



JULIANO GONÇALVES IOSSAQUI

**Técnicas não lineares de controle e filtragem
aplicadas ao problema de rastreamento de trajetórias
de robôs móveis com deslizamento longitudinal das
rodas**

30/2013

**CAMPINAS
2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

JULIANO GONÇALVES IOSSAQUI

**Técnicas não lineares de controle e filtragem
aplicadas ao problema de rastreamento de trajetórias
de robôs móveis com deslizamento longitudinal das
rodas**

Orientador: Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO
JULIANO GONÇALVES IOSSAQUI, E ORIEN-
TADO PELO PROF. DR. JUAN FRANCISCO
CAMINO DOS SANTOS.



ASSINATURA DO ORIENTADOR

**CAMPINAS
2013**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

Iossaqui, Juliano Gonçalves, 1982-
lo7t Técnicas não lineares de controle e filtragem aplicadas ao problema de rastreamento de trajetórias de robôs móveis com deslizamento longitudinal das rodas / Juliano Gonçalves Iossaqui – Campinas, SP: [s.n.], 2013.

Orientador: Juan Francisco Camino dos Santos.
Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Robôs móveis. 2. Sistemas não lineares. 3. Teoria de controle não linear. 4. Estimacão de parâmetros. I. Camino dos Santos, Juan Francisco, 1970-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em Inglês: Nonlinear techniques of control and filtering applied to the trajectory tracking problem of mobile robots with longitudinal wheel slip

Palavras-Chave em Inglês:

Mobile robots

Nonlinear systems

Nonlinear control theory

Parameter estimation.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora:

Juan Francisco Camino dos Santos [Orientador]

Ely Carneiro de Paiva

Douglas Eduardo Zampieri

Edson Roberto de Pieri

Marco Henrique Terra.

Data da Defesa: 28-02-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

**Técnicas não lineares de controle e filtragem
aplicadas ao problema de rastreamento de trajetórias
de robôs móveis com deslizamento longitudinal das
rodas**

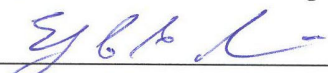
Autor: Juliano Gonçalves Iossaqui

Orientador: Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos

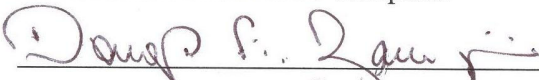
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



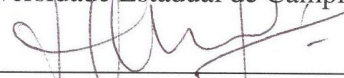
Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos, Presidente
Universidade Estadual de Campinas



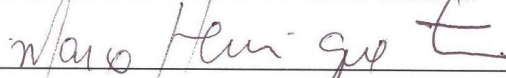
Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Edson Roberto de Pieri
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Dr. Marco Henrique Terra
Universidade de São Paulo

Campinas, 28 de fevereiro de 2013.

Dedico este trabalho a meus pais, Mário e Luzia, e a minha esposa, Patrícia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço:

Aos meus pais, Mário e Luzia, pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

A minha esposa, Patrícia, pela compreensão e amor.

Ao meu orientador, prof. dr. Juan Francisco Camino, pela dedicação e apoio.

A todos os professores e colegas da faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho. Em especial ao prof. dr. Douglas Eduardo Zampieri, pela disposição e sabedoria.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de doutorado concedida através do projeto “Desenvolvimento de uma Plataforma Robótica para Estudos de Mobilidade Terrestre (Semi) Autônoma”.

*Mais vale uma critica que me corrija, do que um
elogio que me corrompa...
(Autor desconhecido)*

RESUMO

Esta tese trata do problema de controle de trajetórias de robôs móveis não holonômicos com deslizamento longitudinal das rodas. As estratégias de controle propostas são projetadas usando dois modelos, um cinemático e um dinâmico, que consideram os deslizamentos longitudinais das rodas como parâmetros desconhecidos. A primeira estratégia de controle consiste em um controlador adaptativo projetado com base em um modelo cinemático que utiliza, como entrada de controle, as velocidades angulares das rodas. Essas velocidades angulares são fornecidas por uma lei de controle cinemática que utiliza estimativas, dos parâmetros de deslizamento desconhecidos, obtidas por meio de uma lei de adaptação. A segunda estratégia de controle consiste em um controlador adaptativo projetado com base em um modelo dinâmico simplificado que utiliza, como entrada de controle, forças de propulsão aplicadas no centro das rodas. A lei de controle, que fornece essas forças, é projetada aplicando-se a técnica *backstepping* ao modelo dinâmico reduzido, que foi obtido com a utilização do método da dinâmica inversa. Os parâmetros de deslizamento longitudinal desconhecidos, necessários para a utilização do método da dinâmica inversa, são estimados por uma lei de adaptação. O filtro de Kalman *unscented* também é utilizado para estimar os parâmetros de deslizamento desconhecidos. Essas estimativas são utilizadas, da mesma forma que as estimativas obtidas pela lei de adaptação, nas leis que fornecem as velocidades angulares e as forças de propulsão das rodas. As estratégias propostas, baseadas na teoria de controle adaptativo e na teoria de filtragem, diferenciam-se basicamente pela técnica que utilizam para estimar os parâmetros de deslizamento. No caso das estratégias adaptativas, a estabilidade do sistema em malha fechada é garantida pela teoria de Lyapunov. Simulações numéricas são realizadas para apresentar o desempenho das estratégias de controle propostas em termos do erro de postura do robô para diferentes perfis de deslizamento.

Palavras-Chave: Robôs móveis; Sistemas não lineares; Teoria de controle não linear; Estimação de parâmetros.

ABSTRACT

This thesis deals with the trajectory tracking control problem of nonholonomic mobile robots with longitudinal slip of the wheels. The proposed control strategies are designed using a kinematic model and a dynamic model which consider the longitudinal slip of the wheels as unknown parameters. The first proposed control strategy consists in an adaptive controller based on a kinematic model that uses the wheel angular velocities as control input. These angular velocities are provided by a kinematic control law which uses the unknown slip parameters estimated by an adaptive rule. The second proposed control strategy consists in an adaptive controller based on a simplified dynamic model that uses the thrust forces applied on the center of the wheels as control input. The control law that provides these thrust forces is designed using the backstepping technique applied to a reduced dynamic model obtained using the inverse dynamic method. The unknown longitudinal slip parameters necessary to use the inverse dynamic method are estimated by an adaptation rule. The unscented Kalman filter is also used to estimate the unknown slip parameters. These estimates are used, in the same way as the estimates obtained by the adaptation rule, by the control laws that provide the angular velocities and the thrust forces. The main difference between the proposed control strategies, based on the adaptive control theory and on the filtering theory, is given by the technique used to estimate the slip parameters. In the case of the adaptive strategies, the stability of the closed-loop system is ensured by the Lyapunov theory. Numerical simulations show the performance of the proposed control strategies in terms of the posture error of the robot with different wheels slip profiles.

Keywords: Mobile robots; Nonlinear systems; Nonlinear control theory; Parameter estimation.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Esquema com relações entre as partes fundamentais que compõem um processo de navegação autônomo (adaptado de Nourbakhsh e Siegwart (2004)).	3
1.2	Problemas de controle de sistemas robóticos móveis autônomos.	6
1.3	Principais tipos de problemas de rastreamento de robôs móveis.	11
2.1	Modelo esquemático de um robô móvel não holonômico.	19
2.2	Modelo esquemático das forças aplicadas sobre um robô móvel não holonômico. . . .	25
3.1	Erro de configuração de trajetória definido para o problema de rastreamento.	36
4.1	Esquema do sistema de controle adaptativo baseado no modelo cinemático.	56
4.2	Esquema do sistema de controle adaptativo baseado no modelo dinâmico.	73
5.1	Esquema do sistema de controle baseado em filtro e no modelo cinemático.	87
5.2	Esquema do sistema de controle baseado em filtro e no modelo dinâmico.	90
6.1	Entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ que geram uma trajetória de referência em forma de “S”.	94
6.2	Entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ que geram uma trajetória de referência em forma de “8”.	94
6.3	Taxas de deslizamento longitudinal i_l e i_r dadas por funções contínuas por partes. . . .	96
6.4	Taxas de deslizamento longitudinal $i_l(t)$ e $i_r(t)$ dadas por funções variantes com o tempo. . . .	96
6.5	Erro aumentado $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T$ obtido usando o controlador adaptivo para $2v_{\text{ref}}(t) = b\omega_{\text{ref}}(t)$ com $\omega_{\text{ref}}(t) = 1.5 - \sin(0.4t)$	99
6.6	Erro aumentado $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T$ obtido usando o controlador adaptivo para $2v_{\text{ref}}(t) = -b\omega_{\text{ref}}(t)$ com $\omega_{\text{ref}}(t) = -1.5 + \sin(0.4t)$	100
6.7	Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “S” para deslizamentos constantes por partes.	101
6.8	Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dada pela configuração de Simulação 1. . . .	102

6.9	Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 1.	103
6.10	Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, ω_r e ω_l , dadas em rad/s, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 1.	103
6.11	Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “S” para deslizamentos variantes no tempo.	104
6.12	Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dada pela configuração de Simulação 2. . .	105
6.13	Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 2.	106
6.14	Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, ω_r e ω_l , dadas em rad/s, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 2.	106
6.15	Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “8” para deslizamentos constantes por partes.	107
6.16	Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 3. . .	108
6.17	Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os valores estimados pela lei de adaptação para perfis de deslizamentos constantes por partes.	109
6.18	Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, ω_r e ω_l , dadas em rad/s, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 3.	109
6.19	Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “S” para deslizamentos constantes por partes.	111
6.20	Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 4. . .	112

6.21	Erros de velocidade e_4 e e_5 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 4. . .	113
6.22	Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 4.	113
6.23	Forças de propulsão aplicadas no centro das rodas direita e esquerda, F_l e F_r , dadas em N, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 4.	114
6.24	Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “8” para deslizamento constante por partes.	115
6.25	Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 5. . .	116
6.26	Erros de velocidade e_4 e e_5 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 5. . .	117
6.27	Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 5.	118
6.28	Forças de propulsão aplicadas no centro das rodas direita e esquerda, F_l e F_r , dadas em N, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 5.	118
6.29	Esquema do processo de estimação dos estados do robô e parâmetros de deslizamento em malha aberta.	120
6.30	Estimação da configuração do robô com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo cinemático.	122
6.31	Estimação dos parâmetros de deslizamento com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo cinemático.	123
6.32	Estimação dos parâmetros de deslizamento com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo dinâmico.	123
6.33	Estimação da configuração do robô com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo dinâmico.	125

6.34	Trajatória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 6.	127
6.35	Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os respectivos valores estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.	128
6.36	Entradas de controle dadas pelas velocidades angulares das rodas direita ω_r e esquerda ω_l em rad/s.	129
6.37	Trajatória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 7.	130
6.38	Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os respectivos valores estimados para perfis de deslizamentos variantes no tempo.	131
6.39	Entradas de controle dadas pelas velocidades angulares das rodas direita ω_r e esquerda ω_l em rad/s.	131
6.40	Trajatória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 8.	132
6.41	Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os respectivos valores estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.	133
6.42	Entradas de controle dadas pelas velocidades angulares das rodas direita ω_r e esquerda ω_l em rad/s.	134
6.43	Trajatória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 9. . .	136
6.44	Comparação entre os valores dos deslizamento reais e os respectivos valores dos parâmetros estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.	137
6.45	Entradas de controle dadas pelas forças de propulsão aplicadas sobre os eixos das rodas direita τ_l e esquerda τ_r em N.m.	137
6.46	Trajatória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 10. .	139

6.47	Comparação entre os valores dos deslizamento reais e os respectivos valores dos parâmetros estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.	140
6.48	Entradas de controle dadas pelas forças de propulsão aplicadas sobre os eixos das rodas direita τ_l e esquerda τ_r em N.m.	140
A.1	Representação do centro instantâneo de rotação CIR do robô não-holonômico do tipo unicycle.	158

LISTA DE TABELAS

5.1	Norma do erro de integração numérica utilizando os métodos de Euler de 1º e 2º ordem e o método de Runge-Kutta de 4º ordem.	84
6.1	Configurações adotadas nas simulações dos controladores adaptativo e baseado no filtro.	97
6.2	Norma do erro de estimação obtida com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo cinemático.	122
6.3	Norma do erro de estimação obtida com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo dinâmico.	124

LISTA DE ACRÔNIMOS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CIR	Centro Instantâneo de Rotação
DARPA	Defense Advanced Research Projects Agency
IME	Instituto Militar de Engenharia
MD	Ministério da Defesa
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas
USP	Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

a_{ji}	coeficientes das funções de restrições não holônicas lineares com respeito as velocidades generalizadas	—
a_r, a_l	parâmetros de deslizamento longitudinal das rodas	—
$\hat{a}_r, \hat{a}_l$	valores estimados dos parâmetros de deslizamento	—
$\tilde{a}_r, \tilde{a}_l$	erros de estimação dos parâmetros de deslizamento	—
A	matriz de coeficientes das funções de restrições não holônicas lineares com respeito as velocidades generalizadas	—
b	distância entre as rodas do robô	[m]
b_i	variáveis da função β	—
B	matriz de entrada do modelo dinâmico	—
B_a	matriz de entrada do modelo dinâmico com deslizamento	—
B_o	matriz de entrada do modelo dinâmico sem deslizamento	—
c	constante utilizada na definição de estabilidade uniforme	—
C_i	forças de restrições generalizadas de um sistema mecânico	[N]
$\mathcal{C}$	classe de funções	—
d	constante utilizada nos teoremas de estabilidade uniforme	—
d_o	distância da posição atual do robô a posição inicial	[m]
D	domínio da função não linear da equação de estado	—
e	vetor de estados	—
e_a	vetor de estados aumentado	—
e_i	estados de um sistema dinâmico	—
$\hat{e}$	vetor de estados estimado pelo filtro	—
$\bar{e}$	ponto de equilíbrio do sistema não-autônomo	—
e_0	valor do vetor de estados no instante inicial	—
e_1, e_2	erros de posição do robô	[m]

e_3	erro de orientação do robô	[rad]
$\mathcal{E}_i$	pontos sigmas	—
f	vetor de funções não lineares da equação de estado	—
f_i	funções não lineares da equação de estado	—
$\bar{f}_j$	funções das restrições não holônicas	—
F	matriz da linearização utilizada no filtro EKF	—
$\mathcal{F}$	função de otimização	—
F_l, F_r	forças propulsoras do robô	[N]
F_N	força normal aplicado sobre uma roda	[N]
F_P	força peso de uma roda	[N]
F_0	sistema de referência inercial	—
F_1	sistema de referência local do robô	—
F_2	sistema de referência local da trajetória de referência	—
g_i	função não linear	—
G	matriz da linearização utilizada no filtro EKF	—
h	vetor de funções não-lineares da saída do modelo de estado	—
h_i	funções não lineares da saída do modelo de estado	—
$\bar{h}_j$	funções das restrições holônicas	—
i	índice	—
i_l, i_r	taxas de deslizamento longitudinal das rodas	—
j	índice	—
J	momento de inércia do robô uniciclo	[kg·m ²]
k	tempo discreto	—
k_i	ganhos de controle	—
$\mathcal{K}, \mathcal{KL}$	classe de funções	—
l	número inteiro	—
L	função Lagrangiana	—

l_s	limite superior do intervalo de definição de α e β	—
m	massa total do robô uniciclo	[kg]
m_w	massa de uma roda	[kg]
M	matriz inercial do modelo dinâmico	—
M_i	matriz inercial modificada do modelo dinâmico com deslizamento	—
M_o	matriz inercial modificada do modelo dinâmico sem deslizamento	—
n	número de coordenadas generalizadas	—
N	número de partículas ou corpos de um sistema mecânico	—
N_1	número de partículas de um sistema mecânico	—
N_2	número de corpos de um sistema mecânico	—
O_0	origem do sistema de referência inercial	—
O_1	origem do sistema de referência local	—
O_2	origem do sistema de referência da trajetória de referência	—
p	número de restrições de um sistema mecânico	—
P	matriz de covariância de estado estimado	—
q	configuração de um sistema mecânico	—
q_i	coordenadas generalizadas	—
q_{ref}	configuração da trajetória de referência	—
Q_p	matriz de covariância do ruído de processo w_p	—
Q_s	matriz de covariância do ruído de saída w_s	—
Q_i	forças generalizadas aplicadas em um sistema mecânico	—
$\mathcal{Q}$	espaço de configuração de um sistema mecânico	—
r	raio das rodas do robô	[m]
R	raio de giração do robô	[m]
$\mathcal{R}$	sistema de referência qualquer	—
R_0^1	matriz de rotação	—
s	vetor de equações de saídas do modelo de estados	—

s_i	equações de saídas do modelo de estados	—
$\hat{s}$	vetor de saídas estimado pelo filtro	—
s_d	trajetória de referência desejada	—
S	matriz do modelo cinemático do robô com entrada dada pelas velocidades do robô	—
$\mathcal{S}$	sistema mecânico	—
S_a	matriz do modelo cinemático do robô com parâmetro de deslizamento e entrada dada pelas velocidades do robô	—
S_i	matriz do modelo cinemático do robô com deslizamento e entrada dada pelas velocidades das rodas	—
S_o	matriz do modelo cinemático do robô com entrada dada pelas velocidades das rodas	—
t	variável continua para o tempo	[s]
t_i, t_f	limites do intervalo de definição do tempo	[s]
t_0	valor da variável de tempo no instante inicial	[s]
T	função da energia cinética de um sistema mecânico	[J]
$\mathcal{T}$	espaço tangente ao espaço de configuração	—
u	vetor de entradas do modelo de estados	—
U	função de energia potencial de um sistema mecânico	[J]
V_0	função utilizada nos teoremas de estabilidade	—
V	função utilizada nos teoremas de estabilidade	—
v	velocidade de translação do robô	[m/s]
v_a	velocidade auxiliar de translação do robô	[m/s]
v_{ref}	velocidade translacional de referência para geração da trajetória de referência	[m/s]
v_r, v_l	velocidades lineares das rodas com respeito ao solo	[m/s]
x	posição longitudinal do robô	[m]
x_{ref}	posição longitudinal da trajetória de referência	[m]

x_0	abscissa do sistema de referência inercial	—
x_1	abscissa do sistema de referência local do robô	—
x_2	abscissa do sistema de referência local da trajetória de referência	—
$\mathcal{X}_i$	pontos sigmas relacionados ao processo	—
y	posição lateral do robô	[m]
y_{ref}	posição lateral da trajetória de referência	[m]
y_0	ordenada do sistema de referência inercial	—
y_1	ordenada do sistema de ref local do robô	—
y_2	ordenada do sistema de referência local da trajetória de referência	—
Z	função utilizada na definição de estabilidade uniforme	—
z	vetor de variáveis auxiliares	—
z_i	variáveis auxiliares	—
$\mathcal{Z}_i$	pontos sigmas relacionados a saída	—
w_p	vetor de ruído do processo	—
w_s	vetor de ruído da saída	—
W_i	função utilizada nos teoremas de estabilidade	—
$\mathcal{W}_i$	vetor de ponderação dos sigmas pontos de estados	—
$\overline{\mathcal{W}}_i$	vetor de ponderação dos sigmas pontos de saídas	—

Letras Gregas

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$	funções utilizada nos teoremas de estabilidade uniforme	—
∂q_i	deslocamento virtual das coordenadas generalizadas	—
∂W	trabalho virtual das forças de restrições generalizadas	—
Φ	matriz de transformação entre velocidades do robô e velocidades das rodas	—
γ_i	ganhos da lei de adaptação	—
	função utilizada na definição de estabilidade	—
ϵ	constante utilizada na definição de estabilidade uniforme	—

η	vetor entrada de controle dado pelas velocidades do robô	—
η_c	vetor entrada de controle auxiliar dado pelas velocidades do robô	—
v_{ref}	vetor entrada de referência dado pelas velocidades do robô	—
θ	orientação do robô	[rad]
θ_{ref}	orientação da trajetória de referência	[rad]
κ_i	parâmetro de ajuste do filtro UKF	—
λ_j	multiplicadores de Lagrange	—
μ	constante utilizada em demonstrações de estabilidade	—
ξ	vetor entrada de controle dado pelas velocidades das rodas	—
ρ	variável de parametrização da trajetória de referência desejada	—
ϱ	variável utilizada na definição de estabilidade uniforme	—
τ	vetor de entrada de controle de torque	—
τ_a	vetor de entrada de controle auxiliar	—
τ_r, τ_l	torques aplicados nos eixos das rodas	[N·m]
ω	velocidade de rotação do robô	[rad/s]
ω_c	velocidade auxiliar de rotação do robô	[rad/s]
φ	função entrada de controle	—
Ω	matriz linear auxiliar	—
ω_{ref}	velocidade rotacional de referência para geração da trajetória de referência	[rad/s]
ω_r, ω_l	velocidades angulares das rodas	[m/s]

Sobrescritos

T denota a transposta de um vetor ou matriz

Subscritos

a auxiliar
ref referência

l	esquerda
r	direita
p	processo
s	saída
i,j	índices

Notações

$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não negativos
$\mathbb{R}_*^+$	conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_+$	conjunto dos números inteiros não negativos
$\mathbb{Z}_*^+$	conjunto dos números inteiros positivos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivações	1
1.2	Revisão bibliográfica	5
1.3	Objetivos	13
1.4	Organização	14
2	MODELAGEM DE UM ROBÔ COM DESLIZAMENTO	15
2.1	Preliminares	15
2.1.1	Descrição de sistemas não holonômicos	15
2.1.2	Formulação de Lagrange para sistemas não holônomicos	17
2.2	Modelo cinemático do robô com deslizamento	19
2.3	Modelo dinâmico do robô com deslizamento	23
3	CONTROLE DO ROBÔ SEM DESLIZAMENTO	29
3.1	Preliminares	29
3.1.1	Problemas de controle na robótica móvel	29
3.1.2	Revisão de análise de sistemas não lineares	31
3.2	Formulação do problema de rastreamento de trajetória	35
3.3	Projeto de controle usando o modelo cinemático	38
3.4	Projeto de controle usando o modelo dinâmico	42
4	CONTROLE ADAPTATIVO DO ROBÔ COM DESLIZAMENTO	49
4.1	Preliminares	49
4.1.1	Análise de estabilidade avançada de sistemas não autônomos	49
4.2	Projeto de controle adaptativo usando o modelo cinemático	51
4.3	Projeto de controle adaptativo usando o modelo dinâmico	66
5	CONTROLE BASEADO EM FILTRO DO ROBÔ COM DESLIZAMENTO	75
5.1	Preliminares	75
5.1.1	Estimação de estados e parâmetros de sistemas não lineares	75

5.1.2	Métodos de discretização	82
5.2	Projeto de controle baseado em filtro usando o modelo cinemático	84
5.3	Projeto de controle baseado em filtro usando o modelo dinâmico	87
6	RESULTADOS NUMÉRICOS	93
6.1	Configurações de simulações	93
6.2	Simulações computacionais dos controladores adaptativos	97
6.2.1	Controlador adaptativo usando modelo cinemático	98
6.2.2	Controlador adaptativo usando modelo dinâmico	110
6.3	Simulações computacionais do controle baseado em filtro	119
6.3.1	Controlador baseado em filtro usando modelo cinemático	126
6.3.2	Controlador baseado em filtro usando modelo dinâmico	134
7	CONCLUSÕES	141
7.1	Comentários gerais	141
7.2	Contribuições	143
7.3	Trabalhos futuros	144
	REFERÊNCIAS	147
	APÊNDICE	157
A.1	Critério de estabilidade de Liénard and Chipart	157
A.2	Relação entre as velocidades do robô e as velocidades das rodas	157
A.3	Matrizes Jacobiana	159
A.4	Demonstração do Teorema 8 quando as entradas de referência são constantes	160

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta uma introdução ao assunto principal desta tese, que lida com o problema de controle de robôs móveis com deslizamento das rodas. A Seção 1.1 apresenta as motivações para realização desta tese. A Seção 1.2 apresenta uma revisão bibliográfica sobre o estado da arte do assunto desta tese. A Seção 1.3 apresenta os objetivos específicos desta tese. A Seção 1.4 apresenta a forma como esta tese é organizada.

1.1 Motivações

A navegação autônoma de robôs móveis terrestres em ambientes considerados desconhecidos constitui interessante área de pesquisa que envolve uma grande variedade de aplicações práticas. Normalmente, essas aplicações requerem que os robôs executem tarefas em atividades como agricultura, mineração, explorações espaciais e operações militares, entre outras. No intuito de tornar seus produtos mais seguros e confortáveis em quaisquer condições de terreno ou clima, as montadoras de veículos e seus fornecedores têm apoiado pesquisas relacionadas ao desenvolvimento de sistemas de auxílio ao condutor. Todas essas atividades necessitam de soluções eficientes do problema de navegação robótica autônoma.

O desenvolvimento da navegação robótica autônoma tem despertado o interesse de vários grupos de pesquisas ao redor do mundo. Por exemplo, visando a manter a superioridade tecnológica do exército norte-americano, a agência de pesquisa conhecida como DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency), dos Estados Unidos da América (EUA), vem promovendo pesquisas na área da navegação autônoma por meio do incentivo financeiro a universidades, colégios e empresas. Em 2004, a agência DARPA promoveu a competição DARPA Grand Challenge, entre veículos que deveriam percorrer de forma completamente autônoma um percurso predefinido no Deserto de Mojave. Na ocasião nenhum veículo conseguiu completar o desafio. No ano seguinte, em 2005, uma nova competição foi realizada, com cinco veículos completando o desafio, que foi vencido pela equipe da Universidade de Stanford (THRUN et al., 2006). Dois anos mais tarde, em 2007,

foi proposta a competição DARPA Urban Challenge. Nessa competição, veículos autônomos deveriam realizar um determinado percurso em perímetro urbano seguindo as regras de trânsito dos EUA (BUEHLER et al., 2009). Na Alemanha, pesquisadores do grupo de inteligência artificial da universidade de Berlin criaram o projeto Spirit of Berlin visando ao desenvolvimento de veículos autônomos voltados à segurança em grandes áreas fechadas. Na França, o centro de pesquisa Heudiasyc tem realizado trabalhos em navegação autônoma com intuito mais específico de atender à indústria automobilística por meio do desenvolvimento de sistemas de auxílio ao condutor.

Alguns grupos de pesquisa dedicados à navegação de veículos autônomos estão sendo formados no Brasil. Desde 2007, vem sendo desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa e Desenvolvimento de Veículos Autônomos da Universidade Federal de Minas Gerais um projeto de automação de um automóvel Chevrolet Astra. Mais recentemente, em 2010, pesquisadores da Universidade de São Paulo, *campus* de São Carlos, criaram o projeto CARINA (Carro Robótico Inteligente de Navegação Autônoma), utilizando um automóvel FIAT Stilo. Atualmente, o grupo conta com um automóvel FIAT Palio Adventure. Outro grupo que tem realizado atividades relacionadas à percepção e à navegação autônoma de veículos robóticos é o Centro de Tecnologia da Informação Renato Archer (CTI), que desenvolve suas pesquisas em um veículo elétrico fabricado pela empresa Freedom.

Nesse cenário foi criado o projeto Desenvolvimento de uma Plataforma Robótica para Estudos de Mobilidade Terrestre (Semi)Autônoma. Este projeto fez parte do programa Pró-Defesa executado por meio de parceria entre o Ministério da Defesa (MD) e a fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Alinhado com as diretrizes do programa Pró-Defesa, o projeto, liderado pela Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) sob coordenação do prof. dr. Douglas Eduardo Zampieri teve a parceria da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (USP) e do Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais do Instituto Militar de Engenharia (IME). Em virtude da formação dos professores envolvidos nesse projeto, cada instituição contribuiu dentro de uma linha de pesquisa específica. As atividades de navegação inercial foram desenvolvidas pelo Laboratório de Navegação Inercial do Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais do IME; as atividades de sensoriamento foram desenvolvidas pelos Laboratórios de Percepção de Tempo Real Baseada em Sensores e Laboratório de Redes de Comunicação sediados no Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle da Escola Politécnica da USP; e a integração das atividades pertinentes a navegação autônoma foram desenvolvidas pelo Laboratório de Mobilidade Autônoma, localizado

na Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

As principais atividades do Laboratório de Mobilidade Autônoma estão voltadas ao desenvolvimento e aperfeiçoamento de algoritmos relacionados a visão computacional, planejamento de trajetórias, controle de movimento e atuação sobre o robô. Nessas atividades estão envolvidos alunos de iniciação científica, mestrado e doutorado, pós-doutorandos e professores doutores. Para desenvolver suas atividades o Laboratório de Mobilidade Autônoma está equipado com diferentes tipos de robôs de duas ou quatro rodas e sensores dos mais variados como câmeras, laser e sistema de navegação inercial.

Conforme Nourbakhsh e Siegwart (2004), o entendimento do processo de navegação robótica autônoma contempla quatro partes fundamentais: percepção – o robô deve interpretar seus sensores para obter dados significantes; localização – o robô deve determinar sua posição no ambiente; cognição – o robô deve decidir como agir para alcançar seus objetivos; e controle de movimento – o robô deve atuar por meio de seu sistema de locomoção para atingir uma determinada trajetória. As relações entre essas partes podem ser vistas na Figura 1.1.

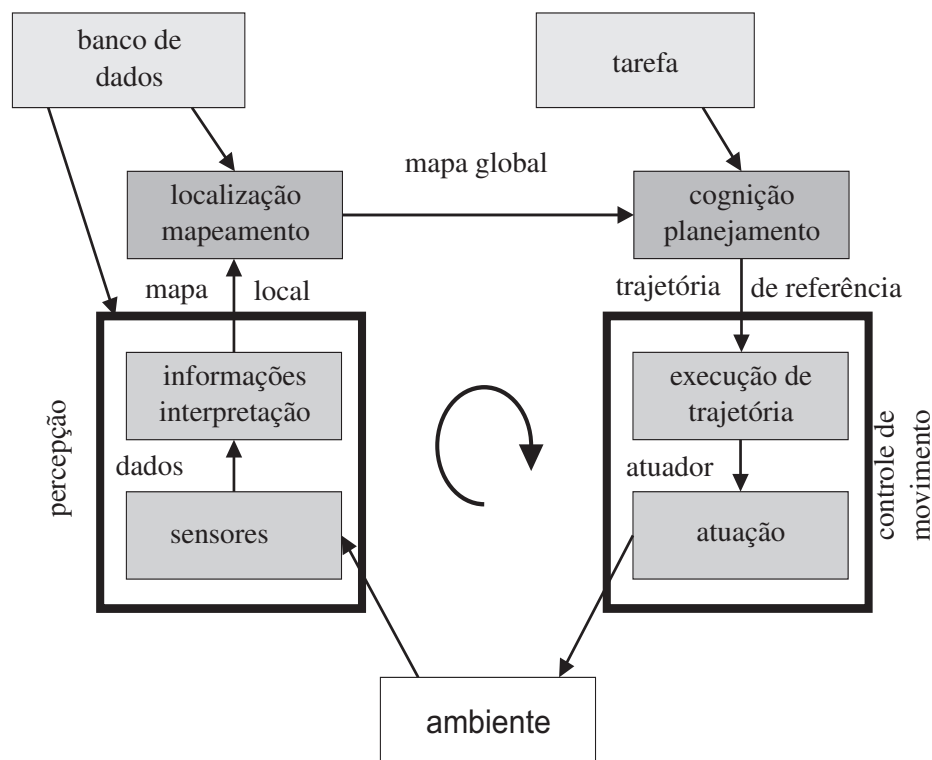


Figura 1.1 - Esquema com relações entre as partes fundamentais que compõem um processo de navegação autônoma (adaptado de Nourbakhsh e Siegwart (2004)).

Pode-se dizer que o ato de navegar em robótica está relacionado ao processo de determinar e realizar uma trajetória adequada e segura entre um ponto inicial e um ponto final desejado (BO-NIN-FONT et al., 2008). De modo geral, pode-se subdividir a navegação em duas grandes classes: navegação em ambiente previamente conhecido (estruturado) e navegação em ambiente desconhecido (não estruturado). Caso a tarefa de navegação seja em ambiente conhecido e estático, os problemas podem ser primeiramente reduzidos à modelagem do ambiente e à busca por caminhos, seguindo algum critério de otimização, por exemplo: distância, energia, processamento, número de movimentos, qualidade dos deslocamentos, etc. Já para ambientes não estruturados, normalmente, o cenário para estudo é dinâmico com vários elementos em movimento. Assim, conduzir um sistema de navegação autônomo de um ponto inicial até o seu destino ou auxiliar um condutor nessa tarefa envolve a execução de operações complexas e não determinísticas, como, por exemplo, a interação com o ambiente, a identificação dos elementos ambientais e as tomadas de decisões.

Uma etapa importante no processo de navegação autônoma consiste no planejamento da trajetória que o robô deve realizar (LAVALLE, 2006). A geração de trajetórias factíveis precisa considerar os vínculos ou restrições de movimento impostos pelo sistema de locomoção do robô (MUIR; NEUMAN, 1986). Em geral, os sistemas robóticos móveis estão sujeitos a restrições cinemáticas denominadas não holonômicas resultantes, por exemplo, de condições de não deslize das rodas. Os sistemas robóticos móveis pertencem em geral à classe de sistemas não holonômicos. Tais sistemas, embora possam ter seus movimentos limitados, são caracterizado por poderem atingir qualquer configuração do espaço onde estão definidos (GREENWOOD, 2003).

Outra etapa importante do processo de navegação autônoma esta relacionada com a definição do problema de controle. O controle de robôs não holonômicos tem sido alvo de interesse de inúmeros pesquisadores por suas características especiais (KOLMANOVSKY; MCCLAMROCH, 1995; D'ANDRÉA-NOVEL et al., 1995; LUCA et al., 2001; MORIN; SAMSON, 2008). Sistemas não holonômicos não podem ser estabilizados assintoticamente para uma configuração de repouso por meio de leis suaves (i.e. de classe C^∞) de controle por realimentação de estados (BLOCH et al., 1992). Isso significa que, embora exista uma propriedade de controlabilidade que indica que qualquer configuração possa ser obtida em um tempo finito, a partir de qualquer outra configuração, aplicando entradas de controle adequadas, nenhuma lei de controle contínua invariante no tempo pode assegurar convergência assintótica do robô para uma configuração de equilíbrio desejada.

As estratégias de controle desenvolvidas para sistemas robóticos móveis normalmente consis-

tem em aplicações de técnicas convencionais de controle de sistemas não lineares. Em geral, essas técnicas podem ser aplicadas a todos os tipos de robôs, desde que o problema de controle possa ser escrito de modo adequado. Contudo, o tipo de robô a ser controlado não pode ser desconsiderado no desenvolvimento do controlador, principalmente, se uma maior robustez a interferências externas são requisitos do projeto. Uma das principais preocupações das estratégias de controle de robôs móveis com rodas é lidar com os distúrbios que afetam sua locomoção. Os principais distúrbios relacionados ao movimento de robôs móveis resultam da interação entre as rodas do robô e o solo. Um dos mais importantes fenômenos observado nessa interação é o deslizamento decorrente da falta de tração das rodas. A caracterização do fenômeno de deslizamento e seus efeitos na locomoção de robôs móveis formam uma área de pesquisa que ainda requer muitas investigações. Modelos matemáticos que representam o movimento dos robôs com deslizamento são essenciais ao projeto de controladores mais robustos. Leis de controle que não consideram os efeitos do deslizamento em seu projeto podem ter seu desempenho e estabilidade drasticamente comprometidos. Uma revisão bibliográfica sobre as principais estratégias de controle de robôs móveis não holonômicos com deslizamento das rodas é apresentado na próxima seção.

1.2 Revisão bibliográfica

O controle de sistemas robóticos móveis não holonômicos pode ser agrupado, como na teoria clássica de controle, em: métodos de controle em malha aberta e métodos de controle em malha fechada (FIGUEIREDO; JOTA, 2004). Os métodos de controle em malha aberta consistem em determinar leis de controle que, sem realimentação de estado, transferem o sistema de um estado inicial até um estado final em um intervalo de tempo finito, enquanto os métodos de malha fechada são aqueles que possuem alguma lei de realimentação para estabilizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio ou em torno de uma trajetória.

Os métodos de controle em malha aberta mais difundidos na área de sistemas robóticos não holonômicos são os baseados em: geometria diferencial e álgebra diferencial, parametrização da entrada, controle ótimo, planejamento do movimento (KOLMANOVSKY; MCCLAMROCH, 1995). Já os métodos de malha fechada mais utilizados consideram técnicas de controle não linear como:

linearização por realimentação dinâmica, integrador de um passo atrás (*backstepping*), modos deslizantes (*sliding mode*), leis adaptativas, redes neurais. Todas essas técnicas são aplicadas basicamente a três tipos de problemas: estabilização em um ponto de equilíbrio (*point stabilization*), estabilização em uma trajetória (rastreamento de trajetória – *trajectory tracking*) e estabilização em uma trajetória parametrizada (seguimento de caminho – *path-following*) (MORIN; SAMSON, 2008; AGUIAR; HESPANHA, 2007). A hierarquização dos problemas de controle de sistemas robóticos móveis autônomos não holonômicos pode ser vista na Figura 1.2.

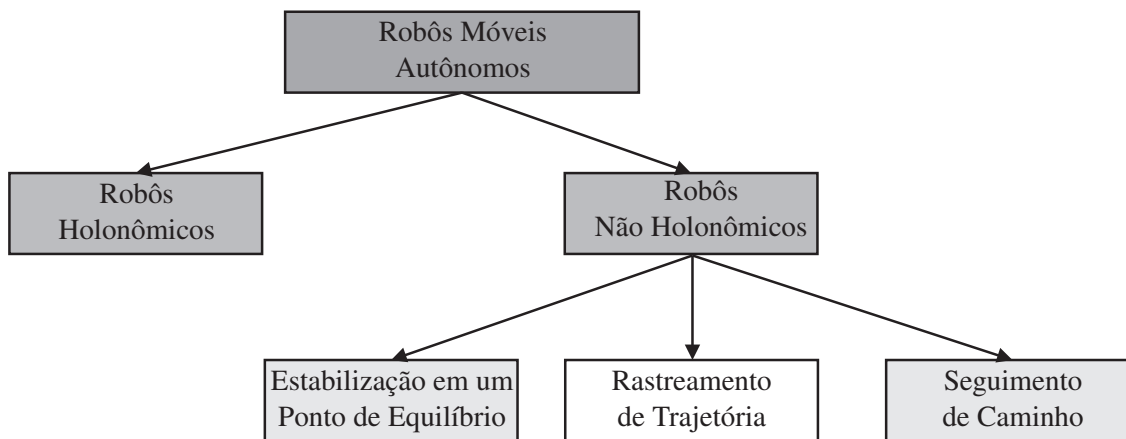


Figura 1.2 - Problemas de controle de sistemas robóticos móveis autônomos.

A estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser analisada por meio da teoria de estabilidade de Lyapunov. Um ponto de equilíbrio é estável se, para qualquer condição inicial na sua vizinhança, a trajetória da solução correspondente permanecer próxima desse ponto (KHALIL, 2001). O problema de estabilização em um ponto de equilíbrio é caracterizado pela estabilidade em uma configuração fixa do sistema, enquanto o problema de rastreamento de trajetória pode ser caracterizado por um problema de estabilização da origem da dinâmica do erro entre a configuração do robô e uma configuração de referência gerada por um modelo de referência do robô. Já o problema de seguimento de caminho pode ser caracterizado por um problema de estabilização da origem da dinâmica do erro entre a configuração do robô e uma trajetória de referência parametrizada com o robô mantendo uma velocidade predeterminada ao longo da trajetória.

Como já mencionado, um resultado bem conhecido da teoria de controle de sistemas não holonômicos diz que um sistema não holonômico, embora seja completamente controlável, não pode ser estabilizado para uma configuração final de repouso por meio de leis suaves de realimentação nos estados (BLOCH et al., 1992). Esse resultado se aplica à estabilização assintótica num ponto de

equilíbrio, porém não é válido para a estabilização em uma trajetória factível, por exemplo, gerada por um modelo de referência do robô. Em geral, os problemas de controle de sistemas robóticos móveis não holonômicos são resolvidos com estratégias que tem como base modelos cinemáticos ou dinâmicos do robô. Portanto, normalmente as estratégias de controle são específicas para cada tipo de robô. O tipo do robô é determinado pela configuração de suas rodas, que por sua vez determina os tipos de vínculos ou restrições de movimento aos quais estará sujeito o robô (MUIR; NEUMAN, 1986; CAMPION et al., 1996).

Restringindo essa revisão bibliográfica aos robôs móveis não holonômicos, as principais técnicas de controle utilizadas para resolver o problema de estabilização em um ponto de equilíbrio empregam: sinais não contínuos (WIT; SORDALEN, 1992), sinais variantes no tempo (SAMSON; AIT-ABDERRAHIM, 1991; SORDALEN; EGELAND, 1995), leis híbridas de realimentação (POURBOGHRAT, 2002), leis adaptativas (JU et al., 2009), enquanto as técnicas de controle utilizadas para resolver o problema de seguimento de caminho normalmente consideram a estabilização variante no tempo (SORDALEN; WI, 1993), a estabilização robusta (AGUILAR et al., 1998; COELHO; NUNES, 2005) e leis adaptativas (PETROV, 2010).

Para o problema de rastreamento de trajetória, as técnicas de controle empregadas normalmente utilizam funções de Lyapunov, associadas a um método para obter as leis de controle. Em geral, os métodos utilizados para resolver o problema de rastreamento de trajetória geralmente consideram a realimentação dinâmica. Por exemplo: linearização por realimentação dinâmica (ORIOLO et al., 2002b), integrador de um passo atrás (*backstepping*) (JIANG; NIJMEIJER, 1997), modos deslizantes (*sliding mode*) (YANG; KIM, 1999; CHWA et al., 2002) e leis adaptativas (COLBAUGH et al., 1998). O problema da estabilização em uma trajetória é mais fácil de ser resolvido do que o da estabilização em um ponto, desde que seja possível calcular previamente uma trajetória que satisfaça as restrições cinemáticas do robô (MORIN; SAMSON, 2006).

O problema da obtenção de uma trajetória factível pode ser amenizado utilizando-se o próprio modelo cinemático do robô para gerar a trajetória de referência. Seguindo essa ideia, Kanayama et al. (1990) propuseram uma lei de controle não linear baseada na cinemática do robô que garante a estabilidade assintótica do problema de rastreamento de trajetória. Utilizando a técnica *backstepping*, Fierro e Lewis (1997) combinaram o resultado obtido por Kanayama et al. (1990) com uma lei de controle baseada na dinâmica do robô para fornecer o torque a ser aplicado nas rodas. Baseado no trabalho de Fierro e Lewis (1997), Fukao et al. (2000) propuseram uma lei de controle

adaptativa para resolver o problema de rastreamento de trajetória de robôs móveis que possuem massa desconhecida. Wu et al. (2009) apresentaram um controle adaptativo robusto a distúrbios na entrada de torque que ajustava os parâmetros, inerciais e geométricos do robô, considerados desconhecidos.

Muitos outros trabalhos que lidaram com o problema de estabilização em uma trajetória formularam suas leis de controle com base no modelo cinemático do robô. Por exemplo, Kim e Oh (1998) resolveram o problema de controle formulado em Kanayama et al. (1990) utilizando uma lei de controle não linear diferente. Lee et al. (2009) utilizaram a técnica *sliding mode* para estabilizar assintoticamente o robô em uma trajetória desejada. A validação experimental desse sistema de controle foi realizada em um robô que recebia informações de sua configuração via rádio, a partir de sensores não embarcados. Gu e Hu (2006) propuseram uma lei de controle obtida utilizando-se o método de modelo de controle preditivo para resolver o problema de rastreamento. Oriolo et al. (2002a) propuseram um controlador baseado em um observador que estima uma das coordenadas de posição que define a configuração do robô, enquanto Koo e Won (2009) propuseram um controlador baseado em um observador que estima a orientação do robô. Martins et al. (2011) propuseram um controlador adaptativo baseado na técnica *sliding mode* para compensar incertezas e distúrbios na entrada de controle do modelo cinemático.

Vários trabalhos que trataram do problema de estabilização em uma trajetória projetaram leis de controle com base no modelo dinâmico do robô. Por exemplo Corradini e Orlando (2001) propuseram uma lei de controle robusta à incerteza do modelo obtida utilizando-se a técnica *sliding mode*. Dong e Xu (2001) projetaram uma lei adaptativa que ajustava o parâmetro de inércia considerado desconhecido utilizando uma nova definição do erro de configuração, obtido a partir das equações do modelo cinemático escrito de forma encadeada (*chained form*). Martins et al. (2008a) também propuseram uma lei adaptativa que ajustava o parâmetro de inércia desconhecido, validando seus resultados experimentalmente para diferentes condições de carga do robô. Wu et al. (2009) propuseram uma lei adaptativa baseada na técnica *backstepping* para ajustar os parâmetros inerciais e geométricos do robô considerados desconhecidos. Kim et al. (2003) projetaram uma lei de controle adaptativa robusta a incertezas do modelo dinâmico e distúrbios na entrada de controle. Ju et al. (2009) propuseram uma lei de controle adaptativa robusta com realimentação de saída baseada em um modelo dinâmico incerto. Dierks e Jagannathan (2009) propuseram uma lei de controle adaptativa utilizando redes neurais para ajustar dinâmicas não modeladas. Anupoju

et al. (2005) propuseram uma lei de controle baseada em um modelo que incluía a dinâmica do atuador, dada por um motor de corrente contínua. Nesse sistema de controle a entrada de controle é dada pela tensão de alimentação do motor. Utilizando esse mesmo modelo dinâmico, Martins et al. (2008b) propuseram um controlador neural baseado na técnica *sliding mode*.

Os trabalhos citados anteriormente apresentam estratégias de controle baseadas em modelos que não consideram os efeitos do deslizamento. Entretanto, o deslizamento das rodas é um dos mais importantes fenômenos ao qual está submetido um robô móvel durante seu movimento (SANCHEZ, 1999). Quando os efeitos do deslizamento não são considerados no projeto do controlador, o objetivo final de controle pode não ser completado e o sistema pode até se tornar instável. O deslizamento resulta da falta de tração das rodas que pode estar relacionada ao tipo de solo, ao material das rodas ou ao nível de deformações das rodas, à intensidade de aceleração ou frenagem do robô, etc. Em geral, os deslizamentos podem ser caracterizados geometricamente por duas componentes: o deslizamento longitudinal e o deslizamento lateral (PACEJKA, 2002).

Os projetos de controladores de robôs não holonômicos que consideram o deslizamento das rodas são normalmente baseados em modelos que apresentam algum grau de incerteza. O projeto de controle desses modelos incertos envolve normalmente técnicas de controle robusto. No controle robusto, o modelo incerto é caracterizado como uma perturbação de um modelo nominal (WANG; LOW, 2008). O controle robusto busca atender aos objetivos de controle para todos os modelos dentro do conjunto de incertezas. Baseado no modelo cinemático discretizado do robô, Corradini et al. (2002) propuseram uma lei de controle discreta robusta a incertezas do modelo cinemático. Tal formulação, assume que o deslizamento lateral está dentro do conjunto de incertezas. Ryu e Agrawal (2011) projetaram uma lei de controle robusta ao deslizamento do robô, a partir da formulação das equações do modelo cinemático na forma de um sistema diferencialmente plano (*differential flatness*). Tal sistema é caracterizado por possuir saídas planas (*flat outputs*) que podem ser utilizadas para expressar todos os estados e entradas em termos dessas saídas e um número finito de suas derivadas.

Outros projetos de controladores de robôs não holonômicos que consideram o deslizamento das rodas parametrizam as incertezas (deslizamento das rodas) em termos de parâmetros desconhecidos que podem ser obtidos em tempo real por meio de algum algoritmo de estimação. O problema de rastreamento de trajetória de robôs com deslizamento longitudinal e lateral foi resolvido com uma estratégia de controle baseada no filtro de Kalman *unscented* em Zhou et al. (2007). O mesmo

problema de rastreamento de trajetória foi resolvido com uma lei de controle baseada no filtro de Kalman *unscented* utilizando linearização por realimentação dinâmica em Zhou e Han (2008). Seyr e Jakubek (2006) utilizaram o filtro de Kalman estendido para estimar o deslizamento lateral do robô e assim usar em sua malha de controle. Michalek et al. (2010) propuseram um controlador que compensa o deslizamento longitudinal baseado em estimações obtidas do filtro de Kalman de forma preditiva. Contudo, se os deslizamentos não são precisamente estimados, por exemplo, devido à precisão dos sensores, o desempenho do controlador pode ser seriamente afetado. Além disso, essas estratégias não consideram o algoritmo de estimação dos parâmetros de deslizamento como parte da malha de controle na hora da análise de estabilidade do sistema.

Assumindo que os parâmetros de deslizamento podem ser medidos, Gonzales et al. (2009a) propuseram uma lei de controle adaptativa obtida utilizando desigualdades matriciais lineares para um robô com deslizamento longitudinal das rodas sujeito a restrições nos estados e entrada de controle. Gonzalez et al. (2009) realizaram testes experimentais com uma lei de controle que compensa o deslizamento longitudinal das rodas estimados utilizando o filtro de Kalman. Também Gonzales et al. (2009b) propuseram uma lei de controle preditivo, que se fundamenta no conceito de robustez baseada em tubos, para um robô com deslizamento longitudinal das rodas.

Embora o modelo cinemático possa ser suficiente para certos objetivos, modelos que incluem efeitos dinâmicos são necessários para outros propósitos. Entretanto, poucas soluções de controle baseado em modelos dinâmicos estão disponíveis para resolver o problema de rastreamento de robôs não holonômicos com deslizamento das rodas. Por exemplo, Sidek e Sarkar (2008) propuseram um modelo dinâmico em que a força de tração (que é função do deslizamento) é dado por uma função conhecida como fórmula mágica que contém coeficientes obtidos empiricamente. Além disso, uma lei de controle descontínua é proposta para assintoticamente estabilizar o robô em uma configuração desejada. Lin et al. (2007) propuseram um modelo dinâmico em que os deslizamento das rodas são tratados como parâmetros desconhecidos. Utilizando programação heurística e redes neurais, os parâmetros de deslizamento são estimados para realimentar uma lei de controle projetada para fazer o robô seguir uma determinada trajetória. Dong (2010) propôs um controlador adaptativo robusto projetado com base nas técnicas *backstepping* e redes neurais para resolver o problema de rastreamento de um robô com deslizamento caracterizado como uma incerteza de um modelo dinâmico. Tarakameh et al. (2010) também propuseram uma lei de controle adaptativa baseada em um modelo incerto, porém adicionaram a dinâmica do atuador para obter entradas de

controle como uma função da tensão de alimentação de um motor de corrente contínua. Yoo (2011) propôs um controlador adaptativo que garantia um limitante último do erro definido pelo problema de seguimento de caminho para um robô com deslizamentos longitudinal e lateral.

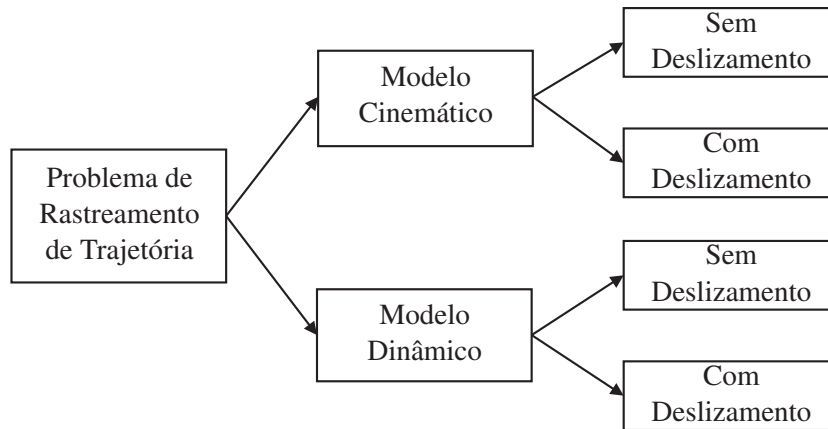


Figura 1.3 - Principais tipos de problemas de rastreamento de robôs móveis.

Como visto anteriormente, o problema de rastreamento de trajetória de robôs não holonômicos pode ser dividido no projeto de controladores cinemáticos e/ou dinâmicos que consideram ou não o deslizamento conforme ilustrado na Figura 1.3. Em geral, os projetos de controle que lidam com o problema de deslizamento das rodas utilizam estimações dos deslizamentos para compensar seus efeitos. Vários trabalhos lidam exclusivamente com a estimação do deslizamento das rodas de um robô.

Estimação é o processo de inferir o valor de uma quantidade de interesse a partir de observações indiretas, imprecisas e incertas (BAR-SHALOM et al., 2001). Segundo Bar-Shalom et al. (2001), a estimação de uma grandeza é realizada por estimadores que podem ser classificados em duas classes: estimadores de parâmetros e estimadores de estados de um sistema dinâmico. Em navegação robótica móvel o filtro de Kalman é provavelmente a técnica mais utilizada para estimação de estados de sistemas dinâmicos. Entretanto, a utilização do filtro de Kalman não pode ser aplicado diretamente na estimação dos estados de robôs móveis quando uma maior precisão das medidas for necessária. Portanto, técnicas de estimação não lineares são necessárias. Extensões das técnicas de filtragem de Kalman para sistemas lineares podem ser encontradas para sistemas não lineares discretos e contínuos. A filtragem também tem aplicação em sistemas de navegação inercial, sistemas de posicionamento global (GPS) e sistemas baseado em visão.

Os filtros também podem ser utilizados na estimação de parâmetros de sistemas dinâmicos.

Le et al. (1997) mostram que os parâmetros de deslizamento podem ser estimados, a partir de uma saída dada pela configuração do robô, utilizando-se o filtro de Kalman estendido (EKF). O método utilizado por Le et al. (1997) consiste em construir um sistema aumentado com estados dados pelos parâmetros de deslizamento e configuração do robô. Dessa forma, o algoritmo do filtro EKF pode ser utilizado para simultaneamente estimar os parâmetros de deslizamento e a configuração do robô. Zhou e Han (2007) apresentaram um estudo comparativo de filtros para sistemas não lineares empregados na estimação simultânea dos estados e parâmetros de deslizamento de um robô. Ward e Iagnemma (2008) utilizou o filtro de Kalman estendido para estimar o deslizamento longitudinal e detectar condições de imobilidade de um robô operando em ambientes não estruturados.

Outros trabalhos tem apresentado soluções alternativas para o problema de estimação dos parâmetros de deslizamento. Song et al. (2008) aplicaram a técnica observador com modos deslizantes para estimação dos parâmetros de deslizamento de um robô. O observador é indiretamente projetado por meio da comparação entre trajetória estimada e trajetória real do robô. Ojeda et al. (2006) propuseram um método baseado na medida da corrente do motor que aciona as rodas para estimar os deslizamentos e ajustar as medidas de biometria afetada pelo deslizamento. Angelova et al. (2006) propuseram estimar os deslizamentos por meio da predição das condições do solo obtidas pro meio da análise de imagens do rastro deixado pelas rodas.

Estratégias de controle para robôs móveis com deslizamento que consideram o algoritmo do estimador em sua análise de estabilidade são apresentadas em Iossaqui et al. (2010b), Iossaqui et al. (2010a), Iossaqui et al. (2011a) e Iossaqui et al. (2011b). Iossaqui et al. (2010b) propuseram uma lei de controle adaptativa baseada no modelo cinemático do robô com o deslizamento longitudinal para lidar com o problema de rastreamento de trajetória. A estabilidade assintótica da dinâmica do erro definido pelo problema de rastreamento foi demonstrada assumindo que os deslizamentos longitudinais de cada uma das rodas são constantes e iguais. Iossaqui et al. (2010a) propuseram uma lei de controle adaptativa baseada em um modelo simplificado, que desprezava a inércia das rodas e forças de interação solo-rodas. A estabilidade assintótica da dinâmica do erro definido pelo problema de rastreamento também foi garantida sob hipótese de que os deslizamentos longitudinais de cada uma das roda são constantes e iguais. Iossaqui et al. (2011a) realizaram uma aplicação de técnicas de filtragem não lineares visando à aplicação real dos controles adaptativos propostos em Iossaqui et al. (2010b) e Iossaqui et al. (2010a). Iossaqui et al. (2011b) propuseram uma lei de controle adaptativa, obtida a partir da lei de controle proposta por Kim e Oh (1998), que garante

a estabilidade do sistema em malha fechada mesmo se os deslizamento de cada uma das rodas forem diferentes. Iossaqui et al. (2011c) utilizaram o filtro de Kalman *unscented* para estimar os parâmetros de deslizamento longitudinais das rodas e, assim, realimentar um controlador obtido a partir da lei de controle proposta por Kim e Oh (1998).

1.3 Objetivos

O objetivo principal desta tese é apresentar técnicas de controle para o problema de rastreamento de trajetórias de robôs móveis não holonômicos com deslizamento longitudinal das rodas. Esse objetivo pode ser dividido nos seguintes objetivos específicos:

- Caracterizar as restrições cinemáticas de robôs móveis não holonômicos desenvolvendo modelos cinemáticos que representam o movimento do robô sob efeito do deslizamento longitudinal das rodas;
- Estudar o formalismo de Lagrange, aplicado a sistemas não holonômicos, para determinar modelos dinâmicos que representam o movimento de robôs sob efeitos do deslizamento das rodas;
- Desenvolver estratégias de controle baseadas nos modelos cinemáticos e dinâmicos de robôs não holonômicos com deslizamento das rodas utilizando técnicas de controle não linear;
- Analisar a estabilidade do sistema de malha fechada com base na análise de estabilidade de sistemas não lineares formulada a partir da teoria de Lyapunov;
- Aplicar e analisar o comportamento das estratégias de controle baseadas em algoritmos de filtragem desenvolvidos para sistemas não lineares;
- Investigar os principais métodos de discretização numérica de sistemas não lineares contínuos no tempo visando à implementação das estratégias de controle propostas.

1.4 Organização

O Capítulo 2 apresenta modelos cinemático e dinâmico que representam o movimento de um robô não holonômico com deslizamento longitudinal das rodas. O modelo cinemático tem como entrada as velocidades angulares das rodas do robô. Já o modelo dinâmico, obtido utilizando-se o formalismo de Lagrange, tem como entrada forças de propulsão aplicadas nas rodas. O Capítulo 3 apresenta leis de controle para os modelos cinemático e dinâmico do robô móvel não holonômico sob hipótese de que os deslizamentos são precisamente conhecidos. O Capítulo 4 apresenta uma estratégia de controle cinemático adaptativo para resolver o problema de rastreamento de trajetória de robôs com deslizamento longitudinal. A estabilidade do sistema em malha fechada é analisada utilizando a teoria de estabilidade de Layapunov. O Capítulo 5 apresenta duas estratégias de controle baseadas em técnicas de filtragem para resolver o problema de rastreamento de robôs não holonômicos com deslizamento longitudinal das rodas. A primeira estratégia é baseada no modelo cinemático e a segunda no modelo dinâmico. O Capítulo 6 apresenta os resultados numéricos obtidos por meio de simulações computacionais das estratégias de controle propostas nos Capítulos 4 e 5. O Capítulo 7 apresenta os comentários finais e as perspectivas futuras. O Apêndice A apresenta algumas definições e manipulações matemáticas omitidas do texto principal.

2 MODELAGEM DE UM ROBÔ COM DESLIZAMENTO

Este capítulo apresenta dois modelos, um cinemático e um dinâmico, de um robô móvel não holonômico com deslizamento longitudinal das rodas. A Seção 2.1 apresenta os fundamentos teóricos necessários para obtenção desses modelos. A Seção 2.2 apresenta o modelo cinemático do robô em que os deslizamentos das rodas são representados por parâmetros desconhecidos. A Seção 2.2 apresenta o modelo dinâmico do robô, obtido utilizando-se a formulação de Lagrange, que também considera os deslizamentos das rodas como sendo parâmetros desconhecidos.

2.1 Preliminares

Os fundamentos teóricos necessários para a obtenção dos modelos cinemático e dinâmico do robô móvel não holonômico são apresentados em duas partes: a primeira parte apresenta uma descrição de sistemas mecânicos holonômicos e não holonômicos e a segunda parte discute o formalismo lagrangiano derivado para sistemas holonômicos e não holonômicos.

2.1.1 Descrição de sistemas não holonômicos

Considere um sistema mecânico formado por N partículas. A configuração desse sistema pode ser representada descrevendo-se a posição de cada uma de suas partículas com respeito a um ponto fixo de um dado referencial. Por exemplo, em um sistema de coordenadas cartesianas seriam necessárias $3N$ coordenadas para representar um sistema mecânico de N partículas. No entanto, essas partículas normalmente estão sujeitas a restrições geométricas ou cinemáticas que limitam seus movimentos. Dessa forma, a configuração de um sistema mecânico pode, em geral, ser representada com um número menor de coordenadas do que $3N$. Na mecânica clássica, essas $n \leq 3N$ coordenadas são denominadas de coordenadas generalizadas (GREENWOOD, 2003).

Suponha um sistema mecânico especificado por n coordenadas generalizadas $(q_1, \dots, q_n)$. Então, a configuração desse sistema pode ser representada ao longo do tempo t pela trajetória $q(t)$, onde $q(t) \in \mathcal{Q}$ é o vetor formado pelas coordenadas generalizadas $q_i(t) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ e $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ é o espaço de configuração desse sistema. O vetor de velocidades generalizadas é definido por $\dot{q}(t) \in \mathcal{T}(\mathcal{Q})$, onde $\mathcal{T}(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^n$ é o espaço tangente de $\mathcal{Q}$. A definição formal de espaço tangente pode ser encontrada em Spivak (1965).

O número de coordenadas generalizadas mutuamente independentes de um sistema mecânico representa o número de graus de liberdade do sistema (TENENBAUM, 2006). Uma partícula livre para se mover no espaço possui três graus de liberdades, enquanto um corpo rígido, em princípio, possui seis graus de liberdade. Dessa forma, um sistema mecânico formado por N_1 partículas e N_2 corpos rígidos teria, em princípio, $3N_1 + 6N_2$ graus de liberdade. Como visto anteriormente, sistemas mecânicos podem ter seus movimentos limitados pelas restrições de natureza geométrica ou cinemática. Um sistema mecânico sujeito a p restrições terá $3N_1 + 6N_2 - p$ graus de liberdade. Tais restrições podem ser representadas por funções que envolvem as coordenadas e velocidades generalizadas do sistema mecânico.

Conforme Lemos (2007), restrições que podem ser representadas por funções da forma

$$\bar{h}_j(q) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.1)$$

são denominadas restrições holonômicas. As funções $\bar{h}_j : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves (i.e. de classe $\mathcal{C}^\infty$) e independentes. Sistemas mecânicos cujas restrições são todas do tipo holonômica são denominados sistemas holonômicos.

Conforme Lemos (2007), restrições que podem ser representadas por funções da forma

$$\bar{f}_j(q, \dot{q}) = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

são denominadas restrições não holonômicas, desde de que não possam ser reduzidas e representadas como (2.1). As funções $\bar{f}_j : \mathcal{Q} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ são suaves (i.e. de classe $\mathcal{C}^\infty$) e independentes. Na maioria dos sistemas mecânicos, as restrições não holonômicas são funções lineares das velocidades

des generalizadas. Tais restrições podem ser representadas da seguinte forma

$$\bar{f}_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}(q)\dot{q}_i = 0, \quad j = 1, \dots, p$$

ou na forma matricial correspondente

$$A(q)\dot{q} = 0$$

com $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^T$ e $A(q) = [a_{ji}(q)] \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Sistemas mecânicos que possuem pelo menos uma restrição não holônoma são denominados sistemas não holonômicos.

2.1.2 Formulação de Lagrange para sistemas não holonômicos

A formulação de Lagrange para sistemas mecânicos é dividida por Greenwood (2003) nas formas holonômicas e não holonômicas. A forma holonômica fundamental da equação de Lagrange é dada por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

com $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - U(q_i, t)$, onde $L : \mathcal{Q} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a função Lagrangiana, $T : \mathcal{Q} \times \mathcal{T} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia cinética do sistema, $U : \mathcal{Q} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia potencial do sistema, $q_i \in \mathbb{R}$ é a i -ésima coordenada generalizada, $Q_i \in \mathbb{R}$ é a força generalizada aplicada sobre o sistema associada a i -ésima coordenada generalizada, $t \in \mathbb{R}^+$ é a variável tempo e $n \in \mathbb{Z}_+^*$ é o número de coordenadas generalizadas do sistema.

Conforme apresentado em Greenwood (2003), o procedimento padrão para incorporar sistemas não holonômicos ao formalismo lagrangiano consiste em avaliar as funções de restrições não holonômicas por meio de multiplicadores de Lagrange.

Seja a força de restrição generalizada $C_i \in \mathbb{R}$ associada à i -ésima coordenada generalizada q_i . Então, o trabalho virtual $\delta W \in \mathbb{R}$ das forças de restrições generalizadas é dado por

$$\delta W = \sum_{i=1}^n C_i \delta q_i$$

onde $\delta q_i \in \mathbb{R}$ é o deslocamento virtual das coordenadas generalizadas.

Conforme o princípio de d'Alembert (GREENWOOD, 2003), o trabalho virtual δW das forças de restrições generalizadas deve ser igual a zero, ou seja

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta q_i = 0 \quad (2.3)$$

desde que o deslocamento virtual δq_i satisfaça as p restrições da forma

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \delta q_i = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.4)$$

onde os coeficientes a_{ji} são obtidas da representação linear da equação de restrição.

Multiplicando (2.4) pelos multiplicadores de Lagrange $\lambda_j \in \mathbb{R}$ e somando em j obtém-se

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n \lambda_j a_{ji} \delta q_i = 0 \quad (2.5)$$

Subtraindo (2.5) de (2.3) tem-se

$$\sum_{i=1}^n \left(C_i - \sum_{j=1}^p \lambda_j a_{ji} \right) \delta q_i = 0$$

É possível escolher os multiplicadores de Lagrange de tal modo que o coeficiente de δq_i seja nulo. Um coeficiente de δq_i nulo significa dizer que a força de restrição generalizada C_i é dada por

$$C_i = \sum_{j=1}^p \lambda_j a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

e que δq_i pode assumir qualquer valor.

Adicionando a força de restrição generalizada C_i dada em (2.6) na equação (2.2), obtém-se a forma não holonômica fundamental da equação de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + C_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

2.2 Modelo cinemático do robô com deslizamento

Esta seção apresenta a obtenção do modelo cinemático do robô móvel não holonômico mostrado na Figura 2.1. Assumindo que o robô seja um corpo rígido que possui movimento restrito ao plano x_0 - y_0 , a postura¹ do robô pode ser descrita pelo vetor de coordenadas generalizadas $q = (x, y, \theta)^T$. No sistema de referência inercial $F_0(x_0, y_0)$, as coordenadas generalizadas definem a posição e a orientação do robô. A posição do robô é definida pelas coordenadas (x, y) do seu centro de massa O_1 , ponto no qual é definida a origem do sistema de referência local $F_1(x_1, y_1)$, enquanto a orientação do robô é definida pela coordenada θ que representa a rotação de F_1 em relação a F_0 . O movimento do robô pode ser caracterizado pelas velocidades de translação v e de rotação ω do centro de massa do robô. O sistema de locomoção que possibilita o movimento do robô é formado por duas rodas acionadas de modo independente. As rodas de raio r estão separadas por uma distância b .

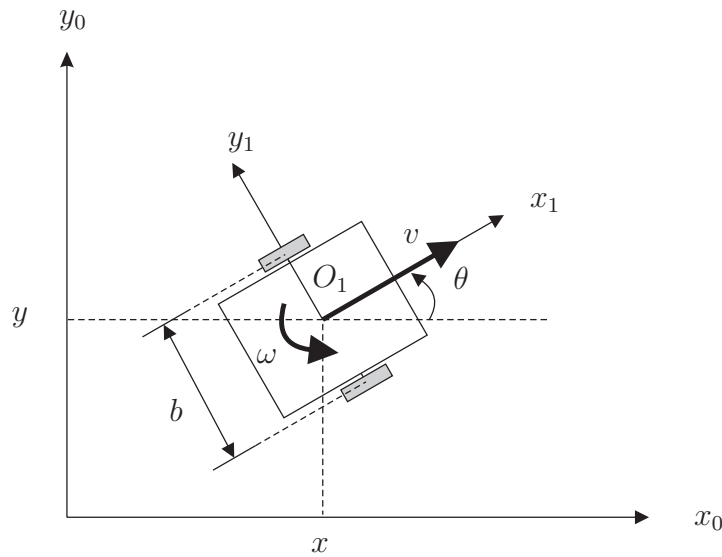


Figura 2.1 - Modelo esquemático de um robô móvel não holonômico.

Conforme apresentado por [Campion et al. \(1996\)](#), o movimento do robô não holonômico

¹Conforme definição dada em [\(CAMPION et al., 1996\)](#), a postura do robô é caracterizada pelas coordenadas generalizadas (x, y, θ) . Para caracterização da configuração do robô, conforme definição apresentada na Seção 2.1, é necessário também considerar as coordenadas generalizadas que representam o deslocamento angular das rodas.

mostrado na Figura 2.1 pode ser descrito pelo seguinte modelo cinemático

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde $v(t) \in \mathbb{R}$ é a velocidade de translação do robô, $\omega(t) \in \mathbb{R}$ é a velocidade de rotação do robô, $x(t) \in \mathbb{R}$ é a posição do robô, $y(t) \in \mathbb{R}$ é a posição do robô e $\theta(t) \in \mathbb{R}$ é a orientação do robô.

Definindo a postura do robô por $q = (x, y, \theta)^T \in \mathbb{R}^3$, o modelo cinemático (2.8) pode ser reescrito na seguinte forma matricial

$$\dot{q} = S(q)\eta\tag{2.9}$$

onde $\eta(t) = (v, \omega)^T \in \mathbb{R}^2$ é a entrada de controle e a matriz $S(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ é dada por

$$S(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{2.10}$$

O modelo cinemático (2.8) não descreve o movimento do robô com deslizamento das rodas. Uma forma de descrever o movimento do robô com deslizamento das rodas é considerar as relações entre as velocidades do robô v e ω com as velocidades das rodas. As velocidades do robô v e ω podem ser relacionadas (ver no Apêndice A.2) com as velocidades lineares das rodas do seguinte modo

$$\begin{aligned}v &= \frac{v_l + v_r}{2} \\ \omega &= \frac{v_r - v_l}{b}\end{aligned}\tag{2.11}$$

onde $v_l(t) \in \mathbb{R}$ e $v_r(t) \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, as velocidades lineares das rodas esquerda e direita do robô com relação ao solo e $b \in \mathbb{R}_*^+$ é a distância entre as rodas do robô.

Conforme descrito por Tipler e Mosca (2004), as velocidades lineares de rodas que não deslizam podem ser relacionadas com as suas velocidades angulares da seguinte forma

$$v_l = r\omega_l \quad \text{e} \quad v_r = r\omega_r\tag{2.12}$$

onde $\omega_l(t) \in \mathbb{R}$ e $\omega_r(t) \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, as velocidades angulares das rodas esquerda e direita de raio $r \in \mathbb{R}_*^+$.

Essas condições não podem ser utilizadas quando as rodas deslizam longitudinalmente. Conforme descrito por Gonzales et al. (2009a), as velocidades lineares das rodas, sob influência de deslizamento longitudinal, podem ser relacionadas com as suas velocidades angulares da seguinte forma

$$\begin{aligned} v_l &= r\omega_l(1 - i_l(t)) \\ v_r &= r\omega_r(1 - i_r(t)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $i_l(t) \in \mathbb{R}$ e $i_r(t) \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, as taxas de deslizamento longitudinal das rodas esquerda e direita do robô. Assume-se que $0 \leq i_l(t) < 1$ e $0 \leq i_r(t) < 1$. Note que uma taxa de deslizamento igual a zero significa que a roda não desliza e que uma taxa de deslizamento igual a um corresponde a um deslizamento completo da roda. Em geral, o deslizamento completo da roda não é comum em aplicações reais de robôs móveis.

Substituindo (2.13) em (2.11), depois o resultado em (2.8), obtém-se o seguinte modelo cinemático do robô não holonômico com deslizamento longitudinal das rodas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{r\omega_l(1 - i_l(t)) + r\omega_r(1 - i_r(t))}{2} \cos \theta \\ \dot{y} &= \frac{r\omega_l(1 - i_l(t)) + r\omega_r(1 - i_r(t))}{2} \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{-r\omega_l(1 - i_l(t)) + r\omega_r(1 - i_r(t))}{b} \end{aligned} \quad (2.14)$$

O modelo cinemático (2.14) é utilizado por Zhou et al. (2007) e Gonzales et al. (2009a) para representar o movimento de robôs com rodas do tipo esteira que, em geral, sofrem excessivos deslizamentos. Contudo, o modelo cinemático (2.14) só pode ser utilizado para robôs com rodas do tipo esteira trafegando em baixa velocidade (MORALES et al., 2009).

Assumindo que as taxas de deslizamento longitudinal das rodas $i_l(t)$ e $i_r(t)$ são constantes e definindo os parâmetros de deslizamento² a_l e a_r como

$$a_l = \frac{1}{1 - i_l} \quad \text{e} \quad a_r = \frac{1}{1 - i_r} \quad (2.15)$$

²Note que $a_l \geq 1$ e $a_r \geq 1$ já que i_l e i_r estão limitadas entre $[0,1)$.

o modelo (2.14) pode ser reescrito da seguinte forma

$$\dot{q} = S_a(q)\xi \quad (2.16)$$

onde $\xi(t) = (\omega_l, \omega_r)^T \in \mathbb{R}^2$ é a entrada de controle e a matriz $S_a(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ é dada por

$$S_a(q) = \frac{r}{2ba_la_r} \begin{pmatrix} ba_r \cos \theta & ba_l \cos \theta \\ ba_r \sin \theta & ba_l \sin \theta \\ -2a_r & 2a_l \end{pmatrix}$$

Note que o robô móvel não holonômico mostrado na Figura 2.1 pode ser controlado pela entrada $\eta = (v, \omega)^T$ ou pela entrada $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$. Embora frequentemente utilizada no projeto de controle cinemático, a entrada de controle η não pode ser diretamente implementada em um robô real já que a atuação é exercida pelas rodas. Uma forma mais realista é utilizar a entrada de controle ξ que, por meio de (2.11)-(2.13) e (2.15), esta relacionada com η da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{r}{2ba_la_r} \begin{pmatrix} b\omega_la_r + b\omega_ra_l \\ -2\omega_la_r + 2\omega_ra_l \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \omega_l \\ \omega_r \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

com a matriz não singular $\Phi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dada por

$$\Phi = \frac{r}{2ba_la_r} \begin{pmatrix} ba_r & ba_l \\ -2a_r & 2a_l \end{pmatrix}$$

e relação inversa $\xi = \Phi^{-1}\eta$ dada por

$$\begin{pmatrix} \omega_l \\ \omega_r \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2a_l & -ba_l \\ 2a_r & ba_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Dessa forma, assumindo que os parâmetros de deslizamento a_l e a_r são precisamente conhecidos, a entrada de controle $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$ sempre pode ser obtida quando uma entrada de controle $\eta = (v, \omega)^T$ é fornecida. O Capítulo 3 apresenta uma lei de controle η que considera que os parâmetros de deslizamento a_l e a_r são precisamente conhecidos. Contudo, quando os parâmetros de deslizamentos a_l e a_r são desconhecidos, a relação (2.18) não pode ser diretamente utilizada. Uma

alternativa é utilizar técnicas de estimação para estimar os parâmetros de deslizamento a_l e a_r e empregá-los em (2.18).

Diferentes técnicas para estimar os parâmetros de deslizamento a_l e a_r são propostas nos Capítulos 4 e 5. No Capítulo 4, os parâmetros de deslizamento são estimados utilizando-se uma lei de adaptação. No Capítulo 5, os parâmetros de deslizamento são estimados utilizando-se o filtro de Kalman *unscented*.

2.3 Modelo dinâmico do robô com deslizamento

Esta seção propõe um modelo dinâmico para o robô móvel não holonômico com deslizamento longitudinal mostrado na Figura 2.1. O processo de obtenção do modelo dinâmico está dividido em duas etapas: na primeira etapa, o formalismo lagrangiano para sistemas não holonômicos apresentado na Seção 2.1 é utilizado para se obter as equações de movimento do robô e na segunda etapa, o modelo cinemático (2.16) é utilizado para eliminar os multiplicadores de Lagrange das equações de movimento do robô e agregar ao modelo dinâmico os parâmetros de deslizamento longitudinal das rodas.

As equações de movimento do robô móvel podem ser obtidas utilizando-se a forma não holonômica da equação de Lagrange dada em (2.7). A aplicação da formulação não holonômica se justifica, pois o robô possui uma restrição em velocidade na direção do eixo y_1 representada por

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (2.19)$$

O movimento do robô não holonômico mostrado na Figura 2.1 está restrito ao plano x_0 - y_0 , portanto sua energia potencial U permanece constante ao longo do tempo. Tomando o plano x_0 - y_0 como referencial da energia potencial $U = 0$, a forma não holonômica da equação de Lagrange dada em (2.7) reduz-se a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + C_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

Desprezando a dinâmica das rodas, a energia cinética T do robô é dada por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

onde $m \in \mathbb{R}_*^+$ é a massa do robô e $J \in \mathbb{R}_*^+$ é o momento de inércia do robô em relação a um eixo vertical normal ao plano x_0 - y_0 passando pelo seu centro de massa O_1 .

Sejam as coordenadas generalizadas $q_1 = x$, $q_2 = y$ e $q_3 = \theta$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} &\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} &\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} &\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = J\ddot{\theta}\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

As forças generalizadas Q_1 , Q_2 e Q_3 aplicadas sobre o robô, calculadas no referencial F_0 , são representadas pelas forças de propulsão F_r e F_l . As forças de propulsão F_r e F_l são aplicadas na direção das velocidades lineares das rodas direita e esquerda, respectivamente. Assume-se neste trabalho que as forças propulsoras F_r e F_l são independentes e podem ser geradas de alguma forma, por exemplo, por meio da aplicação de torques T_r e T_l sobre as rodas. Entretanto, não são tratadas neste trabalho as relações entre os torques aplicados T_r e T_l com as forças de reações e as forças de tração A_r e A_l . A Figura 2.2 mostra as forças que atuam sobre o robô e as rodas. Note que x_1 e y_1 representam os eixos coordenados do sistema de referência local $F_1(x_1, y_1)$ já definido na Figura 2.1.

As forças generalizadas Q_1 , Q_2 e Q_3 , calculadas no referencial F_0 a partir das forças de propulsão F_r e F_l , são dadas, respectivamente, por

$$Q_1 = F_l \cos \theta + F_r \cos \theta$$

$$Q_2 = F_l \sin \theta + F_r \sin \theta$$

$$Q_3 = -F_l \frac{b}{2} + F_r \frac{b}{2}$$

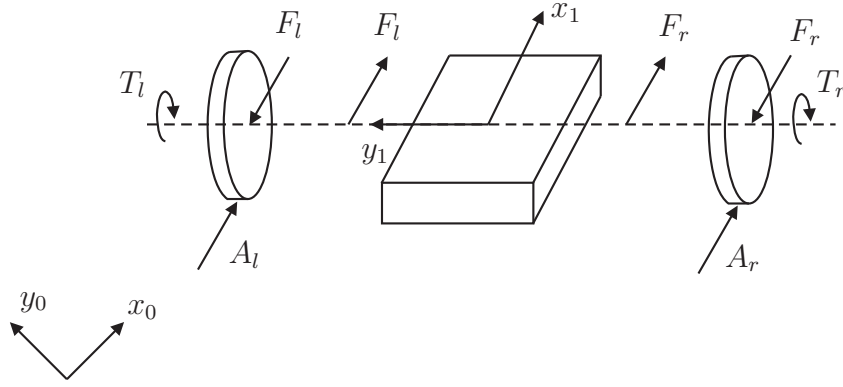


Figura 2.2 - Modelo esquemático das forças aplicadas sobre um robô móvel não holonômico.

As forças de restrições generalizadas C_1 , C_2 e C_3 , calculadas utilizando (2.6), são caracterizadas por meio dos multiplicadores de Lagrange λ_j e dos coeficientes a_{ji} obtidos da equação de restrição do sistema. Considere a equação de restrição não holonômica do robô (2.19) reescrita na forma matricial

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad (2.21)$$

onde $q = (x, y, \theta)^T$ é o vetor de coordenadas generalizadas que representa a postura do robô e $A(q) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ é a matriz

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

com os coeficientes a_{1i} dados por

$$a_{11} = -\sin \theta, \quad a_{12} = \cos \theta \quad \text{e} \quad a_{13} = 0$$

Além disso, como existe uma única equação de restrição, ou seja $p = 1$, tem-se um único multiplicador de Lagrange λ . Então, as forças de restrições generalizadas C_1 , C_2 e C_3 são dadas, respectivamente, por

$$C_1 = -\lambda \sin \theta, \quad C_2 = \lambda \cos \theta, \quad \text{e} \quad C_3 = 0$$

Finalmente, aplicando a equação de Lagrange (2.20), obtém-se o modelo dinâmico do robô não holonômico

$$m\ddot{x} = F_l \cos \theta + F_r \cos \theta - \lambda \sin \theta$$

$$m\ddot{y} = F_l \sin \theta + F_r \sin \theta + \lambda \cos \theta$$

$$J\ddot{\theta} = -F_l \frac{b}{2} + F_r \frac{b}{2}$$

Esse modelo pode ser reescrito na seguinte forma matricial

$$M\ddot{q} = B(q)\tau + A^T(q)\lambda \quad (2.22)$$

onde $\tau(t) = (F_l, F_r)^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é o vetor de entrada de controle de força e $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $B(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ são matrizes dadas, respectivamente, por

$$M = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B(q) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta & 2 \sin \theta \\ -b & b \end{pmatrix}$$

Muitos trabalhos assumem, quando as rodas não deslizam, que as forças F_r e F_l podem ser geradas, respectivamente, pelos torques independentes aplicados sobre as rodas direita e esquerda, por meio das relações $F_r = T_r/r$ e $F_l = T_l/r$ (FIERRO; LEWIS, 1997; FUKAO et al., 2000; WU et al., 2009). Entretanto, essa hipótese não é válida para rodas que deslizam. Modelos complexos que relacionam os torques aplicados sobre as rodas e as forças de propulsão podem ser encontrados na literatura (WONG, 2001; PACEJKA, 2002).

O modelo dinâmico (2.22) não é adequado para o projeto de controladores, pois o multiplicador de Lagrange λ é desconhecido. Além disso, esse modelo também não representa o deslizamento das rodas. Contudo, o multiplicador de Lagrange λ pode ser eliminado da equação (2.22) utilizando-se a equação que descreve a cinemática do robô. Utilizando-se o modelo cinemático do robô com deslizamento incorpora-se a informação do deslizamento das rodas no modelo dinâmico.

Considere o modelo cinemático do robô (2.16), dado por

$$\dot{q} = S_a(q)\xi$$

cujas derivadas em relação ao tempo é dada por

$$\ddot{q} = \dot{S}_a(q)\xi + S_a(q)\dot{\xi} \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.22) tem-se

$$M \left[\dot{S}_a(q)\xi + S_a(q)\dot{\xi} \right] = B(q)\tau + A^T(q)\lambda$$

que multiplicado por $S_a^T(q)$ chega-se a

$$S_a^T(q)M\dot{S}_a(q)\xi + S_a^T(q)MS_a(q)\dot{\xi} = S_a^T(q)B(q)\tau + S_a^T(q)A^T(q)\lambda \quad (2.24)$$

No entanto, observe que

$$\begin{aligned} S_a^T(q)M\dot{S}_a(q) &= \frac{r^2}{4b^2a_l^2a_r^2} \begin{pmatrix} ba_r \cos \theta & ba_r \sin \theta & -2a_r \\ ba_l \cos \theta & ba_l \sin \theta & 2a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ba_r\dot{\theta} \sin \theta & -ba_l\dot{\theta} \sin \theta \\ ba_r\dot{\theta} \cos \theta & ba_l\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S_a^T(q)A^T(q) &= \frac{r}{2ba_la_r} \begin{pmatrix} ba_r \cos \theta & ba_r \sin \theta & -2a_r \\ ba_l \cos \theta & ba_l \sin \theta & 2a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Então, a equação (2.24) pode ser reescrita como

$$S_a^T(q)MS_a(q)\dot{\xi} = S_a^T(q)B(q)\tau$$

como $S_a^T(q)MS_a(q)$ é sempre não singular para qualquer q , têm-se que

$$\dot{\xi} = [S_a^T(q)MS_a(q)]^{-1} S_a^T(q)B(q)\tau$$

Definindo $S_a^T(q)MS_a(q) = M_a \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $S_a^T(q)B(q) = B_a \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, a dinâmica que governa o movimento do robô não holonômico pode ser representada pelo seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S_a(q)\xi \\ \dot{\xi} &= M_a^{-1}B_a\tau \end{aligned} \quad (2.25)$$

com matrizes M_a e B_a dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
M_a &= S_a^T(q) M S_a(q) \\
&= \frac{r^2}{4b^2 a_l^2 a_r^2} \begin{pmatrix} ba_r \cos \theta & ba_r \sin \theta & -2a_r \\ ba_l \cos \theta & ba_l \sin \theta & 2a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ba_r \cos \theta & ba_l \cos \theta \\ ba_r \sin \theta & ba_l \sin \theta \\ -2a_r & 2a_l \end{pmatrix} \\
&= \frac{r^2}{4b^2 a_l^2 a_r^2} \begin{pmatrix} (b^2 m + 4J)a_r^2 & (b^2 m - 4J)a_r a_l \\ (b^2 m - 4J)a_r a_l & (b^2 m + 4J)a_l^2 \end{pmatrix} \\
B_a &= S_a^T(q) B(q) \\
&= \frac{r}{2ba_l a_r} \begin{pmatrix} ba_r \cos \theta & ba_r \sin \theta & -2a_r \\ ba_l \cos \theta & ba_l \sin \theta & 2a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & 2 \cos \theta \\ 2 \sin \theta & 2 \sin \theta \\ -b & b \end{pmatrix} \\
&= \frac{r}{a_l a_r} \begin{pmatrix} a_r & 0 \\ 0 & a_l \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3 CONTROLE DO ROBÔ SEM DESLIZAMENTO

Este capítulo apresenta leis de controle para o robô móvel não holonômico mostrado na Figura 2.1, sob hipótese de que as suas rodas não deslizam. A Seção 3.1 apresenta uma definição formal dos problemas de controle mais comuns na robótica móvel e uma revisão de análise de sistemas não lineares. A Seção 3.2 apresenta a formulação do problema de rastreamento de trajetória de um robô móvel não holonômico sem deslizamento. A Seção 3.3 apresenta o projeto de controle que utiliza o modelo cinemático do robô não holonômico sem deslizamento. A Seção 3.4 apresenta o projeto de controle que utiliza o modelo dinâmico do robô não holonômico sem deslizamento.

3.1 Preliminares

Esta seção apresenta a definição formal dos três problemas de controle mais comuns na robótica móvel. Também apresenta uma revisão das definições e teoremas utilizados na análise de sistemas não lineares autônomos e não autônomos.

3.1.1 Problemas de controle na robótica móvel

Considere que o sistema dinâmico que descreve o movimento de um robô móvel não holonômico possa ser representado no espaço de estado por

$$\dot{s} = f(t, s, u) \quad (3.1)$$

$$z = h(s) \quad (3.2)$$

onde $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ e $h = (h_1, \dots, h_p)^T$ são vetores de funções não lineares com $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $s(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) =$

$(u_1(t), \dots, u_l(t))^T \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas, $z(t) = (z_1(t), \dots, z_l(t))^T \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de saídas e $t \in \mathbb{R}^+$ é o tempo contínuo.

Em geral, três problemas de controle podem ser encontrados na robótica móvel. O problema de estabilização em um ponto (*stabilization point*), o problema de estabilização em uma trajetória de referência ou rastreamento de trajetória (*tracking problem*) e o problema de estabilização em uma trajetória de referência parametrizada ou seguimento de caminho (*path-following*). As definições desses três problemas de controle são enunciadas a seguir

Definição 1. (problema de estabilização em um ponto (MORIN; SAMSON, 2008)) *O problema de estabilização em um ponto consiste em encontrar uma lei de controle $u(t)$ para (3.1) de modo que $s(t)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$.*

Definição 2. (problema de rastreamento de trajetória (MORIN; SAMSON, 2008)) *Seja $z_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}^l$ uma trajetória de referência factível para o robô dado por (3.1) e (3.2). O problema de rastreamento de trajetória consiste em encontrar uma lei de controle $u(t)$ para (3.1) de modo que o erro de rastreamento, definido por $z(t) - z_{\text{ref}}(t)$, converge para zero quando $t \rightarrow \infty$.*

Definição 3. (problema de seguimento de caminho (AGUIAR; HESPANHA, 2007)) *Seja $z_{\text{ref}}(\rho) \in \mathbb{R}^l$ uma trajetória de referência parametrizada por $\rho \in \mathbb{R}$ e seja $v_d(\rho) \in \mathbb{R}$ uma velocidade longitudinal não nula atribuída ao robô. O problema de seguimento de caminho consiste em encontrar uma lei de controle $u(t)$ para (3.1) de modo que o erro de seguimento, definido por $z(t) - z_{\text{ref}}(\rho)$, converge para zero quando $t \rightarrow \infty$ e o robô satisfaça a velocidade desejada v_d ao longo da trajetória z_{ref} .*

As leis de controle propostas nesta tese são projetadas com base no problema de estabilização em uma trajetória, também denominado problema de rastreamento de trajetória. A estabilidade do sistema de malha fechada formada pelo robô e controlador pode ser determinada pela análise da dinâmica do erro de postura. Em geral, a dinâmica do erro de postura é governada por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares cuja estabilidade pode ser determinada utilizando-se a teoria de Lyapunov.

3.1.2 Revisão de análise de sistemas não lineares

Considere o seguinte sistema não linear representado no espaço de estado dado por

$$\dot{e} = f(t, e, u) \quad (3.3)$$

onde $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ é um vetor de funções não lineares com $f_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $e(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas e $t \in \mathbb{R}^+$ é o tempo contínuo.

O sistema representado por uma equação de estado que não depende explicitamente da entrada u é denominado de não forçado. Um sistema não forçado não significa necessariamente que sua entrada u seja nula. A entrada pode ser uma função específica do tempo t , $u = \varphi(t)$, ou uma função do estado e , $u = \varphi(e)$, ou mesmo de ambos, $u = \varphi(t, e)$. Assim, substituindo $u = \varphi$ em (3.3) elimina-se u obtendo-se o sistema não forçado $\dot{e} = f(t, e)$.

Um sistema não forçado que não depende explicitamente do tempo t (ou seja, $\dot{e} = f(e)$) é denominado de sistema autônomo ou invariante no tempo. Um sistema que não é autônomo é denominado de não autônomo ou variante no tempo.

Esta seção trata do problema de estabilização de pontos de equilíbrio de sistemas autônomos e não autônomos. De forma geral, um ponto $\bar{e}$, no espaço de estado, é dito ser um ponto de equilíbrio de um sistema se tem a propriedade de sempre que o estado do sistema inicia em $\bar{e}$ permanece em $\bar{e}$ para todo tempo futuro (KHALIL, 2001). A estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas autônomos e não autônomos pode ser analisada aplicando-se os métodos de Lyapunov.

Considere o sistema autônomo descrito pela seguinte equação

$$\dot{e} = f(e) \quad (3.4)$$

onde $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função localmente Lipschitz em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ cuja origem $e = 0$ é um ponto de equilíbrio de (3.4).

Considerando que $[\partial f / \partial e](t, e)$ denota a matriz jacobiana da função vetorial $f(t, e)$, a condição de localmente Lipschitz da função f pode ser verificada utilizando-se o seguinte lema:

Lema 1. (Lema 3.2 de Khalil (2001)) *Se $f(t, e)$ e $[\partial f / \partial e](t, e)$ são contínuas em $[t_i, t_f] \times D$, para*

algum domínio $D \subset \mathbb{R}^n$, então f é localmente Lipschitz em e no domínio $[t_i, t_f] \times D$.

A definição de estabilidade do ponto de equilíbrio $e = 0$ do sistema autônomo (3.4) é apresentada a seguir.

Definição 4. (Definição 4.1 de Khalil (2001)) *O ponto de equilíbrio $e = 0$ da equação (3.4) é*

- *estável se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\|e(0)\| < \delta \rightarrow \|e(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- *instável se não é estável.*
- *assintoticamente estável se é estável e δ pode ser escolhido tal que*

$$\|e(0)\| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

A estabilidade da origem $e = 0$ do sistema autônomo (3.4) pode ser verificada utilizando o seguinte teorema:

Teorema 1. (Teorema 4.9 de Khalil (2001)) *Seja $e = 0$ um ponto de equilíbrio para (3.4) e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que contém $e = 0$. Seja $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$V(0) = 0 \quad e \quad V(e) > 0 \quad em \quad D - \{0\} \quad (3.5)$$

$$\dot{V}(e) \leq 0 \quad em \quad D$$

Então, $e = 0$ é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(e) < 0 \quad em \quad D - \{0\} \quad (3.6)$$

então, $e = 0$ é assintoticamente estável.

Definições e condições de estabilidade apresentadas para sistemas autônomos podem ser estendidas para sistemas não autônomos.

Considere o sistema não autônomo descrito pela seguinte equação

$$\dot{e} = f(t, e) \quad (3.7)$$

onde $f : \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua por partes em t e localmente Lipschitz em e no domínio $\mathbb{R}^+ \times D$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém a origem $e = 0$.

Sistemas não autônomos são caracterizados por soluções que podem depender de t e t_0 , diferentemente das soluções dos sistemas autônomos que dependem somente de $t - t_0$. Dessa forma, a definição de estabilidade da origem do sistema (3.7) precisa considerar o comportamento uniforme de sua solução com relação ao seu comportamento inicial em t_0 .

A definição de estabilidade do ponto de equilíbrio $e = 0$ do sistema não autônomo (3.7) é apresentada a seguir.

Definição 5. (Definição 4.4 de Khalil (2001)) *O ponto de equilíbrio $e = 0$ da equação (3.7) é*

- *estável se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que*

$$\|e(t_0)\| < \delta \leftarrow \|e(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad (3.8)$$

- *uniformemente estável se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, independente de t_0 , tal que (3.8) é satisfeito.*
- *instável se não é estável.*
- *assintoticamente estável se é estável e existe uma constante positiva $c = c(t_0)$ tal que $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, para todo $\|e(t_0)\| < c$.*
- *uniformemente assintoticamente estável se é uniformemente estável e existe uma constante positiva c , independente de t_0 , tal que para todo $\|e(t_0)\| < c$, $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, uniformemente em t_0 , isto é, para cada $\varrho > 0$, existe um $Z = Z(\varrho) > 0$ tal que*

$$\|e(t)\| < \varrho, \forall t \geq t_0 + Z(\varrho), \forall \|e(t_0)\| < c$$

A definição de estabilidade uniforme do ponto de equilíbrio $e = 0$ do sistema não autônomo (3.7) pode ser expressa de forma mais objetiva utilizando-se funções classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{KL}$.

Definição 6. (Definição 4.2 de Khalil (2001)) *Uma função contínua $\alpha : [0, l_s) \rightarrow [0, \infty)$ é dita pertencer a classe $\mathcal{K}$ se é estritamente crescente e $\alpha(0) = 0$.*

Definição 7. (Definição 4.3 de Khalil (2001)) *Uma função contínua $\beta : [0, l_s) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é dita pertencer a classe $\mathcal{KL}$ se, para cada b_2 fixado, a função $\beta(b_1, b_2)$ pertence a classe $\mathcal{K}$ em relação a b_1 e, para cada b_1 , a função $\beta(b_1, b_2)$ é decrescente em relação a b_2 e $\beta(b_1, b_2) \rightarrow 0$ as $b_2 \rightarrow \infty$.*

A definição de estabilidade uniforme do ponto de equilíbrio $e = 0$ do sistema não autônomo (3.7), utilizando as funções classes $\mathcal{K}$ e $\mathcal{KL}$, é dada através do seguinte lema:

Lema 2. (Lema 4.5 de Khalil (2001)) *O ponto de equilíbrio $e = 0$ da equação (3.7) é*

- *uniformemente estável se e somente se existe uma função α classe $\mathcal{K}$ e uma constante positiva c , independente de t_0 , tal que*

$$\|e(t)\| \leq \alpha(\|e(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|e(t_0)\| < c$$

- *uniformemente assintoticamente estável se e somente se existe uma função β classe $\mathcal{KL}$ e uma constante positiva c , independente de t_0 , tal que*

$$\|e(t)\| \leq \beta(\|e(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|e(t_0)\| < c \quad (3.9)$$

- *globalmente uniformemente assintoticamente estável se e somente se a desigualdade (3.9) é satisfeita para qualquer estado inicial $e(t_0)$.*

A estabilidade da origem $e = 0$ do sistema não autônomo (3.7) pode ser verificada utilizando o seguinte teorema:

Teorema 2. (Teorema 4.9 de Khalil (2001)) *Seja $e = 0$ um ponto de equilíbrio para (3.7) e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que contem $e = 0$. Seja $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável continuamente tal que*

$$W_1(e) \leq V_0(t, e) \leq W_2(e) \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial e} f(t, e) \leq -W_3(e) \quad (3.11)$$

$\forall t \geq 0$ e $\forall e \in D$, onde $W_1(e)$, $W_2(e)$ and $W_3(e)$ são funções definida positiva contínuas no domínio D . Então, o equilíbrio $e = 0$ é uniformemente assintoticamente estável. Além disso, se d e c são escolhidos tal que $B_d = \{\|e\| \leq d\} \subset D$ e $c < \min_{\|e\|=d} W_1(e)$, então toda trajetória iniciando em $\{e \in B_d \mid W_2(e) \leq c\}$ satisfaz

$$\|e(t)\| \leq \gamma(\|e(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

para alguma função γ classe $\mathcal{KL}$.

3.2 Formulação do problema de rastreamento de trajetória

Esta seção apresenta a formulação do problema de rastreamento de trajetória do robô móvel não holonômico sem deslizamento. O problema de rastreamento de trajetória consiste em encontrar uma lei de controle cinemática $\eta = (v, \omega)^T \in \mathbb{R}^2$ para o robô (2.9) de modo que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (q_{\text{ref}} - q) = 0 \quad (3.12)$$

onde $q(t) = (x, y, \theta)^T \in \mathbb{R}^3$ é a postura do robô dada por (2.9) e $q_{\text{ref}}(t) = (x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}}, \theta_{\text{ref}})^T \in \mathbb{R}^3$ é a postura da trajetória de referência obtida utilizando-se o modelo cinemático

$$\dot{q}_{\text{ref}} = S(q_{\text{ref}})\eta_{\text{ref}} \quad (3.13)$$

onde o mapeamento $S(\cdot)$ está definido em (2.10) e $\eta_{\text{ref}} = (v_{\text{ref}}, \omega_{\text{ref}})^T \in \mathbb{R}^2$ é uma dada entrada de referência formada pela velocidade linear $v_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}$ e pela velocidade angular $\omega_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}$.

O problema de rastreamento de trajetória definido em (3.12) pode ser reformulado em termos do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T \in \mathbb{R}^3$. O erro de postura e , representado no sistema de referência local do robô $F_1(x_1, y_1)$, é definido como sendo a diferença entre a postura da trajetória de referência q_{ref} e a postura do robô q . A Figura 3.1 mostra um esquema do erro de postura e representado no referencial local F_1 . A postura do robô q , representada no sistema de referência inercial $F_0(x_0, y_0)$, é descrita pela posição (x, y) da origem O_1 do referencial F_1 e pela rotação θ do referencial F_1 em relação ao referencial F_0 . A postura da trajetória de referência q_{ref} , também representada no referencial inercial F_0 , é descrita pela posição $(x_{\text{ref}}, y_{\text{ref}})$ da origem O_2 do referencial $F_2(x_2, y_2)$ e pela rotação θ_{ref} do referencial F_2 em relação ao referencial F_0 .

O erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$, definido no sistema de referência local F_1 , pode ser descrito no sistema de referência inercial F_0 da seguinte forma

$$q_{\text{ref}} = R(\theta)e + q \quad (3.14)$$

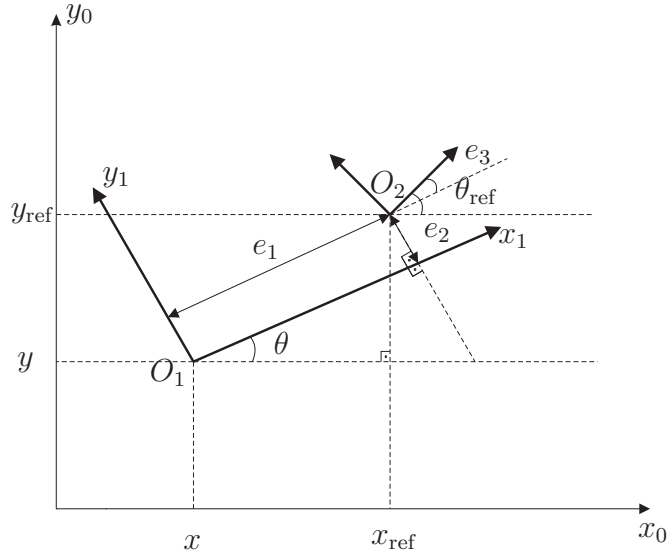


Figura 3.1 - Erro de configuração de trajetória definido para o problema de rastreamento.

onde $R(\theta) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de rotação entre os sistemas de referência F_1 e F_0 dada por

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz de rotação $R(\theta)$ é sempre não singular. Além disso, a matriz de rotação $R(\theta)$ é ortogonal¹. Dessa forma, a representação do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ no sistema de referência local F_1 pode ser facilmente obtida de (3.14). Isolando e de (3.14) tem-se

$$e = R^{-1}(\theta)(q_{\text{ref}} - q) \quad (3.15)$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{ref}} - x \\ y_{\text{ref}} - y \\ \theta_{\text{ref}} - \theta \end{pmatrix}$$

A dinâmica do erro de postura, obtida derivando (3.15) em relação ao tempo, é dada por

$$\dot{e} = \dot{R}^{-1}(\theta)(q_{\text{ref}} - q) + R^{-1}(\theta)(\dot{q}_{\text{ref}} - \dot{q})$$

¹Uma matriz ortogonal tem a propriedade de que sua inversa coincide com a sua transposta, $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$ (MEYER, 2000).

Esse sistema pode ser rescrito em função do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$. Para isso, substitui-se na equação acima (2.9) e (3.13) o que resulta em

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= \begin{pmatrix} -\omega \sin \theta & \omega \cos \theta & 0 \\ -\omega \cos \theta & -\omega \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{ref}} - x \\ y_{\text{ref}} - y \\ \theta_{\text{ref}} - \theta \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos \theta_{\text{ref}} & 0 \\ \sin \theta_{\text{ref}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\text{ref}} \\ \omega_{\text{ref}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \right) \\
&= \omega \begin{pmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\text{ref}} - x \\ y_{\text{ref}} - y \\ \theta_{\text{ref}} - \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\text{ref}} \cos \theta_{\text{ref}} - v \cos \theta \\ v_{\text{ref}} \sin \theta_{\text{ref}} - v \sin \theta \\ \omega_{\text{ref}} - \omega \end{pmatrix} \\
&= \omega \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta (v_{\text{ref}} \cos \theta_{\text{ref}} - v \cos \theta) + \sin \theta (v_{\text{ref}} \sin \theta_{\text{ref}} - v \sin \theta) \\ -\sin \theta (v_{\text{ref}} \cos \theta_{\text{ref}} - v \cos \theta) + \cos \theta (v_{\text{ref}} \sin \theta_{\text{ref}} - v \sin \theta) \\ \omega_{\text{ref}} - \omega \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Equivalentemente, tem-se

$$\dot{e} = \omega \begin{pmatrix} e_2 \\ -e_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{\text{ref}} (\cos \theta \cos \theta_{\text{ref}} + \sin \theta \sin \theta_{\text{ref}}) - v (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ v_{\text{ref}} (\cos \theta \sin \theta_{\text{ref}} - \sin \theta \cos \theta_{\text{ref}}) \\ \omega_{\text{ref}} - \omega \end{pmatrix}$$

Finalmente, utilizando as seguintes relações trigonométricas

$$\cos(\theta - \theta_{\text{ref}}) = \cos \theta \cos \theta_{\text{ref}} + \sin \theta \sin \theta_{\text{ref}} = \cos e_3$$

$$\sin(\theta - \theta_{\text{ref}}) = \cos \theta \sin \theta_{\text{ref}} - \sin \theta \cos \theta_{\text{ref}} = \sin e_3$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

a dinâmica do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ com entrada de controle dada por $\eta = (v, \omega)^T$ pode ser escrita do seguinte modo

$$\dot{e} = f(t, e, \eta) \tag{3.16}$$

com $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(t, e, \eta) = \begin{pmatrix} \omega e_2 + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - v \\ -\omega e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) - \omega \end{pmatrix}$$

Resumindo, o problema de rastreamento de trajetória definido em (3.12) pode ser reescrito como um problema de encontrar uma lei de controle $\eta = (v, \omega)^T$ para (3.16) de tal forma que o erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ convirja para zero quando $t \rightarrow \infty$. Note, a partir da definição do erro de postura (3.15), que $e \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ implica que $q \rightarrow q_{\text{ref}}$ quando $t \rightarrow \infty$.

3.3 Projeto de controle usando o modelo cinemático

Esta seção apresenta uma lei de controle que resolve o problema de rastreamento de trajetória de um robô móvel não holonômico sem deslizamento. Essa lei de controle cinemática é proposta em Kim e Oh (1998) por meio do seguinte teorema:

Teorema 3. (Teorema de Kim e Oh (1998)) *Assumindo que $v_{\text{ref}} > 0$ e ω_{ref} são constantes, a lei de controle cinemática $\eta_c = (v_c, \omega_c)^T$ dada por*

$$\begin{aligned} v_c &= v_{\text{ref}} \cos e_3 - k_3 e_3 \omega_c + k_1 e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}} + \frac{v_{\text{ref}}}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

com ganhos constantes $k_i > 0$ garante que a origem $e = 0$ do sistema (3.16) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

Demonstração. O sistema em malha fechada, obtido a partir da dinâmica do erro de postura (3.16) com entrada de controle $\eta = \eta_c$ dada por (3.17) sob hipótese de que $v_{\text{ref}} > 0$ e ω_{ref} são constantes, é representado pelo seguinte sistema autônomo

$$\dot{e} = f(e) \quad (3.18)$$

com $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(e) = \begin{pmatrix} -k_1 e_1 + \frac{k_2 v_{\text{ref}}}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \omega_{\text{ref}} (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}}{2k_3} (e_2 + k_3 e_3) \sin e_3 \\ -\omega_{\text{ref}} e_1 - \frac{k_2 v_{\text{ref}}}{2} e_1 (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}}{2k_3} e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}} \sin e_3 \\ -\frac{k_2 v_{\text{ref}}}{2} (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}}{2k_3} \sin e_3 \end{pmatrix}$$

Aplicando o Teorema 1, pode-se demonstrar que a origem $e = 0$ do sistema (3.18) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Note que existem outros pontos de equilíbrio dados por $e = (0, -lk_3\pi, l\pi)$ com $l \in \mathbb{Z}$. Portanto, a origem $e = 0$ não pode ser um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

O Teorema 1 requer que a função $f(e)$ seja localmente Lipschitz em um domínio que contém a origem $e = 0$. Essa condição pode ser verificada utilizando-se o Lema 1. Conforme o Lema 1, a função $f(e)$ é localmente Lipschitz se $f(e)$ e $[\partial f / \partial e](e)$ são contínuas em algum domínio $D \subset \mathbb{R}^3$. Verifica-se facilmente, a partir de (3.18), que a função $f(e)$ é contínua em $D = \mathbb{R}^3$. Todos os termos da matriz jacobiana $[\partial f / \partial e](e)$, apresentada no Apêndice A.3, também são contínuos em $D = \mathbb{R}^3$. Portanto, aplicando o Lema 1, mostra-se que $f(e)$ é localmente Lipschitz em $D = \mathbb{R}^3$.

Para prosseguir com a aplicação do Teorema 1 é necessário considerar o domínio $D = \{e \in \mathbb{R}^3 \mid -\pi < e_3 < \pi\}$ que contém a origem $e = 0$ e a seguinte função de Lyapunov candidata $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, proposta em Kim e Oh (1998):

$$V(e) = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{1}{k_2} (1 - \cos e_3)$$

cuja derivada ao longo do tempo é dada por

$$\dot{V}(e) = e_1 \dot{e}_1 + (e_2 + k_3 e_3) (\dot{e}_2 + k_3 \dot{e}_3) + \dot{e}_3 \frac{\sin e_3}{k_2}$$

Substituindo o sistema em malha fechada (3.18) na equação acima, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) &= e_1 \left[-k_1 e_1 + \frac{k_2 v_{\text{ref}}}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \omega_{\text{ref}} (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}}{2k_3} (e_2 + k_3 e_3) \sin e_3 \right] \\
&\quad + (e_2 + k_3 e_3) \left\{ \left[-\omega_{\text{ref}} e_1 - \frac{k_2 v_{\text{ref}}}{2} e_1 (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}}{2k_3} e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}} \sin e_3 \right] \right. \\
&\quad \left. - k_3 \left[\frac{k_2 v_{\text{ref}}}{2} (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}}{2k_3} \sin e_3 \right] \right\} - \left[\frac{k_2 v_{\text{ref}}}{2} (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}}{2k_3} \sin e_3 \right] \frac{\sin e_3}{k_2} \\
&= -k_1 e_1^2 - \frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 - \frac{v_{\text{ref}}}{2k_2 k_3} \sin^2 e_3
\end{aligned}$$

Observa-se que $V(0) = 0$ e $V(e) > 0$ em $D - \{0\}$. Além disso, $\dot{V}(e) < 0$ em $D - \{0\}$. Consequentemente, as condições (3.5) e (3.6) do Teorema 1 são satisfeitas para todo $e \in D$. Portanto, $e = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. $\square$

Na prova do Teorema 3 assume-se que as entradas de referência v_{ref} e ω_{ref} são constantes para demonstrar que a origem $e = 0$ do sistema em malha fechada (3.18) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Contudo, aplicando o Teorema 2, pode-se mostrar formalmente que $e = 0$ é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável para entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ variantes no tempo.

O sistema em malha fechada, obtido a partir da dinâmica do erro de postura (3.16) com entrada de controle $\eta = \eta_c$ dada por (3.17) com ganhos $k_i > 0$ constantes e entradas de referência $\omega_{\text{ref}}(t)$ e $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ variantes no tempo, é representado pelo seguinte sistema não autônomo

$$\dot{e} = f(t, e) \quad (3.19)$$

com $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(t, e) = \begin{pmatrix} -k_1 e_1 + \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \omega_{\text{ref}}(t) (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} (e_2 + k_3 e_3) \sin e_3 \\ -\omega_{\text{ref}}(t) e_1 - \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} e_1 (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ -\frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \end{pmatrix}$$

O Teorema 2 requer que a função $f(t, e)$ seja localmente Lipschitz em um domínio que contém a origem $e = 0$. Essa condição pode ser verificada utilizando-se o Lema 1. Conforme o Lema 1,

a função $f(t, e)$ é localmente Lipschitz se $f(t, e)$ e $[\partial f / \partial e](t, e)$ são contínuas em $[t_i, t_f] \times D$, para algum domínio $D \subset \mathbb{R}^3$. Assumindo que $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ são funções contínuas em $[0, \infty]$, verifica-se facilmente, a partir de (3.19), que a função $f(t, e)$ é contínua em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^3$. Os termos da matriz jacobiana $[\partial f / \partial e](t, e)$, apresentada no Apêndice A.3, também são contínuos em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^3$. Portanto, aplicando o Lema 1, mostra-se que $f(t, e)$ é localmente Lipschitz em e no domínio $[0, \infty] \times \mathbb{R}^3$.

Prosseguindo com a aplicação do Teorema 2, considere o domínio $D = \{e \in \mathbb{R}^3 \mid -\pi < e_3 < \pi\}$ que contém a origem $e = 0$ e a seguinte função de Lyapunov candidata $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, proposta em Kim e Oh (1998):

$$V(e) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} \quad (3.20)$$

cuja derivada ao longo do tempo é dada por

$$\dot{V}(t, e) = e_1\dot{e}_1 + (e_2 + k_3e_3)(\dot{e}_2 + k_3\dot{e}_3) + \dot{e}_3 \frac{\sin e_3}{k_2}$$

Substituindo o sistema em malha fechada (3.19) na equação acima, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e) &= e_1 \left[-k_1e_1 + \frac{k_2v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \omega_{\text{ref}}(t)(e_2 + k_3e_3) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3}(e_2 + k_3e_3) \sin e_3 \right] \\ &\quad + (e_2 + k_3e_3) \left\{ \left[-\omega_{\text{ref}}(t)e_1 - \frac{k_2v_{\text{ref}}(t)}{2}e_1(e_2 + k_3e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3}e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \right] \right. \\ &\quad \left. - k_3 \left[\frac{k_2v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \right] \right\} \\ &\quad - \left[\frac{k_2v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \right] \frac{\sin e_3}{k_2} \\ &= -k_1e_1^2 - \frac{k_2k_3v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_2k_3} \sin^2 e_3 \end{aligned}$$

Então, $V(t, e)$ satisfaz a condição (3.10) do Teorema 2 para todo $t \geq 0$ e $e \in D$, com funções positivas definidas $W_1(e)$ e $W_2(e)$ no domínio D dadas por:

$$\begin{aligned} W_1(e) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} \\ W_2(e) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} \end{aligned}$$

Fazendo $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ para um $\mu \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, $\dot{V}(t, e)$ satisfaz a condição (3.11) do Teorema 2 para todo $t \geq 0$ e $e \in D$, com função positiva definida $W_3(e)$ em D dada por:

$$W_3(e) = k_1 e_1^2 + \frac{k_2 k_3 \mu}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{\mu}{2 k_2 k_3} \sin^2 e_3$$

Todas as condições do Teorema 2 são satisfeitas. Portanto, a origem $e = 0$ é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável.

3.4 Projeto de controle usando o modelo dinâmico

Esta seção apresenta o projeto de uma lei de controle que utiliza o modelo dinâmico (2.25) de um robô móvel não holonômico sob hipótese de que suas rodas não deslizam. O modelo dinâmico precisa ser considerado quando os efeitos inerciais tornam-se um fator importante no movimento do robô. Os efeitos inerciais são importantes, por exemplo, quando o robô está submetido a altas velocidades.

O modelo dinâmico do robô não holonômico sem deslizamento, obtido a partir de (2.25) com $a_l = 1$ e $a_r = 1$, é dado por

$$\begin{aligned} \dot{q} &= S_o(q)\xi \\ \dot{\xi} &= M_o^{-1} B_o \tau \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $S_o(q)$, M_o e B_o são matrizes dadas respectivamente por

$$S_o(q) = \frac{r}{2b} \begin{pmatrix} b \cos \theta & b \cos \theta \\ b \sin \theta & b \sin \theta \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_o = \frac{r^2}{4b^2} \begin{pmatrix} 4m + b^2 J & 4m - b^2 J \\ 4m - b^2 J & 4m + b^2 J \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_o = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Assumindo que os parâmetros geométricos (b e r) e inerciais (m e J) do robô podem ser precisamente medidos, o modelo dinâmico (3.21) pode ser reescrito em um sistema mais adequado

ao projeto de controle utilizando-se a seguinte entrada de controle

$$\tau = B_o^{-1} M_o \tau_a \quad (3.22)$$

Utilizando essa entrada de controle, o modelo dinâmico (3.21) reduz-se a

$$\dot{q} = S_o(q)\xi \quad (3.23)$$

$$\dot{\xi} = \tau_a \quad (3.24)$$

onde $\tau_a(t) = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é uma entrada de controle auxiliar a ser determinada de acordo com o problema de controle.

Considere o problema de rastreamento de trajetória definido na Seção 3.2 através da dinâmica do erro de postura, renomeado como $e_c = (e_1, e_2, e_3)^T$, dada em (3.16), ou seja

$$\dot{e}_c = \begin{pmatrix} \omega e_2 + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - v \\ -\omega e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) - \omega \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

A dinâmica do erro de postura (4.31) pode ser reescrita como uma função das velocidades ω_l e ω_r utilizando a relação entre as velocidades $\eta = (v, \omega)^T$ e $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$ dada em (2.17) com $a_l = 1$ e $a_r = 1$, ou seja

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{r}{2b} \begin{pmatrix} b & b \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_l \\ \omega_r \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (4.31), obtém-se a dinâmica do erro de postura

$$\dot{e}_c = \begin{pmatrix} \frac{r}{b}(\omega_r - \omega_l)e_2 + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - \frac{r}{2}(\omega_l + \omega_r) \\ -\frac{r}{b}(\omega_r - \omega_l)e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) - \frac{r}{b}(\omega_r - \omega_l) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Essa dinâmica é utilizada como base do projeto da entrada de controle auxiliar $\tau_a = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T$.

Para isso considere o sistema (3.23)-(3.24) reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{e}_c &= g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi \\ \dot{\xi} &= \tau_a\end{aligned}\tag{3.28}$$

com funções $g_0(e_c) \in \mathbb{R}^3$ e $g_1(e_c) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ dadas respectivamente por

$$g_0(e_c) = \begin{pmatrix} v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \\ v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_1(e_c) = \frac{r}{2b} \begin{pmatrix} -2e_2 - b & 2e_2 - b \\ 2e_1 & -2e_1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Para determinar a entrada de controle τ_a conforme o problema de rastreamento de trajetória, considere o sistema (3.28) reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{e}_c &= g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi + g_1(e_c)\xi_d - g_1(e_c)\xi_d \\ \dot{\xi} &= \tau_a\end{aligned}\tag{3.29}$$

onde $\xi_d = (\omega_{ld}, \omega_{rd})^T$ é uma velocidade a ser determinada de forma a estabilizar a origem do sistema $\dot{e}_c = g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d$. Uma velocidade ξ_d que estabiliza esse sistema é dada por

$$\begin{pmatrix} \omega_{ld} \\ \omega_{rd} \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2 & -b \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix}\tag{3.30}$$

com velocidades v_c e ω_c dadas pelo projeto do controlador cinemático, ou seja

$$\begin{aligned}v_c &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - k_3 e_3 \omega_c + k_1 e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right]\end{aligned}\tag{3.31}$$

Considere o erro $e_d = (e_4, e_5)^T \in \mathbb{R}^2$ dado por $e_d = \xi - \xi_d$. Então,

$$\dot{e}_d = \dot{\xi} - \dot{\xi}_d$$

Definindo $u = \tau_a - \dot{\xi}_d$ com $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$, o sistema (3.29) pode ser reescrito na forma padrão

de aplicação da técnica *backstepping* (KHALIL, 2001), ou seja

$$\begin{aligned}\dot{e}_c &= g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d + g_1(e_c)e_d \\ \dot{e}_d &= u\end{aligned}\tag{3.32}$$

A aplicação da técnica *backstepping* consiste em determinar um $u = (u_1, u_2)^T$ que estabiliza o sistema (3.32). Para encontrar u , considere a seguinte função de Lyapunov candidata

$$V(e) = V_c(e_c) + \frac{1}{2}e_d^T e_d\tag{3.33}$$

com erro $e = (e_c^T, e_d^T)^T = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ e função $V_c(e_c)$ dada por

$$V_c(e_c) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{1}{k_2}(1 - \cos e_3)$$

A derivada de (3.33) ao longo do tempo é dada por

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V_c}{\partial e_c} \dot{e}_c + \frac{1}{2} \dot{e}_d^T e_d + \frac{1}{2} e_d^T \dot{e}_d$$

Substituindo a dinâmica do sistema (3.32) na equação acima, tem-se

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V_c}{\partial e_c} [g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d] + \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c)e_d + u^T e_d\tag{3.34}$$

onde

$$\frac{\partial V_c}{\partial e_c} [g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d] = -k_1 e_1^2 - \frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_2 k_3} \sin^2 e_3$$

Fazendo $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ para um μ suficientemente pequeno, tem-se

$$\frac{\partial V_c}{\partial e_c} [g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d] \leq -W(e_c)\tag{3.35}$$

com $W(e_c)$ dada por

$$W(e_c) = k_1 e_1^2 + \frac{k_2 k_3 \mu}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{\mu}{2k_2 k_3} \sin^2 e_3\tag{3.36}$$

Consequentemente, a partir de (3.34), tem-se

$$\dot{V}(t,e) \leq -W(e_c) + \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) e_d + u^T e_d$$

Então, escolhendo

$$u^T = -\frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) - \begin{pmatrix} k_4 & k_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 & 0 \\ 0 & e_5 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

chega-se a

$$\dot{V}(t,e) \leq -W(e_c) - k_4 e_4^2 - k_5 e_5^2 \quad (3.38)$$

Note que a entrada de controle auxiliar é dada por $\tau_a = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T$ onde

$$\begin{aligned} \tau_{a1} &= \dot{\omega}_{ld} + u_1 = \dot{\omega}_{ld} - \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) - k_4 e_4 \\ \tau_{a2} &= \dot{\omega}_{rd} + u_2 = \dot{\omega}_{rd} - \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_2(e_c) - k_5 e_5 \end{aligned} \quad (3.39)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) &= \frac{r}{2bk_2} [k_2(-2e_2 - b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] \\ \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_2(e_c) &= -\frac{r}{2bk_2} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] \end{aligned}$$

Note também que a utilização da entrada de controle auxiliar (3.39) requer o cálculo de $\dot{\omega}_{ld}$ e $\dot{\omega}_{rd}$. Essas derivadas, obtidas derivando-se (3.30), são dadas por

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_{ld} \\ \dot{\omega}_{rd} \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2 & -b \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{pmatrix}$$

onde $\dot{v}_c$ e $\dot{\omega}_c$, obtidas derivando-se (3.31), são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{v}_c &= \dot{v}_{\text{ref}} \cos e_3 - v_{\text{ref}} \dot{e}_3 \sin e_3 - k_3 \dot{e}_3 \omega_c - k_3 e_3 \dot{\omega}_c + k_1 \dot{e}_1 \\ \dot{\omega}_c &= \dot{\omega}_{\text{ref}} + \frac{\dot{v}_{\text{ref}}}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] + \frac{v_{\text{ref}}}{2} \left[k_2 (\dot{e}_2 + k_3 \dot{e}_3) + \frac{1}{k_3} \dot{e}_3 \cos e_3 \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

com $(\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3)^T$ dado por (3.27) e $(\dot{v}_{\text{ref}}, \dot{\omega}_{\text{ref}})^T$ dado pela derivada da entrada de referência

$$(v_{\text{ref}}, \omega_{\text{ref}})^T.$$

A estratégia de controle proposta anteriormente com base no modelo dinâmico (3.21) pode ser resumida no seguinte teorema.

Teorema 4. *Seja o modelo dinâmico (3.21) do robô não holonômico sem deslizamento das rodas. Seja a entrada de controle (3.22) com a entrada de controle auxiliar (3.39) junto com (3.30) e (3.31). Seja as entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ funções contínuas no tempo t e $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ para um μ suficientemente pequeno. Então, o erro $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ tende a zero quando o tempo t tende a infinito. Além disso, $q(t) \rightarrow q_{\text{ref}}(t)$ e $\xi \rightarrow \xi_d$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. O sistema em malha fechada, obtido a partir da dinâmica do erro de postura (3.32) com ξ_d dado por (3.30)-(3.31) e u dado por (3.37), é representado pelo seguinte sistema não autônomo

$$\dot{e} = f(t, e) \quad (3.41)$$

com $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por

$$\begin{pmatrix} -k_1 e_1 + \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \left(\omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \right) (e_2 + k_3 e_3) - \frac{r}{2b} [(2e_2 + b)e_4 + (-2e_2 + b)e_5] \\ -\omega_{\text{ref}}(t)e_1 - \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} e_1 (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 + \frac{r}{2b} 2e_1 (e_4 - e_5) \\ - \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 + \frac{r}{b} (e_4 - e_5) \\ - \frac{r}{2bk_2} [k_2(-2e_2 - b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] - k_4 e_4 \\ \frac{r}{2bk_2} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] - k_5 e_5 \end{pmatrix}$$

Aplicando o Teorema 2 pode-se demonstrar que $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ converge assintoticamente para zero quando t tende a infinito. Note que o sistema (3.41) possui pontos de equilíbrio em $e = (0, -nk_3\pi, n\pi, 0, 0)$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, a origem $e = 0$ não pode ser um ponto de equilíbrio globalmente uniformemente assintoticamente estável.

O Teorema 2 requer que a função $f(t, e)$ seja localmente Lipschitz em um domínio que contém a origem $e = 0$. Essa condição pode ser verificada utilizando-se o Lema 1. Conforme o Lema 1, a função $f(t, e)$ é localmente Lipschitz se $f(t, e)$ e $[\partial f / \partial e](t, e)$ são contínuas em $[t_i, t_f] \times D$, para algum domínio $D \subset \mathbb{R}^5$. Assumindo que $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ são funções contínuas em $[0, \infty]$, verifica-se facilmente, a partir de (3.41), que a função $f(t, e)$ é contínua em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^5$. Os termos da matriz jacobiana $[\partial f / \partial e](t, e)$, apresentada no Apêndice A.3, também são contínuos em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^5$. Portanto, aplicando o Lema 1, mostra-se que $f(t, e)$ é localmente Lipschitz

em e no domínio $[0, \infty] \times \mathbb{R}^5$.

Para prosseguir com a aplicação do Teorema 2 é necessário considerar o domínio $D = \{e \in \mathbb{R}^5 \mid -\pi < e_3 < \pi\}$ que contém a origem $e = 0$ e a função de Lyapunov candidata, $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, dada em (3.33):

$$V(e) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{1}{2}e_5^2$$

cuja derivada ao longo do tempo é dada por (3.36)-(3.38), ou seja

$$\dot{V}(t, e) \leq -\left[k_1e_1^2 + \frac{k_2k_3\mu}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{\mu}{2k_2k_3}\sin^2 e_3\right] - k_4e_4^2 - k_5e_5^2$$

com $v_{\text{ref}} \geq \mu > 0$.

Então, $V(t, e)$ satisfaz a condição (3.10) do Teorema 2 para todo $t \geq 0$ e $e \in D$, com funções positivas definidas $W_1(e)$ e $W_2(e)$ no domínio D dadas por:

$$\begin{aligned} W_1(e) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{1}{2}e_5^2 \\ W_2(e) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{1}{2}e_5^2 \end{aligned}$$

Além disso, $\dot{V}(t, e)$ satisfaz a condição (3.11) do Teorema 2 para todo $t \geq 0$ e $e \in D$, com função positiva definida $W_3(e)$ em D dada por:

$$W_3(e) = k_1e_1^2 + \frac{k_2k_3\mu}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{\mu}{2k_2k_3}\sin^2 e_3 + k_4e_4^2 + k_5e_5^2$$

Todas as condições do Teorema 2 são satisfeitas. Portanto, a origem $e = 0$ é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável. Consequentemente, $e_c = (e_1, e_2, e_3)^T \rightarrow 0$ e $e_d = (e_4, e_5)^T \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, $q(t) \rightarrow q_{\text{ref}}(t)$ e $\xi \rightarrow \xi_d$ quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

4 CONTROLE ADAPTATIVO DO ROBÔ COM DESLIZAMENTO

Este capítulo apresenta estratégias de controle para um robô móvel não holonômico com deslizamento longitudinal das rodas. Os deslizamentos são estimados por leis de adaptação obtidas a partir da análise de estabilidade da dinâmica do erro de postura definido pelo problema de rastreamento. A Seção 4.1 apresenta uma revisão de análise de sistemas não lineares não autônomos. A Seção 4.2 apresenta a obtenção da lei de controle adaptativa projetada com base no modelo cinemático do robô. A Seção 4.3 apresenta a lei de controle adaptativa projetada com base no modelo dinâmico do robô.

4.1 Preliminares

4.1.1 Análise de estabilidade avançada de sistemas não autônomos

Esta seção apresenta uma continuação da revisão, apresentada na Seção 3.1, sobre definições e teoremas utilizados na análise de sistemas não lineares não autônomos.

Considere novamente o sistema não autônomo (3.7), ou seja

$$\dot{e} = f(t, e) \tag{4.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^+ \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua por partes em t e localmente Lipschitz em e no domínio $\mathbb{R}^+ \times D$, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio que contém a origem $e = 0$.

Em geral, a estabilidade da origem $e = 0$ do sistema não autônomo (4.1) pode ser verificada utilizando os teoremas apresentados na Seção 3.1. Entretanto, as condições desses teoremas podem ser difíceis de serem obtidas para certos sistemas não autônomos. O próximo teorema fornece condições que garantem a convergência de algumas trajetórias e_i para um conjunto, embora, não necessariamente garanta estabilidade da origem $e = 0$ do sistema não autônomo (4.1).

Teorema 5. (Teorema 8.4 de Khalil (2001)) *Seja $e = 0$ um ponto de equilíbrio para (4.1) e $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio que contém $e = 0$. Além disso, suponha que $f(t, 0)$ é uniformemente limitada para todo $t \geq 0$. Seja $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que*

$$W_1(e) \leq V(t, e) \leq W_2(e) \quad (4.2)$$

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e} f(t, e) \leq -W(e) \quad (4.3)$$

$\forall t \geq 0, \forall e \in D$, onde $W_1(e)$ e $W_2(e)$ são funções contínuas positivas definidas e $W(e_a)$ é uma função contínua positiva semi-definida no domínio D . Escolha $d > 0$ tal que $B_d \subset D$ e seja $c < \min_{\|e_a\|=d} W_1(e)$. Então, todas as soluções de $\dot{e} = f(t, e)$ com $e(t_0) \in \{e \in B_r | W_2(e) \leq c\}$ são limitadas e satisfaz

$$W(e(t)) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \rightarrow \infty$$

Além disso, se todas as hipóteses são satisfeitas globalmente e $W_1(e)$ é radialmente ilimitada, a conclusão é verdadeira para todo $e(t_0) \in \mathbb{R}^n$

Além do Teorema 5, outras alternativas podem ser utilizadas para mostrar a convergência de algumas trajetórias e_i para um conjunto. Uma forma é aplicar o seguinte Lema de Barbalat.

Lema 3. (Lema de Barbalat apresentado em Li e Slotine (1991)) *Se a função diferenciável $e(t)$ tem um limite finito quanto $t \rightarrow \infty$, e se $\dot{e}(t)$ é uniformemente contínua, então $\dot{e}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.*

A estabilidade da origem $e = 0$ do sistema não autônomo (4.1) também pode ser verificada aplicando-se o próximo teorema.

Teorema 6. (Teorema 4.13 de Khalil (2001)) *Seja $e_a = 0$ um ponto de equilíbrio para o sistema não linear*

$$\dot{e}_a = f(t, e_a)$$

onde $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável, $D = \{e_a \in \mathbb{R}^n \mid \|e_a\|_2 < d\}$, e a matriz jacobiana $[\partial f / \partial e_a]$ é limitada e Lipschitz em D , uniformemente em t . Seja

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial e_a}(t, e_a) \right|_{e_a=0}$$

Então, a origem $e_a = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para o sistema não

linear se é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável para o sistema linear variante no tempo

$$\dot{e}_a = A(t)e_a \quad (4.4)$$

Teorema 7. (Teorema 1 de Rosenbrock (1963)) *Seja o sistema dinâmico linear variante no tempo*

$$\dot{e}_a = A(t)e_a$$

onde cada elemento $a_{ij}(t)$ de $A(t)$ é diferenciável e satisfaz $|a_{ij}| \leq \sigma$ para algum $\sigma > 0$ e cada autovalor λ de $A(t)$ satisfaz

$$\text{Re}[\lambda(A(t))] \leq -\epsilon < 0$$

Então, existe um $\delta > 0$ (independente de t) tal que se cada $|\dot{a}_{ij}| \leq \delta$, o ponto de equilíbrio $e_a = 0$ é uniformemente assintoticamente estável que, para sistemas lineares, de acordo com (KHALIL, 2001), é equivalente a estabilidade exponencial.

4.2 Projeto de controle adaptativo usando o modelo cinemático

Esta seção propõe uma estratégia de controle adaptativa baseada no modelo cinemático (2.16) do robô com deslizamento longitudinal das rodas. A estratégia consiste em utilizar uma lei de adaptação para estimar os parâmetros de deslizamento a_l e a_r de tal forma que a relação $\xi = \Phi^{-1}\eta$ dada em (2.18) possa ser utilizada com η dada pela lei de controle cinemática η_c fornecida em (3.17).

A lei de adaptação proposta é projetada a partir da análise de estabilidade do sistema que representa a dinâmica do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ que é definido, conforme o problema de rastreamento de trajetória, em (3.15). Conforme visto na Seção 3.2, a dinâmica do erro de postura

para o robô sem deslizamento é dada por (3.16), ou seja

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} \omega e_2 + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - v \\ -\omega e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) - \omega \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

A dinâmica do erro de postura para o robô com deslizamento longitudinal das rodas pode ser obtida a partir de (4.5) utilizando a relação (2.18), ou seja

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \frac{r}{2ba_la_r} \begin{pmatrix} ba_r & ba_l \\ -2a_r & 2a_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_l \\ \omega_r \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5), obtém-se a dinâmica do erro de postura para o robô com deslizamento longitudinal das rodas

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} \frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) e_2 + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - \frac{r}{2} \left(\frac{\omega_l}{a_l} + \frac{\omega_r}{a_r} \right) \\ -\frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) - \frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Considere a relação $\xi = \Phi^{-1}\eta$ dada em (2.18) com $\hat{a}_l(t) \in \mathbb{R}$ e $\hat{a}_r(t) \in \mathbb{R}$ como estimativas para os parâmetros de deslizamento a_l e a_r , respectivamente. Além disso, considere que $\eta = \eta_c = (v_c, \omega_c)^T$, onde η_c é uma entrada de controle auxiliar a ser projetada. Dessa forma, tem-se que a entrada de controle $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$ é dada por

$$\xi = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2\hat{a}_l & -b\hat{a}_l \\ 2\hat{a}_r & b\hat{a}_r \end{pmatrix} \eta_c \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.7), obtém-se

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} -\frac{\hat{a}_l}{a_l} \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hat{a}_r}{a_r} \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \\ \frac{\hat{a}_l}{a_l} \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} - \frac{\hat{a}_l}{ra_l} \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{\hat{a}_l}{a_l} \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{1}{b} - \frac{\hat{a}_l}{ra_l} \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Definindo as estimativas $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$ como

$$\hat{a}_l = a_l + \tilde{a}_l \quad (4.10)$$

$$\hat{a}_r = a_r + \tilde{a}_r$$

onde $\tilde{a}_l(t) \in \mathbb{R}$ e $\tilde{a}_r(t) \in \mathbb{R}$ são os erros de estimação dos parâmetros a_l e a_r , respectivamente. A equação (4.9) pode ser reescrita como

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \\ \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} - \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{ra_l}\right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{1}{b} - \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{ra_l}\right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Como os parâmetros a_l e a_r são constantes por hipótese, a dinâmica dos erros de estimação $\tilde{a}_l$ e $\tilde{a}_r$ são dadas respectivamente por

$$\dot{\tilde{a}}_l = \dot{\hat{a}}_l \quad \text{e} \quad \dot{\tilde{a}}_r = \dot{\hat{a}}_r \quad (4.12)$$

Lei de adaptação

A lei de adaptação é obtida considerando a dinâmica do erro aumentado, definido por $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T \in \mathbb{R}^5$, e a seguinte função de Lyapunov candidata

$$V(e_a) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r} \quad (4.13)$$

com ganhos $k_i > 0$ e $\gamma_i > 0$ constantes.

A derivada da função $V(e_a)$, em relação ao tempo, é dada por

$$\dot{V}(t, e_a) = e_1 \dot{e}_1 + (e_2 + k_3 e_3)(\dot{e}_2 + k_3 \dot{e}_3) + \frac{1}{k_2} \dot{e}_3 \sin e_3 + \frac{\tilde{a}_l}{\gamma_1 a_l} \dot{\tilde{a}}_l + \frac{\tilde{a}_r}{\gamma_2 a_r} \dot{\tilde{a}}_r \quad (4.14)$$

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.14) obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, e_a) = & e_1 \left[- \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \right] \\ & + (e_2 + k_3 e_3) \left\{ \left[\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} - \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} \right] \right. \\ & + k_3 \left[\omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \right] \left. \right\} \\ & + \frac{1}{k_2} \left[\omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \right] \sin e_3 \\ & + e_1 v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 + (e_2 + k_3 e_3) v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 + \frac{\tilde{a}_l}{\gamma_1 a_l} \dot{\tilde{a}}_l + \frac{\tilde{a}_r}{\gamma_2 a_r} \dot{\tilde{a}}_r \end{aligned}$$

Colocando os termos $\frac{\tilde{a}_l}{a_l}$ e $\frac{\tilde{a}_r}{a_r}$ em evidência e reorganizando, obtém-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, e_a) = & e_1 \left[- \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) + \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \right] \\
& + (e_2 + k_3 e_3) \left\{ \left[\left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} - \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \frac{e_1}{b} + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \right] \right. \\
& + k_3 \left[\omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b} \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) - \frac{1}{b} \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \right] \left. \right\} \\
& + \frac{1}{k_2} \left[\omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b} \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) - \frac{1}{b} \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \right] \sin e_3 \\
& + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \left\{ \frac{\dot{\hat{a}}_l}{\gamma_1} - \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) e_1 - (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) - \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right] \right\} \\
& + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \left\{ \frac{\dot{\hat{a}}_r}{\gamma_2} - \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[- \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) e_1 + (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) + \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right] \right\}
\end{aligned}$$

Simplificando, tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, e_a) = & -e_1 (v_c - \omega_c e_2 - v_{\text{ref}}(t) \cos e_3) \\
& + (e_2 + k_3 e_3) [-\omega_c e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 + k_3 (\omega_{\text{ref}}(t) - \omega_c)] + \frac{1}{k_2} (\omega_{\text{ref}}(t) - \omega_c) \sin e_3 \\
& + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \left\{ \frac{\dot{\hat{a}}_l}{\gamma_1} - \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) e_1 - (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) - \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right] \right\} \\
& + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \left\{ \frac{\dot{\hat{a}}_r}{\gamma_2} - \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[- \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) e_1 + (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) + \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right] \right\}
\end{aligned}$$

Escolhendo como lei de adaptação para $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$ as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{a}}_l = & \gamma_1 \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) e_1 - (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) - \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right] \\
\dot{\hat{a}}_r = & \gamma_2 \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[- \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) e_1 + (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) + \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, e_a) &= -e_1 (v_c - \omega_c e_2 - v_{\text{ref}}(t) \cos e_3) \\
&\quad + (e_2 + k_3 e_3) [-\omega_c e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 + k_3 (\omega_{\text{ref}}(t) - \omega_c)] \frac{1}{k_2} (\omega_{\text{ref}}(t) - \omega_c) \sin e_3 \\
&= -e_1 [v_c - \omega_c e_2 - v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 + (e_2 + k_3 e_3) \omega_c] \\
&\quad + (\omega_{\text{ref}}(t) - \omega_c) \left[k_3 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_2} \sin e_3 \right] + (e_2 + k_3 e_3) v_{\text{ref}}(t) \sin e_3
\end{aligned}$$

Fazendo $\eta_c = (v_c, \omega_c)^T$ igual a lei de controle cinemática (3.17), ou seja

$$\begin{aligned}
v_c &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - k_3 e_3 \omega_c + k_1 e_1 \\
\omega_c &= \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

obtem-se

$$\dot{V}(t, e_a) = -k_1 e_1^2 - \frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2 k_2 k_3} \sin^2 e_3 \tag{4.17}$$

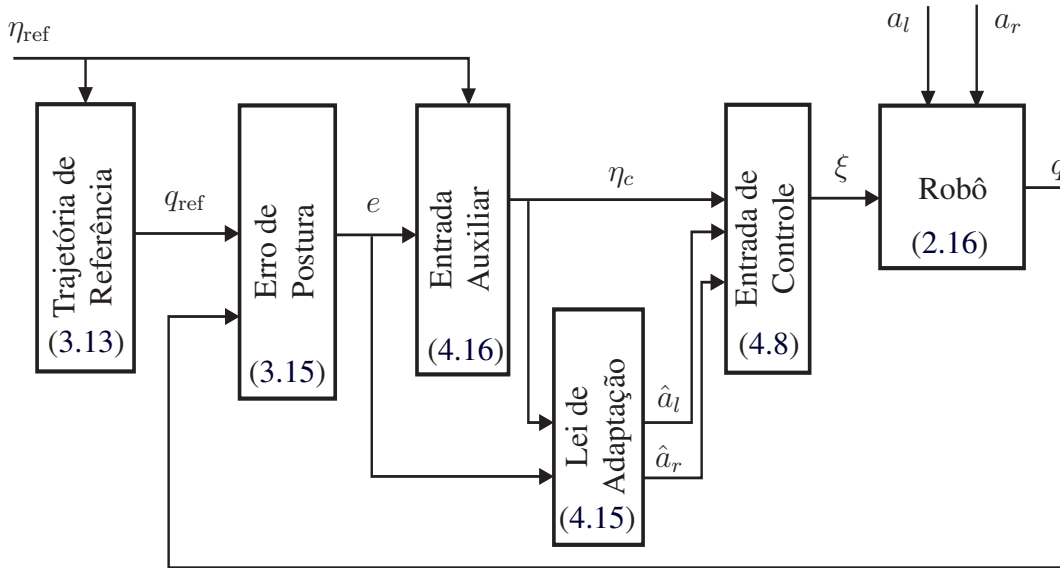


Figura 4.1 - Esquema do sistema de controle adaptativo baseado no modelo cinemático.

A Figura 4.1 mostra um esquema do sistema em malha fechada formado pelo robô e pelo controlador adaptativo proposto. A estabilidade desse sistema em malha fechada pode ser resumido no seguinte teorema:

Teorema 8. *Considere o problema de rastreamento representado pelo erro de postura, $e(t) = (e_1, e_2, e_3)^T$, definido em (3.15). Considere a trajetória de referência $q_{\text{ref}}(t)$ gerada pelo modelo cinemático (3.13) com entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$. Sejam as entradas de referência $\omega_{\text{ref}}(t)$ e $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ funções contínuas limitadas ao longo do tempo com μ suficientemente pequeno. Escolha a entrada de controle (4.8) com a entrada de controle auxiliar (4.16) e a lei de adaptação (4.15). Sejam os parâmetros de deslizamento a_l e a_r constantes ao longo do tempo. Então, o erro de postura $e(t)$ converge para zero quando o tempo t tende a infinito. Além disso, a trajetória do robô $q(t)$ converge assintoticamente para a trajetória de referência $q_{\text{ref}}(t)$ quando o tempo t tende a infinito.*

Demonstração. O sistema em malha fechada, obtido a partir de (4.11) e (4.12), que representa a dinâmica do erro aumentado $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T$ é dado pelo seguinte sistema não autônomo

$$\dot{e}_a = f(t, e_a) \quad (4.18)$$

onde $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ é dada por

$$f(t, e_a) = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \\ \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right)\frac{e_1}{b} - \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right)\frac{e_1}{b} + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) - \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) \\ \gamma_1\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right)\left(\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right)e_1 - (e_2 + k_3 e_3)\frac{e_1}{b} - \frac{k_3}{b}(e_2 + k_3 e_3) - \frac{1}{bk_2} \sin e_3\right) \\ \gamma_2\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right)\left(-\left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right)e_1 + (e_2 + k_3 e_3)\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b}(e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{bk_2} \sin e_3\right) \end{pmatrix}$$

com v_c e ω_c dadas por

$$\begin{aligned} v_c &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - k_3 e_3 \omega_c + k_1 e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] \end{aligned}$$

com ganhos $k_i > 0$ constantes, parâmetros de deslizamentos a_l e a_r constantes, e entradas de referência $\omega_{\text{ref}}(t)$ e $v_{\text{ref}}(t)$ variantes no tempo.

Aplicando o Teorema 5, pode-se demonstrar que $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ converge assintoticamente para zero quando t tende a infinito. Note que existem outros pontos de equilíbrio dados por $e_a = (0, -lk_3\pi, l\pi, 0, 0)$ com $l \in \mathbb{Z}$. Portanto, a origem $e_a = 0$ não pode ser um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

O Teorema 5 requer que a função $f(t, e_a)$ seja localmente Lipschitz em um domínio que contém a origem $e_a = 0$. Essa condição pode ser verificada utilizando-se o Lema 1. Conforme o Lema 1, a função $f(t, e_a)$ é localmente Lipschitz se $f(t, e_a)$ e $[\partial f / \partial e_a](t, e_a)$ são contínuas em $[t_i, t_f] \times D$, para algum domínio $D \subset \mathbb{R}^5$. Assumindo que $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ são funções contínuas em $[0, \infty]$, verifica-se facilmente, a partir de (4.18), que a função $f(t, e_a)$ é contínua em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^5$. Também pode-se verificar que todos os termos da matriz jacobiana $[\partial f / \partial e](t, e)$ são contínuos em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^5$. Portanto, aplicando o Lema 1, mostra-se que $f(t, e_a)$ é localmente Lipschitz em e_a no domínio $[0, \infty] \times \mathbb{R}^5$.

O Teorema 5 também requer que $f(t, 0)$ seja uniformemente limitada para todo $t \geq 0$. Essa condição é satisfeita assumindo que as funções $\omega_{\text{ref}}(t)$ e $v_{\text{ref}}(t)$ são limitadas em $[0, \infty]$.

Para prosseguir com a aplicação do Teorema 5, considere a função de Lyapunov candidata proposta em (4.13), definida no domínio $D = \{e_a \in \mathbb{R}^5 \mid -\pi < e_3 < \pi\}$, dada por

$$V(e_a) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r}$$

cuja derivada ao longo do tempo é dada em (4.17), ou seja

$$\dot{V}(t, e_a) = -k_1e_1^2 - \frac{k_2k_3v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_2k_3}\sin^2 e_3$$

Dessa forma, $V(e_a)$ satisfaz a condição (4.2) do Teorema 5 para $\forall t \geq 0$ e $\forall e_a \in D$, com funções positivas definidas $W_1(e_a)$ e $W_2(e_a)$ no domínio D dadas por:

$$\begin{aligned} W_1(e_a) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r} \\ W_2(e_a) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r} \end{aligned}$$

Além disso, fazendo $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ para um $\mu \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, $\dot{V}(t, e_a)$ satisfaz a condição (4.3) do Teorema 5 para $\forall t \geq 0$ e $\forall e_a \in D$, com função positiva semi definida $W(e_a)$ no

domínio D dada por:

$$W(e_a) = k_1 e_1^2 + \frac{k_2 k_3 \mu}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{\mu}{2 k_2 k_3} \sin^2 e_3 \quad (4.19)$$

Então, pode-se concluir pelo Teorema 5 que existe um $\gamma > 0$ tal que todas as soluções de (4.18) com $e_a(t_0) \in \{e_a \in B_d \mid W_2(e_a) \leq \gamma\}$ são limitadas e satisfaz

$$W(e_a(t)) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

Isso implica que $e(t) = (e_1, e_2, e_3)^T \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, da definição do erro de postura (3.15) vê-se que a trajetória do robô $q(t)$ converge assintoticamente para a trajetória de referência $q_{\text{ref}}(t)$ quando o tempo t tende ao infinito. $\square$

O Apêndice A.4 apresenta uma demonstração do Teorema 8 para o caso particular em que as entradas de referência v_{ref} e ω_{ref} são constantes.

O Teorema 8 mostra que $e = (e_1, e_2, e_3)^T \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Entretanto, o teorema não diz nada a respeito da convergência dos erros de estimação $\tilde{a}_l$ e $\tilde{a}_r$. As condições em que os erros de estimação $\tilde{a}_l$ e $\tilde{a}_r$ convergem para zero quando $t \rightarrow \infty$ são apresentadas no próximo teorema.

Teorema 9. *Suponha que as hipóteses do Teorema 8 sejam satisfeitas com a hipótese adicional que as funções $\dot{v}_{\text{ref}}(t)$ e $\dot{\omega}_{\text{ref}}(t)$ são limitadas. Seja $l_v > 0$ tal que $l_v \neq \pm b l_\omega / 2$. Suponha $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{\text{ref}}(t) = l_v$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\text{ref}}(t) = l_\omega$. Suponha também que os erros de estimação $\tilde{a}_l$ e $\tilde{a}_r$ convergem, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_l = l_l$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_r = l_r$. Então, $\tilde{a}_l \rightarrow 0$ e $\tilde{a}_r \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.*

Demonstração. Considere as funções $\dot{e}_1$ e $\dot{e}_3$ dadas em (4.11), ou seja

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 = & - \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c\right) \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{\hat{a}_r}{a_r}\right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c\right) \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right) \\ & + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\dot{e}_3 = \omega_{\text{ref}}(t) + \left(1 + \frac{\hat{a}_l}{a_l}\right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c\right) \frac{1}{b} - \left(1 + \frac{\hat{a}_r}{a_r}\right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c\right) \frac{1}{b} \quad (4.21)$$

Analisando essas igualdades pode-se demonstrar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_l = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_r = 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Duas etapas são consideradas nessa análise. Na primeira etapa, aplicando o Lema 3 (Lema de Barbalat) mostra-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_1 = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_3 = 0$. Na segunda etapa, tomando o limite,

quando $t \rightarrow \infty$, das igualdades (4.20) e (4.21) mostra-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_l = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_r = 0$.

Considere que todas as hipóteses do Teorema 8 são satisfeitas. Então, existe um $\gamma > 0$ tal que toda solução de (4.18) com $e_a(t_0) \in \{e_a \in B_d \mid W_2(e_a) \leq \gamma\}$ são limitadas. Esta conclusão satisfaz a primeira condição do Lema 3, ou seja, $e_1(t)$ e $e_3(t)$ são limitas. A segunda condição do Lema 3 requer que $\dot{e}_1(t)$ e $\dot{e}_3(t)$ sejam uniformemente contínua. As funções $\dot{e}_1(t)$ e $\dot{e}_3(t)$ são uniformemente contínua se suas derivadas $\ddot{e}_1(t)$ e $\ddot{e}_3(t)$ são limitadas. As derivadas $\ddot{e}_1(t)$ e $\ddot{e}_3(t)$ são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 = & - \left(1 + \frac{\dot{\tilde{a}}_l}{a_l}\right) \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right) \left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) - \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right) \left(\frac{\dot{e}_2}{b}\right) \left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) \\ & - \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right) \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right) \left(\dot{v}_c - \frac{b}{2}\dot{\omega}_c\right) + \left(1 + \frac{\dot{\tilde{a}}_r}{a_r}\right) \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right) \left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) \\ & + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right) \left(\frac{\dot{e}_2}{b}\right) \left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right) \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right) \left(\dot{v}_c + \frac{b}{2}\dot{\omega}_c\right) \\ & + \dot{v}_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - v_{\text{ref}}(t) \dot{e}_3 \sin e_3 \\ \ddot{e}_3 = & \dot{\omega}_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\dot{\tilde{a}}_l}{a_l}\right) \left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right) \left(\dot{v}_c - \frac{b}{2}\dot{\omega}_c\right) \\ & - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\dot{\tilde{a}}_r}{a_r}\right) \left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right) \left(\dot{v}_c + \frac{b}{2}\dot{\omega}_c\right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Essas equações serão limitadas se todos os seus termos são limitados. Sabe-se que $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$, por hipótese, são limitadas. Além disso, verificando (4.16) vê-se que v_c e ω_c são limitadas. Consequentemente, pode-se concluir de (4.18) que $\dot{e}_1$, $\dot{e}_2$, $\dot{e}_3$, $\dot{\tilde{a}}_l$ e $\dot{\tilde{a}}_r$ são limitadas. Assumindo que $\dot{v}_{\text{ref}}(t)$ e $\dot{\omega}_{\text{ref}}(t)$ são limitadas e considerando a derivada temporal de (4.16),

$$\begin{aligned} \dot{v}_c = & -\frac{\dot{v}_{\text{ref}}(t)}{2} e_3 \sin e_3 + \frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}(t)}{2} e_3 \dot{e}_2 + \dot{v}_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - \frac{k_2 k_3 \dot{v}_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3) e_3 - k_3 \dot{v}_{\text{ref}}(t) e_3 \\ & + k_1 e_1 - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \dot{e}_3 [k_2 k_3 (e_2 + 2e_3 k_3) + 2k_3 \omega_{\text{ref}}(t) + v_{\text{ref}}(t) e_3 \cos e_3 + 3v_{\text{ref}}(t) \sin e_3] \\ \dot{\omega}_c = & \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \dot{e}_3 \cos e_3 + \frac{k_2}{2} [v_{\text{ref}}(t) \dot{e}_2 + k_3 v_{\text{ref}}(t) \dot{e}_3 + \dot{v}_{\text{ref}}(t) (e_2 + k_3 e_3)] + \dot{\omega}_{\text{ref}}(t) + \frac{\dot{v}_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \end{aligned}$$

observa-se que $\dot{v}_c$ e $\dot{\omega}_c$ são limitadas. Dessa forma, todos os termos de $\ddot{e}_1$ e $\ddot{e}_3$ são limitados. Então, as funções $\ddot{e}_1$ e $\ddot{e}_3$ são limitas. Consequentemente, as funções $\dot{e}_1$ e $\dot{e}_3$ são uniformemente contínuas em t . Finalmente, aplicando o Lema 3, tem-se que $\dot{e}_1 \rightarrow 0$ e $\dot{e}_3 \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Tomando o limite, quando $t \rightarrow \infty$, das equações (4.20) e (4.21), isto é possível pois esses

limites existem, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[- \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \right] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_3 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \right]\end{aligned}$$

Assumindo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_l(t) = l_l$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_r(t) = l_r$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{\text{ref}}(t) = l_v$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\text{ref}}(t) = l_\omega$, então

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_1 &= - \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_3 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) - \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right)\end{aligned}$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_1 = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}_3 = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0$ e por hipótese, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_l(t) = l_l$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_r(t) = l_r$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{\text{ref}}(t) = l_v$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\text{ref}}(t) = l_\omega$, tem-se

$$\begin{aligned}0 &= - \left(1 + \frac{l_l}{a_l} \right) \frac{1}{2} \left(l_v - \frac{b}{2} l_\omega \right) - \left(1 + \frac{l_r}{a_r} \right) \frac{1}{2} \left(l_v + \frac{b}{2} l_\omega \right) + l_v \\ 0 &= l_\omega + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{l_l}{a_l} \right) \left(l_v - \frac{b}{2} l_\omega \right) - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{l_r}{a_r} \right) \left(l_v + \frac{b}{2} l_\omega \right)\end{aligned}$$

Essas equações podem ser reorganizadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{l_l}{a_l} + \frac{l_r}{a_r} \right) l_v + \frac{b}{4} \left(\frac{l_l}{a_l} - \frac{l_r}{a_r} \right) l_\omega \\ 0 &= \frac{1}{b} \left(\frac{l_l}{a_l} - \frac{l_r}{a_r} \right) l_v - \frac{1}{2} \left(\frac{l_l}{a_l} + \frac{l_r}{a_r} \right) l_\omega\end{aligned}$$

que pode ser reescrito na forma matricial $\Gamma z = 0$ com

$$\Gamma = \frac{1}{4b} \begin{pmatrix} -2bl_v & b^2l_\omega \\ -2bl_\omega & 4l_v \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_l a_r} \begin{pmatrix} l_l a_r + l_r a_l \\ l_l a_r - l_r a_l \end{pmatrix}$$

Se a matriz Γ é não singular (isto ocorre para $l_v \neq \pm bl_\omega/2$), a solução de $\Gamma z = 0$ é dada por

$$\begin{aligned} 0 = z_1 &= \frac{l_l}{a_l} + \frac{l_r}{a_r} \\ 0 = z_2 &= \frac{l_l}{a_l} - \frac{l_r}{a_r} \end{aligned}$$

então, nesse caso $l_l = 0$ e $l_r = 0$. Consequentemente, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_l(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_r(t) = 0$, ou seja, $\tilde{a}_l(t) \rightarrow 0$ e $\tilde{a}_r(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Portanto, a origem $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T = 0$ do sistema (4.18) é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. $\square$

Embora a convergência assintótica da origem $e_a = 0$ do sistema (4.18) seja assegurada pelo Teorema 9, este resultado é obtido sob hipóteses conservadoras como a existência dos limites $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{\text{ref}}(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{\text{ref}}(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_l(t)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{a}_r(t)$.

Uma alternativa menos conservadora para analisar a convergência da origem $e_a = 0$ do sistema (4.18) é aplicar o Teorema 6. Para aplicar o Teorema 6, considere a dinâmica do erro aumentado (4.18). Assumindo que $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$, e suas derivadas $\dot{v}_{\text{ref}}(t)$ e $\dot{\omega}_{\text{ref}}(t)$ são funções contínuas limitadas, verifica-se que $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ é continuamente diferenciável e $[\partial f / \partial e_a](t, e_a)$ é limitada e Lipschitz em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^5$, uniformemente em t .

Para prosseguir com o Teorema 6 é necessário mostra que a origem $e_a = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável de (4.4). A matriz $A(t)$, obtida da linearização de (4.18) em torno da origem $e_a = 0$, é dada por

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

com

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{pmatrix} -k_1 & \omega_{\text{ref}}(t) & k_3\omega_{\text{ref}}(t) \\ -\omega_{\text{ref}}(t) & 0 & v_{\text{ref}}(t) \\ 0 & -(k_2/2)v_{\text{ref}}(t) & -(k_4/2k_3)v_{\text{ref}}(t) \end{pmatrix} \\
A_{12} &= \frac{1}{4ba_la_r} \begin{pmatrix} ba_rv_2(t) & -ba_lv_1(t) \\ 0 & 0 \\ -2a_rv_2(t) & -2a_lv_1(t) \end{pmatrix} \\
A_{21} &= \frac{1}{4bk_2} \begin{pmatrix} -bk_2\gamma_1v_2(t) & 2k_2k_3\gamma_1v_2(t) & 2\gamma_1k_4v_2(t) \\ bk_2\gamma_2v_1(t) & 2k_2k_3\gamma_2v_1(t) & 2\gamma_2k_4v_1(t) \end{pmatrix} \\
A_{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

onde $v_1(t) = 2v_{\text{ref}}(t) + b\omega_{\text{ref}}(t)$, $v_2(t) = -2v_{\text{ref}}(t) + b\omega_{\text{ref}}(t)$ e $k_4 = 1 + k_2k_3^2$.

Para mostrar que a origem $e_a = 0$ do sistema linear variante no tempo (4.4) é exponencialmente estável, aplica-se o Teorema 7. Como, por hipótese, $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$, e suas derivadas $\dot{v}_{\text{ref}}(t)$ and $\dot{\omega}_{\text{ref}}(t)$ são funções contínuas e limitadas, pode-se verificar que cada elemento $a_{ij}(t)$ de (4.23) é diferenciável e satisfaz $|a_{ij}| \leq \sigma$ para alguma constante finita $\sigma > 0$. Da mesma forma, os termos $\dot{a}_{ij}$ são zeros ou dependem dos parâmetros $\dot{v}_{\text{ref}}(t)$ e $\dot{\omega}_{\text{ref}}(t)$ que podem ser escolhidos suficientemente pequenos. Então, pode ser verificado que $|\dot{a}_{ij}| \leq \delta$ par algum suficientemente pequeno $\delta > 0$.

Prosseguindo com o Teorema 7 é preciso mostrar que $\text{Re}[\lambda(A(t))] \leq -\epsilon < 0$. Para isso, considere o polinômio característico da matriz $A(t)$, que é dado por

$$p(s) = s^5 + \alpha_1s^4 + \alpha_2s^3 + \alpha_3s^2 + \alpha_4s + \alpha_5 \quad (4.24)$$

cujo coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= k_1 + \frac{k_4}{2k_3}v_{\text{ref}} \\
\alpha_2 &= \frac{1}{16a_l a_r b^2 k_2 k_3} \left\{ a_l [\gamma_2 k_3 (b^2 k_2 + 4k_4) v_1^2 + 8a_r b^2 k_2 (v_{\text{ref}}(k_1 k_4 + k_2 k_3 v_{\text{ref}}) + 2k_3 \omega_{\text{ref}}^2)] \right. \\
&\quad \left. + a_r \gamma_1 k_3 (b^2 k_2 + 4k_4) v_2^2 \right\} \\
\alpha_3 &= \frac{1}{32a_l a_r b^2 k_2 k_3} \left\{ a_r [16a_l b^2 k_2 v_{\text{ref}}(k_1 k_2 k_3 v_{\text{ref}} + \omega_{\text{ref}}^2) + \gamma_1 v_2^2 (k_2 v_{\text{ref}}(k_3^2 (b^2 k_2 + 8) + b^2) \right. \\
&\quad \left. + 8k_1 k_3 k_4)] + a_l \gamma_2 v_1^2 [k_2 v_{\text{ref}}(k_3^2 (b^2 k_2 + 8) + b^2) + 8k_1 k_3 k_4] \right\} \quad (4.25) \\
\alpha_4 &= \frac{1}{32a_l a_r b^2 k_2} \left\{ \gamma_2 v_1^2 [a_l ((bk_2 v_{\text{ref}} + 2\omega_{\text{ref}})^2 + 4\omega_{\text{ref}}^2 + 8k_1 k_2 k_3 v_{\text{ref}}) + 2\gamma_1 k_4 v_2^2] \right. \\
&\quad \left. + a_r \gamma_1 (b\omega_{\text{ref}} - 2v_{\text{ref}})^2 (bk_2 v_{\text{ref}} - 2\omega_{\text{ref}})^2 + 4\omega_{\text{ref}}^2 + 8k_1 k_2 k_3 v_{\text{ref}} \right\} \\
\alpha_5 &= \frac{1}{16a_l a_r b^2} \gamma_1 \gamma_2 k_3 v_{\text{ref}} v_1^2 v_2^2
\end{aligned}$$

Para mostrar que $\text{Re}[\lambda(A(t))] \leq -\epsilon < 0$, aplica-se o critério de estabilidade de Liénard e Chipart (GANTMACHER, 1960) apresentado no Apêndice A. O critério de estabilidade de Liénard e Chipart estabelece que as condições necessárias e suficiente para que todas as raízes do polinômio real (4.24) tenham parte real negativa são dadas por:

- i) $0 < \alpha_i$, para $i = 1, \dots, 5$;
- ii) $0 < c_2 := \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3$;
- iii) $0 < c_3 := \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - \alpha_3^2 \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_5 - \alpha_1^2 \alpha_4^2 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 + 2\alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 - \alpha_5^2$.

Utilizando (4.25), verifica-se que $\alpha_i > 0$, para $i = 1, \dots, 5$ sempre que $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$. Portanto, a condição (i) é satisfeita. Para verificar a condição (ii) é necessário considerar c_2 , que é dada por

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{1}{16a_l a_r b^2 k_2 k_3^2} \left\{ a_l [4a_r b^2 k_2 (k_1 (k_4^2 v_{\text{ref}}^2 + 4k_3^2 \omega_{\text{ref}}^2) + 2k_1^2 k_3 k_4 v_{\text{ref}} + k_2 k_3 v_{\text{ref}} (k_4 v_{\text{ref}}^2 + 2k_3^2 \omega_{\text{ref}}^2)) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_2 k_3 v_1^2 (b^2 k_1 k_2 k_3 + 2(k_2^2 k_3^4 v_{\text{ref}} + v_{\text{ref}}))] + a_r \gamma_1 k_3 v_2^2 (b^2 k_1 k_2 k_3 + 2(k_2^2 k_3^4 v_{\text{ref}} + v_{\text{ref}})) \right\}
\end{aligned}$$

Claramente, $c_2 > 0$. Portanto, a condição (ii) também é satisfeita. Para verificar a condição (iii) é

necessário considerar c_3 , que é dada por

$$c_3 = -\frac{p_5^2 p_6^2}{1024 a_l^2 a_r^2 b^4 k_2^2} - \frac{p_6 p_7^2}{32768 a_l^3 a_r^3 b^6 k_2^3 k_3^2} + \frac{p_5 p_6 p_7 p_9}{16384 a_l^3 a_r^3 b^6 k_2^3 k_3^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2 k_3 p_5 p_6 v_1^2 v_2^2 v_{\text{ref}}}{256 a_l^2 a_r^2 b^4 k_2} \\ + \frac{\gamma_1 \gamma_2 p_7 p_9 v_1^2 v_2^2 v_{\text{ref}}}{8192 a_l^3 a_r^3 b^6 k_2^2 k_3} - \frac{\gamma_1 \gamma_2 p_5 p_9^2 v_1^2 v_2^2 v_{\text{ref}}}{4096 a_l^3 a_r^3 b^6 k_2^2 k_3} - \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 k_3^2 v_1^4 v_2^4 v_{\text{ref}}^2}{256 a_l^2 a_r^2 b^4}$$

with

$$p_1 = (b k_2 v_{\text{ref}} + 2 \omega_{\text{ref}})^2 + 8 k_1 k_2 k_3 v_{\text{ref}} + 4 \omega_{\text{ref}}^2 \\ p_2 = (b k_2 v_{\text{ref}} - 2 \omega_{\text{ref}})^2 + 8 k_1 k_2 k_3 v_{\text{ref}} + 4 \omega_{\text{ref}}^2 \\ p_3 = 8 k_1 (k_3 + k_2 k_3^3) + k_2 (b^2 + (8 + b^2 k_2) k_3^2) v_{\text{ref}} \\ p_4 = \gamma_2 k_3 (b^2 k_2 + 4 k_4) v_1^2 + 8 a_r b^2 k_2 (v_{\text{ref}} (k_1 k_4 + k_2 k_3 v_{\text{ref}}) + 2 k_3 \omega_{\text{ref}}^2) \\ p_5 = k_1 + (k_4 v_{\text{ref}}) / (2 k_3) \\ p_6 = a_r \gamma_1 p_2 v_2^2 + \gamma_2 v_1^2 (a_l p_1 + 2 \gamma_1 k_4 v_2^2) \\ p_7 = a_l \gamma_2 p_3 v_1^2 + a_r (\gamma_1 p_3 v_2^2 + 16 a_l b^2 k_2 v_{\text{ref}} (k_1 k_2 k_3 v_{\text{ref}} + \omega_{\text{ref}}^2)) \\ p_8 = \gamma_2 k_3 (b^2 k_2 + 4 k_4) v_1^2 + 8 a_r b^2 k_2 (v_{\text{ref}} (k_1 k_4 + k_2 k_3 v_{\text{ref}}) + 2 k_3 \omega_{\text{ref}}^2) \\ p_9 = a_l p_8 + a_r \gamma_1 k_3 (b^2 k_2 + 4 k_4) v_2^2$$

Devido a sua complexidade, a positividade de c_3 é determinada a partir do seguinte problema de otimização

$$\min_{(b, k_i, \gamma_i, a_l, a_r, v_{\text{ref}}, \omega_{\text{ref}})} c_3$$

sujeito as restrições

$$b > 0, k_i > 0, \gamma_i > 0, a_l > 1, a_r > 1, v_{\text{ref}} > 0$$

Esse problema de otimização é resolvido utilizando-se o comando `Nminimize[]` do software Mathematica. O valor ótimo da função custo obtido é sempre um número não negativo próximo de zero. Portanto, conclui-se que c_3 é não negativo. Além disso, observando que $\det[A(t)]$ não é zero para $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$, pode-se concluir que c_3 de fato é estritamente positivo.

Todas as condições do critério de estabilidade de Liénard e Chipart são satisfeitas. Consequentemente, todos os autovalores de $A(t)$ tem parte real negativa. Então, a origem $e_a = 0$ do sistema linear variante no tempo (4.4) é exponencialmente estável. Portanto, a partir do Teorema 6

conclui-se que a origem do sistema não linear (4.18) é exponencialmente estável. Isso implica que a trajetória do robô converge assintoticamente para a trajetória de referência e os parâmetros de deslizamento estimados convergem assintoticamente para os parâmetros de deslizamento reais.

4.3 Projeto de controle adaptativo usando o modelo dinâmico

Esta seção propõe uma estratégia de controle adaptativa baseada no modelo dinâmico (2.25) do robô com deslizamento longitudinal das rodas. A estratégia de controle adaptativa consiste em reescrever o modelo dinâmico (2.25) do robô com deslizamento longitudinal na forma padrão de aplicação da técnica *backstepping*. Os parâmetros de deslizamento desconhecidos são estimados a partir de uma lei de adaptação obtida da análise de estabilidade do sistema dado pela dinâmica do erro de postura definido conforme o problema de rastreamento de trajetórias.

Considere o modelo dinâmico (2.25) do robô com deslizamento longitudinal, ou seja

$$\dot{q} = S_a(q)\xi \quad (4.26)$$

$$\dot{\xi} = M_a^{-1}B_a\tau \quad (4.27)$$

Assumindo que os parâmetros de deslizamento podem ser medidos, esse modelo dinâmico pode ser reduzido a um sistema adequado à aplicação da técnica *backstepping* (KHALIL, 2001) utilizando-se a seguinte entrada de controle

$$\tau = B_a^{-1}M_a\tau_a \quad (4.28)$$

Embora a ideia do projeto de controle adaptativo seja mostrar a estabilidade do sistema em malha fechada com deslizamentos desconhecidos, assume-se, inicialmente, que os deslizamentos em (4.28) são conhecidos. Embora conservadora, essa hipótese permite garantir a convergência do erro de postura para zero. Simulações numéricas do sistema em malha fechada são realizadas com a lei de controle (4.28) utilizando-se os parâmetros de deslizamento estimados $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$ obtidos a partir de uma lei de adaptação a ser projetada.

Utilizando a entrada de controle (4.28), o modelo dinâmico reduz-se a

$$\dot{q} = S_a(q)\xi \quad (4.29)$$

$$\dot{\xi} = \tau_a \quad (4.30)$$

onde $\tau_a(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ é uma entrada de controle auxiliar a ser determinada de acordo com o problema de controle.

Considere o problema de rastreamento de trajetória definido na Seção 4.3 através da dinâmica do erro de postura $e_c = (e_1, e_2, e_3)^T$ dada em (4.5), ou seja

$$\dot{e}_c = \begin{pmatrix} \frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) e_2 + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - \frac{r}{2} \left(\frac{\omega_l}{a_l} + \frac{\omega_r}{a_r} \right) \\ -\frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) - \frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Essa dinâmica é utilizada como base do projeto da entrada de controle auxiliar $\tau_a = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T$. Para isso considere o sistema (4.29)-(4.30) reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_c &= g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi \\ \dot{\xi} &= \tau_a \end{aligned} \quad (4.32)$$

com funções $g_0(e_c) \in \mathbb{R}^3$ e $g_1(e_c) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ dadas respectivamente por

$$g_0(e_c) = \begin{pmatrix} v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \\ v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) \end{pmatrix}, \quad g_1(e_c) = \frac{r}{2ba_la_r} \begin{pmatrix} a_r(-2e_2 + b) & a_l(2e_2 - b) \\ 2a_re_1 & -2a_le_1 \\ 2a_r & -2a_l \end{pmatrix}$$

Para determinar a entrada de controle τ_a , conforme o problema de rastreamento de trajetória, considere o sistema (4.32) reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{e}_c &= g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi + g_1(e_c)\xi_d - g_1(e_c)\xi_d \\ \dot{\xi} &= \tau_a \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde $\xi_d = (\omega_{ld}, \omega_{rd})^T$ é uma velocidade a ser determinada de forma a estabilizar a origem do sistema $\dot{e}_c = g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d$. Uma velocidade ξ_d que estabiliza esse sistema é dada por

$$\begin{pmatrix} \omega_{ld} \\ \omega_{rd} \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2\hat{a}_l & -b\hat{a}_l \\ 2\hat{a}_r & b\hat{a}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

com velocidades v_c e ω_c dadas pelo projeto do controlador cinemático nominal, ou seja

$$\begin{aligned} v_c &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - k_3 e_3 \omega_c + k_1 e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

Note que (4.34) depende dos parâmetros estimados $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$. Esses parâmetros são estimados pela mesma lei de adaptação (4.15) obtida no projeto do controlador cinemático adaptativo, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_l &= \gamma_1 \left(v_c - \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2} \right) e_1 - (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) - \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right] \\ \dot{\hat{a}}_r &= \gamma_2 \left(v_c + \frac{b}{2} \omega_c \right) \left[- \left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2} \right) e_1 + (e_2 + k_3 e_3) \left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b} \right) + \frac{1}{bk_2} \sin e_3 \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Considere que os erros de estimação $\tilde{a}_l$ e $\tilde{a}_r$ dos parâmetros de deslizamento a_l e a_r , respectivamente, são definidos por

$$\tilde{a}_l = \hat{a}_l - a_l \quad \text{e} \quad \tilde{a}_r = \hat{a}_r - a_r$$

Então, a dinâmica dos erros de estimação são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_l &= \dot{\hat{a}}_l \\ \dot{\tilde{a}}_r &= \dot{\hat{a}}_r \end{aligned} \quad (4.37)$$

com $\dot{\hat{a}}_l$ e $\dot{\hat{a}}_r$ dadas em (4.36).

Considere o erro $e_d = (e_4, e_5)^T \in \mathbb{R}^2$ dado por $e_d = \xi - \xi_d$. Então,

$$\dot{e}_d = \dot{\xi} - \dot{\xi}_d$$

Definindo $u = \tau_a - \dot{\xi}_d$ onde $u = (u_1, u_2)^T \in \mathbb{R}^2$, o sistema (4.33) pode ser reescrito na forma

padrão de aplicação da técnica *backstepping* (KHALIL, 2001), ou seja

$$\begin{aligned}\dot{e}_c &= g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d + g_1(e_c)e_d \\ \dot{e}_d &= u\end{aligned}\tag{4.38}$$

A aplicação da técnica *backstepping* consiste em determinar um $u = (u_1, u_2)^T$ que estabiliza o sistema (4.38). Para encontrar u , considere a seguinte função de Lyapunov candidata

$$V(e_a) = V_c(e_c) + \frac{1}{2}e_d^T e_d\tag{4.39}$$

com erro $e_a = (e_c^T, e_d^T, \hat{a}_l, \hat{a}_r)^T = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \hat{a}_l, \hat{a}_r)^T$ e função $V_c(e_c)$ dada por

$$V_c(e_c) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{1}{k_2}(1 - \cos e_3) + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r}$$

A derivada de (4.39) ao longo do tempo é dada por

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V_c}{\partial e_c} \dot{e}_c + \frac{\tilde{a}_l}{\gamma_1 a_l} \dot{\hat{a}}_l + \frac{\tilde{a}_r}{\gamma_2 a_r} \dot{\hat{a}}_r + \frac{1}{2} \dot{e}_d^T e_d + \frac{1}{2} e_d^T \dot{e}_d$$

Substituindo a dinâmica do erro, dada por (4.37) e (4.38), na equação acima, tem-se

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V_c}{\partial e_c} [g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d] + \frac{\tilde{a}_l}{\gamma_1 a_l} \dot{\hat{a}}_l + \frac{\tilde{a}_r}{\gamma_2 a_r} \dot{\hat{a}}_r + \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) e_d + u^T e_d\tag{4.40}$$

Utilizando (4.34)-(4.36), sabe-se da Seção 4.2 que

$$\frac{\partial V_c}{\partial e_c} [g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d] + \frac{\tilde{a}_l}{\gamma_1 a_l} \dot{\hat{a}}_l + \frac{\tilde{a}_r}{\gamma_2 a_r} \dot{\hat{a}}_r = -k_1 e_1^2 - \frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_2 k_3} \sin^2 e_3$$

Fazendo $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ para um μ suficientemente pequeno, tem-se

$$\frac{\partial V_c}{\partial e_c} [g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d] + \frac{\tilde{a}_l}{\gamma_1 a_l} \dot{\hat{a}}_l + \frac{\tilde{a}_r}{\gamma_2 a_r} \dot{\hat{a}}_r \leq -W(e_c)\tag{4.41}$$

com $W(e_c)$ dada por

$$W(e_c) = k_1 e_1^2 + \frac{k_2 k_3 \mu}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{\mu}{2k_2 k_3} \sin^2 e_3\tag{4.42}$$

Consequentemente, a partir de (4.40), tem-se

$$\dot{V}(t,e) \leq -W(e_c) + \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) e_d + u^T e_d$$

Então, escolhendo

$$u^T = -\frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) - \begin{pmatrix} k_4 & k_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_4 & 0 \\ 0 & e_5 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

chega-se a

$$\dot{V}(t,e) \leq -W(e_c) - k_4 e_4^2 - k_5 e_5^2 \quad (4.44)$$

A entrada de controle auxiliar é dada por $\tau_a = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T$ onde

$$\begin{aligned} \tau_{a1} &= \dot{\omega}_{ld} + u_1 = \dot{\omega}_{ld} - \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) - k_4 e_4 \\ \tau_{a2} &= \dot{\omega}_{rd} + u_2 = \dot{\omega}_{rd} - \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_2(e_c) - k_5 e_5 \end{aligned} \quad (4.45)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_1(e_c) &= \frac{r}{2bk_2 a_l} [k_2(-2e_2 - b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] \\ \frac{\partial V_c}{\partial e_c} g_2(e_c) &= -\frac{r}{2bk_2 a_r} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] \end{aligned}$$

Note que mais uma vez foi assumido que os parâmetros de deslizamento a_l e a_r são conhecidos. Entretanto, simulações numéricas serão realizadas com entrada de controle auxiliar (4.45) utilizando-se os parâmetros de deslizamento estimados $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$ obtidos a partir da lei de adaptação (4.36).

Dessa forma, a entrada de controle auxiliar $\tau_a = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T$ é dada por

$$\tau_a = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{ld} \\ \dot{\omega}_{rd} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{r}{2bk_2 \hat{a}_l} [k_2(-2e_2 - b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] + k_4 e_4 \\ -\frac{r}{2bk_2 \hat{a}_r} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3 e_3)(e_1 + k_3) + 2 \sin e_3] + k_5 e_5 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

com $\dot{\omega}_{ld}$ e $\dot{\omega}_{rd}$, obtidas derivando (4.34), dadas por

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_{ld} \\ \dot{\omega}_{rd} \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2\dot{\hat{a}}_l & -b\dot{\hat{a}}_l \\ 2\dot{\hat{a}}_r & b\dot{\hat{a}}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix} + \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2\hat{a}_l & -b\hat{a}_l \\ 2\hat{a}_r & b\hat{a}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{\omega}_c \end{pmatrix}$$

onde $\dot{\hat{a}}_l$ e $\dot{\hat{a}}_l$ são dadas em (4.36) e $(\dot{v}_c, \dot{\omega}_c)^T$ é dada em (3.40).

A estratégia de controle proposta anteriormente para o modelo dinâmico (3.21) pode ser resumida no seguinte teorema.

Teorema 10. *Seja o modelo dinâmico (4.26)-(4.27) do robô não holonômico com deslizamento das rodas. Seja a entrada de controle (4.28) com a entrada de controle auxiliar (4.46) junto com (4.34)-(4.35) e lei de adaptação (4.36). Considere o erro $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ definido em (4.38). Seja as entradas de referência $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ funções contínuas no tempo com μ suficientemente pequeno. Então, o erro $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ tende a zero quando o tempo t tende a infinito. Além disso, $q(t) \rightarrow q_{\text{ref}}(t)$ e $\xi \rightarrow \xi_d$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração. O sistema em malha fechada, obtido a partir da dinâmica do erro aumentado (4.38) com u dada por (4.43) e ξ_d dada por (4.34), é representado pelo seguinte sistema não autônomo

$$\dot{e}_a = f(t, e_a) \quad (4.47)$$

onde $f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - \frac{r}{2b}(2e_2 + b)(e_4 - e_5) \\ \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right)\frac{e_1}{b} - \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right)\frac{e_1}{b} + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 + \frac{r}{2b}2e_1(e_4 - e_5) \\ \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) - \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) + \frac{r}{b}(e_4 - e_5) \\ - \frac{r}{2bk_2}[k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] - k_4e_4 \\ \frac{r}{2bk_2}[k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] - k_5e_5 \\ \gamma_1\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right)\left[\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right)e_1 - (e_2 + k_3e_3)\left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b}\right) - \frac{1}{bk_2}\sin e_3\right] \\ \gamma_2\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right)\left[-\left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right)e_1 + (e_2 + k_3e_3)\left(\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b}\right) + \frac{1}{bk_2}\sin e_3\right] \end{pmatrix}$$

com v_c e ω_c dadas por

$$\begin{aligned} v_c &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - k_3e_3\omega_c + k_1e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \left[k_2(e_2 + k_3e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] \end{aligned}$$

com ganhos $k_i > 0$ e $\gamma_i > 0$ constantes, parâmetros de deslizamentos a_l e a_r constantes, e entradas de referência $\omega_{\text{ref}}(t)$ e $v_{\text{ref}}(t)$ variantes no tempo.

Aplicando o Teorema 5, pode-se demonstrar que $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ converge assintoticamente para zero quando t tende a infinito. Note que existem outros pontos de equilíbrio dados por $e_a = (0, -lk_3\pi, l\pi, 0, 0, 0, 0)$ com $l \in \mathbb{Z}$. Portanto, a origem $e_a = 0$ não pode ser um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

O Teorema 5 requer que a função $f(t, e)$ seja localmente Lipschitz em um domínio que contém a origem $e = 0$. Esta condição pode ser verificada utilizando-se o Lema 1. Conforme o Lema 1, a função $f(t, e)$ é localmente Lipschitz se $f(t, e)$ e $[\partial f / \partial e](t, e)$ são contínuas em $[t_i, t_f] \times D$, para algum domínio $D \subset \mathbb{R}^7$. Assumindo que $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ são funções contínuas em $[0, \infty]$, verifica-se facilmente, a partir de (4.47), que a função $f(t, e)$ é contínua em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^7$. Também pode-se verificar que todos os termos da matriz jacobiana $[\partial f / \partial e](t, e)$ são contínuos em $[0, \infty] \times D$ com $D = \mathbb{R}^7$. Portanto, aplicando o Lema 1, mostra-se que $f(t, e)$ é localmente Lipschitz em e no domínio $[0, \infty] \times \mathbb{R}^7$.

Para prosseguir com a aplicação do Teorema 5 é necessário considerar o domínio $D = \{e_a \in \mathbb{R}^7 \mid -\pi < e_3 < \pi\}$ que contém a origem $e_a = 0$ e a função de Lyapunov candidata, $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, dada em (4.39):

$$V(e_a) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{1}{2}e_5^2 + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r}$$

cuja derivada ao longo do tempo é dada por (4.42)-(4.44), ou seja

$$\dot{V}(t, e_a) \leq -k_1e_1^2 + \frac{k_2k_3v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_2k_3}\sin^2 e_3 + k_4e_4^2 + k_5e_5^2$$

Então, $V(e_a)$ satisfaz a condição (4.2) para $\forall t \geq 0$ e $\forall e_a \in D$, com funções positivas definidas $W_1(e_a)$ e $W_2(e_a)$ no domínio D dadas por:

$$\begin{aligned} W_1(e_a) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r} + \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{1}{2}e_5^2 \\ W_2(e_a) &= \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r} + \frac{1}{2}e_4^2 + \frac{1}{2}e_5^2 \end{aligned}$$

Além disso, fazendo $v_{\text{ref}}(t) \geq \mu > 0$ para um $\mu \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno, $\dot{V}(t, e_a)$ satisfaz a condição (4.3) para $\forall t \geq 0$ e $\forall e_a \in D$, com função positiva semi definida $W(e_a)$ no domínio D

dada por:

$$W(e_a) = k_1 e_1^2 + \frac{k_2 k_3 \mu}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{\mu}{2 k_2 k_3} \sin^2 e_3 + k_4 e_4^2 + k_5 e_5^2 \quad (4.48)$$

Então, pode-se concluir pelo Teorema 5 que existe um $\gamma > 0$ tal que todas as soluções de (4.18) com $e_a(t_0) \in \{e_a \in B_d \mid W_2(e_a) \leq \gamma\}$ são limitadas e satisfaz

$$W(e_a(t)) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

Isso implica que $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, da definição do erro de postura $e = R^{-1}(\theta)(q_{\text{ref}} - q)$, vê-se que a trajetória do robô $q(t)$ converge assintoticamente para a trajetória de referência $q_{\text{ref}}(t)$. Além disso, a velocidade ξ converge para ξ_d quando $t \rightarrow \infty$. $\square$

A Figura 4.2 mostra um esquema do sistema em malha fechada formado pelo robô e pelo controlador adaptativo proposto no Teorema 10.

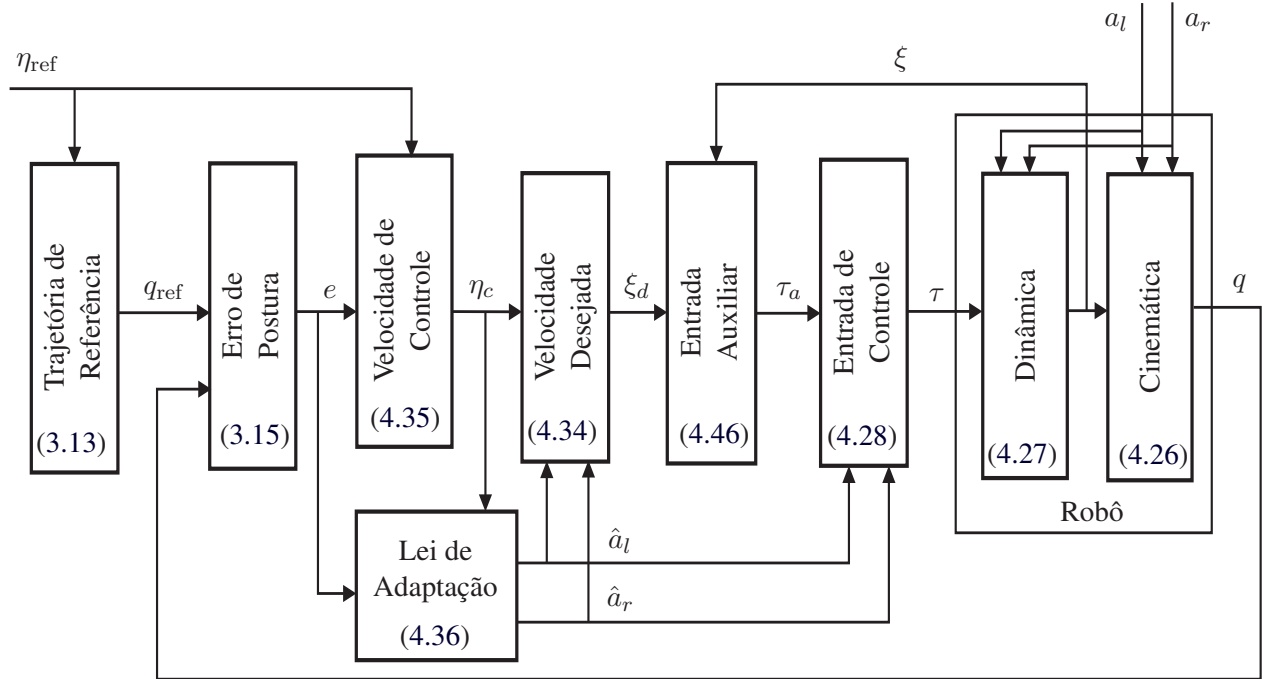


Figura 4.2 - Esquema do sistema de controle adaptativo baseado no modelo dinâmico.

5 CONTROLE BASEADO EM FILTRO DO ROBÔ COM DESLIZAMENTO

Este capítulo apresenta estratégias de controle para o robô móvel não holonômico com deslizamento longitudinal das rodas. As estratégias propostas neste capítulo, assim como as estratégias de controle adaptativas propostas no Capítulo 4, utilizam as leis de controle fornecidas no Capítulo 3. No Capítulo 4 foi proposta uma lei de adaptação para estimar os parâmetros de deslizamento desconhecidos. Neste capítulo, propõe-se utilizar estimativas dos parâmetros de deslizamento desconhecidos obtidas por meio de técnicas de filtragem não linear. A Seção 5.1.1 apresenta as duas técnicas de filtragem mais utilizadas em estimação de sistemas não lineares. A Seção 5.2 apresenta uma estratégia de controle baseada em filtro projetada usando o modelo cinemático do robô. A Seção 5.2 apresenta uma estratégia de controle baseada em filtro projetada usando o modelo dinâmico do robô.

5.1 Preliminares

5.1.1 Estimação de estados e parâmetros de sistemas não lineares

A descrição no espaço de estado de sistemas dinâmicos a tempo discreto é dado por equações da forma

$$e(k+1) = f(k, e(k), u(k)) \quad (5.1)$$

$$s(k) = h(k, e(k), u(k)) \quad (5.2)$$

para $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, onde $k_0 \in \mathbb{Z}$. Além disso, $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ são vetores de funções não-lineares dadas respectivamente por $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ e $h = (h_1, \dots, h_p)^T$, $e(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados dado por $e = (e_1, \dots, e_n)^T$, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas dado por $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, $s(k) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas dado por $s = (s_1, \dots, s_p)^T$.

Considere o sistema não-linear a tempo discreto dado por (5.1) e (5.2) sob a hipótese de que a saída $s(k)$ é conhecido no instante $k + 1$ e não depende de $u(k)$, reescrito como

$$e(k + 1) = f(k, e(k), u(k)) + w_p(k) \quad (5.3)$$

$$s(k + 1) = h(k, e(k)) + w_s(k + 1) \quad (5.4)$$

onde $w_p(k) \in \mathbb{R}^n$ e $w_s(k) \in \mathbb{R}^p$ são vetores de ruído Gaussiano branco, de média zero e matrizes de covariâncias dadas respectivamente por $Q_p(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q_s(k) \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Os vetores $w_p(k)$ e $w_s(k)$ são formados respectivamente por ruídos associados as variáveis de processo e saídas do sistema não-linear. As propriedades dos ruídos $w_p(k)$ e $w_s(k)$ podem ser representadas da seguinte forma

$$w_p(k) \sim (0, Q_p(k))$$

$$w_s(k) \sim (0, Q_s(k))$$

$$\mathbb{E}[w_p(k)w_p^T(j)] = Q_p(k)\delta(k - j)$$

$$\mathbb{E}[w_s(k)w_s^T(j)] = Q_s(k)\delta(k - j)$$

$$\mathbb{E}[w_s(k)w_p^T(j)] = 0$$

onde $\mathbb{E}$ é o operador esperança e $\delta(k - j) : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ é a função delta de Kronecker: $\delta(k - j) = 1$, se $k = j$ e $\delta(k - j) = 0$, se $k \neq j$.

Sob estas condições, os estados do sistema não linear (5.3) e (5.4) podem ser estimados utilizando-se algoritmos de filtragem formulados a partir do filtro de Kalman (KF). O filtro de Kalman é um algoritmo que produz estimativas ótimas de estados de sistemas lineares (ANDERSON; MOORE, 1979). Em geral, os algoritmos de filtragem mais utilizados para sistemas não lineares são o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *unscented* (UKF).

Algoritmo do EKF

O filtro de Kalman estendido é uma versão do filtro de Kalman que se utiliza de linearizações a cada instante de tempo, linearizações que são dadas pela série de Taylor expandida de primeira ordem do sistema não-linear em torno das estimativas atuais dos estados. Essas estimativas dos estados são obtidas aplicando-se as mesmas etapas do filtro de Kalman. Em uma etapa de predição, os estados estimados e a covariância dos erros de estimação são propagados pelo modelo do processo. Em uma etapa seguinte, os estados estimados e a covariância dos erros de estimação previstos são corrigidos com base na ponderação da diferença entre a saída atual e a saída estimada. Em geral, o filtro de Kalman estendido apresenta resultados satisfatórios para muitas aplicações. Entretanto, diferentemente do filtro de Kalman, não se pode assegurar a otimalidade nem a estabilidade das estimativas obtidas com o filtro de Kalman estendido.

O algoritmo do filtro de Kalman estendido (SIMON, 2006) pode ser descrito da seguinte forma:

Inicialize com

$$\hat{e}(0) = \mathbb{E}[e(0)]$$

$$P(0) = \mathbb{E}[(e(0) - \hat{e}(0))(e(0) - \hat{e}(0))^T]$$

onde $\hat{e}(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado estimado e $P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância associada aos erros de estimação dos estados.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$, calcule as etapas

- Calcule a matriz

$$F(k) = \left. \frac{\partial f(k, e(k), u(k))}{\partial e(k)} \right|_{\hat{e}(k), u(k)}$$

onde $F(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz obtida da linearização da função f dada em (5.3) em torno do estado estimado atual $\hat{e}(k)$ e da entrada de controle $u(k)$.

- Calcule os estados estimados e covariância dos erros de estimação utilizando as equa-

ções de predição dadas por

$$\begin{aligned}\hat{e}(k+1) &= f(k, \hat{e}(k), u(k)) \\ P(k+1) &= F(k)P(k)F(k)^T + Q_p(k)\end{aligned}$$

onde $Q_p(k)$ é a matriz de covariância associada aos ruídos das variáveis de processo.

- Calcule a matriz

$$C(k+1) = \left. \frac{\partial h(k, e(k+1))}{\partial e(k+1)} \right|_{\hat{e}(k+1)}$$

onde $C(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz obtida da linearização da função s dada em (5.4) em torno do estado estimado atual $\hat{e}(k+1)$.

- Calcule os estados estimados e covariância dos erros de estimação utilizando as equações de correção dadas por

$$\begin{aligned}K(k+1) &= P(k+1)C^T(k+1) [C(k+1)P(k+1)C^T(k+1) + Q_s(k+1)]^{-1} \\ \hat{e}(k+1) &= \hat{e}(k+1) + K(k+1)(s(k+1) - h(k, e(k+1))) \\ P(k+1) &= P^{-1}(k+1) - K(k+1)C(k+1)P^{-1}(k+1)\end{aligned}$$

onde $K(k+1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é denominado de matriz de ganho do filtro, $Q_s(k)$ é a matriz de covariância associada aos ruídos das variáveis de saídas.

Algoritmo do UKF

O filtro de Kalman *unscented* (UKF) não utiliza aproximações (ou linearizações) do sistema não linear. Em vez disso, o algoritmo do UKF utiliza um método de amostragem determinística denominada transformação *unscented* (UT) (JULIER; UHLMANN, 2004) para capturar um conjunto de pontos amostrados (denominados pontos sigmas) em torno da estimativa. Esses pontos sigmas são propagados pelo modelo não linear em uma etapa de predição. Em uma etapa seguinte, os estados estimados e a covariância dos erros de estimação previstos são corrigidos com base na

ponderação da diferença entre a saída atual e a saída estimada. Assim como o filtro de Kalman estendido, não se pode assegurar a otimalidade nem a estabilidade das estimativas obtidas com o filtro de Kalman *unscented*.

O algoritmo do filtro de Kalman estendido (HAYKIN, 2001) pode ser descrito da seguinte forma:

Inicialize com

$$\hat{e}(0) = \mathbb{E}[e(0)]$$

$$P(0) = \mathbb{E}[(e(0) - \hat{e}(0))(e(0) - \hat{e}(0))^T]$$

onde $\hat{e}(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado estimado e $P(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de covariância associada aos erros de estimação dos estados.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$, siga as etapas

- Calcule os pontos sigma $\mathcal{E}_i \in \mathbb{R}^n$ utilizando

$$\mathcal{E}_0(k) = \hat{e}(k)$$

$$\mathcal{E}_i(k) = \hat{e}(k) + \sqrt{(n + \lambda)P(k)}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathcal{E}_i(k) = \hat{e}(k) - \sqrt{(n + \lambda)P(k)}, \quad i = n + 1, \dots, 2n$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ é uma constante dada por $\lambda = \kappa_1^2(n + \kappa_2) - n$ com $\kappa_1 \in \mathbb{R}_*^+$ e $\kappa_2 \in \mathbb{R}^+$.

- Propague os pontos sigma $\mathcal{E}_i$ utilizando

$$\mathcal{E}_i(k + 1) = f(k, \mathcal{E}_i(k), u(k))$$

onde f é a função dada em (5.3) e calcule os estados estimados e covariância dos erros de estimação utilizando as equações de predição dadas por

$$\hat{e}(k + 1) = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i \mathcal{E}_i(k + 1)$$

$$P(k + 1) = \sum_{i=0}^{2n} \overline{\mathcal{W}}_i [\mathcal{E}_i(k + 1) - \hat{e}(k + 1)] [\mathcal{E}_i(k + 1) - \hat{e}(k + 1)]^T + Q_p(k)$$

onde $\mathcal{W}_i \in \mathbb{R}$ e $\overline{\mathcal{W}}_i \in \mathbb{R}$ são matrizes de ponderação dadas por

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_0 &= \lambda/(n + \lambda) \\ \overline{\mathcal{W}}_0 &= \lambda/(n + \lambda) + (1 - \kappa_1^2 + \kappa_3) \\ \mathcal{W}_i &= \overline{\mathcal{W}}_i = 1/2(n + \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

com $\kappa_3 \in \mathbb{R}_*^+$.

- Calcule os novos pontos sigma $\mathcal{E}_i(k + 1)$ utilizando

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0(k + 1) &= \mathcal{E}_i(k + 1) \\ \mathcal{E}_i(k + 1) &= \mathcal{E}_i(k + 1) + \sqrt{(n + \lambda)Q_p(k)}, \quad i = 1, \dots, n \\ \mathcal{E}_i(k + 1) &= \mathcal{E}_i(k + 1) - \sqrt{(n + \lambda)Q_p(k)}, \quad i = n + 1, \dots, 2n\end{aligned}$$

- Propague os pontos sigma $\mathcal{E}_i(k + 1)$ utilizando

$$\mathcal{S}_i(k + 1) = h(k, \mathcal{E}_i(k + 1))$$

onde $\mathcal{S}_i \in \mathbb{R}^p$.

- Calcule as saídas estimadas $\hat{s}(k) \in \mathbb{R}^p$ utilizando

$$\hat{s}(k + 1) = \sum_{i=0}^{2n} \mathcal{W}_i \mathcal{S}_i(k + 1)$$

- Calcule os estados estimados e covariância dos erros de estimação utilizando as equa-

ções de correção dadas por

$$P_{\hat{s}(k)\hat{s}(k)} = \sum_{i=0}^{2n} \overline{\mathcal{W}}_i (\mathcal{S}_i(k+1) - \hat{s}(k+1)) (\mathcal{S}_i(k+1) - \hat{s}(k+1))^T + Q_s(k)$$

$$P_{e(k)s(k)} = \sum_{i=0}^{2n} \overline{\mathcal{W}}_i (\mathcal{E}_i(k+1) - \hat{e}(k+1)) (\mathcal{S}_i(k+1) - \hat{s}(k+1))^T$$

$$K(k) = P_{e(k)s(k)} P_{\hat{s}(k)\hat{s}(k)}^{-1}$$

$$\hat{e}(k+1) = \hat{e}(k+1) + K(k) (s(k+1) - \hat{s}(k+1))$$

$$P(k+1) = P(k+1) - K(k) P_{\hat{s}(k)\hat{s}(k)} K^T(k)$$

Estimação simultânea de estados e parâmetros

Os algoritmos de filtragem apresentados também podem ser usados para estimar parâmetros desconhecidos de um sistema. Considere o sistema (5.3) e (5.4), reescrito como

$$e(k+1) = f_p(k, e(k), u(k), \sigma(k)) + w_p(k) \quad (5.5)$$

$$s(k+1) = h_p(k, e(k+1)) + w_s(k+1) \quad (5.6)$$

onde $\sigma(k) \in \mathbb{R}^l$ é o vetor de parâmetros desconhecidos. Para estimar o parâmetro σ considere o estado aumentado

$$e_a(k+1) = \begin{pmatrix} e(k+1) \\ \sigma(k+1) \end{pmatrix}$$

Se σ é constante, então o parâmetro σ pode ser modelado como

$$\sigma(k+1) = \sigma(k) + w_\sigma(k)$$

onde $w_\sigma(k)$ é um vetor de ruído Gaussiano branco, de média zero com matriz de covariância conhecida. Portanto, a dinâmica do sistema aumentado é governado por

$$e_a(k+1) = f_p(k, e_a(k), u(k)) + w_a(k)$$

$$s(k+1) = h_p(k, e(k+1)) + v(k+1)$$

onde $w_a(k) = (w_p(k), w_\sigma(k))^T$. Uma vez escrito neste formato, os algoritmos EKF e UKF podem ser utilizados para estimar simultaneamente os estados e parâmetros do sistema não-linear dado por 5.5 e 5.6.

5.1.2 Métodos de discretização

Os algoritmos de estimação de estados apresentados na Seção 5.1.1 são formulados a partir de sistemas discretos no tempo representado por equações a diferenças. Por outro lado, os sistemas de controle e modelos do robô não holonômico são descritos por sistemas contínuos no tempo a partir de equações diferenciais. As implementações numéricas de sistemas contínuos no tempo, em geral, são realizadas por meio da discretização do sistema.

Considere o sistema dinâmico contínuo no tempo dado por (3.3),

$$\dot{e} = f(t, e, u)$$

Este sistema pode ser discretizado utilizando-se, entre outros, os seguintes métodos (GREENWOOD, 2003).

Método 1. (Método de Euler de 1º ordem) *Escolha um intervalo de discretização $T \in \mathbb{R}^+$ e assuma que a condição inicial $e(t(0)) = e_0$ seja dada. A solução numérica para $e(t(k))$ em $t = t(1), t(2), t(3), \dots$ é calculada por*

$$e(t(k+1)) = e(t(k)) + T f(t(k), e(t(k)), u(t(k))) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Método 2. (Método de Euler de 2º ordem) Escolha um intervalo de discretização $T \in \mathbb{R}^+$ e assumo que a condição inicial $e(t(0)) = e_0$ seja dada. A solução numérica para $e(t(k))$ em $t = t(1), t(2), t(3), \dots$ é calculada por

$$e(t(k+1)) = e(t(k)) + T f(t(k), e(t(k)), u(t(k))) \\ + \frac{T^2}{2} J(f(t(k), e(t(k)), u(t(k)))) f(t(k), e(t(k)), u(t(k)))$$

onde $J(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz Jacobiana.

Método 3. (Método de Runge-Kutta de 4º ordem) Escolha um intervalo de discretização $T \in \mathbb{R}^+$ e assumo que a condição inicial $e(t(0)) = e_0$ seja dada. A solução numérica para $e(t(k))$ em $t = t(1), t(2), t(3), \dots$ é calculada por

$$e(t(k+1)) = e(t(k)) + F(t(k), e(t(k)), u(t(k)))$$

com F dado por

$$F(t(k), e(t(k)), u(t(k))) = T \left(\frac{F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4}{6} \right)$$

onde

$$F_1 = f(t(k), e(t(k)), u(t(k)))$$

$$F_2 = f(t(k) + T/2, e(t(k)) + (T/2)F_1, u(t(k)))$$

$$F_3 = f(t(k) + T/2, e(t(k)) + (T/2)F_2, u(t(k)))$$

$$F_4 = f(t(k+1), e(t(k)) + TF_3, u(t(k)))$$

Para exemplificar a diferença entre os métodos, considere o sistema dinâmico contínuo no tempo

$$\dot{x}_e(t) = -x_e(t) \tag{5.7}$$

cujas solução analítica, para condição inicial $x_e(0) = 1$, é dada por $x_e(t) = e^{-t}$. A tabela 5.1 mostra a norma do erro de integração numérica $\|x_e(t) - x_e(k)\|_2$, dado pela diferença entre a solução analítica $x_e(t)$ e a solução numérica $x_e(k)$ obtida utilizando os métodos de Euler de 1º e 2º ordem e o método de Runge-Kutta de 4º ordem. As soluções foram obtidas durante $0 < t \leq 10$ s para intervalos de tempo dado por $T = 10^{-1}$ s, $T = 10^{-2}$ s e $T = 10^{-3}$ s.

T (s)	Euler de 1º ordem	Euler 2º ordem	Runge-Kutta de 4º ordem
10^{-1}	8.1488e-002	2.8446e-003	1.4323e-006
10^{-2}	2.5073e-002	8.3962e-005	4.2015e-010
10^{-3}	7.9080e-003	2.6372e-006	1.6418e-013

Tabela 5.1 - Norma do erro de integração numérica utilizando os métodos de Euler de 1º e 2º ordem e o método de Runge-Kutta de 4º ordem.

Como esperado, o erro de discretização numérica diminui com a redução do intervalo de discretização T para todos os métodos. Além disso, observa-se na tabela 5.1 que o método de Runge-Kutta é mais exato que o método de Euler de 2º ordem, que por sua vez é mais exato que o método de Euler de 1º ordem. Em geral, para sistemas com dinâmica rápida, como a do exemplo (5.7), os métodos de ordem elevada são mais exatos. Entretanto, essa maior exatidão é obtida à custa de um esforço computacional maior. Em relação ao método de Euler de 1º ordem, nota-se que o método de Runge-Kutta realiza mais vezes o cálculo da função f para obter o seu valor em cada instante de tempo, enquanto o método de Euler de 2º ordem requer o cálculo da matriz jacobiana de f em cada instante de tempo. Portanto, o compromisso entre exatidão e esforço computacional precisa ser considerado na escolha do método de discretização.

5.2 Projeto de controle baseado em filtro usando o modelo cinemático

Esta seção apresenta a estratégia de controle baseada em técnicas de filtragem projetada usando o modelo cinemático (2.14) do robô com deslizamento longitudinal das rodas. Essa estratégia de controle segue a ideia da estratégia apresentada em Zhou et al. (2007) que utiliza o filtro de Kalman *unscented* para estimar os parâmetros de deslizamentos longitudinais das rodas e o parâmetro de deslizamento lateral do robô. A estratégia proposta nesta seção utiliza a lei de controle cinemática apresentada no Capítulo 3, que é diferente da lei de controle usada por Zhou et al. (2007). O projeto da estratégia de controle baseada em filtro consiste em demonstrar que a lei de controle apresentada no Capítulo 3 resolve o problema de rastreamento de trajetórias de robôs com deslizamento longitudinal. Essa demonstração pode ser obtida assumindo-se que os parâmetros de deslizamentos são medidos perfeitamente, já que a lei de controle depende dos parâmetros de deslizamento. Entretanto, a medição exata desses parâmetros é difícil de ser realizada e, em geral, está

associada a sensores muitos precisos e caros, sendo assim, propõe-se utilizar as estimativas dos parâmetros de deslizamento obtidas por meio de técnicas de filtragem.

Assumindo que os parâmetros de deslizamentos das rodas podem ser medidos e utilizando-se a relação (2.18) pode-se mostrar que a lei de controle (3.17) apresentada na Seção 3.3 resolve o problema de rastreamento de trajetórias de robôs com deslizamento longitudinal das rodas.

Considere o problema de rastreamento de trajetórias definido por meio da dinâmica do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ dada em (4.7), ou seja

$$\dot{e} = \begin{pmatrix} \frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) e_2 + v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - \frac{r}{2} \left(\frac{\omega_l}{a_l} + \frac{\omega_r}{a_r} \right) \\ -\frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) e_1 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) - \frac{r}{b} \left(\frac{\omega_r}{a_r} - \frac{\omega_l}{a_l} \right) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

A lei de controle $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$ que garante a convergência do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ para zero é dada por (2.18), ou seja

$$\xi = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2a_l & -ba_l \\ 2a_r & ba_r \end{pmatrix} \eta_c \quad (5.9)$$

com $\eta_c = (v_c, \omega_c)^T$ dada por (3.17), ou seja

$$\begin{aligned} v_c &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - k_3 e_3 \omega_c + k_1 e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

A dinâmica do erro de postura (5.8) em malha fechada, obtida substituindo (5.9) e (5.10) em (5.8) é dada por

$$\dot{e} = f(t, e) \quad (5.11)$$

com

$$f(t, e) = \begin{pmatrix} -k_1 e_1 + \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \omega_{\text{ref}}(t) (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} (e_2 + k_3 e_3) \sin e_3 \\ -\omega_{\text{ref}}(t) e_1 - \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} e_1 (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ -\frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \end{pmatrix}$$

Note que o sistema em malha fechada (5.21) é igual ao sistema (3.19) cuja estabilidade já foi analisada na Seção 3.3. Conforme análise da Seção 3.3, a origem $e = 0$ do sistema (3.19) é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável. Consequentemente, a origem $e = 0$ do sistema (5.21) também é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável.

Quando os parâmetros de deslizamento a_l e a_r são medidos, a entrada de controle (5.9) com a entrada de controle auxiliar (5.10) pode ser utilizada para estabilizar a dinâmica do erro de postura (5.8). Entretanto, se os parâmetros de deslizamento a_l e a_r são desconhecidos a entrada de controle (5.9) não pode ser utilizada diretamente. A fim de aplicar em robôs reais a entrada de controle (5.9) propõe-se utilizar o filtro de Kalman *unscented* para estimar em tempo real os valores dos parâmetros de deslizamento a_l e a_r . O filtro de Kalman *unscented* foi escolhido após um estudo numérico comparativo com o filtro de Kalman estendido. Esse estudo é apresentado no Capítulo 6.

A aplicação do filtro de Kalman *unscented* é realizada em malha fechada com o controlador, utilizando a entrada de controle (5.9) com $\hat{a}_l(t) \in \mathbb{R}$ e $\hat{a}_r(t) \in \mathbb{R}$, obtido pelo filtro, como estimativa para os parâmetros de deslizamento $a_l(t)$ e $a_r(t)$, respectivamente, ou seja

$$\xi = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2\hat{a}_l & -b\hat{a}_l \\ 2\hat{a}_r & b\hat{a}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

com entrada auxiliar $\eta_c = (v_c, \omega_c)^T$ dada em (5.10).

Um esquema da estratégia de controle proposta pode ser visto na Figura 5.1. Note que a adição do vetor de ruídos $w_s = (w_x, w_y, w_\theta)^T$ ao vetor $q = (x, y, \theta)^T$ resulta no vetor de medidas $q_m = (x_m, y_m, \theta_m)^T$. O vetor de medidas é utilizado pelo algoritmo de filtragem não linear para obter o vetor de medidas estimados $q_e = (x_e, y_e, \theta_e, \hat{a}_l, \hat{a}_r)^T$.

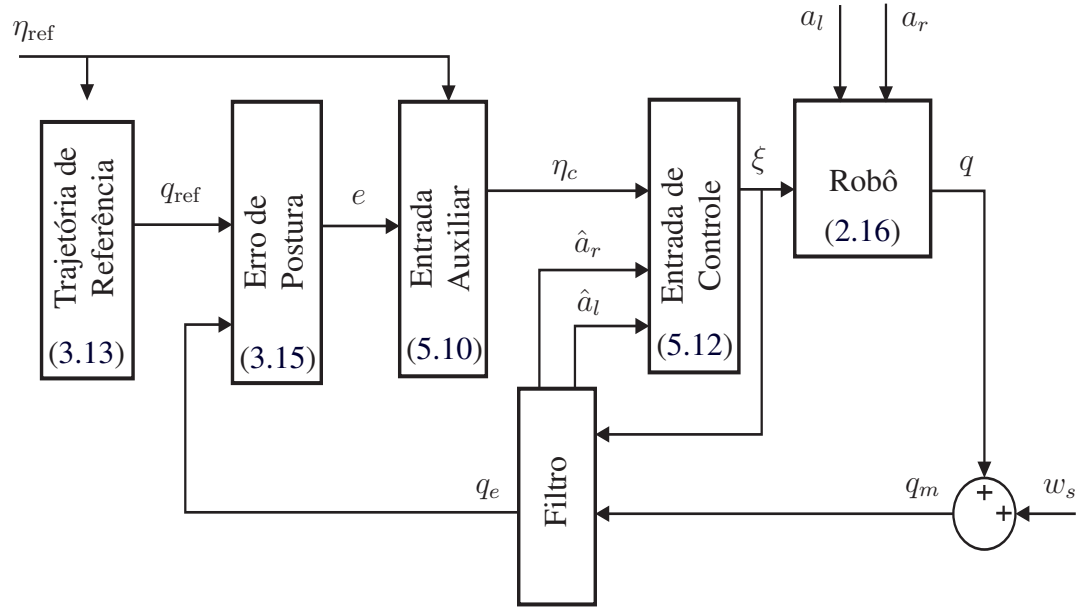


Figura 5.1 - Esquema do sistema de controle baseado em filtro e no modelo cinemático.

5.3 Projeto de controle baseado em filtro usando o modelo dinâmico

Esta seção apresenta a estratégia de controle baseada em técnicas de filtragem projetada usando o modelo dinâmico (2.25) do robô com deslizamento longitudinal das rodas. A estratégia de controle proposta é apresentada em duas etapas. Na primeira etapa, assumindo que os parâmetros de deslizamento são conhecidos, mostra-se que a lei de controle fornecida na Seção 3.4 resolve o problema de rastreamento de trajetórias. Na segunda etapa, propõe-se utilizar o filtro de Kalman *unscented* para estimar os parâmetros de deslizamento para que a lei de controle fornecida na Seção 3.4 possa ser aplicada em situações reais em que os deslizamentos são desconhecidos.

Considere o modelo dinâmico (2.25) do robô com deslizamento longitudinal das rodas, ou seja

$$\dot{q} = S_a(q)\xi \quad (5.13)$$

$$\dot{\xi} = M_a^{-1}B_a\tau \quad (5.14)$$

com

$$M_a = \frac{r^2}{a_l^2 a_r^2} \begin{pmatrix} (mb^2 + 4J)a_r^2 & (mb^2 - 4J)a_l a_r \\ (mb^2 - 4J)a_l a_r & (mb^2 + 4J)a_l^2 \end{pmatrix}, \quad B_a = \frac{r}{a_l a_r} \begin{pmatrix} a_r & 0 \\ 0 & a_l \end{pmatrix}$$

Assumindo que os parâmetros de deslizamento são medidos, o modelo dinâmico (5.13)-(5.14) pode ser reduzido, conforme visto na Seção 4.3 a um sistema adequado à aplicação da técnica *backstepping* utilizando-se a seguinte entrada de controle

$$\tau = B_a^{-1} M_a \tau_a \quad (5.15)$$

Utilizando a entrada de controle (5.15), o modelo dinâmico reduz-se a

$$\dot{q} = S_a(q)\xi \quad (5.16)$$

$$\dot{\xi} = \tau_a \quad (5.17)$$

onde $\tau_a(t)$ é uma entrada de controle auxiliar a ser determinada de acordo com o problema de controle. Considerando o problema de rastreamento de trajetórias, o modelo (5.16)-(5.17) pode ser reescrito na forma padrão de aplicação da técnica *backstepping* conforme (4.38), ou seja

$$\begin{aligned} \dot{e}_c &= g_0(e_c) + g_1(e_c)\xi_d + g_1(e_c)e_d \\ \dot{e}_d &= u \end{aligned} \quad (5.18)$$

com $e_c = (e_1, e_2, e_3)^T$, $e_d = (e_4, e_5)^T$, $u = \tau_a - \dot{\xi}_d$ e funções $g_i(e_c)$ dadas por

$$g_0(e_c) = \begin{pmatrix} v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 \\ v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}}(t) \end{pmatrix}, \quad g_1(e_c) = \frac{r}{2ba_l a_r} \begin{pmatrix} a_r(-2e_2 + b) & a_l(2e_2 - b) \\ 2a_r e_1 & -2a_l e_1 \\ 2a_r & -2a_l \end{pmatrix}$$

A entrada de controle auxiliar $\tau_a = (\tau_{a1}, \tau_{a2})^T$ que resolve esse problema é dada por

$$\tau_a = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{ld} \\ \dot{\omega}_{rd} \end{pmatrix} + u \quad (5.19)$$

onde $\xi_d = (\omega_{ld}, \omega_{rd})^T$ é dada por (5.9)-(5.10). A entrada u projetada conforme a técnica *backstep-*

$ping$ é dada por (4.43), ou seja

$$u = - \left(\begin{array}{c} \frac{r}{2bk_2a_l} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] + k_4e_4 \\ \frac{r}{2bk_2a_r} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] + k_5e_5 \end{array} \right) \quad (5.20)$$

Para analisar a estabilidade da origem $e_a = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T = 0$ da dinâmica do erro (5.18) em malha fechada é preciso substituir (5.9)-(5.10) e (5.20) em (5.18). Essa substituição resulta no seguinte sistema

$$\dot{e}_a = f(t, e_a) \quad (5.21)$$

com

$$\left(\begin{array}{c} -k_1e_1 + \frac{k_2v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3)^2 + \left(\omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \right) (e_2 + k_3e_3) - \frac{r}{2b} [(2e_2 + b)e_4 + (-2e_2 + b)e_5] \\ -\omega_{\text{ref}}(t)e_1 - \frac{k_2v_{\text{ref}}(t)}{2}e_1(e_2 + k_3e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3}e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 + \frac{r}{2b}2e_1(e_4 - e_5) \\ -\frac{k_2v_{\text{ref}}(t)}{2}(e_2 + k_3e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 + \frac{r}{b}(e_4 - e_5) \\ -\frac{r}{2bk_2} [k_2(-2e_2 - b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] - k_4e_4 \\ \frac{r}{2bk_2} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] - k_5e_5 \end{array} \right)$$

Note que esse sistema é igual ao sistema (3.41) analisado no Teorema 10. Conforme análise do Teorema 10, a origem $e_a = 0$ do sistema (3.41) é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável. Consequentemente, pode-se concluir que a origem $e_a = 0$ do sistema (5.21) também é um ponto de equilíbrio uniformemente assintoticamente estável.

Quando os parâmetros de deslizamento a_l e a_r podem ser medidos, a entrada de controle (5.15) com a entrada de controle auxiliar (5.23) pode ser utilizada para estabilizar a dinâmica do erro (5.8). Entretanto, se os parâmetros de deslizamento a_l e a_r são desconhecidos a entrada de controle (5.15) não pode ser utilizada diretamente. A fim de aplicar em robôs reais a entrada de controle (5.15) propõe-se utilizar o filtro de Kalman *unscented* para estimar em tempo real os valores dos parâmetros de deslizamento a_l e a_r .

A entrada de controle (5.15) com estimativas $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$ para os parâmetros de deslizamentos a_l e a_r , respectivamente, é dada por

$$\tau = \hat{B}_a^{-1} \hat{M}_a \tau_a \quad (5.22)$$

com

$$M_a = \frac{r^2}{a_l^2 a_r^2} \begin{pmatrix} (mb^2 + 4J)\hat{a}_r^2 & (mb^2 - 4J)\hat{a}_l\hat{a}_r \\ (mb^2 - 4J)\hat{a}_l\hat{a}_r & (mb^2 + 4J)\hat{a}_l^2 \end{pmatrix}, \quad B_a = \frac{r}{\hat{a}_l\hat{a}_r} \begin{pmatrix} \hat{a}_r & 0 \\ 0 & \hat{a}_l \end{pmatrix}$$

e

$$\tau_a = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{ld} - \frac{r}{2bk_2\hat{a}_l} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] - k_4e_4 \\ \dot{\omega}_{rd} - \frac{r}{2bk_2\hat{a}_r} [k_2(-2e_2 + b)e_1 + 2k_2(e_2 + k_3e_3)(e_1 + k_3) + 2\sin e_3] - k_5e_5 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

onde ξ_d é dado por

$$\xi_d = \begin{pmatrix} \omega_{Ld} \\ \omega_{Rd} \end{pmatrix} = \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} 2\hat{a}_l & -b\hat{a}_l \\ 2\hat{a}_r & b\hat{a}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_c \\ \omega_c \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

com v_c e ω_c dados em (5.10), ou seja

$$\begin{aligned} v_c &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - k_3e_3\omega_c + k_1e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \left[k_2(e_2 + k_3e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] \end{aligned} \quad (5.25)$$

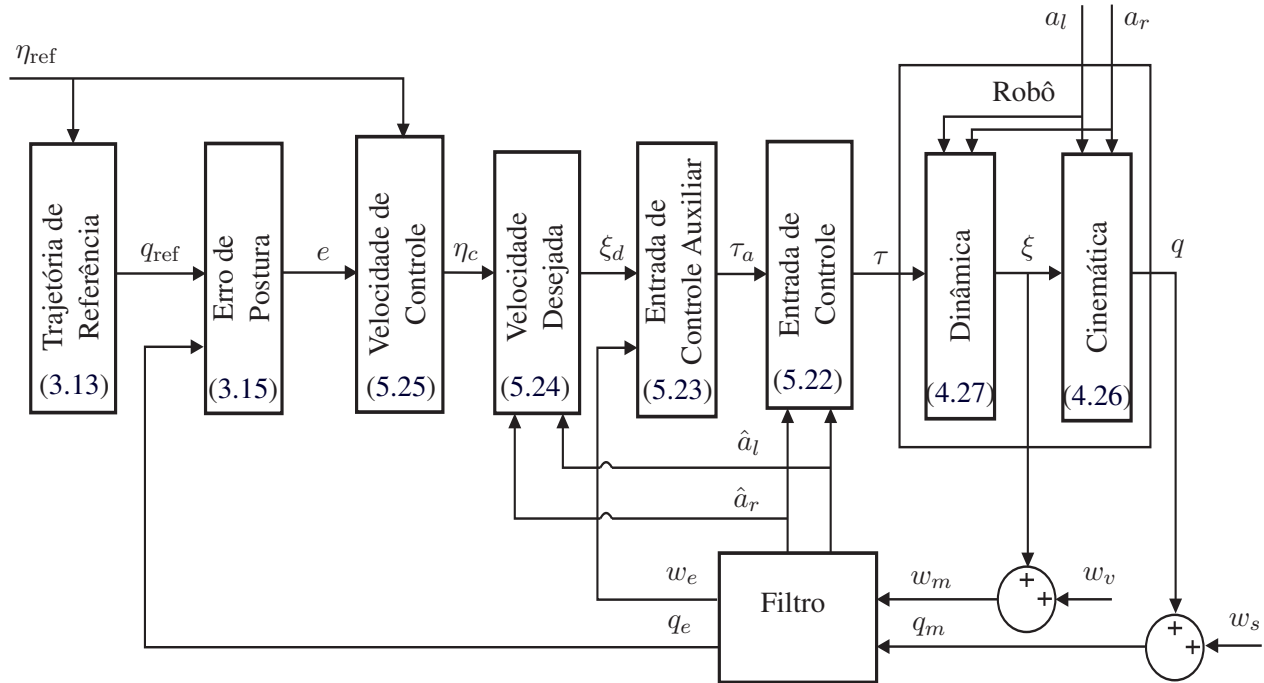


Figura 5.2 - Esquema do sistema de controle baseado em filtro e no modelo dinâmico.

Um esquema da estratégia de controle proposta pode ser visto na Figura 5.2. Seja o vetor de ruídos $w_s = (w_q, w_v)^T$, onde $w_q = (w_x, w_y, w_\theta)^T$ e $w_v = (w_{\omega_l}, w_{\omega_r})^T$. Então, note que a adição do vetor de ruídos $w_q = (w_x, w_y, w_\theta)^T$ ao vetor de configuração $q = (x, y, \theta)^T$ resulta no vetor de medidas $q_m = (x_m, y_m, \theta_m)^T$. Além disso, o vetor de ruídos $w_v = (w_{\omega_l}, w_{\omega_r})^T$ é adicionado ao vetor de velocidade $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$ para formar o vetor de medidas $w_m = (\omega_{lm}, \omega_{rm})^T$. Os vetores de medidas q_m e w_m são utilizados pelo algoritmo de filtragem não linear para obter o vetor de medidas estimados $q_e = (x_e, y_e, \theta_e)^T$, $w_e = (\omega_{le}, \omega_{re})^T$ e os parâmetros de deslizamento estimados $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$.

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta as simulações numéricas realizadas para investigar o comportamento do robô com deslizamento utilizando as estratégias de controle propostas nos Capítulos 4 e 5 . A Seção 6.1 apresenta os perfis de trajetórias de referência e de deslizamentos longitudinais utilizados nas simulações numéricas. A Seção 6.2 apresenta as simulações referentes aos controladores adaptativos, projetados usando o modelo cinemático e o modelo dinâmico, propostos no Capítulo 4. A Seção 6.3 apresenta as simulações dos controladores baseados em filtro, projetados usando o modelo cinemático e o modelo dinâmico, propostos no Capítulo 5.

6.1 Configurações de simulações

O comportamento do robô com deslizamento utilizando as estratégias de controle adaptativa e de controle baseada em filtro são analisadas utilizando-se dois perfis de deslizamentos distintos e duas trajetórias de referência diferentes. A primeira trajetória de referência, apresentada em Fukao et al. (2000), é gerada a partir da integração numérica da equação (3.13) com condição inicial dada por $q_{\text{ref}}(0) = (0,0,0)^T$ e entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ dadas por

$$\begin{aligned} 0 \text{ s} \leq t < 5 \text{ s} : \quad & v_{\text{ref}}(t) = 0.25 \left(1 - \cos \frac{\pi t}{5} \right) & \text{e} \quad \omega_{\text{ref}}(t) = 0 \\ 5 \text{ s} \leq t < 20 \text{ s} : \quad & v_{\text{ref}}(t) = 0.5 & \text{e} \quad \omega_{\text{ref}}(t) = 0 \\ 20 \text{ s} \leq t < 25 \text{ s} : \quad & v_{\text{ref}}(t) = 0.25 \left(1 + \cos \frac{\pi t}{5} \right) & \text{e} \quad \omega_{\text{ref}}(t) = 0 \\ 25 \text{ s} \leq t < 30 \text{ s} : \quad & v_{\text{ref}}(t) = 0.15\pi \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{5} \right) & \text{e} \quad \omega_{\text{ref}}(t) = -v_{\text{ref}}(t)/1.5 \\ 30 \text{ s} \leq t < 35 \text{ s} : \quad & v_{\text{ref}}(t) = 0.15\pi \left(1 - \cos \frac{2\pi t}{5} \right) & \text{e} \quad \omega_{\text{ref}}(t) = v_{\text{ref}}(t)/1.5 \\ 35 \text{ s} \leq t < 40 \text{ s} : \quad & v_{\text{ref}}(t) = 0.25 \left(1 + \cos \frac{\pi t}{5} \right) & \text{e} \quad \omega_{\text{ref}}(t) = 0 \\ 40 \text{ s} \leq t : \quad & v_{\text{ref}}(t) = 0.5 & \text{e} \quad \omega_{\text{ref}}(t) = 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

A Figura 6.1 mostra a evolução temporal das entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ obtidas a partir de (6.1). Essa combinação de $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ gera uma trajetória de referência que possui forma de um “S”.

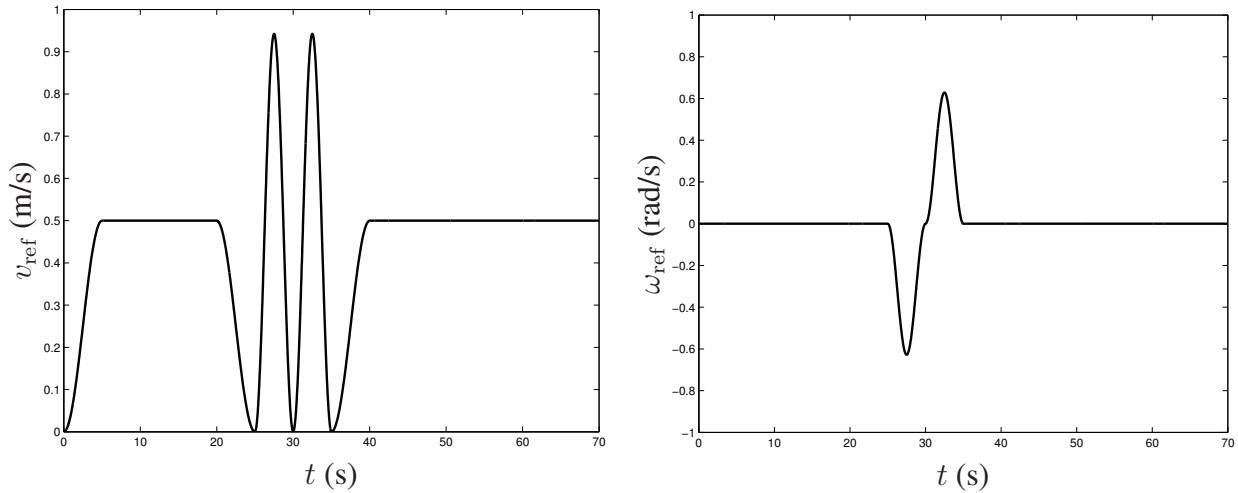


Figura 6.1 - Entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ que geram uma trajetória de referência em forma de “S”.

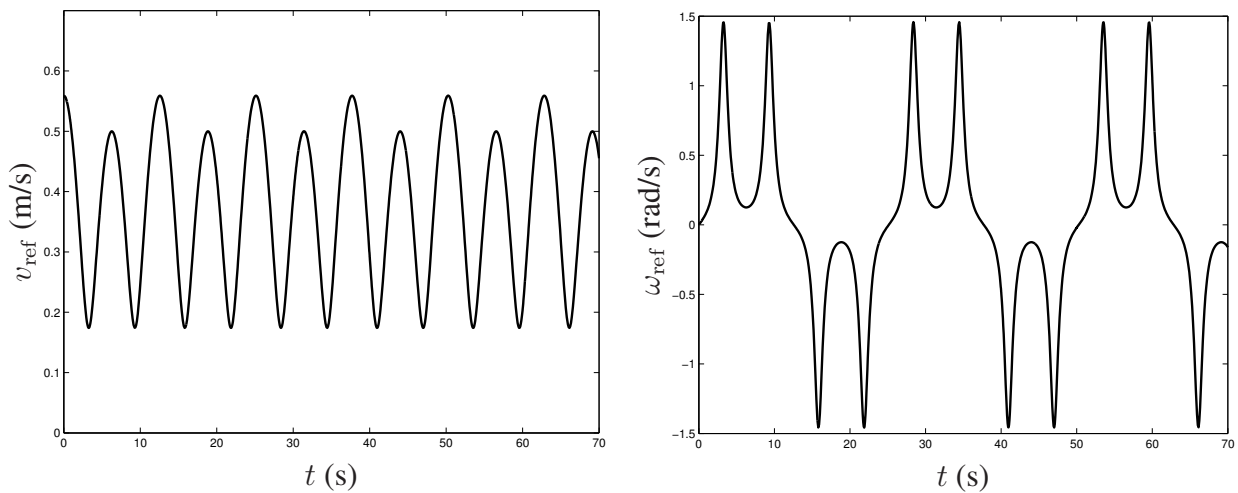


Figura 6.2 - Entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ que geram uma trajetória de referência em forma “8”..

A segunda trajetória de referência, apresentada em Oriolo et al. (2002b), é gerada a partir da integração da equação (3.13) com condição inicial dada por $q_{\text{ref}}(0) = (0, 0, \pi/6)^T$ e entradas de

referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ dadas por

$$\begin{aligned} v_{\text{ref}}(t) &= \sqrt{\dot{X}_{\text{ref}}^2(t) + \dot{Y}_{\text{ref}}^2(t)} \\ \omega_{\text{ref}}(t) &= \frac{\ddot{Y}_{\text{ref}}(t)\dot{X}_{\text{ref}}(t) - \ddot{X}_{\text{ref}}(t)\dot{Y}_{\text{ref}}(t)}{\dot{X}_{\text{ref}}^2(t) + \dot{Y}_{\text{ref}}^2(t)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

com $X_{\text{ref}}(t) = \sin(t/2)$ and $Y_{\text{ref}}(t) = \sin(t/4)$. A Figura 6.2 mostra a evolução temporal das entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ obtidas a partir de (6.2). Essa combinação de $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ gera uma trajetória de referência que possui forma de um “8”.

Note que as duas trajetórias de referência são geradas utilizando o mesmo modelo cinemático (3.13), mas possuem características diferentes devido aos perfis das entradas de referência $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$. As entradas de referência (6.1) apresentam poucas variações e são constantes em determinados intervalos de tempo, enquanto as entradas de referência (6.2) apresentam variações maiores ao longo do tempo. Note também que $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ são dadas por funções limitadas e que $v_{\text{ref}}(t)$ é sempre positiva.

Além de duas trajetórias de referência diferentes, dois perfis de deslizamentos são utilizados nas simulações. O primeiro perfil é caracterizado por funções constantes por partes dada por

$$\begin{aligned} 0 \text{ s} \leq t < 20 \text{ s} : \quad i_l &= 1/2 & \text{e} & \quad i_r = 0 \\ 20 \text{ s} \leq t < 30 \text{ s} : \quad i_l &= 0 & \text{e} & \quad i_r = 0 \\ 30 \text{ s} \leq t < 40 \text{ s} : \quad i_l &= 0 & \text{e} & \quad i_r = 3/5 \\ 40 \text{ s} \leq t < 50 \text{ s} : \quad i_l &= 1/3 & \text{e} & \quad i_r = 3/5 \\ 50 \text{ s} \leq t < 60 \text{ s} : \quad i_l &= 0 & \text{e} & \quad i_r = 0 \\ 60 \text{ s} \leq t : \quad i_l &= 0 & \text{e} & \quad i_r = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

A Figura 6.3 mostra a evolução temporal das taxas de deslizamento longitudinal i_l e i_r . Em geral, as taxas de deslizamento apresentam variações suaves ao longo do tempo. Entretanto, funções contínuas por partes são utilizadas para analisar as convergências das estimações e respostas dos controladores propostos.

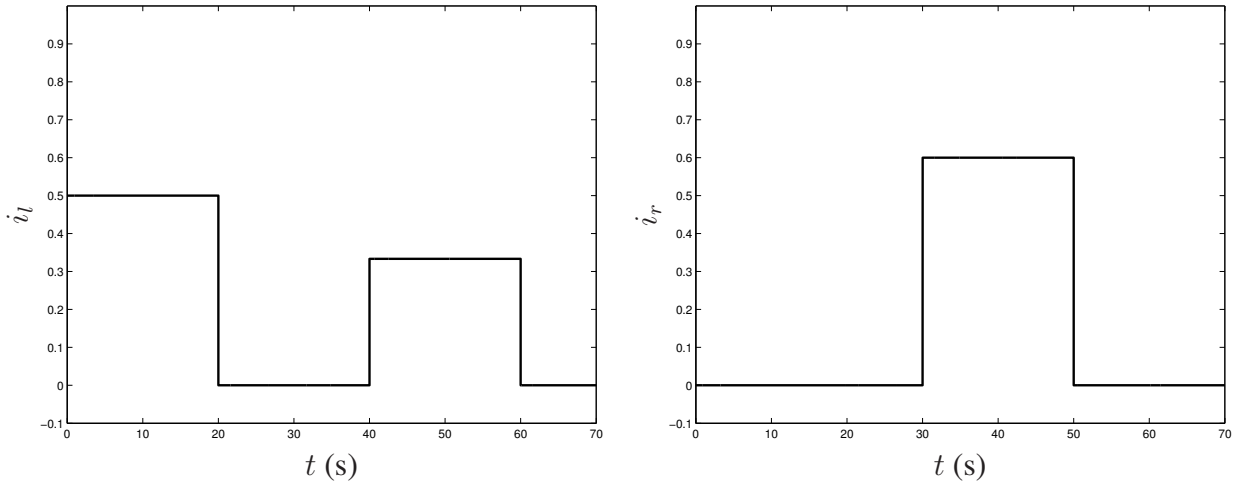


Figura 6.3 - Taxas de deslizamento longitudinal i_l e i_r dadas por funções contínuas por partes.

O segundo perfil é caracterizado por funções variantes no tempo dada por

$$\begin{aligned} i_l(t) &= 0.15 [1 - e^{-0.06t} \cos(0.6t)] \\ i_r(t) &= 0.7 [1 - e^{-0.05t} \sin^2(0.004t^2)] \end{aligned} \quad (6.4)$$

para $t \geq 0$. A Figura 6.4 mostra a evolução temporal das taxas de deslizamento longitudinal $i_l(t)$ e $i_r(t)$. Esse perfil, com variações maiores dadas nos instantes iniciais, é utilizado para analisar a robustez dos controladores propostos quando o robô começa a se movimentar.

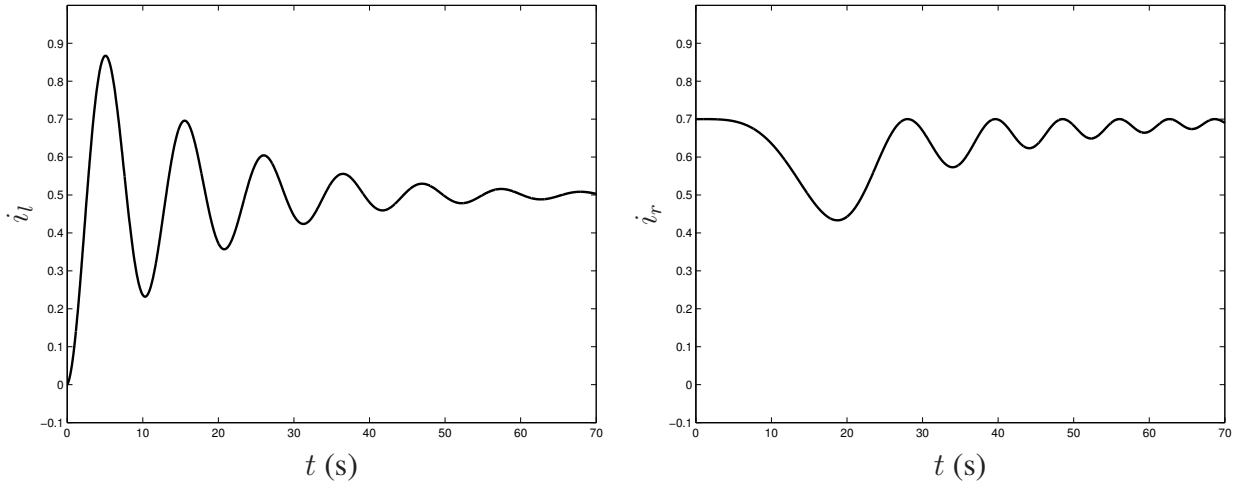


Figura 6.4 - Taxas de deslizamento longitudinal $i_l(t)$ e $i_r(t)$ dadas por funções variantes com o tempo.

A Tabela 6.1 mostra as configurações consideradas nas simulações dos controladores propostos. Note que a primeira coluna indica a simulação, a segunda coluna indica qual modelo foi

considerado no projeto do controlador, a terceira coluna define o perfil da trajetória de referência e a quarta coluna define o perfil de deslizamento. O robô com controlador adaptativo é submetido às condições de simulações numeradas de 1 a 5, enquanto as simulações de 6 a 10 referem-se às simulações do robô com controlador baseado em filtro. As condições adotadas na simulação 0 referem-se ao caso em que a convergência para zero dos erros de estimações dos parâmetros de deslizamento não são garantidas. A trajetória de referência gerada por (6.1) tem a forma de um “S” e a trajetória de referência gerada por (6.2), de um “8”. Os perfis de deslizamentos definidos por constante por partes e variante no tempo são dados por (6.3) e (6.4), respectivamente.

Simulação	Modelo	Trajетória de Referência	Deslizamentos
0	cinemático	caso especial	nulos
1	cinemático	forma de “S”	constantes por partes
2	cinemático	forma de “S”	variantes no tempo
3	cinemático	forma de “8”	constantes por partes
4	dinâmico	forma de “S”	constantes por partes
5	dinâmico	forma de “8”	constantes por partes
6	cinemático	forma de “S”	constantes por partes
7	cinemático	forma de “S”	variantes no tempo
8	cinemático	forma de “8”	constantes por partes
9	dinâmico	forma de “S”	constantes por partes
10	dinâmico	forma de “8”	constantes por partes

Tabela 6.1 - Configurações adotadas nas simulações dos controladores adaptativo e baseado no filtro.

6.2 Simulações computacionais dos controladores adaptativos

As estratégias de controle adaptativas, usando os modelos cinemático e dinâmico, apresentadas respectivamente nas Seções 4.2 e 4.3, são analisadas numericamente utilizando-se o software MATLAB®. As soluções dos sistemas em malha fechada, representados nas Figuras 4.1 e 4.2, são obtidas utilizando-se a função *ode23s* do MATLAB® com tolerância relativa de 10^{-4} e tolerância absoluta de 10^{-7} . O tempo total adotado para as simulações computacionais é $t = 70.0$ s. Os valores numéricos apresentados nesta tese seguem a representação do software MATLAB® que utiliza ponto para denotar o separador ou marcador decimal.

Os parâmetros físicos adotados para os modelos cinemático e dinâmico do robô com desliza-

mento longitudinal das rodas, obtidos de Ryu e Agrawal (2011), são $b = 0.1624$ m, $r = 0.0825$ m, $m = 18.2$ kg e $J = 0.39375$ kg.m².

6.2.1 Controlador adaptativo usando modelo cinemático

Esta seção apresenta as simulações do robô com deslizamento utilizando o controlador adaptativo baseado no modelo cinemático. O desempenho do controlador cinemático adaptativo proposto na Seção 4.2 é comparado com o controlador cinemático sem estimador proposto por Kim e Oh (1998), apresentado na Seção 3.3. Os ganhos de ambos os controladores são otimizados com relação à mesma trajetória de referência e à mesma condição de deslizamento. A trajetória de referência e o perfil de deslizamento utilizados na otimização são os mesmos da configuração de Simulação 1, apresentado na Tabela 6.1.

Os ganhos do controlador adaptativo e do controlador sem estimador são calculados utilizando-se a função *ga* do pacote algoritmo genético do MATLAB®. Utilizam-se as configurações-padrões do algoritmo, alterando o tamanho da população de 20 para 60 e alterando a função de mutação utilizada para lidar com valores escalonados de 0.1 em 0.1. A função a ser minimizada é dada por

$$\mathcal{F} = \|e_1\|_2^2 + \|e_2\|_2^2 + \|e_3\|_2^2 + 5\|\omega_l\|_2^2 + 5\|\omega_r\|_2^2 \quad (6.5)$$

onde e_1 , e_2 e e_3 são os erros de postura e ω_l e ω_r são as entradas de controle do modelo cinemático. Os pesos maiores dados às entradas de controle ω_l e ω_r são utilizados para minimizar possíveis limitações de operação do atuador, como, por exemplo, saturações, tempo de resposta, etc.

A função (6.5) é calculada a cada simulação do sistema em malha fechada (controlador + robô) com condições iniciais do robô dadas por $q(0) = (1/2, -1/2, 0)^T$. Os ganhos obtidos para o controlador sem estimador são $k_1 = 1$, $k_2 = 21$ e $k_3 = 2$. Os ganhos obtidos para o controlador adaptativo proposto são $k_1 = 1$, $k_2 = 21$ e $k_3 = 1$, enquanto os ganhos obtidos para a lei de adaptação são $\gamma_1 = 3$ e $\gamma_2 = 14$. Inúmeras simulações realizadas, com perfis de deslizamentos diferentes, mostraram que os ganhos obtidos para lei de adaptação estão fortemente relacionados com

o perfil de deslizamento ao qual o robô está submetido. Dessa forma, para ter ganhos adequados à maior quantidade possível de perfis de deslizamentos, os ganhos obtidos para a lei de adaptação são ajustados para $\gamma_1 = 7$ e $\gamma_2 = 7$.

Simulação 0: trajetória de referência especial e deslizamentos nulos

A simulação das Figuras 6.5 e 6.6 tem como objetivo mostrar um caso especial em que não se pode garantir a convergência dos erros de estimação para zero. Na Seção 4.2 mostrou-se que o erro de postura converge para zero. Entretanto, a convergência dos erros de estimação $\tilde{a}_l$ e $\tilde{a}_r$ para zero não é garantida se $v_1 := 2v_{\text{ref}}(t) + b\omega_{\text{ref}}(t) = 0$ e $v_2 := 2v_{\text{ref}}(t) - b\omega_{\text{ref}}(t) = 0$. De fato, se $v_1(t) = 0$ ou $v_2(t) = 0$ um erro de estimação pode ocorrer. A Figura 6.5 mostra o erro aumentado e_a obtido usando o controlador adaptativo cinemático para $v_1(t) = 0$, isto é, $2v_{\text{ref}}(t) = -b\omega_{\text{ref}}(t)$ com $\omega_{\text{ref}}(t) = 1.5 - \sin(0.4t)$. Claramente os erros de estimação $\tilde{a}_r$ não converge para zero. Como mostrado na Figura 6.6, resultado similar é encontrado para $v_2(t) = 0$, isto é, $2v_{\text{ref}}(t) = b\omega_{\text{ref}}(t)$ com $\omega_{\text{ref}}(t) = -1.5 + \sin(0.4t)$. Para esse caso, o erro de estimação $\tilde{a}_l$ não converge para zero. Considerou-se nessas simulações que o robô não está submetido a deslizamentos das rodas, para mostrar que mesmo nesse caso mais simples a convergência dos erros de estimação não é garantida.

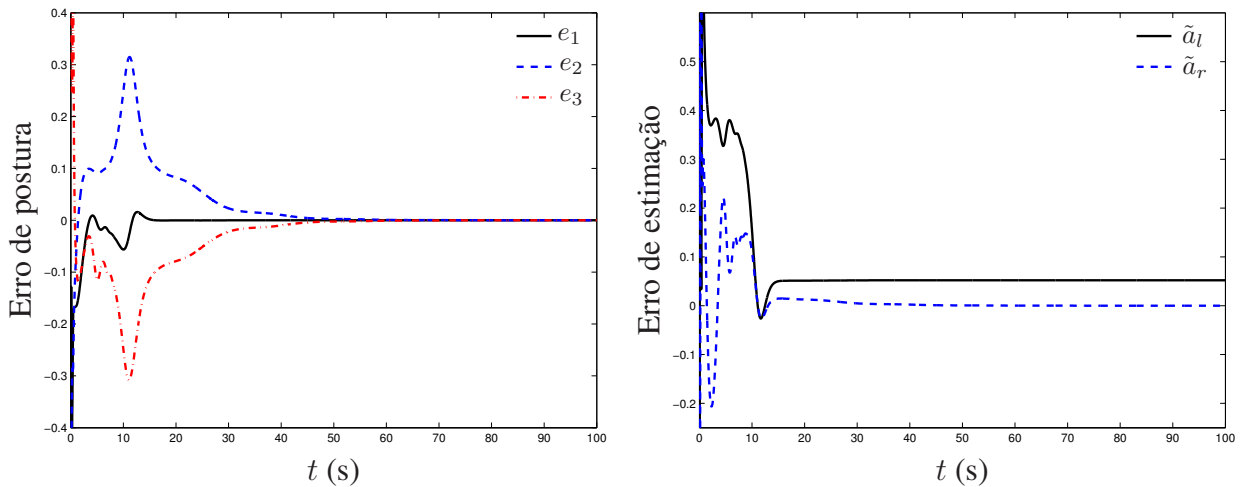


Figura 6.5 - Erro aumentado $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T$ obtido usando o controlador adaptativo para $2v_{\text{ref}}(t) = b\omega_{\text{ref}}(t)$ com $\omega_{\text{ref}}(t) = 1.5 - \sin(0.4t)$.

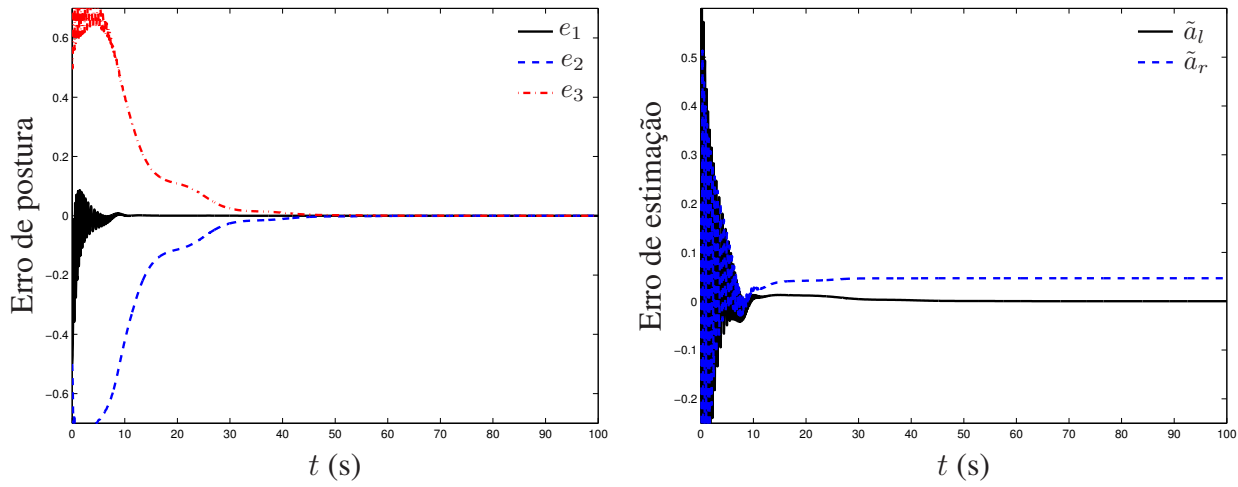


Figura 6.6 - Erro aumentado $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T$ obtido usando o controlador adaptativo para $2v_{\text{ref}}(t) = -b\omega_{\text{ref}}(t)$ com $\omega_{\text{ref}}(t) = -1.5 + \sin(0.4t)$.

Simulação 1: trajetória de referência em forma de “S” e deslizamentos constantes por partes

A condições de Simulação 1 respeitam as hipóteses, sob as entradas de referência e parâmetros de deslizamento, adotadas no projeto do controlador adaptativo. Essa simulação é realizada para que o desempenho do controlador adaptativo possa ser verificado em relação à velocidade de convergência dos erros de postura e erros de estimação dos parâmetros de deslizamentos desconhecidos.

A Figura 6.7 mostra uma comparação entre as trajetórias do robô obtidas utilizando o controlador sem estimador (CS) proposto por Kim e Oh (1998) e o controlador adaptativo (CA) proposto na Seção 4.2 em relação à trajetória de referência (TR) e perfil de deslizamento definidos pela configuração de Simulação 1. A trajetória de referência, a trajetória do robô com controlador sem estimador e a trajetória do robô com controlador adaptativo são representadas pelas linhas ponto-tracejada, tracejada e sólida, respectivamente. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0)^T$. A condição inicial do robô é representada na Figura 6.7 pelo símbolo “•”. Observe que a Figura 6.7(a) mostra a visão geral da trajetória realizada pelo robô, enquanto a Figura 6.7(b) mostra uma ampliação da região da curva, cuja forma se assemelha a um “S”. Note que o robô com controlador adaptativo segue a trajetória de referência, mesmo durante a ocorrência de deslizamento, enquanto o robô com controlador sem estimador não consegue manter a trajetória nos instantes de tempo em que ocorre deslizamento

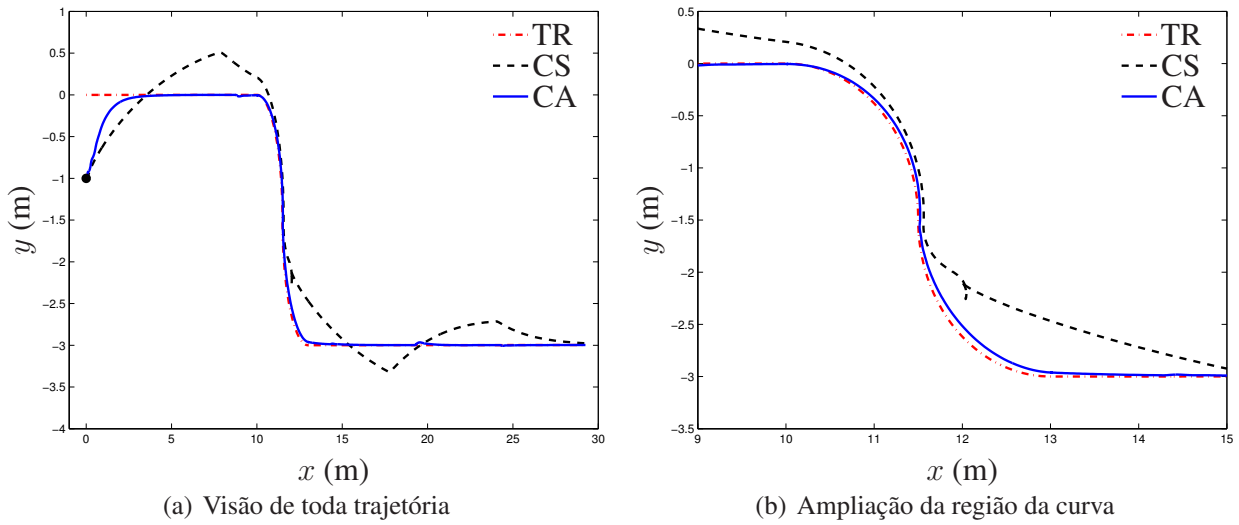


Figura 6.7 - Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “S” para deslizamentos constantes por partes.

das rodas. Observe também que o robô com controlador sem estimador tende a voltar a seguir a trajetória de referência após cessado o deslizamento, porém essa convergência pode não ocorrer, como será verificado na Simulação 3.

A Figura 6.8 mostra uma comparação entre os erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos utilizando o controlador sem estimador (CS) e o controlador adaptativo (CA). Os erros obtidos pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. A maior diferença entre os resultados obtidos pelos dois controladores ocorre no erro e_1 , ou seja, na direção em que o deslizamento ocorre. Entretanto, observe que o deslizamento longitudinal das rodas, que não é compensado pelo controlador sem estimador, também provoca erros e_2 e e_3 .

A Figura 6.9 mostra os valores estimados $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$ em relação aos valores reais das taxas de deslizamento i_l e i_r . Os valores reais e estimados das taxas de deslizamento são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Embora os valores utilizados pela lei de controle sejam os valores estimados $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$, optou-se por mostrar os valores estimados das taxas de deslizamento $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$. Note que parâmetros de deslizamento a_l e a_r com valores iguais a um correspondem a taxas de deslizamento iguais a zero, ou seja, ausência de

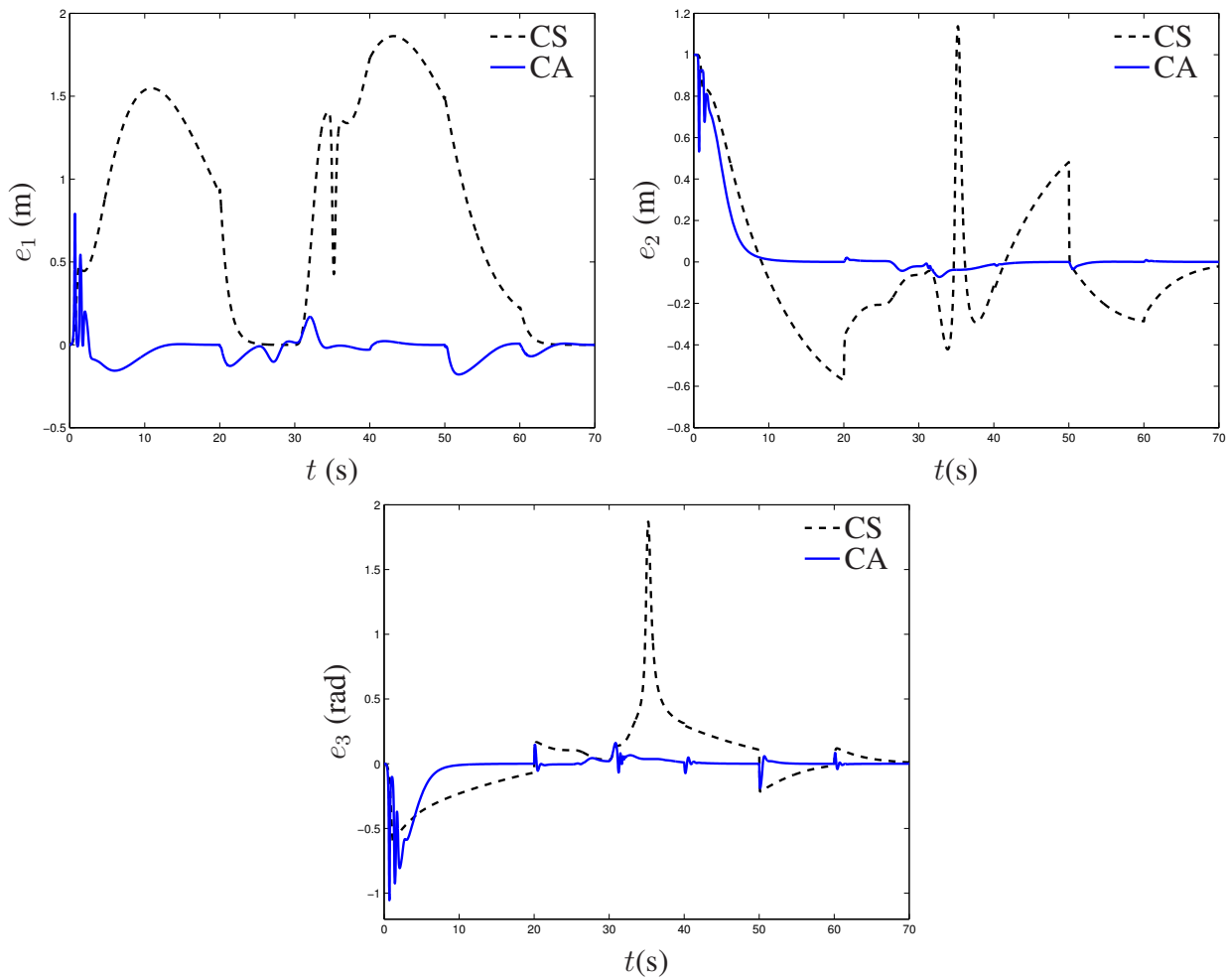


Figura 6.8 - Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 1.

deslizamento. As descontinuidades nos perfis dos deslizamentos reais provocam alterações bruscas na dinâmica do robô. Essas variações bruscas dos deslizamentos não devem ser comuns nos robôs reais. Entretanto, observa-se que a lei de adaptação consegue estimar os valores dos deslizamentos mesmo quando variações bruscas ocorrem.

As Figuras 6.10(a) e 6.10(b) mostram os sinais de entrada de controle gerados pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo, respectivamente. Os sinais de controle são dados pelas velocidades angulares das rodas direita e esquerda, representadas pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Os valores máximos dos sinais de controle ω_l e ω_r gerados pelo controlador sem estimador, dados pela norma infinita, são 24.6 rad/s e 26.2 rad/s, respectivamente, enquanto os valores máximos dos sinais de controle ω_l e ω_r gerados pelo controlador adaptativo, dados pela norma infinita, são 24.4 rad/s e 32.9 rad/s, respectivamente.

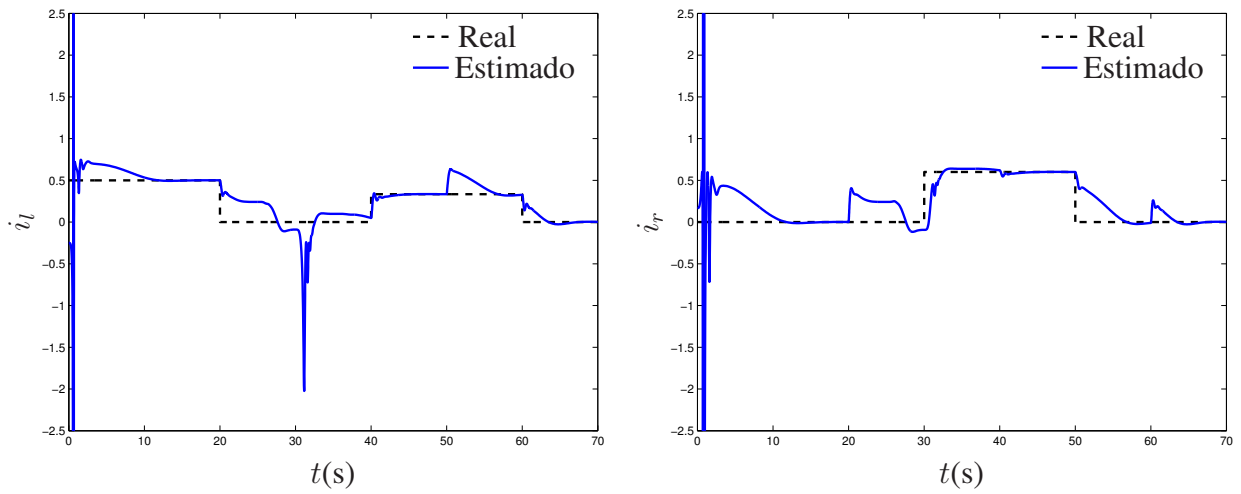


Figura 6.9 - Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 1.

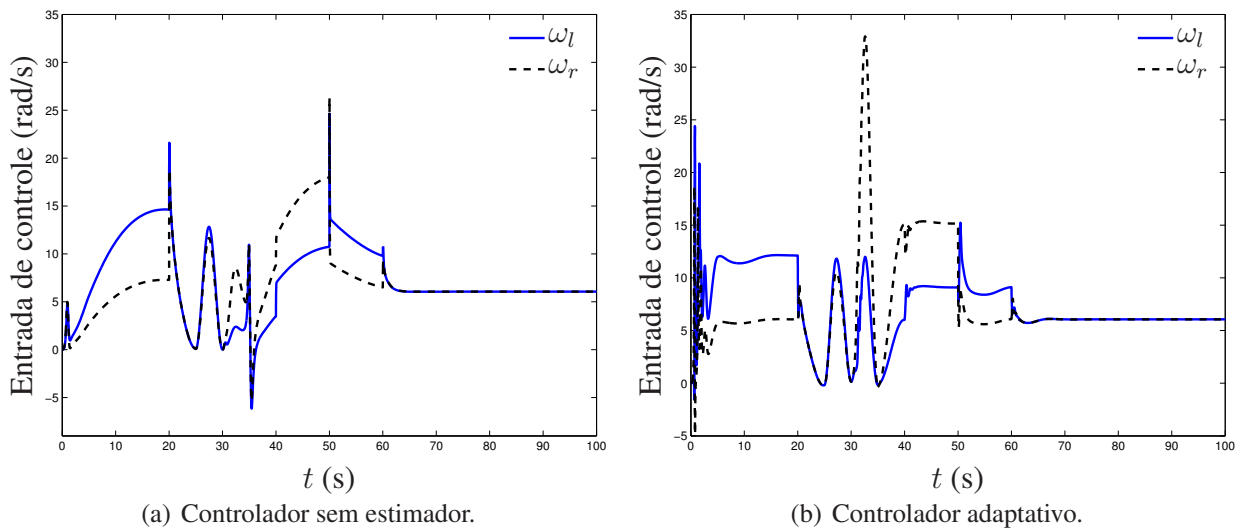


Figura 6.10 - Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, ω_r e ω_l , dadas em rad/s, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 1.

Simulação 2: trajetória de referência em forma de “S” e deslizamentos variantes no tempo

A condições de Simulação 2 são utilizadas para verificar a robustez do controlador adaptativo com relação a taxas de deslizamento mais reais. Note que o controlador adaptativo foi projetado sob hipótese de que os deslizamentos longitudinais das rodas são constantes.

A Figura 6.11 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.7. Entretanto, nessa com-

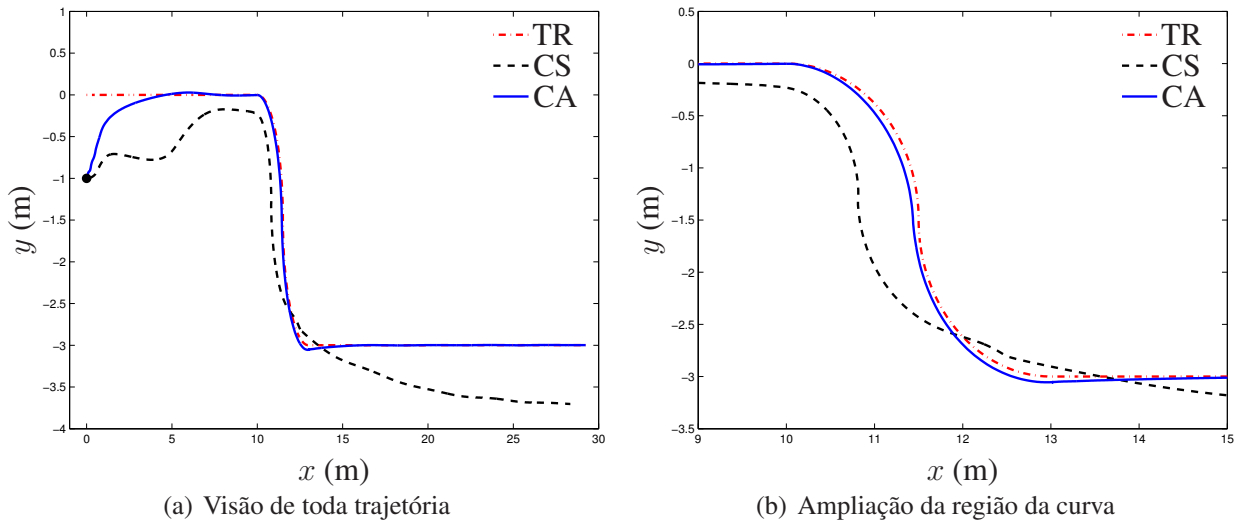


Figura 6.11 - Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “S” para deslizamentos variantes no tempo.

paração assume-se que os robôs com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) estão submetidos às condições da configuração de Simulação 2. A trajetória de referência (TR), a trajetória do robô com controlador sem estimador e a trajetória do robô com controlador adaptativo são representadas pelas linhas ponto-tracejada, tracejada e sólida, respectivamente. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0)^T$. A condição inicial é representada pelo símbolo “•”. Observa-se que o robô com controlador sem estimador não consegue seguir a trajetória de referência em nenhum momento, enquanto o robô com controlador adaptativo segue a trajetória de referência com um erro muito pequeno.

A Figura 6.12 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.8. Os erros obtidos pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Embora o projeto do controlador adaptativo não garanta a convergência do erro de postura para zero no caso de deslizamento variante no tempo, observa-se na Figura 6.12 que os erros tendem a zero; o mesmo não ocorre com o erro obtido pelo controlador sem estimador.

A Figura 6.13 mostra os valores estimados $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$ em relação aos valores reais das taxas de deslizamento i_l e i_r . Os valores reais e estimados das taxas de deslizamento são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$.

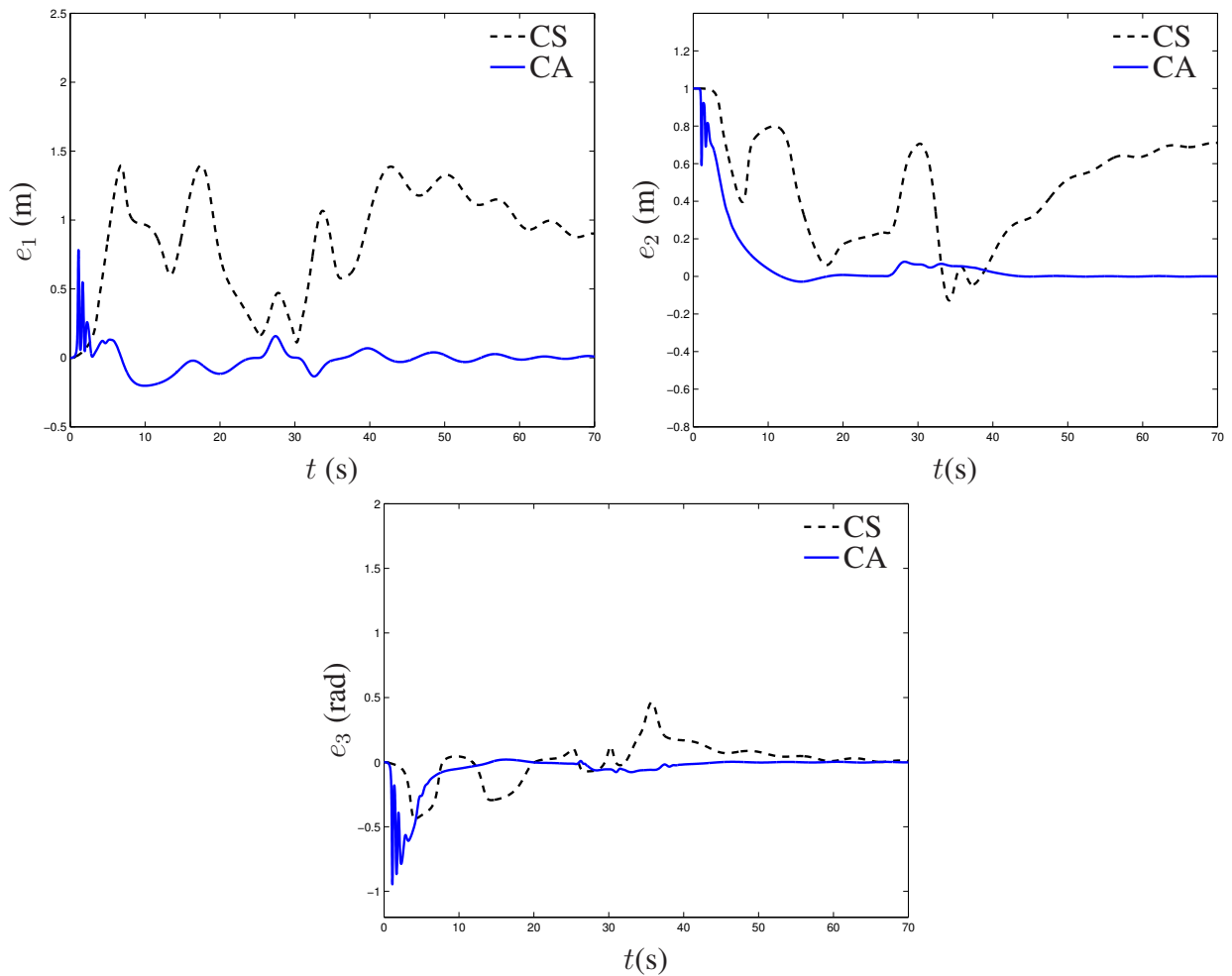


Figura 6.12 - Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dada pela configuração de Simulação 2.

As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$. Observe que os deslizamentos estimados não convergem para os valores reais de deslizamento.

As Figuras 6.14(a) e 6.14(b) mostram os sinais de entrada gerados respectivamente pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo. Os sinais de controle são dados pelas velocidades angulares das rodas direita e esquerda, representadas pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Os valores máximos dos sinais de controle ω_l e ω_r gerados pelo controlador sem estimador, dados pela norma infinita, são 24.9 rad/s e 28.0 rad/s, respectivamente, enquanto os valores máximos dos sinais de controle ω_l e ω_r gerados pelo controlador adaptativo, dados pela norma infinita, são 40.6 rad/s e 36.4 rad/s, respectivamente.

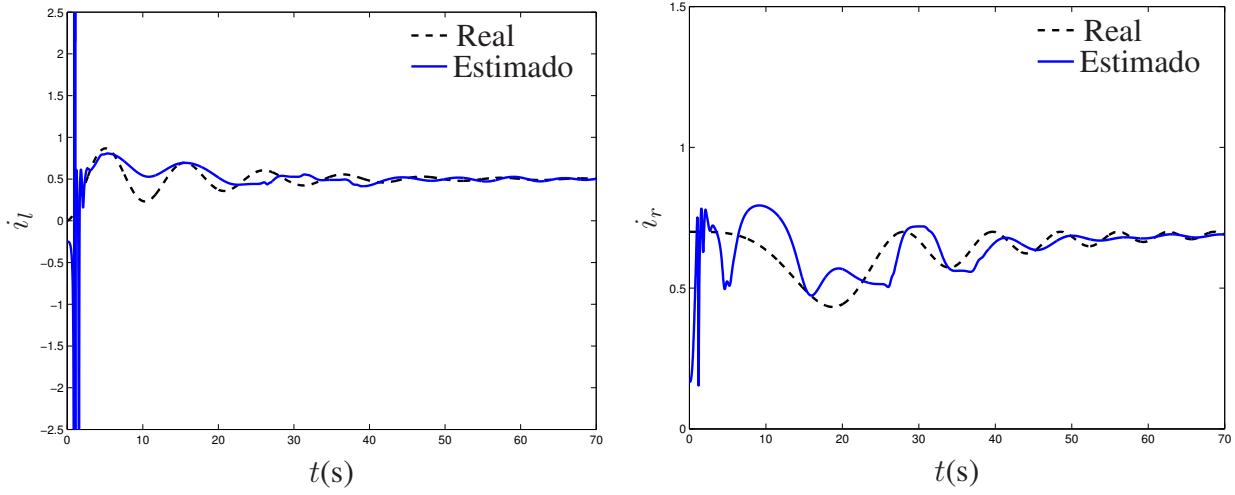


Figura 6.13 - Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 2.

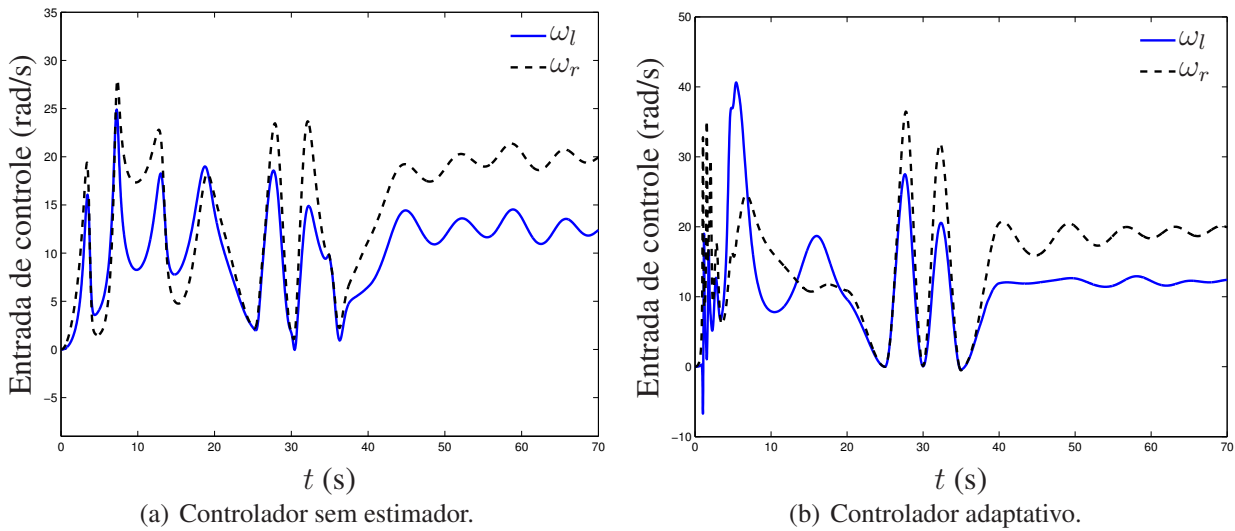


Figura 6.14 - Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, ω_r e ω_l , dadas em rad/s, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 2.

Simulação 3: trajetória de referência em forma de “8” e deslizamentos constantes por partes

A condições de Simulação 3 são utilizadas para verificar a robustez do controlador adaptativo com relação a entradas de referência que possuem taxas de variações altas.

A Figura 6.15 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.7. Entretanto, nessa comparação assume-se que os robôs com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo

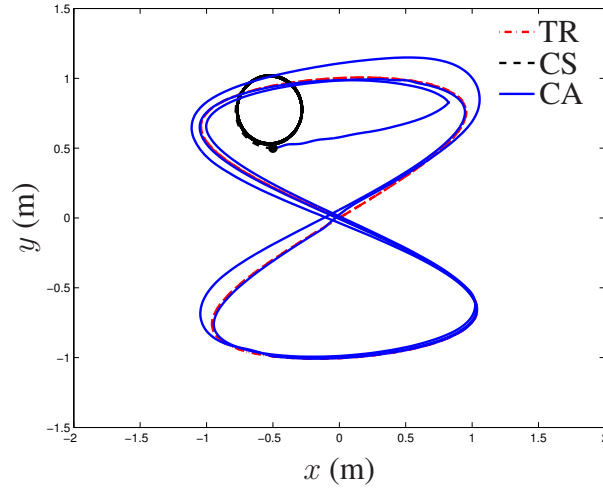


Figura 6.15 - Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “8” para deslizamentos constantes por partes.

(CA) estão submetidos às condições da configuração de Simulação 3. A trajetória de referência (TR), a trajetória do robô com controlador sem estimador e a trajetória do robô com controlador adaptativo são representadas pelas linhas ponto-tracejada, tracejada e sólida, respectivamente. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (-1/2, 1/2, 0)^T$. A condição inicial é representada pelo símbolo “•”. Note que, embora de forma lenta, o robô com controlador adaptativo consegue seguir a trajetória de referência, enquanto o robô com controlador sem estimador, logo nos instantes iniciais, se perde da trajetória de referência. Esse comportamento pode ser melhor verificado através da análise do erro de postura $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ mostrado na Figura 6.16.

Os erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos pelo controlador sem estimador (CS) e pelo controlador adaptativo (CA) são representados na Figura 6.16 pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. As figuras do lado direito e do lado esquerdo mostram o erro de postura para $0 \leq t \leq 70$ s e $0 \leq t \leq 0.07$ s, respectivamente. Observe que os erros de postura obtidos pelo controlador adaptativo apresentam picos em instantes de tempo em que ocorre as descontinuidades do perfil de deslizamento. Observe também que o erro de postura e_3 se torna instável em $t \approx 0.04$ s.

A Figura 6.17 mostra os valores estimados $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$ em relação aos valores reais das taxas de deslizamento i_l e i_r . Os valores reais e estimados das taxas de deslizamento são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$.

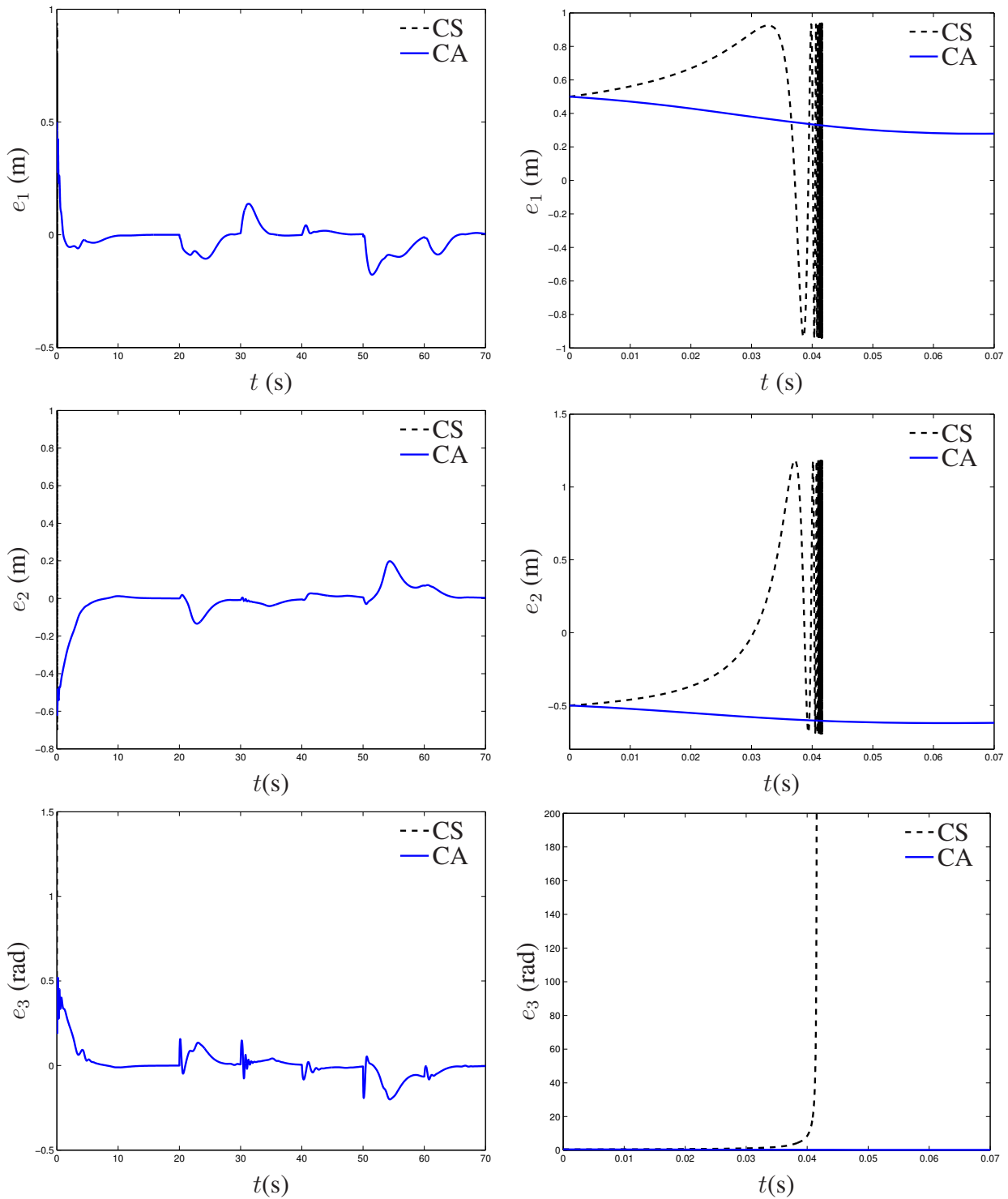


Figura 6.16 - Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 3.

As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$. Observe que os deslizamento estimados convergem para os valores reais de deslizamento mesmo para uma

trajetória de referência que varia o tempo todo.

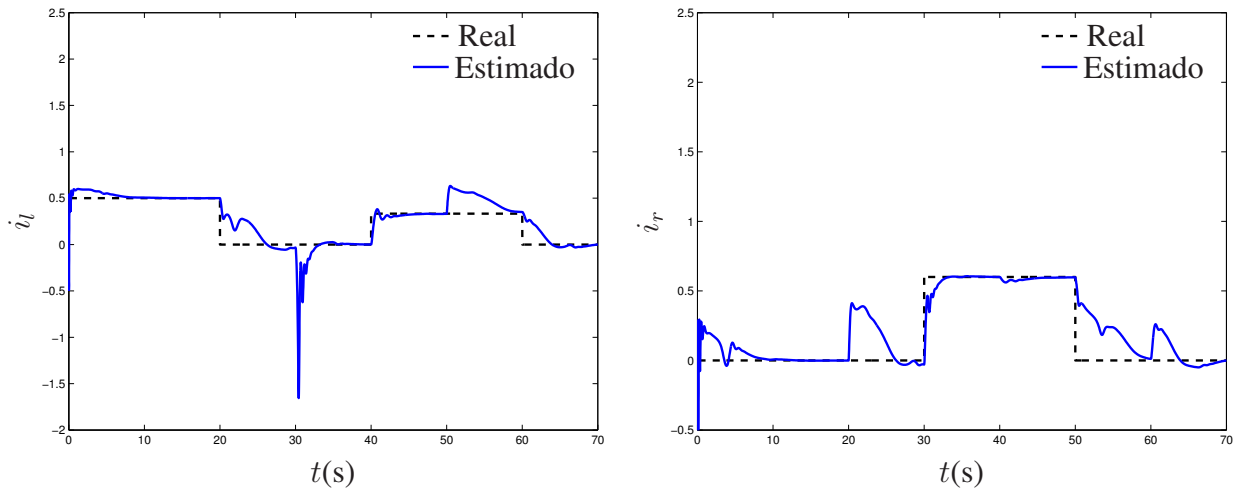


Figura 6.17 - Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os valores estimados pela lei de adaptação para perfis de deslizamentos constantes por partes.

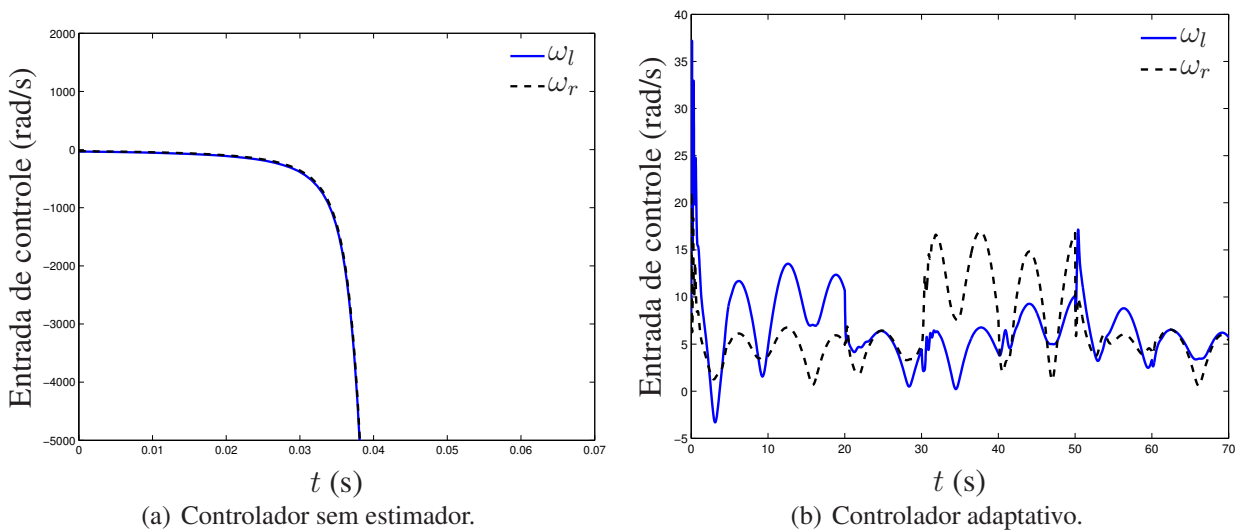


Figura 6.18 - Velocidades angulares das rodas direita e esquerda, ω_r e ω_l , dadas em rad/s, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 3.

As Figuras 6.18(a) e 6.18(b) mostram os sinais de entrada gerados respectivamente pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo. Os sinais de controle são dados pelas velocidades angulares das rodas direita e esquerda representadas pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Os valores máximos dos sinais de controle ω_l e ω_r gerados pelo controlador adaptativo, dados pela norma infinita, são 37.1 rad/s e 21.1 rad/s, respectivamente, enquanto os sinais

de controle ω_l e ω_r gerados pelo controlador sem estimador divergem em $t \approx 0.04$ s.

6.2.2 Controlador adaptativo usando modelo dinâmico

Esta seção apresenta as simulações do robô com deslizamento utilizando o controlador adaptativo baseado no modelo dinâmico. O desempenho do controlador adaptativo proposto na Seção 4.3 é comparado com o sistema de controlador sem estimador proposto na Seção 3.3. Os ganhos de ambos os controladores são otimizados com relação à mesma trajetória de referência e à mesma condição de deslizamento. A trajetória de referência e o perfil de deslizamento utilizados na otimização são os mesmos da configuração de Simulação 1 (Tabela 6.1).

Os ganhos do controlador adaptativo e controlador sem estimador são calculados utilizando-se a função *ga* do pacote algoritmo genético do MATLAB®. Utilizam-se as configurações-padrões do algoritmo, alterando o tamanho da população de 20 para 60 e alterando a função de mutação utilizada para lidar com valores escalonados de 0.1 em 0.1. A função a ser minimizada é dada por

$$\mathcal{F} = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_3\|^2 + \|e_4\|^2 + \|e_5\|^2 + 5\|F_l\|^2 + 5\|F_r\|^2 \quad (6.6)$$

onde e_1 , e_2 e e_3 são os erros de postura, e_4 e e_5 são os erros de velocidade e F_l e F_r são as entradas de controle. Os pesos maiores dados às entradas de controle ω_l e ω_r são utilizados para minimizar possíveis limitações de operação do atuador, como, por exemplo, saturações, tempo de resposta, etc.

A função (6.6) é calculada a cada simulação do sistema em malha fechada (controlador + robô) com condições iniciais do robô dadas por $q(0) = (1/2, -1/2, 0, 0, 0)^T$. Os ganhos obtidos para o controlador sem estimador são $k_1 = 1$, $k_2 = 17$, $k_3 = 1$, $k_4 = 49$ e $k_5 = 49$. Os ganhos obtidos para o controlador adaptativo proposto são $k_1 = 1$, $k_2 = 30$, $k_3 = 0.1$, $k_4 = 15$ e $k_5 = 15$, enquanto os ganhos obtidos para a lei de adaptação são $\gamma_1 = 1$ e $\gamma_2 = 8$. Entretanto, para ter ganhos adequados à maior quantidade possível de perfis de deslizamentos, os ganhos obtidos para a lei de adaptação são ajustadas para $\gamma_1 = 3$ e $\gamma_2 = 3$.

Simulação 4: trajetória em forma de “S” e deslizamentos constantes por partes

A condições de Simulação 4 são as mesmas utilizadas na Simulação 1, com a diferença que o controlador adaptativo testado é projetado com base no modelo dinâmico e fornece forças de propulsões aplicadas as rodas como entrada de controle.

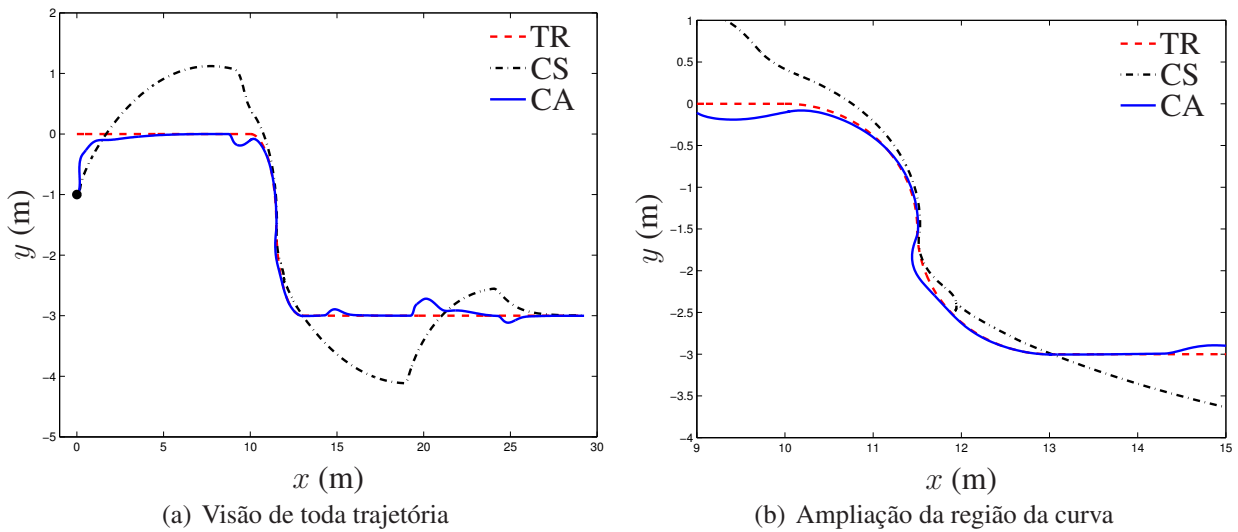


Figura 6.19 - Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “S” para deslizamentos constantes por partes.

A Figura 6.19 mostra uma comparação entre as trajetórias do robô obtidas utilizando o controlador sem estimador (CS) proposto na Seção 3.4 e o controlador adaptativo (CA) proposto na Seção 4.3 em relação a trajetória de referência (TR) e perfil de deslizamento definidos pela configuração de Simulação 4. A trajetória de referência, a trajetória do robô com controlador sem estimador e a trajetória do robô com controlador adaptativo são representadas respectivamente pelas linhas ponto-tracejada, tracejada e sólida. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0, 0, 0)^T$. A condição inicial do robô é representada na Figura 6.19 pelo símbolo “•”. Observe que a Figura 6.19(a) mostra a visão geral da trajetória realizada pelo robô, enquanto a Figura 6.19(b) mostra uma ampliação da região da curva, cuja forma se assemelha a um “S”. Note que o robô com controlador adaptativo segue a trajetória de referência, mesmo durante a ocorrência de deslizamento, enquanto o robô com controlador sem estimador não consegue manter a trajetória nos instantes de tempo em que ocorre deslizamento das

rodas.

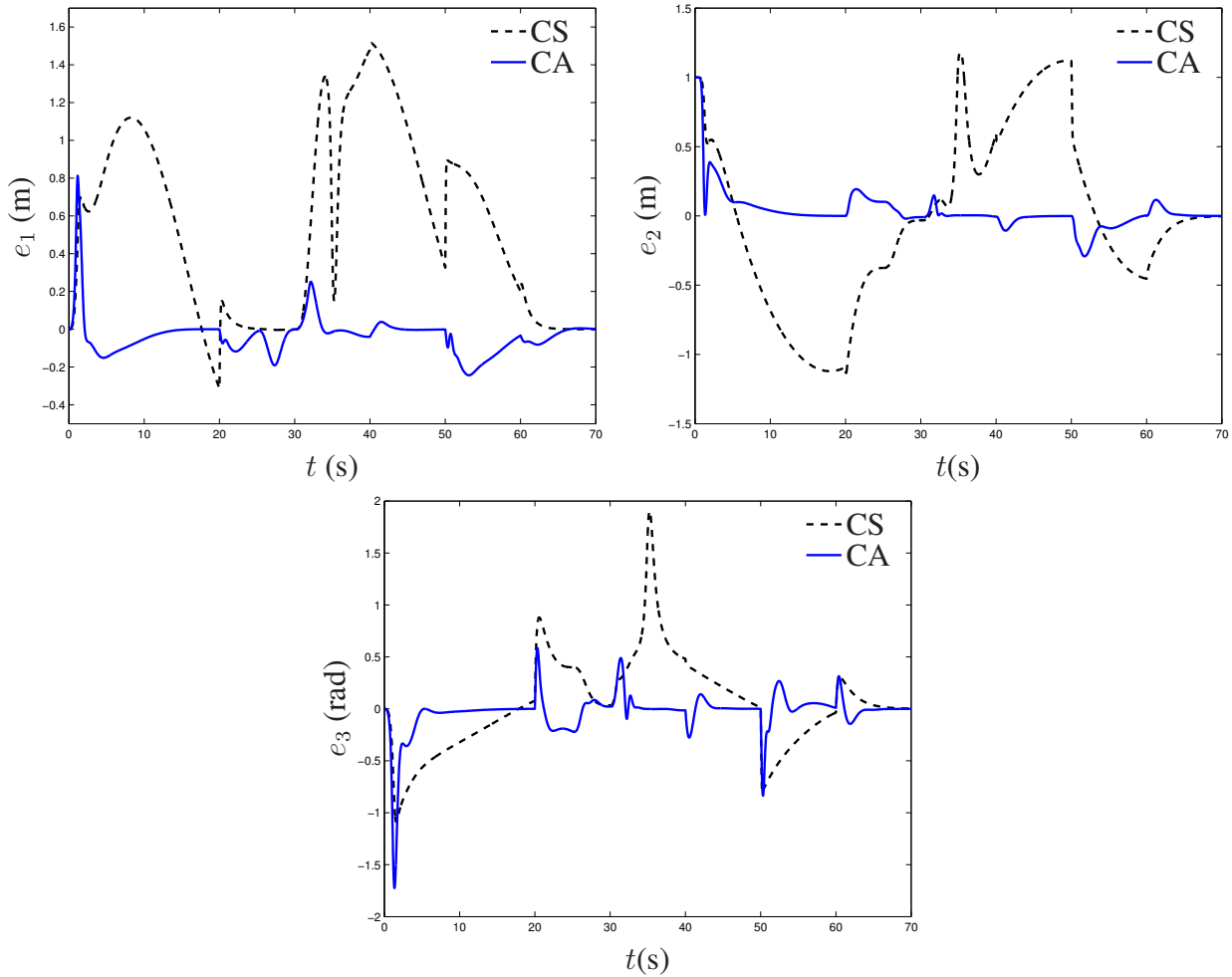


Figura 6.20 - Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 4.

A Figura 6.20 mostra uma comparação entre os erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos utilizando o controlador sem estimador (CS) e o controlador adaptativo (CA). Os erros obtidos pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. A maior diferença entre os resultados obtidos pelos dois controladores ocorre no erro e_1 , ou seja, na direção em que o deslizamento ocorre. Entretanto, observe que o deslizamento longitudinal também provoca erros no deslocamento lateral e_2 e orientação e_3 do robô.

Diferentemente do projeto do controlador cinemático, o projeto do controlador baseado no modelo dinâmico utiliza os erros de velocidade e_4 e e_5 dados em rad/s. A Figura 6.21 mostra os erros de velocidade e_4 e e_5 obtidos utilizando o controlador sem estimador (CS) e o controlador adaptativo (CA). Os erros obtidos pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo

são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente.

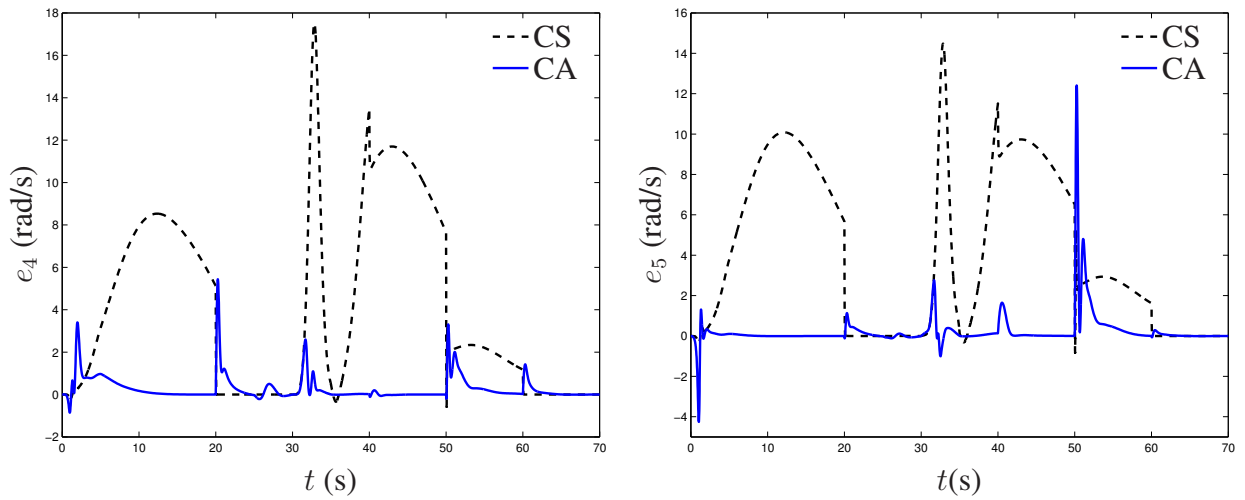


Figura 6.21 - Erros de velocidade e_4 e e_5 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 4.

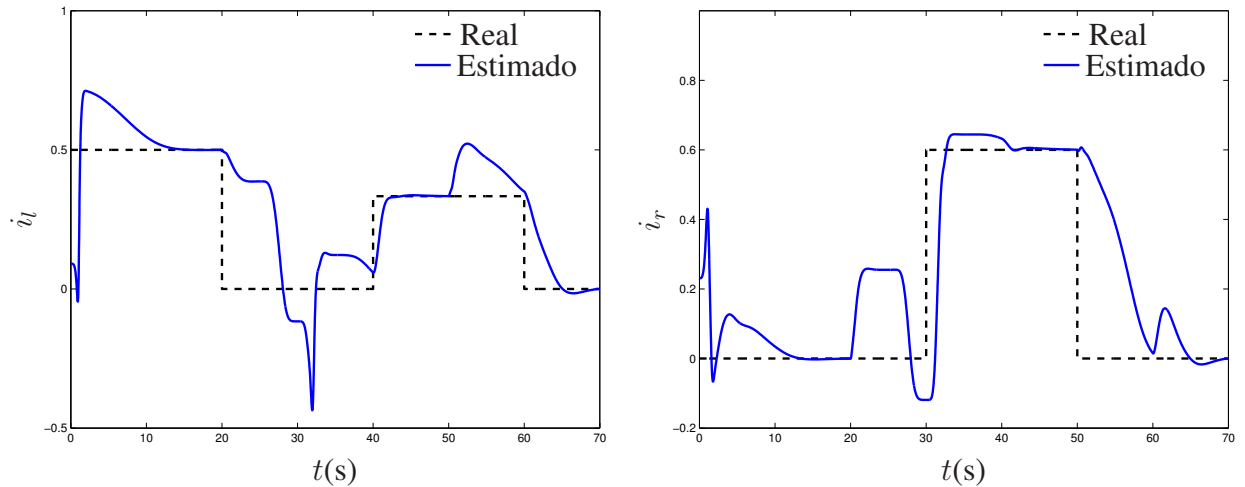


Figura 6.22 - Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 4.

A Figura 6.22 mostra os valores estimados $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$ em relação aos valores reais das taxas de deslizamento i_l e i_r . Os valores reais e estimados das taxas de deslizamento são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento, utilizados pelo controlador, são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 0$ e $\hat{a}_r(0) = 0$. Note que a lei de adaptação consegue estimar os valores dos deslizamentos. Note

também que a convergência de estimação é suficientemente rápida mesmo para variações bruscas dos deslizamentos.

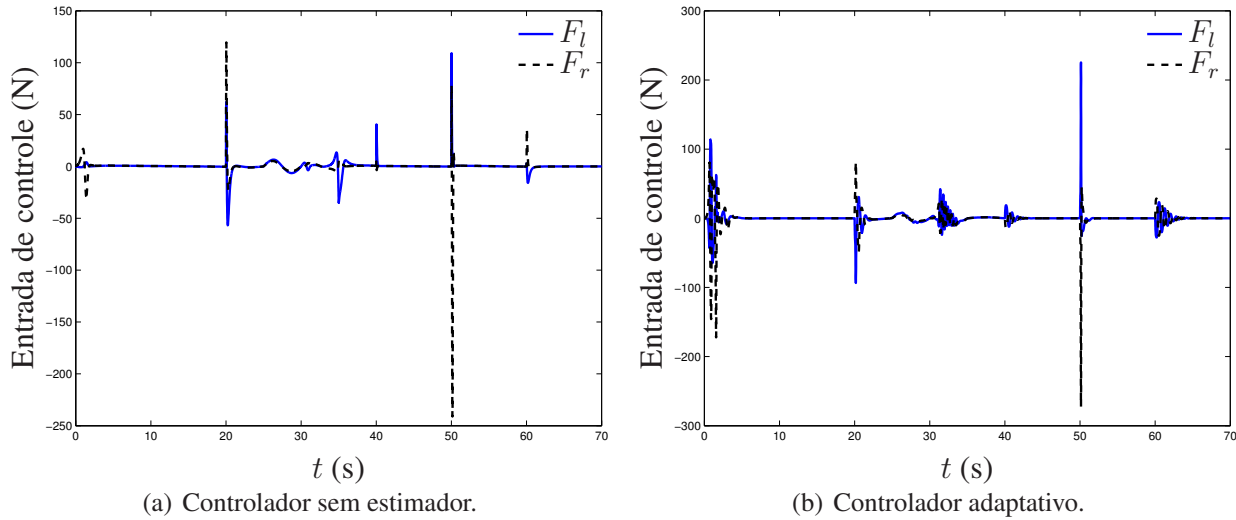


Figura 6.23 - Forças de propulsão aplicadas no centro das rodas direita e esquerda, F_l e F_r , dadas em N, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 4.

As Figuras 6.23(a) e 6.23(b) mostram os sinais de entrada de controle gerados pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo, respectivamente. Os sinais de controle são dados pelas forças de propulsão aplicadas no centro das rodas direita e esquerda. Essas forças são representadas pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Os valores máximos dos sinais de controle F_l e F_r gerados pelo controlador sem estimador, dados pela norma infinita, são 109.1 N e 241.1 N, respectivamente, enquanto os valores máximos dos sinais de controle F_l e F_r gerados pelo controlador adaptativo, dados pela norma infinita, são 225.3 N e 272.4 N, respectivamente. Note que picos ocorrem somente nos instantes de tempo em que os deslizamentos sofrem variações bruscas.

Simulação 5: trajetória em forma de “8” e deslizamentos constantes por partes

A condições de Simulação 5 são utilizadas para verificar a robustez do controlador adaptativo com relação a entradas de referência que possuem taxas de variações altas.

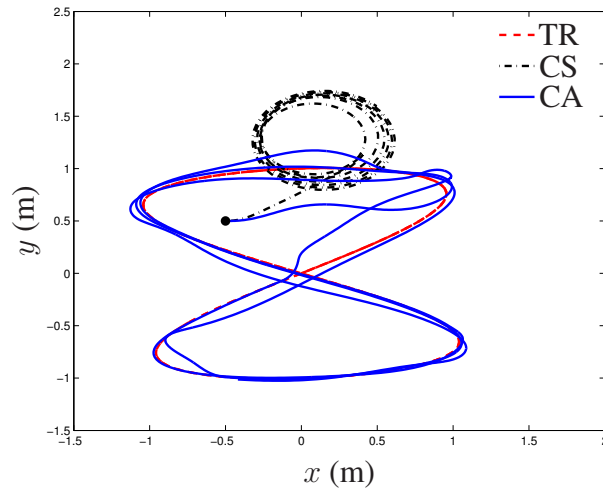


Figura 6.24 - Comparação das trajetórias realizadas pelo robô com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) em relação a trajetória de referência (TR) em forma de “8” para deslizamento constante por partes.

A Figura 6.24 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.19. Entretanto, nessa comparação assume-se que os robôs com controlador sem estimador (CS) e com controlador adaptativo (CA) estão submetidos as condições da configuração de Simulação 5. A trajetória de referência (TR), a trajetória do robô com controlador sem estimador (CS) e a trajetória do robô com controlador adaptativo (CA) são representadas pelas linhas ponto-tracejada, tracejada e sólida, respectivamente. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (-1/2, 1/2, 0)^T$. A condição inicial é representada pelo símbolo “•”. Note que, embora de forma lenta, o robô com controlador adaptativo consegue seguir a trajetória de referência, enquanto o robô com controlador sem estimador executa um movimento circular o tempo todo.

Os erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo são representados na Figura 6.25 pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. As figuras do lado direito e do lado esquerdo mostram o erro de postura para $0 \leq t \leq 70$ s e $0 \leq t \leq 6.0$ s, respectivamente. Observe que os erros de postura obtidos pelo controlador adaptativo apresentam picos em instantes de tempo em que ocorre as descontinuidades do perfil de deslizamento. Observe também que o erro de postura e_3 se torna instável em $t \approx 3.5$ s. Esse mesmo comportamento pode ser observada nos erros e_4 e e_5 .

A Figura 6.26 mostra os erros de velocidade e_4 e e_5 obtidos utilizando o controlador sem estimador (CS) e o controlador adaptativo (CA). Os erros obtidos pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente.

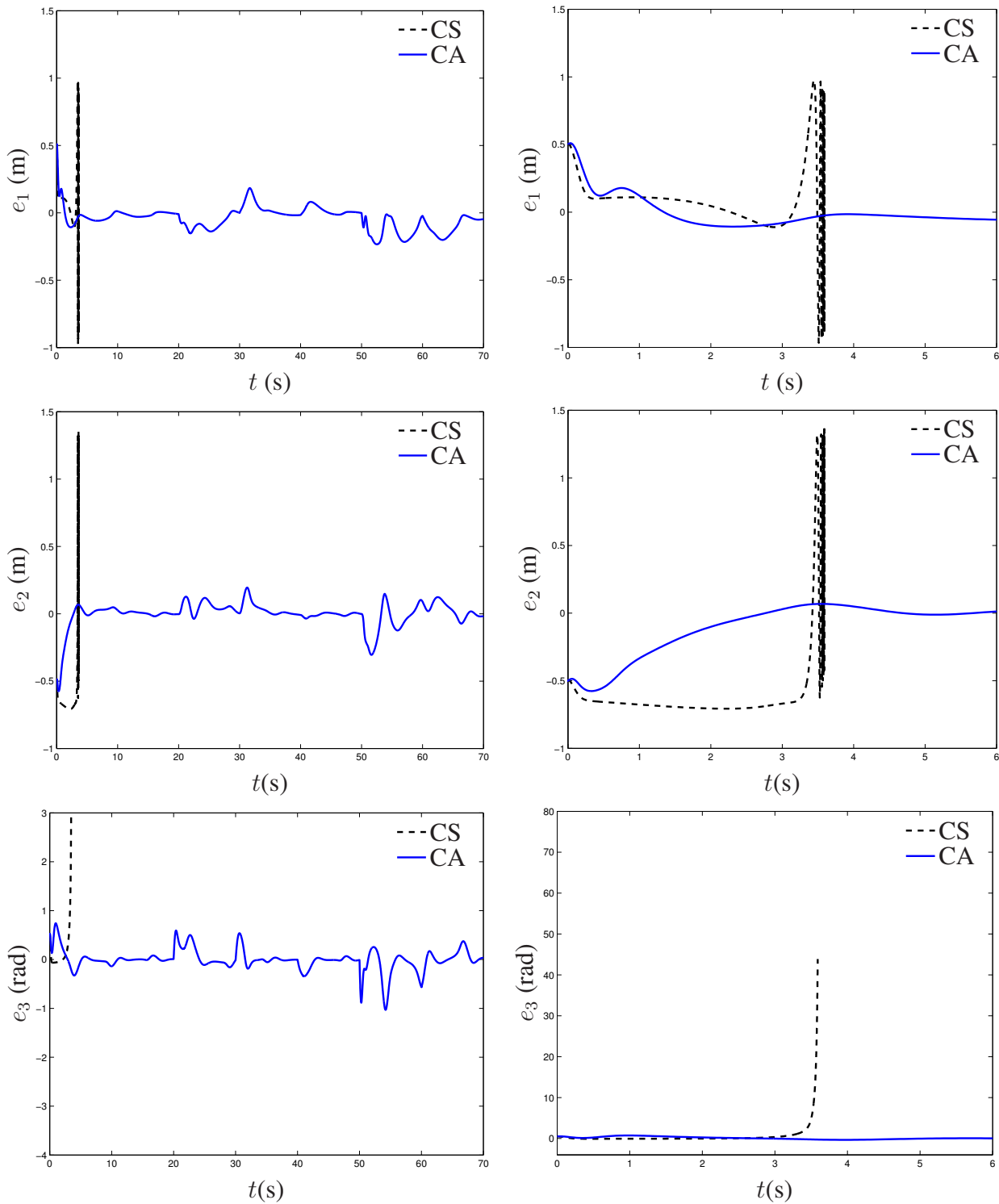


Figura 6.25 - Erros de postura e_1 , e_2 e e_3 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 5.

A Figura 6.27 mostra os valores estimados $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$ em relação aos valores reais das taxas de deslizamento i_l e i_r . Os valores reais e estimados das taxas de deslizamento são representados

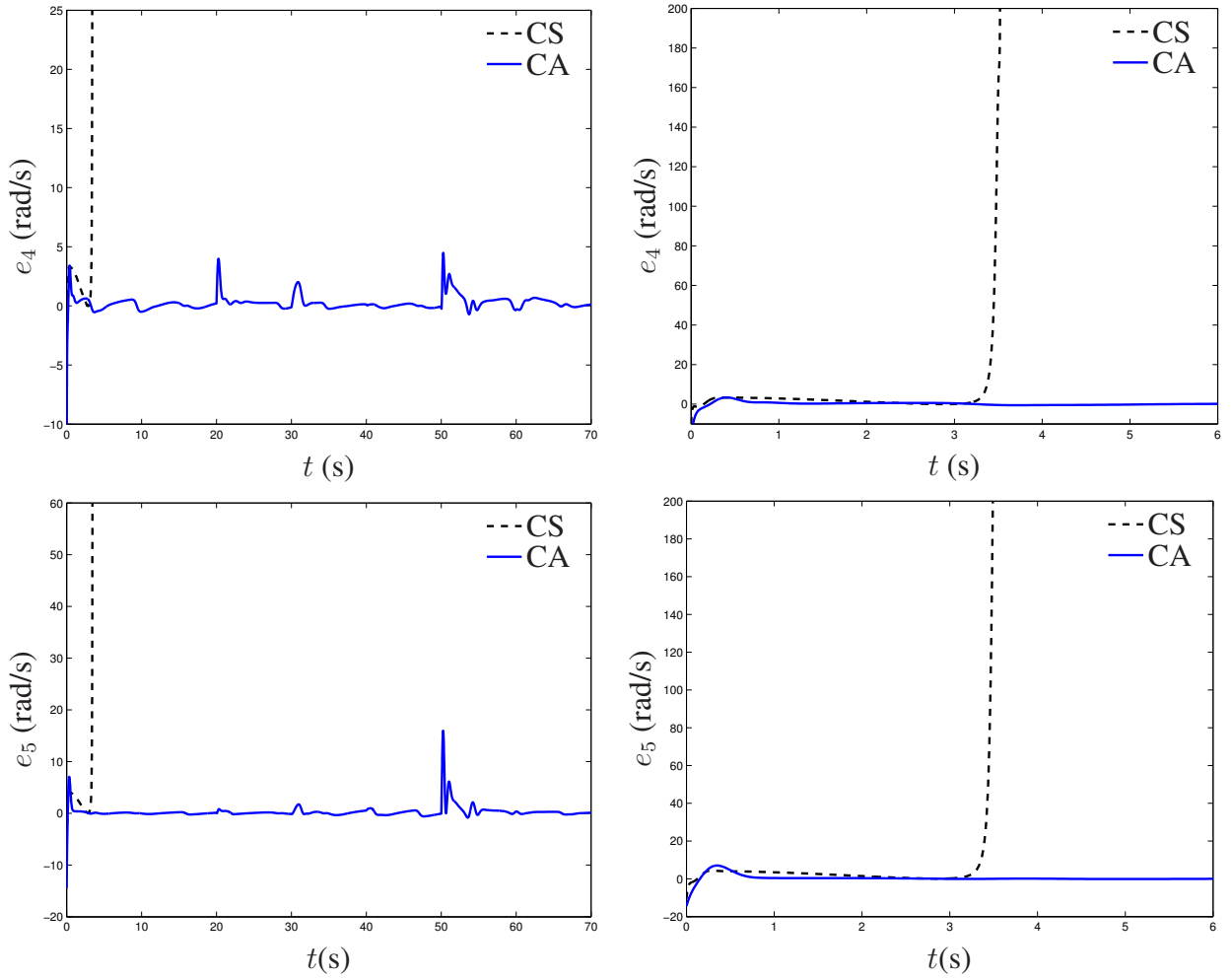


Figura 6.26 - Erros de velocidade e_4 e e_5 obtidos com o controlador sem estimador (CS) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 5.

pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$. Observe que os deslizamento estimados apresentam velocidades de convergência menor do que as obtidas na Simulação 4.

As Figuras 6.28(b) e 6.28(b) mostram os sinais de entrada gerados respectivamente pelo controlador sem estimador e controlador adaptativo. Os sinais de controle são dados pelas forças de propulsão aplicadas no centro das rodas direita e esquerda. Essas forças são representadas pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Os valores máximos dos sinais de controle F_l e F_r gerados pelo controlador adaptativo, dados pela norma infinita, são 37.1 N e 21.1 N, respectivamente, enquanto os sinais de controle F_l e F_r gerados pelo controlador sem estimador divergem em $t \approx 3.6$

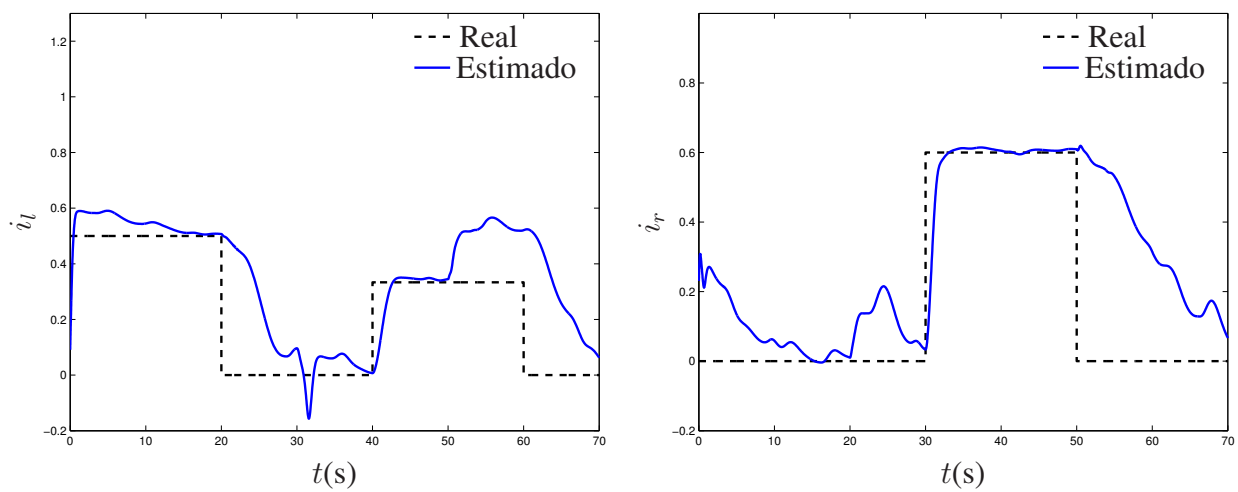


Figura 6.27 - Comparação entre os valores reais das taxas de deslizamento e os valores estimados pela lei de adaptação para condições dadas pela configuração de Simulação 5.

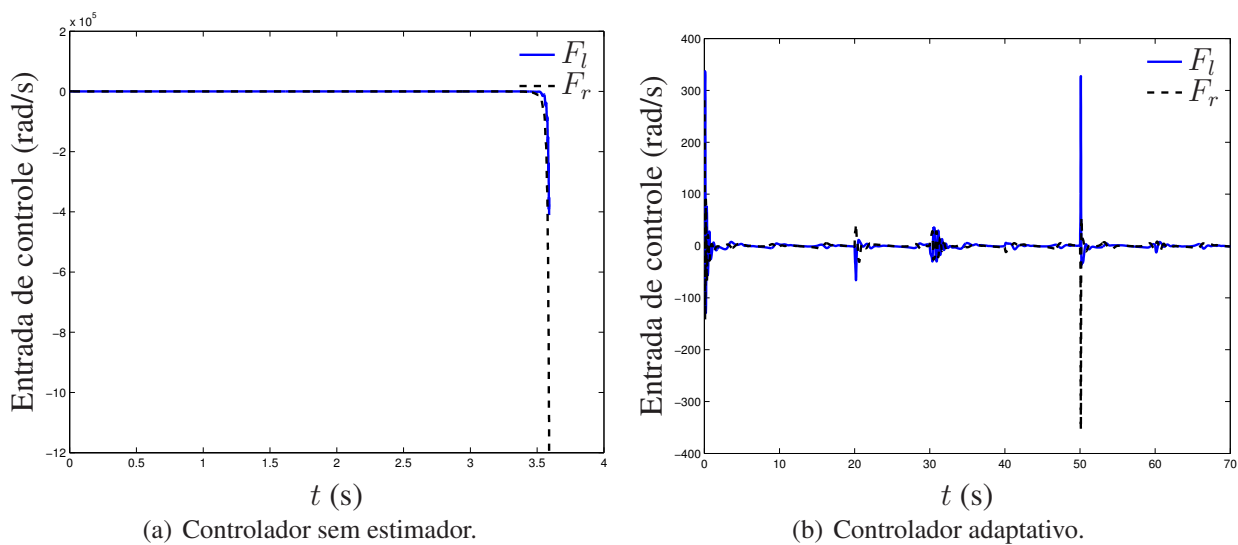


Figura 6.28 - Forças de propulsão aplicadas no centro das rodas direita e esquerda, F_l e F_r , dadas em N, fornecidas pelo controlador sem estimador e pelo controlador adaptativo para condições definidas pela configuração de Simulação 5.

s.

6.3 Simulações computacionais do controle baseado em filtro

As estratégias de controle baseadas em filtros projetadas usando os modelos cinemático e dinâmico, apresentadas, respectivamente, nas Seções 4.2 e 4.3, são analisadas numericamente utilizando-se o software MATLAB[®]. O desempenho das estratégias de controle baseadas no filtro de kalman *unscented* (UKF) é analisado pelas comparações com o sistema de controlador sem estimador e o sistema de controlador adaptativo. Como a estratégia de controle baseada no filtro UKF é condicionalmente discreta no tempo, as comparações dos sistemas de controle são realizadas com base nos sistemas discretizados. As equações que compõem esses sistemas de controle são integradas numericamente utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4º ordem com passo de $T = 10^{-3}$ s. O tempo total adotado para as investigações desses sistemas é $t = 70.0$ s.

Os parâmetros físicos adotados para o modelo cinemático do robô com deslizamento longitudinal, obtidos de Ryu e Agrawal (2011), são $b = 0.1624$ m, $r = 0.0825$ m, $m = 18.2$ kg e $J = 0.39375$ kg.m². Esses parâmetros são os mesmos utilizados nas simulações computacionais dos robôs com controladores adaptativos apresentadas na Seção 6.2.

O comportamento do robô com deslizamento utilizando os controladores baseados em filtro propostos nas Seções 5.2 e 5.3 é investigado sob as condições de deslizamentos e trajetórias de referência, apresentadas na Seção 6.1.

O filtro de Kalman *unscented* foi escolhido para estimar os parâmetros de deslizamento nas estratégias de controle baseadas em filtro, a partir de um estudo comparativo com o filtro de Kalman estendido operando em malha aberta com o robô.

Comportamento dos filtros em malha aberta

O filtro a ser utilizado nas estratégias de controle propostas nas Seções 5.2 e 5.3 é determinado por meio de uma investigação do desempenho de filtros não lineares em malha aberta com o robô conforme esquema na Figura 6.29. Investiga-se o desempenho dos algoritmos mais empregados em problemas não lineares: o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *unscented*

(UKF). Os algoritmos de filtragem estimam simultaneamente os estados do robô q e os parâmetros de deslizamento longitudinal i_l e i_r . Os perfis de deslizamentos utilizados são dados em (6.3). A entrada u representada na Figura 6.29 pode ser a entrada de controle $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$ quando o robô for descrito pelo modelo cinemático ou $\tau = (F_l, F_r)^T$ quando o robô for descrito pelo modelo dinâmico. As entradas de controle $\xi = (\omega_l, \omega_r)^T$ e $\tau = (F_l, F_r)^t$ são dadas, respectivamente, por

$$\omega_l = \frac{1}{r} \left(v_{\text{ref}}(t) - \frac{b}{2} \omega_{\text{ref}}(t) \right)$$

$$\omega_r = \frac{1}{r} \left(v_{\text{ref}}(t) + \frac{b}{2} \omega_{\text{ref}}(t) \right)$$

e

$$F_l = r \left(\frac{m}{4} + \frac{J}{b^2} \right) \omega_l + r \left(\frac{m}{4} - \frac{J}{b^2} \right) \omega_r$$

$$F_r = r \left(\frac{m}{4} - \frac{J}{b^2} \right) \omega_l + r \left(\frac{m}{4} + \frac{J}{b^2} \right) \omega_r$$

com velocidades $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ dadas em (6.1). Esses perfis de entradas de controle foram escolhidos de modo a aproveitar os perfis de velocidades $v_{\text{ref}}(t)$ e $\omega_{\text{ref}}(t)$ dadas em (6.1).

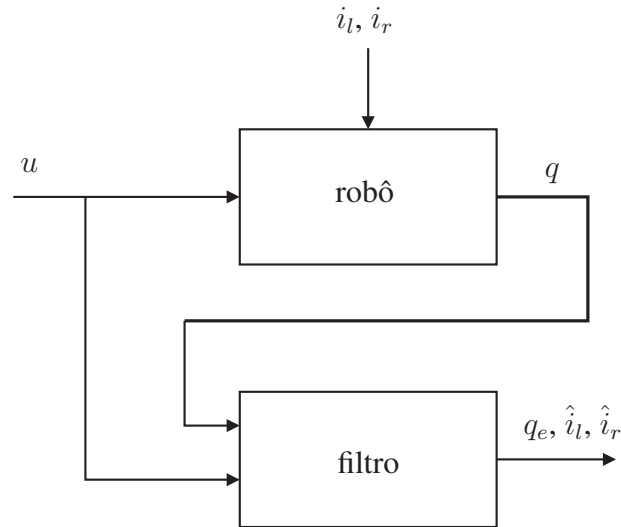


Figura 6.29 - Esquema do processo de estimação dos estados do robô e parâmetros de deslizamento em malha aberta.

Como o interesse é investigar o comportamento dos filtros como estimadores, assume-se que o processo, representado pelo robô, não é afetado por ruídos. Assume-se também que as medidas

dos estados do robô são afetadas por ruídos gaussianos brancos de média zero e matrizes de covariância dada por $10^{-2}I_3$ e $10^{-2}I_5$ (onde I_n é uma matriz identidade de ordem n) quando o robô for representado respectivamente pelo modelo cinemático (de três estados) e pelo modelo dinâmico (de cinco estados).

Para o estudo do comportamento do filtro formulado a partir do modelo cinemático assume-se que as informações sobre os ruídos são conhecidas e, portanto, podem ser utilizadas pelos filtros. Dessa forma, a matriz de covariância dos ruídos dos estados medidos ou saídas do processo é escolhida como $Q_s = 10^{-2}I_3$, onde I_3 é a matriz identidade de ordem 3, enquanto a matriz de covariância dos ruídos do processo é escolhida como $Q_p = 10^{-6} \text{diag}(0,0,0,1,1)$, onde diag é a matriz diagonal que possui os valores dos dois últimos elementos ajustados de tal forma a representar o ruído dos parâmetros estimados. Note que os parâmetros do processo, juntamente com os estados do robô, formam o estado aumentado na aplicação do filtro, por isso a matriz Q_p tem ordem 5. A condição inicial da matriz de covariância dos estados estimados é escolhida como $P(0) = I_5$. As condições iniciais dos estados estimados é $q_e(0) = q(0) + \nu_0$, onde ν_0 é um variável aleatória com distribuição normal. Essa variável aleatória representa uma incerteza na inicialização dos estados estimados. Os três parâmetros de ajustes utilizados no algoritmo do UKF são escolhidos heurísticamente como $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1$ e $\kappa_3 = 2$.

A Figura 6.30 mostra uma comparação entre a estimação dos estados do modelo cinemático (2.14) utilizando o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *unscented* (UKF). Os valores dos estados reais, estimados pelo EKF e pelo UKF, são representados pelas linhas vermelha tracejada, preta ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. A Figura 6.31 mostra os valores estimados das taxas de deslizamento $\dot{i}_l$ e $\dot{i}_r$. Os valores reais e estimados dos deslizamentos pelos filtros EKF e UKF são representados pelas linhas vermelha tracejada, preta ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. Observando as Figuras 6.30 e 6.31 não é possível identificar diferenças nos valores estimados pelo filtro EKF e UKF. Entretanto, pode ser observado analisando-se a norma dos erros de estimação de cada estado que o filtro UKF apresenta um desempenho ligeiramente melhor que o filtro EKF.

A Tabela 6.2 mostra uma comparação entre a norma do erro de estimação dado pela diferença do estado estimado e o estado real ao longo do tempo obtido pelos filtros de Kalman estendido (EKF) e Kalman *unscented* (UKF), formulados usando o modelo cinemático.

Os parâmetros de deslizamento também podem ser estimados utilizando-se o modelo di-

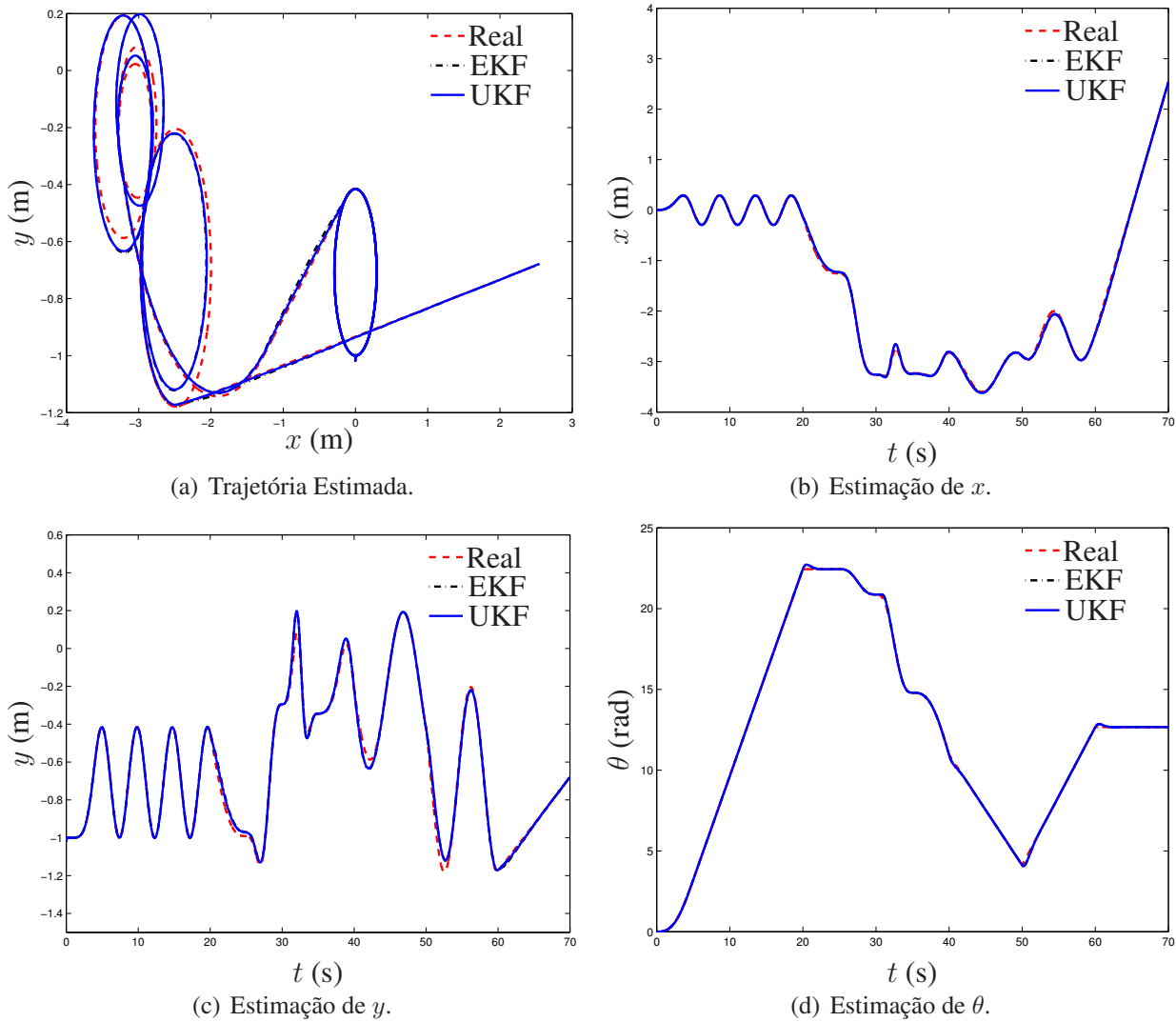


Figura 6.30 - Estimação da configuração do robô com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo cinemático.

Norma	EKF	UKF
$\ x - x_e\ $	2.6301	2.5656
$\ y - y_e\ $	2.1967	2.1302
$\ \theta - \theta_e\ $	5.1484	5.1275
$\ \dot{\theta}_l - \hat{\dot{\theta}}_l\ $	8.9508	8.8899
$\ \dot{\theta}_r - \hat{\dot{\theta}}_r\ $	11.4715	11.3806

Tabela 6.2 - Norma do erro de estimação obtida com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo cinemático.

nâmico do robô. A utilização de modelos dinâmicos é justificada pela influência que os efeitos inerciais podem ter sobre os deslizamentos das rodas. Para o estudo do comportamento do filtro formulado usando o modelo dinâmico, assume-se que as informações sobre os ruídos são conheci-

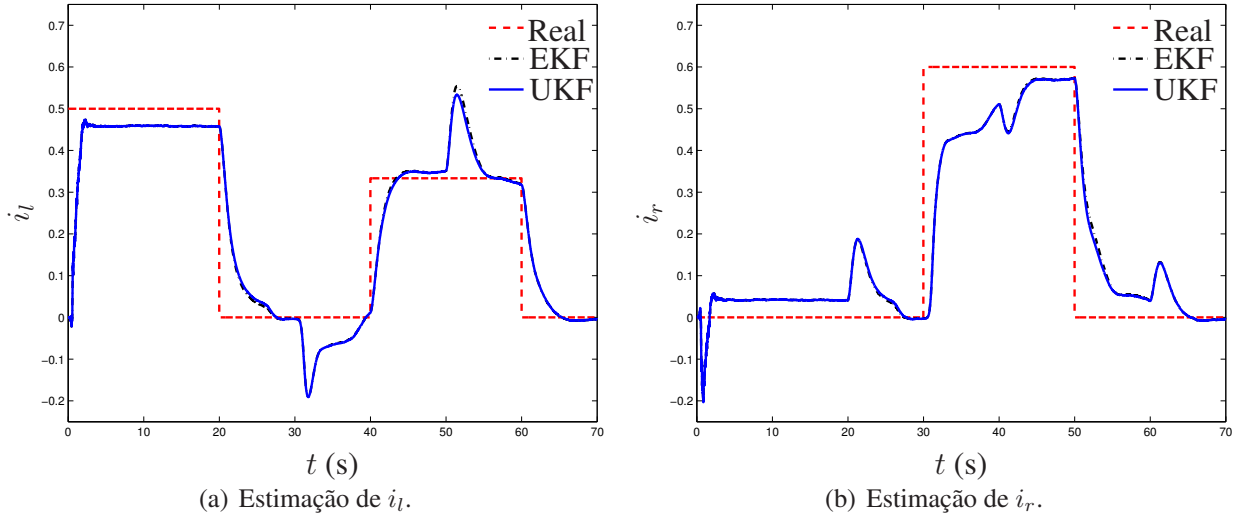


Figura 6.31 - Estimação dos parâmetros de deslizamento com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo cinemático.

das e, portanto, podem ser utilizadas pelos filtros. Dessa forma, a matriz de covariância dos ruídos das saídas do processo é $Q_s = 10^{-2}I_5$, onde I_5 é a matriz identidade de dimensão 5, enquanto a matriz de covariância dos ruídos do processo é $Q_p = 10^{-6} \text{diag}(0,0,0,0,0,1,1)$, onde diag é a matriz diagonal que possui os valores dos dois últimos elementos escolhidos de tal forma a representar o ruído dos parâmetros estimados.

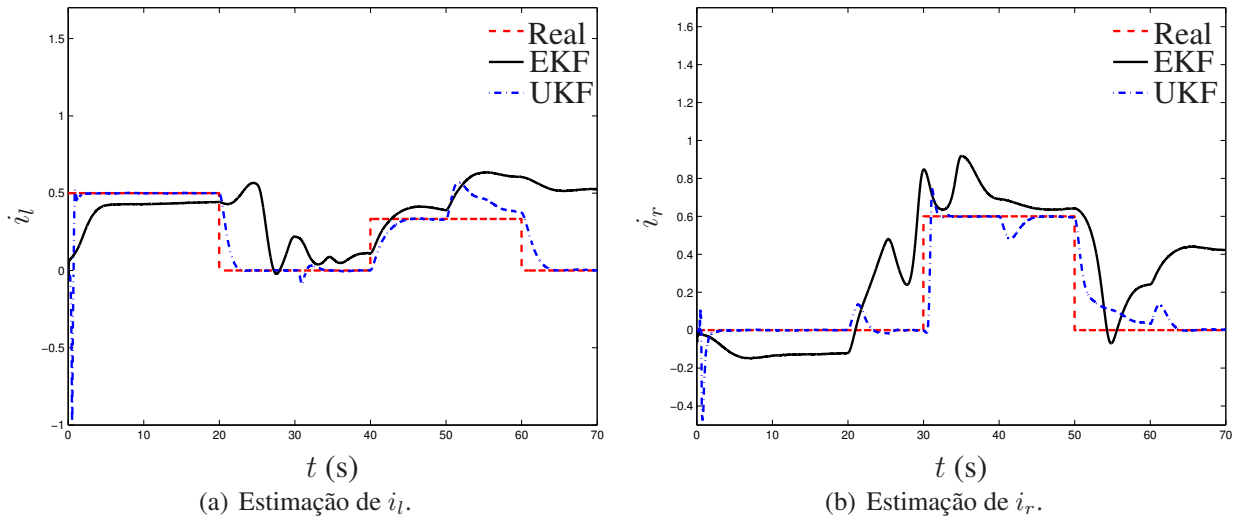


Figura 6.32 - Estimação dos parâmetros de deslizamento com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo dinâmico.

A matriz de covariância do estado estimado inicial é escolhida como $P(0) = I_{5 \times 5}$. O estado estimado inicial é $q_e(0) = q(0) + \nu_0$, onde ν_0 é um variável aleatória com distribuição normal. Os

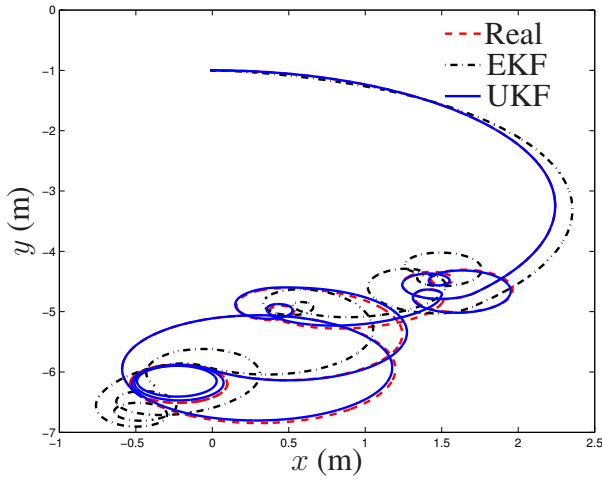
três parâmetros usados no algoritmo do UKF são escolhidos como $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1$ e $\kappa_3 = 2$.

A Figura 6.33 mostra uma comparação entre a estimação dos estados do robô dada pela modelo dinâmico (2.14) utilizando dois diferentes algoritmos de filtragem: o filtro de Kalman estendido (EKF) e o filtro de Kalman *unscented* (UKF). Os valores dos estados reais, estimados pelo EKF e pelo UKF, são representados pelas linhas vermelha tracejada, preta ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. A Figura 6.32 mostra os valores estimados das taxas de deslizamento i_l e i_r . Os valores reais e estimados dos deslizamentos pelos filtros EKF e UKF são representados pelas linhas vermelha tracejada, preta ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente.

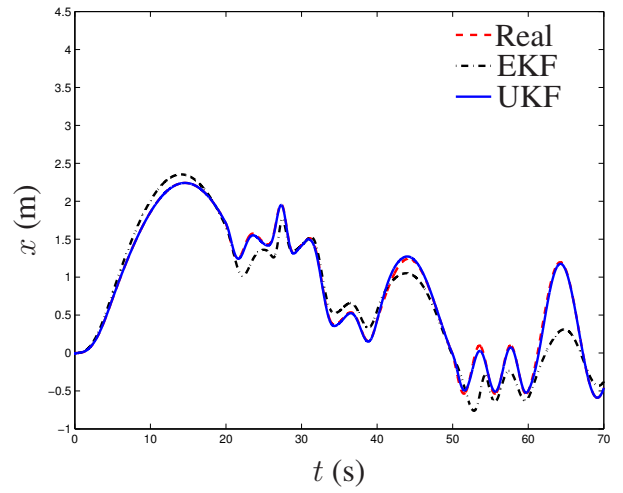
As estimações dos estados e taxas de deslizamento obtidas pelo filtro UKF são graficamente melhores do que as obtidas pelo filtro EKF. Contudo, uma melhor percepção dessa diferença pode ser observada analisando-se a norma dos erros de estimação de cada estado. A Tabela 6.3 mostra uma comparação entre a norma do erro de estimação dado pela diferença do estado estimado e o estado real obtidos pelos filtros de Kalman estendido (EKF) e de Kalman *unscented* (UKF), formulados usando o modelo dinâmico.

Norma	EKF	UKF
$\ x - x_e\ $	21.5766	2.2630
$\ y - y_e\ $	21.0237	2.0500
$\ \theta - \theta_e\ $	56.5629	5.9479
$\ \omega_l - \omega_{le}\ $	6.7788	1.3287
$\ \omega_r - \omega_{re}\ $	10.6901	7.7347
$\ i_l - \hat{i}_l\ $	23.9158	10.4901
$\ i_r - \hat{i}_r\ $	22.0039	8.8916

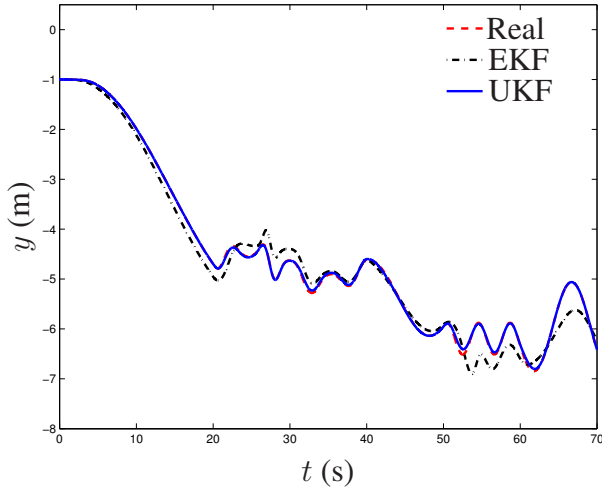
Tabela 6.3 - Norma do erro de estimação obtida com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo dinâmico.



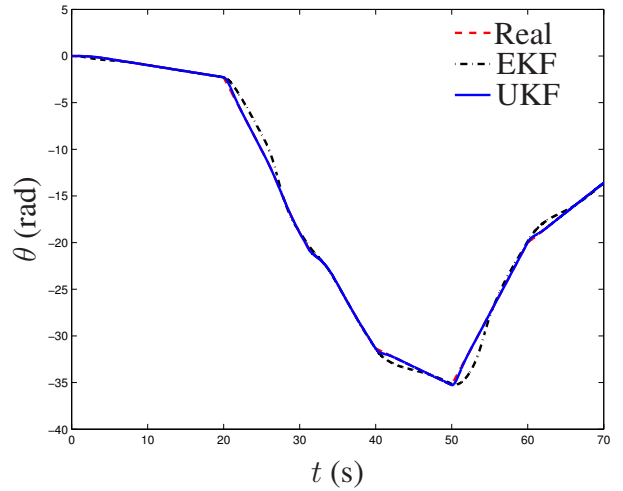
(a) Trajetória Estimada.



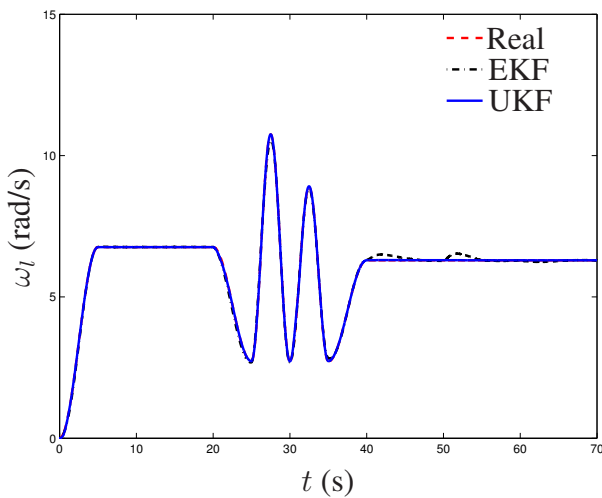
(b) Estimação de x .



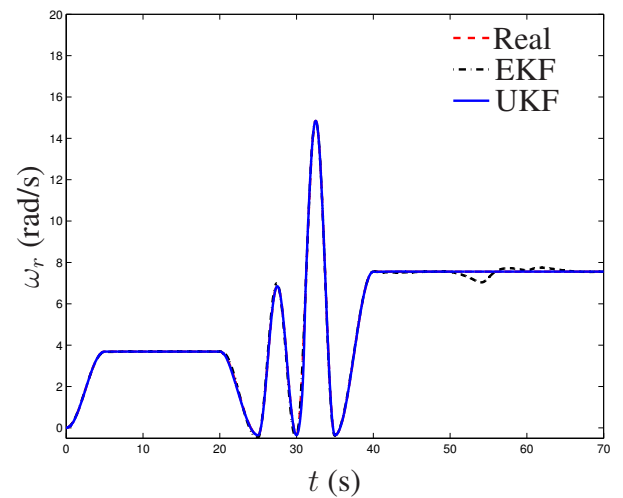
(c) Estimação de y .



(d) Estimação de θ .



(e) Estimação de ω_l .



(f) Estimação de ω_r .

Figura 6.33 - Estimação da configuração do robô com os filtros EKF e UKF formulados a partir do modelo dinâmico.

6.3.1 Controlador baseado em filtro usando modelo cinemático

Esta seção apresenta as simulações do robô com deslizamento utilizando o controlador baseado em filtro projetado usando o modelo cinemático. O desempenho do controlador cinemático baseado em filtro, apresentado na Seção 5.2, é comparado com o sistema de controlador sem estimador de Kim e Oh (1998), apresentado na Seção 3.3 e com o controlador adaptativo, apresentado na Seção 4.2. Os ganhos de ambos os controladores são otimizados com relação à mesma trajetória de referência e à mesma condição de deslizamento. A trajetória de referência e o perfil de deslizamento utilizados na otimização são os mesmos da configuração de Simulação 1, apresentado na Tabela 6.1.

Os ganhos do controlador sem estimador, controlador baseado no filtro e controlador adaptativo são calculados utilizando-se o mesmo método de otimização da Seção 6.2.1. Os ganhos obtidos, minimizando a função 6.5, para o controlador sem estimador são $k_1 = 1$, $k_2 = 21$ e $k_3 = 2$, enquanto os ganhos obtidos para o controlador baseado no filtro UKF são $k_1 = 1$, $k_2 = 21$ e $k_3 = 2$. Já os ganhos obtidos para o controlador adaptativos são $k_1 = 1$, $k_2 = 25$ e $k_3 = 2$.

Considerando o sistema em malha fechada apresentada na Figura 5.1. A matriz de covariância dos ruídos das medidas é $Q_s = 10^{-2}I_{3 \times 3}$, onde $I_{3 \times 3}$ é a matriz identidade de dimensão 3×3 , enquanto a matriz de covariância dos ruídos do processo é $Q_p = 10^{-6} \text{diag}(0,0,0,1,1)$, onde diag é a matriz diagonal que possui os valores dos dois últimos elementos escolhidos de tal forma a representar o ruído dos parâmetros estimados. A matriz de covariância do estado estimado inicial é escolhida como $P(0) = I_{3 \times 3}$. O estado estimado inicial é $q_e(0) = q(0) + \nu_0$, onde ν_0 é um variável aleatória com distribuição normal. Os três parâmetros usados no algoritmo do UKF são escolhidos como $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1$ e $\kappa_3 = 2$.

Simulação 6: trajetória em forma de “S” e deslizamentos constantes por partes

A simulação 6 é realizada para que o desempenho do controlador baseado no filtro UKF possa ser verificado em relação a velocidade de convergência dos erros de postura e erros de estimação

dos parâmetros de deslizamento desconhecidos.

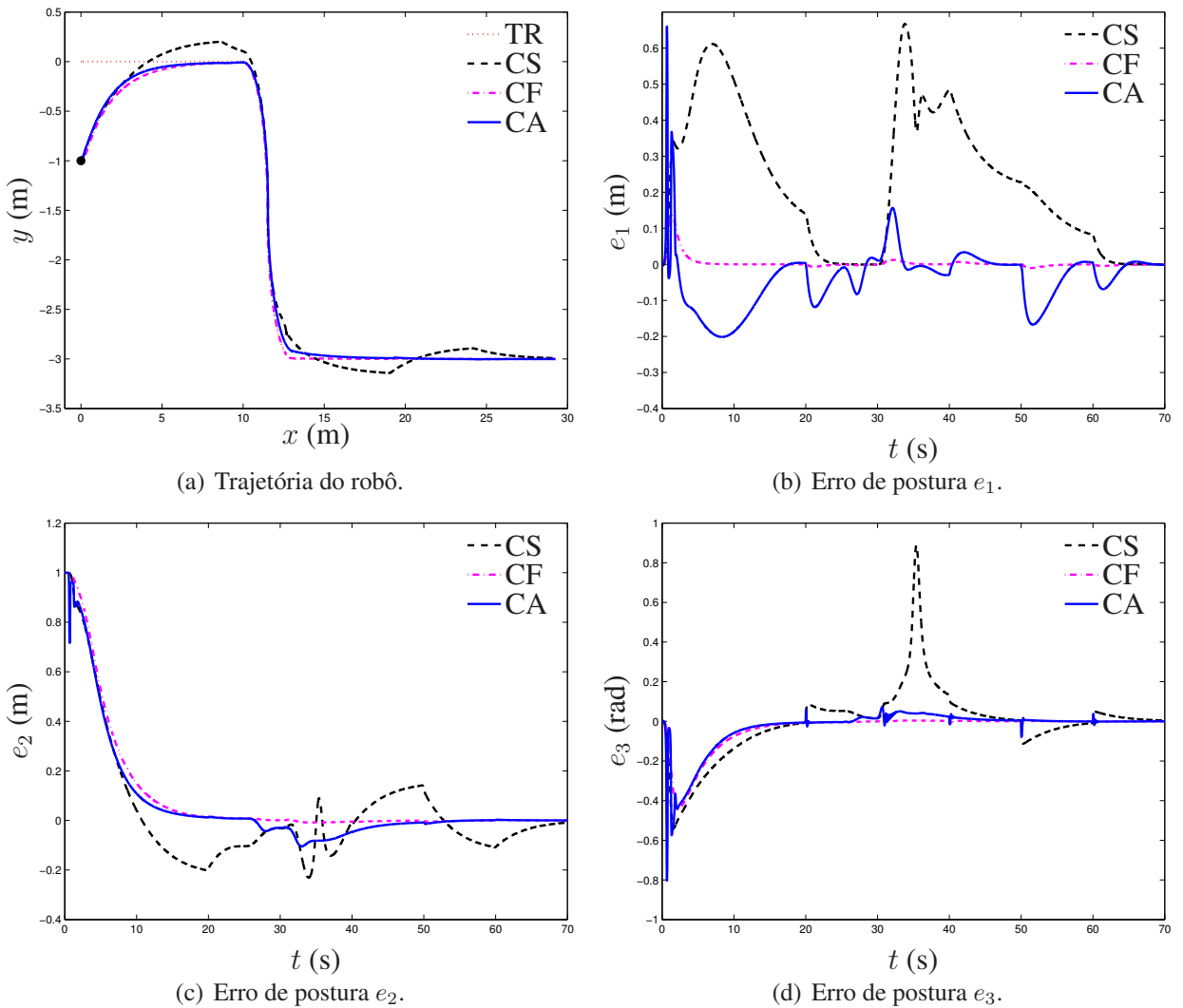


Figura 6.34 - Trajetória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 6.

A Figura 6.34(a) mostra uma comparação entre as trajetórias do robô obtidas utilizando o controlador sem estimador (CS) proposto por Kim e Oh (1998), o controlador baseado no filtro de Kalman *unscented* (CF) proposto na Seção 5.2 e o controlador adaptativo (CA) proposto na Seção 4.2 em relação a trajetória de referência (TR) e perfil de deslizamento definidos pela configuração de Simulação 6. As trajetórias de referência, do robô com controlador sem estimador, do robô com controle baseado no filtro e do robô com controlador adaptativo são representada pelas linhas pontilhadas, tracejada, ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. A condição inicial

do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0)^T$. A condição inicial do robô é representada na Figura 6.34 pelo símbolo “•”. As Figuras 6.34(b)-6.34(d) mostram uma comparação entre os erros de configuração e_1 , e_2 e e_3 obtidos utilizando-se os controladores CS, CF e CA. Os erros obtidos pelos controladores CS, CF e CA são representados pelas linhas tracejada e sólida, respectivamente. Note que o robô com controlador baseado em filtro e o controlador adaptativo segue a trajetória de referência, mesmo durante a ocorrência de deslizamento, enquanto o robô com controlador sem estimador não consegue manter a trajetória nos instantes de tempo em que ocorre deslizamento das rodas.

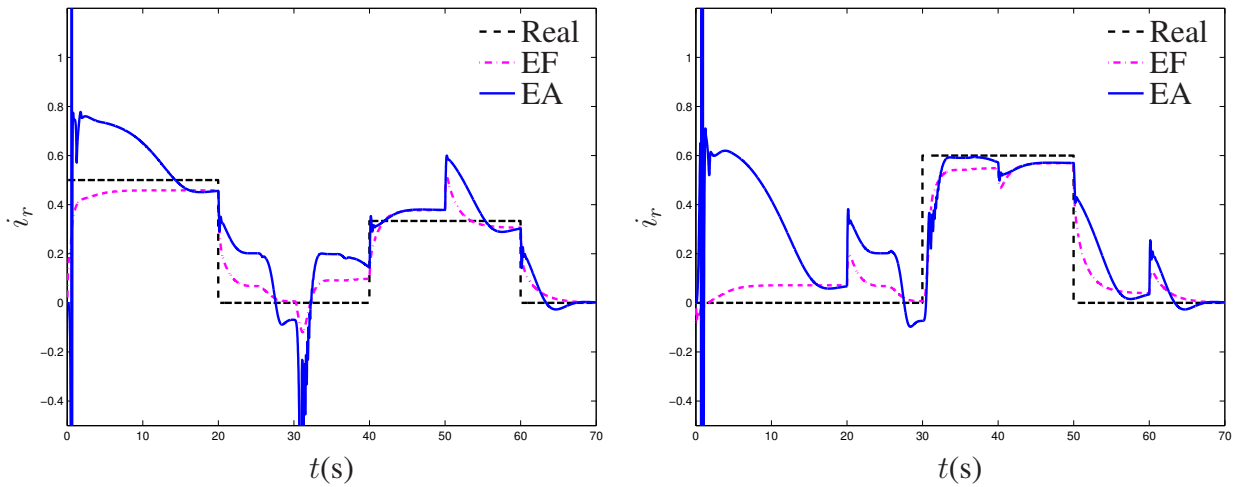


Figura 6.35 - Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os respectivos valores estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.

A Figura 6.35 mostra os valores estimados $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$ em relação aos valores reais das taxas de deslizamento i_l e i_r . Os valores reais, estimados pelo filtro UKF (EF) e pela lei de adaptação (EA) são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. Embora os valores utilizados pela lei de controle sejam os valores estimados $\hat{a}_l$ e $\hat{a}_r$, optou-se por mostrar os valores estimados das taxas de deslizamento $\hat{i}_l$ e $\hat{i}_r$. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$. Note que tanto o filtro UKF quanto a lei de adaptação conseguem estimar os valores dos deslizamentos mesmo quando variações bruscas ocorrem.

As Figuras 6.36(a) e 6.36(b) mostram os sinais de entrada de controle gerados pelos controlador sem estimador (CS), pelo controlador baseado no filtro UKF (CF) e pelo controlador adaptativo

(CA), respectivamente. Os sinais gerados pelo CS, CF e CA são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. Note que os valores máximos dos sinais de controle gerados pelo CF e CA são muito próximos que, por sua vez, são um pouco maior que o sinal de CS.

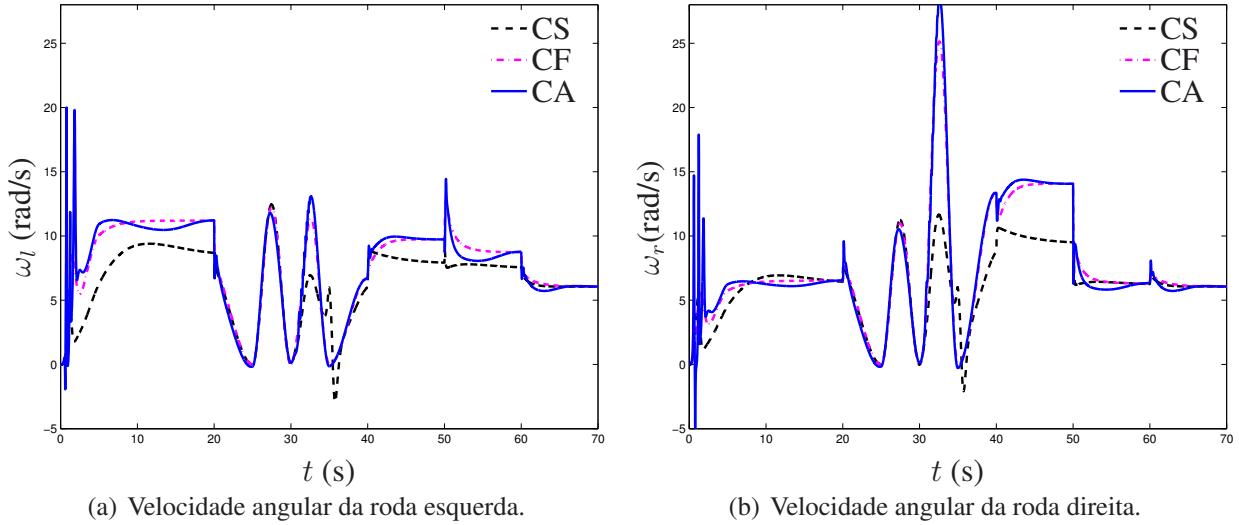


Figura 6.36 - Entradas de controle dadas pelas velocidades angulares das rodas direita ω_r e esquerda ω_l em rad/s.

Simulação 7: trajetória em forma de “S” e deslizamentos variantes no tempo

A Simulação 7 é realizada para que o desempenho do controlador baseado no filtro UKF possa ser verificado em relação a perfis de deslizamentos variantes no tempo.

A Figura 6.37 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.34(a). Entretanto, nessa comparação assume-se que os robôs com controlador sem estimador (CS), com controlador baseado no filtro UKF (CF) e com controlador adaptativo (CA) estão submetidos as condições da configuração de Simulação 7. As trajetórias de referência (TR), do robô com CS, CF e CA são representadas na Figura 6.37(a) pelas linhas pontilhadas, tracejada, ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. Os erros e_1 , e_2 e e_3 obtidos pelos controladores CS, CF e CA são representados nas Figuras 6.37(b)-6.37(d) pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente.

A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0)^T$. A condição inicial do robô é representada na Figura 6.37(a) pelo símbolo “•”. Note que o robô com CF e CA conseguem seguir a trajetória de referência com um erro muito pequeno.

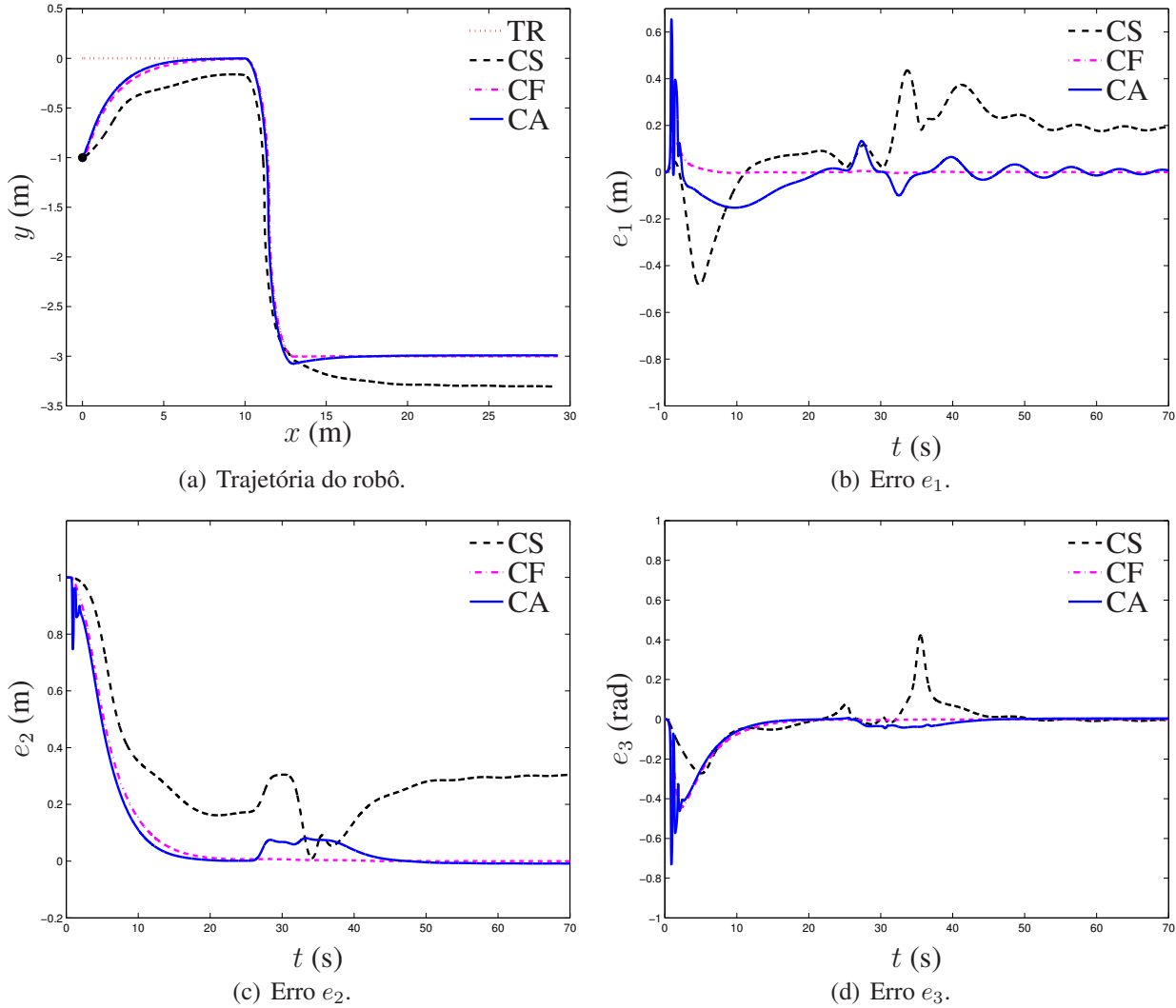


Figura 6.37 - Trajetória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 7.

A Figura 6.38 mostra os valores estimados das taxas de deslizamento $\dot{i}_l$ e $\dot{i}_r$ pelo filtro UKF (EF) e lei de adaptação (EA). Os valores reais, estimados pelo filtro UKF e pela lei de adaptação são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por

$\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$. Observe que os deslizamentos estimados não convergem para os valores reais de deslizamento.

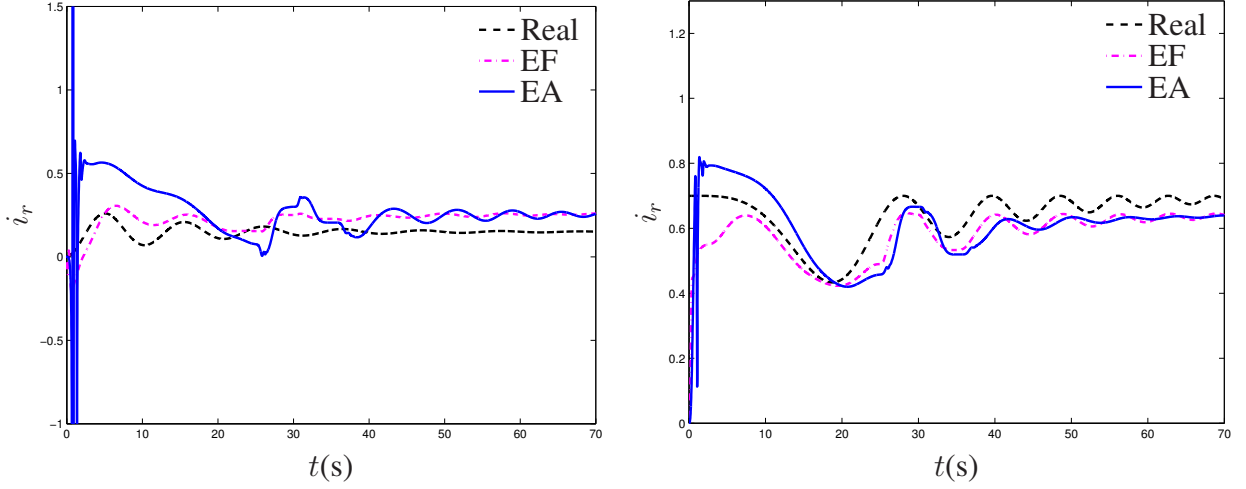


Figura 6.38 - Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os respectivos valores estimados para perfis de deslizamentos variantes no tempo.

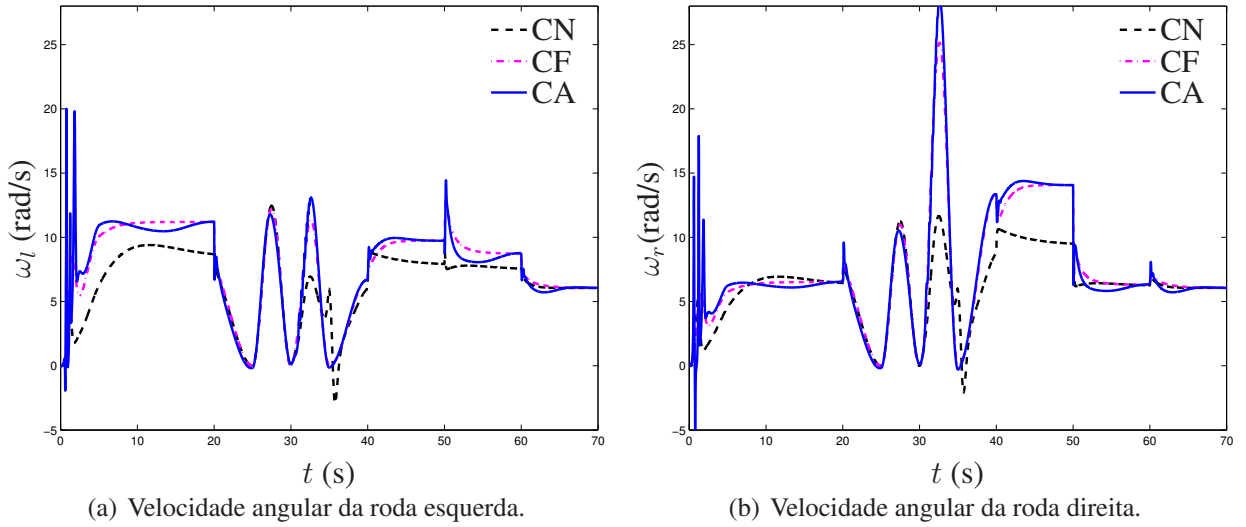


Figura 6.39 - Entradas de controle dadas pelas velocidades angulares das rodas direita ω_r e esquerda ω_l em rad/s.

As Figuras 6.39(a) e 6.39(b) mostram os sinais de entrada de controle gerados pelos controlador sem estimador (CS), pelo controlador baseado no filtro UKF (CF) e pelo controlador adaptativo (CA), respectivamente. Os sinais gerados pelo CS, CF e CA são representados pelas linhas trace-

jada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. Note que os resultados obtidos para o CF e CA são muitos similares em amplitudes.

Simulação 8: trajetória em forma de “8” e deslizamentos constantes por partes

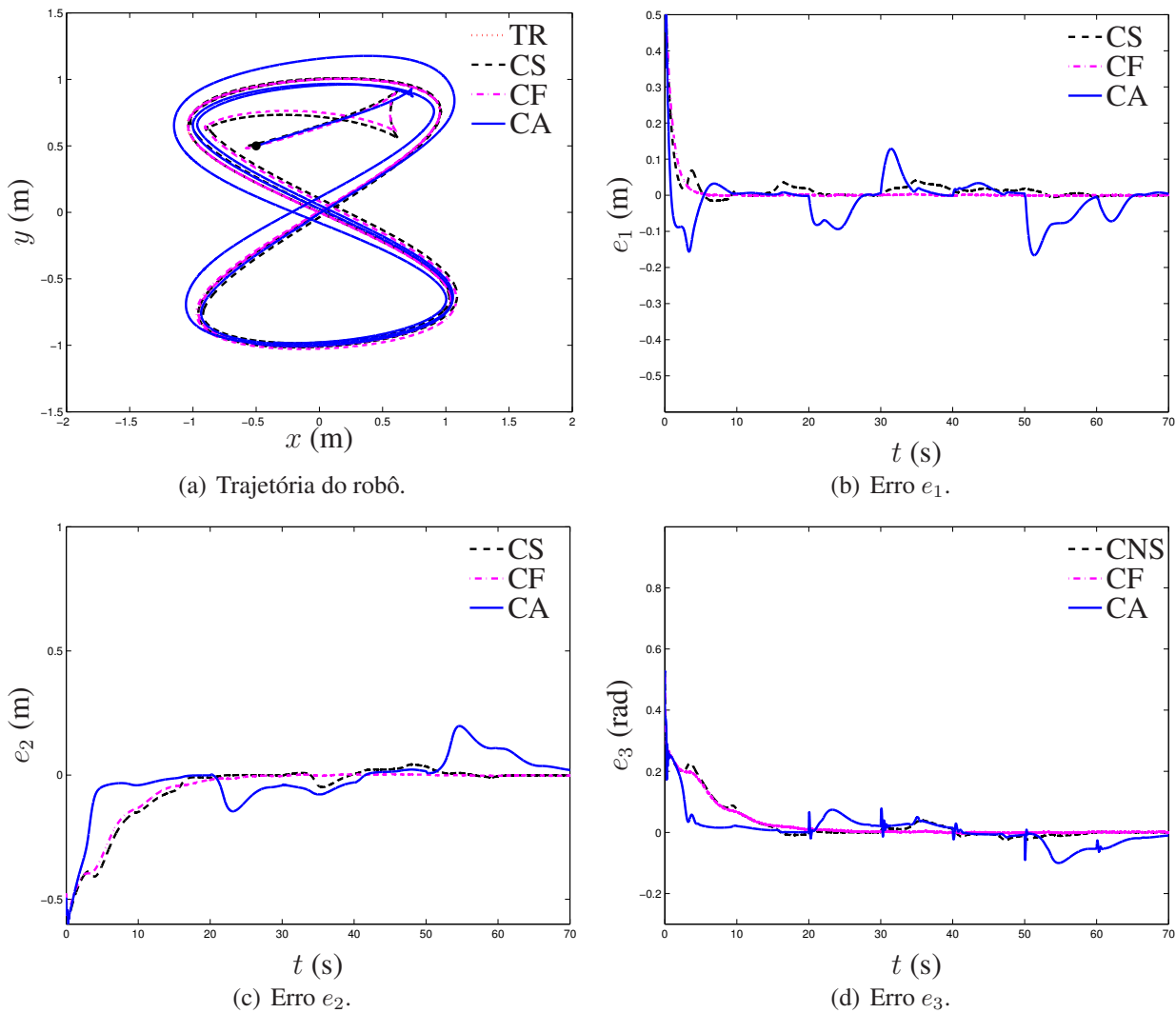


Figura 6.40 - Trajetória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 8.

A Simulação 8 é realizada para que o desempenho do controlador baseado no filtro UKF

possa ser verificado em relação a perfis de trajetórias geradas com entradas de referência com altas taxas de variações.

A Figura 6.40 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.34(a). Entretanto, nessa comparação assume-se que os robôs com controlador sem estimador (CS), com controlador baseado no filtro UKF (CF) e com controlador adaptativo (CA) estão submetidos as condições da configuração de Simulação 8. As trajetórias de referência (TR) e do robô com CS, CF e CA são representadas na Figura 6.40(a) pelas linhas pontilhadas, tracejada, ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. Os erros e_1 , e_2 e e_3 obtidos pelos controladores CS, CF e CA são representados nas Figuras 6.46(b)-6.40(d) pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0)^T$. A condição inicial do robô é representada na Figura 6.40(a) pelo símbolo “•”. Note que o robô com CF e CA conseguem seguir a trajetória de referência com um erro muito pequeno.

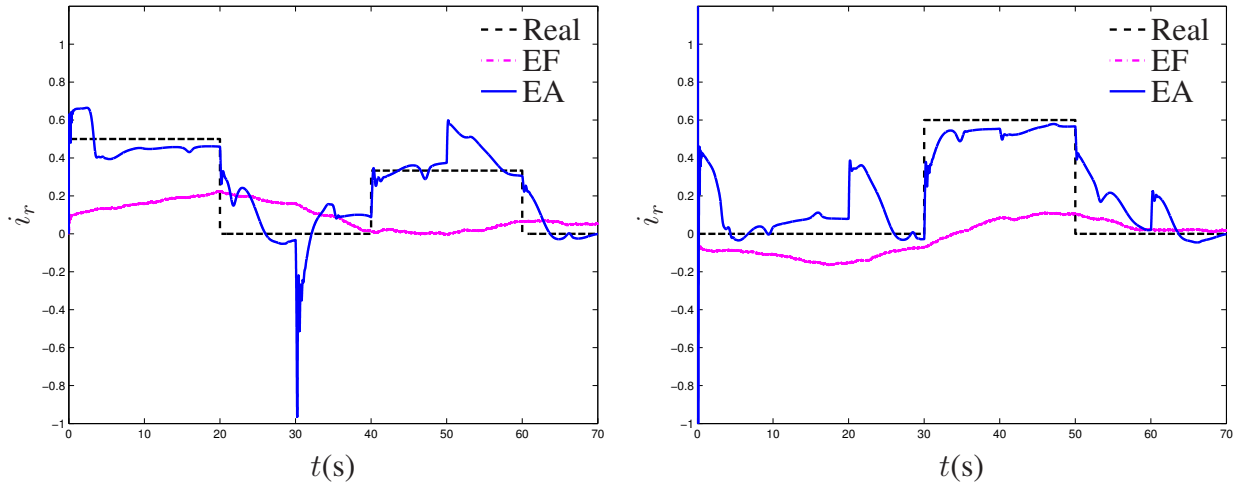


Figura 6.41 - Comparação entre os valores reais dos deslizamentos e os respectivos valores estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.

A Figura 6.41 mostra os valores estimados das taxas de deslizamento i_l e i_r pelo filtro UKF (EF) e lei de adaptação (EA). Os valores reais, estimados pelo filtro UKF e pela lei de adaptação são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$. Note que a lei de adaptação conseguem estimar os valores dos deslizamentos como

esperado. Note também que a convergência da estimação obtida pelo filtro UKF é muito lenta. Contudo, essa estimação ruim parece não afetar o desempenho do controlador quanto a convergência do erro de postura para zero.

As Figuras 6.42(a) e 6.42(b) mostram os sinais de entrada de controle gerados pelos controlador sem estimador (CS), pelo controlador baseado no filtro UKF (CF) e pelo controlador adaptativo (CA), respectivamente. Os sinais gerados pelo CS, CF e CA são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. Note que os sinais de controle obtidos pelo CA, em relação ao CN e CF, apresentam amplitudes maiores.

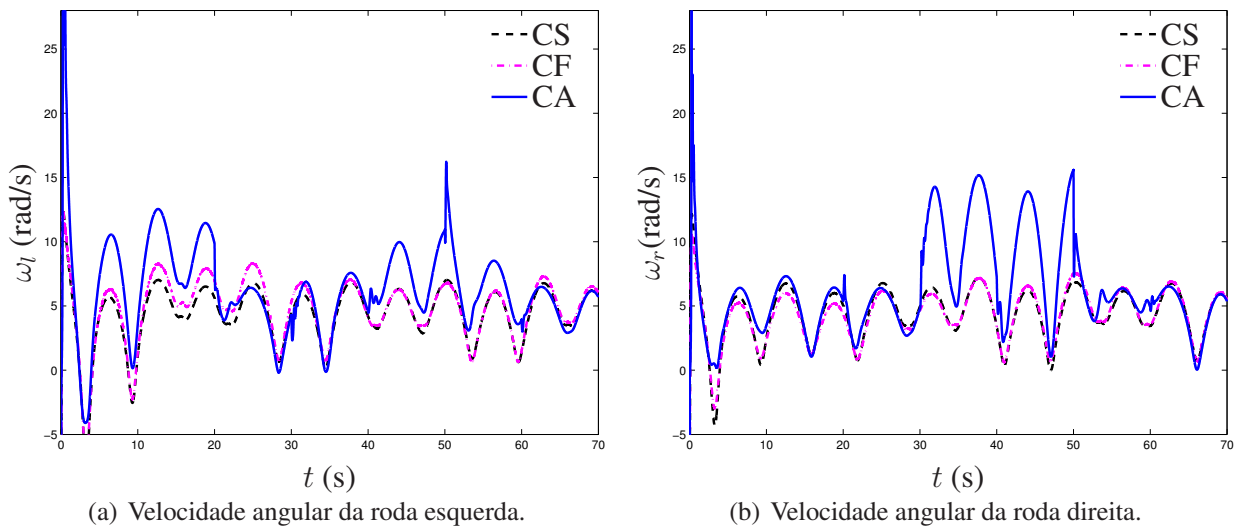


Figura 6.42 - Entradas de controle dadas pelas velocidades angulares das rodas direita ω_r e esquerda ω_l em rad/s.

6.3.2 Controlador baseado em filtro usando modelo dinâmico

Esta seção apresenta as simulações do robô com deslizamento utilizando o controlador baseado em filtro projetado usando o modelo dinâmico. O desempenho do controlador cinemático baseado em filtro, apresentado na Seção 5.3, é comparado com o sistema de controlador sem estimador, apresentado na Seção 3.4 e com o controlador adaptativo, apresentado na Seção 4.3. Os ganhos de ambos os controladores são otimizados com relação à mesma trajetória de referência e

à mesma condição de deslizamento. A trajetória de referência e o perfil de deslizamento utilizados na otimização são os mesmos da configuração de Simulação 1, apresentado na Tabela 6.1.

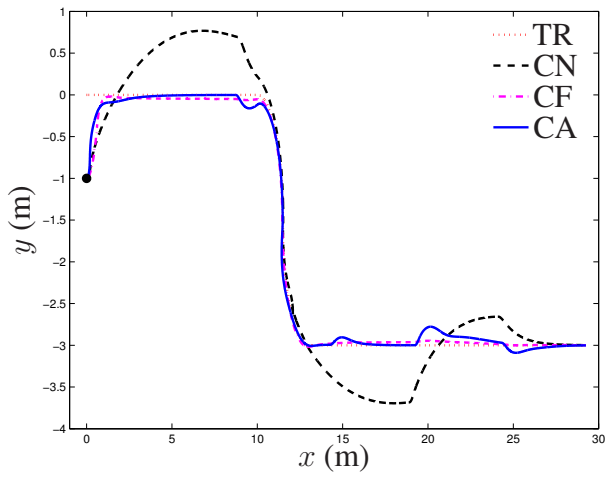
Os ganhos obtidos, minimizando a função 6.6, para o controlador sem estimador são $k_1 = 1$, $k_2 = 17$, $k_3 = 1$, $k_4 = 49$ e $k_5 = 49$, enquanto os ganhos obtidos para o controlador baseado no filtro UKF são $k_1 = 1$, $k_2 = 30$, $k_3 = 0.1$, $k_4 = 15$ e $k_5 = 15$.

A matriz de covariância dos ruídos das medidas é $Q_s = 10^{-2}I_{5 \times 5}$, onde $I_{5 \times 5}$ é a matriz identidade de dimensão 5×5 , enquanto a matriz de covariância dos ruídos do processo é $Q_p = 10^{-6} \text{diag}(0,0,0,0,1,1)$, onde diag é a matriz diagonal que possui os valores dos dois últimos elementos escolhidos de tal forma a representar o ruído dos parâmetros estimados. A matriz de covariância do estado estimado inicial é escolhida como $P(0) = I_{5 \times 5}$. Os estado estimado inicial é $q_e(0) = q(0) + \nu_0$, onde ν_0 é um variável aleatória com distribuição normal. Os três parâmetros usados no algoritmo do UKF são escolhidos como $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1$ e $\kappa_3 = 2$.

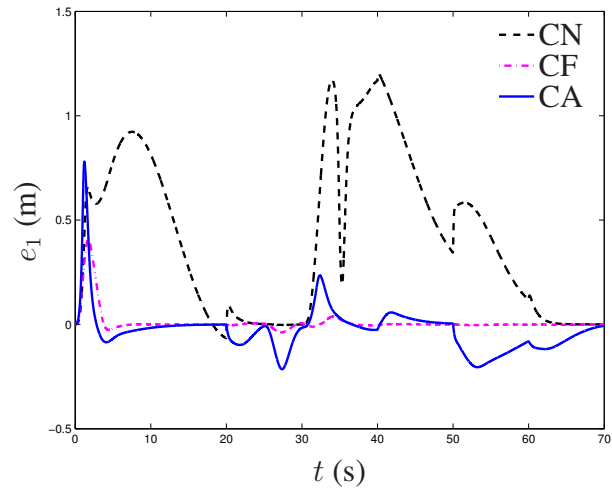
Simulação 9: trajetória em forma de “S” e deslizamentos constantes por partes

A simulação 6 é realizada para que o desempenho do controlador baseado no filtro UKF possa ser verificado em relação a velocidade de convergência dos erros de postura e erros de estimação dos parâmetros de deslizamento desconhecidos.

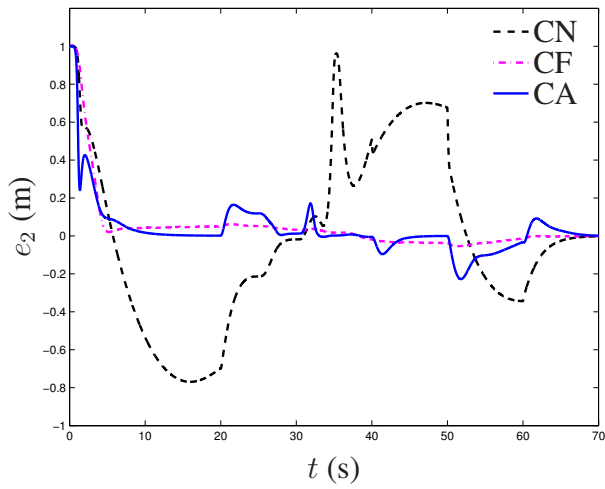
A Figura 6.43 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.34(a). Entretanto, nessa comparação assume-se que os robôs com controlador sem estimador (CS), com controlador baseado no filtro UKF (CF) e com controlador adaptativo (CA) estão submetidos as condições da configuração de Simulação 9. As trajetórias de referência (TR), do robô com CS, CF e CA são representadas na Figura 6.43(a) pelas linhas pontilhadas, tracejada, ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. Os erros e_1 , e_2 , e_3 , e_4 e e_5 obtidos pelos controladores CS, CF e CA são representados nas Figuras 6.43(b)-6.43(f) pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0)^T$. A condição inicial do robô é representada na Figura 6.43(a) pelo símbolo “•”. Note que o robô com CF e CA conseguem seguir a trajetória de referência com um erro muito pequeno.



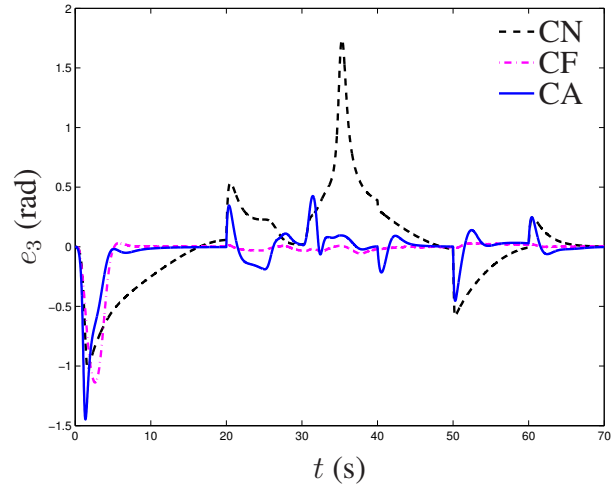
(a) Trajetória do robô.



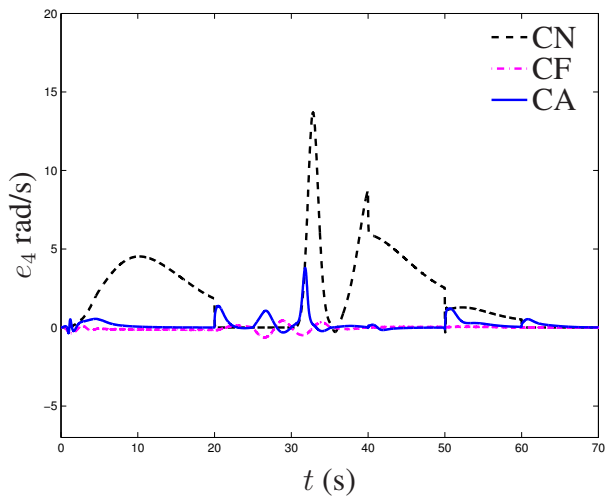
(b) Erro e_1 .



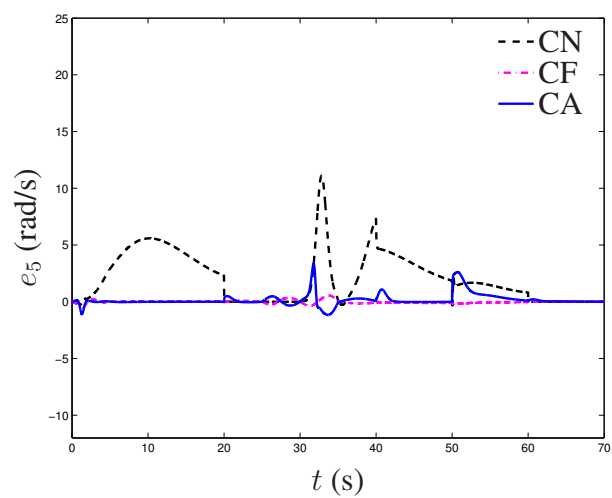
(c) Erro e_2 .



(d) Erro e_3 .



(e) Erro e_4 .



(f) Erro e_5 .

Figura 6.43 - Trajetória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 9.

A Figura 6.44 mostra os valores estimados das taxas de deslizamento $\dot{i}_l$ e $\dot{i}_r$ pelo filtro UKF (EF) e lei de adaptação (EA). Os valores reais, estimados pelo filtro UKF e pela lei de adaptação são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$.

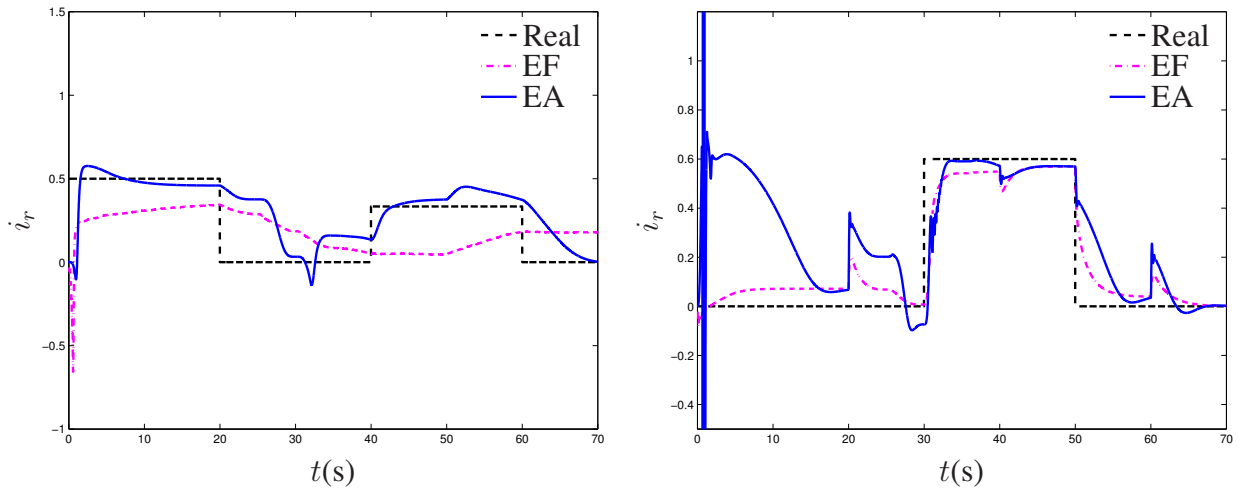


Figura 6.44 - Comparação entre os valores dos deslizamento reais e os respectivos valores dos parâmetros estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.

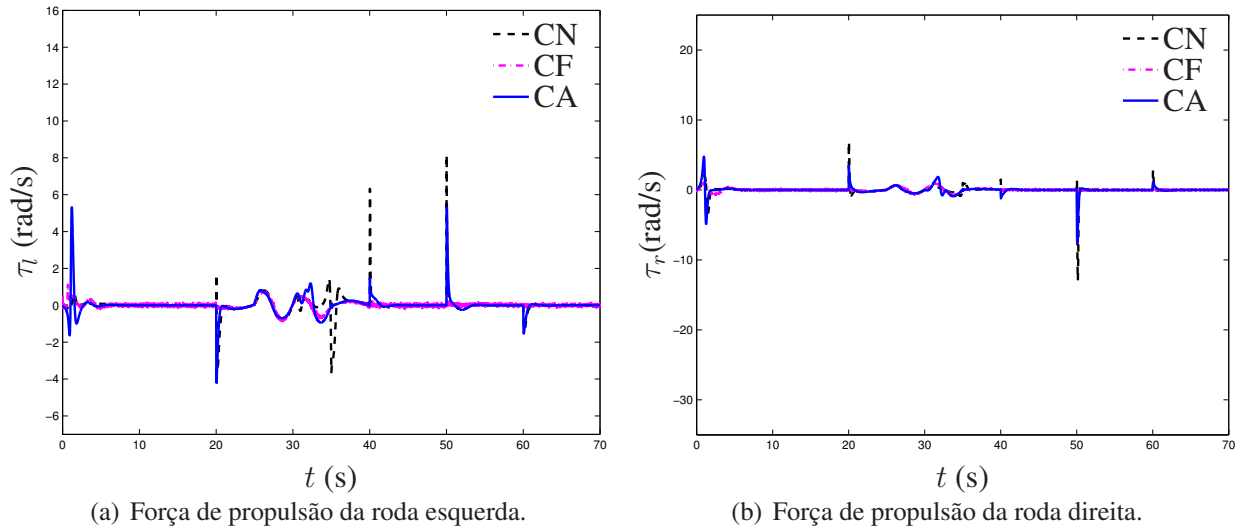


Figura 6.45 - Entradas de controle dadas pelas forças de propulsão aplicadas sobre os eixos das rodas direita τ_l e esquerda τ_r em N.m.

As Figuras 6.45(a) e 6.45(b) mostram os sinais de entrada de controle gerados pelos controlador sem estimador (CS), pelo controlador baseado no filtro UKF (CF) e pelo controlador adaptativo (CA), respectivamente. Os sinais gerados pelo CS, CF e CA são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente.

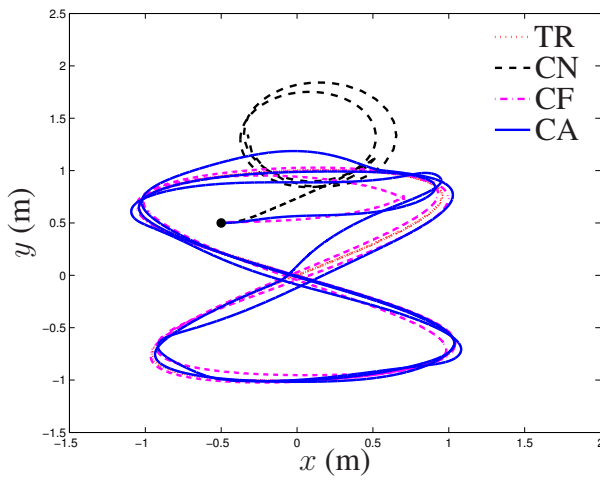
Simulação 10: trajetória em forma de “8” e deslizamentos constantes por partes

A Simulação 10 é realizada para que o desempenho do controlador baseado no filtro UKF usando o modelo dinâmico possa ser verificado em relação a perfis de trajetórias geradas com entradas de referência com altas taxas de variações.

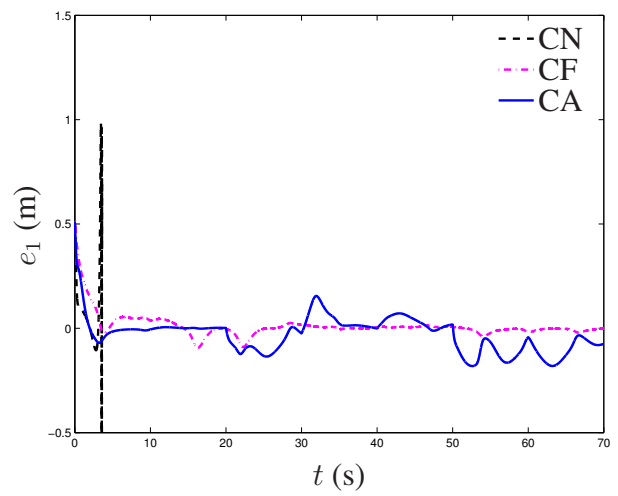
A Figura 6.46 mostra a mesma comparação realizada na Figura 6.34(a). Entretanto, nessa comparação assume-se que os robôs com controlador sem estimador (CS), com controlador baseado no filtro UKF (CF) e com controlador adaptativo (CA) estão submetidos as condições da configuração de Simulação 10. As trajetórias de referência (TR), do robô com CS, CF e CA são representadas na Figura 6.46(a) pelas linhas pontilhadas, tracejada, ponto-tracejada e azul sólida, respectivamente. Os erros e_1 , e_2 , e_3 , e_4 e e_5 obtidos pelos controladores CS, CF e CA são representados nas Figuras 6.46(b)-6.46(f) pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. A condição inicial do robô, diferente da condição inicial da trajetória de referência, é dada por $q(0) = (0, -1, 0)^T$. A condição inicial do robô é representada na Figura 6.46(a) pelo símbolo “•”.

A Figura 6.47 mostra os valores estimados das taxas de deslizamento i_l e i_r pelo filtro UKF (EF) e lei de adaptação (EA). Os valores reais, estimados pelo filtro UKF e pela lei de adaptação são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente. As relações entre os valores estimados das taxas de deslizamento e dos parâmetros de deslizamento são dadas por $\hat{i}_l = 1 - 1/\hat{a}_l$ e $\hat{i}_r = 1 - 1/\hat{a}_r$. As condições iniciais da lei de adaptação são dadas por $\hat{a}_l(0) = 1.1$ e $\hat{a}_r(0) = 1.2$.

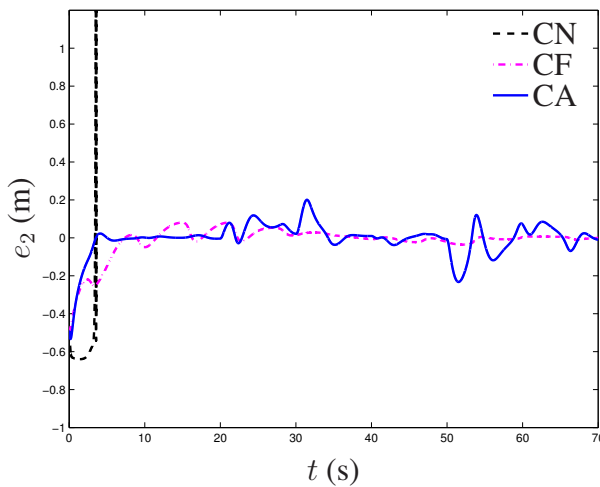
As Figuras 6.48(a) e 6.48(b) mostram os sinais de entrada de controle gerados pelos controlador sem estimador (CS), pelo controlador baseado no filtro UKF (CF) e pelo controlador adaptativo (CA), respectivamente. Os sinais gerados pelo CS, CF e CA são representados pelas linhas tracejada, ponto-tracejada e sólida, respectivamente.



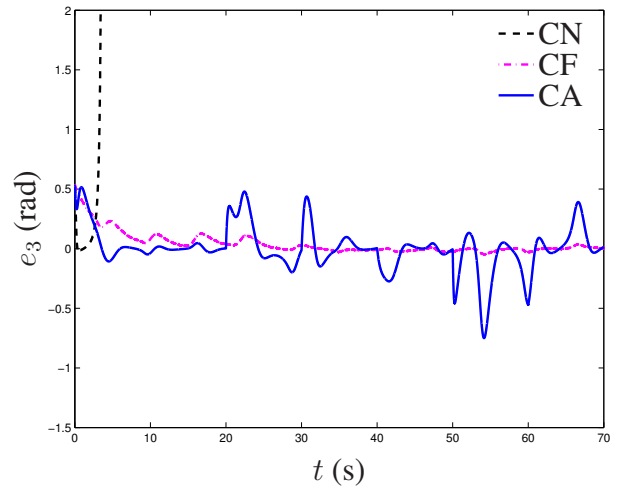
(a) Trajetória do robô.



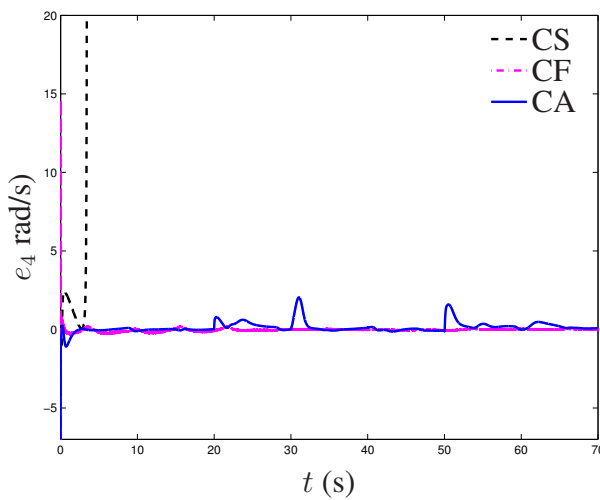
(b) Erro e_1 .



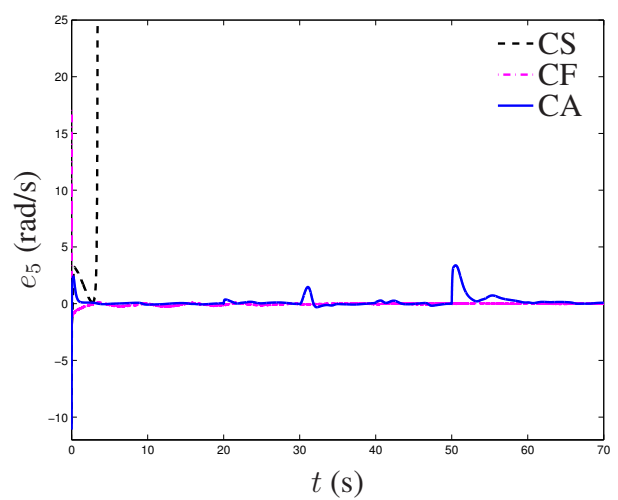
(c) Erro e_2 .



(d) Erro e_3 .



(e) Erro e_4 .



(f) Erro e_5 .

Figura 6.46 - Trajetória do robô e erro de configuração $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)^T$ obtidos com o controlador sem estimador (CS), com o controlador baseado no filtro UKF (CF) e com o controlador adaptativo (CA) sob condições dadas pela configuração de Simulação 10.

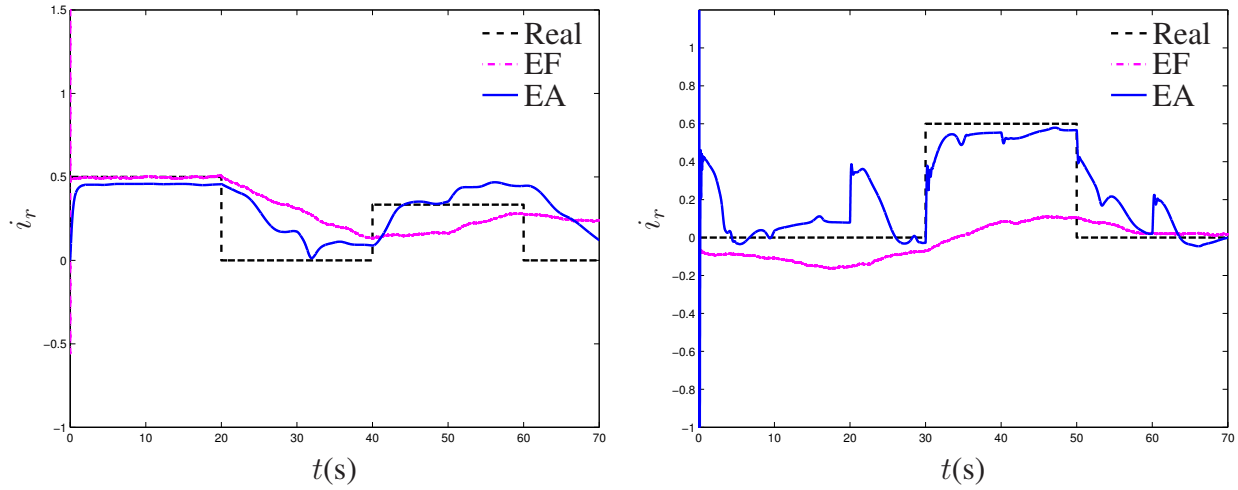


Figura 6.47 - Comparação entre os valores dos deslizamento reais e os respectivos valores dos parâmetros estimados para perfis de deslizamentos constantes por partes.

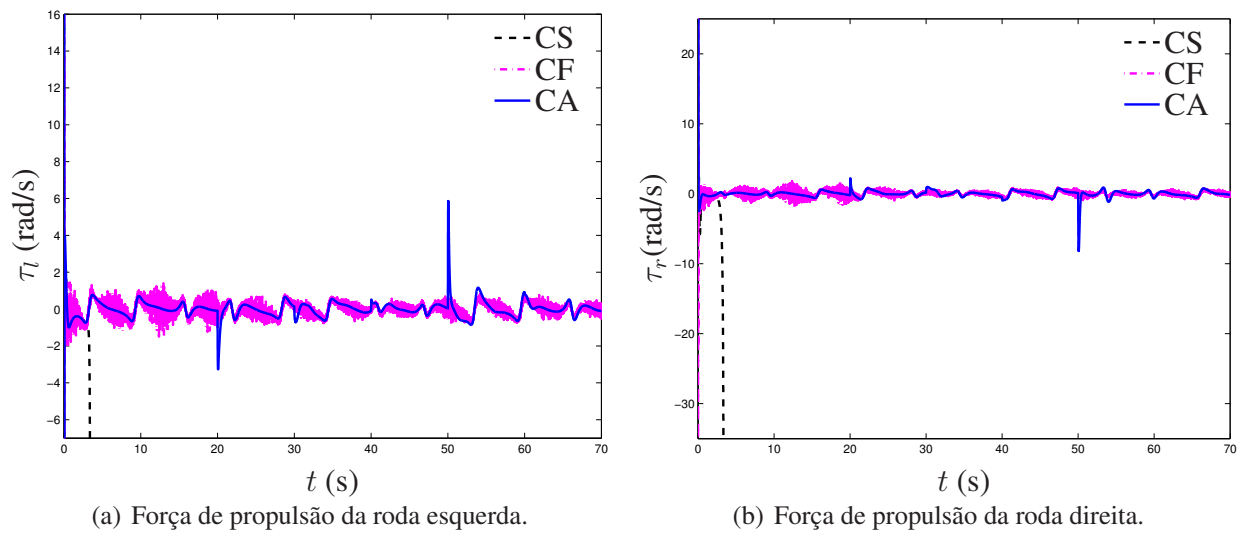


Figura 6.48 - Entradas de controle dadas pelas forças de propulsão aplicadas sobre os eixos das rodas direita τ_r e esquerda τ_l em N.m.

7 CONCLUSÕES

7.1 Comentários gerais

Nesta tese foram propostas estratégias de controle para o problema de rastreamento de trajetória de robôs móveis não holonômicos com deslizamento longitudinal das rodas. Essas estratégias de controle foram projetadas usando dois modelos, um cinemático e um dinâmico, que consideram os deslizamentos longitudinais das rodas como sendo parâmetros desconhecidos.

A primeira estratégia proposta foi um controlador adaptativo baseado no modelo cinemático do robô. Nesse modelo as entradas de controle são dadas pelas velocidades angulares das rodas do robô. A lei de controle que fornece essas velocidades depende dos parâmetros de deslizamento desconhecidos que são estimados por uma lei de adaptação. Assumindo que os parâmetros de deslizamento são constantes, demonstrou-se, usando a teoria de Lyapunov, a estabilidade do sistema em malha fechada. Além disso, a convergência assintótica da estimação dos parâmetros de deslizamento para seus valores reais é garantida utilizando dois métodos distintos. O primeiro método assume inicialmente que os erros de estimação dos parâmetros convergem para algum valor quando o tempo tende a infinito, para em seguida mostrar que esse valor é zero. O segundo método considera o sistema em malha fechada linearizado em torno da origem para mostrar que essa origem converge assintoticamente para zero.

A segunda estratégia proposta foi um controlador adaptativo baseado em um modelo dinâmico simplificado do robô. A dinâmica das rodas não é considerada na obtenção desse modelo, que possui entradas de controle dadas por forças de propulsão aplicadas no centro das rodas. Utilizando uma lei de controle que cancela a dinâmica do robô o problema de rastreamento é reduzido à forma do integrador de um passo a trás (*backstepping*) com uma nova entrada de controle denominada entrada auxiliar. Utilizando-se a técnica do *backstepping*, essa entrada auxiliar foi projetada de tal forma que a velocidade do robô siga uma velocidade que o estabilize na trajetória de referência. Essa velocidade é dada pela lei de controle cinemática adaptativa. Assumindo também que os deslizamentos longitudinais das rodas são constantes, demonstrou-se, usando a teoria de Lyapunov a estabilidade do sistema em malha fechada obtida com essa estratégia de controle.

A aplicação de filtros como estimadores foi investigada por meio de um sistema de controle baseado no modelo cinemático e na estimação dos parâmetros de deslizamento do robô. Os parâmetros estimados são utilizados para realimentar a lei de controle que fornece as velocidades angulares das rodas do robô necessárias para compensar os efeitos dos deslizamentos longitudinais. Seguindo a ideia dessa estratégia, propôs-se um controlador baseado no modelo dinâmico. Essa estratégia utiliza uma lei de controle que fornece forças de propulsão aplicadas no centro das rodas. O filtro de Kalman *unscented* é utilizado nessas estratégias, pois apresenta um desempenho ligeiramente superior quando comparado com o filtro de Kalman estendido na estimação dos parâmetros em malha aberta.

Os desempenhos dos controladores propostos nesta tese foram comparados por meio de simulações numéricas. A comparação do desempenho de controladores de robôs móveis não é uma tarefa simples, pois, em geral, esse desempenho depende da trajetória de referência utilizada. Nesta tese, tal desempenho também depende muito dos deslizamentos aos quais o robô está submetido. Para solucionar essas dificuldades os ganhos de cada controlador foram otimizados com relação à mesma trajetória e perfil de deslizamento. A função minimizada considera tanto os erros de postura quanto os esforços de controle. Para englobar uma maior variedade de situações reais possíveis, dois perfis de trajetórias de referência e dois perfis de deslizamento longitudinal das rodas foram utilizados nas simulações.

A estabilidade dos sistemas de controle adaptativos propostos foi demonstrada analiticamente somente para o caso de deslizamentos constantes, contudo as simulações numéricas mostram que tais sistemas apresentam comportamentos satisfatórios com relação aos erros de postura quando os deslizamentos variam no tempo. Em geral, os deslizamentos longitudinais das rodas de robôs móveis são funções que variam suavemente. Contudo, as simulações numéricas foram realizadas com funções que apresentam variações bruscas dentro do seu intervalo de definição. Como esperado, os controladores adaptativos apresentaram, quando comparados com os controladores sem estimador, resultados superiores em termos do erro de postura. Entretanto, uma característica importante observada foi que o melhor desempenho dos controladores adaptativos não implicou maiores esforços de controle.

A principal vantagem dos controladores adaptativos propostos com relação aos controladores sem estimador é a compensação em tempo real dos deslizamentos longitudinais das rodas, que, em geral, não podem ser obtidos facilmente. Entretanto, uma desvantagem das estratégias adaptativas

é não considerar incertezas do modelo e das medidas dos estados no seu projeto, que considera realimentação completa de estados.

O sistema de controle adaptativo também é comparado com o sistema de controle baseado em filtro por meio de simulações numéricas em tempo discreto. A discretização desses sistemas de controle foi obtida utilizando-se o método de Runge-Kutta de 4º ordem, que apresentou resultados mais precisos com relação aos métodos de Euler de 1º e 2º ordem. Os resultados obtidos utilizando os controladores adaptativos e os controladores baseados em técnicas de filtragem assemelham-se em desempenho quando comparados os erros de postura e os erros de estimação dos parâmetros de deslizamento desconhecidos.

A principal vantagem dos controladores adaptativos propostos, com relação aos controladores baseados em filtro, é a garantia de convergência da trajetória do robô para a trajetória de referência. Por outro lado, a aplicação das técnicas de filtragem como estimadores se justifica no caso em que os filtros já são utilizados na eliminação de ruídos de medidas.

7.2 Contribuições

A principal contribuição desta tese é a estratégia de controle adaptativa desenvolvida para resolver o problema de rastreamento de trajetórias de robôs móveis não holonômicos com deslizamento longitudinal das rodas. Mais especificamente, a relevância da estratégia de controle adaptativa proposta consiste na demonstração formal da estabilidade do sistema em malha fechada.

Além disso, esta tese contribui com a formulação de um modelo dinâmico simplificado para robôs móveis não holonômicos com deslizamento longitudinal das rodas. Esse modelo simplificado permite que estratégias de controle desenvolvidas com base no modelo cinemático possam ser estendidas para fornecer leis de controle que consideram a dinâmica do robô.

Esta tese também contribui com uma investigação por meio de simulações numéricas computacionais da aplicação de filtros como estimadores de parâmetros. Os comportamentos dos filtros desenvolvidos para sistemas não lineares são analisados em malha fechada com a estratégia de controle.

As contribuições mencionadas anteriormente resultaram nas seguintes publicações:

1. IOSSAQUI, J. G.; CAMINO, J. F.; ZAMPIERI, D. E. Adaptive tracking control of tracked mobile robots with unknown slip parameters. In: **Proceedings of the XVIII Congresso Brasileiro de Automática**. Bonito, Brazil, 2010.
2. IOSSAQUI, J. G.; CAMINO, J. F.; ZAMPIERI, D. E. Adaptive torque-based control of tracked mobile robots with unknown longitudinal slip parameter. In: **Proceedings of the VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. Campina Grande, Brazil, 2010.
3. IOSSAQUI, J. G.; CAMINO, J. F.; ZAMPIERI, D. E. An application of filtering techniques for the tracking control of mobile robots with slipping. In: **Proceedings of the XIV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics**. São Sebastião, Brazil, 2011.
4. IOSSAQUI, J. G.; CAMINO, J. F.; ZAMPIERI, D. E. A nonlinear control design for tracked robots with longitudinal slip. In: **Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control**. Milano, Italy, 2011.
5. IOSSAQUI, J. G.; CAMINO, J. F.; ZAMPIERI, D. E. Slip estimation using the unscented kalman filter for the tracking control of mobile robots. In: **Proceedings of the 21st International Congress of Mechanical Engineering**. Natal, Brazil, 2011.

7.3 Trabalhos futuros

A tese apresentada tem três linhas distintas que dão espaço a melhorias e modificações a serem realizadas em trabalhos futuros. Na parte de modelagem, seria interessante considerar a dinâmica das rodas no modelo dinâmico. Essa modelagem requer um estudo mais específico sobre as forças de interação entre as rodas e o solo. Também na parte de modelagem, seria interessante incluir os efeitos dos deslizamentos laterais no modelo dinâmico.

Na parte de controle, seria interessante estender a prova de estabilidade do sistema em malha fechada do robô com controlador adaptativo para parâmetros de deslizamentos variantes no tempo. Também seria interessante formular novas leis de controle para compensar o deslizamento lateral. Seguindo o trabalho de Michalek e Kozłowski (2011), uma extensão direta desta tese seria verificar

como aplicar as leis de controle adaptativas propostas em um robô do tipo carro.

Na parte de filtragem, objetivando aplicações reais, seria interessante que uma metodologia de determinação das matrizes de covariância fosse mais bem compreendida. Também seria interessante derivar modelos mais completos para representar os efeitos dos deslizamentos das rodas, de tal forma a aliviar a hipótese de deslizamentos constantes utilizada na investigação dos algoritmos de filtragem.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, A. P.; HESPANHA, J. P. Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 52, n. 8, p. 1362–1379, 2007.
- AGUILAR, L. E. et al. Robust path-following control with exponential stability for mobile robots. In: **Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Leuven, Belgium: [s.n.], 1998. p. 3279–3284.
- ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Optimal Filtering**. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1979.
- ANGELOVA, A. et al. Learning to predict slip for ground robots. In: **Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Orlando, USA: [s.n.], 2006.
- ANUPOJU, C.; SU, C.-Y.; OYA, M. Adaptive motion tracking control of uncertain nonholonomic mechanical systems including actuator dynamics. **IET Control Theory Applications**, v. 152, p. 575–580, 2005.
- BAR-SHALOM, Y.; LI, X.-R.; KIRUBARAJAN, T. **Estimation with Applications To Tracking and Navigation**. New York, USA: John Wiley and Sons, 2001.
- BLOCH, A. M.; REYHANOGLU, M.; MCCLAMROCH, N. H. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 11, p. 1746–1757, 1992.
- BONIN-FONT, F.; ORTIZ, A.; OLIVER, G. Visual navigation for mobile robots: A survey. **Journal of Intelligent and Robotic Systems**, v. 53, n. 1, p. 263–269, 2008.

BUEHLER, M.; IAGNEMMA, K.; SINGH, S. **The DARPA Urban Challenge: Autonomous Vehicles in City Traffic**. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2009.

CAMPION, G.; BASTIN, G.; D'ANDRÉA-NOVEL, B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 12, n. 1, p. 47–62, 1996.

CHWA, D. et al. Sliding mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots. In: **Proceedings of the American Control Conference**. Anchorage, USA: [s.n.], 2002.

COELHO, P.; NUNES, U. Path-following control of mobile robots in presence of uncertainties. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 21, n. 2, p. 252–261, 2005.

COLBAUGH, R.; BARANY, E.; GLASS, K. Adaptive control of nonholonomic robotic systems. **Journal of Robotic Systems**, v. 15, n. 7, p. 365–393, 1998.

CORRADINI, M.; T.LEO; G.ORLANDO. Experimental testing of a discrete-time sliding mode controller for trajectory tracking of a wheeled mobile robot in the presence of skidding effects. **Journal of Robotic Systems**, v. 19, n. 4, p. 177–188, 2002.

CORRADINI, M. L.; ORLANDO, G. Robust tracking control of mobile robots in the presence of uncertainties in the dynamical model. **Journal of Robotic Systems**, v. 18, n. 6, p. 317–323, 2001.

D'ANDRÉA-NOVEL, B.; BASTIN, G.; CAMPION, G. Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization. **International Journal of Robotics Research**, v. 14, n. 6, p. 543–559, 1995.

DIERKS, T.; JAGANNATHAN, S. Asymptotic adaptive neural network tracking control of nonholonomic mobile robot formations. **Journal of Intelligent and Robotic Systems**, v. 56, n. 1, p. 153–176, 2009.

DONG, W. Control of uncertain wheeled mobile robots with slipping. In: **IEEE Conference on Decision and Control**. Atlanta, USA: [s.n.], 2010.

DONG, W.; XU, W. L. Adaptive tracking control of uncertain nonholonomic dynamic system. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 46, n. 3, p. 450–454, 2001.

FIERRO, R.; LEWIS, F. L. Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. **Journal of Robotic Systems**, v. 14, n. 3, p. 149–163, 1997.

FIGUEIREDO, L. C.; JOTA, F. G. Introdução ao controle de sistemas não-holonômicos. **Revista Controle and Automação**, v. 15, n. 3, p. 243–268, 2004.

FUKAO, T.; NAKAGAWA, H.; ADACHI, N. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 16, n. 5, p. 609–615, 2000.

GANTMACHER, F. R. **The Theory of Matrices**. New York, NY, USA: Chelsea Publishing Company, 1960.

GONZALES, R. et al. Adaptive control for a mobile robot under slip conditions using LMI-based approach. In: **Proceedings of the European Control Conference**. Budapest, Hungary: [s.n.], 2009. p. 1251–1256.

_____. Robust tube-based mpc for constrained mobile robots under slip conditions. In: **Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference**. Shanghai, China: [s.n.], 2009.

GONZALEZ, R. et al. Localization and control of tracked mobile robots under slip conditions. In: **Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics**. Málaga, Spain: [s.n.], 2009.

GREENWOOD, D. T. **Advanced Dynamics**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2003.

GU, D.; HU, H. Receding horizon tracking control of wheeled mobile robots. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 14, n. 4, p. 743–749, 2006.

HAYKIN, S. S. **Kalman Filtering and Neural Networks**. New York, USA: John Wiley and Sons, 2001.

IOSSAQUI, J. G.; CAMINO, J. F.; ZAMPIERI, D. E. Adaptive torque-based control of tracked mobile robots with unknown longitudinal slip parameter. In: **Proceedings of the VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. Campina Grande, Brazil: [s.n.], 2010.

_____. Adaptive tracking control of tracked mobile robots with unknown slip parameters. In: **Proceedings of the XVIII Congresso Brasileiro de Automática**. Bonito, Brazil: [s.n.], 2010.

_____. An application of filtering techniques for the tracking control of mobile robots with slipping. In: **Proceedings of the XIV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics**. São Sebastião, Brazil: [s.n.], 2011.

_____. A nonlinear control design for tracked robots with longitudinal slip. In: **Proceedings of the 18th World Congress of the International Federation of Automatic Control**. Milano, Italy: [s.n.], 2011.

_____. Slip estimation using the unscented kalman filter for the tracking control of mobile robots. In: **Proceedings of the 21st International Congress of Mechanical Engineering**. Natal, Brazil: [s.n.], 2011.

JIANG, Z.-P.; NIJMEIJER, H. Tracking control of mobile robots: A case study in backstepping. **Automatica**, v. 33, n. 7, p. 1393–1399, 1997.

JU, G.; WU, Y.; SUN, W. Adaptive output feedback asymptotic stabilization of nonholonomic systems with uncertainties. **Nonlinear Analysis**, v. 7, n. 1, p. 5106–5117, 2009.

JULIER, S. J.; UHLMANN, J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation. **Proceedings of the IEEE**, v. 92, p. 401–422, 2004.

KANAYAMA, Y. et al. A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. In: **IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Cincinnati, USA: [s.n.], 1990. p. 384–389.

KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, 2001.

KIM, D.-H.; OH, J.-H. Globally asymptotically stable tracking control of mobile robots. In: **Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications**. Trieste, Italy: [s.n.], 1998. p. 1297–1301.

KIM, M.-S. et al. Designing a robust adaptive dynamic controller for nonholonomic mobile robots under modeling uncertainty and disturbances. **Mechatronics**, v. 13, p. 507–519, 2003.

KOLMANOVSKY, I.; MCCLAMROCH, N. H. Developments in nonholonomic control problems. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 15, n. 6, p. 20–36, 1995.

KOO, S. C. J.; WON, S. Observer-based trajectory tracking control for a wheeled mobile robot. In: **Proceedings of the 7th Asian Control Conference**. Hong Kong, China: [s.n.], 2009.

LAVALLE, S. M. **Planning Algorithms**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2006.

LE, A. T.; RYE, D. C.; D.WHYTE, H. F. Estimation of back-soil interactions for autonomous tracked vehicles. In: **IEEE International Conference on Robotics and Automation**. Albuquerque, New Mexico: [s.n.], 1997. p. 1388–1393.

LEE, J. H. et al. Sliding mode control for trajectory tracking of mobile robot in the RFID sensor space. **International Journal of Control, Automation, and Systems**, v. 7, n. 3, p. 429–435, 2009.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. São Paulo, SP, Brasil: Livraria da Física, 2007.

LI, W.; SLOTINE, J.-J. E. **Applied Nonlinear Control**. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 1991.

LIN, W.-S.; CHANG, L.-H.; YANG, P.-C. Adaptive critic anti-slip control of wheeled autonomous robot. **IET Control Theory Applications**, v. 1, n. 1, p. 51–57, 2007.

LUCA, A. de; ORIOLO, G.; VENDITTELLI, M. Control of wheeled mobile robots: An experimental overview. In: **Articulated and Mobile Robotics for Services and Technologies**. [S.l.: s.n.], 2001. p. 181–226.

MARTINS, F. N. et al. An adaptive dynamic controller for autonomous mobile robot trajectory tracking. **Control Engineering Practice**, v. 16, n. 11, p. 1354–1363, 2008.

MARTINS, N. A. et al. Neural dynamic control of a nonholonomic mobile robot incorporating the actuator dynamics. In: **Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control and Automation**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 563–568.

_____. An adaptive variable structure controller for the trajectory tracking of a nonholonomic mobile robot with uncertainties and disturbances. **Journal of Computer Science and Technology**, v. 11, n. 1, p. 34–40, 2011.

MEYER, C. D. **Matrix Analysis and Applied Linear Algebra**. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

MICHALEK, M.; KOZŁOWSKI, K. Feedback control framework for car-like robots using the unicycle controllers. **Robotica**, v. 30, n. 1, p. 517–535, 2011.

MICHALEK, M. M. et al. Vector-field-orientation tracking control for a mobile vehicle disturbed by the skid-slip phenomena. **Journal of Intelligent and Robotic Systems**, v. 59, n. 3, p. 341–365,

2010.

MORALES, J. et al. Power consumption modeling of skid-steer tracked mobile robots on rigid terrain. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 25, n. 5, p. 1098–1108, 2009.

MORIN, P.; SAMSON, C. **Chapter Trajectory Tracking for Non-holonomic Vehicles, in Lecture Notes in Control and Information Sciences**. London, UK: Springer-Verlag, 2006.

_____. **Chapter Motion Control of Wheeled Mobile Robots, in Handbook of Robotics**. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2008. 799–826 p.

MUIR, P.; NEUMAN, C. P. **Kinematic Modeling of Wheeled Mobile Robots**. Pittsburgh, PA, 1986.

NOURBAKHSI, I. R.; SIEGWART, R. **Introduction of Autonomous Mobile Robots**. London, UK: The MIT Press, 2004.

OJEDA, L. et al. Current-based slippage detection and odometry correction for mobile robots and planetary rovers. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 22, n. 2, p. 366–378, 2006.

ORIOLO, G.; LUCA, A. D.; VENDITTELLI, M. Two observer-based tracking algorithms for a unicycle mobile robot. **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, v. 12, n. 4, p. 513–522, 2002.

_____. WMR control via dynamic feedback linearization: Design, implementation, and experimental validation. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 10, n. 6, p. 835–852, 2002.

PACEJKA, H. B. **Tyre and Vehicle Dynamics**. Oxford, UK: Society of Automotive Engineers and Butterworth-Heinemann, 2002.

PETROV, P. Modeling and adaptive path control of a differential drive mobile robot. In: **Proceedings of the 12th International Conference on Automatic Control, Modelling and Simulation**. Catania, Italy: [s.n.], 2010.

POURBOGHRAT, F. Exponential stabilization of nonholonomic mobile robots. **Computers and Electrical Engineering**, v. 28, n. 5, p. 349–359, 2002.

ROSENBROCK, H. H. The stability of linear time-dependent control systems. **Journal Electronics and Control**, v. 15, p. 73–80, 1963.

RYU, J.-C.; AGRAWAL, S. K. Differential flatness-based robust control of mobile robots in the presence of slip. **International Journal of Robotics Research**, v. 30, n. 4, p. 463–475, 2011.

SAMSON, C.; AIT-ABDERRAHIM, K. Feedback stabilization of a nonholonomic wheeled mobile robot. In: **IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**. Osaka, Japan: [s.n.], 1991. p. 1242–1247.

SANCHEZ, R. G. **Contributions to Modelling and Control of Mobile Robots in Off-Road Conditions**. Tese (Doutorado) — Universidad de Almería, Almería, Spain, 1999.

SEYR, M.; JAKUBEK, S. Proprioceptive navigation, slip estimation and slip control for autonomous wheeled mobile robots. In: **Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation and Mechatronics**. Bangkok, Thailand: [s.n.], 2006.

SIDEK, N.; SARKAR, N. Dynamic modeling and control of nonholonomic mobile robot with lateral slip. In: **Proceedings of the 7th WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation**. Cambridge, UK: [s.n.], 2008. p. 66–74.

SIMON, D. **Optimal State Estimation: Kalman, H_{∞} and Nonlinear Approaches**. New Jersey, USA: John Wiley and Sons, 2006.

SONG, Z. et al. Non-linear observer for slip estimation of tracked vehicles. **Journal of Automobile Engineering**, v. 222, n. 4, p. 515–533, 2008.

SORDALEN, . J.; WI, C. C. de. Exponential control law for a mobile robot: Extension to path following. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 9, n. 6, p. 837–842, 1993.

SORDALEN, O. J.; EGELAND, O. Exponential stabilization of nonholonomic chained systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40, n. 1, p. 35–49, 1995.

SPIVAK, M. **Calculus on Manifolds**. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1965.

TARAKAMEH, A.; SHOJAEI, K.; SHAHR, A. M. Adaptive control of nonholonomic wheeled mobile robot in presence of lateral slip and dynamic uncertainties. In: **Proceedings of the 18th Iranian Conference on Electrical Engineering**. Isfahan, Iran: [s.n.], 2010.

TENENBAUM, R. A. **Dinâmica Aplicada**. São Paulo, Brasil: Editora Manole, 2006.

THRUN, S. et al. Stanley: The robot that won the darpa grand challenge. **Journal of Field Robotics**, v. 23, n. 9, p. 661–692, 2006.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. P. **Physics for Scientists and Engineers**. New York, USA: W. H. Freeman and Company, 2004.

WANG, D.; LOW, C. B. Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: Control design perspective. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 24, n. 3, p. 676–687, 2008.

WARD, C. C.; IAGNEMMA, K. A dynamic-model-based wheel slip detector for mobile robots on outdoor terrain. **IEEE Transactions on Robotics**, v. 24, n. 4, p. 821–831, 2008.

WIT, C. C. de; SORDALEN, . J. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 37, n. 11, p. 1791–1797, 1992.

WONG, J. Y. **Theory of Ground Vehicles**. New York, USA: John Wiley and Sons, 2001.

WU, J.; XU, G.; YIN, Z. Robust adaptive control for a nonholonomic mobile robot with unknown parameters. **Journal of Control Theory and Applications**, v. 7, n. 2, p. 212–218, 2009.

YANG, J.-M.; KIM, J.-H. Sliding mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 15, n. 3, p. 578–587, 1999.

YOO, S. J. Adaptive tracking and obstacle avoidance for a class of mobile robots in the presence of unknown skidding and slipping. **IET Control Theory Applications**, v. 5, n. 14, p. 1597–1608, 2011.

ZHOU, B.; HAN, J. A comparison of nonlinear estimation methods for tracked vehicle with slipping. In: **IEEE International Conference on Control and Automation**. Guangzhou, China: [s.n.], 2007. p. 389–394.

_____. Dynamic feedback tracking control of tracked mobile robots with estimated slipping parameters. In: **Proceedings of the IEEE World Congress on Computational Intelligence**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1991–1996.

ZHOU, B.; PENG, Y.; HAN, J. UKF based estimation and tracking control of nonholonomic mobile robots with slipping. In: **IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics**. Sanya, China: [s.n.], 2007. p. 2058–2063.

APÊNDICE

A.1 Critério de estabilidade de Liénard and Chipart

Teorema 11. (Critério de Estabilidade de Liénard and Chipart (GANTMACHER, 1960)) *As condições necessárias e suficientes para que todas as raízes do polinômio real $p(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$ ($a_0 > 0$) tenha parte real negativa pode ser dadas por qualquer uma das seguintes formas:*

- i) $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$
- ii) $a_n > 0, a_{n-2} > 0, \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots,$
- iii) $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0 \dots; \Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0, \dots,$
- iv) $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0 \dots; \Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \dots,$

onde

$$\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & & \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & & \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & & \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_i \end{pmatrix} \quad (a_k = 0 \text{ para } k > n)$$

A.2 Relação entre as velocidades do robô e as velocidades das rodas

As velocidades de translação v e rotação ω do robô podem ser relacionadas com as velocidades lineares das rodas v_l e v_r . Para isso, considere as velocidades lineares das rodas v_l e v_r dadas

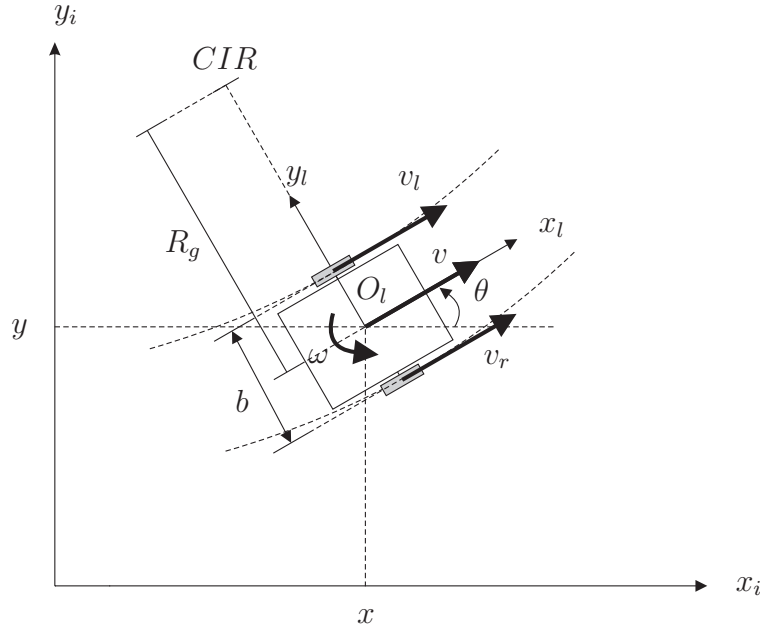


Figura A.1 - Representação do centro instantâneo de rotação CIR do robô não-holonômico do tipo uniciclo.

por

$$v_l = \omega \left(R_g - \frac{b}{2} \right) \quad (\text{A.1})$$

$$v_r = \omega \left(R_g + \frac{b}{2} \right) \quad (\text{A.2})$$

onde $R_g \in \mathbb{R}_+^*$ é o raio de giracão dado pela distância entre o centro geométrico do robô O_l e o centro instantâneo de rotação CIR representados na figura A.1. Além disso, considere a relação

$$v = \omega R \quad (\text{A.3})$$

Então, somando as equações (A.1) e (A.2) obtém-se

$$v_l + v_r = 2\omega R_g \rightarrow R_g = \frac{v_l + v_r}{2\omega}$$

logo, substituindo R em (A.3) tem-se

$$v = \frac{v_l + v_r}{2}$$

Além disso, subtraindo as equações (A.1) e (A.2) obtém-se

$$v_L - v_R = \omega b$$

logo

$$\omega = \frac{v_L - v_R}{b}$$

A.3 Matrizes Jacobiana

Considere o sistema não autônomo (3.19), ou seja

$$\dot{e} = f(t, e)$$

com

$$f(t, e) = \begin{pmatrix} -k_1 e_1 + \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 + \omega_{\text{ref}}(t) (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} (e_2 + k_3 e_3) \sin e_3 \\ -\omega_{\text{ref}}(t) e_1 - \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} e_1 (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} e_1 \sin e_3 + v_{\text{ref}}(t) \sin e_3 \\ -\frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3) - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \end{pmatrix}$$

A matriz Jacobiana deste sistema é dada por

$$\left[\frac{\partial f}{\partial e} \right] (t, e) = \frac{\partial (f_i)}{\partial (e_j)}, \quad i = 1, \dots, 3 \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, 3$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial e_1} &= -k_1 \\
\frac{\partial f_1}{\partial e_2} &= \omega_{\text{ref}}(t) + k_2 v_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} (e_2 + k_3 e_3) \sin e_3 \\
\frac{\partial f_1}{\partial e_3} &= k_3 \omega_{\text{ref}}(t) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} (e_2 + k_3 e_3) \cos e_3 + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2} \sin e_3 + k_2 k_3 v_{\text{ref}}(t) (e_2 + k_3 e_3) \\
\frac{\partial f_2}{\partial e_1} &= -\omega_{\text{ref}}(t) - \frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} (e_2 + k_3 e_3) + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \sin e_3 \\
\frac{\partial f_2}{\partial e_2} &= -\frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} e_1 \\
\frac{\partial f_2}{\partial e_3} &= v_{\text{ref}}(t) \cos e_3 - \frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}(t)}{2} - \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} e_1 \cos e_3 \\
\frac{\partial f_3}{\partial e_1} &= 0 \\
\frac{\partial f_3}{\partial e_2} &= -\frac{k_2 v_{\text{ref}}(t)}{2} \\
\frac{\partial f_3}{\partial e_3} &= -\frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}(t)}{2} + \frac{v_{\text{ref}}(t)}{2k_3} \cos e_3
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Note que a matriz Jacobiana do sistema autônomo (3.18) é um caso particular da matriz Jacobiana dada acima quando $v_{\text{ref}}(t) = v_{\text{ref}}$ e $\omega_{\text{ref}}(t) = \omega_{\text{ref}}$ são constantes.

A.4 Demonstração do Teorema 8 quando as entradas de referência são constantes

Assumindo que as entradas de referência $v_{\text{ref}} > 0$ e ω_{ref} são constantes, o sistema em malha fechada, obtido a partir de (4.11) e (4.12), que representa a dinâmica do erro aumentado $e_a = (e_1, e_2, e_3, \tilde{a}_l, \tilde{a}_r)^T$ é dado pelo seguinte sistema autônomo

$$\dot{e}_a = f(e_a) \tag{A.5}$$

onde $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ é dada por

$$f(e_a) = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) + \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) + v_{\text{ref}} \cos e_3 \\ \left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right)\frac{e_1}{b} - \left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right)\frac{e_1}{b} + v_{\text{ref}} \sin e_3 \\ \omega_{\text{ref}} + \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\tilde{a}_l}{a_l}\right)\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right) - \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\tilde{a}_r}{a_r}\right)\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right) \\ \gamma_1\left(v_c - \frac{b}{2}\omega_c\right)\left(\left(\frac{e_2}{b} + \frac{1}{2}\right)e_1 - (e_2 + k_3 e_3)\frac{e_1}{b} - \frac{k_3}{b}(e_2 + k_3 e_3) - \frac{1}{bk_2} \sin e_3\right) \\ \gamma_2\left(v_c + \frac{b}{2}\omega_c\right)\left(-\left(\frac{e_2}{b} - \frac{1}{2}\right)e_1 + (e_2 + k_3 e_3)\frac{e_1}{b} + \frac{k_3}{b}(e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{bk_2} \sin e_3\right) \end{pmatrix}$$

com v_c e ω_c dadas por

$$\begin{aligned} v_c &= v_{\text{ref}} \cos e_3 - k_3 e_3 \omega_c + k_1 e_1 \\ \omega_c &= \omega_{\text{ref}} + \frac{v_{\text{ref}}}{2} \left[k_2 (e_2 + k_3 e_3) + \frac{1}{k_3} \sin e_3 \right] \end{aligned}$$

com ganhos $k_i > 0$ constantes e parâmetros de deslizamento a_l e a_r constantes.

Aplicando o Teorema 1, pode-se demonstrar que a origem $e_a = 0$ do sistema (A.5) é um ponto de equilíbrio estável. O Teorema 1 requer que a função $f(e_a)$ seja localmente Lipschitz em um domínio que contém a origem $e_a = 0$. Essa condição pode ser verificada utilizando-se o Lema 1. Conforme o Lema 1, a função $f(e_a)$ é localmente Lipschitz se $f(e_a)$ e $[\partial f / \partial e_a](e_a)$ são contínuas em algum domínio $D \subset \mathbb{R}^5$. Verifica-se facilmente, a partir de (A.5), que a função $f(e_a)$ é contínua em $D = \mathbb{R}^5$. Também pode-se verificar que todos os termos da matriz jacobiana $[\partial f / \partial e](e)$ são contínuos em $D = \mathbb{R}^5$. Portanto, aplicando o Lema 1, mostra-se que $f(e)$ é localmente Lipschitz em $D = \mathbb{R}^5$.

Para prosseguir com a aplicação do Teorema 1, considere a função de Lyapunov candidata proposta em (4.13), definida no domínio $D = \{e_a \in \mathbb{R}^5 \mid -\pi < e_3 < \pi\}$, dada por

$$V(e_a) = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2 + k_3 e_3)^2 + \frac{(1 - \cos e_3)}{k_2} + \frac{\tilde{a}_l^2}{2\gamma_1 a_l} + \frac{\tilde{a}_r^2}{2\gamma_2 a_r}$$

cuja derivada ao longo do tempo é dada por

$$\dot{V}(e_a) = -k_1 e_1^2 - \frac{k_2 k_3 v_{\text{ref}}}{2} (e_2 + k_3 e_3)^2 - \frac{v_{\text{ref}}}{2k_2 k_3} \sin^2 e_3$$

Observa-se que $V(0) = 0$ e $V(e_a) > 0$ em $D - \{0\}$. Além disso, $\dot{V}(e_a) \leq 0$ em $D - \{0\}$. Consequentemente, as condições (3.5) e (3.6) do Teorema 1 são satisfeitas para todo $e \in D$. Portanto, $e_a = 0$ é um ponto de equilíbrio estável.

Contudo, não se pode concluir que a origem $e_a = 0$ do sistema (A.5) seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Entretanto, pode-se demonstrar que $e = (e_1, e_2, e_3)^T$ converge assintoticamente para zero quando t tende a infinito aplicando o Lema 3 (Lema de Barbalat).

Mostrou-se que $e_a = 0$ é um ponto de equilíbrio estável, portanto a função diferenciável $V(e_a)$ é limitada quando $t \rightarrow \infty$. Note que a derivada de $\dot{V}(e_a)$ é dada por

$$\ddot{V}(e_a) = -2k_1 e_1 \dot{e}_1 - k_2 k_3 v_{\text{ref}} (e_2 + k_3 e_3) (\dot{e}_2 + k_3 \dot{e}_3) - \frac{v_{\text{ref}}}{k_2 k_3} \sin e_3 \dot{e}_3$$

Assumindo que $v_{\text{ref}} > 0$ é limitada, então $\ddot{V}(e_a)$ também é limitada. Consequentemente, $\dot{V}(e_a)$ é uniformemente contínua. Portanto, pelo Lema 3 tem-se que $\dot{V}(e_a) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Isso implica que $e(t) = (e_1, e_2, e_3)^T \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, da definição do erro de postura (3.15) vê-se que a trajetória do robô $q(t)$ converge assintoticamente para a trajetória de referência $q_{\text{ref}}(t)$ quando o tempo t tende ao infinito.