

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

CONVECÇÃO NATURAL DUPLAMENTE DIFUSIVA
EM TORNO DE UM CILINDRO ENTERRADO NUM
MEIO POROSO SATURADO

CHAVES

029/90

Autor: Carlos Alberto Chaves *et*

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan *et*

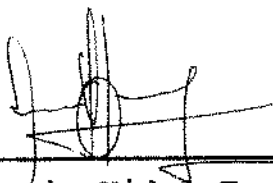
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Este exemplar corresponde
à redação final da Tese
defendida pelo Eng.º Carlos
Alberto Carrasco e aprovada
pela Comissão Julgadora em
07/12/90.

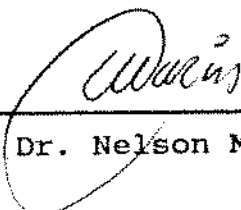
Tese de: Doutorado

Título da Tese: Convecção Natural Duplamente
Difusiva em Torno de um Cilindro
Enterrado num Meio Poroso
Saturado

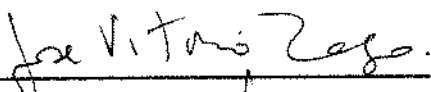
Aprovado por:



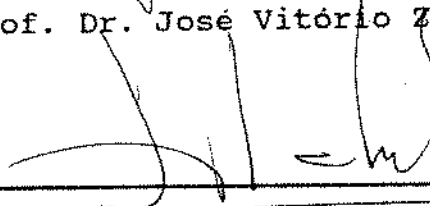
Prof. Dr. Osvair Vidal Trevisan - Presidente



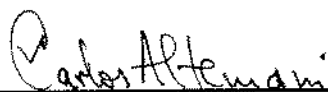
Prof. Dr. Nelson Murcia



Prof. Dr. José Vitorio Zago



Prof. Dr. Silvia Azucena Nebra de Perez



Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani

Campinas, 7 de Dezembro de 1990

Dedico este trabalho aos meus pais, Vera e José, grandes incentivadores nos momentos difíceis e aos meus irmãos, Camilo, Claudemir e Claudio, pela amizade e companheirismo.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao Professor Trevisan pela maneira sempre amiga e humana em que conduziu o trabalho de orientação, incentivando nos momentos certos e que possibilitaram o final deste trabalho.

Agradeço também, particularmente aos professores Altemani e Silvia Nebra, pelas muitas trocas de idéias.

Agradeço em especial, a pessoa de Carlos Eduardo Pereira pela sua paciência e disposição na solução dos muitos problemas de computação que surgiram.

Destaco também meu agradecimento aos colegas do Departamento, pelos bons momentos de convivência.

Agradeço, finalmente, ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) pelo auxílio financeiro, sem o qual este trabalho ficaria impossibilitado de ser realizado.

Os desenhos do texto são devidos a Armando Arruda.

RESUMO

Neste trabalho são apresentadas soluções numéricas para a convecção natural por difusão dupla em torno de um cilindro aquecido enterrado em um meio poroso saturado, sujeito a condições de temperatura e concentração constantes no cilindro e na superfície do solo.

As equações governantes são expressas nas coordenadas bipolares segundo a formulação de função de corrente e resolvidas numericamente pelo método do volume de controle.

As características de transferência de calor e massa são estudadas em função do número de Rayleigh, do número de Lewis e da razão de empuxo.

Soluções analíticas do tipo perturbativo são apresentadas para o mesmo problema tomando por base a perturbação de Rayleigh Ra e da razão de empuxo N . Os resultados analíticos são comparados com os obtidos numericamente. A solução válida nas proximidades do estado estagnante nos permitiu obter resultados em termos dos números de Nusselt e Sherwood para as condições $Ra < 2$ e $-4 < N < 3$ nas situações em que Le é de ordem $O(1)$.

Um estudo similar foi realizado para o caso de fluxo de calor e massa constantes no cilindro e temperatura e concentração constantes na superfície do solo. Também para esta configuração, a solução foi obtida tomando por base a perturbação do número de Rayleigh Ra e da razão de empuxo N e os resultados são comparados com os obtidos numericamente.

SUMMARY

In this work numerical solutions are presented for the natural convection heat transfer by double diffusion from a heated cylinder buried in a saturated porous medium where both the cylinder and the medium surfaces are maintained at constant uniform temperature and concentration.

The governing equations are expressed in bicylindrical coordinates in the stream function formulation and handled numerically by a control-volume method.

Heat and Mass Transfer are studied as a function of Rayleigh number, Lewis number and the buoyancy ratio number.

Perturbative type solutions for the problem are presented considering a perturbation in Rayleigh number and the buoyancy ratio number.

The numerical results obtained are compared with analytical results. The solution, valid in the vicinity of the stagnant condition, allowed us to get results in terms of Nusselt and Sherwood numbers in the range $Ra < 2$, $-4 < N < 3$ in conditions that Le is of $O(1)$.

A similar study was carried for the case where a uniform heat and mass flux cylinder and constant uniform temperature and concentration in the medium surface is considered.

For this configuration, the solution was also obtained taking a perturbation in Rayleigh and buoyancy ratio numbers. The results are compared with numerical ones.

CONVECÇÃO NATURAL DUPLAMENTE DIFUSIVA EM TORNO DE UM CILINDRO ENTERRADO NUM MEIO POROSO SATURADO

ÍNDICE

Nomenclatura.....	i
I. Introdução.....	1
II. Formulação Matemática.....	6
II.1. Equações de Conservação.....	6
II.2. O Sistema de Coordenadas Bipolares.....	8
II.3 Equações Transformadas.....	11
II.4. Variáveis Adimensionais.....	13
II.5. Condições de Contorno.....	15
II.6. Equações Discretizadas.....	18
III. Solução Numérica.....	23
III.1. Nusselt e Sherwood no Sistema de Coordenadas (u,v)...	26
III.2. O Caso Analisado por Haim Bau.....	28
IV. Resultados e Discussão.....	33
IV.1 Escoamentos Dirigidos pelo Calor.....	33
IV.2 Escoamentos com $N > 0$	48
IV.3 Escoamentos com $N < -1$	55
IV.4 Influência da Razão de Empuxo.....	63
V. Soluções Analíticas pelo Método da Perturbação.....	74
V.1 Introdução.....	74
V.2 Expansão em Torno de R e N.....	75
V.2.1 Caso T e C Constantes no Cilindro e na Superfície do Solo.....	76
V.2.1.1 Resultados e Discussões.....	96
V.2.2 Caso q e j Constantes no Cilindro e T e C Constantes na Superfície do Solo.....	104
V.2.2.1 Resultados e Discussões.....	112
V.3 Conclusões.....	120
VI. Conclusões Finais.....	121
Referências.....	123

Apêndices:

A - Sistema de Coordenadas Bipolares (Equações de Transformação).....	125
B - Dedução das Equações Discretizadas pelo Método do Volume de Controle.....	127
C - Expansão das Funções G e H em Séries de Fourier....	133
D - Programas.....	137

Nomenclatura

a	fator de escala para coordenadas bipolares, adimensional
C	concentração do constituinte químico, $[\text{kg}/\text{m}^3]$
d	profundidade do cilindro à superfície superior, $[\text{m}]$
D	difusividade de massa do constituinte no meio, $[\text{m}/\text{s}^2]$
$\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_z$	versores nas coordenadas bipolares, adimensionais
g	aceleração da gravidade, $[\text{m}/\text{s}^2]$
G	função, definida na Eq.2-25, adimensional
h_u, h_v, h_z	fatores de escala na mudança para variáveis bipolares, adimensionais
H	função, definida na Eq.2-24, adimensional
j	fluxo de massa local, $[\text{kg}/\text{m}^2\text{s}]$
J	fluxo de massa total por unidade de comprimento do cilindro, $[\text{kg}/\text{ms}]$
k	condutividade térmica efetiva do meio poroso saturado, $[\text{W}/\text{m K}]$
K	permeabilidade do meio poroso, $[\text{m}^2]$
Le	numero de Lewis, α/D , adimensional
m	parâmetro da grade, número de nós na direção u, adimensional
n	parâmetro da grade, número de nós na direção v, adimensional
N	razão de empuxo, adimensional
$\bar{Nu}$	número de Nusselt médio, adimensional
p	pressão, $[\text{Pa}]$
P_r	número de Prandtl, ν / α , adimensional
q	fluxo de calor local, $[\text{W}/\text{m}^2]$
Q	fluxo de calor total por unidade de comprimento do cilindro, $[\text{W}/\text{m}]$

Qx	dimensão sobre o eixo x, [m]
Qy	dimensão sobre o eixo y, [m]
r_1	raio do cilindro enterrado, [m]
Ra	número de Rayleigh modificado, adimensional
$\bar{Sh}$	número de Sherwood Médio, adimensional
T	temperatura, [K]
u, v	coordenadas bipolares, [m]
V	velocidade média, [m/s]
V_u, V_v	velocidades nas direções u e v, [m/s]
v_1	valor da coordenada v sobre o cilindro, [m]
x, y	coordenadas cartesianas, [m]
Y	valor na superfície do solo, [m]
	($Y = 0$ corresponde a $u = \pi$ $v=0$)

Simbolos Gregos

α	difusividade térmica efetiva do meio poroso saturado, [m/s ²]
β	coeficiente de expansão térmica, [K ⁻¹]
β_c	coeficiente de expansão química, [m ³ /kg]
ΔC	diferença de concentração, do cilindro à superfície superior, [kg/m ³]
ΔT	diferença de temperatura, do cilindro à superfície superior, [K]
θ	valor da variável u sobre o cilindro ($v=v_1$), adimensional
μ	viscosidade dinâmica, [Pa s]
ν	viscosidade cinemática, [m/s ²]
ρ	densidade da solução, [kg/m ³]
Ψ	função de corrente, [m ² /s]
∇	operador diferencial nabla

índices

() *	variáveis dimensionais
() _w	valores relativos ao cilindro
() _s	valores relativos à superfície superior
(-) _o	valores de referência
()	grandezas vetoriais

Especiais

[[a,b]]	max (a,b)
---------	-----------

FIGURAS

- Fig. 2.1 Sistema de coordenadas bipolares
- Fig. 2.2 Domínio finito considerado
- Fig. 2.3 Célula típica do Método do Volume de Controle
- Fig. 3.1 Comportamento de Nu_c em função do número de pontos da malha ($N=0$ $Ra=10$ $Le=1$ $Nu=2.8$)
- Fig. 3.2.a Comportamento de Nu_c em função do número de pontos da malha ($N=0$ $Ra=10$ $Le=1$ e em radianos)
- Fig. 3.2.b Comportamento de Nu_w em função do número de pontos da malha ($N=0$ $Ra = 10$ $Le = 1$)
- Fig. 4.1 Mapas de fluxo (b,d,f) e de temperatura (a,c,e) ($Le=1$ e $N=0$ $\Delta T = 0.1$)
- a,b - $Ra=0.1$ $\Delta\psi = -0.04$
- c,d - $Ra=10$ $\Delta\psi = -0.5$
- e,f - $Ra=1000$ $\Delta\psi = -10.$
- Fig. 4.2 Influência de Le sobre a distribuição de concentração ($N=0$ $Ra=10$ $\Delta C = 0.1$)
- a - $Le=0.1$
- b - $Le=1$
- c - $Le=10$
- d - $Le=100$
- Fig. 4.3 Influência de Ra sobre Nu no cilindro e na parede ($N=0$ e $Le=1$)
- Fig. 4.4 Influência de Le e Ra sobre Sh ($N=0$)
- a - Sh_c
- b - Sh_c
- c - Sh_w
- Fig. 4.5 Influência de Ra sobre a distribuição de Nu local ($N=0$)
- a - Nu no cilindro
- b - Nu na parede

Fig. 4.6 Influência de Ra sobre a distribuição de Sh local no cilindro ($N=0$)

a - $Le=0.1$

b - $Le=10$

c - $Le=100$

Fig. 4.7 Influência de Le sobre a distribuição de Sh local no cilindro ($N=0$)

a - $Ra=1$

b - $Ra=100$

c - $Ra=1000$

Fig. 4.8 Mapas de fluxo(a,c,e) e de temperatura(b,d,f) ($Le=1$ $N=2$ $\Delta T = 0.1$)

a,b - $Ra=0.1$ $\Delta\psi = -0.1$

c,d - $Ra=10$ $\Delta\psi = -1.5$

e,f - $Ra=1000$ $\Delta\psi = -50.0$

Fig. 4.9 Influência de Le sobre a distribuição de concentração ($N=2$ $Ra=10$ $\Delta C = 0.1$)

a - $Le=0.1$

b - $Le=1$

c - $Le=10$

d - $Le=100$

Fig. 4.10 Influência de Ra e Le sobre Nu e Sh ($N=2$)

a - Nu_c

b - Nu_w

c - Sh_c

d - Sh_w

Fig. 4.11 Influência de Le e Ra sobre Nu_c e Sh_c ($N=2$)

a - Nu_c $Le=0.1$

b - Sh_c $Le=0.1$

c - Nu_c $Le=100$

d - Sh_c $Le=100$

Fig. 4.12 Influência de Le sobre o campo de escoamento ($N=-2$ $Ra=100$)

a - $Le=1$ $\Delta\psi = 15$

b - $Le=50$ $\Delta\psi^+ = 0.01$ $\Delta\psi^- = -0.4$

c - $Le=100$ $\Delta\psi = -15$

- Fig. 5.2 Campos de Temperatura nas proximidades de $N=-1$
 $N=-1.05$ - linha tracejada
 $N=-0.95$ - linha cheia
 $(Ra = Le = 1 \quad DT = 0.1)$
- Fig. 5.3 Comportamento de Nu_c em função de Ra (numérico e perturbado $N=0 \quad Le=1$)
- Fig. 5.4 Comportamento de Sh_c em função de Le (numérico e perturbado $N=0 \quad Ra=1$)
- Fig. 5.5 Comportamento de Nu_c em função de N (numérico e perturbado $Ra=1 \quad Le=1$)
- Fig. 5.6 Comportamento das soluções perturbadas para Sh_c em função de N ($Ra=1$)
- Fig. 5.7 Condições de Contorno para o caso q e j constantes no cilindro e T e C constantes na superfície do solo
- Fig. 5.8 Comportamento de Nu em função de N
(linha cheia - aproximação linear, linha tracejada - aproximação de ordem 2)
- Fig. 5.9 Influência de Ra sobre Nu para $N=-0.9$ e -0.5
- Fig. 5.10 Influência do raio r_1 do cilindro sobre a curva de Nu para profundidades diferentes ($d=1$ e 2)
- Fig. 5.11 Influência da profundidade d sobre Nu para valores baixos e altos de Ra
- Fig. 5.12 Influência de d sobre Nu para os dois casos de condições de contorno ($Ra=0.2$)
- Fig. 5.13 Influência de d sobre Nu para os dois casos de condições de contorno ($Ra=0.4$)

TABELAS

Tabela 2.1	Influência do Domínio na Solução (Ra=1 Le=1 N=0)
Tabela 3.1	Variação de Nu em Função da Malha (N=2 Ra=1 Le=1)
Tabela 3.2	Variação de Nu em Função da Malha (N=2 Ra=1000 Le=1)
Tabela 3.3	Variação de Nu em Função da Malha (N=0 Ra=10 Le=1)
Tabela 5.1	Comparação Entre Sh Analítico e Numérico em Função de N (Ra=1 Le=1)
Tabela 5.2	Comparação Entre Nu Analítico e Numérico em Função de N (N = 0 Le = 1)

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A ocorrência de um diferencial de temperatura entre um cilindro enterrado e o meio que o circunda é comum em diversos processos naturais ou industriais. Exemplos dessa ocorrência são as tubulações de distribuição de vapor, as linhas de oleodutos onde o fluido é mantido aquecido para reduzir os custos de transporte e os cabos de energia elétrica em que se deseja uma dissipação controlada do calor gerado. A difusão pura e a convecção natural são os mecanismos envolvidos na transferência de calor nestes casos.

Conhecer bem estes mecanismos significa deter meios de estimar melhor as perdas de calor, de minimizá-las ou estimulá-las tanto quanto possível em cada interesse específico.

Muitos processos de transporte presentes na natureza são devidos a escoamentos com a ocorrência simultânea de gradientes de temperatura e concentração. Alguns fenômenos oceanográficos como os das fontes de sal encontram explicação na presença acoplada dos gradientes térmicos e salinos. Também encontramos aplicação no controle da disseminação de contaminantes poluidores provenientes dos sítios repositórios de lixo industrial químico e de lixo radioativo que permitem soluções para problemas na área de espalhamento radioativo nos solos, da contaminação dos lençóis hídricos e de outros correlatos que ainda continuam a reclamar solução.

Na literatura encontramos alguns trabalhos para a resolução do problema análogo de transferência de calor na ausência de disseminação de componentes químicos.

Os primeiros trabalhos que trataram do assunto consideraram a transferência de calor num meio puramente condutivo [2-3] e algumas soluções analíticas estão disponíveis na literatura para cilindros e cabos em tais condições.

Para o caso de superfície do cilindro com variações na temperatura e configuração puramente condutiva também encontramos o trabalho de Bau e Sadhal [4] que trata do problema do cilindro em um meio homogêneo, semi-infinito, com condições de fronteira mista (convectiva), considerando um coeficiente de transferência de calor uniforme ao longo do cilindro. Os autores também consideraram um segundo caso de variação linear da temperatura ao longo do eixo do cilindro, apresentando soluções perturbativas para a distribuição de temperatura com a utilização de coordenadas bicilíndricas.

Schrock et alli [5] estudaram, inclusive com experimentos de laboratório, o caso de um cilindro enterrado a uma certa profundidade de uma superfície horizontal permeável. Os autores apresentam então correlações para a distribuição de temperatura quando a transferência de calor começa a ter contribuição significativa da convecção.

Mais recentemente Bau [6], avançando na linha do problema convectivo, apresentou soluções analíticas para a convecção natural em casos de números de Rayleigh baixos. No problema estudado, a convecção é induzida por um cilindro aquecido em um meio poroso saturado e permeável, onde ambos, cilindro e solo, são mantidos a uma temperatura constante. O autor utilizou uma técnica de expansão por perturbação regular para o cálculo dos campos de escoamento e de temperatura obtendo soluções analíticas válidas para números de Rayleigh menores do que $O(1)$.

Ficou então a necessidade de ampliar o campo de conhecimento sobre o problema para uma faixa de números de Rayleigh maiores, o que foi feito por Fernandez and Schrock [7] e Farouk e Shayer [8]. Fernandez and Schrock [7] apresentam correlações para o número de Nusselt no caso de cilindros enterrados aquecidos em um meio poroso saturado numa faixa de Rayleigh variando entre 0.01 e 110.

Farouk e Shayer [8] expandem a faixa estudada do número de Rayleigh para $(0 - 300)$. Como característica deste

trabalho temos a utilização de um sistema de grade composta para a discretização do domínio, com uma malha em coordenadas polares nas vizinhanças do cilindro e em coordenadas cartesianas sobre o resto do domínio. Foi também utilizado o método do volume de controle através de um esquema completamente implícito. Os autores exploraram o parâmetro geométrico da profundidade do cilindro até o solo numa faixa (1,2 a 5.2), apresentando extensas análises dos campos de temperatura e velocidades.

O problema de cilindro enterrado em um meio poroso para o caso de convecção duplamente difusiva (efeito de gradientes de temperatura e de concentração) não teve a atenção dos pesquisadores até o presente momento.

Trevisan [9], em seu trabalho sobre convecção natural por difusão dupla em cavidades, se constitui num dos primeiros a abordar este campo. Uma contribuição importante de seu trabalho foi a utilização da análise de escala em problemas desta natureza.

O presente trabalho é um estudo sobre a convecção natural promovida pela difusão dupla em meios porosos saturados que propõe a resolução numérica para variações de Rayleigh (0,1000), de Lewis (0,100) e da razão de empuxo (-3,+3), utilizando-se do método do volume de controle idealizado por Patankar [1]. Este método vem sendo largamente utilizado e a sua implementação para um sistema de coordenadas bicilíndricas foi realizada. Tal elaboração se constituiu em parte importante deste trabalho.

No capítulo II apresentamos a formulação matemática do problema do cilindro aquecido em um meio poroso saturado. A equação adicional do constituinte químico descreve o transporte difusivo acoplado, objeto de atenção nova no presente trabalho. De posse de tais equações num sistema de coordenadas generalizadas, tratamos da transformação de tais equações para um sistema de coordenadas bicilíndricas que resolveu satisfatoriamente todas as dificuldades existentes para a geometria complexa do problema. A formulação função de corrente é então utilizada nesse sistema. A adimensionalização efetuada nos fornece três parâmetros físicos: o

número de Lewis (Le), o número de Rayleigh (Ra) e a razão de empuxo (N), que governam o movimento do fluido, da energia térmica e da espécie química. As condições de contorno no sistema de coordenadas para o meio semi-infinito estudado se tornam mais simples. A restrição da condição no infinito ser descrita num domínio finito é um assunto analisado com o apoio de testes adicionais de sensibilidade. As equações discretizadas em coordenadas bicilíndricas são apresentadas após a integração numérica direta e posterior aplicação do método do volume de controle desenvolvido por Patankar [1].

O Capítulo III apresenta detalhes da validação do método numérico aplicado. Apresentamos resultados numéricos e sua comparação com dados publicado na literatura. Cuidados necessários com o número de pontos da grade para a convergência do método são mostrados em testes de refinamento da malha.

No Capítulo IV referente a apresentação dos resultados, a análise se torna interessante quando expandimos o campo de variação para Ra e Le . Um valor de N negativo apresenta resultados até então não examinados no tocante à inversão do movimento do fluido.

Nos escoamentos dirigidos pelo calor, os resultados apresentados mostram de forma exaustiva a transição entre os escoamentos puramente condutivo, convectivo e condutivo e puramente convectivo. São apresentados perfis de velocidade, de temperatura e a propagação do contaminante pelo meio na geometria, além da investigação sobre a influência dos parâmetros de Rayleigh e Lewis sobre as curvas de Nusselt e Sherwood no cilindro e na parede.

Nos escoamentos com $N > 0$, o empuxo devido ao gradiente de concentração tem uma maior influência no escoamento em relação ao gradiente de temperatura. Um valor positivo de N cria forças de empuxo concordantes e podemos perceber uma intensificação dos efeitos da força de empuxo sobre o escoamento.

Nos escoamentos com $N < -1$ para certos valores de Ra e Le se percebe o efeito de recirculação no escoamento e tal fenômeno é

analisado com detalhes. Nesta classe de escoamentos o efeito mais interessante é o da troca de calor ocorrer entre o cilindro e o meio com o aumento de Ra ou de Le , com quase nenhum calor trocado entre a parede e o meio.

Uma das contribuições deste trabalho foi a de evidenciar a simetria das curvas de Nu e Sh em relação a um ponto de mínimo. Uma constatação importante revelada pelo trabalho de simulação foi a de tal mínimo depender sensivelmente de Le e muito pouco de Ra .

No Capítulo V apresentamos soluções analíticas via expansão por perturbação para comparação com resultados numéricos obtidos pelo método numérico para o caso de T e C constantes no cilindro e na superfície superior. Tal técnica possibilitou descobrir relações explícitas entre as variáveis da concentração e da temperatura para cada nível de aproximação. A faixa de Ra próximo a 1 é uma limitação da técnica quando se deseja conhecer a influência dos efeitos convectivos sobre o escoamento. O caso q e j constantes no cilindro apresenta resultado não disponíveis na literatura para aproximações lineares, onde se procurou analisar a influência do raio do cilindro e a sua profundidade em relação ao solo para Ra e $(N+1)$ próximos de zero.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Consideramos o problema de um cilindro infinito enterrado em um meio poroso saturado. O cilindro tem raio r_1 e está enterrado a uma profundidade d da superfície superior do meio poroso. A parede externa do cilindro é mantida a uma temperatura T_w e a uma concentração C_w , constantes, enquanto a superfície superior do meio poroso é mantida a uma temperatura T_s e a uma concentração C_s , conforme a Fig. (2.1). As hipóteses de regime permanente e parede impermeável também são consideradas.

II.1 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Para a obtenção das equações que descrevem o problema, assumimos que:

- 1- O meio poroso e o fluido que o satura são homogêneos e isotrópicos.
- 2- A Aproximação de Boussinesq é válida para variações de densidade devido a mudanças tanto de temperatura quanto de concentração.

Podemos assim, expressar a densidade por [10]:

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta (T - T_0) - \beta_c (C - C_0)], \quad (2.1)$$

onde β e β_c são os coeficientes de expansão volumétrica térmica e química, respectivamente definidos por

$$\beta = -1/\rho_0 (\partial\rho/\partial T)_p \quad (2.2)$$

$$\beta_c = -1/\rho_0 (\partial\rho/\partial C)_p \quad (2.3)$$

3- Assumimos a validade da Lei de Darcy para descrever o escoamento do fluido no meio poroso.

Assim

$$(\mu/K) \cdot \bar{V} = - [\nabla p - \rho \bar{g}] \quad (2.4)$$

Tomando-se o rotacional de (2.4) e usando o fato que:

$$\nabla \times \nabla p = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times (\rho \bar{g}) = (\nabla \rho) \times \bar{g} + \rho (\nabla \times \bar{g}) \quad (2.6)$$

$$(\nabla \times \bar{g}) = 0 \quad (2.7)$$

Chegamos a expressão

$$(\mu/K) \nabla \times \bar{V} = - (\nabla \rho) \times \bar{g} \quad (2.8)$$

4- A matriz porosa é rígida, o fluido é incompressível e consideramos as demais propriedades termodinâmicas do fluido (à exceção da densidade no termo de empuxo) e da matriz porosa como constantes.

5- Não ocorrem reações químicas e a dissipação viscosa é desprezível.

6- O meio poroso e o fluido apresentam equilíbrio termodinâmico local, e portanto a temperatura do sistema se refere indistintamente à matriz sólida e ao fluido que a satura.

Baseado nas hipóteses por nós consideradas, as equações governantes do problema da convecção natural duplamente difusiva em meios porosos podem ser reescritas para regime permanente na forma [10]:

Conservação de Massa

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (2.9)$$

Variação da Quantidade de Movimento

$$(\mu/K) \cdot \bar{V} = -[\nabla p - \rho \bar{g}] \quad (2.10)$$

Conservação da Energia

$$(\bar{V} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla \cdot (\nabla T) \quad (2.11)$$

Conservação do Constituinte Químico

$$(\bar{V} \cdot \nabla) C = D \nabla \cdot (\nabla C) \quad (2.12)$$

Nas equações anteriores $\bar{V}$ representa o vetor velocidade média por unidade de volume do meio poroso (velocidade de penetração), T é a temperatura de equilíbrio local entre o fluido e a matriz porosa enquanto C representa a concentração do constituinte químico em unidade de massa do constituinte por unidade de volume do meio poroso. O termo α é definido como a difusividade térmica efetiva, ou seja, a condutividade térmica efetiva do meio poroso saturado (sólido mais fluido) dividido pela capacidade térmica específica do fluido que satura a matriz.

O parâmetro D representa a difusividade do constituinte no meio poroso saturado pelo fluido. Os demais termos encontram-se definidos na Nomenclatura.

II.2. O SISTEMA DE COORDENADAS BIPOLARES

A geometria do problema, vide Fig. (2.1), sugere a utilização de um sistema de coordenadas bipolares (u,v) para o encaminhamento de soluções sejam elas numéricas ou analíticas. O

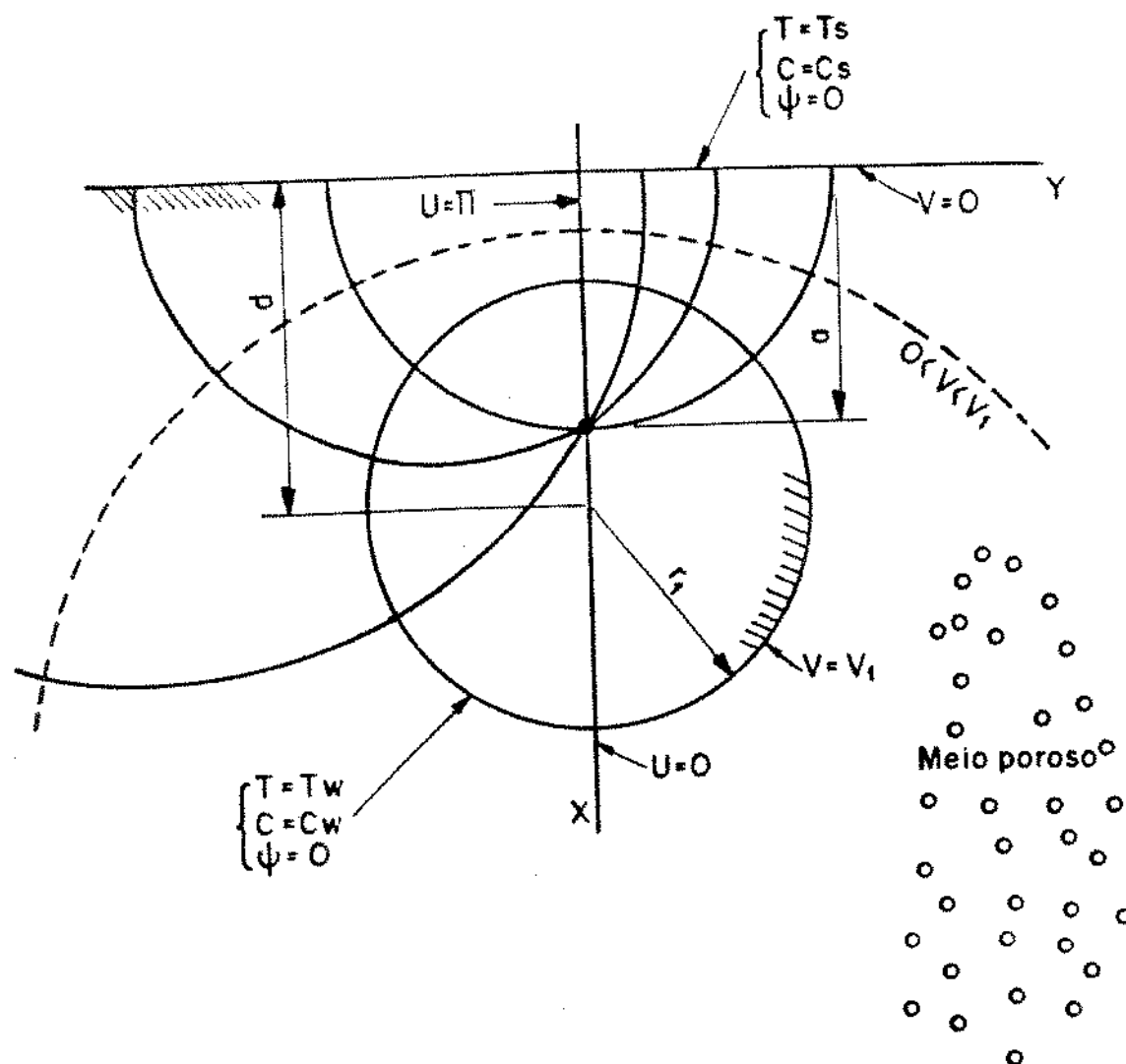


Fig. 2.1 Sistema de coordenadas bipolares

novos sistema é relacionado ao sistema de coordenadas cartesianas (x,y) pela fórmula [11]:

$$x + i y = a \operatorname{cotgh} ((v-iu)/2) \quad (2.13)$$

Como relação de transformação entre os dois sistemas de coordenadas temos

$$x = \frac{a \operatorname{senh} v}{\cosh v - \cos u} \quad (2.14)$$

$$y = \frac{a \operatorname{sen} u}{\cosh v - \cos u} \quad (2.15)$$

$$z = z \quad (2.16)$$

Com

$$\begin{aligned} -\pi &\leq u \leq \pi \\ -\infty &< v < \infty \end{aligned}$$

A profundidade d é dada por:

$$d = r_1 \cosh v_1 \quad (2.17)$$

O fator de escala a por:

$$a = r_1 \operatorname{senh} v_1 \quad (2.18)$$

Onde v_1 é o valor de v sobre o cilindro.

A configuração geométrica do problema esquematizada na presença dos sistemas de coordenadas cartesianas e coordenadas bipolares está representada na Fig. (2.1).

II.3 EQUAÇÕES TRANSFORMADAS

Vamos utilizar a formulação função de corrente nas equações (2.9) a (2.12), que pode ser definida num sistema genérico de coordenadas como

$$V_u = 1/h_v \partial \Psi / \partial v \quad (2.19)$$

$$V_v = - 1/h_u \partial \Psi / \partial u \quad (2.20)$$

Para o sistema de coordenadas bipolares conforme o Anexo A, temos:

$$h_u = h_v = a / (\cosh v - \cos u) \quad (2.21.1)$$

$$h_z = 1 \quad (2.21.2)$$

De (2.19) e (2.20) obtemos

$$\nabla \times \bar{V} = - \nabla^2 \Psi \hat{e}_z, \text{ donde:}$$

$$\nabla \times \bar{V} = \frac{-(\cosh v - \cos u)^2}{a^2} (\partial^2 \Psi / \partial u^2 + \partial^2 \Psi / \partial v^2) \quad (2.22)$$

Assim, escrevendo o lado direito da equação (2.10) no sistema (u,v) com (2.22) e substituindo o lado esquerdo pela expressão (A.3) chegamos a

$$\begin{aligned} \partial^2 \Psi / \partial u^2 + \partial^2 \Psi / \partial v^2 = & \frac{K a \rho_o g}{\mu} [H(\beta \partial T / \partial u + \beta_c \partial C / \partial u) + \\ & + G(\beta \partial T / \partial v + \beta_c \partial C / \partial v)] \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde

$$H = \frac{1 - \cos u \cosh v}{(\cosh v - \cos u)^2} \quad (2.24)$$

$$G = \frac{\sinh v \sin u}{(\cosh v - \cos u)^2} \quad (2.25)$$

De forma semelhante podemos obter a reformulação da equação (2.11) no sistema (u,v):

De (A.1):

$$(\bar{V} \cdot \nabla) T = V_u/h_u \partial T/\partial u + V_v/h_v \partial T/\partial v \quad (2.26)$$

Em termos da função de corrente

$$\begin{aligned} (\bar{V} \cdot \nabla) T = & \frac{(\cosh v - \cos u)^2}{a^2} (\partial \Psi / \partial v \cdot \partial T / \partial u - \\ & - \partial \Psi / \partial u \cdot \partial T / \partial v) \end{aligned} \quad (2.27)$$

De (A.2) temos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) = \nabla^2 T = & \frac{(\cosh v - \cos u)^2}{a^2} (\partial^2 T / \partial u^2 + \\ & + \partial^2 T / \partial v^2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

De (2.27) e (2.28) temos:

$$\nabla^2 T = 1/\alpha (\partial \Psi / \partial v \cdot \partial T / \partial u - \partial \Psi / \partial u \cdot \partial T / \partial v) \quad (2.29)$$

Analogamente, a equação de conservação do constituinte químico assume a forma:

$$\nabla^2 C = 1/D \left(\frac{\partial \Psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial \Psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial C}{\partial v} \right) \quad (2.30)$$

II.4. VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS

As seguintes variáveis adimensionais são definidas:

$$\begin{aligned} a^* &= a / r_1 = \sinh v_1 \\ d^* &= d / r_1 = \cosh v_1 \\ T^* &= \frac{T - T_s}{T_w - T_s} \\ C^* &= \frac{C - C_s}{C_w - C_s} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\psi^* = \psi / (\alpha Ra)$$

onde $Ra = K g \beta \Delta T r_1 / (\nu \alpha)$

e $\Delta T = T_w - T_s$

$$\Delta C = C_w - C_s$$

A eq. (2.23) em termos das variáveis adimensionais fica:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi^* &= a^* \left[(H \frac{\partial T^*}{\partial u} + G \frac{\partial T^*}{\partial v}) + \right. \\ &\quad \left. + N (H \frac{\partial C^*}{\partial u} + G \frac{\partial C^*}{\partial v}) \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde
$$N = \frac{\beta_c \Delta C}{\beta \Delta T}$$

A eq. (2.29) fica

$$\nabla^2 T^* = Ra \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial v} \frac{\partial T^*}{\partial u} - \frac{\partial \psi^*}{\partial u} \frac{\partial T^*}{\partial v} \right) \quad (2.33)$$

E a eq. (2.30) fica

$$\nabla^2 C^* = Ra Le \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial v} \frac{\partial C^*}{\partial u} - \frac{\partial \psi^*}{\partial u} \frac{\partial C^*}{\partial v} \right) \quad (2.34)$$

onde $Le = \alpha / D$

A compreensão geral sobre o fenômeno é auxiliada pela adimensionalização acima efetuada. No caso do nosso estudo, é relativamente grande o número daqueles grupos e devemos esperar uma variedade igualmente grande de regimes de escoamentos possíveis dentro do domínio representado na Fig. (2.1). À excessão do parâmetro N , os grupos adimensionais então apontados têm os seus valores variando no domínio $(0, \infty)$. O grupo N nos fornece a proporção entre as forças devido ao gradiente de concentração e as devidas ao empuxo térmico, cuja combinação dirige o movimento do escoamento, como expresso na equação de conservação da variação da quantidade de movimento (eq. (2.32)). O valor de N pode ser positivo ou negativo, conforme as forças de empuxo sejam concordantes, ou adversas.

II.5. CONDIÇÕES DE CONTORNO

Em termos adimensionais no novo sistema de coordenadas (u,v) estabelecemos as seguintes condições de contorno conforme o domínio mostrado na Fig.(2.1):

$$\begin{aligned}
 u=0 \quad v_1 < v \leq 0 & \Rightarrow \Psi^* = 0, \quad \partial T^* / \partial v = \partial C^* / \partial v = 0 \\
 u=\Pi \quad v_1 < v < 0 & \Rightarrow \Psi^* = 0, \quad \partial T^* / \partial v = \partial C^* / \partial v = 0 \\
 v=v_1 \quad 0 \leq u \leq \Pi & \Rightarrow \Psi^* = 0, \quad T^* = C^* = 1 \\
 v=0 \quad 0 \leq u \leq \Pi & \Rightarrow \Psi^* = 0, \quad T^* = C^* = 0
 \end{aligned}$$

(2.35)

As condições de contorno (2.35) se referem ao domínio semi-infinito do escoamento envolvendo o cilindro aquecido. Para efeito de solução numérica, foi considerado o domínio quadrado como ilustrado na Fig. (2.2).

Nesse domínio finito as condições de fronteira do escoamento nos lados do quadrado afastados do cilindro podem influenciar os resultados numéricos obtidos principalmente para valores de Ra e Le baixos. Procuramos definir valores para Ψ , T e C nos dois lados do quadrado que supomos estarem bem afastados do cilindro de tal forma que pudéssemos considerar as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned}
 y = QY \quad 0 \leq x \leq QX \quad \partial \Psi / \partial y = \partial T / \partial y = \partial C / \partial y = 0 \\
 x = QX \quad 0 \leq y \leq QY \quad \partial \Psi / \partial x = \partial T / \partial x = \partial C / \partial x = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Os valores numéricos apresentados em (2.35) têm sua razão de ser já que a utilização de um sistema de coordenadas

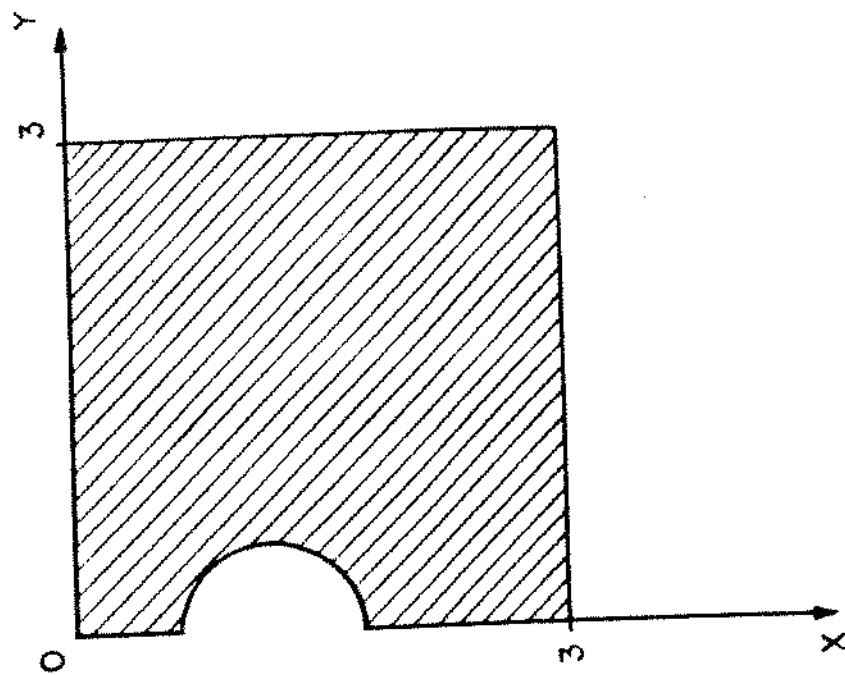


Fig. 2.2 Domínio finito considerado

bicilíndricas obriga-nos a trabalhar integralmente em um domínio semi-infinito. Evidentemente os cálculos efetuados em regiões afastadas do cilindro são imprecisos e podem afetar os resultados para Nusselt e Sherwood no cilindro e na parede.

Optamos por um domínio finito (quadrado como mostrado na Fig.(2.2)), adotando valores de Q_x e Q_y no novo domínio de tal modo a reproduzir os mesmos resultados de um domínio semi-infinito.

A Tabela (2.1) nos mostra a influência de vários domínios para um caso crítico, ou seja com número de Rayleigh bastante reduzido. Com base nos resultados apresentados da Tabela adotamos o quadrado de dimensões 3×3 como adequado para a obtenção dos resultados numéricos aqui apresentados. A escolha de tal domínio foi feita num caso crítico de Le e Ra baixos, onde o espalhamento dos efeitos da condução é bem pronunciado para regiões bastante afastadas do cilindro.

Tabela 2.1
Influência do Domínio na Solução
($Ra=1$ $Le=1$ $N=0$)

$Q_x \times Q_y$	$\bar{Nu}$
2x2	1.120
3x3	1.150
4x4	1.151

A escolha foi baseada num critério de não permitirmos um erro absoluto em $\bar{Nu}$ acima de 1×10^{-3} de um domínio para outro. Tal domínio foi considerado suficientemente grande para que as condições de contorno afastadas do cilindro não afetassem os resultados convergidos por nós obtidos. Tais valores considerados permitiram-nos evitar a influência das fronteiras sobre as curvas de $\bar{Nu}$ e $\bar{Sh}$ no cilindro, principalmente para valores baixos de Ra e Le .

II.6 EQUAÇÕES DISCRETIZADAS

Para resolvermos numericamente o problema, integramos as equações (2.32), (2.33) e (2.34), já escritas em coordenadas bipolares adimensionalizadas sobre o domínio VC_p (Volume de Controle Genérico). Tal domínio é descrito na Fig. (2.3), e a integração é feita conforme a formulação do Método do Volume de Controle desenvolvido por Patankar [1] sobre a célula típica da grade mostrada na Fig.(2.3).

Integrando (2.32) sobre o volume de controle VC_p em relação as variáveis u e v :

$$\begin{aligned} & \iint_{VC_p} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial u^2} du dv + \iint_{VC_p} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial v^2} du dv - \\ & - a^* \left[\left(\iint_{VC_p} H \frac{\partial T^*}{\partial u} du dv + \iint_{VC_p} G \frac{\partial T^*}{\partial v} du dv \right) + \right. \\ & \left. + N \left(\iint_{VC_p} H \frac{\partial C^*}{\partial u} du dv + \iint_{VC_p} G \frac{\partial C^*}{\partial v} du dv \right) \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Adotando o esquema da lei de potência, sugerido por Patankar para o cálculo dos termos de fluxo através das fronteiras de cada volume de controle interno, através do desenvolvimento realizado no Apêndice B chegamos a equação discretizada sob a forma

$$\begin{aligned} a_{i,j} \Psi_{i,j}^* &= a_{i+1,j} \Psi_{i+1,j}^* + a_{i-1,j} \Psi_{i-1,j}^* + a_{i,j+1} \Psi_{i,j+1}^* + \\ &+ a_{i,j-1} \Psi_{i,j-1}^* + b_{i,j} \end{aligned} \quad (2.38)$$

com

$$a_{i+1,j} = \Delta v / (\delta u)_e \quad (2.38.1)$$

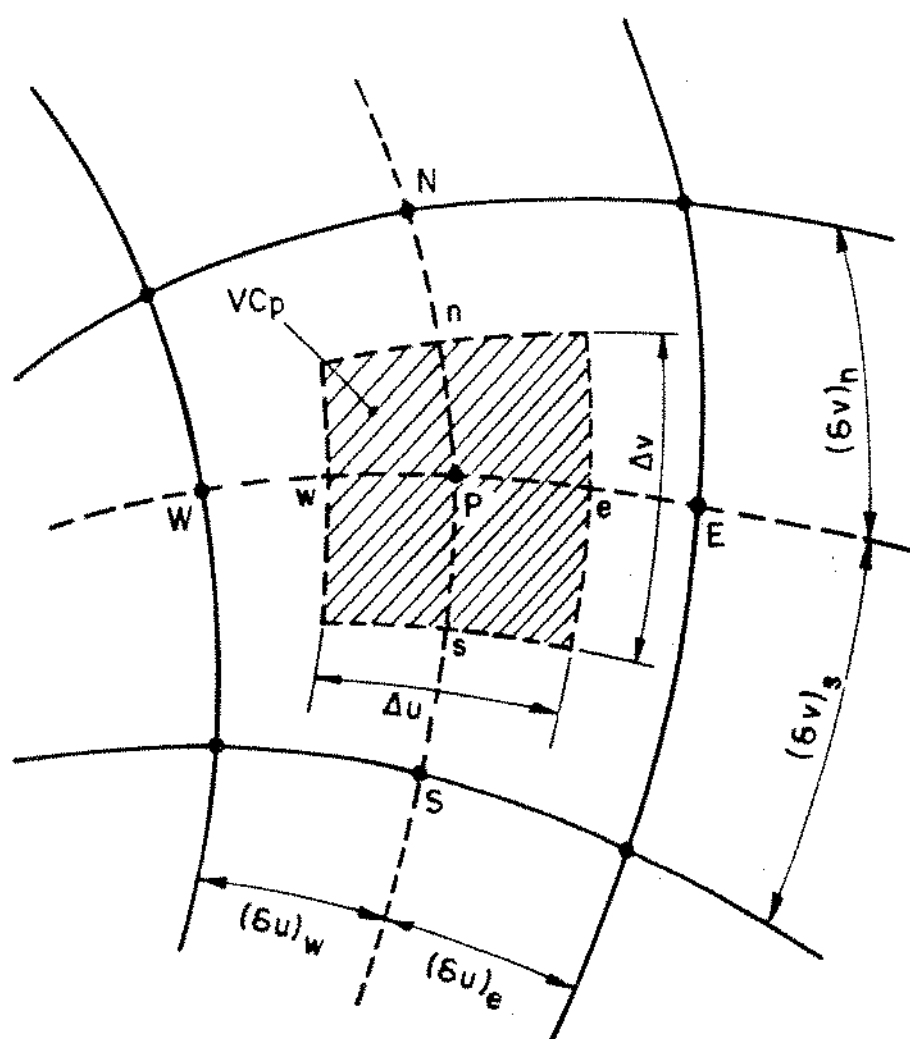


Fig. 2.3 Célula típica do Método do Volume de Controle

$$a_{i-1,j} = \Delta v / (\delta u)_w \quad (2.38.2)$$

$$a_{i,j+1} = \Delta u / (\delta v)_n \quad (2.38.3)$$

$$a_{i,j-1} = \Delta u / (\delta v)_s \quad (2.38.4)$$

onde Δu , Δv , $(\delta u)_w$, $(\delta u)_e$, $(\delta v)_n$ e $(\delta v)_s$ são valores representados na Fig. (2.3).

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1} \quad (2.38.5)$$

$$\begin{aligned} b_{i,j} = & - a^* [H_{i,j} \cdot (\Delta v / 2) \cdot (T_{i+1,j}^* - T_{i-1,j}^*) + \\ & + G_{i,j} \cdot (\Delta u / 2) \cdot (T_{i,j+1}^* - T_{i,j-1}^*) + \\ & + N \cdot H_{i,j} \cdot (\Delta v / 2) \cdot (C_{i+1,j}^* - C_{i-1,j}^*) + \\ & + N \cdot G_{i,j} \cdot (\Delta u / 2) \cdot (C_{i,j+1}^* - C_{i,j-1}^*)] \end{aligned} \quad (2.38.6)$$

Na obtenção da equação da energia na forma discretizada, procedemos de maneira análoga. Conforme explicitado no Apêndice B obtemos então

$$\begin{aligned} a_{i,j} T_{i,j}^* = & a_{i+1,j} T_{i+1,j}^* + a_{i-1,j} T_{i-1,j}^* + a_{i,j+1} T_{i,j+1}^* + \\ & + a_{i,j-1} T_{i,j-1}^* \end{aligned} \quad (2.39)$$

Com

21

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [[-F_e, 0]]$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [[F_w, 0]]$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [[F_n, 0]]$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [[-F_s, 0]]$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

onde

$$F_e = (\partial \psi^* / \partial v)_e \Delta v$$

$$F_w = (\partial \psi^* / \partial v)_w \Delta v$$

$$F_n = -(\partial \psi^* / \partial u)_n \Delta u$$

$$F_s = -(\partial \psi^* / \partial u)_s \Delta u$$

$$D_e = \Delta v / [Ra \times (\delta u)_e]$$

$$D_w = \Delta v / [Ra \times (\delta u)_w]$$

$$D_n = \Delta u / [Ra \times (\delta v)_n]$$

$$D_s = \Delta u / [Ra \times (\delta v)_s]$$

$$P_e = F_e / D_e$$

$$P_n = F_n / D_n$$

$$P_w = F_w / D_w$$

$$P_s = F_s / D_s$$

Onde para o esquema lei da Potência temos

$$A(|P|) = [[0, (1 - 0.1 \times |P|)^5]]$$

Procedimento análogo nos fornece a equação discretizada de conservação de constituinte:

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} c_{i,j}^* &= a_{i+1,j} c_{i+1,j}^* + a_{i-1,j} c_{i-1,j}^* + a_{i,j+1} c_{i,j+1}^* \\
 &+ a_{i,j-1} c_{i,j-1}^*
 \end{aligned}
 \quad (2.40)$$

Com

$$a_E = D_E A(|P_E|) + [[-F_E, 0]]$$

$$a_W = D_W A(|P_W|) + [[F_W, 0]]$$

$$a_N = D_N A(|P_N|) + [[F_N, 0]]$$

$$a_S = D_S A(|P_S|) + [[-F_N, 0]]$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

onde

$$F_E = (\partial \psi^* / \partial v)_E \Delta v$$

$$F_W = (\partial \psi^* / \partial v)_W \Delta v$$

$$F_N = -(\partial \psi^* / \partial u)_N \Delta u$$

$$F_S = -(\partial \psi^* / \partial u)_S \Delta u$$

$$D_E = \Delta v / [Ra \times Le \times (\delta u)_E]$$

$$D_W = \Delta v / [Ra \times Le \times (\delta u)_W]$$

$$D_N = \Delta u / [Ra \times Le \times (\delta v)_N]$$

$$D_S = \Delta u / [Ra \times Le \times (\delta v)_S]$$

$$P_E = F_E / D_E$$

$$P_N = F_N / D_N$$

$$P_W = F_W / D_W$$

$$P_S = F_S / D_S$$

Onde para o esquema lei da Potência temos

$$A(|P|) = [[0, (1 - 0.1 \times |P|)^5]]$$

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO NUMÉRICA

As equações discretizadas junto com as condições de contorno formam um sistema acoplado envolvendo as variáveis função de corrente, temperatura e concentração. Neste capítulo trataremos da solução numérica deste sistema com o emprego do esquema SIMPLE [1]. Para resolução das equações algébricas simultâneas que resultaram do processo de discretização, utilizamos o método iterativo linha a linha.

Como estado inicial consideramos as aproximações iniciais $\psi = 0$ (fluido estagnado) e $T=C=1$ (temperatura e concentração uniformes) em todo o domínio.

Em cada iteração do processo de simulação houve a necessidade de atualizarmos os valores de ψ , T e C . A equação de ψ era resolvida 3 vezes a cada iteração. Para T e C atualizamos apenas uma vez por iteração. Tal procedimento foi bastante útil para os casos de Ra e Le altos, que provocavam fortes correntes convectivas.

O processo de escolha dos parâmetros de relaxação foi baseado num critério gradual, em função do número de iterações como segue

até 5 iterações	fator relaxação 1.0
de 5 até 10	0.9
de 10 até 20	0.8
de 20 até 30	0.7
de 30 até 40	0.6
acima de 40	0.5

Tal critério foi aplicado para todos os valores de Ra , Le e N considerados neste trabalho.

O critério de aceitação de uma solução como convergida se baseou no máximo erro dentro de todo o domínio de cálculo. A convergência dos resultados obtidos foi aceita quando as mudanças

relativas nas variáveis dependentes estavam abaixo de 1×10^{-5} , com o erro relativo dado por

$$\text{erro relativo de } (\psi, T, C) = \frac{\max | (\psi, T, C)_{\text{atual}} - (\psi, T, C)_{\text{anterior}} |}{(\psi, T, C)_{\text{atual}}}$$

Uma investigação do número de pontos da grade em função de Ra , Le e N também foi realizada. As Tabelas 3.1 e 3.2 nos mostram que o número de pontos mínimo adequado para que os resultados produzidos sejam independentes do refinamento é 35×35 , quer para valores altos ou baixos de Ra . A maioria dos resultados apresentados neste trabalho foi obtida utilizando-se uma rede de 35×35 nós. Para as poucas situações em que tínhamos $Ra \times Le > 20.000$ ou em que $N \times Ra \times Le > 4000$, uma rede de 40×40 pontos foi utilizada para garantia da acuidade dos resultados apresentados. Tais redes foram consideradas para um domínio quadrado 3×3 .

Uma investigação do número de pontos da grade foi realizada para comparação com resultados já existentes na literatura.

Tabela 3.1
 Variação de $\bar{Nu}$ em função da malha
 ($N = 2$ $Ra = 1.0$ $Le = 1.0$)

malha	$\bar{Nu}$
20 × 20	1.213
25 × 25	1.432
30 × 30	1.569
35 × 35	1.578
40 × 40	1.578

Tabela 3.2
 Variação de $\bar{Nu}$ em função da malha
 ($N = 2$ $Ra = 1000.0$ $Le = 1.0$)

malha	$\bar{Nu}$
20 × 20	32.911
25 × 25	32.932
30 × 30	32.933
35 × 35	32.933
40 × 40	32.933

III.1 NUSSELT E SHERWOOD NO SISTEMA DE COORDENADAS (u,v)

Para obtenção dos números Nusselt e Sherwood definimos

Fluxo de calor q:

$$q = \frac{\cosh(v) - \cos(u)}{a^*} \left. \frac{\partial T^*}{\partial v} \right|_{v=v_1 \text{ ou } 0} \quad (3.1)$$

O fluxo de calor Q por unidade de comprimento do cilindro dado por

$$Q = \int_{-\pi}^{\pi} q \, du$$

Assim, de (3.1) temos

$$Q = \int_{-\pi}^{\pi} \left. \frac{\partial T^*}{\partial v} \right|_{v=v_1 \text{ ou } 0} du \quad (3.2)$$

Definindo-se o número de Nusselt Médio por

$$\bar{Nu} = Q / Q_{\text{condução}} \quad (3.3)$$

Para o cilindro temos

$$\bar{Nu}_c = v_1 / (2\pi) \times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left. \frac{\partial T^*}{\partial v} \right|_{v=v_1} \right) du \quad (3.4)$$

Para a parede temos

$$\bar{Nu}_w = v_1 / (2\pi) \times \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left. \frac{\partial T^*}{\partial v} \right|_{v=0} \right) du \quad (3.5)$$

Para o número de Sherwood valem as mesmas relações trocando-se T por C. Assim para Sherwood médio no cilindro temos

$$\bar{Sh}_c = v_1 / (2\pi) \times \int_{-\pi}^{\pi} (\partial C^* / \partial v)_{v=v_1} du \quad (3.6)$$

Na parede temos

$$\bar{Sh}_w = v_1 / (2\pi) \times \int_{-\pi}^{\pi} (\partial C^* / \partial v)_{v=0} du \quad (3.7)$$

III.2 O CASO ANALISADO POR HAIM BAU

Para compararmos o programa por nós implementado para as coordenadas bipolares, reproduzimos as condições de Bau [6]:

- cilindro de raio $r_1 = 0.25 \text{ m}$;
- superfície do cilindro isotérmica e impermeável;
- solo externo ao cilindro de sílica (tamanho médio de grão aproximado $2.54 \times 10^{-4} \text{ m}$) de permeabilidade $6 \times 10^{-11} \text{ m}^2$;
- diferença de temperatura entre o cilindro e a superfície do solo de 60°C ;
- água como líquido saturante, com suas propriedades calculadas a 40°C ;
- profundidade do cilindro à superfície do solo de 2 m.

Nestas condições o número de Rayleigh foi $Ra = 10$ ($N=0$, $Le=1.0$) e o número de Nusselt médio sobre o cilindro obtido pelo autor foi 2.80. Esse valor para o número de Nusselt foi o único parâmetro via solução analítica encontrado na literatura para comparação. Outros resultados experimentais existentes na literatura envolviam adimensionalizações e condições de contorno, se constituindo em novos problemas, em termos numéricos computacionais.

A seguir, com o objetivo de explorar o problema analisado por Bau, analisamos alguns outros aspectos numéricos para validação do nosso método numérico empregado.

Na Tabela 3.3 e também nas Figuras (3.1) e (3.2) vemos o efeito do tamanho da malha sobre os resultados obtidos numericamente no presente trabalho. Uma rede de 30×30 pontos já é suficiente para conduzir aos resultados publicados na referência [6]. O número de iterações utilizado para a obtenção do valor 2.80 foi 62. As aproximações iniciais para as variáveis ψ , T e C foram as mesmas mencionadas anteriormente. O domínio considerado foi o quadrado 3×3 .

Na Fig. (3.2.a) e (3.2.b) podemos notar que o sistema de coordenadas bipolares por nós empregado já provoca um refinamento automático na região do domínio entre a parede e o cilindro. Este fato é notado pela proximidade das curvas na Fig.(3.2.a) para pontos próximos de $\theta = 2\pi$, o que já não ocorre nas proximidades de $\theta = 0$, fato indicado pelo afastamento das soluções nos casos de grade grosseira.

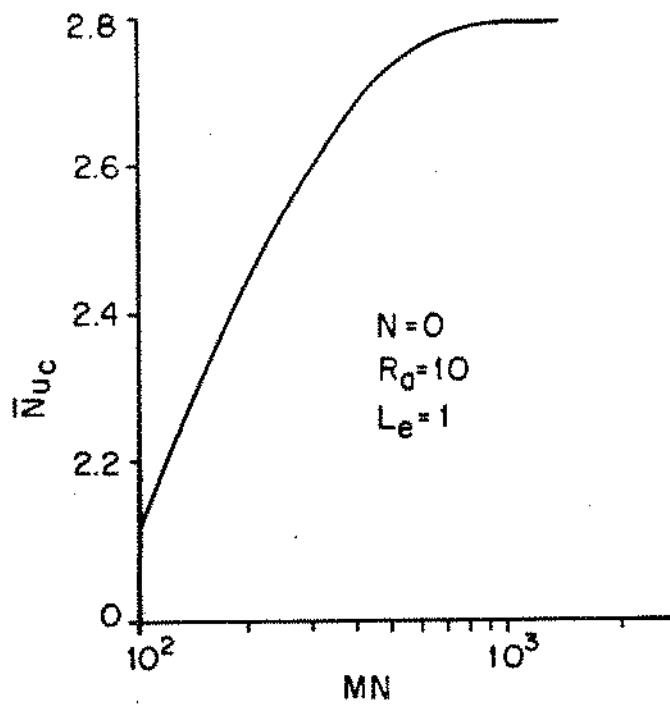


Fig. 3.1 Comportamento de Nu_c em função do número de pontos da malha ($N=0$ $Ra=10$ $Le=1$ $Nu=2.8$)

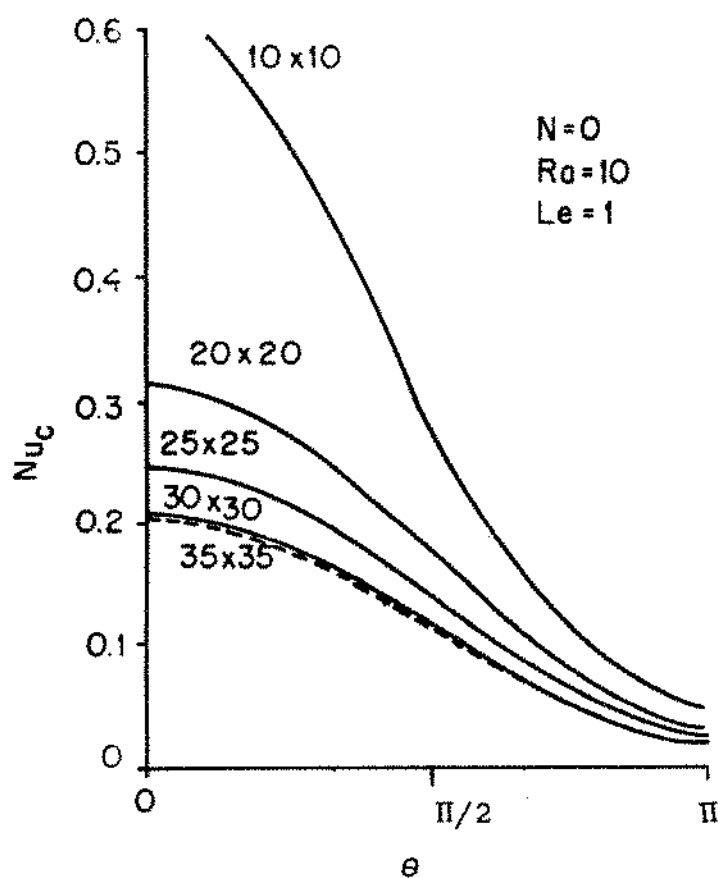


Fig. 3.2.a Comportamento de Nu_c em função do número de pontos da malha ($N=0$ $Ra=10$ $Le=1$ e em radianos)

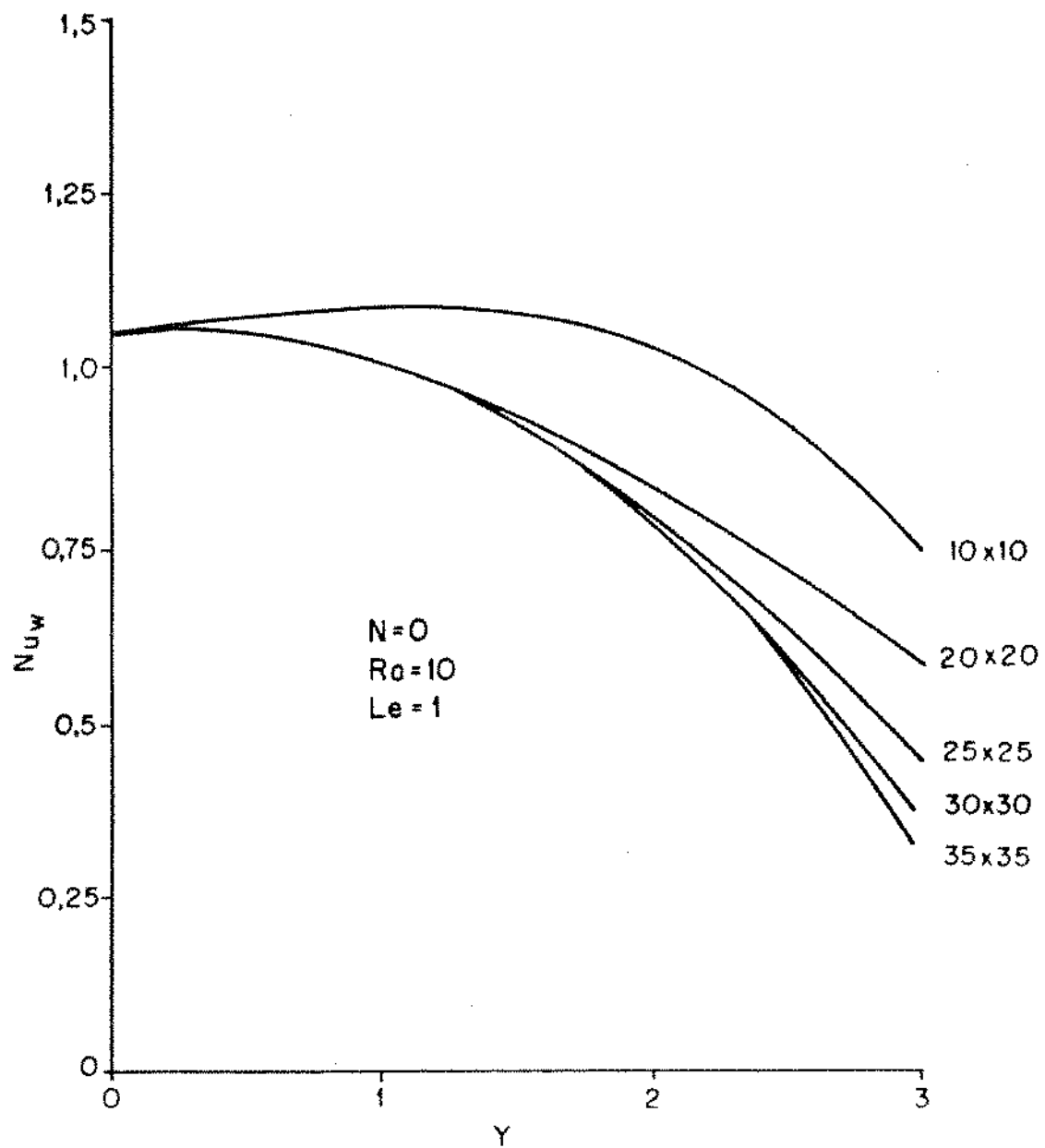


Fig. 3.2.b Comportamento de Nu_w em função do número de pontos da malha ($N=0$ $Ra = 10$ $Le = 1$)

Ainda na Fig.(3.2.a) podemos perceber que para uma rede (30x30) os resultados de Nu local no cilindro já mostram ser satisfatórios, já que praticamente coincidentes com os resultados obtidos para uma rede de (35 x 35) elementos.

Na Fig.(3.2.b) apresentamos resultados de Nusselt local na superfície do solo para diversos números de pontos da grade. Podemos perceber que Nu varia fortemente com o número de pontos da malha, e devido ao domínio finito considerado em (2.36), variam mais que os resultados obtidos para Nusselt no cilindro conforme podemos observar da Fig.(3.2.a). O cuidado na obtenção dos resultados para Nusselt e Sherwood na superfície do solo foi trabalharmos com Le e Ra que não interferissem nos resultados.

Tabela 3.3
Variação de $\bar{Nu}$ em função da malha
($N = 0$ $Ra = 10$ $Le = 1$)

n de pontos	$\bar{Nu}$
10 x 10	2.10
20 x 20	2.64
25 x 25	2.78
30 x 30	2.80
35 x 35	2.80

CAPÍTULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em vista da multiplicidade de grupos adimensionais representados nas equações governantes e seus efeitos associados, a análise e apresentação dos resultados se manteve nos seguintes campos de variação:

$$Le \in [0 , 100]$$

$$Ra \in [0 , 1000]$$

$$d^* = 8$$

$$N \in [-3,3]$$

A análise e apresentação dos resultados foi dividida em partes para uma melhor compreensão da influência dos números de Rayleigh e de Lewis sobre o escoamento: escoamentos dirigidos pelo calor, escoamentos com empuxo ascendente e escoamentos com empuxo adverso.

IV.1 ESCOAMENTOS DIRIGIDOS PELO CALOR

Neste item consideramos em especial a classe dos escoamentos dominados basicamente pelo empuxo devido ao aquecimento do cilindro. Neste caso $N \ll 1$ e a distribuição de constituinte químico pouco influencia o movimento do fluido.

Para os propósitos da simulação o valor de N foi fixado igual a zero. Neste limite o campo de temperaturas está interligado ao campo de escoamento, mas é independente da distribuição de concentração. Ambos os campos de escoamento e de temperaturas dependem do número de Rayleigh, mas não do número de Lewis. A distribuição do constituinte químico, no entanto, depende de ambos os campos de escoamento e de temperatura - ver eq. (2.34). Assim, o mapa de

concentração é influenciado tanto pelo número de Rayleigh como pelo número de Lewis, e a diferença entre os campos de temperatura e de concentração é ditada pelo número de Lewis.

Como pode ser depreendido das equações (2.33) e (2.34), ambos os campos são idênticos para $Le=1$ e somente uma daquelas equações é suficiente para a descrição do problema neste caso singular.

Na Fig.(4.1) vemos os mapas de linhas de corrente e isotérmicas para o caso de $Le=1$ com $N=0$ para $Ra = 0.1, 10$ e 1000 .

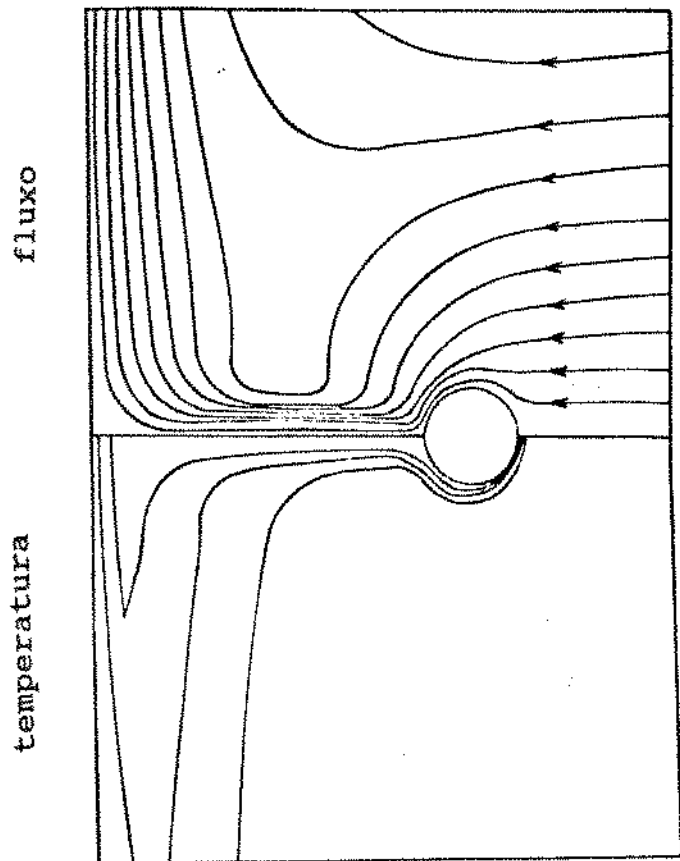
Para $Ra=0.1$ o problema se reduz praticamente ao de um cilindro enterrado em um meio puramente condutivo, como vemos nas Figs. (4.1.a) e (4.1.b). Neste caso a maior parte do calor é transportado por condução. A movimentação de fluido é pequena, representada pelos valores baixos de Ψ^* e o sentido do escoamento é do cilindro para a parede. Quando Ra aumenta os efeitos convectivos se tornam importantes.

Vemos pela Fig. (4.1.c) a formação de uma pluma entre a parede e o cilindro aquecido, para o caso de $Ra=10$.

As linhas muito próximas nos campos de temperatura na Fig. (4.1.c) nas proximidades da superfície do cilindro indicam um gradiente de temperatura maior nesta região. $Ra=10$ representa bem a transição do escoamento puramente condutivo para o fortemente convectivo, transição esta mostrada nas Fig. (4.1.c) e (4.1.d).

Ainda para $Ra=10$ podemos observar um espalhamento razoavelmente uniforme das linhas de corrente. As velocidades do fluido em movimento são maiores que no caso anterior.

Em $Ra=1000$ podemos notar a movimentação intensa de fluido mostrado pela Fig. (4.1.f) onde verificamos que a convecção natural intensa provoca uma região fria mais próxima do cilindro, não ocorrendo mais uma distribuição uniforme do calor por todo o domínio. Para o caso de $Ra=1000$ mostrado na Fig. (4.1.e), uma camada limite térmica fina se forma próximo à superfície do cilindro e a região de pluma é bastante estreita devido aos fortes efeitos convectivos existentes.



(e)

(f)

Fig. 4.1 Mapas de fluxo (b,d,f) e de temperatura (a,c,e)

(Le=1 e N=0 $\Delta T = 0.1$)

a,b - Ra=0.1 $\Delta\psi = -0.04$

c,d - Ra=10 $\Delta\psi = -0.5$

e,f - Ra=1000 $\Delta\psi = -10.$

Com o aumento do número de Rayleigh o escoamento se intensifica mais e mais junto à parte superior do cilindro enterrado e junto à linha de simetria da pluma que se forma sobre o cilindro.

A Fig. (4.2) mostra a influência de Le sobre a distribuição de concentração para $Ra = 10$ fixo. Como pode ser observado o comportamento é muito similar ao mostrado na Fig.(4.1). A transição da condução para a convecção pura pode ser melhor notada.

Na Fig. (4.3) podemos observar a influência de Ra sobre os números de Nusselt no cilindro e na parede. A troca de calor junto ao cilindro aumenta monotonicamente com o número de Rayleigh. Tal comportamento também ocorre para Nusselt na parede.

Na Fig. (4.4) vemos a influência dos parâmetros Ra e Le sobre o número de Sherwood médio do escoamento para $N=0$, onde podemos perceber o mesmo comportamento de Sh em função de Ra e Le .

A Fig. (4.4.a) nos mostra que para Ra baixo, o efeito condutivo é o predominante, para qualquer valor de Le . Efeito análogo pode ser observado na Fig. (4.4.b) onde vemos a pouca influência de Ra na faixa de valores baixos do número de Lewis. A Fig. (4.4.a) nos mostra o comportamento monotônico das curvas de Sh médio. Os resultados obtidos com $Le=0.1$ já se aproximam bastante do efeito de condução pura, isto é, $Sh = 1$, onde também podemos notar que as curvas de $Le = 50$ e $Le = 100$ estão bastante próximas e paralelas indicando-nos já um escoamento plenamente convectivo.

A Fig. (4.4.b) confirma as observações anteriores. Vemos também nesta Figura que para $Ra = 1000$ o efeito predominante sobre o escoamento é o da convecção, indicado pelo comportamento linear da curva com a variação de Le .

A Fig.(4.4.c) nos mostra o comportamento monotônico das curvas de Sherwood na parede em função de Rayleigh. Tal comportamento é muito similar ao mostrado na Fig.(4.4.a) para Sherwood no cilindro em função de Rayleigh.

Na Fig. (4.5) mostramos a distribuição de Nusselt local ao redor do cilindro (Fig.(4.5.a)) e ao longo da parede

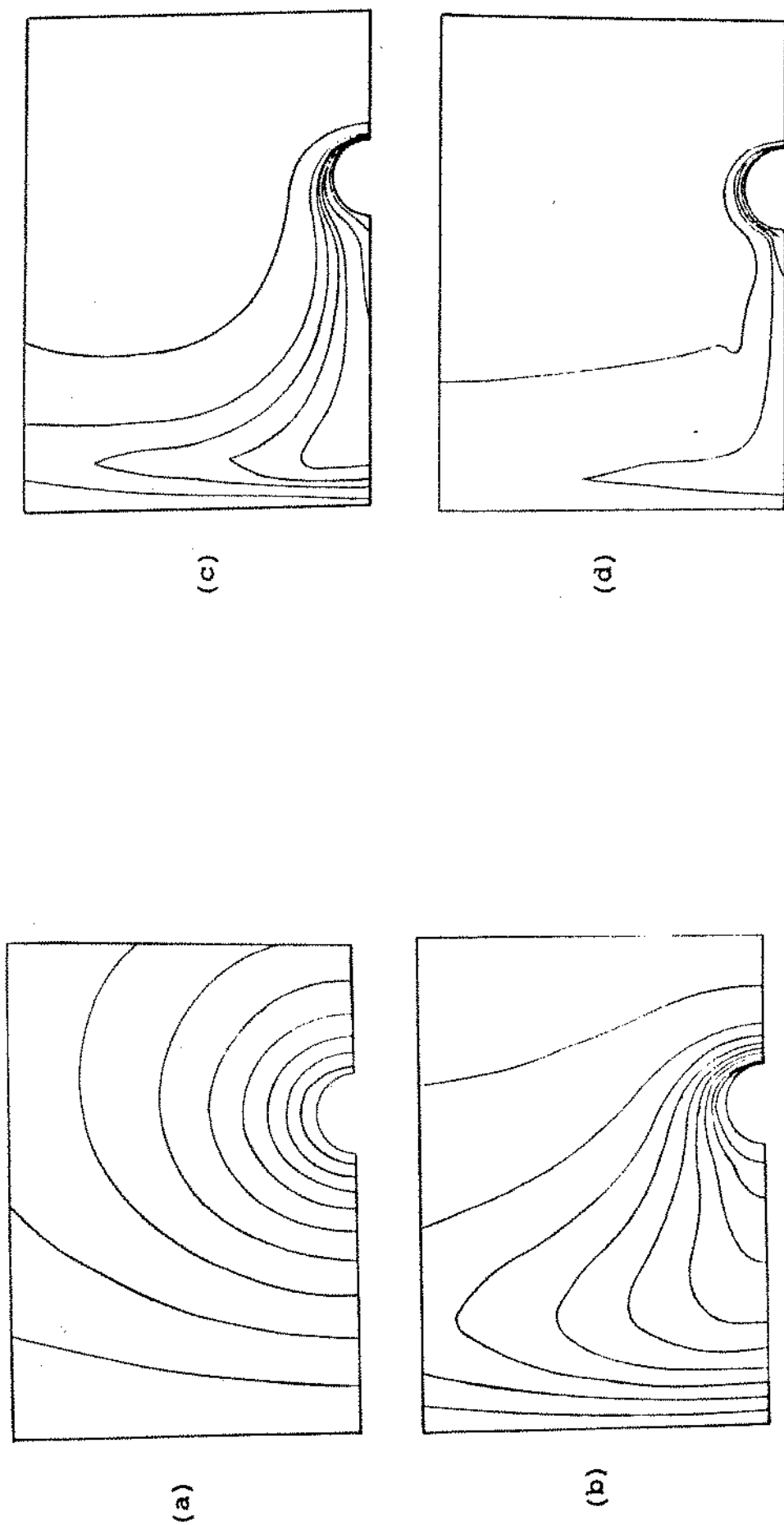


Fig. 4.2 Influência de Le sobre a distribuição de concentração

($N=0$ $Ra=10$ $\Delta C = 0.1$)

a - $Le=0.1$

b - $Le=1$

c - $Le=10$

d - $Le=100$

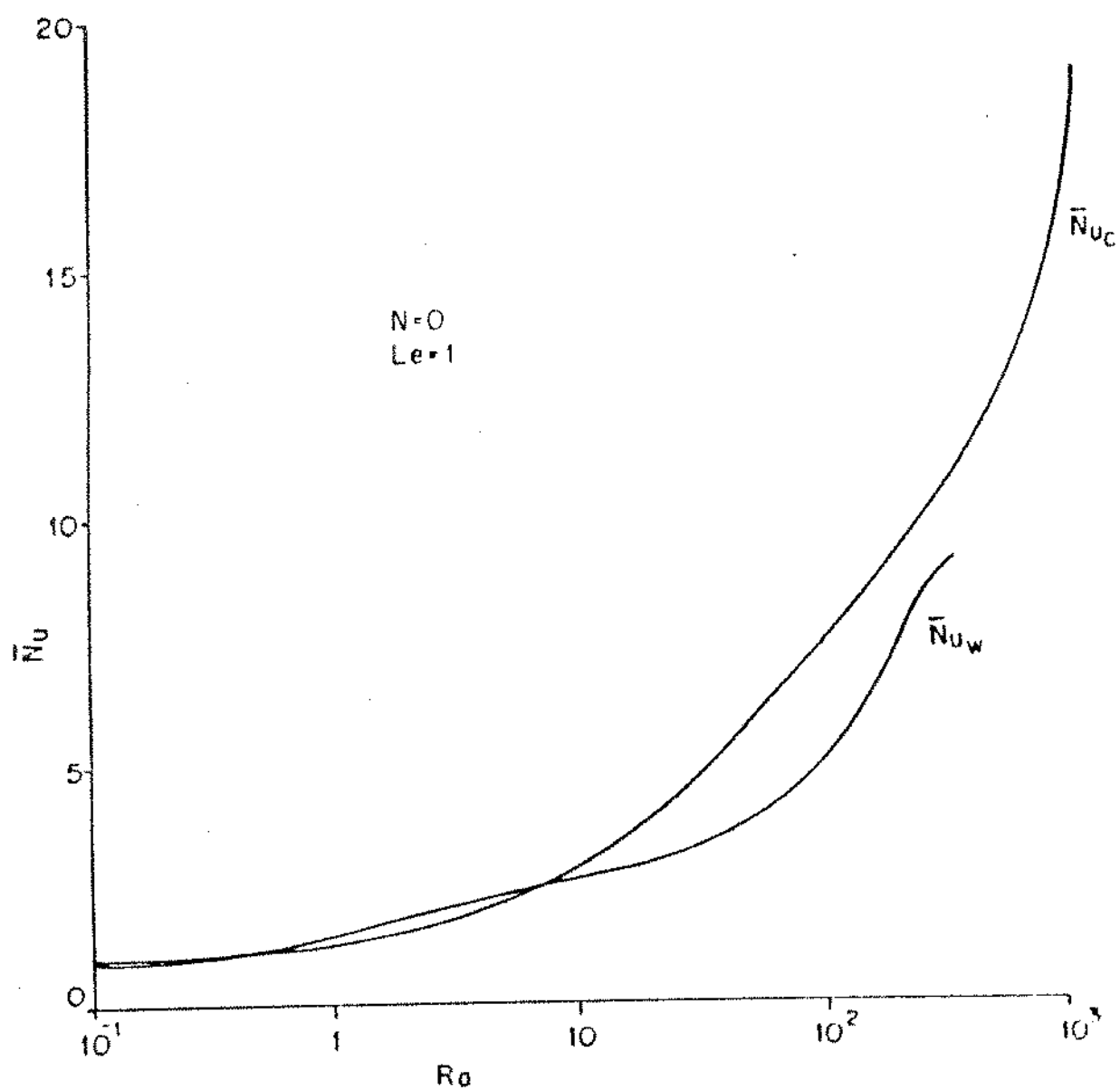


Fig. 4.3 Influência de Ra sobre Nu no cilindro e na parede ($N=0$ e $Le=1$)

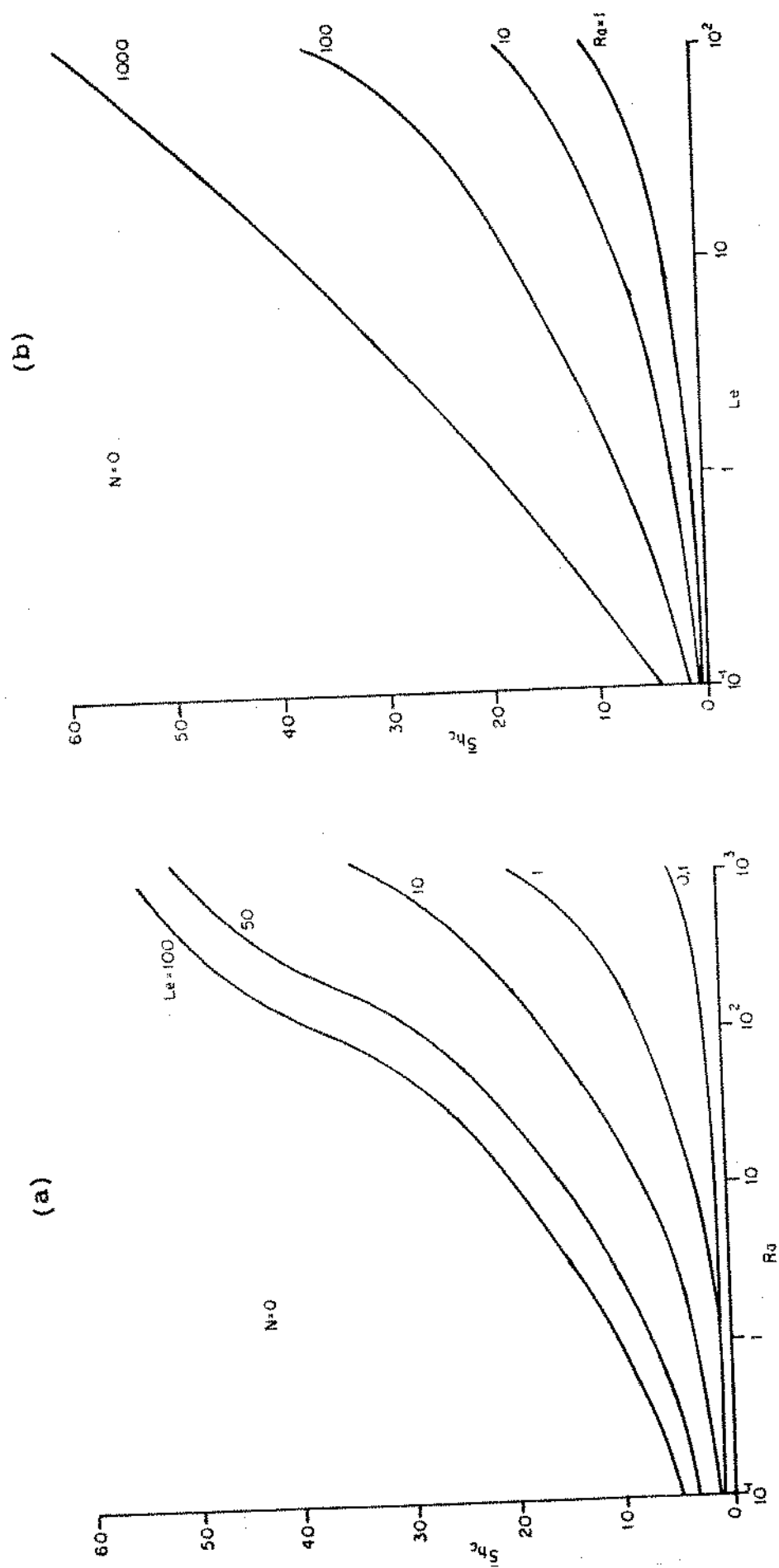


Fig. 4.4 Influência de Le e Ra sobre Sh ($N=0$)

a - Sh_c
b - Sh_c

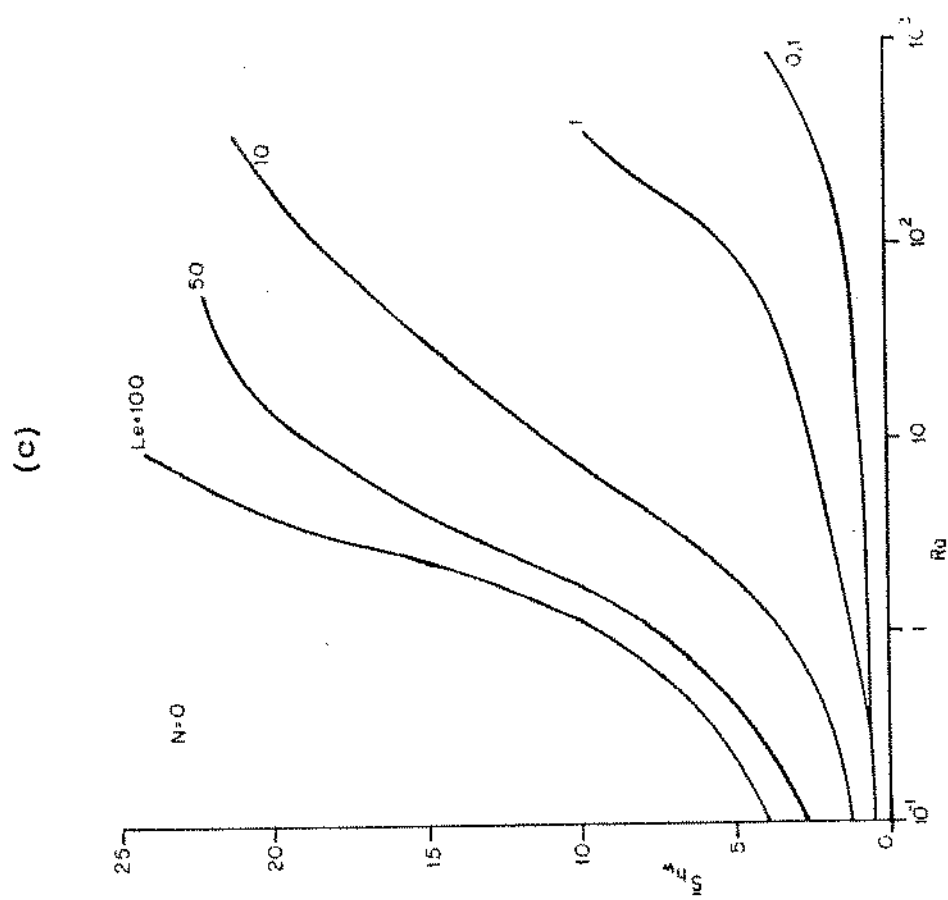


Fig. 4.4 Influência de Le e Ra sobre Sh ($N=0$)

c - Sh_w

(a)

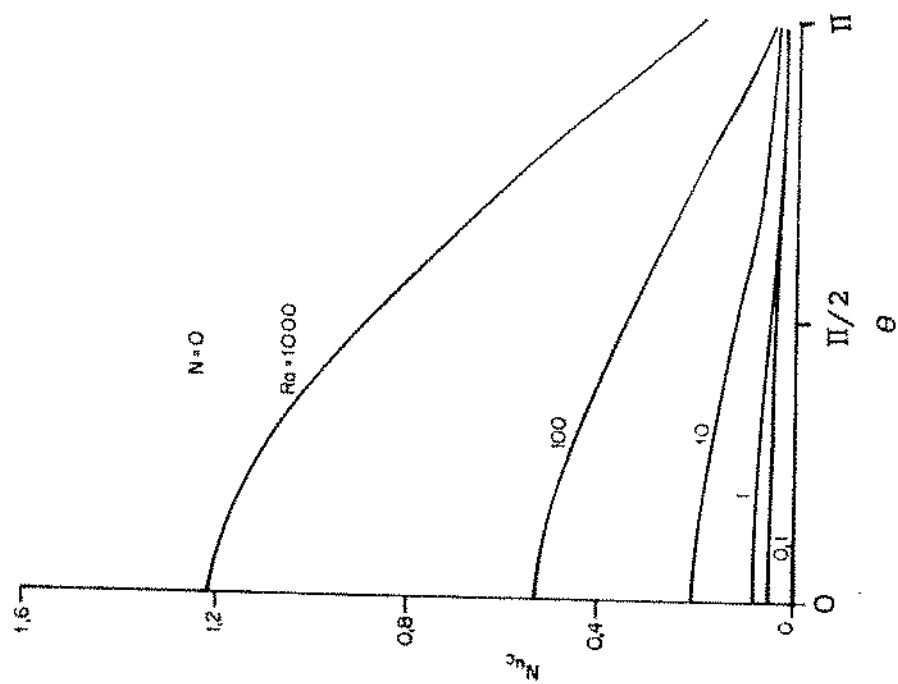


Fig. 4.5 Influência de Ra sobre a distribuição de Nu local ($N=0$)

a - Nu no cilindro

(Fig.(4.5.b)), para uma faixa ampla de números de Rayleigh.

Como mostra a Fig. (4.5.a), os números de Nusselt locais são maiores na região do cilindro oposta à parede ($\theta=0$). Embora a movimentação de fluido neste região seja menor, o fluido está totalmente frio ao entrar em contacto com ela provocando um gradiente elevado. Para todos os valores de Ra considerados, o número de Nusselt local decai continuamente quando o fluido caminha para a região de pluma. A Fig.(4.5.a) também nos mostra que para Ra até o valor 10 a transferência de calor do cilindro é predominantemente condutiva.

Na Fig.(4.5.b) podemos observar que para valores altos de Ra há uma tendência para uma troca de calor constante na parede, que em nosso caso é importante frisar, trata-se de uma parede com temperatura constante imposta.

Na Fig. (4.6) mostramos a distribuição de Sherwood local ao longo do cilindro para $Le=0.1$, 10 e 100. Podemos observar que para Ra próximo de 10 em $Le=0.1$ o caráter difusivo já é modificado conforme a Fig.(4.6.a). Com o aumento de Le , esse limite cai para $Ra=0.1$ em $Le=10$, observado na Fig.(4.6.b). Para $Le=100$ já não observamos características difusivas para quaisquer valores de Ra , como indicado na Fig.(4.6.c).

A Fig. (4.6.a) nos mostra que para Le baixo, mesmo com Ra alto é difícil de se conseguir efeitos puramente convectivos em toda a superfície do cilindro. A mudança é notada na Fig.(4.6.b) para $Le=10$. Já a Fig.(4.6.c), com $Le=100$ nos mostra que a partir de $Ra=100$ temos uma influência convectiva dominante como pode-se notar pelo aspecto uniforme da distribuição de Sh .

Na Fig.(4.7) vemos a influência de Ra sobre a distribuição de Sh local no cilindro que é análoga à que foi observada na Fig. (4.6), para a variação do número de Lewis. Para o caso $N=0$ notamos a grande semelhança de influências de Ra e Le sobre a distribuição de Sh local no cilindro.

(b)

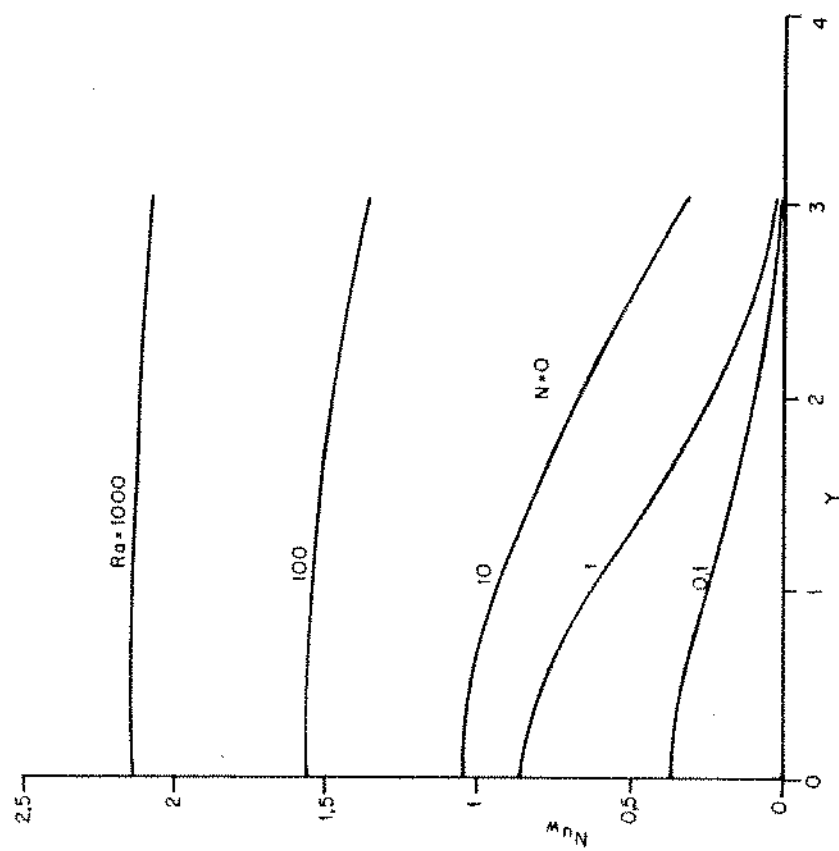
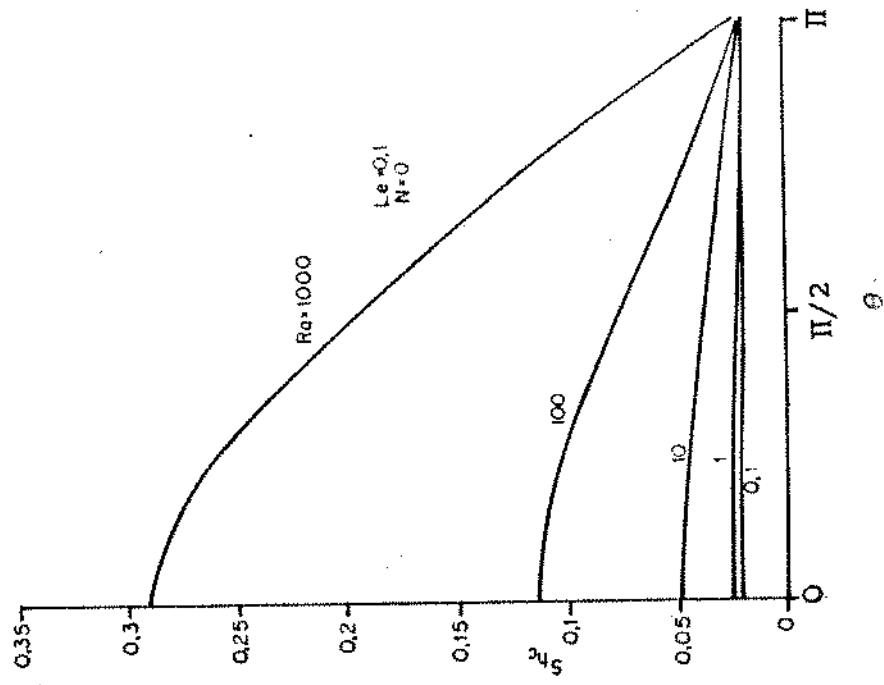


Fig. 4.5 Influência de Ra sobre a distribuição de Nu local ($N=0$)
b - Nu na parede

(a)



(b)

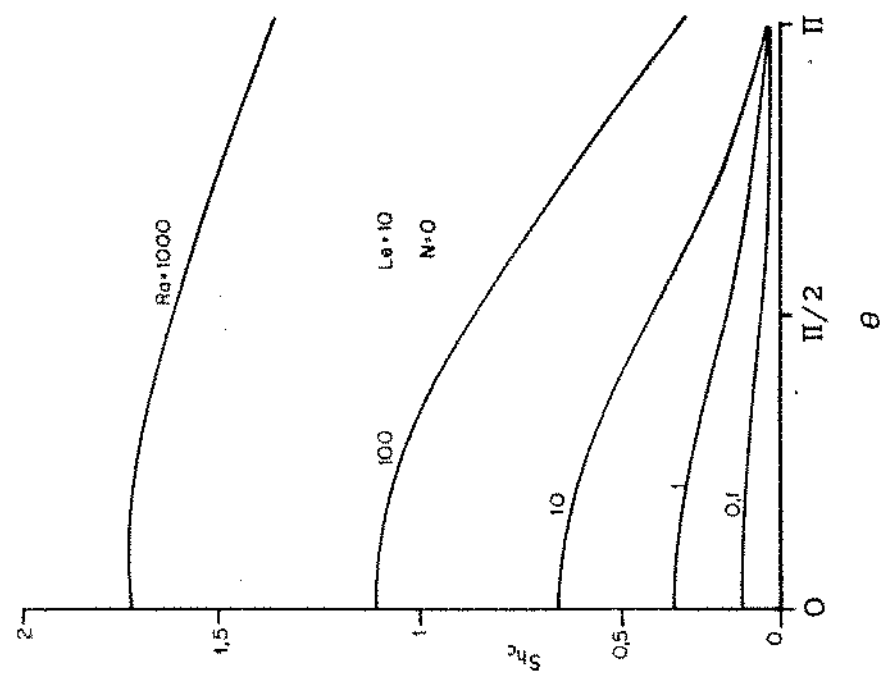


Fig. 4.6 Influência de Ra sobre a distribuição de Sh local no cilindro ($N=0$)
a - $Le=0.1$
b - $Le=10$

(c)

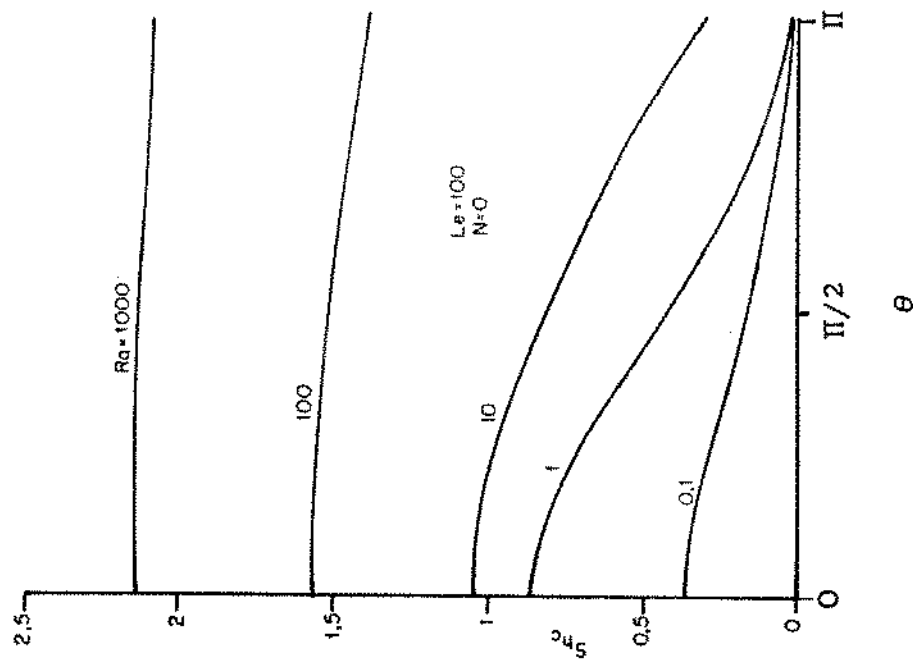


Fig. 4.6 Influência de Ra sobre a distribuição de Sh local no cilindro ($N=0$)

c - $Le=100$

(a)

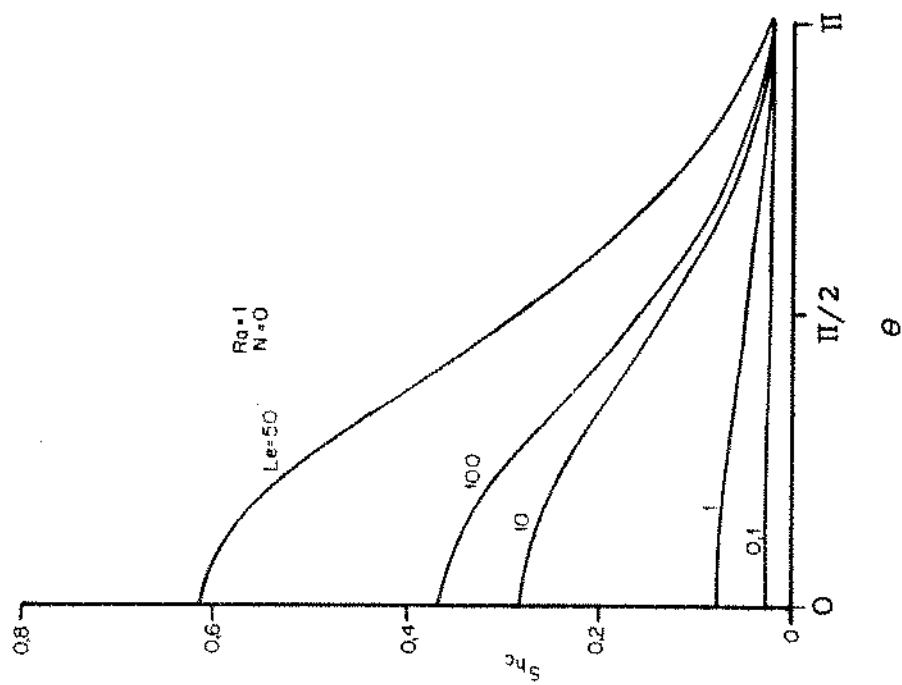
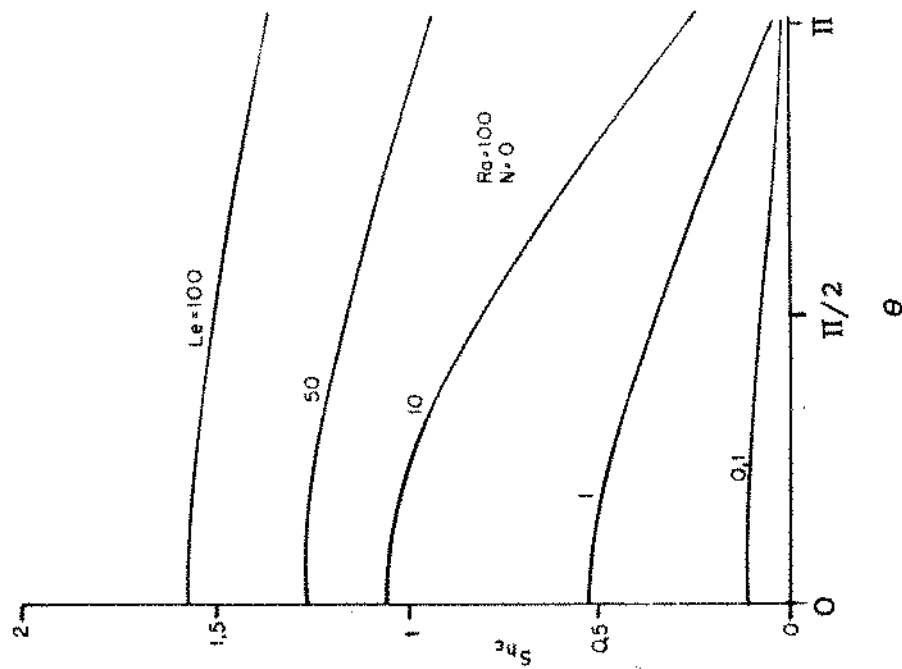


Fig. 4.7 Influência de Le sobre a distribuição de Sh local no cilindro $N=0$.

a - $Ra=1$

(b)



(c)

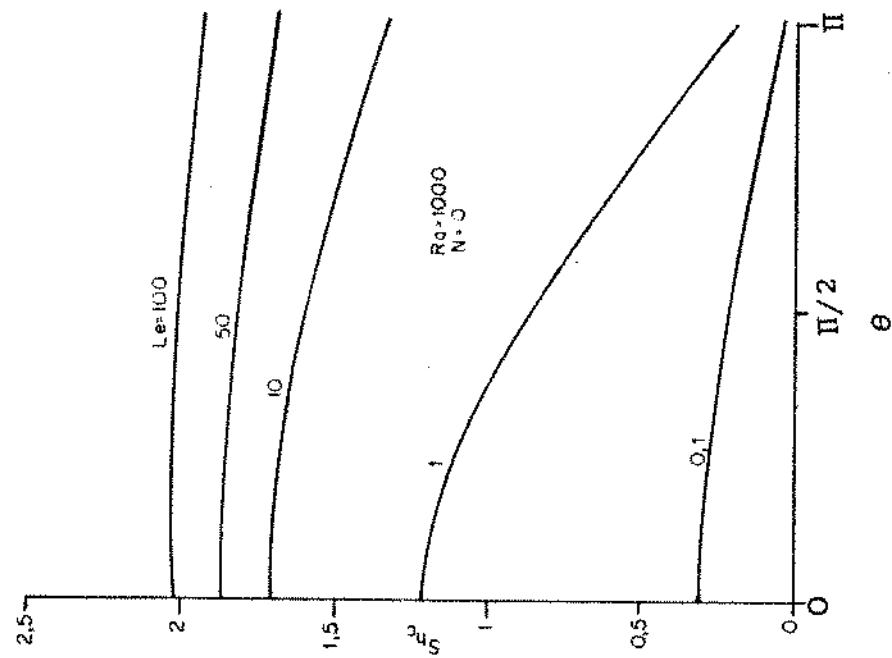


Fig. 4.7 Influência de Le sobre a distribuição de Sh local no

cilindro ($N=0$)

b - $Ra=100$

c - $Ra=1000$

IV.2 ESCOAMENTOS COM $N > 0$

Analisamos a seguir as situações em que o empuxo devido ao gradiente de concentração tem uma maior influência no escoamento do que o empuxo proveniente do gradiente de temperatura. No presente caso, para um valor de N positivo, temos forças de empuxo concordantes e como consequência, uma intensificação dos efeitos da convecção natural sobre o escoamento.

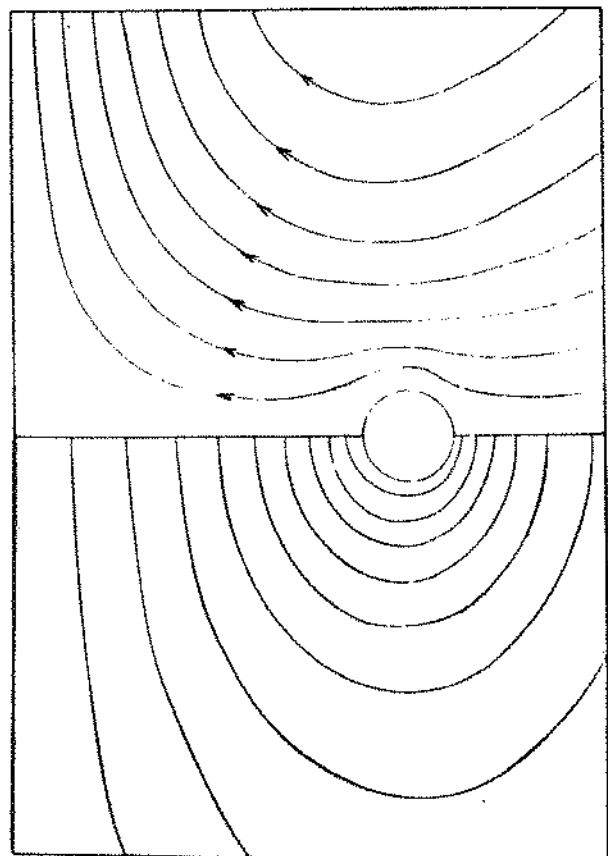
A Fig.(4.8) nos mostra os campos de escoamento e de temperatura para os mesmos parâmetros apontados na Fig.(4.1), ou seja, $Le=1$ para $Ra=0.1, 10$ e 1000 . Da comparação das Figuras (4.8) e (4.1) podemos notar a intensificação dos efeitos das forças de empuxo sobre a convecção natural.

A Fig.(4.9) nos mostra a distribuição de concentração para $Ra=10$ e $Le=0.1, 1, 10$ e 100 respectivamente. Uma intensificação do movimento de fluido dada pelo parâmetro N positivo também pode ser observada quando comparamos com a Fig.(4.2) para o caso $N=0$.

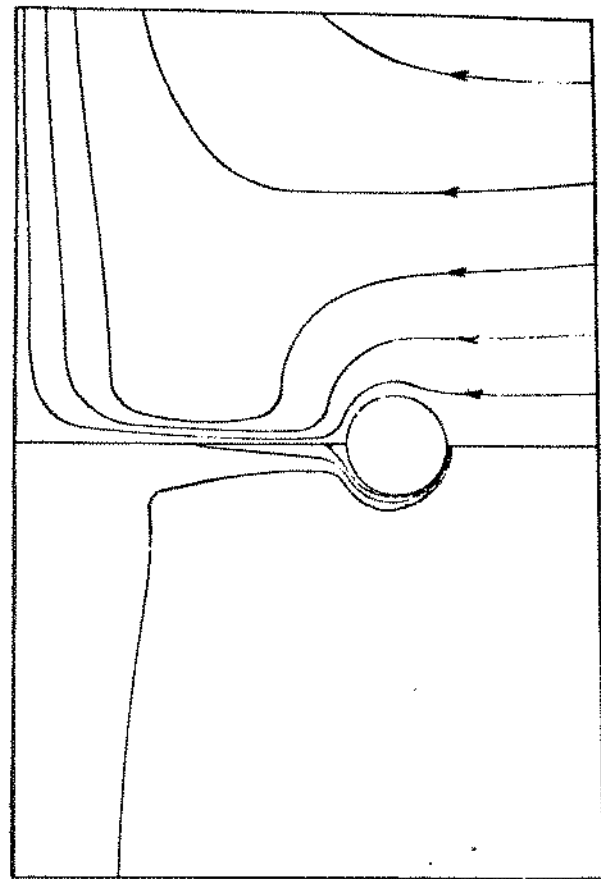
As Figs. (4.10.a) e (4.10.b) nos mostram um comportamento já esperado, em que N intensifica o efeito de empuxo de massa. Nesta figura observamos curvas monotônicas para valores altos de Le , acentuando os efeitos de Le . As Figs. (4.10.c) e (4.10.d) repetem o comportamento geral, sendo que as características do escoamento convectivo se estabelecem para valores menores de Ra e Le quando comparamos com as Figs.(4.4.a) e (4.4.c) no caso $N = 0$.

Como conclusão das curvas analisadas, vemos que N positivo afeta sensivelmente a taxa de transferência de calor, pelo que podemos notar da suavidade das curvas $Nu \times Ra$ no caso $N = 2$. Com relação a Sh há uma notável semelhança com os gráficos apresentados na Fig.(4.4), já que como afirmamos, N positivo amortece os efeitos da temperatura sobre o escoamento.

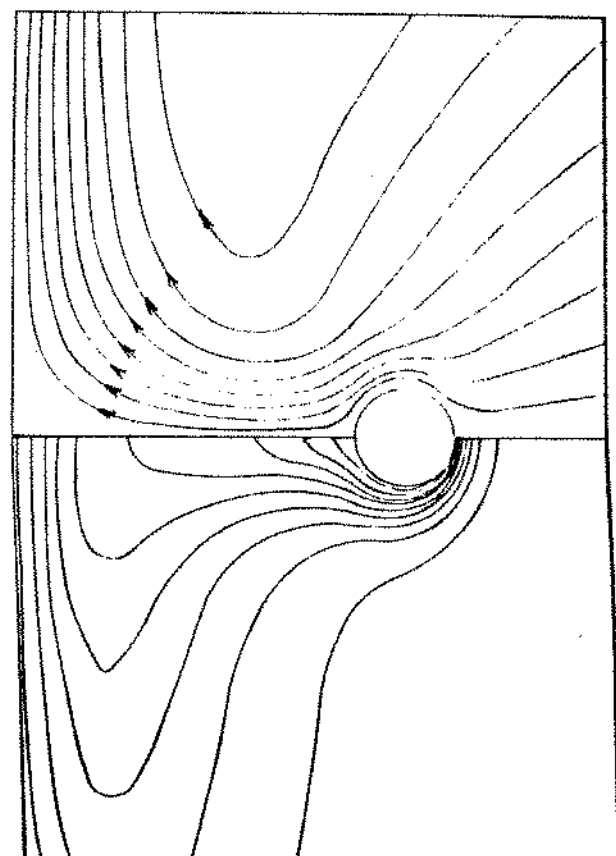
A Fig.(4.11) nos mostra a distribuição de Nu e Sh locais



(a)



(b)



(c)

(e)

(f)

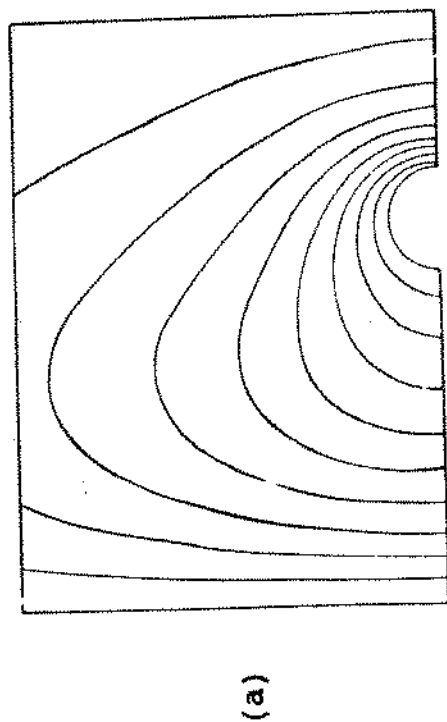
Fig. 4.8 Mapas de fluxo (b,d,f) e de temperatura (a,c,e)

(Le=1 N=2 $\Delta T = 0.1$)

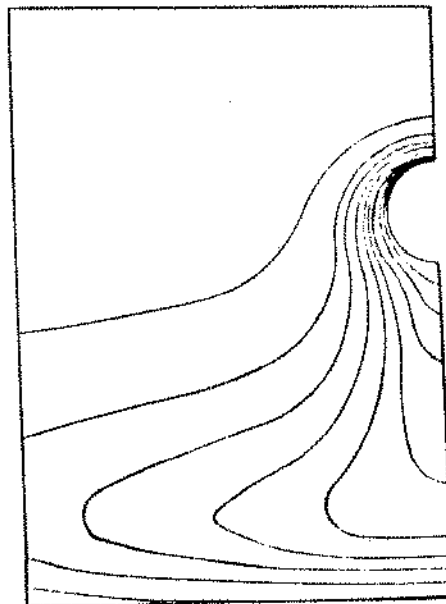
a,b - Ra=0.1 $\Delta\psi = -0.1$

c,d - Ra=10 $\Delta\psi = -1.5$

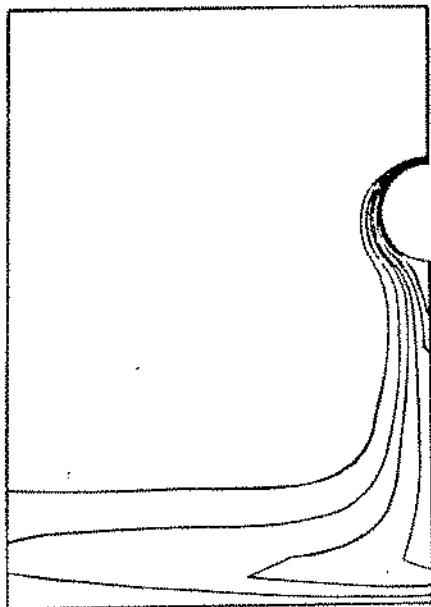
e,f - Ra=1000 $\Delta\psi = -50.0$



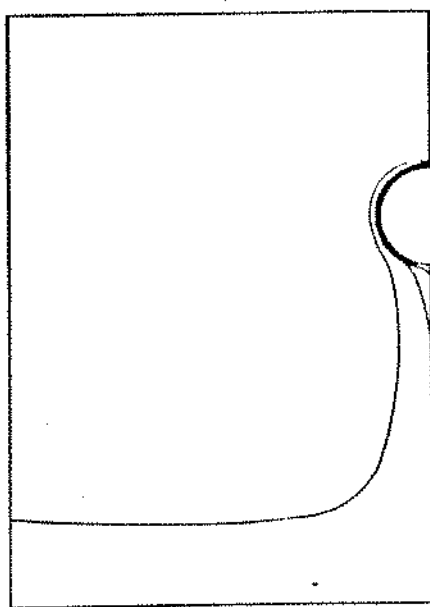
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4.9 Influência de Le sobre o campo de concentração

($N=2$ $Ra=10$ $\Delta C=0.1$)

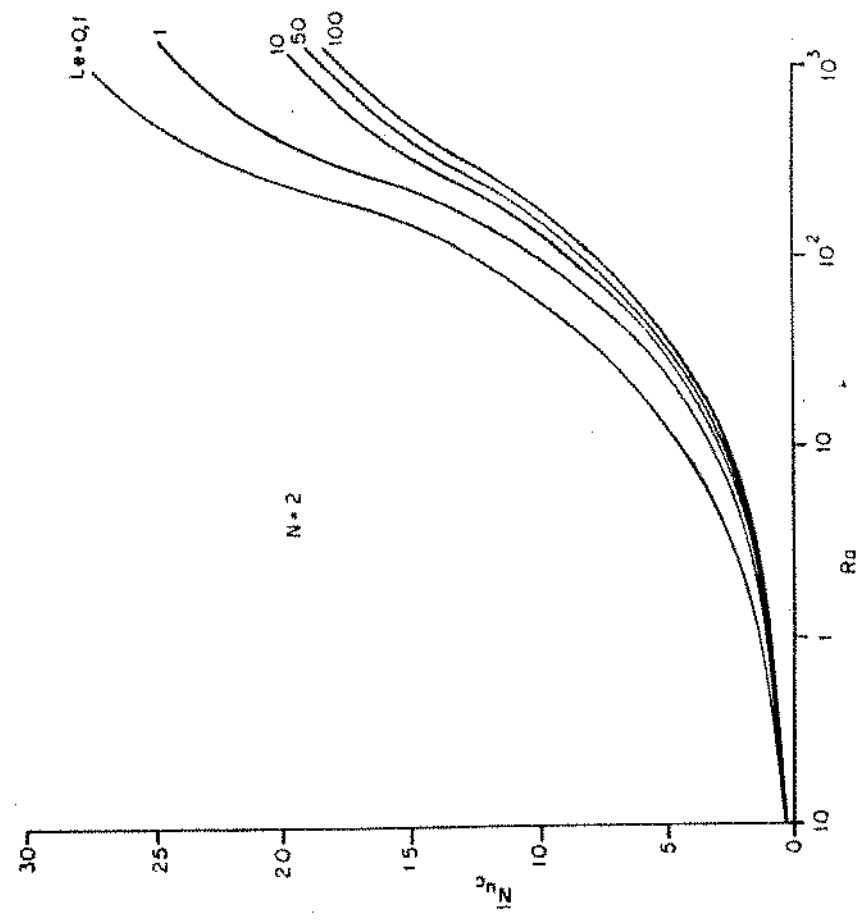
a - $Le=0.1$

b - $Le=1$

c - $Le=10$

d - $Le=100$

(a)



(b)

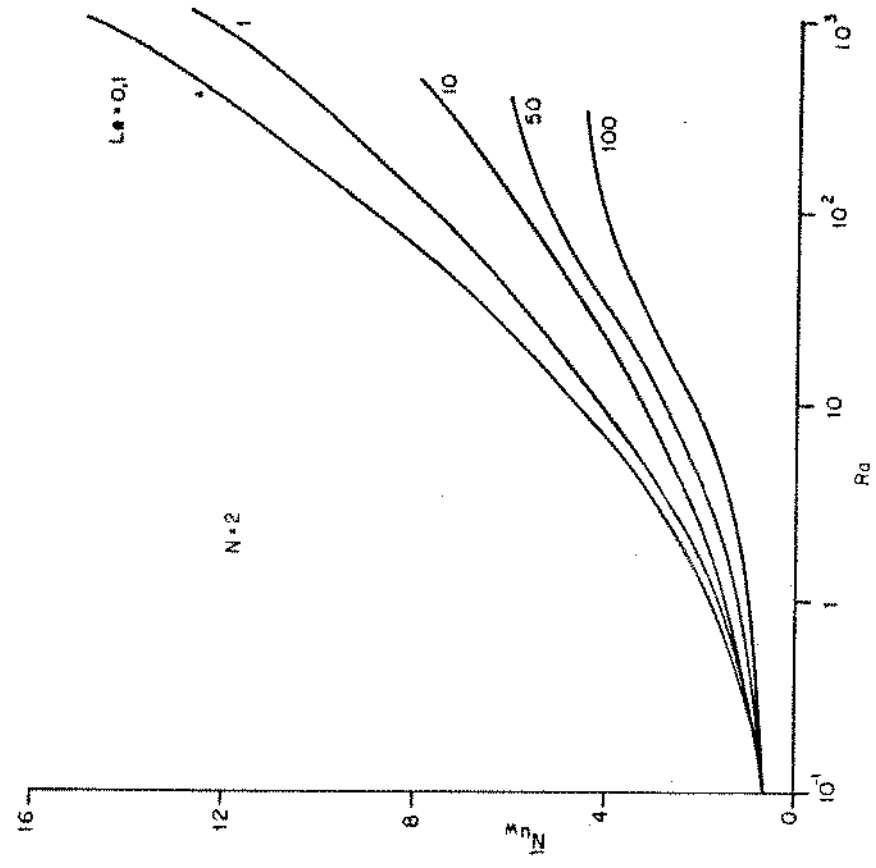
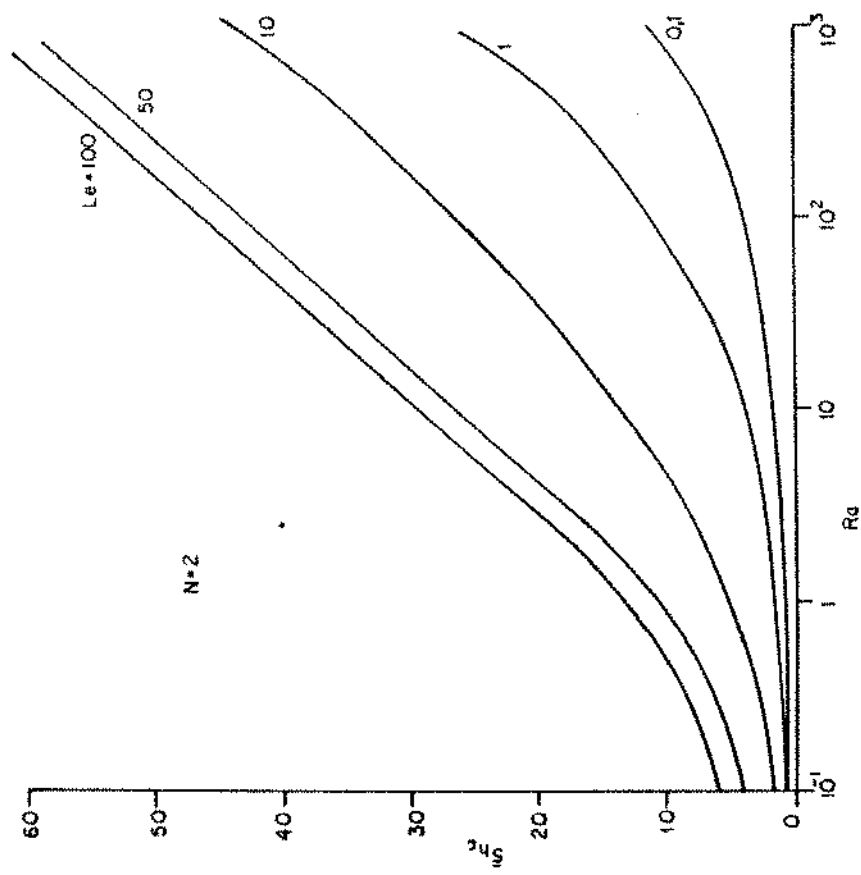


Fig. 4.10 Influência de Ra e Le sobre Nu e Sh ($N=2$)

a - Nu_c
b - Nu_w

(c)



(d)

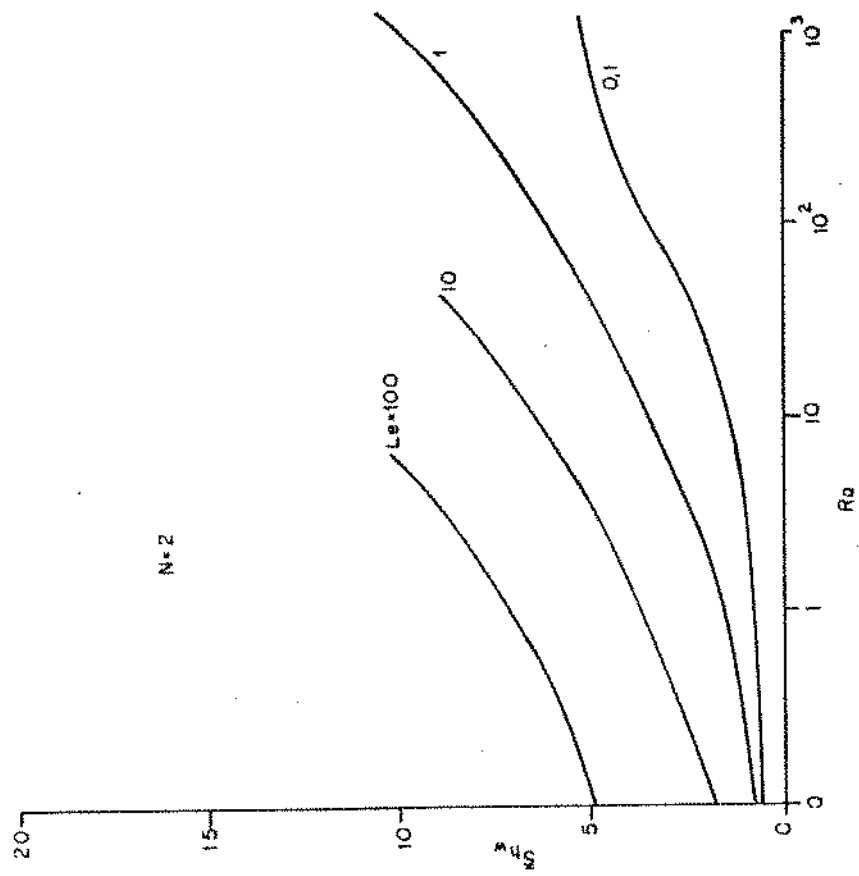


Fig. 4.10 Influência de Ra e Le sobre Nu e Sh ($N=2$)

c - Sh_c
d - Sh_w

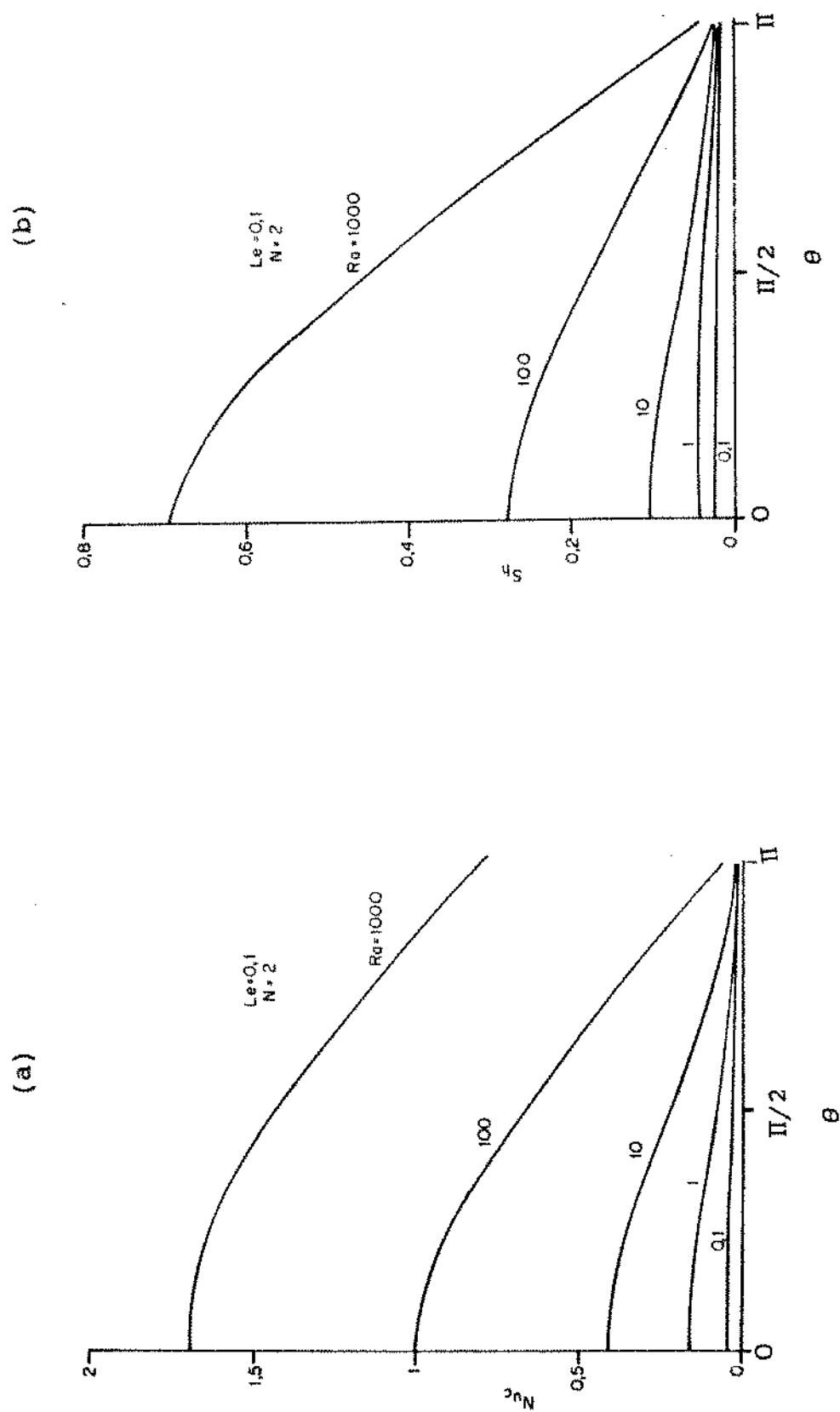
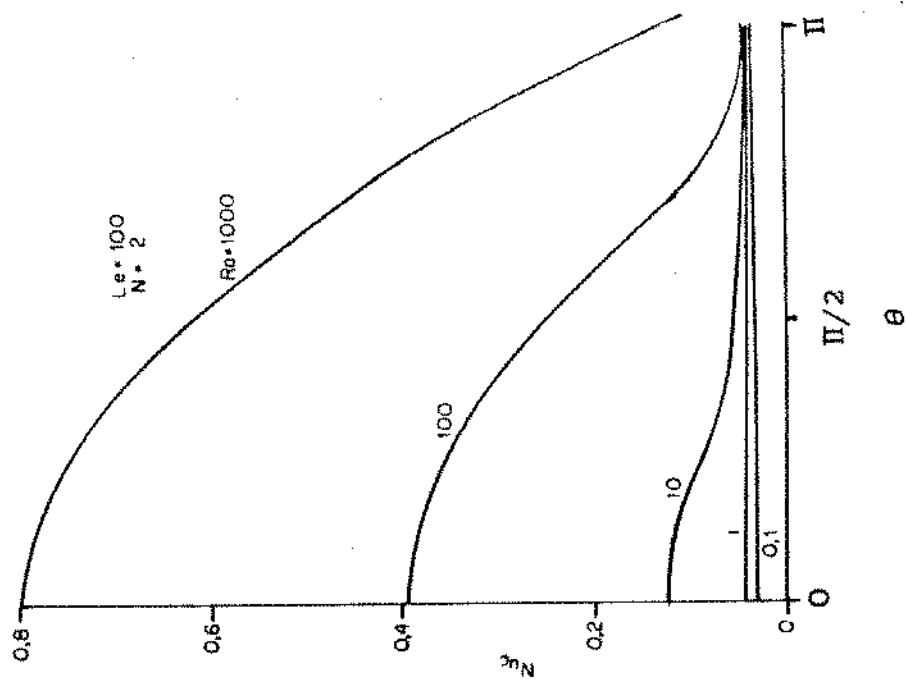


Fig. 4.11 Influência de Le e Ra sobre Nu_C e Sh_C ($N=2$)

a - Nu_C $Le=0.1$
b - Sh_C $Le=0.1$

para $Le=0.1$ e 100 . As Figs.(4.11.c) e (4.11.d) nos mostram que com $Le=100$ e $N=2$, para valores de Ra próximos de 100 já temos escoamento fortemente convectivos.

(c)



(d)

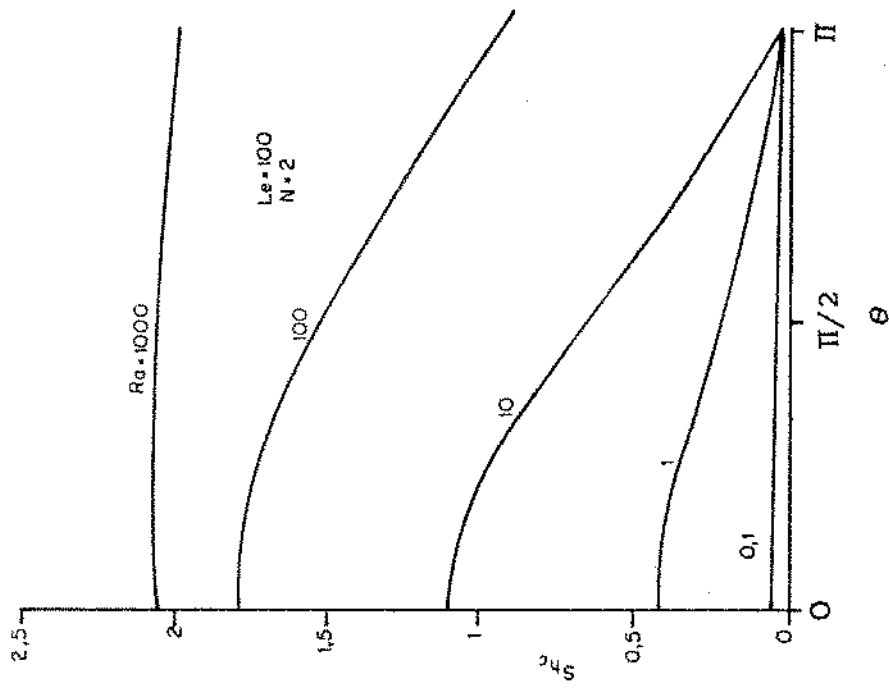


Fig. 4.11 Influência de Le e Ra sobre Nu_c e Sh_c ($N=2$)

c - Nu_c $Le=100$
d - Sh_c $Le=100$

IV.3 ESCOAMENTOS COM $N < -1$

Como observamos anteriormente, a razão de empuxo N estabelece o sentido do movimento do fluido. Um valor de N negativo tende a fazer com que o escoamento se mova em sentido contrário àquele observado quando $N > 0$.

Esse efeito pode ocorrer ou não, conforme os parâmetros Ra e Le possam influenciar de forma sensível o escoamento. A Fig.(4.12) mostra as curvas de níveis da função de corrente em situações diversas nesta classe de problema.

Na Fig.(4.12.a) para Le baixo, o escoamento tem o sentido da parede para o cilindro, oposto ao caso $N > 0$ destacando assim a influência pronunciada do valor negativo de N neste caso.

Na Fig.(4.12.b) o escoamento principal é do cilindro para a parede e as forças de empuxo contraditórias por regiões provocam uma região de recirculação no escoamento. A influência de N desaparece por completo na Fig.(4.12.c) onde Ra e Le são altos e o escoamento tem o mesmo sentido observado para Ra e Le altos com $N > 0$. A influência de N é sentida nos valores assumidos pela função-corrente quando comparados com a Fig.(4.8.c)

A Fig.(4.13) nos mostra a influência de números de Le relativamente baixos com $N < -1$ sobre o campo de temperaturas para uma faixa ampla de Ra , onde o sentido do escoamento é da parede para o cilindro como na Fig.(4.12.a). Podemos notar que com o aumento de Ra quase toda a troca de calor se efetua entre o cilindro e o meio. Praticamente nenhum calor é trocado entre a parede e o cilindro para Ra alto como no caso da Fig.(4.13.c).

A Fig.(4.14) nos mostra as curvas de Nu e Sh no cilindro em função de Le e Ra . Tais curvas são praticamente as mesmas que as apresentadas para o caso $N > 0$ devido ao fato do problema apresentar simetria em relação a N (Ver Fig. (4.10)).

A Fig.(4.15) nos mostra que para N negativo e Le relativamente baixo, a troca de calor maior é na parte do cilindro mais próxima à parede ($\theta = 2\pi$) como na Fig.(4.15.a) e (4.15.b) e para Le alto (o efeito de N desaparece) observamos

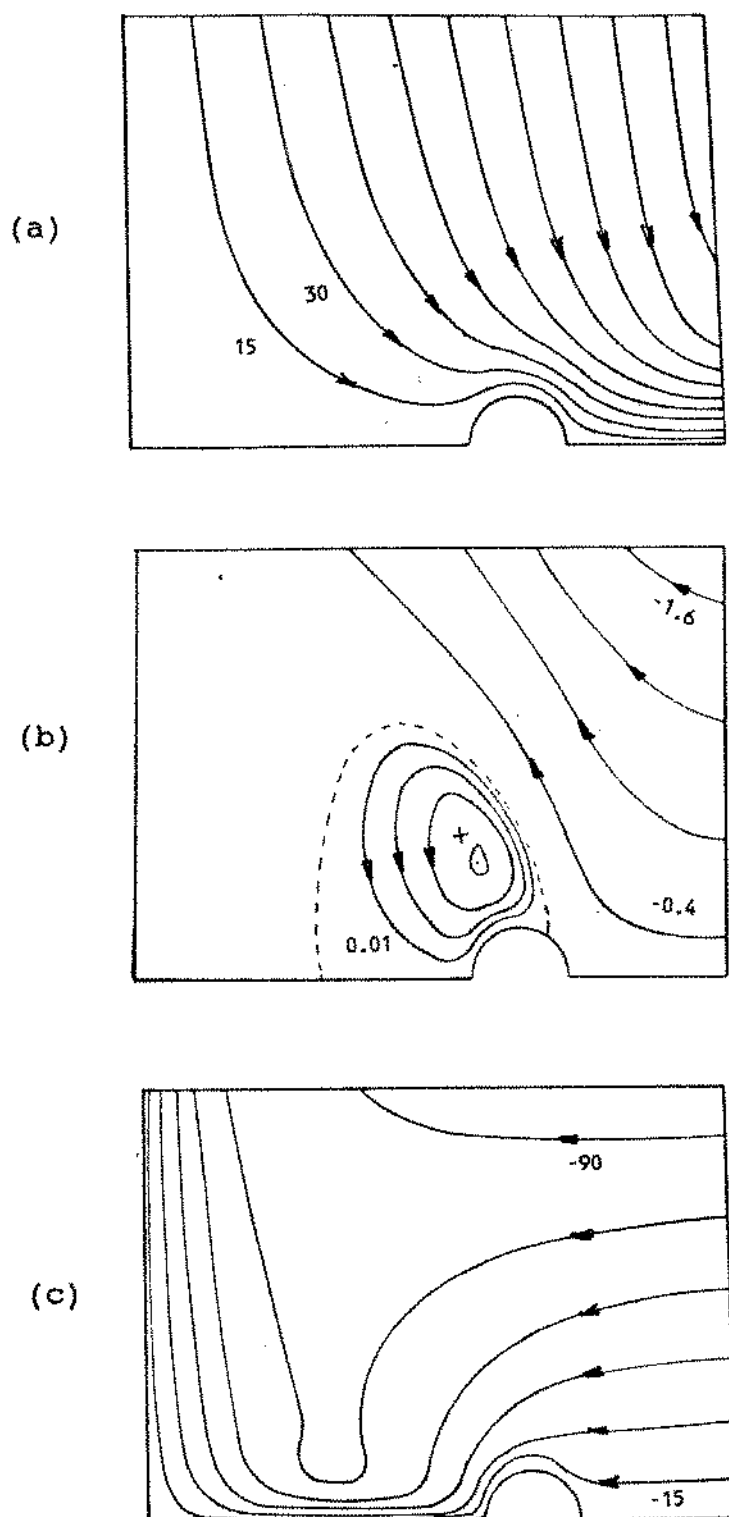


Fig. 4.12 Influência de Le sobre o campo de escoamento
($N=-2$ $Ra=100$)

- a - $Le=1$ $\Delta\psi = 15$
 b - $Le=50$ $\Delta\psi^+ = 0.01$ $\Delta\psi^- = -0.4$
 c - $Le=100$ $\Delta\psi = -15$

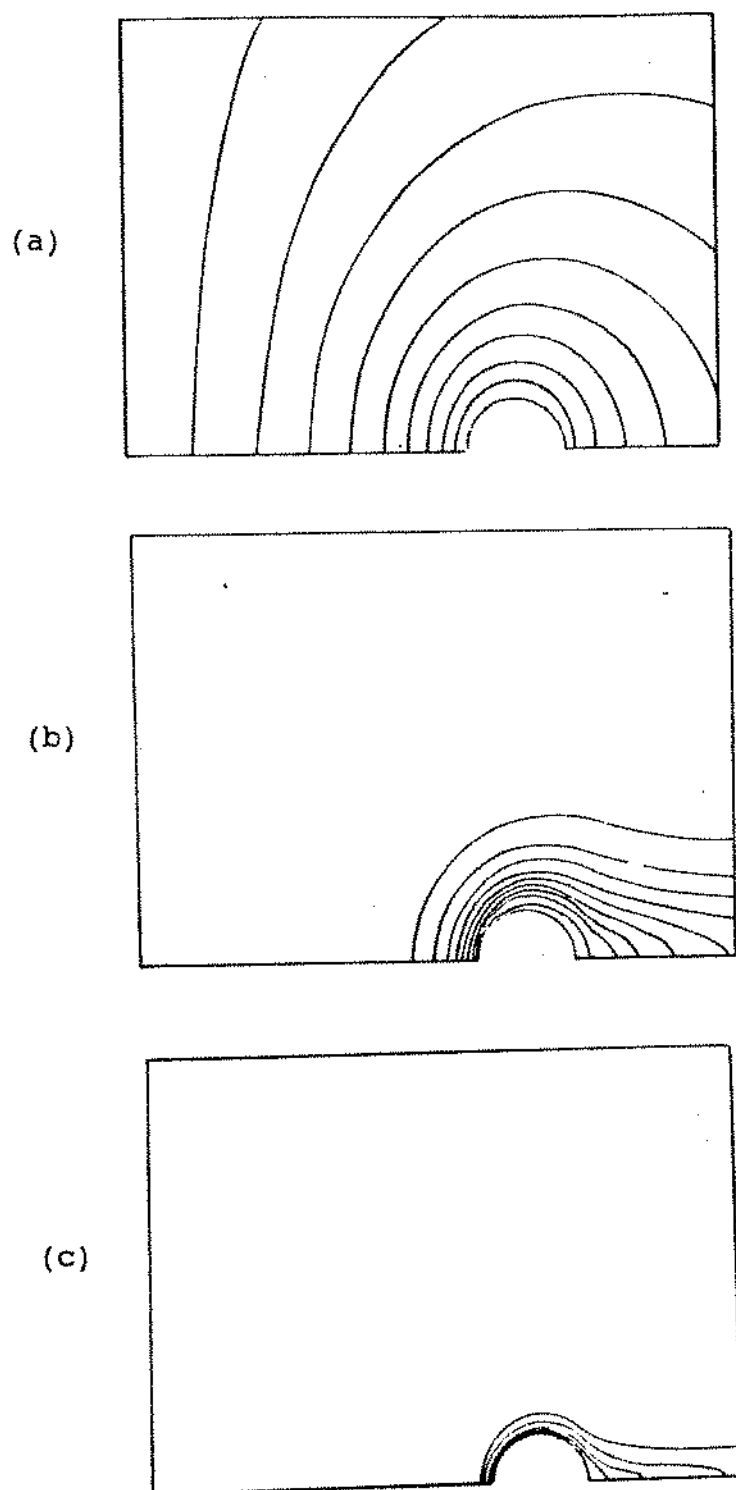


Fig. 4.13 Influência de Ra sobre o campo de temperatura
($N=-2$ $Le=1$ $\Delta T = 0.1$)

- a - $Ra=0.1$
- b - $Ra=10$
- c - $Ra=1000$

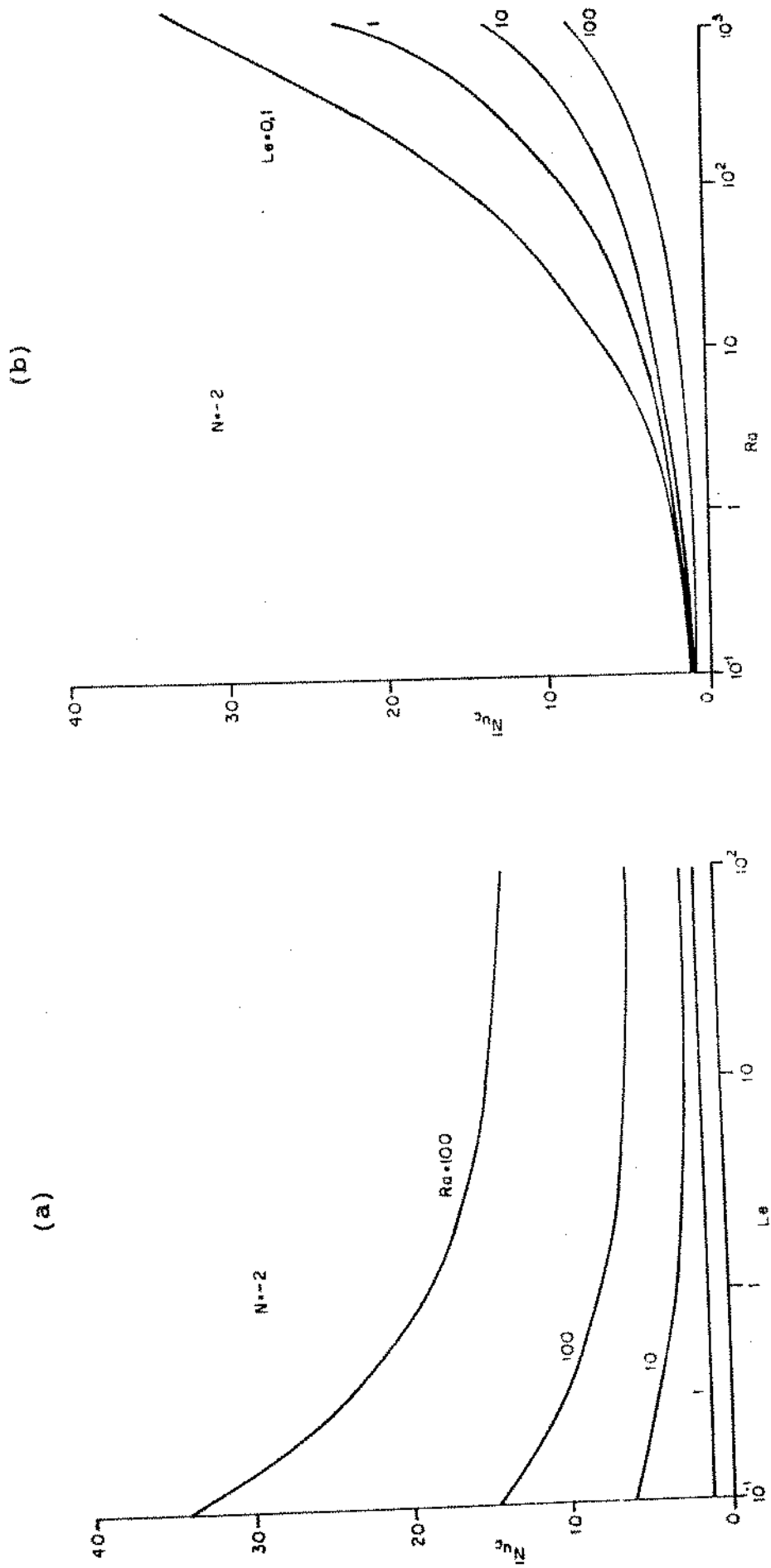
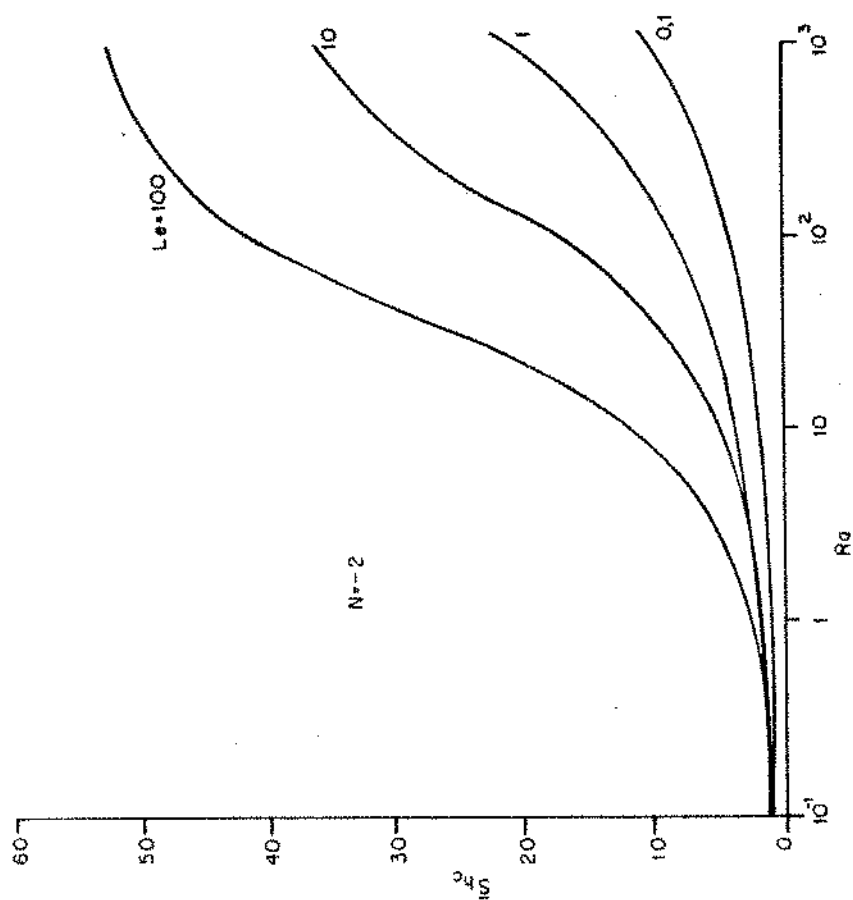


Fig. 4.14 Influência de Ra e Le sobre Nu_C e Sh_C ($N = -2$)

a - Nu_C * Le
b - Nu_C * Ra

(d)



(c)

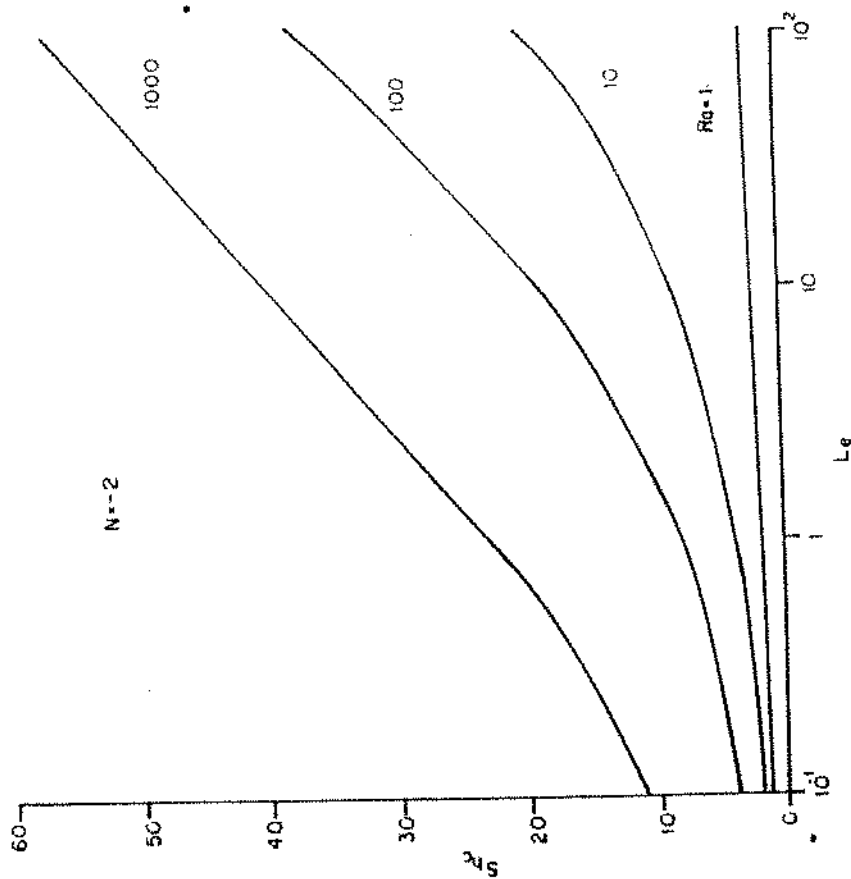
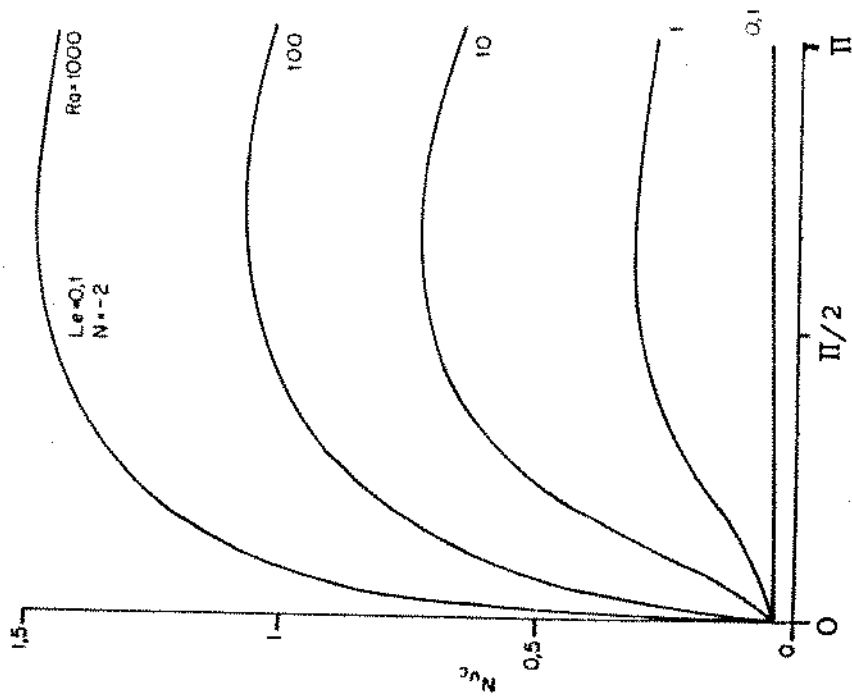


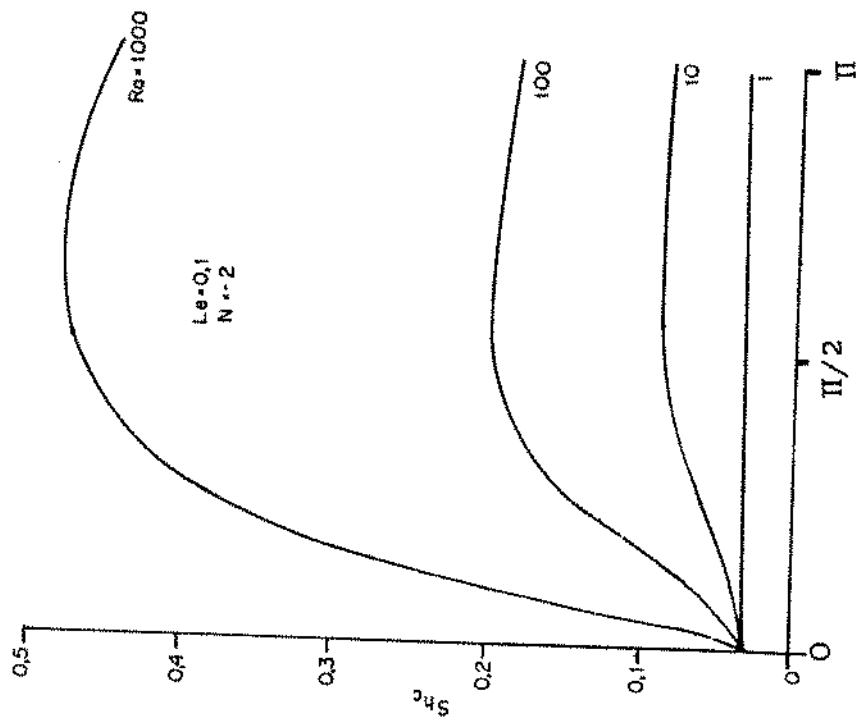
Fig. 4.14 Influência de Ra e Le sobre Nu_c e Sh_c ($N = -2$)

c - $Sh_c \times Le$
d - $Sh_c \times Ra$

(a)



(b)



θ

θ

Fig. 4.15 Influência de Le e Re sobre Nu_C e Sh_C ($N=-2$)

a - Nu_C $Le=0.1$

b - Sh_C $Le=0.1$

curvas muito similares àquelas obtidas quando $N > 0$ dadas pela Fig.(4.11.c) e (4.11.d) para Nu e Sh locais, indicando um maior aquecimento da região do cilindro oposta à parede ($\theta = 0$) conforme as Figs.(4.15.c) e (4.15.d).

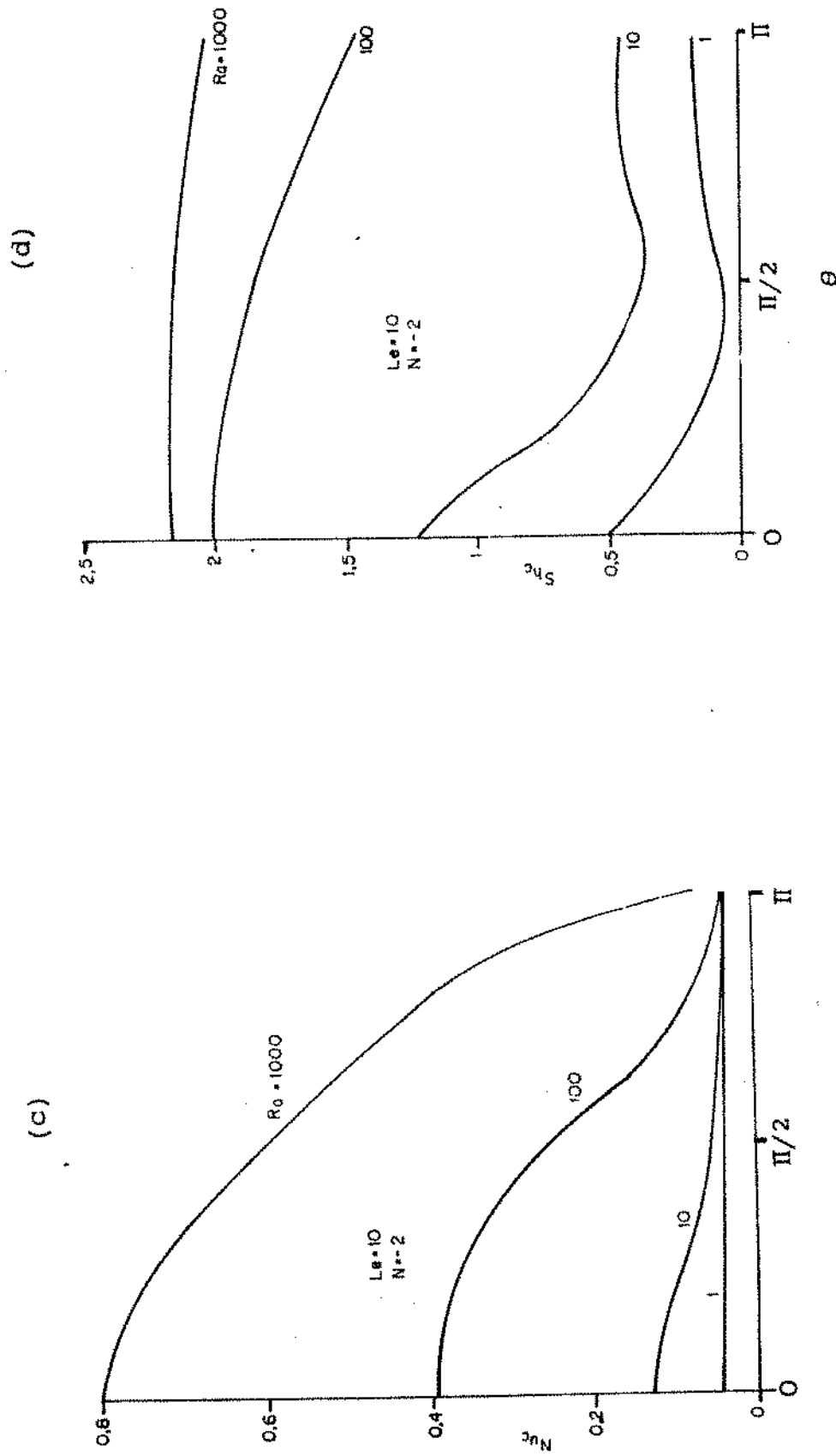


Fig. 4.15 Influência de Le e Ra sobre Nu_c e Sh_c ($N=2$)

c - Nu_c $Le=10$
d - Sh_c $Le=10$

IV.4 INFLUÊNCIA DA RAZÃO DE EMPUXO

O aspecto mais notável da influência de N é a supressão da convecção como mecanismo de transporte. A supressão se acentua nas vizinhanças de $N=-1$, ou seja, nos escoamentos em que os efeitos de empuxo causados pelos gradientes de temperatura e concentração são da mesma ordem de grandeza e de sentidos opostos.

No caso limite de $Le=1$, o fluxo desaparece por completo quando $N=-1$ e temos a difusão pura. Este aspecto é ilustrado pela sequência de mapas de linhas de corrente e de temperatura dispostos na Fig.(4.16) para $Le=1$ e $Ra=10$.

Os casos apresentados nesta figura correspondem ao regime de convecção estabelecida quando os valores de N são suficientemente diferentes de -1 . O fluido circula no sentido do cilindro para a parede quando $N=-0.8$. Esta configuração é revertida para $N=-1.2$.

No caso $N=-1.2$, vemos que a troca de calor é maior entre o cilindro e o meio poroso conforme a Fig.(4.16.c).

Nas Figs.(4.16.b) e (4.16.d) podemos notar a reversão do escoamento em torno do cilindro para os casos $N=-0.8$ e -1.2 respectivamente. A Fig.(4.16.e) nos mostra a distribuição local de Nu no cilindro onde vemos o mesmo efeito de reversão de troca de calor apontado anteriormente.

Vamos agora analisar a passagem pelo ponto de supressão de movimento. A Fig.(4.17) nos mostra a influência de N sobre as curvas de Sh e Nu em função de Le e de Ra .

A passagem por um ponto de mínimo nas curvas apresentadas nos indica a situação de movimento mínimo do fluido.

A simetria das curvas de Nu e Sh em relação a um ponto de mínimo pode ser também notada.

A Fig.(4.17) nos fornece algumas informações interessantes com relação ao mínimo de Nu e Sh . Tal mínimo depende sensivelmente de Le e em menor intensidade de Ra . Na Fig.(4.17.a) vemos que o mínimo é praticamente -2 para $Ra = 1, 100$ e 1000 quando o número de Lewis é mantido igual a 10 . A Fig.(4.17.b)

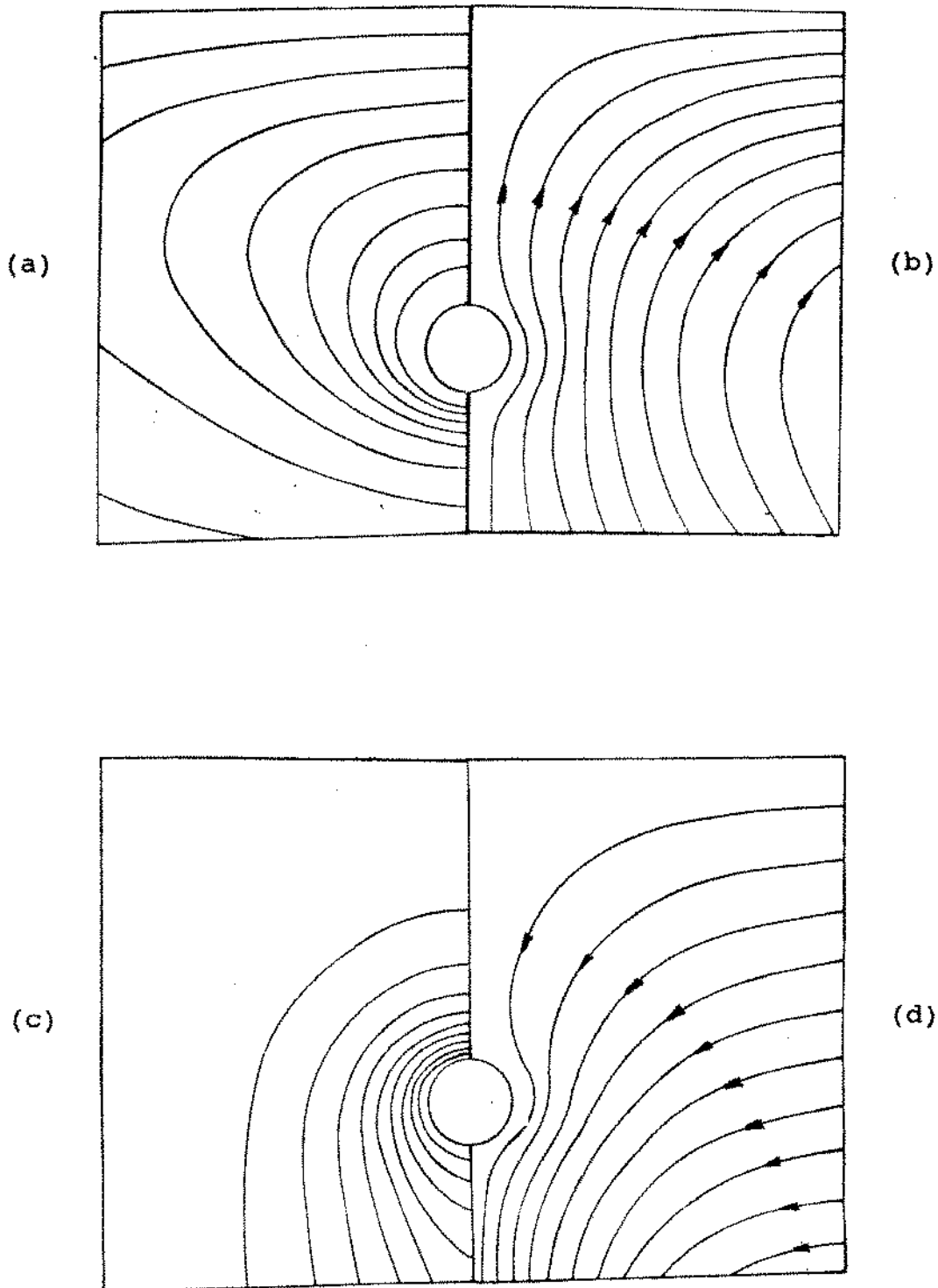


Fig. 4.16 Fenômeno da recirculação em torno de $N=-1$ ($Ra=10$ $Le=1$)

- | | | | |
|---|----------------------|----------|----------------------|
| a | campo de temperatura | $N=-0.8$ | $\Delta T = 0.1$ |
| b | campo de velocidades | $N=-0.8$ | $\Delta \psi = -0.5$ |
| c | campo de temperatura | $N=-1.2$ | $\Delta T = 0.1$ |
| d | campo de velocidades | $N=-1.2$ | $\Delta \psi = 0.3$ |

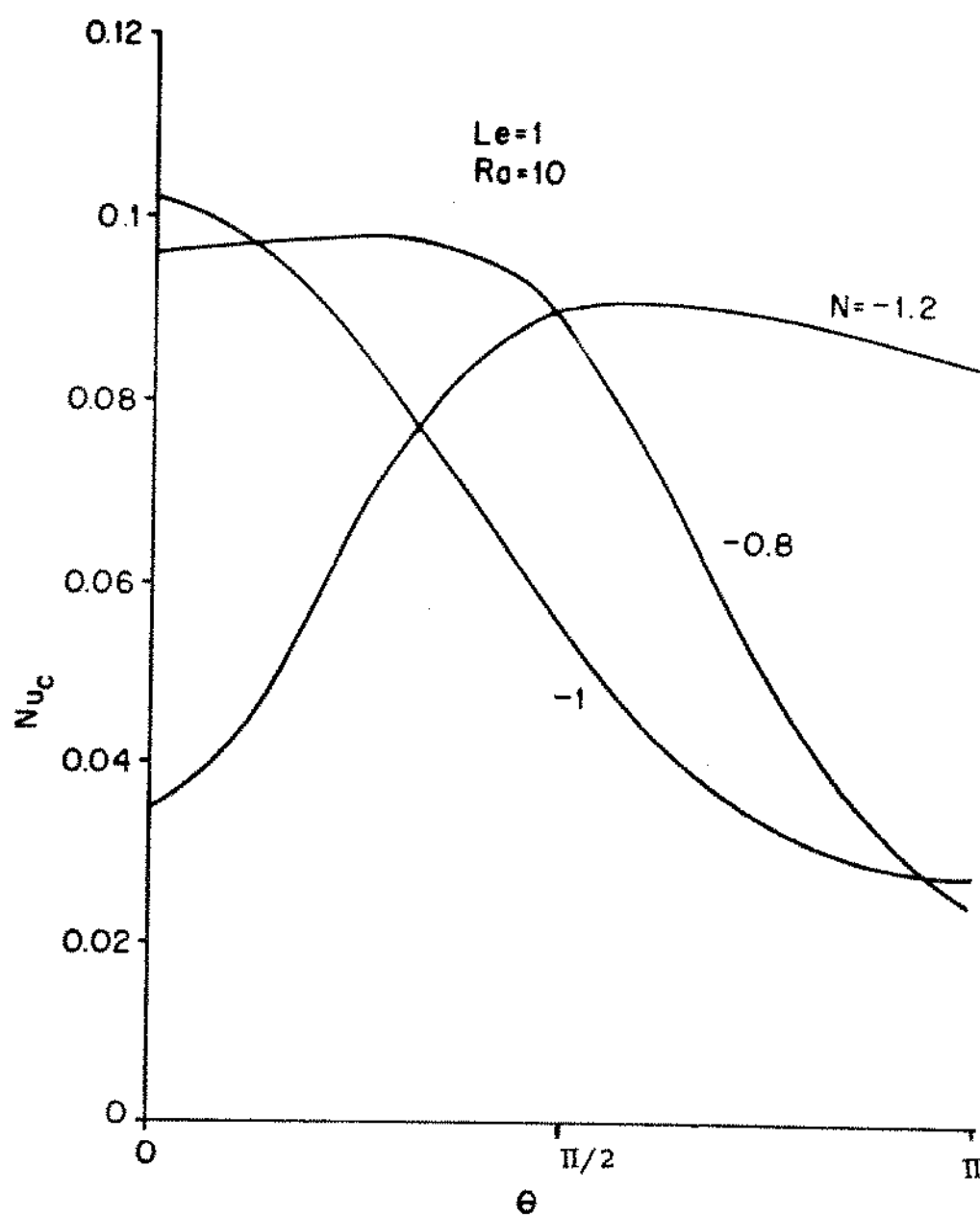


Fig. 4.16.e Distribuição de Nu_c em função de N ($N = -0.8$ e -1.2)

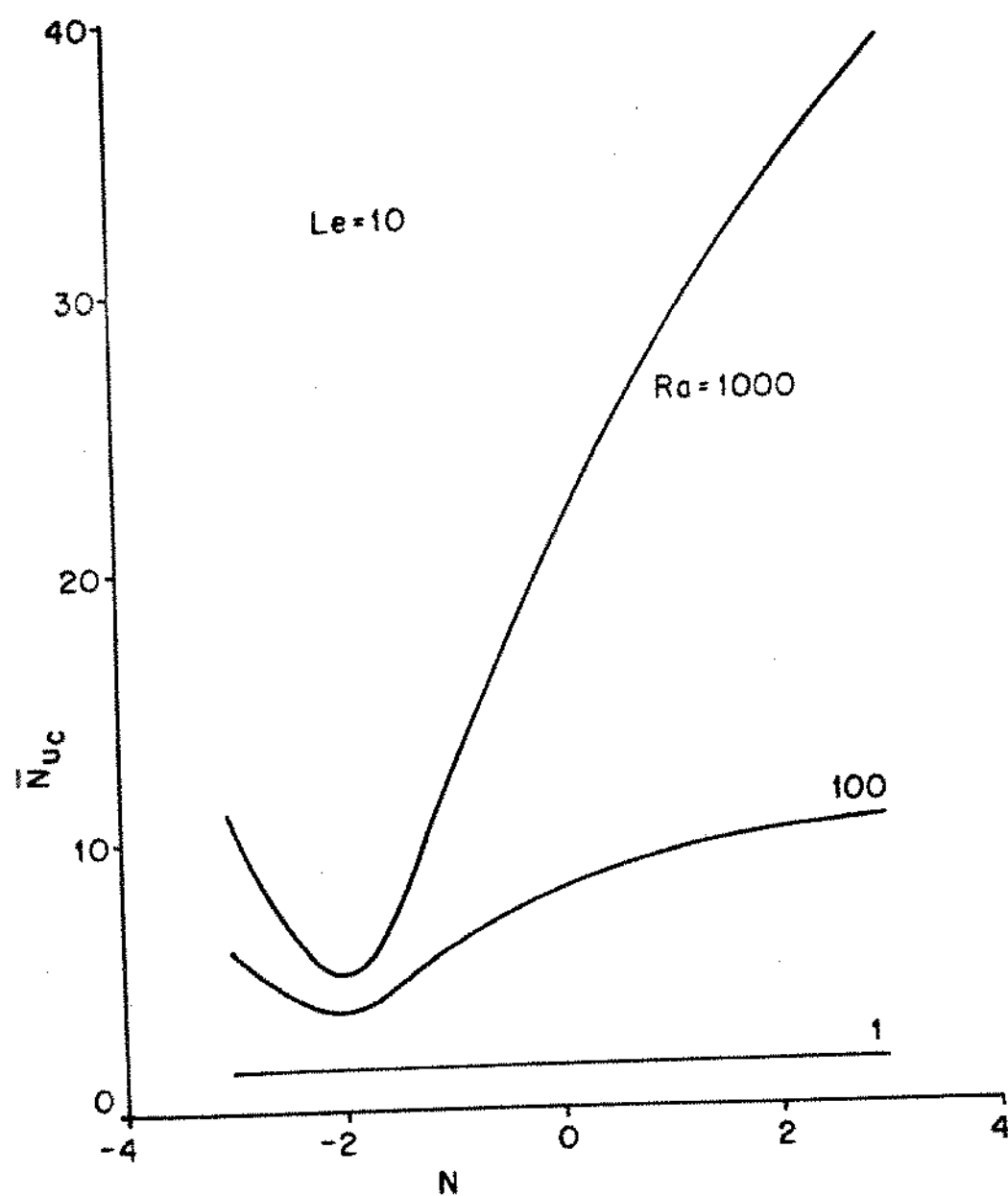


Fig. 4.17.a Influência de N e Ra sobre Nu_c ($Le=10$)

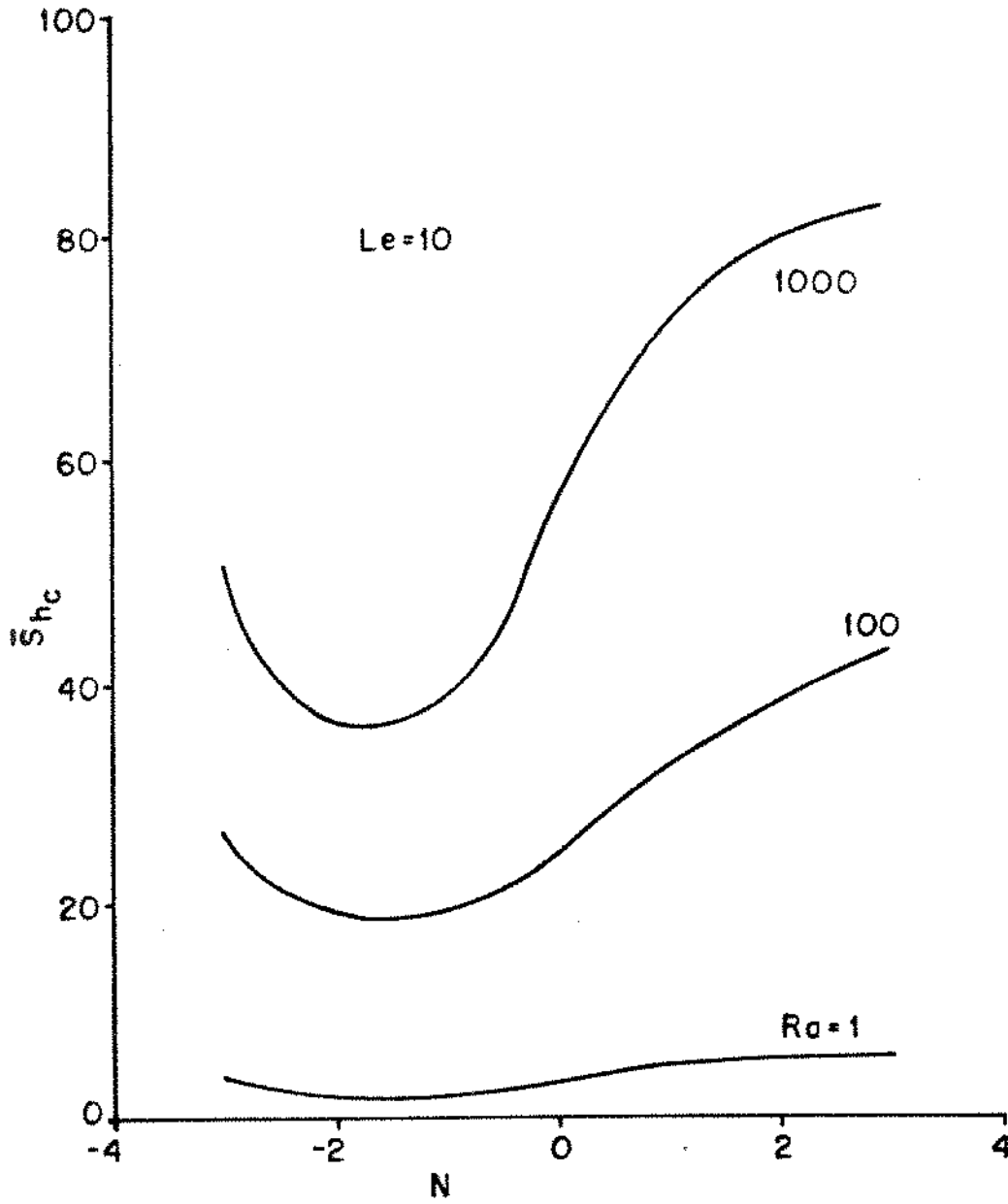


Fig. 4.17.b Influência de N e Ra sobre Sh_c ($Le=10$)

mostra o mesmo comportamento para o número de Sherwood.

Podemos ver pelas Figs.(4.17.c) e (4.17.d) a variação sensível do ponto de mínimo das curvas de Nu e Sh para números de Lewis assumindo valores de 0.1, 10 e 100 respectivamente. À medida que Lewis aumenta o ponto de reversão do escoamento se dá para valores aritmeticamente menores da razão de empuxo. Vemos que a menos do caso específico de $Le=1$, o ponto de reversão do escoamento não significa a extinção do movimento de fluido. As taxas de transferência diminuem com a desaceleração do escoamento mas não chegam a reproduzir em seu mínimo o valor correspondente a uma situação de difusão pura.

As Figs.(4.18.a) a (4.18.c) nos mostram a distribuição de Nu local no cilindro para $Ra=100$ com $Le=0.1, 10$ e 100 respectivamente. As Figs.(4.18.d) e (4.18.e) mostram a distribuição de Nu local no cilindro para $Le=10$ com $Ra=1$ e 1000 respectivamente. Tais curvas nos permitem ter uma visão de quais regiões do cilindro são mais afetadas pela variação de N . Vemos que com o aumento de Le , é necessário valores de N negativos cada vez menores para que a reversão de sentido do escoamento ocorra. Na Fig.(4.18.c) vemos que para Le e Ra altos o valor que permite a reversão do escoamento é menor do que -3. Também pelas Figs.(4.18.d) e (4.18.e) vemos que o parâmetro Ra influencia menos a reversão do movimento do que Le .

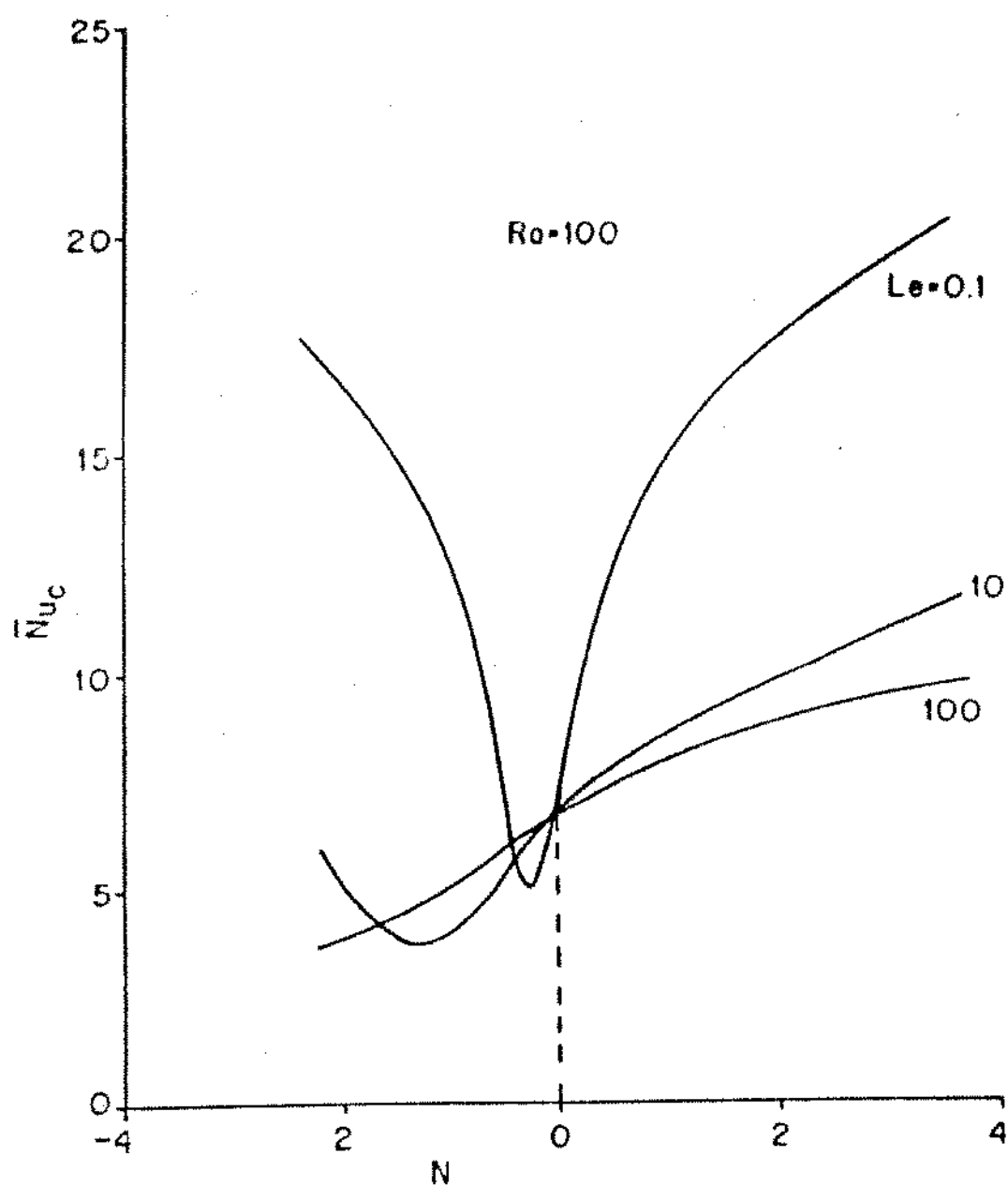


Fig. 4.17.c Influência de N e Le sobre Nu_c ($Ra=100$)

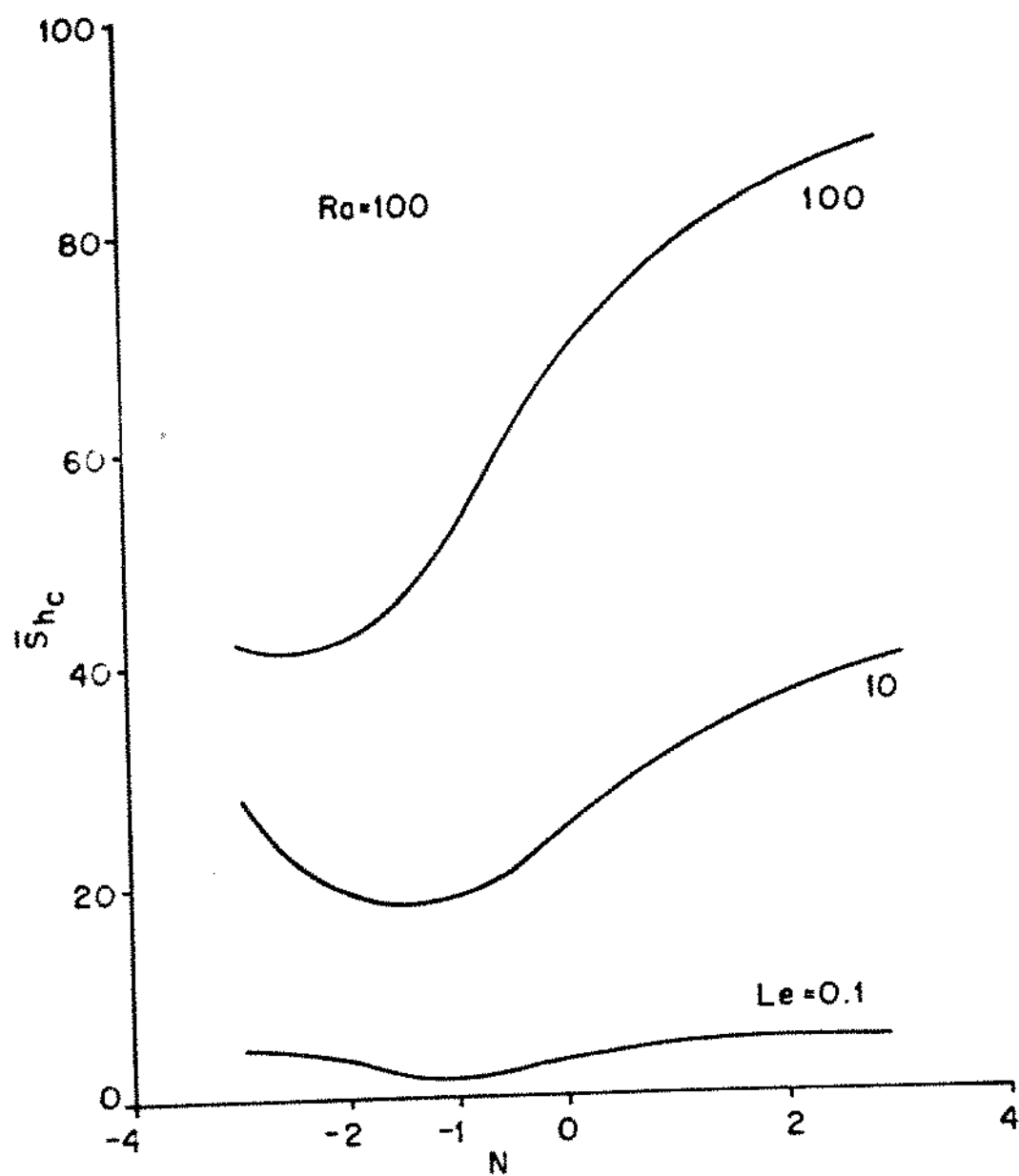
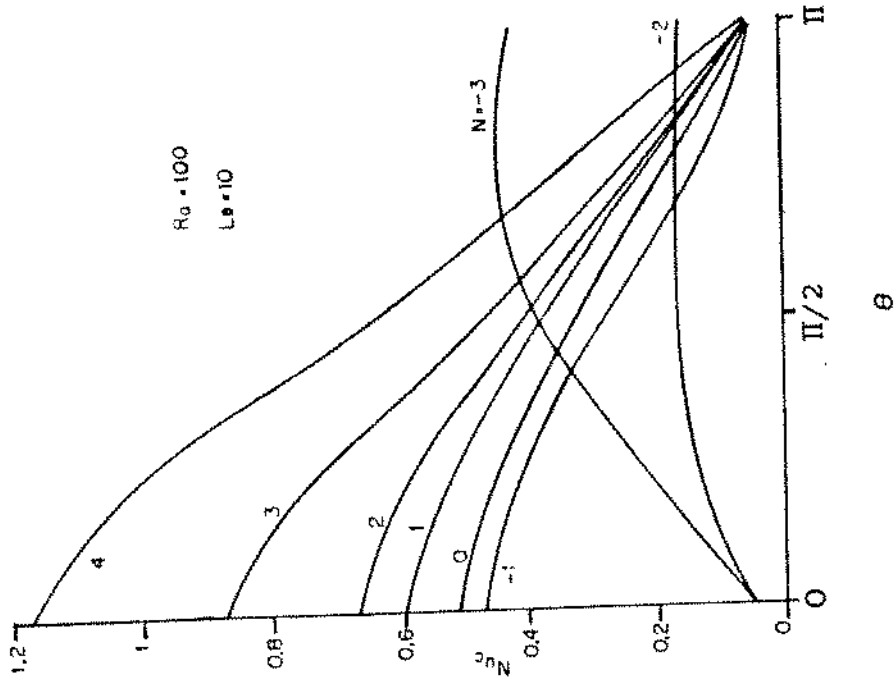


Fig 4.17.d Influência de N e Le sobre Sh_c ($Ra=100$)

(b)



(a)

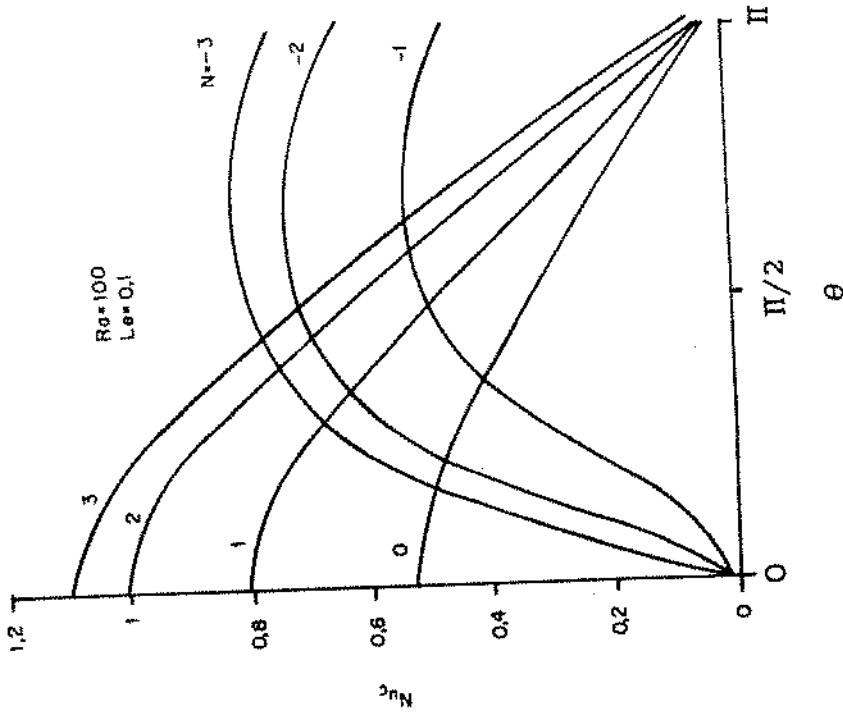
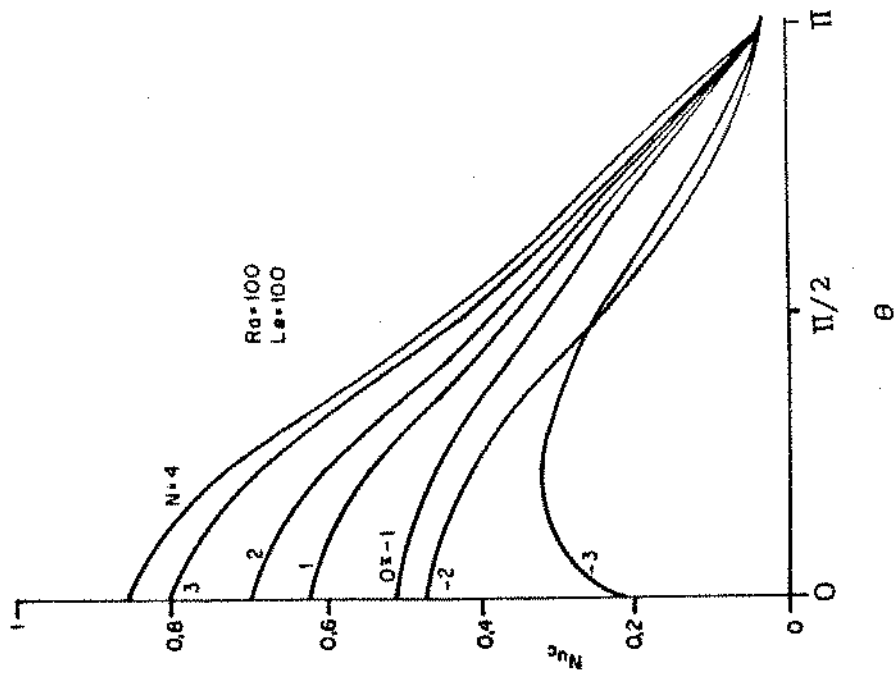


Fig. 4.18 Comportamento de Nu_C em função de N

a - $Le = 0.1$ $Ra = 100$

b - $Le = 10$ $Ra = 100$

(c)



(d)

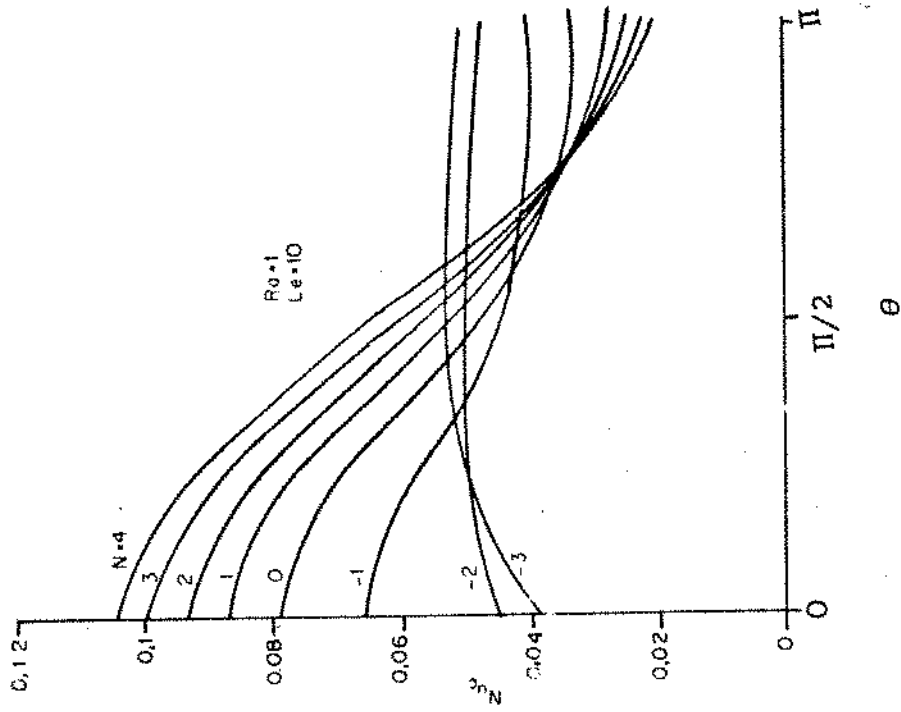


Fig. 4.18 Comportamento de Nu_c em função de N

c - $Le=100$ $Ra=100$

d - $Le=10$ $Ra=1$

(e)

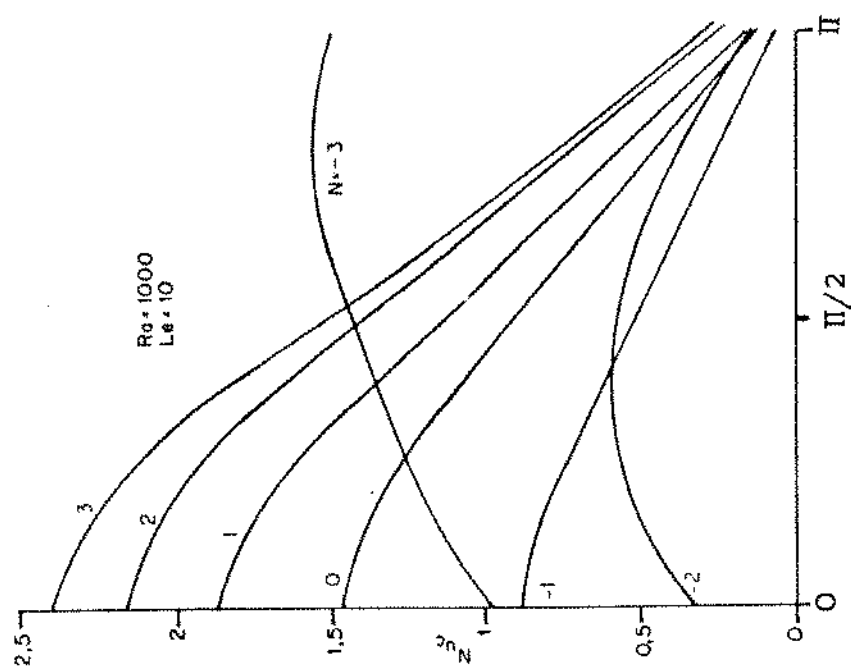


Fig. 4.18 Comportamento de Nu_c em função de N
e - $Le=10$ $Ra=1000$

SOLUÇÕES ANALÍTICAS PELO MÉTODO DA PERTURBAÇÃO

V.1 INTRODUÇÃO

Os métodos de perturbação estão entre os métodos aproximados mais comumente usados em problemas de escoamento fluido. A idéia central na aplicação de tais métodos é usar uma solução aproximada já existente como ponto de partida e procurar uma correção para a mesma, de forma a melhorar a aproximação, pela resolução numérica ou analítica de equações simplificadas.

Seja ψ a solução que será aproximada por $\psi_0 + \alpha \psi_1$, onde α é chamada de perturbação de ordem um, dizemos que a solução é de primeira ordem.

Não é exigida nenhuma condição que assegure a validade da aproximação. Como quase todos os métodos de aproximação, a aproximação de primeira ordem é usada sem nenhuma garantia a priori da sua funcionalidade ou campo de aplicação. A demonstração de que tais métodos realmente reproduzem resultados em situações complexas genéricas são muito difíceis.

Acontece frequentemente que, por alguma razão, os resultados fornecidos pela teoria de primeira ordem não são suficientemente exatos. Em tais casos, torna-se necessário considerar correções de segunda ordem ou de ordens superiores. Na tentativa subsequente a aproximação é do tipo $\psi_0 + \alpha \psi_1 + \alpha^2 \psi_2$, onde α^2 é chamada perturbação de segunda ordem.

Neste capítulo buscaremos soluções analíticas por perturbação regular para o problema da convecção natural sobre um cilindro enterrado. O modelamento matemático é o mesmo já descrito pelas equações (2.32), (2.33), (2.34) e com condições de contorno dadas por (2.35).

Como pode ser observado das equações governantes, o movimento convectivo pode ser causado pela presença de um valor finito de Ra . No entanto, diferentemente do caso da difusão simples, neste caso a alteração de um diferencial de concentração (que induziria à alteração no parâmetro N) pode sozinho provocar

alterações no comportamento do escoamento fluido. Podemos ter situações de escoamento induzido fortemente convectivo para números de Rayleigh extremamente diminutos. Desta forma, torna-se necessário a inclusão do parâmetro N numa análise completa do problema pelo método da perturbação. Daí utilizarmos de uma técnica de perturbação com uma expressão geral envolvendo Ra e N .

O uso da técnica de expansão permitiu descobrir uma relação explícita simples entre T e C para cada grau de aproximação, o que não fora evidenciado até o momento. Como veremos esta relação simples entre T e C está em cada caso associada a uma condição necessária, obtida naturalmente no desenvolvimento das equações perturbadas e que permitiu a obtenção de equações para ψ , T e C , além de expressões para o cálculo dos números de Nusselt e Sherwood no cilindro.

V.2 EXPANSÃO EM TORNO DE R E N

As soluções pelo método da perturbação encontradas na literatura para o caso de um cilindro enterrado (por exemplo, Bau [6]) são obtidas para a variação de uma única variável Ra . Uma extensão natural de uma solução perturbada para duas variáveis seria a utilização de um polinômio completo nas variáveis Ra e N . Assim, para ψ , T , C , Nu e Sh construímos uma solução por perturbação na forma

$$\begin{aligned} \psi = & \psi_0 + R \psi_1 + N \psi_2 + R N \psi_3 + R^2 \psi_4 + N^2 \psi_5 + R N^2 \psi_6 + \\ & + R^2 N \psi_7 + R^2 N^2 \psi_8 + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} T = & T_0 + R T_1 + N T_2 + R N T_3 + R^2 T_4 + N^2 T_5 + R N^2 T_6 + \\ & + R^2 N T_7 + R^2 N^2 T_8 + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$C = C_0 + R C_1 + N C_2 + R N C_3 + R^2 C_4 + N^2 C_5 + R N^2 C_6 + \\ + R^2 N C_7 + R^2 N^2 C_8 + \dots \quad (5.3)$$

$$Nu = Nu_0 + R Nu_1 + N Nu_2 + R^2 N Nu_3 + R^2 Nu_4 + N^2 Nu_5 + R N^2 Nu_6 + \\ + R^2 N Nu_7 + R^2 N^2 Nu_8 + \dots \quad (5.4)$$

$$Sh = Sh_0 + R Sh_1 + N Sh_2 + R^2 N Sh_3 + R^2 Sh_4 + N^2 Sh_5 + R N^2 Sh_6 + \\ + R^2 N Sh_7 + R^2 N^2 Sh_8 + \dots \quad (5.5)$$

$$\text{Onde } R = \sinh(v_1) Ra \quad (5.6)$$

V.2.1 CASO T E C CONSTANTES NO CILINDRO E NA SUPERFÍCIE SUPERIOR DO SOLO

Este caso foi abordado numericamente no Capítulo II e as condições por perturbação são as mesmas lá encontradas.

Para aplicação do método definimos uma nova função de corrente $\psi^{**} = \psi^* / R$ com o que as equações (2.32), (2.33) e (2.34) assumem a forma

$$\nabla^2 \psi^{**} = R [H \partial T^* / \partial u] + G \partial T^* / \partial v + N (H \partial C^* / \partial u + \\ + G \partial C^* / \partial v) \quad (5.7)$$

$$\nabla^2 T^* = \partial \psi^{**} / \partial v \partial T^* / \partial u - \partial \psi^{**} / \partial u \partial T^* / \partial v \quad (5.8)$$

$$\nabla^2 C^* = Le \left(\frac{\partial \psi^{**}}{\partial v} \frac{\partial C^*}{\partial u} - \frac{\partial \psi^{**}}{\partial u} \frac{\partial C^*}{\partial v} \right) \quad (5.9)$$

Onde ψ^* , T^* , C^* , Ra e Le são as mesmas variáveis definidas em (2.31).

As taxas de troca de calor e transporte de massa no cilindro são dadas por

$$\bar{Nu} = (v_1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial T^*}{\partial v} \right)_{v=v_1} du \quad (5.10)$$

$$\bar{Sh} = (v_1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial C^*}{\partial v} \right)_{v=v_1} du \quad (5.11)$$

Para facilidade de representação passamos, de ora por diante, a substituir ψ^{**} por ψ , T^* por T e C^* por C nas equações (5.7)-(5.11).

As equações (5.7)-(5.11) podem ser resolvidas introduzindo-se as expansões (5.1)-(5.5), comparando-se os termos de mesma potência em n e obtendo-se assim para cada nível de aproximação um novo conjunto de equações diferenciais.

Nas expansões sugeridas (5.1)-(5.5), $\psi_0, T_0, C_0, \bar{Nu}_0$ e $\bar{Sh}_0$ são soluções do problema não-perturbado

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= 0 \\ \nabla^2 T &= \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial T}{\partial v} \\ \nabla^2 C &= Le \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial C}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial C}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

com condições de contorno

$$\psi_0 = T_0 = C_0 = 0 \quad \text{em } v=0$$

$$\psi_0 = 0 ; T_0 = C_0 = 1 \quad \text{em } v=v_1$$

O problema no seu estado básico descrito pelo sistema (5.12) tem como solução

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0 \\ T_0 &= C_0 = v/v_1\end{aligned}\quad (5.13)$$

A solução (5.13) nos conduz a

$$Nu_0 = Sh_0 = 1$$

Para as demais ordens de perturbação as equações ficam da seguinte forma

Termos em R

$$\nabla^2 \psi_1 = G \partial T_0 / \partial v + H \partial T_0 / \partial u$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 T_1 &= \partial \psi_0 / \partial v \partial T_1 / \partial u + \partial \psi_1 / \partial v \partial T_0 / \partial u - \partial \psi_0 / \partial T_1 \partial v - \\ &\quad - \partial \psi_1 / \partial u \partial T_0 / \partial v\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 C_1 &= Le (\partial \psi_0 / \partial v \partial C_1 / \partial u + \partial \psi_1 / \partial v \partial C_0 / \partial u - \partial \psi_0 / \partial u \partial C_1 / \partial v - \\ &\quad - \partial \psi_1 / \partial u \partial C_0 / \partial v)\end{aligned}$$

(5.14)

Termos em R^2

$$\nabla^2 \psi_4 = G \partial T_1 / \partial v + H \partial T_1 / \partial u$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 T_4 = & \partial \psi_0 / \partial v \partial T_4 / \partial u + \partial \psi_1 / \partial v \partial T_1 / \partial u + \partial \psi_4 / \partial v \partial T_0 / \partial v \\ & - \partial \psi_0 / \partial u \partial T_4 / \partial v - \partial \psi_1 / \partial u \partial T_1 / \partial v - \partial \psi_4 / \partial u \partial T_0 / \partial v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 C_4 = & \text{Le} (\partial \psi_0 / \partial v \partial C_4 / \partial u + \partial \psi_1 / \partial v \partial C_1 / \partial u + \partial \psi_4 / \partial v \\ & - \partial \psi_0 / \partial u \partial C_4 / \partial v - \partial \psi_1 / \partial u \partial C_1 / \partial v - \partial \psi_4 / \partial u \partial C_0 / \partial v) \end{aligned}$$

(5.15)

Termos em N

$$\nabla^2 \psi_2 = 0$$

$$\nabla^2 T_2 = \partial \psi_0 / \partial v \partial T_2 / \partial u + \partial \psi_2 / \partial v \partial T_0 / \partial u - \partial \psi_0 / \partial u \partial T_2 / \partial v - \partial \psi_2 / \partial u \partial T_0 / \partial v$$

$$\nabla^2 C_2 = \text{Le} (\partial \psi_0 / \partial v \partial C_2 / \partial u + \partial \psi_2 / \partial v \partial C_0 / \partial u - \partial \psi_0 / \partial u \partial C_2 / \partial v - \partial \psi_2 / \partial u \partial C_0 / \partial v)$$

(5.16)

Termos em N^2

$$\nabla^2 \psi_5 = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 T_5 &= \partial\psi_0/\partial v \partial T_5/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial T_2/\partial u + \partial\psi_5/\partial v \partial T_0/\partial u - \\ &- \partial\psi_0/\partial u \partial T_5/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial T_2/\partial v - \partial\psi_5/\partial u \partial T_0/\partial v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 C_5 &= Le (\partial\psi_0/\partial v \partial C_5/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial C_2/\partial u + \partial\psi_5/\partial v \partial C_0/\partial u - \\ &- \partial\psi_0/\partial u \partial C_5/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial C_2/\partial v - \partial\psi_5/\partial u \partial C_0/\partial v) \end{aligned}$$

(5.17)

Termos em $R N$

$$\nabla^2 \psi_3 = G(\partial T_2/\partial v + \partial C_0/\partial v) + H(\partial T_2/\partial u + \partial C_0/\partial u)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 T_3 &= \partial\psi_0/\partial v \partial T_3/\partial u + \partial\psi_1/\partial v \partial T_2/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial T_1/\partial u + \partial\psi_3/\partial v \partial T_0/\partial u - \\ &- \partial\psi_0/\partial u \partial T_3/\partial v - \partial\psi_1/\partial u \partial T_2/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial T_1/\partial v - \partial\psi_3/\partial u \partial T_0/\partial v \end{aligned}$$

$$\nabla^2 C_3 = Le(\partial\psi_0/\partial v \partial C_3/\partial u + \partial\psi_1/\partial v \partial C_2/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial C_1/\partial u + \partial\psi_3/\partial v \partial C_0/\partial u - \\ - \partial\psi_0/\partial u \partial C_3/\partial v - \partial\psi_1/\partial u \partial C_2/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial C_1/\partial v - \partial\psi_3/\partial u \partial C_0/\partial v)$$

(5.18)

Termos em $R N^2$

$$\nabla^2 \psi_6 = G(\partial T_5/\partial v + \partial C_2/\partial v) + H(\partial T_5/\partial u + \partial C_2/\partial u)$$

$$\nabla^2 T_6 = \partial\psi_0/\partial v \partial T_6/\partial u + \partial\psi_1/\partial v \partial T_5/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial T_3/\partial u + \partial\psi_3/\partial v \partial T_2/\partial u + \\ + \partial\psi_5/\partial v \partial T_1/\partial u + \partial\psi_6/\partial v \partial T_0/\partial u - \\ - \partial\psi_0/\partial u \partial T_6/\partial v - \partial\psi_1/\partial u \partial T_5/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial T_3/\partial v - \partial\psi_3/\partial u \partial T_2/\partial v - \\ - \partial\psi_5/\partial u \partial T_1/\partial v - \partial\psi_6/\partial u \partial T_0/\partial v$$

$$\nabla^2 C_6 = Le(\partial\psi_0/\partial v \partial C_6/\partial u + \partial\psi_1/\partial v \partial C_5/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial C_3/\partial u + \partial\psi_3/\partial v \partial C_2/\partial u + \\ + \partial\psi_5/\partial v \partial C_1/\partial u + \partial\psi_6/\partial v \partial C_0/\partial u - \\ - \partial\psi_0/\partial u \partial C_6/\partial v - \partial\psi_1/\partial u \partial C_5/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial C_3/\partial v - \partial\psi_3/\partial u \partial C_2/\partial v - \\ - \partial\psi_5/\partial u \partial C_1/\partial v - \partial\psi_6/\partial u \partial C_0/\partial v)$$

(5.19)

Termos em $R^2 N$

$$\nabla^2 \psi_7 = G(\partial T_3/\partial v + \partial C_1/\partial v) + H(\partial T_3/\partial u + \partial C_1/\partial u)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 T_7 = & \partial \psi_0/\partial v \partial T_7/\partial u + \partial \psi_1/\partial v \partial T_3/\partial u + \partial \psi_2/\partial v \partial T_4/\partial u + \partial \psi_3/\partial v \partial T_1/\partial u \\ & + \partial \psi_4/\partial v \partial T_2/\partial u + \partial \psi_7/\partial v \partial T_0/\partial u - \\ & - \partial \psi_0/\partial u \partial T_7/\partial v - \partial \psi_1/\partial u \partial T_3/\partial v - \partial \psi_2/\partial u \partial C_4/\partial v \\ & - \partial \psi_4/\partial u \partial T_2/\partial v - \partial \psi_7/\partial u \partial T_0/\partial v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 C_7 = & Le(\partial \psi_0/\partial v \partial C_7/\partial u + \partial \psi_1/\partial v \partial C_3/\partial u + \partial \psi_2/\partial v \partial C_4/\partial u + \partial \psi_3/\partial v \partial C_1/\partial u - \\ & + \partial \psi_4/\partial v \partial C_2/\partial u + \partial \psi_7/\partial v \partial C_0/\partial u - \\ & - \partial \psi_0/\partial u \partial C_7/\partial v - \partial \psi_1/\partial u \partial C_3/\partial v - \partial \psi_2/\partial u \partial C_4/\partial u + \partial \psi_3/\partial u \partial C_1/\partial u + \\ & - \partial \psi_4/\partial u \partial C_2/\partial v - \partial \psi_7/\partial u \partial C_0/\partial v) \end{aligned}$$

(5.20)

Termos em $R^2 N^2$

$$\nabla^2 \psi_8 = G(\partial T_6/\partial v + \partial C_3/\partial v) + H(\partial T_6/\partial u + \partial C_3/\partial u)$$

$$\begin{aligned}
v^2 T_8 = & \partial\psi_0/\partial v \partial T_8/\partial u + \partial\psi_1/\partial v \partial T_6/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial T_7/\partial u + \partial\psi_3/\partial v \partial T_3/\partial u \\
& + \partial\psi_4/\partial v \partial T_5/\partial u + \partial\psi_5/\partial v \partial T_4/\partial u + \partial\psi_6/\partial v \partial T_1/\partial u + \partial\psi_7/\partial v \partial T_2/\partial u + \\
& + \partial\psi_8/\partial v \partial T_0/\partial u - \\
& - \partial\psi_0/\partial u \partial T_8/\partial v - \partial\psi_1/\partial u \partial T_6/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial T_7/\partial v - \partial\psi_3/\partial u \partial T_3/\partial v - \\
& - \partial\psi_4/\partial u \partial T_5/\partial v - \partial\psi_5/\partial u \partial T_4/\partial v - \partial\psi_6/\partial u \partial T_1/\partial v - \partial\psi_7/\partial u \partial T_2/\partial v - \\
& - \partial\psi_8/\partial u \partial T_0/\partial v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^2 C_8 = & Le(\partial\psi_0/\partial v \partial C_8/\partial u + \partial\psi_1/\partial v \partial C_6/\partial u + \partial\psi_2/\partial v \partial C_7/\partial u + \partial\psi_3/\partial v \partial C_3/\partial u \\
& + \partial\psi_4/\partial v \partial C_5/\partial u + \partial\psi_5/\partial v \partial C_4/\partial u + \partial\psi_6/\partial v \partial C_1/\partial u + \partial\psi_7/\partial v \partial C_2/\partial u + \\
& + \partial\psi_8/\partial v \partial C_0/\partial u - \\
& - \partial\psi_0/\partial u \partial C_8/\partial v - \partial\psi_1/\partial u \partial C_6/\partial v - \partial\psi_2/\partial u \partial C_7/\partial v - \partial\psi_3/\partial u \partial C_3/\partial v - \\
& - \partial\psi_4/\partial u \partial C_5/\partial v - \partial\psi_5/\partial u \partial C_4/\partial v - \partial\psi_6/\partial u \partial C_1/\partial v - \partial\psi_7/\partial u \partial C_2/\partial v - \\
& - \partial\psi_8/\partial u \partial C_0/\partial v)
\end{aligned}$$

(5.21)

Os sistemas de equações (5.14) a (5.21) têm como condições de contorno

$$\begin{aligned}
\psi_i = T_i = C_i = 0 \quad i \geq 1 \quad \text{em } v=v_1 \\
\psi_i = T_i = C_i = 0 \quad i \geq 1 \quad \text{em } v=0
\end{aligned} \quad (5.22)$$

Utilizando-se das soluções obtidas em (5.13), as equações (5.14) a (5.21) são simplificadas com o uso recursivo das soluções para os problemas de ordem inferior e das condições de contorno, reproduzindo os seguintes sistemas

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi_1 &= G/v_1 \\ \nabla^2 T_1 &= -(1/v_1) \partial \psi_1 / \partial u \\ \nabla^2 C_1 &= -(Le/v_1) \partial \psi_1 / \partial u\end{aligned}\tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\psi_2 &= 0 \\ T_2 &= 0 \\ C_2 &= 0\end{aligned}\tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \psi_1 \\ T_3 &= T_1 \\ C_3 &= C_1\end{aligned}\tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi_4 &= G \partial T_1 / \partial v + H \partial T_1 / \partial u \\ \nabla^2 T_4 &= \partial \psi_1 / \partial v \partial T_1 / \partial u - \partial \psi_1 / \partial u \partial T_1 / \partial v - (1/v_1) \partial \psi_4 / \partial u \\ \nabla^2 C_4 &= Le(\partial \psi_1 / \partial v \partial T_1 / \partial u - \partial \psi_1 / \partial u \partial T_1 / \partial v - (1/v_1) \partial \psi_4 / \partial u)\end{aligned}\tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}\psi_5 &= 0 \\ T_5 &= 0 \\ C_5 &= 0\end{aligned}\tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}\psi_6 &= 0 \\ T_6 &= 0 \\ C_6 &= 0\end{aligned}\tag{5.28}$$

$$\nabla^2 \psi_7 = G (\partial T_1 / \partial v + \partial C_1 / \partial v) + H (\partial T_1 / \partial u + \partial C_1 / \partial u)$$

$$\nabla^2 T_7 = 2 (\partial \psi_1 / \partial v \partial T_1 / \partial u - \partial \psi_1 / \partial u \partial T_1 / \partial v) - (1/v1) \partial \psi_7 / \partial u$$

$$\nabla^2 C_7 = 2 Le (\partial \psi_1 / \partial v \partial C_1 / \partial u - \partial \psi_1 / \partial u \partial C_1 / \partial v) - (Le/v1) \partial \psi_7 / \partial u$$

(5.29)

$$\nabla^2 \psi_8 = G \partial C_1 / \partial v + H \partial C_1 / \partial u$$

$$\nabla^2 T_8 = \partial \psi_1 / \partial v \partial T_1 / \partial u - \partial \psi_1 / \partial u \partial T_1 / \partial v - (1/v1) \partial \psi_8 / \partial u$$

$$\nabla^2 C_8 = Le \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial v} \frac{\partial C_1}{\partial u} - \frac{\partial \psi_1}{\partial u} \frac{\partial C_1}{\partial v} - (1/v_1) \frac{\partial \psi_8}{\partial u} \right)$$

(5.30)

Em termos das soluções decompostas, os números de Nusselt e Sherwood são calculados por

$$Nu_n = (v_1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} (\partial T_n / \partial v)_{v=v_1} du \quad (5.31)$$

$$Sh_n = (v_1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} (\partial C_n / \partial v)_{v=v_1} du \quad (5.32)$$

As expansões (5.1) a (5.5) tem a forma

$$\psi = R (1 + N) \psi_1^2 + R (\psi_4 + N \psi_7 + N^2 \psi_8) \quad (5.33)$$

$$T = v/v_1 + R (1 + N) T_1 + R^2 (T_4 + N T_7 + N^2 T_8) \quad (5.34)$$

$$C = v/v_1 + R (1 + N) C_1 + R^2 (C_4 + N C_7 + N^2 C_8) \quad (5.35)$$

$$Nu = 1 + R (1 + N) Nu_1 + R^2 (Nu_4 + N Nu_7 + N^2 Nu_8) \quad (5.36)$$

$$Sh = 1 + R (1 + N) Sh_1 + R^2 (Sh_4 + N Sh_7 + N^2 Sh_8) \quad (5.37)$$

As expressões (5.33) a (5.37) são válidas para R e $(N+1)$ próximos de zero para quaisquer valores de Le , já que nenhuma imposição foi feita para Le até o presente momento.

De (5.23) vemos que

$$\nabla^2 C_1 = Le \nabla^2 T_1$$

ou então considerando as condições de contorno temos que

$$C_1 = Le T_1 \quad (5.38)$$

A expressão (5.38) substituída em (5.29) nos fornece

$$\psi_7 = (1 + Le) \psi_4 \quad (5.39)$$

De (5.30) temos

$$\psi_8 = Le \psi_4 \quad (5.40)$$

Assim (5.33) fica com a forma

$$\psi = R(1 + N) \psi_1 + R^2 [1 + N(1 + Le) + N^2 Le] \psi_4 \quad (5.41)$$

É importante observar que até este ponto não houve a necessidade de nenhuma nova restrição sobre o campo de validade da técnica utilizada. A expansão (5.41) continua válida para R e $(N+1)$ próximos de zero e quaisquer valores de Le .

Vamos buscar uma expressão para (5.34) semelhante a (5.41).

Substituindo (5.38) em (5.26) vem

$$\nabla^2 C_4 = Le^2 (\nabla^2 T_4) + Le(Le - 1) \cdot (1/v_1) \partial \psi_4 / \partial u \quad (5.42)$$

Por (5.42) vemos que adotar a hipótese $Le \approx 1$ conduz a algumas simplificações em termos de equações.

Observamos que quando $Le \approx 1$ a expressão (5.42) se reduz a uma forma simples

$$C_4 = Le^2 T_4 \quad (5.43)$$

De (5.29) temos que

$$\nabla^2 C_7 = Le^2 \nabla^2 T_7 + Le(Le - 1) (1/v_1) \partial\psi_7/\partial u$$

Da mesma forma quando $Le \approx 1$ temos

$$C_7 = Le^2 T_7 \quad (5.44)$$

De (5.30), analogamente temos que

$$C_8 = Le^2 T_8 \quad (5.45)$$

Na tentativa de conseguirmos uma relação simples para T em (5.34) vamos procurar uma relação entre T_4 e T_7 .

De (5.26) e (5.29) para T temos

$$\nabla^2 T_7 = 2(\nabla^2 T_4 + \partial\psi_4/\partial u / v_1) - (1/v_1) \partial\psi_7/\partial u \quad (5.46)$$

Substituindo (5.39) em (5.46) temos

$$\nabla^2 T_7 = \nabla^2 (2T_4) + [2 \partial\psi_4/\partial u - (1+Le) \partial\psi_4/\partial u] / v_1 \quad (5.47)$$

Vemos que quando $Le \approx 1$ em (5.47) temos que

$$T_7 = 2 T_4 \quad (5.48)$$

De (5.26) e (5.30) temos

$$\nabla^2 T_8 = \nabla^2 T_4 + (1/v_1) \left(\partial \psi_4 / \partial u - \partial \psi_7 / \partial u \right) \quad (5.49)$$

Por (5.40) temos que

$$T_8 = T_4 \quad (5.50)$$

As relações (5.41), (5.34) e (5.35) assumem a forma

$$\psi = R(1+N) \psi_1 + R^2(1+N)^2 \psi_4 \quad (5.51)$$

$$T = v/v_1 + R(1+N) T_1 + R^2(1+N)^2 T_4 \quad (5.52)$$

$$C = v/v_1 + R(1+N) Le T_1 + R^2(1+N)^2 Le^2 Nu_4 \quad (5.53)$$

Partindo de expressões gerais dadas para ψ , T e C em (5.1), (5.2) e (5.3) chegamos a expressões nada triviais dadas por (5.51), (5.52) e (5.53) válidas para R e $(N+1)$ próximos de zero, neste estágio já incorporando a condição de $Le \approx 1$.

Para números de Lewis próximos da unidade as expressões dos números de Nusselt e Sherwood no cilindro dadas por (5.36) e (5.37) assumem a forma

$$Nu = 1 + R(1+N) Nu_1 + R^2(1+N)^2 Nu_4 \quad (5.54)$$

$$Sh = 1 + R(1+N) Le Nu_1 + R^2 Le^2 (1+N)^2 Nu_4 \quad (5.55)$$

Para o cálculo dos parâmetros anteriores escrevemos

$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{1,n} \text{sen}(nu) \quad (5.56)$$

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} g_{1,n} \cos(nu) \quad (5.57)$$

As expressões para G e H definidas em (5.69) e (5.70) sugerem que as soluções perturbadas sejam pesquisadas também na forma de séries de Fourier. De (5.31) verifica-se como conveniente o uso de série de Fourier-cossenos para T_n e C_n sendo que para ψ_n a série de Fourier-senos é a recomendada.

Assim de (5.23) com (5.56) e (5.57) temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} -n^2 g_{1,n} \cos(nu) + \sum_{n=0}^{\infty} g_{1,n}'' \cos(nu) = -(1/v_1) \sum_{n=0}^{\infty} n f_{1,n} \cos(nu) \quad (5.58)$$

que simplificada fica

$$g_{1,n}'' - n^2 g_{1,n} = -(1/v_1) n f_{1,n} \quad (5.59)$$

Como já observado anteriormente, estamos interessados particularmente no valor de $g_{1,0}(v_1)$. Com $n=0$ em (5.59) temos facilmente que

$$Nu_1 = 0 \quad (5.60)$$

Voltando-se às equações (5.54) e (5.55) após os últimos resultados estas ficam

$$Nu = 1 + R^2(1+N)^2 Nu_4 \quad (5.61)$$

$$Sh = 1 + R^2(1+N)^2 Le^2 T_4 \quad (5.62)$$

Prosseguindo na obtenção das parcelas de (5.54) e (5.55), para obtermos Nu_4 adotamos as seguintes aproximações

$$T_4 = \sum_{n=0}^{\infty} g_{2,n} \cos(nu) \quad (5.63)$$

$$\psi_4 = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2,n} \sin(nu) \quad (5.64)$$

As aproximações (5.63) , (5.64), (5.56) e (5.57) introduzidas na equação (5.26) nos fornecem

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 g_{2,n} \cos(nu) + \sum_{n=0}^{\infty} g_{2,n}'' \cos(nu) &= \sum_{i=0}^{\infty} f_{1,i}' \sin(iu) \sum_{j=0}^{\infty} -j g_{1,j} \sin(ju) - \\ \sum_{i=0}^{\infty} i f_{1,i} \cos(iu) \sum_{j=0}^{\infty} g_{1,j}' \cos(ju) &- (1/v_1) \sum_{n=0}^{\infty} n f_{2,n} \cos(nu) \end{aligned}$$

De cujas soluções interessa-nos

$$g_{2,0}'(v_1) = (1/v_1) \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{v_1} f_{1,i} g_{1,i} dv \quad (5.65)$$

Pois de (5.31) para $n=4$

$$Nu_4 = (v_1/2\pi) \int_0^{2\pi} (\partial T_4 / \partial v)_{v=v_1} du = v_1 g_{2,0}'(v_1)$$

ou então por (5.65)

$$Nu_4 = (1/2) \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{v_1} f_{1,i} g_{1,i} dv \quad (5.66)$$

As expressões (5.61) e (5.62) ficam

$$Nu = 1 + R^2 (1+N)^2 / 2 \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{v_1} f_{1,i} g_{1,i} dv \quad (5.67)$$

$$Sh = 1 + Le^2 R^2 (1+N)^2/2 \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{v_1} f_{1,i} g_{1,i} dv \quad (5.68)$$

OBTENÇÃO DE ψ_1 , T_1 e C_1

Antes de resolvermos (5.23), expandiremos as funções G e H em suas respectivas séries de Fourier (ver apêndice C).

$$G = \sinh(v) \sin(u) / (\cosh(v) - \cos(u))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2k e^{-kv} \sin(ku) \quad (5.69)$$

$$H = (1 - \cosh(v) \cos(u)) / (\cosh(v) - \cos(u))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} -2k e^{-kv} \cos(ku) \quad (5.70)$$

A introdução de (5.69) em (5.23) nos fornece

$$\nabla^2 \psi_1 = (2/v_1) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-kv} \sin(ku)$$

$$\nabla^2 T_1 = -(1/v_1) \partial \psi_1 / \partial u \quad (5.71)$$

$$\nabla^2 C_1 = -(Le/v_1) \partial \psi_1 / \partial u$$

com condições de contorno

$$\psi_1 = T_1 = C_1 = 0 \quad \text{em } v=0$$

$$\psi_1 = T_1 = C_1 = 0 \quad \text{em } v=v_1$$

Buscaremos soluções para (5.71) admitindo-se que as mesmas possam ser desenvolvidas em série de Fourier como admitidas em (5.56) e (5.57) que introduzidas em (5.71) nos fornecem o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$f_{1,n}'' - n^2 f_{1,n} = (2n/v_1) e^{-nv} \quad (5.72)$$

$$g_{1,n}'' - n^2 g_{1,n} = (-n/v_1) f_{1,n}$$

com condições de contorno

$$g_{1,n}(0) = g_{1,n}(v_1) = 0 \quad (5.73)$$

$$f_{1,n}(0) = f_{1,n}(v_1) = 0$$

A resolução de (5.72) é simples e nos fornece

$$f_{1,n}(v) = e^{-nv} v_1 \sinh(nv) / \sinh(nv_1) - v e^{-nv} / v_1 \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} g_{1,n}(v) = & (1 + 1/(v_1 n) + 2 \cotgh(n v_1)) e^{-nv} v_1 \sinh(nv) / (4 \sinh(n v_1)) - \\ & - v e^{-nv} v_1 \cosh(nv) / (2 v_1 \sinh(n v_1)) - \\ & - (v + 1/n) v e^{-nv} / (4 v_1^2) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Os termos em (5.74) e (5.75) que não envolvem e^{-nv} são de convergência lenta. Tal problema pode ser contornado trocando-se tais expressões por funções analíticas conhecidas

Do apêndice C temos

$$2 \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-nv} \sin(nu) = \sin(u) / (\cosh(v) - \cos(u)) \quad (5.76)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nv} \cos(nu) = (\cos(u) - e^{-v}) / (2(\cosh(v) - \cos(u))) \quad (5.77)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv} \cos(nu)/n = v/2 - (1/2) \operatorname{Ln}(2(\cosh(v) - \cos(u))) \quad (5.78)$$

Chegamos a expressões analíticas para o cálculo de ψ_1 e T_1 dadas por

$$\begin{aligned} \psi_1 = & -(v/2v_1) \operatorname{sen}(u) / (\cosh(v) - \cos(u)) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} \operatorname{senh}(nv) \operatorname{sen}(nu) / (\operatorname{senh}(nv_1)) \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} T_1 = & -(1/8) (v/v_1)^2 (\cos(u) - e^{-v}) / (\cosh(v) - \cos(u)) - \\ & - (v/4v_1^2) (v/2 - (1/2) \operatorname{Ln}[2(\cosh(v) - \cos(u))]) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} (1 + 1/(nv_1)) + \\ & + 2 \cotgh(nv_1) \operatorname{senh}(nv) \cos(nu) / (4 \operatorname{senh}(nv_1)) - \\ & - (v/2v_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} \cosh(nv) \cos(nu) / (\operatorname{senh}(nv_1)) \end{aligned} \quad (5.80)$$

E dessa forma chegamos às aproximações de primeira ordem para ψ , T e C dadas por

$$\begin{aligned} \psi(u, v) \approx & R(1+N) [-(v/2v_1) (\operatorname{sen}(u) + e^{-v}) / (\cosh(v) - \cos(u)) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} \operatorname{senh}(nv) \operatorname{sen}(nu) / (\operatorname{senh}(nv_1))] \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$T(u, v) \approx v/v_1 + R(1+N) \{ -(1/8)^2 (v/v_1) (\cos(u) - e^{-v}) / (\cosh(v) - \cos(u)) -$$

$$\begin{aligned}
& - (v/4v_1^2) (v/2 - (1/2) \ln[2(\cosh(v) - \cos(u))] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} (1 + 1/(nv_1) + \\
& + 2\cotgh(nv_1)) \sinh(nv) \cos(nu) / (4\sinh(nv_1)) - \\
& - (v/2v_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} \cosh(nv) \cos(nu) / (\sinh(nv_1)) \} \\
& \qquad \qquad \qquad (5.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(u,v) \cong v/v_1 + R \operatorname{Le} (1+N) \{ & - (1/8)^2 (v/v_1) (\cos(u) - e^{-v}) / (\cosh(v) - \\
& - \cos(u)) - (v/4v_1^2) (v/2 - (1/2) \ln[2(\cosh(v) - \cos(u))] + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} (1 + 1/(nv_1) + \\
& + 2\cotgh(nv_1)) \sinh(nv) \cos(nu) / (4\sinh(nv_1)) - \\
& - (v/2v_1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} \cosh(nv) \cos(nu) / (\sinh(nv_1)) \} \\
& \qquad \qquad \qquad (5.83)
\end{aligned}$$

Tais expressões foram usadas para a obtenção dos campos apresentados neste trabalho.

Os números de Nusselt e Sherwood dados por

$$Nu = 1 + R^2 (1+N)^2 / 2 \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{v_1} f_{1,i} g_{1,i} dv \qquad (5.84)$$

$$Sh = 1 + Le^2 R^2 (1+N)^2/2 \sum_{i=1}^{\infty} i \int_0^{v_1} f_{1,i} g_{1,i} dv \quad (5.85)$$

5.2.1.1 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para obtenção dos resultados aqui apresentados, foi utilizado uma rede de 900 elementos. Os campos de temperatura apresentados foram obtidos resolvendo-se a equação (5.82). Os resultados obtidos em termos dos números de Nusselt e Sherwood dados pelas equações (5.83) e (5.84) foram comparados com resultados obtidos numericamente pelo método do volume de controle a partir da forma completa das equações que regem o fenômeno (eqs.(2.32)-(2.34)).

Na Fig.(5.1) apresentamos para comparação os campos de temperatura ($T_0 + R T_1$) por perturbação (linha tracejada) e por simulação numérica (linha cheia). Podemos perceber claramente a boa concordância dos campos para o caso $N=0$ com $Ra=Le=1$.

Na região onde a convecção é predominante, as soluções se afastam indicando a possibilidade do método perturbativo falhar nessa região. Pode-se perceber a região de atuação da convecção na geometria estudada.

Na Fig.(5.2) apresentamos conjuntamente os campos de temperatura para $Ra=Le=1$ nas situações $N=-1.05$ (linha tracejada) e $N=-0.95$ (linha cheia). O aspecto da inversão tratada no Cap. IV é aqui também verificado. Mesmo na presença de valores de Ra baixos o efeito da inversão se faz notar pela diferença relativa entre as curvas.

A Fig.(5.3) mostra o comportamento da curva de Nusselt em função de Rayleigh para $N=0$. Dos resultados obtidos via perturbação, para um erro absoluto menor que 20%, $Ra = 1$ é o maior valor que podemos tomar como limite de validade do método de perturbação. O mesmo comportamento pode ser notado na Fig.(5.4) que mostra Sh em função de Le . Vemos das Figs.(5.3) e (5.4) o fraco desempenho da aproximação de segunda ordem por perturbação na faixa de Ra estudada.

A Fig.(5.5) mostra uma comparação da solução perturbativa de segunda ordem com a solução numérica para Nu com $Ra=Le=1$. Na faixa de N estudada, o valor $N = 1$ é um limite do método para um erro absoluto admissível de 5%. $N=2$ conduz a um erro de 6%. A análise dos erros para Ra e N mostra um aumento

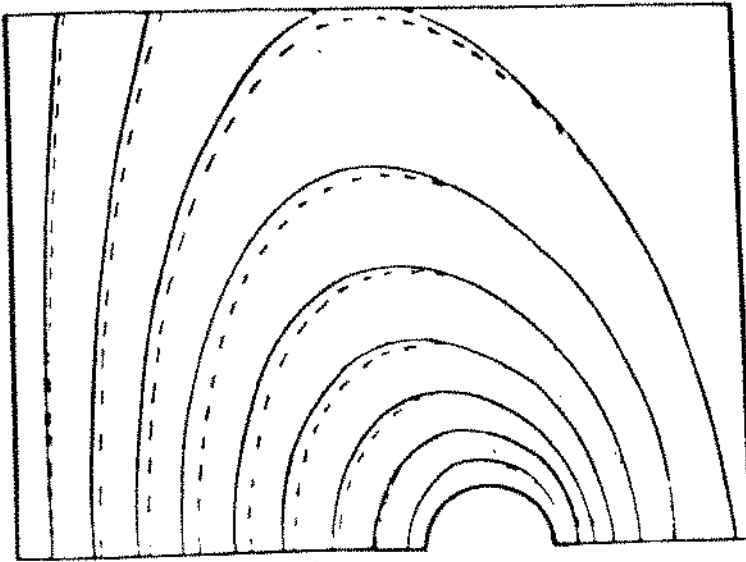


Fig. 5.1 Campos de temperatura obtidos por expansão e numericamente
(expansão - linha tracejada, numérico - linha cheia)
($N=0$ $Ra=Le=1$ $\Delta T = 0.1$)

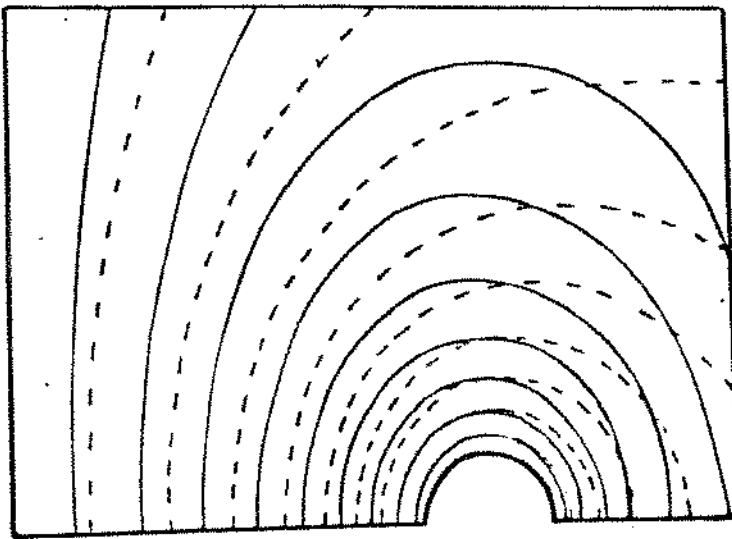


Fig. 5.2 Campos de Temperatura nas proximidades de $N=-1$
 $N=-1.05$ - linha tracejada
 $N=-0.95$ - linha cheia
($Ra = Le = 1$ $\Delta T = 0.1$)

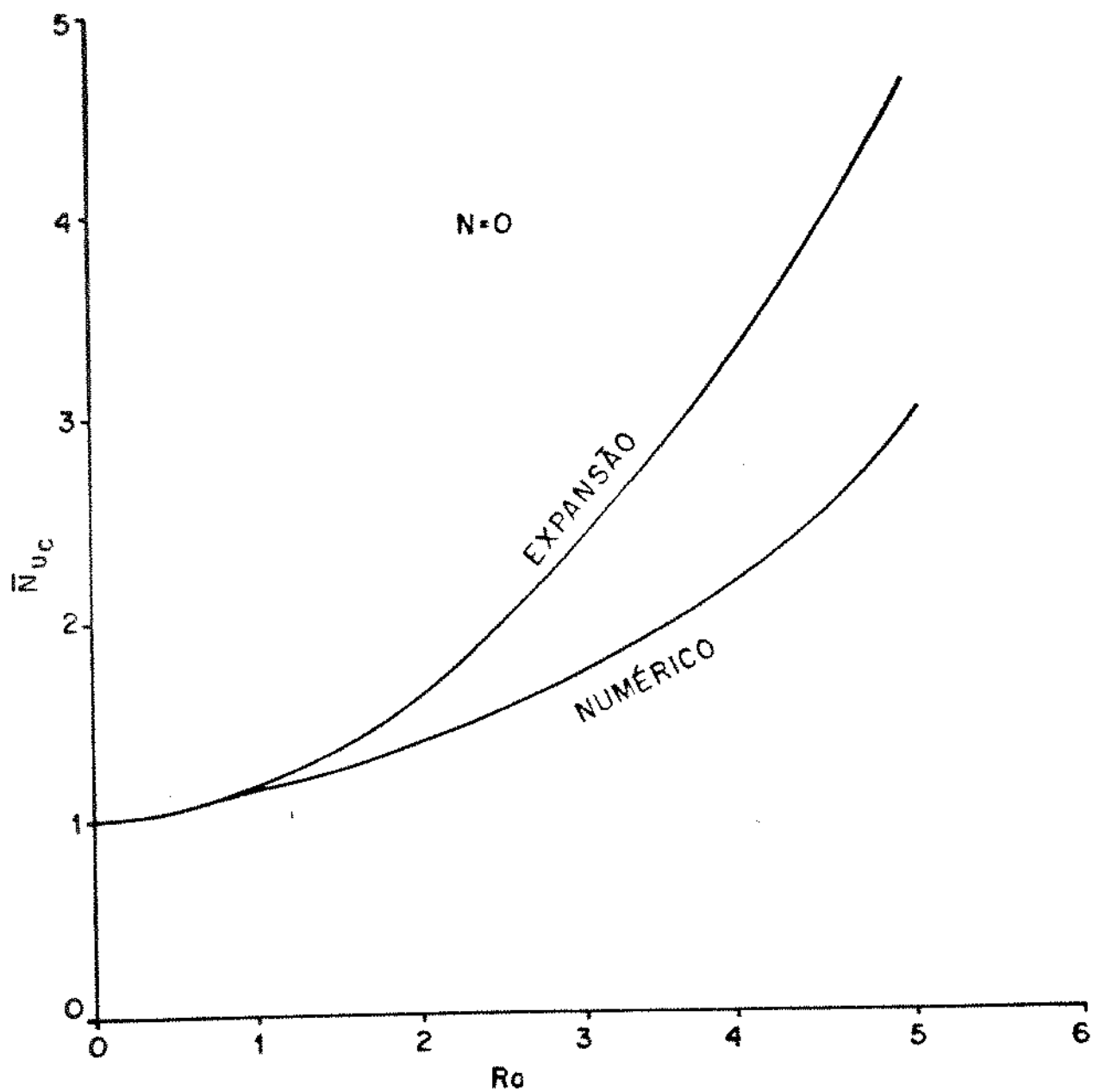


Fig. 5.3 Comportamento de Nu_c em função de Ra (numérico e perturbado $N=0$ $Le=1$)

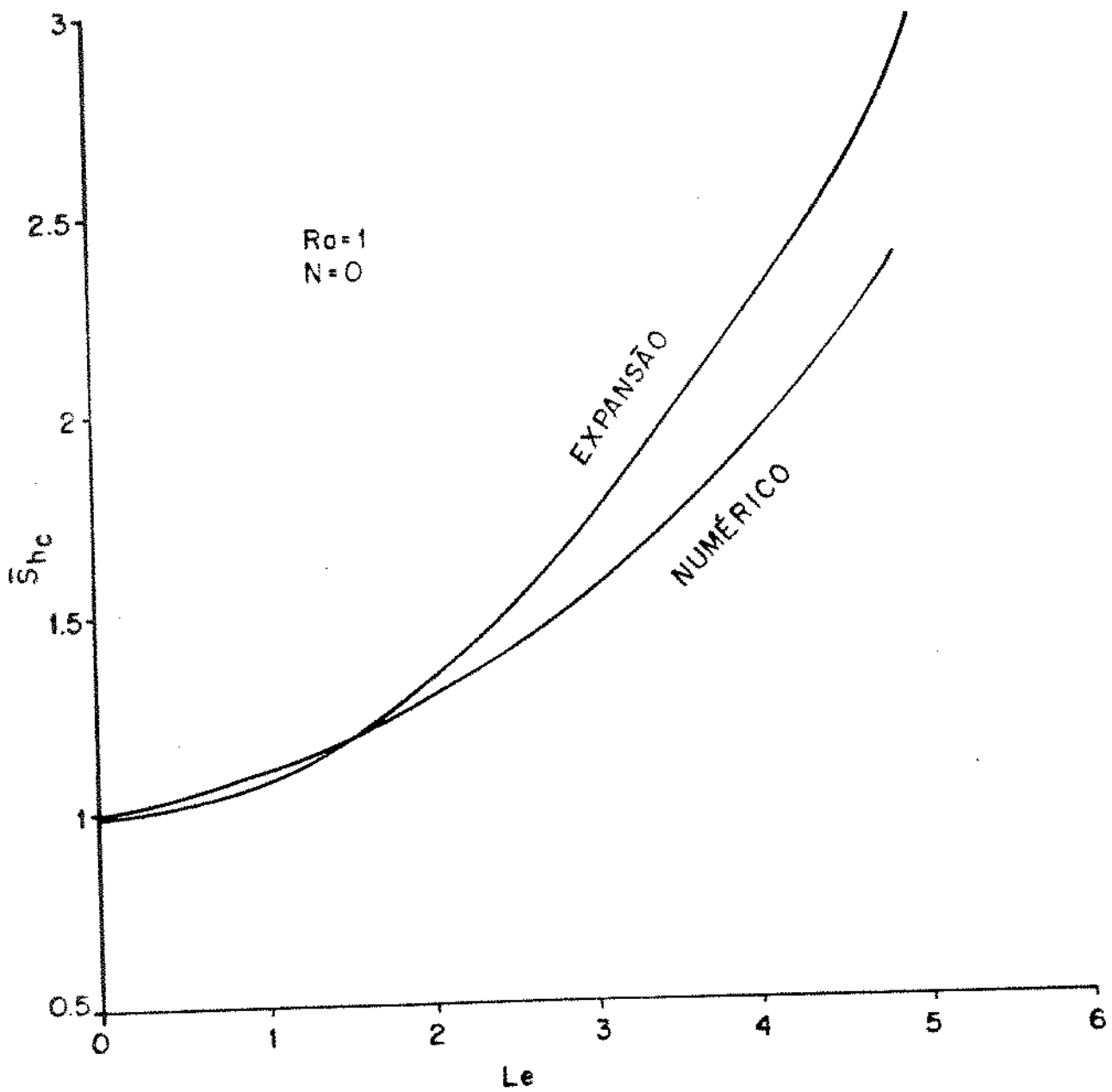


Fig. 5.4 Comportamento de Sh_c em função de Le (numérico e perturbado $N=0$ $Ra=1$)

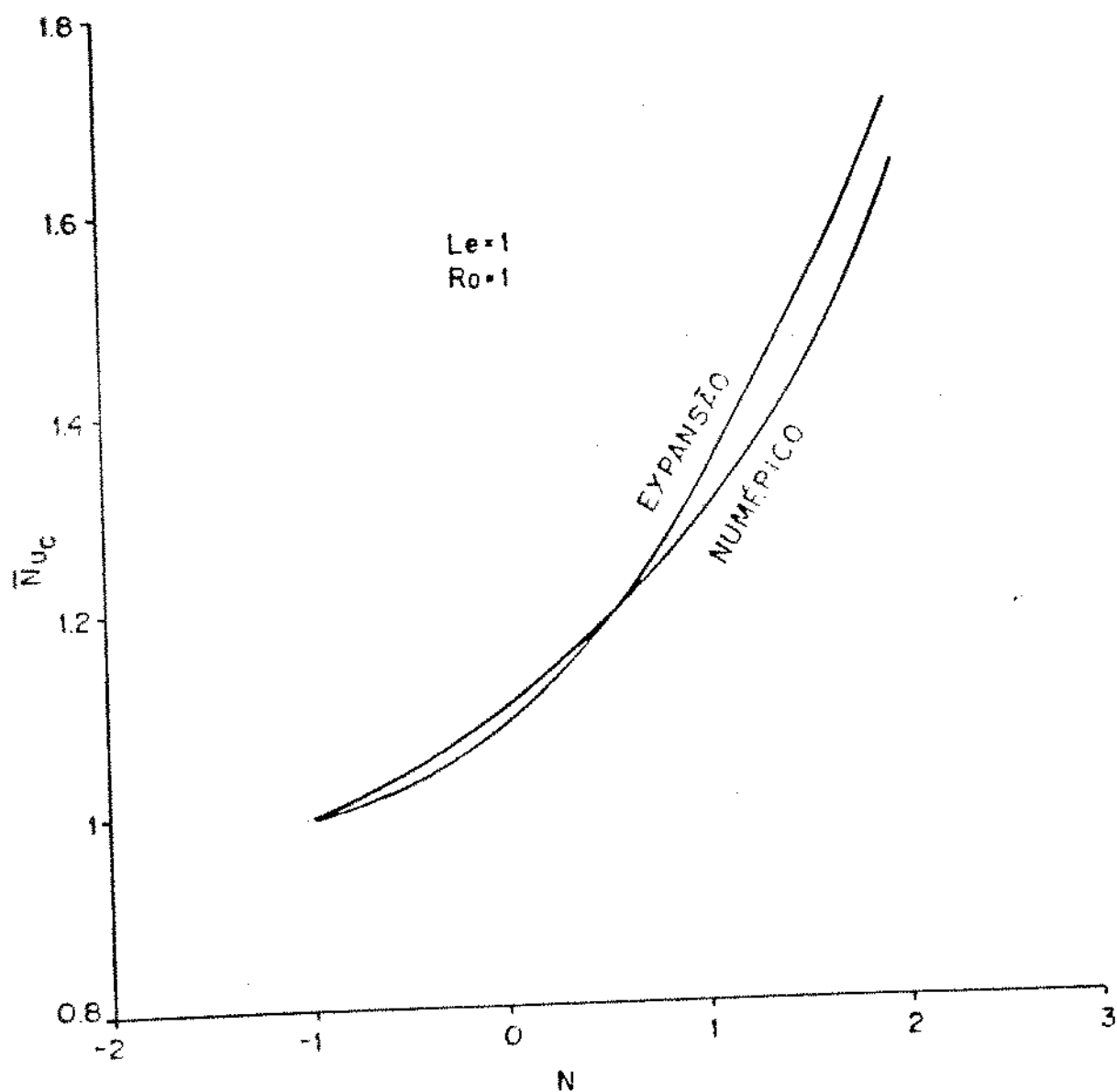


Fig. 5.5 Comportamento de Nu_c em função de N (numérico e perturbado $Ra=1$ $Le=1$)

relativamente suave do erro com N . Tal fato não é observado na variação do erro com Ra ou Le para faixa de Ra , Le e N estudados.

Na Fig.(5.6) apresentamos Sh em função de N para os casos $Le= 1.1, 1.0$ e 0.9 . Esta figura reforça o caráter quadrático de aproximações por perturbação adotadas.

Na Tabela (5.1) apresentamos os valores por nós obtidos numericamente e por expansão perturbativa de Nu em função de N com $Ra=Le=1$, N variando entre -1 e 2 . Na Tabela (5.2) apresentamos os resultados no caso de Nu em função de Ra com $Le=1$, $N=0$ e Ra variando entre 0.1 e 10 .

Como comentado anteriormente, para um erro máximo de 5% , o valor admissível de Ra é 1 . $Ra=2$ já conduz a um erro de 20% nos cálculos dos números de Nusselt e Sherwood.

O desenvolvimento das equações apresentadas neste capítulo para o método de perturbação é relativamente exaustivo porém permitiu a comparação significativa para um valor relativamente baixo dos parâmetros Ra e Le , onde os efeitos convectivos não estão efetivamente presentes. O método de perturbação teve o grande mérito de mostrar relações interessantes entre as aproximações para T e C . Com relação à faixa de validade, verifica-se a validade das soluções para um intervalo restrito dos parâmetros estudados, limitando a análise dos efeitos convectivos àqueles intervalos.

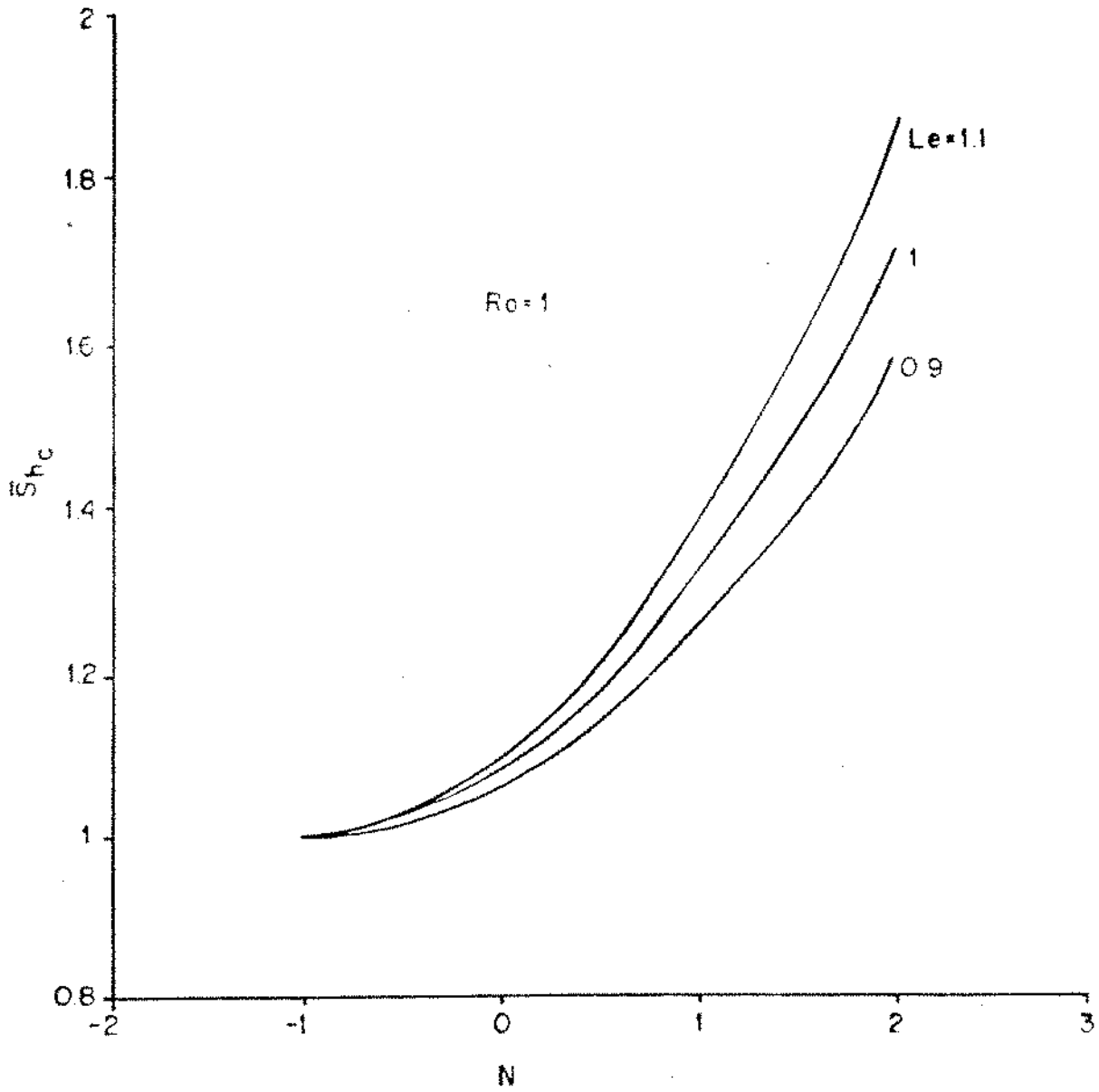


Fig. 5.6 Comportamento das soluções perturbadas para Sh_c em função de N ($Ra=1$)

Tabela (5.1) Comparação entre Sh analítico e
numérico em função de N
($Ra = 1$ $Le = 1$)

N	Sh analítico	Sh numérico
-1	1.0	1.00
0	1.08	1.10
1	1.32	1.28
2	1.70	1.64

Tabela (5.2) Comparação entre Nu analítico
e numérico em função de Ra
($N = 0$ $Le = 1.$)

Ra	Nu analítico	Nu numérico
0.1	1.006	1.009
1.0	1.150	1.140
2.0	1.600	1.402
5.0	2.970	1.941
10.0	8.900	2.800

V.2.2 CASO FLUXO DE CALOR E DE MASSA CONSTANTES NO CILINDRO E T E C CONSTANTES NA SUPERFÍCIE DO SOLO

Consideramos aqui o problema de um cilindro enterrado em um meio poroso saturado. O cilindro tem raio r_1 e está enterrado a uma profundidade d da superfície superior do meio poroso. A parede externa do cilindro é submetida a um fluxo de calor constante q e a um fluxo de massa j , enquanto a superfície superior do meio poroso é mantida a uma temperatura T_s e a uma concentração C_s , conforme a fig.(5.7). As hipóteses de regime permanente e parede impermeável também foram consideradas.

As equações que descrevem o problema, incluindo as hipóteses de modelo consideradas no capítulo II, no sistema de coordenadas bipolares utilizando a formulação função de corrente, em termos adimensionais são as mesmas consideradas em (5.7), (5.8) e (5.9) onde

$$\begin{aligned}
 T^* &= (T - T_s) k / q \\
 C^* &= (C - C_s) D / j \\
 \psi^* &= \psi / \alpha \\
 R &= \sinh(v_1) Ra \\
 Ra &= q \beta \lambda r_1 q / (v \alpha k) \\
 N &= \beta_c j k / (\beta q D) \\
 Le &= \alpha / D
 \end{aligned}
 \tag{5.86}$$

As condições de contorno em termos adimensionais no novo sistema de coordenadas ficam

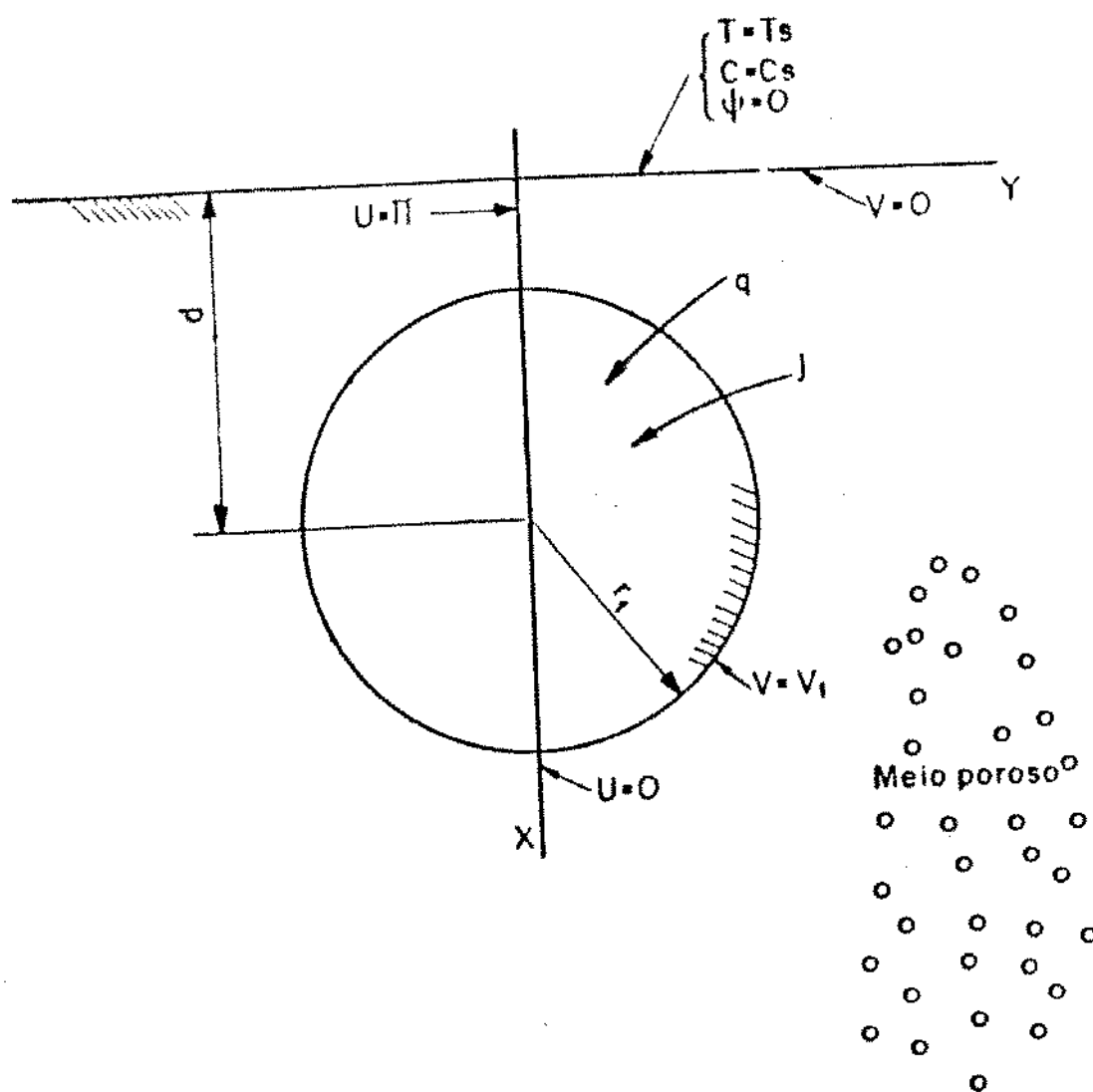


Fig. 5.7 Condições de Contorno para o caso q e j constantes no cilindro e T e C constantes na superfície do solo

$$\begin{aligned}
 v = v_1 \quad \psi^* &= 0 \quad \partial T^* / \partial v = \partial C^* / \partial v = a^* / (\cosh(v_1) - \cos(u)) \\
 v = 0 \quad \psi^* &= 0 \quad T^* = C^* = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.87}$$

Para facilidade de representação, passamos, de ora por diante, a substituir ψ^* por ψ , T^* por T e C^* por C nas equações.

Para ψ , T , C , Nu e Sh construiremos uma solução por perturbação na forma

$$\begin{bmatrix} \psi \\ T \\ C \\ Nu \\ Sh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ T_0 \\ C_0 \\ Nu_0 \\ Sh_0 \end{bmatrix} + R(1+N) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ T_1 \\ C_1 \\ Nu_1 \\ Sh_1 \end{bmatrix}
 \tag{5.88}$$

Nas expansões sugeridas em (5.88), ψ_0 , T_0 e C_0 são soluções do problema não perturbado (5.12) com condições de contorno

$$\begin{aligned}
 v = v_1 \quad \psi_0 &= 0 \quad \partial T_0 / \partial v = \partial C_0 / \partial v = a^* / (\cosh(v_1) - \cos(u)) \\
 v = 0 \quad \psi_0 &= 0 \quad T_0 = C_0 = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.89}$$

O problema no seu estado básico descrito pelo sistema (5.12) tem como solução para ψ_0

$$\psi_0 = 0
 \tag{5.90}$$

Para as demais variáveis, consideraremos as soluções pesquisadas na forma

$$T_o(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sinh(nv) + B_n \cosh(nv)) \cos(nu) + A_0 v \quad (5.91)$$

$$C_o(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n \sinh(nv) + E_n \cosh(nv)) \cos(nu) + D_0 v \quad (5.92)$$

As aproximações (5.91) e (5.92) satisfazem automaticamente o sistema não perturbado (5.12). Para obtenção dos coeficientes A_n , B_n , D_n e E_n que satisfaçam (5.89), consideraremos a expansão em séries de Fourier-cossenos das condições de contorno dadas em (5.89).

Do apêndice (C.19) com $v=v_1$ temos

$$a^*/(\cosh(v_1) - \cos(u)) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} \cos(nu) \quad (5.93)$$

A introdução de (5.91), (5.92) e (5.93) em (5.89) nos conduz

$$T_o(u,v) = C_o(u,v) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv_1} \frac{\sinh(nv) \cos(nu)}{n \cosh(nv_1)} + v \quad (5.94)$$

Para posteriores simplificações definiremos

$$\alpha_{1n} = 2 e^{-nv_1} \sinh(nv) / (n \cosh(nv_1)) \quad (5.95)$$

Para obtenção de Nusselt consideraremos

$$Nu = Q / Q_{\text{cond}} = 2 \pi v_1 / T \quad (5.96)$$

Assim, para Nusselt médio temos

$$\bar{Nu} = (2 \pi v_1) / \int_0^{2\pi} T \, du \quad (5.97)$$

De (5.97) segue que

$$\bar{Nu}_0 = 1 \quad (5.98)$$

A obtenção de ψ_1 na forma apresentada em (5.56) que satisfaça (5.14) com condições de contorno

$$v=0 \quad \psi_1 = 0$$

$$v=v_1 \quad \psi_1 = 0$$

nos conduz a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (f_i'' - i^2 f_i) \sin(iu) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k e^{-(k+n)v} e^{-nv_1} \sin((k-n)u)}{\cosh(nv_1)} + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k e^{(n-k)v} e^{-nv_1} \sin((k+n)u)}{\cosh(nv_1)} + \end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} i e^{-iv} \operatorname{sen}(iu) \quad (5.99)$$

Tais igualdades se verificam quando $k-n = i$. Assim temos

$$f_k'' - k^2 f_k = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i+k) e^{-iv_1} e^{-(k+2i)v}}{\cosh(iv_1)} + 2ke^{-kv} \quad (5.100)$$

$$\text{Com } f_k(0) = f_k(v_1) = 0 \quad (k \geq 0)$$

A resolução de (5.100) é idêntica àquela obtida em (5.72) e por isso será omitida aqui. A equação diferencial (5.100) nos conduz a

$$f_0(v) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-iv_1} e^{-iv} \operatorname{senh}(iv)}{i \cosh(iv_1)} + 2 (v/v_1) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-2iv_1} \operatorname{tgh}(iv_1)}{i} \quad (5.101)$$

Para $k \geq 1$ temos

$$\begin{aligned} f_k(v) = & - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-iv_1} e^{-iv} \operatorname{senh}((k+i)v)}{i \cosh(iv_1)} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-2iv_1} \operatorname{senh}((k+i)v_1) \operatorname{senh}(kv)}{i \cosh(iv_1)} - \\ & - v_1 e^{-kv_1} \operatorname{senh}(kv) / \operatorname{senh}(kv_1) - v e^{-kv} \end{aligned} \quad (5.102)$$

Assim ψ_1 fica sob a forma

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v) = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i(v+v_1)} \sinh((k+i)v) \sin(ku)}{i \cosh(iv_1)} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2iv_1} \sinh((k+i)v_1) \sinh(kv) \sin(ku)}{i \cosh(iv_1) \sinh(kv_1)} + \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} (v_1 e^{-kv_1} \sinh(kv) \sin(ku) / \sinh(kv_1) + \\ & + v e^{-kv} \sin(ku)) \end{aligned} \quad (5.103)$$

A solução de T_1 sob a forma considerada em (5.57) que satisfaz (5.14) com condições de contorno

$$\begin{aligned} v=v_1 & \quad \partial T_1 / \partial v = 0 \\ v=0 & \quad T_1 = 0 \end{aligned}$$

é obtida a partir de

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (g_i'' - i^2 g_i) \cos(iu) = \\ = -0.5 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (n f_k' \alpha_{1n} + \\ + k \alpha_{1n}' f_k) \cos((k-n)u) + 0.5 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (n f_k' \alpha_{1n} - \\ - k \alpha_{1n}' f_k) \cos((k+n)u) - \sum_{i=1}^{\infty} f_i \cos(iu) \end{aligned} \quad (5.104)$$

A resolução de (5.104) é bastante extensa e não será detalhada pois para a obtenção de Nu_1 fazemos

$$Nu_1 = \frac{2 \pi v_1}{\int_0^{2\pi} T_1 du} = v_1/g_0(v_1)$$

A solução de $g_0(v_1)$ é mais simples de ser realizada. Basta tomarmos $k = n$ e $i = 0$. Tal simplificação nos conduz a

$$g_0''(v) = -0.5 \sum_{k=1}^{\infty} k (f_k' \alpha_{1k} + \alpha_{1k}' f_k) - f_0(v) \quad (5.105)$$

Com condições de contorno $g_0(0) = g_0'(v_1) = 0$.

A solução de (5.105) é relativamente simples de ser obtida e assim

$$\begin{aligned} g_0(v_1) = & -0.5 \sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{v_1} f_k(v) \alpha_{1k}(v) dv + \\ & + v_1 \int_0^{v_1} f_0(v) dv - \int_0^{v_1} \int_0^w f_0(s) ds dw \end{aligned} \quad (5.106)$$

Com $T_0 = C_0$ temos por (5.14) que

$$C_1 = Le T_1 \quad (5.107)$$

Para Nusselt e Sherwood médios temos finalmente que

$$Nu = 1 + v_1 R (1+N)/g_o(v_1) \quad (5.108)$$

$$Sh = 1 + v_1 R (1+N)/(Le g_o(v_1)) \quad (5.109)$$

V.2.2.1 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para obtenção dos resultados aqui apresentados, foi utilizado como em (5.3) uma rede de 900 elementos. Os resultados obtidos em termos dos números de Nusselt dados pela equação (5.108) foram apresentados com resultados obtidos no capítulo V.3.

Na fig.(5.8) apresentamos para comparação Nusselt em função de N para aproximações de ordem 1 (linha cheia) e de ordem 2 (linha tracejada) para o caso de $Le = 1$, $Ra=0.2$, $d=2$ e $r_1=0.25$. Tal figura apenas ilustra as aproximações envolvidas para temperatura de cilindro constante e fluxo de calor constante já que não é possível qualquer comparação entre as duas aproximações envolvidas.

Na fig.(5.9) apresentamos Nusselt em função de Rayleigh para $N=-0.9$ e $N=-0.5$ com $Le = 1$, $d=1$ e $r_1=0.25$. Da figura percebemos que $N=-0.9$ já é bastante próxima da solução puramente condutiva. Aqui também é notado o comportamento linear das soluções em função de Rayleigh.

Na fig.(5.10) apresentamos uma situação em que o caráter linear da aproximação adotada conduz a resultados não lineares. É quando consideramos Nusselt em função do raio r_1 do cilindro para os casos $d=1$ e 2 e observamos uma variação não uniforme de

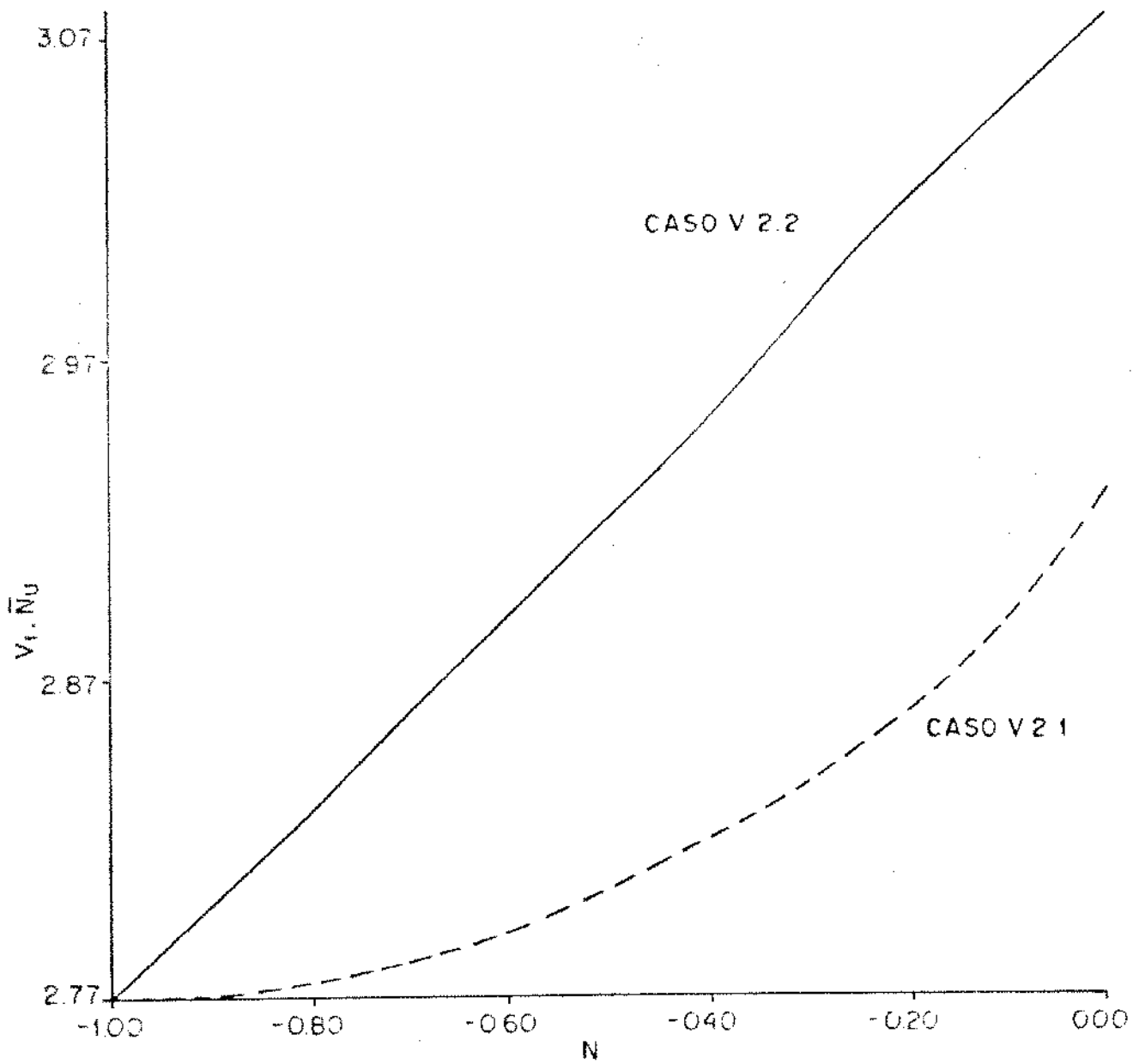


Fig. 5.8

Comportamento de Nu em função de N

(— aproximação linear

- - - aproximação quadrática)

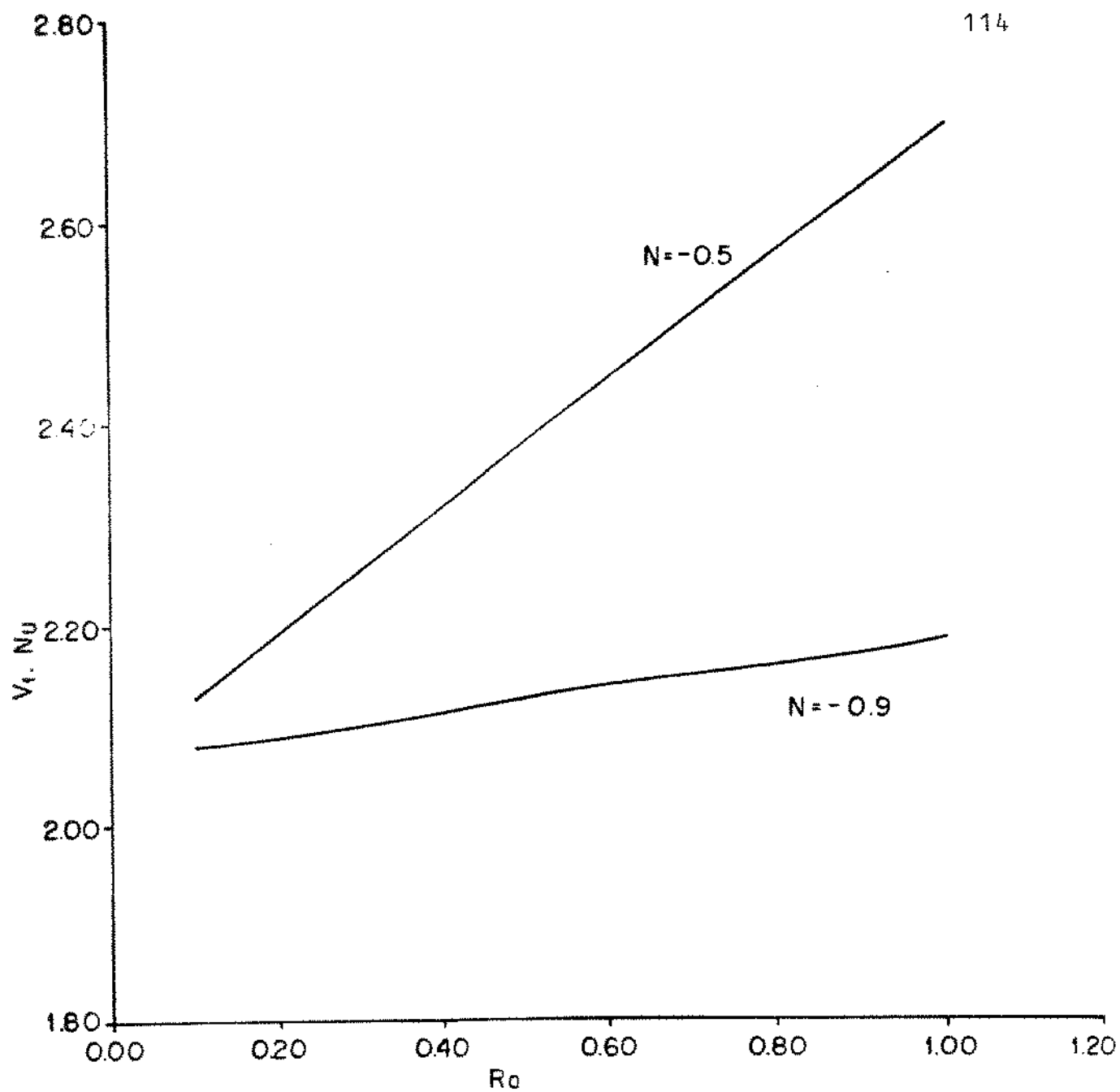


Fig. 5.9 Influência de Ra sobre Nu para $N = -0.9$ e -0.5

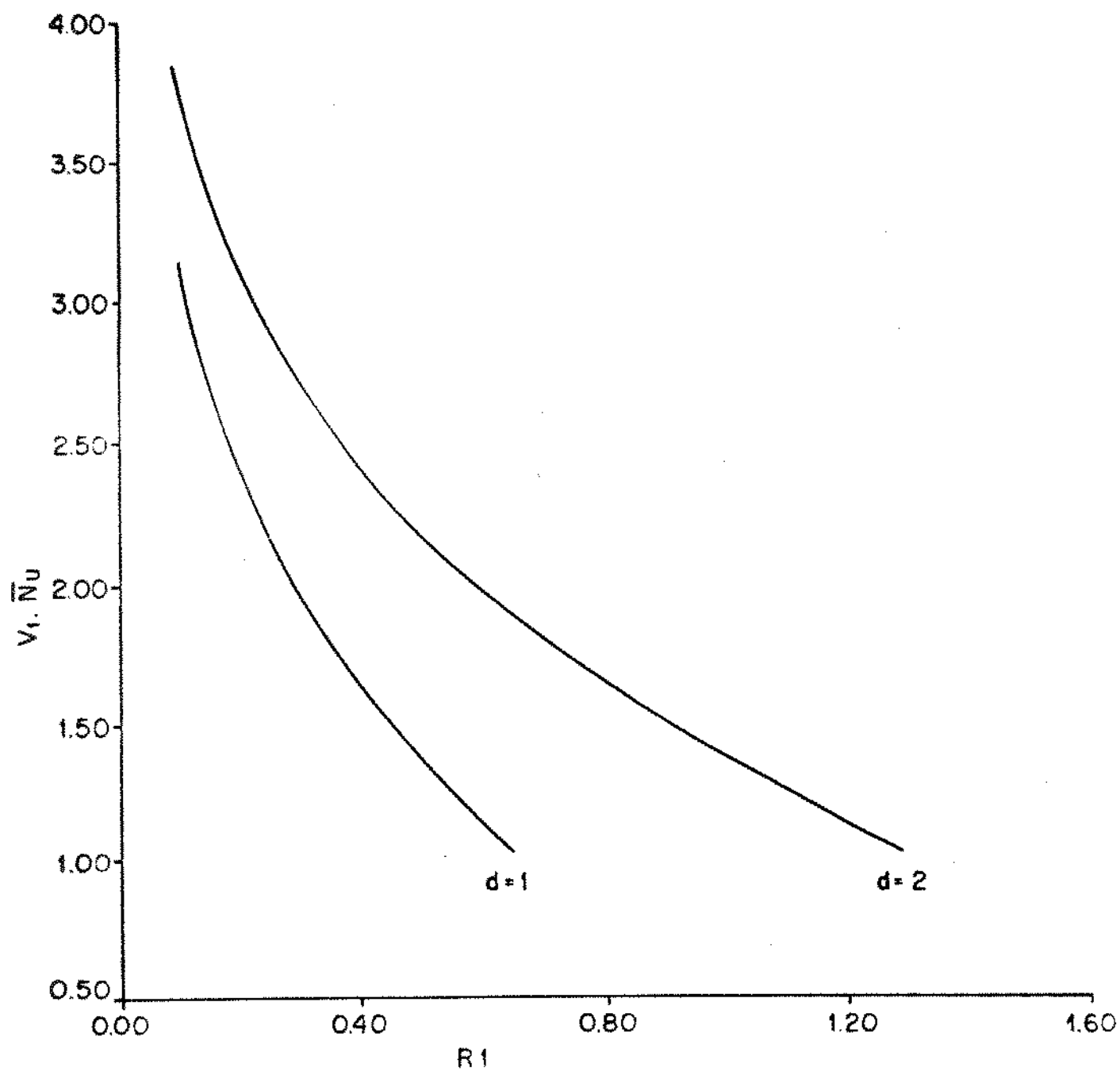


Fig. 5.10 Influência do raio r_1 do cilindro sobre a curva de Nu para profundidades diferentes ($d=1$ e 2)

Nusselt com o aumento de d . Ainda para raios pequenos há uma variação menor de Nusselt, independentemente da distância d .

Na fig.(5.11) apresentamos Nusselt em função de d para $Ra=0.2$, 0.4 e 0.6 com $N=0$, $Le = 1$ e $r_1=0.25$. Um comportamento bastante interessante que tais soluções apresentam se faz presente pelas curvas terem um aspecto logarítmico e uniforme.

Na fig.(5.12) apresentamos Nusselt em função de d para o caso $Ra=0.2$ para as mesmas condições da fig.(5.11). A curva em linha cheia representa a aproximação de fluxo de calor constante e a curva em linha tracejada representa a aproximação temperatura de cilindro constante. Vemos que para Ra pequenos as duas curvas se aproximam muito (variação máxima de 30 % entre as curvas). Na fig.(5.13) para $Ra=0.4$ temos uma variação máxima de 56%. Da análise de tais resultados vemos que para Ra suficientemente baixos as duas aproximações coincidem.

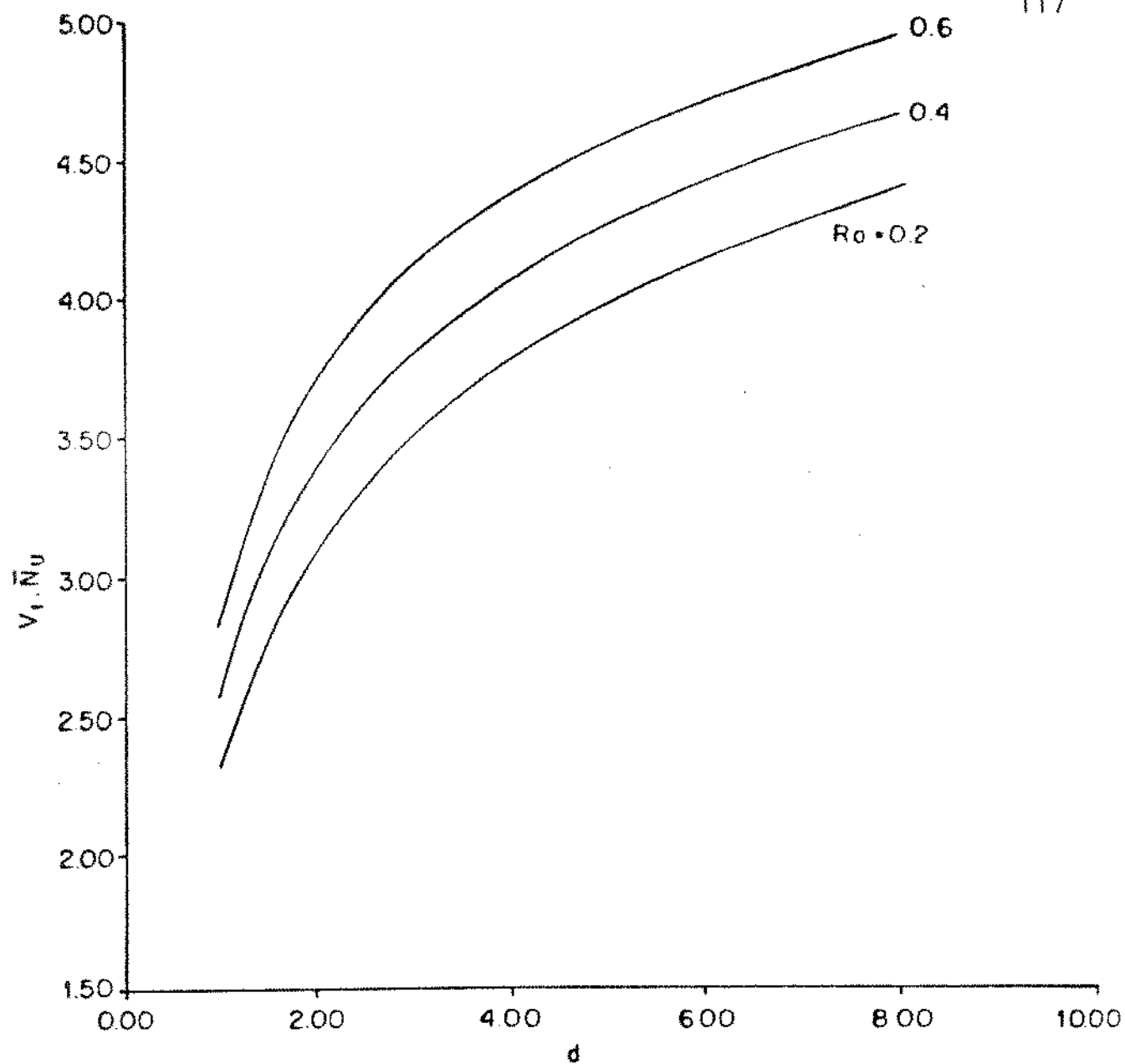


Fig. 5.11 Influência da profundidade d sobre Nu para valores baixos e altos de Ra

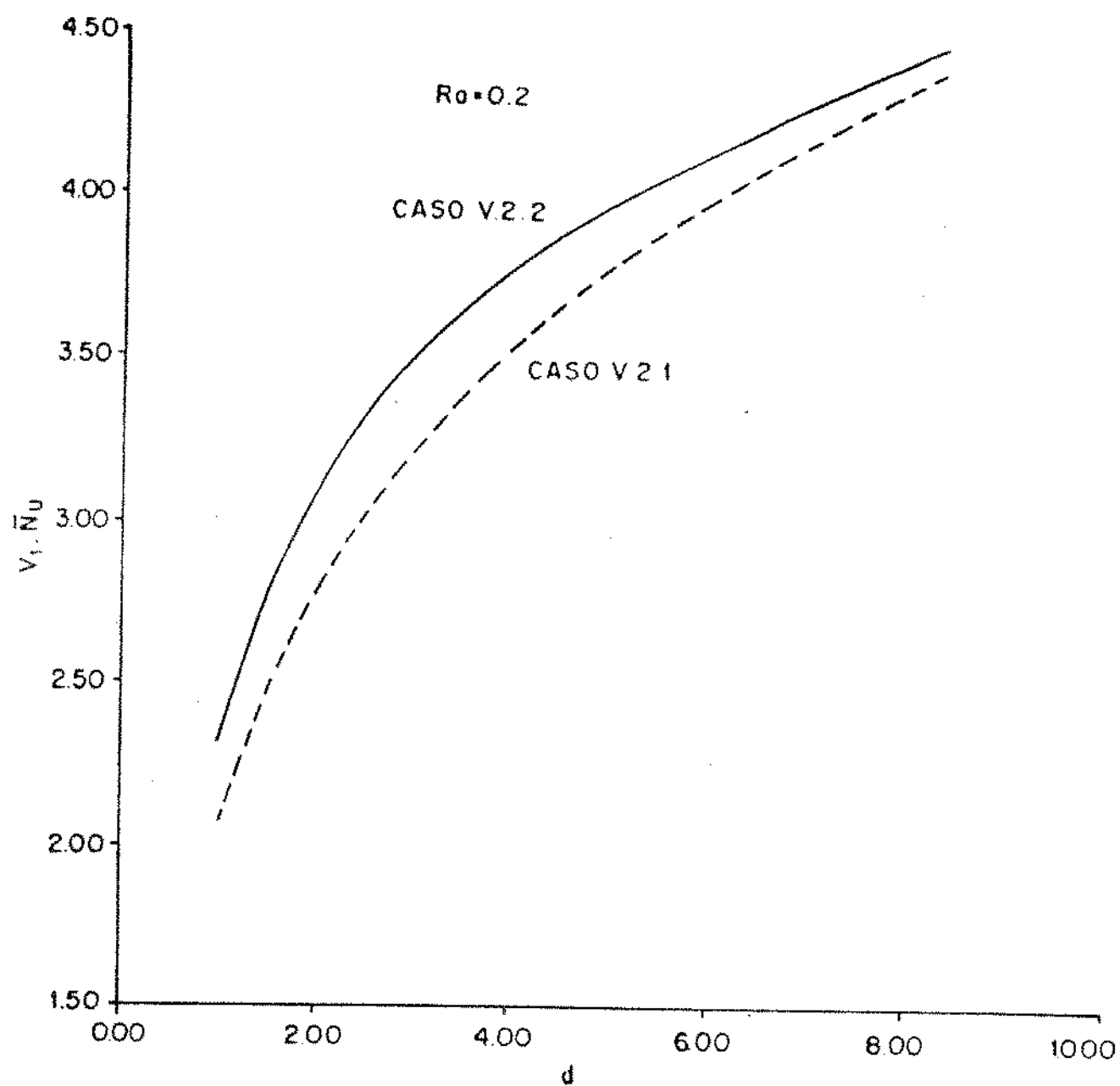


Fig. 5.12 Influência de d sobre Nu para os dois casos de condições de contorno ($Ra=0.2$)

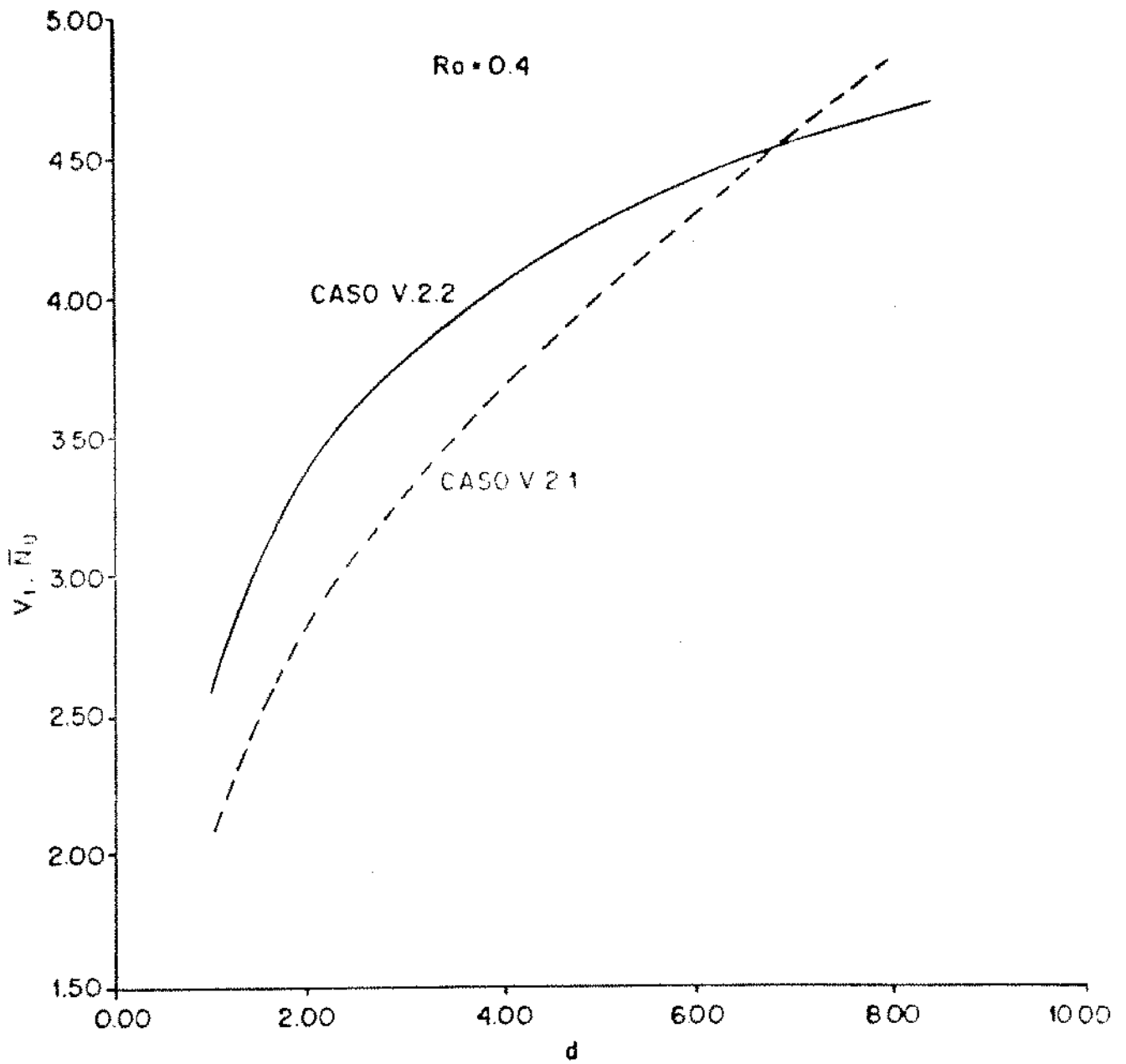


Fig. 5.13 Influência de d sobre Nu para os dois casos de condições de contorno ($Ra=0.4$)

V.3 CONCLUSÕES

Apresenta-se o desenvolvimento de um estudo teórico sobre a convecção natural resultante de empuxos devido ao calor e à diferença de concentração sobre um cilindro enterrado em um meio poroso saturado sujeito para os casos temperatura e concentração constantes no cilindro e na parede (caso V.2.1) e fluxo de calor e massa constantes no cilindro e temperatura e concentração constantes na parede (caso V.2.2). O objetivo foi o de estender a aplicação de soluções do tipo perturbativas, antes aplicadas à convecção natural puramente difusiva, ao problema em questão. A convecção duplamente difusiva depende normalmente de dois parâmetros, Ra e N , e a abordagem adotada emprega uma expansão dupla sobre estes parâmetros. Os resultados apresentados são válidos nos regimes dominados pelo fenômeno difusivo, ou seja, as faixas dos parâmetros principais para aplicação da solução se restringem àquelas em que as contribuições convectivas às curvas de Nusselt são relativamente pequenas se comparadas à contribuição puramente difusiva ($Ra=0$ ou $Le=1$ e $N=-1$).

Este critério foi satisfeito em todos os casos estudados. No caso estudado em V.2.1, o método da perturbação teve o mérito de revelar relações interessantes entre T e C nas condições de estabelecimento do fenômeno.

O desenvolvimento das soluções apresentadas neste trabalho pelo método da perturbação linear para o caso estudado em V.2.2 é relativamente exaustivo porém permitiu a obtenção de resultados exatos e inéditos para a faixa de parâmetros Ra e $(N+1)$ relativamente baixos.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES FINAIS

O estudo da convecção natural duplamente difusiva para um cilindro enterrado em um meio poroso homogêneo e saturado foi investigada numericamente. As equações de conservação que descrevem o problema foram expressas nas coordenadas bipolares segundo a formulação função de corrente e resolvidas numericamente pelo método do volume de controle. Os resultados apresentados foram considerados tomando um domínio finito quadrado de dimensões 3×3 com um critério de aceitação da solução como convergida não permitirmos um erro absoluto acima de 1×10^{-3} . Adotamos também o esquema da lei de potência, sugerido por Patankar para aproximação das variáveis T , C e ψ calculadas. A fim de validarmos o método, uma investigação do número de pontos da grade em função de Ra , Le e N também foi realizada.

O programa implementado em nosso trabalho para uma rede relativamente grosseira de 30×30 pontos, permitiu-nos alcançar o resultado de Nusselt no cilindro via solução analítica obtido por Haim Bau e que possibilitou-nos a escolha dos parâmetros da rede, iterações e domínio para outras situações de Ra , Le e N consideradas. Acreditamos que o uso de redes relativamente grosseiras em nosso trabalho se deve ao refinamento automático realizado pelo sistema de coordenadas bipolares, conforme a Fig.(3.2.a).

A análise e apresentação dos resultados foi dividida em partes para uma melhor compreensão da influência dos números de Rayleigh e de Lewis sobre o escoamento: escoamentos dirigidos pelo calor, escoamentos com empuxo ascendente e escoamentos com empuxo adverso.

Os números de Nusselt e de Sherwood como função de Ra , Le e N foram amplamente analisados e seus efeitos relativamente explicados dentro da faixa de valores especificados neste trabalho. A influência qualitativa dos parâmetros sobre o escoamento pode ser observada pela apresentação dos campos de escoamento, de temperaturas e de concentração.

Os resultados obtidos para escoamentos dirigidos pelo

calor nos mostram basicamente as regiões puramente condutiva, condutiva e convectiva e fortemente convectiva para os diversos valores de Rayleigh e Lewis considerados.

Nos escoamentos com empuxo ascendente tivemos resultados cujos efeitos puderam ser relativamente explicados. A intensificação dos efeitos da convecção natural sobre o escoamento foi a característica principal desta classe de escoamentos.

Os escoamentos com empuxo adverso mereceram uma maior atenção devidos ao aparecimento de influências sobre a direção do escoamento. Acreditávamos que a classe de escoamentos com $N \ll -1$ provocassem a movimentação do escoamento da superfície do solo para o cilindro. Os resultados por nós apresentados mostram que a direção do movimento pode ser alterada para Le e Ra suficientemente grandes que eliminem o efeito $N \ll -1$.

A influência da razão de empuxo sobre o escoamento mereceu um estudo intenso pelo desconhecimento de tais considerações na literatura. A passagem pelo ponto de supressão de movimento mostrou-nos a influência de N sobre as curvas de Nu e Sh em função de Ra e de Le . A passagem por um ponto de mínimo nas curvas apresentadas nos indica a situação de movimento mínimo do fluido, onde podemos notar a simetria das curvas de Nu e de Sh em relação a um ponto de mínimo. A grande constatação que observamos foi a de tal mínimo depender sensivelmente de Le e em menor intensidade de Ra . O parâmetro Ra influencia menos a reversão do movimento do que Le .

Foi possível uma comparação dos resultados numéricos com soluções analíticas perturbativas de segunda ordem para valores relativamente baixos dos números de Rayleigh e de Lewis, limitando a análise dos efeitos convectivos para esta técnica para o caso de temperatura e concentração constantes no cilindro e na superfície do solo.

Uma solução perturbativa do tipo linear para o caso em que temos fluxo de calor e massa constantes no cilindro e temperatura e concentração constantes na superfície do solo foi realizada. Tal análise linear permitiu-nos alcançar resultados de Nusselt e Sherwood razoáveis e coerentes quando analisamos as influências da profundidade d do cilindro e seu respectivo raio r_1 .

REFERÊNCIAS

- [1] - Patankar, S., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, New York, 1980.
- [2] - Di Felice, R.F. e Bau, H.H., Conductive Heat Transfer between eccentric cylinders with boundary conditions of the third kind, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, Series C, J. Heat Transfer 105, 678-680 (1983).
- [3] - Eckert, E.R.G. e Drake, R.M., Analysis of Heat and Mass Transfer, 92-102. Mc Graw Hill, New York (1972).
- [4] - Bau, H.H. e Sadhal, S.S., Heat losses from a fluid flowing in buried pipe, Int. J. Heat. Mass Transfer 25, 1621-1629 (1982).
- [5] - Schrock, V.E., Fernandez, R.T. e Kesavan, K., Heat Transfer from cylinders embedded in a Liquid Filled Porous Medium, Proc. of the Int. Heat Transfer Conf., Paris, Vol. VII, CT 3.6, (1970).
- [6] - Bau, H.H., Convective Heat Losses from a Pipe Buried in a Semi-Infinite Porous Medium, ASME/AICHE National Heat Transfer Conf., Niagara Falls, (1984).
- [7] - Fernandez, R.T. e Schrock, V.E., Natural Convection from Cylinders Buried in a Liquid-Saturated Porous Medium, Proc. of the Int. Heat Transfer Conf., Munich, Vol 2, 335-340, (1982).
- [8] - Farouk, B. e Shayer, H., Natural Convection around a heated cylinder buried in a saturated porous medium, ASME Journal of Heat Transfer 110, 642-648 (1988)
- [9] - Trevisan, O.V., Convecção Natural por difusão dupla em cavidades, Tese de Doutorado, FEC-UNICAMP, Campinas, (1986).
- [10] - Bejan, A., Convection Heat Transfer, John Wiley and Sons, New York, (1984).
- [11] - Spiegel, M.R., Análise Vetorial, Mc Graw-Hill do Brasil, São Paulo, (1976).

- [12] - Himasekhar, K. and Bau, H.H., Thermal Convection Around a Heat Source embedded in a Box containing a saturated porous medium, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs., J. Heat Transfer, 649-654, 1988.

APÊNDICE A

SISTEMA DE COORDENADAS BIPOLARES (EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO)

$$\bar{V} = V_u \hat{e}_u + V_v \hat{e}_v + V_z \hat{e}_z$$

$$\nabla = 1/h_u \partial/\partial u \hat{e}_u + 1/h_v \partial/\partial v \hat{e}_v + 1/h_z \partial/\partial z \hat{e}_z$$

$$\bar{V} \cdot \nabla = V_u/h_u \partial/\partial u + V_v/h_v \partial/\partial v + V_z/h_z \partial/\partial z \quad (A.1)$$

$$\nabla^2 = \frac{(\cosh v - \cos u)^2}{a^2} \left(\partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2 \right) \quad (A.2)$$

$$\nabla \times \bar{A} = \frac{1}{h_u h_v h_z} \begin{vmatrix} h_u \hat{e}_u & h_v \hat{e}_v & h_z \hat{e}_z \\ \partial/\partial u & \partial/\partial v & \partial/\partial z \\ h_u A_u & h_v A_v & h_z A_z \end{vmatrix}$$

$$A_u = A_x \cos(x, u) + A_y \cos(y, u) + A_z \cos(z, u)$$

$$A_v = A_x \cos(x, v) + A_y \cos(y, v) + A_z \cos(z, v)$$

$$A_z = A_x \cos(x, z) + A_y \cos(y, z) + A_z \cos(z, z)$$

onde

$$\cos(i, j) = 1/h_j \partial i / \partial j \quad \begin{matrix} i = x, y, z \\ j = u, v \end{matrix}$$

$$h_u = h_v = a/(\cosh v - \cos u) \quad h_z = 1$$

$$\partial x / \partial u = -a \sin u \sinh v / (\cosh v - \cos u)^2$$

$$\partial x / \partial v = a (1 - \cos u \cosh v) / (\cosh v - \cos u)^2$$

Com $\bar{g} = (g, 0)$, temos

$$g_u = g \cos(x, u) = -g \sin u \sinh v / (\cosh v - \cos u)^2$$

$$g_v = g \cos(x, v) = g (1 - \cos u \cosh v) / (\cosh v - \cos u)^2$$

Para $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T-T_0) - \beta_c(C-C_0)]$, temos

$$\begin{aligned} \nabla \rho = & \frac{-\rho_0(\cosh v - \cos u)}{a} [(\beta \partial T / \partial u + \beta_c \partial C / \partial u) \hat{e}_u + \\ & + (\beta \partial T / \partial v + \beta_c \partial C / \partial v) \hat{e}_v] \end{aligned}$$

Assim $\nabla \rho \times \bar{g}$ com algumas simplificações fica facilmente calculado onde obtivemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \nabla \rho \times \hat{g} = & \frac{-\rho_0 g}{a} [(1 - \cos u \cosh v) (\beta \partial T / \partial u + \beta_c \partial C / \partial u) + \\ & + (\sinh v \sin u) (\beta \partial T / \partial v + \beta_c \partial C / \partial v)] \end{aligned} \quad (A.3)$$

APÊNDICE B

DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DISCRETIZADAS PELO MÉTODO DO VOLUME DE CONTROLE

Equação de ψ^*

Integraremos a eq.(2.32) para a função de corrente ψ^* no volume de controle genérico VC_p mostrado na Fig.(2.3) com relação as variáveis u e v . Assim temos para a eq.(2.32):

$$\begin{aligned} & \iint_{VC_p} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial u^2} du dv + \iint_{VC_p} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial v^2} du dv - \\ & - a^* \left[\left(\iint_{VC_p} H \frac{\partial T^*}{\partial u} du dv + \iint_{VC_p} G \frac{\partial T^*}{\partial v} du dv \right) + \right. \\ & \left. + N \left(\iint_{VC_p} H \frac{\partial C^*}{\partial u} du dv + \iint_{VC_p} G \frac{\partial C^*}{\partial v} du dv \right) \right] \end{aligned} \quad (B.1)$$

A integração de (B.1) nos fornece

$$\begin{aligned} & [(\partial \psi^* / \partial u)_e - (\partial \psi^* / \partial u)_w] \Delta v + [(\partial \psi^* / \partial v)_n - (\partial \psi^* / \partial v)_s] \Delta u - \\ & - \sinh(v1) [H_p (T_e^* - T_w^*) \Delta v + G_p (T_n^* - T_s^*) \Delta u + \\ & + N H_p (C_e^* - C_w^*) \Delta v + N G_p (C_n^* - C_s^*) \Delta u] \end{aligned} \quad (B.2)$$

Em seguida tratamos da substituição das derivadas e funções envolvidas nos nós do VC_p pelas suas respectivas aproximações lineares sugeridas por Patankar:

$$(\partial \psi^* / \partial u)_e = (\psi_E^* - \psi_P^*) / (\delta u)_e$$

$$(\partial\psi^*/\partial u)_w = (\psi_P^* - \psi_W^*)/(\delta u)_w$$

$$(\partial\psi^*/\partial v)_n = (\psi_N^* - \psi_P^*)/(\delta v)_n$$

$$(\partial\psi^*/\partial v)_s = (\psi_P^* - \psi_S^*)/(\delta v)_s$$

$$T_e^* = (T_E^* + T_P^*)/2$$

$$T_w^* = (T_P^* + T_W^*)/2$$

$$T_n^* = (T_N^* + T_P^*)/2$$

$$T_s^* = (T_P^* + T_S^*)/2$$

$$C_e^* = (C_E^* + C_P^*)/2$$

$$C_w^* = (C_P^* + C_W^*)/2$$

$$C_n^* = (C_N^* + C_P^*)/2$$

$$C_s^* = (C_P^* + C_S^*)/2$$

(B.3)

As aproximações (b.3) substituídas em (B.2) nos fornecem

$$\begin{aligned}
 & \psi_E^* [\Delta v / (\delta u)_e] + \psi_P^* [\Delta v / (\delta u)_e - \Delta v / (\delta u)_w - \Delta u / (\delta v)_n - \\
 & - \Delta u / (\delta v)_s] + \psi_W^* [\Delta v / (\delta u)_w] + \psi_N^* [\Delta u / (\delta v)_n] + \\
 & + \psi_S^* [\Delta u / (\delta v)_s] - \sinh(v_1) [H_P \Delta v / 2 (T_E^* - T_W^*) + \\
 & + G_P \Delta u / 2 (T_N^* - T_S^*) + N H_P \Delta v / 2 (C_E^* - C_W^*) + \\
 & + N G_P \Delta u / 2 (C_N^* - C_S^*)] \quad (B.4)
 \end{aligned}$$

Assim reagrupando (B.4) da forma

$$\begin{aligned}
 a_{i,j} \psi_{i,j}^* &= a_{i+1,j} \psi_{i+1,j}^* + a_{i-1,j} \psi_{i-1,j}^* + a_{i,j+1} \psi_{i,j+1}^* + \\
 &+ a_{i,j-1} \psi_{i,j-1}^* + b_{i,j} \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned}
 P &= i, j \\
 E &= i+1, j \\
 W &= i-1, j \\
 N &= i, j+1 \\
 S &= i, j-1
 \end{aligned}$$

Os coeficientes envolvidos em (B.5) têm a forma

$$a_{i+1,j} = \Delta v / (\delta u)_e$$

$$a_{i-1,j} = \Delta v / (\delta u)_w$$

$$a_{i,j+1} = \Delta u / (\delta v)_n$$

$$a_{i,j-1} = \Delta u / (\delta v)_s$$

onde Δu , Δv , $(\delta u)_w$, $(\delta u)_e$, $(\delta v)_n$ e $(\delta v)_s$ são valores representados na Fig. (2.3).

$$a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i-1,j} + a_{i,j+1} + a_{i,j-1}$$

$$\begin{aligned} b_{i,j} = & - a^* [H_{i,j} \cdot (\Delta v / 2) \cdot (T_{i+1,j}^* - T_{i-1,j}^*) + \\ & + G_{i,j} \cdot (\Delta u / 2) \cdot (T_{i,j+1}^* - T_{i,j-1}^*) + \\ & + N \cdot H_{i,j} \cdot (\Delta v / 2) \cdot (C_{i+1,j}^* - C_{i-1,j}^*) + \\ & + N \cdot G_{i,j} \cdot (\Delta u / 2) \cdot (C_{i,j+1}^* - C_{i,j-1}^*)] \end{aligned}$$

(B.6)

Equação de T^*

A obtenção da equação discretizada de T^* é obtida de forma análoga. Tomaremos a eq.(2.33) para T^* que reescreveremos na forma

$$(1/Ra) (\partial^2 T^* / \partial u^2 + \partial^2 T^* / \partial v^2) = \partial(T^* \partial \psi^* / \partial v) / \partial u + \partial(-T^* \partial \psi^* / \partial u)$$

(B.7)

Integrando a eq.(B.7) sobre o volume de controle VC_p com relação a u e v temos

$$\begin{aligned} & (1/Ra) [(\partial T^* / \partial u)_e - (\partial T^* / \partial u)_w] \Delta v + \\ & + (1/Ra) [(\partial T^* / \partial v)_n - (\partial T^* / \partial v)_s] \Delta u = \\ & = [(\partial \psi^* / \partial v \times T^*)_e - (\partial \psi^* / \partial v \times T^*)_w] \Delta v + \\ & + [(-\partial \psi^* / \partial u \times T^*)_n - (-\partial \psi^* / \partial u \times T^*)_s] \Delta u \end{aligned}$$

(B.8)

Utilizando-se das aproximações sugeridas em (B.3) para as variáveis ψ^* e C^* envolvidas na eq.(B.8) utilizando-se de um esquema lei de Potência para obtermos

$$a_{i,j} T_{i,j}^* = a_{i+1,j} T_{i+1,j}^* + a_{i-1,j} T_{i-1,j}^* + a_{i,j+1} T_{i,j+1}^* + a_{i,j-1} T_{i,j-1}^* \quad (B.9)$$

Com

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [[-F_e, 0]]$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [[F_w, 0]]$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [[F_n, 0]]$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [[-F_n, 0]]$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

onde

$$F_e = (\partial\psi^*/\partial v)_e \Delta v$$

$$F_w = (\partial\psi^*/\partial v)_w \Delta v$$

$$F_n = -(\partial\psi^*/\partial u)_n \Delta u$$

$$F_s = -(\partial\psi^*/\partial u)_s \Delta u$$

$$D_e = \Delta v / [Ra \times (\delta u)_e]$$

$$D_w = \Delta v / [Ra \times (\delta u)_w]$$

$$D_n = \Delta u / [Ra \times (\delta v)_n]$$

$$D_s = \Delta u / [Ra \times (\delta v)_s]$$

$$P_e = F_e / D_e$$

$$P_n = F_n / D_n$$

$$P_w = F_w / D_w$$

$$P_s = F_s / D_s$$

Onde para o esquema lei de Potência temos
 $A(|P|) = [0, (1 - 0.1 \times |P|)^5]$

Equação de C^*

Para C^* segue as mesmas equações de T^* trocando-se os coeficientes difusivos D_e , D_w , D_n e D_s definidos em (B.9) por

$$D_e = (1/Ra \ Le) \Delta v / (\delta u)_e$$

$$D_w = (1/Ra \ Le) \Delta v / (\delta u)_w$$

$$D_n = (1/Ra \ Le) \Delta u / (\delta v)_n$$

$$D_s = (1/Ra \ Le) \Delta u / (\delta v)_s$$

APÊNDICE C
EXPANSÃO DAS FUNÇÕES G E H EM SÉRIES DE FOURIER

Neste apêndice iremos expandir as funções G e H definidas pelas eqs. (5.69) e (5.70) em suas correspondentes séries de Fourier.

Escreveremos $G(u, v)$ dado pela eq. (5.9) por

$$G(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \operatorname{sen}(nu) \quad (C.1)$$

Onde os coeficientes G_n são calculados por

$$G_n = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{senh}(v) \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(nu)}{(\cosh(v) - \cos(u))^2} du \quad (C.2)$$

A eq. (C.1) integrada por partes nos fornece

$$G_n = (1/\pi) n \operatorname{senh}(v) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nu)}{\cosh(v) - \cos(u)} du \quad (C.3)$$

A eq. (C.2) será resolvida utilizando-se da Teoria dos Resíduos para variáveis complexas. Nesse sentido consideramos:

$$z^n = \cos(nu) + i \operatorname{sen}(nu) = e^{inu}$$

$$dz = i e^{iu} du \quad (C.4)$$

$$\cos(u) = 0.5 (z + 1/z)$$

De (C.3) definimos

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nu)}{\cosh(v) - \cos(u)} du \quad (C.5)$$

e

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inu}}{\cosh(v) - \cos(u)} du \quad (C.6)$$

De (C.5) e (C.6) segue diretamente que

$$I_n = \text{Real}(J_n) \quad (C.7)$$

Onde $\text{Real}(J_n)$ é a parte real de J_n

Introduzindo-se as expressões (C.4) em (C.6) temos

$$J_n = 2i \oint_c \frac{z^n}{z^2 - 2z \cosh(v) + 1} dz \quad (C.8)$$

Onde c é o círculo unitário ($|z| \leq 1$)

Os polos z_1 e z_2 de (C.7) são dados por

$$\begin{aligned} z_1 &= e^v \\ z_2 &= e^{-v} \end{aligned} \quad (C.9)$$

O integrando em (C.7) tem um polo simples em $z = e^{-v}$.
Pela fórmula da integral de Cauchy temos

$$J_n = 2\pi e^{-nv} / \sinh(v) \quad (C.10)$$

Assim o cálculo de I_n fica da seguinte forma

$$I_n = \text{Real}(2\pi e^{-nv} / \sinh(v)) = 2\pi e^{-nv} / \sinh(v)$$

Dessa forma podemos reescrever (C.3) como

$$G_n = \frac{n \sinh(v)}{\pi} \frac{2\pi e^{-nv}}{\sinh(v)} = 2n e^{-nv} \quad (C.11)$$

O valor de G_n dado em (C.11) substituído em (C.1) nos fornece

$$G(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n e^{-nv} \sin(nu) \quad (C.12)$$

A expansão para $H(u, v)$ definido em (5.70) é obtida de forma similar. Consideraremos $H(u, v)$ em sua série de Fourier da forma

$$H(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cos(nu) \quad (C.13)$$

Onde os coeficientes H_n são calculados por

$$H_n = (\delta n)/\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cosh(v) \cos(u)}{(\cosh(v) - \cos(u))^2} \cos(nu) du \quad (C.14)$$

Para obtenção imediata dos coeficientes H_n reescreveremos a eq.(C.14) da forma como segue

$$H_n = (\delta n)/\pi \partial [\sinh(v) \operatorname{Real}(J_n)] / \partial v \quad (C.15)$$

Onde J_n é o mesmo definido em (C.10) e

$$\begin{aligned} (\delta n) &= 0.5 \text{ para } n=0 \\ (\delta n) &= 1.0 \text{ para } n > 0 \end{aligned} \quad (C.16)$$

Assim da simplificação de H_n dado por (C.15) chegamos a expressão final para $H(u,v)$:

$$H(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} (-2n) e^{-nv} \cos(nu) \quad (C.17)$$

Assim as séries numéricas (5.76), (5.77) e (5.78) envolvidas no cálculo de ψ_1 e T_1 definidos por (5.79) e (5.80) podem ser obtidas facilmente como mostramos a seguir.

Para a obtenção da série (5.76) realizamos a integração da eq. (C.17) da definição de $H(u,v)$ com relação a variável u :

$$\int_0^u H(u,v) du = \sum_{n=1}^{\infty} 2 e^{-nv} \sin(nu) = \frac{\sin(u)}{\cosh(v) - \cos(u)} \quad (C.18)$$

Para obtenção da série (5.77) integramos $G(u,v)$ dado por (C.12) com relação a variável u para obtermos

$$2 (\delta n) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nv} \cos(nu) = \frac{\sinh(v)}{\cosh(v) - \cos(u)} \quad (C.19)$$

Para obtenção da série (5.78) integramos (C.19) com relação a variável u para obtermos

$$v - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) e^{-nv} \cos(nu) = \ln [2 (\cosh(v) - \cos(u))] \quad (C.20)$$

PROGRAMA IMPLEMENTADO NUM SISTEMA DE COORDENADAS

BIPOLARES REFERENTE AOS CAPÍTULOS II, III e IV

LOGICAL LSTOP

COMMON/CNTL/LSTOP

CC

CALL GRID

CALL SETUP1

CALL START

10 CALL DENSE

CALL BOUND

CALL AUTPUT

IF(LSTOP) STOP

CALL SETUP2

GO TO 10

END

CC

FUNCTION HU(XA,YB)

COMMON/V1A/V1

C=COSH(YB)

D=COS(XA)

HU=SINH(V1)/(C-D)

RETURN

END

CC

SUBROUTINE DIFLOW

CC

COMMON/COEF/FLOW,DIFF,ACOF

CC

ACOF=DIFF

IF(FLOW.EQ.0.) RETURN

TEMP=DIFF-ABS(FLOW)*0.1

ACOF=0.

IF(TEMP.LE.0) RETURN

TEMP=TEMP/DIFF

ACOF=DIFF*TEMP**5

RETURN

END

CC

SUBROUTINE SOLVE

CC

LOGICAL LSOLVE,LPRINT,LSTOP

139

COMMON F(51,50,10),RHO(51,50),GAM(51,50),CON(51,50)

+ ,AIP(51,50),AIM(51,50),AJP(51,50),AJM(51,50),

+ AP(51,50),X(51),XU(51),XDIF(51),XCV(51),

+ Y(51),YV(51),YDIF(51),YCV(51)

COMMON PT(51),QT(51)

COMMON/INDX/NF,NFMAX,NP,NRHO,NGAM,L1,L2,L3,M1,M2,M3,

+ IST,JST,ITER,LAST,TITLE(3),RELAX(3),TIME,DT,XL,YL,

+ IPREF,JPREF,LSOLVE(3),LPRINT(3),MODE,NTIMES(3),RHOCON

CC

ISTF=IST-1

JSTF=JST-1

IT1=L2+IST

IT2=L3+IST

JT1=M2+JST

JT2=M3+JST

CC

NTI=NTIMES(NF)

DO 999 NT=1,NTI

DO 90 N=NF,NF

CCCCCCCC SUMMING IN I DIRECTION

CC

DO 90 J=JST,M2

PT(ISTF)=0.

QT(ISTF)=F(ISTF,J,N)

DO 70 I=IST,L2

DENOM=AP(I,J)-PT(I-1)*AIM(I,J)

PT(I)=AIP(I,J)/DENOM

TEMP=CON(I,J)+AJP(I,J)*F(I,J+1,N)+AJM(I,J)*F(I,J-1,N)

QT(I)=(TEMP+AIM(I,J)*QT(I-1))/DENOM

70 CONTINUE

DO 80 II=IST,L2

I=IT1-II

80 F(I,J,N)=F(I+1,J,N)*PT(I)+QT(I)

90 CONTINUE

C-----

DO 190 N=NF,NF

DO 190 JJ=JST,M3

J=JT2-JJ

```

PT(ISTF)=0.
QT(ISTF)=F(ISTF,J,N)
DO 170 I=IST,L2
DENOM=AP(I,J)-PT(I-1)*AIM(I,J)
PT(I)=AIP(I,J)/DENOM
TEMP=CON(I,J)+AJP(I,J)*F(I,J+1,N)+AJM(I,J)*F(I,J-1,N)
      QT(I)=(TEMP+AIM(I,J)*QT(I-1))/DENOM
170      CONTINUE
      DO 180 II=IST,L2
      I=IT1-II
180      F(I,J,N)=F(I+1,J,N)*PT(I)+QT(I)
190      CONTINUE
C-----
CCCCC  SUMMING IN J DIRECTION
      DO 290 N=NF,NF
      DO 290 I=IST,L2
      PT(JSTF)=0.
      QT(JSTF)=F(I,JSTF,N)
      DO 270 J=JST,M2
      DENOM=AP(I,J)-PT(J-1)*AJM(I,J)
      PT(J)=AJP(I,J)/DENOM
      TEMP=CON(I,J)+AIP(I,J)*F(I+1,J,N)+AIM(I,J)*F(I-1,J,N)
      QT(J)=(TEMP+AJM(I,J)*QT(J-1))/DENOM
270      CONTINUE
      DO 280 JJ=JST,M2
      J=JT1-JJ
280      F(I,J,N)=F(I,J+1,N)*PT(J)+QT(J)
290      CONTINUE
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      DO 390 N=NF,NF
      DO 390 II=IST,L3 è      I=IT2-II
      PT(JSTF)=0.
      QT(JSTF)=F(I,JSTF,N)
      DO 370 J=JST,M2
      DENOM=AP(I,J)-PT(J-1)*AJM(I,J)
      PT(J)=AJP(I,J)/DENOM
      TEMP=CON(I,J)+AIP(I,J)*F(I+1,J,N)+AIM(I,J)*F(I-1,J,N)
      QT(J)=(TEMP+AJM(I,J)*QT(J-1))/DENOM
370      CONTINUE

```

DO 380 JJ=JST,M2

J=JT1-JJ

141

380 F(I,J,N)=F(I,J+1,N)*PT(J)+QT(J)

390 CONTINUE

CC

999 CONTINUE

DO 400 J=2,M2

DO 400 I=2,L2

CON(I,J)=0.

AP(I,J)=0.

400 CONTINUE

RETURN

END

CC

SUBROUTINE SETUP

CC

LOGICAL LSOLVE,LPRINT,LSTOP

COMMON F(51,50,10),RHO(51,50),GAM(51,50),

+ CON(51,50),AIP(51,50),AIM(51,50),AJP(51,50),AJM(51,50),

+ AP(51,50),X(51),XU(51),XDIF(51),XCV(51),

+ Y(51),YV(51),YDIF(51),YCV(51)

COMMON PT(51),QT(51)

COMMON/INDX/NF,NFMAX,NP,NRHO,NGAM,L1,L2,L3,M1,M2,M3,

+ IST,JST,ITER,LAST,TITLE(3),RELAX(3),TIME,DT,XL,YL,

+ IPREF,JPREF,LSOLVE(3),LPRINT(3),MODE,NTIMES(3),RHOCON

COMMON/CNTL/LSTOP

COMMON/V1A/V1

COMMON/SORC/SMAX,SSUM

COMMON/COEF/FLOW,DIFF,ACOF

COMMON/ERTCP/F1(51,50,3),ET1,EC1,EPSI1

DIMENSION U(51,50),V(51,50)

EQUIVALENCE(F(1,1,1),T(1,1)),(F(1,1,2),CONC(1,1)),

+ (F(1,1,3),PSI(1,1))

C*****

1 FORMAT(15X,'COMPUTATION IN CARTESIAN COORDINATES')

2 FORMAT(15X,'COMPUTATION FOR AXISYMMETRIC SITUATION')

3 FORMAT(15X,'COMPUTATION IN POLAR COORDINATES')

4 FORMAT(14X,40(1H*),//)

DATA NFMAX,NP,NRHO,NGAM/3,4,5,6/

```

DATA LSTOP,LSOLVE,LPRINT/7*.FALSE./
DATA MODE, LAST, TIME, ITER/1,5,0.,0/
DATA RELAX,NTIMES/3*1.,3*1/
DATA DT,IPREF,JPREF,RHOCON/1.E10,1,1,1./
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
ENTRY SETUP1
L2=L1-1
L3=L2-1
M2=M1-1
M3=M2-1
X(1)=XU(2)
DO 5 I=2,L2
5      X(I)=0.5*(XU(I+1)+XU(I))
X(L1)=XU(L1)
Y(1)=YV(2)
DO 10 J=2,M2
10     Y(J)=0.5*(YV(J+1)+YV(J))
Y(M1)=YV(M1)
DO 15 I=2,L1
15     XDIF(I)=X(I)-X(I-1)
DO 18 I=2,L2
CCCCCCCC CON,AP,U,V,RHO,PC AND P ARRAYS ARE INITIALIZED HERE
DO 95 J=1,M1
DO 95 I=1,L1
U(I,J)=0.
V(I,J)=0.
CON(I,J)=0.
AP(I,J)=0.
RHO(I,J)=RHOCON
95     CONTINUE
RETURN
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
ENTRY SETUP2
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCC COEFFICIENTS FOR THE ALL EQUATIONS
IST=2
JST=2
IF(.NOT.LSOLVE(NF)) GO TO 100
CALL GAMSOR
REL=1.-RELAX(NF)

```

AREA=XCV(I)*HU(X(I),YV(2))

FLOW=AREA*V(I,2)*RHO(I,1)

DIFF=AREA*GAM(I,1)/(YDIF(2)*HU(X(I),YV(2)))

CALL DIFLOW

102 AJM(I,2)=ACOF+AMAX1(0.,FLOW)

DO 103 J=2,M2

FLOW=YCV(J)*HU(X(1),Y(J))*U(2,J)*RHO(1,J)

DIFF=YCV(J)*HU(X(1),Y(J))*GAM(1,J)/(XDIF(2)*HU(XU(2),Y(J)))

CALL DIFLOW

AIM(3,J)=ACOF+AMAX1(0.,FLOW)

DO 103 I=2,L2

IF(I.EQ.L2) GO TO 104

FLOW=YCV(J)*HU(X(I),Y(J))*U(I+1,J)*RHO(I,J)

DIFF=YCV(J)*HU(X(I),Y(J))*2.*GAM(I,J)*GAM(I+1,J)/

+ ((XCV(I)*GAM(I+1,J)*HU(X(I),Y(J))+XCV(I+1)*

+ GAM(I,J)*HU(X(I+1),Y(J))+1.E-30)

GO TO 105

104 FLOW=YCV(J)*HU(X(L1),Y(J))*U(L1,J)*RHO(L1,J)

DIFF=YCV(J)*HU(X(L1),Y(J))*GAM(L1,J)/(XDIF(L1)*

+ HU(XU(L1),YV(J)))

105 CALL DIFLOW

AIM(I+1,J)=ACOF+AMAX1(0.,FLOW)

AIP(I,J)=AIM(I+1,J)-FLOW

AREA=XCV(I)*HU(X(I),Y(J+1))

IF(J.EQ.M2) GO TO 106

FLOW=AREA*V(I,J+1)*RHO(I,J)

DIFF=AREA*2.*GAM(I,J)*GAM(I,J+1)/(YCV(J)*HU(X(I),Y(J))*

+ GAM(I,J+1)+HU(X(I),Y(J+1))*YCV(J+1)*GAM(I,J)+1.E-30)

GO TO 107

106 FLOW=AREA*V(I,M1)*RHO(I,M1)

FLM=XCVIP(I-1)*V(I-1,M1)*RHO(I-1,M1)

DIFF=AREA*GAM(I,M1)/(YDIF(M1)*HU(X(I),Y(M1)))

107 CALL DIFLOW

AJM(I,J+1)=ACOF+AMAX1(0.,FLOW)

AJP(I,J)=AJM(I,J+1)-FLOW

VOL=HU(X(I),Y(J))*2*XCV(I)*YCV(J) è APT=RHO(I,J)/DT

AP(I,J)=AP(I,J)-APT

CON(I,J)=CON(I,J)+APT*F(I,J,NF)

```

AP(I,J)=(-AP(I,J)*VOL+AIP(I,J)+AIM(I,J)+AJP(I,J)+AJM(I,J))
+      /RELAX(NF)
CON(I,J)=CON(I,J)*VOL+REL*AP(I,J)*F(I,J,NF)
103      CONTINUE
      CALL SOLVE
100      CONTINUEC
      ET1=0.
      EC1=0.
      EPSI1=0.
      DO 620 I=1,L1
      DO 620 J=1,M1
      ET=ABS(F(I,J,1)-F1(I,J,1))
      EC=ABS(F(I,J,2)-F1(I,J,2))
      EPSI=ABS(F(I,J,3)-F1(I,J,3))
      ET1=AMAX1(ET1,ET)
      EC1=AMAX1(EC1,EC)
620      EPSI1=AMAX1(EPSI1,EPSI)
      TIME=TIME+DT
      ITER=ITER+1
      IF(ITER.GE.LAST) LSTOP=.TRUE.
      RETURN
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      SUBROUTINE SUPPLY
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
      LOGICAL LSOLVE,LPRINT,LSTOP
      COMMON F(51,50,10),RHO(51,50),GAM(51,50),
+      CON(51,50),AIP(51,50),AIM(51,50),AJP(51,50),AJM(51,50),
+      AP(51,50),X(51),XU(51),XDIF(51),XCV(51),
+      Y(51),YV(51),YDIF(51),YCV(51)
      COMMON PT(51),QT(51)
      COMMON/INDX/NF,NFMAX,NP,NRHO,NGAM,L1,L2,L3,M1,M2,M3,
+      IST,JST,ITER,LAST,TITLE(3),RELAX(3),TIME,DT,XL,YL,
+      IPREF,JPREF,LSOLVE(3),LPRINT(3),MODE,NTIMES(3),RHOCON
      DIMENSION/UV/ U(51,50),V(51,50)
      EQUIVALENCE(F(1,1,1),T(1,1)),(F(1,1,2),CONC(1,1)),
+      (F(1,1,3),PSI(1,1))
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
10      FORMAT(26(1H*),3X,A10,3X,26(1H*))

```

```

20      FORMAT(1X,4H I =,I6,6I9)
30      FORMAT(1X,1HJ)
40      FORMAT(1X,I2,3X,1P7E9.2)
50      FORMAT(1X,1H )
51      FORMAT(1X,'I =',2X,7(I4,9X))
52      FORMAT(1X,'X =',1P7E13.5)
53      FORMAT('TH =',1P7E13.5)
54      FORMAT(1X,'J =',2X,7(I4,9X))
55      FORMAT(1X,'Y =',1P7E13.5)

```

CC

```

      ENTRY UGRID
      XU(2)=0.
      DX=XL/FLOAT(L1-2)
      DO 1 I=3,L1
1         XU(I)=XU(I-1)+DX
      YV(2)=0.+1.E-50
          DY=YL/FLOAT(M1-2)
          DO 2 J=3,M1
2         YV(J)=YV(J-1)+DY

```

RETURN

CC

```

      ENTRY PRINT
      IF(.NOT.LPRINT(3)) GO TO 80
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

      WRITE(10,50)
      IEND=0
301      IF(IEND.EQ.L1) GO TO 310
          IBEG=IEND+1
          IEND=IEND+7
          IEND=MIN0(IEND,L1)
          WRITE(10,50)
          WRITE(10,51) (I,I=IBEG,IEND)
          IF(MODE.EQ.3) GO TO 302
          WRITE(10,52) (X(I),I=IBEG,IEND)
          GO TO 303
302      WRITE(10,53) (X(I),I=IBEG,IEND)
303      GO TO 301
310      JEND=0

```

```

        WRITE(10,50)
311      IF(JEND.EQ.M1) GO TO 320
        JBEG=JEND+1
        JEND=JEND+7
        JEND=MIN0(JEND,M1)
        WRITE(10,50)
        WRITE(10,54) (J,J=JBEG,JEND)
        WRITE(10,55) (Y(J),J=JBEG,JEND)
        GO TO 311
320      CONTINUE
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
        DO 999 NF=1,NGAM
        IF(.NOT.LPRINT(NF)) GO TO 999
        WRITE(10,50)
        WRITE(10,10)TITLE(NF)
        IFST=1
        JFST=1
        IF(NF.EQ.1.OR.NF.EQ.3) IFST=2
        IF(NF.EQ.2.OR.NF.EQ.3) JFST=2
            IBEG=IFST-7
110      CONTINUE
        IBEG=IBEG+7
        IEND=IBEG+6
        IEND=MIN0(IEND,L1)
        WRITE(10,50)
        WRITE(10,20) (I,I=IBEG,IEND)
        WRITE(10,30)
        JFL=JFST+M1
        DO 115 JJ=JFST,M1
        J=JFL-JJ
        WRITE(10,40)J, (F(I,J,NF),I=IBEG,IEND)
115      CONTINUE
        IF(IEND.LT.L1) GO TO 110
999      CONTINUE
        RETURN
        END

```


C

SUBROUTINE USER

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

C      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

```

```

LOGICAL LSOLVE,LPRINT,LSTOP

```

```

COMMON/A1/ F(81,80,3),RHO(81,80),GAM(81,80),CON(81,80),

```

```

+   AIP(81,80),AIM(81,80),AJP(81,80),AJM(81,80),AP(81,80),

```

```

+   X(81),XU(81),XDIF(81),XCV(81),Y(81),YV(81),YDIF(81),YCV(81)

```

```

COMMON/B1/ PT(81),QT(81)

```

```

COMMON/INDX/NF,NFMAX,NP,NRHO,NGAM,L1,L2,L3,M1,M2,M3,

```

```

+   IST,JST,ITER,LAST,TITLE(3),RELAX(3),TIME,DT,XL,YL,

```

```

+   IPREF,JPREF,LSOLVE(3),LPRINT(3),MODE,NTIMES(3),RHOCON

```

```

COMMON/CNTL/LSTOP

```

```

COMMON/ERTCP/F1(81,80,3),ET1,EC1,EPSI1

```

```

COMMON/V1A/V1

```

```

COMMON/SORC/SMAX,SSUM

```

```

COMMON/COEF/FLOW,DIFF,ACOF

```

```

COMMON/UV/U(81,80),V(81,80)

```

```

COMMON/C1/ADPX(81,80),ADPY(81,80),CDX,CDY

```

```

C      COMMON/C11/RAI,ALE,AN,L1,M1

```

```

DIMENSION XX(81),YY(81)

```

```

DIMENSION T(81,80),CONC(81,80),PSI(81,80)

```

```

DIMENSION AANU(60),AASH(60),AANU1(60),AASH1(60)

```

```

EQUIVALENCE (F(1,1,1),T(1,1)),(F(1,1,2),CONC(1,1)),

```

```

+   (F(1,1,3),PSI(1,1))

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCC      PROBLEMA CILINDRO ENTERRADO

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

DATA TITLE(1),TITLE(2),TITLE(3)/'TEMP','CONC','PSI'/

```

```

DATA LSOLVE(1),LSOLVE(2),LSOLVE(3)/3*.TRUE./

```

```

DATA LPRINT(1),LPRINT(3)/2*.FALSE./

```

```

DATA LPRINT(2)/.FALSE./

```

```

DATA RELAX(1),RELAX(2),RELAX(3)/1.,1.,1./

```

```

DATA NTIMES(1),NTIMES(2),NTIMES(3)/1,1,25/

```

```

DATA LAST/50/

```

C

```

ENTRY GRID

```

```

D=2.
R1=0.25
V1=LOG((D/R1)+SQRT((D/R1)**2-1.))
ALE=50.
A=SINH(V1)
RAI=0.1
PI=3.1416
AN=0.
XL=PI
YL=V1
L1=30
M1=30
CALL DADOS(RAI,ALE,AN,L1,M1)
CDX=10
CDY=10
CALL UGRID
RETURN

```

C

```

ENTRY START
DO 100 J=1,M1
DO 100 I=1,L1
T(I,J)=.0
CONC(I,J)=0.
PSI(I,J)=0.

```

C PSI(L1,J)=0.

100 CONTINUE

C READ(17,11) L1,M1,CDX,CDY

C 11 FORMAT(1X,2I,4G)

C OPEN(UNIT=16,FILE='DADOS.DAT',STATUS='UNKNOWN')

C DO 101 I=1,L1

C DO 101 J=1,M1

C READ(16,121) T(I,J),CONC(I,J),PSI(I,J),U(I,J),V(I,J)

121 FORMAT(1X,5E15.7)

C101 CONTINUE

C

C CLOSE(UNIT=16)

RETURN

C

ENTRY DENSE

RETURN

C

ENTRY BOUND

IF(ITER.EQ.15) THEN

RELAX(1)=0.95

RELAX(2)=0.95

RELAX(3)=0.95

END IF

IF(ITER.EQ.20) THEN

RELAX(1)=0.9

RELAX(2)=0.9

RELAX(3)=0.9

END IF

IF(ITER.GE.40) THEN

RELAX(1)=0.8

RELAX(2)=0.8

RELAX(3)=0.8

END IF

IF(ITER.GE.60) THEN

RELAX(1)=0.7

RELAX(2)=0.7

RELAX(3)=0.7

END IF

IF(ITER.GE.80) THEN

RELAX(1)=0.6

RELAX(2)=0.6

RELAX(3)=0.6

END IF

IF(ITER.GE.95) THEN

RELAX(1)=0.5

RELAX(2)=0.5

RELAX(3)=0.5

END IF

IF(ITER.GE.115) THEN

RELAX(1)=0.4

RELAX(2)=0.4

RELAX(3)=0.4

END IF

```

DO 299 I=2,L2
DO 299 J=2,M2
ADPX(I,J)=(A*R1*SINH(Y(J)))/(COSH(Y(J))-COS(X(I)))
ADPY(I,J)=(A*R1*SIN(X(I)))/(COSH(Y(J))-COS(X(I)))
299  CONTINUE
    IF(NF.EQ.3)GO TO 310
DO 400 I=2,L2
U(I,2)=(PSI(I,3)-PSI(I,1))/(YDIF(3)*HU(X(I),(YV(3)
++YV(2))/2)+YDIF(2)*HU(X(I),YV(2)/2))
U(I,2)=0.
400  CONTINUE
DO 410 I=2,L2
U(I,M2)=(PSI(I,M1)-PSI(I,M3))/(YDIF(M1)*HU(X(I),
+(Y(M1)+Y(M2))/2.)+YDIF(M2)*HU(X(I),(Y(M2)+Y(M3))/
+2.))
U(I,M2)=0.
410  CONTINUE
DO 449 I=2,L2
DO 449 J=2,M2
U(I,J)=(PSI(I,J+1)-PSI(I,J-1))/(YDIF(J+1)*HU(
+X(I),YV(J+1))+YDIF(J)*HU(X(I),YV(J)))
U(I,1)=PSI(I,2)/(YDIF(2)*HU(X(I),YV(2)))
U(I,M1)=-PSI(I,L2)/(YDIF(L1)*HU(X(I),YV(L2)))
U(I,M1)=U(I,M2)
U(I,1)=0.
U(I,M1)=0.
449  CONTINUE
DO 430 J=2,M2
V(2,J)=- (PSI(3,J)-PSI(1,J))/(XDIF(2)*HU(XDIF(2)
+/2.,Y(J))+XDIF(3)*HU(XDIF(3)/2+X(2),Y(J)))
430  CONTINUE
DO 440 J=2,M2
V(L2,J)=- (PSI(L1,J)-PSI(L3,J))/(XDIF(L1)*HU(
+(X(M1)+X(M2))/2.,Y(J))+XDIF(L2)*HU(XU(L2),Y(J)))
440  CONTINUE
DO 302 I=2,L2
DO 302 J=2,M2
302  V(I,J)=- (PSI(I+1,J)-PSI(I-1,J))/(XDIF(I+1)*HU(
+XU(I+1),Y(J))+XDIF(I)*HU(XU(I),Y(J)))

```

```

DO 303 J=2,M2
U(1,J)=0.
303 U(L1,J)=0.
DO 304 I=1,L1
U(I,1)=U(I,2)
U(I,M1)=U(I,M2)
U(I,1)=0.
U(I,M1)=0.
304 CONTINUE
DO 305 J=2,M2
V(1,J)=-PSI(2,J)/(XDIF(2)*HU(XDIF(2)/2.,Y(J)))
V(L1,J)=PSI(L2,J)/(XDIF(L1)*HU(XU(L1),Y(J)))
V(1,J)=V(2,J)
V(L1,J)=V(L2,J)
V(1,J)=0.
V(L1,J)=0.
305 CONTINUE
DO 306 I=1,L1
V(I,1)=0.
306 V(I,M1)=0.
DO 331 I=2,L2
DO 331 J=2,M2
331 U(I,J)=(U(I,J)+U(I+1,J))/2
DO 332 I=2,L2
DO 332 J=2,M2
332 V(I,J)=(V(I,J)+V(I+1,J))/2
GO TO 315
310 DO 301 I=1,L1
DO 301 J=1,M1
U(I,J)=0.
301 V(I,J)=0.
315 DO 320 J=2,M2
PSI(1,J)=0.
T(1,J)=T(2,J)
CONC(1,J)=CONC(2,J)
320 CONTINUE
DO 330 I=1,L1
PSI(I,M1)=0.
T(I,M1)=1.

```

```

      CONC(I,M1)=1.0
330  CONTINUE
      DO 340 J=1,M1
      PSI(L1,J)=0.
      CONC(L1,J)=CONC(L2,J)
      T(L1,J)=T(L2,J)
340  CONTINUE
      DO 350 I=1,L1
      T(I,1)=0.
      CONC(I,1)=0.
      PSI(I,1)=0.
350  CONTINUE
      RETURN

C
      ENTRY AUTPUT
      IF(ITER.NE.0) GO TO 405
      WRITE(*,401)
401  FORMAT('  ITER',10X,'ERRT',10X,'ERRC',10X,'ERRPSI',
+10X,'NUSSELT')
      RETURN
405  WRITE(*,402) ITER,ET1,EC1,EPSI1,ANU1
402  FORMAT(I6,4E15.7)
      DO 334 I=2,L2
      DO 334 J=2,M2
      F1(I,J,1)=T(I,J)
      F1(I,J,2)=CONC(I,J)
      F1(I,J,3)=PSI(I,J)
334  CONTINUE
C      KA1=0
C      IF(KA1.EQ.0)GO TO 357
      IF(ITER.NE.LAST) GO TO 357
      OPEN(UNIT=16,FILE='DADOS.DAT',STATUS='UNKNOWN')
      DO 345 I=1,L1
      DO 345 J=1,M1
      WRITE(16,121)T(I,J),CONC(I,J),PSI(I,J),U(I,J),V(I,J)
345  CONTINUE
      CLOSE(UNIT=16)
      DO 333 I=2,L2,1
      DO 333 J=M2,2,-1

```

```

IF (ADPX(I,J).GT.3..OR.ADPY(I,J).GT.2.)GO TO 398
XXMAX=ADPX(I,J)
YYMAX=ADPY(I,J)
PSIMAX=PSI(I,J)
TEMAX=T(I,J)
CONMAX=CONC(I,J)
GOTO 395
398  ADPX(I,J)=XXMAX
     ADPY(I,J)=YYMAX
     PSI(I,J)=PSIMAX
     T(I,J)=TEMAX
     CONC(I,J)=CONMAX
395  ZZZ=1.
     WRITE(13,122)ADPX(I,J),ADPY(I,J),PSI(I,J)
     WRITE(14,122)ADPX(I,J),ADPY(I,J),T(I,J)
     WRITE(15,122)ADPX(I,J),ADPY(I,J),CONC(I,J)
122  FORMAT(1X,E15.7,3X,E15.7,3X,E15.7)
333  CONTINUE
357  SOMAC=0.
     SOMAT=0.
     DO 934 I=2,L2
     IF (ADPX(I,M2).GT.CDX.OR.ADPY(I,M2).GT.CDY)GO TO 934
     ASUM=((T(I,M1)-T(I,M2))/(YDIF(M1)*HU(X(I),Y(M2))+
+YDIF(M1)*0.5)+1.E-30))*XCV(I)*HU(X(I),Y(M1))
     SOMAT=SOMAT+ASUM
     BSUM=((CONC(I,M1)-CONC(I,M2))/(YDIF(M1)*HU(X(I),Y(M2))
++YDIF(M1)*0.5)+1.E-30))*XCV(I)*HU(X(I),Y(M1))
     SOMAC=SOMAC+BSUM
     SDIS=(I-1)*PI/(L1-1)
     IF(ITER.NE.LAST)GO TO 934
C    WRITE(8,54)SDIS,ASUM,BSUM
54   FORMAT(1X,5E15.7)
     AANU(I)=ASUM
     AASH(I)=BSUM
934  CONTINUE
     ANU1=V1*SOMAT/PI
     SH1=V1*SOMAC/PI
     SOMAT=0.
     SOMAC=0.

```

```

DO 935 I=2,L2
IF(ADPX(I,1).GT.CDX.OR.ADPY(I,1).GT.CDY)GO TO 935
  ASUM=(( -T(I,1)+T(I,2))/(YDIF(2)*HU(X(I),Y(2)+
+YDIF(1)*0.5)+1.E-30))*XCV(I)*HU(X(I),Y(1))
  SOMAT=SOMAT+ASUM
  BSUM=(( -CONC(I,1)+CONC(I,2))/(YDIF(2)*HU(X(I),Y(2)+
+YDIF(1)*0.5)+1.E-30))*XCV(I)*HU(X(I),Y(1))
  SOMAC=SOMAC+BSUM
  SDIS=(I-1)*PI/(L1-1)
  IF(ITER.NE.LAST)GO TO 935
  AANU1(I)=ASUM
  AASH1(I)=BSUM
  WRITE(9,54)SDIS,AANU(I),AASH(I),AANU1(I),AASH1(I)
935  CONTINUE
  ANU0=V1*SOMAT/PI
  SH0=V1*SOMAC/PI
  WRITE(7,55)ANU1,ANU0,SH1,SH0
  WRITE(10,55)ANU1,ANU0,SH1,SH0
55  FORMAT(1X,'NUCIL=',E15.7,'NUWALL=',E15.7,'SHCIL=',E15.7,
+'SHWAL=',E15.7)
  IF(ITER.NE.LAST)  RETURN
C    KA1=1
  CALL PRINT
C    END IF

C    CALL PRINT
  RETURN
C
  ENTRY GAMSOR
  IF(NF.NE.1)GO TO 505
  DO 500 J=1,M1
  DO 500 I=1,L1
  GAM(I,J)=1.
500  CONTINUE
505  IF(NF.NE.2)GO TO 506
  DO 510 J=1,M1
  DO 510 I=1,L1
  GAM(I,J)=1./(ALE)
510  CONTINUE

```



```

506  IF(NF.NE.3) GO TO 508
      DO 520 J=1,M1
      DO 520 I=1,L1
      GAM(I,J)=1.
520  CONTINUE
508  IF(NF.EQ.3)GO TO 539
      DO 530 J=2,M2
      GAM(1,J)=0.
530  CONTINUE
      DO 540 J=2,M2
      GAM(L1,J)=0.
      CONC(L1,J)=CONC(L2,J)
      T(L1,J)=T(L2,J)
540  CONTINUE
539  DO 600 I=2,L2
      DO 600 J=2,M2
      IF(ADPX(I,J).GT.CDX.AND.NF.NE.3)THEN
C      T(I,J)=0
C      CONC(I,J)=0.
      GAM(I,J)=0.
      END IF
C      IF(ADPX(I,J).GT.CDX.AND.NF.EQ.2) CONC(I,J)=0.
      IF(ADPY(I,J).GT.CDY.AND.NF.NE.3)THEN
C      T(I,J)=0.
C      CONC(I,J)=0.
      GAM(I,J)=0.
      END IF
C      IF(ADPY(I,J).GT.CDY.AND.NF.EQ.2) CONC(I,J)=0.
      IF(ADPX(I,J).GT.CDX.OR.ADPY(I,J).GT.CDY.AND.
+NF.EQ.3)THEN
      GAM(I,J)=0.
C      PSI(I,J)=0.
      END IF
600  CONTINUE
      IF(NF.NE.3) RETURN
      DO 550 J=2,M2
      DO 550 I=2,L2
      X1=X(I)
      Y1=Y(J)

```

```

AH=(1.-COS(X1)*COSH(Y1))/(COSH(Y1)-COS(X1))**2
AG=SINH(Y1)*SIN(X1)/(COSH(Y1)-COS(X1))**2
ADX=XDIF(I)*HU((X(I)+X(I-1))/2,Y(J))+XDIF(I+1)*
+ HU((X(I)+X(I+1))/2.,Y(J))
ADY=YDIF(J)*HU(X(I),(Y(J)+Y(J-1))/2.)+YDIF(J+1)*
+ HU(X(I),(Y(J)+Y(J+1))/2.)
ACX=CONC(I+1,J)-CONC(I-1,J)
ACY=CONC(I,J+1)-CONC(I,J-1)
ATX=T(I+1,J)-T(I-1,J)
ATY=T(I,J+1)-T(I,J-1)
CON(I,J)=-A*R1*RAI*(AH*ATX/(ADX)+AG*ATY/(ADY))
CON(I,J)=CON(I,J)-A*R1*RAI*AN*(AH*ACX/(ADX)+AG*ACY
+ /(ADY)).

```

```

C      WRITE(*,588)CON(I,J),I,J

```

```

C588   FORMAT(1X,E14.7,I4,I3)

```

```

550   CONTINUE

```

```

      RETURN

```

```

      END

```

PROGRAMA IMPLEMENTADO NUM SISTEMA DE COORDENADAS

BIPOLARES REFERENTE AO CAPÍTULO V CASO V.2.1

```

COMMON/A1/XU(50),YV(50),X(50),Y(50),XX(50),YY(50),
+ PSI(50,50),T(50,50),C(50,50),ADPX(50,50),ADPY(50,50)
D=2.
R1=0.25
V1=ALOG((D/R1)+SQRT((D/R1)**2-1.))
ALE=1.0
A=SINH(V1)
RAI=1.0
PI=3.1416
AN=0.
XL=PI
YL=V1
L1=30
M1=30
XU(2)=0.
DX=XL/(L1-2)
DO 1 I=3,L1
XU(I)=XU(I-1)+DX
1 CONTINUE
YV(2)=0.
DY=YL/(M1-2)
DO 2 J=3,M1
2 YV(J)=YV(J-1)+DY
L2=L1-1
L3=L2-1
M2=M1-1
M3=M2-1
X(1)=XU(2)
DO 5 I=2,L2
X(I)=0.5*(XU(I+1)+XU(I))
5 CONTINUE
X(L1)=XU(L1)
Y(1)=YV(2)
DO 10 J=2,M2
10 Y(J)=0.5*(YV(J+1)+YV(J))
Y(M1)=YV(M1)
DO 333 I=2,L2
DO 333 J=2,M2
IF(COSH(Y(J)).EQ.COS(X(I))) GO TO 333

```

```

XX(I)=(A*R1*SINH(Y(J)))/(COSH(Y(J))-COS(X(I)))
YY(J)=(A*R1*SIN(X(I)))/(COSH(Y(J))-COS(X(I)))
ADPX(I,J)=XX(I)
ADPY(I,J)=YY(J)
C      IF(XX(I).GT.4.0.OR.YY(J).GT.4.0) GO TO 333
      SUMP=0.
      DO 11 K=1,5
      P1=EXP(-K*V1)*SINH(K*Y(J))*SIN(K*X(I))/SINH(K*V1)
      SUMP=SUMP+P1
11     CONTINUE
      PSI(I,J)=SUMP-Y(J)*SIN(X(I))/(2*V1*(COSH(Y(J))-COS(X(I))))
      SUMT=0.
      DO 12 L=1,5
      T1=(EXP(-L*V1)*(1.+1./(V1*L)+2.*(COSH(L*V1)/SINH(L*V1)))*
+      SINH(L*Y(J))*COS(L*X(I)))/(4.*SINH(L*V1))
      TT1=(Y(J)*EXP(-L*V1)*COSH(L*Y(J))*COS(L*X(I)))/
+      (2.*V1*SINH(L*V1))
C      T1=T1-(Y(J)**2*EXP(-L*Y(J))*COS(L*X(I)))/(4.*V1*V1)
C      T1=T1-(Y(J)*EXP(-L*Y(J))*COS(L*X(I)))/(4.*V1**2*L)
      SUMT=SUMT+T1+TT1
12     CONTINUE
C      T(I,J)=SUMT-(1/8)*(Y(J)/V1)**2*((COS(X(I))-EXP(-Y(J)))/
C      +      (COSH(Y(J))-COS(X(I))))
C      +      (COSH(Y(J))-COS(X(I)))
      A1=-(Y(J)/V1)**2/8.
      B1=COS(X(I))-EXP(-Y(J))
      C1=COSH(Y(J))-COS(X(I))
      T(I,J)=SUMT+A1*B1/C1
C      T(I,J)=T(I,J)-(1/4)*(Y(J))/V1**2*(Y(J)/2-0.5*ALOG(
C      C(2*(COSH(Y(J))-COS(X(I)))))
      D1=-(Y(J)/V1**2)/4.
      E1=-0.5*ALOG(2.*(COSH(Y(J))-COS(X(I))))
      T(I,J)=T(I,J)+D1*(Y(J)/2.+E1)
C      WRITE(*,131)Y(J),V1,RAI,SINH(V1),AN,T(I,J)
C131  FORMAT(1X,6F15.7)
      PSI(I,J)=Y(J)/V1+RAI*SINH(V1)*(1.+AN)*PSI(I,J)
      T(I,J)=Y(J)/V1+RAI*SINH(V1)*(1.+AN)*T(I,J)
      C(I,J)=Y(J)/V1+RAI*SINH(V1)*ALE*(1.+AN)*T(I,J)
333   CONTINUE

```

M4=M3-1

160

DO 16 II=2,L2

DO 16 JJ=M4,2,-1

IF(ADPX(II,JJ).GT.3.0.OR.ADPY(II,JJ).GT.2.)GOTO 17

C IF(ADPX(II,JJ).GT.4.0.OR.ADPY(II,JJ).GT.4.) GO TO 17

XXMAX=ADPX(II,JJ)

YYMAX=ADPY(II,JJ)

PSIMAX=PSI(II,JJ)

TMAX=T(II,JJ)

CONMAX=C(II,JJ)

C IF(TMAX.GT.1.) TMAX=1.

GO TO 18

17 ADPX(II,JJ)=XXMAX

ADPY(II,JJ)=YYMAX

PSI(II,JJ)=PSIMAX

T(II,JJ)=TMAX

C(II,JJ)=CONMAX

C IF(T(II,JJ).GT.1.) T(II,JJ)=1.

18 CONTINUE

C WRITE(13,121)ADPX(II,JJ),ADPY(II,JJ),T(II,JJ)

C WRITE(14,121)ADPX(II,JJ),ADPY(II,JJ),C(II,JJ)

C WRITE(15,121)ADPX(II,JJ),ADPY(II,JJ),PSI(II,JJ)

16 CONTINUE

C121 FORMAT(1X,3F15.7)

STOP

END

PROGRAMA IMPLEMENTADO NUM SISTEMA DE COORDENADAS

BIPOLARES REFERENTE AO CAPÍTULO V CASO V.2.2

```

AN=0.
RAI=0.1
ALE=0.9
OPEN(UNIT=1, FILE='F1.DAT', STATUS='UNKNOWN')
READ(1,121) D
121  FORMAT(1X,F10.5)
C    D=1.
R1=0.25
V1=ALOG((D/R1)+SQRT((D/R1)**2-1))
A=SINH(V1)
LIM=5
SUM=0.
DO 13 I=1,LIM
AAN=30
SUM1=0.
DX=V1/AAN
DO 14 J=1,INT(AAN)
A1=2.*A/SINH(V1)
A2=EXP(-I*V1)*SINH(I*J*DX)
A3=I*COSH(I*V1)
ALFA=A1*A2/A3
SUM2=0.
SUM3=0.
DO 15 K=1,LIM
B1=EXP(-K*V1)*EXP(-K*J*DX)
B2=SINH((I+K)*J*DX)
B3=K*COSH(K*V1)
GB=B1*B2/B3
C1=EXP(-2*K*V1)
C2=SINH((I+K)*V1)*SINH(I*J*DX)
C3=K*COSH(K*V1)
GC=C1*C2/C3
SUM2=SUM2+GB
SUM3=SUM3+GC
15  CONTINUE
GK=-A*SUM2/SINH(V1)
GK=GK+(A*SUM3/SINH(V1))/SINH(I*V1)
SUM1=SUM1+ALFA*GK*DX
14  CONTINUE

```



```
SUM=SUM+I*SUM1
13  CONTINUE
SUM=-0.5*SUM
SUM4=0.
DO 16 I=1,LIM
W1=EXP(-I*V1)/(I*COSH(I*V1))
W2=V1**2/2+V1*EXP(-2*I*V1)*(1/4*I**2+V1/(2*I))
W1=W1*W2
W3=(4.*V1**2/3.)
W4=EXP(-2*I*V1)*TANH(I*V1)/I
W4=W3*W4
W5=W4+W1
SUM4=SUM4+W5
16  CONTINUE
ANU=V1/(1+RAI*(1.+AN)*A*(SUM4-0.5*SUM))
SH=V1/(1+ALE*RAI*(1+AN)*A*(SUM4-0.5*SUM))
OPEN(UNIT=111,FILE='F111.DAT',STATUS='UNKNOWN')
write(111,122)sum
WRITE(111,122)ANU,SH
122 FORMAT(1X,2E15.5)
STOP
END
```