

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

Rafael Heraldo Martínez

CONDUÇÃO E CONVECÇÃO TÉRMICA ACOPLADAS
NUM DISCO EM ROTAÇÃO

MARTÍNEZ

14/90

Este exemplar corresponde à redação final da
Dissertação defendida por Rafael Heraldo Martínez e
aprovada pela Comissão Julgadora em 06.3.90

Carlos Attenuani

Dissertação apresentada ao Departamento de
Energia da Faculdade de Engenharia Mecânica
da Universidade Estadual de Campinas como
requisito final à obtenção do título de
Mestre em Engenharia Mecânica, Área Térmica
e Fluidos.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

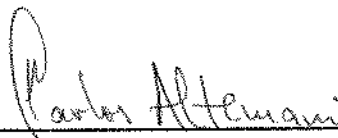
Tese de : Mestrado

Título da Tese: CONDUÇÃO E CONVECÇÃO TERMICA ACOPLADAS
NUM DISCO EM ROTAÇÃO

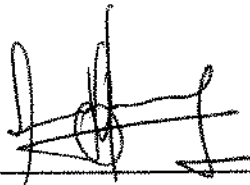
Autor: Rafael Heraldo Martínez

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani

Aprovado por:



Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani



Prof. Dr. Osvair Vidal Trevisan



Prof. Dr. Antonio Carlos Bannwart

Campinas, 6 de março de 1990

O autor agradece:

- Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Carrasco Altemani, pela dedicada orientação e sobretudo pela confiança depositada nos momentos de maior dificuldade.
- A Profa. Dra. Silvia Azucena Nebra de Perez, pela excelente orientação, que me deu a oportunidade de me iniciar na Engenharia.
- Aos colegas, professores e amigos pela contribuição à minha formação e pelos momentos compartilhados.
- Ao pessoal do Departamento de Energia, pelo saudável ambiente de trabalho e pela constante assistência.
- À CAPES pela bolsa concedida.

À tia Selva, minha primeira professora.

À minha família, pelo constante apoio e
compreensão.

RESUMO

Neste trabalho foram revistos os problemas clássicos do escoamento fluido induzido por um disco em rotação num meio fluido semi-infinito e da transferência de calor do disco para o fluido.

Foram obtidas soluções para o problema da transferência convectiva de calor no caso em que a temperatura da parede do disco pode ser expressa por um polinômio da posição radial. As soluções da literatura, quando a temperatura da parede varia na forma $T_w - T_\infty = A r^\lambda$, foram expandidas para os casos de $Pr = 0.72$ e $\lambda = 3$ e de $Pr = 6.78$ e $\lambda = 0, 1, 2$ e 3 .

Apresentou-se também a solução do problema acoplado de Condução-Convecção, em regime permanente, para um disco em rotação aquecido radialmente e submerso num fluido quiescente com temperatura uniforme. Esta solução foi obtida numericamente nas formas dimensional e adimensional do problema. A condição do escoamento foi laminar e na ausência de efeitos de convecção natural. Os resultados apresentados incluíram distribuições de temperatura e do número de Nusselt em função da posição radial no disco. Os parâmetros do problema foram uma condutividade relativa adimensional da parede do disco, o número de Prandtl do fluido e o número de Reynolds associado ao disco em rotação.

ABSTRACT

In this work, the classical problems of the fluid flow induced by a rotating disk in a large body of fluid and of the heat transfer from the disk surface to the fluid were revised.

Solutions were obtained for the thermal convective problem when the wall temperature of the disk can be expressed by a polynomial of the radial position. The solutions of the literature, when the wall temperature varies as $T_w - T_\infty = A r^\lambda$, were expanded to include the cases of $Pr = 0.72$ and $\lambda = 3$ and of $Pr = 6.78$ and $\lambda = 0, 1, 2$ e 3 .

Solutions were also obtained, under steady state conditions, for the coupled conductive-convective problem of a rotating disk, heated at the edge and submerged in a large body of quiescent fluid with uniform temperature. This solution was obtained numerically, including dimensional and dimensionless forms of the problem. The flow conditions were laminar and natural convection effects were neglected. The results were obtained for the wall temperature and for the Nusselt number distributions at the disk surface. The parameters of the problem were a dimensionless relative thermal conductance of the wall of the disk, the Prandtl number of the fluid and the Reynolds number associated to the rotating disk.

ÍNDICE

	Pag.
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 2 - ANÁLISE	
2.1 - Introdução	5
2.2 - Solução Analítica da Condução de Calor no Caso de Coeficiente Convectivo Uniforme	6
2.3 - Solução Numérica da Condução de Calor no Caso de Coeficiente Convectivo Uniforme	10
2.3.1 - Estudo da Grade	10
2.3.2 - Obtenção da Equação de Discretização	11
2.3.3 - Tratamento do Volume de Controle Central	13
2.3.4 - Tratamento do Volume de Controle da Borda	15
2.3.5 - Tratamento dos Nós das Extremidades	16
2.4 - Convecção Laminar num Disco Não Isotérmico em Rotação	17
2.4.1 - Transferência de Calor para o Fluido	20
2.5 - Convecção Laminar num Disco em Rotação com Distribuição Polinomial de Temperatura	21
2.6 - Condução-Convecção Acopladas no Disco Não-Iso- térmico em Rotação. Forma Dimensional	24
2.6.1 - Algoritmo da Solução	26
2.6.2 - Obtenção da Equação de Discretização	28
2.6.3 - Tratamento do Volume de Controle do Centro do Disco	29
2.6.4 - Tratamento do Volume de Controle da Borda	30
2.6.5 - Tratamento dos Nós das Extremidades	30
2.7 - Condução-Convecção Acopladas no Disco Não-Iso- térmico em Rotação. Forma Adimensional	31
2.7.1 - Algoritmo da Solução	35
2.7.2 - Obtenção da Equação de Discretização	37
2.7.3 - Tratamento do Volume de Controle do Centro do Disco	38

2.7.4 - Tratamento do Volume de Controle da Borda	39
2.7.5 - Tratamento dos Nós das Extremidades	40
CAPÍTULO 3 - RESULTADOS E DISCUSSÃO	
3.1 - Introdução	41
3.2 - Soluções Analíticas e Numéricas do Problema da Condução	41
3.3 - Resultados da Convecção Laminar num Disco Não-Isotérmico em Rotação	44
3.4 - Resultados da Condução-Convecção Acopladas no Disco Não-Isotérmico em Rotação	45
CAPÍTULO 4 - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS	
58	
APÊNDICE A	
Programa DISCO	59
APÊNDICE B	
Cálculo do Número de Nusselt Local para $\lambda=3$	62
APÊNDICE C	
Programa MSTETA	67
APÊNDICE D	
Programa DISCO01	69
APÊNDICE E	
Programa DISCO101	77
NOMENCLATURA	84
BIBLIOGRAFIA	87

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento induzido por um disco em rotação num meio fluido semi-infinito é um problema clássico de pesquisa em mecânica dos fluidos.

A primeira solução por similaridade para o escoamento laminar induzido pela rotação de um disco infinito com velocidade angular constante foi proposta por von Kármán em 1921, H. SCHLICHTING (1958). Os resultados iniciais foram melhorados por W. G. COCHRAN (1934), através de um processo de integração numérica das equações de von Kármán.

O problema da transferência de calor do disco para o fluido em escoamento laminar induzido foi também investigado, utilizando as mesmas variáveis de similaridade de von Kármán. K. MILLSAPS e K. POHLHAUSEN (1952) obtiveram resultados para o caso de um disco isotérmico considerando fluidos com número de Prandtl na faixa de 0,5 a 10. E. M. SPARROW e J. L. GREGG (1959) investigaram o mesmo problema na ausência de efeitos de dissipação viscosa e apresentaram resultados numa faixa irrestrita do número de Prandtl.

J. P. HARTNETT (1959) investigou a transferência de calor no caso de superfície não-isotérmica do disco. Soluções de similaridade foram obtidas quando a diferença de temperatura entre a superfície do disco e o ar quiescente longe do disco varia como um expoente da posição radial.

C. L. TIEN (1960) e J. P. HARTNETT e E. C. DELAND (1961) ampliaram a análise do problema convectivo considerando a aproximação das soluções obtidas no caso de um disco para o caso

de um cone não-isotérmico de grande ângulo de abertura. Nesses dois trabalhos, Tien considerou o efeito de compressibilidade do fluido no caso do disco altamente aquecido porém com velocidades moderadas de rotação. Hartnett e Deland consideraram o efeito do número de Prandtl do fluido envolvente.

D. L. OEHLBECK e F. F. ERIAN (1979) consideraram a transferência de calor de um disco em rotação aquecido apenas num anel circular para o escoamento laminar induzido. Neste trabalho, devido a gradientes elevados de temperatura na região próxima ao anel circular, o termo difusivo radial foi mantido na equação da energia para o fluido. Nos trabalhos anteriores, utilizando a aproximação da camada limite, este termo era desprezado. A equação da energia utilizada no caso do anel circular tornou-se então elíptica e a solução numérica correspondente foi efetuada num domínio finito. Várias comparações foram efetuadas, para efeito de teste, com soluções anteriormente obtidas na literatura. Verificou-se assim, por comparação com os resultados de J. P. HARTNETT (1959), que o termo difusivo radial pode ser desprezado se o expoente da variação radial da temperatura do disco não for superior a três.

Ainda recentemente, H. T. LIN e L. K. LIN (1987) propuseram uma modificação das variáveis de similaridade de von Kármán. A finalidade era tornar as soluções do problema de transferência de calor do disco em rotação praticamente independentes do valor do número de Prandtl do fluido em escoamento induzido.

Nas investigações mencionadas, as condições térmicas na superfície do disco são impostas como condições de contorno. Num problema prático de engenharia, a condição térmica da interface do disco em rotação com o escoamento fluido induzido pode não ser

conhecida. Por exemplo, se um fluxo de calor for aplicado na borda de um disco finito em rotação. Neste caso, a condução de calor no material do disco, atuando em paralelo com o mecanismo citado de convecção, determinará a distribuição de temperatura na interface disco-fluido. Esta situação constitui um problema conjugado de condução-convecção em transferência de calor. Esse problema motivou o desenvolvimento desta Dissertação.

A análise foi efetuada em regime permanente, com o escoamento induzido laminar, considerando propriedades constantes para o fluido e para o disco. Foram analisadas situações onde ainda é válida a solução de similaridade de von Karman para o disco infinito e são desprezíveis os efeitos da convecção natural. Neste sentido foram consideradas situações onde os números de Reynolds envolvidos são menores que 100000 e o cociente Gr/Re^2 é muito menor que um.

No capítulo 2 deste trabalho é descrito o método utilizado na solução do problema conjugado. Para facilitar a abordagem, inicialmente são considerados separadamente dois problemas envolvendo um único mecanismo de transferência de calor. No primeiro, considera-se a condução radial de calor num disco finito com um coeficiente convectivo uniforme especificado na sua face e com propriedades físicas constantes. São estudadas independentemente as soluções analítica e numérica no caso de um influxo radial de calor na sua borda. No segundo, considera-se a troca convectiva de calor para o escoamento laminar induzido pela rotação do disco no caso em que a sua temperatura superficial é especificada em função da distância radial por um polinômio.

O problema conjugado de condução-convecção é então abordado

através de um processo iterativo com base na solução dos dois problemas anteriores. Considera-se o caso de um disco unidimensional com uma distribuição radial de temperatura e são apresentadas duas soluções, uma dimensional e uma adimensional.

No capítulo 3 são apresentados os resultados dos problemas analisados no capítulo anterior. São feitas comparações entre resultados analíticos e numéricos do problema da condução no disco. Em seguida, alguns resultados para o problema convectivo são obtidos a partir das soluções obtidas por J. P. HARTNETT (1959). Os resultados e discussões do problema conjugado no caso unidimensional são apresentados, com base no método iterativo desenvolvido neste trabalho.

No capítulo 4 são apresentados os comentários e conclusões finais deste trabalho.

CAPITULO 2

ANÁLISE

2.1.- Introdução

Neste capítulo são analisados os problemas de condução, de convecção e de condução-convecção conjugados para um disco delgado em rotação uniforme.

Nas seções 2.2 e 2.3 é tratado o problema da condução para o disco delgado, com propriedades físicas constantes, aquecido radialmente e que troca calor com o meio circundante pelas faces planas. Na seção 2.2 é analisada a solução analítica e na seção 2.3, a solução numérica.

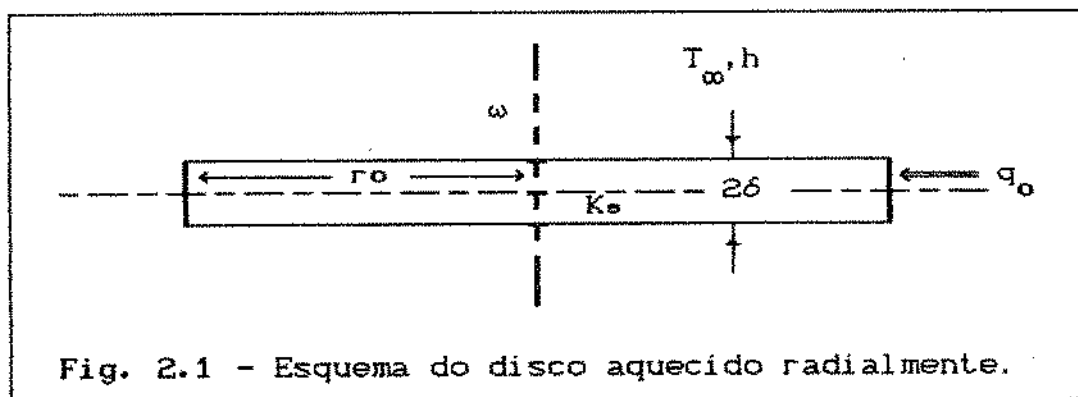
Na seção 2.4 é revisada a solução por similaridade da transferência de calor por convecção, de um disco em rotação, com temperatura na superfície da forma $(T-T_{\infty})=Ar^{\lambda}$, para um fluido em repouso longe do disco e com temperatura não perturbada T_{∞} .

Baseando-se na solução exposta na seção 2.4, é estudada na seção 2.5 a solução para o problema análogo porém com uma distribuição polinomial de temperatura na interface disco-fluido.

O problema acoplado de condução-convecção é abordado nas seções 2.6 e 2.7, apresentando-se soluções numéricas para distribuições dimensionais e adimensionais de temperatura da interface disco-fluido, junto aos respectivos algoritmos de solução e os detalhes do processo de cálculo.

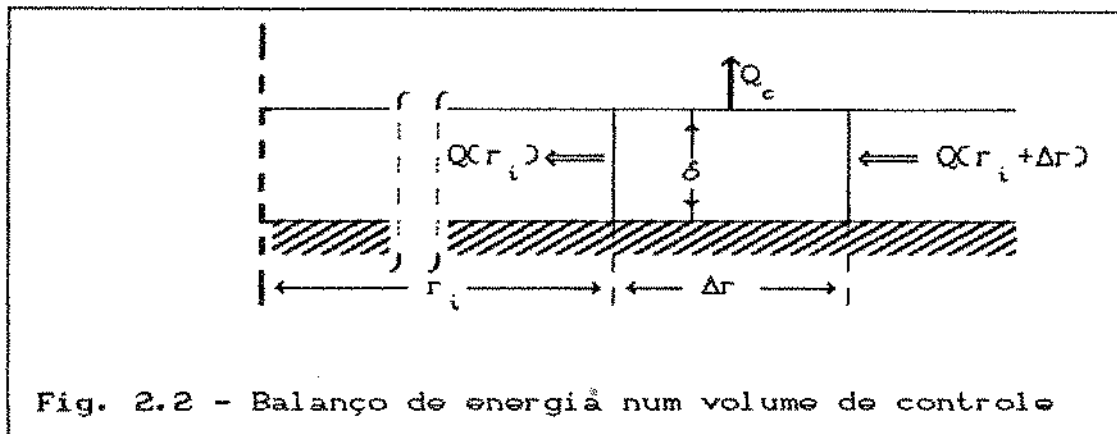
2.2.- Solução Analítica da Condução de Calor no Caso de Coeficiente Convectivo Uniforme

Será analisado agora o problema de condução de calor em um disco de raio r_o , espessura $2\delta \ll r_o$, condutibilidade térmica K_s , aquecido radialmente na borda externa e submerso em um fluido quiescente à temperatura T_∞ , indicado na Fig. 2.1. Na interface disco-fluido considera-se um coeficiente convectivo h uniforme. Devido à espessura relativamente pequena do disco, assume-se que a temperatura deste esteja distribuída apenas radialmente. A borda do disco está sujeita a um influxo de calor q_o .



Considera-se um elemento diferencial de volume com forma de anel circular de raio interno r_i , raio externo $r_i + \Delta r$. Por simetria, o problema pode ser analisado em um domínio de espessura δ , no qual a superfície de simetria é adiabática, como indicado na Fig. 2.2.

As taxas de transferência de calor envolvidas no volume de controle representado na Fig. 2.2 podem ser expressas por:



$$Q(r_i) = \left[K_s 2 \pi \delta r \frac{dT}{dr} \right]_{r_i} \quad (2.1)$$

$$Q(r_i + \Delta r) = \left[K_s 2 \pi \delta r \frac{dT}{dr} \right]_{r_i + \Delta r} \quad (2.2)$$

$$Q_c = h 2 \pi r \Delta r (T - T_\infty) \quad (2.3)$$

onde $Q(r_i)$ é a taxa condutiva radial de calor na interface $r=r_i$, $Q(r_i + \Delta r)$ é a taxa na interface $r=r_i + \Delta r$ e Q_c é a taxa de calor na interface convectiva.

Fazendo um balanço de energia no elemento de volume considerado, e rearranjando, no limite de Δr infinitesimal, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{h}{K_s \delta} (T - T_\infty) = 0 \quad (2.4)$$

Considerando a axi-simetria e o influxo de calor q_0 , esta equação está sujeita às seguintes condições de contorno:

$$r = 0 \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad (2.5)$$

$$r = r_0 \quad K_s \frac{dT}{dr} = q_0 \quad (2.6)$$

Exprimindo a equação (2.4) e suas condições de contorno (2.5) e (2.6) em função das variáveis adimensionais

$$\eta = \frac{r}{r_0} \quad (2.7)$$

$$\varphi = \frac{T - T_\infty}{\frac{q_0 \cdot r_0}{K_s}} \quad (2.8)$$

tem-se

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{h r_0^2}{K_s \delta} \varphi = 0 \quad (2.9)$$

$$\eta = 0 \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = 0 \quad (2.10)$$

$$\eta = 1 \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = 1 \quad (2.11)$$

A equação (2.9) pode ser expressa na forma:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{d\varphi}{d\eta} - m^2 \varphi = 0 \quad (2.12)$$

onde

$$m^2 = \frac{h r_o^2}{K_s \delta} \quad (2.13)$$

A equação (2.12) é a equação de Bessel modificada. Fazendo a mudança de variável $\xi = m \cdot \eta$, esta equação e suas condições de contorno ficam:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} - \varphi = 0 \quad (2.14)$$

$$\xi = 0 \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 0 \quad (2.15)$$

$$\xi = m \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{1}{m} \quad (2.16)$$

A solução geral desta equação e suas condições de contorno é dada por:

$$\varphi(m\eta) = \frac{I_0(m\eta)}{m I_1(m)} \quad (2.17)$$

Esta expressão fornece a distribuição radial da temperatura adimensional do disco delgado em função do parâmetro m e da posição η .

A solução indicada pela equação (2.23) será mostrada graficamente no próximo capítulo.

2.3.- Solução Numérica da Condução de Calor no Caso de Coeficiente Convectivo Uniforme

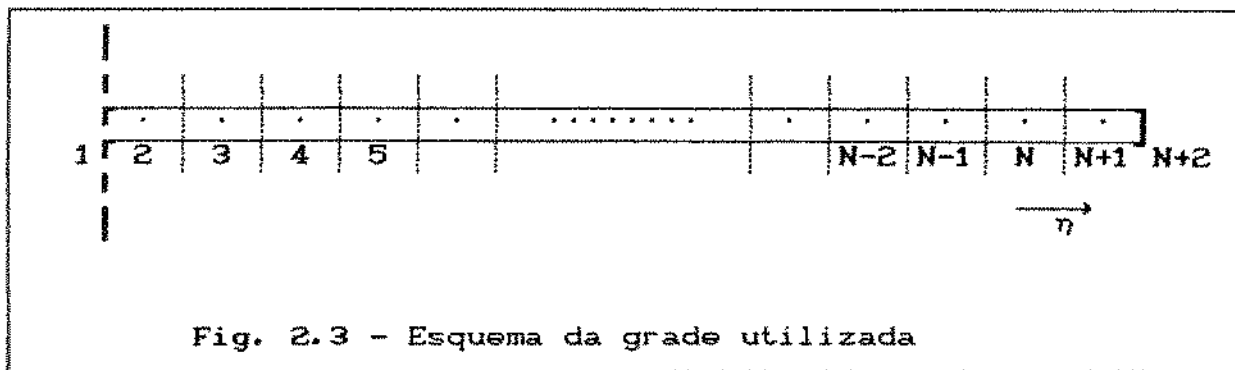
Uma outra forma de resolver o problema de condução de calor no disco delgado, nas condições descritas no parágrafo anterior, é integrar numericamente a equação diferencial (2.12), que descreve o fenômeno. Para isso utiliza-se o Método do Volume de Controle, desenvolvido por S. V. PATANKAR (1980).

2.3.1.- Estudo da Grade

No processo de integração utilizou-se uma grade uniforme obtida pela subdivisão do domínio de integração, $0 \leq \eta \leq 1$, em N volumes de controle de forma anular, de igual comprimento na direção da coordenada radial, cada qual contendo um nó no seu ponto central. Em cada volume de controle, como indicado na Fig. 2.4, P é o nó da grade correspondente a ele, W e E são os nós da grade situados no centro dos volumes de controle esquerdo e direito, respectivamente; as interfaces direita e

esquerda são representadas por $\underline{e}$ e $\underline{w}$, respectivamente.

No processo de discretização foi escolhido o método no qual os volumes de fronteira tem as mesmas dimensões que o resto da grade. Em nosso caso são os volumes 2 e N+1. Nota-se que também são definidos os nós 1 e N+2 nas extremidades.



2.3.2.- Obtenção da Equação de Discretização

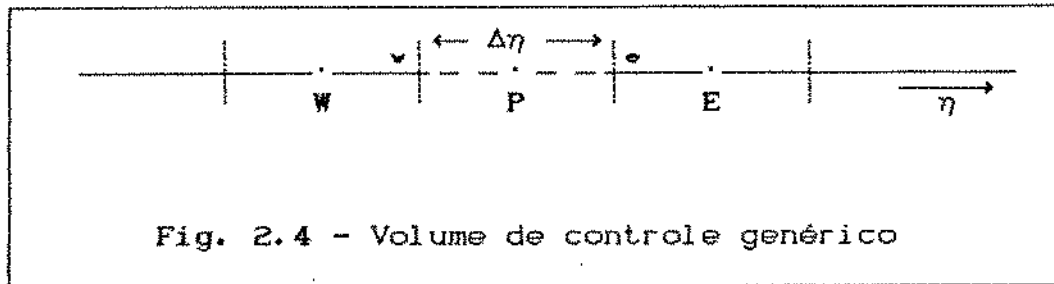
Rearranjando a equação (2.12) obtém-se:

$$\frac{d}{d\eta} \left[\eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right] - m^2 \eta \varphi = 0 \quad (2.18)$$

Integrando a equação (2.18) entre os limites $\underline{w}$ e $\underline{e}$ de um volume de controle genérico, apresentado na Fig. 2.4, tem-se:

$$\int_{\underline{w}}^{\underline{e}} \left[\frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right) - m^2 \eta \varphi \right] d\eta = 0 \quad (2.19)$$

$$\left(\eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_e - \left(\eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right)_v - m^2 \eta_P \varphi_P \Delta\eta = 0 \quad (2.20)$$



As derivadas nas interfaces são aproximadas de forma linear:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_e = \frac{\varphi_E - \varphi_P}{\Delta\eta} \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_v = \frac{\varphi_P - \varphi_W}{\Delta\eta} \quad (2.22)$$

Substituindo as equações (2.21) e (2.22) na equação (2.20) e rearranjando, obtém-se a seguinte equação de discretização:

$$\left(\frac{\eta_e}{\Delta\eta} + \frac{\eta_v}{\Delta\eta} + m^2 \eta_P \Delta\eta \right) \varphi_P = \frac{\eta_e}{\Delta\eta} \varphi_E + \frac{\eta_v}{\Delta\eta} \varphi_W \quad (2.23)$$

Esta equação pode ser expressa na forma:

$$a(i) \varphi_P = b(i) \varphi_E + c(i) \varphi_W + d(i) \Delta\eta \quad (2.24)$$

onde os coeficientes algébricos de discretização são:

$$a(i) = \frac{\eta_e}{\Delta\eta} + \frac{\eta_v}{\Delta\eta} + m^2 \eta_p \Delta\eta \quad (2.25)$$

$$b(i) = \frac{\eta_e}{\Delta\eta} \quad (2.26)$$

$$c(i) = \frac{\eta_v}{\Delta\eta} \quad (2.27)$$

$$d(i) = 0 \quad (2.28)$$

2.3.3.- Tratamento do Volume de Controle Central

Integrando a equação (2.18) no volume de controle vizinho ao eixo de simetria, indicado na Fig. 2.5, obtém-se:

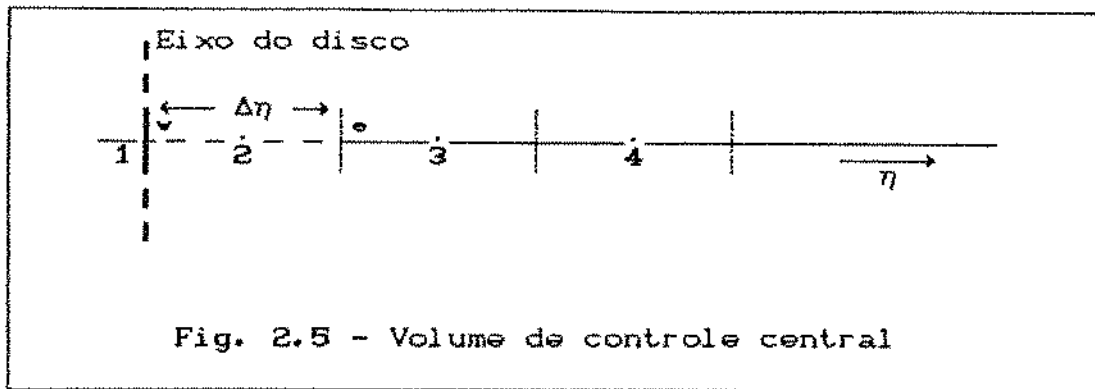
$$\eta_e \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_e - \eta_v \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_v - m^2 \eta_p (\eta_e - \eta_v) = 0 \quad (2.29)$$

onde

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_v = 0 \quad (2.30)$$

e

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_e = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\Delta\eta} \quad (2.31)$$



Substituindo-se na equação (2.29):

$$\left(1 + m^2 \Delta\eta^2\right) \varphi_2 = \varphi_3 \quad (2.32)$$

Observa-se que neste caso os coeficientes da equação de discretização, expressa na forma:

$$a(2) \varphi_2 = b(2) \varphi_3 + c(2) \varphi_1 + d(2) \Delta\eta \quad (2.33)$$

são:

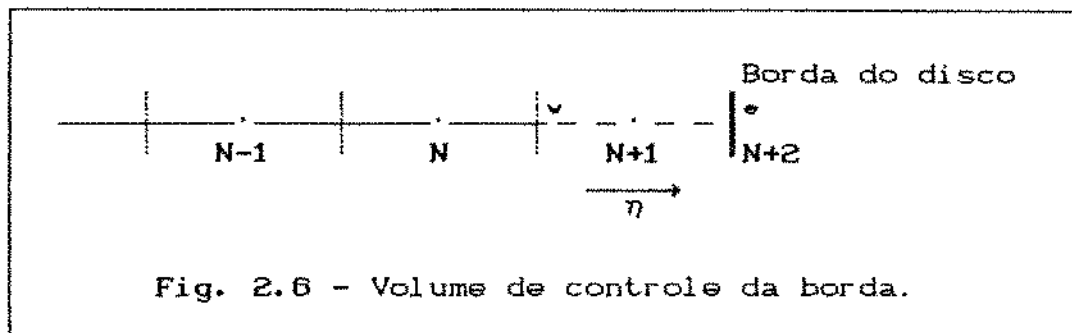
$$a(2) = 1 + m^2 \Delta\eta^2 \quad (2.34)$$

$$b(2) = 1 \quad (2.35)$$

$$c(2) = 0 \quad (2.36)$$

$$d(2) = 0 \quad (2.37)$$

2.3.4. - Tratamento do Volume de Controle da Borda



Considerando que há N nós correspondentes aos volumes de controle distribuídos no disco mais dois nós nas extremidades do domínio de cálculo, é preciso definir um total de $N+2$ nós na grade.

Repetindo o processo de integração da equação (2.18), no caso do volume de controle vizinho da borda do disco, obtém-se:

$$\eta_{N+2} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{N+2} - \eta_v \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_v - m^2 \eta_{N+1} \varphi_{N+1} \Delta\eta = 0 \quad (2.38)$$

onde

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_{N+2} = 1 \quad (2.39)$$

e

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)_v = \frac{\varphi_{N+1} - \varphi_N}{\eta_{N+1} - \eta_N} \quad (2.40)$$

Substituindo-se na equação (2.38), é possível obter a seguinte equação de discretização:

$$\left[N - 1 + \frac{(2.N - 1)}{2.N^2} m^2 \right] \varphi_{N+1} = (N - 1) \varphi_N + 1 \quad (2.41)$$

que pode ser expressa como:

$$a(N+1) \varphi_{N+1} = b(N+1) \varphi_{N+2} + c(N+1) \varphi_N + d(N+1) \Delta \eta \quad (2.42)$$

onde os coeficientes algébricos são:

$$a(N+1) = N - 1 + \frac{(2.N - 1)}{2.N^2} \quad (2.43)$$

$$b(N+1) = 0 \quad (2.44)$$

$$c(N+1) = N - 1 \quad (2.45)$$

$$d(N+1) = 1 \quad (2.46)$$

2.3.5. - Tratamento dos Nós das Extremidades

O Método do Volume de Controle fornece inicialmente os valores da variável do problema para todos os pontos internos do domínio de cálculo. Para obter a solução total do campo é necessário calcular posteriormente os valores da variável dependente nos nós das extremidades.

Na borda interna, a condição de contorno (2.10), de simetria em $\eta = 0$, impõe que:

$$\varphi(1) = \varphi(2) \quad (2.47)$$

Na borda externa, procede-se de forma análoga à discretização da equação (2.11), obtendo-se:

$$\varphi(N+2) = \frac{1}{2N} + \varphi(N+1) \quad (2.48)$$

Os resultados numéricos obtidos serão apresentados e comparados com a solução analítica no próximo capítulo. O programa de computação desenvolvido é apresentado no apêndice A.

2.4. - Convecção Laminar num Disco Não Isotérmico em Rotação

Considera-se agora um disco em rotação, com velocidade angular constante ω , num meio fluido cujo movimento é induzido apenas pelo movimento do disco. Assumindo uma distribuição axissimétrica da temperatura, o balanço de energia na camada limite térmica do fluido junto ao disco pode ser expressa por:

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial r} + \rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = K_f \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.49)$$

Nesta equação as propriedades do fluido e do disco são consideradas constantes e são desprezados os efeitos de dissipação viscosa.

O caso em que a temperatura T_v na superfície do disco varia, em relação à temperatura não perturbada T_∞ do fluido, na forma:

$$T_v - T_\infty = A r^\lambda \quad (2.50)$$

onde λ é uma constante arbitrária, foi resolvido inicialmente por J. P. HARTNETT (1959). Este autor transformou a equação diferencial parcial (2.49) em uma equação diferencial ordinária, utilizando a temperatura adimensional:

$$\theta(\chi) = \frac{T - T_\infty}{T_v - T_\infty} \quad (2.51)$$

Foram utilizadas a variável de similaridade

$$\chi = z (\omega / \nu)^{1/2} \quad (2.52)$$

e as componentes adimensionais, radial e axial da velocidade,

$$F(\chi) = u / (r \cdot \omega) \quad (2.53)$$

$$H(\chi) = w / (\omega \cdot \nu)^{1/2} \quad (2.54)$$

definidas originalmente por T. von Karman.

Em termos das novas variáveis, a equação (2.49) pode ser expressa na forma:

$$\theta''(\chi) = Pr H(\chi) \theta'(\chi) + Pr \lambda F(\chi) \theta(\chi) \quad (2.55)$$

com condições de contorno:

$$\chi = 0 \quad \theta(\chi) = 1 \quad (2.56)$$

$$\chi \rightarrow \infty \quad \theta(\chi) = 0 \quad (2.57)$$

onde θ' e θ'' indicam respectivamente as derivadas primeira e segunda com relação a χ .

O método usado para obter a solução da equação diferencial (2.55) é indicado no Apêndice B. O programa de computação correspondente é mostrado no apêndice C e os resultados são apresentados no próximo capítulo.

No artigo original de J. P. HARTNETT (1959), foram apresentados resultados para $Pr=0.72$ e para $\lambda=0, 1, 2, 4$ e 10 . No presente trabalho entretanto foi necessário obter soluções para $Pr=0.72$ e $\lambda=3$, assim como para $Pr=6.78$ e $\lambda=0, 1, 2$ e 3 , como será explicado na seção 2.5.

2.4.1.- Transferência de Calor para o Fluido

Define-se o coeficiente local de transferência de calor por convecção h_λ como:

$$q(r) = h_\lambda (T_v(r) - T_\infty) \quad (2.58)$$

Considerando que $q(r)$ também pode ser definido na forma:

$$q(r) = - K_f \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (2.59)$$

e rearranjando em função das variáveis de similaridade, obtém-se:

$$h_\lambda = - K_f (\omega / \nu)^{1/2} \theta'(0) \quad (2.60)$$

O número de Nusselt pode então ser definido como:

$$Nu_\lambda = - \theta'(0) \quad (2.61)$$

Nesta equação o valor de $\theta'(0)$ depende, além do parâmetro λ , do número de Prandtl do fluido.

2.5.- Convecção Laminar num Disco em Rotação com Distribuição Polinomial de Temperatura

No problema considerado neste item assumiu-se que o perfil de temperatura no disco poderia ser representado por um polinômio do tipo:

$$T_v - T_\infty = \sum_{\lambda=0}^n a_\lambda r^\lambda \quad (2.62)$$

O polinômio desta equação pode ser expresso na forma:

$$T_v(r) - T_\infty = (T_{v0} - T_\infty) + (T_{v1} - T_\infty) + (T_{v2} - T_\infty) + (T_{v3} - T_\infty) + \dots \quad (2.63)$$

onde

$$T_{v0} - T_\infty = a_0 \quad (2.64)$$

$$T_{v1} - T_\infty = a_1 r \quad (2.65)$$

$$T_{v2} - T_\infty = a_2 r^2 \quad (2.66)$$

$$T_{v3} - T_\infty = a_3 r^3 \quad (2.67)$$

.....

A cada termo à direita da equação (2.63) corresponde então uma solução da equação (2.55) da energia, da forma vista na seção

2.4.

O fluxo de calor do disco em rotação para o fluido pode ser expresso na forma:

$$q(r) = -K_f \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -K_f \left. \frac{\partial (T-T_\infty)}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.68)$$

Utilizando a variável de similaridade χ e a temperatura adimensional $\theta(\chi)$ já definidas, obtém-se:

$$q(r) = -K_f \left. \frac{\partial (T-T_\infty)}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (2.69)$$

ou

$$q(r) = -K_f (\omega/\nu)^{1/2} \left[(T_{w0}-T_\infty) \left. \frac{\partial \theta_0}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} + (T_{w1}-T_\infty) \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} + \right. \\ \left. + (T_{w2}-T_\infty) \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \chi} \right|_{\chi=0} + \dots \right] \quad (2.70)$$

D. L. OEHELBECK e F. F. ERIAN (1979) obtiveram soluções numéricas da equação da energia sem a aproximação da camada limite utilizada por J. P. HARTNETT (1959) para o mesmo problema do disco em rotação. A comparação dos resultados destes dois trabalhos indicou que o efeito de condução radial de calor no fluido não pode ser desprezado para λ maior ou igual a 4. Desta forma, no presente trabalho, a distribuição de temperatura na superfície do disco, indicada pela equação (2.63), foi considerada como sendo limitada por um polinômio de terceiro

grau. O objetivo desta consideração foi fazer uso das soluções de similaridade.

De acordo com a definição do número de Nusselt na equação (2.61) e as equações (2.64) a (2.67), o fluxo convectivo de calor $q(r)$ pode ser expresso por:

$$q(r) = K_f (\omega/\nu)^{1/2} \left[a_0 \text{Nu}_0 + a_1 \text{Nu}_1 r + a_2 \text{Nu}_2 r^2 + a_3 \text{Nu}_3 r^3 \right] \quad (2.71)$$

Considerando agora o coeficiente local de transferência de calor por convecção no problema com distribuição de temperatura na superfície do disco:

$$h(r) = \frac{q_r}{(T_v - T_\infty)} \quad (2.72)$$

ou

$$h(r) = K_f (\omega/\nu)^{1/2} \frac{\left[a_0 \text{Nu}_0 + a_1 \text{Nu}_1 r + a_2 \text{Nu}_2 r^2 + a_3 \text{Nu}_3 r^3 \right]}{\left[a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 \right]} \quad (2.73)$$

O número de Nusselt local é definido por:

$$\text{Nu}(r) = \frac{\left[a_0 \text{Nu}_0 + a_1 \text{Nu}_1 r + a_2 \text{Nu}_2 r^2 + a_3 \text{Nu}_3 r^3 \right]}{\left[a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 \right]} \quad (2.74)$$

Para fins de apresentação a geometria do problema sugere a variável adimensional:

$$\eta = \frac{r}{r_o} \quad (2.7)$$

Em função desta variável a equação (2.74) pode ser expressa na forma:

$$Nu_r(\eta) = \frac{\left(d_o Nu_o + d_1 Nu_1 \eta + d_2 Nu_2 \eta^2 + d_3 Nu_3 \eta^3 \right)}{\left(d_o + d_1 \eta + d_2 \eta^2 + d_3 \eta^3 \right)} \quad (2.75)$$

onde

$$d_o = a_o \quad (2.76)$$

$$d_1 = a_1 r_o \quad (2.77)$$

$$d_2 = a_2 r_o^2 \quad (2.78)$$

$$d_3 = a_3 r_o^3 \quad (2.79)$$

2.6. - Condução-Convecção Acopladas no Disco Não-Isotérmico em Rotação. Forma Dimensional

No problema de condução no disco delgado apresentado nas seções 2.2 e 2.3, a equação de conservação de energia é expressa por:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[K_s \delta r \frac{d\phi}{dr} \right] - h(r) \phi = 0 \quad (2.80)$$

com condições de contorno

$$r = 0 \quad \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad (2.81)$$

$$r = r_o \quad \frac{d\phi}{dr} = \frac{q_o}{K_s} \quad (2.82)$$

onde

$$\phi = T - T_\infty \quad (2.83)$$

Assim, o campo de temperatura no disco depende das propriedades físicas e geométricas do disco, do fluxo de calor na borda e do coeficiente de transferência de calor por convecção.

Da análise do processo convectivo no fluido, apresentado na seção 2.5, o fluxo de calor na interface disco-fluido pode ser expresso pela equação:

$$q(r) = K_f (\omega/\nu)^{1/2} \left[a_0 Nu_0 + a_1 Nu_1 r + a_2 Nu_2 r^2 + a_3 Nu_3 r^3 \right] \quad (2.71)$$

Verifica-se, assim, a dependência do fluxo convectivo local de calor do disco para o fluido com as propriedades físicas deste, com a velocidade de rotação e com a distribuição de temperatura na superfície do disco.

No problema agora considerado, o fluxo de calor na borda do disco dispõe simultaneamente de dois caminhos. Pode penetrar por condução radial de calor para o centro do disco e pode ser transferido por convecção axial na interface disco-fluido. O balanço entre os dois processos determina o perfil radial de temperatura no disco e será analisado agora.

Nota-se que a solução da equação (2.80) depende do conhecimento do coeficiente convectivo $h(r)$. A equação (2.71) fornece o fluxo convectivo $q(r)$ que é utilizado na obtenção do coeficiente convectivo na forma da equação:

$$h(r) = \frac{q(r)}{(T_s - T_\infty)} \quad (2.72)$$

Esta equação por sua vez depende da distribuição de temperatura na superfície do disco.

Desta forma buscou-se uma solução iterativa do problema de condução-convecção acopladas no disco não-isotérmico em rotação.

2.6.1.- Algoritmo de Solução

O processo iterativo de solução será descrito a seguir com base no fluxograma indicado na Fig. 2.7. Ele abrange as seguintes etapas:

1.- Calcula-se Nu_0 , Nu_1 , Nu_2 e Nu_3 para um fluido pré-determinado.

2.- Admite-se uma distribuição radial, $h_A(r)$, do coeficiente

de transferência de calor por convecção.

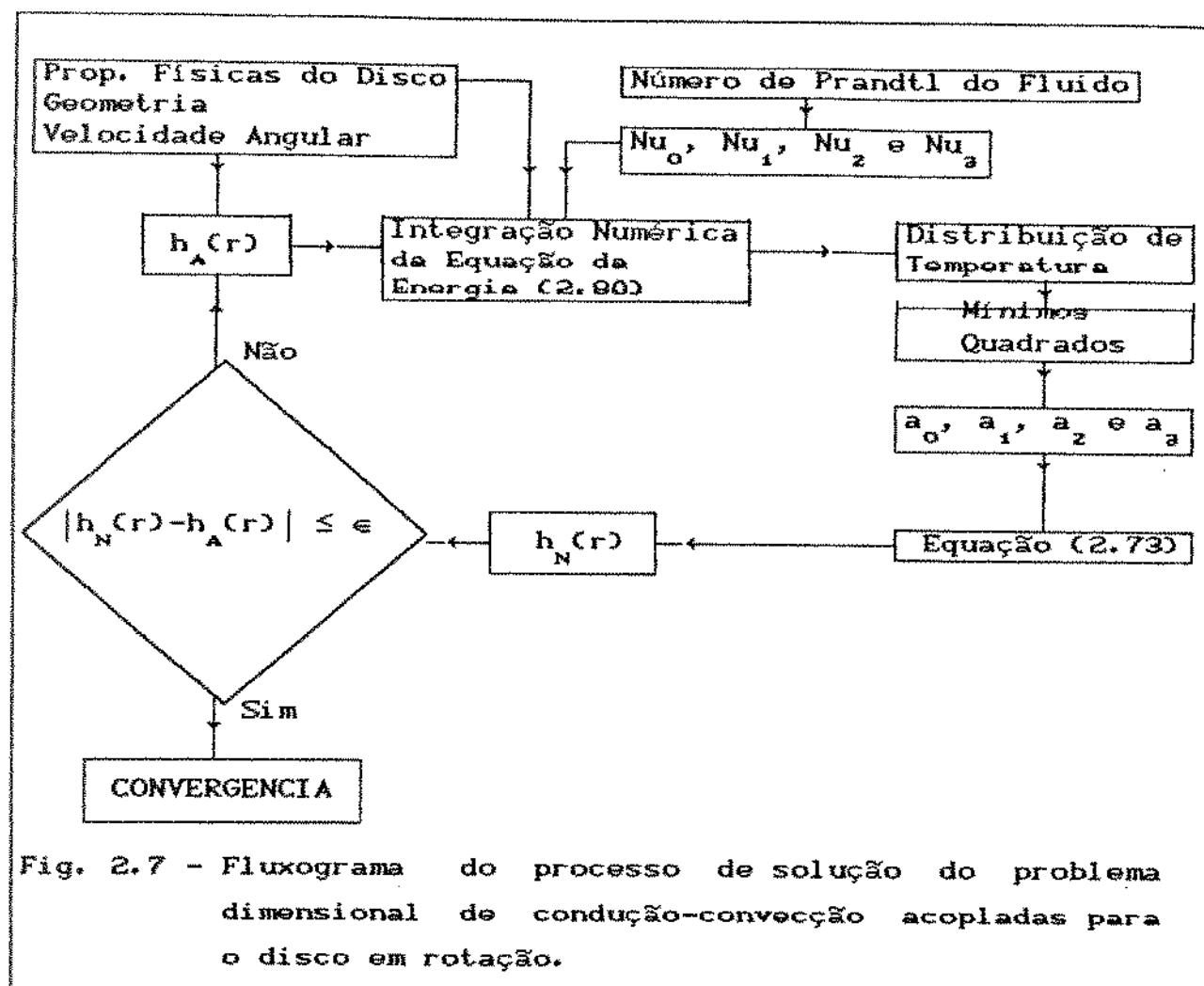


Fig. 2.7 - Fluxograma do processo de solução do problema dimensional de condução-convecção acopladas para o disco em rotação.

3.- Resolve-se a equação de energia (2.80), supondo a distribuição admitida de h . A solução numérica desta equação fornece uma distribuição de temperatura.

4.- À distribuição de temperatura obtida na etapa anterior, aplica-se um processo de regressão por mínimos quadrados para representá-la por um polinômio de terceiro grau.

5.- Os coeficientes do polinômio de ajuste são utilizados na equação (2.73) para obter uma nova distribuição radial $h_N(r)$ do coeficiente de transferência de calor por convecção.

6.- Compara-se a nova distribuição radial de h com a anterior. Se a diferença entre elas for menor que um valor prefixado, o problema terá convergido. Caso contrário admite-se que esta seja a nova distribuição $h_A(r)$ e repete-se o processo, a partir do passo 3 até a convergência.

O processo de integração numérica da equação (2.80) foi realizado utilizando-se o mesmo método empregado na seção 2.3. Os detalhes do processo são apresentados a seguir.

2.6.2.- Obtenção da Equação de Discretização

Integrando a equação da energia (2.80), entre os limites w e e de um volume de controle genérico, indicado na Fig. 2.4, e assumindo que as derivadas nas interfaces são aproximadas linearmente, obtém-se a seguinte equação de discretização:

$$\left[K_e \delta \frac{r_e}{\Delta r} + K_s \delta \frac{r_w}{\Delta r} + \frac{h_p}{2} (r_e^2 - r_w^2) \right] \phi_p = \frac{K_e \delta r_e}{\Delta r} \phi_e + \frac{K_s \delta r_w}{\Delta r} \phi_w \quad (2.84)$$

Esta equação pode ser expressa na forma da equação (2.24), onde os coeficientes algébricos de discretização são:

$$a(i) = K_e \delta \frac{r_e}{\Delta r} + K_s \delta \frac{r_w}{\Delta r} + \frac{h_p}{2} (r_e^2 - r_w^2) \quad (2.85)$$

$$b(i) = \frac{K_s \delta r_e}{\Delta r} \quad (2.86)$$

$$c(i) = \frac{K_s \delta r_v}{\Delta r} \quad (2.87)$$

$$d(i) = 0 \quad (2.88)$$

2.6.3. - Tratamento do Volume de Controle do Centro do Disco

Integrando a equação (2.80) no volume de controle vizinho ao eixo de rotação do disco, indicado na Fig. 2.5, e expressando a solução na forma da equação (2.24), obtém-se a seguinte equação de discretização:

$$\left(K_s \delta \frac{r_e}{\Delta r} + \frac{h_p}{2} r_e^2 \right) \phi_P = K_s \delta \frac{r_e}{\Delta r} \phi_E \quad (2.89)$$

onde os coeficientes algébricos são:

$$a(i) = K_s \delta \frac{r_e}{\Delta r} + \frac{h_p}{2} r_e^2 \quad (2.90)$$

$$b(i) = K_s \delta \frac{r_e}{\Delta r} \quad (2.91)$$

$$c(i) = 0 \quad (2.92)$$

$$d(i) = 0 \quad (2.93)$$

2.6.4. - Tratamento do Volume de Controle da Borda

Repetindo o processo de integração da equação (2.80) no volume de controle vizinho a borda, indicado na Fig. 2.6, é possível obter, neste caso, a seguinte equação de discretização, expressa na forma da equação (2.24):

$$\left(K_s \delta \frac{r_v}{\Delta r} + \frac{h_p}{2} (r_o^2 - r_v^2) \right) \phi_p = \left(K_s \delta \frac{r_v}{\Delta r} \right) \phi_w + q_o r_o \delta \quad (2.94)$$

onde os coeficientes algébricos são:

$$a(i) = K_s \delta \frac{r_v}{\Delta r} + \frac{h_p}{2} (r_o^2 - r_v^2) \quad (2.95)$$

$$b(i) = 0 \quad (2.96)$$

$$c(i) = K_s \delta \frac{r_v}{\Delta r} \quad (2.97)$$

$$d(i) = q_o r_o \quad (2.98)$$

2.6.5. - Tratamento dos Nós das Extremidades

De maneira similar à seção 2.2, a condição de contorno de simetria em $r=0$, equação (2.81), impõe que:

$$\phi(1) = \phi(2) \quad (2.99)$$

Fazendo na borda externa uma consideração análoga à feita no caso da discretização da equação (2.54), obtem-se:

$$\phi(N+2) = \phi(N+1) + \frac{q_o \Delta r}{4 \pi K_e} \quad (2.100)$$

Os resultados deste processo são mostrados no próximo capítulo e o programa computacional correspondente é apresentado no apêndice D.

2.7.- Condução-Convecção Acopladas no Disco Não-isotérmico em Rotação. Forma Adimensional

Como a solução do problema apresentado com as variáveis na forma dimensional só é obtida para casos particulares, procurou-se uma solução numérica em função de variáveis adimensionais com a finalidade de se obter uma solução concisa e matematicamente mais elegante.

A equação (2.4) pode ser apresentada na forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r K_e \frac{dT}{dr} \right] - \frac{1}{\delta} h(r) \left(T(r) - T_{\infty} \right) = 0 \quad (2.101)$$

com condições de contorno:

$$r = 0 \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad (2.102)$$

$$r = r_0 \quad \frac{dT}{dr} = \frac{q_0}{K_s} \quad (2.103)$$

Esta segunda condição sugere a definição das seguintes variáveis adimensionais:

$$\eta = \frac{r}{r_0} \quad (2.7)$$

$$\varphi = \frac{T - T_\infty}{\frac{q_0 r_0}{K_s}} \quad (2.8)$$

Substituindo-se na equação da energia (2.101) e assumindo K_s constante, esta pode ser expressa na forma:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right) - \frac{r_0^2}{K_s \delta} h(\eta) \varphi(\eta) = 0 \quad (2.104)$$

com condições de contorno:

$$\eta = 0 \quad \frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (2.105)$$

$$\eta = 1 \quad \frac{d\varphi(\eta)}{d\eta} = 1 \quad (2.106)$$

Nota-se que no segundo termo desta equação, o produto $h(\eta) \cdot \varphi(\eta)$ pode ser expresso na forma:

$$h(\eta) \cdot \varphi(\eta) = \frac{K_{\infty}}{q_o r_o} h(\eta) \left[T(\eta) - T_{\infty} \right] = \frac{K_{\infty}}{q_o r_o} q(\eta) \quad (2.107)$$

Admitindo-se que o perfil de $\left[T(\eta) - T_{\infty} \right]$ possa ser aproximado por um polinômio de terceiro grau em η , o fluxo convectivo de calor pode ser expresso na forma:

$$q(\eta) = - K_f \left. \frac{dT_f}{dz} \right|_{z=0} = - K_f \sum_{0 \leq i \leq 3} \left. \frac{dT_i}{dz} \right|_{z=0} \quad (2.108)$$

Exprimindo esta equação em função das variáveis χ (2.52) e $\theta(\chi)$ (2.52), obtém-se:

$$\begin{aligned} q(\eta) = K_f \left(\frac{\omega}{\nu_f} \right)^{1/2} & \left[Nu_0 \left[T_{v0} - T_{\infty} \right] + Nu_1 \left[T_{v1} - T_{\infty} \right] + \right. \\ & \left. + Nu_2 \left[T_{v2} - T_{\infty} \right] + Nu_3 \left[T_{v3} - T_{\infty} \right] \right] \end{aligned} \quad (2.109)$$

Os valores de Nu_0 , Nu_1 , Nu_2 e Nu_3 são obtidos do problema da convecção (2.61), para um determinado valor do número de Prandtl do fluido.

Dessa forma, no segundo termo da equação (2.104) o produto $h(\eta) \cdot \varphi(\eta)$ pode ser expresso na forma:

$$\frac{K_s}{q_0 r_0} q(\eta) = K_f \left(\frac{\omega}{\nu_f} \right)^{1/2} \left[Nu_0 b_0 + Nu_1 b_1 \eta + Nu_2 b_2 \eta^2 + \right. \\ \left. + Nu_3 b_3 \eta^3 \right] \quad (2.110)$$

onde os coeficientes b_i estão relacionados com os coeficientes da distribuição dimensional de temperatura na forma:

$$b_0 = \frac{K_s}{q_0 r_0} a_0 \quad (2.111)$$

$$b_1 = \frac{K_s}{q_0} a_1 \quad (2.112)$$

$$b_2 = \frac{K_s r_0}{q_0} a_2 \quad (2.113)$$

$$b_3 = \frac{K_s r_0^2}{q_0} a_3 \quad (2.114)$$

Substituindo as equações (2.107) e (2.110) na equação (2.104), da energia, obtém-se:

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \beta \frac{d\varphi}{d\eta} \right) = Re_0^{1/2} \left[b_0 Nu_0 + b_1 Nu_1 \eta + b_2 Nu_2 \eta^2 + b_3 Nu_3 \eta^3 \right] \quad (2.115)$$

onde o parâmetro β é definido por:

$$\beta = \frac{K_s \delta}{K_f r_o} \quad (2.116)$$

Nesta equação o parâmetro β caracteriza uma condutância relativa da parede do disco. Dessa forma, pode-se prever que a distribuição de temperatura no disco será tanto mais uniforme quanto maior o valor de β .

A equação (2.115) apresenta condições de contorno

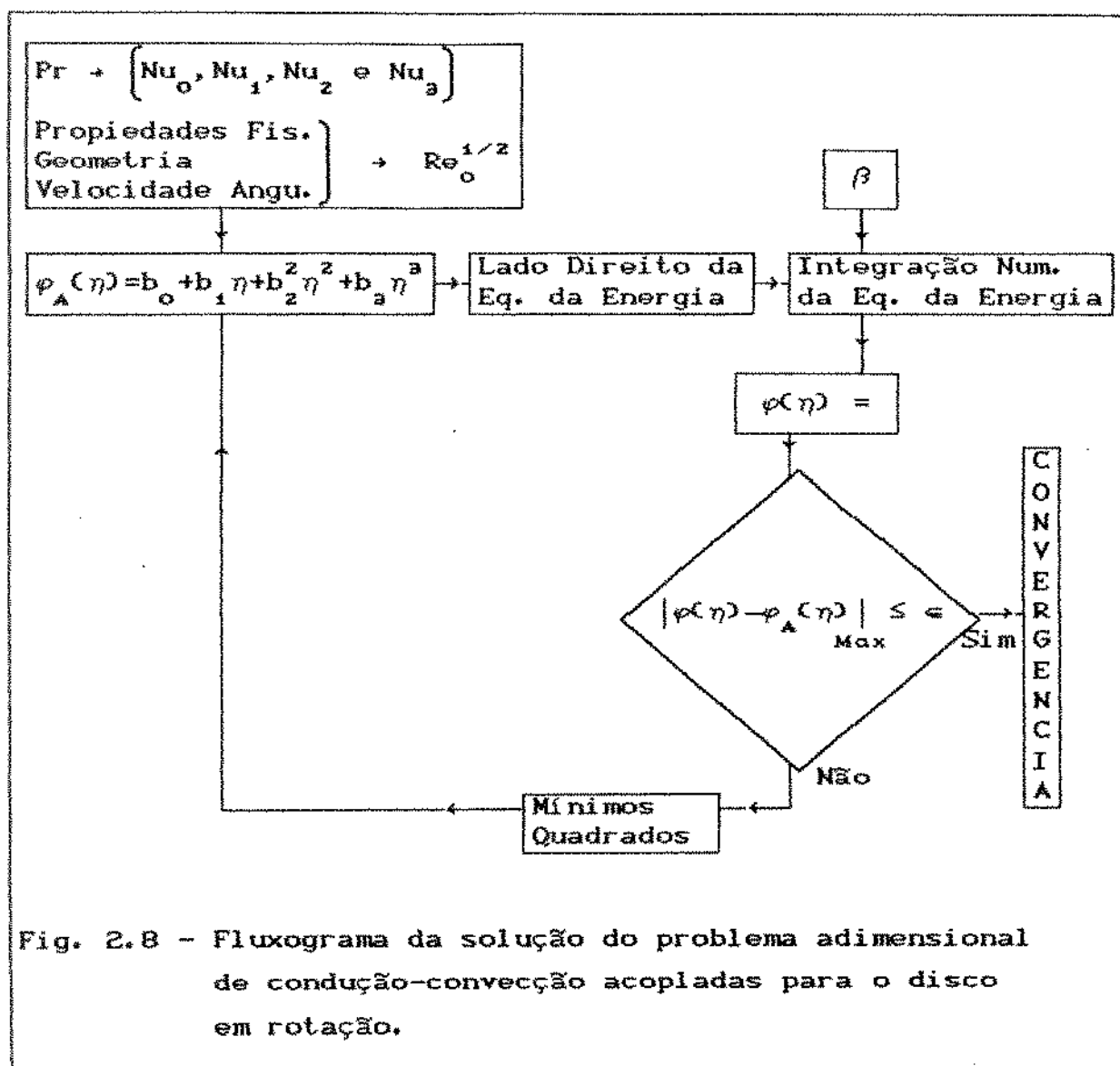
$$\eta = 0 \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = 0 \quad (2.117)$$

$$\eta = 1 \quad \frac{d\varphi}{d\eta} = 1 \quad (2.118)$$

2.7.1.- Algoritmo da Solução

Apresenta-se agora o procedimento para solução do problema de condução-convecção acopladas no disco não isotérmico em rotação, com base no fluxograma indicado na Fig. 2.8. Este fluxograma pode ser descrito pelas seguintes etapas:

1.- A partir das propriedades físicas do fluido e do disco, da velocidade angular e dimensões geométricas calculam-se: Nu_o , Nu_1 , Nu_2 , Nu_3 , Re_o e β .



2.- Admite-se uma distribuição de temperatura:

$$\varphi_A(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + b_3\eta^3$$

e calcula-se o lado direito da equação da energia (2.115).

3.- Integra-se numericamente o lado esquerdo da equação da energia para obter uma nova distribuição de $\varphi(\eta)$. O valor de $\varphi(\eta)$ é assim obtido em cada ponto da grade numérica.

4.- Calcula-se a seguir o valor do polinômio $\varphi_A(\eta)$ nestes pontos. Se a diferença entre eles em qualquer ponto for superior a ϵ , o processo continua no passo 5.

5.- Aplica-se um processo de regressão por mínimos quadrados para ajustar a nova distribuição de $\varphi(\eta)$ por um polinômio de terceiro grau, obtendo assim um novo polinômio $\varphi_A(\eta)$. A seguir retorna-se ao passo 3.

O processo de integração numérica da equação da energia (2.115), foi realizado utilizando-se o mesmo método empregado na solução da seção 2.3.

2.7.2.- Obtenção da Equação de Discretização

Integrando a equação da energia (2.115), entre os limites w e e de um volume de controle genérico, indicado na Fig. 2.4, e assumindo que as derivadas nas interfaces são aproximadas linearmente, obtem-se a seguinte equação de discretização:

$$\left\{ \beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} + \beta \frac{\eta_w}{\Delta\eta} + Re_o^{1/2} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{b_i Nu_i}{i+2} (\eta_e^{i+2} - \eta_w^{i+2}) \right] \frac{1}{\varphi_P^*} \right\} \varphi_P =$$

$$\beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} \varphi_E + \beta \frac{\eta_w}{\Delta\eta} \varphi_W \quad (2.119)$$

onde φ_P^* é o valor admitido da temperatura no volume de controle correspondente ao nó P da malha.

Note-se que a equação (2.119) pode ser expressa na forma:

$$a(i) \varphi_P = b(i) \varphi_E + c(i) \varphi_W + d(i) \Delta\eta \quad (2.120)$$

onde os coeficientes algébricos são:

$$a(i) = \beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} + \beta \frac{\eta_v}{\Delta\eta} + Re_o^{1/2} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{b_i Nu_i}{i+2} \left(\eta_e^{i+2} - \eta_v^{i+2} \right) \right] \frac{1}{\varphi_P^*} \quad (2.121)$$

$$b(i) = \beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} \quad (2.122)$$

$$c(i) = \beta \frac{\eta_v}{\Delta\eta} \quad (2.123)$$

$$d(i) = 0 \quad (2.124)$$

2.7.3.- Tratamento do Volume de Controle do Centro do Disco

Integrando a equação (2.115) no volume de controle vizinho ao eixo de rotação do disco, indicado na Fig. 2.5, e expressando a solução na forma da equação (2.24), obtem-se a seguinte equação de discretização:

$$\left\{ \beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} + Re_o^{1/2} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{b_i Nu_i}{i+2} \eta_e^{i+2} \right] \frac{1}{\varphi_P^*} \right\} \varphi_P = \beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} \varphi_E \quad (2.125)$$

onde os coeficientes algébricos são:

$$a(i) = \beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} + Re_o^{1/2} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{b_i Nu_i}{i+2} \eta_e^{i+2} \right] \frac{1}{\varphi_P^*} \quad (2.126)$$

$$b(i) = \beta \frac{\eta_e}{\Delta\eta} \quad (2.127)$$

$$c(i) = 0 \quad (2.128)$$

$$d(i) = 0 \quad (2.129)$$

2.7.4.- Tratamento do Volume de Controle da Borda

Repetindo o processo de integração da equação (2.115) no volume de controle vizinho da borda do disco é possível obter, nesta situação, a seguinte equação de discretização:

$$\left\{ \beta \frac{\eta_v}{\Delta\eta} + Re_o^{1/2} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{b_i Nu_i}{i+2} (\eta_e^{i+2} - \eta_v^{i+2}) \right] \frac{1}{\varphi_P^*} \right\} \varphi_P = \beta \frac{\eta_v}{\Delta\eta} \varphi_w + \beta \eta_e \quad (2.130)$$

onde os coeficientes algébricos são:

$$a(N+1) = \left\{ \beta \frac{\eta_v}{\Delta\eta} + Re_o^{1/2} \left[\sum_{i=0}^4 \frac{b_i Nu_i}{i+2} (\eta_e^{i+2} - \eta_v^{i+2}) \right] \frac{1}{\varphi_P^*} \right\} \quad (2.131)$$

$$b(N+1) = \beta \frac{\eta_v}{\Delta\eta} \quad (2.132)$$

$$c(N+1) = 0 \quad (2.133)$$

$$d(N+1) = 0 \quad (2.134)$$

2.7.5.- Tratamento dos Nós das Extremidades

Da mesma forma que na seção 2.2, a condição de contorno de simetria em $\eta=0$, equação (2.117), impõe que:

$$\varphi(1) = \varphi(2) \quad (2.135)$$

Fazendo na borda externa uma consideração análoga à feita no caso da discretização da equação (2.48), obtem-se:

$$\varphi(N+2) = \varphi(N+1) + \frac{\Delta\eta}{2} \quad (2.136)$$

Os resultados obtidos e o programa correspondente são apresentados no próximo capítulo e no apêndice E respectivamente.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1. - Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos obtidos com o disco não isotérmico em rotação, utilizando as análises desenvolvidas no capítulo 2.

Na seção 3.2 apresentam-se resultados do problema da condução num disco delgado aquecido radialmente.

São apresentados na seção 3.3 resultados do problema de transferência de calor por convecção para os casos em que o disco encontra-se submerso em ar e também em água.

Os resultados do problema de condução-convecção acopladas são apresentados na seção 3.4, nos casos de distribuições de temperatura dimensional e adimensional.

3.2. - Soluções Analítica e Numérica do Problema da Condução

Apresentam-se agora resultados analíticos e numéricos obtidos utilizando o programa do apêndice A, baseado na análise das seções 2.2 e 2.3.

Foram obtidas distribuições de temperatura adimensional φ (equação (2.8)) em função da coordenada radial adimensional η . Estas distribuições foram obtidas para valores do parâmetro m iguais a 0.5, 1, 2, 5 e 10, no caso de $N=40$ e são apresentadas na Fig. 3.1. A distribuição de temperaturas indica valores maiores sempre na borda do disco e valores relativamente menores a medida

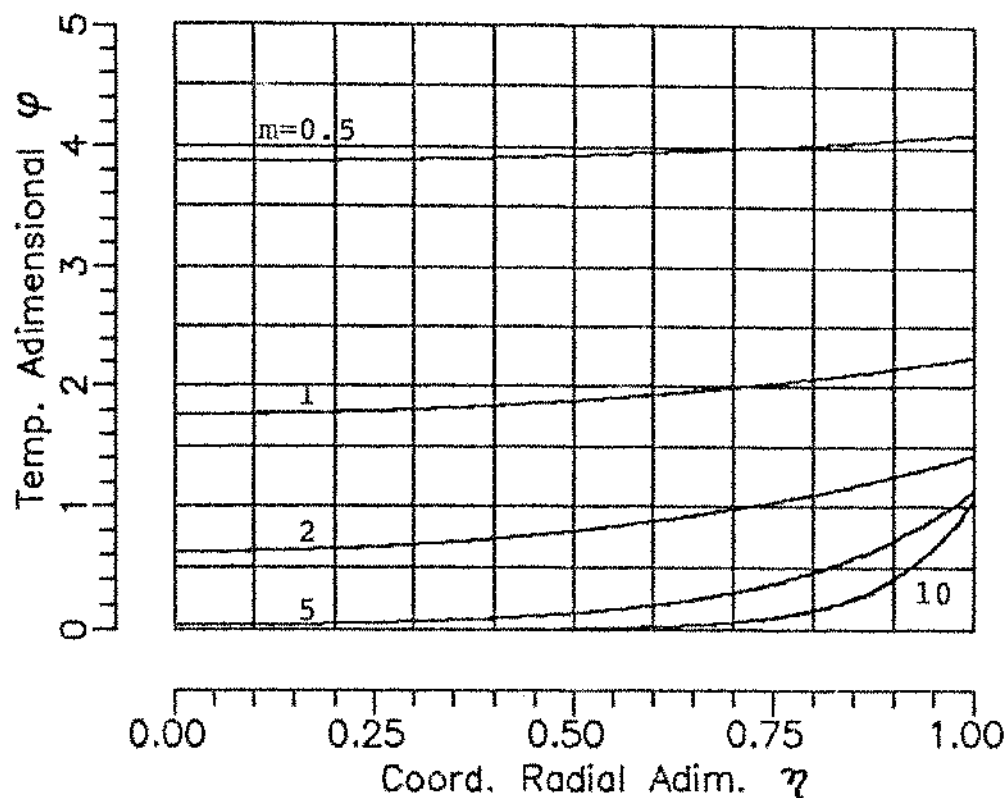


Fig. 3.1 - Temp. Adimensional do Disco para $m=0.5, 1, 2, 5$ e 10
Sol. Analítica e Numérica

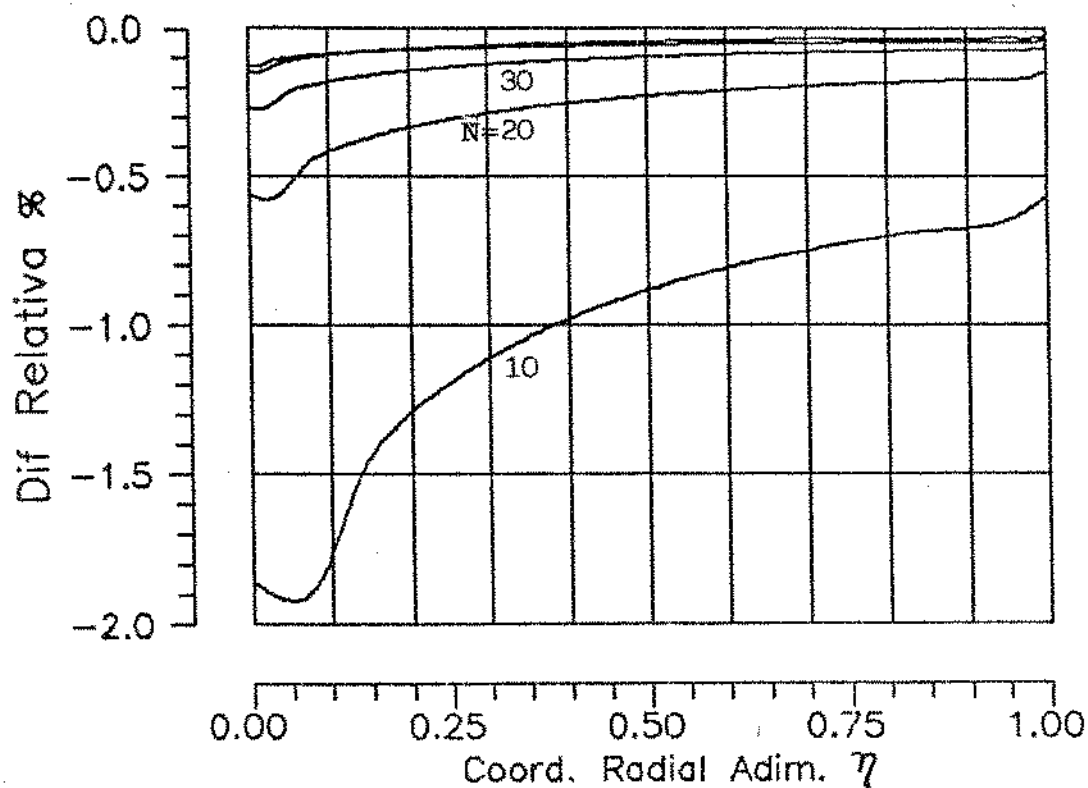


Fig. 3.2 - Diferencia Relativa %
 $m = 1$
 $N = 10, 20, 30, 40$ e 50

que o parâmetro m aumenta. Estes dois comportamentos são fisicamente realistas.

Nota-se que não é possível distinguir nesta figura, entre os resultados numéricos e analíticos. Na realidade obtém-se pequenas diferenças que dependem fundamentalmente do número de pontos da grade no processo numérico de cálculo e do erro de truncamento. Para poder quantificar a exatidão destes resultados, ou seja, o erro de discretização, apresenta-se na Fig. 3.2 a distribuição da diferença relativa porcentual de temperatura:

$$\frac{(T_{\text{Num}} - T_{\text{An}})}{T_{\text{An}}} \cdot 100 \quad (3.1)$$

em função da coordenada radial adimensional η para N variando desde 10 até 50 no caso de $m=1$. As soluções envolvem o cálculo de valores de funções de Bessel, avaliados numericamente com dez termos de cada série. Qualquer número adicional de termos destas séries não afetaria os resultados obtidos.

Observa-se que para todas as distribuições, as maiores diferenças relativas aparecem perto do eixo de rotação do disco. Percebe-se também a diminuição das diferenças relativas para valores crescentes do número de pontos da grade.

Foram efetuados testes adicionais com valores de N até 100, obtendo-se diferenças relativas sempre decrescentes com o número de pontos da grade. Considerou-se entretanto que o desvio máximo de 0.2 % em relação à solução analítica, obtido com 40 pontos, era suficientemente pequeno.

3.2.- Resultados da Convecção Laminar num Disco Não Isotérmico em Rotação

Apresentam-se agora resultados do problema de transferência de calor por convecção, obtidos utilizando o programa de computação apresentado no apêndice C. Os casos resolvidos, necessários para a obtenção da solução do problema acoplado, são indicados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1		
Numero de Nusselt para Disco Não Isotérmico em Rotação		
$\lambda \backslash Pr$	0.72	6.78
0	0.330	0.958
1	0.437	1.196
2	0.524	1.378
3	0.596	1.528

Esta tabela contém os valores dos números de Nusselt para o ar e para a água nos casos de $\lambda=0, 1, 2$ e 3 . Estes valores do número de Nusselt foram obtidos neste trabalho para casos de $Pr=6.78$ e também para $Pr=0.72$ e $\lambda=3$. Os demais resultados estavam disponíveis na literatura (J. P. Hartnett (1959)) e foram utilizados para verificar a precisão do método adotado.

3.3.- Resultados da Condução-Convecção Acopladas no Disco Não Isotérmico em Rotação

Nesta seção são apresentados resultados do problema de condução-convecção acoplado para o disco não isotérmico em rotação. Os resultados abrangem os casos em que a equação da energia é apresentada na forma dimensional, equação (2.80), ou adimensional, equação (2.115).

Foram obtidos resultados numéricos para discos submersos em água ou em ar, na forma de distribuições de temperatura e do número de Nusselt local, para uma faixa de número de Reynolds desde 100 até 100000.

Na Fig. 3.3 apresentam-se distribuições radiais de temperatura para um disco de aço de raio $r_o = 0.2$ m, de espessura $\delta = 0.01$ m, com influxo radial de calor $q_o = 398$ W/m², em rotação no ar com número de Reynolds 1000, 10000 e 100000. Nota-se a coerência física dos resultados, que apresentam uma temperatura mais elevada nas bordas do disco e um patamar decrescente com o número de Reynolds.

A Fig. 3.4 apresenta a distribuição do número de Nusselt local para a mesma configuração da Fig. 3.3. Nota-se que no centro do disco o valor de Nusselt independe do número de Reynolds, como indicado na equação (2.74), coincidindo com o valor correspondente a $\lambda = 0$ na Tabela 3.1. Excetuando-se o centro, o valor do número de Nusselt cresce com a posição radial e com o número de Reynolds.

A seguir, apresentam-se as soluções para a mesma configuração já definida, no caso em que o fluido refrigerante é água.

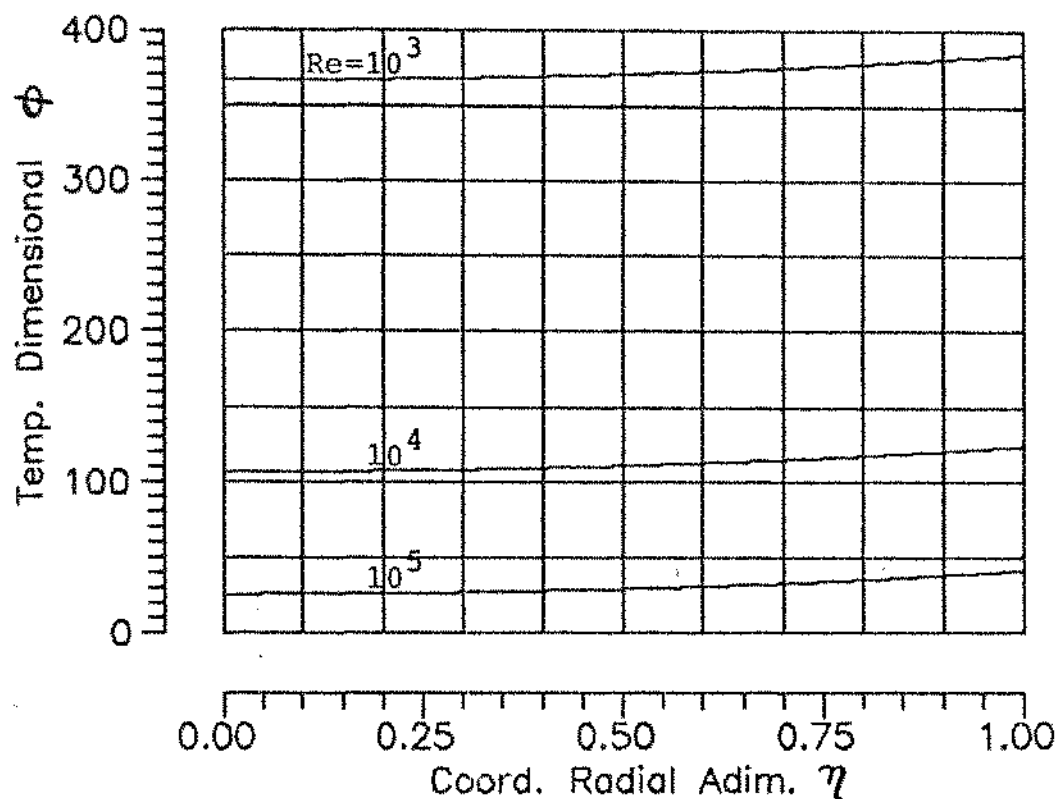


Fig. 3.3 – Temperatura Dimensional
 $Pr=0.72$, $R=0.2m$, $Esp=0.01m$
 Re entre 1000 e 100000

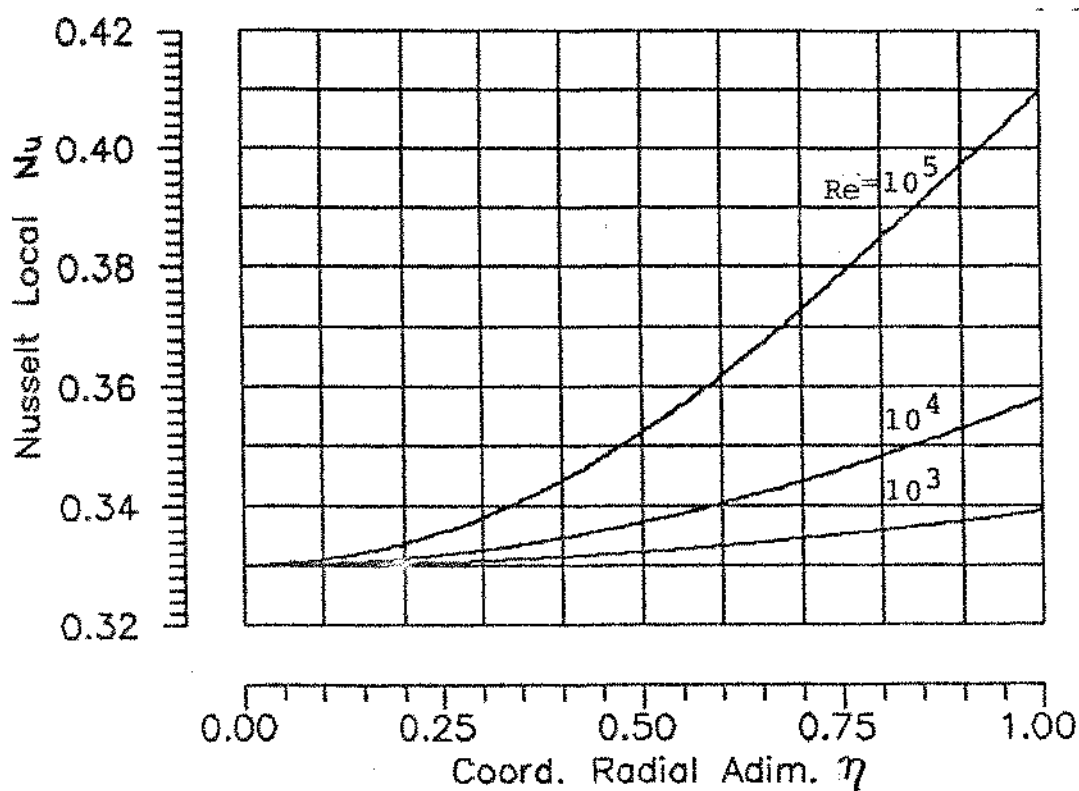


Fig. 3.4 – Nusselt Local
 $Pr=0.72$, $R=0.2m$, $Esp=0.01m$
 Re entre 1000 e 100000

A Fig. 3.5 apresenta a distribuição radial de temperatura considerando-se em relação às condições da Fig. 3.3 apenas a mudança do fluido para a água. O número de Reynolds neste caso varia na faixa entre 100 e 5000. Para Reynolds mais elevados, o método de solução adotado apresentou resultados incoerentes e mesmo negativos do número de Nusselt. A origem deste problema pode ser visualizada na própria Fig. 3.5. Para Reynolds igual a 5000, a temperatura dimensional no centro do disco é da ordem de 0.05°C . Esta temperatura é obtida numericamente no processo iterativo descrito na seção 2.6.1 e ajustada, através de um processo de mínimos quadrados, por um polinômio de terceiro grau. O problema surgiu quando o número de Reynolds era superior a 1000, pois neste caso as temperaturas calculadas no centro do disco eram muito próximas de zero numa extensão muito longa da posição radial, a partir do centro do disco. A partir da metade do disco, ($\eta > 0.5$), o perfil de temperaturas apresentava um gradiente considerável. Este tipo de perfil não pode ser bem representado por um polinômio de terceiro grau. Este fato acabava acarretando resultados incoerentes na distribuição de Nusselt que foram descartados. Um grau maior do polinômio de ajuste foi evitado pelas razões físicas indicadas na seção 2.5.

A Fig. 3.6 apresenta o número de Nusselt local correspondente às condições da Fig. 3.5. Os resultados são coerentes, com um valor comum no centro do disco, correspondente àquele de Nu_0 na Tabela 3.1 e com valores crescentes com a posição radial e com o número de Reynolds.

Apresentam-se a seguir as soluções numéricas utilizando a forma adimensional da equação da energia (2.98).

As Fig. 3.7 a 3.9 apresentam perfis da temperatura

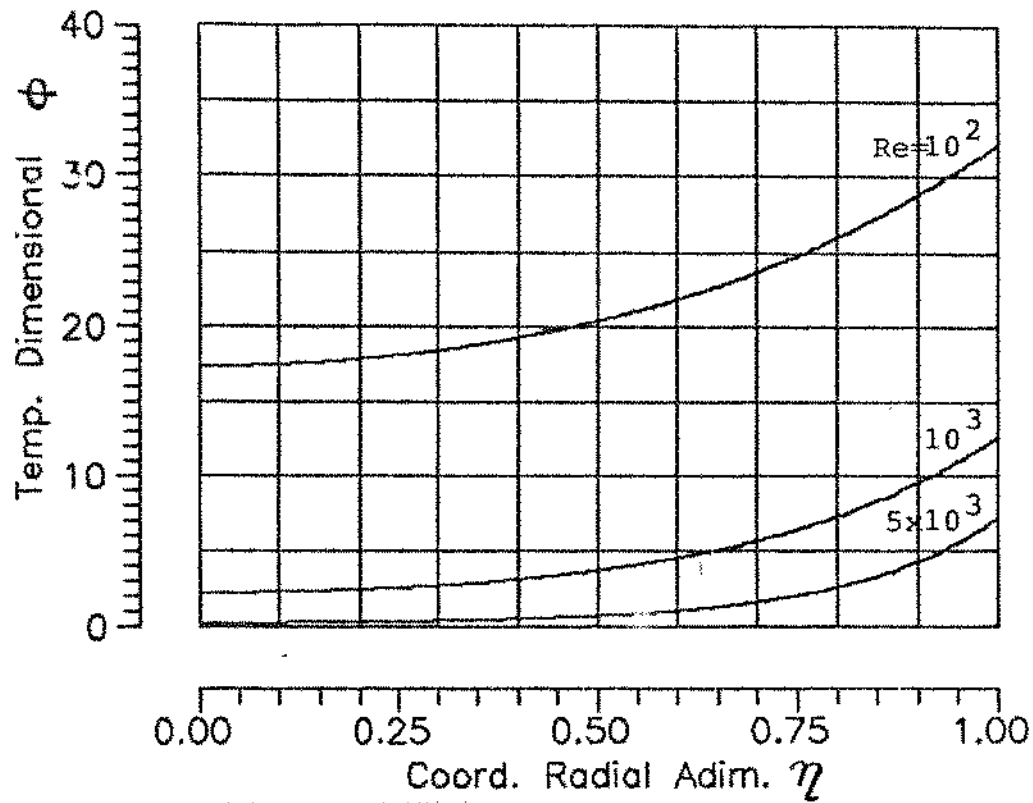


Fig. 3.5 - Temperatura
 $Pr=6.78$, $R=0.2m$, $Esp=0.01m$
 Re entre 100 e 5000

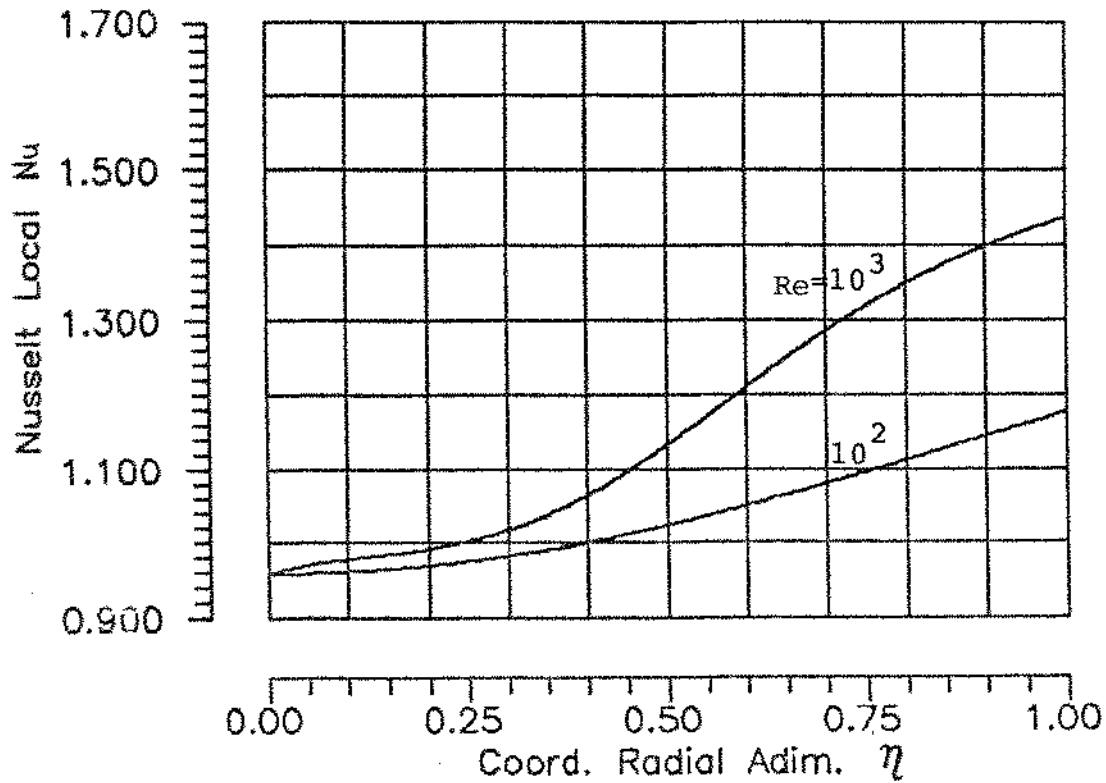


Fig. 3.6 - Nusselt Local
 $Pr=6.78$, $R=0.2m$, $Esp=0.01m$
 Re entre 100 e 1000

adimensional φ , equação (2.8), no caso de $Pr = 0.72$. São considerados três valores de β : 5, 50 e 500 e as curvas estão parametrizadas com o número de Reynolds. Como era de se esperar, a uniformidade da temperatura no disco aumenta com o valor de β . Valores crescentes do número de Reynolds sempre aumentam as velocidades do escoamento fluido e com isso causam um aumento do coeficiente convectivo de troca de calor com o disco. Os resultados obtidos indicam assim, em cada uma dessas figuras, que o crescimento do número de Reynolds causa uma diminuição na temperatura do disco. À medida em que o valor de β diminui, a temperatura do disco torna-se menos uniforme, sendo mais elevada na borda. Destas observações, é de se esperar que valores pequenos do parâmetro β associados simultaneamente a valores elevados do número de Reynolds forneçam temperaturas muito pequenas no centro do disco. Neste caso também, o procedimento adotado de solução poderá apresentar problemas análogos àquele descrito anteriormente.

Nas Figs. 3.10 a 3.12 são apresentadas as distribuições do número de Nusselt correspondentes às três figuras anteriores. No centro do disco todas as distribuições convergem para o valor indicado na Tabela 3.1, correspondente a $Pr = 0.72$ e $\lambda = 0$, como era previsto pela equação (2.75). Quando o valor de β aumenta, o disco tende a ser isotérmico e a distribuição do número de Nusselt torna-se mais uniforme. Assim na Fig. 3.10, correspondente a $\beta=500$, para o valor máxima de Reynolds no regime laminar, a variação do número de Nusselt no disco foi da ordem de 3 por cento. Já no caso de $\beta = 5$, na Fig. 3.10, para um valor de Reynolds igual apenas a 5.000, a variação do número de Nusselt no disco foi de 42 por cento.

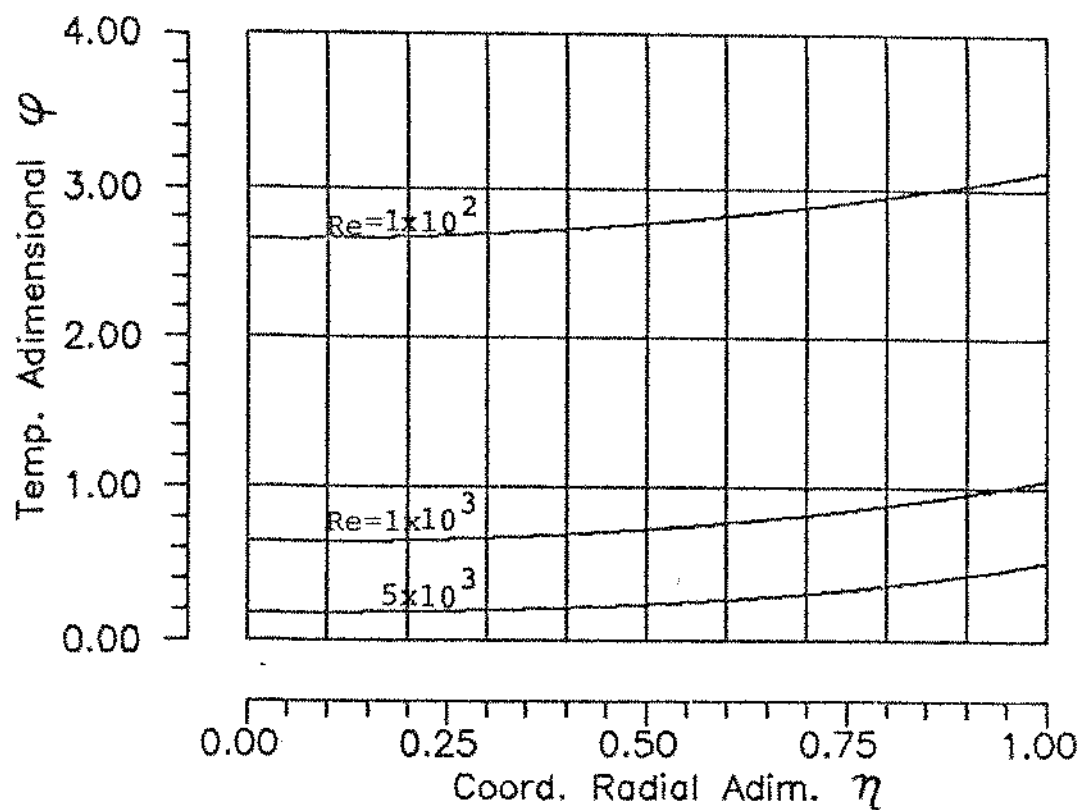


Fig 3.7 - Temp. Adimensional
 $Pr=0.72$, $Beta=5$
 Re entre 100 e 5000

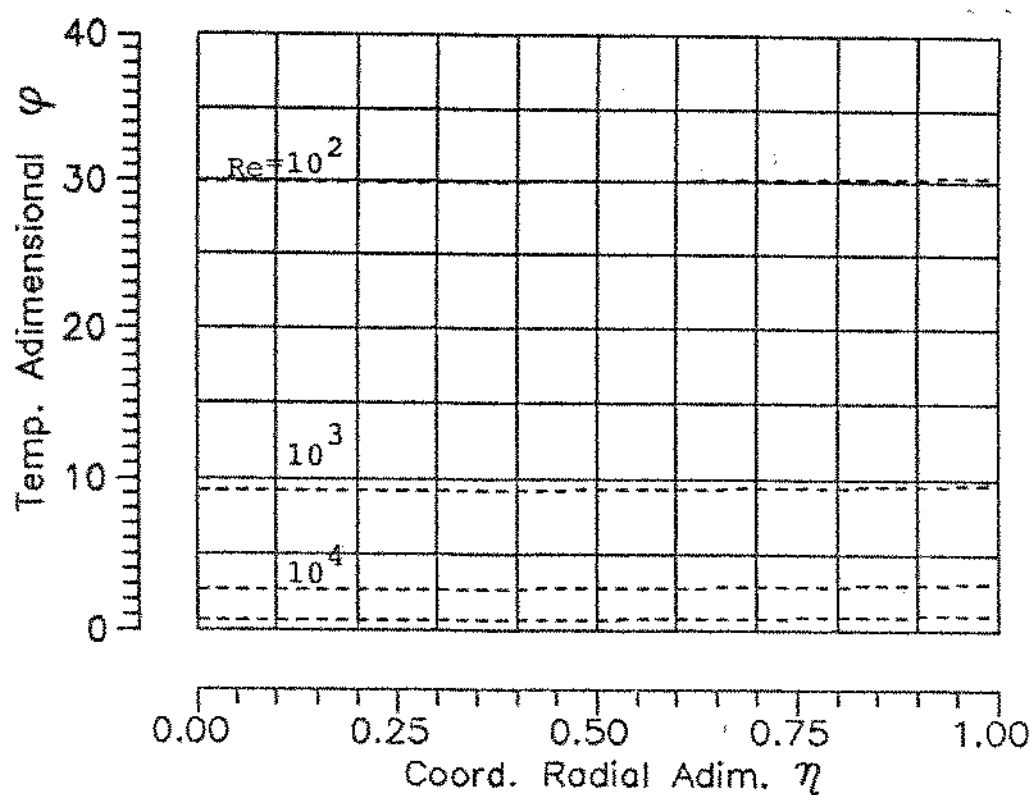


Fig 3.8 - Temp. Adimensional
 $Pr=0.72$, $Beta=50$
 $Re=100$ ate 100000

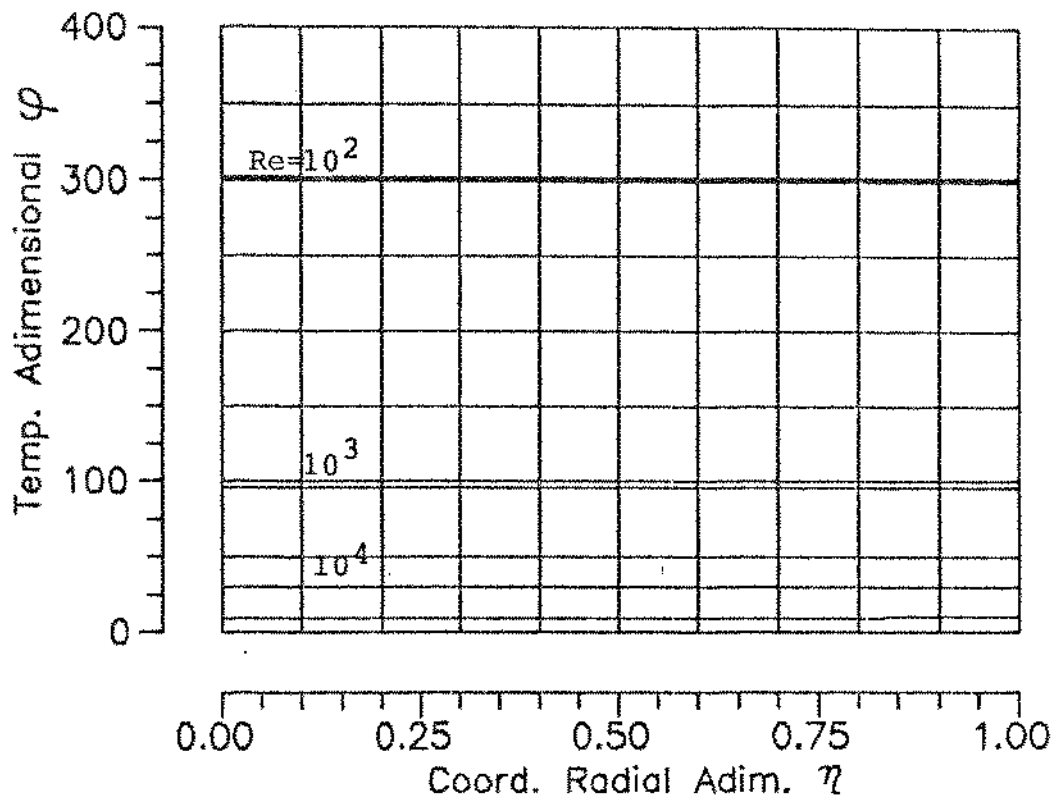


Fig 3.9 - Temp. Adimensional
 $Pr=0.72$, $Beta=500$
 $Re=100$ ate 100000

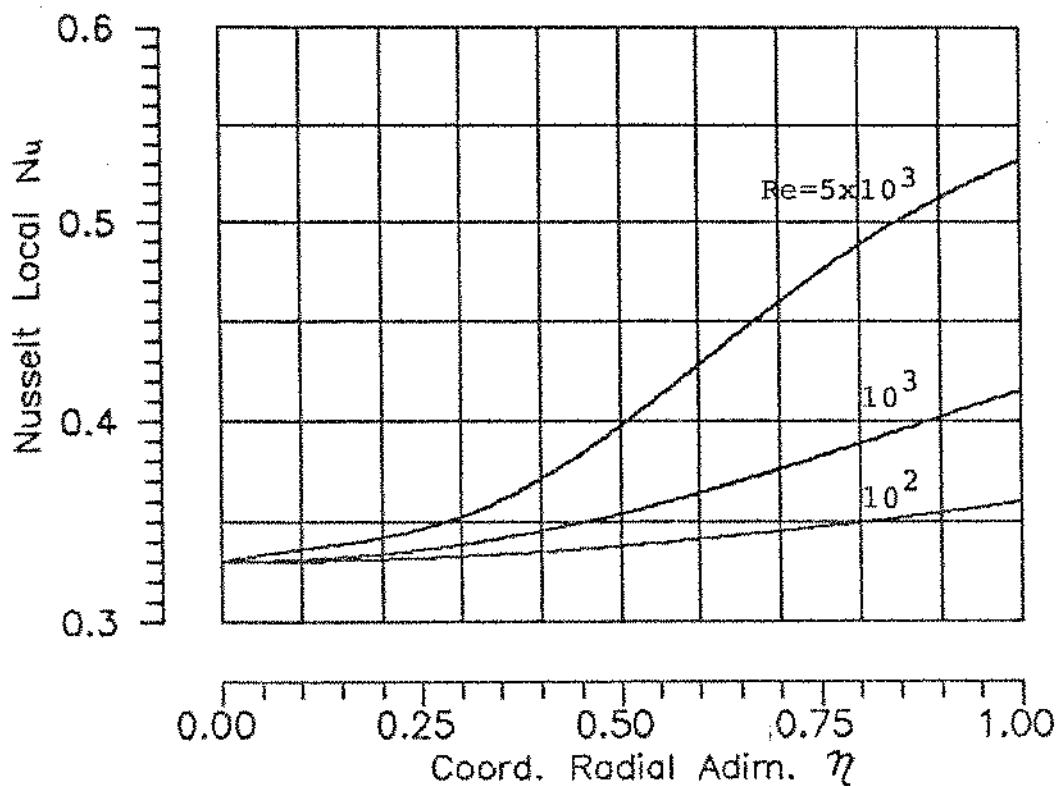


Fig 3.10 - Numero de Nusselt
 $Pr=0.72$, $Beta=5$
 $Re=100$ ate 5000

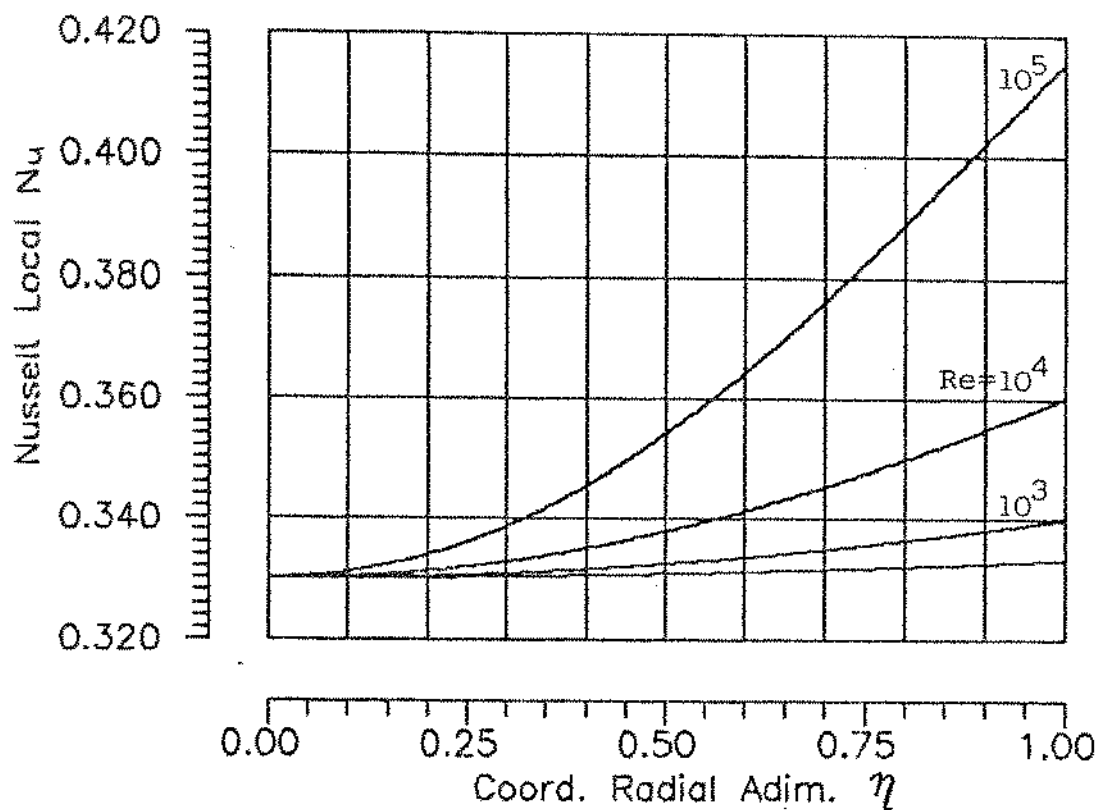


Fig 3.11 - Numero de Nusselt
 $Pr=0.72$, $Beta=50$
 $Re=100$ ate 100000

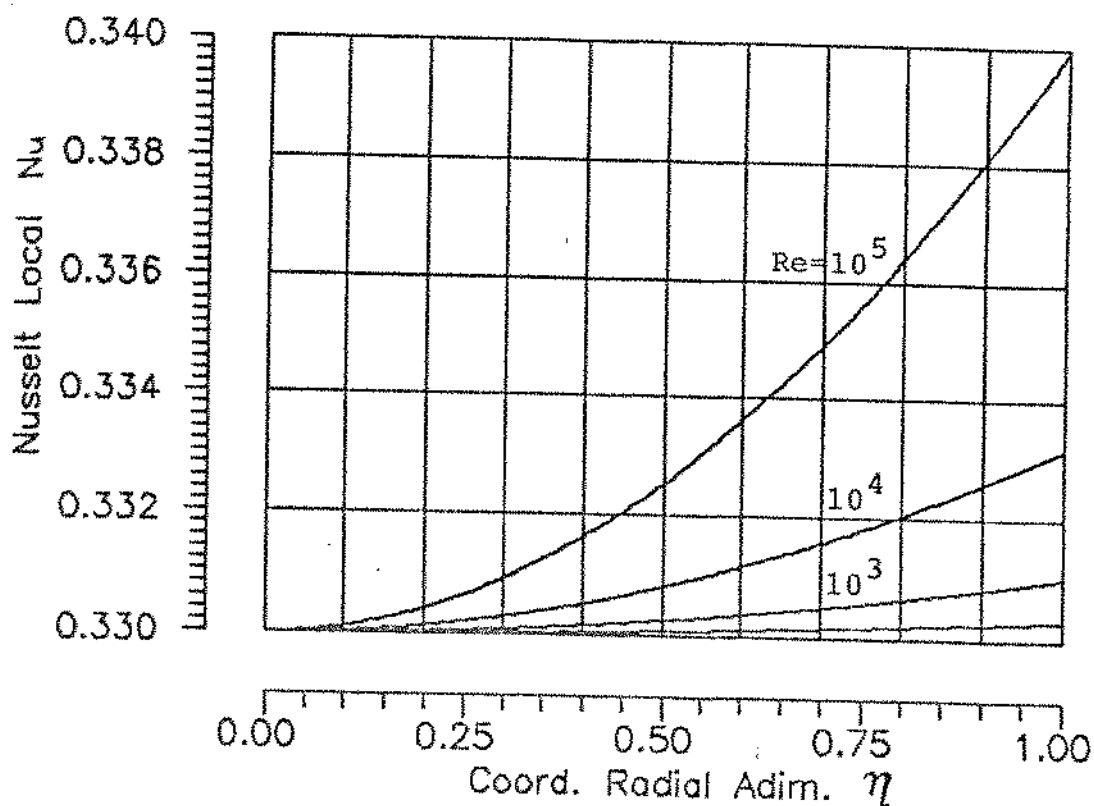


Fig 3.12 - Numero de Nusselt
 $Pr=0.72$, $Beta=500$
 $Re=100$ ate 100000

Para cada valor do parâmetro β , o aumento do número de Reynolds causa, como já foi mencionado, uma diminuição da temperatura do disco. Este efeito é preponderante no cálculo do número de Nusselt, que aumenta com o número de Reynolds nas figuras mencionadas. A Tabela 3.1 indica, para cada valor do número de Prandtl, que Nu_λ aumenta com λ . Dessa forma, a equação (2.78) prevê um aumento de Nusselt com a posição radial confirmado nessas figuras.

Resultados obtidos com o número de Prandtl correspondente à água são indicados nas Figs. 3.13 e 3.14. O aumento do número de Prandtl torna maiores os valores de Nusselt, diminuindo assim a temperatura do disco, em comparação com o caso do ar ($Pr=0.72$). Desta forma, o problema mencionado do ajuste da temperaturas pelo polinômio de terceiro grau é mais acentuado para $Pr=6.78$. Comparando-se por exemplo nas Figs. 3.11 e 3.14 as distribuições de Nusselt para $Re=100.000$, verifica-se o comportamento já no limite do realismo físico no caso de $Pr=6.78$. Nos demais aspectos, tanto a distribuição de temperaturas quanto do número de Nusselt são análogas aos casos anteriores, valendo observações semelhantes.

A seguir foi efetuada uma comparação entre as distribuições de temperaturas obtidas no caso do problema acoplado e no caso de uma solução analítica do problema da condução associado. No centro do disco, o valor do número de Nusselt é sempre igual a Nu_0 , o valor corresponde ao disco isotérmico, associado ao número de Prandtl do fluido. Tomando-se este valor uniforme como referência, é possível obter a distribuição de temperatura da solução analítica do problema da condução. No caso da formulação adimensional do problema acoplado, caracterizado pelos parâmetros

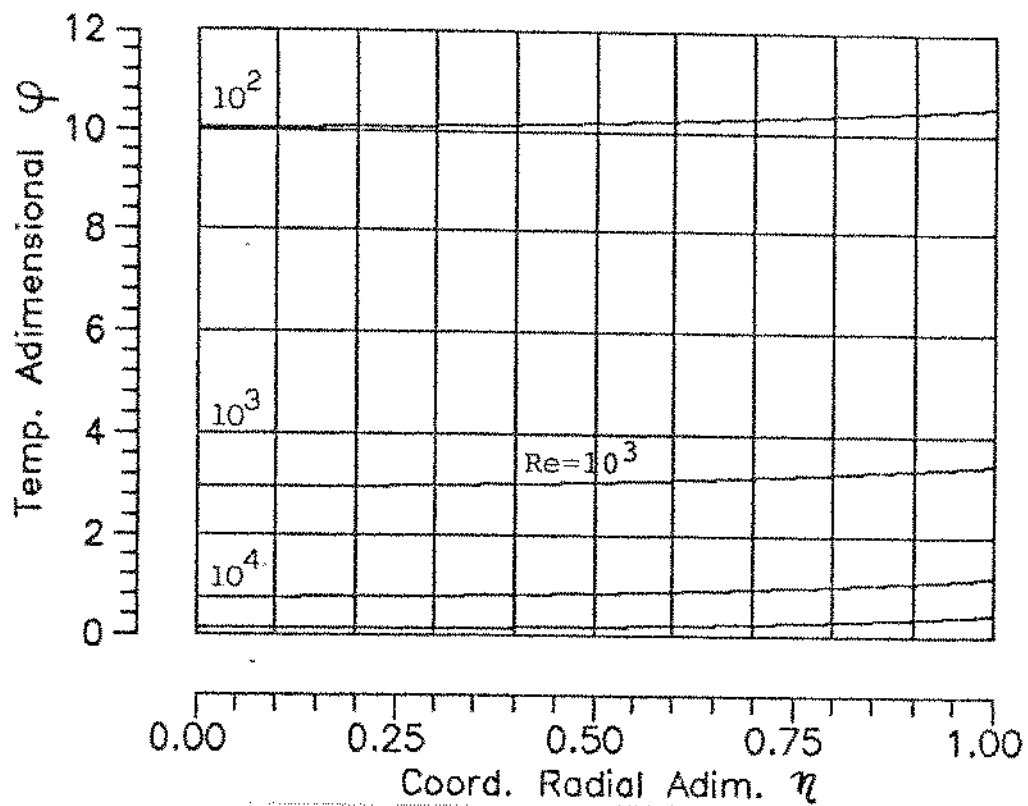


Fig 3.13 – Temp. Adimensional
 $Pr=6.78$, $Beta=50$
 $Re=100$ ate 100000

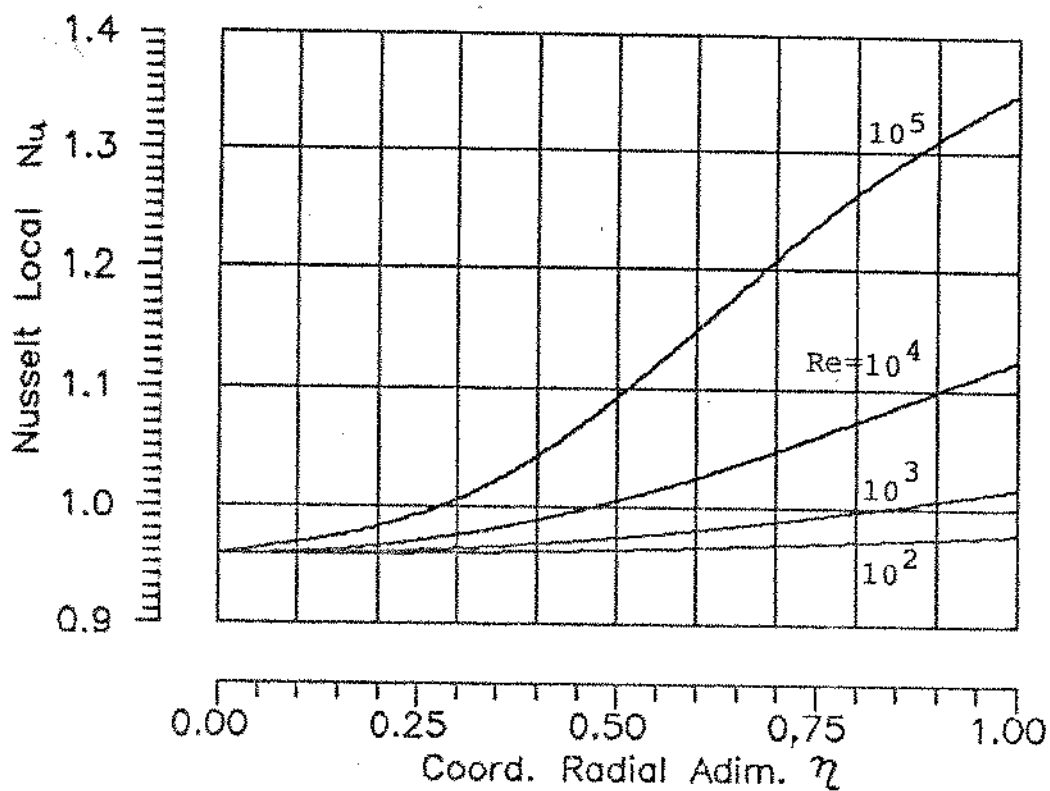


Fig 3.14 – Nusselt Local
 $Pr=6.78$, $Beta=50$
 $Re=100$ ate 100000

Re , Pr e β , o coeficiente adimensional m (2.13) da solução analítica associada foi obtido através da relação

$$m^2 = \frac{Nu_o \cdot Re^{1/2}}{\beta} \quad (3.1)$$

Obtiveram-se assim dois perfis de temperatura para comparação: um correspondente ao problema acoplado e o outro à solução analítica do problema da condução no caso Nu_o uniforme. As Figs. 3.15 a 3.17 indicam resultados desta comparação. As Figs. 3.15 e 3.16 correspondem ao caso considerado de distribuição mais uniforme de $Nu(r)$, ie, $\beta=500$. A distribuição de temperatura da solução analítica é sempre mais elevada devido ao valor menor de Nu_o em comparação com $Nu(r)$ do problema acoplado. À medida em que o valor de Re diminui, a distribuição de $Nu(r)$ torna-se mais uniforme e as temperaturas nos dois casos são mais próximas. Dessa forma, no centro do disco as diferenças relativas são de 1,3 % para $Re=100.000$ e de 0,4 % para $Re = 1.000$. Considerando agora o caso oposto, em que a condutância relativa da parede é bem menor, $\beta=5$, a Fig. 3.17 indica a comparação para $Re=5.000$. A variação de $Nu(r)$ do problema acoplado é agora bem mais pronunciada, de modo que a diferença maior de temperatura é prevista entre as duas soluções. Assim, no centro do disco a diferença relativa é agora de 39%. Nota-se também nestas três figuras que a diferença entre as distribuições de temperatura é praticamente constante em todo o disco, sugerindo que o uso de um valor médio de Nusselt poderia torná-las mais próximas. Esse valor médio entretanto dependeria de se obter inicialmente a solução do problema acoplado. A

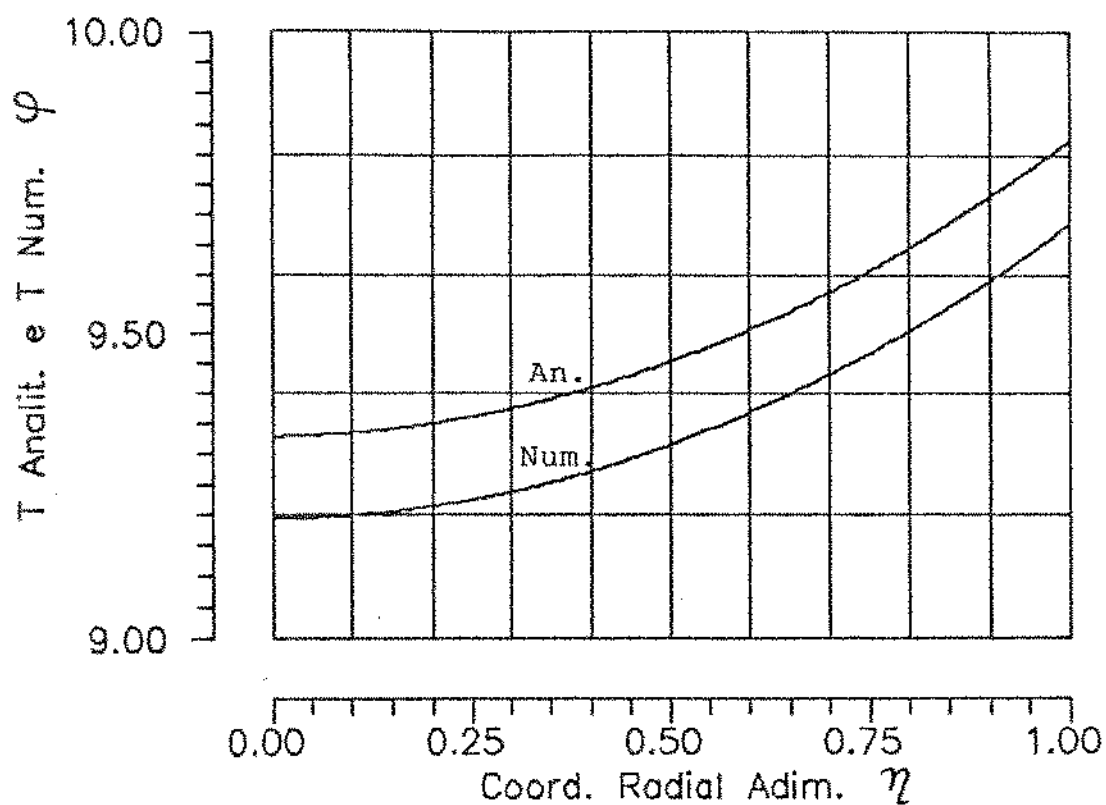


Fig. 3.15 – Temp. Analit.
 $m=0.457$ e Temp. Num. $Pr=0.72$
 $Beta=500$ e $Re=100000$

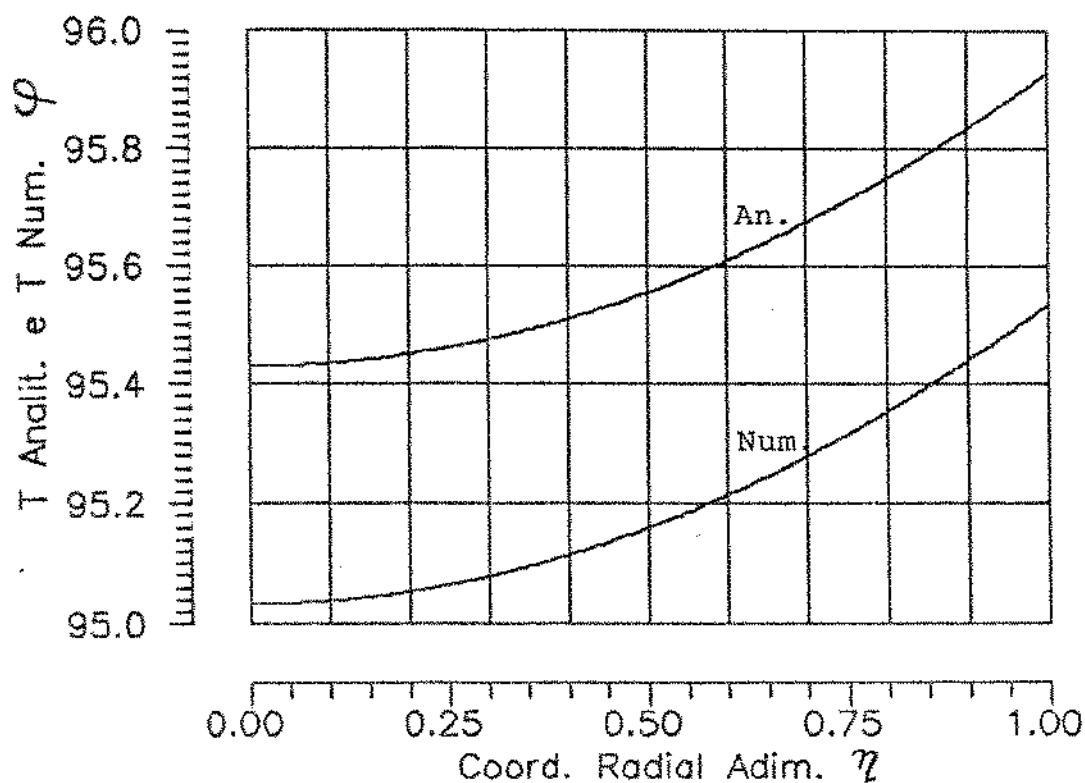


Fig. 3.16 – Temp. Analit.
 $m=0.14447$ e Temp. Numer.
 $Beta=500$, $Re=1000$ e $Pr=0.72$

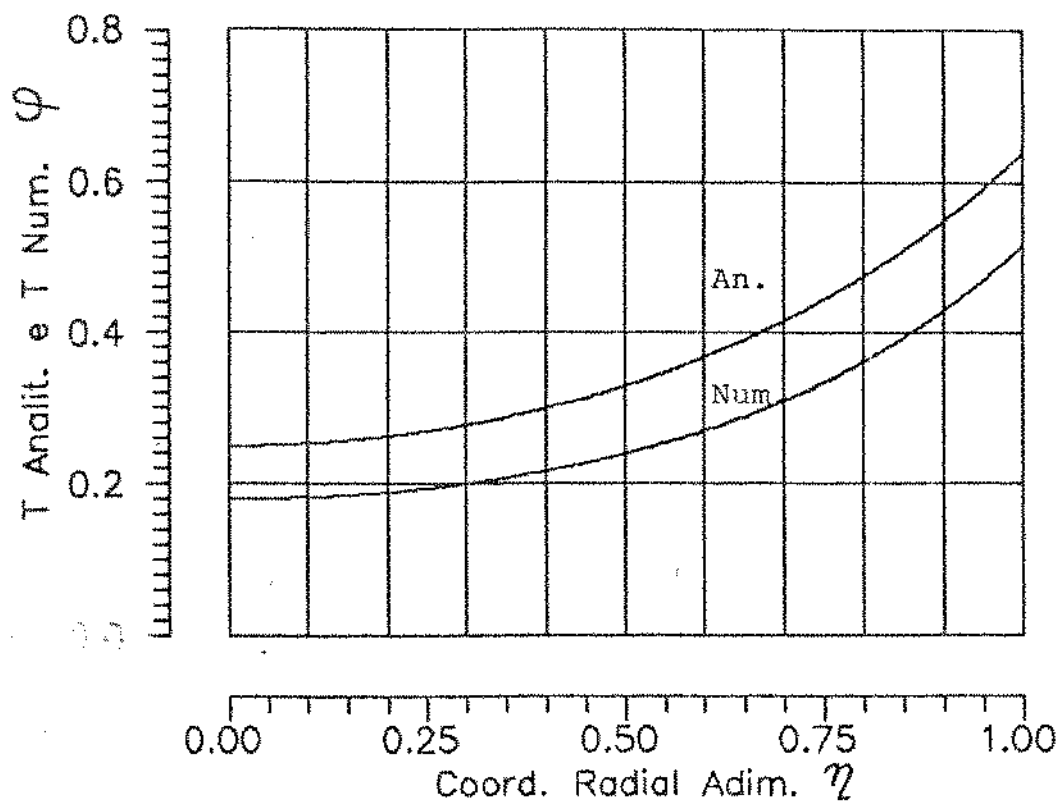


Fig. 3.17 – Temp. Analit.
 $m=2.1603$ e Temp. Numer.
 $Beta=5$, $Re=5000$ e $Pr=0.72$

solução analítica perderia entretanto a sua simplicidade neste caso e a comparação efetuada careceria de sentido.

CAPÍTULO 4

CONCLUSÕES E COMENTARIOS FINAIS

Distribuições de temperatura e do número de Nusselt foram obtidas numericamente para o problema acoplado de condução e convecção térmica num disco em rotação.

O método de solução foi iterativo, através da solução alternada de um problema de condução e de um problema de convecção. No problema da condução, os resultados numéricos obtidos foram comparados com uma solução analítica, no caso do coeficiente convectivo uniforme. No problema da convecção, os resultados numéricos foram comparados com uma solução da literatura baseada nas equações da camada limite laminar. As comparações nos dois casos foram totalmente satisfatórias.

Na solução numérica do problema acoplado, foram necessárias cerca de cinco iterações em todos os casos resolvidos. Os resultados apresentados, tanto para os perfis de temperatura quanto para a distribuição do número de Nusselt, foram fisicamente coerentes. O método de solução utilizado apresentou problemas nos casos em que o número de Reynolds é elevado e o parâmetro β é pequeno, como foi exposto no capítulo 3.

Uma comparação foi efetuada entre os perfis de temperatura do problema acoplado e do problema analítico da condução associado a ele. Os resultados indicam que as duas distribuições podem ser muito próximas para valores elevados do parâmetro β ($\beta=500$), mas sensivelmente diferentes para valores pequenos ($\beta=5$).

APÊNDICE A

PROGRAM DISCO

C *****

C -----

C ESTE PROGRAMA CALCULA A DISTRIBUICAO DE TEMPERATURA DE UN DISCO

C DE ESPESURA DESPRESIVEL RESOLVENDO O PROBLEMA DE CONDU AO E MOS-

C TRA OS RESULTADOS DAS SOLUCOES ANALITICAS E NUMERICAS.

C -----

DIMENSION PHI(102),A(102),B(102),C(102),D(102),P(102),Q(102)

DIMENSION YI0(102),YI1(102),ETAC(102),APHI(102),TERO(102),TER1(102)

CHARACTER*15 ARQUI1

C *****

C DADOS DO PROBLEMA

C *****

WRITE (*,*) 'FORNECA O NUM. DE VOL. DE CONT. INTERIORES'

READ (*,*) N

DETA=1./FLOAT(N)

WRITE (*,*) 'FORNECA O VALOR DE M'

READ (*,*) AM

WRITE (*,*) 'FORNECA A NOME DO ARQUIVO'

READ (*,*) ARQUI1

C *****

ETAC(1)=0.

DO 330 I=2,(N+1)

ETAC(I)=(((FLOAT(I)*2.)-3.)/2.)*DETA

330 CONTINUE

ETAC(N+2)=FLOAT(N)*DETA

C *****

AC(2)=1.+(AM*DETA)**2

BC(2)=1.

CC(2)=0.

DC(2)=0.

DO 130 K=3,N

AC(K)=(C(2.*FLOAT(K)-3.)*(1.+AM**2*DETA**2/2.))

BC(K)=FLOAT(K)-1.

CC(K)=FLOAT(K)-2.

DC(K)=0.

130 CONTINUE

```

      A(N+1)=FLOAT(N-1)+FLOAT(2*N-1)*AM**2*DETA**2/2.
      B(N+1)=0.
      CC(N+1)=FLOAT(N-1)
      DC(N+1)=AM
      DO 140 J=2,N+1
      PC(J)=(B(J)/(AC(J)-CC(J)*PC(J-1)))
      QC(J)=(DC(J)+CC(J)*QC(J-1))/(AC(J)-CC(J)*PC(J-1))
140  CONTINUE
      PHIC(N+1)=QC(N+1)
      DO 300 I=N+1,1,-1
      PHIC(I) = PC(I) * PHIC(I+1) + QC(I)
300  CONTINUE
      PHIC(1)=PHIC(2)
      PHI(N+2)=PHI(N+1)+AM*DETA/2.
C      *****
C      SOLUCAO ANALITICA
C      *****
      DO 310 M=1,(N+2)
      YI0(M)=0.
      YI1(M)=0.
      TERO(1)=1.
      TER1(1)=AM/2.
      YI0(M)=TERO(1)
      YI1(M)=TER1(1)
      DO 340 J=2,10
340  TERO(J)=TERO(J-1)*(AM*ETA(M)/(2.*(FLOAT(J)-1.)))**2
      DO 342 J=2,10
342  YI0(M)=YI0(M)+TERO(J)
      DO 350 J=2,10
350  TER1(J)=TER1(J-1)*AM**2/(4.*(FLOAT(J)*(FLOAT(J)-1.)))
      DO 352 J=2,10
352  YI1(M)=YI1(M)+TER1(J)
      APM(M)=YI0(M)/YI1(M)
310  CONTINUE
C      *****
      WRITE(*,50)AM
50  FORMAT(8X,'DISTRIBUICAO DE TEMPERATURA DE DISCO',/,8X,36C'*'),//,
      8X,'M =',F7.2,/,8X,9C'-''),/,3X,'PTO',6X,'ETA',12X,'SOL. NUM.',13X,
      *'SOL. ANAL.',/,1X,60C'-''),/

```

```

DO 400 I=1,N+2
  WRITE (*,360)I,ETACID,PHICID,APHICID
360 FORMAT(3X,I3,2X,F7.3,10X,1PE12.6,10X,1PE12.6)
400 CONTINUE
  OPEN(1,FILE=ARQUI1,STATUS='NEW')
  DO 500 I=2,N+2
    WRITE(1,*)ETACID,PHICID,APHICID
500 CONTINUE
  STOP
  END

```

APÊNDICE B

Cálculo de Número de Nusselt Local para $\lambda=3$

O problema térmico precisa ser resolvido simultaneamente com o problema hidrodinâmico, portanto as equações a serem resolvidas são F. M. WHITE (1974):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u) + \frac{\partial}{\partial z} (w) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = - \frac{1}{\rho} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{B.2})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u \cdot v}{r} = \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial r} + \rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = K_f \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{B.4})$$

com as condições de contorno:

$$\text{em } z=0: \quad u = w = 0 \quad v = r \cdot \omega \quad T = T_v \quad (\text{B.5})$$

$$\text{em } z \rightarrow \infty \quad u = v = 0 \quad T = T_\infty \quad (\text{B.6})$$

Utilizando a variável de similaridade de von KARMAN:

$$\theta = z (\omega / \nu)^{1/2} \quad (B.7)$$

definem-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$F(\theta) = u / (r. \omega) \quad (B.8)$$

$$G(\theta) = v / (r. \omega) \quad (B.9)$$

$$H(\theta) = w / (\omega. \nu)^{1/2} \quad (B.10)$$

$$\theta(\theta) = (T - T_{\infty}) / (T_v - T_{\infty}) \quad (B.11)$$

com a condição de similaridade:

$$T_v - T_{\infty} = a. r^{\lambda} \quad (B.12)$$

Substituindo-se estas variáveis nas equações (B.1) - (B.4), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas:

$$H'(\theta) = - 2 F(\theta) \quad (B.13)$$

$$F''(\theta) = F^2(\theta) - G^2(\theta) + H(\theta) F'(\theta) \quad (B.14)$$

$$G''(\theta) = 2 F(\theta) G(\theta) + H(\theta) G'(\theta) \quad (B.15)$$

$$\theta''(\theta) = Pr H(\theta) \theta'(\theta) + Pr \lambda F(\theta) \theta(\theta) \quad (B.16)$$

com as condições de contorno:

$$\text{em } \theta = 0 \quad F(\theta) = H(\theta) = 0 \quad G(\theta) = \theta(\theta) = 1 \quad (B.17)$$

$$\text{em } \theta \rightarrow \infty \quad F(\theta) = G(\theta) = 0 \quad \theta(\theta) = 0 \quad (B.18)$$

Resolve-se este sistema através da integração numérica pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Substitui-se as três equações de segunda ordem para $F(\theta)$, $G(\theta)$ e $\theta(\theta)$ por seis equações de primeira ordem para $F(\theta)$, $F'(\theta)$, $G(\theta)$, $G'(\theta)$, $\theta(\theta)$ e $\theta'(\theta)$.

Seguindo este procedimento, define-se um vetor $Y(i)$, $1 \leq i \leq 7$ da forma:

$$Y(1) = H(\theta) \quad (B.19)$$

$$Y(2) = F'(\theta) \quad (B.20)$$

$$Y(3) = F(\theta) \quad (B.21)$$

$$Y(4) = G'(\theta) \quad (B.22)$$

$$Y(5) = G(\theta) \quad (B.23)$$

$$Y(6) = \theta'(\theta) \quad (B.24)$$

$$Y(7) = \theta(\theta) \quad (B.25)$$

é um vetor $\langle F(i), 1 \leq i \leq 7 \rangle$ definido como $F(i) \equiv Y'(i)$. Em termos destas definições, o sistema de equações de (A.13) a (A.16) é obtido como:

$$F(1) = -2 Y(3) \quad (B.26)$$

$$F(2) = Y(3)^2 - Y(5)^2 + Y(1) Y(2) \quad (B.27)$$

$$F(3) = Y(2) \quad (B.28)$$

$$F(4) = 2 Y(3) Y(5) + Y(1) Y(4) \quad (B.29)$$

$$F(5) = Y(4) \quad (B.30)$$

$$F(6) = Pr Y(1) Y(6) \quad (B.31)$$

$$F(7) = Y(6) \quad (B.32)$$

Da condição de contorno B(17), definem-se as seguintes condições iniciais:

$$Y(1)_0 = 0 \quad (B.33)$$

$$Y(3)_0 = 0 \quad (B.34)$$

$$Y(5)_0 = 1 \quad (B.35)$$

$$Y(7)_0 = 1 \quad (B.36)$$

Este problema é resolvido utilizando-se o "Shooting Method" e a solução do problema hidrodinâmico, $Y(2) \equiv F'(0)$ e $Y(4) \equiv G'(0)$, para obtenção dos valores das variáveis $Y(2) \equiv F'(\theta)$, $Y(4) \equiv G'(\theta)$ e $Y(6) \equiv \theta'(\theta)$ que satisfazem simultaneamente as condições de contorno (B.18):

$$Y(3)_\infty \equiv F(\theta)_\infty = 0 \quad (B.37)$$

$$Y(5)_\infty \equiv G(\theta)_\infty = 0 \quad (B.38)$$

$$Y(7)_\infty \equiv \theta(\theta)_\infty = 0 \quad (B.39)$$

O valor de $Y(6) \equiv \theta'(\theta)$ em $\theta=0$, solução deste problema, é utilizado na obtenção do número de Nusselt local, para uma constante λ definida (J. P. HARTNETT, (1959)).

$$Nu_r = - \theta'(\theta) \Big|_{\theta=0} \quad (B.40)$$

Note que a integração simultânea do conjunto das equações do momentum era necessária para obtenção das componentes adimensionais da velocidade, $F(\theta)$ e $G(\theta)$ nas posições discretizadas do processo de integração numérica.

APENDICE C

```

PROGRAM MSTETA
C *****
C -----
C :SOLUCAO NUMERICA PARA DISCO NAO ISOTERMICO EM ROTACAO.      :
C :USA-SE HIPOTESE DE SIMILARIDADE (HARTNETT).                :
C :SOLUCAO PARA APENAS UM PARAMETRO "M".                      :
C -----
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(10),F(10)
N=7
PR=0.72D0
XM=0.D0
WRITE (*,3)XM,PR
X=0.D0
XLIM=11.D0
H=0.1D0
M=0
Y(1)=0.D0
Y(2)=0.51023D0
Y(3)=0.D0
Y(4)=-0.61592D0
Y(5)=1.D0
Y(7)=1.D0
Y(6)=0.330D0
WRITE (*,5)X,Y(3),Y(2),Y(5),Y(4),Y(1),Y(7),Y(6)
8 IF(X-XLIM)6,6,30
6 CALL RUNGE (N,Y,F,X,H,M,K)
GO TO (10,20), K
10 F(1)= (-2.) * Y(3)
F(2)= - Y(5)*Y(5) + Y(3)*Y(3) + Y(2)*Y(1)
F(3)= Y(2)
F(4)= 2. * Y(3)*Y(5) + Y(1)*Y(4)
F(5)= Y(4)
F(6)= Y(1) * Y(6) * PR + XM * Y(3) * Y(7) * PR
F(7)= Y(6)
GO TO 6

```

```
20 WRITE (*,5)X,Y(3),Y(2),Y(5),Y(4),Y(1),Y(7),Y(6)
    GO TO 8
C   2 FORMAT(1X,/,6X,'TLO1=',E15.8,4X,'TINF1=',E15.8,///)
    3 FORMAT(1X,'SOLUCAO NUMERICA PARA DISCO NAO ISOTERMICO EM ROTACAO
        *',/,1X,53C'*')/,1X,'PARAMETRO "M"=',F3.0,5X,'PRANDTL=',F8.3,/,3X,
        *'ETA',5X,'F',5X,'F"',5X,'G',5X,'G"',5X,'H',5X,'TETA',5X,'TETA"'')
C   4 FORMAT (1X,/,6X,'TLO2= ',E15.8,'TINF2= ',E15.8,///)
    5 FORMAT (/,1X,F5.2,5E14.8,/,5X,2E15.8)
C  29 FORMAT (1X,/,6X,'DELTA= ',E15.8,'EPSIL= ',E15.8,///)
C  11 FORMAT (1X,/,6X,'TLO2= ',E15.8,///)
30 CONTINUE
    STOP
    END
```

```
PROGRAM DISCO01
C *****
C
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C CCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCC
C CCCCCCCCCCC - UNIDIMENSIONAL - AQUECIMENTO RADIAL - CCCCCCCCCCCC
C CCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCC
C CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
C
COMMON/B1/DIFTC(42),NL,ETAC(42),M,MXM,TMC(6),RMINC(42),ABC(84),YMRC(42)
DIMENSION PHI(42),AC(42),BC(42),CC(42),DC(42),PC(42),QC(42),ANUC(42)
DIMENSION RMA1(42),ENNV(42),ENWDX(42)
DIMENSION HCONDC(42),HCONVC(42),TETAL(4),AMC(42),DIFHC(42)
DIMENSION DIFAMC(4),AMOLDX(4),RMENC(42),TEMP(42),TMRC(6)
DIMENSION QCV1(42),QCOV1(42),DELTAT(42),FONTEC(42)
DIMENSION ENEDX(42),ENSDX(42),ENSVC(42),DIFECD(42),DI FEAB(42)
C
C
C DADOS DO PROBLEMA
C *****
NITER=0
LAST=100
N=40
DETA=1.D0/DFLOAT(N)
DO 10 I=1,(N+2)
10 HCOND(I)=31.3D0
ESPE=0.002D0
RAIO=0.2D0
DERA=RAIO/DFLOAT(N)
AKFLU=0.040D0
QL=10.D0
PI=3.1415926D0
CONS2=QL/(2.D0*PI)
REY=1.00E+00
VISDI=1.D-05
OMEGA=REY*VISDI/(RAIO**2)
APRAND=0.72D0
```

```

TETAL(1)=0.330D0
TETAL(2)=0.437D0
TETAL(3)=0.524D0
TETAL(4)=0.596D0
ERRO=1.D-07
AKDIS=386.D0
CONSI=AKFLU*DSQRT(OMEGA/VISDI)
AREFE=PI*RAIO**2

```

C

C

C CALCULO DA POSICAO DE NOS E INTERFACES

C *****

C VARI AVEL ADIMENSSIONAL

C *****

ETAC(1)=0.D0

DO 100 I=2,(N+1)

ETAC(I)=(C(DFLOAT(I)*2.D0-3.D0)/2.D0)*DETA

100 CONTINUE

ETAC(N+2)=DFLOAT(N)*DETA

C

C

C VOLTA A VARI AVEL DIMENSSIONAL

C *****

DO 110 I=1,(N+2)

110 RMIN(I)=RAIO*ETAC(I)

DO 115 I=2,(N+1)

RMEN(I)=RMIN(I)-DERA/2.D0

RMA1(I)=RMIN(I)+DERA/2.D0

115 CONTINUE

C

C

C *****

C *****

C ***** ITERACOES *****

C *****

C *****

DO 800 L=1, LAST+1

C

C

```

C      ****
C      ****
C      **** SOLUCAO NUMERICA DO PROBLEMA DA CONDUCAO ****
C      ****
C      ****

C      CALCULO
C      ****
      AC(2)=AKDIS*ESPE+HCOND(2)*RMA1(2)**2/2. DO
      BC(2)=AKDIS*ESPE
      CC(2)=0. DO
      DC(2)=0. DO
      DO 120 I=3,N
      AC(I)=(AKDIS*ESPE/DERA)*(RMA1(I)+RMEN(I))+HCOND(I)*(RMA1(I)**2-
      *RMEN(I)**2)/2. DO
      BC(I)=AKDIS*ESPE*RMA1(I)/DERA
      CC(I)=AKDIS*ESPE*RMEN(I)/DERA
      DC(I)=0. DO
120  CONTINUE
      AC(N+1)=AKDIS*ESPE*RMEN(N+1)/DERA+HCOND(N+1)*(RMA1(N+1)**2-RMEN
      *(N+1)**2)/2. DO
      BC(N+1)=0. DO
      CC(N+1)=AKDIS*ESPE*RMEN(N+1)/DERA
      DC(N+1)=QL/(2. DO*PI)
      DO 130 J=2,(N+1)
      PC(J)=BC(J)/(AC(J)-CC(J)*PC(J-1))
      QC(J)=(DC(J)+CC(J)*QC(J-1))/(AC(J)-CC(J)*PC(J-1))
130  CONTINUE
      DIFT(N+1)=QC(N+1)
      DO 140 I=(N+1),1,-1
      DIFT(I) = PC(I) * DIFT(I+1) + QC(I)
140  CONTINUE

C
C
C      BORDADO
C      ****
      DIFT(1)=DIFT(2)
      DIFT(N+2)=DIFT(N+1)

```

```

C
C
C   VARIAVEIS "TEMP" E "TMED"
C   ****
DO 165 I=1,N+2
165 TEMP(I)=DIFT(I)*2.DO*PI*ESPE*AKDIS/QL
   TMED=(DIFT(1)+DIFT(N+2))/2.DO
C
C
C   CALCULO DO BALANCO DE ENERGIA
C   ****
ENED(1)=0.DO
ENSD(1)=0.DO
ENSV(1)=0.DO
ENED(N+2)=0.DO
ENSD(N+2)=0.DO
ENSV(N+2)=0.DO
DO 184 I=2,N
184 ENED(I)=AKDIS*RMA(I)*ESPE*(DIFT(I+1)-DIFT(I))/DERA
   ENSD(N+1)=QL/(2.DO*PI)
DO 186 I=2,N+1
186 ENSD(I)=AKDIS*RMEN(I)*ESPE*(DIFT(I)-DIFT(I-1))/DERA
   DO 188 I=2,N+1
188 ENSV(I)=HCOND(I)*DIFT(I)*(RMA(I)**2-RMEN(I)**2)/2.DO
   DEMAX=0.DO
   ENERGIA=0.DO
DO 190 I=1,N+2
   DIFEC(I)=ENED(I)-ENSD(I)-ENSV(I)
   DIFEABC(I)=DABS(DIFEC(I))
   ENERGIA=ENERGIA+DIFEC(I)
   DEMAX=DMAX1(DEMAX,DIFEABC(I))
190 CONTINUE
C
C
C   FORMACAO DA MATRIZ PARA "AJUSTE"
C   ****
DO 165 I=1,N+2
165 ABC(I)=RMEN(I)
DO 170 I=N+3,(2*N+4)

```

```
170 ABC(I)=DIFT(I-(N+2))
```

C

C

```
C      DADOS PARA SUBROUTINA "AJUSTE"
```

```
C      *****
```

```
C      MXM: GRAU DO POLINOMIO
```

```
      MXM=3
```

C

```
C      NL: NUMERO DE PARES DE PONTOS NA ENTRADA
```

```
      NL=N+2
```

C

```
C      M: NUMERO DE CURVAS A AJUSTAR + 1
```

```
      M=2
```

C

C

```
C      CHAMADA A SUBROUTINE "AJUSTE"
```

```
C      *****
```

```
      CALL AJUSTE
```

C

C

```
C      CALCULO DE DIFERENCA (DIFT - YMR)
```

```
C      *****
```

```
      DO 198 I=1,N+2
```

```
      DELTAT(I)=(C(YMRC(I))-DIFT(I))/DIFT(I)*100. DO
```

```
198 CONTINUE
```

C

C

```
C      PROPRIEDADES CONVECTIVAS
```

```
C      *****
```

C

```
C      QCOND3 = CALOR PERDIDO POR CONVECCAO USANDO SUMATORIA DO CALOR
```

```
C      PERDIDO EM CADA VOLUME DE CONTROLE, USANDO "HCOND",
```

```
C      AREA=((RMAS)**2-(RMEN)**2)/2, E "DIFT" OBTIDA NO PROBLEMA
```

```
C      DA CONDUCAO
```

C

```
C      EQCOND3= ERRO RELATIVO PORCENTUAL, CALCULADO: (QCOND3-(QL/2*PI))/
```

```
C      (QL/2*PI)*100
```

C

C

```

C
C      CALCULO DE PROP. TERMICAS
C      *****
      QCOND3=0. DO
      DO 174 I=1,N+2
      PROD=0. D+00
      PROD=TM(1)*TETAL(1)+TM(2)*RMIN(1)*TETAL(2)
      PROD=PROD+TM(3)*RMIN(1)**2*TETAL(3)
      PROD=PROD+TM(4)*RMIN(1)**3*TETAL(4)
      DIV=0. D+00
      DIV=TM(1)+TM(2)*RMIN(1)+TM(3)*RMIN(1)**2+TM(4)*RMIN(1)**3
      HCONV(1)=CONS1*PROD/DIV
      ANUC(1)=PROD/DIV
174 CONTINUE
C
C
C      CONTINUACAO
C      *****
      DO 180 I=2,N+1
      QCOV1(I)=HCOND(I)*DIFTC(I)*(RMA1(I)**2-RMEN(I)**2)/2. DO
180 QCOND3=QCOND3+QCOV1(I)
      EQCOND3=((QCOND3-CONS2)/CONS2)*100. DO
C
C
C      CONTROL DE LOOP
C      *****
      DO 500 J=1,(N+2)
500 DIFHC(J)= DABS(HCONV(J)-HCOND(J))
      DIFMAX=0. DO
      DO 510 I=1,(N+2)
      DIFMAX=DMAX1(DIFMAX,DIFHC(I))
510 CONTINUE
      IF (DIFMAX.GT.ERRO)GO TO 520
      GO TO 810
520 CONTINUE
      DO 530 I=1,(N+2)
530 HCOND(I)= HCONV(I)
      NITER=NITER+1
800 CONTINUE

```

810 CONTINUE

```

C
C
C    CALCULO DE HMED E NUMED
C    *****
    HMED=0. DO
    ANUMED=0. DO
    DO 850 I=1,N+2
    PROD=0. DO
    PROD=TM(1)*TETAL(1)+TM(2)*RAIO*TETAL(2)*2. DO/3. DO
    PROD=PROD+TM(3)*RAIO**2*TETAL(3)/2. DO
    PROD=PROD+TM(4)*RAIO**3*TETAL(4)*2. DO/5. DO
    DIV=0. DO
    DIV=TM(1)+TM(2)*RAIO+TM(3)*RAIO**2+TM(4)*RAIO**3
    ANUMED=PROD/DIV
    HMED=ANUMED*CONS1

```

850 CONTINUE

```

C
C
C    SAIDA DA ULTIMA ITERACAO
C    *****
    OPEN (1,FILE='QUARR10.DAT',STATUS='NEW')
    WRITE (1,900) NITER,REY,APRAND,OMEGA,N,QL,RAIO,ESPE,AKDIS
900 FORMAT (1X,/,7X,'TRANSFERENCA DE CALOR EM DISCO EM ROTACAO (UNIDI
    *M. AXIAL CENTRO) ',/,7X,64C('*)'),/,7X,'ITER=',I3,2X,'REY=',1PE8.2,2
    *X,'PR=',1PE8.2,2X,'OMEGA=',1PE8.2,2X,'V.C.=',I3,/,7X,'Q=',1PE8.2,2
    *X,'RO=',1PE8.2,2X,'ESPE=',1PE8.2,2X,'KDIS=',1PE8.2,/,7X,64C('*'))
    WRITE(1,905)
905 FORMAT(1X,/,7X,'COEFICIENTES DO POLINOMIO',/,7X,26C('*')),/)
    WRITE(1,910) (TM(I),I=1,MXM+1)
910 FORMAT(3X,'TM(1)=' ,1PE15.8,3X,'TM(2)=' ,1PE15.8/,3X,'TM(3)=' ,
    *1PE15.8,3X,'TM(4)=' ,1PE15.8/)
    WRITE(1,915)
915 FORMAT(/,3X,'PTO',3X,'ETA',4X,'RMIN',7X,'TDIM',10X,'TFITT',10X,'DE
    *LT%',9X,'NUSELTT',/,1X,79C('-'))
    DO 971 I=1,(N+2)
    WRITE (1,976)I,ETAC(I),RMIN(I),DIFT(I),YMRC(I),DELTAT(I),ANUC(I)
976 FORMAT(3X,I3,F7.4,F7.4,2(3X,1PE12.6),2X,1PE13.6,2X,1PE12.6)
971 CONTINUE

```

```

WRITE(1,930)
930 FORMAT(1X,12( /),7X,'PTO',3X,'ETA',4X,'RMIN',6X,'TADIM',8X,'HCOND',
*8X,'BALENER',/,7X,60(' - '))
DO 935 I=1,(N+2)
WRITE (1,940)I,ETAC(I),RMINC(I),TEMP(I),HCONDC(I),DIFEC(I)
940 FORMAT(7X,I3,F7.4,F7.4,2(2X,1PE12.6),2X,1PE13.6)
935 CONTINUE
WRITE (1,945)HMED,ANUMED
945 FORMAT(/,7X,'HMEDXNUM=' ,1PE15.8,3X,'ANUMEDXNUM=' ,1PE15.8)

```

C

```

STOP
END

```



```

      READ(*,*) TEL1, TEL2
      WRITE(*,*) 'ESCREVA: TETAL(3) E TETAL(4)'
      READ(*,*) TEL3, TEL4
      TETAL(1)=TEL1
      TETAL(2)=TEL2
      TETAL(3)=TEL3
      TETAL(4)=TEL4

C
C
C   CALCULO DA POSICAO DE NOS E INTERFACES
C   *****
C   VARI AVEL ADIMENSSIONAL
C   *****
      ETAC(1)=0. DO
      EMEN(1)=0. DO
      EMA1(1)=0. DO
      DO 100 I=2,N+1
      ETAC(I)=(C(DFLOAT(I)*2. DO)-3. DO)/2. DO)*DETA
      EMEN(I)=ETAC(I)-DETA/2. DO
      EMA1(I)=ETAC(I)+DETA/2. DO
100  CONTINUE
      ETAC(N+2)=DFLOAT(N)*DETA
      EMEN(N+2)=1. DO
      EMA1(N+2)=1. DO

C
C
C   *****
C   *****
C   *****  ITERACOES  *****
C   *****
C   *****
C   *****
C
C
C   DO 800 L=1, LAST+1

C
C
C   *****
C   *****
C   *****  SOLUCAO NUMERICA DO PROBLEMA DA CONDUCAO *****

```

```

C      *****
C      *****
C
C
C      CALCULO DE TEMPERATURA ADIMENSIONAL
C      *****
C
      A2=DSQRT(REY)*(TMC(1)*TETALC(1)*(EMA1(2)**2)/2.DO+TMC(2)*
      *TETALC(2)*(EMA1(2)**3)/3.DO+TMC(3)*TETALC(3)*(EMA1(2)**4)/4.DO+
      *TMC(4)*TETALC(4)*(EMA1(2)**5)/5.DO)/PHIAC(2)
      AC(2)=A2+BETA
      BC(2)=BETA
      CC(2)=0.DO
      DC(2)=0.DO
      DO 120 I=3,N
      A3(I)=DSQRT(REY)*(TMC(1)*TETALC(1)*(EMA1(I)**2-EMENC(I)**2)/2.DO+
      *TMC(2)*TETALC(2)*(EMA1(I)**3-EMENC(I)**3)/3.DO+TMC(3)*TETALC(3)*(EMA
      *1(I)**4-EMENC(I)**4)/4.DO+TMC(4)*TETALC(4)*(EMA1(I)**5-EMENC(I)**5)/
      *5.DO)/PHIAC(I)
      B(I)=BETA*EMA1(I)/DETA
      C(I)=BETA*EMENC(I)/DETA
      A(I)=B(I)+C(I)+A3(I)
      D(I)=0.DO
120  CONTINUE
      BC(N+1)=0.DO
      CC(N+1)=BETA*EMENC(N+1)/DETA
      A4=DSQRT(REY)*(TMC(1)*TETALC(1)*(EMA1(N+1)**2-
      *EMENC(N+1)**2)/2.DO+TMC(2)*TETALC(2)*(EMA1(N+1)**3-EMENC(N+1)**3)/
      *3.DO+TMC(3)*TETALC(3)*(EMA1(N+1)**4-EMENC(N+1)**4)/4.DO+TMC(4)*
      *TETALC(4)*(EMA1(N+1)**5-EMENC(N+1)**5)/5.DO)/PHIAC(N+1)
      A(N+1)=A4+CC(N+1)
      DC(N+1)=BETA
      DO 130 J=2,(N+1)
      PC(J)=(BC(J)/(AC(J)-CC(J)*PC(J-1)))
      QC(J)=(DC(J)+CC(J)*QC(J-1))/(AC(J)-CC(J)*PC(J-1))
130  CONTINUE
      PHIC(N+1)=QC(N+1)
      DO 140 I=(N+1),1,-1
      PHIC(I) = PC(I) * PHIC(I+1) + QC(I)

```

140 CONTINUE

C

C

C BORDADO

C *****

PHI(1)=PHI(2)

PHI(N+2)=PHI(N+1)+DETA/2.DO

C

C

C FORMACAO DA MATRIZ PARA "AJUSTE"

C *****

DO 165 I=1,N+2

165 ABC(I)=ETAC(I)

DO 170 I=N+3,(2*N+4)

170 ABC(I)=PHI(I-(N+2))

C

C

C DADOS PARA SUBROUTINA "AJUSTE"

C *****

C MXM: GRAU DO POLINOMIO

MXM=3

C

C NL: NUMERO DE PARES DE PONTOS NA ENTRADA

NL=N+2

C

C M: NUMERO DE CURVAS A AJUSTAR + 1

M=2

C

C

C CHAMADA A SUBROUTINE "AJUSTE"

C *****

CALL AJUSTE

C

C

C CALCULO DE DIFERENCA (PHI - YMR)

C *****

DO 188 I=1,N+2

DELTAT(I)=((YMR(I)-PHI(I))/PHI(I))*100.DO

```

198 CONTINUE
C
C
C      CONTROL DE LOOP
C      *****
DO 500 J=2,N+1
500 DIFPHI(J) = DABSCPHI(J)-PHIAC(J)
DIFMAX=0. DO
DO 510 I=2,N+1
DIFMAX=DMAX1(DIFMAX,DIFPHI(I))
510 CONTINUE
IF (DIFMAX.GT.ERRO)GO TO 520
GO TO 810
520 CONTINUE
DO 530 I=2,N+1
530 PHIAC(I)=PHI(I)
NITER=NITER+1
800 CONTINUE
810 CONTINUE
C
C
C      CALCULO DO NUMERO DE NUSSELT
C      *****
DO 174 I=1,N+2
ANUSSC(I)=(TETAL(1)*TMC(1)+TETAL(2)*TMC(2)*ETAC(1)+TETAL(3)*TMC(3)*
*(ETAC(I)**2)+TETAL(4)*TMC(4)*(ETAC(I)**3))/(TMC(1)+TMC(2)*ETAC(1)+
*TMC(3)*(ETAC(I)**2)+TMC(4)*(ETAC(I)**3))
174 CONTINUE
C
C
C      CALCULO DO BALANCO DE ENERGIA
C      *****
ENEDC(1)=0. DO
ENSDC(1)=0. DO
ENSV(1)=0. DO
ENEDC(N+2)=0. DO
ENSDC(N+2)=0. DO
ENSV(N+2)=0. DO

```

```

ENEDX(2)=BETA*(PHI(3)-PHI(2))
ENSDX(2)=0. DO
ENSV(2)=A2*PHIAC(2)
DO 184 I=3,N
ENEDX(I)=BETA*EMA1(I)*(PHI(I+1)-PHI(I))/DETA
ENSDX(I)=BETA*EMENC(I)*(PHI(I)-PHI(I-1))/DETA
ENSV(I)=A3(I)*PHIAC(I)

```

184 CONTINUE

```

ENEDX(N+1)=BETA
ENSDX(N+1)=BETA*EMENC(N+1)*(PHI(N+1)-PHI(N))/DETA
ENSV(N+1)=A4*PHIAC(N+1)
DEMAX=0. DO
ENERGIA=0. DO
DO 190 I=1,N+2
DIFENERC(I)=ENEDX(I)-ENSDX(I)-ENSV(I)
DIFENABC(I)=DABS(DIFENERC(I))
ENERGIA=ENERGIA+DIFENERC(I)
DEMAX=DMAX1(DEMAX,DIFENABC(I))

```

190 CONTINUE

C

C

C SAIDA DA ULTIMA ITERACAO

C *****

OPEN (1,FILE=ARQ1,STATUS='NEW')

OPEN (2,FILE=ARQ2,STATUS='NEW')

WRITE (1,900) NITER,REY,APRAND,BETA,N

900 FORMAT (//,7X,'TRANSFERENCA DE CALOR EM DISCO EM ROTACAO (UNIDIM.

AQUE. RADIAL)',/,7X,64C(''),/,7X,'ITER=',I3,2X,'REY=',1PE9.2,2X

, 'PR=',1PE9.2,2X,'BETA=',1PE9.2,2X,'V.C.=',I3,/,7X,63C(''))

WRITE(1,905)

905 FORMAT(1X,/,7X,'COEFICIENTES DO POLINOMIO',/,7X,25C('*'),/)

WRITE(1,910) (TMC(I),I=1,MM+1)

910 FORMAT(7X,'BEC(1)=' ,1PE15.8,3X,'BEC(2)=' ,1PE15.8/,7X,'BEC(3)=' ,

*1PE15.8,3X,'BEC(4)=' ,1PE15.8/)

WRITE(1,915)

915 FORMAT(/,2X,'PTO',2X,'ETA',6X,'TADIM',8X,'TFITT',8X,

*'DELT%',9X,'NUSS',6X,'BALENER'/,1X,78C('-'))

DO 971 I=1,(N+2)

WRITE (1,976)I,ETAC(I),PHI(I),YMR(I),DELTAT(I),ANUSSC(I),DIFENERC(I)

```

      WRITE (2,*)DETAC(I),PHI(I),ANUSS(I)
976  FORMAT(1X,I3,F7.4,5(1X,1PE12.5))
971  CONTINUE

```

C

C

STOP

END

NOMENCLATURA

- A: Constante da distribuição de temperatura
- a(i) Coeficiente algébrico da equação de discretização
- b(i) Coeficiente algébrico da equação de discretização
- c(i) Coeficiente algébrico da equação de dscretização
- d(i) Coeficiente algébrico da equação de discretização
- cp: Calor específico a pressão constante, KJ/Kg.C
- F: Componente radial adimensional da velocidade, $= u/r\omega$
- H: Componente axial adimensional da velocidade, $w/(r\omega)^{1/2}$
- h: Coeficiente de película, W/m².C
- I₀: Função de Bessel modificada de primeira especie de ordem zero
- I₁: Função de Bessel modificada de primeira especie de ordem um
- K: Condutibilidade térmica, W/m.C
- K₀: Função de Bessel modificada de segunda especie de ordem zero
- m: Parâmetro adimensional, $= r_0 (h/K_0 \delta)^{1/2}$
- N: Número de volumes de controle
- q: Fluxo de calor, W/m²
- q₀: Fluxo radial de calor na borda disco, W/m²
- r: Coordenada radial, m
- r₀: Raio do disco, m
- T: Temperatura, °C
- u: Componente radial da velocidade, m/s
- w: Componente axial da velocidade, m/s
- z: Coordenada axial, m

Números Adimensionais

Nu: Número de Nusselt, $=h(\nu/\omega)^{1/2}/K$

Pr: Número de Prandtl, $=\nu/\alpha$

Re: Número de Reynolds, $=\omega r_o^2/\nu$

Letras Gregas

α : Difusividade térmica, $=K/\rho c_p$, m^2/s

β : Parâmetro adimensional, $=K_s \delta / K_f r_o$

δ : Semi-espessura do disco, m

ρ : Densidade, Kg/m^3

ω : Velocidade angular, $1/s$

λ : Potencia da distribuicao superficial de temperatura

ν : Viscosidade cinemática, m^2/s

ξ : Variável adimensional, $=m.\eta$

η : Coordenada radial adimensional, $=r/r_o$

φ : Temperatura adimensional, $=(T-T_\infty)K_s/(q_o r_o)$

θ : Temperatura adimensional, $=(T-T_\infty)/(T_w-T_\infty)$

χ : Variável de similaridade, $=z(\omega/\nu)^{1/2}$

Π : Constante pi $=3.1415...$

Subindices

E: Nó do volume de controle vizinho Leste

e: Interface Leste

f: Propriedade do fluido

P: Nó do volume de controle

s: Propriedade do sólido

W: Nó do volume de controle vizinho Oeste

- w: Propriedade da parede do disco
- v: Interface Oeste
- ∞ : Propriedade do fluido sem perturbação
- c: Convecção
- r: Propriedade local
- o: Propriedade na borda do disco

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] COCHRAN, W. G.; "The Flow Due to a Rotating Disc"; Proceedings, Cambridge Philosophical Society; Vol. 30; 1934; pags. (366-376).
- [2] HARTNETT, J. P.; "Heat Transfer From a Nonisothermal Disk Rotating in Still Air"; Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics; Dec/1959; pags. (672-673).
- [3] HARTNETT, J. P. e DELAND, E. C.; "The Influence of Prandtl Number on the Heat Transfer From Rotating Nonisothermal Disks and Cone"; Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer; Fev/1961; pags. (95-96).
- [4] LIN, H. T. e LIN, L. K.; "Heat Transfer From a Rotating Cone or Disk to Fluids of Any Prandtl Number"; International Communication Heat and Mass Transfer"; Vol. 14; 1987; pags. (323-332).
- [5] MILLSAPS, K. e POHLHAUNSEN, K.; "Heat Transfer by Laminar Flow From a Rotating Plate"; Journal of the Aeronautical Sciences; Fev/1952; pags. (120-126).
- [6] OEHLBECK, D. L. e ERIAN, F. F.; "Heat Transfer from Axisymmetric Sources at the Surface of a Rotating Disk"; International Journal of Heat and Mass Transfer; 1979; Vol. 22; pags. (601-610).
- [7] PATANKAR S. V.; "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow"; Ed. McGraw-Hill Book Company; 1980.
- [8] SCHLICHTING, H.; "Teoria de la Capa Limite"; Ed. Urmo - Bilbao; 1972.
- [9] SPARROW, E. M. e GREGG, J. L.; "Heat Transfer From a Rotating Disk to Fluids of Any Prandtl Number"; Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer; Vol. 81; Ago/1959; pags.

(249-251).

- [10] TIEN, C. L.; "Heat Transfer by Laminar Flow From a Rotating Cone"; Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer; Aug/1960; pags. (252-253).
- [11] WHITE F.M. ; "Viscous Fluid Flow";Ed. Mc.Graw-Hill Book Company; 1974.