

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR *Paulo Augusto de*
Oliveira Martins E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM *29 / 07 / 2005*

.....

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Estudo de Algoritmo de Continuação
Aplicado a Resposta Não-Linear
em Frequência**

Autor: Paulo Augusto de Oliveira Martins

Orientador: Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira

Co-Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Estudo de Algoritmo de Continuação Aplicado a Resposta Não-Linear em Frequência

Autor: **Paulo Augusto de Oliveira Martins**

Orientador: **Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira**

Co-Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005

S.P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M366e Martins, Paulo Augusto de Oliveira
 Estudo de algoritmo de continuação aplicado a
 resposta não-linear em frequência / Paulo Augusto de
 Oliveira Martins. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.

 Orientadores: Janito Vaqueiro Ferreira, Alberto Luiz
 Serpa.

 Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

 1. Mecânica não-linear. 2. Vibração. 3. Resposta em
 frequência. 4. Engenharia de métodos. I. Ferreira, Janito
 Vaqueiro. II. Serpa, Alberto Luiz. III. Universidade
 Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
 Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Study of path-following algorithm applied non-linear response
 frequency

Palavras-chave em Inglês: Nonlinear mechanics, Vibration, Frequency response
 (Dynamics), Methods engineering

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Renato Pavanelo, Vinícius Fernando Arcaro

Data da defesa: 29/07/2005

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

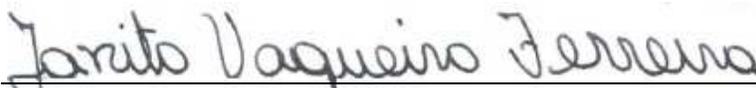
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo de Algoritmo de Continuação
Aplicado a Resposta Não-Linear
em Frequência**

Autor: Paulo Augusto de Oliveira Martins

Orientador: Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira

Co-Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa



Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Vinícius Fernando Arcaro
FEC/UNICAMP

Campinas, 29 de Julho de 2005.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa Karina, à minha mãe Daulina e ao meu filho Matheus, pelo muito que fizeram por mim, pelo apoio em todos os momentos e pela confiança que sempre tiveram e têm em mim...

Agradecimentos

Quando eu terminei a graduação tinha um pensamento fixo em fazer mestrado. Então escolhi a UNICAMP, por vários motivos. Aqui encontrei o Prof. Dr. Janito, que me fez uma proposta de trabalho explicando os detalhes com muita confiança e conhecimento. Embora das coisas que ele falou, eu não entendia nada, mas a vontade de conhecer, de apreciar, de julgar o que é um Mestrado foi maior. Então aceitei sua proposição. Tudo ia muito bem obrigado, até começar a entrar nos objetivos da tese. Foi então que eu consegui dimensionar a dificuldade que tinha de transpor e não era pequena. Houve dias que pensei em desistir de tudo. Achava que nunca ia conseguir atingir o final deste trabalho. Houve momentos que achávamos que tínhamos conseguido resolver todos os problemas, porém no outro dia com novos testes concluímos que estávamos errados. Assim, muitas tormentas houveram mas sempre depois destas há sempre uma calmaria. Mas sempre tenha algo em mente caro leitor, nunca desista de chegar ao seu objeto por mais torto, por trabalhoso que ele seja, pois as coisas que nós conquistamos e aprendemos com maior dificuldade é o que nos darão mais orgulho na vida, é o que ficará no final... Então, por esta lição de vida, entre outras é que agora agradeço à dignidade do Prof. Dr. JANITO VAQUEIRO FERREIRA, por ter me aceitado como seu orientado, por me ensinar a pesquisar, por me mostrar o que é o mestrado, por me ensinar a verificar e testar tudo aquilo que desenvolvi e irei desenvolver utilizando seus conselhos e pelas horas alegres e tristes nestes dois anos. Assim, meu muito obrigado, que a motivação nunca o abandone e seu caminho seja sempre iluminado com brilhantes idéias.

Agradeço também, ao MESTRE Iguti, que me ajudou sempre que eu necessitei. Pela sua contribuição fundamental, com a idéia de implementar o "*arc-length*" para esta finalidade. Agradeço aos professores do DMC/UNICAMP, que contribuíram direta ou indiretamente na minha formação ou na dissertação. Agradeço, ao meu amigo Alex, pelas dúvidas tiradas, pela horas alegres com muitas risadas, pelas brincadeiras feitas com os colegas do DMC. Agradeço também, a todos os colegas do DMC que me ajudaram direta ou indiretamente neste trabalho, por suas companhias e pelas horas de conversação amigável. Agradeço ao Pedro, pelo auxílio com o Matlab, por todas as explicações que ele me deu sobre diversos assuntos e por todos os favores que ele me fez. Gostaria também de agradecer ao Éder, pelas dicas com \LaTeX , pelo seu conhecimento matemático o qual me tirou muitas dúvidas e também pelas horas de conversas. Agradeço também ao pessoal da minha sala, pela companhia nestes dois anos. Um agradecimento especial para minha mãe, para todos os meus familiares e também para minha esposa Karina, que sempre me apoiaram. Ao CNPq e à CAPES, agradeço pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

"If I have seen further, it is by standing on the shoulders of Giants."

(Isaac Newton wrote to Robert Hooke)

Resumo

Martins, Paulo Augusto de Oliveira. *Estudo de algoritmo de continuação aplicado a função de resposta em frequência não-linear*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 128 p. Dissertação (Mestrado).

O objetivo deste trabalho é estudar a aplicação do método "*arc-length*" em funções de resposta em frequência não-lineares (RFs), para se obter principalmente regiões instáveis do caminho de equilíbrio da curva de receptância $\alpha(\omega)$. Para isto, é necessário conhecer os vários procedimentos de continuação existentes com o intuito de se escolher o melhor método que executasse este objetivo. O procedimento "*arc-length*" tem que ser usado em conjunto com algum algoritmo para solução de sistema de equações não-lineares. Logo, é utilizado o procedimento de Newton-Raphson, devido a sua razão de convergência e confiabilidade. A não-linearidade assumida neste trabalho é obtida através de funções descritivas, sendo que, no modelo matemático, a não-linearidade pode ser acrescentada tanto na matriz rigidez quanto na matriz de amortecimento, e sua posição irá depender do tipo de função descritiva que se está utilizando. Para verificar a funcionalidade do método, implementou-se um procedimento gráfico mostrando em cada passo de iteração até sua convergência. Na equação do resíduo para o caso de impedância ou receptância, o parâmetro de frequência (ω) é modificado para ($\omega\lambda$), pois (λ) é o fator que relaxa a frequência. Já, os resultados deste trabalho obtidos com o método "*arc-length*" são apresentados graficamente, utilizando vários modelos, os quais

são mostrados os casos lineares e não-lineares. Estes gráficos são comentados e analisados, e são mostradas as dificuldades encontradas. Os resultados deste trabalho são de grande importância para a validação do método proposto e também para trabalhos futuros, no qual este método pode ser empregado junto a outros que determinam soluções periódicas, no qual o "*arc-length*" pode ser utilizado para obter a estabilidade da resposta sistema.

Palavras-chaves: "*Arc-length*", método de continuação, Função de resposta em frequência, análise de estabilidade, Não-linearidade, Funções descritivas.

Abstract

Martins, Paulo Augusto de Oliveira. *Estudo de algoritmo de continuação aplicado a função de resposta em frequência não-linear*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005, 128 p. Dissertação (Mestrado).

The objective of this work is to study the applicability of the arc-length method in nonlinear frequency response (RF), mainly to obtain unstable regions of the receptance curve $\alpha(\omega)$ following the equilibrium way. To do this, it is necessary to know the several path-following procedures with the intuit of choosing the best method to do this task. The arc-length procedure must be used together with some optimization algorithm, so that this solves the nonlinear system of equations. Therefore, the procedure used is Newton-Raphson, due to its convergence ratio and reliability, although others Newton methods can be used with this purpose. The nonlinearity assumed in this work is obtained through describing functions, this nonlinearity is increased in the stiffness matrix and damping matrix of the mathematical model. To verify the functionality of the method, a graphic procedure was implemented to show the convergence at each iteration step. In the equation of residue, for the case of impedance or receptance, the parameter of frequency (ω) is modified for $(\omega\lambda)$, because (λ) is the factor that relaxes the frequency. The results obtained with the method are represented graphically using several models, which are treated for linear and nonlinear cases. These

graphs are commented properly, analyzed and the difficulties are showed presented. The results of this work are of great importance to validate the proposed method and also for future works, in which this method can be used in conjunction to others that determine periodic solutions, in which the arc-length can be used to obtain the stability of the system.

Keywords: Arc-length, Path-following, Frequency response functions, stability analysis, Non-linearity, Describing functions.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação do Trabalho	1
1.2	Revisão Bibliográfica	5
1.3	Objetivo	18
1.4	Descrição do Trabalho	19
2	Análise Dinâmica Não-Linear de Estruturas	21
2.1	Modelagem de Forças Não-Lineares	22
2.2	Modelos Matemáticos Utilizados	29
2.3	Método Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado	33
3	Método "Arc-Length"	36
3.1	Introdução	37
3.2	Teoria Básica de Solução	38
3.3	Procedimento Preditor	41
3.4	Procedimento Corretor	44

3.4.1	Definição do Resíduo para Desenvolvimento Numérico na Obtenção de RF	50
3.5	Técnicas para Ampliar a Robustez do Método "Arc-Length"	54
3.5.1	Estimativa Inicial do Comprimento do Raio	54
3.5.2	Controle do Fator de Carregamento Complexo	55
3.5.3	Implementação do "Line Search"	62
3.5.4	Estratégia para Controlar Automaticamente o Raio	63
3.6	Problemas de Convergência	67
3.7	Solução para Problemas de Convergência	69
3.8	Interpretação Geométrica do Método "Arc-Length"	70
4	Resultados e Discussões	81
4.1	Simulação dos Testes Realizados	82
4.1.1	Teste Realizado Com o Sistema de Um Grau de Liberdade, Com Representação de $\Re \times \text{Img}$, Linear e Não-Linear	82
4.1.2	Teste Realizado Com Um S3GL, Com Representação de $\Re \times \text{Img}$, Módulo, Linear e Não-Linear	91
4.1.3	Teste Com Um Sistema de Um Grau de Liberdade, Variando o Vetor Força Para o Caso do Módulo Linear e Não-Linear	103
4.1.4	Teste Com o Sistema de Um Grau de Liberdade Utilizando a Função Descritiva de Folga	106
4.1.5	Teste Com Um S3GL Utilizando A Função Descritiva de Folga	110

5	Conclusões	116
5.1	Considerações finais	116
5.2	Conclusões	117
5.3	Sugestões para trabalhos futuros	118
	Referências Bibliográficas	120
A	Fluxograma e Descrição do Método "Arc-Length" Aplicado a RF Não-Linear	129
B	Teste Realizado Com Uma Equação Linear	145
C	Teste Realizado Com Uma Parábola	148
D	Teste Realizado Com Um Sistema de Um Grau de Liberdade, Módulo, Linear e Não-Linear	154

Lista de Figuras

1.1	Método do carregamento constante.	6
1.2	Método do controle do deslocamento.	8
1.3	Fenômeno de " <i>snap-back</i> ".	9
1.4	(a) Método de Riks com técnica de Newton-Raphson.	10
1.5	(b) Método de Riks com técnica de Newton-Raphson modificado.	10
1.6	Fenômeno de " <i>snap-through</i> ".	11
2.1	Coeficientes de funções descritivas para sistemas não-lineares.	25
2.2	FRF e RF do sistema com um grau de liberdade com a componente real e imaginária.	31
2.3	FRF e RF do módulo do sistema com um grau de liberdade com a componente real e imaginária.	32
2.4	Fase linear e não-linear do módulo do sistema de um grau de liberdade com a componente real e imaginária.	32
2.5	Determinando o zero de uma função por Newton-Raphson.	34
2.6	Determinando o zero de uma função por Newton-Raphson modificado.	35

3.1	Fenômeno de "snap-back" e "snap-through".	37
3.2	Trajectoria da soluçao e curva de restricão	41
3.3	Ilustraçao do preditor tangencial foward-Euler	42
3.4	Ilustraçao da equaçao quadrática.	49
3.5	Ilustraçao da equaçao do resíduo.	50
3.6	Ilustraçao da equaçao do resíduo.	51
3.7	Ilustraçao das raizes para a equaçao quadrática.	61
3.8	Ponto não convergido.	67
3.9	Problema de convergência na inflexão.	68
3.10	Restricão cilíndrica representada no plano $ Receptância \times Freqüência$	72
3.11	Restricão cilíndrica vista no plano $\Re(Receptância) \times \Im(Receptância)$	72
3.12	Restricão cilíndrica vista no espaço $Receptância \times Freqüência$	73
3.13	Detalhe da restricão cilíndrica em três dimensões.	74
3.14	Funcionamento do método "arc-length", com 4 pontos convergidos.	75
3.15	Detalhe dos vetores do "arc-length" no processo iterativo, com vista no plano.	76
3.16	Detalhe dos vetores do "arc-length" no processo iterativo, visto no espaço.	76
3.17	Vetor $\delta\lambda_{k+1}^{i+1} \delta\mathbf{q}_{k+1}^{i+1}$ na posicão tangente.	78
3.18	Vetor $\delta\lambda_{k+1}^{i+1} \delta\mathbf{q}_{k+1}^{i+1}$ fora da equaçao de restricão.	79
4.1	Gráfico de Nyquist "arc-length" aplicado no sistema de um grau de liberdade linear $\Re \times \text{Img}$	83

4.2	Pontos convergidos do método aplicado no sistema de um grau de liberdade linear $\Re \times \text{Img}$	83
4.3	Visão geral do procedimento "arc-length" funcionando no sistema de um grau de liberdade linear $\Re \times \text{Img}$	83
4.4	Representação do "arc-length" para um caso linear $\Re \times \text{Img}$	84
4.5	Detalhe do método "arc-length", mostrando seu funcionamento para um caso linear $\Re \times \text{Img}$	85
4.6	Representação da RF de um sistema de um grau de liberdade com não-linearidade positiva com a parte $\Re \times \text{Img}$	86
4.7	Representação da RF do sistema de um grau de liberdade com não-linearidade negativa com a parte $\Re \times \text{Img}$	86
4.8	Detalhe da figura (4.6) para facilitar a visualização do caminho não-linear.	86
4.9	Gráfico de Nyquist com o funcionamento do "arc-length" aplicado no sistema de um grau de liberdade não-linear.	87
4.10	Visão espacial da RF não-linear do sistema de um grau de liberdade.	87
4.11	Detalhe do "arc-length" funcionando para um modelo do sistema de um grau de liberdade não-linear $\Re \times \text{Img}$	88
4.12	Pontos convergidos do "arc-length" aplicado no sistema de um grau de liberdade não-linear $\Re \times \text{Img}$	88
4.13	Outro ponto de vista da figura (4.12).	88
4.14	Módulo do modelo de um sistema de um grau de liberdade não-linear $\Re \times \text{Img}$	89

4.15	Esquema massa-mola de um S3GL não-linear, com amortecimento.	91
4.16	FRF linear de um S3GL.	92
4.17	Visão espacial da FRF linear de um S3GL.	92
4.18	Detalhe da primeira região de ressonância do S3GL linear.	92
4.19	RF não-linear de um S3GL.	94
4.20	Visão espacial da RF não-linear de um S3GL.	94
4.21	Detalhe da primeira região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL.	95
4.22	Detalhe do ponto crítico da figura (4.21).	95
4.23	Detalhe da segunda região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL.	95
4.24	Detalhe do ponto crítico da figura (4.23).	95
4.25	Detalhe da terceira região de ressonância de um sistema linear equivalente. .	96
4.26	Detalhe do ponto crítico da figura (4.26).	96
4.27	Gráfico de Nyquist do S3GL linear.	96
4.28	Gráfico de Nyquist do S3GL não-linear.	96
4.29	RF não-linear de um S3GL com $\beta < 0$	97
4.30	Detalhe da primeira região de ressonância de um sistema linear equivalente da figura (4.29).	97
4.31	Visão espacial da RF não-linear do S3GL com $\beta < 0$	97

4.32	Detalhe da segunda região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL da figura (4.29).	99
4.33	Visão mais aproximada da figura (4.32).	99
4.34	Detalhe da terceira região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL da figura (4.29).	99
4.35	Gráfico de Nyquist do S3GL não-linear com $\beta < 0$	100
4.36	Detalhe do gráfico de Nyquist da figura (4.35).	100
4.37	Vista espacial de RF lineares e RF não-lineares do sistema de um grau de liberdade com variação da força de excitação.	103
4.38	Outro ponto de vista da figura (4.37).	103
4.39	RF linear e RF não-linear do sistema de um grau de liberdade com variação da força.	104
4.40	Superfície da RF do sistema de um grau de liberdade não-linear.	104
4.41	Superfície da RF do sistema de um grau de liberdade não-linear.	105
4.42	RF do sistema de um grau de liberdade não-linear com representação das partes real e imaginária.	107
4.43	Detalhe da RF na figura (4.42).	107
4.44	RF do sistema de um grau de liberdade não-linear com função descritiva de folga.	107
4.45	Gráfico de Nyquist do sistema de um grau de liberdade não-linear com a função descritiva de folga, mostrando o procedimento do "arc-length".	108

4.46	Visão espacial da RF do sistema de um grau de liberdade não-linear com função descritiva de folga.	108
4.47	Gráfico de Nyquist de um S3GL não-linear com função descritiva de folga.	111
4.48	Visão espacial da RF S3GL não-linear com função descritiva de folga.	111
4.49	RF de um S3GL não-linear com função descritiva de folga.	111
4.50	Detalhe da primeira harmônica da figura (4.49).	112
4.51	Detalhe da segunda harmônica da figura (4.49).	112
4.52	Detalhe da terceira harmônica da figura (4.49).	112
A.1	Descrição da nomenclatura do fluxograma.	129
A.2	Fluxograma geral do método "arc-length".	131
A.3	Fluxograma do programa inicial <i>indat</i>	132
A.4	Fluxograma da função <i>arc</i> : parte 1.	134
A.5	Fluxograma da função <i>arc</i> : parte 2.	134
A.6	Fluxograma da função <i>funkt</i>	135
A.7	Fluxograma da função <i>calcjac</i>	137
A.8	Fluxograma da função <i>funres</i>	138
A.9	Fluxograma da função <i>polin</i>	142
A.10	Fluxograma da função <i>resp3</i>	143
B.1	Simulação da reta $y = 2x + 3$ com uma visão global.	146

B.2	Simulação com a reta $y = 2x + 3$ com detalhes.	146
C.1	Curva de variação do tempo com a diminuição do raio.	149
C.2	"Arc-length" aplicado a uma parábola.	150
C.3	Visualização do funcionamento do método "arc-length" aplicados a uma parábola.	150
C.4	Detalhe do método "arc-length" subindo a parábola.	151
C.5	Detalhe do método "arc-length" no pico da parábola.	151
C.6	Detalhe do método "arc-length" descendo a parábola.	152
D.1	Funcionamento do método "arc-length" para sistema de um grau de liberdade linear.	155
D.2	Detalhe do pico dos pontos convergidos da figura D.1.	155
D.3	Detalhe do funcionamento do "arc-length" no pico da figura D.1.	155
D.4	Resultado do "arc-length" aplicado no módulo do sistema de um grau de liberdade não-linear ($X \times \text{Hz}$).	157
D.5	Resultado do "arc-length" aplicado no módulo do sistema de um grau de liberdade não-linear ($\text{dB} \times \text{Hz}$).	157
D.6	Detalhe do ponto de pico dos pontos convergidos da D.4.	157
D.7	Funcionamento do método "arc-length" para o sistema de um grau de liberdade não-linear.	158
D.8	Detalhe do método "arc-length" iniciando a curva da figura (D.7).	158
D.9	Detalhe do método "arc-length", mostrando a inflexão da figura (D.7).	159

D.10	Detalhe do método "arc-length", mostrando a segunda inflexão da figura (D.7).	159
D.11	Procedimento do "arc-length" para o módulo do sistema de um grau de liberdade não-linear com $\beta < 0$.	160
D.12	Detalhe do ponto crítico da figura (D.11) mostrando o funcionamento diferenciado nesta região.	160
D.13	Visualização do resultado final dos pontos convergidos do sistema de um grau de liberdade não-linear com $\beta < 0$.	161
D.14	Outra representação da RF com os dados obtidos pelo "arc-length".	161

Lista de Tabelas

C.1	Relação do comprimento do raio e tempo computacional.	149
-----	---	-----

Nomenclatura

Letras Latinas

a	- equação de restrição (" <i>arc-length</i> ")	
C, c	- amortecimento viscoso	$[Ns/m]$
\mathbf{C}	- matriz de amortecimento viscoso	$[Ns/m]$
df	- função descritiva	
F_e	- amplitude da excitação	$[m]$
f_e	- força de excitação externa	$[N]$
\mathbf{f}_e	- vetor de força de excitação externa senoidal	$[N]$
\mathbf{f}_i	- vetor de força interna	$[N]$
\mathbf{f}_e	- vetor de carregamento externo	$[N]$
F	- vetor de força não-linear	$[N]$
\mathbf{F}	- vetor força	$[N]$
\mathcal{F}	- função harmônica complexa não-linear	
H	- resposta em frequência	
i	- número imaginário	
i	- número de iterações	
$N + 1$	- número de equações não-lineares	
K, k	- rigidez	$[N/m]$
\mathbf{K}	- matriz de rigidez	$[N/m]$
\mathbf{K}_t	- matriz tangente	
M, m	- massa	$[kg]$
\mathbf{M}	- matriz de massa	$[kg]$
\mathbf{p}	- vetor de deslocamento	$[m]$
\mathbf{q}, \mathbf{q}_e	- vetor de carregamento aplicado	$[N]$

t	- tempo	[s]
x	- deslocamento	[m]
\mathbf{x}	- vetor de deslocamento	[m]
\dot{x}	- velocidade	[m/s]
$\dot{\mathbf{x}}$	- vetor de velocidade	[m/s]
\ddot{x}	- aceleração	[m/s ²]
$\ddot{\mathbf{x}}$	- vetor de aceleração	[m/s ²]
X	- amplitude complexa do deslocamento	[m]
\mathbf{X}	- Vetor de amplitude complexa do deslocamento	[m]
\mathbf{Z}	- impedância	
$f(x)$	- função não-linear	
S_p	- parâmetro de rigidez corrente ou parâmetro de Bergan	

Letras Gregas

β	-	coeficiente de rigidez da função descritiva	
δ	-	incremento de uma função não-linear	
θ	-	deslocamento angular	[rad]
λ	-	fator de carregamento	
ν	-	função descritiva	
τ	-	ωt	[rad]
ϕ	-	fase do deslocamento complexo	[rad]
ψ, ξ	-	parâmetro de escala ("arc-length")	
α	-	parâmetro de escala (<i>busca-unidimensional</i>)	
Ψ	-	resíduo	
$\alpha(\omega)$	-	matriz receptância	
ω	-	frequência de excitação	[rad/s]
$\bar{\delta}\mathbf{p}$	-	incremento iterativo de deslocamento devido a contribuição do resíduo	
$\delta\mathbf{p}$	-	vetor de deslocamento iterativo	
$\delta\mathbf{q}_t$	-	deslocamento tangencial iterativo devido a matriz rigidez tangencial	
$\delta\lambda$	-	parâmetro de incremento de carregamento	
Δl	-	raio da circunferência	
$\Delta\mathbf{p}$	-	vetor incremento de deslocamento	
$\Delta\mathbf{p}^0$	-	vetor incremento de deslocamento inicial	
$\Delta\lambda$	-	parâmetro incremento de carregamento	
γ	-	fator de relaxação	

Superescritos

- k - iteração
- m - ordem harmônica
- \sim - variável aproximada

Subscritos

- i - pontos convergidos
- t - tangente

Abreviações

- FRF - função de resposta em frequência (H linear)
- S3GL - Sistema com três graus de liberdade
- RF - resposta em frequência (H não-linear)
- MBH - método do balanço harmônico

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação do Trabalho

Existem muitos métodos de cálculos aplicados em vibração de sistemas lineares com parâmetros constantes. Em geral estes métodos representam a maioria dos casos de vibração estrutural em engenharia mecânica. Mas também existem importantes exemplos de vibração mecânica quando as equações possuem coeficientes variando ou quando as equações são não-lineares.

Na prática existem muitas estruturas complexas que possuem um comportamento não-linear. Alguns sinais de uma estrutura com comportamento não-linear, podem ser:

- Frequências naturais variando com a excitação;
- Gráficos de resposta em frequência distorcidos;
- Dados instáveis ou não se repetem.

Porém se um comportamento não-linear é detectado numa estrutura é útil ter uma estratégia de como proceder para analisar a resposta em frequência, uma vez que o princípio

de superposição não é mais válido.

A arquitetura dos computadores têm mudado rapidamente, permitindo manipular matrizes, realizar cálculos em paralelo e obter visualização gráfica. Novas linguagens de computadores foram desenvolvidas para facilitar ainda mais a comunicação entre os computadores e a sua aplicação no desenvolvimento de programas de engenharia.

Juntamente com estes desenvolvimentos, melhores métodos numéricos foram desenvolvidos devido as mudanças rápidas que surgiram com as técnicas computacionais, facilitando aos pesquisadores confrontar a teoria, através de programas, com a parte prática. Assim, foi possível desenvolver métodos numéricos iterativos mais sofisticados, e sendo possível aplicá-los na determinação das respostas de sistema não-lineares. Estas respostas representam posições de equilíbrio das equações diferenciais do sistema que podem ser soluções de equilíbrio estáveis ou instáveis. O sistema será classificado como estável se seu centro de gravidade estiver abaixo do ponto de suspensão. Já se o centro de gravidade estiver acima do centro de suspensão o equilíbrio será instável.

Dentre os métodos iterativos para resolver sistemas de equações não-lineares, tem-se os métodos Newton-Raphson e Newton-Raphson modificado (Crisfield, 1979), porém estes métodos são incapazes de determinar respostas não-lineares instáveis de estruturas. Contudo, devido a necessidade de analisar estas respostas foi necessário que um método de continuação fosse empregado em conjunto com o método de Newton-Raphson.

Nestas duas últimas décadas, várias técnicas numéricas iterativas têm sido desenvolvidas com aplicações em soluções de problemas estruturais não-lineares (não-linearidades geométricas ou de material), tais como: pseudo-*"arc-length"* (Nayfeh e Balachandran, 1995), *"arc-length"* (Crisfield, 1981), método do controle do deslocamento (Powell e Simons, 1981a),

método do controle do trabalho (Yang e Shieh, 1990), entre outros. Alguns destes métodos são capazes de traçar caminhos complexos no espaço carregamento-deslocamento (Magnusson e Svensson, 1998; Batoz e Dhett, 1979; Feng *et al.*, 1995; Bellini e Chulya, 1987; Xu e Mirmiran, 1997).

Estes procedimentos numéricos, são baseados em algoritmos de continuação (Kouhia e Mikkola, 1999; Tanaka e Tatsuoka, 1995; Zhou e Murray, 1994; Kouhia e Mikkola, 1999), que possuem a capacidade de seguir o caminho de equilíbrio e ultrapassar pontos críticos se estes existirem. Estes métodos possibilitam determinar o caminho de instabilidade, o que não é possível quando se utiliza, por exemplo, o método Newton Raphson (Ferreira, 1998).

Um desses procedimentos mais populares é o método "*arc-length*" de Crisfield(1981), que possui a capacidade de ultrapassar pontos de inflexão, sem necessariamente ter que determiná-los, tornando-se apto a ser empregado em situações onde o caminho de equilíbrio possui um ou múltiplos pontos críticos, ou seja um ponto do domínio da função onde a derivada é nula, que é o caso típico de estruturas não-lineares.

Podemos encontrar, na literatura, basicamente três tipos de problemas, quando é desejado traçar resposta não-linear de estruturas. Primeiro, o caminho de equilíbrio que deve ser seguido (Wriggers e Simo, 1990; Garcea *et al.*, 1998; Allman, 1989); segundo, os pontos singulares, isto é, pontos limites ou de bifurcação que devem ser identificados e calculados quando houver necessidade (Shi, 1996; Chan, 1993; Riks, 1979); e terceiro, para o ponto de bifurcação, o braço secundário que deve ser examinado e seguido (Magnusson e Svensson, 1998; Fujii e Ramm, 1997; Kouhia e Mikkola, 1989).

Para o caso de seguir caminhos de soluções não-singulares, um número considerável de procedimentos de continuação foram propostos nas últimas décadas (Hellweg e Crisfield,

1998; Crisfield, 1983; Forde e Stiemer, 1987; Lee *et al.*, 1999). Entre estes métodos, o método "*arc-length*" tem sido utilizado principalmente em aplicações numéricas como: na análise de trincas em estruturas de concreto (Crisfield, 1986a), análise de grandes deflexões em vigas submetidas a um ponto de carregamento (Wang *et al.*, 1997), estudo da flambagem de arcos (Xu e Mirmiran, 1997), análise de cascas de revolução sujeitas a carregamentos axisimétricos (Tend e Lou, 1997) e entre outros. Basicamente o método "*arc-length*" adiciona uma equação de restrição a equação de equilíbrio residual, e resolve a equação estendida por procedimento iterativo-incremental tais como: Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado, ou técnicas de Quasi-Newton, para obter um ponto de solução ao longo da curva (Crisfield, 1997).

Existe uma grande similaridade entre as curvas de carregamento-deslocamento não-lineares obtidas com o método "*arc-length*" com relação às curvas de respostas em frequência não-lineares (RF), devido aos pontos críticos, tipos de inclinações, problema de convergência, ou seja, pelo fato de possuírem mais de uma resposta para um determinado parâmetro. Assim, devido a todas estas peculiaridades, torna-se complexo empregar métodos convencionais de otimização para superar todos estes obstáculos e ser possível obter, principalmente, as respostas instáveis.

A proposta deste trabalho é utilizar um procedimento de continuação, especificamente o "*arc-length*" para seguir o caminho de equilíbrio estável e instável de uma RF (resposta em frequência) não-linear. Para aplicar este procedimento será necessário substituir às variáveis de carregamento e deslocamento por variáveis de frequência e amplitude, respectivamente.

O desenvolvimento do método "*arc-length*" mostrou ser importante quando aplicado na obtenção de resposta em frequência não-linear, por causa da dificuldade em encontrar trabalhos relacionados a este assunto (von Groll e Ewins, 2000), e por possibilitar a comparação

entre uma resposta em frequência não-linear teórica e uma obtida experimentalmente.

Para facilitar o entendimento do método "*arc-length*" é necessário interpretar geometricamente o seu funcionamento, as suas limitações, e as suas vantagens. O método é aplicado para resolver um sistema simples de duas equações não lineares para possibilitar a visualização geométrica da obtenção das suas RFs.

Uma vez que muitos trabalhos (de Borst, 1987; Chan, 1993; Tend e Lou, 1997; Fujii e Ramm, 1997; de Souza Neto e Feng, 1999; Raghothama e Narayanan, 2000b,a) foram desenvolvidos levando em consideração pontos de bifurcação, algoritmos para determinar o braço de equilíbrio secundário e também métodos para determinar com exatidão pontos críticos ou os pontos de bifurcação, torna-se necessário citá-los devido a relação que eles possuem com o "*arc-length*" e pela quantidade de obras publicadas, embora este assunto fuja do escopo deste trabalho. Assim, o próximo passo é uma revisão da literatura que foi utilizada ao longo deste trabalho.

1.2 Revisão Bibliográfica

Dentre os métodos de continuação existentes, o primeiro a ser utilizado com o método de Newton-Raphson, foi o método do carregamento (Risks, 1972). Ele é frequentemente usado para análise não-linear estrutural com elementos finitos, desde que ela seja feita até um carregamento pré-crítico. O método de carregamento foi inicialmente desenvolvido por (Risks, 1972) e (Wempner, 1971), que coincidentemente e engenhosamente introduziram uma equação de restrição ao método Newton-Raphson envolvendo uma técnica de variação de carregamento iterativo. Este procedimento fornece um tratamento mais geral e numericamente

eficiente para respostas pré-crítica de estruturas.

A estratégia iterativa que ocorre no método do carregamento não permite ultrapassar pontos limites tal como é mostrado na figura 1.1. É possível observar que nível de carregamento só pode ser elevado até o ponto crítico e após este ponto, é impossível determinar a solução do caminho de equilíbrio. No gráfico é possível visualizar o problema descrito. As coordenadas são representadas por λ e \mathbf{p} , as quais correspondem ao fator de carregamento e deslocamento, respectivamente.

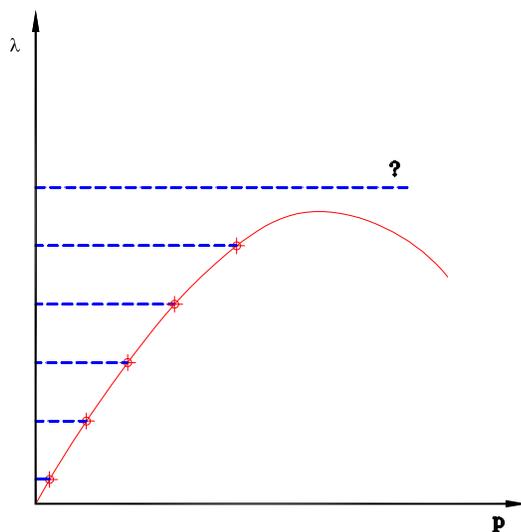


Figura 1.1: Método do carregamento constante.

Assim, quando se deseja fazer uma análise de carregamento para passar pontos limites e obter respostas instáveis, o método do carregamento falha em dar uma solução satisfatória (Haisler *et al.*, 1977).

Logo, foi necessário utilizar um outro método de continuação que pudesse ultrapassar o carregamento crítico, e determinar as respostas da estrutura pré e pós-críticas. Por isto, vários autores em busca de suprir esta necessidade, apresentaram e estudaram outros métodos

de continuação com o método de Newton-Raphson, para obter as respostas independente do carregamento crítico.

Uma vez que o método do deslocamento começou a ser estudado, naturalmente algumas variações dele foram surgindo e paralelamente surgiram diversas aplicações com o método, conforme será apresentado a seguir.

(Batoz e Dhatt, 1979) definiram uma técnica a qual preserva a simetria da matriz de rigidez e as propriedades de banda, quando usado com um algoritmo de controle de deslocamento. Este método utiliza a componente de deslocamento como uma variável independente ao invés do parâmetro de carregamento como usual.

Dois métodos semelhantes, porém desenvolvidos independentemente, foram propostos por (Noor e Peters, 1981) que desenvolveram um método baseado no deslocamento nodal aplicado para um reduzido sistema de equações não-lineares e por (Powell e Simons, 1981a) que desenvolveram um método de controle de deslocamento para analisar estruturas não-lineares. Este método foi apenas analisado para estruturas com pouca complexidade em relação ao carregamento-deslocamento.

Considerando um método um pouco mais sofisticado que o anterior, tem-se o método do controle do deslocamento. Os autores (Powell e Simons, 1981a) desenvolveram um método de controle do deslocamento, baseando-se numa técnica mais geral. De acordo com (Powell e Simons, 1981a) este método é eficiente e estável quando aplicado a pequenas estruturas, quando estas possuem uma relação de carregamento-deslocamento mais complexa, o método pode ficar não muito confiável.

Uma outra análise realizada por (Carrera, 1994) diz que o método do deslocamento falha próximo a um ponto limite como é mostrado na figura 1.2. À medida que se aumenta o nível

de deslocamento as respostas vão sendo determinadas até o ponto em que a curva reverte sua direção de equilíbrio.

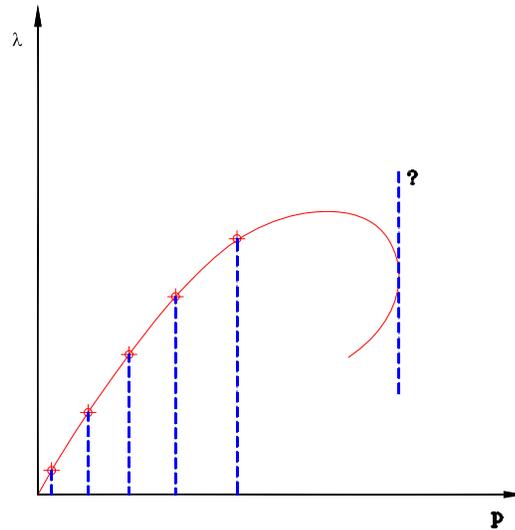


Figura 1.2: Método do controle do deslocamento.

Paralelamente ao desenvolvimento do método de carregamento, (Riks, 1979) desenvolveu um método incremental para análise de flambagem e solução de problema de "snap-back". Este fenômeno envolve um salto dinâmico para um novo estado de carregamento com um nível de deslocamento fixo, como é mostrado na figura 1.3. O método de Riks ou método do plano normal, foi o procedimento que Crisfield tomou como base para desenvolver seu método. O método de (Riks, 1979) corresponde a uma linearização da forma esférica do método "arc-length" de Crisfield. Este procedimento é aplicado apenas a problemas unidimensionais e não esta numa forma desejável para ser utilizada em elementos finitos (Crisfield, 1981; Jeusette e Laschet, 1989).

(Crisfield, 1981) então utilizou estas contribuições simultaneamente propondo uma equação de restrição constante cilíndrica e posteriormente esférica chamada de "arc-length". Ele fez uma modificação do plano tangente restringido, que é a restrição do método de Riks, para a

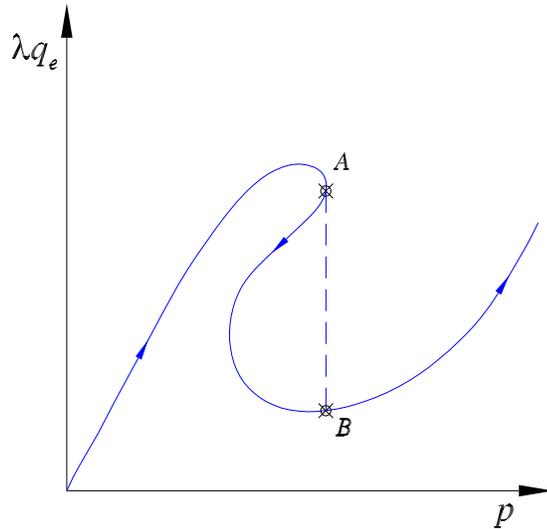


Figura 1.3: Fenômeno de "snap-back".

equação de uma circunferência que tornou o "arc-length" capaz de resolver de forma iterativa um sistema de $N + 1$ equações não-lineares. Isto permitiu a aplicação do "arc-length" em elementos finitos.

A aplicação do procedimento de (Riks, 1979) para solução de problemas unidimensionais, está ilustrada nas figuras 1.4 e 1.5. Riks usou a direção normal para restringir a tangente ao invés de um caminho circular. Segundo Crisfield, o método utilizando um caminho circular é ligeiramente menos provável à falha.

Em outro trabalho Crisfield desenvolveu um método de "arc-length" introduzindo um procedimento de "line-search". Ele também desenvolveu um simples parâmetro de aceleração baseando-se neste "line-search", obtendo assim um novo "arc-length" que pode ser aplicado para não-linearidade geométrica e de material (Crisfield, 1983). Crisfield, também mostrou que o "arc-length" pode ser utilizado para uma aplicação diferente da proposta inicial, que é o levantamento de curvas carregamento-deslocamento. Neste trabalho, Crisfield aplicou

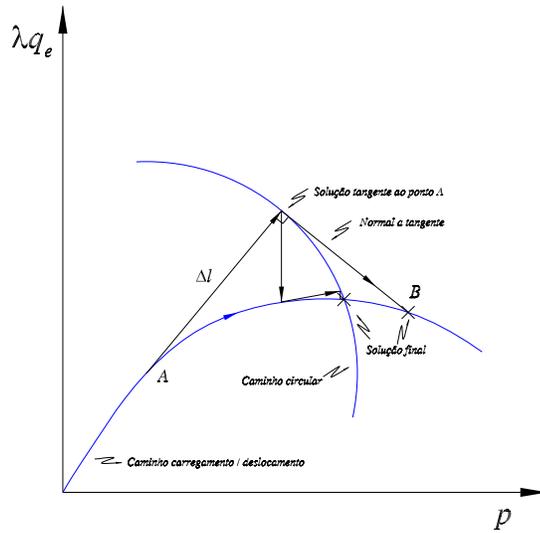


Figura 1.4: (a) Método de Riks com técnica de Newton-Raphson.

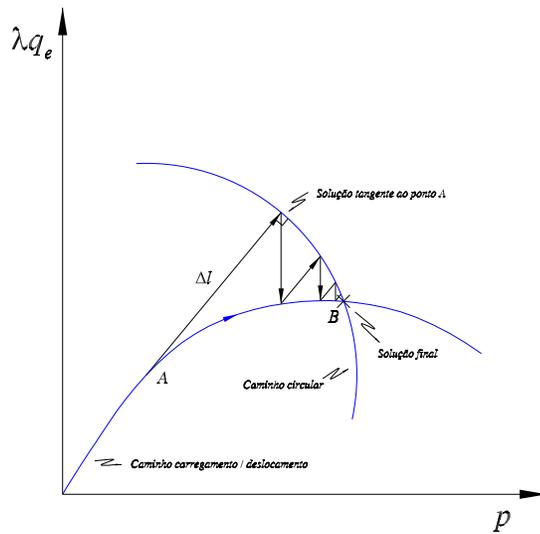


Figura 1.5: (b) Método de Riks com técnica de Newton-Raphson modificado.

o método na análise de estruturas de concreto com trincas que apresentam comumente as respostas com *"snap-back"* e *"snap-through"* (Crisfield, 1986b), fenômenos estes relacionados com saltos dinâmicos. Para o caso do *"snap-through"* o salto é dado para um novo estado de deslocamento para um nível de carregamento fixo, como é mostrado na figura 1.6.

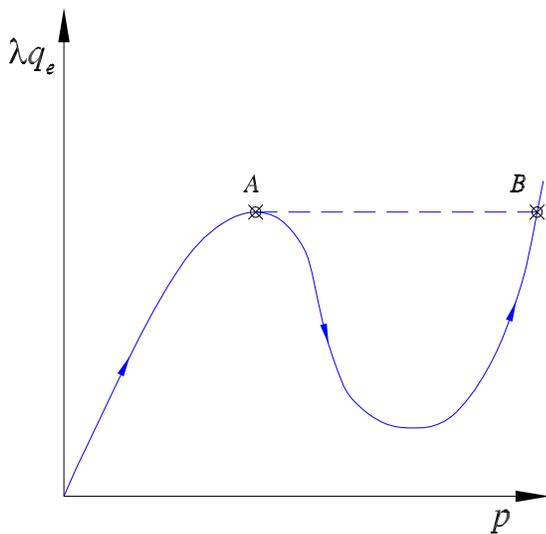


Figura 1.6: Fenômeno de *"snap-through"*.

Baseando nos estudos de Crisfield muitos autores desenvolveram outros trabalhos. Eles utilizaram o método de Crisfield como base e implementaram novas ferramentas, tornando o método mais robusto e confiável. Outros autores propuseram seus métodos de continuação modificando o procedimento de Crisfield. Algumas destas variações e técnicas serão mostradas a seguir.

(Forde e Stiemer, 1987) apresentaram uma nova derivação do *"arc-length"* baseado em princípios ortogonais, o qual forneceu o mesmo resultado do método de Crisfield com uma redução no esforço computacional. O autor aplica sua teoria para um exemplo numérico de uma estrutura de placas e cascas.

(Kouhia e Mikkola, 1989) implementaram um método para detectar pontos críticos baseado em autovalores da matriz de rigidez tangencial.

Os autores (Clarke e Hancock, 1990) fizeram um estudo de vários métodos de continuação considerando o caso de não-linearidade geométrica. Vários métodos foram comparados destacando suas limitações e vantagens.

O autor (Carrera, 1994) também fez um estudo de métodos "*arc-length*" e ilustrou suas falhas utilizando um modelo simples. Ele fez uma interpretação geométrica do método com a equação de equilíbrio linearizada, e baseado nisto ele propôs seu método aplicando-o em uma parábola.

Já os autores (Zhou e Murray, 1994) desenvolveram uma formulação modificada do "*arc-length*", que evita o aparecimento de raízes complexas. Este procedimento foi utilizado neste trabalho e será posteriormente descrito com mais detalhes na seção 3.5.2.

Um método, levando-se em consideração a equação de equilíbrio normalizada e a estratégia de parametrização do caminho de equilíbrio, foi proposto por (Feng *et al.*, 1995) para assegurar que o procedimento siga a curva corretamente.

(Tanaka e Tatsuoka, 1995) utilizaram um método de relaxação dinâmica para traçar o caminho de equilíbrio aplicado em problemas com materiais não-lineares. Porém este tipo de problema, segundo o autor, apresentou geralmente a resposta "*snap-through*", e para resolver este problema foi utilizado o controle do "*arc-length*".

Uma nova proposta para determinar a direção do parâmetro de carregamento inicial é mostrada por (Feng *et al.*, 1996). Os autores fazem uma análise dos critérios existentes para mostrar a eficiência de sua proposta. Seu critério leva em consideração o tipo de equação de restrição do "*arc-length*".

No mesmo ano os autores (Feng *et al.*, 1997) provaram matematicamente que o sinal do determinante da matriz rigidez pode ser utilizado para determinar a direção do parâmetro de carregamento inicial, a menos que um ponto de bifurcação seja passado.

(Hellweg e Crisfield, 1998) propuseram um método em propagação de trincas para ultrapassar ponto limite, através do cálculo do resíduo para ambas as raízes da equação quadrática do carregamento.

(Montag *et al.*, 1999) mostraram uma estratégia de simulação numérica altamente eficiente para análise de estruturas de cascas elasto-plásticas. Estes autores utilizaram elementos isoparamétricos e um modelo de material não-linear bastante realístico.

Num outro trabalho, os autores (Szyszkowski e Husband, 1999) apresentaram uma interpretação geométrica do método "*arc-length*" com o intuito de ajudar a entender as complexidades que os métodos de continuação apresentam. Estes autores fizeram uma breve discussão dos prós e dos contras das iterações de equilíbrio utilizando o método de Crisfield.

Já (Jike *et al.*, 1999) aplicaram o "*arc-length*" para resolver equações diferenciais ordinárias com certos tipos de singularidade.

Assim, diversas técnicas e variações do "*arc-length*" foram propostas, os quais foram aplicadas em diversos casos. Dentre estes casos, encontra-se o "*arc-length*" de Crisfield bastante utilizado quando se quer empregá-lo na análise de estruturas com carregamento pós-crítico. Porém, podem haver casos em que a resposta da estrutura possui um braço de equilíbrio secundário, tornando-se necessário determinar o ponto de bifurcação para analisar o caminho secundário. Seguindo esta linha de pesquisa vários trabalhos utilizando o "*arc-length*", foram desenvolvidos e são relacionados abaixo.

Uma outra contribuição foi desenvolvida por (de Borst, 1987) através de um método

"*arc-length*" que leva em consideração a bifurcação em estruturas que demonstram resposta pós-bifurcação que podem ser traçadas com sucesso.

Já o autor (Jeusette e Laschet, 1989) propõe um método que possui uma nova equação para controlar o tamanho do raio, que facilita a análise de bifurcação e uma completa resposta não-linear de uma estrutura.

Um outro autor, (Allman, 1989), segue na mesma linha do anterior apresentando uma metodologia para o cálculo de pontos singulares e bifurcação. Ele utiliza problemas com modelos simples, os quais representam o fenômeno de estabilidade elástica de estruturas mecânicas.

(Kouhia, 1992) detalhou um procedimento "*arc-length*", que possui um controle adaptativo do comprimento do raio. Seu algoritmo levou em consideração apenas um ponto crítico, e mostrou um procedimento para seguir o braço secundário da bifurcação. Na sua equação de restrição, ele utilizou uma matriz diagonal que contém termos de pesos do deslocamento e fator de escala.

Seguindo uma outra linha, (Chan, 1993) desenvolveu um método numérico para determinar com precisão um ponto limite ou de bifurcação. Este autor mostra a necessidade de determinar tais pontos com precisão para se ter uma previsão mais exata do carregamento crítico da estrutura. Seu método exige um custo computacional maior para determinação do ponto crítico, pois é um ponto cuja a convergência exige normalmente um número maior de iterações em relação aos outros pontos porque é necessário satisfazer não somente a condição de equilíbrio, mas também a necessidade de detectar a mudança do estado de equilíbrio através da matriz de rigidez tangencial.

Uma outra proposta de (Fujii e Ramm, 1997) leva em consideração a bifurcação, a deter-

minação de ponto críticos com precisão. Eles também desenvolveram um procedimento para seguir o caminho secundário para traçar o caminho na região de pós-flambagem.

Um outro trabalho desenvolvido por (Magnusson e Svensson, 1998), mostra um método direto que determina os resultados completos da curva carregamento-deslocamento, incluindo ambos os braços primários e secundários, assim como o cálculo exato dos pontos singulares. Os autores utilizaram o procedimento "*arc-length*" de Crisfield.

Uma outra proposta feita por (de Souza Neto e Feng, 1999), discute a escolha do sinal do incremento do fator inicial de carregamento para o método "*arc-length*". Estes autores propuseram um novo critério para este caso, que leva em consideração a bifurcação.

O método "*arc-length*" de Crisfield é um dos métodos de continuação mais utilizado na literatura conforme os trabalhos já mostrados. Porém, outros métodos mais recentes foram desenvolvidos ou modificados na tentativa de serem mais eficientes, como os dois casos que seguem que são uma modificação do método de carregamento e deslocamento, respectivamente.

Um estudo desenvolvido por (Xu e Mirmiran, 1997) utilizaram uma técnica modificada de Riks-Wempner, a qual permitiu a análise de flambagem de arcos. Eles utilizaram uma formulação de elementos finitos que permite separar o deslocamento de corpo rígido do deslocamento de deformação do elemento.

A maioria dos métodos apresentados até aqui, leva em consideração apenas um ponto crítico, porém (Yang e Shieh, 1990) contribuíram com um método melhorado, para resolver problemas não-lineares com múltiplos pontos limites e pontos de "*snap-back*", pois quando estes problemas aconteciam estes métodos não eram capazes de superar estas dificuldades e um salto ocorria na curva de equilíbrio. Os autores propuseram uma equação de restrição mais

geral, e referenciam sua proposta como método do controle do deslocamento generalizado.

Um outro método desenvolvido por (Kouhia, 1992), é o método do controle do trabalho, o qual usa um carregamento restringido para sempre obter raízes reais.

O método do controle do trabalho possui o resíduo igual ao trabalho externo apenas na primeira iteração, cujo trabalho é mantido constante durante o passo $i + 1$, ou seja, para iterações $i > 1$ o resíduo é nulo. A quantidade de trabalho externo, deve ser pequena o bastante para assegurar que as equações de equilíbrio deste método forneçam raízes reais. Um estudo realizado por (Yang e Shieh, 1990), diz que este método geralmente é eficiente para traçar caminhos com pontos limites, mas não obtém sempre sucesso quando ocorre o fenômeno de "*snap-back*" (Clarke e Hancock, 1990).

Há também um método "*arc-length*" desenvolvido para uma aplicação diferenciada, o qual foi empregado por (Náprstek, 1999) que propôs uma versão estocástica do método "*arc-length*" de sistemas não-lineares estocásticos com uma formulação linearizada, que de acordo com o autor possui problemas de convergência e o método precisa ser melhorado.

Os três últimos métodos de continuação citados, são variações de métodos de continuação, possuem problemas de convergência e são limitados dependendo da aplicação na qual estes métodos são empregados.

Uma vez que foram mostrados alguns métodos de continuação, é possível mostrar os motivos pelos quais o método "*arc-length*" supera os outros métodos, seja na confiabilidade de convergência, velocidade ou no número de trabalhos que utilizam o método "*arc-length*".

O método "*arc-length*" de Crisfield, cujo equacionamento será explicado no capítulo 3 é brevemente discutido aqui. O método de (Crisfield, 1983), que representa uma modificação do procedimento de Riks, foi realizado sob a luz de sua experiência numérica além de adaptar

um adequado método de elementos finitos.

O método de Crisfield possui a vantagem de levar em consideração uma equação iterativa de restrição esférica, de raio Δl , centrada no último estado de convergência, ao invés de um plano como originalmente proposto por Riks e Wemper. Uma outra vantagem do método é sua capacidade de evitar que um ponto de convergência já definido seja determinado novamente, simplesmente escolhendo uma das raízes da expressão quadrática corretamente.

Levando em consideração alguns estudos realizados por diversos autores, tem-se o realizado por (Clarke e Hancock, 1990) que compararam algumas técnicas e chegaram a conclusão que o "*arc-length*" apresentou um sucesso mais amplo a respeito das outras técnicas iterativas. Este método não apresentou dificuldades nas proximidades de pontos limites.

Uma outra análise realizada por (Forde e Stiemer, 1987) pôs em questão vários procedimentos de continuação:

- ① - Método do plano normal.
- ② - Método iterativo consistentemente[‡] linearizado.
- ③ - Método iterativo esférico de Crisfield.
- ④ - Método iterativo esférico usando ortogonalidade.

Sendo que cada um destes métodos foram combinados com três métodos baseados em métodos de Newton:

- ① - Newton modificado.

[‡]Este método será explicado na seção 3.2.

② - Quasi-Newton.

③ - Newton convencional.

Segundo o autor o resultado da análise indica que a convergência é relativamente independente do procedimento aplicado e que o seu método forneceu resultados idênticos ao método de Crisfield e com uma redução de 18% no tempo computacional gasto em relação aos outros métodos analisados.

Assim, pode-se assumir que como o método "*arc-length*" fornece a facilidade de ultrapassar pontos críticos, sucesso para o problema de "*snap-back*" (pois este método surgiu para evitar que saltos dinâmicos para um novo nível de carregamento ocorra), e confiabilidade na convergência relacionada com fortes comportamentos não-lineares. Portanto, o método "*arc-length*" de (Crisfield, 1981) foi escolhido neste trabalho, devido as características das curvas de RF não-lineares apresentarem todas as dificuldades anteriormente discutidas.

1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho é estudar um método de continuação "*arc-length*", e aplicá-lo na obtenção de respostas em frequências não-lineares.

O estudo envolve o desenvolvimento das equações do método "*arc-length*", bem como sua interpretação geométrica. A aplicação envolve a demonstração das alterações necessárias no método "*arc-length*" para obtenção das RFs (respostas em frequência não-lineares).

No estudo foi realizado uma seqüência grande de testes para avaliar o método e verificar seu funcionamento. Inicialmente foram realizados testes de validação em uma equação de

reta, e numa equação de parábola, e posteriormente em modelos de parâmetros concentrados representando sistemas de 1,2 e 3 graus de liberdade lineares e não-lineares.

1.4 Descrição do Trabalho

O capítulo 1 mostra a motivação para desenvolver este trabalho. Foi apresentada uma exposição dos objetivos propostos, na qual é fornecida uma visão geral da proposta deste trabalho, foi dado um posicionamento do mesmo em relação aos trabalhos que existem na literatura e fornecida uma revisão bibliográfica de diversos autores, com o intuito de mostrar o contexto atual e passado voltado para o problema proposto. Assim, foi possível definir a escolha do método utilizado e também entender as dificuldades impostas, na sua implementação.

Dando seqüência, no capítulo 2, é feita uma breve descrição sobre tipos de modelos matemáticos que serão utilizados nesta tese. No mesmo capítulo será destacada a função descritiva que linearizará o problema, bem como os métodos convencionais para solução de equações não-lineares, como o Newton-Raphson.

No capítulo 3, será fornecida uma descrição matemática global do método "*arc-length*" que será utilizado neste trabalho. Nele se desenvolverá a aplicação do método "*arc-length*" em resposta em frequência não-linear, além de mostrar alguns procedimentos para aumentar a confiabilidade e performance do método "*arc-length*". Serão mostradas técnicas que podem ser incorporadas ao método tornando-o mais robusto e também uma interpretação geométrica.

No capítulo 4, serão mostrados os resultados obtidos com todos os modelos testados para

convalidar o método implementado, além de discutir alguns detalhes e peculiaridades.

Finalizando, o capítulo 5 são feitas as considerações finais sobre este trabalho, destacando as conclusões obtidas com este estudo.

Capítulo 2

Análise Dinâmica Não-Linear de Estruturas

O estudo de sistemas dinâmicos não-lineares foi preterivelmente escolhido o domínio da frequência ao invés do tempo, devido o esforço computacional e o tempo de simulação que são muito menores. Se o sistema possuir um número grande de graus de liberdade, será necessário um computador poderoso para realizar integração no domínio do tempo. Uma outra vantagem na análise no domínio da frequência é a possibilidade de linearizar as não-linearidades inerentes dos sistemas. Além de que alguns problemas são difíceis de solucionar diretamente, podendo ser mais fácil resolvê-lo no domínio da frequência e aplicar uma inversão do sistema para achar sua solução.

Neste capítulo são mostrados os modelos matemáticos que foram utilizados neste trabalho. Parcialmente é apresentada a teoria sobre funções descritivas, que dá suporte para tratar a não-linearidade que é incluída no sistema. Em seguida é mostrado o modelo de sistemas de parâmetros concentrados, depois é mostrado o modelo de RF (resposta em frequência não-linear) e como ele deve ser representado o modelo matemático do resíduo, utilizado

para aplicação do método "arc-length". O modelo do resíduo foi desenvolvido na forma de impedância e receptância, linear e não-linear. A importância na escolha correta do resíduo foi um dos fatores determinantes no êxito do método.

Finalmente, é dada uma introdução ao método de Newton-Raphson que é o escolhido para ser utilizado com o procedimento do "arc-length".

2.1 Modelagem de Forças Não-Lineares

As não-linearidades localizadas podem ser modeladas no domínio da frequência utilizando o método das funções descritivas. O método de funções descritivas lineariza a não-linearidade através da definição de um série infinita de coeficientes a determinar (Ferreira, 1998).

Na analysis de sistemas não-lineares, o método de funções descritivas é freqüentemente usado onde oscilações sustentadas existem, comum em sistemas eletrônicos (Sanders, 1993). A base teórica do método de funções descritivas vêm do método de van der Pol (der Pol, 1927), que varia lentamente coeficientes assim para resolver certos problemas da mecânica não-linear, comum em vibrações (Lin, 1988).

Assumindo uma excitação externa senoidal chamada de f_e , ela pode ser escrita na forma

$$f_e(t) = F_e e^{i\omega t} + F_e^* e^{-i\omega t} = F_e e^{i\tau} + F_e^* e^{-i\tau}, \quad (2.1)$$

onde F_e representa a amplitude da excitação, ω é a frequência de excitação, $\tau = \omega t$, e o sobrescrito * representa o complexo conjugado.

A resposta estacionária pode ser representada em série de Fourier por

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X^m e^{im\omega t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X^m e^{im\tau}. \quad (2.2)$$

onde m é a ordem da harmônica, X é a amplitude complexa do deslocamento e ω é a frequência de excitação. Note que X^{-m} é o complexo conjugado de X^m , o qual resulta em componentes harmônicas reais:

$$x^m(t) = X^m e^{im\tau} + X^{-m} e^{-im\tau} = (A^m \sin(m\tau) + B^m \cos(m\tau)) = X^m \sin(m\omega t + \phi), \quad (2.3)$$

onde ϕ é o ângulo de fase e

$$\begin{aligned} A^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(m\tau) d\tau, \\ B^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(m\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Para linearizar uma força não-linear $F(x, \dot{x})$ utilizando o método de funções descritivas, é necessário assumir inicialmente que as componentes harmônicas de alta ordem da resposta x e \dot{x} que aparecem em $F(x, \dot{x})$ possuam amplitudes relativamente pequenas quando comparadas às suas componentes fundamentais. Portanto a resposta é dominada pela componente fundamental da série de Fourier. Neste caso, a resposta $x(t)$ pode ser escrita como:

$$x(t) \approx \tilde{x}(t) = x^1(t) = \sum_{m=-1}^1 X^m e^{im\tau} = (A^1 \sin(\tau) + B^1 \cos(\tau)) = X^1 \sin(m\omega t + \phi) = X^1 \sin(\tau + \phi), \quad (2.4)$$

onde $\tilde{x}(t)$ é a resposta aproximada da resposta completa $x(t)$ e $x^1(t)$ é a componente fundamental da série de Fourier de $x(t)$.

Para efeito de simplificação a partir deste ponto a amplitude X^1 será chamada de X .

Pode-se ainda escrever as derivadas em relação ao tempo da equação 2.4 conforme abaixo:

$$\dot{x}(t) \approx \tilde{\dot{x}}(t) = X\omega \cos(\omega t + \phi), \quad (2.5)$$

$$\ddot{x}(t) \approx \tilde{\ddot{x}}(t) = -X\omega^2 \sin(\omega t + \phi), \quad (2.6)$$

Se as variáveis x e \dot{x} na força não-linear $F(x, \dot{x})$ podem ser aproximadas pela sua forma harmônica como nas equações 2.4 e 2.5, a força não-linear $F(x, \dot{x})$ será uma função complexa, periódica no tempo e aproximada pela força $F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}})$.

A força aproximada $F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}})$ também pode ser expandida em série de Fourier na forma complexa por:

$$F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}) = \sum_{m=0}^{\infty} F^m(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}})(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^m e^{im\tau}, \quad (2.7)$$

onde os coeficientes da função harmônica \mathcal{F}^m são calculados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}) d\tau, \\ \mathcal{F}^m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}) e^{-im\tau} d\tau, \quad (m \geq 1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para introduzir a definição da função descritiva (Taylor, 1999; bvba, 1995; Sanders, 1993), vamos reescrever a expansão da força não-linear $F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}})$ por série de Fourier numa outra forma,

$$F(x, \dot{x}) \approx F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}) = N_1 \tilde{x} + iN_2 \tilde{\dot{x}} + \dots, \quad (2.9)$$

ou ainda como,

$$F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}) = (\nu(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}))\tilde{x}, \quad (2.10)$$

onde,

$$\nu(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}}) = N_1 + iN_2 + \dots, \quad (2.11)$$

sendo que $\nu(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}})$ é chamada de função descritiva (Lin, 1988). Os coeficientes de funções descritivas dos mais comuns elementos não-lineares estão apresentados na figura 2.1.

Através da expansão da força não-linear $F(\tilde{x}, \tilde{\dot{x}})$ surgem os coeficientes correspondentes da função descritiva que podem ser determinados por integrações numéricas:

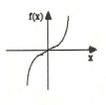
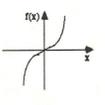
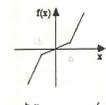
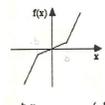
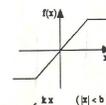
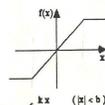
Type of Nonlinearity	Describing Function Coefficients	Type of Nonlinearity	Describing Function Coefficients
 $f(x) = k_0 x + \beta x^3$	$N_0 = 0$ $N_1 = k_0 + 0.75\beta X^2$ $N_2 = 0$	 $f(x) = k_0 x + \beta x^3$	$N_0 = 0$ $N_1 = k_0 + 0.75\beta X^2$ $N_2 = 0$
 $f(x) = \begin{cases} k_0 x & (-b \leq x \leq b) \\ k_0 b + k_1(x-b) & (x > b) \\ -k_0 b + k_1(x+b) & (x < -b) \end{cases}$	$N_0 = 0$ $N_1 = k_0 \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{b}{X} + \frac{b}{X} \sqrt{1 - \frac{b^2}{X^2}} \right]$ $N_2 = 0$	 $f(x) = \begin{cases} k_0 x & (-b \leq x \leq b) \\ k_0 b + k_1(x-b) & (x > b) \\ -k_0 b + k_1(x+b) & (x < -b) \end{cases}$	$N_0 = 0$ $N_1 = k_0 \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{b}{X} + \frac{b}{X} \sqrt{1 - \frac{b^2}{X^2}} \right]$ $N_2 = 0$
 $f(x) = \begin{cases} kx & (x < b) \\ kb & (x > b) \\ -kb & (x < -b) \end{cases}$	$N_0 = 0$ $N_1 = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b}{X} + \frac{b}{X} \sqrt{1 - \frac{b^2}{X^2}} \right]$ $N_2 = 0$	 $f(x) = \begin{cases} kx & (x < b) \\ kb & (x > b) \\ -kb & (x < -b) \end{cases}$	$N_0 = 0$ $N_1 = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin \frac{b}{X} + \frac{b}{X} \sqrt{1 - \frac{b^2}{X^2}} \right]$ $N_2 = 0$

Figura 2.1: Coeficientes de funções descritivas para sistemas não-lineares.

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} F(\tilde{x}, \tilde{x}) \sin \tau d\tau; \\
 N_2 &= \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} F(\tilde{x}, \tilde{x}) \cos \tau d\tau; \\
 N_3 &= \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} F(\tilde{x}, \tilde{x}) \sin 2\tau d\tau; \\
 N_4 &= \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} F(\tilde{x}, \tilde{x}) \cos 2\tau d\tau; \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Uma vez que, os coeficientes da função descritiva são conhecidos, então a análise do sistema não-linear é simplesmente reduzida a uma estratégia iterativa baseado num sistema linear (Lin, 1988).

Assumindo agora que a força não-linear $F(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ também pode ser aproximada pelo termo fundamental, então ela pode ser simplificada pela primeira componente harmônica $F^1(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$, ou seja,

$$F(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) \approx F^1(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = N_1 \tilde{x} + iN_2 \dot{\tilde{x}}, \quad (2.13)$$

e a função descritiva de primeira-ordem $\nu^1(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ pode ser escrita como:

$$\nu^1(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}) = N_1 + iN_2. \quad (2.14)$$

Portanto, se o tipo de não-linearidade é conhecida na força não-linear $F(x, \dot{x})$, a função descritiva $\nu^1(\tilde{x}, \dot{\tilde{x}})$ pode ser calculada pelas equações 2.12 e 2.14. Para ilustrar o uso da função descritiva será utilizada uma importante não-linearidade, a rigidez cúbica, porque muitos sistemas físicos não-lineares exibem um comportamento de forças proporcional ao cubo do deslocamento, como por exemplo os efeitos não-lineares numa alavanca de transmissão mecânica. Assim como, o fio tensionado de uma tecla de piano (McFarland *et al.*, 2002).

Logo, considerando a força não-linear da seguinte maneira:

$$F(x) \approx F(\tilde{x}) = K_o x + \beta x^3. \quad (2.15)$$

Substituindo a força não-linear 2.15 na equação 2.12, os coeficientes da função descritiva podem ser escritos como:

$$N_1 = \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} F(x) \sin \tau d\tau; \quad (2.16)$$

$$N_2 = 0.$$

Substituindo a equação 2.4 na equação 2.16, tem-se:

$$N_1 = \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} (K_0 X \sin \tau + \beta X^3 \sin^3 \tau) \sin \tau d\tau. \quad (2.17)$$

Separando a equação 2.17 em duas integrais, pode-se escrever

$$N_1 = \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} K_0 X \sin^2 \tau d\tau + \frac{1}{\pi X} \int_0^{2\pi} \beta X^3 \sin^4 \tau d\tau. \quad (2.18)$$

A equação 2.18 pode escrita como:

$$N_1 = \frac{K_0}{\pi} A + \frac{\beta X^2}{\pi} B, \quad (2.19)$$

no qual,

$$A = \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau; \quad (2.20)$$

$$B = \int_0^{2\pi} \sin^4 \tau d\tau.$$

A solução das integrais A e B são dadas por:

$$A = \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau = \pi; \quad (2.21)$$

$$B = \int_0^{2\pi} \sin^4 \tau d\tau = \frac{3}{4}\pi.$$

Substituindo a equação 2.21 na equação 2.19, obtém-se:

$$N_1 = K_0 + \frac{3}{4}\beta X^2. \quad (2.22)$$

Portanto, a força não-linear $F(\mathbf{x})$ e a força não-linear $F^1(\tilde{\mathbf{x}})$ aproximada, representada pela função descritiva $\nu^1(X)\tilde{\mathbf{x}}$, pode ser escrita como:

$$F(\mathbf{x}) = K_0 X + \beta \mathbf{x}^3 \approx F^1(\tilde{\mathbf{x}}) = \nu^1(X)\tilde{\mathbf{x}} = (K_0 + \frac{3}{4}\beta X^2)\tilde{\mathbf{x}}. \quad (2.23)$$

Substituindo a equação 2.4 na equação 2.23, tem-se:

$$K_0 X \sin \tau + \beta X^3 \sin^3 \tau \approx (K_0 + \frac{3}{4}\beta X^2)X \sin \tau. \quad (2.24)$$

Através da equação 2.24, pode-se notar que a força não-linear $F(X)$ tem um termo $\sin \tau$ e outro não-linear $\sin^3 \tau$, enquanto que a força não-linear aproximada $F^1(\tilde{\mathbf{x}})$ tem somente o termo linear $\sin \tau$.

2.2 Modelos Matemáticos Utilizados

Neste trabalho, foi utilizado um sistema de parâmetros concentrados composto de massa, rigidez e amortecimento cujo o movimento é governado por uma equação diferencial do tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_e, \quad (2.25)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{x} é o vetor deslocamento, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ é vetor força não-linear, \mathbf{f}_e é o vetor de força de excitação externa, $\dot{\mathbf{x}}$ e $\ddot{\mathbf{x}}$ correspondem as derivadas de primeira e segunda ordem do vetor deslocamento \mathbf{x} .

Considerando a excitação da equação 2.25, é possível assumir uma solução particular aproximada para esta equação diferencial usando somente a primeira componente harmônica expressa por,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}e^{i\omega t}, \quad (2.26)$$

onde ω é a frequência de excitação, t é o instante de tempo e $i = \sqrt{-1}$ o número imaginário.

As derivadas de primeira e segunda ordem da equação 2.26 são dadas, respectivamente, por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}i\omega e^{i\omega t}, \quad (2.27)$$

e,

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{X}\omega^2 e^{i\omega t}. \quad (2.28)$$

Substituindo as equações 2.26, 2.27 e 2.28 na equação 2.25 e colocando \mathbf{X} em evidência, a equação do movimento pode ser escrita como:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))\mathbf{X} = \mathbf{F}. \quad (2.29)$$

Rearranjando a equação 2.29 para determinar as respostas desconhecidas, tem-se:

$$\mathbf{X}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}))^{-1} \mathbf{F}, \quad (2.30)$$

Definindo $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ como a matriz de receptância tem-se:

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}))^{-1}, \quad (2.31)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ é uma matriz ($n \times n$) para um sistema de ordem n . Para o caso de sistemas lineares ($\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}) = 0$), $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ é conhecida como modelo de resposta em frequência utilizada para descrever o comportamento de um sistema. Neste caso, cada um dos termos da matriz $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ corresponde a uma função de resposta em frequência (FRF). Portanto, pela equação 2.30, para uma força \mathbf{F} e frequência ω constantes pode-se calcular um deslocamento \mathbf{X} e conseqüentemente obter a função de resposta em frequência definida como sendo a divisão do deslocamento \mathbf{X} pela amplitude da força \mathbf{F} . Para o caso não-linear ($\boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}) \neq 0$), é necessário considerar que o modelo de resposta em frequência dependerá da amplitude da excitação. Isto caracteriza um modelo de resposta não-linear e neste caso para um nível de excitação, cada um dos termos da matriz $\boldsymbol{\alpha}(\omega)$ será definido como uma resposta em

freqüência não-linear (RF). Este comportamento de resposta pode ser facilmente visualizado nas FRF e RF de um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade linear, e de um sistema de um grau de liberdade não-linear através de uma rigidez proporcional ao cubo do deslocamento. Na figura 2.2 são apresentadas as componentes real e imaginária da FRF (função resposta em freqüência) do sistema linear e a componente real e imaginária da RF, resposta em freqüência não-linear. Já na figura 2.3 são apresentadas na forma de módulo e na figura 2.4[‡], tem-se a fase da mesma FRF e RF.

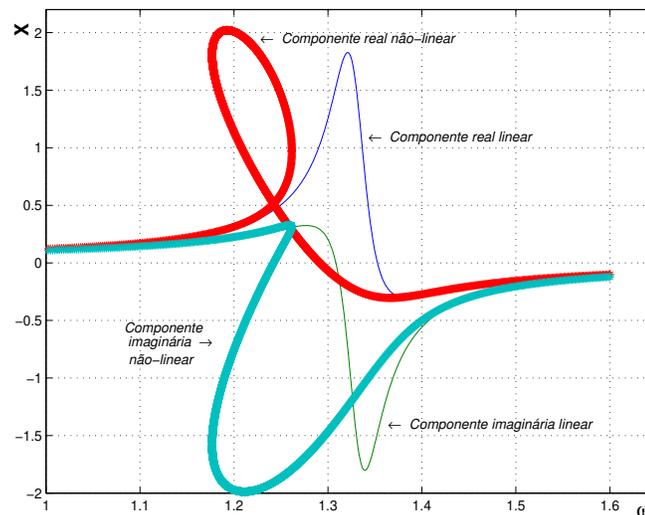


Figura 2.2: FRF e RF do sistema com um grau de liberdade com a componente real e imaginária.

É interessante notar que o modelo de FRF é único e independente da amplitude da força de excitação. No caso do modelo de RF não-linear, existe um modelo para cada amplitude da força de excitação.

Assim, pode-se concluir que a base teórica que se assume para sistemas lineares não pode ser aplicada na obtenção de respostas de sistemas não-lineares (Ferreira, 1998), sendo

[‡]As figuras 2.2, 2.3 e 2.4 podem ser reproduzidas com os dados que se encontram no anexo

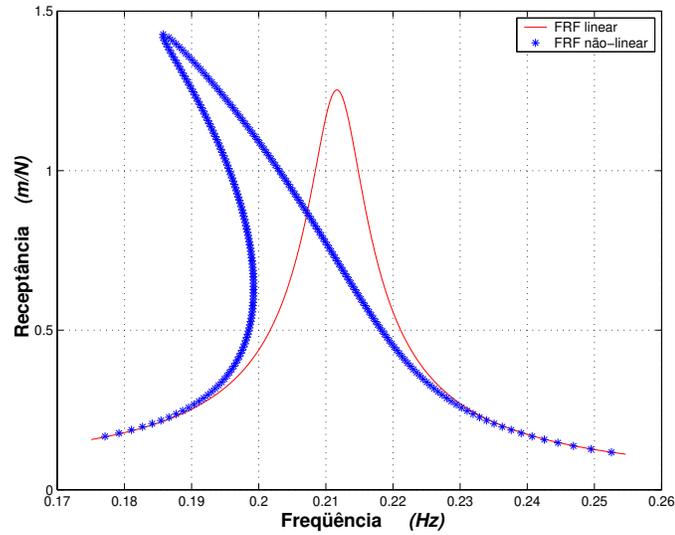


Figura 2.3: FRF e RF do módulo do sistema com um grau de liberdade com a componente real e imaginária.

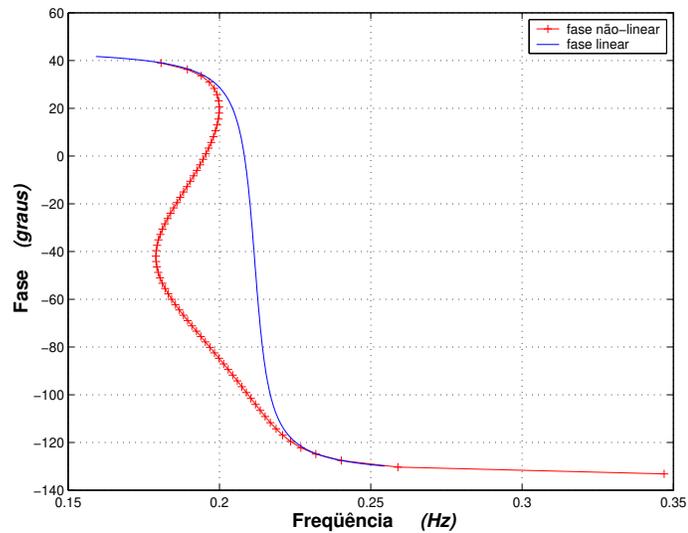


Figura 2.4: Fase linear e não-linear do módulo do sistema de um grau de liberdade com a componente real e imaginária.

necessário a aplicação de um método de continuação para obter a resposta completa do sistema.

2.3 Método Newton-Raphson e Newton-Raphson Modificado

A idéia do método de Newton-Raphson consiste em determinar o zero de uma função $f(x)$ não-linear que será aproximada localmente por uma função quadrática, e esta função aproximada é que fornecerá o zero da função. O método requer o cálculo da função $f(x)$ não-linear e da sua derivada $f(x)'$ para um ponto arbitrário da função $f(x)$.

O procedimento de Newton-Raphson mostrado na figura 2.5 funciona conforme a seqüência: é necessário ter um ponto da função $f(x)$ conhecido (1). Então é possível calcular a derivada da função neste ponto. Agora conhecendo o ponto e sua derivada é fácil obter a equação da reta que representa esta derivada. Utilizando esta equação da reta é possível determinar o ponto no eixo das abscissas que é interceptado pela equação da reta (2). Uma vez que se tem o ponto (2), é possível calcular o ponto correspondente substituindo-o na função $f(x)$. Com isto se tem um novo ponto definido (3) da curva para se determinar raiz. Assim, a seqüência novamente é repetida formando um processo iterativo até que se determine um x que faça $f(x) = 0$ ou $f(x)$ dentro de uma precisão especificada. Existe uma modificação do método de Newton-Raphson, gerando o método de Newton-Raphson modificado. No método de Newton-Raphson a derivada é sempre atualizada a todo passo de iteração, nos pontos 1,3,5,7,8. Já no método Newton-Raphson modificado mostrado na figura 2.6, a derivada é calculada uma única vez no ponto 1, ou seja, ela é mantida constante para todo passo de iteração.

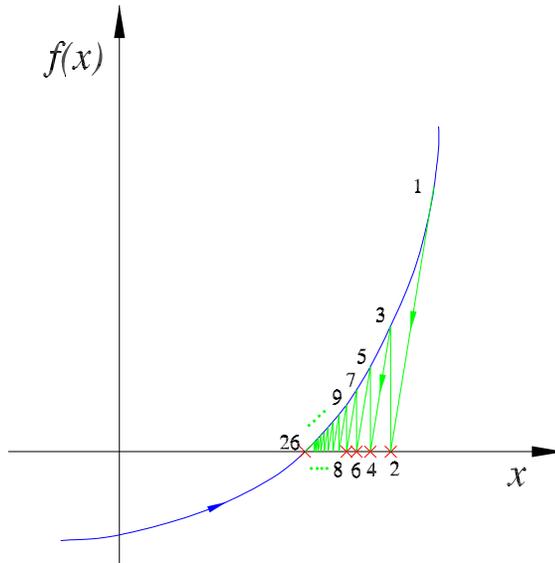


Figura 2.6: Determinando o zero de uma função por Newton-Raphson modificado.

Uma vez que o método de Newton-Raphson foi aplicado em uma função unidimensional, isto não implica que ele é restrito para apenas uma dimensão. É possível também considerar o método de Newton-Raphson para uma função de várias variáveis. Por exemplo, para duas variáveis \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 tem-se:

$$\mathbf{f}_{i+1}(\mathbf{x}_1 + \delta\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + \delta\mathbf{x}_2) = \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_1} \delta\mathbf{x}_1 + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}_2} \delta\mathbf{x}_2. \quad (2.35)$$

Esta foi a forma utilizada neste trabalho, aplicando o método de Newton-Raphson para determinar o zero de uma função de duas variáveis.

Capítulo 3

Método "*Arc-Length*"

Neste capítulo será introduzido o método de continuação "*arc-length*" utilizado neste trabalho. Serão mostradas a sua formulação e os procedimentos utilizados em conjunto com o "*arc-length*". Na segunda seção será mostrada a forma de representar a resposta do modelo para fornecer o resíduo do "*arc-length*". Também serão mostradas algumas técnicas que podem ser empregadas em conjunto com o "*arc-length*" para evitar o surgimento da raiz complexa, como o "*line-search*" e controle do tamanho do raio. Estas técnicas têm como objetivo melhorar a eficiência ou desempenho do método. Serão mostrados os tipos de "*arc-length*" do ponto de vista geométrico e matemático.

Para finalizar, serão discutidos alguns problemas encontrados na literatura relatados por vários autores e também serão mostradas algumas soluções para estas dificuldades. Na última seção será apresentada uma interpretação geométrica do "*arc-length*".

3.1 Introdução

Vários métodos de continuação foram propostos com a finalidade de transpor pontos limites com características de "snap-back" e "snap-through", figura 3.1 (Crisfield, 1997).

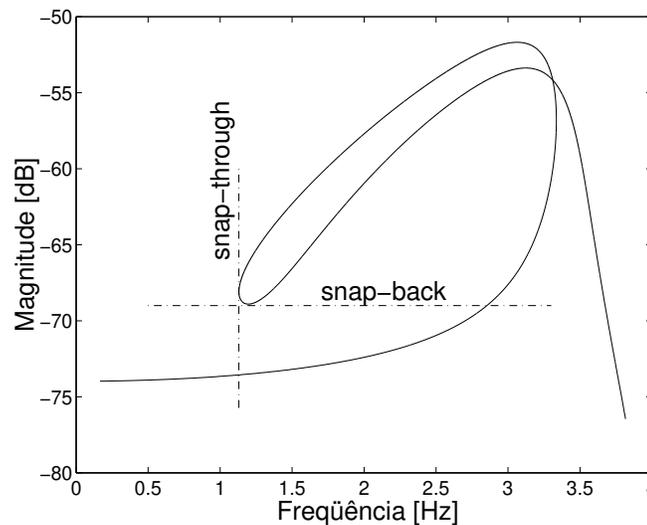


Figura 3.1: Fenômeno de "snap-back" e "snap-through".

A maioria dos métodos de continuação são efetivamente procedimentos de Newton-Raphson com uma equação de restrição adicional para definir a direção iterativa do caminho ou superfície.

Alguns destes métodos propostos com esta finalidade foram: método do plano normal e atualizado, método do controle do deslocamento e método "arc-length" esférico e cilíndrico (Crisfield, 1983; Carrera, 1994; Yang e Shieh, 1990; Hellweg e Crisfield, 1998).

O método mais eficiente na análise de casos que apresentam características de pontos limites como os da figura 3.1 é o "arc-length".

No "arc-length" é definido um "parâmetro nível de carga" λ que é visto como uma variável isolada que terá um valor quando o zero da função resíduo for achado. Porém neste trabalho,

a conotação que será dada a esta variável é outra. Neste trabalho λ é a variável desejada, introduzida como um parâmetro que servirá para provocar a relaxação da frequência ω .

Adotou-se o método "*arc-length*" que será empregado conjuntamente com o método de Newton-Raphson na obtenção de todos os pontos de equilíbrio da curva de resposta em frequência (RF). O procedimento escolhido foi o proposto por (Crisfield, 1983), que é uma generalização para N dimensões do procedimento proposto por (Riks, 1972) e (Wempner, 1971) para problemas unidimensionais, acrescentando como equação de restrição a equação da circunferência.

De acordo com (Crisfield, 1981), o método de Riks utilizando o método de Newton-Raphson ou Newton-Raphson modificado, embora apresente resultados satisfatórios para problemas unidimensionais, não é adequado para ser utilizado com o método de elementos finitos, pois a solução das equações resultantes destroem a simetria da matriz do sistema de equações que representam as equações de equilíbrio (Crisfield, 1997). Este inconveniente pode ser superado adotando-se uma técnica semelhante à que foi utilizada por (Batoz e Dhatt, 1979) que é o "controle do deslocamento". (Crisfield, 1983), por outro lado, resolveu este inconveniente através de uma técnica que será apresentada detalhadamente na próxima seção.

3.2 Teoria Básica de Solução

Uma equação de equilíbrio residual geral que governa muitos problemas não-lineares pode ser escrita como,

$$\Psi(\mathbf{p}, \lambda \mathbf{f}_e) = \mathbf{f}_i(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{f}_e \quad (3.1)$$

na qual, em uma análise estrutural, \mathbf{p} é o "vetor de deslocamento", \mathbf{f}_i é o "vetor de força interna" que é função do deslocamento \mathbf{p} , o escalar λ é um "parâmetro de nível de carga" e \mathbf{f}_e é o "vetor de carregamento externo".

Considerando que o número de graus de liberdade de um problema seja n , então a equação 3.1 representa n relações entre \mathbf{p} e λ que juntas descrevem uma curva (ou um conjunto de curvas se existirem pontos de bifurcação) chamada de curva solução no espaço \mathfrak{R}^{n+1} medido por \mathbf{p} e λ .

A equação anterior pode ser resolvida por muitos procedimentos incrementais nos quais o carregamento e/ou deslocamento controlado pode ser aplicado (Kahaner *et al.*, 1989). Porém, estes métodos não são apropriados na solução de problemas para os quais os caminhos da resposta precisam ser traçados além dos pontos limites. Tais situações surgem tipicamente em problemas de instabilidade estrutural, nos quais técnicas de continuação são empregadas, sendo que o método "*arc-length*" parece ser o mais utilizado.

O método "*arc-length*" é descrito dentro da categoria de métodos de continuação e é aplicado para se obter o traçado de uma solução. Basicamente, o método "*arc-length*" considera primeiro o fator de carregamento λ como uma variável na equação residual 3.1. Então, uma nova equação de restrição é acrescentada à equação de equilíbrio residual 3.1, o qual irá definir o próximo ponto da solução em uma intersecção entre as curvas da solução e da equação de restrição. Para isto um sistema não-linear estendido é então resolvido usando-se técnicas iterativas convencionais para obter o ponto de equilíbrio.

Porém antes de resolver o sistema não-linear é necessário linearizar a equação residual com \mathbf{p} e λ sendo variáveis desconhecidas, junto com a restrição relevante do método "*arc-length*" pelas séries de Taylor. Assim, o sistema composto diretamente de $n + 1$ variáveis,

sendo n variáveis de deslocamentos \mathbf{p} e mais uma variável do fator de carregamento λ poderá ser resolvido usando os métodos iterativos.

Considerando a equação de restrição como uma equação de restrição esférica proposta por (Crisfield, 1997), no formato geral tem-se:

$$a(\Delta\mathbf{p}, \Delta\lambda) = (\Delta\mathbf{p}^t \Delta\mathbf{p} + \Delta\lambda^2 \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e) - \Delta l^2 = 0 \quad (3.2)$$

onde Δl é o raio fixo da intersecção desejada, o vetor $\Delta\mathbf{p}$ e o escalar $\Delta\lambda$ são o deslocamento e o fator de carregamento incrementais, e o escalar ψ é um parâmetro de escala, sendo $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ e $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ com $(\mathbf{p}_0, \lambda_0)$ o último ponto conhecido convergido.

O sistema estendido que acumula a equação de equilíbrio 3.1 e a equação de restrição 3.2 pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{c} \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{f}_e) \\ a(\Delta\mathbf{p}, \Delta\lambda) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_i(\mathbf{p}) - \lambda \mathbf{f}_e \\ (\Delta\mathbf{p}^t \Delta\mathbf{p} + \Delta\lambda^2 \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e) - \Delta l^2 \end{array} \right\} = \{0\} \quad (3.3)$$

Para uma posição conhecida ao longo do traçado da solução, é possível visualizar a equação 3.3 geometricamente para um sistema de um grau de liberdade. A figura (3.2) mostra a intersecção de ambas as curvas relacionadas com equação 3.3, indicando as próximas soluções possíveis. A equação 3.3 representa um sistema não-linear de $n+1$ incógnitas as quais podem ser resolvidas por procedimentos iterativos incrementais convencionais para obter o ponto da solução ao longo da trajetória. Estes métodos normalmente requerem valores iniciais satisfatórios para o procedimento iterativo convergir para os pontos corretos da solução. Assim, o procedimento que obtém o próximo ponto de equilíbrio $(\mathbf{p}, \lambda \mathbf{f}_e)$ normalmente consiste em duas fases, a fase de predição e a fase de correção. Os procedimentos preditores são aplicados

para estimar a primeira solução e para determinar a direção a ser seguida. Os procedimentos iterativos corretores são usados para computar uma seqüência de convergência de estimativas para obter a solução convergida.

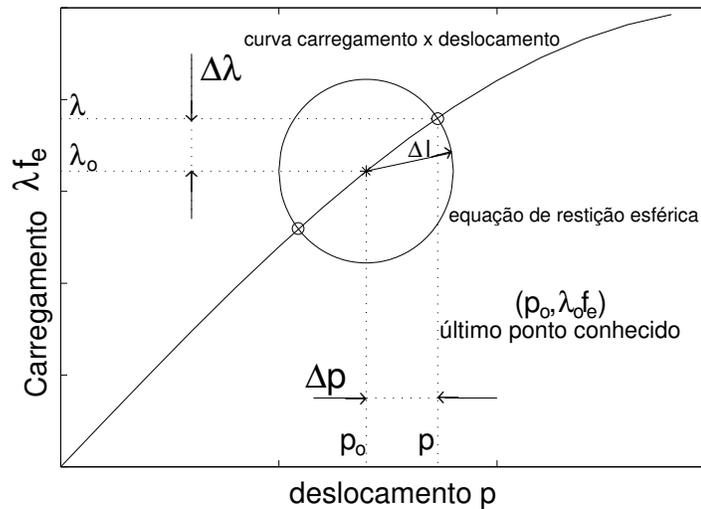


Figura 3.2: Trajetória da solução e curva de restrição

Depois de convergido à solução, o caminho da solução pode ser traçado em termos de um conjunto de pontos passo a passo.

3.3 Procedimento Predictor

Esta fase é responsável em determinar um ponto de partida satisfatório para a próxima fase de correção. Isto é necessário porque em princípio não há nenhuma regra para a direção na qual o procedimento de continuação deveria caminhar. A direção a ser seguida é determinada pelo ponto obtido através do procedimento de predição conhecido como o predictor tangencial *forward-Euler* (Crisfield, 1997). O predictor tangencial *forward-Euler* é baseado apenas no último ponto da solução, e é determinado por

$$\Delta \mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{K}_t^{(0)-1} \Delta \mathbf{f}_e^{(0)} = \Delta \lambda^{(0)} \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{f}_e \quad (3.4)$$

onde \mathbf{K}_t é a matriz tangente e $\Delta \mathbf{f}_e^{(0)}$ é o carregamento incremental, ambos relacionados ao ponto $(\mathbf{p}^{(0)}, \lambda^{(0)})$ como ilustrado na figura (3.3).

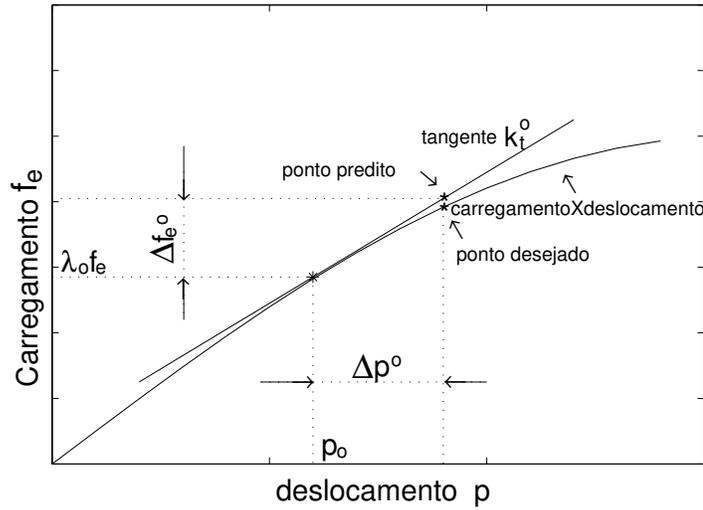


Figura 3.3: Ilustração do preditor tangencial forward-Euler

Substituindo a equação de predição 3.4 na equação de restrição 3.2 tem-se

$$\Delta \lambda^{(0)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{(\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{f}_e)^t (\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{f}_e) + \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e}} \quad (3.5)$$

Da equação 3.5 é possível ver que por causa do sinal de mais ou menos, duas soluções estão disponíveis. Se o sinal não for escolhido corretamente, a direção de procura para o próximo ponto estará incorreta e o corretor pode convergir a um ponto indesejado, voltando atrás para a solução previamente computada.

Existem muitos critérios propostos na literatura para determinar o sinal da equação 3.5 (Bathe e Dvorkin, 1983; Powell e Simons, 1981b; Crisfield, 1997; Papadrakakis, 1993;

Bergan *et al.*, 1978; Feng *et al.*, 1995; de Souza Neto e Feng, 1999; Crisfield, 1997; Bellini e Chulya, 1987; Clarke e Hancock, 1990; Feng *et al.*, 1997), mas a experiência prática de muitas pesquisas sugere que o parâmetro de rigidez corrente S_p^\ddagger proposto por (Bergan *et al.*, 1978) ou os critérios que usam o sinal do determinante da rigidez tangente $|\mathbf{K}_t|$ são os mais eficientes. O critério da rigidez tangente, $\text{sign}|\mathbf{K}_t| = \text{sign} \Delta\lambda$, trabalha muito bem na maioria dos casos (Clarke e Hancock, 1990; Crisfield, 1997; Wagner e Wriggers, 1988; Feng *et al.*, 1995), embora foram relatados algumas situações mal sucedidas (Bellini e Chulya, 1987; Allgower e Georg, 1980) onde este procedimento pode falhar se \mathbf{K}_t for singular. Felizmente, como foi observado por (Batoz e Dhatt, 1979), é extremamente improvável ocorrer isto na prática, devido ao grande número de componentes de deslocamento \mathbf{p} e possíveis erros de arredondamento, o que foi comprovado neste estudo.

Como resultado da fase de predição, $\mathbf{p}^{(k)}$ e $\lambda^{(k)}$, é obtido de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{(k)} &= \mathbf{p}^{(0)} + \Delta\mathbf{p}^{(0)}, \\ \lambda^{(k)} &= \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^{(0)},\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde $\mathbf{p}^{(0)}$ é a solução do último ponto de equilíbrio e $\lambda^{(0)}$ é arbitrado inicialmente com o valor 1 (um), que corresponde ao carregamento completo.

[‡]Este parâmetro será mais detalhado posteriormente, quando for comparado vários métodos de continuação.

3.4 Procedimento Corretor

Na fase de correção, um procedimento numérico é aplicado para achar a solução do sistema estendido de equações 3.3, utilizando o resultado $(\mathbf{p}^{(k)}, \lambda^{(k)} \mathbf{f}_e)$ determinado na fase do preditor. Muitos métodos podem ser usados para resolver a equação 3.3, tais como o método Newton-Raphson, Newton-Raphson modificado ou Quasi Newton-Raphson. Para aplicar estes métodos na equação 3.3, é conveniente linearizar a equação estendida ou ambas as equações 3.1 e 3.2, aplicando as séries de Taylor, levando a,

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \delta \lambda \\ &= \Psi_0 + \mathbf{K}_t \delta \mathbf{p} - \mathbf{f}_e \delta \lambda = 0,\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}a &= a_0 + \frac{\partial a}{\partial \mathbf{p}} \delta \mathbf{p} + \frac{\partial a}{\partial \lambda} \delta \lambda \\ &= a_0 + 2\Delta \mathbf{p}^t \delta \mathbf{p} + 2\Delta \lambda \delta \lambda \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e = 0,\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}},\tag{3.9}$$

$$\mathbf{q} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda},\tag{3.10}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \mathbf{p}} = 2\Delta \mathbf{p}^t \frac{\partial \Delta \mathbf{p}}{\partial \mathbf{p}} = 2\Delta \mathbf{p}^t \delta \mathbf{p},\tag{3.11}$$

$$\frac{\partial a}{\partial \lambda} = 2\Delta \lambda \delta \lambda \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \lambda} = 2\Delta \lambda \delta \lambda \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e.\tag{3.12}$$

No caso particular da equação 3.1, $\mathbf{q} = \mathbf{f}_e$.

Finalmente, combinando a equação 3.7 e a equação 3.8 para resolver $\delta \mathbf{p}$ e $\delta \lambda$, o sistema não-linear estendido pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{p} \\ \delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\mathbf{q} \\ 2\Delta \mathbf{p}^t & 2\Delta \lambda \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

A equação 3.13 pode ser resolvida usando técnicas iterativas convencionais para obter a solução do ponto de equilíbrio, $(\delta \mathbf{p}, \delta \lambda)$. A matriz nesta equação permanece não singular para qualquer valor, exceto quando $\mathbf{K}_t = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}}$ seja singular. Como colocado anteriormente, a existência de tal singularidade não pode ser descartada, mas a possibilidade de ocorrência é rara na prática (Feng *et al.*, 1995) devido ao grande número de componentes que o vetor \mathbf{p} pode ter e a existência de possíveis erros de arredondamento (Batoz e Dhatt, 1979).

Este método não obriga as equações 3.7 e 3.8 a serem satisfeitas para cada iteração, possibilitando sempre uma solução para δp e $\delta \lambda$. Porém, este método não é recomendado devido ao elevado custo computacional para inverter a matriz e resolver a equação 3.13 uma vez que esta matriz de rigidez não é simétrica nem em banda. Este procedimento resultante é conhecido como método consistente (Magnusson e Svensson, 1998; de Souza Neto e Feng, 1999). Este problema pode ser superado adotando o esquema não consistente (Feng *et al.*, 1995; Crisfield, 1997) onde o sistema original expandido pode ser resolvido a cada iteração, e a equação 3.13 é substituída pelas seguintes equações,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_t^{(k)} & -\mathbf{q} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{p}^{(k+1)} \\ \delta \lambda^{(k+1)} \end{pmatrix} = -\Psi(\mathbf{p}^{(k)}, \lambda^{(k)}) = -\Psi^{(k)}, \quad (3.14)$$

$$\Delta \mathbf{p}^{(k+1)t} \Delta \mathbf{p}^{(k+1)} + \Delta \lambda^{(k+1)2} \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e = \Delta l^2, \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{K}_t^{(k)} = \mathbf{K}_t(\mathbf{p}^{(k)})$.

A solução da equação 3.14 e equação 3.15 converge à mesma solução de equilíbrio $(\delta \mathbf{p}, \delta \lambda)$

da equação 3.13. A diferença entre o método consistente e o método não consistente é que no método consistente ambas equações, a equação 3.1 e a equação de restrição 3.2, são linearizadas de uma maneira consistente com procedimentos iterativos (Feng *et al.*, 1996, 1995; Crisfield, 1997). Então a equação de restrição não é satisfeita ao longo do processo de iteração até que a solução seja alcançada, enquanto o método não consistente força a equação de restrição a ser satisfeita a cada iteração, uma vez que a equação de restrição não é linearizada. A maioria dos autores (Crisfield, 1983; Xu e Mirmiran, 1997; Hellweg e Crisfield, 1998; de Souza Neto e Feng, 1999; Crisfield, 1997) utilizam este método por ser mais eficiente, aplicável em elementos finitos e necessitar de menor custo computacional. Neste trabalho o método utilizado foi o não-consistente.

O processo de resolução através do método não-consistente começa na equação 3.14 onde o vetor de deslocamento iterativo, $\delta\mathbf{p}^{(k+1)}$, pode ser obtido como

$$\delta\mathbf{p}^{(k)} = -\mathbf{K}_t^{(k)-1}\boldsymbol{\Psi}^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\mathbf{K}_t^{(k)-1}\mathbf{q} \quad (3.16)$$

A equação 3.16 pode ser reescrita como

$$\delta\mathbf{p}^{(k)} = \delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{p}_t^{(k)}, \quad (3.17)$$

onde $\delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)}$ é o vetor de deslocamento iterativo de deslocamento devido a contribuição do resíduo, que pode ser obtido através de um algoritmo convencional de carregamento controlado para um valor $\delta\lambda^{(k)}$ fixo de carga, i.e.,

$$\delta\bar{\mathbf{p}}^{(k)} = \mathbf{K}_t^{(k)-1}\boldsymbol{\Psi}^{(k)}, \quad (3.18)$$

e $\delta \mathbf{p}_t^{(k)}$ é o vetor de deslocamento que também corresponde à carga fixa \mathbf{f}_e conhecido como solução tangencial

$$\delta \mathbf{p}_t^{(k)} = \mathbf{K}_t^{(k)-1} \mathbf{q}. \quad (3.19)$$

Determinada a expressão para o vetor de deslocamento iterativo, $\delta \mathbf{p}^{(k)}$, onde $\delta \lambda^{(k)}$ ainda é desconhecido, é possível escrever o novo deslocamento incremental $\Delta \mathbf{p}^{(k+1)}$ como

$$\Delta \mathbf{p}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{p}^{(k)} + \delta \mathbf{p}^{(k)}. \quad (3.20)$$

A substituição da equação 3.17 na equação 3.20 leva a,

$$\Delta \mathbf{p}^{(k+1)} = \Delta \mathbf{p}^{(k)} + \delta \bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{p}_t^{(k)}, \quad (3.21)$$

na qual $\delta \lambda^{(k)}$ é a única incógnita.

O fator de carregamento incremental pode ser escrito similarmente como

$$\Delta \lambda^{(k+1)} = \Delta \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k)}. \quad (3.22)$$

A substituição da equação 3.21 na equação de restrição 3.2 conduz a equação quadrática escalar

$$a \delta \lambda^{(k)2} + b \delta \lambda^{(k)} + c = 0, \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= \delta \mathbf{p}_t^{(k)t} \delta \mathbf{p}_t^{(k)} + \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e \\
b &= 2\delta \mathbf{p}_t^{(k)t} (\Delta \mathbf{p}^{(k)} + \delta \bar{\mathbf{p}}^{(k)}) + 2\Delta \lambda^{(k)} \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e \\
c &= (\Delta \mathbf{p}^{(k)} + \delta \bar{\mathbf{p}}^{(k)})^t (\Delta \mathbf{p}^{(k)} + \delta \bar{\mathbf{p}}^{(k)}) - \Delta l^2 + \Delta \lambda^{(k)2} \psi^2 \mathbf{f}_e^t \mathbf{f}_e.
\end{aligned}$$

O fator de carregamento $\delta \lambda^{(k)}$ pode ser determinado pela escolha da raiz apropriada na equação quadrática 3.23. A raiz correta normalmente é escolhida computando ambas as soluções,

$$\Delta \mathbf{p}_1^{(k+1)} = \Delta \mathbf{p}^{(k)} + \delta \bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta \lambda_1^{(k)} \delta \mathbf{p}_t^{(k)}, \quad (3.24)$$

$$\Delta \mathbf{p}_2^{(k+1)} = \Delta \mathbf{p}^{(k)} + \delta \bar{\mathbf{p}}^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k)} \delta \mathbf{p}_t^{(k)}, \quad (3.25)$$

e escolhendo a solução que tem o menor ângulo entre $\Delta \mathbf{p}_{1,2}^{(k+1)}$ e $\Delta \mathbf{p}^{(k)}$, i.e., o máximo cosseno do ângulo dado pela equação

$$\cos \theta = \frac{\Delta \mathbf{p}_{1,2}^{(k+1)} \Delta \mathbf{p}^{(k)}}{\Delta l^2}. \quad (3.26)$$

A visualização da equação quadrática para o caso esférico ($\psi = 1$) com suas raízes $\delta \lambda_1^{(k)}$ e $\delta \lambda_2^{(k)}$ pode ser observada na figura (3.4). Esta figura também mostra a importância de se escolher uma das raízes corretamente, para que a convergência se dê na direção desejada, evitando que esta ocorra em um ponto previamente determinado no caminho original do carregamento/deslocamento.

Experiências numéricas revelaram que alguns critérios extras devem ser somados para se alcançar uma boa confiabilidade na escolha da raiz correta. É necessário conferir se o sinal

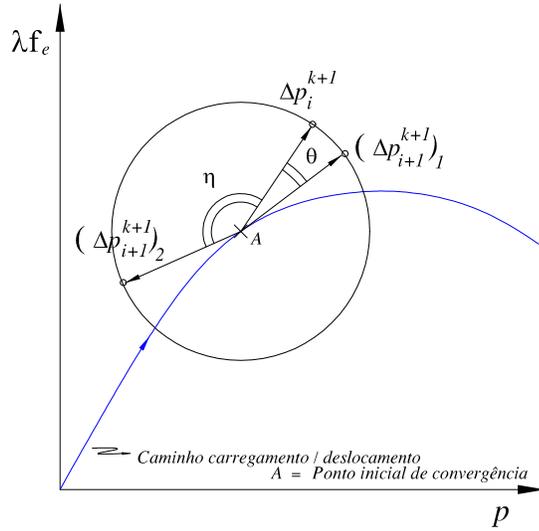


Figura 3.4: Ilustração da equação quadrática.

da raiz escolhida pelo primeiro critério do ângulo mínimo, $\delta\lambda_1^{(k+1)}$ tem o mesmo sinal do determinante da rigidez tangente $|\mathbf{K}_t|$. Se não, deve-se escolher a outra raiz, $\delta\lambda_2^{(k+1)}$.

Uma vez alcançado o fator de carregamento iterativo $\delta\lambda^{(k)}$, o deslocamento iterativo $\delta\mathbf{p}^{(k)}$ deve ser computado através de equação 3.17. Então o deslocamento incremental é calculado através de equação 3.20 e o fator de carregamento incremental através da equação 3.22.

Para se obter o próximo ponto convergido $(\mathbf{p}^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}\mathbf{f}_e)$, é necessário adicionar o deslocamento incremental, equação 3.20, e o fator de carregamento incremental, equação 3.22, ao deslocamento e ao nível de carregamento do ponto convergido anterior, $(\mathbf{p}^{(k)}, \lambda^{(k)}\mathbf{f}_e)$, respectivamente na equação 3.6. Repetindo este procedimento e usando critérios de convergência para parar o processo, alcança-se o próximo ponto convergido que está localizado na intersecção da equação de restrição com o traçado da equação de equilíbrio.

A variação do resíduo Ψ pode ser visualizada na figura (3.5), na qual estão destacados suas posições e variações para as primeiras iterações.

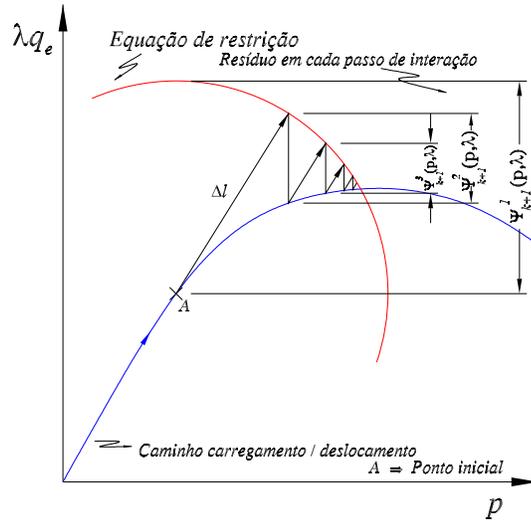


Figura 3.5: Ilustração da equação do resíduo.

O princípio do método de "arc-length" esférico de (Crisfield, 1981) é ilustrado na figura (3.6). Ele define uma superfície de restrição esférica com a introdução de um comprimento de arco Δl o qual é mantido constante durante uma iteração.

3.4.1 Definição do Resíduo para Desenvolvimento Numérico na Obtenção de RF

A matriz de receptância $\alpha(\omega)$ definida no modelo de resposta apresentado na seção 2.2 pode ser escrita na forma de resíduo Ψ , baseado na equação 3.1 ou na forma de impedância, como

$$[\mathbf{Z}(\omega)]\mathbf{X} - \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Dessa forma, a frequência ω , implica no carregamento \mathbf{f}_e . Se a equação 3.27 for relaci-

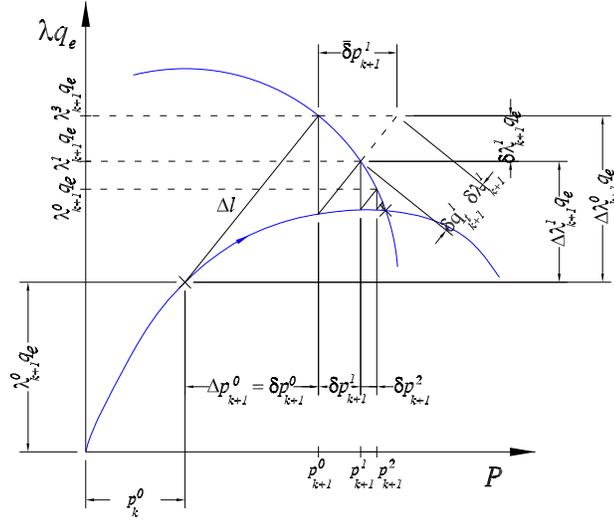


Figura 3.6: Ilustração da equação do resíduo.

onada com a equação 3.1, tem-se o resíduo levando em consideração a frequência variando, para um determinado valor de carregamento.

$$\Psi(\mathbf{X}, \lambda\omega) = [\mathbf{Z}(\lambda)]\mathbf{X} - \mathbf{F}. \quad (3.28)$$

Pode-se rearranjar os termos em função dos parâmetros modais:

$$\Psi(\mathbf{X}, \lambda\omega) = (\mathbf{K} - (\lambda\omega)^2 \mathbf{M} + i(\lambda\omega)\mathbf{C})\mathbf{X} - \mathbf{F}. \quad (3.29)$$

A representação do resíduo, considerando a força não-linear modelada pela função descritiva, é dada por,

$$\Psi(\mathbf{X}, \lambda\omega) = (\mathbf{K} - (\lambda\omega)^2\mathbf{M} + i(\lambda\omega)\mathbf{C} + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{X}))\mathbf{X} - \mathbf{F}. \quad (3.30)$$

Pode-se também trabalhar com valores reais, dobrando-se a ordem do sistema, separando a parte real e imaginária. A expressão geral do sistema com a ordem dobrada pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} h_r \\ h_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_e] & -[I_{mag}] \\ [I_{mag}] & [R_e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_r \\ g_i \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

sendo que o vetor do lado esquerdo da equação representa a resposta do sistema que se está procurando e o vetor do lado direito à excitação. A matriz na equação 3.31 é o modelo de resposta em frequência, na qual $[R_e]$ é a parte real da equação 2.31 e $[I_{mag}]$ a parte imaginária da equação 2.31. Escrevendo a equação 3.31 em função dos parâmetros modais tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2\mathbf{M} & -(\omega\lambda)\mathbf{C} \\ (\omega\lambda)\mathbf{C} & \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ x_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_r \\ f_i \end{Bmatrix}. \quad (3.32)$$

Pode-se representar o resíduo Ψ na forma de impedância, seguindo este procedimento matemático para n equações com seus componentes reais e imaginários separadamente, ou seja,

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2\mathbf{M} & -(\omega\lambda)\mathbf{C} \\ (\omega\lambda)\mathbf{C} & \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ x_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_r \\ f_i \end{Bmatrix}. \quad (3.33)$$

Para a impedância de um sistema de um grau de liberdade tem-se um sistema vetorial representando as partes reais e imaginárias, sendo:

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} k - (\omega\lambda)^2 m & -(\omega\lambda)c \\ (\omega\lambda)c & k - (\omega\lambda)^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ x_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_r \\ f_i \end{Bmatrix}. \quad (3.34)$$

Já para o caso não-linear utilizando a função descritiva, a representação do resíduo na forma de impedância não-linear pode ser escrita da seguinte forma,

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda) = \begin{bmatrix} k - (\omega\lambda)^2 m + df_r & -(\omega\lambda)c - df_i \\ (\omega\lambda)c + df_i & k - (\omega\lambda)^2 m + df_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_r \\ x_i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_r \\ f_i \end{Bmatrix}, \quad (3.35)$$

nas quais as não-linearidades df_r e df_i estão relacionadas com a parte real e imaginária da função descritiva.

Analogamente pode-se escrever o resíduo em termos de receptância, na forma

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2 \mathbf{M} & -(\omega\lambda)\mathbf{C} \\ (\omega\lambda)[\mathbf{C}] & \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2 \mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_r \\ x_i \end{Bmatrix}. \quad (3.36)$$

Finalmente, a receptância não-linear fica:

$$\Psi(\mathbf{x}, \lambda) = - \begin{bmatrix} \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2 \mathbf{M} + df_r & -(\omega\lambda)\mathbf{C} - df_i \\ (\omega\lambda)\mathbf{C} + df_i & \mathbf{K} - (\omega\lambda)^2 \mathbf{M} + df_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_r \\ x_i \end{Bmatrix}. \quad (3.37)$$

A equação 3.36 é equivalente ao resíduo utilizado pelos autores (Kouhia, 1992; Kouhia e Mikkola, 1999). Neste trabalho modelos de resíduo na forma de impedância e receptância foram empregados e obtiveram os mesmos resultados.

3.5 Técnicas para Ampliar a Robustez do Método "Arc-Length"

Agora, serão mostrados alguns procedimentos que auxiliam o método "arc-length", minimizando as possibilidades de falha e que tornam sua convergência mais rápida e segura. Será apresentado um método que estima o raio inicial compatível com o carregamento aplicado, e uma técnica matemática que evita o surgimento de raiz complexa na equação quadrática 3.23. Também será introduzido um procedimento "line-search" que dará maior confiabilidade e velocidade ao "arc-length", principalmente para os pontos que exigem grande número de iterações. Por último, será mostrado um controle incremental do raio que regula a distância entre os pontos convergidos.

3.5.1 Estimativa Inicial do Comprimento do Raio

A necessidade de calcular o raio inicial Δl vem do fato de que o usuário normalmente não tem uma idéia da magnitude apropriada a ser escolhida. Então um método deve ser aplicado

na estimativa de um raio inicial compatível com o carregamento aplicado. Um valor inicial satisfatório pode ser obtido pela especificação de um incremento de carregamento $\Delta\lambda$, e pelo cálculo do passo de Newton δp de um ponto inicial conhecido $(\mathbf{p}^{(0)}, \lambda^{(0)}\mathbf{f}_e)$ (Crisfield, 1997), como mostrado a seguir

$$\delta\mathbf{p} = [\mathbf{K}_t^{(0)}]^{-1}\Psi(\mathbf{p}^{(0)}, \lambda^{(0)} + \Delta\lambda). \quad (3.38)$$

Finalmente o comprimento do raio inicial pode ser calculado por

$$\Delta l = \sqrt{\delta\mathbf{p}^t\delta\mathbf{p}}. \quad (3.39)$$

A estimativa do incremento do carregamento inicial $\Delta\lambda$ pode ser feita pela avaliação das características físicas do problema.

3.5.2 Controle do Fator de Carregamento Complexo

O incremento do fator de carregamento calculado na equação 3.23 pode produzir raízes reais ou complexas. Quando as raízes forem complexas, significa que a equação de restrição do *"arc-length"* falhou na determinação do próximo incremento do fator de carregamento sobre a restrição (Zhou e Murray, 1994).

(Zhou e Murray, 1994) propuseram uma modificação na formulação do *"arc-length"* para melhorar seu controle, adicionando um fator de relaxação γ e, com isto, evitando que ocorra falha devido ao aparecimento de raízes complexas.

Quando aparecem raízes complexas, a equação de restrição do *"arc-length"* falha na determinação do incremento do fator de carregamento $\delta\lambda$ e então o método também falha no

ajuste de um carregamento válido. Falhas do controle do "arc-length" podem ser associadas com falhas altamente localizadas devido a não-linearidades do modelo ou com pontos de bifurcação da resposta da estrutura como descrito por (de Borst, 1987) e (Lam e Morley, 1992).

A essência desta nova formulação é introduzir este fator de relaxação γ na equação do resíduo 3.1, onde $0 < \gamma \leq 1$. Este procedimento será demonstrado abaixo.

A interpretação física do fator relaxação γ é que somente uma fração das forças desbalanceadoras são levadas em consideração em algumas iterações, ao invés de utilizar toda a força, como é comum na maioria dos procedimentos iterativos. Segundo (Zhou e Murray, 1994), a introdução do fator de relaxação pode aumentar o número de iterações, mas a estabilidade do processo iterativo pode ser melhorada e a probabilidade de falha do procedimento de solução pode ser diminuída. Assim o que este procedimento faz, ao invés do método de Crisfield, é que o vetor de deslocamento iterativo $\bar{\delta}\mathbf{p}_k$ será em módulo menor, sendo isto possível através do fator γ multiplicando o vetor de deslocamento iterativo.

Se $\gamma=1$ então tem-se o método de Crisfield comum. Matematicamente o fator de relaxamento γ é introduzido para satisfazer a condição:

$$B^2 - 4AC \geq 0, \quad (3.40)$$

e γ é introduzido na equação 3.17, que fica,

$$\delta\mathbf{p}_{k+1}^{i+1} = \gamma\bar{\delta}\mathbf{p}_{k+1}^{i+1} + \delta\lambda_{k+1}^{i+1}\delta\mathbf{q}_{k+1}^{i+1} \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (3.41)$$

Os valores de a , b e c na equação 3.23 são redefinidos para A , B e C devido ao fator γ . O procedimento "arc-length" desenvolvido (Zhou e Murray, 1994), que corresponde a uma formulação que evita o surgimento de raízes complexas na equação 3.23 não foi utilizado na íntegra neste trabalho. Por isto, uma demonstração análoga para os valores A , B e C é apresentada resumidamente para o "arc-length" esférico. Assim, tem-se os valores de,

$$\begin{aligned}
A &= \delta \mathbf{q}_{\mathbf{t}_{k+1}}^{\mathbf{t}^{i+1}} \delta \mathbf{q}_{\mathbf{t}_{k+1}}^{i+1} + \xi^2 \mathbf{q}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} \mathbf{q}_{\mathbf{e}} ; \\
B &= 2(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^{\mathbf{t}} \delta \mathbf{q}_{\mathbf{t}_{k+1}}^{i+1} + 2(\Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} \mathbf{q}_{\mathbf{e}}) ; \\
C &= (\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^{\mathbf{t}} (\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}) + ((\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_{\mathbf{e}}^{\mathbf{t}} \mathbf{q}_{\mathbf{e}}) - \Delta l^2.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

A variação possível do fator γ é determinada pela condição 3.40, o qual é assumido $0 < \gamma \leq 1$.

Substituindo as equações 3.42 na condição 3.40 e igualando a zero, tem-se uma equação quadrática em termos do fator de relaxamento γ , isto é:

$$D\gamma^2 + E\gamma + F = 0. \tag{3.43}$$

A seguir será demonstrado como é possível obter os parâmetros D , E e F da equação anterior, cujo procedimento é semelhante ao da equação 3.42 e dos parâmetros a , b e c na equação 3.23 como mostrado anteriormente. Para garantir raízes reais iguais e, desta forma, tangentes à equação de restrição, a condição 3.40 é assumida como $B^2 - 4AC = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}
& [2(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} + 2(\Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)]^2 \\
& - 4[\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} + \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e][(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t (\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})] \\
& + ((\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e) - \Delta l^2] = 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Fatorando, tem-se

$$\begin{aligned}
& 4\{[(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}]^2 + 2[(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}][\Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e] \\
& + (\Delta \lambda_{k+1}^i) \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e\} - 4\{[\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}][(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t (\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})] \\
& + (\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})((\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e) - (\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}) \Delta l^2 \\
& + (\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)[(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t (\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + \gamma \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})] \\
& + (\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e) - (\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e) \Delta l^2\} = 0,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

organizando a equação acima em termos de γ , obtém-se

$$\begin{aligned}
& ((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^2 + ((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^2 \gamma^2 + 2((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}) \gamma \\
& + 2((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})(\Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e) + 2[(\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})(\Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)] \gamma \\
& + (\Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)^2 - ((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \Delta \mathbf{p}_{k+1}^i) \\
& - 2((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}) \gamma - [((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})] \gamma^2 \\
& - ((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})((\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e) + ((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}) \Delta l^2 \\
& - (\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t (\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i) - 2(\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}) \gamma \\
& - [(\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})] \gamma^2 - [(\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)] \\
& + (\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e) \Delta l^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Finalmente os coeficientes são obtidos por,

$$\begin{aligned}
D &= ((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^2 - ((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}) \\
&- (\xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}) ;
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
E &= 2((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} + \Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}) \\
&- 2((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} + \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}) ;
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
F &= ((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} + \Delta \lambda_{k+1}^i \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)^2 \\
&- ((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1} + \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e)((\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + (\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e - \Delta l^2)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

e a partir daqui, o "arc-length" cilíndrico pode ser obtido fazendo-se $\xi = 0$.

Para garantir raízes reais na equação 3.43, ou seja, garantir que a condição $E^2 - 4DF \geq 0$ seja sempre satisfeita, é necessário desenvolver o procedimento como segue, usando a equação de restrição completa,

$$(\Delta \mathbf{p}_{k+1}^i)^t \Delta \mathbf{p}_{k+1}^i + (\Delta \lambda_{k+1}^i)^2 \xi^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e - \Delta l^2 = 0. \quad (3.50)$$

Para a iteração i , o segundo termo da equação 3.49 desaparece. Conseqüentemente, F é maior do que zero sob todas as condições.

Notando que o primeiro termo da equação 3.47 pode ser expresso como

$$((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^2 = ((\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1})^t \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}) ((\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1})^t \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}) \cos^2(\theta), \quad (3.51)$$

sendo que θ é o ângulo entre $\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}$ e $\delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}$ e ξ é um número positivo, D é obviamente um número negativo. Como resultado, a condição $E^2 - 4DF \geq 0$ é satisfeita em todas as condições. As raízes são

$$\gamma_{1,2} = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}, \quad (3.52)$$

onde $\gamma_1 \leq 0$ e $\gamma_2 \geq 0$. A equação 3.40 é satisfeita quando o valor de γ está entre as duas raízes, como mostrado na figura (3.7). Devido a equação quadrática ter o valor negativo em D , sua curvatura é invertida.

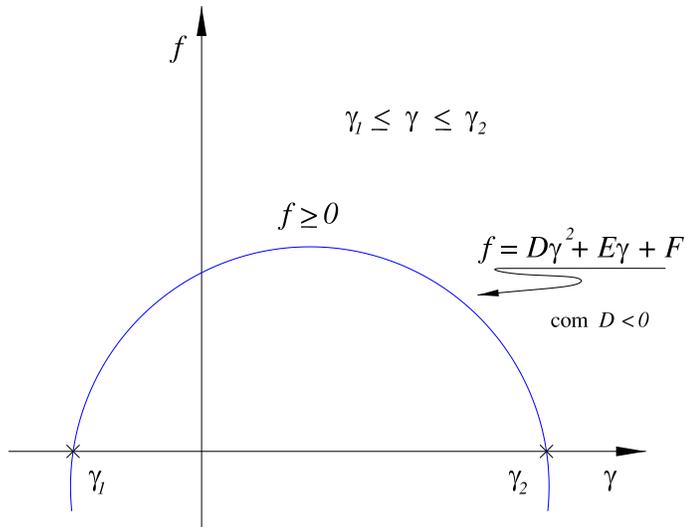


Figura 3.7: Ilustração das raízes para a equação quadrática.

O limite inferior para uma variação aceitável do fator γ é, claramente, zero por causa que γ_1 é menor do que zero, e o limite superior é menor que γ_2 e 1 . Conseqüentemente uma variação aceitável do fator γ é

$$0 < \gamma \leq \gamma_{m\acute{a}x}, \tag{3.53}$$

onde $\gamma_{m\acute{a}x} = \min(1, \gamma_2)$.

Então, a magnitude de $\gamma_{m\acute{a}x}$ tem uma influência na eficiência do processo de solução. Valores pequenos de $\gamma_{m\acute{a}x}$ reduzem a eficiência pois implicam em um número maior de iterações.

Para prevenir condições extremas, tais como valores de γ próximos de zero ou de $\gamma_{m\acute{a}x}$, o procedimento padrão é a troca do método de Newton-Raphson pelo método Newton-Raphson modificado quando $\gamma_{m\acute{a}x}$ é menor do que $0,01$. Em geral, esta combinação assegura a estabilidade do procedimento de solução e alcança uma melhor eficiência.

Logo, tem-se um procedimento que minimiza a falha do "*arc-length*" quando surgem raízes complexas. Experiências que aplicaram este método de relaxação para muitos graus de liberdade minimizaram a falha mas o problema ainda persiste. A estratégia adotada por (Crisfield, 1997) de reduzir o raio e reiniciar o processo à partir do último ponto convergido trabalhou muito bem para todos os casos testados neste trabalho.

3.5.3 Implementação do "*Line Search*"

Existe uma estrutura padrão para a maioria dos algoritmos de busca unidirecional "*line search*", que é da seguinte forma: dado um ponto inicial, deve-se ser determinada uma direção de movimento de acordo com uma regra fixa, por exemplo método do gradiente e, finalmente, move-se na direção do mínimo da função objetivo. Para um novo ponto uma nova direção é determinada e o processo é repetido. A diferença básica entre os algoritmos (método do gradiente conjugado, método de Newton, etc.) são as suas direções de movimento.

Uma vez que a seleção do método é feita, todos algoritmos se movimentam para um ponto de mínimo na linha correspondente. O processo de determinar um ponto de mínimo numa dada linha é chamado de "*line-search*".

Para a maioria das funções não-lineares que não podem ser minimizadas analiticamente, este processo é realizado por busca ao longo de uma linha para um ponto de mínimo. Estas técnicas de "*line-search*" são usadas para resolver problema de minimização multidimensional e constituem a espinha dorsal de algoritmos de programação não-linear. Problemas de altas dimensões têm sido resolvidos recentemente pela execução de uma seqüência sucessivas de buscas unidimensionais (Luenberger, 1984).

A primeira aplicação do "*line-search*" em combinação com o método "*arc-length*" foi

apresentado por (Crisfield, 1983), e mais tarde por (Shi e Crisfield, 1995) que produziram um outro trabalho mostrando maiores detalhes da utilização do *"line-search"* em seu método. Isto também foi estudado detalhadamente por (Papadrakakis, 1993), o autor cita um algoritmo utilizando a aproximação *"regule-falsi"*. A busca unidirecional é discutida com maiores detalhes na seção 3.8.

3.5.4 Estratégia para Controlar Automaticamente o Raio

O tamanho do raio usado no método *"arc-length"* é um ponto crucial para se alcançar um método robusto. Uma vez que o preditor foi obtido e a direção é determinada, deseja-se que só uma solução permaneça naquela direção. Se o raio for muito grande, é possível que exista mais de uma solução ao longo do caminho, o que significa que a equação de restrição cruzou com outras porções do traçado da solução. Por outro lado, se o raio escolhido for muito pequeno, o custo computacional para obtenção do caminho da solução é muito grande. De acordo com (Kouhia, 1992; Jeusette e Laschet, 1989) entre outros, para se ter sucesso e economia computacional no procedimento *"arc-length"*, é necessário determinar uma equação para os passos subseqüentes que controle o comprimento do raio da equação de restrição 3.2. Uma técnica simples foi proposta por (Crisfield, 1997), onde o raio incremental é determinado pela seguinte equação

$$\Delta l_{k+1} = \Delta l_k \left(\frac{I_d}{I_k} \right) \quad (3.54)$$

na qual Δl_{k+1} e Δl_k são os raios incrementais nas iterações $k + 1$ e k , I_d é o número de iterações desejadas e I_k é o número de iterações requeridas na iteração k .

O controle do raio, conduz à pequenos incrementos quando a resposta for muito não-linear

e incrementos maiores quando a resposta for menos não-linear. Embora este controle tenha trabalhado muito bem para os testes realizados, existem ainda certas deficiências no controle de problemas com mudanças súbitas na trajetória da solução (Riks, 1984; Bellini e Chulya, 1987).

Quase todos os autores utilizam este tipo de equação, tais como Crisfield, que usou praticamente em todos seus trabalhos sobre o "*arc-length*", porém alguns autores deram maior importância a equação 3.54 como (Bellini e Chulya, 1987; Jeusette e Laschet, 1989; Clarke e Hancock, 1990). Os primeiros afirmaram em seus trabalhos que a definição de um novo comprimento do raio Δl , feito sempre no início do processo iterativo tem uma influência direta no desempenho do método. Contudo, eles propuseram modificações na equação 3.54 que foi proposta como

$$\Delta l_{k+1} = \Delta l_k \sqrt[4]{\left(\frac{I_d}{I_n}\right)}, \quad (3.55)$$

com I_n ajustado para 2. A equação 3.55 tende a manter o Δl novo próximo do Δl velho, independente do caminho, quando o número de iterações é grande. Isto ocorre quando a não-linearidade é grande, pois é mais difícil de convergir para a solução. Por outro lado, a equação 3.55 tende a manter o Δl novo muito maior do que o Δl velho, quando o número de iterações é pequeno. Isto ocorre quando a não-linearidade não é muito acentuada.

Já a segunda modificação feita por Crisfield na equação do controle do raio, é escrita da seguinte forma

$$\Delta l_{k+1} = \Delta l_k \sqrt{\left(\frac{I_n}{I_d}\right)}, \quad (3.56)$$

com I_n ajustado em 5 para problemas com pequenos números de graus de liberdade (NGL) ($NGL < 100$), e 6 para problemas com moderado e grande número de graus de liberdade ($100 < NGL < 100.000$). Esta forma tende a produzir Δl grandes na maioria dos passos mas o Δl será curto na vizinha onde a não-linearidade tem maior efeito.

(Jeusette e Laschet, 1989) também fez uma análise sobre estas equações, principalmente aquela utilizada por Crisfield 3.56, que corresponde a equação 3.57 para o caso que φ é ajustado para $\frac{1}{2}$.

$$\Delta l_{k+1} = \Delta l_k \left(\frac{I_n}{I_d}\right)^\varphi, \quad (3.57)$$

Ele concluiu que todas estas equações trabalham relativamente bem considerando sua simplicidade e a falta de uma base teórica sólida. Depois de vários testes, ele mostrou que estas fórmulas não ajustam muito bem os comprimentos de Δl de acordo com a curvatura da solução e não podem antecipar mudanças de curvaturas muito intensas e calcular pequenos incrementos de raio, especialmente quando se trata da solução de um caminho instável de pós-flambagem, apresentando um ponto limite com inclinação negativa.

Em seu trabalho, (Jeusette e Laschet, 1989) mostrou mais duas relações, uma desenvolvida por Bathe e Dvorkin e outra utilizando o parâmetro de rigidez corrente de Bergan S_p .

A relação de Bathe é obtida multiplicando o lado direito da equação 3.56 pelo quociente da norma dos incrementos de deslocamentos prévios admissíveis

$$\Delta l_{k+1} = \Delta l_k \sqrt{\left(\frac{I_n}{I_d}\right) \frac{\rho \|\mathbf{p}_k^{i+1}\|}{\|\mathbf{p}_{k+1}^i - \mathbf{p}_k^i\|}}, \quad (3.58)$$

onde ρ é uma constante que depende do problema, a qual varia de 2 até 50. A relação (3.58) fornece uma previsão dada por fórmulas precedentes para inicializar o cálculo do raio, tendo-se que utilizar a iteração anterior para prever o \mathbf{p}^i . Contudo, o ajuste da constante ρ , depende do primeiro incremento do ponto de equilíbrio, que pode ser difícil de se achar.

Finalmente, a relação com S_p para calcular os incrementos dos comprimentos dos raios é dada por

$$\Delta l_{k+1} = \Delta l_k \left(\frac{\Delta S_p}{(S_p)_{k+1}^i - (S_p)_k^i} \right), \quad (3.59)$$

sendo ΔS_p é a mudança desejada no parâmetro durante o passo. Os valores iniciais para o incremento do parâmetro S_p são geralmente determinados aplicando-se um carregamento restrito depois de localizado o primeiro ponto de equilíbrio, via controle do deslocamento ou do carregamento para o primeiro passo.

Estas duas últimas equações levam em consideração a forte mudança na curvatura local da solução, porém esta mudança é fracamente detectada ou antecipada.

Agora, os autores (Clarke e Hancock, 1990) utilizaram a maioria destas fórmulas em

diferentes tipos de métodos de continuação obtendo sucesso em todos os casos.

Mesmo que as equações 3.58 e 3.59 possuam uma maior base matemática, ainda não são a solução definitiva. Embora elas funcionem muito bem quando são levadas em consideração suas limitações, ainda há a necessidade de desenvolver uma equação que satisfaça qualquer traçado antecipadamente, auto-ajustando o tamanho do raio conforme a necessidade.

3.6 Problemas de Convergência

Antes do método "arc-length" estar funcionando corretamente, algumas dificuldades foram encontradas. Por exemplo: haviam pontos na curva de equilíbrio que não convergiam, o método permanecia em torno de um ponto e não seguia na direção do zero da função resíduo nem sequer na direção contrária, simplesmente o vetor δp e suas componentes permaneciam constantes, como pode ser observado na figura (3.8).

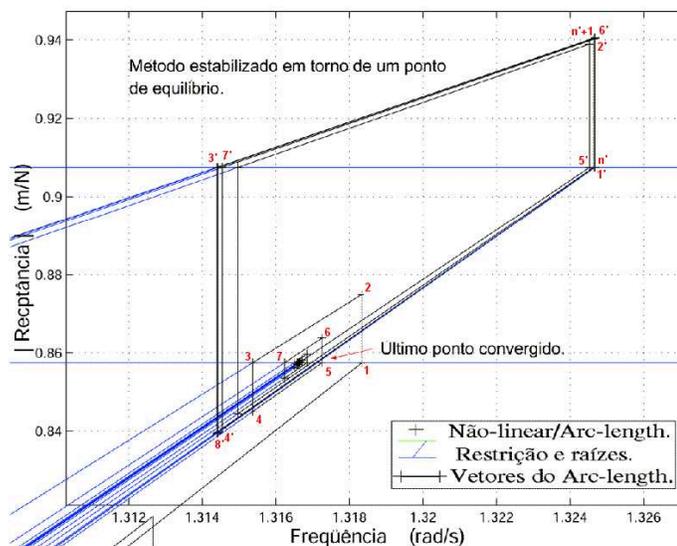


Figura 3.8: Ponto não convergido.

A seqüência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... na figura (3.8) mostra o último ponto que ocorreu con-

vergência. A partir daí, dá-se a seqüência $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8', \dots, n', n' + 1$, o qual não ocorre mais a convergência. O método iterativo fica em torno destes pontos indefinidamente.

Outro problema encontrado no desenvolvimento do "arc-length" foi quando a convergência se aproximava do ponto de inflexão. Neste local o método não se comportava muito bem e divergia na tentativa de ultrapassar o ponto crítico. Este problema ocorria devido a escolha errada da raiz da equação quadrática 3.23 não possibilitando a convergência. Conseqüentemente, o resíduo aumentava infinitamente provocando a falha do método. Este problema pode ser visualizado na figura (3.9) que mostra o método divergindo num ponto de inflexão.

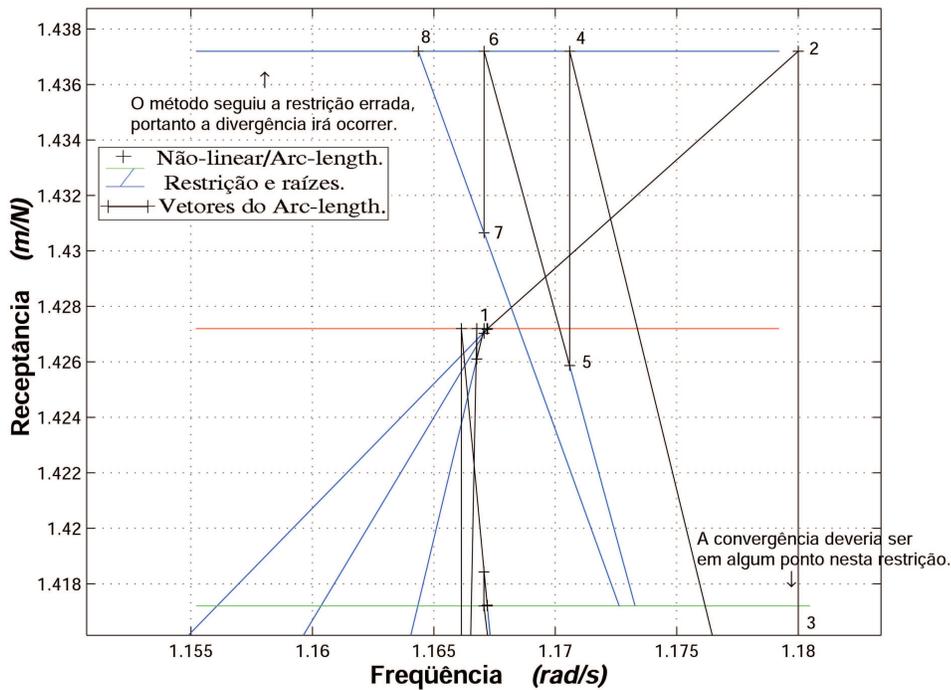


Figura 3.9: Problema de convergência na inflexão.

O ponto 1 é o último ponto que ocorreu convergência, na seqüência o método segue para o próximo ponto que é o mais próximo da inflexão. A convergência deveria ocorrer numa região próxima ao ponto 3, porém a raiz na equação 3.23 é escolhida errada e o método iterativo

segue o caminho errado nos pontos 4, 5, 6, 7, 8, ... ocorrendo a divergência. Uma forma de assegurar que o método não divirja é verificar o sinal do determinante da matriz tangente \mathbf{K}_t . O sinal desta matriz irá mudar no ponto de inflexão.

(Hellweg e Crisfield, 1998) relataram sobre este tipo de problema de convergência quando estudaram propagação de trincas em estruturas de concreto. Eles disseram que as características dos problemas de convergência eram oscilações cíclicas, sendo que as soluções iterativas ficavam num ciclo infinito tentativas, as quais nunca convergiam para a solução desejada.

Na próxima seção são apresentadas algumas soluções encontradas na literatura a respeito deste tipo de problema.

3.7 Solução para Problemas de Convergência

Alguns autores desenvolveram ou utilizaram técnicas para superar o problema de convergência, dentre os quais é possível determinar algumas técnicas que são as mais importantes.

(Bergan *et al.*, 1978) usam o *parâmetro de rigidez corrente* para prever a posição de um máximo e mínimo local. Eles então suprimem o equilíbrio iterativo na vizinhança de um ponto extremo (limite) que segue uma mudança no sinal do determinante da matriz rigidez tangente. A supressão do equilíbrio iterativo fornece incrementos de carregamento muito pequenos próximos aos pontos limite. Logo, quanto menor for este incremento, mais difícil vai ser para ocorrer a divergência.

Uma outra técnica mais simples e que foi utilizada neste trabalho é a de utilizar o determinante da matriz de rigidez tangencial \mathbf{K}_t para controlar tanto a direção do incremento de carregamento inicial $\Delta\lambda^0$ quanto a escolha da raiz $\delta\lambda$ na equação quadrática 3.23 (Feng

et al., 1997, 1996).

Na próxima seção, será mostrado uma interpretação geométrica desenvolvida para visualizar o funcionamento do método "arc-length". Este procedimento é importante para entender alguns problemas que ocorrem com o método e também por ser uma forma de verificar se o "arc-length" está funcionando corretamente.

3.8 Interpretação Geométrica do Método "Arc-Length"

Uma grande quantidade de autores trabalham com variações da equação de restrição 3.2 na tentativa de formular procedimentos que vão de encontro com seus anseios. Porém, dentre as restrições, podemos destacar pelo menos três tipos que são de grande importância: a cilíndrica, esférica e elipsoidal. Estas diferem apenas pelo valor do parâmetro de escala ψ . Se este parâmetro for levado em consideração na equação de restrição, então é considerada a contribuição que o carregamento tem sobre o deslocamento (Crisfield, 1997). (Bergan *et al.*, 1978) propuseram relacionar este parâmetro ψ com o parâmetro de rigidez corrente de Bergan, ou apenas parâmetro de rigidez corrente S_p (Bergan *et al.*, 1978).

Já em (Crisfield, 1983) e em outros trabalhos (Crisfield, 1986b, 1981), ψ foi geralmente ajustado como zero. Estes estudos concluem que quando $\psi = 1$, além de adicionar um pouco mais de complexidade nas equações do método "arc-length", o parâmetro não contribui muito na eficiência da convergência ou na precisão. Outros autores seguem a mesma linha como (Magnusson e Svensson, 1998; Xu e Mirmiran, 1997) dentre outros.

De acordo com o parâmetro ψ , tem-se:

① $\psi = 1$, a equação de restrição 3.2 fica

$$\Delta \mathbf{p}^t \Delta \mathbf{p} + \Delta \lambda^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e = \Delta l^2, \quad (3.60)$$

conhecida como o método "arc-length" esférico originalmente proposto por (Crisfield, 1980).

② $\psi = 0$, a equação de restrição reduz-se a:

$$\Delta \mathbf{p}^t \Delta \mathbf{p} = \Delta l^2, \quad (3.61)$$

que também foi proposta por (Crisfield, 1981).

Para problemas dinâmicos a forma analítica da equação 3.61 pode ser representada pela superfície de um cilindro circular no espaço tridimensional formado pelos eixos das componentes real e imaginária da resposta versus o eixo da frequência, tal resposta pode ser apresentada em termos de receptância, mobilidade ou inertância. É possível mostrar como é representado geometricamente a restrição no plano e no espaço. Na figura (3.10) são destacados os vetores que compõem o método "arc-length" no plano |Receptância| x Frequência. Saindo do ponto inicial até a restrição tem-se o escalar que representa o comprimento do raio, sendo sua inclinação é determinada pela matriz rigidez tangencial, ou seja, a derivada do resíduo em relação do deslocamento $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{p}}$. O seguimento de reta $\bar{\delta} \mathbf{p}$ representa uma das componentes do vetor $\delta \mathbf{p}$. O segmento $\delta \lambda \delta \mathbf{q}_t$ é a outra componente $\delta \mathbf{p}$ que sai do ponto convergido.

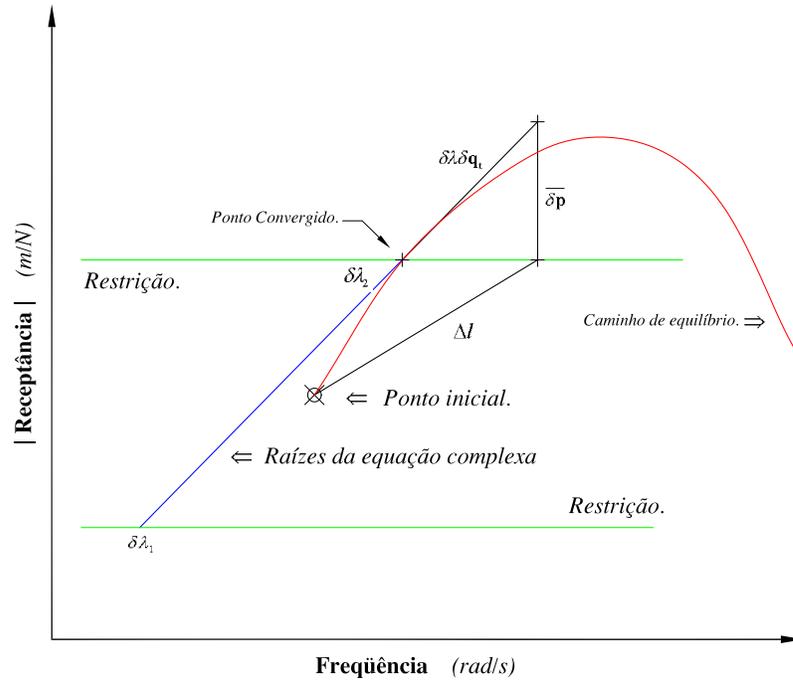


Figura 3.10: Restrição cilíndrica representada no plano $|Receptância| \times Freqüência$.

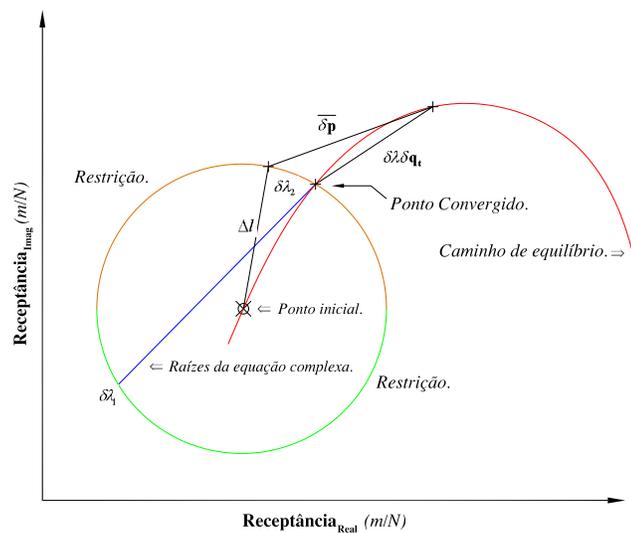


Figura 3.11: Restrição cilíndrica vista no plano $\Re(Receptância) \times \Im(Receptância)$.

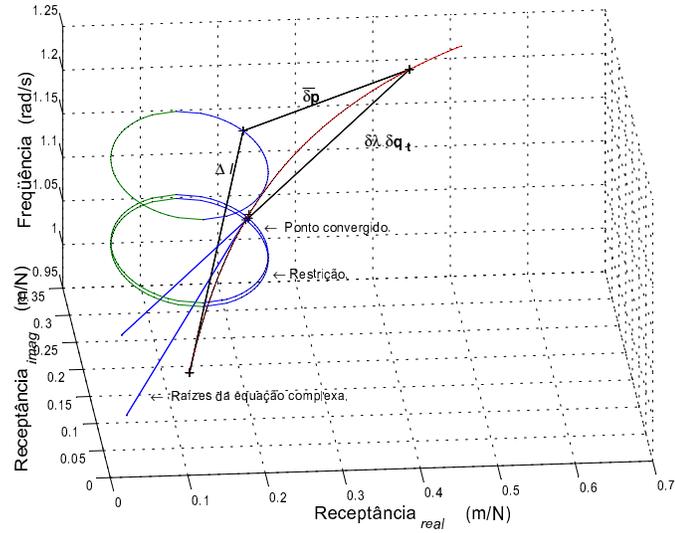


Figura 3.12: Restrição cilíndrica vista no espaço Receptância \times Freqüência.

No plano da receptância $\Re \times \Im$, a restrição pode ser mostrada como uma circunferência, conforme a figura (3.11). O mesmo comentário realizado para figura (3.10) se aplica para a figura (3.11).

Já na figura (3.12), são mostrados os mesmos vetores da figura (3.10), porém considerando uma visão no espaço do caminho de equilíbrio. Aqui o cilindro é mais fácil de ser visualizado, seu centro está no penúltimo ponto convergido e o ponto convergido está na superfície da restrição descrita pelo cilindro. Na figura (3.13) é mostrado um detalhe do ponto convergido da figura (3.12).

③ Parâmetro de rigidez corrente, S_p . A equação de restrição é escrita como:

$$\Delta \mathbf{p}^t \Delta \mathbf{p} + S_p \Delta \lambda^2 \mathbf{q}_e^t \mathbf{q}_e = \Delta l^2, \quad (3.62)$$

na qual,

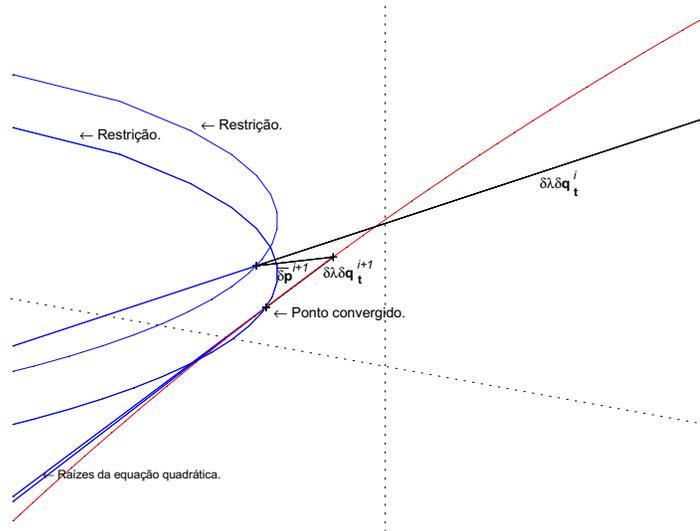


Figura 3.13: Detalhe da restrição cilíndrica em três dimensões.

$$S_p = \left| \frac{\Delta \lambda^i \|\Delta p_n^{i+1}\|}{\Delta \lambda^i \|\Delta p_n^i\|} \right|. \quad (3.63)$$

Em (Bellini e Chulya, 1987) foi utilizada esta técnica, na qual o autor observou que o S_p é atualizado no final de cada passo de incremento de carregamento. A equação 3.62 representa a superfície de uma elipsóide e o método é chamado de "arc-length" elipsoidal. Devido a dificuldade de representação gráfica, não será mostrado um esquema geométrico da restrição.

Assim, foi mostrado rapidamente as formas de se tratar o "arc-length" do ponto de vista geométrico, sendo que entre eles não há diferença em termos de eficiência. O estudo gráfico do método possibilitou a sua visualização, tornando-se possível entender como o método funciona durante a convergência. O desenvolvimento da visualização gráfica do "arc-length" tornou possível entender de maneira mais clara os vetores que compõem o método e também visualizar suas falhas, como por exemplo falhas devido o surgimento de raízes complexas.

Através da figura (3.14), é mostrado uma ilustração de como o "arc-length" converge. É observado nesta figura 4 pontos convergidos, os cilindros que representam a equação de

restrição e o método fazendo iterações em torno de uma das soluções. Já nas figuras (3.15) e (3.16), tem-se os vetores do processo iterativo em função do deslocamento \mathbf{x} , indicados até o terceiro passo de iteração.

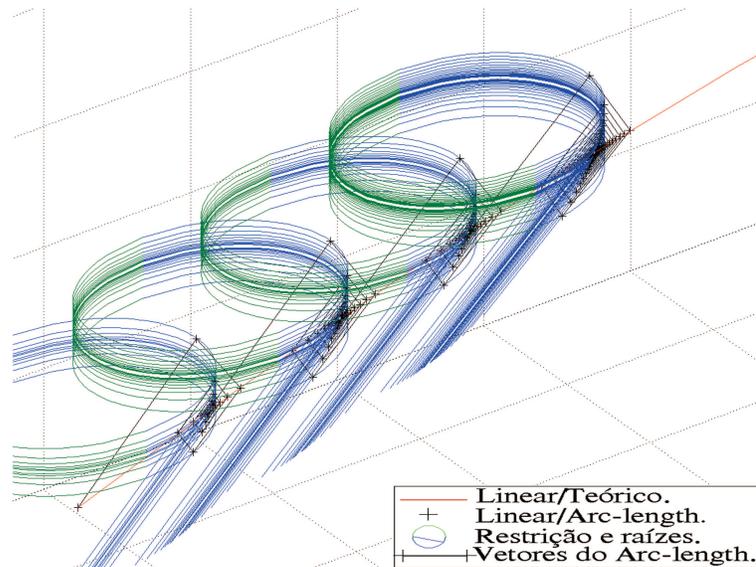


Figura 3.14: Funcionamento do método "arc-length", com 4 pontos convergidos.

Através do procedimento de visualização como o da figura (3.14), é possível verificar se o método está funcionando adequadamente, ou seja, se a convergência está caminhando em direção ao zero da função resíduo. Caso, isto não ocorra, o método divergirá para uma direção indeterminada, o qual resultará num aumento no módulo do resíduo e o método "arc-length" falhará.

Para facilitar o entendimento de convergência do "arc-length", são identificados nas figuras (3.15) e (3.16) os incrementos do vetor \mathbf{p} , que compõem o método.

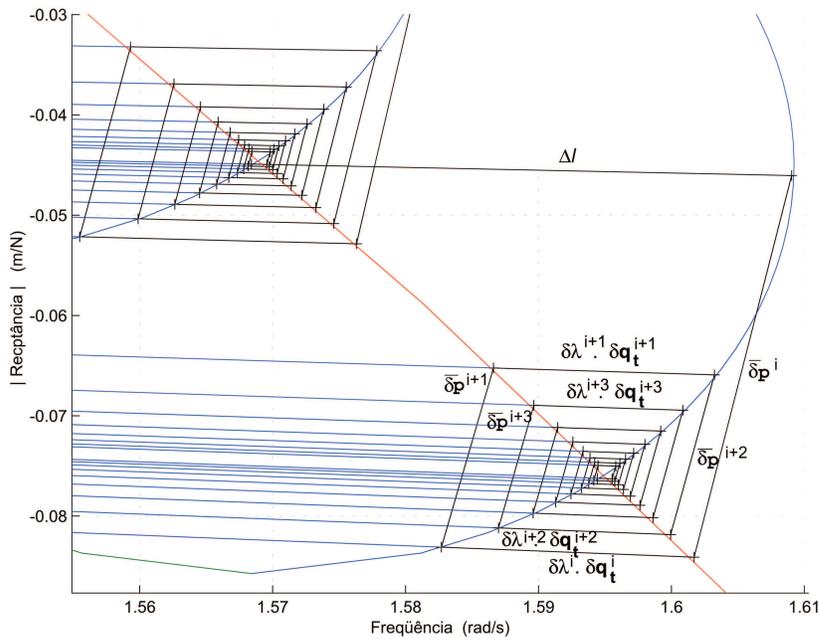


Figura 3.15: Detalhe dos vetores do "arc-length" no processo iterativo, com vista no plano.

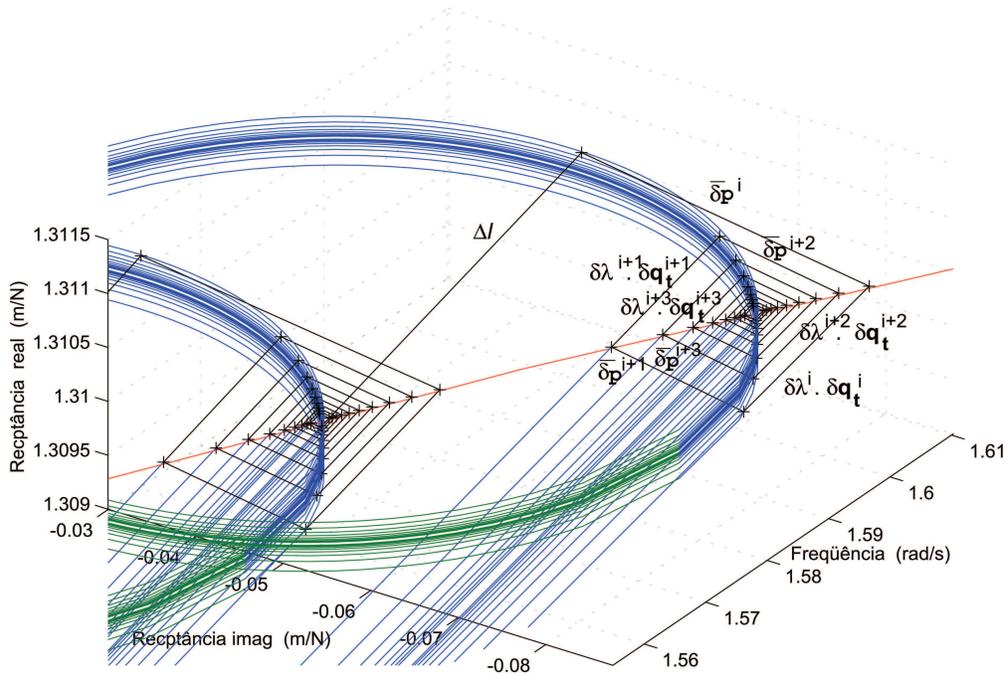


Figura 3.16: Detalhe dos vetores do "arc-length" no processo iterativo, visto no espaço.

Um outro estudo que pode ser feito com a interpretação geométrica é saber o que ocorre

quando surgem raízes complexas. Quando o "arc-length" falha, seja pelo resíduo que aumentou ou pelas raízes da equação quadrática 3.23 que deram complexas, é necessário desenvolver técnicas para contornar tais problemas.

Para corrigir as raízes complexas foi utilizado o método citado na seção (3.5.2) desenvolvido por (Zhou e Murray, 1994). O método fornece um escalar β que diminui a magnitude do vetor $\bar{\delta}\mathbf{p}_{k+1}^{i+1}$, mantendo a mesma direção do vetor inicial, de forma que o vetor $\delta\lambda_{k+1}^{i+1}\delta\mathbf{q}_{k+1}^{i+1}$ fique em sua posição limite na equação de restrição 3.2, que é tangente a equação de restrição. Isto é fácil de visualizar, principalmente se tivermos utilizando o procedimento Newton-Raphson modificado. A figura (3.17) mostra este tipo de problema e também mostra o motivo do surgimento das raízes complexas, quando o vetor $\delta\lambda_{k+1}^{i+1}\delta\mathbf{q}_{k+1}^{i+1}$ não cruza com a equação de restrição e então provocou uma falha na determinação do fator de carregamento $\delta\lambda$, figura (3.18). Um outro método utilizado, bem mais simples que o primeiro e não menos eficiente, consiste em sempre que surgirem as raízes complexas retornar ao ponto anteriormente convergido e reduzir o tamanho do raio, por exemplo pela metade, e continuar o procedimento normal. Geralmente é necessário apenas um fracionamento do raio por iteração para as raízes tornem-se reais, mas nada impede que sucessivos redimensionamentos do raio sejam necessários (Magnusson e Svensson, 1998; Crisfield, 1997).

Logo que este coeficiente β traz novamente o controle do equilíbrio do método para a tangente, as raízes são recalculadas com o novo valor do vetor $\beta\bar{\delta}\mathbf{p}_{k+1}^{i+1}$ pela equação quadrática que fornecerá as raízes reais. Devido a erros numéricos o programa desenvolvido em *Matlab*[®] apresentou falhas no cálculo das raízes $\delta\lambda$. O *Matlab*[®] fornecia um termo complexo para as raízes muito pequeno que na verdade era um "lixo numérico", pois as raízes esperadas deveriam ser reais. Para contornar o problema foi acrescentado no termo c da equação 3.23

um incremento de $\varepsilon = 1.1e^{-10}$.

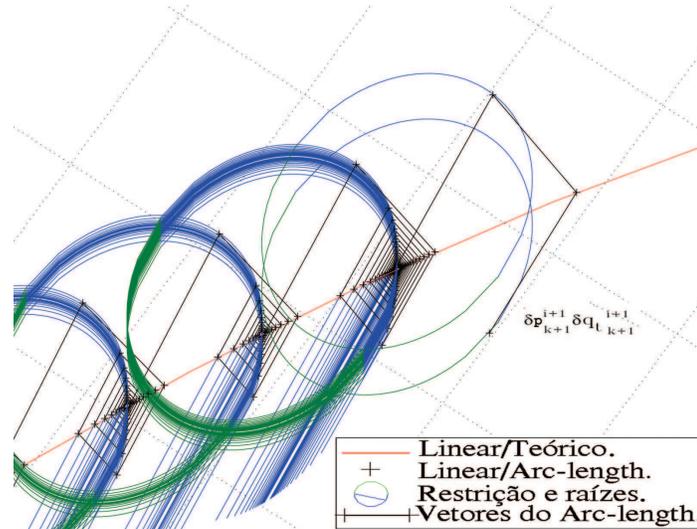


Figura 3.17: Vetor $\delta \lambda_{k+1}^{i+1} \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}$ na posição tangente.

Contudo, um outro problema surgiu independente se a raiz da equação quadrática 3.23 for complexa ou não. O problema é que o novo resíduo não pode ter módulo maior que o da iteração anterior. A estratégia neste caso é achar através de uma busca unidimensional um escalar α que diminua o vetor $\bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}$ para garantir que o resíduo diminua sempre, até satisfazer um critério de parada.

Para achar este valor mínimo de α , foi utilizado o procedimento de Newton-Raphson. Uma nova função resíduo foi criada, sendo que dentro dela o valor da amplitude \mathbf{p} é atualizada para um carregamento constante, pois se tem uma busca unidimensional. Uma outra função dentro deste resíduo calcula a amplitude para cada valor de α fornecido pela função do *Matlab*[®] *fmin*[‡] através de um processo iterativo. Para a função *fmin* é passado a norma do

[‡](A função *fmin*, acha os zeros de funções de uma variável. O algoritmo é baseado na seção áurea e interpolação parabólica, sua sintaxe é " $\mathbf{p} = \textit{fmin}(\textit{'fun'}, p1, p2, \textit{options}, P1, P2, \dots)$ ". Na seqüência tem-se: nome da função resíduo, intervalo de busca, controle de precisão do método, parâmetros adicionais a função resíduo.)

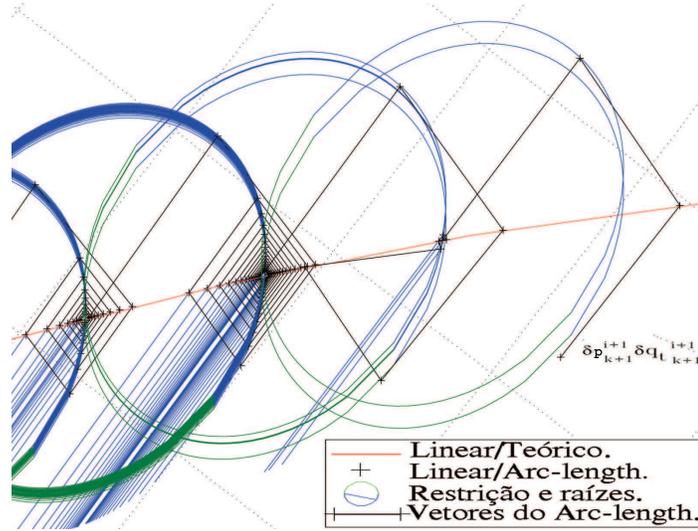


Figura 3.18: Vetor $\delta \lambda_{k+1}^{i+1} \delta \mathbf{q}_{k+1}^{i+1}$ fora da equação de restrição.

resíduo a qual se quer determinar seu zero. A amplitude é agora determinada calculando as raízes (3.23) com o vetor $\alpha \bar{\delta} \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}$ atualizado. É escolhida a raiz correta e calculadas as raízes do vetor $\delta \mathbf{p}_{k+1}^{i+1}$ de forma que agora pode-se atualizar o valor \mathbf{p} variando apenas α . Assim, o que se deseja com o método de Newton-Raphson é determinar um α que ache o zero da função resíduo para garantir que o resíduo diminua o suficiente para ser menor que o anterior, na direção de Newton.

Matematicamente, nossa meta é buscar um próximo ponto \mathbf{p}_{i+1} ao longo da direção de Newton com um passo $\delta \mathbf{p}$, não necessariamente o vetor inteiro. Portanto se deseja um α que determine o zero da função resíduo $\Psi(\mathbf{p}_i + \alpha \delta \mathbf{p})$.

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + \alpha \delta \mathbf{p} \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.64)$$

Durante a fase de desenvolvimento do "arc-length" a busca unidirecional *fmin* foi im-

plementada na tentativa de fazer com que o método funcionasse corretamente, porém com a correção dos erros do método a busca unidirecional não foi necessária e portanto não foi implementada na fase final , o qual ela pode vir a ser no futuro aplicado no "*arc-length*" se a busca unidirecional trouxer algum benefício.

Assim, encerra-se o capítulo 3 que foi apresentado o método "*arc-length*" e alguns problemas transponíveis que podem ocorrer com este método. Foi mostrada uma interpretação geométrica do método e no próximo capítulo será vista a aplicação deste método sobre as funções de respostas em frequência e respostas não-lineares em frequência.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

Neste capítulo serão mostrados os exemplos numéricos utilizados para convalidar o método "arc-length" aplicado em FRF e RF. O capítulo inicia com um teste bastante simples realizado com uma equação linear, depois é mostrado um caso com uma equação quadrática e finalmente os modelos de RF. Os primeiros testes a serem realizados é com o módulo da FRF de um sistema de um grau de liberdade linear e RF. Como segundo modelo de FRF e RF foi considerado a equação de um grau de liberdade com a representação $\Re \times \text{Img}$. O quarto teste é realizado com uma resposta em frequência não-linear de um S3GL (sistema com três graus de liberdade), que foram realizados testes tanto com seu módulo a partir de um sistema $\Re \times \text{Img}$ quanto com este último. Uma outra simulação realizada, foi com um sistema de um grau de liberdade não-linear, porém variando o nível de força. E finalmente, nos dois últimos exemplos, foram feitos com um sistema de um grau de liberdade e um sistema de três graus de liberdade, repetindo os casos citados acima, porém com uma modificação da função não-linear aplicada, que agora é uma função descritiva de folga, ao invés de uma função cúbica como nos casos anteriores.

4.1 Simulação dos Testes Realizados

Como já foi citado no capítulo 1 sobre a representação de modelos, utilizou-se alguns exemplos mais simples e outros mais elaborados e complexos. Estes exemplos serão aqui mostrados, e explicados os motivos pelos quais se teve que testar os modelos simples e também os mais elaborados. A apresentação se dará em ordem crescente de complexidade.

Os primeiros teste foram realizados com uma equação linear e devido a sua simplicidade os resultados estão apresentados no anexo (B).

Na seqüência foram realizados testes com uma parábola e com um sistema de um grau de liberdade que podem ser visualizados nos anexos (C) e (D), respectivamente.

4.1.1 Teste Realizado Com o Sistema de Um Grau de Liberdade, Com Representação de $\Re \times \text{Img}$, Linear e Não-Linear

Nesta fase serão mostrado os modelos do sistema de um grau de liberdade com representação das componentes reais e imaginárias através da duplicação da ordem do sistema. O tratamento realizado sobre este modelo é vetorial, ao contrário do teste anterior com o módulo do sistema de um grau de liberdade que era escalar.

Os primeiros casos mostram o procedimento para o caso linear no qual a figura (4.1) é o gráfico de Nyquist, a figura (4.2) são os pontos convergidos do método visto no espaço e a figura (4.3) é a visão espacial do procedimento "arc-length". Geralmente na execução dos casos lineares não houve problema de convergência, sendo que a maioria deles ocorreram nos casos não-lineares.

A figura (4.4) mostra a receptância com as partes real e imaginária de um sistema linear.

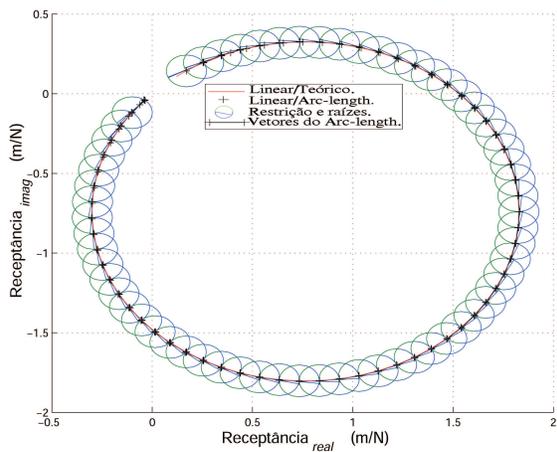


Figura 4.1: Gráfico de Nyquist "arc-length" aplicado no sistema de um grau de liberdade linear $\Re \times \text{Im}g$.

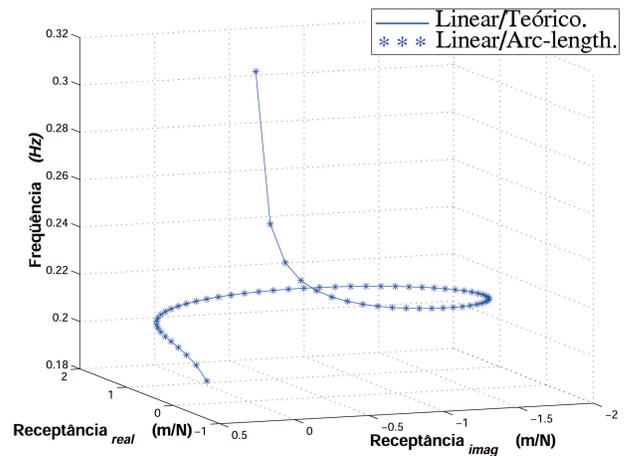


Figura 4.2: Pontos convergidos do método aplicado no sistema de um grau de liberdade linear $\Re \times \text{Im}g$.

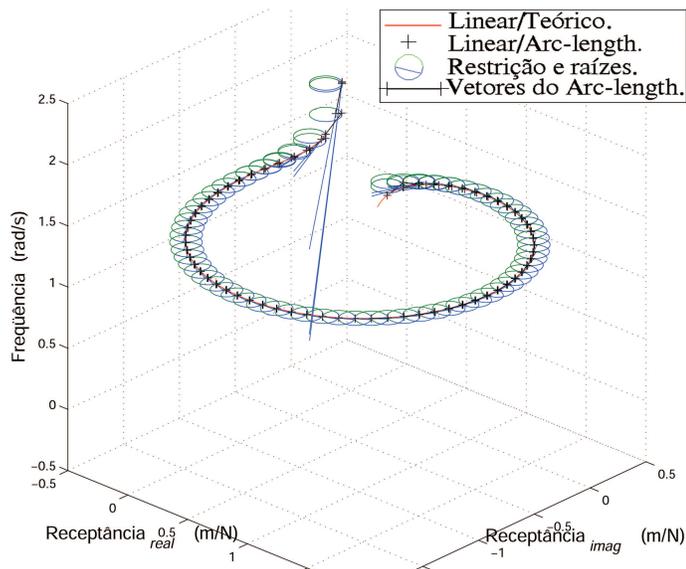


Figura 4.3: Visão geral do procedimento "arc-length" funcionando no sistema de um grau de liberdade linear $\Re \times \text{Im}g$.

Como as FRF lineares possuem os caminhos mais suaves, digo, suas inclinações não são muito bruscas ou exageradas, elas são geralmente obtidas com menor esforço computacional, tendo um número menor de iterações para a convergência em relação ao caso não-linear.

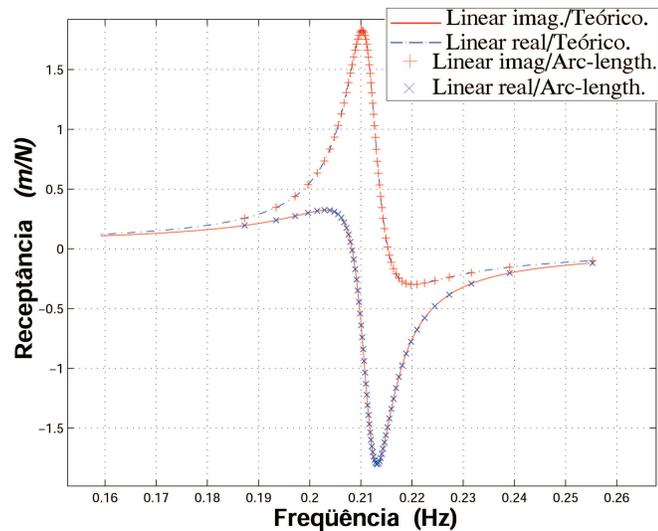


Figura 4.4: Representação do "arc-length" para um caso linear $\Re \times \text{Img}$.

Na figura (4.5), tem-se o funcionamento seqüencial do "arc-length", o qual é mostrado a equação de restrição, os pontos de convergência, o caminho teórico, as duas raízes $\delta\lambda_i$ da equação quadrática 3.23, a derivada do resíduo em relação a \mathbf{x} , os vetores $\bar{\delta}\mathbf{p}$ e $\delta\lambda\delta\mathbf{q}_t$. Os pontos de convergências mostram a direção correta do caminho a ser seguido e também que os escalares ($\delta\lambda_i$) da equação quadrática foram escolhidos corretamente, caso este vetor seja escolhido errado o algoritmo retornará ao ponto convergido precedente.

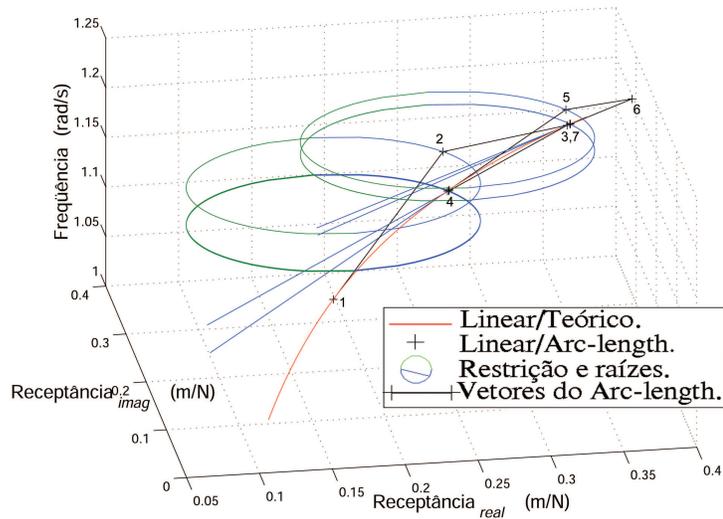


Figura 4.5: Detalhe do método "arc-length", mostrando seu funcionamento para um caso linear $\Re \times \text{Im}g$.

Agora, tem-se as figuras (4.6) e (4.7) que são casos do sistema de um grau de liberdade não-linear com representação das partes real e imaginária. Aqui é observado, que na primeira figura o caminho não-linear está inclinado para direita e a segunda para esquerda. Isto se dá, devido ao tipo de não-linearidade imposta aos ambos modelos de RF. A primeira RF possui uma não-linearidade positiva e a segunda negativa. Na equação do resíduo, o sinal da não-linearidade é controlada pelo fator β da função descritiva. A interpretação física deste fator, é que para $\beta > 0$, quanto maior é a força que se aplicada ao sistema mais rígido a estrutura fica e para $\beta < 0$, quanto maior é a força que se aplica ao sistema, mais flexível ele fica.

A próxima figura (4.8) é um detalhe da figura (4.6).

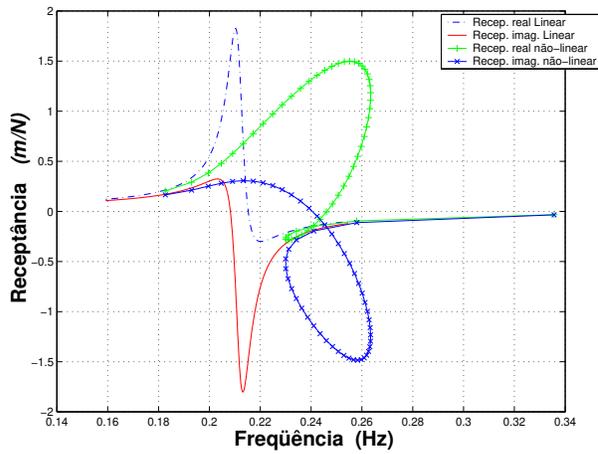


Figura 4.6: Representação da RF de um sistema de um grau de liberdade com não-linearidade positiva com a parte $\Re \times \text{Im}g$.

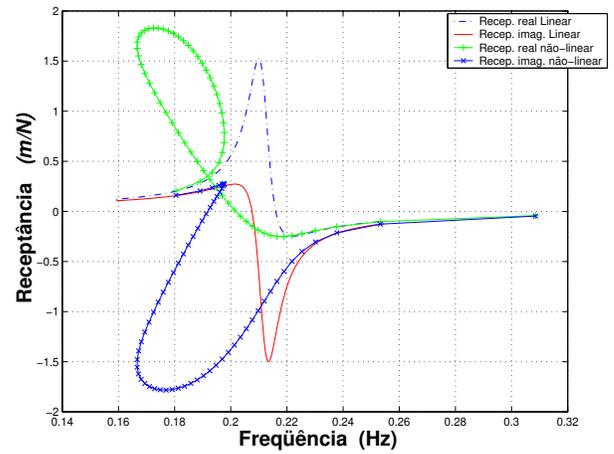


Figura 4.7: Representação da RF do sistema de um grau de liberdade com não-linearidade negativa com a parte $\Re \times \text{Im}g$.

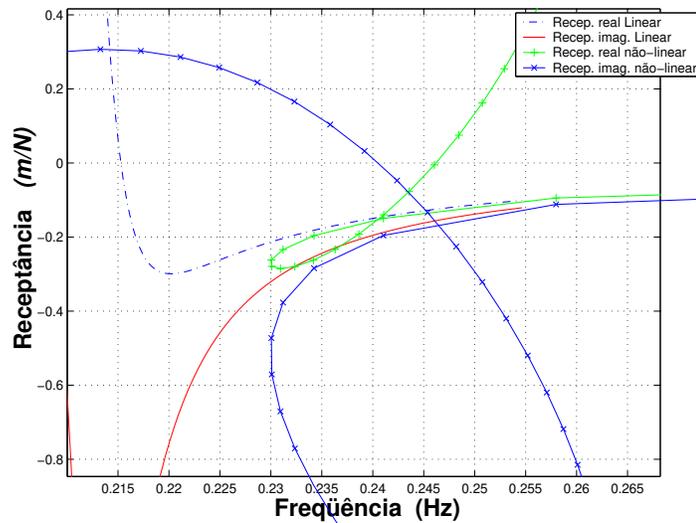


Figura 4.8: Detalhe da figura (4.6) para facilitar a visualização do caminho não-linear.

Já as figuras (4.9) e (4.10) mostram um procedimento não-linear para o modelo complexo do sistema de um grau de liberdade não-linear. O primeiro é o gráfico de Nyquist, com o procedimento do "arc-length" não-linear comparado com a curva de Nyquist linear. Já a segunda figura representa uma visão espacial da mesma RF, que é comparada com o

caso linear. É observado nestas figuras que em um ponto os vetores $\bar{\delta p}$ e $\delta \lambda \delta \mathbf{q}_t$ possuem uma ordem de grandeza maior em relação aos outros. Isto se dá devido a proximidade de um eventual ponto crítico, que provoca um mau-condicionamento da matriz rigidez e como aqueles vetores são determinados utilizando a inversa desta matriz, então suas dimensões geralmente são superiores aos demais.

Na figura (4.11), tem-se o procedimento do "arc-length" para o caso não-linear, sendo semelhante ao caso linear citado anteriormente. Quanto menos pronunciado é a não-linearidade mais próximo a curva não-linear está da linear, sendo o inverso verdadeiro. Isto é uma característica comum das RF não-lineares, que dependem do deslocamento possuem maior influência nos locais onde a amplitude do sistema é mais elevada.

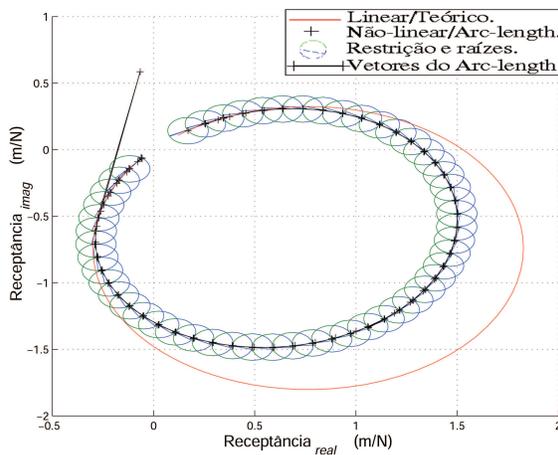


Figura 4.9: Gráfico de Nyquist com o funcionamento do "arc-length" aplicado no sistema de um grau de liberdade não-linear.

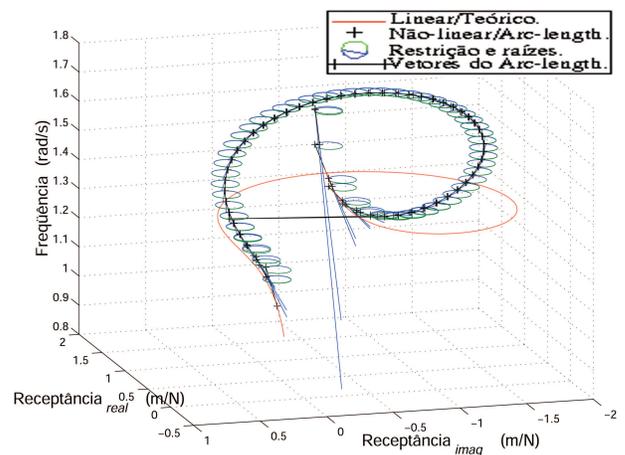


Figura 4.10: Visão espacial da RF não-linear do sistema de um grau de liberdade.

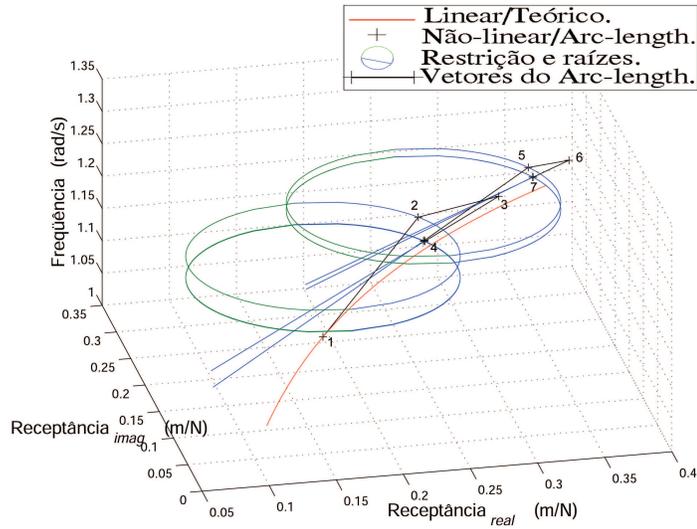


Figura 4.11: Detalhe do "arc-length" funcionando para um modelo do sistema de um grau de liberdade não-linear $\Re \times \text{Im}g$.

As últimas figuras deste item mostram os pontos convergidos do método para este caso, com uma visão espacial e o módulo do resíduo calculado após o ponto convergido terem sido obtidas. Este resultado é equivalente ao utilizando no resíduo onde foi utilizado somente o módulo da RF para um sistema de um grau de liberdade, mostrado anteriormente.

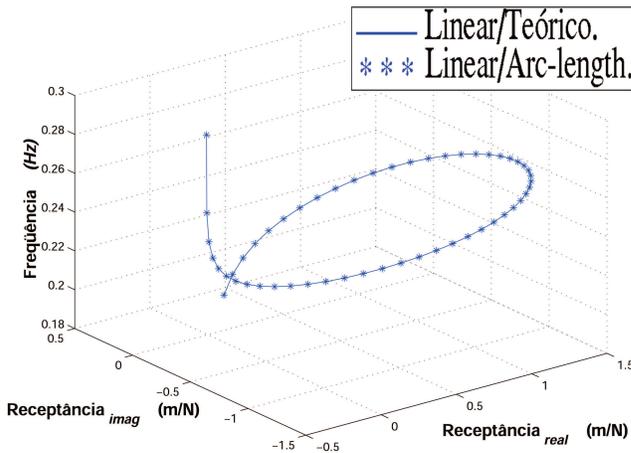


Figura 4.12: Pontos convergidos do "arc-length" aplicado no sistema de um grau de liberdade não-linear $\Re \times \text{Im}g$.

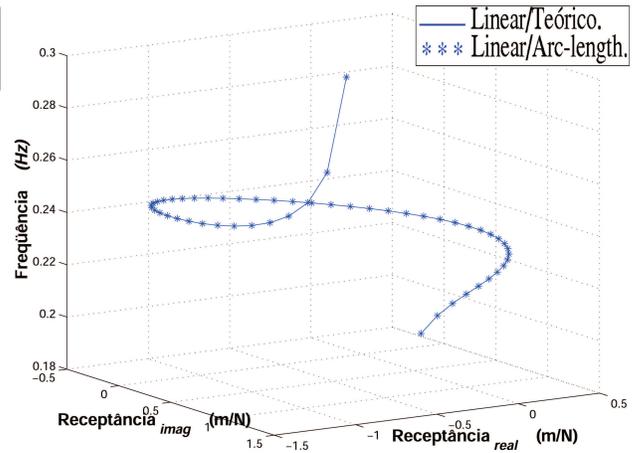


Figura 4.13: Outro ponto de vista da figura (4.12).

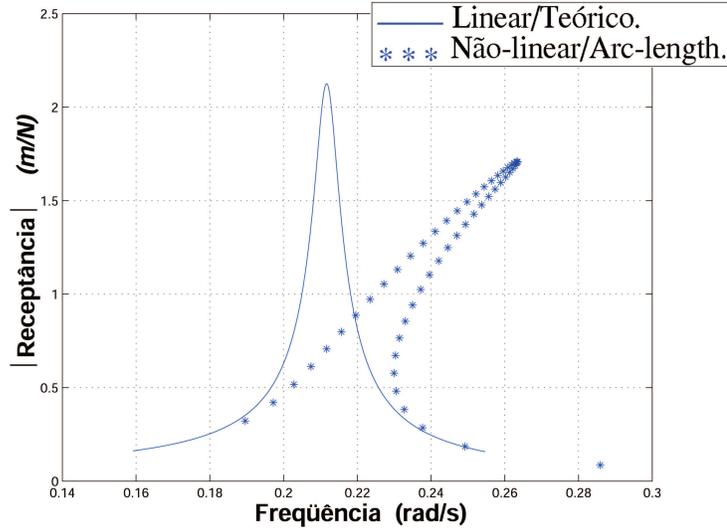


Figura 4.14: Módulo do modelo de um sistema de um grau de liberdade não-linear $\Re \times \text{Im}g$.

Dados utilizados nestes testes, para sua reprodução futura :

► Equação : $|\alpha(\omega)| = \frac{x}{f} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega c)}$;

► Vetor resíduo linear :

$$(\Psi) = \begin{bmatrix} k - (\omega\lambda)^2 m & -(\omega\lambda)c \\ (\omega\lambda)c & k - (\omega\lambda)^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{real} \\ x_{imag} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{real} \\ f_{imag} \end{Bmatrix};$$

► Vetor resíduo não-linear :

$$(\Psi) = \begin{bmatrix} k - (\omega\lambda)^2 m + dfr & -(\omega\lambda)c \\ (\omega\lambda)c & k - (\omega\lambda)^2 m + dfr \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{real} \\ x_{imag} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{real} \\ f_{imag} \end{Bmatrix};$$

► Ponto inicial : $\mathbf{x}_0 = \begin{Bmatrix} 0.1211482749 \\ 0.1079799841 \end{Bmatrix}$ e $y_0 = 1.0$. O ponto (\mathbf{x}_0, y_0) foi obtido considerando a equação acima do resíduo com a não-linearidade nula e utilizando os dados abaixo desta lista;

► Função descritiva : $dfr = \frac{3}{4}\beta x^2$;

- ▶ Coeficiente : $\beta = \pm 0.5$;
- ▶ Matriz rigidez tangencial : $K_t \implies$ calculado numericamente $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;
- ▶ Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \implies$ calculado numericamente por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;
- ▶ Rigidez : $k = 2.0 (N/m)$;
- ▶ Amortecimento : $c = 0.05 (Ns/m)$;
- ▶ Massa : $m = 1.13 (Kg)$;
- ▶ Força : $\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{Bmatrix} (N)$;
- ▶ Frequência inicial e final : $\omega_i = 1.0 (rad/s)$ e $\omega_f = 1.7 (rad/s)$, respectivamente;
- ▶ Raio : $\Delta l_0 = 0.1$, para demais iterações controle automático pela equação 3.56;
- ▶ Sistema linear($\beta = 0$) e não-linear($\beta \neq 0$).

Para os casos do sistema de um grau de liberdade, o método funcionou muito bem, gerou poucos pontos para descrever toda a curva claramente, independente se o tratamento dado foi escalar ou vetorial. Assim, é possível elevar um pouco mais o nível de dificuldade e aplicar o "arc-length" num sistema de maior grau de liberdade, como é o caso do S3GL a seguir que dobrando a ordem do sistema fornecerão seis equações para representar as partes $\Re \times \text{Img}$.

4.1.2 Teste Realizado Com Um S3GL, Com Representação de $\mathfrak{R} \times \text{Img}$, Módulo, Linear e Não-Linear

Aqui, foi utilizado um modelo mais elaborado com três graus de liberdade com representação real e imaginária, que dá ao resíduo um sistema de seis equações. O sistema utilizado é um massa-mola com amortecimento viscoso que possui três molas não-lineares. Apenas, serão mostradas as figuras das RF mais representativas do modelo, dentre as diversas possíveis.

Para representar o S3GL um sistema de parâmetros concentrados composto de elementos de massa, rigidez e amortecimento e governado pela equação 2.25, é mostrado na figura (4.15).

As três figuras (4.16), (4.17) e (4.18) são casos de um sistema linear, que mostram a eficiência do método quando aplicado nestes casos.

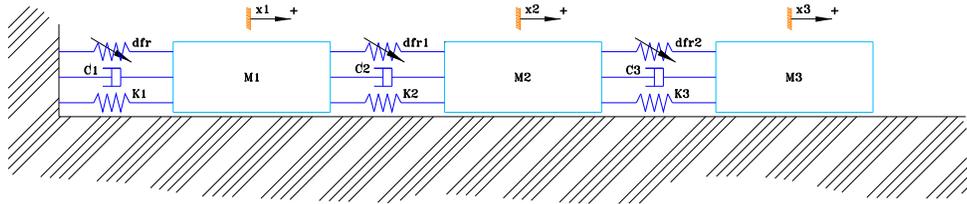


Figura 4.15: Esquema massa-mola de um S3GL não-linear, com amortecimento.

A precisão em todos os casos mostrados na simulação é a mesma, sendo que a convergência se dá quando o vetor resíduo, Ψ , é menor que $1e^{-6}$. Para este caso, é observado que quando o número de iterações é pequeno, a curva é representada por pouco pontos, e o contrário também é verdadeiro quando se tem um número grande de iterações. Isto é justificável, porque quanto mais abrupta é a inclinação do caminho a ser percorrido, maior é o número de iterações para convergir. E com isto o controle do raio, que depende do número de iterações diminui seu comprimento sensivelmente.

Nos próximos modelos, tem-se as RF não-lineares de um S3GL, no qual foram destacados seus picos para facilitar a visualização dos pontos convergidos do procedimento "arc-length". Uma vez que é complicado mostrar a representação gráfica das iterações devido a dimensão vetorial, só serão mostrados apenas os pontos finais convergidos. As RF que serão mostradas aqui correspondem a excitação e medição no ponto 1 (x1 e M1), "drive point", na figura 4.15.

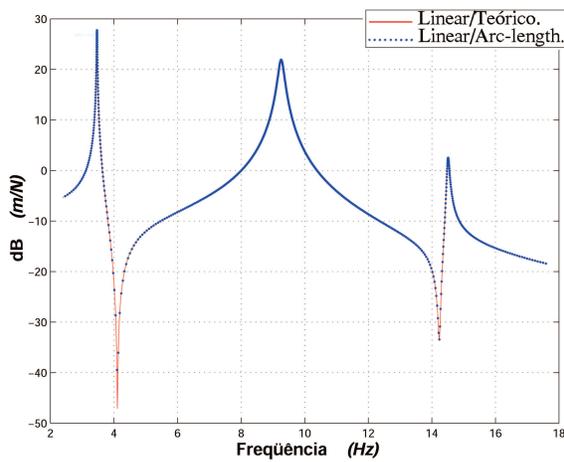


Figura 4.16: FRF linear de um S3GL.

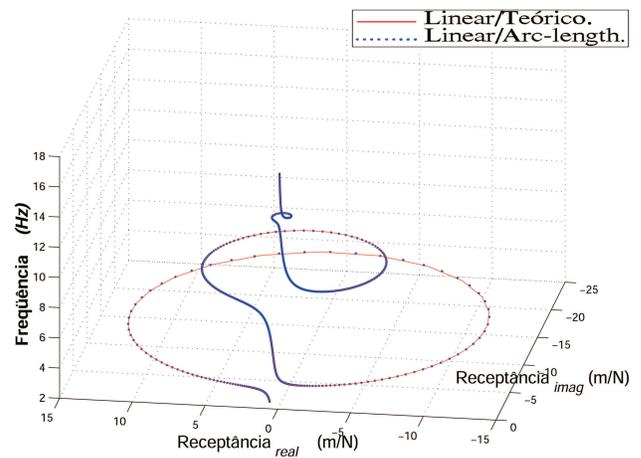


Figura 4.17: Visão espacial da FRF linear de um S3GL.

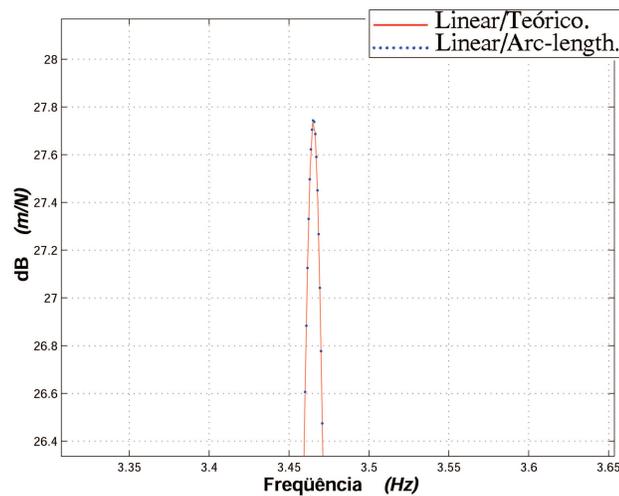


Figura 4.18: Detalhe da primeira região de ressonância do S3GL linear.

Para o caso não-linear, assim como para o caso linear do mesmo modelo, foi exigido do método um número extremamente grande de pontos para completar toda a curva, mesmo utilizando um raio, Δl , muito grande. Na média, foram utilizados 4000 pontos que levou um tempo razoável para a execução de todo o trajeto. O raio utilizado aqui, foi de $\Delta l = 30$ que é um valor muito grande, para o método ultrapassar este tipo de inflexão tão abrupta quanto inclinada para um dos lados. Quando a convergência se aproximava destes pontos, ocorria uma seqüência ininterrupta de raízes complexas devido a grandeza do raio. O método então retornava ao anterior e reduzia o comprimento do raio pela metade. Este procedimento ocorria conforme a dificuldade imposta pela curva. Isto implicou no aumento de cálculo computacional, pois aquele procedimento era repetido até que a equação 3.23 forneça raízes reais. Logo, para se ter sucesso o método deve conter o controle da raiz complexa e também escolher corretamente o $\delta\lambda_i$ fornecido pela equação 3.23, sendo a escolha dada pelo sinal do determinante da matriz rigidez tangencial, \mathbf{K}_t .

Assim, uma solução para o problema do tempo pode ser a utilização de uma linguagem de programação, ao invés do *Matlab*[®], pois se aumentar ainda mais a tamanho do raio, a curva será discretizada com um número menor de pontos, porém na vizinhança de um ponto crítico o algoritmo praticamente vai estagnar devido a redução do raio em cada ponto nesta região. Uma outra possibilidade é desenvolver uma equação que controle o raio levando em consideração a não-linearidade, para que ela aumente ou diminua o raio conforme a ausência ou manifestação da não-linearidade.

Através do teste realizado com o modelo de um S3GL não-linear, vários exemplos foram obtidos, como o que está na figura (4.19). Neste exemplo foi utilizado um $\beta > 0$ na função descritiva. O método "*arc-length*" foi testado nesta RF que possui várias inflexões, e ele

percorreu todo o caminho independente do tipo de inclinação da curva.

Já na figura (4.20), é fornecido uma visão espacial da RF não-linear mostrada na figura (4.19).

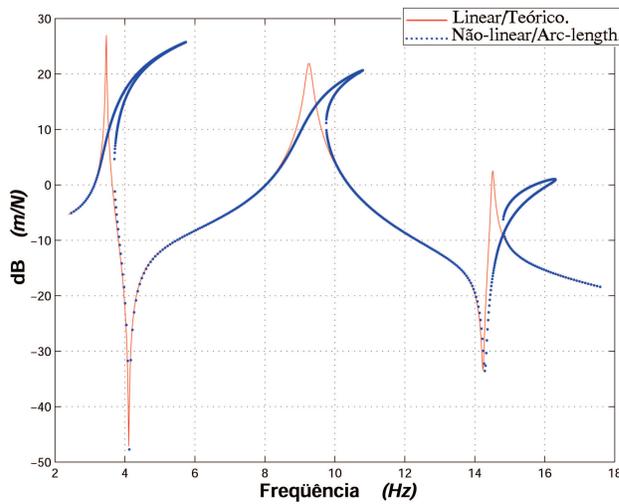


Figura 4.19: RF não-linear de um S3GL.

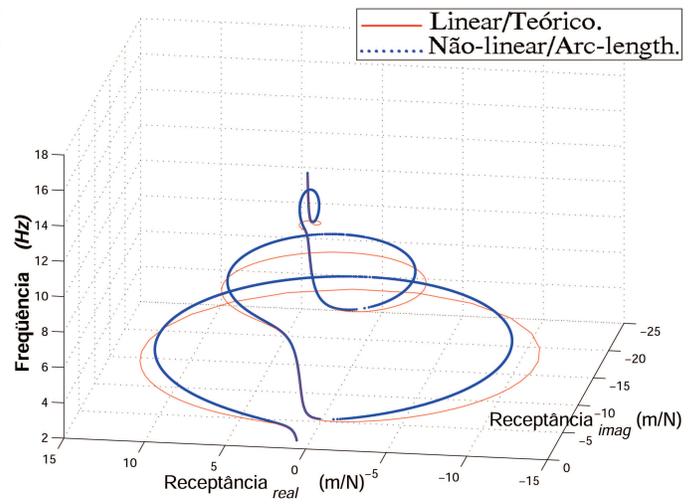


Figura 4.20: Visão espacial da RF não-linear de um S3GL.

A partir da figura (4.21) até a figura (4.26) são mostrados em detalhes os picos na região de ressonância, referente a RF da figura (4.19), onde se concentra a maioria dos pontos convergidos e conseqüentemente onde se consome o maior tempo computacional. Já na região que a RF possui um menor efeito da não-linearidade ocorre o inverso, tem-se menos pontos convergidos.

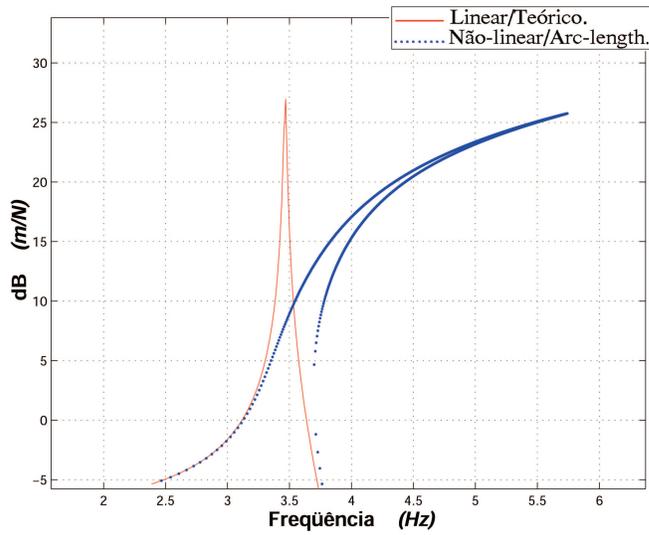


Figura 4.21: Detalhe da primeira região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL.

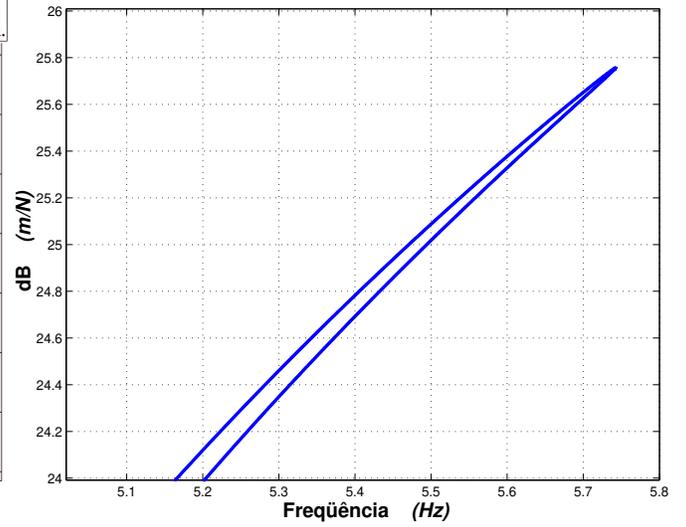


Figura 4.22: Detalhe do ponto crítico da figura (4.21).

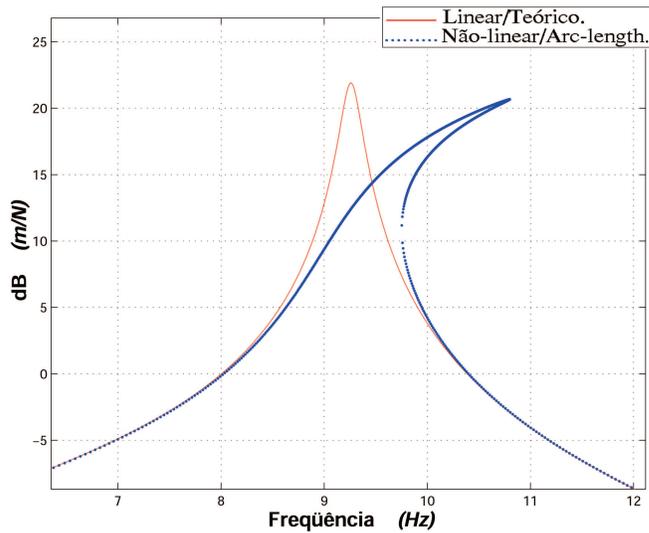


Figura 4.23: Detalhe da segunda região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL.

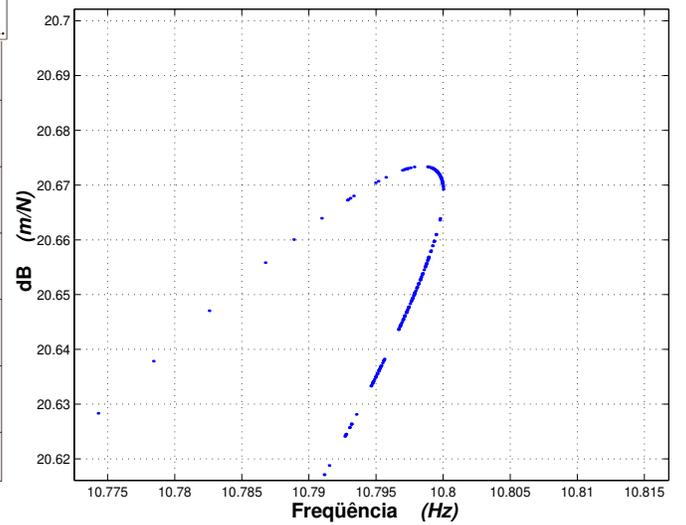


Figura 4.24: Detalhe do ponto crítico da figura (4.23).

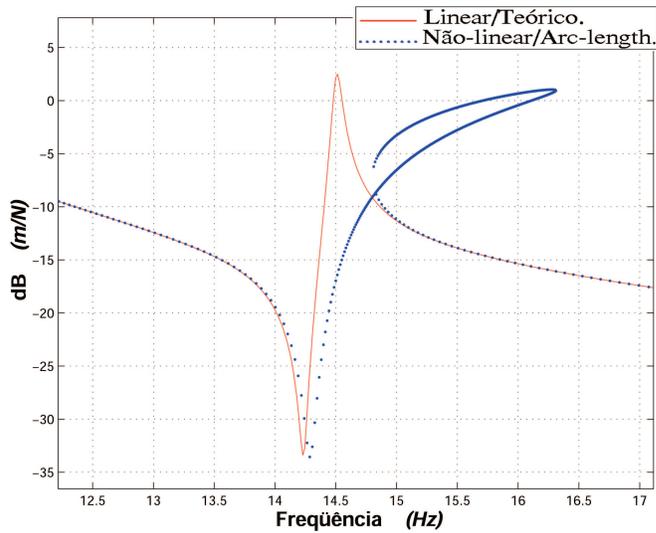


Figura 4.25: Detalhe da terceira região de ressonância de um sistema linear equivalente.

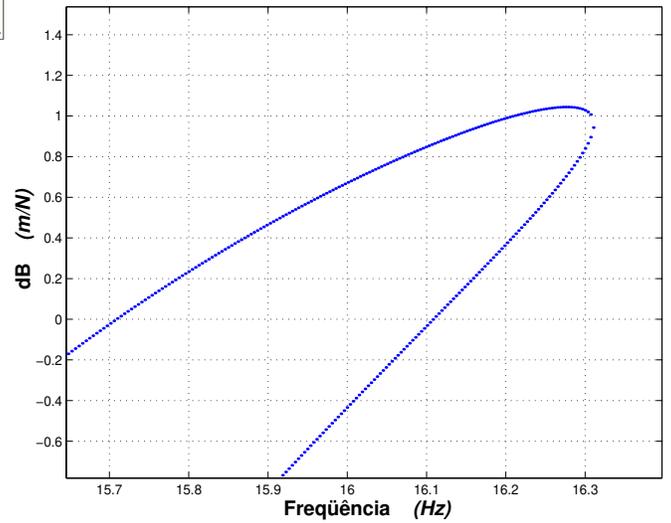


Figura 4.26: Detalhe do ponto crítico da figura (4.26).

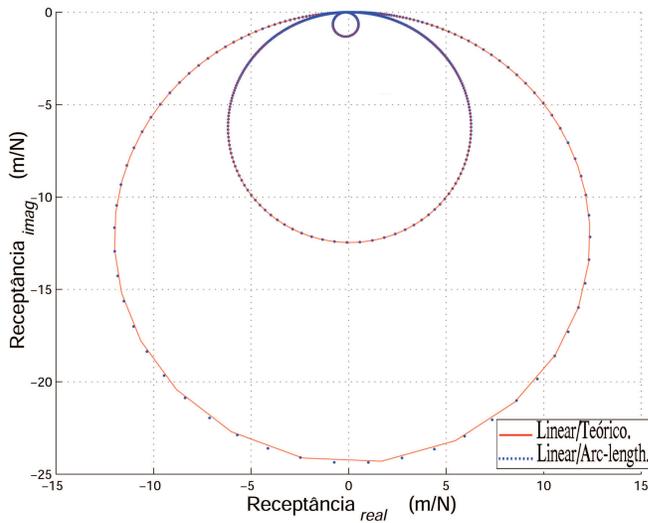


Figura 4.27: Gráfico de Nyquist do S3GL linear.

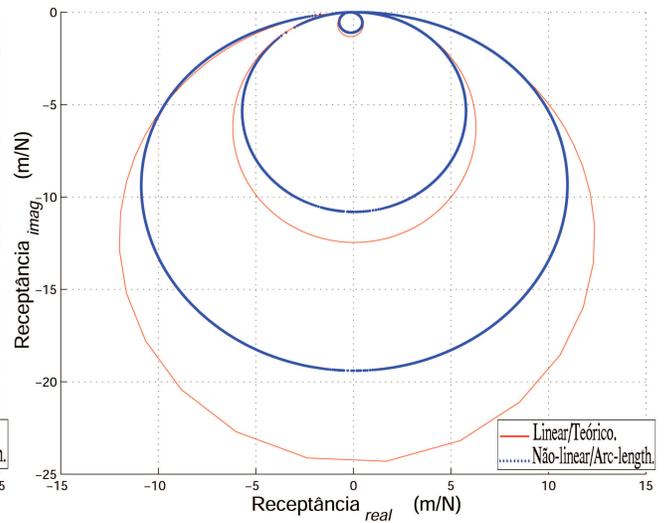


Figura 4.28: Gráfico de Nyquist do S3GL não-linear.

Nas duas últimas figuras (4.27) e (4.28), tem-se uma outra representação do gráfico de Nyquist da FRF linear e RF não-linear do S3GL. Aqui é fácil visualizar a quantidade excessiva de pontos exigidos para o caso não-linear e uma discretização mais adequada para o caso

linear. Logo, é necessário ao método um controle para reduzir o número de pontos convergidos para o caso não-linear, que conseqüentemente diminuirá o tempo de cálculo do caminho.

Agora, para os subseqüentes itens serão mostrados os casos com o fator $\beta < 0$, que forneceu alguns resultados mais interessantes e difíceis e que exigiu um maior esforço do procedimento para se ter sucesso ao longo de todo o caminho da RF não-linear.

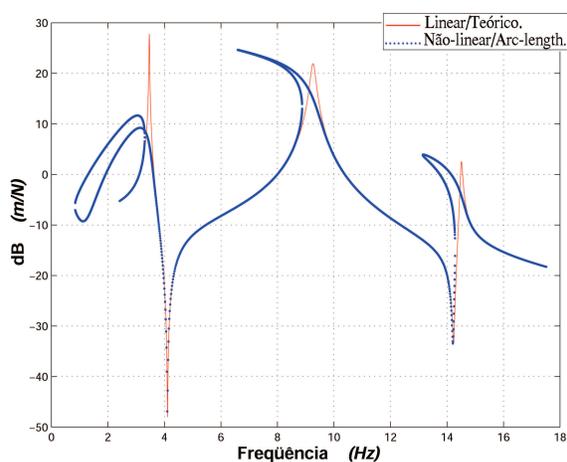


Figura 4.29: RF não-linear de um S3GL com $\beta < 0$.

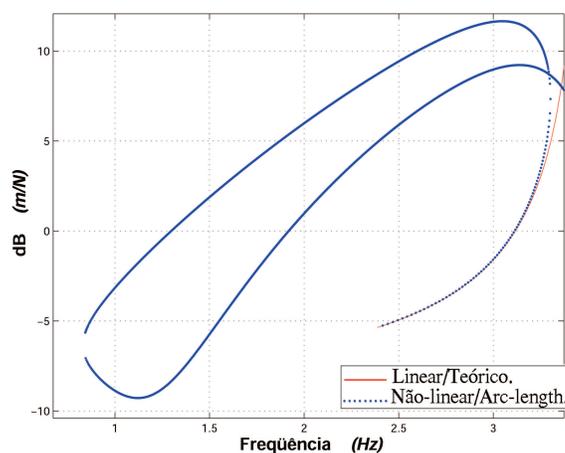


Figura 4.30: Detalhe da primeira região de ressonância de um sistema linear equivalente da figura (4.29).

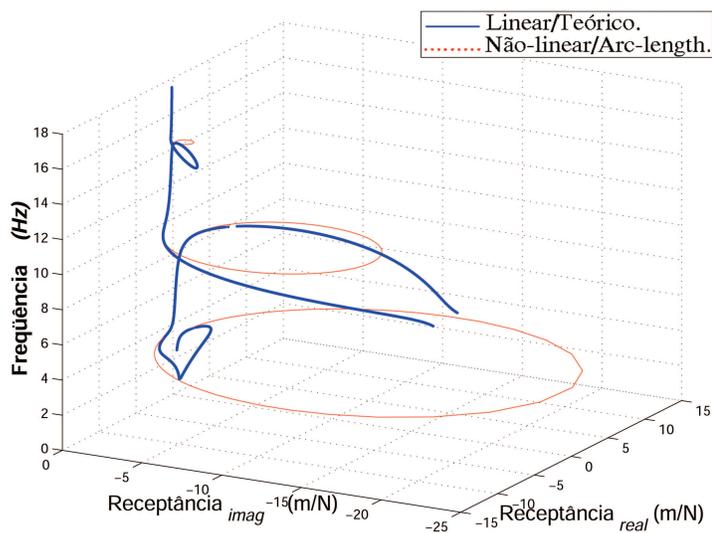


Figura 4.31: Visão espacial da RF não-linear do S3GL com $\beta < 0$.

Na figura (4.29) mostra uma RF de um S3GL não-linear, cujo $\beta < 0$. No detalhe da figura (4.30) é mostrado uma descontinuidade, que ocorreu porque o raio da restrição não foi pequeno o suficiente para determinar pontos adjacentes, provocando com isto um salto na curva. Este caso teve um número maior de pontos convergidos em relação ao caso anterior na figura (4.19).

Esta RF apresentou um número maior de inflexões em relação ao mesmo caso, porém com $\beta > 0$ e também um número maior de pontos convergidos.

Agora, para facilitar a visualização da RF na figura (4.29), suas ressonâncias foram destacadas em vários gráficos, como na figura (4.30) e entre as figuras (4.32) e (4.34), inclusive.

Já na figura (4.31), tem-se uma visão espacial desta RF não-linear do S3GL, para $\beta < 0$.

Observando as figuras (4.32) e (4.33), verifica-se uma descontinuidade no gráfico da RF não-linear na segunda ressonância. Isto se deve claramente ao pequeno amortecimento atribuído a segunda massa, os valores utilizados estão no final desta seção. Porém, devido a grande dimensão do raio, ele proporcionou o salto para o outro lado da descontinuidade. Logo, caso o raio e ou amortecimento sejam menores, o algoritmo não estará preparado para identificar tal ponto de descontinuidade e ultrapassá-lo para continuar sua convergência no caminho de equilíbrio, ou seja, o sistema tem que possuir amortecimento. O método continuará indefinidamente em um dos lados da descontinuidade até atingir um número máximo de iterações. Embora, seja possível obter os dois lados da RF sem amortecimento, através da inversão de convergência do seu caminho. Por exemplo, para a convergência ir da esquerda para direita basta manter o sinal do $\Delta\lambda_{k+1}^\theta$, na equação 3.5 e para ocorrer o contrário basta ajustar o valor deste escalar para seu inverso.

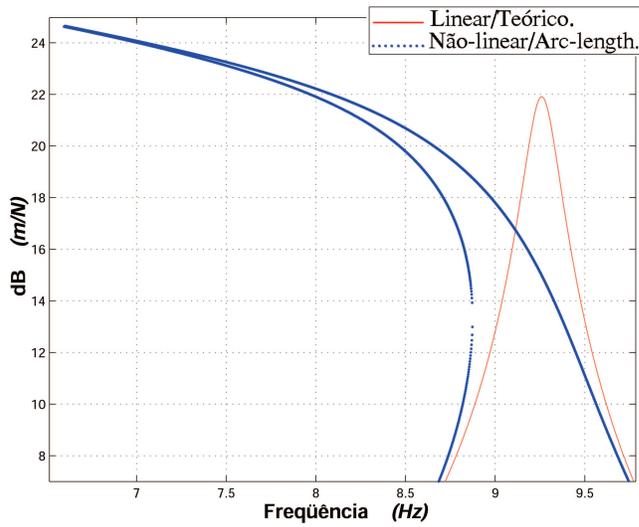


Figura 4.32: Detalhe da segunda região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL da figura (4.29).

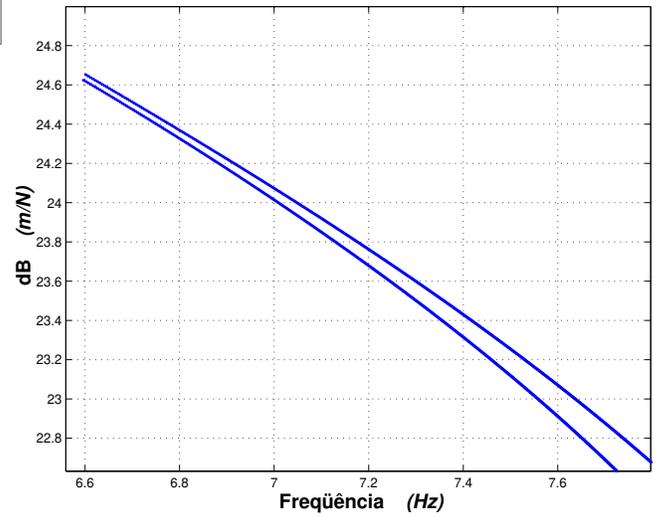


Figura 4.33: Visão mais aproximada da figura (4.32).

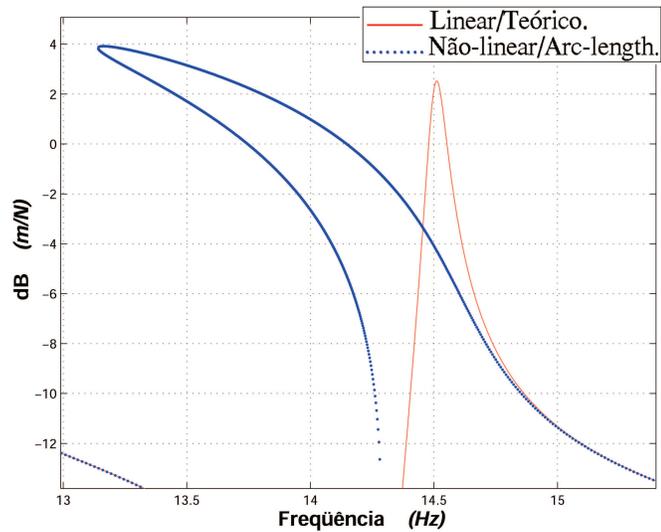


Figura 4.34: Detalhe da terceira região de ressonância de um sistema linear equivalente S3GL da figura (4.29).

Nas últimas duas figuras (4.35) e (4.36), é mostrado o diagrama de Nyquist com representação linear e não-linear. No caso não-linear é observado uma deformação muito grande

da primeira região de ressonância de um sistema linear equivalente. Na segunda região de ressonância é observado a descontinuidade comentada anteriormente.

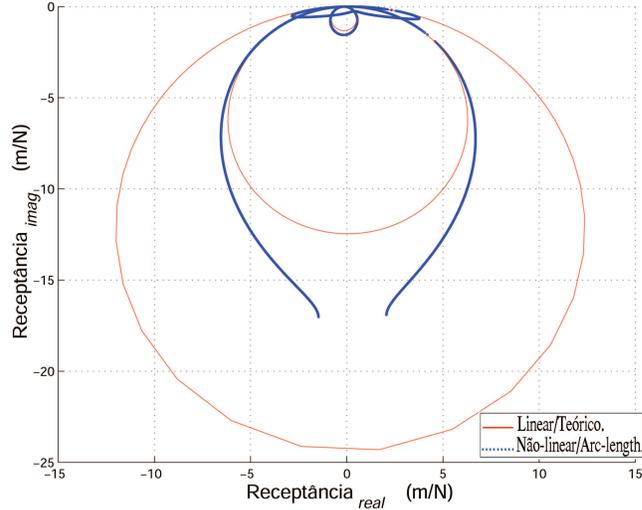


Figura 4.35: Gráfico de Nyquist do S3GL não-linear com $\beta < 0$.

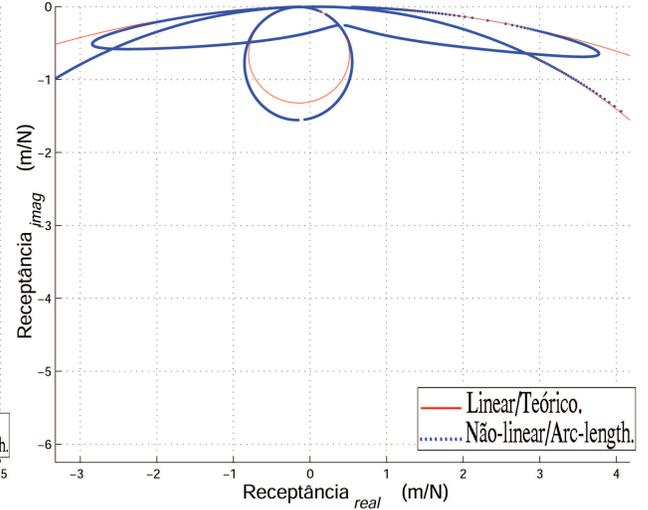


Figura 4.36: Detalhe do gráfico de Nyquist da figura (4.35).

Para reproduzir estes casos, deve-se utilizar os dados abaixo:

► Equação : $|\alpha(\omega)| = \frac{x}{f} = \frac{1}{(K - \omega^2 M) + i(\omega C)}$;

► Vetor resíduo linear :

$$(\Psi) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - (\omega\lambda)^2 m_1 & -k_2 & 0 & -(\omega\lambda)(c_1 + c_2) & (\omega\lambda)c_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 & -k_3 & (\omega\lambda)^2 c_2 & -(\omega\lambda)(c_2 + c_3) & (\omega\lambda)c_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 & 0 & (\omega\lambda)c_3 & -(\omega\lambda)c_3 \\ (\omega\lambda)(c_1 + c_2) & -(\omega\lambda)c_2 & 0 & (k_1 + k_2) - (\omega\lambda)^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -(\omega\lambda)c_2 & (\omega\lambda)(c_2 + c_3) & -(\omega\lambda)c_3 & -k_2 & (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -(\omega\lambda)c_3 & (\omega\lambda)c_3 & 0 & -k_3 & k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix};$$

► Vetor resíduo não-linear :

$$(\Psi) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - (\omega\lambda)^2 m_1 + d1 & -k_2 - d3 & 0 & (\omega\lambda)(c_1 + c_2) & -(\omega\lambda)c_2 & 0 \\ -k_2 - d3 & (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 + d2 & -k_3 - d4 & -(\omega\lambda)^2 c_2 & (\omega\lambda)(c_2 + c_3) & -(\omega\lambda)c_3 \\ 0 & -k_3 - d4 & k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 + d4 & 0 & -(\omega\lambda)c_3 & (\omega\lambda)c_3 \\ -(\omega\lambda)(c_1 + c_2) & (\omega\lambda)c_2 & 0 & (k_1 + k_2) - (\omega\lambda)^2 m_1 + d1 & -k_2 - d3 & 0 \\ (\omega\lambda)c_2 & -(\omega\lambda)(c_2 + c_3) & (\omega\lambda)c_3 & -k_2 - d3 & (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 + d2 & -k_3 - d4 \\ 0 & (\omega\lambda)c_3 & -(\omega\lambda)c_3 & 0 & -k_3 - d4 & k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 + d4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix};$$

onde,

$$a_1 = dfr1;$$

$$b_1 = dfr1 + dfr2;$$

$$c_1 = dfr1;$$

$$c_2 = dfr2.$$

► Ponto inicial : $\mathbf{x}_0 = \begin{Bmatrix} 0.539628065 \\ 0.767379594 \\ 0.838093485 \\ -0.005580286 \\ -0.008669851 \\ -0.009491949 \end{Bmatrix}$ e $y_0 = 15$. O ponto (\mathbf{x}_0, y_0) foi obtido considerando a equação acima do resíduo com a não-linearidade nula e utilizando os dados abaixo desta lista;

► Função descritiva :

$$dfr = \frac{3}{4}\beta(\sqrt{x_1^2 + x_4^2})^2;$$

$$dfr1 = \frac{3}{4}\beta(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_4 - x_5)^2})^2;$$

$$dfr2 = \frac{3}{4}\beta(\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (x_5 - x_6)^2})^2;$$

► Coeficiente : $\beta = \pm 8$;

► Matriz rigidez tangencial : $K_t \implies$ calculado numericamente $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;

► Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \implies$ calculado numericamente por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;

- Rigidez : $k_1 = 5000, k_2 = 2000, k_3 = 4000 (N/m)$;
- Amortecimento : $c_1 = 2.5, c_2 = 0.3, c_3 = 0.08 (Ns/m)$;
- Massa : $m_1 = 2, m_2 = 1.0, m_3 = 1.5 (Kg)$;
- Força : $\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} .5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} (N)$;
- Frequência inicial e final : $\omega_i = 15 (rad/s)$ e $\omega_f = 110 (rad/s)$, respectivamente;
- Raio : $\Delta l_0 = 30$, para demais iterações ele é constante;
- Sistema linear($\beta = 0$) e não-linear($\beta \neq 0$).

Nesta última simulação, um foi exigido um esforço computacional maior para transpor todo o caminho de equilíbrio, pois conforme se observou nas figuras anteriores a não-linearidade foi bastante intensa. Uma quantidade maior de pontos foi necessária para compor toda a curva, uma quantidade pequena de raízes complexas surgiu nos pontos onde a não-linearidade foi mais acentuada. Contudo, independente das dificuldades, o "arc-length" não falhou. Agora é possível testar um outro parâmetro para garantirmos ainda mais a eficiência do método que é a variação do nível de força, sendo calculadas várias FRF lineares e RF não-lineares, sendo que cada uma terá uma força de excitação diferente das outras. Observe o resultado na seção seguinte.

4.1.3 Teste Com Um Sistema de Um Grau de Liberdade, Variando o Vetor Força Para o Caso do Módulo Linear e Não-Linear

Nos exemplos que serão mostrados aqui, tem-se uma série de RF calculadas uma após outra, com variação do vetor força, para o sistema de um grau de liberdade. Observa-se neste caso, que com o aumento da excitação é proporcionado uma elevação da rigidez não-linear.

O mesmo pode ser feito para casos com maior número de graus de liberdade, porém levará um tempo computacional maior considerando a quantidade de número de pontos necessária para cada curva de RF.

Nas figuras (4.37) até (4.39) são mostradas as RF com níveis de forças diferentes, sendo que para obter estes gráficos o procedimento foi bastante simples, pois o algoritmo já não possuía mais erros e ele já tinha sido bastante testado. Para cada curva de RF o nível de força foi permanecido constante e para a subsequente RF um incremento de força foi adicionado.

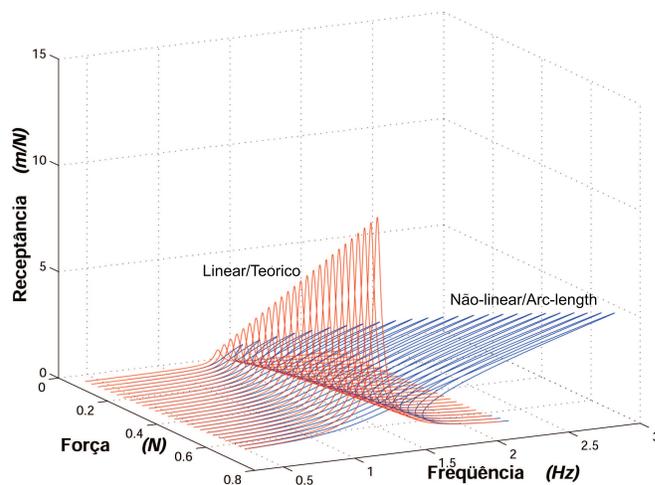


Figura 4.37: Vista espacial de RF lineares e RF não-lineares do sistema de um grau de liberdade com variação da força de excitação.

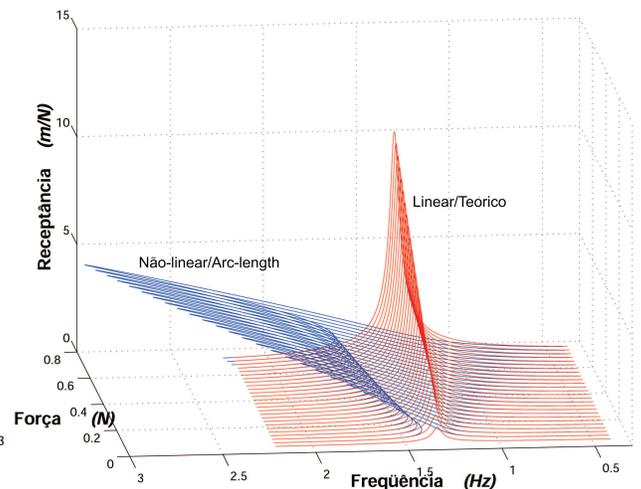


Figura 4.38: Outro ponto de vista da figura (4.37).

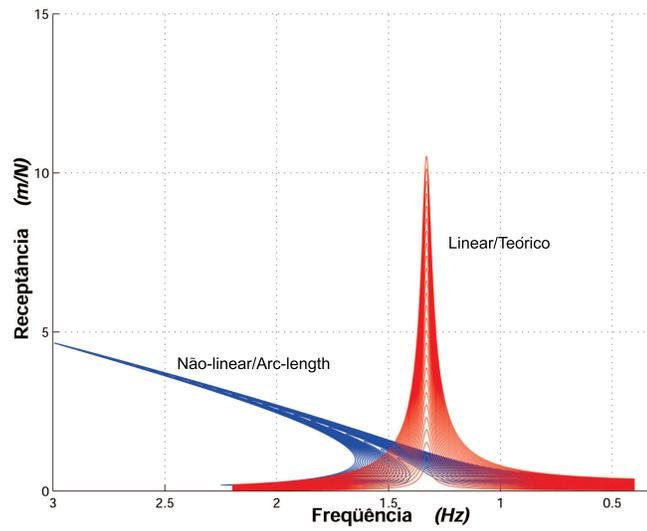


Figura 4.39: RF linear e RF não-linear do sistema de um grau de liberdade com variação da força.

Para este tipo de modelo é possível representar a superfície de RF, como mostrado nas figuras (4.40) e (4.41).

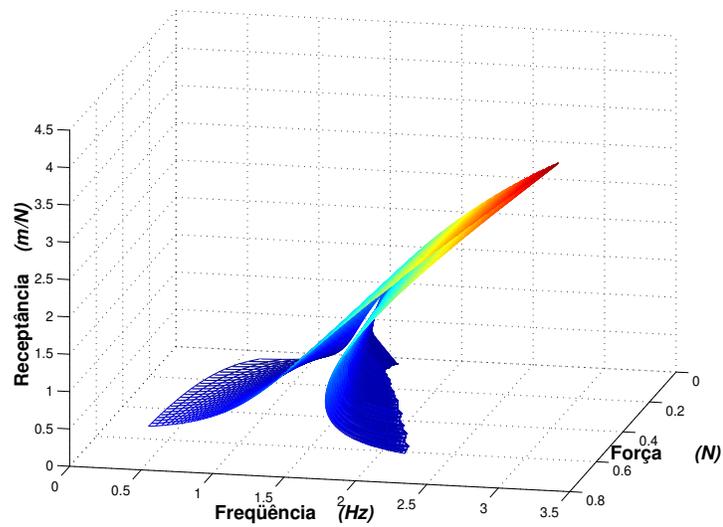


Figura 4.40: Superfície da RF do sistema de um grau de liberdade não-linear.

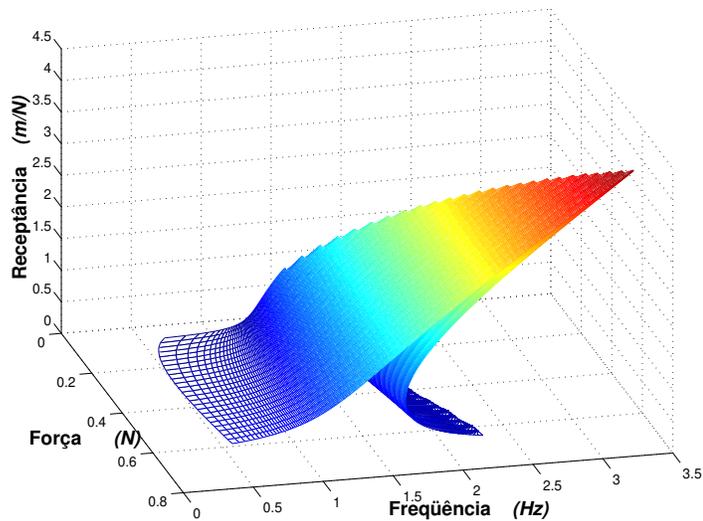


Figura 4.41: Superfície da RF do sistema de um grau de liberdade não-linear.

Para reproduzir este caso, deve-se utilizar os dados abaixo:

- Equação : $|\alpha(\omega)| = \frac{x}{f} = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}}$;
- Vetor resíduo linear : $(\Psi) = \left(\sqrt{(k - (\omega\lambda)^2 m)^2 + (\omega\lambda c)^2} \right) x - f$;
- Vetor resíduo não-linear : $(\Psi) = \left(\sqrt{(k - (\omega\lambda)^2 m + dfr)^2 + (\omega\lambda c)^2} \right) x - f$;
- Ponto inicial : $(x_0, y_0) = (0.4, 0.0274829478)$. O ponto (x_0, y_0) foi obtido considerando a equação acima do resíduo com a não-linearidade nula e utilizando os dados abaixo desta lista;
- Função descritiva : $dfr = \frac{3}{4}\beta x^2$;
- Coeficiente : $\beta = \pm 0.5$;
- Matriz rigidez tangencial : $K_t \implies$ calculado numericamente $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;

- ▶ Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \implies$ calculado numericamente por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;
- ▶ Rigidez : $k = 2$ (N/m);
- ▶ Amortecimento : $c = 0.05$ (Ns/m);
- ▶ Massa : $m = 1.13$ (Kg);
- ▶ Força inicial e final : $f = 0.05$ (N) e $f = 0.7$ (N);
- ▶ Número de curvas : 25;
- ▶ Frequência inicial e final : $\omega_i = 0.4$ (rad/s) e $\omega_f = 3.6$ (rad/s), respectivamente;
- ▶ Raio : $\Delta l_\theta = 0.01$, e fixo para as demais iterações;
- ▶ Sistema linear($\beta = 0$) e não-linear($\beta \neq 0$).

Para esta simulação, o "arc-length" calculou com sucesso as várias RF não-lineares, para cada nível de força e foi possível de acordo com o tipo de modelo mostrar uma representação da superfície de RF.

4.1.4 Teste Com o Sistema de Um Grau de Liberdade Utilizando a Função Descritiva de Folga

Os exemplos que serão mostrados aqui, foram obtidos utilizando a segunda função descritiva mostrada no capítulo 2.

Nesta simulação diversos tipos de gráficos foram apresentados. Isto foi feito com o intuito de mostrar que o método funciona com não-linearidades diferentes. O método para este teste

produziu as RF com o número pequeno de pontos convergidos. O número de iteração para ocorrer a convergência ficou restrito entre uma ou duas iterações, que é um número bastante baixo. Logo, o gráfico foi gerado rapidamente.

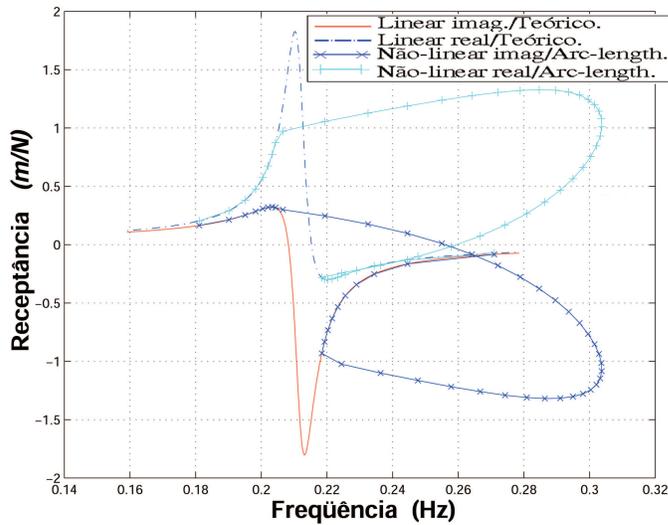


Figura 4.42: RF do sistema de um grau de liberdade não-linear com representação das partes real e imaginária.

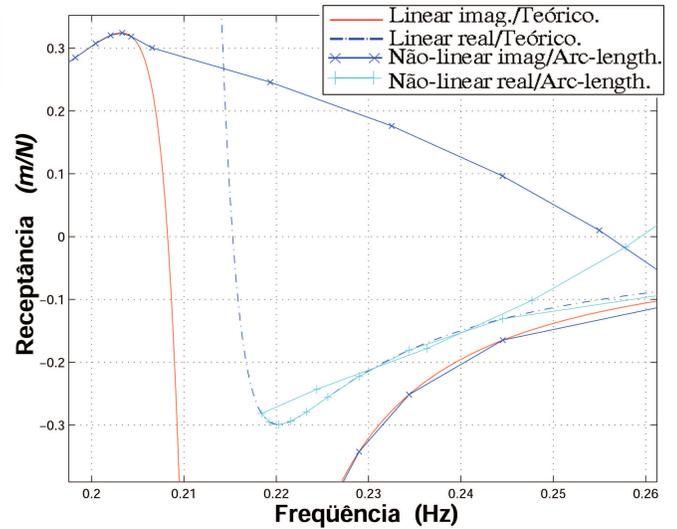


Figura 4.43: Detalhe da RF na figura (4.42).

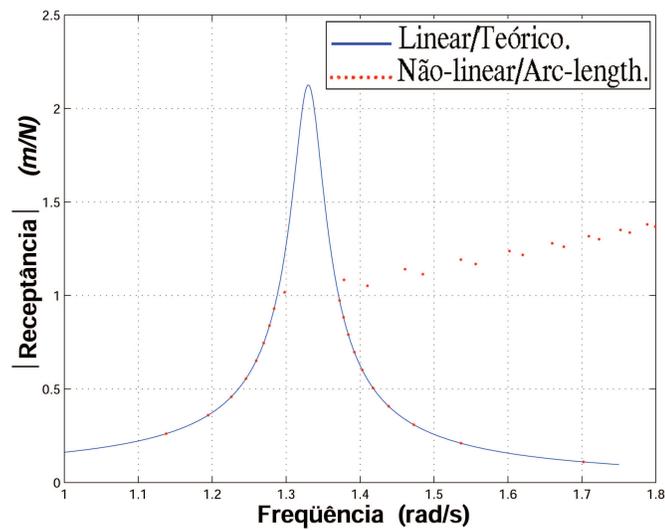


Figura 4.44: RF do sistema de um grau de liberdade não-linear com função descritiva de folga.

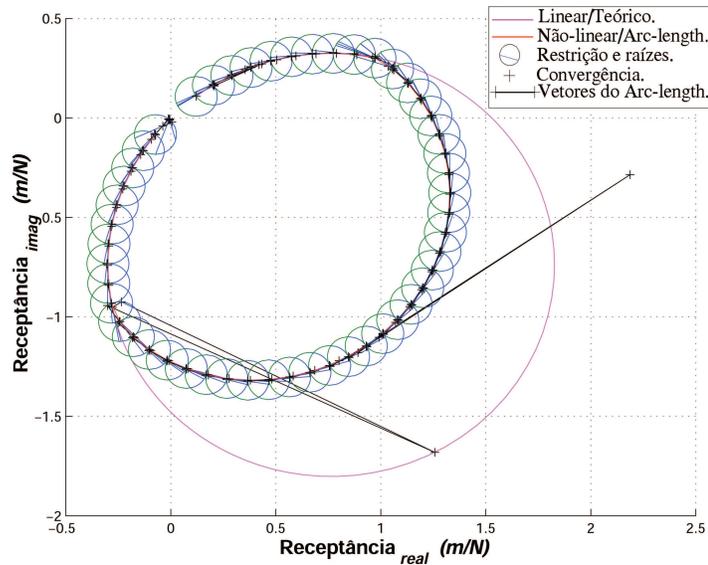


Figura 4.45: Gráfico de Nyquist do sistema de um grau de liberdade não-linear com a função descritiva de folga, mostrando o procedimento do "arc-length".

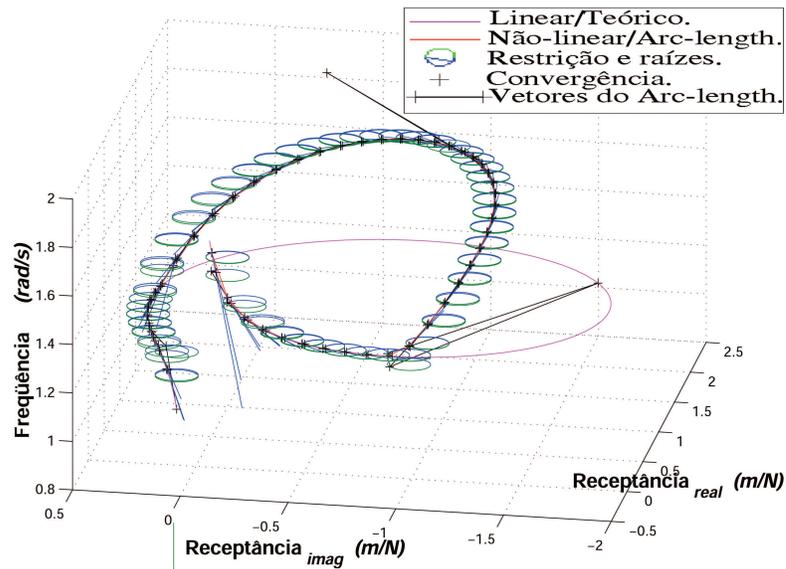


Figura 4.46: Visão espacial da RF do sistema de um grau de liberdade não-linear com função descritiva de folga.

Para reproduzir este caso, deve-se utilizar os dados abaixo:

➤ Equação : $|\alpha(\omega)| = \frac{x}{f} = \frac{1}{(k-\omega^2 m)+i(\omega c)}$;

➤ Vetor resíduo linear :

$$(\Psi) = \begin{bmatrix} k - (\omega\lambda)^2 m & -(\omega\lambda)c \\ (\omega\lambda)c & k - (\omega\lambda)^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{real} \\ x_{imag} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{real} \\ f_{imag} \end{Bmatrix};$$

➤ Vetor resíduo não-linear :

$$(\Psi) = \begin{bmatrix} k - (\omega\lambda)^2 m + dfr & -(\omega\lambda)c \\ (\omega\lambda)c & k - (\omega\lambda)^2 m + dfr \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{real} \\ x_{imag} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{real} \\ f_{imag} \end{Bmatrix};$$

➤ Ponto inicial : $\mathbf{x}_0 = \begin{Bmatrix} 0.1211482749 \\ 0.1079799841 \end{Bmatrix}$ e $y_0 = 1.0$. O ponto (\mathbf{x}_0, y_0) foi obtido considerando a equação acima do resíduo com a não-linearidade nula e utilizando os dados abaixo desta lista;

➤ Tipo de não-linearidade : $f(x) = \begin{cases} k(x-b) & , (x < b) \\ k(x-b) & , (x > b) \end{cases}$;

➤ Coeficiente : $\beta = \pm 0.5$;

➤ Matriz rigidez tangencial : $K_t \implies$ calculado numericamente $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;

➤ Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \implies$ calculado numericamente por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;

➤ Rigidez : $k = 2.0$ (N/m);

➤ Amortecimento : $c = 0.05$ (Ns/m);

➤ Massa : $m = 1.13$ (Kg);

➤ Força : $\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$ (N);

- Frequência inicial e final : $\omega_i = 1.0$ (*rad/s*) e $\omega_f = 1.91$ (*rad/s*), respectivamente;
- Raio : $\Delta l_\theta = 0.1$, para demais iterações controle automático pela equação 3.56;
- Sistema linear($\beta = 0$) e não-linear($\beta \neq 0$).

Nesta simulação, o "*arc-length*" apresentou mais uma vez sucesso mesmo com este tipo de não-linearidade. Logo é possível aplicar o método também para um caso com número maior de graus de liberdade, como no exemplo que segue abaixo.

4.1.5 Teste Com Um S3GL Utilizando A Função Descritiva de Folga

Para este caso, o método apresentou as maiores dificuldades de transpor os pontos críticos, precisando de pequenos raios para se obter sucesso nestes pontos e mesmo forçando o método a utilizar um raio grande houve um número grande de pontos convergidos, além do tempo computacional elevado.

A seguir são mostrados uma seqüência de gráficos com o resultado do "*arc-length*", quando aplicado uma função descritiva de folga.

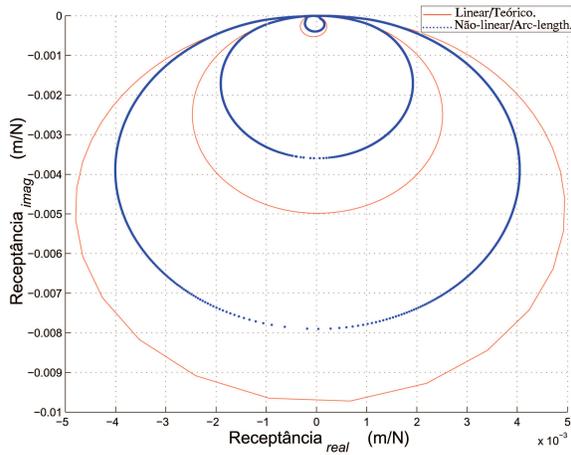


Figura 4.47: Gráfico de Nyquist de um S3GL não-linear com função descritiva de folga.

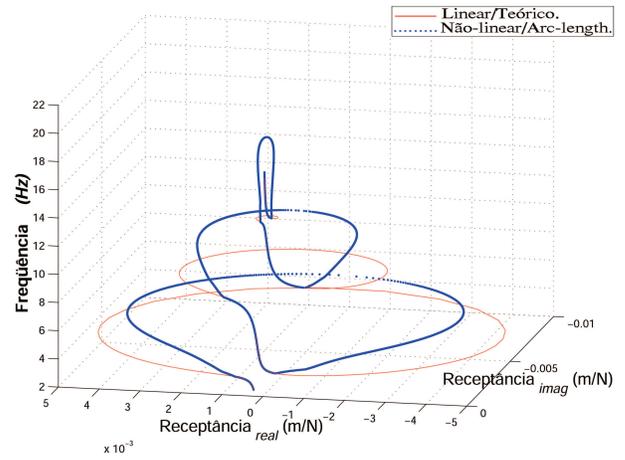


Figura 4.48: Visão espacial da RF S3GL não-linear com função descritiva de folga.

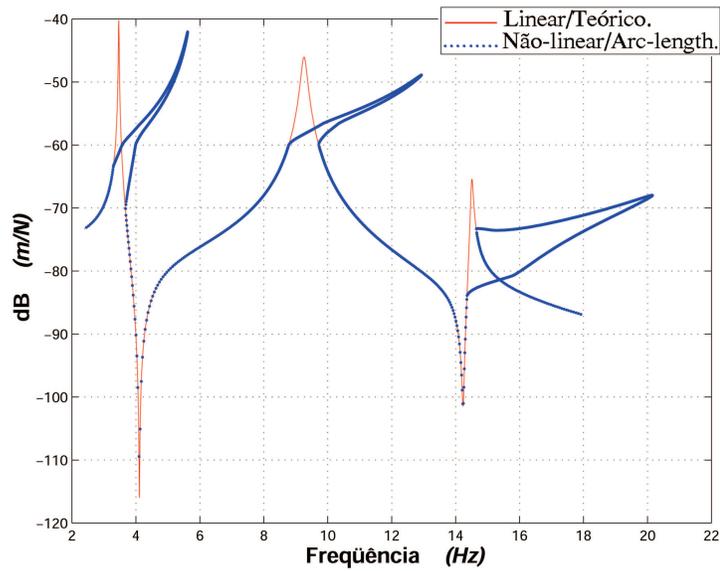


Figura 4.49: RF de um S3GL não-linear com função descritiva de folga.

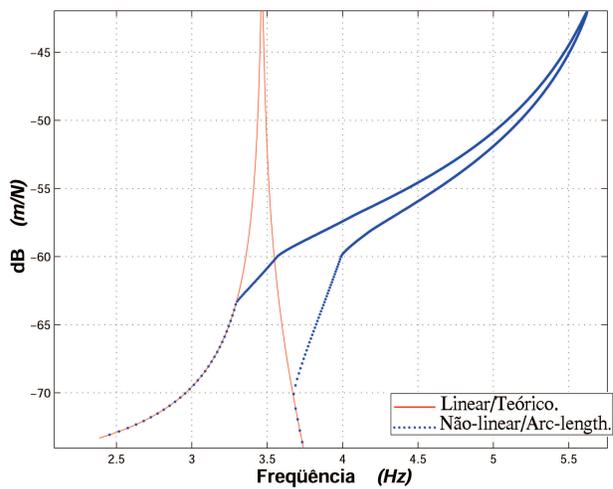


Figura 4.50: Detalhe da primeira harmônica da figura (4.49).

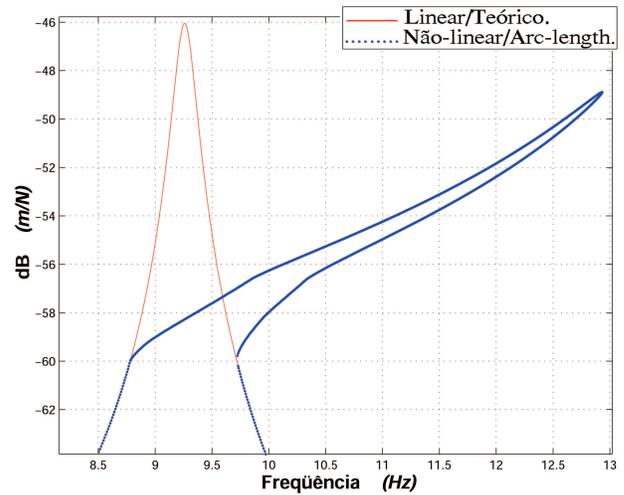


Figura 4.51: Detalhe da segunda harmônica da figura (4.49).

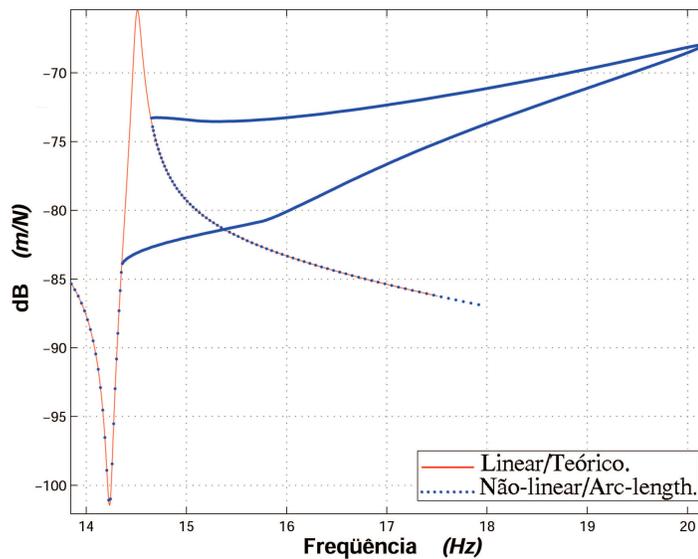


Figura 4.52: Detalhe da terceira harmônica da figura (4.49).

Para reproduzir este último caso utilizar os dados abaixo :

► Equação : $|\alpha(\omega)| = \frac{x}{f} = \frac{1}{(K - \omega^2 M) + i(\omega C)}$;

► Vetor resíduo linear :

$$(\Psi) = \mathbf{W} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}; \quad (4.1)$$

onde,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - (\omega\lambda)^2 m_1 & -k_2 & 0 & -(\omega\lambda)(c_1 + c_2) & (\omega\lambda)c_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 & -k_3 & (\omega\lambda)^2 c_2 & -(\omega\lambda)(c_2 + c_3) & (\omega\lambda)c_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 & 0 & (\omega\lambda)c_3 & -(\omega\lambda)c_3 \\ (\omega\lambda)(c_1 + c_2) & -(\omega\lambda)c_2 & 0 & (k_1 + k_2) - (\omega\lambda)^2 m_1 & -k_2 & 0 \\ -(\omega\lambda)c_2 & (\omega\lambda)(c_2 + c_3) & -(\omega\lambda)c_3 & -k_2 & (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 & -k_3 \\ 0 & -(\omega\lambda)c_3 & (\omega\lambda)c_3 & 0 & -k_3 & k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 \end{bmatrix};$$

► Vetor resíduo não-linear :

$$(\Psi) = \mathbf{W}_2 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix}; \quad (4.2)$$

onde,

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} w_{11} & -k_2 - dfr1 & 0 & -(\omega\lambda)(c_1 + c_2) & (\omega\lambda)c_2 & 0 \\ -k_2 - dfr1 & w_{22} & -k_3 - dfr2 & (\omega\lambda)^2 c_2 & -(\omega\lambda)(c_2 + c_3) & (\omega\lambda)c_3 \\ 0 & -k_3 - dfr2 & w_{33} & 0 & (\omega\lambda)c_3 & -(\omega\lambda)c_3 \\ (\omega\lambda)(c_1 + c_2) & -(\omega\lambda)c_2 & 0 & w_{44} & -k_2 - dfr1 & 0 \\ -(\omega\lambda)c_2 & (\omega\lambda)(c_2 + c_3) & -(\omega\lambda)c_3 & -k_2 - dfr1 & w_{55} & -k_3 - dfr2 \\ 0 & -(\omega\lambda)c_3 & (\omega\lambda)c_3 & 0 & -k_3 - dfr2 & w_{66} \end{bmatrix};$$

no qual os coeficientes $w_{11}, w_{22}, w_{33}, w_{44}, w_{55}, w_{66}$,

$$\begin{aligned} w_{11} &= k_1 + k_2 - (\omega\lambda)^2 m_1 + dfr1 + dfr; \\ w_{22} &= (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 + dfr1 + dfr2; \\ w_{33} &= k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 + dfr2; \\ w_{44} &= (k_1 + k_2) - (\omega\lambda)^2 m_1 + dfr1 + dfr; \\ w_{55} &= (k_2 + k_3) - (\omega\lambda)^2 m_2 + dfr1 + dfr2; \\ w_{66} &= k_3 - (\omega\lambda)^2 m_3 + dfr2; \end{aligned} \quad (4.3)$$

► Ponto inicial : $\mathbf{x}_0 = 1e^{-3} \left\{ \begin{array}{c} 0.2158512263 \\ .3069518377 \\ 0.3352373942 \\ -0.0022321144 \\ -0.0034679407 \\ -0.0037967797 \end{array} \right\}$ e $y_0 = 15$. O ponto (\mathbf{x}_0, y_0) foi obtido

considerando a equação acima do resíduo com a não-linearidade nula e utilizando os dados abaixo desta lista;

- Primeira função não-linear (dfr) : $f_1(x) = \begin{cases} k(x-b) & , (x < b) \\ k(x-b) & , (x > b) \end{cases}$ onde $x = x_1$;
- Segunda função não-linear (dfr1) : $f_2(x) = \begin{cases} k(x-b) & , (x < b) \\ k(x-b) & , (x > b) \end{cases}$ onde $x = x_1 - x_2$;
- Terceira função não-linear (dfr2) : $f_3(x) = \begin{cases} k(x-b) & , (x < b) \\ k(x-b) & , (x > b) \end{cases}$ onde $x = x_2 - x_3$;

► Coeficiente : $\beta = \pm 0.8$;

► Matriz rigidez tangencial : $K_t \implies$ calculado numericamente $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;

► Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \implies$ calculado numericamente por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;

► Rigidez : $k_1 = 5000, k_2 = 2000, k_3 = 4000 (N/m)$;

► Amortecimento : $c_1 = 2.5, c_2 = 0.3, c_3 = 0.08 (Ns/m)$;

► Massa : $m_1 = 2, m_2 = 1.0, m_3 = 1.5 (Kg)$;

► Força : $\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{c} 0.8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} (N)$;

► Frequência inicial e final : $\omega_i = 15 (rad/s)$ e $\omega_f = 110 (rad/s)$, respectivamente;

- ▶ Raio : $\Delta l_0 = 0.01$, para demais iterações controle automático pela equação 3.56;
- ▶ Sistema linear($\beta = 0$) e não-linear($\beta \neq 0$).

Aqui, finalizam os resultados numéricos aplicados com o método "*arc-length*", para sua convalidação. Agora virá a discussão sobre este capítulo que será explicado e destacado os tópicos mais importantes.

Assim, em todos os casos o algoritmo teve sucesso, neste último 4.1.5 particularmente é o que mais exigiu computacionalmente, sendo a obtenção da curva foi de aproximadamente de 1 hora, executado num pentium 500Mhz. Nos pontos críticos houve o surgimento de um grande número de raízes complexas, mesmo utilizando um raio pequeno o qual propiciou um grande número de pontos convergidos na curva. O próximo capítulo será visto as conclusões tiradas com este trabalho e os pontos os quais o método tem que ser melhorados.

Capítulo 5

Conclusões

Neste capítulo, serão apresentados as conclusões obtidas com este trabalho destacando-se às tarefas realizadas e também uma análise sobre o método "*arc-length*" e finalmente as sugestões que podem dar continuidade ao estudo desta obra.

5.1 Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi estudar um algoritmo que propiciasse obter as soluções de equilíbrio de um sistema não-linear escrito na forma de impedância 3.27 para uma força harmônica de amplitude e frequência definidas. Uma vez que os métodos para solução de sistemas de equações não-lineares mais comuns como Newton-Raphson, Quasi-Newton entre outros, não conseguem obter tais pontos é necessário utilizar um método de continuação. Assim, levando em consideração as vantagens que o "*arc-length*" possui em relação aos outros métodos de continuação, ele foi escolhido para trabalhar junto com o Newton-Raphson, além do que este método possui uma convergência elevada e confiabilidade. Uma outra fase do trabalho, foi escolher os modelos matemáticos apropriados para testar e garantir que o "*arc-*

length” funcionasse, e finalmente depois que o algoritmo respondeu as expectativas, deu-se seqüência a simulação dos exemplos os quais foram mostrados neste trabalho.

5.2 Conclusões

Nesta trabalho um estudo do método *”arc-length”* aplicado em resposta em freqüência não-linear foi analisado. Este método, apresentou ser bastante eficiente, dentro do objetivo proposto aqui. Quando o método *”arc-length”* foi implementado para obter as RF, algumas dificuldades foram encontradas como o problema de convergência ao longo da RF, ou então o algoritmo após convergir em um determinado ponto, ao invés de seguir para um ponto de convergência posterior o método retornava para um ponto previamente convergido e ficava neste processo cíclico infinitamente. Houve também um problema para ultrapassar um ponto limite, pois sem um procedimento eficiente para controlar a direção de convergência do método, ele divergia. O método também apresentou alguns outros problemas quanto ao surgimento de raízes complexas, mas isto foi facilmente contornado conforme explicado anteriormente. Uma possível alternativa, para evitar o aparecimento de raízes complexas, pode ser feita desenvolvendo uma equação que controle a dimensão do raio mais eficientemente que levará em consideração a não-linearidade da curva, e os parâmetros de amplitude e freqüências. Existem, inúmeras quantidades de equações que controlam o raio, sendo que algumas foram detalhadas neste trabalho, mas que a eficiência delas não foram muito toleráveis dentro o objetivo proposto. É possível que a eficiência delas sejam mais eficaz, quando o *”arc-length”* é utilizado da maneira convencional levantando curvas de carregamento-deslocamento. Através, deste trabalho foi possível desenvolver um procedimento gráfico para visualizar, e conseqüentemente entender, o funcionamento do método *”arc-length”*. Utilizando este procedimento

foi possível também entender, o que ocorreu quando as raízes da equação quadrática se tornaram complexas. Porém, é ainda necessário fazer um estudo para concluir que condições provocam a falha desta equação.

5.3 Sugestões para trabalhos futuros

Alguns problemas foram encontrados neste trabalho e também algumas idéias surgiram através do estudo realizado aqui. Assim, estes fatores contribuíram para sugerir alguns trabalhos, que podem colaborar ainda mais, no entendimento de fenômenos não-lineares envolvendo sistemas dinâmicos. Logo, segue uma pequena lista a abaixo:

- ▶ Analisar e estudar o fenômeno de bifurcação, para aplicá-lo em conjunto com o método de "*arc-length*". Um prévio estudo, já foi realizado mas não se chegou a uma conclusão consistente sobre, o que é a bifurcação, quais são as condições que elas aparecem, quais as vantagens que ela proporciona e verificar quais são as aplicações encontrada na literatura utilizando o "*arc-length*". Algumas, referências foram encontradas na literatura sobre o assunto e serão mostradas agora: (Fujii e Ramm, 1997; Kouhia e Mikkola, 1989; de Souza Neto e Feng, 1999; de Borst, 1987; Wriggers e Simo, 1990; Raghothama e Narayanan, 2000b; Tend e Lou, 1997; Shi, 1996; Chan, 1993).
- ▶ Logo que o caso anterior seja desenvolvido, implementar ao código para que ele siga o outro braço de equilíbrio.
- ▶ Uma outra sugestão, é aplicar o "*arc-length*" em conjunto com outros métodos, como o balanço harmônico, perturbação entre outros, no qual os dois últimos vão calcular a resposta periódica de sistema não-lineares sobre uma excitação periódica. Já, o primeiro

será utilizado para calcular a estabilidade das soluções periódicas achadas com o método do balanço harmônico (MBH). Para maiores detalhes consulte em relação ao MBH: (Lewandowski, 1992; Raghothama e Narayanan, 2000a; von Groll e Ewins, 2000) e para métodos de continuação aplicados em análise de estabilidade tem-se: (Sundararajan e Noah, 1997; Lau *et al.*, 1982; Li, 1994; Sundararajan e Noah, 1998; Peleg e Hinga, 1992).

- Uma vez que o método foi implementado em *Matlab*[®] seria conveniente fazer o "*arc-length*" em C++.
- Otimizar o código em termos de velocidade, controlando a distância de convergência entre um ponto e outro, de forma mais confiável.

Referências Bibliográficas

- Allgower, E. L. e Georg, K. (1980). Simplicial and continuation methods for approximating fixed points and solutions to systems of equations. *SIAM Review*, **22**, 28–85.
- Allman, D. J. (1989). Calculation of the stable equilibrium paths of discrete conservative systems with singular points. *Computers & Structures*, **32**(5), 1045 a 1054.
- Bathe, K. J. e Dvorkin, E. N. (1983). On the automatic solution of nonlinear finite element equations. *Computers & Structures*, **17**, 871–879.
- Batoz, J.-L. e Dhatt, G. (1979). Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14**, 1262 a 1267.
- Bellini, P. X. e Chulya, A. (1987). An improved automatic incremental algorithm for the efficient solution of nonlinear finite element equation. *Computers & Structures*, **26**, 99 a 110.
- Bergan, P. G., Horrigmoe, G., e et al. (1978). Solution techniques for nonlinear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **12**, 1677 a 1696.
- bvba, J. V. (1995). *Describing Functions Can Better Model Hard Nonlinearities In The Frequency Domain Than The Volterra Theory*. Ph.D. thesis, Vrije Universiteit Brussel, Gertrudeveld 15, 1840 Steenhuffel Belgium.

- Carrera, E. (1994). A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model. *Computers & Structures*, **50**(2), 217 a 229.
- Chan, S. L. (1993). A non-linear numerical method for accurate determination of limit and bifurcation points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 2779 a 2790.
- Clarke, M. J. e Hancock, G. J. (1990). A study of incremental-iterative strategies for non-linear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 1365 a 1391.
- Crisfield, M. A. (1979). A faster modified newton-raphson iteration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **20**, 267 a 278.
- Crisfield, M. A. (1980). *Incremental/iterative solution procedures for non-linear structural analysis, Numerical methods for non-linear problems*, volume 1. C. Taylor, E. Hilton and D. R. J. Owen, Pineridge Press, Swansea.
- Crisfield, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures*, **13**, 55 a 62.
- Crisfield, M. A. (1983). An arc-length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 1269 a 1289.
- Crisfield, M. A. (1986a). Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration. *International Journal Numerical Methods Engineering*, **22**(3), 751 a 767.

- Crisfield, M. A. (1986b). Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **22**, 751 a 767.
- Crisfield, M. A. (1997). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. John Wiley & Sons, New York, first edition.
- de Borst, R. (1987). Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids. *Computers & Structures*, **25**, 211 a 224.
- de Souza Neto, E. A. e Feng, Y. T. (1999). On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and snap-backs. *Comput. Methods Appl. Mech. Engineering.*, **179**, 81 a 89.
- der Pol, B. V. (1927). Forced oscilation in a circuit with nonlinear with nonlinear resistance. *The London, Edinburgh, and Doblin Philosophical Magzine and Journal of Science*, **3**, 65 a 80.
- Feng, Y. T., Peric', D., e Owen, D. R. J. (1995). Determination of travel directions in path-following methods. *Mathl. Comput. Modeling*, **21**(7), 43 a 59.
- Feng, Y. T., Peric', D., e Owen, D. R. J. (1996). A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Computers & Structures*, **58**(3), 479 a 485.
- Feng, Y. T., Owen, D. R. J., e Peric, D. (1997). On the sign of the determinant of the structural stiffness matrix for determination of loading increment in arc-length algorithms. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **13**, 47 a 49.

- Ferreira, J. V. (1998). *Dynamic reponse analysis of structures with nonlinear components*. Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine.
- Forde, B. W. R. e Stiemer, S. F. (1987). Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, **27**(5), 625 a 630.
- Fujii, F. e Ramm, E. (1997). Computational bifurcation theory: path-tracing, pinpointing and path-switching. *Engineering Structures*, **19**(5), 385 a 392.
- Garcea, G., Trunfio, G. A., e Casciaro, R. (1998). Mixed formulation and locking in path-following nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **165**(1-4), 247 a 272.
- Haisler, W. E., Stricklin, J. A., e Key, J. E. (1977). Displacement incrementation in non-linear structural analysis by the self-correcting method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 3 a 10.
- Hellweg, H. B. e Crisfield, M. A. (1998). A new arc-length method for handling sharp snap-backs. *Computers & Structures*, **66**(5), 705 a 709.
- Jeusette, J.-P. e Laschet, G. (1989). An effective automatic incremental/iterative method for static nonlinear structural analysis. *Computers & Structures*, **32**(1), 125 a 135.
- Jike, W., Hui, W. H., e Hongli, D. (1999). Arc-length method for differential equations. *Applied Mathematics and Mechanics*, **20**, 936 a 942.
- Kahaner, D., Moler, C., e Nash, S. (1989). *Numerical methods and software*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, first edition.

- Kouhia, R. (1992). On the solution of non-linear finite element equations. *Computers & Structures*, **44**(1 a 2), 243 a 254.
- Kouhia, R. e Mikkola, M. (1989). Tracing the equilibrium path beyond simple critical points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 2923 a 2941.
- Kouhia, R. e Mikkola, M. (1999). Tracing the equilibrium path beyond compound critical points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 1049–1074.
- Lam, W. F. e Morley, C. T. (1992). Arc-length method for passing limit points in structural calculation. *Journal of Structural Engineering ASCE*, **118**, 169 a 185.
- Lau, S. L., Cheung, Y. K., e Wu, S. Y. (1982). A variable parameter incrementation method for dynamic instability of linear and nonlinear elastic systems. *Journal of Applied Mechanics*, **49**, 849 a 853.
- Lee, J.-H., Lee, C.-M., e Lee, K.-K. (1999). A modified path-following algorithm using a known algebraic path. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **47**(5), 1407 a 1409.
- Lewandowski, R. (1992). Non-linear, steady-state vibration of structures by harmonic balance/finite element method. *Computers & Structures*, **44**(1/2), 287 a 296.
- Li, L.-Y. (1994). Determination of stability in nonlinear analysis of structures. *Applied Mechanics*, **64**, 119 a 126.
- Lin, R. M. (1988). Nonlinear coupling analysis based on a describing function method. Technical Report 88030, Imperial College London - Dynamics Section Mechanical Engineering, London.

- Luenberger, D. G. (1984). *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park California, second edition.
- Magnusson, A. e Svensson, I. (1998). Numerical treatment of complete load-deflection curves. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 955 a 971.
- McFarland, D. M., Gipson, D. L., e et. al. (2002). Characterization of an essentially nonlinear 2-dof vibration test apparatus. page 1 at 8. ASCE Engineering Mechanics Conference.
- Montag, U., Kratzig, W. B., e Soric, J. (1999). Increasing solution stability for finite-element modeling of elasto-plastic shell response. *Advances in Engineering Software*, **30**, 607 a 619.
- Nayfeh, A. H. e Balachandran, B. (1995). *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, first edition.
- Noor, A. K. e Peters, J. M. (1981). Tracing post-limit-point paths with reduced basis technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **28**, 217 a 240.
- Náprstek, J. (1999). Strongly non-linear stochastic response of a system with random initial imperfections. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **14**, 141 a 148.
- Papadrakakis, M. (1993). *Solving large-scale non-linear problems in mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester, Boffins Lane, first edition.
- Peleg, K. e Hinga, S. (1992). Simplified determination of stability bounds in nonlinear vibration systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, **114**, 319 a 329.
- Powell, G. e Simons, J. (1981a). Improved iteration strategy for nonlinear structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **17**, 1455 a 1467.

- Powell, G. e Simons, J. (1981b). Improved iterative strategy for nonlinear structures. *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, **17**, 1455–1467.
- Raghothama, A. e Narayanan, S. (2000a). Bifurcation and chaos in escape equation model by incremental harmonic balancing. *Chaos, Solutions and Fractals*, **11**, 1349 a 1363.
- Raghothama, A. e Narayanan, S. (2000b). Bifurcation and chaos of an articulated loading platform with piecewise non-linear stiffness using the incremental harmonic balance method. *Ocean Engineering*, **27**, 1087 a 1107.
- Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal Solids Structures*, **15**, 529 a 551.
- Riks, E. (1984). Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computational Methods of Applied Mechanical Engineering*, **47**, 219–259.
- Risks, E. (1972). The aplication of newton’s method to the problem of elastic stability. *Journal Appl. Mech.*, **39**, 1060 a 1066.
- Sanders, S. R. (1993). On limit cycles and the describing function method in periodically switched circuits. *IEEE Transactions on circuits and systems*, **40**, 564 a 572.
- Shi, J. (1996). Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method. *Computers & Structures*, **58**(1), 203 a 220.
- Shi, J. e Crisfield, M. A. (1995). Combining arc-length control and line searches in path following. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **11**, 793 a 803.
- Sundararajan, P. e Noah, S. T. (1997). Dynamics of forced nonlinear systems using shooting

- / arc-length continuation method – application to rotor systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**, 9 a 20.
- Sundararajan, P. e Noah, S. T. (1998). An algorithm for response and stability of large order non-linear systems-application to rotor systems. *Journal of Sound and Vibration*, **214**(4), 695 a 723.
- Szyszkowski, W. e Husband, J. B. (1999). Curvature controlled arc-length method. *Computational Mechanics*, **24**, 245 a 257.
- Tanaka, T. e Tatsuoka, F. (1995). Tracing the equilibrium path by dynamic relaxation in materially nonlinear problems. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **19**, 749 a 767.
- Taylor, J. H. (1999). *Describing Functions, Electrical Engineering Encyclopedia*, volume 1. John Wiley & Sons, New York, first edition.
- Tend, J. G. e Lou, Y. F. (1997). Post-collapse bifurcation analysis of shells of revolution by the accumulated arc-length method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 2369 a 2383.
- von Groll, G. e Ewins, D. J. (2000). The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of Sound and Vibration*, **241**, 223 a 233.
- Wagner, W. e Wriggers, P. (1988). A simple method for the calculation of postcritical branches. *Engineering Computations*, **5**, 103 a 109.

- Wang, C. M., Lam, K. Y., e et. al. (1997). Large deflections of an end supported beam subjected to a point load. *International Journal Non-Linear Mechanics*, **32**, 63 a 72.
- Wempner, G. A. (1971). Discrete approximations related to non-linear theories of solids. *Int. Journal Solids Struct.*, **7**, 1581 a 1599.
- Wriggers, P. e Simo, J. C. (1990). A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, 155 a 176.
- Xu, Z. e Mirmiran, A. (1997). Looping behavior of arches using corotational finite element. *Computers & Structures*, **62**(6), 1059 a 1071.
- Yang, Y.-B. e Shieh, M.-S. (1990). Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, **28**(12), 2110 a 2116.
- Zhou, Z. e Murray, D. W. (1994). An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures. *Computers & Structures*, **55**(5), 749 a 759.

Apêndice A

Fluxograma e Descrição do Método "Arc-Length" Aplicado a RF Não-Linear

Agora, serão mostrados alguns fluxogramas que compõem o programa "arc-length" e também uma descrição completa do funcionamento do mesmo. A nomenclatura utilizada no fluxograma geral (A.2) é mostrada na figura (A.1).

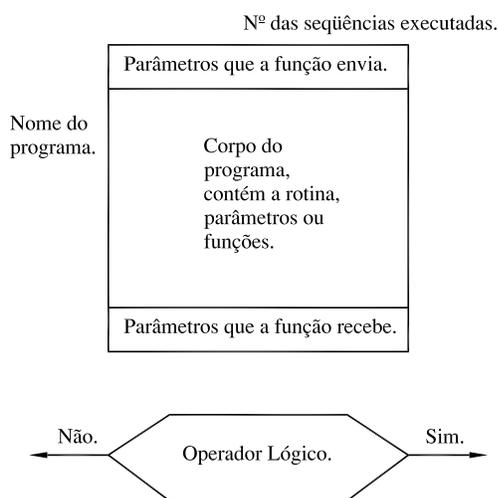


Figura A.1: Descrição da nomenclatura do fluxograma.

De acordo com o fluxograma, na figura (A.2) tem-se uma visão geral do funcionamento do método "arc-length". Nele é mostrado como as funções são chamadas, a ordem em que elas são chamadas e inclusive os parâmetros enviados ou recebidos.

Pela seqüência (1), tem-se o início a execução do código, ele ativa o programa inicial (*indat*)[‡]. Na seqüência (2), pode-se acompanhar o desenvolvimento pelo fluxograma (A.3). Este tem a finalidade de definir por exemplo, a faixa de freqüência da RF, seus valores iniciais (ω_i) e final (ω_f). Isto é necessário para limitar o gráfico; definir o número máximo de pontos convergidos (*nptmax*); definir uma constante para ativar a direção de convergência, se é da direita para esquerda ou vice-versa; criar os modelos matemáticos de elementos finitos como massa *m*, amortecimento *c* e rigidez *k*; ajustar um nível de força *F*; definir um fator de não-linearidade β ; criar uma constante ξ para ativar ou desativar no algoritmo o "arc-length" esférico (1) ou cilíndrico (0); calcular a amplitude inicial (\mathbf{x}_0); Atribuir a freqüência inicial (ω_i) a outra variável como (*y*₀); Fazer uma constante (*hplot*) para ativar (1) ou desativar (0) a plotagem da seqüência de funcionamento do "arc-length"; criar uma variável *jj*, ajuste para nulo, o qual terá a função de indexar os vetores que armazenarão os pontos convergidos; definir uma variável (*nw*), para determinar o número de pontos convergidos; ajustar uma variável (ω) para ter o valor da freqüência inicial, que será relaxada ao longo da RF, ou seja, a própria freqüência; criar a variável (*inter*) que terá o valor unitário; fazer um "looping" para para finalizar o procedimento utilizando a freqüência final ($y_0 \leq \omega_f$) e o número máximo de iterações ($nw \leq nptmax$); definir uma variável que represente o comprimento do raio (*raio*); fazer um incremento unitário do número de pontos convergidos (*nw*) e chamar a função (*arc*). A explicação seguirá os passos de execução do programa, retornará a função

[‡]Ela tem a função de ler os dados iniciais do programa, armazenar os pontos convergidos e fornecê-los para manipulação futura, como a produção de um gráfico.

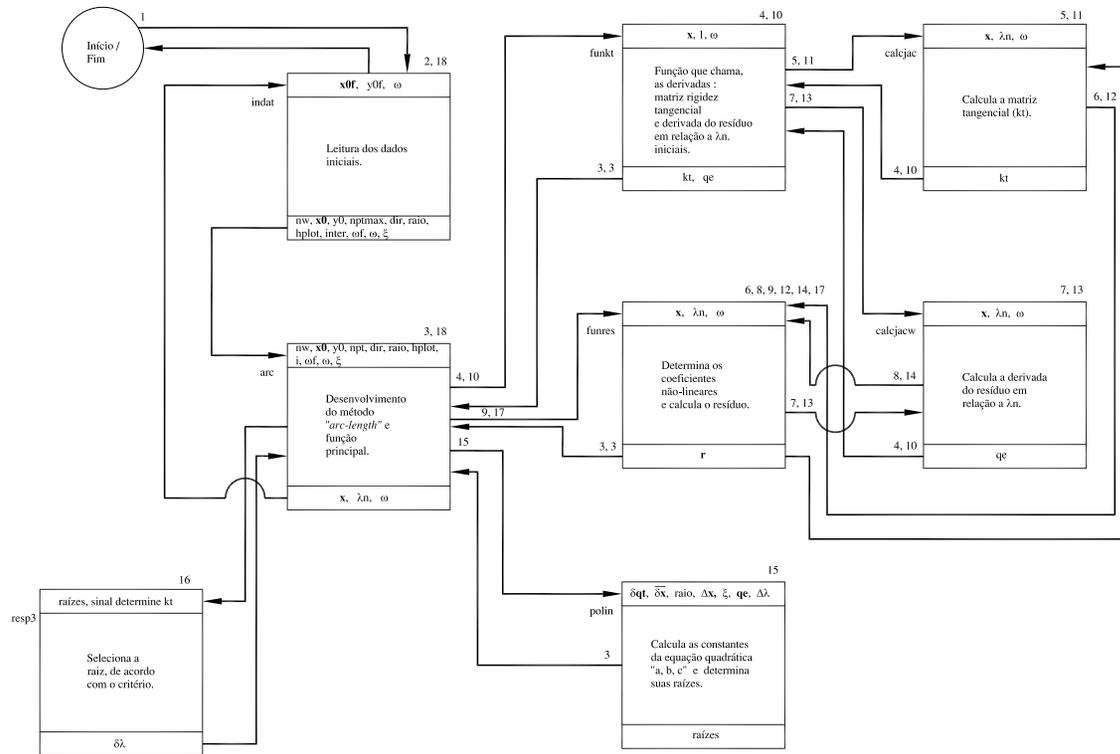


Figura A.2: Fluxograma geral do método "arc-length".

(*indat*) quando a seqüência (3) estiver finalizada.

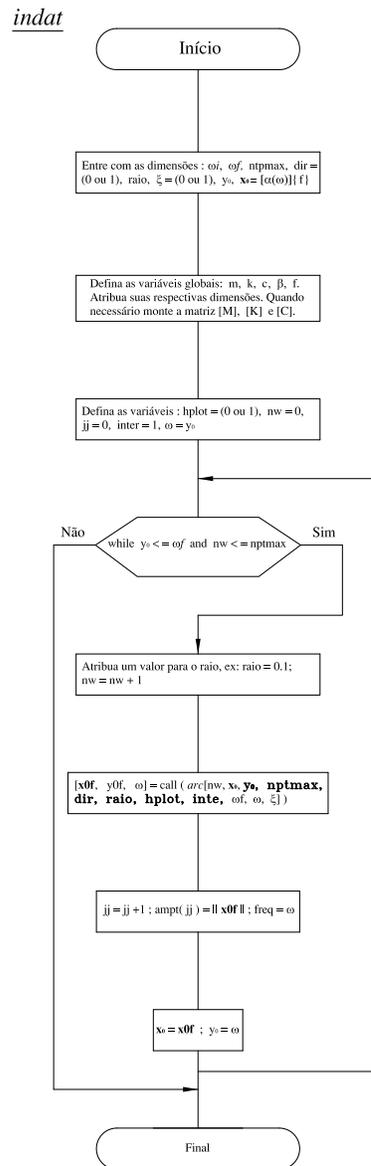


Figura A.3: Fluxograma do programa inicial *indat*.

Agora, se dará início a seqüência (3) na função (*arc*), este é o corpo principal do algoritmo, o próprio arc-length, o qual é possível acompanhar através da figura (A.4) e (A.5). Os parâmetros que esta função recebe de (*indat*) estão disponíveis no fluxograma. A sucessão que ocorre em (*arc*) é a seguinte: tem que se definir uma nova variável para o deslocamento

inicial como (\mathbf{x}) e atribuir a (\mathbf{x}_0) ; defina uma variável para se ter a tolerância (tol), no qual o resíduo deva convergir ($1e^{-6}$); caso haja necessidade de visualizar o procedimento do "arc-length" então ative a variável ($hplot$) para a unidade e com um operador lógico use está variável como condição verdadeira. Então armazene as componentes da amplitude e a frequência em vetores auxiliares. Defina um contador unitário para indexar estes vetores, para facilitar quando for fazer o gráfico e pode-se então finalizar o operador lógico; crie uma variável ($raiomax$), cuja atribuição será o valor do raio, para limitar seu tamanho máximo. Defina duas variáveis, primeira pode ser ($icod$), ajustando-a em uma unidade, o qual será usada no controle do comprimento do raio e a segunda variável será ($final$), sendo sua atribuição um conjunto de caracteres "false" que controlará o "looping" externo; Faça agora, o primeiro "looping" utilizando esta última variável criada, de forma que condição seja verdadeira, e será falsa apenas quando o resíduo convergir; Defina um outro operador lógico, utilizando ($icod$) como condição verdadeira; utilize a equação (3.56) da seguinte forma $raio = raio \sqrt{\frac{5}{i}}$; Abra um outro operador lógico para verificar se o raio é maior que o raio máximo, em caso afirmativo atribua ao ($raio$) a variável ($raiomax$), feche então o operador lógico; Abra novamente outro operador lógico para verificar se o raio é menor que um valor mínimo como por exemplo ($1e^{-5}$), caso seja, atribua este valor ao ($raio$) e feche o operador lógico; Crie uma condição de caso contrário para o operador lógico que utilizou a variável ($icod$); agora diminua o raio pela metade; faça ($icod$) valer uma unidade; inicialize novamente (\mathbf{x}) com o valor de (\mathbf{x}_0) . Estes procedimentos da condição falsa do operador lógico é para o caso de surgimento da raiz complexa.

Caso esteja visualizando o gráfico do funcionamento do "arc-length", faça uma estrutura semelhante do operador lógico cuja condição de verdade é testada com a variável ($hplot$), que

arc

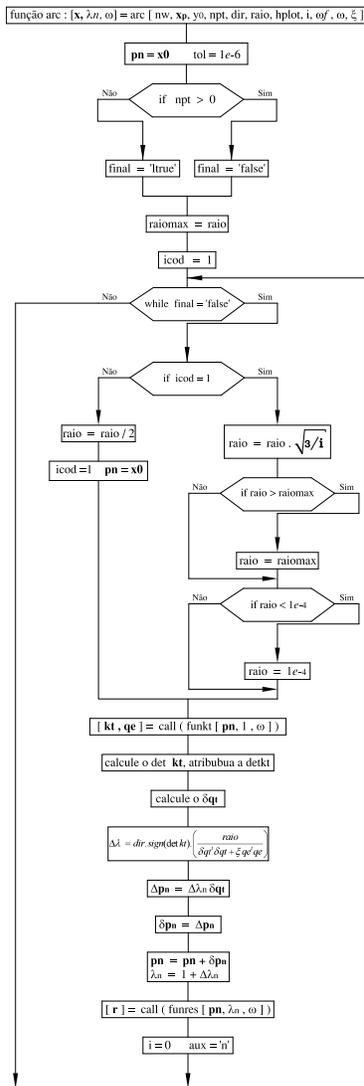


Figura A.4: Fluxograma da função *arc*:
parte 1.

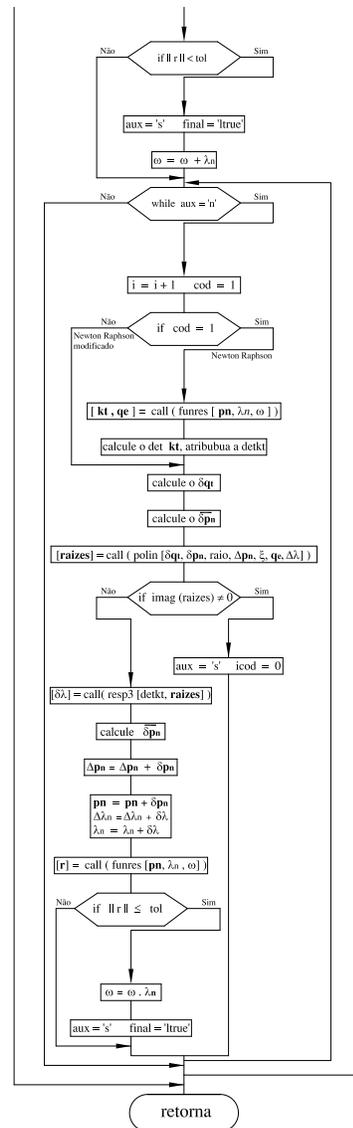


Figura A.5: Fluxograma da função *arc*:
parte 2.

foi anteriormente explicada, feche então o operador lógico da variável (*icod*) criado no início do "looping".

Agora, dentro da função (*arc*) será chamada a função (*funkt*), que calcula as derivadas matriz rigidez tangencial (\mathbf{k}_t) e derivada do resíduo em relação ao carregamento (\mathbf{q}_e). Para seguir o fluxo de funcionamento do algoritmo, irá se passar para a função (*funkt*) até seu término, e retornar assim para a função (*arc*), pode-se acompanhar o funcionamento daquela função observando a figura (A.6).

A função (*funkt*), corresponde a seqüência número (4), que recebe como argumentos as variáveis (\mathbf{x} , ω , e a constante 1) para a iteração inicial. Ela retorna a matriz e o vetor ($\mathbf{k}_t, \mathbf{q}_e$). Dentro desta função, tem-se duas outras no qual uma retorna (\mathbf{k}_t) e a segunda (\mathbf{q}_e). A função que regressa (\mathbf{k}_t) para (*funkt*) se chama (*calcjac*) e recebe como argumentos também (\mathbf{x} , ω e λ_n). Já a segunda função pode ter o nome de (*calcjacw*) e recebe os mesmos argumentos que a primeira.

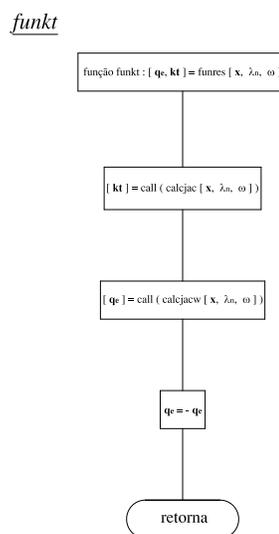


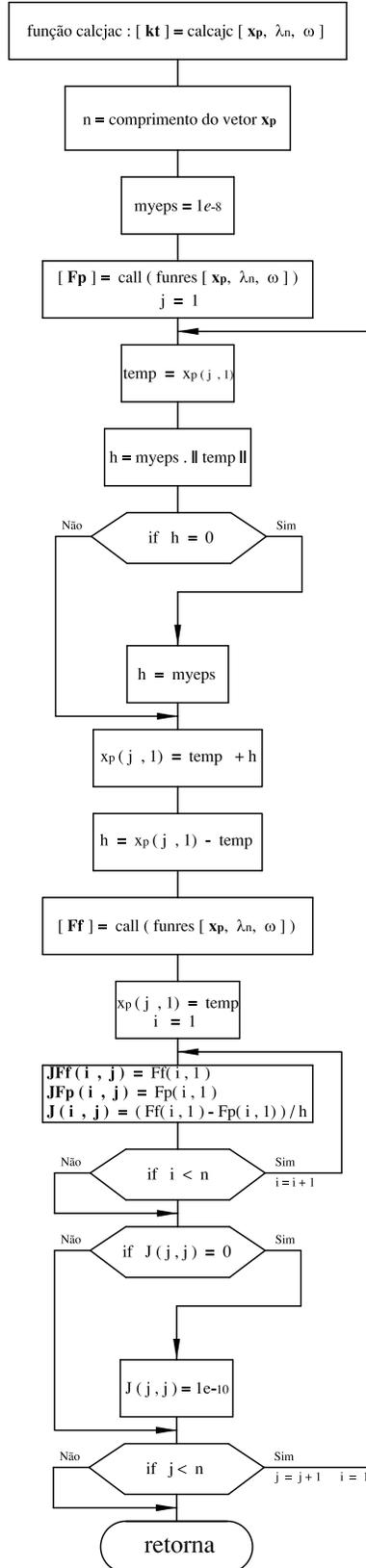
Figura A.6: Fluxograma da função *funkt*.

A função (*calcjac*) corresponde a seqüência número (5), que consiste no cálculo da derivada por diferenças finitas e será o mesmo processo para todos os casos, veja a figura (A.7). Primeiro a componente do vetor (\mathbf{x}) é armazenada em uma variável (*n*) para montar o tamanho da matriz quadrada; determine uma tolerância na variável (*myeps*) e atribua o valor de $1e^{-8}$; é então chamado a função resíduo (*funres*), o qual receberá os mesmos argumentos que as derivadas e retornará o valor do resíduo, na variável (*r*).

Logo, se tem na seqüência (6) a função resíduo (*funres*) que terá de calcular a função não-linear por integração ou calcular a não-linearidade através dos coeficientes da função descritiva, já determinados, e pode-se observar seu fluxograma na figura (A.8). Além do que, o resíduo deve conhecer os parâmetros de força, β , amortecimento, rigidez e massa de alguma forma. Pode-se utilizar variáveis globais que foi utilizado pelo autor ou então passá-los como argumento da função. Agora, atribua a variável (*dfr*) a não-linearidade. No caso da cúbica será ($\frac{3}{4}\beta Y^2$), sendo (*Y*) a norma do vetor deslocamento (\mathbf{x}). Monte o resíduo conforme o esquema da seção (3.4.1) e retorne o valor do resíduo para a função (*calcajac*).

Uma vez que a função (*calcjac*) possui o valor do resíduo, o qual será atribuído a variável (*Fp*), que foi calculado em relação ao ponto (\mathbf{x}, ω) fornecido anteriormente pela função (*arc*). O procedimento agora, é calcular o resíduo com o valor do (\mathbf{x}) adicionado de um incremento e dividí-lo pela diferença das amplitudes. Assim, faça um (*"looping"*) externo que varie de 1 até *n*, utilize (*j*) como um indexador; crie uma variável temporária (*temp*) e atribua a ela o vetor ($\mathbf{x}(j)$) com o índice do *"looping"*; Crie uma variável (*h*) e atribua a ela a multiplicação da (*myeps*) com o absoluto de (*temp*). Este será o incremento; faça um operador lógico e verifique se (*h*) é nulo. Se for verdadeiro então atribua a ele o valor de (*myeps*) e feche o operador lógico; atribua ao vetor ($\mathbf{pn}(j)$), a soma entre (*temp*) e (*h*) para se ter um

calcjac



funres

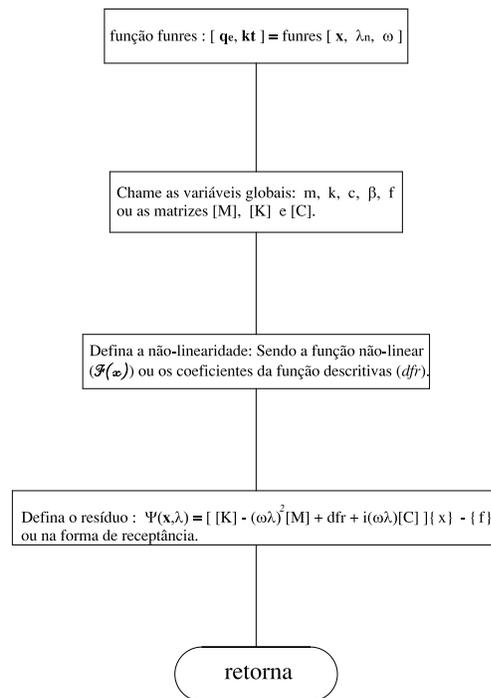


Figura A.8: Fluxograma da função *funres*.

novo valor de amplitude com incremento. Agora, atribua a variável (h) a diferença entre ($\mathbf{pn}(j)$) e ($temp$) para se ter a variação entre a amplitude inicial e a com o incremento; Calcule novamente o resíduo, porém agora utilizando o ($\mathbf{pn}(j)$) com seu incremento. O funcionamento do resíduo é semelhante em qualquer situação, como já foi explicado de agora em diante será apenas mencionado. Logo, com o novo valor do resíduo atribua-o a uma variável (Fp), segue-se novamente atribuindo o valor de ($temp$) ao vetor ($\mathbf{pn}(j)$); Abra um "looping" com um contador de 1 até n , utilizando um índice i ; Então, calcule a derivada, fazendo uma matriz no qual seus dois índices são ($J(i,j)$) para armazenar a matriz (\mathbf{k}_t). Atribua a esta matriz a diferença de ($Ff(i)$) e ($Fp(i)$) e divida tudo por (h); feche este último "looping" aberto. Agora será realizado um teste para verificar se a derivada não está nula, defina um operador lógico e compare ($J(j,j)$) com zero. Em caso verdadeiro atribua ($1e^{-10}$) ao elemento ($J(j,j)$) desta matriz e finalize o operador lógico; Finalmente o "looping" mais externo pode ser fechado e retornar a função ($funkt$), para fornecer o valor da derivada do resíduo em relação a ($\mathbf{pn}(j)$), ou seja, a matriz rigidez tangencial. Esta derivada em ($funkt$) será atribuída a (\mathbf{k}_t). Agora, terão início as seqüências (7 e 8). Será determinado a próxima derivada do resíduo em relação a (λ_n), logo a função ($funkt$) chamará a função ($calcjacw$), e está retornará o vetor daquela derivada atribuindo-a na variável (\mathbf{q}_e). A função ($calcjacw$) é semelhante a função ($calcjac$), a não ser pela variável (n) que agora será atribuída o valor unitário, oriundo do escalar (λ_n).

Uma vez que se calculou (\mathbf{q}_e), é necessário que dentro da função ($funkt$), inverta seu sinal. Isto deve ocorrer devido ao sinal negativo da equação de equilíbrio (3.5), que se levou em consideração quando se fez a expansão em série de Taylor. Logo a função ($funkt$) já possui os valores das duas derivadas ($\mathbf{k}_t, \mathbf{q}_e$) que serão retornadas para a função (arc).

Retornando à função (*arc*), crie a variável (*i*) e ajuste-a para zero. Esta variável servirá de índice e representará o número de iterações até a convergência; calcule o determinante da matriz (\mathbf{k}_t)[‡] e atribua a variável (*detkt*). O sinal desta servirá para escolher a raiz ($\delta\lambda$); determine o vetor $\delta\mathbf{q}_t$ e o escalar $\Delta\lambda_n$; calcule o vetor $\Delta\mathbf{x}$ e atribua este vetor ao $\delta\mathbf{x}$; Agora, incremente os vetores \mathbf{x} e λ_n da seguinte forma : $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ e $\lambda_n = 1 + \Delta\lambda_n$.

Assim, novamente a função resíduo será chamada, a qual dará início a seqüência (9), mas agora a partir da função (*arc*). Invoque a função (*funres*), conforme foi explicado anteriormente, e atribua a variável (*r*) o valor do resíduo. Esta função será sempre chamada quando novos valores de (\mathbf{x} e λ_n) forem obtidos.

Caso se o leitor queira visualizar o funcionamento do procedimento, então se deve colocar novamente o código que foi explicado com a variável (*hplot*) anteriormente. Seguindo o algoritmo, crie uma variável auxiliar (*aux*) e atribua a ela por exemplo o caracter (*n*). Esta variável servirá para ser testada no próximo "looping" que será criado. Logo, faça um operador lógico comparando a norma de (*r*) sendo menor ou igual a variável (*tol*); atribua a (*aux*) o caracter (*s*), e a variável (*final*) o conjunto de caracteres (*true*). Então atualize o valor de ω , atribuindo a ele o produto dele mesmo com λ_n ; finalize o operador lógico. Todo este procedimento é para verificar se houve convergência no primeiro passo da iteração.

Continuando o algoritmo na função (*arc*), faça agora um "looping" interno que foi comentado com a variável (*aux*), de tal forma que a comparação com seu caracter seja verdadeira; Construa um contador unitário com a variável (*i*) e novamente chame a função (*funkt*), que agora receberá como argumentos as variáveis (\mathbf{x} , ω e λ_n) para calcular os parâmetros ($\mathbf{k}_t, \mathbf{q}_e$). Neste ponto é definido as seqüências (10, 11, 12, 13 e 14) que correspondem ao encadeamento

[‡]Seu determinante pode ser facilmente calculado através de decomposição triangular do tipo $\mathbf{k}_t = LDL^t$, no qual o produto da matriz diagonal é o próprio determinante.

das rotinas que sucedem no algoritmo para se obter as derivadas, como foi já explicado. Um outro ponto, que deve ser destacado é para o caso da função (*funkt*) estar ou não ativa neste ponto. Em caso afirmativo, se terá o método de Newton Raphson caso contrário se dará o Newton Raphson modificado.

O próximo passo é calcular o determinante de (\mathbf{k}_t), caso o Newton Raphson esteja ativo; depois calcule os vetores $\delta\mathbf{q}_t$ e $\bar{\delta}\mathbf{x}$; novamente coloque o procedimento do (*hplot*) para visualização do algoritmo. Porém adicione os vetores de (*hplot*), auxiliares do deslocamento e amplitude, a soma de \mathbf{x} com $\bar{\delta}\mathbf{x}$ e o produto de λ_n com ω , respectivamente.

A próxima etapa se inicia na seqüência (15), chamando a função (*polin*), veja a figura (A.9), ela é capaz de calcular os coeficientes da equação quadrática (3.23) e determinar as raízes desta equação. A função (*polin*) receberá como argumentos os vetores $\delta\mathbf{q}_t$, $\bar{\delta}\mathbf{x}$ e \mathbf{q}_e , além dos escalares raio, $\Delta\mathbf{x}$, ξ , $\Delta\lambda_n$. Ela fornece as raízes da equação (3.23) para a função (*arc*).

Dentro da função (*polin*), tem-se a seguinte disposição: os coeficientes a , b e c que se encontram na equação (3.23); deve-se calcular as raízes do polinômio com estas constantes e atribuir a variável (*raízes*). Finalmente retorne está variável para a função (*arc*).

Novamente em (*arc*), faça um operador lógico verificar se a variável (*raízes*) é complexa, em caso verdadeiro o algoritmo terá de retornar para o início e reduzir o tamanho do raio. Mas antes atribua a variável (*aux*) o caracter ('s') e a (*icod*) atribua o zero. No caso do operador ser falso, será chamado a função (*resp3*), que é seqüência número (16). Seu fluxograma está na figura (A.10). Está função tem a finalidade de escolher uma das duas raízes reais na variável (*raízes*).

A função (*resp3*) recebe dois argumentos (\mathbf{k}_t , \mathbf{q}_e) e retorna $\delta\lambda$, o qual é a raiz que dará

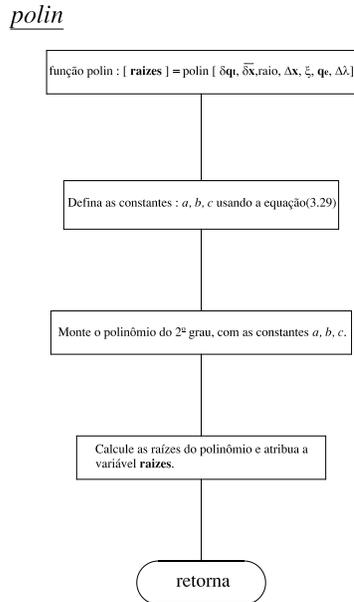


Figura A.9: Fluxograma da função *polin*.

direção correta de convergência de acordo com o caminho. Nesta função, tem-se a segunda componente do vetor coluna (*raízes*) sendo atribuído a $\delta\lambda$. Agora, defina um operador lógico que será comparado com o sinal da variável (*detkt*) com o sinal da primeira componente do vetor (*raízes*), em caso de verdade é atribuído ao $\delta\lambda$ a primeira componente do vetor (*raízes*). Finalmente feche o operador lógico. Assim, retorne o valor de $\delta\lambda$ escolhido para a função (*arc*).

Retornando novamente para a função (*arc*), se estiver levando em consideração a visualização do procedimento, abra um operador lógico com a variável (*hplot*) fazendo que a condição seja verdadeira para que se possa armazenar as duas raízes e calcular as duas possibilidades de soluções para observar a raiz "correta" e a "errada". Atribua as duas componentes da (*raízes*) em variáveis diferentes como ($\delta\lambda_1$ e $\delta\lambda_2$); calcule $\delta\mathbf{x}$ para as duas raízes tendo as variáveis $\delta\mathbf{x}_1$ e $\delta\mathbf{x}_2$. Assim, tem-se duas respostas para \mathbf{x} e λ_n , que será ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$) e

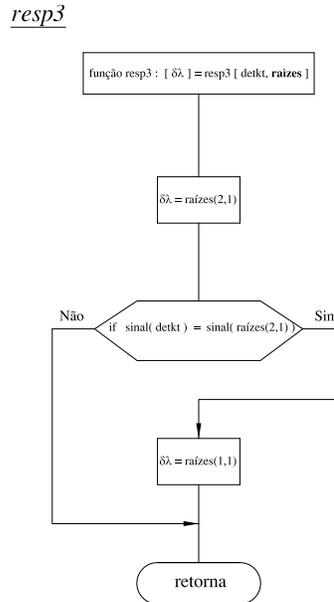


Figura A.10: Fluxograma da função *resp3*.

$(\lambda_{n1}, \lambda_{n2})$; pode-se finalizar o operador lógico.

Continuando o algoritmo calcule o vetor $\delta \mathbf{x}$ da seguinte maneira, faça a multiplicação de $\delta \lambda$ com $\delta \mathbf{q}_t$ e some isto com o $\bar{\delta} \mathbf{x}$, então atribua ao $\delta \mathbf{x}$. Determine o vetor $\Delta \mathbf{x}$ novo, somando ele mesmo com $\delta \mathbf{x}$; atualize o vetor \mathbf{x} , somando ele mesmo com o vetor $\delta \mathbf{x}$, e o mesmo para $\delta \lambda$ somando além dele o $\delta \lambda$. Finalmente, some λ_n a ele mesmo, mais o escalar $\delta \lambda$. Agora todos os vetores e escalares estão atualizados para esta iteração. Logo, é possível calcular o resíduo mais uma vez.

Caso haja necessidade, armazene o resíduo (r) numa variável temporária como *temp*. O próximo passo é a seqüência número (17), que retornará mais uma vez o valor do resíduo através da função (*funres*) conforme já foi explicado.

Agora, pela última vez, se estiver visualizando o "arc-length" funcionando, coloque o procedimento (*hplot*) e dentro dele coloque um comando para plotar os vetores armazenados

em (*hplot*) junto com $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ e $(\lambda_{n1}, \lambda_{n2})$. Logo, será visualizado todo o procedimento.

Uma vez fora de (*hplot*), abra um operador lógico para verificar a convergência. Compare nele se a norma do resíduo (r) é menor que (tol). Para a condição verdadeira, atribua a variável (*aux*) o caracter ('s') e para (*final*) o conjunto de caracter ('true'). Finalmente atualize o valor de (ω) atribuindo a ele o produto dele mesmo com λ_n ; finalize o operador lógico; finalize o operador lógico para verificação da raiz complexa; finalize o "looping" interno e também o externo.

O algoritmo ficará no "looping" interno até o resíduo convergir, quando isto ocorrer então foi achado mais um ponto de equilíbrio da curva, e este ponto será passado para a função (*indat*), no qual é a seqüência (18), que pode armazená-los nas variáveis (*ampt* e *freq*), que correspondem ao novo nível de amplitude e frequência, respectivamente. De acordo com a necessidade, pode-se separar as partes real e imaginária da amplitude ou então calcular seu módulo e armazená-los para análise futura. Os valores de (\mathbf{x}_0, y_0) são atualizados com os que vieram da função (*arc*) para que a convergência continue a partir deste ponto. Uma vez que se possui os pontos de equilíbrio, pode-se manipula-los da forma que melhor for conveniente. O última ação é fechar o "looping" da função (*indat*) e o programa está finalizado.

Este estão foi o procedimento para compor todo o "arc-length", no qual foi descrito todas as funções utilizadas pelo método.

Apêndice B

Teste Realizado Com Uma Equação Linear

O teste realizado com uma reta serve para verificar se o procedimento de Newton-Raphson ou Newton-Raphson modificado estava funcionando corretamente, e como para este caso a convergência tem que ser apenas em um passo, o modelo serviu com êxito para esta verificação, lembrando que, o método "*arc-length*" não chegou a ser totalmente utilizado para este caso, pois a convergência se deu com a primeira aproximação do método. Logo, ficou testado a parte inicial do programa que prevê aproximadamente os parâmetros de incrementos iniciais do primeiro passo no qual para o caso de uma reta, tem-se mais sentido em dizer que há incrementos na coordenada x e y .

Um outro motivo de grande importância que induziu a utilização deste modelo foi para ajustar o cálculo das derivadas, pois o método tinha que convergir neste caso em uma iteração. Considerando o resíduo da equação da reta $y = 2x + 3$ como sendo $\Psi = y - 2x + 3$, a derivada analítica e numérica, por exemplo desta equação do resíduo que foi utilizado é trivialmente fácil de se determinar e então analisar onde estava ocorrendo o erro. A análise foi auxiliada graficamente pela plotagem de cada passo de convergência dos vetores do método.

Logo, através da visualização, ficou mais coerente com a realidade observar a derivada e a própria reta com a mesma inclinação, ao invés do vetor derivada com uma inclinação diferente ao da reta, que acontecia anteriormente.

Uma visualização do método para o caso de uma reta, pode ser observado pelas figuras (B.1) e (B.2) :

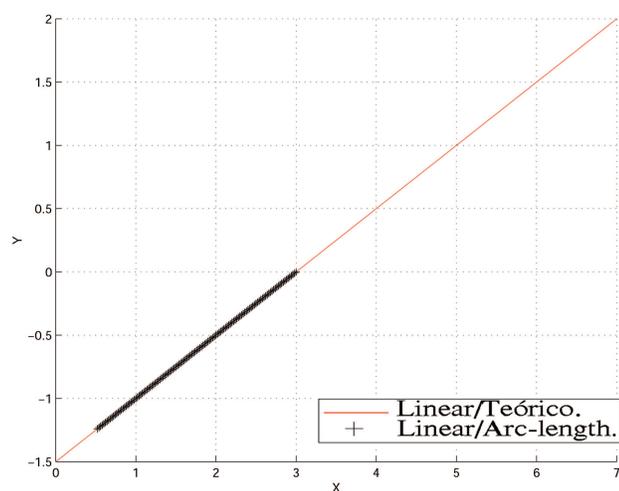


Figura B.1: Simulação da reta $y = 2x + 3$ com uma visão global.

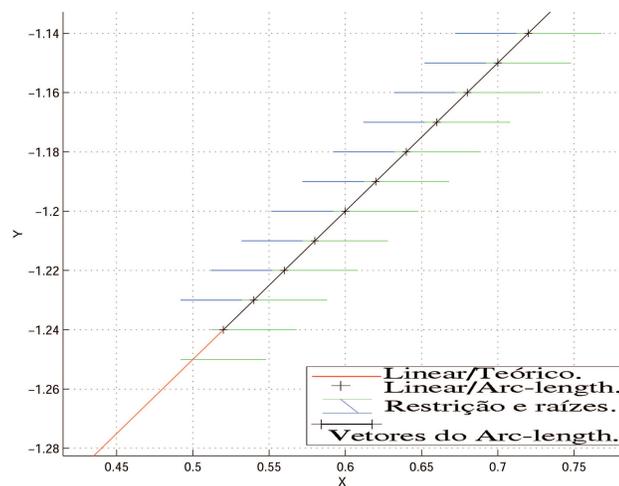


Figura B.2: Simulação com a reta $y = 2x + 3$ com detalhes.

Para reproduzir este último caso utilizar os dados abaixo :

- ▶ Equação : $y = 2x + 3$;
- ▶ Vetor resíduo : $(\Psi) = y\lambda - 2x - 3$;
- ▶ Ponto inicial : $(x_0, y_0) = (-1.5, 0)$. O ponto escolhido satisfaz a equação do resíduo acima;
- ▶ Matriz rigidez tangencial : $K_t = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ calculado numericamente por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;
- ▶ Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = y$;
- ▶ Raio : $\Delta l_0 = 0.01$, e fixo para as demais iterações;
- ▶ Sistema linear.

Uma vez que houve sucesso para um exemplo simples como o da reta, que manteve a convergência na primeira iteração, pode-se então aumentar o grau de dificuldade colocando um modelo com um simples ponto de inflexão, como é o caso de uma equação de uma parábola que será mostrada na próxima seção.

Apêndice C

Teste Realizado Com Uma Parábola

Por ser a parábola um exemplo simples de uma curva com apenas um ponto de inflexão, ela é um modelo ótimo para o estudo particular deste ponto. Desta forma, torná-se possível verificar suas particularidades, as dificuldades de ultrapassá-lo e analisar os vários métodos de inversão da raiz que existem para este ponto.

Foram realizados testes com pequenos comprimentos de raio, Δl , para obter uma maior resolução de pontos da curva, e com isto foi possível observar que a possibilidade de surgimento de raiz complexa é menor. Contudo, há um maior tempo computacional com o aumento da resolução de pontos convergidos.

Para a equação,

$$y = -x^2 + 5x + 60, \tag{C.1}$$

foram levantados alguns dados no *Matlab*[®] para se ter uma idéia da análise de quanto a variação do raio influencia no tempo computacional. Tem-se a tabela (C.1) abaixo com alguns valores dos parâmetros citados. Todos os dados foram obtidos com as mesmas condições[‡], a

[‡]Apenas o algoritmo em si foi considerado. Não houve nenhuma plotagem intermediária para verificar o procedimento de funcionamento.

não ser pelo raio.

Tabela C.1: Relação do comprimento do raio e tempo computacional.

$N^\circ.$	<i>Raio</i>	$N^\circ. \text{ de pontos convergidos}$	<i>Tempo computacional</i>
1	0.5	7	0.05s
2	0.1	31	0.17s
3	0.01	301	1.05s
4	0.001	2.997	4.94s

Para uma variação de comprimento do raio, $0.5 \leq \Delta l \leq 0.001$, levantou-se a curva na figura (C.1) o qual foi verificado que o tempo computacional cresce exponencialmente com a diminuição do raio.

Porém, com a diminuição do raio o algoritmo fica mais estável pois a possibilidade de surgir raiz complexa é menor para incrementos pequenos.

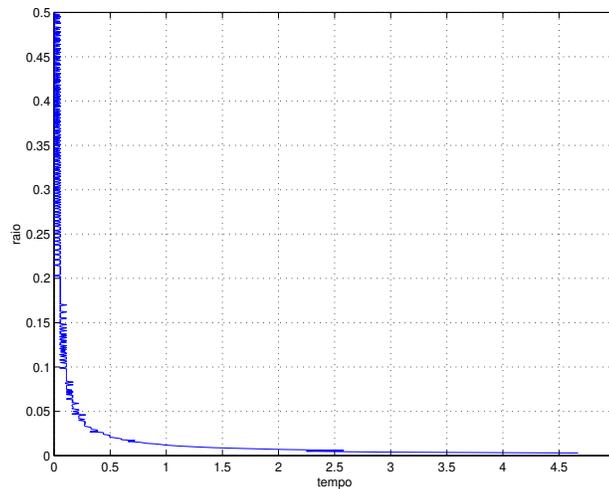


Figura C.1: Curva de variação do tempo com a diminuição do raio.

Agora, pode-se mostrar algumas simulações realizadas com o modelo de parábola. Primeiro tem-se a figura (C.2) da equação (C.1) que mostra os pontos convergidos em cima da

equação analítica. O erro aqui foi praticamente nulo.

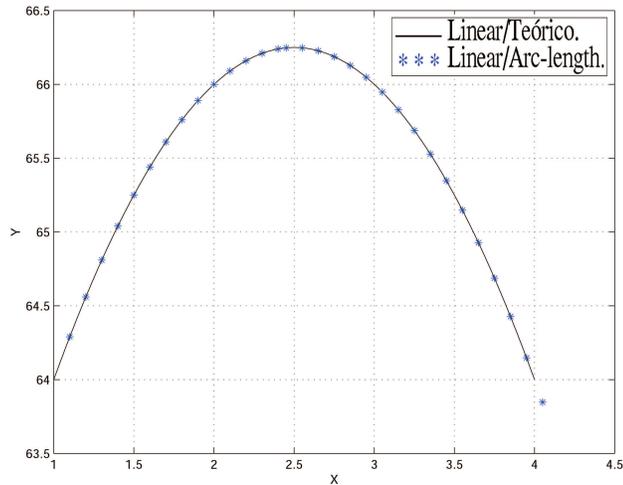


Figura C.2: "Arc-length" aplicado a uma parábola.

Já a figura (C.3) apresenta detalhes de convergência do método "arc-length". São plotados nela todos os incrementos de vetores de frequência e amplitude, além da restrição, as duas raízes da equação quadrática de $(\delta\lambda_i)$, os pontos convergidos e a curva analítica.

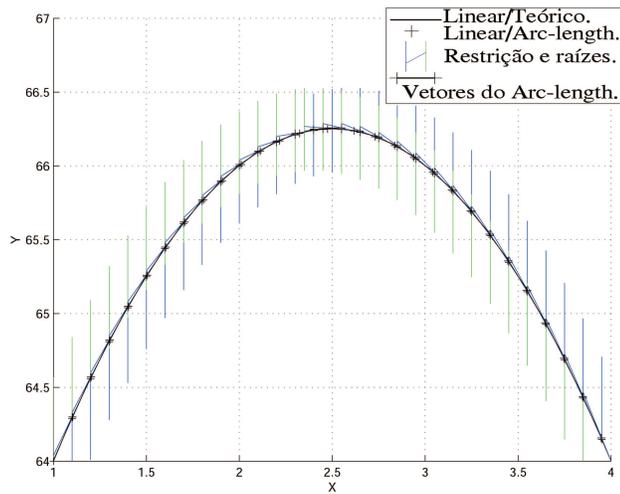


Figura C.3: Visualização do funcionamento do método "arc-length" aplicados a uma parábola.

Para melhor visualizar o método funcionando na parábola, tem-se três figuras (C.4, C.5 e C.6) que representam o começo, o pico e o final, respectivamente. Estas figuras mostram em detalhes o "arc-length" funcionando, no qual a numeração colocado sobre estas figuras representam a seqüência de execução do programa.

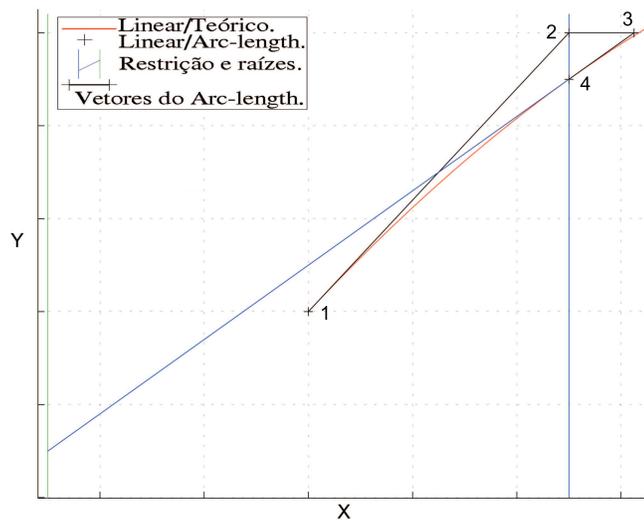


Figura C.4: Detalhe do método "arc-length" subindo a parábola.

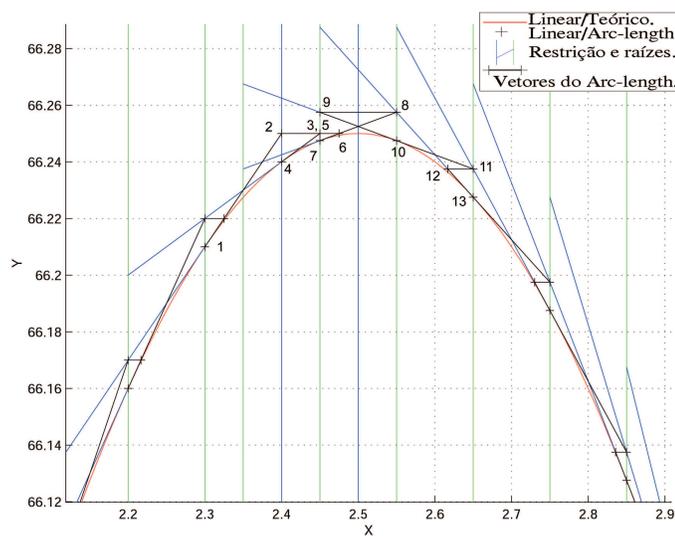


Figura C.5: Detalhe do método "arc-length" no pico da parábola.

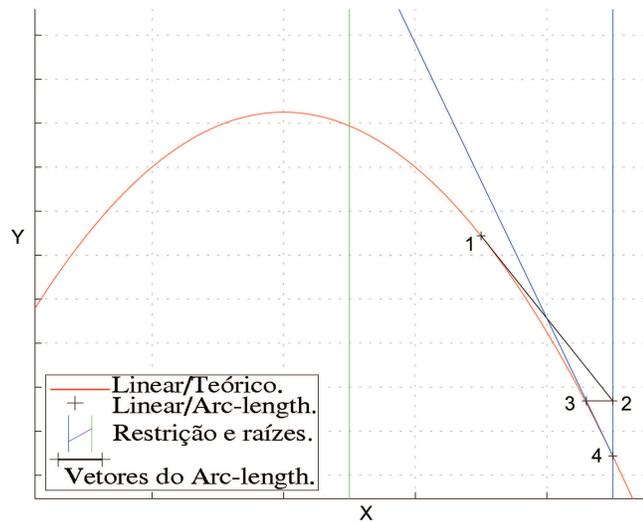


Figura C.6: Detalhe do método "arc-length" descendo a parábola.

Dados necessários para reprodução dos testes realizados neste item :

- Equação : $y = -x^2 + 5x + 60$;
- Vetor resíduo : $(\Psi) = -y\lambda - x^2 + 5x + 60$;
- Ponto inicial : $(x_0, y_0) = (1, 64)$. O ponto escolhido satisfaz a equação do resíduo acima;
- Matriz rigidez tangencial : $K_t \implies$ calculado numericamente $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;
- Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = -y$;
- Raio : $\Delta l_0 = 0.1$, e fixo para as demais iterações;
- Sistema linear.

Os detalhes dos vetores nas figuras, serão mostrados em exemplos posteriores mais adequados.

O método "*arc-length*" não mostrou dificuldades em transpor a parábola, principalmente seu ponto de inflexão. Assim, com método consolidado para exemplos simples pode-se ir ao objetivo deste trabalho, aplicando o método para obtenção de FRF e RF, começando pelo exemplo mais simples como segue na próxima seção.

Apêndice D

Teste Realizado Com Um Sistema de Um Grau de Liberdade, Módulo, Linear e Não-Linear

A análise com este tipo de modelo é baseado no objetivo deste trabalho. Este é um modelo simples, porém para iniciar o estudo do "arc-length" aplicado na obtenção da resposta em frequência não-linear é necessário um exemplo mais trivial para entender o funcionamento do método.

A partir desta simulação os testes sempre foram realizados para um sistema linear e depois para o não-linear. Durante a fase de desenvolvimento do método, havia uma certa instabilidade na convergência. Isto ocorria quando a inclinação da curva tornava-se mais acentuada, então a convergência se estabiliza em torno de um ponto ou o resíduo começava aumentar e provocava uma divergência levando a falha do método.

Uma outra questão, que se aplicada a todos os modelos testados é o critério de parada. É considerado que uma convergência foi obtida quando a norma do resíduo satisfaça a expressão, $\|\Psi\| < 1e^{-5}$.

Os exemplos mostrados aqui são baseados nos modelos lineares veja as figuras (D.1, D.2 e D.3), os quais sempre foram testados primeiro, pois estes são mais fáceis de analisar como o procedimento funcionava. Numa próxima etapa era testado o modelo com não-linearidade para avaliar a eficiência do método.

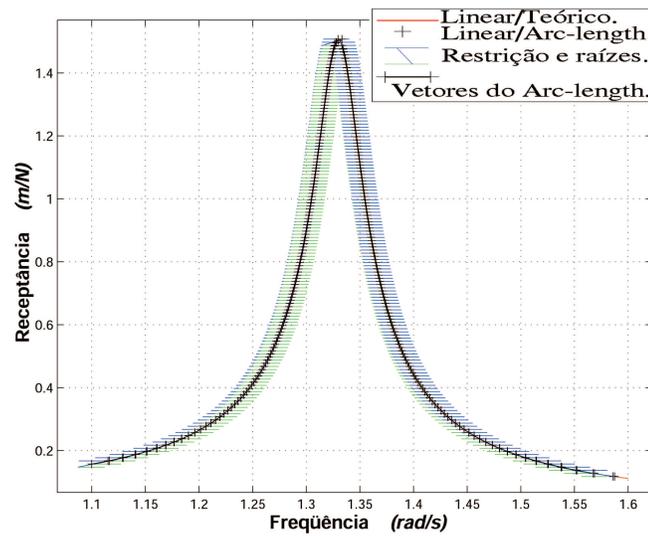


Figura D.1: Funcionamento do método "arc-length" para sistema de um grau de liberdade linear.

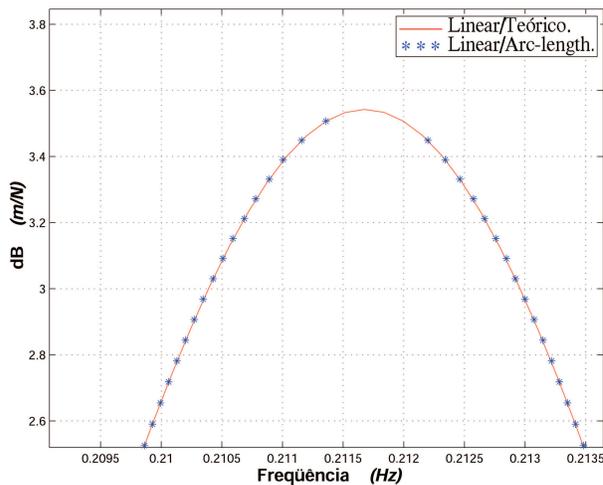


Figura D.2: Detalhe do pico dos pontos convergidos da figura D.1.

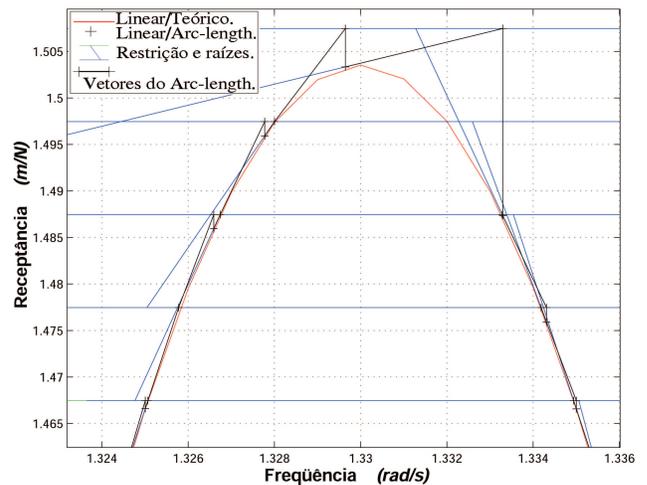


Figura D.3: Detalhe do funcionamento do "arc-length" no pico da figura D.1.

Já, as figuras (D.4) e (D.5) são as RF construídas com os pontos convergidos do método "arc-length".

No detalhe do ponto de inflexão na figura (D.6) é mostrado uma quantidade pequena de pontos, pois o comprimento do raio teria de ser menor, para ter uma quantidade maior de pontos no local. A figura (D.7) mostra a mesma RF com a equação de restrição e os vetores do método "arc-length" plotados.

É observado nas figuras (D.4) e (D.5) que os dados iniciais são lineares. Porém, ao passo que a frequência sofre uma variação, a não-linearidade vai se pronunciando, pois a força não-linear $F(\mathbf{x})$ embutida no sistema torná-se perceptível, e retorna a ser linear novamente nos últimos pontos convergidos. Observando a figura (D.7) vê-se que ela possui uma inclinação em relação a curva linear. Isto se dá devido ao tipo de função descritiva que se está utilizando. Por exemplo, para o caso da rigidez cúbica se esta rigidez for negativa a curva inclinará para esquerda, caso esta rigidez seja positiva a curva será para direita.

Pode-se ainda visualizar alguns detalhes da RF na figura (D.7). A figura (D.8) representa o método "arc-length" funcionando no início da RF da figura (D.7), o qual é possível observar que a não-linearidade está presente embora a ordem de grandeza seja pequena, pois a convergência está fora do caminho linear. Aqui o funcionamento do "arc-length" é idêntico ao do modelo linear, diferenciando apenas na não-linearidade presente. Agora, a última figura (D.9) representa o detalhe do ponto de inflexão que por sinal exigiu nesta região um esforço maior do método para determinar o próximo ponto.

Como se pode observar na figura (D.9), a escolha da raiz pelo sinal do determinante do \mathbf{K}_t funcionou muito bem, auto-invertendo a raiz da equação quadrática no ponto crítico. Logo, quero aqui ressaltar que se a escolha da raiz for incorreta, a falha do método é certa.

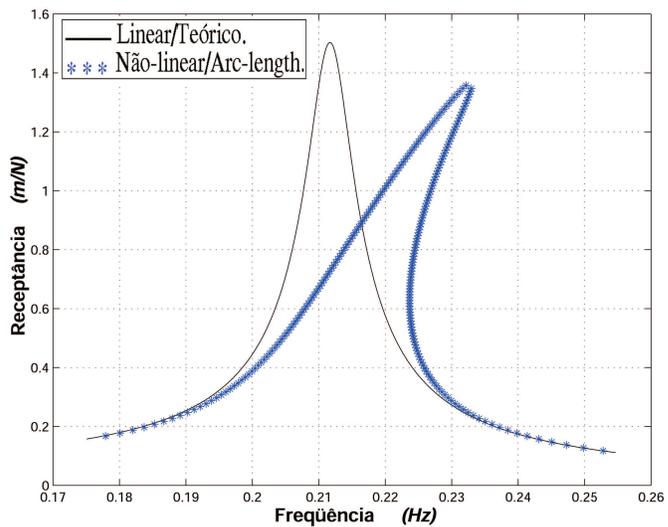


Figura D.4: Resultado do "arc-length" aplicado no módulo do sistema de um grau de liberdade não-linear (X x Hz).

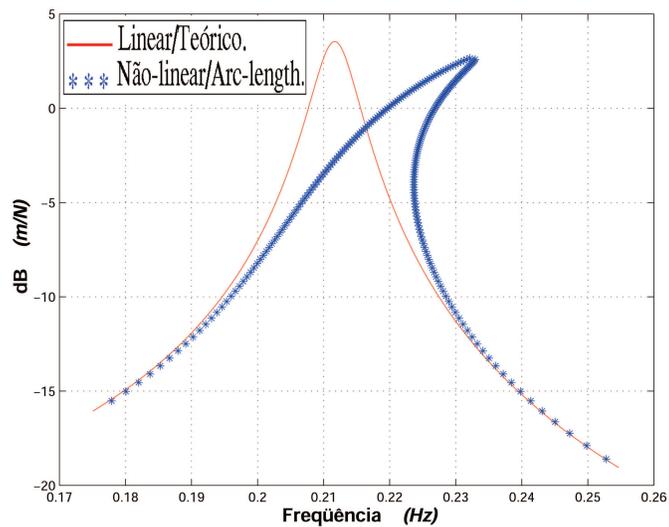


Figura D.5: Resultado do "arc-length" aplicado no módulo do sistema de um grau de liberdade não-linear (dB x Hz).

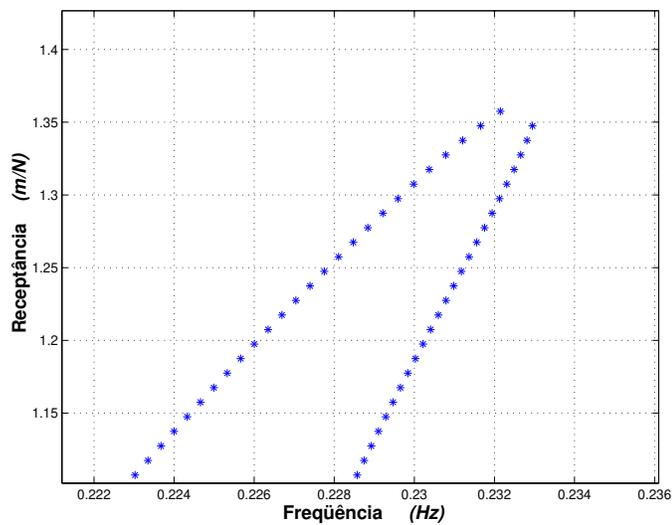


Figura D.6: Detalhe do ponto de pico dos pontos convergidos da D.4.

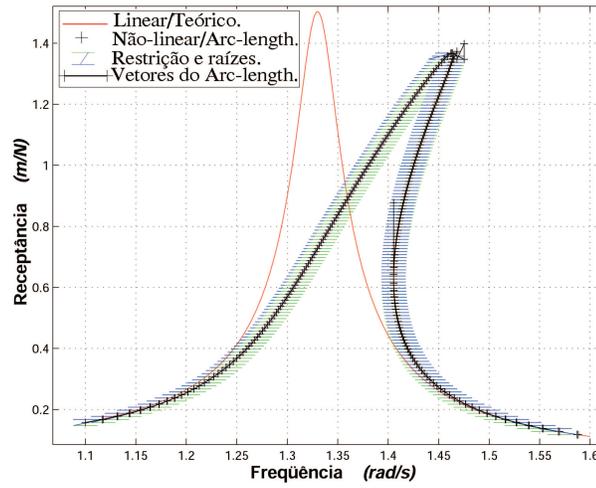


Figura D.7: Funcionamento do método "arc-length" para o sistema de um grau de liberdade não-linear.

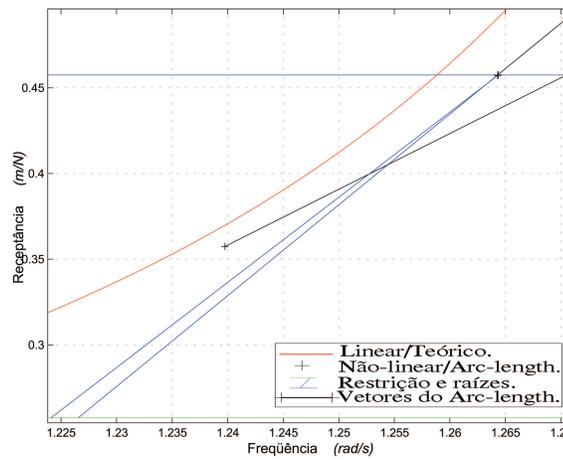


Figura D.8: Detalhe do método "arc-length" iniciando a curva da figura (D.7).

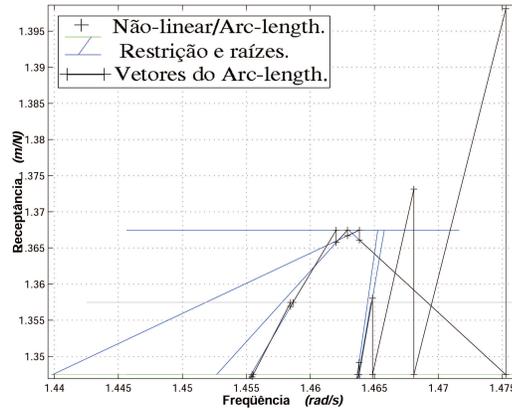


Figura D.9: Detalhe do método "arc-length", mostrando a inflexão da figura (D.7).

E por último, tem-se a figura (D.10) que representa um outro ponto da RF, mostrando que o método é eficiente independente do caminho que ele tem que ultrapassar, e como este ponto possui uma inclinação mais suave que o da figura (D.9) a facilidade é menor para transpô-lo. Os vetores de elevada ordem de grandeza nesta região são mostrados na figura (D.10). A matriz de rigidez próximo a este ponto é mal condicionada e os vetores que dependem de sua inversa automaticamente possuem uma ordem de grandeza bastante elevada, e mesmo assim a falha não ocorreu.

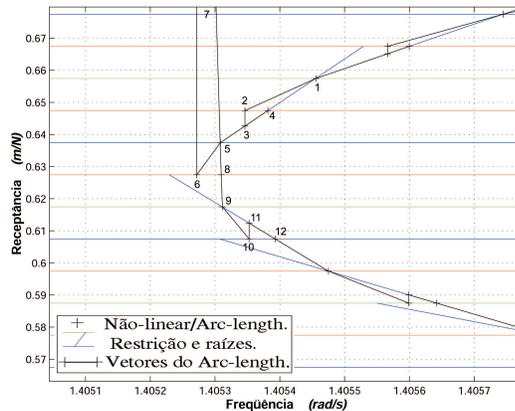


Figura D.10: Detalhe do método "arc-length", mostrando a segunda inflexão da figura (D.7).

Os próximos casos que serão mostrados referem-se àqueles com fator $\beta < 0$ que proporciona uma rigidez mais flexível quando se aplica uma excitação a estrutura. O procedimento do "arc-length" para este caso estão nas figuras (D.11) e (D.12).

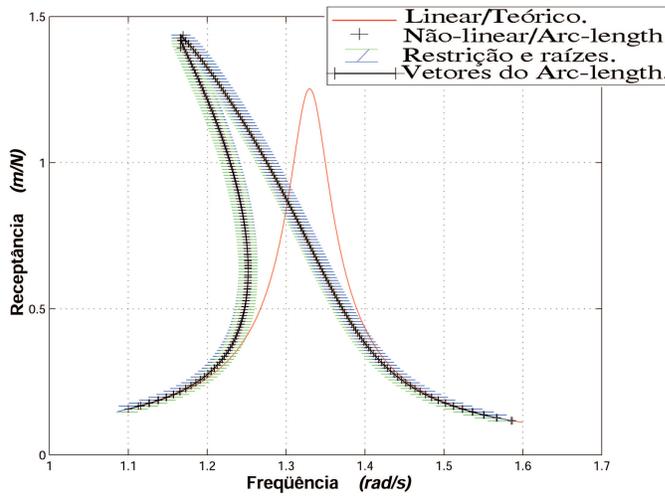


Figura D.11: Procedimento do "arc-length" para o módulo do sistema de um grau de liberdade não-linear com $\beta < 0$.

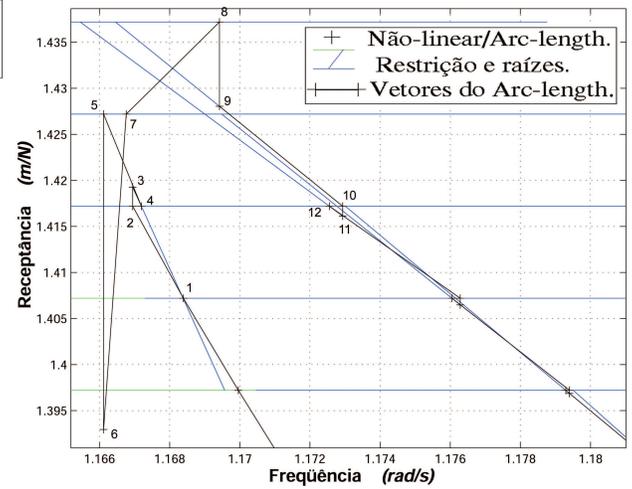


Figura D.12: Detalhe do ponto crítico da figura (D.11) mostrando o funcionamento diferenciado nesta região.

Uma vez que se obtém as respostas de todo o caminho de equilíbrio, considerando o estável e o instável, pode-se observá-los em escalas diferentes conforme a sua necessidade como mostrado nas figuras (D.13) e (D.14)

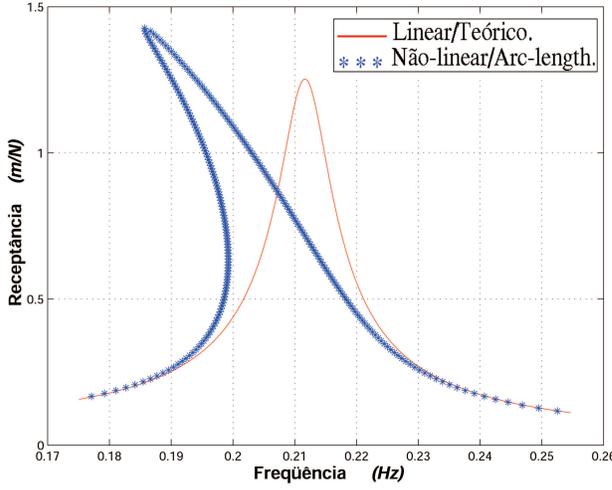


Figura D.13: Visualização do resultado final dos pontos convergidos do sistema de um grau de liberdade não-linear com $\beta < 0$.

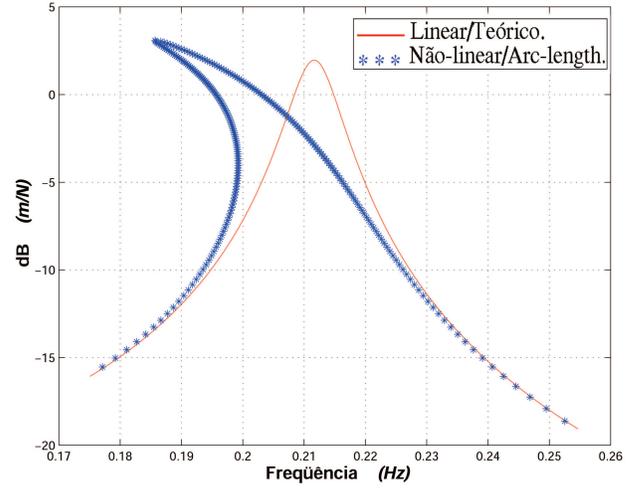


Figura D.14: Outra representação da RF com os dados obtidos pelo "arc-length".

Para reproduzir este último caso utilizar os dados abaixo :

- Equação : $|\alpha(\omega)| = \frac{x}{f} = \frac{1}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}}$;
- Vetor resíduo linear : $(\Psi) = \left(\sqrt{(k - (\omega\lambda)^2 m)^2 + (\omega\lambda c)^2} \right) x - f$;
- Vetor resíduo não-linear : $(\Psi) = \left(\sqrt{(k - (\omega\lambda)^2 m + dfr)^2 + (\omega\lambda c)^2} \right) x - f$;
- Ponto inicial : $(x_0, y_0) = (1.1, 0.157458)$. O ponto (x_0, y_0) foi obtido considerando a equação acima do resíduo com a não-linearidade nula e utilizando os dados abaixo desta lista;
- Função descritiva : $dfr = \frac{3}{4}\beta x^2$;
- Coeficiente : $\beta = \pm 0.3$;

- ▶ Matriz rigidez tangencial : $K_t \implies$ calculado numericamente $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;
- ▶ Vetor carregamento : $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \implies$ calculado numericamente por diferenças finitas com $\epsilon = 10^{-3}$;
- ▶ Rigidez : $k = 12$ (N/m);
- ▶ Amortecimento : $c = 2$ (Ns/m);
- ▶ Massa : $m = 5$ (Kg);
- ▶ Força : $f = 0.1$ (N);
- ▶ Frequência inicial e final : $\omega_i = 1.1$ (rad/s) e $\omega_f = 1.6$ (rad/s), respectivamente;
- ▶ Raio : $\Delta l_0 = 0.01$, e fixo para as demais iterações;
- ▶ Sistema linear($\beta = 0$) e não-linear($\beta \neq 0$).

Para o primeiro caso de RF não-linear, o método foi bastante eficiente, pois todos os outros casos testados não levaram a não-linearidade em consideração. Ainda que se trata de uma aplicação numérica bastante simples onde o tratamento matemático é escalar, é possível aumentar um pouco o grau de dificuldade numérica fazendo um tratamento vetorial deste caso, como segue na simulação seguinte que leva em consideração a fase e o modulo simultaneamente.