

**Universidade Estadual de Campinas**

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

Departamento de Telemática

---

**MODELAMENTO E REGULAÇÃO DE TRÁFEGO DE TRENS  
EM LINHAS METROVIÁRIAS**

George Eduardo Gomes De Faria

Membros da Banca:

Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani (Orientador)

Prof. Dr. Evelin Maria Abreu Teixeira

Prof. Dr. Takaaki Ohishi

Prof. Dr. Anésio dos Santos Jr.

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação da Universidade Estadual de Campinas,  
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do  
título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas - SP

-Junho/2000-

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

Este exemplar corresponde a redação final da tese  
defendida por: GEORGE EDUARDO GOMES  
DE FARIA e aprovada pela Comissão  
Julgada em: 30 / 06 / 2000.

*Basílio E. A. Milani*  
Orientador

2000187407



UNIDADE 3e  
 N.º CHAMADA: T/UNICAMP  
F225m  
 V. \_\_\_\_\_ Ex. \_\_\_\_\_  
 TOMBO BC/ 43149  
 PROC. 96-278100  
 C  D   
 PREÇO R\$ 41,00  
 DATA 02/12/00  
 N.º CPD \_\_\_\_\_



CM-00153264-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
 BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F225m Faria, George Eduardo Gomes de  
 Modelamento e regulação de tráfego de trens em  
 linhas metroviárias / George Eduardo Gomes de  
 Faria.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: Basílio Ernesto de Almeida Milani  
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
 Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
 Computação.

1. Metrô. 2. Transporte urbano. 3. Locomoção e  
 regulação. 4. Ferovias - Tráfego. I. Milani, Basílio  
 Ernesto de Almeida. II. Universidade Estadual de  
 Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
 Computação. III. Título.

# Resumo

Este trabalho apresenta a regulação de linhas metroviárias como um problema de programação matemática, considerando informações de campo disponibilizadas pelos modernos centros de controle. Para a solução deste problema é proposto um novo modelo do tráfego de trens e sobre esse modelo uma nova formulação do problema de regulação de tráfego na forma de controle preditivo de dois passos. O primeiro passo tem por objetivo a regulação dos horários de saída dos trens nas plataformas, tendo como evento inicial o horário de saída dos mesmos das plataformas anteriores na via. O segundo passo utiliza a medida dos horários de chegada dos trens nas plataformas para refinar a regulação dos horários de saída dos mesmos nessas plataformas. A utilização da informação do horário de chegada nas plataformas permite uma regulação de tráfego mais efetiva com evidentes vantagens sobre trabalhos anteriores onde essa informação, disponível nos centros de controle modernos, não é aproveitada.

# Abstract

This work presents the regulation of metro lines as a problem of mathematical programming, considering field information available on the modern control centers. For the solution of this problem, it is proposed a new train traffic model and, on this model, it is also proposed a new formulation of the traffic regulation problem in the form of two steps predictive control. The first step objectives the regulation of the trains departure time from platforms using as initial event the trains departure time from the previous platforms of the line. The second step uses the measurement of the trains arrival time at platforms to refine the regulation of the departure time of the trains at these platforms. The utilization of the arrival time at platforms information allows a more effective traffic regulation with strict advantage on former works where this information, available on modern control centers, has not been taken into account.

# Agradecimentos

- ao meu orientador, Prof Basílio Ernesto de Almeida Milani pela sua amizade e colaboração e por ter constantemente me motivado a realizar este projeto,

- à ALSTOM, em especial ao excelente amigo e companheiro de trabalho Guilherme Pedroso, pelo apoio e por acreditar neste projeto como parte integrante de minha formação profissional,

- ao amigo Roque de Lázaro Rosa que, por seu grande conhecimento do tema deste trabalho, me inspirou a prosseguir neste projeto.

- aos meus pais pela minha formação, pelos meus valores e pelo apoio e suporte que sempre me proporcionaram,

- à minha esposa Marisane pela sua paciência e amor,

- às minhas filhas Lívia e Laís pelo seu amor,

- aos membros da banca, Professores Basílio, Evelin Maria, Takaaki e Anésio, pela participação e contribuição ao trabalho.

# Índice

Capítulo 1 Introdução Geral.....	1
1.1 Motivação.....	1
1.2 Proposição e Roteiro da Tese.....	3
Capítulo 2 Os Modelos de Tráfego.....	4
2.1 Introdução.....	4
2.2 Modelo de Tempo Real.....	8
2.3 Modelo de Tempo Real Estendido (MTRE).....	13
Capítulo 3 Regulação do Tráfego de Trens.....	17
3.1 Introdução.....	17
3.2 Modelo de Tráfego de Trens.....	18
3.3 Problema de Regulação.....	20
3.3.1 Formulação do Problema 1.....	21
3.3.2 Solução do Problema 1.....	21
3.3.3 Formulação do Problema 2.....	24
3.3.4 Solução do Problema 2.....	24
Capítulo 4 Resultados Numéricos.....	26
4.1 Dados Utilizados.....	26
4.2 Política de Regulação Econômica.....	31
4.3 Política de Regulação de Alto Desempenho.....	41
4.4 Problema de Regulação de 1 Passo.....	50
Capítulo 5 Conclusões.....	59
Referências.....	60

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

# Capítulo 1

## Introdução Geral

### 1.1 Motivação

O metrô de São Paulo, atualmente com três linhas - Linha Norte-Sul, Linha Leste-Oeste e Linha Madalena-Oratório totalizando 49,2 km de extensão e 49 estações, está entre os mais carregados do mundo, transportando cerca de 2,5 milhões de passageiros/dia. Isto equivale a dizer que a demanda por serviço de transporte (número de pessoas que desejam se deslocar de um ponto a outro, por unidade de tempo) para o metrô de São Paulo é de 80.000 passageiros por hora por sentido. Para comportar tal carregamento, este sistema é dimensionado com alta frequência de trens, contando com um intervalo entre trens máximo de 100 segundos nos horários de pico de demanda.

O tráfego de trens em linhas de metro de alta frequência é sabido ser naturalmente instável. Isto significa que qualquer desvio com respeito ao programa horário é amplificado com o tempo e perturba a operação dos outros trens. O fenômeno é explicado desta maneira: numa linha de alta frequência, os passageiros chegam randômicamente nas estações. Assim, o número de passageiros esperando numa plataforma para pegar o próximo trem cresce com o intervalo de tempo contado desde a partida do trem precedente. Se um trem está atrasado, este intervalo de tempo e, portanto, o número de passageiros cresce mais do que o esperado nominalmente. O tempo de parada de um trem na plataforma que depende do número de passageiros trocados entre o trem e a plataforma, obviamente, também cresce. Portanto o atraso deste trem cresce a cada plataforma ao longo de sua trajetória na via. Um controle de tráfego é, portanto, necessário a fim de prevenir essa instabilidade. Um controle de tráfego mínimo é sempre implementado nas linhas de metrô através de dispositivos tolerantes à falhas que garantem a segurança do sistema, impingindo uma distância mínima entre trens, evitando assim possíveis colisões. Este controle, entretanto, não garante uma distribuição uniforme dos trens e torna a velocidade comercial muito baixa. [5].

Uma estratégia de controle mais adequada e de utilização generalizada nos metrôs atuais, procura obter a aderência do tráfego dos trens a um programa horário nominal. Esta forma de controle pode ser vista como uma hierarquia de dois níveis: programação e regulação de tráfego.

#### **Programação de Tráfego**

O objetivo da programação de tráfego é a obtenção do Programa Horário Nominal da linha. [4], [11].

**Dados utilizados:**

- Disponibilidade de trens;
- Desejo de viagem;
- Nível de conforto, medido pela quantidade de passageiros por metro quadrado;
- Demanda de passageiros: dados históricos da linha, levantados através de coleta de dados em campo, que determinam qual é a quantidade de passageiros que entram e saem de cada estação, em cada horário do dia, em cada dia da semana, considerando sazonalidades.
- Matriz Origem-Destino: representando a distribuição da porcentagem do fluxo de passageiros que se destina a qual estação destino. Este levantamento é feito em campo e, através de ferramentas estatísticas, é determinada a matriz Origem - Destino da linha.

**Produto:**

Tabela horária resultado de um compromisso entre os seguintes objetivos: satisfazer a demanda de passageiros, tempo de parada dos trens nas estações suficiente para o embarque / desembarque de todos os passageiros, manter a máxima ocupação dos trens, dentro de níveis aceitáveis, satisfazer restrições de conexão com os outros sistemas de transporte e minimizar custos operacionais tais como número de trens, energia consumida, requisitos de horário de operadores ... [4], [11].

**Regulação de Tráfego**

Atua durante a operação real, procurando manter o horário de partida das estações, o intervalo de tempo entre partidas sucessivas de trens e o esforço de controle mais perto possível dos valores previstos no Programa Horário Nominal. As ações de controle consistem em instruções dadas pelo controlador automático de trens nas estações, aumentando ou diminuindo sua velocidade durante o tempo de percurso até a próxima estação e/ou seu tempo de espera na plataforma. O controle é naturalmente restringido pelo espectro de velocidades permitidas aos trens, tempo mínimo de espera nas plataformas e regras de segurança de tráfego. O intervalo de tempo entre trens sucessivos é também restringido pelas regras de segurança de tráfego e pela ocupação máxima dos trens [5], [21].

## 1.2 Proposição e Roteiro da Tese

Esta tese trata do problema de regulação de tráfego de trens em linhas de metrô, tendo como referência o Programa Horário Nominal da linha.

Este problema foi tratado anteriormente por vários autores: [1], [5], [21], [6], [7], [10], [14], [16], [17], [18]. Esses trabalhos tem em comum um modelo de tráfego na forma de variáveis de estado [2], [8], relacionando os instantes de partida dos trens nas plataformas da via com os controles de tempo de percurso entre estações e tempo de parada nas mesmas, proposto em [5], [21]. Eles se diferenciam no refinamento da formulação do problema de regulação para tratamento das incertezas do modelo, nas restrições nas variáveis de controle de estado e cálculo em tempo real da lei de controle [14]-[18].

Neste trabalho será proposto um novo modelo de tráfego de trens e sobre este modelo será proposta uma nova formulação do problema de regulação de tráfego na forma de controle preditivo de dois passos [12].

A matéria se distribui ao longo dos capítulos da seguinte forma:

- **Capítulo 2:** É apresentado o modelo existente de tráfego de trens em linhas de metrô denominado Modelo de Tempo Real proposto em [5], [21]. Em seguida, é proposto um modelo novo, correspondente a uma extensão do Modelo de Tempo Real, levando-se em conta a informação do evento de chegada dos trens nas plataformas, informação esta que é disponível nos modernos centros de controle operacionais, e não aproveitada.
- **Capítulo 3:** É formulado o problema de regulação do tráfego dos trens baseado no novo modelo. O resultado é uma formulação de controle em tempo real, preditivo de dois passos, robusto, [2], [11], de um sistema linear incerto, com restrições nas suas variáveis de saída, controle e perturbações externas [22].
- **Capítulo 4:** São apresentados resultados numéricos de simulação para ilustrar a abordagem de regulação de tráfego proposta neste trabalho.
- **Capítulo 5:** Fecha este trabalho com conclusões sobre os resultados obtidos e sugestões para futuros desenvolvimentos.

# Capítulo 2

## Os Modelos de Tráfego

### 2.1 Introdução

O tráfego de trens em uma linha de metrô é caracterizado pelos instantes de chegada e partida, nas plataformas de embarque e desembarque de passageiros nas estações, dos trens em circulação na linha. Nestes instantes é medido o desvio dos horários dos trens em relação ao Programa Horário Nominal. É também nas plataformas das estações da linha, que a viagem dos trens é controlada através da designação do tempo de parada na plataforma e o perfil de velocidade no percurso entre plataformas, na forma de instruções passadas desde o centro de controle até os computadores a bordo dos trens.

Seja um conjunto de trens ordenados, percorrendo uma linha de metrô, constituída por uma seqüência de estações em cujas plataformas cada trem deve parar para que passageiros possam subir e descer. Cada trem que entra na linha segue a seqüência de estações/plataformas numeradas, que é a mesma para todos os trens na linha. Em cada plataforma, a seqüência de trens é ordenada e é a mesma para todas as plataformas. Essas são as características das linhas seqüenciais que podem ser subdivididas em duas sub-classes: linhas de regime aberto e linhas de regime fechado.

*As linhas de regime aberto* são definidas como uma seqüência de  $N$  plataformas com  $M$  trens operando. Os índices das plataformas variam de 1 a  $N$  e dos trens de 1 a  $M$ . Os trens são inseridos na plataforma 1 e saem da linha na plataforma  $N$  (figura 2.1.a).

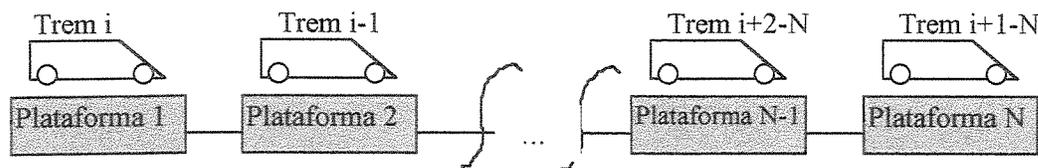


Fig. 2.1.a - Linha aberta de metrô com  $N$  plataformas

*As linhas de regime fechado* possuem  $N$  plataformas (índices de 1 a  $N$ ) e  $M$  trens (índice de 1 a  $M$ ) operando. A plataforma 1 é conectada à plataforma  $N$  e a seqüência das plataformas é  $1,2,\dots,N,1,2,\dots$ . De acordo com a estrutura da linha, as variáveis relativas à plataforma 1 dependem da evolução passada do tráfego e é influenciada pelas variáveis relativas à plataforma  $N$  (figura 2.1.b).

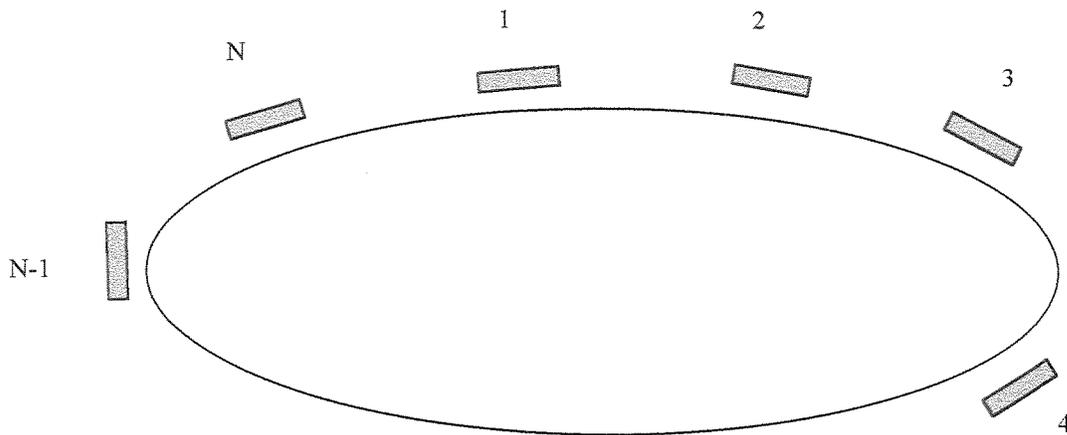


Fig. 2.1.b - Linha fechada de metrô com  $N$  plataformas

Este trabalho é dedicado à análise do tráfego em linhas de metrô operando em regime aberto, porque a maioria as linhas comerciais, embora sejam fechadas do ponto de vista físico, operam como linhas abertas.

Considere, por exemplo, a configuração clássica de uma linha com duas vias entre duas estações terminais A e B (uma via para cada direção) (figura 2.1.c). No trajeto AB os números das plataformas são 1,2, ...,  $N$  e no trajeto BA,  $N, N + 1, \dots, 2N - 2, 1$ . Os  $(N - 2)$  pares de plataformas  $\{(2, 2N - 2), \dots, (N - 1, N + 1)\}$  correspondem às  $(N-2)$  estações com duas plataformas cada. A e B são duas estações terminais com cruzamento de vias, possibilitando o retorno de trens. Se a seqüência de  $M$  trens está operando periodicamente no circuito ABA, esta linha pode ser considerada como uma linha fechada com  $(2N - 2)$  plataformas. Por outro lado, se em uma das estações terminais (por exemplo a estação A) existir pelo menos um trem reserva, isto garante as saídas de trens na plataforma 1 (um) no horário nominal fazendo com que esta linha possa ser considerada uma linha operando em regime aberto. (figura 2.1.c).

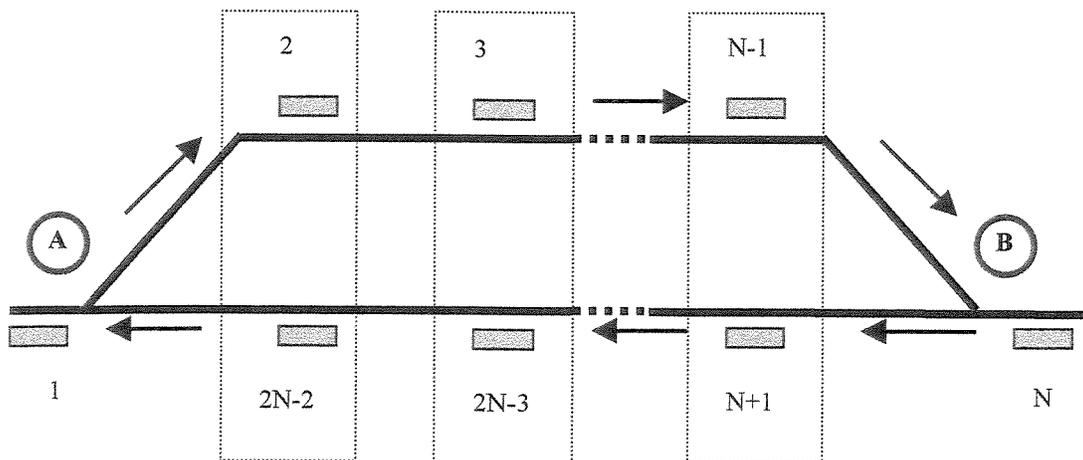


Fig. 2.1.c - Linha de Metro comercial com  $2N - 2$  plataformas operando em regime aberto

O tempo de percurso de um trem entre duas plataformas consecutivas é determinado pelo perfil de velocidade e aceleração comandado na plataforma de partida e as perturbações sofridas ao longo deste percurso.

A parada de um trem em uma plataforma obedece a seguinte seqüência de eventos: chegada na plataforma, parada completa, abertura de portas, desembarque dos passageiros dentro do trem para a plataforma, embarque no trem dos passageiros que estavam em espera na plataforma, fechamento de portas e partida do trem para executar seu percurso até a próxima estação.

Este tempo de parada, mais caracterizado por tempo em plataforma com portas abertas é, nominalmente, o tempo previsto no programa horário, para aquela estação, naquele horário do dia, naquela data. Este tempo de parada nominal, atende a demanda de passageiros na plataforma naquele instante com uma folga, porque o tempo de parada sofre perturbações de vários tipos, que atuam sempre no sentido de estender este tempo nominal para um tempo maior.

Um tipo de perturbação que tempo de parada sofre, é intrínseco à dinâmica de troca de passageiros entre o trem e a plataforma. Quando algum passageiro estiver bloqueando as portas, no momento de seu fechamento, um sistema automático de segurança, as abre novamente, impedindo que o passageiro fique preso às portas, podendo se ferir. Isto obviamente, prolonga o tempo de parada.

Além desta perturbação evidente, uma perturbação de outra ordem, ligada mais à dinâmica do fluxo de passageiros na estação, também se faz presente.

Suponha um trem atrasado, chegando em uma estação. Quanto maior é o intervalo entre este trem e o trem anterior a este na estação, mais passageiros chegarão à plataforma para embarque. A demanda de transporte (número de passageiros) se torna maior do que a esperada nominalmente. Logo, o trem não poderá cumprir exatamente o seu tempo de parada programado, sob pena de deixar passageiros sem embarcar, na estação. O tempo de parada nominal do trem será, então estendido, por conta de uma interação maior de passageiros entre a plataforma e o trem, acarretando um atraso ainda maior do que aquele que já estava sendo observado.

É fácil observar, então, que o atraso de um trem provoca um atraso maior ainda neste trem, quando o mesmo chega a uma plataforma para recolher passageiros, o que caracteriza um comportamento instável do sistema.

As figuras a seguir ilustram estas situações operacionais (figuras 2.1.d e 2.1.e).

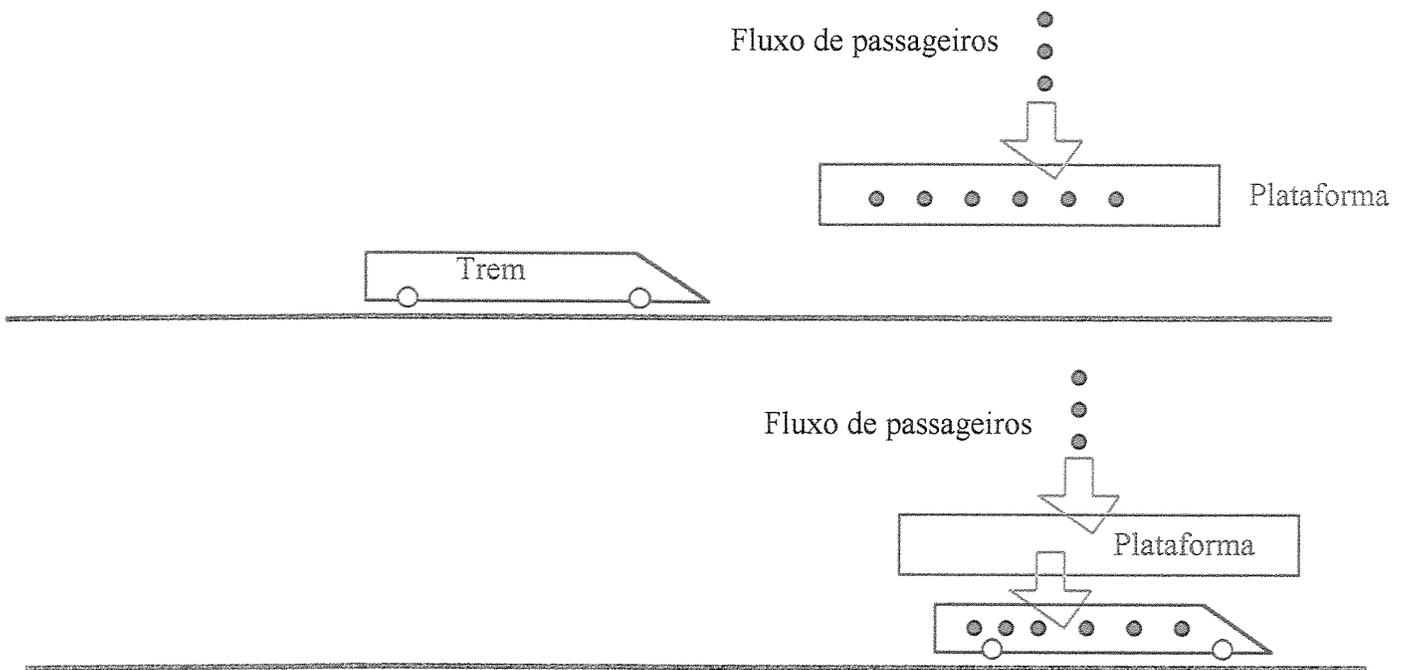


Fig. 2.1.d - Interação entre passageiros e trem na plataforma em horário nominal

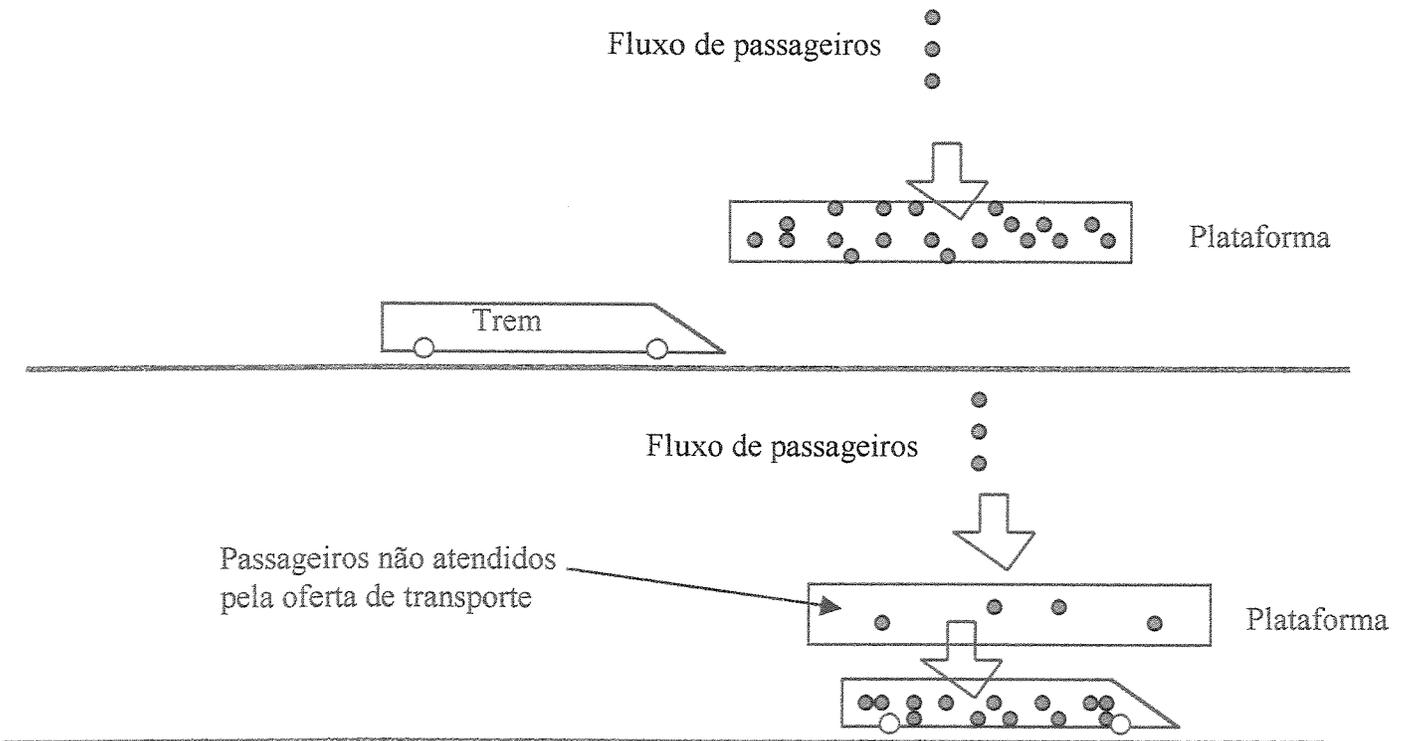


Fig. 2.1.e - Interação entre passageiros e trem na plataforma com trem atrasado em relação ao horário nominal

Nas seções seguintes, serão apresentados modelos de tráfego de trens em linhas de metrô combinando as características de um sistema movido a eventos discretos, dentro de uma formulação de variáveis de estado, que na literatura tem se mostrado adequado para o tratamento de problemas de regulação de tráfego metroviário [1], [9], [13], [19], [20], [5], [21].

*Notação.* Ao longo deste trabalho, será usada a notação de dois índices para identificar as variáveis relativas a um dado trem em uma dada plataforma: o índice superior refere-se ao número do trem e o índice inferior ao número da plataforma. Esses índices tem valores máximos respectivamente  $M$  e  $N$ . Com esta convenção de índices, dois trens sucessivos podem ser identificados, sem perda de generalidade, por  $i$  e  $i + 1$ , com  $(1 \leq i \leq M)$ , sendo que o trem  $i + 1$  segue o trem  $i$ . Também, por esta convenção, duas plataformas sucessivas podem ser identificadas pelos índices  $k$  e  $k + 1$  com  $(1 \leq k \leq N)$ .

## 2.2 Modelo de Tempo Real

Campion e outros propõem o seguinte modelo matemático [5], [21]:

Considere  $M$  trens (índice superior  $i = 1, \dots, M$ ) e uma linha com  $N$  plataformas (índice inferior  $k = 1, \dots, N$ ).

Sejam:

$t_k^i$ : instante de partida do  $i$ -ésimo trem da  $k$ -ésima estação

$r_k^i$ : tempo de percurso do  $i$ -ésimo trem entre a  $k$ -ésima e a  $(k + 1)$ -ésima estação

$s_k^i$ : tempo de parada do  $i$ -ésimo trem na  $k$ -ésima estação

Obviamente, o instante da partida do trem  $i$  em duas estações sucessivas  $k, k + 1$  é dado por:

$$t_{k+1}^i = t_k^i + r_k^i + s_{k+1}^i$$

O tempo de percurso  $r_k^i$  pode ser modelado como:

$$r_k^i = R_k + u_k^i + w1_k^i$$

onde  $R_k$  é o tempo nominal do percurso entre as  $k$ -ésima e a  $(k + 1)$ -ésima estações;

$u_k^i$  é a ação de controle, aplicado ao  $i$ -ésimo trem entre as estações  $k$  e  $k + 1$ , para diminuir ( $u_k^i < 0$ ) ou aumentar ( $u_k^i > 0$ ) o tempo de percurso. Esta ação de controle, nos sistemas

automáticos de supervisão de trens, é traduzida na prática por uma ordem dada pelo controle central ao computador a bordo do trem para que este siga uma marcha mais acelerada ou mais vagarosa até a próxima estação;

$w1_k^i$  é um termo de perturbação associada ao percurso interestação.

O tempo de parada  $s_k^i$  depende do intervalo entre a partida do trem anterior e a chegada do trem atual. Modelo sofisticado para determinar esse tempo de parada tem sido apresentado na literatura (veja por exemplo, [5]) usando teoria de fila. Contudo, supor que esse tempo seja linear é perfeitamente aceitável: o tempo de parada aumenta proporcionalmente ao número de passageiros que irão entrar no trem, i.e., ao tempo decorrido desde a partida do último trem até a chegada do atual, supondo também que a chegada dos passageiros à plataforma de embarque da estação ocorra aleatoriamente.

Desta forma, o tempo de parada  $s_k^i$  pode ser modelado como:

$$s_k^i = a_k^i (t_k^i - s_k^i - t_k^{i-1}) + D + w2_k^i \quad (2.1)$$

onde  $D$  é o tempo de parada mínimo em uma plataforma de uma estação, quando ninguém entra no trem e as portas são fechadas tão logo seja possível;

$a_k^i$  é a taxa de atraso, representando o efeito no tempo de parada do intervalo de tempo decorrido desde a partida do último trem;

$w2_k^i$  é um termo de perturbação associada ao tempo de parada na estação.

Definindo-se:

$$c_k^i = \frac{a_k^i}{1 + a_k^i} \quad (2.2)$$

$$b_k^i = \frac{1}{1 + a_k^i} \quad (2.3)$$

$$w_k^i = w1_k^i + w2_k^i \quad ; \quad v_k^i = b_k^i w_k^i \quad (2.4)$$

e relacionando com (2.1) tem-se:

$$s_k^i = c_k^i (t_k^i - t_k^{i-1}) + b_k^i D + v_k^i \quad (2.5)$$

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

Definindo-se o horário nominal representando a operação sem nenhum controle ou perturbação ( $u_k^i = 0$  e  $v_k^i = 0$ ), isto é:

$$T_{k+1}^i = T_k^i + R_k + c_{k+1}^i (T_{k+1}^i - T_{k+1}^{i-1}) + b_{k+1}^i D$$

Definindo-se também  $x_k^i = t_k^i - T_k^i$  como o desvio do tempo de partida  $t_k^i$  do seu valor nominal  $T_k^i$ , tem-se:

$$(1 - c_{k+1}^i)x_{k+1}^i + c_{k+1}^i x_{k+1}^{i-1} = x_k^i + u_k^i + v_k^i \quad (2.6)$$

A equação (2.6) constitui a equação básica de transferência do  $i$ -ésimo trem da  $k$ -ésima para  $k + 1$ -ésima estação.

Nestas relações  $D$ ,  $R_k$ ,  $c_k^i$  e  $b_k^i$  são parâmetros característicos da linha e do material rodante.  $D$  é um parâmetro definido pela política operacional da linha e  $R_k$  é definido pelas características do material rodante e traçado geométrico da linha.

A taxa  $a_k^i$  ( e, portanto,  $c_k^i$  e  $b_k^i$  ) devem ser estimados através de medidas do fluxo de passageiros chegando na plataforma e o tempo necessário para embarque dos mesmos nos trens.

Na equação (2.6) é importante notar que:

- Os parâmetros  $c_k^i$  são naturalmente incertos, dada sua relação com a demanda de passageiros que é aleatória;
- Os termos de perturbação  $v_k^i$  são aleatórios;
- as variáveis de controle  $u_k^i$  são restritas em valor e dependem das características do material rodante e traçado da linha.

A representação na forma de variáveis de estado, da equação (2.6), é conveniente para a utilização de modernas técnicas de controle.

A equação (2.6) é equivalente à:

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{1 - c_{k+1}^i} x_k^i - \frac{c_{k+1}^i}{1 - c_{k+1}^i} x_{k+1}^{i-1} + \frac{1}{1 - c_{k+1}^i} u_k^i + \frac{1}{1 - c_{k+1}^i} v_k^i \quad (2.7)$$

Assim, em forma matricial, pode-se ter:

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j + BV_j \quad (2.8)$$

onde:

$$X_j = \begin{bmatrix} x_1^{j-1} \\ x_2^{j-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k^{j-k} \end{bmatrix}, U_j = \begin{bmatrix} u_0^j \\ u_1^{j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{k-1}^{j-k+1} \end{bmatrix}, V_j = \begin{bmatrix} v_0^j \\ v_1^{j-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{k-1}^{j-k+1} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e as matrizes dinâmicas A e B possuem formas simples (bidiagonal e diagonal, respectivamente).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-c_1}{1-c_1} & & & & & 0 \\ \frac{1}{1-c_2} & \frac{-c_2}{1-c_2} & & & & \\ & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & & \frac{1}{1-c_k} & \frac{-c_k}{1-c_k} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-c_1} & & & & & 0 \\ & \frac{1}{1-c_2} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \frac{1}{1-c_k} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Pode ser visto na equação (2.7), que o termo  $x_k^i$  é multiplicado pelo fator  $\frac{1}{1-c_{k+1}} > 1$  para a obtenção de  $x_{k+1}^i$ . Isto significa que, mesmo na ausência de desvio do trem  $i - 1$  na estação  $k + 1$ , sem controle na estação  $k$ , o desvio do trem  $i$  na estação  $k + 1$  será maior que o seu desvio na estação  $k$ , caracterizando comportamento de um sistema instável.

Outra propriedade interessante desta última formulação é que os componentes do vetor estado são conhecidos quase que simultaneamente ou podem ser estimados facilmente. Por causa do

requisito de segurança do tráfego, (por exemplo: em trecho entre duas plataformas só pode estar no máximo um trem) os desvios  $x_k^i$  ( $i$ -ésimo trem na  $k$ -ésima estação) e  $x_{k+1}^{i-1}$  (trem anterior na próxima estação) são medidos pelo sistema supervisorio de controle, num curto espaço de tempo. Estas propriedades tornam possível uma implementação prática, em tempo real, de uma lei de controle de realimentação de estado. Por esta razão, este modelo é denominado de “Modelo de Tempo Real” (MTR).

Pode ser visto em (2.7) a (2.11), que a estrutura diagonal da matriz  $B$  (2.11), faz com que  $x_{k+1}^i$ , do ponto de vista de controle, dependa apenas de  $u_k^i$ , caracterizando um sistema descentralizado de comando, onde cada trem (computador de bordo), em cada plataforma de estação, recebe do sistema de controle supervisorio um controle correspondente à uma ordem de tempo de percurso até a próxima estação.

Na figura 2.2.a é apresentada de forma esquemática, uma matriz  $EX$ , contendo a evolução dos desvios dos instantes de partida, em relação ao horário nominal, de  $J$  trens ao longo das  $K$  estações de uma linha operando em regime aberto. Pode ser verificado que o vetor de estado do modelo MTR é composto pelos componentes da diagonal secundária da matriz  $EX$ .

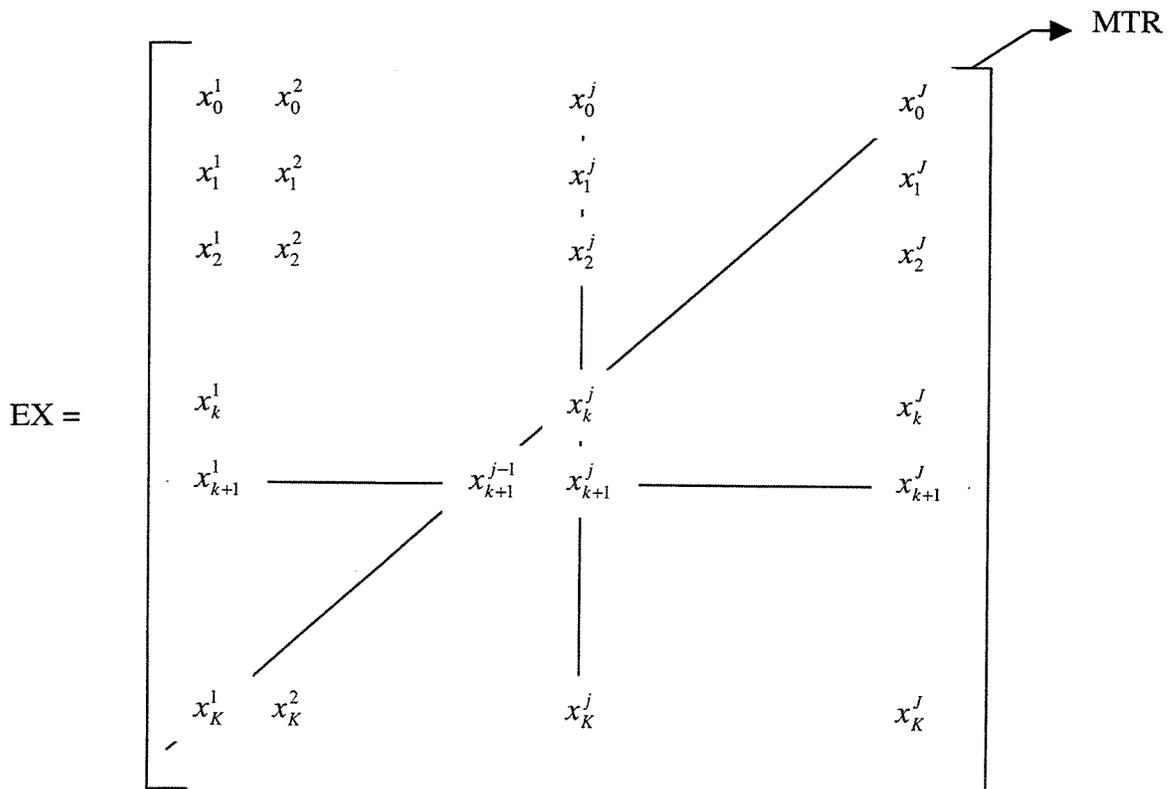


Fig. 2.2.a - Matriz  $EX$  com o vetor de estado do Modelo de Tempo Real - MRT

É importante notar que o modelo MTR envolve as seguintes hipóteses básicas importantes:

- o controle é feito somente através da variação do tempo de percurso dos trens entre estações;
- o tempo de parada dos trens nas plataformas é assumido igual ao estritamente necessário para o embarque / desembarque dos passageiros;
- utiliza apenas as informações sobre o instante de partida dos trens nas plataformas.

Estas características conflitam com a prática de controle utilizada nas linhas de metrô atuais:

- o controle atua no tempo de percurso entre estações e tempo de parada nas plataformas;
- não existe informação que permita ao centro de controle saber qual é o tempo de parada nas plataformas estritamente necessário para o embarque / desembarque dos passageiros;
- são utilizadas não somente as informações sobre os instantes de partida dos trens nas plataformas mas também as informações sobre os instantes de chegada dos mesmos.

### 2.3 Modelo de Tempo Real Estendido (MTRE)

Nesta seção é proposto um novo modelo de tráfego de trens, que pode ser considerado uma extensão do modelo MTR descrito na seção 2.2, mais adequado à prática de controle utilizada nas linhas de metrô atuais. As características básicas deste novo modelo são:

- tráfego de trens descrito através dos desvios, em relação ao Programa Horário Nominal, dos instantes de chegada e partida dos trens nas plataformas;
- controle envolvendo o tempo de percurso dos trens entre estações e o tempo de parada dos mesmos nas plataformas;
- antecipando o problema de controle, as incertezas do modelo e as restrições sobre suas variáveis são explicitadas.

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

## Modelo Matemático

Sejam:

$x_k^i$  : desvio horário, em relação ao programado, do trem  $i$  saindo da plataforma  $k$ ;

$y_k^i$  : desvio horário, em relação ao programado, do trem  $i$  chegando na plataforma  $k$ ;

$u_{k-1}^i$  : variação do tempo de percurso, em relação ao programado, aplicada no trem  $i$  ao sair da plataforma  $k - 1$ ;

$v_{k-1}^i$  : perturbação do tempo de percurso do trem  $i$  da plataforma  $k - 1$  até a próxima estação;

$R_{k-1}^U$  : limite superior da variação do tempo de percurso, em relação ao programado, aplicada nos trens saindo da plataforma  $k - 1$ ;

$-R_{k-1}^L$  : limite inferior da variação do tempo de percurso, em relação ao programado, aplicada nos trens saindo da plataforma  $k - 1$ ;

$V_{k-1}$  : limitante da perturbação do tempo de percurso dos trens da plataforma  $k - 1$  até a próxima estação;

$s_k^i$  : variação do tempo de parada, em relação ao programado, aplicada no trem  $i$  na plataforma  $k$ ;

$w_k^i$  : perturbação do tempo de parada do trem  $i$  na plataforma  $k$ ;

$P_k^U$  : tempo de parada máximo na plataforma  $k$  previsto no Programa Horário Nominal;

$P_k^L$  : tempo de parada mínimo na plataforma  $k$  previsto no Programa Horário Nominal;

$P_k^H$  : tempo de parada para embarque e desembarque de todos os passageiros na plataforma  $k$ , requerido pelo intervalo entre trens sucessivos, previsto no Programa Horário Nominal;

$P_k$  : tempo de parada programado na plataforma  $k$ , previsto no Programa Horário Nominal;

$W_k^U$  : limitante superior da perturbação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$ ;

$W_k^L$  : limitante inferior da perturbação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$ ;

$c_k^U$  : limite superior do coeficiente de variação do tempo de parada na plataforma  $k$  relativo à variação, em relação ao programado, do intervalo entre trens;

$c_k^L$  : limite inferior do coeficiente de variação do tempo de parada na plataforma  $k$  relativo à variação, em relação ao programado, do intervalo entre trens;

$H_k^U$  : limite superior do desvio do intervalo entre trens, em relação ao programado para os trens saindo da plataforma  $k$ ;

$-H_k^L$  : limite inferior do desvio do intervalo entre trens, em relação ao programado para os trens saindo da plataforma  $k$ ;

A figura 2.3.a a seguir ilustra os desvios horários de saída e chegada das plataformas de passageiros:

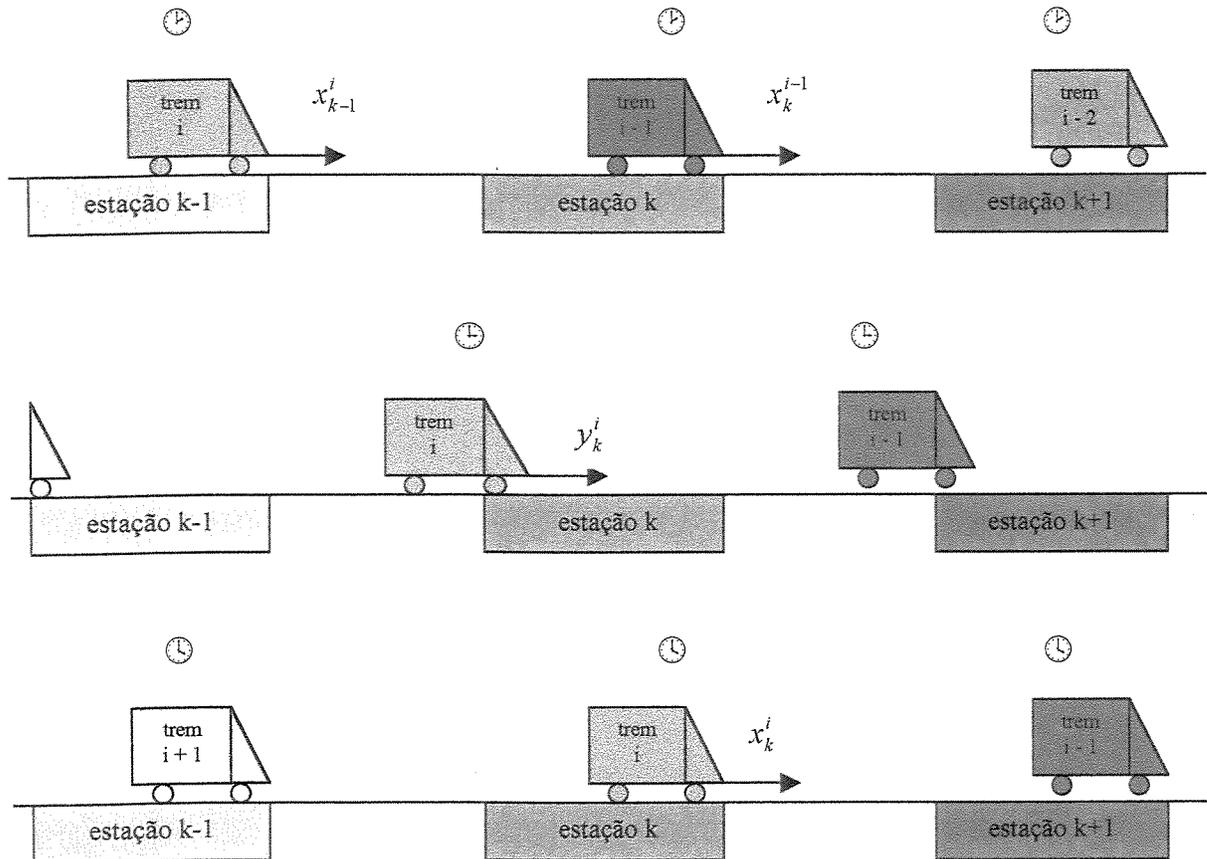


Fig. 2.3.a - Ilustração dos desvios horários de saída e chegada dos trens nas plataformas de passageiros

Tem-se:

Equações de percurso do trem entre plataformas.

$$y_k^i = x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + v_{k-1}^i \quad (2.12)$$

$$-R_{k-1}^L \leq u_{k-1}^i \leq R_{k-1}^U \quad (2.13)$$

$$-V_{k-1} \leq v_{k-1}^i \leq V_{k-1} \quad (2.14)$$

Equações de parada do trem em plataforma:

$$x_k^i = y_k^i + s_k^i + w_k^i \quad (2.15)$$

$$P_k^L \leq s_k^i + P_k \leq P_k^U \quad (2.16)$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k (x_k^i - x_k^{i-1}) \quad (2.17)$$

$$-W_k^L \leq w_k^i \leq W_k^U \quad (2.18)$$

$$c_k^L \leq c_k \leq c_k^U \quad (2.19)$$

É fácil verificar que a equação (2.16) representa a obediência do tempo de parada na plataforma aos seus limites superior e inferior. A equação (2.17) representa a variação permitida ao controle de parada  $s_k^i$  decorrente da folga de tempo de parada prevista no Programa Horário Nominal  $P_k^H - P_k$ , modulada pela variação do tempo de parada em função da variação do intervalo entre trens  $c_k (x_k^i - x_k^{i-1})$  em relação ao previsto no Programa Horário Nominal. As equações (2.18) e (2.19) representam as incertezas sobre a perturbação de parada  $w_k^i$  e sobre o fator  $c_k$ .

Restrições de segurança impõem ainda sobre o intervalo entre trens sucessivos, a restrição:

$$-H_k^L \leq x_k^i - x_k^{i-1} \leq H_k^U \quad (2.20)$$

É importante notar que a utilização do desvio do instante de chegada dos trens na plataformas, permitiu separar a descrição do tráfego de trens em duas etapas sucessivas: percurso entre estações e parada na plataforma. Os principais benefícios são:

- permite o controle independente do tempo de percurso entre estações e do tempo de parada nas plataformas;
- separou as incertezas do modelo do percurso entre estações das do modelo de parada nas plataformas;
- a medida do desvio do instante de chegada nas plataformas permite estimar as incertezas do percurso entre estações, reduzindo a incerteza global do modelo de tráfego.

# Capítulo 3

## Regulação do Tráfego de Trens

### 3.1 Introdução

Conforme visto no capítulo 2, o tráfego de trens em uma linha de metrô apresenta comportamento instável e é descrito por modelo contendo significativa parcela de incertezas, porque depende da demanda de passageiros e perturbações ao longo das viagens dos trens, ambos de natureza aleatória.

Do ponto de vista dos passageiros, é necessário controlar o tráfego dos trens de forma a diminuir o tempo de espera nas estações, manter a lotação dos trens dentro dos níveis adequados de conforto e promover rapidez nos traslados compatível com as expectativas dos passageiros. Isto é obtido, mantendo os intervalos entre trens sucessivos tão próximos quanto possível de seus valores nominais. Por outro lado, ao se considerar conexões com outros sistemas de transporte, a entrada e a saída de trens na linha em função da variação da demanda de passageiros ao longo do período de operação comercial, o tráfego de trens deve ser controlado de forma que os horários dos trens também sejam mantidos próximos de seus valores nominais. Considerando, ainda, o interesse de minimizar custos operacionais por parte da entidade operadora da linha, o controle dos trens também não deve se afastar dos valores nominais requeridos pelo Programa Horário Nominal [11], [4].

As ações de controle consistem em instruções dadas ao trens, através da comunicação entre o sistema supervisor de controle e os computadores à bordo dos trens, que causam o aumento ou diminuição dos tempo de parada nas estações e/ou o aumento ou diminuição da velocidade e aceleração nos percursos inter-estações. O controle é limitado naturalmente por restrições de velocidade máxima, tempo mínimo de parada e regras de segurança impostas pela sinalização da linha. As regras de segurança e a lotação máxima desejada para os trens impõem restrições, respectivamente sobre o intervalo mínimo e máximo entre dois trens consecutivos. Essas limitações resultam em restrições aos desvios horários dos trens em relação ao previsto no Programa Horário Nominal.

Assim sendo, o controle de tráfego para bem operar uma linha metroviária deve representar uma solução de compromisso entre três objetivos cujas variações devem ser minimizadas (horário, intervalo entre trens e esforço de controle) e que seja robusta frente às incertezas do modelo de tráfego, respeitando as restrições sobre suas variáveis.

Neste capítulo, baseada no Modelo de Tempo Real Estendido MTRE apresentado na seção 2.3, será apresentada uma nova formulação para o problema de regulação do tráfego de trens em uma linha de metrô operando em regime aberto.

Ao longo deste capítulo, bem como no restante deste trabalho será utilizada a seguinte convenção: para duas matrizes reais  $n \times m$   $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ ,  $A \leq B$  é equivalente a  $a_{ij} \leq b_{ij}$  para todo  $i, j$  tal que  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ .  $A \geq 0$  é equivalente a  $a_{ij} \geq 0$  e  $|A| = (|a_{ij}|)$ . Também  $I_p$  e  $1_p$  representam respectivamente a Matriz identidade  $p \times p$  e o vetor  $p \times 1$  com todas as componentes iguais à unidade.

### 3.2 Modelo de Tráfego de Trens

Considera-se uma linha de metrô operando em regime aberto com  $N$  plataformas (figura 3.2.a), descrita pelo Modelo de Tempo Real Estendido discutido no capítulo anterior.

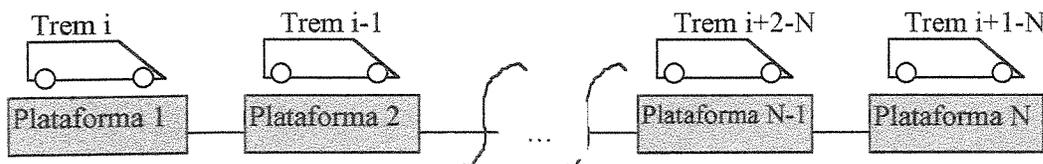


Fig. 3.2.a - Linha aberta de metrô com  $N$  plataformas

Sejam:

$x_k^i$ : desvio horário, em relação ao programado, do trem  $i$  saindo da plataforma  $k$ ;

$x_{k-1}^i$ : desvio horário, em relação ao programado, do trem  $i$  saindo da plataforma  $k - 1$ ;

$x_k^{i-1}$ : desvio horário, em relação ao programado, do trem  $i - 1$  saindo da plataforma  $k$ ;

$y_k^i$ : desvio horário, em relação ao programado, do trem  $i$  chegando na plataforma  $k$ ;

$u_{k-1}^i$ : variação do tempo de percurso, em relação ao programado, aplicada no trem  $i$  ao sair da plataforma  $k - 1$ ;

$v_{k-1}^i$ : perturbação do tempo de percurso do trem  $i$  da plataforma  $k - 1$  até a próxima estação;

$R_{k-1}^U$ : limite superior da variação do tempo de percurso, em relação ao programado, aplicada nos trens saindo da plataforma  $k - 1$ ;

$-R_{k-1}^L$  : limite inferior da variação do tempo de percurso, em relação ao programado, aplicada nos trens saindo da plataforma  $k - 1$ ;

$V_{k-1}$  : limitante da perturbação do tempo de percurso dos trens da plataforma  $k - 1$  até a próxima estação;

$s_k^i$  : variação do tempo de parada, em relação ao programado, aplicada no trem  $i$  na plataforma  $k$ ;

$w_k^i$  : perturbação do tempo de parada do trem  $i$  na plataforma  $k$ ;

$P_k^U$  : tempo de parada máximo na plataforma  $k$  previsto no Programa Horário Nominal;

$P_k^L$  : tempo de parada mínimo na plataforma  $k$  previsto no Programa Horário Nominal;

$P_k^H$  : tempo de parada para embarque e desembarque de todos os passageiros na plataforma  $k$ , requerido pelo intervalo entre trens sucessivos, previsto no Programa Horário Nominal;

$P_k$  : tempo de parada programado na plataforma  $k$ , previsto no Programa Horário Nominal;

$W_k^U$  : limitante superior da perturbação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$ ;

$W_k^L$  : limitante inferior da perturbação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$ ;

$c_k^U$  : limite superior do coeficiente de variação do tempo de parada na plataforma  $k$  relativo à variação, em relação ao programado, do intervalo entre trens;

$c_k^L$  : limite inferior do coeficiente de variação do tempo de parada na plataforma  $k$  relativo à variação, em relação ao programado, do intervalo entre trens;

$H_k^U$  : limite superior do desvio do intervalo entre trens, em relação ao programado para os trens saindo da plataforma  $k$ ;

$-H_k^L$  : limite inferior do desvio do intervalo entre trens, em relação ao programado para os trens saindo da plataforma  $k$ ;

Tem-se:

Equações de percurso do trem entre plataformas.

$$y_k^i = x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + v_{k-1}^i \quad (3.1)$$

$$-R_{k-1}^L \leq u_{k-1}^i \leq R_{k-1}^U \quad (3.2)$$

$$-V_{k-1} \leq v_{k-1}^i \leq V_{k-1} \quad (3.3)$$

Equações de parada do trem em plataforma:

$$x_k^i = y_k^i + s_k^i + w_k^i \quad (3.4)$$

$$P_k^L \leq s_k^i + P_k \leq P_k^U \quad (3.5)$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k (x_k^i - x_k^{i-1}) \quad (3.6)$$

$$-W_k^L \leq w_k^i \leq W_k^U \quad (3.7)$$

$$c_k^L \leq c_k \leq c_k^U \quad (3.8)$$

Restrições de segurança impõem ainda sobre o intervalo entre trens sucessivos, a restrição:

$$-H_k^L \leq x_k^i - x_k^{i-1} \leq H_k^U \quad (3.9)$$

### 3.3 Problema de Regulação

O objetivo da regulação de tráfego de trens em uma linha de metrô é a determinação dos controles de tempo de percurso e tempo de parada em plataforma dos trens, durante a operação comercial da linha, procurando obter a aderência do tráfego de trens com o previsto no Programa Horário Nominal

Neste trabalho, considerando a linha de metrô (figura 3.2.a) e as equações do modelo MTRE apresentadas na seção 3.2, será utilizado o seguinte critério de desempenho de regulação:

$$J_i = \sum_{k=1}^N J_i^k$$

$$J_i^k = \max_{w_k, v_{k-1}, c_k} p |x_k^{i-k+1}| + q |x_k^{i-k+1} - x_k^{i-k}| + r |u_{k-1}^{i-k+1}| + z |s_k^{i-k+1}|$$

onde  $p, q, r, z$  são escalares positivos para ponderação dos componentes do critério e a maximização em  $w_k, v_{k-1}, c_k$  corresponde ao pior caso dado a incerteza de suas variáveis.

Pode ser visto em (3.1), (3.4), que  $x_k^{i-k+1}$ , do ponto de vista de controle, depende apenas de  $u_{k-1}^{i-k+1}$ ,  $s_k^{i-k+1}$ . Isto faz com que a minimização do critério global  $J_i$  possa ser obtida da minimização de cada um dos critérios  $J_i^K$  isoladamente.

Pode ser verificado também que  $J_i^K$  corresponde ao critério de desempenho da regulação de um trem  $i-k+1$  saindo da plataforma  $k-1$  em direção à plataforma  $k$ . No trajeto da plataforma  $k-1$  até a saída da plataforma  $k$ , o trem  $i-k+1$  recebe um controle de percurso  $u_{k-1}^{i-k+1}$  no evento de sua saída da plataforma  $k-1$  e um controle de tempo de parada  $s_k^{i-k+1}$  no evento de sua chegada na plataforma  $k$ .

Para determinação dos controles dos trens,  $u$  nos eventos de saída de plataforma e  $s$  nos eventos de chegada em plataforma, são propostas, a seguir, duas formulações de controle preditivo [12], aqui denominadas respectivamente de Problema 1 e Problema 2.

### 3.3.1 Formulação do Problema 1

Considere as relações:

$$-\gamma_x \leq x_k^i \leq \gamma_x \quad (3.10)$$

$$-\gamma_h \leq x_k^i - x_k^{i-1} \leq \gamma_h \quad (3.11)$$

$$-\gamma_u \leq u_{k-1}^i \leq \gamma_u \quad (3.12)$$

$$-\gamma_s \leq s_k^i \leq \gamma_s \quad (3.13)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \geq 0 \quad (3.14)$$

**Evento:** Trem  $i$  partindo da plataforma  $k-1$ :

**Problema 1:** Dados  $x_k^{i-1}$ ,  $x_{k-1}^i$ , determinar  $u_{k-1}^i$  solução do problema mini-max:

$$\min \quad \max \quad p\gamma_x + q\gamma_h + r\gamma_u + z\gamma_s \quad (3.15)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \quad w, v, c$$

sujeito às equações (3.1)-(3.9), (3.10)-(3.14)

### 3.3.2 Solução do Problema 1

**Lema 3.1:** Considere as restrições lineares:

$$-\xi^L \leq Gz + Ev \leq \xi^U \quad (3.16)$$

$$-\eta^L \leq v \leq \eta^U \quad (3.17)$$

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

onde:  $z \in \mathfrak{R}^m$ ;  $v \in \mathfrak{R}^p$ ;  $\xi^L, \xi^U \in \mathfrak{R}^n$ ;  $\xi^L, \xi^U, \eta^L, \eta^U \geq 0$ ;  $E \geq 0$ .

Um vetor  $z$  é uma solução factível de (3.16) para todo  $v$  satisfazendo (3.17) se e somente se  $z$  é também uma solução factível de:

$$E\eta^L - \xi^L \leq Gz \leq \xi^U - E\eta^U$$

**Prova:**

As restrições (3.16) pode ser rescrita como:

$$Gz \leq \xi^U - Ev \quad (3.18)$$

$$-Gz \leq \xi^L + Ev \quad (3.19)$$

Por inspeção em (3.17) e (3.18) é fácil verificar que  $v = \eta^U$  é o pior caso de  $v$  (3.17) para (3.18):

$$Gz \leq \xi^U - E\eta^U$$

Analogamente,  $v = -\eta^L$  é o pior caso de  $v$  (3.17) para (3.19):

$$-Gz \leq \xi^L - E\eta^L$$

Consequentemente:

$$E\eta^L - \xi^L \leq Gz \leq \xi^U - E\eta^U$$

*c. q. d.*  $\square$

**Proposição 3.1:** O problema 1 é equivalente ao seguinte problema de programação linear:

$$\min \quad p\gamma_x + q\gamma_h + r\gamma_u + z\gamma_s \quad (3.20)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$W_k^L + V_{k-1} - \gamma_x \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i \leq \gamma_x - W_k^U - V_{k-1} \quad (3.21)$$

$$W_k^L + V_{k-1} - \gamma_h \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1} \leq \gamma_h - W_k^U - V_{k-1} \quad (3.22)$$

$$-\gamma_u \leq u_{k-1}^i \leq \gamma_u \quad (3.23)$$

$$-\gamma_s \leq s_k^i \leq \gamma_s \quad (3.24)$$

$$P_k^L - P_k \leq s_k^i \leq P_k^U - P_k \quad (3.25)$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k^U W_k^U + c_k^U V_{k-1} + c_k^U (x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1}) \quad (3.26)$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k^L W_k^U + c_k^L V_{k-1} + c_k^L (x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1}) \quad (3.27)$$

$$W_k^L + V_{k-1} - H_k^L \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1} \leq H_k^U - W_k^U - V_{k-1} \quad (3.28)$$

$$-R_{k-1}^L \leq u_{k-1}^i \leq R_{k-1}^U \quad (2.29)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \geq 0 \quad (3.30)$$

**Prova:**

Substituindo (3.1), (3.4) em (3.10), (3.11), (3.6), (3.9), o problema 1 fica:

$$\begin{array}{ll} \min & \max \quad p\gamma_x + q\gamma_h + r\gamma_u + z\gamma_s \\ & \gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \quad w, v, c \end{array}$$

sujeito às equações:

$$-\gamma_x \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + v_{k-1}^i + s_k^i + w_k^i \leq \gamma_x \quad (3.31)$$

$$-\gamma_h \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + v_{k-1}^i + s_k^i + w_k^i - x_k^{i-1} \leq \gamma_h \quad (3.32)$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k (x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + v_{k-1}^i + s_k^i + w_k^i - x_k^{i-1}) \quad (3.33)$$

$$-H_k^L \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + v_{k-1}^i + s_k^i + w_k^i - x_k^{i-1} \leq H_k^U \quad (3.34)$$

$$-\gamma_u \leq u_{k-1}^i \leq \gamma_u$$

$$-R_{k-1}^L \leq u_{k-1}^i \leq R_{k-1}^U$$

$$-\gamma_s \leq s_k^i \leq \gamma_s$$

$$P_k^L - P_k \leq s_k^i \leq P_k^U - P_k$$

$$-W_k^L \leq w_k^i \leq W_k^U \quad (3.35)$$

$$-V_{k-1} \leq v_{k-1}^i \leq V_{k-1} \quad (3.36)$$

$$c_k^L \leq c_k \leq c_k^U$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \geq 0$$

Aplicando o Lema 3.1 em (3.31)-(3.34), (3.35), (3.36), resulta:

$$\begin{array}{ll} \min & \max \quad p\gamma_x + q\gamma_h + r\gamma_u + z\gamma_s \\ & \gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \quad c \end{array} \quad (3.37)$$

sujeito às equações:

$$W_k^L + V_{k-1} - \gamma_x \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i \leq \gamma_x - W_k^U - V_{k-1}$$

$$W_k^L + V_{k-1} - \gamma_h \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1} \leq \gamma_h - W_k^U - V_{k-1}$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k W_k^U + c_k V_{k-1} + c_k (x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1}) \quad (3.38)$$

$$W_k^L + V_{k-1} - H_k^L \leq x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1} \leq H_k^U - W_k^U - V_{k-1}$$

$$-\gamma_u \leq u_{k-1}^i \leq \gamma_u$$

$$-R_{k-1}^L \leq u_{k-1}^i \leq R_{k-1}^U$$

$$-\gamma_s \leq s_k^i \leq \gamma_s$$

$$P_k^L - P_k \leq s_k^i \leq P_k^U - P_k$$

$$c_k^L \leq c_k \leq c_k^U \quad (3.39)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \geq 0$$

É fácil verificar que (3.38) é satisfeita para todo  $c_k$  (3.39) se e somente se é simultaneamente satisfeita para  $c_k^L, c_k^U$ . Desta forma, (3.37) e (3.38) correspondem à:

$$\begin{aligned} \min \quad & p\gamma_x + q\gamma_h + r\gamma_u + z\gamma_s \\ & \gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s \\ s_k^i \geq & P_k^H - P_k + c_k^U W_k^U + c_k^U V_{k-1} + c_k^U (x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1}) \\ s_k^i \geq & P_k^H - P_k + c_k^L W_k^U + c_k^L V_{k-1} + c_k^L (x_{k-1}^i + u_{k-1}^i + s_k^i - x_k^{i-1}) \end{aligned}$$

completando a prova.  $\square$

### 3.3.3 Formulação do Problema 2

**Evento:** Trem  $i$  chegando na plataforma  $k$ :

**Problema 2:** Dados  $y_k^i, x_k^{i-1}$ , determinar  $s_k^i$  solução do problema mini-max:

$$\begin{aligned} \min \quad & \max \quad p\gamma_x + q\gamma_h + z\gamma_s \quad (3.40) \\ & \gamma_x, \gamma_h, \gamma_s \quad w, c \end{aligned}$$

sujeito às equações (3.4)-(3.9), (3.10)-(3.14)

### 3.3.4 Solução do Problema 2

**Proposição 3.2:** O problema 2 é equivalente ao seguinte problema de programação linear:

$$\min \quad p\gamma_x + q\gamma_h + z\gamma_s \quad (3.41)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_s$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$W_k^L - \gamma_x \leq y_k^i + s_k^i \leq \gamma_x - W_k^U \quad (3.42)$$

$$W_k^L - \gamma_h \leq y_k^i + s_k^i - x_k^{i-1} \leq \gamma_h - W_k^U \quad (3.43)$$

$$-\gamma_s \leq s_k^i \leq \gamma_s \quad (3.44)$$

$$P_k^L - P_k \leq s_k^i \leq P_k^U - P_k \quad (3.45)$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k^U W_k^U + c_k^U (y_k^i + s_k^i - x_k^{i-1}) \quad (3.46)$$

$$s_k^i \geq P_k^H - P_k + c_k^L W_k^U + c_k^L (y_k^i + s_k^i - x_k^{i-1}) \quad (3.47)$$

$$W_k^L - H_k^L \leq y_k^i + s_k^i - x_k^{i-1} \leq H_k^U - W_k^U \quad (3.48)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_s \geq 0 \quad (3.49)$$

**Prova:**

Análoga à proposição 3.1.  $\square$

Para finalizar este capítulo, é oportuno realçar os seguintes aspectos:

- O problema 1 corresponde a um problema de controle preditivo robusto de dois passos porque o trem ao sair de uma plataforma tem à sua frente duas etapas de controle: percurso entre estações e parada na plataforma seguinte. As incertezas do modelo combinam as incertezas paramétricas com as perturbações das duas etapas de controle. Nessas condições o controle obtido tem um carácter conservativo.
- O problema 2 corresponde a um problema de controle preditivo robusto de 1 passo porque o trem ao chegar em uma plataforma tem à sua frente apenas a etapa de controle parada em plataforma. As incertezas envolvidas são as incertezas paramétricas e a perturbação de parada em plataforma. Por envolver menos incertezas, o controle obtido é menos conservativo que o do problema 1 e corresponde a um refinamento da solução fornecida anteriormente pelo mesmo.
- A utilização combinada dos problemas 1 e 2 permite reduzir a incerteza global do modelo de tráfego, resultando em controles menos conservativos que os obtidos somente com o problema 1. A utilização isolada do problema 1 corresponde a ignorar a informação de chegada do trem em plataforma, opção esta presente nas abordagens anteriores do problema de regulação robusta [16], [17].

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

# Capítulo 4

## Resultados Numéricos

Neste capítulo serão apresentados exemplos numéricos que ilustram o desempenho dos resultados apresentados no capítulo anterior.

Pode-se destacar duas políticas de controle para a operação de um sistema metroviário: uma privilegia a economia operacional (política econômica) e a outra privilegia o desempenho do sistema em detrimento do custo operacional (política de alto desempenho). A estratégia utilizada depende da política da companhia em relação aos passageiros, o horário de operação (horário de pico de demanda ou não) e a necessidade de conexão com outro sistema de transporte que torna importante o cumprimento dos horários. Os exemplos apresentados neste capítulo levam em consideração essas duas políticas operacionais.

### 4.1 Dados Utilizados

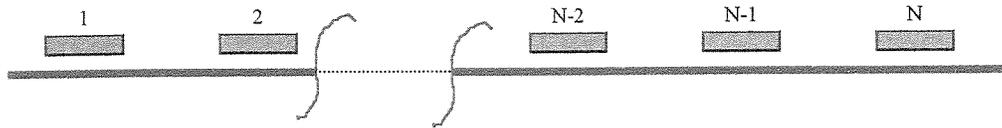


Fig. 4.1.a - Linha metrô aberta com  $N$  plataformas

Considerou-se uma linha metroviária com  $N = 10$  plataformas (figura 4.1.a) e vetor de parâmetros incertos  $c_k$  delimitados por:

$$c_k^U = [.210 \ .210 \ .210 \ .240 \ .260 \ .290 \ .210 \ .210 \ .210 \ .210]$$

$$c_k^L = [.189 \ .189 \ .189 \ .216 \ .234 \ .261 \ .189 \ .189 \ .189 \ .189]$$

Considerou-se também que o vetor de perturbação de tempo de percurso  $v_{k-1}$ , o vetor de perturbação de tempo de parada  $w_k$ , o controle de percurso  $u_{k-1}$  e o intervalo entre trens sucessivos  $(x_k^i - x_k^{i-1})$ , são delimitados respectivamente por (em segundos):

$$V_{k-1} = [2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 2.5]$$

$$W_k^L = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$W_k^U = [2.5 \quad 2.5 \quad 2.5]$$

$$R_{k-1}^L = R_{k-1}^U = [10 \quad 10 \quad 10]$$

$$H_k^L = H_k^U = [62 \quad 62 \quad 62]$$

A diferença entre o tempo de parada programado e o tempo de parada mínimo nas plataformas ao longo da via foi considerado como (em segundos):

$$P_k - P_k^L = [6 \quad 6 \quad 6 \quad 9 \quad 11 \quad 14 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6]$$

A diferença entre o tempo de parada máximo e o tempo de parada programado nas plataformas ao longo da via foi considerado como (em segundos):

$$P_k^U - P_k = [10 \quad 10 \quad 10]$$

A diferença entre o tempo de parada requerido pelo intervalo de trens sucessivos programado e o tempo de parada programado nas plataformas ao longo da via foi considerado como (em segundos):

$$P_k^H - P_k = [-2.6775; -2.6775; -2.6775; -3.0600; -3.3150; -3.6975; -2.6775; -2.6775; -2.6775; -2.6775]$$

É considerado que os componentes dos parâmetros  $c_k$  e as perturbações do tempo de percurso  $v_{k-1}$  e do tempo de parada  $w_k$  são variáveis aleatórias, uniformemente distribuídas dentro dos poliedros delimitados respectivamente por:

$$\begin{aligned} c_k^L &\leq c_k \leq c_k^U \\ -V_{k-1} &\leq v_{k-1}^i \leq V_{k-1} \\ -W_k^L &\leq w_k^i \leq W_k^U \end{aligned}$$

Para ilustrar o desempenho obtido com os diferentes tipos de regulação, serão apresentados um conjunto de 100 resultados de simulações dos intervalos entre trens  $(x_k^i - x_k^{i-1})$ , controles de percurso  $u_{k-1}^i$ , controles de parada  $s_k^i$ , atrasos de partida  $x_k^i$  e atrasos de chegada  $y_k^i$  de 10 trens em 10 plataformas, sendo que o trem 10, inicialmente se encontra na plataforma 1, o trem 9, na plataforma 2 e assim sucessivamente até o trem 1 na décima plataforma.

A condição inicial dos desvios de partida (em segundos) dos trens foi considerada como:

$$x_0 = [30 \quad -25 \quad -20 \quad -15 \quad -10 \quad 0 \quad 0 \quad 30 \quad 25 \quad 0]$$

onde, o primeiro elemento do vetor  $x_0$  refere-se ao trem 10 na plataforma 1, indicando que este está 30 segundos atrasado em relação ao seu horário nominal, o segundo elemento do vetor  $x_0$  refere-se ao trem 9 na plataforma 2, indicando que este está 25 segundos adiantado em relação ao seu horário nominal, e assim sucessivamente, até o último elemento do vetor  $x_0$ , o qual refere-se ao trem 1 na plataforma 10, indicando que este obedece exatamente o seu horário nominal.

No algoritmo de simulação, o seguinte procedimento recursivo é adotado: na saída das plataformas, o problema 1 é computado e são obtidos os controles de percurso  $u_{k-1}^i$  para os trens. A seguir, o percurso real é simulado, com os trens executando percursos até as plataformas seguintes, sendo considerado nestes percursos, os valores aleatórios para as perturbações de percurso em cada inter-estação ( $v_{k-1}^i$ ). Na parada na plataforma seguinte, o problema 2 é computado para todos os trens, obtendo-se os controles de parada  $s_k^i$ , para cada trem em cada plataforma. A seguir, é simulada a parada real de todos os trens, aplicando-se o tempo de parada obtido  $s_k^i$  e somando-se a este a perturbação de parada aleatória  $w_k^i$ , para cada trem em sua plataforma. Com este cálculo, obtém-se os desvios dos instantes de partida dos trens nas plataformas  $x_k^i$ , e os intervalos entre os trens ( $x_k^i - x_k^{i-1}$ ).

As figuras a seguir (figuras 4.1.b, 4.1.c, 4.1.d, 4.1.e, 4.1.f) ilustram este processo:

A figura 4.1.g ilustra a simulação completa envolvendo os 10 trens e 10 plataformas.

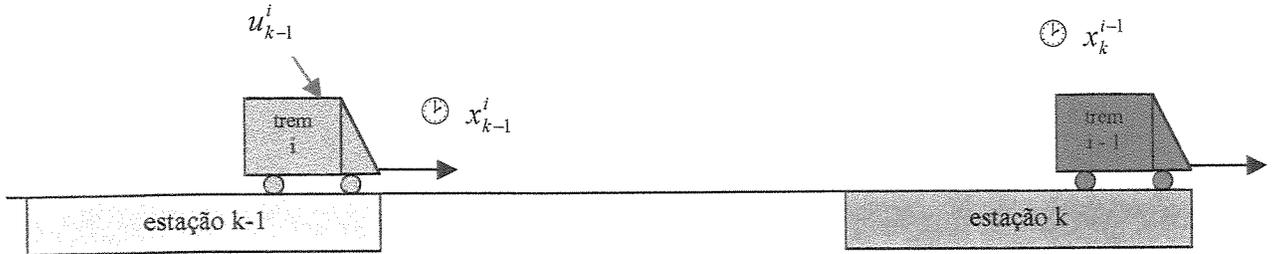


Fig. 4.1.b - Problema de Regulação 1: Dados:  $x_{k-1}^i$  e  $x_k^{i-1}$  determinar o controle de percurso  $u_{k-1}^i$  considerando as equações de percurso entre estações e parada na próxima estação

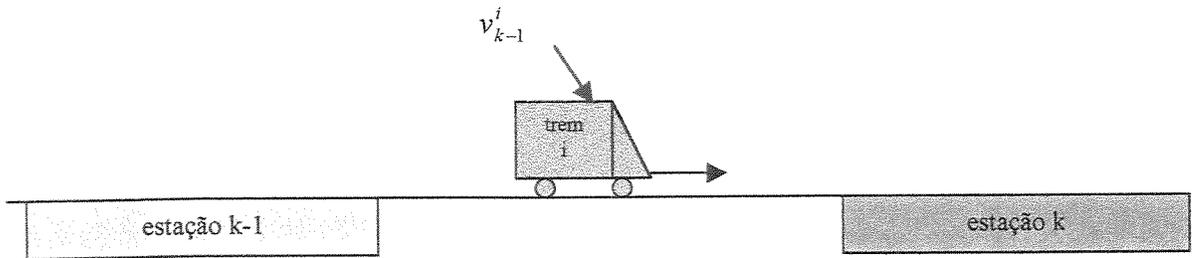


Fig. 4.1.c - Percurso real, considerando a perturbação de percurso  $v_{k-1}^i$  entre estações

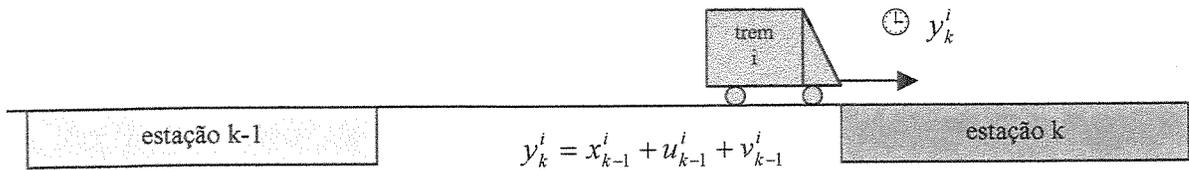


Fig. 4.1.d - Chegada na próxima estação

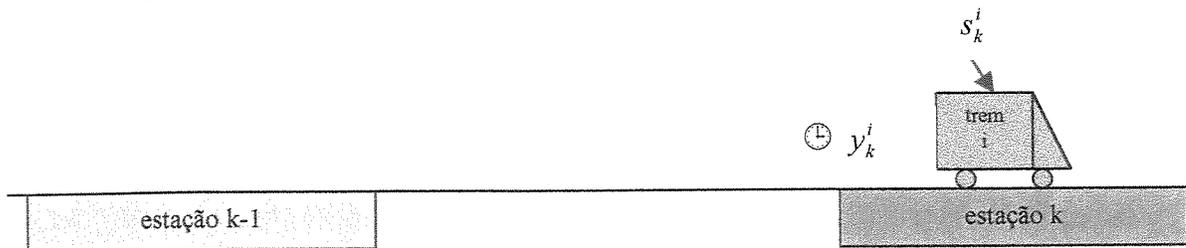


Fig. 4.1.e - Problema de Regulação 2: Dados:  $y_k^i$  e  $x_k^{i-1}$  determinar o controle de parada  $s_k^i$  considerando as equações de parada na estação

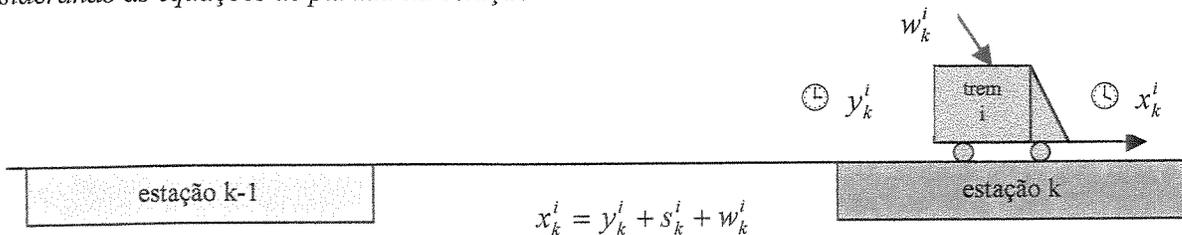


Fig. 4.1.f - Parada real, considerando a perturbação de parada  $w_k^i$  na estação

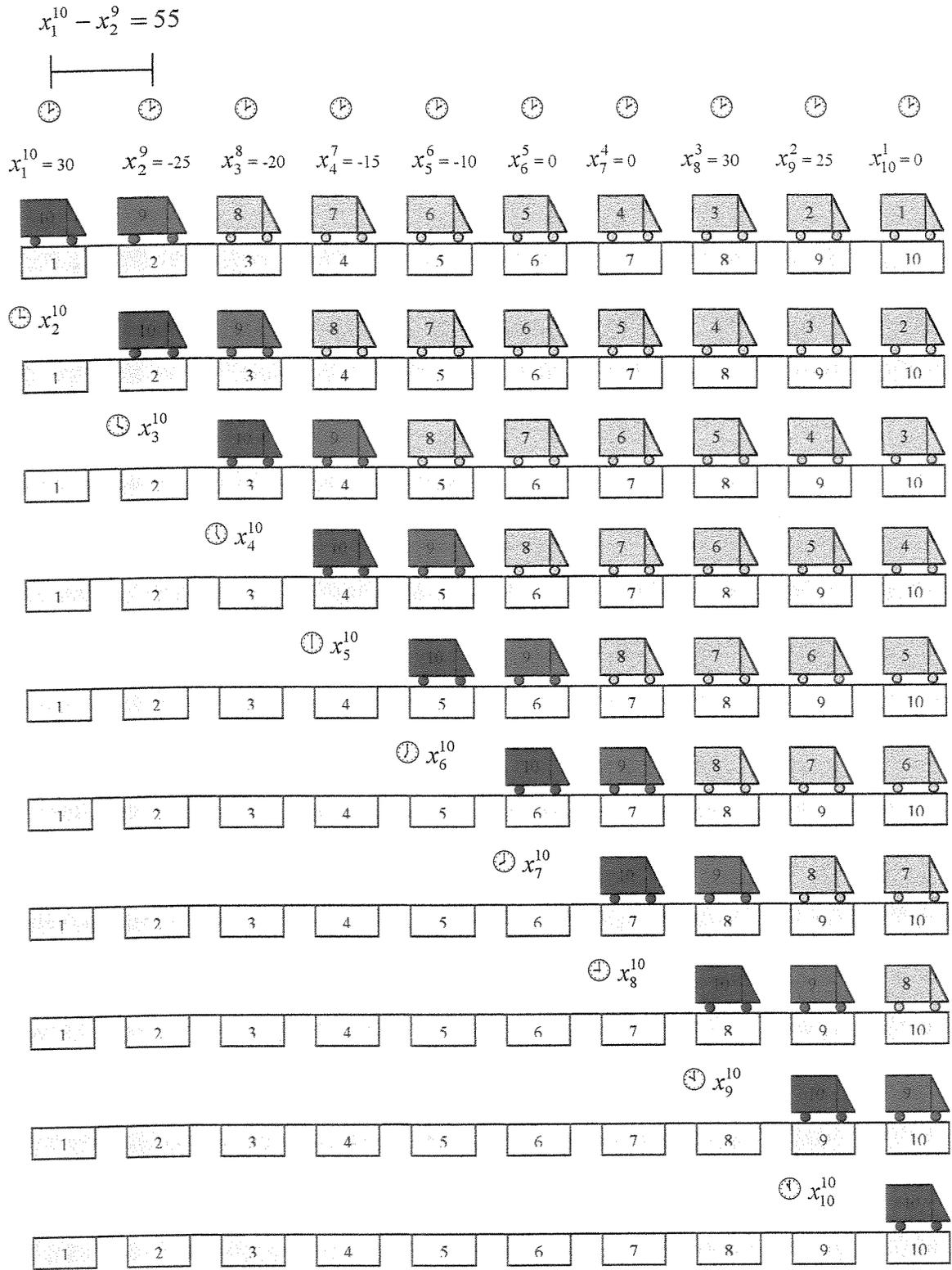


Fig. 4.1.g – Simulação da viagem do trem 10 desde a plataforma 1 até a plataforma 10

## 4.2 Política de Regulação Econômica

Para uma política operacional de regulação econômica, adotou-se a seguinte ponderação:

$$p = 2 \quad ; \quad q = 1 \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad z = 1$$

para o critério de desempenho do problema 1:

$$\min \quad p\gamma_x + q\gamma_h + r\gamma_u + z\gamma_s \quad (4.1)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_u, \gamma_s$$

Ainda dentro da política de regulação econômica, a seguinte ponderação:

$$p = 1 \quad ; \quad q = 1 \quad ; \quad z = 1$$

é adotada para o critério de desempenho do problema 2:

$$\min \quad p\gamma_x + q\gamma_h + z\gamma_s \quad (4.2)$$

$$\gamma_x, \gamma_h, \gamma_s$$

São consideradas as seguintes situações:

- Problema 1 e 2 robustos (ver figuras 4.2.a e 4.2.a1);
- Problema 1 e 2 nominais (ver figuras 4.2.b e 4.2.b1);

Os problemas 1 e 2 nominais corresponde a considerar os parâmetros  $c_k$  perfeitamente conhecidos, dados por:

$$c_k = \frac{c_k^U + c_k^L}{2}$$

e as perturbações  $w$ ,  $v$ , nulas, ou seja:

$$W_k^L = W_k^U = 0$$

$$V_{k-1} = 0$$

- Problema 1 nominal e Problema 2 robusto (ver figuras 4.2.c e 4.2.c1);
- Problema 1 robusto e Problema 2 nominal (ver figuras 4.2.d e 4.2.d1).

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SECÃO CIRCULANTE

Pode ser visto nas figuras 4.2.b, 4.2.b1, 4.2.d e 4.2.d1, nos gráficos de Partida Prematura, que a mesma não é nula em todas as plataformas, significando que passageiros deixaram de embarcar / desembarcar nas plataformas , violando a premissa básica de qualidade de oferta de transporte.

Do ponto de vista de desempenho de regulação, pode ser visto nos gráficos de Atraso e Intervalo que as situações em que a partida prematura é nula, podem ser consideradas equivalentes.

Vale a pena notar também o caráter refinador da solução do problema de regulação exercido pelo Problema 2. No caso em que o Problema 1 é nominal, utilizar o Problema 2 robusto conseguiu garantir Partida Prematura nula (ver figuras 4.2.b, 4.2.b1, 4.2.c e 4.2.c1).

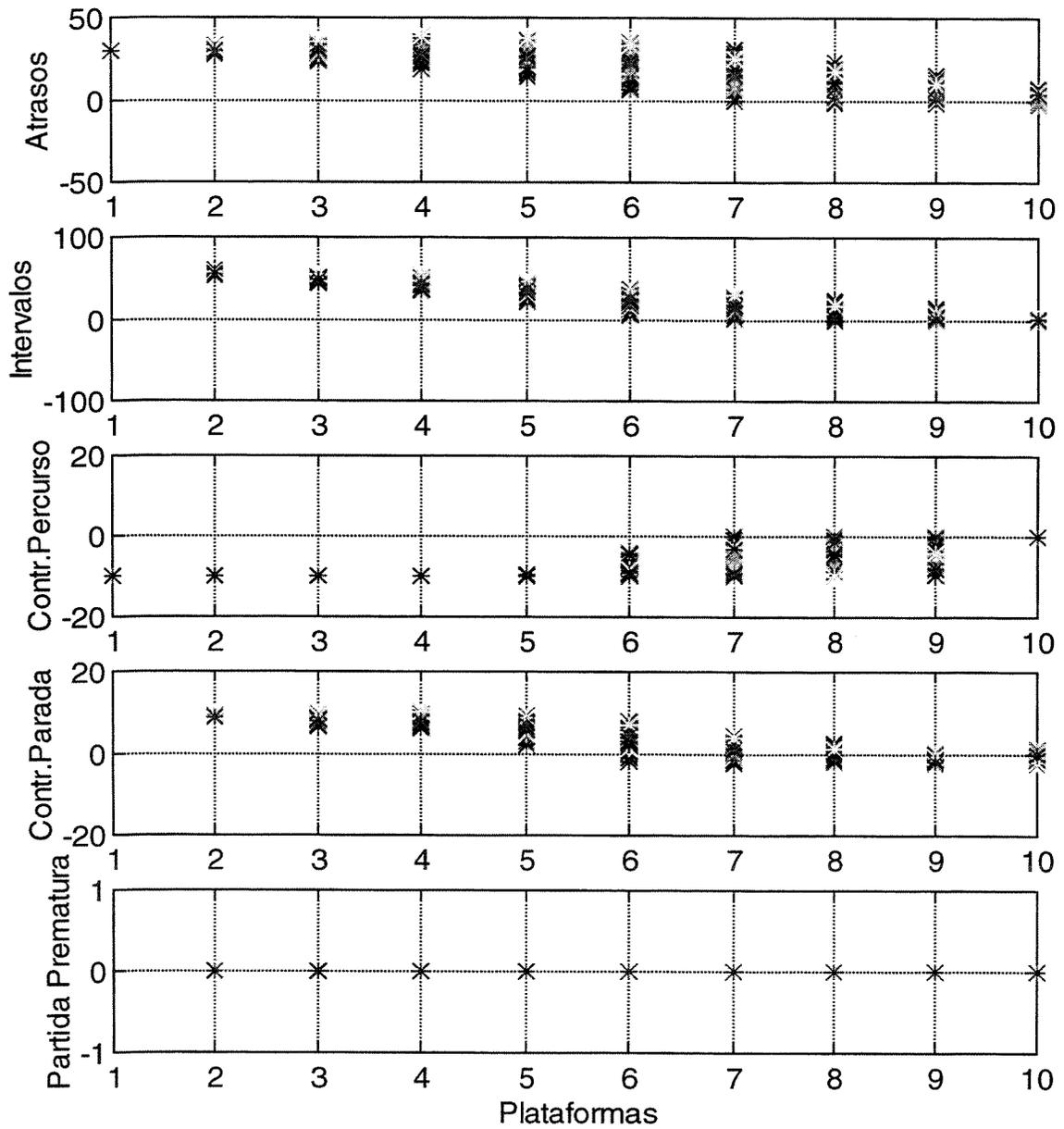


Fig. 4.2.a - Política de Regulação Econômica – Problemas 1 e 2 Robustos

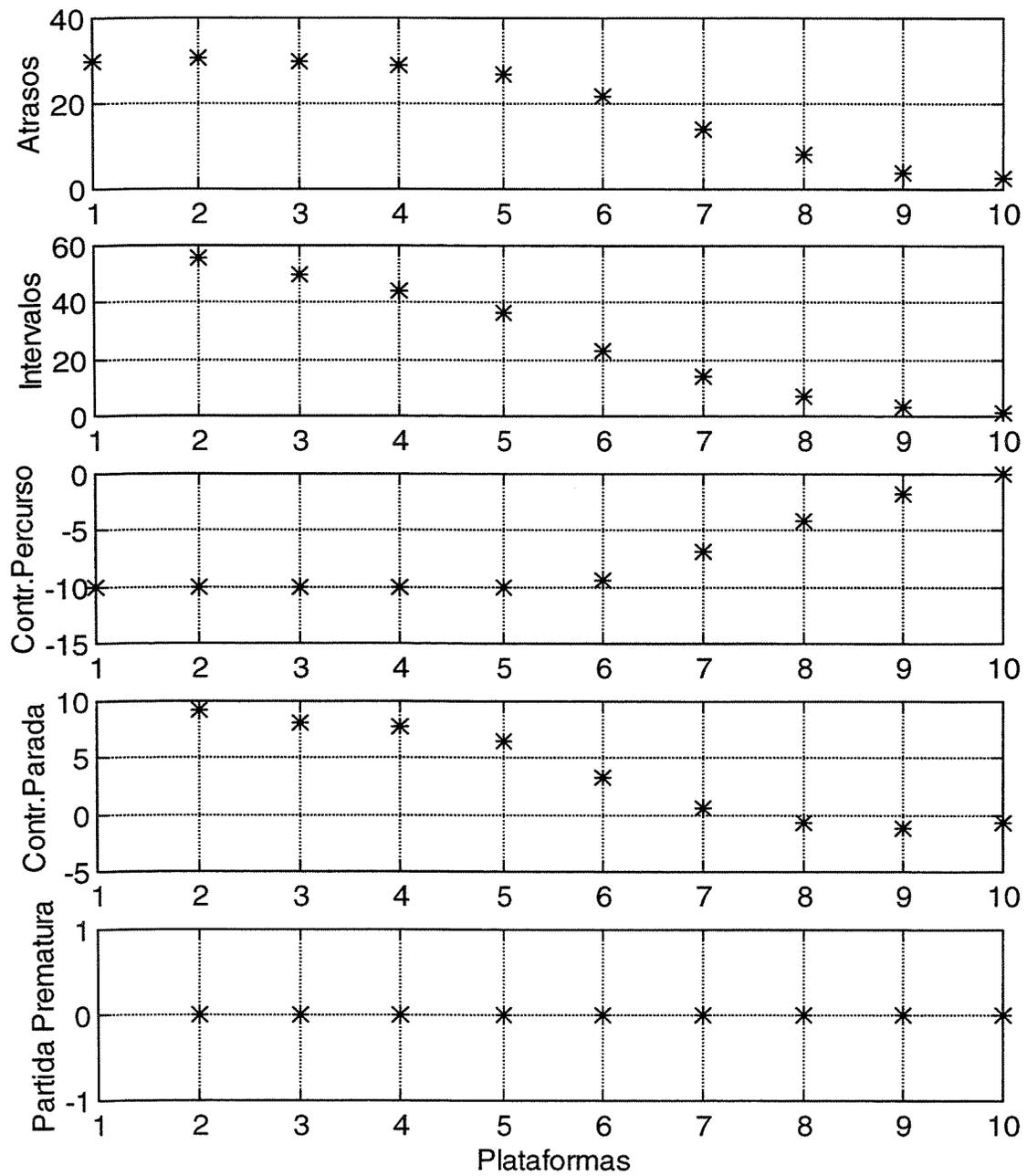


Fig. 4.2.a1 - Política de Regulação Econômica – Problemas 1 e 2 Robustos (Valores Médios)

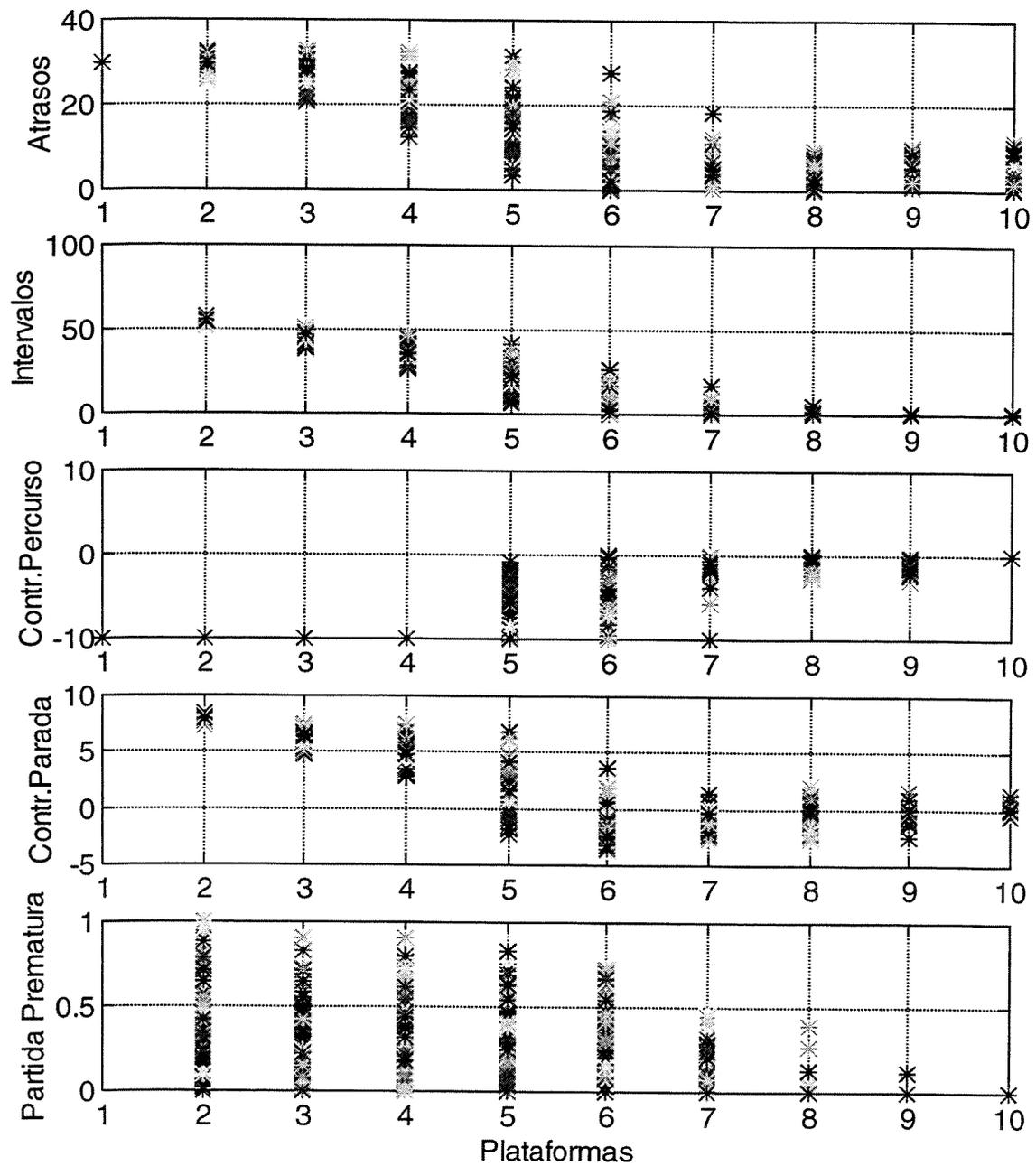


Fig. 4.2.b - Política de Regulação Econômica – Problemas 1 e 2 Nominais

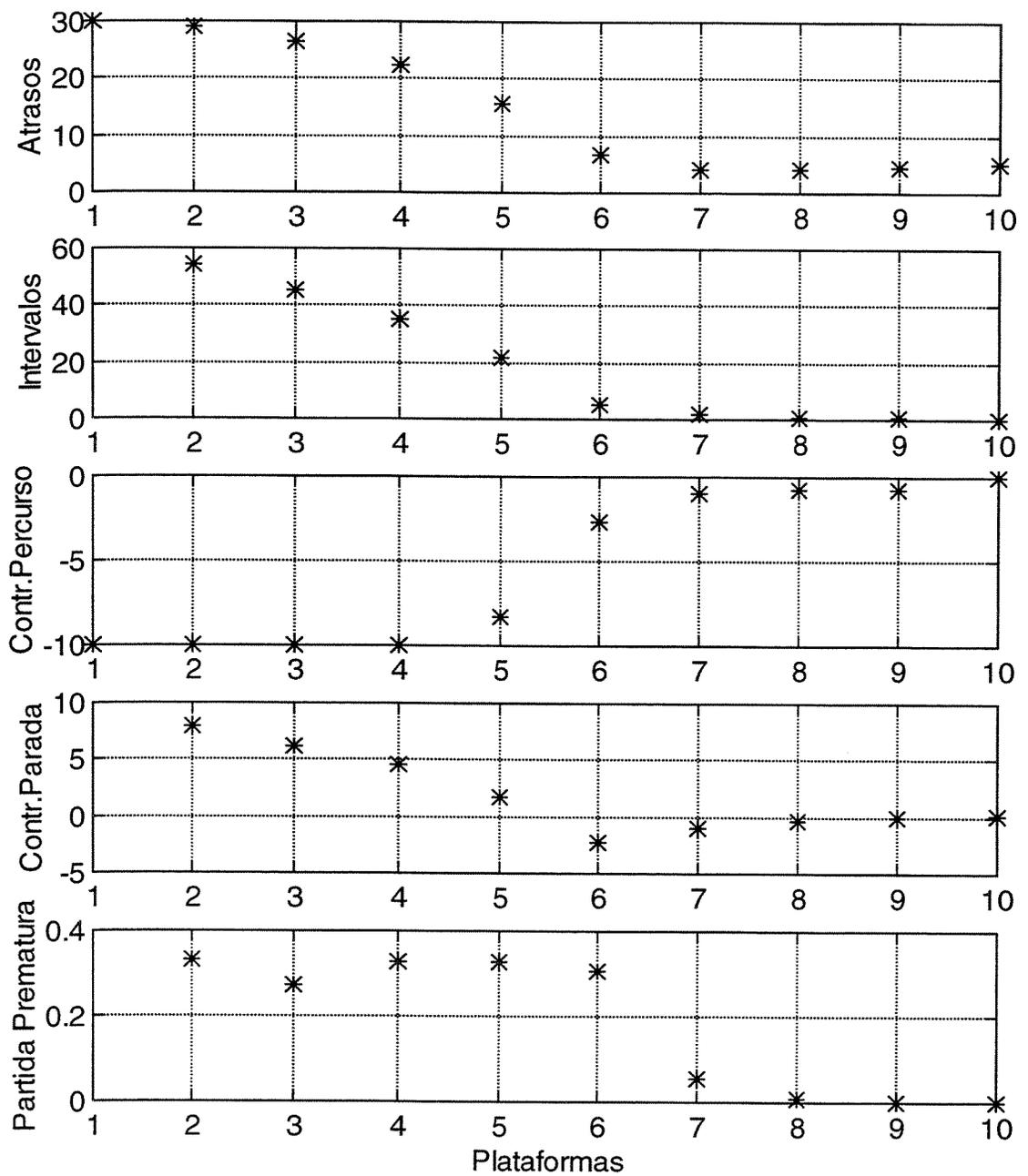


Fig. 4.2.b1 - Política de Regulação Econômica – Problemas 1 e 2 Nominais (valores Médios)

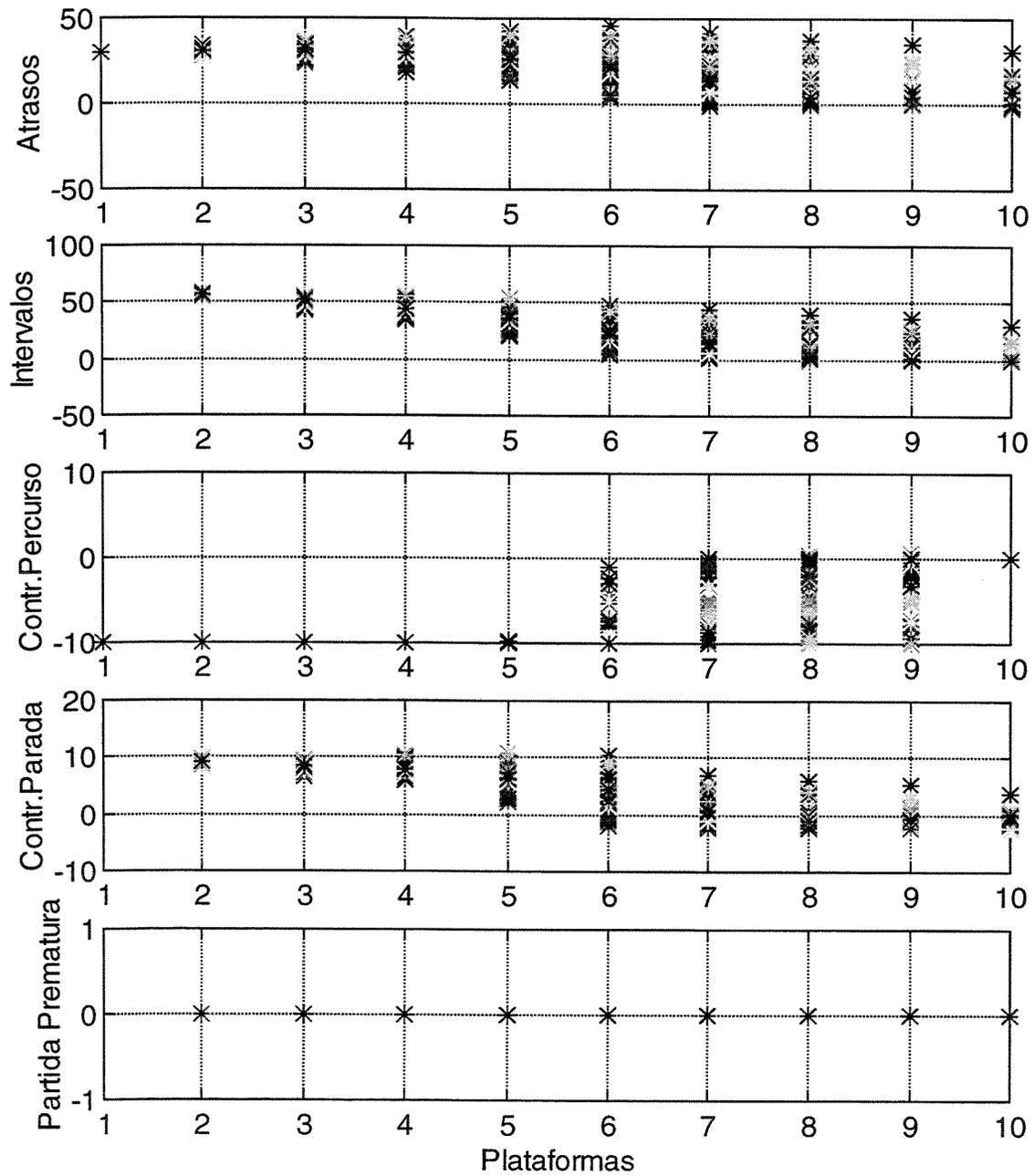


Fig. 4.2.c - Política de Regulação Econômica – Problema 1 Nominal e Problema 2 Robusto

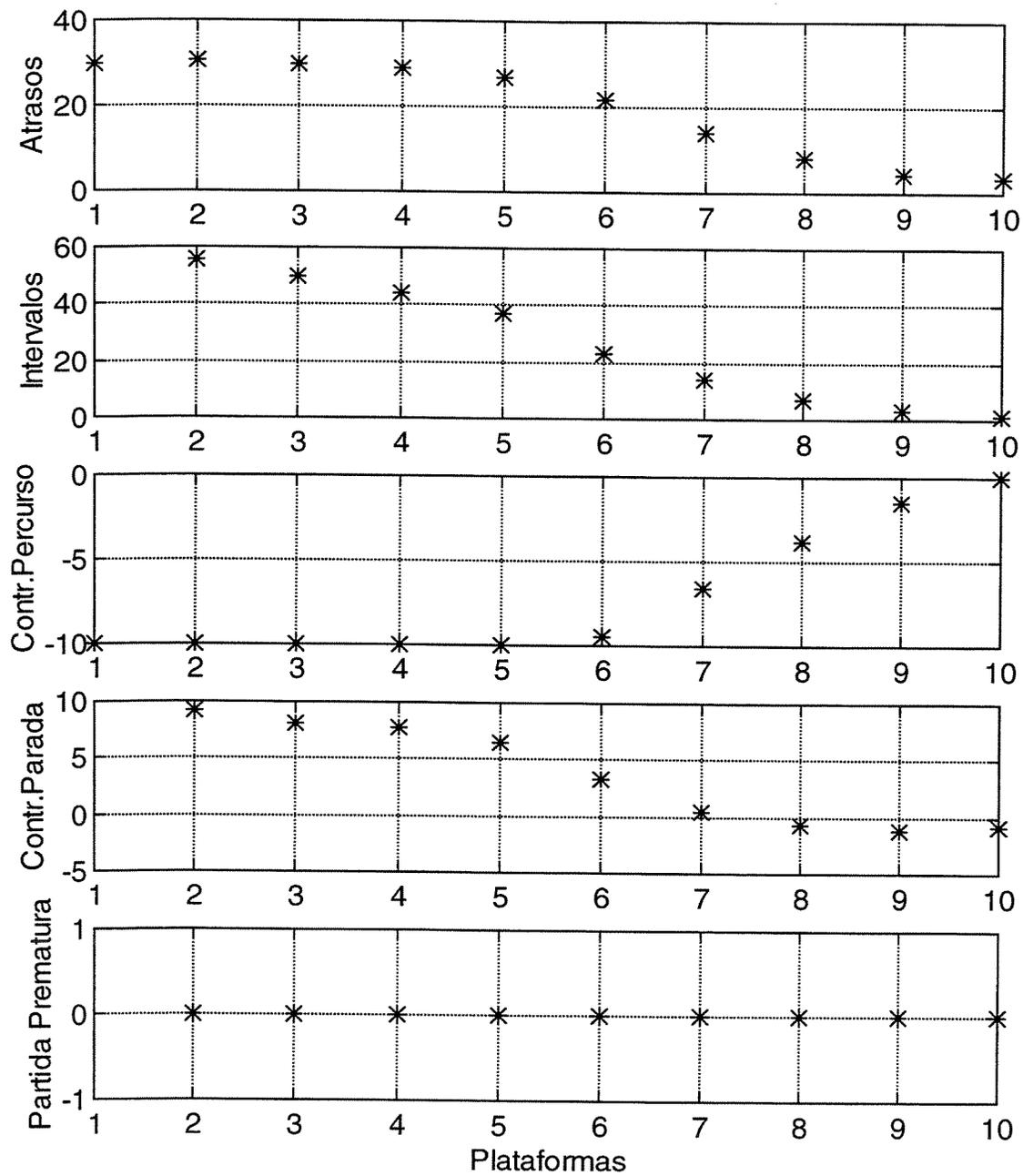


Fig. 4.2.c1 - Política de Regulação Econômica – Problema 1 Nominal e Problema 2 Robusto (Valores Médios)

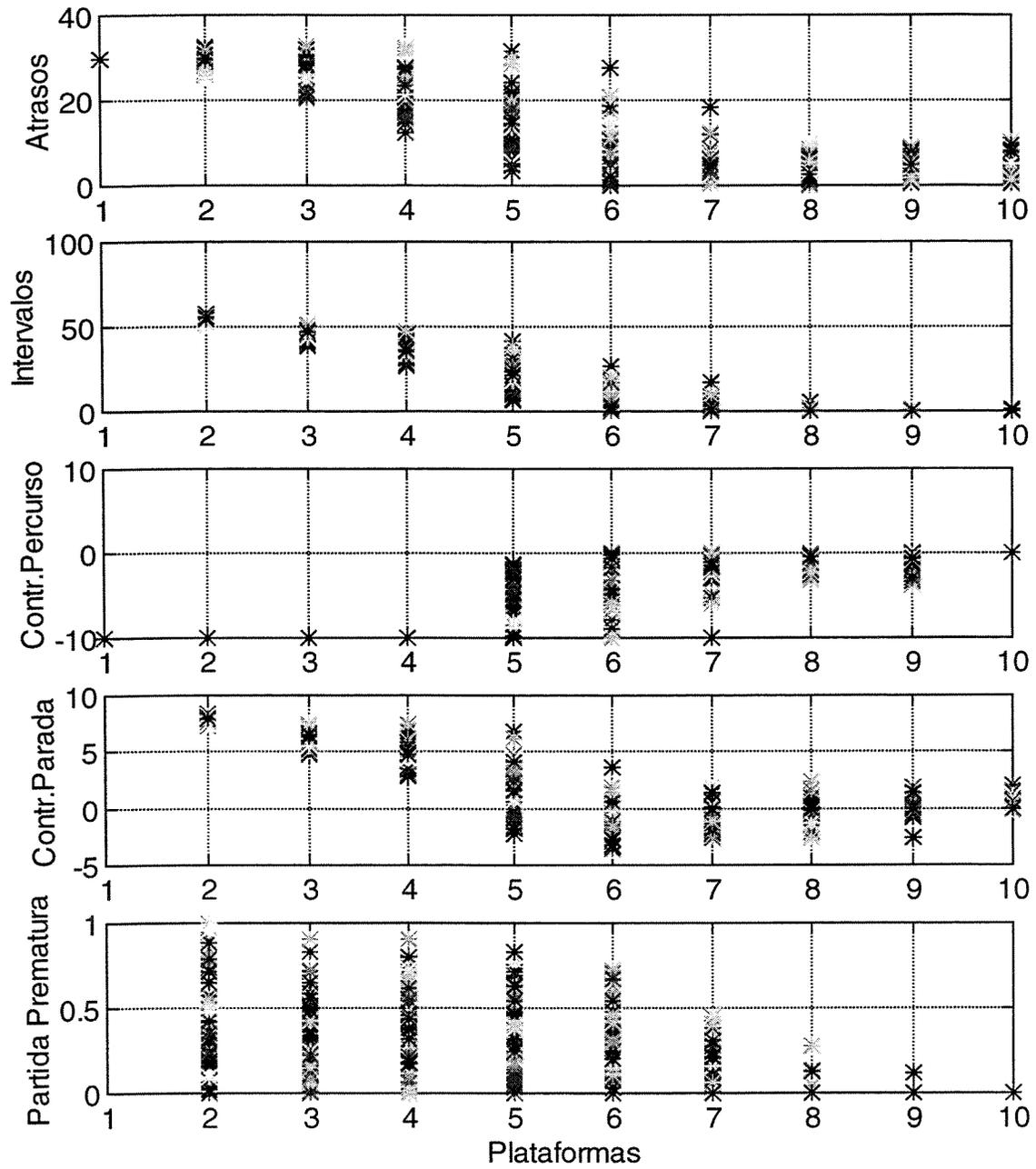


Fig. 4.2.d - Política de Regulação Econômica – Problema 1 Robusto e Problema 2 Nominal

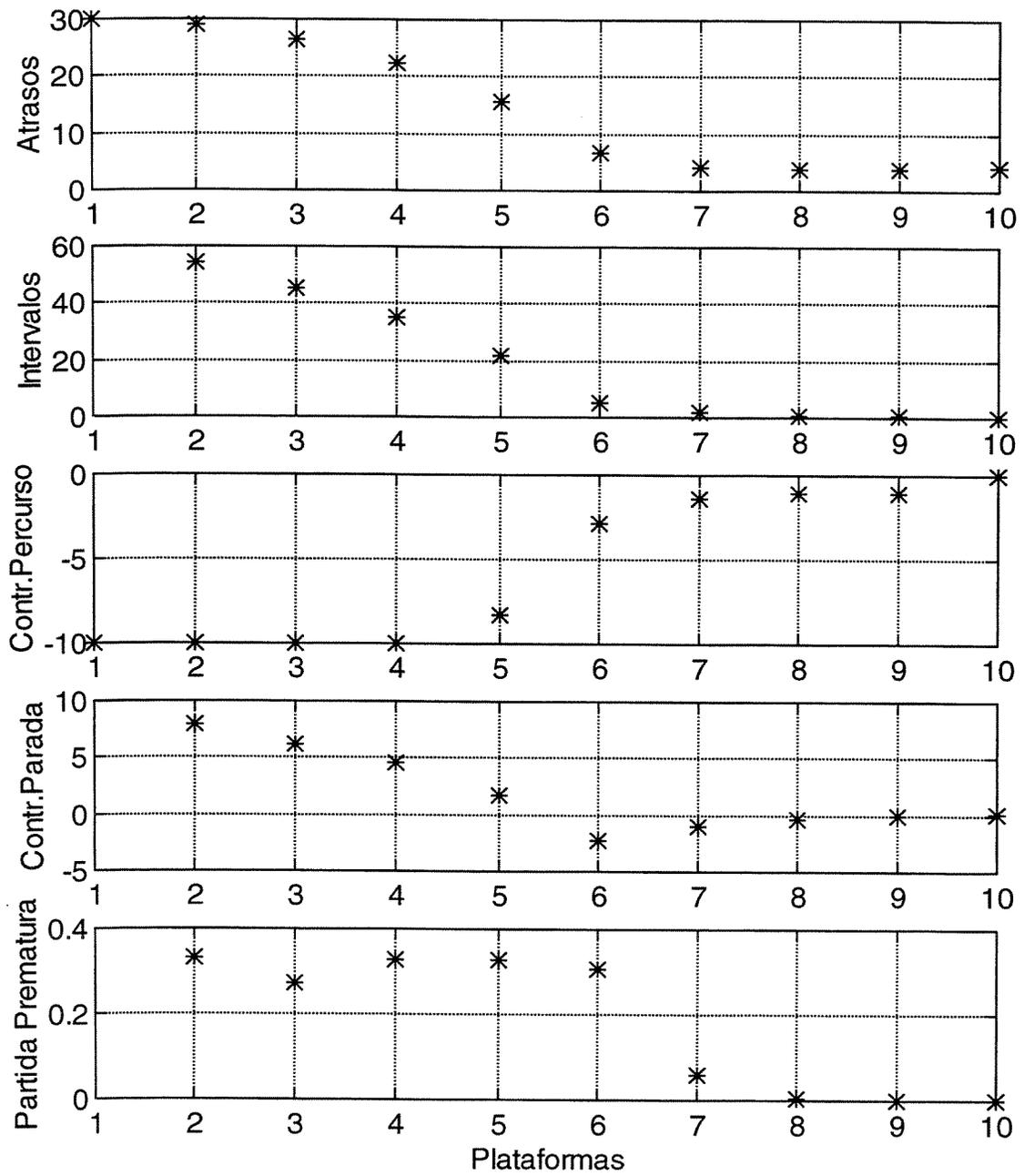


Fig. 4.2.d1 - Política de Regulação Econômica – Problema 1 Robusto e Problema 2 Nominal (Valores Médios)

### 4.3 Política de Regulação de Alto Desempenho

Para uma política operacional de regulação de alto desempenho, adotou-se a seguinte ponderação:

$$p = 2 \quad ; \quad q = 1 \quad ; \quad r = 0.1 \quad ; \quad z = 0.1$$

para o critério de desempenho do problema 1 (4.1). Ainda dentro da política de regulação de alto desempenho, a seguinte ponderação:

$$p = 1 \quad ; \quad q = 1 \quad ; \quad z = 0.1$$

é adotada para o critério de desempenho do problema 2 (4.2):

São consideradas as seguintes situações:

- Problema 1 e 2 robustos (ver figuras 4.3.a e 4.3.a1);
- Problema 1 e 2 nominais (ver figuras 4.3.b e 4.3.b1);
- Problema 1 nominal e Problema 2 robusto (ver figuras 4.3.c e 4.3.c1);
- Problema 1 robusto e Problema 2 nominal (ver figuras 4.3.d e 4.3.d1).

Comparando as figuras 4.3.a a 4.3.d1 da política de alto desempenho, com as respectivas figuras 4.2.a a 4.2.d1 da política econômica, pode ser verificado que o desempenho de regulação melhorou significativamente. No entanto, essa melhoria foi obtida sem um aumento significativo do esforço de controle. Este aparente paradoxo é devido ao horizonte de otimização ser de uma plataforma à frente, apenas. A política econômica neste caso, não tem como prever que a economia momentânea corresponde a um custo maior e permanente no futuro, devido a não recuperação dos desvios de horário e intervalo entre trens.

Pode ser também verificado que o efeito das combinações de robustez nos Problemas 1 e 2 são equivalentes ao observado nas mesmas opções da política econômica.

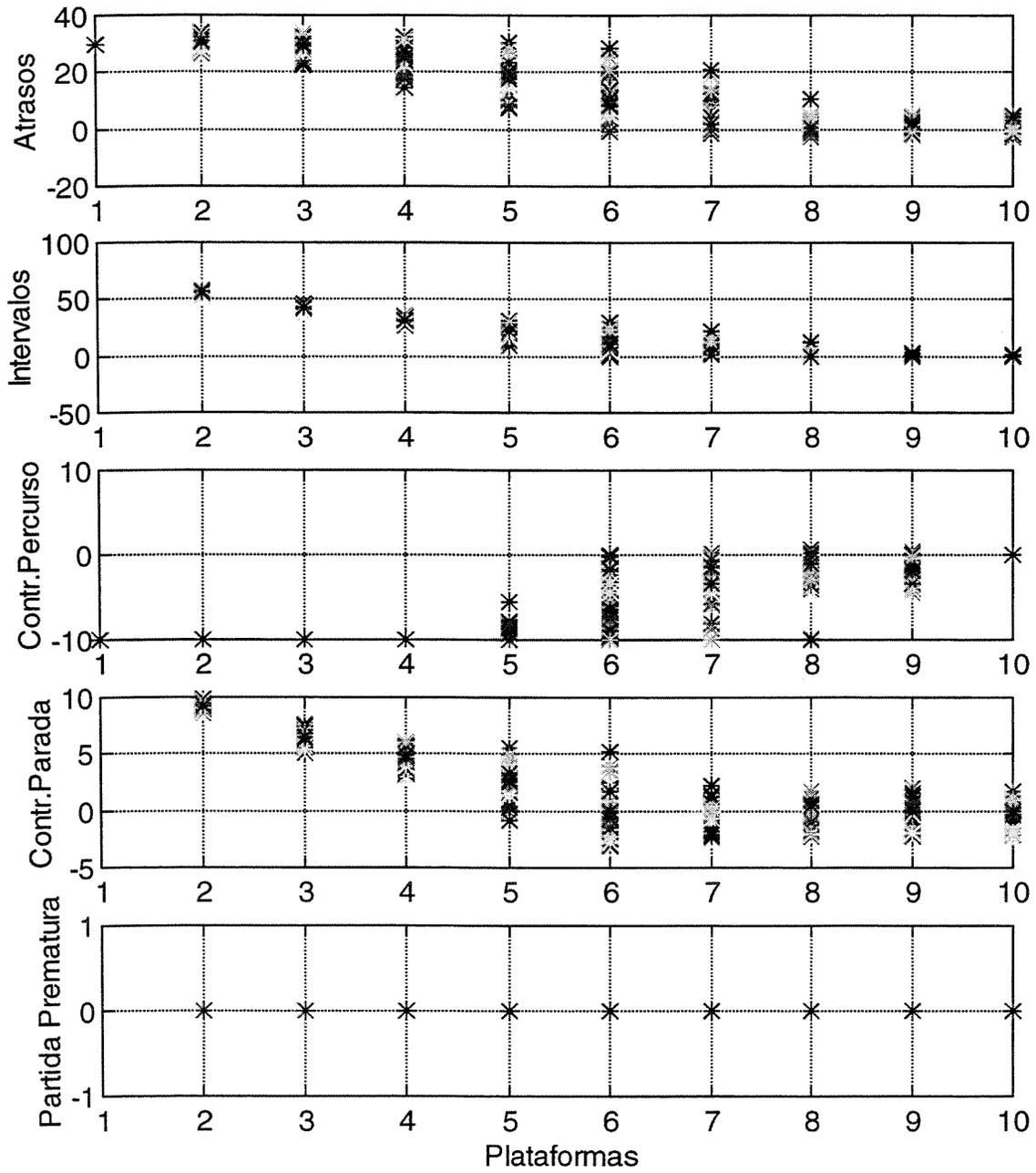


Fig. 4.3.a - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problemas 1 e 2 Robustos

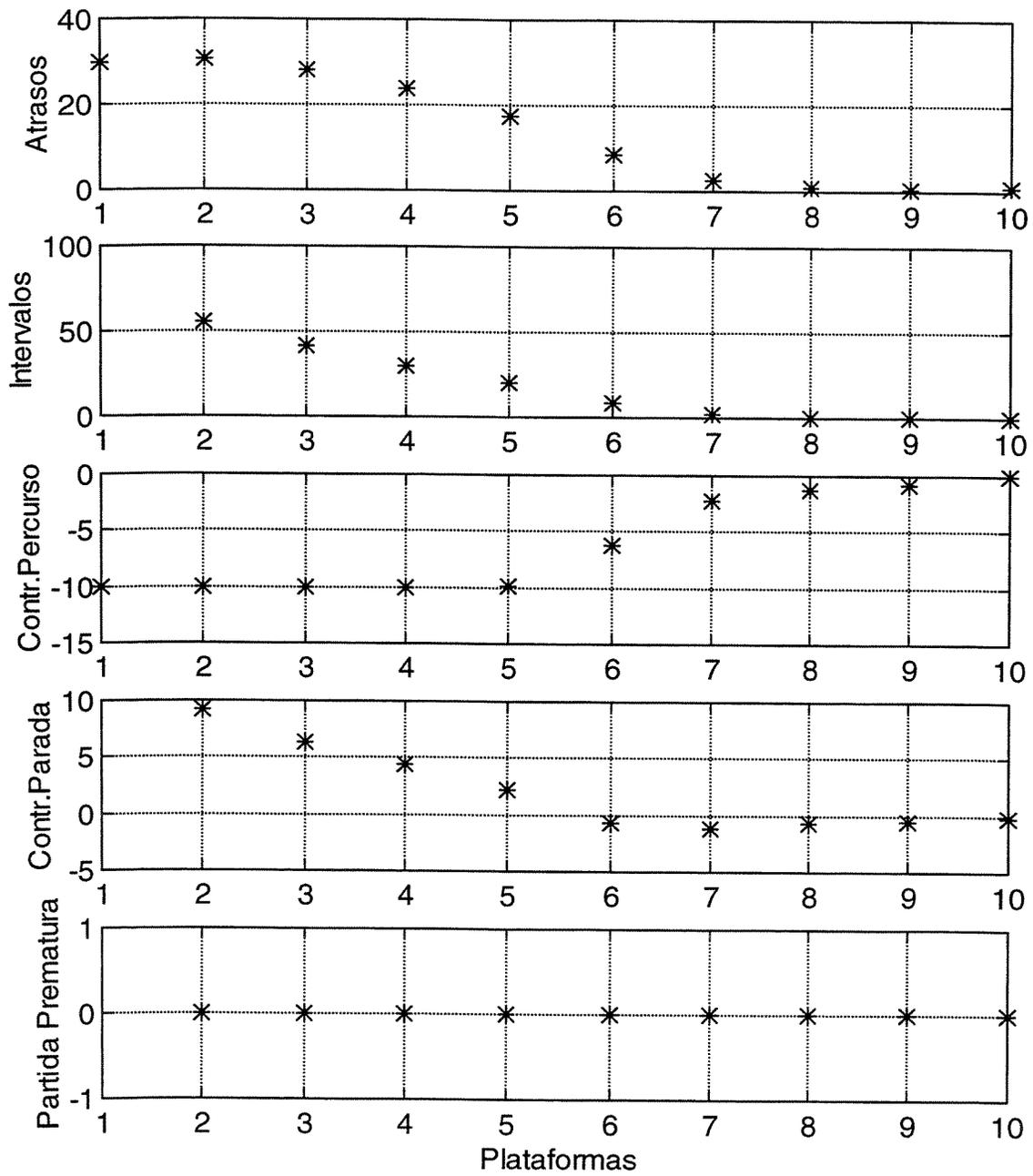


Fig. 4.3.a1 - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problemas 1 e 2 Robustos (Valores Médios)

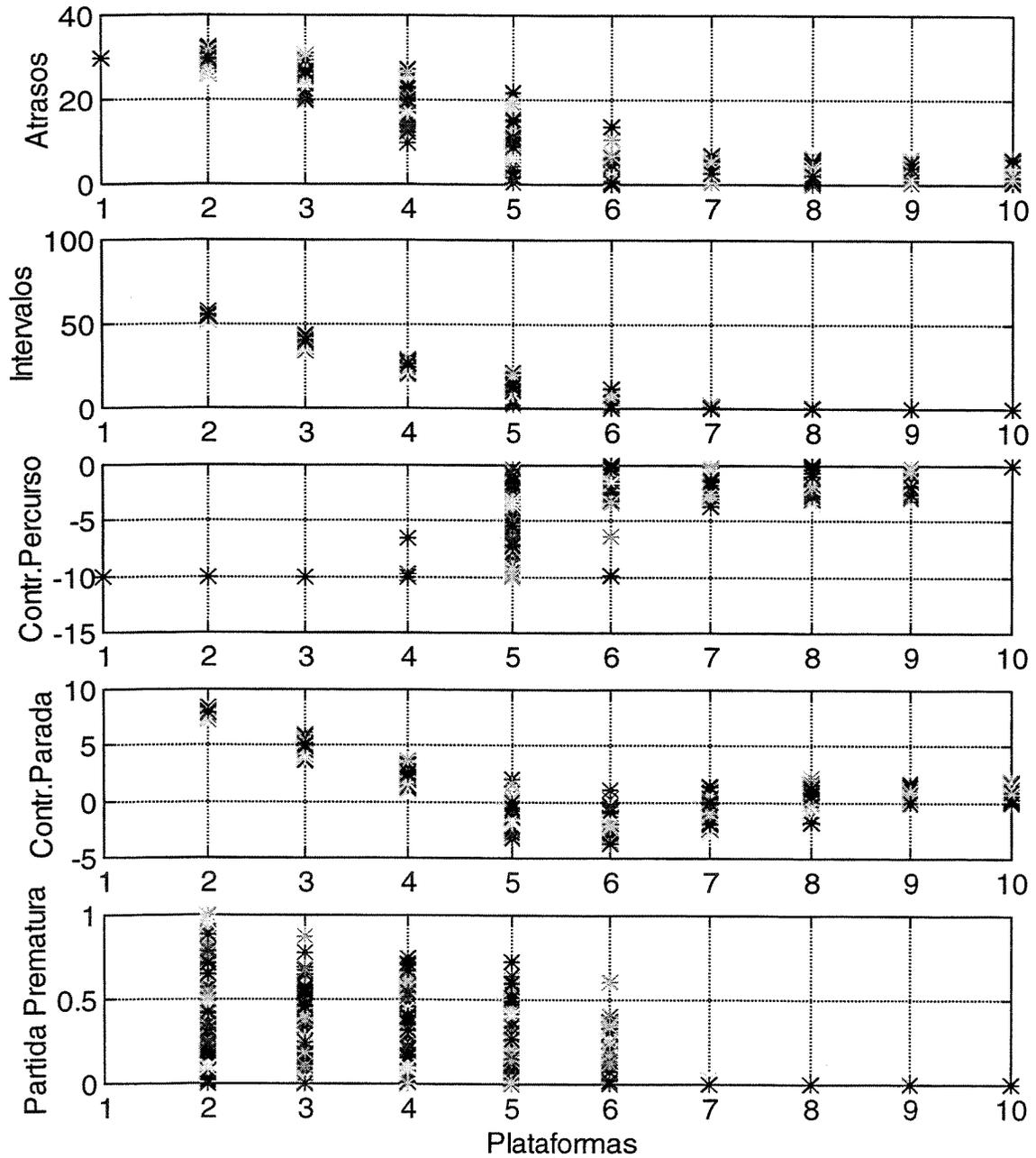


Fig. 4.3.b - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problemas 1 e 2 Nominais

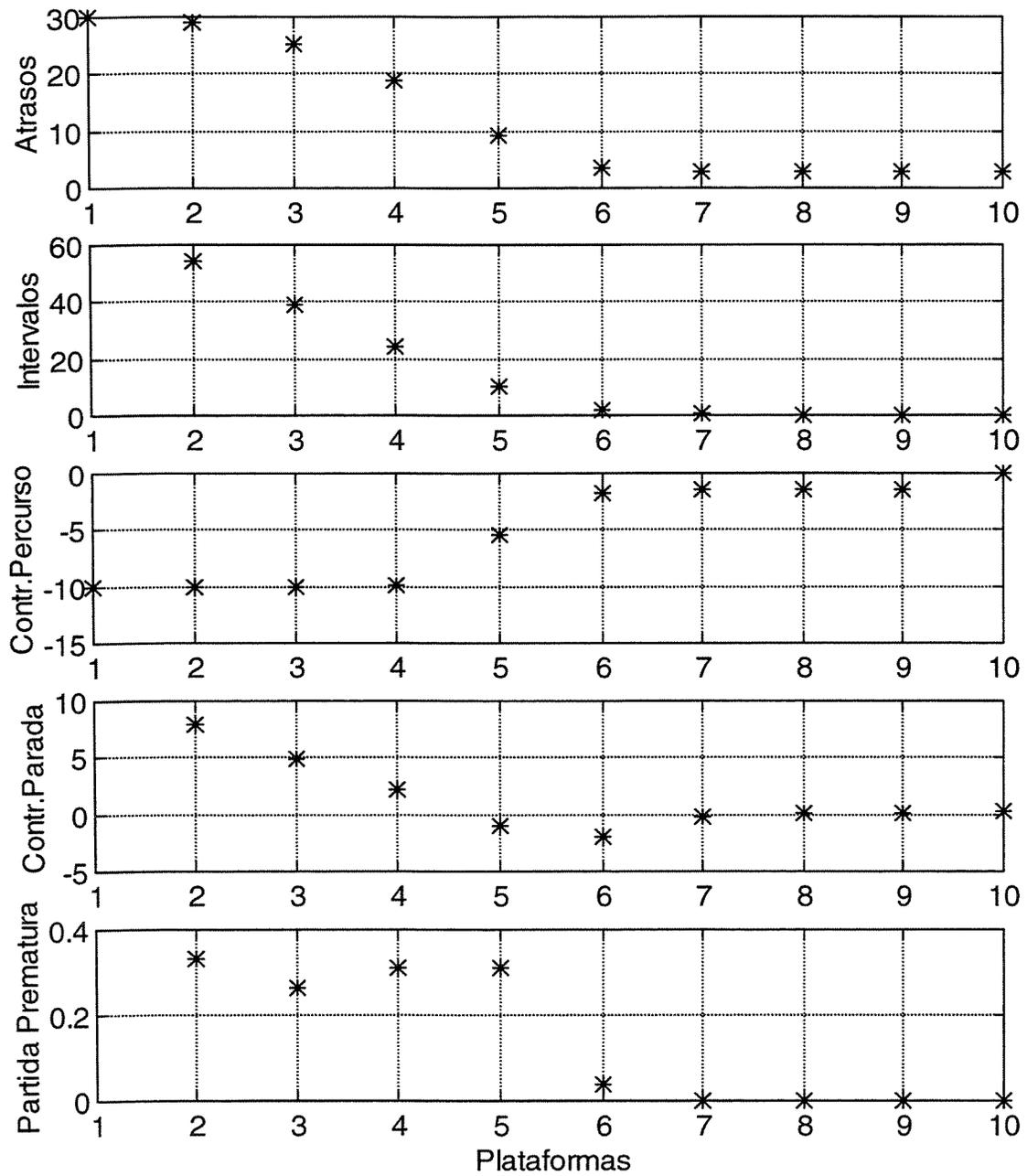


Fig. 4.3.b1 - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problemas 1 e 2 Nominais (Valores Médios)

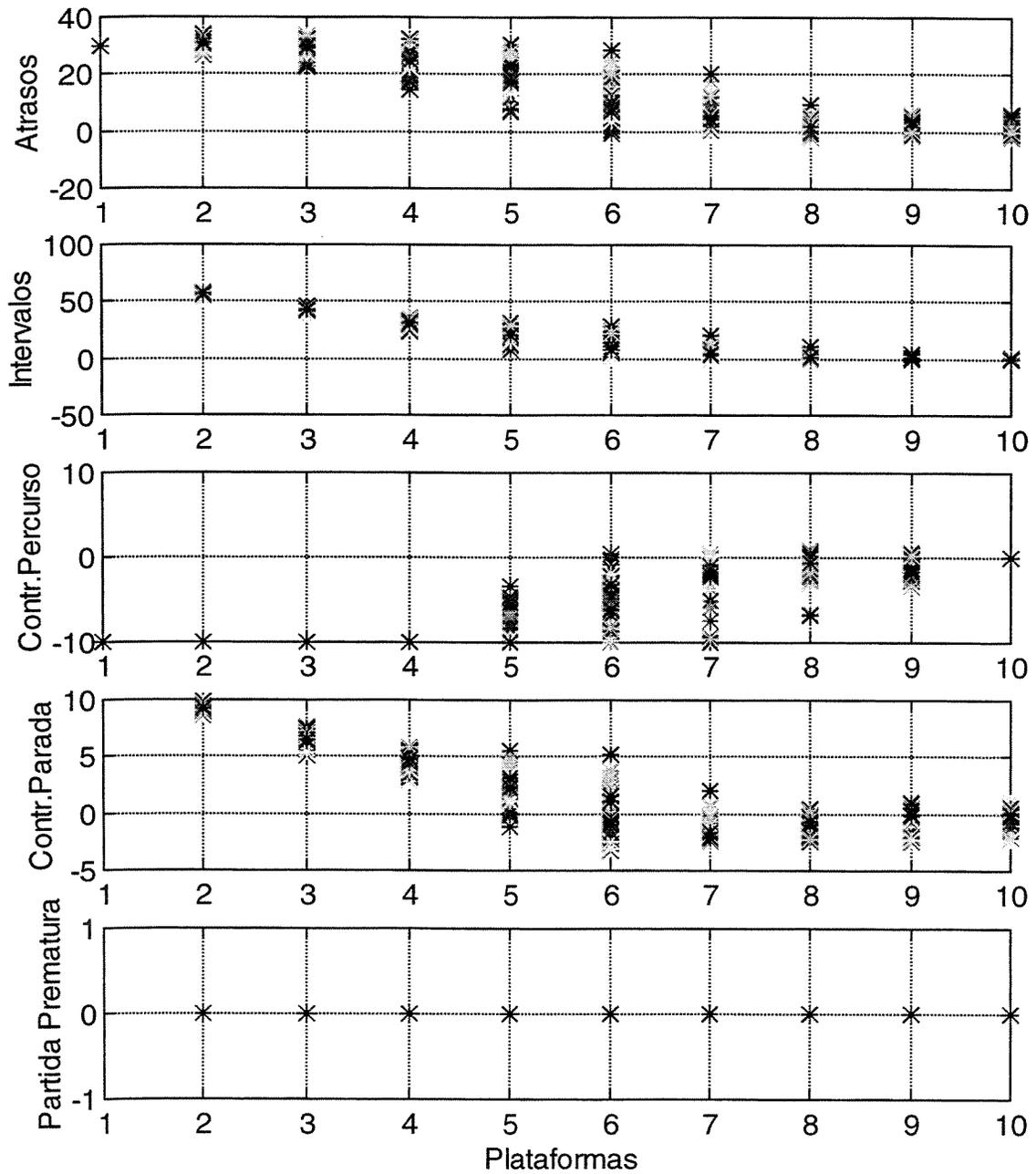


Fig. 4.3.c - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema 1 Nominal e Problema 2 Robusto

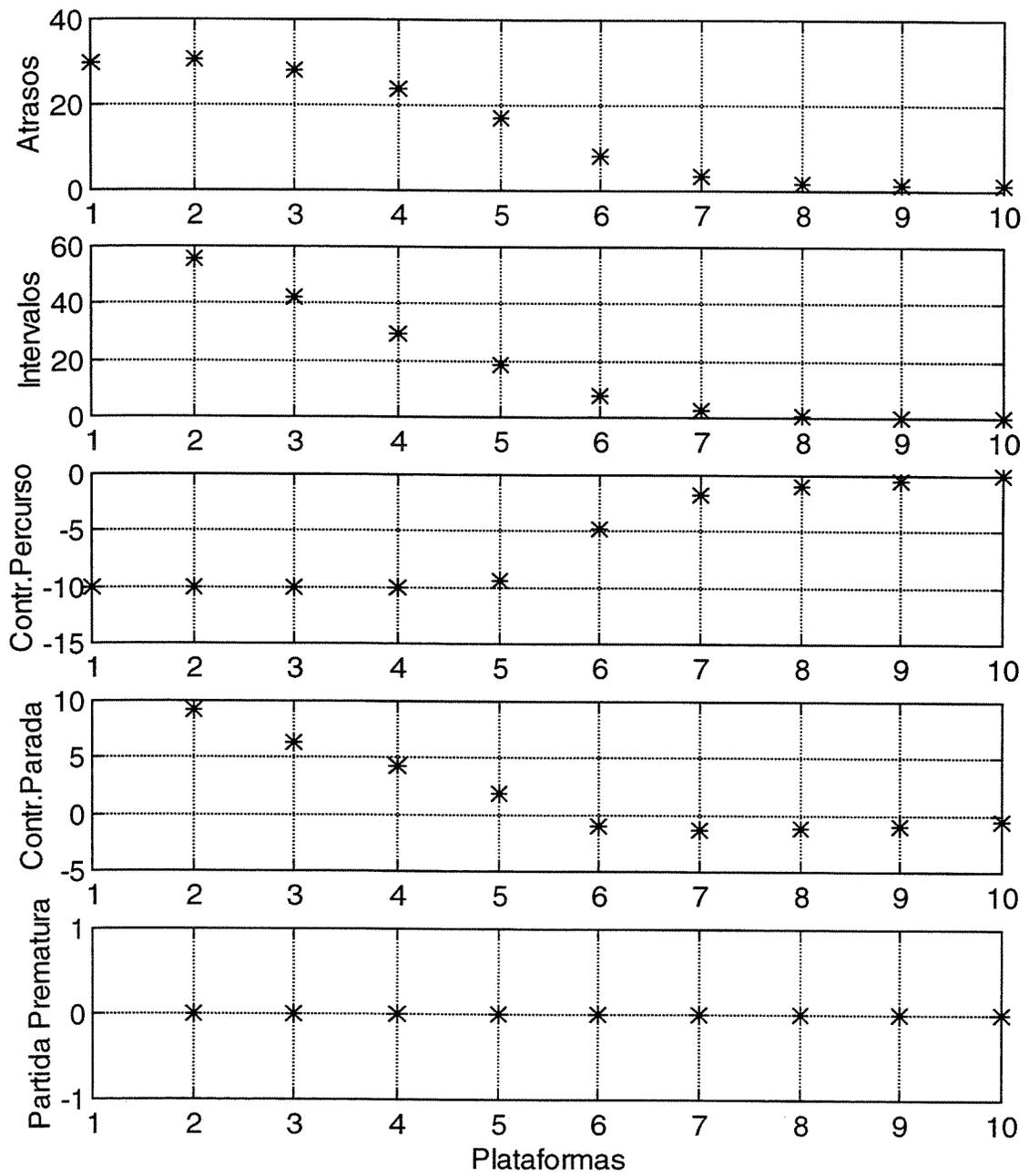


Fig. 4.3.c1 - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema 1 Nominal e Problema 2 Robusto (Valores Médios)

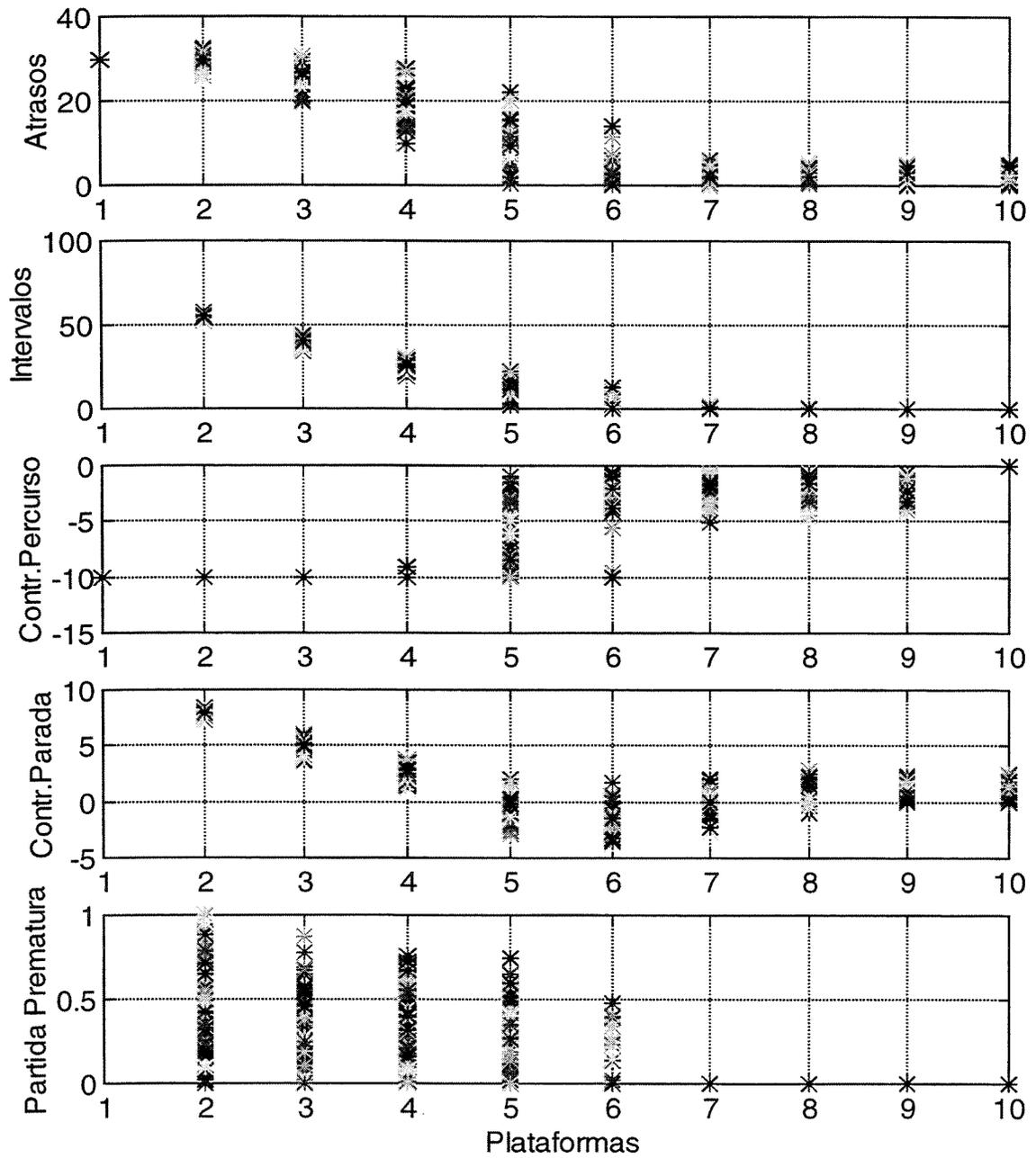


Fig. 4.3.d - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema 1 Robusto e Problema 2 Nominal

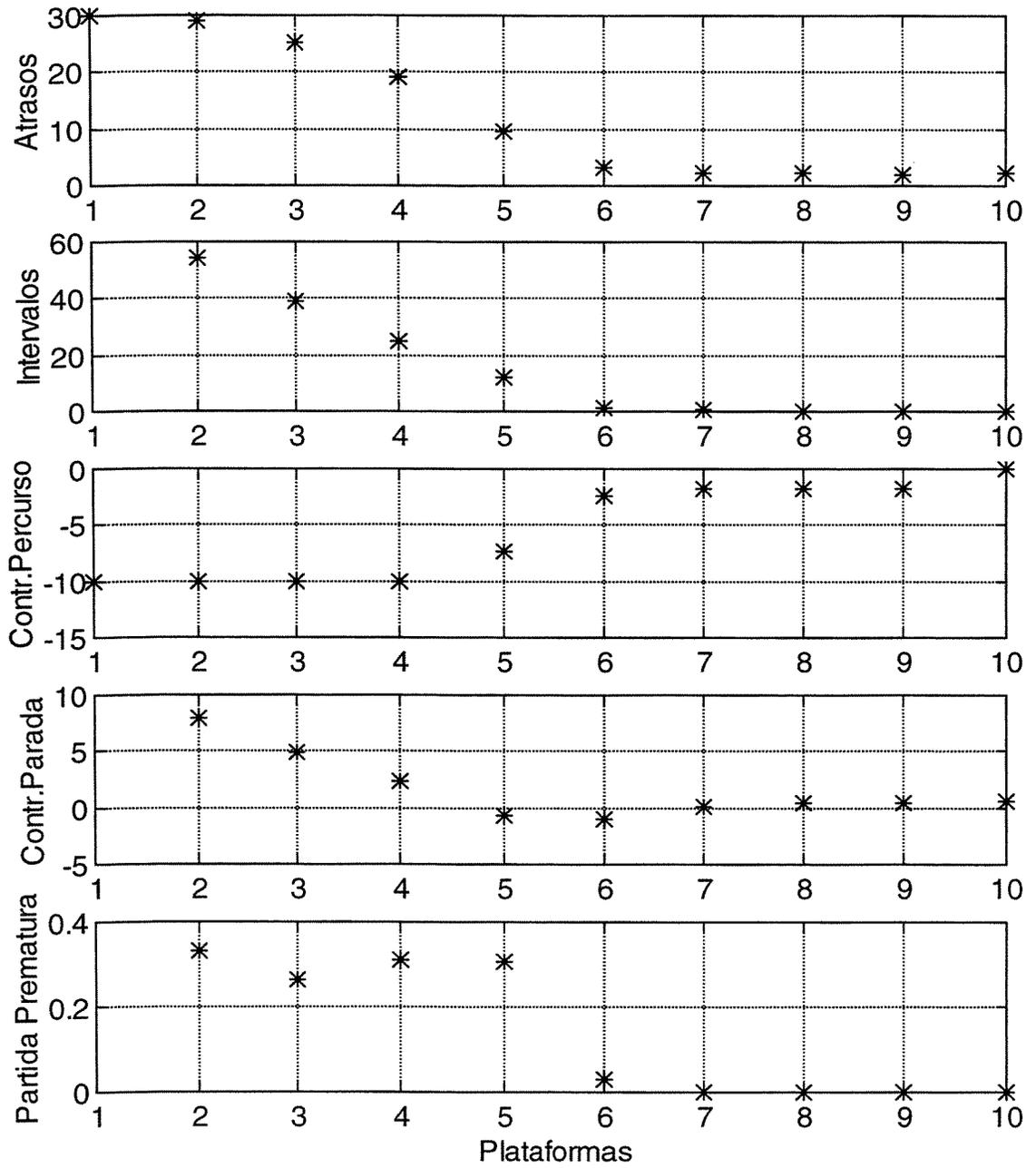


Fig. 4.3.d1 - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema 1 Robusto e Problema 2 Nominal (Valores Médios)

## 4.4 Problema de Regulação de 1 Passo

Para fins de comparação com os resultados que seriam obtidos com o modelo MTR, a seguir são apresentadas simulações, considerando o problema de regulação de um só passo utilizando apenas o problema 1, para calcular os controles de percurso entre estações e parada em plataforma.

São consideradas as seguintes situações:

- Política econômica - Problema robusto (ver figuras 4.4.a e 4.4.a1 );
- Política econômica – Problema nominal (ver figuras 4.4.b e 4.4.b1);
- Política de alto desempenho – Problema robusto (ver figuras 4.4.c e 4.4.c1);
- Política de alto desempenho – Problema nominal (ver figuras 4.4.d e 4.4.d1).

Pode ser também verificado nas figuras 4.4.a, 4.4.a1, 4.4.b, 4.4.b1, que no caso da política econômica, o sistema apresentou instabilidade, o que não ocorreu nas seções 4.2 e 4.3.

Para a política de alto desempenho, pode ser verificado que os resultados estão próximos dos obtidos nas seções 4.2 e 4.3, não podendo ser diferenciados analisando visualmente os gráficos.

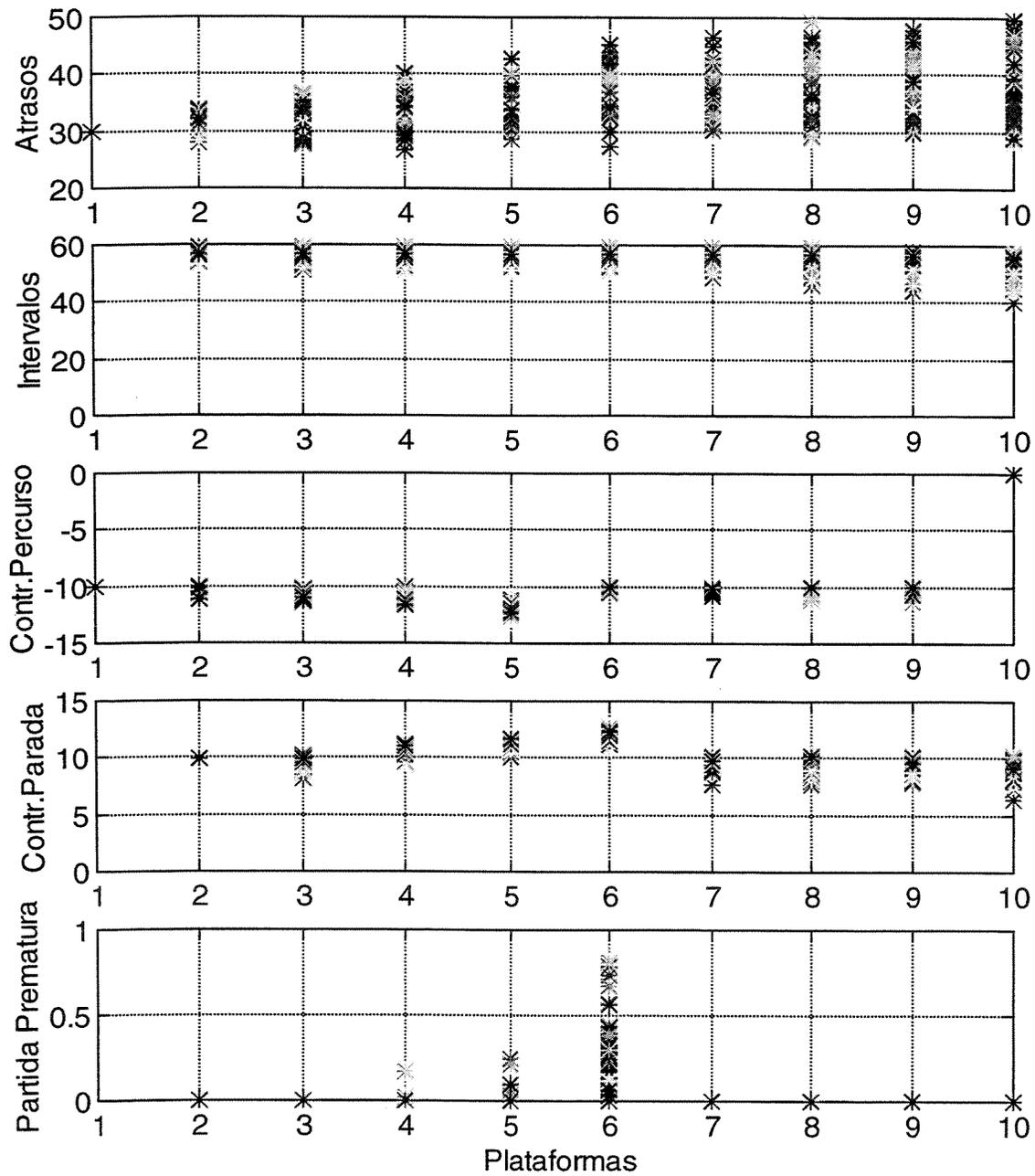


Fig. 4.4.a - Política de Regulação Econômica – Problema Robusto com 1 Passo

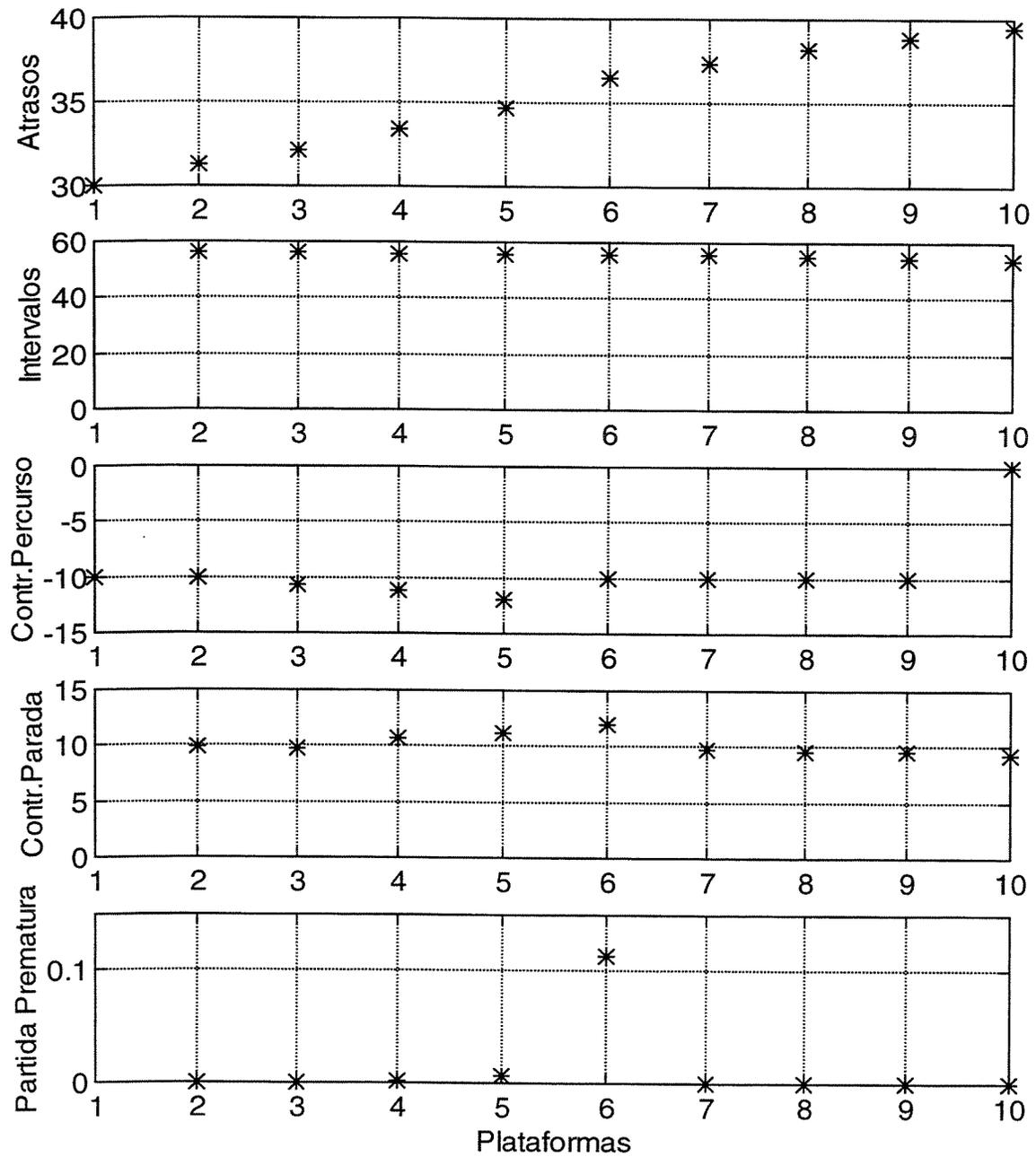


Fig. 4.4.a1 - Política de Regulação Econômica – Problema Robusto com 1 Passo (Valores Médios)

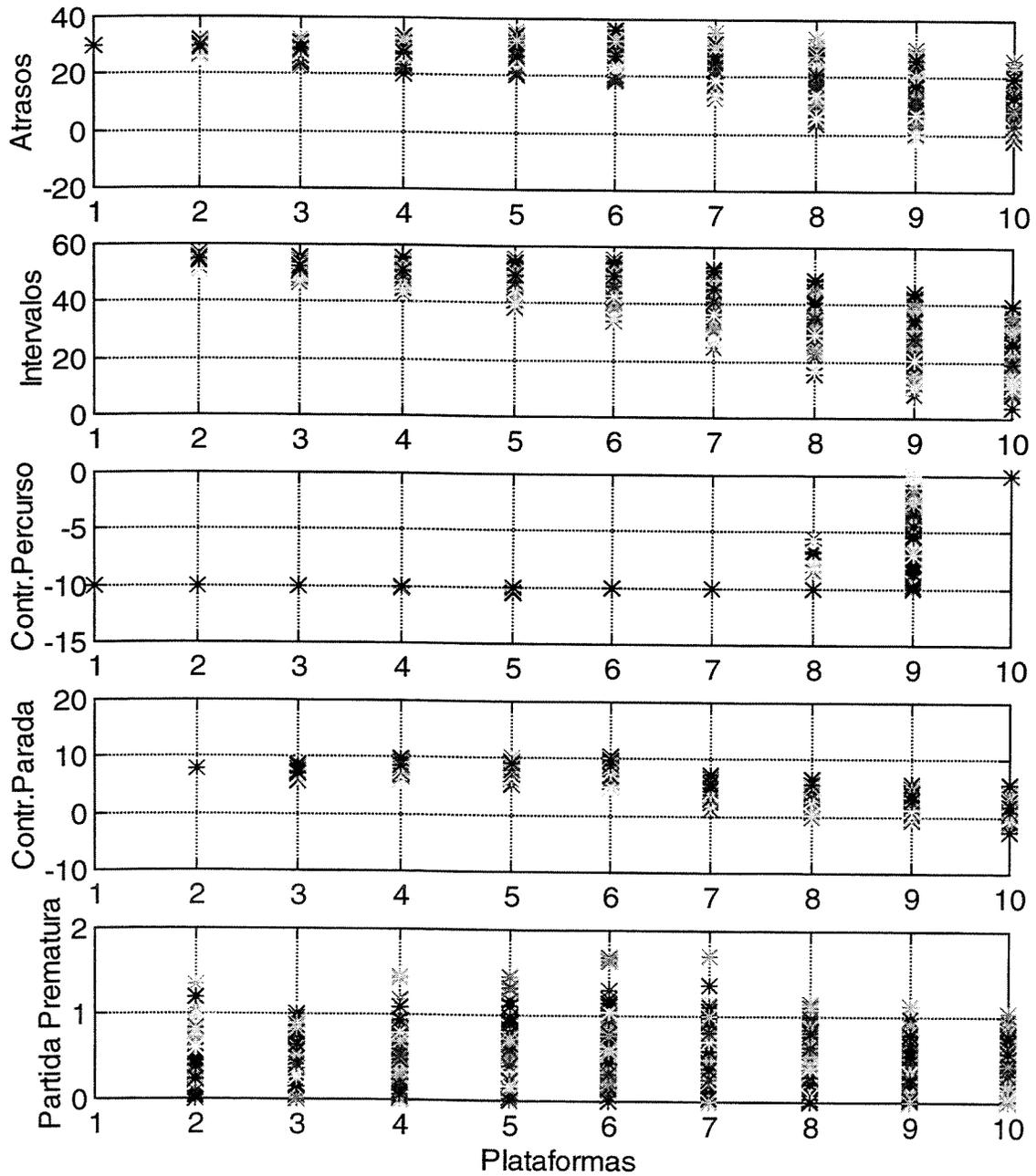


Fig. 4.4.b - Política de Regulação Econômica – Problema Nominal com 1 Passo

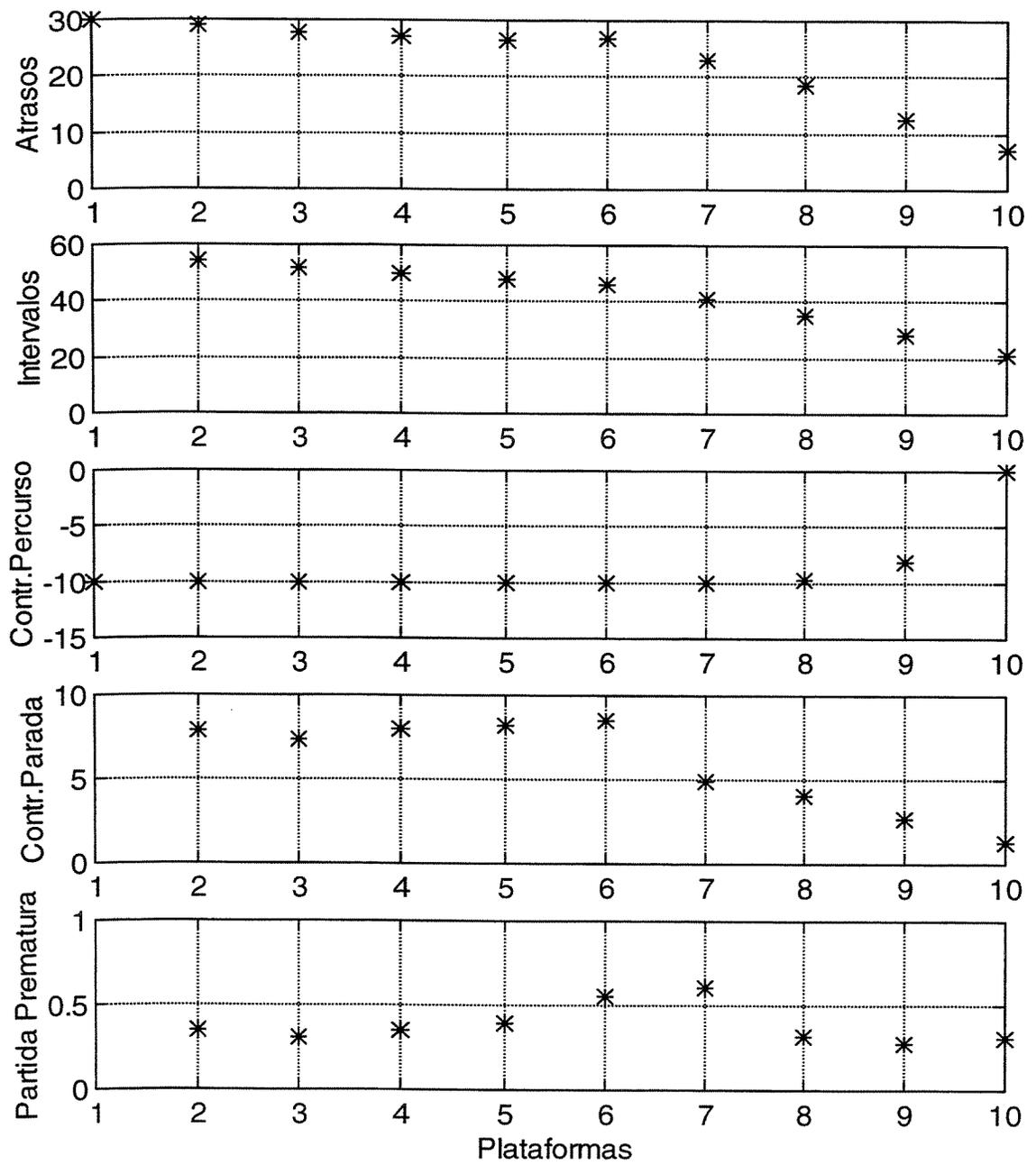


Fig. 4.4.b1 - Política de Regulação Econômica – Problema Nominal com 1 Passo (Valores Médios)

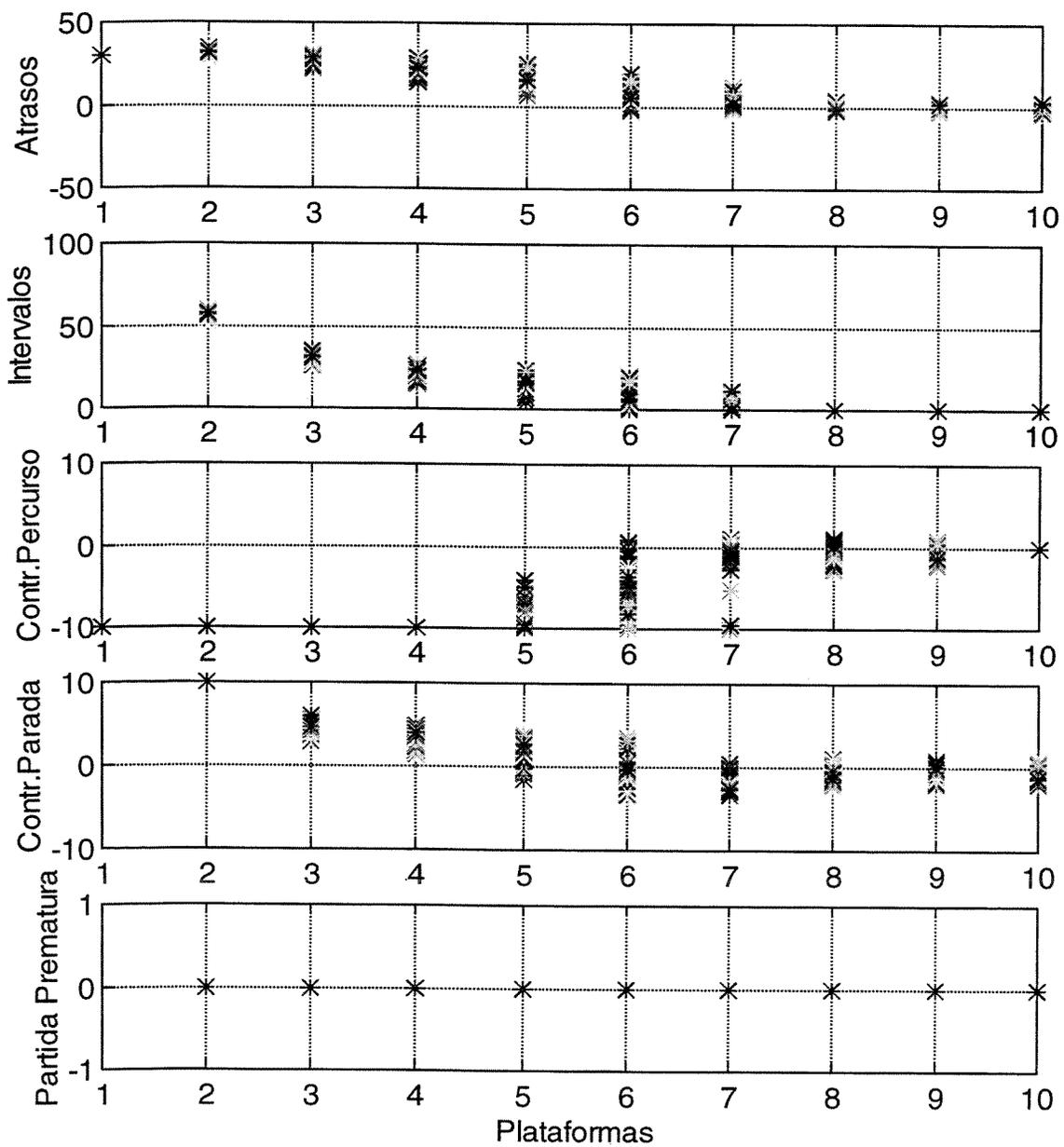


Fig. 4.4.c - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema Robusto com 1 Passo

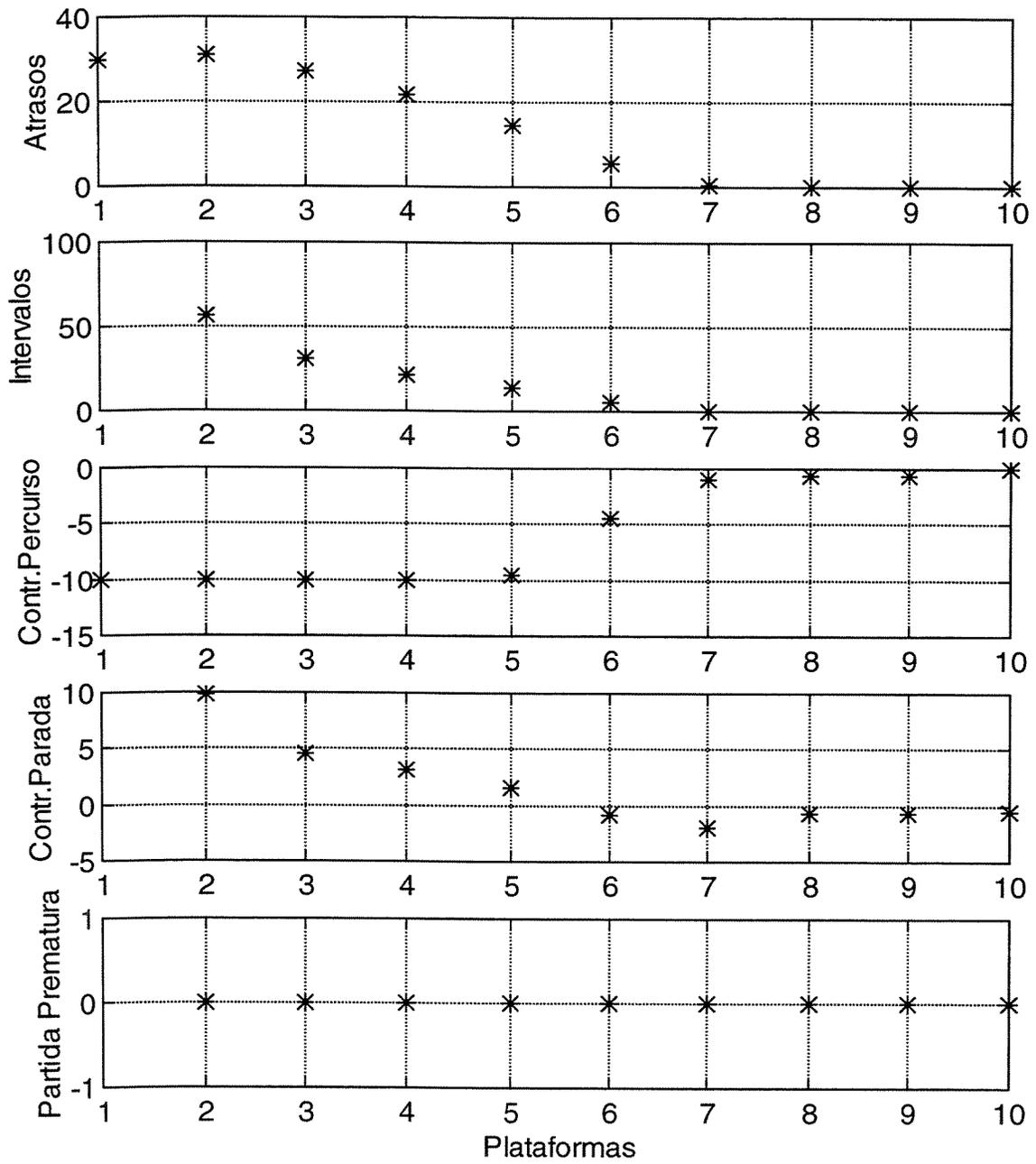


Fig. 4.4.c1 - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema Robusto com 1 Passo (Valores Médios)

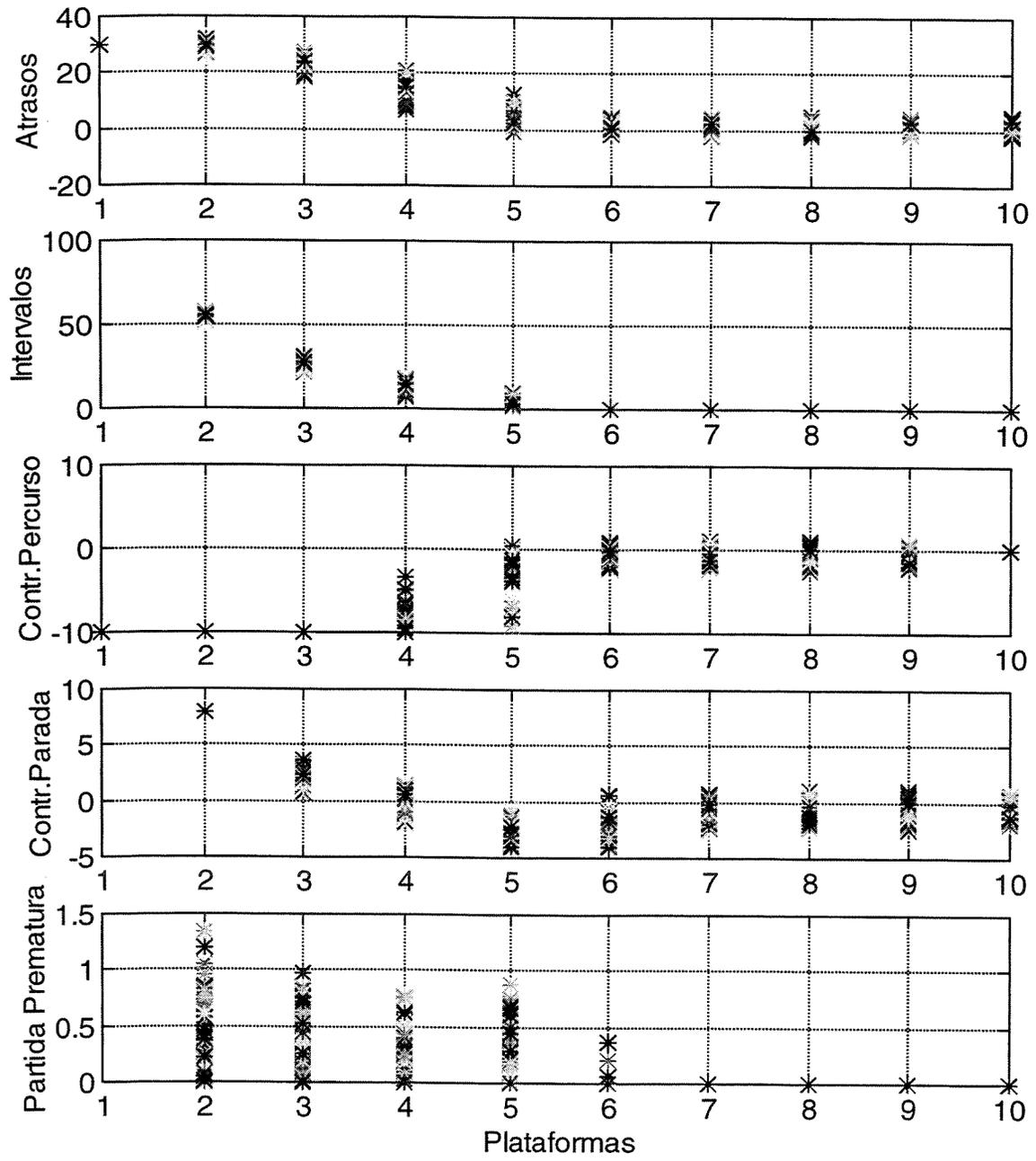


Fig. 4.4.d - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema Nominal com 1 Passo

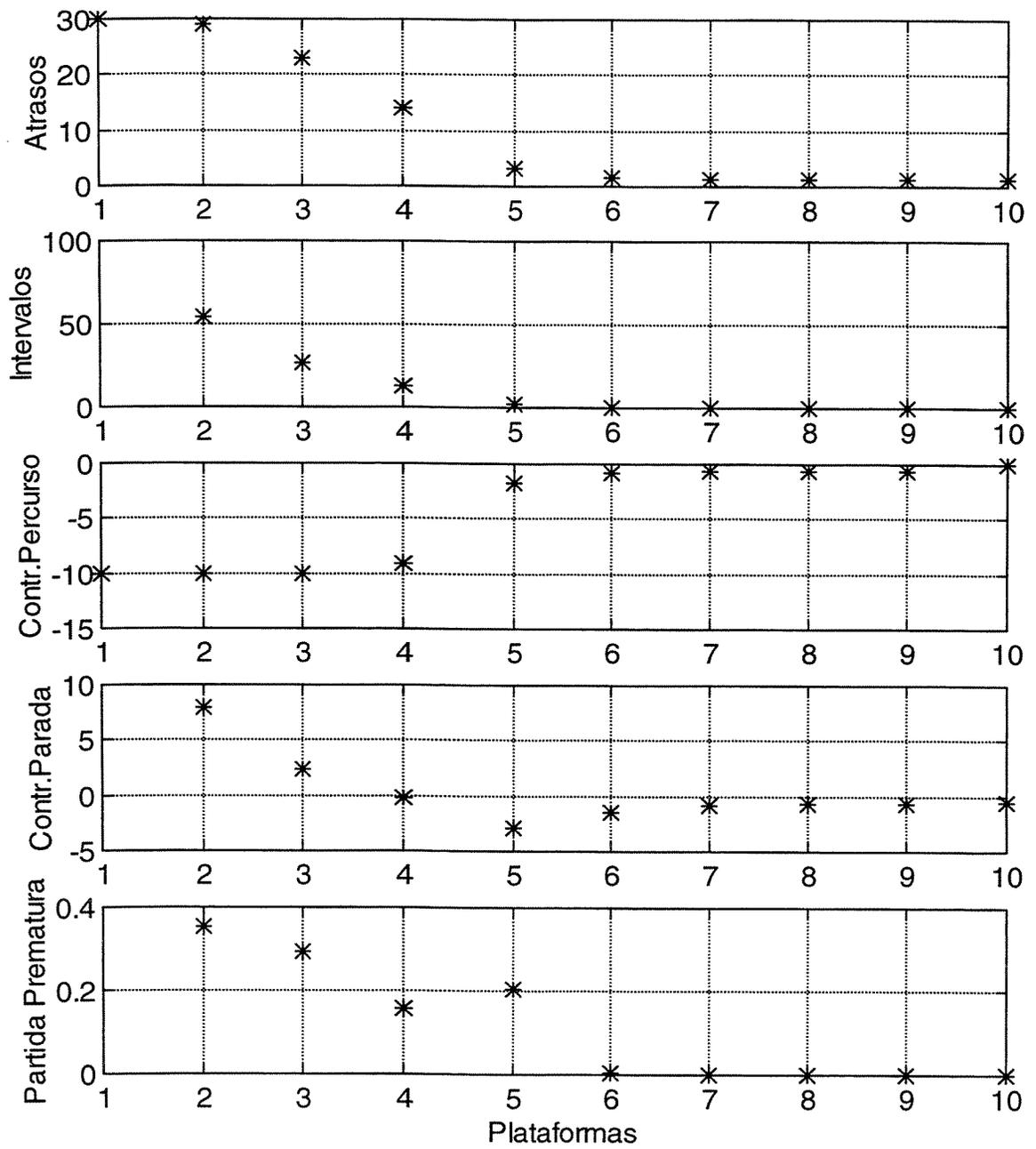


Fig. 4.4.d1 - Política de Regulação de Alto Desempenho – Problema Nominal com 1 Passo (Valores Médios)

# Capítulo 5

## Conclusões

Esta dissertação tratou do problema de modelamento e regulação do tráfego de trens em linhas de metrô operando em regime aberto.

Foi proposto um novo modelo de tráfego de trens **MTRE**, correspondente a uma extensão do modelo **MTR** utilizado em trabalhos anteriores [21], [16], [17], levando em conta o informação do evento de chegada dos trens nas plataformas. As principais vantagens deste modelo são:

- descrição do tráfego de trens em duas etapas sucessivas: percurso entre estações e parada em plataforma;
- separação do controle do tempo de percurso entre estações do controle do tempo de parada em plataforma;
- separação das incertezas do modelo de percurso entre estações das do modelo de parada nas plataformas;
- adequação à prática operacional dos metrôs atuais contendo explicitamente os intervalos permitidos para as variáveis de controle e as limitações sobre as variáveis de estado e perturbações.

Baseado no modelo **MTRE**, foi proposta uma nova abordagem de controle preditivo robusto para o problema de regulação do tráfego de trens. As principais vantagens são:

- determinação dos controles dos trens nos eventos de chegada e saída dos mesmos das plataformas, feita de forma descentralizada para cada trem em cada plataforma, resolvendo pequenos problemas de programação matemática;
- utilização do evento de chegada dos trens nas plataformas para efetivamente reduzir a incerteza global do modelo de tráfego e obter resultados menos conservativos.

Os resultados apresentados podem ser aperfeiçoados em muitos aspectos dentre os quais destacam-se:

- incorporação de restrições no problema de regulação de forma a garantir a estabilidade do tráfego de trens;
- estratégias de controle adaptativo para obtenção de resultados acima menos conservativos que a abordagem robusta descentralizada.

# Referências

- [1] Araya, S.; Sone, S., "Traffic dynamics of automated transit systems with pre-established schedules", *IEEE Transaction Syst., Man Cybernetics*, Vol. 14, pp. 677-687, June 1984.
- [2] Barmish, B.R., *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Co., 1994, USA.
- [3] Bazaraa, M.S.; Shetty C.M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, Wiley, New York, 1979.
- [4] Bergamaschi, F.A.; Milani, B.E.A.; Hsin, T.C., "Geração de Horários de Despacho de Trens em Linhas de Transporte Metroviário", *Anais do IV Congresso Brasileiro de Automática*, Campinas S.P. 1982.
- [5] Champion, G.; Van Breusegem, V; Pinson, P.; Bastin, G., "Traffic Regulation of an Underground Railway Transportation System By State Feedback", *Optimal Control Application & Methods*, Vol. 6, pp. 385-402, 1985.
- [6] Carvalho, A.N.; Milani, B.E.A., "Regulação Ótima de Tráfego em Linhas de Metrô com Restrições no Estado e Controle", *Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SOBRAPO*, Campinas S.P. 1993.
- [7] Carvalho, A.N.; Milani, B.E.A., "Regulação Robusta de Linhas de Metroviárias Sujeitas a Restrições no Estado e Controle", *Anais do 6º Congresso Latino Americano de Controle Automático ( e 10º CBA)*, SBA, Rio de Janeiro R.J., 1994.
- [8] Chen, C.T., *Linear System Theory and Design*, Saunders HBJ, USA, 1984.
- [9] Chu, K.C., "Optimal Decentralized Regulation of a String of Coupled System", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-19, pp. 243-246, June 1974.

- [10] Corrêa, S.S.; Milani, B.E.A., “Regulação Robusta Descentralizada de Linhas Metroviárias”, *XI Congresso Brasileiro de Automática*, Vol. 3, pp. 1643-1648, Setembro 1996.
- [11] Cury, J.E.; Gomide, F.A.; Mendes, M.J., “A Methodology for Generation of Optimal Schedules for an Underground Railway System by State Feedback”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 25, No. 4, pp. 217-222, April 1980.
- [12] Garcia, C.E.; Morari, M., “Model Predictive Control: Theory and Practice – a Survey” , *Automatica*, Vol. 25, No. 3, 1989.
- [13] Levine, W.S.; Athans, M., “On the Optimal Error Regulation of a String of Moving Vehicles”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-11, pp. 355-361, 1966.
- [14] Milani, B.E.A.; Carvalho, A.N., “Robust Optimal Linear Regulator Design for Discrete-Time Systems Under State and Control Constraints”, *Proc. IFAC Symposium on Robust Control*, Rio de Janeiro R.J., Brazil, pp. 273-278, 1994.
- [15] Milani, B.E.A.; Castelan, E.B.; Tarbouriech, S., “Linear Regulator Design for Bounded Uncertain Discrete-Time Systems with Additive Disturbances”, *Proceedings of the 1996 IFAC World Congress*, San Francisco CA, USA, 1996.
- [16] Milani, B.E.A.; Corrêa, S.S., “On-Line Minimax Optimal Regulation of Metro Lines”, *IASTED International Conference CONTROL 97*, Cancun, Mexico, 1997.
- [17] Milani, B.E.A.; Corrêa, S.S., “Decentralized Robust Regulation of Metro Lines”, *Proc. American Control Conference*, pp. 218, 219, June 1997.
- [18] Milani, B.E.A.; Corrêa, S.S., “Regulação em Tempo Real de Linhas de Metroviárias”, *Anais do 12º Congresso Brasileiro de Automática, SBA*, Uberlândia M.G., 1998.
- [19] Peppard, L.E.; Gourishankar, V., “Optimal Control of a String of Moving Vehicles”, *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. AC-15, pp. 386-387, June 1970.

- [20] Sasama, H.; Ohkawa, Y., "Floating Traffic Control for Public Transportation System", *Proc. 4<sup>th</sup>. IFAC Conference on Control in Transportation Systems*, Baden-Baden, Germany, April 1983.
- [21] Van Breusegem, V.; Campion, G.; Bastin, G., "Traffic Modeling and State Feedback Control for Metro Lines", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 36, No. 7, pp. 770-784, July 1991.
- [22] Vassilaki, M.; Hennes, J.C.; Bitsoris, G., "Feedback Control of Linear Discrete-Time Systems under State and Control Constraints", *International Journal of Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1727-1735, 1988.