UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA

Síntese de Concentrador Acústico através de uma Formulação Axi-simétrica do Método dos Elementos de Contorno

Autor: **Ronaldo Carrion**

Orientador: **Prof. Dr. Sérgio Santos Mühlen**

Co-orientador: **Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto**

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por Ronaldo Carrion
e aprovada pela Comissão
Julgada em ___/___/___
Orientador

Curso: Engenharia Elétrica

Área de Concentração: Engenharia Biomédica

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

UNICAMP 15568

Campinas, 2000
S.P. – Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA BIOMÉDICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Síntese de Concentrador Acústico através de uma Formulação Axi-simétrica do Método dos Elementos de Contorno

Autor: **Ronaldo Carrion**
Orientador: **Sérgio Santos Mühlen**
Co-orientador: **Euclides de Mesquita Neto**

Prof. Dr. Sérgio Santos Mühlen , Presidente
FEEC - UNICAMP

Profª. Drª. Vera Lúcia da S. N. Button
FEEC – UNICAMP

Prof. Dr. Emílio C. N. Silva
DEM – POLI - USP

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIDADE BC
N.º CHAMADA:
T/Unicamp
C235s
V. Ex.
TOMBO BC/ 42668
PROC. 16/2K8100
C [ ] D [X]
PREÇO R$ 11,00
DATA 14/10/00
N.º CPD

CM-00147047-5

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C235s

Carrion, Ronaldo
Síntese de concentrador acústico através de uma formulação axi-simétrica do método dos elementos de contorno / Ronaldo Carrion.--Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientadores: Sérgio Santos Mühlen e Euclides de Mesquita Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Carga axial. 3. Ondas estacionárias. I. Mühlen, Sérgio Santos. II. Mesquita Neto, Euclides de. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Resumo

CARRION, Ronaldo, *Síntese de Concentrador Acústico através de uma Formulação Axi-simétrica do Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 2000, 143 p. Dissertação de Mestrado

Este trabalho apresenta uma formulação por Elementos de Contorno para a análise da resposta dinâmica de corpos elásticos axi-simétricos que simulam o comportamento de concentradores acústicos. Esta formulação requer a integração de algumas funções, chamadas de soluções fundamentais ou núcleos. Por se tratar de um problema com simetria axial, as soluções fundamentais 3D foram transformadas em soluções fundamentais axi-simétricas através da mudança de coordenadas retangulares para cilíndricas e posterior integração sobre o eixo azimutal, o que diminui o problema de uma dimensão. A integração numérica de alguns núcleos dinâmicos apresenta singularidade e isto é contornado através da subtração dos correspondentes núcleos estáticos, artifício este, chamado de regularização da integral singular. A implementação por Elementos de Contorno é validada pela determinação da resposta de um cilindro cujos dados modais são conhecidos, isto é, as freqüências naturais e os modos de vibração. A metodologia é também aplicada para analisar a resposta de um concentrador acústico empregado em terapia médica.

Palavras Chave

Método dos Elementos de Contorno, Corpos Axi-simétricos, Concentradores Acústicos

Abstract

CARRION, Ronaldo *Síntese de Concentrador Acústico através de uma Formulação Axi-simétrica do Método dos Elementos de Contorno*, Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 2000, 143 p. Dissertação de Mestrado

A Boundary Element formulation to analyze the dynamic response of elastic axisymmetric bodies is presented to simulate the behaviour of an acoustic concentrator. The formulation requires some functions to be integrate, called fundamental solutions or kernels. Since the problem has axial simmetry, the 3D kernels were transformed into axisymmetric ones by a coordinate change and an integration over the azimuthal direction, what makes the problem one less dimension. The singularity presented in some dynamic kernels is regularized subtracting the corresponding static kernels. The BE implementation is validated by determining the response of a cylinder with known modal data, i.e. eigenfrequencies and eigenmodes. The methodology is also applied to analyze the response of an acoustic concentrator.

Key Words

Boundary Elements Method, Axisymmetric Bodies, Acoustic Concentrator

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e entidades, às quais presto minha homenagem:

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto pelo direcionamento e acompanhamento de toda a tese, além do suporte necessário não somente no âmbito do conhecimento técnico.

Prof. Dr. Sérgio Santos Mühlen pela oportunidade concedida de poder desenvolver este projeto.

Alunos da Pós Graduação do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP pelo companheirismo e opiniões que certamente ajudaram na execução do trabalho.

Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Eliana Corrêa Aguirre de Mattos pelo estímulo e opiniões ao longo do trabalho.

A todos que de alguma forma contribuíram para que o objetivo final fosse atingido.

Dedicatória:

Dedico este trabalho aos meus avós Joseppino Merli e Alice Victor Merli.

Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive.

Fernando Pessoa
(heterônimo Ricardo Reis)

Índice

Introdução 1

Capítulo 1

Conceitos de Mecânica dos Sólidos e Elasticidade Linear 9

1.1 Análise de Tensão

1.1.1 A idéia de tensão 9

1.1.2 Notação para as componentes da tensão 11

1.1.3 Fórmula de Cauchy 12

1.1.4 Equações de equilíbrio 15

1.2 Análise de Deformação

1.2.1 Conceito de deformação 18

1.2.2 Definição matemática de deformação 19

1.3 Equações Constitutivas 24

1.4 Elasticidade Linear 27

1.5 Viscoelasticidade

1.5.1 Princípio da Correspondência 29

Capítulo 2

Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Elastostática 30

2.1 Método dos Resíduos Ponderados 30

2.2 De Equações Diferenciais no Domínio a Equações Integrais de Contorno 31

Capítulo 3

Elastostática Axi-simétrica 56

3.1 Formulação Elastostática Axi-simétrica 57

3.2 Exemplos Elastostáticos Axi-simétricos 69

3.2.1 Barra fixa-livre 71

3.2.2 Coluna cônica fixa-livre 73

Capítulo 4

Elastodinâmica Axi-simétrica Estacionária 75

4.1 Equações Integrais de Contorno 75

4.2 Exemplos Elastodinâmicos Axi-simétricos 79

4.2.1 Barra fixa-livre 80

4.2.2 Barra fixa-fixa 89

Capítulo 5

Aplicações 99

Capítulo 6

Discussão, Conclusões e Perspectivas 109

Referências Bibliográficas 112

Apêndices 115

Apêndice A 115

Apêndice B 130

Apêndice C 133

Apêndice D 141

Lista de Figuras

I.1	Transdutor ultra-sônico	2
1.1	Princípio da tensão	10
1.2	Notação para as componentes da tensão	11
1.3	Forças de superfície num tetraedro	13
1.4	Componentes da tensão em equilíbrio num paralelogramo infinitesimal	15
1.5	Representação de um corpo sujeito à tração	18
1.6	Deformação angular de um elemento	19
1.7	Elementos carregados nas posições inicial e final	19
1.8	Deformações angulares	24
2.1a	Deslocamentos no ponto x resultantes de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1	37
2.1b	Tensor de tensões σ^*_{ij1} no ponto x resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1	37
2.1c	Vetor de tensões t^*_{jl} atuando no ponto x, na superfície de orientação n, resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_l.	38
2.2	Superfície de contorno acrescida de um hemisfério de integração S_ε	42
2.3	Definições geométricas	44
2.4	Exemplo de um corpo bidimensional discretizado em elementos constantes	47
3.1	Representação de um domínio axi-simétrico	56
3.2	Transformação de coordenadas cartesianas em cilíndricas para representação de uma superfície	57

3.3 Esquema utilizado na simulação de uma barra fixa-livre sujeita a um carregamento axial de tração 69
3.4 Esquema utilizado na simulação de uma coluna cônica sujeita a um carregamento axial de compressão 71

4.1 Esquema utilizado na simulação de uma barra fixa-livre sujeita a um carregamento axial de tração periódico harmônico 78
4.2 Quadros representando o primeiro modo de vibrar da barra fixa-livre num ciclo 84
4.3 Quadros representando o segundo modo de vibrar da barra fixa-livre num ciclo 85
4.4 Quadros representando o terceiro modo de vibrar da barra fixa-livre num ciclo 86
4.5 Esquema utilizado na simulação de uma barra fixa-fixa sujeita a um carregamento axial periódico harmônico 87
4.6 Quadros representando o primeiro modo de vibrar da barra fixa-fixa num ciclo 93
4.7 Quadros representando o segundo modo de vibrar da barra fixa-fixa num ciclo 94
4.8 Quadros representando o terceiro modo de vibrar da barra fixa-fixa num ciclo 95

5.1 Representação geométrica das barras com suas respectivas identificações 98
5.2 Representação do deslocamento normal num elemento da malha 108

Gráficos

4.1 Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z da extremidade carregada para as quatro discretizações do intervalo de freqüência mostrados na Tabela 4.1 81

4.2 Modos de vibração de uma barra fixa-livre 83
4.3 Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto de coordenadas (0,6; 10,5) para as quatro discretizações do intervalo de freqüência mostrados na Tabela 4.3 90
4.4 Modos de vibração de uma barra fixa-fixa 92

5.1 Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar0_05 99
5.2 Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar0_75 100
5.3 Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar1_00 101
5.4 Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar1_25 102
5.5 Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar1_50 103

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Lista de Tabelas

3.1 Comparação, entre duas fontes e *AXIEST*, dos deslocamentos no ponto de coordenada (0,05; 10,0) situado na extremidade livre da barra fixa-livre 70

3.2 Comparação, entre duas fontes e *AXIEST*, dos deslocamentos no ponto de coordenada (0,5; 50,0) situado na extremidade livre da coluna cônica 72

4.1 Influência da discretização do intervalo de freqüência no cálculo da freqüência natural de uma barra fixa-livre 80

4.2 Influência da discretização da malha no cálculo da freqüência natural da barra fixa-livre 82

4.3 Influência da discretização do intervalo de freqüência no cálculo da freqüência natural da barra fixa-fixa 89

4.4 Influência da discretização da malha no cálculo da freqüência natural da barra fixa-fixa 91

5.1 Influência da discretização do intervalo de freqüência no cálculo das freqüências naturais das cinco estruturas 99

5.2 Influência da discretização da malha no cálculo das freqüências naturais das cinco estruturas 104

Nomenclatura

Letras Latinas

b_j	componentes do vetor força de corpo
Cp	velocidade de propagação da onda de pressão
Cs	velocidade de propagação da onda de cisalhamento
E	módulo de elasticidade linear
E^*	módulo de elasticidade linear em um meio contínuo viscoelástico
$E\left(m,\pi/2\right)$	integral elíptica do segundo tipo
e_j	versores nas direções dos eixos de cartesianos
G	módulo de elasticidade transversal
G^*	módulo de elasticidade transversal em um meio contínuo viscoelástico
$[G]$	matriz que contém os núcleos de deslocamento
$[H]$	matriz que contém os núcleos de forças de superfície
$K\left(m,\pi/2\right)$	integral elíptica do primeiro tipo
m	módulo das integrais elípticas
$\boldsymbol{n}$	vetor unitário normal à uma superfície
$\boldsymbol{r}\,(\xi, x)$	vetor raio (definido na formulação do MEC)
S	superfície de contorno
t_j^n	componentes do vetor força de superfície
t_{ij}	componentes do tensor força de superfície
u_j	componentes do vetor deslocamento
$\ddot{u}_j$	componentes do vetor aceleração

u_{ij}	componentes do tensor de deslocamento
x	ponto de campo (definido na formulação do MEC)
x_i	eixos do sistema cartesiano de coordenadas
r, θ, z	orientações do sistema de coordenadas cilíndricas

Letras Gregas

Γ	linha de contorno
δ_{ij}	delta de Kronecker
ε_{ij}	componentes do tensor de deformações
λ , μ	constantes de Lamè
ν	coeficiente de Poisson
ξ	ponto de colocação (definido na formulação do MEC)
ρ	densidade de massa
σ_{ij}	componentes do tensor de tensões
ω	freqüência angular
Ω	domínio de uma função

INTRODUÇÃO

Equipamentos de ultra-som de potência vêm progressivamente se tornando auxiliares poderosos nos processos industriais, ao lado das tecnologias tradicionais, em aplicações tais como: usinagem de precisão, soldagem, limpeza, emulsificação, ruptura celular e esterilização, entre outras.

Em medicina, diversas aplicações surgiram nas últimas décadas e os equipamentos médicos utilizando tecnologia ultra-sônica de potência vieram incorporar definitivamente o arsenal terapêutico já existente, principalmente nas especialidades cirúrgicas e em fisioterapia.

As vantagens das ferramentas baseadas em vibrações ultra-sônicas em relação às tecnologias tradicionais repousam essencialmente na ausência de peças móveis, na grande densidade de energia envolvida e sobretudo num aproveitamento diferenciado desta energia, em função das impedâncias acústicas dos diferentes tecidos ou meios envolvidos no processo. Pode-se citar o desenvolvimento de equipamentos de terapia, tais como o bisturi ultra-sônico para cirurgia oncológica, a faco-emulsificação de cataratas, os instrumentos de cirurgia ortopédica, a fragmentação de calculoses urinárias e vesicais, a detartaragem dentária, a hipertermia em fisioterapia, etc.

A geração de ondas ou impulsões acústicas faz necessariamente uso de transdutores, cujo rendimento energético continua sendo objeto de otimização, com o intuito de melhorar a conversão eletro-acústica e o acoplamento com o meio biológico.

Os transdutores ultra-sônicos de potência são geralmente constituídos de partes ativas e passivas. As partes ativas, onde se dá a conversão eletro-mecânica da energia, podem utilizar o princípio da magnetostrição ou (com muito maior freqüência) cerâmicas piezoelétricas, que sofrem modificações geométricas quando submetidas a um campo elétrico. As partes passivas

constituem-se de massas geralmente metálicas, dispostas à frente e atrás do transdutor, com a finalidade de modificar as condições de acoplamento acústico com o meio externo, aumentar a amplitude vibratória na face frontal e, se necessário, aplicar um pré-tensionamento mecânico às cerâmicas piezoelétricas (Figura I.1).

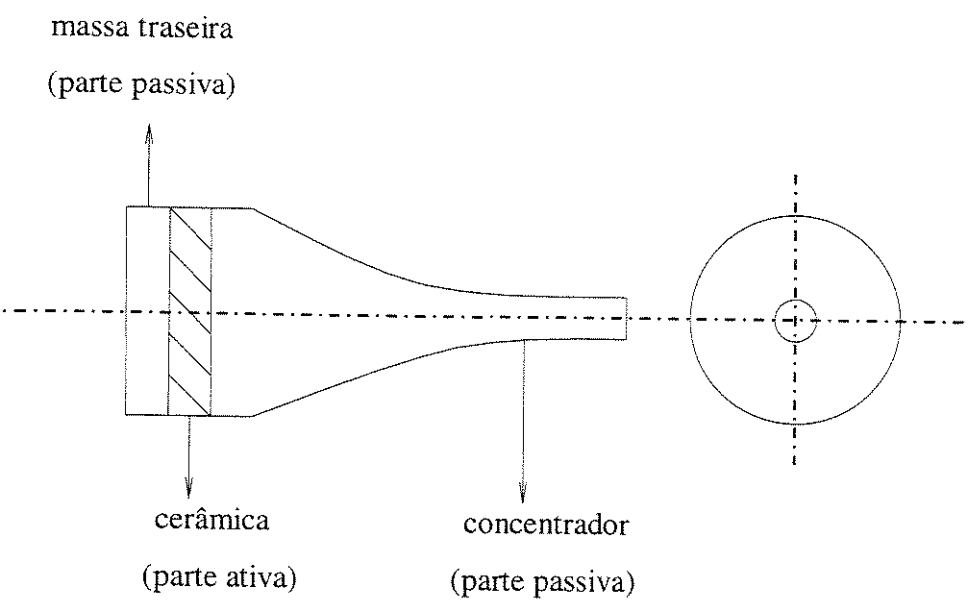


Figura I.1 - Transdutor ultra-sônico

Pela facilidade na construção, normalmente é adotada uma geometria axi-simétrica no conjunto. A seção transversal e as características da cada um dos materiais componentes do transdutor determinam a sua eficiência. Uma redução da seção transversal da parte frontal do transdutor está associada a um aumento da amplitude vibratória nesta face, o que é desejável para se produzir aí um campo acústico mais intenso e com energia concentrada. Esta parte frontal é então chamada concentrador.

Uma preocupação sempre presente no projeto dos transdutores é maximizar sua eficiência acústica, definida como a relação entre a energia acústica útil na extremidade do concentrador e a energia elétrica consumida. Esta preocupação é particularmente crítica para transdutores que operam com potências da ordem de centenas de watts, onde mesmo perdas de poucos pontos

percentuais podem significar sérios problemas para a estabilidade térmica e a durabilidade do conjunto.

Para a análise das perdas em um sistema mecânico é necessário considerar os dois mecanismos responsáveis pela retirada de energia do sistema: quando um corpo vibra existe uma perda causada por atritos internos nos materiais envolvidos na condução da energia. Este tipo de perda é conhecido como amortecimento interno ou amortecimento material. Em meios ilimitados, porém, também é possível que energia seja retirada das proximidades de sua fonte por ondas que se propagam através deste meio e que não são refletidas. Este mecanismo é chamado de amortecimento geométrico.

Uma primeira análise do transdutor, na qual é assumido contato perfeito entre a cerâmica e o concentrador, indica que os dois mecanismos de amortecimento estão presentes no sistema. De um lado a cerâmica e o concentrador ao serem submetidos a vibrações dissipam energia por atrito interno, dando origem às perdas internas; por outro lado o concentrador (e em última instância também a cerâmica) quando vibram geram um campo acústico que dissipa energia na forma de ondas radiadas.

Este campo acústico é gerado em decorrência de deslocamentos normais a toda a superfície do transdutor, e não só na face frontal do concentrador. Isso significa que apenas o campo gerado na extremidade do concentrador é considerado útil, sendo o restante da energia acústica considerada perda por radiação, chamada perda acústica.

Um procedimento de aprimoramento da eficiência dos transdutores de ultra-som passa pela avaliação quantitativa das perdas internas e das perdas acústicas. Do ponto de vista das perdas acústicas seria importante obter uma geometria dos transdutor que causasse o mínimo de radiação acústica fora da região de utilização da energia ultra-sônica.

MOTIVAÇÃO

Este trabalho pretende modelar o comportamento dinâmico estacionário da parte passiva frontal dos transdutores de ultra-som com o objetivo de criar uma ferramenta de simulação que possa auxiliar na determinação dos campos acústicos, útil e não-utilizável, gerados por um concentrador de geometria determinada. O procedimento de modelagem deve ser tal que permita,

dentro de limites estabelecidos, uma variação arbitrária da geometria do concentrador. Uma modelagem que seja suficientemente maleável para descrever uma variação geométrica do transdutor pode ser utilizada, em uma etapa posterior, para a determinação das parcelas útil e não-útil do campo acústico gerado pelo transdutor.

A partir do campo de deslocamentos do concentrador é possível simular o campo acústico total gerado utilizando-se ferramentas numéricas tais como, por exemplo, o Método dos Elementos de Contorno [Anzou 1996]. De posse do campo acústico total é possível quantificar a sua parcela útil, passível de ser aplicada em sistemas de ultra-som. Variando-se a geometria obtém-se outros campos de deslocamentos na superfície do concentrador e conseqüentemente outro campo acústico total pode ser determinado. Assim, embora a modelagem do comportamento dinâmico do concentrador não venha contribuir diretamente na determinação das perdas acústicas, ela é um passo necessário para a análise de perdas acústicas do transdutor.

METODOLOGIA PROPOSTA

Em uma primeira abordagem, o concentrador pode ser modelado como um meio elástico ou viscoelástico, linear, homogêneo e isotrópico. A questão da modelagem do concentrador passa então a ser a solução de um Problema de Valor de Contorno da (Visco)Elastodinâmica Tridimensional. O requisito de solução de um problema de valor de contorno de elastodinâmica com geometria arbitrariamente variável exclui a possibilidade de soluções analíticas. Deve-se então procurar uma ferramenta numérica adequada para aproximar a solução do problema em questão.

No âmbito da solução aproximada de problemas de valor de contorno lineares, dois métodos numéricos concorrentes estão disponíveis. O primeiro deles, e o mais utilizado entre os engenheiros é o Método dos Elementos Finitos (MEF) [Zienkiewicz/Morgan 1983]. Uma alternativa que nos últimos anos vem sendo progressivamente utilizada na solução de diversos tipos de problemas lineares é o chamado Método dos Elementos de Contorno (MEC). A diferença mais significativa entre os dois métodos é que enquanto o MEF exige a discretização de todo o domínio sendo modelado, o MEC somente requer a discretização da superfície do respectivo

domínio [Brebbia/Dominguez 1989, Kane 1994]. A conseqüência mais imediata é que no MEC a dimensão do problema a ser tratado é reduzido de uma ordem. Assim, problemas tridimensionais somente necessitam a discretização de uma superfície, enquanto problemas bidimensionais requerem a discretização de uma linha. Problemas unidimensionais são reduzidos a dois pontos nos extremos do domínio [Hartmann 1986]. Uma implicação importante desta redução de uma ordem da dimensão do problema sendo tratado pelo MEC é que o sistema algébrico resultante da discretização é bem menor que a contrapartida produzida pelo MEF. Outro aspecto importante do MEC é que ele é capaz de modelar naturalmente o amortecimento geométrico associado à propagação de ondas em meios ilimitados [Dominguez 1993, Anzou 1996], sem ter que recorrer a elementos ou técnicas especiais como no caso do MEF [Bettess 1992, Zavala 1999]. Uma discussão mais detalhada sobre as vantagens e desvantagens relativas do MEC quando comparado ao MEF pode ser encontrada em [Mesquita/Pontes/Sousa 1994 a,b].

No presente trabalho optou-se por modelar o comportamento elastodinâmico estacionário do concentrador através do MEC, por duas razões principais:

1) o concentrador possui uma geometria axi-simétrica, conseqüentemente uma modelagem via MEF significa discretizar uma superfície (a superfície geradora do sólido de revolução) enquanto o tratamento via MEC se reduz à discretização de uma linha (a linha geradora da superfície de revolução). Desta forma o sistema algébrico resultante da aplicação do MEC é significativamente menor do que aquele que seria obtido pelo MEF. Tendo em vista que em uma etapa posterior seja possível a implementação de um processo de otimização da geometria do transdutor (visando minimizar as perdas acústicas) e que isto implica em um processo iterativo onde as equações algébricas do sistema são montadas muitas vezes, a existência de um sistema algébrico menor pode levar a um processo de otimização computacionalmente mais eficiente.

2) a geração do campo acústico total em um domínio aberto (ilimitado) a partir do campo de deslocamentos na superfície do concentrador é realizada de forma mais eficiente através do MEC [Anzou 1996]. Por sua vez o acoplamento entre o campo de deslocamento na superfície do concentrador e o campo acústico externo é realizado também de forma mais eficiente se ambos os campos forem sintetizados através da Metodologia de Elementos de Contorno [Sousa 1992, Mesquita/Pontes/Sousa 1994 a,b]. A alternativa de se acoplar o campo de deslocamentos do

transdutor, obtido via MEF, com o campo acústico exterior, descrito pelo MEC é viável, mas implica em acoplar sistemas algébricos com características distintas e resulta em sistemas finais de dimensões maiores [Sousa 1992].

O fato de existirem poucos trabalhos sobre a implementação do MEC na elastodinâmica axi-simétrica estacionária e o interesse em investigar com mais detalhes o desempenho numérico desta implementação, constituem motivação suplementar para a escolha do MEC como ferramenta de modelagem do concentrador em questão.

ESTADO DA ARTE

No que diz respeito à aplicação do MEC em problemas axi-simétricos, em 1977 Cruse, Snow e Wilson utilizaram o método da equação integral de contorno para a solução de um problema estático de análise de tensões num corpo axi-simétrico sujeito a carregamento também axi-simétrico, fazendo a transformação das integrais dos núcleos de deslocamento e forças de superfície tridimensionais em coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas, o que possibilitou ainda uma transformação destas últimas em integrais elípticas do primeiro e segundo tipos, com resultados comparáveis aos valores analíticos e numéricos (MEF). Em 1982, Yoshikawa e Tanaka propuseram uma formulação para o problema potencial axi-simétrico no qual usaram a solução fundamental tridimensional. A integração dos núcleos de potencial na geometria axi-simétrica foi feita através de um procedimento matemático envolvendo integrações analítica e numérica (Quadratura Gaussiana). Através do conceito de potencial uniforme resultar em fluxo zero, foi possível também calcular os termos singulares dos núcleos de fluxo do potencial.

Já em 1985, Gomez-Lera, Alarcon e Dominguez apresentaram alguns resultados obtidos num problema de interação solo-estrutura usando a solução fundamental tridimensional dinâmica como função ponderadora enquanto mantinham a representação da geometria axi-simétrica em coordenadas cilíndricas. Para resolver o problema das singularidades, foi usada a estratégia de regularização da integral singular (subtrair o núcleo estático do dinâmico) e somado um cálculo analítico. Um ano mais tarde, Rizzo e Shippy mostraram um procedimento de formulação e solução numérica elastostática envolvendo corpos e carregamentos axi-simétricos através do uso

das integrais elípticas do primeiro e segundo tipos. Também acrescentaram condições de contorno não-axi-simétricas, resolvendo este problema por meio da análise de Fourier expandindo estas condições de contorno em Série de Fourier.

Emperador e Dominguez, em 1989, utilizaram o MEC novamente num estudo de interação solo-estrutura para obter as funções de rigidez dinâmica de fundações cilíndricas e hemisféricas engastadas em semi-espaços uniformes e estratificados e, no mesmo ano, Wang e Banerjee retomaram o tema do estudo de sólidos axi-simétricos sujeitos a carregamento estático não-axi-simétrico resolvidos pela expansão das variáveis em Série de Fourier, acrescentando detalhes como a subestruturação para facilitar a análise de problemas de multi-domínio.

Em 1990, Wang e Banerjee publicam dois trabalhos relacionados ao tema. No primeiro, complementando um estudo anterior feito por eles próprios sobre vibrações livres de sólidos de revolução utilizando o MEC (com o uso das integrais elípticas) juntamente com outro método de integração particular, fizeram a análise de vibrações livres não axi-simétricas de sólidos axi-simétricos; no segundo, propuseram uma combinação da formulação tridimensional elastodinâmica com geometria e carregamento axi-simétricos juntamente com a expansão da Série de Fourier para condições de contorno não axi-simétrica resultando numa análise elastodinâmica axi-simétrica geral para o MEC.

Em 1992, Becker publica um livro sobre o MEC aplicado em problemas estáticos, em que um dos capítulos é dedicado exclusivamente a problemas potenciais e elastostáticos axi-simétricos, trazendo também um programa fonte (*BEACON*) bastante didático e esclarecedor, capaz de resolver problemas elastostáticos bidimensionais e axi-simétricos.

No ano seguinte, 1993, Dominguez também publica um livro sobre a aplicação do MEC em dinâmica, que traz em um de seus capítulos o estudo do problema harmônico tridimensional com um programa fonte (*CONDTHEH*) em que mostra como é feita a regularização da integral singular.

Vale notar que estas duas últimas referências foram de absoluta relevância na elaboração do programa que faz parte dos resultados deste trabalho.

ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido da seguinte maneira.

Capítulo 1: Breve revisão da teoria de Mecânica dos Sólidos englobando os conceitos de estados de tensão e deformação de um ponto juntamente com as equações que relacionam os dois estados além das equações básicas da Elasticidade Linear, com o objetivo de lançar as bases teóricas que serão necessárias ao longo de todo o trabalho;

Capítulo 2: O MEC e a Elastostática Linear. O propósito deste capítulo é a formulação do MEC para problemas elastostáticos, tendo em vista que o problema dinâmico axi-simétrico é resolvido neste trabalho usando uma estratégia matemática em que é necessária a prévia resolução do primeiro;

Capítulo 3: A Elastostática Axi-simétrica. Aqui são mostradas todas as particularizações necessárias para a resolução de um problema elastostático axi-simétrico incluindo a execução de um programa computacional, os resultados obtidos e discussão;

Capítulo 4: O MEC e a Elastodinâmica Linear. Este capítulo visa a formulação do MEC para problemas elastodinâmicos, e como no capítulo anterior, com as particularizações para problemas axi-simétricos além da execução de um programa computacional, os resultados obtidos e discussão;

Capítulo 5: Aplicações. Usando o programa computacional resultante deste trabalho, este capítulo busca analisar o desempenho, sob condições especificadas no seu decorrer, de algumas geometrias que podem simular o modo de operação de um concentrador ultra-sônico;

Capítulo 6: Discussão, Conclusões e Perspectivas.

CAPÍTULO 1

Conceitos de Mecânica dos Sólidos e Elasticidade Linear

O propósito deste capítulo é fazer uma breve revisão da Teoria da Elasticidade Linear englobando basicamente os conceitos de tensão e deformação, bem como as relações existentes entre elas através das equações constitutivas [Fung 1977, Popov 1978], apresentando em seguida as equações básicas da Elastodinâmica Linear [Eringen/Suhubi 1975].

1.1 – ANÁLISE DE TENSÃO

1.1.1 – A IDÉIA DE TENSÃO

Considerando um sistema na mecânica da partícula, devemos especificar exatamente a maneira pela qual uma é influenciada pelas demais. De maneira similar, na mecânica do contínuo, temos que considerar a interação entre uma porção e outra de um mesmo corpo. Entretanto, uma vez que o contínuo é uma abstração matemática, pois mesmo o menor volume contém um grande número de partículas, é necessária uma outra maneira para descrever esta interação que não seja sob o conceito de partícula. É a partir daí que se cria o conceito de tensão.

Considere um material contínuo B ocupando uma região espacial V (Figura 1.1) e uma superfície S fechada dentro de B. Queremos expressar a interação entre a porção externa e interna a S.

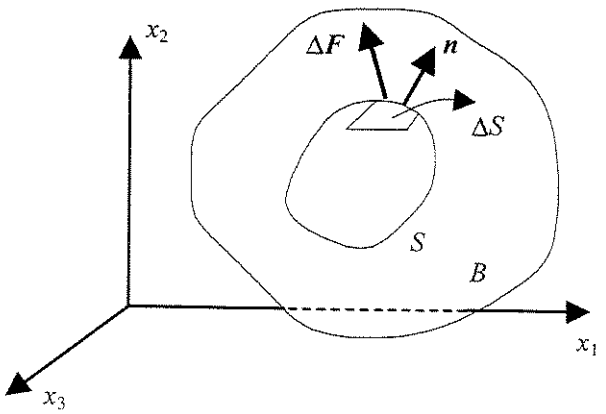


Figura 1.1 – Princípio da tensão.

Esta interação pode ser dividida em dois tipos: o primeiro devido às forças de ação à distância, como a gravitacional ou eletromagnética, que podem ser expressas como força por unidade de volume e que são chamadas de forças de corpo; e o segundo tipo de interação é devido à ação de forças através da superfície de contorno S, chamadas de forças de superfície. Para expressar esta última, vamos considerar um pequeno elemento de área ΔS na superfície S e, de um ponto em ΔS, um vetor unitário $\boldsymbol{n}$ normal a ΔS com sua direção voltada para o lado externo de S. Com isto podemos distinguir os dois lados de ΔS de acordo com a direção de $\boldsymbol{n}$, de maneira que o lado para o qual este vetor normal aponta será considerado o lado positivo. A parte do material que está neste lado exerce uma força $\Delta \boldsymbol{F}$ na outra porção, a qual está situada no lado negativo em relação à normal, ressaltando-se que esta força $\Delta \boldsymbol{F}$ depende da localização e tamanho da área e da orientação do vetor normal. Fazendo com que ΔS tenda a zero, a relação $\Delta \boldsymbol{F}/\Delta S$ tende para o limite $\mathrm{d}\boldsymbol{F}/\mathrm{d}S$, e o momento resultante agindo na superfície ΔS em relação a qualquer ponto dentro desta área será zero. Desta forma, este vetor, no limite, será escrito como:

$$\overset{n}{\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}S} \tag{1.1}$$

onde o sobrescrito n é introduzido para denotar a direção normal à superfície ΔS. O vetor $\overset{n}{t}$ é chamado de vetor força de superfície ou vetor tensão e representa a força por unidade de área agindo na superfície.

1.1.2 – NOTAÇÃO PARA AS COMPONENTES DA TENSÃO

Considere um caso especial no qual a superfície ΔS_k (k = 1, 2 ou 3), é paralela a um dos planos do sistema de coordenadas retangulares. A normal a ΔS_k está na direção positiva do eixo x_k. O vetor tensão agindo em ΔS_k é denotado por $\overset{k}{t}$, com três componentes $\overset{k}{t}_1$, $\overset{k}{t}_2$ e $\overset{k}{t}_3$ orientadas nas direções dos eixos x_1, x_2 e x_3 , respectivamente. O índice i de $\overset{k}{t}_i$ denota a componente da força, e o símbolo k indica a normal à superfície na qual a força está agindo. Neste caso especial, introduzimos um novo conjunto de símbolos para as componentes da tensão (ver Figura 1.2).

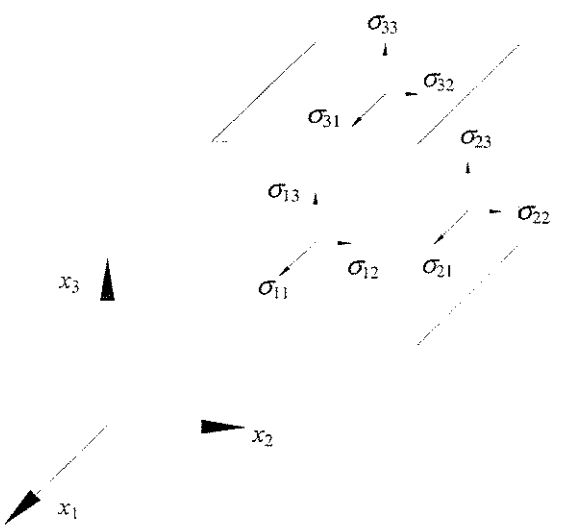


Figura 1.2 – Notação para as componentes da tensão.

$$\overset{k}{t}_1 = \sigma_{k1}, \qquad \overset{k}{t}_2 = \sigma_{k2}, \qquad \overset{k}{t}_3 = \sigma_{k3} \tag{1.2}$$

Rearranjando as componentes das forças de superfície agindo nas superfícies ΔS_k numa matriz, obtemos:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

As componentes σ_{11}, σ_{22} e σ_{33} são chamadas de tensões normais, e as componentes restantes σ_{12} , σ_{13}, etc., são chamadas de tensões de cisalhamento.

Pode-se mostrar que as componentes σ_{ij} das tensões obtidas a partir de três planos mutuamente perpendiculares, formam um tensor do 2° grau.

1.1.3 – FÓRMULA DE CAUCHY

Vamos agora estabelecer uma relação entre as componentes do tensor de tensões, que são também as componentes dos vetores de tensão atuando em três planos mutuamente perpendiculares, com as componentes do vetor tensão atuando em um plano de direção arbitrária, caracterizado pela normal $\boldsymbol{n}$.

Consideremos um tetraedro infinitesimal formado por três superfícies paralelas aos planos coordenados e uma outra superfície normal ao vetor unitário $\boldsymbol{n}$ (Figura 1.3). A área da superfície normal ao vetor $\boldsymbol{n}$ é dS.

As áreas das outras três superfícies são:

$dS_1 = dS \cos(\boldsymbol{n}, x_1) = n_1\, dS$ = área da superfície paralela ao plano x_2x_3 ,

$dS_2 = dS \cos(\boldsymbol{n}, x_2) = n_2\, dS$ = área da superfície paralela ao plano x_3x_1 ,

$dS_3 = dS \cos(\boldsymbol{n}, x_3) = n_3\, dS$ = área da superfície paralela ao plano x_1x_2 ,

e o volume do tetraedro é:

$$dv = \frac{1}{3} h \, dS \tag{1.4}$$

onde h é a altura do vértice P oposto a dS.

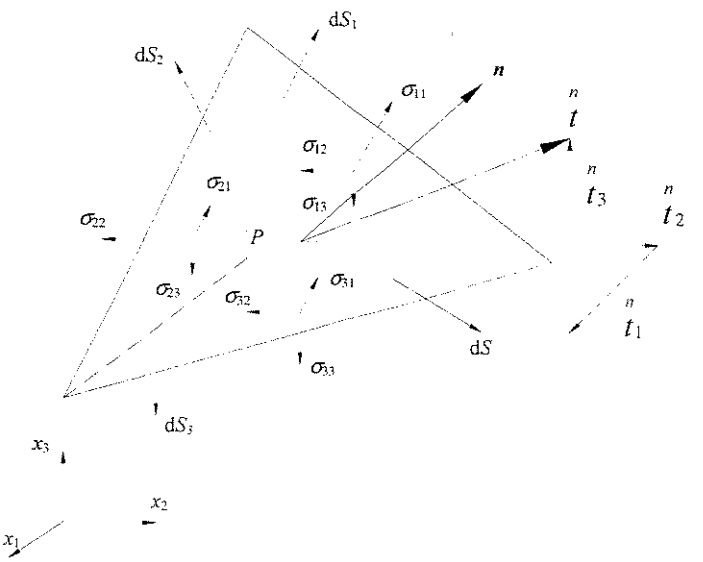


Figura 1.3 – Forças de superfície num tetraedro.

As forças na direção positiva de x_1, agindo nas três superfícies coordenadas, podem ser escritas como:

$$\left(-\sigma_{11} + e_1\right) dS_1 \qquad \left(-\sigma_{21} + e_2\right) dS_2 \qquad \left(-\sigma_{31} + e_3\right) dS_3$$

onde σ_{11}, σ_{21}, σ_{31} são as tensões no vértice P oposto a dS . O sinal negativo vem do fato das normais às três superfícies terem sentidos opostos em relação aos eixos coordenados, e os e's são inseridos porque as forças de superfície agem num ponto levemente diferente de P . Se admitirmos que o campo de tensões é contínuo, então e_1, e_2 e e_3 são quantidades infinitesimais.

Por outro lado, a força agindo no triângulo normal a $\boldsymbol{n}$ tem uma componente $\left(\overset{n}{t}_1 + e\right)\mathrm{d}S$ na direção positiva de x_1 e as forças de corpo têm uma componente na direção de x_1 igual a $(b_1 + e')\mathrm{d}v$. Aqui $\overset{n}{t}_1$ e b_1 referem-se ao ponto P, e e e e' são novamente infinitesimais. A primeira equação de equilíbrio estático (somatório das forças atuando na direção x_1) é então;

$$\left(-\sigma_{11} + e_1\right) n_1 \mathrm{d}S + \left(-\sigma_{21} + e_2\right) n_2 \mathrm{d}S + \left(-\sigma_{31} + e_3\right) n_3 \mathrm{d}S + \left(\overset{n}{t}_1 + e\right)\mathrm{d}S + \left(b_1 + e'\right)\frac{1}{3} h\, \mathrm{d}S = 0$$

Dividindo os termos por dS e tomando no limite $h \rightarrow 0$ notamos então que e_1, e_2, e_3, e e e' tendem a zero com h, e assim temos

$$\overset{n}{t}_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 \qquad (1.5a)$$

que é a primeira componente da Fórmula de Cauchy, onde as outras componentes seguem o mesmo raciocínio, e são:

$$\overset{n}{t}_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \qquad (1.5b)$$

$$\overset{n}{t}_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3 \qquad (1.5c)$$

A Fórmula de Cauchy pode ser escrita em notação indicial como:

$$\overset{n}{t}_j = \sigma_{ij} n_i \qquad (1.6)$$

e nos mostra que as nove componentes do tensor de tensões σ_{ij} definem as forças de superfície através de qualquer elemento cuja superfície seja caracterizada por uma normal $\boldsymbol{n}$. Desta forma o estado de tensão de um corpo é completamente caracterizado por este conjunto de quantidades σ_{ij}.

1.1.4 – EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Considere um paralelepípedo infinitesimal em equilíbrio, com suas superfícies paralelas aos planos coordenados. As tensões agindo nas várias superfícies são mostradas na Figura 1.4. A força $\sigma_{11}\,dx_2\,dx_3$ age no lado esquerdo e a força $\left[\sigma_{11}+\left(\partial\sigma_{11}/\partial x_1\right)dx_1\right]dx_2dx_3$ age no lado direito. As forças de corpo são $b_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3$.

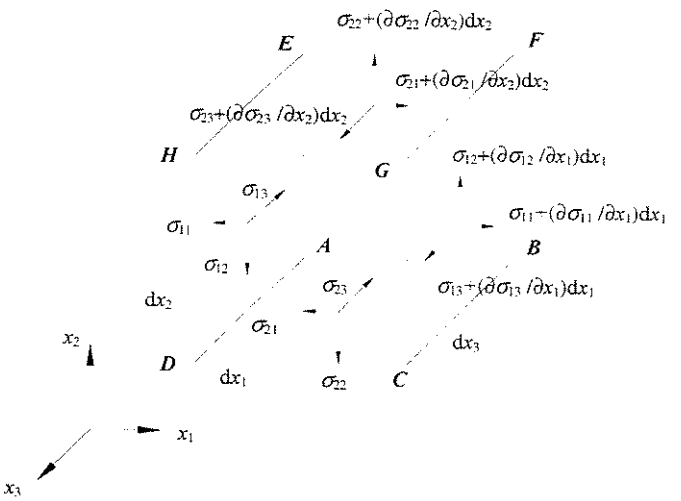


Figura 1.4 – Componentes da tensão em equilíbrio num paralelogramo infinitesimal.

Todas as componentes da tensão são funções da posição. Assim a componente σ_{11} é função de x_1, x_2 e x_3. Num ponto levemente deslocado para a direita de (x_1,x_2,x_3), chamado de (x_1+dx_1,x_2,x_3) o valor da tensão σ_{11} é $\sigma_1(x_1+dx_1,x_2,x_3)$. Mas se σ_{11} é uma função diferenciável, então de acordo com o Teorema de Taylor podemos escrever:

$$\sigma_{11}(x_1+dx_1,x_2,x_3)=\sigma_{11}(x_1,x_2,x_3)+dx_1\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)+\ldots$$

onde os outros termos da anterior são suficientemente pequenos quando comparados com o termo em dx_1.

Considerando as forças na direção x_1 e lembrando que o corpo está em equilíbrio, as seis componentes das forças de superfície e uma da força de corpo devem satisfazer a relação:

$$\left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3-\sigma_{11}dx_2dx_3+\left(\sigma_{21}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3dx_1-\sigma_{21}dx_3dx_1+$$
$$\left(\sigma_{31}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_1-\sigma_{31}dx_1dx_2+b_1dx_1dx_2dx_3=\rho\,\ddot{u}_1\,dx_1dx_2dx_3$$

onde $\ddot{u}_1$ é a componente da aceleração na direção x_1 e ρ é a densidade de massa (massa por unidade de volume).

Dividindo por $dx_1dx_2dx_3$ e fazendo o limite $dx_i \to 0$ (i = 1, 2, 3), obtemos:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}+b_1=\rho\,\ddot{u}_1 \qquad (1.7a)$$

Considerando também o equilíbrio de forças nas direções x_2 e x_3, obtemos respectivamente:

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}+b_2=\rho\,\ddot{u}_2 \qquad (1.7b)$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}+b_3=\rho\,\ddot{u}_3 \qquad (1.7c)$$

Podemos escrever o conjunto de Equações (1.7), em notação indicial, como:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}+b_j=\rho\,\ddot{u}_j \qquad (1.8)$$

O equilíbrio rotacional (equilíbrio de momentos) de um elemento também deve ser estabelecido. Vejamos por exemplo os momentos das forças agindo nas faces do elemento sobre a linha *AE*, que é paralela ao eixo x_2 (ver Figura 1.4). As tensões que agem nas faces *ABCD* e *EFGH* contribuem com momento resultante nulo. O mesmo ocorre com as tensões normais que agem nas outras quatro faces. Entretanto, o momento em relação a *AE* da força devido à tensão σ_{13} agindo na face *BCGF*, cuja área é $dx_2\, dx_3$, é $\sigma_{13}(dx_2\, dx_3)dx_1$. Este deve ser balanceado pelo momento da força devido à tensão σ_{31} agindo na face *CDHG*, que é $\sigma_{31}(dx_1\, dx_2)dx_3$ na direção oposta. Assim:

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

Considerando também o equilíbrio de momentos sobre linhas paralelas aos eixos x_3 e x_1, obtemos respectivamente:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \qquad \text{e} \qquad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Esta consideração nos conduz a uma importante conclusão que é a simetria do tensor de tensões, ou seja;

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1.9}$$

Podemos observar que as equações acima (a equação de equilíbrio e a simetria do tensor de tensões) decorrem somente das exigências do equilíbrio e são válidas para qualquer meio contínuo.

1.2 – ANÁLISE DE DEFORMAÇÃO

1.2.1 – CONCEITO DE DEFORMAÇÃO

Um corpo sólido se deforma quando sujeito a mudanças de temperatura ou a uma carga externa. Por exemplo, quando um corpo está submetido a uma força crescente P, como mostrado na Figura 1.5, ocorre mudança no comprimento do elemento entre dois pontos, como A e B. Observa-se maior deformação com uma mesma carga e consequentemente uma distância maior entre esses dois pontos. Dessa forma, é de maior utilidade a referência ao alongamento observado por unidade de comprimento, isto é, a taxa de deformação.

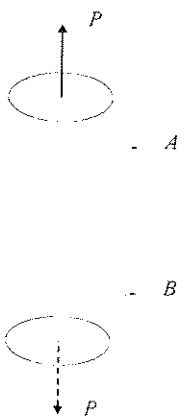


Figura 1.5 – Representação de um corpo sujeito à tração.

Se l_0 é o comprimento original e l é o observado após a deformação, e sendo Δl o alongamento, então pode-se escrever $\Delta l = l - l_0$. Assim, o alongamento por unidade de comprimento ε é

$$\varepsilon = \int_0^l \frac{dl}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{1.10}$$

Esse alongamento por unidade de comprimento é chamado de deformação linear e é uma quantidade adimensional. Além deste tipo deformação, um corpo também pode sofrer deformação angular como mostrado na Figura 1.6.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

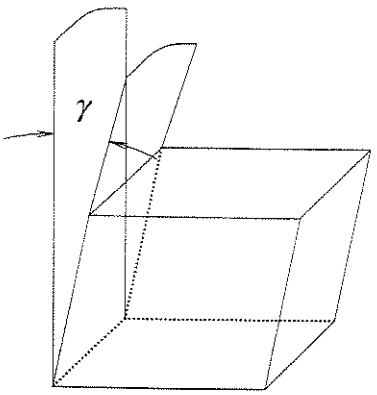
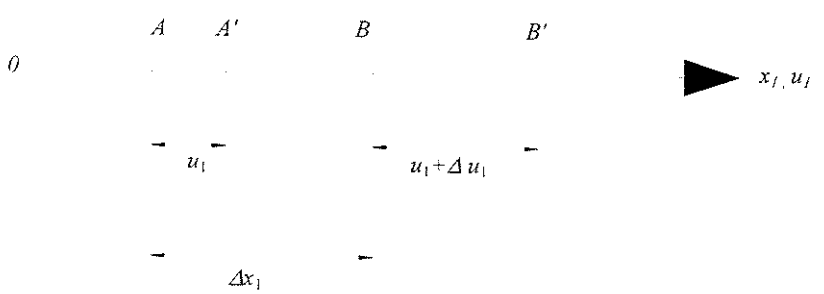


Figura 1.6 – Deformação angular de um elemento.

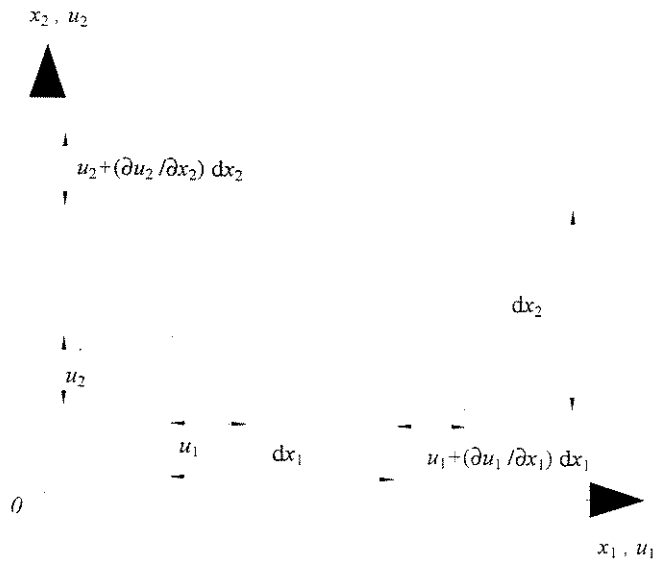
Tais deformações causam uma mudança nos ângulos retos iniciais entre as linhas imaginárias do corpo, e essa alteração angular define a deformação de cisalhamento ou deformação angular.

1.2.2 – DEFINIÇÃO MATEMÁTICA DE DEFORMAÇÃO

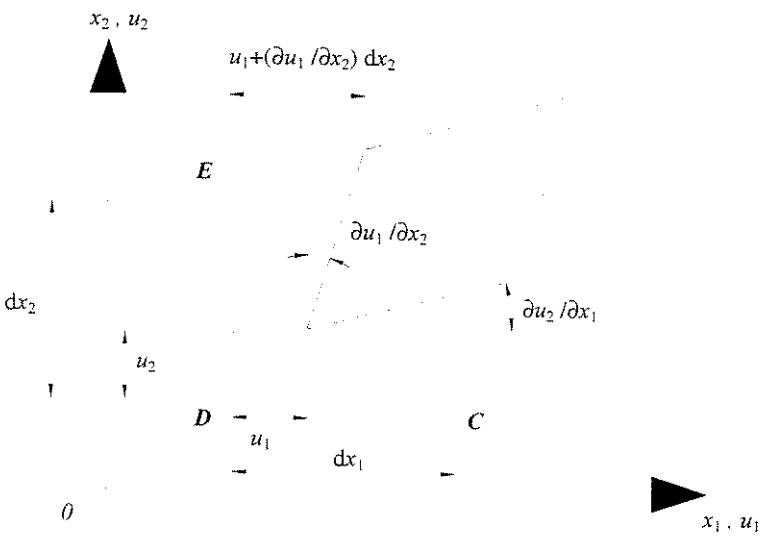
Como as deformações geralmente variam de ponto para ponto, as definições de deformação devem ser variáveis contínuas. Considere uma deformação linear ocorrendo numa direção, como mostra a Figura 1.7 (a). Os pontos A e B movem-se para A' e B' respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.7 – Elementos carregados nas posições inicial e final

Durante a deformação, o ponto A sofre um deslocamento u_1. O deslocamento do ponto B é $u_1 + \Delta u_1$ porque, além de u_1 , comum a todo elemento Δx_1 , ocorre a distensão Δu_1 no elemento. Assim, a definição da taxa de deformação linear é

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x_1} \tag{1.11}$$

Se um corpo sofre deformações em direções ortogonais, como é mostrado na Figura 1.7 (b) para o caso bidimensional, as deformações decorrentes devem ser diferenciadas por meio de índices, sendo pela mesma razão necessário mudar as derivadas ordinárias para parciais. Dessa forma, se em um ponto do corpo, u_1, u_2 e u_3 forem as três componentes de deslocamento ocorrendo nas direções x_1, x_2 e x_3 respectivamente, as definições básicas de deformação linear ficam

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \tag{1.12}$$

Observe que podem ser usados índices duplos, analogamente àqueles de tensão.

Assim;

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{11} \qquad \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{22} \qquad \varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{33} \tag{1.13}$$

onde um dos índices designa a direção do deslocamento, e o outro a direção da variação do deslocamento. O sinal positivo aplica-se a alongamentos, enquanto que encurtamentos são deformações lineares negativas.

Em acréscimo à deformação linear, um elemento também pode sofrer uma deformação angular (transversal), como é mostrado no plano x_1-x_2 da Figura 1.7 (c). Isso inclina os lados do elemento deformado em relação aos eixos x_1 e x_2. Observe-se que $\partial u_2 / \partial x_1$ representa a variação do deslocamento u_2 na direção x_1 e representa também a deformação angular da face horizontal

paralela ao eixo x_1. Analogamente, o lado vertical gira de um ângulo $\partial u_1 / \partial x_2$ e, em decorrência disto, o ângulo inicialmente reto *CDE* reduz-se de $\left(\partial u_2 / \partial x_1\right) + \left(\partial u_1 / \partial x_2\right)$. Assim, para pequenas mudanças de ângulo, a definição de deformação angular associada com as direções x_1 x_2 são

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \qquad \gamma_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \tag{1.14a}$$

Para se chegar a essa equação, admite-se que tangentes de pequenos ângulos sejam iguais aos ângulos em si.

As definições de deformações angulares para as demais direções são análogas àquelas da Equação (1.14 a).

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \qquad \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \tag{1.14b}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \qquad \gamma_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \tag{1.14c}$$

O conjunto de Equações (1.13) e (1.14) define nove componentes da deformação. Pode-se mostrar que estas também são componentes de um tensor de 2° grau, mas uma vez que $\gamma_{12} \neq \gamma_{21}$ este tensor não é simétrico. Na seqüência será comentada uma convenção capaz de tornar simétrico o tensor de deformações.

Observando a Figura 1.8, notamos que nos três casos mostrados a deformação angular do elemento é sempre a mesma e igual à soma $\gamma_{12} + \gamma_{21} = \alpha$. O que diferencia as figuras não é a deformação angular mas sim uma rotação de corpo rígido.

Podemos usar o fato das deformações em 1.8 (a), (b) e (c) serem iguais para definirmos uma outra medida da deformação angular:

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{(\gamma_{12} + \gamma_{21})}{2} \tag{1.15a}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{(\gamma_{12} + \gamma_{21})}{2} \tag{1.15b}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{(\gamma_{12} + \gamma_{21})}{2} \tag{1.15c}$$

As definições para as deformações lineares (1.12) e angulares (1.15) podem ser escritas de forma única através da expressão indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.16a}$$

ou ainda usando a convenção de diferenciação na notação indicial $\partial u_i / \partial x_j = u_{i,j}$ temos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{1.16b}$$

As Equações (1.16) definem o chamado tensor de pequenas deformações de Cauchy e sua representação matricial é da forma:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Devemos observar que as diagonais de tensor contêm deformações lineares (alongamentos e encurtamentos) e que os termos não diagonais representam deformações angulares. Este tensor define completamente as pequenas deformações que um corpo pode sofrer.

Sua definição é baseada somente na descrição da cinemática possível do movimento do contínuo, considerando-se pequenos deslocamentos e deformações.

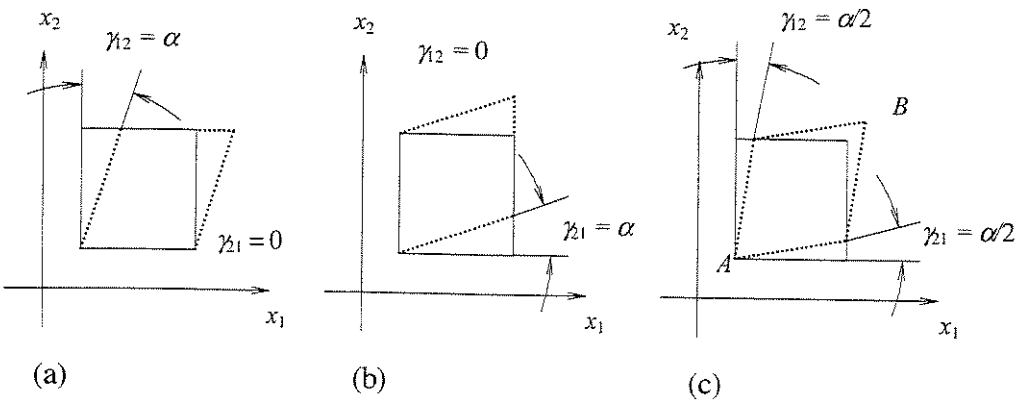


Figura 1.8 – Deformações angulares.

1.3 – EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Como foi visto, o tensor de tensões e suas relações advinham da interação dos corpos através de superfícies e das imposições do equilíbrio. O tensor de deformações foi definido a partir da cinemática de pequenas deformações e deslocamentos. Assim estas grandezas σ e ε foram definidas independentemente uma da outra.

Mas é um fato observável que deformações em um corpo induzem tensões no mesmo e, reciprocamente, esforços aplicados em um corpo induzem deformações.

A ligação entre estas grandezas é feita pelas propriedades do corpo (contínuo). As expressões matemáticas destas relações entre tensões e deformações são conhecidas como equações constitutivas.

Uma forma particular de equação constitutiva é aquela dos materiais que se comportam linearmente. A relação entre as seis componentes do tensor de tensões e de deformações para materiais lineares é conhecida como Lei de Hooke generalizada, que segue:

$$\varepsilon_{11} = A_{11}\sigma_{11} + A_{12}\sigma_{22} + A_{13}\sigma_{33} + A_{14}\sigma_{12} + A_{15}\sigma_{23} + A_{16}\sigma_{31}$$

$$\varepsilon_{22} = A_{21}\sigma_{11} + A_{22}\sigma_{22} + A_{23}\sigma_{33} + A_{24}\sigma_{12} + A_{25}\sigma_{23} + A_{26}\sigma_{31}$$

$$\varepsilon_{33} = A_{31}\sigma_{11} + A_{32}\sigma_{22} + A_{33}\sigma_{33} + A_{34}\sigma_{12} + A_{35}\sigma_{23} + A_{36}\sigma_{31}$$

$$\varepsilon_{12} = A_{41}\sigma_{11} + A_{42}\sigma_{22} + A_{43}\sigma_{33} + A_{44}\sigma_{12} + A_{45}\sigma_{23} + A_{46}\sigma_{31}$$

$$\varepsilon_{23} = A_{51}\sigma_{11} + A_{52}\sigma_{22} + A_{53}\sigma_{33} + A_{54}\sigma_{12} + A_{55}\sigma_{23} + A_{56}\sigma_{31}$$

$$\varepsilon_{31} = A_{61}\sigma_{11} + A_{62}\sigma_{22} + A_{63}\sigma_{33} + A_{64}\sigma_{12} + A_{65}\sigma_{23} + A_{66}\sigma_{31} \qquad (1.18)$$

onde os A_{ij} são constantes que caracterizam as propriedades do material (contínuo) considerado.

Para materiais elásticos, lineares, homogêneos e isotrópicos, a Equação (1.18) é bastante simplificada e pode ser escrita como

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E}$$

$$\varepsilon_{22} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu\frac{\sigma_{33}}{E}$$

$$\varepsilon_{33} = -\nu\frac{\sigma_{11}}{E} - \nu\frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\sigma_{33}}{E}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2G}$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{\sigma_{31}}{2G} \qquad (1.19)$$

A relação tensão-deformação pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

Nessas equações a constante E é chamada módulo de elasticidade ou módulo de Young, a constante de proporcionalidade G é chamada módulo de elasticidade transversal ou módulo de rigidez e a constante ν é chamada coeficiente de Poisson. Para um material isotrópico, existe uma relação entre essas três constantes que é:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.21}$$

Com o auxílio de (1.21), a Equação (1.20) pode ser descrita em notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\nu}{E}\sigma_{kk} \tag{1.22}$$

onde δ_{ij} é o operador Delta de Kronecker com a seguinte propriedade:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ para } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ para } i \neq j$$

Se quisermos escrever a tensão em função da deformação teremos:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\frac{\nu\, E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk} \tag{1.23}$$

Para facilitar a manipulação matemática das equações constitutivas, define-se duas constantes chamadas constantes de Lamè dadas por:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad \text{e} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

e a Equação (1.23) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\,\lambda\,\varepsilon_{kk} \tag{1.24}$$

1.4 – ELASTICIDADE LINEAR

De posse dos tensores de tensão e deformação e das equações constitutivas, é possível definir as equações da Elasticidade linear, isotrópica e homogênea.

A Elasticidade linear é governada por três equações de equilíbrio (1.8),

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = \rho\,\ddot{u}_j \tag{1.8}$$

por seis equações relacionando deslocamentos e deformações (1.16)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{1.16}$$

e por seis equações constitutivas (1.24)

$$\sigma_{ij} = 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\,\lambda\,\varepsilon_{kk} \tag{1.24}$$

Temos então quinze equações envolvendo quinze grandezas sendo três deslocamentos u_i, seis deformações ε_{ij} e seis tensões σ_{ij}.

A tarefa da elasticidade linear é resolver estas equações para um domínio fornecido e para as condições de contorno e iniciais prescritas.

É comum reescrever estas quinze equações na forma de três equações de equilíbrio acopladas, tendo como variável o deslocamento, bastando para isto combinar as Equações (1.8), (1.16) e (1.24), obtendo-se a chamada Equação de Navier para problemas elásticos dinâmicos, que em notação indicial fica:

$$\mu\, u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + b_i = \rho\, \ddot{u}_i \tag{1.25}$$

Particularmente para o regime estacionário, assumindo-se uma variação temporal harmônica $u(x,t) = u(x)\exp(i\omega t)$, pode-se reescrever a equação de Navier:

$$\mu\, u_{i,jj} + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + b_i = -\omega^2 \rho\, u_i \tag{1.26}$$

É possível mostrar que as relações

$$\frac{\mu}{\rho} = Cs^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} = Cp^2$$

representam, respectivamente Cs a velocidade de propagação da onda de cisalhamento e Cp a velocidade de propagação da onda de pressão em um meio contínuo elástico [Graff 1975, Dominguez 1993]. Com esta definição das velocidades de propagação das ondas, a equação de Navier pode ser reescrita como:

$$Cs^2 u_{i,jj} + \left(Cp^2 - Cs^2\right) u_{j,ji} + b_i = -\omega^2 u_i \tag{1.27}$$

A solução aproximada deste conjunto de três equações diferenciais parciais acopladas para domínios axi-simétricos pelo chamado Método dos Elementos de Contorno é o objetivo final deste trabalho.

Os próximos capítulos irão mostrar como transformar estas equações diferenciais em um conjunto de equações integrais bem como a técnica usada para aproximar sua solução.

1.5 – VISCOELASTICIDADE

Como vimos nos itens anteriores, nas análises de tensão e deformação, três tipos de equações são necessárias: equações de equilíbrio, equações cinemáticas e equações constitutivas do material. Os dois primeiros tipos são iguais tanto para problemas elásticos como viscoelásticos e a principal característica que diferencia a análise elástica de viscoelástica está nas equações constitutivas do material [Findley/Lai/Onaran 1989].

1.5.1 – PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

É possível obter a solução viscoelástica de um problema de análise de tensão no domínio da freqüência (ω) a partir da solução elástica, trocando-se os módulos ou parâmetros constitutivos elásticos por sua contra partida viscoelástica da seguinte maneira:

Definindo η como fator de amortecimento, as constantes viscoelásticas tornam-se [Pontes Jr. 1992]:

$$E^* = E\left[1 + i\eta_E(\omega)\right]$$

$$G^* = G\left[1 + i\eta_G(\omega)\right]$$

Geralmente assume-se que o coeficiente de Poisson (ν) é real, o que implica em $\eta_E = \eta_G$. Nas implementações feitas neste trabalho foram utilizados os módulos complexos; nos cálculos, entretanto, utilizou-se $\eta = 0$.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

CAPÍTULO 2

Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Elastostática

2.1 – MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

As equações diferenciais que regem os problemas da Física Matemática somente possuem soluções analíticas fechadas em casos onde tanto a geometria do domínio quanto as condições de contorno e iniciais são extremamente simples. Problemas com domínios arbitrários e condições de contorno bastante gerais apenas podem ser resolvidos de maneira aproximada, como por exemplo, através de técnicas numéricas.

O Método dos Resíduos Ponderados (MRP) é uma técnica de aproximação da solução de equações diferenciais que serve de base tanto para soluções analíticas aproximadas como para técnicas numéricas [Zienkiewicz/Morgan 1983].

Na presente seção serão apresentadas alguma considerações iniciais sobre o MRP.

Admita-se a seguinte equação diferencial linear:

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + B = 0 \qquad (2.1)$$

Seja $h(x)$ uma solução aproximada de (2.1) onde:

$$h(x) = \alpha_1 h_1(x) + \alpha_2 h_2(x) + \ldots + \alpha_n h_n(x) \qquad (2.2)$$

Nesta solução, $h_i(x)$ são chamadas de funções aproximadoras e no presente trabalho assume-se que elas satisfaçam as condições de contorno da Equação (2.1). As funções aproximadoras são fornecidas, e consequentemente conhecidas, enquanto os coeficientes de ponderação α_i são as incógnitas da solução aproximada. A idéia central do método é encontrar os α_i de forma a aproximar a solução de (2.1) em um sentido a ser definido.

Considerando-se que $h(x)$ é uma solução aproximada de (2.1), sua substituição nesta equação resulta em um resíduo $R(x)$, em geral não nulo.

$$A\frac{d^2h(x)}{dx^2} + B = R(x) \neq 0 \tag{2.3}$$

A idéia do MRP é tentar minimizar o resíduo $R(x)$. Uma maneira bastante genérica de se obter esta minimização é exigir que a integral do resíduo no domínio Ω da equação diferencial, ponderada por alguma função $w(x)$, seja nula.

$$\int_{\Omega} R(x)\, w(x)\, d\Omega = 0 \tag{2.4}$$

Conforme a escolha da função ponderadora, a Expressão (2.4) dá origem ao método da colocação, método da aproximação por sub-domínios ou método de Galerkin, sendo este último uma forma muito freqüente de se formular o MEF. As equações integrais de contorno, passo necessário para a obtenção do MEC, também podem ser formuladas a partir desta técnica de aproximação, como será demonstrado adiante.

2.2 – DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO DOMÍNIO A EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Nesta seção as equações diferenciais que regem a elastostática linear, e definidas sobre o domínio do problema em questão, serão transformadas em equações integrais equivalentes, definidas sobre o contorno deste mesmo domínio.

Antes porém seria útil lembrar o Teorema da Divergência do Cálculo Vetorial onde é possível expressar uma integral de superfície através de uma integral de volume ou vice-versa [Kreyszig 1988].

Seja V uma região fechada do espaço cujo contorno é delimitado por uma superfície S. Sendo **F** uma função vetorial contínua e as primeiras derivadas parciais também contínuas, então;

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \int_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\, dS$$

que também pode ser escrito das duas maneiras que seguem:

$$\int_V \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\, dV = \int_S F_i\, n_i\, dS$$

ou

$$\int_V F_{i,i}\, dV = \int_S F_i\, n_i\, dS$$

onde $\boldsymbol{n}$ é o vetor normal externo à superfície S.

Partindo-se agora da equação de equilíbrio da elastostática ($\sigma_{ij,j} + b_i = 0$) e tomando as componentes de um campo de deslocamentos u_i^* como função ponderadora, pode-se aplicar a idéia do MRP, resultando em:

$$\int_\Omega \left(\sigma_{ij,j} + b_i\right) u_i^* d\Omega = 0 \qquad (2.5)$$

Separando a equação acima em dois termos:

$$\int_\Omega \sigma_{ij,j}\, u_i^* d\Omega + \int_\Omega b_i u_i^* d\Omega = 0 \qquad (2.6)$$

Vamos trabalhar com o primeiro termo da Equação (2.6), lembrando que:

$$\left(\sigma_{ij}u_i^*\right)_{,j} = \sigma_{ij,j}u_i^* + \sigma_{ij}u_{i,j}^* \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{ij,j}u_i^* = \left(\sigma_{ij}u_i^*\right)_{,j} - \sigma_{ij}u_{i,j}^*$$

Este primeiro termo pode ser dividido em outros dois de tal forma que, aplicando-se o Teorema da Divergência e a Fórmula de Cauchy (Equação 1.6) obtemos:

1° termo: $$\int_\Omega \left(\sigma_{ij}u_i^*\right)_{,j} \mathrm{d}\Omega = \int_S \sigma_{ij}u_i^* n_j \mathrm{d}S = \int_S \sigma_{ij}n_j u_i^* \mathrm{d}S = \int_S u_i^* t_i \mathrm{d}S$$

2° termo: $$\int_\Omega \sigma_{ij}u_{i,j}^* \mathrm{d}\Omega$$

Mas observando que:

$$\sigma_{ij}u_{i,j}^* = \sigma_{ji}u_{j,i}^* = \sigma_{ij}u_{j,i}^*$$

e lembrando a definição do tensor de deformações de Cauchy (Equação 1.16b) temos:

$$\sigma_{ij}u_{i,j}^* = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}u_{i,j}^* + \sigma_{ij}u_{j,i}^*\right) = \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*\right) = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^*$$

Assim a Equação (2.6) pode ser escrita como:

$$\int_S u_i^* t_i \mathrm{d}S - \int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega b_i u_i^* \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2.7}$$

ou

$$-\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega b_i u_i^* \mathrm{d}\Omega = -\int_S u_i^* t_i \mathrm{d}S \tag{2.8}$$

Manipulando o primeiro termo do lado esquerdo da Equação (2.8) e lembrando as equações constitutivas (1.22) e (1.24) vistas no Capítulo 1, que são:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\sigma_{kk} \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}$$

podemos escrever:

$$-\int_{\Omega}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{*}\mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega}\left(\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ij}\right)\left(\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}^{*} - \delta_{ij}\frac{\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\sigma_{kk}^{*}\right)\mathrm{d}\Omega =$$

$$= -\int_{\Omega}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right)\left(\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}^{*}\right)\right] + \left[\left(\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\right)\left(-\delta_{ij}\frac{\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\sigma_{kk}^{*}\right)\right] \\ + \left[\left(2\mu\varepsilon_{ij}\right)\left(\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}^{*}\right)\right] + \left[\left(2\mu\varepsilon_{ij}\right)\left(-\delta_{ij}\frac{\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\sigma_{kk}^{*}\right)\right]\end{array}\right\}\mathrm{d}\Omega =$$

$$= -\int_{\Omega}\left\{\frac{\lambda}{2\mu}\delta_{ij}\sigma_{ij}^{*}\varepsilon_{kk} - \frac{\lambda^{2}\,\delta_{ij}\delta_{ij}}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\varepsilon_{kk}\sigma_{kk}^{*} + \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}^{*} - \frac{\lambda}{\left(3\lambda+2\mu\right)}\delta_{ij}\varepsilon_{ij}\sigma_{kk}^{*}\right\}\mathrm{d}\Omega$$

Analisando separadamente cada termo a ser integrado da expressão acima, temos:

1°termo: $$\frac{\lambda}{2\mu}\,\delta_{ij}\,\sigma_{ij}^{*}\,\varepsilon_{kk} = \frac{\lambda}{2\mu}\,\sigma_{ii}^{*}\,\varepsilon_{kk} = \frac{\lambda}{2\mu}\,\sigma_{kk}^{*}\,\varepsilon_{kk}$$

2° termo: $$-\frac{\lambda^{2}\,\delta_{ij}\,\delta_{ij}}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\varepsilon_{kk}\,\sigma_{kk}^{*} = -\frac{\lambda^{2}\,\delta_{ii}}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\varepsilon_{kk}\,\sigma_{kk}^{*} = -\frac{3\lambda^{2}}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\varepsilon_{kk}\,\sigma_{kk}^{*}$$

3° termo: $$\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}^{*}$$

4° termo: $$-\frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\,\varepsilon_{ij}\,\sigma^{*}_{kk}=-\frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)}\varepsilon_{ii}\,\sigma^{*}_{kk}=-\frac{\lambda}{(3\lambda+2\mu)}\varepsilon_{kk}\,\sigma^{*}_{kk}$$

Somando os quatro termos, obtemos:

$$\sigma^{*}_{kk}\varepsilon_{kk}\left(\frac{\lambda}{2\mu}-\frac{3\lambda^2}{2\mu(3\lambda+2\mu)}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\right)+\varepsilon_{ij}\sigma^{*}_{ij}=$$

$$=\sigma^{*}_{kk}\varepsilon_{kk}\left(\frac{\lambda(3\lambda+2\mu)-3\lambda^2-2\mu\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right)+\varepsilon_{ij}\sigma^{*}_{ij}=$$

$$=\sigma^{*}_{kk}\varepsilon_{kk}\left(\frac{3\lambda^2+2\mu\lambda-3\lambda^2-2\mu\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\right)+\varepsilon_{ij}\sigma^{*}_{ij}=0+\varepsilon_{ij}\sigma^{*}_{ij}=\varepsilon_{ij}\sigma^{*}_{ij}$$

Portanto;

$$-\int_{\Omega}\sigma_{ij}\varepsilon^{*}_{ij}\,d\Omega=-\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}\sigma^{*}_{ij}\,d\Omega$$

Desta forma, a Equação (2.8) pode ser escrita como:

$$-\int_{\Omega}\sigma^{*}_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Omega+\int_{\Omega}b_i u^{*}_i\,d\Omega=-\int_{S}u^{*}_i t_i\,dS \qquad (2.9)$$

Considerando-se ainda que:

$$-\int_{\Omega}\sigma^{*}_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Omega=-\int_{\Omega}\sigma^{*}_{ij}u_{i,j}\,d\Omega \qquad (2.10)$$

e lembrando mais uma vez que:

$$\left(\sigma^{*}_{ij}u_i\right)_{,j}=\sigma^{*}_{ij,j}u_i+\sigma^{*}_{ij}u_{i,j} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^{*}_{ij}u_{i,j}=\left(\sigma^{*}_{ij}u_i\right)_{,j}-\sigma^{*}_{ij,j}u_i$$

podemos voltar em (2.10) e escrever:

$$-\int_{\Omega}\sigma_{ij}^{*}u_{i,j}\,\mathrm{d}\Omega=-\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij}^{*}u_{i}\right)_{,j}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\sigma_{ij,j}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}\Omega$$

Usando o Teorema da Divergência no primeiro termo do lado direito da equação acima;

$$-\int_{\Omega}\sigma_{ij}^{*}u_{i,j}\,\mathrm{d}\Omega=-\int_{S}\sigma_{ij}^{*}u_{i}n_{j}\,\mathrm{d}S+\int_{\Omega}\sigma_{ij,j}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}\Omega$$

Analisando cada termo do lado direito separadamente, vem:

1° termo: $-\int_{S}\sigma_{ij}^{*}u_{i}n_{j}\,\mathrm{d}S=-\int_{S}t_{i}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}S$

2° termo: $\int_{\Omega}\sigma_{ij,j}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}\Omega=-\int_{\Omega}b_{i}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}\Omega$ (lembrando que $\sigma_{ij,j}^{*}+b_{i}^{*}=0$)

Finalmente voltando em (2.9), temos:

$$-\int_{S}t_{i}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}S-\int_{\Omega}b_{i}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}b_{i}u_{i}^{*}\,\mathrm{d}\Omega=-\int_{S}u_{i}^{*}t_{i}\,\mathrm{d}S$$

que pode ser escrita como:

$$\int_{S}t_{i}u_{i}^{*}\,\mathrm{d}S+\int_{\Omega}b_{i}u_{i}^{*}\,\mathrm{d}\Omega=\int_{S}t_{i}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}S+\int_{\Omega}b_{i}^{*}u_{i}\,\mathrm{d}\Omega \qquad (2.11)$$

O resultado obtido na Equação (2.11) é conhecido como Teorema da Reciprocidade ou Teorema de Betti, que estabelece que o trabalho realizado por um conjunto de forças (de superfície t_i ou de corpo b_i) de um estado elastostático sobre os deslocamentos de um segundo estado u_i^*, é igual ao trabalho realizado pelo conjunto de forças t_i^* ou b_i^* do segundo, sobre os deslocamentos do primeiro u_i. Observe-se que esta é uma expressão escalar.

O que temos até este ponto é a transformação de uma equação diferencial (1.8) numa equação integral equivalente (2.11) válida em todo o domínio e não somente no contorno como o método sugere. A maneira de se obter uma equação integral de contorno é através da escolha de uma função ponderadora u_i^* com algumas particularidades. O emprego desta função ponderadora transforma as integrais de domínio da expressão integral em integrais de contorno, como segue.

Uma função ponderadora particularmente útil para ser aplicada na Equação (2.5) é aquela que resulta do chamado Problema de Kelvin [Kane 1994]. Este problema é caracterizado pela aplicação de uma força de corpo (volume) na forma de um Delta de Dirac de intensidade unitária em um ponto ξ de um domínio elástico completo (ilimitado) em uma direção e_i dos eixos coordenados:

$$b_i^*(x,\xi) = \Delta(x-\xi)\, e_i$$

Neste problema, ξ é chamado de ponto de colocação (ou ponto fonte) e x é o ponto de campo. Na Figura (2.1a) estão indicados uma excitação $\Delta(x\text{-}\xi)$ aplicada em ξ na direção $i = 1$. Em um ponto de campo qualquer x o problema terá três componentes de deslocamento u_{11}^*, u_{12}^* e u_{13}^*.

Mas a mesma excitação $b_1^*(x,\xi) = \Delta(x-\xi)\, e_1$ também irá gerar no ponto x um tensor de tensões σ_{1ik}, cujas componentes estão mostradas na Figura (2.1b).

Em uma superfície passando pelo ponto x de orientação arbitrária e caracterizada pelas componentes n_k de sua normal atuam forças de superfície (vetor tensão) caracterizadas pelas componentes $t_{1i}^* = \sigma_{1ik}\, n_k$ como pode ser visto na Figura (2.1c).

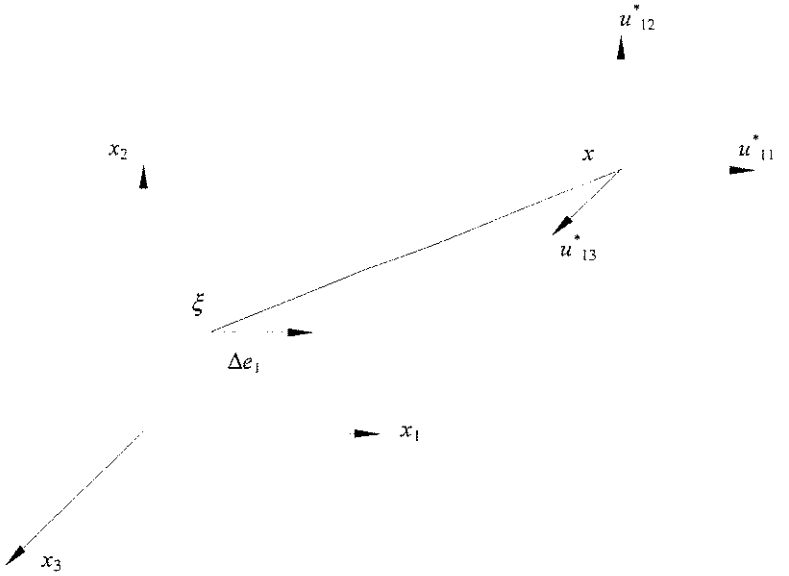


Figura 2.1 a – Deslocamentos no ponto x resultantes de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1.

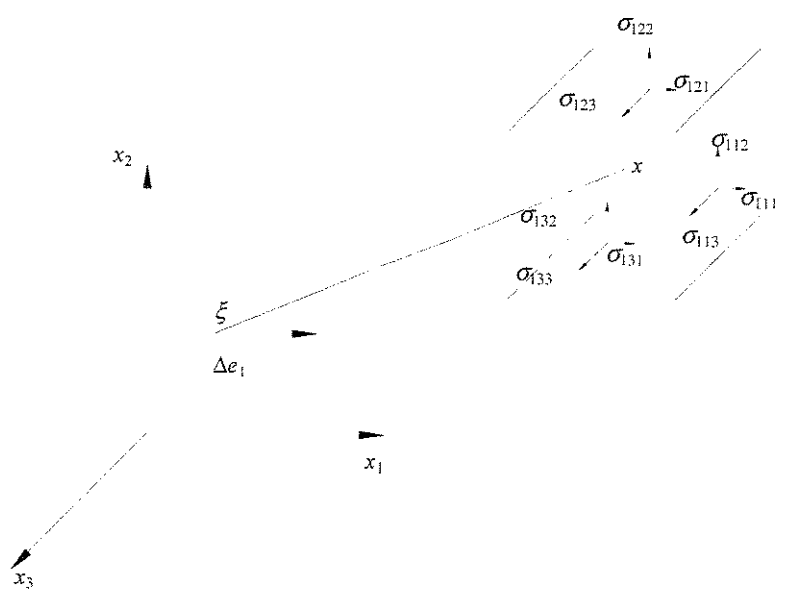


Figura 2.1 b – Tensor de tensões σ^*_{1ij} no ponto x resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_1.

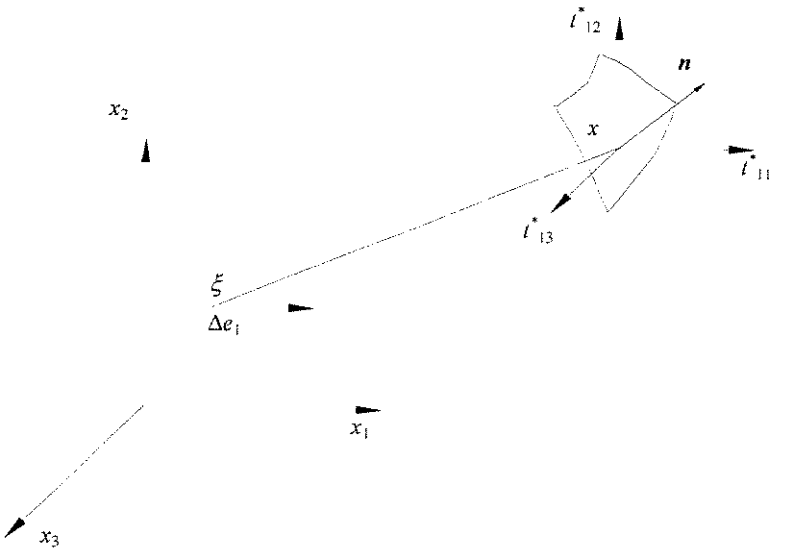


Figura 2.1 c – Vetor de tensões t^*_{ij} atuando no ponto x, na superfície de orientação $\boldsymbol{n}$, resultante de uma força unitária Δ aplicada no ponto ξ na direção e_i.

É importante reconhecer que se as forças unitárias b^*_i forem aplicadas concomitantemente nas três direções e_i, então o campo de deslocamentos resultante será a superposição das componentes de cada excitação;

$$u^*_1 = u^*_{11} + u^*_{21} + u^*_{31}$$
$$u^*_2 = u^*_{12} + u^*_{22} + u^*_{32}$$
$$u^*_3 = u^*_{13} + u^*_{23} + u^*_{33}$$

que ainda poderia ser escrito de forma compacta com o indicador de direção e_i (de valor unitário) como:

$$u^*_1 = u^*_{i1}\, e_i$$
$$u^*_2 = u^*_{i2}\, e_i$$
$$u^*_3 = u^*_{i3}\, e_i$$

ou ainda:

$$u_j^* = u_{ij}^* \, e_i$$

Analogamente, as forças de superfície atuando em uma superfície de orientação $\boldsymbol{n}_k$ são dadas por:

$$t_j^* = t_{ij}^* \, e_i$$

Estes tensores u_{ij}^* e t_{ij}^* são conhecidos como tensores de Stokes [Eringen/Suhubi 1975] e representam a chamada Solução Fundamental do problema elastostático linear [Brebbia/Dominguez 1989] sendo as suas expressões para o caso 3D:

$$u_{ij}^*(\xi,x) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[\frac{1}{r(\xi,x)}\right]\left[(3-4\nu)\,\delta_{ij} + \frac{\partial r(\xi,x)}{\partial x_i}\frac{\partial r(\xi,x)}{\partial x_j}\right] \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} t_{ij}^*(\xi,x) = {} & \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2(\xi,x)}\left[\frac{\partial r(\xi,x)}{\partial n}\right]\left[(1-2\nu)\,\delta_{ij} + 3\frac{\partial r(\xi,x)}{\partial x_i}\frac{\partial r(\xi,x)}{\partial x_j}\right] \\ & - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)r^2(\xi,x)}\left[\frac{\partial r(\xi,x)}{\partial x_j}n_i - \frac{\partial r(\xi,x)}{\partial x_i}n_j\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde $r(\xi,x) = x - \xi$ é a distância entre o ponto de campo x e o ponto de colocação ξ e

$\frac{\partial r(\xi,x)}{\partial n} = \nabla r \bullet n$ que é o produto escalar entre o gradiente do raio e a normal.

Voltando agora na Equação (2.11), e trocando nela i por j apenas para usar as relações acima como elas se apresentam, podemos escrevê-la como:

$$\int_S t_j u_{ij}^* e_i \, dS(x) + \int_\Omega b_j u_{ij}^* e_i \, d\Omega(x) = \int_S t_{ij}^* e_i u_j \, dS(x) + \int_\Omega b_j^* u_j \, d\Omega(x)$$

ou

$$\int_S t_j u_{ij}^* e_i \, dS(x) + \int_\Omega b_j u_{ij}^* e_i \, d\Omega(x) = \int_S t_{ij}^* e_i u_j \, dS(x) + \int_\Omega \Delta(x-\xi)\, e_j u_j \, d\Omega(x) \qquad (2.14)$$

Analisando somente a última integral do lado direito, podemos escrever:

$$\int_\Omega \Delta(x-\xi)\, e_j u_j(x) \, d\Omega(x)$$

Aplicando a propriedade do delta de Kronecker $\Rightarrow \quad \delta_{ji} e_i = e_j$ resulta:

$$\int_\Omega \Delta(x-\xi)\, \delta_{ji} e_i u_j(x) \, d\Omega(x) = \int_\Omega \Delta(x-\xi)\, \delta_{ji} u_j(x)\, e_i \, d\Omega(x)$$

$$\int_\Omega \Delta(x-\xi)\, \delta_{ij} u_j(x)\, e_i \, d\Omega(x) = \int_\Omega \Delta(x-\xi)\, u_i(x)\, e_i \, d\Omega(x)$$

Aplicando uma propriedade do delta de Dirac $\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x-c)\, g(x)\, dx = g(c)$ obtêm-se:

$$\int_\Omega \Delta(x-\xi)\, u_i(x)\, e_i \, d\Omega(x) = u_i(\xi)\, e_i$$

Assim, a Equação (2.14) pode ser reescrita como:

$$u_i(\xi) + \int_S t_{ij}^* u_j \, dS(x) = \int_S t_j u_{ij}^* \, dS(x) + \int_\Omega b_j u_{ij}^* \, d\Omega(x)$$

ou

$$u_i(\xi) = \int_S \left\{ t_j u_{ij}^* - t_{ij}^* u_j \right\} dS(x) + \int_\Omega b_j u_{ij}^* d\Omega(x) \qquad (2.15)$$

Esta Expressão (2.15) é conhecida como Identidade de Somigliana. Ela é uma equação integral que fornece o valor das componentes de deslocamento em função de integrais de contorno das grandezas u_j e t_j e de uma integral de volume envolvendo forças de corpo b_j. Notar que em (2.15) u_j e t_j não são geralmente conhecidas em todo o contorno, ao passo que b_j o é. A aplicação da Identidade de Somigliana para se obter u_i em qualquer ponto do domínio requer a obtenção prévia das grandezas u_j e t_j no contorno do domínio. Nas próximas seções mostrar-se á uma metodologia para a obtenção das grandezas no contorno.

RESOLVENDO O PROBLEMA NO CONTORNO (FORMULAÇÃO SINGULAR)

Como já mencionado, a Equação Integral (2.15) permite a determinação do deslocamento u_j em um ponto ξ do domínio, uma vez conhecidas u_j e t_j no contorno. Veremos que a estratégia para a obtenção de u_j e t_j em S passa pela colocação do ponto ξ no próprio contorno S.

Assim, ao colocarmos ξ sobre S e fazermos o ponto de campo x, que é a variável de integração, percorrer S, vamos encontrar a situação em que x coincide com ξ e a variável $r(\xi, x) = x - \xi$ tende a zero. Uma análise das expressões para u_{ij}^* e t_{ij}^*, Equações (2.12) e (2.13), indica que elas possuem um comportamento $1/r$ e $1/r^2$, respectivamente. Logo, quando $r \to 0$ os núcleos u_{ij}^* e t_{ij}^* apresentam comportamento singular.

O artifício usado para resolver este problema consiste em aumentar o contorno S de um hemisfério com centro no ponto de colocação e um pequeno raio ε que será posteriormente tomado no limite, como mostra a Figura (2.2).

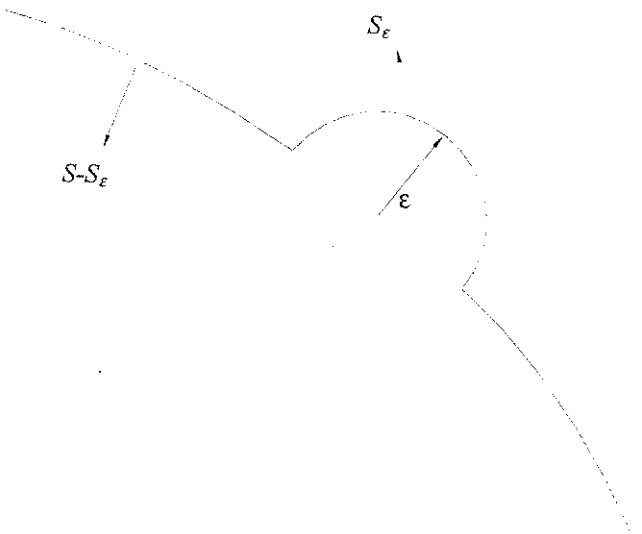


Figura 2.2 – Superfície de contorno acrescida de um hemisfério de integração S_ε

Reescrevendo a Equação (2.15) para o contorno expandido mostrado na Figura (2.2) e fazendo o limite $\varepsilon \to 0$, temos:

$$u_i(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\left(\int_{S-S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j \mathrm{d}S(x) + \int_{S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j \mathrm{d}S(x)\right) - \left(\int_{S-S_\varepsilon} t_{ij}^* u_j \mathrm{d}S(x) + \int_{S_\varepsilon} t_{ij}^* u_j \mathrm{d}S(x)\right) + \int_\Omega b_j u_{ij}^* \mathrm{d}\Omega(x)\right] \tag{2.16}$$

Este procedimento de expandir o contorno em torno de um ponto singular e após fazer o limite é conhecido como integrar uma função no sentido do Valor Principal de Cauchy [Kane 1994].

Vamos analisar agora estas integrais uma a uma [Brebbia 1978].

Discutindo inicialmente a integral envolvendo a solução fundamental em deslocamento:

$$\int_S u_{ij}^* t_j \mathrm{d}S(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{S-S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j \mathrm{d}S(x)\right) + \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^* t_j \mathrm{d}S(x)\right)$$

A primeira integral do lado direito torna-se simplesmente uma integral em todo o contorno S quando $\varepsilon \to 0$, ou seja:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S-S_\varepsilon} u_{ij}^{*} t_j \mathrm{d}S(x)\right) = \int_S u_{ij}^{*} t_j \mathrm{d}S(x)$$

Já a segunda integral pode ser escrita novamente como:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^{*} t_j \mathrm{d}S(x)\right) = t_j \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^{*} \mathrm{d}S(x)\right)$$

Lembrando que a solução fundamental é da ordem de $1/\varepsilon$, a integral de superfície acima resulta em ε^2, e daí concluímos que esta tende a zero quando $\varepsilon \to 0$, ou seja:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S_\varepsilon} u_{ij}^{*} \mathrm{d}S(x)\right) = 0$$

Em outras palavras, a integral envolvendo a solução fundamental em deslocamento não é afetada pela singularidade em ξ.

Analisando agora a integral envolvendo a solução fundamental em forças de superfície, usaremos as definições geométricas da Figura (2.3).

$$\int_S t_{ij}^{*} u_j \mathrm{d}S(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S-S_\varepsilon} t_{ij}^{*} u_j \mathrm{d}S(x)\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S_\varepsilon} t_{ij}^{*} u_j \mathrm{d}S(x)\right)$$

A primeira integral do lado direito torna-se simplesmente uma integral em todo o contorno S quando $\varepsilon \to 0$, ou seja:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S-S_\varepsilon} t_{ij}^{*} u_j \mathrm{d}S(x)\right) = \int_S t_{ij}^{*} u_j \mathrm{d}S(x)$$

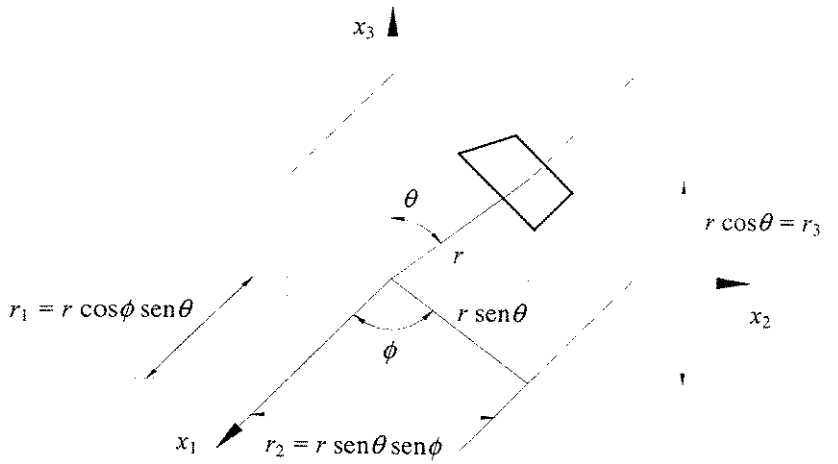


Figura 2.3 – Definições geométricas

A segunda integral pode ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{S_\varepsilon}\left\{u_j\left[\frac{\partial r}{\partial n}\left((1-2\nu)\,\delta_{ij}+3\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right)-(1-2\nu)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j-\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right)\right]\frac{1}{8\pi(1-\nu)\,r^2}\right\}\mathrm{d}S(x)\right\}$$

Reforçando o fato de que $\varepsilon \equiv r$ e analisando a Figura (2.3), podemos escrever que:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j-\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i=\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}-\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial x_i}=0$$

e percebendo que $\qquad \dfrac{\partial r}{\partial n}=1$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{r_i}{r}=n_i=\varepsilon_i$$

onde ε_i é a componente de ε na direção i ; podemos escrever que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{S_\varepsilon}\left\{u_j\left[\left((1-2\nu)\,\delta_{ij}+3\varepsilon_i\varepsilon_j\right)\right]\frac{1}{8\pi(1-\nu)\,r^2}\right\}\mathrm{d}S(x)\right\}$$

Usando as relações geométricas da Figura (2.3), é possível escrever para i=1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{S_\varepsilon}\left\{u_1\,(1-2\nu)+3u_1\varepsilon_1\varepsilon_1+3u_2\varepsilon_1\varepsilon_2+3u_3\varepsilon_1\varepsilon_3\right\}\frac{\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{8\pi(1-\nu)}\right\}$$

A integral agora não depende de r e pode ser expressa em termos de ϕ e θ.

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\left\{\left[u_1(1-2\nu)+3u_1\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\phi+3u_2\operatorname{sen}^2\theta\cos\phi\operatorname{sen}\theta+3u_3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\phi\right]\frac{\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi}{8\pi(1-\nu)}\right\}$$

Resolvendo a integral anterior [Brebbia 1978], encontramos, para um contorno suave:

$$-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)\,2\pi+2\pi\right]u_1(\xi)=-\frac{4(1-\nu)}{8(1-\nu)}u_1(\xi)=-\frac{1}{2}u_1(\xi)$$

O mesmo pode ser demonstrado quando fazemos i=2 e i=3 e este resultado pode então ser escrito como:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{S_\varepsilon}t_{ij}^{*}u_j\,\mathrm{d}S(x)\right)=-\frac{1}{2}u_i(\xi)=-\frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi)$$

Desta forma a integral envolvendo a solução fundamental em força de superfície se torna:

$$\int_S t_{ij}^{*}u_j\,\mathrm{d}S(x)=\int_S t_{ij}^{*}u_j\,\mathrm{d}S(x)-\frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi)$$

Após feitas estas considerações em que ξ pertence ao contorno, podemos finalmente escrever a Equação (2.15) como:

$$\delta_{ij}u_j(\xi)-\frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi)=\int_S\left\{t_ju_{ij}^*-t_{ij}^*u_j\right\}\mathrm{d}S(x)+\int_\Omega b_ju_{ij}^*\mathrm{d}\Omega(x)$$

ou

$$\frac{1}{2}\delta_{ij}u_j(\xi)+\int_S t_{ij}^*u_j\mathrm{d}S(x)=\int_S u_{ij}^*t_j\mathrm{d}S(x)+\int_\Omega b_ju_{ij}^*\mathrm{d}\Omega(x) \qquad (2.17)$$

De maneira mais genérica a equação integral de contorno (2.17) pode ser escrita como:

$$c_{ij}u_j(\xi)+\int_S t_{ij}^*u_j\mathrm{d}S(x)=\int_S u_{ij}^*t_j\mathrm{d}S(x)+\int_\Omega u_{ij}^*b_j\mathrm{d}\Omega(x) \qquad (2.18)$$

onde a constante c_{ij} depende da localização do ponto ξ e pode ser representado como:

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & \xi \text{ é externo ao contorno S}\\ \delta_{ij} & \xi \text{ é interno ao contorno S}\\ \frac{1}{2}\delta_{ij} & \xi \text{ está sobre o contorno S}\end{cases}$$

A equação integral (2.18) é uma representação exata da solução u_j do problema elastostático. Aqui ainda persiste o fato que nem todos os valores de u_j e t_j em S são conhecidos. Na próxima etapa vamos mostrar uma técnica para aproximar a solução desta equação integral.

SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO

Nos problemas práticos da elastostática linear, os deslocamentos são conhecidos em uma parte do contorno S_1 e as forças de superfície em outra parte S_2, de tal forma que $S_1 + S_2 = S$. Por

isso, não é possível resolver a Equação (2.18) na forma como ela se apresenta. A maneira de solucionar este problema é discretizando o contorno, ou ainda, dividindo-o em elementos. Vamos considerar agora como a Equação (2.18) pode ser discretizada para montar o sistema de equações a partir do qual todos os valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno podem ser encontrados. Para melhor compreensão isto será feito através de um exemplo.

Assumiremos por simplicidade que o corpo é bidimensional e seu contorno é dividido em 3 segmentos ou elementos como mostrado na Figura (2.4). Também para simplificar, admitiremos ausentes as forças de corpo. As funções deslocamento e força de superfície são supostas constantes ao longo de cada um dos elementos e o ponto central, chamado de nó, é tomado como representante de todo o elemento. Devido a esta última hipótese, dizemos que o contorno foi dividido em elementos constantes.

Escrevendo a forma discretizada da Equação (2.18) para todo ponto nodal, um sistema de equações algébricas lineares deve ser resolvido para se calcular todos os valores desconhecidos, e, consequentemente, uma solução aproximada para o problema de valor de contorno é obtida.

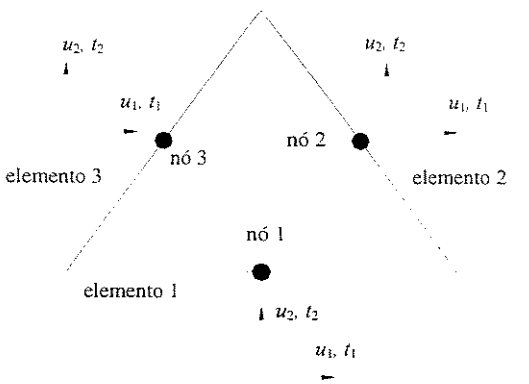


Figura 2.4 – Exemplo de um corpo bidimensional discretizado em elementos constantes.

As condições do contorno deste problema hipotético são:

$u_1^{(1)} = \bar{u}_1^{(1)}$ e $u_2^{(1)} = \bar{u}_2^{(1)}$ conhecido em S_1

$u_1^{(2)} = \bar{u}_1^{(2)}$ e $u_2^{(2)} = \bar{u}_2^{(2)}$ conhecido em S_2

$u_1^{(3)}, u_2^{(3)}$ incógnita em S_3

$t_1^{(1)}, t_2^{(1)}$ incógnita em S_1

$t_1^{(2)}, t_2^{(2)}$ incógnita em S_2

$t_1^{(3)} = \bar{t}_1^{(3)}$ e $t_2^{(3)} = \bar{t}_2^{(3)}$ conhecido em S_3

onde o índice superior indica o número do elemento e o inferior o grau de liberdade.

Vamos aplicar a Equação (2.18) discretizada para três elementos sendo que o ponto de colocação ξ onde a solução fundamental está sendo aplicada pode variar também de 1 a 3, e seus efeitos avaliados nos outros nós. Um comentário pertinente a ser feito neste instante é que esta discretização até este ponto independe de quaisquer condições de contorno.

Desta forma, podemos escrever:

Para o ponto de colocação ξ_1

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}(\xi=\xi_1)\\ u_2^{(1)}(\xi=\xi_1)\end{Bmatrix}+$$

$$+\int_{S_1}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_1,x) & t_{12}^*(\xi_1,x)\\ t_{21}^*(\xi_1,x) & t_{22}^*(\xi_1,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}dS_1(x)+\int_{S_2}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_1,x) & t_{12}^*(\xi_1,x)\\ t_{21}^*(\xi_1,x) & t_{22}^*(\xi_1,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}dS_2(x)+$$

$$+\int_{S_3}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_1,x) & t_{12}^*(\xi_1,x)\\ t_{21}^*(\xi_1,x) & t_{22}^*(\xi_1,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}dS_3(x)=$$

$$=\int_{S_1}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_1,x) & u_{12}^*(\xi_1,x)\\ u_{21}^*(\xi_1,x) & u_{22}^*(\xi_1,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}dS_1(x)+\int_{S_2}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_1,x) & u_{12}^*(\xi_1,x)\\ u_{21}^*(\xi_1,x) & u_{22}^*(\xi_1,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}dS_2(x)+$$

$$+\int_{S_3}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_1,x) & u_{12}^*(\xi_1,x)\\ u_{21}^*(\xi_1,x) & u_{22}^*(\xi_1,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}dS_3(x) \qquad (2.19a)$$

para o ponto de colocação ξ_2

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}(\xi=\xi_2)\\ u_2^{(2)}(\xi=\xi_2)\end{Bmatrix}+$$
$$+\int_{S_1}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_2,x) & t_{12}^*(\xi_2,x)\\ t_{21}^*(\xi_2,x) & t_{22}^*(\xi_2,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_1(x)+\int_{S_2}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_2,x) & t_{12}^*(\xi_2,x)\\ t_{21}^*(\xi_2,x) & t_{22}^*(\xi_2,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_2(x)+$$
$$+\int_{S_3}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_2,x) & t_{12}^*(\xi_2,x)\\ t_{21}^*(\xi_2,x) & t_{22}^*(\xi_2,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_3(x)=$$
$$=\int_{S_1}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_2,x) & u_{12}^*(\xi_2,x)\\ u_{21}^*(\xi_2,x) & u_{22}^*(\xi_2,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_1(x)+\int_{S_2}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_2,x) & u_{12}^*(\xi_2,x)\\ u_{21}^*(\xi_2,x) & u_{22}^*(\xi_2,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_2(x)+$$
$$+\int_{S_3}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_2,x) & u_{12}^*(\xi_2,x)\\ u_{21}^*(\xi_2,x) & u_{22}^*(\xi_2,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_3(x) \qquad (2.19b)$$

para o ponto de colocação ξ_3

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}(\xi=\xi_3)\\ u_2^{(3)}(\xi=\xi_3)\end{Bmatrix}+$$
$$+\int_{S_1}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_3,x) & t_{12}^*(\xi_3,x)\\ t_{21}^*(\xi_3,x) & t_{22}^*(\xi_3,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_1(x)+\int_{S_2}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_3,x) & t_{12}^*(\xi_3,x)\\ t_{21}^*(\xi_3,x) & t_{22}^*(\xi_3,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_2(x)+$$
$$+\int_{S_3}\begin{bmatrix}t_{11}^*(\xi_3,x) & t_{12}^*(\xi_3,x)\\ t_{21}^*(\xi_3,x) & t_{22}^*(\xi_3,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_3(x)=$$
$$=\int_{S_1}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_3,x) & u_{12}^*(\xi_3,x)\\ u_{21}^*(\xi_3,x) & u_{22}^*(\xi_3,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_1(x)+\int_{S_2}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_3,x) & u_{12}^*(\xi_3,x)\\ u_{21}^*(\xi_3,x) & u_{22}^*(\xi_3,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_2(x)+$$
$$+\int_{S_3}\begin{bmatrix}u_{11}^*(\xi_3,x) & u_{12}^*(\xi_3,x)\\ u_{21}^*(\xi_3,x) & u_{22}^*(\xi_3,x)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}\mathrm{d}S_3(x) \qquad (2.19c)$$

Como u_i^j e t_i^j são constantes, eles podem ser tirados das integrais. Chamando

$$\hat{H}^{ij}(\xi_i,x)=\int_{Sj}\begin{bmatrix} t^*_{11}(\xi_i,x) & t^*_{12}(\xi_i,x)\\ t^*_{21}(\xi_i,x) & t^*_{22}(\xi_i,x)\end{bmatrix}\mathrm{d}S_j \qquad G^{ij}(\xi_i,x)=\int_{Sj}\begin{bmatrix} u^*_{11}(\xi_i,x) & u^*_{12}(\xi_i,x)\\ u^*_{21}(\xi_i,x) & u^*_{22}(\xi_i,x)\end{bmatrix}\mathrm{d}S_j \tag{2.20}$$

podemos escrever o conjunto de Equações (2.19) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^{(1)}(\xi=\xi_1)\\ u_2^{(1)}(\xi=\xi_1)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{11}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{12}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{13}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}=$$
$$=G^{11}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+G^{12}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+G^{13}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix} \tag{2.21a}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^{(2)}(\xi=\xi_2)\\ u_2^{(2)}(\xi=\xi_2)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{21}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{22}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{23}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}=$$
$$=G^{21}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+G^{22}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+G^{23}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix} \tag{2.21b}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1^{(3)}(\xi=\xi_3)\\ u_2^{(3)}(\xi=\xi_3)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{31}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{32}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+\hat{H}^{33}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix} u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}=$$
$$=G^{31}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+G^{32}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+G^{33}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix} t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix} \tag{2.21c}$$

Vamos chamar ainda

$$H^{ij}(\xi_i,x)=\begin{cases}\hat{H}^{ij}(\xi_i,x) & \text{para } i\neq j\\ \hat{H}^{ij}(\xi_i,x)+\dfrac{1}{2}\delta_{ij} & \text{para } i=j\end{cases}$$

Desta forma, podemos escrever o conjunto de Equações (2.21) como:

$$H^{11}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+H^{12}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+H^{13}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}=$$
$$=G^{11}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+G^{12}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+G^{13}(\xi_1,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix} \qquad (2.22a)$$

$$H^{21}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+H^{22}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+H^{23}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}=$$
$$=G^{21}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+G^{22}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+G^{23}(\xi_2,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix} \qquad (2.22b)$$

$$H^{31}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(1)}(x)\\ u_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+H^{32}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(2)}(x)\\ u_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+H^{33}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix}u_1^{(3)}(x)\\ u_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix}=$$
$$=G^{31}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(1)}(x)\\ t_2^{(1)}(x)\end{Bmatrix}+G^{32}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(2)}(x)\\ t_2^{(2)}(x)\end{Bmatrix}+G^{33}(\xi_3,x)\begin{Bmatrix}t_1^{(3)}(x)\\ t_2^{(3)}(x)\end{Bmatrix} \qquad (2.22c)$$

ou na forma matricial de maneira mais simplificada;

$$\begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} & H^{13} \\ H^{21} & H^{22} & H^{23} \\ H^{31} & H^{32} & H^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} & G^{13} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{2.23}$$

que pode ser representado como

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \tag{2.24}$$

Aplicando as condições de contorno do exemplo representadas no início por $\bar{u}$ e $\bar{t}$, vem:

$$\begin{bmatrix} H^{11} & H^{12} & H^{13} \\ H^{21} & H^{22} & H^{23} \\ H^{31} & H^{32} & H^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(1)} \\ \bar{u}_2^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(2)} \\ \bar{u}_2^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} & G^{13} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{t}_1^{(3)} \\ \bar{t}_2^{(3)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{2.25}$$

Rearranjando o sistema de modo a deixar todas as incógnitas num mesmo vetor do lado esquerdo, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} -G^{11} & -G^{12} & H^{13} \\ -G^{21} & -G^{22} & H^{23} \\ -G^{31} & -G^{32} & H^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^{11} & -H^{12} & G^{13} \\ -H^{21} & -H^{22} & G^{23} \\ -H^{31} & -H^{32} & G^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(1)} \\ \bar{u}_2^{(1)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{(2)} \\ \bar{u}_2^{(2)} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{t}_1^{(3)} \\ \bar{t}_2^{(3)} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

ou ainda

$$[A]\{x\}=[B] \tag{2.27}$$

onde o vetor $\{\mathbf{x}\}$, e isto é importante ressaltar, possui incógnitas tanto em deslocamentos como em forças de superfície.

Com a resolução da Equação (2.27), todos os valores do contorno são conhecidos, e uma vez feito isto, é possível calcular qualquer valor interno de u e t novamente a partir da Equação (2.18).

DESENVOLVIMENTO DAS INTEGRAIS

O cálculo dos coeficientes das matrizes $\hat{H}^{ij}(\xi_i,x)$ e $G^{ij}(\xi_i,x)$ requer a resolução de integrais do tipo $\int_S t^*(\xi,x)\,\mathrm{d}S(x)$ e $\int_S u^*(\xi,x)\,\mathrm{d}S(x)$ como mostrado na Equação (2.20). Quando o ponto de colocação ξ não está sobre o elemento de integração que contém o ponto de campo x, estas integrais são resolvidas numericamente usando a Quadratura Gaussiana Padrão [Stroud/Secrest 1966] cuja fórmula é dada em termos das coordenadas normalizadas η como mostra a Equação (2.28).

$$\int_{\eta_1=-1}^{\eta_2=+1} \mathrm{f}(\eta)\,\mathrm{d}\eta \cong \sum_{k=1}^{N} w_k \mathrm{f}(\eta_k) \tag{2.28}$$

onde N é o número de pontos de integração, η_k é a coordenada do k ésimo ponto de integração e w_k é o fator ponderador (peso) associado.

Aplicando então a definição (2.28) nos núcleos de deslocamento e força de superfície da Equação (2.20), temos:

$$\int_S u^*(\xi,x)\mathrm{d}S(x)=\int_{\eta_1=-1}^{\eta_2=+1} u^*[\xi(\eta),x(\eta)]\,\mathcal{J}[r(\eta)]\,\mathrm{d}\eta=\sum_{k=1}^{N} u^*(\eta_k)\,\mathcal{J}[r(\eta_k)]\,w_k \tag{2.29a}$$

$$\int_S t^*(\xi,x)\mathrm{d}S(x)=\int_{\eta_1=-1}^{\eta_2=+1} t^*[\xi(\eta),x(\eta)]\,J[r(\eta)]\,\mathrm{d}\eta=\sum_{k=1}^{N} t^*(\eta_k)\,J[r(\eta_k)]\,w_k \qquad (2.29b)$$

onde $J[r(\eta_k)]$ representa o Jacobiano da transformação de coordenadas globais (ξ,x) para a coordenada local η.

Devemos ainda calcular os coeficientes das matrizes $\hat{H}^{ij}(\xi_i,x)$ e $G^{ij}(\xi_i,x)$ quando o ponto de colocação ξ está sobre o elemento de integração que contém o ponto de campo x. Isto significa dizer que a variável $r(\xi,x)=x-\xi$ utilizada nos núcleos de deslocamento e força de superfície das Equações (2.12) e (2.13) tende a zero e, conforme já comentado anteriormente neste mesmo capítulo, o fato de $r(\xi,x)=x-\xi$ tender a zero acarreta em um comportamento singular de ordem $1/r$ e $1/r^2$ nos núcleos de deslocamento e força de superfície respectivamente. Para resolver este problema, lança-se mão de artifícios específicos para cada tipo de análise (estática ou dinâmica), sendo seus detalhes esclarecidos nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 3

Elastostática Axi-simétrica

Geometrias axi-simétricas, ou corpos de revolução, são formados pela rotação de 360° de um plano sobre um eixo dado (chamado eixo de simetria rotacional). Em coordenadas cilíndricas, o eixo z é o eixo de simetria, enquanto r e θ são as direções radial e angular respectivamente (ver Figura 3.1).

Há vários problemas em mecânica dos sólidos que apresentam este tipo de geometria e muito freqüentemente esta mesma particularidade também ocorre nas condições de carregamento. Este é o caso considerado neste trabalho, ou seja, a existência da simetria axial tanto na geometria quanto no carregamento.

Tais problemas podem ser completamente representados analisando-se qualquer plano que passa pelo eixo de simetria rotacional, isto é, o plano rz. Desta maneira, as dimensões do problema são reduzidas de três para duas: radial e axial. Os valores das grandezas ao longo de θ são constantes. O desenvolvimento do MEC axi-simétrico é feito a partir da solução fundamental tridimensional e posterior integração sobre θ [Becker 1992, Cruse/Snow/Wilson 1977, Rizzo/Shippy 1986, Wang/Banerjee 1989].

3.1 - FORMULAÇÃO ELASTOSTÁTICA AXI-SIMÉTRICA.

Inicialmente vamos definir o sistema de coordenadas axi-simétricas. Há três direções (chamadas cilíndricas): radial (r), axial (z) e angular (θ). Para que possamos diminuir uma dimensão, a solução fundamental tridimensional é transformada de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) para cilíndrica (r, θ, z) e então integrada analiticamente em relação a θ, para que tenhamos núcleos e funções com componentes apenas radial e axial.

A Figura (3.1) representa um problema com um domínio axi-simétrico arbitrário, sendo o ponto fonte ξ de coordenadas $(R(\xi), \theta(\xi), Z(\xi))$ e o ponto de campo x de coordenadas $(r(\mathrm{x}), \theta(\mathrm{x}), z(\mathrm{x}))$. As letras maiúsculas indicam as coordenadas fixas, enquanto as minúsculas, coordenadas variáveis.

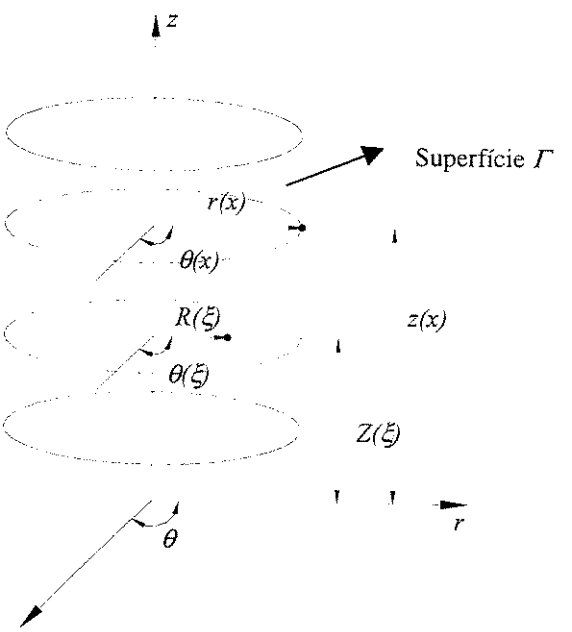


Figura 3.1 - Representação de um domínio axi-simétrico.

A equação integral de contorno tridimensional para problemas elastostáticos (2.18) pode ser transformada em uma equação integral de contorno axi-simétrica através da transformação de coordenadas já mencionadas (ver Figura 3.2), acarretando uma mudança na integral de superfície dS para uma integral de linha dΓ usando a seguinte relação:

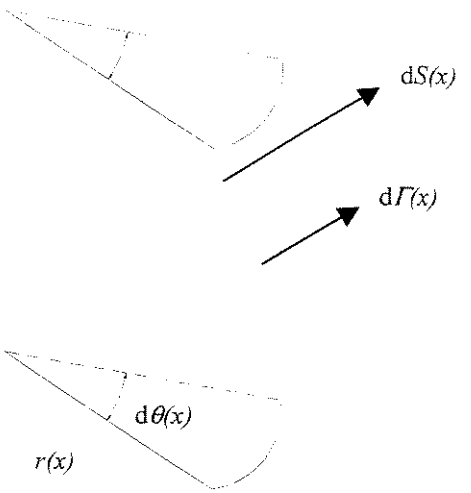


Figura 3.2 – Transformação de coordenadas cartesianas em cilíndricas para representação de uma superfície.

$$\mathrm{d}S(x) = r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{3.1}$$

Os vetores deslocamento e força de superfície em ξ e x podem ser calculados nas direções radial e axial como segue:

$$u_1(\xi) = u_r(\xi)\cos\theta(\xi)\,; \qquad u_2(\xi) = u_r(\xi)\,\mathrm{sen}\,\theta(\xi)\,; \qquad u_3(\xi) = u_z(\xi)$$

$$t_1(\xi) = t_r(\xi)\cos\theta(\xi)\,; \qquad t_2(\xi) = t_r(\xi)\,\mathrm{sen}\,\theta(\xi)\,; \qquad t_3(\xi) = t_z(\xi)$$

$$u_1(x) = u_r(x)\cos\theta(x)\,; \qquad u_2(x) = u_r(x)\,\mathrm{sen}\,\theta(x)\,; \qquad u_3(x) = u_z(x)$$

$$t_1(x) = t_r(x)\cos\theta(x)\,; \qquad t_2(x) = t_r(x)\,\mathrm{sen}\,\theta(x)\,; \qquad t_3(x) = t_z(x) \tag{3.2}$$

Admitindo $\theta(\xi) = 0$, temos:

$$u_1(\xi) = u_r(\xi); \qquad u_2(\xi) = 0; \qquad u_3(\xi) = u_z(\xi)$$

$$t_1(\xi) = t_r(\xi); \qquad t_2(\xi) = 0; \qquad t_3(\xi) = t_z(\xi)$$

$$u_1(x) = u_r(x)\cos\theta(x); \qquad u_2(x) = u_r(x)\,\mathrm{sen}\,\theta(x); \qquad u_3(x) = u_z(x)$$

$$t_1(x) = t_r(x)\cos\theta(x); \qquad t_2(x) = t_r(x)\,\mathrm{sen}\,\theta(x); \qquad t_3(x) = t_z(x)$$

(3.3)

Vimos no Capítulo 2 que a equação integral de contorno tridimensional escrita em coordenadas cartesianas (Equação 2.18) pode ser representada como:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \\ u_3(\xi) \end{bmatrix} + \int_S \begin{bmatrix} t^*_{11}(\xi,x) & t^*_{12}(\xi,x) & t^*_{13}(\xi,x) \\ t^*_{21}(\xi,x) & t^*_{22}(\xi,x) & t^*_{23}(\xi,x) \\ t^*_{31}(\xi,x) & t^*_{32}(\xi,x) & t^*_{33}(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{bmatrix} \mathrm{d}S(x) =$$

$$= \int_S \begin{bmatrix} u^*_{11}(\xi,x) & u^*_{12}(\xi,x) & u^*_{13}(\xi,x) \\ u^*_{21}(\xi,x) & u^*_{22}(\xi,x) & u^*_{23}(\xi,x) \\ u^*_{31}(\xi,x) & u^*_{32}(\xi,x) & u^*_{33}(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1(x) \\ t_2(x) \\ t_3(x) \end{bmatrix} \mathrm{d}S(x)$$

(3.4)

Mas a mesma equação escrita em coordenadas cilíndricas se torna:

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ 0 \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi,x) & t_{12}^*(\xi,x) & t_{13}^*(\xi,x) \\ t_{21}^*(\xi,x) & t_{22}^*(\xi,x) & t_{23}^*(\xi,x) \\ t_{31}^*(\xi,x) & t_{32}^*(\xi,x) & t_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x)\cos\theta(x) \\ u_r(x)\operatorname{sen}\theta(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} \right\} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) =$$

$$= \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi,x) & u_{12}^*(\xi,x) & u_{13}^*(\xi,x) \\ u_{21}^*(\xi,x) & u_{22}^*(\xi,x) & u_{23}^*(\xi,x) \\ u_{31}^*(\xi,x) & u_{32}^*(\xi,x) & u_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x)\cos\theta(x) \\ t_r(x)\operatorname{sen}\theta(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} \right\} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{3.5}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ 0 \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi,x)\cos\theta(x) & t_{12}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{13}^*(\xi,x) \\ t_{21}^*(\xi,x)\cos\theta(x) & t_{22}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{23}^*(\xi,x) \\ t_{31}^*(\xi,x)\cos\theta(x) & t_{32}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) =$$

$$= \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi,x)\cos\theta(x) & u_{12}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{13}^*(\xi,x) \\ u_{21}^*(\xi,x)\cos\theta(x) & u_{22}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{23}^*(\xi,x) \\ u_{31}^*(\xi,x)\cos\theta(x) & u_{32}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{3.6}$$

Percebendo que as componentes $u_r(x)$ e $t_r(x)$ aparecem nas duas primeiras linhas de seus respectivos vetores, ainda podemos escrever :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ 0 \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + t_{12}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{13}^*(\xi,x) \\ t_{21}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + t_{22}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{23}^*(\xi,x) \\ t_{31}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + t_{32}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) =$$

$$= \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + u_{12}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{13}^*(\xi,x) \\ u_{21}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + u_{22}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{23}^*(\xi,x) \\ u_{31}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + u_{32}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{3.7}$$

Devido ao fato de numa geometria axi-simétrica o problema no plano *rz* ser desacoplado do problema em θ, ou seja, o seu tratamento é bi-dimensional como já citado, podemos representar completamente um problema axi-simétrico reescrevendo a Equação (3.7) como:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} +$$

$$+ \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} t_{11}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + t_{12}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{13}^*(\xi,x) \\ t_{31}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + t_{32}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & t_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) =$$

$$= \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + u_{12}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{13}^*(\xi,x) \\ u_{31}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + u_{32}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) & u_{33}^*(\xi,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\theta(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{3.8}$$

Chamando

$$t_{rr}^*(\xi,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[t_{11}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + t_{12}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) \right] \mathrm{d}\theta(x) \tag{3.9a}$$

$$t_{rz}^*(\xi,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_{13}^*(\xi,x)\,\mathrm{d}\theta(x) \tag{3.9b}$$

$$t_{zr}^*(\xi,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[t_{31}^*(\xi,x)\cos\theta(x) + t_{32}^*(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x) \right] \mathrm{d}\theta(x) \tag{3.9c}$$

$$t^*_{zz}(\xi,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^*_{33}(\xi,x)\,\mathrm{d}\theta(x) \tag{3.9d}$$

e

$$u^*_{rr}(\xi,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u^*_{11}(\xi,x)\cos\theta(x) + u^*_{12}(\xi,x)\mathrm{sen}\,\theta(x)\right]\mathrm{d}\theta(x) \tag{3.10a}$$

$$u^*_{rz}(\xi,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*_{13}(\xi,x)\,\mathrm{d}\theta(x) \tag{3.10b}$$

$$u^*_{zr}(\xi,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u^*_{31}(\xi,x)\cos\theta(x) + u^*_{32}(\xi,x)\mathrm{sen}\,\theta(x)\right]\mathrm{d}\theta(x) \tag{3.10c}$$

$$u^*_{zz}(\xi,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*_{33}(\xi,x)\,\mathrm{d}\theta(x) \tag{3.10d}$$

Podemos reescrever a Equação (3.8), nas coordenadas r e z como segue:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_r(\xi) \\ u_z(\xi) \end{bmatrix} + 2\pi\int_\Gamma \begin{bmatrix} t^*_{rr}(\xi,x) & t^*_{rz}(\xi,x) \\ t^*_{zr}(\xi,x) & t^*_{zz}(\xi,x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_r(x) \\ u_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) = \\ = 2\pi\int_\Gamma \begin{bmatrix} u^*_{rr}(\xi,x) & u^*_{rz}(\xi,x) \\ u^*_{zr}(\xi,x) & u^*_{zz}(\xi,x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_r(x) \\ t_z(x) \end{bmatrix} r(x)\,\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{3.11}$$

NÚCLEOS ELASTOSTÁTICOS AXI-SIMÉTRICOS.

Os núcleos de deslocamentos da formulação tridimensional, citados anteriormente como tensores de Stokes que representam a chamada Solução Fundamental do problema, podem ser expressos como na Equação (2.12) que segue:

$$u^*_{ij}(\xi,x) = \frac{1}{16\pi\mu\,(1-\nu)}\left[\frac{1}{r(\xi,x)}\right]\left[(3-4\nu)\,\delta_{ij} + \frac{\partial\, r(\xi,x)}{\partial\, x_i}\frac{\partial\, r(\xi,x)}{\partial\, x_j}\right] \tag{3.12}$$

Estes núcleos tridimensionais foram transformados de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) para cilíndricas (r, θ, z), como mostrado no conjunto de Equações (3.10). Substituindo-se agora a Equação (2.12) em (3.10), obtemos o conjunto de Equações (3.12), cujas demonstrações encontram-se no Apêndice A.

$$u_{rr}(\xi,x)=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{C\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}\right]+\left[\frac{\left(R_\xi-r_x\right)^2\left(1-2\cos^2\alpha\right)-4R_\xi r_x\cos^4\alpha}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha \tag{3.12a}$$

$$u_{rz}(\xi,x)=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\left(R_\xi-r_x+2r_x\cos^2\alpha\right)\left(Z_\xi-z_x\right)}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha \tag{3.12b}$$

$$u_{zr}(\xi,x)=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\left(R_\xi-r_x-2R_\xi\cos^2\alpha\right)\left(Z_\xi-z_x\right)}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha \tag{3.12c}$$

$$u_{zz}=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{3-4\nu}{C\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}+\frac{\left(Z_\xi-z_r\right)^2}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha \tag{3.12d}$$

É conveniente comentar que os núcleos de deslocamentos apresentados acima não são integrais em relação a $\theta(x)$ como nos sugere o conjunto de Equações (3.10). Isto ocorre porque houve uma outra transformação de coordenadas (a orientação angular θ do ponto de campo x do sistema de coordenadas cilíndricas foi substituída por $\theta(x)=\pi-2\alpha$). Este artifício facilitará o tratamento numérico destas integrais como será visto mais adiante.

Embora todas as passagens envolvendo as transformações do conjunto de Equações (3.10) no conjunto de Equações (3.12) estejam no Apêndice A, é interessante deixar explícito nesta parte do texto algumas variáveis introduzidas nesta última transformação, que são:

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)} \tag{3.13a}$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{1/2} \tag{3.13b}$$

$$m = \frac{2(R(\xi)\, r(x))^{1/2}}{C} \tag{3.13c}$$

Analisando as variáveis acima e o conjunto de Equações (3.12), notamos que os núcleos de deslocamento ainda apresentam singularidade e não podem ser integrados pelo Método da Quadratura Gaussiana Padrão; por isto lança-se mão de um artifício que é a transformação das integrais destes núcleos em integrais elípticas do primeiro e segundo tipos, representadas por $K\left(m, \pi/2\right)$ e $E\left(m, \pi/2\right)$ respectivamente, como mostra o Apêndice B.

Com isto, as integrais que contêm o parâmetro $\left(1 - m^2 \text{sen}^2 \alpha\right)$ podem ser transformadas nas integrais elípticas acima citadas. Desta forma, os núcleos de deslocamento são expressos como seguem, e as demonstrações destas transformações encontram-se no Apêndice C.

$$u_{rr}(\xi, x) = \frac{A}{R(\xi)\, r(x)\, C} \left\{ \left[3 - 4\nu + \left[R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] + (Z(\xi) - z(x))^2 \right] K\left(m, \pi/2\right) + \right.$$
$$\left. + \left[-C^2 (3 - 4\nu) - \frac{(Z(\xi) - z(x))^2 \left[R(\xi)^2 + r(x)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]}{D} \right] E\left(m, \pi/2\right) \right\} \tag{3.14a}$$

$$u_{rz}(\xi, x) = \frac{A\,(Z(\xi) - z(x))}{R(\xi)\, C} \left\{ K\left(m, \pi/2\right) - \frac{r(x)^2 - R(\xi)^2 + (Z(\xi) - z(x))^2}{D} E\left(m, \pi/2\right) \right\} \tag{3.14b}$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{A\,(Z(\xi)-z(x))}{r(x)\,C}\left\{-K\left(m,\pi/2\right)+\frac{R(\xi)^2-r(x)^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{D}\,E\left(m,\pi/2\right)\right\} \tag{3.14c}$$

$$u_{zz}(\xi,x)=\frac{2A}{C}\left\{(3-4\nu)\,K\left(m,\pi/2\right)+\frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{D}\,E\left(m,\pi/2\right)\right\} \tag{3.14d}$$

com A, C e m já definidos anteriormente em (3.13) e

$$D=(R(\xi)-r(x))^2+(Z(\xi)-z(x))^2$$

Os núcleos de forças de superfície podem também ser calculados a partir dos núcleos tridimensionais. Entretanto, devido à complexidade destes últimos, é necessário uma considerável manipulação algébrica antes que eles possam ser expressos na forma de integrais elípticas. Uma aproximação mais fácil se consegue usando a relação deformação-deslocamento e a Lei de Hooke para expressá-los diretamente em termos dos núcleos de deslocamentos já calculados. Com isto, estes núcleos axi-simétricos podem ser calculados como segue:

$$t_{rr}(\xi,x)=2\mu\left[t_1 n_r+t_2 n_z\right] \tag{3.15a}$$

$$t_{rz}(\xi,x)=2\mu\left[t_3 n_r+t_4 n_z\right] \tag{3.15b}$$

$$t_{zr}(\xi,x)=2\mu\left[t_5 n_r+t_6 n_z\right] \tag{3.15c}$$

$$t_{zz}(\xi,x)=2\mu\left[t_7 n_r+t_8 n_z\right] \tag{3.15d}$$

O Apêndice D mostra estes núcleos especificando as variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_8$.

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.

As integrais elípticas podem ser expressas como séries de termos com singularidade logarítmica (ver Apêndice C), o que torna possível sua integração por Quadratura Gaussiana [Stroud/Secrest 1966], cuja fórmula é dada em termos das coordenadas normalizadas η como mostra a Equação (3.16).

$$\int_{\eta_1=0}^{\eta_2=1} f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta \cong \sum_{gl=1}^{N} w_{gl}\ f(\eta_{gl}) \tag{3.16}$$

onde N é o número de pontos de integração, η_{gl} e w_{gl} são as coordenadas gaussianas logarítmica e os fatores ponderadores (pesos) associados, respectivamente.

Desta maneira, o mesmo esquema de integração pode ser usado para os núcleos de deslocamento e forças de superfície, exceto para os termos da diagonal da matriz *[H]*, que em problemas bi ou tridimensionais podem ser calculados pela consideração do movimento do corpo rígido (deslocamento constante para todos os nós em qualquer direção). Podemos fazer esta consideração pois as matrizes da equação integral de contorno devem ser aplicadas à qualquer problema físico com uma única solução desde que esta solução independa de sua geometria. Aqui arbitraremos deslocamentos unitários ($\{\boldsymbol{u}\} = \{1\}$).

Como conseqüência do movimento do corpo rígido, as forças de superfície são zero em qualquer ponto ($\{t\} = \{0\}$) e os termos da diagonal podem ser calculados pela soma de todos os termos não diagonais. Isto pode ser expresso, a partir da Equação (2.24), da seguinte forma:

Se $\{\boldsymbol{u}\} = \{1\} \Rightarrow \{t\} = \{0\}$. Assim $[H]\{1\} = [G]\{0\} = \{0\}$

que para um elemento pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.17}$$

Já que o vetor $\{\boldsymbol{u}\}$ contém os deslocamentos dos nós dos elementos (diferentes de zero pois houve movimento do corpo rígido), podemos concluir, a partir da Equação (3.17) que a soma de todos os coeficientes de qualquer linha da matriz *[H]* deve ser igual a zero.

Expressando o que foi escrito anteriormente mais explicitamente, temos para a Equação (3.17):

$$H_{11} * 1 + H_{12} * 1 = 0 \Rightarrow H_{11} + H_{12} = 0 \Rightarrow H_{11} = -H_{12}$$

e

$$H_{21} * 1 + H_{22} * 1 = 0 \Rightarrow H_{21} + H_{22} = 0 \Rightarrow H_{22} = -H_{21}$$

Assim os termos da diagonal de *[H]* podem ser determinados como segue:

$$[H]_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} [H]_{ij} \qquad \text{com } i = 1,2,3,\ldots,p \tag{3.18}$$

onde p é o número total de pontos nodais.

Porém, na formulação axi-simétrica, não é possível considerar o movimento do corpo rígido na direção radial, pois qualquer movimento nesta direção resultará em forças de superfície diferentes de zero. Assim, a melhor maneira de lidar com este problema é usar o movimento do corpo rígido somente na direção axial e uma outra condição na direção radial.

A representação de Equação (3.17) em coordenadas cilíndricas fica:

$$\begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rz} \\ H_{zr} & H_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{zr} & G_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Usando o conceito do movimento do corpo rígido nas sub-matrizes de *[H]* (arbitrando aqui também deslocamento unitário $u_z = 1$), os coeficientes da direção z, H_{rz} e H_{zz}, podem ser escritos como segue:

$$\begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \qquad \text{com } i=1,2,3,...,p \tag{3.20}$$

onde p é o número total de pontos nodais.

Os únicos coeficientes que ainda não foram calculados são os H e H_{zr} da diagonal, que podem ser expressos em termos dos outros coeficientes como temos abaixo:

$$\begin{bmatrix} H_{rr} \\ H_{zr} \end{bmatrix}_{ii} [u_r]_i = -\begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} [u_z]_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{p} \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rz} \\ H_{zr} & H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}_j + \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{zr} & G_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} t_r \\ t_z \end{bmatrix}_j$$

$$\text{com } i=1,2,3,...,p \tag{3.21}$$

onde p é o número total de pontos nodais.

Fixando as forças de superfície nas direções r e z e calculando os valores correspondentes dos deslocamentos, o lado direito da Equação (3.21) pode ser determinado. Qualquer conjunto de condições de forças de superfície pode ser usado desde que seja aplicado em qualquer geometria.

Vamos escolher o seguinte conjunto de condições de tensões.

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 1 \; ; \qquad \sigma_{zz} = 0 \tag{3.22}$$

Estas condições de tensões são equivalentes às tensões planas nos problemas bi-dimensionais. Usando a relação tensão - força de superfície e a Lei de Hooke, a seguinte correspondência entre forças de superfície e deslocamentos pode ser determinada.

$$t_r = n_r \; ; \qquad t_z = 0$$

$$u_r = \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \; ; \qquad u_z = \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \tag{3.23}$$

Substituindo estas forças de superfície e deslocamentos na Equação (3.21), os termos diagonais da matriz *[H]* na direção radial, H_{rr} e H_{zr} podem ser explicitamente calculados como segue:

$$\begin{bmatrix} H_{rr} \\ H_{zr} \end{bmatrix}_{ii} \left[\left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \right]_i = -\begin{bmatrix} H_{rz} \\ H_{zz} \end{bmatrix}_{ii} \left[\left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \right]_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{p} \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rz} \\ H_{zr} & H_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} \left(\frac{1-\nu}{E} \right) r \\ \left(\frac{-2\nu}{E} \right) z \end{bmatrix}_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} G_{rr} & G_{rz} \\ G_{zr} & G_{zz} \end{bmatrix}_{ij} \begin{bmatrix} n_r \\ 0 \end{bmatrix}_j$$

$$\text{para } i = 1,2,3,...,p \tag{3.24}$$

onde r e z são as coordenadas do nó.

Convém comentar que se o ponto fonte ξ estiver no eixo z, u_r se torna zero e isto torna impossível o cálculo dos termos da diagonal na Equação (3.24). Entretanto, neste caso não há necessidade de fazer este cálculo porque o deslocamento radial no eixo z deve ser zero para qualquer problema axi-simétrico; portanto, não é necessário incluir estas equações particulares no sistema de equações global.

3.2 - EXEMPLOS ELASTOSTÁTICOS AXI-SIMÉTRICOS.

Os exemplos citados neste item têm como base de comparação o programa *BEACON* existente em [Becker 1992] além do cálculo analítico já existente. Como o objetivo, por hora, é apenas a montagem do programa sem uma otimização, serão feitos comentários apenas sobre o número de elementos usados na discretização do contorno com o propósito de mostrar que o resultado converge para o esperado à medida que a malha é refinada. O número de pontos de Gauss utilizado na integração dos núcleos também é citado mas mantido fixo.

Outro comentário relevante a ser feito é que o programa que está sendo validado neste capítulo usa elementos constantes, o que significa dizer que as variáveis calculadas em cada elemento têm seu valor aproximado por uma constante (função de interpolação de grau zero). Já o *BEACON* usa elementos quadráticos, o que, por sua vez, significa dizer que as variáveis

calculadas em cada elemento têm seu valor aproximado por uma função quadrática (função de interpolação de grau dois).

A motivação deste trabalho era resolver um problema dinâmico estacionário axi-simétrico e a opção pela discretização do contorno em elementos constantes foi devido ao fato de ser mais simples o seu tratamento analítico e numérico. Porém, como já foi mencionado anteriormente, percebeu-se que a resolução do problema estático era um dos passos para que se resolvesse o problema dinâmico. Para usar este artifício, ambos os problemas devem ter o mesmo tipo de elemento para que o sistema algébrico gerado seja consistente. Isto explica a escolha dos elementos constantes neste programa.

3.2.1 - BARRA FIXA-LIVRE.

Este exemplo trata de uma barra fixa-livre com área da seção transversal circular, cuja aproximação é feita através de um cilindro onde a relação entre altura e diâmetro da base é 10:1, com um carregamento axial de tração uniformemente distribuído na extremidade livre.

Esquematicamente podemos representar como:

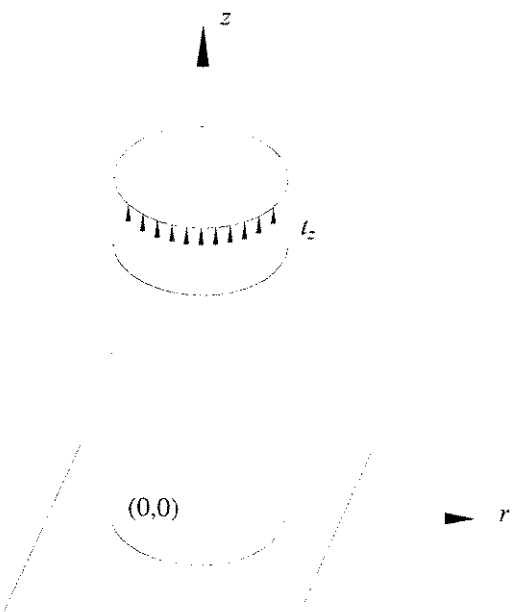


Figura 3.3 - Esquema utilizado na simulação de uma barra fixa-livre sujeita a um carregamento axial de tração.

O deslocamento na extremidade livre da barra pode ser calculado analiticamente pela fórmula abaixo [Shames, 1989]:

$$\Delta L = \frac{FL}{AE};$$

com: ΔL = alongamento da barra

F = força que produz a distensão da barra

L = comprimento da barra

A = área da seção transversal da barra

E = módulo de elasticidade linear do material

O ponto escolhido para se medir o deslocamento tem coordenadas (0,05; 10,0) e a Tabela 3.1 abaixo faz uma comparação entre o cálculo analítico, *BEACON* e o programa feito para este trabalho, o qual doravante será chamado de *AXIEST* (axi-simétrico estático). Para este último, o cálculo é feito para malhas com 8, 16, e 32 elementos constantes e 4 pontos de Gauss. Os resultados obtidos são normalizados tomando como base o valor do cálculo analítico.

ANALÍTICO	*BEACON*	*AXIEST*	*AXIEST*	*AXIEST*
	30 elementos quadráticos	8 elementos constantes	16 elementos constantes	32 elementos constantes
1,0000	0,9976	0,5335	0,9523	1,0002
Erro relativo	0,24%	46,65%	4,77%	0,02%

Tabela 3.1 – Comparação, entre duas fontes e *AXIEST*, dos deslocamentos, em z, no ponto de coordenada (0,05; 10,0) situado na extremidade livre da barra fixa-livre.

3.2.2 - COLUNA CÔNICA FIXA-LIVRE.

Este exemplo trata de uma coluna cônica fixa na base e livre na outra extremidade, com um carregamento axial de compressão uniformemente distribuído nesta última. O raio da seção transversal vai diminuindo ao longo da altura a uma razão de 1:10, ou seja, para uma variação positiva de dez unidades de comprimento no eixo z, o raio diminui uma unidade.

Esquematicamente podemos representar como:

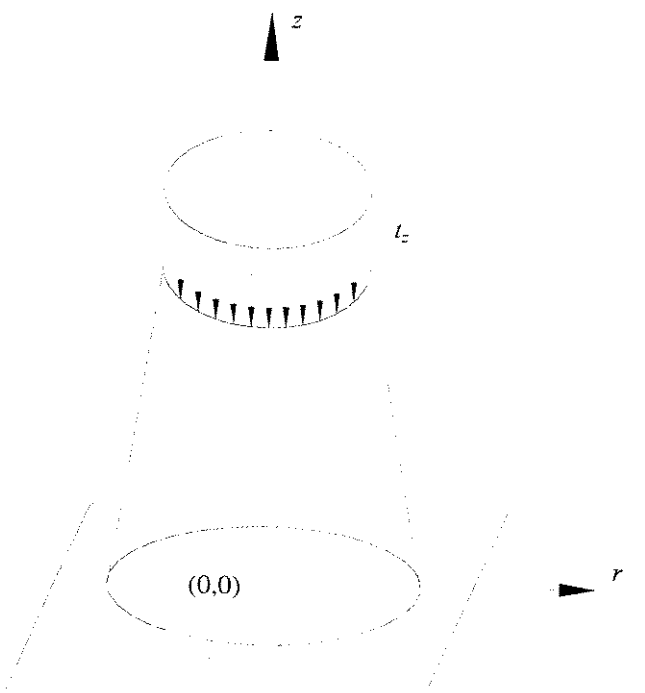


Figura 3.4 - Esquema utilizado na simulação de uma coluna cônica sujeita a um carregamento axial de compressão.

O deslocamento na extremidade livre pode ser calculado analiticamente, a partir da equação da barra [Popov, 1978], como:

$$\Delta L = \frac{1}{\pi} \frac{FL}{rRE};$$

com: ΔL = alongamento da barra

F = força que produz a distensão da barra

L = comprimento da barra

r = raio menor

R = raio maior

E = módulo de elasticidade linear do material

Aqui, o ponto escolhido para se medir o deslocamento tem coordenadas (0,5; 50,0), sendo que a Tabela 3.2 abaixo compara os valores dos deslocamentos neste ponto. A comparação também é feita entre o cálculo analítico, *BEACON* e *AXIEST*, sendo que no último as malhas têm 16, 32, e 64 elementos constantes e 4 pontos de Gauss. Os resultados obtidos são normalizados tomando como base o valor do cálculo analítico.

ANALÍTICO	*BEACON*	*AXIEST*	*AXIEST*	*AXIEST*
	24 elementos Quadráticos	16 elementos constantes	32 elementos constantes	64 elementos constantes
1,000	1,0153	0,7206	0,9525	1,0036
Erro relativo	1,53%	27,94%	4,75%	0,36%

Tabela 3.2 – Comparação, entre duas fontes e *AXIEST*, dos deslocamentos, em z, no ponto de coordenada (0,5; 50,0) situado na extremidade livre da coluna cônica.

Como os resultados obtidos pelas simulações feitas com *AXIEST* estão de acordo com os valores do cálculo analítico e *BEACON*, tanto no exemplo da barra como da coluna cônica, vamos passar para o estudo do problema dinâmico axi-simétrico, pois como já foi mencionado, para a solução numérica do problema dinâmico pelo MEC, é preciso anteriormente simular o problema estático.

CAPÍTULO 4

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Elastodinâmica Axi-simétrica Estacionária

A formulação do MEC para a elastodinâmica tem o mesmo tratamento já verificado no Capítulo 2, para a elastostática, mudando apenas a equação de equilíbrio do corpo (Equação (1.8) que segue abaixo):

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i$$

É conveniente ressaltar que para o regime estacionário, assumindo-se uma variação temporal harmônica $u(x,t) = u(x)\exp(i\omega t)$ a equação acima passa a ser independente do tempo e pode ser escrita como:

$$\overline{\sigma}_{ij,j} + \overline{b}_i = -\omega^2 \rho \overline{u}_i$$

onde a barra sobre os símbolos representam que as grandezas são complexas.

4.1 - EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO.

Baseados na idéia do MRP e usando o resultado obtido na equação (2.24), podemos escrever a equação integral de contorno para a Elastodinâmica no domínio da freqüência como sendo:

$$\frac{1}{2}\bar{u}_j(\xi,\omega)=\int_S\left[\bar{t}_j\bar{u}^*_{ij}-\bar{t}^*_{ij}\bar{u}_j\right]\mathrm{d}S(x) \tag{4.1}$$

A dificuldade em resolver a equação (4.1) está na técnica de integração dos núcleos tridimensionais elastodinâmicos cujas expressões são:

$$u^*_{ij}(\xi,x,\omega)=\frac{1}{4\pi\rho\, Cs^2}\left[\psi\,\delta_{ij}-\chi\,\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right] \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}t^*_{ij}(\xi,x,\omega)=\frac{1}{4\pi}\Bigg[&\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{r(\xi,x)}\chi\right)\left(\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right)+\\&-\frac{2}{r(\xi,x)}\chi\left(n_j\frac{\partial r}{\partial x_i}-2\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial n}\right)-2\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\frac{\partial r}{\partial n}+\\&+\left(\frac{Cp^2}{Cs^2}-2\right)\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}r}-\frac{1}{2r}\chi\right)\frac{\partial r}{\partial x_i}n_j\Bigg]\end{aligned} \tag{4.3}$$

com

$$\begin{aligned}\psi(\xi,x,\omega)=\Bigg[&\left(1-\frac{Cs^2}{\omega^2r^2(\xi,x)}+\frac{Cs}{i\omega\, r(\xi,x)}\right)\frac{e^{-i\omega\, r(\xi,x)/Cs}}{r(\xi,x)}+\\&-\left(\frac{Cs^2}{Cp^2}\right)\left(-\frac{Cp^2}{\omega^2r^2(\xi,x)}\frac{Cp}{i\omega\, r(\xi,x)}\right)\frac{e^{-i\omega\, r(\xi,x)/Cp}}{r(\xi,x)}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}\chi(\xi,x,\omega)=\Bigg[&\left(-\frac{3Cs^2}{\omega^2r^2(\xi,x)}+\frac{3Cs}{i\omega\, r(\xi,x)}+1\right)\frac{e^{-i\omega\, r(\xi,x)/Cs}}{r(\xi,x)}+\\&-\left(\frac{Cs^2}{Cp^2}\right)\left(-\frac{3Cp^2}{\omega^2r^2(\xi,x)}+\frac{3Cp}{i\omega\, r(\xi,x)}+1\right)\frac{e^{-i\omega\, r(\xi,x)/Cp}}{r(\xi,x)}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.5}$$

Quando o ponto de colocação ξ não está sobre o elemento de integração que contém o ponto de campo x, estas integrais são resolvidas numericamente usando-se a Quadratura Gaussiana Padrão (ver Equação 2.28). Entretanto, quando o ponto de colocação ξ está sobre o elemento de integração que contém o ponto de campo x, como já vimos no Capítulo 2, a variável $r(\xi,x)=x-\xi$ tende a zero e isto acarreta em um comportamento singular de ordem $1/r$ e $1/r^2$ nos núcleos de deslocamento e força de superfície, respectivamente. Por isso uma outra metodologia de integração deve ser utilizada.

Considerando o fato de que no problema dinâmico há deslocamento relativo entre dois pontos quaisquer, não é possível aplicar o conceito de movimento de corpo rígido pois, como foi visto no Capítulo 3, esta consideração implica em deslocamento constante para todos os nós em qualquer direção (deslocamento relativo entre dois pontos quaisquer igual a zero). Isto nos traz a necessidade de encontrar outro método de integração destes núcleos.

Para isto usaremos os seguintes índices:

$3D$ = problema tridimensional (coordenadas cartesianas);
AXI = problema axi-simétrico (coordenadas cilíndricas);
EST = problema estático;
DIN = problema dinâmico.

A equação (4.1) pode ser representada agora para o problema dinâmico tridimensional como:

$$\frac{1}{2}\bar{u}_j(\xi,\omega)=\int_S\left\{\bar{\vec{u}}_{ij(3D,DIN)}\,\bar{t}_j-\bar{\vec{t}}_{ij(3D,DIN)}\,\bar{u}_j\right\}dS(x) \qquad (4.6)$$

Vamos ver a estratégia usada para integrar os núcleos quando estes apresentam o tipo de singularidade mencionada [Dominguez 1993].

Inicialmente vamos somar e subtrair o problema estático tridimensional ao problema dinâmico:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\bar{u}_j(\xi,\omega) = \int_S \bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,DIN)}\ \bar{t}_j\ \mathrm{d}S(x) + \\
&+ \int_S \bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,EST)}\ \bar{t}_j\ \mathrm{d}S(x) - \int_S \bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,EST)}\ \bar{t}_j\ \mathrm{d}S(x) + \\
&- \int_S \bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,DIN)}\ \bar{u}_j\ \mathrm{d}S(x) + \\
&+ \int_S \bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,EST)}\ \bar{u}_j\ \mathrm{d}S(x) - \int_S \bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,EST)}\ \bar{u}_j\ \mathrm{d}S(x)
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

que, quando transformado num problema axi-simétrico, pode ser escrito como:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\bar{u}_j(\xi,\omega) = \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \left[\bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,DIN)} - \bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,EST)} \right] \bar{t}_j\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Gamma(x) + \\
&+ \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,EST)}\ \bar{t}_j\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Gamma(x) + \\
&- \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \left[\bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,DIN)} - \bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,EST)} \right] \bar{u}_j\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Gamma(x) + \\
&+ \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,EST)}\ \bar{u}_j\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Gamma(x)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

ou ainda:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\bar{u}_j(\xi,\omega) = \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \left[\bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,DIN)} - \bar{\bar{u}}^*_{ij(3D,EST)} \right] \bar{t}_j\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Gamma(x) + \\
&+ \int_\Gamma \bar{\bar{u}}^*_{ij(AXI,EST)}\ \bar{t}_j\ \mathrm{d}\Gamma(x) + \\
&- \int_\Gamma \int_0^{2\pi} \left[\bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,DIN)} - \bar{\bar{t}}^*_{ij(3D,EST)} \right] \bar{u}_j\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Gamma(x) + \\
&+ \int_\Gamma \bar{\bar{t}}^*_{ij(AXI,EST)}\ \bar{u}_j\ \mathrm{d}\Gamma(x)
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

As integrais das diferenças dos núcleos dinâmico e estático (primeira e terceira da Equação (4.9)) não apresentam singularidade quando executadas da maneira expressa acima porque elas são da mesma ordem nos dois problemas ($1/r$ para o deslocamento e $1/r^2$ para a força de superfície). Isto é chamado de regularização da integral singular [Kane 1994], e com isto tais integrais podem ser resolvidas pela fórmula padrão de Quadratura Gaussiana. Já as integrais

dos núcleos estáticos axi-simétricos (segunda e quarta da Equação (4.9)) foram anteriormente resolvidas no Capítulo 3. Com isto, é possível fazer as quatro integrais de (4.9).

Uma vez encontrada uma maneira de realizar as integrações dos núcleos tridimensionais axi-simétricos, vamos passar aos exemplos para validar o programa.

4.2 – EXEMPLOS ELASTODINÂMICOS AXI-SIMÉTRICOS.

Devido à inexistência de um programa computacional elastodinâmico axi-simétrico na literatura pesquisada, os exemplos envolvidos neste item têm como base de comparação apenas as soluções analíticas. A validação do programa montado para este trabalho, que será citado a partir deste ponto como AXIDIN (axi-simétrico dinâmico), se dará a partir do cálculo das freqüências naturais e dos modos de vibração das estruturas exemplificadas. Também serão feitas algumas animações destes modos.

4.2.1 – BARRA FIXA-LIVRE.

Este exemplo difere daquele feito no item 3.2.1 apenas no carregamento que agora é periódico e harmônico. Desta maneira temos uma barra fixa-livre com área da seção transversal circular, cuja aproximação é feita através de um cilindro no qual a relação entre altura e diâmetro é 10:1, com um carregamento axial de tração periódico uniformemente distribuído na extremidade livre, como mostra a Figura 4.1 .

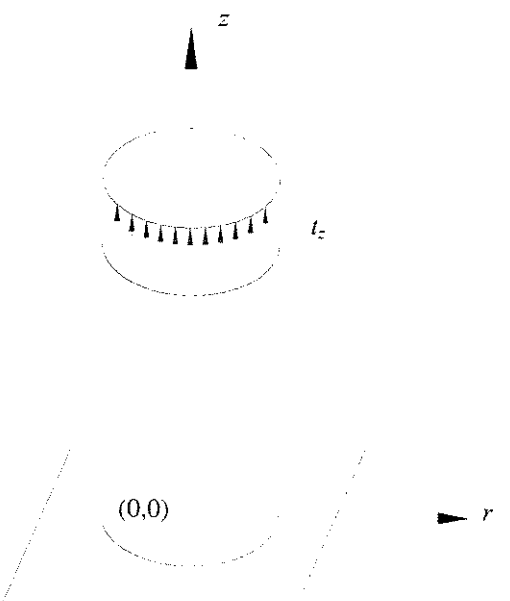


Figura 4.1 - Esquema utilizado na simulação de uma barra fixa-livre sujeita a um carregamento axial de tração periódico harmônico.

Abaixo segue a fórmula para o cálculo analítico das freqüências naturais (ω_n) que será feito com precisão de $1/100$ [Richart Jr/ Hall Jr/ Woods 1970]:

$$\omega_n = \frac{n \pi v_c}{2L} \qquad \text{com } n=1, 3, 5,... \tag{4.10}$$

Com $v_c^2 = \frac{E}{\rho}$

onde:

E = módulo de elasticidade linear do material

ρ = densidade de massa do material

L = comprimento da barra

Para este exemplo: $E = 2,6$ [N/m²]

$\rho = 1,0$ [kg/m³]

$L = 12,0$ [m]

Assim, aplicando a Equação (4.10), temos:

$\omega_1 = 0,21$ [rad/s]

$\omega_3 = 0,63$ [rad/s]

$\omega_5 = 1,06$ [rad/s]

Para iniciar a análise, vamos construir a Função de Resposta em Freqüência (FRF) desta estrutura para uma malha com um número fixo de elementos. Fixemos em 32 elementos constantes, pois esta malha apresentou um bom resultado para o problema estático (ver Tabela 3.1).

De posse desta malha, queremos estudar o comportamento do deslocamento do ponto de coordenada (0,1; 12,0) que está na superfície da extremidade livre da barra, fazendo variar a freqüência numa faixa que vai de 0,01 a 1,11. Esta faixa foi escolhida porque sabemos, através do cálculo analítico, que aí se encontram as três primeira freqüências naturais desta estrutura.

Vamos chamar o número de passos em que é feita a varredura ao longo do eixo da freqüência de *nf*. Analisemos o que acontece com o valor das freqüências naturais calculadas

numericamente por *AXIDIN* em relação aos valores analíticos à medida que variamos o valor de *nf*.

A regra utilizada para o cálculo de *nf* é:

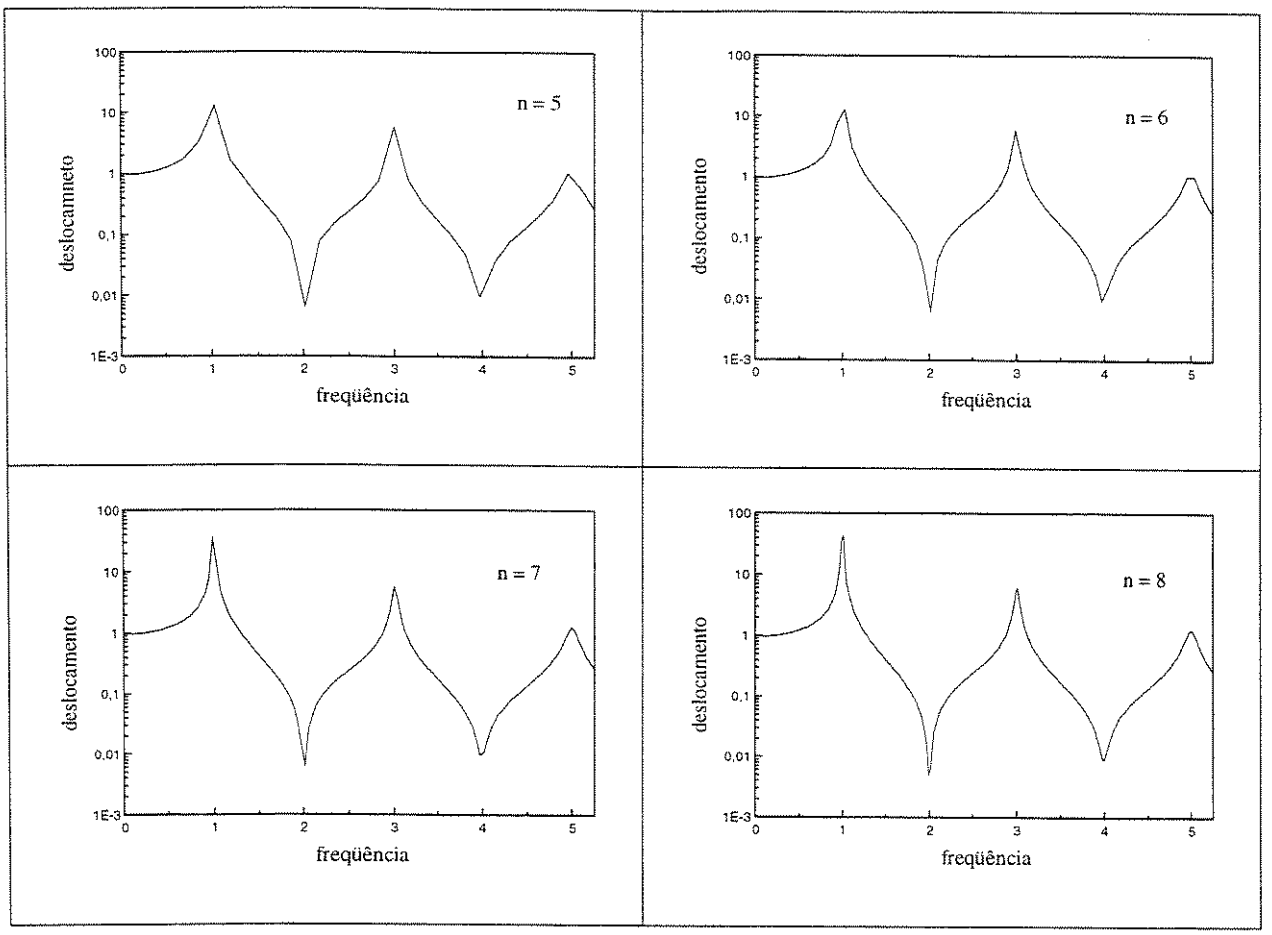
$$nf = 2^n \qquad n = 1, 2, 3,... \tag{4.11}$$

Com isto o número de pontos avaliados no intervalo é $2^n + 1$. Isto nos garante que dentre os ponto avaliados para um determinado valor de n estão todos aqueles considerados para o valor n-1.

A seguir estão as FRF's usando (4.11) com n = 5, 6, 7 e 8 e uma tabela comparativa entre as três primeiras freqüências naturais calculadas numérica e analiticamente. Os resultados estão normalizados tendo como base os valores analíticos.

	ω_1	ω_3	ω_5
ANALÍTICO	1,00	3,00	5,00
AXIDIN n= 5	1,03	2,99	4,96
Erro relativo	3%	1%	4%
AXIDIN n= 6	1,03	2,99	4,96
Erro relativo	3%	1%	4%
AXIDIN n= 7	0,99	2,99	5,00
Erro relativo	1%	1%	–
AXIDIN n= 8	1,01	3,01	5,00
Erro relativo	1%	1%	–

Tabela 4.1 – Influência da discretização do intervalo de freqüência no cálculo da freqüência natural de uma barra fixa-livre.



Gráficos 4.1 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z da extremidade carregada para as quatro discretizações do intervalo de freqüência mostrados na Tabela 4.1.

Pela análise da Tabela 4.1 percebemos que existe uma convergência dos valores numéricos para o analítico e devido a pouca variação no erro com o acréscimo de $n = 7$ para $n = 8$, vamos utilizar o primeiro valor.

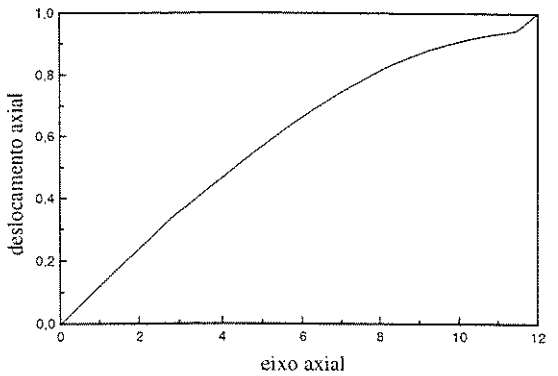
Em seguida, vamos analisar a conseqüência da variação do número de elementos da malha para o cálculo das freqüências naturais, mantendo fixo (e igual a 7) o valor de n na Equação (4.11).

	ω_1	ω_3	ω_5
ANALÍTICO	1.00	3.00	5.00
AXIDIN 16 elementos constantes	0.99	2.99	5.00
Erro relativo	1%	1%	–
AXIDIN 32 elementos constantes	0.99	2.99	5.00
Erro relativo	1%	1%	–
AXIDIN 64 elementos constantes	0.99	2.99	5.00
Erro relativo	1%	1%	–

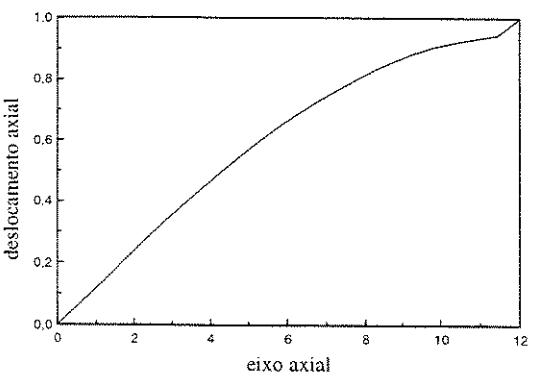
Tabela 4.2 – Influência da discretização da malha no cálculo da freqüência natural da barra fixa-livre.

Notamos que à medida que o número de elementos da malha aumenta, os resultados numéricos não variam. Isto ocorre porque as discretizações feitas tornam as malhas flexíveis o suficiente para serem sensíveis aos modos de vibração analisados (os três primeiros). Com isto, para dar andamento a este exemplo, vamos utilizar a malha com 32 elementos pois neste ponto há uma estabilização no erro relativo para os valores das freqüências naturais calculadas numericamente.

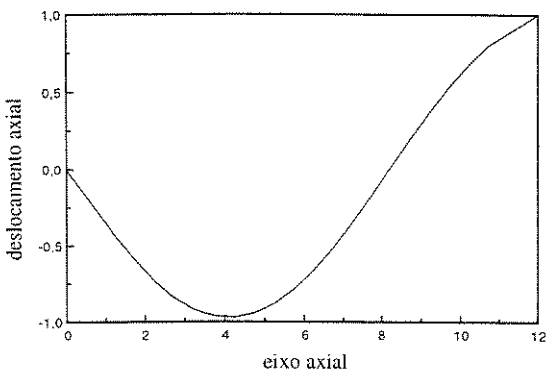
Nas próximas páginas seguem os gráficos obtidos por *AXIDIN* dos três primeiros modos de vibração longitudinal do eixo axial expresso transversalmente, bem como suas respectivas animações feitas em 16 quadros por ciclo, cuja ordem de acompanhamento é da esquerda para a direita e de cima para baixo.



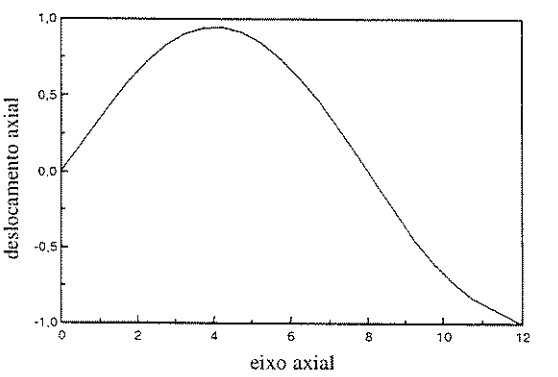
Modo 1 – parte real (amplitude)



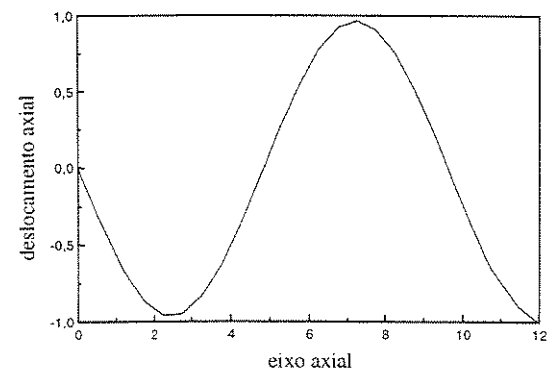
Modo 1 – parte imaginária (fase)



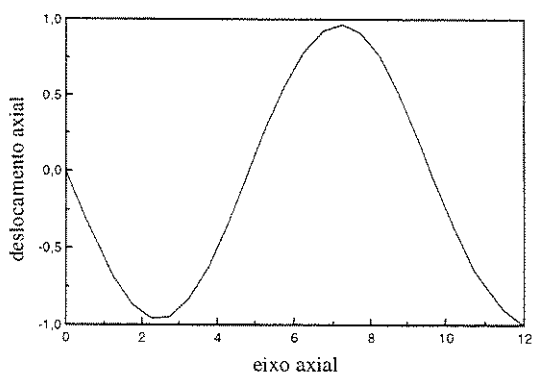
Modo 2 – parte real (amplitude)



Modo 2 – parte imaginária (fase)



Modo 3 – parte real (amplitude)



Modo 3 – parte imaginária (fase)

Gráficos 4.2 – Modos de vibração de uma barra fixa-livre.

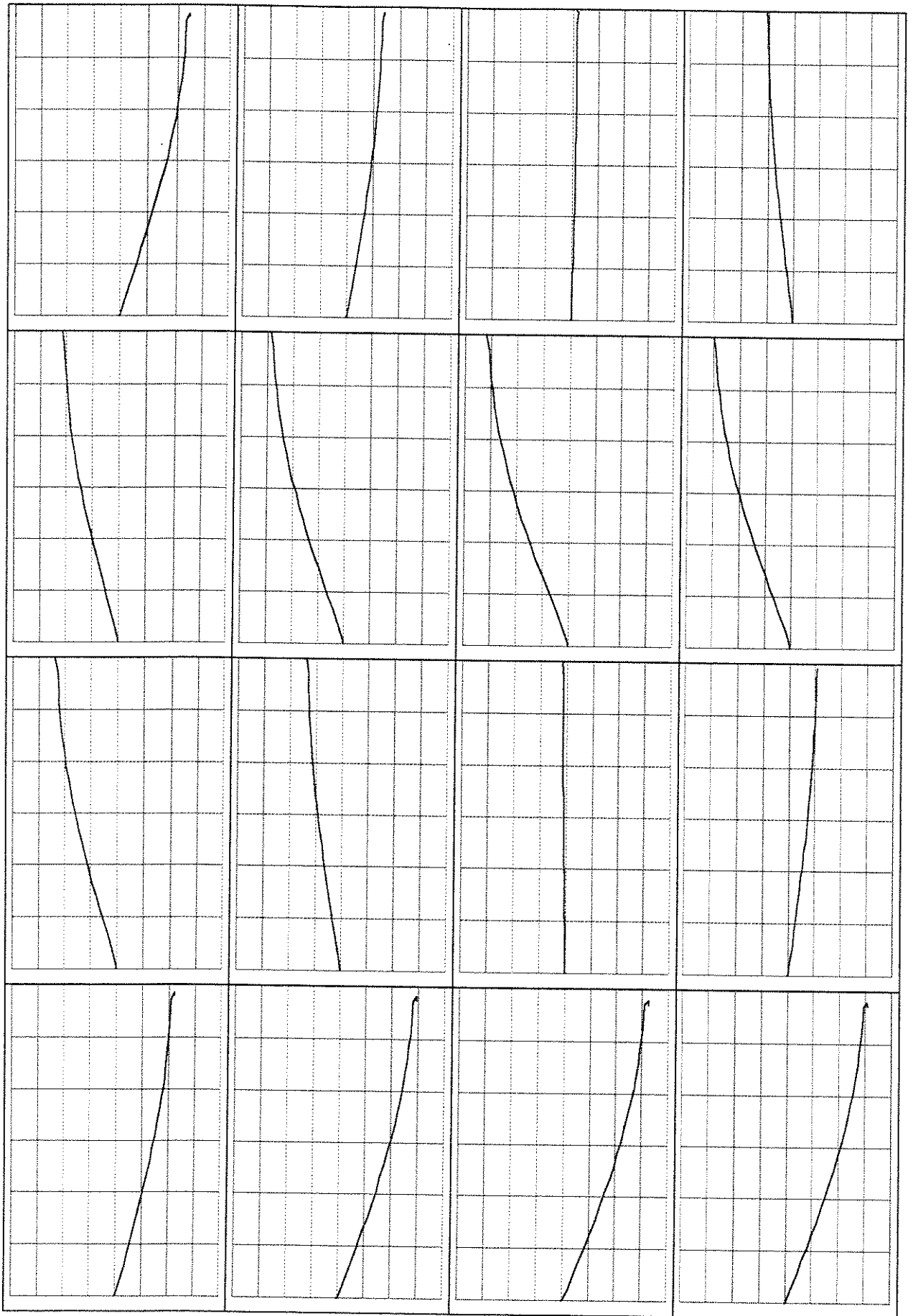


Figura 4.2 – Quadros representando o primeiro modo de vibrar da barra fixa-livre num ciclo.

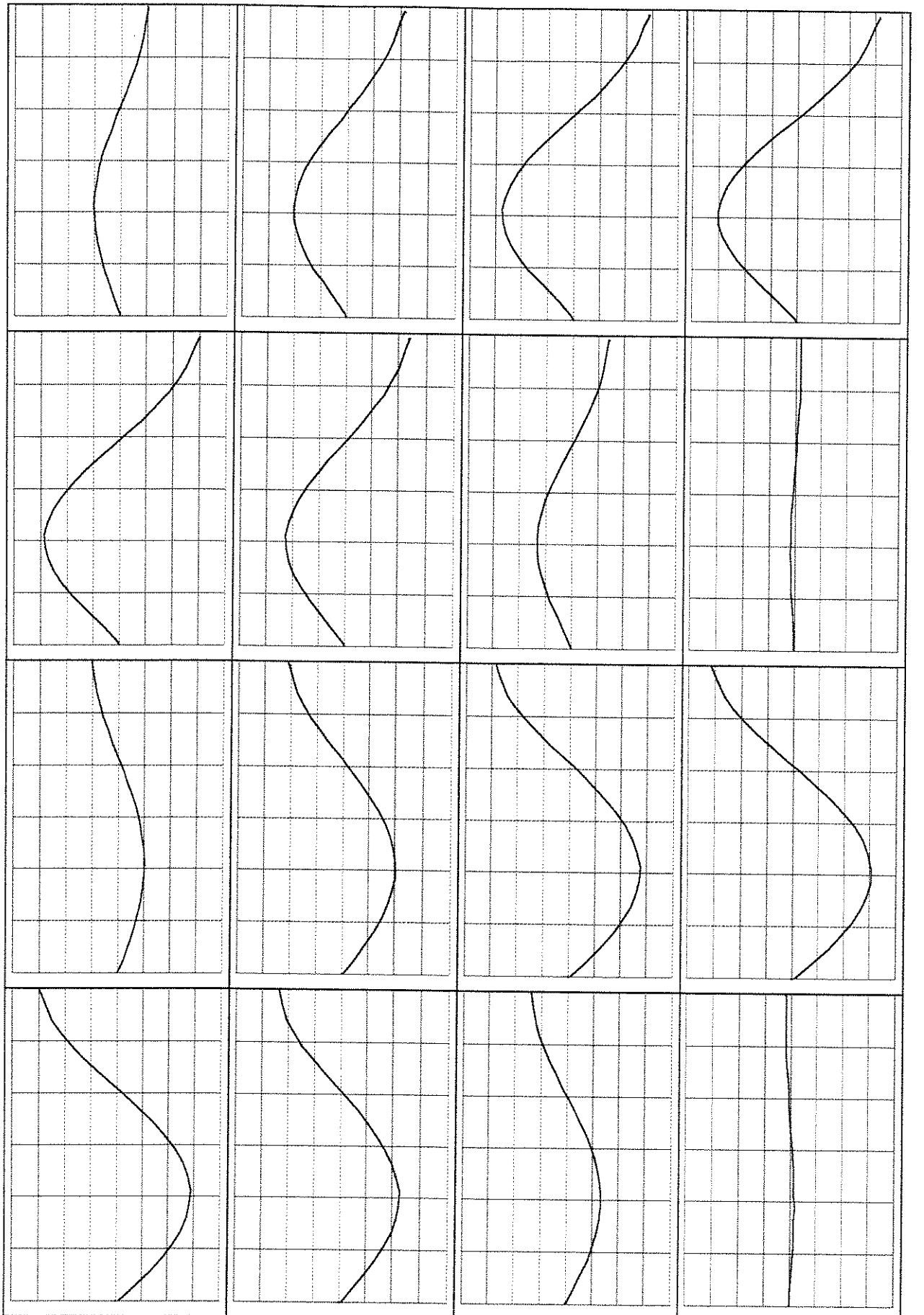


Figura 4.3 – Quadros representando o segundo modo de vibrar da barra fixa-livre num ciclo.

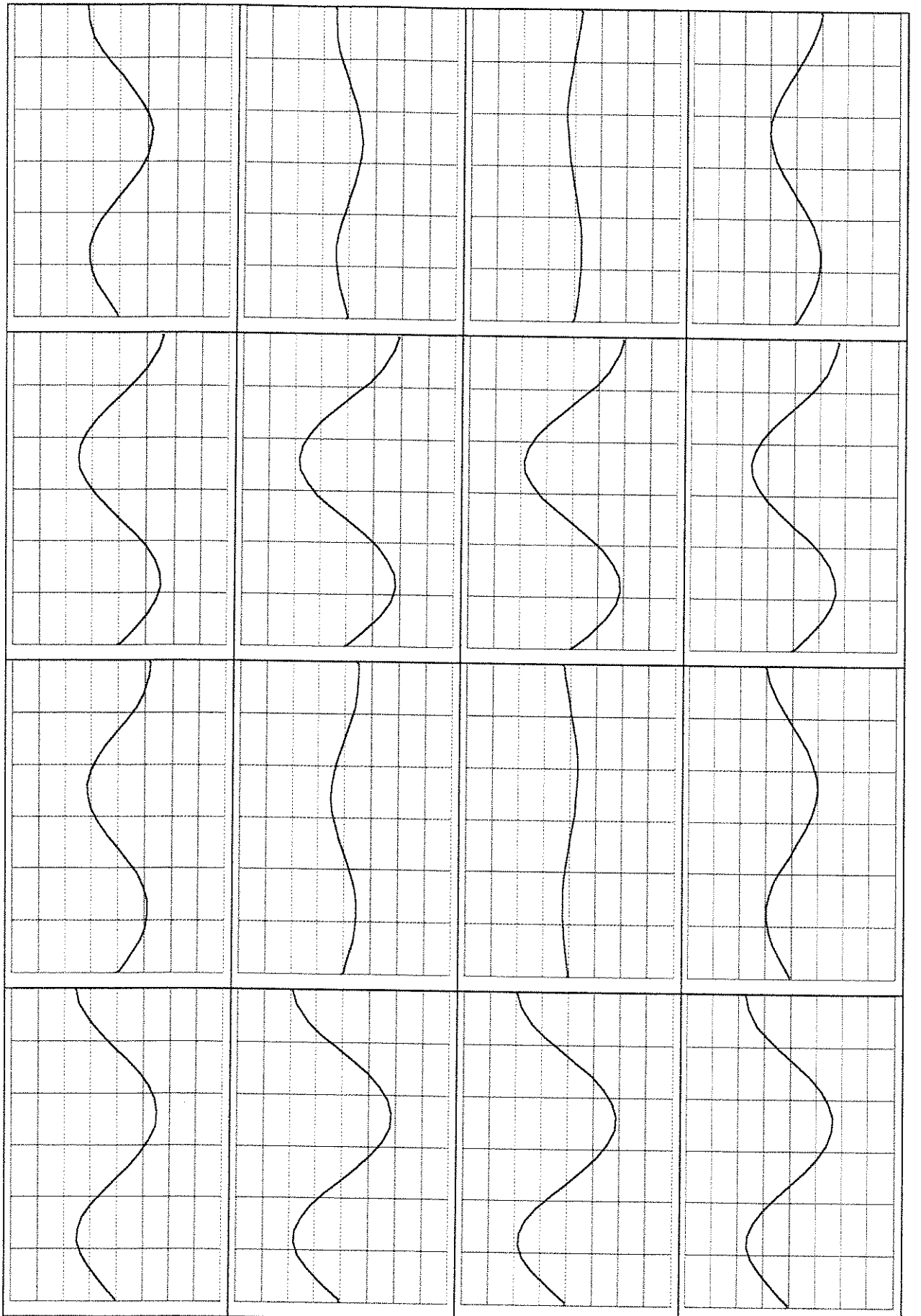


Figura 4.4 – Quadros representando o terceiro modo de vibrar da barra fixa-livre num ciclo.

4.2.2 – BARRA FIXA-FIXA.

Vamos considerar neste exemplo as mesmas condições de geometria e propriedades do material assumidas para a barra fixa-livre. Porém, devido ao engastamento ser nas duas extremidades, o carregamento é distribuído ao longo da barra mas ainda na direção axial como mostra a Figura 4.2 .

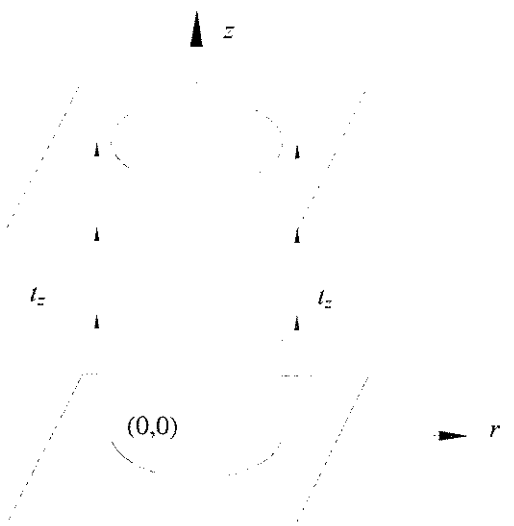


Figura 4.5 - Esquema utilizado na simulação de uma barra fixa-fixa sujeita a um carregamento axial periódico harmônico.

Abaixo segue a fórmula para o cálculo analítico das freqüências naturais que será feito com precisão de $1/100$ [Richart Jr/ Hall Jr/ Woods 1970]:

$$\omega_n = \frac{n \pi v_c}{L} \qquad \text{com } n=1, 2, 3,... \tag{4.12}$$

Lembrando que $v^2 = \frac{E}{\rho}$

onde:

E = módulo de elasticidade linear do material

ρ = densidade de massa do material

L = comprimento da barra

Para este exemplo: $E = 2{,}6$ [N/m²]

$\rho = 1{,}0$ [kg/m³]

$L = 12{,}0$ [m]

Assim, aplicando a Equação (4.12), temos:

$\omega_1 = 0{,}42$ [rad/s]

$\omega_2 = 0{,}84$ [rad/s]

$\omega_3 = 1{,}27$ [rad/s]

O mesmo tratamento anteriormente feito para a barra fixa-livre será empregado neste exemplo, porém é necessário mudar o ponto de análise do deslocamento já que as extremidades estão fixas. Aqui este ponto terá coordenadas (0,6; 10,5) que está na superfície lateral da barra.

Para a análise, vamos construir a FRF desta estrutura para uma malha com um número fixo de elementos. Como no exemplo anterior, será fixado em 32 elementos constantes uma vez que é a mesma geometria.

Inicialmente vamos observar as FRF's em função da discretização do intervalo de freqüência analisado, que aqui será de 0,01 a 1,41, pois sabemos através do cálculo analítico que as três primeiras freqüências naturais estão neste intervalo.

Usando a Equação (4.11) com n = 5, 6, 7 e 8 podemos construir as FRF's e uma tabela comparativa entre as três primeiras freqüências naturais calculadas numérica e analiticamente, como segue. Os resultados estão normalizados tendo como base os valores analíticos.

	ω_1	ω_2	ω_3
ANALÍTICO	1.00	2.00	3.00
AXIDIN n= 5	0.96	2.00	3.04
Erro relativo	4%	–	4%
AXIDIN n= 6	1.01	2.00	2.99
Erro relativo	1%	–	1%
AXIDIN n= 7	1.01	2.00	2.99
Erro relativo	1%	–	1%
AXIDIN n= 8	1.01	2.00	3.01
Erro relativo	1%	–	1%

Tabela 4.3 – Influência da discretização do intervalo de freqüência no cálculo da freqüência natural da barra fixa-fixa.

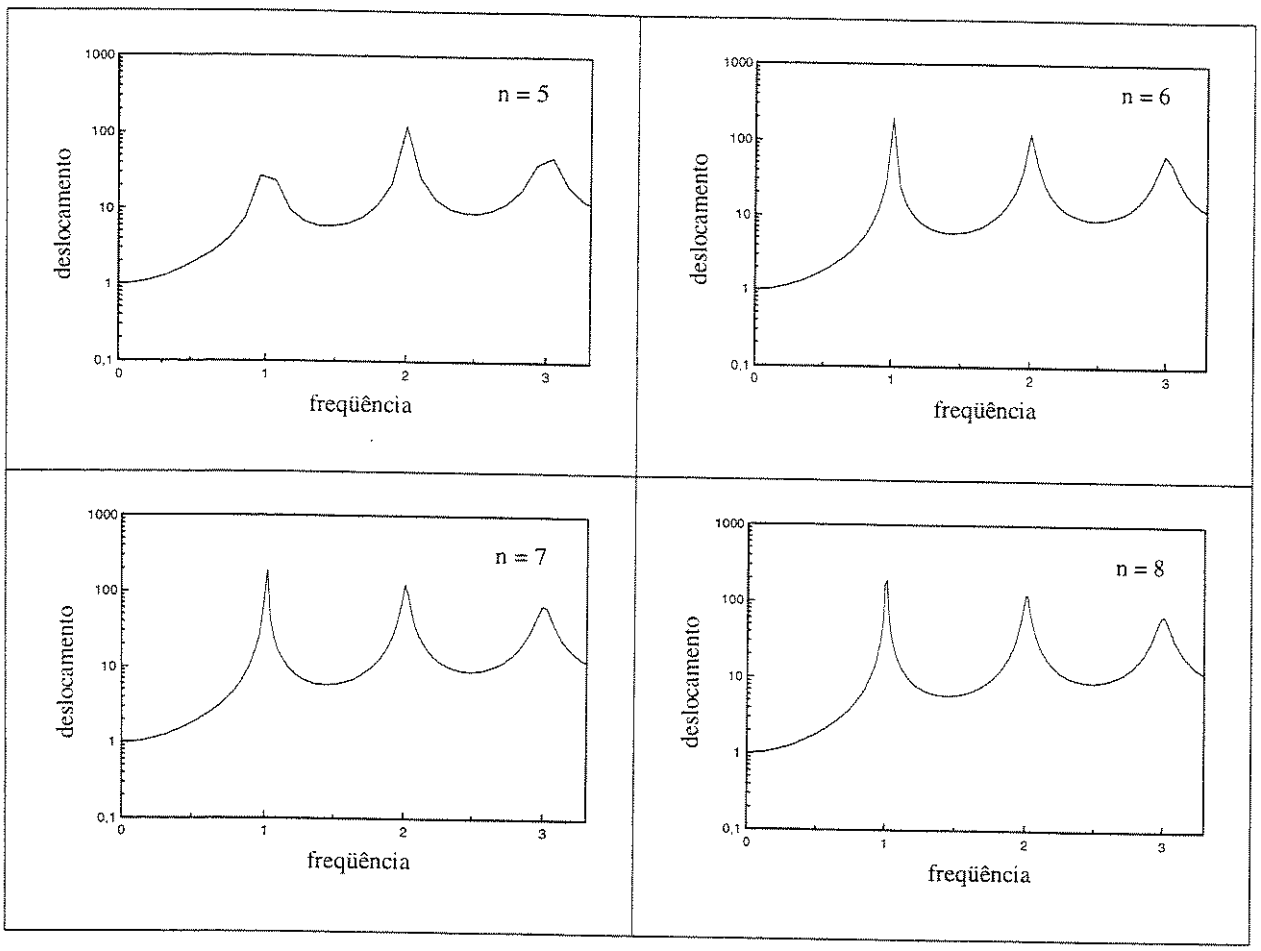


Gráfico 4.3 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto de coordenadas (0,6; 10,5) para as quatro discretizações do intervalo de freqüência mostrados na Tabela 4.3.

Pela análise da Tabela 4.3 percebemos que existe uma convergência dos valores numéricos para o analítico e como a variação no erro estabilizou-se com o acréscimo de $n = 6$ para $n = 7$, vamos utilizar o primeiro valor.

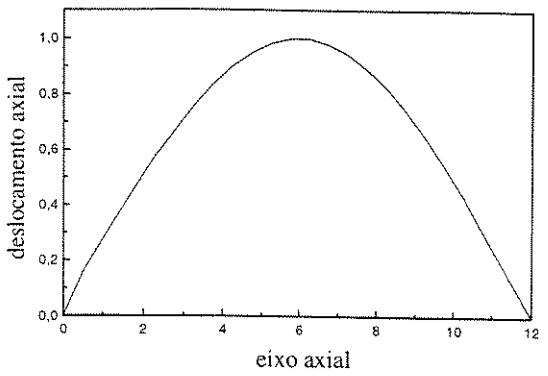
Em seguida, vamos analisar a conseqüência da variação do número de elementos da malha para o cálculo das freqüências naturais, mantendo fixo (e igual a 6) o valor de n na Equação (4.11).

	ω_1	ω_2	ω_3
ANALÍTICO	1.00	2.00	3.00
AXIDIN 16 elementos constantes	1.01	2.00	2.99
Erro relativo	1%	–	1%
AXIDIN 32 elementos constantes	1.01	2.00	2.99
Erro relativo	1%	–	1%
AXIDIN 64 elementos constantes	1.01	2.00	3.01
Erro relativo	1%	–	1%

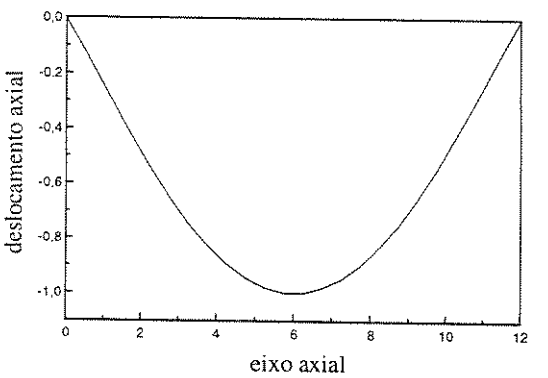
Tabela 4.4 – Influência da discretização da malha no cálculo da freqüência natural da barra fixa-fixa.

Notamos que à medida que o número de elementos da malha aumenta, os resultados numéricos não variam. Isto ocorre porque as discretizações feitas tornam as malhas flexíveis o suficiente para serem sensíveis aos modos de vibração analisados (os três primeiros). Com isto, para dar andamento a este exemplo, vamos utilizar a malha com 32 elementos pois neste ponto há uma estabilização no erro relativo para os valores das freqüências naturais calculadas numericamente.

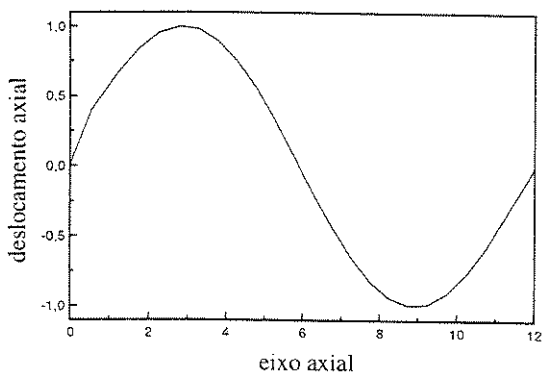
Nas próximas páginas seguem os gráficos obtidos por *AXIDIN* dos três primeiros modos de vibração longitudinal do eixo axial expresso transversalmente, bem como suas respectivas animações feitas em 16 quadros por ciclo, cuja ordem de acompanhamento é da esquerda para a direita e de cima para baixo.



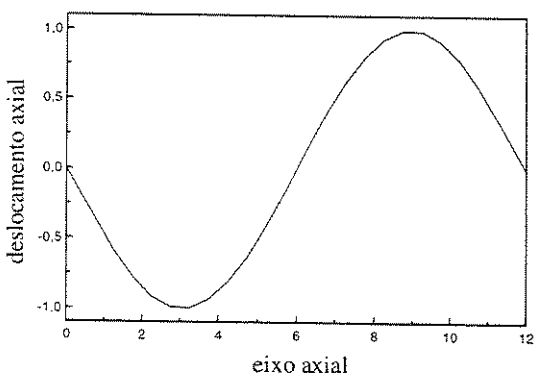
Modo 1 – parte real (amplitude)



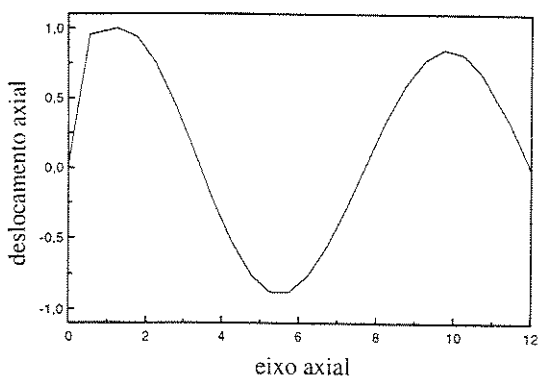
Modo 1 – parte imaginária (fase)



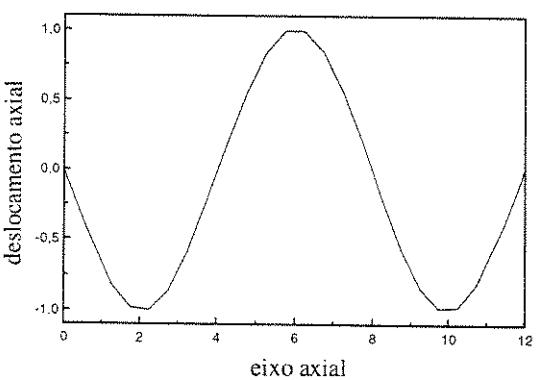
Modo 2 – parte real (amplitude)



Modo 2 – parte imaginária (fase)



Modo 3 – parte real (amplitude)



Modo 3 – parte imaginária(fase)

Gráficos 4.4 – Modos de vibração de uma barra fixa-fixa.

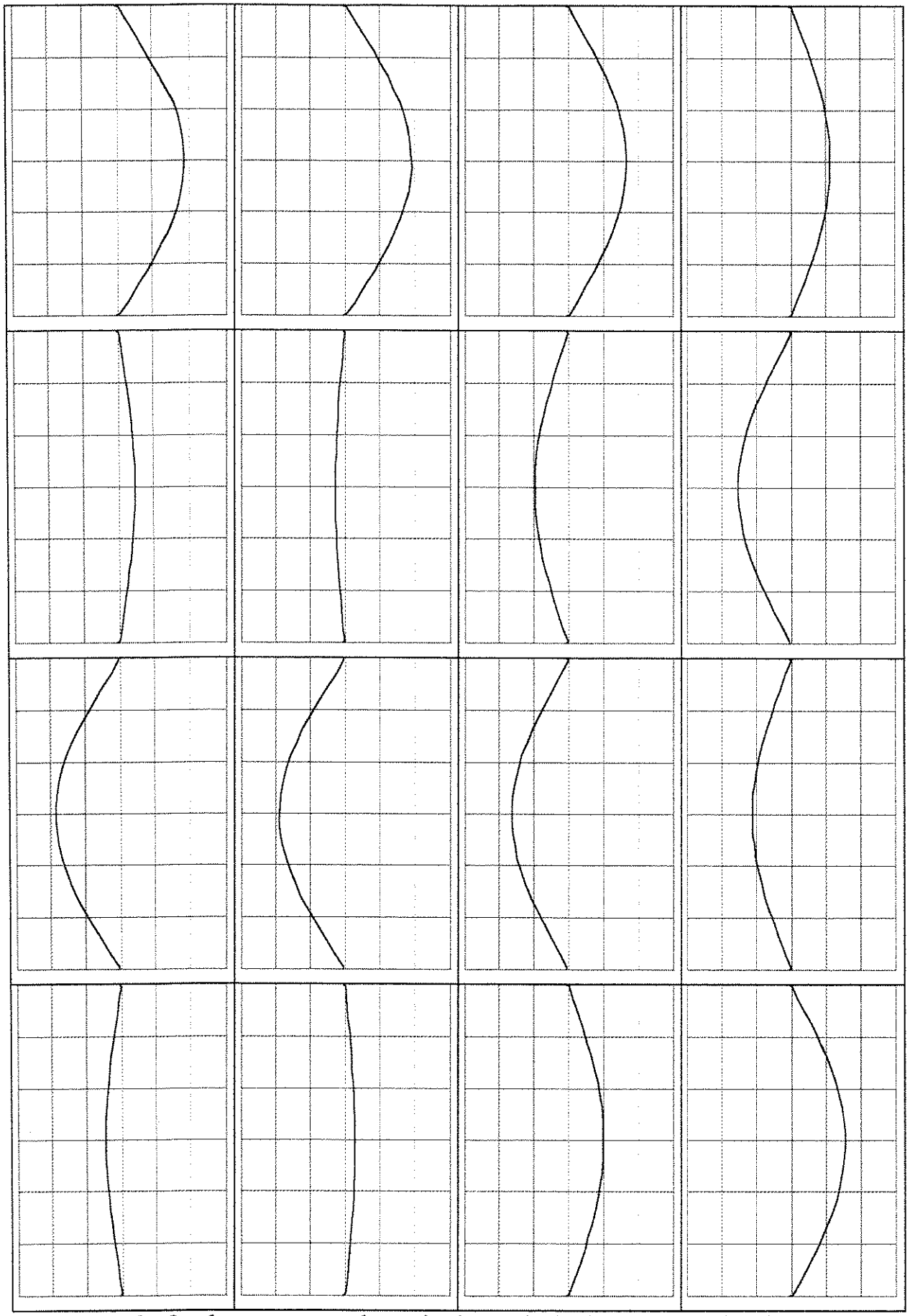


Figura 4.6 – Quadros representando o primeiro modo de vibrar da barra fixa-fixa num ciclo.

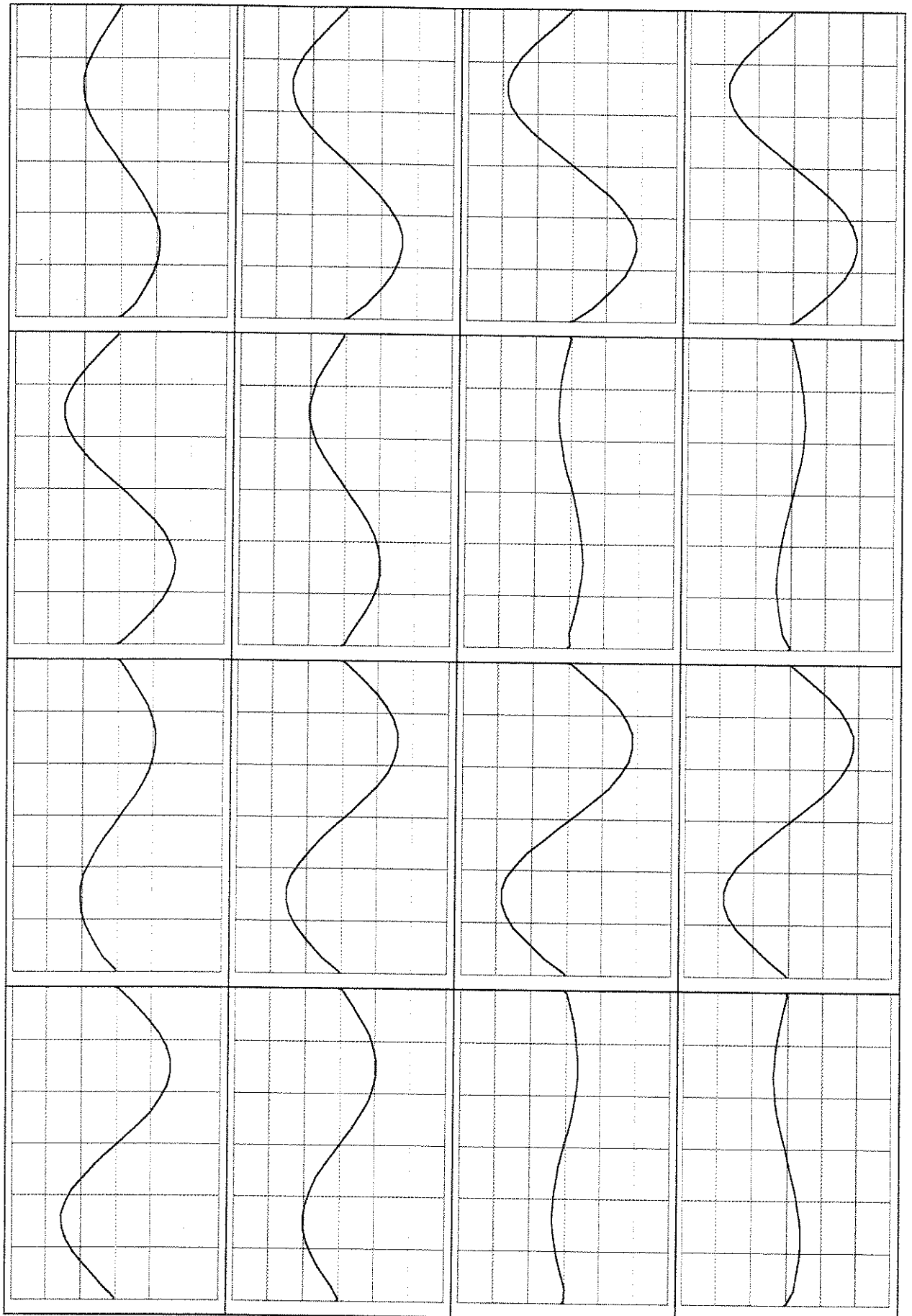


Figura 4.7 – Quadros representando o segundo modo de vibrar da barra fixa-fixa num ciclo.

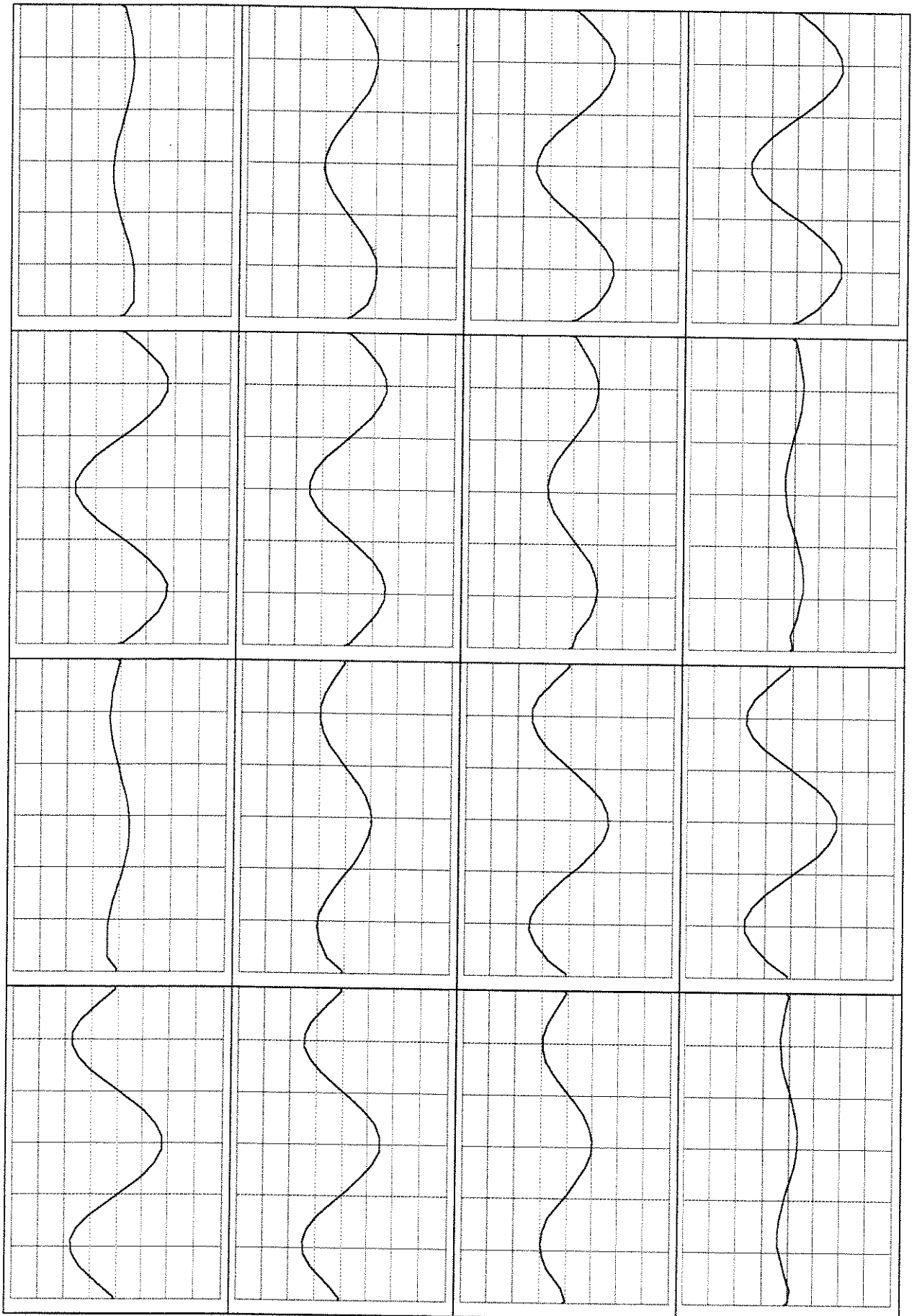


Figura 4.8 – Quadros representando o terceiro modo de vibrar da barra fixa-fixa num ciclo.

Como comentário final aos gráficos obtidos, convém salientar que aqueles que trazem as FRF's têm significado numérico, ou seja, os valores neles contidos coincidem com uma situação real de operação do concentrador, ao passo que os outros, dos modos de vibração e animações, foram multiplicados por um fator de escala conveniente para apresentar os valores vistos, tendo apenas significado conceitual.

Já que estes exemplos analisados apresentaram resultados coerentes, numérica e conceitualmente, com os conhecidos analiticamente, encerramos este capítulo concluindo que o primeiro passo pretendido foi realizado: a montagem de um programa (visco)elastodinâmico estacionário axi-simétrico.

CAPÍTULO 5

Aplicações

Sem perder de vista a idéia inicial que é a otimização do concentrador ultra-sônico, este capítulo procura tratar de um problema que se aproxima de uma situação prática, tentando analisar algumas geometrias, e entre elas aquela que pode possuir um melhor rendimento.

Para tanto, vamos tomar cinco barras com área da seção transversal circular e variável com as extremidades livres (barras sem vínculo algum), submetidas a um carregamento periódico harmônico unitário ($t_z = 1$) de compressão na extremidade maior (ver Figura 5.1) e medir o deslocamento na outra extremidade no ponto de coordenada (0,5; 12,0). Em todos os cinco exemplos a serem analisados, as barras possuem raio maior R_1 = 7,5 , raio menor R_2 = 6,0 e comprimento L = 12,0. O diferencial entre elas é a razão com que o raio vai diminuindo ao longo do comprimento.

A equação usada para fazer variar o perfil desta estrutura é:

$$r(z) = r(0)\left[1 - (z/L)^{\alpha}\right] + r(L)(z/L)^{\alpha} \tag{5.1}$$

onde r e z são as coordenadas radial e axial respectivamente e α é um número real qualquer. Para os nossos exemplos usaremos α = 0,50, 0,75, 1,00, 1,25 e 1,50 sendo que cada perfil será citado em função deste valor de α com os seguintes nomes: bar0_50, bar0_75, bar1_00, bar1_25 e bar1_50.

A Figura 5.1 especifica esta nomenclatura relacionando-a a cada perfil.

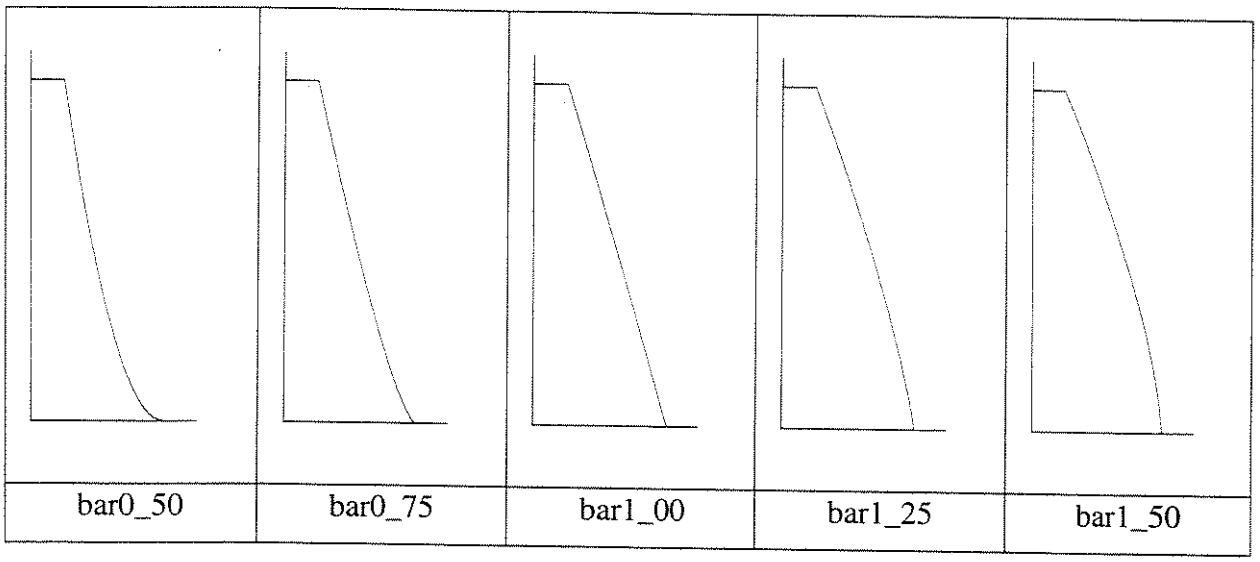


Figura 5.1 – Representação geométrica das barras com suas respectivas identificações.

Nosso problema inicial é encontrar as freqüências naturais de cada uma das geometrias através do programa *AXIDIN*. Por se tratar de um capítulo de aplicações, vamos nos preocupar em encontrar somente o primeiro modo de vibrar de cada uma, pois assim é o funcionamento dos concentradores ultra-sônicos abordados neste trabalho.

Como nos exemplos 4.2.1 e 4.2.2, vamos construir as FRF's para cada uma das estruturas, mantendo fixo o número de elementos da malha e variando o passo no intervalo de freqüência analisado. Fixemos o número de elementos em 32 e o intervalo de freqüência variando de 0,01 a 0,61. Esta escolha foi feita em virtude dos resultados obtidos no Capítulo 4.

Devido ao fato das geometrias serem bastante próximas, vamos fazer os cálculos das freqüências naturais com uma precisão de $1/1000$.

Segue agora uma tabela comparativa entre as freqüências naturais e também as FRF's para cada uma das estruturas, com valores de n = 5, 6, 7, 8, e 9 de acordo com a Equação (4.11).

	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
bar0_50	0,422	0,422	0,418	0,419	0,419
bar0_75	0,422	0,422	0,422	0,422	0,422
bar1_00	0,422	0,422	0,427	0,426	0,426
bar1_25	0,422	0,432	0,427	0,429	0,429
bar1_50	0,422	0,432	0,432	0,432	0,432

Tabela 5.1 – Influência da discretização do intervalo de freqüência no cálculo das freqüências naturais das cinco estruturas.

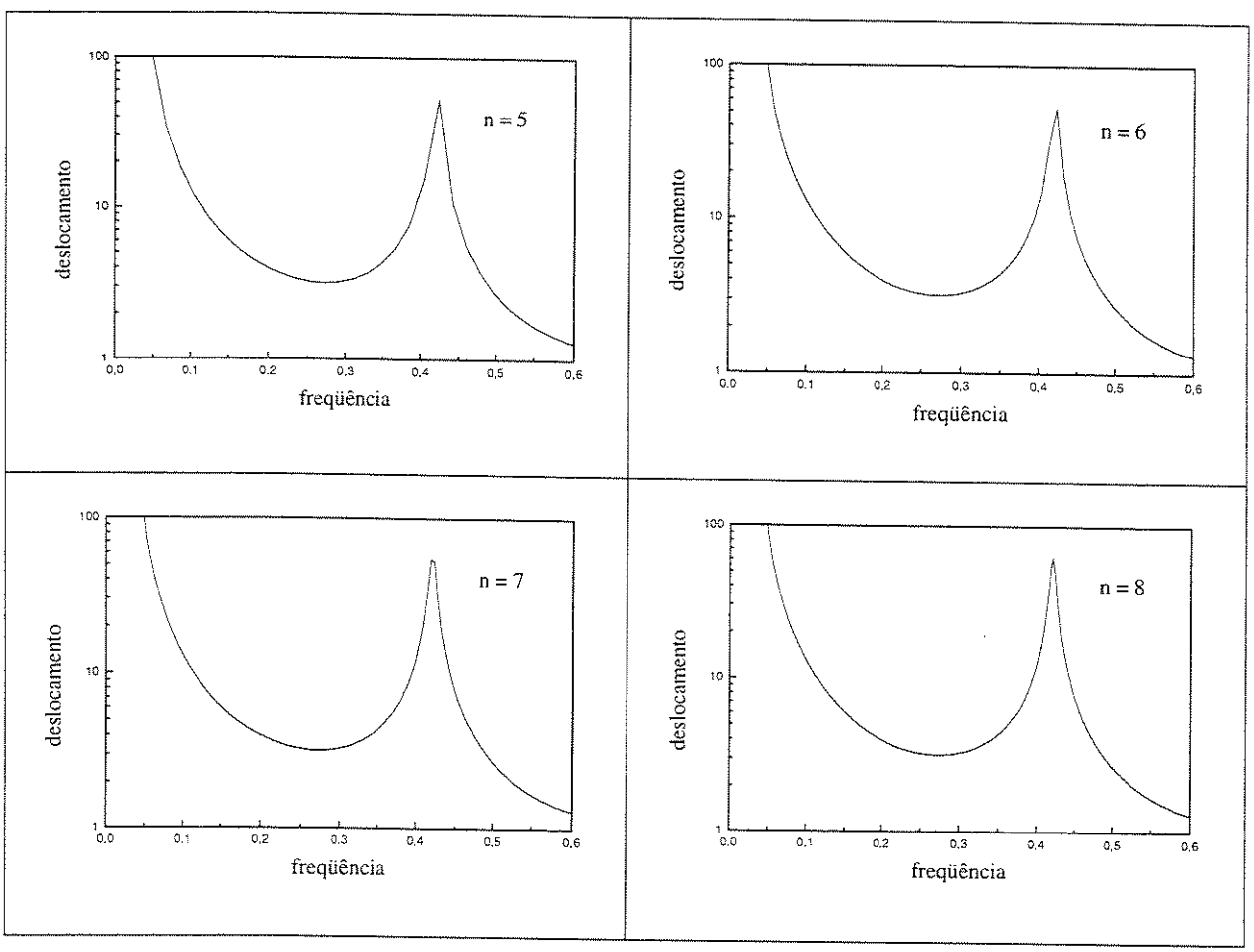


Gráfico 5.1 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar0_05.

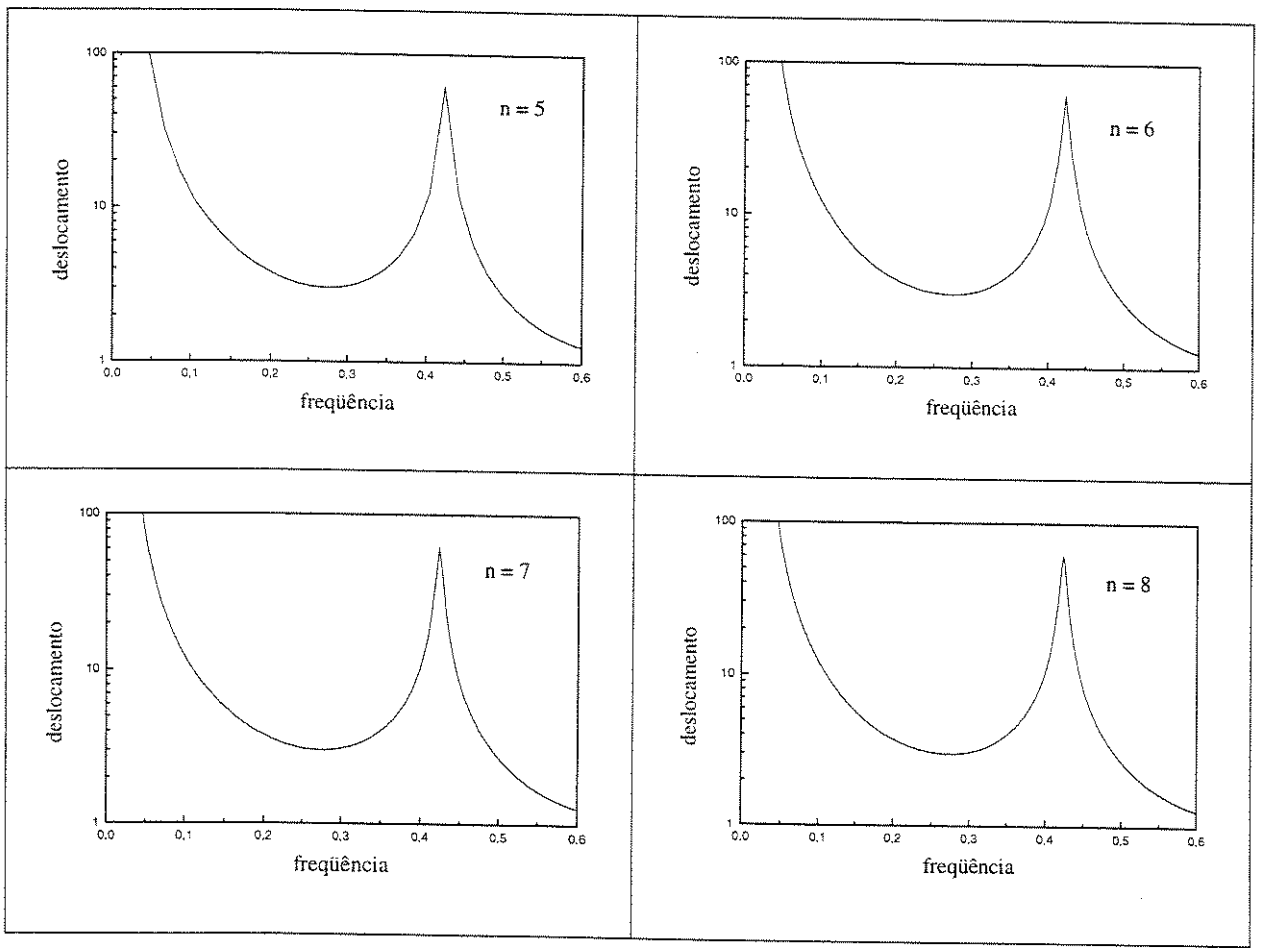


Gráfico 5.2 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em *z* do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar0_75.

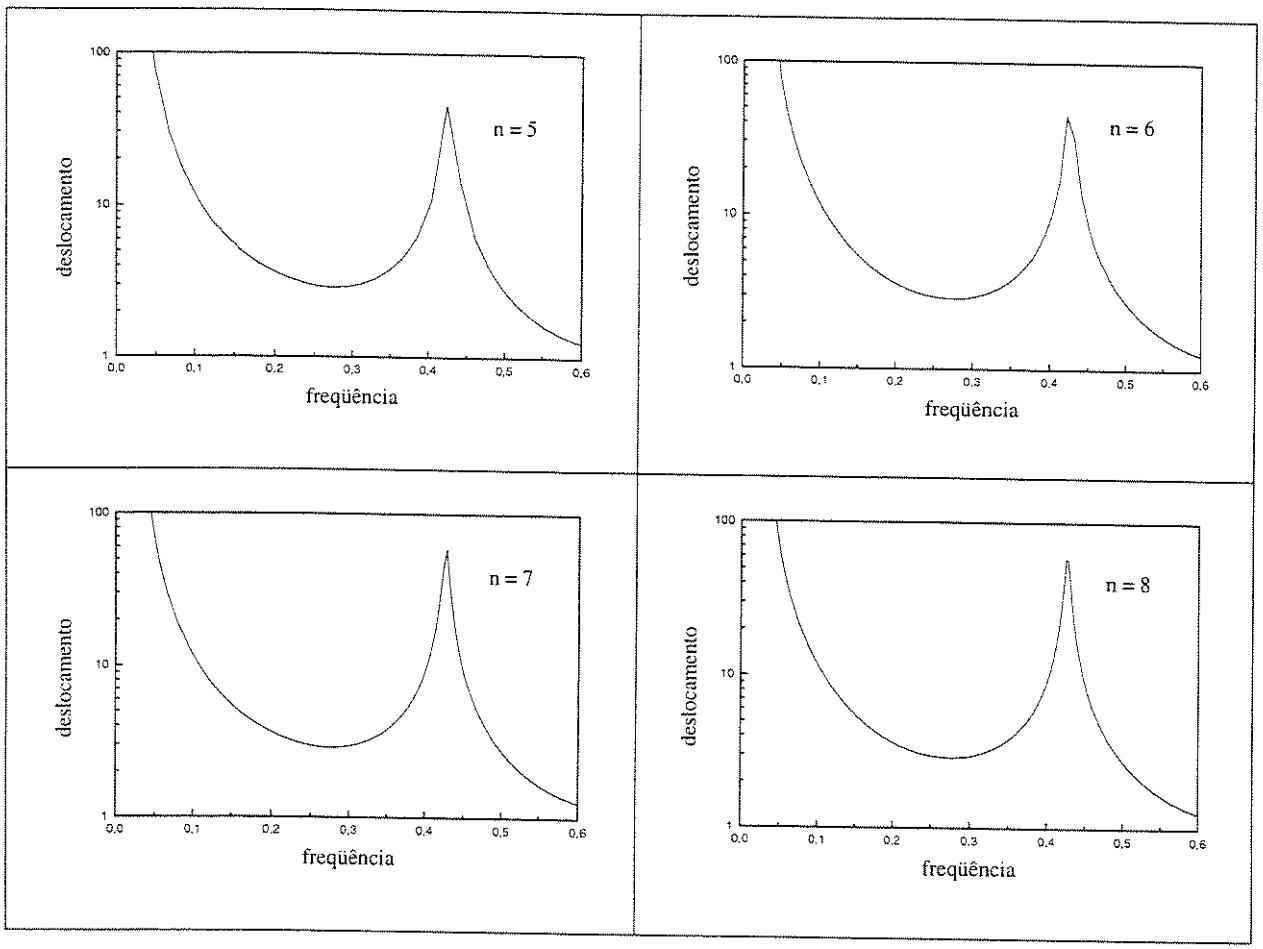


Gráfico 5.3 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em *z* do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar1_00.

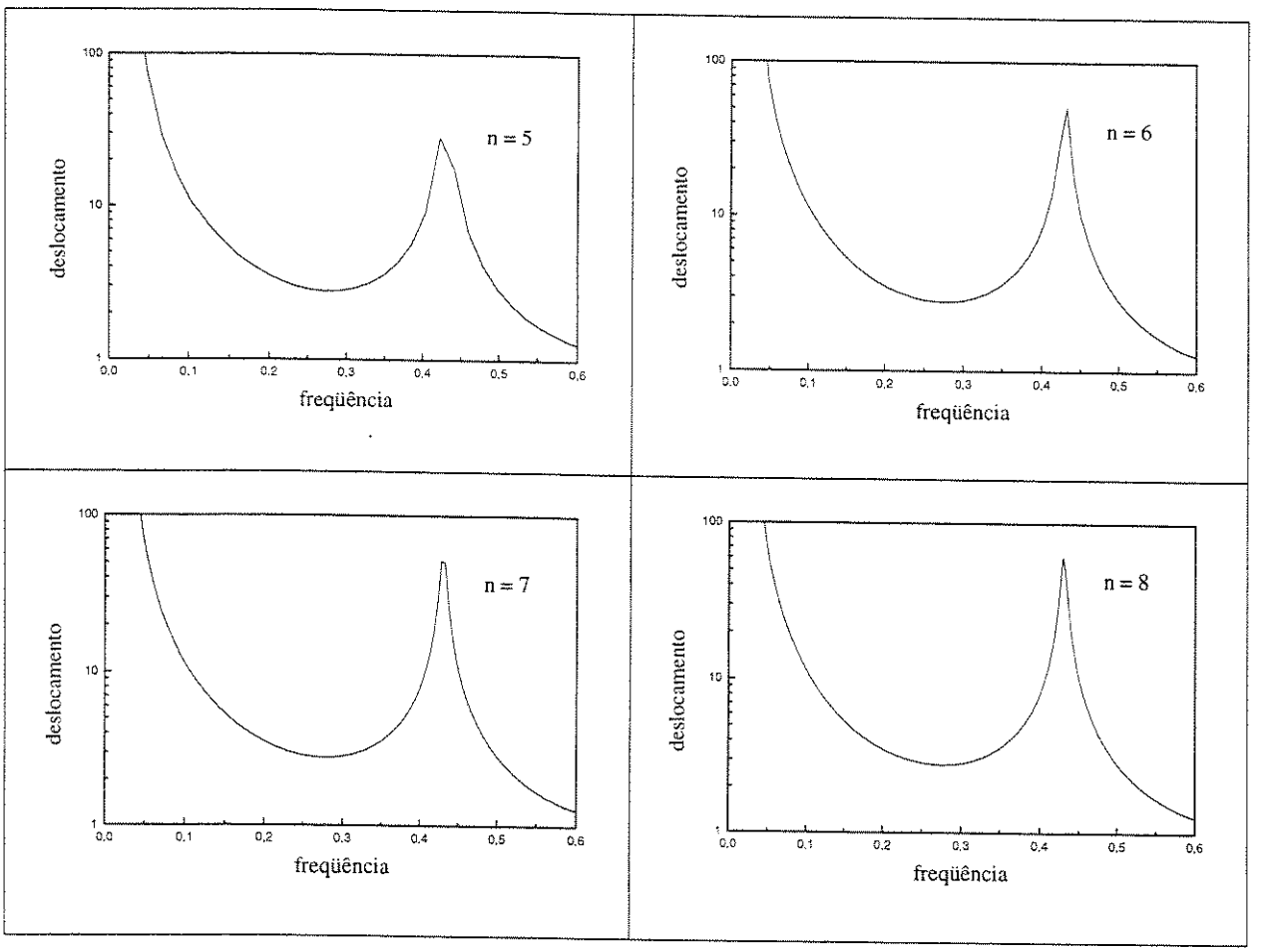


Gráfico 5.4 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em *z* do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar1_25.

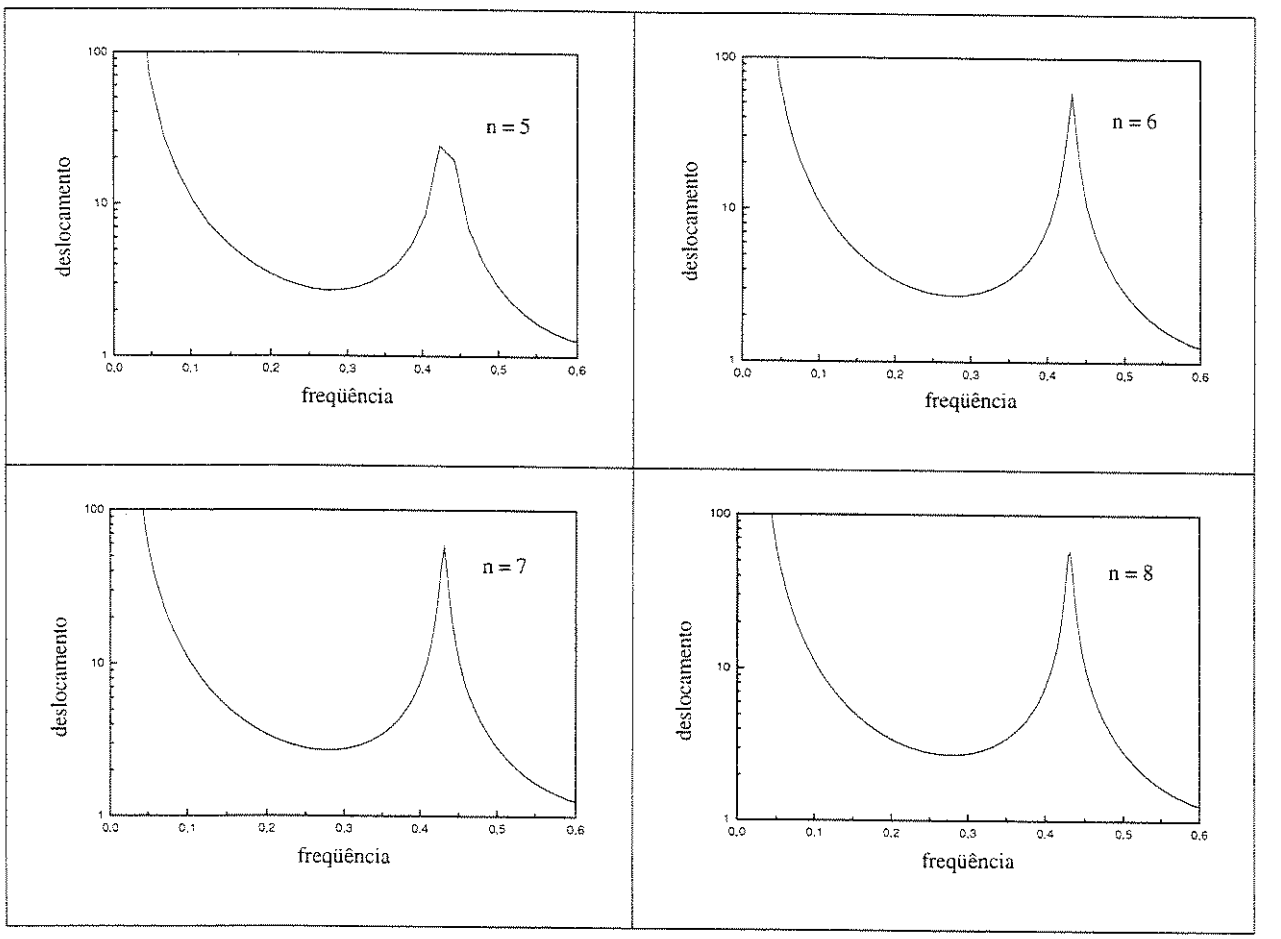


Gráfico 5.5 – Função de Resposta em Freqüência do deslocamento em z do ponto (0,5; 12,0) para quatro discretizações de freqüência da estrutura bar1_50.

Analisando a Tabela 5.1, notamos que não há mais variações nas freqüências naturais quando mudamos n de 8 para 9. Devido a isto, vamos utilizar uma discretização do intervalo de freqüência com $n = 8$ e assim dar andamento às nossas análises. Convém comentar que os Gráficos 5.1 a 5.5 só apresentam FRF's até $n = 8$ por não haver mudança nas FRF's para $n = 9$.

Em seguida, vamos analisar a influência da variação do número de elementos da discretização da malha no cálculo das freqüências naturais, mantendo fixo (e igual a 8) o valor de n na Equação (4.11).

	bar0_50	bar0_75	bar1_00	bar1_25	Bar1_50
16 elementos constantes	0,422	0,425	0,430	0,432	0,434
32 elementos constantes	0,419	0,422	0,426	0,429	0,432
64 elementos constantes	0,419	0,422	0,426	0,429	0,431

Tabela 5.2 – Influência da discretização da malha no cálculo das freqüências naturais das cinco estruturas.

Como ocorreu nos exemplos do Capítulo 4, notamos que os resultados numéricos quando variaram foi numa proporção muito pequena que pode ser desprezada se considerarmos o custo computacional que isto acarreta. Podemos dizer aqui também que as discretizações feitas tornam as malhas flexíveis o suficiente para serem sensíveis ao modo de vibração analisado (o primeiro). Com isto, para dar andamento a este estudo, vamos utilizar a malha com 32 elementos pois neste ponto há uma estabilização no valor das freqüências naturais calculadas numericamente.

Encontrados o número de elementos para discretização das malhas e as freqüências naturais das estruturas, vamos agora tentar encontrar qual das geometrias pode possuir um melhor rendimento.

Existe aqui um problema prático, pois sendo estas estruturas livres-livres, elas estão "soltas" nos espaço. Como elas vão operar sempre no primeiro modo próprio, temos que localizar o nó (ponto de deslocamento nulo) para fixarmos aí a estrutura.

Partindo da mesma situação utilizada na determinação das freqüências naturais, vamos tomar cada estrutura e submetê-las a um carregamento periódico harmônico de compressão na extremidade maior, sendo este com freqüência igual à primeira freqüência natural de cada estrutura. Com isto temos cada barra operando no primeiro modo próprio (1ª ressonância) e assim poderemos localizar o nó acima citado.

Localizado o nó para cada estrutura, colocamos ali um vínculo e excitamos novamente as estruturas nas mesmas condições anteriores, e temos assim uma simulação do modo de operação de um concentrador ultra-sônico.

O que temos até então são as cinco estruturas da Figura 5.1 com um carregamento de compressão periódico harmônico na extremidade maior, fixas nos respectivos nós (previamente conhecidos) e queremos conhecer qual delas pode possuir um melhor rendimento.

Devido ao fato de que nestas simulações não estamos considerando as perdas por atrito interno no material (material viscoelástico), não podemos submeter a estrutura a um carregamento harmônico periódico com freqüência igual à primeira freqüência natural de cada estrutura, pois isto poderia gerar resultados numericamente errados. Na ressonância os deslocamentos tenderiam ao infinito.

Para esta análise, vamos utilizar um carregamento com freqüência 0,01 a menos que a primeira freqüência natural obtida numericamente ($\omega_{excitação} = \omega_{natural} - 0{,}01$).

Vamos definir agora uma grandeza que chamaremos eficiência acústica como:

→ eficiência acústica: integral do deslocamento lateral na direção da normal / integral do deslocamento na extremidade menor (saída) na direção da normal. Esta relação releva o fato de que o deslocamento lateral está associado ao campo acústico não-útil ao passo que o deslocamento na extremidade tende a gerar o campo útil.

A Figura 5.2 mostra como é calculado o deslocamento normal para um elemento.

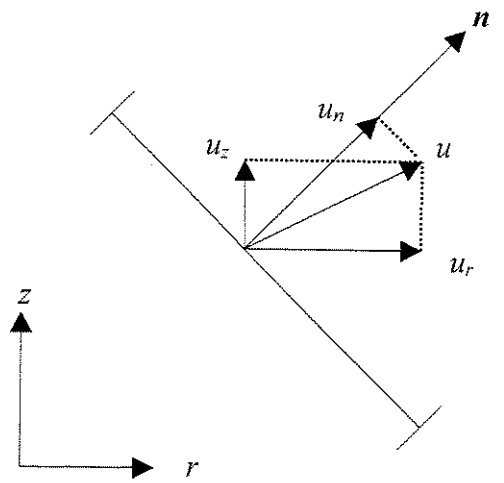


Figura 5.2 – Representação do deslocamento normal num elemento da malha.

Fazendo esta análise para cada uma das estruturas, temos:

bar0_50 ⇒ eficiência acústica = 1,701

bar0_750 ⇒ eficiência acústica = 2,949

bar1_00 ⇒ eficiência acústica = 2,697

bar1_25 ⇒ eficiência acústica = 1,670

bar1_50 ⇒ eficiência acústica = 1,688

Analisando os valores obtidos dos indicadores de eficiência acústica de cada uma das cinco estruturas e considerando somente os fatos explanados neste trabalho, seríamos levados a concluir que a geometria denominada bar_0.75 apresentaria um melhor desempenho global, porém cabe ainda ressaltar que existem outros fatores que devem ser considerados para uma análise mais precisa como por exemplo o amortecimento do material.

CAPÍTULO 6

Discussão, Conclusões e Perspectivas

O que se pretendeu neste trabalho foi modelar o comportamento dinâmico da parte passiva de um transdutor utilizado em equipamentos ultra-sônicos de potência, através de uma estrutura com simetria axial.

Com o conhecimento das áreas citadas, o passo seguinte foi a compreensão da formulação de um método numérico, aqui o Método dos Elementos de Contorno (MEC), para que o problema pudesse ser resolvido para qualquer geometria independente do cálculo analítico, o qual, para algumas situações, é de difícil resolução.

Escolhido o método numérico, partiu-se então para a implementação computacional. No entanto, para as equações usadas, não foi possível uma aplicação direta do referido método devido à existência de integrais singulares fortes e hipersingulares, e uma estratégia matemática se fez necessária para contornar o problema. Por conseqüência desta estratégia, este trabalho tem não somente um estudo de uma estrutura sujeita a um carregamento periódico harmônico, como também uma consideração sobre uma estrutura sujeita a um carregamento estático.

A respeito da análise do problema estático axi-simétrico, pode-se dizer que o programa desenvolvido neste trabalho obteve resultados com margem de erro pequena quando comparado à solução numérica obtida pelo programa formal existente na literatura pesquisada (*BEACON*), e o que se pôde perceber é que à medida que a geometria foi se tornando mais complexa, indo de um cilindro para uma coluna cônica, foi necessário um número maior de elementos para que os

resultados convergissem para os esperados. Ainda com relação ao mesmo problema, como foi visto, o programa *BEACON* usa elementos quadráticos e, conforme esperado, convergiu mais rapidamente (menor número de elementos) para o resultado analítico.

Conclui-se, à evidência do que foi exposto, que já existem resultados com maior exatidão e menor tempo computacional que os obtidos neste trabalho, mas aqui ele é apenas um meio para a abordagem de outro problema que é o dinâmico. Para finalizar os comentários sobre o programa estático axi-simétrico é pertinente dizer que foi necessário que ele possuísse elementos constantes, pois só assim seria útil no programa dinâmico axi-simétrico que inicialmente, por ser mais simples, usou também o mesmo tipo de elementos.

Com relação ao tema específico desta tese, notou-se que é no desenvolvimento matemático envolvendo as integrações em que se baseia o MEC onde certamente se concentram as maiores dificuldades, pois todos os artifícios usados foram para contornar este tipo de problema.

A forma de análise dos resultados se baseou em duas etapas: a primeira foi quantitativa, consequentemente pode ser mensurada, e comparou numericamente as freqüências naturais das estruturas exemplificadas, atingindo resultados coerentes com o cálculo analítico. Este ponto foi fundamental para que se passasse para a segunda etapa, esta qualitativa, em que analisou-se as formas das estruturas nas ressonâncias, que também foram compatíveis com as conhecidas analiticamente. Embora figurem neste trabalho apenas os três primeiros modos de vibração de cada exemplo, os superiores também foram testados com bons resultados mas com discretizações maiores das malhas.

Considerando o fato de que os exemplos utilizados pelo programa até este ponto tiveram resultados pertinentes, foi interessante tentar comparar o comportamento de algumas geometrias para que, sob alguns aspectos, pudéssemos concluir qual delas possui o melhor desempenho, mas esta conclusão é bastante particular para este trabalho.

Sem perder de vista que a idéia inicial era a montagem de um programa que analisasse uma estrutura (visco)elástica axi-simétrica sujeita a um carregamento periódico harmônico, pode-se dizer que o objetivo foi alcançado mas, como perspectiva para o aprimoramento do que já foi feito, enumera-se a execução de um programa para outras geometrias com elementos lineares e quadráticos usando a filosofia de programação orientada a objeto tendo por ambiente a linguagem

C++ e, principalmente, uma análise do rendimento energético do concentrador acoplando-o ao campo acústico gerado. Num próximo passo, propõe-se testes com outras estratégias para contornar os problemas matemáticos e também comparações com outros métodos.

Referências Bibliográficas

Anzou, L. A. ; *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a equação de Helmholtz, visando a modelagem da radiação e dispersão acústica*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1996, Tese (Mestrado).

Becker, A. A. ; *The Boundary Element Method in Engineering - A complete course,* McGraw-Hill Book Company, ano1992.

Bettess, P. ; *Infinite Elements*, Penshaw Press, 1992.

Brebbia, C. A. ; *The Boundary Element Method for Engineers*, Computacional Mechanics Publication, 1978.

Brebbia, C. A.; Dominguez, J. ; *Boundary Elements – An Introductory Course*, Computacional Mechanics Publication, 1989.

Cruse, T. A.; Snow, D. W.; Wilson, R. B. ; "Numerical Solutions in Axisymmetric Elasticity", *Computers & Structures*, vol. 7, pp. 445-451, Pergamon Press, 1977.

Dominguez, J. ; *Boundary Elements in Dynamics*, Computacional Mechanics Publications, 1993.

Emperador, J. M.; Dominguez, J. ; "Dynamic Response of Axisymmetric Embedded Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol.18, pp. 1105-1117, 1989.

Eringen, A. C.; Suhubi, E. S. ; *Elastodynamics – Linear Theory*, vol. 1 e 2, Academic Press, 1975.

Findley, W. N.; Lai, J. S.; Onaran, K. ; *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*, Dover Publications, 1989.

Fung, Y. C. ; *A First Course in Continuum Mechanics*, Prentice Hall, 1977.

Gomez-Lera, M. S.; Alarcon, E.; Dominguez, J. ; "On the Use of a 3-D Fundamental Solution for Axisymmetric Steady-State Dynamic Problems", *Boundary Elaments VII*, pp. 6-127-136, 1985.

Graff, K. F. ; *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, 1975.

Hartmann, F. ; *Introduction to Boundary Elements – Theory and Applications* , Springer-Verlag, 1989.

Kane, J. H. ; *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*, Prentice Hall, 1994.

Kreyszig, E. ; *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 1988.

Mesquita Neto, E.; Pontes Jr., B. R.; Sousa, E. A. C. ; "Coupling of finite element and boundary element procedures for steady state elastodynamics. Part. I: Formulation", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, RBCM*, vol. XVI, n° 2, pp. 143-158, 1994.

Mesquita Neto, E.; Pontes Jr., B. R.; Sousa, E. A. C. ; "Coupling of finite element and boundary element procedures for steady state elastodynamics. Part. I: Validation and applications", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, RBCM*, vol. XVI, n° 2, pp. 159-176, 1994.

Pontes Jr., B. R. ; *Interação Dinâmica de Estruturas Bidimensionais com o Solo*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1992, Tese (Mestrado).

Popov, E. P. ; *Introdução à Mecânica dos Sólidos*, Edgard Blücher, 1978.

Richart Jr. , F.E.; Hall Jr. , J.R.; Woods, R.D. ; *Vibrations os Soils and Foundations,* Prentice Hall, 1970.

Rizzo, F. J.; Shippy, D. J. ; "A Boundary Element Method for Axisymmetric Elastic Bodies", *Developments in BEM*, vol. 4, Eds. P. K. Banerjee and J. O. Watson, Elsevier, pp. 67-90, 1986.

Shames, I. H. ; *Introduction to Solid Mechanics,* Second Edition, Prentice Hall, 1989.

Sousa, E. A. C. ; *Acoplamento do método dos elementos finitos e elementos de contorno para tratamento de problemas estacionários da elastodinâmica*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1992, Tese (Mestrado).

Stroud, A. H.; Secrest, D. ; *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, 1966.

Wang, H. C.; Banerjee, P. K. ; "Multi-Domain General Axisymmetric Stress Analysis by BEM", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, pp. 2065-2083, 1989.

Wang, H. C.; Banerjee, P. K. ; "Free Vibration of Axisymmetric Solids by BEM Using Particular Integrals", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 985-1001, 1990.

Wang, H. C.; Banerjee, P. K. ; "Generalized Axisymmetric Elastodynamic Analysis by Boundary Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 115-131, 1990.

Yoshikawa, F.; Tanaka, M. ; "Boundary Elements in Axisymmetric Potencial Problems", *Boundary Element Methods in Engineering*, Ed. C. A. Brebbia, pp. 101-111, Springer-Verlag, 1982.

Zavala, P. A. G. ; *Análise Vibro-Acústica Utilizando o Método de Elementos Finitos com Mapeamento Dirichlet-to-Newmann (DtN)*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1999, Tese (Mestrado).

Zienkiewicz, O. C.; Morgan, K. ; *Finite Element and Aproximations*, Wiley, 1983.

APÊNDICE A

Núcleos elastostáticos axisimétricos de deslocamento expressos em coordenadas cilíndricas referenciados no Capítulo 3.

Neste apêndice, estes núcleos são expressos fazendo-se a substituição dos núcleos tridimensionais, mostrando-se os passos envolvidos.

$$u_{rr}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u_{11}(\xi,x)\cos\theta(x)+u_{12}(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x)\right]\mathrm{d}\theta(x)$$

$$u_{rr}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\left[\frac{1}{16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]\left[\frac{1}{\left[(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.\right.$$
$$\left[(3-4\nu)+\frac{(x_1(x)-X_1(\xi))^2}{(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2}\right]\cos\theta(x)\Bigg]+$$
$$+\left[\left[\frac{1}{16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]\left[\frac{1}{\left[(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.$$
$$\left.\left.\left[\frac{(x_1(x)-X_1(\xi))(x_2(x)-X_2(\xi))}{(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2}\right]\operatorname{sen}\theta(x)\right]\right\}\mathrm{d}\theta(x)$$

Fazendo a transformação $\theta(x)=\pi-2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi)=R(\xi)\cos\theta(\xi)=R(\xi)\,;\qquad X_2\xi)=R(\xi)\operatorname{sen}\theta(\xi)=0\,;\qquad X_3(\xi)=Z(\xi)$$

$$x_1(x)=r(x)\cos\theta(x)\,;\qquad x_2(x)=r(x)\operatorname{sen}\theta(x)\,;\qquad x_3(x)=x_3(x)$$

temos:

$$u_{rr}(\xi,x)=\left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left\{\left[\frac{3-4\nu}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\cos(\pi-2\alpha)+\right.$$

$$+\left[\frac{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]\cos(\pi-2\alpha)+$$

$$\left.+\left[\frac{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]\operatorname{sen}(\pi-2\alpha)\right\}\mathrm{d}\alpha$$

Considerando agora as identidades

$\cos(\pi-2\alpha)=\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$ e

$\operatorname{sen}(\pi-2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ podemos escrever:

$$u_{rr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]+$$

$$\left.+\left[\frac{\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\left(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

lembrando que $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ temos:

$$u_{rr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{1/2}}\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{\left(r(x)\left(1-2\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}}\right]+$$

$$\left.+\left[\frac{\left(r(x)\left(1-2\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)\left(4r(x)\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{rr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)_p\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{1/2}}\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{\left(r(x)-2r(x)\cos^2\alpha-R(\xi)\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}}\right]+$$

$$\left.+\left[\frac{\left(r(x)-2r(x)\cos^2\alpha-R(\xi)\right)\left(1-2\cos^2\alpha\right)+4r(x)\cos^2\alpha-4r(x)\cos^4\alpha}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

agrupando agora os dois últimos termos do integrando, resulta

$$u_{rr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{1/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\left(r(x)-2r(x)\cos^2\alpha-R(\xi)\right)\left(r(x)+2r(x)\cos^2\alpha-R(\xi)\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{rr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{1/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(R(\xi)-r(x))^2\left(1-2\cos^2\alpha\right)-4R(\xi)\,r(x)\cos^4\alpha}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

manipulando o termo

$$\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+\left(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)^2+\left(z(x)-Z(\xi)\right)^2$$

concluímos que ele é igual a

$$\left(R(\xi)+r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2-4r(x)R(\xi)\operatorname{sen}^2\alpha$$

Fazendo

$$A=\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}$$

$$C=\left[\left(R(\xi)+r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$m=\frac{2\left(R(\xi)\,r(x)\right)^{1/2}}{C}$$

temos por enquanto:

$$u_{rr}(\xi, x) =$$

$$= 2A\int_0^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)\left(1-2\cos^2\alpha\right)}{C\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}\right]+\left[\frac{(R(\xi)-r(x))^2\left(1-2\cos^2\alpha\right)-4R(\xi)\,r(x)\cos^4\alpha}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u_{13}(\xi,x)\,\mathrm{d}\theta(x)\right]$$

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]\left[\frac{1}{\left[(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\left[\frac{(x_1(x)-X_1(\xi))(x_3(x)-X_3(\xi))}{(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2}\right]\right\}\mathrm{d}\theta(x)$$

Fazendo a transformação $\theta(x)=\pi-2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi)=R(\xi)\cos\theta(\xi)=R(\xi);\qquad X_2(\xi)=R(\xi)\,\mathrm{sen}\,\theta(\xi)=0;\qquad X_3(\xi)=Z(\xi)$$

$$x_1(x)=r(x)\cos\theta(x);\qquad x_2(x)=r(x)\,\mathrm{sen}\,\theta(x);\qquad x_3(x)=x_3(x)$$

temos:

$$u_{rz}(\xi,x)=\left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left\{\left[\frac{1}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\,\mathrm{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\left[\frac{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))(z(x)-Z(\xi))}{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\,\mathrm{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

Considerando agora as identidades

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha \qquad \text{e}$$

$$\text{sen}(\pi - 2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \qquad \text{podemos escrever:}$$

$$u_{rz}(\xi,x) = \left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right] \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{1}{\left[\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2\right]^{1/2}}\right] \left[\frac{\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R_p\right)\left(z(x) - Z_p\right)}{\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2}\right]\right\} \text{d}\alpha$$

lembrando que $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ temos:

$$u_{rz}(\xi,x) = \left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\frac{\left(r(x)\left(1 - 2\cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)\left(z(x) - Z(\xi)\right)}{\left[\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}}\right\} \text{d}\alpha$$

manipulando o termo

$$\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2$$

concluímos que ele é igual a

$$\left(R(\xi) + r(x)\right)^2 + \left(Z(\xi) - z(x)\right)^2 - 4r(x)R(\xi)\,\text{sen}^2\,\alpha$$

Fazendo

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu\,(1-\nu)}$$

$$C = \left[\left(R(\xi)+r(x)\right)^2 + \left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$m = \frac{2\left(R(\xi)\,r(x)\right)^{1/2}}{C}$$

temos por enquanto:

$$u_{rz}(\xi,x) = 2A\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\left(R(\xi)-r(x)+2r(x)\cos^2\alpha\right)\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u_{31}(\xi,x)\cos\theta(x)+u_{32}(\xi,x)\operatorname{sen}\theta(x)\right]\mathrm{d}\theta(x)$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi}\left\{\left[\left[\frac{1}{16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]\left[\frac{1}{\left[(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left[\frac{(x_3(x)-X_3(\xi))(x_1(x)-X_1(\xi))}{(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2}\right]\right]\cos\theta(x)+$$

$$+\left[\left[\frac{1}{16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]\left[\frac{1}{\left[(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.$$

$$\left.\left.\left[\frac{(x_3(x)-X_3(\xi))\,(x_2(x)-X_2(\xi))}{(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2}\right]\right]\operatorname{sen}\theta(x)\right\}\mathrm{d}\theta(x)$$

Fazendo a transformação $\theta(x)=\pi-2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi)=R(\xi)\cos\theta(\xi)=R(\xi);\qquad X_2(\xi)=R(\xi)\operatorname{sen}\theta(\xi)=0;\qquad X_3(\xi)=Z(\xi)$$

$$x_1(x)=r(x)\cos\theta(x);\qquad x_2(x)=r(x)\operatorname{sen}\theta(x);\qquad x_3(x)=x_3(x)$$

temos:

$$u_{zr}(\xi,x)=\left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left\{\left[\left[\frac{1}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.$$

$$\left.\left[\frac{(z(x)-Z(\xi))\,(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))}{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2}\right]\right]\cos(\pi-2\alpha)+$$

$$+\left[\left[\frac{1}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.$$

$$\left.\left.\left[\frac{(z(x)-Z(\xi))(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))}{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\operatorname{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2}\right]\right]\right\}d\alpha$$

Considerando agora as identidades

$\cos(\pi-2\alpha)=\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha$ e

$\operatorname{sen}(\pi-2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ podemos escrever:

$$u_{zr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(z(x)-Z(\xi))\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(z(x)-Z(\xi))\,(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\,(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{\left[\left(r(x)\left(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)-R(\xi)\right)^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

lembrando que $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ temos:

$$u_{zr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(z(x)-Z(\xi))\,(r(x)-2r(x)\cos^2\alpha-R(\xi))\,(1-2\cos^2\alpha)}{\left[(r(x)\,(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{(z(x)-Z(\xi))\,(4r(x))\,(\cos^2\alpha-\cos^4\alpha)}{\left[(r(x)\,(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right]$$
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{\frac{(z(x)-Z(\xi))\,(r(x)-R(\xi)+2R(\xi)\cos^2\alpha)}{\left[(r(x)\,(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha$$

manipulando o termo

$$(r(x)\,(\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)^2+(z(x)-Z(\xi))^2$$

concluímos que ele é igual a

$$(R(\xi)+r(x))^2+(Z(\xi)-z(x))^2-4r(x)R(\xi)\operatorname{sen}^2\alpha$$

Fazendo

$$A=\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}$$

$$C=\left[(R(\xi)+r(x))^2+(Z(\xi)-z(x))^2\right]^{1/2}$$

$$m = \frac{2\left(R(\xi)\, r(c)\right)^{1/2}}{C}$$

temos por enquanto:

$$u_{zr}(\xi, x) = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\left(R(\xi) - r(x) - 2R(\xi)\cos^2\alpha\right)\left(Z(\xi) - z(x)\right)}{C^3\left(1 - m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}} \right\} d\alpha$$

$$u_{zz}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u_{33}(\xi,x)\,\mathrm{d}\theta(x)\right]$$

$$u_{zz}(\xi,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left[\frac{1}{16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]\left[\frac{1}{\left[(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.$$
$$\left.\left[(3-4\nu)+\frac{(x_3(x)-X_3(\xi))^2}{(x_1(x)-X_1(\xi))^2+(x_2(x)-X_2(\xi))^2+(x_3(x)-X_3(\xi))^2}\right]\right\}\mathrm{d}\theta(x)$$

Fazendo a transformação $\theta(x)=\pi-2\alpha$

e lembrando que

$$X_1(\xi)=R(\xi)\cos\theta(\xi)=R(\xi);\qquad X_2\xi)=R(\xi)\,\mathrm{sen}\,\theta(\xi)=0;\qquad X_3(\xi)=Z(\xi)$$

$$x_1(x)=r(x)\cos\theta(x);\qquad x_2(x)=r(x)\,\mathrm{sen}\,\theta(x);\qquad x_3(x)=x_3(x)$$

temos:

$$u_{zz}(\xi,x)=\left[\frac{-2}{2\pi 16\pi\mu\,(1-\nu)}\right]$$
$$\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\left\{\left[\frac{1}{\left[(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\,\mathrm{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2\right]^{1/2}}\right]\right.$$
$$\left.\left[(3-4\nu)+\frac{(z(x)-Z(\xi))^2}{(r(x)\cos(\pi-2\alpha)-R(\xi))^2+(r(x)\,\mathrm{sen}(\pi-2\alpha))^2+(z(x)-Z(\xi))^2}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

Considerando agora as identidades

$\cos(\pi - 2\alpha) = \text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha$ e

$\text{sen}(\pi - 2\alpha) = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$ podemos escrever:

$$u_{zz}(\xi,x) = \left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{1}{\left[\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}} \right] \left[(3-4\nu) + \frac{\left(z(x) - Z(\xi)\right)^2}{\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2} \right] \right\} d\alpha$$

$$u_{zz}(\xi,x) = \left[\frac{1}{16\pi^2\mu\,(1-\nu)}\right] \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ \left[\frac{(3-4\nu)}{\left[\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2\right]^{1/2}} \right] + \left[\frac{\left(z(x) - Z(\xi)\right)^2}{\left[\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2\right]^{3/2}} \right] \right\} d\alpha$$

manipulando o termo

$$\left(r(x)\left(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) - R(\xi)\right)^2 + \left(r(x)2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\right)^2 + \left(z(x) - Z(\xi)\right)^2$$

concluímos que ele é igual a

$$\left(R(\xi) + r(x)\right)^2 + \left(Z(\xi) - z(x)\right)^2 - 4r(x)\,R(\xi)\,\text{sen}^2\,\alpha$$

Fazendo

$$A = \frac{1}{16\pi^2 \mu (1-\nu)}$$

$$C = \left[(R(\xi) + r(x))^2 + (Z(\xi) - z(x))^2 \right]^{1/2}$$

$$m = \frac{2(R(\xi)\, r(x))^{1/2}}{C}$$

temos por enquanto:

$$u_{zz} = 2A \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{3-4\nu}{C\left(1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^{1/2}} + \frac{(Z(\xi) - z(x))^2}{C^3 \left(1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^{3/2}} \right\} \mathrm{d}\alpha$$

APÊNDICE B

Integrais elípticas do primeiro e segundo tipos refenciadas no Capítulo 3. Estas integrais elípticas que aparecem nos núcleos axisimétricos são escritas nas formas:

$$K\left(m,\pi/2\right)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}}\,\mathrm{d}\alpha \tag{B.1}$$

$$E\left(m,\pi/2\right)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \tag{B.2}$$

onde m é chamado módulo, $K\left(m,\pi/2\right)$ e $E\left(m,\pi/2\right)$ são as integrais elípticas completas do primeiro e segundo tipos respectivamente.

As integrais elípticas podem ser escritas em formas de séries como seguem abaixo:

$$K\left(m,\pi/2\right)=\ln 4+\sum_{i=1}^{n}a_i\left(1-m^2\right)^i+\ln\left(\frac{1}{1-m^2}\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\left(1-m^2\right)^i\right] \tag{B.3}$$

$$E\left(m,\pi/2\right)=1+\sum_{i=1}^{n}c_i\left(1-m^2\right)^i+\ln\left(\frac{1}{1-m^2}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}d_i\left(1-m^2\right)^i\right] \tag{B.4}$$

onde n é o número de coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i usados nas aproximações. Para o propósito deste estudo, será usado n = 5 onde a média de erro é estimada em 10^{-8} % [Becker 1992].

Os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i necessários para estas equações foram calculados como:

$a_1 = 0.096578619622$

$a_2 = 0.031559431627$

$a_3 = 0.023761224857$

$a_4 = 0.025962888452$

$a_5 = 0.0066398011146$

$b_1 = 0.12499929597$

$b_2 = 0.070148757782$

$b_3 = 0.044983875539$

$b_4 = 0.018751660276$

$b_5 = 0.0018472341632$

$c_1 = 0.44315287472$

$c_2 = 0.057566998484$

$c_3 = 0.031761145524$

$c_4 = 0.030662347457$

$c_5 = 0.0076529606032$

$d_1 = 0.24999920273$

$d_2 = 0.093564907830$

$d_3 = 0.054260524448$

$d_4 = 0.021836021169$

$d_5 = 0.0021247918284$

Algumas integrais relevantes na formulação axisimétrica envolvendo $cos\ \alpha$ podem ser transformadas em integrais elípticas como seguem:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}} \, d\alpha = \frac{1}{m^2} \left[E\left(m, \pi/2\right) - \left(1 - m^2\right) K\left(m, \pi/2\right) \right] \tag{B5}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\left(1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^{3/2}} \, d\alpha = \frac{1}{1 - m^2} E\left(m, \pi/2\right) \tag{B6}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha}{\left(1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^{3/2}} \, d\alpha = \frac{1}{m^2} \left[K\left(m, \pi/2\right) - E\left(m, \pi/2\right) \right] \tag{B7}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 \alpha}{\left(1 - m^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\right)^{3/2}} \, d\alpha = \frac{1}{m^2} \left[\left(2 - m^2\right) E\left(m, \pi/2\right) - 2\left(1 - m^2\right) K\left(m, \pi/2\right) \right] \tag{B8}$$

APÊNDICE C

Núcleos elastostáticos axisimétricos de deslocamento expressos em função das integrais elípticas referenciados no Capítulo 3.

Este apêndice contém as passagens para sair da representação dos núcleos como estão no apêndice A e representá-los em função das integrais elípticas.

$$u_{rr}(\xi,x)=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\left[\frac{(3-4\nu)(1-2\cos^2\alpha)}{C\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}\right]+\left[\frac{(R(\xi)-r(x))^2(1-2\cos^2\alpha)-4R(\xi)\,r(x)\cos^4\alpha}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right]\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$\begin{aligned}u_{rr}(\xi,x)=2A\Bigg\{&\frac{(3-4\nu)}{C}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}\mathrm{d}\alpha-2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\alpha}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}\mathrm{d}\alpha\right]+\\&+\frac{(R(\xi)-r(x))^2}{C^3}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha-2\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\alpha}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\right]+\\&\frac{4R(\xi)\,r(x)}{C^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4\alpha}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\Bigg\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{rr}(\xi,x)=2A\Bigg\{&\frac{(3-4\nu)}{C}\left[K\left(m,\pi/2\right)-\frac{2}{m^2}\left[E\left(m,\pi/2\right)-\left(1-m^2\right)K\left(m,\pi/2\right)\right]\right]+\\&+\frac{(R(\xi)-r(x))^2}{C^3}\left[\frac{1}{1-m^2}E\left(m,\pi/2\right)-\frac{2}{m^2}\left[K\left(m,\pi/2\right)-E\left(m,\pi/2\right)\right]\right]+\\&\frac{4R(\xi)\,r(x)}{C^3m^4}\left[\left(2-m^2\right)E\left(m,\pi/2\right)-2\left(1-m^2\right)K\left(m,\pi/2\right)\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

$$u_{rr}(\xi,x)=\frac{2A}{C}\left\{\left[3-4\nu+\frac{2(3-4\nu)\left(1-m^2\right)}{m^2}-\frac{2\left(R_p-r_Q\right)^2}{C^2m^2}+\frac{8R(\xi)r(x)\left(1-m^2\right)}{C^2m^4}\right]K\left(m,\pi/2\right)+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{2\left(3-4\nu\right)}{m^2}+\frac{\left(R(\xi)-r(x)\right)^2}{C^2\left(1-m^2\right)}+\frac{2\left(R(\xi)-r(x)\right)^2}{C^2m^2}-\frac{4R(\xi)\,r(x)\left(2-m^2\right)}{C^2m^4}\right]E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

após algumas manipulações matemáticas, concluímos que:

$$1-m^2=\frac{\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2}{C^2}$$

$$\frac{1-m^2}{m^2}=\frac{\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2}{4R(\xi)\,r(x)}$$

$$\frac{1-m^2}{m^4}=\frac{\left[\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]C^2}{16R(\xi)^2+r(x)^2}$$

$$\frac{2-m^2}{m^4}=\frac{\left(R(\xi)^2+r(x)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)\right)C^2}{8R(\xi)^2r(x)^2}$$

e fazendo $D=\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2$ temos que:

$$u_{rr}(\xi,x)=\frac{2A}{C}\left\{\left[3-4\nu+\frac{2(3-4\nu)\left[(R(\xi)-r(x))^2-(Z(\xi)-z(\xi,x))^2\right]}{2R_p r_Q}-\frac{(R(\xi)-r(x))^2}{2R(\xi)\,r(x)}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{(R(\xi)-r(x))^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{2R(\xi)\,r(x)}\right]K\left(m,\pi/2\right)+$$
$$\left[-\frac{(3-4\nu)\,C^2}{2R(\xi)\,r(x)}+\frac{(R(\xi)-r(x))^2}{D}+\frac{(R(\xi)-r(x))^2}{2R(\xi)\,r(x)}+\right.$$
$$\left.\left.\frac{R(\xi)^2+r(x)^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{2R(\xi)\,r(x)}\right]E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

$$u_{rr}(\xi,x)=\frac{A}{R(\xi)\,r(x)\,C}\left\{\left[3-4\nu+\left[R(\xi)^2+r(x)^2+(Z(\xi)-z(x))^2\right]+(Z(\xi)-z(x))^2\right]K\left(m,\pi/2\right)+\right.$$
$$\left.+\left[-(3-4\nu)\,C^2+\frac{2R(\xi)\,r(x)\,(R(\xi)-r(x))^2}{D}-2R(\xi)\,r(x)-(Z(\xi)-z(x))^2\right]E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

$$u_{rr}(\xi,x)=\frac{A}{R(\xi)\,r(x)\,C}\left\{\left[3-4\nu+\left[R(\xi)^2+r(x)^2+(Z(\xi)-z(x))^2\right]+(Z(\xi)-z(x))^2\right]K\left(m,\pi/2\right)+\right.$$
$$\left.+\left[-C^2(3-4\nu)-\frac{(Z(\xi)-z(x))^2\left[R(\xi)^2+r(x)^2+(Z(\xi)-z(x))^2\right]}{D}\right]E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

$$u_{rz}(\xi,x)=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\left(R(\xi)-r(x)+2r(x)\cos^2\alpha\right)\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{R(\xi)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha-r(x)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha+\right.$$

$$\left.+2r(x)\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\alpha}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\right\}$$

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{\frac{R(\xi)}{1-m^2}E\left(m,\pi/2\right)-\frac{r(x)}{1-m^2}E\left(m,\pi/2\right)+\frac{2r(x)}{m^2}\left[K\left(m,\pi/2\right)-E\left(m,\pi/2\right)\right]\right\}$$

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{\frac{2r(x)}{m^2}K\left(m,\pi/2\right)+\left(\frac{R(\xi)\,r(x)}{1-m^2}-\frac{2r(x)}{m^2}\right)E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

lembrando que:

$$1-m^2=\frac{\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2}{C^2}$$

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{\frac{C^2}{2R(\xi)}\left[K\left(m,\pi/2\right)+\left(\frac{\left(R(\xi)-r(x)\right)2R(\xi)}{C^2-4R(\xi)\,r(x)}-1\right)E\left(m,\pi/2\right)\right]\right\}$$

e fazendo $D=\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2$ temos que:

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{2A\,(Z(\xi)-z(x))}{C^3}\left\{\frac{C^2}{2R(\xi)}\left[\;K\left(m,\pi/2\right)-\left(\frac{r(x)^2-R(\xi)^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{D}\right)E\left(m,\pi/2\right)\right]\right\}$$

$$u_{rz}(\xi,x)=\frac{A\,(Z(\xi)-z(x))}{R(\xi)\,C}\left\{\;K\left(m,\pi/2\right)-\frac{r(x)^2-R(\xi)^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{D}\,E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

$$u_{zr}(\xi,x)=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\left(R(\xi)-r(x)-2R(\xi)\cos^2\alpha\right)\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{R(\xi)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha-r(x)\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha+\right.$$
$$\left.-2R(\xi)\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\alpha}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\mathrm{d}\alpha\right\}$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{\frac{R(\xi)}{1-m^2}E\left(m,\pi/2\right)-\frac{r(x)}{1-m^2}E\left(m,\pi/2\right)-\frac{2R(\xi)}{m^2}\left[K\left(m,\pi/2\right)-E\left(m,\pi/2\right)\right]\right\}$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{\frac{-2R(\xi)}{m^2}K\left(m,\pi/2\right)+\left[\frac{R(\xi)-r(x)}{1-m^2}+\frac{2R(\xi)}{m^2}\right]E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

lembrando que:

$$1-m^2=\frac{\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2}{C^2}$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{C^3}\left\{\frac{C^2}{2r(x)}\left[-K\left(m,\pi/2\right)+\left(\frac{2R(\xi)\,r(x)-2r(x)^2}{C^2-4R(\xi)\,r(x)}+1\right)E\left(m,\pi/2\right)\right]\right\}$$

e fazendo $D=\left(R(\xi)-r(x)\right)^2+\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2$ temos que:

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{2A\,(Z(\xi)-z(x))}{C^3}\left\{\frac{C^2}{2r(x)}\left[-K\left(m,\pi/2\right)+\left(\frac{R(\xi)^2-r(x)^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{D}\right)E\left(m,\pi/2\right)\right]\right\}$$

$$u_{zr}(\xi,x)=\frac{A\,(Z(\xi)-z(x))}{r(x)\,C}\left\{-K\left(m,\pi/2\right)+\frac{R(\xi)^2-r(x)^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{D}E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

$$u_{zz}(\xi,x)=2A\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{3-4\nu}{C\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}+\frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C^3\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{3/2}}\right\}\mathrm{d}\alpha$$

$$u_{zz}(\xi,x)=2A\left\{\frac{3-4\nu}{C}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}\mathrm{d}\alpha+\frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C^3}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-m^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)^{1/2}}\mathrm{d}\alpha\right\}$$

$$u_{zz}(\xi,x)=2A\left\{\frac{3-4\nu}{C}\,K\left(m,\pi/2\right)+\frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C^3}\,\frac{1}{1-m^2}\,E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

lembrando que:

$$1-m^2=\frac{(R(\xi)-r(x))^2+(Z(\xi)-z(x))^2}{C^2}$$

$$u_{zz}=2A\left\{\frac{3-4\nu}{C}\,K\left(m,\pi/2\right)+\frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{C\left[(R(\xi)-r(x))^2+(Z(\xi)-z(x))^2\right]}\,E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

e fazendo $D=(R(\xi)-r(x))^2+(Z(\xi)-z(x))^2$ temos que:

$$u_{zz}(\xi,x)=2A\left\{\frac{3-4\nu}{C}\,K\left(m,\pi/2\right)+\frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{CD}\,E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

$$u_{zz}(\xi,x)=\frac{2A}{C}\left\{(3-4\nu)\,K\left(m,\pi/2\right)+\frac{(Z(\xi)-z(x))^2}{D}\,E\left(m,\pi/2\right)\right\}$$

APÊNDICE D

Núcleos elastostáticos axisimétricos de forças de superfície referenciados no Capítulo 3. Aqui estes núcleos também são escritos em função das integrais elípticas.

$$t_{rr}(\xi,x) = 2\mu\left[t_1 n_r + t_2 n_z\right]$$

$$t_{rz}(\xi,x) = 2\mu\left[t_3 n_r + t_4 n_z\right]$$

$$t_{zr}(\xi,x) = 2\mu\left[t_5 n_r + t_6 n_z\right]$$

$$t_{zz}(\xi,x) = 2\mu\left[t_7 n_r + t_8 n_z\right]$$

onde:

$$t_1 = \frac{A}{R(\xi)\,r(x)^2}\left[2\nu M - \frac{3}{2}N + \frac{BF\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2}{2DC^2}\right]K\left(m,\pi/2\right) +$$
$$\frac{A}{R(\xi)\,r(x)^2}\left\{\frac{-2\nu}{D}\left[R(\xi)^2 S + \left(Z(\xi)-z(x)\right)^2 V + r(x)^4\right] +\right.$$
$$\left. + \frac{3}{D}\left[R(\xi)^2 F + \left(Z(\xi)-z(x)\right)^2 M\right] - \frac{2B^2F}{D^2C^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right\}E\left(m,\pi/2\right)$$

$$t_2 = \frac{A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{R(\xi)\,r(x)CD}\left[D\left(2\nu-3\right) + \frac{B}{C^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]K\left(m,\pi/2\right) +$$
$$\frac{A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{R(\xi)\,r(x)CD}\left[3\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2 - B\left(2\nu-3\right) - \frac{4B}{DC^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]E\left(m,\pi/2\right)$$

$$t_3 = t_2$$

$$t_4 = \frac{A}{R(\xi)CD}\left[-D\left(1-2\nu\right) + \frac{H}{C^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]K\left(m,\pi/2\right) +$$
$$\frac{A}{R(\xi)CD}\left[-\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2 + H\left(1-2\nu\right) - \frac{8FR(\xi)^2}{DC^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]E\left(m,\pi/2\right)$$

$$t_5 = \frac{A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{CD}\left[\frac{D}{r(x)^2}+\frac{2}{C^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]K\left(m,\pi/2\right)+$$
$$\frac{A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{CD}\left[4\left(1+\nu\right)-\frac{B}{r(x)^2}-\frac{8B}{DC^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]E\left(m,\pi/2\right)$$

$$t_6 = \frac{A}{r(x)CD}\left[-D\left(1-2\nu\right)-\frac{F}{C^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]K\left(m,\pi/2\right)+$$
$$\frac{A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{r(x)CD}\left[-3\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2+F\left(1-2\nu\right)-\frac{4BF}{DC^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]E\left(m,\pi/2\right)$$

$$t_7 = t_6$$

$$t_8 = \frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{CD}\left[\frac{-1}{C^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]K\left(m,\pi/2\right)+$$
$$\frac{2A\left(Z(\xi)-z(x)\right)}{CD}\left[\left(1-2\nu\right)+\frac{4B}{DC^2}\left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]E\left(m,\pi/2\right)$$

As constantes *A, B, C, D, F, H, M, N, S* e *V* são definidas como seguem:

$$A = \frac{1}{16\pi^2\mu\left(1-\nu\right)}$$

$$B = R(\xi)^2 + r(x)^2 + \left(Z(\xi)-z(x)\right)^2$$

$$C = \left[\left(R(\xi)+r(x)\right)^2 + \left(Z(\xi)-z(x)\right)^2\right]^{1/2}$$

$$D = \left(R(\xi)-r(x)\right)^2 + \left(Z(\xi)-z(x)\right)^2$$

$$F = R(\xi)^2 - r(x)^2 + \left(Z(\xi)-z(x)\right)^2$$

$$H = r(x)^2 - R(\xi)^2 + \left(Z(\xi) - z(x)\right)^2$$

$$M = 2R(\xi)^2 + r(x)^2 + 2\left(Z(\xi) - z(x)\right)^2$$

$$N = 2R(\xi)^2 + 3\left(Z(\xi) - z(x)\right)^2$$

$$S = 2R(\xi)^2 - 3r(x)^2 + 4\left(Z(\xi) - z(x)\right)^2$$

$$V = 3r(x)^2 + 2\left(Z(\xi) - z(x)\right)^2$$