

**Redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de Modelos Através de
Desigualdades Matriciais Lineares:
Otimização Local e Global**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

UNICAMP

BIBLIOTECA CENTRAL

SEÇÃO CIRCULANTE

Edvaldo Assunção

Engenheiro Eletricista — FEIS/UNESP

Mestre em Ciências — ITA

Março de 2000

Orientador: Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres FEEC/UNICAMP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres	FEEC/UNICAMP (Orientador)
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Rafael Santos Mendes	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira	FEIS/UNESP
Prof. Dr. Edson Roberto De Pieri	DAS/UFSC

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por Edvaldo Assunção e aprovada pela Comissão Julgada em 03/03/00
Pedro Luis Dias Peres
Orientador

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

200045575

UNIDADE 50
N.º CHAMADA:
Il/Unicamp
As 79r
V. Ex.
TOMBO BC/ 42670
PROC. 161278100
C D
PREC# R\$ 11,00
DATA 24/10/00
N.º CPD

CM-00144303-6

HA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

As79r

Assunção, Edvaldo

Redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos através de desigualdades matriciais lineares: otimização local e global / Edvaldo Assunção -- Campinas, SP:[s.n.], 2000.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Teoria de controle. 2. Sistemas lineares. 3. Otimização matemática. 4. Controle automático.
I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Resumo

Este trabalho aborda o problema de redução de modelos para sistemas dinâmicos lineares, contínuos e discretos no tempo, tendo como critérios as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência associada ao erro de redução. Primeiramente, são apresentados e discutidos os principais métodos de redução de modelos existentes na literatura. A seguir, o problema de redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos é formulado em termos de desigualdades matriciais bilineares, assim como o problema de redução \mathcal{H}_2 de ordem de controlador (neste caso, a formulação apresentada difere das demais existentes na literatura). São propostos algoritmos de otimização local para a redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos e discretos no tempo, com ou sem incertezas, baseados na iteração entre dois subproblemas formulados em termos de desigualdades matriciais lineares. Esses algoritmos não possuem convergência garantida e, como mostrado, são dependentes da inicialização. Finalmente, são propostos algoritmos de otimização global para a redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos e para a redução \mathcal{H}_2 da ordem de controladores para sistemas contínuos no tempo. Estes algoritmos têm convergência para o ótimo global garantida em tempo finito e são baseados na técnica de otimização *branch-and-bound*, com subproblemas convexos na forma de desigualdades matriciais lineares.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Abstract

This work addresses the problem of model reduction for continuous and discrete-time linear dynamic systems, using as criteria the \mathcal{H}_2 and the \mathcal{H}_∞ norms of the transfer matrix associated to the reduction error. First, some important model reduction methods in the literature are presented and discussed. Then, the problem of \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ model reduction is formulated in terms of bilinear matrix inequalities, as well as the problem of controller order reduction with criterion \mathcal{H}_2 (in this case, the formulation presented differs from the existing ones in the literature). Local optimization algorithms are proposed to solve the problem of \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ model reduction for continuous and discrete-time systems, with or without uncertainties, based on the iteration between two subproblems formulated in terms of linear matrix inequalities. These algorithms do not have convergence assured and, as shown, depend on the initialization. Finally, global optimization algorithms are proposed to solve the problem of \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ model reduction and the \mathcal{H}_2 controller order reduction for continuous-time systems. These algorithms have convergence assured to the global optimum in finite time, being based on *branch-and-bound* optimization techniques, with convex subproblems in terms of linear matrix inequalities.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

À Silvia minha razão de ser e

à Camila minha razão de viver.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

O prazer de se encontrar o ótimo global de um problema não resolvido pela comunidade científica é único e causa a sensação da vitória ao pisar em um terreno desconhecido pelo homem, comparável à descoberta de uma nova caverna por um espeleólogo.

Agradecimentos

A Pedro, meu orientador, por transmitir, através deste trabalho, parte de seu vasto conhecimento.

À Silvia por apoiar a minha opção em trilhar o árduo caminho da Ciência.

Aos meus amigos Marcelo, José Paulo e Nobuo por colaborarem com esforços pessoais para que o meu afastamento fosse concretizado.

Ao meu amigo Reinaldo, pelo companheirismo e colaborações à atividade acadêmica necessária para a realização deste trabalho.

Aos colegas Carlos e Sérgio pelos valorosos favores fielmente realizados.

À UNESP, pelo programa de capacitação de docentes.

À CAPES, por conceder suporte financeiro.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Conteúdo

Resumo	i
Abstract	iii
Notação e Definições	1
1 Introdução	3
2 Técnicas de Redução de Modelos	5
2.1 Principais Técnicas de Redução de Modelos	5
2.2 Seleção de Estados na Redução de Modelos via Realização Balanceada	7
3 Formulação do Problema de Redução de Modelos	11
3.1 Introdução	11
3.2 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos	11
3.2.1 A Norma \mathcal{H}_2	11
3.2.2 Exemplo	13
3.2.3 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos	13
3.2.4 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos	17
3.2.5 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos Incertos	20
3.2.6 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos Incertos	22
3.3 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos	25
3.3.1 A Norma \mathcal{H}_∞	25
3.3.2 Exemplo	26
3.3.3 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos	26
3.3.4 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos	30
3.3.5 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos Incertos	31
3.3.6 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos Incertos	34
3.4 Redução \mathcal{H}_2 da Ordem do Controlador	37
4 Otimização Local	41
4.1 Introdução	41
4.2 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos	41
4.2.1 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos	42

4.2.2	Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos	44
4.2.3	Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos Incertos	45
4.2.4	Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos Incertos	48
4.3	Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos	50
4.3.1	Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos	50
4.3.2	Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos	52
4.3.3	Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos Incertos	54
4.3.4	Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos Incertos	56
5	Otimização Global	59
5.1	Introdução	59
5.2	O Algoritmo <i>Branch and Bound</i>	59
5.3	Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos	62
5.3.1	Limitante Superior	62
5.3.2	Limitante Inferior	63
5.3.3	Construção de \mathcal{Q}	63
5.3.4	Análise da Convergência	64
5.4	Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos	65
5.4.1	Limitante Superior	65
5.4.2	Limitante Inferior	66
5.5	Redução \mathcal{H}_2 da Ordem do Controlador	66
5.5.1	Limitante Superior	67
5.5.2	Limitante Inferior	67
5.5.3	Construção de \mathcal{Q}	68
5.5.4	Análise da Convergência	69
6	Exemplos	71
6.1	Introdução	71
6.2	Otimização Local	71
6.3	Otimização Global	77
7	Conclusões e Perspectivas	85
	Bibliografia	87

Lista de Figuras

2.1	Representação do sistema original em dois subsistemas: dominante e fraco.	7
3.1	Respostas impulsivas do modelo original, dos modelos reduzidos (parte (a)) e dos erros de redução (parte (b)).	14
3.2	Diagrama de blocos do erro de redução para sistemas estritamente próprios (norma \mathcal{H}_2).	15
3.3	Curvas de magnitude do modelo original, dos modelos reduzidos (parte (a)) e dos erros de redução (parte (b)).	27
3.4	Diagrama de blocos do erro de redução para sistemas próprios (norma \mathcal{H}_∞).	29
3.5	Diagrama de blocos do modelo do erro de redução da ordem do controlador: os parâmetros da planta são A, B, C , do controlador original são A_k, B_k, C_k e do controlador reduzido são A_r, B_r, C_r	39
5.1	Interpretação gráfica do algoritmo <i>branch and bound</i>	61
5.2	Regiões factíveis.	65
6.1	Resposta em frequência dos modelos original e reduzido (exemplo 5).	75
6.2	Diagrama de valores singulares para o exemplo 7: vértices do sistema original (tracejado) e modelo reduzido precisamente conhecido (sólido).	78
6.3	Diagrama de valores singulares para o exemplo 7: vértices do modelo do erro de redução (tracejado) e custo garantido $\mathcal{H}_\infty, \gamma = 5.9992$ (sólido).	78
6.4	Evolução dos limitantes inferior e superior para a redução \mathcal{H}_2 do modelo dado no exemplo 8.	79
6.5	Superfície da norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução (exemplo 8).	81
6.6	Curvas de nível da norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução do problema (exemplo 8). O ótimo global obtido pelo algoritmo <i>branch and bound</i> está indicado por +.	81
6.7	Evolução dos limitantes inferior e superior para a redução \mathcal{H}_2 do modelo dado no exemplo 9.	82
6.8	Respostas impulsivas: do sistema realimentado com o controlador original (“o”) e do sistema realimentado com o controlador reduzido (“+”) (exemplo 10).	83

Lista de Tabelas

6.1	Valores iniciais e finais da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução para as três inicializações (exemplo 1).	72
6.2	Valores finais da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução para as três inicializações (exemplo 2).	72
6.3	Valores iniciais e finais da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução para os dois critérios de seleção de estados (exemplo 3).	73
6.4	Valores finais da norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução (exemplo 4).	74
6.5	Valores finais da norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução (exemplo 5).	75
6.6	Valores finais da norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução (exemplo 6).	76
6.7	Valores inicial e final do custo garantido \mathcal{H}_∞ dos erros de redução (exemplo 7).	77

Notação e Definições

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais
- \mathbb{R}^n é o espaço euclidiano real
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ é o espaço real das matrizes reais
- $\sigma_{max}(M)$ denota o valor singular máximo da matriz M
- $\sigma_i(M)$ denota o i -ésimo valor singular da matriz M
- $\mathcal{L}_2[0; \infty)$ denota o espaço (de Hilbert) das funções de quadrado integrável a Lebesgue no intervalo $[0; \infty)$
- \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão apropriada
- $\mathbf{0}$ é a matriz nula de dimensão apropriada
- M' denota a matriz transposta de M
- $M > \mathbf{0}$ ($M \geq \mathbf{0}$) é definida (semidefinida) positiva
- $M < \mathbf{0}$ ($M \leq \mathbf{0}$) é definida (semidefinida) negativa
- $Tr(M)$ representa o traço da matriz M
- \sup denota o supremo
- $\mathcal{V}(\cdot)$ denota o conjunto dos vértices $i, i = 1, \dots, \ell$ de um politopo convexo
- SISO do inglês *Single Input Single Output* (sistema monovariável, uma entrada e uma saída)
- MIMO do inglês *Multiple Input Multiple Output* (sistema multivariável, múltiplas entradas e múltiplas saídas)
- LMIs do inglês *Linear Matrix Inequalities* (desigualdades matriciais lineares)
- BMIs do inglês *Bilinear Matrix Inequalities* (desigualdades matriciais bilineares)

Lista de Definições

- RMS apresentado na página 11
- $S_u(\omega)$ apresentado na página 12
- \mathcal{P} definido em (3.16)
- \mathcal{U} definido em (3.37)
- Θ apresentado na página 33
- Θ_v apresentado na página 33
- \mathcal{L}_∞ apresentado na página 25
- $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ apresentados na página 46
- \mathcal{Q} apresentado na página 59
- SP apresentado na página 59
- \mathcal{L}_k apresentado na página 60
- Φ_L apresentado na página 60
- Φ_U apresentado na página 60

Capítulo 1

Introdução

O problema de redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos para sistemas dinâmicos lineares é abordado neste trabalho.

No capítulo 2, é apresentada uma rápida revisão dos principais métodos de redução de modelos existentes na literatura. O capítulo é iniciado com os métodos clássicos de redução de modelos, depois abordam-se os principais métodos de redução de modelos que utilizam LMIs no procedimento de otimização e, por último, são apresentados alguns métodos de redução de modelos incertos.

No capítulo 3, são formulados, na forma de BMIs, os problemas de redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos para os casos de sistemas contínuos ou discretos, com ou sem incertezas. Também é formulado, na forma de BMIs, o problema de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador para sistemas contínuos. Trata-se de uma estrutura de projeto de controladores reduzidos na qual é otimizado o erro entre a resposta impulsiva do sistema controlado original e a do sistema controlado reduzido, que difere das demais existentes na literatura. Para os casos de sistemas com incertezas, os métodos propostos neste trabalho impõem que o modelo reduzido seja determinístico. Os principais motivos são que pode-se utilizar técnicas de projeto de controladores para plantas determinísticas [AP99b] e, ainda, a estrutura proposta para redução de modelos incertos pode ser aplicada na formulação do problema de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador, proporcionando diretamente um controlador reduzido determinístico.

No capítulo 4, são propostos algoritmos de otimização local para resolver os problemas de redução de modelos formulados no capítulo 3. Basicamente, os algoritmos consistem em fixar uma das variáveis dos termos bilineares das desigualdades matriciais e otimizar a função objetivo em função das variáveis restantes. O procedimento de otimização fica então descrito na forma de LMIs. No passo seguinte, essas variáveis são fixadas e as anteriores passam a ser as variáveis de otimização.

No capítulo 5, são propostos algoritmos de otimização global para se resolver os problemas de redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos [AP99a] e para o problema de redução \mathcal{H}_2 de controladores contínuos. Esses algoritmos, baseados na técnica de otimização não linear *branch and bound*, exibem condições que asseguram a convergência para o ótimo global em tempo finito. O algoritmo envolve a construção de uma árvore

de busca sendo que os problemas de otimização são descritos na forma de LMIs.

No capítulo 6, são mostrados alguns exemplos numéricos que ilustram o funcionamento dos algoritmos propostos bem como os resultados obtidos. É analisada a influência do procedimento de inicialização dos algoritmos de otimização local nos resultados finais obtidos. É mostrado também que os algoritmos de otimização global propostos podem apresentar convergência lenta em alguns casos.

Capítulo 2

Técnicas de Redução de Modelos

2.1 Principais Técnicas de Redução de Modelos

O problema de redução de modelos tem recebido muita atenção durante as últimas três décadas. De fato, um modelo de baixa ordem que aproxima bem uma planta de alta ordem é muito importante para propósitos de controle. Modelos de baixa ordem são mais fáceis para analisar ou simular e podem ser eficientemente implementados. Um exemplo prático da importância da utilização da redução de modelos pode ser visto em [RE99]. Trata-se do projeto de um controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para gerar uma região de silêncio em um fone de ouvido. Neste caso, foi implementado um controlador de ordem reduzida que manteve o desempenho próximo ao obtido no projeto original e garantiu que as restrições impostas fossem respeitadas, com um menor custo de implementação. Um outro exemplo similar pode ser encontrado em [JK98], que trata do controle de um avião supersônico.

Muitos métodos de redução de modelos foram propostos na literatura. Dentre os métodos clássicos, os que mais causaram impacto foram: o método da realização balanceada [Moo81] e o método da norma Hankel [Glo84]. O primeiro consiste em descrever o modelo do sistema em uma representação de estados que consegue ponderar igualmente a controlabilidade e a observabilidade de cada estado do sistema, utilizando os gramianos de controlabilidade e de observabilidade do sistema. A transformação linear que leva o sistema a essa representação é chamada de transformação balanceada. Neste método, o modelo reduzido é obtido desprezando-se os estados associados aos menores valores singulares. Na seção 2.2 é apresentado um critério alternativo de seleção dos estados para a redução via realização balanceada, que é útil na inicialização dos algoritmos de otimização local propostos neste trabalho.

A redução de modelos via norma Hankel baseia-se no fato de que esta norma permite um mapeamento das entradas passadas em saídas futuras através dos estados do sistema e assim, quantifica as contribuições individuais de cada estado do sistema. Esse método equivale a minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução [Glo84].

Uma descrição completa e detalhada destes e dos principais métodos clássicos de redução de modelos e de controladores pode ser encontrada em [Hen96]. Esses

métodos foram utilizados para realizar a redução do modelo dinâmico de um avião; foi feita uma análise do funcionamento dos métodos, dos resultados obtidos e também realizou-se a redução da ordem do controlador empregado [Hen96].

Recentemente, o problema de redução de modelos foi abordado utilizando-se métodos de otimização baseados em LMIs acopladas, usando as normas \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ como critério de desempenho. Em [Gri95], condições necessárias e suficientes foram derivadas para a existência de uma solução para a redução de modelos de sistemas contínuos e discretos no tempo, utilizando-se a norma \mathcal{H}_∞ . Essas condições foram expressas em termos de LMIs acopladas por uma restrição de posto não convexa. Um procedimento iterativo foi proposto para resolver o problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos, utilizando o método das projeções alternadas [Gri95]. A idéia básica desta técnica é a seguinte: dada uma família de conjuntos convexos, a seqüência de projeções alternadas nestes conjuntos convexos converge para um ponto de intersecção da família dos conjuntos, veja [GS94a] e [GS94b]. Essas projeções são realizadas utilizando-se um operador ortogonal de projeção. Contudo, a convergência é garantida apenas localmente.

A redução \mathcal{H}_∞ de modelos utilizando LMIs também foi estudada em [KB96]. Foi mostrado que a restrição de posto é equivalente a uma restrição quadrática, por sua vez transformada em uma desigualdade matricial. Um algoritmo baseado em LMIs foi utilizado para resolver o problema, vide [Kav94a] e [Kav94b], sem garantia de convergência.

Uma abordagem do problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos diferente das anteriores foi proposta em [Hel94]. O problema não foi formulado com uma restrição de posto e sim através de BMIs. A norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução foi expressa através do *Bounded Real Lemma* [BEFB94]. Um algoritmo foi proposto, consistindo em fixar uma das variáveis dos termos bilineares das desigualdades matriciais e minimizar a norma \mathcal{H}_∞ em função das variáveis restantes. No passo seguinte, essas são fixadas e as anteriores passam a ser as variáveis de otimização. Este algoritmo é comumente conhecido como algoritmo de otimização DK [EB94]. Neste caso, apenas a otimização local é obtida, sem garantia de convergência. Os resultados numéricos apresentados mostram que o método pode obter soluções melhores do que as obtidas com o método da norma Hankel [Glo84].

A redução de modelos com a norma \mathcal{H}_2 utilizando BMIs foi proposta em [VD97]. O algoritmo DK foi utilizado para a otimização do problema. Os resultados obtidos são superiores aos obtidos com a utilização do método da realização balanceada [Moo81]. Também neste caso não existe garantia de convergência.

Os processos de modelagem de sistemas dinâmicos e projeto de controladores, usando métodos recentes de controle robusto, freqüentemente proporcionam modelos de alta ordem com incertezas. Para este caso, foram propostos na literatura vários métodos de redução de modelos incertos [BDG96], [BD95], [BB97], [BD93], [WDBG91], [BD97], [Kav96], [Wu96]. Dentre eles, um método que estende o conceito de realização balanceada para sistemas incertos foi proposto em [WDBG91]. As incertezas são consideradas limitadas em norma. Em [BDG96], a redução de modelos com custo-garantido é realizada através da LFT (*Linear Fractional Transformation*).

O problema não convexo de otimização é formulado através de LMIs acopladas por restrição de posto. Em [Wu96], o problema de redução de modelos com parâmetros incertos pertencentes a um politopo convexo foi investigado e foram propostas condições suficientes descritas em termos de LMIs acopladas com uma restrição de posto. Em todos estes métodos, os modelos reduzidos são incertos.

A redução de modelos discretos e a redução da ordem de controladores discretos foram amplamente estudadas e alguns dos métodos discutidos acima foram propostos na literatura para o caso de sistemas discretos no tempo, vide [WS90], [HP90], [XGF96], [OLLP97] e [SDN95].

2.2 Seleção de Estados na Redução de Modelos via Realização Balanceada

Na redução de modelos utilizando a realização balanceada, basicamente, reorganiza-se o modelo original com uma transformação linear de forma que sejam evidenciados os subsistemas dominante e fraco. A redução de modelos consiste em reter os estados do subsistema dominante no modelo reduzido. A figura 2.1 ilustra este procedimento [Moo81].

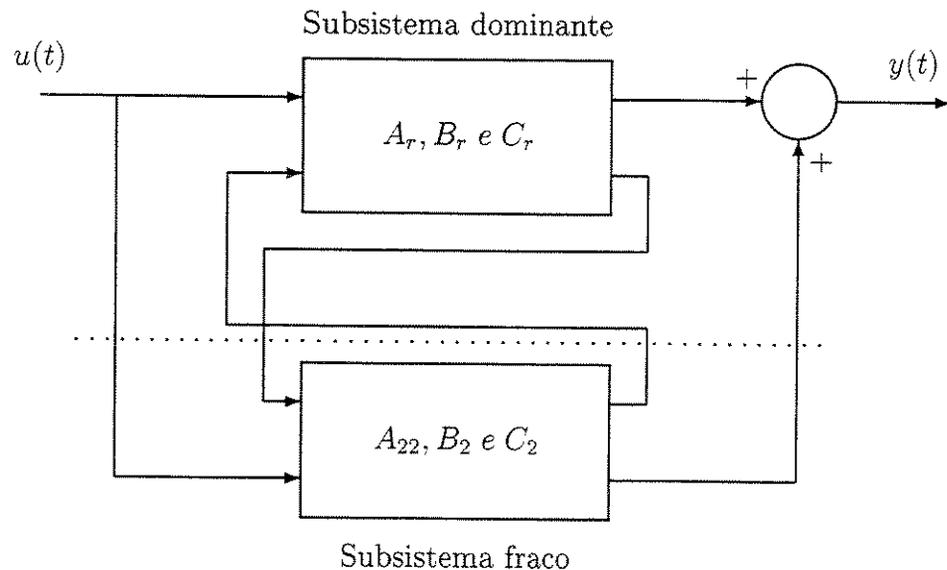


Figura 2.1: Representação do sistema original em dois subsistemas: dominante e fraco.

A seguir, será apresentada a redução de modelos que tem como critério a contribuição de cada estado na norma \mathcal{H}_2 do sistema original [AS88], baseada na realização balanceada.

Seja o sistema dinâmico linear invariante no tempo, estável, controlável e observável,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

com as matrizes $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, supostamente conhecidas.

A realização balanceada $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ é determinada de modo a satisfazer duas equações de Lyapunov:

$$\begin{aligned}\bar{A}\Sigma + \Sigma\bar{A}' + \bar{B}\bar{B}' &= 0 \\ \bar{A}'\Sigma + \Sigma\bar{A} + \bar{C}'\bar{C} &= 0\end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int_0^{+\infty} \exp(\bar{A}t)\bar{B}\bar{B}' \exp(\bar{A}'t)dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(\bar{A}'t)\bar{C}'\bar{C} \exp(\bar{A}t)dt = \tag{2.1} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Um método para o cálculo da realização balanceada é apresentado em [LHPW87]. A norma \mathcal{H}_2 de $G(s)$ é dada por:

$$\|G(s)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} Tr[\bar{B}' \exp(\bar{A}'t)\bar{C}'\bar{C} \exp(\bar{A}t)\bar{B}]dt$$

ou ainda,

$$\|G(s)\|_2^2 = Tr(\bar{B}'\Sigma\bar{B}) = Tr(\bar{C}\Sigma\bar{C}')$$

Assim, pode-se ordenar os estados do sistema $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ de forma que sejam retidos os estados que contribuem mais significativamente na norma \mathcal{H}_2 do sistema original.

Este critério baseado na norma \mathcal{H}_2 também permite a análise do comportamento do sistema em função da ordem, fornecendo ao projetista um gráfico ilustrativo do desempenho versus ordem do modelo, que auxilia a escolha da ordem do modelo reduzido (veja [APFH97] e [Ass91]).

Note que esse critério difere do proposto em [Moo81]. Segundo [Moo81], o modelo reduzido é obtido ordenando-se os valores singulares σ_i (na equação (2.1)) em ordem decrescente ($\sigma_i \geq \sigma_{i+1}$) e então truncando-se os estados com índice maior que r e tais que $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$. Neste caso, as contribuições à resposta impulsiva são computadas apenas em termos dos valores singulares σ_i , desprezando-se a influência dos coeficientes das matrizes \bar{B} e \bar{C} . O critério de Moore estabelece a contribuição dos estados em termos de um limitante da resposta impulsiva, e o outro critério em termos da norma \mathcal{H}_2 .

Tanto o critério \mathcal{H}_2 quanto o critério de Moore podem não refletir adequadamente o modelo original para uma determinada particularidade, pois os dois métodos estão quantificando apenas a contribuição de cada estado na resposta impulsiva ou na norma \mathcal{H}_2 do sistema original e deixando de lado o erro de redução entre o sistema original e o reduzido. Em [APFH98] é mostrado um exemplo em que a seleção de estados baseada apenas nos valores singulares proporciona uma diferença considerável entre a resposta impulsiva do modelo original e a resposta impulsiva do modelo reduzido. Isto ocorreu devido ao fato de não se estar considerando o erro de redução propriamente dito.

Os métodos de redução de modelos via LMIs propostos neste trabalho minimizam o erro de redução entre o sistema original e o reduzido e não apenas a norma \mathcal{H}_2 de cada estado ou o valor singular associado.

Capítulo 3

Formulação do Problema de Redução de Modelos

3.1 Introdução

O problema de redução de modelos está fundamentado no critério de desempenho adotado para quantificar o erro inerente à redução. Dada a importância do critério de desempenho, neste capítulo serão apresentados os conceitos de norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de um sistema dinâmico antes de se formular os problemas de redução de modelos baseados nestas normas. Serão apresentados alguns exemplos mostrando que essas normas quantificam adequadamente o erro inerente à redução do modelo.

3.2 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos

3.2.1 A Norma \mathcal{H}_2

Antes de apresentar a norma \mathcal{H}_2 , se faz necessário estudar o conceito de valor eficaz de um sinal, valor RMS (*Root-Mean-Square*). O valor eficaz de um sinal escalar é dado por [BB91]:

$$\|y\|_{rms} \triangleq \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

desde que o limite exista. Esta é uma clássica noção do tamanho de um sinal, muito utilizada em engenharia e seu significado, útil em redução de modelos, é que esta norma quantifica o valor médio da área sob um sinal que é igual a $y(t)^2$.

A norma RMS de um vetor de sinais é dado por:

$$\|y\|_{rms} \triangleq \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)' y(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

desde que o limite exista. Neste caso, o valor RMS é obtido levando-se em consideração a soma das áreas referentes ao quadrado de cada componente do vetor $y(t)$.

Considere um sistema linear invariante no tempo SISO, estritamente próprio, com sinal de entrada $u(s)$, saída $y(s)$ e função de transferência $H(s)$. A norma de um sistema pode ser formulada em termos dos sinais de entrada e saída do sistema. Uma medida de uma função de transferência é o valor RMS da saída quando a entrada é um processo estocástico particular. Suponha que a entrada tem uma densidade espectral $S_u(\omega)$, e que $H(s)$ é estável. A densidade espectral da saída é dada por

$$S_y(\omega) = S_u(\omega)|H(j\omega)|^2$$

sendo que $|H(j\omega)|$ denota magnitude de $H(j\omega)$. Tem-se ainda (veja [BB91] para maiores detalhes):

$$\|y\|_{rms} \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_u(\omega) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para o caso particular em que o processo estocástico estacionário corresponde a um ruído branco, tem-se $S_u(\omega) = 1$, para todo ω . A norma \mathcal{H}_2 de um sistema estável é definida como a norma RMS do sinal de saída quando a entrada é um ruído branco, ou seja:

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

A norma \mathcal{H}_2 tem ainda uma outra interpretação. Pelo teorema de Parseval, de (3.1), tem-se

$$\|H\|_2 = \left(\int_0^{\infty} h(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

sendo $h(t)$ a resposta ao impulso de $H(s)$. Então, pode-se interpretar a norma \mathcal{H}_2 como a medida da energia do sinal da saída $y(t)$ para uma entrada tipo impulsiva, $u(t) = \delta(t)$.

A norma \mathcal{H}_2 de um sistema linear invariante no tempo MIMO é dada por

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[H(j\omega)H(-j\omega)'] d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

que pelo teorema de Parseval,

$$\|H\|_2 = \left(\int_0^{\infty} \text{Tr}[h(t)h(t)'] dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para o caso de sistemas discretos no tempo, a norma \mathcal{H}_2 de um sistema MIMO é

dada por

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}[H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega})'] d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

A seguir, será mostrado um exemplo ilustrando o fato de que a norma \mathcal{H}_2 é um excelente critério de desempenho para propósitos de redução de modelos.

3.2.2 Exemplo

Considere o sistema dinâmico descrito pela seguinte função de transferência [APFH98]

$$H(s) = \frac{3125(10s + 1)}{s^7 + 81.6s^6 + 3934.4s^5 + 62593s^4 + 679600s^3 + 2054800s^2 + 3023750s + 282500}$$

Considere dois modelos candidatos a aproximar $H(s)$ dados por

$$H_a(s) = \frac{0.0006s^2 - 0.039s + 0.79}{s^3 + 13.9s^2 + 47.9s + 70.4}$$

$$H_b(s) = \frac{0.0004s^2 - 0.024s + 0.5}{s^3 + 6.9s^2 + 52.7s + 70.4}$$

A figura 3.1a mostra os sinais $y(t)$, $y_a(t)$ e $y_b(t)$ que correspondem às respostas impulsivas de $H(s)$, $H_a(s)$ e $H_b(s)$. O erro $e_a(t) = y(t) - y_a(t)$ bem como o erro $e_b(t) = y(t) - y_b(t)$ estão mostrados na figura 3.1b.

Os valores das normas $\|E_a(s)\|_2 = \|H(s) - H_a(s)\|_2$ e $\|E_b(s)\|_2 = \|H(s) - H_b(s)\|_2$ são

$$\|E_a(s)\|_2 = 3.6 \times 10^{-4}$$

$$\|E_b(s)\|_2 = 47.1 \times 10^{-4}$$

Na seção 3.2.3 será mostrado um procedimento para se calcular a norma \mathcal{H}_2 de um sistema.

Note que este exemplo ilustra o fato de que a norma \mathcal{H}_2 pode ser utilizada como um excelente índice de desempenho para a escolha do modelo reduzido que melhor aproxima o modelo original, tomando-se como referência a resposta impulsiva do sistema.

3.2.3 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos

A norma \mathcal{H}_2 do sistema dinâmico estritamente próprio $H(s)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A, B, C) ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

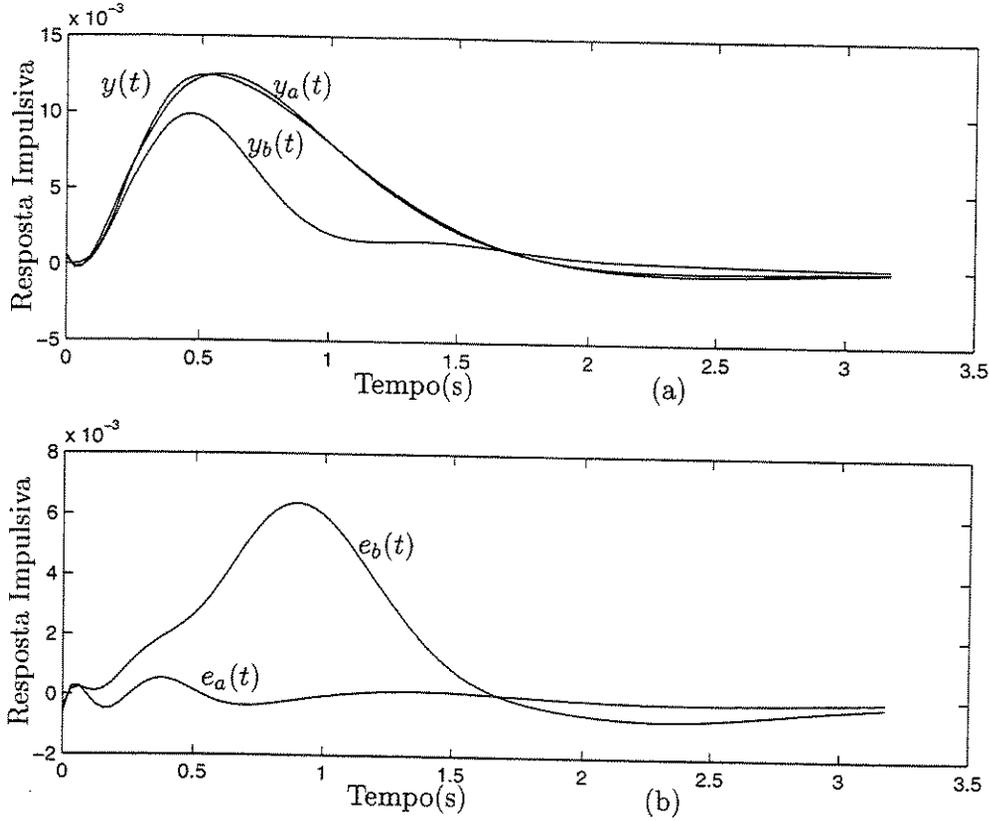


Figura 3.1: Respostas impulsivas do modelo original, dos modelos reduzidos (parte (a)) e dos erros de redução (parte (b)).

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs [BEFB94]:

$$\begin{aligned} \|H(s)\|_2^2 = \min & \text{Tr}(CPC') \\ \text{s.a.} & AP + PA' + BB' \leq 0 \\ & P > 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ou, de maneira equivalente (forma dual):

$$\begin{aligned} \|H(s)\|_2^2 = \min & \text{Tr}(B'QB) \\ \text{s.a.} & A'Q + QA + C'C \leq 0 \\ & Q > 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

A matriz de transferência do sistema é dada por $H(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B$.

O problema ótimo de redução \mathcal{H}_2 de modelos pode ser assim formulado: encontre um sistema estável com ordem $r < n$ e com representação no espaço de estados (A_r, B_r, C_r)

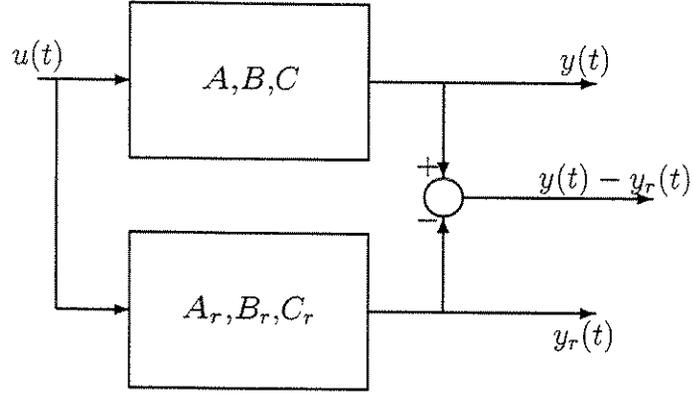


Figura 3.2: Diagrama de blocos do erro de redução para sistemas estritamente próprios (norma \mathcal{H}_2).

$$\begin{aligned}\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t)\end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$, tal que a norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução seja minimizada. A figura 3.2 mostra o diagrama de blocos do modelo do erro de redução, cuja realização em termos de matriz de transferência é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.4)$$

De (3.2) e (3.4), a norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução pode ser obtida como

$$\begin{aligned}\Phi = \|H_e(s)\|_2^2 &= \min Tr(\tilde{C}P\tilde{C}') \\ \text{s.a. } &\tilde{A}P + P\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}' \leq \mathbf{0} \\ &P > \mathbf{0}\end{aligned} \quad (3.5)$$

Esta formulação corresponde a um problema de otimização descrito por uma desigualdade matricial que não é linear nas variáveis de interesse do problema (isto é, A_r , B_r , C_r e P). Neste caso, não é possível utilizar um algoritmo de otimização convexa baseado em LMIs para resolver o problema. Assim sendo, se faz necessário manipular a expressão (3.5) para que surjam formas mais convenientes às técnicas numéricas de otimização. Uma ferramenta útil neste caso é o uso do complemento de Schur

[BEFB94]. A idéia básica é a seguinte: sendo $Q(x) = Q(x)'$ e $L(x) = L(x)'$, a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & L(x) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.6)$$

é equivalente a

$$L(x) > \mathbf{0}, \quad Q(x) - S(x)L(x)^{-1}S(x)' > \mathbf{0} \quad (3.7)$$

sendo $Q(\cdot)$, $S(\cdot)$ e $L(\cdot)$ funções afins da variável $x \in \mathbb{R}^k$.

Assim, a desigualdade matricial (3.6) equivale às expressões dadas em (3.7).

Adotando-se um limitante superior para a função objetivo do problema (3.5), ou seja: $\tilde{C}P\tilde{C}' \leq R$, ou ainda $R - \tilde{C}PP^{-1}P\tilde{C}' \geq \mathbf{0}$ e aplicando-se o complemento de Schur no sentido inverso, obtém-se

$$\begin{bmatrix} R & \tilde{C}P \\ P\tilde{C}' & P \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

De mesma maneira, aplicando-se o complemento de Schur no sentido inverso na desigualdade matricial (restrição) de (3.5) obtém-se

$$\begin{bmatrix} -\tilde{A}P - P\tilde{A}' & -\tilde{B} \\ -\tilde{B}' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}' & \tilde{B} \\ \tilde{B}' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Assim, o problema (3.5) pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \Phi = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & \tilde{C}P \\ P\tilde{C}' & P \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \tilde{A}P + P\tilde{A}' & \tilde{B} \\ \tilde{B}' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ & P > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substituindo-se (3.4) em (3.8) e particionando-se a matriz P na forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

com $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $P_{12} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi = \min \quad & Tr(R) \\
s.a \quad & \begin{bmatrix} R & CP_{11} - C_r P'_{12} & CP_{12} - C_r P_{22} \\ P_{11} C' - P_{12} C'_r & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C' - P_{22} C'_r & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11} A' & AP_{12} + P_{12} A'_r & B \\ A_r P'_{12} + P'_{12} A' & A_r P_{22} + P_{22} A'_r & B_r \\ B' & B'_r & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Para uma ordem r fixa para o modelo reduzido, as variáveis do problema são A_r , B_r , C_r , P e R , produzindo os termos bilineares $P_{12} A'_r$, $P_{22} A'_r$, $P_{12} C'_r$, $P_{22} C'_r$. O problema de redução ótima de modelos está descrito na forma de BMIs. Note que o número de variáveis do problema é $r^2 + rm + pr + (n+r)(n+r+1)/2 + p(p+1)/2$ que é dependente de n . O número de termos não-lineares (bilineares) é 4, envolvendo $(n+r)(r+p)$ produtos de variáveis. Nos capítulos 4 e 5, serão descritos algoritmos de otimização local e global para este problema.

A formulação do problema na forma dual, é dada por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & Tr(R) \\
s.a \quad & \begin{bmatrix} R & B'Q_{11} + B'_r Q'_{12} & B'Q_{12} + B'_r Q_{22} \\ Q_{11} B + Q_{12} B_r & Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} B + Q_{22} B_r & Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} A'Q_{11} + Q_{11} A & A'Q_{12} + Q_{12} A_r & C' \\ A'_r Q'_{12} + Q'_{12} A & A'_r Q_{22} + Q_{22} A_r & -C'_r \\ C & -C_r & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2.4 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos

A norma \mathcal{H}_2 do sistema discreto estritamente próprio $H(z)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A, B, C) ,

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
y(k) &= Cx(k)
\end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs [PTP97]:

$$\begin{aligned} \|H(z)\|_2^2 = \min \quad & Tr(CPC') \\ \text{s.a} \quad & APA' + BB' - P \leq \mathbf{0} \\ & P > \mathbf{0} \end{aligned}$$

A desigualdade de Lyapunov é equivalente a

$$APP^{-1}PA' + BB' - P \leq \mathbf{0}$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} P & PA' \\ AP & P - BB' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} P & PA' \\ AP & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Aplicando novamente o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{bmatrix} P & PA' & \mathbf{0} \\ AP & P & B \\ \mathbf{0} & B' & I \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

Assim, o problema de otimização pode ser descrito na forma de LMIs (mais conveniente):

$$\begin{aligned} \|H(z)\|_2^2 = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} P & PC' \\ CP & R \end{bmatrix} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P & PA' & \mathbf{0} \\ AP & P & B \\ \mathbf{0} & B' & I \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & P > \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.12}$$

A matriz de transferência do sistema discreto é dada por $H(z) = C(zI - A)^{-1}B$.

O problema de redução ótima de modelos \mathcal{H}_2 discretos pode ser assim formulado: encontre um sistema estável com ordem $r < n$ e representação no espaço de estados (A_r, B_r, C_r)

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r u(k) \\ y_r(k) &= C_r x_r(k) \end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$, tal que a norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução, dado por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.13)$$

seja minimizada.

Particionando-se P como em (3.9) e substituindo-se (3.13) em (3.12), tem-se

$$\begin{aligned} \Phi &= \min \quad Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} P_{11} & P_{12} & P_{11}C' - P_{12}C'_r & \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}C' - P_{22}C'_r & \\ \hline CP_{11} - C_rP'_{12} & CP_{12} - C_rP_{22} & & R \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} P_{11} & P_{12} & P_{11}A' & P_{12}A'_r & \mathbf{0} \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}A' & P_{22}A'_r & \mathbf{0} \\ AP_{11} & AP_{12} & P_{11} & P_{12} & B \\ A_rP'_{12} & A_rP_{22} & P'_{12} & P_{22} & B_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B' & B'_r & I \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{array} \right] > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Note que o problema está descrito na forma de BMIs; no capítulo 4 serão descritos algoritmos de otimização local para resolvê-lo.

A formulação do problema na forma dual, é dada por:

$$\begin{aligned} \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}B + Q_{12}B_r & \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}B + Q_{22}B_r & \\ \hline B'Q_{11} + B'_rQ'_{12} & B'Q_{12} + B'_rQ_{22} & & R \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}A & Q_{12}A_r & \mathbf{0} \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}A & Q_{22}A_r & \mathbf{0} \\ A'Q_{11} & A'Q_{12} & Q_{11} & Q_{12} & C' \\ A'_rQ'_{12} & A'_rQ_{22} & Q'_{12} & Q_{22} & -C'_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C & -C_r & I \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0$$

3.2.5 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos Incertos

Considere o seguinte sistema estritamente próprio incerto

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, considerados desconhecidos porém, pertencentes a um conjunto convexo conhecido do tipo politopo.

Em outras palavras, as matrizes (A, B, C) pertencem a um domínio politópico convexo \mathcal{P} dado por

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, B, C) \mid (A, B, C) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (3.16)$$

significando que qualquer matriz (A, B, C) pode ser escrita como uma combinação convexa dos N extremos dados pelas matrizes (A_i, B_i, C_i) , $i = 1 \cdots N$. Claramente, se $N = 1$ tem-se um sistema precisamente conhecido.

O problema de redução \mathcal{H}_2 ótima de modelos contínuos incertos deve ser formulado de forma que seja obtido um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 que englobe todas as incertezas pertencentes ao politopo [PTP97]: encontre um sistema estável com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r)

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) \end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ determinísticos, tal que o custo garantido \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução seja minimizado $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}$. A realização do erro é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.17)$$

Neste caso, é suposto que as matrizes (A_r, B_r, C_r) não são incertas, o que difere dos demais métodos de redução de modelos incertos propostos na literatura (vide

[BB97], [BD93] e [Wu96]). O motivo pelo qual adotou-se esta estrutura é que pode-se obter um modelo reduzido determinístico para o qual utilizam-se técnicas clássicas de projeto de controladores.

De maneira similar à desenvolvida na seção 3.2.3, utilizando-se as equações (3.8), (3.9) e (3.17), o problema de redução \mathcal{H}_2 ótima de modelos contínuos incertos é formulado como

$$\begin{aligned} \Phi = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & CP_{11} - C_r P'_{12} & CP_{12} - C_r P_{22} \\ P_{11} C' - P_{12} C'_r & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C' - P_{22} C'_r & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11} A' & AP_{12} + P_{12} A'_r & B \\ A_r P'_{12} + P'_{12} A' & A_r P_{22} + P_{22} A'_r & B_r \\ B' & B'_r & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}$.

Seja $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ o conjunto dos vértices $i = 1, \dots, N$ do polítopo convexo \mathcal{P} .

Defina o conjunto Θ como

$$\Theta \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, P, R) \mid R = R' \geq 0; P = P' > 0; \Gamma(\cdot) \geq 0; \Psi(\cdot) \leq 0;$$

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}\}$$

sendo

$$\Gamma(C, C_r, P, R) \triangleq \begin{bmatrix} R & CP_{11} - C_r P'_{12} & CP_{12} - C_r P_{22} \\ P_{11} C' - P_{12} C'_r & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C' - P_{22} C'_r & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\Psi(A, B, A_r, B_r, P) \triangleq \begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11} A' & AP_{12} + P_{12} A'_r & B \\ A_r P'_{12} + P'_{12} A' & A_r P_{22} + P_{22} A'_r & B_r \\ B' & B'_r & -I \end{bmatrix}$$

os conjuntos das restrições de (3.18).

Defina o conjunto Θ_v com condições similares computadas nos vértices, ou seja

$$\Theta_v \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, P, R) \mid R = R' \geq 0; P = P' > 0; \Gamma(\cdot) \geq 0; \Psi(\cdot) \leq 0;$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})\}$$

Note que Θ e Θ_v são afins em A , B e C e, devido à convexidade de \mathcal{P} , conclui-se que estes conjuntos são equivalentes ou seja, $\Theta = \Theta_v$. Assim sendo, o problema (3.18) pode ser resolvido investigando-se apenas os vértices de \mathcal{P} , ou seja $\mathcal{V}(\mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} \Phi = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & C_i P_{11} - C_r P'_{12} & C_i P_{12} - C_r P_{22} \\ P_{11} C'_i - P_{12} C'_r & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C'_i - P_{22} C'_r & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} A_i P_{11} + P_{11} A'_i & A_i P_{12} + P_{12} A'_r & B_i \\ A_r P'_{12} + P'_{12} A'_i & A_r P_{22} + P_{22} A'_r & B_r \\ B'_i & B'_r & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Note que este problema também está descrito na forma de BMIs e, portanto, se faz necessário o uso de técnicas de otimização não-lineares para resolvê-lo. Essas técnicas estão mostradas no capítulo 4.

A formulação do problema dual é dada por:

$$\begin{aligned} \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & B'_i Q_{11} + B'_r Q'_{12} & B'_i Q_{12} + B'_r Q_{22} \\ Q_{11} B_i + Q_{12} B_r & Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} B_i + Q_{22} B_r & Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} A'_i Q_{11} + Q_{11} A_i & A'_i Q_{12} + Q_{12} A_r & C'_i \\ A'_r Q'_{12} + Q'_{12} A_i & A'_r Q_{22} + Q_{22} A_r & -C'_r \\ C_i & -C_r & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

3.2.6 Formulação da Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos Incertos

Considere o seguinte sistema discreto estritamente próprio incerto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, considerados desconhecidos porém, pertencentes a um conjunto convexo conhecido do tipo politopo.

Em outras palavras, as matrizes (A, B, C) pertencem a um domínio politópico convexo \mathcal{P} dado por

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, B, C) \mid (A, B, C) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (3.21)$$

significando que qualquer matriz (A, B, C) pode ser escrita como uma combinação convexa dos N extremos dados pelas matrizes (A_i, B_i, C_i) , $i = 1 \cdots N$.

O problema de redução \mathcal{H}_2 ótima de modelos discretos incertos pode ser assim formulado: encontre um sistema estável com ordem $r < n$ e representação no espaço de estados (A_r, B_r, C_r)

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r u(k) \\ y_r(k) &= C_r x_r(k) \end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ determinísticos, tal que o custo garantido \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução seja minimizado $\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}$. A realização do erro é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.22)$$

Neste caso, é suposto que as matrizes (A_r, B_r, C_r) não são incertas, pelo mesmo motivo apresentado na seção 3.2.5.

De maneira similar à desenvolvida na seção 3.2.4, utilizando-se as equações (3.12), (3.9) e (3.22), o problema de redução \mathcal{H}_2 ótima de modelos discretos incertos é formulado como

$$\begin{aligned} \Phi = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \left[\begin{array}{ccc|c} P_{11} & P_{12} & P_{11}C' - P_{12}C'_r & \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}C' - P_{22}C'_r & \\ \hline CP_{11} - C_rP'_{12} & CP_{12} - C_rP_{22} & & R \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} P_{11} & P_{12} & P_{11}A' & P_{12}A'_r & \mathbf{0} \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}A' & P_{22}A'_r & \mathbf{0} \\ AP_{11} & AP_{12} & P_{11} & P_{12} & B \\ A_rP'_{12} & A_rP_{22} & P'_{12} & P_{22} & B_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B' & B'_r & I \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{array} \right] > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}$.

Seja $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ o conjunto dos vértices $i = 1, \dots, N$ do polítopo convexo \mathcal{P} .

Defina o conjunto Θ como

$$\Theta \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, P, R) \mid R = R' \geq \mathbf{0}; P = P' > \mathbf{0}; \Gamma(\cdot) \geq \mathbf{0}; \Psi(\cdot) \geq \mathbf{0};$$

$$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}\}$$

sendo

$$\Gamma(C, C_r, P, R) \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}C'_r - P_{12}C'_r \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}C'_r - P_{22}C'_r \\ CP_{11} - C_rP'_{12} & CP_{12} - C_rP_{22} & R \end{bmatrix}$$

e

$$\Psi(A, B, A_r, B_r, P) \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}A'_r & P_{12}A'_r & \mathbf{0} \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}A'_r & P_{22}A'_r & \mathbf{0} \\ AP_{11} & AP_{12} & P_{11} & P_{12} & B \\ A_rP'_{12} & A_rP_{22} & P'_{12} & P_{22} & B_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B' & B'_r & I \end{bmatrix}$$

os conjuntos das restrições de (3.23).

Defina o conjunto Θ_v com condições similares computadas nos vértices, ou seja

$$\Theta_v \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, P, R) \mid R = R' \geq \mathbf{0}; P = P' > \mathbf{0}; \Gamma(\cdot) \geq \mathbf{0}; \Psi(\cdot) \geq \mathbf{0};$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})\}$$

Note que Θ e Θ_v são afins em A , B e C e, devido à convexidade de \mathcal{P} , conclui-se que estes conjuntos são equivalentes ou seja, $\Theta = \Theta_v$. Assim, o problema (3.23) pode ser resolvido investigando-se apenas os vértices de \mathcal{P} , ou seja $\mathcal{V}(\mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} \Phi = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}C'_i - P_{12}C'_r \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}C'_i - P_{22}C'_r \\ C_iP_{11} - C_rP'_{12} & C_iP_{12} - C_rP_{22} & R \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}A'_i & P_{12}A'_r & \mathbf{0} \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}A'_i & P_{22}A'_r & \mathbf{0} \\ A_iP_{11} & A_iP_{12} & P_{11} & P_{12} & B_i \\ A_rP'_{12} & A_rP_{22} & P'_{12} & P_{22} & B_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B'_i & B'_r & I \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

O problema está descrito na forma de BMIs e portanto, se faz necessário o uso de técnicas de otimização não-lineares para resolvê-lo. Essas técnicas estão mostradas nos capítulo 4.

A formulação do problema dual é dada por:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Tr(R) \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}B_i + Q_{12}B_r \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}B_i + Q_{22}B_r \\ B'_iQ_{11} + B'_rQ'_{12} & B'_iQ_{12} + B'_rQ_{22} & R \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}A_i & Q_{12}A_r & 0 \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}A_i & Q_{22}A_r & 0 \\ A'_iQ_{11} & A'_iQ_{12} & Q_{11} & Q_{12} & C'_i \\ A'_rQ'_{12} & A'_rQ_{22} & Q'_{12} & Q_{22} & -C'_r \\ 0 & 0 & C_i & -C_r & I \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

3.3 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos

3.3.1 A Norma \mathcal{H}_∞

Uma verificação simples para que um sinal $y(t)$ seja considerado pequeno, é testar se o sinal é pequeno para todo $t \geq 0$, ou equivalentemente, se o seu máximo valor absoluto é pequeno [BB91]. Uma norma que quantifica esta medida é a norma \mathcal{L}_∞ , também chamada de norma pico, definida como

$$\|y\|_\infty \triangleq \sup_{t \geq 0} |y(t)|$$

Para o caso de um vetor de sinais com l componentes, a norma \mathcal{L}_∞ é definida por:

$$\|y\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq l} \|y_i(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \max_{1 \leq i \leq l} |y_i(t)|$$

Este conceito pode ser aplicado a sistemas lineares. Um sistema dinâmico é “pequeno” caso sua função de transferência $H(s)$ possua pequenas magnitudes em todas as frequências. Uma norma que quantifica esta medida para sistemas SISO é definida

por:

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega>0} |H(j\omega)|$$

e é chamada de norma \mathcal{H}_∞ de $H(s)$.

Para sistemas MIMO, a norma \mathcal{H}_∞ é definida por:

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega>0} \sigma_{max}(H(j\omega))$$

A norma \mathcal{H}_∞ também pode ser interpretada como a norma induzida $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$, ou seja

$$\|H\|_\infty = \gamma \Leftrightarrow \|y\|_2 \leq \gamma \|w\|_2 \quad \forall w \in \mathcal{L}_2$$

veja [BB91] para maiores detalhes.

O exemplo 3.3.2 mostra a utilidade da norma \mathcal{H}_∞ para a redução de modelos.

3.3.2 Exemplo

Considere o sistema dinâmico dado no exemplo 3.2.2, bem como os modelos reduzidos. A figura 3.3a mostra as curvas de magnitude de $H(j\omega)$, $H_a(j\omega)$ e $H_b(j\omega)$ e a figura 3.3b mostra as curvas de magnitude de $H(j\omega) - H_a(j\omega)$ e $H(j\omega) - H_b(j\omega)$.

A figura 3.3b mostra também o valor máximo de cada curva. Assim, as normas $\|H(j\omega) - H_a(j\omega)\|_\infty$ e $\|H(j\omega) - H_b(j\omega)\|_\infty$ são:

$$\|H(j\omega) - H_a(j\omega)\|_\infty = 1.5 \times 10^{-4}$$

$$\|H(j\omega) - H_b(j\omega)\|_\infty = 48.7 \times 10^{-4}$$

Note que, no que diz respeito à análise em frequência, a norma \mathcal{H}_∞ é uma medida adequada do erro de redução.

3.3.3 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos

Considere o sistema dinâmico próprio $H(s)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A, B, C, D) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ supostamente conhecidas. A matriz de transferência do sistema é dada por $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

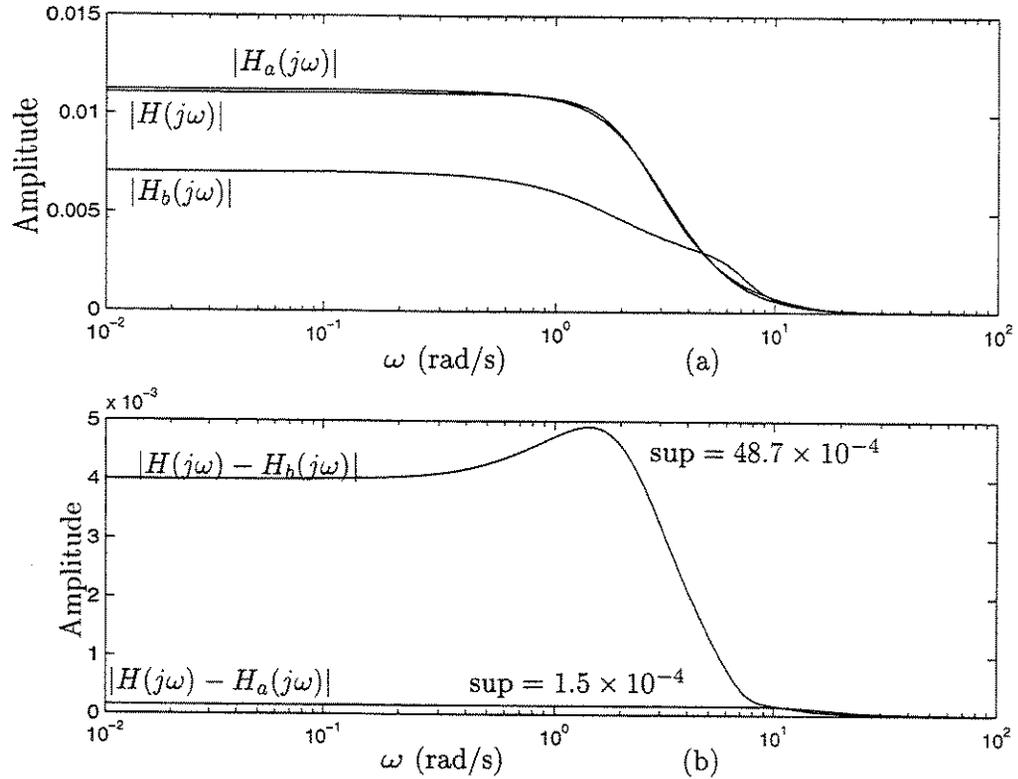


Figura 3.3: Curvas de magnitude do modelo original, dos modelos reduzidos (parte (a)) e dos erros de redução (parte (b)).

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema (A, B, C, D) relaciona-se com a existência de uma matriz P definida positiva através do chamado *Bounded Real Lemma* (veja por exemplo [BEFB94]):

$$\|H\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \exists P = P' > 0 : \begin{bmatrix} A'P + PA + \gamma^{-2}C'C & PB + \gamma^{-2}C'D \\ B'P + \gamma^{-2}D'C & \gamma^{-2}D'D - \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.26)$$

Usando complemento de Schur e definindo $\mu \triangleq \gamma^2$, a equação (3.26) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} -A'P - PA & -PB & C' \\ -B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & D & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0$$

Com isto, o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ do sistema pode ser realizado através do seguinte problema de otimização:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -A'P - PA & -PB & C' \\ -B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & D & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.27)$$

$$P > \mathbf{0}$$

ou, na forma dual:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -AQ - QA' & -QC' & B \\ -CQ & \mathbf{I} & D \\ B' & D' & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.28)$$

$$Q > \mathbf{0}$$

O problema de redução \mathcal{H}_∞ ótima de modelos contínuos pode ser formulado como: encontre um sistema estável com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r, D_r)

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$, tal que a norma \mathcal{H}_∞ do modelo do erro de redução seja minimizada. A matriz de transferência da realização do erro é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (3.29)$$

A figura 3.4 mostra o diagrama de blocos do erro de redução.

A norma \mathcal{H}_∞ do modelo do erro de redução pode ser formulada utilizando-se (3.27) e (3.29):

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -\tilde{A}'P - P\tilde{A} & -P\tilde{B} & \tilde{C}' \\ -\tilde{B}'P & \mathbf{I} & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \tilde{D} & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.30)$$

$$P > \mathbf{0}$$

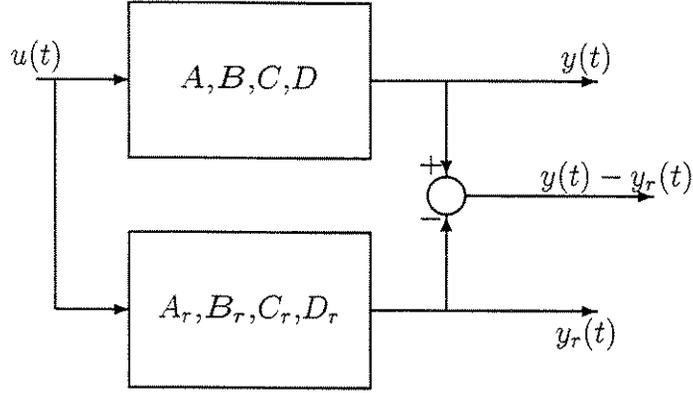


Figura 3.4: Diagrama de blocos do erro de redução para sistemas próprios (norma \mathcal{H}_∞).

Substituindo-se (3.29) em (3.30) e particionando-se P como em (3.9), tem-se

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - P_{12}A_r & -P_{11}B - P_{12}B_r & C' \\ -A_r'P_{12}' - P_{12}'A & -A_r'P_{22} - P_{22}A_r & -P_{12}'B - P_{22}B_r & -C_r' \\ -B'P_{11} - B_r'P_{12}' & -B'P_{12} - B_r'P_{22} & \mathbf{I} & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para uma ordem r fixa para o modelo reduzido, as variáveis do problema são A_r , B_r , C_r , D_r , μ e P , produzindo os termos bilineares $P_{12}A_r$, $P_{22}A_r$, $P_{12}B_r$, $P_{22}B_r$. O problema de redução ótima de modelos está descrito na forma de BMIs. Note que o número de variáveis do problema é $r^2 + rm + pr + pm + 1 + (n+r)(n+r+1)/2$ que é dependente de n . Nos capítulos 4 e 5, serão descritos algoritmos de otimização local e global para este problema.

Note que a redução \mathcal{H}_∞ de modelos também pode ser aplicada em sistemas estritamente próprios, ou seja quando $D = \mathbf{0}$.

A formulação do problema na forma dual é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -AQ_{11} - Q_{11}A' & -AQ_{12} - Q_{12}A_r' & -Q_{11}C' + Q_{12}C_r' & B \\ -A_r'Q_{12}' - Q_{12}'A' & -A_r'Q_{22} - Q_{22}A_r' & -Q_{12}'C' + Q_{22}C_r' & B_r \\ -CQ_{11} + C_r'Q_{12}' & -CQ_{12} + C_r'Q_{22} & \mathbf{I} & D - D_r \\ B' & B_r' & D' - D_r' & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.3.4 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos

A norma \mathcal{H}_∞ do sistema discreto próprio $H(z)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A, B, C, D) ,

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs [PTP97]:

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \min \mu \\ \text{s.a.} \quad &\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & C' & A'P \\ \mathbf{0} & I & D' & B'P \\ C & D & \mu I & \mathbf{0} \\ PA & PB & \mathbf{0} & P \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ &P > \mathbf{0}\end{aligned} \quad (3.33)$$

A matriz de transferência do sistema discreto é dada por $H(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$.

O problema ótimo de redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos pode ser formulado como: encontre um sistema estável com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r, D_r)

$$\begin{aligned}x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r u(k) \\y_r(k) &= C_r x_r(k) + D_r u(k)\end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$, tal que a norma \mathcal{H}_∞ do modelo do erro de redução seja minimizada. A realização do erro é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (3.34)$$

Particionando-se P , como em (3.9), e substituindo-se (3.34) em (3.33), tem-se

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$\begin{aligned}
s.a \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathbf{0} & C' & A'P_{11} & \dots \\ P'_{12} & P_{22} & \mathbf{0} & -C'_r & A'_r P'_{12} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D' - D'_r & B'P_{11} + B'_r P_{12} & \dots \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I & \mathbf{0} & \dots \\ P_{11}A & P_{12}A_r & P_{11}B + P_{12}B_r & \mathbf{0} & P_{11} & \dots \\ P'_{12}A & P'_{22}A_r & P'_{12}B + P'_{22}B_r & \mathbf{0} & P'_{12} & \dots \\ & & & & \dots & AP_{12} \\ & & & & & \dots & A'_r P_{22} \\ & & & & & & B'P_{12} + B'_r P_{22} \\ & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & P_{12} \\ & & & & & & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

O problema está descrito na forma de BMIs; no capítulo 4 serão descritos algoritmos de otimização local para resolvê-lo.

A formulação do problema na forma dual, é dada por:

$$\begin{aligned}
\gamma^2 = \min \quad & \mu \\
s.a \quad & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \mathbf{0} & B & AQ_{11} & \dots \\ Q'_{12} & Q_{22} & \mathbf{0} & B_r & A_r Q'_{12} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D - D_r & CQ_{11} - C_r Q_{12} & \dots \\ B' & B'_r & D' - D'_r & \mu I & \mathbf{0} & \dots \\ Q_{11}A' & Q_{12}A'_r & Q_{11}C' - Q_{12}C'_r & \mathbf{0} & Q_{11} & \dots \\ Q'_{12}A' & Q'_{22}A'_r & Q'_{12}C' - Q'_{22}C'_r & \mathbf{0} & Q'_{12} & \dots \\ & & & & \dots & AQ_{12} \\ & & & & & \dots & A_r Q_{22} \\ & & & & & & CQ_{12} - C_r Q_{22} \\ & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & Q_{12} \\ & & & & & & Q_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

3.3.5 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos Incertos

Considere o seguinte sistema próprio incerto

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, considerados desconhecidos porém pertencentes a um conjunto convexo conhecido do tipo politopo, isto é, as matrizes (A, B, C, D) pertencem a um domínio politópico convexo \mathcal{U} dado por

$$\mathcal{U} \triangleq \left\{ (A, B, C, D) \mid (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i, D_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (3.37)$$

significando que qualquer matriz (A, B, C, D) pode ser escrita como uma combinação convexa dos N extremos dados pelas matrizes (A_i, B_i, C_i, D_i) , $i = 1 \dots N$.

O problema ótimo de redução de modelos \mathcal{H}_∞ para sistemas incertos deve ser formulado de forma que seja obtido um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ que englobe todas as incertezas pertencentes ao politopo [PTP97]: encontre um sistema estável com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r, D_r)

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r u(t) \\ y_r(t) &= C_r x_r(t) + D_r u(t) \end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$ determinísticos, tal que o custo garantido \mathcal{H}_∞ do modelo do erro de redução seja minimizado $\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{U}$. A matriz de transferência do erro de redução é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (3.38)$$

Neste caso, é suposto que as matrizes (A_r, B_r, C_r, D_r) não são incertas, o que difere dos demais métodos de redução de modelos incertos propostos na literatura (vide [Kav96]).

De maneira similar à desenvolvida na seção 3.3.3, utilizando-se as equações (3.9), (3.30) e (3.38), o problema ótimo de redução \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos incertos é formulado como

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \min \mu \\ \text{s.a.} \quad & \left[\begin{array}{cccc|c} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - P_{12}A_r & -P_{11}B - P_{12}B_r & C' & \\ -A_r'P'_{12} - P'_{12}A & -A_r'P_{22} - P_{22}A_r & -P'_{12}B - P_{22}B_r & -C_r' & \\ -B'P_{11} - B_r'P'_{12} & -B'P_{12} - B_r'P_{22} & \mathbf{I} & D' - D_r' & \\ C & -C_r & D - D_r & \mu \mathbf{I} & \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{array} \right] > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{U}$.

Seja $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ o conjunto dos vértices $i = 1, \dots, N$ do politopo convexo \mathcal{U} .

Defina o conjunto Θ como

$$\Theta \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, D_r, P, \mu) \mid \mu > 0; P = P' > \mathbf{0}; \Gamma(\cdot) \geq \mathbf{0};$$

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{U}\}$$

sendo

$$\Gamma(A, B, C, D, A_r, B_r, C_r, D_r, P, \mu) \triangleq$$

$$\begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - P_{12}A_r & -P_{11}B - P_{12}B_r & C' \\ -A_r'P_{12}' - P_{12}'A & -A_r'P_{22} - P_{22}A_r & -P_{12}'B - P_{22}B_r & -C_r' \\ -B'P_{11} - B_r'P_{12}' & -B'P_{12} - B_r'P_{22} & \mathbf{I} & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

o conjunto das restrições de (3.39).

Defina o conjunto Θ_v com condições similares computadas nos vértices, ou seja

$$\Theta_v \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, D_r, P, \mu) \mid \mu > 0; P = P' > \mathbf{0}; \Gamma(\cdot) \geq \mathbf{0};$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})\}$$

Note que Θ e Θ_v são afins em A, B, C e D e, devido à convexidade de \mathcal{U} , conclui-se que estes conjuntos são equivalentes ou seja, $\Theta = \Theta_v$. Assim, o problema (3.39) pode ser resolvido investigando-se apenas os vértices de \mathcal{U} , ou seja $\mathcal{V}(\mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -A_i'P_{11} - P_{11}A_i & -A_i'P_{12} - P_{12}A_r & -P_{11}B_i - P_{12}B_r & C_i' \\ -A_r'P_{12}' - P_{12}'A_i & -A_r'P_{22} - P_{22}A_r & -P_{12}'B_i - P_{22}B_r & -C_r' \\ -B_i'P_{11} - B_r'P_{12}' & -B_i'P_{12} - B_r'P_{22} & \mathbf{I} & D_i' - D_r' \\ C_i & -C_r & D_i - D_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Neste caso o problema também está descrito na forma de BMIs; portanto, se faz necessário o uso de técnicas de otimização de problemas não-lineares para resolvê-lo. Essas técnicas estão mostradas no capítulo 4.

A formulação do problema dual é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -A_i Q_{11} - Q_{11} A_i' & -A_i Q_{12} - Q_{12} A_r' & -Q_{11} C_i' + Q_{12} C_r' & B_i \\ -A_r Q_{12}' - Q_{12}' A_i' & -A_r Q_{22} - Q_{22} A_r' & -Q_{12}' C_i' + Q_{22} C_r' & B_r \\ -C_i Q_{11} + C_r Q_{12}' & -C_i Q_{12} + C_r Q_{22} & \mathbf{I} & D_i - D_r \\ B_i' & B_r' & D_i' - D_r' & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U}).$$

3.3.6 Formulação da Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos Incertos

Considere o seguinte sistema próprio incerto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, considerados desconhecidos porém, pertencentes a um conjunto convexo conhecido do tipo politopo, isto é, as matrizes (A, B, C, D) pertencem a um domínio politópico convexo \mathcal{U} dado por

$$\mathcal{U} \triangleq \left\{ (A, B, C, D) \mid (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i, D_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\} \quad (3.42)$$

significando que qualquer matriz (A, B, C, D) pode ser escrita como uma combinação convexa dos N extremos dados pelas matrizes (A_i, B_i, C_i, D_i) , $i = 1 \dots N$.

O problema ótimo de redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos incertos deve ser formulado de forma que seja obtido um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ que englobe todas as incertezas pertencentes ao politopo [PTP97]: encontre um sistema estável com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r, D_r)

$$\begin{aligned} x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r u(k) \\ y_r(k) &= C_r x_r(k) + D_r u(k) \end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$ determinísticos, tal que o custo garantido \mathcal{H}_∞ do modelo do erro de redução seja minimizado $\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{U}$. A

realização do erro é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (3.43)$$

Neste caso, é suposto que as matrizes (A_r, B_r, C_r, D_r) não são incertas.

De maneira similar à desenvolvida na seção 3.3.4, utilizando-se as equações (3.9), (3.33) e (3.43), o problema ótimo de redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos incertos é formulado como

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathbf{0} & C' & A'P_{11} & \cdots \\ P'_{12} & P_{22} & \mathbf{0} & -C'_r & A'_r P'_{12} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D' - D'_r & B'P_{11} + B'_r P_{12} & \cdots \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I & \mathbf{0} & \cdots \\ P_{11}A & P_{12}A_r & P_{11}B + P_{12}B_r & \mathbf{0} & P_{11} & \cdots \\ P'_{12}A & P'_{22}A_r & P'_{12}B + P'_{22}B_r & \mathbf{0} & P'_{12} & \cdots \\ & & & & \cdots & AP_{12} \\ & & & & \cdots & A'_r P'_{22} \\ & & & & \cdots & B'P_{12} + B'_r P'_{22} \\ & & & & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & & \cdots & P_{12} \\ & & & & \cdots & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{U}$.

Seja $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ o conjunto dos vértices $i = 1, \dots, N$ do politopo convexo \mathcal{U} .

Defina o conjunto Θ como

$$\Theta \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, D_r, P, \mu) \mid \mu > 0; P = P' > \mathbf{0}; \Gamma(\cdot) \geq \mathbf{0};$$

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathcal{U}\}$$

sendo

$$\Gamma(A, B, C, D, A_r, B_r, C_r, D_r, P, \mu) \triangleq$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathbf{0} & C' & A'P_{11} & AP_{12} \\ P'_{12} & P_{22} & \mathbf{0} & -C'_r & A'_r P'_{12} & A'_r P_{22} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D' - D'_r & B'P_{11} + B'_r P_{12} & B'P_{12} + B'_r P_{22} \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P_{11}A & P_{12}A_r & P_{11}B + P_{12}B_r & \mathbf{0} & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12}A & P_{22}A_r & P'_{12}B + P_{22}B_r & \mathbf{0} & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

o conjunto das restrições de (3.44).

Defina o conjunto Θ_v com condições similares computadas nos vértices, ou seja

$$\Theta_v \triangleq \{(A_r, B_r, C_r, D_r, P, \mu) \mid \mu > 0; P = P' > \mathbf{0}; \Gamma(\cdot) \geq \mathbf{0};$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})\}$$

Note que Θ e Θ_v são afins em A, B, C e D e, devido à convexidade de \mathcal{U} , conclui-se que estes conjuntos são equivalentes ou seja, $\Theta = \Theta_v$. Assim, o problema (3.44) pode ser resolvido investigando-se apenas os vértices de \mathcal{U} , ou seja $\mathcal{V}(\mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathbf{0} & C'_i & A'_i P_{11} & \dots \\ P'_{12} & P_{22} & \mathbf{0} & -C'_r & A'_r P'_{12} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D'_i - D'_r & B'_i P_{11} + B'_r P_{12} & \dots \\ C_i & -C_r & D_i - D_r & \mu I & \mathbf{0} & \dots \\ P_{11}A_i & P_{12}A_r & P_{11}B_i + P_{12}B_r & \mathbf{0} & P_{11} & \dots \\ P'_{12}A_i & P_{22}A_r & P'_{12}B_i + P_{22}B_r & \mathbf{0} & P'_{12} & \dots \\ & & & & \dots & A_i P_{12} \\ & & & & & \dots & A'_r P_{22} \\ & & & & & & \dots & B'_i P_{12} + B'_r P_{22} \\ & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & \dots & P_{12} \\ & & & & & & & & \dots & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U}).$$

Neste caso o problema também está descrito na forma de BMIs e, portanto, se faz necessário o uso de técnicas de otimização não-lineares para resolvê-lo. Essas técnicas estão mostradas no capítulo 4.

A formulação do problema dual é dada por:

$$\gamma^2 = \min \quad \mu$$

$$\begin{aligned}
s.a \quad & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \mathbf{0} & B_i & A_i Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & \mathbf{0} & B_r & A_r Q'_{12} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D_i - D_r & C_i Q_{11} - C_r Q_{12} & \cdots \\ B'_i & B'_r & D'_i - D'_r & \mu I & \mathbf{0} & \cdots \\ Q_{11} A'_i & Q_{12} A'_r & Q_{11} C'_i - Q_{12} C'_r & \mathbf{0} & Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12} A'_i & Q_{22} A'_r & Q'_{12} C'_i - Q_{22} C'_r & \mathbf{0} & Q'_{12} & \cdots \\ & & & & \cdots & A_i Q_{12} \\ & & & & \cdots & A_r Q_{22} \\ & & & & \cdots & C_i Q_{12} - C_r Q_{22} \\ & & & & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & & \cdots & Q_{12} \\ & & & & \cdots & Q_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U}).$$

3.4 Redução \mathcal{H}_2 da Ordem do Controlador

Nesta seção é apresentada uma formulação para o problema da redução da ordem do controlador distinta das formulações existentes na literatura. Esta formulação possibilita encontrar um controlador de ordem reduzida que objetiva aproximar o desempenho obtido com o controlador de alta ordem, independente da técnica utilizada no projeto original. Neste caso, a norma \mathcal{H}_2 é utilizada como medida do desempenho do procedimento de redução.

O problema ótimo de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador pode ser assim formulado: encontre um controlador com ordem $r < k$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + B_r y(t) \\
u(t) &= C_r x_r(t)
\end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$ e $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$, tal que a norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro entre o sistema realimentado pelo controlador original de ordem k e o sistema controlado pelo controlador de ordem reduzida de ordem r seja minimizada. A matriz de transferência da realização do erro é dada por

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} A & -BC_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B \\ B_k C & A_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A & -BC_r & B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_r C & A_r & \mathbf{0} \\ \hline C & \mathbf{0} & -C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (3.47)$$

A equação (3.47) representa o modelo do erro de redução entre o sistema realimentado pelo controlador original, dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_k(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BC_k \\ B_k C & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.48)$$

e o sistema realimentado pelo controlador de ordem reduzida, dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{\hat{x}}_r(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -BC_r \\ B_r C & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t) \\ y_r(t) &= \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x_r(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por simplicidade, adotou-se a mesma matriz B da planta original para a ponderação do sinal de controle da realimentação e do sinal de referência externo.

Os estados do controlador original são representados por $x_k(t)$. A figura 3.5 mostra o diagrama de blocos do modelo do erro de redução do controlador.

De maneira similar à desenvolvida na seção 3.2.3, utilizando-se as equações (3.8) e (3.47) e particionando-se a matriz P na forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix}$$

com $P_{11} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$, $P_{12} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times n}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{13} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times r}$, $P_{23} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $P_{33} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tem-se

$$\begin{aligned} \Phi &= \min \quad Tr(R) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} R & C_f P_{11} - C P'_{12} & C_f P_{12} - C P_{22} & C_f P_{13} - C P_{23} \\ P_{11} C'_f - P_{12} C' & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} C'_f - P_{22} C' & P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} C'_f - P'_{23} C' & P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

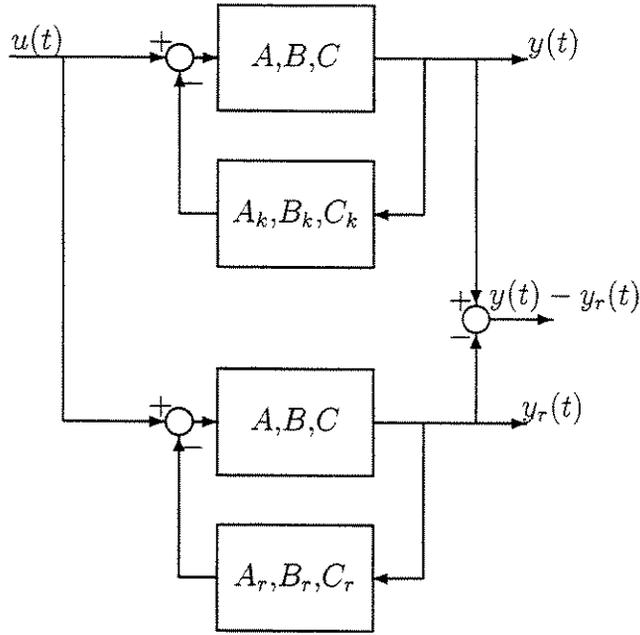


Figura 3.5: Diagrama de blocos do modelo do erro de redução da ordem do controlador: os parâmetros da planta são A, B, C , do controlador original são A_k, B_k, C_k e do controlador reduzido são A_r, B_r, C_r .

$$\begin{bmatrix}
 A_f P_{11} + P_{11} A'_f & A_f P_{12} + P_{12} A' - P_{13} C'_r B' & \dots \\
 A P'_{12} - B C_r P'_{13} + P'_{12} A'_f & A P_{22} - B C_r P'_{23} + P_{22} A' - P_{23} C'_r B' & \dots \\
 B_r C P'_{12} + A_r P'_{13} + P'_{13} A'_f & B_r C P_{22} + A_r P'_{23} + P'_{23} A' - P_{33} C'_r B' & \dots \\
 B'_f & B' & \dots \\
 \dots & A_f P_{13} + P_{12} C' B'_r + P_{13} A'_r & B_f \\
 \dots & A P_{23} - B C_r P_{33} + P_{22} C' B'_r + P_{23} A'_r & B \\
 \dots & B_r C P_{23} + A_r P_{33} + P'_{23} C' B'_r + P_{33} A'_r & 0 \\
 \dots & 0 & -I
 \end{bmatrix} \leq 0$$

$$\begin{bmatrix}
 P_{11} & P_{12} & P_{13} \\
 P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\
 P'_{13} & P'_{23} & P_{33}
 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.49)$$

sendo que A_f, B_f, C_f são os parâmetros do sistema realimentado pelo controlador original, dado em (3.48), ou seja,

$$A_f = \begin{bmatrix} A & -B C_k \\ B_k C & A_k \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [C \quad \mathbf{0}]$$

Note que o problema (3.49) está descrito na forma de BMIs e no capítulo 5, será proposto um método de otimização global para o problema.

Capítulo 4

Otimização Local

4.1 Introdução

Neste capítulo, algoritmos de otimização local para a solução do problema de redução de modelos são apresentados e discutidos. A idéia básica é fixar algumas variáveis de otimização, tornando o problema resultante um problema convexo descrito por LMIs. A solução desse problema fornece valores de variáveis que serão fixadas numa próxima iteração, quando as primeiras ficarão livres. Este procedimento de otimização de problemas bilineares é comumente conhecido como algoritmo de otimização DK [EB94].

A vantagem desse procedimento iterativo está na solução de uma seqüência de problemas convexos na forma de LMIs. As desvantagens são: dependência da inicialização e não garantia de convergência.

4.2 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos

A inicialização do algoritmo de otimização local do problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos é um fator crucial para obtenção de resultados eficientes. Neste trabalho, os algoritmos são inicializados com modelos reduzidos obtidos pelo método da realização balanceada [Moo81], pelo método da norma Hankel [Glo84] e por um método que computa as contribuições em termos da norma \mathcal{H}_2 [APFH97].

Foram mostradas no Capítulo 2 duas formas de selecionar os estados que serão retidos no modelo reduzido obtido via realização balanceada. Os algoritmos propostos a seguir utilizam estes critérios na etapa de inicialização. Os exemplos numéricos mostrados no capítulo 6 ilustram que a inicialização dos algoritmos utilizando a norma \mathcal{H}_2 pode proporcionar melhores resultados (veja [AP98a], [AP98b] e [AP98c]).

4.2.1 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos

A idéia principal do primeiro algoritmo é resolver o problema (3.10) dividindo-o em dois procedimentos de otimização que utilizam apenas LMIs. O problema (3.10) é repetido aqui por motivos de clareza:

$$\begin{aligned}
 \Phi = \min \quad & Tr(R) \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & CP_{11} - C_r P'_{12} & CP_{12} - C_r P_{22} \\ P_{11} C' - P_{12} C'_r & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C' - P_{22} C'_r & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11} A' & AP_{12} + P_{12} A'_r & B \\ A_r P'_{12} + P'_{12} A' & A_r P_{22} + P_{22} A'_r & B_r \\ B' & B'_r & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.1) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P, R e B_r .

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.1) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P_{11}, A_r, B_r, C_r e R .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Cada passo deste algoritmo pode ser resolvido por otimização convexa (por exemplo, utilizando o pacote LMISol [dFG97]); porém, não há garantia de que a solução atinja o mínimo global, podendo o algoritmo convergir para um mínimo local. Os exemplos mostrados no capítulo 6 ilustram este fato.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual, dado por (3.11) e repetido aqui:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Tr(R) \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & B'Q_{11} + B'_r Q'_{12} & B'Q_{12} + B'_r Q_{22} \\ Q_{11} B + Q_{12} B_r & Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} B + Q_{22} B_r & Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} A'Q_{11} + Q_{11} A & A'Q_{12} + Q_{12} A_r & C' \\ A'_r Q'_{12} + Q'_{12} A & A'_r Q_{22} + Q_{22} A_r & -C'_r \\ C & -C_r & -I \end{bmatrix} \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e B_r constantes na equação (4.2) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q, R e C_r .

Passo 3. Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.2) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q_{11}, A_r, B_r, C_r e R .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r)_0$ obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.

Passo 3. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Em [VD97], alguns exemplos são apresentados apontando como melhor algoritmo o de número 3, em princípio por envolver as duas formas de cálculo da norma \mathcal{H}_2 . O capítulo 6 apresenta vários exemplos de redução de modelos, mostrando que a inicialização dos algoritmos é um fator crucial para a obtenção do modelo reduzido com menor norma do erro de redução, e que, como conclusão geral, a inicialização dos algoritmos com o modelo reduzido obtido através da seleção \mathcal{H}_2 de estados conduz sistematicamente a melhores resultados nos três algoritmos.

4.2.2 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos

Similarmente ao caso contínuo, a idéia principal do primeiro algoritmo é resolver o problema (3.14) dividindo-o em dois procedimentos de otimização que utilizam apenas LMIs. O problema (3.14) é repetido aqui por clareza:

$$\begin{aligned}
 \Phi = \min \quad & Tr(R) \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}C' - P_{12}C'_r \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}C' - P_{22}C'_r \\ CP_{11} - C_rP'_{12} & CP_{12} - C_rP_{22} & R \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}A' & P_{12}A'_r & 0 \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}A' & P_{22}A'_r & 0 \\ AP_{11} & AP_{12} & P_{11} & P_{12} & B \\ A_rP'_{12} & A_rP_{22} & P'_{12} & P_{22} & B_r \\ 0 & 0 & B' & B'_r & I \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.3) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P, R e B_r .

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.3) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P_{11}, A_r, B_r, C_r e R .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Cada passo deste algoritmo pode ser resolvido por otimização convexa (por exemplo, utilizando o pacote LMISol [dFG97]); porém, não há garantia de que a solução atinja o mínimo global, podendo o algoritmo convergir para um mínimo local.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual, dado por (3.15) e repetido aqui:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Tr(R) \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}B + Q_{12}B_r \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}B + Q_{22}B_r \\ B'Q_{11} + B'_rQ'_{12} & B'Q_{12} + B'_rQ_{22} & R \end{bmatrix} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}A & Q_{12}A_r & \mathbf{0} \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}A & Q_{22}A_r & \mathbf{0} \\ A'Q_{11} & A'Q_{12} & Q_{11} & Q_{12} & C' \\ A'_rQ'_{12} & A'_rQ_{22} & Q'_{12} & Q_{22} & -C'_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C & -C_r & I \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e B_r constantes na equação (4.4) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q , R e C_r .

Passo 3. Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.4) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q_{11} , A_r , B_r , C_r e R .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r)_0$ obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.

Passo 3. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

4.2.3 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos Incertos

Os algoritmos de otimização local do problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos incertos são similares aos apresentados para o caso de redução \mathcal{H}_2 de modelos determinísticos, com a diferença crucial que neste caso o modelo reduzido utilizado para inicializar os algoritmos é obtido com a redução via Hankel ou realização balanceada dos valores nominais do sistema original incerto. Os valores nominais correspondem

aos valores médios (centrais) das incertezas paramétricas. Devido à convexidade de \mathcal{P} , não é necessário que a otimização seja realizada em todo domínio poliédrico \mathcal{P} mas apenas no conjunto dos vértices do poliedro, $\mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Na seção 3.2.5 o problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos incertos foi formulado como (equação (3.19))

$$\begin{aligned} \Phi = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & C_i P_{11} - C_r P'_{12} & C_i P_{12} - C_r P_{22} \\ P_{11} C'_i - P_{12} C'_r & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C'_i - P_{22} C'_r & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} A_i P_{11} + P_{11} A'_i & A_i P_{12} + P_{12} A'_r & B_i \\ A_r P'_{12} + P'_{12} A'_i & A_r P_{22} + P_{22} A'_r & B_r \\ B'_i & B'_r & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Neste caso, o conjunto poliédrico convexo \mathcal{P} é dado por

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, B, C) \mid (A, B, C) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\}$$

e $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ é o conjuntos dos vértices de \mathcal{P} .

Se A_r e C_r (P_{12} e P_{22}) são mantidos constantes, as desigualdades matriciais resultantes são afins em P_{11} , P_{12} , P_{22} , R e B_r (P_{11} , R , A_r , B_r e C_r). Assim sendo, o problema (4.5) pode ser resolvido pelo seguinte algoritmo, sendo que $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ denota os valores nominais de $(A, B, C) \in \mathcal{P}$,

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.5) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P , R e B_r , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.5) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P_{11} , A_r , B_r , C_r e R , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual (3.20), dado por

$$\begin{aligned}
 \min \quad & Tr(R) \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & B'_i Q_{11} + B'_r Q'_{12} & B'_i Q_{12} + B'_r Q_{22} \\ Q_{11} B_i + Q_{12} B_r & Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} B_i + Q_{22} B_r & Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} A'_i Q_{11} + Q_{11} A_i & A'_i Q_{12} + Q_{12} A_r & C'_i \\ A'_r Q'_{12} + Q'_{12} A_i & A'_r Q_{22} + Q_{22} A_r & -C'_r \\ C_i & -C_r & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}).$$

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e B_r constantes na equação (4.6) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q , R e C_r , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Passo 3. Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.6) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q_{11} , A_r , B_r , C_r e R , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r)_0$ obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.

Passo 3. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

4.2.4 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Discretos Incertos

Na seção 3.2.6 o problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos discretos incertos foi formulado como (equação (3.24))

$$\begin{aligned}
 \Phi = \min \quad & Tr(R) \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}C'_i - P_{12}C'_r \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}C'_i - P_{22}C'_r \\ C_iP_{11} - C_rP'_{12} & C_iP_{12} - C_rP_{22} & R \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{11}A'_i & P_{12}A'_r & 0 \\ P'_{12} & P_{22} & P'_{12}A'_i & P_{22}A'_r & 0 \\ A_iP_{11} & A_iP_{12} & P_{11} & P_{12} & B_i \\ A_rP'_{12} & A_rP_{22} & P'_{12} & P_{22} & B_r \\ 0 & 0 & B'_i & B'_r & I \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Neste caso, o conjunto poliédrico convexo \mathcal{P} é dado por

$$\mathcal{P} \triangleq \left\{ (A, B, C) \mid (A, B, C) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\}$$

e $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ denota o conjunto dos vértices de \mathcal{P} .

Se A_r e C_r (P_{12} e P_{22}) são mantidos constantes, as desigualdades matriciais resultantes são afins em P_{11} , P_{12} , P_{22} , R e B_r (P_{11} , R , A_r , B_r e C_r). Assim sendo, o problema (4.7) pode ser resolvido pelo seguinte algoritmo, sendo que $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ denota os valores nominais de $(A, B, C) \in \mathcal{P}$,

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.7) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P , R e B_r , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.7) e minimize $Tr(R)$ com respeito a P_{11} , A_r , B_r , C_r e R , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual (3.25), dado por

$$\begin{aligned}
 & \min \quad Tr(R) \\
 & \text{s.a.} \quad \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}B_i + Q_{12}B_r \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}B_i + Q_{22}B_r \\ B'_iQ_{11} + B'_rQ'_{12} & B'_iQ_{12} + B'_rQ_{22} & R \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\
 & \quad \left[\begin{array}{ccccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{11}A_i & Q_{12}A_r & \mathbf{0} \\ Q'_{12} & Q_{22} & Q'_{12}A_i & Q_{22}A_r & \mathbf{0} \\ A'_iQ_{11} & A'_iQ_{12} & Q_{11} & Q_{12} & C'_i \\ A'_rQ'_{12} & A'_rQ_{22} & Q'_{12} & Q_{22} & -C'_r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_i & -C_r & I \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\
 & \quad \left[\begin{array}{cc} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{array} \right] > \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$\forall (A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

- Passo 1.** Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.
- Passo 2.** Faça A_r e B_r constantes na equação (4.8) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q, R e C_r , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.
- Passo 3.** Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.8) e minimize $Tr(R)$ com respeito a Q_{11}, A_r, B_r, C_r e R , para $(A_i, B_i, C_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P})$.
- Passo 4.** Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

- Passo 1.** Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r)_0$ obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.
- Passo 2.** Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.
- Passo 3.** Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r)_i$.
- Passo 4.** Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

4.3 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos

Os algoritmos de otimização local propostos para a otimização do problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos são similares aos propostos para o caso de redução \mathcal{H}_2 de modelos, apresentados na seção 4.2.1.

4.3.1 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos

O problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos foi descrito por (3.31), repetido aqui:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - P_{12}A_r & -P_{11}B - P_{12}B_r & C' \\ -A_r'P_{12}' - P_{12}'A & -A_r'P_{22} - P_{22}A_r & -P_{12}'B - P_{22}B_r & -C_r' \\ -B'P_{11} - B_r'P_{12}' & -B'P_{12} - B_r'P_{22} & I & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.9)$$

De maneira similar aos algoritmos anteriores, o algoritmo consiste de dois procedimentos de otimização que utilizam apenas LMIs.

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.9) e minimize μ com respeito a P , μ , B_r e D_r .

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.9) e minimize μ com respeito a P_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Este algoritmo não tem garantia de convergência para o mínimo global da variável objetivo μ , podendo convergir para um mínimo local.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual, dado por (3.32) e repetido aqui:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -AQ_{11} - Q_{11}A' & -AQ_{12} - Q_{12}A'_r & -Q_{11}C' + Q_{12}C'_r & B \\ -A_rQ'_{12} - Q'_{12}A' & -A_rQ_{22} - Q_{22}A'_r & -Q'_{12}C' + Q_{22}C'_r & B_r \\ -CQ_{11} + C_rQ'_{12} & -CQ_{12} + C_rQ_{22} & \mathbf{I} & D - D_r \\ B' & B'_r & D' - D'_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e B_r constantes na equação (4.2) e minimize μ com respeito a Q , μ , C_r e D_r .

Passo 3. Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.2) e minimize μ com respeito a Q_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r, D_r)_0$ obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.

Passo 3. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

No capítulo 6, alguns exemplos são apresentados apontando como melhor algoritmo o de número 3, em princípio por envolver as duas formas de cálculo da norma \mathcal{H}_∞ . É importante ressaltar que o algoritmo 1 foi proposto em [Hel94] e os outros dois algoritmos 2 e 3 estão sendo propostos neste trabalho (veja também [AP98a]).

4.3.2 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos

O problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos foi descrito por (3.35), repetido aqui:

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 = \min \quad & \mu \\
 \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & C' & A'P_{11} & \dots \\ P'_{12} & P_{22} & 0 & -C'_r & A'_r P'_{12} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D' - D'_r & B'P_{11} + B'_r P_{12} & \dots \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I & \mathbf{0} & \dots \\ P_{11}A & P_{12}A_r & P_{11}B + P_{12}B_r & \mathbf{0} & P_{11} & \dots \\ P'_{12}A & P'_{22}A_r & P'_{12}B + P'_{22}B_r & \mathbf{0} & P'_{12} & \dots \\ & & & & \dots & AP_{12} \\ & & & & & \dots & A'_r P'_{22} \\ & & & & & & \dots & B'P_{12} + B'_r P'_{22} \\ & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & \dots & P_{12} \\ & & & & & & & & \dots & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

De maneira similar aos algoritmos anteriores, o algoritmo consiste de dois procedimentos de otimização que utilizam apenas LMIs.

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e B_r constantes na equação (4.11) e minimize μ com respeito a P , μ , C_r e D_r .

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.11) e minimize μ com respeito a P_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Este algoritmo não tem garantia de convergência para o mínimo global da variável objetivo μ , podendo convergir para um mínimo local.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual, dado por (3.36) e repetido aqui:

$$\gamma^2 = \min \quad \mu$$

$$\begin{aligned}
s.a \quad & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \mathbf{0} & B & AQ_{11} & \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & \mathbf{0} & B_r & A_r Q'_{12} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D - D_r & CQ_{11} - C_r Q_{12} & \cdots \\ B' & B'_r & D' - D'_r & \mu I & \mathbf{0} & \cdots \\ Q_{11}A' & Q_{12}A'_r & Q_{11}C' - Q_{12}C'_r & \mathbf{0} & Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12}A' & Q_{22}A'_r & Q'_{12}C' - Q_{22}C'_r & \mathbf{0} & Q'_{12} & \cdots \\ & & & & \cdots & AQ_{12} \\ & & & & \cdots & A_r Q_{22} \\ & & & & \cdots & CQ_{12} - C_r Q_{22} \\ & & & & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & & \cdots & Q_{12} \\ & & & & \cdots & Q_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
& \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.12) e minimize μ com respeito a Q , μ , B_r e D_r .

Passo 3. Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.12) e minimize μ com respeito a Q_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ .

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r, D_r)_0$ obtido da redução via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.

Passo 3. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

4.3.3 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos Incertos

Na seção 3.3.5 o problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos incertos foi formulado como (equação (3.40))

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} -A'_i P_{11} - P_{11} A_i & -A'_i P_{12} - P_{12} A_r & -P_{11} B_i - P_{12} B_r & C'_i \\ -A'_r P'_{12} - P'_{12} A_i & -A'_r P_{22} - P_{22} A_r & -P'_{12} B_i - P_{22} B_r & -C'_r \\ -B'_i P_{11} - B'_r P'_{12} & -B'_i P_{12} - B'_r P_{22} & \mathbf{I} & D'_i - D'_r \\ C_i & -C_r & D_i - D_r & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Neste caso, o conjunto poliédrico convexo \mathcal{U} é dado por

$$\mathcal{U} \triangleq \left\{ (A, B, C, D) \mid (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i, D_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\}$$

e $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ denota o conjunto dos vértices de \mathcal{U} .

Se A_r e B_r (P_{12} e P_{22}) são mantidos constantes, as desigualdades matriciais resultantes são afins em P_{11} , P_{12} , P_{22} , μ , C_r e D_r (P_{11} , μ , A_r , B_r , C_r e D_r). Assim sendo, o problema (4.13) pode ser resolvido pelo seguinte algoritmo, sendo que $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ denota os valores nominais de $(A, B, C, D) \in \mathcal{U}$.

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e B_r constantes na equação (4.13) e minimize μ com respeito a P , μ , C_r e D_r , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.13) e minimize μ com respeito a P_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual (3.41), dado por

$$\gamma^2 = \min \quad \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} -A_i Q_{11} - Q_{11} A_i' & -A_i Q_{12} - Q_{12} A_r' & -Q_{11} C_i' + Q_{12} C_r' & B_i \\ -A_r Q_{12}' - Q_{12}' A_i' & -A_r Q_{22} - Q_{22} A_r' & -Q_{12}' C_i' + Q_{22} C_r' & B_r \\ -C_i Q_{11} + C_r Q_{12}' & -C_i Q_{12} + C_r Q_{22} & \mathbf{I} & D_i - D_r \\ B_i' & B_r' & D_i' - D_r' & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.14)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.14) e minimize μ com respeito a Q , μ , B_r e D_r , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 3. Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.14) e minimize μ com respeito a Q_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r, D_r)_0$ obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.

Passo 3. Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.

Passo 4. Faça $i = i + 1$ e repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

4.3.4 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Discretos Incertos

Na seção 3.3.6 o problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos incertos foi formulado como (equação (3.45))

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 = \min \quad & \mu \\
 \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathbf{0} & C'_i & A'_i P_{11} & \cdots \\ P'_{12} & P_{22} & \mathbf{0} & -C'_r & A'_r P'_{12} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D'_i - D'_r & B'_i P_{11} + B'_r P_{12} & \cdots \\ C_i & -C_r & D_i - D_r & \mu I & \mathbf{0} & \cdots \\ P_{11} A_i & P_{12} A_r & P_{11} B_i + P_{12} B_r & \mathbf{0} & P_{11} & \cdots \\ P'_{12} A_i & P_{22} A_r & P'_{12} B_i + P_{22} B_r & \mathbf{0} & P'_{12} & \cdots \\ & & & & \cdots & A_i P_{12} \\ & & & & \cdots & A'_r P_{22} \\ & & & & \cdots & B'_i P_{12} + B'_r P_{22} \\ & & & & \cdots & \mathbf{0} \\ & & & & \cdots & P_{12} \\ & & & & \cdots & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Neste caso, o conjunto poliédrico convexo \mathcal{U} é dado por

$$\mathcal{U} \triangleq \left\{ (A, B, C, D) \mid (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^N \xi_i (A_i, B_i, C_i, D_i), \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \right\}$$

e $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ denota o conjunto dos vértices de \mathcal{U} .

Se A_r e B_r (P_{12} e P_{22}) são mantidos constantes, as desigualdades matriciais resultantes são afins em P_{11} , P_{12} , P_{22} , μ , C_r e D_r (P_{11} , μ , A_r , B_r , C_r e D_r). Assim sendo, o problema (4.15) pode ser resolvido pelo seguinte algoritmo, sendo que $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ denota os valores nominais de $(A, B, C, D) \in \mathcal{U}$,

Algoritmo 1 (primal)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e B_r constantes na equação (4.15) e minimize μ com respeito a P , μ , C_r e D_r , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 3. Faça P_{12} e P_{22} constantes na equação (4.15) e minimize μ com respeito a P_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

O segundo algoritmo é similar ao primeiro, aplicado no problema dual (3.46), dado por

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \mathbf{0} & B_i & A_i Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & \mathbf{0} & B_r & A_r Q'_{12} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & D_i - D_r & C_i Q_{11} - C_r Q_{12} & \cdots \\ B'_i & B'_r & D'_i - D'_r & \mu I & \mathbf{0} & \cdots \\ Q_{11} A'_i & Q_{12} A'_r & Q_{11} C'_i - Q_{12} C'_r & \mathbf{0} & Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12} A'_i & Q_{22} A'_r & Q'_{12} C'_i - Q_{22} C'_r & \mathbf{0} & Q'_{12} & \cdots \\ \cdots & A_i Q_{12} & & & & \\ \cdots & A_r Q_{22} & & & & \\ \cdots & C_i Q_{12} - C_r Q_{22} & & & & \\ \cdots & \mathbf{0} & & & & \\ \cdots & Q_{12} & & & & \\ \cdots & Q_{22} & & & & \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.16)$$

$\forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Algoritmo 2 (dual)

O algoritmo consiste nos seguintes passos:

Passo 1. Comece com o modelo reduzido (A_r, B_r, C_r, D_r) obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.

Passo 2. Faça A_r e C_r constantes na equação (4.16) e minimize μ com respeito a Q , μ , B_r e D_r , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 3. Faça Q_{12} e Q_{22} constantes na equação (4.16) e minimize μ com respeito a Q_{11} , A_r , B_r , C_r , D_r e μ , para $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})$.

Passo 4. Repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Algoritmo 3 (misto)

O terceiro algoritmo é uma mistura dos dois primeiros, com os seguintes passos:

- Passo 1.** Comece com o modelo reduzido $(A_r, B_r, C_r, D_r)_0$ obtido da redução do modelo nominal $(A_{nom}, B_{nom}, C_{nom}, D_{nom})$ via Hankel ou realização balanceada.
- Passo 2.** Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 1, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.
- Passo 3.** Faça $i = i + 1$, execute o algoritmo 2, com inicialização $(A_r, B_r, C_r, D_r)_{i-1}$ e coloque o resultado em $(A_r, B_r, C_r, D_r)_i$.
- Passo 4.** Faça $i = i + 1$ e repita os passos 2 e 3 até que algum critério de precisão seja satisfeito.

Capítulo 5

Otimização Global

5.1 Introdução

Na literatura, existem muitos métodos para resolver problemas de otimização global. Dentre eles, o método de otimização *simulated annealing* (veja [BB92]), que descreve uma família de métodos iterativos onde a cada iteração incrementa-se um parâmetro com uma probabilidade que decai exponencialmente com a função energia associada ao novo valor do parâmetro. Esta técnica não mantém os limitantes superior e inferior do ótimo global. Como resultado, este algoritmo não tem critério de parada. Outra técnica de otimização é baseada no algoritmo de pontos interiores [BB92], que tem sido usado em alguns problemas de programação inteira. Porém, este também não tem limites garantidos sobre o ótimo global. Em contraste com essas técnicas, o algoritmo *branch and bound* mantém limitantes superior e inferior para o ótimo global, o que garante a sua convergência para o ótimo global em tempo finito.

Neste capítulo será apresentado um método de otimização global para o problema de redução de modelos, baseado no algoritmo *branch and bound* [BB92],[AP99a]. Inicialmente é feita uma apresentação geral do algoritmo; depois são apresentados os limitantes superior e inferior para os problemas de redução \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos e também para o problema de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador de sistemas contínuos. A estratégia de divisão iterativa do espaço de busca também é discutida e, finalmente, é mostrada a convergência do algoritmo em tempo finito para o ótimo global.

5.2 O Algoritmo *Branch and Bound*

O algoritmo *branch and bound* é uma técnica de otimização global que pode ser aplicada em problemas NP-hard, encontrando o mínimo global de uma função não convexa $f : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ sobre um hiper-retângulo \mathcal{Q} de dimensão l . O hiper-retângulo é iterativamente dividido até que o ótimo global seja obtido com dada precisão ϵ .

De acordo com [GSP94], o método *branch and bound* pode ser interpretado como

uma maneira conveniente de realizar divisões iterativas no espaço de busca que utiliza limites superiores e inferiores para refinar progressivamente as áreas de interesse, evitando que todo o espaço de busca seja investigado. Este procedimento termina quando a diferença entre o limite superior e o inferior é menor que ϵ .

O algoritmo *branch and bound* é ilustrado na figura 5.1, (veja [RS95] para detalhes). Primeiro, são determinadas uma função relaxação inicial L_1 e uma função restrição inicial U_1 restringindo a função objetivo não convexa F , como ilustrado na figura 5.1(a). Essas funções devem ser determinadas de forma a garantir que o mínimo global da função restrição seja maior que o mínimo global da função não convexa e que o mínimo global da função relaxação seja menor que o mínimo global da função não convexa. O domínio factível é então dividido em duas subregiões, à direita e à esquerda do ponto de divisão (SP) e novos limites inferiores (L_2, L_3) e limites superiores (U_2, U_3) são calculados. O ponto SP é o ponto médio do maior lado do hiper-retângulo. Se o valor mínimo do limite inferior for maior que o valor mínimo de qualquer limitante superior, essa região deve ser descartada pois o ótimo global não pertence a essa região. A figura 5.1(b) ilustra este procedimento, neste caso, o valor mínimo do limitante inferior L_3 , indicado por L , é maior que o valor mínimo do limitante superior U_2 , indicado por U . A figura 5.1(c) ilustra a região descartada. Após, a região factível é dividida (figura 5.1(d)) e o procedimento é repetido até que a diferença entre os limites superior e inferior seja menor que ϵ .

O algoritmo *branch and bound* proposto neste trabalho envolve a construção de uma árvore de busca com problemas de otimização descritos na forma de LMIs em cada nó (essas LMIs serão descritas na seção 5.3). Apesar das LMIs serem eficientemente resolvidas, a manipulação do hiper-retângulo \mathcal{Q} requer uma heurística com a qual espera-se reduzir o número total de operações para resolver o problema, quando comparado com a divisão exaustiva do hiper-retângulo (para maiores detalhes vide [BB92]). A seguir, é apresentado o algoritmo *branch and bound*, sendo que os limitantes superiores e inferiores para o problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos serão apresentados na seção 5.3.

O Algoritmo *Branch and Bound*

Na seguinte descrição, k denota o índice da k -ésima iteração, \mathcal{L}_k denota a lista de hiper-retângulos ativos na k -ésima iteração, \mathcal{Q}_i é o i -ésimo hiper-retângulo pertencente à lista \mathcal{L}_k (subdivisões do hiper-retângulo inicial \mathcal{Q}), $\Phi_L(\mathcal{Q}_i)$ denota o valor mínimo do limitante inferior do i -ésimo hiper-retângulo, $\Phi_U(\mathcal{Q}_i)$ denota o valor mínimo do limitante superior do i -ésimo hiper-retângulo e $\epsilon > 0$ é a precisão especificada.

1. *Faça:* $k = 0$, $\mathcal{L}_0 = \{\mathcal{Q}\}$, $L_0 = \Phi_L(\mathcal{Q})$, $U_0 = \Phi_U(\mathcal{Q})$.

2. *Repita* {

R1. *selecione* $\mathcal{Q}_i \in \mathcal{L}_k$ tal que $\Phi_L(\mathcal{Q}_i) = L_k$;

R2. *divida* \mathcal{Q}_i ao longo de seu maior lado e coloque em \mathcal{Q}_I e \mathcal{Q}_{II} ;

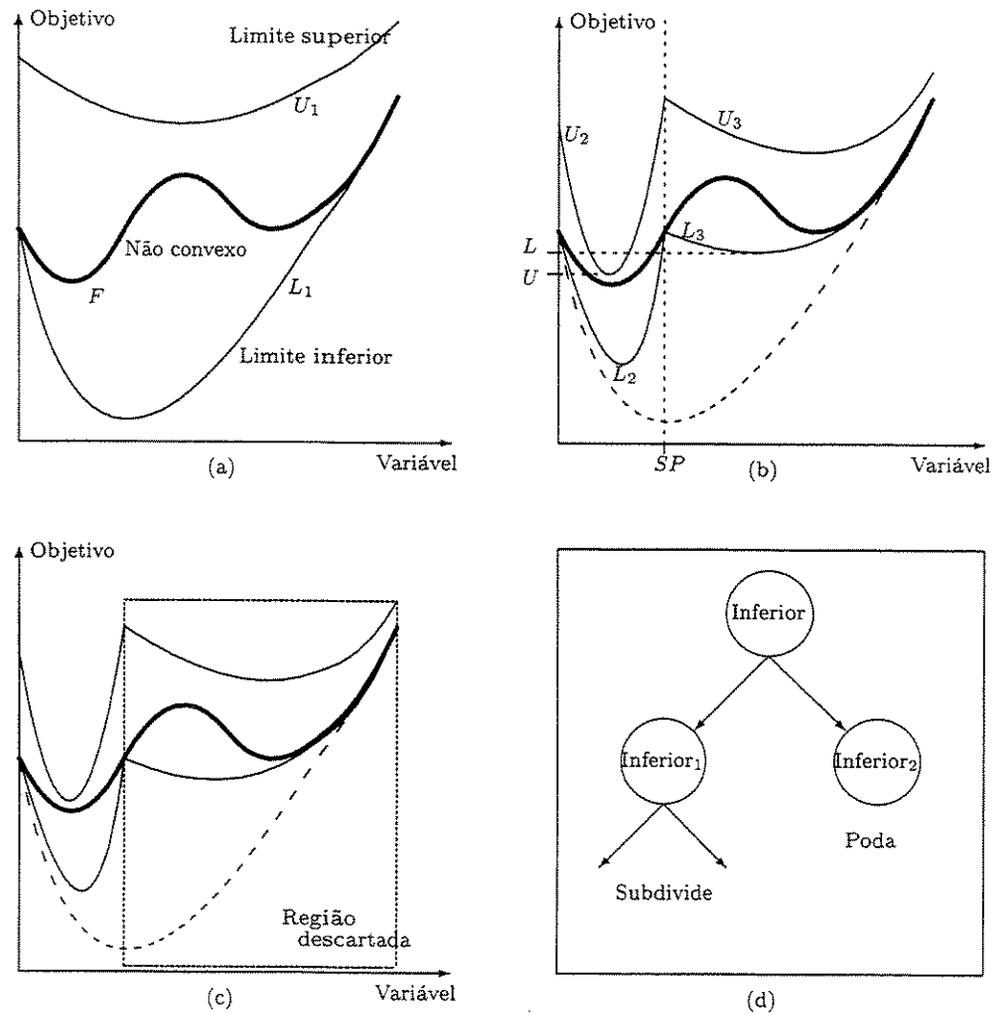


Figura 5.1: Interpretação gráfica do algoritmo *branch and bound*.

- R3. $\mathcal{L}_{k+1} := (\mathcal{L}_k - \{Q_i\}) \cup \{Q_I, Q_{II}\};$
 R4. $L_{k+1} := \min_{Q_i \in \mathcal{L}_{k+1}} \Phi_L(Q_i);$
 R5. $U_{k+1} := \min_{Q_i \in \mathcal{L}_{k+1}} \Phi_U(Q_i);$
 R6. $k := k + 1.$
 } até $U_k - L_k < \epsilon.$

Note que, no item R3, o hiper-retângulo Q_i dos itens R1 e R2 é removido da lista \mathcal{L}_k , enquanto as duas novas partições são adicionadas. A cada iteração, novos limitantes inferiores e superiores são obtidos nos itens R4 e R5, respectivamente. A cada iteração, a poda pode ser realizada eliminando-se da lista \mathcal{L}_k os hiper-retângulos $Q_i \in \mathcal{L}_k$ que satisfaçam

$$\Phi_L(Q_i) > U_k$$

o que reduz a quantidade de memória computacional necessária para o algoritmo operar.

A seguir, apresentam-se os limitantes superiores e inferiores do problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos que satisfaçam as condições necessárias para que o algoritmo convirja para o ótimo global em um tempo finito.

5.3 Redução \mathcal{H}_2 de Modelos Contínuos

5.3.1 Limitante Superior

Considere o problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos formulado na seção 3.2.3 pela equação (3.10), um limitante superior Φ_U para a norma \mathcal{H}_2 (ao quadrado) do erro de redução pode ser obtido fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (3.10), isto é

$$\begin{aligned} \Phi_U = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} R & CP_{11} - \hat{C}_r P'_{12} & CP_{12} - \hat{C}_r P_{22} \\ P_{11} C' - P_{12} \hat{C}'_r & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C' - P_{22} \hat{C}'_r & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11} A' & AP_{12} + P_{12} \hat{A}'_r & B \\ \hat{A}_r P'_{12} + P'_{12} A' & \hat{A}_r P_{22} + P_{22} \hat{A}'_r & B_r \\ B' & B'_r & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Observe que, fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (5.1), uma restrição foi imposta em \mathcal{Q} implicando que

$$\Phi_U(\hat{A}_r, \hat{C}_r) \geq \Phi_{(A_r, C_r) \in \mathcal{Q}} \quad (5.2)$$

Note que (5.1) é um problema de otimização descrito na forma de LMIs que pode ser eficientemente resolvido por procedimentos numéricos de características polinomiais [GNLC95]. Qualquer escolha \hat{A}_r, \hat{C}_r produz Φ_U satisfazendo (5.2), mas uma inicialização com \hat{A}_r, \hat{C}_r obtidos pela otimização de (3.10) fixando-se as matrizes P_{12} e P_{22} é mais conveniente. Os valores fixos de P_{12} e P_{22} podem ser obtidos do resultado oriundo do processo de otimização do limitante inferior.

5.3.2 Limitante Inferior

Um limitante inferior para o problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos formulado na seção 3.2.3 pela equação (3.10) pode ser obtido através da relaxação das restrições, criando-se novas variáveis que representem os termos bilineares, ou seja, definindo-se $W_1 = C_r P'_{12}$, $W_2 = C_r P_{22}$, $W_3 = P_{12} A'_r$ e $W_4 = A_r P_{22}$ na equação (3.10), obtendo-se

$$\begin{aligned} \Phi_L = \min \quad & Tr(R) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & CP_{11} - W_1 & CP_{12} - W_2 \\ P_{11} C' - W'_1 & P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} C' - W'_2 & P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \\ & \begin{bmatrix} AP_{11} + P_{11} A' & AP_{12} + W_3 & B \\ W'_3 + P'_{12} A' & W_4 + W'_4 & B_r \\ B' & B'_r & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Claramente, a equação (5.3) representa um problema relaxado quando comparado com a equação (3.10), implicando que

$$\Phi_{(A_r, C_r) \in \mathcal{Q}} \geq \Phi_L \quad (5.4)$$

Assim como o limitante superior, o limitante inferior dado por (5.3), é um problema de otimização via LMI que pode ser eficientemente resolvido.

5.3.3 Construção de \mathcal{Q}

O problema de redução \mathcal{H}_2 de modelos não impõe restrições naturais às variáveis do problema, que são os elementos das matrizes $A_r, B_r, C_r, R, P, W_1, W_2, W_3$ e W_4 .

Para construir a região de busca, definida pelo hiper-retângulo \mathcal{Q} , uma nova região relaxada pode ser obtida resolvendo-se $2N_t$ problemas de otimização via LMIs, sendo N_t o número total de variáveis (veja [MF97] para mais detalhes). Denotando $x \in \mathbb{R}^{N_t}$ o vetor de todas as variáveis matriciais (exceto A_r e C_r), resolva

$$\begin{aligned} \min \quad & x_i \\ \text{s.a} \quad & (5.3) \\ & i = 1, \dots, N_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_i \\ \text{s.a.} \quad & (5.3) \\ & i = 1, \dots, N_t \end{aligned}$$

Com este procedimento obtêm-se,

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^{N_t}$$

Os valores máximo e mínimo dos elementos das matrizes A_r e C_r são obtidos em função dos vetores x_{min} e x_{max} .

Apenas para ilustrar, a figura 5.2 mostra uma região não convexa factível, a sua relaxação convexa e a relaxação convexa retangular obtida de $[x_{min}, x_{max}]$.

5.3.4 Análise da Convergência

Para que o algoritmo *branch and bound* minimize Φ é necessária a existência de duas funções, Φ_L e Φ_U , sobre a região \mathcal{Q} , tal que as seguintes condições sejam satisfeitas [BB92]:

C1. Φ_L é um limitante inferior e Φ_U um limitante superior para Φ , isto é,

$$\Phi_L \leq \Phi \leq \Phi_U$$

para todo hiper-retângulo \mathcal{Q} .

C2. Seja $\text{Size}(\mathcal{Q})$ o comprimento do maior lado do hiper-retângulo \mathcal{Q} . Quando $\text{Size}(\mathcal{Q}) \rightarrow 0$, $\Phi_U(\mathcal{Q}) - \Phi_L(\mathcal{Q}) \rightarrow 0$ uniformemente, isto é, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, tal que,

$$\text{Size}(\mathcal{Q}) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \Phi_U(\mathcal{Q}) - \Phi_L(\mathcal{Q}) \leq \epsilon$$

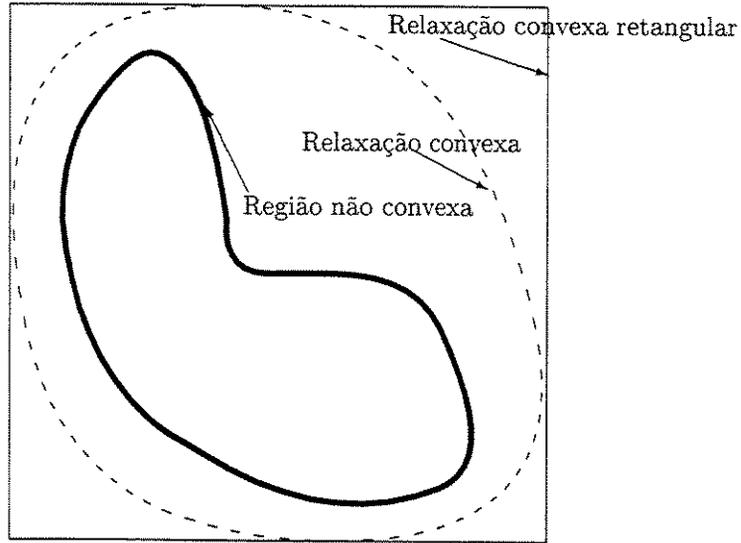


Figura 5.2: Regiões factíveis.

Claramente, Φ_L e Φ_U definidos nas equações (5.3) e (5.1) satisfazem as condições **C1** e **C2**. A condição **C1** segue imediatamente das equações (5.2) e (5.4); se o maior lado de \mathcal{Q} é iterativamente reduzido pelo algoritmo, a condição **C2** também é satisfeita. Assim, as condições **C1** e **C2** são satisfeitas e portanto, o algoritmo converge para o ótimo global em um tempo finito (veja [BBB91]).

5.4 Redução \mathcal{H}_∞ de Modelos Contínuos

5.4.1 Limitante Superior

Considere o problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos formulado na seção 3.3.3 pela equação (3.31), um limitante superior Φ_U para a norma \mathcal{H}_∞ (ao quadrado) do erro de redução pode ser obtido fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $B_r = \hat{B}_r$ em (3.31), isto é

$$\Phi_U = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - P_{12}\hat{A}_r & -P_{11}B - P_{12}\hat{B}_r & C' \\ -\hat{A}_r'P_{12} - P_{12}'A & -\hat{A}_r'P_{22} - P_{22}\hat{A}_r & -P_{12}'B - P_{22}\hat{B}_r & -C_r' \\ -B'P_{11} - \hat{B}_r'P_{12}' & -B'P_{12} - \hat{B}_r'P_{22} & \mathbf{I} & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (5.5)$$

Observe que, fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $B_r = \hat{B}_r$ em (5.5), uma restrição foi imposta

em \mathcal{Q} implicando que

$$\Phi_U(\hat{A}_r, \hat{B}_r) \geq \Phi_{(A_r, B_r) \in \mathcal{Q}} \quad (5.6)$$

Note que (5.5) é um problema de otimização descrito na forma de LMIs que pode ser eficientemente resolvido.

5.4.2 Limitante Inferior

Um limitante inferior para o problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos formulado na seção 3.3.3 pela equação (3.31) pode ser obtido através da relaxação das restrições, criando-se novas variáveis que representem os termos bilineares, ou seja, definindo-se $W_1 = P_{12}A_r$, $W_2 = P_{12}B_r$, $W_3 = P_{22}A_r$ e $W_4 = P_{22}B_r$ na equação (3.31), obtendo-se

$$\begin{aligned} \Phi_L = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - W_1 & -P_{11}B - W_2 & C' \\ -W_1' - P_{12}'A & -W_3' - W_3 & -P_{12}'B - W_4 & -C_r' \\ -B'P_{11} - W_2' & -B'P_{12} - W_4' & \mathbf{I} & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Claramente, a equação (5.7) representa um problema relaxado quando comparado com a equação (3.31), implicando que

$$\Phi_{(A_r, B_r) \in \mathcal{Q}} \geq \Phi_L \quad (5.8)$$

Note que o limitante inferior dado por (5.7), é um problema de otimização via LMI.

Devido ao fato de que os limitantes inferiores e superiores dos problemas de redução \mathcal{H}_∞ de modelos e redução \mathcal{H}_2 de modelos possuem a mesma estrutura, a construção do hiper-retângulo bem como a garantia de convergência do algoritmo, para o problema de redução \mathcal{H}_∞ de modelos, seguem diretamente das seções 5.3.3 e 5.3.4.

5.5 Redução \mathcal{H}_2 da Ordem do Controlador

Nesta seção serão apresentados os limitantes superiores e inferiores para o problema de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador que resolvem o problema utilizando o algoritmo *branch and bound* mostrado na seção 5.2.

5.5.1 Limitante Superior

Considere o problema de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador formulado na seção 3.4 pela equação (3.49), um limitante superior Φ_U para a norma \mathcal{H}_2 (ao quadrado) do erro de redução pode ser obtido fixando-se $A_r = \hat{A}_r$, $B_r = \hat{B}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (3.49), isto é

$$\Phi_U = \min \quad Tr(R)$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} R & C_f P_{11} - C P'_{12} & C_f P_{12} - C P_{22} & C_f P_{13} - C P_{23} \\ P_{11} C'_f - P_{12} C' & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} C'_f - P_{22} C' & P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} C'_f - P'_{23} C' & P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} A_f P_{11} + P_{11} A'_f & A_f P_{12} + P_{12} A' - P_{13} \hat{C}'_r B' & \dots \\ A P'_{12} - B \hat{C}_r P'_{13} + P'_{12} A'_f & A P_{22} - B \hat{C}_r P'_{23} + P_{22} A' - P_{23} \hat{C}'_r B' & \dots \\ \hat{B}_r C P'_{12} + \hat{A}_r P'_{13} + P'_{13} A'_f & \hat{B}_r C P_{22} + \hat{A}_r P'_{23} + P'_{23} A' - P_{33} \hat{C}'_r B' & \dots \\ B'_f & B' & \dots \\ \dots & A_f P_{13} + P_{12} C' \hat{B}'_r + P_{13} \hat{A}'_r & B_f \\ \dots & A P_{23} - B \hat{C}_r P_{33} + P_{22} C' \hat{B}'_r + P_{23} \hat{A}'_r & B \\ \dots & \hat{B}_r C P_{23} + \hat{A}_r P_{33} + P'_{23} C' \hat{B}'_r + P_{33} \hat{A}'_r & \mathbf{0} \\ \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq \epsilon$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (5.9)$$

Note que, fixando-se $A_r = \hat{A}_r$, $B_r = \hat{B}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (5.9), uma restrição foi imposta em \mathcal{Q} implicando que

$$\Phi_U(\hat{A}_r, \hat{B}_r, \hat{C}_r) \geq \Phi_{(A_r, B_r, C_r) \in \mathcal{Q}} \quad (5.10)$$

Neste caso, (5.9) é um problema de otimização descrito na forma de LMIs que pode ser eficientemente resolvido.

5.5.2 Limitante Inferior

Um limitante inferior para o problema de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador formulado na seção 3.4 pela equação (3.49) pode ser obtido através da relaxação das restrições, criando-se novas variáveis que representem os termos bilineares, ou seja, definindo-se $W_1 = B C_r P'_{13}$, $W_2 = B C_r P'_{23}$, $W_3 = B_r C P'_{12}$, $W_4 = A_r P'_{13}$, $W_5 = B_r C P_{22}$, $W_6 = A_r P'_{23}$, $W_7 = P_{33} C'_r B'$, $W_8 = B_r C P_{23}$ e $W_9 = A_r P_{33}$ na equação (3.49), obtendo-se

$$\begin{aligned}
\Phi_L = \min \quad & Tr(R) \\
\text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} R & C_f P_{11} - C P'_{12} & C_f P_{12} - C P_{22} & C_f P_{13} - C P_{23} \\ P_{11} C'_f - P_{12} C' & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} C'_f - P_{22} C' & P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} C'_f - P_{23} C' & P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} \geq 0 \\
& \begin{bmatrix} A_f P_{11} + P_{11} A'_f & A_f P_{12} + P_{12} A' - W'_1 & \dots \\ P'_{12} A'_f + A P'_{12} - W_1 & A P_{22} + P_{22} A' - W_2 - W'_2 & \dots \\ W_3 + W_4 + P'_{13} A'_f & W_5 + W_6 - W_7 + P'_{23} A' & \dots \\ B'_f & B' & \dots \\ \dots & A_f P_{13} + W'_3 + W'_4 & B_f \\ \dots & A P_{23} + W'_5 + W'_6 - W'_7 & B \\ \dots & W_8 + W'_8 + W_9 + W'_9 & 0 \\ \dots & 0 & -I \end{bmatrix} \leq 0 \\
& \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Claramente, a equação (5.11) representa um problema relaxado quando comparado com a equação (3.49), implicando que

$$\Phi_{(A_r, B_r, C_r) \in \mathcal{Q}} \geq \Phi_L \tag{5.12}$$

Aqui também, o limitante inferior dado por (5.11), é um problema de otimização via LMI que pode ser eficientemente resolvido.

5.5.3 Construção de \mathcal{Q}

O problema de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador não impõe restrições naturais às variáveis do problema, que são os elementos das matrizes A_r , B_r , C_r , R , P , W_1 , W_2 , W_3 , W_4 , W_5 , W_6 , W_7 , W_8 e W_9 . Para construir a região de busca, definida pelo hiper-retângulo \mathcal{Q} , uma nova região relaxada pode ser obtida resolvendo-se $2N_t$ problemas de otimização via LMIs, sendo N_t o número total de variáveis. Denotando $x \in \mathbb{R}^{N_t}$ o vetor de todas as variáveis matriciais (exceto A_r , B_r e C_r), resolva

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_i \\
\text{s.a} \quad & (5.11) \\
& i = 1, \dots, N_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_i \\ \text{s.a.} \quad & (5.11) \\ & i = 1, \dots, N_t \end{aligned}$$

Com este procedimento obtêm-se,

$$x_{min} \leq x \leq x_{max} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^{N_t}$$

Os valores máximo e mínimo dos elementos da matrizes A_r , B_r e C_r são obtidos em função dos vetores x_{min} e x_{max} .

5.5.4 Análise da Convergência

Claramente, Φ_L e Φ_U definidos nas equações (5.11) e (5.9) satisfazem as condições **C1** e **C2** mostradas na seção 5.3.4, portanto o algoritmo converge para o ótimo global em um tempo finito.

Capítulo 6

Exemplos

6.1 Introdução

Neste capítulo será mostrado um apanhado de exemplos numéricos que ilustram os resultados obtidos com os algoritmos propostos nos capítulos 4 e 5. Por motivos diversos, os algoritmos de otimização local foram implementados utilizando-se o software LMIsol [dFG97] e os algoritmos de otimização global foram implementados utilizando-se o software *LMI Control Toolbox* [GNLC95].

6.2 Otimização Local

Exemplo 1. Este exemplo foi abordado em [APFH97]; trata-se de um sistema dinâmico contínuo dado por:

$$A = \begin{bmatrix} -18.5544 & 2.9393 & 5.8739 & 7.4693 \\ 21.2758 & -3.4087 & -6.7954 & -8.5100 \\ -17.0577 & 2.7091 & 5.3106 & 6.9667 \\ 38.7915 & -6.1881 & -12.2708 & -15.6391 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} -6.9 & 10.2 & -6.6 & 16.9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4.175 & 1.025 & 1.150 & 1.975 \end{bmatrix}$$

O algoritmo 3 de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos (seção 4.2.1) foi inicializado com os modelos reduzidos obtidos pelos métodos: Hankel e realização balanceada (com o critério de Moore e com a seleção \mathcal{H}_2). A redução de modelos foi realizada para $r = 1, 2, 3$. Os resultados estão mostrados na tabela 6.1. O número de variáveis envolvidas foi 19 ($r = 1$), 30 ($r = 2$) e 44 ($r = 3$).

Estes resultados mostram que a eficiência dos algoritmos de otimização local de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos depende fundamentalmente do modelo reduzido com

r	Hankel		Critério de Moore		Seleção \mathcal{H}_2	
	$\mathcal{H}_2(\text{inicial})$	$\mathcal{H}_2(\text{final})$	$\mathcal{H}_2(\text{inicial})$	$\mathcal{H}_2(\text{final})$	$\mathcal{H}_2(\text{inicial})$	$\mathcal{H}_2(\text{final})$
1	8.014	8.008	8.000	8.170	2.590	2.580
2	1.183	0.883	0.059	0.059	0.059	0.059
3	1.050	0.780	0.045	0.044	0.013	0.007

Tabela 6.1: Valores iniciais e finais da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução para as três inicializações (exemplo 1).

o qual o algoritmo é inicializado. Neste exemplo os algoritmos **1** e **2** também foram executados e os resultados foram praticamente os mesmos obtidos pelo algoritmo **3**.

Exemplo 2. O segundo exemplo consiste na aplicação do algoritmo **3** de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos a um sistema tratado em [GLS96], cujo modelo é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.005 & -0.99 \\ -0.99 & -5000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Inicializando o algoritmo **3** de redução \mathcal{H}_2 de modelos contínuos com o modelo reduzido obtido pelo método de Moore, o modelo reduzido final obtido foi: $A_r = -0.00498$, $B_r = -0.999$ e $C_r = -0.9991$ e a norma \mathcal{H}_2 do erro de redução foi: $\|G(s) - G_r(s)\|_2 = 100.0$. Inicializando com o modelo reduzido obtido com a seleção \mathcal{H}_2 , o modelo reduzido final foi: $A_r = -4996.64$, $B_r = -100.18$ e $C_r = -99.81$ e a norma \mathcal{H}_2 do erro de redução foi: $\|G(s) - G_r(s)\|_2 = 9.802$. Utilizando o modelo reduzido obtido via Hankel obteve-se: $A_r = -0.0049$, $B_r = -0.0099$ e $C_r = 98.9998$ e a norma \mathcal{H}_2 do erro de redução foi: $\|G(s) - G_r(s)\|_2 = 100.0$. A tabela 6.2 resume esses resultados. Neste exemplo, nota-se uma substancial diferença no resultado obtido a partir da inicialização via seleção \mathcal{H}_2 .

r	Hankel	Critério de Moore	Seleção \mathcal{H}_2
	$\mathcal{H}_2(\text{final})$	$\mathcal{H}_2(\text{final})$	$\mathcal{H}_2(\text{final})$
1	100.00	100.00	9.802

Tabela 6.2: Valores finais da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução para as três inicializações (exemplo 2).

Exemplo 3. O exemplo consiste na aplicação do algoritmo 3 de redução \mathcal{H}_2 de modelos discretos (seção 4.2.2) no modelo de um sistema discreto de ordem 7 com duas entradas e duas saídas. As matrizes que descrevem o sistema são dadas na equação (6.1).

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1.00294 & 0.00178 & -0.00332 & -0.00040 & -0.00149 & -0.0072 & -0.00001 \\ 0.00769 & 1.00310 & -0.00815 & -0.00176 & -0.00341 & -0.00134 & 0.00050 \\ 0.00641 & 0.00294 & 0.99302 & -0.00119 & -0.00292 & -0.00124 & 0.00029 \\ 0.00563 & 0.00245 & -0.00599 & 0.99873 & -0.00256 & -0.00105 & 0.00031 \\ 0.00814 & 0.00325 & -0.00853 & -0.00200 & 0.99637 & -0.00141 & 0.00055 \\ 0.00403 & 0.00206 & -0.00436 & -0.00080 & -0.00194 & 0.99913 & 0.00012 \\ 0.00383 & 0.00206 & -0.00422 & -0.00068 & -0.00187 & -0.00085 & 1.00008 \end{bmatrix} \\
 B' &= \begin{bmatrix} 0.0016 & 0.0007 & 0.0014 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0013 & 0.0014 \\ 0.0022 & 0.0051 & 0.0037 & 0.0041 & 0.0061 & 0.0031 & 0.0029 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} -1.9674 & -4.3198 & 3.6035 & -1.8558 & 2.1119 & 1.6802 & 1.0413 \\ -2.6499 & -0.3149 & 2.0919 & 2.3478 & 1.4106 & -0.0212 & -0.3332 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

O algoritmo foi inicializado com os modelos reduzidos obtidos com a realização balanceada utilizando-se os dois critérios de seleção de estados: seleção pelos valores singulares e seleção pela norma \mathcal{H}_2 . Os resultados estão resumidos na tabela 6.3.

r	Seleção com valores singulares		Seleção com critério \mathcal{H}_2		Número de variáveis envolvidas
	$\mathcal{H}_2(\text{inicial})$	$\mathcal{H}_2(\text{final})$	$\mathcal{H}_2(\text{inicial})$	$\mathcal{H}_2(\text{final})$	
1	0.2096	0.2095	0.1421	0.1241	44
2	0.1934	0.1910	0.1156	0.0985	60
3	0.1777	0.1762	0.0655	0.0237	79
4	0.1600	0.1596	0.0335	0.0153	101
5	0.1327	0.1323	0.0181	0.0104	126
6	0.0888	0.0880	0.0142	0.0021	154

Tabela 6.3: Valores iniciais e finais da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução para os dois critérios de seleção de estados (exemplo 3).

Estes resultados mostram que o algoritmo pode reduzir significativamente a norma do erro de redução tomando como base o erro inicial de redução. Ainda, mostram que a eficiência do algoritmo depende fundamentalmente do modelo reduzido com o qual

o algoritmo é inicializado.

É interessante notar que, utilizando o critério \mathcal{H}_2 como inicialização, obtém-se um modelo de ordem $r = 3$ com desempenho superior ao do modelo reduzido com $r = 6$, fornecido pelo algoritmo quando inicializado com o critério dos valores singulares.

Exemplo 4. O quarto exemplo foi abordado em [Hel94]; a função de transferência do sistema dinâmico é dada por:

$$G(s) = \frac{s^4 + 9s^3 + 19s^2 + 34s + 18}{2s^5 + 7s^4 + 19s^3 + 28s^2 + 26s + 8}$$

A tabela 6.4 resume os resultados obtidos utilizando-se os três algoritmos de redução \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos (seção 4.3.1).

r	Alg. 1	Alg. 2	Alg. 3	Número de variáveis
	\mathcal{H}_∞	\mathcal{H}_∞	\mathcal{H}_∞	
1	0.2989	0.2988	0.2988	26
2	0.1225	0.1222	0.1221	38
3	2.731×10^{-2}	2.734×10^{-2}	2.728×10^{-2}	53

Tabela 6.4: Valores finais da norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução (exemplo 4).

Neste caso, o algoritmo **3** proporcionou resultados iguais ou superiores aos alcançados pelos demais. A função transferência do modelo reduzido de ordem 2, obtido com o algoritmo **3**, é dada por

$$G_r(s) = \frac{0.1162s^2 - 0.5506s + 8.9634}{s^2 + 4.1818s + 4.2030} \quad (6.2)$$

Exemplo 5. Este exemplo consiste na redução \mathcal{H}_∞ de modelos do sistema de controle da posição angular de uma câmera colocada em um satélite [DB95]; a função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+4)} \quad (6.3)$$

Aplicando os três algoritmos de redução \mathcal{H}_∞ de modelos contínuos, obteve-se os resultados mostrados na tabela 6.5 (o algoritmo **3** obteve o melhor resultado). Neste exemplo, a função de transferência do modelo reduzido obtido com o algoritmo **3** é

r	Alg. 1	Alg. 2	Alg. 3	Número de variáveis
	\mathcal{H}_∞	\mathcal{H}_∞	\mathcal{H}_∞	
1	2.34×10^{-2}	2.22×10^{-2}	2.17×10^{-2}	15

Tabela 6.5: Valores finais da norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução (exemplo 5).

dada por:

$$G_r(s) = \frac{-0.0184s + 0.0645}{s + 0.4822} \quad (6.4)$$

Para ilustrar a aproximação entre modelo original, equação (6.3), e o modelo reduzido, equação (6.4), são mostradas na figura 6.1 as respostas em frequência dos dois modelos.

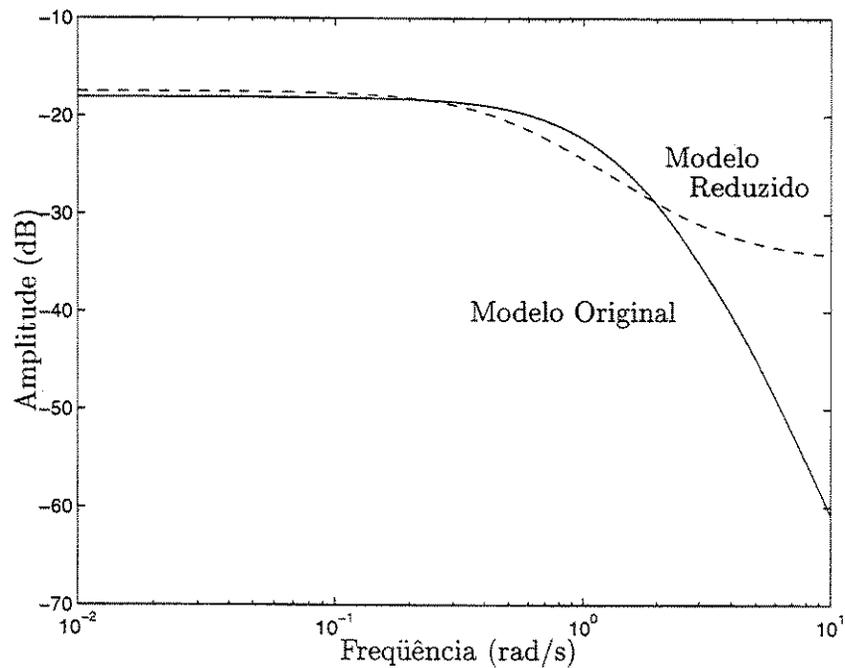


Figura 6.1: Resposta em frequência dos modelos original e reduzido (exemplo 5).

Exemplo 6. O exemplo consiste na aplicação dos algoritmos de redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos (seção 4.3.2) no seguinte sistema:

$$G(z) = \frac{z + 0.5}{z^3 + 0.7z^2 - 0.14z - 0.12}$$

A tabela 6.6 mostra os resultados obtidos.

	Alg. 1	Alg. 2	Alg. 3	Número de
r	\mathcal{H}_∞	\mathcal{H}_∞	\mathcal{H}_∞	variáveis
1	0.9295	0.9295	0.9295	15

Tabela 6.6: Valores finais da norma \mathcal{H}_∞ do erro de redução (exemplo 6).

Neste caso, os três algoritmos obtiveram o mesmo resultado. De acordo com a teoria de redução de modelos com a norma Hankel [Glo84], a norma do erro de redução é limitada: $\|G(z) - G_r(z)\|_\infty \geq \sigma_{r+1}$. Neste caso, os valores singulares são: $\sigma_1 = 1.3015$, $\sigma_2 = 0.9295$ e $\sigma_3 = 7.6892 \times 10^{-9}$, logo, para $r = 1$, $\|G(z) - G_r(z)\|_\infty \geq 0.9295$, indicando que o resultado obtido corresponde ao mínimo global do problema. Neste caso, função de transferência do modelo reduzido é dada por:

$$G_r(z) = \frac{0.2069z + 0.0093}{z + 0.9271}$$

Exemplo 7. O exemplo consiste na redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos incertos (seção 4.3.4), do seguinte modelo:

$$A = \begin{bmatrix} 0.7200 & 0.4947 + \Delta & -0.4203 & -0.0385 & 0.0605 & -0.0086 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B' = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.3700 + \delta \\ 0 & 0 & 0 & 0.1000 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo que Δ e δ são os parâmetros incertos limitados por:

$$-0.05 \leq \Delta \leq 0.05$$

$$-0.5 \leq \delta \leq 0.5$$

Os resultados apresentados pelo algoritmo 3 de redução \mathcal{H}_∞ de modelos discretos incertos para diferentes valores de r estão mostrados na tabela 6.7.

r	$\mathcal{H}_\infty(\text{inicial})$	$\mathcal{H}_\infty(\text{final})$	N. de variáveis
1	10.8577	6.2281	35
2	7.8865	5.9992	49
3	7.4950	5.8280	66
4	7.2969	5.8180	86
5	7.0364	5.8180	109

Tabela 6.7: Valores inicial e final do custo garantido \mathcal{H}_∞ dos erros de redução (exemplo 7).

Apenas para ilustrar, o modelo reduzido de ordem 2 é mostrado na equação (6.5).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.9199 & -0.1151 \\ 0.1320 & 0.7206 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8324 \\ -0.5440 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0.3337 & -0.7369 \\ 0.8789 & 2.3039 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0459 \\ -0.1873 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Os valores singulares do modelo original e reduzido estão mostrados na figura 6.2 e os valores singulares do modelo do erro de redução estão mostrados na figura 6.3.

6.3 Otimização Global

Nesta seção, foram utilizados os algoritmos *branch and bound* apresentados no capítulo 5.

Exemplo 8. O primeiro exemplo refere-se à redução \mathcal{H}_2 do modelo de um sistema dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.1000 & -0.8889 \\ 1.0000 & -0.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -1.0000 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

O objetivo é obter um modelo de primeira ordem, isto é, $r = 1$. A figura 6.4 mostra a evolução dos limitantes inferior e superior da função Φ , equações (5.3) e (5.1). Como pode ser notado, o algoritmo necessitou de 80 iterações para reduzir a

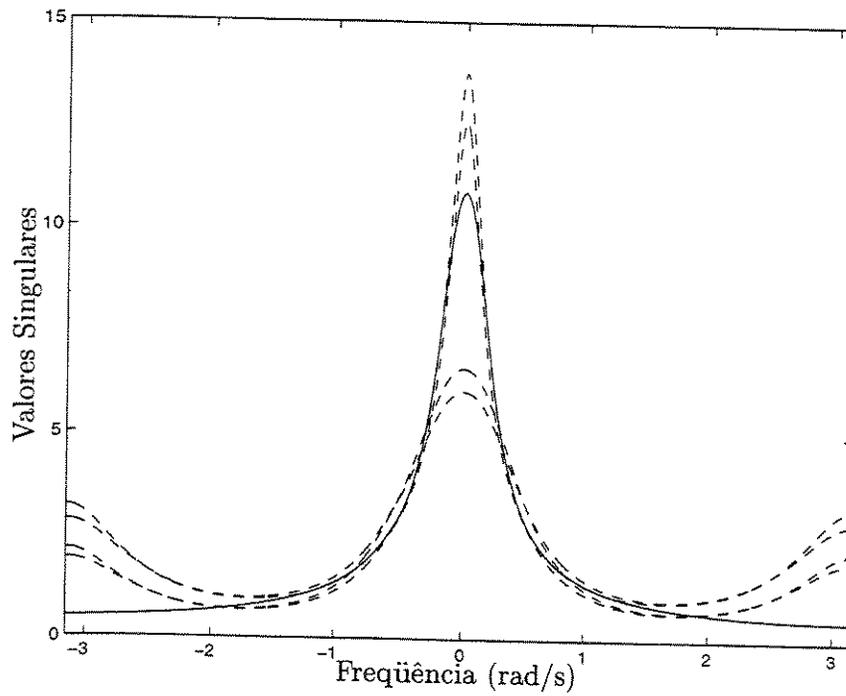


Figura 6.2: Diagrama de valores singulares para o exemplo 7: vértices do sistema original (tracejado) e modelo reduzido precisamente conhecido (sólido).

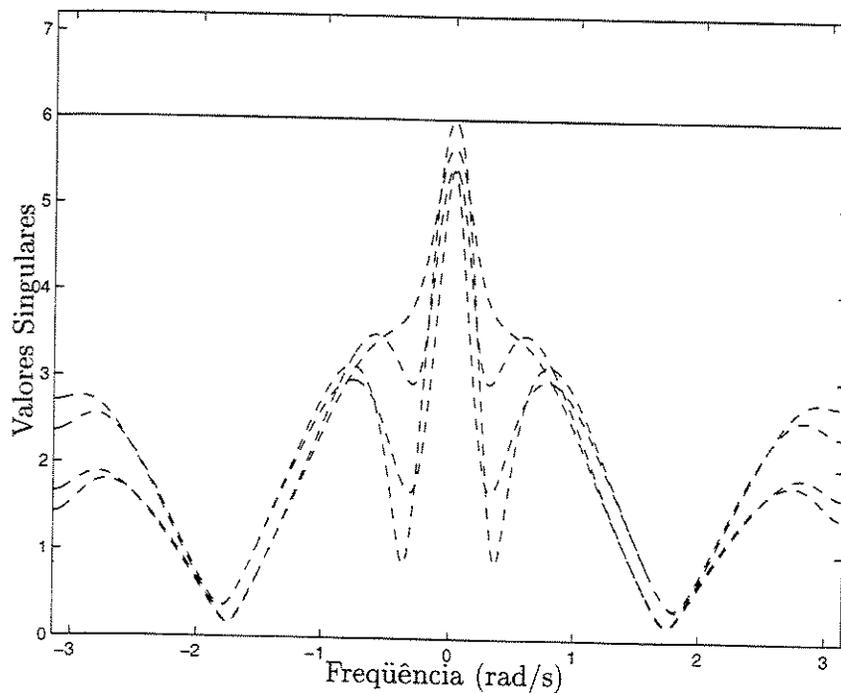


Figura 6.3: Diagrama de valores singulares para o exemplo 7: vértices do modelo do erro de redução (tracejado) e custo garantido \mathcal{H}_∞ , $\gamma = 5.9992$ (sólido).

diferença entre o limitante superior e o inferior para menos que 0.4% do limitante superior. O número de variáveis envolvidas foi 10. Para efeito de comparação com os outros métodos de redução de modelos, mostra-se na figura 6.4 a raiz quadrada dos valores dos limitantes superior e inferior.

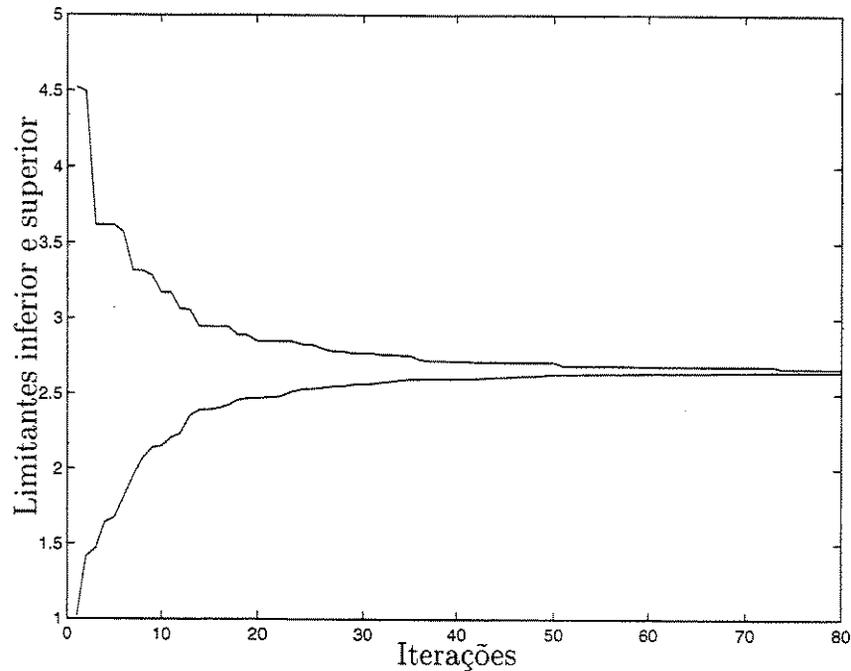


Figura 6.4: Evolução dos limitantes inferior e superior para a redução \mathcal{H}_2 do modelo dado no exemplo 8.

O modelo reduzido resultante é dado por

$$\dot{x}(t) = -1.6648x(t) + 1.0022u(t)$$

$$y(t) = 2.8323x(t)$$

A norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução é 2.6610. Usando a realização balanceada [Moo81], obtêm-se 4.1088 e utilizando o algoritmo de otimização local descrito na seção 4.2.1 o modelo reduzido resultante proporcionou norma \mathcal{H}_2 3.0632. Como esperado, o algoritmo *branch and bound* produziu melhor resultado que os outros métodos de otimização local. Contudo, o algoritmo *branch and bound* demanda um grande esforço computacional. Neste exemplo, o tempo de CPU gasto pelo algoritmo de otimização global foi 527.99s (Pentium, 200MHz) e o tempo de CPU gasto pelo

algoritmo de otimização local foi 4.24s (Sun Ultra 1, 123MHz).

Apenas para ilustração, neste caso, a norma \mathcal{H}_2 da diferença entre o sistema original e o modelo reduzido de ordem $r = 1$ pode ser diretamente calculada como função de A_r , B_r e C_r . Fixando-se $B_r = 1$, o ótimo global da função Φ pode ser obtido através da divisão exaustiva do domínio paramétrico. A figura 6.5 mostra a norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução como uma superfície no espaço do domínio paramétrico dado por $-10 < A_r < 0$, $-10 < C_r < 10$. As curvas de nível da norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução estão mostradas na figura 6.6. Pode-se notar que o valor ótimo da norma \mathcal{H}_2 coincide (indicado por "+") com o valor ótimo obtido pelo algoritmo *branch and bound*.

Exemplo 9. O segundo exemplo refere-se à redução \mathcal{H}_2 do modelo de um sistema de controle que mantém constante a tensão na lâmina de aço quente de uma máquina de laminação (veja [DB95] para detalhes). A função de transferência do sistema é dada por

$$G(s) = \frac{0.0350s + 0.0175}{2.5s^6 + 8.5s^5 + 11.125s^4 + 7s^3 + 2.125s^2 + 0.285s + 0.0175} \quad (6.7)$$

O algoritmo *branch and bound* foi utilizado para se obter o modelo reduzido. A figura 6.7 mostra a evolução dos limitantes inferior e superior da função Φ . (Na verdade, mostra-se a raiz quadrada dos valores dos limitantes superior e inferior).

O modelo reduzido obtido com o ótimo global da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução confinado no intervalo $0.0557 \leq \mathcal{H}_2 \leq 0.0616$ (precisão abaixo de 10%) é:

$$\dot{x}(t) = -0.054x(t) + 0.0089u(t)$$

$$y(t) = 2.4781x(t)$$

Neste caso, o número total de iterações é 17491 e o número de variáveis envolvidas é 32. Este exemplo mostra que o algoritmo *branch and bound* pode apresentar lenta convergência para problemas de alta ordem.

Exemplo 10. Este exemplo consiste na redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador, utilizando-se o algoritmo *branch and bound* proposto na seção 5.5.

O modelo da planta é dado por

$$G(s) = \frac{9}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

A planta é realimentada pelo controlador que tem o seguinte modelo:

$$C(s) = \frac{20.8}{s^3 + 15s^2 + 74s + 120}$$

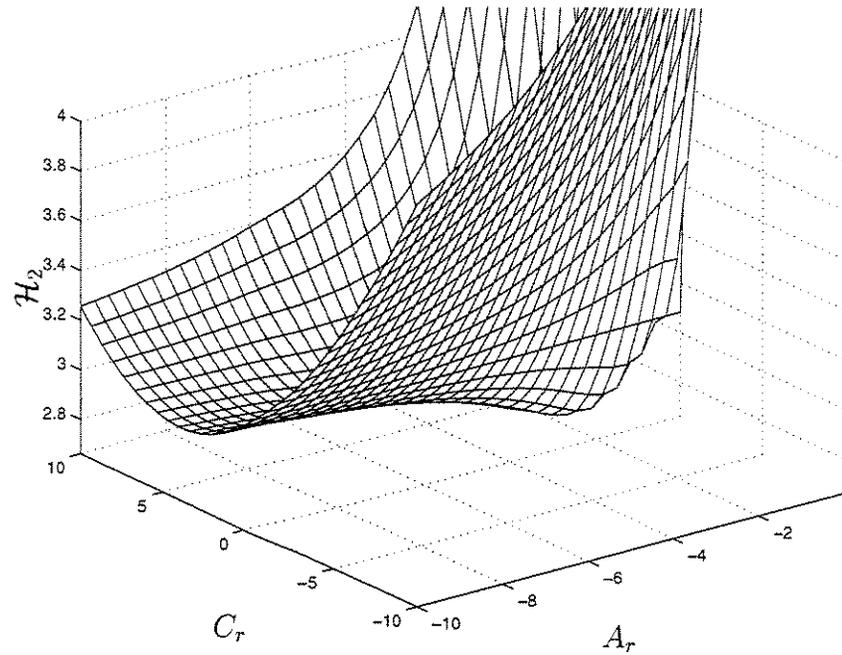


Figura 6.5: Superfície da norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução (exemplo 8).

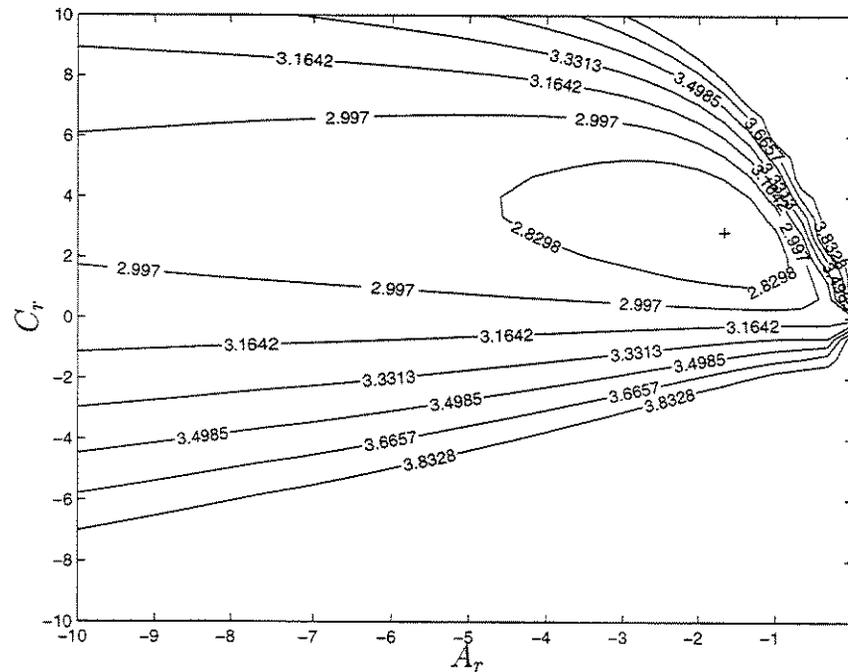


Figura 6.6: Curvas de nível da norma \mathcal{H}_2 do modelo do erro de redução do problema (exemplo 8). O ótimo global obtido pelo algoritmo *branch and bound* está indicado por +.

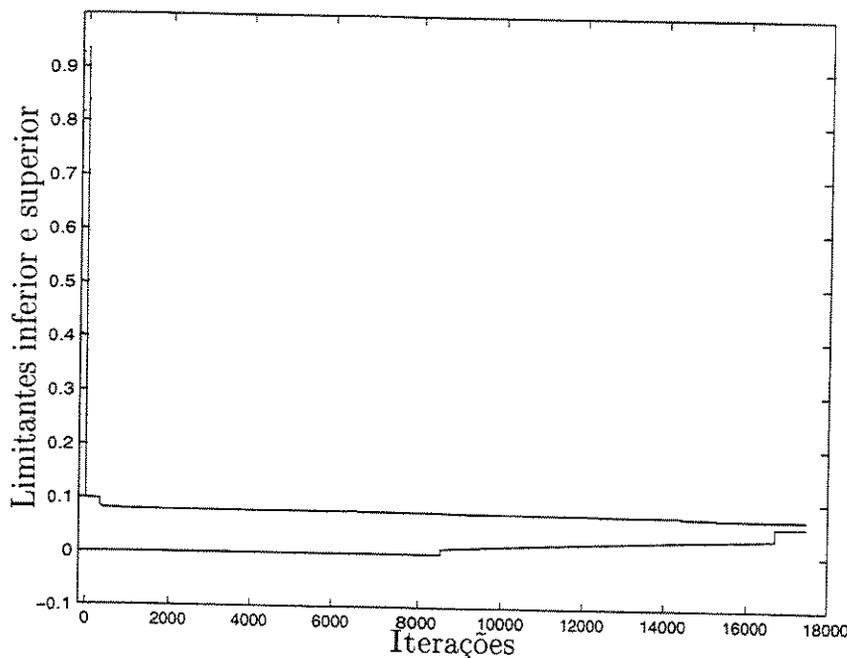


Figura 6.7: Evolução dos limitantes inferior e superior para a redução \mathcal{H}_2 do modelo dado no exemplo 9.

A função de transferência do modelo do sistema realimentado (planta e controlador) é

$$H(s) = \frac{9s^3 + 135s^2 + 666s + 1080}{s^6 + 21s^5 + 175s^4 + 735s^3 + 1623.99s^2 + 1763.99s + 907.2}$$

O diagrama de blocos do erro de redução está mostrado na figura 3.5 (capítulo 3), sendo que, na figura, (A, B, C) está representado por $G(s)$ (planta), (A_k, B_k, C_k) está representado por $C(s)$ (controlador original) e (A_r, B_r, C_r) está representado por $C_r(s)$ (controlador de ordem reduzida).

Utilizando-se o algoritmo *branch and bound* de redução \mathcal{H}_2 da ordem do controlador para este sistema, obteve-se o seguinte modelo reduzido do controlador:

$$C_r(s) = \frac{0.6054}{s + 3.3075}$$

sendo que o valor ótimo da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução obtido após 105 iterações, foi 2.92×10^{-2} . O número de variáveis envolvidas foi 59.

O modelo do sistema realimentado com o controlador de ordem reduzida ótimo é dado por

$$H_r(s) = \frac{9s + 29.76}{s^4 + 9.31s^3 + 30.84s^2 + 42.38s + 25.29}$$

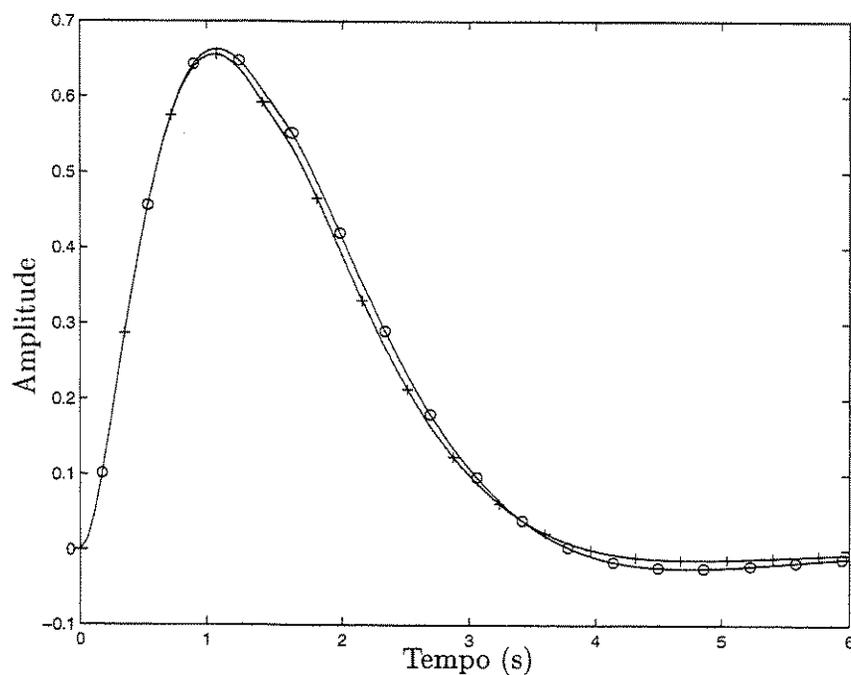


Figura 6.8: Respostas impulsivas: do sistema realimentado com o controlador original (“o”) e do sistema realimentado com o controlador reduzido (“+”) (exemplo 10).

A figura 6.8 mostra as respostas impulsivas do sistema realimentado com o controlador original e do sistema realimentado com o controlador reduzido. É interessante notar que, segundo os resultados apresentados na figura 6.8 e segundo o valor ótimo da norma \mathcal{H}_2 do erro de redução, o algoritmo *branch and bound* proporcionou um excelente resultado para a redução de ordem do controlador.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

O problema de redução de modelos foi investigado e foram propostos alguns métodos de otimização local e global. A redução tendo por critérios as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ foi abordada para sistemas lineares, invariantes no tempo, contínuos e discretos no tempo, precisamente conhecidos ou com incertezas nos parâmetros do modelo.

Tendo formulado os problemas de redução de modelos, foram propostos alguns algoritmos de otimização local cujos resultados obtidos mostraram que a solução final depende fortemente da inicialização dos procedimentos. Apesar de não ter garantia de convergência, estes algoritmos, em geral, proporcionam bons resultados de otimização e baixo custo computacional.

Também foi proposto um algoritmo de otimização global, envolvendo a técnica de otimização não-linear *branch and bound*, que possibilita a obtenção do ótimo global com garantia de convergência em tempo finito. O algoritmo *branch and bound* proposto neste trabalho, envolve a construção de uma árvore de busca com problemas de otimização descritos na forma de LMIs em cada nó. Essas LMIs são eficientemente resolvidas. Uma desvantagem do método proposto é que, por se tratar de um problema NP-hard, em alguns casos o custo computacional pode ser muito elevado.

A formulação da redução de ordem de modelos através de LMIs produz, para uma planta de n estados, m entradas, p saídas e um modelo reduzido de ordem r , um problema com $r^2 + rm + pr + (n+r)(n+r+1)/2 + p(p+1)/2$ variáveis e um total de 4 termos não lineares (envolvendo o produto de $(n+r)(r+p)$ variáveis). No procedimento iterativo (otimização local), apenas LMIs são resolvidas, sem que haja o confinamento do espaço de busca nas variáveis. Neste caso, a cada iteração utiliza-se um algoritmo de pontos interiores de características polinomiais de convergência, e um ótimo local é atingido após poucas iterações.

No algoritmo *branch-and-bound*, por outro lado, as variáveis de otimização são confinadas em hiper-retângulos que têm seus lados reduzidos a cada iteração. Embora as iterações se caracterizem também por problemas semelhantes aos do procedimento de otimização local (isto é, LMIs), há as restrições devido ao confinamento das variáveis de otimização no interior do hiper-retângulo e, além disso, a redução do volume total do hiper-retângulo requer em geral um grande número de iterações.

Uma nova arquitetura de redução da ordem do controlador foi proposta, objetivando-se obter um controlador de ordem reduzida que aproxime o resultado obtido com o projeto original, tendo como parâmetro a resposta do sistema controlado original. Um algoritmo *branch and bound* de otimização global foi proposto para esta nova estrutura de projeto de controladores reduzidos e os resultados apresentados mostraram a sua eficiência.

Devido ao fato de que a otimização global do problema de redução de modelos estar sendo proposta pela primeira vez, muitos casos devem ainda ser abordados. A otimização global pode ser aplicada (trabalhos futuros) nos seguinte casos:

- i. Otimização global de redução de modelos para os casos \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , contínuos, com incertezas na planta.
- ii. Otimização global de redução de modelos para os casos \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , discretos no tempo, com ou sem incertezas na planta.
- iii. Otimização global de redução de modelos com ponderações na frequência para os casos \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , contínuos e discretos no tempo, com ou sem incertezas na planta.
- iv. Otimização global do problema de redução de ordem do controlador casos \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , contínuos com incertezas na planta.
- v. Otimização global do problema de redução de ordem do controlador casos \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , discreto no tempo, com ou sem incertezas na planta.
- vi. Otimização global do problema de redução da ordem do controlador para todos casos acima, porém colocando-se o controlador em série com a planta e não na realimentação.
- vii. Para todos os casos de redução da ordem do controlador descritos acima, incluir uma restrição para garantir a estabilidade do controlador.
- viii. Melhorar o desempenho do algoritmo, tentando reduzir o número de variáveis que devem ser divididas pelo *branch and bound* através de manipulações prévias das BMIs que descrevem o problema.
- ix. Investigar soluções subótimas que tenham um desempenho intermediário entre a otimização global e o procedimento iterativo apresentado no capítulo 4. Por exemplo, fixando-se uma estrutura particular para as matrizes P e Q envolvidas no processo que simplifique o problema ou mesmo elimine algumas variáveis.

Bibliografia

- [AP98a] E. Assunção e P. L. D. Peres. Redução de modelos com critério \mathcal{H}_∞ através de desigualdades matriciais lineares: casos contínuo e discreto no tempo. In *XII Congresso Brasileiro de Automática*, volume 3, pp. 885–890, Uberlândia, MG, 1998.
- [AP98b] E. Assunção e P. L. D. Peres. Redução de modelos contínuos com critério \mathcal{H}_2 através de desigualdades matriciais lineares. In *XII Congresso Brasileiro de Automática*, volume 3, pp. 879–884, Uberlândia, MG, 1998.
- [AP98c] E. Assunção e P. L. D. Peres. Redução de modelos discretos com critério \mathcal{H}_2 através de desigualdades matriciais lineares. In *VIII Latin American Congress on Automatic Control*, volume 1, pp. 61–66, Viña del Mar, Chile, 1998.
- [AP99a] E. Assunção e P. L. D. Peres. A global optimization approach for the \mathcal{H}_2 -norm model reduction problem. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1857–1862, Phoenix, AZ, USA, 1999.
- [AP99b] E. Assunção e P. L. D. Peres. A \mathcal{H}_2 and/or \mathcal{H}_∞ -norm model reduction of uncertain discrete-time systems. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, pp. 4466–4470, San Diego, CA, USA, 1999.
- [APFH97] E. Assunção, P. L. D. Peres, P. A. V. Ferreira, e E. M. Hemerly. Seleção de estados em redução de modelos com realização balanceada. In *Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, volume CD-ROM, pp. COB–098, Bauru, SP, Brasil, 1997.
- [APFH98] E. Assunção, P. L. D. Peres, P. A. V. Ferreira, e E. M. Hemerly. States selection in model reduction via balanced realization. In *VIII Latin American Congress on Automatic Control*, volume 2, pp. 697–702, Viña del Mar, Chile, 1998.
- [AS88] P. Agathoklis e V. Sreeram. Truncation criteria for model reduction using balanced realisation. *Electronics Letters*, 24(14):837–838, July 1988.

- [Ass91] E. Assunção. *Métodos para Redução de Modelos*. Tese de Mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA, 1991.
- [BB91] S. Boyd e C. H. Barrat. *Linear Controller Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.
- [BB92] V. Balakrishnan e S. Boyd. Global optimization in control system analysis and design. In C. T. Leondes, editor, *Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Applications*, volume 53. Academic Press, New York, NY, 1992.
- [BB97] C. Beck e P. Bendotti. Model reduction methods for unstable uncertain systems. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, 1997.
- [BBB91] V. Balakrishnan, S. Boyd, e S. Balemi. Branch and bound algorithm for computing the minimum stability degree of parameter-dependent linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1(4):295–317, 1991.
- [BD93] C. Beck e J. Doyle. Model reduction of behavioural systems. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3652–3657, San Antonio, TX, USA, 1993.
- [BD95] C. Beck e J. Doyle. Realizations of uncertain systems and formal power series. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, pp. 1481–1485, Seattle, Washington, USA, 1995.
- [BD97] C. Beck e R. D’Andrea. Minimality, controllability and observability for uncertain systems. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, pp. 3130–3135, Albuquerque, New Mexico, USA, 1997.
- [BDG96] C. Beck, J. Doyle, e K. Glover. Model reduction of multidimensional and uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-41(10):1466–1477, October 1996.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.
- [DB95] R. C. Dorf e R. H. Bishop. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1995.
- [dFG97] M. C. de Oliveira, D. P. Farias, e J. C. Geromel. *LMISol, User’s guide*. UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, 1997.

- [EB94] L. El Ghaoui e V. Balakrishnan. Synthesis of fixed-structure controllers via numerical optimization. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2678–2683, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994.
- [Glo84] K. Glover. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds. *International Journal of Control*, 39(6):1115–1193, February 1984.
- [GLS96] K. M. Grigoriadis, J. Lu, e R. E. Skelton. L_2 and L_2-L_∞ model reduction via linear matrix inequalities. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4282–4287, Kobe, Japan, 1996.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, e M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Mathworks Inc., Natick, MA, USA, 1995.
- [Gri95] K. M. Grigoriadis. Optimal H_∞ model reduction via linear matrix inequalities: continuous and discrete-time cases. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 3074–3079, New Orleans, LA, USA, 1995.
- [GS94a] K. M. Grigoriadis e R. E. Skelton. Alternating convex projection methods for covariance control design. *International Journal of Control*, 60(6):1083–1106, 1994.
- [GS94b] K. M. Grigoriadis e R. E. Skelton. Fixed-order control design for LMI control problems using alternating projection methods. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2003–2008, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994.
- [GSP94] K. C. Goh, M. G. Safonov, e G. P. Papavassilopoulos. A global optimization approach for the BMI problem. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2009–2014, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994.
- [Hel94] A. Helmersson. Model reduction using LMIs. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pp. 3217–3222, Lake Buena Vista, FL, USA, 1994.
- [Hen96] A. Hentz. *Redução de Ordem de Controladores, Formas Balançadas e Fatorações Coprimas*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1996.
- [HP90] D. Hinrichsen e A. J. Pritchard. An improved error for reduced-order models of discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-35(3):317–320, March 1990.

- [JK98] S. M. Joshi e A. G. Kelkar. Inner loop control of supersonic aircraft in the presence of aeroelastic modes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(6):730–739, November 1998.
- [Kav94a] D. Kavranoglu. A computational scheme for \mathcal{H}_∞ model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-39(7):1447–1451, July 1994.
- [Kav94b] D. Kavranoglu. \mathcal{H}_∞ -Norm approximation of systems by constant matrices and related results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-39(5):1006–1009, May 1994.
- [Kav96] D. Kavranoglu. Controller reduction for uncertain systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 887–892, Kobe, Japan, 1996.
- [KB96] D. Kavranoglu e M. Bettayeb. LMI based computational schemes for H_∞ model reduction. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pp. 191–196, San Francisco, CA, USA, 1996.
- [LHPW87] A. J. Laub, M. T. Heath, C. C. Paige, e R. C. Ward. Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(2):115–122, February 1987.
- [MF97] C. D. Maranas e C. A. Floudas. Global optimization in generalized geometric programming. *Computers & Chemical Engineering*, 21(4):351–369, 1997.
- [Moo81] B. C. Moore. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(1):17–32, February 1981.
- [OLLP97] D. C. Oh, K. R. Lee, S. K. Lee, e H. B. Park. Discrete balanced controller order reduction. In *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, pp. 3577–3581, Albuquerque, New Mexico, USA, 1997.
- [PTP97] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, e P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, 1997.
- [RE99] B. Rafaely e S. J. Elliott. $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Active control of sound in a headrest: design and implementation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-7(1):79–84, January 1999.
- [RS95] H. S. Ryoo e N. V. Sahinidis. Global optimization of nonconvex NLPs and MINLPs with applications in process design. *Computers & Chemical Engineering*, 19(5):551–566, 1995.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

- [SDN95] C. Schwarz, S. Dasgupta, e K. Nagpal. The \mathcal{H}_2 -norm of uncertain systems. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1437–1442, New Orleans, LA, USA, 1995.
- [VD97] C. Valentin e G. Duc. LMI-based algorithms for frequency weighted optimal \mathcal{H}_2 -norm model reduction. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pp. 767–772, San Diego, CA, USA, 1997.
- [WDBG91] W. Wang, J. Doyle, C. Beck, e K. Glover. Model reduction of LFT systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1233–1238, Brighton, England, 1991.
- [WS90] W. Wang e M. G. Safonov. Comparison between continuous and discrete-time model truncation. In *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 494–499, Honolulu, Hawaii, USA, 1990.
- [Wu96] F. Wu. Induced L_2 norm model reduction of polytopic uncertain linear systems. *Automatica*, 32(10):1417–1426, 1996.
- [XGF96] X. Xin, L. Guo, e C. Feng. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular \mathcal{H}_∞ control problems based on LMI. *Automatica*, 32(11):1581–1585, 1996.