

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

Análise de Junções Planares Ópticas pelo Método dos Elementos Finitos

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO DA
UNICAMP COMO PARTE DOS REQUISITOS EXIGIDOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Autor:

Marcelo Ishihara Davanço

Orientador:

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández-Figueroa

Banca Examinadora:

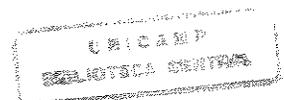
Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández-Figueroa - FEEC - UNICAMP

Prof. Dr. Evandro Conforti - FEEC - UNICAMP

Prof. Dr. Murilo Araújo Romero - USP/São Carlos

CAMPINAS, FEVEREIRO DE 2000.

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por Marcelo Ishihara Davanço
e aprovada pela Comissão
Julgada em 27 / 03 / 2000
H. E. F.
Orientador



200008753

UNIDADE Bc
N.º CHAMADA:
T/UNICAMP
10271a
41598
278/00

RB 11,00
14-07-00
CPO

CM-00142254-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

D271a Davanço, Marcelo Ishihara
Análise de junções planares ópticas pelo método dos
elementos finitos / Marcelo Ishihara Davanço.--
Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: Hugo Enrique Hernández-Figueroa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Ótica - Simulação por computador. 2. Ótica
integrada. 3. Método dos elementos finitos. I.
Hernández-Figueroa, Hugo Enrique. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação. III. Título.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a minha família pela compreensão e suporte sem os quais não seria possível realizar este trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Hugo Hernández pela confiança, apoio e (muita) paciência durante todo o processo.

Agradeço ao Cosme, pelo suporte, discussões e paciência; ao Vitaly, por me permitir utilizar seu computador, onde foi realizada a maioria das simulações deste trabalho; aos colegas do DMO com quem tive contato ao longo destes dois anos, pela amizade e suporte.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior - CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Códigos baseados em elementos finitos 2D são desenvolvidos para a simulação de junções bidimensionais de estruturas ópticas planares com até quatro portas de acesso alimentadas por guias de onda infinitos. Para o truncamento da janela numérica, foram utilizados PMLs (Perfectly Matched Layers). Três formulações do método dos elementos finitos são desenvolvidas, utilizando três condições de contorno distintas para simular guias de onda com acesso a uma junção: a primeira baseada numa expansão do campo nas portas em termos dos modos do guia correspondente; a segunda considerando variação puramente harmônica na direção do eixo dos guias de acesso; a terceira baseada numa aproximação paraxial da variação longitudinal do campo sobre as portas. Esta última, até onde sabemos, é original e representa uma alternativa mais eficiente - relativamente à primeira - e confiável - relativamente à segunda - para simulação. Ao final, alguns casos complexos são simulados e comparações são feitas entre as três condições de contorno. Os códigos foram parcialmente escritos em FORTRAN e MATLAB.

Abstract

Codes based on 2D-finite-elements are developed for the simulation of bidimensional junctions of planar optical structures with up to four accessing ports fed by infinite waveguides. To truncate the computational window, PMLs (Perfectly Matched Layers) are used. Three formulations of the finite-element method are developed, using three distinct boundary conditions for simulating the guides accessing the junction: the first is based on an expansion of the field over the ports in terms of the corresponding accessing guides; the second considers a purely harmonic variation of the field in the guide's axis' direction; the third is based on a paraxial approximation to the longitudinal variation of the field over the ports. This last condition, as far as we know, is original and represents a more efficient - relatively to the first - and more reliable - relatively to the second - alternative for simulation. At last, three complex cases are simulated and a few comparisons are made between the three conditions. The codes were partially developed in FORTRAN and MATLAB.

Conteúdo

1	Introdução	9
1.1	Considerações iniciais	9
1.2	Sumário do trabalho	10
2	Guias de onda planares	13
2.1	Introdução	13
2.2	Guia Planar Multicamadas	14
2.2.1	Equacionamento geral	14
2.2.2	Modos do guia planar multicamadas	17
2.3	Discretização do espectro radiativo	21
3	Formulação da Equação de Helmholtz 2D pelo Método dos Elementos Finitos	27
3.1	Introdução	27
3.2	Método dos elementos finitos	27
3.2.1	Definição da Malha	27
3.2.2	Elementos finitos	29
3.2.3	Funções de forma	29
3.2.4	Aproximação de soluções de equações diferenciais parciais	30
3.3	Formulação por MEF da equação de Helmholtz 2D escalar	32
3.4	Condições de contorno	37
3.4.1	Condição de Contorno por Expansão Modal (CCEM)	37
3.4.2	Condição de Contorno "Simples" (CCS)	39
3.4.3	Condição de Contorno Paraxial (CCP)	40
3.5	Cálculo das potências acopladas nos guias de acesso	43
4	Comparação de resultados empregando diferentes condições de contorno	45
4.1	Propagação modal	45
4.2	Guia com descontinuidade	47
4.2.1	Artifício na utilização da CCEM	47
4.2.2	Comparação das condições de contorno	51

5	Aplicações em junções complexas	57
5.1	Laser com cobertura anti-refletiva	57
5.2	Divisor de feixe optoeletrônico	60
5.3	Otimização de uma junção em 90° com alto contraste de índice	64
6	Conclusão	79
A	Modos do guia multicamadas	81
A.1	Modos Guiados	81
A.2	Modos Radiativos	82
A.2.1	Modos radiativos de substrato ($r=0$)	83
A.2.2	Modos radiativos de substrato-cobertura ($r=1,2$)	83
B	Elementos Simplexos	85
B.1	Definição	85
B.2	Funções de forma	87
B.2.1	Funções 1D lineares sobre um 1-simplexo	87
B.2.2	Funções 1D quadráticas sobre um 1-simplexo	87
B.2.3	Funções 2D lineares sobre um 2-simplexo	88
B.2.4	Funções 2D quadráticas sobre um 2-simplexo	88
B.3	Cálculo das integrais do MEF	90
B.3.1	Elementos 1D retilíneos	90
B.3.2	Elementos 2D triangulares	92
C	Dedução da equação de onda escalar 2D para o campo eletromagnético em uma PML.	95
C.1	Introdução	95
C.2	Equação de onda	96
C.3	Condições de contorno	98

Lista de Figuras

2-1	Guia <i>slab</i> . A estrutura é infinita nas direções x e z	14
2-2	Guia planar multicamadas com coordenadas locais para cada camada.	14
2-3	Mapeamento dos modos do guia planar em termos dos índices efetivos	21
2-4	Guia <i>slab</i> simétrico limitado por paredes elétricas/magnéticas em $y = \{-W/2, W/2\}$	22
2-5	Modos TE_0 para o guia <i>slab</i> infinito e dois guias limitados com $n_1 = n_3 = 1, 0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1, 0$	22
2-6	Modos TE_1 do guia <i>slab</i> infinito e dois guias limitados com $n_1 = n_3 = 1, 0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1, 0$	23
2-7	Modo radiativo para os guia aberto e limitado com $W = 4$ com $n_1 = n_3 = 1, 0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1, 0$	24
2-8	Quadrado da constante de propagação dos modos do guia <i>slab</i> limitado com $W = 20$ e $n_1 = n_3 = 1, 0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1, 0$	25
2-9	Quadrado da constante de propagação dos modos do guia <i>slab</i> limitado com $W = 4$ e $n_1 = n_3 = 1, 0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1, 0$	25
3-1	Malha com elementos triangulares em um região retangular com numerção global de nós e elementos.	28
3-2	Estrutura geral para a simulação de junções planares. A junção dentro do domínio Ω é alimentada por até quatro portas. Note que são usados PMLs para a simulação de regiões abertas. As condições de contorno sobre as paredes dos guias de acesso são do tipo Dirichlet homogêneas ($\phi = 0$).	33
3-3	Domínio composto por dois subdomínios de características diferentes. $\delta\Omega$ é o contorno de Ω com normal \hat{n} e $\delta\Omega_d$ a interface entre os dois meios.	35
4-1	Guia <i>slab</i> limitado por paredes elétricas utilizado para testar o método com as três condições de contorno. O campo incidente é a soma dos dois primeiros modos TE normalizados da estrutura.	45
4-2	Layout da estrutura utilizada para teste das condições de contorno.	47
4-3	Extensão de um guia de ondas blindado utilizado para cálculo de modos. O guia original estende-se sobre y_l , sendo l o número da porta correspondente.	48
4-4	Amplitude do campo elétrico para a janela $y \in [-5; 5] \mu m$ com e sem extensão do guia de acesso.	50
4-5	Amplitude do campo elétrico para a janela $y \in [-3; 3] \mu m$ com e sem extensão do guia de acesso.	50
4-6	Amplitude do campo elétrico na porta 2 com CCEM para a janelas numéricas $y \in [-3; 3] \mu m$ e $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 1] \mu m$, sem extensão e com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$	51
4-7	Amplitude do campo elétrico para as três condições de contorno para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 1] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$	52

4-8	Amplitude do campo elétrico calculada com a) CCEM b) CCP e c) CCS para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 1] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.	52
4-9	Amplitude do campo elétrico para as três condições de contorno para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 2] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.	54
4-10	Amplitude do campo elétrico calculada com a) CCEM b) CCP e c) CCS para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 2] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.	54
4-11	Amplitude do campo elétrico para as três condições de contorno para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 3] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.	55
4-12	Amplitude do campo elétrico calculada com a) CCEM b) CCP e c) CCS para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 3] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.	55
5-1	Modelo de laser com camada anti-refletiva utilizado para a simulação. O PML absorve o campo que escapa através da face, com um mínimo de reflexão.	57
5-2	Amplitude do campo elétrico para laser sem camada anti-refletiva. O padrão de onda estacionária indica a alta refletividade da face.	58
5-3	Refletividade da face do laser com cobertura anti-refletiva. Um mínimo de refletividade existe para L próximo de $0,206 \mu m$.	59
5-4	Amplitude do campo elétrico para laser com camada anti-refletiva de espessura quase-ótima $L = 0,206 \mu m$. O padrão de onda estacionária é bem menos expressivo do que no caso anterior.	59
5-5	Divisor de feixe optoeletrônico. A região mais clara corresponde ao espelho de índice n_m variável.	60
5-6	Potência refletida para modo TE fundamental incidente.	61
5-7	Potência transmitida para modo TE fundamental incidente.	61
5-8	Potência transmitida para modo TM fundamental incidente.	62
5-9	Potência refletida para do modo TM fundamental incidente.	62
5-10	Amplitude do campo elétrico para $n_m = 2,1$ para modo TE fundamental incidente, utilizando CCEM.	63
5-11	Amplitude do campo elétrico para $n_m = 2,1$ para modo TE fundamental incidente, utilizando CCP.	63
5-12	Amplitude do campo elétrico para $n_m = 2,1$ para modo TE fundamental incidente, utilizando CCS.	64
5-13	Junção com ângulo de 90° .	65
5-14	Potência relativa transmitida acoplada no modo TE_0 para a porta 2 da junção.	66
5-15	Potência relativa refletida acoplada no modo TE_0 para a porta 1 da junção.	66
5-16	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção, calculado com CCEM.	67
5-17	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção, calculado com CCP.	67
5-18	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção, calculado com CCS.	68
5-19	Junção de 90° com ressoador.	68

5-20	Potência relativa transmitida acoplada no modo TE_0 para porta 2 da junção com ressoador.	69
5-21	Potência relativa refletida acoplada no modo TE_0 para a porta 1 da junção com ressoador.	69
5-22	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressoador, calculado com CCEM.	70
5-23	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressoador, calculado com CCP.	70
5-24	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressoador, calculado com CCS.	71
5-25	Junção de 90° com ressoador e espelho de 45°	71
5-26	Potência relativa transmitida acoplada no modo TE_0 para a porta 2 da junção com ressoador e espelho.	72
5-27	Potência relativa refletida acoplada no modo TE_0 para a porta 1 da junção com ressoador e espelho.	72
5-28	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressonador e espelho, calculado com CCEM.	73
5-29	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressonador e espelho, calculado com CCP.	73
5-30	Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressoador e espelho, calculado com CCS.	74
5-31	Evolução do desempenho de transmissão da junção de 90° . A potência transmitida sobe de pouco mais de 30% para acima de 98%.	74
5-32	Evolução do desempenho de reflexão da junção de 90° . A reflexão cai de pouco mais de 20% a menos de 0,1% com o acoplamento do ressoador.	75
5-33	Divisor em T com ressoadores.	75
5-34	Potência Transmitida para os braços do divisor em T simétrico. Somente as curvas para o braço direito são mostradas, por serem coincidentes com as do esquerdo.	76
5-35	Potência refletida para a o divisor em T simétrico.	76
5-36	Potência transmitida para os dois braços do divisor em T assimétrico com deslocamento $d = 80$ nm. Note que a potência transmitida ao braço direito vai a aproximadamente 60 % enquanto o outro braço recebe apenas 35%.	77
5-37	Potência refletida para o divisor em T assimétrico.	77
B-1	2-Simplexo subdividido em 3 sub-simplexos. A coordenada ζ_m é igual a 1 quando M coincide com o ponto m	86
B-2	Funções de forma lineares para o 1-simplexo com respeito à coordenada $\zeta = \zeta_1$. (a) e (b) mostram N_1 e N_2 respectivamente.	89
B-3	Funções de forma quadráticas para o 1-simplexo com respeito à coordenada $\zeta = \zeta_1$. (a) e (b) mostram N_1 e N_2 respectivamente.	89
B-4	Funções de forma lineares para o 2-simplexo, em termos das coordenadas $\zeta = \zeta_1$, $\eta = \zeta_2$. As figuras de (a) a (c) mostram N_1 a N_3	89

B-5	Funções de forma quadráticas para o 2-simplexo em termos das coordenadas $\zeta = \varsigma_1$ e $\eta = \varsigma_2$. As funções $N_1 - N_6$ são mostradas na figura em (a)-(f).	90
B-6	Elemento retilíneo 1D	90
B-7	Transformação de coordenadas para elemento simplexo 2D.	92
C-1	Truncamento do domínio computacional utilizando PML perpendicular à direção z . A onda plana incidente não sofre reflexão na interface e é atenuada no interior do PML. A espessura δ deve ser ajustada de forma que a onda refletida na parede "dura" tenha amplitude insignificante ao sair do PML.	96

Lista de Tabelas

2.1	Valores de n_{eff} para dois modos TE, para distância W entre paredes elétricas.	23
3.1	Conectividade da malha da Figura 3-1.	28
3.2	Valores de s_x e s_y segundo orientação da PML.	34
4.1	Potências transmitidas e refletidas no guia <i>slab</i> simétrico. Cálculo com condições de contorno de expansão modal.	46
4.2	Potências transmitidas e refletidas no guia <i>slab</i> simétrico. Cálculo com condições de contorno paraxiais.	46
4.3	Potências transmitidas e refletidas para o guia <i>slab</i> simétrico. Cálculo com condições de contorno simples.	46
4.4	Número de elementos não-nulos das matrizes finais e tempo de resolução dos sistemas resultantes para as três condições de contorno.	47
4.5	Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM para diferentes números de modos utilizados. Os modos utilizados são para o guia com $y_l \in [-5; 5]$ sem extensão.	49
4.6	Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM para diferentes números de modos utilizados. Os modos utilizados são para o guia com $y_l \in [-5; 5]$ com extensão tal que $y_l \in [-8; 8]$	49
4.7	Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM para diferentes números de modos utilizados, para a estrutura sem PMLs. Os modos utilizados são para o guia com $y_l \in [-5; 5]$, extensão e PMLs.	49
4.8	Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM, CCP e CCS para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 1] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$	51
4.9	Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM, CCP e CCS para a janela $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 2] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$	53
4.10	Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM, CCP e CCS para a janela $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 3] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$	53
5.1	Refletividades para o laser sem filme AR obtidas para as três condições de contorno.	58
B.1	Valores de $C_{p,i}$ para elementos lineares.	93
B.2	Valores de $C_{p,i}$ para elementos quadráticos.	94

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações iniciais

A simulação computacional é uma ferramenta que permite reduzir gastos e tempo de processos de fabricação de estruturas ópticas integradas. Atualmente, métodos numéricos eficientes e modelos físicos realistas são utilizados para otimização de componentes, levando a bons resultados práticos.

Quando se deseja prever qualitativamente o comportamento de uma determinada estrutura, métodos numéricos de menor complexidade, que requeiram menores recursos computacionais e tempo de processamento, podem ser utilizados. Em particular, a aproximação de estruturas tridimensionais por estruturas planares bidimensionais permite que se tenha uma visão clara e intuitiva dos fenômenos envolvidos [1], [2], embora, na maioria dos casos, com precisão limitada. Resultados obtidos desta aproximação podem ainda servir como passo inicial para uma otimização mais fina utilizando-se modelos físicos mais completos, ou ainda para o desenvolvimento de novas técnicas para simulação. Em guias planares, é possível separar o campo eletromagnético em ondas do tipo TE e TM [1]; nestes casos, obtêm-se equações tais que, a partir de uma das componentes do campo elétrico ou magnético, as demais podem ser obtidas. Desta forma, torna-se necessário somente resolver-se uma equação de onda escalar [4], o que é muito interessante do ponto de vista computacional.

Muitos métodos foram desenvolvidos para a simulação de junções de guias de ondas planares, utilizando diferentes técnicas: Método dos Elementos de Fronteira (BEM - Boundary Element Method) [17], [15], Método da Propagação de Feixe (BPM- Beam-Propagation Method) [20] ou ainda o Método dos Elementos Finitos [18], [21], [23]; em especial, muita atenção foi dada ao problema do guia com descontinuidades longitudinais [13], [14], [17], [20], [19], [16], que envolve propagação em dois sentidos longitudinais opostos devido à reflexão do campo eletromagnético na descontinuidade; o método numérico deve ser capaz, portanto, de simultaneamente levar em conta ondas co- e contra-propagantes. Um problema semelhante surge quando se deseja simular problemas mais gerais, envolvendo estruturas com múltiplas portas de acesso, em que se tem propagação em várias direções [24].

O método dos elementos finitos (MEF) no domínio bidimensional permite simular estruturas com ondas propagando-se em qualquer direção sobre o plano. Permite, além disso, modelar estruturas não-homogêneas de formato qualquer, produzindo sistemas lineares esparsos que podem ser resolvidos de forma bastante eficiente; por estas razões decidimos utilizá-lo neste trabalho.

O MEF é definido numa região limitada do plano, de forma que alguns artifícios são necessários para a simulação de estruturas abertas e guias de acesso infinitos.

Em geral, condições de contorno especiais como as ABCs (Absorbing Boundary Conditions) [9] são utilizadas sobre o contorno do domínio computacional para absorver ondas propagando-se para regiões externas. Um artifício bastante estudado e que tem rendido bons resultados consiste em se recobrir a fronteira do domínio com camadas de uma material que absorve ondas incidentes sem que haja reflexões em sua interface. Este artifício, utilizado neste trabalho, foi introduzido pela primeira vez em 1994 [30] com o nome de Perfectly Matched Layer (PML). A eficiência da PML permite arbitrar condições de contorno de campo nulo sobre as fronteiras do domínio recobertas com o material; em vista da simplicidade de implementação destas condições, pouco se adiciona à complexidade do método.

Uma forma bastante utilizada para simular guias de acesso às junções consiste em se expandir o campo eletromagnético em termos dos modos do referido guia [4], [17], [18], [21] visando a se obter uma condição de contorno relacionando o campo e sua derivada longitudinal. A expansão, quando se tratarem de guias abertos, inclui integrais sobre o contínuo de modos radiativos que podem tornar o processo de geração das matrizes bastante tedioso. Para contornar este inconveniente, alguns autores [13], [17], [23], [24] utilizam os modos discretos de guias equivalentes blindados por paredes elétricas ou magnéticas, de forma que as integrais da estrutura aberta tornam-se somatórias; a boa representação do campo elétrico depende do distanciamento entre as paredes da blindagem. Este procedimento foi implementado no presente trabalho em vista de sua simplicidade. A técnica rende resultados bastante confiáveis, uma vez que permite levar em conta individualmente todos os modos que compõem o campo nas saídas da junção de forma exata, inclusive modos evanescentes. As desvantagens são sua complexidade - uma vez que se torna necessário encontrar um conjunto suficientemente grande de modos de cada guia de acesso - e o empobrecimento da esparsidade das matrizes geradas - uma vez que as submatrizes referentes às portas individuais são todas cheias.

Uma condição de contorno menos complexa foi desenvolvida como alternativa a esta última, mediante uma aproximação paraxial à derivada longitudinal do campo sobre as portas de acesso. Até onde pudemos pesquisar, trata-se de uma contribuição original à simulação de junções planares; sua aplicação é extremamente simples e os resultados obtidos são bastante precisos (relativamente aos resultados obtidos com a condição supracitada) em vários casos práticos.

1.2 Sumário do trabalho

No Capítulo 2, delinea-se a obtenção de expressões modais para os campos TE e TM em um guia multicamadas [21], enumerando-se os tipos de modos de propagação existentes nesta estrutura. A seguir, discute-se a representação de guias de onda dielétricos ilimitados por equivalentes blindados por paredes elétricas / magnéticas suficientemente distantes da região de guiamento; este procedimento é adotado mais adiante para facilitar a obtenção das matrizes referentes a uma das condições de contorno utilizadas no método.

No Capítulo 3, são introduzidos os conceitos principais envolvidos na resolução de equações diferenciais parciais com o método dos elementos finitos (FEM) e a equação de onda 2D escalar para o campo eletromagnético é discretizada. Três condições de contorno são desenvolvidas para a representação de guias de onda de acesso: Condição de Contorno por Expansão Modal (CEM), C.C. Simples (CCS) e C.C. Paraxial (CCP), esta última,

até onde pudemos pesquisar, original.

No Capítulo 4, resultados de duas simulações utilizando CCEM, CCS e CCP são mostrados, de forma a se compararem eficiência e exatidão do método com cada uma das condições de contorno.

No Capítulo 5, apresentam-se resultados de simulações de três estruturas planares complexas, demonstrando-se assim a utilidade do FEM em situações de interesse prático. Comparações são feitas entre os resultados obtidos com as três condições de contorno desenvolvidas no Capítulo 3.

Capítulo 2

Guias de onda planares

2.1 Introdução

Uma análise precisa das propriedades de guias de onda de óptica integrada exige que se levem em conta tanto as características físicas de estruturas envolvidas como o conjunto de equações que descrevem a propagação de sinais ópticos. Em geral, trata-se de um estudo de estruturas tridimensionais complexas com múltiplas camadas de características físicas diversas e equações diferenciais vetoriais sem soluções analíticas simples.

Atualmente, existe e se desenvolve um grande número de métodos numéricos que permitem simular com grande precisão estruturas reais [10], [12] através de formulações completas e modelos físicos fiéis. Estes métodos normalmente tendem a ser muito custosos computacionalmente, além de apresentarem um alto nível de complexidade em contrapartida a sua precisão.

É possível, no entanto, aproximar estruturas reais por equivalentes simplificados que levem a equações menos complexas e permitam simular com boa precisão fenômenos físicos envolvidos em um grande número de situações encontradas na prática. Esta estratégia pode ser muito interessante para um estudo preliminar de novos componentes ópticos, quando se busca uma apreciação mais rápida e menos precisa do ponto de vista quantitativo do objeto de estudo e quando se busca uma confirmação mais categórica de modelos físicos que envolvem um amplo conjunto de simplificações. O presente trabalho segue esta alternativa, tendo em vista o desenvolvimento de métodos simples de simulação para verificações rápidas e conceituais em componentes ópticos baseados em guias de onda passivos.

Neste capítulo será desenvolvida a teoria modal do guia planar multicamadas, uma generalização do guia do tipo *slab* que permite analisar estruturas gerais baseadas em princípios semelhantes, através de um equacionamento matricial. O guia *slab*, mostrado na Figura 2-1, é o mais simples dos guias dielétricos, constituído por três camadas contíguas de índices de refração diferentes, infinitas em duas direções (x e z , arbitramos). O índice de refração da camada central deve ser o maior dos três para que haja guiamento da luz. A estrutura é planar, ou seja, possui apenas duas dimensões, sendo que uma delas é a dimensão ao longo da qual se propagam as ondas eletromagnéticas. O interesse em se estudar o guia *slab* reside na simplicidade de sua formulação, na visão clara que oferece do fenômeno de guiamento e, finalmente, no fato de aproximar com boa precisão muitos tipos de guias reais [2], [3], servindo exatamente à proposta deste trabalho; com efeito, guias de onda reais são simulados, no que segue, como guias do tipo *slab* ou do tipo multicamadas, como o da Figura 2-2, a qual

permite analisar uma gama maior de estruturas físicas reais.

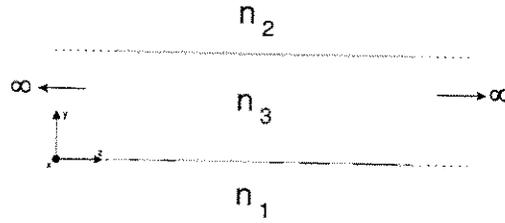


Fig. 2-1: Guia *slab*. A estrutura é infinita nas direções x e z .

2.2 Guia Planar Multicamadas

2.2.1 Equacionamento geral

O estudo das características de propagação de guias de onda é feita de maneira rigorosa através da solução das equações de Maxwell na estrutura analisada. Sendo assim, tomamos inicialmente um guia de onda aberto constituído por um conjunto de camadas homogêneas de material dielétrico com características diferentes distribuídas ao longo do eixo y , como na Figura 2-2 e consideramos que a estrutura toda seja invariável e infinita nas direções $\pm x$ e $\pm z$. Arbitramos que o campo eletromagnético se propague na direção z e não tenha variação na direção x , de modo que $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$.

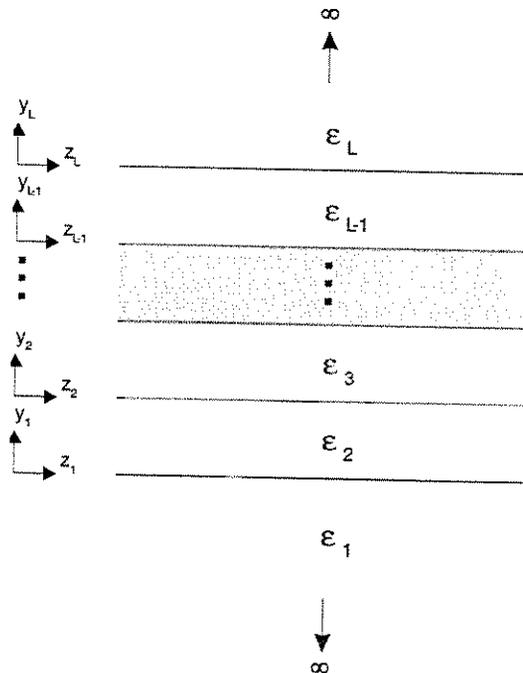


Fig. 2-2: Guia planar multicamadas com coordenadas locais para cada camada.

As características da camada l são definidas pela permissividade relativa complexa ϵ_l . O índice de refração

do meio é definido como

$$n_l = \sqrt{\text{Re}\{\epsilon_l\}}.$$

Para facilitar a notação, vamos definir os índices de refração das duas camadas mais externas 1 e L da seguinte forma:

$$n_s = \max\{n_1, n_L\} \quad (2.1)$$

$$n_c = \min\{n_1, n_L\}. \quad (2.2)$$

Normalmente, a camada externa de maior índice de refração corresponde ao substrato do circuito integrado, enquanto a de menor índice corresponde à cobertura - que, em muitos casos, pode ser simplesmente espaço aberto. Por esta razão, se $n \in \{n_1, n_L\}$, chamaremos a camada com $n = n_s$ *substrato* e com $n = n_c$ *cobertura*.

Consideramos que o campo eletromagnético tenha variação harmônica no tempo:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot e^{j\omega \cdot t}\} \quad (2.3)$$

onde $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ representa campos elétrico ou magnético vetoriais e $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ é um vetor complexo (fasor). Na notação fasorial, as equações de Maxwell em cada camada têm a seguinte forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{E}) = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot (\mu\mathbf{H}) = 0 \quad (2.7)$$

onde $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ e $\mu = \mu_0$.

Os modos de propagação das ondas eletromagnéticas no guia são soluções de (2.4)-(2.7) do tipo

$$\mathbf{A}(y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2.8)$$

ou seja, soluções cuja forma na direção y (transversal) não varia ao longo do eixo de propagação z . O conjunto completo destas soluções constitui uma base para a representação de soluções gerais das equações (2.4)-(2.7), o que justifica categoricamente este tipo de análise. Considerando (2.8), podemos realizar a substituição $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -j\beta$ nas equações de Maxwell, de onde resultam as igualdades

$$\frac{dE_z}{dy} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x \quad (2.9)$$

$$\beta E_x = \omega\mu H_y \quad (2.10)$$

$$\frac{dE_x}{dy} = j\omega\mu H_z \quad (2.11)$$

$$\frac{dH_z}{dy} + j\beta H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (2.12)$$

$$\beta H_x = -\omega \varepsilon E_y \quad (2.13)$$

$$\frac{dH_x}{dy} = -j\omega \varepsilon E_z \quad (2.14)$$

$$\frac{d(\varepsilon E_y)}{dy} - j\beta E_z = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{d(\mu H_y)}{dy} - j\beta H_x = 0 \quad (2.16)$$

Podemos obter equações mais simples caso procurarmos, como soluções, ondas com polarização Transversal Elétrica (TE) ou Transversal Magnética (TM). Ondas TE não possuem componentes de campo elétrico longitudinais ($E_z = 0$), enquanto que ondas TM não possuem componentes longitudinais de campo magnético ($H_z = 0$). A partir destas considerações, obtemos as expressões

$$\phi_z = 0 \quad (2.17)$$

$$\phi_y = \varphi_x = 0 \quad (2.18)$$

$$\pm \frac{\beta}{\omega q} \phi_x = \varphi_y \quad (2.19)$$

$$\mp \frac{j}{\omega q} \frac{d\phi_x}{dy} = \varphi_z \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{1}{q} \frac{d\phi_x}{dy} \right) + \left[\frac{k^2}{q} - \beta^2 \right] \phi_x = 0 \quad (2.21)$$

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon \quad (2.22)$$

definidas para os casos TE e TM como:

– TE:

$$\phi = \mathbf{E} \quad (2.23)$$

$$\varphi = \mathbf{H} \quad (2.24)$$

$$q = 1 \quad (2.25)$$

– TM:

$$\phi = \mathbf{H} \quad (2.26)$$

$$\varphi = \mathbf{E} \quad (2.27)$$

$$q = \varepsilon_r(y) = [n(y)]^2 \quad (2.28)$$

O sinal positivo em (2.19) e (2.20) é para modos TE, enquanto que o negativo é para modos TM.

As equações acima mostram que, conhecendo-se ϕ_x , as componentes restantes podem ser obtidas substituindo-a em (2.19) e (2.20). O problema reduz-se, desta forma, à solução de (2.21), que é uma equação de autovalores β_m e autovetores ϕ_{mx} , onde o índice m indica o m -ésimo par autovalor-autovetor:

$$L\phi_{mx} = \beta_m^2 \phi_x, \quad (2.29)$$

$$L = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{q} \frac{d}{dy} \right) + \left(\frac{k}{q} \right)^2 \quad (2.30)$$

As igualdades (2.18)-(2.22) acima são válidas individualmente em cada camada l do guia, sendo que campos em meios contíguos relacionam-se uns com os outros através das condições de contorno para interfaces entre dois meios dielétricos sem cargas. Assim, na interface entre as camadas l e $l+1$ a condição de continuidade dos campos elétrico e magnético tangenciais

$$\hat{n} \times (\phi^l - \phi^{l+1})|_{\Gamma_l} = 0 \quad (2.31)$$

onde \hat{n} é um versor normal à interface e que leva às condições de contorno para o campo escalar ϕ_x

$$\phi_x^l = \phi_x^{l+1} \quad (2.32)$$

$$\varphi_z^{l+1} = \varphi_z^{l+1} \rightarrow \frac{1}{q_{l+1}} \frac{d\phi_x^{l+1}}{dy} = \frac{1}{q_l} \frac{d\phi_x^l}{dy}. \quad (2.33)$$

Estas condições de contorno, juntamente com condições que definam o comportamento de ϕ_x no limite em que $|y| \rightarrow \infty$, caracterizam de forma completa o problema. e, conseqüentemente, os autovetores $\phi_{m,x}$ (modos) e seus respectivos autovalores β_m (constantes de propagação) podem ser determinados. O conjunto de todos os autovalores e autovetores da equação é denominado seu *espectro*.

Antes de iniciarmos desenvolvimentos adicionais envolvendo modos do guia, é interessante, para futuros cálculos, evidenciar a expressão do fluxo de potência na direção de propagação, dado pela componente longitudinal do vetor de Poynting:

$$S_z = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \cdot \hat{z} = \frac{1}{2} \phi_x \phi_y^* = \frac{\omega}{2 \cdot k_z \cdot q} |\phi_x|^2. \quad (2.34)$$

2.2.2 Modos do guia planar multicamadas

Adotaremos, a partir deste ponto, a notação de [21] com pequenas modificações, em vista de sua praticidade. Os modos de propagação do guia serão representados por funções $f_m(y)$ normalizadas:

$$\phi_{m,x}(y, z) = f_m(y) \exp(-j\beta z) \quad (2.35)$$

$$f_m(y) = \frac{h_m(y)}{\sqrt{D_m}} \quad (2.36)$$

$$D_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h_m(y)|^2}{q(y)} dy \quad (2.37)$$

A dedução de $h_m(y)$ é facilitada se adotarmos a solução

$$h_{ml}(y) = A_{ml} \cos(\kappa_{ml} y_l) + \frac{q_l}{\kappa_{ml}} B_{ml} \sin(\kappa_{ml} y_l) \quad (2.38)$$

de forma que podemos dispor do sistema matricial

$$\begin{bmatrix} h_{ml}(y) \\ \frac{1}{q_l} \frac{dh_{ml}(y)}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_{ml} y_l) & \frac{q_l}{\kappa_{ml}} \sin(\kappa_{ml} y_l) \\ -\frac{\kappa_{ml}}{q_l} \sin(\kappa_{ml} y_l) & \cos(\kappa_{ml} y_l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{m,l} \\ B_{m,l} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

que permite, dadas as condições de contorno 2.32 e 2.33, escrever

$$\begin{bmatrix} A_{m,(l+1)} \\ B_{m,(l+1)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_l \cdot \begin{bmatrix} A_{m,l} \\ B_{m,l} \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

onde

$$\mathbf{T}_l = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_{ml}d_l) & \frac{q_l}{\kappa_{ml}} \sin(\kappa_{ml}d_l) \\ -\frac{\kappa_{ml}}{q_l} \sin(\kappa_{ml}d_l) & \cos(\kappa_{ml}d_l) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Os coeficientes de duas camadas arbitrárias L_1 e L_2 , $L_2 > L_1$, relacionam-se, desta forma, por

$$\begin{bmatrix} A_{m,L_2} \\ B_{m,L_2} \end{bmatrix} = \left(\prod_{l=L_1}^{L_2-1} \mathbf{T}_l \right) \cdot \begin{bmatrix} A_{m,L_1} \\ B_{m,L_1} \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

com $L_1 = 2, 3, \dots, L-1$ e $L_2 = 2, 3, \dots, L-1$. Note-se que sempre podemos considerar

$$\begin{bmatrix} A_{m,2} \\ B_{m,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ B_{m,1} \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Implementadas as condições de contorno sobre as interfaces, resta arbitrar o comportamento dos campos a grandes distâncias da região de guiamento, determinando o tipo do modo a ser calculado. O conjunto completo de modos para o guia em questão pode ser separado em três classes diferentes e complementares, segundo o comportamento dos campos no limite em que $|y| \rightarrow \infty$ [1], [4]:

Modos guiados

O guiamento da luz se dá por conta deste conjunto de modos. Estas soluções representam o confinamento transversal da luz numa região definida pelas camadas internas da estrutura. O campo ϕ_x apresenta um decaimento exponencial com $|y| \rightarrow \infty$, significando que a energia acoplada no modo concentra-se na região de guiamento ao longo de toda a propagação: as constantes de propagação transversais para substrato e cobertura, κ_{m1} e κ_{mN} , são imaginárias. Como na expressão 2.35, o perfil transversal do campo não sofre variação em y .

As constantes de propagação destes modos são determinadas através da equação transcendental obtida de 2.39 considerando que $\lim_{y \rightarrow +\infty} h_{mN}(y) \rightarrow 0$ e $\lim_{y \rightarrow -\infty} h_{m1}(y) \rightarrow 0$ em 2.39 (detalhes no Apêndice A):

$$\frac{\gamma_{mL}}{p_L} \left(P_m + \frac{\gamma_{m1}}{p_1} Q_m \right) + \left(R_m + \frac{\gamma_{m1}}{p_1} S_m \right) = 0. \quad (2.44)$$

onde

$$\gamma_{ml} = \sqrt{\beta_m^2 - n_l^2 k_0^2} \quad (2.45)$$

e

$$\begin{bmatrix} A_{m,L} \\ B_{m,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_m & Q_m \\ R_m & S_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ B_{m,1} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

A dedução destas expressões pode ser encontrada em [21] e as fórmulas das constantes D_{mj} no Apêndice A. A equação 2.44 possui um conjunto discreto de soluções e pode ser resolvida através de um método numérico para

determinação de zeros de função. Para estruturas sem perdas, as constantes de propagação são todas reais e um método simples, como o da bissecção, pode ser utilizado. Soluções para meios com perdas devem ser localizadas no plano complexo, uma vez que as constantes de propagação incluirão também uma parte imaginária. O problema torna-se mais complicado, com um grau a mais de liberdade.

O índice efetivo do modo m é definido como

$$n_m = \frac{\beta_m}{k_0}, \quad (2.47)$$

uma quantidade que assume valores discretos no intervalo $\max[n_1, n_L] < n_m < \max[n_l], l = 1 \dots L$ para estruturas sem perdas. A mesma relação vale, aplicada às partes reais das constantes de propagação, para estruturas com perdas. É importante notar que o índice efetivo de um modo guiado nunca é superior ao maior índice da estrutura e nunca inferior ao do substrato.

Modos radiativos propagantes

Estes modos constituem um conjunto contínuo de funções que oscilam indefinidamente ao longo da direção y e propagam-se em z , permitindo descrever situações em que há um fluxo de energia para dentro ou para fora da região de guiamento. É o que ocorre na existência de variações na estrutura do guia que causam perda de energia para as regiões externas, ou ainda excitação da estrutura por fontes localizadas fora da região de guiamento. É impossível excitar modos radiativos individualmente; nestas situações uma infinidade de modos radiativos é excitada e a interferência do conjunto contínuo ao longo da propagação define o fluxo de energia [1]. Para levar em conta sua natureza contínua, reconsideramos as expressões 2.38, 2.46 e 2.35-2.37 da seguinte forma [21]:

$$h_{r,l}(y, \rho) = A_{r,l} \cos(\kappa_{r,l} y_l) + \frac{q_l}{\kappa_{r,l}} B_{r,l} \sin(\kappa_{r,l} y_l) \quad (2.48)$$

$$\begin{bmatrix} A_{r,L} \\ B_{r,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_r & Q_r \\ R_r & S_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{r,1} \\ B_{r,1} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

$$\phi_{r,x}(y, z, \rho) = f_r(y, \rho) \exp(-j\beta_r(\rho)z) \quad (2.50)$$

$$f_r(y) = \frac{h_r(y, \rho)}{\sqrt{D_r(\rho)}} \quad (2.51)$$

$$D_r(\rho) \delta(\rho - \rho') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_r(y, \rho) h_r(y, \rho')}{q(y)} dy \quad (2.52)$$

$$\beta_r(\rho) = \sqrt{n_s^2 k_0^2 - \rho^2}, \quad (2.53)$$

sendo $\delta(\rho)$ o delta de Dirac. Nestas expressões, ρ é a constante de propagação lateral para o substrato, variando continuamente tal que a constante de propagação $\beta_r(\rho)$ limita-se ao intervalo

$$0 \leq |\beta_r(\rho)| < k_0 n_s. \quad (2.54)$$

O índice r pode assumir os valores 0, 1 ou 2, indicando o tipo do modo de radiação baseado no valor da constante de propagação $\beta_r(\rho)$, conforme se especifica abaixo.

$r = 0$:

As constantes de propagação destes modos variam em

$$k_0 n_c \leq |\beta_r(\rho)| < k_0 n_s \quad (2.55)$$

para ρ no intervalo

$$0 \leq |\rho| < \sqrt{(n_s^2 - n_c^2)} \cdot k_0. \quad (2.56)$$

O campo neste caso é oscilatório no substrato, apresentando decaimento exponencial na cobertura, de forma que estes modos são chamados de *modos radiativos de substrato*. Eles permitem representar a energia luminosa escapando da região de guiamento para dentro do substrato apenas ou ainda o acoplamento de energia proveniente deste para dentro das camadas de confinamento. A natureza contínua do espectro é obtida a partir da expressão 2.49 que relaciona os coeficientes A_1 , B_1 , A_L , B_L e da condição $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} h_{0n_s}(y, \rho) \rightarrow 0$. Como somente esta condição é estabelecida, não é possível chegar a uma expressão que permita isolar a constante de propagação na equação de autovalores, refletindo o caráter contínuo do espectro. Os detalhes desta derivação são mostrados no Apêndice A.

$r = 1, 2$:

Estes modos, com constante de propagação variando entre

$$0 \leq |\beta_r(\rho)| < k_0 n_s \quad (2.57)$$

são oscilatórios tanto no substrato como na cobertura, sendo chamados, por esta razão, modos radiativos de *substrato-cobertura*. Assim como no caso $r = 0$, a continuidade do espectro é obtida a partir da relação 2.49, considerando-se oscilação nas duas camadas mais externas. No procedimento, detalhado no Apêndice A, mostra-se que as equações admitem dois conjuntos de modos radiativos de substrato-cobertura, $r = 1$ e $r = 2$. O parâmetro ρ varia, neste caso, no intervalo

$$k_0 \sqrt{(n_s^2 - n_c^2)} \leq |\rho| < k_0 n_s \quad (2.58)$$

Situações em que há energia escapando da região de guiamento tanto para a cobertura como para o substrato são representadas por estes conjuntos, ou ainda situações em que há fontes localizadas em ambas as regiões[1].

Modos radiativos evanescentes

Estes modos são os mesmos do tipo $r = 1, 2$ discutidos no ítem anterior, tomados para ρ tal que $\beta_r(\rho)$ resulta imaginário. Neste caso, não há propagação em z , porém apenas um decaimento exponencial, representando o padrão do campo eletromagnético nas vizinhanças de descontinuidades e imperfeições do guia. O parâmetro ρ é tal que

$$|\rho| \geq k_0 n_s. \quad (2.59)$$

A enumeração acima é sintetizada na Figura 2-3 abaixo.

É possível mostrar que os modos de guias sem perdas são ortogonais tanto dentro de cada grupo, como entre

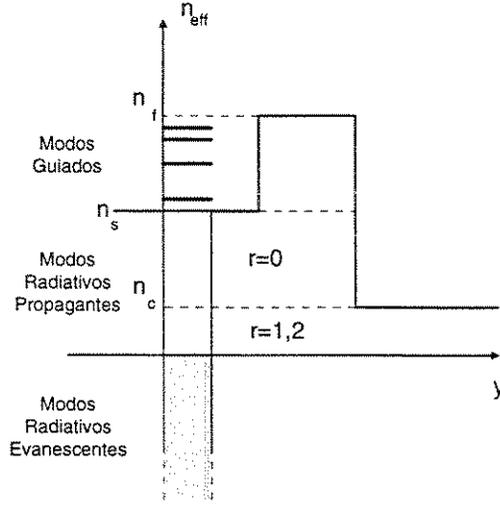


Fig. 2-3: Mapeamento dos modos do guia plano em termos dos índices efetivos

grupos [2],[3]. A relação de ortogonalidade é obtida diretamente da aplicação das equações de Maxwell e é dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{H}_n^*) \cdot \hat{x} dx dy = 0 \quad (2.60)$$

onde \mathbf{E}_m e \mathbf{H}_n podem ser de modos de tipos quaisquer. Neste caso, o campo ϕ_x pode, ser expandido da seguinte maneira

$$\phi_x = \sum_m^n a_m f_m(y) e^{-j\beta_m z} + \sum_r \int a_r(\rho) f_r(y, \rho) e^{-j\beta_r(\rho) z} d\rho. \quad (2.61)$$

$$a_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(y) \cdot p(y) \cdot f_m(y) dy \quad (2.62)$$

$$a_r(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(y) \cdot p(y) \cdot f_r(y, \rho) dy \quad (2.63)$$

$$p(y) = \frac{1}{n(y)^2}$$

2.3 Discretização do espectro radiativo

Por razões práticas, em métodos numéricos que façam uso da expansão modal, é conveniente dispor de um conjunto discreto de modos que representem com precisão suficiente o campo radiativo completo [13],[17],[19] uma vez que as integrais à direita de 2.61, por estenderem-se até o infinito e apresentarem singularidades não triviais, tornam mais custoso, tanto computacionalmente, como em termos da complexidade do problema, o processo de simulação. A discretização do espectro permitiria substituir as integrais por somatórias finitas de modos discretos, evitando a necessidade de se implementarem códigos especiais para integração numérica que tornam o processo geral da simulação mais lento.

Um método bastante utilizado para a obtenção dos modos radiativos em guias *slab* consiste em limitar as regiões externas do guia em estudo por paredes elétricas ou magnéticas para ondas TE e TM, respectivamente,

a distâncias finitas da camada de guiamento. A imposição de condições de contorno de campo nulo sobre estas paredes limita o conjunto de soluções "radiativas" possíveis a um conjunto discreto. Por soluções "radiativas", neste caso, entendemos o conjunto de modos que possuem comportamento oscilatório na direção y no substrato e (ou) na cobertura. Conforme se aumentam as distâncias entre as paredes e o guia, a estrutura passa a admitir mais modos com constantes de propagação mais próximas umas das outras. No limite em que as distâncias tornam-se infinitas, obtém-se um espectro contínuo de modos radiativos num guia aberto. Usaremos o mesmo processo para encontrar um espectro discreto de modos radiativos para o guia infinito [17], procurando encontrar um posicionamento ideal dos limites de truncamento tal que resulte um número grande de modos "radiativos".

Podemos analisar os efeitos deste artifício através de um exemplo simples de guia *slab* multimodo, como o da Figura 2-4, com $n_1 = n_3 = 1,0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1,0$. Este guia possui dois modos guiados do tipo TE. O efeito da introdução de paredes elétricas limitando o guia pode ser observado nas Figuras 2-5 e 2-6, que mostram os modos para o guia ilimitado e dois guias limitados, com paredes em $y = \{-10,10\}$ e $y = \{-2,2\}$.

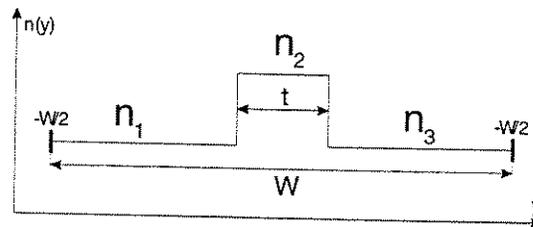


Fig. 2-4: Guia slab simétrico limitado por paredes elétricas/magnéticas em $y = \{-W/2, W/2\}$

Os modos TE_0 das duas estruturas fechadas, mostrados na Figura 2-5, são praticamente idênticos ao modo principal da estrutura aberta, indicando que a distância das paredes elétricas é suficiente para a representação do modo.

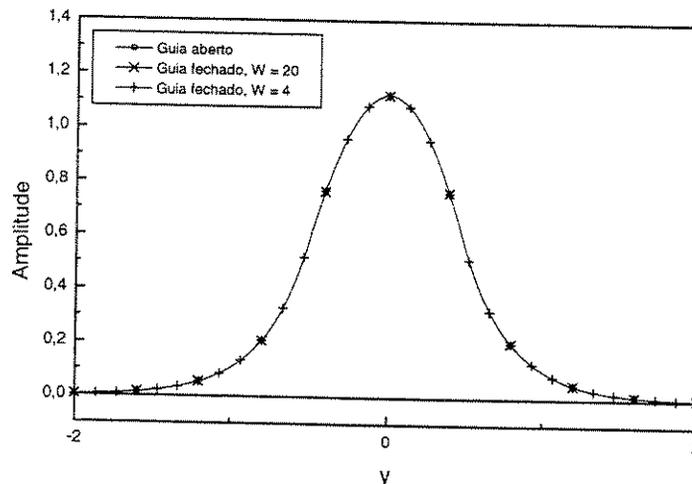


Fig. 2-5: Modos TE_0 para o guia *slab* infinito e dois guias limitados com $n_1 = n_3 = 1,0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1,0$.

Já o para modo TE_1 , Figura 2-6, a situação se altera: como se observa, o campo elétrico do guia aberto possui valores não-desprezíveis sobre $y = 2$ e $y = -2$. O distanciamento das paredes neste caso não foi suficiente para que o modo do guia fechado pudesse simular com precisão o do guia aberto. Com efeito, o campo elétrico

no guia fechado apresenta um decaimento muito mais rápido nas regiões externas, refletindo uma diferente constante de propagação em relação ao guia aberto, como observamos na Tabela 2.1:

n_{eff}	Guia aberto	Guia fechado, $W=20$	Guia fechado, $W=4$
TE ₀	1,9848	1,9848	1,9848
TE ₁	1,1862	1,1862	1,1772

Tab. 2.1: Valores de n_{eff} para dois modos TE, para distância W entre paredes elétricas.

Para paredes suficientemente distantes, como as do guia com $W = 20$, há boa concordância com soluções do guia aberto. Uma forma conveniente de se escolher o posicionamento dos limites de uma estrutura em teste é realizar o cálculo dos modos do guia para distâncias cada vez maiores até que o campo elétrico aproxime-se bastante de zero antes de encontrar paredes elétricas ou magnéticas.

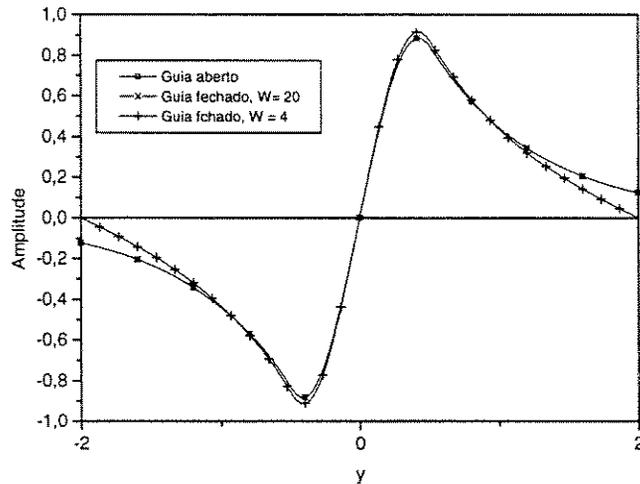


Fig. 2-6: Modos TE₁ do guia *slab* infinito e dois guias limitados com $n_1 = n_3 = 1,0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1,0$

Modos radiativos do guia aberto são afetados em um nível diferente pelo truncamento, em vista da existência de um contínuo de soluções deste tipo. Os autovalores da estrutura fechada são exatamente os mesmos da estrutura aberta, selecionados dentre infinitos modos, tal que o campo sobre os limites de truncamento é nulo. A Figura 2-7 mostra modos radiativos para o guia *slab* da Figura 2-4 com e sem truncamento. As duas funções são idênticas para uma mesma constante de propagação.

Modos de substrato-cobertura requerem um pouco mais de cuidado, uma vez que apresentam, na cobertura, decaimento exponencial em y ao invés de oscilação. Assim como no caso dos modos guiados, portanto, a distância das paredes em relação ao limite da cobertura deve ser suficientemente grande. O decaimento do campo na cobertura é dado por

$$\alpha_c = \sqrt{n_c^2 k_0^2 - \beta^2}. \quad (2.64)$$

Uma boa estimativa para o distanciamento das paredes é obtida do limite superior de β em 2.55, para o qual a

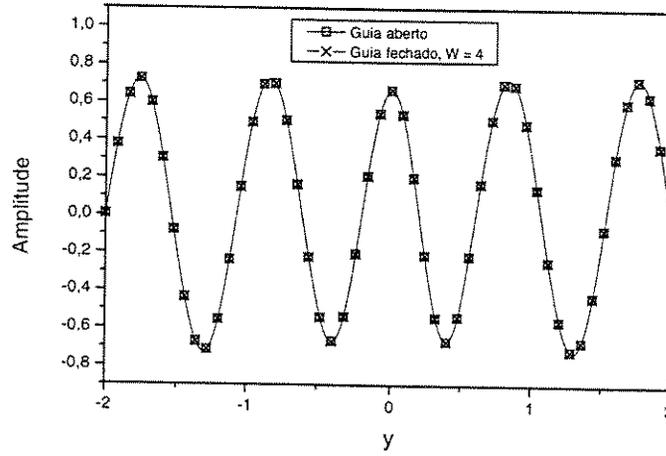


Fig. 2-7: Modo radiativo para os guia aberto e limitado com $W = 4$ com $n_1 = n_3 = 1,0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1,0$.

constante de decaimento do campo é máxima:

$$\alpha_{c,MAX}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n_s^2 - n_c^2} \cdot k_0}.$$

Para uma distância de $\alpha_{c,s}^{-1}$ para dentro da cobertura, a amplitude do campo é 37% do valor sobre a interface.

A seguir, para melhor compreender a discretização do espectro radiativo, tomamos os autovalores das duas estruturas fechadas dos exemplos anteriores. As Figuras 2-8 e 2-9 mostram o quadrado das constantes de propagação β para o guia com $W = 20$ e $W = 4$, respectivamente, em função da ordem do modo. Valores negativos indicam modos evanescentes, uma vez que β nestes casos é imaginário. Em ambos os casos, os dois primeiros valores correspondem aos dois modos guiados, enquanto que os demais representam modos radiativos. A primeira estrutura, por apresentar um distanciamento maior entre as paredes elétricas, possui onze modos "radiativos" propagantes ($\beta^2 > 0$), ou seja, dentro dos limites para existência de modos radiativos propagantes 2.57, a estrutura limitada admite onze soluções propagantes. Já a estrutura com $W = 4$ admite apenas duas soluções "radiativas" propagantes, uma vez que a distância entre as paredes é muito pequena para permitir um número grande de oscilações e, portanto, de modos "radiativos".

Em resumo, o aumento da distância W disponibiliza um maior número de modos radiativos propagantes dentro de seu intervalo de existência e também do número de modos evanescentes dentro de um determinado intervalo de β . Assim, se para um determinado W temos que o modo evanescente de ordem N_E possui uma constante β_e , para um $W' > W$, o modo com β'_e mais próximo de β_e será de ordem $N'_E > N_E$.

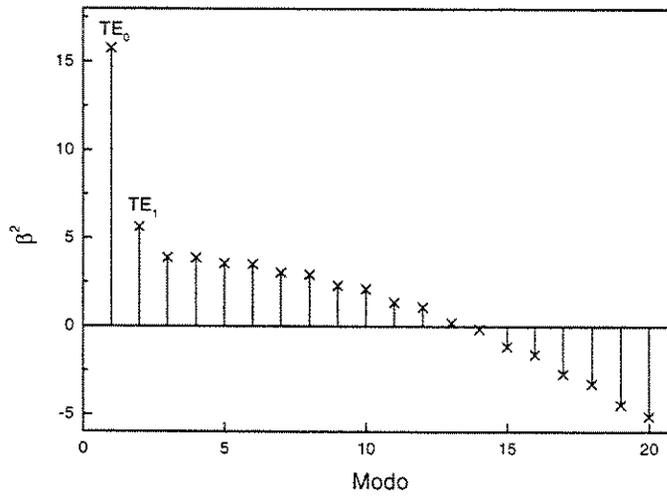


Fig. 2-8: Quadrado da constante de propagação dos modos do guia *slab* limitado com $W = 20$ e $n_1 = n_3 = 1,0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1,0$.

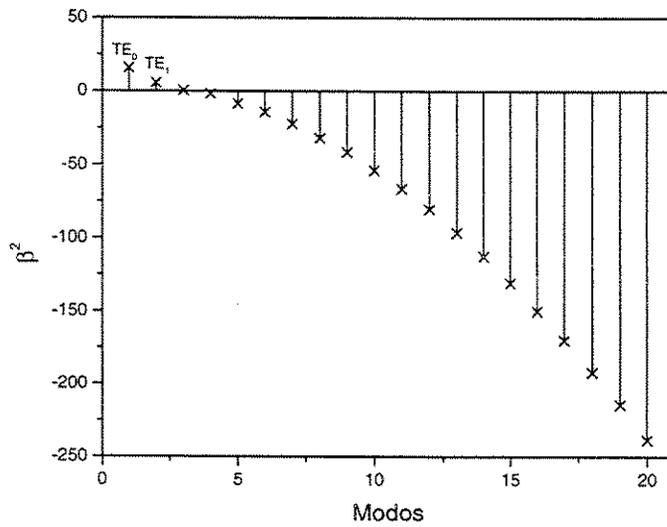


Fig. 2-9: Quadrado da constante de propagação dos modos do guia *slab* limitado com $W = 4$ e $n_1 = n_3 = 1,0$, $n_2 = \sqrt{5}$, $t = 1,0$.

Capítulo 3

Formulação da Equação de Helmholtz 2D pelo Método dos Elementos Finitos

3.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico para resolução de equações diferenciais parciais em domínios finitos. Através de uma discretização do domínio original contínuo do problema, obtém-se um sistema linear esparso que pode ser resolvido utilizando técnicas eficientes de solução. A esparsidade das matrizes geradas é a principal vantagem deste método; uma vantagem adicional é sua versatilidade, uma vez que pode ser utilizado em domínios com características não-homogêneas de formatos quaisquer, utilizando-se uma discretização adequada. Neste capítulo, são desenvolvidas as formulações por elementos finitos da equação de Helmholtz escalar que descreve aproximadamente o comportamento do campo eletromagnético em guias de onda planares. Inicialmente, apresenta-se brevemente o conceito de malha e dos tipos de elementos e funções a serem utilizadas neste trabalho. A seguir, desenvolvem-se os conceitos envolvidos na obtenção do sistema matricial e as formulações propriamente ditas.

3.2 Método dos elementos finitos

3.2.1 Definição da Malha

No MEF, o domínio $\Omega \in R^N$, limitado por uma fronteira $\delta\Omega$, de uma equação diferencial parcial é dividido em uma porção de pequenos subdomínios contíguos e inter-relacionados chamados *elementos*, definidos através da conexão de um conjunto de nós numerados, como na Figura 3-1. O conjunto de nós e elementos constitui a *malha* do problema. O relacionamento entre nós e elementos da malha é estabelecido mediante uma numeração global do conjunto destas duas entidades e de uma numeração local dos vértices de cada elemento. Por exemplo, na malha bidimensional da Figura 3-1, cada elemento triangular possui três vértices numerados no sentido horário a partir de um vértice arbitrário; a Tabela 3.1 a seguir mostra a relação entre a numeração global e local dos nós da malha para cada elemento. Esta relação é chamada de *conectividade* da malha.

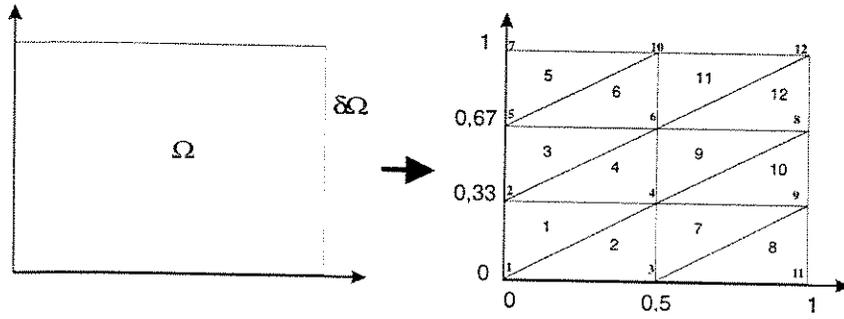


Fig. 3-1: Malha com elementos triangulares em um região retangular com numeração global de nós e elementos.

Elemento	Nó1	Nó2	Nó3
1	2	4	1
2	4	3	1
3	5	6	2
4	6	4	2
5	7	10	5
6	10	6	5
7	4	9	3
8	9	8	3
9	6	11	4
10	11	9	4
11	10	12	16
12	12	11	6

Tab. 3.1: Conectividade da malha da Figura 3-1.

É possível, também, adicionar colunas extras a esta tabela que indiquem as propriedades físicas do meio (por exemplo índice de refração ou não-linearidades) no interior de cada elemento. Da conectividade, havendo uma Tabela com as coordenadas dos nós, é possível obter parâmetros do elemento necessários para a realização dos cálculos do método. Por exemplo, é possível calcular a área do elemento 4 a partir da conectividade: a área é dada pela expressão

$$A = \left| \frac{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)}{2} \right| \quad (3.1)$$

sendo \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 as posições dos nós locais do elemento. Pela conectividade, estes correspondem, respectivamente, aos nós 6, 4 e 2 globais da malha, de forma que, da Figura 3-1, obtemos:

$$\mathbf{v}_1 = (0, 5; 0, 67); \mathbf{v}_2 = (0, 5; 0, 33); \mathbf{v}_3 = (0; 0, 33).$$

A área é $A = 1/12$.

Deve-se ressaltar que a escolha de uma boa malha é essencial para a precisão dos resultados obtidos. Em geral, procuramos utilizar uma densidade maior de elementos em regiões onde se espera que a solução possua maior variação ou valores de maior amplitude. Estas regiões nem sempre são conhecidas a priori, de forma que normalmente é necessário testar uma sequência de malhas antes de se encontrarem resultados satisfatórios: uma simulação preliminar, com um número reduzido de elementos, permite enxergar regiões mais críticas; as

próximas malhas deverão ser mais densas sobre estas regiões. Este procedimento é repetido até que a precisão desejada seja alcançada. O desenvolvimento de esquemas de malhas adaptativas é um tópico de bastante estudo na área [11].

Tanto a definição do formato dos elementos como das funções que irão aproximar a solução da equação diferencial determinam a precisão do método. As duas seções seguintes tratam destes dois aspectos.

3.2.2 Elementos finitos

Este trabalho envolve a discretização de um domínio bidimensional e de sua fronteira; os elementos escolhidos para a composição da malha são triangulares. A fronteira - uma curva fechada - resulta, por esta razão, discretizada em elementos de linha unidimensionais correspondentes às arestas dos triângulos, como na Figura 3-1. Elementos triangulares são escolhidos porque regiões poligonais arbitrárias podem ser divididas em regiões triangulares; além disso, regiões envolvendo curvas podem ser melhor aproximadas com uma densidade suficientemente grande de elementos deste tipo.

Na teoria dos simplexes [5], triângulos num espaço bidimensional são chamados 2-simplexos; a representação dos elementos triangulares através desta teoria facilita muito os cálculos envolvidos na geração das matrizes do MEF, inclusive no que diz respeito à relação entre elementos triangulares e elementos de linha: de forma geral é possível definir elementos P -simplexos em R^P que relacionam-se com simplexes de ordens imediatamente inferiores ou superiores de forma direta. Por esta razão, estaremos trabalhando adiante com os elementos simplexes uni- e bi-dimensionais definidos no Apêndice B.

3.2.3 Funções de forma

No MEF, dado um problema com M nós, para cada nó m da malha define-se uma função de aproximação w_m tal que um campo escalar ϕ pode ser representado por

$$\phi \cong \sum_{m=1}^M \phi_m w_m. \quad (3.2)$$

onde ϕ_m é o valor de ϕ sobre m . A função w_m por sua vez é dada por uma combinação linear de funções $N_{e(m),p(m)}$, chamadas *funções de forma*, definidas dentro de cada elemento e que possui o ponto m como vértice:

$$w_m = \sum_{e(m)} N_{e(m),v(m)} \quad (3.3)$$

Nesta somatória, $e(m)$ corresponde a todos os elementos que possuem um vértice sobre m ; $v(m)$ indica o vértice local do elemento e que corresponde ao nó m na conectividade da malha. $N_{e(m),v(m)}$ é a $v(m)$ -ésima função de forma do elemento $e(m)$, relacionando-se com seu vértice $v(m)$ local; as funções de forma $N_{e(m),v(m)}$ adotadas neste trabalho são unitárias sobre $v(m)$ e nulas fora e sobre os demais nós do elemento.

Sob outro ponto de vista, o campo ϕ no interior de um elemento e é dado como uma combinação linear das V funções de forma $N_{e,v}(x, y)$ definidas em e :

$$[\phi(x, y)]_e = \sum_{v=1}^V \phi_{e,v} N_{e,v}(x, y) \quad (3.4)$$

onde os colchetes indicam que a função toma valores no interior do elemento e . Para tornar os cálculos subsequentes mais compactos, definimos vetores-coluna $\{N_e\}$ e $\{\phi_e\}$ tais que $\{N_e\}_v = N_{e,v}$ e $\{\phi_e\}_v = \phi_{e,v}$ tal que

$$[\phi(x, y)]_e = \{\phi_e\}^T \{N_e\} \quad (3.5)$$

Quando não for especificado mais à frente, por conveniência, fica subentendido que $\{N\} = \{N_e\}$. O vetor completo com os valores da função sobre o nó global m da malha é obtido fazendo a soma de (3.5) sobre todos os elementos:

$$\{\phi\} = \sum_e \{\phi_e\}^T \{N_e\} \quad (3.6)$$

Os produtos à direita de (3.6) resultam em vetores-coluna de V linhas, cada linha v com o valor de ϕ sobre o v -ésimo vértice do elemento e . Estas linhas são mapeadas sobre as linhas de $\{\phi\}$ através da conectividade:

$$\{\phi\}_m = \sum_e [\{\phi_e\}^T \{N_e\}]_{v(m)}. \quad (3.7)$$

Em geral no MEF são geradas inicialmente matrizes por elementos -chamadas *matrizes elementares*- que são em seguida distribuídas na matriz global. Por exemplo, se $\{\phi_e\}$ relaciona-se com $\{\psi_e\}$ conhecido através de uma matriz $V \times V$ elementar M_e

$$\{\phi_e\} = M_e \{\psi_e\}, \quad (3.8)$$

o vetor completo $\{\phi\}$ relaciona-se com $\{\psi\}$ através da conectividade:

$$\{\phi\}_n = \left[\sum_e [M_e]_{v(m), v(n)} \right] \{\psi\}_m \quad (3.9)$$

A matriz global $[M]$, desta forma, é dada como uma somatória de matrizes elementares:

$$\{\phi\} = [M] \{\psi\} \quad (3.10)$$

$$[M]_{m,n} = \sum_e [M_e]_{v(m), v(n)} \quad (3.11)$$

As funções de forma utilizadas neste trabalho são polinômios lineares ou quadráticos definidos segundo as coordenadas simplexas de cada elemento. Fora dos respectivos elementos, estas funções são nulas, uma característica que reflete-se na esparsidade das matrizes do FEM. As funções de forma são definidas e mostradas no Apêndice B. Deste ponto em diante, estabelecemos que uma matriz A entre colchetes ($[A]$) possui elementos em posições relativas aos nós globais da malha (e não locais a alguma entidade como, por exemplo, um elemento).

3.2.4 Aproximação de soluções de equações diferenciais parciais

No que se segue, estaremos procurando soluções aproximadas para equações diferenciais parciais em subespaços de dimensão finita do espaço de Sobolev $H^2(\Omega)$, com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) g^*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

onde o asterisco sobre $g(\mathbf{x})$ indica conjugação complexa. O espaço de Sobolev é um espaço de funções quadrado-integráveis no sentido de Lebesgue [8] - pertencentes a $L^2(\Omega)$ - com primeira e segunda derivadas também quadrado-integráveis. As funções que procuramos são escalares e complexas e tomam valores num domínio $\Omega \in \mathbf{R}^2$ limitado por uma fronteira $\delta\Omega$ sobre a qual definimos condições de contorno. O problema pode ser representado introduzindo de um operador $\mathcal{L} : W \rightarrow W$, $W \subset H^2(\Omega)$ como

$$\mathcal{L}\phi = f \quad (3.13)$$

onde ϕ e f são funções escalares complexas quadrado-integráveis definidas no domínio Ω .

Soluções aproximadas para esta equação são obtidas de combinações lineares de N funções de expansão $\phi_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, linearmente independentes em W :

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n(\mathbf{x}). \quad (3.14)$$

O conjunto de funções de expansão forma a base de um subespaço N -dimensional W_N de W .

Definimos uma quantidade denominada *resíduo* por

$$r = \mathcal{L}\bar{\phi} - f \quad (3.15)$$

que serve como um parâmetro de qualidade para a representação da solução exata. Idealmente, $r = 0$ em todos os pontos do domínio no caso em que a equação (3.13) é exatamente satisfeita. Esta condição, em geral, não é alcançada através de aproximações do tipo (3.14) - em vista da própria dimensão finita dos subespaços gerados - porém é possível encontrar soluções que levem a resíduos mínimos, constituindo boas aproximações à função procurada.

A estratégia conhecida como *método dos resíduos ponderados mínimos* (weighted residual methods) [6] consiste em minizar a média ponderada do resíduo em relação a uma função-peso $w_m(\mathbf{x})$, representada pelo produto interno em W

$$R_m = \langle r, w_m \rangle = 0. \quad (3.16)$$

Substituindo (3.15) e (3.14) em (3.16) e fazendo uso da propriedade distributiva dos produtos internos, temos o conjunto de equações simultâneas

$$\left\langle \sum_{j=1}^M \alpha_j \mathcal{L}\phi_j, w_m \right\rangle = \langle f, w_m \rangle \quad (3.17)$$

que pode ser representado matricialmente como

$$A\alpha = b \quad (3.18)$$

onde

$$[A]_{m,n} = \langle \mathcal{L}\phi_n, w_m \rangle \quad (3.19)$$

e

$$[b]_m = \langle f, w_m \rangle \quad (3.20)$$

e α é o vetor-coluna dos coeficientes α_n . Este sistema linear pode ser resolvido para os coeficientes α_n da expansão.

A solução do sistema depende da definição do produto interno e da escolha das funções de base ϕ_n e de peso w_m . O produto interno a ser utilizado aqui já foi definido em (3.12). Escolhemos as funções de base segundo o chamado *Método de Galerkin*,

$$\phi_m = w_m, \quad (3.21)$$

de onde resulta

$$[A]_{m,n} = \langle \mathcal{L}w_m, w_m \rangle. \quad (3.22)$$

O resíduo ponderado R_m em relação a uma função w_m pode ser expresso como uma soma do resíduos para as funções de forma que a compõem:

$$R_m = \langle r, w_m \rangle = \sum_{e(m)} \int_e r N_{e(m),v(m)}^* d\Omega_e \quad (3.23)$$

onde Ω_e é o diferencial do subdomínio correspondente ao elemento e .

Alternativamente, podemos definir um vetor-coluna $\{r_e\}$ cujas linhas são os resíduos ponderados em relação a cada N_v para um dado elemento e

$$\{r_e\}_p = \langle r, N_{e,v} \rangle \quad (3.24)$$

de maneira que podemos escrever

$$\{R_m\} = \sum_e \{R_e\}$$

sendo $\{R_m\}$ o vetor-coluna cujas linhas são os resíduos R_m , sendo que as linhas de $\{r_e\}$ são arranjadas segundo a conectividade da malha.

É sempre bom lembrar que consideramos as características do meio (índice de refração, condutividade, etc) constantes em cada um dos elementos.

3.3 Formulação por MEF da equação de Helmholtz 2D escalar

A seguir, mostraremos a formulação da equação de Helmholtz 2D escalar utilizando elementos finitos. Idealmente, por estarmos tratando de guias de onda e estruturas em geral abertas, as equações deveriam ser resolvidas em todo o plano \mathbf{R}^2 , de forma que todo o campo radiativo -extendendo-se a grandes distâncias- pudesse ser tratado adequadamente. Dada a impossibilidade deste tratamento, consideramos um domínio Ω de dimensões finitas de \mathbf{R}^2 limitado por uma fronteira $\delta\Omega$ como nossa janela computacional e adotamos esquemas sobre a fronteira que simulem regiões abertas: se uma onda incide sobre as fronteiras fictícias, não devem ser refletidas de volta, porém completamente expelidas do domínio pelo esquema adotado.

Um esquema bastante utilizando é a aplicação de PMLs (Perfectly-Matched Layers), camadas perfeitamente casadas de um material bianisotrópico, diretamente em contato com $\delta\Omega$ [30],[24],[33],[34]; estas camadas absorvem quase completamente ondas incidentes sem permitir reflexões sobre as interfaces (daí o nome camadas perfeitamente casadas). PMLs podem ser aplicados diretamente sobre $\delta\Omega$ com condições de campo nulo

(Condições de Dirichlet Homogêneas) com bons resultados, permitindo uma boa redução do domínio computacional. Neste trabalho, faz-se uso extensivo de PMLs para o truncamento de domínios infinitos.

Tomamos como uma estrutura generalizada para simulação o domínio retangular bidimensional Ω mostrado na Figura 3-2, de cujos lados derivam guias infinitos ideais. Esta estrutura é geral o suficiente para permitir o estudo de junções com até quatro portas de acesso. Sobre as linhas do contorno $\delta\Omega$ definem-se eixos de coordenadas locais retangulares para simplificar os cálculos.

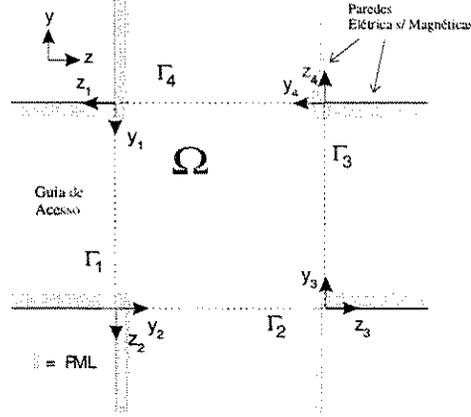


Fig. 3-2: Estrutura geral para a simulação de junções planares. A junção dentro do domínio Ω é alimentada por até quatro portas. Note que são usados PMLs para a simulação de regiões abertas. As condições de contorno sobre as paredes dos guias de acesso são do tipo Dirichlet homogêneas ($\phi = 0$).

Consideramos, para facilitar a formulação, condição de campo nulo $\phi = 0$ (condição de contorno de Dirichlet homogênea, uma condição essencial que deve ser implementada diretamente no método) para ambas polarizações TE e TM sobre os cantos do contorno $\delta\Omega$; neste ponto, a derivada normal é indefinida. Para simular uma estrutura aberta, PMLs diagonais são introduzidos em torno destes pontos críticos.

Podemos escrever

$$\delta\Omega = \sum_{l=1}^4 \Gamma_l. \quad (3.25)$$

Sobre esta fronteira são definidas condições de contorno que relacionam o campo e sua derivada normal, levando em conta a existência dos guias de acesso. Estas condições são essenciais para o problema e, por esta razão, são tratadas com maior detalhe mais adiante.

A dedução da equação de onda para esta estrutura, considerando PMLs encontra-se no Apêndice C. A equação resultante que desejamos discretizar é, seguindo a notação de [24]:

$$s_y \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{s_y}{s} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + s_z \frac{\partial}{\partial z} \left(p \frac{s_z}{s} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + sqk_0^2 \phi = f(x, y), \quad (3.26)$$

onde

$$\phi = E_x, p = 1, q = n^2 \text{ caso TE} \quad (3.27)$$

$$\phi = H_x, p = 1/n^2, q = 1 \text{ caso TM} \quad (3.28)$$

$$s = \begin{cases} 1 - j \frac{3}{2k_0 n d} \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{R_t}\right), & \text{dentro do PML} \\ 1, & \text{fora do PML} \end{cases} \quad (3.29)$$

e

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.30)$$

sendo λ o comprimento de onda da luz no vácuo. Na expressão acima, δ é a espessura do PML, n é o índice de refração da região em contato com a camada, ρ a distância ao início da camada e R_t é a refletividade aparente [30], definido no Apêndice C. Esta variação quadrática de s com a distância à superfície apresenta resultados ótimos para um grande número de casos [30],[33],[24] e por esta razão é adotada neste trabalho. Os parâmetros s_x e s_y assumem os valores definidos na Tabela 3.2 para PMLs com s variando perpendicularmente aos eixos y e z ou a ambos os eixos (PML *diagonal*).

	$\perp y$	$\perp z$	$\perp y, z$
s_y	1	s	1
s_z	s	1	1

Tab. 3.2: Valores de s_x e s_y segundo orientação da PML.

Sobre as paredes dos guias de acesso, assim como sobre alguma linha Γ_l , num caso em que não existe o guia de acesso l , consideramos sempre que $\phi_l = 0$ (condições de contorno de Dirichlet homogêneas).

Sobre a interface entre duas regiões com diferenças abruptas de características como na Figura 3-3, considerando que não há cargas sobre a descontinuidade $\delta\Omega_d$, o campo ϕ obedece às seguintes condições de contorno:

$$\phi^+ = \phi^- \quad (3.31)$$

$$\left\{ \frac{p}{s} (\bar{S}^2 \cdot \nabla) \phi \right\}^+ \cdot \hat{n} = \left\{ \frac{p}{s} (\bar{S}^2 \cdot \nabla) \phi \right\}^- \cdot \hat{n} \quad (3.32)$$

onde \bar{S} é um tensor definido por

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} s_y & 0 \\ 0 & s_z \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

tal que $\bar{S}^2 = \bar{S} \cdot \bar{S}$. Nestas expressões, os sinais + e - correspondem às duas regiões envolvidas e \hat{n} é um vetor normal à interface. As funções de expansão w_m devem possuir as mesmas propriedades sobre a fronteira para modelar corretamente o campo ϕ . O operador L de (3.13) é dado, desta forma, por

$$\mathcal{L} = (\bar{S} \cdot \nabla) \cdot \left\{ \frac{p}{s} \bar{S} \cdot \nabla \right\} + sqk_0^2. \quad (3.34)$$

Como em (3.14), obtemos de (3.23) o resíduo ponderado em um elemento em relação à função de forma N_v (note que deixamos de lado, por simplicidade, o índice e de $N_{e,v} = N_v$):

$$\begin{aligned} \{r_e\}_v &= \langle \mathcal{L}\phi_e - f, N_v \rangle \\ &= \iint_e (\bar{S} \cdot \nabla) \cdot \left[\frac{p}{s} \bar{S} \cdot \nabla \phi_e \right] N_v^* + sqk_0^2 \phi_e N_v^* dx dy \end{aligned}$$

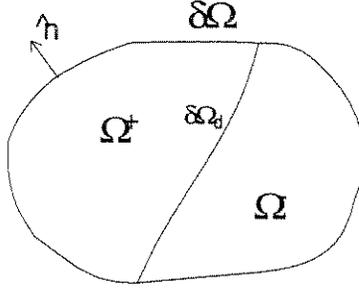


Fig. 3-3: Domínio composto por dois subdomínios de características diferentes. $\delta\Omega$ é o contorno de Ω com normal \hat{n} e $\delta\Omega_d$ a interface entre os dois meios.

$$- \iint_e f N_v^* dx dy \quad (3.35)$$

Consideramos que as características (p , q e \bar{S}) do domínio são constantes dentro de cada elemento. Usando a identidade vetorial

$$[(\bar{S} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}] v = (\bar{S} \cdot \nabla) \cdot (v\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\bar{S} \cdot \nabla) v, \quad (3.36)$$

e o teorema escalar de Green no plano obtemos

$$\begin{aligned} \{r_e\}_v &= - \iint_e \left[\frac{p}{s} \bar{S} \cdot \nabla \phi_e \right] \cdot (\bar{S} \cdot \nabla) N_v^* + sqk_0^2 \phi_e N_v^* dx dy \\ &+ \oint_e \bar{S} \cdot N_v^* \frac{p}{s} [\bar{S} \cdot \nabla \phi_e] \cdot \hat{n} dl_e - \iint_e f N_v^* dx dy \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde a integral de linha é sobre o contorno do elemento, cuja normal é \hat{n} . Mais adiante, faremos uma somatória dos resíduos de todos os elementos para chegarmos à equação matricial final. Sendo assim, tendo em vista as condições de contorno de continuidade (3.31) e (3.32), a integral de contorno de (3.37) resulta numa integral sobre a fronteira $\delta\Omega$:

$$\sum_e \oint_e N_v^* \frac{p}{s} (\bar{S}^2 \cdot \nabla \phi_e) \cdot \hat{n} dl_e = \oint_{\delta\Omega} N_v^* \frac{p}{s} (\bar{S}^2 \cdot \nabla \phi) \cdot \hat{n} d\delta\Omega \quad (3.38)$$

Este resultado se dá pelo fato da integral sobre uma linha comum a dois elementos ser feita em dois sentidos diferentes, um para cada elemento. Notamos agora que, dado que

$$s_1 = s_z, \quad s_2 = s_y, \quad s_3 = s_z, \quad s_4 = s_y, \quad (3.39)$$

sobre as linhas Γ_l que compõem $\delta\Omega$, podemos escrever

$$\left[\bar{S}^2 \cdot \nabla \phi \cdot \hat{n} \right]_{\Gamma_l} = s_l^2 \frac{\partial \phi}{\partial z_l} = s_l^2 \psi_l \quad (3.40)$$

de forma que

$$\oint_{\delta\Omega} N_v^* \frac{p}{s} (\bar{S}^2 \cdot \nabla \phi) \cdot \hat{n} d\delta\Omega = \sum_{l=1}^4 \int_{\Gamma_l} N_v^* \frac{ps_l^2}{s} \psi_l d\Gamma_l. \quad (3.41)$$

lembrando que sobre os limites de Γ_l assumimos a condição de contorno $\phi = 0$. A seguir, expandimos ϕ_e e f

em termos das funções de forma do elemento, como em (3.4):

$$[\phi]_e \cong \{N\}^T \{\phi_e\} \quad (3.42)$$

$$[f]_e \cong \{N\}^T \{f\} \quad (3.43)$$

$$[\psi_l]_e \cong \{N\}^T \{\psi_{l,e}\} \quad (3.44)$$

Nestas expressões, $\{\phi_e\}$ é um vetor-coluna com os coeficientes da expansão do campo em termos das funções de forma $\{N\}$. Note que os elementos deste vetor correspondem aos valores de ϕ_e sobre os vértices do elemento, uma vez que, sobre seu v -ésimo vértice, $N_v = 1$. A derivada $\psi_{l,e}$ é expandida em termos de funções unidimensionais cuja forma coincide, como foi explicado acima, com a função de forma 2D sobre a aresta do elemento. $\{r_e\}$ é então dado por

$$\begin{aligned} \{r_e\} = & - \iint_e \left\{ \frac{p}{s} \{(\bar{S} \cdot \nabla) N\} \{(\bar{S} \cdot \nabla) N\}^T + sqk_0^2 \{N\} \{N\}^T \right\} dx dy \{\phi_e\} \\ & + \sum_{l=1}^4 \left[\int_e \frac{ps_l^2}{s} \{N\} \{N\}^T dy_l \right]_{\Gamma_l} \{\psi_{l,e}\} - \iint_e \{N\} \{N\}^T dx dy \{f\} \end{aligned}$$

sendo que os colchetes indicam que a integração de linha é feita somente sobre a aresta do elemento e coincidente com uma das linhas Γ_l . Na prática, estas integrais de linha são calculadas com as funções 1D correspondentes definidas anteriormente. Resulta assim o resíduo no elemento:

$$\{R_e\} = [A_e] \{\phi_e\} + k_0^2 [B_e] \{\phi_e\} - [D_e] \{f\} + \sum_{l=1}^4 [C_{l,e}] \{\psi_{l,e}\} \quad (3.45)$$

com

$$[A_e] = \iint_e \frac{p}{s} \left\{ s_y^2 \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\}^T + s_z^2 \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\}^T \right\} dx dy \quad (3.46)$$

$$[B_e] = \iint_e sq \{N\} \{N\}^T dx dy \quad (3.47)$$

$$[C_{l,e}] = \left[\int_e \frac{ps_l^2}{s} \{N\} \{N\}^T dy_l \right]_{\Gamma_l} \quad (3.48)$$

$$[D_e] = \iint_e \{N\} \{N\}^T dx dy \quad (3.49)$$

As matrizes $[A_e]$, $[B_e]$ e $[C_e]$ são as chamadas *matrizes elementares*. O cálculo destas matrizes é detalhado no Apêndice C.

Fazendo a somatória dos resíduos individuais de cada elemento e igualando a zero, obtemos a equação matricial

$$[A] \{\phi\} + k_0^2 [B] \{\phi\} = [D] \{f\} - \sum_{l=1}^4 [C_l] \{\psi_l\} \quad (3.50)$$

onde

$$[A] = \sum_e [A_e] \quad (3.51)$$

$$[B] = \sum_e [B_e] \quad (3.52)$$

$$[D] = \sum_e [D_e] \quad (3.53)$$

$$[C_l] = \sum_e [C_{l,e}] \quad (3.54)$$

sendo que as somatórias obedecem à conectividade da malha.

A solução que procuramos é uma solução fraca para o problema original, uma vez que estabelecemos continuidade somente do campo e não do campo e sua derivada; por esta razão, diz-se que a equação (3.37) é uma forma fraca do método de Galerkin.

Devemos agora procurar condições de contorno que relacionem as derivadas ψ_l com o campo ϕ sobre cada uma das linhas Γ_l para obtermos um sistema de equações definido, uma vez que os valores de ψ_l são desconhecidos. Três formas de relacionar a derivada longitudinal com o campo são utilizadas neste trabalho, cada uma com suas vantagens e limitações. A primeira maneira é expandir o campo sobre Γ_l em termos dos modos dos respectivos guias de acesso. A segunda considera a condição de contorno de impedância $\psi_l = -jk_{0l}\phi$, sendo chamado de condição de contorno "simples"; considera-se neste caso o campo na saída do guia como sendo composto por apenas um modo. A terceira faz uso de uma expressão paraxial para a derivada em z_l . Os três métodos são detalhados a seguir.

3.4 Condições de contorno

3.4.1 Condição de Contorno por Expansão Modal (CCEM)

Como vimos no Capítulo 2, podemos representar guias abertos por guias blindados considerando paredes com condições de campo nulo suficientemente distantes da região de guiamento. Definindo

$$\phi_l \equiv [\phi]_{\Gamma_l}, \quad (3.55)$$

tomamos as linhas Γ_l com condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas ($\phi_l = 0$) sobre seus limites, obtendo desta forma um espectro discreto de modos para o guia conectado à porta l :

$$\phi_l = \sum_m [a_{l,m}e^{-j\beta_{l,m}z_l} + b_{l,m}e^{j\beta_{l,m}z_l}] f_{l,m}(y_l) \quad (3.56)$$

$$\psi_l = \sum_m -j\beta_{l,m} [a_{l,m}e^{-j\beta_{l,m}z_l} - b_{l,m}e^{j\beta_{l,m}z_l}] f_{l,m}(y_l) \quad (3.57)$$

Nestas expressões, $f_{l,m}(y_l)$ é o m -ésimo modo do guia l . Consideramos, sem perda de generalidade, que somente a porta 1 receba excitação externa:

$$b_{2,m} = b_{3,m} = b_{4,m} = 0 \quad (3.58)$$

Os coeficientes $b_{l,1}$ são conhecidos. Usando a relação de ortogonalidade

$$\int_{\Gamma_l} f_{l,m}^*(y_l) p(y_l) f_{l,m}(y_l) dy_l = \delta_{ll'} \quad (3.59)$$

obtemos de (3.56)

$$a_{l,m} = \left\{ \int_{\Gamma_l} f_{l,m}^*(y_l) p(y_l) \phi_l dy_l - b_{1,m} e^{j\beta_{1,m} z_l} \delta_{1l} \right\} e^{j\beta_{1,m} z_l} \quad (3.60)$$

que, aplicado em (3.57), fica

$$\psi_l = \sum_m \left\{ -j\beta_{l,m} f_{l,m}(y_l) \left[\int_{\Gamma_l} f_{l,m}^*(y_l) p(y_l) \phi_l dy_l \right] \right\} + 2\delta_{1l} \sum_m j\beta_{1,m} b_{1,m} f_{1,m}(y_1). \quad (3.61)$$

Expandindo ϕ_l e $f_{l,m}(y_l)$ em termos das funções de forma do elemento e ,

$$[f_{l,m}(y_l)]_e = \{f_{l,m,e}\} \{N\}^T \quad (3.62)$$

$$[\phi_l]_e = \{\phi_{l,e}\} \{N\}^T, \quad (3.63)$$

temos

$$\begin{aligned} \{\psi_{l,e}\} &= \sum_m -j\beta_{l,m} \{f_{l,m,e}\} \{f_{l,m,e}^*\}^T \left[\int_e p(y_l) \{N\} \{N\}^T dy_{l,e} \right]_{\Gamma_l} \{\phi_{l,e}\} \\ &\quad + 2\delta_{1l} \sum_m j\beta_{1,m} b_{1,m} \{f_{1,m,e}\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$= [P_{l,e}] [Q_{l,e}] \{\phi_{l,e}\} + 2\delta_{1l} \sum_m j\beta_{1,m} b_{1,m} \{f_{1,m,e}\} \quad (3.65)$$

sendo

$$[P_{l,e}] = \sum_m -j\beta_{l,m} \{f_{l,m,e}\} \{f_{l,m,e}^*\}^T \quad (3.66)$$

e

$$[Q_{l,e}] = \left[\int_e p(y_l) \{N\} \{N\}^T dy_{l,e} \right]_{\Gamma_l}. \quad (3.67)$$

Temos assim

$$\{\psi_l\} = [P_l] [Q_l] \{\phi_l\} + 2\delta_{1l} \sum_m j\beta_{1,m} b_{1,m} \{f_{1,m}\} \quad (3.68)$$

onde

$$[P_l] = \sum_e [P_e] \quad (3.69)$$

$$[Q_l] = \sum_e [Q_e]. \quad (3.70)$$

Com estas expressões, podemos reescrever (3.50) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &[A] \{\phi\} + k_0^2 [B] \{\phi\} + \sum_{l=1}^4 [Z_l] \{\phi_l\} \\ &= 2 \sum_m j\beta_{1,m} b_{1,m} [C_1] \{f_{1,m}\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$[Z_l] = [C_l] [P_l] [Q_l], \quad (3.72)$$

sendo C_l a mesma matriz de (3.54). Para facilitar a compreensão, podemos localizar valores de ϕ_l sobre as fronteiras dentro do vetor completo $\{\phi\}$:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_{int} \\ \phi_l \\ \phi_1 \end{Bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\left\{ [A] + k_0^2 [B] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_l & 0 \\ 0 & 0 & Z_1 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \phi_{int} \\ \phi_l \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = 2 \sum_m j\beta_{1,m} b_{1,m} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 f_{1,m} \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

Nesta expressão, $\{\phi_{int}\}$ corresponde ao conjunto dos pontos internos do problema. Esta é uma equação do tipo

$$[M]\phi = \{b\} \quad (3.75)$$

que pode ser resolvida por qualquer método de solução de sistemas lineares.

O conjunto dos modos utilizados para a expansão pode ser obtida através de fórmulas analíticas como as do Capítulo 2 [4],[21] ou ainda através de uma formulação numérica, como por exemplo elementos finitos. No primeiro caso, é necessário obter fórmulas de autovalores para os modos da estrutura blindada, ao invés do contínuo de modos radiativos do guia aberto. Neste trabalho, foi utilizado um método de elementos finitos 1D para obtenção dos modos.

Esta condição de contorno é a mais exata das três apresentadas neste trabalho, pois permite levar em conta um número arbitrário de modos, inclusive de modos radiativos evanescentes; por esta razão, a precisão das soluções obtidas com as demais condições de contorno é avaliada em comparação a ela.

As desvantagens deste método são várias. Primeiramente, é necessário calcular modos do guia de acesso, um processo que pode ser bastante trabalhoso e demorado, dependendo da estrutura e do método de solução escolhido. Em particular, o cálculo dos modos em guias 3D frequentemente é realizado por métodos numéricos complexos - nem sempre equações de autovalores analíticas são disponíveis - que tornam o processo todo bastante custoso. Em segundo lugar, as matrizes locais Z_l são cheias, diminuindo a esparsidade do sistema matricial final; este custará mais para ser resolvido. A terceira desvantagem diz respeito à escolha dos modos a integrarem a matriz Z_l . Para se ter certeza de um determinado resultado, é necessário realizar o cálculo para conjuntos diferentes de modos até que se alcance uma convergência, um processo que pode ser bastante tedioso, especialmente em problemas grandes.

3.4.2 Condição de Contorno "Simples" (CCS)

Podemos considerar que o campo sobre Γ_l apresenta apenas uma variação simplesmente harmônica em z_l [6], [15]:

$$\phi_l = \tilde{\phi}_l(y_l, z_l) \exp(-jk_0 n_{0l} z) \quad (3.76)$$

onde n_{0l} é o índice de referência para o guia l . A escolha do índice de referência, como veremos mais adiante, determinará a precisão das soluções obtidas. Desta expressão, obtemos

$$\psi_l = \frac{\partial \phi_l}{\partial z_l} \phi_l = -jk_0 n_{0l} \phi_l. \quad (3.77)$$

A equação (3.50) resulta em

$$[A] \{\phi\} + k_0^2 [B] \{\phi\} + \sum_{l=1}^4 -jk_0 n_{0l} [C_l] \{\phi_l\} = 0 \quad (3.78)$$

sendo $[A]$, $[B]$, $[C_l]$ as mesmas matrizes de (3.51)-(3.54). Considerando

$$\phi_1(y_1, z_1)|_{\Gamma_1} = \widetilde{\phi}_1^r(y_1, z_1) \cdot \exp(-jk_0 n_{01} z_1) + \widetilde{\phi}_1^{inc}(y_1, z_1) \cdot \exp(jk_0 n_{01} z_1), \quad (3.79)$$

obtemos a equação matricial

$$[M] \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{int} \\ \phi_l \\ \phi_1^r \end{Bmatrix} + \sum_{l=2}^4 -jk_0 n_{0l} [C_l] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_l \\ 0 \end{Bmatrix} - jk_0 n_{01} z_1 [C_1] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_1^r \end{Bmatrix} = (jk_0 n_{01} [C_1] - [M]) \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_1^{inc} \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

com $[M] = ([A] + k_0^2 [B])$.

Esta condição de contorno é extremamente simples e de fácil aplicação, porém além de não tratar corretamente modos evanescentes [35], constitui uma pior aproximação à derivada em z_l , levando a erros significativos na transmissão de modos propagantes. Em geral, esta condição tratará de maneira exata o modo cujo índice efetivo é $n_{eff} = n_{0l}$. No caso de propagação de um único modo, a relação (3.77) é exata. A propagação dos demais modos, no entanto, fica prejudicada quanto maior for a discrepância entre n_{eff} e n_{0l} . A esparsidade da matriz final é a mesma da matriz $[M]$ acima; portanto o método fica muito mais eficiente em termos computacionais do que o da seção anterior. Em todas as simulações deste trabalho, foi utilizado $n_{0l} = n_{eff0}$, onde n_{eff0} é o índice efetivo do modo fundamental do guia l .

3.4.3 Condição de Contorno Paraxial (CCP)

Neste caso consideramos novamente que o campo seja da forma

$$\phi_l(y_l, z_l)|_{\Gamma_l} = \widetilde{\phi}_l(y_l, z_l) \cdot \exp(-jk_0 n_{0l} z_l) \quad (3.81)$$

onde n_{0l} é o índice de referência para o guia l . A escolha do índice de referência, assim como no caso anterior, determina a precisão da solução.

Tomando a derivada em z_l de (3.81), para $l \neq 1$,

$$\left. \frac{\partial \phi_l(y_l, z_l)}{\partial z_l} \right|_{\Gamma_l} = \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_l}{\partial z_l} - j k_0 n_{0l} \tilde{\phi} \right) \cdot \exp(-j k_0 n_{0l} z_l). \quad (3.82)$$

Sem perda de generalidade, consideramos que existe excitação somente na porta 1 de modo que

$$\phi_1(y_1, z_1)|_{\Gamma_1} = \tilde{\phi}_1^r(y_1, z_1) \cdot \exp(-j k_0 n_{01} z_1) + \tilde{\phi}_1^{inc}(y_1, z_1) \cdot \exp(j k_0 n_{01} z_1). \quad (3.83)$$

Consideramos também que o campo incidente é o modo principal do guia 1:

$$\frac{\partial \phi_1^{inc}(y_1, z_1)}{\partial z_1} = j k_0 n_{01} \tilde{\phi}_1^{inc}(y_1) \cdot \exp(j k_0 n_{01} z_1) \quad (3.84)$$

tal que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_1(y_1, z_1)}{\partial z_1} \right|_{\Gamma_1} &= \left[\frac{\partial \tilde{\phi}_1^r(y_1, z_1)}{\partial z_1} - j k_0 n_{01} \tilde{\phi}_1^r(y_1, z_1) \right] \cdot \exp(-j k_0 n_{01} z_1) \\ &\quad + j k_0 n_{01} \tilde{\phi}_1^{inc}(y_1) \cdot \exp(j k_0 n_{01} z_1). \end{aligned} \quad (3.85)$$

e ainda

$$\begin{aligned} s_{z,l} \frac{\partial}{\partial z_l} \left(p \frac{s_{z,l}}{s} \frac{\partial \phi_l}{\partial z_l} \right) &= s_{z,l} \frac{\partial}{\partial z_l} \left[p \frac{s_{z,l}}{s} \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_l}{\partial z_l} - j k_0 n_{0l} \tilde{\phi} \right) \exp(-j k_0 n_{0l} z_l) \right] \\ &= p \frac{s_{z,l}^2}{s} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}_l}{\partial z_l^2} - j k_0 n_{0l} \frac{\partial \tilde{\phi}_l}{\partial z_l} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial \tilde{\phi}_l}{\partial z_l} - j k_0 n_{0l} \tilde{\phi}_l \right) \cdot \left[j k_0 n_{0l} \left(p \frac{s_{z,l}}{s} \right) \right] \right\} \exp(-j k_0 n_{0l} z_l) \\ &\cong p \frac{s_{z,l}^2}{s} \left(-2 j k_0 n_{0l} \frac{\partial \tilde{\phi}_l}{\partial z_l} + (k_0 n_{0l})^2 \tilde{\phi}_l \right) \exp(-j k_0 n_{0l} z_l) \end{aligned} \quad (3.86)$$

onde consideramos que p é independente de z_l e

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_l}{\partial z_l^2} \right| \ll \left| k_0 n_{0l} \frac{\partial \tilde{\phi}_l}{\partial z_l} \right|. \quad (3.87)$$

Esta última consideração é denominada aproximação de envoltória de variação lenta. A expressão (3.86) acima também vale para ϕ_1^r .

Se consideramos a equação de Helmholtz (3.26) sobre Γ_l no sistema de coordenadas locais y_l e z_l , valem para todo l $s_{z,l} = s_l$ e $s_{y,l} = 1$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_l} \left(p \frac{\partial \phi_l}{\partial y_l} \right) + s_l \frac{\partial}{\partial z_l} \left(p \frac{s_l}{s} \frac{\partial \phi_l}{\partial z_l} \right) + s_l k_0^2 \phi_l \right]_{\Gamma_l} = 0, \quad (3.88)$$

Aplicando (3.81) nesta equação,

$$p \frac{s_l^2}{s} \frac{\partial \tilde{\phi}_l}{\partial z_l} = \frac{1}{2jk_0 n_{0l}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{p}{s} \frac{\partial \phi_l}{\partial y_l} \right) + sk_0^2 (q - pn_{0l}^2) \tilde{\phi}_l \right]. \quad (3.89)$$

Esta é uma aproximação paraxial da equação de Helmholtz que, em geral, funciona bem para feixes propagando-se a pequenos ângulos do eixo z_l .

Substituindo (3.89) em (3.82) e (3.85), obtemos

$$p \frac{s_l^2}{s} \frac{\partial \phi_l}{\partial z_l} \Big|_{\Gamma_l} = p \frac{s_l^2}{s} \psi_l \cong \frac{1}{2jk_0 n_{0l}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_l} \left(\frac{p}{s} \frac{\partial \phi_l}{\partial y_l} \right) + sk_0^2 (q + pn_{0l}^2) \tilde{\phi}_l \right] \cdot \exp(-jk_0 n_{0l} z_l) \quad (3.90)$$

para $l \neq 1$ e

$$p \frac{s_1^2}{s} \psi_1 \cong \frac{1}{2jk_0 n_{01}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{p}{s} \frac{\partial \phi_1^r}{\partial y_1} \right) + sk_0^2 (q + pn_{01}^2) \tilde{\phi}_1^r \right] \cdot \exp(-jk_0 n_{01} z_1) \\ + jk_0 n_{01} p s \tilde{\phi}^{inc} \cdot \exp(jk_0 n_{01} z_1) \delta_{1l}. \quad (3.91)$$

para $l = 1$.

Esta expressão é substituída diretamente em (3.41) e o mesmo processo de discretização é aplicado ao resíduo:

$$\{R_e\} = [A_e] \{\phi_e\} + k_0^2 [B_e] \{\phi_e\} - jk_0 n_{01} [D_e] \{\phi^{inc}\} \\ + \sum_{l=2}^4 \frac{1}{2jk_0 n_{0l}} [C_{l,e}] \{\phi_{l,e}\} + \frac{1}{2jk_0 n_{01}} [C_{1,e}] \{\phi_{1,e}^r\} \quad (3.92)$$

$$[A_e] = \iint_e \frac{p}{s} \{s_z \{N_y\} \{N_y\}^T + s_z \{N_z\} \{N_z\}^T\} dx dy \quad (3.93)$$

$$[B_e] = \iint_e s q k_0^2 \{N\} \{N\}^T dx dy \quad (3.94)$$

$$[D_e] = \int_e s p \{N\} \{N\}^T dy_l \quad (3.95)$$

$$[C_{l,e}] = \left[\int_e \frac{p}{s} \{N_{y_l}\} \{N_{y_l}\}^T dy_l + k_0^2 \int_e s (q + pn_{0l}^2) \{N\} \{N\}^T dy_l \right]_{\Gamma_l}. \quad (3.96)$$

Fazendo a somatória dos resíduos de todos os elementos,

$$[A] \{\phi\} + k_0^2 [B] \{\phi\} + \sum_{l=2}^4 \frac{1}{2jk_0 n_{0l}} [C_l] \{\phi_l\} \\ + \frac{1}{2jk_0 n_{01}} [C_1] \{\phi_1^r\} = jk_0 n_{01} [D] \{\phi^{inc}\} \quad (3.97)$$

$$[U] = \sum_e [U_e] \quad (3.98)$$

Lembrando que

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_{int} \\ \phi_l \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{int} \\ \phi_l \\ \phi^{inc} + \phi_1^r \end{Bmatrix}, \quad (3.99)$$

obtemos a equação matricial

$$[M] \cdot \begin{Bmatrix} \phi_{int} \\ \phi_l \\ \phi_1^r \end{Bmatrix} + \sum_{l=2}^4 \frac{1}{2jk_0 n_{0p}} [C_l] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_p^t \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2jk_0 n_{01}} [C_1] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_1^r \end{Bmatrix} = (jk_0 n_{01} [D] - [M]) \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi^{inc} \end{Bmatrix}, \quad (3.100)$$

onde ϕ_{int} são os valores do campo internos a Ω e $[M] = [A] + k_0^2 [B]$. Esta é a equação a ser resolvida.

As CCPs também apresentam uma limitação em relação à propagação de modos evanescentes [28] se o índice de referência é puramente real, uma vez que as constantes de propagação β para modos evanescentes são imaginárias. Além disso, conforme o índice de referência afasta-se do índice de um determinado modo, observa-se um aumento do erro associado a sua propagação [37]. Este erro é muito menor do que o para CCS. As matrizes $[C_l]$ são todas diagonais (tridiagonais para elementos lineares, pentadiagonais no caso quadrático), de forma que a esparsidade do sistema final é igual à de $[M]$. A solução do sistema resultante deve ser tão custosa quanto à do sistema com CCP e bem menos cara do que com CCEM.

3.5 Cálculo das potências acopladas nos guias de acesso

Se ϕ_l é expandido em termos dos modos ortogonais da porta l

$$\phi_l = \sum_m \phi_{m,l} = \sum_m a_{m,l} f_{m,l}(y) e^{-j\beta_{m,l}z} \quad (3.101)$$

$$a_{m,l} = \int_{\Gamma_l} \phi_l(y) \cdot p(y) \cdot f_{m,l}^*(y) dy_l \quad (3.102)$$

$$p(y) = \frac{1}{n(y)^2} \quad (3.103)$$

a potência acoplada no modo m da expansão (3.101) é obtida integrando a componente \hat{z} do vetor de Poynting para $\phi_{m,l}$ sobre Γ_l :

$$P_m^{(abs)} = \frac{\beta_m}{2\omega\alpha} \int_{\Gamma_l} \phi_{m,l} \phi_{m,l}^* p(y) dy_l = \frac{\beta_m}{2\omega\alpha} |a_{m,l}|^2 \quad (3.104)$$

Esta expressão é obtida levando em conta a relação de ortogonalidade entre os modos. Se o campo incidente no guia 1 é seu modo fundamental normalizado, a potência relativa é dada por

$$P_m = \frac{P_m^{(abs)}}{P_{inc}} = \frac{\frac{\beta_m}{2\omega\alpha} |a_{m,l}|^2}{\frac{\beta_1}{2\omega\alpha} \int_{\Gamma_1} |f_{m,l}|^2 p(y) dy_l} = \frac{\beta_m}{\beta_1} |a_{m,l}|^2 \quad (3.105)$$

O cálculo de $a_{m,l}$ é feito considerando a expansão de $\phi_l(y)$ e $f_{m,l}(y)$ em termos das funções de forma para o domínio discretizado em elementos finitos:

$$[\phi_l]_e = \{\phi_{l,e}\}^T \{N\} \quad (3.106)$$

$$[f_{m,l}]_e = \{f_{m,l,e}\}^T \{N\} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} a_{m,l} &= \int_{\Gamma_l} \phi_l(y) \cdot p(y_l) \cdot f_{m,l}^*(y) dy_l \\ &= \sum_e \int_{\Gamma_l} p(y_l) \cdot \{\phi_{l,e}\}^T \{N\} \{N\}^T \{f_{m,l,e}^*\} dy_l \end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_e \{\phi_{l,e}\}^T \int_{\Gamma_l} p(y_l) \cdot \{N\} \{N\}^T dy_l \{f_{m,l,e}^*\} \\ &= \{\phi_l\}^T \left[\sum_e \int_{\Gamma_l} p(y_l) \cdot \{N\} \{N\}^T dy_l \right] \{f_{m,l}^*\} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Na última expressão, $\{\phi_l\}$ e $\{f_{m,l}^*\}$ são os valores de ϕ_l e $f_{m,l}^*$ sobre os nós da malha.

Capítulo 4

Comparação de resultados empregando diferentes condições de contorno

Neste capítulo são comparadas soluções obtidas com as três condições de contorno para duas situações simples. No primeiro exemplo, são testadas exatidão e eficiência do método num caso simples envolvendo dois modos propagantes num guia *slab*. No segundo exemplo, introduz-se inicialmente um artifício na utilização da CCEM para tornar mais precisos os cálculos com janelas numéricas menores; a seguir, comparam-se resultados da simulação de um guia com descontinuidade utilizando-se CCEM, CCP e CCS.

4.1 Propagação modal

A primeira comparação é feita lançando-se dois modos TE num guia slab simétrico como o da Figura 4-1 e analisando-se a potência dos sinais na entrada e saída para cada uma das condições de contorno. Como os modos do guia não sofrem variação durante a propagação, espera-se que suas potências à saída sejam iguais às da entrada. O guia utilizado possui índices $n_s = 1,0$ e $n_f = 3,2$ e paredes elétricas limitando-o em $y_l = -4 \mu m$ e $y_l = 4 \mu m$. A largura da região de maior índice é $d = 0,2 \mu m$ e a simulação é feita com $\lambda = 1,55 \mu m$.

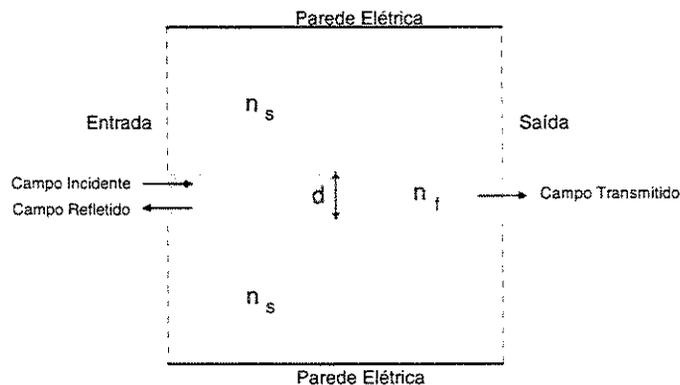


Fig. 4-1: Guia *slab* limitado por paredes elétricas utilizado para testar o método com as três condições de contorno. O campo incidente é a soma dos dois primeiros modos TE normalizados da estrutura.

Os dois primeiros modos propagantes normalizados da estrutura são lançados no guia, o primeiro aproximando-se de um modo confinado da estrutura aberta relacionada, o segundo a um radiativo propagante. O cálculo é repetido para o método com CCP e CCS com diferentes índices de referência. Para este cálculo, foram utilizados 3010 elementos quadráticos. As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 mostram os resultados obtidos para CCEM, CCP e CCS respectivamente. Nestas tabelas, $P_{m,n}$ é a potência do modo de ordem n na porta m .

$P_{1,0}$	$P_{2,0}$	$P_{1,1}$	$P_{2,1}$
$0,666 \cdot 10^{-7}$	$0,027 \cdot 10^{-7}$	1,000	1,000

Tab. 4.1: Potências transmitidas e refletidas no guia *slab* simétrico. Cálculo com condições de contorno de expansão modal.

$n_{01} = n_{02}$	$P_{1,0}$	$P_{2,0}$	$P_{1,1}$	$P_{2,1}$
2,4575	$1,4 \cdot 10^{-10}$	0,024	1,002	0,595
1,6944	$0,11 \cdot 10^{-2}$	$0,60 \cdot 10^{-2}$	0,934	0,829
1,4745	$0,34 \cdot 10^{-2}$	$0,23 \cdot 10^{-1}$	0,875	0,897
1,0	0,02	$1,6 \cdot 10^{-6}$	0,642	0,998

Tab. 4.2: Potências transmitidas e refletidas no guia *slab* simétrico. Cálculo com condições de contorno paraxiais.

$n_{01} = n_{02}$	$P_{1,0}$	$P_{2,0}$	$P_{1,1}$	$P_{2,1}$
2,4575	$1,4 \cdot 10^{-10}$	0,045	1,002	0,221
1,6944	0,045	0,037	1,326	0,440
1,4745	0,088	0,028	1,409	0,553
1,0	0,269	0,001	1,514	0,928

Tab. 4.3: Potências transmitidas e refletidas para o guia *slab* simétrico. Cálculo com condições de contorno simples.

A primeira Tabela mostra que praticamente toda a potência de entrada é transmitida para a porta de saída, como esperado. Já as últimas mostram que há uma grande dependência entre as potências transmitidas e o índice de referência escolhido. Nota-se que, em ambos os casos, o n -ésimo modo é melhor tratado quanto mais próximo o índice de referência estiver de seu índice efetivo. Os erros nos dois casos, desta forma, devem-se à grande diferença entre os índices efetivos dos dois modos lançados, $n_{eff} = 2,4575$ e $n_{eff} = 0,9575$: mesmo que o índice efetivo localize-se exatamente sobre a média destes dois, não está próximo suficiente para gerar resultados precisos para ambos os modos simultaneamente. Fica claro, no entanto, que o método com condições paraxiais é menos sensível a este parâmetro, o que o torna mais confiável na maioria dos casos.

Estruturas com pequeno contraste de índice ($\Delta n = [n_f - n_s] / n_f < 10\%$) são as menos afetadas por esta limitação, especialmente se a parte radiativa do campo concentra-se em modos com constantes de propagação próximas de $\beta = k_0 \cdot n_s$.

A Tabela 4.4 mostra o número total de elementos não-nulos das matrizes finais geradas com cada método e os tempos de resolução dos sistemas lineares. Como se observa, as matrizes para CCEM possuem um número muito superior de elementos não-nulos em relação às demais e, por esta razão, os sistemas levam muito mais tempo para serem resolvidos. As outras duas condições levam a matrizes com o mesmo número de elementos

	Nº de elementos não-nulos	Tempo de resolução (unid. arb.)
Exp. Modal	155.125	166,6800
Paraxial	69.425	10,5150
Simples	69.425	10,6950

Tab. 4.4: Número de elementos não-nulos das matrizes finais e tempo de resolução dos sistemas resultantes para as três condições de contorno.

não-nulos e padrão de esparsidade; os sistemas resultantes levam aproximadamente o mesmo tempo para serem resolvidos. Em geral, pode-se dizer que métodos com CCP ou CCS são mais eficientes do que com CCEM, embora menos precisos. Pode-se dizer ainda que o método com CCP leva a resultados mais confiáveis do que os calculados com CCS.

A seguir, mostramos alguns resultados interessantes envolvendo as três condições de contorno.

4.2 Guia com descontinuidade

Uma segunda comparação foi feita com a estrutura da Figura 4-2, em que dois guias de onda encontram-se deslocados de uma distância b um em relação ao outro, de forma que um grande nível de radiação é esperado. Ambos os guias possuem índice de refração $n_f = 1,6$ e estão envoltos por ar. O deslocamento testado é tal que $b/d = 0,5 \mu m$, sendo $d = 0,2 \mu m$ e $d \cdot k_0 = 2$. Os PMLs utilizados possuem $\delta = 0,2 \mu m$ e $R_t = 0,0001$. Um modo TE_0 é lançado na porta 1. Este exemplo foi tirado da referência [18].

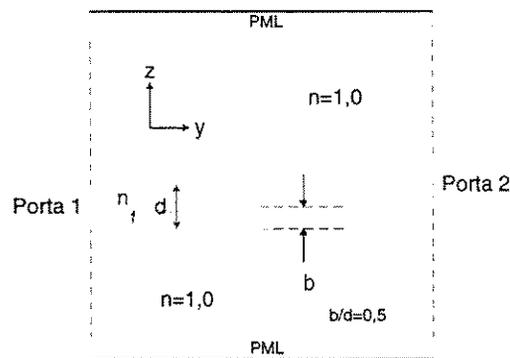


Fig. 4-2: Layout da estrutura utilizada para teste das condições de contorno.

4.2.1 Artificio na utilização da CCEM

A Figura 4-3 ilustra um artifício utilizado para aproximar melhor o campo nas portas de acesso em janelas numéricas limitadas. Ao invés de se expandir o campo em termos dos modos do guia original com paredes elétricas/magnéticas distanciadas de w , utilizam-se modos de um guia expandido com $w' > w$; desta maneira dispõe-se de um número maior de modos radiativos dentro de um intervalo fixo de constantes de propagação e espera-se que a solução se aproxime mais do resultado para o guia aberto, cujo espectro radiativo é contínuo.

Note-se que as PMLs sobre as paredes do guia blindado permitem simular o espaço livre.

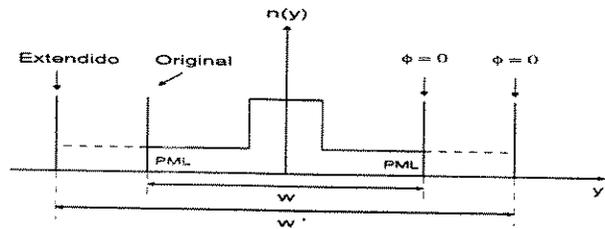


Fig. 4-3: Extensão de um guia de ondas blindado utilizado para cálculo de modos. O guia original estende-se sobre y_l , sendo l o número da porta correspondente.

A priori, não é possível saber o distanciamento ideal entre paredes de blindagem para uma descrição precisa do campo, sendo portanto necessário testar uma sequência de estruturas com distanciamento diferente até que se encontre um ponto de convergência para algum parâmetro de saída da simulação; este parâmetro pode ser por exemplo a potência transmitida a cada uma das portas da junção em teste.

Uma dada estrutura blindada possuirá um espectro com um número limitado de modos "guiados" e "radiativos" propagantes e uma infinidade de modos "radiativos" evanescentes. Neste trabalho, o conjunto de modos obtidos para a implementação da CCEM é ordenado em ordem decrescente de β^2 , de forma que, quanto mais modos são considerados na somatória, mais modos radiativos são levados em conta. Em particular existe um limite M_{E0} tal que para $m > M_{E0}$, $\beta_m^2 < 0$; somar modos acima deste limite significa incluir modos evanescentes de maiores ordem nas matrizes da CCEM.

Para cada w' testado, é necessário variar o número de modos utilizados no cálculo, porque também não é possível saber a priori a quantidade de modos radiativos evanescentes necessários: modos evanescentes decaem ao longo do guia, de forma que só é necessário levar em conta um conjunto limitado destes; como a atenuação do modo aumenta com sua ordem, podemos tomar a somatória sobre modos radiativos somente até um limite M_E ; este limite pode ser obtido utilizando-se um número crescente de modos evanescentes por vez, até que se chegue a uma convergência.

Modos radiativos propagantes não decaem; é necessário encontrar um conjunto grande o suficiente destes modos (dentro de seu intervalo de existência) para a representação precisa do campo; aumentando-se w' , aumentamos o número de modos propagantes disponíveis no intervalo. É importante ressaltar, no entanto, que através deste procedimento estamos aumentando também a disponibilidade de modos evanescentes dentro de um determinado intervalo; desta forma se dois testes consecutivos são feitos, inicialmente com distância w' e a seguir com $w'' > w'$, é necessário que $M_E'' > M_E'$ para que modos evanescentes equivalentes nos dois testes sejam levados em conta.

Para o caso da Figura 4-2, inicialmente, simulações foram realizadas utilizando uma janela numérica com $y \in [-5; 5] \mu m$ e $z \in [0; 1] \mu m$. Em primeiro lugar, foram obtidos resultados para a janela sem extensão dos guias de acesso; a seguir o mesmo cálculo foi realizado para uma extensão dos guias de acesso tal que seus limites fossem $y_l = -8 \mu m$ e $y_l = 8 \mu m$, $l = 1, 2$. Finalmente, um teste foi realizado para a estrutura sem PMLs, com os modos dos guias sem extensão. Em todos os casos, foram utilizados 100 modos, suficientes -nas três situações - para convergência das potências transmitidas às duas portas da junção. A convergência em função do número

de modos utilizados pode ser observado nas Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7, para os casos sem extensão, com extensão e sem PML, respectivamente.

# Modos	P ₁	P ₂
50	0,071	0,7336
80	0,0086	0,7215
100	0,0086	0,7215

Tab. 4.5: Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM para diferentes números de modos utilizados. Os modos utilizados são para o guia com $y_l \in [-5; 5]$ sem extensão.

# Modos	P ₁	P ₂
50	0,0090	0,7135
80	0,0085	0,7194
100	0,0085	0,7194

Tab. 4.6: Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM para diferentes números de modos utilizados. Os modos utilizados são para o guia com com $y_l \in [-5; 5]$ com extensão tal que $y_l \in [-8; 8]$.

# Modos	P ₁	P ₂
80	0,0075	0,7293
100	0,0075	0,7293

Tab. 4.7: Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM para diferentes números de modos utilizados, para a estrutura sem PMLs. Os modos utilizados são para o guia com com $y_l \in [-5; 5]$, extensão e PMLs.

A Figura 4-4 mostra a amplitude do campo elétrico na porta 2 da estrutura para as três simulações. Observa-se que, sem PMLs, a parte radiativa do campo é bastante oscilatória, em vista do (pequeno) número de modos disponíveis para a descrição do campo e da reflexão total do campo divergente nas paredes elétricas da estrutura. A simulação com PMLs e sem extensão dos guias gera uma solução um pouco menos oscilatória, uma vez que se eliminam em grande parte reflexões nas paredes elétricas, sendo o número limitado de modos radiativos propagantes utilizados responsável pela oscilação na parte radiativa do campo. Considerando um número maior de modos radiativos, através da extensão de $-8 \mu m$ a $8 \mu m$, as oscilações diminuem sensivelmente.

O mesmo teste foi a seguir realizado para uma janela numérica com $y \in [-3; 3] \mu m$ e $z \in [0; 1] \mu m$. A extensão aplicada aos guias de acesso, neste caso, era limitada em $y_l = -8 \mu m$ e $y_l = 8 \mu m$, $l = 1, 2$ e 100 modos das estruturas foram utilizados. A Figura 4-5 mostra a amplitude do campo elétrico para simulações sem e com extensão. No primeiro caso, a curva apresenta um nível relativamente alto de oscilação; já no segundo, as oscilações praticamente desaparecem, em vista da disponibilidade de um maior número de modos radiativos propagantes. A Figura 4-6 mostra uma comparação entre o campo elétrico para a simulação anterior utilizando $y \in [-5; 5] \mu m$ e extensão de -8 a 8 e a atual com $y \in [-3; 3] \mu m$ e extensão de -8 a 8 . As soluções nos dois casos encontram-se muito próximas, deixando clara a convergência do método.

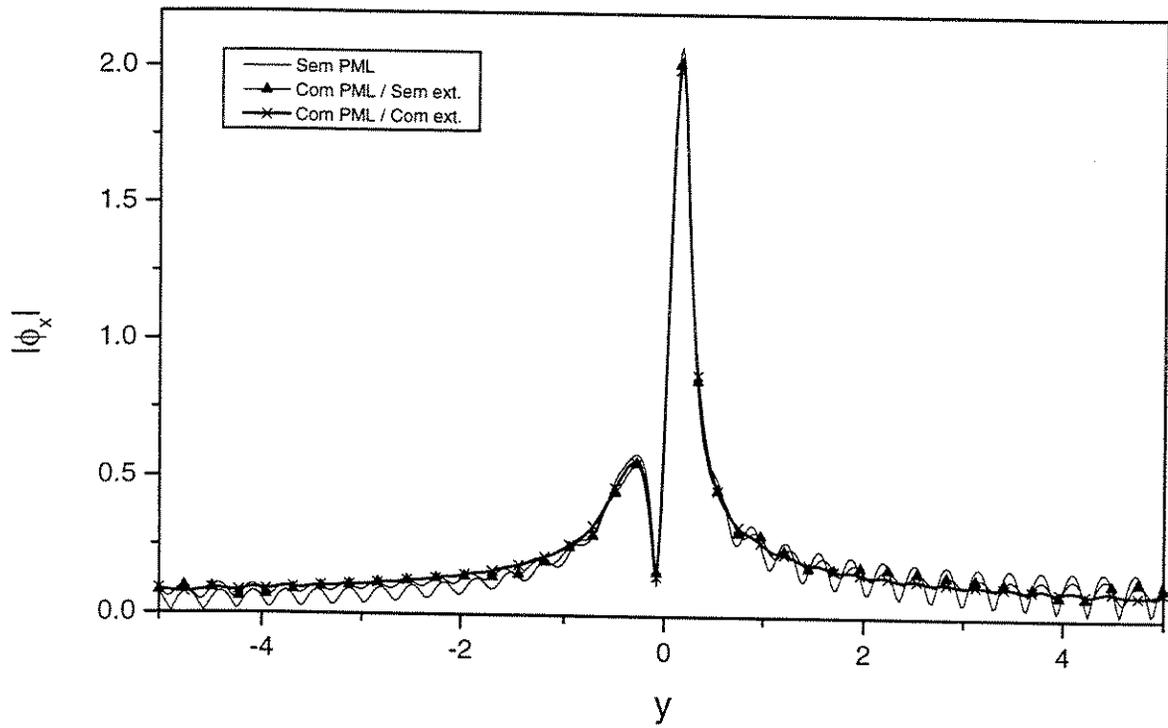


Fig. 4-4: Amplitude do campo elétrico para a janela $y \in [-5; 5] \mu m$ com e sem extensão do guia de acesso.

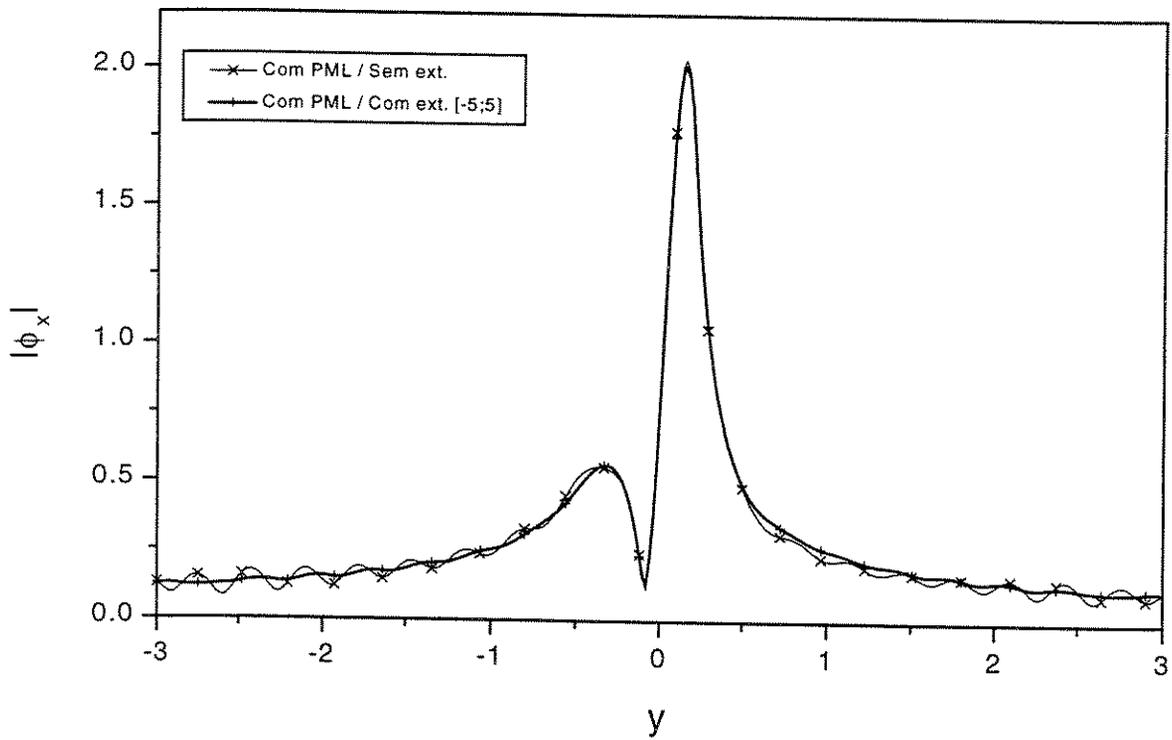


Fig. 4-5: Amplitude do campo elétrico para a janela $y \in [-3; 3] \mu m$ com e sem extensão do guia de acesso.

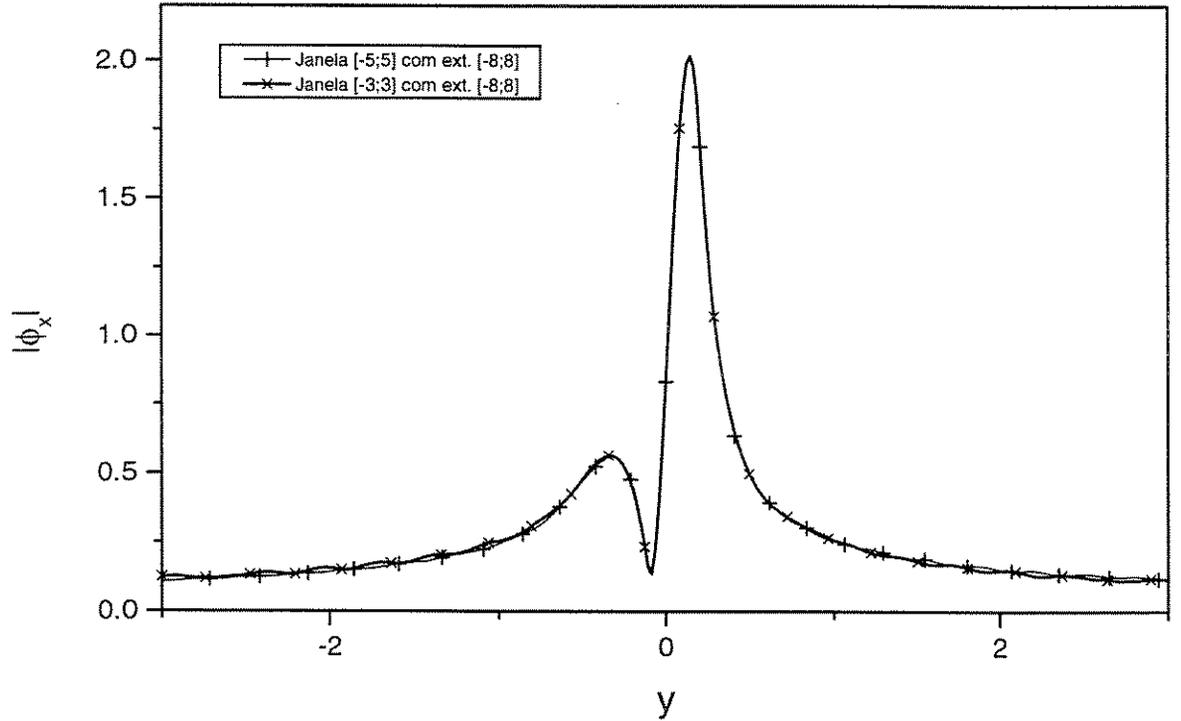


Fig. 4-6: Amplitude do campo elétrico na porta 2 com CCEM para a janelas numéricas $y \in [-3;3] \mu m$ e $y \in [-3;3] \mu m$, $z \in [0;1] \mu m$, sem extensão e com extensão tal que $y_l \in [-8;8] \mu m$.

4.2.2 Comparação das condições de contorno

A Figura 4-7 mostra a amplitude do campo elétrico calculada com as três condições de contorno; as Figuras 4-8 a), b) e c) mostram respectivamente os campos calculados com CCEM, CCP e CCS. Devido à grande presença de modos radiativos evanescentes, a radiação nos últimos dois casos apresenta qualitativamente diferenças significativas em relação ao primeiro; a potência acoplada nos modos principais, no entanto, são pouco afetadas. É esperado que, aumentando-se a distância entre as portas de acesso e a junção, os resultados das condições de contorno alternativas sejam mais confiáveis. A Tabela 4.8 mostra as potências acopladas ao modo fundamental nas portas 1 e 2, calculadas com os três métodos.

	P1	P2
CCEM	0.0082	0.7192
CCP	0.0091	0.7223
CCS	0.0120	0.7175

Tab. 4.8: Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM, CCP e CCS para a janela numérica $y \in [-3;3] \mu m$, $z \in [0;1] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8;8] \mu m$.

A seguir, foram realizadas simulações para a janela $y \in [-3;3] \mu m$, $z \in [0;2] \mu m$. Como a distância entre a descontinuidade e as portas de acesso é maior, é de se esperar que os campos calculados com CCP e CCS estejam mais próximos aos calculados com CCEM; isto de fato se observa na Figura 4-10, que mostra a amplitude do campo sobre a porta 2 para os três casos. As Figuras 4-9 a), b) e c) permitem comparar qualitativamente as

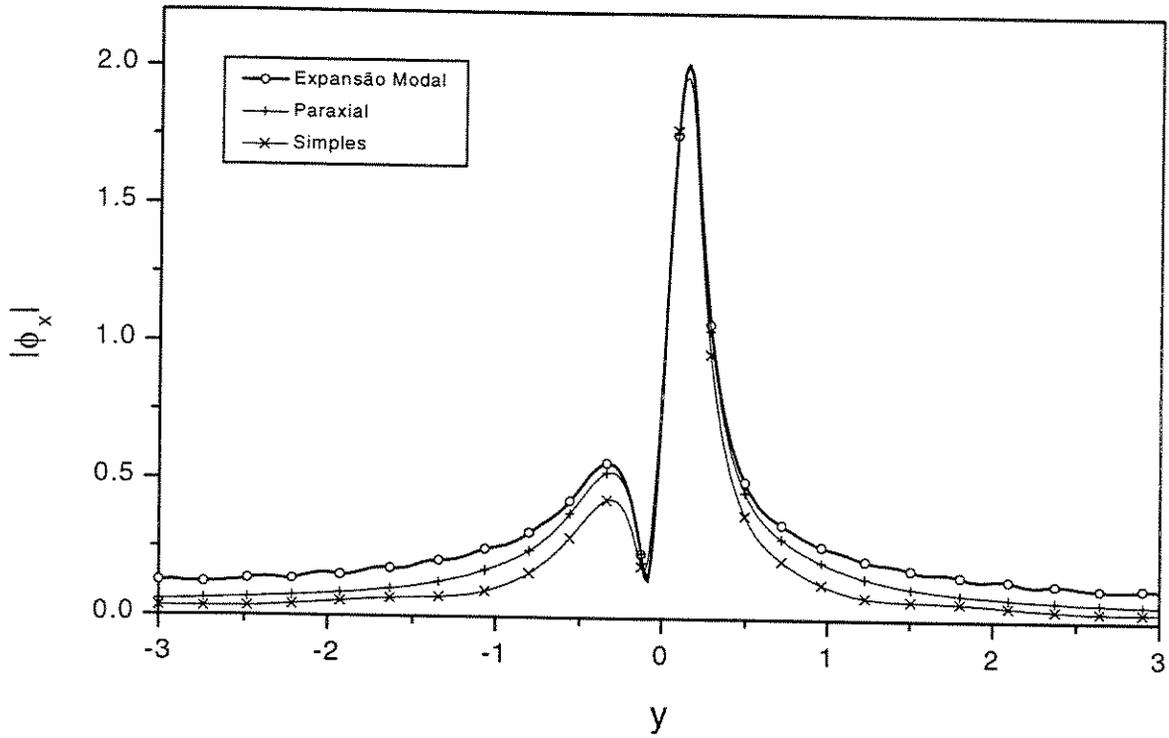


Fig. 4-7: Amplitude do campo elétrico para as três condições de contorno para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 1] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

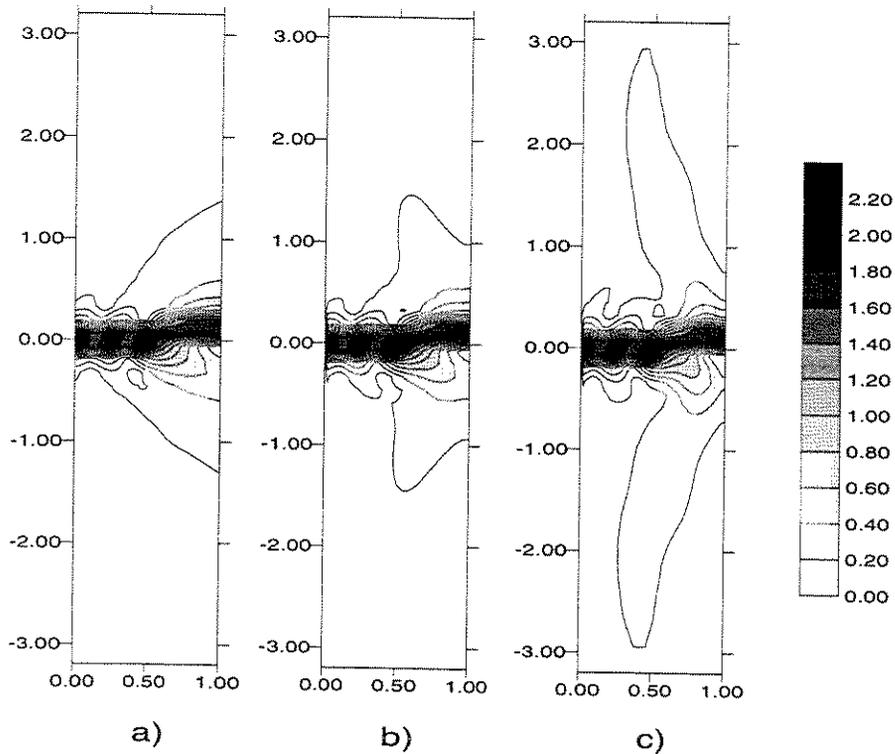


Fig. 4-8: Amplitude do campo elétrico calculada com a) CCEM b) CCP e c) CCS para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 1] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

soluções obtidas com cada condição de contorno. Nas duas figuras, as soluções obtidas com CCP aproximam melhor as soluções obtidas com CCEM. As potências calculadas com os três métodos são mostradas na Tabela 4.9. Finalmente, as mesmas simulações foram realizadas com uma janela com $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 3] \mu m$. A

	P1	P2
CCEM	0.0082	0.7192
CCP	0.0091	0.7223
CCS	0.0120	0.7175

Tab. 4.9: Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM, CCP e CCS para a janela $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 2] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

Figura 4-11 mostra as amplitudes do campo elétrico na porta 2 para as três condições de contorno e as Figuras 4-12 a), b) e c) mostram a amplitude do campo elétrico para CCEM, CCP e CCS respectivamente. Nota-se que os resultados obtidos com CCP aproximam-se muito mais dos obtidos com CCEM. As potências calculadas com os três métodos são mostradas na Tabela 4.10.

Pode-se concluir desta forma que resultados mais confiáveis podem ser obtidos utilizando-se CCP do que com CCS, quando comparadas às soluções mais exatas obtidas com CCEM.

	P1	P2
CCEM	0.0086	0.7194
CCP	0.0086	0.7226
CCS	0.082	0.7241

Tab. 4.10: Potências transmitidas às portas 1 e 2 calculadas com CCEM, CCP e CCS para a janela $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 3] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

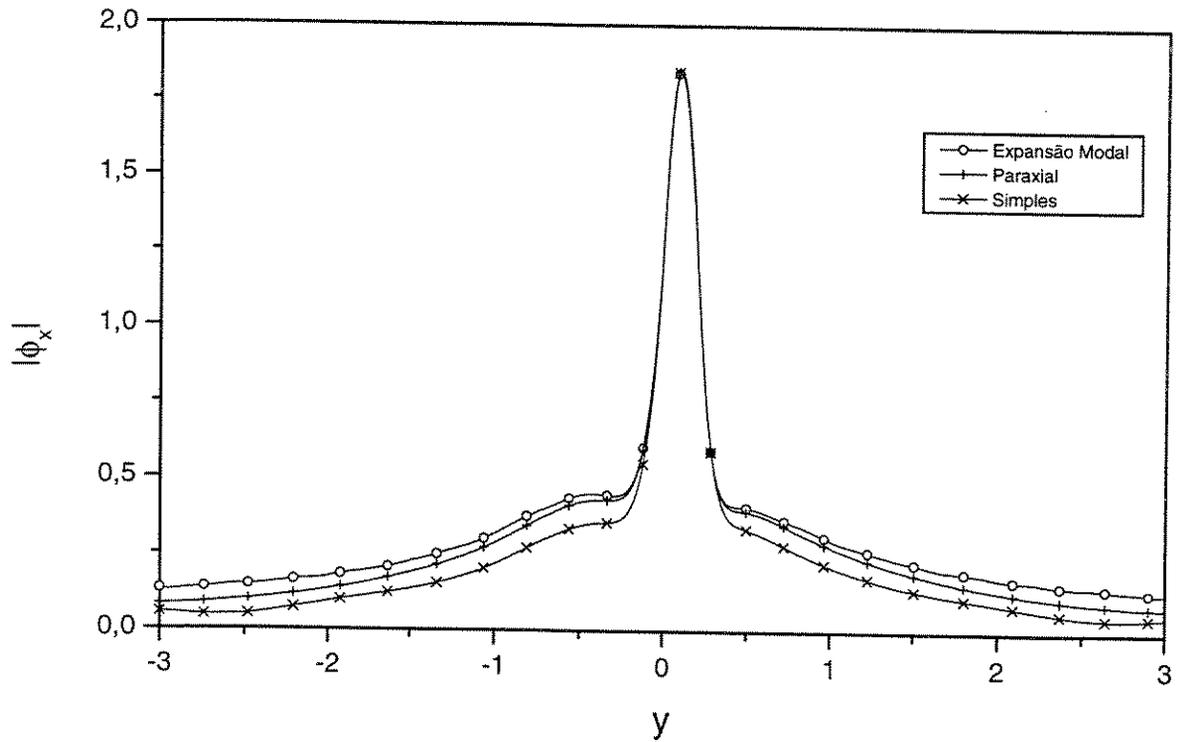


Fig. 4-9: Amplitude do campo elétrico para as três condições de contorno para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 2] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

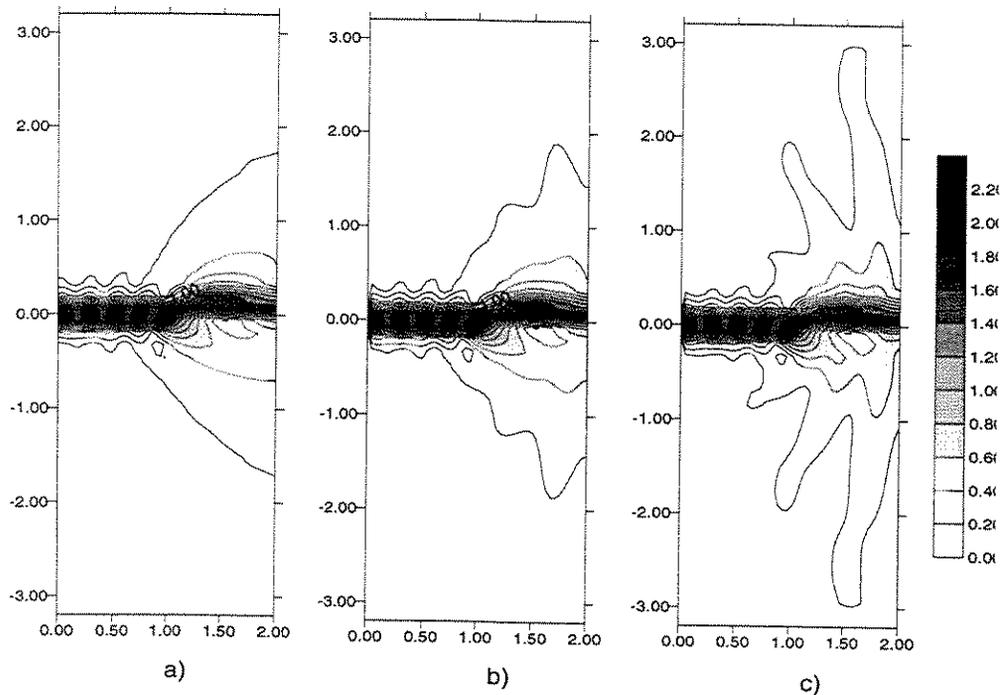


Fig. 4-10: Amplitude do campo elétrico calculada com a) CCEM b) CCP e c) CCS para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 2] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

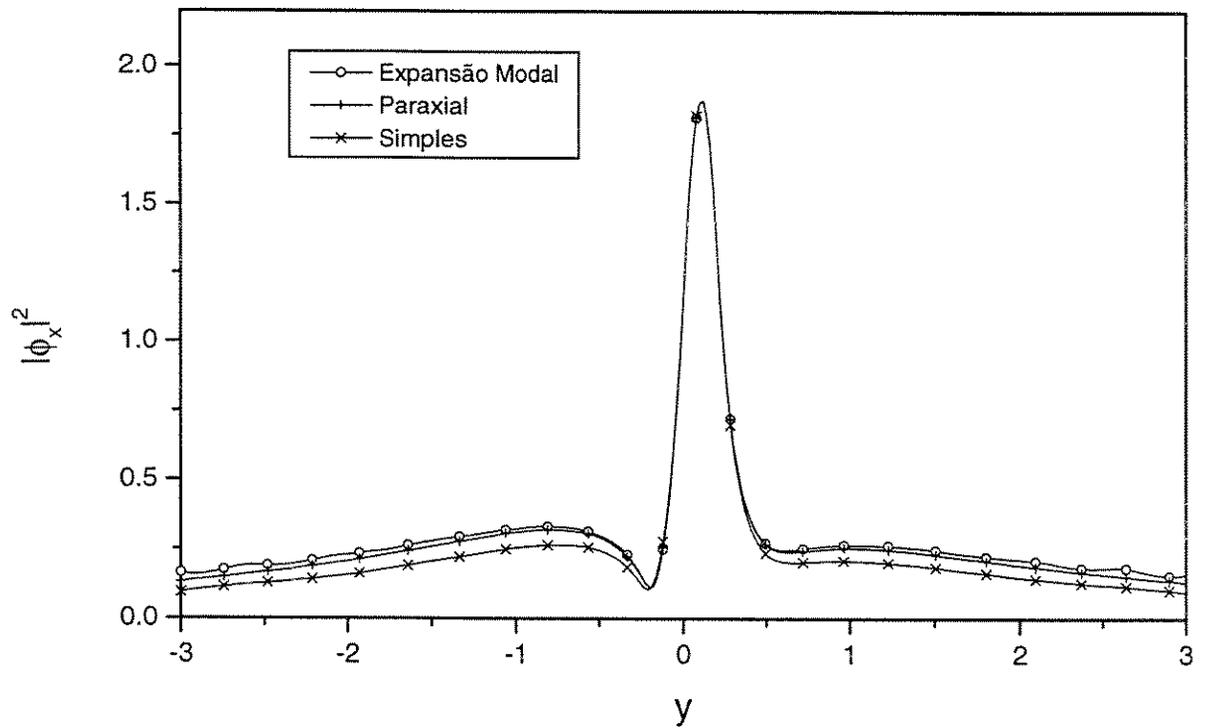


Fig. 4-11: Amplitude do campo elétrico para as três condições de contorno para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 3] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

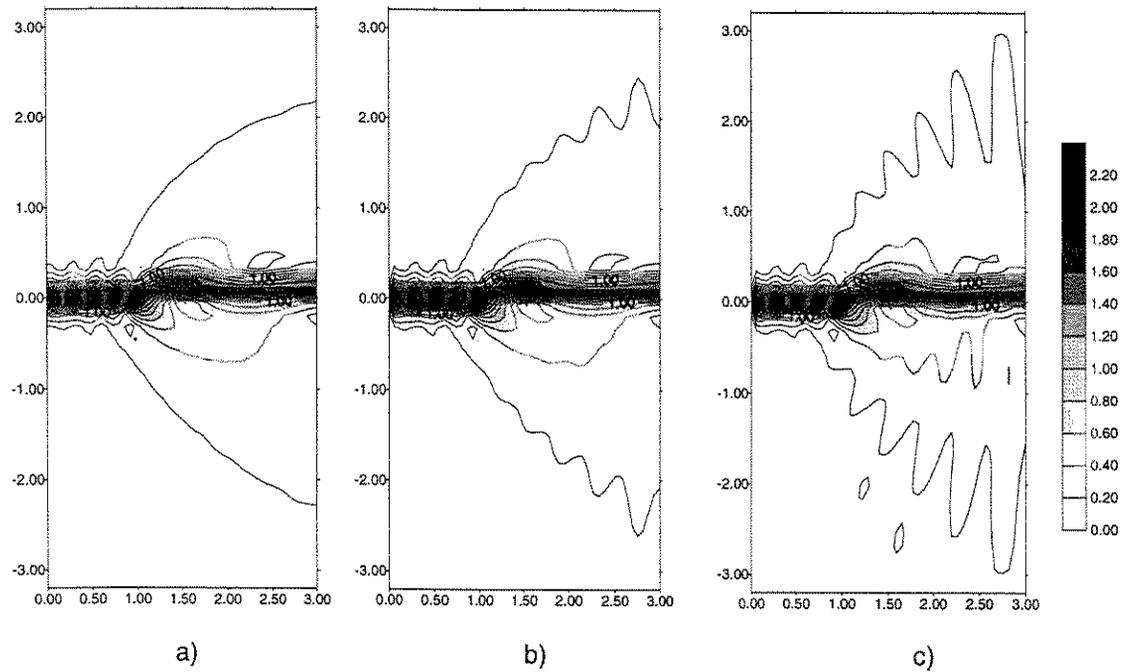


Fig. 4-12: Amplitude do campo elétrico calculada com a) CCEM b) CCP e c) CCS para a janela numérica $y \in [-3; 3] \mu m$, $z \in [0; 3] \mu m$. Para CCEM, foi utilizado o guia com extensão tal que $y_l \in [-8; 8] \mu m$.

Capítulo 5

Aplicações em junções complexas

Neste capítulo são mostrados alguns resultados de simulações de três estruturas complexas utilizando-se as três condições de contorno discutidas no capítulo anterior.

5.1 Laser com cobertura anti-refletiva

Este exemplo foi obtido da referência [23] e usa os mesmos parâmetros físicos. Uma estrutura como a da Figura 5-1 modela uma face de laser semiconductor com uma camada anti-refletiva (AR) homogênea de índice de refração n_{AR} . Considera-se o guia passivo com $n_f = 3,6$ e $n_s = 3,564$ $t = 1,46 \mu m$. A janela numérica para simulação era exatamente como na figura, discretizada em 8446 elementos. O comprimento de onda de operação era $\lambda = 1,55 \mu m$. Para a formulação com CCEM, foram utilizados 50 modos. Para as duas outras condições de contorno, foi utilizado o índice efetivo do modo TE_0 fundamental $n_{eff} = 3,5864$ como índice de referência. O PML possuía $R = 0,0001$ e espessura $\delta = 0,2 \mu m$

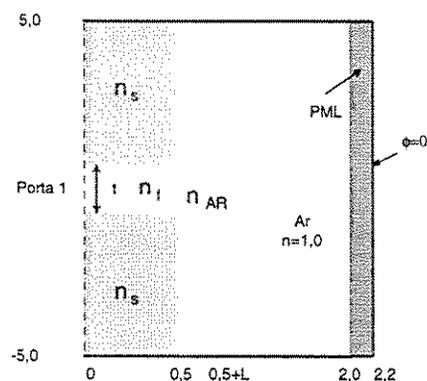


Fig. 5-1: Modelo de laser com camada anti-refletiva utilizado para a simulação. O PML absorve o campo que escapa através da face, com um mínimo de reflexão.

Inicialmente, uma simulação é feita para $n_{AR} = 1,0$ e um modo TE_0 incidente na porta 1 para determinar a refletividade da face do laser sem a camada AR. A Tabela 5.1 mostra os valores obtidos com as três condições de contorno e as Figuras 5-2 a), b) e c) mostram a amplitude do campo calculado respectivamente com CCEM,

CCP e CCS. Nota-se em todos os casos um padrão de onda estacionária no guia de onda, indicando um nível significativo de reflexão na face.

	CCEM	CCP	CCS
R	0,3262	0,3263	0,3263

Tab. 5.1: Refletividades para o laser sem filme AR obtidas para as três condições de contorno.

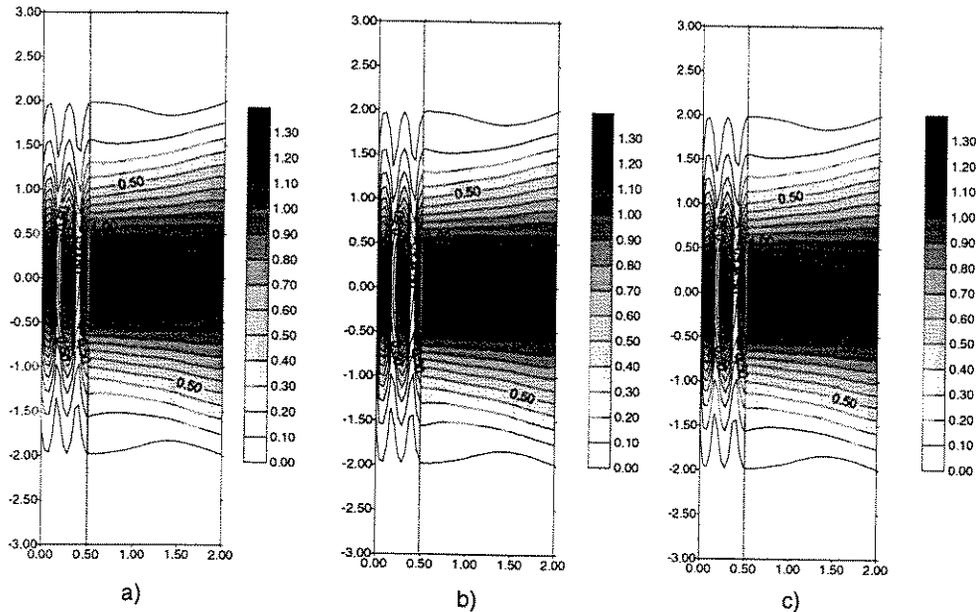


Fig. 5-2: Amplitude do campo elétrico para laser sem camada anti-refletiva. O padrão de onda estacionária indica a alta refletividade da face.

Os resultados das três simulações são praticamente os mesmos; isto se deve ao fato do guia ser monomodo e haver poucos (e de pequena amplitude) modos radiativos retornando à entrada. Outro fator importante é o baixo contraste entre os índices do guia: a constante de propagação dos principais modos radiativos excitados é bem próxima das constantes de referência escolhidas para CCP e CCS, causando menores erros. É possível ainda inferir que modos evanescentes excitados na face possuem pequena amplitude sobre a porta de entrada do guia.

Para reduzir o nível de reflexão na face do laser, introduz-se a camada AR com $n_{AR} = 1,8938$ e procura-se encontrar um valor ótimo de L para o comprimento de onda de operação. A Figura 5-3 mostra a curva de potência refletida para L entre $0,190 \mu\text{m}$ e $0,220 \mu\text{m}$. A refletividade diminui sensivelmente, chegando próximo de $0,001\%$ para o valor quase-ótimo $L = 0,206 \mu\text{m}$. Novamente -e pelas mesma razões- os valores obtidos com os três métodos são idênticos, mostrando a eficiência das condições de contorno alternativas CCP e CCS em relação à CCEM. As Figuras 5-4 a), b) e c) mostram a amplitude do campo elétrico na situação $L = 0,206 \mu\text{m}$. Note-se que o padrão de onda estacionária é bem menos expressivo do que no caso anterior, sem cobertura AR.

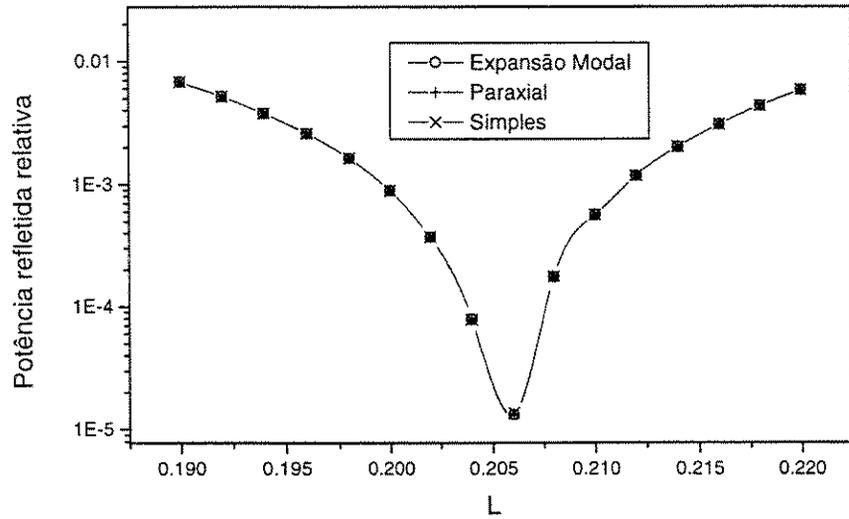


Fig. 5-3: Refletividade da face do laser com cobertura anti-refletiva. Um mínimo de refletividade existe para L próximo de $0,206 \mu\text{m}$.

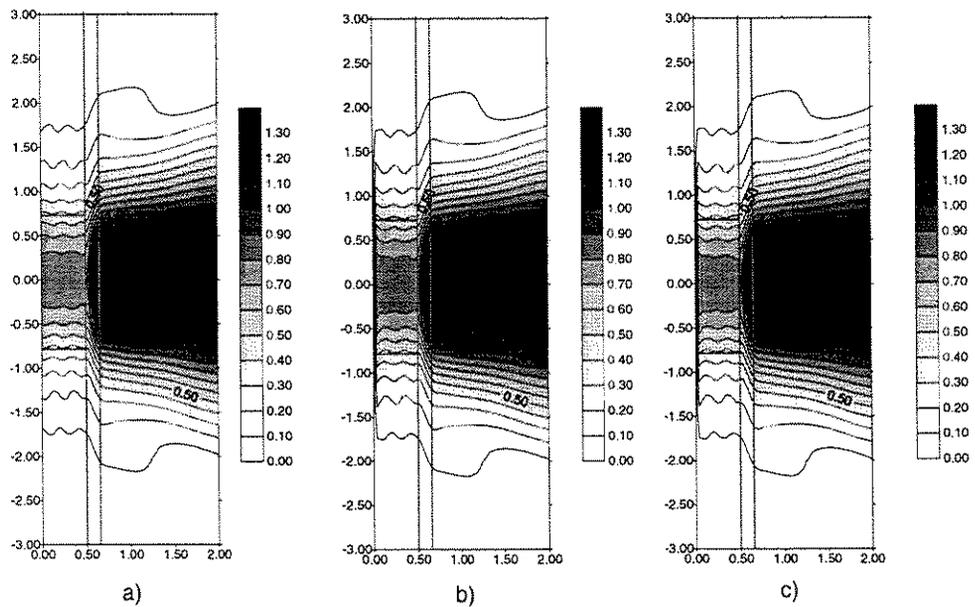


Fig. 5-4: Amplitude do campo elétrico para laser com camada anti-refletiva de espessura quase-ótima $L = 0,206 \mu\text{m}$. O padrão de onda estacionária é bem menos expressivo do que no caso anterior.

5.2 Divisor de feixe optoeletrônico

Este componente, mostrado na Figura 5-5, consiste de uma junção em 90° de dois guias idênticos de baixo contraste ($\Delta n \simeq 2.4\%$), formando uma estrutura de quatro portas, com um espelho de 45° optoeletrônico com índice variável na região de intersecção. O espelho localiza-se exatamente sobre a junção de maneira que o ajuste de seu índice de refração controla a reflexão da luz que entra pela porta 1 para a porta 2 e sua transmissão para a porta 3. O componente é operado a um comprimento de onda $\lambda = 1,5 \mu m$, a largura do guia é $W = 1,0 \mu m$ e a do espelho é $G = 0,255 \mu m$. Os índices da estrutura são $n_f = 3,17$ e $n_s = 3,25$.

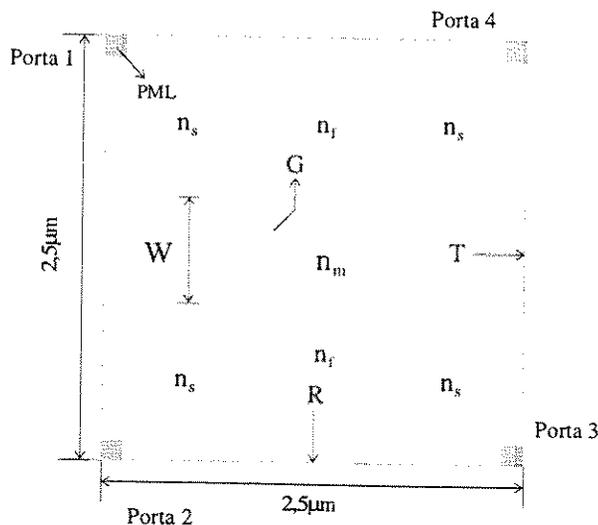


Fig. 5-5: Divisor de feixe optoeletrônico. A região mais clara corresponde ao espelho de índice n_m variável.

Estudamos o efeito da variação do índice de refração n_m do espelho sobre a transmissão de energia entre as portas 1-4. Consideramos que a excitação seja somente um modo fundamental normalizado da porta 1. A potência R refletida para a porta 2 é mostrada nas Figuras 5-6 e 5-8 respectivamente para os casos TE e TM. A potência T transmitida para a porta 3 é mostrada nas Figuras 5-7 e 5-9 para os casos TE e TM respectivamente. Tanto a potência refletida acoplada na porta 1 como a potência acoplada à porta 4 permanecem abaixo de -30dB para todos os valores de n_m testados.

A Figura 5-10 mostra a amplitude campo elétrico para incidência do modo TE para $n_m = 2,1$, calculado com CCEM. As Figuras 5-11 e 5-12 mostram a mesma situação, porém com CCP e CCS respectivamente. As simulações foram feitas com 7780 elementos quadráticos triangulares.

Para as simulações, foram utilizados $\delta = 0,2$ e $R_t = 0,001$ nos PMLs. Para condições de contorno de expansão modal, foram utilizados 50 modos de um guia limitado por paredes elétricas entre $y_l = -5$ e $y_l = 5$, $l = 1 - 4$ (todos os guias são idênticos). Para condições de contorno dos tipos paraxial e simples, foi utilizado o índice do modo principal como índice de referência: $n_{0l} = 3,2205$. Observamos uma boa concordância entre os três métodos em todos os casos. Os resultados obtidos comparam-se muito bem com os de [22] e [24].

Como se observa, é possível controlar a potência acoplada aos dois guias de saída através da variação do índice de refração do espelho. O dispositivo pode ainda ser otimizado para reduzir perdas por radiação, especialmente em se desejando acoplar mais potência à porta 2. A energia é quase totalmente transmitida para a porta 3

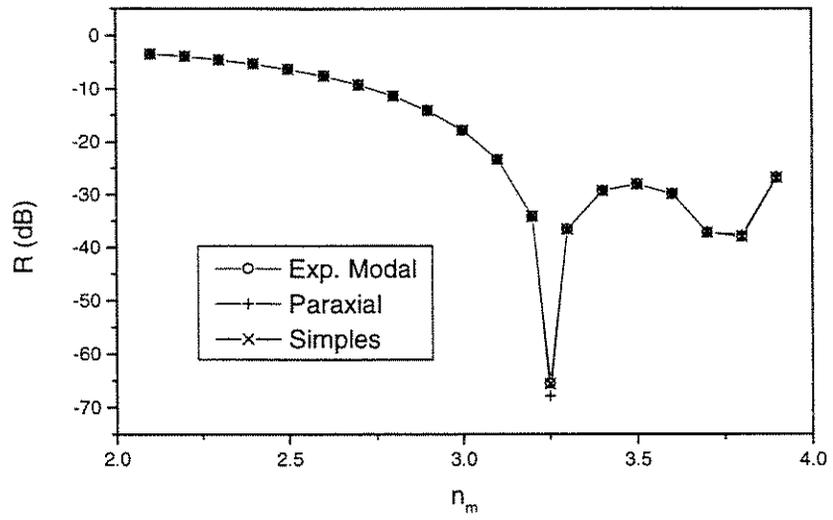


Fig. 5-6: Potência refletida para modo TE fundamental incidente.

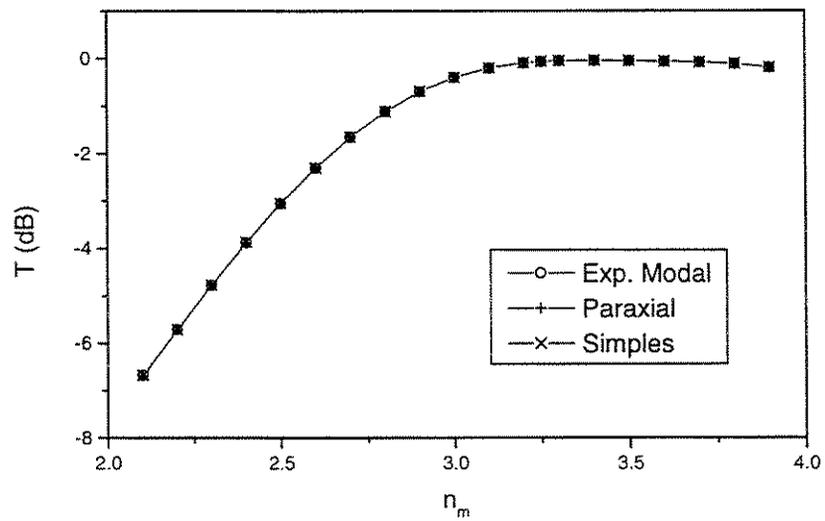


Fig. 5-7: Potência transmitida para modo TE fundamental incidente.

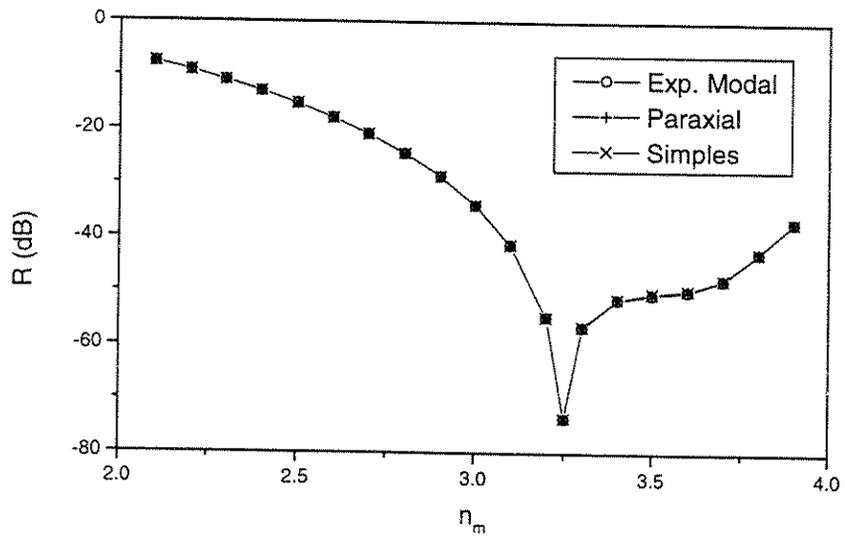


Fig. 5-8: Potência transmitida para modo TM fundamental incidente.

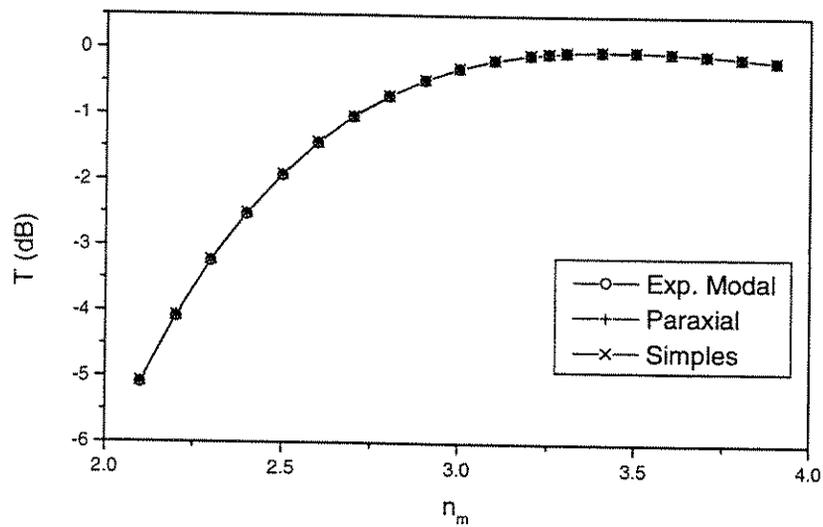


Fig. 5-9: Potência refletida para do modo TM fundamental incidente.

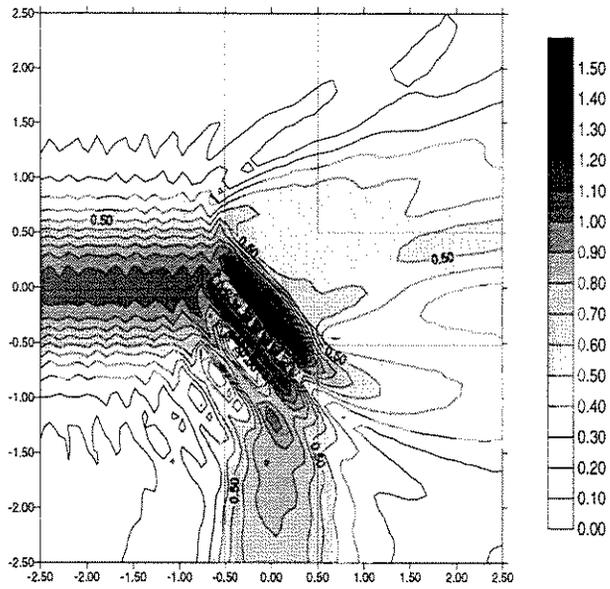


Fig. 5-10: Amplitude do campo elétrico para $n_m = 2, 1$ para modo TE fundamental incidente, utilizando CCEM.

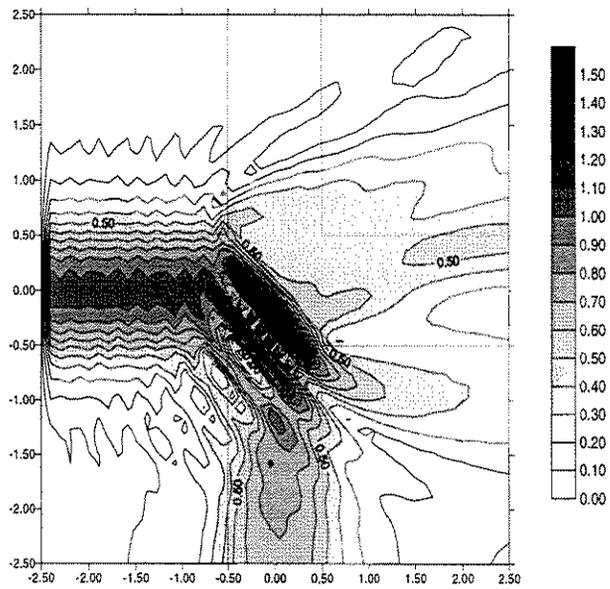


Fig. 5-11: Amplitude do campo elétrico para $n_m = 2, 1$ para modo TE fundamental incidente, utilizando CCP.

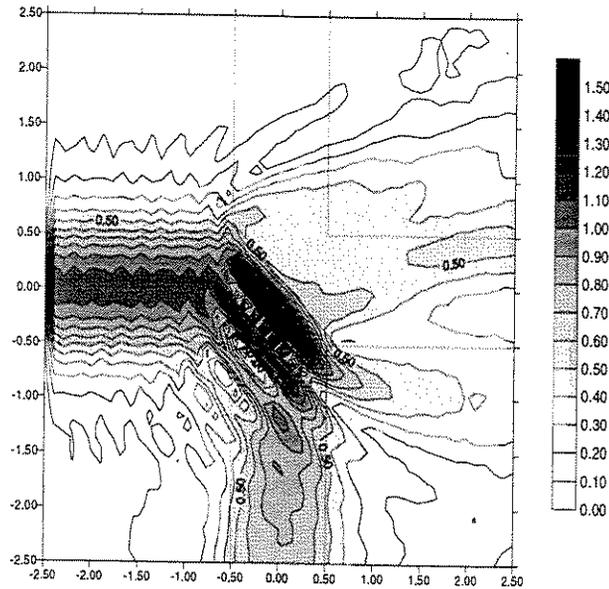


Fig. 5-12: Amplitude do campo elétrico para $n_m = 2,1$ para modo TE fundamental incidente, utilizando CCS.

para as duas polarizações quando o índice do espelho é igual ao dos guias. O pequeno contraste entre n_f e n_s permite evitar uma distorção muito grande do campo sobre a junção neste caso, o que explica o baixo nível de diafonia -abaixo de -30 dB - nas portas 2 e 4. A polarização TM é muito mais refletida pelo espelho do que a TE.

Os resultados dos três métodos coincidem bem em vista da baixa amplitude dos modos radiativos evanescentes sobre as portas e do baixo contraste dos índices de refração dos guias. Os modos radiativos mais significativamente excitados possuem índice efetivo muito próximo de n_s ; as discrepâncias entre estes índices e os de referência são muito pequenas para que erros grandes resultem.

5.3 Otimização de uma junção em 90° com alto contraste de índice

Nesta seção, procura-se otimizar as características de transmissão e perdas da junção em ângulo reto com alto contraste de índice ($\Delta n \cong 2,2$) mostrada na Figura 5-13. Estruturas como esta são interessantes para a integração de circuitos ópticos, uma vez que permitem desviar a direção de propagação da luz a grandes ângulos em pequenas regiões do espaço. Convencionalmente, são implementadas estruturas adiabáticas de grandes dimensões ($>100\text{mm}$) para reduzir perdas tendo em vista um baixo Δn . Na junção da figura, o alto Δn permite confinar melhor a luz no interior dos guias, resultando em menores perdas por radiação.

A otimização da junção é feita através da implementação de um ressoador na parte inferior da junção, como se verá mais adiante. A idéia por trás deste artifício tem base numa teoria de cavidades ressonantes acopladas desenvolvida em [7]. A análise nesta referência é centrada num acoplamento temporal entre os modos de um ressoador e os de seus canais de acesso. Considerando forte este acoplamento e pequenas perdas, é possível prever extremos de transmissão de energia às portas para determinados comprimentos de onda. No caso testado a seguir, procura-se minimizar o acoplamento de energia do ressoador à porta de alimentação (correspondendo a uma potência refletida de volta à fonte) e maximar a transmissão de energia para uma porta de saída, para um

determinado comprimento de onda. A teoria possui muitas simplificações, sendo bastante limitada em termos quantitativos; apresenta, no entanto, resultados qualitativos interessantes confirmados por cálculos mais precisos como os dos métodos numéricos desenvolvidos neste trabalho.

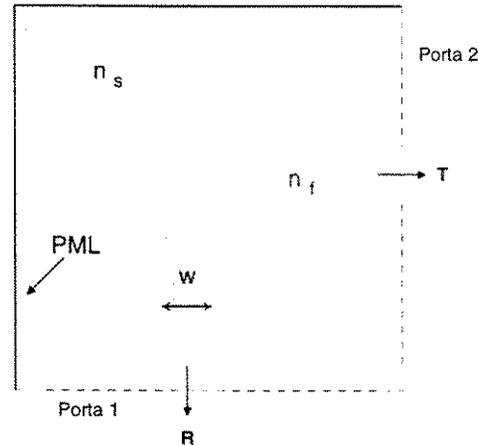


Fig. 5-13: Junção com ângulo de 90° .

A estrutura da Figura 5-13 possui $n_f = 3,2$, $n_s = 1,0$ e $w = 0,2$. A janela numérica adotada para simulação ia de -4 a 4 em y e z , escolhida segundo a convergência do método utilizando CCEM. Foram utilizados 80 modos dos guias de acesso com paredes elétricas em $y_l = -4$ e $y_l = 4$ (10 modos radiativos propagantes), resultando numa discretização de 13636 elementos. Para as outras duas condições de contorno, foram utilizados os índices dos modos fundamentais em cada comprimento de onda como índices de referência. Os PMLs utilizados possuíam $\delta = 0,2$ e $R_t = 0,0001$. As potências relativas transmitida (T) e refletida (R) para o modo TE fundamental na faixa $\lambda = 1,48 \mu\text{m}$ a $\lambda = 1,62 \mu\text{m}$ incidente na porta 1 são mostradas na Figuras 5-14 e 5-15 respectivamente. Observa-se que, para as três condições de contorno, apenas aproximadamente 30% da potência é transmitida, enquanto que aproximadamente 20% da potência é refletida para a porta de entrada.

A amplitude do campo elétrico para $\lambda = 1,55$ mostrado na Figura 5-16 (calculado com CCEM) apresenta bastante radiação próximo da terminação do guia vertical; neste ponto, existe reflexão parcial do campo incidente e somente parte da energia é acoplada ao guia horizontal. Um padrão de onda estacionária no guia vertical indica claramente reflexão significativa do modo. As Figuras 5-17 e 5-18 mostram a mesma situação, calculada com CCP e CCS, respectivamente.

As três condições de contorno levam a soluções bastante próximas; o maior erro para potência refletida é de 2,5% do valor calculado com CCEM para as duas condições alternativas. Na transmissão, o erro é menor do que 1,0 % para CCS e CCP. A discrepância entre as soluções obtidas com as três condições de contorno podem ser explicadas em termos de dois fatores: o primeiro e menos significativo (no caso em questão) é a existência de modos radiativos próximos das bordas da janela computacional. Como mencionado no capítulo anterior, as condições alternativas CCP e CCS não conseguem tratar modos radiativos evanescentes. Uma vez que estes modos decaem ao longo do guia, localizando-se os limites da janela computacional a distâncias suficientemente grandes da junção tal que as amplitudes dos mesmos sejam insignificantes, é possível obter resultados mais confiáveis [35]; no caso em questão, a concordância entre as soluções indica pouca presença de modos radiativos.

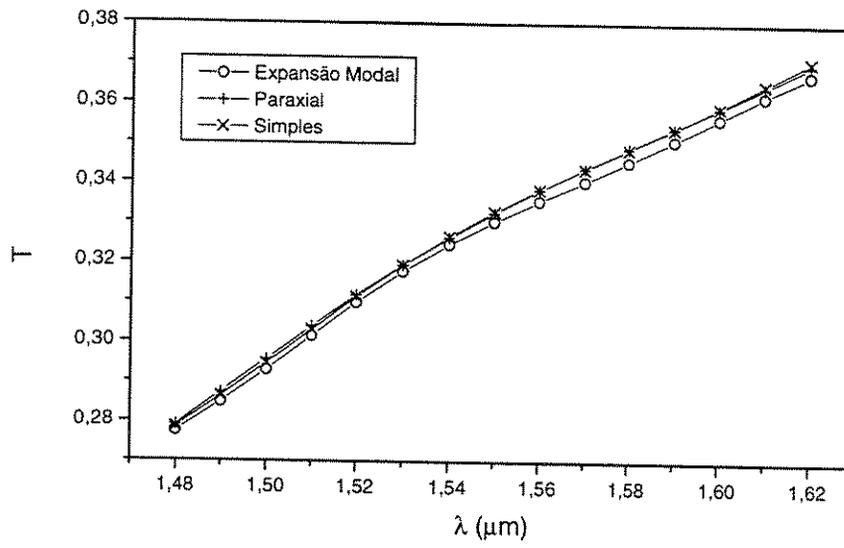


Fig. 5-14: Potência relativa transmitida acoplada no modo TE_0 para a porta 2 da junção.

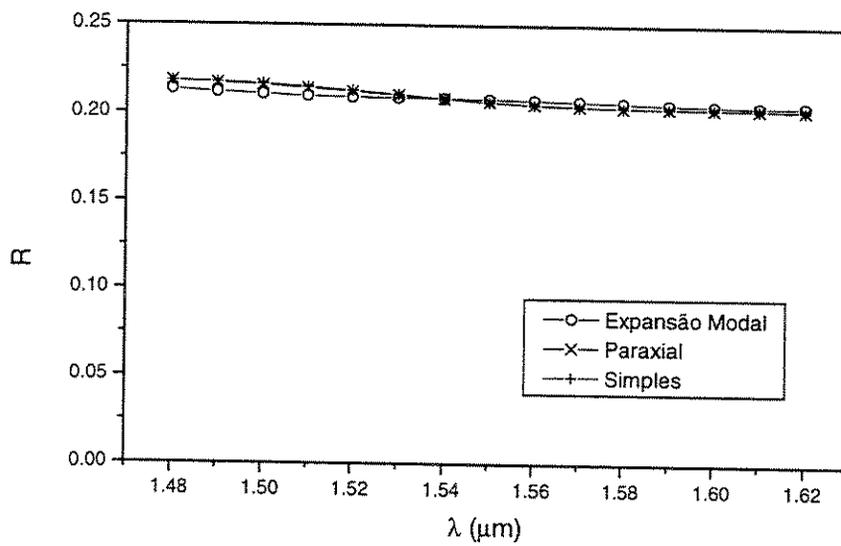


Fig. 5-15: Potência relativa refletida acoplada no modo TE_0 para a porta 1 da junção.

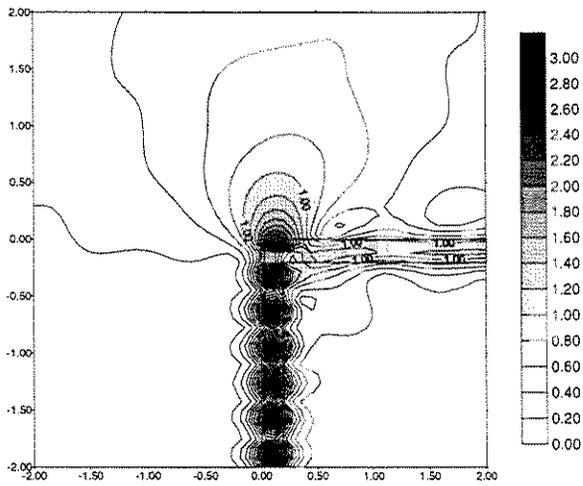


Fig. 5-16: Campo elétrico para modo TE₀ para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção, calculado com CCEM.

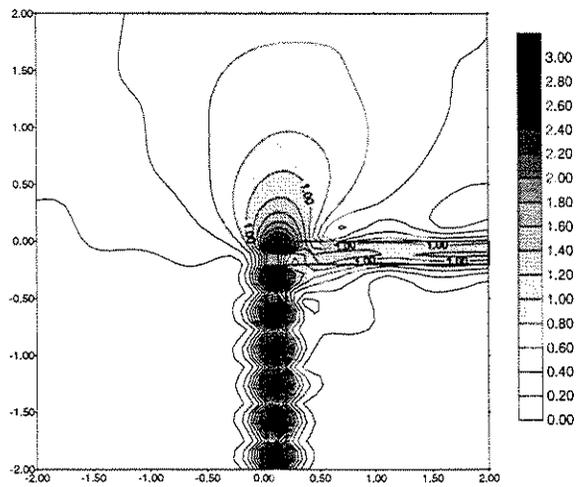


Fig. 5-17: Campo elétrico para modo TE₀ para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção, calculado com CCP.

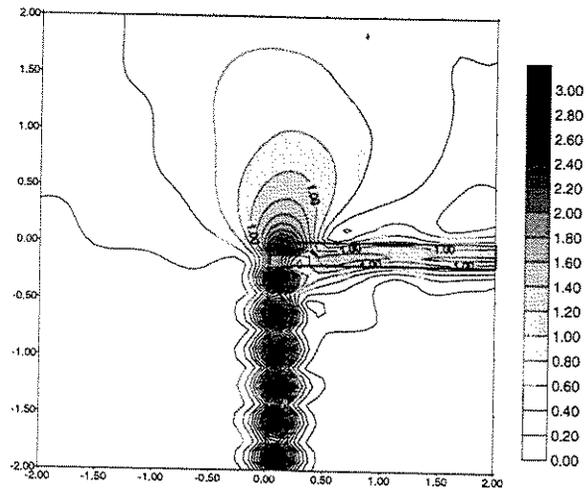


Fig. 5-18: Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção, calculado com CCS.

O segundo fator relaciona-se com o alto contraste entre índices: a constante do modo fundamental (em torno de $n_{eff} = 2,5$ para toda a faixa) encontra-se bastante distante do valor a partir do qual passam a existir os modos radiativos ($n_{eff} = 1,0$). Uma vez que o índice do modo fundamental é utilizado como referência nos métodos com CCP e CCS, existe um erro significativo no tratamento daqueles. As curvas de transmissão indicam que, em geral, a CCP leva a resultados mais confiáveis do que a CCS, apresentando erros menores relativamente ao método com CCEM. As Figuras 5-16, 5-17 e 5-18 ajudam a confirmar esta afirmação.

Para procurar diminuir o nível de reflexão desta estrutura, é introduzida uma cavidade ressonante no canto inferior da junção quadrada de lado $a = 0,62 \mu m$ - o mesmo valor utilizado em [25]- como mostra a Figura 5-19.

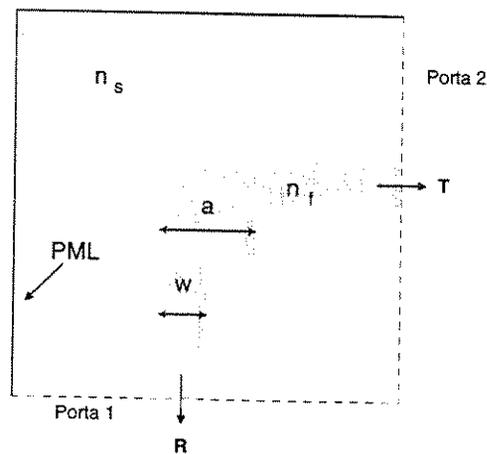


Fig. 5-19: Junção de 90° com ressonador.

As novas curvas de transmissão e reflexão são mostradas nas Figuras 5-20 e 5-21 respectivamente. Como se observa, a potência refletida cai abaixo de 1%, enquanto que a potência transmitida vai acima de 50%; a estrutura possui um máximo de transmissão próximo de $\lambda = 1,55 \mu m$, correspondendo a um comprimento de onda de ressonância. A Figura 5-22 mostra a amplitude do campo elétrico para este comprimento de onda

calculado com CCEM. As perdas por radiação ocorrem próximas da região de acesso dos guias, ao invés de na terminação do guia vertical, como no caso anterior, devido ao acoplamento aos modos do ressoador. As Figuras 5-23 e 5-24 permitem comparar resultados obtidos com CCP e CCS respectivamente com o da Figura 5-22. Como se observa, a CCP apresenta um resultado mais fiel do que a CCS, especialmente no que diz respeito ao campo radiativo e à potência transmitida. As simulações foram feitas com uma malha de 13636 elementos triangulares quadráticos para uma janela numérica limitada entre -4 e 4 em y e z .

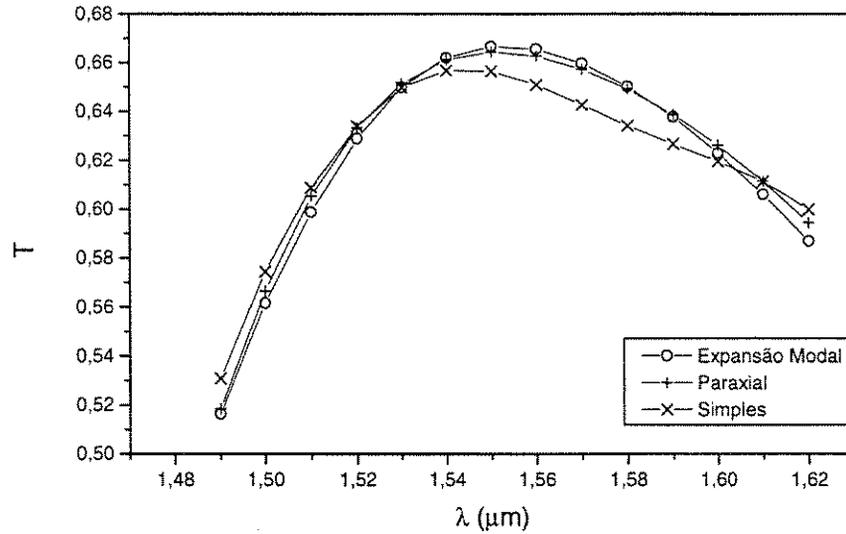


Fig. 5-20: Potência relativa transmitida acoplada no modo TE_0 para porta 2 da junção com ressoador.

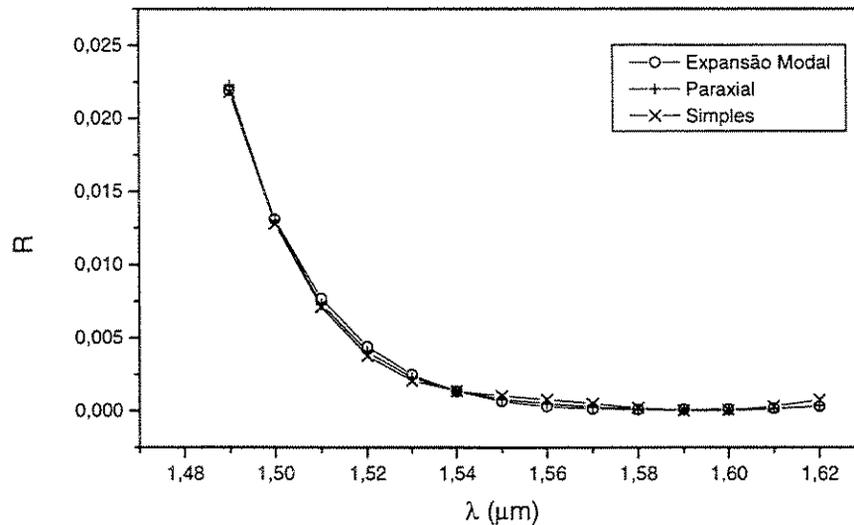


Fig. 5-21: Potência relativa refletida acoplada no modo TE_0 para a porta 1 da junção com ressoador.

Para reduzir as perdas por radiação, é necessário introduzir uma estrutura que cause uma rotação de 90° da frente de onda proveniente do guia vertical. Um espelho de 45° [27], [26], como na Figura 5-25 é introduzido

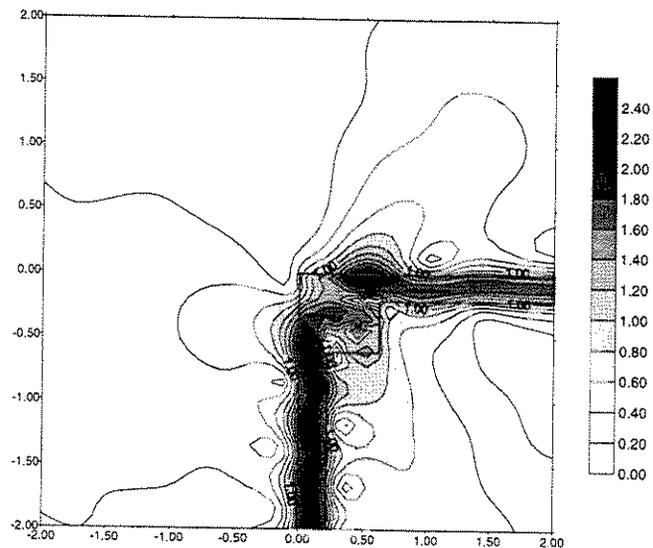


Fig. 5-22: Campo elétrico para modo TE₀ para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressoador, calculado com CCEM.

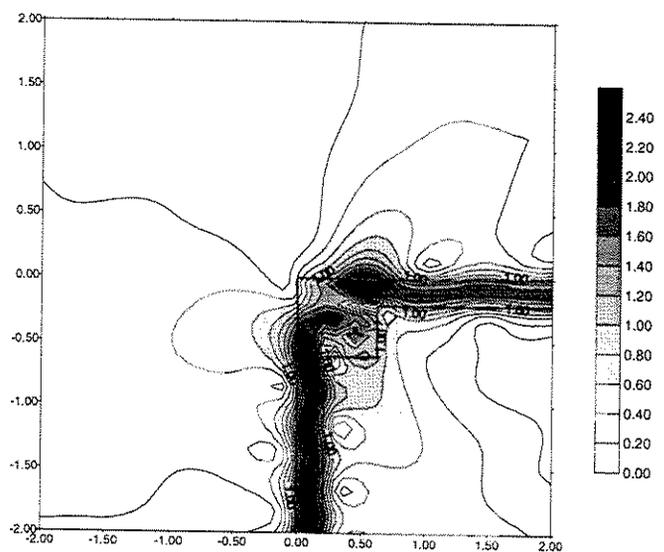


Fig. 5-23: Campo elétrico para modo TE₀ para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressoador, calculado com CCP.

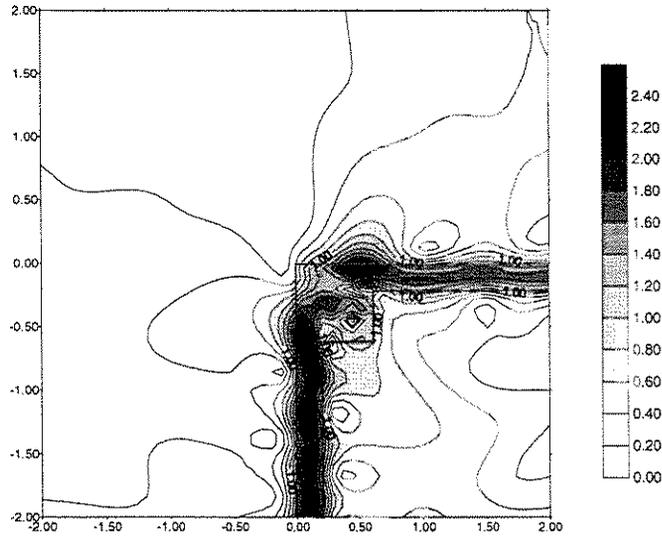


Fig. 5-24: Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressoador, calculado com CCS.

com esta finalidade em conjunto com um ressoador quadrado de lado $a = 0,72 \mu m$. Assim como em [25], foi utilizado $x = 0,56 \mu m$. As Figuras 5-26 e 5-27 mostram respectivamente as potências transmitida e refletida para o modo fundamental TE_0 . Como se observa, a transmissão de potência vai acima de 97% para toda a faixa, enquanto que a potência refletida permanece abaixo de 0,01%. Com a introdução do espelho, houve uma diminuição significativa das perdas por radiação, como se esperava. As simulações foram feitas com uma malha de 12194 elementos triangulares quadráticos. A janela numérica limitava-se entre -4 e 4 em y e z . As

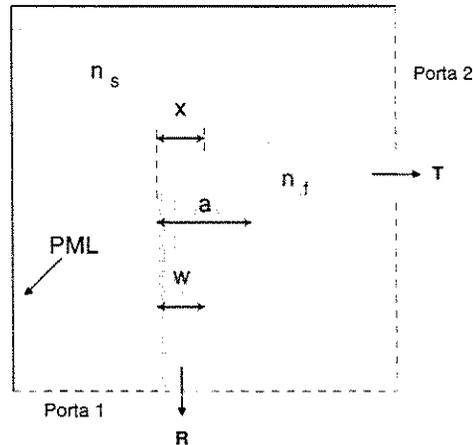


Fig. 5-25: Junção de 90° com ressoador e espelho de 45° .

Figuras 5-28, 5-29 e 5-30 mostram o campo elétrico TE calculado com CCEM, CCP e CCS respectivamente. Nota-se que a radiação escapando da região próxima à junção é muito pequena; o espelho desempenha muito bem o papel de desviar a frente de onda incidente na direção do guia de saída; o acoplamento aos modos do ressoador diminui a reflexão de potência e melhora a transmissão do sinal. A maior parte da energia radiada está relacionada com o guia de saída, uma vez que a rotação da frente de onda não é perfeita. As curvas de

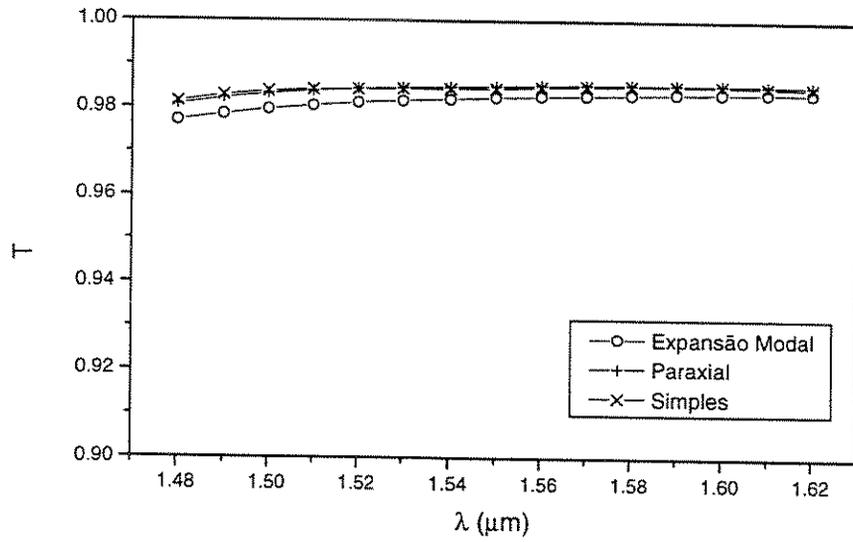


Fig. 5-26: Potência relativa transmitida acoplada no modo TE_0 para a porta 2 da junção com ressoador e espelho.

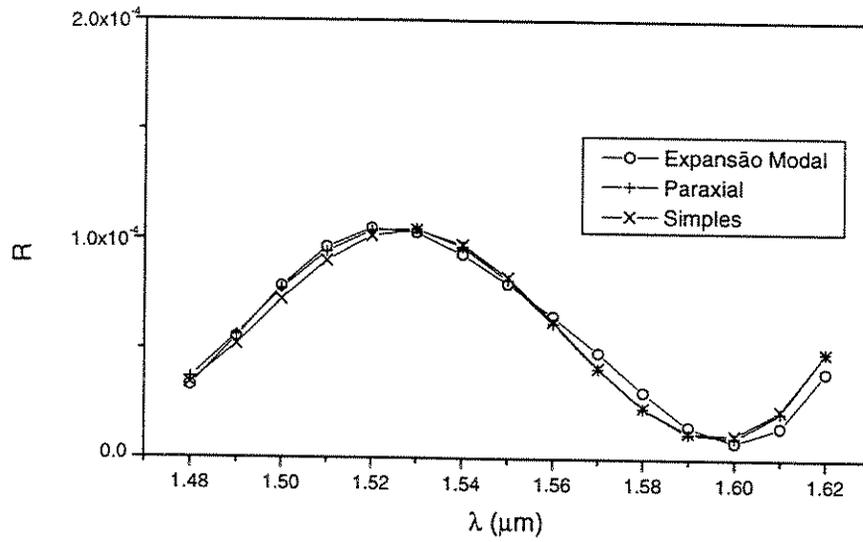


Fig. 5-27: Potência relativa refletida acoplada no modo TE_0 para a porta 1 da junção com ressoador e espelho.

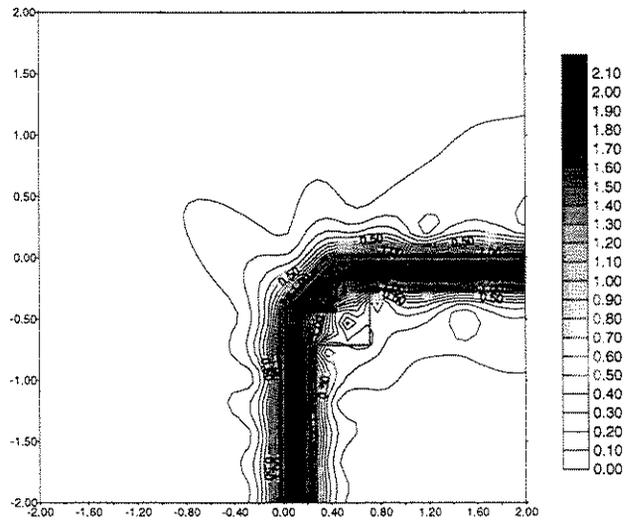


Fig. 5-28: Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressonador e espelho, calculado com CCEM.

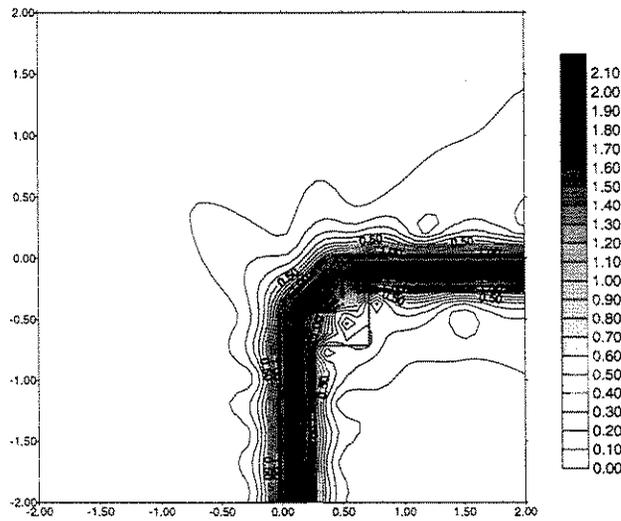


Fig. 5-29: Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressonador e espelho, calculado com CCP.

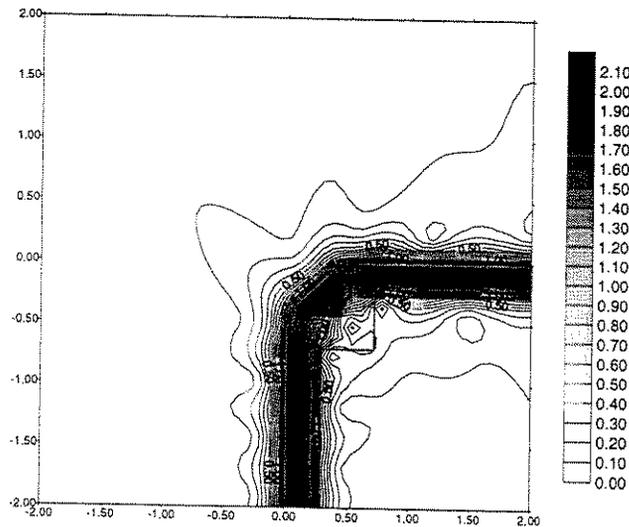


Fig. 5-30: Campo elétrico para modo TE_0 para $\lambda = 1,55 \mu m$ incidindo na porta 1 da junção com ressonador e espelho, calculado com CCS.

transmissão e reflexão mostram uma grande concordância entre os resultados obtidos com as três condições de contorno; o erro em relação ao método com CCEM é menor do que 0,1%. Este resultado é possível em vista do pequeno acoplamento em modos radiativos nos dois guias. As Figuras 5-31 e 5-32 mostram em conjunto as curvas de transmissão e reflexão para as três estruturas estudadas, explicitando a melhora do desempenho da junção.

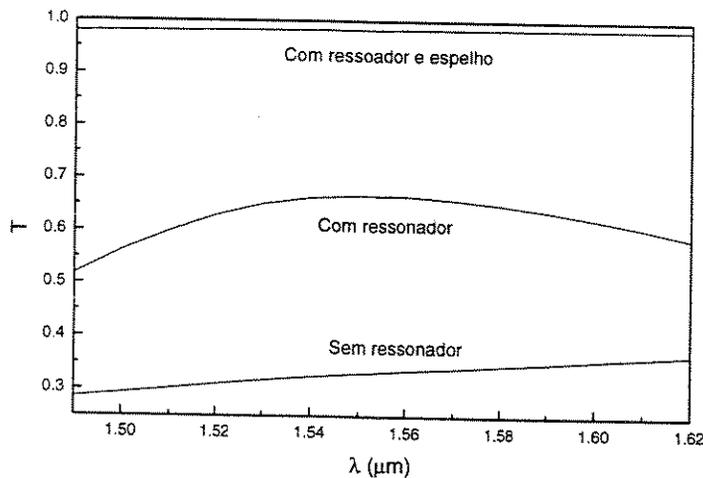


Fig. 5-31: Evolução do desempenho de transmissão da junção de 90° . A potência transmitida sobe de pouco mais de 30% para acima de 98%.

Aproveitando o bom desempenho da junção através da introdução do ressonador e do espelho, é possível testar o desempenho de um divisor em T baseado no mesmo princípio, como ilustrado na Figura 5-33. Mais ainda, deslocando-se lateralmente o guia de entrada (porta 1), é possível controlar-se a potência transmitida para as portas 2 e 3, como se mostra a seguir. As simulações do divisor em T utilizam exatamente os mesmos parâmetros das anteriores, com exceção da janela numérica, limitada entre de -3 a 3 em y e z .

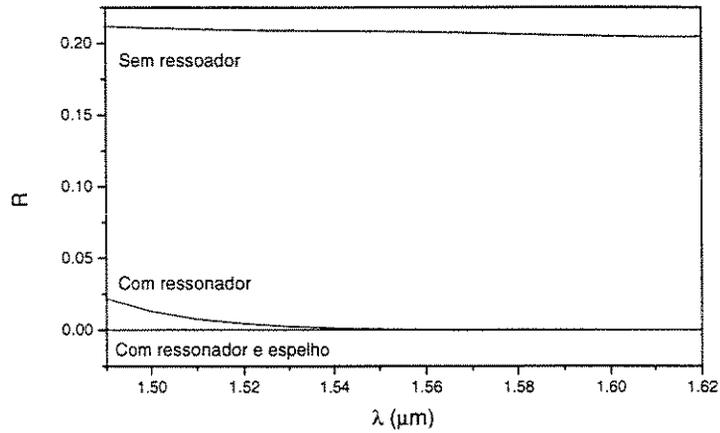


Fig. 5-32: Evolução do desempenho de reflexão da junção de 90° . A reflexão cai de pouco mais de 20% a menos de 0,1% com o acoplamento do ressonador.

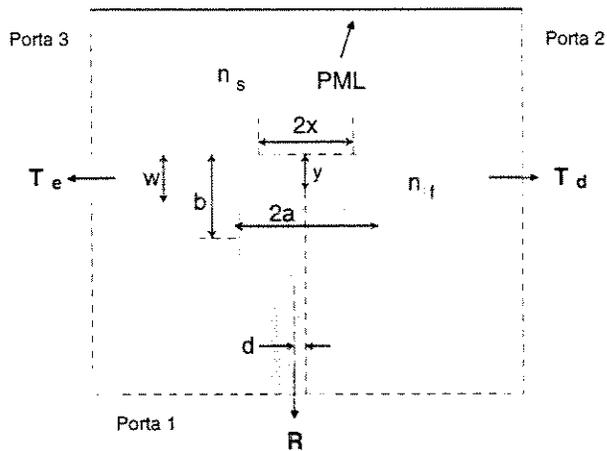


Fig. 5-33: Divisor em T com ressoadores.

A Figura 5-34 mostra a potência relativa T_d transferida ao braço direito do divisor simétrico ($d = 0$). Neste caso, devido à simetria da estrutura, $T_d = T_e$. O sinal é quase totalmente transmitido às portas 2 e 3 (acima de 49%), mostrando que muito pouco da energia é radiada para o espaço livre. A Figura 5-35 mostra a curva de potência refletida. Assim como na junção do caso anterior, o nível de reflexão do sinal é bastante baixo ao longo de toda a faixa testada.

A Figura 5-36 mostra as curvas de potência transmitida para os dois braços, considerando um deslocamento $d = 80 \text{ nm}$ para a esquerda. A potência relativa acoplada ao braço direito varia em torno de 60% enquanto que a potência acoplada ao outro braço varia em torno de 35%. O nível de reflexão, como mostra a Figura 5-37 continua bastante baixo, embora tenha aumentado significativamente.

Os três métodos coincidem razoavelmente bem nestes dois casos; das curvas de reflexão, no entanto, observa-se que a CCP gera resultados melhores do que as CCS.

As curvas obtidas nesta seção coincidem quase completamente com as da referência [25], de onde foram

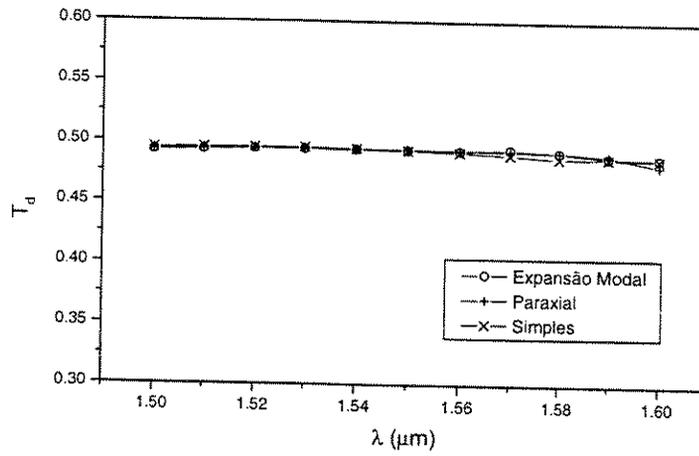


Fig. 5-34: Potência Transmitida para os braços do divisor em T simétrico. Somente as curvas para o braço direito são mostradas, por serem coincidentes com as do esquerdo.

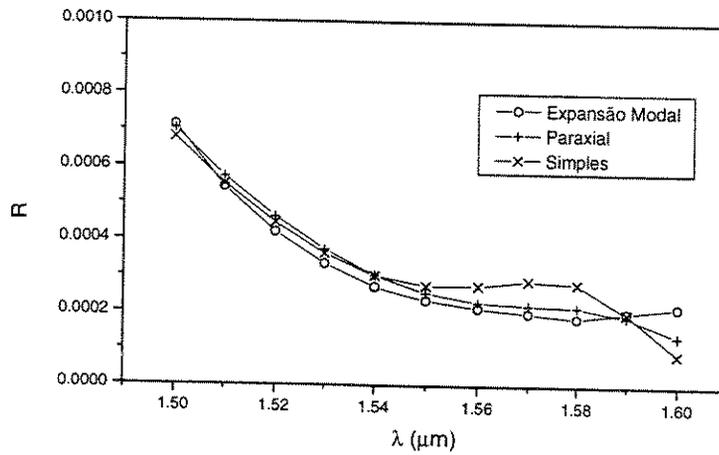


Fig. 5-35: Potência refletida para a o divisor em T simétrico.

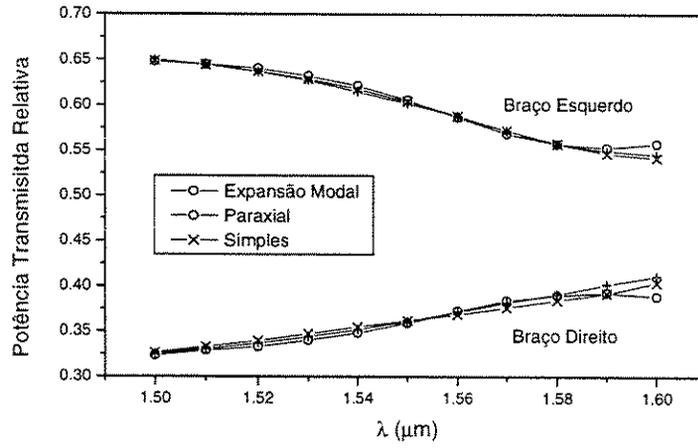


Fig. 5-36: Potência transmitida para os dois braços do divisor em T assimétrico com deslocamento $d = 80$ nm. Note que a potência transmitida ao braço direito vai a aproximadamente 60 % enquanto o outro braço recebe apenas 35%.

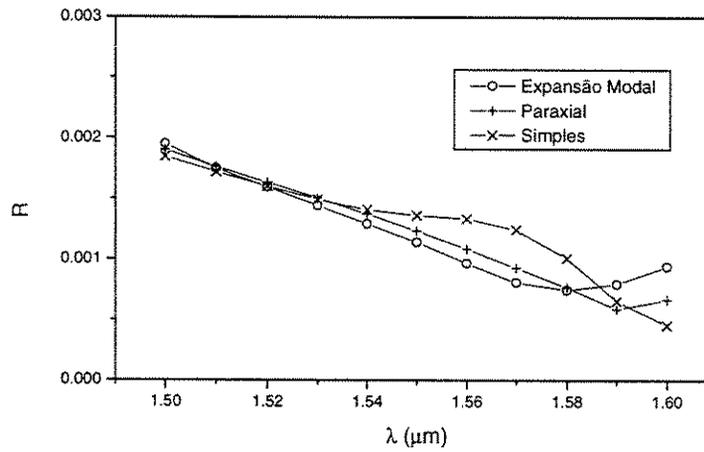


Fig. 5-37: Potência refletida para o divisor em T assimétrico.

tirados os casos; observam-se discrepâncias significativas para valores de potência refletida muito pequena, em geral abaixo de 10^{-3} . O comportamento geral da estrutura, no entanto, é qualitativamente semelhante para os dois métodos. Deve-se ressaltar, no entanto, que o método descrito na referência citada é de maior complexidade e os cálculos de potência envolvem um número maior de operações numéricas complexas, o que pode levar a erros significativos para níveis pequenos de potência. O método é baseado em diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) e o cálculo de potência é realizado com o uso de transformadas discretas de Fourier. O pulso de entrada possui um perfil gaussiano no tempo, mantendo espacialmente o formato do modo para $\lambda = 1,55 \mu m$.

Capítulo 6

Conclusão

Foram desenvolvidos códigos de elementos finitos para a simulação de junções ópticas planares no domínio da frequência. Três condições de contorno foram implementadas no método dos elementos finitos para a representação de guias infinitos acessando as junções em simulação. A primeira condição foi obtida de fórmulas de expansão modal do campo para os guias de acesso, e por esta razão foi denominada Condição de Contorno por Expansão Modal (CCEM). A segunda consistia de uma condição de contorno de impedância em que se assumia variação puramente harmônica do campo na direção do eixo dos guias sobre as portas de acesso; esta condição recebeu o nome de Condição de Contorno "Simples" (CCS). A terceira condição foi obtida de uma aproximação paraxial da derivada do campo na direção do eixo do guia de acesso; por esta razão, foi denominada Condição de Contorno Paraxial (CCP). Os métodos permitem simular junções ópticas planares passivas com até quatro portas de acesso. Estas simulações podem servir como primeiro passo na otimização de estruturas reais, ou ainda para testar de forma mais exata conceitos desenvolvidos a partir de modelos físicos simplificados. Para truncar a janela computacional, foram utilizados PMLs (Perfectly Matched Layers) que permitem a absorção de ondas refletidas na estrutura em estudo.

Comparações entre métodos utilizando as três condições de contorno indicaram que a CCEM produz resultados mais exatos, por tratar da forma correta os modos dos guias de acesso, inclusive modos evanescentes. Em contrapartida, a resolução de suas matrizes é muito menos eficiente devido a sua pouca esparsidade. Além disso, requer o cálculo dos modos dos guias de acesso, o que complica o processo de simulação. A aplicação de CCS, por outro lado, é de implementação extremamente simples e resulta em matrizes bastante esparsas, de resolução muito mais eficiente do que a das geradas com CCEM. Seus resultados, no entanto, são pouco confiáveis, especialmente quando existem modos evanescentes de amplitude significativa próximo das portas de acesso, que não são propagados da forma correta. Além disso, esta condição leva a erros significativos em situações multimodais, dependendo da escolha do índice de refração de referência.

A aplicação de CCP permite obter resultados confiáveis relativamente aos obtidos com CCEM. Esta condição de contorno leva em conta de forma mais exata (em relação à CCS) modos cujos índices efetivos diferem do índice de referência escolhido. Ainda assim, é incapaz de propagar corretamente modos evanescentes e portanto deve ser utilizada com certo cuidado. A esparsidade das matrizes geradas é a mesma das geradas com CCS, portanto muito mais esparsas do que as geradas por CCEM. Conclui-se desta forma que a CCP é uma condição de contorno alternativa à CCEM que pode ser utilizada em um grande número de situações, com tempo de

cálculo muito menor e menor complexidade de implementação.

Para futuros desenvolvimentos, sugere-se a formulação de CCP em situações de maior complexidade, por exemplo envolvendo estruturas tridimensionais e campo vetoriais completos - ao invés de somente uma das componentes - de forma a reduzir o tempo total de computação. Outra ramo a ser investigado é a modificação da formulação da CCP para um melhor tratamento de modos evanescentes; neste caso, sugere-se utilizar índices de referência complexos ou ainda aproximações não paraxiais à derivada do campo, como por exemplo aproximações do tipo Padé [29]. Do ponto de vista das aplicações, o método pode ainda ser utilizado para simulações de estruturas contendo inomogeneidades, não-linearidades ou perdas, e ainda estruturas mais complexas como por exemplo cristais fotônicos.

Apêndice A

Modos do guia multicamadas

Consideramos um guia multicamadas com L camadas dielétricas de índice de refração n_l , $l = 1 \dots L$. Definimos, para simplificar os cálculos, a função $p(y) = p_j$, onde $p_j = 1$ ou n_l^2 para modos TE ou TM respectivamente. Nas expressões abaixo, $\phi_x = E_x$ para modos TE e $\phi_x = H_x$ para modos TM.

A.1 Modos Guiados

Modos guiados da estrutura multicamadas são da forma

$$\phi_{mx}(y, z) = f_m(y) \exp(-j\beta z) \quad (\text{A.1})$$

com

$$f_m(y) = \frac{h_m(y)}{\sqrt{D_m}} \quad (\text{A.2})$$

$$D_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|h_m(y)|^2}{q(y)} dy \quad (\text{A.3})$$

$$h_{ml}(y) = A_{ml} \cos(\kappa_{ml}y_l) + \frac{q_l}{\kappa_{ml}} B_{ml} \sin(\kappa_{ml}y_l). \quad (\text{A.4})$$

$$\kappa_{ml} = \begin{cases} \sqrt{n_l^2 k_0^2 - \beta_m^2}, & \beta_m < n_l k_0 \\ -j\sqrt{\beta_m^2 - n_l^2 k_0^2} \equiv -j\gamma_{ml}, & \beta_m > n_l k_0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Da expressão do campo (A.4) tiramos

$$\begin{bmatrix} h_{ml}(y) \\ \frac{1}{q_l} \frac{dh_{ml}(y)}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_{ml}y_l) & \frac{q_l}{\kappa_{ml}} \sin(\kappa_{ml}y_l) \\ -\frac{\kappa_{ml}}{q_l} \sin(\kappa_{ml}y_l) & \cos(\kappa_{ml}y_l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{m,l} \\ B_{m,l} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

que, dada a continuidade de $h_{ml}(y)$ e $\frac{1}{p_l} \frac{dh_{ml}(y)}{dy}$ sobre as interfaces, pode ser utilizada para relacionar os coeficientes A_{ml} e B_{ml} :

$$\begin{bmatrix} A_{m,(l+1)} \\ B_{m,(l+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_{ml}d_l) & \frac{q_l}{\kappa_{ml}} \sin(\kappa_{ml}d_l) \\ -\frac{\kappa_{ml}}{q_l} \sin(\kappa_{ml}d_l) & \cos(\kappa_{ml}d_l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{m,l} \\ B_{m,l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

, $l = 2, \dots, L - 1$. As constantes de propagação β_m destes modos são determinadas através da equação transcendental obtida de (A.6) considerando que $\lim_{y \rightarrow +\infty} h_{mN}(y) \rightarrow 0$ e $\lim_{y \rightarrow -\infty} h_{m1}(y) \rightarrow 0$:

$$\frac{\gamma_{mL}}{p_L} \left(P_m + \frac{\gamma_{m1}}{p_1} Q_m \right) + \left(R_m + \frac{\gamma_{m1}}{p_1} S_m \right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Tendo obtido desta expressão os valores de γ_{mL} para o m -ésimo modo e arbitrando que $A_{m2} = A_{m1} = 1$ e $B_{m2} = B_{m1}$, de (A.7) obtêm-se os valores de A_{ml} e B_{ml} . As constantes de normalização D_m para o m -ésimo modo podem então ser calculadas da integral (A.3):

$$D_m = \frac{1}{2p_1\gamma_{m1}} + \sum_{l=2}^{L-1} D_{ml} + \frac{A_{mL}^2}{2p_L\gamma_{mL}} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} D_{ml} = & \frac{d_l}{2p_l} \left\{ \left(A_{ml}^2 + \frac{p_l^2}{\kappa_l^2} B_{ml}^2 \right) \right. \\ & + \left(A_{ml}^2 - \frac{p_l^2}{\kappa_l^2} B_{ml}^2 \right) \frac{\sin(2\kappa_l d_l)}{2\kappa_l d_l} \\ & \left. + 2p_l d_l A_{ml} B_{ml} \left(\frac{\sin(\kappa_l d_l)}{\kappa_l d_l} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.2 Modos Radiativos

Neste caso, consideramos as expressões

$$\phi_{rx}(y, z, \rho) = f_r(y, \rho) \exp(-j\beta_r(\rho)z) \quad (\text{A.11})$$

$$f_r(y) = \frac{h_r(y, \rho)}{\sqrt{D_r(\rho)}} \quad (\text{A.12})$$

$$D_r(\rho)\delta(\rho - \rho') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_r(y, \rho)h_r(y, \rho')}{q(y)} dy \quad (\text{A.13})$$

$$h_{rl}(y, \rho) = A_{rl} \cos(\kappa_{rl}y_l) + \frac{q_l}{\kappa_{rl}} B_{rl} \sin(\kappa_{rl}y_l) \quad (\text{A.14})$$

$$\beta_r(\rho) = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \rho^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\kappa_{rl} = \begin{cases} \sqrt{(n_l^2 - n_1^2)k_0^2 + \rho^2} \\ -j\sqrt{(n_l^2 - n_1^2)k_0^2 - \rho^2} \equiv -j\gamma_l \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

sendo $\delta(\rho)$ o delta de Dirac.

Da mesma forma temos a expressão

$$\begin{bmatrix} h_{rl}(y) \\ \frac{1}{q_l} \frac{dh_{rl}(y)}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_{rl}y_l) & \frac{q_l}{\kappa_{rl}} \sin(\kappa_{rl}y_l) \\ -\frac{\kappa_{rl}}{q_l} \sin(\kappa_{rl}y_l) & \cos(\kappa_{rl}y_l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{r,l} \\ B_{r,l} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

que, em vista da continuidade de $h_{r,l}(y)$ e $\frac{1}{p_l} \frac{dh_{r,l}(y)}{dy}$, permite escrever

$$\begin{bmatrix} A_{r,(l+1)} \\ B_{r,(l+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\kappa_{r,l} d_l) & \frac{q_l}{\kappa_{r,l}} \sin(\kappa_{r,l} d_l) \\ -\frac{\kappa_{r,l}}{q_l} \sin(\kappa_{r,l} d_l) & \cos(\kappa_{r,l} d_l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{r,l} \\ B_{r,l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

, $l = 2, \dots, L - 1$, tal que

$$\begin{bmatrix} A_{r,L} \\ B_{r,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_r & Q_r \\ R_r & S_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{r,1} \\ B_{r,1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

A.2.1 Modos radiativos de substrato ($r=0$)

De (A.17), (A.19) e da condição $\lim_{y \rightarrow +\infty} h_{0N}(y) \rightarrow 0$, arbitrando $A_{0,1} = 0$, obtemos os coeficientes

$$B_{0,1} = -\frac{R_0 + (\gamma_L/p_L) P_0}{S_0 + (\gamma_L/p_L) Q_0} \quad (\text{A.20})$$

$$B_{0,L} = (-\gamma_L/p_L) A_{0,L} \quad (\text{A.21})$$

De (A.18) obtemos

$$D_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{p_1 B_{0,1}^2}{\rho^2} \right). \quad (\text{A.22})$$

Os coeficientes $B_{0,l}$ podem então ser obtidos destes valores utilizando-se (A.18).

A.2.2 Modos radiativos de substrato-cobertura ($r=1,2$)

Da ortogonalidade entre os modos dos tipos $r = 1$ e $r = 2$ obtemos a expressão

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{p_1} A_{1,1} A_{2,1} + \frac{p_1}{\rho} B_{1,1} B_{2,1} \\ & + \frac{\kappa_L}{p_L} A_{1,L} A_{2,L} + \frac{p_L}{\kappa_L} B_{1,L} B_{2,L} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Desta, arbitrando $A_{1,1} = A_{2,1} = 1$ e $B_{1,1} + B_{2,1} = 0$ e tomando (A.18), resultam finalmente as expressões

$$B_{1,1} = -B_{2,1} = \frac{\sqrt{\frac{\rho}{p_1} \frac{p_1 \kappa_L^2 P_r^2 + p_1 p_L^2 R_r^2 + \rho p_L P_r^2}{\rho \kappa_L^2 Q_r^2 + \rho p_L^2 S_r^2 + p_1 p_L \kappa_L}}}{\sqrt{\frac{\rho}{p_1} \frac{p_1 \kappa_L^2 P_r^2 + p_1 p_L^2 R_r^2 + \rho p_L P_r^2}{\rho \kappa_L^2 Q_r^2 + \rho p_L^2 S_r^2 + p_1 p_L \kappa_L}}} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} D_r &= \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{1}{p_1} + \frac{p_1 B_{0,1}^2}{\rho^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\kappa_n}{\rho} \left(\frac{A_{r,L}^2}{p_L} + \frac{p_L B_{2,L}^2}{\kappa_n^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Os coeficientes $B_{r,l}$ podem então ser obtidos destes valores utilizando-se (A.18).

Apêndice B

Elementos Simplexos

B.1 Definição

Um P -simplexo é definido como a mínima figura geométrica não-trivial possível em um espaço P -dimensional [5]: sobre a reta é um segmento de reta, sobre plano um triângulo, no espaço um tetraedro e assim por diante, dotado sempre de $P + 1$ vértices. Os elementos utilizados neste trabalho são simplexos no interior dos quais se definem funções baseadas em coordenadas simplexas locais. Duas são as vantagens desta escolha: em primeiro lugar, estas figuras mínimas aproximam bem domínios complexos, uma vez que qualquer figura definida por um número maior que $P + 1$ vértices pode ser representada por uma combinação de P -simplexos. Estruturas curvilíneas em geral também podem ser bem representadas por figuras mínimas suficientemente pequenas. Em segundo lugar, a definição de P -simplexos pode ser unificada numa formulação simples, o que é conveniente em problemas envolvendo espaços de diferentes dimensões.

Cálculos envolvendo as funções polinomiais utilizadas neste trabalhos são extremamente facilitados através da utilização de coordenadas simplexas locais. Por esta razão, são mostrados aqui os conceitos fundamentais deste sistema.

Inicialmente, definimos como *tamanho* de um simplexo a quantidade

$$\sigma(S) = \frac{1}{P!} \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_1^{(P)} \\ 1 & x_2^{(1)} & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_{P+1}^{(1)} & x_1^{(2)} & \dots & x_{P+1}^{(N)} \end{vmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde cada linha contém as coordenadas de um dos vértices da figura. Esta quantidade equivale ao comprimento do 1-simplexo, à área do 2-simplexo, volume do 3-simplexo e assim por diante [5].

Um ponto M no interior de um P -simplexo S subdivide-o em $P + 1$ simplexos menores S_m de mesma ordem tais que

$$\sigma(S) = \sum_{n=1}^{N+1} \sigma(S_n) \quad (\text{B.2})$$

As razões ς_m entre os tamanhos de S_m e S

$$\varsigma_m = \frac{\sigma(S_m)}{\sigma(S)} \quad (\text{B.3})$$

constituem as *coordenadas simplexas*; esta razão é também igual à distância perpendicular entre o vértice m e a face oposta a ele [5]. Relacionamos, desta forma, o vértice m com o simplexo S_m que possui uma face em S oposta ao primeiro. A Figura B-1 mostra estes conceitos em um triângulo, caso em que ζ_m é a razão entre a área de S_m e a área total.

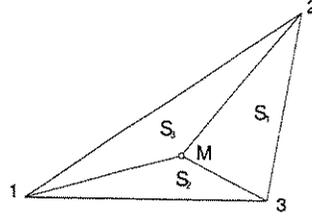


Fig. B-1: 2-Simplexo subdividido em 3 sub-simplexos. A coordenada ζ_m é igual a 1 quando M coincide com o ponto m .

Note que ζ_m vai de 0 a 1 sendo que este último valor é assumido quando M localiza-se sobre o vértice m . De (B.2) e (B.3) obtemos ainda a relação

$$\sum_{n=1}^{N+1} \zeta_m = \frac{1}{\sigma(S)} \sum_{n=1}^{P+1} \sigma(S_m) = 1. \quad (\text{B.4})$$

O índice m de (B.3) refere-se à numeração local do vértice no elemento.

É importante notar que, como um P -simplexo é uma figura num espaço P -dimensional, uma das $P + 1$ coordenadas ζ_m pode sempre ser escrita em função das outras. Nos casos estudados a seguir, escolhemos sempre ζ_{P+1} como a coordenada dependente. Esta consideração permite estabelecer a relação entre diferenciação em coordenadas simplexas $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_P)$ e coordenadas retangulares (q_1, q_2, \dots, q_P) através da regra da cadeia:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dq_1} \\ \frac{d}{dq_2} \\ \vdots \\ \frac{d}{dq_P} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{d}{d\zeta_1} \\ \frac{d}{d\zeta_2} \\ \vdots \\ \frac{d}{d\zeta_P} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d\zeta_1}{dq_1} & \frac{d\zeta_2}{dq_1} & \dots & \frac{d\zeta_P}{dq_1} \\ \frac{d\zeta_1}{dq_2} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{d\zeta_1}{dq_P} & \dots & & \frac{d\zeta_N}{dq_P} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

sendo que a inversa de $[J]$ foi adotada para manter a uniformidade com a referência [4].

B.2 Funções de forma

Um conjunto de funções adequadas para a representação das soluções de nossas equações diferenciais pode ser construído a partir do polinômio definido por

$$\left. \begin{aligned} R_m(n, \varsigma) &= \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (n\varsigma - k), m > 0 \\ R_0(n, \varsigma) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.7})$$

que possui m zeros, localizados em $\varsigma = k/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ igualmente espaçados e localizados entre 0 e m/n , sendo que sobre o último ponto o polinômio assume valor unitário. É interessante observar que se $i_k = n$, teremos zeros igualmente espaçados para ς entre 0 e 1.

Para funções de expansão em um P -simplexo, desta forma, definimos famílias de polinômios

$$\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_{P+1}}(\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_{P+1}) = \prod_{k=1}^{P+1} R_{i_k}(n, \varsigma_k) \quad (\text{B.8})$$

sendo que

$$\sum_{k=1}^{P+1} i_k = n, \quad (\text{B.9})$$

de forma que há n raízes no total, sendo i_k raízes sobre cada ς_k .

Os polinômios $N_v^e = \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_{P+1}}(\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_{P+1})$ são denominados *funções de forma*. O índice v do elemento e indica o vértice sobre o qual $N_v^e = 1$. Para os cálculos a seguir, o índice e é deixado de lado por conveniência, a não ser quando se tornar necessário. Deve ficar claro, no primeiro caso, que o índice v é local ao elemento e , relacionando-se com um índice global na malha através da conectividade

As funções de forma utilizadas mais adiante neste trabalho são definidas a seguir:

B.2.1 Funções 1D lineares sobre um 1-simplexo

Neste caso, os polinômios possuem apenas uma raiz sobre $\varsigma_k = 0$, $k = 1, 2$ de forma que $n = 1$. De (B.8), levando em conta (B.9), duas funções podem ser definidas:

$$N_1 = \alpha_{1,0}(\varsigma_1, \varsigma_2) = R_1(1, \varsigma_1)R_0(1, \varsigma_2) = \varsigma_1 \quad (\text{B.10})$$

$$N_2 = \alpha_{0,1}(\varsigma_1, \varsigma_2) = R_0(1, \varsigma_1)R_1(1, \varsigma_2) = \varsigma_2 \quad (\text{B.11})$$

As duas funções lineares são mostradas na Figura B-2.

B.2.2 Funções 1D quadráticas sobre um 1-simplexo

Neste caso $n = 2$, portanto três funções de forma quadráticas são obtidas de (B.8) e (B.9):

$$N_1 = \alpha_{0,2}(\varsigma_1, \varsigma_2) = R_0(2, \varsigma_1)R_2(2, \varsigma_2) = \varsigma_1(2\varsigma_1 - 1) \quad (\text{B.12})$$

$$N_2 = \alpha_{2,0}(\varsigma_1, \varsigma_2) = R_2(2, \varsigma_1)R_0(2, \varsigma_2) = \varsigma_2(2\varsigma_2 - 1) \quad (\text{B.13})$$

$$N_3 = \alpha_{1,1}(\varsigma_1, \varsigma_2) = R_1(2, \varsigma_1)R_1(2, \varsigma_2) = 4\varsigma_1\varsigma_2 \quad (\text{B.14})$$

Estas três funções são mostradas na Figura (B-3). Note que as raízes encontram-se sobre $\varsigma_k = 0$, $\varsigma_k = 1$ e $\varsigma_k = 1/2$.

B.2.3 Funções 2D lineares sobre um 2-simplexo

Um 2-simplexo é um triângulo como o da Figura B-1, que define três coordenadas simplexas. Para $n = 1$, três funções de forma são obtidas de (B.8) e (B.9):

$$N_1 = \alpha_{1,0,0}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = \varsigma_1 \quad (\text{B.15})$$

$$N_2 = \alpha_{0,1,0}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = \varsigma_2 \quad (\text{B.16})$$

$$N_3 = \alpha_{0,0,1}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = \varsigma_3 \quad (\text{B.17})$$

Estas três funções, mostradas na Figura B-4, assumem valor unitário para $\varsigma_k = 1$ e são nulas em $\varsigma_k = 0$. É útil ter em mente que sobre as arestas as funções de forma são exatamente iguais às definidas para o caso unidimensional linear. Isto pode ser melhor apreciado através da Figura B-4, onde a função N_k assume valor unitário sobre vértice k do triângulo. Sobre a aresta 1, $N_1 = \varsigma_1$ e $N_2 = \varsigma_2$ enquanto $N_3 = 0$. Sobre o vértice 1, $\varsigma_1 = 1$ e $\varsigma_2 = 0$. Sobre o vértice 2, $\varsigma_1 = 0$ e $\varsigma_2 = 1$. Isto mostra que sobre a aresta, a função aproximada será descrita por duas funções de forma como as definidas no caso 1D linear acima. Esta propriedade é muito interessante em problemas bidimensionais que envolvem integrais de linha em conjunto com integrais de domínio.

B.2.4 Funções 2D quadráticas sobre um 2-simplexo

Para $n = 2$ no triângulo, obtemos seis funções de forma de (B.8) e (B.9):

$$N_1 = \alpha_{2,0,0}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = \varsigma_1(2\varsigma_1 - 1) \quad (\text{B.18})$$

$$N_2 = \alpha_{0,2,0}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = \varsigma_2(2\varsigma_2 - 1) \quad (\text{B.19})$$

$$N_3 = \alpha_{0,0,2}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = \varsigma_3(2\varsigma_3 - 1) \quad (\text{B.20})$$

$$N_4 = \alpha_{1,1,0}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = 4\varsigma_1\varsigma_2 \quad (\text{B.21})$$

$$N_5 = \alpha_{0,1,1}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = 4\varsigma_2\varsigma_3 \quad (\text{B.22})$$

$$N_6 = \alpha_{1,0,1}(\varsigma_1, \varsigma_2, \varsigma_3) = 4\varsigma_3\varsigma_1 \quad (\text{B.23})$$

Com os mesmos argumentos do item anterior, podemos mostrar que estas funções bidimensionais também comportam-se como as unidimensionais sobre as arestas. As funções $N_1 - N_6$ são mostradas na Figura B-5 (a)-(f).

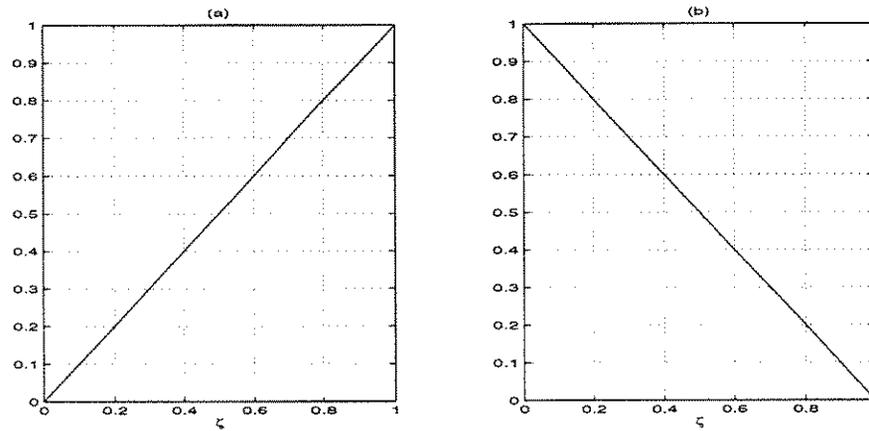


Fig. B-2: Funções de forma lineares para o 1-simplexo com respeito à coordenada $\zeta = \zeta_1$. (a) e (b) mostram N_1 e N_2 respectivamente.

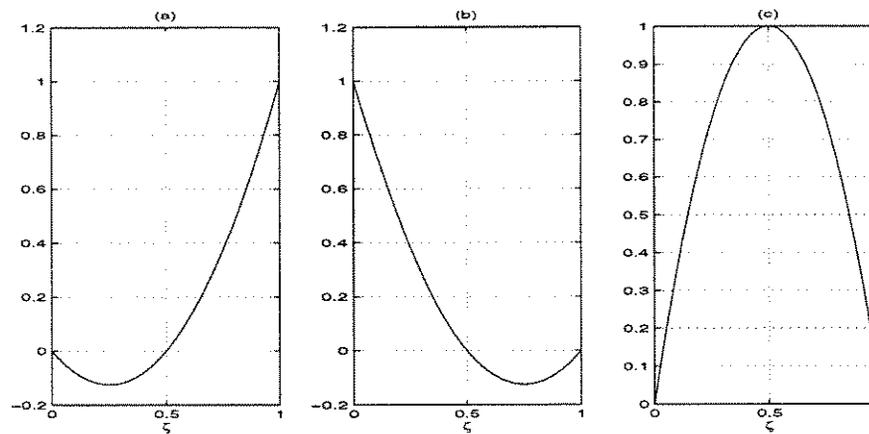


Fig. B-3: Funções de forma quadráticas para o 1-simplexo com respeito à coordenada $\zeta = \zeta_1$. (a) e (b) mostram N_1 e N_2 respectivamente.

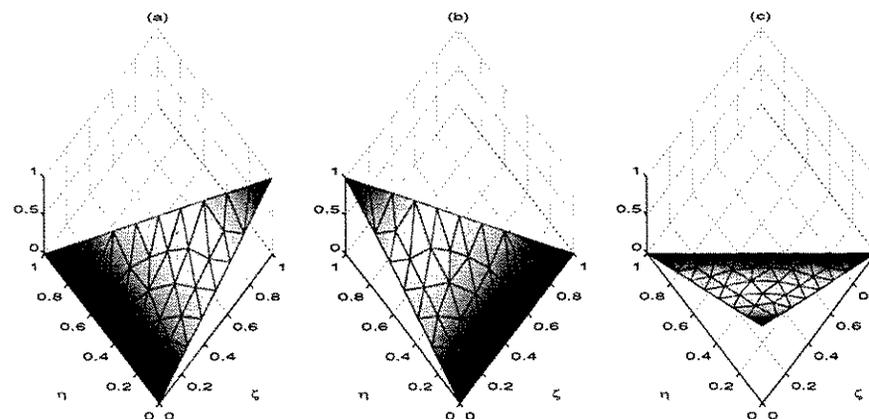


Fig. B-4: Funções de forma lineares para o 2-simplexo, em termos das coordenadas $\zeta = \zeta_1$, $\eta = \zeta_2$. As figuras de (a) a (c) mostram N_1 a N_3 .

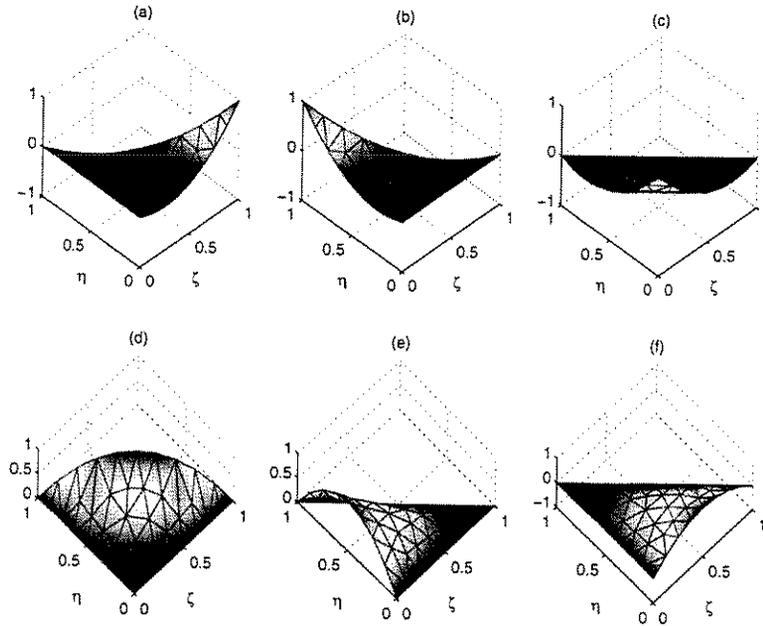


Fig. B-5: Funções de forma quadráticas para o 2-simplexo em termos das coordenadas $\zeta = \zeta_1$ e $\eta = \zeta_2$. As funções $N_1 - N_6$ são mostradas na figura em (a)-(f).

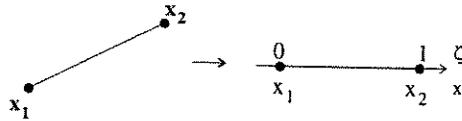


Fig. B-6: Elemento retilíneo 1D

B.3 Cálculo das integrais do MEF

A seguir, são calculadas as seguintes integrais para as funções definidas nas seções anteriores:

$$\int_e \{N\} \{N\}^T d\Omega_e \quad (\text{B.24})$$

$$\int_e \{N_{q_i}\} \{N\}^T d\Omega_e \quad (\text{B.25})$$

$$\int_e \{N_{q_i}\} \{N_{q_j}\}^T d\Omega_e \quad (\text{B.26})$$

Nestas expressões, e é um elemento, T indica transposição matricial e $N_{q_i} = \frac{dN}{dq_i}$, sendo q_i a i -ésima coordenada retangular.

B.3.1 Elementos 1D retilíneos

Estes elementos são utilizados em problemas unidimensionais definidos sobre uma linha no espaço que possa ser bem representada por um conjunto de pequenas retas. Um elemento retilíneo é mostrado na Figura B-6, consistindo de um segmento ligando dois pontos x_1 e x_2 no plano.

Sem perda de generalidade, consideramos um eixo x passando sobre o segmento tal que podemos considerar $x_1 = x_1$ e $x_2 = x_2$. As coordenadas simplexas são obtidas de (B.3):

$$\begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

onde l_e é o comprimento do elemento. Matricialmente, Tomando ς_1 como referência,

$$\zeta = \varsigma_1, \quad (\text{B.28})$$

de (B.4) obtemos

$$\varsigma_2 = 1 - \zeta. \quad (\text{B.29})$$

De (B.27)-(B.29), obtemos a relação útil

$$\int_e \varsigma_1^k \varsigma_2^l dx = l_e \frac{k!l!}{(k+l+1)!}. \quad (\text{B.30})$$

Os valores de(B.24)-(B.26) para elementos lineares e quadráticos são calculados utilizando (B.5) e (B.30) e mostrados a seguir:

Elementos lineares:

Dado o vetor-coluna $\{N\}$ para as funções (B.10)-(B.11), temos, usando (B.30),

$$\int_e \{N\}\{N\}^T dx = \frac{l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.31})$$

$$\int_e \{N_x\}\{N\}^T dx = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.32})$$

$$\int_e \{N_x\}\{N_x\}^T dx = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.33})$$

Elementos quadráticos:

Procedendo da mesma maneira com um vetor de três colunas para as funções quadráticas (B.12)-(B.14), obtemos

$$\int_e \{N\}\{N\}^T dx = \frac{l_e}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 16 \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

$$\int_e \{N_x\}\{N\}^T dx = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.35})$$

$$\int_e \{N_x\} \{N_x\}^T dx = \frac{1}{3l_e} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

B.3.2 Elementos 2D triangulares

Um exemplo deste tipo de elementos é mostrado na Figura B-7.

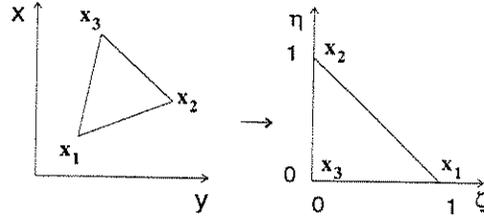


Fig. B-7: Transformação de coordenadas para elemento simpleso 2D.

Fazendo a transformação de coordenadas,

$$\begin{bmatrix} \varsigma_1 \\ \varsigma_2 \\ \varsigma_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \quad (\text{B.37})$$

$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \quad (\text{B.38})$$

$$b_k = y_l - y_m \quad (\text{B.39})$$

$$c_k = x_m - x_l \quad (\text{B.40})$$

onde $(k, l, m) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ e A_e é a área do elemento. As derivadas são relacionadas por (B.5), sendo que

$$[J]^{-1} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.41})$$

Para tornar os cálculos mais simples, tomamos as coordenadas ς_1 e ς_2 como referência:

$$\varsigma_1 = \zeta \quad (\text{B.42})$$

$$\varsigma_2 = \eta \quad (\text{B.43})$$

$$\varsigma_3 = 1 - \zeta - \eta. \quad (\text{B.44})$$

O resultado deste mapeamento é mostrado na Figura B-7. Sendo ζ e η independentes e observando a Figura B-7, a integral de $f(x, y)$ sobre um elemento é dada por

$$\iint_e f(x, y) dx dy = 2A_e \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} f(\zeta, \eta) d\zeta d\eta \quad (\text{B.45})$$

de onde obtemos a relação útil

$$\iint_e \zeta_1^k \zeta_2^l \zeta_3^m dx dy = 2A_e \frac{k!l!m!}{(k+m+l+2)!}. \quad (\text{B.46})$$

Utilizando (B.41) e (B.46), calculamos as integrais (B.24)-(B.26) para elementos lineares e quadráticos. Os resultados são mostrados a seguir:

Elementos lineares

$$\iint_e \{N\}\{N\}^T dx dy = \frac{A_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.47})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\}\{N\}^T dx dy \right]_{i,j} = \frac{A_e}{3} C_{q,i} \quad (\text{B.48})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\}\{N_q\}^T dx dy \right]_{i,j} = A_e C_{p,i} C_{q,j} \quad (\text{B.49})$$

onde p e q indicam a variável de derivação (x ou y) e $C_{p,i}$ é definido na Tabela B.1 a seguir:

i	$C_{x,i}$	$C_{y,i}$
1	b_1	c_1
2	b_2	c_2
3	b_3	c_3

Denominador comum: $1/2A_e$

Tab. B.1: Valores de $C_{p,i}$ para elementos lineares.

Elementos quadráticos

$$\iint_e \{N\}\{N\}^T dx dy = \frac{A_e}{180} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 32 & 16 & 16 \\ 4 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 16 & 32 \end{bmatrix} \quad (\text{B.50})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\}\{N\}^T dx dy \right]_{i,1} = \frac{A_e}{30} C_{p,i}^{(1)} - \frac{A_e}{60} (C_{p,i}^{(2)} + C_{p,i}^{(3)}) \quad (\text{B.51})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\}\{N\}^T dx dy \right]_{i,2} = \frac{A_e}{30} C_{p,i}^{(2)} - \frac{A_e}{60} (C_{p,i}^{(1)} + C_{p,i}^{(3)}) \quad (\text{B.52})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\}\{N\}^T dx dy \right]_{i,3} = \frac{A_e}{30} C_{p,i}^{(3)} - \frac{A_e}{60} (C_{p,i}^{(1)} + C_{p,i}^{(2)}) \quad (\text{B.53})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\}\{N\}^T dx dy \right]_{i,4} = \frac{A_e}{15} (2C_{p,i}^{(1)} + 2C_{p,i}^{(2)} + C_{p,i}^{(3)} + 5C_{p,i}^{(4)}) \quad (\text{B.54})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\} \{N\}^T dx dy \right]_{i,5} = \frac{A_e}{15} \left(C_{p,i}^{(1)} + 2C_{p,i}^{(2)} + 2C_{p,i}^{(3)} + 5C_{p,i}^{(4)} \right) \quad (\text{B.55})$$

$$\left[\iint_e \{N_p\} \{N\}^T dx dy \right]_{i,6} = \frac{A_e}{15} \left(2C_{p,i}^{(1)} + C_{p,i}^{(2)} + 2C_{p,i}^{(3)} + 5C_{p,i}^{(4)} \right) \quad (\text{B.56})$$

$$\begin{aligned} \left[\iint_e \{N_p\} \{N_q\}^T dx dy \right]_{i,j} &= \frac{A_e}{6} (C_{p,i}^{(1)} C_{q,j}^{(1)} + C_{p,i}^{(2)} C_{q,j}^{(2)} + C_{p,i}^{(3)} C_{q,j}^{(3)}) \\ &+ \frac{A_e}{12} (C_{p,i}^{(1)} C_{q,j}^{(2)} + C_{p,i}^{(1)} C_{q,j}^{(3)} + C_{p,i}^{(2)} C_{q,j}^{(1)} \\ &+ C_{p,i}^{(2)} C_{q,j}^{(3)} + C_{p,i}^{(3)} C_{q,j}^{(1)} + C_{p,i}^{(3)} C_{q,j}^{(2)}) \\ &+ \frac{A_e}{3} (C_{p,i}^{(1)} C_{q,j}^{(4)} + C_{p,i}^{(2)} C_{q,j}^{(3)} + C_{p,i}^{(3)} C_{q,j}^{(4)} \\ &+ C_{p,i}^{(4)} C_{q,j}^{(1)} + C_{p,i}^{(4)} C_{q,j}^{(2)} + C_{p,i}^{(4)} C_{q,j}^{(3)}) \\ &+ A_e C_{p,i}^{(4)} C_{q,j}^{(4)} \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

i	$C_{xi}^{(1)}$	$C_{xi}^{(2)}$	$C_{xi}^{(3)}$	$C_{xi}^{(4)}$	$C_{yi}^{(1)}$	$C_{yi}^{(2)}$	$C_{yi}^{(3)}$	$C_{yi}^{(4)}$
1	$4b_1$			$-b_1$	$4c_1$			$-c_1$
2		$4b_2$		$-b_2$		$4c_2$		$-c_2$
3			$4b_3$	$-b_3$			$4c_3$	$-c_3$
4	$4b_2$	$4b_1$			$4c_2$	$4c_1$		
5		$4b_3$	$4b_2$			$4c_3$	$4c_2$	
6	$4b_3$		$4b_1$		$4c_3$		$4c_1$	

Denominador comum: $1/2A_e$

Tab. B.2: Valores de $C_{p,i}$ para elementos quadráticos.

Apêndice C

Dedução da equação de onda escalar 2D para o campo eletromagnético em uma PML.

C.1 Introdução

A utilização de camadas perfeitamente casadas (PMLs - Perfectly Matched Layers) de um material anisotrópico para o truncamento de domínios computacionais foi pioneiramente introduzida em [30]. A PML pode ser ajustada de forma a ser perfeitamente casada com um meio contíguo de características (ε, μ) , de forma que ondas incidentes sobre o primeiro não sofram reflexão na interface; ao mesmo tempo, devido a sua condutividade finita, a PML causa atenuação da onda propagante em seu interior. Desta forma, é possível aplicar uma PML diretamente sobre uma parede "dura" (onde há reflexão total), ajustando-se sua espessura de forma que muito pouco da onda incidente seja refletida de volta para o meio original. Esta idéia é ilustrada na Figura C-1, que mostra uma onda plana incidente sobre a PML disposta sobre uma parede "dura". A PML deve ser capaz de simular o espaço aberto.

No trabalho pioneiro [30], Berenger desenvolveu o conceito de PML em termos de uma separação de componentes do campo em subcomponentes em cada uma das direções retangulares, num esquema que pode ser facilmente aplicado a códigos de diferenças finitas. No mesmo ano, Chew e Weedon [31] chegaram a uma formulação alternativa baseada no mapeamento anisotrópico e complexo do espaço para esquemas de FDTD (Diferenças Finitas no Domínio do Tempo); ambas as formulações levam a equações não-Maxwellianas no domínio do tempo que não se aplicam diretamente em formulações de elementos finitos. Em [34], de 1995, Sacks, Kingsland, Lee e Lee mostraram que uma PML pode ser vista como uma camada de material bianisotrópico tal que

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{\bar{\mu}}{\mu} = [\Lambda] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

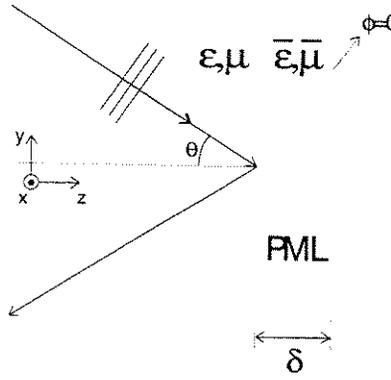


Fig. C-1: Truncamento do domínio computacional utilizando PML perpendicular à direção z . A onda plana incidente não sofre reflexão na interface e é atenuada no interior do PML. A espessura δ deve ser ajustada de forma que a onda refletida na parede "dura" tenha amplitude insignificante ao sair do PML.

e desenvolveram equações que podem ser facilmente aplicadas a esquemas baseados em elementos finitos no domínio da frequência. Esta formulação leva a equações de campo Maxwellianas, diferentemente das duas descritas anteriormente.

Ainda em 1995, Pekel e Mittra [33], baseados no mapeamento complexo do espaço de [31], chegaram a equações modificadas do campo eletromagnético para PMLs no domínio da frequência que podiam ser diretamente aplicadas a formulações de elementos finitos; as equações resultantes novamente não levam a um campo eletromagnético Maxwelliano, particularmente devido às condições de continuidade das componentes normais sobre interfaces [36]; não obstante, estas camadas garantem a eficiente absorção de ondas incidentes estando perfeitamente casadas com o meio de origem. Esta formulação é utilizada em [24] para se obter a equação de onda para componentes tangencias de campo elétrico (para ondas TE) ou magnético (para ondas TM); a mesma formulação é utilizada neste trabalho e desenvolvida na próxima seção.

C.2 Equação de onda

Em [32] e [33], as equações para o campo separado em sub-componentes de [31] são manipuladas de forma que as seguintes equações envolvendo rotacionais modificados resultam (com $\frac{\partial}{\partial x} = 0$):

$$\nabla' \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (\text{C.2})$$

$$\nabla' \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad (\text{C.3})$$

com

$$\begin{aligned} \nabla' &= \frac{\partial}{\partial y'} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z'} \hat{\mathbf{z}} \\ &= s_y \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + s_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$s = 1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1 - j \frac{\sigma^*}{\omega\mu} \quad (\text{C.5})$$

$$s_y = \begin{cases} 1, & \text{se PML} \perp y \\ 1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \varepsilon} = 1 - j \frac{\sigma_y^*}{\omega \mu}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

$$s_z = \begin{cases} 1, & \text{se PML} \perp z. \\ 1 - j \frac{\sigma_z}{\omega \varepsilon} = 1 - j \frac{\sigma_z^*}{\omega \mu}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

sendo $\sigma_d = \sigma_d(d)$ e $\sigma_d^* = \sigma_d^*(d)$ respectivamente as condutividades elétrica e magnética do meio na direção d , possuindo valores arbitrários.

Definimos s relativamente à condutividade σ do meio da seguinte forma:

$$s = 1 - j \frac{\sigma(\rho)}{\omega} \quad (\text{C.8})$$

onde ρ é a distância à interface do PML, na direção à qual é perpendicular: se perpendicular a y , $\rho = \rho(y)$; perpendicular a z , $\rho = \rho(z)$; perpendicular a y e z , $\rho = \rho(y, z)$.

Relacionamos $\sigma(\rho)$ com um parâmetro R denominado *refletividade aparente* definido em [30] como

$$R(\theta) = \exp\left(-2 \frac{\cos(\theta) \cdot n}{\varepsilon_0 c_0} \int_0^\delta \sigma(\rho) d\rho\right) \quad (\text{C.9})$$

para incidência de uma onda plana sobre a PML. Nesta expressão, θ é o ângulo de incidência, c_0 a velocidade da luz no vácuo, $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ o índice de refração do meio e δ a espessura da PML. Esta expressão corresponde à atenuação da onda incidente após propagação pelo PML, reflexão completa na parede elétrica e propagação de volta através da PML. Quanto menor o valor de R , portanto, menor a reflexão da onda incidente, melhor a qualidade da camada. O maior valor da refletividade aparente é alcançado em $\theta = 0$. Tomamos como referência este valor máximo para os futuros cálculos:

$$R_t = R(0) \quad (\text{C.10})$$

Muitas referências [30], [33], [24] mostram que a variação quadrática da permissividade em ρ leva a PMLs de eficiência superior. Utilizamos, desta forma ,

$$\sigma(\rho) = \sigma_m \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^2 \quad (\text{C.11})$$

de forma que podemos escrever

$$\sigma_m = \frac{3}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{R_t}\right) \frac{c_0}{n \cdot \delta}. \quad (\text{C.12})$$

O parâmetro s fica, desta forma,

$$s = 1 - j \frac{3}{2} \frac{c_0}{\omega n \delta} \ln\left(\frac{1}{R_t}\right) \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^2 = 1 - j \frac{3k_0}{2n\delta^3} \ln\left(\frac{1}{R_t}\right) \rho^2. \quad (\text{C.13})$$

Aplicando um rotacional modificado em (C.2) e substituindo (C.3), obtemos

$$\nabla' \times \left\{ \frac{1}{\mu_r s} [\nabla' \times \mathbf{E}] \right\} = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 s \mathbf{E}. \quad (\text{C.14})$$

para o campo elétrico. Isolando a componente \hat{x} de (C.14), resulta a equação de onda escalar

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{s_y}{s} \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\mu_r} \cdot \frac{s_z}{s} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] = s \cdot n^2 \cdot k_0^2 E_x. \quad (\text{C.15})$$

Uma equação semelhante é obtida para o campo magnético, utilizando-se o teorema da dualidade. De forma generalizada, temos a equação

$$s_y \frac{\partial}{\partial y} \left[p \cdot \frac{s_y}{s} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + s_z \frac{\partial}{\partial z} \left[p \cdot \frac{s_z}{s} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] + s \cdot q \cdot k_0^2 \phi = 0 \quad (\text{C.16})$$

para ϕ sendo:

- Campo Elétrico:

$$\phi = E_x \quad (\text{C.17})$$

$$p = 1 \quad (\text{C.18})$$

$$q = n^2 \quad (\text{C.19})$$

- Campo Magnético:

$$\phi = H_x \quad (\text{C.20})$$

$$p = \frac{1}{n^2} \quad (\text{C.21})$$

$$q = 1 \quad (\text{C.22})$$

As funções s , s_y e s_z assumem os valores expostos na Tabela C.1 de acordo com a direção à qual o PML é perpendicular, conforme se propõe em [33].

	$\perp y$	$\perp z$	$\perp y, z$
s_y	1	s	1
s_z	s	1	1

Tab. C.1: Valores de s_x e s_y segundo orientação da PML.

C.3 Condições de contorno

Definimos agora as condições de contorno para ϕ em (C.17) e (C.20) sobre a interface entre dois meios diferentes. A primeira é simplesmente a condição de continuidade para as componentes tangenciais do campo eletromagnético; Tomando somente a componente \hat{x} ,

$$\phi^+ = \phi^-, \quad (\text{C.23})$$

sendo que os sinais $+$ e $-$ indicam as duas regiões que formam a interface.

Da condição de contorno para o campo magnético tangencial entre dois meios diferentes,

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0 \quad (\text{C.24})$$

onde \hat{n} é a normal à interface, podemos obter condições de contorno envolvendo a derivada normal do campo elétrico: da expressão (C.3), podemos escrever

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = \hat{n} \times \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon_0 n^2} \nabla' \times \mathbf{H} \right\}. \quad (\text{C.25})$$

Tomando somente a componente x desta expressão e definindo

$$\bar{S} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix},$$

obtemos

$$[\hat{n} \times \mathbf{E}]_x = \left[\hat{n} \times \left(\frac{1}{j\omega\epsilon_0 n^2} \nabla' \times \mathbf{H}_x \right) \right] \cdot \hat{x} = \left(\frac{1}{s} \frac{\bar{S}^2}{j\omega\epsilon_0 n^2} \nabla H_x \right) \cdot \hat{n}, \quad (\text{C.26})$$

de onde resulta a condição de contorno

$$\hat{n} \cdot \left[\frac{1}{s} \frac{\bar{S}^2}{n^{2+}} \nabla_t H_x^+ - \frac{1}{s} \frac{\bar{S}^2}{n^{2-}} \nabla_t H_x^- \right] = 0. \quad (\text{C.27})$$

Uma expressão semelhante pode ser obtida para E_x , através do teorema da dualidade, de forma que temos finalmente de forma unificada

$$\hat{n} \cdot \left[\frac{\bar{S}^2}{sq^+} \nabla_t \phi^+ - \frac{\bar{S}^2}{sq^-} \nabla_t \phi^- \right] = 0. \quad (\text{C.28})$$

Referências

- [1] D. Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press, 1991, second edition.
- [2] D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Robert E. Krieger Pub. Comp., 1989, second edition
- [3] R. März, *Integrated Optics - Design and Modeling*, Artech House, 1995.
- [4] M. Koshiba, *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*, KTK Scientific Publishers and Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [5] P. P. Silvester, R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, 1996, Third Ed.
- [6] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley and Sons, 1993.
- [7] H. A. Haus, *Waves and Fields in Optoelectronics*, Englewood Cliffs, NJ; Prentice-Hall, 1994.
- [8] G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Chapter 1, pp. 3-41, Birkhäuser, 1994.
- [9] R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*, IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory, Co-Published with Oxford University Press, 1998.
- [10] M. Koshiba, "Optical Channel Waveguides", in *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*, Chap. 3, pp 73-111, KTK Scientific Publishers and Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [11] M. Salazar-Palma and L.-E. García-Castillo, "Self-Adaptive Procedure for Waveguiding Structure Analysis", in *Finite Element Software for Microwave Engineering*, edited by T. Itoh, G. Pelosi, P. S. Silvester, pp. 401-434, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [12] E. Montanari, S. Salleri, L. Vicenti, and M. Zaboli, "Finite-Element Full-Vectorial Propagation Analysis for Three-Dimensional z-Varying Optical Waveguides", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, pp. 703-714, April 1998
- [13] G. H. Brooke, M. M. Kharadly, "Step Discontinuities on Dielectric Waveguides", *Elec. Lett.*, vol. 12, pp. 473-475, September 1976.
- [14] T. E. Rozzi, "Rigorous Analysis of the Step Discontinuity in a Planar Dielectric Waveguide", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-26, pp. 738-746, October 1978.
- [15] S. Kagami, I. Fukai, "Application of Boundary-Element Method to Electromagnetic Field Problems", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-32, pp. 455-461, April 1984.

- [16] V. Ramaswamy, P. G. Suchoski, Jr. , "Power Loss at a Step Discontinuity in an Asymmetrical Dielectric Slab Waveguide", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 1, pp. 754-759, July 1984.
- [17] M. Koshiba, M. Suzuki, "Boundary-Element Analysis of Dielectric Slab Waveguide Discontinuities", *App. Opt.*, vol. 25, pp. 828-829, March 1986.
- [18] M. Koshiba, K. Hirayama, "Application of Finite-Element Method to Arbitrarily Shaped Discontinuities in a Dielectric Slab Waveguide", *IEE Proceedings*, vol. 135, pp. 8-12, February 1988.
- [19] K. Hirayama, M. Koshiba, "Analysis of Discontinuities in an Open Dielectric Slab Waveguide by Combination of Finite and Boundary Elements", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 37, pp. 761-768, April 1989.
- [20] L. R. Gabeh, "Beam Propagation Method Step Applied to a Step Discontinuity in Dielectric Planar Waveguide", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 36, pp. 791-792, April 1988.
- [21] K. Hirayama, M. Koshiba, "Rigorous Analysis of Coupling Between Laser and Passive Waveguide in Multilayer Slab Waveguide", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 11, pp. 1353-1359, August 1993.
- [22] S.-T. Chu, S. Chudhuri, "A Finite-Difference Time-Domain Method for the Design and Analysis of Guided Wave Optical Structures", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 7, pp. 2033-2038, December 1989.
- [23] K. Hayashi, M. Koshiba, Y. Tsuji, S. Yoneta, R. Kaji, "Combination of Beam Propagation Method and Mode Expansion Method for Bidirectional Optical Beam Propagation Analysis", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, pp. 2040-2045, November 1998.
- [24] S. Yoneta, M. Koshiba, Y. Tsuji, "Combination of Beam Propagation Method and Finite Element Method for Optical Beam Propagation Analysis", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, pp. 2398-2404, November 1999.
- [25] C. Manolatu, S. G. Johnson, S. Fan, P. R. Villeneuve, H. A. Haus, J. D. Joannopoulos, "High-Density Integrated Optics", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, pp. 1682-1692, September 1999.
- [26] L. Faustini, C. Coriasso, A. Stano, C. Cacciatore, D. Campi, "Loss Analysis and Interference Effect in Semiconductor Integrated Waveguide Turning Mirrors," *IEEE Phot. Tech. Lett.*, vol. 8, pp. 1355-1357, October 1996.
- [27] S.T. Lau, T. Shiraishi, P. R. McIsaac, A. Behfar-Rad, J. M. Ballantyne, "Reflection and Transmission of a Dielectric Waveguide Mirror", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 10, pp. 634-643, May 1992.
- [28] H.E.Hernández-Figueroa, "Simple Nonparaxial Beam-Propagation Method for Integrated Optics", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 12, pp. 644-649, April 1994.
- [29] G.R. Hadley, "Wide-Angle Beam Propagation Using Padé Approximant Operators", *Opt. Lett.*, vol. 17, pp. 1426-1428, October 1992.
- [30] J.-P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves", *Journal of Computational Physics*, vol. 114, pp. 185-200, October 1994.

- [31] J.-P. Berenger, "A 3D Perfectly Matched Medium from Modified Maxwell's Equations with Stretched Coordinates", *Microwave Opt. Tech. Lett.*, vol. 7, pp. 599-604, September 1994.
- [32] R. Mittra, Ü. Pekel, "A New Look at the Perfectly Matched Layer (PML) Concept for the Reflectionless Absorption of Electromagnetic Waves", *IEEE-Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 5, pp. 84-86, March 1995.
- [33] Ü. Pekel, R. Mittra, "A Finite-Element-Method Frequency-Domain Application of the Perfectly Matched Layer (PML) Concept ", *Microwave Opt. Tech. Lett.*, vol. 9, no. 3, pp. 117-122, June 1995.
- [34] Z. S. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee., J.-F. Lee, "A Perfectly-Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Boundary Condition ", *IEEE Trans. Ant. and Prop.*, vol. 43, pp. 1460-1463, December 1995.
- [35] W. C. Chew, J. M. Jin, "Perfectly Matched Layers in the Discretized Space: An Analysis and Optimization", *Electromagnetics* , vol. 16, pp. 325-340, 1996
- [36] J.-Y. Wu, D. M. Kingsland, J.-F. Lee, R. Lee, "A comparison of Anisotropic PML to Berenger's PML and Its Application to the Finite-Element Method for EM Scattering ", *IEEE Trans. Ant. and Prop.*, vol. 45, pp. 40-50, January 1997.
- [37] C. Vassalo, "Reformulation of the Beam-Propagation Method", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 2208-2216, October 1993.

Análise de Junções Planares Ópticas pelo Método dos Elementos Finitos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANEXO

Este anexo contém reimpressões de figuras que não aparecem claramente na presente versão.

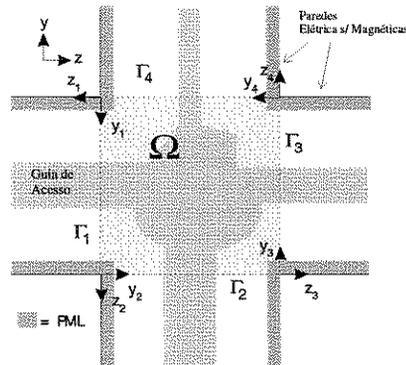


Fig. 3-2

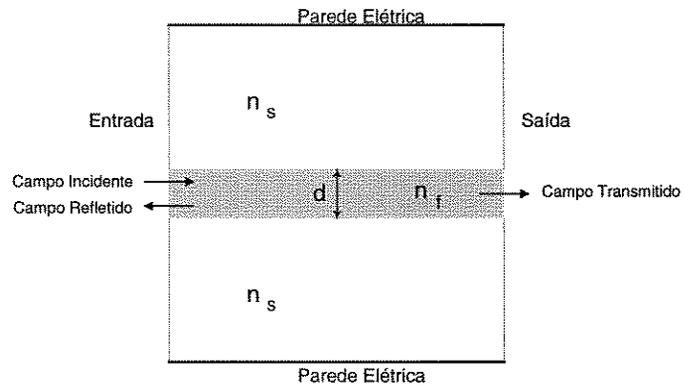


Fig. 4-1

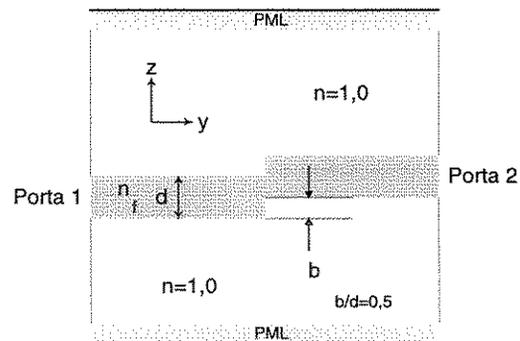


Fig. 4-2

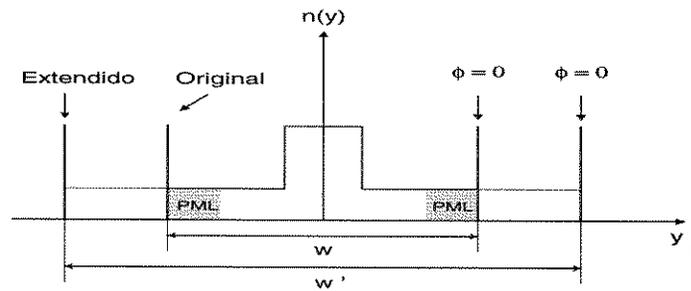


Fig. 4-3

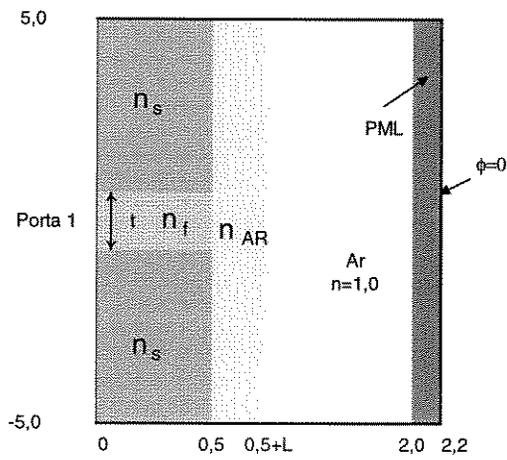


Fig. 5-1

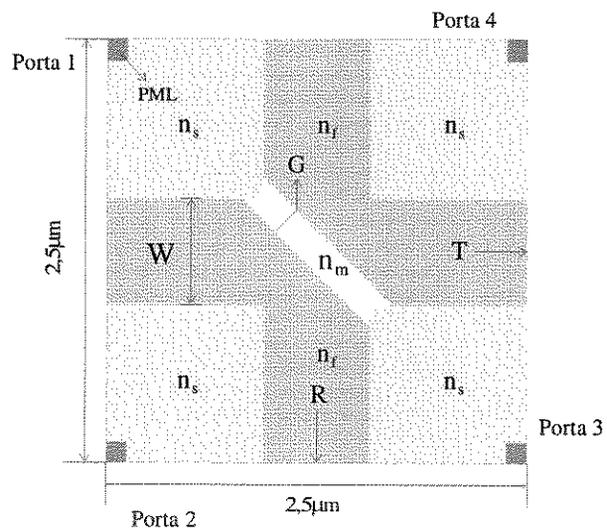


Fig. 5-5

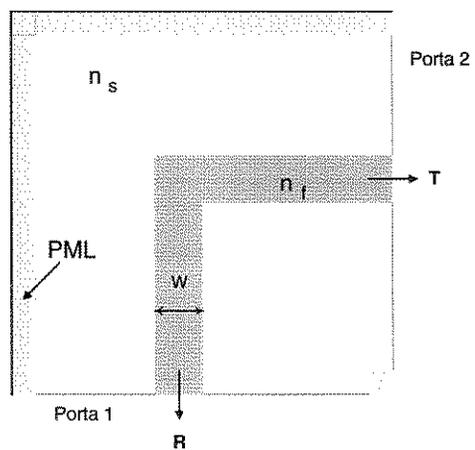


Fig. 5-13

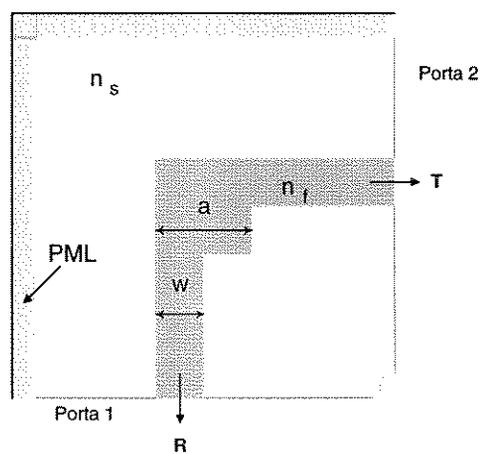


Fig. 5-19

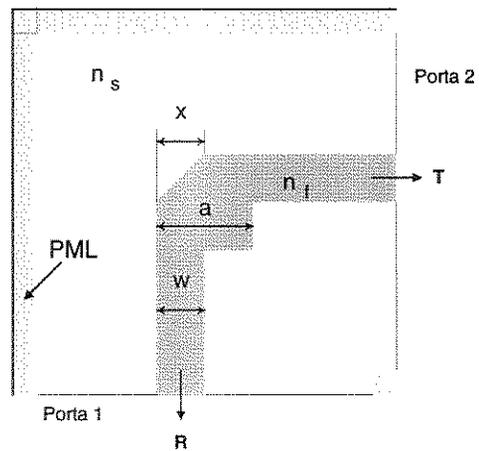


Fig. 5-25

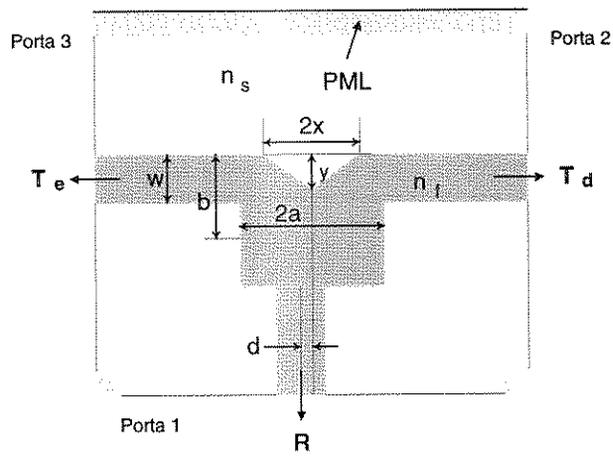


Fig. 5-33

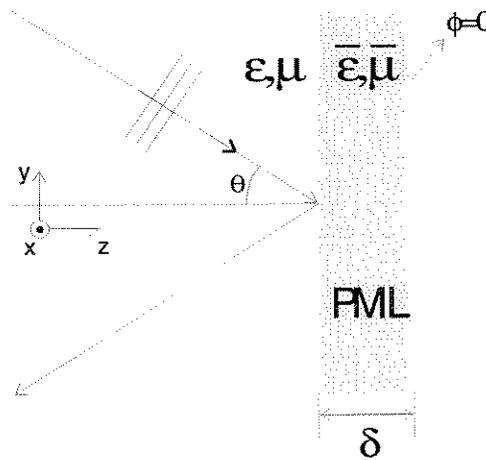


Fig. C-1