

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento de Telemática

**Controle Ótimo Multicritério:
Uma Abordagem por Programação Convexa**

Autor: José Reginaldo Hughes *Carvalho* *n.º/253*
Orientador: Prof. Dr. Paulo A. Valente *Ferreira* *t*
Augusto

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas - FEE-UNICAMP, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por JOSÉ REGINALDO HUGHES CARVALHO aprovada pela Comissão Julgadora em 22 01 1993.
Paulo Augusto Valente Ferreira
Orientador

Aos meus irmãos Ginho e Jane.
Vão em frente.

“O temor do Senhor é o princípio da ciência”

Salmos 1:7

Agradecimentos

Devo a realização deste trabalho à contribuição, direta ou indiretamente, de muitos, entre professores, colegas e amigos. Em especial, gostaria de externar os meus sinceros agradecimentos a:

- Prof. Paulo Augusto Valente Ferreira, um raro exemplo de dedicação e competência, cuja orientação impecável foi primordial para a viabilização deste trabalho;
- Aos meus pais, a quem eu muito amo, e cujo exemplo e apoio, mesmo a distância, serão sempre essenciais, sejam quais forem os meus caminhos;
- À minha, Andrea, por ter-me dado uma segurança tal, que só os que amam podem entender;
- Ao grande amigo Trabuco, pela parceria em boa parte desta jornada, e por quem eu tenho um grande carinho;
- Aos amigos Braz e Silvania, Paulo e Concha, Rosana e Rogério, Iva e Maurício, Marie, Humberto, Rita, Isamara, João, Júnior, dentre outros, pelo ambiente de amizade gostoso que me proporcionaram;
- Aos professores da FEE que ministraram os cursos que auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho;
- Aos que, através da CAPES, financiaram este trabalho.
- E Àquele a quem sempre será devido todos os méritos, pois Dele provém todas as coisas.

Sumário

O presente trabalho propõe uma nova abordagem para a solução de problemas de controle multicritérios. Em particular, demonstra-se que se os funcionais são critérios quadráticos agregados a uma determinada *Função Valor*, a solução do problema consiste, do ponto de vista da teoria de controle, na solução iterativa de equações do tipo Riccati. A solução do chamado *Problema de Salukvadze*, no qual a função valor associada ao problema representa uma norma l_p é obtida como caso particular da abordagem proposta. Relações entre esta nova abordagem e técnicas alternativas existentes na literatura e, em especial, com a estratégia de controle min-max de sistemas dinâmicos são também investigadas. O trabalho inclui experiências numéricas que ilustram o desempenho da abordagem proposta.

Abstract

In this work, a new approach for the problem of multicriteria control is proposed. In particular, it is shown that if the criteria are quadratic, being aggregated into a prescribed *Value Function*, the solution of the problem consists, from the control theory viewpoint, in the iterative solution of Riccati type equations. The solution of the so-called *Salukvadze Problem*, in which the value function is a l_p -norm, is easily obtained by the approach proposed. Relationships between this new approach and existing solution techniques, and especially with the min-max control strategy for dynamic systems, are investigated. The work includes numerical experiences that illustrate the performance of the approach proposed.

Conteúdo

Introdução Geral	1
1 Fundamentos Teóricos	5
1.1 Introdução	5
1.2 Convexidade de Conjuntos e Funções	5
1.3 Propriedade Fundamental de Conjuntos Convexos	7
1.4 Equivalência Primal-Dual	8
1.5 Solução do Dual Via Aproximação Tangencial: Subgradientes	12
1.6 Existência do Gradiente: Teorema de Daskin	13
1.7 Programação Multicritério: Aspectos Básicos	15
1.8 Conclusão	17
2 Controle Multicritério: Formulação e Metodologias	18
2.1 Introdução	18
2.2 Formulação do Problema de Controle Ótimo	18
2.3 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman	19
2.4 Princípio do Mínimo de Pontryagin	21
2.5 Formulação do Problema de Controle Multicritério	23
2.6 Abordagem de Salukvadze	24
2.7 Abordagem de Medanić e Andjelić	29
2.8 Diferenciabilidade de $G(\cdot)$	31
2.9 Abordagem de Duan Li	33
2.10 Conclusão	34
3 Controle Multicritério: Solução via Programação Convexa	35
3.1 Introdução	35
3.2 Formulação do Problema no Espaço dos Critérios	35
3.3 Representação da Região Viável através de Semi-Espaços Suportes	36
3.4 Algoritmo Básico: Níveis de Análise e de Decisão	38
3.5 Relações entre o Nível de Análise e a Abordagem de Medanić e Andjelić	41
3.6 Solução do Problema em Malha Fechada	43

3.7	Convergência do Procedimento	44
3.8	Caso Especial: Regulador Linear Quadrático	45
3.9	Implementação dos Níveis de Análise e Decisão	46
3.10	Conclusão	52
4	Solução de Problemas Clássicos de Controle Multicritério	53
4.1	Introdução	53
4.2	Formulação do Problema de Controle Min-Max	53
4.3	Solução por Medanić e Andjelić	55
4.4	Solução por Duan Li	57
4.5	Solução por Programação Convexa	60
4.6	Formulação do Problema de Múltiplos Alvos	64
4.7	Solução por Medanić e Andjelić	65
4.8	Solução por Programação Convexa	72
4.9	Formulação do Problema de Salukvadze	74
4.10	Solução por Duan Li	75
4.11	Solução por Programação Convexa	76
4.12	Formulação do Problema de Tempo e Energia Mínimos	79
4.13	Solução por Programação Convexa: Nível de Análise	80
4.14	Solução por Programação Convexa: Nível de Decisão	81
4.15	Conclusão	88
	Conclusão Geral	89
	Referências Bibliográficas	91

Lista de Figuras

3.1	Pólo do sistema em função de α	50
3.2	(a): 1ª Iteração; (b): 2ª Iteração; (c): 3ª Iteração.	51
4.1	Plano de fase do Exemplo 4.2.1.	58
4.2	Plano de fase do Exemplo 4.2.2.	58
4.3	Evolução de P - Exemplo 4.2.1.	63
4.4	Evolução dos estados - Exemplo 4.2.3.	63
4.5	Evolução do controle - Exemplo 4.2.3.	64
4.6	Decomposição do plano de fase.	71
4.7	Elementos de P , V e M em função do tempo.	71
4.8	Soluções múltiplas usando norma infinito.	73
4.9	Plano de Fase Ex. 4.6.1 - T fixo, R variável.	74
4.10	Plano de fase Ex. 4.6.1 - R fixo, T variável.	75
4.11	Convergência do Algoritmo - $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$	78
4.12	Prob. no espaço dos critérios - $v_1 = 1$, $v_2 = 1$	83
4.13	Evolução do estado e do controle - $v_1 = 1$, $v_2 = 1$	84
4.14	Prob. no espaço dos critérios - $v_1 = 5$, $v_2 = 1$	85
4.15	Evolução do estado e do controle - $v_1 = 5$, $v_2 = 1$	86

Lista de Tabelas

3.1	Comportamento do Algoritmo Básico para $\alpha = 0,5$	50
4.1	Iterações do Algoritmo de Duan Li.	60
4.2	Solução do Exemplo 4.2.1 - via projeção.	61
4.3	Solução do Exemplo 4.2.2 - via projeção.	62
4.4	Resultados encontrados - abordagem via projeção	73
4.5	Iterações obtidas pelo procedimento de Duan Li, $p = 2$	76
4.6	Solução do Exemplo 4.2.3 para $p = 1$	77
4.7	Solução do Exemplo 4.2.2 para $p = 2$	78
4.8	Solução do Exemplo 4.12.2 para $v_1 = 1, v_2 = 1$	84
4.9	Solução do Exemplo 4.12.2 para $v_1 = 5, v_2 = 1$	86

Introdução Geral

Durante os últimos anos, técnicas de otimização multicritério têm experimentado um grande desenvolvimento. Um número crescente de métodos e algoritmos que tratam das diversas classes de problemas multiobjetivos vêm sendo propostos, motivados principalmente pela grande capacidade de modelamento e fácil implementação de técnicas derivadas da programação matemática. O interesse por este tipo de abordagem tem aumentado significativamente, encontrando atualmente espaço nas mais diversas áreas de aplicação, tais como gerenciamento de recursos hidráulicos, planejamento de sistemas de transporte e controle ótimo.

Este trabalho trata de uma nova abordagem, baseada em programação convexa, para resolver o problema de controle multicritério, onde a solução de compromisso para o sistema dinâmico considerado é obtida minimizando-se uma *Função Valor* que agrega um conjunto de critérios de desempenho. Formulações baseadas no problema de controle multicritério aparecem naturalmente em muitas situações distintas, como por exemplo, no projeto de sistemas de controle de aviões de caça (Kreisselmeier e Steinhauser, 1983; Kuvshinov e Salyuchenko, 1991) e no planejamento de recursos hidráulicos (Haimes et al., 1975).

Otimização concorrente de vários critérios de desempenho associados a um mesmo sistema dinâmico e conseqüentemente a apenas um recurso comum foi primeiramente introduzida por Zadeh (1963). Salukvadze (1979) desenvolveu um método que usa o valor ótimo escalar resultante da otimização individual de cada critério para definir um *ponto ideal* no espaço dos critérios. Em seguida, é minimizada a distância Euclideana entre este ponto e o conjunto de valores alcançáveis através de controles admissíveis. Na prática, qualquer norma l_p pode ser usada para medir a distância e as escolhas mais comuns são $p = 1$ (combinação linear), $p = 2$ (norma euclidiana) and $p = \infty$ (norma infinito).

Entre os resultados encontrados na literatura que abordam o problema de controle multicritério destaca-se a aplicação da teoria de jogos para o problema min-max e o problema de múltiplos alvos por Medanić e Andjelić (1971, 1972). Nesses trabalhos, os autores formulam o problema como um jogo, onde um dos jogadores define a estratégia de controle, enquanto que o outro jogador seleciona o objetivo do jogo a partir da estratégia escolhida pelo primeiro jogador. Como o número de critérios

de desempenho é finito, constituindo-se portanto em um conjunto não convexo, não é possível garantir a existência de uma solução do tipo *ponto de sela*. Para contornar esta característica indesejável, os autores tornam o problema convexo através de uma parametrização por um vetor ponderação, modificando o problema original. É então demonstrado que o problema modificado possui um ponto de sela e que a sua solução também resolve o problema original. Os algoritmos foram desenvolvidos com base no problema linear quadrático, permitindo que, entre outras coisas, a etapa de minimização do problema ponderado possua uma solução analítica.

Outra abordagem possível é a proposta por Salukvadze (1979) para o problema proposto pelo mesmo autor, que consiste em encontrar uma solução de compromisso entre as soluções factíveis do sistema e o vetor formado pelos valores mínimos individuais dos critérios (solução ideal). No seu trabalho, obtém-se uma representação equivalente do problema na forma de Mayer, que consiste em colocar o funcional apenas como função do estado final, para, a partir da teoria de programação dinâmica, poder relacionar a solução do problema proposto à função de Bellman correspondente. A partir da equação de Halmilton-Jacobi, das condições de otimalidade do problema na forma de Mayer e do Princípio do Mínimo de Pontryagin obtém-se condições para a função de Bellman, que garantem que serão satisfeitas para a solução do problema. É então proposto um procedimento para a construção de uma função de Bellman que satisfaça todas as condições impostas. O autor finalmente faz uma análise detalhada de como seria a forma destas funções auxiliares para uma série de classes de problemas, inclusive para a classe de problemas lineares quadráticos.

Mais recentemente, Li (1990a, 1990b) propôs uma abordagem baseada na equalização dos critérios de desempenho para resolver o problema min-max e o problema de Salukvadze, ainda considerando o caso do regulador linear quadrático. Em Li (1990a), o autor mostra que na solução do problema, os critérios de desempenho associados às componentes do vetor ponderação que são estritamente positivas possuem valores idênticos. O autor então desenvolve uma expressão analítica para o valor de cada critério de desempenho e propõe um algoritmo que procura um controle que iguale os valores dos critérios que estão associados às componentes do vetor ponderação estritamente positivas. Caso não exista um controle deste tipo a solução min-max será aquela que, dentre as soluções do problema escalar considerando-se cada critério individualmente, estiver associada ao critério de maior valor.

O problema Linear Quadrático Multicritério Gaussiano, (LQMG) tem recebido atenção especial na literatura de controle multicritério. Em Toivonen (1984), uma ordenação hierárquica dos critérios quadráticos é usada para relacionar a minimização das variâncias dos estados com o critério de desempenho padrão do regulador. O método do ponto ideal de Salukvadze foi estendido para o caso discreto do problema LQMG por Koussoulas and Leondes (1984) e um procedimento para calcular uma solução *eficiente* ou *não inferior* (Zadeh, 1963) para o problema LQMG foi desenvolvido por Toivonen e Mäkilä (1989). Mais recentemente, atenção tem sido

direcionada para a solução do problema LQMG nos espaços de Hilbert através da introdução de vetores de critérios \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ (Khargonekar e Rotea, 1991)

Apesar do grande número de contribuições fundamentais para o domínio do controle multicritério, a questão básica de resolver eficientemente o problema permanece aberta. Mais ainda, embora a convexidade desempenhe um papel essencial para a obtenção de muitas propriedades relacionadas com o projeto de controle de sistemas lineares (Boyd e Barrat, 1991), os métodos observados não exploram tal propriedade em sua completa extensão.

A abordagem proposta neste trabalho baseia-se em estratégias de projeção e relaxação para compor a solução do problema de controle multicritério de acordo com uma estrutura multinível (Carvalho e Ferreira, 1992, 1993). No *Nível Inferior* ou de *Análise*, resolve-se um subproblema min-max similar ao introduzido por Medanić e Andjelić (1971), porém parametrizado por informações vindas do *Nível Superior* ou de *Decisão*, onde uma versão relaxada e estática do problema é considerada.

O problema é formulado no espaço dos critérios, fato que, apesar de possuir certas vantagens metodológicas não mantém, em princípio, a convexidade no espaço das variáveis de controle. O espaço dos critérios é então limitado a uma região de interesse e, através de propriedades fundamentais de conjuntos convexos, usam-se técnicas de relaxação para fazer uma aproximação gradual da região factível do problema. Este tipo de abordagem evita uma limitação habitual da formulação no espaço dos critérios, que é a inviabilidade de se fazer um mapeamento completo das soluções do espaço das variáveis de controle.

A solução do nível de decisão é enviada ao nível de análise, onde é resolvido um problema min-max parametrizado por esta solução. A solução do nível de análise é que vai fornecer informações para que seja feita uma melhor aproximação da região de soluções eficientes do problema.

O Decisor, dispondo destas informações, encontra uma nova solução a ser avaliada pelo analista. O procedimento prossegue até que o Decisor disponha de informações suficientes para poder encontrar uma solução que seja considerada satisfatória pelo analista. Em particular, demonstra-se que se os funcionais são critérios quadráticos, a solução do problema de análise consiste, do ponto de vista da teoria de controle, na solução interativa de equações do tipo Riccati.

Os capítulos que compoem esta dissertação estão organizados como segue.

Capítulo 1 - Neste capítulo será feita uma breve revisão sobre os fundamentos teóricos que darão suporte a esta dissertação, tais como conjuntos convexos, programação convexa escalar e programação convexa multicritério.

Capítulo 2 - Tratará da formulação do problema de controle multicritério propriamente dito. Será feita uma revisão da teoria de controle ótimo para propiciar um melhor entendimento das diversas abordagens que serão apresentadas neste mesmo capítulo.

Capítulo 3 - Neste capítulo será feito o desenvolvimento da abordagem que é o tema central desta dissertação. Será proposto um algoritmo básico com estrutura multinível, com um estudo sobre sua convergência, além da implementação com realimentação, que promove correções na trajetória.

Capítulo 4 - Aqui serão formulados e implementados problemas clássicos de controle multicritério, tais como o problema min-max, múltiplos alvos e tempo e energia mínimos (Ferreira e Carvalho, 1993). Estes problemas serão resolvidos pela metodologia proposta nesta dissertação e comparados com os resultados disponíveis na literatura.

Conclusão Geral - Apresentará as conclusões mais relevantes a respeito da dissertação como um todo, além de sugerir temas para futuros trabalhos.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

1.1 Introdução

Neste capítulo será feita uma breve revisão de temas considerados importantes para o suporte teórico desta dissertação. Como a base do trabalho é Programação Convexa, faz-se necessário apresentar conceitos e propriedades importantes para a caracterização de um problema convexo. Uma introdução à programação convexa, a equivalência entre os problemas primal e dual a partir da existência do ponto de sela e aspectos de diferenciabilidade e solução numérica do problema dual serão apresentados. Alguns resultados referentes a problemas multicritérios convexas, como caracterizações do conjunto de soluções *eficientes*, são também discutidos.

1.2 Convexidade de Conjuntos e Funções

Como será visto mais adiante, o desenvolvimento da metodologia proposta nesta dissertação será realizado sob a hipótese de convexidade do problema. Consequentemente, os conceitos e propriedades de conjuntos e funções convexas serão de fundamental importância para este trabalho.

Definição 1.1 - Conjuntos Convexos *Diz-se que um conjunto Ω de vetores de um dado espaço vetorial \mathcal{X} é convexo se,*

$$\forall x^1, x^2 \in \Omega \rightarrow wx^1 + (1-w)x^2 \in \Omega, \quad \forall 0 \leq w \leq 1. \quad (1.1)$$

Ou seja, dados quaisquer dois pontos pertencentes ao conjunto, este será convexo se o segmento de reta que os une também pertencer ao conjunto. Algumas propriedades básicas de conjuntos convexas, que podem ser facilmente demonstradas diretamente da definição, são apresentadas a seguir.

Proposição 1.1 *Sejam C^i , $i = 1, \dots, r$ conjuntos convexos de vetores. Então*

- a) wC_i , $\forall i = 1, \dots, r$ também é um conjunto convexo, $\forall w$ real.
 b) $\sum_{i=1}^r C^i$ é um conjunto convexo.
 c) $\cap_{i=1}^r C^i$ é um conjunto convexo.
 d) $\forall x^1, x^2, \dots, x^n \in C_j \rightarrow \sum_{j=1}^n w_j x^j \in C_i$, $\forall i = 1, \dots, r$, $\forall w \in W$, onde W é definido como

$$W = \{w \in \mathcal{R}^n : w \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1\}. \quad (1.2)$$

Ou seja, a combinação convexa de vetores pertencentes a um conjunto convexo também pertence ao conjunto.

Definição 1.2 - Funções Convexas *Diz-se que uma função $f(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ é convexa sobre um conjunto convexo Ω se para quaisquer $x^1, x^2 \in \Omega$*

$$f(wx^1 + (1-w)x^2) \leq wf(x^1) + (1-w)f(x^2), \quad \forall 0 \leq w \leq 1. \quad (1.3)$$

Para a função ser estritamente convexa deve valer a desigualdade estrita em (1.3)

Se uma função é convexa então, a reta que liga quaisquer dois pontos da função sempre fica acima da curva da função.

Similarmente ao que foi feito para conjuntos convexos, serão apresentadas a seguir algumas propriedades de funções convexas que poderão ser facilmente demonstradas usando-se a definição.

Proposição 1.2 *Seja $f(\cdot)$ um vetor cujas componentes $f_j(\cdot) : \Omega^j \rightarrow \mathcal{R}$ são funções convexas sobre Ω^j , $j = 1, \dots, m$ convexas. Então*

- a) $wf_j(\cdot)$ é uma função convexa sobre Ω^j , $\forall w > 0$.
 b) $\sum_{i=1}^m w_i f_i(\cdot)$ é uma função convexa sobre $\cap_{j=1}^m \Omega_j$, $\forall w \in W$.
 c) $\forall x^1, x^2, \dots, x^n \in \Omega^j \in f_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, m$

$$f_j \left(\sum_{i=1}^n w_i x^i \right) \leq \sum_{i=1}^n w_i f_j(x^i), \quad \forall w \in W$$

Definindo \mathcal{C}^1 como o conjunto de funções que possuem até primeira derivada contínua e \mathcal{C}^2 como o conjunto de funções que possuem até segunda derivada contínua, as seguintes afirmações sobre $f(\cdot)$ são verdadeiras

Proposição 1.3 *Seja $f(\cdot) \in C^1$ uma função convexa definida sobre Ω convexo. Então*

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)'(x - y), \quad \forall x, y \in \Omega \quad (1.4)$$

Se uma função $f(\cdot)$ é convexa então o seu valor supera o da sua aproximação linear quaisquer que sejam os pontos $x, y \in \Omega$ considerados.

Proposição 1.4 *Seja $f(\cdot) \in C^2$ uma função definida sobre Ω convexo. Então a matriz*

$$F(x) \triangleq \nabla^2 f(x) \quad (1.5)$$

é semi-definida positiva sobre Ω . Se $f(\cdot)$ for estritamente convexa sobre Ω , então $F(x)$ é definida positiva sobre Ω .

Outros resultados importantes são as relações entre conjuntos e funções convexas

Proposição 1.5 *Seja $f(\cdot)$ uma função convexa sobre Ω convexo. Então o conjunto*

$$C_\alpha \triangleq \{x \in \Omega : f(x) \leq \alpha, \quad \alpha \in \mathcal{R}\} \quad (1.6)$$

é um conjunto convexo.

Proposição 1.6 *Epígrafo* *O epígrafo de uma função $f(\cdot)$, definido como*

$$[\Omega, f(\cdot)] = \{(x, \alpha) : f(x) \leq \alpha, \quad \alpha \in \mathcal{R}\} \quad (1.7)$$

é um conjunto convexo se e somente $f(\cdot)$ é uma função convexa.

1.3 Propriedade Fundamental de Conjuntos Convexos

Sejam $f_i(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{R}, i = 1, 2, \dots, m$ funções convexas sobre um conjunto convexo Ω . Considerando $f(\cdot)$ um vetor cujas componentes são as funções $f_1(\cdot), f_2(\cdot), \dots, f_m(\cdot)$, é fácil mostrar que o conjunto \mathcal{G} definido como

$$\mathcal{G} \triangleq \{y \in \mathcal{R}^m : f(x) \leq y, \text{ para algum } x \in \Omega\} \quad (1.8)$$

é um conjunto convexo, uma vez que \mathcal{G} a interseção dos epígrafos de $f_j(\cdot), j = 1, \dots, m$.

A partir de (1.8) têm-se condições de se apresentar um resultado que será de notável importância para o trabalho desenvolvido nesta dissertação. Trata-se de uma propriedade fundamental de conjuntos convexas (Lasdon, 1970), apresentada a seguir.

Teorema 1.1 *Seja \mathcal{G} definido como em (1.8). Então $y \in \mathcal{G}$ se e somente se y satisfaz o sistema linear com infinitas restrições*

$$\min_{x \in \Omega} \langle w, f(x) - y \rangle \leq 0, \quad \forall w \in W \quad (1.9)$$

Prova - Necessidade: Seja um vetor $x^0 \in \Omega$ tal que $f(x^0) \leq y$ para algum $y \in \mathcal{R}^m$. Como $w \in W$ é sempre não negativo, então

$$\langle w, f(x^0) - y \rangle \leq 0, \quad \forall w \in W \quad (1.10)$$

Pode-se então substituir o lado esquerdo de (1.10) pelo menor valor da função $\langle w, f(x^0) - y \rangle$ para $x \in \Omega$, mantendo o sinal da desigualdade. Então

$$\min_{x \in \Omega} \langle w, f(x) - y \rangle \leq 0, \quad \forall w \in W \quad (1.11)$$

(Suficiência): Perceba que a desigualdade (1.9) vale para todo $w \in W$, inclusive para o que em particular produz o maior valor da função. Ou seja

$$\max_{w \in W} \min_{x \in \Omega} \langle w, f(x) - y \rangle \leq 0 \quad (1.12)$$

Como a restrição $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ presente em W (1.2) é para atender a uma normalização, a desigualdade continuará valendo se a maximização for feita apenas sobre $w \geq 0$. Então

$$\max_{w \geq 0} \min_{x \in \Omega} \langle w, f(x) - y \rangle \leq 0 \quad (1.13)$$

e sua solução é $w = 0$. Agora, note que (1.13) é o problema dual de

$$\begin{aligned} \min_{x \in \Omega} \quad & 0'x \\ \text{s.a.} \quad & f(x) - y \leq 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

É possível mostrar que, se o problema *dual* for limitado, e este é o caso, então o problema primal será factível (Lasdon, 1970). Consequentemente, a solução de (1.14) é factível, ou seja $\exists x \in \Omega : f(x) \leq y$. \square

1.4 Equivalência Primal-Dual

Agora que os conceitos de conjuntos e funções convexas necessários para definir um problema convexo são conhecidos, pode-se formalizar a solução desta classe de problemas através da *Programação Convexa*.

Seja o problema de otimização não linear

$$\begin{aligned} \min_{x \in \Omega} f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $f(\cdot)$ e $g(\cdot) = [g_1(\cdot), \dots, g_q(\cdot)]'$ são funções convexas sobre Ω convexo. Problemas convexas possuem, como será visto no decorrer desta seção, uma série de propriedades que fazem com que sua abordagem seja relativamente simples. Estes resultados são amplamente conhecidos na literatura, podendo suas demonstrações serem encontradas, por exemplo, em Lasdon (1970).

A primeira característica apresentada diz respeito à relação entre soluções globais e soluções locais dos problemas convexas.

Teorema 1.2 *Seja $\alpha = \min_{x \in \Omega} f(x)$. Então*

- a) $\Omega^* \triangleq \{x \in \Omega : f(x) = \alpha\}$ é um conjunto convexo.
- b) Se x^* é um mínimo local de $f(\cdot)$, então $f(x^*) = \alpha$ e portanto x^* é também um mínimo global de $f(\cdot)$.

É claro que se $x^* \in \Omega$ resolve (1.15), então existem multiplicadores $w^* \in \mathcal{R}^q$ tais que (x^*, w^*) satisfazem às condições necessárias de otimalidade de Kuhn-Tucker

- i) $w_i^* \geq 0$
- ii) $w_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, q$
- iii) $g_i(x^*) \leq 0, \quad i = 1, \dots, q$
- iv) $\nabla l(x, w)|_{\substack{x=x^* \\ w=w^*}} = 0$

sendo que $l(\cdot)$ é a *Função Lagrangeano* de (1.15), definida como

$$l(x, w) = f(x) + \langle w, g(x) \rangle \tag{1.16}$$

e w o vetor formado pelos multiplicadores de lagrange $w_i, \quad i = 1, \dots, q$.

Apesar das condições de K-T serem apenas condições necessárias, a convexidade inerente ao problema tratado garante a sua suficiência, o que pode ser verificado a partir da definição de ponto de sela.

Definição 1.3 *Diz-se que um par $(x^0, w^0), x^0 \in \Omega, w^0 \geq 0$ é um Ponto de Sela da função lagrangeano (1.16), se satisfaz*

$$\begin{aligned} l(x^0, w^0) &\leq l(x, w^0), & \forall x \in \Omega \\ l(x^0, w^0) &\geq l(x^0, w), & \forall w \geq 0 \end{aligned}$$

Ou seja, um par (x^0, w^0) é um ponto de sela se x^0 minimiza o lagrangeano sobre Ω e w^0 maximiza o lagrangeano sobre $w \geq 0$.

Teorema 1.3 *Seja o par (x^0, w^0) , $x^0 \in \mathcal{X}$, onde \mathcal{X} é um espaço vetorial qualquer, $w^0 \geq 0$. Então (x^0, w^0) é um ponto de sela de $l(x, w)$ se e somente se:*

- a) $g_i(x^0) \leq 0$, $i = 1, \dots, q$
- b) $w_i^0 g_i(x^0) = 0$, $i = 1, \dots, q$
- c) x^0 minimiza $l(x, w^0)$ sobre \mathcal{X}

Perceba que as condições (a) e (b) são respectivamente as condições de factibilidade (iii) e de folga complementar (ii) de K-T supondo-se que Ω é todo o espaço vetorial considerado. A diferença está na condição de estacionariedade (iv) que aqui é representada pela condição (c). Note porém que, se (c) for satisfeita então (iv) também será.

Este teorema é de grande importância para a programação convexa pois, uma condição suficiente para que um problema satisfaça as condições (a)-(c), e logo possua um ponto de sela, é que seja convexo. O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Lasdon (1970), fundamenta a afirmação feita de que a convexidade de um problema garante a suficiência das condições de K-T.

Teorema 1.4 *Suponha que $f(\cdot)$, $g_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, q$ são funções convexas sobre Ω convexo e que exista $x \in \Omega$ tal que $g(x) < 0$. Então x^0 resolve (1.15) se e somente se existem multiplicadores de Lagrange $w_i^0 \geq 0$, $i = 1, \dots, q$, tais que o par (x^0, w^0) satisfaça as condições de K-T.*

A condição $g(x) < 0$, chamada de *qualificação de restrição*, indica que o conjunto de restrições deve ter um ponto interior. Tal suposição é necessária por uma questão de consistência com a demonstração indicada em Lasdon (1970).

Como os problemas convexas sempre possuem um ponto de sela, a prova deste teorema torna-se imediata, através da similaridade entre as condições (i)-(iv) e as condições (a)-(c).

Uma consequência imediata deste teorema é que, se (x^0, w^0) é um ponto de sela de $l(x, w)$, então, pelas condições (a) – (c), x^0 é a solução de (1.15).

Considere agora a função $\phi(\cdot)$ definida como

$$\phi(w) \triangleq \min_{x \in \Omega} l(x, w) \tag{1.17}$$

Chama-se de *Problema Dual* de (1.15) (primal) o problema

$$\max_{w \in \mathcal{W}} \phi(w) \quad (1.18)$$

onde, $\phi(\cdot)$, denominada *Função Dual*, é côncava sobre o domínio \mathcal{W} , dado por

$$\mathcal{W} \triangleq \{w \geq 0 : \exists \min_{x \in \Omega} l(x, w)\} \quad (1.19)$$

Os problemas dual e primal estão relacionados entre si por diversos aspectos, como será visto no decorrer desta seção. A primeira relação apresentada diz respeito à factibilidade.

Proposição 1.7 *Sejam os problema primal e dual definidos como em (1.15) e (1.18). Então se a solução do primal for limitada então o dual será factível e se a primal for factível a solução do dual será limitada.*

Verificou-se anteriormente que problemas convexos possuem uma característica bastante desejável que é a existência de um ponto de sela (x^0, w^0) e que, em consequência, x^0 resolve o problema primal. O objetivo agora será o de verificar que no ponto de sela também está a solução do problema dual e que os valores das funções $f(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$ nas respectivas soluções ótimas são idênticos.

Teorema 1.5 *Se existem x^0, w^0 soluções factíveis primal e dual. tais que $\phi(w^0) = f(x^0)$ então x^0 resolve o primal e w^0 o dual.*

Ou seja, uma condição suficiente para que tenham sido encontradas as soluções dos problemas primal e dual é que as funções que estão sendo otimizadas possuam o mesmo valor para as respectivas soluções. O próximo teorema mostra onde é satisfeita a condição apresentada pelo Teorema 1.5.

Teorema 1.6 *O par (x^0, w^0) é um ponto de sela de $l(x, w)$ se e somente se x^0 e w^0 são factíveis e $\phi(w^0) = f(x^0)$.*

Perceba o quão importante é o papel desempenhado pelo ponto de sela (x^0, w^0) na solução de um problema convexo. Além de ter a existência garantida nesta classe de problemas, os Teoremas 1.5 e 1.6 mostram que no ponto de sela encontra-se tanto a solução do problema primal quanto a do problema dual. A consequência deste fato é que, na busca da solução de um problema convexo, a abordagem pelo problema primal e a abordagem pelo problema dual são equivalentes.

1.5 Solução do Dual Via Aproximação Tangencial: Subgradientes

Na seção anterior foi formulado o problema dual de um problema convexo (primal) e verificada a equivalência da solução do dual em relação ao primal a partir da existência de um ponto de sela. Nada porém foi dito quanto a como encontrar a solução do dual. É deste assunto que trata esta seção. Antes, porém, é necessário definir o conjunto de subgradientes da função dual $\phi(\cdot)$.

Definição 1.4 *Seja $\phi(\cdot)$ definida com em (1.17). Então o vetor $\mu \in \mathcal{R}^q$ é um subgradiente de $\phi(\cdot)$ no ponto $w^0 \in \mathcal{W}$ se*

$$\phi(w) \leq \phi(w^0) + \langle \mu, w - w^0 \rangle, \quad \forall w \in \mathcal{W} \quad (1.20)$$

O conjunto de todos os subgradientes de $\phi(\cdot)$ no ponto w^0 será denotado por $\partial\phi(w^0)$.

Seja

$$X(w) \triangleq \left\{ x : x = \arg \min_{x \in \Omega} l(x, w) \right\}. \quad (1.21)$$

Pode-se mostrar que (Lasdon, 1970), para qualquer $x \in X(w)$, $g(x)$ é um subgradiente de $\phi(\cdot)$. A partir deste resultado é possível fazer uma aproximação tangencial de $\phi(\cdot)$ através de hiperplanos suportes nos pontos $w^i \in \mathcal{W}$, $i = 1, \dots, q$, cujas inclinações seriam dadas pelos subgradientes $g(x^i)$, $x^i \in \Omega$, $i = 1, \dots, q$.

O problema então consistiria em resolver o problema

$$\max_{w \in \mathcal{W}} \phi^r(w) \quad (1.22)$$

onde

$$\phi^r(w) = \min_{1 \leq j \leq r} \{ f(x^j) + \langle w, g(x^j) \rangle \} \quad (1.23)$$

é a aproximação de $\phi(\cdot)$ a partir da existência de r subgradientes.

Note que (1.22) é equivalente ao seguinte problema linear

$$\begin{aligned} & \max_{w \in \mathcal{W}} \sigma \\ & \text{s.a.} \quad \sigma \leq f(x^i) + \langle w, g(x^i) \rangle, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (1.24)$$

O método de **Aproximação Tangencial** consiste em:

Passo 1 - A partir de uma aproximação com r subgradientes, resolva (1.24), obtendo w^{r+1} .

Passo 2 - Resolva o problema (1.17) para $w = w^{r+1}$

$$\phi(w^{r+1}) = \min_{x \in \Omega} \{f(x) + \langle w^{r+1}, g(x) \rangle\} \quad (1.25)$$

obtendo uma solução x^{r+1} e um subgradiente $g(x^{r+1})$.

Passo 3 - Se $\sigma - \phi(w^{r+1}) < \epsilon$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, pare. Caso contrário, com os valores de w^{r+1} , x^{r+1} e $g(x^{r+1})$, adicione mais uma restrição ao problema (1.24), faça $r = r + 1$ e volte ao Passo 1.

Uma vantagem de se trabalhar com esta metodologia é que, independentemente da forma da função dual original, o problema (1.24) é sempre um problema de programação linear. O que o método faz quando, a cada iteração, acrescenta uma restrição ao problema (1.24), é melhorar a aproximação da função dual. Note que a aproximação feita por subgradientes sempre superestima o valor de $\phi(\cdot)$ e sendo assim, o valor da diferença $\sigma - \phi(w^{r+1})$ será sempre um valor positivo.

1.6 Existência do Gradiente: Teorema de Daskin

Uma análise que sempre deve ser levada em conta quando da abordagem do problema dual refere-se à diferenciabilidade de $\phi(\cdot)$. Caso a diferenciabilidade seja garantida, encontrar o valor de $d\phi(\cdot)/dw$ é uma operação extremamente simples, pois a relação entre $\phi(\cdot)$ e w é sempre linear. A importância desta análise não está exatamente na necessidade de se resolver o problema dual, pois, na seção anterior, foi apresentado um método que encontra a sua solução, bastando que $\phi(\cdot)$ seja contínua. O que interessa é determinar sob que condições a propriedade de diferenciabilidade de $\phi(\cdot)$ para todo $w \in \mathcal{W}$ é válida.

Teorema 1.7 *Seja o problema primal (1.15) onde $f(\cdot)$ e $g_i(\cdot)$ são funções contínuas sobre Ω . A função dual $\phi(\cdot)$ é diferenciável no ponto w^0 se e somente se $g(\cdot)$ for constante sobre $X(w)$ e, neste caso, o valor de cada derivada parcial será dada por*

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial w_i} \right|_{w=w^0} = g_i(x), \quad \forall x \in X(w^0) \quad (1.26)$$

Prova: Este teorema é facilmente demonstrado a partir de um outro resultado (Lasdon, 1970) que mostra que, dadas as condições impostas sobre $f(\cdot)$, $g_i(\cdot)$ e Ω ,

a derivada direcional unilateral de $\phi(\cdot)$ existe em qualquer direção h e em qualquer ponto $w \in \mathcal{W}$; seu valor é dado por

$$\begin{aligned} D\phi(w, h) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\phi(w + \alpha h) - \phi(w)}{\alpha} \\ &= \min_{x \in X(w)} \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial l(x, w)}{\partial w_i} \end{aligned} \quad (1.27)$$

e como $\frac{\partial}{\partial w_i} l(x, w) = g_i(x)$, então

$$D\phi(w, h) = \min_{x \in X(w)} \sum_{i=1}^m h_i g_i(x) \quad (1.28)$$

Para calcular a derivada parcial de $\phi(\cdot)$ em relação a w_i basta fazer h igual ao i -ésimo vetor unitário e^i , ($h = e^i$) em (1.28). Sendo assim tem-se que:

$$D\phi(w, e^i) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial w_i} \right)^+ = \min_{x \in X(w)} g_i(x) \quad (1.29)$$

No caso da derivada parcial à esquerda tem-se, com $h = -e^i$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial w_i} \right)^- &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\phi(w) - \phi(w - \alpha e^i)}{\alpha} = - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\phi(w + \alpha(-e^i)) - \phi(w)}{\alpha} \\ &= -D\phi(w, -e^i) = - \min_{x \in X(w)} -g_i(x) = \max_{x \in X(w)} g_i(x) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Sabe-se que uma condição para que uma função seja diferenciável é que a sua derivada à esquerda seja igual a sua derivada à direita. Perceba que, para o caso de $\phi(\cdot)$, a partir de (1.29) e (1.30), isto só será possível se $g_i(\cdot)$ for constante para todo $x \in X(w)$.

Sendo $g_i(\cdot) = k(w)$ constante sobre $x \in X(w)$, então a expressão da derivada direcional de $\phi(\cdot)$ na direção h qualquer (1.28) torna-se

$$D\phi(w, h) = k(w) \sum_{i=1}^m h_i \quad (1.31)$$

que é linear com relação às componentes de h . Como $\phi(\cdot)$ é côncava, então, usando o Teorema de Fechel (Lasdon, 1970), que diz

Lema 1.1 *Seja $f(\cdot)$ uma função côncava sobre um conjunto convexo Ω . Seja $y^0 \in \text{int } \Omega$ e suponha que $Df(y^0, h)$ é linear em h . Então $f(\cdot)$ é diferenciável em y^0 .*

Está provada a necessidade. A suficiência é imediata, uma vez que, como foi mencionado anteriormente, a igualdade das derivadas pelos dois lados já é uma condição para a diferenciabilidade. \square

Um caso de particular interesse é quando $\min_{x \in \Omega} l(x, w^0)$ tem apenas uma única solução x^0 . Neste caso, $X(w^0)$ é um conjunto unitário (*Singleton*) composto apenas por x^0 . Consequentemente $g(x^0)$ será constante sobre $X(w^0)$, fazendo com que $\phi(\cdot)$ seja sempre diferenciável.

A vantagem de se garantir a diferenciabilidade de $\phi(\cdot)$ é a possibilidade de se usar métodos baseados no gradiente $\nabla \phi(\cdot)$ para maximizar a função dual.

Uma classe de problemas em que $X(w^0)$ é sempre um conjunto unitário é obviamente a dos problemas estritamente convexos. Este trabalho abordará um tipo de problema convexo bastante conhecido e explorado na teoria de controle, que é o *Regulador Linear Quadrático*, só que aplicado à programação multicritério.

1.7 Programação Multicritério: Aspectos Básicos

Em Programação Multicritério procura-se otimizar não uma função, mas um vetor de funções agregadas por uma *Função Valor* ou *Utilidade* (Yu, 1985). Considere, então, o problema multicritério

$$\min_{x \in \Omega} \mathcal{V}(f(x)) \quad (1.32)$$

onde Ω é um conjunto convexo qualquer e $f(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{R}^m$ é um vetor composto pelos critérios a serem minimizados $f_i(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, m$, agregados pela função valor $\mathcal{V}(\cdot)$, suposta crescente em relação a cada critério. Uma característica importante da programação multicritério é que $\mathcal{V}(\cdot)$ não precisa ser explicitamente conhecida. Em geral, apenas propriedades globais como diferenciabilidade, convexidade e crescimento em relação a cada critério são suficientes para viabilizar o emprego deste tipo de formulação.

Como geralmente os critérios são conflitantes, ou seja, numa situação de equilíbrio a diminuição do valor de um implicará no aumento de pelo menos um outro, não existe para (1.32) uma solução ótima, no sentido empregado nos problemas escalares. Para a Programação Multicritério a solução será caracterizada sob o conceito de eficiência.

Definição 1.5 Diz-se que $x^* \in \Omega$ é uma solução eficiente de (1.32) se não existe nenhum outro ponto x factível tal que $f(x) \leq f(x^*)$ e $f(x) \neq f(x^*)$.

O conjunto de soluções eficientes será denotado por Ω^* . O problema (1.32) formulado no *espaço dos critérios* fica na forma

$$\min_{y \in \mathcal{F}} \mathcal{V}(y) \quad (1.33)$$

onde \mathcal{F} , definido como

$$\mathcal{F} = \{y \in \mathcal{R}^m : y = f(x), \text{ para algum } x \in \Omega\} \quad (1.34)$$

é o mapeamento de Ω no espaço dos critérios, representado por simplicidade por $\mathcal{F} = f(\Omega)$, e Γ denotará o conjunto de soluções eficientes no espaço dos critérios, ou seja $\Gamma = f(\Omega^*)$. É possível mostrar (Ferreira e Geromel, 1990) que, todo ponto interior a \mathcal{F} não satisfaz à Definição 1.5 e conseqüentemente $\Gamma \subset \partial\mathcal{F}$, onde $\partial\mathcal{F}$ representa a fronteira de \mathcal{F} .

Condições necessárias para caracterizar a eficiência de uma solução x^* serão derivadas a seguir através de problemas escalares, os quais estão relacionados ao problema original multicritério.

Teorema 1.8 *Se $x^* \in \Omega$ é uma solução eficiente de (1.32) então existe um $j \in [1, \dots, m]$ e números reais ϵ_i , $i = 1, \dots, m$ ($i \neq j$) tais que $f_j(x^*) \leq f_j(x)$ para todo $x \in \Omega$ tal que*

$$f_i(x) \leq \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m \ (i \neq j) \quad (1.35)$$

Prova: Por contradição suponha que x^* seja eficiente mas não satisfaça as hipóteses do teorema. Então, para todo $j \in [1, \dots, m]$ e todos os números reais ϵ_i , $i = 1, \dots, m$ ($i \neq j$), x^* não minimiza $f_j(\cdot)$ sujeito a (1.35). Em particular, se $j = 1$ e $\epsilon_i = f_i(x^*)$, $i = 2, \dots, m$, então existe um vetor $\hat{x} \in \Omega$ tal que $f_1(\hat{x}) < f_1(x^*)$ e $f_i(\hat{x}) \leq f_i(x^*)$, $i = 2, \dots, m$, o que contradiz, pela definição de solução eficiente, a hipótese de eficiência de x^* . \square

Através do teorema acima é possível então determinar se x^* é uma solução eficiente de (1.32).

Teorema 1.9 *Se x^* é eficiente, então para todo $j \in [1, \dots, m]$, x^* é a solução do seguinte problema*

$$\min_{x \in \Omega} f_j(x) \quad (1.36)$$

$$s.a. \quad f_i(x) \leq f_i(x^*), \quad i = 1, \dots, m \ (i \neq j)$$

A prova deste teorema segue diretamente como conseqüências da prova anterior. Uma outra técnica usada para a caracterização de soluções eficientes e que será de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho é a que faz uso do problema paramétrico

$$\min_{x \in \Omega} \langle w, f(x) \rangle \quad (1.37)$$

Proposição 1.8 *Seja $x(w)$ uma solução ótima de (1.37) para $w \in W$. Então $x(w) \in \Omega$ é uma solução eficiente de (1.32) se*

- a) $w_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$
- b) $x(w)$ é solução única de (1.37)

Sob hipótese de convexidade dos critérios de desempenho, Ω^* pode ser completamente gerado variando-se w sobre W definido como (1.2). Ou seja, se $y^* \in \Gamma$ então existe $w \in W$ tal que $y^* = f(x(w))$ onde $x(w)$ resolve (1.37).

Este resultado pode ser interpretado através do conceito de dualidade visto anteriormente. Se o problema for convexo então Γ admite um hiperplano suporte para qualquer solução eficiente de (1.32), uma vez que, se $x(w^*)$ é solução eficiente de (1.37) então $f(x(w^*)) \in \Gamma \subset \partial\mathcal{F}$. Então resolver (1.32) é equivalente ao problema de encontrar o vetor $w = w^*$ que fornece $x^* = x(w^*)$.

1.8 Conclusão

Neste capítulo foram revistos os conceitos necessários para a caracterização de problemas convexos. Foi enfatizada a importância da existência do ponto de sela e a equivalência dos problemas primal e dual. Discutiu-se ainda a questão da diferenciabilidade da função dual e da solução numérica do problema dual. Finalmente, foram apresentados os aspectos básicos de um problema multicritério convexo, com a caracterização do conjunto de soluções eficientes. Nos próximos capítulos será feita uma extensão da teoria de programação multicritério para sistemas de controle, onde o problema tratado deixa de ser estático para, com a consideração da variável tempo, adquirir um caráter dinâmico. As propriedades relativas à problemas convexos aqui apresentadas serão de grande valia para solução dos problemas que serão levantados, particularmente a que se refere à propriedade fundamental de conjuntos convexos, que terá um papel de destaque no desenvolvimento do algoritmo que é o tema central desta dissertação.

Capítulo 2

Controle Multicritério: Formulação e Metodologias

2.1 Introdução

Com a finalidade de prover esta dissertação do suporte teórico necessário na área de controle multicritério, será feita neste capítulo uma pequena revisão dos tópicos de teoria de controle ótimo mais relacionados ao assunto. Serão apresentadas a formulação do Problema de Controle Ótimo e algumas abordagens conhecidas para caracterizar a sua solução, como a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e as condições de otimalidade estabelecidas pelo Princípio do Mínimo de Pontryagin. Também serão apresentadas a formulação básica do Problema de Controle Multicritério, a aplicação de alguns conceitos vistos no capítulo anterior para a caracterização da sua solução, além de algumas abordagens encontradas na literatura para resolvê-lo.

2.2 Formulação do Problema de Controle Ótimo

A busca de um controle para um sistema dinâmico qualquer é naturalmente seguida do desejo de se avaliar os resultados deste controle sobre o sistema considerado. Esta avaliação é medida a partir de *critérios de desempenho* que podem ter como objetivo, por exemplo, encontrar um controle que leve o sistema ao estado desejado no menor tempo possível ou com um mínimo de energia dispendida. A formulação geral de um problema de controle ótimo consiste então em encontrar a lei de controle para um sistema dinâmico que minimize um critério de desempenho pré-estabelecido.

Seja o sistema cuja dinâmica é regida pela equação

$$\dot{x} = \phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

onde $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$ é o estado do sistema, e \mathcal{X} é um conjunto aberto e $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$ é uma função contínua por partes que representa o controle, sendo U uma esfera q -dimensional de raio fixo. Então o problema de controle ótimo para o sistema dinâmico acima é formulado como

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u(\cdot)) &= \left\{ \int_0^T f(x(t), u(t)) dt + g(x(T)) \right\} \\ \text{s.a.} \quad \dot{x} &= \phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $J(\cdot)$ representa o critério de desempenho que avaliará o controle sobre o conjunto de todos os controles admissíveis $\mathcal{U} \subset U$, definidos no intervalo de tempo $[0, T]$. Supõe-se que as funções $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ que compõem $J(\cdot)$ são continuamente diferenciáveis com respeito a seus argumentos. Note que $f(\cdot)$ considera o estado e o controle durante todo o intervalo de tempo, enquanto que $g(\cdot)$ leva em conta apenas o valor do estado final na solução do problema.

2.3 Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Dentre as diversas formas de se resolver o problema de controle ótimo apresentado na seção anterior se encontra a abordagem através da *Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman*. Através do *Princípio da Otimalidade de Bellman* sabe-se que, se $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [0, T]$ resolve (2.2) então $u(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [t^*, T]$ é solução de

$$\begin{aligned} V(x^*, t^*) &= \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{ \int_{t^*}^T f(x(t), u(t)) dt + g(x(T)) \right\} \\ \text{s.a.} \quad \dot{x} &= \phi(x(t), u(t)), \quad x(t^*) = x^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $V(\cdot)$ é a *Função Valor Ótimo* associada ao problema. Se os valores de $V(x(T), T)$ forem conhecidos para todos os valores de $x(T)$ possíveis e supondo um instante de tempo ΔT suficientemente pequeno então

$$\begin{aligned} V(x(T-\Delta), T-\Delta) &= \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{ \int_{T-\Delta}^T f(x(t), u(t)) dt + V(x(T), T) \right\} \\ &= \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \{ f(x(T-\Delta), u(T-\Delta)) \Delta T + V(x(T), T) \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde, por simplicidade foi introduzida a notação $T - \Delta T = T_{-\Delta}$ e $T + \Delta T = T_{+\Delta}$.

Como por hipótese $V(x(T), T)$ é conhecido, a solução do problema consiste em encontrar o controle que transfere o sistema do estado $x(T_{-\Delta})$ para $x(T)$. Mas

através de (2.1) tem-se que

$$\begin{aligned} x(T) &= x(T_{-\Delta}) + \int_{T_{-\Delta}}^T \phi(x(t), u(t)) dt \\ &\simeq x(T_{-\Delta}) + \phi(x(T_{-\Delta}), u(T_{-\Delta})) \Delta T \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para um t genérico pode-se então reescrever (2.4) como

$$V(x(t), t) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \{f(x(t), u(t)) \Delta T + V(x(T_{+\Delta}), T_{+\Delta})\} \quad (2.6)$$

onde $x(T_{+\Delta}) = x(t) + \phi(x(t), u(t)) \Delta T$

Expandindo em série de Taylor obtém-se então

$$\begin{aligned} V(x(T_{+\Delta}), T_{+\Delta}) &= V(x(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x} \phi(x(t), u(t)) \Delta T + \\ &+ \frac{\partial V}{\partial t} \Delta T + o(\Delta T^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.4), dividindo-se tudo por ΔT , reagrupando-se os termos e tomando o limite quando $\Delta T \rightarrow 0$ encontra-se a *Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman* que fornece $V(x(t), t)$.

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \left\{ f(x(t), u(t)) + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} \phi(x(t), u(t)) \right\} = 0 \quad (2.8)$$

Após encontrada, a função $V(\cdot)$ caracteriza a solução do problema (2.2). Em geral (2.8) não admite uma solução analítica. Uma exceção importante, cuja solução é bastante conhecida e explorada na teoria de controle ótimo, é a do problema linear quadrático (PLQ), onde o critério de desempenho para (2.2) é do tipo

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (x'(t) Q x(t) + u(t)' R u(t)) dt + \frac{1}{2} x(T)' F x(T), \quad (2.9)$$

sendo que $Q = Q' \geq 0$, $F = F' \geq 0$ e $R = R' > 0$. Neste caso tem-se como função valor

$$V(x(t), t) = \frac{1}{2} x(t)' P(t) x(t), \quad P(t) = P(t)' > 0, \quad t \in [0, T] \quad (2.10)$$

sendo que $P(\cdot)$ é solução da *equação matricial de Riccati*

$$\dot{P}(t) + P(t)A + A'P(t) - P(t)SP(t) + Q = 0, \quad P(T) = F, \quad (2.11)$$

$$S = BR^{-1}B' \quad (2.12)$$

O controle ótimo, solução de (2.8), tem como expressão

$$u^*(t) = -R^{-1}B'P(t)x(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.13)$$

Note que a solução para o controle é do tipo $u(t) = -K(t)x(t)$, caracterizando uma realimentação de estados. Para a trajetória ótima tem-se

$$\dot{x} = (A - SP(t))x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.14)$$

e o valor do critério de desempenho

$$J(u^*(\cdot)) = \frac{1}{2}x_0'P(0)x_0 \quad (2.15)$$

2.4 Princípio do Mínimo de Pontryagin

A solução de problemas de controle ótimo pode ser caracterizada através das condições de otimalidade estabelecidas pelo *Princípio do Mínimo de Pontryagin*. Nesta seção serão apresentadas as condições para sistemas de controle com tempo e estado final livres. Este é um resultado de grande importância para a teoria de controle e sua demonstração pode ser encontrada por exemplo em Athans e Falb (1966).

Considere o problema de controle ótimo

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T f(x(t), u(t)) dt + g(x(T)) \\ \text{s.a.} \quad \dot{x} = \phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Suponha que não existe restrição quanto ao estado final do sistema (estado final livre) e que o sistema trabalha com horizonte de tempo livre.

As condições de otimalidade a serem apresentadas foram desenvolvidas a partir de um *sistema canônico* associado ao problema original (2.16), formulado através da função *Hamiltoniano*, definida como

$$H(x(t), p(t), u(t)) = f(x(t), u(t)) + p(t)' \phi(x(t), u(t)) \quad (2.17)$$

onde o vetor $p(\cdot)$ é denominado de *vetor de co-estados* do sistema. Note que a derivada em relação a $p(\cdot)$

$$\frac{\partial H}{\partial p(t)} = \phi(x(t), u(t)), \quad (2.18)$$

e que, devido às hipóteses anteriores, $H(\cdot)$ possui derivada parcial contínua em relação a $x(\cdot)$.

Definição 2.1 *Seja a função Hamiltoniano definida em (2.17). Chama-se então de Sistema Canônico ou Sistema Hamiltoniano associado ao problema de controle ótimo (2.16) ao sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \phi(x(t), u(t)) \\ -\dot{p} &= \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi(x(t), u(t))}{\partial x} \right)' p(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

A partir da definição do sistema canônico é possível estabelecer condições necessárias de otimalidade para um controle $u^*(\cdot)$ relacionado ao par $(x^*(\cdot), p^*(\cdot))$, solução do sistema canônico (2.19).

Teorema 2.1 (Princípio do Mínimo de Pontryagin) *Seja $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ o controle que transfere o sistema considerado do estado $x(0)$ para o estado $x(T)$, cuja trajetória correspondente é dada por $x^*(t)$, $t \in [0, T]$. Se $u^*(\cdot)$ é o controle ótimo do sistema em termos do problema (2.16) então existe uma função $p^*(\cdot)$ tal que:*

i - $p^*(\cdot)$ e $x^*(\cdot)$ são soluções do sistema canônico

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\dot{p}^* &= \frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.20)$$

satisfazendo às condições de contorno

$$x^*(0) = x_0, \quad p^*(t) = \frac{d}{dx(T)} g(x^*(T)) \quad (2.21)$$

ii - $u^*(t)$ minimiza $H(x^*(t), p^*(t), u(t))$ sobre \mathcal{U} para $t \in [0, T]$, ou seja

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} H(x^*(t), p^*(t), u(t)) = H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) \quad (2.22)$$

iii - $H(x^*(t), p^*(t), u^*(t))$ deve satisfazer à relação

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t)) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.23)$$

Vale a pena ressaltar que se forem mudadas as hipóteses iniciais sobre o problema (2.16), as condições dadas pelo princípio do mínimo sofrem alterações.

2.5 Formulação do Problema de Controle Multicritério

Em sistemas reais de controle é comum que exista mais de um aspecto que mereça uma avaliação quanto aos resultados da lei de controle aplicada. Este *mais de um aspecto* é traduzido na existência de mais de um critério de desempenho e neste caso a teoria de controle ótimo apresentada nas seções anteriores não encontra aplicação, por tratar o problema com apenas um critério. É a busca da solução de problemas de controle ótimo com mais de um critério de desempenho que será abordada nesta seção. Será verificado que na formulação do Problema de Controle Multicritério, os conceitos vistos na Seção 1.7, que trata do problema multicritério estático, são válidos, bastando que sejam guardadas as peculiaridades quanto à formulação de um problema dinâmico.

Seja $J(u(\cdot)) = (J_1(u(\cdot)), \dots, J_m(u(\cdot)))$ um vetor de m critérios de desempenho, onde cada critério é função do controle $u(\cdot)$, pertencente ao conjunto \mathcal{U} de todos os controles admissíveis para o sistema, definidos no intervalo de tempo $[0, T]$. Seja também o sistema dinâmico regido pela equação diferencial

$$\dot{x} = \phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.24)$$

O problema de controle multicritério consiste em procurar minimizar todos os critérios simultaneamente, ou seja

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u(\cdot)) \\ \text{s.a. } \dot{x} = \phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como foi visto anteriormente (Seção 1.7), geralmente os objetivos (critérios de desempenho) são conflitantes, não existindo uma solução *ótima* para (2.25) no sentido empregado em otimização escalar. Para o problema de controle multicritério, a solução será caracterizada sob o conceito de *controle eficiente*.

Definição 2.2 Diz-se que um controle $u^*(t), t \in [0, T]$ é eficiente se não existe nenhum outro controle $u(t), t \in [0, T]$ factível tal que $J(u(\cdot)) \leq J(u^*(\cdot))$ e $J(u(\cdot)) \neq J(u^*(\cdot))$.

O conjunto de controles eficientes será denotado por \mathcal{U}^* . De forma similar ao

que foi visto para problemas estáticos (1.37), o problema paramétrico

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} & \langle w, J(u(\cdot)) \rangle . \\ \text{s.a. } & \dot{x} = \phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

tem uma grande importância para o problema de controle multicritério, pois também neste caso, se os critérios de desempenho forem convexos, todo o conjunto de controles eficientes \mathcal{U}^* pode ser completamente gerado variando-se w sobre W definido em (1.2).

Como (2.25) possui um número infinito de soluções eficientes é necessário então que haja interação com um *Decisor* para que este decida qual dentre os controles eficientes será a solução do problema.

Supondo que as preferências do *Decisor* sobre os critérios podem ser representadas através de uma *Função Valor* (ou *Função Utilidade*) $\mathcal{V}(\cdot) : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$, pode-se então formular o seguinte problema, equivalente a (2.25)

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} & \mathcal{V}(J(u(\cdot))) \\ \text{s.a. } & \dot{x} = \phi(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Note mais uma vez que a função $\mathcal{V}(\cdot)$ não precisa ser explicitamente conhecida. Em geral, apenas propriedades globais como diferenciabilidade, convexidade e crescimento com cada critério são suficientes para viabilizar o emprego deste tipo de formulação. Em seguida, discutem-se resumidamente algumas estratégias propostas para resolver o problema de Controle Multicritério.

2.6 Abordagem de Salukvadze

Uma abordagem para solucionar o problema de controle multicritério através de técnicas clássicas de controle ótimo foi proposta por Salukvadze (1982). Visto que normalmente não é possível encontrar uma solução factível que minimize todos os critérios de desempenho simultaneamente, o autor, nesta abordagem, formula um problema em que a distância entre as soluções factíveis do problema e o vetor formado pelos valores mínimos individuais de cada critério (solução *utópica* ou *ideal*) é tomada como referência, para que seja definido um critério geral a ser minimizado. Em Salukvadze (1982), o problema foi formulado com base no modelo diferencial¹

$$\dot{x} = \phi(x, u) \quad ; \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (2.28)$$

¹Por simplicidade, nesta Seção a dependência temporal das variáveis será omitida sempre que possível.

onde $\phi(\cdot)$ descreve a dinâmica possivelmente não linear do sistema. O desempenho do sistema com relação ao controle aplicado é avaliado em termos de um vetor composto por m critérios $J(\cdot)$, sendo que cada componente de $J(\cdot)$ é por sua vez definida como

$$J_i(u) = \int_0^T f_i(x, u) dt, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.29)$$

onde T não está previamente definido.

Seja

$$u^i = \arg \min_u \{J_i(u) \text{ s.a. } \dot{x} = \phi(x, u), x(0) = x_0; x(T) = x_T\} \quad (2.30)$$

a solução ideal para o i -ésimo critério de desempenho, x^i a trajetória de estado correspondente e defina, para $i = 1, \dots, m$,

$$\begin{aligned} \Delta J_i(u) &= J_i(u) - J_i(u^i) \\ y_i(t) &= \int_0^t [f_i(x, u) - f_i(x^i, u^i)] dt - \Delta J_i(u) \end{aligned} \quad (2.31)$$

O problema de controle multicritério pode então ser visto como equivalente a determinar u^* para o sistema aumentado².

$$\dot{x} = \phi(x, u) \quad ; \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \quad (2.32)$$

$$\dot{y} = f(x, u) - f(x^i, u^i) \quad , \quad y(T) = 0,$$

de forma a minimizar o critério global (*Problema de Letov*, (Salukvadze, 1982))

$$J_0(u) = \int_0^T L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) dt, \quad (2.33)$$

onde $y^{(r)} \triangleq \frac{d^r}{dt^r} y$ e $L(\cdot)$ é uma função positiva e continuamente diferenciável em relação a $y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}$. Através da variável auxiliar

$$z(t) = \int_0^t L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) dt, \quad (2.34)$$

o mesmo problema pode ser colocado na forma de *Mayer* (Salukvadze, 1982):

$$\begin{aligned} \min_u G(t) &= z(T) \\ \text{s.a. } \dot{x} &= \phi(x, u), & x(0) &= x_0: \quad x(T) = x_T \\ \dot{y} &= f(x, u) - f(x^i, u^i), & y(T) &= 0 \\ \dot{z} &= L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}), & z(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

² $f(x^i, u^i)' = [f_1(x^1, u^1), f_2(x^2, u^2), \dots, f_m(x^m, u^m)]$.

A função Hamiltoniana $H(\cdot)$ associada ao problema é

$$H(x, y, z, u, \lambda, \beta, \gamma) = \lambda' \phi(x, u) + \beta' [f(x, u) - f(x^i, u^i)] + \gamma' L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}), \quad (2.36)$$

onde λ , β e γ são vetores de dimensões apropriadas que representam as variáveis de co-estado associadas às equações dinâmicas. Busca-se então determinar $\Psi(\cdot)$ solução da equação de Hamilton-Jacobi-Belman

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \min_u \left\{ \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \phi(x, u) + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} [f(x, u) - f(x^i, u^i)] + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Psi'}{\partial z} L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\Psi(x, y, z, t)|_{t=T} = G(t)|_{t=T} = z(T)$$

que se obtida permite escrever a lei de controle ótima u^* como realimentação dos estados x , y e z . No caso do problema de Mayer, $\Psi(\cdot)$ deve ainda satisfazer

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi(x, y, z, t) \right|_{u=u^*} = 0 \quad (2.38)$$

e portanto $\Psi(\cdot)$ deve ser tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Psi(x, y, z, t) + \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \phi(x, u^*) + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} [f(x, u^*) - f(x^i, u^i)] + \\ + \frac{\partial \Psi'}{\partial z} L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por outro lado sabe-se que, como o controle é irrestrito, através de (2.37)

$$\left. \frac{\partial \Psi'}{\partial x} \Phi(x, u^*) + \frac{\partial \Psi'}{\partial y} F(x, u^*) + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial u} L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \right|_{u=u^*} = 0. \quad (2.40)$$

onde Φ e F são matrizes Jacobianas associadas a $\phi(\cdot)$ e $f(\cdot)$ calculadas em $u = u^*$:

$$\Phi(x, u^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \phi_1(x, u^*)' \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u} \phi_n(x, u^*)' \end{bmatrix}; \quad F(x, u^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f_1(x, u^*)' \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u} f_m(x, u^*)' \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

A partir das equações de estado e de co-estado e suas respectivas condições de contorno é possível mostrar, através da equivalência entre (2.37)-(2.40) e o Princípio do mínimo de Pontryagin para o problema, que a função $\Psi(\cdot)$ possui ainda as seguintes propriedades.

Lema 2.1 *Seja (u^*, x^*) uma solução ótima definida por (2.37)-(2.40). Então a função $\Psi(\cdot)$ deve satisfazer às condições*

$$i) \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{t=T} = 0$$

$$ii) \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{t=T} = 0$$

$$iii) \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{t=T} = 1$$

Prova: (Salukvadze, 1982)

Baseado nas propriedades evidenciadas no Lema 2.1, o autor propõe a seguinte forma para $\Psi(\cdot)$:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi_1(x, t) + \sum_{i=1}^m \Psi_{i+1}(t)y_i(t) + z(t) \quad (2.42)$$

onde $\Psi_j(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, m+1$ são funções continuamente diferenciáveis em relação a seus argumentos, cujas formas finais dependem de $\phi(\cdot)$, $f(\cdot)$ e $L(\cdot)$. Levando-se em conta as condições impostas sobre o problema (2.38), vem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi &= \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(x, t) + \frac{\partial \Psi_1'}{\partial x} \phi(x, u^*) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{d}{dt} \Psi_{i+1}(t)y_i + \Psi_{i+1}(t)[f_i(x, u^*) - f_i(x^i, u^i)] \right\} + L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Como

$$\Psi(x, y, z, t)|_{t=T} = \Psi_1(x(T), T) + \sum_{i=1}^m \Psi_{i+1}(T)y_i(T) + z(T) \quad (2.44)$$

e $y_i(T) = 0$, $i = 1, \dots, m$, conclui-se então que

$$\Psi_1(x, t)|_{t=T} = 0. \quad (2.45)$$

Note que $\Psi(\cdot)$ definida como em (2.42) garante a condição *iii)* do Lema 2.1, e que as condições *i)* e *ii)* levam a

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(x, t) \right|_{t=T} = 0 \quad (2.46)$$

$$\Psi_{i+1}(t)|_{t=T} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

O controle ótimo u^* é obtido a partir de (2.40) com $\Psi(\cdot)$ definida por (2.42):

$$\frac{\partial \Psi_1'}{\partial x} \Phi(x, u^*) + \sum_{i=1}^m \Psi_{i+1}(t) \frac{\partial}{\partial u} f_i(x, u^*) y_i + \frac{\partial}{\partial u} L(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)}) \Big|_{u=u^*} = 0 \quad (2.47)$$

Como exemplo de aplicação desta metodologia, considere as seguintes condições particulares:

$$T = \infty$$

$$\phi(x, u) = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

$$f_i(x, u) = \frac{1}{2} \{x' Q_i x + u' R_i u\}, \quad Q_i = Q_i' \geq 0; \quad R_i = R_i' > 0$$

$$L = L(\dot{y}) = \langle w, f(x, u) - f(x^i, u^i) \rangle, \quad w \in W$$

diferenciando (2.43) em relação a y e lembrando que $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, vem

$$\frac{d}{dt} \Psi_{i+1}(t) = 0 \rightarrow \Psi_{i+1}(t) = cte, \quad i = 1, \dots, m$$

mas como $\Psi_{i+1}(T) = 0$, $i = 1, \dots, m$, obtém-se

$$\Psi_{i+1}(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

A condição (2.47) reduz-se então a

$$\frac{\partial \Psi_1'}{\partial x} \Phi(x, u^*) + \frac{\partial}{\partial u} L(\dot{y}) \Big|_{u=u^*} = 0 \quad (2.48)$$

onde $\Psi_1(\cdot)$ pode ser escolhida na forma

$$\Psi_1(x, t) = \frac{1}{2} x' P x$$

levando a

$$(Px)' B + \frac{\partial}{\partial u} \langle w, f(x, u) - f(x^i, u^i) \rangle \Big|_{u=u^*} = 0$$

$$B' P x + \left(\sum_{i=1}^m w_i R_i \right) u^* = 0$$

e finalmente

$$u^* = -R^{-1} B' P x = -K x \quad (2.49)$$

onde $R = \sum_{i=1}^m w_i R_i$ e P é a solução da equação (2.43). O autor discute ainda formas específicas para $\Psi_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, m+1$ no caso de situações mais gerais do que as ilustradas com este pequeno exemplo.

2.7 Abordagem de Medanić e Andjelić

Medanić e Andjelić (1971) aplicam Teoria de Jogos para obter a solução min-max para um problema de controle multicritério dinâmico linear do tipo

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.50)$$

onde A e B são matrizes de dimensões apropriadas que representam os parâmetros do sistema.

No trabalho desenvolvido pelos autores, o problema é tratado como um jogo, onde um dos jogadores define a estratégia de controle enquanto que o outro jogador define o objetivo do jogo. Os autores então adotam a seguinte formulação para o problema.

$$\min_{u(\cdot)} \max_{i \in I} J_i(u(\cdot)) \quad (2.51)$$

$$s.a. \quad \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

sendo $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

Apesar dos autores utilizarem critérios de desempenho do tipo quadrático

$$J_i(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)' Q_i x(t) + u(t)' R_i u(t)) dt + \frac{1}{2} x(T)' F_i x(T), \quad (2.52)$$

onde

$$F_i = F_i' \geq 0, \quad Q_i = Q_i' \geq 0 \quad \epsilon \quad R_i = R_i' > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.53)$$

o problema (2.51) não possui, em geral, um ponto de sela, pois como o número de critérios de desempenho é finito o conjunto I normalmente não é convexo. Os autores mostram, através dos Teoremas 2.2 e 2.3, que a solução de

$$\min_{u(\cdot)} \max_{w \in W} \sum_{i=1}^m w_i J_i(u(\cdot)) \quad (2.54)$$

$$s.a. \quad \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

sendo W definido como em (1.2), também resolve (2.51) e que o problema (2.54) possui um ponto de sela.

Teorema 2.2 *Seja a função de maximização modificada $F^m(u(\cdot), x_0)$, definida como*

$$F^m(u(\cdot), x_0) \triangleq \max_{w \in W} \sum_{i=1}^m w_i J_i(u(\cdot)) \quad (2.55)$$

e seja a função de maximização $F(\cdot)$, definida como

$$F(u(\cdot), x_0) \triangleq \max_{i \in I} J_i(u(\cdot)). \quad (2.56)$$

Então, para x_0 e $u(t)$ limitados, $t \in [0, T]$, tem-se que

$$F^m(u(\cdot), x_0) = F(u(\cdot), x_0) \quad (2.57)$$

Prova: Seja $u(\cdot)$ um controle limitado qualquer e seja x_0 qualquer condição inicial limitada. O controle e a condição inicial definem completamente a trajetória do sistema e conseqüentemente, os valores dos critérios de desempenho $J_i(u(\cdot))$, para qualquer i . Seja $w^* \in W$ o vetor ponderação que maximiza (2.55) para $u(\cdot)$ e x_0 dados. Seja ainda w^0 tal que

$$\sum_{i=1}^m w_i^0 J_i(u(\cdot)) = \max_{i \in I} J_i(u(\cdot)) \triangleq F(u(\cdot), x_0). \quad (2.58)$$

Agora, através da otimalidade de w^* , tem-se que

$$F^m(u(\cdot), x_0) \triangleq \sum_{i=1}^m w_i^* J_i(u(\cdot)) \geq \sum_{i=1}^m w_i^0 J_i(u(\cdot)) \triangleq F(u(\cdot), x_0). \quad (2.59)$$

Por outro lado, como $F(u(\cdot), x_0) \geq J_i(u(\cdot))$, para todo $i = 1, \dots, m$, tem-se

$$\sum_{i=1}^m w_i^* J_i(u(\cdot)) \leq \sum_{i=1}^m w_i^* F(u(\cdot), x_0), \quad (2.60)$$

logo

$$F^m(u(\cdot), x_0) \triangleq \sum_{i=1}^m w_i^* J_i(u(\cdot)) = F(u(\cdot), x_0), \quad (2.61)$$

completando a prova. \square

Teorema 2.3 O critério de desempenho modificado $J^m(u(\cdot)) \triangleq \sum_{i=1}^m w_i J_i(u(\cdot))$ possui um ponto de sela, i.e., existe um par $(u^*(\cdot), w^*)$ que satisfaz

$$\min_{u(\cdot)} \max_{w \in W} J^m(u(\cdot)) = \max_{w \in W} \min_{u(\cdot)} J^m(u(\cdot)). \quad (2.62)$$

Prova: Note que não existem restrições para o controle $u(\cdot)$ e logo, o seu domínio é convexo. Como W é definido pela interseção entre dois conjuntos convexos (1.2), W também é convexo. Mais ainda, como pelo menos um elemento de w_i é estritamente positivo, as matrizes Q_i e F_i permanecem, ao menos, semi-definidas positivas, enquanto R_i permanece definida positiva. Conseqüentemente, o critério modificado é

convexo em $u(\cdot)$. Como o critério modificado é côncavo (linear) sobre W , conclui-se que o critério modificado possui um ponto de sela. \square

Garantida a existência do ponto de sela, é possível permutar os operadores min-max

$$\min_{u(\cdot)} \max_{w \in W} \sum_{i=1}^m w_i J_i(u(\cdot)) = \max_{w \in W} G(w) \quad (2.63)$$

onde

$$G(w) = \min_{u(\cdot)} J^m(u(\cdot), w) \quad (2.64)$$

e

$$J^m(u(\cdot), w) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t)) dt + \frac{1}{2} x(T)' F x(T), \quad (2.65)$$

sendo

$$Q = \sum_{i=1}^m w_i Q_i; \quad F = \sum_{i=1}^m w_i F_i; \quad R = \sum_{i=1}^m w_i R_i; \quad (2.66)$$

Perceba que (2.65) é totalmente equivalente ao problema do regulador ótimo com funcionais quadráticos, possuindo uma solução conhecida para o valor de $G(w)$ (ver Seção 2.3)

$$G(w) = \frac{1}{2} x_0' P(w, 0) x_0 \quad (2.67)$$

2.8 Diferenciabilidade de $G(\cdot)$

Na seção anterior foi apresentada a solução para a etapa de minimização do problema (2.54). Para desenvolver a maximização de $G(w)$ sobre W , será necessário primeiro encontrar, caso exista, o valor de cada derivada parcial de $G(w)$ em relação às componentes do vetor w .

A partir de (2.67) sabe-se que

$$\frac{\partial G(w)}{\partial w_i} = \frac{1}{2} x_0' \left(\frac{\partial P(w, 0)}{\partial w_i} \right) x_0 \quad (2.68)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(w, 0)}{\partial w_i} &= \frac{\partial \dot{P}}{\partial w_i} + \frac{\partial P}{\partial w_i} A + A' \frac{\partial P}{\partial w_i} - \frac{\partial P}{\partial w_i} S P - \\ &- S \frac{\partial P}{\partial w_i} + P B \frac{\partial R^{-1}}{\partial w_i} B' P + Q_i = 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial P(T)}{\partial w_i} = F_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Colocando-se os termos relativos a $\frac{\partial P}{\partial w_i}$, à direita e à esquerda em evidência, e sabendo-se que

$$\frac{\partial R^{-1}}{\partial w_i} = -R^{-1} \frac{\partial R}{\partial w_i} R^{-1} \quad (2.70)$$

encontra-se a seguinte expressão para a derivada de P em relação a w

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(w, 0)}{\partial w_i} &= \frac{\partial \dot{P}}{\partial w_i} + \frac{\partial P}{\partial w_i} (A - SP) + \\ &+ (A - SP)' \frac{\partial P}{\partial w_i} + PBR^{-1}R_iR^{-1}B'P + Q_i = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial P(T)}{\partial w_i} = F_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Pré-multiplicando (2.71) por x' e pós-multiplicando por x , e integrando de 0 a T obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^T [x' \left(\frac{\partial \dot{P}}{\partial w_i} \right) x + x' \left(\frac{\partial P}{\partial w_i} (A - SP) \right) x + \\ + x' \left((A - SP)' \frac{\partial P}{\partial w_i} \right) x + x' (PBR^{-1}R_iR^{-1}B'P + Q_i) x] dt = 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Substituindo (2.14) e (2.13) em (2.72) tem-se que

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} \right) [x' \left(\frac{\partial P}{\partial w_i} \right) x] dt + \int_0^T (x' Q_i x + u' R_i u) dt = 0. \quad (2.73)$$

Usando as condições de contorno de (2.71), e a equação (2.67)

$$\frac{\partial G}{\partial w_i} = \frac{1}{2} x_0' \left[\frac{\partial P(w, 0)}{\partial w_i} \right] x_0 = \frac{1}{2} \int_0^T (x' Q_i x + u' R_i u) dt + \frac{1}{2} x_T' F_i x_T \quad (2.74)$$

encontra-se finalmente que

$$\partial G(w) / \partial w_i = J_i(u(\cdot)), \quad i = 1, \dots, m \quad (2.75)$$

onde $u(\cdot)$ é a solução do problema para $w \in W$.

Ou seja, a derivada parcial de $G(w)$ em relação a cada componente i do vetor w é igual ao valor de cada critério i . Este resultado será demonstrado no próximo capítulo explorando-se as propriedades de problemas convexos. Note que (2.75)

define o gradiente ∇G da função a ser maximizada (1.8), tornando possível o desenvolvimento de algoritmos baseados no método do gradiente, para resolver o problema proposto. No Capítulo 4 será detalhada a implementação do algoritmo feita Medanić e Andjelić e discutidos alguns exemplos.

2.9 Abordagem de Duan Li

Outra estratégia que aborda a solução de um problema de controle ótimo multicritério é apresentada por Duan Li (Li, 1990a). O autor mostra que a solução do problema min-max é uma questão de equalização dos critérios de desempenho. Para chegar a este resultado o autor também usa o problema paramétrico (2.26), só que agora, através da Proposição 2.1, introduz uma expressão analítica para o valor de cada componente $J_i(u(\cdot))$.

Proposição 2.1 *Cada solução eficiente, a partir de um dado valor de $w \in W$, tem a seguinte forma no espaço dos objetivos*

$$J_i(u(\cdot)) = G_i(w, 0) = \frac{1}{2}x_0'P_i(w, 0)x_0 \quad (2.76)$$

onde $P_i(w, 0)$ é solução da equação diferencial matricial

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial t} + P_i A + A' P_i - P S P_i - P_i S P + P B R^{-1} R_i R^{-1} B' P + Q_i &= 0, \\ P_i(w, T) &= F_i \end{aligned} \quad (2.77)$$

R é definida por (2.66), $P = \sum_{i=1}^m w_i P_i$ e $S = B R^{-1} B'$

Prova: Já foi comentado na seção anterior que (2.13) e (2.14) nos dão a solução do problema ponderado (2.26), sendo pois necessário resolver a equação matricial de Riccati (2.11). Defina

$$G_i(w, t) = \frac{1}{2}x(t)'P_i(w, t)x(t) = \frac{1}{2}x(T)'F_i x(T) + \frac{1}{2}\int_t^T (x'Q_i x + u'R_i u)dt \quad (2.78)$$

e então $J_i(u(\cdot)) = G_i(w, 0)$ e $P_i(w, T) = F_i$. Diferenciando-se (2.78) em relação a t e a partir de (2.14), de (2.13) e da equação dinâmica do sistema, tem-se que, para $x(t)$ arbitrário,

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + A' P_i + P_i A - P S P_i - P_i S P + P B R^{-1} R_i R^{-1} B' P + Q_i = 0, \quad (2.79)$$

onde $P = \sum_{i=1}^m w_i P_i$ e $R = \sum_{i=1}^m w_i R_i$

Multiplicando (2.79) por w_i e somando as expressões resultantes em $i = 1, \dots, m$ obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{P} + PA + A'P - PBR^{-1}B'P + Q &= 0, \\ Q &= \sum_{i=1}^m w_i Q_i \end{aligned} \quad (2.80)$$

Note que a solução de (2.80) com a condição de contorno $P(w, T) = \sum_{i=1}^m w_i F_i$ resolve o problema do regulador para Q e R dadas. A validade da Proposição segue do fato de que P assim definida resolve então (2.77) para $i = 1, \dots, m$ e condição de contorno $P_i(w, 0) = F_i$.

O autor mostra que, dada uma solução ótima para o problema min-max, todos os $G_{i_s}^*$ associados a $w_{i_s}^*$ estritamente maiores que zero possuem o mesmo valor. Como a função

$$\sum_{i=1}^m w_i G_i(w, 0) \quad (2.81)$$

é estritamente convexa pelas características de (2.52), a solução é única e as condições necessárias de otimalidade são também condições suficientes.

2.10 Conclusão

Nesta seção tratou-se da teoria básica de controle ótimo, que será de grande utilidade para o desenvolvimeto dos algoritmos apresentados nesta dissertação. Introduziu-se a formulação de um problema de controle ótimo e a caracterização da sua solução através da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman e do Princípio do Mínimo de Pontryagin de onde derivam condições para a solução do problema. Foi formulado também o problema de controle multicritério, sendo destacado o fato de que a determinação da solução segue os conceitos discutidos na Seção 1.7, bastando que atente-se para as particularidades dos sistemas dinâmicos. Foram apresentadas também três abordagens para problemas de controle multicritérios; a de Salukvadze, que desenvolve o problema de forma a gerar condições que caracterizam a solução para um problema de controle multicritério generalizado, a abordagem de Medanić e Andjelić que aplica teoria de jogos para resolver um problema de controle multicritério do tipo linear quadrático, e a de Duan Li, que desenvolve um algoritmo baseado na equalização dos critérios para resolver o problema. As duas últimas serão retomadas posteriormente no capítulo que tratará da implementação dos métodos discutidos nesta dissertação.

Capítulo 3

Controle Multicritério: Solução via Programação Convexa

3.1 Introdução

O objetivo das seções anteriores foi fornecer todo o embasamento teórico, reunindo os resultados que servirão para o desenvolvimento, neste capítulo, do procedimento que é a principal razão desta dissertação. Serão feitas algumas considerações a mais, como a caracterização do domínio do problema no espaço dos critérios, para então aplicar técnicas de relaxação e projeção visando a obtenção de um *Algoritmo Básico*, uma estrutura multinível equivalente ao problema original. Também será feita a análise de convergência do procedimento e discutida a sua implementação em malha fechada, de forma que sejam feitas correções de desvios na trajetória. Relações entre a abordagem proposta neste capítulo e a técnica de Medanić and Andjelić (1971,1972) serão investigadas. Finalmente, a aplicação da nova abordagem à problemas lineares quadráticos, aproveitando-se propriedades inerentes a este tipo de problema, ilustrará os principais aspectos teóricos e numéricos do procedimento.

3.2 Formulação do Problema no Espaço dos Critérios

Na Seção 2.5 foi apresentada a formulação de um problema de controle multicritério no espaço das variáveis de decisão. Na Seção 1.7 discutiu-se a formulação de um problema multicritério estático no espaço dos critérios. Neste capítulo, considera-se a formulação do problema de controle multicritério (2.25) no espaço dos

critérios

$$\min_{y \in \mathcal{F}} \mathcal{V}(y) \quad (3.1)$$

onde

$$\mathcal{F} \triangleq \{y \in \mathcal{R}^m : y = J(u(\cdot)), \text{ para algum } u(t) \in \mathcal{U}, t \in [0, T]\} \quad (3.2)$$

Perceba que apesar do problema original ser dinâmico, a formulação no espaço dos critérios permanece estática, aliás é a mesma vista na Seção 1.7, com a diferença óbvia de que agora \mathcal{F} representa o mapeamento das estratégias de controle no espaço dos critérios. O conjunto das soluções eficientes no espaço dos critérios continuará sendo denotado por Γ . É claro que, como já foi visto para problemas estáticos, $\Gamma \subset \partial\mathcal{F}$, onde $\partial\mathcal{F}$ representa a fronteira de \mathcal{F} .

Apesar do problema (3.1) possuir certas vantagens metodológicas que serão discutidas e exploradas nas próximas seções, o mapeamento completo de \mathcal{F} sobre o espaço dos critérios é apenas uma abstração. Mais ainda, o mapeamento de \mathcal{F} não preserva, em geral, a convexidade do problema, isto é, o problema (3.1) pode ser não-convexo mesmo que o problema original (2.25) seja convexo. Seguindo a mesma metodologia introduzida por Ferreira e Geromel (1990) busca-se nesta dissertação obter uma representação adequada e **convexa** para \mathcal{F} através de manipulações matemáticas básicas. A estratégia é aplicar técnicas de relaxação e projeção, para iterativamente fazerem-se aproximações sucessivas de Γ através de hiperplanos suportes. Este desenvolvimento é motivado pela seguinte definição .

Definição 3.1 Diz-se que um vetor $y \in \mathcal{R}^m$ de trade off's implícitos é satisfatório se existe $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, tal que $J(u(\cdot)) \leq y$.

Conforme será demonstrado na próxima seção, a definição de solução satisfatória é fundamental para o estabelecimento de uma abordagem baseada no espaço dos critérios.

3.3 Representação da Região Viável através de Semi-Espaços Suportes

Ao invés de se trabalhar com todo o \mathcal{R}^m como o domínio para os trade-off's implícitos, alguns subconjuntos $\mathcal{Y} \subset \mathcal{R}^m$ podem ser considerados, por exemplo, $\mathcal{Y} = \{y : y \geq \underline{y}\}$, onde \underline{y} denota a solução *utópica* ou *ideal*, composta pelos valores mínimos

$$\underline{y}_i = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J_i(u(\cdot)) \quad i = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

onde $J_i(u(\cdot))$, $i = 1, \dots, m$ representam os m critérios de desempenho do problema. É fácil perceber que, qualquer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{Y}$. O vetor \underline{y} é conhecido como solução utópica porque, como geralmente os critérios são conflitantes, \underline{y} não é factível.

A projeção da restrição $J(u(\cdot)) \leq y$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ sobre o espaço de trade-off's implícitos é representada pelo conjunto convexo

$$\mathcal{C} \triangleq \{y \in \mathcal{R}^m : J(u(\cdot)) \leq y, \text{ para algum } u(\cdot) \in \mathcal{U}\} \quad (3.4)$$

o qual também define todo o conjunto de soluções satisfatórias do problema.

Considere agora o problema de determinar a melhor solução satisfatória de (3.1), isto é,

$$\min_{y \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Y}} \mathcal{V}(y) \quad (3.5)$$

Teorema 3.1 *Seja y^* a solução ótima de (3.5). Então y^* resolve o problema de controle multicritério definido por (3.1).*

Prova: Se $y^* \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Y}$ resolve (3.5) então existe $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ tal que $y^* = J(u^*(\cdot))$. Caso contrário, se $y^* \geq J(u^*(\cdot))$ e $y^* \neq J(u^*(\cdot))$ então $y^0 = J(u^*(\cdot))$ contradiz a otimalidade de y^* , pois $y^0 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{Y}$ e $\mathcal{V}(y^0) < \mathcal{V}(y^*)$, devido às hipóteses prévias sobre $\mathcal{V}(\cdot)$. Note finalmente que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{Y}$ permitindo concluir que $J(u^*(\cdot)) \in \mathcal{F}$ também resolve (3.1). \square

Consequentemente, os problemas (3.1) e (3.5) são equivalentes. Porém, ao contrário de (3.1), as restrições de (3.5) podem ser caracterizadas através de uma propriedade fundamental dos conjuntos convexos, apresentada anteriormente através do Teorema 1.1, aqui rerepresentado apenas para adequá-lo à notação usada no problema de controle multicritério.

Teorema 3.2 *Seja \mathcal{C} definido como em (3.4). Então $y \in \mathcal{C}$ se e somente se y satisfaz o sistema linear com infinitas restrições*

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) - y \rangle \leq 0, \quad \forall w \in W \quad (3.6)$$

Observe que a minimização indicada em (3.6) é independente de y . O Teorema 3.2 permite representar (3.5) através do seguinte problema com infinitas restrições

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{V}(y) \quad (3.7)$$

$$\text{s.a.} \quad \langle w, y \rangle \geq \langle w, J(u(w, \cdot)) \rangle, \quad \forall w \in W.$$

onde

$$u(w, \cdot) = \arg \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) \rangle \quad (3.8)$$

3.4 Algoritmo Básico: Níveis de Análise e de Decisão

É óbvio que alguma estratégia de relaxação deverá ser empregada para resolver (3.7). Técnicas de relaxação são baseadas em duas etapas principais: *i*) determinar se a solução corrente do problema satisfaz todas as restrições ignoradas e, caso contrário, *ii*) gerar a restrição ou, normalmente, a restrição mais violada para ser adicionada à aproximação da região viável anterior. Consequentemente, uma questão básica é determinar se um dado $y \in \mathcal{Y}$ é viável para (3.7).

Proposição 3.1 *Dado $y \in \mathcal{Y}$, então $y \in \mathcal{C}$ se e somente se $\Theta(y) \leq 0$, onde*

$$\begin{aligned}\Theta(y) &= \max_{w \in W} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) - y \rangle \\ &= \max_{w \in W} \phi(w)\end{aligned}\tag{3.9}$$

A verificação deste resultado é imediata. Claramente, se $\Theta(y) > 0$ então a restrição mais violada do problema (3.7) é automaticamente identificada. Antes de partir para a implementação prática da Proposição 3.1 são necessárias algumas definições e propriedades adicionais sobre problema min-max.

Teorema 3.3 *Seja \mathcal{U} um subconjunto convexo compacto de U e defina*

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(w) &\triangleq \{u(\cdot) : u(\cdot) = \arg \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) - y \rangle\} \\ \xi &\triangleq J(u^0(\cdot)) - y, \quad u^0(\cdot) \in \mathcal{U}(w)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Então, para qualquer $u^0(\cdot) \in \mathcal{U}(w)$, $\xi \in \partial\phi(w)$, onde $\partial\phi(w)$ representa o conjunto de todos os subgradientes de $\phi(\cdot)$ em w .

Novamente a prova é imediata uma vez que

$$\begin{aligned}\phi(v) &\leq \langle v, J(u(\cdot)) - y \rangle, \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}, v \in W \\ \phi(w) &= \langle w, J(u^0(\cdot)) - y \rangle, \quad \forall u^0(\cdot) \in \mathcal{U}(w), w \in W\end{aligned}$$

e fazendo-se $u(\cdot) = u^0(\cdot)$ e subtraindo-se as duas equações,

$$\phi(v) \leq \phi(w) + \xi'(v - w), \quad \forall v \in W$$

a qual é precisamente a definição do *subgradiente* de $\phi(\cdot)$ em w (Lasdon, 1970). A existência de um subgradiente em qualquer ponto $w \in W$ é suficiente para garantir a

implementação de um método baseado em *Aproximação Tangencial* (Lasdon, 1970) com o objetivo de resolver (3.9). A solução ótima de (3.7) ((3.5),(2.25)) é obtida através do seguinte procedimento.

Algoritmo Básico

Passo 0. Faça $k = 0$ e $\mathcal{Y}^0 = \mathcal{Y}$.

Passo 1. Resolva o problema relaxado

$$\min_{y \in \mathcal{Y}^k} \mathcal{V}(y) \quad (3.11)$$

Seja y^k a solução relaxada

Passo 2. Resolva o problema min-max

$$\Theta(y^k) = \max_{w \in W} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) - y^k \rangle$$

Escolha $w^0 \in W$ e faça $\ell = 0$.

Passo 2.1 Resolva o problema de controle ótimo (*min*)

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w^\ell, J(u(\cdot)) - y^k \rangle$$

obtendo $u^\ell(\cdot) \in \mathcal{U}(w^\ell)$, $\xi^\ell = J(u^\ell(\cdot)) - y^k$ e $\phi(w^\ell)$.

Passo 2.2 Resolva o problema linear (*max*)

$$\max_{\substack{\sigma \\ w \in W}} \sigma$$

$$\sigma \leq \langle w, \xi^i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, \ell.$$

se $\sigma^\ell - \phi(w^\ell) < \epsilon$, para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, faça $w^k = w^\ell$, $u^k(\cdot) = u^\ell(\cdot)$ e $\Theta(y^k) = \sigma^\ell$ e vá ao Passo 3. Caso contrário, faça $l = l + 1$ e volte ao Passo 2.1

Passo 3. Se $\Theta(y^k) \leq 0$, então $u^*(\cdot) = u(w^k, \cdot)$ resolve (2.25) e $y^* = J(u^*(\cdot))$ resolve (3.7) ((3.5)). Caso contrário, adicione a restrição mais violada a \mathcal{Y}^k

$$\mathcal{Y}^{k+1} = \{y \in \mathcal{Y}^k : \langle w^k, y \rangle \geq \langle w^k, J(u^k(\cdot)) \rangle\}$$

faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 1.

Com relação ao Algoritmo Básico é possível fazer várias observações e interpretações úteis.

- i) O Passo 1 diz respeito à solução de um problema multicritério relaxado e estático sob condições extremamente favoráveis. Os critérios e as restrições são lineares e o número de variáveis (critérios) é igual a m , o qual frequentemente é muito pequeno. Um método de programação matemática adequado pode ser aplicado dependendo da natureza de $\mathcal{V}(\cdot)$. Observe também que através da projeção do problema no espaço dos critérios, a possível *não-separabilidade* do problema original no sentido da Programação Dinâmica (Larsen e Casti, 1978) é superada. Uma vez que, mesmo quando todos os critérios do problema são separáveis no tempo, o efeito de agregação causado pela função $\mathcal{V}(\cdot)$ pode em princípio levar à perda desta importante propriedade;
- ii) Adiantando um resultado que será demonstrado na próxima seção, se $y = 0$, então o problema (3.9) é exatamente o problema min-max de Medanić e Adjelić (1971,1972) estendido a um problema de controle multicritério convexo. Consequentemente, o Algoritmo Básico pode ser visto como uma generalização daquele procedimento para uma função valor $\mathcal{V}(\cdot)$ arbitrária, onde no Passo 2 o problema min-max dependente da solução do Passo 1,

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \max_{1 \leq i \leq m} \{J(u(\cdot)) - y^k\} \quad (3.12)$$

é resolvido. Esta analogia é adequada uma vez que, conforme será visto, (3.9) é na verdade o **problema dual** de (3.12) e os problemas são equivalentes devido à hipótese de convexidade;

- iii) Observe que do ponto de vista de controle ótimo, o problema interno no Passo 2 é definido pela minimização de uma combinação convexa dos funcionais sujeito à dinâmica e restrições originais do sistema. Consequentemente, as propriedades de uma dada classe de funcionais são preservadas e evita-se a necessidade de uma abordagem baseada no aumento de estados, como proposta a por Salukvadze (1982). Tal característica é particularmente importante para a classe de problemas lineares-quadráticos, que será discutida mais a frente.
- iv) Finalmente, vale a pena notar que se $u^*(\cdot) = u(w^*, \cdot)$ é a solução de (3.1) obtida pelo Algoritmo Básico e $w^* > 0$ ou $u^*(\cdot)$ é a única solução que minimiza o problema escalar, então o controle $u^*(\cdot)$ é também eficiente (Zadeh, 1963). De fato, é possível mostrar (Geoffrion, 1968) que quando o problema multicritério for convexo, todo o conjunto de controles eficientes \mathcal{U}^* pode ser gerado por (3.8) fazendo-se w variar sobre W .

3.5 Relações entre o Nível de Análise e a Abordagem de Medanić e Andjelić

Suponha que a função valor a ser incorporada no nível de decisão seja a norma l_p , $p = \infty$, isto é,

$$\mathcal{V}(y) = \|y - \underline{y}\|_{\infty} \quad (3.13)$$

Fazendo-se $\underline{y} = 0$, o Passo 1 do Algoritmo Básico na iteração zero será a solução do problema

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} \|y\|_{\infty} \quad (3.14)$$

tendo obviamente como solução $y^0 = 0$. Consequentemente, com este valor de y^0 , o nível de análise (Passo 2) tem a forma

$$\Theta(y^0) = \max_{w \in \mathcal{W}} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) \rangle \quad (3.15)$$

que terá como solução um controle $u^0(\cdot)$, para um vetor w^0 correspondente, gerando um plano de corte a ser introduzido no nível de decisão, que passa a ser representado pelo problema

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} \|y\|_{\infty} \quad (3.16)$$

$$s.a. \quad \langle w^0, y \rangle \geq \langle w^0, J(u^0(\cdot)) \rangle$$

O Problema (3.16) terá como solução $y^1 = J(u^0(\cdot))$, que por sua vez será uma solução satisfatória, fazendo com que o controle $u^1(\cdot)$, obtido pelo nível de análise na iteração 1 forneça um valor de $\Theta(y^1) \leq 0$ encerrando o procedimento. De fato, o controle encontrado na iteração 1 será o mesmo obtido na iteração 0. Portanto, a solução $u^0(\cdot) = u^1(\cdot)$, $w^0 = w^1$ encontrada pelo analista na iteração zero é a solução do problema considerado. Nestes termos, a solução para $\mathcal{V}(y) = \|y\|_{\infty}$ será sempre encontrada na primeira iteração.

Seguindo passo a passo o Algoritmo Básico conclui-se então que, na determinação do controle ótimo de um problema multicritério tendo como função valor a norma infinito, o nível de decisão fornece na primeira iteração uma solução que coincide com a solução gerada pelo nível de análise. Este resultado tem um fundamento matemático simples que poderá ser verificado a seguir.

Para encontrar a solução do problema com norma infinito através do Algoritmo Básico, o seguinte problema é resolvido

$$\min_{y \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{C}} \max_{i \in I} (y_i - \underline{y}_i) \quad (3.17)$$

que por sua vez equivale ao problema

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \max_{i \in I} (J_i(u(\cdot)) - \underline{y}_i) \quad (3.18)$$

no espaço das variáveis de controle.

Teorema 3.4 *O controle ótimo $u(w^*, \cdot)$, $w^* \in W$, obtido no Passo 2 do Algoritmo Básico, é a solução do problema (3.18).*

Prova: Sabe-se que (3.17) é equivalente ao problema

$$\begin{aligned} \min_{\substack{u(\cdot) \in \mathcal{U} \\ \sigma}} \sigma \\ \text{s.a. } \sigma \geq J_i(u(\cdot) - \underline{y}_i), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.19)$$

que possui como problema dual

$$\max_{w \geq 0} \phi(w) \quad (3.20)$$

onde a função dual $\phi(w)$ tem a forma

$$\phi(w) = \min_{\substack{u(\cdot) \in \mathcal{U} \\ \sigma}} \left\{ \sigma + \sum_{i=1}^m w_i [(J_i(u(\cdot)) - \underline{y}_i) - \sigma] \right\} \quad (3.21)$$

Rearrmando os termos tem-se

$$\max_{w \geq 0} \min_{\substack{u(\cdot) \in \mathcal{U} \\ \sigma}} \left\{ (1 - \sum_{i=1}^m w_i) \sigma + \sum_{i=1}^m w_i (J_i(u(\cdot)) - \underline{y}_i) \right\} \quad (3.22)$$

Agora, perceba que o domínio da função dual $\phi(\cdot)$ são todos os valores de $w \geq 0$ tais que o seu valor seja finito.

$$\text{Dom}_\phi = \{w \geq 0 : \phi(w) > -\infty\} \quad (3.23)$$

Analisando-se (3.22) verifica-se que obrigatoriamente $\sum_{i=1}^m w_i = 1$, pois caso contrário σ poderá assumir valores arbitrariamente grandes ou pequenos, dependendo se o termo que o multiplica for maior ou menor que zero. Com esta restrição sobre o valor de w tem-se que o domínio da função dual é equivalente ao conjunto definido por (1.2), que é o conjunto W . Sendo assim, o problema dual transforma-se no problema

$$\max_{w \in W} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) - \underline{y} \rangle \quad (3.24)$$

e através das hipóteses de convexidade garante-se que os problemas possuem a mesma solução. \square

Este mesmo resultado foi verificado de outro modo por Medanić e Andjelić (1971,1972) e apresentado na Seção 2.8 para $\underline{y} = 0$.

Resumindo: se a função valor for igual a norma infinito, então o Teorema 3.4 mostra que os problemas nos níveis de decisão e análise do Algoritmo Básico são equivalentes. Para $\underline{y} = 0$, o nível de análise torna-se equivalente ao problema resolvido por Medanić e Andjelić, que assim pode ser interpretado como um caso particular da abordagem proposta neste capítulo.

3.6 Solução do Problema em Malha Fechada

Um tópico de grande interesse para o controle multicritério é a implementação do procedimento em malha fechada, a qual assegura a otimalidade da solução na presença de perturbações sobre a trajetória do sistema. Claramente, uma versão do Algoritmo Básico em malha fechada será função tanto do estado corrente como dos valores acumulados dos m critérios sobre o tempo decorrido. Denotando os valores acumulados no intervalo $0 \leq t \leq \tau$ como $J^{(\tau)}$, o problema de determinar a política de controle ótimo para o horizonte de tempo remanescente é semelhante ao que foi feito para desenvolver o Algoritmo Básico. Para tal é necessário apenas definir o conjunto convexo

$$\mathcal{C}^{(\tau)} \triangleq \{y \in \mathcal{R}^m : J^{(\tau, T)}(u(\cdot)) \leq y - J^{(\tau)}, \text{ para algum } u(\cdot) \in \mathcal{U}\} \quad (3.25)$$

onde agora $u(\cdot)$ é o controle no intervalo $[\tau, T]$. O problema min-max torna-se então

$$\max_{w \in W} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J^{(\tau, T)}(u(\cdot)) - (y - J^{(\tau)}) \rangle \quad (3.26)$$

$$\text{s.a. } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(\tau) = x_\tau$$

e uma restrição a ser incorporada ao problema de decisão assume a forma

$$\langle w^k, y \rangle \geq \langle w^k, J^{(\tau, T)}(u^k(\cdot)) \rangle + \langle w^k, J^{(\tau)} \rangle \quad (3.27)$$

onde a dependência da solução no nível de decisão com os valores acumulados é considerada explicitamente¹. O Algoritmo Básico pode ser implementado em malha fechada introduzindo-se um terceiro nível na estrutura que incrementará o tempo decorrido τ de uma quantidade fixa ΔT , por exemplo. Como para pequenos valores de ΔT , espera-se que os subconjuntos $\mathcal{C}^{(\tau)}$ e $\mathcal{C}^{(\tau+\Delta T)}$ não sofram grandes alterações, uma boa heurística é inicializar a próxima iteração com a solução ótima da iteração anterior.

¹Observe que na ausência de perturbações $J^{(\tau)} = J^{(\tau)}(u^k(\cdot))$, onde $u^k(\cdot)$ é definido no intervalo $[0, \tau]$, e o problema se reduz ao caso já tratado (malha aberta).

Em geral, o valor de w^* dependerá do estado corrente e dos valores acumulados dos critérios. Entretanto, na ausência de perturbações e com perfeita descrição da planta, o valor de w^* permanece constante e só depende do estado inicial $x(0)$

$$w^*(x(\tau), J^{(\tau)}) = w^*(x(0)) = \text{constante}. \quad (3.28)$$

De fato, observe que se $u(w^*, t)$, $t \in [\tau, T]$ resolve

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \mathcal{V}(J(\cdot)) \quad (3.29)$$

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(\tau) = x_\tau$$

para quaisquer $\tau \in [0, T]$ e então

$$y^{\tau, T} = J^{(\tau, T)}(u(w^*, \cdot)) = y^* - J^{(\tau)}(u(w^*, \cdot)) \quad (3.30)$$

resolve o mesmo problema no espaço dos critérios, indicando que w^* e y^* resolvem o problema multicritério para qualquer valor de τ .

3.7 Convergência do Procedimento

Observe que, como $\mathcal{V}(\cdot)$ é uma função crescente com respeito aos seus argumentos, o problema (3.11) sempre tem um mínimo. Sob tais condições, fica simples demonstrar que o Algoritmo Básico converge.

Teorema 3.5 *Qualquer ponto limite da sequência $\{y^k\}$ gerada pelo Algoritmo Básico resolve (3.5).*

Prova: Considere a sequência $\{y^k\}$ ou, se necessário, uma subsequência, com y^* sendo o ponto limite. Em uma iteração arbitrária k , a última restrição linear adicionada a \mathcal{Y}^k pode ser escrita como

$$0 \geq \langle w^k, J(u^k(\cdot)) - y^k \rangle + \langle w^k, y^k - y \rangle \quad (3.31)$$

$$0 \geq \Theta(y^k) + \langle w^k, y^k - y \rangle$$

e em qualquer iteração posterior $r > k$, a solução y^r deve satisfazer (3.31). ou seja,

$$\Theta(y^k) \leq \langle w^k, y^r - y^k \rangle$$

$$\leq \|w^k\|_2 \cdot \|y^r - y^k\|_2$$

implicando que $\Theta(y^*) \leq 0$ uma vez que $\|w^k\|_2 \leq 1$, $\forall w^k \in W$ e $\|y^r - y^k\|_2 \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Em outras palavras, $y^* \in (\mathcal{C} \cap \mathcal{Y})$ é viável para (3.7). Agora,

supondo que \mathcal{V}^* é o valor ótimo de (3.7), então $\mathcal{V}^k \leq \mathcal{V}^*$ uma vez que $(\mathcal{C} \cap \mathcal{Y}) \subset \mathcal{Y}^k$ para todo $k = 0, 1, \dots$. Consequentemente, $\mathcal{V}(y^*) \leq \mathcal{V}^*$, mostrando que y^* resolve (3.7). \square

Torna-se claro que a convergência do Algoritmo Básico vai depender de quão precisa é a determinação da solução do problema relaxado quando $\mathcal{V}(\cdot)$ não é perfeitamente conhecida. É claro que em tais casos, a determinação de y^k depende da convergência do método usado para resolver o problema relaxado. Alguns aspectos sobre a convergência de métodos multicritérios interativos são discutidos em Geoffrion (1972).

3.8 Caso Especial: Regulador Linear Quadrático

Considere que o problema de controle multicritério (3.1) possui um conjunto finito de m critérios quadráticos

$$J_i(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T \{x(t)' Q_i x(t) + u(t)' R_i u(t)\} dt + \frac{1}{2} x(T)' F_i x(T) \quad (3.32)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

onde $Q_i = Q_i' \geq 0$, $F_i = F_i' \geq 0$ e $R_i = R_i' > 0$. Obviamente, o problema interno, a menos de y , de minimização no Passo 2 assume a forma

$$\min_{u(\cdot)} \frac{1}{2} \int_0^T \{x(t)' Q x(t) + u(t)' R u(t)\} dt + \frac{1}{2} x(T)' F x(T) \quad (3.33)$$

$$s.a. \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

onde $Q = \sum_{i=1}^m w_i Q_i$; $R = \sum_{i=1}^m w_i R_i$ e $F = \sum_{i=1}^m w_i F_i$, $w \in W$.

A partir de resultados já existentes para esta classe de problemas (Athans e Falb, 1966), a propriedade apresentada a seguir torna-se evidente.

Proposição 3.2 *Os elementos do conjunto de controles eficientes \mathcal{U}^* de (3.33) têm a forma*

$$u(w, t) = -K(w, t)x(t) \quad (3.34)$$

onde $K(w, t) = R^{-1}B'P(w, t)$ e $P(w, t)$ é a solução da equação matricial de Riccati

$$\dot{P}(w, t) + A'P(w, t) + P(w, t)A - P(w, t)BR^{-1}B'P(w, t) + Q = 0 \quad (3.35)$$

tendo como condição de contorno $P(w, T) = F$.

Menos evidente, e aparentemente ainda não explorada na literatura de controle multicritério, é a seguinte consequência da Proposição 3.2.

Proposição 3.3 *O conjunto de todos os controles eficientes \mathcal{U}^* é independente da condição inicial x_0 .*

Em outras palavras, todo o controle calculado por (3.34) permanece eficiente para o mesmo valor de $w \in W$, independente do valor que x_0 assume. Entretanto, Γ **depende** de x_0 e uma solução ótima encontrada a partir de uma determinada condição inicial não permanece ótima se muda a condição inicial (embora permaneça eficiente). A utilidade prática da Proposição 3.3 é que se x_0 muda, os semi-espacos suportes que definem a região viável \mathcal{Y}^{k+1} no Passo 3 do Algoritmo Básico podem ser facilmente atualizados e o procedimento trabalhará a partir de uma aproximação razoável de Γ . De grande importância prática será o seguinte resultado especial para problemas Lineares-Quadráticos Multicritérios (LQM).

Teorema 3.6 *A função $\phi(\cdot)$ é diferenciável sobre W e*

$$\nabla\phi(w) = \frac{\partial\phi}{\partial w} = J(u(w, \cdot)), \quad \forall w \in W \quad (3.36)$$

A unicidade da solução do problema (3.33) leva-nos a $\mathcal{U}(w) = \{u(w, \cdot)\}$, um singleton e um caso especial no qual o renomado Teorema de Daskin para diferenciabilidade (visto na Seção 1.6) aplica-se. Como consequência, o algoritmo de aproximação tangencial do Passo 2 (Algoritmo Básico) pode ser eficientemente substituído por um método de gradiente ótimo baseado no algoritmo iterativo

$$w^{\ell+1} = w^\ell + \alpha_\ell s^\ell \quad (3.37)$$

onde s^ℓ é a projeção ortogonal de $\nabla\phi(w^\ell)$ sobre o espaço nulo de W e α_ℓ é um tamanho de passo tal que $w^{\ell+1} \in W$, ambos facilmente calculados neste caso.

3.9 Implementação dos Níveis de Análise e Decisão

Os algoritmos desenvolvidos neste trabalho foram implementados usando o pacote para operações matriciais *MATLAB*©, uma vez que este oferece as vantagens de cálculos sempre em dupla precisão, grande facilidade para manipular vetores e

matrizes, fácil programação além de possuir uma ampla biblioteca de funções, que foram de grande valia para este trabalho.

O nível de análise (Passo 2 do Algoritmo Básico) consiste no problema do tipo min-max

$$\max_{w \in W} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) - y \rangle \quad (3.38)$$

sendo, como visto anteriormente, um problema dual que possui como função dual

$$\phi(w) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \langle w, J(u(\cdot)) - y \rangle \quad (3.39)$$

Uma vez garantida a diferenciabilidade de $\phi(\cdot)$ com respeito ao vetor w , o cálculo do gradiente da função dual é imediato. Para tal, basta solucionar a etapa de minimização, que consiste em um problema de controle ótimo, amplamente discutido na literatura, para depois usar o resultado do Teorema 1.6 e obter o valor do gradiente. Com isso, torna-se viável a implementação de métodos baseados no gradiente ótimo aplicados a problemas restritos para resolver a etapa de maximização do problema min-max.

Uma formulação semelhante ao problema acima, com a diferença de que $y = 0$, foi utilizada por Medanić e Andjelić (1971). A implementação do nível de análise baseou-se na mesma estratégia usada por aqueles autores, onde a direção de busca em cada iteração da etapa de maximização era calculada projetando-se o gradiente sobre as restrições ativas do problema, ou seja

$$w^{k+1} = w^k + \alpha \text{Proj}_W \nabla \phi \quad (3.40)$$

onde α é um escalar positivo, solução de um problema de busca unidimensional.

A consideração prévia da existência do gradiente não desfaz o caráter genérico da abordagem aqui apresentada uma vez que, assim como o método do gradiente projetado, o método da aproximação tangencial poderia ser implementado sem maiores dificuldades. O que foi feito apenas demonstra, ao contrário, uma grande flexibilidade do algoritmo proposto, onde o prévio conhecimento de determinadas propriedades do sistema a ser tratado pode trazer melhorias à sua solução, não configurando-se em informação sem valor prático algum.

Com relação ao nível de decisão (Passo 1 do Algoritmo Básico), o método a ser usado dependerá da função valor $\mathcal{V}(\cdot)$ a ser implementada. Nesta dissertação considerou-se como função valor a norma l_p para $p = 1$ (combinação linear), $p = 2$ (norma Euclidiana) e $p = \infty$ (norma infinito). Vale a pena salientar que, como foi visto anteriormente, o nível de decisão possui características que lhe garantem grande facilidade de implementação qualquer que seja a função valor adotada.

Para $p = 1$, tem-se o seguinte problema no nível de decisão

$$\min_{y \in \mathcal{Y}^k} \sum_{i=1}^m (y_i - \underline{y}_i) \quad (3.41)$$

e para $p = \infty$ tem-se

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\sigma \\ y^k}} \sigma \\ \text{s.a. } \sigma \geq (y_i - \underline{y}_i), \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (3.42)$$

Perceba que ambos são problemas de otimização lineares, para os quais já existem diversos procedimentos eficientes de solução.

Para encontrar a solução do nível de decisão quando $p = 2$, resolveu-se o seguinte problema

$$\min_{y \in Y^k} \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} (y_i - \underline{y}_i)^2 \quad (3.43)$$

que é um problema quadrático, também bastante conhecido.

As funções valores aqui apresentadas são todas explícitas e como foi dito antes, devido à simplicidade intrínseca ao problema no nível de decisão não houve nenhuma dificuldade para a sua implementação. A utilização de uma função valor implícita pelo Algoritmo Básico será ilustrada no Capítulo 4 desta dissertação.

A seguir apresenta-se a solução de um problema de 1^a ordem, que apesar de extremamente simples, é de grande valia no sentido de mostrar como o algoritmo se comporta durante a busca da solução.

Seja o problema de controle ótimo linear quadrático

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q x^2(t) + r u^2(t)) dt \\ \text{s.a. } \dot{x} &= -ax(t) + u(t), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde a , q e r são quantidades escalares positivas. A partir da equação de Riccati (aqui uma equação escalar) para o caso de horizonte de tempo infinito

$$ap + pa - pr^{-1}p + q = 0 \quad (3.45)$$

encontra-se o seguinte valor para p

$$p = ar + \sqrt{a^2 r^2 + qr} \quad (3.46)$$

Com isso, o ganho de realimentação e o valor do critério na solução ficam na forma

$$\begin{aligned} k &= r^{-1}p \\ &= a + \sqrt{a^2 + \frac{q}{r}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$J(u^*) = \frac{1}{2} p x_0^2$$

Fez-se então uma divisão do critério em duas partes, uma relativa ao estado e a outra ao controle, resultando no seguinte problema bi-critério.

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} J_1(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2(\cdot) dt \\ J_2(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^2(t) dt \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$s.a. \quad \dot{x} = -ax(t) + u(t), \quad x(0) = x_0$$

Como foi visto anteriormente, todas as soluções eficientes do problema acima podem ser geradas a partir do problema ponderado

$$\min_{u(\cdot)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (w x^2(t) + (1-w) u^2(t)) dt, \quad 0 \leq w \leq 1 \quad (3.49)$$

$$s.a. \quad \dot{x} = -ax(t) + u(t)$$

cuja solução para cada valor de w é imediatamente determinada pela solução de (3.44) bastando-se que naquelas expressões q seja substituído por w e r por $(1-w)$. Para ilustrar o comportamento do Algoritmo Básico, usou-se como função valor a expressão

$$\mathcal{V}(y) = y_1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} y_2, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.50)$$

onde α é um valor definido pelo Decisor e que procura refletir suas preferências quanto aos aspectos de regulação e esforço de controle que compõem o problema bi-critério.

Na Tabela 3.1 são apresentados os resultados encontrados pelo Algoritmo Básico para $a = 2$, considerando-se que ambos os critérios possuem a mesma importância do ponto de vista do decisor, o que se procura representar através de $\alpha = 0,5$.

Como era de se esperar, o valor de w^* tende para o valor de α dado, significando que a solução $u^*(\cdot)$ fornece os valores de critérios de desempenho que satisfazem à preferência pré-estabelecida pelo decisor. Qualquer que seja o valor de α fornecido, espera-se que a solução final encontrada seja compatível, fornecendo valores que espelham suas preferências.

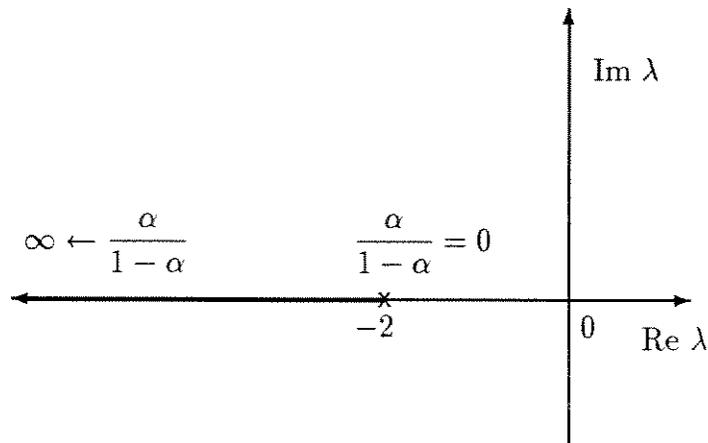
De fato, note que tem-se como expressão para o sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (a - k)x \quad (3.51)$$

que, por sua vez, tem como autovalor

$$\lambda = a - k = -\sqrt{a^2 + \frac{q}{r}} = -\sqrt{a^2 + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (3.52)$$

k	y_1	y_2	w_1	w_2	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$\Theta(y)$
0	0	0	0,833	0,167	0,0833	0,0833	0,0833
1	0,1000	0	0,554	0,446	0,1092	0,0092	0,0092
2	0,1166	0	0,323	0,677	0,1181	0,0016	0,0016
3	0,1135	0,0038	0,449	0,551	0,1140	0,0043	$4,68 \cdot 10^{-4}$
4	0,1115	0,0063	0,504	0,496	0,1116	0,0064	$1,27 \cdot 10^{-4}$
5	0,1128	0,0052	0,477	0,523	0,1128	0,0053	$3,04 \cdot 10^{-5}$
6	0,1122	0,0058	0,490	0,510	0,1122	0,0058	$0,78 \cdot 10^{-5}$

Tabela 3.1: Comportamento do Algoritmo Básico para $\alpha = 0,5$.Figura 3.1: Pólo do sistema em função de α .

indicando que, ao preferir um determinado valor de α , o decisor influencia diretamente na dinâmica do sistema. Esta influência se dá, como pode ser visto na Figura 3.1, na localização do pólo do sistema. Quanto menor o valor de α menor o valor do pólo, que estando diretamente ligado à constante de tempo do sistema indicará que o decisor dá maior importância à economia de energia, optando por uma regulação mais lenta. Caso contrário, quanto maior o valor de α menor será a constante de tempo e mais rápida será a regulação, e em contrapartida, maior o esforço de controle.

A Figura 3.2 mostra as três primeiras iterações do Algoritmo Básico durante a resolução do exemplo. Pode-se ver como passo a passo o decisor vai melhorando a sua aproximação de Γ através dos planos suportes (em cada iteração é resolvido um problema linear (PL) formado pelos planos suportes). tendo assim mais condições

para fornecer uma solução y^k melhor. Este melhor é traduzido pelo cada vez menor valor de $\Theta(y^k)$, que representa a distância da solução (infactível) encontrada pelo decisor e a solução viável mais próxima determinada pelo analista. Com isso, decisor e analista estão sempre trocando informações até que o decisor tenha informações (planos suportes) suficientes para fornecer uma solução que seja satisfatória para o analista ($\Theta(y) \leq \epsilon$, para $\epsilon > 0$).

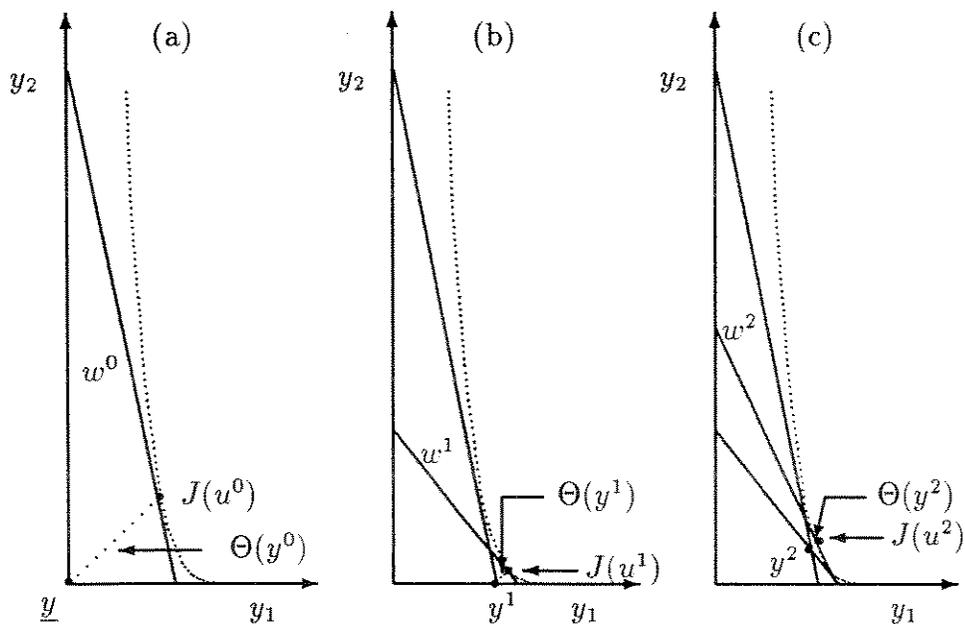


Figura 3.2: (a): 1ª Iteração; (b): 2ª Iteração; (c): 3ª Iteração.

3.10 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a abordagem para a solução do problema de controle multicritério. Através do uso adequado de resultados de programação convexa como a equivalência primal-dual, além de manipulações básicas como relaxação e projeção, foi possível decompor o problema multicritério em uma estrutura de dois níveis através da qual os subproblemas de decisão e controle ótimo podem ser facilmente resolvidos. Verificou-se também a validade e a aplicabilidade da abordagem, através da garantia de convergência do procedimento, além de terem sido tecidos comentários relevantes quanto à implementação do algoritmo em malha fechada. A principal característica desta abordagem é propiciar um tratamento unificado para o controle multicritério, eliminando limitações do tratamento no espaço das variáveis de controle e contornando completamente as dificuldades do tratamento no espaço dos critérios. Em síntese, estendeu-se o trabalho de Medanić and Andjelić (1971,1972), associado ao controle min-max dos sistemas lineares quadráticos, para problemas gerais com funcionais convexos agregados a uma função valor $V(\cdot)$ arbitrária. A abordagem também evita, no caso de problemas convexos, o uso de esquemas baseados no aumento do vetor de estados como proposto por Salukvadze (1982).

Capítulo 4

Solução de Problemas Clássicos de Controle Multicritério

4.1 Introdução

Este capítulo tratará efetivamente dos aspectos numéricos relativos à implementação do Algoritmo Básico. Alguns exemplos ilustrativos serão resolvidos e comparados com as soluções fornecidas por outras abordagens, discutidas no Capítulo 2. Serão apresentadas também algumas observações sobre a execução dos referidos exemplos, tanto em relação ao nível de análise quanto ao de decisão, além de informar as condições de inicialização e parada de cada execução. Durante todo o decorrer do capítulo serão apresentadas tabelas e curvas, para que os resultados obtidos possam ser analisados com maior facilidade.

4.2 Formulação do Problema de Controle Min-Max

O problema de controle multicritério min-max consiste em

$$\begin{aligned} & \min_{u(\cdot)} \max_{i \in I} J_i(u(\cdot)) \\ & \text{s.a.} \quad \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ & I = \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tal formulação foi motivada pelo desejo de, na busca de uma solução de compromisso entre todos os critérios, procurar o controle que minimize o pior caso, ou seja, o critério de maior valor. Existem na literatura vários procedimentos que se propõem

a resolver o problema min-max, dois dos quais foram apresentados no Capítulo 2. Com o objetivo de comentar o desempenho do Algoritmo Básico foram resolvidos os mesmos exemplos utilizados pelos autores para ilustrar os seus respectivos trabalhos.

Exemplo 4.2.1 - (Medanić e Andjelić, 1971)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T = \infty,$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 2, \quad R_2 = 1, \quad R_3 = 3.$$

Exemplo 4.2.2 - (Medanić e Andjelić (1971), Duan Li (1990a))

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T = \infty,$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = 2 \quad R_2 = 1,$$

Exemplo 4.2.3 - (Duan Li, 1990a, 1990b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T = 1$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3 Solução por Medanić e Andjelić

Na Seção 2.7 foi apresentada a abordagem proposta por Medanić e Andjelić (1971) para a solução do problema min-max. O objetivo aqui será o de apresentar o algoritmo desenvolvido pelos autores.

Como foi visto antes, a etapa de minimização consiste em um problema de controle ótimo escalar cuja solução analítica, bastante conhecida, é dada por (2.67). Para resolver a etapa de maximização, utiliza-se a existência do gradiente para aplicar o método do gradiente projetado (Lasdon, 1970). As restrições na qual o gradiente livre será projetado são as definidas pelo conjunto W dado por (1.2). Vale lembrar que a projeção é feita apenas sobre as restrições ativas do problema.

Para definir a matriz que projetará o gradiente livre ∇G é necessário primeiro encontrar a sua projeção sobre a restrição de igualdade (que por definição está sempre ativa)

$$\nabla G p^0 = \nabla G - \epsilon'_0 \epsilon_0 \nabla G \quad (4.2)$$

onde o vetor de dimensão m , $\epsilon_0 = 1/\sqrt{m} [1, \dots, 1]'$, representa a restrição de igualdade. A partir de (4.2) é gerada a matriz

$$E = \begin{bmatrix} \epsilon'_0 \\ \epsilon'_{i1} \\ \vdots \\ \epsilon'_{is} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

onde ϵ_i é um vetor também de dimensão m , composto por $m - 1$ zeros e com um 1 na posição i , que será acrescentado sempre que alguma componente w_i do vetor

ponderação seja zero e a correspondente componente de $\nabla G p_i^0$ for menor que zero. O índice s indica que mais de uma componente pode estar nestas condições e neste caso serão acrescentadas s linhas a E . Com isso, E permite encontrar a projeção do gradiente sobre todas as restrições que por ventura estejam ativas. Desta forma o gradiente projetado $\nabla G p$ é calculado como segue

$$\nabla G p = [I - E'(EE')^{-1}E]\nabla G \quad (4.4)$$

A partir do cálculo do gradiente projetado, os autores apresentam o seguinte algoritmo para resolver o problema min-max.

Algoritmo de Medanić e Andjelić

Passo 1 - Dado o Sistema

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

e o conjunto de critérios de desempenho

$$J_i(u(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^T (x'(t)Q_i x(t) + u'(t)R_i u(t)) dt + \frac{1}{2} x'(t)F_i x(t), \quad i = 1, \dots, m,$$

escolha $w^0 \in W$, Δt , h , ε e faça $k = 0$.

Passo 2 - Calcule

$$Q^k = \sum_{i=1}^m w_i^k Q_i; \quad F^k = \sum_{i=1}^m w_i^k F_i; \quad R^k = \sum_{i=1}^m w_i^k R_i;$$

e encontre o valor de $P^k(w^k, \cdot)$ a partir de

$$\begin{aligned} \dot{P}^k + P^k A + A' P^k - P^k S^k P^k + Q^k &= 0, \quad P^k(T) = F^k, \\ S^k &= BR^{k-1} B'. \end{aligned}$$

Passo 3 - Encontre as componentes do gradiente a partir de

$$\nabla G_i^k = \frac{1}{2} \int_0^T (x^{k'}(t)Q_i x^k(t) + u^{k'}(t)R_i u^k(t)) dt + \frac{1}{2} x^{k'}(T)F_i x^k(T)$$

e do Gradiente Projetado a partir de

$$\nabla G p^k = [I - E'(EE')^{-1}E]\nabla G^k,$$

onde $u^k(t) = -R^{k-1} B' P^k(w^k, t)x(t)$.

Passo 4 - Encontre o novo valor do vetor ponderação w

$$w^{k+1} = w^k + h \nabla G p^k$$

Se a norma de $\nabla G p^k$ for menor que ε , $u^k(\cdot)$ resolve o problema min-max. Caso contrário faça $k = k + 1$ e volte ao Passo 2.

Apesar do algoritmo poder ser implementado em malha fechada, apenas o caso malha aberta foi tratado, pois os autores não levam em conta os valores acumulados dos critérios para atualizar a estratégia de controle. Esta distorção foi reconhecida pelos próprios autores, tendo sido corrigida em um outro trabalho que será discutido mais adiante. Na Figura 4.1 pode-se observar como evolui a trajetória do sistema durante o intervalo de tempo determinado para o Exemplo 4.2.1 e na Figura 4.2 para o Exemplo 4.2.2 sob diferentes condições iniciais. Estes dados foram obtidos a partir da implementação do algoritmo apresentado, que pode ser vista como ponto de partida para a implementação do nível de análise do Algoritmo Básico, considerando-se as mesmas condições iniciais.

Os resultados foram rigorosamente idênticos aos fornecidos pelos próprios autores.

4.4 Solução por Duan Li

Como foi visto na Seção 2.9, o autor mostra que, na solução do problema min-max, os critérios associados às componentes do vetor ponderação w que são estritamente maiores do que zero possuem o mesmo valor. Como o problema é convexo, e com isso as condições necessárias de otimalidade são também suficientes, é proposto um algoritmo que consiste em procurar um vetor ponderação w que iguale todos os critérios de desempenho associados às componentes estritamente maiores do que zero. Isto dentro de todas as combinações possíveis entre $w_{i's} > 0$ e $w_{i's} = 0$ para o vetor w . Para tal, deve ser convencionado que $\binom{m}{j}$ é o número de combinações de m elementos j a j , onde m é a dimensão do vetor ponderação w e j é o número de componentes $w_{i's} > 0$; S^j é o conjunto de j elementos que contém os $i's$ relativos a $w_i > 0$, ou seja

$$S^j \subset \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4.5)$$

Também são definidos os conjuntos

$$W_s^j \triangleq \{w : w_i \geq 0, \sum_{i=1}^m w_i = 1; w_i > 0, i \in S^j; w_i = 0, i \notin S^j\}, j = 1, \dots, m \quad (4.6)$$

$$G_s^j \triangleq \{[G_1(w, 0), \dots, G_m(w, 0)]'\}; \quad (4.7)$$

$$w \in W_s^j, G_i(w, 0) = G_k(w, 0), i, k \in S^j, j = 1, \dots, m$$

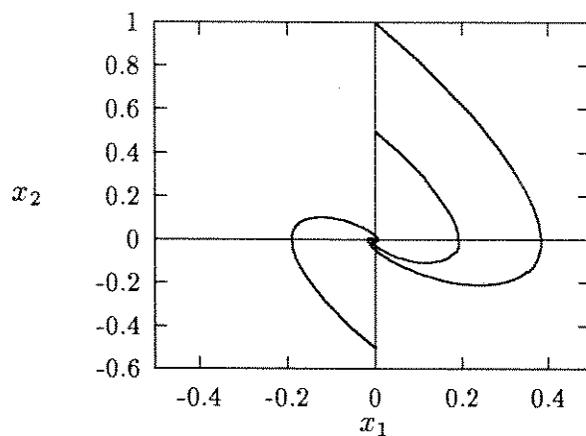


Figura 4.1: Plano de fase do Exemplo 4.2.1.

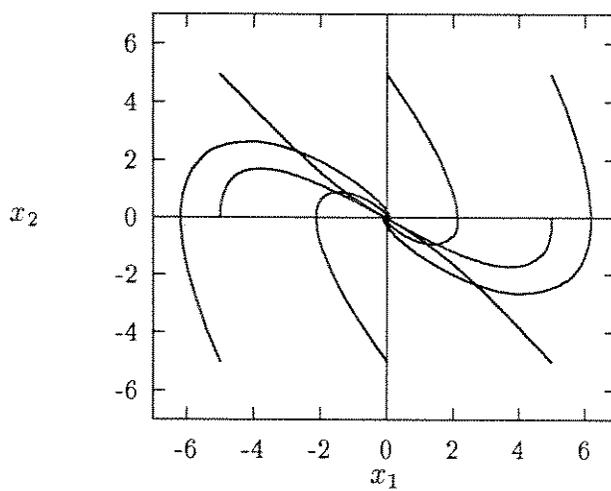


Figura 4.2: Plano de fase do Exemplo 4.2.2.

Tem-se abaixo o algoritmo proposto

Algoritmo de Duan Li

Passo 1 - Dado $w_i^0 > 0$, $i = \{1, \dots, m\}$, calcule $G_i(w^0, 0)$ a partir de (2.76).

Passo 2 - Faça $j = m$.

Passo 3 - Se $j = 1$ vá ao Passo 6.

Passo 4 - Procure uma solução em G_s^j para todas as $\binom{m}{j}$ combinações de S^j . Se for encontrada uma solução $G(w, 0) \in G_s^j$, pare.

Passo 5 - Faça $j = j - 1$ e volte ao Passo 3.

Passo 6 - Compare todos os valores extremos fazendo $w_i = 1$, $i = 1, \dots, m$ e escolha o menor valor. Pare.

O autor mostra que, como o termo

$$[J_i(w_1, \dots, w_{m-1}) - J_m(w_1, \dots, w_{m-1})] \quad (4.8)$$

é decrescente em relação a w_i , quaisquer que sejam i e m , os valores dos critérios podem ser aproximados (e eventualmente igualados), aumentando o coeficiente w_i do objetivo de maior valor ($J_{i_{max}}$) e diminuindo o coeficiente associado ao de menor valor ($J_{i_{min}}$), em relação à iteração corrente. O autor sugere o seguinte procedimento para alterar os valores de $w_i \rightarrow J_{i_{min}}$ e $w_i \rightarrow J_{i_{max}}$, para a próxima iteração.

$$\begin{cases} w_i^{k+1} = w_i^k + c[J_{max}(w^k) - J_{min}(w^k)], & w_i \rightarrow J_{i_{max}} \\ w_i^{k+1} = w_i^k - c[J_{max}(w^k) - J_{min}(w^k)], & w_i \rightarrow J_{i_{min}} \\ w_i^{k+1} = w_i^k, & w_i \rightarrow J_i, \quad J_i \neq J_{i_{max}} \text{ ou } J_{i_{min}}, \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \quad (4.9)$$

onde o parâmetro c deve ser ajustado para garantir que $w \in W$.

A seguir tem-se os resultados para o Exemplo 4.2.3 encontrados pelo autor utilizando este procedimento. Para este exemplo, com $w_1^0 = 0,3$ e $w_2^0 = 0,5$ e o valor do parâmetro $c = 0,005$, as equações (2.77) foram resolvidas pelo método de Runge-Kutta de 4^a ordem, com tamanho do passo 0,01. O procedimento chega ao final quando a diferença entre os critérios não for maior que 0,0001, encontrando a solução na 15^a iteração (ver Tabela 4.1).

k	w_1	w_2	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$J_3(u)$
1	0,300000	0,500000	30,4838	31,8082	44,7345
2	0,228746	0,500000	36,3602	33,0938	35,3988
3	0,245078	0,483660	34,7847	33,8470	35,4079
4	0,245078	0,475863	34,8334	34,2687	34,6289
5	0,247902	0,473039	34,5880	34,3998	34,6228
6	0,247902	0,471925	34,5940	34,4604	34,5151
7	0,248570	0,471256	34,5370	34,4914	34,5133
8	0,248798	0,471028	34,5176	34,5020	34,5123
9	0,248877	0,470950	34,5110	34,5056	34,5123
10	0,248877	0,470916	34,5112	34,5075	34,5092
11	0,248895	0,470987	34,5096	34,5084	34,5091
12	0,248902	0,470891	34,5091	34,5086	34,5091
13	0,248902	0,470889	34,5091	34,5088	34,5089
14	0,248903	0,470887	34,5090	34,5088	34,5090
15	0,248904	0,470886	34,5089	34,5089	34,5089

Tabela 4.1: Iterações do Algoritmo de Duan Li.

4.5 Solução por Programação Convexa

Como foi visto anteriormente (Seção 3.5), a solução do problema min-max pelo Algoritmo Básico consiste em fazer $\mathcal{V}(y) = \|y - \underline{y}\|_\infty$ e $\underline{y} = 0$. Analogamente ao que foi feito por Medanić e Andjelić (1971), o problema min-max do nível de análise foi implementado a partir do método do gradiente projetado. Com isso, a implementação do nível de análise torna-se similar ao procedimento daqueles autores, enquanto que o nível de Decisão consiste em um problema de otimização linear, já comentado na Seção 3.9. Consequentemente, na implementação do Algoritmo Básico para solução do problema min-max usou-se o algoritmo de Medanić e Andjelić para o nível de análise e para o nível de decisão foi usada uma função do *MATLAB* para problemas lineares. Os valores dos estados em cada instante de tempo foram calculados a partir da solução da equação diferencial

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad K = R^{-1}B'P, \quad (4.10)$$

usando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com tamanho de passo fixo. Já o cálculo dos valores dos funcionais (que determinam o valor do gradiente livre) foi feito a partir do método de integração de Simpson.

Os comentários que serão feitos a seguir sobre a execução do nível de análise

x_{1_0}	x_{2_0}	y_1	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$J_3(u)$
0	1	0,85	1,02	1,02	0,00	0,00	1,00	0,85	0,64	1,02
0	0,5	0,21	0,26	0,26	0,00	0,00	1,00	0,21	0,16	0,26
0	-0,5	0,21	0,26	0,26	0,00	0,00	1,00	0,21	0,16	0,26

Tabela 4.2: Solução do Exemplo 4.2.1 - via projeção.

servirão para todas as seções que seguem. O passo ótimo α que faz a atualização de

$$w^{k+1} = w^k + \alpha \nabla G_p^k \quad (4.11)$$

é determinado a partir de uma rotina de busca unidimensional na qual foi usado o método de Fibonacci. Sempre que um elemento do vetor w for menor do que 10^{-6} este é considerado zero. Observou-se que grande parte do esforço computacional concentra-se na busca unidimensional, e este pode ser reduzido ajustando-se o número de elementos da série de Fibonacci para um valor suficientemente pequeno de forma a não comprometer a precisão do passo a ser calculado. O nível de análise assume como critério de parada o valor da norma do gradiente projetado $\|\nabla G_p^k\| \leq 10^{-3}$ ou se o passo ótimo $\alpha < 10^{-6}$. O procedimento termina quando $\Theta(y) < 10^{-3}$.

A seguir tem-se a solução dos Exemplos 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3. O Exemplo 4.2.1 foi resolvido para $x_0 = [0 \ 1]'$, $x_0 = [0 \ 0,5]'$ e $x_0 = [0 \ -0,5]'$, que são as mesmas condições iniciais consideradas no trabalho de Medannić e Andjelić (ver Fig. 4.1), sempre inicializados com $w^0 = [0,5 \ 0,2 \ 0,3]'$. Os resultados encontram-se na Tabela 4.2; o Exemplo 4.2.2 foi resolvido para as condições iniciais

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}, e \begin{bmatrix} -5 \\ -5 \end{bmatrix},$$

(as mesmas utilizadas por aqueles autores - Fig. 4.2) todos inicializados com $w = [0,5 \ 0,5]'$ (ver Tabela 4.3), Note que os resultados para condições iniciais simétricas são idênticos devido ao fato da solução ser uma forma quadrática em x_0 (2.15). O Exemplo 4.2.3 foi resolvido apenas para $x_0 = [2 \ 2 \ -1]'$ (Duan Li, 1990a), e inicializado com $w_0 = [0,3 \ 0,5 \ 0,2]$. Para o Exemplo 4.2.3, as Figuras 4.4 e 4.5 apresentam a evolução dos estados e do controle respectivamente. Quanto à solução destes exemplos perceba que, para os Exemplos 4.2.1 e 4.2.2 tem-se $T = \infty$, e com isso a equação diferencial de Riccati passa a ser uma equação algébrica e o valor

de sua solução é constante para todo o intervalo de tempo. Este resultado diminui o esforço computacional e o espaço em memória, uma vez que, quando T é finito, torna-se necessário calcular e armazenar os valores de P em cada instante de tempo para que seja possível encontrar o valor dos estados nos instantes correspondentes, enquanto que, se $T = \infty$ só será necessário calcular $P(0)$ e então usar este valor, que é constante, para todo o instante de tempo. Para uma melhor visualização, a Figura 4.3 mostra como evolue a solução de P para o Exemplo 4.2.1, onde $T = \infty$ (ver Figura 4.3).

O fato da solução ter se dado sempre em pontos extremos (ver Tabelas 4.2 e 4.3) tem como causa a dependência de w com x_0 . Em Medanić e Andjelić (1971) foi realizado um mapeamento das possíveis combinações dos critérios em função do estado inicial. As regiões em que existem combinações de mais de um critério na solução são bastante estreitas, prevalecendo as regiões puras, nas quais as soluções equivalem a minimizar apenas um dos critérios. Neste caso, o algoritmo ao fornecer uma solução deste tipo, indica, dentre os critérios, aquele que melhor se adequa ao sistema, considerando-se a condição inicial dada.

x_{1_0}	x_{2_0}	y_1	y_2	w_1	w_2	$J_1(u)$	$J_2(u)$
0	5	39,53	39,53	1,00	0,00	39,53	29,65
0	-5	39,53	39,53	1,00	0,00	39,53	29,65
5	0	40,45	40,45	0,00	1,00	29,43	40,45
-5	0	40,45	40,45	0,00	1,00	29,43	40,45
5	5	116,56	116,56	1,00	0,00	116,56	96,79
5	-5	43,40	43,40	0,00	1,00	21,35	43,40
-5	5	43,40	43,40	0,00	1,00	21,35	43,40
-5	-5	116,56	116,56	1,00	0,00	116,56	96,79

Tabela 4.3: Solução do Exemplo 4.2.2 - via projeção.

O uso desta estrutura multinível para resolver o problema min-max linear quadrático pode parecer dispensável, uma vez que o algoritmo de Medanić e Andjelić fornece rigorosamente a mesma solução. Mas deve-se sempre ter em mente que aquele algoritmo pode ser considerado como um caso particular desta abordagem, e como tal resolve apenas o problema a que se propõe (min-max linear quadrático). O uso de funcionais de outra natureza, como por exemplo, funcionais não diferenciáveis e a escolha de um outro critério que não seja o do problema min-max inviabiliza completamente a outra abordagem.

Comparações com a abordagem de Duan Li serão feitas na seção que tratará do problema de Salukvadze, pois os comentários que serão feitos aplicam-se inteiramen-

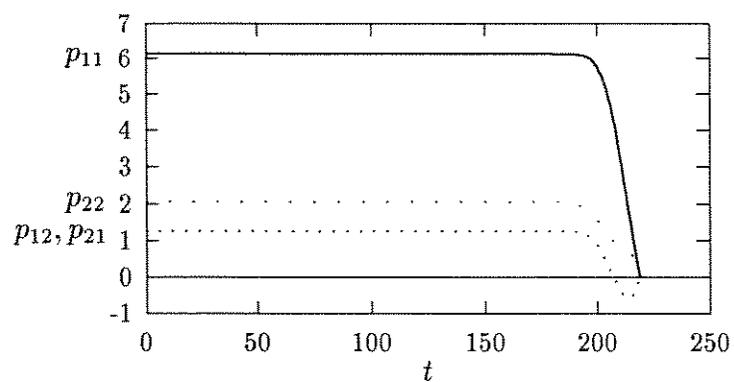
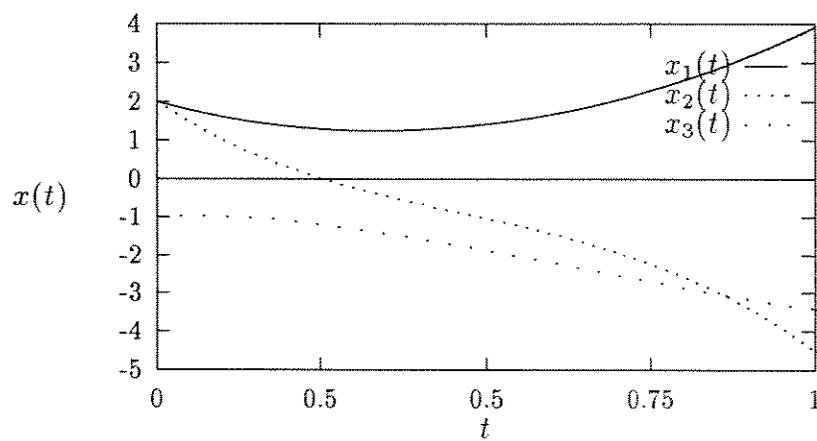
Figura 4.3: Evolução de P - Exemplo 4.2.1.

Figura 4.4: Evolução dos estados - Exemplo 4.2.3.

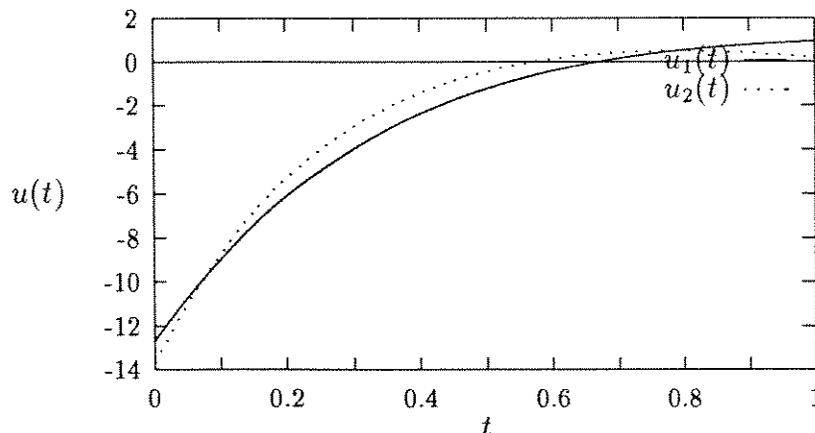


Figura 4.5: Evolução do controle - Exemplo 4.2.3.

te ao procedimento para solução do problema min-max.

4.6 Formulação do Problema de Múltiplos Alvos

Imagine o seguinte cenário: numa reunião que decidirá quais pontos estratégicos serão atingidos por ataques de mísseis, os oficiais se deparam com dois dilemas. No primeiro, um alvo de extrema importância não possui uma posição bem definida e sim uma série de possíveis posições e no segundo, em determinada região existem vários alvos com coordenadas e importâncias distintas. Em ambos os casos seria extremamente caro e ineficiente enviar um míssil para cada posição. Então, decidindo-se por enviar apenas um míssil, como escolher a melhor coordenada em relação à posição de maior probabilidade ou importância. Estes comentários servem de motivação para o Problema de Múltiplos Alvos (PMA), que possui uma natureza multicritério e cuja solução será discutida nas próximas seções.

Em um trabalho posterior ao que foi discutido na Seção 2.7, Medanić e Andjelić (1971) usam teoria de jogos para a formulação do PMA. Tem-se então o problema

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} \max_{i \in I} J_i(u(\cdot)) \quad & i = 1, 2, \dots, m \\ \text{s.a.} \quad & \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

sendo

$$J_i(u(\cdot)) = \frac{1}{2}(x(T) - x^i)'F(x(T) - x^i) + \frac{1}{2} \int_0^T \{(x - x^i)'Q(x - x^i) + u'Ru\} dt. \quad (4.13)$$

onde os vetores x^i representam as coordenadas das posições que serão levadas em conta no problema.

Apesar de possuir uma formulação semelhante ao problema min-max, discutido nas seções anteriores, o caráter multicritério do PMA está nas diversas coordenadas (x^i , $i = 1, m$) que são referências para o estado final de um mesmo sistema e portanto cada critério terá as mesmas matrizes de parâmetros Q , R e F , enquanto que no problema min-max o caráter multicritério está exatamente nestas matrizes. Perceba que, como no problema min-max, esta formulação não possui um ponto de sela, sendo necessário fazer uma transformação através do problema ponderado

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot)} \max_{w \in W} \sum_{i=1}^m w_i J_i(u(\cdot)) \\ \text{s.a. } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde W está definido em (1.2). A seguir tem-se o exemplo que foi usado como ilustração para o problema de múltiplos alvos.

Exemplo 4.6.1 - (Medanić e Andjelić, 1972)

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T = 1, \\ Q &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ x^1 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.7 Solução por Medanić e Andjelić

Os Teoremas 2.2 e 2.3 são invocados para mostrar que o problema (4.14) possui um ponto de sela e que a solução de (4.14) é também solução de (4.12).

Com a propriedade de ponto de sela de (4.14) é possível permutar os operadores min-max

$$\min_{u(\cdot)} \max_{w \in W} \sum_{i=1}^m w_i J_i(u(\cdot)) = \max_{w \in W} G(w) \quad (4.15)$$

onde

$$\begin{aligned} G(w) &= \min_{u(\cdot)} \sum_{i=1}^m w_i J_i(u(\cdot)) \\ &= \min_{u(\cdot)} \frac{1}{2} \int_0^T (x' Q x - 2x' Q x_g + u' R u) dt + \frac{1}{2} x(T)' F x(T) - \\ &\quad - x(T)' F x_g + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i x^{i'} \left(\int_0^T Q dt + F \right) x^i \end{aligned} \quad (4.16)$$

e

$$x_g = \sum_{i=1}^m c_i x^i \quad (4.17)$$

Perceba que (4.16) é equivalente ao Problema do regulador linear não homogêneo, cuja solução é da forma (Medanić e Andjelić, 1972)

$$u(t) = -R^{-1} B' P(t) x(t) - R^{-1} B' V(w, t) x_g, \quad t \in [0, T], \quad (4.18)$$

para a trajetória

$$\dot{x} = (A - SP)x - SV x_g, \quad x(0) = x_0, \quad (4.19)$$

e para o valor do critério de desempenho¹

$$\begin{aligned} G(w) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m w_i x^{i'} \left(\int_0^T Q dt + F \right) x^i + \frac{1}{2} x_0' P(w, 0) x_0 + \\ &\quad + x_0' V x_g - \frac{1}{2} x_g' \left(\int_0^T V S V dt \right) x_g \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $P(\cdot)$ satisfaz à equação matricial de Riccati (2.11) e $V(w, \cdot)$ satisfaz à equação diferencial matricial linear

$$\dot{V} + (A - SP)' V - Q = 0, \quad V(T) = -F, \quad (4.21)$$

$$S = BR^{-1} B' \quad (4.22)$$

A solução para o problema (4.14) consiste agora em resolver o problema de maximização

$$\max_{w \in W} G(w). \quad (4.23)$$

que é o ponto de maior dificuldade no desenvolvimento do algoritmo proposto pelos autores.

¹Observe que as matrizes A , B , Q , R e F podem ser variantes no tempo, que foi o caso considerado pelo autor. Manteve-se a notação original.

Para entender melhor o comportamento da solução do PMA com a condição inicial, os autores mostram que, como o controle calculado por (4.18) só depende de w através do seu segundo termo e mesmo assim a dependência é linear, é possível estabelecer uma relação entre o controle ótimo $u^*(\cdot) = u(w^*, \cdot)$ e a dependência de w^* com a condição inicial x_0 .

Primeiro os autores lembram que, como no problema min-max, o plano de fase do PMA é dividido em subregiões de acordo com a condição inicial, sendo que agora pode haver subregiões vazias. Por outro lado existem regiões onde w^* não depende do estado inicial (caso em que algum $w_i^* = 1$). As regiões de interesse são aquelas em que o valor do vetor ponderação w é função do estado inicial. Estas regiões são aquelas em que existem mais de um $w_i^* > 0$, pois neste caso os valores das componentes de w^* dependem do valor de x_0 .

Considerando uma região particular, onde apenas $1 < k \leq m$ componentes do vetor w são maiores que zero, representadas pelo conjunto $R \triangleq \{j : w_j > 0\}$, é necessário obter a dependência apenas de w_j , $j \in R$ com a condição inicial, uma vez que as outras componentes são conhecidas, pois são iguais a zero. Introduzindo o Multiplicador de Lagrange λ associado à restrição $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ na função (4.20) e diferenciando em relação a w_j e λ , têm-se as seguintes condições de otimalidade para o problema de maximização:

$$\sum_{j \in R} w_j x^{i'} M x^j - \lambda = \frac{1}{2} x^{i'} (N + F) x^i + x_0' V x^i, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.24)$$

$$\sum_{j \in R} w_j = 1 \quad (4.25)$$

onde

$$M = \int_0^T V' S V dt \quad (4.26)$$

$$N = \int_0^T Q dt \quad (4.27)$$

Colocando as condições de otimalidade (4.24)-(4.25) na forma matricial e assumindo, sem perda de generalidade, que as k primeiras componentes de w são positivas, obtém-se

$$Z \begin{vmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_k^* \\ \lambda \end{vmatrix} = z(x_0), \quad (4.28)$$

onde

$$Z = \left[\begin{array}{c|ccc} & & & -1 \\ & & & -1 \\ & E & & \vdots \\ & & & -1 \\ \hline & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right], \quad z(x_0) = \left| \begin{array}{c} +\frac{1}{2}x^{1'}(N+F)x^1 + x_0'Vx^1 \\ \vdots \\ +\frac{1}{2}x^{k'}(N+F)x^k + x_0'Vx^k \\ 1 \end{array} \right| \quad (4.29)$$

e cada elemento de $E \in \mathcal{R}^{k \times k}$ é definido como $E_{ij} = x^i M x^j$.

Tem-se finalmente a expressão que explicita a dependência de w^* com a condição inicial x_0

$$\left| \begin{array}{c} w_1^* \\ \vdots \\ w_k^* \\ \lambda \end{array} \right| = Z^{-1}z(x_0), \quad (4.30)$$

Perceba que, como Z é independente de x_0 e z é uma função linear de x_0 , então w^* é também uma função linear da condição inicial. Porém esta linearidade muda com a transição de uma subregião para outra no plano de fase, caracterizando uma dependência linear por partes de w^* em função de x_0 .

Para o caso do sistema em malha fechada, sabe-se que a estratégia de controle será função do estado corrente e do valor acumulado dos critérios durante o intervalo de tempo decorrido. Este valor acumulado até o instante t será representado por

$$J_i \triangleq \frac{1}{2} \int_0^t ((x - x^i)'Q(x - x^i) + u'Ru) dt, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.31)$$

O problema (4.14) fica então na forma

$$\max_{w \in W} \left(\sum_{i=1}^m w_i J_i + G(w) \right), \quad (4.32)$$

sendo que agora o controle se refere ao intervalo $[t, T]$.

Fazendo um desenvolvimento análogo ao que foi feito no caso do sistema em malha aberta chega-se à seguinte relação entre o vetor w^* , o estado corrente e o vetor $J = [J_1, J_2, \dots, J_k]'$.

$$\left| \begin{array}{c} w_1^* \\ \vdots \\ w_k^* \\ \lambda \end{array} \right| = Z^{-1}z(x_0) + Z^{-1} \left| \begin{array}{c} J_1 \\ \vdots \\ J_k \\ 0 \end{array} \right|, \quad (4.33)$$

Perceba que agora o vetor ponderação w^* passa a ser uma função linear por partes do estado corrente e do vetor J . Conseqüentemente, através de (4.18), esta mesma dependência se reflete no controle.

Apesar da facilidade de se encontrar uma solução analítica para a função de maximização (4.23), o que tornaria o procedimento extremamente simples, a impossibilidade de se determinar com precisão as fronteiras das diversas subregiões fez os autores optarem por uma estratégia baseada no algoritmo do gradiente projetado, que foi apresentado na Seção 4.3. Neste caso, como as equações (2.11) e (4.21) são independentes de x_0 , o passo em que são computadas fica fora do laço de maximização, diminuindo o esforço computacional e facilitando o procedimento, principalmente para o sistema em malha aberta. Para o caso do sistema em malha fechada, novas matrizes P , V , e M devem ser computadas após a atualização de $t = t + \Delta t$. Abaixo é apresentado o algoritmo desenvolvido pelos autores para o sistema em malha fechada.

Algoritmo de Medanić e Andjelić - PMA

Passo 1 - Dado o Sistema

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

e o conjunto de critérios de desempenho

$$J_i(u(\cdot)) = \frac{1}{2}(x(T) - x^i)'F(x(T) - x^i) + \frac{1}{2} \int_0^T ((x - x^i)'Q(x - x^i) + u'Ru)dt, \quad i = 1, \dots, m,$$

escolha $w^0, \in W, \Delta t, h, \varepsilon$. Faça $J = 0, k = 0$ e $t = 0$.

Passo 2 - Calcule $P^k(0), V^k(0)$ e $M^k(0)$ a partir de

$$\begin{aligned} \dot{P}^k + P^k A + A' P^k - P^k S^k P^k + Q &= 0, & P^k(T) &= F, \\ \dot{V}^k + (A - S P^k)' V^k - Q &= 0, & V^k(T) &= -F, \\ \dot{M}^k - V^{k'} S V^k &= 0, & M^k(t) &= 0 \end{aligned}$$

$$S^k = B R^{k-1} B'.$$

Passo 3 - Calcule x_g a partir de

$$x_g = \sum_{i=1}^m w_i x^i$$

Passo 4 - Encontre as componentes do gradiente a partir de

$$\nabla G_i^k = \frac{1}{2} x^{i'} (N + F) x^i + x_0' V x^i - x^{i'} M x_g + J_i, \quad i = 1, \dots, m$$

e do Gradiente Projetado a partir de

$$\nabla G p^k = [I - E'(EE')^{-1}E] \nabla G^k.$$

Passo 5 - Encontre o novo valor do vetor ponderação w

$$w^{k+1} = w^k + h \nabla G p^k$$

Se a norma de $\nabla G p^k$ for menor que ε vá ao Passo 6, caso contrário volte ao Passo 2.

Passo 6 - Encontre o valor de $x(t + \Delta t)$ a partir de

$$\dot{x} = (A - SP)x - SVx_g, \quad x(0) = x_0$$

e de $J(t + \Delta t)$ a partir de

$$\dot{J}_i = (x - x^i)' Q (x - x^i) + u' R u, \quad J_i(0) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Se t for maior do que T pare. Caso contrário faça

$$t \leftarrow t + \Delta t, \quad x_0 \leftarrow x(t + \Delta t) \quad \text{e} \quad J_0 \leftarrow J(t + \Delta t)$$

e volte ao Passo 2.

Este algoritmo foi executado para encontrar a solução do Exemplo 4.6.1. A divisão do plano de fase nas diversas subregiões, em função da condição inicial, é mostrada na Figura 4.6. Perceba que, as subregiões indicadas com a letra I correspondem àquelas onde todos os elementos do vetor w são estritamente maiores do que zero. Os limites destas subregiões não foram perfeitamente determinados pois, segundo os autores, a precisão necessária para isto exigiria um tempo de computação excessivo.

A Figura 4.7 mostra os valores dos elementos das matrizes P , V , e M no intervalo $[0, T]$ As matrizes P , V , e M são as mesmas qualquer que seja a condição inicial, desde que seja mantido o intervalo de tempo, significando que, caso a condição inicial fosse alterada estas matrizes não precisariam ser recalculadas novamente.

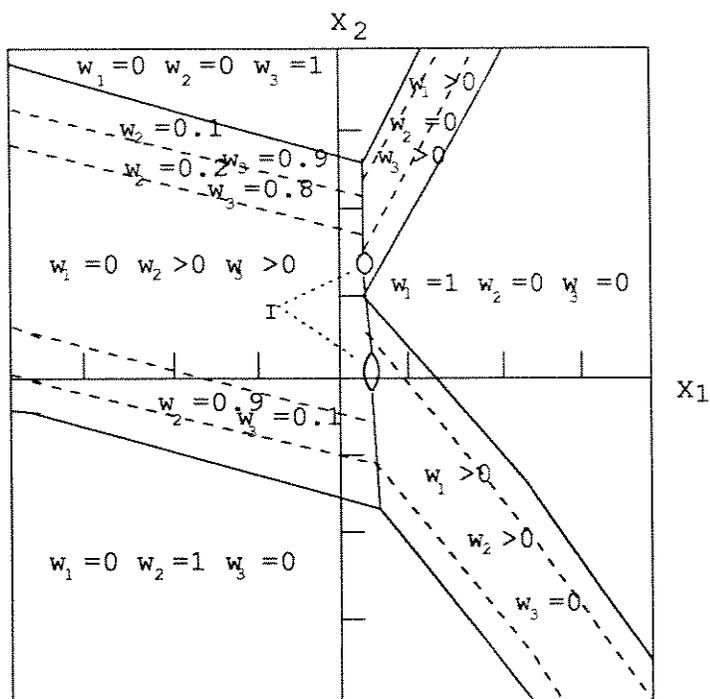


Figura 4.6: Decomposição do plano de fase.

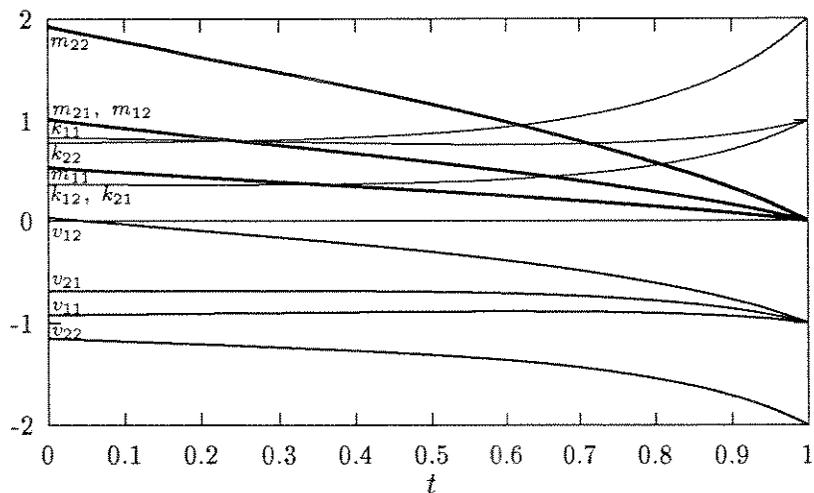


Figura 4.7: Elementos de P , V e M em função do tempo.

4.8 Solução por Programação Convexa

Nesta seção o problema de múltiplos alvos será resolvido através do Algoritmo Básico. Da mesma forma que no problema min-max, a norma l_p , $p = \infty$ fará o papel de $\mathcal{V}(\cdot)$, sendo que $\underline{y} = 0$. O problema fica então formulado como segue

$$\min_{y \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{C}} \|y\|_{\infty}. \quad (4.34)$$

Para implementar o nível de decisão foi utilizada as facilidades do *MATLAB*, já citado anteriormente. Com isso inexisteu qualquer dificuldade computacional nesta etapa do procedimento.

O nível de análise consiste no seguinte problema

$$\max_{w \in W} \min_{u(\cdot)} \langle w, J(u(\cdot)) - y \rangle \quad (4.35)$$

$$s.a \quad \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0,$$

O fato do PMA ser um problema do tipo min-max faz com que a formulação do nível de análise seja idêntica ao problema resolvido por Medanić e Andjelić, visto na seção anterior. Além disso, como no PMA para problemas lineares-quadráticos, a exemplo do que ocorre para o problema min-max, é garantida a diferenciabilidade da função dual em qualquer ponto do seu domínio, poderá ser feito uso de um método baseado em gradiente projetado para resolver o nível de análise.

Os aspectos computacionais da implementação do Algoritmo Básico são os mesmos feitos para o problema min-max na Seção 4.5, acrescentando-se o fato de que, como a equação de Riccati (2.11) e a equação que determina $V(\cdot)$ (4.21) são independentes de x^0 , só precisam ser resolvidas uma vez para malha aberta e uma vez a cada passagem pelo nível de análise para malha fechada, diminuindo o esforço computacional em relação ao problema min-max visto na primeira parte deste capítulo. Durante a execução foi observado que, apesar da solução do problema min-max encontrada no nível de análise satisfazer o problema no nível de decisão (pois $p = \infty$), o que teoricamente levaria o algoritmo a encontrar a solução na primeira iteração ($\theta(y^0) < \epsilon$), sempre que o problema linear do nível de decisão não era inicializado com o valor de w^0 encontrado pelo nível de análise, este encontrava uma nova solução y^1 em que $|\theta(y^1)| > \epsilon$, fazendo com que o algoritmo levasse várias iterações para encontrar a solução desejada. Este comportamento deve-se ao fato de que, como o nível de decisão está formulado no espaço dos objetivos, o plano de corte determinado por w pode coincidir com uma aresta da curva de trade-off, fazendo com que a norma infinito encontre soluções múltiplas. Desta forma não se garante que a solução encontrada pelo nível de decisão seja uma solução eficiente (ver na Figura 4.8 uma representação em duas dimensões de como o decisor pode encontrar soluções múltiplas).

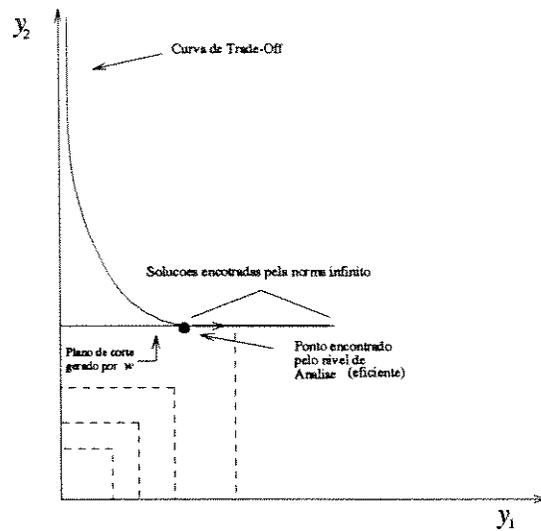


Figura 4.8: Soluções múltiplas usando norma infinito.

Este problema foi facilmente contornado inicializando-se o nível de decisão com o valor de w^0 , o que computacionalmente falando, equivale a dar ao problema (4.34) uma solução factível inicial que, no caso, equivale à solução ótima devido à natureza das soluções encontradas pela formulação min-max (análise) e norma infinito (decisão).

R	T	y_1	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$J_3(u)$
0,1	1	6,45	5,22	8,42	0	0,50	0,50	6,45	5,22	8,42
0,1	10	28,10	28,08	29,92	0	0,50	0,50	28,10	28,08	29,92
1	1	7,90	3,94	11,18	0	0,50	0,50	7,90	3,94	11,18
1	10	26,35	28,97	27,36	0	0,50	0,50	26,35	28,97	27,36

Tabela 4.4: Resultados encontrados - abordagem via projeção .

A Tabela 4.4 apresenta os resultados encontrados, todos na primeira iteração. Note que aparentemente o primeiro alvo é ignorado, sendo considerados apenas os outros dois na solução do problema. Isso deve-se ao fato de ser possível integrar ao problema preferências sobre os alvos. No caso estas preferências estão incorporadas nas matrizes Q e F que compõem o problema. Como estas ponderam mais a 2ª coordenada da trajetória do sistema, a solução tende a minimizar esta coordenada (ver Figura 4.10). O algoritmo foi executado para dois valores de R ($R = 1$ e $R = 10$) com $T = 5$, cujos resultados podem ser verificados na Figura 4.9, e para horizontes de tempo $T = 1$ e $T = 10$ para $R = 1$, que estão na Figura 4.10, com o intuito

de observar a influência da ponderação sobre o controle na trajetória do sistema, e de se proporcionar maior tempo para o sistema evoluir. Através da Figura 4.9 fica visível que, diminuindo a ponderação sobre o controle, o sistema pode gastar mais energia e em consequência, a trajetória é mais rápida e a solução mais próxima dos alvos de maior interesse.

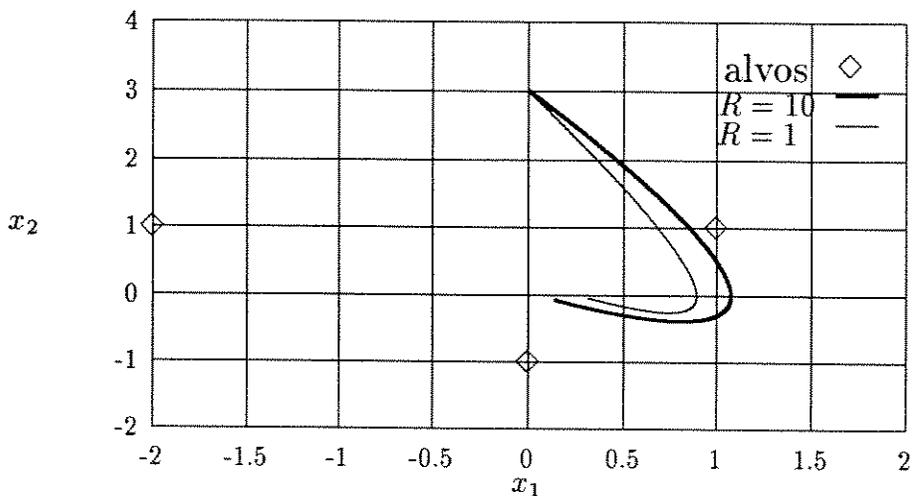


Figura 4.9: Plano de Fase Ex. 4.6.1 - T fixo, R variável.

4.9 Formulação do Problema de Salukvadze

Uma forma razoável de se selecionar um controle dentre o conjunto de controles eficientes Γ é compará-lo à solução utópica ou ideal do problema (vetor \underline{y}). O controle a ser escolhido como solução será o que minimize a distância entre a solução utópica e o conjunto Γ . É nisso que consiste o problema de Salukvadze, que será discutido nesta seção, onde a distância entre \underline{y} e Γ é medida nos termos da norma l_p , $p \geq 1$.

O problema de Salukvadze é equivalente ao seguinte problema, formulado no espaço dos critérios

$$\min_{\underline{y} \in \mathcal{Y} \cap \mathcal{C}} l_p = \left(\sum_{i=1}^m (y_i - \underline{y}_i)^p \right)^{1/p} \quad p \geq 1 \quad (4.36)$$

Os valores de p mais frequentemente usados, como visto na Seção 3.9, são $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$. Nas próximas seções, a solução do problema de Salukvadze será ilustrada através do Exemplo 4.2.3, apresentado no início deste capítulo.

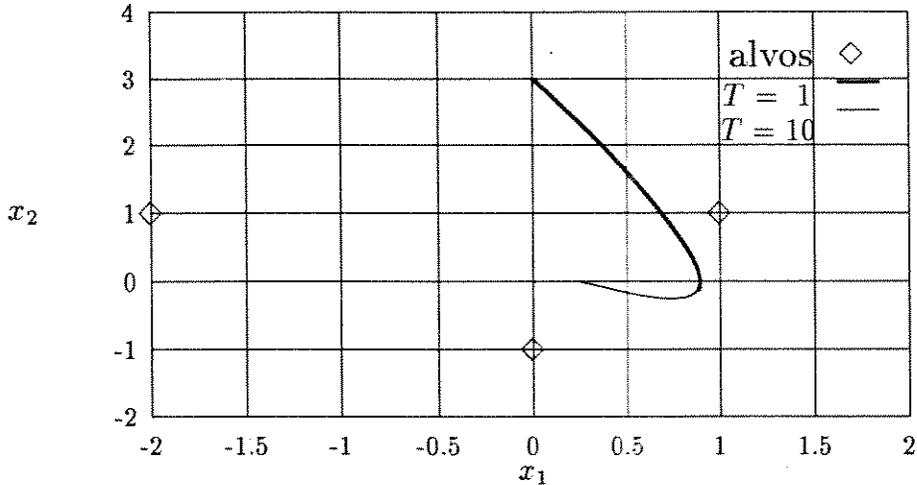


Figura 4.10: Plano de fase Ex. 4.6.1 - R fixo, T variável.

4.10 Solução por Duan Li

Analogamente ao que foi feito para a solução do problema min-max, Duan Li (1990b) aplica algumas propriedades do problema linear quadrático, tais como diferenciabilidade e convexidade, para propor um procedimento, em que a busca da solução do problema de Salukvadze consiste em encontrar o vetor w cujas componentes que são estritamente maiores do que zero equalizem a expressão

$$\frac{\partial \hat{J} / \partial J_i}{w_i}, \quad w_i > 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.37)$$

onde

$$\hat{J} \triangleq \sum_{i=1}^m (J_i(u(\cdot)) - \underline{y}_i)^p, \quad p \geq 1 \quad (4.38)$$

O algoritmo proposto para resolver o problema de Salukvadze é o mesmo apresentado pelo autor para o problema min-max, sendo que (4.8) é substituída pela expressão (4.37).

O autor apresenta os resultados relativos ao Exemplo 4.2.3 para a norma l_p , $p = 2$. Neste caso

$$\hat{J} = (J_1(u(\cdot)) - 22,39)^2 + (J_2(u(\cdot)) - 12,39)^2 + (J_3(u(\cdot)) - 8,32)^2 \quad (4.39)$$

A seguir, têm-se os resultados obtidos pelo autor para o referido exemplo. Para tal, durante a execução do procedimento o valor de c foi de 0,0005 e o procedimento termina quando a diferença entre os elementos de (4.37) não for maior do que

0,015. As outras condições de operação são as mesmas utilizadas para a execução do procedimento que resolve o problema min-max (Seção 4.4).

k	w_1	w_2	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$J_3(u)$	$\frac{\partial J/\partial J_1}{w_1}$	$\frac{\partial J/\partial J_2}{w_2}$	$\frac{\partial J/\partial J_3}{w_3}$
1	0,20000	0,40000	39,94	37,87	26,45	175,53	127,40	90,6428
2	0,24244	0,40000	35,10	38,34	28,76	104,83	129,76	114,33
3	0,22998	0,41246	36,34	37,62	28,75	121,37	122,34	114,30
4	0,22998	0,41648	36,36	37,41	28,99	121,52	120,16	116,92
5	0,23228	0,41648	36,13	37,42	29,13	118,29	120,22	118,48
6	0,23132	0,41745	36,23	37,37	29,12	119,66	119,67	118,47
7	0,23132	0,41805	36,23	37,34	29,16	119,68	119,35	118,88
8	0,23172	0,41805	36,19	37,34	29,19	119,12	119,36	119,15
9	0,23159	0,41817	36,20	37,33	29,19	119,29	119,29	119,15
10	0,23159	0,41824	36,20	37,33	29,19	119,29	119,26	119,20
11	0,23164	0,41824	36,20	37,33	29,19	119,23	119,26	119,23
12	0,23163	0,41825	36,20	37,33	29,19	119,25	119,25	119,23
13	0,23163	0,41826	36,20	37,33	29,19	119,25	119,25	119,24

Tabela 4.5: Iterações obtidas pelo procedimento de Duan Li, $p = 2$.

4.11 Solução por Programação Convexa

A implementação do Algoritmo Básico para encontrar a solução do problema de Salukvadze segue basicamente o que foi feito para resolver o problema min-max. O nível de análise permanece o mesmo, enquanto que o nível de decisão muda com o tipo de norma usada ($p = 1, 2$ ou ∞ , ver Seção 3.9). O procedimento foi executado para as três normas, sendo que os dados obtidos em cada uma estão distribuídos em tabelas, apresentadas a seguir. Para $p = 1$ e $p = \infty$ o nível de decisão consiste em um problema linear, enquanto que para $p = 2$ o problema é quadrático (ver Seção 3.9), todos resolvidos através da aplicação direta de funções do *MATLAB*. Como o nível de análise é o mesmo do problema min-max, os comentários acerca da execução do procedimento são os mesmos feitos na Seção 4.5.

A Tabela 4.6 apresenta os valores obtidos a cada iteração pelo Algoritmo Básico durante a solução do problema de Salukvadze para $p = 1$, enquanto que a Tabela 4.7 faz o mesmo $p = 2$. O resultado para $p = \infty$ pode se conferido em (4.40). A Figura 4.11 descreve o comportamento de convergência do algoritmo nos três casos considerados ($p = 1, p = 2$ e $p = \infty$). Note que o número de iterações variou em

k	y_1	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$J_3(u)$
0	22,39	12,39	8,32	0,181	0,483	0,336	43,28	33,38	29,59
1	22,39	56,00	8,32	0,170	0,000	0,830	33,63	63,94	19,69
2	22,39	46,50	21,99	0,477	0,183	0,340	26,55	50,62	26,14
3	22,39	32,97	41,43	0,522	0,317	0,161	25,54	36,13	44,58
4	28,49	38,81	29,74	0,332	0,358	0,310	29,67	39,97	31,00
5	32,31	47,09	19,96	0,222	0,209	0,569	34,17	48,75	21,78
6	29,44	45,56	24,79	0,312	0,261	0,419	30,06	46,21	25,45
7	26,90	44,21	29,08	0,426	0,270	0,304	27,29	44,60	29,49
8	29,55	42,53	28,18	0,227	0,319	0,351	29,72	42,37	28,40
9	28,25	40,93	31,42	0,374	0,333	0,293	28,40	41,06	31,57
10	30,51	39,71	30,40	0,310	0,368	0,322	30,60	39,83	30,51
11	29,48	41,24	29,98	0,337	0,340	0,323	29,50	41,27	30,04
12	30,81	41,10	28,85	0,304	0,348	0,348	30,82	41,14	28,91
13	30,06	41,66	29,06	0,321	0,337	0,342	30,08	41,67	29,06
14	29,41	42,14	29,23	0,339	0,327	0,334	29,42	42,14	29,26
15	29,79	41,53	29,46	0,330	0,337	0,333	29,78	41,55	29,48
16	29,41	41,64	29,63	0,337	0,334	0,328	29,49	41,65	29,67

Tabela 4.6: Solução do Exemplo 4.2.3 para $p = 1$.

relação ao tipo de norma usada. Como era de se esperar, para $p = \infty$ o método gera a solução ótima na primeira iteração, enquanto que para $p = 1$ o método precisou de mais iterações para encontrar a solução devido às características de linearidade do problema relaxado (Nível de Decisão).

k	y_1	y_2	y_3	w_1	w_2	w_3	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$J_3(u)$
0	22,39	12,39	8,32	0,181	0,483	0,336	43,48	33,55	29,61
1	32,50	39,40	27,11	0,263	0,366	0,371	33,24	40,20	27,93
2	36,44	36,17	29,64	0,227	0,435	0,348	36,58	36,38	29,92
3	35,79	38,07	28,27	0,233	0,403	0,364	35,84	38,10	28,36
4	36,05	37,22	29,19	0,232	0,419	0,359	36,03	37,21	29,26
5	36,17	37,32	29,04	0,231	0,418	0,351	36,14	37,29	29,09

Tabela 4.7: Solução do Exemplo 4.2.2 para $p = 2$.

Abaixo tem-se a solução encontrada para $p = \infty$.

$$\begin{aligned}
 y_1 &= 43,59 & w_1 &= 0,181 & J_1(u(\cdot)) &= 43,48 \\
 y_2 &= 33,60 & w_2 &= 0,482 & J_2(u(\cdot)) &= 33,63 \\
 y_3 &= 29,52 & w_3 &= 0,337 & J_3(u(\cdot)) &= 29,53
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

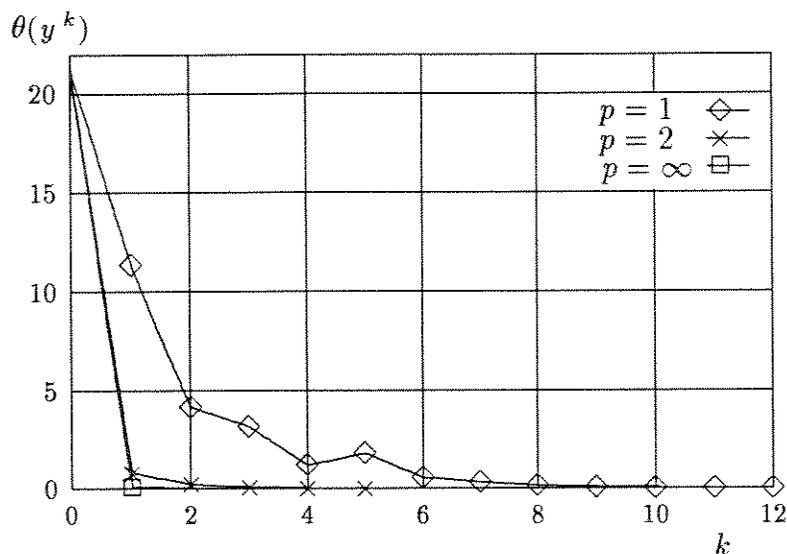


Figura 4.11: Convergência do Algoritmo - $p = 1$, $p = 2$ e $p = \infty$.

Com relação ao procedimento proposto por Duan Li, o Algoritmo Básico possui a vantagem de não depender da diferenciabilidade do problema para poder ser

aplicado. Além disso, a forma como a abordagem via projeção utiliza propriedades de conjuntos convexos para transformar um problema de difícil geometria, que é o problema no espaço das variáveis de controle, para um problema de grande simplicidade, como o mesmo problema no espaço dos critérios, torna a solução, representada pelo Algoritmo Básico, muito elegante do ponto de vista matemático. Outra questão a ser levantada sobre a abordagem de Duan Li é que o procedimento possui sua eficiência intimamente ligada à região do plano de fase no qual será inicializado. Se por uma infelicidade a inicialização do procedimento for feita em uma região em que o vetor w^* solução tenha $m - 1$ elementos iguais a zero e um elemento igual a um, o procedimento passará por todas as possibilidades até chegar a esta conclusão.

4.12 Formulação do Problema de Tempo e Energia Mínimos

Um problema clássico de controle ótimo é o Problema de Tempo e Energia Mínimos onde, dado um sistema dinâmico linear, procura-se o controle que reflita um certo compromisso entre o tempo necessário para levar o sistema do seu estado inicial a um estado final desejado e a energia dispendida para tal. Sendo assim o problema é formulado como segue

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J_1(u(\cdot)) &= \int_0^T dt \\ \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J_2(u(\cdot)) &= \int_0^T \|u(t)\|_R^2 dt, \quad R = R' > 0 \\ \text{s.a} \quad \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde $J_1(u(\cdot))$ representa tempo decorrido e $J_2(u(\cdot))$ o gasto de energia. Vale a pena ressaltar o caráter conflitante destes dois critérios, pois quanto mais rápida deva ser a ação do controle sobre o sistema no sentido de deslocá-lo do seu estado inicial ao estado desejado mais energia terá que ser gasta e, por outro lado, quanto menos energia disponível tiver o sistema mais tempo levará para alcançar o objetivo. Note que os dois critérios são convexos permitindo com isso a aplicação do Algoritmo Básico.

Para ilustrar como o Algoritmo Básico foi usado para resolver o problema de

tempo e energia mínimos, escolheu-se o seguinte exemplo.

Exemplo 4.12.1 - (Kirk, 1970)

$$\begin{aligned} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J_1(u(\cdot)) &= \int_0^T dt \\ \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J_2(u(\cdot)) &= \int_0^T u(t)^2 dt \\ \text{s.a} \quad \dot{x} &= -x(t) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0 \end{aligned} \tag{4.42}$$

sendo que $\mathcal{U} = \{u(\cdot) : |u(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$.

4.13 Solução por Programação Convexa: Nível de Análise

O nível de análise do Algoritmo Básico para o problema tratado consiste em

$$\max_{w \in W} \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} w_1 J_1(u(t)) + w_2 J_2(u(t)) - [w_1 y_1 + w_2 y_2] \tag{4.43}$$

Considerando primeiramente apenas a etapa de minimização, tem-se

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} w_1 J_1(u(t)) + w_2 J_2(u(t)) - [w_1 y_1 + w_2 y_2] \tag{4.44}$$

cuja solução independe do vetor y . Consequentemente a etapa de minimização

possui como solução $u^*(w, \cdot)$ (Kirk, 1970)

$$u^*(w, t) = \begin{cases} x(t) - \sqrt{(x(t))^2 + \beta}, & \text{para } 0 < \frac{\beta - 1}{2} < x(t) \\ -1, 0, & \text{para } 0 < x(t) \leq \frac{\beta - 1}{2} \\ +1, 0, & \text{para } -\frac{\beta - 1}{2} \leq x(t) < 0 \\ x(t) + \sqrt{(x(t))^2 + \beta}, & \text{para } x(t) < -\frac{\beta - 1}{2} < 0 \\ 0, & \text{para } x(t) = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

onde $\beta = \frac{w_1}{w_2}$ e T é o instante em que $x(T) = 0$.

A unicidade da solução (Kirk, 1970) presta um importante papel para a solução da etapa de maximização, pois garante a diferenciabilidade de $G(w)$ e consequentemente a existência do gradiente em todo o domínio, sendo que

$$\nabla G(w) = J(u^*(w, \cdot)) \quad (4.46)$$

Perceba que, como $w_2 = 1 - w_1$ o problema de maximização é na realidade unidimensional em w_1 . Contudo, por uma questão de generalidade, manteve-se o uso do método do gradiente projetado para resolver o problema no nível de análise.

4.14 Solução por Programação Convexa: Nível de Decisão

Como foi visto na Seção 3.4, o problema a ser resolvido no nível de decisão do Algoritmo Básico consiste em

$$\min_{y \in \mathcal{Y}^k} \mathcal{V}(y) \quad (4.47)$$

onde $\mathcal{V}(\cdot)$ é uma função crescente com respeito a y .

Para resolver (4.47) optou-se pelo método de *Frank-Wolfe*, não só pela facilidade de implementação, pois a cada iteração é resolvido um problema de programação linear a partir de uma aproximação de $\mathcal{V}(\cdot)$, mas principalmente porque este método

está intimamente associado ao método de *Geoffrion, Dyer, Feinberg* (Geoffrion et al., 1972) para a resolução interativa de problemas multicritério, que resolve problemas com $\mathcal{V}(\cdot)$ implícita. A seguir tem-se a implementação do nível de decisão a partir do algoritmo de Frank-Wolfe

Passo 1 Escolha $y^0 \in \mathcal{Y}^k$ e faça $l = 0$

Passo 2 Resolva o problema linear

$$\xi^l = \arg \min_{\xi \in \mathcal{Y}^k} \nabla \mathcal{V}(y^l)' \xi$$

e calcule a direção

$$d^l = \xi^l - y^l$$

Passo 3 Determine o passo ótimo α^l resolvendo a busca unidimensional

$$\min_{0 \leq \alpha \leq 1} \mathcal{V}(y^l + \alpha d^l)$$

Passo 4 Faça $y^{l+1} = y^l + \alpha^l d^l$. Se $\|y^{l+1} - y^l\| < \epsilon$, sendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno então pare. Caso contrário, faça $l = l + 1$ e volte ao Passo 2.

Para o exemplo proposto na Seção 4.12 foi adotada como função valor

$$\mathcal{V}(y) = v_1 e^{y_1} + v_2 e^{y_2} \quad (4.48)$$

por ser esta, dentre as funções sugeridas por Geoffrion (1966), a que melhor evidencia o aspecto de que, qualquer que seja a função valor considerada, o problema no nível de decisão será sempre de fácil tratamento. Note que, o problema a ser resolvido é o seguinte, no espaço das variáveis de controle

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} v_1 e^{\int_0^T dt} + v_2 e^{\int_0^T \|u(t)\|_R^2 dt} \quad (4.49)$$

$$s.a \quad \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

que é de uma complexidade bem maior.

O Exemplo 4.12.1 foi resolvido para $v = [1 \ 1]'$ e para $v = [5 \ 1]'$. Considerou-se como critério de parada para o método do gradiente projetado no nível de análise

$$(G(w^k) - G(w^{k-1})) < 10^{-2}(1 + G(w^{k-1})) \text{ ou } (\|\nabla G_p^k\| < 10^{-2}(\|\nabla G^k\|)^{\frac{1}{3}}) \quad (4.50)$$

e para o método de Frank-Wolfe, no nível de decisão, o critério de parada foi $(y^k - y^{k-1}) < 10^{-6}$, enquanto que o procedimento termina quando $\Theta < 10^3$ (??). Nas

Tabelas 4.8 e 4.9 encontram-se os resultados obtidos para $v = [1 \ 1]'$ e $v = [5 \ 1]'$ respectivamente. Observe que, para o segundo caso o funcional relativo ao tempo possui um peso maior do que o relativo à energia, conseqüentemente o decisor estará mais disposto a um maior gasto de energia para obter uma economia de tempo. As Figuras 4.12 e 4.14 mostram o problema no espaço dos critérios, com as curvas de nível de $\mathcal{V}(\cdot)$, o conjunto Γ bem como $J(u(\cdot))$ em cada iteração e a solução $J(u^*(\cdot))$ encontrada, ilustrando mais claramente a influência da geometria de $\mathcal{V}(\cdot)$ na solução do problema. As Figuras 4.13 e 4.15 mostram a evolução dos estados e do controle do sistema nos dois casos, os instantes em que ocorrem saturações do controle e a sua dependência com o estado. Para o segundo caso a saturação deu-se antes que o primeiro caso, resultando em um maior gasto de energia. Em compensação o sistema chegou mais rápido ao estado final.

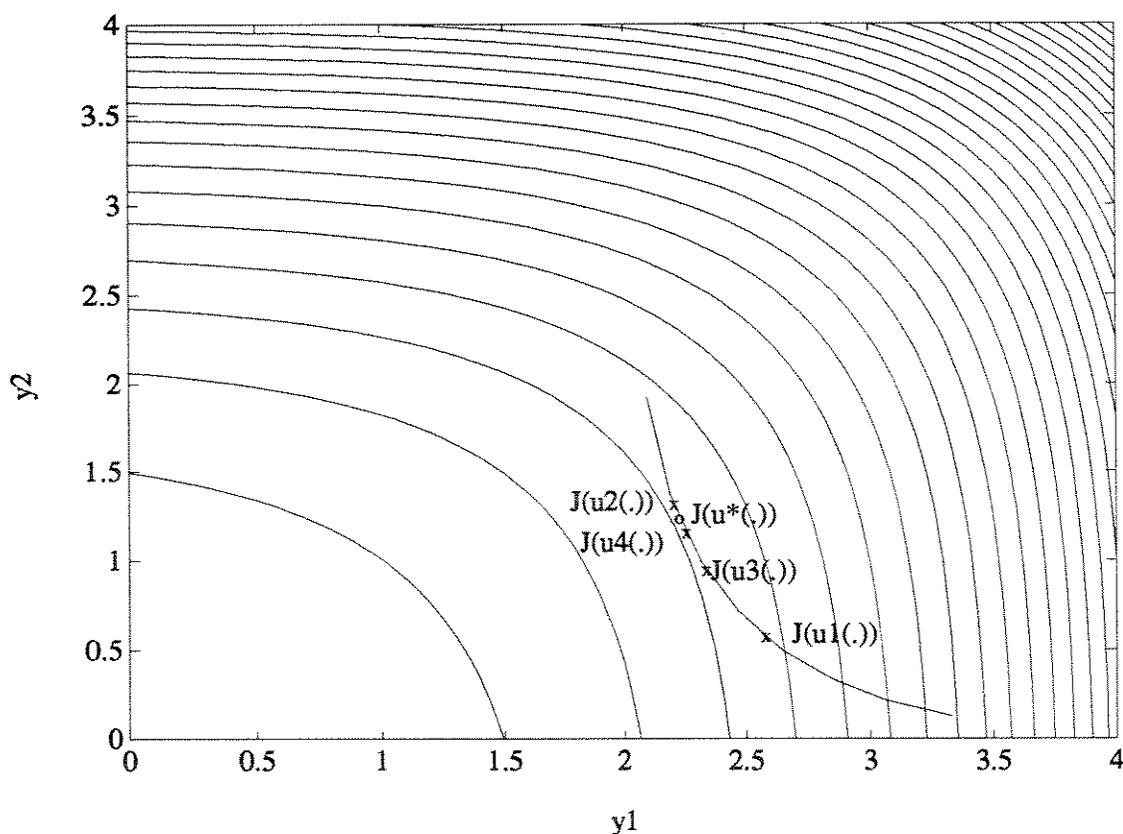


Figura 4.12: Prob. no espaço dos critérios - $v_1 = 1$, $v_2 = 1$.

Como foi mencionado anteriormente, a escolha do método de Frank-Wolfe para resolver o nível de decisão deve-se ao fato deste ser base para a implementação do

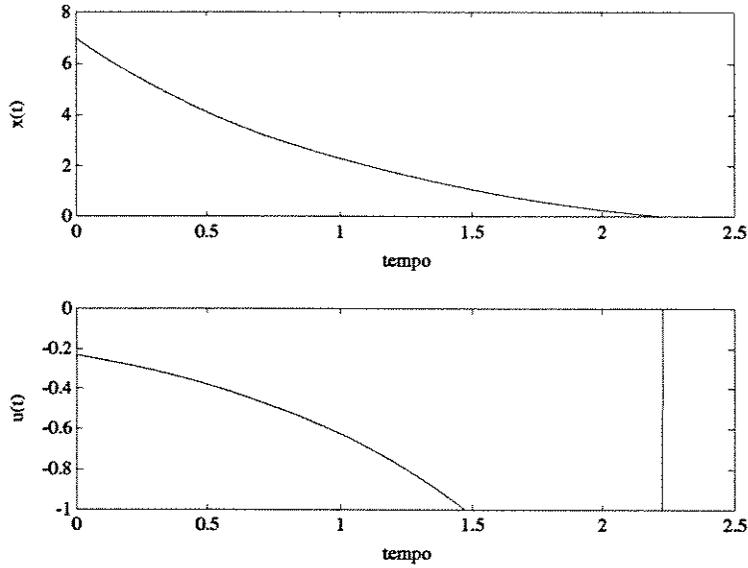


Figura 4.13: Evolução do estado e do controle - $v_1 = 1$, $v_2 = 1$.

k	y_1	y_2	w_1	w_2	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$\Theta(y)$
0	2,0786	0	0,5343	0,4657	2,5783	0,5688	0,5319
1	2,0786	1,1422	0,7845	0,2155	2,2065	1,3085	0,1362
2	2,2915	0,9992	0,6817	0,3183	2,3379	0,9378	0,0121
3	2,2660	1,0918	0,7435	0,2565	2,2567	1,1476	0,0073
4	2,2451	1,1810	0,7657	0,2343	2,2273	1,2292	-0,0024

Tabela 4.8: Solução do Exemplo 4.12.2 para $v_1 = 1$, $v_2 = 1$.

método de Geoffrion et al. para a solução de problemas multicritérios. Esta solução é interativa, ou seja, o decisor, sempre que recebe a solução do nível de análise, informa o quanto é necessário que cada critério aumente ou diminua, orientando o processo de solução do problema. Este tipo de problema envolve a utilização de uma função valor implícita que possua as características descritas no Capítulo 3.

O método de Geoffrion et al. consiste no método de Frank-Wolfe (Seção 4.14),

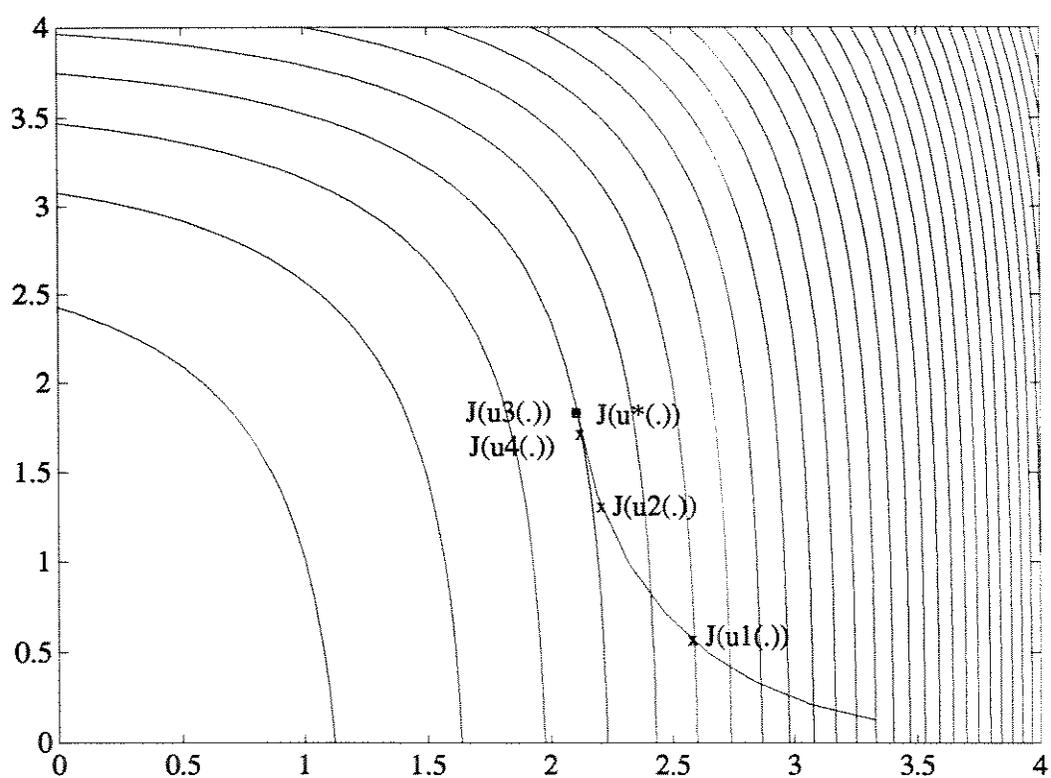


Figura 4.14: Prob. no espaço dos critérios - $v_1 = 5$, $v_2 = 1$.

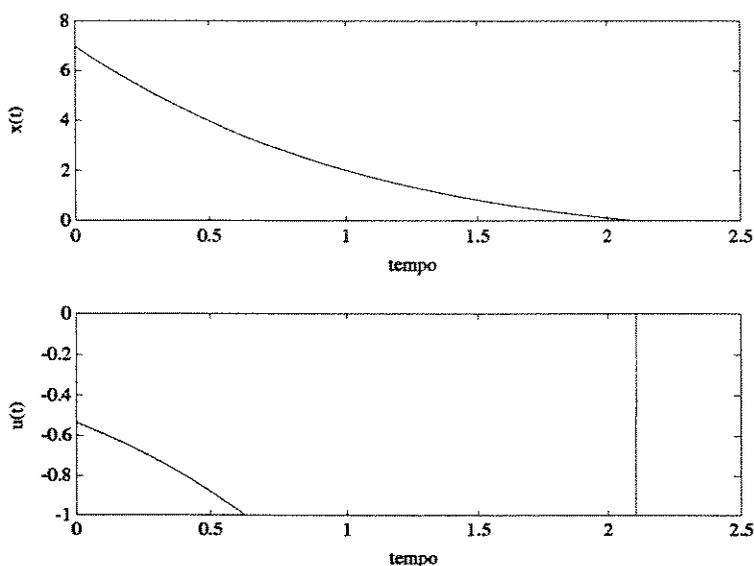


Figura 4.15: Evolução do estado e do controle - $v_1 = 5$, $v_2 = 1$.

k	y_1	y_2	w_1	w_2	$J_1(u)$	$J_2(u)$	$\Theta(y)$
0	2,0786	0	0,5343	0,4657	2,5789	0,5660	0,5308
1	2,0786	1,1400	0,7845	0,2155	2,2063	1,3065	0,1361
2	2,0786	1,7715	0,8857	0,1143	2,1055	1,8342	0,0310
3	2,1246	1,6860	0,8652	0,1348	2,1226	1,7123	0,0018
4	2,1146	1,7637	0,8857	0,1143	2,1055	1,8342	$-2,3 \cdot 10^{-13}$

Tabela 4.9: Solução do Exemplo 4.12.2 para $v_1 = 5$, $v_2 = 1$.

onde os Passos 2, 3 e 4 devem ser executados com o auxílio do decisor, como segue.

Passo 2

Note que

$$\nabla \mathcal{V}(y) = \frac{d\mathcal{V}}{dy}. \quad (4.51)$$

Selecionando-se uma componente de y como referência é possível determinar o

vetor formado pelos trade-off's entre esta referência e as outras componentes de y

$$\tau_i = \frac{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_i}}{\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_j}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (4.52)$$

onde y_j é a componente de referência. Estes trade-off's indicam qual a variação necessária de cada componente de y , a partir de uma variação da referência y_j , de forma a manter $\mathcal{V}(\cdot)$ constante. Como por hipótese $\mathcal{V}(\cdot)$ deve ser crescente com respeito aos seus argumentos, então qualquer que seja a componente de y escolhida como referência tem-se

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y_j} > 0, \quad \forall j \in [1, \dots, m] \quad (4.53)$$

Desta forma, o problema de minimização do Passo 1 do algoritmo de Frank-Wolfe não se altera se for escrito como

$$\xi^l = \arg \min_{\xi \in \mathcal{Y}^l} \tau^l \xi \quad (4.54)$$

Passo 4

O decisor pode indicar qual o valor do passo ótimo α^k a partir da escolha da solução mais adequada entre os vetores $y^k + \alpha d^k$ no intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$. Note que encontra-se aqui outra conveniência na escolha do método de Frank-Wolfe, pois a busca unidimensional é sempre feita neste intervalo.

Passo 5

O procedimento converge quando não for mais possível encontrar uma solução que forneça um decréscimo do valor de $\mathcal{V}(y)$ de tal forma que compense prosseguir. Ou seja, quando o ganho entre duas iterações for menor do que um certo valor pré-estabelecido.

$$\frac{\mathcal{V}(y^l) - \mathcal{V}(y^{l+1})}{\mathcal{V}(y^{l-1}) - \mathcal{V}(y^l)} < \gamma, \quad \gamma > 0. \quad (4.55)$$

A diferença entre o método de Frank-Wolfe e o de Geoffrion et al. é que o primeiro pode ser usado com uma função valor explícita $\mathcal{V}(\cdot)$ que permite o cálculo do valor de seu gradiente no ponto y^l , enquanto que o segundo não utiliza explicitamente $\mathcal{V}(\cdot)$,

porém possui a informação da variação necessária que cada componente de y^k deve ter para manter $\mathcal{V}(\cdot)$ constante, caso a componente de referência varie (trade-off's).

Com o método de Geoffrion et al. torna-se possível encontrar a solução de um problema de controle multicritério fornecendo-se a cada iteração os valores dos trade-off's, portanto não sendo necessário explicitar matematicamente uma função valor $\mathcal{V}(\cdot)$ para o problema.

4.15 Conclusão

A abordagem proposta nesta dissertação possui uma aplicabilidade bem superior aos procedimentos aqui discutidos além de, como já foi observado anteriormente, possuir uma flexibilidade tal que permite o aproveitamento de características do problema para tornar sua solução mais eficiente. Sua grande vantagem é a capacidade do Algoritmo Básico de se adequar a diversos tipos de problemas, sejam diferenciáveis, não diferenciáveis, funções valores explícitas ou implícitas. Neste capítulo de exemplos, o Algoritmo Básico foi utilizado para resolver quatro tipos de problemas com características bem distintas: os problemas min-max, múltiplos alvos, Salukvadze e de Mínimo Tempo e Energia. Ou seja, no mundo convexo muito pode ser feito a partir deste procedimento.

Conclusão Geral

O objetivo desta dissertação foi o de propor uma nova abordagem para a solução de problemas de controle multicritérios, tratados no espaço dos critérios em lugar de resolvê-los no espaço das variáveis de controle.

Foi mostrado que um problema de controle no espaço dos critérios é em geral um problema não convexo, com um domínio não caracterizável matematicamente. Através da aplicação de resultados relevantes da programação convexa, revistos no Capítulo 1, aliados a manipulações básicas, tais como, projeção e relaxação, foi possível decompor o problema multicritério em uma estrutura multinível na qual tanto o aspecto de decisão quanto os subproblemas de controle podem ser trabalhados apropriadamente, transformando a abordagem do problema no espaço dos critérios, de uma abstração não convexa em um problema estático, convexo e de restrições sempre lineares. Esta decomposição em níveis permite que a tomada de decisão, além de ser sempre feita através de um problema de otimização de características bastante favoráveis, como evidenciado anteriormente e verificado no Capítulo 3, será isolada da dinâmica do sistema em questão. Com efeito, ficou bastante claro, durante o desenvolvimento do trabalho, o quanto é conveniente esta forma de abordagem do problema no espaço dos critérios.

No Capítulo 2 foram discutidas diversas abordagens já conhecidas para a solução de algumas classes de problemas de controle multicritérios, dentre as quais o procedimento de Medanić e Andjelić (Medanić e Andjelić, 1971,1972) e de Duan Li (Li, 1990a) para o problema min-max e o procedimento de Duan Li (Li, 1990b) para o problema de Salukvadze. O destaque da abordagem por programação convexa é oferecer um tratamento único para o controle multicritério, estendendo os trabalhos de Medanić e Andjelić (1971,1972), associados ao controle min-max de sistemas lineares quadráticos, para problemas gerais com critérios convexos agregados por uma função valor $\mathcal{V}(\cdot)$ crescente. A apresentação no Capítulo 4 da solução dos problemas de Múltiplos-Alvos, de Salukvadze, de Mínimo Tempo e Energia, além do próprio problema min-max, ilustra com bastante propriedade esta importante característica do Algoritmo Básico. Esta abordagem também evita, no caso de problemas convexos, o uso de estratégias baseadas no aumento de estados, como proposto por Salukvadze (1982).

Como trabalhos futuros planeja-se tratar os problemas de controle multicritérios com perturbações gaussianas. Uma investigação da aplicação desta nova abordagem na solução de problemas de otimização em normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ também é prevista.

Referências Bibliográficas

Athans, M. & P. Falb, (1966). **Optimal Control**, MacGraw-Hill.

Boyd, S.P. & C. H. Barratt, (1991). **Linear Controller Design-Limits of Performance**, Prentice Hall.

Carvalho J. R. H. & P. A. V. Ferreira, (1992). "Uma Abordagem Para o Problema de Controle Multicritério de Sistemas Dinâmicos", anais do **9^o Congr. Bras. de Automática**, Vitória - ES.

Carvalho J. R. H. & P. A. V. Ferreira, (1993). "Multiple Criteria Control: A Convex Programming Approach", **1993 World IFAC Congress**, Sidney - Australia, submetido.

Ferreira, P.A.V. & J. C. Geromel, (1990). "An Interactive Projection Method for Multicriteria Optimization Problems", **IEEE Trans. Sys., Man, and Cyb.**, vol. SMC-20, n^o 3.

Ferreira, P.A.V. & Carvalho J. R. H., (1993). "A Mathematical Programming Framework for a Class of Multicriteria Optimal Control Problems", **IEEE Trans. Autom. Control**, submetido.

Geoffrion, A. M., (1967). "Solving Bicriterion Mathematical Programs," **Operations Research**, Vol. 15, n^o 1.

Geoffrion, A. M., (1971). "Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications - Oriented Development", **SIAM Review**, Vol. 13.

Geoffrion, A., M., J. S. Dyer & A. Feinberg, (1972). "An Interactive Approach for Multicriteria Optimization, with An Application to the Operation of An Academic

Department", **Management Science**, vol. 19, n^o 4.

Haimes, Y. Y., Hall, W. A. & H. T. Freedman, (1975). **Multiobjective Optimization in Water Resources Systems**, Elsevier.

Kirk, D. E., (1970). **Optimal Control Theory - An Introduction**, Prentice Hall.

Khargonekar, P. P. & M. A. Rotea, (1991). Multiple Objective Optimal Control of Linear Systems: The Quadratic Norm Case, **IEEE Trans. Autom. Control**, vol. 36, n^o 1.

Koussoulas, N.T. & C. T. Leondes, (1986). "The Multiobjective Linear Quadratic Gaussian Problem", **Int. J. Control**, vol. 43.

Kresselmeier, G. & R. Steinhauser, (1983). Application of Vector Performance Optimization to a Robust Control Loop Design of a Fighter Aircraft, **Int. J. Control** vol. 37, n^o 2.

Kuvshinov, V. M. & A. M. Salyuchenko, (1991). Practical Multiobjective Design Method for Aircraft Control System, 1st **IFAC Symp. on Design Methods of Control Systems**, Zurich.

Lasdon, L.S., (1970). **Optimization Theory for Large Systems**, London: Mac-Millan Co.

Li, D., (1990). "On the Minimax Solution of Multiple Linear-Quadratic Problem", **IEEE Trans. Autom. Control**, vol. AC-35, n^o 10.

Li, D., (1990). "A New Solution Approach to Salukvadze Problem", **Proceedings of the American Control Conference**, San Diego, CA.

Looze, D. P., Poor, H. V., Vastola, K. S. & J. C. Darragh, (1983). Minimax Control of Linear Stochastic Systems with Noise Uncertainty, **IEEE Trans. Autom. Control**, vol. AC-28, n^o 9.

MATLAB User's Guide, U.S.A.: The MathWorks, Inc, January, 1991.

Medanić, J. & A. Andjelić, (1971). "On a Class of Differential Games without

Saddle-Point Solution", **J. Opt. Theory Appl.**, vol. 8, n^o 6.

Medanić, J. & M. Andjelić, (1972). Minimax Solution of the Multiple-Target Problem, **IEEE Trans. Autom. Control**, vol. AC-17, n^o 5.

Salukvadze, M., (1982). "An Approach to the Solution of the Vector Optimization Problem of Dynamic Systems", **J. Opt. Theory Appl.**, vol. 38.

Toivonen, H. T., (1984). A Multiobjective Linear Quadratic Gaussian Control Problem, **IEEE Trans. Autom. Control**, Vol AC-29, n^o 3.

Toivonen, H. T. & P. M. Mäkilä, (1989). Computer-Aided Design Procedure for Multiobjective LQG Control Problems, **Int. J. Control**, vol. 49, n^o 2.

Yu, P.L., (1985). **Multiple Criteria Decision Making**, Plenum Press.

Zadeh, L. A. (1963), Optimality and Non-Scalar Valued Performance Criteria, **IEEE Trans. Autom. Control**, vol. AC-8, n^o 1.

MATLABiiiiii