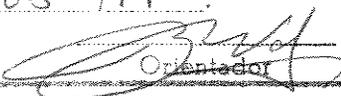


Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por José Leandro Félix Salles e aprovada pela Comissão Julgada em 26/05/99.

Orientador

Controle da Produção por Itens com Interrupções e Demanda Aleatória

José Leandro Félix Salles

Orientador: Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente)
- Prof. Dr. Oswaldo Luis do Vale Costa — EPUSP
- Prof. Dr. Paulo Eigi Miyagi — EPUSP
- Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres — UNICAMP
- Prof. Dr. Rafael Santos Mendes — UNICAMP
- Prof. Dr. Akebo Yamakami (suplente) — UNICAMP
- Prof. Dr. Paulo A. V. Ferreira (suplente) — UNICAMP

Aprovada em 26 de maio de 1999

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

9913867

Be

UNIDADE	
N.º CHAMADA	
V.	Ex.
TOMBO BC/	38534
PROC.	229/99
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	01,00
DATA	25-07-99
N.º CPD	

CM-00125564-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Sa34c

Salles, José Leandro Félix

Controle da produção por itens com interrupções e
demanda aleatória. / José Leandro Félix Salles.--
Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientadores: João Bosco Ribeiro do Val.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Processo estocástico. 2. Markov, Processos de. 3.
Controle de estoque. 4. Controle de produção. 5.
Administração da produção. I. Val, João Bosco Ribeiro
do. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Para minha esposa Regina
e minhas filhas Júlia e Clarice.

Nós não sabemos,
podemos apenas conjecturar.

(Karl Popper)

Agradecimentos

Ao meu amigo e orientador, Prof. João Bosco Ribeiro do Val, pelo incentivo e, acima de tudo, pelas críticas valiosas, sem as quais esta tese não teria sido desenvolvida.

A todos as pessoas que de forma direta ou indiretamente me apoiaram para que este trabalho fosse realizado. Em especial à Regina, pela paciência, e aos meus pais, pela minha formação.

À CAPES pelo suporte financeiro durante o período que estive na UNICAMP.

Às irmãs do Carmelo Santa Terezinha, pelas lições de vida.

A Deus, a Quem os meus agradecimentos são ínfimos em relação a tudo que nos faz.

Resumo

Estuda-se uma classe de problemas de Produção & Estoque e outros modelos análogos como Expansão da Capacidade e Filas Controladas com Servidor Removível. Desenvolvem-se algoritmos recursivos que obtêm a solução destes problemas, os quais se baseiam em operadores associados ao problema de controle contínuo e impulsional de Processos Markovianos Determinísticos por Partes (PMDP). Prova-se que estes operadores são contrativos, o que elimina qualquer restrição necessária à inicialização dos algoritmos. Apresenta-se um método que acelera a convergência das sequências geradas por estes operadores, tornando os algoritmos mais rápidos. Esta tese também contribui para a análise qualitativa da estratégia ótima de produção de um sistema de manufatura que fabrica um único item, e cujo custo operacional engloba os custos de estoque/déficit de estoque e os custos de preparação (set up) associados às interrupções e reiniciações da produção. Mostra-se a existência de um nível de estoque abaixo do qual a estratégia ótima é produzir completamente o item e, acima deste nível, a produção pode ser interrompida permitindo que o item fique parcialmente acabado.

Abstract

A class of Production & Storage problems and other related models such as the Capacity Expansion and Controlled Queues with Removable Servers problems is studied in this thesis. It furnishes recursive algorithms that provide the solution of these problems, based on operators associated to the continuous and impulse control problems of Piecewise Deterministic Markov Process (PMDP). It proves that these operators are contractive mappings, and consequently the algorithms are free of any restrictions in the initialization procedure, and it presents a method that accelerates the convergence rate of the algorithms. This thesis also contributes with the qualitative analysis of the optimal strategies of a production problem arising in a manufacturing system, that produces only one type of item and has operational costs given by stock/backlog costs and set up costs, associated to the interruptions/re-initializations in the production. It shows the existence of a stock level below which the optimal strategy is to produce an item completely and, for each stock level above, the strategy interrupts the production at one intervention point at a maximum, allowing the item be partially produced.

Sumário

1 - Motivação	1
1.1 - Modelos P&E Propostos	2
1.1.1 - Modelos Análogos ao P&E	5
1.2 - O Processo Markoviano Determinístico por Partes	8
1.2.1 - O Problema de Controle Contínuo (P_c)	9
1.2.2 - O Problema de Controle Impulsional (P_I)	11
1.3 - Notas e Referências	12
2 - Solução do Problema P_c	19
2.1 - O Operador de “Um Salto”	19
2.1.1 - Definições e Hipóteses	19
2.1.2 - Equações de Otimalidade do Problema de “Um Salto”	23
2.2 - Caracterização do Problema P_c	29
2.3 - Notas e Referências	31
3 - Solução do Problema P_I	35
3.1 - O Operador de “Um Salto ou Intervenção”	35
3.1.1 - Definições e Hipóteses	35
3.1.2 - Equações de Otimalidade	37
3.2 - Resultados Intermediários	40
3.2.1 - Propriedades do Operador \mathcal{P}	40
3.3 - Caracterizações do Problema P_I	44
3.3.1 - Relação entre os Problemas P_c e P_I	48
3.4 - Notas e Referências	48
4 - Procedimentos Recursivos	51
4.1 - Aceleração da convergência	53
4.2 - Comparação dos Procedimentos Recursivos	54
4.2 - Notas e Referências	59
5 - Estratégias Ótimas	63

5.1 - O Problema P&E com Custo de Set Up e Espaço Limitado	63
5.1.1 - Definições e Hipóteses	63
5.1.1 - Resultados Auxiliares	65
5.2 - Análise da Solução do problema P&E	66
5.3 - O Problema P&E com Espaço Não limitado	69
5.4 - O Problema P&E sem Custo de Set Up	72
5.5 - Notas e Referências	75
6 - Resultados Numéricos	79
6.1 - Problema P&E sem Custo de Set Up	81
6.2 - Problema P&E com Custo de Set Up	83
6.3 - Comparação dos Procedimentos Recursivos	85
7 - Conclusões	89
Apêndice A	93
Apêndice B	95
Apêndice C	103
Apêndice D	107
Apêndice E	110
Referências Bibliográficas	113

Notação e Simbologia

P&E Produção & Estoque

PMDP Processos Markovianos Determinístico por Partes.

P_c O Problema de Controle Contínuo.

P_I O Problema de Controle Impulsional.

IUC Invest until completed.

FRD Follows Realized Demand.

v.a. Variável aleatória.

e.d.o. Equação diferencial ordinária.

H-J-B Hamilton Jacobi Bellman.

q.t., q.c. Quase todo, quase certamente.

:= Igual por definição.

\liminf Ínfimo assintótico de uma sequência.

\limsup Supremo assintótico de uma sequência.

$\mathbb{1}_{\{A\}}$ Função indicadora do conjunto A.

$A \setminus B$ Diferença entre os conjuntos A e B.

$\{\emptyset\}$ Conjunto vazio.

∂_S (∂_S^*) Conjunto fronteira (fronteira ativa) de S.

\mathbb{Z} Conjunto dos números inteiros.

\mathbb{Z}^+ Números inteiros positivos

\mathbb{R}^+ Números reais positivos.

\mathbb{R}^n Espaço Euclidiano de dimensão n.

$x \wedge y$ Mínimo entre x e y.

$\partial y / \partial t$ Derivada parcial de y em relação a t.

\mathcal{F}_t A σ -álgebra gerada por $\{z_s : s \leq t\}$.

P_z A lei de probabilidade de z_t iniciando em z.

$E_y[x] = E[x|y]$ Valor esperado da variável aleatória x dado y .

$\|\cdot\|$ Norma sup.

$|\cdot|$ Valor absoluto.

$C_b(S)$ Classe de funções contínuas e limitadas sobre S (página 7).

$AC(S)$ Classe de funções absolutamente contínuas sobre S .

$B(S)$ Classe de funções mensuráveis a Borel e limitadas sobre S (página 7).

\mathcal{A} Gerador infinitesimal.

$f_1 \circ f_2$ Composição das funções f_1 e f_2 .

Lista de Teoremas, Proposições, Corolários, Hipóteses e Algoritmos

Hipótese A_1	19
Hipótese a_1	24
Teorema 2.1 (convergência uniforme para o problema P_c)	29
Teorema 2.2 (equações de otimalidade para o problema P_c)	30
Hipóteses B_1, B_2, B_3 e B_4	36
Proposição 3.3 (solução geral para o problema P_I)	44
Teorema 3.1 (solução proposta para o problema P_I)	47
Corolário 3.1 (relação entre os problemas P_c e P_I)	48
Algoritmo 4.1 (procedimento para o problema P_c)	51
Algoritmo 4.2 (procedimento geral para o problema P_I)	52
Algoritmo 4.3 (procedimento proposto para o problema P_I)	52
Algoritmo 4.4 (procedimento proposto para o problema P_I com aceleração)	54
Teorema 4.1 (comparação dos procedimentos recursivos)	59
Hipóteses C_1, C_2, C_3 e C_4	64
Hipótese c_1	65
Teorema 5.1 (produção completa para o problema P&E com custo de set up)	66
Teorema 5.2 (produção parcial para o problema P&E com custo de set up)	68
Corolário 5.1	68
Teorema 5.3 (aproximação do problema P&E com espaço ilimitado)	71
Teorema 5.4 (produção completa para o problema P&E sem custo de set up)	73

Capítulo 1

Motivação

O Problema de Produção & Estoque (P&E) é uma extensão do problema de controle de estoque padrão, sujeito a uma demanda aleatória dos itens. No problema P&E a questão não é somente saber quando e como os itens devem ser repostos no estoque, mas também decidir em que instante se deve iniciar a produção e a que taxa ela deve ser processada à medida que estes itens vão sendo consumidos pela demanda. Esta decisão é tomada no sentido de minimizar os custos operacionais do sistema, a saber [HS84a]:

(i) **Custo de estoque e déficit de estoque:**

O custo de estoque está relacionado aos custos de aluguel, de amortização e de manutenção das instalações de armazenagem. O custo de déficit de estoque está relacionado ao prejuízo devido à perda de clientes por insatisfação ou atrasos na entrega do pedido.

(ii) **Custo relacionado à taxa de produção:**

São gastos associados à produção dos itens como: pagamento dos empregados, treinamento, gastos com matérias primas, etc.

(iii) **Custo de preparação (set up):**

São custos instantâneos ou não, provocados pelas paralisações e/ou iniciações da produção, tais como: remanejamento, contratação e/ou demissão da mão de obra, compra de equipamentos, ajuste da linha de produção, etc.

Um sistema P&E é constituído por uma equação de balanço relacionando em cada instante de tempo as variáveis nível de estoque (definido por n_t), a quantidade de mercadorias produzidas e adicionadas ao estoque (definido por q_t) e a demanda (d_t). A variável q_t pode ser afetada pela quantidade de mercadorias retornadas por insatisfação do cliente, pelos atrasos na produção devido à quebra de máquinas e pelos atrasos na estocagem dos itens produzidos. Já a demanda (d_t) pode ser afetada pelos atrasos na entrega da mercadoria pedida pelo cliente. Neste caso a demanda pode esperar (backlog) ou desistir do pedido. Na seção 1.3 discute-se alguns modelos P&E encontrados na literatura e as técnicas utilizadas para analisá-los. A seguir apresenta-se os modelos P&E propostos nesta tese.

1.1 Modelos P&E Propostos

P&E Sem Custo de Set Up ([dVS91], [dVS93b], [dVS99]): Seja $u_t \in [0, 1]$, $t \geq 0$, uma taxa de produção normalizada; a progressão da produção de cada lote de K itens que estão sendo produzidos no instante $t \geq 0$ é representada pelo processo $t \rightarrow \xi_t$, definido por:

$$\xi_t = \int_{\theta}^t u_s ds, \quad (1.1)$$

onde $0 \leq \theta \leq t$ é o instante de acabamento do último lote de K itens. Um lote é completado quando a progressão da produção chega a um certo valor dado por Γ ; assim, $0 \leq \xi_t \leq \Gamma$ para todo $t \geq 0$. Observa-se a trajetória de ξ_t na Fig. 1.1, onde se considera que θ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ é uma sequência de acabamento dos lotes produzidos.

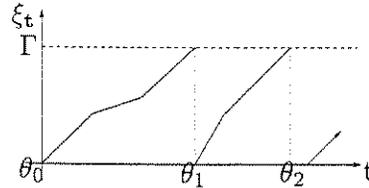


Figura 1.1: Trajetória do processo ξ_t .

Seja o processo q_t , $t \geq 0$ definido por

$$q_t = \sum_i K \cdot \mathbb{1}_{\{\theta_i \leq t\}} \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

($\mathbb{1}_A$ é a função indicadora do conjunto A e K é o tamanho do lote produzido), representando a produção acumulada em cada instante t . Assume-se que os pedidos de compra dos itens são aleatórios e formam um processo de Poisson composto com taxa $\delta > 0$. Os lotes pedidos por cada cliente formam uma sequência de variáveis aleatórias inteiras representada por ω_i , $i = 1, 2, \dots$, com distribuição p_k , $k = 1, \dots, \ell$ tal que $P(\omega_i = k) = p_k$. A estabilidade do sistema é garantida se a capacidade da produção for compatível com a demanda, no seguinte sentido:

$$\delta \Gamma \cdot \sum_{k=1}^{\ell} k p_k < K. \quad (1.3)$$

Na expressão acima, o termo $\delta \Gamma$ representa o número médio de chegada de clientes até a conclusão do lote, e o termo $\sum_{k=1}^{\ell} k p_k$ indica o consumo médio de cada cliente. Seja σ_i , $i =$

1, 2, ... uma sequência representando os instantes de chegadas dos clientes; a demanda acumulada no instante t é definida por:

$$d_t := \sum_i \omega_i \mathbb{1}_{\{\sigma_i \leq t\}}, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

Considerando estas definições, a quantidade de itens armazenados no estoque ou em déficit de estoque, pode ser expressa por:

$$n_t = q_t - d_t, \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

O processo $(n_t, \xi_t), t \geq 0$ apresenta uma trajetória determinística, intercalada por saltos aleatórios: no interior do espaço de estados, estes saltos ocorrem a uma taxa igual a δ associados à chegada de demanda; na fronteira $\mathbb{Z} \times \{\Gamma\}$, existem saltos forçados de $(n_{\theta_1^-}, \Gamma)$ para $(n_{\theta_1} + K, 0)$ correspondendo a um lote de itens acabados e adicionados ao estoque. Ilustra-se esta trajetória na Fig. 1.2 abaixo:

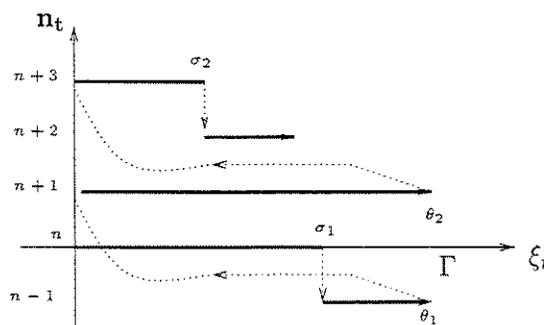


Figura 1.2: Trajetória típica de (n_t, ξ_t) para o problema P&E com $K = 2$.

Neste problema, o decisor deve escolher a taxa de produção $u_t, t \geq 0$ de maneira que minimize o custo médio esperado com horizonte infinito, associado aos mecanismos de produção. Seja $\alpha > 0$ a taxa de desconto, β uma constante positiva representando o custo de produção de cada lote de K itens por unidade de tempo; considera-se uma função convexa $n \rightarrow L(n)$, que define o custo de estoque ($n_t > 0$) e o custo de déficit de estoque ($n_t < 0$). O problema P&E sem custo de set up é calcular a função valor $V : \mathbb{Z} \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ do seguinte problema de controle ótimo:

$$V_n(\xi) := \inf_{u \in \mathbf{U}} E_{n, \xi}^u \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} [L(n_s) + \beta u_s] ds \right\}, \quad (1.6)$$

onde $n_0 = n$ e $\xi_0 = \xi$; o valor esperado é calculado em relação ao processo $(n_t, \xi_t), t \geq 0$; o ínfimo é definido sobre a classe de controles realimentados $\mathbf{U} = \{u : \mathbb{Z} \times [0, \Gamma] \rightarrow [0, 1], u \text{ é mensurável}\}$.

P&E Com Custo de Set Up ([dVS93a], [SdV98a], [SdV98b], [SdV99b], [SdV99c]): As variáveis de estado deste problema são o nível de estoque $n_t \in \mathbb{Z}$ definida em (1.5) e a progressão da produção de cada lote de K itens, representada por ξ_t e redefinida pela seguinte expressão:

$$\xi_t := \int_{\theta}^t m_s ds, \quad (1.7)$$

onde $0 \leq \theta \leq t$ é a mesma variável definida em (1.1); $m_t \in \{0, 1\}$ é uma variável que assume o valor 1 quando o sistema está produzindo e o valor zero no caso contrário.

A Fig. 1.3 mostra uma trajetória de $z_t := (n_t, \xi_t)$. Observa-se que, se $m_t = 1$, o processo z_t tem trajetória determinística intercalada por saltos aleatórios no subconjunto de produção $S' := \mathbb{Z} \times [0, \Gamma]$. No interior de S' , z_t salta nos instantes de chegada da demanda $t = \sigma_i$, $i = 1, 2$; na fronteira de S' , z_t tem saltos forçados de $(n_{\sigma_i^-}, \Gamma)$ para $(n_{\sigma_i^-} + 1, 0)$, $i = 1, 2$, indicando que um novo item foi adicionado ao estoque. Se $m_t = 0$, z_t permanece parado no subconjunto de não produção $S'' := \mathbb{Z} \times [0, \Gamma]$, com exceção dos instantes de chegada da demanda σ_i , $i = 3, 4$, quando z_t salta para baixo. Também se observa na Fig. 1.3 que z_t é transferido de S' para S'' , ou vice-versa, nos instantes τ_1 ou τ_2 , respectivamente.

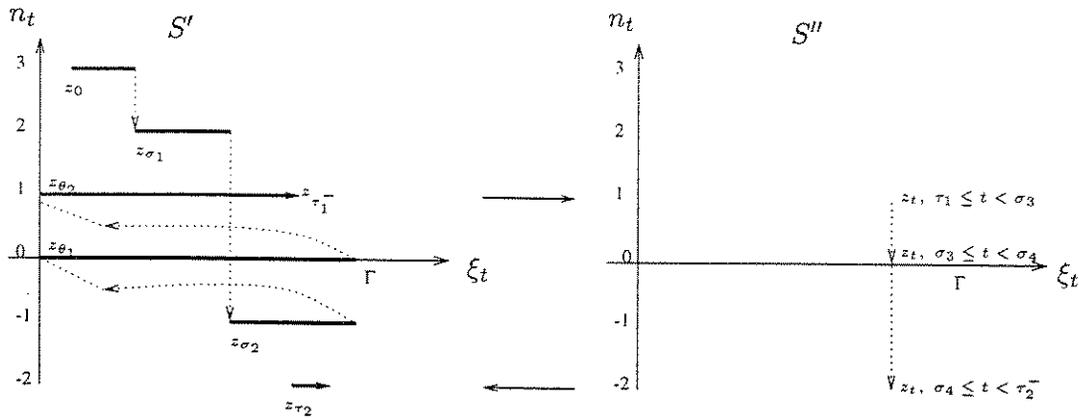


Figura 1.3: Trajetória de $z_t = (n_t, \xi_t)$ para o problema P&E com $K = 1$.

Define-se uma estratégia de produção pela sequência de variáveis aleatórias $\pi := \{\tau_1, \tau_2, \dots\}$, que indicam os instantes em que o sistema é transferido do estado de produção para o estado de não produção, ou vice-versa. Para cada estratégia de produção π , associa-se em $(n, \xi) := (n_0, \xi_0)$ o seguinte custo:

$$V_n^\pi(\xi) := E_{n, \xi}^\pi \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} [L(n_s) + \beta \cdot \mathbb{1}_{\{(n_s, \xi_s) \in S'\}}] ds + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha \tau_i} g(n_{\tau_i^-}, \xi_{\tau_i^-}) \right\}, \quad (1.8)$$

onde $L(n)$, β e α foram definidos no problema P&E sem custo de set up; $g : \mathbb{Z} \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ representa os custos de set up associados às paralisações e iniciações da produção. O valor esperado é tomado com relação ao processo (n_t, ξ_t) , para uma dada estratégia de produção π .

O problema P&E com custo de set up é determinar a estratégia de produção que minimize o custo médio dado por (1.8). Quando esta estratégia existe, obtém-se a *função valor* do problema, $V : \mathbb{Z} \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$, através da seguinte expressão:

$$V_n(\xi) := \inf_{\pi \in \Pi} V_n^\pi(\xi), \quad (1.9)$$

onde Π é a classe de estratégias de produção factíveis.

A principal característica que diferencia estes modelos propostos em relação àqueles encontrados na literatura (alguns destes modelos estão descritos na seção 1.3) é que a produção do item pode ser paralisada antes que o mesmo seja completado, permitindo que o item fique parcialmente acabado (estratégia preemptiva). As estratégias ótimas de produção dos problemas P&E sem custo de set up e com custo de set up, são analisadas no Capítulo 5, e os resultados numéricos ilustrando estas estratégias estão no Capítulo 6. A seguir apresenta-se alguns modelos importantes encontrados na área da pesquisa operacional, os quais possuem semelhanças com os modelos P&E propostos.

1.1.1 Modelos Análogos ao P&E

Expansão da Capacidade ([DDSV87]): A expansão da capacidade é o processo de decisão encontrado em sistemas de grande porte, tais como sistemas de geração de energia, sistemas de comunicação, sistemas de manufatura de grandes itens, etc. Neste problema deve-se procurar o equilíbrio entre oferta e demanda obtida através da construção de sucessivos projetos de expansão, cada qual com um custo Γ e uma capacidade total de K unidades de demanda. Nos instantes θ_i , onde cada projeto é completado, a capacidade total instalada é ampliada para q_t , onde q_t é definido como em (1.2). Portanto, o déficit de capacidade pode ser definido por $n_t = d_t - q_t$, onde d_t é a demanda. A função convexa $n \rightarrow L(n)$ representa o custo de excesso de capacidade ($n_t < 0$) ou déficit de capacidade ($n_t > 0$). Investimentos são aplicados na construção de cada projeto a uma taxa normalizada dada por $u_t \in [0, 1]$, e a parte do projeto já executado até o instante t é definida por $\xi_t \in [0, \Gamma]$ de acordo com (1.1). O problema da expansão da capacidade é escolher a taxa de investimento u_t , $t \geq 0$ tal que minimize o custo médio com desconto $\alpha > 0$ dado por (1.6) com $\beta = 1$. Note que a trajetória de estado do processo de expansão é idêntica a da Fig. 1.2 com o eixo n_t invertido.

Fila M/G/1 Controlada com Servidor Removível I ([SdV99a]): Considera-se um sistema de fila com servidor removível, que pode ser desativado em qualquer instante de tempo, mesmo que o *tempo de serviço* de um cliente não esteja completado (estratégia preemptiva). Assume-se

que a chegada dos clientes forma um processo de Poisson com taxa $\delta > 0$, e que o servidor seja ativado após a fila atingir um certo tamanho. A variável $n_t \geq 0$, associada ao estoque no sistema P&E, agora representa o número total de clientes no sistema no instante $t \geq 0$; a variável ξ_t dada por (1.7) representa a quantidade de tarefas requisitadas pelo servidor por cada cliente atendido até o instante t . Nos instantes θ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ o servidor finaliza uma tarefa de tamanho $\xi_{\theta_i} \leq \Gamma$, e assume-se que:

$$P(\xi_{\theta_i} < \xi) = H(\xi) := \begin{cases} \int_0^\xi h(r) dr & \xi < \Gamma, \\ 1 & \xi \geq \Gamma, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $h(\cdot)$ é uma função contínua e limitada que caracteriza a densidade de probabilidade de ξ_{θ_i} , $i = 0, 1, 2, \dots$. Isto quer dizer que os saltos de ξ_t podem ocorrer antes de Γ de acordo com a distribuição genérica dada por (1.10), caracterizando assim uma fila do tipo M/G/1. Observa-se na Figura 1.4, apresentada a seguir, que o processo (n_t, ξ_t) salta para cima quando o cliente chega nos instantes σ_i $i = 1, 2$, e salta para baixo quando uma tarefa é completada nos instantes θ_i $i = 1, 2$. Se os saltos de ξ_t ocorrerem sempre em Γ , a fila será do tipo M/D/1 e a trajetória do processo (n_t, ξ_t) será equivalente a trajetória mostrada na Fig. 1.3 com o eixo n_t invertido. O problema de controle é determinar uma estratégia ótima de operação do servidor removível em vista dos custos associados ao tamanho da fila e à operação do servidor.

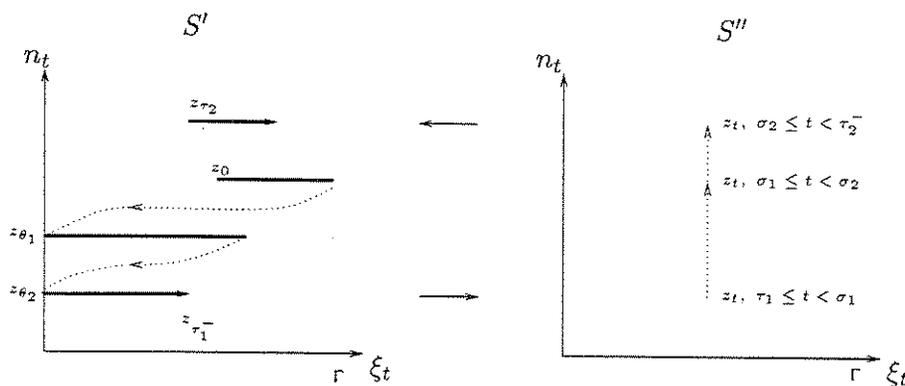


Figura 1.4: Trajetória de $z_t = (n_t, \xi_t)$ para a Fila M/G/1

Fila M/G/1 Controlada com Servidor Removível II: Neste modelo assume-se que os clientes chegam a uma fila em instantes aleatórios $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, e o cliente que chega no instante σ_i requer $Y_i > 0$ unidades de tempo para ser processado. O total de serviço acumulado até o instante t é dado por:

$$q_t := \sum_i Y_i \mathbb{1}_{\{t \geq \sigma_i\}}. \quad (1.11)$$

O servidor tem dois estados possíveis: produzir ou não produzir, os quais serão indicados pelas variáveis $m_t = 1$ ou $m_t = 0$, respectivamente. O *tempo virtual* do sistema é definido por:

$$V_t := q_t - \int_0^t \mathbb{1}_{\{m_s=1\}} ds.$$

Observa-se que o segundo termo do lado direito da igualdade acima é a quantidade de serviço já processado pelo servidor; portanto V_t é o total de tarefas não realizadas no instante t , ou equivalentemente, o tempo que o cliente, chegando no instante t , deve esperar para ser atendido pelo servidor. Quando $m_t = 1$, observa-se na Fig. 1.5 que o sistema está no *subconjunto de produção* S' e V_t decresce com taxa unitária entre saltos de demanda nos instantes σ_1 e σ_5 ; e quando $m_t = 0$, o sistema está no *subconjunto de não produção* S'' e V_t modifica-se somente entre os instantes de chegada da demanda σ_i $i = 2, 3, 4$. Observa-se também que, no instante τ_1 , V_t é transferido do subconjunto S' para S'' e no instante τ_2 ocorre o caso contrário. O objetivo é controlar os períodos de remoção do servidor de maneira que seja minimizado o custo médio de atendimento e espera do cliente. Outros detalhes sobre os problemas de filas controladas encontram-se na nota 1.6, pag. 16.

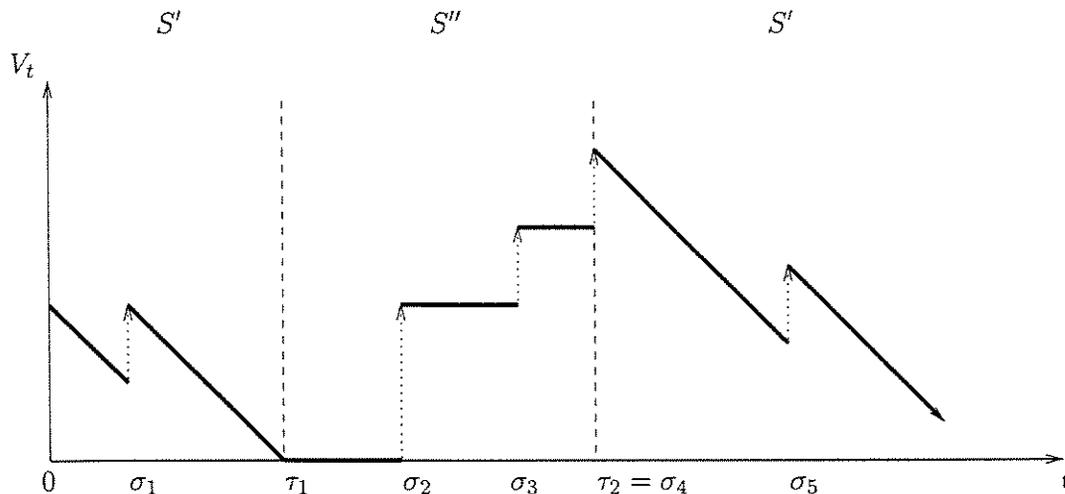


Figura 1.5: Trajetória de V_t para a Fila M/G/1

Os modelos estocásticos apresentados até aqui têm características que permitem enquadrá-los na classe dos Processos Markovianos Determinísticos por Partes (PMDP) desenvolvido por [Dav93], o qual é um processo estocástico markoviano constituído por saltos a tempo contínuo. O PMDP controlado é um tipo de Processo de Decisão de Markov que abrange o Processo de Decisão de Markov com Drift proposto por Hordijk e Shouten [HS83] e o Processo Linear por Partes, desenvolvido por Gnedenko e Kovalenko [GK66].

1.2 O Processo Markoviano Determinístico por Partes

O espaço de estados do PMDP é formado pela união dos subconjuntos S, ∂_S, Δ , onde ∂_S é a fronteira de S e Δ é um conjunto de pontos exteriores a $S \cup \partial_S$, chamado *conjunto de estado cemitério*. Assume-se que S seja um conjunto aberto do espaço produto $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$. Seja $B(S)$ o espaço de funções mensuráveis e limitadas com a norma “sup”, assumindo valores no conjunto S , e denota-se por $C_b(S)$ o espaço de funções limitadas sobre S e contínuas sobre o subconjunto das variáveis com valores no \mathbb{R}^n .

Definição 1.1 *Uma função $\varphi : [0, \infty) \times S \rightarrow S$ é uma trajetória determinística (drift) para S se:*

- (i) φ é contínua sobre $S \times [0, \infty)$,
- (ii) $\varphi(0, z) = z$ para todo $z \in S$,
- (iii) $\varphi(t, z) = \varphi(t - r, \varphi(r, z))$ para todo $z \in S, 0 \leq r \leq t$.

Caracteriza-se o PMDP pelos seguintes elementos:

- (i) Uma trajetória determinística $t \rightarrow \varphi(t, z), t \geq 0$, que gera uma fronteira ativa definida por:

$$\partial_S^* := \{z \in \partial_S : \exists t > 0, z_0 \in S \text{ tal que } \varphi(s, z_0) \rightarrow z \text{ quando } s \rightarrow t\},$$

- (ii) Taxa de salto $\lambda \in C_b(S \cup \partial_S^*)$,
- (iii) Probabilidade de transição de estados $\mu(\cdot, z)$ sobre o conjunto S , para qualquer $z \in S \cup \partial_S^*$. Quando $z \in \partial_S^*$, considera-se que $\mu(dy; z) > 0$ para algum $dy \in S$, ou seja, saltos na fronteira são obrigatórios.

Seja,

$$t^*(z) := \inf\{t \geq 0 : \varphi(t, z) \in \partial_S^*, z \in S\}, \quad (1.12)$$

e assume-se que t^* seja uma função contínua em S . Define-se,

$$\Lambda(t, z) := \int_0^t \lambda(\varphi(s, z)) ds, \quad (1.13)$$

A trajetória do PMDP $t \rightarrow z_t$ é descrita da seguinte forma: partindo do estado inicial $z_0 = z$, seja T_1 o instante do primeiro salto tal que:

$$P_z(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\Lambda(t,z)} & t < t^*(z) \\ 0 & t \geq t^*(z), \end{cases} \quad (1.14)$$

e

$$z_t = \varphi(t, z) \text{ para } t < T_1, \quad P_z \text{ q.c.}$$

Seja $F_t := \sigma(z_s : s \leq t)$ a filtragem do processo z_t , e considera-se $F_{T_1^-}$, de acordo com a Definição 5.12 em [Ell82]. No instante de primeiro salto, o processo vai para o estado z_{T_1} com probabilidade:

$$P_z(z_{T_1} \in A | F_{T_1^-}) = \mu(A, \varphi(T_1, z)), \quad (1.15)$$

para qualquer conjunto mensurável à Borel $A \in S$. Após o primeiro salto, o processo reinicia-se em z_{T_1} , seguindo uma trajetória determinística definida pela função $\varphi(t, z_{T_1})$ sobre o intervalo $T_1 \leq t < T_2$, onde :

$$T_2 := \inf\{t > T_1 : z_t \neq z_{t-}\} \text{ e } z_{t-} = \lim_{s \uparrow t} z_s.$$

O intervalo entre saltos $T_2 - T_1$ e o estado pós salto z_{T_2} terão distribuições similares a (1.14) e (1.15) respectivamente. Seguindo este procedimento recursivamente, caracteriza-se a trajetória determinística por partes do processo markoviano z_t , através da função φ , dos instantes de saltos T_1, T_2, \dots e dos estados pós-saltos z_{T_1}, z_{T_2}, \dots . O gerador estendido do PMDP está caracterizado no Apêndice A.

A seguir formula-se dois tipos de problemas de otimização do PMDP, denominados *O Problema de Controle Contínuo (P_c)* e *O Problema de Controle Impulsional (P_I)*. Estes problemas possuem generalidades que são suficientes para englobar todos os modelos apresentados na seção 1.1.

1.2.1 O Problema de Controle Contínuo (P_c)

Seja a variável aleatória contínua ξ_t definida em (1.1). Assume-se que ξ_t seja não markoviano com distribuição de probabilidade $H(\cdot)$ dada por (1.10). Usando a técnica da *variável suplementar*, apresentada em [Dav93]) na pg. 36, pode-se redefinir o processo ξ_t de maneira que ele seja

markoviano. Seja $\eta(\xi)$ a taxa de perigo (hazard rate) do processo ξ_t , definida pela seguinte expressão:

$$\eta(\xi) := \frac{h(\xi)}{1 - H(\xi)}, \quad (1.16)$$

onde $h(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade. Seja n_t uma variável aleatória discreta, com saltos nos instantes θ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ e também nos instantes σ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, onde $\sigma_j - \sigma_{j-1}$ tem uma distribuição exponencial com taxa $\delta_{n_t}(\xi_t)$. Observa-se que, no interior do espaço de estados $S = \mathbb{Z} \times [0, \Gamma)$, o PMDP (n_t, ξ_t) terá saltos a uma taxa total dada por:

$$\lambda_n(\xi, u) := \delta_n(\xi) + \eta(\xi) \cdot u_n(\xi). \quad (1.17)$$

Portanto, a taxa λ é a soma das taxas de salto devido à demanda ($\delta_n(\xi)$) e à conclusão do serviço ou do item ($\eta(\xi) \cdot u_n(\xi)$). Entre saltos consecutivos, (n_t, ξ_t) percorre uma curva descrita pelo drift:

$$\varphi(s; n_t, \xi_t) = \begin{bmatrix} n_t \\ \xi_s \end{bmatrix}, \quad T_i \leq t \leq s < T_{i+1}. \quad (1.18)$$

Observa-se que a trajetória $s \rightarrow \xi_s$ é determinística no intervalo indicado acima. Dada a função $u_t \in [0, 1]$ $t \geq 0$, define-se o seguinte custo médio descontado:

$$V_n^u(\xi) := E_{n, \xi}^u \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} [f_{n_s}(\xi_s) + \beta u_s] ds \right\}, \quad (1.19)$$

onde $(n, \xi) = (n_0, \xi_0)$, α é a taxa de desconto, f e $\beta u \geq 0$ são custos por unidade de tempo. Para uma função $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ seja o operador:

$$\mathcal{Q}_n[\phi](\xi, u) := \begin{cases} \text{arbitrário} & \text{para } \lambda_n(\xi, u) = 0, \\ \frac{\eta(\xi) \cdot u}{\lambda_n(\xi, u)} \cdot \mathcal{D}_n[\phi](\xi) + \frac{\delta_n(\xi)}{\lambda_n(\xi, u)} \cdot \mathcal{E}_n[\phi](\xi) & \text{para } \lambda_n(\xi, u) > 0 \text{ e } \xi < \Gamma, \\ \mathcal{D}_n[\phi](\xi) & \text{para } \lambda_n(\xi, u) > 0 \text{ e } \xi = \Gamma, \end{cases} \quad (1.20)$$

onde

$$\mathcal{D}_n[\phi](\xi) = E[\phi_{n_t}(\xi_t) | t = \theta_i; (n_{t-}, \xi_{t-}) = (n, \xi)], \quad (1.21)$$

$$\mathcal{E}_n[\phi](\xi) = E[\phi_{n_t}(\xi_t) | t = \sigma_i; (n_{t-}, \xi_{t-}) = (n, \xi)]. \quad (1.22)$$

O operador (1.21) é o valor esperado em relação à medida de transição de estado devido à conclusão do serviço ou do item, e o operador (1.22) é o valor esperado em relação à medida de transição de estado devido à demanda. De acordo com o Teorema A.3 no apêndice A, o gerador do processo (n_t, ξ_t) é dado por:

$$\mathcal{A}^u V_n^u(\xi) := u \frac{dV_n^u(\xi)}{d\xi} + \lambda_n^u(\xi) (\mathcal{Q}_n[V^u](\xi, u) - V_n^u(\xi)), \quad (1.23)$$

onde $V_n^u(\xi)$ pertence ao domínio do gerador $D(\mathcal{A})$, definido no Apêndice A, e satisfaz à seguinte condição de fronteira:

$$V_n^u(\Gamma) = \mathcal{D}_n[V](\Gamma). \quad (1.24)$$

O Problema de Controle Contínuo (P_c) é determinar a função valor $V : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$(P_c) : \quad V_n(\xi) := \inf_{u \in \mathbf{U}} V_n^u(\xi), \quad (1.25)$$

onde $\mathbf{U} = \{u : S \cup \partial_S \rightarrow [0, 1], u \text{ é mensurável}\}$ é a classe de controles realimentados. A equação de otimalidade do problema P_c é caracterizada no Capítulo 2 através de um operador de programação dinâmica cujo horizonte é o instante do primeiro salto do processo (n_t, ξ_t) .

1.2.2 O Problema de Controle Impulsional (P_I)

Sejam S' e S'' duas cópias de um mesmo conjunto tais que $S = S' \cup S''$. Considera-se um PMDP cuja trajetória determinística $\varphi(t, z) \in S''$ satisfaz $\varphi(t, z) = \varphi(0, z) = z$, $t \geq 0$, ou seja, $\varphi(t, z)$ tem velocidade nula no subconjunto S'' .

Se $z \in S'$, indica-se por \bar{z} o estado correspondente em S'' , ou, se $z \in S''$, \bar{z} indica o estado correspondente em S' . O problema de controle impulsional proposto é caracterizado por intervenções que transferem o processo z_t do subconjunto S' para S'' ou vice-versa, pagando-se por isto um custo instantâneo $g(z)$. A sequência de instantes de intervenção é definida pelas variáveis aleatórias τ_i , $i = 1, 2, \dots$ e se $z_{\tau_i^-} = z$ então $z_{\tau_i} = \bar{z}$, $i = 1, 2, \dots$. Entre estas ocorrências, uma taxa de custo $h(z)$ é associada à evolução deste processo. Seja Π o conjunto de tempos de parada em relação à filtragem F_t . Para cada estratégia de controle $\pi = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots) \in \Pi$, associa-se o seguinte custo:

$$V^\pi(z) := E_z^\pi \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha \tau_i} g(z_{\tau_i^-}) \right\}, \quad (1.26)$$

onde $\alpha > 0$ é a taxa de desconto e a esperança matemática é calculada em relação ao processo $t \rightarrow z_t$ com $z := z_0$ para uma dada política de controle π . O *Problema de controle impulsional* (P_I) é determinar a estratégia de controle que minimiza o custo esperado (1.26), ou seja, resolver o seguinte problema:

$$(P_I) \quad V(z) := \inf_{\pi \in \Pi} V(z). \quad (1.27)$$

A solução do problema P_I é caracterizada no Capítulo 3 através de desigualdades variacionais, enquanto no Capítulo 4 compara-se os métodos recursivos propostos nesta tese com o método recursivo encontrado na literatura, o qual é utilizado para resolver problemas gerais de controle impulsional do PMDP.

1.3 Notas e Referências

1.1 - Os modelos P&Es e as técnicas utilizadas para analisá-los são as mais variadas possíveis, conforme se observa em [AK86], [FSS87], [GG81], [HS84a], [Par85], [Tij86]. De acordo com [HS84a], esta relevância dada pela literatura deve-se, basicamente, aos seguintes fatores:

- (i) Estes modelos são importantes historicamente pois foram a 1^a classe de problemas em Pesquisa Operacional tratados através de técnicas de otimização estocástica.
- (ii) Na prática, estes problemas fazem parte de etapa de decisão estratégica, dentro da hierarquia de planejamento de produção, onde se agrega todas as informações necessárias para estudar a relação entrada/saída do sistema de produção. Esta etapa de decisão é conhecida na literatura especializada ([BS93], [HC84], [Els85]) como Planejamento de Produção Agregada.
- (iii) Uma variedade de situações encontradas nos modelos de Produção & Estoque também podem ser estendidas a outros problemas tratados na Pesquisa Operacional, como Expansão de Capacidade, Filas, Planejamento Energético, etc.

1.2 - As soluções do problema P&E resumem-se basicamente a dois tipos: se os custos de *set up* são levados em conta no modelo, a estratégia é produzir o suficiente até que o estoque atinja o nível de segurança igual a s (estratégia s). Caso o estoque esteja acima deste nível, a produção deve ser paralisada, e se o estoque for abaixo de s , a produção deve ser reiniciada. Uma outra estratégia, obtida quando existe o custo de *set up* no modelo, é produzir sempre quando o estoque atingir um nível suficientemente baixo, denotado por s , e parar de produzir quando o estoque atingir um nível suficientemente elevado, denotado por S (estratégia (s, S)). A seguir apresentam-se dois modelos com estes tipos de estratégias.

P&E com estratégia (s) ([AK86]): Este modelo trata de um sistema de manufatura que produz itens de um único tipo, que são consumidos por uma demanda determinística de valor d , tal que $0 < d < D$, onde D é uma constante positiva. O sistema possui 2 estados de funcionamento, representado pelo processo z_t . Quando $z_t = 1$, o sistema está produzindo a uma taxa $u(t)$ tal que $0 \leq u(t) \leq D$; quando $z_t = 2$ o sistema está parado (em manutenção) após uma falha imprevista na produção. As transições entre os dois estados ocorrem de acordo com uma cadeia de Markov contínua no tempo, onde q_{12} é a taxa de transição do estado de produção para o estado de manutenção, e q_{21} é a taxa de transição do estado de manutenção para o estado de produção (alternativamente, o tempo médio entre falhas é q_{12}^{-1} e o tempo médio de reparo é q_{21}^{-1}). De acordo com [FS93], Capítulo 3, pg. 131, o gerador estendido de z_t tem a seguinte forma:

$$A\phi_z(n) := q_{zz'}[\phi_{z'}(n) - \phi_z(n)] \quad z \neq z'.$$

Atrasos na entrega dos itens aos clientes são permitidos, e isto quer dizer que o nível de estoque $t \rightarrow n_t$ pode assumir valores negativos. Quando o sistema está produzindo, assume-se que:

$$\frac{dn_t}{dt} = u_t - d, \quad (1.28)$$

e durante os intervalos de paralisação, a dinâmica do sistema é dada por:

$$\frac{dn_t}{dt} = -d.$$

Aos níveis de estoque positivos, associa-se uma taxa de custo C^+ (por item por unidade de tempo) e aos níveis de estoque negativos associa-se a taxa C^- , onde $C^+ > 0$ e $C^- > 0$. Seja

$$L(n) := C^+n^+ + C^-n^-,$$

onde $n^+ = \max\{n, 0\}$, $n^- = \max\{-n, 0\}$. O objetivo do problema de controle é determinar a taxa de produção u_t no instante t , de maneira que o custo médio descontado de excesso ou déficit de itens no estoque seja minimizado, ou seja, determinar:

$$V_z(n) := \inf_{u \in [0, D]} E\left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha t} L(n_t) dt \right\}, \quad (1.29)$$

onde α é a taxa de desconto. O controle ótimo $u_1^*(n)$ tem a seguinte característica:

$$u_1^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n > s, \\ d & \text{se } n = s, \\ D & \text{se } n < s, \end{cases}$$

sendo que s é o nível de estoque crítico determinado em [AK86]. Observa-se, na expressão acima, que se o nível de estoque ultrapassar o valor crítico s então não se deve produzir; se for menor, deve-se produzir à máxima taxa, enquanto que se for exatamente igual, deve-se produzir o suficiente para atender à demanda.

P&E com estratégia (s,S) ([GG81]): Este modelo é caracterizado pela produção de itens idênticos que, são enviados imediatamente ao estoque com capacidade finita, à medida que vão sendo acabados. O tempo gasto para se produzir um item é uma variável aleatória com distribuição $D(\cdot)$ e a demanda forma um processo de Poisson com taxa λ . O cliente é imediatamente atendido se o item estiver estocado e, caso contrário, o cliente espera pela produção do item solicitado. As seguintes taxas de custos são consideradas neste modelo:

- (i) $L(n)$, $n > 0$ - custo de estoque por item por unidade de tempo;
- (ii) $L(n)$, $n < 0$ - custo de déficit de estoque por item por unidade de tempo;
- (iii) g - custo fixo devido às iniciações e/ou paralisações da produção.

Em [GG81], Gavish e Graves fazem uma analogia entre o comportamento deste sistema e uma fila com servidor removível, observando que a produção está associada ao servidor e a fila está relacionada ao nível de estoque. Portanto, um acréscimo na fila, devido à chegada de cliente, corresponde a um decréscimo no nível de estoque; e a retirada de um elemento da fila, quando um serviço é finalizado, corresponde ao acréscimo de um item no estoque após a sua produção. Denotando-se o nível máximo permitido de estoque por N , pode-se relacionar o tamanho da fila $t \rightarrow q_t$ com o nível de estoque $t \rightarrow n_t$ através da seguinte expressão:

$$n_t = N - q_t, \quad (1.30)$$

A política ótima da fila com servidor removível consiste em interromper o serviço quando a fila for igual a q^* e reiniciá-lo quando a fila for igual a Q^* . Em vista de (1.30), a política de produção correspondente é parar de produzir quando o estoque for maior que $S = N - q^*$ e reiniciar a produção quando o estoque for menor que $s = N - Q^*$.

Gavish e Graves usam conceitos da teoria de renovação e da teoria de filas para determinar o custo médio por unidade de tempo durante um ciclo de produção e ociosidade do servidor e desenvolvem um procedimento que fornece o seu ótimo global. Outro exemplo com características semelhantes a este modelo pode ser visto em [KT85].

1.3 - Modelos do tipo apresentado em [GG81], o qual está descrito na nota 1.2, são denominados estáticos, pois eliminam a dependência temporal da solução. De acordo com [Tij86], Capítulo 3, seção 1, os modelos dinâmicos estocásticos podem incluir os custos de set up quando se considera controles que atuam diretamente no estado de produção, mudando-o instantaneamente para o estado de não produção (ou vice-versa) em instantes aleatórios, denominados *instantes de intervenção*. Esta forma de controle é conhecida como *controle impulsional* e é encontrada, por exemplo, em Processos de Decisão

Semi-Markovianos ([Tij86], Capítulo 3 e [HS84a], Capítulo 5). Nos modelos semi-Markovianos, quando as intervenções acontecem só no instante de chegada da demanda, é possível considerar paralisações da produção antes que o item esteja totalmente acabado, caracterizando assim uma política de paralisação do tipo *preemptiva*, de acordo com [HS84a], exemplo 5.16, pg. 212. Nos problemas P&E propostos nesta tese considera-se políticas preemptivas gerais, com paralisações na produção acontecendo em instantes que independam da chegada da demanda.

1.4 - Em [Sha88], generaliza-se o modelo P&E desenvolvido por [AK86] e descrito na nota 2. Em [Sha88] formula-se um modelo com número arbitrário de estados da máquina, onde se associa uma taxa de produção distinta a cada um destes estados. Um outro modelo com dinâmica de estoque descrita por (1.28) e também caracterizado por controle contínuo no gerador infinitesimal foi proposto por [FSS87]. Neste problema, porém, não se considera falhas na produção e a aleatoriedade do modelo provém da demanda, que é uma cadeia de Markov contínua no tempo.

O problema de produção proposto por [AK86] é um exemplo de aplicação do PMDP no planejamento de sistemas de manufatura. Outros exemplos podem ser encontrados em [BH90], [BZZ94], [BY96], onde é estudado o problema de planejamento de P&E e controle da manutenção num sistema de manufatura flexível sujeito a falhas. Assim como no modelo de [AK86], as falhas nas máquinas são distúrbios representados por saltos no estado do sistema. A probabilidade de falha em cada máquina depende da sua idade, que é definida como uma função da produção total da máquina desde o seu último reparo ou manutenção. Também em Yan e Zhang [YZ97], o problema de planejamento e sequenciamento da produção de um sistema de manufatura capaz de produzir diferentes itens é tratado como um problema de controle contínuo e impulsional do PMDP, simultaneamente. Considera-se neste modelo um custo de set up adicionado nos instantes de "chaveamento" da produção de um item para o outro.

Estes modelos de manufatura, com estrutura semelhante ao PMDP, não levam em conta as situações encontradas nos problemas P&E propostos nesta tese, onde a produção não é instantânea, com a possibilidade de chegada de clientes durante a produção dos itens. Em [HS84a] pg. 328, comenta-se que é interessante, neste caso, que o decisor tenha a flexibilidade de controlar a taxa de produção do lote de itens à medida que eles vão sendo produzidos, chegando ao ponto de ser necessário parar de produzi-los antes que sejam completados.

Versões discretizadas do problema P&E com estratégia s podem ser encontradas em [HS84a], Capítulos 3 e 4 e [FZ86]. Estes autores tratam o problema através da teoria dos Processos de Decisão de Markov Discreto e caracterizam o nível de estoque s . Já em [Par85] e em [CdV98], o problema de produção & estoque com demanda aleatória é resolvido através de técnicas de controle ótimo linear quadrático discreto.

1.5 - Davis et al [DDSV87] apresentam um algoritmo que busca a solução do problema da expansão da capacidade para o caso em que: (i) $\Gamma = 1$, $K = 1$, $\ell = 1$; (ii) o espaço de estado é limitado, impondo-se níveis máximo e mínimo de capacidade instalada. Quando estes extremos são atingidos, o processo é paralisado e um custo, ou penalidade, é associado a este evento.

O algoritmo resolve diretamente a equação de Bellman segundo a conjectura de que a solução pertença a duas classes de estratégias possíveis: A estratégia IUC (invest until completed), onde só se

paralisa o investimento após ter completado o respectivo projeto, e a estratégia **FRD**, onde o investimento no projeto é paralisado antes da conclusão do projeto de expansão. As Figuras 1.6 e 1.7, apresentadas a seguir, mostram as estratégias **IUC** e **FRD** onde a linha cheia (ou pontilhada) representa investimento (ou não investimento) no projeto de expansão. As sequências de pontos $\{\zeta_{n_*+1}, \zeta_{n_*+2}, \zeta_{n_*+3}\}$ e $\{\xi_{n_*+1}, \xi_{n_*+2}, \xi_{n_*+3}\}$ apresentadas nas Figuras 1.6 e 1.7 respectivamente, indicam comutações na estratégia de investimento do projeto de expansão.

Em Davis et al [DDSV87], várias indagações são feitas a respeito da existência e/ou otimalidade destas estratégias, as quais não foram devidamente respondidas. Dentre as perguntas levantadas pelos autores destacam-se: por que a política **IUC** só será ótima quando não se penaliza o excesso de capacidade instalada? Todavia, se este custo for levado em conta, por que a política ótima será do tipo **FRD**? Em que circunstâncias a estratégia **FRD** será ϵ -ótima? Estas questões também são pertinentes ao problema P&E e serão analisadas no Capítulo 5.

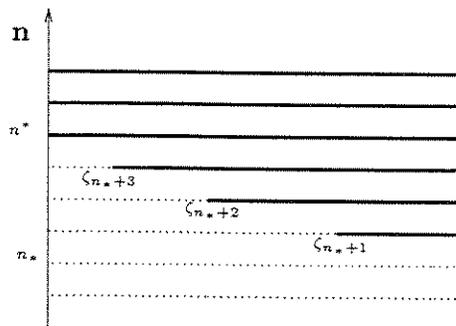


Figura 1.6: Estratégia **IUC**

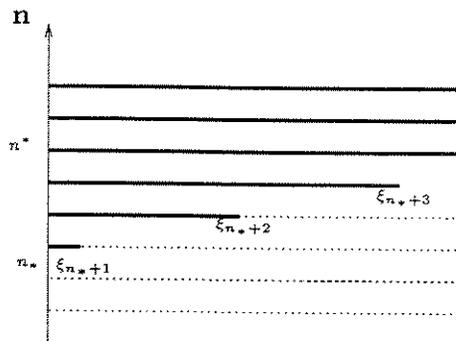


Figura 1.7: Estratégia **FRD**

1.6 - A literatura de sistemas de filas com servidor removível (também conhecidos como sistemas de filas com férias) é extremamente vasta, conforme se observa em [HS84b], [The86],[Dos86],[Tij86]. A importância deste assunto se torna cada vez maior, haja visto que estes modelos são utilizados para analisar o desempenho de sistemas a eventos discretos ([Ho87]), como por exemplo, sistemas de manufatura flexível ([Ger94], [Kum96], [GR97]). Três tipos de estratégias de remoção do servidor são geralmente encontrados:

- (i) A estratégia N: quando o estado do servidor é definido como o número de clientes presentes no sistema, semelhante ao modelo de filas I, pg. 5. Veja-se também [HS84b] e [Wan97].

- (ii) A estratégia D: onde o estado é a carga total de tarefas a ser realizada pelo servidor, conforme o problema de filas II da pg. 6 .
- (iii) Estratégia T: quando, após a fila ter se esvaziada, o servidor entra de férias por um período aleatório T. Se, após este período, existir algum cliente na fila, então o servidor é reativado; caso contrário o servidor reinicia outro período de férias. Este tipo de controle é utilizado em sistemas de controle de tráfego telefônico, veja [AN93].

Capítulo 2

Solução do Problema P_c

Neste Capítulo usa-se uma abordagem semelhante a da Programação Dinâmica Discreta encontrada em [BS78], por exemplo, para se obter a solução do problema P_c , definido em (1.25). Primeiro estuda-se a regularidade do operador de Programação Dinâmica, denominado o operador de “um salto” (seção 2.1), o qual está associado a um problema de controle ótimo cujo horizonte é o instante do primeiro salto do processo (n_t, ξ_t) , definido por $T_1 := \theta_1 \wedge \sigma_1$. Em seguida mostra-se no Teorema 2.1 (seção 2.2) que uma sequência de funções geradas pelo operador de “um salto” converge uniformemente para a solução do problema P_c . Finalmente, no Teorema 2.2, apresenta-se a equação de otimalidade do problema P_c na forma de equação de H-J-B e de desigualdades variacionais; sendo que esta última representação é comumente encontrada em problemas de parada ótima.

2.1 O Operador de “Um Salto”

2.1.1 Definições e Hipóteses

Seja $\mathbf{U} = \{u : S \cup \partial S \rightarrow [0, 1], u \text{ é mensurável}\}$ a classe de controles realimentados. Para uma função ϕ pertencente à classe de funções mensuráveis e limitadas $B(S \cup \partial_S^*)$, usa-se a notação $f(z) = f_n(\xi)$, $\forall z = (n, \xi) \in S \cup \partial_S^*$. Considera-se a seguinte hipótese:

(A_1) A taxa de custo $f(z)$ pertence à classe de funções contínuas e limitadas sobre $S \cup \partial_S^*$, denotada por $C_b(S \cup \partial_S^*)$;

No problema P_c , ξ_t é a variável de estado real e possui dimensão unitária. Portanto A_1 implica em dizer que $\xi \rightarrow f_n(\xi)$ é uma função contínua. Posteriormente comenta-se na nota 2.2 que a condição A_1 pode ser eliminada para o problema P&E. Assume-se que a taxa de saltos $\lambda(z, u)$ seja uma função contínua e limitada ao longo da trajetória determinística de (n_t, ξ_t) e que o instante $t_u^*(z)$, definido em (1.12), pertence à classe $C_b(S \cup \partial_S^*)$ para um dado controle $u \in \mathbf{U}$. Para qualquer função $\phi \in B(S \cup \partial_S)$ e controle $u = u_t \in \mathbf{U}$, $t \geq 0$, define-se os operadores:

$$\mathcal{T}_{u_t}[\phi](z) = E_z^u \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha t} [f(z_t) + \beta u_t] dt + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \right\}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{T}[\phi](z) = \inf_{u \in U} \mathcal{T}_u[\phi](z), \quad (2.2)$$

onde $z_t := (n_t, \xi_t)$, $z = z_0 = (n, \xi)$ e o valor esperado da expressão acima é obtido em relação às distribuições (1.14) e (1.15); $\mathcal{T}_u[\phi]$ definido em (2.2) é denotado “o operador de um salto.”

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, define-se um número inteiro $J_n \geq 0$ e considera-se a seguinte definição (Fig. 2.1):

Definição 2.1 *Uma política de comutações é um elemento na classe U tal que para cada $n \in \mathbb{Z}$:*

$$u_n(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{para } \xi_n(j) \leq \xi < \zeta_n(j), \\ 1 & \text{para } \zeta_n(j+1) \leq \xi < \xi_n(j), \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\{\xi_n(j), \zeta_n(j) : j = 0, 1, \dots, J_n\}$ são duas sequências que satisfazem à seguinte ordenação:

$$\begin{cases} \xi_n(0) \leq \zeta_n(0) = \Gamma, \\ \xi_n(j) < \zeta_n(j) < \xi_n(j-1), \forall 0 < j \leq J_n, \\ \xi_n(J_n) < 0 \text{ se } \zeta_n(J_n) = 0. \end{cases}$$

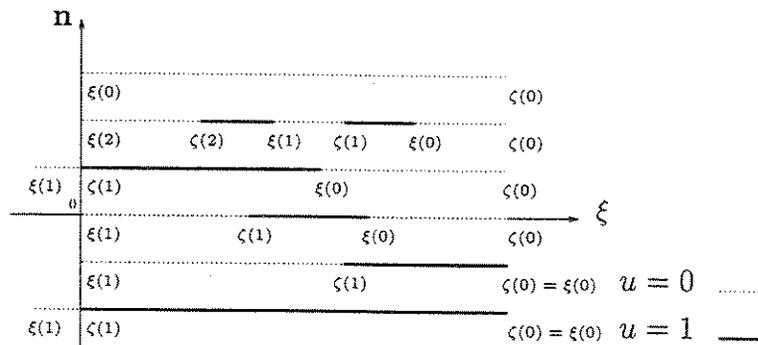


Figura 2.1: Política de Comutações.

Seja U_d uma classe de controles determinísticos em malha aberta, definida por:

$$\mathbf{U}_d := \{u : [0, \infty) \rightarrow [0, 1], u \text{ é mensurável}\}.$$

Para $u \in \mathbf{U}_d$ considera-se as seguintes notações:

$$z(t) := \varphi(t, z), \quad \xi(t) := \xi_t \text{ para } t < T_1, \quad u(t) := u_t \text{ para } t < T_1,$$

$$\Lambda(t, z, u) := \int_0^t \lambda(z(s), u(s)) ds,$$

$$\widehat{\lambda}(z, u) := \alpha + \lambda(z, u),$$

$$\widehat{\Lambda}(t, z, u) := \int_0^t \widehat{\lambda}(z(s), u(s)) ds,$$

$$z_\Gamma := (n, \Gamma),$$

$$\widetilde{f}(z, u) := f(z) + \beta u. \tag{2.4}$$

Tendo em vista (1.1), note que $\dot{\xi}(t) = u(t)$, $\xi(0) = \xi$, $\forall \xi \in [0, \Gamma]$. Também observa-se que a trajetória determinística $z(t)$ varia somente na direção de $\xi(t)$ e pode-se expressar equivalentemente $z(t) = (n, \xi(t)) = \varphi_n(t, \xi(0))$. Para o problema P_c , (1.12) é equivalente a:

$$t_u^*(z) := \inf\{t \geq 0 : \xi(t) = \Gamma, \xi(0) = \xi\} \quad \text{com a convenção } \inf\{\emptyset\} = +\infty.$$

A seguir obtém-se a representação do operador de "um salto" na forma de um problema de controle ótimo determinístico do tipo Bolsa ([CHL91], [FR75],[FS93]):

Lema 2.1

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\phi](z) = & \inf_{u \in \mathbb{U}_d} \left\{ \int_0^{t_u^*(z)} e^{-\widehat{\Lambda}(t,z,u)} [\tilde{f}(z(t), u(t)) + \lambda(z(t), u(t)) \mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t))] dt + \right. \\ & \left. + \mathcal{D}[\phi](z_\Gamma) e^{-\widehat{\Lambda}_n(t_u^*(z), z, u)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde a trajetória determinística satisfaz

$$\dot{\xi}(t) = u(t), \quad 0 \leq t \leq t_u^* \quad \xi(0) = \xi.$$

Prova: O valor esperado em (2.1) é calculado em relação à medida de probabilidade do instante do 1º salto, dada por (1.14), e de transição de estado após o 1º salto, dada por (1.15), condicionadas aos conjuntos $\{T_1 < t_u^*(z)\}$ (o primeiro salto ocorre antes da fronteira) e $\{T_1 \geq t_u^*(z)\}$ (o primeiro salto ocorre na fronteira). Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_u[\phi](z) = & \\ = & \int_0^\infty \left\{ E_z \left[\int_0^s e^{-\alpha r} \tilde{f}(z(r), u(r)) dr + e^{-\alpha s} \phi(z_{T_1}) \mid T_1 = s \right] \right\} dP_{T_1}(s) \\ = & \int_0^{t_u^*(z)} \left\{ \int_0^s e^{-\alpha r} \tilde{f}(z(r), u(r)) dr + e^{-\alpha s} \mathcal{Q}[\phi](z(s), u(s)) \right\} dP_{T_1}(s) \\ + & P(T_1 > t_u^*(z)) \left\{ \int_0^{t_u^*(z)} e^{-\alpha s} \tilde{f}(z(s), u(s)) ds + e^{-\alpha t_u^*(z)} \mathcal{D}[\phi](z_\Gamma) \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $dP_{T_1}(t)$ é a densidade de probabilidade da função de distribuição (1.14), \mathcal{Q} e \mathcal{D} estão definidos em (1.20) e (1.21) respectivamente. Usando a fórmula da integral por partes, verifica-se que:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_u^*(z)} \left\{ \int_0^s e^{-\alpha r} \tilde{f}(z(r), u(r)) dr \right\} \lambda(z(s), u(s)) e^{-\Lambda(s,z,u)} ds = \\ = & \int_0^{t_u^*(z)} e^{-(\alpha + \Lambda(s,z,u))} \tilde{f}(z(s), u(s)) ds - e^{-\Lambda(t_u^*, z, u)} \int_0^{t_u^*(z)} e^{-\alpha s} \tilde{f}(z(s), u(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo (2.7) em (2.6) chega-se ao resultado desejado. □

Para $\phi \in B(S \cup \partial_S)$, seja $W : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ a função valor do problema de "um salto" definida por:

$$W(z) := \mathcal{T}[\phi](z), \quad \forall z \in S \cup \partial_S. \quad (2.8)$$

tal que:

$$W(z_\Gamma) = \mathcal{D}[\phi](z_\Gamma) \quad \text{para } z_\Gamma = (n, \Gamma). \quad (2.9)$$

2.1.2 Equações de Otimalidade do Problema de "Um Salto"

Lema 2.2 *A solução ótima do problema (2.8) é tal que $u^*(t) = 0$ ou $u^*(t) = 1$ (controle bang-bang).*

Prova: Definindo os vetores do coestado:

$$\bar{p}(t) := [p_1(t) \quad p_2(t)] \quad \text{e} \quad \bar{q}(t) := \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix},$$

a função $\mathcal{H} : \mathbf{U}_d \times (S \cup \partial_S) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o hamiltoniano associado ao problema (2.5), é dado por ([FS93], pg. 12):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(u, z, \bar{p}) &:= \tilde{f}(z(t), u(t)) + \lambda(z(t), u(t)) \mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t)) + \bar{p} \cdot \bar{q} \\ &= f_n(\xi(t)) + \delta_n(\xi(t)) \mathcal{E}_n[\phi](\xi(t)) + u(t) \cdot [\beta + \eta(\xi(t)) \mathcal{D}_n[\phi](\xi(t)) + p_2(t)]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Do princípio do Mínimo de Pontryagin ([FS93], pg. 21), o controle ótimo u^* do problema de um salto satisfaz:

$$\min_{u \in [0,1]} \mathcal{H}(u, z, \bar{p}) = \mathcal{H}(u^*, z, \bar{p}).$$

Portanto o controle $u^*(t)$ que minimiza a expressão acima assume os valores extremos 0 ou 1. □

Comentário 2.1.1 De acordo com [Dav93], pg. 139, a solução ótima do problema de controle determinístico (2.8) pode ser representada por controles realimentados $u^*(z) = 1$ ou $u^*(z) = 0$, o que está compatível com a classe de controles admissíveis \mathbf{U} adotada para o problema P_C .

Para um instante de tempo arbitrário $0 \leq t' \leq t_u^*(z)$, considera-se um controle genérico $u(t)$, $t \in [0, t']$. Aplicando o princípio de otimalidade ([FS93], Lema 4.1, pg. 91) determina-se, a partir de (2.5) e (2.8), a seguinte relação:

$$W(z) \leq \int_0^{t'} e^{-\hat{\Lambda}(t,z,u)} [\tilde{f}(z(t), u(t)) + \lambda(z(t), u(t)) \mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t))] dt + W(z(t')) e^{-\hat{\Lambda}(t',z,u)}, \quad (2.11)$$

onde (2.11) é satisfeita com igualdade se $u(t) \forall t \in [0, t']$ for um controle ótimo. Suponha que $u(z) = 0$, então é claro que $z(t) = z$, $u(z(t)) = 0$, $\forall t \geq 0$ e $t_u^*(z) = +\infty$. Portanto, considerando (2.11) com $u(z) = 0$ e $t' = t_u^*(z)$ conclui-se que:

$$\begin{aligned} W(z) &\leq \int_0^{\infty} e^{-\hat{\Lambda}_n(t,\xi,0)} [\tilde{f}(z, 0) + \lambda(z(t), 0) \mathcal{Q}[\phi](z, 0)] dt \\ &= \mathcal{N}[\phi](z), \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$\mathcal{N}[\phi](z) := (f(z) + \lambda(z, 0) \mathcal{Q}[\phi](z, 0)) / \hat{\lambda}(z, 0) \text{ para } z \in S. \quad (2.13)$$

com a extensão $\mathcal{N}[\phi](z_\Gamma) := \lim_{z \rightarrow z_\Gamma} \mathcal{N}[\phi](z)$. Observa-se que a solução ótima é tal que $u^*(z) = 0$, sempre que (2.12) for satisfeito com igualdade. Portanto $\mathcal{N}[\phi]$ é o custo associado à estratégia de investimento nulo no sistema de produção. Considera-se que:

(a₁) A função $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ é não negativa e diferenciável com relação a ξ , com exceção de um conjunto enumerável de pontos identificado por $\Omega_S \subset S$.

Usa-se a notação $\dot{\phi}(z)$ para $z = (n, \xi)$, quando ϕ for diferenciável em relação a $\xi \in [0, \Gamma]$. A solução do problema (2.8) pode ser caracterizada através da política de comutação apresentada na Definição 2.1, conforme mostra o seguinte lema:

Lema 2.3 *Os seguintes fatos são verdadeiros:*

(i) $u^*(z) = 0$ se e somente se $W(z) = \mathcal{N}[\phi](z)$;

(ii) Se $u^*(z) = 1$, $\dot{W}(z)$ existe, e W satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\dot{W}(z) - \hat{\lambda}(z, 1)W(z) + \lambda(z, 1)\mathcal{Q}[\phi](z, 1) + f(z) + \beta = 0, \quad (2.14)$$

para cada ponto $z \notin \Omega_s$ pertencente a $n \times [\zeta_n(j+1), \xi_n(j)]$, $j = 0, \dots, J_n - 1$, com a condição final:

$$W_n(\xi_n(j)) = \begin{cases} \mathcal{D}[\phi](z_\Gamma), & \text{se } j = 0 \text{ e } \xi(0) = \Gamma, \\ \mathcal{N}_n[\phi](\xi_n(j)), & \text{se caso contrário.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Prova:

(i) É obtida através dos argumentos usados para determinar (2.12).

(ii) Primeiro demonstra-se que $u^*(z) = 1$ sobre intervalos não vazios, denotados por $n \times [\zeta_n(j), \xi_n(j)]$. Dado um ponto $z = (n, \xi)$ com $\xi < \Gamma$ tal que o controle ótimo é $u^*(z) = 1$, considera-se (2.11) com $u = u^*$, $t' = \xi' - \xi > 0$ para algum $\xi' < \Gamma$ na vizinhança de ξ . Suponha em princípio que não seja possível encontrar $t' = \xi' - \xi > 0$ com $u^*(t) = 1$ para $0 \leq t < t'$; então do Lema 2.2, $u^*(t) = 0$ para $0 < t < t'$, e do item (i) deste lema, $W(z(t)) = \mathcal{N}[\phi](z(t))$ para $0 < t < t'$. Por continuidade, conclui-se a partir de (2.11) com igualdade que $W(z(t)) = \mathcal{N}[\phi](z(t))$ para $0 \leq t \leq t'$. Neste caso $z(t) = z$ para $0 \leq t < t'$ e portanto $W(z) = \mathcal{N}[\phi](z)$, o que contradiz o fato de que $u^*(z) = 1$ em vista do item (i) deste lema. Portanto demonstra-se a primeira etapa desta prova.

Considera-se agora o controle $u^* = 1$ em (2.11) com igualdade. Multiplicando-se esta expressão por -1 , e somando cada lado por $W(z(t'))$ e finalmente dividindo todos os seus termos por t' , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{W(z(t')) - W(z)}{t'} &= \frac{1}{t'} \left\{ \int_0^{t'} e^{\hat{\Lambda}(t,z,u)} [\tilde{f}(z(t), u(t)) + \lambda(z(t), u(t))\mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t))] dt \right\} \\ &+ W(z(t'))(1 - e^{-\hat{\Lambda}(t',z,u)})/t', \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde $z(0) = z$. Tomando o limite $t' \downarrow 0$ na expressão acima determina-se (2.14). Note que a primeira condição de fronteira em (2.15) é dada por (2.9). Tendo-se a igualdade na expressão (2.11) para $u^*(z(t)) = 1$, e fazendo o limite de $W_n(\xi)$ quando $\xi \uparrow \xi_n(j)$, obtém-se a segunda condição de fronteira através do item (i) deste lema, dado que $u_n^*(\xi_n(j)) = 0$. \square

Lema 2.4 (Verificação) u^* é um controle ótimo em cada ponto $z \notin \Omega_S$ se e somente se

$$\begin{aligned} & \dot{W}(z) \cdot u^* - \widehat{\lambda}(z, u^*)W(z) + \lambda(z, u^*)\mathcal{Q}[\phi](z, u^*) + f(z) + \beta u^* \\ & = \min\{\dot{W}(z) \cdot u - \widehat{\lambda}_n(\xi, u)W(z) + \\ & \quad + \lambda(z, u)\mathcal{Q}(z, u) + \beta u + f(z) : u \in [0, 1]\} = 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde W satisfaz as condições finais em (2.15).

Prova:(Necessidade) Primeiro assume-se que o problema de “uma salto” possui uma solução. Usando o resultado do item (ii) do Lema 2.3, note que $W(z)$ para $z \in n \times [\zeta_n(j+1), \xi_n(j)]$, $j = 0, \dots, J_n - 1$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\dot{W}(z) \cdot u^*(z) - \widehat{\lambda}(z, u^*)W(z) + \lambda(z, u^*)\mathcal{Q}[\phi](z, u^*) + f(z) + \beta u^*(z) = 0.$$

Por outro lado, de acordo com a Definição 2.1, tem-se que $u^*(z) = 0$ nos intervalos complementares $n \times [\xi_n(j), \zeta_n(j)]$, e em vista do item (i) do Lema 2.3 conclui-se que (2.17) é satisfeito por $W(z)$ para todo $z \in S$ e $z \notin \Omega_S$.

(Suficiência): Considera-se uma função $G(z)$ que satisfaça (2.15) e (2.17), para todo $z \in S$, com exceção dos pontos pertencentes Ω_S . Seja $u(t) \in (0, 1]$, para $0 < t < t_f \leq t_u^*(z)$, então a seguinte desigualdade é satisfeita para q.t. $t \in (0, t_f)$:

$$\begin{aligned} & e^{-\widehat{\Lambda}(t,z,u)}[f(z(t)) + \beta u(z(t)) + \lambda(z(t), u(t))\mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t))] \geq \\ & -e^{-\widehat{\Lambda}(t,z,u)}[\dot{G}(z(t))u(t) - \widehat{\lambda}(z(t), u(t))G(z(t))] \geq -\frac{d}{dt}[G(z(t))e^{-\widehat{\Lambda}(t,z,u)}]. \end{aligned}$$

Integrando a expressão anterior entre 0 e t_f , onde $t_f \leq t_u^*(z)$ e usando as condições finais (2.15) conclui-se que:

$$\begin{aligned} G(z) & \leq W^u(z) := \int_0^{t_f} e^{-\widehat{\Lambda}(t,z,u)}[f(z(t)) + \beta u(z(t)) + \lambda(z(t), u(t))\mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t))]dt \\ & \quad + W^u(z(t_f))e^{-\widehat{\Lambda}_n(t_f,z,u)}, \end{aligned}$$

para qualquer $u(t) \in (0, 1]$. Considerando $u(t_f) = 0$ e tomando o limite $t_f \rightarrow 0$ na expressão acima, conclui-se que

$$G(z) \leq W^{u=0}(z) = \mathcal{N}[\phi](z).$$

Portanto, $G(z) \leq W^u(z)$. Agora seja G e u^* satisfazendo (2.15) e (2.17) com igualdade. Refazendo os calculos acima obtém-se $G(z) = W^{u^*}(z)$ e conclui-se que u^* é um controle ótimo. \square

Comentário 2.1.2 Considerando os Lemas 2.3 e 2.4, verifica-se que a função W definida em (2.8) satisfaz a seguinte desigualdade variacional:

$$\{\dot{W}(z) - \hat{\lambda}(z, 1)W(z) + \lambda(z, 1)\mathcal{Q}[\phi](z, 1) + f(z) + \beta\} \wedge \{\mathcal{N}[\phi](z) - W(z)\} = 0,$$

para q.t. $z = (n, \xi) \in S$, com a condição de fronteira $W(z_\Gamma) = \mathcal{D}[\phi](z_\Gamma) \wedge \mathcal{N}[\phi](z_\Gamma)$.

Para cada $z = (n, \xi) \in S \cup \partial_S$, define-se os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[\phi](z) &:= \inf_{u \in \mathbf{U}_d} \left\{ \int_0^{t_u^*(z)} e^{-\hat{\Lambda}(t, z, u)} [\tilde{f}(z(t), u(t)) + \lambda(z(t), u(t))\mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t))] dt \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}[\phi](z_\Gamma) e^{-\hat{\Lambda}(t_u^*(z), z, u)} \right\} \quad \text{com a restrição } \xi(t_n^*(\xi)) = \Gamma, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\phi](z) &:= \inf_{u \in \mathbf{U}_d} \left\{ \int_0^\infty e^{-\hat{\Lambda}(t, z, u)} [\tilde{f}(z(t), u(t)) + \lambda(z(t), u(t))\mathcal{Q}[\phi](z(t), u(t))] dt \right\} \\ &\quad \text{com a restrição } \xi(t) < \Gamma \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Na nota 2.3 apresenta-se um comentário sobre a existência de solução dos problemas de controle ótimo (2.18) e (2.19). Tendo em vista que $t_u^*(z) < \infty$ ($t_u^*(z) = \infty$) sempre que $\xi(t_n^*(z)) = \Gamma$ ($\xi(t_n^*(z)) < \Gamma$) conclui-se a partir do Lema 2.1 e de (2.8) que:

$$W(z) = \mathcal{J}[\phi](z) \wedge \mathcal{K}[\phi](z). \quad (2.20)$$

Lema 2.5 Em vista da hipótese A_1 a função valor do problema (2.8) satisfaz (a_1) .

Prova: Como $t_u^*(z) \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, conclui-se que $\mathcal{K}[\phi]$ pertence à classe de funções contínuas e limitadas $C_b(S \cup \partial_S^*)$. Tendo em vista (2.20) resta mostrar somente a continuidade de $\mathcal{J}[\phi]$. Se $W(z) = \mathcal{J}[\phi](z)$ e assumindo que problema de “um salto” tenha solução ótima, pode-se afirmar a partir do Lema 2.2 que existe um tempo final $t_f < \infty$ tal que $u^*(t) = 1$ para $0 \leq t \leq t_f$ e $u^*(t) = 0 \forall t \geq t_f$. Considerando este controle ótimo em (2.19) pode-se escrever:

$$\mathcal{J}[\phi](z) = \inf_{0 \leq t < \infty} \mathcal{J}_t[\phi](z), \quad (2.21)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_t[\phi](z) &:= \int_0^t e^{-\hat{\Lambda}(s,z,1)} [\tilde{f}(z(s), 1) + \lambda(z(s), 1) \mathcal{Q}[\phi](z(s), 1)] ds \\ &+ \mathcal{N}[\phi](z(t)) e^{-\hat{\Lambda}(t,z,1)}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como o ínfimo em (2.22) existe e é finito, pode-se encontrar números ϵ e $t_\epsilon \geq 0$ tais que:

$$\mathcal{J}[\phi](z) + \epsilon \geq \mathcal{J}_{t_\epsilon}[\phi](z). \quad (2.23)$$

Para qualquer $z(t) = (n, \xi(t))$ tal que $0 \leq t \leq t_\epsilon$, verifica-se através do princípio de otimalidade que:

$$\mathcal{J}[\phi](z(t)) \leq \mathcal{J}_{t_\epsilon}[\phi](z(t)). \quad (2.24)$$

Tendo em vista (2.23) e (2.24), obtém-se as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} &|\mathcal{J}[\phi](z(t)) - \mathcal{J}[\phi](z)| \leq |\mathcal{J}_{t_\epsilon}[\phi](z(t)) - \mathcal{J}_{t_\epsilon}[\phi](z)| + \epsilon \\ &\leq \left| - \int_0^t e^{-\hat{\Lambda}(s,z,1)} [\tilde{f}(z(s), 1) + \lambda(z(s), 1) \mathcal{Q}[\phi](z(s), 1)] ds \right| \\ &+ |\mathcal{N}[\phi](z(t_\epsilon)) (e^{-\hat{\Lambda}_n(t_\epsilon-t, z, 1)} - e^{-\hat{\Lambda}(t_\epsilon, z, 1)})| + \epsilon \leq (C_0 + \|\phi\| C_1) t_\epsilon + \epsilon, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde C_0 e C_1 são números finitos positivos, tendo em vista que f e ϕ (portanto $\mathcal{N}[\phi]$) satisfazem A_1 . Portanto, dados $\epsilon' > \epsilon > 0$ existe um número $\delta = (\epsilon' - \epsilon)/(C_0 + \|\phi\| C_1) > 0$ tal que $|\mathcal{J}[\phi](z(t)) - \mathcal{J}[\phi](z)| < \epsilon'$ sempre que $|\xi(t) - \xi| < \delta$, $t \leq t_\epsilon < \delta$. Portanto $W(z)$ pertence à classe $C_b(S \cup \partial_S^*)$.

Agora, se o problema de “um salto” não tiver solução, ou seja, se existir uma sequência minimizante $u(z(t^* - \epsilon_k)) = 0$ para $\epsilon_k \rightarrow 0$ deriva-se através de (2.11) e do item (i) do lema 2.3, o seguinte resultado:

$$W_n(\xi) = \lim_{\epsilon_k \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{t^* - \epsilon_k} e^{-\hat{\lambda}(t, z, 1)} [\tilde{f}(z(t), 1) + \lambda(z(t), 1) \mathcal{Q}[\phi](z(t), 1)] dt + \mathcal{N}[\phi](z(t^* - \epsilon_k)) e^{-\hat{\lambda}(t^* - \epsilon_k, z, 1)} \right\}. \quad (2.26)$$

Com isto, verifica-se que W ainda é uma função pertencente à classe $C_b(S \cup \partial_S^*)$. Para concluir que W satisfaz (\mathbf{a}_1) , avalia-se a partir do lema 2.3 para cada ponto $(n, \xi) \notin \Omega_S$, a derivada:

$$\dot{W}_n(\xi) = \begin{cases} \dot{\mathcal{N}}_n[\phi](\xi) = \frac{d}{d\xi} [\lambda_n(\xi, 0) \mathcal{Q}_n[\phi](\xi, 0) / \lambda_n(\xi, 0)] \\ \text{ou} \\ \hat{\lambda}(z, 1) W(z) - \lambda(z, 1) \mathcal{Q}[\phi](z, 1) - f(z) - \beta. \end{cases}$$

Como W e $\mathcal{N}[\phi]$ são funções contínuas e limitadas, conclui-se que $\dot{W} \leq c < \infty$, em cada ponto $z \notin \Omega_S$. Portanto, W é uma função contínua e limitada sobre o espaço $S \cup \partial_S^*$ com derivadas limitadas, ou seja diferenciável com exceção de um conjunto enumerável de pontos ([Roy68], Capítulo 5, Corolário 5). Logo W satisfaz (\mathbf{a}_1) . \square

2.2 Caracterização do problema P_C

Define-se:

$$\lambda_{sup} := \sup\{\lambda(z, u) : z \in (S \cup \partial_S), u \in \mathbf{U}\} \text{ e } \hat{\rho} := \frac{\lambda_{sup}}{\alpha + \lambda_{sup}} \quad (2.27)$$

e considera-se o seguinte lema cuja prova está no apêndice B.2.1:

Lema 2.6 Para $u \in \mathbf{U}$, $\mathcal{T}_u^2 := \mathcal{T}_u \circ \mathcal{T}_u$ é um mapeamento ρ -contrativo¹ em $B(S \cup \partial_S)$

Teorema 2.1 Considerando a hipótese A_1 , pode-se afirmar que:

- (i) A função valor $V : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (1.25) pertence à classe $C_b(S \cup \partial_S^*)$ e a sequência $\{W_k := \mathcal{T}[W_{k-1}], k = 1, 2, \dots\}$, onde $W_0 \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, converge uniformemente para V ;
- (ii) V é o único ponto fixo do operador \mathcal{T} .

¹A definição de mapeamento ρ -contrativo está no Apêndice B.2

(iii) Se a taxa de salto λ independe da variável ξ e do controle $u \in \mathbf{U}$, então $\xi \rightarrow V_n(\xi)$ é uma função contínua e diferenciável com exceção de um conjunto enumerável de pontos, ou seja, V satisfaz \mathbf{a}_1 .

Prova dos itens (i) e (ii): É obtida através do Teorema de Ponto Fixo de Banach (Apêndice B.2.2). Primeiro mostra-se que $\limsup_{k \rightarrow \infty} W_k < \infty$. Para isto, conclui-se através do Lema B.1 e da hipótese A_1 que

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} W_k &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}^k[\phi](z) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \inf_{u \in \mathbf{U}} \mathcal{T}_u^k[\phi](z) \\ &\leq \inf_{u \in \mathbf{U}} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_u^k[\phi](z) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_u^k[\phi](z) < \infty. \end{aligned}$$

A partir do Lema 2.5, observa-se que a sequência $W_k \geq 0$ satisfaz (\mathbf{a}_1) , e portanto pode-se dizer que W_k é uma sequência de funções contínuas e limitadas. Desta forma, se o limite destas funções existir, este limite também deverá pertencer à classe de funções $C_b(S \cup \partial_S^*)$. Em vista dos Lemas 2.6 e B.2 e do Teorema B.1 no Apêndice B.2.2, pode-se garantir que este limite existe e é único, concluindo assim que W_k converge uniformemente na norma “sup” para alguma função denotada por $\mathcal{V} \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ tal que $\mathcal{V} = \mathcal{T}[\mathcal{V}]$. Para concluir que $\mathcal{V} = V$ usa-se os mesmos argumentos do Teorema 4.2 de [BS78], Capítulo 4 (Lema B.3).

Prova do item (iii): A prova deste item está na proposição 11 de [dVS99]. \square

Comentário 2.2.1 De acordo com o Teorema 2.1, os resultados da seção 2.1 para $W = \phi = V$ continuam válidos para o problema P_c . Isto vai ser usado para se provar os seguintes fatos:

Teorema 2.2 Em vista da hipótese A_1 pode-se afirmar que:

- (i) A política ótima u^* é constituída somente de valores extremos 0 ou 1;
- (ii) Para $z = (n, \xi)$, $V(z) = \mathcal{N}[V](z)$ se e somente se $u^*(z) = 0$. Se $u^*(z) = 1$ então $V(z)$ satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\dot{V}(z) - \widehat{\lambda}(z, 1)V(z) + \lambda(z, 1)\mathcal{Q}[V](z, 1) + f(z) + \beta = 0, \quad (2.28)$$

sobre intervalos não vazios $n \times [\zeta_n(j+1), \xi_n(j)]$ $j = 0, 1, \dots, J_n - 1$, com a condição final:

$$V_n(\xi_n(j)) = \begin{cases} \mathcal{D}[V](z_\Gamma) & \text{se } j = 0 \text{ e } \xi_n(0) = \Gamma, \\ \mathcal{N}_n[V](\xi_n(j)) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.29)$$

(iii) $u^* = u^*(z)$ é um controle ótimo em $z = (n, \xi) \notin \Omega_S$ se e somente se

$$\begin{aligned} & \dot{V}(z) \cdot u^* - (\alpha + \lambda(z, u^*))V(z) + \lambda(z, u^*)\mathcal{Q}[V](z, 1) + f(z) + \beta u^* \\ &= \min\{\dot{V}(z) \cdot u - \widehat{\lambda}(z, u)V(z) + \\ & \quad + \lambda(z, u)\mathcal{Q}[V](z, u) + \beta u + f(z) : u \in [0, 1]\} = 0. \end{aligned}$$

(iv) A função valor satisfaz a seguinte desigualdade variacional:

$$\{\dot{V}(z) - (\alpha + \lambda(z, 1))V(z) + \lambda(z, 1)\mathcal{Q}[V](z, 1) + f(z) + \beta\} \wedge \{\mathcal{N}[V](z) - V(z)\} = 0, \quad (2.30)$$

para q.t $z \in S$, com a condição de fronteira:

$$V(z_\Gamma) = \mathcal{D}[V](z_\Gamma) \wedge \mathcal{N}[V](z_\Gamma), \text{ onde } z_\Gamma = (n, \Gamma).$$

Prova: De acordo com o comentário 2.2.1, conclui-se que os itens (i),(ii) e (iii) do Teorema 2.2 é demonstrado através dos Lemas 2.3, 2.4 e 2.5 com $\phi = V$ e $W = V$. Já o item (iv) é obtido de acordo com o comentário 2.1.2 com $V = W = \phi$. \square

2.3 Notas e Referências

2.1 - Em problemas gerais de controle ótimo do PMDP, a classe de controles realimentados \mathbf{U} não é adequada para se garantir a unicidade e existência da solução da equação diferencial que representa a dinâmica da sua trajetória determinística. De acordo com [Dav93], pg. 137 a classe de controle adequada é chamada de "controle em malha aberta por partes." Nesta classe, o controle só depende do estado no instante de saltos; entre saltos o controle é do tipo malha aberta. No entanto, para o problema P_c especificamente, a classe \mathbf{U} é apropriada, tendo em vista a simplicidade de sua dinâmica, que é dada pela equação $\dot{\xi}_t = u_t$ ([Dav93], pg. 139.)

2.2 - Para que o problema P&E sem set up formulado em (1.6) satisfaça a hipótese A_1 , é necessário estabelecer um limite máximo de armazenamento dos itens e um limite mínimo de déficit de estoque, abaixo do qual haverá perdas de clientes. Este problema, denominado P&E sem set up e espaço limitado, pode ser formulado da seguinte forma: seja $N^- < 0$ o limite inferior de déficit de estoque e $N^+ > 0$ o limite superior de estoque; portanto $n_t \in I_N := \{N^-, \dots, N^+\}$. Considera-se o custo $\Psi : \{N^+, N^-\} \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$, o qual penaliza o processo (n_t, ξ_t) sempre que os níveis N^- ou N^+ forem atingidos. Seja o tempo de parada:

$$\tau_c = \inf\{t \geq 0 : n_t \leq N^- \text{ ou } n_t \geq N^+\},$$

A função valor do problema P&E com espaço limitado, $V : I_N \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$, é definida por:

$$V_n(\xi) := \inf_{u \in \mathbf{U}} E_z^\tau \left\{ \int_0^{\tau_c} e^{-\alpha s} (L(n_s) + \beta u_s) ds + e^{-\alpha \tau_c} \Psi(n_{\tau_c}, \xi_{\tau_c}) \right\}, \quad (2.31)$$

onde $z = (n, \xi)$. Os resultados obtidos neste Capítulo podem ser estendidos ao problema definido acima, desde que a seguinte condição de fronteira seja satisfeita:

$$V_n(\Gamma) = \begin{cases} V_{n+K}(0) & \text{se } N^- < n + K < N^+ , \\ \Psi_n(0) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No Capítulo 5, mostra-se no Teorema 5.3 que a função custo $L(n)$ do problema P&E não precisa ser limitada, eliminando esta exigência da hipótese A_1 .

2.3 - (Existência da Solução) O Problema de controle ótimo determinístico apresentado no Lema 2.1 pode ser desmembrado em dois tipos de problemas específicos: O primeiro, definido em (2.18) possui uma trajetória que atinge sempre a fronteira Γ num tempo finito $t_f = t_u^*(z)$. Este problema é do tipo tempo final livre, conjunto alvo dos estados finais compacto e conjunto de controles também compacto. Portanto existirá solução em vista de Teorema 4.1, pg. 68 de [FR75].

O segundo problema, definido em (2.19), possui uma trajetória que permanece indefinidamente no interior de $[0, \Gamma]$, com posição final $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) < \Gamma$ livre. Este problema também é padrão, e a sua solução existirá se a sequência de controles

$$u_n^k(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{para } \xi \leq \Gamma - \epsilon_k, \\ 0 & \text{para } \Gamma - \epsilon_k < \xi \leq \Gamma. \end{cases}$$

não for uma sequência minimizante quando $\epsilon_k \rightarrow 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Observa-se que, para esta sequência de controles, a trajetória terá uma posição final $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t)$ que se aproximará cada vez mais da fronteira $\mathbb{Z} \times \{\Gamma\}$, o que implica numa solução que não é factível para a classe de controles \mathbf{U} . Descartando esta estratégia, o problema de um salto terá solução que será dada pelo mínimo entre $\mathcal{K}[\phi]$ e $\mathcal{J}[\phi]$.

2.4 - Observando-se a prova do Teorema 2.1, pode-se mostrar que o problema de controle contínuo P_c possui controles ϵ -ótimos para qualquer $\epsilon > 0$, ou seja:

$$\|V_n^{u_\epsilon}(\xi) - V_n(\xi)\| \leq \epsilon.$$

Estratégias ϵ ótimas podem ocorrer quando o controle ótimo tende a paralisar a trajetória próximo à fronteira, de acordo com o comentário feito na nota anterior.

2.5 -A equação de H-J-B do problema P_c pode ser obtida usando diretamente o gerador infinitesimal e a fórmula de Dynkin, conforme está demonstrado no Apêndice B.3. No entanto, a forma com que se desenvolveu este Capítulo, provando-se primeiro o Teorema 2.1 para se chegar à equação de H-J-B apresentada no Teorema 2.2, será utilizada para se obter um procedimento recursivo que calcula a solução do problema P_c (Capítulo 4) e para se caracterizar a política ótima de produção do problema P&E (Capítulo 5).

Usando esta mesma metodologia, é possível resolver o problema P_c com dinâmica dada por:

$$\dot{\xi} = a\xi + bu,$$

onde $u \in [0, 1]$ é o controle e o custo por unidade de tempo é do tipo quadrático.

Capítulo 3

Solução do Problema P_I

Uma metodologia semelhante à utilizada no capítulo anterior será empregada aqui. Na seção 3.1 mostra-se a regularidade de um operador associado a um problema de parada ótima, cujo horizonte é o instante de primeiro salto ou a primeira intervenção deste problema. Adaptando-se ao problema um custo de intervenção adequado, define-se na seção 3.2 um novo operador e mostra-se que este é um mapeamento contrativo. Na seção 3.3 desenvolve-se a solução do problema P_I de acordo com os resultados gerais para o PMDP (veja [CD89] e [Dav93]) e apresenta-se a caracterização proposta, que é baseada neste mapeamento contrativo. Ainda na seção 3.3 mostra-se que a solução dos problemas P_I com custo de intervenção tendendo a zero, se aproxima da solução do problema P_c , estudado no Capítulo 2.

3.1 O Operador de “Um Salto ou Intervenção”

3.1.1 Definições e Hipóteses

Seja o espaço de estados S formado pela união de duas cópias de um mesmo conjunto, denotados por S' e S'' . Seja o instante t^* definido em (1.12) e considera-se, por definição, que o problema P_I formulado em (1.27) tenha as seguintes características:

- (i) No instante de intervenção $\tau = t$ o processo $s \rightarrow z_s, 0 \leq s < t$ é transferido do estado $z_{t-} = \lim_{s \uparrow t} z_s \in S'$ (ou S'') para o ponto \bar{z}_t pertencente ao subconjunto S'' (ou S') do espaço de estados S ;
- (ii) Para cada $z \in S''$ a trajetória determinística satisfaz $\varphi(t, z) = z, t \geq 0$, ou seja, a trajetória determinística possui velocidade nula em S'' .

Para $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, define-se o seguinte conjunto:

$$U_\epsilon = \{z \in S : t^*(z) \geq \epsilon\} \quad \text{para } \epsilon > 0.$$

e considerando a medida de probabilidade μ dada em (1.15), define-se o seguinte valor esperado:

$$\mathcal{Q}[\phi](z) := E[\phi(z_{T_1}) | z_{T_1^-} = z]. \quad (3.1)$$

Assume-se que o problema P_I também satisfaça as seguintes hipóteses:

(B_1) $h, g \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ e $\mathcal{Q}[\phi] \in C_b(S)$ para todo $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$,

(B_2) Para cada $z \in S$, $g(z) \geq g_0 > 0$,

(B_3) Existe $\epsilon > 0$ tal que $\mu(z, U_\epsilon) = 1$, $\forall z \in \partial_S^*$.

A hipótese B_2 garante a existência de intervenções isoladas no tempo para qualquer candidato à solução ótima do problema (1.27). Os detalhes relacionando B_2 com as condições gerais definidas em [Dav93] e [CD89] estão no Apêndice C.3. A hipótese B_3 garante a existência de saltos isolados no tempo, haja visto que os saltos em ∂_S^* serão direcionados para pontos distantes desta fronteira. Sejam as funções ϕ e ψ pertencentes à classe $C_b(S \cup \partial_S^*)$ e definem-se os seguintes operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t[\phi, \psi](z) &:= E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{t \geq T_1\}} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\alpha t} (\psi(\bar{z}_t) + g(z_{t-})) \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} \right\}, \\ \mathcal{R}[\phi, \psi](z) &:= \inf_{0 \leq t \leq t^*(z)} \mathcal{R}_t[\phi, \psi](z). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observa-se que, se $t \geq T_1$, o operador de “um salto ou intervenção” \mathcal{R}_t é equivalente ao custo associado com a evolução de z_s no intervalo $0 \leq s \leq T_1$, com um custo final $\phi(z_{T_1})$. No caso complementar, $t < T_1$, o custo \mathcal{R}_t está associado à evolução de z_s no intervalo $0 \leq s \leq t$, considerando-se o custo final $\psi(\bar{z}_t) + g(z_{t-})$, a ser pago no instante de intervenção $\tau_1 = t$.

Definição 3.1 Uma função $\phi : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução viscosa da equação diferencial $F(\phi, D\phi, z) = 0$ se e somente se:

(i) $F(\phi, p, z) \leq 0$ para qualquer $p \in D^-\phi(z)$;

(ii) $F(\phi, p, z) \geq 0$ para qualquer $p \in D^+\phi(z)$;

onde $D^+[\phi](z)$ é o superdiferencial definido por:

$$D^+[\phi](z) := \left\{ p \in \mathbb{R} : \limsup_{|z_n - z| \rightarrow 0} \frac{\phi(z_n) - \phi(z) - \langle p, z_n - z \rangle}{z_n - z} \leq 0 \right\}$$

e $D^-[\phi](z)$ é o subdiferencial definido por $D^-[\phi](z) := -D^+(-[\phi](z))$

Nos pontos onde $\phi(z)$ é diferenciável, define-se:

$$D[\phi](z) := \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [\phi(\varphi(t, z)) - \phi(z)] = D^-[\phi](z) = D^+[\phi](z).$$

Exige-se aqui que a trajetória determinística seja continuamente diferenciável sobre S , e assim como em [Gat92]:

(B_4) Existe $a = (a_1 \cdots a_d)$ $a_j \in C_b(S)$, $j = 1, \dots, d$ tal que $D[\phi](z) = \langle a(z), \nabla \phi(z) \rangle$, para qualquer $\phi \in C_b(S)$ diferenciável em $z \in S$.

3.1.2 Equações de Otimalidade

Para $\phi, \psi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ seja a função $\nu : S \cup \partial_S^*$ definida por:

$$\nu(z) := \mathcal{R}[\phi, \psi](z). \quad (3.3)$$

Usando-se os argumentos de [Dav93], Lema (53.38), p. 224, prova-se o seguinte resultado:

Proposição 3.1 *Assume-se que as hipóteses B_1 e B_2 sejam válidas, e supõe-se que $\phi, \psi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$; então $\nu \in C_b(S \cup \partial_S^*)$.*

Considera-se a seguinte notação :

$$\widehat{\Lambda}(t, z) := \int_0^t (\alpha + \lambda(\varphi(s, z))) ds = \int_0^t \widehat{\lambda}(\varphi(s, z)) ds,$$

$$\mathcal{N}[\phi](z) = \frac{1}{\widehat{\lambda}(z)} (h(z) + \lambda(z) \mathcal{Q}[\phi](z)) \quad \forall z \in S, \quad (3.4)$$

$$\text{com a extensão } \mathcal{N}[\phi](z_\Gamma) := \lim_{z \uparrow z_\Gamma} \mathcal{N}[\phi](z) \quad z_\Gamma \in \partial_S^*. \quad (3.5)$$

Lema 3.1 *Assumindo-se que as hipóteses B_1 , B_2 e B_4 sejam válidas, pode-se afirmar que:*

(i) ν definido em (3.3) satisfaz às seguintes desigualdades variacionais:

$$\{D[\nu](z) - \widehat{\lambda}(z)\nu(z) + \lambda(z)\mathcal{Q}[\phi](z) + h(z)\} \wedge \{\psi(\bar{z}) + g(z) - \nu(z)\} = 0, \quad z \in S', \quad (3.6)$$

$$\nu(z) = \{\psi(\bar{z}) + g(z)\} \wedge \mathcal{N}[\phi](z), \quad z \in S'' \quad (3.7)$$

com a condição de fronteira:

$$\nu(z) = \mathcal{Q}[\phi](z) \wedge (\psi(\bar{z}) + g(z)), \quad \text{para } z \in \partial_S^*. \quad (3.8)$$

E se ν satisfaz (3.6)-(3.8) para cada $z \in S$, então $\nu = \mathcal{R}[\phi, \psi]$.

(ii) ν é uma solução viscosa das desigualdades variacionais (3.6)–(3.8).

Prova do item (i): Usando a fórmula da integral por partes, determina-se, para $t \leq t^*(z)$:

$$\begin{aligned}
 E_z^\pi \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds \right\} &= \\
 &= \int_0^t \lambda(\varphi(s, z)) e^{-\Lambda(s, z)} \left(\int_0^s e^{-\alpha r} h(\varphi(r, z)) dr \right) ds + e^{-\Lambda(t, z)} \left(\int_0^t e^{-\alpha r} h(\varphi(r, z)) dr \right) \\
 &= \int_0^t (e^{-\Lambda(r, z)} - e^{-\Lambda(t, z)}) e^{-\alpha r} h(\varphi(r, z)) dr + e^{-\Lambda(t, z)} \left(\int_0^t e^{-\alpha r} h(\varphi(r, z)) dr \right) \\
 &= \int_0^t e^{-\widehat{\Lambda}(s, z)} h(\varphi(s, z)) ds.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Consideram-se agora as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 E_z^\pi \{ e^{-\alpha t} \nu(z_t) \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} - \nu(z) \} & \\
 &= E_z^\pi \{ e^{-\alpha t} \nu(\varphi(t, z)) \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} - \nu(z) \} \\
 &= e^{-\Lambda(t, z)} e^{-\alpha t} \nu(\varphi(t, z)) - \nu(z) \\
 &= \int_0^t e^{-\widehat{\Lambda}(s, z)} \left(-\widehat{\lambda}(\varphi(s, z)) \nu(\varphi(s, z)) + D[\nu](\varphi(s, z)) \right) ds
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

e

$$\begin{aligned}
 E_z^\pi \{ e^{-\alpha T_1} \phi(z(T_1)) \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t\}} \} & \\
 &= E_z^\pi \{ e^{-\alpha T_1} \mathcal{Q}[\phi](\varphi(T_1, z)) \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t\}} \} \\
 &= \int_0^t e^{-\Lambda(s, z)} \left(\lambda(\varphi(s, z)) e^{-\alpha s} \mathcal{Q}[\phi](\varphi(s, z)) \right) ds + e^{-\widehat{\Lambda}(t, z)} \mathcal{Q}[\phi](\varphi(t, z)) \mathbb{1}_{\{t = t^*(z)\}}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Portanto, a partir de (3.9)–(3.11) calcula-se:

$$\begin{aligned}
 E_z^\pi \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z(T_1)) \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t\}} + e^{-\alpha t} (\psi(\bar{z}_t) + g(z_{t-})) \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} - \nu(z) \right\} \\
 &= \int_0^t e^{-\widehat{\Lambda}(s, z)} \left(h(\varphi(s, z)) + \lambda(\varphi(s, z)) \mathcal{Q}[\phi](\varphi(s, z)) - \right. \\
 &\quad \left. - \widehat{\lambda}(\varphi(s, z)) \nu(\varphi(s, z)) + D[\nu](\varphi(s, z)) \right) ds + e^{-\widehat{\Lambda}(t, z)} (\psi(\bar{\varphi}(t, z)) + g(\varphi(t, z))) \mathbb{1}_{\{t < t^*(z)\}} \\
 &\quad + e^{-\widehat{\Lambda}(t, z)} (\mathcal{Q}[\phi](\varphi(t, z)) \mathbb{1}_{\{t = t^*(z)\}} - \nu(\varphi(t, z))),
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $\bar{\varphi}(t, z) = \bar{z}_t$ é o estado após a intervenção em z_{t-} . Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\phi, \psi](z) = \nu(z) = & \quad (3.13) \\ E_z^\pi \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z(T_1)) \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t\}} + e^{-\alpha t} (\psi(\bar{z}_t) + g(z_{t-})) \mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} \right\} - \\ & \int_0^t e^{-\hat{\Lambda}(s, z)} \Omega(\varphi(s, z)) ds + e^{-\hat{\Lambda}(t, z)} (\Gamma_1(\varphi(t, z)) \mathbb{1}_{\{t < t^*(z)\}} + \Gamma_2(\varphi(t, z)) \mathbb{1}_{\{t = t^*(z)\}}), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} \Omega(z) &:= h(z) + \lambda(z) \mathcal{Q}[\phi](z) - \hat{\lambda}(z) \nu(z) + D[\nu](z) \quad \text{para } z \in S \\ \Gamma_1(z) &:= \psi(\bar{z}) + g(z) - \nu(z), \quad \text{para } z \in S \\ \Gamma_2(z) &:= \mathcal{Q}[\phi](z) - \nu(z), \quad \text{para } z \in \partial_S^*. \end{aligned}$$

Aplicando o princípio da otimalidade em (3.12), pode-se afirmar que $\Omega(z) \geq 0$, $\Gamma_1(z) \geq 0$ e $\Gamma_2(z) \geq 0$ e o ínfimo é obtido se e somente se em (3.13) $\Omega(\varphi(s, z)) = 0$, $0 \leq s < t$, $\Gamma_1(\varphi(t, z)) = 0$ se $t < t^*(z)$ ou $\Gamma_1(\varphi(t, z)) \wedge \Gamma_2(\varphi(t, z)) = 0$ se $t = t^*(z)$. Logo, $t = \arg \min\{\mathcal{R}_s[\phi, \psi](z) : 0 \leq s \leq t^*(z)\}$ e $\tau_1 = t$ é o instante ótimo de intervenção. Consequentemente as seguintes expressões devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} \Omega(z) \wedge \Gamma_1(z) = 0, \quad \forall z \in S, \\ \Gamma_1(z) \wedge \Gamma_2(z), \quad \forall z \in \partial_S^* \end{aligned} \quad (3.14)$$

que são equivalentes, respectivamente, a (3.6) para $z \in S'$ e a condição de fronteira (3.8) para $z \in \partial_S^*$. Para $z \in S''$ observa-se que $D[\nu] = 0$, e de (3.4), $\Omega(z) = h(z) + \lambda(z) \mathcal{Q}[\phi](z) - \hat{\lambda}(z) \nu(z) = \hat{\lambda}(z) (\mathcal{N}[\phi](z) - \nu(z))$. Usando este fato em (3.14) obtém-se um resultado equivalente a (3.7).

Prova do item (ii): É necessário somente provar que ν é solução viscosa da e.d.o.

$$D[\nu](z) - \hat{\lambda}(z) \nu(z) + \lambda(z) \mathcal{Q}[\phi](z) + h(z) = 0,$$

usando os mesmos argumentos da Proposição 5 de [Gat92] (veja Apêndice C.1). \square

Seja $AC(\mathbb{R}^+)$ o espaço de funções absolutamente contínuas (Definição A.2 no Apêndice A) e seja a classe de funções:

$$\mathcal{W} := \{w \in C_b(S \cup \partial_S^*) : w(\varphi(\cdot, z)) \in AC(\mathbb{R}^+) \text{ para qualquer } z \in S\}.$$

Definição 3.2 Uma função $\phi : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução generalizada da equação diferencial de primeira ordem $F(\phi, D\phi, z) = 0$ se $\phi \in \mathcal{W}$ e satisfaz $F(\phi, D\phi, z) = 0$ em q.t. $z \in S \cup \partial_S$.

Em vista do Lema 3.1 e da Proposição 6 de [Gat92], pode-se afirmar que:

Proposição 3.2 Se $g, \psi, \phi, \mathcal{Q}[\phi] \in \mathcal{W}$ então ν é uma solução generalizada de (3.6) – (3.8).

3.2 Resultados Intermediários

Seja o seguinte operador:

$$\mathcal{P}[\phi](z) := \begin{cases} \mathcal{R}[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z), & \text{para } z \in S' \\ (\mathcal{R}[\phi, \mathcal{N}[\phi]](\bar{z}) + g(z)) \wedge \mathcal{N}[\phi](z), & \text{para } z \in S''. \end{cases} \quad (3.15)$$

Comentário 3.2.1 *Em vista de (3.15), verifica-se que $\mathcal{P}[\phi](z) = (\mathcal{P}[\phi](\bar{z}) + g(z)) \wedge \mathcal{N}[\phi](z)$ para $z \in S''$.*

3.2.1 Propriedades do Operador \mathcal{P}

Definindo:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\phi](z) &:= \inf_{0 \leq t < t^*(z)} \mathcal{R}_t[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) = E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{t \geq T_1\}} + e^{-\alpha t} (\mathcal{N}[\phi](\bar{z}_t) + g(z_t)) \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

e

$$\mathcal{K}[\phi](z) := \mathcal{R}_{t^*(z)}[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) = E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \right\}, \quad (3.17)$$

onde a última igualdade é obtida a partir de (3.2) e do fato de que $P_z(t < T_1) = 0$ se $t = t^*(z)$. Portanto, em vista de (3.15), (3.16) e (3.17) obtém-se a seguinte expressão para todo $z \in S'$:

$$\mathcal{P}[\phi](z) = \mathcal{R}[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) = \mathcal{J}[\phi](z) \wedge \mathcal{K}[\phi](z). \quad (3.18)$$

Observa-se também, a partir do Comentário 3.2.1 e de (3.18) que pode-se escrever:

$$\mathcal{P}^2[\phi](z) = \begin{cases} \mathcal{J}[\mathcal{P}[\phi]](z) \wedge \mathcal{K}[\mathcal{P}[\phi]](z), & z \in S', \\ (\mathcal{P}^2[\phi](\bar{z}) + g(z)) \wedge \mathcal{N}[\mathcal{P}[\phi]](\bar{z}), & z \in S''. \end{cases} \quad (3.19)$$

Seja o seguinte resultado auxiliar cuja prova está no Apêndice C.2:

Lema 3.2 *Sejam os mapeamentos $\mathcal{H} : B(S \cup \partial_S^*) \rightarrow B(S \cup \partial_S^*)$, $\mathcal{I} : B(S \cup \partial_S^*) \rightarrow B(S \cup \partial_S^*)$ e supõe-se que*

$$\|\mathcal{H}[\phi_0] - \mathcal{H}[\phi_1]\| \leq r\|\phi_0 - \phi_1\| \text{ e } \|\mathcal{I}[\phi_0] - \mathcal{I}[\phi_1]\| \leq s\|\phi_0 - \phi_1\|,$$

onde $r, s > 0$ são constantes. Defina-se $\mathcal{G} : B(S \cup \partial_S^*) \rightarrow B(S \cup \partial_S^*)$ por

$$\mathcal{G}[\phi](z) := \mathcal{H}[\phi](z) \wedge \mathcal{I}[\phi](z).$$

Então:

$$\|\mathcal{G}[\phi_0] - \mathcal{G}[\phi_1]\| \leq \max\{r, s\}\|\phi_0 - \phi_1\|.$$

Seja

$$\rho := \sup_{z \in S} \frac{\lambda(z)}{\widehat{\lambda}(z)} < 1, \quad \widehat{\lambda}(z) = \alpha + \lambda(z) \tag{3.20}$$

e consideram-se os seguintes resultados:

Lema 3.3 (i) \mathcal{N} é uma ρ -contração;

(ii) \mathcal{J} é uma ρ -contração;

(iii) \mathcal{P} é uma contração.

Prova do item (i): É direta da definição de \mathcal{N} em (3.4).

Prova do item (ii): Usando (3.2) com $\psi = \mathcal{N}[\phi_0]$ e $\psi = \mathcal{N}[\phi_1]$, respectivamente, obtém-se:

$$|\mathcal{R}_t[\phi_0, \mathcal{N}[\phi_0]](z) - \mathcal{R}_t[\phi_1, \mathcal{N}[\phi_1]](z)| =$$

$$|E_z^\pi \{ e^{-\alpha t} [\mathcal{N}[\phi_0](\bar{z}_t) - \mathcal{N}[\phi_1](\bar{z}_t)] \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} [\phi_0(z_{T_1}) - \phi_1(z_{T_1})] \mathbb{1}_{\{t \geq T_1\}} \}|$$

e se $0 \leq t < t^*(z)$, conclui-se do item (i) que:

$$|\mathcal{R}_t[\phi_0, \mathcal{N}[\phi_0]](z) - \mathcal{R}_t[\phi_1, \mathcal{N}[\phi_1]](z)| \leq E_z^\pi \{ \rho e^{-\alpha t} \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} \mathbb{1}_{\{t \geq T_1\}} \} \|\phi_0 - \phi_1\|$$

$$= [\rho e^{-\widehat{\Lambda}(t,z)} + \int_0^t \lambda(\varphi(s,z)) e^{-\widehat{\Lambda}(s,z)} ds] \|\phi_0 - \phi_1\|$$

$$\leq [\rho e^{-\widehat{\Lambda}(t,z)} + \rho \int_0^t \widehat{\lambda}(\varphi(s,z)) \exp\{-\int_0^s \widehat{\lambda}(\varphi(u,z)) du\} ds] \|\phi_0 - \phi_1\| = \rho \|\phi_0 - \phi_1\|. \tag{3.21}$$

Portanto, de (3.16) e (3.21) prova-se a segunda parte deste lema.

Prova do item (iii): Primeiro mostra-se que \mathcal{K} é um mapeamento contrativo. A partir de (3.17) chega-se às seguintes desigualdades:

$$\|\mathcal{K}[\phi_0] - \mathcal{K}[\phi_1]\| \leq E_z \{ e^{-\alpha T_1} \|\phi_0(z_{T_1}) - \phi_1(z_{T_1})\| \} \leq \|\phi_0 - \phi_1\|. \quad (3.22)$$

Portanto, de (3.18), do item (ii) deste lema e em vista do Lema 3.2, verifica-se que:

$$\sup_{z \in S'} |\mathcal{P}[\phi_0](z) - \mathcal{P}[\phi_1](z)| \leq \|\phi_0 - \phi_1\|. \quad (3.23)$$

Agora, para $z \in S''$ observa-se a partir de (3.15) que:

$$\mathcal{P}[\phi](z) = \{ \mathcal{P}[\phi](\bar{z}) + g(z) \} \wedge \mathcal{N}[\phi](z), \quad \forall z \in S''. \quad (3.24)$$

Usando os itens (i) e (ii) deste lema, juntamente com o Lema 3.2, chega-se ao seguinte resultado:

$$\sup_{z \in S''} |\mathcal{P}[\phi_0](z) - \mathcal{P}[\phi_1](z)| \leq \|\phi_0 - \phi_1\| \quad (3.25)$$

e assim se completa a prova do item (iii). \square

Seja o operador $\mathcal{K}[\mathcal{P}[\phi]](z)$ para $z \in S'$, o qual será denotado por $\bar{\mathcal{K}}[\phi]$. Portanto, de (3.17) tem-se que:

$$\bar{\mathcal{K}}[\phi](z) = E_z \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \inf_{T_1 \leq s \leq t^*(z_{T_1})} \mathcal{R}_s[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z_{T_1}) \right\}. \quad (3.26)$$

Lema 3.4 *Supondo que a hipótese B_3 seja válida, pode-se afirmar que $\bar{\mathcal{K}}$ é um mapeamento ρ -contrativo.*

Prova: Para qualquer $\hat{z} \in S \cup \partial_S$, supõe-se arbitrariamente que:

$$\|\bar{\mathcal{K}}[\phi_0] - \bar{\mathcal{K}}[\phi_1]\| = |\bar{\mathcal{K}}[\phi_0](\hat{z}) - \bar{\mathcal{K}}[\phi_1](\hat{z})|.$$

Usando o Lema 3.3 (i), verifica-se que:

$$\begin{aligned}
& |\bar{\mathcal{K}}[\phi_0](\hat{z}) - \bar{\mathcal{K}}[\phi_1](\hat{z})| = \\
& = E_{\hat{z}} \left\{ e^{-\alpha T_1} \left| \inf_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} \mathcal{R}_t[\phi_0, \mathcal{N}[\phi_0]](z_{T_1}) - \inf_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} \mathcal{R}_t[\phi_1, \mathcal{N}[\phi_1]](z_{T_1}) \right| \right\} \\
& \leq E_{\hat{z}} \left\{ e^{-\alpha T_1} \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} \left| \mathcal{R}_t[\phi_0, \mathcal{N}[\phi_0]](z_{T_1}) - \mathcal{R}_t[\phi_1, \mathcal{N}[\phi_1]](z_{T_1}) \right| \right\} \\
& \leq E_{\hat{z}} \left\{ e^{-\alpha T_1} \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} E_{z_{T_1}} \left\{ e^{-\alpha(t-T_1)} |\mathcal{N}[\phi_0](\bar{z}_t) - \mathcal{N}[\phi_1](\bar{z}_t)| \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t < T_2\}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^{-\alpha(T_2-T_1)} |\phi_0(z_{T_2}) - \phi_1(z_{T_2})| \mathbb{1}_{\{t \geq T_2\}} \right\} \right\} \\
& \leq E_{\hat{z}} \left\{ e^{-\alpha T_1} \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} E_{z_{T_1}} \left\{ \rho e^{-\alpha(t-T_1)} \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t < T_2\}} + e^{-\alpha(T_2-T_1)} \mathbb{1}_{\{t \geq T_2\}} \right\} \right\} \|\phi_0 - \phi_1\|.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Portanto, conclui-se a prova deste lema se for demonstrado que:

$$E_{\hat{z}} \left\{ \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} E_{z_{T_1}} \left\{ \rho e^{-\alpha(t-T_1)} \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t < T_2\}} + e^{-\alpha(T_2-T_1)} \mathbb{1}_{\{t \geq T_2\}} \right\} \right\} \leq \rho = \sup_{z \in S} \frac{\lambda(z)}{\hat{\lambda}(z)}. \tag{3.28}$$

Para isto, observa-se a partir da hipótese B_3 que $T_2 - T_1 > 0$ q.c., e portanto aplica-se a propriedade de Markov Forte do PMDP, e a distribuição do primeiro salto em (1.14), para se obter:

$$\begin{aligned}
E_{z_{T_1}} \left\{ e^{-\alpha(T_2-T_1)} \mathbb{1}_{\{t \geq T_2\}} \right\} &= \int_0^{t-T_1} \lambda(\varphi(s, z_{T_1})) \exp \left\{ - \int_0^s \hat{\lambda}(\varphi(u, z_{T_1})) du \right\} ds \\
&\leq \rho \int_0^{t-T_1} \hat{\lambda}(\varphi(s, z_{T_1})) \exp \left\{ - \int_0^s \hat{\lambda}(\varphi(u, z_{T_1})) du \right\} ds \\
&= \rho \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^{t-T_1} \hat{\lambda}(\varphi(u, z_{T_1})) du \right\} \right],
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde ρ é dado por (3.20). Também observa-se que,

$$E_{z_{T_1}} \left\{ \rho e^{-\alpha(t-T_1)} \mathbb{1}_{\{T_1 \leq t < T_2\}} \right\} \leq \rho \exp \left\{ - \int_0^{t-T_1} \hat{\lambda}(\varphi(u, z_{T_1})) du \right\}. \tag{3.30}$$

Portanto, (3.28) segue de (3.29) e (3.30) e o Lema está demonstrado. \square

3.3 Caracterizações do problema P_I

A primeira caracterização é obtida adaptando-se os resultados de [CD89] e [Dav93] para o problema geral de controle impulsional do PMDP, conforme mostra a Proposição 3.3 a seguir. Seja $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ e define-se:

$$\mathcal{L}[\phi](z) := \mathcal{R}[\phi, \phi](z). \quad (3.31)$$

Proposição 3.3 *Assumindo-se que as hipóteses B_1 e B_2 sejam válidas, pode-se afirmar que V é a maior função mensurável a Borel que resolve o sistema:*

$$\begin{cases} w = \mathcal{L}[w] \\ w \leq I, \end{cases}$$

onde $I : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por:

$$I(z) := E_z \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} h(z_s) ds \right\}. \quad (3.32)$$

Além disto, para uma função $V_0 \geq I$, a sequência V_i $i = 1, 2, \dots$, definida por:

$$V_i(z) := \mathcal{L}[V_{i-1}](z), \quad \forall z \in S, \quad (3.33)$$

converge para V quando $i \rightarrow \infty$.

Prova: Veja Apêndice C.3.1

Antes da caracterização proposta para o problema P_I , apresenta-se a seguir dois lemas auxiliares. Tendo em vista a Proposição 3.3 e a definição do operador \mathcal{L} em (3.31), pode-se dizer que a expressão (3.3) é satisfeita com $\nu = \phi = \psi = V$. Definem-se os seguintes conjuntos:

$$A_c := \{z \in S : V(z) < V(\bar{z}) + g(z)\} \quad \text{and} \quad A_s := \{z \in S : V(z) = V(\bar{z}) + g(z)\}$$

e note que $V(\bar{z}) + g(z)$ é o custo associado à estratégia de intervenção em $z \in S$. Portanto, denomina-se por A_c o conjunto de não intervenção ou continuidade e por A_s o conjunto de intervenção ou paralisação.

Lema 3.5 *Assumindo-se que as hipóteses B_1 e B_2 sejam válidas, pode-se afirmar que:*

(i) Se $z \in A_s$, $\bar{z} \in A_c$;

$$(ii) \quad V(z) = \mathcal{P}[V](z).$$

Prova do item (i): Supondo $z \in A_s$ e assumindo $\bar{z} \in A_s$, conclui-se que:

$$V(z) = V(\bar{z}) + g(z), \quad (3.34)$$

$$V(\bar{z}) = V(z) + g(\bar{z}). \quad (3.35)$$

Portanto,

$$V(\bar{z}) = V(\bar{z}) + g(z) + g(\bar{z}),$$

o que é um absurdo, considerando que $g(z) + g(\bar{z}) > 0$ a partir de B_2 . Logo, $\bar{z} \in A_c$ se $z \in A_s$.

Prova do item (ii): Primeiro observa-se a partir da Proposição 3.3, que a função valor V satisfaz:

$$V = \mathcal{L}[V] = \mathcal{R}[V, V]$$

e do item (i) deste lema, verifica-se que, se $z \in S'$ e $z \in A_s$, então $\bar{z} \in A_c$. Considerando em (3.3), $\nu = V$, $\phi = V$ e $\psi = V$, conclui-se através de (3.7) no Lema 3.1, que:

$$V(\bar{z}) = \mathcal{N}[V](\bar{z}), \quad \bar{z} \in S'', \bar{z} \in A_c.$$

e deste modo pode-se escrever:

$$V(z) = \mathcal{L}[V](z) = \mathcal{R}[V, \mathcal{N}[V]](z) = \mathcal{P}[V](z), \quad \text{para } z \in S' \quad (3.36)$$

Para completar a demonstração, considera-se no Lema 3.1 que $\nu = V$, $\phi = V$ e $\psi = V$ e obtém-se a seguinte expressão:

$$V(z) = [V(\bar{z}) + g(z)] \wedge \mathcal{N}[V](z), \quad \text{para } z \in S''.$$

Portanto, de (3.36) e do comentário 3.2.1 (pg. 40) tem-se $V(z) = \mathcal{P}[V](\bar{z}) \wedge \mathcal{N}[V](z)$ para $z \in S''$. □

Considera-se agora um resultado semelhante ao do lema anterior. Para $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, define-se o seguinte problema:

$$W(z) := \mathcal{P}[\phi](z), \quad (3.37)$$

onde \mathcal{P} é o operador definido em (3.15). Sejam os seguintes conjuntos:

$$B'_c := \{z \in S' : W(z) < \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z)\} \text{ e } B'_s := \{z \in S' : W(z) = \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z)\},$$

$$B''_c := \{z \in S'' : W(z) < W(\bar{z}) + g(z)\} \text{ e } B''_s := \{z \in S'' : W(z) = W(\bar{z}) + g(z)\},$$

$$B_c := B'_c \cup B''_c \text{ e } B_s := B'_s \cup B''_s.$$

onde $\mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z)$ e $W(\bar{z}) + g(z)$ são os custos de intervenção em $z \in S'$ e $z \in S''$, respectivamente, associados ao problema (3.37).

Lema 3.6 *Assumindo-se que as hipóteses B_1 e B_2 sejam válidas, pode-se afirmar que:*

(i) *Se $z \in B_s$, $\bar{z} \in B_c$;*

(ii) $W(z) = \mathcal{R}[\phi, W](z)$.

Prova do item (i): Aqui usa-se os mesmos argumentos aplicados na prova do Lema 3.5. Para $z \in S'$, supõe-se que $z \in B'_s$ e $\bar{z} \in B''_s$; então :

$$\begin{aligned} W(z) &= \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z) \\ W(\bar{z}) &= W(z) + g(\bar{z}) = \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z) + g(\bar{z}) \leq \mathcal{N}[\phi](\bar{z}), \end{aligned}$$

o que é um absurdo, em vista de B_2 . Portanto, se $z \in B'_s$ então $\bar{z} \in B''_c$. Considerando os mesmo raciocínio, mostra-se que $\bar{z} \in B'_c$ se $z \in B''_s$, provando-se, assim, a primeira parte.

Prova do item(ii): Observa-se a partir de (3.7) com $\psi = W$ que $W(\bar{z}) + g(z) \wedge \mathcal{N}[\phi](z) = \mathcal{R}[\phi, W](z) \forall z \in S''$. Portanto, de (3.15) e (3.37) conclui-se que:

$$W(z) = \begin{cases} \mathcal{R}[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z), & \text{para } z \in S', \\ \mathcal{R}[\phi, W](z), & \text{para } z \in S''. \end{cases} \quad (3.38)$$

Falta mostrar que $\mathcal{R}[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) = \mathcal{R}[\phi, W](z)$ para $z \in S'$. Para $z \in S'$, se $z \in B'_s$ tem-se que $\bar{z} \in B''_c$; logo:

$$W(\bar{z}) = \mathcal{N}[\phi](\bar{z}), \quad \text{se } z \in B'_s,$$

Em vista disto, pode-se escrever:

$$W(z) = \mathcal{R}[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) = \mathcal{R}[\phi, W](z), \quad \text{para } z \in S',$$

o que finaliza a prova deste lema. □

A caracterização proposta é a seguinte:

Teorema 3.1 *Assumindo-se que as hipóteses B_1 - B_4 sejam válidas, pode-se afirmar que:*

(i) $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \circ \mathcal{P}$ é um operador contrativo. Além disto, a sequência

$$W_i(z) := \mathcal{P}[W_{i-1}](z), \quad (3.39)$$

onde $W_0 \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, converge uniformemente para $V \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ e V é a única solução de $V = \mathcal{P}[V]$.

(ii) V é a solução viscosa da desigualdade variacional:

$$\{D[V](z) - \hat{\lambda}(z)V(z) + \lambda(z)\mathcal{Q}[V](z) + h(z)\} \wedge \{\mathcal{N}[V](\bar{z}) + g(z) - V(z)\} = 0, \quad z \in S', \quad (3.40)$$

$$V(z) = \{V(\bar{z}) + g(z)\} \wedge \mathcal{N}[V](z), \quad z \in S'' \quad (3.41)$$

com a condição de fronteira:

$$V(z) = \mathcal{Q}[V](z) \wedge (\mathcal{N}[V](\bar{z}) + g(z)), \quad \text{para } z \in \partial_{S'}^*. \quad (3.42)$$

Prova do item (i): Em vista dos Lemas 3.3 e 3.4 conclui-se que cada operador do lado direito de (3.19), ou seja, $\mathcal{J}[\mathcal{P}[\phi]]$, $\mathcal{K}[\mathcal{P}[\phi]]$ e $\mathcal{N}[\mathcal{P}[\phi]]$ são mapeamentos ρ -contrativos. Logo, a partir do Lema 3.2 demonstra-se que \mathcal{P}^2 é um mapeamento ρ -contrativo. A definição do operador \mathcal{P} em (3.15) implica que:

$$W_1(z) = \begin{cases} \mathcal{R}[W_0, \mathcal{N}[W_0]](z), & \text{para } z \in S', \\ \mathcal{R}[W_0, \mathcal{N}[W_0]](\bar{z}) \wedge \mathcal{N}[W_0](z), & \text{para } z \in S''. \end{cases}$$

Da Proposição 3.1 com $\phi = W_0$ e $\psi = \mathcal{N}[W_0]$, conclui-se que $W_1 \in C_b(S \cup \partial_S^*)$. Por indução, $W_i \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ para todo $i = 1, \dots$. Esta sequência é de Cauchy na norma 'sup', e tendo em vista o Lema B.2, conclui-se que esta sequência converge uniformemente para alguma função $W \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, onde W é o único ponto fixo de \mathcal{P} . Usando o fato de que \mathcal{P}^2 é um mapeamento ρ -contrativo e tendo em vista o Lema 3.5 (ii) pode-se afirmar que $W = V$.

Prova do item (ii): É direta do Teorema 3.1 e do Lema 3.1 com $V(z) = \nu(z) = \phi(z) = \psi(z)$ $z \in S'$ e $\psi(\bar{z}) = \mathcal{N}[V](\bar{z})$, $\bar{z} \in S''$. □

3.3.1 Relação entre os Problemas P_c e P_I

Sejam as variáveis aleatórias n_t e ξ_t , definidas no problema de controle contínuo P_c (Capítulo 1), e considera-se que $\delta_n(\xi)$ é a taxa de salto de (n_t, ξ_t) no interior de S e que $\eta(\xi)$ é a taxa de perigo.

Corolário 3.1 *Para o problema P_I com $z_t = (n_t, \xi_t)$, supõe-se que $h(z) = f(z) + \beta \mathbb{1}_{\{z \in S'\}}$, $\lambda(z) = \delta(z) + \eta(z) \forall z \in S'$, $\lambda(z) = \delta(z) \forall z \in S''$. Se $g(z) \downarrow 0 \forall z \in S$, então:*

(i) $V(z) = V(\bar{z}) \quad z \in S'$,

(ii) *A função valor do problema P_I tende para a função valor do problema P_c .*

Prova do item (i): Fazendo $g(z) \downarrow 0$ em (3.40) e (3.41) conclui-se os seguintes fatos: se $z \in B'_c$, tem-se que $V(z) < \mathcal{N}[V](\bar{z})$ e da desigualdade (3.41) pode-se afirmar que $V(z) = V(\bar{z})$. Agora, se $z \in B'_s$, tem-se que $V(z) = \mathcal{N}[V](\bar{z})$ e através de (3.41) conclui-se novamente que $V(z) = V(\bar{z})$.

Prova do item (ii): Quando $g(z) \downarrow 0$, observa-se que a expressão (3.40) e a desigualdade apresentada no teorema 2.2 (iv) são idênticas, tendo em vista que $V(z) = V(\bar{z})$ e $\mathcal{Q}[V](z_\Gamma) = \mathcal{D}[V](z_\Gamma)$. \square

3.4 Notas e Referências

3.1 - É bem conhecido que não se tem unicidade de solução generalizada de equações de H-J-B ou de desigualdades variacionais. Dentre estas funções, existe uma única função (exatamente a função valor) que satisfaz a propriedade de *viscosidade*, veja Corolário 9.1, do Capítulo 2 em [FS93]. A solução viscosa abrange classes de funções que não precisam necessariamente ser diferenciáveis em nenhum ponto, exigindo apenas que a função seja contínua. Outras propriedades da solução viscosa podem ser encontradas no cap. 2 de [FS93].

3.2 - As caracterizações na forma Lipschitz contínua para a função valor, encontradas em [Dav93] e [Gat91], impõem uma série de restrições ao problema de controle impulsional do PMDP. No teorema (54.35) de [Dav93] assume-se que o custo de intervenção $g(z)$ seja constante, enquanto que no teorema (54.28) de [Dav93] considera-se que este custo seja Lipschitz contínuo, mas requer-se que o conjunto destino de intervenções $K(z)$ seja independente de z ($K(z) = K$). Também em [Gat91] (veja Teorema 1, pg. 93), caracteriza-se a função valor do problema impulsional como Lipschitz contínua, mas requer-se que $\|V(\bar{z}) + g(z)\| \leq \|V(z)\|$, condição esta que também não é satisfeita pelo problema P_I . Por estes motivos, [Dav93] comenta na pag. 245 que o mais adequado para o problema de controle impulsional do PMDP é a caracterização por solução viscosa.

3.3 - Observa-se que o problema P_I engloba os problemas P&E com custo de set up e filas com servidor removível I e II apresentados no Capítulo 1. O problema P&E é igual ao problema P_I com espaço de estados dado por $S' = S'' = \mathbb{Z} \times [0, \Gamma)$; fronteira dada por $\partial S' = \partial S'' = \mathbb{Z} \times \{\Gamma\}$; trajetória determinística descrita por $\varphi(t, z') = (n, t + \xi)$ para $z' \in S'$ e $\varphi(t, z'') = (n, \xi)$ para $z'' \in S''$ e $t \geq 0$;

e a taxa de custo $h(z) = L(n) + \beta$ se $z \in S'$ e $h(z) = L(n)$ se $z \in S''$. No problema de filas com servidor removível I, o espaço de estados é $S' = S'' = \mathbb{Z}^+ \times [0, \Gamma]$; a fronteira é $\partial_{S'} = \partial_{S''} = \mathbb{Z}^+ \times \{\Gamma\}$; a trajetória determinística e a taxa de custo possuem a mesma forma apresentada no problema P&E. Já o problema de filas com servidor removível II é equivalente ao problema P_I com espaço de estados dado por $S' = S'' = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; fronteira igual a $\partial_{S'}^* = \{0\} \times \mathbb{R}^+$; e trajetória determinística é dada por $\varphi(t, z') = V_0 - t$, $0 \leq t \leq V$ para $z' \in S'$, e $\varphi(t, z'') = V_0$ para $z'' \in S''$ e $t \geq 0$. No problema de fila com servidor removível I, se a fronteira $\{1\} \times \{\Gamma\}$ em S' for atingida, deve-se considerar saltos do subconjunto S' para S'' . Já no problema de fila com servidor removível II, os saltos de S' para S'' ocorrerão quando a fronteira $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ em S' for atingida.

O problema P_I também resolve o problema P&E com manutenção programada, semelhante ao modelo proposto por [AK86] (veja nota 2.2 do Capítulo 2) e [BH90]. Em S' o sistema produz a uma taxa constante e o estoque descreve uma trajetória dada pela e.d.o. (1.28); em S'' o sistema está parado devido à falha ou manutenção programada, enquanto o estoque decresce nos instantes de chegada da demanda. A manutenção ocorre após os instantes de intervenção que transferem o processo de S' para S'' , e as falhas são representadas por saltos aleatórios entre estes dois subconjuntos. O decisor deve regular a duração de cada manutenção com o nível de estoque, a fim de que os custos operacionais do sistema sejam minimizados. Em relação aos modelos apresentados em [AK86] e [BH90], o problema proposto aqui tem a vantagem de considerar a aleatoriedade da demanda e incluir o custo de set up g no instante em que se inicia e termina uma manutenção. A desvantagem é que a taxa de produção é constante.

Capítulo 4

Procedimentos Recursivos

Os procedimentos recursivos apresentados a seguir se baseiam no fato de que os operadores de “um salto” e “um salto ou intervenção” podem ser descritos por desigualdades variacionais apresentadas nos capítulos 2 e 3, respectivamente, e que as soluções recursivas destas desigualdades geram seqüências de funções que convergem para as soluções dos problemas P_c e P_f .

O primeiro procedimento fornece a solução do problema P_c , e consiste numa aplicação direta dos Teoremas 2.1 e 2.2.

Algoritmo 4.1 *Considera-se $z = (n, \xi) \in S \cup \partial_S$ e assume-se que a hipótese A_1 seja válida para $f(z)$.*

Passo 1 *Escolha arbitrariamente uma função $W_0(z) \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ satisfazendo (a_1) . Faça $i = 1$.*

Passo 2 *Resolva a seguinte desigualdade variacional:*

$$\{\dot{W}_i(z) - \widehat{\lambda}(z, 1) + \lambda(z, 1)\mathcal{Q}[W_{i-1}](z, 1) + f(z) + \beta\} \wedge \{\mathcal{N}[W_{i-1}](z) - W_i(z)\} = 0, \quad (4.1)$$

para q.t. $z \in S$, com a condição de fronteira:

$$W_i(z_\Gamma) = \mathcal{D}[W_{i-1}](z_\Gamma) \wedge \mathcal{N}[W_{i-1}](z_\Gamma), \quad z_\Gamma = (n, \Gamma),$$

onde \dot{W}_i é a derivada de W em relação à variável ξ .

Passo 3 *Retorne ao passo 2 com $i = i + 1$ se $\|W_i - W_{i-1}\|$ não for suficientemente pequeno; caso contrário adote as seguintes estratégias:*

Faça $u^(z) = 1$ se $W_i(z)$ satisfaz a equação diferencial em (4.1). Caso contrário considere $u^*(z) = 0$.*

O próximo procedimento fornece a solução do problema P_I através do resultado geral de controle impulsionial do PMDP apresentado na proposição 3.3.

Algoritmo 4.2 *Assume-se que as hipóteses B_1 e B_2 sejam válidas.*

Passo 1 *Escolha uma função $V_0(z) \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ tal que $V_0(z) \geq I(z)$, onde a função $I(z)$ é dada por (3.32). Faça $i = 0$.*

Passo 2 *No subconjunto S' determine $V_i(z)$ resolvendo a seguinte desigualdade variacional para q.t. $z \in S'$:*

$$\{\dot{V}_i(z) - \hat{\lambda}(z)V_i(z) + \lambda(z)\mathcal{Q}[V_{i-1}](z) + h(z)\} \wedge \{V_{i-1}(\bar{z}) + g(z) - V_i(z)\} = 0, \quad (4.2)$$

onde V_i satisfaz a seguinte condição de fronteira:

$$V_i(z) = \mathcal{Q}[V_{i-1}](z) \wedge (V_{i-1}(\bar{z}) + g(z)), \quad z \in \partial_{S'}^*. \quad (4.3)$$

Passo 3 *No subconjunto S'' determine:*

$$V_i(z) = [V_{i-1}(\bar{z}) + g(z)] \wedge \mathcal{N}[V_{i-1}](z) \quad \forall z \in S''. \quad (4.4)$$

Passo 4 *Retorne ao passo 2 se $\|V_i - V_{i-1}\|$ não for suficientemente pequeno. Caso contrário, adote as seguintes soluções:*

Não intervir em $z \in S'$ se $V_i(z)$ satisfaz a e.d.o. em (4.5). Quando $V_i(z)$ resolve a equação algébrica em (4.5), então se deve intervir em $z \in S'$, transferindo este estado para $\bar{z} \in S''$;

Não intervir em $z \in S''$ se $V_i(\bar{z}) + g(z) \geq \mathcal{N}[V_{i-1}](z)$. Caso contrário, deve-se transferir o estado $z \in S''$ para $\bar{z} \in S'$.

O terceiro procedimento também fornece a solução do problema P_I , mas se baseia no resultado apresentado no Teorema 3.1.

Algoritmo 4.3 *Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 sejam válidas.*

Passo 1 *Escolha arbitrariamente uma função $W_0(z) \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ tal que W_0 seja diferenciável com exceção de um conjunto enumerável de pontos. Faça $i = 0$.*

Passo 2 No subconjunto S' determine $W_i(z)$ resolvendo a seguinte desigualdade variacional para q.t. $z \in S'$:

$$\{\dot{W}_i(z) - \hat{\lambda}(z)W_i(z) + \lambda(z)\mathcal{Q}[W_{i-1}](z) + h(z)\} \wedge \{\mathcal{N}[W_{i-1}](\bar{z}) + g(z) - W_i(z)\} = 0, \quad (4.5)$$

onde W_i satisfaz a seguinte condição de fronteira:

$$W_i(z) = \mathcal{Q}[W_{i-1}](z) \wedge (\mathcal{N}[W_{i-1}](\bar{z}) + g(z)), \quad z \in \partial_{S'}^*. \quad (4.6)$$

Passo 3 No subconjunto S'' determine:

$$W_i(z) = [W_i(\bar{z}) + g(z)] \wedge \mathcal{N}[W_{i-1}](z) \quad \forall z \in S''. \quad (4.7)$$

Passo 4 Repita o passo 4 do Algoritmo 4.2.

Comentário 4.0.1 Tendo em vista o Corolário 3.1, pode-se dizer que o Algoritmo 4.1 é um caso particular do Algoritmo 4.3 quando a função custo de set up (g) tende a zero e que ambos possuem a mesma velocidade de convergência.

4.1 Aceleração da Convergência

O último procedimento recursivo apresentado a seguir, utiliza explicitamente o fato que o vetor de estado z_t é constituído por um conjunto de variáveis inteiras e reais. Este procedimento é uma variação do método apresentado no Algoritmo 4.3 (e Algoritmo 4.1), quanto à forma de se atualizar a função W_i obtida em cada iteração.

Supondo que a parte inteira da variável de estado z_t seja finita, é possível ordenar o conjunto S em um total de N subconjuntos da seguinte forma:

$$S' = S'^1 \cup \dots \cup S'^{N/2} \quad \text{e} \quad S'' = S''^1 \cup \dots \cup S''^{N/2}, \quad (4.8)$$

ou alternativamente,

$$S = S^1 \cup \dots \cup S^N.$$

Assumindo este tipo de espaço de estado, propõe-se o seguinte método recursivo:

Algoritmo 4.4 Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 sejam válidas e considera-se o operador \mathcal{P} definido em (3.15).

Passo 1 Faça $U_0 = (U_0^1, \dots, U_0^N) \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ arbitrariamente;

Passo 2 Para $i = 1, 2, \dots$ e $k = 1, \dots, N$, calcule recursivamente:

$$U_i^k = \mathcal{P}[\tilde{U}_i^k], \quad (4.9)$$

onde $\tilde{U}_i^k = (\tilde{U}_i^{k1}, \dots, \tilde{U}_i^{kN})$ é definido por:

$$\tilde{U}_i^{kj} = \begin{cases} U_i^j, & \text{para } j = 1, \dots, k-1; \\ U_{i-1}^j, & \text{para } j = k, \dots, N. \end{cases} \quad (4.10)$$

4.2 Comparação dos Procedimentos Recursivos

Nesta seção compara-se a velocidade de convergência dos algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4 considerando-se que o Algoritmo 4.2 seja iniciado por uma função qualquer, não necessariamente o custo I dado por (3.32). Estes procedimentos recursivos serão interpretados como aproximações originadas por meio de problemas de programação dinâmica, cujos horizontes formam seqüências crescentes de tempos de parada. As seqüências que divergem mais rapidamente estão associadas a métodos que convergem mais rapidamente para a solução do problema.

Seja a seqüência de instantes de saltos $\Sigma = \{T_i : i = 0, 1, \dots\}$ e a seqüência de instantes de intervenções $\Pi = \{\tau_i : i = 0, 1, \dots\}$. Seja a seqüência $\Upsilon = \{\varsigma_i : i = 0, 1, \dots\}$, contendo todos os instantes de saltos e intervenções, definida por:

$$\varsigma_0 := 0, \quad \varsigma_i := \min\{t > \varsigma_{i-1} : z_t \neq z_{t-}\},$$

onde $(z_{t-} := \lim_{s \uparrow t} z_s)$. Estas seqüências são $\{F_t\}$ -tempos de parada, e em vista das hipóteses B_2 e B_3 garante-se que $\tau_i \rightarrow \infty$ P_z -q.c. e $T_i \rightarrow \infty$ P_z -q.c., quando $i \rightarrow \infty$, veja apêndice D.2 para maiores detalhes. Consequentemente $\varsigma_i \rightarrow \infty$ P_z -q.c.

Seja a seqüência de funções V_i , W_i e U_i , $i = 0, \dots$, obtidas nos Algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4, respectivamente. Assume-se, no decorrer desta análise, que exista solução ótima para cada problema envolvendo a classe de intervenções Π a ser definido a seguir; apesar de ser possível (e também exaustivo), se estender os resultados obtidos para o caso onde existam somente soluções ϵ -ótimas.

Lema 4.1 Para cada $z \in S$ e $i = 0, 1, \dots$

$$V_i(z) = \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^{\varsigma_i} e^{-\alpha s} h(z_s) dt + \sum_{j=1}^i e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_i\}} + e^{-\alpha \varsigma_i} V_0(z_{\varsigma_i}) \right\}, \quad (4.11)$$

$$W_i(z) = \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^{T_i} e^{-\alpha s} h(z_s) dt + \sum_{j=1}^{\nu_i} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_i\}} + e^{-\alpha T_i} W_0(z_{T_i}) \right\}, \quad (4.12)$$

onde ν_i é um número inteiro tal que $\nu_i \geq i$

Prova: Considera-se $i = 1$. Por definição, $V_1 = \mathcal{L}[V_0]$ e $\varsigma_1 = \tau_1 \wedge T_1$ para $\tau_1 \in [0, \infty]$. Supõe-se que (4.11) seja válido para qualquer $i > 1$. Como $\{z_t : t \geq 0\}$ é um processo de Markov Forte, conclui-se o seguinte resultado através de argumentos de programação dinâmica :

$$\begin{aligned} V_{i+1}(z) &= \mathcal{L}[V_i](z) = \min_{\tau_1} E_z^\pi \left\{ \int_0^{\varsigma_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha \tau_1} g(z_{\tau_1}) \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_1\}} + e^{-\alpha \varsigma_1} V_i(z_{\varsigma_1}) \right\} \\ &= \min_{\tau_1} E_z^\pi \left\{ \int_0^{\varsigma_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha \tau_1} g(z_{\tau_1}) \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_1\}} + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\alpha \varsigma_1} \min_{\pi \in \Pi} E^\pi \left\{ \int_{\varsigma_1}^{\varsigma_{i+1}} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^{i+1} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_{i+1}\}} + e^{-\alpha \varsigma_{i+1}} V_0(z_{\varsigma_{i+1}}) | \mathcal{F}_{\varsigma_1} \right\} \right\} \\ &= \min_{\pi \in \Pi} E^\pi \left\{ \int_0^{\varsigma_{i+1}} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^{i+1} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_{i+1}\}} + e^{-\alpha \varsigma_{i+1}} V_0(z_{\varsigma_{i+1}}) \right\}, \end{aligned}$$

mostrando assim a expressão (4.11) para $i+1$. Para se demonstrar (4.12) observa-se, para $z \in S'$, que:

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \mathcal{P}[W_0](z) = \mathcal{R}[W_0, \mathcal{N}[W_0]](z) = \\ &= \min_{\tau_1} E_z^\pi \left\{ \int_0^{\varsigma_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha \tau_1} (g(z_{\tau_1}) + \mathcal{N}[W_0](\bar{z}_{\tau_1})) \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} W_0(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{\tau_1 \geq T_1\}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Também observa-se que $\varphi(\cdot, z) = z$ para $z \in S''$ e que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[W_0](z) &= \frac{1}{\alpha + \lambda(z)} (h(z) + \lambda(z) \mathcal{Q}[W_0](z)) \\ &= E_z \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(\varphi(t, z)) ds + e^{-\alpha T_1} W_0(z_{T_1}) \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

e de (4.13) e (4.14) acima conclui-se, para $z \in S'$, que

$$W_1(z) = \min_{\tau_1} E_z^\pi \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha \tau_1} g(z_{\tau_1}) \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} W_0(z_{T_1}) \right\}. \quad (4.15)$$

Para $z \in S''$ segue do Lema 3.6 com $W = W_1$ e $\phi = W_0$ e de (4.15) que:

$$\begin{aligned}
W_1(z) &= \mathcal{P}[W_0](z) = \mathcal{R}[W_0, W_1](z) = & (4.16) \\
&= \min_{\tau_1} E_z^\pi \left\{ \int_0^{\varsigma_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha \tau_1} g(z_{\tau_1}) \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_1\}} + \right. \\
&\quad \left. + e^{-\alpha \varsigma_1} \min_{\tau_2} E^\pi \left\{ \int_{\varsigma_1}^{T_1} e^{-\alpha s} h(\bar{z}_s) ds + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. e^{-\alpha \tau_2} g(\bar{z}_{\tau_2}) \mathbb{1}_{\{\tau_2 < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} W_0(\bar{z}_{T_1}) | \mathcal{F}_{\varsigma_1} \right\} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} W_0(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{\tau_1 \geq T_1\}} \right\} \\
&= \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^2 e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} W_0(z_{T_1}) \right\}.
\end{aligned}$$

Conclui-se o resultado deste lema para $z \in S''$ aplicando-se os os mesmos argumentos utilizados para se provar (4.11). \square

Considerando a decomposição $S = S^1 \cup \dots \cup S^N$, seja a função indicadora $\mathcal{X} : S \rightarrow \{1, \dots, N\}$ definida por:

$$\mathcal{X}(z) = k, \quad \text{sempre que } z \in S^k.$$

Define-se a seguinte sequência de $\{F_t\}$ -tempos de parada:

$$\varrho_0 := 0, \quad \varrho_i := \min\{T_j > \varrho_{i-1} : \mathcal{X}(z_{T_j}) > \mathcal{X}(z_{T_j^-}); T_j \in \Sigma\}. \quad (4.17)$$

Com estas definições, pode-se desenvolver uma contrapartida do Lema 4.1 para o método apresentado em (4.9) e (4.10). Pela definição, note que:

$$\begin{aligned}
U_i^1 &= \mathcal{P}[\tilde{U}_i^1] = \mathcal{P}[U_{i-1}] \\
&\vdots \\
U_i^k &= \mathcal{P}[(U_i^1, \dots, U_i^{k-1}, U_{i-1}^k, \dots, U_{i-1}^N)] \\
&\vdots \\
U_i^N &= \mathcal{P}[(U_i^1, \dots, U_i^{N-1}, U_{i-1}^N)]
\end{aligned}$$

e portanto, pode-se escrever:

$$U_1^1(z) = \mathcal{P}[U_0]^1(z), \quad z \in S^1,$$

$$U_1^2(z) = \mathcal{P}[(\mathcal{P}[U_0]^1, U_0^2, \dots, U_0^N)]^2(z) =$$

$$\min_{\tau} E_z^{\pi} \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_j e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_1\}} + e^{-\alpha T_1} (\mathcal{P}[U_0]^1(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{z_{T_1} \in S^1\}} + U_0(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{z_{T_1} \in S^{\ell}, \ell=3, \dots, N\}}) \right\} =$$

$$\min_{\pi \in \Pi} E_z^{\pi} \left\{ \int_0^{\varrho_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_j^{\iota_i} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < \varrho_1\}} + e^{-\alpha \varrho_1} U_0(z_{\varrho_1}) \right\}, \quad z \in S^2$$

onde $\iota_i \geq 1$, $\varrho_1 = T_1$ se $z \in S^1$ e $\varrho_1 = T_2 \mathbb{1}_{\{z_{T_1} \in S^1\}} + T_1 \mathbb{1}_{\{z_{T_1} \in S^{\ell}, \ell=3, \dots, N\}}$ se $z \in S^2$. Em geral, para $1 \leq k \leq N$, pode-se expressar o tempo final ϱ_1 como:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \sum_{\ell=1}^k T_{\ell} \mathbb{1}_{\{\chi(z_{T_{\ell}}) > \chi(z_{T_{\ell}^-}) \text{ e } \chi(z_{T_j}) < \chi(z_{T_j^-}), j=1, \dots, \ell-1, \text{ tal que } \ell-1 \geq 1\}} \\ &= \min\{T_{\ell} : \mathcal{X}(z_{T_{\ell}}) > \mathcal{X}(z_{T_{\ell}^-}); T_{\ell} \in \Sigma\}. \end{aligned}$$

Usando a definição da sequência ϱ_i em (4.17) e argumentos similares ao do Lema 4.1, demonstra-se o seguinte resultado:

Lema 4.2 Para $z \in S$, $i = 0, 1, \dots$ e $\iota_i \geq i$

$$U_i(z) := \min_{\pi \in \Pi} E_z^{\pi} \left\{ \int_0^{\varrho_i} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^{\iota_i} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < \varrho_i\}} + e^{-\alpha \varrho_i} U_0(z_{\varrho_i}) \right\}.$$

O importante é que se verifique as seguintes desigualdades:

$$\varsigma_i \leq T_i \leq \varrho_i. \tag{4.18}$$

Comentário 4.2.1 Desde que o problema P_I não seja degenerado, ou seja, $\varsigma_i = T_i$ ou $T_i = \varrho_i$, observa-se na expressão acima que a sequência $\{\varrho_i\}$ diverge mais rapidamente para o infinito que a sequência $\{T_i\}$, que por sua vez deve divergir mais rápido para o infinito que a sequência $\{\varsigma_i\}$. Portanto, se for provado que V_i , W_i e U_i convergem para a função valor do problema P_I , mostra-se que o algoritmo 4.4 é mais rápido que o algoritmo 4.3, que por sua vez será mais rápido que o algoritmo 4.2.

Seja $\overset{\circ}{V}_i, i = 0, 1, \dots$ a sequência obtida no Algoritmo 4.2 com $V_0 = 0$. Similarmente, denota-se por $\overset{\circ}{W}_i$ e $\overset{\circ}{U}_i, i = 0, 1, \dots$, as sequências obtidas nos Algoritmos 4.3 e 4.4 quando $W_0 = 0$ e $U_0 = 0$, respectivamente. Indica-se por π^* a sequência ótima de intervenção.

Lema 4.3 Para cada $i = 0, 1, \dots$,

$$0 \leq \overset{\circ}{V}_i \leq \overset{\circ}{W}_i \leq \overset{\circ}{U}_i, \quad (4.19)$$

$$\overset{\circ}{V}_i(z) \leq V_i(z) \leq V(z) + E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha_i} \|V_0 - V\| \}, \quad (4.20)$$

$$\overset{\circ}{W}_i(z) \leq W_i(z) \leq V(z) + E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha_i} \|W_0 - V\| \}, \quad (4.21)$$

$$\overset{\circ}{U}_i(z) \leq U_i(z) \leq V(z) + E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha_i} \|U_0 - V\| \}. \quad (4.22)$$

Prova: Observa-se que:

$$\begin{aligned} J_i(z) &= \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^\zeta e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^{l_i} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < \zeta\}} + e^{-\alpha \zeta} J_0(z_\zeta) \right\} \\ &\geq \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^\zeta e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^{l_i} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < \zeta\}} \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

é satisfeito para qualquer $\{F_t\}$ -tempo de parada ζ , e se ϑ é também um $\{F_t\}$ -tempo de parada com $\zeta \leq \vartheta$ P_z -q.c., então:

$$\begin{aligned} &\min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^\zeta e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^{l_i} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < \zeta\}} \right\} \\ &\leq \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^\vartheta e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^{l_i} e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < \vartheta\}} \right\}, \end{aligned}$$

a partir do qual se conclui, juntamente com os Lemas 4.1 e 4.2, mais as desigualdades em (4.18), que:

$$0 \leq \overset{\circ}{V} \leq \overset{\circ}{W} \leq \overset{\circ}{U}.$$

Para se demonstrar (4.21), conclui-se através da expressão (4.23) e de (1.27) que:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{V}_i(z) &= \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^{s_i} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^i e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_i\}} \right\} \\
&\leq \min_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^{s_i} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{j=1}^i e^{-\alpha \tau_j} g(z_{\tau_j}) \mathbb{1}_{\{\tau_j < T_i\}} + e^{-\alpha s_i} V_0(z_{s_i}) \right\} \\
&= V_i(z) \leq V(z) + E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha s_i} \|V_0 - V\| \}.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio, mostra-se as desigualdades (4.21) e (4.22). De (4.18), segue que $0 \leq E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha t_i} \} \leq E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha T_i} \} \leq E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha s_i} \} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$, tendo em vista que $e^{-\alpha s_i} \rightarrow 0$ P_z -q.c. quando $i \rightarrow \infty$. \square

O próximo Teorema conclui esta seção, mostrando que as sequências $\{V_i\}$ (obtida no Algoritmo 4.2), $\{W_i\}$ (obtida no Algoritmo 4.3) e $\{U_i\}$, (obtida no Algoritmo 4.4) convergem para a função valor do problema P_I . Além disto mostra-se que em cada iteração $i = 0, 1, \dots$, o erro de convergência da sequência $\{U_i\}$ é menor que o erro da sequência $\{W_i\}$, que por sua vez será menor ainda que o erro da sequência $\{V_i\}$.

Teorema 4.1 *Supõe-se que $V_0 = W_0 = U_0$. Para cada $i = 0, 1, \dots$ pode-se encontrar números $v_i \leq w_i \leq u_i \leq \bar{u}_i \leq \bar{w}_i \leq \bar{v}_i$, com $v_i \rightarrow 0$ e $\bar{v}_i \rightarrow 0$ tais que*

$$v_i \leq V_i(z) - V(z) \leq \bar{v}_i, \quad (4.24)$$

$$w_i \leq W_i(z) - V(z) \leq \bar{w}_i,$$

$$u_i \leq U_i(z) - V(z) \leq \bar{u}_i.$$

Prova: Considerando $v_i = \| \overset{\circ}{V}_i - V \|$, $\bar{v}_i = \sup_{z \in S} E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha s_i} \|V_0 - V\| \}$, $w_i = \| \overset{\circ}{W}_i - V \|$, $\bar{w}_i = \sup_{z \in S} E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha T_i} \|W_0 - V\| \}$, $u_i = \| \overset{\circ}{U}_i - V \|$ e $\bar{u}_i = \sup_{z \in S} E_z^{\pi^*} \{ e^{-\alpha t_i} \|U_0 - V\| \}$ chega-se ao resultado deste Teorema, em vista do Lema 4.3. \square

4.3 Notas e Referências

4.1 - Definindo-se w_i e \bar{w}_i conforme a prova do Teorema 4.1, conclui-se através de (4.24) que $W_i \rightarrow V$ e $V_i \rightarrow V$ quando $i \rightarrow \infty$ q.c. Observa-se que esta é uma forma alternativa de se mostrar a convergência das sequências $\{W_i\}$ e $\{V_i\}$ para a solução do problema P_I , sem precisar dos argumentos de contração utilizados na prova do Teorema 3.1 ou da análise desenvolvida em [CD89]. Observa-se, no entanto, que a convergência no Teorema 3.1 é uniforme, o que não ocorre em (4.24) e em [CD89].

4.2 - Métodos gerais para a solução do problema de otimização do PMDP foram estudados por [CD89] e [Cos91], para o problema de controle impulsional, e por [BQG95] e [Cam97], para o problema de controle contínuo do PMDP.

Em [CD89], discretiza-se o espaço de estado e resolve-se o problema a partir da caracterização apresentada na Proposição 3.3. Em [Cos91], discretiza-se também o instante de intervenção e formula-se um problema de programação linear. As variáveis deste PL são definidas pela função valor avaliada em cada ponto discretizado, e as restrições com igualdade definem os pontos de intervenção. Num primeiro passo, o PL é resolvido a partir de uma discretização grosseira do espaço de estado, a fim de eliminar as desigualdades associadas à estratégia de não intervenção. Em seguida, aumenta-se o número de discretizações e resolve-se o PL novamente. Em [Cos91] afirma-se que a disponibilidade de programas prontos para resolução de PL é uma vantagem, do ponto de vista de implementação, em relação ao método recursivo da Proposição 3.3, além de permitir a análise de sensibilidade do problema. No entanto, o método baseado na Proposição 3.3 torna-se vantajoso à medida que o número de discretizações aumenta.

Em [Cam97], formula-se um problema de controle ótimo do PMDP discreto no tempo e mostra-se que este se aproxima do problema de controle contínuo no tempo, fornecendo-se uma estimativa do erro de convergência. Usando a técnica dos elementos finitos, [Cam97] discretiza-se também o espaço de estados, e obtém-se este mesmo resultado de convergência para um problema de decisão markoviano discreto no tempo, o qual é resolvido através de aproximações sucessivas. Em [BZZ94] utiliza-se uma técnica semelhante a esta, porém assume-se que o controle seja uma função continuamente diferenciável.

4.3 - Conforme o Corolário 3.1, as soluções dos problemas P_c e P_I irão coincidir quando o custo de set up é igual a zero. Neste caso é mais vantajoso resolver o problema através do procedimento apresentado no Algoritmo 4.1 do que o fornecido no Algoritmo 4.3 tendo em vista que, no primeiro procedimento, o espaço de estado tem uma dimensão que é a metade da dimensão utilizada no segundo.

4.4 No algoritmo 4.4 a convergência é acelerada devido a atualização de cada função $z \rightarrow U_i(z)$ ser feita imediatamente após a mesma ter sido calculada em cada subconjunto S^k . Nos procedimentos apresentados nos algoritmos 4.1 e 4.3, as atualizações são feitas somente após o cálculo de $z \rightarrow W_i(z)$ em todos os pontos do conjunto S . Este resultado não pode ser obtido diretamente pela análise dos operadores de programação dinâmica e parada ótima apresentados nos Capítulos 2 e 3, respectivamente.

4.5 - A estrutura do espaço de estados S , dividido em N subconjuntos (veja (4.8)), aparece no problema de P&E sem custo de set up, capacidade de armazenamento limitada (N^+) e déficit de itens no estoque também limitado (N^-). Considerando $N^+ = -N^- = N$, pode-se definir:

$$S^k = \left\{ k - 1 - \frac{N}{2} \right\} \times [0, \Gamma] \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

Observa-se na Fig. 4.1 que (4.25) forma uma escada, onde a cada degrau associa-se um nível de estoque; o menor nível estaria em S^1 e o maior em S^N .

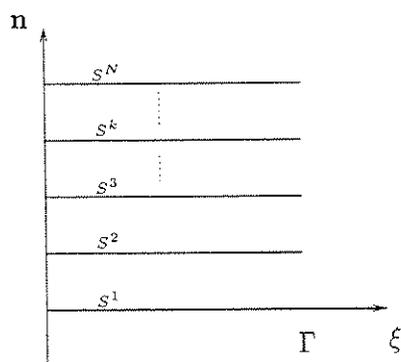


Figura 4.1: Espaço de estados S do modelo P&E sem custo de set up.

Dados ϱ_{i-1} e uma sequência arbitrária de saltos $\{T_j > \varrho_{i-1}\}$, pode-se interpretar ϱ_i definida em (4.17) como o primeiro instante de salto que faz o processo z_t subir qualquer degrau da escada da Fig. 4.1. Como exemplo, estando z_t inicialmente no degrau 3, se o 1^o salto for para o degrau 2, o 2^o for para o degrau 1 e o 3^o for para qualquer degrau acima de 1, então $\varrho_1 = T_3$.

Capítulo 5

Estratégias ótimas

Nas seções 5.1, 5.2 e 5.3 estuda-se o problema P&E com custo de set up e espaço de estados limitado, mostrando-se no Teorema 5.1 a existência de uma região do espaço de estados onde o ótimo é produzir o item até a sua finalização, ou seja, em todo intervalo $[0, \Gamma]$. Na região complementar, prova-se no Teorema 5.2 que a estratégia ótima é bem mais simples do que aquela mostrada na Fig. 2.1 do Capítulo 2: em cada nível “n” de estoque a solução possui no máximo um único intervalo de produção, o qual se inicia em $\xi = 0$ e termina em $\xi_n(0) \leq \Gamma$, significando que o item deve ser parcialmente produzido. No Teorema 5.3 demonstra-se que a solução do problema P&E com espaço de estados não limitado pode ser aproximada da solução do problema com espaço limitado. Na seção 5.4 estendem-se estes resultados ao problema P&E sem custo de set up e obtém-se uma caracterização exclusiva para esta situação.

5.1 O Problema P&E com Custo de Set Up e Espaço Limitado

Além das definições e hipóteses apresentadas no início dos Capítulos 2 e 3, utilizam-se aqui outras hipóteses específicas ao problema P&E formulado no Capítulo 1.

5.1.1 Definições e Hipóteses

No problema P&E considera-se que o término do item seja determinístico ($\eta(\xi) = 0$) e que a taxa de chegada de clientes δ seja uma constante. Em vista disto, conclui-se a partir de (1.21) com $\lambda = \delta$, que:

$$\mathcal{Q}_n[\phi](\xi) := \begin{cases} \mathcal{D}_n[\phi](\Gamma) = \phi_{n+K}(0) & \text{se } \xi = \Gamma, \\ \mathcal{E}_n[\phi](\xi) = \sum_k p_k \phi_{n-k}(\xi) & \text{se } \xi < \Gamma. \end{cases} \quad (5.1)$$

onde K é o tamanho do lote produzido e p_k $k = 1 \dots \ell$ é a probabilidade do lote pedido pelo cliente ser igual a k . Indica-se por g' e g'' a restrição do custo de set up g nos subconjuntos S' e S'' , respectivamente. Assumindo-se que o custo de estoque e déficit de estoque ($n \rightarrow L(n)$)

seja uma função estritamente convexa, é possível existir um número n^* definido pela seguinte expressão:

$$n^* := \max\{n : L(n) - L(n+K) > \Xi(n), \quad \forall n \leq n^*\}, \quad (5.2)$$

onde $\Xi(n) := \beta(e^{\widehat{\lambda}\Gamma} - 1) + \widehat{\lambda}(g'(n+1, 0) + g''(n, \Gamma)e^{\widehat{\lambda}\Gamma}) > 0$, $\widehat{\lambda} = \alpha + \lambda$ e β é a taxa de custo de produção. Seja o seguinte conjunto:

$$S^* := \{N^-, \dots, n^*\} \times [0, \Gamma], \quad S^* \subset S'.$$

Para $z = (n, \xi)$, seja $\dot{\phi}(z)$ a derivada de ϕ em relação a ξ . Assim como no problema P_I , associa-se ao estado $z = (n, \xi)$ o estado $\bar{z} = (n, \xi)$ tal que, se $z \in S'$ ($\in S''$) então $\bar{z} \in S''$ ($\in S'$). Para o problema P&E formulado em (1.9), considera-se que $\xi \rightarrow g_n(\xi)$ seja diferenciável e acrescenta-se as seguintes hipóteses:

- (C₁) $\dot{g}(\bar{z}) - \widehat{\lambda}g(\bar{z}) + \lambda\mathcal{E}[g](\bar{z}) - \beta \leq 0 \quad \forall z \in S'$,
- (C₂) $\dot{g}(\bar{z}) \geq 0$ e $g''(n+1, 0) \leq g''(n, \Gamma) \quad \forall z \in S^*$,
- (C₃) $\dot{g}(z) - \widehat{\lambda}g(z) + \lambda\mathcal{E}[g](z) + \beta \leq 0 \quad \forall z \in S' \setminus S^*$,
- (C₄) $\dot{g}(z) \leq 0$ e $\widehat{\lambda}g(z) + \lambda\mathcal{E}[g](\bar{z}) - \beta \leq 0 \quad \forall z \in S' \setminus S^*$.

Na nota 5.1 apresenta-se uma discussão sobre as hipóteses C_1 - C_4 . Considera-se a seguinte notação:

$$h(z) = L(n) + \beta\mathbb{1}_{\{z \in S'\}}. \quad (5.3)$$

Como a função $n \rightarrow L(n)$ não é limitada sobre \mathbb{Z} , é possível que a função valor (1.8) também não seja limitada, o que impossibilita a aplicação dos resultados obtidos no Capítulo 3 diretamente ao problema P&E com custo de set up. Assim, considerando $I_N = \{N^-, \dots, N^+\}$ e procedendo de maneira indicada na nota 2.2, define-se a função valor do problema P&E com espaço limitado e custo de set up, $V : I_N \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$, através da seguinte expressão:

$$V(z) := \inf_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^{\tau_c} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha \tau_i} g(z_{\tau_i^-}) \mathbb{1}_{\{\tau_i < \tau_c\}} + e^{-\alpha \tau_c} \Psi(z_{\tau_c}) \right\}, \quad (5.4)$$

onde $z_t = (n_t, \xi_t)$, $z = z_0$ e

$$\tau_c = \inf\{t \geq 0 : n_t \leq N^- \text{ ou } n_t \geq N^+\}.$$

Comentário 5.1.1 Como o espaço de estados do problema (5.4) é limitado, a função valor V também será limitada e portanto o Teorema 3.1 pode ser aplicado ao problema (5.4), desde que na fronteira ∂_S^* , a seguinte condição seja satisfeita:

$$V_n(\Gamma) = \begin{cases} V_{n+K}(0) & \text{se } N^- < n+K < N^+, \\ \Psi_n(0) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para a extensão desta solução ao problema com espaço de estados não limitado, vide seção 5.3. A seguir apresenta-se uma sequência de resultados auxiliares que serão utilizados para caracterizar a estratégia ótima do problema P&E em (5.4). As provas destes resultados estão no Apêndice D.

5.1.2 Resultados Auxiliares

Para $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, define-se o seguinte problema:

$$W(z) := \mathcal{P}[\phi](z), \quad (5.5)$$

onde \mathcal{P} é o operador definido em (3.15).

Lema 5.1 *Assume-se que as hipóteses B_1 e B_2 sejam satisfeitas. Para todo $z \in S'$, a função $W(z)$, definida em (5.5) satisfaz:*

$$g(z) \geq W(z) - W(\bar{z}) \geq -g(\bar{z}).$$

Considera-se uma função teste $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$ com as seguintes propriedades:

(c₁) Para todo $z \in S'$, $g(z) \geq \phi(z) - \phi(\bar{z}) \geq -g(\bar{z})$ e $\dot{\phi}(\bar{z}) \leq 0$

Lema 5.2 *Assume-se que as hipóteses B_1 , B_2 e C_1 sejam satisfeitas. Se ϕ satisfaz c₁ então esta propriedade também será satisfeita pela função $W(z) = \mathcal{P}[\phi](z)$.*

Comentário 5.1.2 *Os resultados dos Lemas 5.1 e 5.2 são válidos para $W = \phi = V$, tendo em vista que V é o único ponto fixo de \mathcal{P} , conforme anunciado no Teorema 3.1 e o comentário 5.1.1.*

Para $0 \leq t \leq t^*(z)$ define-se:

$$\xi(t) := \xi_t \text{ para } t < T_1.$$

Seja

$$z_\theta = (n + K, 0), \quad z(t) = (n, \xi(t))$$

e denota-se por $\bar{z}(t)$ o ponto correspondente em S'' (ou S') se $z(t) \in S'$ (ou S''). Considerando (5.1), conclui-se que (3.4) é equivalente a:

$$\mathcal{N}[\phi](z) = \frac{1}{\lambda} (h(z) + \lambda \mathcal{E}[\phi](z)) \quad \forall z \in S. \quad (5.6)$$

Define-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t[\phi, g](z) := & \int_0^t e^{-\hat{\lambda}s} \{ \beta + \dot{g}(z(s)) - \hat{\lambda}g(z(s)) + \lambda [\mathcal{E}[\dot{\phi}](\bar{z}(s)) / \hat{\lambda} \\ & + \mathcal{E}[\phi](z(s)) - \mathcal{E}[\phi](\bar{z}(s))] \} ds. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Lema 5.3 *A função valor (5.4) satisfaz a seguinte expressão:*

$$V(z) = \mathcal{N}[V](\bar{z}) + g(z) + \inf_{t \in [0, t^*(z)]} \{ \mathcal{G}_t[V, g](z) + [V(z_\theta) - (\mathcal{N}[V](\bar{z}(t)) + g(z(t)))] e^{-\hat{\lambda}t} \mathbb{1}_{\{t=t^*(z)\}} \}, \quad \forall z \in S'. \quad (5.8)$$

5.2 Análise da Solução do Problema P&E

O próximo teorema caracteriza a estratégia ótima do problema P&E com custo de set up na região onde o nível de estoque está abaixo do número n^* definido em (5.2).

Teorema 5.1 *Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 , C_1 e C_2 sejam válidas. Supõe-se que existe o número n^* definido em (5.2) com $K = 1$. Então a estratégia ótima do problema (5.4) em cada nível de estoque $n \leq n^*$ é produzir o item completamente, ou seja, produzi-lo em todo intervalo $[0, \Gamma]$.*

Prova: Seja $z_\Gamma = (n, \Gamma)$ e assume-se que a função valor do problema satisfaça às seguintes condições:

$$V(z) \leq V(\bar{z}) \quad \text{para } z \in S^*, \text{ e} \quad (5.9)$$

$$V(\bar{z}_\theta) \leq V(\bar{z}_\Gamma), \quad \text{para } z_\theta \in S^*. \quad (5.10)$$

No final da prova mostra-se que de fato V satisfaz (5.9) e (5.10). Considera-se a e.d.o. em (3.6) escrita na seguinte forma:

$$\dot{\nu}(z) - \hat{\lambda}\nu(z) + \lambda\mathcal{E}[V](z) = 0, \quad z \in S', \quad (5.11)$$

com a condição final $\nu(z_\Gamma) = V(z_\Gamma)$. Portanto ν é o custo da estratégia de não intervenção até o instante T_1 , o qual ocorre em $t^*(z)$. Avalia-se ν considerando $t = t^*(z)$ na expressão (3.13) do Lema 3.1 com $\psi = \phi = V$. Denota-se $\nu = V_c$; é claro que $V \leq V_c$. Portanto, integrando a e.d.o. (5.11) com a respectiva condição de fronteira, determina-se:

$$V(z) \leq V_c(z) = \int_0^{t^*} e^{-\hat{\lambda}s} [h(z(s)) + \lambda\mathcal{Q}[V](z(s))] ds + V(z_\Gamma) e^{-\hat{\lambda}t^*(z)} \leq \int_0^{t^*} e^{-\hat{\lambda}s} [h(z(s)) + \lambda\mathcal{E}[V](z(s))] ds + (\mathcal{N}[V](\bar{z}_\theta) + g(z_\theta)) e^{-\hat{\lambda}t^*(z)}, \quad (5.12)$$

onde a última desigualdade segue por otimalidade, ou seja: $V(z_\Gamma) \leq V(z_\theta) \leq \mathcal{N}[V](\bar{z}_\theta) + g(z_\theta)$, em vista do Teorema 3.1. Usando (5.6), escreve-se (5.12) como a soma de duas integrais I_1 e I_2 :

$$V_c(z) \leq I_1 + I_2 = \int_0^{t^*(z)} e^{-\hat{\lambda}s} h(z(s)) ds + (h(\bar{z}_\theta)/\hat{\lambda} + g(z_\theta)) e^{-\hat{\lambda}t^*(z)} + \int_0^{t^*(z)} \lambda e^{-\hat{\lambda}s} \mathcal{E}[V](z(s)) ds + (\lambda/\hat{\lambda}) \mathcal{E}[V](\bar{z}_\theta) e^{-\hat{\lambda}t^*(z)}. \quad (5.13)$$

Primeiramente calcula-se I_1 . Observa-se a partir de (5.3) que

$$h(z(\cdot)) = h(\bar{z}(\cdot)) + \beta = L(n) + \beta, \quad z(\cdot) \in S' \quad \text{e} \quad h(z_\theta) = L(n+1), \quad z_\theta \in S'',$$

e usando (5.2), escreve-se

$$h(\bar{z}_\theta) < h(\bar{z}) + \beta(1 - e^{\hat{\lambda}t^*(z)}) - \hat{\lambda}(g(z_\theta) + e^{\hat{\lambda}t^*(z)}g(\bar{z}_\Gamma)), \quad \forall z \in S^*, \quad (5.14)$$

tendo em vista que $t^*(z) \leq t^*(0) = \Gamma$. Aplicando (5.14) à integral I_1 definida em (5.13), tem-se o seguinte limitante superior:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq (h(\bar{z}) + \beta)(1 - e^{-\hat{\lambda}t^*(z)})/\hat{\lambda} + & (5.15) \\ &\quad \left([h(\bar{z}) + \beta(1 - e^{\hat{\lambda}t^*(z)})]/\hat{\lambda} - e^{\hat{\lambda}t^*(z)}g(\bar{z}_\Gamma) \right) e^{-\hat{\lambda}t^*(z)} = \\ &= h(\bar{z})/\hat{\lambda} - g(\bar{z}_\Gamma) \leq h(\bar{z})/\hat{\lambda} - g(\bar{z}), \quad \forall z \in S^*, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que $\dot{g}(\bar{z}) \geq 0$, $\forall z \in S^*$, de acordo com a hipótese C_2 . Para se calcular I_2 , consideram-se as desigualdades em (5.9) e (5.10). Portanto $\mathcal{E}[V](z) \leq \mathcal{E}[V](\bar{z})$, $\mathcal{E}[V](\bar{z}_\theta) \leq \mathcal{E}[V](\bar{z}_\Gamma)$, e o seguinte limitante superior é obtido :

$$I_2 \leq \int_0^{t^*(z)} \lambda e^{-\hat{\lambda}s} \mathcal{E}[V](\bar{z}(s)) ds + (\lambda/\hat{\lambda}) \mathcal{E}[V](\bar{z}_\Gamma) e^{-\hat{\lambda}t^*(z)}. \quad (5.16)$$

Tendo em vista que $\dot{V}(\bar{z}) \leq 0$ (comentário 5.1.2), conclui-se a partir da expressão anterior que:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^{t^*(z)} \lambda e^{-\hat{\lambda}s} \mathcal{E}[V](\bar{z}) ds + (\lambda/\hat{\lambda}) \mathcal{E}[V](\bar{z}) e^{-\hat{\lambda}t^*(z)} = & (5.17) \\ &(\lambda/\hat{\lambda}) \mathcal{E}[V](\bar{z}). \end{aligned}$$

Agora considera-se (5.13), (5.15) e (5.17) para se chegar ao seguinte resultado:

$$V_c(z) < \left(h(\bar{z}) + \lambda \mathcal{E}[V](\bar{z}) \right) / \hat{\lambda} - g(\bar{z}) = \mathcal{N}[V](\bar{z}) - g(\bar{z}), \quad \forall z \in S^*. \quad (5.18)$$

A partir do Teorema 3.1, e tendo em vista (5.12) e (5.18) conclui-se para $z \in S^*$ que

$$V(z) = V_c(z) < \mathcal{N}[V](\bar{z}) - g(\bar{z}) \quad \text{e portanto} \quad V(\bar{z}) = V(z) + g(\bar{z}), \quad (5.19)$$

o que implica que $\bar{z} \in B_s''$, e do Lema 3.6 (i), que $z \in B_c'$. Logo $V(z) \leq V(\bar{z}) \quad \forall z \in S^*$, mostrando que V satisfaz (5.9). Além disto, como $S^* \subset B_c'$, tem-se que $V(z_\Gamma) = V(z_\theta)$; considerando o fato de que $g(\bar{z}_\theta) \leq g(\bar{z}_\Gamma)$, $\forall z_\theta \in S^*$ (hipótese C_2), tem-se a partir de (5.19) que

$$\begin{aligned} V(\bar{z}_\theta) &= V(z_\theta) + g(\bar{z}_\theta) = V(z_\Gamma) + g(\bar{z}_\theta) \\ &\leq V(z_\Gamma) + g(\bar{z}_\Gamma) = V(\bar{z}_\Gamma), \quad \text{para cada } z_\theta \in S^*, \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde a última identidade vem do fato de que $\bar{z}_\Gamma \in B_s''$. De (5.19) e (5.20) mostra-se as relações em (5.10), finalizando-se a prova deste teorema. \square

A seguir caracteriza-se a solução do problema P&E na região acima de n^* .

Teorema 5.2 *Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 , C_1 e C_3 sejam satisfeitas. A estratégia ótima do problema (5.4) em cada nível $n > n^*$ só possui um único intervalo de produção, que se inicia em zero e termina em $\xi_n(0) \in [0, \Gamma]$, conforme mostra a Fig. 5.1.*

Prova: Seja o operador \mathcal{G}_t apresentado em (5.7). Primeiro analisa-se o integrando de $t \rightarrow \mathcal{G}_t[V, g](z)$, definido por:

$$G(z) := \beta + \dot{g}(z) - \hat{\lambda}g(z) + \lambda[\mathcal{E}[\dot{V}](\bar{z})/\hat{\lambda} + \mathcal{E}[V](z) - \mathcal{E}[V](\bar{z})]. \quad (5.21)$$

De acordo com o Lema 5.2 com $V = \phi = W$, tem-se que $\dot{V}(\bar{z}) \leq 0 \forall z \in S'$. Através do Lema 5.1 com $V = \phi = W$ e de C_3 obtém-se:

$$G(z) \leq \beta + \dot{g}(z) - \hat{\lambda}g(z) + \lambda\mathcal{E}[g](z) \leq 0, \quad \forall z \in S' \setminus S^*. \quad (5.22)$$

Portanto $t \rightarrow \mathcal{G}_t[V, g](z)$ é monótono decrescente. Supondo $V(z_\theta) < \mathcal{N}[V](\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)$, conclui-se que o instante $t = t^*(z)$ minimiza (5.8) para qualquer $z \in [z_0, z_\Gamma]$, onde $z_0 = (n, 0)$ e $z_\Gamma = (n, \Gamma)$. Portanto $V(z) < \mathcal{N}[V](\bar{z}) + g(z) \forall z \in [z_0, z_\Gamma]$, indicando que se deve produzir o item completamente.

Supõe-se agora que $V(z_\theta) \geq \mathcal{N}[V](\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)$. Neste caso, de (5.8) nota-se que existe $0 \leq \tau < t^*(z)$ tal que $z(\tau) = (n, \xi_n(0))$ para $z(0) = z$. Se $\xi_n(0) \neq 0$ pode-se afirmar que existe $z = (n, \xi)$ com $\xi < \xi_n(0)$ tal que $V(z) < \mathcal{N}[V](\bar{z}) + g(z)$. Tendo em vista (5.8) conclui-se daí que:

$$\mathcal{G}_\tau[V, g](z) < 0, \quad \tau > 0. \quad (5.23)$$

Considera-se $z' < z$ de tal forma que $z'(\tau') = z(\tau) = (n, \xi_n(0))$. Tendo em vista (5.7), (5.22) e (5.23) escreve-se a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\tau'}[V, g](z') &= \int_0^{\tau'-\tau} e^{-\hat{\lambda}s} G(z'(s)) ds + e^{-\hat{\lambda}(\tau'-\tau)} \mathcal{G}_\tau[V, g](z) \\ &\leq e^{-\hat{\lambda}(\tau'-\tau)} \mathcal{G}_\tau[V, g](z) < 0, \end{aligned} \quad (5.24)$$

Em vista de (5.24), conclui-se novamente através de (5.8) que $V(z') < \mathcal{N}[V](\bar{z}') + g(z')$, de onde se afirma que a estratégia ótima é produzir em todo ponto $z_0 \leq z' < (n, \xi_n(0))$. \square

A seguir caracteriza-se uma situação onde o problema P&E em (5.4) não tem solução ótima, apenas ϵ -ótima (vide também a Proposição 7 de [CD89]):

Corolário 5.1 *Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 , C_1 e C_3 (esta última com desigualdade estrita) sejam válidas. Se existe $z_\Gamma \in S' \setminus S^*$ tal que:*

$$V(z_\theta) - (\mathcal{N}[V](\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)) \geq 0, \quad (5.25)$$

então o problema P&E (5.4) só possui soluções ϵ -ótimas na região $S' \setminus S^*$ (Fig. 5.2).

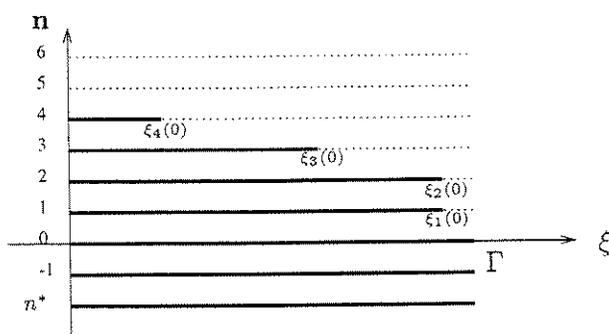


Figura 5.1: Estratégia ótima em S' : o pontilhado indica intervenção.

Prova: Supondo desigualdade estrita em C_3 , conclui-se de forma similar a (5.22) que $G(z) < 0 \forall z \in S' \setminus S^*$. Portanto, a partir de (5.7), tem-se que:

$$\mathcal{G}_{t^*(z)}[V, g](z) \leq \mathcal{G}_t[V, g](z) < 0, \quad \text{para } t \in [0, t^*(z)).$$

Supondo que (5.25) seja verdadeiro, não haverá neste caso solução para o problema de minimização em (5.8) e deve-se adotar $t = t^*(z) - \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno. \square

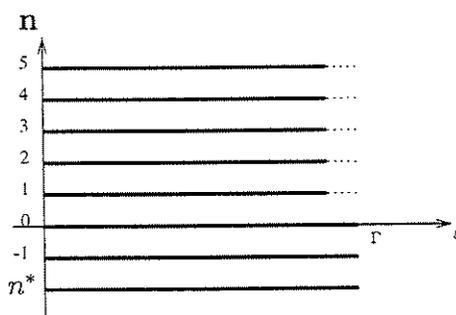


Figura 5.2: Estratégia ϵ -ótima S' .

No Lema 5.5 apresentado na próxima seção, garante-se que a condição (5.25) é verificada.

5.3 O Problema P&E com Espaço não Limitado

Para efeito de análise, assume-se que os extremos N^+ e $-N^-$ sejam suficientemente grandes. Consideram-se os seguintes lemas:

Lema 5.4 *Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 , C_1 e C_4 sejam satisfeitas. Então $\dot{V}(z) \leq 0 \forall z \in S' \setminus S^*$.*

Prova: Se $V(z) = \mathcal{N}[V](\bar{z}) + g(z)$ conclui-se através do Lema 5.2 e de C_4 que $\dot{V}(z) \leq 0$. Considerando (5.3) e (5.6) obtém-se:

$$\lambda \mathcal{E}[V](z) + h(z) = \widehat{\lambda} \mathcal{N}[V](\bar{z}) + \lambda [\mathcal{E}[V](z) - \mathcal{E}[V](\bar{z})] + \beta, \quad \forall z \in S'.$$

No caso presente,

$$V(z) < \mathcal{N}[V](\bar{z}) + g(z) \quad (5.26)$$

e $V(z)$ satisfaz e.d.o. em (3.40), de forma que:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{V}(z) - \widehat{\lambda} V(z) + \lambda \mathcal{E}[V](z) + h(z) \\ &= \dot{V}(z) - \widehat{\lambda} [V(z) - \mathcal{N}[V](\bar{z}) - g(z)] + \lambda [\mathcal{E}[V](z) - \mathcal{E}[V](\bar{z})] - \widehat{\lambda} g(z) + \beta. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Aplicando em (5.27) a expressão (5.26) e considerando-se o Lema 5.1 e a hipótese C_4 , chega-se às seguintes desigualdades para $z \in S' \setminus S^*$:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \dot{V}(z) + \lambda (\mathcal{E}[V](z) - \mathcal{E}[V](\bar{z})) - \widehat{\lambda} g(z) + \beta \\ &\geq \dot{V}(z) - \lambda \mathcal{E}[g](\bar{z}) - \widehat{\lambda} g(z) + \beta \\ &\geq \dot{V}(z), \end{aligned} \quad (5.28)$$

concluindo assim a prova deste lema □

Lema 5.5 *Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 , C_1 e C_4 sejam satisfeitas. Supõe-se que N^+ seja suficientemente grande. Então existe um nível de estoque $n < N^+$ ($n \gg n^*$) tal que a estratégia ótima é paralisar a produção, ou seja:*

$$V(z_\theta) - (\mathcal{N}[V](\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)) \geq 0 \quad \text{para } z_\Gamma = (n, \Gamma), \quad z_\theta = (n + K, 0). \quad (5.29)$$

Prova: Supõe-se que $V(z_\theta) - (\mathcal{N}[V](\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)) < 0$ para todo n suficientemente grande. Então, nos pontos pertencentes à vizinhança de z_Γ , V satisfaz a e.d.o. em (3.40) e a condição de fronteira $V(z_\theta) = V(z_\Gamma)$. Supõe-se agora que na vizinhança de z_Γ $\dot{V}(z) = 0$ e observa-se que (3.40) é equivalente a

$$V(z) = \frac{\lambda \mathcal{E}[V](z) + L(n) + \beta}{\widehat{\lambda}}$$

e portanto:

$$\lim_{z \uparrow z_\Gamma} V(z) = \frac{\lambda \mathcal{E}[V](z_\Gamma) + L(n) + \beta}{\widehat{\lambda}} \quad \text{e} \quad \lim_{z \downarrow z_\theta} V(z) = \frac{\lambda \mathcal{E}[V](z_\theta) + L(n + K) + \beta}{\widehat{\lambda}}.$$

Usando o fato de que $L(n + K) > L(n)$ para n suficientemente grande, e considerando por otimalidade que $\mathcal{E}[V](z_\Gamma) \leq \mathcal{E}[V](z_\theta)$, obtém-se a seguinte desigualdade:

$$\lim_{z \uparrow z_\Gamma} V(z) \neq \lim_{z \downarrow z_\theta} V(z),$$

logo $V(z)$ não satisfaz a condição de fronteira em z_Γ o que é um absurdo. Logo $\dot{V}(z) < 0$ na vizinhança de z_Γ . Portanto, para n suficientemente grande, $z \rightarrow V(z)$ é estritamente decrescente na vizinhança de z_Γ e, haja visto que V é contínua sobre $S \cup \partial_S^*$, conclui-se que $V(z) \rightarrow 0$ e $\dot{V}(z) \rightarrow 0$ pois $V(z) \geq 0$. Mas na vizinhança de z_Γ , tem-se que $\dot{V}(z) < 0$, o que é um absurdo; logo deve existir n suficientemente grande tal que $\dot{V}(z) = 0$ e $V(z)$ é descontínua em z_Γ ; assim $V(z) = \mathcal{N}[V](z)$ para z na vizinhança de z_Γ , concluindo que a desigualdade (5.29) deverá valer para n suficientemente grande. \square

A seguir mostra-se que a solução do problema (5.4) com os extremos N^+ e N^- suficientemente grandes, se aproxima da solução do problema P&E com espaço de estado ilimitado ($n \in \mathbb{Z}$) definido na expressão (1.9) do Capítulo 1.

Teorema 5.3 *Assume-se que as hipóteses B_1 - B_3 , C_1 e C_4 sejam satisfeitas. Sejam, respectivamente, $V : \mathbb{Z} \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ e $V^N : I_N \times [0, \Gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ as funções valores dos problemas P&E (1.9) e (5.4). Então:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \|V^N(z) - V(z)\| : z \in S \} = 0.$$

Prova: Tendo em vista os Lemas 5.3 e 5.5, existe um nível $n' \leq N^+$, para n' suficientemente grande, tal que $V(z_\Gamma) = \mathcal{N}[V](\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)$ para $z_\Gamma = (n', \Gamma)$; e conseqüentemente ψ_{N^+} não afeta o custo $V_n^N(\xi)$ para $n \leq n'$. Portanto a análise se restringe a estudar somente o efeito de ψ_{N^-} (onde $N^- < 0$) na função valor. Considera-se a expressão

$$E_z^\pi[\Psi(z_{\tau_c})]e^{-\alpha\tau_c}, \quad (5.30)$$

para uma política π (não ótima) tal que a produção fique paralisada desde o nível de estoque n até N^- . Seja σ_k uma variável aleatória que indica o tempo de chegada do k -ésimo cliente, a partir do instante zero, e define-se k_n por:

$$k_n := \min\{k \in \mathbb{Z} : k > (n - N^-)/\ell\},$$

onde k_n é interpretado como a quantidade de clientes que chegam, considerando que o estoque inicial seja $n_0 = n$ e que todos os pedidos dos clientes são lotes de tamanho igual a ℓ . Dado

que $\sigma_{k+1} > \sigma_k$ q.c., é claro que $\tau_c \geq \sigma_{k_n}$ q.c. Portanto, usando o fato de que $t \rightarrow \Psi(z)e^{-\alpha t}$ é decrescente para cada z , segue que:

$$E_z^\pi[\Psi(z_{\tau_c})e^{-\alpha\tau_c}] \leq \|\Psi\| E_z^\pi[e^{-\alpha\sigma_k}] \leq \|\Psi\| \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_{k_n}(t) dt,$$

onde $p_{k_n}(t)$ é a função densidade de probabilidade relacionada com o tempo aleatório σ_{k_n} . Tendo em vista que este processo de chegada é de Poisson com taxa λ , conclui-se de [Jam81, pg. 37], que:

$$p_{k_n}(t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=k_n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \right].$$

Usando a fórmula $\int_0^\infty t^k e^{-\hat{\lambda}t} dt = (k!)/(\hat{\lambda}^{k+1})$ e o fato de que $\hat{\lambda} = \alpha + \lambda$, conclui-se que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\alpha t} p_{k_n}(t) dt &= \sum_{k=k_n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^\infty (kt^{k-1} e^{-\hat{\lambda}t} - \lambda t^k e^{-\hat{\lambda}t}) dt \\ &= \sum_{k=k_n}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{1}{\hat{\lambda}^k} - \frac{\lambda}{\hat{\lambda}^{k+1}} \right) = \frac{\alpha}{\hat{\lambda}} \sum_{k=k_n}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\hat{\lambda}} \right)^k. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} E_z^\pi[\Psi(z_{\tau_c})e^{-\alpha\tau_c}] &\leq \|\Psi\| \frac{\alpha}{\hat{\lambda}} \sum_{k=k_n}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\hat{\lambda}} \right)^k \\ &\leq \|\Psi\| \frac{\alpha}{\hat{\lambda}} \sum_{k=n-N^-}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\hat{\lambda}} \right)^k \rightarrow 0, \quad \text{quando } N^- \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Como $I_N \rightarrow \mathbb{Z}$ quando $N \rightarrow \infty$ e n foi escolhido arbitrariamente, finaliza-se a prova deste lema a partir desta última expressão. \square

5.4 O Problema P&E sem Custo de Set Up

De acordo com o Corolário 3.1 pode-se afirmar que a solução do problema P&E com custo de set up tendendo a zero, se aproxima da solução do problema P&E sem custo de set up definido em (1.6). Observa-se que, se $g = 0$, as hipóteses C_1, C_2 e C_4 serão satisfeitas para qualquer $\beta \geq 0$, enquanto que C_3 será satisfeita somente se $\beta = 0$. Em vista disto, os Teoremas 5.1 e 5.3 podem ser estendidos ao problema P&E sem custo de set up e $\beta \geq 0$, enquanto que o Teorema 5.2 é válido somente quando $\beta = 0$. Já a estratégia mostrada no Corolário 5.1 nunca ocorrerá neste

problema com $g = 0$, enquanto que o resultado do Lema 5.5 será válido para a situação estudada aqui.

Os resultados seguintes mostram outras caracterizações para o problema P&E que serão demonstradas somente quando o custo de set up é igual a zero. O primeiro generaliza o Teorema 5.1 para $K \geq 1$.

Teorema 5.4 *Assume-se que $g = 0$ e $\beta \geq 0$. Supõe-se que existe o número n^* definido em (5.2) com $K \geq 1$. Então a estratégia ótima em cada nível de estoque $n \leq n^*$ é produzir o item completamente.*

Prova: Supondo $K = 1$ a prova é direta do Teorema 5.1. Para se mostrar este resultado para $K > 1$ deve-se considerar que $V(z)$ satisfaça:

$$V(z) \leq V(\bar{z}) \quad \text{para } z \in S^*, \text{ e} \quad (5.31)$$

$$V(\bar{z}_\theta) \leq V(\bar{z}_\Gamma), \quad \text{para } z_\Gamma \in S^*. \quad (5.32)$$

De acordo com o Corolário 3.1 tem-se que $V(z) = V(\bar{z}) \forall z \in S$ quando $g \downarrow 0$ e portanto $V(z)$ satisfaz (5.31). Através dos mesmos argumentos da prova do Teorema 5.1, com a condição (5.32) substituindo a condição (5.10), obtém-se a seguinte expressão equivalente à (5.19) com $g = 0$, ou seja:

$$V(z) < \mathcal{N}[V](z), \quad z \in S^*$$

de onde se conclui que $z \in B'_c$ e $V(\bar{z}_\Gamma) = V(z_\Gamma) = V(z_\theta) = V(\bar{z}_\theta) \forall z_\Gamma \in S^*$, mostrando-se (5.32) o que conclui a prova deste teorema. \square

A seguir mostra-se a existência de uma ordenação do ponto de comutação $\xi_n(0)$ (Fig. 5.3):

Lema 5.6 *Assume-se que $g = 0$ e $\beta \geq 0$. Para n suficientemente grande pode-se afirmar que:*

(i)

$$\xi_n(0) \leq \rho(n) := \max\{\xi_{n-k}(0), k = 1, \dots, \ell.\} \quad (5.33)$$

(ii) *Se $\beta = 0$ e $p_k > 0 \forall k = 1, \dots, \ell$, existe um único ponto de comutação que satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\xi_{n+1}(0) \leq \xi_n(0).$$

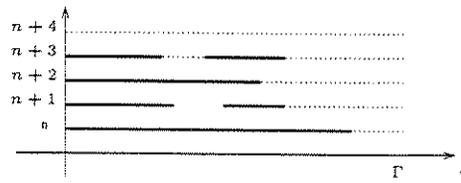


Figura 5.3: Estratégia ótima para “n” suficientemente grande ($\beta > 0$ e $\ell > 1$.)

Prova do item (i): Se $\rho(n) = \Gamma$ o resultado é direto já que $\xi_n(0) \leq \Gamma$, por Definição. Se $\rho(n) < \Gamma$, pode-se afirmar através da Definição 2.1 que $u_{n-k}^*(\xi) = 0$ no intervalo $\rho(n) \leq \xi \leq \Gamma$ e $k = 1, \dots, \ell$. Portanto, em vista do Teorema 2.2, conclui-se que para cada nível n tal que $(n, \xi) \notin \Omega_S$, a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\frac{d}{d\xi} V_{n-k}(\xi) \geq -\beta \text{ no intervalo } \rho(n) \leq \xi \leq \Gamma, k = 1, \dots, \ell \quad (5.34)$$

de onde se obtém, para um ponto $(n, \xi) \notin \Omega_S$, o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \mathcal{N}_n[V](\xi) &= \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \sum_{k=1}^{\ell} p_k \frac{d}{d\xi} V_{n-k}(\xi) \\ &\geq \frac{-\lambda\beta}{\bar{\lambda}}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

para $\rho(n) \leq \xi \leq \Gamma$. Fazendo a mudança de variável $t = \xi' - \xi$ para ξ' e $\xi \in [0, \Gamma]$ em (5.7) com $g = 0$, conclui-se através do Corolário 3.1 que neste caso:

$$\mathcal{G}_{\xi'}[V, 0](n, \xi) = \int_{\xi}^{\xi'} e^{-\bar{\lambda}(s-\xi)} [\dot{\mathcal{N}}_n[V](s) + \beta] ds. \quad (5.36)$$

Portanto, pode-se afirmar a partir de (5.35) e (5.36) que

$$\mathcal{G}_{\xi'}[V, 0](n, \xi) \geq 0 \text{ para } \rho(n) \leq \xi \leq \xi' \leq \Gamma.$$

Em vista disto e considerando o Lema 5.3 com $g = 0$, conclui-se que $V_n(\xi) = \mathcal{N}_n[V](\xi)$ para $\xi \in [\rho(n), \Gamma]$. Logo, a partir do Teorema 2.2 tem-se que $u_n^*(\xi) = 0$ para o intervalo $\rho(n) \leq \xi \leq \Gamma$ e da Definição 2.1 pode-se afirmar que $\xi_n(0) \leq \rho(n)$.

Prova do item (ii): Supondo $\xi_n(0) < \Gamma$, conclui-se a partir da Definição 2.1 e do Teorema 2.2 que:

$$u_n(\xi) = 0, \quad \dot{V}_n(\xi) = 0 \text{ e } V_n(\xi) = \mathcal{N}_n[V](\xi) \quad \text{para } \xi \in [\xi_n(0), \Gamma] \quad (5.37)$$

de onde se obtém que:

$$\dot{V}_n(\xi) = \dot{\mathcal{N}}_n[V](\xi) = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{V}_{n-k}(\xi) = 0 \quad \text{para } \xi \in [\xi_n(0), \Gamma] \quad (5.38)$$

e como $p_k > 0$, $\forall k = 1, \dots, \ell$ a equação (5.38) implica que:

$$\dot{V}_{n-k}(\xi) = 0 \text{ para } \xi \in [\xi_n(0), \Gamma] \text{ e todo } k = 1, \dots, \ell. \quad (5.39)$$

De (5.37) e (5.39) segue que:

$$\dot{\mathcal{N}}_{n+1}[V](\xi) = \frac{\lambda}{\hat{\lambda}} \sum_{k=1}^{\ell} p_k \dot{V}_{n+1-k}(\xi) = 0 \text{ para } \xi \in [\xi_n(0), \Gamma]. \quad (5.40)$$

Tendo em vista o lema 5.5, tem-se aqui que $V_{n+1+K}(0) \geq \mathcal{N}_{n+1}[V](\Gamma)$ para n suficientemente grande. A partir de (5.36) com $\beta = 0$, de (5.8) e (5.40) conclui-se que

$$V_{n+1}(\xi) = \mathcal{N}_{n+1}[V](\xi) \quad \forall \xi \in [\xi_n(0), \Gamma]$$

e neste caso $\xi_{n+1}(0) \leq \xi_n(0)$. □

5.5 Notas e Referências

5.1 - Para o problema P&E, observa-se em (5.1) que $\mathcal{E}[g](z) = \sum_k^{\ell} p_k g_{n-k}(\xi)$. Considerando g independente de $n \in I_N$, as hipóteses C_1 e C_2 utilizadas no teorema 5.1, são verificadas para um custo de set up g'' que satisfaça $\dot{g}''(z) - \alpha g''(z) - \beta \leq 0$ e $\dot{g}''(z) \geq 0 \quad \forall z \in S''$. Deste modo, $g''(n, \xi) = \beta/\alpha(e^{\alpha\xi} - 1) + c_0$ deve satisfazer C_1 e C_2 . Já a hipótese C_3 utilizada no teorema 5.2, é satisfeita quando g' satisfaz a desigualdade $\dot{g}'(z) - \alpha g'(z) + \beta \leq 0$; observa-se que $g'(n, \xi) = \beta/\alpha(e^{\alpha\xi} + 1) + c_0$ é uma função deste tipo. Finalmente, a hipótese C_4 , necessária ao teorema 5.3, é satisfeita para $\dot{g}'(z) \leq 0$ e $g'(z) \leq (\beta - \lambda g''(z))/\hat{\lambda}$.

5.2 - As caracterizações apresentadas nas seções 5.2 e 5.4 são utilizadas para aumentar a eficiência do procedimento recursivo desenvolvidos nos algoritmos 4.1, 4.2 e 4.3. Assumindo que as hipóteses $B_1 - B_3$ e $C_1 - C_4$ sejam satisfeitas, observam-se que os testes de otimalidade entre o custos de produção e intervenção efetuados pela equação (4.5), não são necessários na região S^* . De acordo com o Teorema 5.1, o custo nesta região será dado somente pela solução da equação diferencial em (4.5) com a condição de fronteira (4.6). Do Teorema 5.2 também se conclui que, na região $S' \setminus S^*$, basta o algoritmo encontrar o único ponto de comutação $\xi_n(0)$, onde a produção deve ser paralisada, para se calcular a função valor em $V_n(\xi)$, $\xi \in [0, \xi_n(0))$ através da equação diferencial em (4.5) e obter $V_n(\xi)$, $\xi \in [\xi_n(0), \Gamma]$ usando a equação algébrica em (4.5). O algoritmo que explora estas características da estratégia ótima é apresentado a seguir:

Passo 1 Considere N^+ e $-N^-$ suficientemente grande e defina uma função arbitrária $W_0(z) \in C_b(S \cup \partial_S^*)$. Faça $i = 1$.

Passo 2 Em S^* , resolva a e.d.o. :

$$\dot{W}_i(z) - \hat{\lambda}W_i(z) + \lambda\mathcal{E}[W_{i-1}](z) + L(n) = 0 \quad (5.41)$$

com a condição final $W_i(z_\Gamma) = W_{i-1}(z_\theta) \wedge (\mathcal{N}[W_{i-1}](\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma))$, para $z_\theta = (n+K, 0)$, $z_\Gamma = (n, \Gamma)$.

Passo 3 Em $S' \setminus S^*$ calcule $W_i(z)$ através de (5.41) com a condição final $W_i(z_\Gamma) = W_{i-1}(z_\theta)$, se $W_{i-1}(z_\theta) < \mathcal{N}(\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)$. Neste caso não haverá ponto de comutação e vá para o passo 5.

Passo 4 Se $W_{i-1}(z_\theta) \geq \mathcal{N}(\bar{z}_\Gamma) + g(z_\Gamma)$ faça $z(0) = (n, 0)$ e obtenha:

$$\tau := \sup \{s \in [0, t^*(z)) : G(z(s)) < 0\}, \quad (5.42)$$

onde G está definido em (5.21)

Para $t \in [0, \tau)$ determine $W_i(z(t))$ resolvendo (5.41) com a condição final

$$W_i(z(\tau)) = \mathcal{N}[W_{i-1}](\bar{z}(\tau)) + g(z(\tau)).$$

Para $z \in [\tau, t^*(z)]$ faça $W_i(z(t)) = \mathcal{N}[W_{i-1}](\bar{z}(t)) + g(z(t))$.

Passo 5 Em S'' resolva a desigualdade variacional:

$$W_i(z) = [W_i(\bar{z}) + g(z)] \wedge \mathcal{N}[W_{i-1}](z) \quad \forall z \in S''.$$

Passo 6 Retorne ao Passo 2 se $\|W_i - W_{i-1}\|$ não for suficientemente pequeno.

No passo 4 deste algoritmo, τ define o instante de intervenção, e portanto $\xi_n(0) = \xi(\tau)$. A partir do Lema 5.3 e do Teorema 5.2, verifica-se que $\mathcal{G}_t^*(z)[V, g](n, \xi) \geq 0$ para $\xi \in [\xi_n(0), \Gamma]$ e $\mathcal{G}_t(z)[V, g](n, \xi) < 0$ para $0 \leq \xi < \xi_n(0)$ e $t = \xi_n(0) - \xi$, de onde se conclui que τ pode ser obtido através de (5.42).

5.3 - Um algoritmo semelhante ao mostrado acima pode ser obtido para o problema P&E sem custo de set up e $\beta = 0$, com exceção do passo 5, que deve ser eliminado, tendo em vista que $W(z) = W(\bar{z})$. Também o cálculo de τ seria dado por:

$$\tau_n = \sup\{s \in [0, \tau_{n-1}) : \mathcal{E}[\dot{W}_{i-1}](z(s)) < 0\},$$

com $z(0) = (n, 0)$ e $\xi(\tau_n) = \xi_n(0)$, tendo em vista o Lema 5.6 (ii).

5.4 - No problema P&E sem custo de set up, não foi possível obter a caracterização do Teorema 5.2 quando $\beta > 0$. Uma das razões é que não se definiu com precisão o sinal da derivada de $\mathcal{N}_n[V](\xi)$ em relação a $\xi \in [0, \Gamma]$. Tendo em vista o Lema 5.2 com $g = 0$ e $\beta > 0$, pode-se afirmar que $\dot{\mathcal{N}}_n[V](\xi) \leq 0$, e portanto nada impede que esta derivada assuma os seguintes valores:

$$\dot{\mathcal{N}}_n[V](\xi) \begin{cases} < -\beta, & \text{para } \xi \in (\xi^*, \Gamma), \\ \geq -\beta, & \text{para } \xi \in (0, \xi^*), \end{cases}$$

para algum $\xi^* \in (0, \Gamma)$ e $\beta > 0$. Neste caso, $\mathcal{G}_{\xi'}[V, 0]$ dado em (5.36) pode assumir valores maiores que zero e pode ser crescente com relação a $\xi' \in [\xi, \Gamma]$. Para exemplificar, considera-se um ponto de comutação $\zeta_n(1) \in (0, \xi')$, tal que

$$\mathcal{G}_n[V, 0](\xi, \Gamma) \begin{cases} < 0, & \text{para } \xi \in (\zeta_n(1), \Gamma], \\ \geq 0, & \text{para } \xi \in [0, \zeta_n(1)]. \end{cases}$$

Neste caso, se $V_{n+K}(0) \geq V_n(\Gamma)$ conclui-se através do Lema 5.3 com $g = 0$ e do Teorema 2.2 que a seguinte estratégia de produção será ϵ -ótima :

$$u_n(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{para } \xi \in [0, \zeta_n(1)], \\ 1, & \text{para } \xi \in (\zeta_n(1), \Gamma - \epsilon]. \end{cases}$$

Deste modo, pode-se conjecturar outros comportamentos da derivada $\dot{\mathcal{N}}_n[V](\xi)$ que forneçam estratégias do tipo:

$$u_n(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{para } \xi \in [0, \zeta_n(1)] \text{ e } \xi \in (\xi_n(0), \Gamma] \\ 1, & \text{para } \xi \in (\zeta_n(1), \xi_n(0)]. \end{cases}$$

Por outro lado, se $\beta = 0$, pode-se afirmar que $\xi' \rightarrow \mathcal{G}_{\xi'}[V, 0](n, \xi)$ é menor ou igual a zero e decrescente em relação a $\xi' \in [\xi, \Gamma]$, atingindo um valor constante quando $\xi' \geq \xi_n(0)$, ou seja, a partir do único ponto onde ocorre a comutação de $u=1$ para $u=0$ (Fig. 5.4).

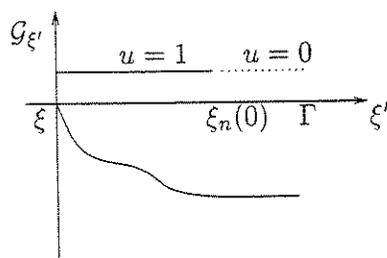


Figura 5.4: $\mathcal{G}_{\xi'}[V, 0](n, \xi)$ com $\beta = 0$.

5.5 - Em [MW95] estuda-se a otimalidade de uma estratégia de investimento, denominada "Cutoff," para o problema da expansão da capacidade formulado no Capítulo 1. Esta estratégia é um caso particular da estratégia IUC (vide Fig. 1.6, Capítulo 1), sendo caracterizada por investimentos à máxima taxa quando o déficit de capacidade ($n \geq 0$) for acima de um nível M e não investimentos quando o déficit de capacidade for abaixo de M , ou seja:

$$u_n(\xi) = \begin{cases} 1, & n \geq M, \xi \in [0, \Gamma], \\ 0, & n < M, \xi \in [0, \Gamma]. \end{cases}$$

Em [MW95] os autores mostram a existência da estratégia Cutoff, assumindo que o custo de cada projeto de expansão (ξ_θ) seja uma variável aleatória ilimitada ($\Gamma = \infty$), caracterizada por uma distribuição exponencial, e que o custo de déficit de capacidade $n \rightarrow L(n)$, $n \geq 0$ satisfaça:

$$L(n+K) - L(n) > \frac{\alpha}{\eta} \quad \forall n \geq 0,$$

onde η é uma constante que representa a taxa de azar do processo ξ_t definida em (1.16). De acordo com [DDSV87], conjectura-se que a estratégia Cutoff poderá existir no problema P&E quando o custo $n \rightarrow L(n)$ decrescer suavemente para $n \leq n^*$, permanecendo num valor constante para os níveis $n > n^*$. O que se pode afirmar, no entanto, é que a estratégia IUC não será ótima na seguinte situação:

Lema 5.7 *Supõe-se que $g = 0$, $\beta \geq 0$ e $L(n) < L(n+1) \forall n > n^*$. Em qualquer nível $n > n^*$ a estratégia $u(z) = 1$ na vizinhança de z_Γ e $u(z) = 0$ na vizinhança de z_θ , não é candidata a estratégia ótima, onde $z_\Gamma = (n, \Gamma)$ e $z_\theta = (n+K, 0)$.*

Prova: Por otimalidade tem-se que $V(z_\Gamma) \leq V(z_\theta)$ e $V(z_\Gamma) \leq \mathcal{N}[V](z_\Gamma)$. Supondo que $L(n) < L(n+1) \forall n > n^*$ obtém-se na fronteira ∂_S^* a seguinte desigualdade:

$$V(z_\Gamma) \leq \mathcal{N}[V](z_\Gamma) = \frac{\lambda \mathcal{E}[V](z_\Gamma) + L(n)}{\hat{\lambda}} < \frac{\lambda \mathcal{E}[V](z_\theta) + L(n+K)}{\hat{\lambda}} = \mathcal{N}[V](z_\theta), \quad (5.43)$$

para $z_\Gamma \in S' \setminus S^*$. Supondo que a estratégia mencionada seja ótima, obtém-se:

$$V(z_\Gamma) = V(z_\theta) = \mathcal{N}[V](z_\theta),$$

o que é um absurdo em vista de (5.43), concluindo a prova deste lema. □

Capítulo 6

Resultados Numéricos

Neste capítulo apresentam-se exemplos numéricos dos problemas de P&E, cujos parâmetros estão mostrados na Tabela 6.1. Em cada um dos casos considera-se que o tamanho do lote pedido por cada cliente tenha distribuição binomial, $p_k = (0.0417 + 0.5^{\ell} \ell!) / k!(\ell - k)!$, $k = 1, \dots, \ell$ e $\ell = 3$.

Nas seções 6.1 e 6.2 discutem-se vários tipos de soluções encontradas para os problemas P&E sem custo de set up e com custo de set up, respectivamente. Na seção 6.3 comparam-se as taxas de convergência dos procedimentos recursivos apresentados no capítulo 4, ou seja, os Algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4. Não se inclui o algoritmo 4.1 nesta comparação porque este é um caso particular do algoritmo 4.3 quando o custo de set up tende a zero.

Tabela 6.1: Casos Numéricos do Problema P&E.

Caso	Parâmetros									
	Taxa de desconto (α)	Custo de produção (β)	Chegadas de clientes (λ)	Custo de estoque ($L, n \geq 0$)	Custo de déficit ($L, n < 0$)	Custo de set up (g)	Lote produzido (K)	Valor do item (Γ)		
A	0.1	0	0.25	$5n$	$-10n$	0	1	2		
B	0.1	5	0.25	$5n$	$-10n$	0	1	2		
C	0.1	0	0.25	$5n$	$-10n$	0	6	2		
D	0.2	20	0.1	$20n$	$24 - 12(n+1)$	0	1	2		
E	0.1	5	0.25	$1.2n$	$-1.2n$	0	1	2		
F	0.1	5	0.25	n	$-n$	0	1	2		
G	0.25	0	0.3	$10n$	$-10n$	$2.5e^{\alpha\xi}$	1	2		
H	0.15	0	0.3	$10n$	$-10n$	2.5	1	2		
I	0.25	5	0.3	$2.5n$	$-2.5n$	$2.5e^{\lambda\xi}$	1	2		
J	0.15	0	0.3	$10n$	$-10n$	$10e^{\lambda\xi}$	1	2		
K	0.05	0	0.3	$10n$	$-10n$	$10e^{\alpha\xi}$	1	2		
L	0.05	0	0.3	$10n$	$-10n$	10	1	2		
M	0.5	0	0.3	$10n$	$-10n$	10	1	2		

6.1 Problema P&E sem Custo de Set Up

Para o caso A ($\beta = 0$) nota-se a existência de estoques mais elevados do que no caso B ($\beta > 0$). Quando o nível de estoque atinge um certo valor, verifica-se em ambos os casos que a produção do item deve ser paralisada num único ponto de comutação ($0 < \xi_n(0) < \Gamma$).

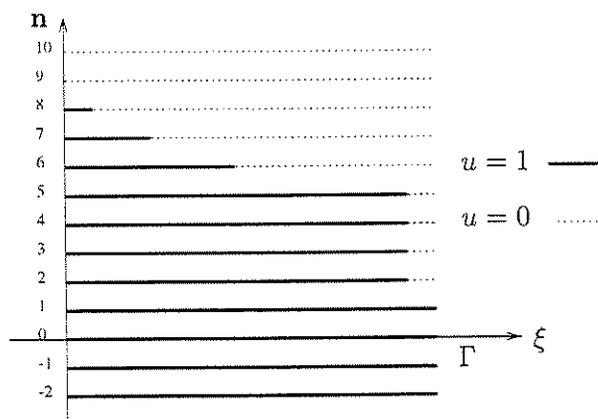


Figura 6.1: Estratégia de produção para o caso A

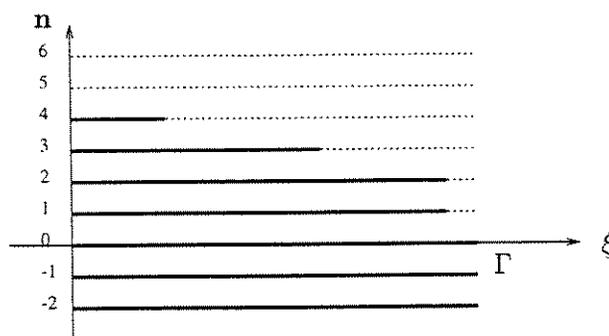


Figura 6.2: Estratégia de produção para o caso B

Para os casos A e B, o algoritmo detecta, nos respectivos intervalos $1 \leq n \leq 5$ e $1 \leq n \leq 2$, que a solução é caracterizada por paralisações da produção na fronteira $\mathbb{Z} \times \Gamma$. De acordo com a nota 2.3, adota-se nestas regiões as estratégias ϵ -ótimas $u_n(\xi) = 1$ para $\xi \in [0, \Gamma - \epsilon)$ e $u_n(\xi) = 0$ para $\xi \in [\Gamma - \epsilon, \Gamma]$, onde $\epsilon > 0$ é um número suficientemente pequeno, conforme mostram as Figuras 6.1 e 6.2.

Nos casos A e C (Figuras 6.1 e 6.3) pode-se comparar o efeito do aumento do lote de itens (ou projetos) produzidos.

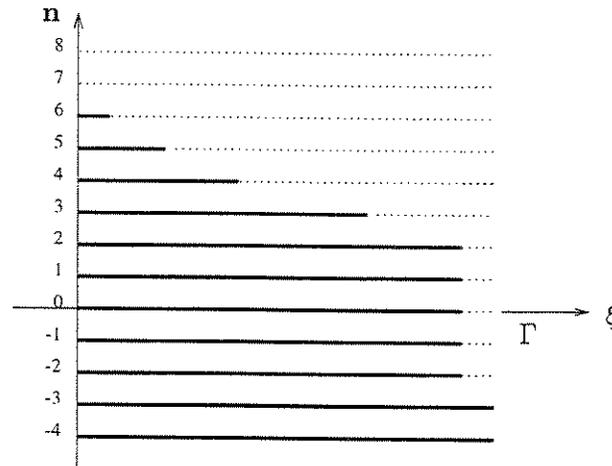


Figura 6.3: Estrat\u00e9gia de produ\u00e7\u00e3o para o caso C

Situa\u00e7\u00e3o onde h\u00e1 mais de um ponto de comuta\u00e7\u00e3o:

Dentre os exemplos mostrados na Tabela 6.1 sem custo de set up, somente os casos A e C satisfazem as condi\u00e7\u00f5es do Teorema 5.2 com $g = 0$ e $\beta = 0$. A maioria dos resultados num\u00e9ricos estudados com $\beta > 0$ e $g = 0$ apresentou uma caracteriza\u00e7\u00e3o semelhante ao do Teorema 5.2 (estrat\u00e9gia **FRD**). No entanto, encontrou-se uma situa\u00e7\u00e3o como a da Fig. 6.4, onde se observa a exist\u00eancia dos pontos de comuta\u00e7\u00e3o do tipo $\zeta_n(1)$ e $\xi_n(0)$ para o n\u00edvel $n = 0$.

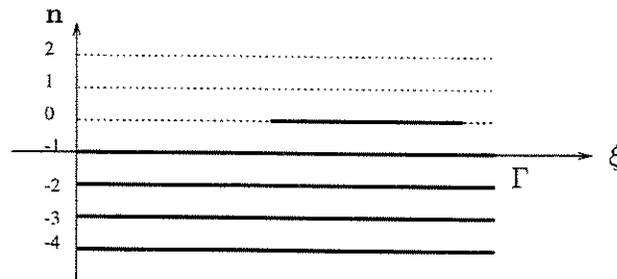


Figura 6.4: Estrat\u00e9gia de produ\u00e7\u00e3o para o caso D.

Situa\u00e7\u00e3o onde n\u00e3o existe o n\u00famero n^* definido em (5.2):

Nos casos A, B, C e D pode-se encontrar o n\u00famero n^* definido em (5.2) com $g = 0$ e, de acordo com o Teorema 5.4, deve-se produzir completamente o item na regi\u00e3o $n \leq n^* = -1$, para os casos A, B e D, e na regi\u00e3o $n \leq n^* = -6$ para o caso C. Observa-se que nos casos E e F n\u00e3o \u00e9 poss\u00edvel encontrar n^* tal que $L(n) - L(n + K) > \Xi(n) = \beta(e^{\lambda\Gamma} - 1) = 5$ para $n \leq n^*$. Mesmo assim a solu\u00e7\u00e3o encontrada na Fig. 6.5, \u00e9 produzir em todos os pontos abaixo de -1 e

não produzir em nenhum ponto acima de -1 . Esta estratégia é denominada "cutoff", de acordo com os comentários na nota 5.5. Já na Fig. 6.6, observa-se que o ótimo é não produzir na vizinhança de $(n, 0)$, $n \leq -1$; caso a produção do item já tenha sido iniciada, deve-se paralisar a sua produção somente após este item ter sido acabado (estratégia IUC).

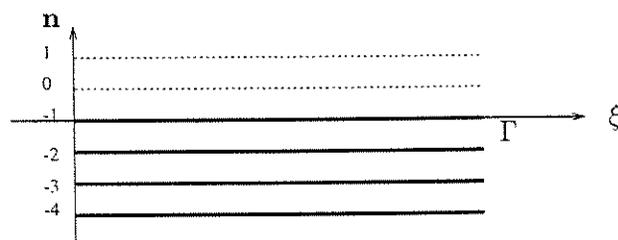


Figura 6.5: Estratégia de produção para o caso E.

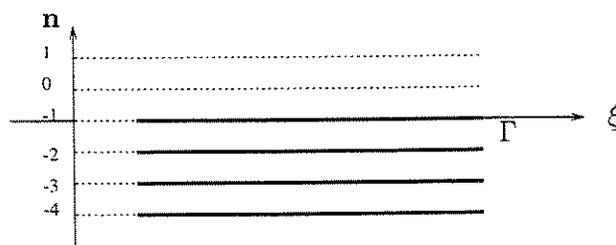


Figura 6.6: Estratégia de produção para o caso F.

6.2 Problema P&E com Custo de Set Up

Nas Figuras abaixo, a linha pontilhada indica a estratégia de intervenção (não intervenção) no subconjunto S' (S'') e a linha cheia indica o caso contrário.

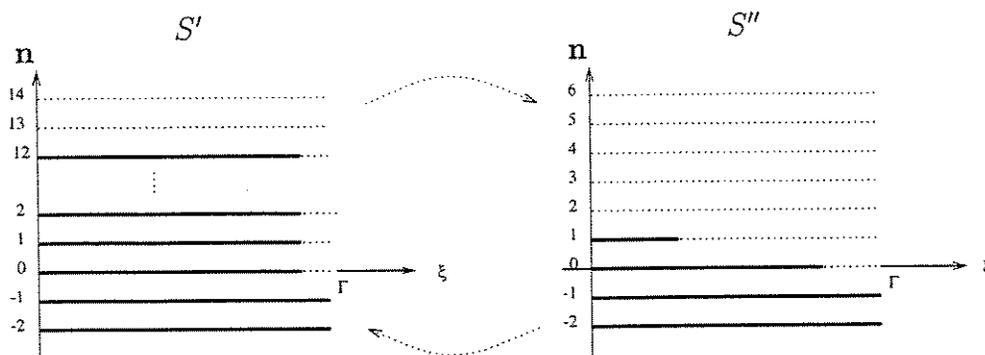


Figura 6.7: Estratégia de produção para o caso G.

No caso G existe o número $n^* = -1$ definido em (5.2) e os dados do problema satisfazem as condições C_1 e C_2 . Neste caso observa-se na Fig. 6.7 uma solução com as características

apresentadas nos Teoremas 5.1 e 5.2, ou seja, a estratégia ótima é produzir completamente o item na região S^* e intervir no máximo num único ponto de comutação em $S' \setminus S^*$. Para que n^* exista neste caso, deve-se ter $\beta \leq 1$.

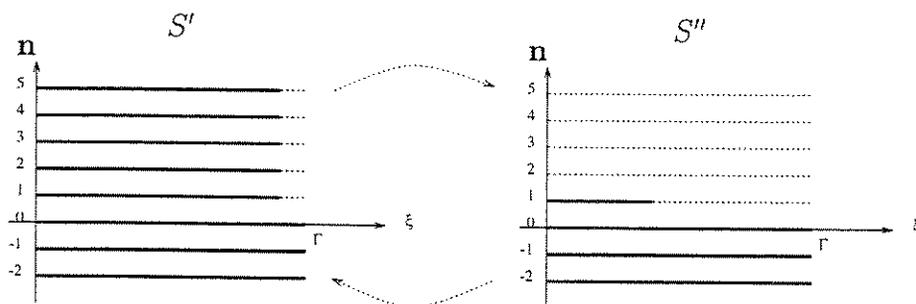


Figura 6.8: Estratégia de produção para o caso H.

No caso H, os dados satisfazem C_1 e C_2 , esta última com desigualdade estrita, e observa-se na Fig. 6.8 a existência de paralisações próximas à fronteira, nos pontos $\xi_n(0) = \Gamma - \epsilon$ para $n > 0$, conforme mostrou o Corolário 5.1

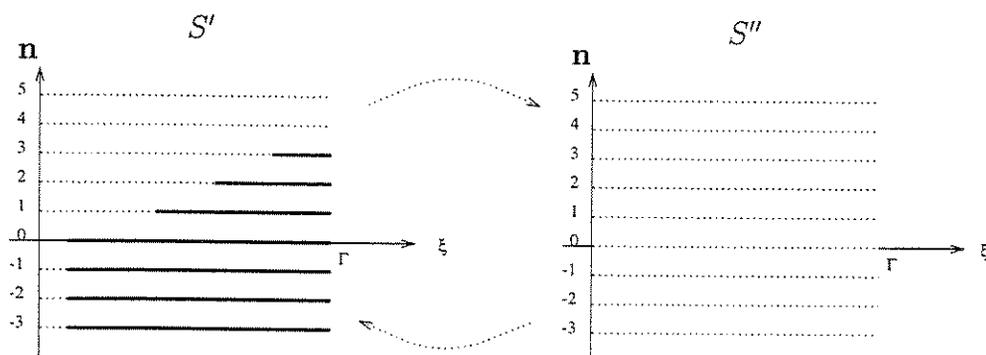


Figura 6.9: Estratégia de produção para o caso I.

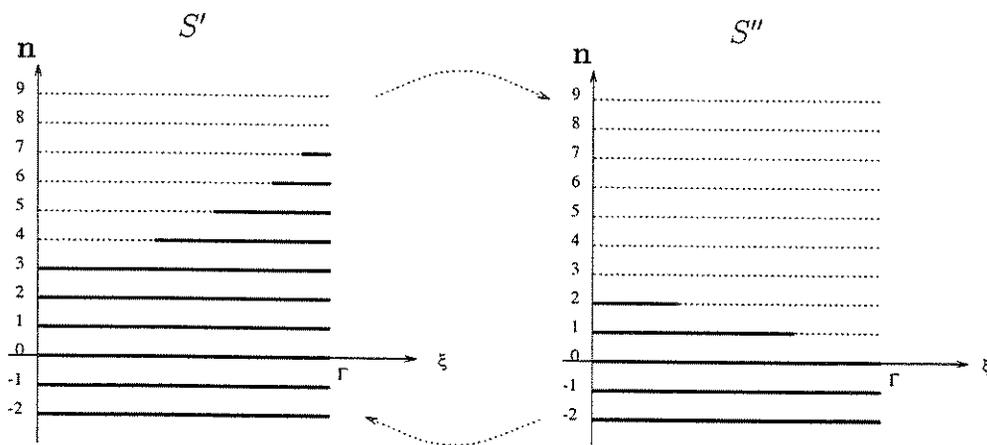


Figura 6.10: Estratégia de produção para o caso J.

No caso I não existe o número n^* definido em (5.2) e verifica-se na Fig. 6.9 que não se deve iniciar a produção do item em S' para qualquer $n \leq 3$; no entanto, observa-se que o item

deve ser completado desde que a sua produção já tenha sido iniciada (estratégia IUC). Em S'' verifica-se na Fig. 6.9 que a estratégia de intervenção nunca é ótima em todos os pontos deste subconjunto, mesmo para valores de estoque muito negativos ($n \approx -1000$). No caso J os dados do problema não permitem obter o número n^* e as condições C_1 e C_2 não são satisfeitas; no entanto, observa-se na Fig. 6.10 que, para $n \leq 3$, a estratégia ótima é produzir completamente o item e para $n > 3$ a estratégia é do tipo IUC.

A respeito do efeito do parâmetro β na solução do problema P&E com set up, observa-se no caso G que, se $\beta \geq 17$, a solução começa a ficar parecida com a do caso I, ou seja, o nível n^* não vai existir. Quando $\beta \leq 2$ no caso I, o número n^* continuará a não existir, mas a estratégia em S' muda para produção completa do item em todo $n \leq -1$; enquanto que em S'' a estratégia também se modifica para a intervenção em todo ponto $n \leq -1$. Já no caso J, quando $\beta \geq 30$, a estratégia de produção tende a ficar parecida com a do caso I.

6.3 Comparação dos Procedimentos Recursivos

As comparações efetuadas nesta seção foram obtidas para os casos numéricos G, K, L e M da Tabela 6.1. Considerou-se que o espaço de estado do problema P&E seja dado por $S = [0, 2) \times \{-146, \dots, 54\}$, e assumiu-se que a função valor satisfaça as condições de fronteira dadas por $V_{-146}(\xi) = V_{54}(\xi) = \|L(n)/\alpha\|$, $\xi \in [0, 2]$. Para cada iteração $i = 1, 2, \dots$, definiu-se o erro de convergência das sequências (3.33), (3.39) e (4.9) por $\|V_i(z) - V_{i-1}(z)\|$, $\|W_i(z) - W_{i-1}(z)\|$ e $\|U_i(z) - U_{i-1}(z)\|$, respectivamente. Nas simulações mediu-se o tempo de processamento num computador do tipo PC com CPU 486-50 MHZ e contou-se o número de iterações necessárias para que os algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4 tenham um erro de convergência igual a 0.02. Em cada Tabela abaixo indica-se por I e T o número de iterações e o tempo de processamento, respectivamente, considerados como referências.

Tabela 6.2: Algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4 para o caso G

Algoritmo	$I = 39$ e $T = 69$ seg.	
	Número de Iterações	Tempo de Processamento
4.2	(1:1)	(1:1)
4.3	(1:0.74)	(1:0.76)
4.4	(1:0.35)	(1:0.37)

Nas Tabelas 6.2 e 6.3, compara-se a velocidade de convergência dos algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4 quando inicializados por uma mesma função igual a $\|L(n)/\alpha\|$. Observa-se que o número de iterações e o tempo de processamento necessários para a convergência dos algoritmos 4.3 e 4.4, propostos nesta tese, são menores que os encontrados no algoritmo 4.2. Inspeccionando estas

Tabela 6.3: Algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4 para o caso K

$I = 244$ e $T = 431$ seg.		
Algoritmo	Número de Iterações	Tempo de Processamento
4.2	(1:1)	(1:1)
4.3	(1:0.63)	(1:0.63)
4.4	(1:0.38)	(1:0.38)

duas tabelas, também se observa que o esforço computacional necessário para resolver o caso G ($\alpha = 0,3$) é bem menor que o esforço gasto com o caso K (com $\alpha = 0,05$) tendo em vista que a taxa de convergência é inversamente proporcional ao fator de desconto, conforme mostra a expressão (3.20).

Tabela 6.4: Algoritmo 4.2 para o caso L

$I = 217$ e $T = 319$ seg.		
Inicialização	Número de iterações	Tempo de Processamento
FV(K)	(1:1)	(1:1)
$L(n)/\alpha$	(1:1)	(1:1)
$\ L(n)/\alpha\ $	(1:1.06)	(1:1.06)

Tabela 6.5: Algoritmo 4.3 para o caso L

$I = 57$ e $T = 84$ seg.		
Inicialização	Número de iterações	Tempo de Processamento
FV(K)	(1:1)	(1:1)
$L(n)/\alpha$	(1:2.66)	(1:2.65)
$\ L(n)/\alpha\ $	(1:2.7)	(1:2.7)

Já nas Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6 compara-se o tempo de processamento dos algoritmos 4.2, 4.3 e 4.4, respectivamente, em relação às diferentes formas de inicialização destes procedimentos recursivos. Estas comparações foram obtidas resolvendo-se o caso L, que difere do caso K apenas no custo de set up. Denota-se por FV(K) a função valor obtida no caso K. Observam-se nestas Tabelas que a inicialização com a função FV(K) é a que fornece o menor esforço computacional, e portanto esta função deve estar mais próxima do custo ótimo do que as funções $L(n)/\alpha$ e $\|L(n)/\alpha\|$.

Tabela 6.6: Algoritmo 4.4 para o caso L

I = 24 e T = 41 seg.		
Inicialização	Número de iterações	Tempo de Processamento
FV(K)	(1:1)	(1:1)
$L(n)/\alpha$	(1:3.63)	(1:3.12)
$\ L(n)/\alpha\ $	(1:3.88)	(1:3.88)

É interessante comentar que, em todos os casos estudados, o algoritmo 4.2 sempre convergiu para uma mesma função, independentemente de qual seja a função dada na etapa inicial do procedimento. Isto indica que o operador \mathcal{L} , definido em (3.31), tem a característica de um mapeamento contrativo, apesar de não ter sido demonstrado este fato. Finalmente, observa-se nas Figuras 6.11 e 6.12, respectivamente, uma ilustração da função valor dos casos L e M, onde a linha cheia (pontilhada) é a função em S' (S'').

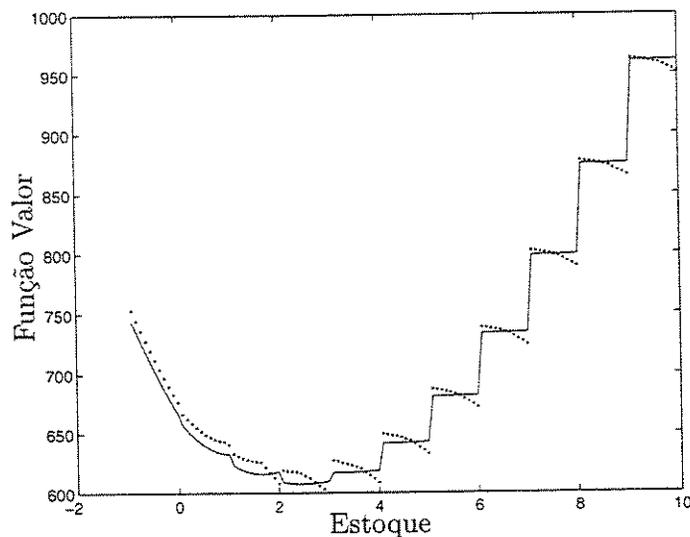


Figura 6.11: Função Valor para o caso L ($\alpha = 0.05$)

Nas Figuras 6.11 e 6.12 pode-se dizer que haverá intervenção de S'' para S' quando a linha cheia estiver abaixo do pontilhado, enquanto que a intervenção será de S' para S'' , quando a linha cheia estiver acima do pontilhado. Na região onde o estoque é menor que -1 verifica-se que $V(\bar{z}_\theta) < V(\bar{z}_\Gamma)$ e $V(z_\Gamma) = V(z_\theta)$ onde $z_\Gamma = (n, \Gamma)$ e $z_\theta = (n + 1, 0)$.

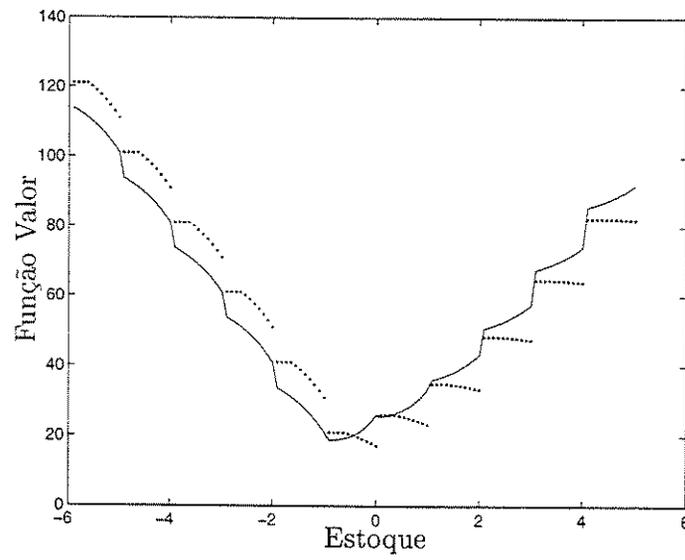


Figura 6.12: Função Valor para o caso M ($\alpha = 0.5$)

Capítulo 7

Conclusões

Nesta tese estudou-se dois tipos de problemas de controle de uma classe de PMDPs. O primeiro é um problema de controle ótimo contínuo, do tipo “bang-bang,” cujo vetor de estados é constituído por variáveis contínuas e discretas. O segundo é um problema de controle impulsional cujo espaço de estados é formado por duas cópias de um mesmo conjunto. Numa região a trajetória determinística possui velocidade nula, e noutra região a trajetória é genérica. Estes problemas são adequados para modelar sistemas de P&E, Expansão da Capacidade e Filas Controladas com Servidor Removível.

Demonstrou-se que os operadores associados aos problemas de controle contínuo e impulsional desta classe de PMDPs têm características semelhantes. Uma delas é que estes operadores são mapeamentos contrativos, e a outra é que eles tendem a se igualar quando o custo de intervenção tende a zero. Considerando estes fatos, foi desenvolvido um único procedimento recursivo (Algoritmo 4.4) para obter a solução destes problemas, o qual não necessita da restrição de inicialização encontrada no procedimento utilizado para resolver problemas gerais de controle impulsional do PMDP (Algoritmo 4.2). Demonstrou-se também que o procedimento proposto possui uma taxa de convergência maior do que este procedimento geral. Usando uma técnica alternativa de se atualizar a função custo de cada iteração, provou-se que é possível acelerar mais ainda a taxa de convergência do método proposto, desde que o espaço de estado seja constituído por uma mistura de variáveis inteiras e contínuas, como é o caso do problema P&E e os modelos análogos a este. Resultados numéricos mostram este fato, mostrando que o tempo de processamento do algoritmo proposto é aproximadamente $1/3$ do tempo computacional gasto com o algoritmo geral.

Também nesta tese desenvolveu-se uma análise qualitativa da solução de uma classe de problemas P&E com demanda aleatória, produção em lotes e decisões preemptivas da produção. Quando o custo de estoque e déficit de estoque é uma função estritamente convexa, determinou-se as condições para a existência de um nível de estoque n^* , abaixo do qual a estratégia ótima é produzir completamente um item. Portanto, a solução do problema pode ser determinada por um procedimento que realiza testes de otimalidade somente na região acima de n^* . Nesta região mostrou-se que a estratégia ótima é produzir completamente o item ou não produzi-lo, ou ainda,

produzi-lo parcialmente com no máximo um único ponto de comutação do tipo $\xi_n(0)$, ocorrendo no instante em que a produção do item é paralisada (estratégia **FRD**).

Se o custo de set up g é maior que zero, este último resultado é válido para o problema P&E quando o parâmetro β , associado à taxa de produção, for maior ou igual a zero; e quando $g = 0$ este resultado só é válido para $\beta = 0$. No caso em que $g = 0$ e $\beta > 0$, notou-se nos resultados numéricos estudados que ocorria um único ponto de comutação do tipo ξ_n ou ζ_n , mas não observou-se nenhuma situação com múltiplos pontos de comutação, como indicado na Definição 2.1. Provou-se também que no caso em que $g = 0$ e $\beta \geq 0$, a estratégia **IUC** não poderá existir na região onde o custo de estoque é estritamente crescente.

A partir destas caracterizações, demonstrou-se que a solução do problema P&E com capacidade de armazenamento e déficit de estoque limitados, aproxima-se do respectivo problema com capacidade ilimitada, à medida que os extremos do espaço de estados se tornam suficientemente grandes. Todos estes resultados podem ser aplicados diretamente ao problema da expansão da capacidade formulado no capítulo 1.

Para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa, propõe-se a seguir dois problemas de “scheduling” que podem ser resolvidos a partir das idéias desenvolvidas nesta tese:

O primeiro, proposto na seção 5 de [DDSV87], é um problema de expansão da capacidade com J projetos diferentes, cada um com capacidade K_j a um custo fixo Γ_j $j = 1, \dots, J$. Neste caso, o estado do processo é (n, ξ, j) , onde j indica o projeto que está em construção e o espaço de estado é a união disjunta $S = \cup_{j=1}^J (\mathbb{Z} \times [0, \Gamma_j])$. No interior do espaço de estado pode-se paralisar o investimento em qualquer instante, mas somente na fronteira ativa ∂_S^* deve-se decidir qual o próximo projeto que deve ser construído.

O segundo é um problema de “scheduling” num sistema de manufatura flexível, capaz de produzir dois tipos de itens diferentes. Neste sistema produz-se um item a cada vez e a demanda associada a cada item forma um processo de Poisson com taxas λ_i , $i = 1, 2$. Seja $n = [n_1 \ n_2]$ e $\xi = [\xi_1 \ \xi_2]$, $\xi_i \in [0, \Gamma_i]$ vetores que indicam o nível de estoque/déficit de estoque e a progressão da produção de cada item do tipo $i = 1, 2$. O objetivo é determinar uma sequência de intervenções τ_1, τ_2, \dots pertencentes à classe de intervenções admissíveis Π , que minimize o custo médio descontado, ou seja:

$$V(z) = \inf_{\pi \in \Pi} E_z^\pi \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} h(z_s) ds + \sum_{i=1}^\infty e^{-\alpha \tau_i} g(z_{\tau_i^-}, z_{\tau_i}) \right\} \quad (7.1)$$

onde $z_t = (n_t, \xi_t)$. Este modelo difere daqueles encontrados em [ZZ90] e [YZ97], pelo fato de que a produção de cada item pode ser paralisada em qualquer instante, mesmo que um item ainda esteja incompleto, a fim de produzir um outro item que esteja sendo mais requisitado pela demanda.

Sejam as cópias S' , S'' e S''' tais que $S = S' \cup S'' \cup S'''$, e considere que em S' somente são produzidos itens do tipo 1, em S'' só se produz itens do tipo 2 e que em S''' não se produz nenhum destes itens. Será visto a seguir que o *problema de dois itens* acima pode ser tratado de forma análoga ao problema P_I , desde que se considere que, após uma intervenção que leve o estado para o subconjuntos S' ou S'' , uma outra intervenção só poderá ocorrer após um item ter sido completamente produzido.

Seja $K(z)$ o conjunto destino de intervenções a partir do estado $z \in S$, definido por:

$$K(z) := \begin{cases} \{x, \bar{z}\}, & \text{se } z \in S' \text{ ou } z \in S'', \\ \{x, y\}, & \text{se } z \in S'''. \end{cases} \quad (7.2)$$

onde $x \in S''$ e $\bar{z} \in S'''$ se $z \in S'$, ou $x \in S'$ e $\bar{z} \in S'''$ se $z \in S''$. E se $z \in S'''$, tem-se que $x \in S'$ e $y \in S''$. Isto quer dizer que x , y e \bar{z} são pontos correspondentes nas cópias. Para $z \in S$ e qualquer $\phi, \psi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, defina os seguintes operadores:

$$\mathcal{M}[\phi](z) := \begin{cases} (\mathcal{K}[\phi](x) + g(z, x)) \wedge (\mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z, \bar{z})) & \text{para } z \in S' \cup S'', \\ (\mathcal{K}[\phi](x) + g(z, x)) \wedge (\mathcal{K}[\phi](y) + g(z, y)) & \text{para } z \in S''' \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_t[\phi, \psi](z) := E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{t \geq T_1\}} + e^{-\alpha t} \psi(z_{t-}) \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} \right\}, \quad (7.4)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}[\phi, \psi](z) := \inf_{0 \leq t \leq t^*(z)} \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi, \psi](z) \quad (7.5)$$

onde $\mathcal{K}[\phi]$ e $\mathcal{N}[\phi]$ estão definidos em (3.4) e (3.17). Assim como em (3.15), deve-se definir o seguinte operador:

$$\tilde{\mathcal{P}}[\phi](z) := \begin{cases} \tilde{\mathcal{R}}[\phi, \mathcal{M}[\phi]](z), & \text{para } z \in S' \cup S'' \\ (\tilde{\mathcal{P}}[\phi](x) + g(z, x)) \wedge (\tilde{\mathcal{P}}[\phi](y) + g(z, y)) \wedge \mathcal{N}[\phi](z), & \text{para } z \in S''' \text{ e } x, y \in K(z). \end{cases} \quad (7.6)$$

No Apêndice E prova-se que $\tilde{\mathcal{P}}^2$ é um mapeamento contrativo sobre $C_b(S \cup \partial_S^*)$. Desta forma, é possível demonstrar a partir dos resultados gerais de controle impulsional do PMDP, que a função valor em (7.1) é o único ponto fixo do operador $\tilde{\mathcal{P}}$.

Para tratar computacionalmente sistemas de manufatura complexos como este, além dos procedimentos desenvolvidos aqui, é necessário recorrer a algoritmos do tipo apresentado em [JL94] e a outras técnicas de programação, tais como processamento paralelo. De fato, esta técnica pode beneficiar o algoritmo 4.4 apresentado no Capítulo 4, tendo em vista a forma conceitual com que o mesmo foi desenvolvido, executando os cálculos em cada iteração de maneira assíncrona.

Apêndice A

Propriedades do PMDP

Uma propriedade importante do PMDP utilizada nesta tese é apresentada no seguinte Teorema:

Teorema A.1 [Dav93, Teorema 22.5, Capítulo 2] *O PMDP é um processo de Markov Forte homogêneo no tempo, ou seja, para $z \in S$, e quaisquer funções mensuráveis e limitadas $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ verifica-se que:*

$$E_z[\phi(z_{T+s})\mathbb{1}_{\{T < \infty\}} | F_T] = E_{z_T}[\phi(z_s)\mathbb{1}_{\{T < \infty\}}], \quad (\text{A.1})$$

onde E é o valor esperado, T é uma variável aleatória que define o instante de ocorrência de um evento (tempo de parada), F_t é a σ -álgebra gerada por z_s , $s \leq t$ e $\mathbb{1}_{\{A\}}$ é a função indicadora do conjunto A .

Consideram-se as seguintes definições:

Definição A.1 (Gerador Estendido) *Seja $D(\mathcal{A})$ o conjunto de funções $\phi : S \cup \partial_S \cup \{\Delta\} \rightarrow \mathbb{R}$, mensuráveis e limitadas com a seguinte propriedade: existe um operador $\mathcal{A}[\phi]$ mensurável e limitado, tal que $t \rightarrow \mathcal{A}[\phi](x_t)$ seja integrável a lebesgue para cada $z \in S \cup \partial_S$ e satisfaça:*

$$E_z[\phi](z_t) = \phi(z) + E_z \int_0^t \mathcal{A}[\phi](x_s) ds, \quad \text{Fórmula de Dynkin.} \quad (\text{A.2})$$

Denota-se por \mathcal{A} o gerador estendido do processo z_t e por $D(\mathcal{A})$ o seu domínio.

Definição A.2 *Uma função $\phi : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se, para todo intervalo finito $[a, b]$ e $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que:*

se $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ então $\sum_{i=1}^n |\phi(b_i) - \phi(a_i)| < \epsilon$

para quaisquer intervalos disjuntos (a_i, b_i) $i = 1, 2, \dots, n$ contidos em $[a, b]$.

Teorema A.2 *Se $\phi : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua, então ϕ é diferenciável em quase todos os pontos $z \in S \cup \partial_S$ com exceção de um conjunto de medida de Lebesgue nula.*

A seguir caracteriza-se o gerador estendido do PMDP.

Teorema A.3 [Dav93, Teorema 26.14, Capítulo 2] *O domínio $D(\mathcal{A})$ do gerador estendido do PMDP, é a classe de funções $\phi : S \cup \partial_S \cup \{\Delta\} \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis e limitadas, que satisfazem as seguintes propriedades:*

p_1 : Para cada $z \in S$, $t \rightarrow \phi(\varphi(x, t))$ é absolutamente contínua no intervalo $[0, t^*(z)]$;

p_2 : Para cada $z \in \partial_S^*$, a seguinte condição de fronteira é observada:

$$\phi(z) = \int_S \phi(y) \mu(dy; z).$$

p_3 : $\sum_{T_i \leq \tau_n} \|\phi(z_{T_i}) - \phi(z_{T_i^-})\|$ é integrável para alguma sequência de variáveis aleatórias τ_n satisfazendo $\tau_n \rightarrow \infty$ q.c. quando $n \rightarrow \infty$.

Para cada $\phi \in D(\mathcal{A})$, o gerador estendido $\mathcal{A}[\phi]$ é dado por:

$$\mathcal{A}[\phi](z) := \chi[\phi](z) + \lambda(z) \int_S [\phi(y) - \phi(x)] \mu(dy; z), \quad (\text{A.3})$$

onde χ é o operador campo vetorial satisfazendo:

$$\phi(\varphi(t, z)) - \phi(z) = \int_0^t \chi[\phi](\varphi(s, z)) ds.$$

Apêndice B

Resultados de Programação Dinâmica para o Problema P_c

B.1 O Operador de k - Saltos

Seja o operador $\mathcal{T}_u^k := \mathcal{T}_u^k \circ \mathcal{T}_u^{k-1}$ $k = 1, 2, \dots$, resultante da composição k vezes do operador de “um salto.” Considera-se a seguinte sequência de variáveis aleatórias:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ T_1 &= \inf\{s > 0 : n_s \neq n_0\} \\ &\vdots \\ T_k &= \inf\{s > T_{k-1} : n_s \neq n_{T_{k-1}}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Lema B.1 Para $u \in U$:

(i)

$$\mathcal{T}_u^k[\phi](z) = E_z^u \left\{ \int_0^{T_k} e^{-\alpha t} \tilde{f}(z_t, u_t) dt + e^{-\alpha T_k} \phi(z_{T_k}) \right\}; \quad (\text{B.1})$$

(ii)

$$\mathcal{T}^k[\phi](z) = \inf_u \mathcal{T}_u^k[\phi](z).$$

Prova do item (i): Em vista de (2.1) e da definição dos instantes de salto T_1 e T_2 , pode-se escrever:

$$\mathcal{T}_u^2[\phi](z) = E_z^u \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha t} \tilde{f}(z_t, u_t) dt + e^{-\alpha T_1} \mathcal{T}_u[\phi](z_{T_1}) \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Como o processo estocástico em estudo é um processo de Markov forte homogêneo no tempo, obtém-se a partir da propriedade de Markov forte e a propriedade da esperança condicional

$(E[E(X|G)|H] = E[X|H], H \subset G)$, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & E_z^u \left\{ e^{-\alpha T_1} \mathcal{T}_u[\phi](z_{T_1}) \right\} = \\ &= E_z^u \left\{ e^{-\alpha T_1} E_z^u \left\{ \int_{T_1}^{T_2} e^{-\alpha(t-T_1)} \tilde{f}(z_t, u_t) dt + e^{-\alpha(T_2-T_1)} \phi(z_{T_2}) \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right\} \\ &= E_z^u \left\{ \int_{T_1}^{T_2} e^{-\alpha t} \tilde{f}(z_t, u_t) dt + e^{-\alpha T_2} \phi(z_{T_2}) \right\}, \end{aligned}$$

onde \mathcal{F}_t é a filtragem do processo $z_t = (r_t, \xi_t)$. Associando (B.2) e (B.3) chega-se à expressão que se deseja provar no item (i), considerando $k = 2$. Portanto, por indução prova-se este resultado para $k > 2$.

Prova do item (ii): Primeiramente, considera-se uma sequência de controles ϵ -minimizantes $\{u^j : j = 0, 1, 2, \dots\}$ pertencentes ao conjunto \mathbf{U} , tal que

$$\inf_u \mathcal{T}_u[\phi](z_{T_1}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{u^j}[\phi](z_{T_1}) - \epsilon,$$

para um número ϵ pequeno. Como $\mathcal{T}_{u^j}[\phi](z_{T_1})$ é uma sequência de variáveis aleatórias limitadas, conclui-se do Teorema da convergência limitada que:

$$\begin{aligned} & E_z^u \left\{ \inf_u \mathcal{T}_u[\phi](z_{T_1}) \right\} = \\ & E_z^u \left\{ \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{u^j}[\phi](z_{T_1}) - \epsilon \right\} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} E_z^u \left\{ \mathcal{T}_{u^j}[\phi](z_{T_1}) \right\} - \epsilon = \\ &= \inf_u E_z^u \left\{ \mathcal{T}_u[\phi](z_{T_1}) \right\}. \end{aligned}$$

De forma análoga à expressão (B.2), calcula-se:

$$\mathcal{T}^2[\phi](z) = \inf_u E_z^u \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha t} \tilde{f}(z_t, u_t) dt + e^{-\alpha T_1} \inf_u \mathcal{T}_u[\phi](z_{T_1}) \right\}. \quad (\text{B.3})$$

Tendo em vista (B.3), retira-se o ínfimo de dentro do valor esperado da expressão (B.3). Assim, usando a propriedade de Markov forte e a propriedade da esperança condicional e procedendo com os mesmos argumentos usados na prova do item (i) deste Lema, pode-se demonstrar a expressão do item (ii) para $k=2$. Por indução, mostra-se este resultado para $k > 2$. \square

B.2 Mapeamentos Contrativos

Definição B.1 Diz-se que o mapeamento $\mathcal{G} : B(S \cup \partial_S^*) \rightarrow B(S \cup \partial_S^*)$ é um mapeamento contrativo sobre $B(S \cup \partial_S^*)$, se para qualquer $\phi_0, \phi_1 \in B(S \cup \partial_S^*)$,

$$\|\mathcal{G}[\phi_0] - \mathcal{G}[\phi_1]\| \leq \|\phi_0 - \phi_1\|,$$

e \mathcal{G} é um mapeamento ρ -contrativo se

$$\|\mathcal{G}[\phi_0] - \mathcal{G}[\phi_1]\| \leq \rho \|\phi_0 - \phi_1\|,$$

para algum $0 \leq \rho < 1$.

B.2.1 Prova do Lema 2.6

Sejam T_k^i e T_k^f , $k = 1, 2, \dots$ duas sequências de saltos de $z_t = (n_t, \xi_t)$ no interior do espaço de estados S e na fronteira de S (∂_S), respectivamente. Será demonstrado que existe um número ρ , $0 \leq \rho < 1$ que é independente de $u \in \mathbf{U}$, tal que:

$$\|\mathcal{T}_u^2 \phi' - \mathcal{T}_u^2 \phi''\| \leq \rho \|\phi' - \phi''\|,$$

para qualquer ϕ' e ϕ'' pertencentes a $B(S \cup \partial_S)$, onde $\|\cdot\|$ indica a norma 'sup' sobre $S \cup \partial_S$. A prova utiliza, numa forma mais simplificada, os argumentos de [Dav93], Proposição (46.17) e pg. 179. Do item (i) do Lema B.1:

$$\mathcal{T}_u^2[\phi](z) = E_z^u \left\{ \int_0^{T_2} e^{-\alpha t} \tilde{f}(z_t, u_t) dt + e^{-\alpha T_2} \phi(z_{T_2}) \right\}. \quad (\text{B.4})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_u^2 \phi' - \mathcal{T}_u^2 \phi''\| &= \|E_z^u e^{-\alpha T_2} (\phi'(z_{T_2}) - \phi''(z_{T_2}))\| \\ &\leq \sup_z |E_z^u [e^{-\alpha T_2}]| \|\phi' - \phi''\| \end{aligned}$$

e deve ser demonstrado que $\sup_z E_z^u [e^{-\alpha T_2}] \leq \rho < 1$. Em primeiro lugar observa-se que $T_1 = \min\{T_1^i, T_1^f\}$, onde $T_1^f = t_u^*(z)$ e T_1^i é uma variável aleatória exponencialmente distribuída com taxa $\lambda(z, u) = \delta(z) + u \cdot \eta(z)$. Tendo em vista que $t_u^*(z_\Gamma) = 0$, conclui-se que $\sup_z E_z^u [e^{-\alpha T_1}] = 1$. Nota-se que T_2 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_2 &= T_2^f \mathbb{1}_{\{T_2^f < T_1^i\}} + T_1^i \mathbb{1}_{\{T_1^f < T_1^i < T_2^f\}} \\ &\quad + T_1^f \mathbb{1}_{\{T_1^i < T_1^f < T_2^f\}} + T_2^i \mathbb{1}_{\{T_2^i < T_1^f\}}, \end{aligned}$$

ou seja, $T_2 \geq \min\{T_2^f, T_1^i\} \geq \min\{\Gamma, T_1^i\}$. Logo:

$$\begin{aligned}
E_z^u[e^{-\alpha T_2}] &\leq E_z^u[e^{-\alpha(T_1^i \wedge \Gamma)}] = E_z^u[e^{-\alpha T_1^i} \mathbb{1}_{\{T_1^i < \Gamma\}}] + E_z^u[e^{-\alpha \Gamma} \mathbb{1}_{\{T_1^i \geq \Gamma\}}] \\
&= \int_0^\Gamma (\alpha + \lambda_n(z(s), u(s))) \frac{\lambda(z(s), u(s))}{\alpha + \lambda(z(s), u(s))} e^{-\hat{\Lambda}(s, z, u)} ds + e^{-\hat{\Lambda}(\Gamma, z, u)} \\
&\leq \hat{\rho} \int_0^\Gamma (\alpha + \lambda(z(s), u(s))) e^{-\hat{\Lambda}(s, z, u)} ds + e^{-\hat{\Lambda}(\Gamma, z, u)} = \hat{\rho} + (1 - \hat{\rho}) e^{-\hat{\Lambda}(\Gamma, z, u)} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

tendo em vista que $\Gamma > 0$, o que conclui a prova deste lema. \square

B.2.2 Resultados Auxiliares à Prova do Teorema 2.1

O primeiro é o Teorema do ponto fixo de Banach, cuja demonstração pode ser obtida em [Lim93].

Teorema B.1 *Seja X um espaço métrico completo e $T^m : X \rightarrow X$ uma contração para algum $m \geq 1$. Então existe um único $\bar{x} \in X$ tal que $T[\bar{x}] = \bar{x}$ e qualquer que seja x_0 , a sequência $\{x_k, k = 1, 2, \dots\}$, onde $x_{k+1} = T[x_k]$, converge para \bar{x} .*

Relembre que $C_b(S \cup \partial_S^*)$ é o espaço de funções reais, contínuas e limitadas sobre $S \cup \partial_S^*$ com a norma “sup.”

Lema B.2 *$C_b(S \cup \partial_S^*)$ é um espaço de Banach.*

Prova: Considera-se uma sequência de Cauchy $\{q_k\} \subset C_b(S \cup \partial_S^*)$, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, k > n_0$ então $\|q_m - q_k\| < \epsilon$. Portanto, para todo $z = (n, \xi) \in S \cup \partial_S^*$ e $m, k > n_0$, verifica-se que:

$$|q_m - q_k| < \epsilon. \quad (\text{B.5})$$

Fixando-se arbitrariamente z , nota-se através de (B.5) que a sequência $\{q_k(z)\}$ é de Cauchy em \mathbb{R} . Como \mathbb{R} é completo, para cada $z \in S \cup \partial_S^*$ existe o limite desta sequência. Anotando-se $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k(z) = q(z) \in \mathbb{R}$ define-se um mapeamento $q : S \cup \partial_S^* \rightarrow \mathbb{R}$ que é também o limite pontual da sequência $\{q_k\}$.

Agora se demonstra que $q_k \rightarrow q$ uniformemente sobre $S \cup \partial_S^*$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (B.5) conclui-se que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > n_0$ então $|q(z) - q_k(z)| < \epsilon$ para todo $z \in S \cup \partial_S^*$. Logo, $q_k \rightarrow q$ uniformemente na norma “sup”. Como $\{q_k\} \subset C_b(S \cup \partial_S^*)$, conclui-se da proposição 14 de [Lim93] que $q \in C_b(S \cup \partial_S^*)$. \square

Lema B.3 *Seja $\mathcal{V}(z) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}^k[\phi](z)$, onde ϕ satisfaz A_1 . Então $V = \mathcal{V}$.*

Prova: Para $u \in \mathbf{U}$, define-se a função $V_u : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$V_u := \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_u^k[\phi]. \quad (\text{B.6})$$

Tendo em vista o Teorema B.1 e os Lemas 2.5, 2.6 e B.2, pode-se dizer que o limite acima existe e é único para qualquer $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, e além disto $V_u \in C_b(S \cup \partial_S^*)$. Dado um número $\bar{\epsilon} > 0$ qualquer, é sempre possível encontrar um controle ϵ -ótimo $u_{\bar{\epsilon}}$ do tipo “bang-bang” tal que:

$$\mathcal{V} \leq \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}] \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}] \leq \mathcal{T}[\mathcal{V}] + \bar{\epsilon} = \mathcal{V} + \bar{\epsilon}, \quad (\text{B.8})$$

onde $\mathcal{V} = \mathcal{T}[\mathcal{V}]$ tendo em vista o Lema 2.6. Observando que \mathcal{T}_u é um operador monótono, conclui-se através de (B.7) que:

$$\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}] \leq \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}],$$

e tendo em vista que:

$$\|\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}] - \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}]\| \leq \|\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}] - \mathcal{V}\|, \quad (\text{B.9})$$

chega-se, através da desigualdade triangular, à seguinte expressão:

$$\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}] \leq \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}] + \|\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}] - \mathcal{V}\|.$$

Em vista disto, e considerando (B.8), determina-se:

$$\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}] \leq \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}[\mathcal{V}] + \bar{\epsilon} \leq \mathcal{V} + 2\bar{\epsilon}. \quad (\text{B.10})$$

A partir do Lema 2.6 e da desigualdade triangular, escreve-se:

$$\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^4[\mathcal{V}] = \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}]] \leq \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}] + \hat{\rho}_{u_{\bar{\epsilon}}} \|\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}] - \mathcal{V}\|, \quad (\text{B.11})$$

para $0 < \hat{\rho}_{u_{\bar{\epsilon}}} < 1$. De (B.10) e (B.11) chega-se às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^4[\mathcal{V}] &\leq \mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^2[\mathcal{V}] + 2\hat{\rho}_{u_{\bar{\epsilon}}}\bar{\epsilon} \\ &\leq \mathcal{V} + (1 + \hat{\rho}_{u_{\bar{\epsilon}}})2\bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

Repetindo-se o raciocínio anterior, conclui-se para todo $k \geq 2$ que:

$$\mathcal{T}_{u_{\bar{\epsilon}}}^{2k}[\mathcal{V}] \leq \mathcal{V} + (1 + \hat{\rho}_{u_{\bar{\epsilon}}} + \dots + \hat{\rho}_{u_{\bar{\epsilon}}}^{k-1})2\bar{\epsilon}.$$

Tendo em vista (B.6) e o Lema 2.6 pode-se escrever:

$$V_{u_\epsilon} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{u_\epsilon}^{2k}[\phi] = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_{u_\epsilon}^{2k}[\mathcal{V}] \leq \mathcal{V} + \epsilon, \quad (\text{B.12})$$

onde $\epsilon = \frac{2}{(1-\rho_{u_\epsilon})} \bar{\epsilon}$. Para qualquer $\phi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$, usa-se a expressão do item (iii) do Lema 2.4 para se obter, através do princípio de otimalidade, a seguinte desigualdade:

$$\mathcal{V} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}^k[\phi] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_u^k[\phi] = V_u.$$

Portanto,

$$\mathcal{V} \leq \inf_{u \in \mathbf{U}} V_u = V, \quad (\text{B.13})$$

onde a igualdade em (B.13) é obtida tomando o limite $k \rightarrow \infty$ em (B.1) para em seguida obter o ínfimo. Por outro lado, usando (B.12), chega-se à desigualdade:

$$V \leq V_{u_\epsilon} \leq \mathcal{V} + \epsilon. \quad (\text{B.14})$$

Logo, de (B.13) e (B.14) conclui-se que $\mathcal{V} = V$ e este Lema está provado. \square

B.3 A Equação de H-J-B para o Problema P_c

As condições necessárias e suficientes de otimalidade do problema P_c , também podem ser obtidas através dos resultados de [FR75] e [FS93]. Seja $z_s = (n_s, \xi_s)$, $z = z_0 = (n, \xi)$ e consideram-se as seguintes Proposições:

Proposição B.1 *Se existe um controle ótimo $u^* \in \mathbf{U}$, que resolva (1.25), então a função valor V satisfaz a equação de H-J-B:*

$$\min_{u \in [0,1]} \{ \mathcal{A}^u V(z) - \alpha V(z) + f(z) + \beta u \} = 0, \quad (\text{B.15})$$

com a condição de fronteira (1.24), para q.t. $z \in S$ onde $u : S \rightarrow [0, 1]$ é uma função que satisfaz:

$$u = \frac{d\xi}{dt} \quad \xi \in [0, \Gamma]. \quad (\text{B.16})$$

Prova: Define-se $\tilde{f}(z, u) := f(z) + \beta u$. Para qualquer controle $u \in \mathbf{U}$ e $t \in (0, \infty)$, seja:

$$w_s^1 := \begin{cases} u_s, & 0 \leq s \leq t, \\ u_s^*, & s > t. \end{cases}$$

Do princípio de otimalidade de Bellman, pode-se afirmar que:

$$V(z) \leq E_z^{u^1} \left\{ \int_0^t e^{-\alpha s} (\tilde{f}(z_s, u_s)) ds + e^{-\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha(s-t)} (\tilde{f}(z_s, u_s^*)) ds \right\}. \quad (\text{B.17})$$

Aplicando as propriedades da esperança condicional e de Markov forte em (B.17), chega-se à seguinte expressão:

$$V(z) \leq E_z^{u^1} \left\{ \int_0^t e^{-\alpha s} (\tilde{f}(z_s, u_s)) ds + e^{-\alpha t} V(z_t) \right\}.$$

Multiplicando-se a desigualdade anterior por -1 e somando ambos os lados da expressão resultante por $E_z^{u^1} V(z_t)$, conclui-se que:

$$E_z^{u^1} V(z_t) - V(z) \geq -E_z^{u^1} \left\{ \int_0^t e^{-\alpha s} (\tilde{f}(z_s, u_s)) ds + V(z_t)(1 - e^{-\alpha t}) \right\}.$$

Dividindo os termos da expressão acima por t e fazendo $t \rightarrow 0^+$ obtém-se:

$$\mathcal{A}^{u^1} V(z) := \lim_{t \rightarrow 0^+} (E_z^{u^1} V(z_t) - V(z)) \geq -\tilde{f}(z, u) + \alpha V(z).$$

Como u^1 é arbitrário, a igualdade na relação acima ocorrerá quando $u_t^1 = u_t^*$ para $t \geq 0$. Logo a função V satisfaz a equação de H-J-B para $u = u^*$, com a condição de fronteira $V_n(\Gamma) = V_{n_0}(0)$. \square

Proposição B.2 (Verificação) *Supõe-se que $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i = \infty$, onde $T_i = \tau_i$ é o instante do i -ésimo salto do processo (n_t, ξ_t) . Considera-se que exista uma função $J : S \cup \partial_S \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfazendo as seguintes condições:*

d_1 : J seja diferenciável com exceção de um conjunto enumerável de pontos, satisfazendo a condição de fronteira $J_n(\Gamma) = \mathcal{Q}[J](z_\Gamma, u)$;

d_2 : Para qualquer $u \in U$, $t > 0$

$$E_z^u \sum_i \mathbf{1}_{\{t \geq T_i\}} \|J(z_{T_i^-}) - J(z_{T_i^-})\| < \infty;$$

d_3 : Para qualquer $u \in U$, $E_z^u e^{-\alpha t} J(z_t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$;

d_4 : Existe $u^* \in U$ tal que, para cada $(n, \xi) \in S$, J minimiza a equação de H-J-B (B.15) com $u = u^*$;

Então u^* é um controle ótimo e $V(z) = J(z)$.

Prova: Em vista das condições d_1 e d_2 , $J \in D(\mathcal{A}^u)$ e para $\phi = e^{-\alpha t} J_{n_t}(\xi_t)$ e qualquer controle $u \in \mathbf{U}$, tem-se, a partir da fórmula de Dynkin, a seguinte expressão:

$$J(z) = E_z^u \left\{ \int_0^t e^{-\alpha s} [-\mathcal{A}^u J(z_s) + \alpha J(z_s)] ds + E_z^u e^{-\alpha t} J(z_t) \right\}. \quad (\text{B.18})$$

Da equação de H-J-B conclui-se que:

$$-\mathcal{A}^u J(z) + \alpha J(z) \leq \tilde{f}(z, u), \quad (\text{B.19})$$

para $\forall z \in S$ e qualquer $u \in \mathbf{U}$. Substituindo (B.19) em (B.18) e fazendo $t \rightarrow \infty$ conclui-se, a partir da condição d_3 , que:

$$J(z) \leq J^u(z) := E_z^u \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha s} (\tilde{f}(z_s, u_s)) ds \right\} \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

Se existe u^* tal que $-\mathcal{A}^{u^*} J(z) + \alpha J(z) = \tilde{f}(z, u^*)$, usa-se os argumentos anteriores para concluir que:

$$J_n(\xi) = J_n^{u^*}(\xi),$$

e u^* é um controle ótimo. □

Apêndice C

Resultados Auxiliares para o Problema P_I

C.1 Prova do Lema 3.1 (ii)

Seja $f_1(z) := \lambda(z)\mathcal{Q}[\phi](z) + h(z)$; fixe um ponto $z \in S$. Se $a(z) = 0$, então :

$$F(\nu, p, z) = (f_1(z) - \widehat{\lambda}(z)\nu(z)) \wedge (\psi(\bar{z}) + g(z) - \nu(z)) = 0,$$

para qualquer $p \in R^n$. Seja $a(z) > 0$ e supõe-se que exista $p \in D^+$ tal que:

$$F(\nu, p, z) = (\langle a(z), p \rangle + f_1(z) - \widehat{\lambda}(z)\nu(z)) \wedge (\psi(\bar{z}) + g(z) - \nu(z)) < 0. \quad (C.1)$$

Tendo em vista que $\nu(z) \leq \psi(\bar{z}) + g(z)$, conclui-se a partir de (C.1) que $\langle a(z), p \rangle < \widehat{\lambda}(z)\nu(z) - f_1(z)$. Portanto, de (3.6), tem-se que:

$$\mathcal{B}[\nu](z) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\varphi(t, z)) - \nu(z)}{t} \geq \widehat{\lambda}(z)\nu(z) - f_1(z),$$

de onde se verifica que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\varphi(t, z)) - \nu(z)}{t} - \langle a(z), p \rangle > 0$. Logo

$$\begin{aligned} & \lim_{|z_n - z| \rightarrow 0^+} \sup \frac{\nu(z_n) - \nu(z) - \langle p, z_n - z \rangle}{|z_n - z|} \\ & \geq \lim_{t \rightarrow 0^+} \inf \frac{\nu(\varphi(t, z)) - \nu(z) - \langle p, \varphi(t, z) - z \rangle}{|\varphi(t, z) - z|} \\ & = |a(z)|^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \inf \frac{\nu(\varphi(t, z)) - \nu(z) - \langle p, a(z) \rangle t + o(t)}{t} > 0. \end{aligned} \quad (C.2)$$

Em vista da definição 3.1, conclui-se que $p \notin D^+$. Portanto, para qualquer $p \in D^+$:

$$(\langle a(z), p \rangle + f_1(z) - \widehat{\lambda}(z)\nu(z)) \wedge (\psi(\bar{z}) + g(z) - \nu(z)) \geq 0.$$

Agora, supõe-se que exista $p \in D^-$ tal que:

$$(\langle a(z), p \rangle + f_1(z) - \widehat{\lambda}(z)\nu(z)) \wedge (\psi(\bar{z}) + g(z) - \nu(z)) > 0.$$

Isto implica que $\nu(z) < \psi(\bar{z}) + g(z)$ e $\langle a(z), p \rangle > \widehat{\lambda}(z)\nu(z) - f_1(z)$. Portanto, de (3.6) segue que:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\varphi(t, z)) - \nu(z)}{t} = \widehat{\lambda}(z)\nu(z) - f_1(z) < \langle a(z), p \rangle.$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \lim_{|z_n - z| \rightarrow 0^+} \inf \frac{v(z_n) - v(z) - \langle p, z_n - z \rangle}{|z_n - z|} \\ & \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\varphi(t, z)) - \nu(z) - \langle p, \varphi(t, z) - z \rangle}{|\varphi(t, z) - z|} \\ & = |a(z)|^{-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\nu(\varphi(t, z)) - \nu(z) - \langle p, a(z) \rangle t + o(t)}{t} < 0. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Portanto $p \notin D^-$ e para qualquer $p \in D^-$:

$$(\langle a(z), p \rangle + f_1(z) - \widehat{\lambda}(z)\nu(z)) \wedge (\psi(\bar{z}) + g(z) - \nu(z)) \leq 0.$$

De (C.2) e (C.3) conclui-se que ν é uma solução viscosa de (3.6)–(3.8). \square

C.2 Prova do Lema 3.2

Supõe-se arbitrariamente que:

$$\|\mathcal{G}[\phi_0] - \mathcal{G}[\phi_1]\| = \mathcal{G}[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{G}[\phi_1](\hat{z}), \quad \text{para algum } \hat{z} \in S,$$

e assume-se que \hat{z} ,

$$\mathcal{H}[\phi_1](\hat{z}) \wedge \mathcal{I}[\phi_1](\hat{z}) = \mathcal{H}[\phi_1](\hat{z}).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{G}[\phi_1](\hat{z}) &= \mathcal{H}[\phi_0](\hat{z}) \wedge \mathcal{I}[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{H}[\phi_1](\hat{z}) \wedge \mathcal{I}[\phi_1](\hat{z}) \\ &= \mathcal{H}[\phi_0](\hat{z}) \wedge \mathcal{I}[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{H}[\phi_1](\hat{z}) \\ &\leq \mathcal{H}[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{H}[\phi_1](\hat{z}) \leq \|\mathcal{H}[\phi_0] - \mathcal{H}[\phi_1]\| \leq r\|\phi_0 - \phi_1\|. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Agora, se

$$\mathcal{H}[\phi_1](\hat{z}) \wedge \mathcal{I}[\phi_1](\hat{z}) = \mathcal{I}[\phi_1](\hat{z}),$$

repete-se os argumentos anteriores para concluir que:

$$\mathcal{G}[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{G}[\phi_1](\hat{z}) \leq \mathcal{I}[\phi_0](\hat{z}) - \mathcal{I}[\phi_1](\hat{z}) \leq \|\mathcal{I}[\phi_0] - \mathcal{I}[\phi_1]\| \leq s\|\phi_0 - \phi_1\|, \quad (\text{C.5})$$

e portanto através de (C.4) e (C.5) termina-se a prova deste Lema. \square

C.3 Condições gerais do problema P_I

Para cada $z \in S$ seja $K(z) \subset S$ o conjunto no qual o PMDP deve ser transferido após uma intervenção no estado z . Para o problema P_I , $K(z) = \bar{z}$, mas para atender às condições padrões estabelecidas em [CD89] e [Dav93], deve-se adotar $K(z) = \{z, \bar{z}\}$. Defina-se:

$$\mathcal{M}[\psi](z) := \inf_{z \in K(z)} \{\psi(z)\} + g(z) = \psi(z) \wedge \psi(\bar{z}) + g(z), \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi, \psi](z) := E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{t \geq T_1\}} \right. \\ \left. + e^{-\alpha t} \mathcal{M}[\psi](z)(z_t) \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\tilde{\mathcal{R}}[\phi, \psi](z) := \inf_{0 \leq t \leq t^*(z)} \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi, \psi](z) \quad (\text{C.8})$$

$$\tilde{\mathcal{L}}[\phi](z) := \tilde{\mathcal{R}}[\phi, \phi](z), \quad (\text{C.9})$$

para qualquer $\phi, \psi \in C_b(S \cup \partial_S^*)$. Considera-se a seguinte hipótese:

(\tilde{B}_2) Para cada $z \in S$, $K(z) = \{z, \bar{z}\}$, $g(z) \geq g_0 > 0$ e $f, g \in C_b(S \cup \partial_S^*)$.

\tilde{B}_2 garante que $K(\bar{z}) = K(z)$ e a condição (54.1) em [Dav93] pg. 227, ou seja, $K(y) \subset K(z)$, $\forall z \in S$ e $y \in K(z)$ é satisfeita aqui. Isto quer dizer que não é permitido fazer consecutivas intervenções em qualquer ponto do espaço de estados, para qualquer candidato à solução ótima. Considerando esta hipótese, pode-se anunciar:

Proposição C.1 [Dav93, teorema 54.23] *Assume-se que as hipóteses B_1 e \tilde{B}_2 sejam válidas. Então V é a maior solução mensurável à Borel do seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} w = \tilde{\mathcal{L}}[w], \\ w \leq I, \end{cases}$$

com I dado por (3.32). Além disto, para uma função $\tilde{V}_0 \geq I$, a sequência \tilde{V}_i $i = 1, 2, \dots$ definida por:

$$\tilde{V}_i(z) := \tilde{\mathcal{L}}[\tilde{V}_{i-1}](z), \quad \forall z \in S$$

converge para V quando $i \rightarrow \infty$.

C.3.1 Prova da Proposição 3.3

Em vista da proposição (C.1), $V = \tilde{\mathcal{L}}[V]$ e de acordo com os resultados de Gatarek [Gat92], os conjuntos de paralisação e continuidade associados com a função V (veja também o Lema 3.5) são dados, respectivamente por:

$$\tilde{A}_c := \{z \in S : V(z) < \mathcal{M}[V](z) + g(z)\} \text{ e } \tilde{A}_s := \{z \in S : V(z) = \mathcal{M}[V](z) + g(z)\}$$

e as equações equivalentes a (3.34) e (3.35) no Lema 3.5 (i) são dadas por:

$$\begin{aligned} V(z) &= \mathcal{M}[V](z) + g(z) = V(\bar{z}) + g(z), \\ V(\bar{z}) &= \mathcal{M}[V](\bar{z}) + g(\bar{z}) = V(z) + g(\bar{z}). \end{aligned}$$

Portanto os resultados no Lema 3.5 item (i) e (ii) são também satisfeitos quando se considera os operadores (C.6)–(C.9).

Além disto observa-se que, se $z \in \tilde{A}_s$, então $V(z) = V(\bar{z}) + g(z)$, e se $z \in \tilde{A}_c$, então $V(z) < V(\bar{z}) + g(z)$; portanto,

$$V = \tilde{\mathcal{L}}[V] = \mathcal{L}[V, \mathcal{M}[V]] = \mathcal{L}[V].$$

Para completar a prova da Proposição 3.3, observa-se que:

$$V_1(z) = \mathcal{R}[h, h](z) \leq \mathcal{R}_{t^*(z)}[h, h](z) = h(z) = V_0(z),$$

pois \mathcal{L} é um operador monótono. Agora, se $V_i \leq V_{i-1}$,

$$V_{i+1} = \mathcal{R}[V_i, V_i] \leq \mathcal{R}[V_{i-1}, V_{i-1}] = V_i.$$

Portanto V_i converge para alguma função mensurável à Borel, denotada por \bar{V} quando $i \rightarrow \infty$ onde $\bar{V} = \mathcal{R}[\bar{V}, \bar{V}] = \mathcal{L}[\bar{V}]$. A partir do Lema 3.5, observa-se que $\bar{V} = \mathcal{P}[\bar{V}]$; logo $V = \bar{V}$, pois V é o único ponto fixo de \mathcal{P} , e a Proposição 3.3 está provada. \square

Apêndice D

Resultados Auxiliares para o Problema $P\&E$

D.1 Prova do Lema 5.1

A partir dos Lemas 3.1 e 3.6 obtém-se:

$$\begin{aligned}W(z) - W(\bar{z}) &\leq g(z) \quad \forall z \in S', \\W(\bar{z}) - W(z) &\geq -g(z) \quad \forall z \in S''.\end{aligned}\tag{D.1}$$

Nota-se que (D.1) é equivalente à seguinte expressão:

$$W(z) - W(\bar{z}) \geq -g(\bar{z}) \quad \forall z \in S',$$

e a prova está concluída. □

D.2 Prova do Lema 5.2

Mostrou-se no Lema 5.1 que W satisfaz a primeira parte de \mathbf{c}_1 . Agora se demonstra a segunda parte. A partir de (5.3) e (5.6) conclui-se:

$$h(z) + \lambda \mathcal{E}[\phi](z) = \beta + \widehat{\lambda} \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + \lambda(\mathcal{E}[\phi](z) - \mathcal{E}[\phi](\bar{z})).\tag{D.2}$$

Supõe-se que $\bar{z} \in B_s''$, ou seja:

$$W(\bar{z}) = W(z) + g(\bar{z}).\tag{D.3}$$

Do Lema 3.6 segue que $z \in B_c'$, e do Lema 3.1 $W(z)$ satisfaz a e.d.o:

$$\dot{W}(z) - \widehat{\lambda} W(z) + \lambda \mathcal{E}[\phi](z) + h(z) = 0.$$

Substituindo as expressões (D.2) e (D.3) na equação acima, obtém-se o seguinte resultado:

$$\dot{W}(\bar{z}) - \dot{g}(\bar{z}) + \widehat{\lambda}g(\bar{z}) - \widehat{\lambda}(W(\bar{z}) - \mathcal{N}[\phi](\bar{z})) + \lambda(\mathcal{E}[\phi](z) - \mathcal{E}[\phi](\bar{z})) + \beta = 0. \quad (\text{D.4})$$

Tendo em vista que $W(\bar{z}) \leq \mathcal{N}[\phi](\bar{z})$, conclui-se de C_1 e \mathbf{c}_1 as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \dot{W}(\bar{z}) - \dot{g}(\bar{z}) + \widehat{\lambda}g(\bar{z}) + \lambda(\mathcal{E}[\phi](z) - \mathcal{E}[\phi](\bar{z})) + \beta \\ &\geq \dot{W}(\bar{z}) - \dot{g}(\bar{z}) + \widehat{\lambda}g(\bar{z}) - \lambda\mathcal{E}[g](\bar{z}) + \beta \\ &\geq \dot{W}(\bar{z}) \quad \forall \bar{z} \in S''. \end{aligned}$$

Finalmente, se $W(\bar{z}) = \mathcal{N}[\phi](\bar{z})$, obtém-se a partir de (3.4) que:

$$\dot{W}(\bar{z}) = \dot{\mathcal{N}}[\phi](\bar{z}) = \frac{\lambda}{\widehat{\lambda}}\mathcal{E}[\dot{\phi}](\bar{z}) \leq 0 \quad \forall \bar{z} \in S''. \quad (\text{D.5})$$

pois $\dot{\phi}(\bar{z}) \leq 0 \forall z \in S'$. Logo \mathbf{c}_1 é também satisfeita por W . \square

D.3 Prova do Lema 5.3

Desenvolvendo o valor esperado do operador \mathcal{R}_t , definido em (3.2), com $0 \leq t \leq t^*(z)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) &= \int_0^t e^{-\widehat{\lambda}s} [h(z(s)) + \lambda\mathcal{E}[\phi](z(s))] ds + \\ &+ e^{-\widehat{\lambda}t} \{ (\mathcal{N}[\phi](\bar{z}(t)) + g(z(t))) \mathbb{1}_{\{t < t^*(z)\}} + \phi(z_\theta) \mathbb{1}_{\{t = t^*(z)\}} \} \quad \forall z \in S'. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Através de (D.2) e (D.6) deriva-se a seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) &= \int_0^t e^{-\widehat{\lambda}s} \{ \beta + \widehat{\lambda}\mathcal{N}[\phi](\bar{z}(s)) + \lambda[\mathcal{E}[\phi](z(s)) - \mathcal{E}[\phi](\bar{z}(s))] \} ds \\ &+ e^{-\widehat{\lambda}t} \{ (\mathcal{N}[\phi](\bar{z}(t)) + g(z(t))) \mathbb{1}_{\{t < t^*(z)\}} + \phi(z_\theta) \mathbb{1}_{\{t = t^*(z)\}} \}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Usando-se a fórmula da integral por partes em (D.7), obtém-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) &= \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + \int_0^t e^{-\widehat{\lambda}s} \{ \beta + \dot{\mathcal{N}}[\phi](\bar{z}(s)) + \lambda[\mathcal{E}[\phi](z(s)) - \mathcal{E}[\phi](\bar{z}(s))] \} ds \\ &+ e^{-\widehat{\lambda}t} \{ (\mathcal{N}[\phi](\bar{z}(t)) + g(z(t))) \mathbb{1}_{\{t < t^*(z)\}} + \phi(z_\theta) \mathbb{1}_{\{t = t^*(z)\}} - \mathcal{N}[\phi](\bar{z}(t)) \}. \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Apêndice E

O Operador $\tilde{\mathcal{P}}$ do problema de dois itens

Teorema E.1 $\tilde{\mathcal{P}}^2$ é um mapeamento contrativo sobre $C_b(S \cup \partial_S^*)$.

Prova: Primeiro observa-se, para $z \in S' \cup S''$, que:

$$\inf_{0 \leq t \leq t^*(z)} \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi, \mathcal{M}[\phi]](z) = \inf_{0 \leq t \leq t^*(z)} \tilde{\mathcal{K}}_t[\phi](z) \wedge \inf_{0 \leq t \leq t^*(z)} \mathcal{R}_t[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z), \quad (\text{E.1})$$

onde $\mathcal{R}_t[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z)$ é obtido em (3.2) com $\psi = \mathcal{N}[\phi]$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_t[\phi](z) &:= E_z \left\{ \int_0^{t \wedge T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) \mathbb{1}_{\{t \geq T_1\}} \right. \\ &\quad \left. + e^{-\alpha t} (\mathcal{K}[\phi](x_t) + g(z_{t-}, x_t)) \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} \right\} = \\ &= E_z \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \phi(z_{T_1}) + g(z_{t-}, x_t) \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde a última igualdade acima é obtida de forma equivalente a (4.14). Seja

$$\tilde{\mathcal{K}}[\phi](z) := \inf_{0 \leq t \leq t^*(z)} \tilde{\mathcal{K}}_t[\phi](z).$$

Para $z \in S' \cup S''$ escreve-se a partir de (E.1) e (3.18) a seguinte expressão:

$$\tilde{\mathcal{R}}[\phi, \mathcal{M}[\phi]](z) = \tilde{\mathcal{K}}[\phi](z) \wedge \mathcal{J}[\phi](z) \wedge \mathcal{K}[\phi](z). \quad (\text{E.3})$$

Em (E.2) observa-se que $\tilde{\mathcal{K}}_{t^*(z)}[\phi](z) = \mathcal{K}[\phi](z)$ e portanto:

$$\tilde{\mathcal{R}}[\phi, \mathcal{M}[\phi]](z) = \tilde{\mathcal{K}}[\phi](z) \wedge \mathcal{J}[\phi](z).$$

Adicionando-se a identidade:

$$g(z) - g(z(t))e^{-\widehat{\lambda}t} = - \int_0^t e^{-\widehat{\lambda}s} [\dot{g}(z(s)) - \widehat{\lambda}g(z(s))] ds$$

ao lado direito de (D.8) e usando o fato de que $\mathcal{N}[\phi](\bar{z}) = \frac{\lambda}{\widehat{\lambda}} \mathcal{E}[\dot{\phi}](\bar{z})$, conclui-se, através de (5.7), que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_t[\phi, \mathcal{N}[\phi]](z) &= \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z) + \mathcal{G}_t[\phi, g](z) + e^{-\widehat{\lambda}t} \{ [\mathcal{N}[\phi](\bar{z}(t)) \\ &+ g(z(t))] \mathbb{1}_{\{t < t^*(z)-1\}} \} + \phi(z_\theta) \mathbb{1}_{\{t=t^*(z)\}} \} \\ &= \mathcal{N}[\phi](\bar{z}) + g(z) + \mathcal{G}_t[\phi, g](z) + [\phi(z_\theta) - (\mathcal{N}[\phi](\bar{z}(t)) + g(z(t)))] e^{-\widehat{\lambda}t} \mathbb{1}_{\{t=t^*(z)\}}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Considerando $\phi = V$ e tomando o ínfimo em $t \in [0, t^*(z)]$ da expressão acima, conclui-se (5.8). \square

Do Lema 3.3 conclui-se que $\mathcal{J}[\phi]$ é um mapeamento ρ contrativo, e que $\tilde{\mathcal{K}}[\phi]$ é uma contração, de acordo com a definição B.1. Portanto, para se provar este Teorema através do Lema 3.2, é necessário analisar o seguinte operador:

$$\tilde{\mathcal{K}}[\tilde{\mathcal{P}}[\phi]](z) = E_z \left\{ \int_0^{T_1} e^{-\alpha s} h(z_s) ds + e^{-\alpha T_1} \inf_{T_1 \leq s \leq t^*(z_{T_1})} \tilde{\mathcal{R}}_s[\phi, \mathcal{M}[\phi]](z_{T_1}) + g(z_{t^-}, x_t) \mathbb{1}_{\{t < T_1\}} \right\}. \quad (\text{E.4})$$

Por isto avalia-se, para $z \in S' \cup S''$:

$$\begin{aligned} & |\tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{P}[\phi_0]](z) - \tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{P}[\phi_1]](z)| = \\ & = E_z \left\{ e^{-\alpha T_1} \left| \inf_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi_0, \mathcal{M}[\phi_0]](z_{T_1}) - \inf_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi_1, \mathcal{M}[\phi_1]](z_{T_1}) \right| \right\} \\ & \leq E_z \left\{ \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} e^{-\alpha T_1} \left| \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi_0, \mathcal{M}[\phi_0]](z_{T_1}) - \tilde{\mathcal{R}}_t[\phi_1, \mathcal{M}[\phi_1]](z_{T_1}) \right| \right\} \quad (\text{E.5}) \\ & \leq E_z \left\{ \max \left\{ \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} e^{-\alpha T_1} \left| \mathcal{R}_t[\phi_0, \mathcal{N}[\phi_0]](z_{T_1}) - \mathcal{R}_t[\phi_1, \mathcal{N}[\phi_1]](z_{T_1}) \right|, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} e^{-\alpha T_1} \left| \tilde{\mathcal{K}}_t[\phi_0](z_{T_1}) - \tilde{\mathcal{K}}_t[\phi_1](z_{T_1}) \right| \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Através de (3.27) pode-se afirmar que o primeiro termo dentro do “max” de (E.5) é menor ou igual a $\rho \|\phi_0 - \phi_1\|$ onde $\rho < 1$. Quanto ao segundo termo, obtém-se a partir de (E.2) que:

$$E_z \left\{ \sup_{T_1 \leq t \leq t^*(z_{T_1})} e^{-\alpha T_1} \left| \tilde{\mathcal{K}}_t[\phi_0](z_{T_1}) - \tilde{\mathcal{K}}_t[\phi_1](z_{T_1}) \right| \right\} \leq E_z \{ e^{-\alpha T_2} \} \|\phi_0 - \phi_1\| \leq \rho \|\phi_0 - \phi_1\|, \quad (\text{E.6})$$

onde a última desigualdade é concluída através da prova do Lema 2.6. Portanto:

$$|\tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{P}[\phi_0]](z) - \tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{P}[\phi_1]](z)| \leq \rho \|\phi_0 - \phi_1\|,$$

e aplicando os mesmos argumentos usados na prova do Teorema 3.1 (i) mostra-se que $\tilde{\mathcal{P}}^2$ é contrativo. \square

Referências Bibliográficas

- [AK86] R. Akella and P.R. Kumar. Optimal Control of Production Rate in a Failure Prone Manufacturing System. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(2):116–126, 1986.
- [AN93] E. Altman and P. Nain. Optimal Control of M/G/1 Queue with Repeated Vacations of the Server. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(12):1766 – 1775, 1993.
- [BH90] E.K. Boukas and A. Haurie. Manufacturing Flow Control and Preventive Maintenance: A Stochastic Control Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(9):1024–1031, 1990.
- [BQG95] E.K. Boukas, Q.Zhang, and G.Yin. Robust Planning in Stochastic Manufacturing Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(6), 1995.
- [BS78] D.P. Bertsekas and S.E. Shereve. *Optimal Control: The Discrete Time Case*. Academic Press, New York, 1978.
- [BS93] J.A. Buzacott and J. George Shanthikumar. *Stochastic Models of Manufacturing Systems*. Prentice Hall, 1993.
- [BY96] E.K. Boukas and H. Yan. Optimal Control of Manufacturing Flow and Preventive Maintenance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(6):881–885, 1996.
- [BZZ94] E.K. Boukas, Q. Zhu, and Q. Zhang. Piecewise Deterministic Markov Process Model for a Flexible Manufacturing System With Preventive Maintenance. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 81:260–275, 94.
- [Cam97] F. Camilli. Approximation of Integro-Differential Equations Associated With Piecewise Deterministic Markov Process. *Optimal Control Applications & Methods*, 18:423–444, 1997.
- [CD89] O.L.V. Costa and M.H.A. Davis. Intervention Control of Piecewise Deterministic Processes. *Mathematics on Control Signals Systems*, 2:187–206, 1989.
- [CdV98] O.L.V. Costa and J.B.R. do Val. Jump LQ-Optimal Control for Discrete-time Markovian Systems With Stochastic Inputs. *Stochastic Analysis Applications*, 16(5):843–858, 1998.

- [CHL91] D.A. Carlson, A.B. Haurie, and A. Leizarowitz. *Infinite Horizon Optimal Control*. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [Cos91] O.L.V. Costa. Impulse Control of Piecewise-Deterministic Processes Via Linear Programming. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(3):371–375, 1991.
- [Dav93] M. H. A. Davis. *Markov Models and Optimization*. Chapman and Hall, London, 1993.
- [DDSV87] M.H.A. Davis, M.A.H. Dempster, S.P. Sethi, and D. Vermes. Optimal Capacity Expansion Under Uncertainty. *Adv. Applied Probability*, 19:156–176, 1987.
- [Dos86] B.T. Doshi. Queueing Systems with Vacations - A Survey. *Queueing Systems*, 1(1):29–66, 1986.
- [dVS91] J.B.R. do Val and J.L.F. Salles. Analysis And Algorithm for The Stochastic Control Problem of a Production/Storage System. In *Proceedings of 30th IEEE Conference on Decision and Control*, Brighton - England, 1991.
- [dVS93a] J.B.R. do Val and J.L.F. Salles. The Impulse Control Problem in a Production/Storage System. In *Proceeding of 12^o IFAC World Congress*, Sydney-Australia, 1993.
- [dVS93b] J.B.R. do Val and J.L.F. Salles. The Stochastic Control Of Investment In A Production/Storage System. In *Proceedings of 12^o IFAC World Congress*, Sydney-Australia, 1993.
- [dVS99] J.B.R. do Val and J.L.F. Salles. Optimal Production With Preemption To Meet Stochastic Demand. *Aceito para publicação na Automatica*, 1999.
- [Eli82] R.J. Elliott. *Stochastic Calculus and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Els85] E. A. Elsayed. *Analysis and Control of Production Systems*. Prentice Hall, 1985.
- [FR75] W. H. Fleming and R.W. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Springer-Verlag, New York, 1975.
- [FS93] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [FSS87] W.H. Fleming, S.P. Sethi, and H.M. Soner. An Optimal Stochastic Production Planning Problem With Randomly Fluctuating Demand. *SIAM J. Control and Optimization*, 5:1495–1502, 1987.
- [FZ86] A. Federgruem and P. Zipkin. An Inventory Model With Limited Production Capacity and Uncertain Demands II. The Discounted Cost Criterion. *Mathematics of Operations Research*, 11(2):208–215, 1986.
- [Gat91] D. Gatarek. On First-Order Quasi-Variational Inequalities with Integral Terms. *Applied Mathematics and Optimization*, 24:85–98, 1991.

- [Gat92] D. Gatarek. Optimality Conditions for Impulse Control of Piecewise Deterministic Process. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 5, 1992.
- [Ger94] S. B. Gershwin. *Manufacturing Systems Engineering*. Prentice Hall, 1994.
- [GG81] B. Gavish and S.C. Graves. Production/Inventory Systems With a Stochastic Production Rate Under a Continuous Review Policy. *Comp. & Operation Research*, 8:169–183, 1981.
- [GK66] B.V. Gnedenko and I.I. Kovalenko. *Introduction to The Theory of Mass Service*. Nauka, Moscow, 1966.
- [GR97] N. Gans and G.V. Ryzin. Optimal control of Multiclass, Flexible Queueing System. *Operation Research*, 45(5):677–693, 1997.
- [HC84] A.C. Hax and D. Candea. *Production and Inventory Management*. Prentice Hall, New Jersey, 1984.
- [Ho87] Y.C. Ho. Performance Evaluation and Perturbation Analysis of Discrete Event Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(7):563–572, 1987.
- [HS83] A. Hordijk and F.A. V. D. D. Shouten. Average Optimal Policies In Markov Drift Processes With Applications to a Queueing and Replacement Model. *Adv. Applied Probability*, 15:274–303, 1983.
- [HS84a] D. Heyman and M. Sobel. *Stochastic Models in Operation Research*, volume I. McGraw-Hill, New York, 1984.
- [HS84b] D. Heyman and M. Sobel. *Stochastic Models in Operation Research*, volume II. McGraw-Hill, New York, 1984.
- [Jam81] Barry R. James. *Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário*. Projeto Euclides, 1ª edition, 1981.
- [JL94] J. Jiang and S.X.C. Lou. Production Control of Manufacturing Systems: A Multiple Time Scale Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(11):2292–2297, 1994.
- [KT85] A. G. De Kok and H.C. Tijms. A Stochastic Production/Inventory System With All-Or-Nothing Demand and Service Measures. *Comm. Statist. and Stochastic Models*, 1(2):171–190, 1985.
- [Kum96] P.R. Kumar. Scheduling Manufacturing Systems: Design and Analysis. In *Conferências Plenárias do XI Congresso Brasileiro de Automática*, São Paulo (S.P.), 1996.
- [Lim93] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, 3ª edition, 1993.
- [MW95] M. Monticino and J. Weisinger. Optimal Cutoff Strategies in Capacity Expansion Problems. *Naval Research Logistic*, 42:1021–1039, 1995.

- [Par85] M. Parlar. A Stochastic Production Planning Model With a Dynamic Change Constraint. *European Journal of Operational Research*, 20:255–260, 1985.
- [Roy68] H.L. Royden. *Real Analysis*. The Macmillan Company, New York, 2^a edition, 1968.
- [SdV98a] J.L.F. Salles and J.B.R. do Val. An Algorithm for a Stochastic Production/Storage Problem With Set Up Costs. In *Anais do 12^o Congresso Brasileiro de Automática*, Uberlândia - M.G., 1998.
- [SdV98b] J.L.F. Salles and J.B.R. do Val. An Efficient Algorithm For An Intervention Control Problem In A Production/Storage System. In *Optimization Conference: Abstracts*, Coimbra - Portugal, 1998.
- [SdV99a] J. L. F. Salles and J.B.R. do Val. A Numerical Method for an Impulse Control Problem Arising In Production and Controlled Queue Models. In *Aceito no 7th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, Haifa - Israel, julho de 1999.
- [SdV99b] J. L. F. Salles and J.B.R. do Val. An Impulse Control Problema of a Production Model with Interruptions to Follow a Stochastic Demand. In *Submetido ao 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix - EUA, dezembro de 1999.
- [SdV99c] J.L.F. Salles and J.B.R. do Val. An Impulse Control Problem of a Production Model with Interruptions to Follow Stochastic Demand. *Submetido ao European Journal of Operational Research*, 1999.
- [Sha88] A. Sharifnia. Production Control of a Manufacturing System with Multiple Machine States. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7):620–625, 1988.
- [The86] J. Theghem. Control of the Service in Queueing System. *European Journal of Operational Research*, 23:141–158, 1986.
- [Tij86] H.C. Tijms. *Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach*. John Wiley & Sons, 1986.
- [Wan97] K.H. Wang. Optimal control of an M/Ek/1 Queueing System with Removable Service Station Subject to Breakdowns. *Journal of the Operational Research Society*, 48:936–942, 1997.
- [YZ97] H. Yan and Q. Zhang. A Numerical Method In Optimal Production and Setup Scheduling of Stochastic Manufacturing Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(10):1452–1455, 1997.
- [ZZ90] Yu-Sheng Zheng and Paul Zipkin. A Queueing Model To Analyse The Value Of Centralized Inventory Information. *Operations Research*, 38(2):296–307, 1990.