

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Departamento de Comunicações

## **Códigos Restritos para se Reduzir o Número de Fótons por Bit em Transmissão Óptica**

por

Rony Mark da Silva  
Eng. Eletricista (FEEC/UNICAMP, 1996)

Orientador: Prof. Dr. Helio Waldman  
DECOM – FEEC – UNICAMP

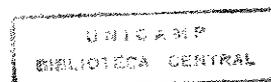
Banca Examinadora :

Prof. Dr. Helio Waldman – DECOM / FEEC / UNICAMP ( Presidente )  
Prof. Dr. Bartolomeu F. Uchôa Filho – FAPESP / PÓS DOUTORADO  
Prof. Dr. Celso de Almeida – DECOM / FEEC / UNICAMP  
Prof. Dr. Jaime Portugheis – DECOM / FEEC / UNICAMP ( Suplente )

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por <u>Rony Mark da Silva</u> e aprovada pela Comissão Julgada em <u>09/03/99</u> por <u>Helio Waldman</u> Orientador
---

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas, Março de 1999



9914890



*A meus pais.*

## *Resumo*

Este trabalho objetiva o estudo de códigos de linha aplicados à transmissão óptica visando uma economia do número de fótons por bit necessários a este tipo de comunicação. Os códigos escolhidos são aqueles com restrições  $(d,k)$  e RLL ( Runlength-limited ).

É definido genericamente um Ganho de Eficiência Fotônica, obtido quando uma codificação de linha é empregada. A seguir, são obtidas expressões para o cálculo deste ganho e para a determinação das curvas de entropia versus esparsidade, visando encontrar-se o ponto de operação de Máxima Eficiência Fotônica.

A análise das curvas conseguidas é apresentada, bem como os métodos numéricos usados na sua confecção.

Um exemplo de aplicação é desenvolvido, mostrando-se o estudo e análise do projeto completo de um código com restrição  $d = 2$ .

Como conclusão, os resultados conseguidos demonstraram que a codificação de linha na transmissão óptica é uma alternativa interessante para se reduzir a potência óptica inserida na fibra, com conseqüente diminuição dos efeitos não-lineares da mesma, tendo uma potencial aplicação em Sistemas WDM ( Wavelength Division Multiplexing ).

## *Abstract*

The present work aims at the study of line codes for Optical Transmission leading to an economy in the number of photons per bit required by this kind of communication. The codes chosen are those with  $(d,k)$  and RLL ( Runlength-limited ) constraints.

A Photonic Efficiency Gain is generically defined, which takes place when a line coding is used. Next, the mathematical expressions to calculate that gain and to allow the construction of graphics of Entropy versus sparseness are obtained, so that a Maximum Photonic Efficiency operating point can be determined.

Then, a graphical analysis is presented, as well as the numerical methods used to obtain those graphics.

An application example is developed, showing the study and analysis of a complete project of a code with the  $d = 2$  constraint.

As a conclusion, the results obtained throughout the work showed that line coding in optical transmission is an interesting alternative to reduce the optical power inside the fiber, decreasing its non-linear effects, with a potential practical application in WDM Systems.

---

# *Agradecimentos*

Nenhum trabalho é feito por uma única pessoa. De forma direta ou indireta, sempre recebemos sugestões, críticas, ensinamentos e força para terminar o que supomos estar fazendo sozinhos.

Assim, gostaria de começar agradecendo à ajuda de meu orientador, o Prof. Dr. Helio Waldman. Fundamental em sua solicitude e paciência, soube guiar-me pelos caminhos do mundo acadêmico, ajudando-me a descobri-lo e a participar dele através de várias atividades, resultando, finalmente, no trabalho ora apresentado. Sua experiência e atenção fizeram com que esta caminhada fosse, se não plenamente suave – pois todo caminhar exige esforço, pelo menos agradável, sendo algo para se relembrar com prazer no futuro.

Agradeço também à minha família, que durante todo este tempo sempre me apoiou, respeitando e valorizando minha opção em continuar estudando após minha Graduação. Em particular, agradeço a meu irmão Alex Sandro da Silva, que partilhou comigo a convivência destes dois últimos anos, tendo de enfrentar bem de perto minhas inquietações e impaciências durante esse período.

À CAPES pelo financiamento deste trabalho.

Os estudantes da pós-graduação da FEEC/UNICAMP, em particular Paula Renata C. Gomes, César Kyn, Ramiro R. Costa e Luís Augusto de Sá Pessoa, também contribuíram direta ou indiretamente para a finalização deste trabalho, compartilhando experiências, dúvidas e saberes acadêmicos.

Meu muito obrigado a Carlos Eduardo C. Barion pela sua ajuda na edição deste trabalho.

Finalmente e de forma muito especial, agradeço ao nosso Pai Celeste, Deus, pela sua constante presença em todos os momentos de minha vida, guiando, inspirando e protegendo meus passos, tornando-os mais firmes a cada dia.

# Índice

<i>Resumo</i>	1
<i>Abstract</i>	1
<i>Agradecimentos</i>	2
<i>Índice</i>	3
<i>Prefácio</i>	4
<i>Capítulo I - Introdução</i>	5
<i>Capítulo II - Sistemas Ópticos</i>	9
II.1 – Enlaces Ópticos Limitados por Perdas	11
<i>Capítulo III - Codificação de Linha em Enlaces Ópticos</i>	15
III.1 – Ganho de Codificação e Eficiência Fotônica	15
III.2 – Restrições em Códigos de Linha	18
<i>Capítulo IV - Seqüências <math>d, (d,k)</math> e RLL</i>	21
IV.1 – Códigos com Restrição $d$	21
IV.2 – Códigos com Restrição $(d,k)$	29
IV.3 – Seqüências RLL ( Runlength Limited )	39
<i>Capítulo V - Metodologia de Cálculo Utilizada</i>	46
V.1 – Códigos com Restrição $(d,k)$	47
V.2 – Seqüências RLL	50
<i>Capítulo VI - Exemplo de Aplicação</i>	53
VI.1 – Projeto de um Código de Bloco com restrição $d = 2$	54
<i>Capítulo VII - Conclusão</i>	66
<i>Referências</i>	70
<i>Apêndice</i>	72
A.1 - Fórmula de Stirling	72
A.2 – Trabalho Publicado	77

## *Prefácio*

Como se me apresentaria o mundo se eu pudesse viajar em um raio de luz ?

( A. Einstein )

Quer ficar calmo ? Respira suavemente diante da chama leve que faz sossegadamente seu trabalho de luz.

( Bachelard )

E depois de termos construído um altar para a Luz Invisível, poderemos sobre ele colocar as pequenas luzes para as quais nossos olhos foram feitos.

( T. S. Eliot )

O amor prefere a luz das velas. Talvez porque seja isto tudo o que desejamos de uma pessoa amada : que ela seja uma luz suave que nos ajude a suportar o terror da noite. Sob a luz do amor que ilumina modesta e pacientemente, o escuro já não assusta tanto.

( Rubem Alves )

*De Einstein a Rubem Alves,*

*Da Ciência à Filosofia,*

*Da Tecnologia à Poesia,*

*O mesmo fascínio,*

*O grande mistério,*

*O nosso destino :*

*A LUZ.*

## ***Capítulo I - Introdução***

O trabalho desenvolvido nas últimas décadas na área dos sistemas ópticos possibilitou uma grande disponibilidade de faixa nas fibras da ordem de dezenas de TeraHertz. A largura de faixa em uma única fibra é de 25.000 GHz ( ~ 200nm ), em cada uma das janelas ópticas : 0.85 $\mu$ m, 1.3 $\mu$ m e 1.5 $\mu$ m. Teoricamente, isto traz uma enorme capacidade para se trafegar quaisquer tipos de aplicações na fibra, até então inviáveis de serem implementadas através dos outros meios de comunicação.

Contudo, quando a utilização de amplificadores ópticos é necessária nos enlaces da rede, esta capacidade é reduzida consideravelmente de 25 THz para 5 THz, para o caso dos Amplificadores a Fibra Dopada com Érbio (AFDE).

Apesar da limitação de faixa imposta por estes dispositivos, este valor disponível – 5THz – é muito maior do que a velocidade com que operam os circuitos eletrônicos mais rápidos, trazendo agora uma limitação não mais do ponto de vista óptico, mas eletrônico.

Devido às limitações da Eletrônica e ao crescimento da demanda hoje em dia por serviços de faixa larga, a busca de soluções que atendessem a estas necessidades levou ao desenvolvimento dos sistemas WDM – Wavelength Division Multiplexing, ou Multiplexação por Comprimento de onda.

Nestes sistemas, várias portadoras ópticas, com diferentes comprimentos de onda, compartilham a mesma fibra, sendo cada uma delas modulada eletronicamente a uma taxa que varia tipicamente de 2.5 a 10 Gbps. Desta maneira, utiliza-se a faixa disponível do sistema de uma forma mais eficiente, pois um grande volume de informação pode ser transmitido através do agrupamento dos vários canais ópticos, sem se ultrapassar, contudo, os limites impostos pelos componentes eletrônicos. Além disso, este tipo de transmissão pode aproveitar a malha de fibras já instalada, não necessitando da colocação de novos cabos ópticos para se aumentar o número de canais destes enlaces.

Entretanto, uma potência excessiva de luz dentro da fibra, resultante da soma das potências individuais de cada um dos canais ópticos, pode levar a um aumento dos efeitos não-lineares da mesma (Espalhamentos de Raman e Brillouin Estimulados, Mistura de quatro fótons,  $T_c$ ), cujas conseqüências são sentidas através do enfraquecimento do sinal de um canal propagante e pelo aumento da interferência entre canais adjacentes (crosstalk). Estes efeitos limitam o número máximo de canais suportado pela fibra.

Além disso, grande parte dos fótons são fornecidos por amplificadores ópticos, que são limitados essencialmente pela potência média. Portanto, o sistema passa a ser limitado pela potência média, e não mais pela potência de pico, o que ocorre quando a luz é totalmente produzida por fontes primárias (Lasers).

Por estas razões, a pesquisa de estratégias que resultem numa diminuição da potência média de cada canal WDM, sem degradar o desempenho, tem sua justificativa, pois, ao diminuir-se a potência média de um canal, um número maior de canais poderá ser alocado antes de serem atingidos os limites de potência dados pelos amplificadores ópticos e pelos efeitos não-lineares da fibra.

Esta é a motivação do presente trabalho, onde são estudadas três classes importantes de códigos de linha visando à diminuição da potência injetada no enlace óptico : códigos com restrição  $d$ ,  $(d,k)$  e os de restrição RLL ( Runlength Limited ), os quais serão detalhados oportunamente.

No Capítulo II é feita uma breve explanação a respeito dos tipos de modulação utilizadas em comunicações ópticas, ressaltando-se as vantagens da tecnologia WDM. Segue-se com uma análise matemática do desempenho de enlaces opticamente amplificados e a comprovação, através de equações, da possibilidade de diminuir-se a potência média necessária à transmissão nestes enlaces através da introdução de algum tipo de codificação, definindo-se um Ganho de Codificação, que quantifica a economia de potência gerada quando da utilização de algum código de linha na transmissão óptica.

O Capítulo III estuda propriamente a codificação de linha proposta para os enlaces ópticos. O conceito de Ganho de Codificação é analisado agora sob um outro aspecto, o de significar uma diminuição do número de fótons por bit necessário à transmissão em comparação ao caso não-codificado, constituindo-se o que este trabalho chamou de Ganho de Eficiência Fotônica. Mais adiante, é introduzido o conceito de Entropia de um código, necessário ao cálculo do ganho mencionado, que será desenvolvido matematicamente nos capítulos posteriores. O capítulo termina com a apresentação e explicação conceitual dos tipos de restrições impostas pelos códigos de linha que foram escolhidos para estudo.

A formulação matemática do problema, visando obter expressões fechadas para o cálculo da Entropia dos códigos em questão e posterior determinação dos Ganhos de Eficiência Fotônica, é apresentada de forma aprofundada no Capítulo IV. É também feita a análise dos resultados obtidos, inclusive determinando-se a penalidade de faixa ( aumento da largura de faixa óptica necessária à transmissão ) resultante do processo de codificação, propondo-se ainda algumas estratégias para diminuí-la.

A obtenção dos resultados mostrados graficamente no Capítulo IV foi feita através do cálculo das expressões de Entropia para cada tipo de restrição. Esse cálculo demonstrou-se, em vários casos, não ser tão trivial, devido a algumas dessas expressões terem de ser maximizadas. O procedimento adotado para a solução numérica dessas

expressões é apresentado no Capítulo V, que mostra também as limitações e dificuldades encontradas ao longo desse processo.

Devido à abordagem do problema e sua formulação matemática terem sido essencialmente paramétricas ao longo dos capítulos descritos até aqui, decidiu-se pela apresentação de um exemplo de aplicação, com o objetivo de ampliar o campo de visão do leitor, mostrando como é o processo de elaboração de um código. Isto é feito no Capítulo VI, sendo apresentado o projeto completo de um código simples que obedece à restrição  $d = 2$ , com posterior análise das características deste ao final do projeto.

Finalmente, o Capítulo VII traz as conclusões do trabalho apresentado.

## *Capítulo II - Sistemas Ópticos*

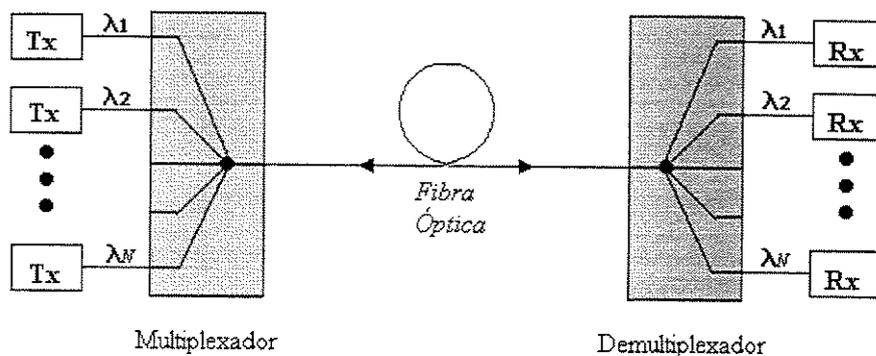
Existem, basicamente, duas maneiras de se transmitir múltiplos canais em enlaces ópticos : a Multiplexação por Divisão de Tempo – TDM (Time Division Multiplexing) e a Multiplexação por Divisão em Frequência – FDM (Frequency Division Multiplexing).

TDM é utilizado dentro de um único canal óptico, onde uma portadora óptica é modulada para carregar dados que correspondem a vários canais TDM agrupados. Este tipo de multiplexação trabalha muito bem a baixas e médias taxas, sendo, contudo, de difícil implementação para taxas de transmissão acima de 10 Gbps, pelas conseqüentes limitações de velocidade dos componentes eletrônicos utilizados, principalmente dos Lasers semicondutores.

FDM pode ser feito tanto no domínio elétrico, quanto no óptico. Neste último caso recebe o nome de WDM – Wavelength Division Multiplexing.

No sistema FDM elétrico, os vários canais são criados modulando-se várias portadoras elétricas, que são combinadas para formar o sinal elétrico composto aplicado ao Laser e enviado através da fibra. Este tipo de modulação é bastante usado na transmissão e distribuição de CATV ( Cable Television ).

O esquema WDM consiste em se transmitir ao longo da fibra várias portadoras ópticas, cada uma delas sendo modulada por sinais elétricos independentes, que por sua vez podem estar utilizando técnicas TDM ou FDM no domínio elétrico. Esta técnica é ilustrada pela figura abaixo.



**Figura 2-1** – Enlace Óptico com N Transmissores e N Receptores utilizando Multiplexação por Comprimento de Onda – WDM.

Desta forma, a transmissão utilizando WDM se constitui a melhor técnica para se explorar a enorme disponibilidade de faixa oferecida pela fibra, podendo transmitir dezenas, centenas ou até milhares de canais conjuntamente, dependendo do espaçamento entre as diversas portadoras ópticas, que deve ser suficiente para se evitar interferências entre canais adjacentes.

Contudo, o fato de serem colocadas dentro da fibra várias portadoras ópticas traz algumas limitações, como mencionado no capítulo anterior, pela degradação da qualidade dos sinais trafegantes, devido ao aparecimento dos efeitos não-lineares da fibra.

Portanto, qualquer esforço no sentido de diminuir-se a potência média de cada portadora óptica acarretará um aumento do número máximo de canais permitidos e, conseqüentemente, um melhor uso da capacidade oferecida pela fibra óptica.

A partir dos itens seguintes será iniciada a apresentação e análise de uma proposta para se atingir tal objetivo, utilizando-se técnicas de codificação de linha.

A discussão será construída para um único canal óptico de um dado enlace, visando à diminuição de sua potência média de transmissão. Contudo, deve-se ter em mente que o estudo e resultados obtidos para este caso particular, podem ser estendidos a qualquer um dos canais ópticos que compõem um sistema WDM e ainda, que as melhorias obtidas para um único canal em termos de potência serão sentidas de uma forma ampliada no sistema WDM como um todo, seja na possibilidade de alocação de um número maior de canais ópticos, seja na obtenção de uma relação sinal-ruído (e taxa de erro de bit) mais robusta.

## II.1 – Enlaces Ópticos Limitados por Perdas

A análise de desempenho de enlaces opticamente amplificadas é bem conhecida e desenvolvida na literatura desta área. Na referência [2, Capítulo XI], esta análise é feita para o caso de uma transmissão óptica não-codificada. No presente trabalho, o modelo desenvolvido em [2] será ampliado e a discussão estendida a enlaces ópticos que utilizem alguma forma de codificação, tendo-se, ao final, uma forma analítica de se medir quantitativamente a melhoria introduzida por este tipo de estratégia no desempenho do sistema.

Para o enlace óptico dado na figura 2-2, seja  $Z$  o comprimento total do enlace e  $K$  o número total de amplificadores da cascata, admitindo-se os mesmos igualmente espaçados. Portanto,  $L = Z / K$  representa a distância entre dois amplificadores consecutivos na cascata.

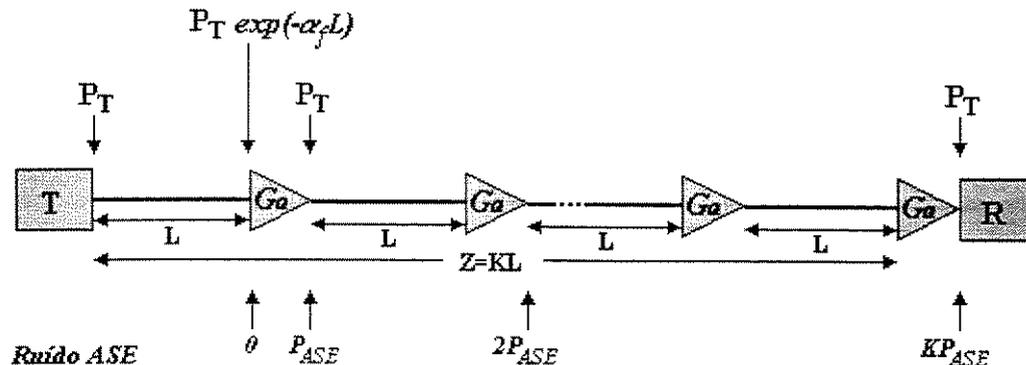


Figura 2-2 – Enlace Óptico com vários amplificadores igualmente espaçados por  $L$ .

Seja ainda  $Ga$ , o ganho de cada amplificador, assumindo que a colocação dos mesmos é feita de tal maneira que  $Ga$  compense a perda de potência no pedaço de fibra imediatamente anterior a cada um deles. Nesta análise, é considerado que o efeito do Ruído de Emissão Espontânea Amplificado – ASE (Amplified Spontaneous Emission) –, acumulado ao longo do enlace, não provoca a saturação dos últimos amplificadores.

Se  $\alpha_f$  é a atenuação da fibra por unidade de comprimento, pode-se escrever :

$$Ga = \exp(\alpha_f L) \quad (2.1)$$

Encontrando-se :

$$L = \frac{1}{\alpha_f} \ln Ga \quad (2.2)$$

Dado que  $L = Z / K$ , obtém-se

$$K = \frac{\alpha_f Z}{\ln Ga} \quad (2.3)$$

Cada amplificador gera um Ruído de ASE, que no domínio óptico é Gaussiano Aditivo, com potência dada por : [2, Capítulo VI]

$$P_{ASE} = N_{sp} h f_c (Ga - 1) B_o \quad (2.4)$$

onde : -  $N_{sp}$  é o fator de emissão espontânea;

-  $h f_c$  é a energia do fóton;

-  $B_o$  é a largura de faixa óptica total, centrada na frequência da portadora óptica.

De forma a atender ao critério de Nyquist, evitando a interferência intersimbólica, o valor de  $B_o$  para o caso não-codificado deve ser, no mínimo :

$$B_{o_{NC}} = \left( \frac{1}{T_{NC}} \right) = B \quad (2.5)$$

onde : -  $B$  é a taxa de bits/segundo transmitida;

-  $T_{NC}$  é a duração do símbolo, para a transmissão não-codificada.

Ao introduzir-se uma codificação no sinal, supondo  $R$  a taxa do código, estarão sendo transmitidos  $R$  bits de informação para cada símbolo enviado. Para que seja mantida a mesma quantidade de informação transmitida, ou seja, um número de bits de

informação por unidade de tempo (bits/segundo) igual em ambos os casos codificado e não-codificado, deve-se fazer :

$$T_C = T_{NC}R \quad (2.6)$$

onde : -  $T_C$  é a duração do símbolo para a transmissão codificada.

Neste caso, a faixa mínima  $B_{OC}$  necessária será :

$$B_{OC} = \frac{1}{T_C} = \frac{1}{T_{NC}R} \quad ,$$

$$B_{OC} = \frac{B}{R} \quad (2.7)$$

onde : -  $B$  é a taxa de bits/segundo;

-  $R$  é a taxa do código, em bits/símbolo.

Para sistemas ópticos que utilizam Modulação por Intensidade, os dígitos binários '1'(marca) e '0' são transmitidos através da emissão de um número aleatório de fótons com média  $N_1$  e  $N_0$ , respectivamente, valores esses determinados essencialmente pela tecnologia de detecção e probabilidade de erro requerida para o sistema [2, Capítulo VIII].

Usualmente, nenhuma energia é necessária para a transmissão do zero binário, sendo este assinalado pela ausência de fótons, ou seja,  $N_0 = 0$ .

Sendo  $p$  a probabilidade de um símbolo binário transmitido ser uma marca e considerando-se que o zero binário é a ausência de fótons, pode-se obter a potência média de transmissão,  $P_T$ , da forma :

$$P_T = pP \quad (2.8)$$

onde : -  $P$  é a potência óptica de transmissão da marca.

Relembrando a figura 2-2, se  $P_T$  é a potência média transmitida, este será o valor da potência que chega ao Receptor e também o valor presente em todas as saídas dos amplificadores, valor este que se deseja manter tão baixo quanto possível, para um dado desempenho, com o fim de minimizar as distorções provenientes das características não-lineares da fibra.

Ainda com referência à figura 2-2, percebe-se que a potência total do ruído ASE recebida -  $P_{ASE(R)}$  é dada por [2, Capítulo XI] :

$$P_{ASE(R)} = KP_{ASE} \quad (2.9)$$

onde : -  $P_{ASE}$  é como definido em (2.4).

Com isso, pode-se escrever a relação sinal-ruído –  $SNR$  – para a detecção na entrada do receptor :

$$SNR = \frac{P}{P_{ASE(R)}} \quad (2.10)$$

Utilizando as eqs. (2.3),(2.4),(2.8) e (2.9), chega-se a :

$$SNR = \frac{P_T}{p \left( \frac{\alpha_f Z}{\ln Ga} \right) N_{sp} (Ga - 1) h f_c B_o} \quad (2.11)$$

Introduzindo o valor mínimo de  $B_o$ , calculado em (2.7) para o caso de sinais codificados obtém-se :

$$(SNR)_{MAX} = \left( \frac{2P_T}{\alpha_f Z N_{sp} h f_c B} \right) \left( \frac{\ln Ga}{Ga - 1} \right) \left( \frac{R}{2p} \right) \quad (2.12)$$

O fator mais à esquerda corresponde a parâmetros intrínsecos ao sistema, como atenuação, tamanho do enlace, taxa de bits, amplificadores e potência média transmitida por canal óptico ( a ser minimizada em sistemas WDM, como explicado anteriormente ).

O fator que aparece ao centro é o ganho de espaçamento do amplificador. Neste termo, nota-se que o denominador varia muito mais rapidamente que o numerador, o que leva à conclusão de que deve-se operar com valores de  $Ga$  pequenos, resultando, portanto, num valor de  $K$  grande – vide equação (2.3). Isto mostra que, para este tipo de enlace, é preferível ter-se muitos amplificadores de baixos ganhos, mais próximos uns dos outros, ao longo do enlace, do que poucos com ganho elevado.

O último fator será aqui chamado Ganho de Codificação, e corresponde à melhoria ou degradação do desempenho do sistema ao introduzir-se algum tipo de codificação. Este é o fator que se deseja maximizar, pois, fixada uma Relação Sinal-Ruído necessária para uma dada taxa de erro do sistema, pode-se diminuir  $P_T$  através da maximização do Ganho de Codificação, como é facilmente verificado por inspeção em (2.12). Uma abordagem mais completa sobre o Ganho de Codificação será dada no capítulo a seguir.

# Capítulo III - Codificação de Linha em Enlaces Ópticos

## III.1 – Ganho de Codificação e Eficiência Fotônica

Será analisado agora o conceito de Ganho de Codificação, já mencionado no Capítulo II. Para isso, inicialmente, devem ser obtidas algumas expressões importantes relacionadas à transmissão digital no canal óptico.

O número de fótons por bit, chamado aqui de Eficiência Fotônica, a ser transmitido num canal óptico pode ser escrito da forma :

$$\frac{\# \text{ fótons}}{\text{bit}} = \frac{\# \text{ fótons}}{\text{símbolo}} \times \frac{\# \text{ símbolos}}{\text{bit}} \quad (3.1)$$

Pode-se, ainda, escrever :

$$\frac{\# \text{ fótons}}{\text{símbolo}} = \frac{\# \text{ fótons}}{\text{marca}} \times p + \frac{\# \text{ fótons}}{\text{zero}} \times (1 - p)$$

onde : -  $p$  é a probabilidade de um símbolo binário ser uma marca.

Supondo-se que o zero binário é indicado pela ausência de fótons, chega-se a :

$$\frac{\# \text{ fótons}}{\text{símbolo}} = \frac{\# \text{ fótons}}{\text{marca}} \times p \quad (3.2)$$

Chamando  $N$  o número de fótons por bit,  $N_I$  o número de fótons por marca, e  $R$  a taxa de um código de linha qualquer ( #bits/símbolo ) utilizado na transmissão, chega-se à seguinte expressão, com base em (3.1) e (3.2) :

$$N = \frac{N_I p}{R}, \quad (3.3)$$

O parâmetro  $N_I$  é essencialmente determinado pela tecnologia de detecção e pela probabilidade de erro requerida para o sistema, sendo, portanto, um dado desta equação. Assim, a eq. (3.3) sugere que o número de fótons por bit pode ser minimizado ( minimização da potência média transmitida ) através da maximização da quantidade (  $R/p$  ), tal como mostrado em (2.12) para uma situação mais específica.

Na ausência de codificação de linha,  $R = 1$  bit/símbolo e  $p = 1/2$ , de tal maneira que pode ser definido o Ganho de Codificação como sendo :

$$\Gamma = \frac{R}{2p} \leq \frac{H(p)}{2p} \quad (3.4)$$

onde  $H(.)$  é a Função Entropia do código.

A expressão (3.4) é a mesma presente no termo mais à direita de (2.12), porém, pode-se ampliar agora o conceito de Ganho de Codificação, sendo entendido como um aumento da Eficiência Fotônica ( #fótons/bit ). Os termos Ganho de Codificação e Ganho de Eficiência Fotônica serão usados como sinônimos neste trabalho, sempre referindo-se, indistintamente, à quantidade obtida através da equação (3.4).

A Entropia de um código, ou de uma fonte qualquer de informação, está associada ao conteúdo de informação médio por símbolo transmitido, numa seqüência longa, idealmente infinita.

Para o caso de sistemas irrestritos, a Entropia  $H(.)$  vale [1, Capítulo III] :

$$H(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) \quad (3.5)$$

A figura 3-1 mostra o gráfico da equação anterior.

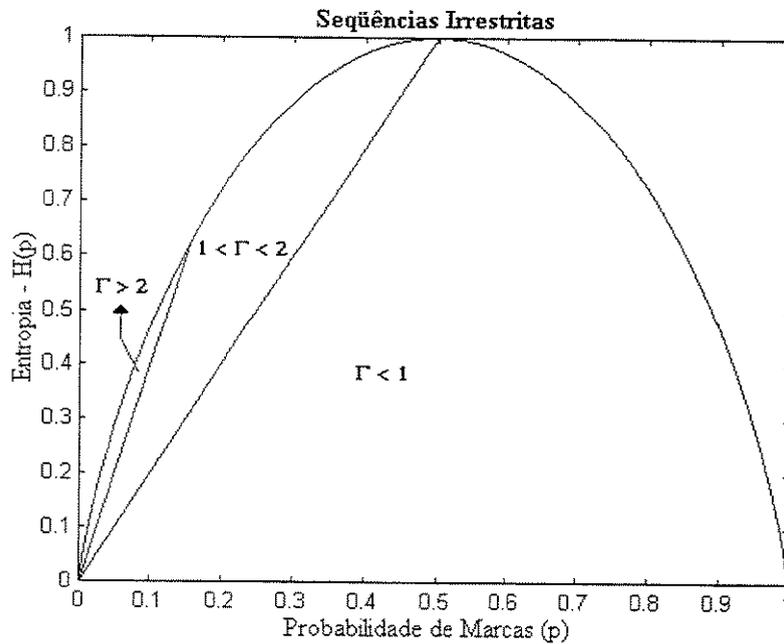


Figura 3-1 – Curva de Entropia para Sistemas Irrestritos.

O objetivo da codificação de canal é realizar uma transmissão com confiabilidade, a despeito das limitações impostas pelo canal, da forma mais eficiente possível, tentando-se atingir a Capacidade do mesmo. Entende-se por Capacidade de Canal, o ponto de máximo na curva de Entropia, para o qual se tem o maior valor médio de informação por símbolo transmitido, para um dado canal. Um estudo detalhado sobre o assunto pode ser encontrado em [6].

Este trabalho não busca estudar os códigos de linha de forma a se obter a sua operação no ponto máximo da curva de Entropia, ponto onde a capacidade do código é atingida. A ênfase será dada na maximização do Ganho de Codificação, podendo significar a operação em pontos da curva de Entropia abaixo da capacidade. Ou seja, objetiva-se aqui, não a maximização do número de bits por símbolo, mas sim a minimização do número de fótons por bit e, portanto, da potência média necessária para a transmissão nos enlaces ópticos, possibilidade observada através das equações (3.3),(3.4) e (2.12).

Voltando novamente à figura 3-1, é mostrada a região do plano  $(R, p)$  da curva de Entropia, na qual o ganho  $\Gamma$  está entre os valores 1 e 2. Nota-se que para se atingir um

ganho maior que 2, um código de linha deve operar bem próximo à curva de Entropia, naquela região do plano.

Nesta figura, à medida em que se caminha para a origem, aumentando-se a esparsidade do código, o Ganho de Codificação cresce ilimitadamente, o que é previsível, visto que códigos mais esparsos tem potência média menor.

Contudo, ao mesmo tempo em que isto acontece, também há uma contínua diminuição na quantidade de informação transmitida por símbolo ( a taxa do código diminui continuamente ), o que resulta num aumento de igual ordem da faixa requerida para a transmissão, de forma a se manter a mesma taxa de informação por unidade de tempo anterior. No limite, quando  $p$  tende a zero, seria preciso uma faixa infinita, o que é impraticável.

Portanto, a adoção de restrições que diminuam ou limitem a faixa necessária para a transmissão óptica, quando se introduz esparsidade na informação transmitida, torna-se necessária.

### III.2 – Restrições em Códigos de Linha

Três classes importantes de restrições são estudadas neste trabalho, constituídas pelas seqüências  $d$ ,  $(d,k)$  e RLL (Runlength Limited).

As seqüências  $(d,k)$  correspondem àquelas obtidas através das seguintes restrições:

- a) Restrição  $d$  – duas marcas (1's) quaisquer devem ser espaçadas por um número mínimo de  $d$  zeros consecutivos;
- b) Restrição  $k$  – o número de zeros consecutivos não pode ser maior que  $k$ .

Como exemplo, um código que obedece à restrição  $(d,k) = (1,3)$  geraria seqüências formadas pela concatenação das seguintes palavras :

**10            100            1000**

Este tipo de restrição introduz uma esparsidade no sinal transmitido, o que é desejável. Contudo, será visto posteriormente que o preço pago será um aumento da faixa necessária para se trafegar estes sinais na fibra.

As seqüências com restrição  $d$  constituem-se um caso particular das seqüências  $(d,k)$ , para o qual o valor do parâmetro  $k$  é infinito.

As seqüências RLL são também caracterizadas por 2 parâmetros:  $(d+1)$  e  $(k+1)$ , que estipulam um comprimento mínimo e máximo para símbolos iguais transmitidos consecutivamente.

Um caso particular de seqüências RLL são as chamadas RLL simétricas. Para este tipo, as restrições são iguais tanto para 1's consecutivos, quanto para 0's consecutivos, da seguinte maneira :

- a) Restrição  $(d+1)$  – o comprimento de 0's ou 1's transmitidos consecutivamente deve ser de, no mínimo,  $(d+1)$ ;
- b) Restrição  $(k+1)$  – o comprimento de 0's ou 1's transmitidos consecutivamente deve ser de, no máximo,  $(k+1)$ .

Um código com restrição RLL simétrica  $(d+1, k+1) = (1, 2)$ , poderia possuir a seguinte seqüência transmitida :

**...100101100110110100...**

Pode-se verificar [1, Capítulo V] que seqüências RLL  $(d+1, k+1)$  – RLL simétricas – e seqüências  $(d, k)$ , supondo-se os mesmos parâmetros  $d$  e  $k$  para ambas, têm capacidades equivalentes, podendo ser obtidas umas a partir das outras, como será mostrado no Capítulo IV.

O caso mais geral de seqüências RLL corresponde aos códigos obtidos através de restrições assimétricas, do tipo RLL  $[(d_0+1, k_0+1), (d_1+1, k_1+1)]$ , cujas regras de formação são as seguintes :

- a) Restrição  $(d_0+1, k_0+1)$  : o comprimento de 0's transmitidos consecutivamente deve ser de, no mínimo  $(d_0+1)$  e no máximo  $(k_0+1)$ ;
- b) Restrição  $(d_1+1, k_1+1)$  : o comprimento de 1's transmitidos consecutivamente deve ser de, no mínimo  $(d_1+1)$  e no máximo  $(k_1+1)$ ;

Em todos os casos mostrados, pode-se dizer que o parâmetro  $d$  controla a frequência máxima de transições e, portanto, relaciona-se com a interferência intersimbólica e a faixa requerida para a transmissão no canal.

O parâmetro  $k$  está relacionado a questões de sincronização entre transmissor e receptor, pois, para valores muito elevados deste parâmetro, pode haver imprecisão na detecção e com isso perda do sincronismo.

Por isso, a escolha pelo estudo dos códigos com restrições  $d$ ,  $(d,k)$  e RLL foi feita com base nas características resultantes dessas restrições, sugerindo serem códigos de grande aplicabilidade. Será iniciado agora um estudo detalhado destas seqüências.

## Capítulo IV - Seqüências $d,(d,k)$ e RLL

### IV.1 – Códigos com Restrição $d$

As seqüências  $d$  implementam como restrição a existência de no mínimo ' $d$ ' zeros entre duas marcas consecutivas. Assim sendo, este código pode ser construído através da livre concatenação das palavras “.0.” e “.10 <sup>$d$</sup> .”, onde a notação “0 <sup>$d$</sup> ” indica uma seqüência de  $d$  zeros consecutivos.

Supondo uma seqüência de  $N$  dígitos com probabilidade de marcas igual  $p$ ,  $W$  palavras possíveis em  $N$  dígitos, com  $W_1$  palavras “.10 <sup>$d$</sup> .” e  $W_2$  palavras “.0.”, pode-se escrever :

$$W = W_1 + W_2 \quad (4.1)$$

$$N = (d + 1)W_1 + W_2 \quad (4.2)$$

O número de combinações de seqüências possíveis,  $C_d(N)$ , em  $N$  dígitos, será dado por :

$$C_d(N) = \binom{W}{W1} = \binom{W1 + N - (d+1)W1}{W1} = \binom{N - dW1}{W1} \quad (4.3)$$

Seja  $f(W1) = \binom{W}{W1} = C_d(N)$ , então, pela desigualdade de Jensen para funções côncavas [14, Capítulo II], tem-se :

$$E\{f(W1)\} \leq f(E\{W1\}) , \quad \text{onde } E\{X\} \text{ significa Esperança de } X.$$

Mas  $E\{W1\} = pN$ , então :

$$E\{f(W1)\} \leq f(pN)$$

$$E\{f(W1)\} \leq \binom{N - dpN}{pN}$$

Portanto, o valor máximo de  $C_d(N)$ , será dado por :

$$C_d(N) = \binom{N - dpN}{pN} = \frac{(N - dpN)!}{(pN)! [N - (d+1)pN]!} \quad (4.4)$$

A Entropia  $H(p)$  é também dada por [1, Capítulo IV] :

$$H(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log_2 C(N)}{N} \quad (4.5)$$

onde : -  $N$  é o tamanho (em dígitos) da seqüência

-  $C(N)$  é o número de combinações possíveis em  $N$  dígitos

Para o caso em questão  $C(N) = C_d(N)$ .

Para se calcular o limite dado por (4.5), pode-se usar a fórmula de Stirling – cuja dedução é dada no Apêndice A.1 deste trabalho – utilizada para se calcular  $n!$ , dada por :

$$n! = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} n^n [\exp(-n)] (1 + \theta_n) \quad (4.6)$$

para a qual o termo  $\theta_n$  se aproxima de zero quando  $n$  tende a infinito.

Chamando em (4.4), por comodidade de notação, os seguintes termos :

$$A(N) = N - dpN \quad (4.7)$$

$$B(N) = pN \quad (4.8)$$

$$C(N) = N - (d+1)pN \quad (4.9)$$

e aplicando-se a fórmula de Stirling, a equação (4.5) pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned}
 H_d(p) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log_2 \frac{A(N)!}{B(N)!C(N)!} = \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log_2 \left\{ \left[ \frac{A(N)^{A(N)}}{B(N)^{B(N)} C(N)^{C(N)}} \right] \left[ \exp[-A(N) + B(N) + C(N)] \right] \right. \\
 &\quad \left. \left[ \sqrt{2\pi \frac{B(N)C(N)}{A(N)}} \right] \left[ \frac{(1 + \theta_{A(N)})}{(1 + \theta_{B(N)})(1 + \theta_{C(N)})} \right] \right\} \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Alguns termos de (4.10) podem ser simplificados, da seguinte maneira :

$$\bullet \exp[-A(N) + B(N) + C(N)] = 1 \quad (4.11)$$

$$\bullet \sqrt{2\pi \frac{B(N)C(N)}{A(N)}} = \sqrt{NK} \quad (4.12)$$

onde : -  $K = \sqrt{2\pi \frac{p[1 - (d+1)p]}{(1-dp)}}$  é um número real e finito, para  $p \in [0, \frac{1}{d+1}]$ ,

que é o intervalo válido para  $p$  nas seqüências com restrição  $d$ .

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.10), obtém-se :

$$\begin{aligned}
 H_d(p) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ \log_2 \left[ \frac{A(N)^{A(N)}}{B(N)^{B(N)} C(N)^{C(N)}} \right] \right\} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\log_2 \sqrt{NK}}{N} \right\} + \\
 &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ \log_2 (1 + \theta_{A(N)}) \right\} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ \log_2 (1 + \theta_{B(N)}) \right\} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ \log_2 (1 + \theta_{C(N)}) \right\} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

A segunda parcela da soma anterior será igual a zero, devido ao numerador crescer mais lentamente que o denominador.

As três últimas parcelas de (4.13) podem ser calculadas utilizando-se algumas propriedades de limite.

De forma genérica, define-se o seguinte limite – que será utilizado em (4.13) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ \log_2 (1 + \theta_N) \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} f(N)g(N) \quad (4.14)$$

para :

- $f(N) = \left(\frac{1}{N}\right)$ ;
- $g(N) = \log_2(1 + \theta_N)$ .

**Teorema 1:** Sejam  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_2$ , onde  $L_1$  e  $L_2$  são números reais, ou seja, os limites das referidas funções existem e são finitos, então :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L_1 L_2 \quad (4.15)$$

Para que se possa aplicar o *Teorema 1* à equação (4.14) é preciso que os limites de  $f$  e  $g$  existam e sejam finitos. É necessário, portanto, calculá-los.

Tem-se que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 0 \quad (4.16)$$

Continuando :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} g[h(N)] \quad (4.17)$$

para :

$$\bullet \quad h(N) = (1 + \theta_N) \quad (4.18)$$

$$\bullet \quad g(N) = \log_2[h(N)]. \quad (4.19)$$

Para resolver o limite em (4.17), recorre-se ao teorema seguinte.

**Teorema 2:** Sejam  $g$  e  $h$ , duas funções tais que,  $\text{Im}(h) \subset D(g)$  – onde  $D(g)$  e  $\text{Im}(h)$  são, respectivamente, o domínio da função  $g$  e a imagem da função  $h$ . Se  $\lim_{x \rightarrow b} h(x) = a$  e  $g$  é contínua em  $a$ , então,

$$\lim_{x \rightarrow b} g[h(x)] = g[\lim_{x \rightarrow b} h(x)] \quad (4.20)$$

As funções  $g$  e  $h$  definidas em (4.18) e (4.19) satisfazem às condições do *Teorema 2* e, com isso, é possível aplicá-lo à expressão (4.17), da forma :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} g(N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} g[h(N)] = g[\lim_{N \rightarrow \infty} h(N)] \\ &= g[\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \theta_N)] = \log_2[\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \theta_N)] \end{aligned}$$

Mas:  $\lim_{N \rightarrow \infty} \theta_N = 0$ , do desenvolvimento da fórmula de Stirling (ver Apêndice A.1).

E portanto :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g(N) = 0 \tag{4.21}$$

As equações (4.21) e (4.16) satisfazem às condições do Teorema 1 e permitem a aplicação do mesmo ao cálculo de (4.14), resultando em :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \{\log_2(1 + \theta_N)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} f(N)g(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(N) \lim_{N \rightarrow \infty} g(N) = 0 \tag{4.22}$$

Este resultado pode ser estendido aos três últimos termos de (4.13), o que faz com que aquela equação possa ser reescrita como :

$$H_d(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left\{ \log_2 \left[ \frac{A(N)^{A(N)}}{B(N)^{B(N)} C(N)^{C(N)}} \right] \right\}$$

Finalmente, após algumas manipulações, chega-se a uma fórmula analítica simples para o cálculo de  $H_d(p)$ , dada por :

$$H_d(p) = (1-dp) \log_2(1-dp) - p \log_2(p) - [1-(d+1)p] \log_2[1-(d+1)p] \tag{4.23}$$

A figura 4-1 mostra a Entropia do espaço de seqüências  $d$  para diversos valores de  $d$  e a figura 4-2, os respectivos ganhos de codificação.

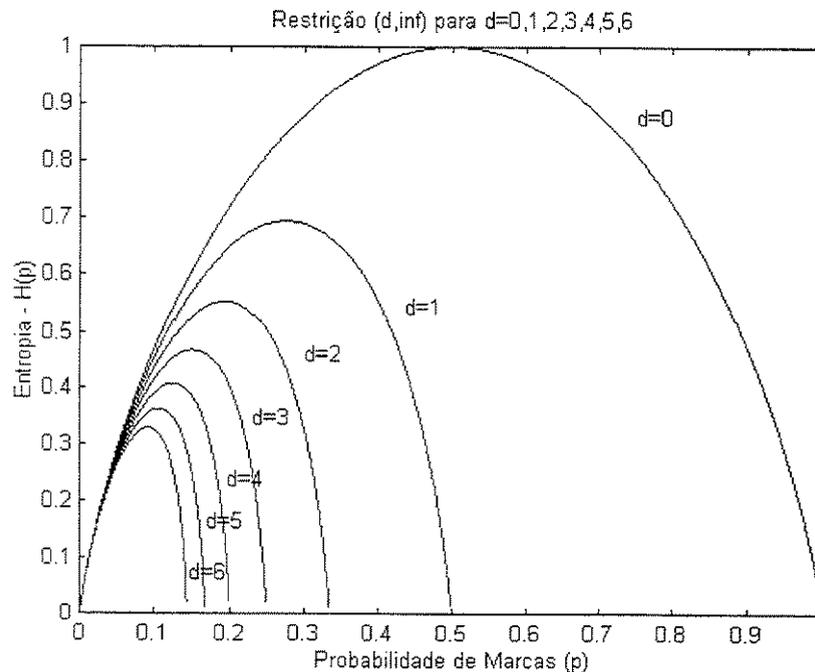
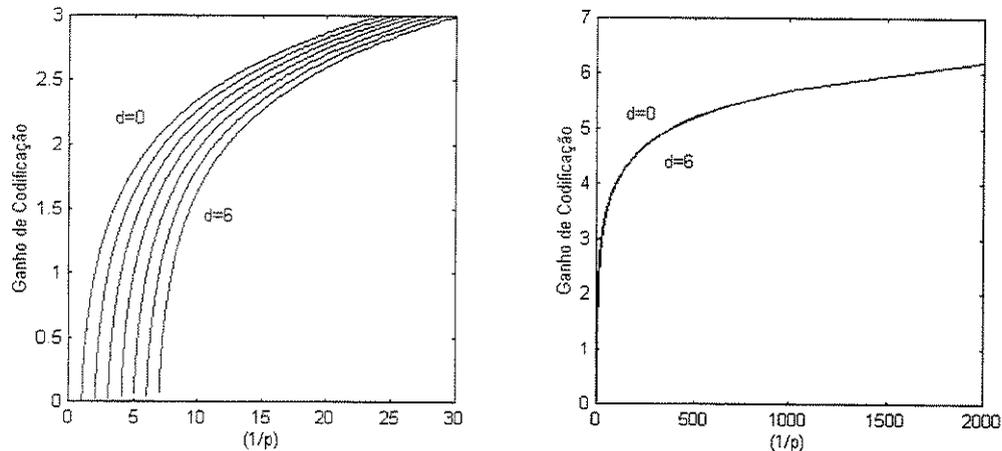


Figura 4-1 – Curvas de Entropia de seqüências  $d$ , para diversos valores do parâmetro  $d$ .



**Figura 4-2** – Curvas de Ganho de Codificação de seqüências  $d$ , para diversos valores do parâmetro  $d$ . O gráfico à esquerda mostra os Ganhos conseguidos para valores de Probabilidade de Marcas acima de 0.033 e o à direita o comportamento assintótico do Ganho à medida que  $p$  vai assumindo valores cada vez menores. Percebe-se que o Ganho vai para infinito quando que  $p$  tende a zero.

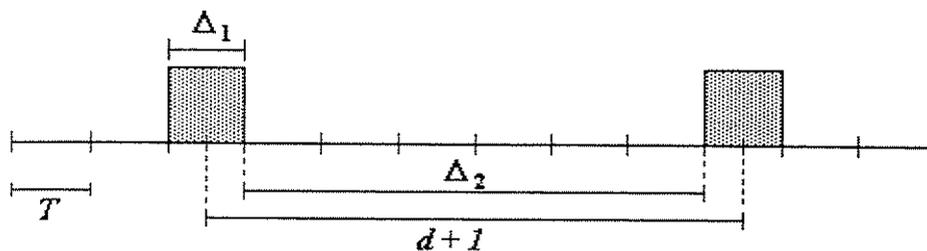
Nota-se que, também neste caso, o Ganho de Codificação vai para o infinito à medida em que  $p$  caminha para zero, levando a uma ocupação infinita de faixa.

A vantagem apresentada por estas seqüências em relação ao caso não-codificado é que, assumindo uma transmissão binária, as penalidade de faixa podem ser diminuídas se for permitido que os pulsos ópticos '1' sejam alargados, ocupando mais do que 1 slot de tempo, de maneira a se reduzir o espaçamento mínimo entre sucessivas transições.

Desde que o alargamento dos pulsos ópticos não altere o número de fótons por pulso, o resultado será uma diminuição da potência de pico trafegando na linha, reduzindo, portanto, o aparecimento dos efeitos não-lineares na fibra, principalmente no caso de enlaces WDM, onde a potência de pico que trafega no interior da fibra é composta pela somatória das potências de pico de cada canal. Evidentemente, a potência média do sinal total trafegante também será menor.

Além disso, pulsos mais largos significam uma menor ocupação de faixa, diminuindo-se a penalidade de faixa final. Existe, contudo, um ponto ótimo de alargamento do pulso, a partir do qual a ocupação de faixa começa a aumentar novamente, devido à maior proximidade entre pulsos sucessivos.

Para se calcular a menor penalidade de faixa obtida neste esquema, deve-se encontrar o ponto ótimo de alargamento do pulso, com base no tamanho do slot de tempo ocupado por um símbolo. A figura abaixo ilustra o processo :



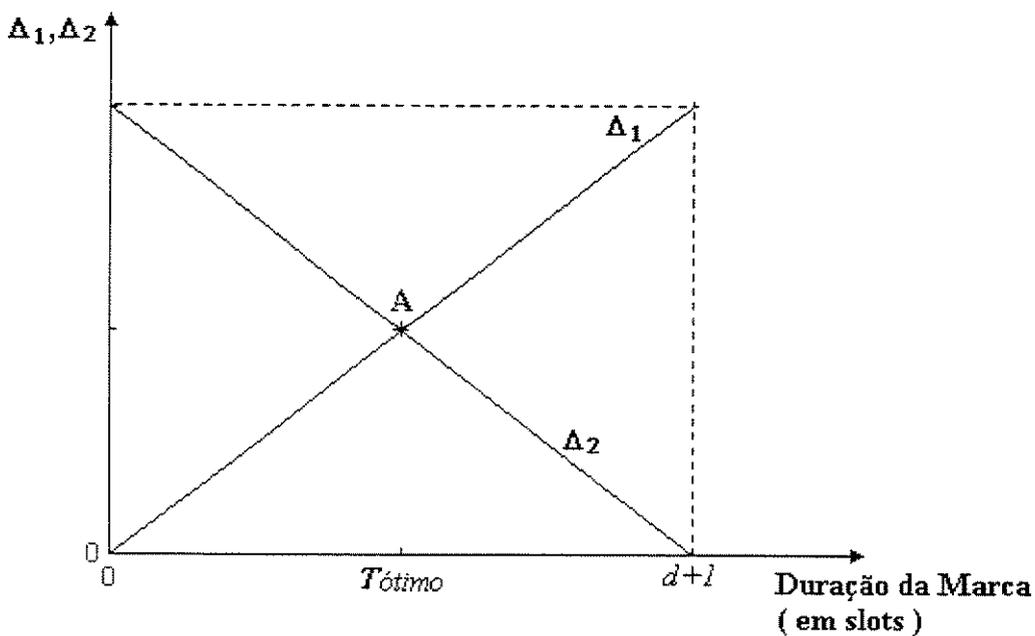
**Figura 4-3** – Representação de dois pulsos consecutivos de códigos com restrição  $d$ , onde  $T$  é o valor de tempo correspondente a um slot e  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  são como indicado a seguir.

Este ponto é facilmente obtido, como sendo :

$$T_{\text{ótimo}} = \text{máx}\{\text{mín}\{\Delta_1, \Delta_2\}\}, \quad \text{com : } \Delta_1 = \text{Tempo de duração da marca ;}$$

$$\Delta_2 = d + 1 - \Delta_1.$$

Graficamente,



**Figura 4-4** – Representação gráfica do método para se encontrar  $T_{\text{ótimo}}$ .

Tem-se, então, no ponto A :

$$T_{\acute{o}timo} = d + 1 - T_{\acute{o}timo}$$

$$T_{\acute{o}timo} = \left( \frac{d+1}{2} \right) \quad (\text{slots de tempo } T) \quad (4.24)$$

Portanto, a máxima redução de penalidade de faixa é obtida quando o pulso é alargado de 1 para  $(d+1)/2$  slots de tempo, reduzindo a largura da faixa na mesma proporção.

A expressão para a penalidade de faixa  $\beta$ , para  $d \geq 1$ , usando esta codificação, após o alargamento do pulso, será dada por :

$$\beta = \frac{2}{R(d+1)} \quad (4.25)$$

cujos valores menores que 1, indicam uma redução da faixa necessária à transmissão e os maiores que 1, uma ampliação da mesma.

Convém comentar que um alargamento muito grande dos pulsos ópticos introduzirá imprecisão na localização do real posicionamento do pulso pelo receptor. Por isso, esta estratégia não é prática para valores de  $d$  muito grandes.

Seja  $p_d(d)$  o valor de  $p$  no espaço das seqüências  $d$ , para o qual  $H_d(p_d)$  é máximo, e seja ainda  $H_d^{-1}(\cdot) \in [0, p_d(d)]$  a função Entropia inversa. Então, o limitante superior para o Ganho de Codificação, com base em (3.4), assumindo uma penalidade de faixa máxima tolerada  $\beta_{\acute{m}ax}$ , valerá :

$$\Gamma \leq \frac{1}{\beta_{\acute{m}ax}(d+1)H_d^{-1}\left(\frac{2}{\beta_{\acute{m}ax}(d+1)}\right)} \quad (4.26)$$

com :

$$\beta_{\acute{m}ax} \geq \frac{2}{Cap_d(d+1)} = \beta_{\acute{m}in} \quad (4.27)$$

sendo :-  $Cap_d = \acute{m}ax\{H_d(p)\}$ , a Capacidade do espaço de seqüências  $d$ ;

-  $\beta_{\acute{m}in}$ , a mínima penalidade de faixa obtida com a restrição  $d$ .

Ao invés de fixar-se uma valor para a penalidade de faixa, pode-se desejar que uma certa taxa  $R < Cap_d$ , racional, seja atingida, pois taxas racionais do tipo  $p:q$  - onde  $p$

bits de informação são codificados em  $q$  símbolos – levam a códigos de bloco de baixa complexidade, conforme será mostrado no Capítulo VI. Neste caso, a penalidade de faixa continuará sendo dada por (4.25) e o Ganho de Codificação será :

$$\Gamma = \frac{R}{2H_d^{-1}(R)} \quad (4.28)$$

A teoria de “State-splitting” [4] mostra que códigos de bloco de janelas deslizantes podem ser projetados para pontos arbitrariamente próximos da capacidade (ponto máximo da curva de Entropia). Contudo, para que sejam atingidos os máximos ganhos de codificação dados por (4.26), é suposto poder-se operar próximo a outros pontos da curva de Entropia, o que não é estabelecido pela teoria acima citada, sendo, neste caso, apenas uma suposição admitida no presente trabalho.

## IV.2 – Códigos com Restrição $(d,k)$

No esquema de codificação anterior, obteve-se uma redução na largura de faixa necessária através do alargamento do pulso óptico. Todavia, para valores de  $p$  próximos de zero, apesar do ganho tender a infinito, a taxa continua tendendo a zero, significando, novamente, uma ocupação infinita de faixa.

Portanto, a adoção de mais uma restrição seria necessária, visando contornar esse problema. Códigos com restrição  $(d,k)$  têm no mínimo  $d$  (como no caso anterior) e no máximo  $k$  zeros entre 2 marcas consecutivas. Desde que existe uma probabilidade de marcas mínima e máxima nestes códigos, iguais a  $\left(\frac{1}{k+1}\right)$  e  $\left(\frac{1}{d+1}\right)$ , respectivamente, ter-se-á um máximo Ganho de Codificação dentro deste intervalo de probabilidades.

Com isso, existirá um valor máximo finito para o Ganho de Codificação para um valor de  $p \neq 0$ , evitando-se a obtenção de ganhos cada vez maiores somente quando  $p$  se aproxima de zero, como visto anteriormente.

O Ganho de Codificação máximo para estas sequências será dado por :

$$\Gamma_{m\acute{a}x}(d,k) = \frac{H_{d,k}(p_{m\acute{a}x})}{2p_{m\acute{a}x}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dp} H_{d,k}(p) \right]_{p=p_{m\acute{a}x}} \quad (4.29)$$

onde: -  $p_{m\acute{a}x}$  é o valor de  $p$  no ponto de tangência à curva de Entropia, obtido ao traçar-se uma linha reta que passa pela origem e toca a curva de Entropia somente num ponto.

Supondo  $p_t(d,k)$  o valor de  $p$  no espaço das seqüências (d,k) para o qual  $H_{d,k}(p)$  é máximo, vale ressaltar que os códigos devem ser buscados no intervalo  $p \in [p_{m\acute{a}x}, p_t(d,k)]$ , visto que, fora deste intervalo, haverá uma diminuição do Ganho de Codificação e da taxa do código, causando um aumento da penalidade de faixa, o que não é desejável.

A penalidade de faixa neste esquema, para o máximo Ganho de Codificação, será dada por :

$$\beta = \frac{2}{H_{d,k}(p_{m\acute{a}x})(d+1)} \quad (4.30) \quad , \quad \text{para } d \geq 1.$$

Para que possam ser avaliadas as expressões (4.29) e (4.30), a expressão para  $H_{d,k}(p)$  deve ser obtida, o que será feito agora.

Para seqüências com restrição (d,k), as palavras possíveis que podem ser livremente concatenadas são : “.10<sup>d</sup>.”, “.10<sup>d+1</sup>.”, “.10<sup>d+2</sup>.”, ..., “.10<sup>k</sup>.”.

Seja  $W$  o número total de palavras possíveis em  $N$  dígitos, pode-se escrever então:

$$W = W_{d+1} + W_{d+2} + W_{d+3} + \dots + W_{k+1} \quad (4.31)$$

onde  $W_l$  é o número de palavras de comprimento  $l$ .

Para  $N$  dígitos, sendo  $p$  a probabilidade de marcas, tem-se ainda :

$$W = pN = W_{d+1} + W_{d+2} + W_{d+3} + \dots + W_{k+1} \quad (4.32)$$

$$N = (d+1)W_{d+1} + (d+2)W_{d+2} + (d+3)W_{d+3} + \dots + (k+1)W_{k+1} \quad (4.33)$$

Neste caso, número máximo de combinações de seqüências possíveis,  $C_{d,k}(N)$ , em  $N$  dígitos será dado por :

$$C_{d,k}(N) = \frac{W!}{W_{d+1}!W_{d+2}!W_{d+3}!\dots W_{k+1}!} \quad (4.34)$$

Combinando-se as equações (4.32) e (4.33) é possível explicitar os valores de  $W_{d+1}$  e  $W_{d+2}$ , em função das outras variáveis, da forma :

$$W_{d+1} = (d+2)W - N + \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-2)W_{d+i} \quad (4.35)$$

$$W_{d+2} = N - (d+1)W - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-1)W_{d+i} \quad (4.36)$$

Com isso, escreve-se (4.34), da seguinte maneira :

$$C_{d,k}(N) = \frac{pN!}{\prod_{i=3}^{(k-d+1)} [p_{d+i}N]! \left[ (d+2)p-1 + \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-2)p_{d+i} \right] N! \left[ 1 - (d+1)p - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-1)p_{d+i} \right] N!} \quad (4.37)$$

onde  $p_{d+i} = W_{d+i}/N$ .

Utilizando a equação da Entropia, dada por (4.5), com  $C(N) = C_{d,k}(N)$ , e aplicando-se a Fórmula de Stirling, tem-se o seguinte resultado para as seqüências (d,k) :

$$H_{d,k}(p) = \max_{\{p_{d+i}, i \in [3, (k-d+1)]\}} \left( p \log_2 p - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} p_{(d+i)} \log_2 p_{(d+i)} - \left[ 1 - (d+1)p - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-1)p_{(d+i)} \right] \log_2 \left[ 1 - (d+1)p - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-1)p_{(d+i)} \right] - \left[ (d+2)p-1 + \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-2)p_{(d+i)} \right] \log_2 \left[ (d+2)p-1 + \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-2)p_{(d+i)} \right] \right) \quad (4.38)$$

Como exemplo, a figura 4-5 mostra a família de curvas de  $H_{d,5}(p)$  para  $d = 0, 1, 2, 3$  e  $4$  :

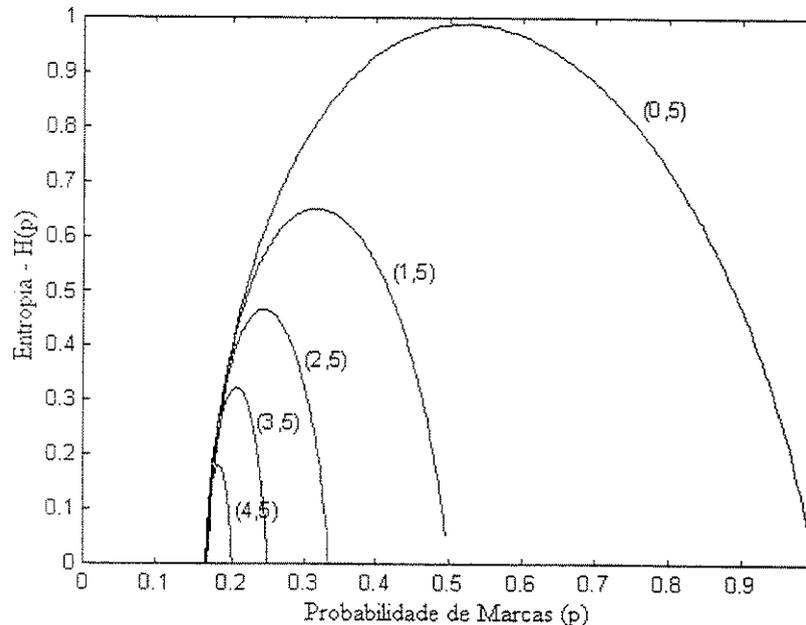


Figura 4-5 – Entropia de códigos com  $k = 5$  para vários valores de  $d$ .

O ponto de tangência a cada curva, traçando-se uma reta a partir da origem, corresponde ao par  $(p_{m\acute{a}x}, H_{d,k}(p_{m\acute{a}x}))$ , usado na determinação do Máximo Ganho de Codificação para um dado  $(d,k)$ .

A figura 4-6 mostra as curvas de Ganho de Codificação obtidas a partir dos resultados presentes na figura 4-5 :

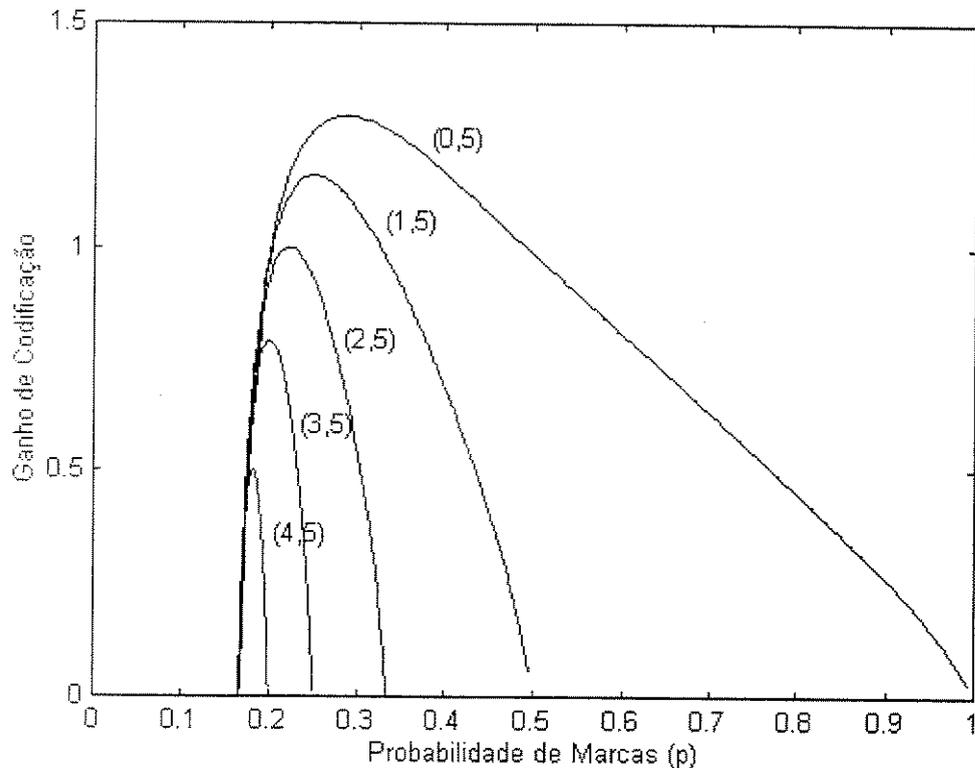


Figura 4-6 – Ganho de Codificação de códigos com  $k = 5$  para vários valores de  $d$ .

Na figura anterior vê-se claramente o comportamento das curvas de Ganho de Codificação : à medida que a distância  $(k - d)$  cresce, o mesmo ocorre com os ganhos correspondentes. Este resultado confirma a expectativa teórica a respeito do sistema ao adotar-se mais uma restrição no processo de codificação, ou seja :

- O aumento em  $(k - d)$  – aumento no grau de liberdade das seqüências – leva diretamente a um aumento da Entropia e do Ganho de Codificação correspondente.
- A introdução de uma restrição  $k$  leva à obtenção de uma curva de ganho que possui um ponto de máximo finito, ocorrendo para um valor de  $p$  ( $= p_{m\acute{a}x}$ )

diferente de zero, não levando mais a uma ocupação infinita de faixa quando se opera com máximo ganho.

Para o caso em análise, a variação das penalidades de faixa, obtidas nos pontos de máximo ganho, pode ser observada na Tabela 4-1 :

$d$	$\Gamma_{max}$	$\beta(\Gamma_{max})$
0	1.2924	1.3540
1	1.1610	1.7227
2	1	1.5
3	0.7925	1.5773
4	0.5	2.2

**Tabela 4-1** – Máximos Ganhos de Codificação e Penalidades de Faixa para vários valores de  $d$ , com  $k = 5$ .

Nota-se que o melhor ponto de operação é obtido para  $d = 0$ . Embora  $d = 0$  sempre leve ao melhor ponto de operação – Máximo Ganho de Codificação com Mínima Penalidade de Faixa – independentemente do valor de  $k$ , observa-se que valores maiores de  $k$  produzirão um mínimo na penalidade de faixa para algum valor finito e positivo de  $d$ .

Uma característica interessante do comportamento do Ganho de Codificação para as sequências com restrição  $(d,k)$  foi notada ao agrupar-se os dados numéricos obtidos de acordo com as distâncias  $(k-d)$  pesquisadas. Foram traçados gráficos de Entropia e Ganho de Codificação para distâncias  $(k-d)$  iguais a 1,2 e 3. Apesar de, para cada par  $(d,k)$ , as curvas de Entropia serem diferentes umas das outras e as regiões válidas para  $p$  ( domínio de  $H_{d,k}(p)$  ) serem também distintas, observou-se que o valor máximo atingido pelo Ganho de Codificação permaneceu o mesmo para distâncias  $(k-d)$  idênticas, para quaisquer valores de  $d$  e  $k$  envolvidos. As figuras 4-7 a 4-12 nas páginas seguintes ilustram este fato.

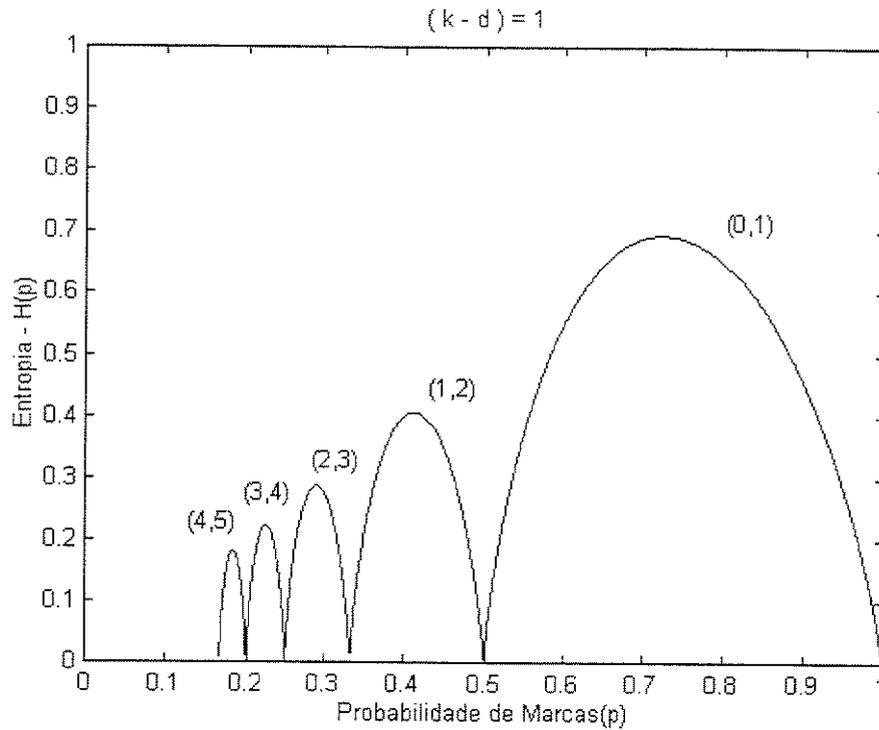


Figura 4-7 – Entropia de códigos com  $(k - d) = 1$  para vários valores de  $d$  e  $k$ .

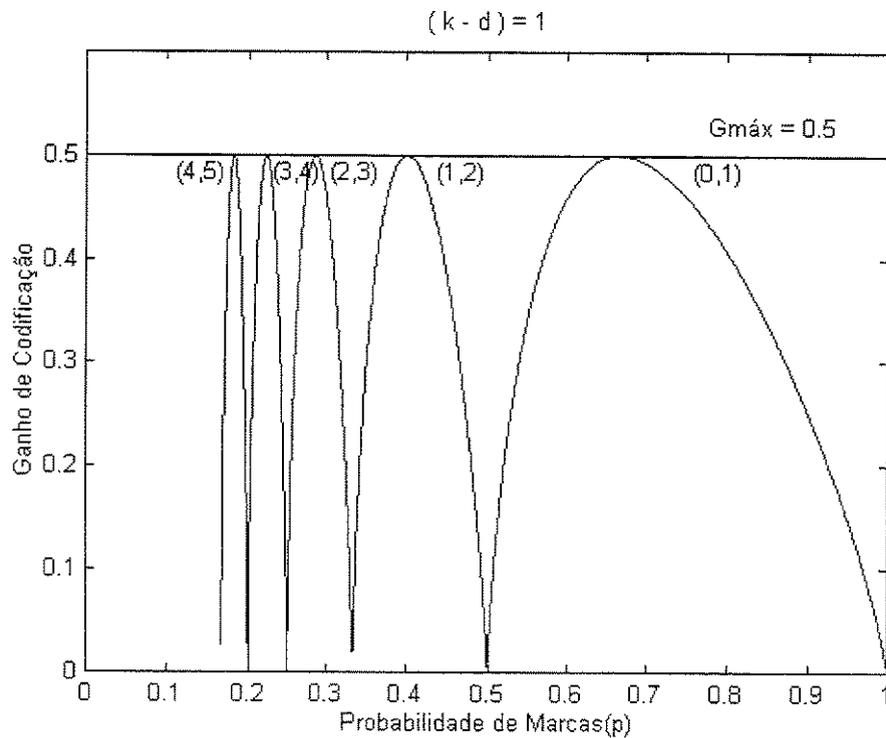


Figura 4-8 – Ganho de Codificação de códigos com  $(k - d) = 1$  para vários valores de  $d$  e  $k$ .

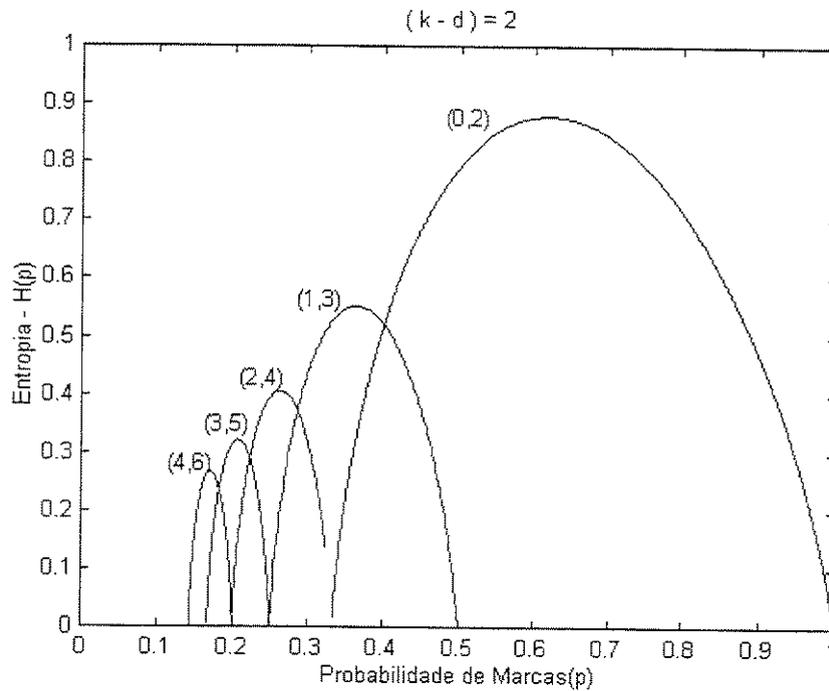


Figura 4-9 – Entropia de códigos com  $(k - d) = 2$  para vários valores de  $d$  e  $k$ .

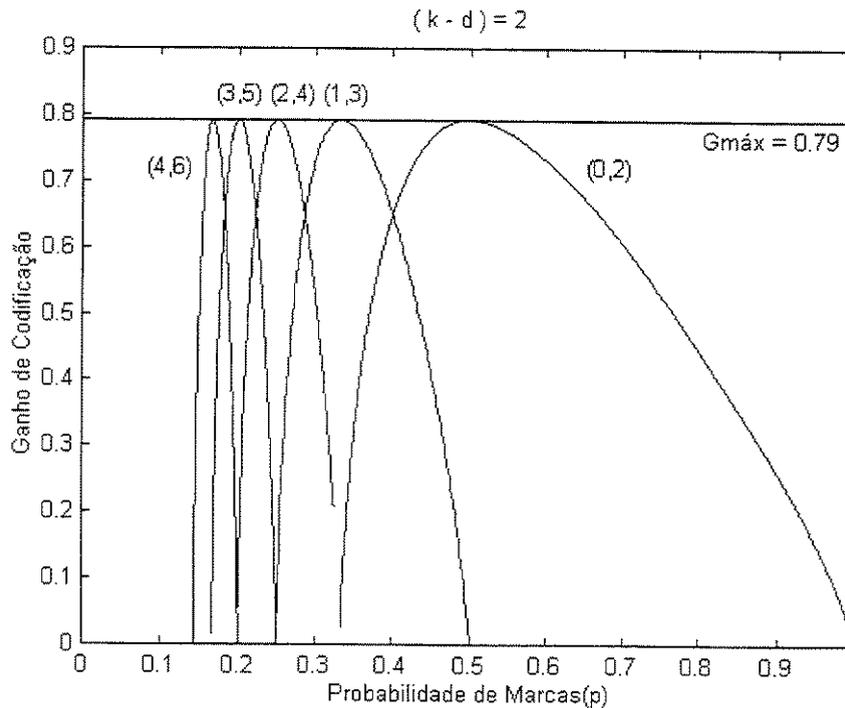


Figura 4-10 – Ganho de Codificação de códigos com  $(k - d) = 2$  para vários valores de  $d$  e  $k$ .

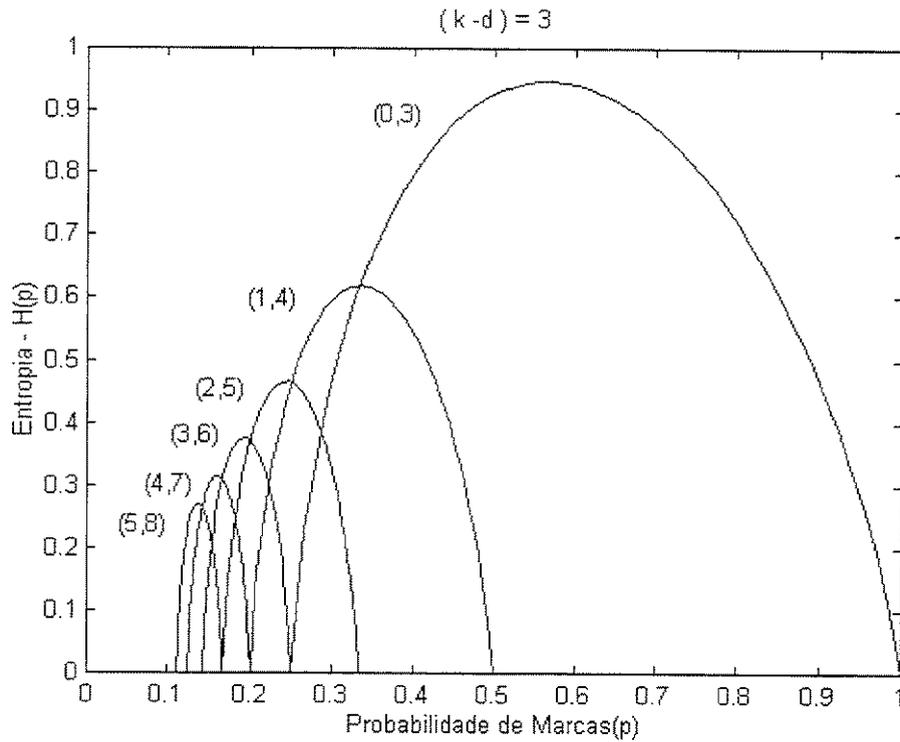


Figura 4-11 – Entropia de códigos com  $(k - d) = 3$  para vários valores de  $d$  e  $k$ .

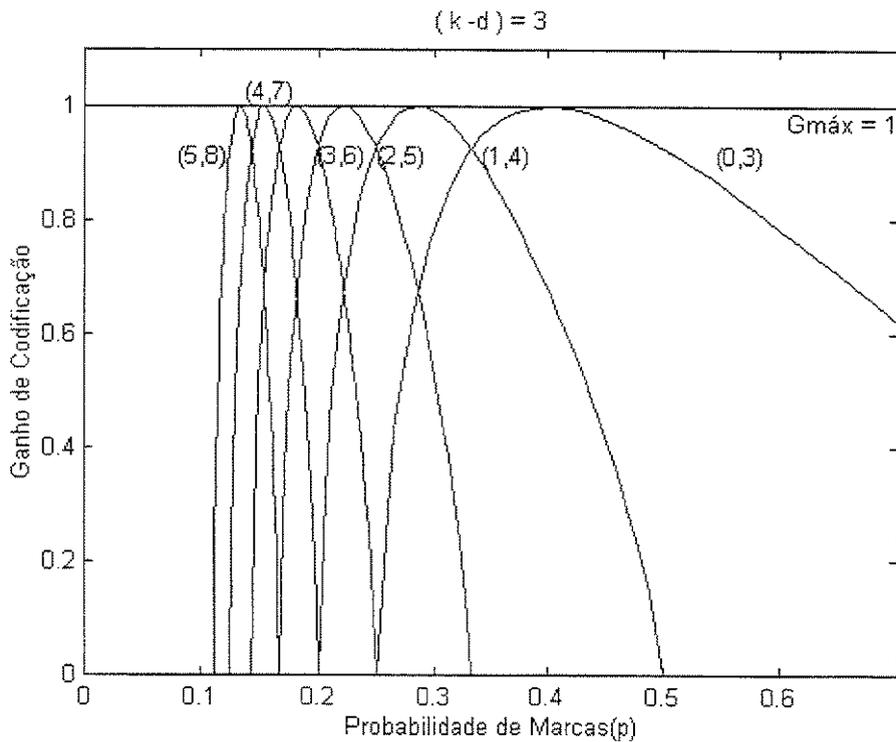


Figura 4-12 – Ganho de Codificação de códigos com  $(k - d) = 3$  para vários valores de  $d$  e  $k$ .

Estudando mais atentamente a questão, obteve-se a seguinte equação, que descreve com exatidão o comportamento analítico do Ganho Máximo de Codificação observado através dos dados da tabela 4-1 e das figuras 4-8, 4-10 e 4-12 :

$$\Gamma_{\text{máx}}(d,k) = \frac{1}{2} \log_2(k-d+1) \quad (4.39)$$

Essa equação pode ser deduzida através do argumento que se segue.

As seqüências  $(d,k)$  podem ser vistas como formadas pela livre concatenação de  $(k-d+1)$  palavras diferentes : “.10<sup>d</sup>.”, “.10<sup>d+1</sup>.”, “.10<sup>d+2</sup>.”, ... , “.10<sup>k</sup>.”, onde “.0<sup>d</sup>.”, corresponde à transmissão de “d” zeros consecutivos.

Assim sendo, de acordo com a Teoria da Informação, essas seqüências só podem transmitir no máximo  $\log_2(k-d+1)$  bits por palavra.

Acontece que, nas seqüências  $(d,k)$ , cada palavra tem exatamente uma marca. Desta forma,  $\log_2(k-d+1)$  é também o máximo número de bits por marca, ou seja, é o máximo valor que pode ser assumido por  $(H(p)/p)$ , pois  $H(p)$  é o máximo número de bits por símbolo para uma dada taxa  $p$  de marcas por símbolo.

O Ganho de Codificação, tal qual definido por ( 3.4 ), é dado por :

$$\Gamma = \frac{R}{2p} \leq \frac{H(p)}{2p}$$

Então, pelo argumento anterior, seu valor máximo para as seqüências  $(d,k)$  será, finalmente :

$$\Gamma_{\text{máx}}(d,k) = \frac{1}{2} \log_2(k-d+1)$$

Este é um resultado importante e prova que o cálculo do máximo ganho depende unicamente do valor  $(k-d)$ . Além disso, (4.39) permite prever o Máximo Ganho de Codificação para as seqüências  $(d,k)$  sem o cálculo da sua Entropia, o que é uma vantagem pela complexidade envolvida na determinação de  $H_{d,k}(p)$ .

Os resultados obtidos até aqui para as seqüências  $(d,k)$  levam às seguintes conclusões :

- Os valores de ganho para seqüências  $(d,k)$  são os mesmos para quaisquer  $d$  e  $k$  com  $(k-d) = \text{constante}$ , variando-se somente a região de operação no eixo  $p$  ( Probabilidade de Marcas ), como pode ser observado através das figuras 4-8, 4-10 e 4-12.
- Para este tipo de seqüências, o ponto de Máximo Ganho de Codificação acontece quando as palavras “. $10^d$ .”, “. $10^{d+1}$ .”, “. $10^{d+2}$ .”, ... , “. $10^k$ .” são equiprováveis. Isto permite a obtenção de  $p_{\text{máx}}$  e posteriormente  $H_{d,k}(p_{\text{máx}})$ , sem a necessidade do cálculo de (4.38).
- Existe um limitante superior para o Máximo Ganho de Codificação que depende exclusivamente do valor  $(k-d)$ .

Assim, num dado projeto, não seria necessário se estudar todas as variações em  $d$  e  $k$  visando se atingir um Ganho de Codificação requerido. De posse do valor do ganho desejado, seriam estudados os limitantes superiores para vários  $(k-d)$  que satisfizessem à condição requerida, sendo determinado qual é o  $(k-d)$  mínimo em que isso acontece – menor complexidade na elaboração do código. Após isso, escolher-se-iam os valores de  $d$  e  $k$  – para este  $(k-d)$  – que melhor atendessem às exigências particulares do sistema em questão : menor interferência intersimbólica, sincronismo, penalidade de faixa, etc. Isto representaria uma vantagem adicional na elaboração de um código, adequando-o melhor à uma dada aplicação.

Como comentário final, pode-se destacar que o critério de escolha de um certo esquema de codificação será sempre baseado no melhor compromisso entre Ganho de Codificação, penalidade de faixa, interferência inter-simbólica e parâmetros de sincronismo. Todos esses fatores serão sensíveis às variações de  $d$  e  $k$  do esquema de codificação adotado.

### IV.3 – Seqüências RLL ( Runlength Limited )

As seqüências RLL têm se constituído num dos esquemas mais aplicados de codificação em gravação digital até hoje. Neste trabalho, é investigada a sua possível utilização em transmissão óptica.

O intervalo de tempo – comprimento – entre transições consecutivas numa transmissão digital é conhecido como “runlength”. Como já dito no item III.2, as seqüências RLL são definidas por dois parâmetros,  $(d+1)$  e  $(k+1)$ , que limitam o comprimento mínimo e máximo no envio consecutivo de 0’s ou 1’s num dado canal.

Para o caso de seqüências RLL simétricas, ou seja, aquelas cujas restrições  $(d+1)$  e  $(k+1)$  são as mesmas tanto para 0’s quanto para 1’s, pode-se verificar que estas seqüências são equivalentes em capacidade às obtidas nos códigos com restrição  $(d,k)$ , supondo-se os mesmos  $d$  e  $k$  para ambas as seqüências.

Para ilustrar esta propriedade, seja a obtenção de uma seqüência RLL a partir de uma seqüência  $(d,k)$  com  $d = 0$  e  $k = 3$ . Para não haver confusão na interpretação dos símbolos, será adotado como alfabeto para a seqüência  $(d,k)$  o conjunto de símbolos  $\{0,1\}$ , e como alfabeto para a seqüência RLL obtida, o conjunto de símbolos  $\{-1,1\}$ . A cada ‘1’ lógico encontrado na seqüência  $(d,k)$  será associada uma transição em RLL de  $1 \rightarrow -1$  ou  $-1 \rightarrow 1$ . Portanto, a seguinte seqüência  $(d,k) = (0,3)$  :

**0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1**

será convertida para RLL, da forma :

**1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1**

que corresponde a uma seqüência RLL  $((d+1),(k+1)) = (1,4)$ .

A observação dessa simples correspondência leva à conclusão de que as capacidades serão as mesmas em ambas as seqüências. Contudo, apesar disto acontecer, as curvas de Ganho de Codificação versus Probabilidade de Marcas serão diferentes. De qualquer maneira, os argumentos matemáticos para a obtenção das expressões de ganho e Entropia serão bastante semelhantes, o que será visto a seguir.

O caso mais geral possível de seqüências RLL e que permite o maior grau de liberdade no projeto dos códigos considerados, corresponde às seqüências RLL assimétricas. Como mencionado no Capítulo III, podem ser construídas seqüências assimétricas do tipo RLL  $((d_0+1,k_0+1), (d_1+1,k_1+1))$ , formadas por uma sucessão de

séries de marcas com comprimento mínimo  $(d_1+1)$  e máximo  $(k_1+1)$ , e sucessões de séries de zeros com comprimento mínimo  $(d_0+1)$  e máximo  $(k_0+1)$ .

A obtenção da expressão de Entropia para seqüências RLL segue raciocínio análogo ao das seqüências  $(d,k)$ . Suponha  $W_{n_1}$  o número total de palavras possíveis em  $N$  dígitos, formadas somente por '1's, pode-se escrever então :

$$W_{n_1} = W_{d_1+1} + W_{d_1+2} + W_{d_1+3} + \dots + W_{k_1+1} \quad (4.40)$$

onde  $W_l$ , no segundo membro de (4.40), é o número de palavras de comprimento  $l$ .

Para  $N$  dígitos, sendo  $p$  a probabilidade de marcas, tem-se ainda :

$$pN = (d_1 + 1)W_{d_1+1} + (d_1 + 2)W_{d_1+2} + (d_1 + 3)W_{d_1+3} + \dots + (k_1 + 1)W_{k_1+1} \quad (4.41)$$

$$\mu N = W_{d_1+1} + W_{d_1+2} + W_{d_1+3} + \dots + W_{k_1+1} \quad (4.42)$$

onde  $\mu = W_{n_1} / N$ .

O número máximo de combinações de séries de marcas,  $C_1(N)$ , possíveis em  $N$  dígitos será dado por :

$$C_1(N) = \frac{W_{n_1}!}{W_{d_1+1}!W_{d_1+2}!W_{d_1+3}!\dots W_{k_1+1}!} \quad (4.43)$$

Com o mesmo raciocínio das seqüências  $(d,k)$  chega-se a :

$$C_1(N) = \frac{\mu N!}{\prod_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} [p_{d_1+i} N]! \left\{ \left[ (d_1 + 2)\mu - p + \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-2) p_{d_1+i} \right] N \right\}!} \times \frac{1}{\left\{ \left[ p - (d_1 + 1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-1) p_{d_1+i} \right] N \right\}!} \quad (4.44)$$

onde  $p_{d_1+i} = W_{d_1+i} / N$ .

Seguindo a metodologia acima e lembrando que  $W_{n_0} = W_{n_1}$ , pois a uma seqüência de zeros sempre se segue uma seqüências de marcas, pode-se obter também o número máximo de combinações de séries de zeros,  $C_0(N)$ , possíveis em  $N$  dígitos :

$$C_0(N) = \frac{\mu N!}{\prod_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} [p_{d_0+i} N]! \left\{ \left[ (d_0+2)\mu - (1-p) + \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-2)p_{d_0+i} \right] N \right\}!} \times \frac{1}{\left\{ \left[ (1-p) - (d_0+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-1)p_{d_0+i} \right] N \right\}!} \quad (4.45)$$

onde  $p_{d_0+i} = W_{d_0+i} / N$ .

O número total de seqüências será dado por :

$$C(N) = C_I(N) C_0(N) \quad (4.46)$$

E a Entropia deste código, utilizando a equação (4.5) e aplicando-se a fórmula de Stirling será :

$$H_{RLL}(p) = \max_{\{\mu, p_{d_0+i}, p_{d_1+i}, i \in [3, (k-d+1)]\}} \left( \begin{aligned} & 2\mu \log_2 \mu - \sum_{i=3}^{k_0-d_0+1} p_{(d_0+i)} \log_2 p_{(d_0+i)} - \sum_{i=3}^{k_1-d_1+1} p_{(d_1+i)} \log_2 p_{(d_1+i)} - \\ & - \left[ (1-p) - (d_0+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-1)p_{(d_0+i)} \right] \log_2 \left[ (1-p) - (d_0+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-1)p_{(d_0+i)} \right] - \\ & - \left[ p - (d_1+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-1)p_{(d_1+i)} \right] \log_2 \left[ p - (d_1+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-1)p_{(d_1+i)} \right] - \\ & - \left[ (d_0+2)\mu - (1-p) + \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-2)p_{(d_0+i)} \right] \log_2 \left[ (d_0+2)\mu - (1-p) + \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-2)p_{(d_0+i)} \right] - \\ & - \left[ (d_1+2)\mu - p + \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-2)p_{(d_1+i)} \right] \log_2 \left[ (d_1+2)\mu - p + \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-2)p_{(d_1+i)} \right] \end{aligned} \right) \quad (4.47)$$

Também para este tipo de codificação existe uma probabilidade de marcas  $p$  e uma Entropia  $H(p)$  que geram um máximo local para o Ganho de Codificação.

À medida que aumentam o grau de liberdade e a esparsidade das seqüências transmitidas, o Ganho de Codificação aumenta – o que seria de se esperar. Este fato ocorre para o caso em questão e pode ser verificado através das figuras 4-13 e 4-14, construídas com o uso da equação ( 4.47 ).

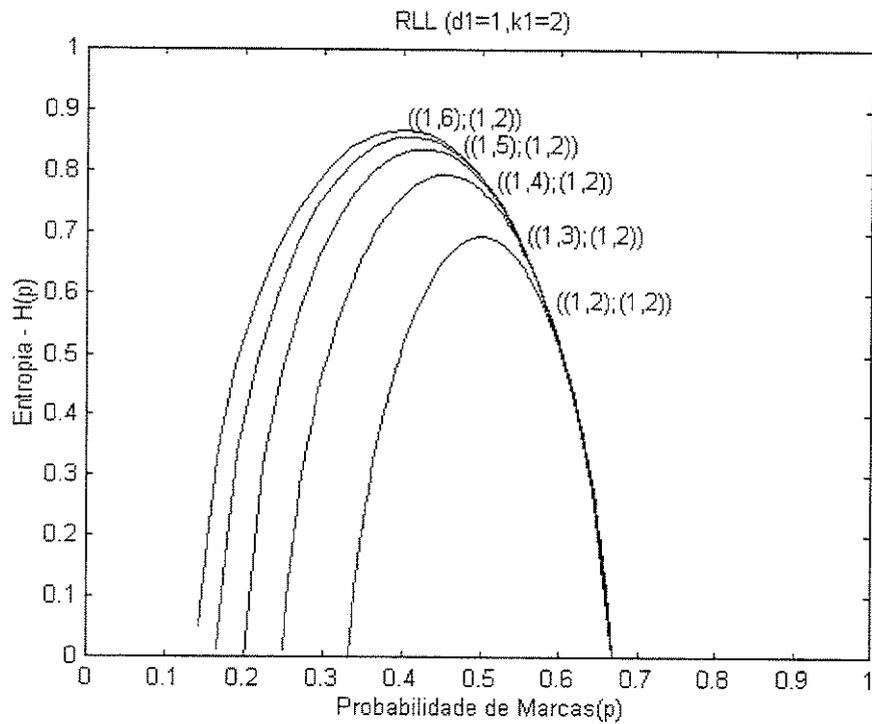


Figura 4-13 – Entropia de Sequências RLL com  $k_l$ ,  $d_l$  e  $d_0$  fixos, variando-se  $k_0$ .

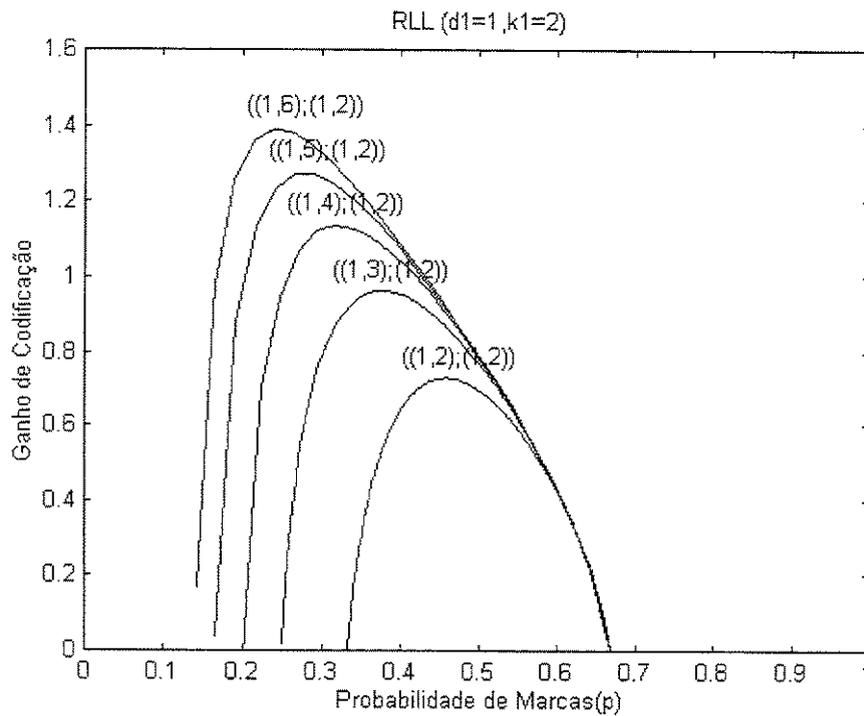
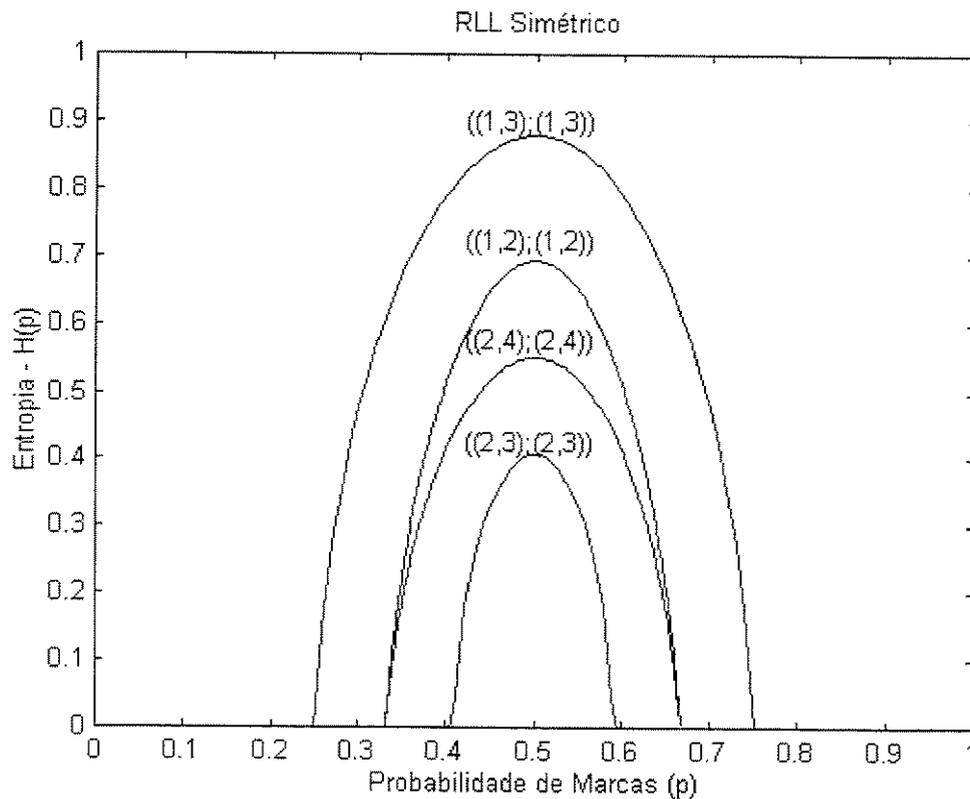


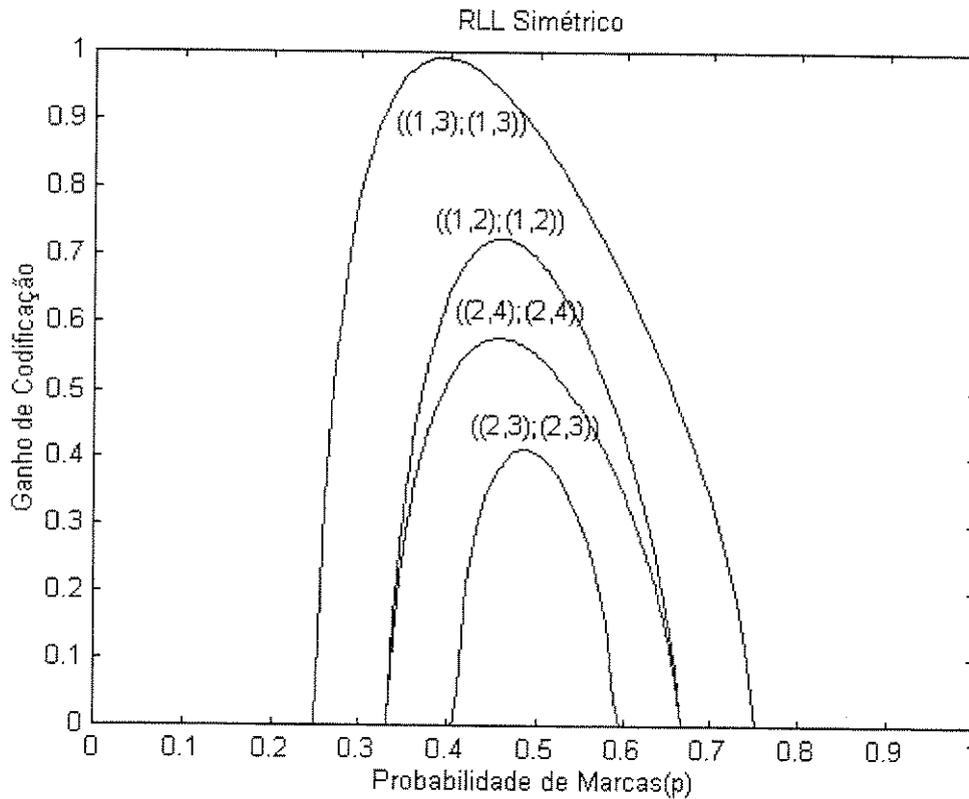
Figura 4-14 – Ganhos de Codificação de Sequências RLL com  $k_l$ ,  $d_l$  e  $d_0$  fixos, variando-se  $k_0$ .

Percebe-se também de maneira geral que os valores máximos para o ganho destas sequências ( com  $k_l$  e  $d_l$  fixos ) é maior comparativamente aos valores obtidos com as sequências  $(d,k)$  anteriores, assumindo as distâncias  $(k_0 - d_0)$  e  $(k - d)$  iguais. Isto se deve à maior liberdade obtida nas sequências RLL, pois agora o número de marcas consecutivas pode variar.

As figuras abaixo ilustram o comportamento de sequências RLL simétricas.



**Figura 4-15** – Entropia de Sequências RLL Simétricas.



**Figura 4-16** – Ganho de Codificação de Sequências RLL Simétricas.

Na figura anterior, o RLL simétrico  $((1,3),(1,3))$ , equivalente em capacidade ao  $(d,k) = (0,2)$ , possui um ganho de aproximadamente 1 no seu ponto de máximo, enquanto chega-se somente a 0.79 para  $(d,k) = (0,2)$ . Este resultado mostra claramente que, apesar das sequências  $(d,k)$  e RLL simétrico  $((d+1,k+1))$  possuírem mesma capacidade e poderem ser construídas umas a partir das outras, têm ganhos bastante diferentes. Desta forma, no que se refere ao Ganho de Codificação, as sequências RLL simétricas apresentam vantagem com relação às suas correspondentes  $(d,k)$ .

É interessante notar que, mesmo no caso de sequências RLL assimétricas distintas mas que possuam curvas de entropia cujos valores são iguais, os ganhos obtidos não serão os mesmos. Isto ocorre justamente pelo domínio da função  $H_{RLL}(p)$ , destacando-se que curvas cujo domínio se apresente mais próximo da origem – sequências com maior esparsidade – apresentarão melhores ganhos de codificação. Como exemplo desta característica, as figuras 4-17 e 4-18 mostram as curvas de Entropia

e Ganho de Codificação para as seqüências RLL assimétricas  $((1,2),(1,3))$  e  $((1,3),(1,2))$ .

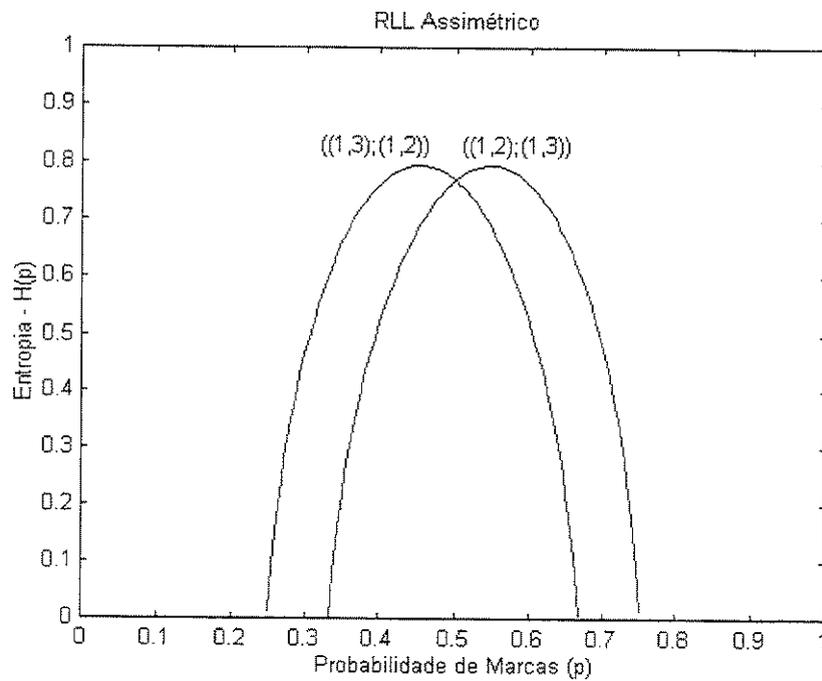


Figura 4-17 – Entropia de Sequências RLL Assimétricas  $((1,2),(1,3))$  e  $((1,3),(1,2))$ .

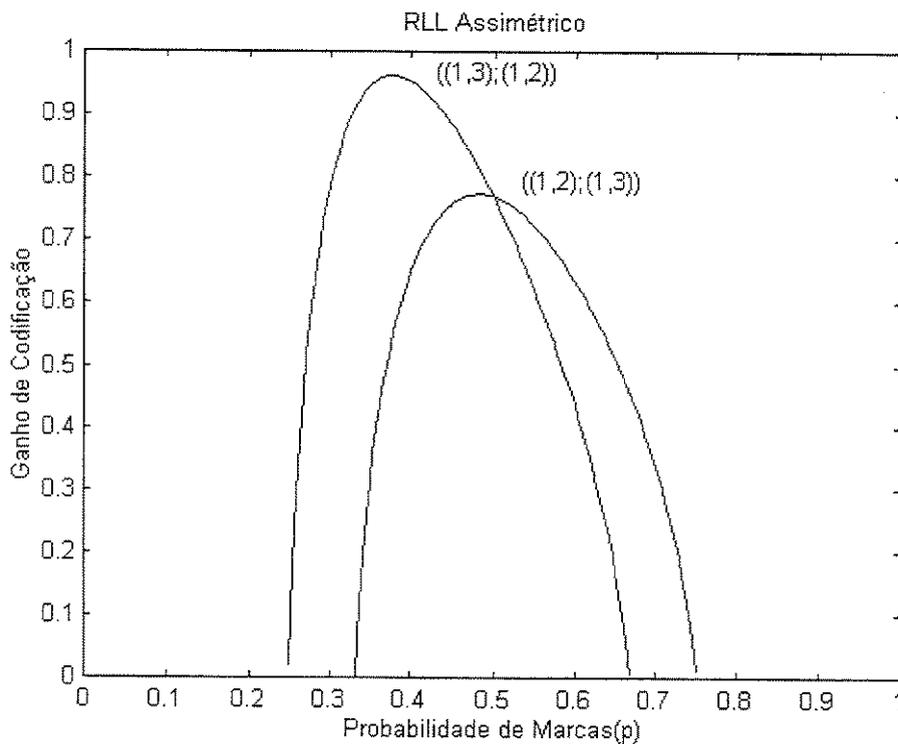


Figura 4-18 – Ganho de Codificação de Sequências RLL Assimétricas  $((1,2),(1,3))$  e  $((1,3),(1,2))$ .

## ***Capítulo V - Metodologia de Cálculo Utilizada***

Até aqui, foram mostradas a dedução e análise das equações envolvendo códigos com restrição  $d$ ,  $(d,k)$  e RLL. Apresentou-se também algumas figuras contendo os gráficos de Entropia e Ganho de Codificação dos respectivos códigos. Em nenhum momento, porém, os métodos para o cálculo daquelas expressões foram abordados, visando não sobrecarregar a leitura, para que a análise dos resultados pudesse ser mais fluente.

Neste capítulo serão mostrados os passos percorridos na obtenção das curvas de Entropia dos capítulos anteriores, inclusive os métodos numéricos utilizados.

É interessante ressaltar que grande parte das dificuldades durante o transcorrer deste trabalho foram encontradas no cálculo das expressões de Entropia, o qual envolvia a maximização destas e o uso de ferramentas numéricas que facilitassem a busca dos

pontos de máximo. Nem sempre essa busca foi trivial, pois à medida que a quantidade  $(k - d)$  aumentava, também crescia o número de equações a serem resolvidas, equações que faziam parte de um sistema não-linear, obtido através das derivadas parciais de  $H(p)$ , no processo de maximização. A resolução destes sistemas não-lineares foi um dos desafios deste trabalho.

## V.1 – Códigos com Restrição $(d, k)$

O cálculo de  $H_d(p)$ , no caso de códigos com restrição  $d$ , é trivial, como pode ser visto em (4.23).

No entanto, uma atenção maior é requerida ao se tentar calcular  $H_{d,k}(p)$  em (4.38), reescrita aqui por conveniência :

$$H_{d,k}(p) = \max_{\{p_{d+i}, i \in [3, (k-d+1)]\}} \left( \begin{array}{l} p \log_2 p - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} p_{(d+i)} \log_2 p_{(d+i)} \\ - \left[ 1 - (d+1)p - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-1)p_{(d+i)} \right] \log_2 \left[ 1 - (d+1)p - \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-1)p_{(d+i)} \right] \\ - \left[ (d+2)p - 1 + \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-2)p_{(d+i)} \right] \log_2 \left[ (d+2)p - 1 + \sum_{i=3}^{(k-d+1)} (i-2)p_{(d+i)} \right] \end{array} \right) \quad (5.1)$$

Para  $(k - d) < 2$ , ou seja,  $(k - d) = 1$  ( lembrando que  $k$  e  $d$  são números naturais, com  $k > d$  ), a expressão (5.1) se reduz a :

$$H_{d,k}(p) = p \log_2 p - [1 - (d+1)p] \log_2 [1 - (d+1)p] - [(d+2)p - 1] \log_2 [(d+2)p - 1] \quad (5.2)$$

cujos cálculos não envolvem nenhuma dificuldade.

Para  $(k - d) \geq 2$ , a solução começa na obtenção das  $(k - d - 1)$  equações, provenientes das derivadas parciais de (5.1) com relação a todos as  $p_{d+n}$  com  $n$  natural  $\in [3, (k - d + 1)]$ . Trabalhando-se nesta direção chega-se a um sistema de  $(k - d - 1)$  equações a  $(k - d - 1)$  variáveis, do tipo :

$$p_{d+n} \left[ (d+2)p - 1 + \sum_{i=3}^{k-d+1} (i-2)p_{d+i} \right]^{(n-2)} - \left[ 1 - (d+1)p - \sum_{i=3}^{k-d+1} (i-1)p_{d+i} \right]^{(n-1)} = 0 \quad (5.3)$$

com  $n = 3, 4, \dots, (k-d+1)$ .

Este é um sistema não-linear cuja dificuldade em se achar suas soluções está diretamente ligada ao número de variáveis ( e, portanto, de equações ) envolvidas.

O objetivo passa a ser a obtenção das soluções para as probabilidades  $p_{d+n}$  que satisfaçam (5.3) para cada valor de  $p$  (probabilidade de marcas) escolhido no intervalo

$\left( \frac{1}{k+1}, \frac{1}{d+1} \right)$ . De posse dos valores de  $p_{d+n}$  e  $p$ , calcula-se o valor de  $H_{d,k}(p)$ , repetindo-se

o processo de maximização para vários valores de  $p$  dentro do intervalo em questão.

Para se resolver o sistema dado em (5.3) foi feito o uso do Método de Newton aplicado a sistemas não-lineares, onde a busca das soluções do sistema é feita através da atualização das variáveis levando-se em conta o gradiente da função em questão [10].

Seja definido o vetor coluna de probabilidades  $\mathbf{P}$  como :

$$\mathbf{P} = [ p_{d+3} \quad p_{d+4} \quad p_{d+5} \quad \dots \quad p_{k+1} ]^T$$

Seja, ainda, o sistema definido pelo conjunto de funções  $F_m$ , como dado a seguir :

$$F_m = p_{d+n} \left[ (d+2)p - 1 + \sum_{i=3}^{k-d+1} (i-2)p_{d+i} \right]^{(n-2)} - \left[ 1 - (d+1)p - \sum_{i=3}^{k-d+1} (i-1)p_{d+i} \right]^{(n-1)} = 0,$$

Com : -  $n = 3, 4, 5, \dots, (k-d+1)$ ;

-  $m = n - 2$ .

Define-se, então, o vetor coluna  $\mathbf{F}(\mathbf{P})$  como sendo os valores encontrados para  $F_m$  associados a um certo  $\mathbf{P}$ , dado um valor de  $p \in \left[ \left( \frac{1}{k+1}, \frac{1}{d+1} \right) \right]$ , ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}) = [ F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \dots \quad F_{(k-d-1)} ]^T$$

Finalmente, seja  $\mathbf{J}(\mathbf{P})^{-1}$  o inverso do Jacobiano associado ao sistema dado por (5.3), para um certo  $\mathbf{P}$  assumido, calculado para um valor de  $p$  válido no intervalo em questão. Assim :

$$\mathbf{J}(\mathbf{P})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_{d+3}} & \frac{\partial F_1}{\partial p_{d+4}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial p_{k+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_{d+3}} & \frac{\partial F_2}{\partial p_{d+4}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial p_{k+1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_{(k-d-1)}}{\partial p_{d+3}} & \frac{\partial F_{(k-d-1)}}{\partial p_{d+4}} & \dots & \frac{\partial F_{(k-d-1)}}{\partial p_{k+1}} \end{bmatrix}^{-1}$$

Utiliza-se, então, o seguinte algoritmo para a solução do sistema (5.3) dentro do intervalo de  $p$  considerado :

1.  $p = p_0$ . ( Valor Inicial de  $p$  )
2.  $\Delta p = \Delta p_0$  ( Tamanho do passo adotado para o eixo de Probabilidade de Marcas )
3.  $i = 1$ . ( Marcador de iterações )
4.  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0$ . ( Valor Inicial de  $\mathbf{P}$  )
5. Erro =  $E_0$ . ( Valor do erro de aproximação adotado como critério de parada )
6. Calcula-se  $\mathbf{F}(\mathbf{P}_i)$ .
7. Se  $\mathbf{F}(\mathbf{P}_i) \leq \text{Erro}$  → Vá para o passo 11.
8. Calcula-se  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_i)^{-1}$ .
9. Atualiza-se  $\mathbf{P}_i$  da forma :  

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i - \mathbf{J}(\mathbf{P}_i)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{P}_i)$$

$$i = i+1.$$
10. Volta para o passo 6.
11. Guarda os valores de  $p, p_{d+3}, p_{d+4}, \dots, p_{k+1}$ .
12. Calcula-se  $H_{d,k}(p)$ . ( Equação 5.1 )
13.  $p = p + \Delta p$  ( Próximo valor de  $p$  a ser considerado )
14. Volta para o passo 3.

O algoritmo anterior é repetido para vários valores de  $p$  tomados no intervalo  $p \in \left[ \left( \frac{1}{k+1}, \frac{1}{d+1} \right) \right]$ , de maneira que obtém-se, ao final, o cálculo da Entropia  $H_{d,k}(p)$  para os pontos considerados. A maior ou menor acuidade do gráfico de  $H_{d,k}(p)$  depende,

então, do maior ou menor número de pontos considerados no intervalo de probabilidade de marcas.

Este algoritmo foi implementado utilizando a linguagem própria de programação do MATLAB, sendo este o software usado na obtenção de todos os resultados apresentados neste trabalho, bem como dos respectivos gráficos relativos a cada um dos códigos estudados. Todas as figuras de Entropia que aparecem em IV.2 foram traçadas com base nos resultados obtidos pela implementação do algoritmo citado.

Convém comentar que este método funcionou muito bem para valores de  $(k - d)$  pequenos, operando de forma satisfatória até  $(k - d) = 5$ . Para distâncias maiores entre  $k$  e  $d$  foram observados sérios problemas de convergência em algumas partes do intervalo de  $p$  considerado, comprometendo a acuidade dos resultados obtidos.

Continua, portanto, o desafio de se conseguir resultados que se estendam sobre distâncias de  $(k - d)$  maiores que 5, seja pela utilização de outro software, ou pela opção por um método numérico diferente do adotado. Este trabalho não contempla estudos a esse respeito, apresentando-se como uma questão em aberto.

## V.2 – Seqüências RLL

O cálculo da Entropia para as seqüências RLL segue as linhas gerais do cálculo das seqüências  $(d, k)$ . A diferença se dá no aumento do número de equações a serem resolvidas no sistema não-linear usado para a maximização de  $H_{RLL}(p)$ . A expressão de  $H_{RLL}(p)$ , obtida no Capítulo IV ( Eq. (4.47) ), é a seguinte :

$$H_{RLL}(p) = \max_{\{\mu, p, d_0, \dots, p_{d_1+i}, i \in \{3, (k-d+1)\}\}} \left( \begin{aligned} & 2\mu \log_2 \mu - \sum_{i=3}^{k_0-d_0+1} p_{(d_0+i)} \log_2 p_{(d_0+i)} - \sum_{i=3}^{k_1-d_1+1} p_{(d_1+i)} \log_2 p_{(d_1+i)} - \\ & - \left[ (1-p) - (d_0+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-1)p_{(d_0+i)} \right] \log_2 \left[ (1-p) - (d_0+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-1)p_{(d_0+i)} \right] - \\ & - \left[ p - (d_1+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-1)p_{(d_1+i)} \right] \log_2 \left[ p - (d_1+1)\mu - \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-1)p_{(d_1+i)} \right] - \\ & - \left[ (d_0+2)\mu - (1-p) + \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-2)p_{(d_0+i)} \right] \log_2 \left[ (d_0+2)\mu - (1-p) + \sum_{i=3}^{(k_0-d_0+1)} (i-2)p_{(d_0+i)} \right] - \\ & - \left[ (d_1+2)\mu - p + \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-2)p_{(d_1+i)} \right] \log_2 \left[ (d_1+2)\mu - p + \sum_{i=3}^{(k_1-d_1+1)} (i-2)p_{(d_1+i)} \right] \end{aligned} \right) \quad (5.4)$$

Novamente, para  $k_1 - d_1 = 1$  e  $k_0 - d_0 = 1$ , a equação acima se reduz a :

$$H_{RLL}(p) = \underset{\mu}{\text{máx}} \left\{ \begin{aligned} &2\mu \log_2 \mu - [(1-p) - (d_0 + 1)\mu] \log_2 [(1-p) - (d_0 + 1)\mu] - \\ &[p - (d_1 + 1)\mu] \log_2 [p - (d_1 + 1)\mu] - [(d_0 + 2)\mu - (1-p)] \log_2 [(d_0 + 2)\mu - (1-p)] - \\ &[(d_1 + 2)\mu - p] \log_2 [(d_1 + 2)\mu - p] \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

cuja expressão que dá os valores de  $\mu$  para os quais  $H_{RLL}(p)$  é máxima será :

$$\mu^2 [(1-p) - (d_0 + 1)\mu]^{d_0+1} [p - (d_1 + 1)\mu]^{d_1+1} - [(d_0 + 2)\mu - (1-p)]^{d_0+2} [(d_1 + 2)\mu - p]^{d_1+2} = 0 \quad (5.6)$$

A expressão (5.6) é um polinômio em  $\mu$ , de resolução trivial para os softwares matemáticos ( no caso o MATLAB ) de forma que o gráfico de  $H_{RLL}(p)$  pode ser construído sem maiores dificuldades.

O aumento do grau de dificuldade no cálculo de (5.4) se dá quando a diferença  $(k - d)$  cresce para valores de  $(k_l - d_l) \geq 2$  e  $(k_0 - d_0) \geq 2$ . Nessa situação, o sistema não-linear usado para encontrar os valores de  $\mu$ ,  $p_{d_0+i}$ ,  $p_{d_1+i}$ , que maximizam  $H_{RLL}(p)$  possuirá  $(k_0 + k_1) - (d_0 + d_1) - 1$  equações, tendo este mesmo número de incógnitas, sendo formado tomando-se as derivadas parciais de  $H_{RLL}(p)$  com relação às variáveis envolvidas em (5.4). Este sistema será o seguinte :

$$\left\{ \begin{aligned} &\mu^2 (EXPR3)^{d_0+1} (EXPR3)^{d_1+1} - (EXPR1)^{d_0+2} (EXPR2)^{d_1+2} = 0, \quad \forall d_0, d_1 \geq 0 \\ &(EXPR3)^{j-1} - p_{d_0+j} (EXPR1)^{j-2} = 0, \quad \text{para } j = 3, 4, 5, \dots, k_0 - d_0 + 1 \\ &(EXPR4)^{l-1} - p_{d_1+l} (EXPR2)^{l-2} = 0, \quad \text{para } l = 3, 4, 5, \dots, k_1 - d_1 + 1 \end{aligned} \right. \quad (5.7)$$

onde :

- $EXPR1 = (d_0 + 2)\mu - (1-p) + \sum_{i=3}^{k_0-d_0+1} (i-2)p_{d_0+i}$
- $EXPR2 = (d_1 + 2)\mu - p + \sum_{i=3}^{k_1-d_1+1} (i-2)p_{d_1+i}$
- $EXPR3 = (1-p) - (d_0 + 1)\mu - \sum_{i=3}^{k_0-d_0+1} (i-1)p_{d_0+i}$
- $EXPR4 = p - (d_1 + 1)\mu - \sum_{i=3}^{k_1-d_1+1} (i-1)p_{d_1+i}$

Como pode ser visto, houve um aumento considerável do número de equações do sistema a ser resolvido em relação ao caso estudado para as seqüências  $(d, k)$ .

O mesmo método numérico descrito no item anterior foi utilizado para resolver o sistema (5.7). Portanto, o algoritmo de cálculo é bastante semelhante ao implementado

para as seqüências  $(d, k)$ , tendo sido efetuadas as devidas modificações nas definições dos vetores  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{P})$ , além da matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{P})^{-1}$ , adequando os mesmos ao caso dos códigos RLL.

Entretanto, é válido mencionar que a complexidade envolvida na obtenção dos resultados deste novo sistema, também limitou bastante as distâncias  $(k_0 - d_0)$  e  $(k_1 - d_1)$ , havendo problemas de convergência no algoritmo para valores de  $[(k_0 - d_0) + (k_1 - d_1)] \geq 5$ .

Outro fator limitante deste algoritmo foi o cálculo do Jacobiano  $\mathbf{J}(\mathbf{P})$  a cada iteração e sua posterior inversão, comprometendo o tempo de processamento, o que limitou o número de pontos a serem tomados no intervalo de probabilidade de marcas válido para os códigos RLL, correspondente a  $p \in \left[ \left( \frac{d_1 + 1}{d_1 + k_0 + 2}, \frac{k_1 + 1}{d_0 + k_1 + 1} \right) \right]$ . Uma simples inspeção no sistema (5.7) pode dar uma idéia da complexidade envolvida na construção do seu Jacobiano.

A metodologia descrita até aqui foi aplicada e levou às curvas de Entropia mostradas no item IV.3 para os códigos RLL.

Mais uma vez o desafio de serem conseguidas curvas com maiores distâncias entre  $k$  e  $d$  permanece, não sendo contemplados neste trabalho estudos sobre outros softwares ou algoritmos que pudessem melhorar o desempenho na obtenção dos resultados, permanecendo como uma questão em aberto.

## ***Capítulo VI - Exemplo de Aplicação***

Ao longo dos capítulos precedentes foi apresentada a formulação teórica dos códigos com restrição  $d$ ,  $(d,k)$  e RLL, estudando-se os ganhos apresentados pelos mesmos para o caso da transmissão em enlaces ópticos. Para isso, foi desenvolvida uma extensa dedução visando obter as expressões de  $H(p)$  que permitiram o cálculo de um limitante superior para os ganhos destes códigos, fornecendo uma ferramenta útil para se verificar o quão próximo os códigos implementados na prática estarão do caso ideal.

Contudo, ao leitor talvez reste a dúvida de como tudo isso se encaixaria quando se está projetando um código para ser implementado.

De maneira a situar melhor o leitor, será apresentado neste capítulo um exemplo de projeto de um código com taxa  $R = \frac{1}{2}$  e  $d = 2$ , cuja simplicidade de implementação e

algumas características obtidas com o mesmo, demonstram ser este um código bastante interessante de ser estudado.

Serão tomadas como base para a construção do código considerado o desenvolvimento teórico apresentado nas referências [1, Capítulos 3 e 5] e [4], que tratam de forma genérica sobre técnicas de codificação existentes, envolvendo códigos que obedecem a algum tipo de restrição. Vários resultados dados pelas referências acima serão utilizados no projeto em questão, tentando, sempre que possível, apresentá-los ao longo do texto, contudo, sem fazer as demonstrações e discussões teóricas aprofundadas dos mesmos. Recomenda-se ao leitor que deseja se aprofundar neste campo, a leitura destas referências, que se apresentam bastante completas e são de grande valia para o estudo e análise das seqüências em espaços restritos.

É importante salientar que o algoritmo de partição de estados ( State-splitting Algorithm ) apresentado na referência [4, item III ] e utilizado na construção de códigos de blocos deslizantes ( Sliding-block Codes ), consegue obter códigos com taxas racionais  $R$  arbitrariamente próximas do pico da curva de Entropia de uma dada restrição, mas não do ponto de maior ganho de eficiência fotônica, na curva de Ganho de Codificação.

Pode-se, contudo, utilizar-se esse algoritmo para procurar códigos a uma taxa racional  $R$ , escolhida suficientemente próxima do ponto de Entropia ótima (e não máxima) obtido das curvas de Ganho de Codificação. Para se fazer isso, deve-se guiar o algoritmo de State-splitting para maximizar a esparsidade do código, através da exclusão de palavras código que possuam a maior quantidade de “1”s, sempre que o algoritmo permitir uma escolha. Este pode ser um procedimento geral quando se está projetando um código e será utilizado no exemplo que se segue.

## VI.1 – Projeto de um Código de Bloco com restrição $d = 2$

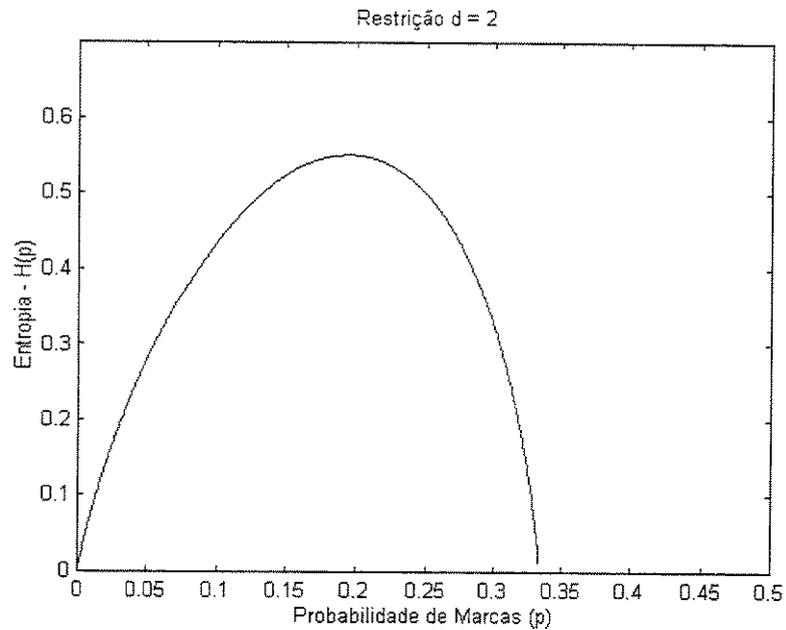
No item IV.1 deste trabalho foi deduzida uma expressão analítica utilizada no cálculo de  $H_d(p)$ , correspondendo às curvas de Entropia das seqüências com restrição  $d$ . A fórmula obtida é dada em (4.23) e reescrita aqui por comodidade :

$$H_d(p) = (1 - dp) \log_2(1 - dp) - p \log_2(p) - [1 - (d + 1)p] \log_2[1 - (d + 1)p] \quad (6.1)$$

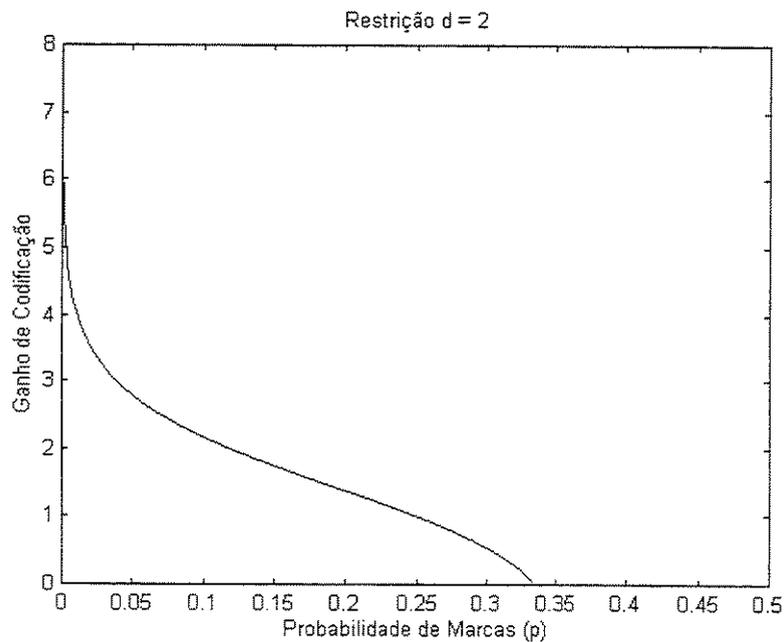
Para o caso do exemplo considerado, tem-se que  $d = 2$  e a expressão acima fica :

$$H_2(p) = (1-2p)\log_2(1-2p) - p\log_2(p) - [1-3p]\log_2[1-3p] \quad (6.2)$$

As figuras 6-1 e 6-2 mostram as curvas de Entropia correspondente à eq. (6.2) e do Ganho de Codificação obtido através da razão  $H_2(p)/2p$ , respectivamente :



**Figura 6-1** – Entropia de seqüências com restrição  $d = 2$ .



**Figura 6-2** – Ganho de Codificação para seqüências com restrição  $d = 2$ .

Pode-se representar convenientemente o conjunto de seqüências que obedecem a uma restrição qualquer através de um diagrama de transição de estados finitos ( Finite-State Transition-Diagram – FSTD ). Um FSTD  $G$  é um grafo direcionado com um número finito de estados (vértices) e transições, possuindo rótulos (associados às transições) que são extraídos de um alfabeto contendo um número finito de símbolos.

O conjunto de seqüências gerado pela restrição  $d = 2$ , com um alfabeto de símbolos binários, pode ser representado pelo seguinte FSTD  $H$  :

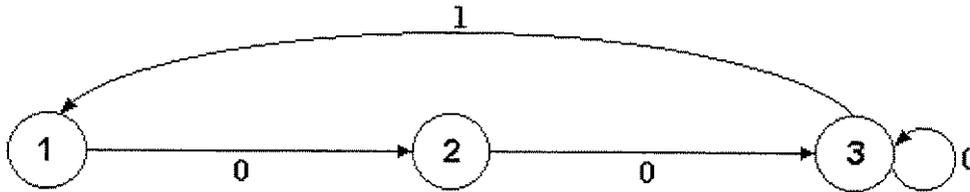


Figura 6-3 – FSTD  $H$  para restrição  $d = 2$ .

Define-se Matriz de Adjacência ou Matriz de Transição de Estados  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(G) = \{a_{ij}\}$ , como sendo uma matriz quadrada onde o elemento  $a_{ij}$  corresponde ao número de transições existentes do estado 'i' para o estado 'j' em  $G$ . Será, portanto, uma matriz formada por números inteiros não-negativos.

Para o FSTD  $H$  tem-se a seguinte matriz de adjacência :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dado um FSTD  $G$ , com antecipação local finita [4, item I] e matriz de adjacência  $\mathbf{A}$ , então a capacidade do código ( também conhecida como Capacidade de Shannon ), que corresponde ao valor de pico da curva de Entropia  $H(p)$ , é obtida da forma:

$$Cap(S) = máx\{H(p)\} = \log_2 \lambda(\mathbf{A}) \quad (6.4)$$

onde  $\lambda(\mathbf{A})$  é o maior autovalor real de  $\mathbf{A}$ .

Portanto, a capacidade do código estudado será :

$$\lambda(A) \cong 1.46557$$

$$Cap(S) = \log_2(1.46557)$$

$$\boxed{Cap(S) \cong 0.55146}$$

Vê-se que este valor coincide com o pico do gráfico de  $H_2(p)$ , mostrado na fig. 6-1. Deve-se agora procurar um código de bloco de taxa racional  $p : q$  ( palavras-fonte de tamanho ‘p’ bits convertidas em palavras-código de tamanho ‘q’ bits ), cuja razão  $p/q$  ( correspondente a  $R$  ) seja menor ou igual a  $Cap(S)$ .

O código de blocos mais simples e de menor tamanho que satisfaz  $p/q \leq 0.55146$  é aquele que possui  $p = 1$  e  $q = 2$ , correspondendo a uma taxa  $R = 1/2$ .

De acordo com o algoritmo de State-splitting [4, Item III] deve-se encontrar o autovetor aproximado  $\nu$  com parâmetros  $A^q$  e  $2^p$ . Este autovetor aproximado deve satisfazer à seguinte relação :

$$A^q \nu \geq 2^p \nu \quad (6.5)$$

Para calcular  $\nu$  utiliza-se o Algoritmo do Autovetor Aproximado, mostrado também em [4, Item III]. Após algumas iterações chega-se ao valor de  $\nu$  desejado, correspondente a :

$$\nu = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Uma simples substituição de  $\nu = [1 \ 1 \ 2]^T$ ,  $p = 1$  e  $q = 2$  em (6.5), mostra que esta equação é satisfeita :

$$A^2 \nu \geq 2^1 \nu$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como o tamanho da palavra código é  $q = 2$ , tem-se agora o seguinte FSTD  $J$  :

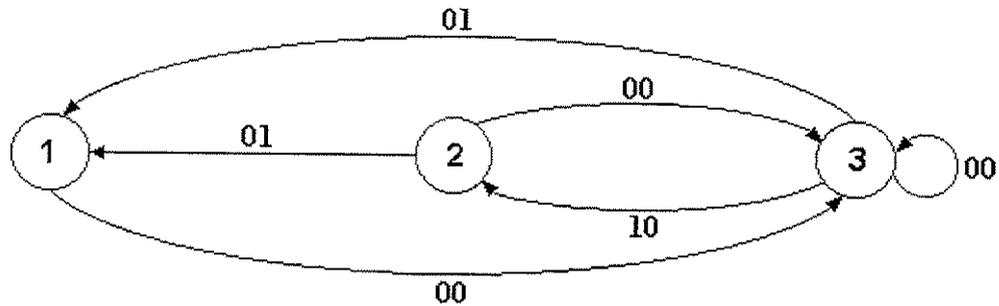


Figura 6-4 – FSTD  $J$

O vetor  $\nu$  possui todas as suas componentes iguais a 1, exceto  $\nu_{13} = 2$ . Esta componente corresponde a um peso 2 associado ao estado 3 do FSTD anterior. Desta maneira, deve-se encontrar uma partição básica  $\nu$ -consistente ( $\nu$ -consistent splitting) de forma que o estado 3 (de peso 2) seja dividido em dois estados  $3^1$  e  $3^2$ , cada um deles com peso 1.

Um novo FSTD poderá, então, ser obtido a partir dessa partição. É importante salientar que este novo FSTD continuará a satisfazer a condição dada por (6.5) desde que as partições básicas efetuadas tenham sido  $\nu$ -consistentes. É possível demonstrar que, dados um FSTD  $G$  irredutível (isto é, existe sempre um caminho em  $G$  saindo de qualquer estado inicial 'i' e chegando em qualquer estado de destino 'j', para 'i' e 'j'  $\in G$ ) e um autovetor aproximado  $\nu$  (associado a  $G$ ) que não possua todas as suas componentes iguais a '1', existirá sempre uma partição  $\nu$ -consistente em  $G$  [4, Item III].

Após encontrar-se a partição básica  $\nu$ -consistente para o FSTD  $J$  e efetuar-se a divisão do estado 3, de acordo com essa partição, obtém-se o novo FSTD  $L$ , mostrado na figura 6-5.

Ao FSTD  $L$  associa-se uma nova matriz de adjacência  $A^2$ , da forma :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

com as transições associadas aos novos estados  $3^1$  e  $3^2$  ocupando as duas últimas linhas e também as duas últimas colunas da matriz anterior.

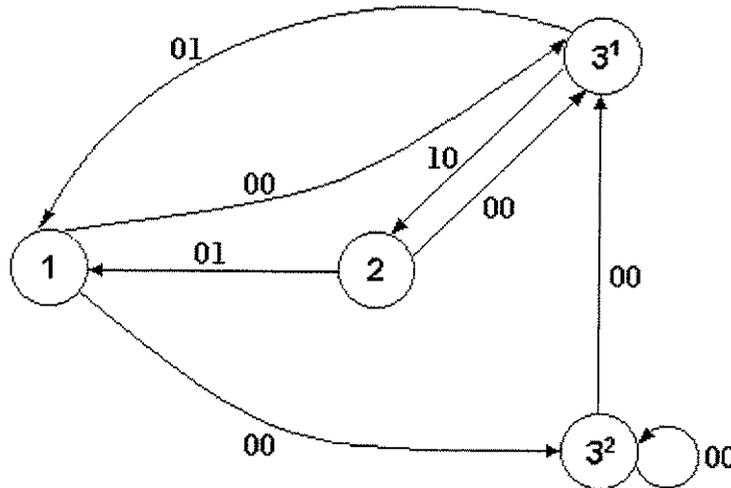


Figura 6-5 – FSTD  $L$

É fácil verificar que o vetor  $v' = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  satisfaz a relação  $A^2 v' \geq 2' v'$ , sendo, portanto, um autovetor aproximado do FSTD  $L$ .

O algoritmo de State-splitting terminaria aqui, com a construção da tabela do codificador. Contudo, após o State-splitting pode aparecer alguma redundância de estados. Essa redundância aumenta a complexidade tanto do codificador quanto do decodificador. Portanto, deve-se objetivar a retirada dessa redundância, obtendo-se com isso um número menor de estados e simplificando consideravelmente os processos de codificação e decodificação. Isto é feito usando-se a fusão de estados.

Define-se  $F(i)$  como o conjunto de todas as palavras de todos os comprimentos que são geradas pelo estado ‘i’ de um dado FSTD. Seja  $G$  um FSTD e sejam ‘i’ e ‘j’ dois estados de  $G$ , então se  $F(i) \subseteq F(j)$  – onde  $\subseteq$  significa “está contido”, a fusão (i,j) pode ser obtida da seguinte maneira :

1. Eliminando-se todas as transições que emanam do estado ‘j’;
2. Redirecionando para o estado ‘i’ todas as transições que chegam ao estado ‘j’;
3. Eliminando-se o estado ‘j’.

Para o caso em questão, de acordo com a FSTD  $L$ , pode-se levantar os seguintes conjuntos :

- $F(1) = \{ 00, 00 \}$
- $F(2) = \{ 00, 01 \}$
- $F(3^1) = \{ 01, 10 \}$
- $F(3^2) = \{ 00, 00 \}$

Percebe-se, claramente, que a fusão do estado 1 com 2 é possível, permanecendo o estado 1. Isto leva, em seguida, à possibilidade de fusão também entre os estados 1 e  $3^2$ , permanecendo o estado 1. Efetuando-se essas fusões, consegue-se chegar finalmente ao seguinte FSTD  $M$  para o código em questão :

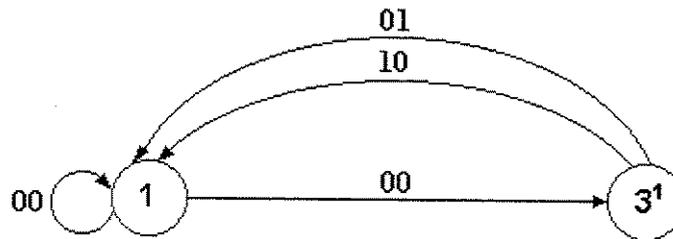


Figura 6-6 – FSTD  $M$

A partir deste FSTD podem ser definidos o codificador e o decodificador utilizados na implementação das seqüências com restrição  $d = 2$  :

- **Codificador** : Possuirá dois estados A e B.  
 No estado A, o símbolo-fonte 0 é codificado como 10 e o símbolo-fonte 1 como 01. Em ambos os casos o próximo estado é B.  
 No estado B, ambos os símbolos-fonte 0 e 1 são codificados como 00, com o próximo estado sendo B se o símbolo-fonte é 0, e A caso contrário.
- **Decodificador** : A palavra-código 01 é decodificada como 1, e a palavra-código 10 como 0. A palavra-código 00 é decodificada como 0 se a próxima palavra-código for 00, e como 1 caso contrário.

As tabelas a seguir sintetizam os comportamentos do codificador e decodificador descritos :

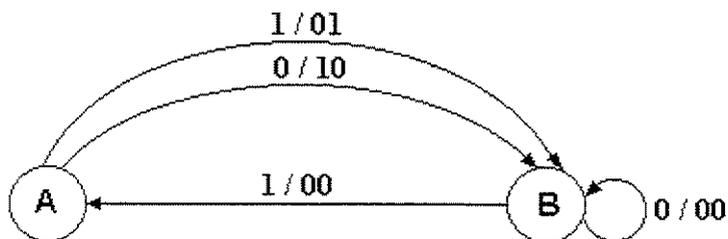
Palavra-Fonte	Estado Atual			
	A		B	
	Palavra-código	Próximo estado	Palavra-código	Próximo estado
0	10	B	00	B
1	01	B	00	A

**Tabela 6-1** – Tabela do codificador usado na transmissão, para restrição  $d = 2$ .

Palavra-código atual	Palavra-código seguinte	Saída do decodificador
01	( não é necessária )	1
10	( não é necessária )	0
00	00	0
	01	1
	10	1

**Tabela 6-2** – Tabela do decodificador usado na recepção, para restrição  $d = 2$ .

A figura a seguir mostra o FSTD  $N$  do codificador, de acordo com as convenções adotadas na tabela 6-1 :



**Figura 6-7** – FSTD  $N$  final para  $d = 2$ .

Após completar-se o projeto anterior, chega o momento de avaliar o Ganho de Codificação atingido ( Aumento na Eficiência Fotônica ) e a eficiência do código com relação à curva  $H_2(p)$  – curva que representa as taxas máximas teóricas alcançadas para uma dada probabilidade de marcas ( $p$ ), através de seqüências maxentrópicas[1]. Para isso deve ser determinado o ponto de operação do código, encontrando-se o par  $(R,p)$  do mesmo.

A sua taxa  $R$  é obtida diretamente da taxa de codificação de blocos adotada, ou seja,  $R = p/q = 1/2$ , como já mencionado em parágrafos anteriores.

O cálculo da probabilidade de marcas ( $p$ ) para este código não é obtida de maneira tão direta, sendo seguidos os passos adiante.

Do FSTD  $N$ , constrói-se a matriz  $Q$ , chamada Matriz de Probabilidades de Transição, onde o elemento  $q_{ij}$  representa a probabilidade de se ir para o estado ‘j’, dado que se está no estado ‘i’. Assumindo que as palavras-fonte são equiprováveis e renomeando os estados A e B, por 1 e 2, respectivamente – por conveniência de notação, a matriz  $Q$  do FSTD  $N$  será :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Deve-se determinar agora o Vetor de Probabilidades de Estado Estacionárias  $\pi$ , cujo elemento  $\pi_i$  corresponde à probabilidade de se estar no estado  $i$ , quando o tempo tende a infinito ( $t \rightarrow \infty$ ).

Este vetor é facilmente obtido ao resolver-se a equação matricial abaixo [1, Capítulo III] :

$$\pi Q = \pi,$$

sujeita à seguinte condição :

$$\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$$

onde  $N$  é o número de estados do FSTD em questão.

O resultado para o caso estudado será :

$$\pi = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

De posse das probabilidades estacionárias acima e das probabilidades de transição de estado ( dadas por  $\mathbf{Q}$  ), finalmente calcula-se a probabilidade de marcas do FSTD  $N$ , levando-se em conta a ocorrência de ‘1’s nas palavras-código adotadas. Assim :

$$p = \pi_1 q_{12} \left( \frac{1}{2} \right) + \pi_2 q_{21}(0) + \pi_2 q_{22}(0)$$

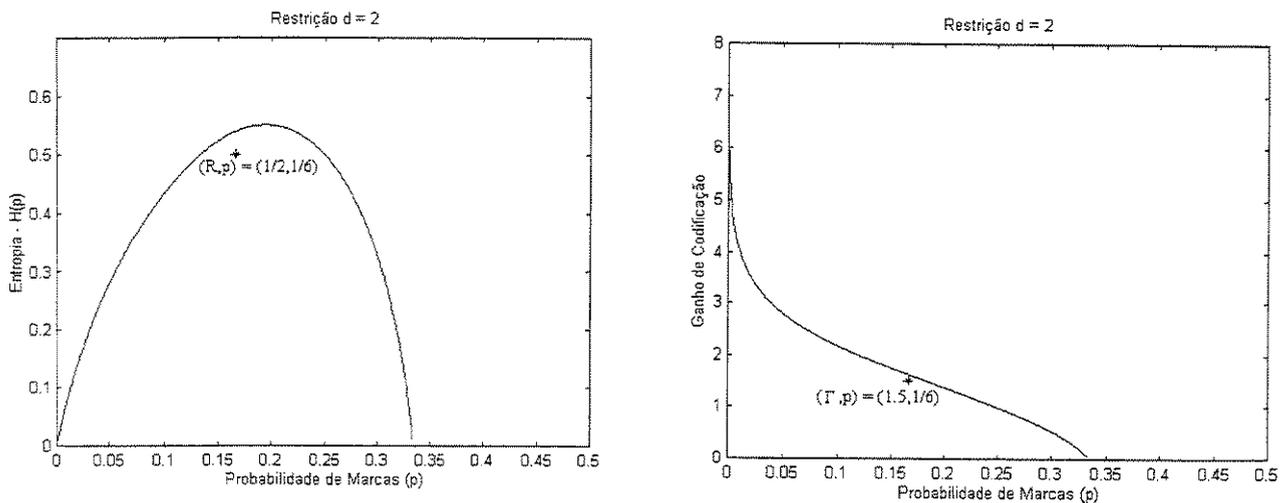
$$p = \frac{1}{6}$$

Este valor de probabilidade de marcas permite calcular o Ganho de Codificação como definido pela equação (3.4) :

$$\Gamma = \frac{R}{2p} = \frac{1/2}{1/3}$$

$$\Gamma = 1.5 \quad \text{ou} \quad \Gamma \cong 1.8 \text{ dB}$$

Os gráficos de  $H_2(p)$  e do Ganho de Codificação são mostrados novamente abaixo, sendo indicados agora os pontos de operação  $(R,p) = (1/2, 1/6)$  e  $(\Gamma, p) = (1.5, 1/6)$  do código construído ao longo deste capítulo :



**Figura 6-8** – Pontos de operação do código projetado com  $d=2$ . Nota-se que, em ambos os gráficos, estes pontos se encontram bem próximos do caso ideal, onde as seqüências finais encontradas para o código em questão seriam maxentrópicas.

Graficamente, é possível verificar que o ponto \* está bem próximo da curva  $H_2(p)$ , o que indica que o código conseguido possui uma alta eficiência. Esta eficiência, do ponto de vista da Entropia do código, pode ser medida através da seguinte relação :

$$\eta = \frac{R}{H_2(p)} \Big|_{p=1/6} = \frac{1/2}{0.5408}$$

$$\boxed{\eta \cong 92.45 \%}$$

Vê-se, pelos resultados obtidos que este código possui características bastante interessantes, que serão analisadas agora.

A eficiência alcançada de 92.45 % demonstra que as palavras-código escolhidas, bem como as características do FSTD final, estão bem próximas ( do ponto de vista estatístico ) daquelas que seriam conseguidas por seqüências maxentrópicas ( caso ideal de codificação ) para  $p = 1/6$ .

O Ganho de Codificação conseguido  $\Gamma = 1.5$ , apesar de parecer pequeno, indica de maneira geral, a possibilidade de se poder chegar até 50 % mais longe do que se não houvesse sido usada nenhuma codificação, num enlace óptico comum. Para enlaces que utilizam WDM, indica também a possibilidade de se alocar até 50 % mais canais do que o permitido sem a codificação; ou ainda, este ganho representa um aumento de 1.8 dB na Relação Sinal-Ruído, se mantidos os mesmos níveis de potência utilizados na transmissão não-codificada, levando a uma menor taxa de erro de bit e aumentando a robustez do sistema.

A taxa  $R = 1/2$  , indicaria uma ampliação na largura de faixa da ordem de 2 na transmissão codificada. Utilizando-se, entretanto, o alargamento do pulso, como sugerido no item IV.1, pode-se diminuir essa penalidade de faixa para 4/3.

A simplicidade de implementação também se constitui uma grande vantagem na utilização deste código, se não a maior, tendo em vista o pequeno esforço de processamento requerido tanto no codificador como no decodificador. Em algumas situações, o projeto de códigos de linha que estão sujeitos a alguma restrição, leva à obtenção de códigos extremamente eficientes e com ganhos elevados, contudo, estes não tem viabilidade prática de implementação devido à complexidade envolvida nos processos de codificação e decodificação.

Existe ainda uma vantagem adicional do código apresentado e que possui grande importância, em se tratando de sincronismo entre transmissor e receptor. Este é um código auto-sincronizável, onde o sincronismo de bloco é recuperado a partir da ocorrência da subsequência 1001 na entrada do decodificador. Desde que a palavra-código 10 é sempre seguida por 00, o par central de zeros em 1001 é necessariamente uma palavra-código. Se, por algum motivo, houver perda de sincronismo entre transmissor e receptor, a detecção da seqüência acima seria suficiente para restaurá-lo.

## ***Capítulo VII - Conclusão***

O presente trabalho visou mostrar a importância que estratégias de codificação de linha podem assumir nos enlaces ópticos, especialmente quando se trata da busca de soluções que possam diminuir a potência média de transmissão mínima necessária para estes enlaces, aumentando o desempenho dos mesmos e sugerindo uma potencial aplicação em Sistemas WDM.

As seqüências  $(d,k)$  e RLL mostraram-se bastante interessantes de serem estudadas, pois suas restrições aumentam a esparsidade dos bits transmitidos, diminuindo-se a potência média do sinal trafegante. Isso colabora para a redução dos efeitos não-lineares da fibra, que atuam como fatores degradantes do sinal óptico transmitido.

Os resultados do Capítulo IV sugerem que a utilização deste tipo de seqüências na codificação de linha pode trazer ganhos satisfatórios em termos de eficiência fotônica ( diminuição do número de fótons por bit na transmissão ), apresentando a possibilidade de se evitar aumentos exagerados na largura de faixa dos canais ópticos envolvidos, utilizando-se o alargamento dos pulsos, como descrito nos itens IV.1 e IV.2. Este capítulo mostrou também um melhor desempenho das seqüências RLL em termos de Ganho de Codificação comparativamente às seqüências  $(d,k)$ .

O exemplo de aplicação apresentado no capítulo anterior demonstra também, pelas características do código final conseguido, que é possível obter-se ganhos de codificação consideráveis e eficiências elevadas do código ( com relação às seqüências maxentrópicas ), sem que, para isso, códigos de alta complexidade tenham de ser usados.

O mesmo exemplo, pela sua simplicidade de implementação, reforça a idéia de que o projeto de códigos de linha, apesar de bem sistematizado, é um campo de pesquisa não completamente fechado, deixando um lugar considerável para a criatividade do projetista na busca de códigos que sejam mais simples e adequados à implementação prática.

Como contribuição deste trabalho, pode ser destacada toda a formulação teórica apresentada ao longo do Capítulo IV, com a posterior obtenção de expressões analíticas de  $H(p)$  para as restrições estudadas. Sem estas, não seria possível o cálculo do Ganho de Codificação (  $H(p)/2p$  ), cuja curva permite a localização do ponto de máxima eficiência fotônica ( Máximo Ganho de Codificação ), podendo, então, ser definida um ponto de Entropia ótima ( não máxima ), de acordo com essa abordagem. Através da determinação deste ponto, consegue-se o valor de  $p$  ( Probabilidade de Marcas) necessário para se atingir o ganho máximo de codificação. O conhecimento deste valor de  $p$  é importante no projeto do código, pois, como citado no capítulo anterior, permite nortear a escolha das palavras-código e a topologia do FSTD ao longo do desenvolvimento do algoritmo de State-splitting.

Outro fato que também torna importante o conhecimento das curvas de  $H(p)$  é a possibilidade de se determinar a eficiência do código para qualquer valor de probabilidade de marcas obtido ao final de um projeto. Como os valores de  $H(p)$ , calculados pelas expressões do Capítulo IV, correspondem às máximas taxas

teoricamente atingíveis por um código que obedece uma dada restrição, é importante poder quantificar, no fim do projeto do código, o quão próximo este está do caso ideal, que seria obtido se as suas seqüências fossem maxentrópicas.

A expressão (4.39), que permite calcular o Ganho Máximo atingível pelas seqüências  $(d,k)$ , bem como os desdobramentos decorrentes desta e descritos nos parágrafos finais de IV.2, pertencem ao conjunto de contribuições da pesquisa apresentada.

O exemplo de aplicação, descrito no Capítulo VI também se constitui uma contribuição deste trabalho, pois o mesmo não foi encontrado na literatura pesquisada, bem como o tipo de análise apresentada, destacando-se as características principais obtidas com o código encontrado.

É importante ser dito que este trabalho não visou esgotar o assunto concernente à aplicação de códigos na transmissão óptica, o que seria impossível. O objetivo foi investigar a possível utilização de códigos com restrições  $d$ ,  $(d,k)$  ou RLL – que são largamente empregados nas áreas de gravação óptica e magnética – na transmissão em enlaces opticamente amplificadas, verificando-se a qualidade dos resultados conseguidos através desta estratégia.

O trabalho apresentado pode ser utilizado como ponto de partida para investigações mais aprofundadas que não foram abordadas aqui e que se constituem temas interessantes de serem estudados, a saber :

- Pesquisa de novos e mais rápidos algoritmos para o cálculo numérico de  $H(p)$
- A otimização do algoritmo de cálculo numérico com vistas a se conseguir resolver os problemas de convergência, que não foi conseguida para valores muito distantes entre  $d$  e  $k$ , o que permitiria a obtenção de curvas de  $H(p)$  para quaisquer valores desses parâmetros
- O estudo e análise do Algoritmo de State-splitting visando estender os resultados de [4] – onde o algoritmo permite obter códigos de blocos com taxas racionais arbitrariamente próximas da capacidade ( $\max\{H(p)\}$ ) – de forma a se conseguir um algoritmo que possibilitasse o projeto de um código de blocos com uma taxa racional arbitrariamente próxima de qualquer ponto da curva de  $H(p)$ . Isto seria essencial para se atingir a máxima eficiência fotônica com maior exatidão

- O estudo do ganho de codificação levando-se em conta o problema completo, ou seja, considerando também os ganhos de detecção destes códigos em receptores otimizados, que não foram levados em conta neste trabalho.

Como comentário final, é importante salientar que todo o estudo apresentado vale para a classe de enlaces ópticos que são limitados por perdas. Códigos esparsos podem fornecer ganhos de codificação quando usados em enlaces limitados pela potência média e a maximização destes ganhos é limitada, então, pela dispersão, devido à penalidade de faixa resultante do processo de codificação.

Quando o sistema já é limitado pela dispersão ou estiver próximo desta condição, a obtenção de ganhos de codificação de linha com códigos que aumentam a esparsidade dos bits transmitidos não parece ser uma boa estratégia, pois o eventual Ganho de Codificação obtido é compensado pelos efeitos danosos do aumento de velocidade, havendo perda de desempenho, como pode ser verificado em [5].

## *Referências*

- [1] Kees A. S. Immink, "Coding Techniques for Digital Recorders", Prentice-Hall, UK, 1991;
- [2] Paul E. Green, Jr., "Fiber Optic Networks", Prentice-Hall, New Jersey, 1993;
- [3] Paul E. Green, Jr., "Optical Networking Update", IEEE J. Select. Areas Commun. , vol.14, n° 5, pp. 764-779, 1996;
- [4] Brian H. Marcus, Paul H. Siegel, Jack K. Wolf, "Finite-State Modulation Codes for Data Storage", IEEE J. Select. Areas Commun., vol.10, n° 1, pp. 5-37, 1992;
- [5] Helio Waldman, Moisés R.N.Ribeiro, Rony M. da Silva, "Códigos de Linha para Enlaces Ópticos", Anais do 15° Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, pp. 306-310, Recife, Brasil, 1997;
- [6] C.E.Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", Bell Syst. Tech. J., vol.27, pp 379-423, July 1948;
- [7] W.F.Giozza, Evandro Conforti, Helio Waldman, "Fibras Ópticas : Tecnologia e Projeto de Sistemas", Makron Books, São Paulo, 1991;
- [8] J.R.Pierce, "Optical Channels : Practical Limits with Photon Counting", IEEE Trans. Commun., vol COM-26, n°12, pp. 1819-1821, December 1978;
- [9] Kenneth S. Miller, "Engineering Mathematics", Dover Publications, Inc., New York, 1956;

- [10] Márcia A.G. Ruggiero, Vera L.R.Lopes, “Cálculo Numérico : Aspectos Teóricos e Computacionais”, McGraw-Hill, São Paulo, 1997;
- [11] Hamilton L. Guidorizzi, “Um Curso de Cálculo”, vol.1, LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1987;
- [12] Govind P. Agrawal, “Fiber-Optic Communication Systems”, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1992;
- [13] Erwin Kreyszig, “Advanced Engineering Mathematics”, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1993.
- [14] Thomas M. Cover, Joy A. Thomas, “Elements of Information Theory”, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1991.

# Apêndice

## A.1 - Fórmula de Stirling

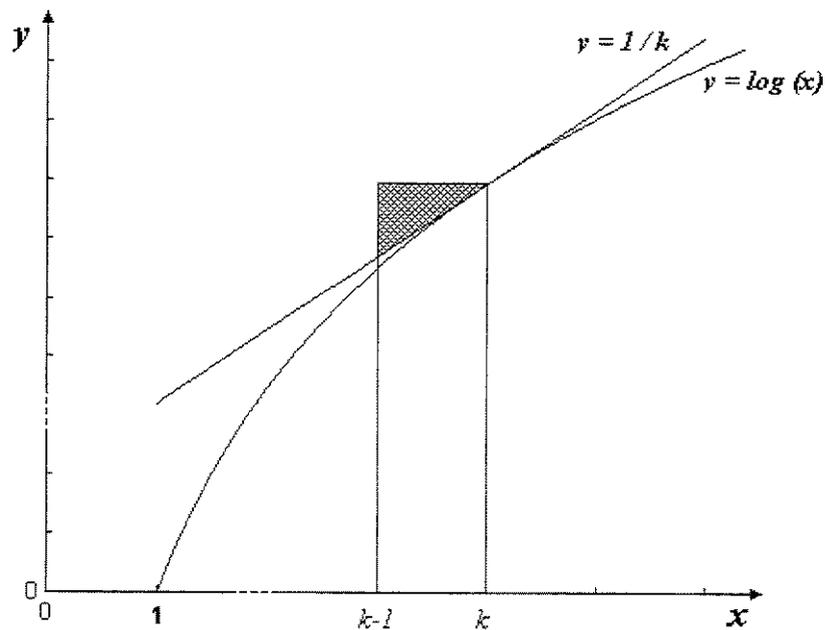
A Fórmula de Stirling, dada em (4.6) e utilizada ao longo de todo este trabalho para o cálculo das Entropias associadas aos tipos de restrições estudadas, será deduzida neste apêndice com o objetivo de reforçar a sua validade para os casos apresentados.

Relembrando, a referida fórmula aparece em (4.6), aproximando o cálculo de  $n!$  através da seguinte expressão :

$$\boxed{n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} (1 + \theta_n)} \quad (\text{A1.1})$$

onde  $\theta_n$  se aproxima de zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Esta expressão é chamada assintótica, desde que, quanto maior  $n$ , mais a expressão  $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} n^n [\exp(-n)]$  aproxima-se de  $n!$ .

Para derivar a Fórmula de Stirling, seja o gráfico da função  $y = \log x$ , mostrado na figura abaixo. ( será adotada, ao longo deste item, a notação  $\log (m)$  como sendo o logaritmo do número  $m$ , tomado na base  $e$  )



**Figura A1-1** – Gráfico da função  $y = \log(x)$  e sua derivada no ponto  $x = k$ .

A área do retângulo entre dois inteiros consecutivos  $(k-1)$  e  $k$  será  $[k - (k - 1)] \log k = \log k$ . A tangente à curva no ponto  $x = k$  terá a seguinte inclinação

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=k} = \frac{1}{k}$$

portanto, a área do triângulo assinalado será

$$\frac{1}{2} [k - (k - 1)] \frac{1}{k} = \frac{1}{2k}$$

Por outro lado, a área sob a curva  $y = \log x$  entre dois pontos consecutivos  $k-1$  e  $k$  é dada por

$$\int_{k-1}^k \log x \, dx.$$

Com isso tem-se, com referência à figura A1-1, a seguinte desigualdade

$$\log k - \frac{1}{2k} > \int_{k-1}^k \log x \, dx$$

Somando a desigualdade de  $k = 2$  até  $k = n$ , tem-se

$$\sum_{k=2}^n \log k - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} > \int_1^n \log x \, dx \quad (\text{A1.2})$$

Contudo,

$$\sum_{k=2}^n \log k = \log n!$$

ainda,

$$\int_1^n \log x \, dx = n \log n - n + 1$$

Com isso a equação A1.2 pode ser escrita como

$$\boxed{\log n! > n \log n - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \quad (\text{A1.3})$$

Para obter uma desigualdade para a somatória de  $1/k$ , seja o gráfico da função  $y = \frac{1}{x}$ , como mostrado na figura A1-2.

Utilizando raciocínio análogo ao anterior e notando que a área do triângulo assinalado é

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

ter-se-á

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \log(n+1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \quad (\text{A1.4})$$

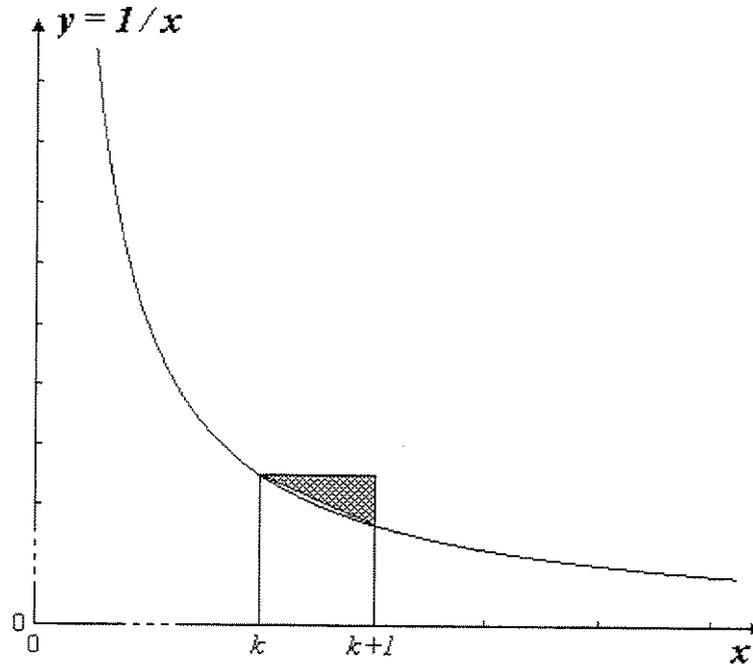


Figura A1-2 – Gráfico da função  $y = 1/x$ .

Utilizando o resultado de A1.4 em A1.3 tem-se

$$\log n! > n \log n - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ \log(n+1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \right] \quad (\text{A1.5})$$

$$= \left( n + \frac{1}{2} \right) \log n - n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \left( \frac{n+1}{n} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)}$$

Porém, para  $n \geq 1$ ,

$$\log \left( \frac{n+1}{n} \right) > 0$$

e também,

$$\frac{1}{4} \left[ 1 - \frac{1}{n+1} \right] > 0$$

Portanto, se estes termos forem desprezados na equação A1.5, a desigualdade será bastante simplificada, resultando em

$$\log n! > \left( n + \frac{1}{2} \right) \log n - n + \frac{1}{2}$$

Agora, seja :

$$a_n = \log n! - \left( n + \frac{1}{2} \right) \log n + n - \frac{1}{2} \quad (\text{A1.6})$$

Se conseguir se mostrar que

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots,$$

então, desde que  $a_n > 0$ , o limite de  $a_n$  quando  $n$  vai para infinito existirá, pois uma seqüência decrescente de números positivos tem um limite. Chame-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

Pode-se escrever, portanto,

$$a_n - a = Z_n$$

onde :  $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = 0$ .

A equação A1.6 ficará

$$\boxed{\log n! = \left( n + \frac{1}{2} \right) \log n - n + \frac{1}{2} + a + Z_n} \quad (\text{A1.7})$$

Antes de se continuar com os cálculos em A1.7, será provada as suposições consideradas para  $a_n$ . O objetivo será provar que  $a_n - a_{n+1} > 0$ . Escrevendo-se :

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \log n! - \log(n+1)! - \left( n + \frac{1}{2} \right) \log n + \left( n + \frac{3}{2} \right) \log(n+1) + n - (n+1) \\ &= \left( n + \frac{1}{2} \right) \log \left( \frac{n+1}{n} \right) - 1 \end{aligned}$$

Usando a expansão de McLaurin de  $\log(1+x)$ , pode-se escrever :

$$a_n - a_{n+1} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \dots \right) - 1$$

Desde que a série é alternada e cada termo é menor que o seu predecessor ( para  $n > 1$  ), conclui-se que

$$a_n - a_{n+1} > \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} \right) - 1$$

ou

$$a_n - a_{n+1} > \left( \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} - \frac{1}{8n^4} \right)$$

Pode-se facilmente verificar que

$$\left( \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} - \frac{1}{8n^4} \right) > 0$$

para  $n = 2, 3, \dots$ , enquanto para  $n = 1$ , a expressão também é verificada. Com isso, termina-se a prova das hipóteses assumidas para  $a_n$ .

Voltando à expressão A1.7, será tomado o antilog em ambos os lados da mesma.

Assim,

$$n! = An^n \sqrt{n} e^{-n} (1 + \theta_n) \quad (\text{A1.8})$$

$$\text{onde : } A = e^{\frac{a+1}{2}} ;$$

$$e^{Z_n} = 1 + \theta_n .$$

Desde que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{Z_n} = 1$ , conclui-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ .

Para encontrar o valor numérico de  $A$  utiliza-se a fórmula de Wallis [9, Seção 5], que estabelece

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{[(2n)!]^2 n}$$

Substituindo  $n!$  e  $2n!$  da equação acima pela equação A1.8, obtém-se após algumas manipulações algébricas,

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^2 (1 + \theta_n)^4}{2 (1 + \theta_{2n})^2} = \frac{A^2}{2}$$

ou

$$A = \sqrt{2\pi} .$$

Finalmente, substituindo-se o valor de  $A$  na equação A1.8, tem-se a Fórmula de Stirling :

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} (1 + \theta_n)$$

## A.2 – Trabalho Publicado

Anais do 15º Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, pp. 306-310, Recife, Brasil, 1997 – Próximas páginas.

## CÓDIGOS DE LINHA PARA ENLACES ÓPTICOS

Helio Waldman, Moisés R. N. Ribeiro<sup>1</sup> e Rony M. da Silva  
 DECOM/FEEC/UNICAMP, CP. 6101, 13083-970 Campinas, SP - BRASIL  
 Tel: (019)788-8324, FAX: (019)788-1395  
 e-mail: waldman@decom.fee.unicamp.br

**Resumo:** Os sistemas ópticos estão se tornando essencialmente ilimitados em faixa, mas continuam limitados em potência. Isto motiva a busca de códigos de linha que minimizem o dispêndio de fótons por bit, com a utilização das sobras de faixa geradas pelo gargalo eletrônico. Este artigo discute algumas possíveis soluções.

### 1. Introdução

Em muitos sistemas de transmissão digital, a energia despendida na transmissão de um dígito binário é a mesma para os dois símbolos do alfabeto binário. Este, porém, não é o caso da transmissão óptica por modulação de intensidade (IM). Nesta, ao menos nominalmente, não há dispêndio de energia na transmissão de um zero, ao passo que a transmissão de uma marca implica numa energia finita que se traduz na emissão de um número médio  $N_1$  de fótons por marca.

Nestas condições, o mínimo dispêndio de fótons seria obtido transmitindo apenas zeros, mas assim não conseguiríamos transmitir nenhum bit de informação. Por outro lado, a transmissão de dígitos binários independentes e equiprováveis - ou seja, a não adoção de uma codificação de linha - maximiza a quantidade de bits por símbolo, mas não a de fótons por bit. Em sistemas com limitação de faixa, freqüentemente se deseja maximizar a eficiência no uso desta faixa, e aí faz sentido maximizar a quantidade de bits por símbolo. A evolução dos sistemas ópticos, porém, está levando atualmente a situações de enorme disponibilidade de faixa, em contraste com uma relativa escassez de potência - ou seja, de fótons. Esta é a motivação para a busca de esquemas de codificação de linha que minimizem o dispêndio de fótons por bit.

### 2. Ganhos de Codificação

Seja  $p$  a probabilidade do símbolo binário ser uma marca, e  $R$  a quantidade de bits por símbolo binário (correspondente à taxa de um código de linha

eventualmente utilizado, supondo-se a fonte de dados maxentrópica), o número de fótons por bit será:

$$N = \frac{N_1 p}{R} \quad (1)$$

O parâmetro  $N_1$  é essencialmente determinado pela tecnologia de recepção e pela probabilidade de erro desejada [1, Cap. 5], podendo portanto ser tratado como constante neste contexto. Assim sendo, o número de fótons por bit é minimizado pela maximização de  $(R/p)$ . Na ausência de codificação de linha,  $R = 1$  e  $p = 1/2$ , de maneira que  $R/p = 2$ . Assim sendo, podemos definir um ganho de codificação dado por:

$$\Gamma = \frac{R}{2p} \leq \frac{H(p)}{2p}, \quad (2)$$

onde  $H(\cdot)$  é a função entropia:

$$H(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p). \quad (3)$$

#### 2.1 Ganhos Irrestritos

O limitante superior  $(2p)^{-1} H(p)$  sobre o ganho de codificação cresce ilimitadamente quando  $p$  se aproxima de zero, sugerindo ganhos ilimitados de codificação. Ocorre, porém, que quando  $p$  tende a zero a entropia  $H(p)$  também cai a zero, de maneira que a taxa do código também cairia a zero, obrigando a uma ocupação infinita de faixa para transmitir qualquer quantidade finita de bits por segundo. Portanto, ganhos ilimitados de codificação só poderão ocorrer ao custo de uso ilimitado de faixa, o que não é prático.

Suponhamos, porém, que a faixa disponível seja  $K$  vezes maior que a taxa de bits, de maneira que a taxa  $R$  possa descer até  $K^{-1}$  sem grande dificuldade. O ganho de codificação ficará então limitado a:

$$\Gamma_{max} = \frac{R}{2H^{-1}(R)} = K^{-1} [2H^{-1}(K^{-1})]^{-1}, \quad (4)$$

<sup>1</sup> Depto. de Eng. Elétrica, UFES

Este trabalho foi apoiado pelo CNPq, pela CAPES e pela Telebrás.

onde  $H^{-1}(\cdot)$  é a função entropia inversa, com valores em  $[0, 1/2]$ . A Figura 1 mostra o ganho máximo de codificação  $\Gamma_{\max}$  em função de  $K$ .

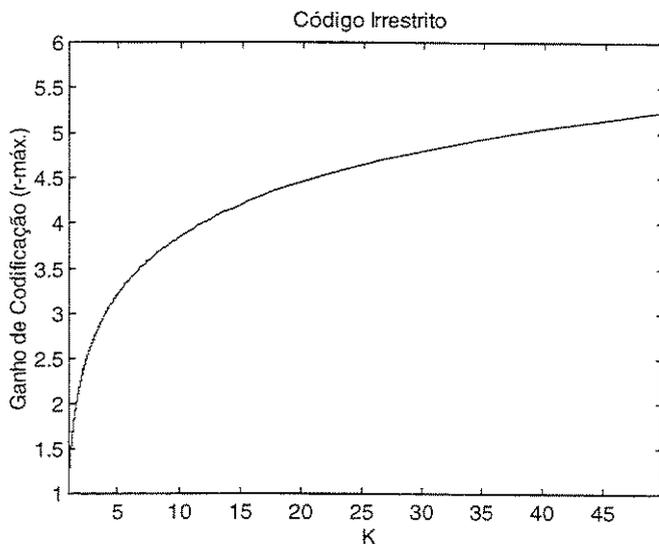


Fig. 1 - Ganho máximo de codificação.

## 2.2 Sistemas Restritos

Geralmente, os códigos de linha implementam algum tipo de restrição sobre a seqüência digital, de forma a adequar as características do sinal às do canal. Uma restrição comum é a restrição-dc, que limita a diferença entre o número de zeros e marcas em qualquer subsequência a um teto que costuma ser pequeno. Como esta restrição força  $p$  a ser igual a  $1/2$  e reduz  $R$  abaixo de 1, ela impede a obtenção do ganho dado por (2).

Uma outra classe de restrições comumente encontrada é constituída pelas seqüências de comprimento serial limitado ("run-length limited", ou RLL), caracterizadas pelos parâmetros  $d$  e  $k$ . Em seqüências  $(d, k)$ , duas marcas consecutivas precisam ser separadas por pelo menos  $d$  e no máximo  $k$  zeros. As seqüências RLL  $(d, k)$  são obtidas das seqüências  $(d, k)$  pela substituição de cada marca por uma transição e cada zero por uma não-transição. Assim sendo, as seqüências RLL  $(d, k)$  são formadas por uma sucessão de séries de marcas e séries de zeros com comprimento mínimo  $(d+1)$  e comprimento máximo  $(k+1)$ .

A investigação da viabilidade do ganho de codificação definido em (2) nestas classes de sistemas restritos depende do cálculo da entropia como função da probabilidade de marcas para o sistema restrito em estudo. Substituindo-se  $H(\cdot)$  na Eq. (4) por esta função, pode-se

estabelecer um limitante superior para o ganho de codificação permitido pela restrição.

Fazendo-se  $k = \infty$  na restrição  $(d, k)$ , obtém-se a restrição  $d$ , que é capaz de suprimir parcialmente o conteúdo espectral do sinal em baixas frequências [2]. A Figura 2 mostra a entropia do espaço de seqüências- $d$

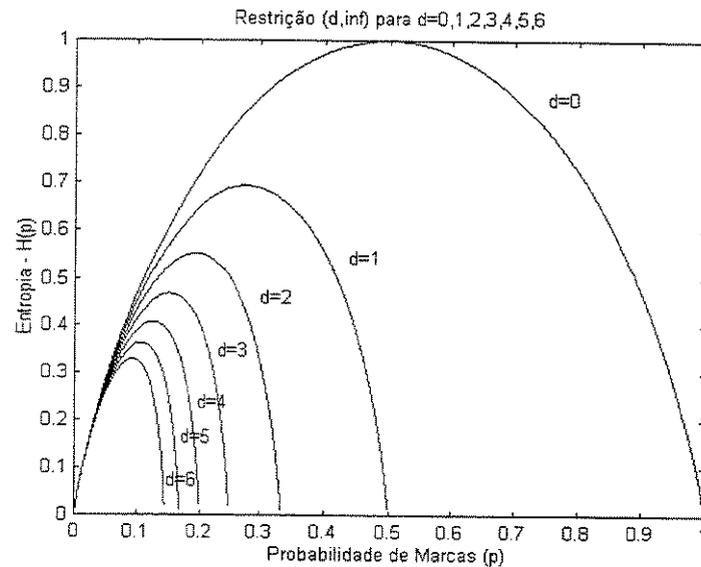


Fig. 2 - Entropia das seqüências- $d$ .

para diversos valores de  $d$ . Conforme mostrado no Apêndice A1 a partir de um argumento combinatório, ela é dada por:

$$H_d(p) = (1 - pd) \log_2(1 - pd) - p \log_2 p - [1 - p(d + 1)] \log_2[1 - p(d + 1)]. \quad (5)$$

Tal como no caso irrestrito, também para a restrição- $d$  o ganho cresce monotônica e ilimitadamente quando  $p$  e  $H_d(p)$  tendem a zero, de maneira que o ganho máximo depende da mínima taxa que se pode tolerar em função de limitações de faixa.

Quando se introduz uma restrição  $(d, k)$  com  $k$  finito, a seguinte função entropia pode ser obtida com argumentos semelhantes aos do Apêndice A1, porém mais complexos:

$$H_{d,k}(p) = \max_{\mu_{d+3}, \mu_{d+4}, \dots, \mu_{k+1}} \left\{ g(p) - \sum_{i=3}^{k-d+1} g(\mu_{d+i}) - \left[ 1 - (d + 1)p - \sum_{i=3}^{k-d+1} (i - 1)\mu_{d+i} \right] \right\}$$

$$-g\left[(d+2)p-1+\sum_{i=3}^{k-d+1}(i-2)\mu_{d+i}\right], \quad (6)$$

onde  $g(x) = x \log_2(x)$ .

A Figura 3 mostra as entropias de espaços restritos  $(2,k)$  para diversos valores de  $k$ . Observa-se que agora existe uma probabilidade de marcas  $p$  e uma entropia  $H_{d,k}(p)$  que geram um máximo local para o ganho definido em (2), de maneira que a Eq. (4) não é mais aplicável.

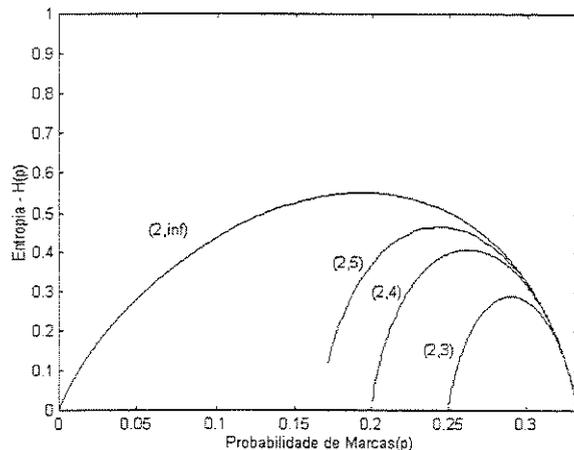


Fig. 3 - Entropia das seqüências  $(2,k)$ .

### 2.3 Construção de Códigos

Em geral, a teoria que dá apoio à construção de códigos em espaços restritos é dirigida para realizar a capacidade do sistema, ou seja, construir códigos que se aproximem do pico da função entropia. Esta teoria resultou no chamado algoritmo de “state-splitting” [3], que garante a obtenção de um código em qualquer taxa racional, abaixo da capacidade, previamente especificada.

Conforme vimos acima, porém, a maximização do número de fótons por bit em geral não leva à capacidade, mas sim à operação em algum ponto da parte ascendente da função entropia. Isto levanta naturalmente a questão de se saber se é possível garantir a existência de códigos em pontos  $(R,p)$ , com  $R$  racional, arbitrariamente próximos de um ponto desejado da função entropia do espaço restrito. Como o algoritmo de “state-splitting” garante isso para o pico da curva, e oferece uma multiplicidade de soluções, a hipótese parece plausível mas não está demonstrada.

De qualquer forma, uma vez estabelecido, sobre a curva da entropia do espaço restrito, um ponto interessante de operação, podemos escolher uma taxa racional

razoavelmente vizinha (por baixo) da entropia ótima, mas com numerador e denominador pequenos para minimizar a complexidade esperada do código. A partir daí, podemos aplicar o algoritmo de “state-splitting” para esta taxa, procurando minimizar a probabilidade de marcas através do descarte das palavras-código com maior número de marcas, sempre que o algoritmo oferecer a oportunidade de descartar palavras.

#### 2.3.1 Um Exemplo

As idéias acima apresentadas podem ser ilustradas pelo seguinte código de blocos deslizantes de taxa 1:2, que obedece à restrição  $d = 2$ :

a) *Codificador*. Tem dois estados, digamos A e B. No estado A, o bit 0 é codificado como 10 e o bit 1 como 01; em ambos os casos, o próximo estado é B. No estado B tanto 0 como 1 são codificados como 00, com o próximo estado sendo B se o bit de dados for 0, e A no caso contrário;

b) *Decodificador*. A palavra-código 01 é decodificada como 1, e a palavra-código 10 como 0. A palavra-código 00 é decodificada como 0 se a próxima palavra-código for 00, e como 1 no caso contrário. A sincronização de bloco pode ser adquirida a partir das ocorrências de 1001: como a palavra-código 10 é sempre seguida por 00, o par central de zeros em 1001 é necessariamente uma palavra-código.

Este código foi obtido aplicando o algoritmo de bifurcação de estados (“state-splitting”) para a restrição mencionada na taxa  $1/2$ , e guiando o algoritmo para maximizar a esparsidade. Para uma fonte maxentrópica de dados, este código terá  $p = 1/6$  e  $R = 1/2$ , resultando num ganho de codificação  $\Gamma = 3/2$ , que pode ser usado por qualquer sistema no qual  $K > 2$ . Das Eqs.(4) e (5), ganhos de codificação de até 2,27 poderiam ser obtidos para sistemas com  $R = 1/2$ , mas provavelmente ao custo de maior complexidade.

### 3. Enlaces Opticamente Amplificados

O aperfeiçoamento das fibras ópticas elevou a faixa total de transmissão de cada fibra a cerca de 25000 GHz, um valor mil vezes superior à faixa total de rádio em qualquer enlace atmosférico. Apesar disso, a velocidade dos enlaces convencionais (monocanal) continua limitada a alguns GHz, em virtude do chamado *gargalo eletrônico*: a incapacidade de gerar e processar sinais eletrônicos em velocidades muito superiores a 10 GHz [4].

A tecnologia mais promissora para ocupar esta faixa inexplorada é a multiplexagem por divisão em comprimento de onda (“wavelength division multiplexing”, ou WDM), na qual vários comprimentos de onda são propagados na mesma fibra, cada um modulado por um fluxo de um ou alguns Gbps. WDM foi viabilizada pelo surgimento de bons amplificadores ópticos (especialmente na terceira janela óptica), que são capazes de amplificar todos os canais ópticos em sua faixa de ganho, dispensando assim os repetidores regenerativos. O melhor exemplo é o amplificador a fibra dopada com érbio (AFDE), cuja faixa de ganho se estende por 4000 GHz.

Em enlaces WDM opticamente amplificados, os 4000 GHz de faixa disponível poderiam em princípio ser partilhados por centenas, ou até um ou dois milhares, de canais Gbps. O estado-da-arte atual, porém, implica numa série de limitações (baixa seletividade dos filtros ópticos, não-linearidades das fibras, deriva dos componentes, etc.) que exigem um espaçamento mínimo da ordem de 100 GHz entre os canais, de maneira que grande parte do espectro continuará inexplorado [4].

Nestes enlaces, o ruído dominante é causado pelo batimento entre o sinal e a emissão espontânea amplificada (“amplified spontaneous emission”, ou ASE) dos amplificadores [5], cuja caracterização é semelhante à do ruído *shot* [6], para o qual vale o ganho definido na Eq. (2). Alguns enlaces, porém, poderão ser limitados pela dispersão, e não pelo ruído, havendo portanto a necessidade de distinguir entre esses dois casos.

### 3.1 Enlaces Limitados por Perdas

O desempenho limitado pelas perdas em enlaces opticamente amplificados é obtido em [7, Cap.11] para sinais não-codificados. Seguindo a mesma metodologia analítica para sinais codificados, obtivemos a seguinte expressão para a relação sinal-ruído SNR no ponto de decisão do receptor:

$$SNR = \left( \frac{P_T}{2hf_c MN_{sp} \alpha_f} \right) \left( \frac{\ln G_a}{G_a - 1} \right) \left( \frac{R}{2pBZ} \right), \quad (6)$$

onde  $P_T$  é a potência transmitida,  $hf_c$  é a energia dos fótons,  $M$  é o número de amplificadores ópticos em cascata,  $N_{sp}$  é o fator de emissão espontânea dos amplificadores,  $\alpha_f$  é a atenuação da fibra,  $G_a$  é o ganho dos amplificadores,  $Z$  é o comprimento total do enlace, e  $B$  é a taxa de bits. Como podemos verificar, o mesmo ganho definido em (2) reaparece neste contexto.

### 3.2 Enlaces Limitados por Dispersão

Nesta Seção, discutimos as taxas que podem ser atingidas pelos códigos de linha que proíbem a ocorrência de uma ou mais subsequências de três dígitos consecutivos que possam ser desfavoráveis para a detecção do dígito do meio. A Tabela I mostra as capacidades de todas as restrições definidas por uma lista  $L$  de até duas subsequências de 3 dígitos, calculadas conforme a fórmula de Shannon [2, Cap. 3]. Alguns pares de subsequências estão agregados em classes de equivalência nas quais a proibição de uma implica na proibição da outra e vice-versa. Um código que implementa a proibição de 010 (capacidade 0.8114) com taxa 4/5 é proposto em [8].

000	0.879					
010	0.694	0.811				
001/100	0.694	0.551	0.694			
110/011	0.405	0	0	0.694		
101	0.694	0.694	0	0.551	0.811	
111	0.694	0.694	0.405	0.694	0.694	0.879
$L_1 \uparrow L_2 \rightarrow$	000	010	001/100	110/011	101	111

Tabela I - Capacidade da restrição  $L = \{L_1\} \cup \{L_2\}$ .

### 3.3 Ganhos Máximos de Codificação

A maximização do ganho de codificação leva a uma situação na qual o sistema é limitado por uma combinação de ruído e dispersão, de maneira que não se pode mais caracterizá-lo nem como limitado por ruído nem por dispersão. Nestas condições, o sistema não é bem caracterizado pelo diagrama de olho clássico, devido à possível predominância de termos não-aditivos e não-estacionários no ponto de decisão. A necessidade de caracterizar o desempenho na presença de ruídos não aditivos e não-estacionários deste tipo levou [9] a propor uma generalização experimental do conceito de diagrama-de-olho, chamado “padrão de taxa de erros”. Em [10], este conceito foi estendido a um ambiente computacional, resultando numa ferramenta para o cálculo de padrões de taxas de erros.

O cálculo de padrões de taxas de erros é capaz de determinar  $R_{min}=1/K$  para diversas restrições, sem desprezar as não-linearidades do laser e ruídos não estacionários do sistema, fornecendo assim um contexto conceitualmente robusto para a comparação de códigos neste caso extremo. Tendo em vista as dificuldades de normalização do comportamento não-linear do laser,

isto tem que ser feito caso a caso. A seguir, discutimos alguns casos específicos com o apoio da ferramenta computacional discutida em [10] e [6].

### 3.4 Simulação Computacional de Ganhos na Presença de Ruído e Dispersão

Para o estudo da influência da supressão de determinadas seqüências sobre desempenho do sistema, tomamos um sistema STM-16 (2,5 Gb/s) com um amplificador óptico, como pré-amplificador, com 20dB de ganho não saturado, figura de ruído de 5 dB e filtro óptico de 1nm. Dados sobre o laser e a fibra utilizados na simulação podem ser encontrados em [11]. O receptor óptico com sensibilidade de -34,4 dBm possui um filtro elétrico com formato gaussiano com uma banda de 0,75 da taxa de bits sem codificação na linha. Levantamos as curvas de penalidade por fechamento do diagrama-de-olho e da taxa de erros de símbolo (BER) em função do comprimento do enlace para o posicionamento ótimo do ponto de decisão. Observa-se que a análise baseada somente em penalidades não é suficiente. Os resultados do sistema sem codificação servem de referência para as nossas comparações com os resultados dos sistemas com codificação de linha, para os quais a largura do filtro elétrico foi otimizado buscando o melhor desempenho em termos de taxa de erro. A tabela II mostra a largura otimizada do filtro elétrico e o valor da potência média lançada na fibra em cada caso.

Seq. Proibida	$P_{méd}$ a (mW)	Banda ótima do receptor (GHz)
∅	1,102	-
010	1,18	3,125*0,55
010 e 101	1,047	3,75*0,35
110	0,767	3,75*0,45
110 e 101	0,657	-

Tabela II - Parâmetros das simulações.

Em todos os casos, o aumento na taxa de símbolos da linha acentua as degradações impostas pelo laser de tal forma que não houve ganho com a codificação; ao contrário, temos perda de desempenho. É interessante observar que a eliminação simultânea das seqüência 010 e 101 propiciou um desempenho próximo do caso sem codificação; isto deve-se ao fato que neste caso não teremos nenhum símbolo isolado, o que permite a redução

significativa da banda do filtro no receptor. A eliminação simultânea das seqüências 110 e 101 teve um desempenho tão inferior que não consta nos gráficos.

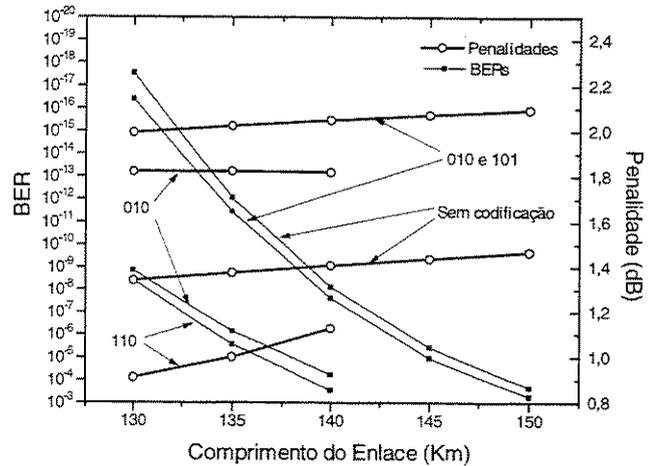


Fig. 4 - Valores otimizados de taxa de erros de bits e penalidades.

Se substituirmos a modulação direta por modulação externa, as degradações de desempenho causadas pela modulação do laser serão removidas, sendo plausível o aparecimento de algum ganho nos melhores casos. Esta questão está sendo investigada.

### 4. Conclusões

Códigos esparsos podem fornecer ganhos de codificação quando usados em enlaces limitados pela potência média. A maximização destes ganhos é limitada pela dispersão.

Quando o sistema já é limitado pela dispersão ou estiver próximo desta condição, a obtenção de ganhos de codificação de linha com códigos que combatem a interferência entre símbolos não parece significativa, pois a eventual redução da interferência é neutralizada pelos efeitos danosos do aumento da velocidade.

### 5. Apêndice A1

Numa seqüência- $d$  com  $N$  dígitos, dos quais  $pN$  marcas, existem  $pN$  palavras  $.10^d$ , onde  $0^d$  representa uma sucessão de  $d$  zeros sucessivos; e  $[N - (d + 1)pN]$  zeros avulsos. Como estes  $(N - dpN)$  objetos podem estar dispostos em qualquer ordem, o número  $S_d(N)$  de seqüências- $d$  de comprimento  $N$  e densidade de marcas  $p$  será:

$$S_d(N) = \binom{N - dpN}{pN} = \frac{(N - dpN)!}{(pN)! [N - (d+1)pN]!} \quad (\text{A1})$$

A entropia  $H_d(p)$  é:

$$H_d(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log_2 S_d(N)}{N} \quad (\text{A2})$$

Fazendo-se  $N$  tender a infinito em (A1) e aplicando-se a fórmula de Stirling, a aplicação do limite descrito em (A2) resulta na Eq. (5).

## 6. Referências

- [1] W.F. Giozza, E. Conforti e H. Waldman, "Fibras Ópticas: Tecnologia e Projeto de Sistemas", Makron Books, São Paulo, 1991.
- [2] K.A.S. Immink, "Coding Techniques for Digital Recorders", Prentice-Hall, UK, 1991.
- [3] B.H. Marcus, P.H. Siegel and J.K. Wolf, "Finite-State Modulation Codes for Data Storage," IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 10, No. 1, pp. 5-37, Jan. 1992.
- [4] P.E. Green, Jr., "Optical Networking Update", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 14, pp. 764-769, Jun. 96.
- [5] N.A. Olsson, "Lightwave Systems with Optical Amplifiers", Journ. of Lightwave Tech., vol. 7, no. 7, pp. 1071-1082, July 1989.
- [6] M.R.N. Ribeiro, H. Waldman, J. Klein and L.S. Mendes, "Error Rate Patterns for the Modeling of Optically Amplified Transmission Systems", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, a ser publicado no vol. 15, no. 4, Maio 97.
- [7] P. E. Green, "Fiber optics networks", Prentice-Hall, New Jersey, 1993.
- [8] N.L. Swenson and J.M. Cioffi, "Sliding-Block Line Codes to increase Dispersion-Limited Distance of Optical Fiber Channels," IEEE Journal on Selected Areas in Communications, vol. 13, No. 3, pp. 485-498, April 1995.
- [9] H. Nishimoto et al., "New Method of Analyzing Eye Patterns and its Application to High-speed Optical Transmission System", Journ. of Lightwave Tech., vol. 6, no. 5, pp. 678-685, May 1988.
- [10] Padrões de Taxa de Erro em Sistemas Ópticos Digitais de Alta Capacidade com Amplificação Fotônica, Anais do 13<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, pp. 113-118, Águas de Lindóia, Brasil, Sep. 1995.
- [11] Moisés R.N. Ribeiro, "Padrões de Taxa de Erros em Enlaces Ópticos de Alta Velocidade," Tese de Mestrado, FEE/UNICAMP, 1996.