

**Universidade Estadual de Campinas**

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Laboratório de Análise Convexa



# Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

**Maurício Carvalho de Oliveira**

Mestre em Engenharia Elétrica — FEEC/UNICAMP

em 28 de maio de 1999 perante a banca examinadora:

**José Cláudio Geromel**

Orientador

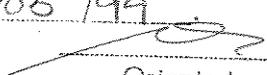
**Alexandre Trofino Neto**

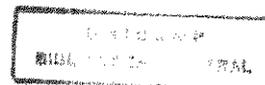
**Liu Hsu**

**Basílio Ernesto Almeida Milani**

**João Bosco Ribeiro do Val**

9916675

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por <u>Maurício Carvalho de Oliveira</u> e aprovada pela Comissão Julgada em <u>28/05/99</u>
 Orientador



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	11-6
Ex.	001.38686
DOC.	229/99
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	04/09/99
CPD	

CM-00134261-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA — BAE — UNICAMP

OL4c Oliveira, Maurício Carvalho de  
Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades  
matriciais lineares. / Maurício Carvalho de  
Oliveira. — Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: José C. Geromel.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Programação (Matemática). 2. Otimização matemática.  
3. Algoritmos. I. Geromel, José C. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.  
III. Título.

# Resumo

Esta dissertação é dedicada ao estudo de métodos de análise de sistemas dinâmicos e de projeto de filtros e controladores para sistemas lineares, tendo como ferramenta básica as desigualdades matriciais lineares.

Apresentamos uma pequena revisão de resultados conhecidos para análise de sistemas dinâmicos e desenvolvemos novas condições de estabilidade. Estes novos resultados nos permitem obter condições suficientes de estabilidade para diversos problemas, como a análise de estabilidade de sistemas lineares incertos com o auxílio de funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros.

Descrevemos parametrizações convexas para o projeto de filtros e controladores por realimentação do estado e por realimentação dinâmica da saída. Estas parametrizações são utilizadas na resolução de diversos problemas de filtragem e controle que ainda permaneciam sem solução como, por exemplo, o problema de controle positivo-real, o problema de filtragem descentralizada e robusta para sistemas incertos em domínios poliedrais e o problema de controle  $H_2$  com seleção simultânea de atuadores e sensores. Outros problemas abordados no texto são o controle robusto e descentralizado por realimentação dinâmica da saída e o problema de controle com múltiplos objetivos. O texto é ilustrado com exemplos numéricos e simulações.

# Abstract

This thesis is devoted to the analysis of dynamic systems and to the synthesis of filters and controllers for linear systems, all on the Linear Matrix Inequalities (LMI) framework.

We review some well known results on dynamic systems analysis and develop new stability conditions. The new results enable us to draw sufficient stability conditions for several open problems, as the stability analysis of linear uncertain systems with parameter dependent Lyapunov functions.

We describe a set of convex parametrizations for the synthesis of filters and controllers under state and dynamic output feedback. These parametrizations provide solutions to several open problems as, for instance, the synthesis of positive-real control systems, the robust and decentralized filtering of uncertain polyhedral systems and the  $H_2$  control problem with simultaneous selection of sensors and actuators. Other problems addressed in the text are the robust and decentralized dynamic output feedback control problem and the multi-objective control problem. The text is illustrated by examples and simulations.



*Where are you, Schooby-doo?*



# Agradecimentos

A angústia de deixar de lado pessoas que merecidamente deveriam ser citadas nesta página torna a redação destes agradecimentos tarefa difícil. Afinal de contas, depois de mais de nove anos de trabalho na *Faculdade de Engenharia Elétrica*, hoje *Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação*, da UNICAMP, são diversos os amigos e os colegas que me vêm à mente em boas lembranças.

Dentre todos estes amigos, o professor Geromel — orientador de iniciação científica, mestrado e doutorado — talvez tenha sido uma das pessoas com a qual eu tenha mais tempo convivido durante os últimos seis anos (para desespero da Dani e dos meus pulmões!). Em todo este tempo, ele tem sido um verdadeiro *mestre*, ensinando-me a investigar problemas em teoria de controle e otimização com curiosidade e rigor matemático. Se há algum brilho neste trabalho, ele é reflexo da inesgotável capacidade e dedicação do professor Geromel.

Durante a realização do meu programa de doutorado, tive o prazer de colaborar com dois outros professores, aos quais sou muito grato: Jacques Bernussou e Liu Hsu. Apesar do pequeno tempo de convívio, fruto do isolamento geográfico, a oportunidade de compartilhar idéias e problemas com estes dois pesquisadores foi a origem de muitos dos resultados contidos nesta dissertação. Agradeço em especial ao professor Bernussou o convite para a realização de um breve, porém agradabilíssimo, estágio no *Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes*, LAAS, em Toulouse, França. Ao professor Liu continuo devendo algumas cervejas na cidade maravilhosa.

A todos os professores do *Departamento de Telemática*, deixo um grande abraço, em especial, a Pedro Peres, Paulo Valente, Ivanil Bonatti e João Bosco. Agradeço também aos colegas que comigo compartilharam do *Laboratório de Telemática*, com atenção a Reinaldo Palhares, Ricardo Takahashi e Ricardo Campelo. A Pedro Gapski, companheiro de muitas coxinhas e cervejas, um abraço, extensivo à crescente família. Espero também poder vir a retribuir a hospitalidade de Humberto Araújo, que me aturou em Toulouse por quase um mês. Saúde a todos!

Sou grato à *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo*, FAPESP, que vem financiando os meus estudos desde o curso de graduação. Após todos estes anos de trabalho, ainda me impressiono com a seriedade e o respeito com os quais meus relatórios e pedidos de auxílio sempre foram tratados.

Em contraste com o caráter técnico deste trabalho, para alguns desprovido de qualquer paixão, é com intensidade e alegria que aprendi a desfrutar da vida. E estou certo de que é a convivência com pessoas muito especiais que sustenta esta aventura barroca. Aos meus pais, Antônio & Isa, e aos meus sogros, Zé & Gabi, muito obrigado. E que nenhum nefelibata perca o sono, questionando-se se ainda há espaço para sonhos. Estes, divido-os com Dani, minha esposa.



# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Exemplos</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Apresentação . . . . .	1
1.2 Notação . . . . .	2
<b>2 Fatos fundamentais em análise de sistemas dinâmicos</b>	<b>5</b>
2.1 Definições preliminares . . . . .	5
2.1.1 Estabilidade . . . . .	5
2.1.2 Norma $H_2$ . . . . .	6
2.1.3 Norma $H_\infty$ . . . . .	10
2.1.4 Positividade real . . . . .	11
2.2 Robustez . . . . .	12
2.2.1 Teorema do ganho pequeno . . . . .	13
2.2.2 Estabilidade absoluta . . . . .	14
2.2.3 O problema de Persidskii e $D$ estabilidade . . . . .	15
2.2.4 Sistemas com incertezas poliedrais . . . . .	16
2.2.5 Desempenho robusto . . . . .	17
2.3 Sistemas discretos . . . . .	23
2.3.1 Estabilidade . . . . .	23
2.3.2 Norma $H_2$ . . . . .	24
2.3.3 Norma $H_\infty$ . . . . .	25
2.3.4 Positividade real . . . . .	26
2.3.5 $D$ estabilidade . . . . .	26

<b>3</b>	<b>Novos resultados em análise</b>	<b>27</b>
3.1	<i>AB</i> estabilidade . . . . .	27
3.1.1	Sistemas contínuos . . . . .	27
3.1.2	Sistemas discretos . . . . .	31
3.1.3	Exemplos e aplicações . . . . .	32
3.1.4	Estabilidade robusta . . . . .	33
3.2	Estabilidade estendida para sistemas discretos . . . . .	35
3.2.1	Estabilidade . . . . .	36
3.2.2	Norma $H_2$ . . . . .	37
3.2.3	Norma $H_\infty$ . . . . .	38
3.2.4	Robustez e desempenho robusto . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Parametrização de filtros e controladores</b>	<b>43</b>
4.1	Controle por realimentação do estado . . . . .	44
4.1.1	Sistemas contínuos . . . . .	45
4.1.2	Sistemas discretos . . . . .	48
4.2	Filtragem . . . . .	51
4.2.1	Sistemas contínuos . . . . .	53
4.2.2	Sistemas discretos . . . . .	58
4.3	Controle por realimentação da saída . . . . .	62
4.3.1	Sistemas contínuos . . . . .	63
4.3.2	Sistemas discretos . . . . .	67
4.3.3	Propriedades de separação . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Miscelânea de problemas em projeto de filtros e controladores</b>	<b>77</b>
5.1	Controle positivo-real . . . . .	77
5.1.1	Realimentação do estado . . . . .	78
5.1.2	Realimentação da saída . . . . .	80
5.2	Filtragem robusta . . . . .	83
5.2.1	Sistemas contínuos . . . . .	83
5.2.2	Sistemas discretos . . . . .	87
5.3	Controle robusto por realimentação do estado . . . . .	91
5.4	Controle robusto por realimentação da saída . . . . .	95
5.4.1	Propriedades de separação . . . . .	96
5.4.2	Algoritmo de decomposição cruzada . . . . .	101
5.5	Controle e filtragem descentralizados . . . . .	105
5.5.1	Controle descentralizado por realimentação do estado . . . . .	106
5.5.2	Filtragem descentralizada . . . . .	107
5.5.3	Controle descentralizado por realimentação da saída . . . . .	108
5.6	Controle com múltiplos objetivos . . . . .	112
5.7	Controle com alocação de atuadores e sensores . . . . .	118
5.7.1	Modelo matemático . . . . .	119
5.7.2	Seleção de sensores e atuadores em malha aberta . . . . .	121
5.7.3	Seleção de sensores e atuadores em malha fechada: realimentação do estado . . . . .	123
5.7.4	Seleção de sensores e atuadores em malha fechada: realimentação da saída . . . . .	125
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>137</b>

---

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>139</b>
<b>A Resultados auxiliares</b>	<b>147</b>
<b>B Solução de problemas de otimização semi-definida mista</b>	<b>149</b>
B.1 Soluções ótimas globais . . . . .	149
B.2 Soluções sub-ótimas . . . . .	151



# Lista de Exemplos

3.1	<i>AB</i> estabilidade: estabilidade robusta de sistemas contínuos . . . . .	33
3.2	<i>AB</i> estabilidade: estabilidade robusta de sistemas discretos . . . . .	33
3.3	<i>AB</i> estabilidade: <i>D</i> estabilidade de sistemas contínuos . . . . .	35
3.4	<i>AB</i> estabilidade: <i>D</i> estabilidade de sistemas discretos . . . . .	35
5.1	Custo garantido positivo-real: realimentação do estado . . . . .	79
5.2	Custo garantido positivo-real: realimentação da saída: controlador estritamente próprio . . . . .	81
5.3	Filtragem robusta: sistema massa-mola . . . . .	85
5.4	Filtragem robusta: incertezas estruturadas . . . . .	89
5.5	Filtragem robusta: incertezas não estruturadas . . . . .	91
5.6	Controle robusto por realimentação do estado . . . . .	94
5.7	Controle robusto por realimentação da saída: projeto por separação . . . . .	99
5.8	Controle robusto por realimentação da saída: algoritmo de decomposição cruzada . . . . .	104
5.9	Controle descentralizado por realimentação do estado . . . . .	107
5.10	Controle descentralizado por realimentação da saída: ensaio numérico I: projeto por separação . . . . .	110
5.11	Controle descentralizado por realimentação da saída: ensaio numérico II: projeto por decomposição cruzada . . . . .	111
5.12	Controle misto $H_2/H_\infty$ . . . . .	114
5.13	Controle com múltiplos objetivos . . . . .	115
5.14	Otimização $H_2$ com seleção de atuadores: realimentação do estado . . . . .	132
5.15	Otimização $H_2$ com seleção de atuadores: realimentação da saída . . . . .	134
5.16	Otimização $H_2$ com seleção de sensores e atuadores: realimentação da saída . . . . .	134



# Lista de Figuras

2.1	Sistemas interconectados . . . . .	13
2.2	Sistema interconectado: perturbações no vetor de estado . . . . .	15
2.3	Sistema interconectado: custo garantido $H_2/H_\infty$ . . . . .	18
2.4	Sistema interconectado: custo garantido positivo-real . . . . .	19
4.1	Parametrização convexa . . . . .	43
4.2	Filtragem . . . . .	52
4.3	Controle por realimentação da saída . . . . .	62
5.1	Projeto de controladores positivo-reais . . . . .	77
5.2	Custo garantido positivo-real . . . . .	82
5.3	Filtragem robusta: sistema massa-mola . . . . .	86
5.4	Filtragem robusta: sistema massa-mola: diagrama de Bode . . . . .	87
5.5	Controle seguro: simulação com falha de atuadores . . . . .	105
5.6	Controle misto $H_2/H_\infty$ : custo garantido $H_2$ . . . . .	115
5.7	Controle misto $H_2/H_\infty$ : desempenho $H_2$ . . . . .	116
5.8	Controle misto $H_2/H_\infty$ : desempenho $H_\infty$ . . . . .	117
5.9	Controle com múltiplos objetivos: desempenho $H_2$ . . . . .	118
5.10	Controle com múltiplos objetivos: desempenho $H_\infty$ . . . . .	119
5.11	Controle por realimentação do estado com seleção de atuadores . . . . .	133
5.12	Controle por realimentação da saída com seleção de atuadores . . . . .	134
5.13	Controle por realimentação da saída com seleção simultânea de atuadores e sensores . . . . .	136



# Lista de Tabelas

3.1	Estabilidade robusta para sistemas contínuos: valor máximo de $\alpha$ . . . . .	33
3.2	Estabilidade robusta para sistemas discretos: valor máximo de $\alpha$ . . . . .	34
5.1	Filtragem robusta: incerteza estruturada . . . . .	91
5.2	Filtragem robusta: incerteza não estruturada . . . . .	92
5.3	Controle seguro: possíveis falhas . . . . .	100
5.4	Ensaio numérico: dimensão dos sistemas gerados aleatoriamente . . . . .	110
5.5	Ensaio numérico I (estabilidade): sucesso do Algoritmo 5.1 . . . . .	110
5.6	Ensaio numérico I (estabilidade): sucesso do Algoritmo 5.2 . . . . .	111
5.7	Ensaio numérico I (estabilidade): sucesso dos Algoritmos 5.1 e 5.2 combinados . . . . .	111
5.8	Ensaio numérico I (custo garantido $H_2$ ): melhoria obtida com o uso do Algoritmo 5.2 . . . . .	111
5.9	Ensaio numérico II (estabilidade) . . . . .	112
5.10	Ensaio numérico II (custo garantido $H_2$ ) . . . . .	112



# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação tem por objetivo discorrer sobre métodos de análise de sistemas lineares e de projeto de controladores. O elo de ligação entre os temas abordados é a utilização das desigualdades matriciais lineares como instrumento básico. A denominação “desigualdade matricial linear” provém do termo correspondente em língua inglesa *Linear Matrix Inequality*, mais conhecido pela sigla formada pelas iniciais LMI. Embora o escopo de problemas acessíveis à desigualdades matriciais lineares transcenda o campo dos sistemas de controle [24, 127], é neste domínio que as aplicações derivadas desta técnica têm se afirmado de maneira incontestável [16]. Além da simplicidade e consistência algébrica, uma das razões da popularidade dos métodos de análise e projeto baseados nas desigualdades matriciais lineares é a disponibilidade de algoritmos computacionais eficientes [24], derivados dos algoritmos de pontos interiores [40] para programação convexa [103]. A importância e o impacto das desigualdades matriciais lineares no desenvolvimento da teoria do controle podem ser avaliadas observando-se nas recentes edições de congressos da área, como o *IEEE Conference on Decision and Control* ou o *American Control Conference*, o elevado número de artigos que delas fazem uso.

Dos primeiros trabalhos em análise de sistemas [16] e projeto de controladores por realimentação do estado [13], o escopo dos problemas de controle ao alcance das desigualdades matriciais lineares se estende hoje ao projeto de filtros [53, 60] e controladores por realimentação dinâmica da saída [116, 96].

Ao longo deste trabalho, percorremos todas estas áreas, buscando apresentar nossas contribuições de maneira consistente e homogênea. O trabalho aqui consolidado consiste num apanhado da maior parte dos estudos desenvolvidos durante a realização do programa de doutorado do autor na Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP.

### 1.1 Apresentação

Dividimos esta dissertação em seis capítulos e dois apêndices. Este primeiro capítulo consiste em uma introdução ao texto e serve como um *guia de leitura* do trabalho, situando o leitor com relação aos capítulos subseqüentes e atentando para alguns detalhes sobre a notação. Os demais capítulos se estruturam como indicado:

**Capítulo 2:** Este pequeno capítulo faz uma revisão sucinta dos resultados em análise de sistemas dinâmicos relevantes para o desenvolvimento do texto. Supomos que o leitor esteja familiarizado com as técnicas de manipulação de espaços normados e com os conceitos de estabilidade relacionados aos métodos de Lyapunov.

- Capítulo 3:** Utilizamos este capítulo para apresentar novos teste de estabilidade para sistemas dinâmicos. Dois tipos de teste são desenvolvidos: o primeiro permite estudar a estabilidade de equações diferenciais ou de equações *a diferenças* cujas matrizes dinâmicas consistam em um produto de duas matrizes; o segundo é um caso particular do primeiro, aplicável somente a sistemas discretos. A principal vantagem deste segundo teste é a possibilidade de extensão para a caracterização das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  e o seu uso imediato no projeto de controladores. Mostramos como aplicar estes testes em diversos contextos como, por exemplo, no desenvolvimento de condições suficientes de estabilidade usando funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros. Os resultados obtidos são comparados aos conhecidos por meio de exemplos numéricos.
- Capítulo 4:** O intuito deste capítulo é desenvolver parametrizações convexas para os seguintes problemas: controle por realimentação do estado, filtragem e controle por realimentação dinâmica da saída. Lidamos, simultaneamente, com sistemas contínuos e discretos. No caso de sistemas discretos, os resultados são baseados na nova condição de estabilidade obtida no Capítulo 3. Procuramos sempre estabelecer relações entre as parametrizações obtidas, caracterizadas com o auxílio das desigualdades matriciais lineares, e os resultados clássicos, baseados em equações de Riccati. Na seção que trata do problema de controle por realimentação dinâmica da saída, fazemos uma análise das propriedades de separação no contexto das desigualdades matriciais lineares.
- Capítulo 5:** Neste capítulo, o mais longo deste trabalho, fazemos uso das parametrizações desenvolvidas no Capítulo 4 para resolver diversos problemas de filtragem e controle. A exposição dos problemas, cuja solução não pode ser obtida por métodos convencionais como, por exemplo, a resolução de equações de Riccati, encontra-se acompanhada de exemplos numéricos.
- Capítulo 6:** Fechamos este trabalho apresentando algumas conclusões e discutindo algumas possíveis extensões dos resultados obtidos.
- Apêndice A:** Incluímos neste apêndice alguns lemas de cunho algébrico, como o *complemento de Schur*, utilizados ao longo de toda a dissertação, e cujas provas não são essenciais à compreensão e interpretação dos resultados.
- Apêndice B:** Na Seção 5.7 do Capítulo 5, formulamos problemas de controle como programas semi-definidos mistos, isto é, problemas de otimização que envolvem restrições na forma de desigualdades matriciais lineares e nos quais algumas das variáveis assumem valores somente no campo dos inteiros. Apresentamos um algoritmo que permite obter as soluções ótimas globais desta classe de problemas. Discutimos também algumas estratégias sub-ótimas.

## 1.2 Notação

Ao redigirmos esta dissertação, mantivemos uma preocupação sempre em mente: tornar a notação clara e homogênea. Não obstante, e devido ao largo espectro do trabalho, algumas inconsistências ainda persistem. Acreditamos, porém, que o contexto seja capaz de situar o leitor adequadamente.

Procuramos adotar a nomenclatura padrão para a maior parte dos entes matemáticos. Assim, todas as matrizes são grafadas em letras maiúsculas e os vetores, em letras minúsculas. Conjuntos são denotados por letras maiúsculas do alfabeto grego ou por letras maiúsculas do alfabeto latino grafadas em modo

caligráfico. Os conjuntos dos números reais é denotado por  $\mathbb{R}$  e o conjunto constituído pelos elementos  $\{0, 1\}$ , por  $\mathbb{B}$ .

A operação de transposição é indicada por meio do símbolo ( $'$ ), pós-posto a um vetor ou matriz. Para matrizes e vetores com elementos no campo dos complexos, o símbolo ( $*$ ) denota transposição seguida de conjugação. Os símbolos ( $>$ ,  $\geq$ ,  $<$ ,  $\leq$ ) são utilizados para denotar, indistintamente, relações entre grandezas escalares ou matriciais. Neste último caso, por exemplo, a notação  $X > 0$  indica que a matriz simétrica<sup>1</sup>  $X$  é *estritamente definida positiva*, isto é, todos os autovalores de  $X$  são números reais estritamente maiores do que zero. Por oposição,  $X < 0$  indica que a matriz simétrica  $X$  é *estritamente definida negativa*. A notação  $X \geq 0$  ( $X \leq 0$ ) indica que a matriz  $X$  é apenas *definida positiva* (*definida negativa*), ou seja, todos os autovalores de  $X$  são números reais positivos (negativos) ou nulos. O operador  $\text{tr}(X)$  denota o *traço* da matriz  $X$ , isto é, a soma dos elementos da diagonal principal da matriz  $X$ . A operação  $\text{diag}(A, B)$  simboliza a construção de uma matriz cujos blocos da diagonal principal são as matrizes  $A$  e  $B$  e cujos elementos fora desses blocos são todos nulos. Denotamos cada um dos autovalores da matriz  $X$  por meio do símbolo  $\lambda_i(X)$ . Do mesmo modo, cada elemento da diagonal principal de  $X$  é denotado por  $\text{diag}_i(X)$ . Finalmente, com a intenção de poupar algum espaço na descrição de matrizes simétricas particionadas em vários blocos, utilizamos o símbolo  $(\star)'$  para denotar um bloco cujo correspondente simétrico já se encontra descrito.

---

<sup>1</sup>Não definimos relações entre matrizes que não sejam simétricas ou que possuam elementos no campo dos complexos.



## Capítulo 2

# Fatos fundamentais em análise de sistemas dinâmicos

Este capítulo é dedicado à apresentação de resultados relativos à análise de sistemas lineares segundo as desigualdades matriciais lineares. Embora seja tarefa fácil encontrar na literatura referências a estes resultados, aproveitamos este capítulo para introduzir os fundamentos teóricos e as técnicas básicas a serem utilizadas nos capítulos subsequentes.

### 2.1 Definições preliminares

Com relação ao sistema linear contínuo e invariante no tempo descrito pelas equações

$$\dot{x} = Ax + Bw, x(0) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$z = Cx + Dw \quad (2.2)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $w \in \mathbb{R}^r$  representa a entrada e  $z \in \mathbb{R}^q$  representa a saída, denotamos por  $H_{wz}(s)$  a função de transferência matricial da entrada  $w$  para a saída  $z$ . Nesse modelo, as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  possuem dimensões apropriadas segundo as regras que regem o produto usual de matrizes.

Este sistema é dito *estritamente próprio* se a matriz  $D$  for nula ou simplesmente *próprio* caso contrário. Sempre que a dimensão da entrada  $w$  for igual à dimensão da saída  $z$ , isto é, sempre que  $r = q$ , dizemos que este sistema é *quadrado*.

#### 2.1.1 Estabilidade

A estabilidade do sistema linear (2.1–2.2) pode ser estudada mediante análise dos resultados da seguinte equação linear matricial

$$A'P + PA + Q = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

conhecida como equação de Lyapunov. Assim, segundo [18], podemos enunciar o seguinte lema

**Lema 2.1** *Com relação ao sistema linear (2.1–2.2), as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *O sistema é assintoticamente estável.*
2. *A matriz  $A$  é Hurwitz.*

3. Todos os autovalores da matriz  $A$  possuem partes reais estritamente negativas.
4. Para toda matriz  $Q = Q' > 0$  a equação de Lyapunov (2.3) apresenta uma única solução  $P = P' > 0$ .

### 2.1.2 Norma $H_2$

A solução da equação (2.3) pode ser calculada mediante a operação de integração [129]

$$P = \int_0^{\infty} e^{A't} Q e^{At} dt \quad (2.4)$$

Esta forma de cálculo da solução da equação de Lyapunov serve de elo entre a teoria de estabilidade no espaço de estados e a norma de sistemas  $H_2$ , cuja definição no espaço frequencial é

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 := \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{tr} (H_{wz}^*(j\omega) H_{wz}(j\omega)) d\omega \quad (2.5)$$

Essa ligação é estabelecida pelo teorema de Parseval [15], que permite recalculer essa norma por meio da operação de integração temporal

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 := \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{tr} (h(t)h(t)') dt \quad (2.6)$$

em que  $h(t)$  é a resposta impulsiva do sistema (2.1–2.2). Aplicando essas definições ao sistema (2.1–2.2) percebemos que o resultado desta integração é finito apenas se  $H_{wz}(j\infty) = 0$  ou, em outras palavras, se o sistema (2.1–2.2) for estritamente próprio. O ‘traço’ dentro da integral (2.6) nos permite caracterizá-la como o resultado do seguinte experimento hipotético [35]: considerando-se que o sistema (2.1–2.2) tem  $r$  entradas, aplicar à entrada do sistema as entradas impulsivas<sup>1</sup>  $w_i = \delta(t)e_i$  e coletar as  $q$  saídas

$$h_i(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B w_i(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} C e^{A(t-\tau)} B e_i \delta(\tau) d\tau$$

Assim

$$\begin{aligned} \|H_{wz}(s)\|_2^2 &= \sum_{i=0}^r \int_0^{\infty} h_i(t)' h_i(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^r e_i' B' \left[ \int_0^{\infty} e^{A't} C' C e^{At} dt \right] B e_i \\ &= \text{tr} (B' P_o B) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Portanto, a matriz simétrica  $P_o$ , conhecida por *Gramiano de observabilidade*, também pode ser calculada como solução da equação de Lyapunov

$$A' P_o + P_o A + C' C = 0 \quad (2.8)$$

A comutatividade do traço nos permite inverter a ordem dos termos do operando da integração, o que implica o procedimento *dual* de cálculo da norma  $H_2$

$$\begin{aligned} \|H_{wz}(s)\|_2^2 &= \text{tr} \left( C \left[ \int_0^{\infty} e^{At} B B' e^{A't} dt \right] C' \right) \\ &= \text{tr} (C P_c C') \end{aligned} \quad (2.9)$$

<sup>1</sup> $e_i$  é definido como o vetor canônico de dimensão  $r \times 1$  cujo  $i$ ésimo componente é igual a 1.

em que a matriz simétrica  $P_c$ , chamada *Gramiano de controlabilidade*, pode ser obtida como solução da equação de Lyapunov

$$AP_c + P_cA' + BB' = 0 \quad (2.10)$$

A norma  $H_2$  possui também uma interpretação estocástica, como mostra o próximo lema [21].

**Lema 2.2** *Dado o sistema linear autônomo*

$$\dot{x} = Ax + w, \quad x(0) = 0 \quad (2.11)$$

$$z = Cx \quad (2.12)$$

no qual a entrada  $w$  é um ruído branco com média nula e variância  $E\{ww'\} = BB'$  então o valor dos custos quadráticos

$$J_1 := \lim_{t \rightarrow \infty} E \{z(t)'z(t)\} \quad (2.13)$$

$$J_2 := \lim_{\tau \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^\tau z(t)'z(t) dt \right\} \quad (2.14)$$

pode ser calculado como

$$J_1 = J_2 = \text{tr}(B'P_oB) \quad (2.15)$$

Notemos que o problema tratado no lema acima pode ser convertido na forma de um problema em norma  $H_2$  para o sistema (2.1–2.2) por meio da definição adequada da matriz  $B$ . O mesmo ocorre no seguinte contexto.

**Lema 2.3** *Dado o sistema linear autônomo*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \quad (2.16)$$

$$z = Cx \quad (2.17)$$

o valor do custo quadrático

$$\int_0^\infty z(t)'z(t) dt = x_0'P_o x_0 \quad (2.18)$$

Se consideramos  $x_0$  uma variável aleatória com média zero e variância  $E\{x_0x_0'\} = BB'$  então

$$\int_0^\infty E \{z(t)'z(t)\} dt = \text{tr}(B'P_oB) \quad (2.19)$$

**Prova:** Para provar este lema basta definir a função de Lyapunov quadrática

$$v(x) := x'P_o x$$

em que a matriz  $P_o$  é simétrica. Assim, tendo em vista que

$$\dot{v}(x) = x'(A'P_o + P_oA)x = -x'C'Cx$$

ao integrarmos a expressão acima do zero ao infinito podemos afirmar que

$$\int_0^{\infty} z'z \, dt = x_0' P_0 x_0 = \int_0^{\infty} x' C' C x \, dt$$

que é exatamente (2.18). A expressão (2.19) é obtida então mediante a aplicação do operador linear esperança matemática. ■

Mais uma vez, a definição adequada da matriz  $B$  permite tratar este problema no contexto da norma  $H_2$ . Uma propriedade importante da solução da equação de Lyapunov é descrita no próximo lema.

**Lema 2.4** *Se a matriz  $A$  for Hurwitz, as soluções de duas equações de Lyapunov obedecem à seguinte propriedade:  $P_1 > P_2$  sempre que  $Q_1 > Q_2$ .*

**Prova:** Podemos verificar este resultado escrevendo

$$\begin{aligned} 0 &= A'(P_1 - P_2) + (P_1 - P_2)A + (Q_1 - Q_2) \\ &= A'\Delta_P + \Delta_P A + \Delta_Q \end{aligned}$$

Assim

$$Q_1 > Q_2 \Rightarrow \Delta_Q := Q_1 - Q_2 > 0$$

o que, pelo Lema 2.1, implica

$$\Delta_P := P_1 - P_2 > 0$$

e conclui a prova. ■

Esta propriedade permite transportar o problema de cálculo da norma  $H_2$  para o contexto de programação convexa. A chave para essa transformação é a conversão da equação de Lyapunov em uma inequação, ou melhor, numa desigualdade matricial linear (LMI). A equação (2.8) pode ser *convertida* na desigualdade

$$A'P + PA + C'C < 0 \quad (2.20)$$

A partir do Lema 2.4 concluímos que qualquer solução factível para a desigualdade acima obedece à propriedade

$$P > P_0 > 0 \quad (2.21)$$

Portanto, a norma  $H_2$  pode ser calculada mediante a resolução do problema de programação convexa

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \inf_{P>0} \{ \text{tr}(B'PB) : A'P + PA + C'C < 0 \} \quad (2.22)$$

Uma questão que resta ser respondida é se, de fato, a solução obtida por meio do 'inf' coincide com a solução de (2.7–2.8). Sem recorrermos a argumentos sofisticados, podemos superar esta dificuldade redefinindo a matriz de saída

$$C \leftarrow \begin{bmatrix} C \\ \sqrt{\epsilon} \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

na qual  $\varepsilon$  é um escalar positivo, e o problema sobre o conjunto fechado

$$\|H_{wz}(s, \varepsilon)\|_2^2 = \min_{P>0} \{ \text{tr}(B'PB) : A'P + PA + C'C \leq 0 \} \quad (2.24)$$

Podemos controlar a distância entre a solução ótima do problema modificado (2.24) e a solução ótima do problema original (2.22) escolhendo adequadamente o valor de  $\varepsilon$ . Segundo o cálculo da norma  $H_2$  mediante a obtenção do Gramiano de observabilidade (2.9), garantimos que o erro acarretado por essa redefinição é<sup>2</sup>

$$\|H_{wz}(s, \varepsilon)\|_2^2 - \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \varepsilon \text{tr}(P_c) = O(\varepsilon) \quad (2.25)$$

Do ponto de vista prático, essa distância entre a solução obtida por meio da desigualdade estrita e a solução “exata” pode ser controlada ajustando-se a precisão do algoritmo utilizado, em geral um algoritmo de pontos interiores [24, 103], o qual fornece apenas soluções que obedecem estritamente às desigualdades. Mais uma vantagem em se lidar com as restrições no sentido estrito é que podemos fazer uso do *complemento de Schur* (Lema A.1) e converter os problemas em norma  $H_2$  para o formato dado no seguinte lema, o que será de grande valia para os procedimentos de projeto a serem desenvolvidos nos próximos capítulos.

**Lema 2.5** *Com relação ao sistema linear (2.1–2.2), as seguintes afirmações são equivalentes*

i)  $\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \gamma$

ii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C' \\ C & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.27)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (2.28)$$

iii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B \\ B' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} W & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.30)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (2.31)$$

O valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (2.26-2.28) \} \quad (2.32)$$

ou

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (2.29-2.31) \} \quad (2.33)$$

<sup>2</sup>Neste sentido, e cometendo um pequeno abuso, todos os problemas de minimização a serem considerados neste trabalho, mesmo os em conjuntos abertos, serão simplesmente denotados por meio do operador ‘min’.

**Prova:** Para provarmos a equivalência entre os itens *i*) e *ii*) procedemos da seguinte forma. Aplicamos o Lema A.1 à desigualdade (2.26) e obtemos (2.20). Com a definição da variável auxiliar  $W$  obtemos, desta vez aplicando o Lema A.1 a (2.27),

$$W > B'PB$$

donde, usando (2.28), temos

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \text{tr}(W) < \gamma$$

Segundo a discussão acima, o valor exato da norma pode ser calculado minimizando-se  $\gamma$ . Notemos também que a restrição fundamental  $P > 0$  se encontra agora contida em (2.27).

A equivalência entre *i*) e *iii*) é o resultado dual obtido a partir do cálculo da norma  $H_2$  envolvendo o Gramiano de controlabilidade (2.10). ■

Podemos generalizar a definição da norma  $H_2$  de modo a levar em consideração normas do tipo

$$\sup_{\|w\|_2 \leq 1} \sup_{t \geq 0} \|z(t)\|_p \quad (2.34)$$

definidas para os valores de  $p = 2$  ou  $\infty$ , como em [130, 21]. Neste caso, para que obtenhamos uma formulação correspondente ao Lema 2.5, basta substituímos o ‘traço’ nas definições (2.28) e (2.31) por uma das funções

$$g_p(W) := \begin{cases} \max_i \lambda_i(W), & p = 2 \\ \max_i \text{diag}_i(W), & p = \infty \end{cases} \quad (2.35)$$

Estas funções, embora não sejam lineares, ainda são convexas, e podem ser formuladas em termos de problemas de otimização lineares sujeitos a restrições na forma de desigualdades matriciais lineares [21]. O caso  $p = 1$  é um pouco mais complexo, e encontra-se descrito em [61]. Finalmente, todos os procedimentos de projeto de controladores e filtros a serem estudados nos próximos capítulos podem ser generalizados para lidar com estas normas com a simples substituição da função  $\text{tr}(\cdot)$  por  $g_p(\cdot)$ , como em [112, 21, 61].

### 2.1.3 Norma $H_\infty$

Uma outra norma que será intensamente utilizada neste trabalho é a norma  $H_\infty$ , cuja definição no espaço freqüencial é [21, 41]

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[H_{wz}(j\omega)] \quad (2.36)$$

em que  $\bar{\sigma}(\cdot)$  denota o máximo valor singular de  $(\cdot)$ . Como a norma  $H_2$ , a norma  $H_\infty$  também pode ser calculada em função de uma matriz simétrica e definida positiva associada à teoria de estabilidade de Lyapunov. Esta relação é mostrada no próximo lema [133].

**Lema 2.6** *Com relação ao sistema linear (2.1–2.2), as seguintes afirmações são equivalentes*

*i)  $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma$*

*ii)  $\bar{\sigma}(D) < \sqrt{\gamma}$  e existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  de tal forma que*

$$A'P + PA + (PB + C'D)(\gamma I - D'D)^{-1}(B'P + D'C) + C'C = 0 \quad (2.37)$$

iii)  $\bar{\sigma}(D) < \sqrt{\gamma}$  e existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  de tal forma que

$$AP + PA' + (PC' + BD')(\gamma \mathbf{I} - DD')^{-1}(CP + DB') + BB' = 0 \quad (2.38)$$

iv) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma \mathbf{I} & D' \\ C & D & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.39)$$

$$P > 0 \quad (2.40)$$

v) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B & PC' \\ B' & -\mathbf{I} & D' \\ CP & D & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

$$P > 0 \quad (2.42)$$

O valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problema de otimização convexos

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (2.39-2.40) \} \quad (2.43)$$

ou

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (2.41-2.42) \} \quad (2.44)$$

#### 2.1.4 Positividade real

Mais um conceito a ser explorado neste trabalho é o de positividade real. Este conceito se aplica somente a sistemas quadrados e está relacionado com a noção de passividade [129, 47] e com diversas condições de estabilidade robusta a serem estudadas. Os resultados baseiam-se no próximo lema, conhecido pelo nome de Lema de Kalman-Yakubovitch [129, 48]

**Lema 2.7** Com relação ao sistema linear (2.1-2.2) quadrado, as seguintes afirmações são equivalentes

i) A matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é positiva-real estrita.

ii)  $H_{wz}(j\omega) + H_{wz}^*(j\omega) > 0$  para todo  $\omega \in \mathbb{R}$

iii) Caso o sistema (2.1-2.2) seja estritamente próprio ( $D = 0$ ), existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$A'P + PA < 0 \quad (2.45)$$

$$B'P = C \quad (2.46)$$

$$P > 0 \quad (2.47)$$

iv) Caso o sistema (2.1–2.2) seja estritamente próprio ( $D = 0$ ), existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$AP + PA' < 0 \quad (2.48)$$

$$B' = CP \quad (2.49)$$

$$P > 0 \quad (2.50)$$

v) Caso o sistema (2.1–2.2) não seja estritamente próprio ( $D \neq 0$ ), existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB - C' \\ B'P - C & -(D + D') \end{bmatrix} < 0 \quad (2.51)$$

$$P > 0 \quad (2.52)$$

vi) Caso o sistema (2.1–2.2) não seja estritamente próprio ( $D \neq 0$ ), existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B - PC' \\ B' - CP & -(D + D') \end{bmatrix} < 0 \quad (2.53)$$

$$P > 0 \quad (2.54)$$

## 2.2 Robustez

A propriedade conhecida pelo nome de robustez é um dos fatores essenciais para o sucesso de um sistema de controle. Dizemos que um sistema é robusto com relação a uma dada característica se ele possui a capacidade de preservá-la mesmo na ocorrência de variações de outras de suas características ou do meio em que se encontra inserido. Neste trabalho, estamos interessados em estudar sistemas robustos cuja propriedade a ser preservada na presença de variações paramétricas é a estabilidade. Na literatura, encontramos métodos de análise de robustez em diversos contextos, como, por exemplo, para famílias de polinômios [89, 1], para sistemas com incertezas limitadas em norma [133, 38, 86] e, finalmente, para polítopos de matrizes no espaço de estado [13, 70]

Um dos pontos de partida para o estudo de robustez é o diagrama de interconexão mostrada na Figura 2.1, no qual  $H_{wz}(s)$  é um sistema linear e invariante no tempo com representação de estados (2.1–2.2) e  $\Delta : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$  é um operador causal que realimenta a saída  $z$  por intermédio da entrada  $w$ , isto é  $w = \Delta z$ . A ferramenta básica de análise é o método de Lyapunov. Para testar a estabilidade de sistemas dinâmicos, utilizamos uma função de Lyapunov que é quadrática com relação ao vetor de estados

$$v(x) := x'Px, \quad P > 0 \quad (2.55)$$

Um sistema será estável sempre que pudermos garantir que

$$\dot{v}(x) < 0 \quad (2.56)$$

ao longo de toda e qualquer trajetória  $x$  associada a este sistema. Iniciemos o estudo das propriedades de robustez pelo conhecido *teorema do ganho pequeno*.

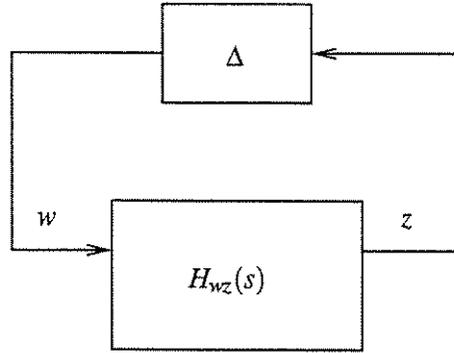


Figura 2.1: Sistemas interconectados

### 2.2.1 Teorema do ganho pequeno

Para estudar a estabilidade robusta pelo teorema do ganho pequeno, definimos, com relação ao operador  $\Delta$ , a norma induzida do tipo  $\infty$ , o que pode ser feito mediante a introdução do ganho  $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$  [93, 113]

$$\|\Delta\|_\infty := \sup_{\|z\|_2 \neq 0} \frac{\|w\|_2}{\|z\|_2} = \sup_{\|z\|_2 \neq 0} \frac{\|\Delta z\|_2}{\|z\|_2} \quad (2.57)$$

A versão do teorema do ganho pequeno que nos interessa é a seguinte [133].

**Lema 2.8** *Se*

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1 \quad (2.58)$$

*então o sistema interconectado mostrado na Figura 2.1 é estável.*

**Prova:** De posse da função de Lyapunov quadrática (2.55), desejamos verificar o domínio estabilidade da interconexão na Figura 2.1 determinando sob quais condições podemos obter trajetórias no espaço de estados de tal forma que

$$\dot{v}(x) = x' (A'P + PA)x + 2x'PBw \quad (2.59)$$

seja negativa. A chave para esta determinação é o Lema 2.6. Denotando por  $\gamma := (\|H_{wz}(s)\|_\infty + \varepsilon)^2$ , em que  $\varepsilon > 0$  é um escalar arbitrário, e aplicando o complemento de Schur (Lema A.1) à desigualdade (2.39), obtemos

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB \\ B'P & -\gamma I \end{bmatrix} < - \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}$$

Multiplicando esta desigualdade à direita por

$$t = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

e à esquerda por  $t'$  obtemos

$$x' (A'P + PA)x + 2x'PBw < \gamma w'w - z'z$$

Assim, comparando a expressão acima a (2.59) concluímos que a conexão na Figura 2.1 é estável sempre que

$$\|w\|_2 < \gamma^{-\frac{1}{2}} \|z\|_2$$

ou, alternativamente (veja (2.57))

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_\infty &< \gamma^{-\frac{1}{2}} \\ &< \frac{1}{\|H_{wz}(s)\|_\infty + \varepsilon} \end{aligned}$$

Ao fazer  $\varepsilon$  tender a zero, obtemos o resultado enunciado. ■

### 2.2.2 Estabilidade absoluta

Suponhamos que as dimensões  $q$  e  $r$  sejam idênticas e que o operador  $\Delta$  da Figura 2.1 pertença à seguinte classe

$$\Delta_{\text{PR}} := \{w = \Delta z : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q, w = h(z), h(z)'z \leq 0, h(0) = 0\} \quad (2.60)$$

Podemos assegurar estabilidade ao sistema (2.1–2.2) frente a esse tipo de realimentação lançando mão do conceito de positividade real, introduzido no Lema 2.7. Pela generalidade da função  $h(\cdot)$ , que pode assumir qualquer valor no *setor* acima definido, a estabilidade de sistemas interconectados desta maneira é chamada *estabilidade absoluta*. Podemos enunciar o seguinte resultado para essa classe de sistemas [129].

**Lema 2.9** *Se o sistema linear (2.1–2.2) for positivo-real estrito e o operador  $\Delta \in \Delta_{\text{PR}}$  então o sistema interconectado mostrado na Figura 2.1 é estável.*

**Prova:** Para provarmos este lema analisamos as duas possibilidades expressas pelos itens *iii*) e *v*) do Lema 2.7. Começamos por definir a função de Lyapunov quadrática (2.55) de tal modo que, como no lema anterior, a estabilidade estará assegurada se pudermos verificar se

$$\dot{v}(x) = x' (A'P + PA)x + 2x'PBh(z)$$

é negativa.

No caso de sistemas positivos-reais estritamente próprios (item *iii*)), basta substituir a relação (2.46) na expressão acima para que tenhamos

$$\dot{v}(x) = x' (A'P + PA)x + 2z'h(z) < 0$$

A negatividade provém da desigualdade (2.45) e da definição (2.60).

Para sistemas positivos-reais próprios (item *v*)), devemos multiplicar a desigualdade (2.51) por

$$t = \begin{bmatrix} x \\ h(z) \end{bmatrix}$$

à direita e  $t'$  à esquerda para que possamos obter

$$x' (A'P + PA)x + 2x'PBh(z) < 2z'h(z)$$

donde decorre imediatamente que

$$\dot{v}(x) < 2z'h(z) < 0$$

o que prova a estabilidade do sistema. ■

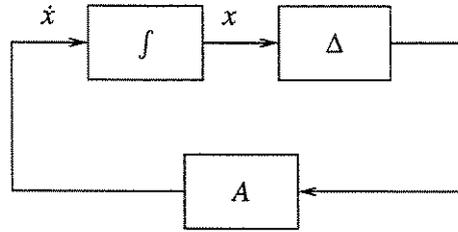


Figura 2.2: Sistema interconectado: perturbações no vetor de estado

### 2.2.3 O problema de Persidskii e $D$ estabilidade

Nas análises das seções anteriores, baseadas no diagrama da Figura 2.1, o operador  $\Delta$  atua como um fator de realimentação do sistema, isto é, age *externamente* ao sistema. Nesta seção, estamos interessados em estudar perturbações *internas* ao sistema, que atuam diretamente sobre o vetor de estado, como na Figura 2.2. Estudaremos a estabilidade dos sistemas dinâmicos associados à equação diferencial

$$\dot{x} = A\Delta x \quad (2.61)$$

Concentrando a nossa atenção na classe de perturbações

$$\Delta_{\text{Persidskii}} := \{ \Delta x := h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, h_i(x) = h_i(x_i), h_i(\xi)' \xi > 0, h(0) = \mathbf{0} \} \quad (2.62)$$

podemos assegurar a estabilidade do sistema interconectado da Figura 2.2 por meio do seguinte lema, estabelecido, pela primeira vez, por Persidskii [107].

**Lema 2.10** *Se existe uma matriz diagonal  $P = P_D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisfaz as desigualdades matriciais lineares*

$$A'P_D + P_D A < 0 \quad (2.63)$$

$$P > 0 \quad (2.64)$$

então o sistema (2.61) é estável na presença das perturbações definidas em (2.62).

**Prova:** Para provar este lema, basta definir a função de Lyapunov

$$v(x) := 2 \sum_{i=1}^n P_{ii} \int_0^{x_i} h_i(\xi) d\xi$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= 2 \sum_{i=1}^n P_{ii} h_i(x_i) \dot{x}_i \\ &= 2h(x)' P_D \dot{x} \\ &= h(x)' (A' P_D + P_D A) h(x) \\ &< 0 \end{aligned}$$

Isto conclui a prova deste lema. ■

A determinação de uma matriz de Lyapunov diagonal  $P_D$  é alvo de investigação, por exemplo, no artigo [51].

Um problema de estabilidade para o qual o Lema 2.10 também serve como condição suficiente de estabilidade é o chamado problema de  $D$  estabilidade, que merece atenção especial devido às suas aplicações, dentre outras, em sistemas econômicos [6, 80]. No problema de  $D$  estabilidade, o domínio da perturbação  $\Delta$  é definido por meio do conjunto

$$\Delta_D := \{\Delta x := h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, h_i(x) = D_i x_i, D_i > 0\} \quad (2.65)$$

que pode ser visto como um caso particular de (2.62), no qual a função  $h(x)$  é uma função linear. O nome  $D$  estabilidade é decorrente da estrutura da matriz dinâmica do sistema (2.61), que passa a ter a forma  $AD$ , na qual  $D$  é uma matriz diagonal e positiva.

#### 2.2.4 Sistemas com incertezas poliedrais

Podemos descrever sistemas lineares incertos por meio de modelos paramétricos inscritos em poliedros. Desejamos estudar a estabilidade da família de sistemas lineares na forma (2.1–2.2) cuja matriz dinâmica  $A$  pertence ao politopo convexo

$$\mathcal{A} := \left\{ A(\xi) = \sum_{i=1}^N A_i \xi_i, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (2.66)$$

construído como combinação convexa dos vértices representados por  $N$  matrizes  $A_i$ . Consideramos que o parâmetro  $\xi$  não é conhecido ou mensurável. Em alguns casos  $\xi$  pode variar ao longo do tempo; em outros, simplesmente pode permanecer constante.

Asseguramos a estabilidade desta família de sistemas lançando mão do conceito de *estabilidade quadrática*, introduzido em [9].

**Lema 2.11** *Se existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T > 0$  que satisfaz a desigualdade matricial linear*

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.67)$$

*então o sistema linear (2.1–2.2) é estável para toda matriz  $A(\xi) \in \mathcal{A}$ .*

**Prova:** Para provar este lema definimos a função de Lyapunov quadrática (2.55), de tal forma que o sistema (2.1–2.2) será estável se

$$\dot{v}(x) = x^T (A(\xi)^T P + P A(\xi)) x < 0$$

para toda matriz  $A(\xi) \in \mathcal{A}$ . Isto ocorre se (2.67) for satisfeita pois, se definimos os escalares  $\xi_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ , e somamos todas as desigualdades (2.67) multiplicadas pelo correspondente  $\xi_i$  obtemos

$$A(\xi)^T P + P A(\xi) < 0$$

que é uma relação válida para todo  $A(\xi) \in \mathcal{A}$ . ■

Este resultado tem sua formulação dual expressa no próximo corolário.

**Corolário 2.12** *Existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T > 0$ , que satisfaz o Lema 2.11 se, e somente se, existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^T > 0$ , que satisfaz*

$$A_i P + P A_i^T < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.68)$$

**Prova:** Se existe  $P_1 = P_1' > 0$  de tal forma que

$$A_i'P_1 + P_1A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

então, ao multiplicar cada desigualdade acima pela matriz simétrica e definida positiva  $P_2 := P_1^{-1}$  à esquerda e à direita, temos

$$A_iP_2 + P_2A_i' < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Isto completa a prova uma vez que esta operação pode ser revertida. ■

É importante notarmos que o uso de uma função de Lyapunov que não depende do parâmetro  $\xi$  permite que o mesmo varie arbitrariamente ao longo do tempo. Podemos, inclusive, mostrar que o critério de estabilidade quadrática torna-se uma condição necessária de estabilidade para sistemas com este tipo de incerteza<sup>3</sup>. Assim, o uso da condição de estabilidade quadrática para sistemas incertos porém invariantes no tempo, ou cuja variação paramétrica não seja arbitrariamente rápida, deve ser sempre encarada com cautela. Para este tipo de sistema, resultados menos conservativos podem ser obtidos permitindo-se que a função de Lyapunov dependa do parâmetro  $\xi$ .

### 2.2.5 Desempenho robusto

Ao considerarmos sistemas incertos nos moldes dos das seções anteriores, as expressões de desempenho em termos das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  precisam ser modificadas para que levemos em conta a possibilidade de variação paramétrica. Chamamos esses critérios modificados de critérios de *desempenho robusto* ou *custos garantidos*. A idéia é prover um limite superior que possa ser facilmente calculado (de preferência expresso por meio de desigualdades matriciais lineares) para o valor dessas normas em todo o domínio das incertezas.

Segundo discussão anterior, sistemas com restrições em norma  $H_\infty$  apresentam interessantes propriedades de robustez. Adicionalmente, desejaremos introduzir na fase de projeto de controladores algum tipo de consideração sobre o desempenho em malha fechada, o que pode ser feito em termos de limite para a norma  $H_2$ . Para tal, estendemos o número de saídas do sistema linear (2.1–2.2) da seguinte maneira

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad x(0) = 0 \tag{2.69}$$

$$z_1 = C_1x + D_1w \tag{2.70}$$

$$z_2 = C_2x \tag{2.71}$$

em que  $z_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$  e  $z_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ . Com relação ao sistema realimentado mostrado na Figura 2.3, podemos obter a seguinte condição de desempenho robusto em norma  $H_\infty$ , também conhecida por custo garantido  $H_2/H_\infty$  [87].

**Lema 2.13** *Com relação ao sistema interconectado mostrado na Figura 2.3, se existir uma matriz  $P =$*

---

<sup>3</sup>Utilizamos o substantivo incerteza para denominar de maneira genérica as diversas classes de variação paramétrica consideradas neste trabalho.

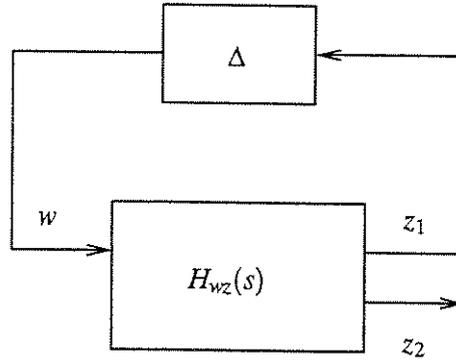


Figura 2.3: Sistema interconectado: custo garantido  $H_2/H_\infty$

$P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B & PC_1' \\ B' & -I & D_1' \\ C_1P & D_1 & -\gamma_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.72)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_2P \\ PC_2' & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.73)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma_2 \quad (2.74)$$

então

$$\|H_{wz_1}(s)\|_\infty^2 < \gamma_1 \quad (2.75)$$

$$\sup_{\|\Delta\|_\infty < \gamma_1^{-1}} \|H_{wz_2}(s)\|_2^2 < \rho_2(\Delta) := \gamma_2 \quad (2.76)$$

O valor mínimo deste custo garantido  $H_2/H_\infty$  pode ser calculado resolvendo-se o problema de otimização convexo

$$\min \{ \gamma_2 : (2.72-2.74) \} \quad (2.77)$$

**Prova:** Pelos Lemas 2.6 e 2.8, a desigualdade (2.72) garante a estabilidade do sistema interconectado na presença de incertezas pertencentes ao domínio limitado em norma  $\|\Delta\|_\infty < \gamma_1^{-1}$ . Como esta desigualdade garante a estabilidade para todo valor de  $\Delta$  neste domínio, podemos aplicar o complemento de Schur e obter

$$AP + PA' + BB' + Q < 0$$

em que

$$Q := (PC_1' + BD_1') (\gamma_1 I - D_1' D_1)^{-1} (C_1 P + D_1 B') \geq 0$$

Recorrendo ao Lema 2.4 garantimos que  $P > P_c$ , no qual  $P_c$  é o Gramiano de controlabilidade calculado por meio da equação (2.10), para todo o domínio da incerteza  $\Delta$ . Por fim, o complemento de Schur de (2.73) permite afirmar que

$$\sup_{\|\Delta\|_\infty < \gamma_1^{-1}} \|H_{wz_2}(s)\|_2^2 < \text{tr}(C_2 P C_2') < \text{tr}(W) < \gamma_2 = \rho_2(\Delta)$$

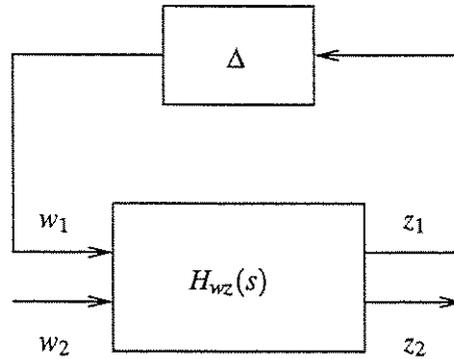


Figura 2.4: Sistema interconectado: custo garantido positivo-real

o que conclui a prova. ■

É interessante notar que à medida em que o valor de  $\gamma_1$  aumenta, o domínio de incerteza se contrai e o valor de  $\rho_2(\Delta)$  se aproxima do valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz_2}(s)$ . Notemos também que podemos calcular este custo garantido  $H_2/H_\infty$  sempre que  $\|H_{wz_1}(s)\|_\infty^2 < \gamma_1$ .

Resultado semelhante pode ser obtido para sistemas positivos-reais. Neste caso, definimos o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + B_1w_1 + B_2w_2, x(0) = 0 \quad (2.78)$$

$$z_1 = C_1x + D_1w_1 \quad (2.79)$$

$$z_2 = C_2x + D_2w_1 \quad (2.80)$$

em que  $w_1 \in \mathbb{R}^{r_1}$ ,  $w_2 \in \mathbb{R}^{r_2}$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$  e  $z_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ . Este sistema está associado ao sistema realimentado mostrado na Figura 2.4. Podemos obter a seguinte condição de desempenho robusto para sistemas positivos-reais, à qual chamamos custo garantido positivo-real, introduzida em nossos artigos [12, 11].

**Lema 2.14** *Com relação ao sistema interconectado mostrado na Figura 2.3, caso uma das seguintes afirmações for verdadeira*

- i) *A função de transferência entre  $w_1$  e  $z_1$  é estritamente própria ( $D_1 = 0$ ) e existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$ , e um escalar  $\mu$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & C_2' \\ C_2 & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.81)$$

$$B_1'P = C_1 \quad (2.82)$$

$$\begin{bmatrix} W & B_2'P \\ PB_2 & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.83)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (2.84)$$

- ii) *A função de transferência entre  $w_1$  e  $z_1$  não é estritamente própria ( $D_1 \neq 0$ ) e existem matrizes*

$P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$ , e um escalar  $\mu$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB_1 - C_1' & C_2' \\ B_1'P - C_1 & -(D_1 + D_1') & \mathbf{0} \\ C_2 & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.85)$$

$$\begin{bmatrix} W & B_2'P \\ PB_2 & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.86)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (2.87)$$

então a função de transferência entre  $w_1$  e  $z_1$  é positiva-real estrita e

$$\sup_{\Delta \in \Delta_{\text{PR}}} \|H_{w_2 z_2}(s)\|_2^2 < \rho_2(\Delta) := \mu\gamma \quad (2.88)$$

O valor mínimo deste custo garantido positivo-real pode ser calculado resolvendo-se o problema de busca unidimensional em  $\mu$

$$\rho_2(\Delta) = \min_{\mu} \{\mu\gamma : (2.81-2.84)\} \quad (2.89)$$

ou

$$\rho_2(\Delta) = \min_{\mu} \{\mu\gamma : (2.85-2.87)\} \quad (2.90)$$

**Prova:** Caso as desigualdades dadas nos itens *i*) e *ii*) sejam verdadeiras, então, pelos Lema 2.7 e 2.9, a função de transferência entre  $w_1$  e  $z_1$  é positiva-real estrita pois  $P > 0$ ,  $\mu > 0$  e (2.81–2.82) ou (2.85) são factíveis. Quanto ao custo  $H_2$ , analisemos o que acontece para as desigualdades apresentadas no item *i*). Aplicando o complemento de Schur às desigualdades (2.81) e (2.83) obtemos

$$A'P + PA + \mu^{-1}C_2'C_2 < 0 \quad W > B_2'PB_2$$

Portanto,

$$\sup_{\Delta \in \Delta_{\text{PR}}} \|H_{w_2 z_2}(s)\|_2^2 < \mu \text{tr}(B_2'PB_2) < \mu \text{tr}(W) < \mu\gamma$$

Provamos o resultado correspondente ao item *ii*) de maneira idêntica. ■

Notemos que o problema de busca unidimensional definido acima é, na verdade, um problema convexo, bastando para tal substituir nas expressões acima as variáveis  $(\hat{P}, \hat{W}, \hat{\gamma}) := (\mu P, \mu W, \mu\gamma)$ . Podemos reescrever, por exemplo, as desigualdades (2.81–2.84) na forma

$$\begin{bmatrix} A'\hat{P} + \hat{P}A & C_2' \\ C_2 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ B_1'\hat{P} = \mu C_1 \\ \begin{bmatrix} \hat{W} & B_2'\hat{P} \\ \hat{P}B_2 & \hat{P} \end{bmatrix} > 0 \\ \text{tr}(\hat{W}) < \hat{\gamma}$$

de tal modo que a relação (2.88) torne-se

$$\sup_{\Delta \in \Delta_{PR}} \|H_{w_2 z_2}(s)\|_2^2 < \rho_2(\Delta) := \hat{\gamma}$$

A justificativa pela qual apresentamos o Lema numa forma mais complexa é que, como esta manipulação envolve o produto de  $C_1$  (e  $D_1$  caso este não seja nulo) por  $\mu$ , não poderemos utilizar esta versão convexa ao lidarmos com o projeto de controladores. A razão disto é que as matrizes em malha fechada  $C_1$  e  $D_1$  dependem das matrizes do controlador. Poderíamos ainda argumentar que este problema se reduz a um problema convexo caso o valor de  $\mu$  seja fixado em um valor constante. Neste caso porém, o lema perde uma de suas mais importantes propriedades, qual seja, o fato de podermos calcular um custo garantido positivo-real por meio do Lema 2.14 sempre que o Lema 2.7 indicar que a matriz de transferência de  $w_1$  para  $z_1$  é positiva-real estrita. Este fato não é levado em conta, por exemplo, em [21].

Podemos também calcular custos garantidos para sistemas com incertezas poliedrais como os descritos na Seção 2.2.4. Para tal, começamos por agrupar as matrizes do sistema linear (2.1–2.2) na forma

$$M := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

de modo que possamos descrever sistemas incertos como sistemas cuja matriz  $M$  pertence ao politopo convexo

$$\mathcal{M} := \left\{ M(\xi) = \sum_{i=1}^N M_i \xi_i, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (2.92)$$

do qual as matrizes  $M_i, i = 1, \dots, N$  são os vértices. Começemos pelo custo garantido  $H_2$ .

**Lema 2.15** *Com relação ao sistema linear (2.1–2.2), se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

i) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A_i'P + PA_i & C_i' \\ C_i & -I \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, N \quad (2.93)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B_i'P \\ PB_i & P \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N \quad (2.94)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma, i = 1, \dots, N \quad (2.95)$$

ii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A_iP + PA_i' & B_i \\ B_i' & -I \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, N \quad (2.96)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_iP \\ PC_i' & P \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N \quad (2.97)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma, i = 1, \dots, N \quad (2.98)$$

em que  $A_i, B_i$  e  $C_i$  são as matrizes do sistema linear (2.1–2.2) calculadas nos vértices  $M_i, i = 1, \dots, N$ , então a seguinte propriedade também é verdadeira

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{w_2}(s)\|_2^2 < \rho_2(\mathcal{M}) := \gamma \quad (2.99)$$

Os valores mínimos deste custo garantido  $H_2$  podem ser calculados resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\rho_2(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (2.93-2.95) \} \quad (2.100)$$

ou

$$\rho_2(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (2.96-2.98) \} \quad (2.101)$$

**Prova:** Apresentaremos apenas a prova do item *i*) pois, seguindo exatamente os mesmos passos, podemos provar o item *ii*) sem dificuldades adicionais. Como na prova do Lema 2.11, começamos notando que, devido à presença de uma única matriz  $P$ , as desigualdades (2.93–2.95) são lineares com relação aos parâmetros  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$ . Se definimos os escalares  $\xi_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$ , e somamos todas as desigualdades (2.93–2.95) multiplicadas pelo correspondente  $\xi_i$  obtemos

$$\begin{bmatrix} A(\xi)'P + PA(\xi) & C(\xi)' \\ C(\xi) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad \begin{bmatrix} W(\xi) & B(\xi)'P \\ PB(\xi) & P \end{bmatrix} > 0 \quad \text{tr}(W(\xi)) < \gamma$$

o que, segundo os itens *i*) e *ii*) do Lema 2.5, garante que (2.99) é verdadeira para todo  $M(\xi) \in \mathcal{M}$ . ■

Sempre que apresentarmos resultados como o do lema acima, que contenham formulações primais e duais cuja prova seja idêntica, limitaremos-nos a provar uma delas.

Notemos que, embora do ponto de vista da estabilidade (veja Lema 2.11 e Corolário 2.12) as formulações primais e duais sejam equivalentes, os valores dos custos garantidos calculados via (2.100) ou (2.101) podem ser diferentes. Resultado análogo pode ser obtido para a norma  $H_\infty$ .

**Lema 2.16** *Com relação ao sistema linear (2.1–2.2), se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira*

*i) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A_i'P + PA_i & PB_i & C_i' \\ B_i'P & -\gamma\mathbf{I} & D_i' \\ C_i & D_i & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.102)$$

$$P > 0 \quad (2.103)$$

*ii) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A_iP + PA_i' & B_i & PC_i' \\ B_i' & -\mathbf{I} & D_i' \\ C_iP & D_i & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.104)$$

$$P > 0 \quad (2.105)$$

em que  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  e  $D_i$  são as matrizes do sistema linear (2.1–2.2) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então a seguinte propriedade também é verdadeira

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \rho_\infty(\mathcal{M}) := \gamma \quad (2.106)$$

Os valores mínimos deste custo garantido  $H_\infty$  podem ser calculados resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\rho_\infty(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (2.102-2.103) \} \quad (2.107)$$

ou

$$\rho_\infty(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (2.104-2.105) \} \quad (2.108)$$

**Prova:** Como as desigualdades (2.102) e (2.104) são lineares com relação aos parâmetros  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  e  $D_i$  a prova deste lema pode ser obtida de modo idêntico à prova do Lema 2.15. ■

## 2.3 Sistemas discretos

Todos os resultados apresentados até o momento possuem análogos caso o sistema linear a ser considerado seja discreto. Neste caso, devemos tomar modelos descritos no espaço de estados na forma

$$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k), \quad x(0) = \mathbf{0} \quad (2.109)$$

$$z(k) = Cx(k) + Dw(k) \quad (2.110)$$

no qual os vetores apresentam as mesmas dimensões do caso contínuo. Denotamos por  $H_{wz}(\zeta)$  a função de transferência matricial entre a entrada  $w$  e a saída  $z$ . Nas próximas seções discutimos algumas dessas analogias. Não discutiremos as extensões desses análogos aplicados à robustez de sistemas discretos.

### 2.3.1 Estabilidade

A estabilidade do sistema linear (2.109–2.110) pode ser estudada mediante análise dos resultados da seguinte equação linear matricial

$$A'PA - P + Q = 0 \quad (2.111)$$

conhecida como equação de Lyapunov discreta. O análogo do Lema 2.1 pode ser formulado da seguinte maneira.

**Lema 2.17** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. O sistema é assintoticamente estável.
2. A matriz  $A$  é Schur.
3. Todos os autovalores da matriz  $A$  possuem valores absolutos estritamente menores do que um.
4. Para toda matriz  $Q = Q' > 0$  a equação de Lyapunov (2.111) apresenta uma única solução  $P = P' > 0$ .

### 2.3.2 Norma $H_2$

A definição da norma  $H_2$  para sistemas discretos envolve a operação de integração [129]

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{tr} \left( H_{wz}^*(e^{j\theta}) H_{wz}(e^{j\theta}) \right) d\theta \quad (2.112)$$

e a correspondente temporal

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 := \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \text{tr} (h(k)h(k)') \quad (2.113)$$

em que a operação de integração utilizada no caso contínuo aparece substituída pelo somatório. As mesmas propriedades e interpretações discutidas no caso contínuo podem ser transpostas para o caso discreto. O único lema para o qual apresentamos correspondente discreto é o Lema 2.5.

**Lema 2.18** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), as seguintes afirmações são equivalentes*

i)  $\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \gamma$

ii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & A'P & C' \\ PA & P & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.114)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.115)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (2.116)$$

iii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & AP & B \\ PA' & P & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.117)$$

$$\begin{bmatrix} W & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} > 0 \quad (2.118)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (2.119)$$

O valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(\zeta)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (2.114\text{--}2.116) \} \quad (2.120)$$

ou

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (2.117\text{--}2.119) \} \quad (2.121)$$

Um detalhe neste lema é que todas as desigualdades baseadas na desigualdade de Lyapunov discreta

$$A'PA - P < 0$$

ou a correspondente dual, aparecem transformadas pelo complemento de Schur. Notemos que, desta maneira, o termo quadrático  $A'PA$  é substituído pelo termo linear  $A'P$ .

### 2.3.3 Norma $H_\infty$

Definimos o ganho  $l_2 \rightarrow l_2$  para sistemas lineares por meio da operação [93, 113]

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty := \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \bar{\sigma} \left[ H_{wz}(e^{j\theta}) \right] \quad (2.122)$$

Este cálculo pode ser expresso por desigualdades matriciais lineares. Este é o assunto do próximo lema.

**Lema 2.19** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), as seguintes afirmações são equivalentes*

i)  $\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$

ii)  $\bar{\sigma}(D) < \sqrt{\gamma}$  e existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  de tal forma que

$$A'PA - P + (A'PB + C'D) (\gamma \mathbf{I} - D'D - B'PB)^{-1} (B'PA + D'C) + C'C = 0 \quad (2.123)$$

iii)  $\bar{\sigma}(D) < \sqrt{\gamma}$  e existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  de tal forma que

$$APA' - P + (APC' + BD') (\gamma \mathbf{I} - DD' - CPC')^{-1} (CPA' + DB') + BB' = 0 \quad (2.124)$$

iv) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \gamma \mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.125)$$

iv) Existe uma matriz  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P & AP & B & \mathbf{0} \\ PA' & P & \mathbf{0} & PC' \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{I} & D' \\ \mathbf{0} & CP & D & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.126)$$

O valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{wz}(\zeta)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (2.125) \} \quad (2.127)$$

ou

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (2.126) \} \quad (2.128)$$

### 2.3.4 Positividade real

O análogo discreto da condição de positividade real, apresentada no Lema 2.7, encontra-se no próximo lema.

**Lema 2.20** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110) quadrado, as seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *A matriz de transferência  $H_{wz}(\zeta)$  é positiva-real estrita.*
- ii)  *$H_{wz}(e^{j\theta}) + H_{wz}^*(e^{j\theta}) > 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .*
- iii) *Caso o sistema (2.109–2.110) não seja estritamente próprio ( $D \neq 0$ ), existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P^t > 0$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A^tPA - P & A^tPB - C^t \\ B^tPA - C & B^tPB - D - D^t \end{bmatrix} < 0 \quad (2.129)$$

Conforme atestam os artigos [110, 36], o conceito de positividade real para sistemas discretos envolve alguns aspectos complexos, que estão fora do escopo deste trabalho. Por esta razão, o Lema 2.20 aparece tão simplificado, contendo apenas os itens necessários ao desenvolvimento dos resultados do Capítulo 3.

### 2.3.5 $D$ estabilidade

As discussões sobre estabilidade robusta podem ser estendidas para o caso discreto de maneira análoga à apresentada para sistemas contínuos. A única caracterização que merece destaque especial é a do conjunto de matrizes  $D$  estáveis discretas [14, 85]. Com relação à equação a diferenças

$$x(k+1) = A\Delta x(k) \quad (2.130)$$

análoga à equação diferencial (2.61), definimos o conjunto de matrizes  $D$  estáveis para sistemas discretos por meio do conjunto

$$\Delta_D := \{\Delta x := h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, h_i(x) = D_i x_i, |D_i| \leq 1\} \quad (2.131)$$

Em contraste com o caso contínuo, este conjunto é poliedral e fechado.

## Capítulo 3

# Novos resultados em análise

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento de novas condições de estabilidade para sistemas contínuos e discretos. A motivação principal é o desenvolvimento de condições de estabilidade robusta que permitam superar o conceito de estabilidade quadrática [9]. Para que isto seja possível, buscaremos condições que não envolvam o produto entre a matriz de Lyapunov e as matrizes dinâmicas. As condições a serem apresentadas possuem a forma de desigualdades matriciais lineares e permitem interpretações frequenciais via Lema de Kalman-Yakubovitch [129]. A forma particular que estas condições assumem para sistemas discretos nos permitirá estendê-las para lidar também com problemas de análise de desempenho em normas  $H_2$  e  $H_\infty$ .

### 3.1 $AB$ estabilidade

Nesta seção, formularemos condições suficientes para a estabilidade de sistemas lineares cuja matriz dinâmica se apresenta na forma de um produto entre duas matrizes  $A$  e  $B$ . Estas condições mostram-se adequadas para o tratamento de diversos problemas de análise de estabilidade. Algumas destas aplicações encontram-se na Seção 3.1.3.

#### 3.1.1 Sistemas contínuos

Estamos interessados em determinar condições sob as quais os sistemas dinâmicos associados à equação diferencial

$$\dot{x} = ABx \quad (3.1)$$

são estáveis. Inicialmente, consideraremos que as matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são conhecidas. Os resultados desta seção foram introduzidos nos artigos [65, 66], e baseiam-se no seguinte teorema.

**Teorema 3.1** *O sistema dinâmico contínuo (3.1) é estável se, e somente se, existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  que satisfazem a desigualdade matricial linear*

$$\begin{bmatrix} B'H' + HB & PA + B'G' - H \\ A'P + GB - H' & -G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.2)$$

**Prova:** Iniciemos pela prova da necessidade. Dado um sistema estável na forma (3.1), podemos determinar  $P > 0$  e  $Q$  por meio da relação

$$-Q := B'A'P + PAB < 0$$

Para a escolha particular das variáveis

$$H = PA \qquad G = \varepsilon I \qquad (3.3)$$

determinamos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de modo que

$$2\varepsilon I > \varepsilon^2 B Q^{-1} B'$$

Assim, obtemos

$$G + G' > (A'P + GB - H') Q^{-1} (PA + B'G' - H)$$

e completamos a prova aplicando o complemento de Schur a esta desigualdade, com o que recuperamos (3.2).

Para provar a suficiência, supondo que existam matrizes que satisfaçam o teorema, multiplicamos a desigualdade (3.2) à direita pela matriz

$$T := \begin{bmatrix} I \\ B \end{bmatrix}$$

e à esquerda por  $T'$ . Esta operação produz a desigualdade de Lyapunov

$$B'A'P + PAB < 0$$

que prova a estabilidade do sistema. ■

Uma segunda interpretação para o resultado deste teorema pode ser dada em função do conceito de positividade real. Este é o assunto do próximo corolário.

**Corolário 3.2** *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  que satisfazem a desigualdade matricial linear (3.2) se, e somente se, a matriz de transferência*

$$F(s) := (G's + H'A) (sI - BA)^{-1} \qquad (3.4)$$

for positiva-real estrita.

**Prova:** Provamos este corolário multiplicando (3.2) à direita pela matriz regular

$$T := \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & I \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

e à esquerda por  $T'$ . Deste modo obtemos

$$\begin{bmatrix} B'A'P + PAB & PA - B'G - H \\ A'P - G'B - H' & -G - G' \end{bmatrix} < 0$$

que, segundo o Lema 2.7, implica que a matriz de transferência

$$\begin{aligned} M(s) &= (G'B + H') (sI - AB)^{-1} A + G \\ &= (G'B + H') A (sI - BA)^{-1} + G \\ &= G'BA (sI - BA)^{-1} + H'A (sI - BA)^{-1} + G \\ &= G' \left[ s (sI - BA)^{-1} - I \right] + H'A (sI - BA)^{-1} + G \\ &= F(s) + G - G' \end{aligned}$$

é positiva-real estrita. Notemos que as manipulações acima são possíveis graças à regularidade da matriz  $AB$  que, por sua vez, é uma consequência da estabilidade. Completamos a prova observando que a identidade

$$M(s) + M^*(s) = F(s) + F^*(s)$$

permite concluir sobre a positividade real de  $F(s)$ . ■

O fato mais importante contido neste resultado é que é possível concluir sobre a estabilidade do produto  $AB$  por meio de uma desigualdade matricial que é linear em cada um dos fatores. Ademais, a matriz  $B$  não aparece multiplicada pela matriz de Lyapunov  $P$  em nenhum dos termos da desigualdade. Esta propriedade permite tratar o problema de estabilidade para a classe de sistemas incertos na forma  $AB$  cujas matrizes  $A$  são constantes e as matrizes  $B$  pertencem a conjuntos  $\mathcal{B}$ , descritos pelo politopo convexo

$$\mathcal{B} := \left\{ B(\xi) = \sum_{i=1}^N B_i \xi_i, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0 \right\} \quad (3.6)$$

Consideramos que o parâmetro  $\xi$  é estacionário, isto é, não é função do tempo. Este resultado, que é o principal a ser apresentado nesta seção, está contido no próximo teorema.

**Teorema 3.3** *Se existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  que satisfazem a desigualdade matricial linear*

$$\begin{bmatrix} B_i' H' + H B_i & P_i A + B_i' G' - H \\ A' P_i + G B_i - H' & -G - G' \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

então o sistema dinâmico contínuo (3.1) é estável para toda matriz  $B(\xi) \in \mathcal{B}$ .

**Prova:** Para provar este teorema definimos os escalares  $\xi_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$  e, supondo que as desigualdades dadas no teorema estejam satisfeitas, definimos a matriz simétrica e definida positiva

$$P(\xi) := \sum_{i=1}^N \xi_i P_i \quad (3.8)$$

Em seguida, multiplicamos cada uma das desigualdades em (3.7) pelo correspondente  $\xi_i$  e somamos todos os termos. Com isto, obtemos

$$\begin{bmatrix} B(\xi)' H' + H B(\xi) & P(\xi) A + B(\xi)' G' - H \\ A' P(\xi) + G B(\xi) - H' & -G - G' \end{bmatrix} < 0$$

donde a estabilidade do sistema dinâmico incerto pode ser deduzida multiplicando a desigualdade acima à direita por

$$T(\xi) := \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ B(\xi) \end{bmatrix}$$

e à esquerda por  $T(\xi)'$ . Essa operação provê a desigualdade de Lyapunov

$$B(\xi)' A' P(\xi) + P(\xi) A B(\xi) < 0 \quad (3.9)$$

que é válida para todo  $B(\xi)$  pertencente a  $\mathcal{B}$ , sempre que as condições do teorema forem satisfeitas. ■

Notemos que a matriz de Lyapunov (3.8) utilizada para testar a estabilidade é função do parâmetro incerto  $\xi$ . De fato, podemos construir uma função de Lyapunov dependente dos parâmetros [75, 76, 39, 45]

$$v(x, \xi) := x' P(\xi) x \quad (3.10)$$

que nos permite concluir sobre a estabilidade do sistema incerto graças a

$$\dot{v}(x, \xi) = x' [B(\xi)' A' P(\xi) + P(\xi) A B(\xi)] x < 0, \forall x \neq 0, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \quad (3.11)$$

e à desigualdade (3.9).

A importância deste resultado é que, embora não possamos mostrar que o Teorema 3.3 proveja condições necessárias de estabilidade, ele contém como caso particular o conceito de *estabilidade quadrática*, como atesta o próximo corolário.

**Corolário 3.4** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *Existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P'$   $> 0$  de tal forma que*

$$B_i' A' P + P A B_i < 0 \quad (3.12)$$

ii) *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} B_i' H' + H B_i & P A + B_i' G' - H \\ A' P + G B_i - H' & -G - G' \end{bmatrix} < 0, i = 1, \dots, N \quad (3.13)$$

**Prova:** Seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 3.3 provamos que ii) implica i). Para mostrar o contrário, supomos que o item i) seja verdadeiro e calculamos as matrizes  $P > 0$  e  $Q_i$  por meio das relações

$$-Q_i := B_i' A' P + P A B_i < 0, i = 1, \dots, N$$

Com a escolha particular das variáveis (3.3), determinamos  $\varepsilon$  suficientemente pequeno de modo que

$$2\varepsilon I > \varepsilon^2 B Q_i^{-1} B', i = 1, \dots, N$$

Repetindo as mesmas etapas da prova de necessidade do Teorema 3.1 obtemos o resultado desejado. ■

Uma pergunta permanece sem resposta: é possível determinar uma classe de sistemas incertos para a qual o Teorema 3.3 é condição necessária de estabilidade? Neste sentido é interessante observarmos que, graças à presença das múltiplas matrizes de Lyapunov  $P_i$  e ao Corolário 3.2, o Teorema 3.3 será satisfeito sempre que as matrizes de transferência

$$F_i(s) := (G' s + H' A) (sI - B_i A)^{-1} \quad (3.14)$$

forem positivas-reais estritas.

### 3.1.2 Sistemas discretos

Os teste de estabilidade para sistemas contínuos que acabamos de apresentar podem ser estendidos para lidar com o problema de estabilidade  $AB$  da equação a diferenças

$$x(k+1) = ABx(k) \quad (3.15)$$

Seremos capazes de estabelecer testes para a estabilidade  $AB$  de sistemas discretos utilizando funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros. Estes resultados têm especial importância devido à escassez de trabalhos sobre funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros no caso discreto [33, 74]. Em analogia ao caso contínuo, podemos estabelecer a seguinte condição necessária e suficiente de estabilidade.

**Teorema 3.5** *O sistema dinâmico discreto (3.15) é estável se, e somente se, existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  que satisfazem a desigualdade matricial linear*

$$\begin{bmatrix} B'H' + HB - P & B'G' - H \\ GB - H' & A'PA - G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

**Prova:** Como na prova de necessidade do Teorema 3.1 determinamos as matrizes  $P$  e  $Q$

$$-Q := B'A'PAB - P < 0$$

associadas a um sistema estável e escolhemos

$$H = 0 \quad G = A'PA + \varepsilon I \quad (3.17)$$

e  $\varepsilon$  suficientemente pequeno para que

$$A'PA + 2\varepsilon I > \varepsilon^2 BQ^{-1}B'$$

Aplicando a definição (3.17) e o complemento de Schur a esta desigualdade obtemos

$$\begin{bmatrix} B'A'PAB - P & B'A'PA - B'G - H \\ A'PAB - G'B - H' & A'PA - G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

Concluimos esta parte da prova observando que a expressão acima é exatamente a desigualdade (3.16) multiplicada à direita pela matriz  $T$ , definida em (3.5), e à esquerda por  $T'$ .

A prova de suficiência é idêntica à do caso contínuo. ■

Podemos também estabelecer uma relação entre esta condição de estabilidade e a condição de positividade real, dada no Lema 2.20.

**Corolário 3.6** *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  que satisfazem a desigualdade matricial linear (3.2) se, e somente se, a matriz de transferência*

$$F(\zeta) := (G'B + H')(\zeta I - AB)^{-1}A + G \quad (3.19)$$

for positiva-real estrita.

**Prova:** Estabelecemos esta equivalência notando que a desigualdade (3.18) é exatamente a condição de positividade real (2.129) para a matriz de transferência (3.19). Notemos que esta é uma condição necessária e suficiente pois a transformação efetuada pela matriz regular  $T$ , definida em (3.5), é sempre congruente. ■

É interessante notar que no caso discreto a estabilidade não implica que nenhuma das matrizes  $A$  e  $B$  seja regular. Assim, não é possível manipular a matriz de transferência  $F(\zeta)$  e levá-la a uma forma tão compacta quanto (3.4) sem que haja perda de generalidade. Para sistemas incertos, o teorema e o corolário seguintes são análogos ao Teorema 3.3 e ao Corolário 3.4. As provas, semelhantes às do caso contínuo, não serão apresentadas.

**Teorema 3.7** *Se existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  que satisfazem a desigualdade matricial linear*

$$\begin{bmatrix} B_i'H' + HB_i - P_i & B_i'G' - H \\ GB_i - H' & A'P_iA - G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.20)$$

então o sistema dinâmico discreto (3.1) é estável para toda matriz  $B(\xi) \in \mathcal{B}$ .

**Corolário 3.8** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *Existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  de tal forma que*

$$B_i'A'PAB_i - P < 0 \quad (3.21)$$

ii) *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} B_i'H' + HB_i - P & B_i'G' - H \\ GB_i - H' & A'PA - G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

Associamos a condição de estabilidade do Teorema 3.7 à função de Lyapunov quadrática

$$v(x(k), \xi) := x(k)'P(\xi)x(k) \quad (3.23)$$

e, usando a mesma definição para a matriz  $P(\xi)$  dada em (3.8), obtemos via

$$v(x(k+1), \xi) - v(x(k), \xi) = x(k)' [B(\xi)'A'P(\xi)AB(\xi) - P(\xi)] x(k) < 0, \forall x(k) \neq 0, \xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \xi_i = 1 \quad (3.24)$$

a estabilidade em todo o domínio  $\mathcal{B}$ .

### 3.1.3 Exemplos e aplicações

Nesta seção aplicaremos as condições discutidas anteriormente a dois problemas de análise de estabilidade: o problema de estabilidade robusta com funções de Lyapunov dependente dos parâmetros e o problema de  $D$  estabilidade. A idéia básica é definir de maneira adequada as matrizes  $A$  e  $B$ . Por exemplo, se  $B = I$  simplesmente testamos a estabilidade da matriz.

Método	$\alpha$
Valor exato	4.00
Teorema 3.3	4.00
Critério em [39]	4.00
Teorema 3.3 com $G = H$	3.40
Critério de Popov	2.39
Corolário 3.4	2.20
Teorema do ganho pequeno	2.15

Tabela 3.1: Estabilidade robusta para sistemas contínuos: valor máximo de  $\alpha$ 

### 3.1.4 Estabilidade robusta

Se definimos  $A = I$  e  $B \in \mathcal{B}$ , definido em (3.6), testamos a estabilidade robusta da família de sistemas considerada anteriormente no contexto da estabilidade quadrática em [70]. Em nosso contexto, testamos a estabilidade desta família por meio de uma função de Lyapunov dependente dos parâmetros utilizando os Teoremas 3.3 e 3.7. Os próximos exemplos ilustram outras possibilidades.

**Exemplo 3.1** Os dados deste exemplo foram obtidos em [39]. Desejamos determinar o máximo valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  de tal forma que a matriz  $M + \theta bc$  seja Hurwitz para todo  $|\theta| < \alpha$ . Os dados numéricos são

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12 & -12 & -25 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O valor exato pode ser calculado por meio de técnicas exaustivas como, por exemplo, o *método do lugar das raízes* [34], e se encontra na primeira linha da Tabela 3.1. No contexto das novas condições, definimos as matrizes

$$A := M \quad B_1 := I + \alpha M^{-1}bc \quad B_2 := I - \alpha M^{-1}bc$$

e resolvemos, sucessivamente, a LMI dada no Teorema 3.3 até encontrarmos o máximo valor de  $\alpha$  possível. Neste exemplo, este procedimento fornece o valor máximo exato (segunda linha da Tabela 3.1). Para efeito de comparação, listamos nesta mesma tabela outros resultados obtidos por meio de condições conhecidas. É interessante notarmos que, dos métodos que envolvem a determinação de funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros, o critério dado em [39] também consegue atingir o valor exato, enquanto o critério de Popov [129] fica bem abaixo. Os últimos colocados são os critérios baseados em condições de estabilidade quadrática, quais sejam, a condição do Corolário 3.4 e o teorema do ganho pequeno (veja Lema 2.8). Finalmente, com o intuito de avaliar uma possível extensão destes resultados para projeto de controladores, aplicamos a condição do Teorema 3.3 com a restrição adicional  $G = H$ . Mesmo nesta situação extrema, o resultado obtido é ainda melhor do que boa parte das condições existentes. ♦

**Exemplo 3.2** Neste segundo exemplo, cujos dados foram obtidos em [33], resolvemos o mesmo problema do Exemplo 3.1 com o intuito de determinar o máximo valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  de tal forma que a matriz

Método	$\alpha$
Valor exato	0.462
Teorema 3.7	0.462
Teorema 3.7 com $H = 0$	0.462
Theorem 3.7 com $G = H$	0.453
Corolário 3.8	0.428
Teorema do ganho pequeno	0.297

Tabela 3.2: Estabilidade robusta para sistemas discretos: valor máximo de  $\alpha$ 

$M + \theta bc$  seja Schur para todo  $|\theta| < \alpha$ . Os dados numéricos são

$$M = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.25 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.03 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c' = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e os resultados, que seguem o mesmo padrão obtido no caso contínuo, são apresentados na Tabela 3.2. A única diferença da formulação do caso contínuo é que, como não podemos contar sempre com a regularidade da matriz  $M$ , determinamos o raio de estabilidade diretamente para as matrizes

$$A := I \quad B_1 := M + \alpha bc \quad B_2 := M - \alpha bc$$

Aparentemente, os testes não são sensíveis a este tipo de manipulação. Notemos ainda que, para sistemas discretos, a escolha das variáveis utilizadas nas provas sugere que podemos, ao menos no caso quadrático, impor a restrição  $H = 0$  sem perturbar os resultados. Isto efetivamente acontece neste exemplo, para o qual esta restrição não altera o máximo raio de estabilidade obtido.  $\blacklozenge$

### $D$ estabilidade

Conforme discutido na Seção 2.2.3, uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  associada ao sistema contínuo (2.66) é dita  $D$  estável se, para todas as matrizes  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonais e positivas, o produto de matrizes<sup>1</sup>  $MD$  é Hurwitz. Uma vez que todos os autovalores de uma matriz são tais que  $\alpha \lambda_i(M) = \lambda_i(\alpha M)$  podemos normalizar o teste para  $D$  estabilidade considerando apenas as matrizes cujo  $\text{tr}(D) = 1$ . Desta forma, podemos utilizar o Teorema 3.3 no teste de  $D$  estabilidade definindo  $A := M$  e o poliedro associado aos vértices

$$B_i := \text{diag} \left( \frac{\varepsilon}{n-1}, \dots, \overbrace{1-\varepsilon}^i, \dots, \frac{\varepsilon}{n-1} \right) > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

Controlando o valor de  $\varepsilon > 0$  podemos nos aproximar arbitrariamente do conjunto de  $D$  estabilidade original (2.65), que é um conjunto *aberto*.

O mesmo pode ser feito para sistemas discretos se definirmos os vértices do poliedro de  $D$  estabilidade (2.131)

$$B_i := \text{diag} (\gamma_1, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_n) > 0, \quad i = 1, \dots, 2^{n-1} \quad (3.26)$$

<sup>1</sup>Denotamos o produto por  $MD$  para que não haja confusão com a matriz  $A$  do sistema (3.1).

em que  $\gamma_j \in \{1, -1\}$ ,  $j = 1, \dots, n$  e  $B_k \neq -B_l \forall k, l$ . Observemos que esta última condição indica que não é necessário testar vértices opostos. Isto decorre da mesma propriedade dos autovalores segundo a qual podemos normalizar o teste de  $D$  estabilidade para sistemas contínuos. Outra observação importante é que o conjunto de matrizes  $D$  estáveis associado a sistemas discretos é poliedral e *fechado* (veja Seção 2.3.5). No entanto, a dimensão do poliedro cresce exponencialmente com a ordem da matriz.

Desta forma, para os poliedros definidos acima, podemos testar  $D$  estabilidade utilizando os Teoremas 3.3 e 3.7. Uma vez que estes teoremas contêm os resultados obtidos com a noção de estabilidade quadrática como casos particulares, todas as condições conhecidas de  $D$  estabilidade, tanto para sistemas contínuos quanto para sistemas discretos, encontram-se neles embutidas [6, 80, 77, 84, 14].

**Exemplo 3.3** Sabe-se que a matriz [65]

$$M = \begin{bmatrix} -0.2 & 1.0 & 0.0 \\ 1.0 & -10.0 & 1.0 \\ \alpha & 1.0 & -0.1 \end{bmatrix}$$

é  $D$  estável para valores de  $\alpha$  entre

$$-0.682 \leq \alpha \leq -0.1000$$

Aplicando o Teorema 3.3 com a definição do poliedro (3.25) e  $\varepsilon = 10^{-4}$ , obtemos o domínio de  $D$  estabilidade

$$-0.682 \leq \alpha \leq -0.118$$

que se aproxima bem do domínio real. É importante realçar que nenhum teste conhecido de  $D$  estabilidade baseado na estabilidade quadrática é positivo para esta matriz. ♦

**Exemplo 3.4** Como no exemplo anterior, a propriedade de  $D$  estabilidade da matriz [14]

$$M = \begin{bmatrix} 0.97701 & -0.32047 & -0.089600 \\ 0.07282 & 0.66868 & 0.389559 \\ 0.15153 & -0.27886 & 0.697892 \end{bmatrix}$$

associada a um sistema discreto não pode ser detectada por nenhum método conhecido baseado na estabilidade quadrática [14]. No entanto, o Teorema 3.7 com o poliedro (3.26) é capaz de detectá-la. ♦

## 3.2 Estabilidade estendida para sistemas discretos

Nesta seção mostraremos como é possível introduzir um grau de liberdade extra na condição de estabilidade e na caracterização das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  para sistemas discretos na forma (2.109–2.110). Esta caracterização, ao contrário do que ocorre nas condições de estabilidade discutidas no início deste capítulo, envolvem apenas uma matriz adicional e apresentam como principal vantagem a possibilidade de extensão dos resultados de análise para projeto de filtros e controladores.



### 3.2.1 Estabilidade

A idéia central pode ser extraída da seguinte condição necessária e suficiente de estabilidade [26].

**Teorema 3.9** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), as seguintes afirmações são equivalentes*

i) *O sistema é assintoticamente estável.*

ii) *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & A'G' \\ GA & G+G'-P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.27)$$

iii) *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & AG \\ G'A' & G+G'-P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.28)$$

**Prova:** Iniciemos pela prova da equivalência entre os itens i) e ii). A prova de necessidade é imediata pois, dado um sistema estável, basta determinar  $P$  satisfazendo a inequação de Lyapunov

$$\begin{bmatrix} P & A'P' \\ PA & P \end{bmatrix} > 0$$

para que a escolha particular da matriz  $G = G' = P$  mostre que (3.27) é, de fato, factível.

A prova de suficiência é igualmente simples e decorre do seguinte fato

$$(P - G)P^{-1}(P - G)' \geq 0 \Rightarrow GP^{-1}G' \geq G + G' - P \quad (3.29)$$

válido para quaisquer matrizes  $G$  e  $P = P' > 0$ . Assim, ao tomarmos matrizes que satisfaçam a desigualdade (3.27), podemos estabelecer a relação

$$\begin{bmatrix} P & A'G' \\ GA & GP^{-1}G' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} P & A'G' \\ GA & G+G'-P \end{bmatrix} > 0$$

Como  $G + G' > P > 0$  implica que  $G$  é regular, basta então multiplicar o termo mais à esquerda na relação acima por

$$T := \text{diag}(\mathbf{I}, PG^{-1})$$

à esquerda e por  $T'$  à direita para que recuperemos a desigualdade de Lyapunov.

A prova da equivalência entre i) e iii) é dual e será omitida. ■

Este resultado está diretamente relacionado com a condição de estabilidade discutida na Seção 3.1.2. Esta relação é revelada pelo próximo corolário.

**Corolário 3.10** *Se existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que satisfazem o Teorema 3.9, então existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' > 0$  que satisfazem o Teorema 3.5. Além disto, a matriz de transferência*

$$F(\zeta) := G'A(\zeta\mathbf{I} - A)^{-1} + G \quad (3.30)$$

*é positiva-real estrita.*

**Prova:** A prova deste corolário dá-se por inspeção uma vez que dadas matrizes que satisfazem o item ii) do Teorema 3.9 para uma certa matriz  $A$ , a escolha  $H = 0$  torna a condição dada no Teorema 3.5 factível para o par de matrizes  $(A, B) \leftarrow (I, A)$ . A positividade da matriz (3.30) provém diretamente do Corolário 3.6. ■

Esta relação de continência vai mais além. Notemos, por exemplo, que a prova de necessidade do Teorema 3.9 é idêntica à do Teorema 3.5 com  $\varepsilon = 0$ . Poderíamos, igualmente, utilizar uma prova de suficiência nos moldes das provas anteriores. No entanto, preferimos introduzir uma nova estratégia, que nos permitirá estender estes resultados de maneira surpreendente.

Vale a pena realçar que, até o momento, não foi possível encontrar um resultado análogo para o caso contínuo. Caso busquemos alguma dica de como proceder nas provas dos teoremas do caso contínuo, notaremos que a variável  $H$  não pode ser nunca tomada igual a zero e que  $\varepsilon$  deve permanecer sempre estritamente positivo. Assim, apesar de ser possível generalizar o Teorema 3.9 para sistemas contínuos utilizando, por exemplo, o *lema da eliminação* [16] ou até mesmo formas quadráticas particulares, nenhuma destas alternativas provê a possibilidade de extensão obtidas no caso discreto.

### 3.2.2 Norma $H_2$

Uma das mais importantes características da condição de estabilidade definida no Teorema 3.9 é que podemos estendê-la para lidar com outros problemas de análise de sistemas lineares. O próximo teorema, introduzido pela primeira vez em [25], faz esta generalização para a norma  $H_2$ .

**Teorema 3.11** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), as seguintes afirmações são equivalentes*

i)  $\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \gamma$

ii) *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & A'G' & C' \\ GA & G+G'-P & 0 \\ C & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'G' \\ GB & G+G'-P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.32)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (3.33)$$

iii) *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & AG & B \\ G'A' & G+G'-P & 0 \\ B' & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} W & CG \\ G'C' & G+G'-P \end{bmatrix} > 0 \quad (3.35)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (3.36)$$

O valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (3.31-3.33) \} \quad (3.37)$$

ou

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{\gamma : (3.34-3.36)\} \quad (3.38)$$

**Prova:** Mais uma vez, provamos apenas a equivalência entre os itens *i*) e *ii*). Como no Teorema 3.9, a necessidade pode ser estabelecida tomando matrizes que satisfaçam o item *ii*) do Lema 2.18 para que a escolha particular da matriz  $G = G' = P$  mostre que as desigualdades (3.31–3.33) são factíveis.

A prova de suficiência baseia-se em (3.29). Ao tomarmos matrizes que satisfaçam as desigualdade (3.31–3.32), podemos estabelecer as relações

$$\begin{bmatrix} P & A'G' & C' \\ GA & GP^{-1}G' & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} P & A'G' & C' \\ GA & G+G'-P & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} W & B'G' \\ GB & GP^{-1}G' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} W & B'G' \\ GB & G+G'-P \end{bmatrix} > 0$$

Como  $G + G' > P > 0$  implica que  $G$  é regular, basta multiplicarmos os termos mais à esquerda nas relações acima por, respectivamente,

$$T := \text{diag}(\mathbf{I}, PG^{-1}, \mathbf{I})$$

e

$$T := \text{diag}(\mathbf{I}, PG^{-1})$$

à esquerda e pelo correspondente  $T'$  à direita para que recuperemos a condição dada no Lema 2.18. ■

Notemos que, nesta caracterização estendida da norma  $H_2$ , as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  aparecem multiplicadas pela matriz  $G$  e não pela matriz de Lyapunov  $P$ . Este fato terá suma importância para o desenvolvimento de teste de estabilidade robusta para sistemas com incertezas poliedrais e para o projeto de controladores.

### 3.2.3 Norma $H_\infty$

O mesmo tipo de procedimento leva à caracterização estendida da norma  $H_\infty$ , apresentada pela primeira vez em [32].

**Teorema 3.12** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), as seguintes afirmações são equivalentes*

*i)  $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma$*

*ii) Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & A'G' & \mathbf{0} & C' \\ GA & G+G'-P & GB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'G' & \gamma\mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.39)$$

iii) Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P & AG & B & \mathbf{0} \\ G'A' & G+G'-P & \mathbf{0} & G'C' \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{I} & D' \\ \mathbf{0} & CG & D & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.40)$$

O valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (3.39)\} \quad (3.41)$$

ou

$$\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (3.40)\} \quad (3.42)$$

**Prova:** Apenas a equivalência entre os itens *i*) e *ii*) será provada. A necessidade pode ser estabelecida tomando matrizes que satisfaçam o item *ii*) do Lema 2.19 para que a escolha particular da matriz  $G = G' = P$  mostre que (3.39) é factível.

Para matrizes que satisfazem a desigualdade (3.39) e utilizando (3.29) podemos estabelecer a relação

$$\begin{bmatrix} P & A'G' & \mathbf{0} & C' \\ GA & GP^{-1}G' & GB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'G' & \gamma \mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} P & A'G' & \mathbf{0} & C' \\ GA & G+G'-P & GB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'G' & \gamma \mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$$

Como  $G + G' > P > 0$  implica que  $G$  é regular, basta multiplicar o termo mais à esquerda na relação acima por

$$T := \text{diag}(\mathbf{I}, PG^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$$

à esquerda e por  $T'$  à direita para que recuperemos a condição do Lema 2.19. ■

Mais uma vez, notemos que o produto das matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  pela matriz  $P$  não aparece em nenhuma das desigualdades.

### 3.2.4 Robustez e desempenho robusto

Nesta seção apresentaremos uma das importantes implicações das caracterizações estendidas recém-introduzidas. Para a classe de sistemas discretos com incertezas poliedrais, podemos estender os resultados descritos na Seção 2.2.4 considerando funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros. Deste modo, seremos capazes de lidar com todos os problemas acessíveis ao conceito de estabilidade quadrática [9], sempre fornecendo resultados mais abrangentes.

**Teorema 3.13** *Se existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i = P'_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  que satisfazem as desigualdades matriciais lineares*

$$\begin{bmatrix} P_i & A'_i G' \\ GA_i & G + G' - P_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.43)$$

então o sistema linear (2.109–2.110) é estável para toda matriz  $A(\xi) \in \mathcal{A}$ , definido em (2.66). Isto ocorre se, e somente se, as matrizes de transferências

$$F_i(\zeta) := G'A_i(\zeta\mathbf{I} - A_i)^{-1} + G \quad (3.44)$$

forem positivas-reais estritas.

**Prova:** Como nos teoremas anteriores, definimos os escalares  $\xi_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que  $\sum_{i=1}^N \xi_i = 1$  e a matriz de Lyapunov dependente dos parâmetros (3.8). Como (3.43) é linear com relação a  $P_i$ ,  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , multiplicamos cada uma das desigualdades em (3.43) pelo correspondente  $\xi_i$  e somamos todos os termos. Com isto, obtemos

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)'G' \\ GA(\xi) & G + G' - P(\xi) \end{bmatrix} > 0$$

Se notamos que  $P(\xi) > 0$  e, portanto, que a desigualdade fundamental (3.29) pode ser também escrita na forma

$$GP(\xi)^{-1}G' \geq G + G' - P(\xi) \quad (3.45)$$

então

$$\begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)'G' \\ GA(\xi) & GP(\xi)^{-1}G' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} P(\xi) & A(\xi)'G' \\ GA(\xi) & G + G' - P(\xi) \end{bmatrix} > 0$$

Multiplicando o primeiro termo desta desigualdade por

$$T(\xi) := \text{diag}(\mathbf{I}, P(\xi)G^{-1})$$

obtemos a desigualdade de Lyapunov, que implica estabilidade. Notemos que  $G + G' > P(\xi) > 0$  e, portanto,  $G$  é regular. Como existem matrizes  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , a segunda parte do teorema provém diretamente do Corolário 3.10. ■

Este resultado tem a sua forma dual expressa no próximo corolário.

**Corolário 3.14** *Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , que satisfazem o Teorema 3.13 se, e somente se, existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , que satisfazem*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i G \\ G' A_i' & G + G' - P_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.46)$$

**Prova:** A prova segue os mesmos passos da prova do Corolário 2.12. ■

Observemos que a prova do Teorema 3.13 é, em tudo, semelhante à prova de suficiência do Teorema 3.9. Combinando este tipo de prova com os resultados apresentados na Seção 2.2.5, formulamos os próximos teoremas sobre desempenho robusto, cujas provas não serão apresentadas. Consideramos sistemas incertos cujas matrizes  $M$ , definidas em (2.91), pertencem ao domínio poliedral  $\mathcal{M}$ , definido em (2.92).

**Teorema 3.15** *Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

i) Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i'G' & C_i' \\ GA_i & G+G'-P_i & \mathbf{0} \\ C_i & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B_i'G' \\ GB_i & G+G'-P_i \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N \quad (3.48)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma, i = 1, \dots, N \quad (3.49)$$

ii) Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_iG & B_i \\ G'A_i' & G+G'-P_i & \mathbf{0} \\ B_i' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N \quad (3.50)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_iG \\ G'C_i' & G+G'-P_i \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N \quad (3.51)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma, i = 1, \dots, N \quad (3.52)$$

em que  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são as matrizes do sistema linear (2.109–2.110) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então a seguinte propriedade também é verdadeira

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \rho_2(\mathcal{M}) := \gamma \quad (3.53)$$

Os valores mínimos deste custo garantido  $H_2$  podem ser calculados resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\rho_2(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (3.47-3.49) \} \quad (3.54)$$

ou

$$\rho_2(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (3.50-3.52) \} \quad (3.55)$$

**Teorema 3.16** Com relação ao sistema linear (2.109–2.110), se pelo menos uma das seguintes afirmações é verdadeira

i) Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i'G' & \mathbf{0} & C_i' \\ GA_i & G+G'-P_i & GB_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_i'G' & \gamma\mathbf{I} & D_i' \\ C_i & \mathbf{0} & D_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.56)$$

ii) Existem matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_iG & B_i & \mathbf{0} \\ G'A_i' & G+G'-P_i & \mathbf{0} & G'C_i' \\ B_i' & \mathbf{0} & \mathbf{I} & D_i' \\ \mathbf{0} & C_iG & D_i & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.57)$$

em que  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  e  $D_i$  são as matrizes do sistema linear (2.109–2.110) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então a seguinte propriedade também é verdadeira

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(\zeta)\|_{\infty}^2 < \rho_{\infty}(\mathcal{M}) := \gamma \quad (3.58)$$

Os valores mínimos deste custo garantido  $H_{\infty}$  podem ser calculados resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\rho_{\infty}(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (3.56) \} \quad (3.59)$$

ou

$$\rho_{\infty}(\mathcal{M}) = \min \{ \gamma : (3.57) \} \quad (3.60)$$

É importante notar que as provas destes teoremas dependem da unicidade da matriz  $G$ , que sempre aparece multiplicada pelas matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Igualmente importante é a ausência do produto entre estas matrizes e a matriz de Lyapunov  $P$ .

## Capítulo 4

# Parametrização de filtros e controladores

É em [13] que, pela primeira vez, o projeto de controladores para sistemas lineares aparece formulado como um problema de otimização convexo. Cabe a nós evidenciar as diferenças entre esta abordagem e o projeto de reguladores lineares quadráticos (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulators*), cuja determinação, conhecida desde os anos sessenta [82, 91], também se dá por meio da resolução de problemas de otimização convexos [3]. Dado um conjunto de matrizes de ponderação, a família dos reguladores lineares quadráticos não contém todos os controladores capazes de estabilizar um certo sistema linear<sup>1</sup>. O fato é que, no problema linear quadrático, a eliminação de parte das variáveis de otimização<sup>2</sup> por meio das condições necessárias de otimalidade torna a determinação do controlador ótimo um problema convexo. O que foi estabelecido em [13] é bastante diferente. Os autores deste trabalho mostraram que, dado o conjunto de controladores estabilizantes por realimentação do estado, denominado  $\mathcal{K}$ , que originalmente não é um conjunto convexo, é possível definir uma transformação de variáveis de caráter biunívoco

$$\mathcal{T} : \mathcal{K} \longleftrightarrow C \quad (4.1)$$

que permite parametrizar o conjunto de todos os controladores estabilizantes por meio do conjunto convexo  $C$ . Mais especificamente, o conjunto  $C$  é um conjunto descrito por desigualdades matriciais lineares. Esta relação está ilustrada na Figura 4.1.

De posse desta caracterização dos controladores estabilizantes, diversos problemas de controle por realimentação do estado foram resolvidos [16, 21, 69, 59, 70, 71, 106]. Nosso intuito neste capítulo é estudar transformações nos moldes de  $\mathcal{T}$  que tornem convexas parametrizações mais abrangentes de filtros e controladores. Baseado nestas parametrizações, definiremos, segundo um tratamento uniforme, problemas de filtragem e controle correspondentes aos diversos métodos de análise definidos nos Capítulos 2 e 3.

---

<sup>1</sup>Chamados controladores *estabilizantes*.

<sup>2</sup>E, conseqüentemente, de parte dos controladores estabilizantes.

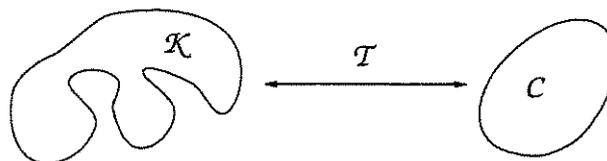


Figura 4.1: Parametrização convexa

Revisaremos os procedimentos de projeto de controladores por realimentação do estado com o intuito de generalizá-los para as condições estendidas introduzidas na Seção 3.2. Trataremos também da parametrização convexa de filtros e controladores com estruturas lineares, porém, dinâmicas. Estes resultados formam a base teórica para a resolução dos diversos problemas de filtragem e controle que serão discutidos no Capítulo 5.

## 4.1 Controle por realimentação do estado

Neste seção, consideramos sistemas lineares na forma

$$\partial x = Ax + B_w w + B_u u, x(0) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

$$z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \quad (4.3)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  representa a entrada de controle,  $w \in \mathbb{R}^r$  representa uma entrada externa e  $z \in \mathbb{R}^q$  representa a saída controlada. Sempre que nos referimos ao sistema (4.2–4.3) como um sistema contínuo, o operador linear  $\partial$  representa a operação de derivação com relação ao tempo. Se tratamos de (4.2–4.3) como um sistema discreto, avanço unitário. Desejamos parametrizar de maneira convexa todos os controladores estabilizantes por realimentação do estado, isto é, os controladores lineares na forma

$$u = Kx \quad (4.4)$$

capazes de estabilizar o sistema linear (4.2–4.3). De acordo com a introdução, denotamos por  $\mathcal{K}$  este conjunto dos controladores estabilizantes. Se aplicamos a lei de controle (4.4) ao sistema (4.2–4.3), obtemos o sistema em malha fechada

$$\partial x = \tilde{A}x + \tilde{B}w, x(0) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

$$z = \tilde{C}x + \tilde{D}w \quad (4.6)$$

no qual as matrizes  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  e  $\tilde{D}$  são

$$\tilde{A} := A + B_u K \quad \tilde{B} := B_w \quad (4.7)$$

$$\tilde{C} := C_z + D_{zu} K \quad \tilde{D} := D_{zw} \quad (4.8)$$

Os resultados contidos em [13] baseiam-se no seguinte lema, cuja prova se dá por inspeção.

**Lema 4.1** *A transformação de variável*

$$L := KX \quad (4.9)$$

*é capaz de linearizar os produtos de matrizes*

$$\tilde{A}X = AX + B_u L \quad \tilde{C}X = C_z X + D_{zu} L \quad (4.10)$$

### 4.1.1 Sistemas contínuos

Queremos utilizar o Lema 4.1 a fim de obter parametrizações convexas para o problema de controle por realimentação do estado (4.4) de sistemas contínuos, segundo as normas  $H_2$  e  $H_\infty$  e segundo a propriedade de positividade real. Estes conceitos foram definidos nos Lemas 2.5, 2.6 e 2.7. Nestes lemas, dividimos as caracterizações por meio de desigualdades matriciais lineares em dois grupos, que denominamos primal e dual. No grupo primal encontram-se as caracterizações que envolvem o produto da matriz  $A$  pela matriz  $P$  na forma  $A'P$ . As desigualdades do grupo dual contêm o produto  $AP$ . Conforme veremos em seguida, a escolha [13]

$$X := P \quad (4.11)$$

permite que o Lema 4.1 linearize as desigualdades em suas formas duais. A linearização dos problemas na forma primal requer a definição alternativa

$$X := P^{-1} \quad (4.12)$$

Assim, dado um par factível de variáveis de otimização  $(X, L)$ , obtemos um controlador na forma (4.4) por meio da inversão da relação (4.9). Mais precisamente, calculamos o ganho de realimentação mediante a operação

$$K = LX^{-1} \quad (4.13)$$

Para tal, devemos assegurar a regularidade de  $X$ , a qual estará sempre presente nos resultados que apresentaremos. Dessa forma, a relação (4.9) configura uma transformação biunívoca nos moldes de (4.1). Tratemos do projeto em norma  $H_2$ .

**Teorema 4.2** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um controlador na forma (4.4) que estabiliza o sistema linear contínuo (4.2–4.3) e que garante que a norma  $H_2$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & XC'_z + L'D'_{zu} \\ C_z X + D_{zu} L & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_w \\ B_w & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.15)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.16)$$

- iii) *Existem matrizes  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & B_w \\ B'_w & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_z X + D_{zu} L \\ XC'_z + L'D'_{zu} & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.18)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.19)$$

O mínimo valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.14-4.16) \} \quad (4.20)$$

ou

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.17-4.19) \} \quad (4.21)$$

**Prova:** Provamos a necessidade do item *iii*) observando que, dado um controlador  $K$  e uma matriz  $P$  com a propriedade descrita em *i*), a definição da variável  $X$  dada em (4.11) e o Lema 4.1 tornam as desigualdades matriciais (2.29–2.31), calculadas para as matrizes em malha fechada (4.7–4.8), exatamente (4.17–4.19).

A prova da necessidade do item *ii*) é semelhante, porém envolve um passo preliminar. As desigualdades (2.26–2.28), calculadas para as matrizes em malha fechada (4.7–4.8), não apresentam o produto  $KX$  segundo nenhuma das definições (4.11) ou (4.12). Sendo assim, para que possamos aplicar o Lema 4.1, devemos submeter as desigualdades (2.26–2.28) a transformações congruentes que façam aparecer este produto. Se notamos que, para um controlador factível, a matriz  $P$  é sempre estritamente definida positiva, portanto regular, obtemos os termos em  $KX$  multiplicando, por ambos os lados, as desigualdades (2.26) e (2.27) por, respectivamente,  $T := \text{diag}(P^{-1}, \mathbf{I})$  e  $T := \text{diag}(\mathbf{I}, P^{-1})$ . Procedendo como no prova do item *iii*), finalizamos a prova da necessidade do item *ii*) utilizando a definição (4.12) juntamente com o Lema 4.1.

Estabelecemos a suficiência destes resultados de maneira simples. Se observamos que as desigualdades (4.15) e (4.18) implicam  $X > 0$ , podemos obter matrizes  $P$  e  $K$  que satisfaçam as desigualdades dadas no Lema 2.5 por meio de (4.13). ■

Notemos que a norma  $H_2$  somente se encontra definida para sistemas estritamente próprios. Desta feita, o teorema acima só é aplicável a sistemas (4.2–4.3) que apresentem

$$\tilde{D} = D_{zw} = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Observemos também que o conjunto de todos os ganhos estabilizantes em sua formulação convexa, que denomináramos  $C$ , encontra-se incorporado às desigualdades (4.14–4.19). Estabelecemos a relação

$$K \in \mathcal{K} \iff L \in C \quad (4.23)$$

definindo o conjunto  $C$  por meio das desigualdades

$$C := \{ L : AX + B_u L + XA' + L'B_u' < 0, X > 0 \} \quad (4.24)$$

Finalmente, é possível mostrar que a solução por realimentação do estado para o problema em norma  $H_2$  obtida no Teorema 4.2 é, de fato, a solução ótima global dentre todas as estruturas de controladores existentes [5, 21]. Sendo assim, devemos ser capazes de estabelecer a relação entre a solução obtida via desigualdades matriciais lineares e a solução obtida por meio da solução da equação de Riccati associada ao problema do regulador linear quadrático. Para tal, consideremos as hipóteses clássicas

$$C_z' D_{zu} = \mathbf{0} \quad D_{zu}' D_{zu} = \mathbf{I} \quad D_{zw} = \mathbf{0} \quad (4.25)$$

A equivalência com a solução do problema LQR pode ser verificada a partir das condições de otimalidade do problema (4.20), que nos permite concluir que o mínimo valor do traço da matriz  $W$  ocorre para

$$P := X^{-1} \quad L = -B'_u \quad (4.26)$$

em que a matriz  $P > 0$  é a solução da equação algébrica de Riccati [21]

$$A'P + PA - PB_u B'_u P + C_z C'_z = 0 \quad (4.27)$$

Dada a relação (4.26), e aplicando o complemento de Schur à desigualdade (4.14), percebemos que esta equação define uma solução na fronteira do conjunto descrito por (4.14–4.16).

De volta à parametrização de todos os controladores por realimentação do estado, podemos caracterizar problemas convexos correspondentes à minimização da norma  $H_\infty$  e à propriedade da positividade real por meio destas mesmas transformações. As provas destes resultados são idênticas à apresentada para o problema em norma  $H_2$  e, por isso, serão omitidas.

**Teorema 4.3** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um controlador na forma (4.4) que estabiliza o sistema linear contínuo (4.2–4.3) e que garante que a norma  $H_\infty$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $L \in L^{m \times n}$  e  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & B_w & XC'_z + L'D'_{zu} \\ B'_w & -\gamma \mathbf{I} & D'_{zw} \\ C_z X + D_{zu} L & D_{zw} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.28)$$

$$X > 0 \quad (4.29)$$

- iii) *Existem matrizes  $L \in L^{m \times n}$  e  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & B_w & XC'_z + L'D'_{zu} \\ B'_w & -\mathbf{I} & D'_{zw} \\ C_z X + D_{zu} L & D_{zw} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.30)$$

$$X > 0 \quad (4.31)$$

O mínimo valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (4.28-4.29) \} \quad (4.32)$$

ou

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (4.30-4.31) \} \quad (4.33)$$

No caso do projeto em norma  $H_\infty$ , as caracterizações primal e dual, dadas no teorema acima, praticamente coincidem, permanecendo a posição do escalar  $\gamma$  a única diferença. Podemos demonstrar que existe uma relação entre as variáveis de otimização das desigualdades (4.28–4.29) e (4.30–4.31) do tipo

$$(\gamma X, \gamma L) \longleftrightarrow (X, L) \quad (4.34)$$

Considerando as hipóteses (4.25) e a escolha (4.26), e aplicando o complemento de Schur à desigualdade (4.28), obtemos a equação de Riccati

$$A'P + PA - P(B_u B_u' - \gamma^{-1} B_w B_w')P + C_z C_z' = 0 \quad (4.35)$$

correspondente à caracterização do controlador  $H_\infty$  central [35]. O próximo teorema trata do projeto de sistemas com a propriedade da positividade real.

**Teorema 4.4** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um controlador na forma (4.4) que estabiliza o sistema linear contínuo (4.2–4.3) e torna a matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  positiva-real estrita.*
- ii) *Caso o sistema (4.5–4.6) seja estritamente próprio ( $\tilde{D} = D_{zw} = 0$ ), existem matrizes  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$AX + B_u L + XA' + L' B_u' < 0 \quad (4.36)$$

$$B_w' = C_z X + D_{zu} L \quad (4.37)$$

$$X > 0 \quad (4.38)$$

- iii) *Caso o sistema (4.5–4.6) não seja estritamente próprio ( $\tilde{D} = D_{zw} \neq 0$ ), existem matrizes  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L' B_u' & B_w - X C_z' - L' D_{zu}' \\ B_w' - C_z X - D_{zu} L & -(D_{zw} + D_{zw}') \end{bmatrix} < 0 \quad (4.39)$$

$$X > 0 \quad (4.40)$$

Observemos que, a partir das formulações primal e dual dadas no Lema 2.7, obtemos uma única caracterização de controladores por realimentação de estado que torna um sistema positivo-real.

### 4.1.2 Sistemas discretos

Podemos utilizar as escolhas feitas em (4.11) e (4.12) juntamente com a transformação de variável definida no Lema 4.1 para dar solução aos problemas de projeto de controladores para sistemas discretos, conforme as definições dadas nos Lemas 2.18 e 2.19. No entanto, estes resultados não se aplicam à caracterização estendida introduzida no Capítulo 3. Nesta caracterização, a configuração em malha fechada (4.5–4.6) faz com que a matriz de ganho  $K$  apareça nas definições das desigualdades matriciais lineares multiplicada pela matriz  $G$ , e não pela matriz de Lyapunov  $P$ . Uma pequena modificação destas escolhas provê o resultado desejado: para obtermos a linearização das desigualdades duais definimos

$$X := G \quad (4.41)$$

e para as desigualdades primais

$$X := G^{-T} \quad E := G^{-1} P G^{-T} \quad (4.42)$$

A partir de um conjunto de variáveis de otimização factível, calculamos o ganho de realimentação do controlador por meio da relação de inversão (4.13). Para isto, devemos assegurar a regularidade da matriz  $G$ . O problema de projeto em norma  $H_2$  está descrito no próximo teorema.

**Teorema 4.5** *As seguintes afirmações são equivalentes*

i) *Existe um controlador na forma (4.4) que estabiliza o sistema linear discreto (4.2–4.3) e que garante que a norma  $H_2$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \gamma$ .*

ii) *Existem matrizes  $E = E' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} E & X'A' + L'B'_u & X'C'_z + L'D'_{zu} \\ AX + B_uL & X + X' - E & \mathbf{0} \\ C_zX + D_{zu}L & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.43)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_w \\ B_w & X + X' - E \end{bmatrix} > 0 \quad (4.44)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.45)$$

iii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & AX + B_uL & B_w \\ X'A' + L'B'_u & X + X' - P & \mathbf{0} \\ B'_w & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.46)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_zX + D_{zu}L \\ X'C'_z + L'D'_{zu} & X + X' - P \end{bmatrix} > 0 \quad (4.47)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.48)$$

*O mínimo valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos*

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.43-4.45) \} \quad (4.49)$$

*ou*

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.46-4.48) \} \quad (4.50)$$

**Prova:** Inicialmente, tomemos um controlador com a propriedade descrita em i) e calculemos, por meio do Teorema 3.11, uma matriz  $P$  e uma matriz regular  $G$  de forma que

$$G + G' > P > 0$$

Como o auxílio do Lema 4.1, verificamos que as desigualdades matriciais (3.34–3.36), calculadas para as matrizes em malha fechada (4.7–4.8), são exatamente as desigualdades (4.46–4.48). Isto prova a necessidade do item iii).

Como no Teorema 4.2, a prova de necessidade do item ii) envolve um passo preliminar: a multiplicação da desigualdade (3.31) por  $T := \text{diag}(G^{-1}, G^{-1}, \mathbf{I})$  à esquerda e  $T'$  à direita e a multiplicação da desigualdade (3.32) por  $T := \text{diag}(G^{-1}, G^{-1})$  à esquerda e  $T'$  à direita. Nesta forma, concluímos novamente pelo Lema 4.1 que as desigualdades (4.43–4.45), calculadas para as matrizes em malha fechada, são exatamente (3.31–3.33).

A prova da suficiência é também similar à prova da suficiência do Teorema 4.2. Dadas matrizes que satisfazem as desigualdades (4.43–4.48), podemos afirmar que

$$E > 0$$

$$P > 0$$

$$X + X' > 0$$

com o que concluímos que a matriz  $X$  é regular. Por meio de (4.13), obtemos matrizes  $K$ ,  $G$  e  $P$  que satisfazem as desigualdades do Teorema 3.11. No problema primal, o valor da matriz  $P$  adequada ao Teorema 3.11 deve ser calculado por meio da relação

$$P = GEG' \quad (4.51)$$

o que finaliza esta prova. ■

Como no caso contínuo, o Teorema 4.5 contém a descrição do conjunto convexo  $C$ , neste caso, caracterizado pela desigualdade

$$C := \left\{ L : \begin{bmatrix} P & AX + B_u L \\ X'A' + L'B'_u & X + X' - P \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (4.52)$$

No início desta seção, havíamos dito que, com base nos Lemas 2.18 e 2.19 e nas transformações de variáveis (4.11–4.13), resultados análogos aos obtidos no caso contínuo poderiam ser derivados. Uma outra maneira de obter estes análogos é a partir dos resultados recém-apresentados. Nos problemas de análise estudados no Capítulo 3, a restrição adicional  $G = P$  é capaz de reduzir os resultados estendidos às condições padrões. Esta propriedade permanece inalterada, mesmo após a transformação de variáveis (4.41–4.42). Assim, para que obtenhamos os problemas de projeto associados ao Lema 2.18 basta impor aos problemas do Teorema 4.5 a restrição linear adicional

$$X = X' = E = P \quad (4.53)$$

Neste contexto, as hipóteses clássicas (4.25) e as definições

$$P := X^{-1} \quad L = -(B'_u P B_u + I)^{-1} B'_u P A X \quad (4.54)$$

associadas à condição de otimalidade do problema (4.49), permitem recuperar a solução ótima do problema  $H_2$  por meio da equação de Riccati [5]

$$A' P A - P - A' P B_u (B'_u P B_u + I)^{-1} B'_u P A + C'_z C_z = 0 \quad (4.55)$$

que, segundo o complemento de Schur de (4.43), define uma solução na fronteira do conjunto (4.43–4.45). Passemos agora ao projeto em norma  $H_\infty$ .

**Teorema 4.6** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um controlador na forma (4.4) que estabiliza o sistema linear discreto (4.2–4.3) e que garante que a norma  $H_\infty$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $E = E' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$  e  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} E & X'A' + L'B'_u & \mathbf{0} & X'C'_z + L'D'_{zu} \\ AX + B_u L & X + X' - E & B_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'_w & \gamma \mathbf{I} & D'_{zw} \\ C_z X + D_{zu} L & \mathbf{0} & D_{zw} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.56)$$

- iii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$  e  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & AX + B_u L & B_w & \mathbf{0} \\ X'A' + L'B'_u & X + X' - P & \mathbf{0} & X'C'_z + L'D'_{zu} \\ B'_w & \mathbf{0} & \mathbf{I} & D'_{zw} \\ \mathbf{0} & C_z X + D_{zu} L & D_{zw} & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.57)$$

O valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (4.56)\} \quad (4.58)$$

ou

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (4.57)\} \quad (4.59)$$

A restrição (4.53) permite recuperar os resultados convencionais [71]. Se consideramos as hipóteses (4.25) e definimos as variáveis

$$P := (X - \gamma^{-1} B_w B_w')^{-1} \quad L = - (B_u' P B_u + \mathbf{I})^{-1} B_u' P A X \quad (4.60)$$

obtemos a equação de Riccati do controlador  $H_\infty$  central

$$A' P A - (P^{-1} + \gamma^{-1} B_w B_w')^{-1} - A' P B_u (B_u' P B_u + \mathbf{I})^{-1} B_u' P A + C_z' C_z = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

aplicando o complemento de Schur à desigualdade (4.56).

## 4.2 Filtragem

O problema de obtenção de uma boa aproximação para uma grandeza corrompida por ruídos leva o nome genérico de *filtragem*. Neste trabalho, consideramos como grandeza a ser aproximada a saída de um sistema dinâmico, problema a que muitos autores se referem pelo nome de *filtragem dinâmica* [4]. Se a saída deste sistema é o próprio vetor de estado, o problema de filtragem leva o nome de *estimação do estado* e o filtro torna-se um *observador do estado* [104]. Na literatura de controle, reconhecemos a estimação do estado como dual ao controle por realimentação do estado. Paradoxalmente, embora a parametrização de todos os controladores estabilizantes por realimentação do estado já se encontre formulada como um problema de otimização convexo desde o fim dos anos oitenta [13], só recentemente pudemos obter resultado correspondente para a parametrização dos filtros [53, 60]. Este resultado trouxe consigo solução para diversos problemas que ainda se encontravam em aberto [53, 60, 57, 63].

O problema a ser resolvido nesta seção é o seguinte. Dado o sistema linear

$$\partial x = A x + B_w w, \quad x(0) = \mathbf{0} \quad (4.62)$$

$$z = C_z x + D_{zw} w \quad (4.63)$$

$$y = C_y x + D_{yw} w \quad (4.64)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $w \in \mathbb{R}^r$  representa uma entrada externa,  $z \in \mathbb{R}^q$  representa a saída de referência e  $y \in \mathbb{R}^p$  representa a saída medida, desejamos obter um filtro linear e invariante no tempo

$$\partial x_f = A_f x_f + B_f y, \quad x_f(0) = \mathbf{0} \quad (4.65)$$

$$z_f = C_f x_f + D_f y \quad (4.66)$$

em que  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$  é o estado estimado e  $z_f \in \mathbb{R}^q$  é a saída estimada, que faça com que o erro de estimação

$$e := z - z_f \quad (4.67)$$

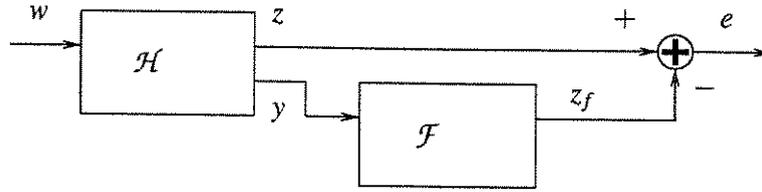


Figura 4.2: Filtragem

seja mínimo segundo critérios a serem definidos. Notemos que, por enquanto, não estamos impondo uma dimensão fixa ao vetor de estado estimado  $x_f$ . A conexão do filtro (4.65–4.66) ao sistema (4.62–4.64), conforme a Figura 4.2, produz o sistema linear

$$\partial \tilde{x} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} w, \quad \tilde{x}(0) = \mathbf{0} \quad (4.68)$$

$$e = \tilde{C} \tilde{x} + \tilde{D} w \quad (4.69)$$

cujas matrizes dinâmicas são

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_y & A_f \end{bmatrix} \quad \tilde{B} := \begin{bmatrix} B_w \\ B_f D_{yw} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\tilde{C} := [C_z - D_f C_y \quad -C_f] \quad \tilde{D} := D_{zw} - D_f D_{yw} \quad (4.71)$$

Consideraremos dois critérios de minimização do erro de estimação: minimização em norma  $H_2$  e em norma  $H_\infty$ . Conforme as definições dessas normas, dadas nos Capítulo 2, e segundo a natureza da entrada de ruído  $w$ , dois tipos de problema de otimização podem ser considerados. No primeiro, para o qual utilizaremos a minimização em norma  $H_2$ , a entrada  $w$  é um ruído branco Gaussiano de média nula e variância conhecida [4] (veja também Lema 2.2). No segundo, a entrada  $w$  é um ruído de média nula sem distribuição precisamente conhecida porém cuja variância é limitada. Neste caso, utilizaremos a minimização em norma  $H_\infty$  [101, 119].

Agrupando os parâmetros do filtro na matriz

$$\tilde{K}_f := \begin{bmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

nosso objetivo é obter uma transformação de variáveis capaz de parametrizar os diversos filtros  $\tilde{K}_f \in \mathcal{K}_f$  por meio de um conjunto convexo  $C_f$ . Antes de prosseguirmos para os resultados específicos, definimos as matrizes

$$\tilde{X} := \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U} \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{X}^{-1} := \begin{bmatrix} Y' & \hat{V}' \\ V' & \hat{Y}' \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Definimos também a matriz

$$\tilde{T} := \begin{bmatrix} Z' & Y' \\ \mathbf{0} & V' \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

de tal forma que obtenhamos o produto

$$\tilde{X} \tilde{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ U Z' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

O próximo lema é análogo ao Lema 4.1. A prova, novamente, dá-se por inspeção.

**Lema 4.7** *As transformações de variáveis*

$$\begin{bmatrix} Q & F \\ L & R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{K}_f \begin{bmatrix} UZ' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad S := VUZ' \quad (4.76)$$

são capazes de linearizar os produtos de matrizes

$$\tilde{T}' \tilde{A} \tilde{X} \tilde{T} = \begin{bmatrix} ZA & ZA \\ YA + FC_y + Q & YA + FC_y \end{bmatrix} \quad \tilde{C} \tilde{X} \tilde{T} = [C_z - RC_y - L \quad C_z - RC_y] \quad (4.77)$$

$$\tilde{T}' \tilde{B} = \begin{bmatrix} ZB_w \\ YB_w + FD_{yw} \end{bmatrix} \quad \tilde{T}' \tilde{X} \tilde{T} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Y + S & Y \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

#### 4.2.1 Sistemas contínuos

Com base no Lema 4.7, podemos introduzir transformações linearizantes para problemas de filtragem de sistemas contínuos. Dadas as matrizes

$$\tilde{P} = \tilde{P}' := \begin{bmatrix} Z^{-T} & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^{-T} := \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

a transformação linearizante adequada ao tratamento das desigualdades na forma dual é (4.76) com a escolha particular

$$\tilde{X} := \tilde{P} \quad (4.80)$$

Para tratarmos problemas na formulação primal devemos alterar as definições das matrizes para

$$\tilde{P} = \tilde{P}' := \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad \tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^{-T} := \begin{bmatrix} Z^{-T} & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

de tal forma que a escolha

$$\tilde{X} := \tilde{P}^{-1} \quad (4.82)$$

faça com que a transformação (4.76) mantenha suas propriedades linearizantes.

Obtidas soluções em termos das matrizes transformadas, recuperamos os correspondentes parâmetros do filtro invertendo a transformação (4.76) por meio de

$$\tilde{K}_f = \begin{bmatrix} V^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{-T} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

em que as matrizes regulares  $U$  e  $V$  devem ser escolhidas de modo a satisfazer

$$VU = SZ^{-T} \quad (4.84)$$

Como mostraremos adiante, todas as matrizes que precisam ser invertidas são, efetivamente, regulares, o que assegura o caráter biunívoco desta transformação. Tratemos agora do problema em norma  $H_2$ .

**Teorema 4.8** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) Existe um filtro (4.65–4.66) de ordem completa ( $n_f = n$ ) para o sistema linear contínuo (4.62–4.64) que garante que a norma  $H_2$  do erro de estimação satisfaz  $\|H_{we}(s)\|_2^2 < \gamma$ .

ii) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZA + A'Y + C_y'F' + Q' & C_z' - C_y'R' - L' \\ (\star)' & A'Y + C_y'F' + YA + FC_y & C_z' - C_y'R' \\ (\star)' & (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.85)$$

$$\begin{bmatrix} W & B_w'Z & B_w'Y + D_{yw}'F' \\ (\star)' & Z & Z \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.86)$$

$$D_{zw} - RD_{yw} = 0 \quad (4.87)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.88)$$

iii) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZA + A'Y + C_y'F' + Q' & ZB_w \\ (\star)' & A'Y + C_y'F' + YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} \\ (\star)' & (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.89)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_z - RC_y - L & C_z - RC_y \\ (\star)' & Z & Z \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.90)$$

$$D_{zw} - RD_{yw} = 0 \quad (4.91)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.92)$$

O mínimo valor da norma  $H_2$  de  $H_{we}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{\tilde{K}_f \in \mathcal{K}_f} \|H_{we}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.85-4.87) \} \quad (4.93)$$

ou

$$\min_{\tilde{K}_f \in \mathcal{K}_f} \|H_{we}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.89-4.91) \} \quad (4.94)$$

**Prova:** Dado um filtro  $\tilde{K}_f$  com a propriedade descrita em i) podemos calcular matrizes regulares  $\tilde{P} > 0$  que satisfazem as desigualdades matriciais (2.26–2.28) e (2.29–2.31), calculadas com as matrizes em malha fechada (4.70–4.71). Para provar a necessidade do item ii), multiplicamos a desigualdade (2.26) à direita por  $T = \text{diag}(\tilde{P}^{-1}\tilde{T}, \mathbf{I})$  e à esquerda por  $T'$  e, em seguida, multiplicamos a desigualdade (2.27) à direita por  $T = \text{diag}(\mathbf{I}, \tilde{P}^{-1}\tilde{T})$  e à esquerda por  $T'$ . Feito isto, obtemos

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}'\tilde{P}^{-1}\tilde{A}'\tilde{T} + \tilde{T}'\tilde{A}\tilde{P}^{-1}\tilde{T} & \tilde{T}'\tilde{P}^{-1}\tilde{C}' \\ \tilde{C}\tilde{P}^{-1}\tilde{T} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad \begin{bmatrix} W & \tilde{B}'\tilde{T} \\ \tilde{T}'\tilde{B} & \tilde{T}'\tilde{P}^{-1}\tilde{T} \end{bmatrix} > 0$$

Se aplicamos a essas desigualdades o Lema 4.7 e a definição (4.82), recuperamos (4.85–4.86). Para provar o item iii), multiplicamos a desigualdade (2.29) à direita por  $T = \text{diag}(\tilde{T}, \mathbf{I})$  e à esquerda por  $T'$  e multiplicamos (2.30) à direita por  $T = \text{diag}(\mathbf{I}, \tilde{T})$  e à esquerda por  $T'$ . Recuperamos as desigualdades (4.89–4.90) aplicando o Lema 4.7 e a definição (4.80).

Notemos que, ao efetuar tais multiplicações, devemos assegurar a existência de matrizes  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P}^{-1}$  cujos componentes  $U$  e  $V$  sejam regulares. Graças ao caráter estrito das desigualdades envolvidas no problema, uma ligeira perturbação em  $\tilde{P}$  é capaz de fornecer a propriedade de regularidade desejada sem que violemos as desigualdades originais (para maiores detalhes veja [44]). Com base na regularidade de  $U$  e  $V$ , podemos garantir a regularidade da matriz  $\tilde{T}$  e, conseqüentemente, a reversibilidade das manipulações efetuadas.

Quanto ao “desaparecimento” da variável  $S$ , que não consta das desigualdades do teorema, um último detalhe resta ser esclarecido. A escolha particular de  $\tilde{P} = \tilde{P}'$  e de suas inversas em (4.79) e (4.81) fornece a identidade

$$Y + S = Y + VUZ' = Z$$

com a qual eliminamos a variável  $S$  do problema.

Para estabelecer a suficiência dos resultados, devemos mostrar que, a partir de soluções factíveis para as desigualdades em *ii*) e *iii*), podemos obter um filtro factível por meio de (4.83). Resta-nos provar que, a partir de variáveis de otimização factíveis, podemos definir uma matriz  $\tilde{T}$  regular. Se isto for verdade, dada a reversibilidade das manipulações da prova da necessidade, as desigualdades (2.26–2.31) serão factíveis. Com este intuito, notemos que o complemento de Schur das desigualdades (4.86) e (4.90) implica

$$Z > 0 \qquad Y - Z > 0 \qquad (4.95)$$

Como as matrizes  $U$  e  $V$  devem ser escolhidas de modo a satisfazer a identidade

$$VU = (Z - Y)Z^{-T} \qquad (4.96)$$

e o termo à direita nesta identidade é regular,  $U$  e  $V$  também o são. Isto garante, a um só tempo, a regularidade da matriz  $\tilde{T}$  e a inversibilidade das matrizes em (4.83).

Finalmente, as igualdades (4.87) e (4.91) indicam que  $\tilde{D}$  deve ser nulo, que é uma condição necessária para o cálculo da norma  $H_2$ . ■

Teçamos alguns comentários sobre o papel secundário representado pelas matrizes  $U$  e  $V$ . O único momento em que delas precisamos é no cálculo da implementação do filtro. Mesmo nesta hora, a escolha de uma dessas matrizes, por exemplo,  $U$ , é completamente arbitrária<sup>3</sup>. A outra matriz, no caso,  $V$ , é determinada a partir da identidade (4.84). Efetivamente, se olhamos mais a fundo para o cálculo da matriz de transferência do filtro, notamos que

$$\begin{aligned} F(s) &= C_f (sI - A_f)^{-1} B_f + D_f \\ &= LZ^{-T}U^{-1} (sI - V^{-1}QZ^{-T}U^{-1})^{-1} V^{-1}F + R \\ &= L (sVUZ' - Q)^{-1} F + R \\ &= L (sS - Q)^{-1} F + R \end{aligned} \qquad (4.97)$$

A expressão (4.97) não depende da escolha das matrizes  $U$  e  $V$ . Em outras palavras, as matrizes  $U$  e  $V$  parametrizam a representação de estado do filtro, porém não têm nenhuma influência sobre a sua matriz de transferência. Como esperado, variações em  $U$  e  $V$  não alteram a otimalidade dos resultados obtidos por meio dos problemas (4.93) e (4.94). Um ponto interessante é que não é necessário conhecer os valores das matrizes  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  para que possamos sintetizar o filtro.

<sup>3</sup>Desde que seja regular.

Outro fato que podemos perceber por intermédio da expressão da matriz de transferência do filtro (4.97), é que obteremos filtros de ordem reduzida sempre que a matriz  $S$  apresentar deficiência em seu posto. De fato, obtemos filtros estáticos, isto é, sem dinâmica, impondo a restrição linear adicional

$$S = Z - Y = 0$$

Esta observação serve de ponto de partida para o próximo corolário.

**Corolário 4.9** *O filtro de ordem completa ( $n_f = n$ ) obtido como solução dos problemas definidos no Teorema 4.8 é o filtro linear ótimo dentre todos os filtros lineares de ordem finita.*

**Prova:** Começemos pelos filtros de ordem reduzida, isto é, os filtros cuja dimensão obedecem à relação  $n_f < n$ . Neste caso, devemos notar que a matriz  $\tilde{T}$ , definida em (4.74), não é quadrada, mas ainda assim possui posto completo<sup>4</sup>. Relaxando o caráter estrito dessas desigualdade e procedendo como anteriormente, chegamos à conclusão de que as mesmas desigualdades (4.85–4.92) continuam válidas, porém, para que possamos obedecer à relação

$$VUZ' = S = Z - Y$$

devemos impor a restrição adicional

$$\text{posto}(S) = \text{posto}(Z - Y) = n_f$$

Como esta restrição adicional contribui para aumentar o valor da norma, concluímos que o filtro de ordem completa é o que apresenta a menor norma dentre os filtros de ordem reduzida.

Resta-nos considerar o caso  $n_f > n$ . Como anteriormente, a matriz  $\tilde{T}$  não é quadrada, porém tem posto completo. Sem perda de generalidade, podemos considerar que a matriz  $\tilde{T}$  tem a seguinte estrutura

$$\tilde{T} := \begin{bmatrix} Z' & Y' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V' & \mathcal{N}_{\hat{U}} \end{bmatrix}$$

em que  $\mathcal{N}_{\hat{U}}$  denota uma base para o espaço nulo da matriz  $\hat{U}$ . Notemos que esta matriz deve ter posto completo pois, segundo a definição (4.73) e as relações em (4.95), a matriz

$$\hat{U}V' = Z^{-T}(Z' - Y')$$

deve ser uma matriz regular. Assim, obtemos o produto fundamental

$$\tilde{X}\tilde{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \hat{U}\mathcal{N}_{\hat{U}} \\ UZ' & \mathbf{0} & \hat{X}\mathcal{N}_{\hat{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ UZ' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

pois, segundo a definição (4.73),

$$\hat{X} = -\hat{V}^{-T}Y'\hat{U}$$

Refazendo os cálculos, chegaremos ao mesmo conjunto de desigualdades (4.85–4.92), o que nos leva a concluir que, toda vez que houver um filtro de ordem  $n_f > n$ , poderemos construir um filtro de ordem completa com o mesmo valor do custo. ■

Em verdade, o enunciado deste corolário pode ser mais abrangente do que o formulado. Para a classe de sistemas lineares (4.62–4.64) o filtro linear (4.65–4.66) consiste na estrutura ótima dentre todas as

<sup>4</sup>Como no caso quadrado, podemos considerar sem perda de generalidade que as matrizes  $U$  e  $V$  têm posto completo.

possíveis estruturas de filtros causais, incluindo-se aí a extensa classe de filtros não lineares [4]. Em outras palavras, o problema de filtragem ótima obtido provê, exatamente, o valor da norma associado ao filtro ótimo estacionário de Kalman. Esta relação torna-se mais clara se observamos o comportamento das desigualdades à medida em que a matriz  $Z$  tende a zero. Para tal, relaxemos o caráter estrito das desigualdades (4.89–4.92) e nos atenhamos, por simplicidade, às hipóteses clássicas

$$B_w D'_{yw} = 0 \quad D_{yw} D'_{yw} = I \quad D_{zw} = 0 \quad (4.98)$$

Para que possamos satisfazer as desigualdades (4.89–4.90) devemos impor

$$Q = -YA - FC_y \quad L = C_z \quad R = 0 \quad (4.99)$$

o que nos permite simplificá-las da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} A'Y + C'_y F' + YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} \\ B'_w Y + D'_{yw} F' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad \begin{bmatrix} W & C_z \\ C'_z & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.100)$$

Se percebemos que o mínimo valor do traço da matriz  $W$  associado a essas desigualdades ocorre para

$$P := Y^{-1} \quad F = -C'_y \quad (4.101)$$

então a equivalência com o filtro de Kalman decorre da possibilidade de cálculo da matriz  $P > 0$  como solução da equação de Riccati

$$AP + PA' - PC'_y C_y P + B_w B'_w = 0 \quad (4.102)$$

Isto demonstra que o filtro de Kalman encontra-se na fronteira do conjunto de filtros definido por meio das desigualdades matriciais lineares (4.100).

Nosso próximo passo é generalizar esta abordagem para o problema de filtragem em norma  $H_\infty$ .

**Teorema 4.10** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um filtro (4.65–4.66) de ordem completa ( $n_f = n$ ) para o sistema linear contínuo (4.62–4.64) que garante que a norma  $H_\infty$  do erro de estimação satisfaz  $\|H_{we}(s)\|_\infty^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZA + A'Y + C'_y F' + Q' & ZB_w & C'_z - C'_y R' - L' \\ (\star)' & A'Y + C'_y F' + YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} & C'_z - C'_y R' \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} & D'_{zw} - D'_{yw} R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.103)$$

$$Y > Z > 0 \quad (4.104)$$

- iii) *Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZA + A'Y + C'_y F' + Q' & ZB_w & C'_z - C'_y R' - L' \\ (\star)' & A'Y + C'_y F' + YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} & C'_z - C'_y R' \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} & D'_{zw} - D'_{yw} R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.105)$$

$$Y > Z > 0 \quad (4.106)$$

O mínimo valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{we}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{\tilde{K}_f \in \mathcal{X}_f} \|H_{we}(s)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (4.103-4.104) \} \quad (4.107)$$

ou

$$\min_{\tilde{K}_f \in \mathcal{X}_f} \|H_{we}(s)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (4.105-4.106) \} \quad (4.108)$$

**Prova:** Podemos provar este teorema seguindo os mesmos passos da prova do Teorema 4.8. O único detalhe é que as desigualdades (4.104) e (4.106) foram obtidas aplicando-se o complemento de Schur a

$$\begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & Y \end{bmatrix} > 0$$

No mais, as provas são semelhantes. ■

Podemos formular para o problema em norma  $H_\infty$  um corolário análogo ao Corolário 4.9, pois os argumentos usados em sua prova permanecem inalterados. Além disto, caso consideremos as hipóteses simplificadoras (4.98), recuperamos o filtro  $H_\infty$  central [101] fazendo, novamente, a matriz  $Z$  tender a zero. Impondo a estrutura (4.99) à desigualdade (4.105) obtemos

$$\begin{bmatrix} A'Y + C'_y F' + YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} & C'_z \\ B'_w Y + D'_{yw} F' & -I & 0 \\ C_z & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.109)$$

Utilizando a definição (4.101) concluímos que a matriz  $P > 0$  que resolve a equação de Riccati

$$AP + PA' - P(C'_y C_y - \gamma^{-1} C'_z C_z)P + B_w B'_w = 0 \quad (4.110)$$

encontra-se na fronteira das desigualdades (4.105-4.106).

#### 4.2.2 Sistemas discretos

Passemos agora ao problema de filtragem para sistemas discretos. Conforme a exposição do problema de controle por realimentação do estado, apresentaremos os resultados para o projeto de filtros discretos segundo as caracterizações estendidas introduzidas no Capítulo 3. Para obtermos as desigualdades matriciais lineares do projeto dual de filtros discretos, devemos definir a matriz adicional  $\tilde{G}$  e a matriz de Lyapunov  $\tilde{P}$

$$\tilde{G} := \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U} \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{G}^{-1} := \begin{bmatrix} Y' & \hat{V}' \\ V' & \hat{Y}' \end{bmatrix} \quad \tilde{P} = \tilde{P}' := \begin{bmatrix} P & J \\ J' & K \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Desta forma, a escolha particular

$$\tilde{X} := \tilde{G} \quad (4.112)$$

torna as transformações de variáveis (4.76) linearizantes. Para tratarmos do problema de projeto de filtros na formulação primal devemos alterar esta definição para

$$\tilde{G}' := \begin{bmatrix} Y' & \hat{V}' \\ V' & \hat{Y}' \end{bmatrix} \quad \tilde{G}'^{-T} := \begin{bmatrix} Z^{-T} & \hat{U} \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

de tal forma que a escolha linearizante seja

$$\tilde{X} := \tilde{G}^{-T} \quad \tilde{T}'\tilde{G}^{-1}\tilde{P}\tilde{G}^{-T}\tilde{T} = \begin{bmatrix} E & G \\ G' & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E' & G \\ G' & H' \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Como continuaremos usando as transformações definidas no Lema 4.7, os parâmetros dos filtros podem ser obtidos a partir das variáveis de otimização transformadas por meio da operação de inversão definida em (4.83). Iniciemos pelo problema em norma  $H_2$ .

**Teorema 4.11** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um filtro (4.65–4.66) de ordem completa ( $n_f = n$ ) para o sistema linear discreto (4.62–4.64) que garante que a norma  $H_2$  do erro de estimação satisfaz  $\|H_{we}(\zeta)\|_2^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $E = E' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} E & G & A'Z' & A'Y' + C'_yF' + Q' & C'_z - C'_yR' - L' \\ (\star)' & H & A'Z' & A'Y' + C'_yF' & C'_z - C'_yR' \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - E & Z + Y' + S' - G & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.115)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_wZ' & B'_wY' + D'_{yw}F' \\ (\star)' & Z + Z' - E & Z + Y' + S' - G \\ (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H \end{bmatrix} > 0 \quad (4.116)$$

$$D_{zw} - RD_{yw} = \mathbf{0} \quad (4.117)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.118)$$

- iii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K = K' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & J & ZA & ZA & ZB_w \\ (\star)' & K & YA + FC_y + Q & YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - P & Z + Y' + S' - J & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.119)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_z - RC_y - L & C_z - RC_y \\ (\star)' & Z + Z' - P & Z + Y' + S' - J \\ (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.120)$$

$$D_{zw} - RD_{yw} = \mathbf{0} \quad (4.121)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.122)$$

O mínimo valor da norma  $H_2$  de  $H_{we}(\zeta)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{\tilde{\mathcal{K}}_f \in \mathcal{K}_f} \|H_{we}(\zeta)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.115-4.118) \} \quad (4.123)$$

ou

$$\min_{\tilde{\mathcal{K}}_f \in \mathcal{K}_f} \|H_{we}(\zeta)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.119-4.122) \} \quad (4.124)$$

**Prova:** A prova deste teorema segue os mesmos moldes da prova do Teorema 4.8. A diferença fundamental é que devemos multiplicar as desigualdades matriciais primais (3.31–3.33), respectivamente, pelas matrizes  $T := \text{diag}(\tilde{G}^{-1}\tilde{T}, \tilde{G}^{-1}\tilde{T}, \mathbf{I})$  e  $T := \text{diag}(\mathbf{I}, \tilde{G}^{-1}\tilde{T})$  à direita e pelas suas transpostas à esquerda. Para as desigualdades duais (3.34–3.36) basta multiplicar por  $T := \text{diag}(\tilde{T}, \tilde{T}, \mathbf{I})$  e  $T := \text{diag}(\mathbf{I}, \tilde{T})$ . Notemos que, mais uma vez, podemos assegurar a regularidade da matriz  $\tilde{T}$  visto que

$$\tilde{G} + \tilde{G}' > \tilde{P} > 0$$

Na prova da suficiência, notemos que

$$\begin{bmatrix} Z + Z' & Z + Y' + S' \\ Z' + Y + S & Y + Y' \end{bmatrix} > 0$$

Assim, se multiplicamos essa desigualdade pela matriz

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

à esquerda e por  $T'$  à direita obtemos

$$S + S' < 0$$

donde concluímos que as matrizes  $Z$  e  $S$  são regulares. Conseqüentemente, as matrizes  $U$  e  $V$  também são regulares. ■

Como a prova deste teorema segue a mesma linha da prova do Teorema 4.8, formulamos um corolário análogo ao Corolário 4.9, cuja prova, em todos os aspectos, semelhante, não será apresentada.

**Corolário 4.12** *O filtro de ordem completa ( $n_f = n$ ) obtido como solução dos problemas definidos no Teorema 4.11 é o filtro linear ótimo dentre todos os filtros lineares de ordem finita.*

Como no problema por realimentação do estado, podemos impor restrições adicionais às desigualdades fornecidas no teorema acima de modo a cobrir o projeto baseado nas condições do Lema 2.18. Verificamos que, para levar em conta a condição simplificadora  $\tilde{G} = \tilde{G}' = \tilde{P}$ , devemos impor às desigualdades (4.115–4.122) as restrições lineares

$$Z = Z' = E = P \qquad Y = Y' = H = K \qquad (4.125)$$

$$G = G' = J = J' = Z \qquad Z = Y + S \qquad (4.126)$$

Além disto, fazendo a matriz  $Z$  tender a zero, podemos mostrar a equivalência entre este resultado e o filtro de Kalman discreto. Se consideramos as hipóteses (4.98), a mesma escolha de variáveis (4.99) nos permite obter, a partir das desigualdades (4.119–4.120), as desigualdades equivalentes

$$\begin{bmatrix} Y & YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} \\ A'Y + C'_y F' & Y & \mathbf{0} \\ B'_w Y + D'_{yw} F' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \qquad \begin{bmatrix} W & C_z \\ C'_z & Y \end{bmatrix} > 0 \qquad (4.127)$$

A equivalência com o filtro de Kalman discreto provém das definições

$$P := Y^{-1} \qquad F = -YAPC'_y (C_y PC'_y + \mathbf{I})^{-1} \qquad (4.128)$$

em que a matriz  $P > 0$  é a solução da equação de Riccati

$$APA' - P - APC'_y (C_y PC'_y + \mathbf{I})^{-1} C_y PA' + B_w B'_w = \mathbf{0} \qquad (4.129)$$

Tratemos do problema em norma  $H_\infty$ . O próximo teorema, cuja prova não será apresentada, provê o projeto de filtros em norma  $H_\infty$ .

**Teorema 4.13** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um filtro (4.65–4.66) de ordem completa ( $n_f = n$ ) para o sistema linear discreto (4.62–4.64) que garante que a norma  $H_\infty$  do erro de estimação satisfaz  $\|H_{we}(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $E = E' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} E & G & A'Z' & A'Y' + C'_y F' + Q' & 0 & C'_z - C'_y R' - L' \\ (\star)' & H & A'Z' & A'Y' + C'_y F' & 0 & C'_z - C'_y R' \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - E & Z + Y' + S' - G & ZB_w & 0 \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H & YB_w + FD_{yw} & 0 \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \gamma \mathbf{I} & D'_{zw} - D'_{yw} R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.130)$$

- iii) *Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K = K' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P & J & ZA & ZA & ZB_w & 0 \\ (\star)' & K & YA + FC_y + Q & YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} & 0 \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - P & Z + Y' + S' - J & 0 & C'_z - C'_y R' - L' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K & 0 & C'_z - C'_y R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} & D'_{zw} - D'_{yw} R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.131)$$

O mínimo valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{we}(\zeta)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{K_f \in \mathcal{K}_f} \|H_{we}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (4.130) \} \quad (4.132)$$

ou

$$\min_{K_f \in \mathcal{K}_f} \|H_{we}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{ \gamma : (4.131) \} \quad (4.133)$$

Estabelecemos a equivalência entre o filtro dado no teorema acima e o filtro  $H_\infty$  central [119] por meio das hipóteses (4.98) e da escolha de variáveis (4.99). Impondo as restrições simplificadoras (4.125–4.126) e fazendo a matriz  $Z$  tender a zero reescrevemos a desigualdade (4.131) na forma

$$\begin{bmatrix} Y & YA + FC_y & YB_w + FD_{yw} & 0 \\ A'Y + C'_y F' & Y & 0 & C'_z \\ B'_w Y' + D'_{yw} F' & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & C_z & 0 & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.134)$$

Com a definição

$$P := (Y - \gamma^{-1} C'_z C_z)^{-1} \quad F = -YAPC'_y (C_y PC'_y + \mathbf{I})^{-1} \quad (4.135)$$

podemos obter o filtro  $H_\infty$  central calculando o valor da matriz  $P > 0$  que soluciona a equação de Riccati

$$APA' - (P^{-1} + \gamma^{-1} C'_z C_z)^{-1} - APC'_y (C_y PC'_y + \mathbf{I})^{-1} C_y PA' + B_w B'_w = 0 \quad (4.136)$$

obtida a partir do complemento de Schur da desigualdade (4.134).

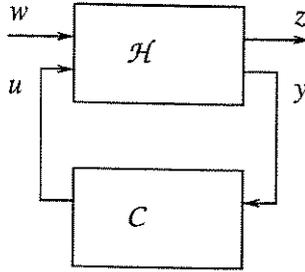


Figura 4.3: Controle por realimentação da saída

### 4.3 Controle por realimentação da saída

Voltemos a tratar do problema de controle, desta vez por realimentação da saída. Estaremos interessados em obter controladores para sistemas lineares na forma

$$\partial x = Ax + B_w w + B_u u, \quad x(0) = 0 \quad (4.137)$$

$$z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \quad (4.138)$$

$$y = C_y x + D_{yw} w \quad (4.139)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $w \in \mathbb{R}^r$  uma entrada externa,  $z \in \mathbb{R}^q$  a saída de referência e  $y \in \mathbb{R}^p$  a saída medida. Desejamos obter um controlador linear e invariante no tempo

$$\partial x_c = A_c x_c + B_c y, \quad x_c(0) = 0 \quad (4.140)$$

$$u = C_c x_c + D_c y \quad (4.141)$$

em que  $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$  é o estado estimado.

A conexão do sistema com o controlador, mostrada na Figura 4.3, produz o sistema linear em malha fechada

$$\partial \tilde{x} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} w, \quad \tilde{x}(0) = 0 \quad (4.142)$$

$$z = \tilde{C} \tilde{x} + \tilde{D} w \quad (4.143)$$

cujas matrizes dinâmicas são

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} \quad \tilde{B} := \begin{bmatrix} B_w + B_u D_c D_{yw} \\ B_c D_{yw} \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

$$\tilde{C} := [C_z + D_{zu} D_c C_y \quad D_{zu} C_c] \quad \tilde{D} := D_{zw} + D_{zu} D_c D_{yw} \quad (4.145)$$

Como no problema de filtragem, agrupamos os parâmetros do controlador na matriz

$$\tilde{K}_c := \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

Desejamos obter transformações de variáveis capazes de parametrizar todos os controladores estabilizantes  $\tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c$  por meio de um conjunto convexo  $\mathcal{C}_c$ . Para tal, definimos as matrizes

$$\tilde{X} := \begin{bmatrix} X & \hat{U} \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{X}^{-1} := \begin{bmatrix} Y' & \hat{V}' \\ V' & \hat{Y}' \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

e as matrizes de transformação

$$\tilde{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y' \\ \mathbf{0} & V' \end{bmatrix} \quad \tilde{X}\tilde{T} = \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ U & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.148)$$

Descrevemos as propriedades linearizantes dessas matrizes no próximo lema.

**Lema 4.14** *As transformações de variáveis*

$$\begin{bmatrix} Q & F \\ L & R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} V & YB_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{K}_c \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ C_y X & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad S := YX + VU \quad (4.149)$$

são capazes de linearizar os produtos de matrizes

$$\tilde{T}' \tilde{A} \tilde{X} \tilde{T} = \begin{bmatrix} AX + B_u L & A + B_u R C_y \\ Q & YA + F C_y \end{bmatrix} \quad \tilde{C} \tilde{X} \tilde{T} = [C_z X + D_{zu} L \quad C_z + D_{zu} R C_y] \quad (4.150)$$

$$\tilde{T}' \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_w + B_u R D_{yw} \\ Y B_w + F D_{yw} \end{bmatrix} \quad \tilde{T}' \tilde{X} \tilde{T} = \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ S & Y \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

### 4.3.1 Sistemas contínuos

Obtemos as desigualdades matriciais lineares associadas aos diversos problemas de projeto de controladores para sistemas contínuos definindo as matrizes

$$\tilde{P} = \tilde{P}' := \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^{-T} := \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

Neste caso, a transformação (4.149), com a escolha particular

$$\tilde{X} := \tilde{P} \quad (4.153)$$

lineariza as desigualdades na forma dual. Se alteramos estas definições para

$$\tilde{P}^{-1} = \tilde{P}^{-T} := \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{P} = \tilde{P}' := \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

e modificamos a escolha

$$\tilde{X} := \tilde{P}^{-1} \quad (4.155)$$

obtemos a transformação adequada à formulação primal. Uma vez que tenhamos obtido soluções em termos das matrizes transformadas, recuperamos os parâmetros do controlador correspondente por meio da operação

$$\tilde{K}_c = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1} Y B_u \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - Y A X & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0} \\ -C_y X U^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

Vale a pena ressaltar um detalhe significativo: a transformação (4.149)  $\leftrightarrow$  (4.156), ao contrário do que ocorre no projeto de controladores por realimentação do estado e no projeto de filtros, depende das matrizes do sistema  $A$ ,  $B_u$  e  $C_y$ . Este fato terá grande impacto nos métodos de projeto de controladores por realimentação da saída. Por ora, notemos que, para que possamos efetuar a inversão (4.156), matrizes  $U$  e  $V$  devem ser escolhidas de modo a satisfazer

$$VU = S - YX \quad (4.157)$$

Mais uma vez, devemos assegurar a regularidade destas matrizes. Passemos ao problema em norma  $H_2$ .

**Teorema 4.15** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um controlador (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) que estabiliza o sistema linear contínuo (4.137–4.139) e que garante que a norma  $H_2$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & A + B_u RC_y + Q' & XC'_z + L'D'_{zu} \\ (\star)' & A'Y + C'_y F' + YA + FC_y & C'_z + C'_y R'D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.158)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_w + D'_{yw} R'B'_u & B'_w Y + D'_{yw} F' \\ (\star)' & X & I \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.159)$$

$$D_{zw} + D_{zu} R D_{yw} = 0 \quad (4.160)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.161)$$

- iii) *Existem matrizes  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & A + B_u RC_y + Q' & B_w + B_u R D_{yw} \\ (\star)' & A'Y + C'_y F' + YA + FC_y & YB_w + F D_{yw} \\ (\star)' & (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.162)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_2 X + D_{zu} L & C_z + D_{zu} R C_y \\ (\star)' & X & I \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.163)$$

$$D_{zw} + D_{zu} R D_{yw} = 0 \quad (4.164)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.165)$$

*O mínimo valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos*

$$\min_{\tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.158-4.160) \} \quad (4.166)$$

*ou*

$$\min_{\tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min \{ \gamma : (4.162-4.164) \} \quad (4.167)$$

**Prova:** Partimos de um controlador  $\tilde{K} \in \mathcal{K}_c$ , para o qual calculamos matrizes  $\tilde{P} > 0$  satisfazendo as desigualdades matriciais (2.26–2.28) e (2.29–2.31). Seguindo procedimentos idênticos aos adotados na prova do Teorema 4.8, concluímos que o Lema 4.14 e as definições (4.153) e (4.155) fornecem as desigualdades (4.158–4.165). Devemos apenas nos lembrar de que a estrutura simétrica das matrizes  $\tilde{P}$  e  $\tilde{P}^{-1}$  implica

$$S = YX + VU = I$$

razão pela qual, eliminamos a variável  $S$  das desigualdades.

Para estabelecermos a suficiência dos resultados devemos assegurar a regularidade da matriz de transformação  $\tilde{T}$ , definida em (4.148). Dadas matrizes que satisfazem as desigualdades, temos que

$$X > 0 \qquad Y - X^{-1} > 0$$

Assim, a regularidade do produto

$$VU = (X^{-1} - Y)X$$

implica a regularidade das matrizes  $U$  e  $V$ . Vale a pena ressaltar que, apesar da transformação (4.149) depender das matrizes do sistemas, a inversão desta relação, por meio de (4.156), depende apenas da regularidade de  $U$  e  $V$ . ■

Segundo o teorema acima, apesar da transformação de variáveis mais complexa, ainda assim podemos linearizar o problema de controle por realimentação da saída. Como anteriormente, as desigualdades matriciais fornecidas não envolvem as matrizes  $U$  e  $V$ . Um detalhe interessante é que a maneira como estas matrizes se distribuem na transformação inversa (4.156) pode nos induzir a pensar que a função de transferência do controlador deva depender dessa escolha. No entanto, reescrevendo a relação (4.156)

$$\tilde{K}_c = \begin{bmatrix} V^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - Y(A - B_u R C_y)X - Y B_u L - F C_y X & F - Y B_u R \\ L - R C_y X & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

notamos que a função de transferência do controlador

$$\begin{aligned} C(s) &= C_c (s\mathbf{I} - A_c)^{-1} B_c + D_c \\ &= L U^{-1} (s\mathbf{I} - V^{-1} [Q - Y \{A - B_u R C_y\} X - Y B_u L - F C_y X] U^{-1})^{-1} V^{-1} F + R \\ &= L (s V U - Q + Y [A - B_u R C_y] X + Y B_u L + F C_y X)^{-1} F + R \\ &= L (s [S - Y X] - Q + Y [A - B_u R C_y] X + Y B_u L + F C_y X)^{-1} F + R \end{aligned} \quad (4.169)$$

não depende, mais uma vez, da escolha de  $U$  e  $V$ . Tampouco precisamos conhecer as matrizes  $\hat{X}$  e  $\hat{Y}$  para que possamos calcular os controladores.

Uma diferença significativa com relação ao problema de filtragem é que a restrição associada à obtenção de controladores estáticos torna-se *não linear*

$$S = YX$$

Infelizmente, e apesar de vários esforços [30, 37, 68, 67, 72, 124], não sabemos como manipular este tipo de restrição mantendo a convexidade das desigualdades. Ainda assim, podemos formular o próximo corolário, correspondente ao Corolário 4.9.

**Corolário 4.16** *O controlador de ordem completa ( $n_c = n$ ) obtido como solução dos problemas definidos no Teorema 4.15 é o controlador linear ótimo dentre todos os controladores lineares de ordem finita.*

**Prova:** A prova deste corolário é muito semelhante à prova do Corolário 4.9. No que se refere aos controladores de ordem reduzida ( $n_c < n$ ), devemos apenas atentar para a nova condição de resolução da equação algébrica

$$VU = YX - S$$

que passa a ser

$$\text{posto}(YX - S) = n_c$$

Já para os controladores de ordem elevada ( $n_c > n$ ), notemos que a redefinição da matriz

$$\tilde{T} := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y' & \mathbf{0} \\ 0 & V' & \mathcal{N}_G \end{bmatrix}$$

basta para que possamos reproduzir os passos da prova do Corolário 4.9. Neste caso, o produto fundamental  $\tilde{X}\tilde{T}$  provê

$$\tilde{X}\tilde{T} = \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} & \hat{U}\mathcal{N}_G \\ U & \mathbf{0} & \hat{X}\mathcal{N}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ U & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Isto completa esta prova. ■

Assim como no problema de filtragem, o corolário anterior pode ser generalizado de modo a demonstrar que o controlador linear (4.140–4.141) minimiza a norma  $H_2$  dentre todos os possíveis controladores causais [21]. Podemos, igualmente, demonstrar a equivalência entre este resultado e o procedimento de projeto via equações de Riccati segundo as propriedades de separação, que será assunto da próxima seção. Passemos, rapidamente, para o problema de controle em norma  $H_\infty$ . O próximo teorema pode ser provado por meio das técnicas já discutidas.

**Teorema 4.17** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um controlador (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) que estabiliza o sistema linear contínuo (4.137–4.139) e que garante que a norma  $H_\infty$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma$ .*
- ii) *Existem matrizes  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B_u' & A + B_u R C_y + Q' & B_w + B_u R D_{yw} & X C_z' + L' D_{zu}' \\ (\star)' & A' Y + C_y' F' + Y A + F C_y & Y B_w + F D_{yw} & C_z' + C_y' R' D_{zu}' \\ (\star)' & (\star)' & -\gamma \mathbf{I} & D_{zw}' + D_{yw}' R' D_{zu}' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.170)$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.171)$$

- iii) *Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B_u' & A + B_u R C_y + Q' & B_w + B_u R D_{yw} & X C_z' + L' D_{zu}' \\ (\star)' & A' Y + C_y' F' + Y A + F C_y & Y B_w + F D_{yw} & C_z' + C_y' R' D_{zu}' \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} & D_{zw}' + D_{yw}' R' D_{zu}' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.172)$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.173)$$

O mínimo valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{wz}(s)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{\tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (4.170-4.171)\} \quad (4.174)$$

ou

$$\min_{\tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (4.172-4.173)\} \quad (4.175)$$

No caso de projeto de controladores para sistemas contínuos, um outro problema que nos interessa é o projeto de sistemas com a propriedade da positividade real. De fato, foi a solução deste problema para sistemas estritamente próprios (veja [12]), o ponto de partida para o estudo de grande parte dos temas incluídos neste trabalho.

**Teorema 4.18** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) Existe um controlador (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) que estabiliza o sistema linear contínuo (4.137–4.139) e torna a matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  positiva-real estrita.
- ii) Caso o sistema (4.142–4.143) seja estritamente próprio ( $\tilde{D} = \mathbf{0}$ ), existem matrizes  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & A + B_u RC_y + Q' \\ (\star)' & A'Y + C'_y F' + YA + FC_y \end{bmatrix} < 0 \quad (4.176)$$

$$B'_w + D'_{yw} R' B'_u = C_z X + D_{zu} L \quad (4.177)$$

$$B'_w Y + D'_{yw} F' = C_z + D_{zu} RC_y \quad (4.178)$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.179)$$

$$D_{zw} + D_{zu} R D_{yw} = \mathbf{0} \quad (4.180)$$

- iii) Caso o sistema (4.142–4.143) não seja estritamente próprio ( $\tilde{D} \neq \mathbf{0}$ ), existem matrizes  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & A + B_u RC_y + Q' & B_w + B_u R D_{yw} - X C'_z - L' D'_{zu} \\ (\star)' & A'Y + C'_y F' + YA + FC_y & Y B_w + F D_{yw} - C'_z - C'_y R' D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & -D_{zw} - D'_{zw} - D_{zu} R D_{yw} - D'_{yw} R' D'_{zu} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.181)$$

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.182)$$

### 4.3.2 Sistemas discretos

Nesta seção, discutiremos o problema de controle por realimentação da saída para sistemas discretos. Os resultados são análogos aos apresentados para o problema de filtragem na Seção 4.2.2, e são capazes de lidar com as condições estendidas do Capítulo 3. Dadas as matrizes

$$\tilde{G} := \begin{bmatrix} X & \hat{U} \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{G}^{-1} := \begin{bmatrix} Y' & \hat{V}' \\ V' & \hat{Y}' \end{bmatrix} \quad \tilde{P} = \tilde{P}' := \begin{bmatrix} P & J \\ J' & K \end{bmatrix} \quad (4.183)$$

a escolha particular

$$\tilde{X} := \tilde{G} \quad (4.184)$$

faz com que as transformações de variáveis (4.149) tornem-se linearizantes. Para resolvermos o problema de controle por realimentação da saída nas formulações primais devemos considerar

$$\tilde{G}^{-T} := \begin{bmatrix} X & \hat{U} \\ U & \hat{X} \end{bmatrix} \quad \tilde{G}' := \begin{bmatrix} Y' & \hat{V}' \\ V' & \hat{Y}' \end{bmatrix} \quad (4.185)$$

e a escolha linearizante

$$\tilde{X} := \tilde{G}^{-T} \quad \hat{T}' \tilde{G}^{-1} \hat{P} \tilde{G}^{-T} \hat{T} = \begin{bmatrix} E & G \\ G' & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E' & G \\ G' & H' \end{bmatrix} \quad (4.186)$$

Estas matrizes, associadas ao Lema 4.14, fornecem o problema de controle  $H_2$  contido no próximo teorema.

**Teorema 4.19** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) Existe um controlador (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) que estabiliza o sistema linear discreto (4.137–4.139) e que garante que a norma  $H_2$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \gamma$ .
- ii) Existem matrizes  $E = E' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} E & G & X'A' + L'B'_u & Q' & XC'_z + L'D'_{zu} \\ (\star)' & H & A' + C'_y R' B'_u & A'Y' + C'_y F' & C'_z + C'_y R' D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & X + X' - E & S' + I - G & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.187)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_w + D'_{yw} R' B'_u & B'_w Y + D'_{yw} F' \\ (\star)' & X + X' - E & S' + I - G \\ (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H \end{bmatrix} > 0 \quad (4.188)$$

$$D_{zw} + D_{zu} R D_{yw} = \mathbf{0} \quad (4.189)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.190)$$

- iii) Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K = K' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P & J & AX + B_u L & A + B_u R C_y & B_w + B_u R D_{yw} \\ (\star)' & K & Q & YA + F C_y & Y B_w + F D_{yw} \\ (\star)' & (\star)' & X + X' - P & S' + I - J & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.191)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_z X + D_{zu} L & C_z + D_{zu} R C_y \\ (\star)' & X + X' - P & S' + I - J \\ (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K \end{bmatrix} > 0 \quad (4.192)$$

$$D_{zw} + D_{zu} R D_{yw} = \mathbf{0} \quad (4.193)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.194)$$

O mínimo valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(\zeta)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{\tilde{\kappa}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{\gamma : (4.187-4.190)\} \quad (4.195)$$

ou

$$\min_{\tilde{\kappa}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 = \min \{\gamma : (4.191-4.194)\} \quad (4.196)$$

**Prova:** A prova deste teorema segue os moldes da prova do Teorema 4.11, inclusive no que tange às definições das matrizes de transformação  $T$ . Devemos atentar apenas para a regularidade da matriz  $\tilde{T}$  utilizada na prova de suficiência. Esta propriedade é confirmada pela relação

$$\begin{bmatrix} X + X' & S' + I \\ S + I & Y + Y' \end{bmatrix} > 0$$

que implica a regularidade da matriz  $X$  e das matrizes  $U$  e  $V$ . Esta última propriedade provém do produto da relação acima por

$$T := \begin{bmatrix} X^{-1} \\ -I \end{bmatrix}$$

à direita e  $T'$  à esquerda. Esta operação fornece

$$(S - YX)X^{-1} + X^{-T}(S - YX)' < 0$$

que, segundo (4.149), implica a regularidade do produto  $VU$ , portanto, das matrizes  $V$ ,  $U$  e  $\tilde{T}$ . ■

Os parâmetros dos controladores podem ser obtidos via (4.156). A seguir, tratamos do problema em norma  $H_\infty$ .

**Teorema 4.20** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) Existe um controlador (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) que estabiliza o sistema linear discreto (4.137–4.139) e que garante que a norma  $H_\infty$  da saída controlada satisfaz  $\|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \gamma$ .
- ii) Existem matrizes  $E = E' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H = H' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} E & G & X'A' + L'B'_u & Q' & 0 & XC'_z + L'D'_{zu} \\ (\star)' & H & A' + C'_y R' B'_u & A'Y' + C'_y F' & 0 & C'_z + C'_y R' D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & X + X' - E & S' + I - G & B_w + B_u R D_{yw} & 0 \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H & Y B_w + F D_{yw} & 0 \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \gamma I & D'_{zw} + D'_{yw} R' D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.197)$$

- iii) Existem matrizes  $P = P' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K = K' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P & J & AX + B_u L & A + B_u R C_y & B_w + B_u R D_{yw} & 0 \\ (\star)' & K & Q & YA + F C_y & Y B_w + F D_{yw} & 0 \\ (\star)' & (\star)' & X + X' - P & S' + I - J & 0 & XC'_z + L'D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K & 0 & C'_z + C'_y R' D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & I & D'_{zw} + D'_{yw} R' D'_{zu} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.198)$$

O mínimo valor da norma  $H_\infty$  de  $H_{wz}(\zeta)$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min_{K_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (4.197)\} \quad (4.199)$$

ou

$$\min_{K_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 = \min \{\gamma : (4.198)\} \quad (4.200)$$

### 4.3.3 Propriedades de separação

Em livros que abordam o problema de controle no espaço de estados, para citar alguns [34, 5, 18, 95], são inúmeras as referências ao dual do problema de controle por realimentação do estado: o problema de *estimação do estado*. Com base na conhecida propriedade de separação [5] entre o problema de estimação e o de controle por realimentação do estado, podemos, em certos casos, implementar os ganhos de realimentação substituindo o vetor de estado verdadeiro de um sistema (geralmente, de difícil obtenção) pelo vetor de estado *estimado*. Esta possibilidade, percebida pela primeira vez por D. G. Luenberger, em [92], baseia-se na seguinte observação: se o controlador por realimentação da saída é estritamente próprio ( $D_c = 0$ ), o sistema em malha fechada (4.142–4.143), escrito em função do estado do sistema a ser controlado e do erro de estimação

$$\tilde{x} := \begin{bmatrix} x \\ x_c - x \end{bmatrix} \quad (4.201)$$

possui uma representação de estado (4.142–4.143) cujas matrizes são

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A + B_u C_c & B_u C_c \\ A_c - A - B_u C_c + B_c C_y & A_c - B_u C_c \end{bmatrix} \quad \tilde{B} := \begin{bmatrix} B_w \\ B_c D_{yw} - B_w \end{bmatrix} \quad (4.202)$$

$$\tilde{C} := [C_z + D_{zu} C_c \quad D_{zu} C_c] \quad \tilde{D} := D_{zw} \quad (4.203)$$

A escolha particular da matriz

$$A_c := A + B_u C_c - B_c C_y \quad (4.204)$$

faz com que a matriz  $\tilde{A}$  tenha a seguinte estrutura

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + B_u C_c & B_u C_c \\ 0 & A - B_c C_y \end{bmatrix} \quad (4.205)$$

Desta forma, para que tenhamos estabilidade em malha fechada, basta escolher de maneira adequada os ganhos de realimentação  $B_c$  e  $C_c$ . A matriz  $C_c$  pode ser interpretada como um ganho de realimentação do estado para o sistema

$$\partial x = Ax + B_u u \quad (4.206)$$

e a matriz  $B_c$  como o oposto da matriz transposta do ganho de realimentação do estado para o sistema dual

$$\partial x = A'x + C_y' u \quad (4.207)$$

Em ambos os casos, o importante é que os autovalores da matriz  $\tilde{A}$  podem ser calculados segundo

$$\lambda(\tilde{A}) = \{\lambda(A + B_u C_c), \lambda(A - B_c C_y)\} \quad (4.208)$$

Isto significa que, ao menos no que se refere à estabilidade, a escolha da matriz  $B_c$  pode ser feita de maneira independente da escolha de  $C_c$ . Esta importante propriedade, conhecida como *propriedade da separação*, é responsável por grande parte dos resultados em projeto de controladores por realimentação da saída disponíveis.

O procedimento usual de projeto via separação envolve duas etapas: o cálculo do ganho estabilizante de controle  $C_c$  e, em seguida, o cálculo do ganho estabilizante de estimação  $B_c$ . Notemos que a matriz dinâmica (4.204) também depende de  $A$ ,  $B_u$  e  $C_y$ . Isto é, a determinação do controle via separação pressupõe conhecimento exato das matrizes do sistema. Mais tarde, mostrou-se que esta propriedade é bem mais abrangente, o que torna possível a obtenção de controladores para os demais problemas considerados neste trabalho, quais sejam, minimização das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  e obtenção de sistemas positivos reais, no contexto de separação [5, 35, 123].

Como nos problemas de controle por realimentação do estado e de filtragem, é de se esperar que seja possível obter o estimador de Luenberger a partir das formulações baseadas nas desigualdades matriciais lineares. Em primeiro lugar, notemos que, nos problemas discutidos na seção anterior, sempre que a matriz  $Q$  não estiver sujeita a nenhuma restrição estrutural, poderemos eliminar a linha e a coluna a ela correspondente com o auxílio do Lema A.2. Por exemplo, podemos reformular as desigualdades (4.158–4.161) e obter

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B_u' & XC_z' + L'D_{zu}' \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.209)$$

$$\begin{bmatrix} A'Y + C_y'F' + YA + FC_y & C_z' + C_y'R'D_{zu}' \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.210)$$

$$\begin{bmatrix} W & B_w' + D_{yw}'R'B_u' & B_w'Y + D_{yw}'F' \\ (\star)' & X & \mathbf{I} \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (4.211)$$

$$D_{zw} + D_{zu}RD_{yw} = \mathbf{0} \quad (4.212)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (4.213)$$

Segundo o Lema A.2, para que eliminemos a matriz  $Q$  desta forma, devemos impor

$$Q = -A' - C_y'R'B_u' - (C_z' + C_y'R'D_{zu}') (C_zX + D_{zu}L) \quad (4.214)$$

o que implica, de acordo com (4.168), a estrutura particular da matriz dinâmica do controlador

$$A_c = -V^{-1} (A' - C_y'R'B_u') U^{-1} - V^{-1} (C_z' + C_y'R'D_{zu}') (C_zX + D_{zu}L) U^{-1} \\ - V^{-1}Y (A - B_uRC_y) XU^{-1} - V^{-1}YB_uLU^{-1} - V^{-1}FC_yXU^{-1} \quad (4.215)$$

Em última análise, levando-se em conta a dependência da matriz  $A_c$  com relação à matriz  $Q$ , sempre poderemos simplificar as desigualdades de projeto definidas na seção anterior utilizando o Lema A.2. Entretanto, é difícil acreditar que complexas expressões, como a obtida acima para a matriz  $A_c$ , possam ter alguma relação com a estrutura dinâmica do estimador de Luenberger. A expressão (4.204), comparada a (4.215), aparenta ser tão mais simples! O intuito das próximas linhas é esclarecer esta questão.

Consideremos, por exemplo, o problema (4.166) definido, porém, para as desigualdades simplificadas (4.209–4.213). Para recuperarmos os resultados de separação devemos adotar um controlador estritamente próprio, isto é, devemos impor  $D_c = R = 0$ . Começemos por aplicar o complemento de Schur às desigualdades (4.210) e (4.211), com o que obtemos

$$A'Y + C_y'F' + YA + FC_y + C_z'C_z < 0 \quad (4.216)$$

$$\begin{bmatrix} W - B_w'X^{-1}B_w & B_w'(Y - X^{-1}) + D_{yw}'F' \\ (\star)' & Y - X^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.217)$$

Como nenhuma das outras desigualdades depende da matriz  $Y$ , tentaremos eliminá-la com a introdução da variável

$$Z := Y - X^{-1} \quad (4.218)$$

Definindo a matriz  $C_X$  por meio da fatoração<sup>5</sup>

$$C_X'C_X := A'X^{-1} + X^{-1}A + C_z'C_z \quad (4.219)$$

obtemos

$$A'Z + C_y'F' + ZA + FC_y + C_X'C_X < 0 \quad (4.220)$$

$$\begin{bmatrix} W - B_w'X^{-1}B_w & B_w'Z + D_{yw}'F' \\ (\star)' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (4.221)$$

Finalmente, a introdução das variáveis  $W_Z$  e  $W_X$

$$W_Z := W - B_w'X^{-1}B_w \quad W_X > B_w'X^{-1}B_w \quad (4.222)$$

nos permite afirmar que

$$\text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Z) > B_w'X^{-1}B_w + \text{tr}(W_Z) = \text{tr}(W) \quad (4.223)$$

Notemos que, em caso de minimização da soma  $\text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Z)$ , este termo deve se aproximar do valor de  $\text{tr}(W)$  segundo precisão arbitrária. Assim, em função das novas variáveis  $W_Z$ ,  $W_X$  e  $Z$ , reescrevemos as desigualdades deste problema do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} AX + B_uL + XA' + L'B_u' & XC_z' + L'D_{zu}' \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.224)$$

$$\begin{bmatrix} W_X & B_w' \\ (\star)' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.225)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + C_y'F' + ZA + FC_y & C_X' \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.226)$$

$$\begin{bmatrix} W_Z & B_w'Z + D_{yw}'F' \\ (\star)' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (4.227)$$

$$\text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Z) < \gamma \quad (4.228)$$

<sup>5</sup>Mais adiante, mostraremos que a matriz  $C_X'C_X$  pode ser considerada definida positiva, com o que poderemos afirmar a existência desta fatoração.

A partir de uma solução para essas desigualdades, os ganhos  $B_c$  e  $C_c$  devem ser calculados via

$$B_c := V^{-1}F \quad C_c := LU^{-1} \quad (4.229)$$

Como as matrizes  $U$  e  $V$  podem ser escolhidas de maneira arbitrária, fixemo-nos à escolha particular

$$U := X \quad V := X^{-1} - Y = -Z \quad (4.230)$$

Esta escolha faz com que possamos calcular os ganhos (4.229) em função das novas variáveis, definidas em (4.218) e (4.222), via

$$B_c = -Z^{-1}F \quad C_c = LX^{-1} \quad (4.231)$$

Por ora, o cálculo de  $A_c$  continua sendo feito por intermédio de (4.215).

Na forma (4.224–4.228), o problema de minimização de  $\gamma$  se encontra praticamente “separável”: as variáveis contidas nas desigualdades (4.224–4.225) e (4.226–4.227) são distintas e a desigualdade (4.228), associada ao cálculo do custo  $H_2$ , é aditiva em  $W_Z$  e  $W_X$ . Infelizmente, não somos capazes de obter separação completa devido à presença da matriz  $C_X$ . Este resultado é, até certo ponto, desapontador, pois sabemos que o lema da separação provê os controladores ótimos a partir da resolução de duas equações de Riccati completamente desacopladas! A pergunta que devemos ser capazes de responder é: será possível obter propriedade semelhante a partir das desigualdades matriciais lineares?

A chave para este impasse é a percepção de que o procedimento usual de separação *não se preocupa com o custo  $H_2$ , mas apenas com o cálculo do controlador ótimo*. Neste sentido, um ponto inicial de investigação é a possibilidade de obtenção das duas equações de Riccati a partir de (4.224–4.228). Segundo as discussões da Seção 4.1, as desigualdades (4.224–4.225) já se encontram em um formato adequado, uma vez que podemos eliminar o ganho  $L$  através das condições necessárias de otimalidade associada à desigualdade (4.224). No entanto, segundo a Seção 4.2, não é isto o que ocorre com (4.226–4.227): o ganho  $F$  não pode ser eliminado por estar presente em ambas as desigualdades. Para contornar esta situação, adotamos um procedimento de dualização parcial do problema de minimização associado a (4.224–4.228). Entendemos por dualização parcial a substituição das desigualdades (4.226–4.227), e apenas destas, por suas equivalentes duais<sup>6</sup>. Este procedimento fornece as desigualdades equivalentes

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & XC'_z + L'D'_{zu} \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.232)$$

$$\begin{bmatrix} W_X & B'_w \\ (\star)' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.233)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + C'_y F' + ZA + FC_y & ZB_w + FD_{yw} \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.234)$$

$$\begin{bmatrix} W_Z & C'_X \\ (\star)' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (4.235)$$

$$\text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Z) < \gamma \quad (4.236)$$

Notemos que, nessas desigualdades,  $Z$  e  $F$  denotam as variáveis duais associadas a (4.226–4.227), e não mais as variáveis primais  $Z$ , definida em (4.218), e  $F$ . Um detalhe interessante é que o cálculo do ganho

<sup>6</sup>Esta manipulação pode ser conduzida de modo rigoroso com a introdução de funções Lagrangeanas e utilização das condições de otimalidade [93, 10]. No entanto, para efeito de verificação, podemos identificar o par de problemas primal e dual nos itens *ii*) e *iii*) do Teorema 4.2.

$B_c$ , definido em (4.230–4.231) a partir das variáveis primais  $Z$  e  $F$ , mantém-se, agora em função das variáveis duais, na forma

$$B_c = -Z^{-1}F \quad (4.237)$$

Isto ocorre pois, segundo a Seção 4.1.1, os ganhos primais e duais devem ser calculados de maneira idêntica<sup>7</sup> a partir das matrizes  $Z$  e  $F$

Na forma (4.232–4.236), apesar de a solução ótima do problema de minimização de  $\gamma$  continuar apenas “quase” separável<sup>8</sup>, o cálculo do controlador ótimo é separável. Vejamos como isto se processa.

Inicialmente, eliminemos o ganho  $L$ . Conforme a Seção 4.1, fazemos isto escrevendo a condição de otimalidade<sup>9</sup> associada ao complemento de Schur de (4.232)

$$0 = \frac{\partial}{\partial L} \text{tr} \left( \Phi [AX + B_u L + XA' + L'B'_u + (XC'_z + L'D'_{zu}) (C_z X + D_{zu} L)] \right) \quad (4.238)$$

$$= 2 (B_u + XC'_z D_{zu} + L'D'_{zu} D_{zu})' \Phi \quad (4.239)$$

em que  $\Phi = \Phi' \geq 0$  é a variável dual associada. Se observamos que, na solução ótima, a identidade

$$AX + B_u L + XA' + L'B'_u + (XC'_z + L'D'_{zu}) (C_z X + D_{zu} L) = 0 \quad (4.240)$$

se estabelece<sup>10</sup>, então o multiplicador de Lagrange  $\Phi$  deve ser estritamente definido positivo. Esta observação fornece o ganho ótimo<sup>11</sup>

$$L = - (D'_{zu} D_{zu})^{-1} (B_u + D'_{zu} C_z X) \quad (4.241)$$

A substituição deste ganho em (4.240) provê a equação de Riccati associada. Notemos que a determinação da matriz  $X$  (ou da sua inversa) que satisfaz esta equação não depende da matriz de custo  $B_w$ . Em última análise, isto significa que alterações nesta matriz não alteram a determinação do ganho de realimentação do estado ótimo  $C_c$ , via (4.231). Esta mesma análise, repetida após a eliminação do ganho  $F$  a partir de (4.234), nos leva a concluir que a determinação do ganho de estimação do estado ótimo  $B_c$ , também via (4.231), não depende da matriz  $C_X$ ! Portanto, *apenas para efeito apenas de cálculo do controlador ótimo*, podemos substituir a matriz  $C_X$  presente na desigualdade (4.235) por qualquer outra matriz com posto de linhas completo<sup>12</sup> sem que percamos a otimalidade da solução. Obviamente, o valor de  $\gamma$  não mais coincide com o valor do custo  $H_2$ , que deve ser calculado *a posteriori*. Esta discussão permite formular o seguinte problema de minimização da norma  $H_2$  em sua forma separável.

<sup>7</sup>Identificamos as variáveis  $Z$  e  $F$ , tanto primais quanto duais, às matrizes  $X$  e  $L$  do Lema 4.1, e a matriz  $B_c$  ao oposto do ganho de realimentação do estado  $K$ .

<sup>8</sup>Devido, novamente, à presença da matriz  $C_X$ .

<sup>9</sup>Para que possamos eliminar as variáveis por meio das condições necessárias de otimalidade devemos, primeiramente, relaxar o caráter estrito das desigualdades.

<sup>10</sup>Pois trata-se de um problema de minimização da função convexa

$$\text{tr} (B_w B_w' X^{-1}) = \langle B_w B_w', X^{-1} \rangle$$

Veja também o Lema 2.4 e as discussões que se seguem.

<sup>11</sup>Consideramos aqui que a condição de regularidade  $D'_{zu} D_{zu} > 0$  é satisfeita.

<sup>12</sup>Ou uma versão perturbada (2.23).

**Lema 4.21** Um controlador (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) e estritamente próprio que minimiza a norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  do sistema linear contínuo (4.137–4.139) é obtido por meio das definições (4.204) e (4.231), em que as matrizes  $X$  e  $L$  solucionam o problema de otimização convexo

$$\min \text{tr}(W_X) \quad (4.242)$$

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & XC'_z + L'D'_{zu} \\ (*)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.243)$$

$$\begin{bmatrix} W_X & B'_w \\ (*)' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (4.244)$$

e as matrizes  $Z$  e  $F$  solucionam o problema de otimização convexo

$$\min \text{tr}(W_Z) \quad (4.245)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + C'_y F' + ZA + FC_y & ZB_w + FD_{yw} \\ (*)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.246)$$

$$\begin{bmatrix} W_Z & C'_z \\ (*)' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (4.247)$$

**Prova:** A prova deste lema decorre diretamente das discussões anteriores. Apenas destruímos o acoplamento entre as desigualdades (4.232–4.236) substituindo a matriz  $C_X$  por  $C_z$ . Veja também, a seguir, a discussão sobre a determinação da matriz  $A_c$ . ■

Neste lema, os problemas (4.242–4.244) e (4.245–4.247) constituem o conhecido par de problemas do teorema da separação [5, 21]: o problema de realimentação do estado (4.242–4.244) e o problema de estimação do estado (4.245–4.247).

Adotando as hipóteses clássicas (4.25) e (4.98) (veja Seções 4.1 e 4.2)

$$C'_y D_{zu} = 0 \quad D'_{zu} D_{zu} = I \quad D_{zw} = 0 \quad (4.248)$$

$$B_w D'_{yw} = 0 \quad D_{yw} D'_{yw} = I \quad (4.249)$$

estabelecemos a equivalência entre as soluções ótimas de (4.242–4.244) e (4.245–4.247) com a escolha

$$P_X := X^{-1} \quad L = -B'_u \quad (4.250)$$

$$P_Z := Z^{-1} \quad F = -C'_y \quad (4.251)$$

em que  $P_X > 0$  é a solução da equação de Riccati

$$A'P_X + P_X A - P_X B_u B'_u P_X + C'_z C_z = 0 \quad (4.252)$$

e  $P_Z > 0$  é a solução da equação de Riccati

$$AP_Z + P_Z A' - P_Z C'_y C_y P_Z + B_w B'_w = 0 \quad (4.253)$$

Um ponto ainda obscuro neste lema é a determinação do controlador. Não resta dúvida de que as matrizes  $B_c$  e  $C_c$  podem ser determinadas por intermédio de (4.231). Porém, não temos argumentos para concluir que a estrutura de Luenberger (4.204) proveja a matriz  $A_c$  ótima. Para que isto seja verdade, e segundo (4.215), a identidade

$$VA_c U = -A' - YAX - YB_u L - FC_y X - C'_z D_{zu} L - C'_z C_z X \quad (4.254)$$

deve ser satisfeita. Substituindo o valor de  $Y$  em função de  $Z$ , como em (4.218), e considerando as escolhas para  $B_c$ ,  $C_c$ ,  $U$  e  $V$  em (4.230–4.231) e a definição de  $A_c$  conforme (4.204), podemos reescrever esta identidade na forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= -VA_cU - A' - (Z + X^{-1})AX - (Z + X^{-1})B_uL - FC_yX - C'_zD_{zu}L - C'_zC_zX \\
&= Z(A + B_uC_c - B_cC_y)X \\
&\quad - A' - (Z + X^{-1})AX - (Z + X^{-1})B_uL - FC_yX - C'_zD_{zu}L - C'_zC_zX \\
&= X^{-1}(XZAX + XZB_uL + XFC_yX) \\
&\quad - X^{-1}(XA' + XZAX + XZB_uL + XFC_yX + AX + B_uL + XC'_zD_{zu}L + XC'_zC_zX) \\
&= -X^{-1}(AX + XA' + B_uL + XC'_zD_{zu}L + XC'_zC_zX)
\end{aligned} \tag{4.255}$$

Notemos que, em geral, esta identidade não se encontra satisfeita, o que indica que a escolha de  $A_c$  como a matriz dinâmica do estimador de Luenberger (4.204) nem sempre é válida. No entanto, na solução ótima, temos que<sup>13</sup>

$$B_uL + XC'_zD_{zu}L + L'D'_{zu}D_{zu}L = \mathbf{0} \tag{4.256}$$

que reduz o termo multiplicado por  $X^{-1}$  em (4.255) a (4.240). A conclusão final é que, embora a estrutura do estimador de Luenberger não forneça controladores admissíveis para qualquer combinação factível das variáveis de otimização, ela é factível na solução ótima do problema  $H_2$ .

Antes de encerrarmos este capítulo, atentemos para um fato que, propositalmente, deixamos passar em branco: a existência da decomposição (4.219). Utilizando a condição de otimalidade (4.240) multiplicada por  $X^{-1}$  à esquerda e à direita e comparando com (4.219) e (4.256) obtemos

$$\begin{aligned}
C'_X C_X &= A'X^{-1} + X^{-1}A + C'_zC_z \\
&= -X^{-1}(B_uL + XC'_zD_{zu}L)X^{-1} \\
&= X^{-1}L'D'_{zu}D_{zu}LX^{-1} \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{4.257}$$

Isto atesta a existência da decomposição indicada.

Podemos reproduzir e estender estes procedimentos de obtenção das propriedades de separação para todos os problemas de otimização discutidos nas seções anteriores. Em todos os casos, concluiremos sobre a existência de estruturas do tipo estimador de Luenberger que estão contidas na fronteira das desigualdades matriciais lineares apresentadas. Embora interessante, este tipo de desenvolvimento pouco contribui para a compreensão de novas técnicas de projeto, mostrando apenas que as parametrizações apresentadas contêm, de fato, os resultados disponíveis na literatura como casos particulares.

<sup>13</sup>Veja as condições de otimalidade com relação à matriz  $L$ .

## Capítulo 5

# Miscelânea de problemas em projeto de filtros e controladores

Este capítulo é dedicado à resolução de problemas de filtragem e controle em diversos contextos. Os resultados baseiam-se nas parametrizações desenvolvidas no Capítulo 4. A apresentação é ilustrada por exemplos numéricos e simulações em computador. Os problemas de programação semi-definida foram resolvidos utilizando o pacote LMISol [27].

### 5.1 Controle positivo-real

O problema a ser resolvido nesta seção está representado na figura 5.1. Desejamos projetar um controlador  $C$  para o sistema  $\mathcal{H}$  de tal forma que o sistema interconectado mostrado nesta figura seja robusto na presença das incertezas do tipo  $\Delta \in \Delta_{PR}$ , definidas em (2.60), isto é, desejamos obter um sistema interconectado com a propriedade da positividade real<sup>1</sup>. Além disto, desejamos que este controlador minimize o custo garantido definido no Lema 2.14, isto é, desejamos minimizar um limite superior da norma  $H_2$  da matriz de transferência entre a entrada  $w_2$  e a saída  $z_2$ . O artigo [69] trata deste problema no contexto de

<sup>1</sup>É neste sentido que o título desta seção deve ser interpretado. Não devemos imaginar que o controlador ou o sistema a ser controlado possua, isoladamente, a propriedade da positividade-real.

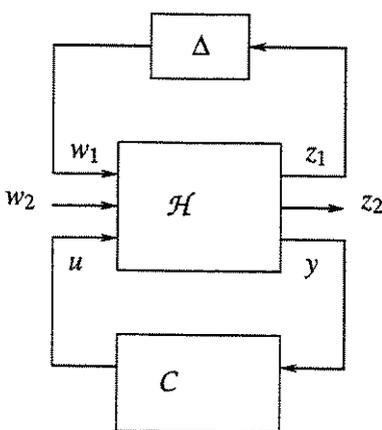


Figura 5.1: Projeto de controladores positivo-reais

realimentação do estado, ao passo que os artigos [12, 11] lidam com realimentação da saída.

Observemos que a primeira parte deste problema, a obtenção do sistema positivo-real em malha fechada, já se encontra resolvida nos Teoremas 4.4 e 4.18, apresentados no Capítulo 4. Resta-nos adicionar a estas formulações as restrições correspondentes à minimização em norma  $H_2$ . Nas seções seguintes, apresentaremos resultados relativos a sistemas contínuos com controladores por realimentação do estado e realimentação dinâmica da saída.

### 5.1.1 Realimentação do estado

Dada a realização de estado para o sistema linear  $\mathcal{H}$

$$\dot{x} = Ax + B_{w_1}w_1 + B_{w_2}w_2 + B_uu, \quad x(0) = 0 \quad (5.1)$$

$$z_1 = C_{z_1}x + D_{z_1w_1}w_1 + D_{z_1u}u \quad (5.2)$$

$$z_2 = C_{z_2}x + D_{z_2w_1}w_1 + D_{z_2u}u \quad (5.3)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $w_1 \in \mathbb{R}^{r_1}$ ,  $w_2 \in \mathbb{R}^{r_2}$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$  e  $z_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ , desejamos resolver o problema formulado na introdução com o controlador por realimentação do estado (4.4). Se conectamos este controlador ao sistema (5.1–5.3) obtemos o sistema linear

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}_1w_1 + \tilde{B}_2w_2, \quad x(0) = 0 \quad (5.4)$$

$$z_1 = \tilde{C}_1x + \tilde{D}_1w_1 \quad (5.5)$$

$$z_2 = \tilde{C}_2x + \tilde{D}_2w_1 \quad (5.6)$$

no qual as matrizes em malha fechada são

$$\tilde{A} := A + B_uK \quad \tilde{B}_1 := B_{w_1} \quad \tilde{B}_2 := B_{w_2} \quad (5.7)$$

$$\tilde{C}_1 := C_{z_1} + D_{z_1u}K \quad \tilde{D}_1 := D_{z_1w_1} \quad (5.8)$$

$$\tilde{C}_2 := C_{z_2} + D_{z_2u}K \quad \tilde{D}_2 := D_{z_2w_1} \quad (5.9)$$

O próximo teorema provê os problemas de otimização com desigualdades matriciais lineares a serem resolvidos.

**Teorema 5.1** *As seguintes afirmações são equivalentes*

- i) *Existe um controlador na forma (4.4) que estabiliza o sistema linear contínuo (5.1–5.3) e torna a matriz de transferência  $H_{w_1z_1}(s)$  positiva-real estrita e que garante que*

$$\sup_{\Delta \in \Delta_{PR}} \|H_{w_2z_2}(s)\|_2^2 < \rho_2(\Delta) := \gamma \quad (5.10)$$

- ii) *Caso a matriz de transferência  $H_{w_1z_1}(s)$  do sistema (5.4–5.6) seja estritamente própria ( $\tilde{D}_1 = D_{z_1w_1} = 0$ ), existem matrizes  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_uL + XA' + L'B_u' & XC_{z_2}' + L'D_{z_2u}' \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.11)$$

$$\lambda B_{w_1}' = C_{z_1}X + D_{z_1u}L \quad (5.12)$$

$$\begin{bmatrix} W & B_{w_2}' \\ (\star)' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (5.13)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (5.14)$$

$$\lambda > 0 \quad (5.15)$$

iii) Caso a matriz de transferência  $H_{w_1z_1}(s)$  do sistema (5.4–5.6) não seja estritamente própria ( $\tilde{D}_1 = D_{z_1w_1} \neq 0$ ), existem matrizes  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L'B'_u & \lambda B_w - XC'_z - L'D'_{zu} & XC'_{z_2} + L'D_{z_2u} \\ (\star)' & -\lambda (D_{zw} + D'_{zw}) & 0 \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_{w_2} \\ (\star)' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (5.17)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (5.18)$$

O controlador é dado em (4.13) e o valor mínimo de  $\rho_2(\Delta)$  pode ser calculado resolvendo-se, apropriadamente, um dos problemas convexos

$$\min \{ \gamma : (5.11\text{--}5.15) \} \quad (5.19)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.16\text{--}5.18) \} \quad (5.20)$$

**Prova:** A prova deste teorema baseia-se numa versão ligeiramente modificada do Lema 2.14. Obtemos as desigualdades correspondentes a esta versão modificada do Lema 2.14 por meio da transformação de variáveis  $(\hat{P}, \hat{W}, \hat{\gamma}, \lambda) := (\mu P, \mu W, \mu \gamma, \mu^{-1})$ . Por exemplo, podemos reescrever as desigualdades (2.81–2.84) na forma<sup>2</sup>

$$\begin{bmatrix} A'\hat{P} + \hat{P}A & C'_2 \\ C_2 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ \lambda B'_1 \hat{P} = C_1 \\ \begin{bmatrix} W & B'_2 \hat{P} \\ \hat{P} B_2 & \hat{P} \end{bmatrix} > 0 \\ \text{tr}(W) < \hat{\gamma} \\ \lambda > 0$$

que estão associadas ao custo garantido

$$\sup_{\Delta \in \Delta_{\text{PR}}} \|H_{w_2z_2}(s)\|_2^2 < \rho_2(\Delta) := \hat{\gamma}$$

A partir desta versão modificada, obtemos as desigualdades e os problemas formulados no enunciado aplicando o Lema 4.1 mais a transformação primal (4.12), discutida na Seção 4.1.1, com respeito às variáveis transformadas. ■

A diferença marcante entre o problema de custo garantido no artigo [69] e a nossa abordagem é a presença do multiplicador escalar  $\lambda$ , que permite assegurar a existência do custo garantido  $H_2$  sempre que houver um controlador que torne o sistema positivo-real em malha fechada.

<sup>2</sup>Veja também a discussão apresentada logo em seguida ao Lema 2.14.

**Exemplo 5.1** Os dados deste exemplo foram adaptados dos artigos [12, 11]. Dadas as matrizes do sistema linear (5.1–5.3)

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2.5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & B_{w_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{w_2} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & B_u &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 C_{z_1} &= [1 \quad 1 \quad 0] & D_{z_1 w_1} &= [0] & D_{z_1 u} &= [1 \quad 1] \\
 C_{z_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & D_{z_2 w_1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & D_{z_2 u} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

desejamos projetar um controlador por realimentação do estado conforme o Teorema 5.1. Como a matriz  $D_{z_1 w_1}$  é nula, devemos utilizar a formulação do item *ii*) deste teorema. Resolvendo o problema de otimização (5.19) obtemos o ganho de realimentação do estado ótimo

$$K = \begin{bmatrix} 0.1605 & 0.0429 & 2.3410 \\ -1.1605 & -1.0429 & -2.3410 \end{bmatrix}$$

associado ao custo garantido positivo-real ótimo  $\rho_2(\Delta) = 19.68$ . ♦

### 5.1.2 Realimentação da saída

Para definirmos o problema de controle positivo-real por realimentação dinâmica da saída, consideremos o sistema linear  $\mathcal{H}$

$$\dot{x} = Ax + B_{w_1} w_1 + B_{w_2} w_2 + B_u u, \quad x(0) = \mathbf{0} \tag{5.21}$$

$$z_1 = C_{z_1} x + D_{z_1 w_1} w_1 + D_{z_1 u} u \tag{5.22}$$

$$z_2 = C_{z_2} x + D_{z_2 w_1} w_1 + D_{z_2 u} u \tag{5.23}$$

$$y = C_y x + D_{y w_1} w_1 \tag{5.24}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $w_1 \in \mathbb{R}^{r_1}$ ,  $w_2 \in \mathbb{R}^{r_2}$ ,  $z_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$  e  $z_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ . Desejamos resolver o problema formulado na introdução, desta vez utilizando o controlador contínuo (4.140–4.141). Conectando este controlador ao sistema (5.21–5.24) obtemos o sistema linear

$$\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}_1 w_1 + \tilde{B}_2 w_2, \quad x(0) = \mathbf{0} \tag{5.25}$$

$$z_1 = \tilde{C}_1 x + \tilde{D}_1 w_1 \tag{5.26}$$

$$z_2 = \tilde{C}_2 x + \tilde{D}_2 w_1 \tag{5.27}$$

cujas matrizes dinâmicas são

$$\tilde{A} := \begin{bmatrix} A + B_u D_c C_y & B_u C_c \\ B_c C_y & A_c \end{bmatrix} & \tilde{B}_1 := \begin{bmatrix} B_{w_1} + B_u D_c D_{y w_1} \\ B_c D_{y w_1} \end{bmatrix} & \tilde{B}_2 := \begin{bmatrix} B_{w_2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

$$\tilde{C}_1 := [C_{z_1} + D_{z_1 u} D_c C_y \quad D_{z_1 u} C_c] & \tilde{D}_1 := D_{z_1 w_1} + D_{z_1 u} D_c D_{y w_1} \tag{5.29}$$

$$\tilde{C}_2 := [C_{z_2} + D_{z_2 u} D_c C_y \quad D_{z_2 u} C_c] & \tilde{D}_2 := D_{z_2 w_1} + D_{z_2 u} D_c D_{y w_1} \tag{5.30}$$

Ao contrário do que ocorre no problema por realimentação do estado, não conseguimos simplificar as expressões do Lema 2.14 de modo a eliminar a busca unidimensional. Deste modo, a partir das desigualdades do Lema 2.14, obtemos imediatamente as desigualdades matriciais lineares a serem consideradas no problema de projeto.

**Teorema 5.2** *As seguintes afirmações são equivalentes*

i) *Existe um controlador na forma (4.140–4.141) que estabiliza o sistema linear contínuo (5.21–5.24) e torna a matriz de transferência  $H_{w_1z_1}(s)$  positiva-real estrita e que garante que*

$$\sup_{\Delta \in \Delta_{PR}} \|H_{w_1z_1}(s)\|_2^2 < \rho_2(\Delta) := \mu\gamma \quad (5.31)$$

ii) *Caso a matriz de transferência  $H_{w_1z_1}(s)$  do sistema (5.25–5.27) seja estritamente própria ( $\bar{D}_1 = \mathbf{0}$ ), existem matrizes  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{r_2 \times r_2}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_uL + XA' + L'B'_u & A + B_uRC_y + Q' & XC'_{z_2} + L'D'_{z_2u} \\ (\star)' & A'Y + C'_yF' + YA + FC_y & C'_{z_2} + C'_yR'D'_{z_2u} \\ (\star)' & (\star)' & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.32)$$

$$B'_{w_1} + D'_{yw_1}R'B'_u = C_{z_1}X + D_{z_1u}L \quad (5.33)$$

$$B'_{w_1}Y + D'_{yw_1}F' = C_{z_1} + D_{z_1u}RC_y \quad (5.34)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_{w_2} & B'_{w_2}Y \\ (\star)' & X & \mathbf{I} \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.35)$$

$$D_{z_1w_1} + D_{z_1u}RD_{yw_1} = \mathbf{0} \quad (5.36)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (5.37)$$

iii) *Caso a matriz de transferência  $H_{w_1z_1}(s)$  do sistema (5.25–5.27) não seja estritamente própria ( $\bar{D}_1 \neq \mathbf{0}$ ), existem matrizes  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q_2 \times q_2}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} AX + B_uL + XA' + L'B'_u & A + B_uRC_y + Q' & B_{w_1} + B_uRD_{yw_1} - XC'_{z_1} - L'D'_{z_1u} & XC'_{z_2} + L'D'_{z_2u} \\ (\star)' & A'Y + C'_yF' + YA + FC_y & YB_{w_1} + FD_{yw_1} - C'_{z_1} - C'_yR'D'_{z_1u} & C'_{z_2} + C'_yR'D'_{z_2u} \\ (\star)' & (\star)' & -D_{z_1w_1} - D'_{z_1w_1} - D_{z_1u}RD_{yw_1} - D'_{yw_1}R'D'_{z_1u} & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.38)$$

$$\begin{bmatrix} W & B'_{w_2} & B'_{w_2}Y \\ (\star)' & X & \mathbf{I} \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.39)$$

$$\text{tr}(W) < \gamma \quad (5.40)$$

*O controlador é dado em (4.156) e o valor mínimo de  $\rho_2(\Delta)$  pode ser calculado resolvendo-se, apropriadamente, um dos problemas de busca unidimensional*

$$\min_{\mu} \{ \mu\gamma : (5.32-5.37) \} \quad (5.41)$$

ou

$$\min_{\mu} \{ \mu\gamma : (5.38-5.40) \} \quad (5.42)$$

Podemos obter as expressões utilizadas no teorema acima diretamente do Lema 2.14 e dos Teoremas 4.15 e 4.18, formulados na Seção 4.3.1, razão pela qual não apresentaremos uma prova formal deste resultado.

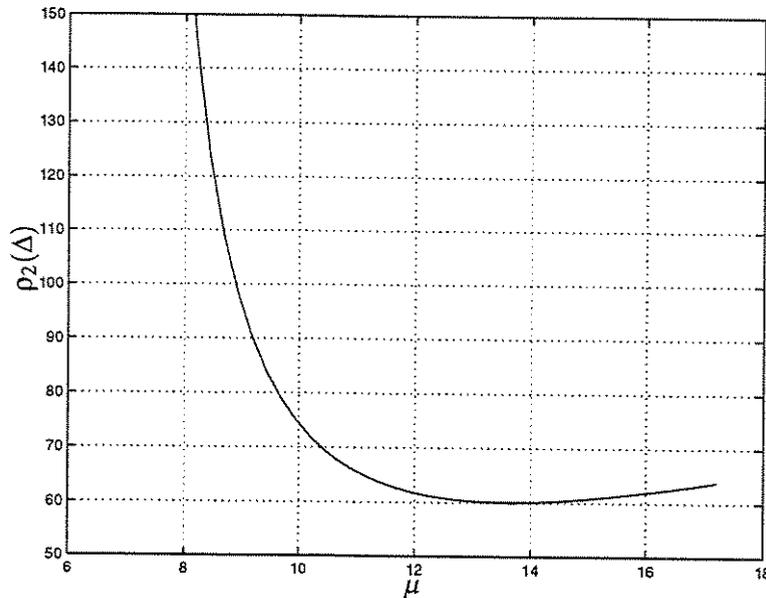


Figura 5.2: Custo garantido positivo-real

**Exemplo 5.2** Suponhamos que, do mesmo sistema considerado no Exemplo 5.1, possamos medir apenas a saída (5.24), cujas matrizes são

$$C_y = [1 \quad 0 \quad 1] \qquad D_{yw_1} = 1$$

Desejamos projetar um controlador por realimentação da saída (4.140–4.141) *estritamente próprio*. Novamente, como a matriz  $D_{z_1 w_1}$  é nula e o controlador é estritamente próprio, devemos utilizar a formulação do item *ii*) do Teorema 5.2. Resolvendo o problema de busca unidimensional, obtemos a gráfico mostrado na Figura 5.2, pelo qual podemos concluir que o mínimo global fica próximo ao ponto  $\mu = 13.6$  e está associado ao custo garantido positivo-real  $p_2(\Delta) = 60.01$ . Ressaltamos que esta curva nem sempre é convexa, como sugere a figura. É interessante notarmos que o valor  $\mu = 1$  não provê controlador factível algum, o que realça a necessidade de introdução do parâmetro adicional  $\mu$ .

Se calcularmos a matriz de transferência do controlador ótimo, que, neste caso, apresenta ordem igual a três, notaremos que a parte real de um dos seus pólos é muito negativa, estando, portanto, associada a um modo extremamente rápido. De fato, os autovalores da matriz valem

$$\lambda(I - XY) = \{-990.59, -177.77, -7.41E - 10\}$$

donde concluímos<sup>3</sup> que este controlador se aproxima de um controlador de ordem dois. Utilizando técnicas de redução de ordem para sistemas singulares obtemos o controlador ótimo de segunda ordem

$$C(s) = \begin{bmatrix} \frac{2.12s^2 + 5.15s + 1.90}{s^2 + 2.46s + 0.91} \\ \frac{1.77s^2 + 6.56s + 3.66}{s^2 + 2.46s + 0.91} \end{bmatrix}$$

Notemos que, devido à redução de ordem, este controlador não é estritamente próprio. ♦

<sup>3</sup>Veja discussão sobre a ordem dos controladores na Seção 4.3.1.

## 5.2 Filtragem robusta

Encontramos na literatura diversas referências ao problema de filtragem robusta. A maior parte das abordagens lida com incertezas descritas por elipsóides definidos em norma  $H_\infty$  (*norm bounded uncertainty*). Neste contexto, podemos citar os trabalhos [108, 109, 79, 132], que tratam do problema de minimização de um limite superior para a norma  $H_2$ , obtido por meio de uma única função de Lyapunov. Conforme discutido no Capítulo 2, o uso da norma  $H_2$  implica que os filtros obtidos por meio da minimização deste custo garantido quadrático são adequados para o tratamento de sistemas afetados por ruído branco gaussiano. Já os trabalhos [101, 119, 42, 131], baseados na minimização de um índice de desempenho em norma  $H_\infty$ , são adequados ao tratamento de sistemas com sinais ruidosos cuja variância seja conhecida e limitada, porém, com função de distribuição de probabilidade arbitrária [118]. Alguns autores tentam conciliar estes dois aspectos lançando mão de critérios mistos do tipo  $H_2/H_\infty$  [88].

Nesta seção, abordamos o projeto de filtros robustos para sistemas com incertezas poliedrais. Consideramos um sistema linear na forma (4.62–4.64) cujas matrizes dinâmicas são desconhecidas, porém podem ser descritas por meio de um politopo convexo. Ao agruparmos as matrizes do sistema (4.62–4.64) na forma

$$M := \begin{bmatrix} A & B_w \\ C_z & D_{zw} \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

consideramos que o politopo  $\mathcal{M}$ , definido em (2.92), é capaz de descrever todas as possíveis variações dos parâmetros do sistema. Em paralelo ao problema de filtragem definido na Seção 4.2, nosso objetivo é minimizar funções de custo garantido  $H_2$  e  $H_\infty$  da matriz de transferência entre a entrada de ruído e o erro de estimação (4.67). Essas funções de custo garantido são calculadas conforme os Lemas 2.15 e 2.16 e os Teoremas 3.15 e 3.16.

O problema de filtragem para sistemas contínuos com incertezas poliedrais foi resolvido pela primeira vez em [53, 60, 62]. A versão correspondente para sistemas discretos está contida em [57, 58]. Estes resultados foram estendidos para lidar com o problema de filtragem robusta com funções de Lyapunov dependente dos parâmetros em [63]. A recente data de publicação destes resultados contrasta com a data de publicação dos primeiros resultados em controle robusto por realimentação do estado [13]. Embora o problema de filtragem robusta possa ser entendido como um problema dual ao problema de controle por realimentação do estado, acreditamos que a razão pela qual tenha permanecido tanto tempo sem uma solução satisfatória possa ser creditada à ausência de um modelo nominal. Este fato impede a utilização de uma estrutura de filtragem do tipo filtro de Luenberger.

### 5.2.1 Sistemas contínuos

Os resultados discutidos nesta seção foram apresentados pela primeira vez nos artigos [60, 62]. Devemos ressaltar que os problemas definidos nos próximos teoremas não contêm nenhuma das hipóteses simplificadoras adotadas em [60, 62], quais sejam, a ausência da matriz  $D_{yw}$  e a imposição de uma estrutura de filtragem estritamente própria. Este fato nos permite tratar de problemas de filtragem de sistemas com incertezas em todas as matrizes do sistema (4.62–4.64).

**Teorema 5.3** *Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.62–4.64) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

i) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A_i'Z + ZA_i & ZA_i + A_i'Y + C_{yi}'F' + Q' & C_{zi}' - C_{yi}'R' - L' \\ (\star)' & A_i'Y + C_{yi}'F' + YA_i + FC_{yi} & C_{zi}' - C_{yi}'R' \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.44)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B_{wi}'Z & B_{wi}'Y + D_{ywi}'F' \\ (\star)' & Z & Z \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.45)$$

$$D_{zwi} - RD_{ywi} = \mathbf{0} \quad (5.46)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.47)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A_i'Z + ZA_i & ZA_i + A_i'Y + C_{yi}'F' + Q' & ZB_{wi} \\ (\star)' & A_i'Y + C_{yi}'F' + YA_i + FC_{yi} & YB_{wi} + FD_{ywi} \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.48)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_{zi} - RC_{yi} - L & C_{zi} - RC_{yi} \\ (\star)' & Z & Z \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.49)$$

$$D_{zwi} - RD_{ywi} = \mathbf{0} \quad (5.50)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.51)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

então existe um filtro (4.65–4.66) de ordem completa ( $n_f = n$ ) para o sistema linear contínuo (4.62–4.64) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{we}(s)\|_2^2 < \rho_2(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.52)$$

O filtro é dado em (4.83) e o valor mínimo do custo garantido  $\rho_2(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se os problemas de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.44\text{--}5.46) \} \quad (5.53)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.48\text{--}5.50) \} \quad (5.54)$$

Conforme realçado na Seção 4.2, a independência da parametrização dos filtros com relação aos parâmetros do sistema e a linearidade das desigualdades matriciais com relação aos componentes da matriz  $M$ , definida em (5.43), nos permite multiplicar cada desigualdade contidas nos itens i) e ii) pelo seu correspondente  $\xi_i$  que, somadas, garantem a validade do custo garantido (5.52) em todo o domínio poliedral  $\mathcal{M}$ . Apresentamos a formulação análoga para o caso  $H_\infty$  no próximo teorema.

**Teorema 5.4** Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.62–4.64) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira

i) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A_i'Z + ZA_i & ZA_i + A_i'Y + C_{yi}'F' + Q' & ZB_{wi} & C_{zi}' - C_{yi}'R' - L' \\ (\star)' & A_i'Y + C_{yi}'F' + YA_i + FC_{yi} & YB_{wi} + FD_{ywi} & C_z' - C_{yi}'R' \\ (\star)' & (\star)' & -\gamma \mathbf{I} & D_{zwi}' - D_{ywi}'R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.55)$$

$$Y > Z > 0 \quad (5.56)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A_i'Z + ZA_i & ZA_i + A_i'Y + C_{yi}'F' + Q' & ZB_{wi} & C_{zi}' - C_{yi}'R' - L' \\ (\star)' & A_i'Y + C_{yi}'F' + YA_i + FC_{yi} & YB_{wi} + FD_{ywi} & C_z' - C_{yi}'R' \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} & D_{zwi}' - D_{ywi}'R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.57)$$

$$Y > Z > 0 \quad (5.58)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

então existe um filtro (4.65–4.66) de ordem completa ( $n_f = n$ ) para o sistema linear contínuo (4.62–4.64) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{we}(s)\|_\infty^2 < \rho_\infty(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.59)$$

O filtro é dado em (4.83) e o valor mínimo do custo garantido  $\rho_\infty(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se os problemas de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.55-5.56) \} \quad (5.60)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.57-5.58) \} \quad (5.61)$$

Ilustramos a aplicação destes resultados com um exemplo.

**Exemplo 5.3** Os dados deste exemplo foram obtidos em [78]. Trata-se de um sistema com duas massas acopladas por duas molas, como mostrado na Figura 5.3. Neste sistema, as massas  $m_1$  e  $m_2$  estão posicionadas em  $x_1$  e  $x_2$ , e  $k_1$  e  $k_2$  representam os coeficientes de elasticidade das molas. O coeficiente de atrito  $c$  é um dos parâmetros desconhecidos e a posição da massa  $m_1$  é medida por um sensor com fator de ruído  $d$ .

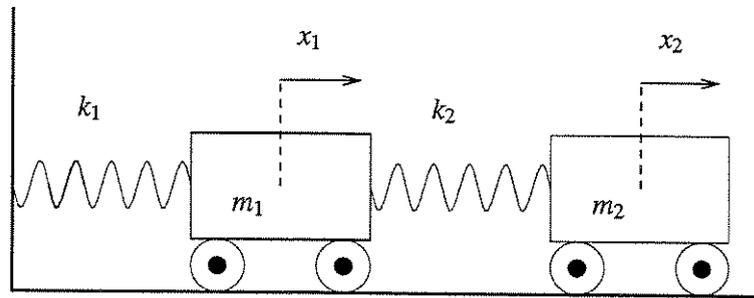


Figura 5.3: Filtragem robusta: sistema massa-mola

O nosso objetivo é obter um filtro robusto  $H_2$  capaz de estimar a posição da massa  $m_2$ . Supomos que o estado inicial do sistema e do filtro sejam ambos nulos. Dados os parâmetros

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 & 0.5 \leq c \leq 3.5 & & k_1 = k_2 = 1 \\ m_2 &= 0.5 & 0.5 \leq d \leq 1.5 & & \end{aligned}$$

uma realização para este sistema contínuo na forma (4.62–4.64) corresponde às matrizes

$$M = \left[ \begin{array}{c|c} A & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \\ C_y & D_{yw} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -c & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2c & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & d \end{array} \right]$$

Como  $D_{zw} = 0$  e  $D_{yw} \neq 0$ , devemos, obrigatoriamente, limitar a nossa busca a filtros estritamente próprios. Obtemos o filtro

$$F_{\text{rob}}(s) = 0.0675 \frac{s^3 + 3.2151s^2 + 4.8634s + 27.0312}{s^4 + 3.4992s^3 + 7.0996s^2 + 9.1558s + 4.0301}$$

associado ao mínimo custo garantido  $\rho_2(\mathcal{M})$  resolvendo o problema (5.53), do Teorema 5.3. Como esperado, temos que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{we}(s)\|_2^2 = 0.2535 < \rho_2(\mathcal{M}) = 0.4339$$

Observemos que o ‘sup’, calculado com relação aos parâmetros definidos acima, ocorre para

$$(c, d) = (0.5, 0.5)$$

Este é um resultado surpreendente pois, em primeira análise, deveríamos esperar que o mais baixo coeficiente de atrito e o mais alto ruído de medição implicassem o mais alto erro de estimação. No entanto, não é isto o que ocorre! Mostramos na Figura 5.4 os diagramas de Bode associados ao filtro de Kalman, calculado para o sistema nominal

$$(c, d)_{\text{nom}} = (2, 1)$$

e ao filtro robusto. O comportamento dos dois filtros é semelhante nas baixas frequências, porém, à medida em que caminhamos no espectro em direção às altas frequências, a atenuação do filtro de Kalman torna-se maior. Uma interpretação para este fato é que, como indicado, o pior desempenho do filtro robusto ocorre para pequenos valores do fator de ruído, o que faz com que o filtro robusto “permita” uma menor atenuação em altas frequência em troca de um melhor desempenho. ♦

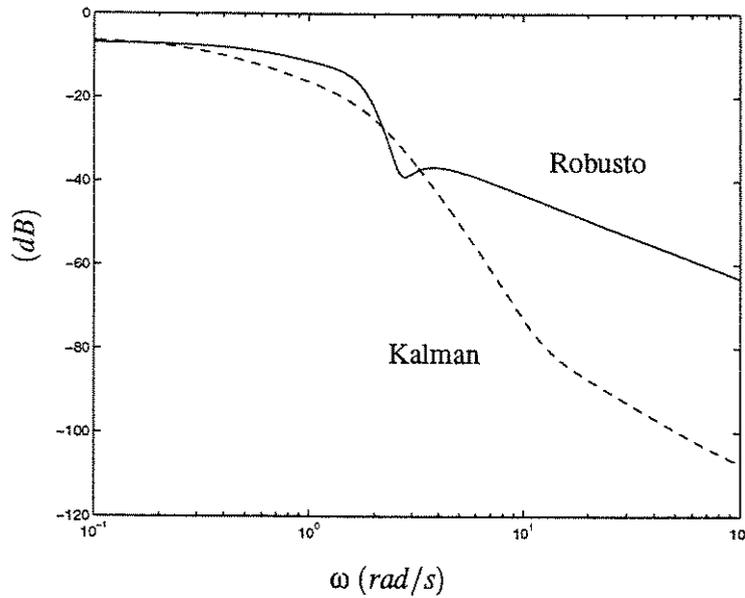


Figura 5.4: Filtragem robusta: sistema massa-mola: diagrama de Bode

### 5.2.2 Sistemas discretos

Problemas análogos aos formulados nos Teoremas 5.3 e 5.4 podem ser obtidos para sistemas discretos, conforme apresentado em [57, 58]. Nesta seção, apresentamos as formulações adequadas ao problema de filtragem robusta com funções de Lyapunov dependente dos parâmetros [63]. Os resultados constituem uma extensão do artigo [63] para o problema de filtragem em norma  $H_\infty$ . Como na seção anterior, não consideramos nenhuma das hipóteses simplificadoras presentes em [57, 58, 63].

**Teorema 5.5** *Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.62–4.64) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

- i) *Existem matrizes  $E_i = E'_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H_i = H'_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W'_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} E_i & G_i & A'_i Z' & A'_i Y' + C'_{yi} F' + Q' & C'_{zi} - C'_{yi} R' - L' \\ (\star)' & H_i & A'_i Z' & A'_i Y' + C'_{yi} F' & C'_{zi} - C'_{yi} R' \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - E_i & Z + Y' + S' - G_i & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H_i & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.62)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B'_{wi} Z' & B'_{wi} Y' + D'_{ywi} F' \\ (\star)' & Z + Z' - E_i & Z + Y' + S' - G_i \\ (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H_i \end{bmatrix} > 0 \quad (5.63)$$

$$D_{zwi} - R D_{ywi} = \mathbf{0} \quad (5.64)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.65)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) *Existem matrizes*  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_i = K_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  *de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} P_i & J_i & ZA_i & ZA_i & ZB_{wi} \\ (\star)' & K_i & YA_i + FC_{yi} + Q & YA_i + FC_{yi} & YB_{wi} + FD_{ywi} \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - P_i & Z + Y' + S' - J_i & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K_i & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.66)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_{zi} - RC_{yi} - L & C_{zi} - RC_{yi} \\ (\star)' & Z + Z' - P_i & Z + Y' + S' - J_i \\ (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K_i \end{bmatrix} > 0 \quad (5.67)$$

$$D_{zwi} - RD_{ywi} = \mathbf{0} \quad (5.68)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.69)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

então existe um filtro (4.65–4.66) de ordem completa ( $n_f = n$ ) para o sistema linear discreto (4.62–4.64) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{we}(\zeta)\|_2^2 < \rho_2(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.70)$$

O filtro é dado em (4.83) e o valor mínimo do custo garantido  $\rho_2(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se os problemas de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.62\text{--}5.65) \} \quad (5.71)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.66\text{--}5.69) \} \quad (5.72)$$

**Teorema 5.6** *Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.62–4.64) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

i) *Existem matrizes*  $E_i = E_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H_i = H_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  *de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} E_i & G_i & A_i'Z' & A_i'Y' + C_{yi}'F' + Q' & \mathbf{0} & C_{zi}' - C_{yi}'R' - L' \\ (\star)' & H_i & A_i'Z' & A_i'Y' + C_{yi}'F' & \mathbf{0} & C_{zi}' - C_{yi}'R' \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - E_i & Z + Y' + S' - G_i & ZB_{wi} & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - H_i & YB_{wi} + FD_{ywi} & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \gamma \mathbf{I} & D_{zwi}' - D_{ywi}'R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.73)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) Existem matrizes  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $J_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $K_i = K_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{q \times p}$  e  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P_i & J_i & ZA_i & ZA_i & ZB_{wi} & \mathbf{0} \\ (\star)' & K_i & YA_i + FC_{yi} + Q & YA_i + FC_{yi} & YB_{wi} + FD_{ywi} & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & Z + Z' - P_i & Z + Y' + S' - J_i & \mathbf{0} & C'_{zi} - C'_{yi}R' - L' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & Y + Y' - K_i & \mathbf{0} & C'_{zi} - C'_{yi}R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} & D'_{zwi} - D'_{ywi}R' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & (\star)' & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.74)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

então existe um filtro (4.65–4.66) de ordem  $n_f = n$  para o sistema linear discreto (4.62–4.64) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{we}(\zeta)\|_\infty^2 < \rho_\infty(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.75)$$

O filtro é dado em (4.83) e o valor mínimo do custo garantido  $\rho_\infty(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se os problemas de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.73) \} \quad (5.76)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.74) \} \quad (5.77)$$

Como esperado, podemos recuperar os resultados em filtragem robusta quadrática, presentes nos artigos [57, 58], com o próximo corolário<sup>4</sup>.

**Corolário 5.7** Os resultados dos Teoremas 5.5 e 5.6 reduzem-se às condições necessárias e suficientes de projeto de filtros quadraticamente estáveis caso as restrições lineares

$$Z = Z' = E_i = P_i \quad Y = Y' = H_i = K_i \quad (5.78)$$

$$G_i = G_i' = J_i = J_i' = Z \quad Z = Y + S \quad (5.79)$$

consideradas para todo valor de  $i = 1, \dots, N$ , sejam incorporadas às desigualdades matriciais lineares apresentadas.

**Exemplo 5.4** Os dados deste exemplo foram obtidos em [57, 63]. Os resultados obtidos são comparados com os dos artigos [108] e [57]. Começamos por definir as matrizes associadas ao sistema nominal

$$M = \left[ \begin{array}{c|c} A_0 & B_w \\ \hline C_z & D_{zw} \\ \hline C_y & D_{yw} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0.9 & 0.1 & 1 & 0 & 0 \\ 0.01 & 0.9 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array} \right]$$

<sup>4</sup>Vejá (4.125–4.126).

Para este sistema nominal, obtemos as matrizes do filtro de Kalman

$$F_K = \left[ \begin{array}{cc|c} A_f & B_f & \\ \hline C_f & D_f & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} 0.4427 & 0.1000 & 0.4573 \\ -0.1615 & 0.9000 & 0.1715 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

associadas a um custo ótimo  $H_2$  igual a 8.0759.

Consideramos então uma perturbação sobre a matriz  $A_0$  da seguinte maneira

$$A = A_0 + \Delta_A$$

na qual a incerteza  $\Delta_A$  é definida por meio da relação

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} 0 & 0.06\alpha \\ 0.05\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e os parâmetros incertos estão contidos nos domínios

$$|\alpha| \leq 1 \qquad |\beta| \leq 1$$

Este tipo de incerteza, estruturada e com dois blocos, pode ser descrita de maneira exata por meio de um conjunto poliedral  $\mathcal{M}$ . Embora não possamos aplicar diretamente os resultados de [108] sem que haja alguma perda com relação à descrição da incerteza, consideramos, para efeito de comparação, a melhor solução obtida sem que levemos em conta a estrutura bloco-diagonal dos parâmetros incertos. Esta solução está associada a um parâmetro  $\varepsilon = 1.5264 \times 10^{-4}$  e à realização mínima

$$F_S = \left[ \begin{array}{cc|c} 0.0335 & 0.1014 & 0.8667 \\ -0.2551 & 0.9117 & 0.2652 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Construindo as  $N = 4$  matrizes do domínio  $\mathcal{M}$  e resolvendo o problema (5.72), do Teorema 5.5, na presença das restrições adicionais (5.78–5.79), do Corolário 5.7, obtemos o filtro robusto quadrático ótimo [57]

$$F_Q = \left[ \begin{array}{cc|c} 0.0826 & -0.0768 & -0.0413 \\ -0.0002 & 0.8543 & 0.0001 \\ \hline -29.8415 & -70.1868 & 0 \end{array} \right]$$

Finalmente, considerando o mesmo conjunto de vértices, e resolvendo o problema (5.72), do Teorema 5.5, obtemos o filtro ótimo [63]

$$F_P = \left[ \begin{array}{cc|c} -0.1312 & 0.0842 & -0.1151 \\ -0.0073 & 0.8352 & -0.0007 \\ \hline -14.7625 & -41.3592 & 0 \end{array} \right]$$

Para cada um desses filtros, apresentamos na Tabela 5.1 os valores do custo garantido  $H_2(p_2)$  e de

$$\tau_2 := \sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{we}(\zeta)\|_2^2$$

calculado por um método exaustivo. O filtro de Kalman, ótimo para o sistema nominal, apresenta o pior desempenho no domínio de incertezas em questão, e os filtros  $F_S$  e  $F_Q$  são inferiores ao filtro  $F_P$  em termos do custo garantido. Além disto, o filtro  $F_P$  tem um desempenho aproximadamente 50% melhor do que os demais, tanto com relação ao custo garantido, quanto com relação ao custo de estimação calculado para o pior caso. ♦

Filtro	$F_K$	$F_S$	$F_Q$	$F_P$
$\rho_2$	—	129.7915	100.0278	44.0039
$\tau_2$	49.4994	38.2183	30.0664	15.4506

Tabela 5.1: Filtragem robusta: incerteza estruturada

**Exemplo 5.5** Considerando o mesmo sistema do Exemplo 5.4, mudemos a descrição das incertezas para a forma

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} 0 & 0.06\alpha \\ 0 & 0.05\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

na qual os parâmetros incertos são limitados em norma da seguinte maneira

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$$

Para este tipo de incerteza, que não é estruturada, obtemos por meio do procedimento de projeto definido em [108] o filtro de melhor custo garantido  $H_2$  quadrático

$$F_O = \left[ \begin{array}{cc|c} 0.3521 & 0.1069 & 0.5479 \\ -0.2211 & 0.9400 & 0.2311 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Ao contrário do que ocorre no exemplo 5.4, o tipo de incerteza considerado neste exemplo não pode ser representado de maneira exata por meio de um polítopo convexo  $\mathcal{M}$ . No entanto, como em [57], podemos aproximar internamente este domínio elipsoidal construindo o domínio poliedral

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi i/N) \\ \sin(2\pi i/N) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N$$

Vemos na Tabela 5.2 que, com apenas  $N = 8$  vértices, o filtro quadrático  $F_Q$ , obtido por meio da solução do problema (5.72), do Teorema 5.5, com as restrições adicionais do Corolário 5.7, apresenta praticamente o mesmo desempenho do filtro quadrático ótimo  $F_O$ . Finalmente, se calculamos o filtro  $F_P$  resolvendo o problema (5.72), dado no Teorema 5.5, podemos obter um melhor desempenho. Notemos que este filtro, cuja representação de estado é

$$F_P = \left[ \begin{array}{cc|c} 0.4491 & 0.0758 & -0.2360 \\ 0.0006 & 0.9008 & -0.0013 \\ \hline -3.2370 & -8.5027 & 0 \end{array} \right]$$

é construído a partir de uma função de Lyapunov dependente dos parâmetros incertos e possui um custo garantido que praticamente iguala o custo de estimação de pior caso. ♦

### 5.3 Controle robusto por realimentação do estado

Recentemente, diversos autores têm tentado desenvolver métodos de análise de sistemas lineares baseados nas funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros [39, 45] (veja também Seção 3.2). Como

Filtro	$F_K$	$F_O$	$F_Q$	$F_P$
$N = 2$	—	—	9.6796	8.8499
$N = 4$	—	—	13.0219	11.5307
$N = 8$	—	—	13.0446	11.6053
$\rho_2$	—	13.0446	13.0446	11.6053
$\tau_2$	13.0036	11.8655	11.8655	11.5980

Tabela 5.2: Filtragem robusta: incerteza não estruturada

a maioria dos procedimentos de análise já é complexa, os problemas de projeto de controladores tendem a ser complicados, e muitos ainda restam sem uma solução definitiva. Nosso objetivo nesta seção é, justamente, desenvolver métodos de projeto de controladores robustos por realimentação do estado com funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros. Os nossos resultados são baseados nas caracterizações estendidas para sistemas discretos introduzidas na Seção 3.2 e na parametrização dos controladores por realimentação do estado da Seção 4.1.2. Embora os resultados de análise da Seção 3.2 sejam apenas suficientes, conforme já demonstrado, eles são gerais o bastante para incorporar o conceito de estabilidade quadrática [9] como um caso particular. O mesmo ocorre no projeto de controladores.

Ao longo desta seção, consideramos um sistema linear discreto descrito pelas equações (4.2–4.3). Os parâmetros deste sistema são agrupados na matriz

$$M := \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

Estamos interessados em projetar controladores por realimentação do estado (4.4) para sistemas incertos cuja variação dos parâmetros possa ser descrita pelo politopo  $\mathcal{M}$ , definido em (2.92). Como na seção anterior, o nosso objetivo é minimizar funções de custo garantido  $H_2$  e  $H_\infty$  da matriz de transferência entre a entrada  $w$  e a saída  $z$ . Essas funções de custo garantido serão calculadas conforme os Teoremas 3.15 e 3.16. Parte dos resultados desta seção está contida nos artigos [26, 25]. Começemos pelo problema em norma  $H_2$ .

**Teorema 5.8** *Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.2–4.3) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

i) *Existem matrizes  $E_i = E_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} E_i & X'A_i + B_{wi}'L' & X'C_{zi}' + L'D_{zui}' \\ (\star)' & X + X' - E_i & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.81)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B_{wi}' \\ (\star)' & X + X' - E_i \end{bmatrix} > 0 \quad (5.82)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.83)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) Existem matrizes  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i X + B_{ui} L & B_{wi} \\ (\star)' & X + X' - P_i & \mathbf{0} \\ (\star)' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.84)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_{zi} X + D_{zui} L \\ (\star)' & X + X' - P_i \end{bmatrix} > 0 \quad (5.85)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.86)$$

então existe um controlador por realimentação do estado (4.4) para o sistema linear discreto (4.2–4.3) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(\zeta)\|_2^2 < \rho_2(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.87)$$

O controlador é dado em (4.13) e o valor mínimo do custo garantido  $\rho_2(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se os problemas de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.81-5.83) \} \quad (5.88)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.84-5.86) \} \quad (5.89)$$

Mais uma vez, a prova deste teorema decorre da linearidade das desigualdades matriciais com relação aos componentes da matriz  $M$ , definida em (5.80), e da independência da parametrização convexa dos controladores por realimentação do estado, desenvolvida na Seção 4.1.1, com relação aos parâmetros do sistema. Uma consequência imediata deste teorema é que o conjunto de todos os controladores de estado estabilizantes, segundo a definição de estabilidade dependente dos parâmetros adotada, é descrito pela desigualdade matricial linear

$$\begin{bmatrix} E_i & X' A_i' + B_{ui}' L' \\ (\star)' & X + X' - E_i \end{bmatrix} > 0 \quad (5.90)$$

O problema correspondente em norma  $H_\infty$  está contido no próximo teorema.

**Teorema 5.9** Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.2–4.3) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira

i) Existem matrizes  $E_i = E_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$  e  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} E_i & X' A_i' + B_{ui}' L' & \mathbf{0} & X' C_{zi}' + L' D_{zui}' \\ (\star)' & X + X' - E_i & B_{wi} & \mathbf{0} \\ (\star)' & (\star)' & \gamma \mathbf{I} & D_{zwi}' \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.91)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) Existem matrizes  $P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in L^{m \times n}$  e  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i X + B_{ui} L & B_{wi} & \mathbf{0} \\ (\star)' & X + X' - P_i & \mathbf{0} & X' C'_{zi} + L' D'_{zui} \\ (\star)' & (\star)' & \mathbf{I} & D'_{zwi} \\ (\star)' & (\star)' & (\star)' & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.92)$$

então existe um controlador por realimentação do estado (4.4) para o sistema linear discreto (4.2–4.3) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(\zeta)\|_\infty^2 < \rho_\infty(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.93)$$

O controlador é dado em (4.13) e o valor mínimo do custo garantido  $\rho_\infty(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se os problema de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.91) \} \quad (5.94)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.92) \} \quad (5.95)$$

Este resultados se reduzem aos conhecidos procedimentos de projeto quadrático [70, 21] na presença das restrições lineares adicionais dadas no próximo corolário.

**Corolário 5.10** *Os resultados dos Teoremas 5.8 e 5.9 reduzem-se às condições necessárias e suficientes de projeto de controladores quadraticamente estáveis caso as restrições lineares*

$$E_i = E_i' = P_i = P_i' = X, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.96)$$

sejam incorporadas às desigualdades matriciais lineares apresentadas.

**Exemplo 5.6** Os dados deste exemplo foram obtidos no artigo [72], no qual foram utilizados para a projeto de controladores para sistemas contínuos. A partir destes dados, e utilizando a regra de Euler [7] para um período de amostragem igual  $h = 0.1$ , geramos as seguinte matrizes

$$A = \mathbf{I} + h \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & a_{32} & -0.1707 & a_{34} \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad B_u = h \begin{bmatrix} -0.4422 & -0.1761 \\ b_{21} & 7.5922 \\ 5.5200 & -4.4900 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

e consideramos os intervalos de variação paramétrica

$$|a_{32} - 0.3681| < \alpha \quad a_{34} \in [1.2200, 1.6200] \quad b_{21} \in [2.7476, 4.3446]$$

Inicialmente, determinamos o maior valor de  $\alpha$  para o qual podemos sintetizar um controlador que torne o sistema estável para todo  $M \in \mathcal{M}$ . O procedimento de projeto baseado no conceito de estabilidade quadrática (Corolário 5.10) provê

$$\alpha_Q = 92$$

enquanto com o projeto dependente dos parâmetros (desigualdade (5.90)) podemos ir até

$$\alpha_P = 169$$

Notemos que o domínio de estabilidade praticamente dobrou.

Em seguida, fixando  $\alpha = 50$ , resolvemos o problema de custo garantido  $H_2$  para as matrizes

$$\begin{aligned} B_w &= \mathbf{I} & D_{zw} &= \mathbf{0} \\ C_z &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & D_{zu} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com o projeto quadrático (problema (5.89) mais condições suplementares (5.96)) obtemos o custo garantido

$$\rho_Q = 214.29$$

enquanto com o projeto dependente dos parâmetros (problema (5.89)) obtemos

$$\rho_P = 91.79$$

É interessante notar que, caso adicionemos ao problema (5.89) a restrição sobre as matrizes de custo

$$W = W_i, i = 1, \dots, N$$

este custo garantido sobe para 97.97. No projeto quadrático não há diferenças, devido à presença de uma única matriz  $B_w$ . ♦

## 5.4 Controle robusto por realimentação da saída

Em paralelo ao que ocorre no problema de filtragem robusto, diversos problemas se encontram resolvidos na área de controle robusto de sistemas com incertezas limitadas em norma [133, 21]. A abordagem clássica se resume à formulação dos problemas de robustez em termos de condições em norma  $H_\infty$ , cuja solução pode ser obtida por meio da resolução de equações de Riccati ou por meio de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais lineares [43, 44, 116]. Até hoje não foi possível encontrar uma solução baseada na resolução de problemas convexos para sistemas com incertezas poliedrais. A principal razão para isto é que a parametrização dos controladores por realimentação da saída (veja Seção 4.3) depende das matrizes do sistema.

Nesta seção, desenvolvemos um procedimento de projeto envolvendo as desigualdades matriciais lineares, e inspirado nos problemas de filtragem robusta, apresentados na Seção 5.2, e nas propriedades de separação, discutidas na Seção 4.3.3. Desejamos projetar controladores por realimentação da saída para sistemas contínuos (4.137–4.139) cujos parâmetros incertos, agrupados na matriz

$$M := \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & \mathbf{0} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

pertencem ao politopo  $\mathcal{M}$ , definido em (2.92). Apesar de abordarmos apenas o projeto em norma  $H_2$  de controladores para sistemas contínuos, os procedimentos apresentados podem ser facilmente convertidos para lidar com outras normas e com sistemas discretos. Dois métodos são desenvolvidos: o primeiro

deles procura generalizar o conceito de separação e tratar o problema de projeto de controladores da saída em dois passos. A partir da dualização do conceito de separação, desenvolvemos o nosso segundo método, baseado num algoritmo cujos passos são problemas lineares com restrições do tipo desigualdades matriciais lineares. Este algoritmo pode ser visto como uma generalização, para uma classe muito mais abrangente de problemas, do algoritmo desenvolvido em [126].

Para que possamos lidar com o problema de controle robusto por realimentação da saída, temos que transpor um grande obstáculo: a dependência da parametrização dos controladores, representada pelas transformações (4.149) e (4.156), com relação ao conhecimento exato das matrizes do sistema  $A$ ,  $B_u$  e  $C_y$ . Notemos que, caso nos atenhamos somente ao projeto de controladores na forma (4.140–4.141), porém estritamente próprios ( $D_c = R = 0$ ), somos capazes de obter uma primeira simplificação. No que diz respeito às matrizes  $L$  e  $F$  temos que

$$F := VB_c \qquad L := C_c U \qquad (5.98)$$

que não dependem das matrizes do sistema. No entanto, a transformação envolvendo a matriz  $Q$  torna-se

$$Q := VA_c U + YAX + YB_u L + FC_y X \qquad (5.99)$$

que ainda depende de  $A$ ,  $B_u$  e  $C_y$ . Notemos que esta transformação não é linear com relação às variáveis  $X$ ,  $Y$ ,  $F$  e  $L$ . Os procedimentos a serem desenvolvidos nas próximas seções visam incorporá-la de maneira linear às desigualdades de projeto.

#### 5.4.1 Propriedades de separação

Como visto no Capítulo 4, a parametrização dos controladores por realimentação do estado e dos filtros não dependem dos parâmetros do sistema. Se comparamos as matrizes em malha fechada  $\tilde{A}$  para o problema de filtragem, em (4.70), e para o problema de controle por realimentação da saída, em (4.144), percebemos que estas matrizes tornam-se muito semelhantes caso façamos  $B_u C_c = 0$ . É claro que podemos fazer isto de duas maneiras: a primeira é eliminar a entrada de realimentação tornando  $B_u$  nulo; a segunda é tornar  $C_c$  nulo, em outras palavras, “desligar” a saída do controlador. Em ambas as hipóteses, o problema de controle robusto converte-se num problema de filtragem, cuja parametrização apresenta as características desejadas. Averiguaremos a possibilidade de dar um passo intermediário: ao invés de “desligar” o controlador, tentaremos apenas *fixar* a sua matriz de saída. Sem sombra de dúvida, o “desligamento” do controlador corresponde à fixação da matriz de saída em um valor nulo. Estamos interessados em estudar as matrizes de saída  $C_c$  associadas a

$$A_k := A + B_u C_c \qquad C_k := C_z + D_u C_c \qquad (5.100)$$

Em paralelo ao que ocorre com as propriedades tradicionais de separação (veja Seção 4.3.3), a matriz  $C_c$  deve ser capaz de estabilizar a matriz  $A_k$ , ou seja, deve ser um ganho de realimentação do estado estabilizante. De posse de tal matriz  $C_c$ , podemos obter a seguinte condição suficiente em norma  $H_2$ .

**Teorema 5.11** *Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.137–4.139) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

i) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W_i' \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A_{ki}'Z + ZA_{ki} & ZA_i + A_{ki}'Y + C_{yi}'F' + S' & C_{ki}' \\ (\star)' & A_i'Y + C_{yi}'F' + YA_i + FC_{yi} & C_{zi}' \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.101)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B_{wi}'Z & B_{wi}'Y + D_{ywi}'F' \\ (\star)' & Z & Z \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.102)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.103)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que

$$\begin{bmatrix} A_{ki}'Z + ZA_{ki} & ZA_i + A_{ki}'Y + C_{yi}'F' + S' & ZB_{wi} \\ (\star)' & A_i'Y + C_{yi}'F' + YA_i + FC_{yi} & YB_{wi} + FD_{ywi} \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.104)$$

$$\begin{bmatrix} W & C_{ki} & C_{zi} \\ (\star)' & Z & Z \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.105)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.106)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

então existe um controlador estritamente próprio (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) para o sistema linear contínuo (4.137–4.139) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 < \rho_2(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.107)$$

O controlador é dado em (5.113) e o valor mínimo sub-ótimo para o custo garantido  $\rho_2(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se os problemas de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.101-5.103) \} \quad (5.108)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.104-5.106) \} \quad (5.109)$$

**Prova:** A prova deste teorema é baseada diretamente no Teorema 4.15. Se consideramos apenas controladores estritamente próprios e adotamos a escolha particular  $U = X$ , podemos reescrever as desigualdades (4.158–4.159) na forma

$$\begin{bmatrix} A_k X + X A_k' & A + G' + X A_k' Y + X' C_y' F' & X C_k' \\ (\star)' & A' Y + C_y' F' + Y A + F C_y & C_z' \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} W & B_w' & B_w' Y + D_{yw}' F' \\ (\star)' & X & \mathbf{I} \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0$$

em que  $A_k$  e  $C_k$  foram definidos em (5.100) e

$$G := VA_c X = Q - YAX - YB_u L - FC_y X$$

A partir das desigualdades acima, basta então definir

$$Z := X^{-1} \qquad S := GX^{-1} \qquad (5.110)$$

e multiplicar, tanto à esquerda quanto à direita, a primeira desigualdade por  $T = \text{diag}(Z, \mathbf{I}, \mathbf{I})$  e a segunda desigualdade por  $T = \text{diag}(\mathbf{I}, Z, \mathbf{I})$  para que recuperemos a estrutura em (5.101–5.103). A partir das variáveis definidas acima, as matrizes  $A_c$  e  $B_c$  do controlador passam a ser calculadas por meio da transformação biunívoca

$$[A_c \ B_c] := (Z - Y)^{-1} [S \ F] \qquad (5.111)$$

Como desejado, esta transformação não depende dos parâmetros do sistema. Portanto, a linearidade das desigualdades (5.101–5.103) em função dos elementos da matriz  $M$  nos permite concluir sobre validade do custo garantido quadrático (5.107). A prova para as desigualdades duais (5.104–5.106) é idêntica. ■

Motivados por estes resultados, poderíamos nos perguntar até que ponto o Teorema 5.11 é apenas suficiente? Se lembramos que a escolha das matrizes  $U$  e  $V$ , que se dá de maneira arbitrária, não influencia o grau de otimalidade das soluções obtidas, podemos imaginar que existe uma escolha *a posteriori* de  $U$  que, para uma matriz  $C_c$  arbitrária e fixa, torna

$$LU^{-1} = C_c \qquad (5.112)$$

Isto significa que, para todos os efeitos, podemos considerar que a matriz de saída do controlador é conhecida e assume um valor constante. Sendo assim, onde é que se encontra a suficiência do Teorema 5.11? Podemos obter esta resposta observando, justamente, a relação (5.112). Para que a matriz  $C_c$  possa assumir um determinado valor, devemos permitir que a matriz  $U$  seja escolhida *arbitrariamente*. No entanto, observando a prova do Teorema 5.11, notamos que, logo no início, impusemos a restrição  $U = X = Z^{-1}$ . Assim, somos obrigados a concluir que, para que não haja perda de generalidade, devemos manter a matriz  $U$  livre sempre que a matriz  $C_c$  for mantida fixa, e *vice-versa*. No entanto, notemos que a família de controladores parametrizados pelo Teorema 5.11 é ainda bastante abrangente, uma vez que

$$\begin{aligned} C(s) &= C_c (s\mathbf{I} - A_c)^{-1} B_c \\ &= C_c [s\mathbf{I} - (Z - Y)^{-1} S]^{-1} (Z - Y)^{-1} F \end{aligned} \qquad (5.113)$$

Assim, conjecturamos que a variação das matrizes  $S$  e  $F$  é, pelo menos em princípio, capaz de cobrir boa parte do conjunto dos controladores estabilizantes.

Uma segunda observação decorrente do Teorema 5.11 e da definição das matrizes  $A_k$  e  $C_k$ , em (5.100), é que  $C_c$  deve se comportar como um ganho de realimentação do estado quadraticamente estabilizante. Isto fica claro a partir da análise do sub-bloco

$$A'_{ki} Z + Z A_{ki} < 0 \qquad (5.114)$$

Notemos que a estabilizabilidade quadrática por realimentação do estado passa a ser uma condição necessária para obtenção de um controlador por meio do Teorema 5.11. Esta interpretação está em completa

concordância com as propriedades usuais de separação, nas quais a estabilizabilidade por realimentação do estado é também uma condição necessária para obtenção de um controlador.

Finalmente, ressaltemos a semelhança entre as desigualdades do Teorema 5.11 e as do Teorema 5.3. Notemos, inclusive, que os dois teoremas se tornam idênticos caso façamos  $C_c = \mathbf{0}$ . Isto nos ajuda a identificar o resultado do Teorema 5.11 como um problema de projeto de filtros robustos, ou melhor, de estimadores do estado robustos, uma vez que as matrizes  $A_k$  e  $C_k$  efetivamente levam em conta a realimentação por meio da entrada de controle  $u$ . Desta forma, estamos prontos para propor o seguinte procedimento de projeto de controladores robustos em dois passos.

### Algoritmo 5.1

#### 1. Dadas as desigualdades matriciais lineares

$$\begin{bmatrix} A_i X + B_{ui} L + X A_i' + L' B_{ui}' & X C_{zi}' + L' D_{zui}' \\ C_{zi} X + D_{zui} L & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.115)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B_{wi}' \\ B_{wi} & X \end{bmatrix} > 0 \quad (5.116)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.117)$$

obter o ganho robusto de realimentação do estado

$$K := LX^{-1} \quad (5.118)$$

como solução do problema de otimização

$$\min \{ \gamma : (5.115-5.117) \} \quad (5.119)$$

2. Definir  $C_c := K$  e calcular as matrizes  $A_k$  e  $C_k$  como em (5.100). Se o problema de otimização (5.108) tiver solução, então o controlador por realimentação da saída (5.113) associado ao custo garantido sub-ótimo  $\rho_2(\mathcal{M}) := \gamma$ , definido em (5.107), estabiliza quadraticamente o sistema (4.137–4.139) e garante que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 < \gamma \quad (5.120)$$

Procedimento idêntico pode ser empregado para tratar deste problema na formulação dual, obtida a partir do item ii) do Teorema 5.11. Esta formulação não será apresentada.

Parece claro que não podemos assegurar a otimalidade global deste procedimento, uma vez que a matriz  $C_c$  se encontra fixa em um determinado valor. Nem mesmo podemos garantir que o Algoritmo 5.1 provê algum resultado sempre que um controlador factível existir. No entanto, conforme demonstram os experimentos numéricos que apresentaremos mais adiante (veja Seção 5.5.3), este procedimento parece apresentar um excelente desempenho prático. Passemos então à resolução de um exemplo ilustrativo, que é de difícil solução pelas técnicas convencionais.

Situação	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$c_2$
Operação normal	1	1	1	1
Falha do atuador nº1	0	1	1	1
Falha do atuador nº2	1	0	1	1
Falha do sensor nº1	1	1	0	1
Falha do sensor nº2	1	1	1	0

Tabela 5.3: Controle seguro: possíveis falhas

**Exemplo 5.7** O problema de controle robusto resolvido neste exemplo pode ser denominado também problema de controle seguro (do inglês *reliable control*). Para o sistema definido pelas matriz

$$M := \left[ \begin{array}{c|c|c} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & \mathbf{0} & D_{zu} \\ \hline C_y & D_{yw} & \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|ccc|cc} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

desejamos encontrar um controlador por realimentação da saída que estabilize o sistema face a falhas que possam vir a ocorrer em um dos canais de medição ou de atuação. Como o sistema é instável em malha aberta, não conseguiremos manter a estabilidade caso os dois canais de atuação (ou medição) falhem simultaneamente. Os dados deste exemplo foram obtidos no artigo [128]. Neste artigo, o autor obtém controladores seguros por realimentação da saída baseados em uma condição suficiente obtida a partir da solução de equações de Riccati. Entretanto, o tipo de problema resolvido em [128] é bem mais simples, capaz de lidar apenas com uma seqüência de falhas previamente conhecida. Por exemplo, o controlador obtido em [128] que garante a estabilidade do sistema frente à falha do primeiro atuador pode não estabilizar o sistema caso o atuador a falhar seja o de número dois.

Para formular o nosso problema no contexto do controle robusto, definimos 5 vértices  $M_i$  relativos aos valores das constantes  $b$  e  $c$  dadas na Tabela 5.3. Utilizando o Algoritmo 5.1 obtemos como solução do problema (5.119) o ganho de realimentação do estado

$$C_c = K = \begin{bmatrix} -0.3689 & -0.3047 & -0.2485 & -0.2021 \\ -0.7905 & -0.6210 & -0.5462 & -0.2123 \end{bmatrix}$$

Este ganho é factível com relação ao problema de otimização (5.108), cuja solução provê o controlador robusto por realimentação da saída

$$C = \left[ \begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & \mathbf{0} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cc} -1.7215 & 0.3828 & 0.1713 & 1.3134 & 0.8110 & 0.7164 \\ 0.3804 & -0.9970 & -1.6697 & 0.3209 & 1.6293 & 1.3264 \\ 0.5605 & -1.4702 & -4.6003 & -3.8224 & 1.1669 & 0.5415 \\ -3.4150 & 0.9354 & 5.3644 & 2.2401 & -0.9406 & -0.5962 \\ \hline -0.3689 & -0.3047 & -0.2485 & -0.2021 & 0 & 0 \\ -0.7905 & -0.6210 & -0.5462 & -0.2123 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

associado ao custo sub-ótimo  $p_2(\mathcal{M}) = 25.52$ .



### 5.4.2 Algoritmo de decomposição cruzada

Iniciamos as discussões desta seção tentando “dualizar” o resultado do Teorema 5.11. A pergunta a ser respondida é: caso fixemos a matriz de entrada  $B_c$  do controlador, é possível obter as matrizes complementares  $A_c$  e  $C_c$  como no Teorema 5.11? Para respondermos a afirmativamente a esta questão definimos as matrizes

$$A_k := A + B_c C_y \quad B_k := B_w + B_c D_{yw} \quad (5.121)$$

e formulamos o próximo teorema.

**Teorema 5.12** *Considerando-se que as matrizes grafadas com índices  $i$  são as matrizes do sistema linear (4.137–4.139) calculadas nos vértices  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , se pelo menos uma das afirmações seguintes é verdadeira*

i) *Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i = W'_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A_i X + B_{ui} L + X A'_i + L' B'_{ui} & A_i Z + X A'_{ki} + L' B'_{ui} + S' & X C'_{zi} + L' D'_{zui} \\ (\star)' & A_k Z + Z A'_{ki} & Z C'_{zi} \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.122)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & B'_{wi} & B'_{ki} \\ (\star)' & X & Z \\ (\star)' & (\star)' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (5.123)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.124)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

ii) *Existem matrizes  $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W = W' \in \mathbb{R}^{q \times q}$  de tal forma que*

$$\begin{bmatrix} A_i X + B_{ui} L + X A'_i + L' B'_{ui} & A_i Z + X A'_{ki} + L' B'_{ui} + S' & B_{wi} \\ (\star)' & A_k Z + Z A'_k & B_{ki} \\ (\star)' & (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.125)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_{zi} X + D_{zui} L & Z C_{zi} \\ (\star)' & X & Z \\ (\star)' & (\star)' & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (5.126)$$

$$\text{tr}(W_i) < \gamma \quad (5.127)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ .

então existe um controlador estritamente próprio (4.140–4.141) de ordem completa ( $n_c = n$ ) para o sistema linear contínuo (4.137–4.139) de tal forma que

$$\sup_{M \in \mathcal{M}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 < \rho_2(\mathcal{M}) := \gamma \quad (5.128)$$

O controlador é dado em (5.135) e o valor mínimo sub-ótimo para o custo garantido  $\rho_2(\mathcal{M})$  pode ser calculado resolvendo-se um dos problemas de otimização convexos

$$\min \{ \gamma : (5.122-5.124) \} \quad (5.129)$$

ou

$$\min \{ \gamma : (5.125-5.127) \} \quad (5.130)$$

**Prova:** A prova deste teorema é praticamente idêntica à prova do Teorema 5.11. A diferença marcante é que impomos  $V = Y$ , definimos

$$Z := Y^{-1} \quad S := Y^{-1}G \quad (5.131)$$

e alteramos as matrizes das transformações de congruência  $T$  para que multipliquem as linhas e colunas contendo os termos em  $Y$ . A partir dessas variáveis obtemos a transformação desejada

$$\begin{bmatrix} A_c \\ C_c \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} S \\ L \end{bmatrix} (Z - X)^{-1} \quad (5.132)$$

O restante da prova permanece o mesmo. ■

De posse desta versão dual, podemos imaginar o seguinte procedimento de refinamento da solução: obtemos  $C_c$  e, em seguida, o restante do controlador (matrizes  $A_c$  e  $B_c$ ) por meio do Algoritmo 5.1. Mantendo fixa agora a matriz de entrada  $B_c$ , utilizamos o resultado do Teorema dual 5.12 e obtemos novas matrizes  $A_c$  e  $C_c$ . Estas matrizes nos permitem reiniciar o ciclo. Conceitualmente, este algoritmo deve agir de modo a refinar o controlador de saída obtido por meio do Algoritmo 5.1 até encontrar um ponto estacionário. No entanto, para que possamos enunciá-lo formalmente devemos ser capazes de responder à seguinte questão: toda matriz  $B_c$  obtida como solução de um dos problemas do Teorema 5.11 está associada a uma solução factível para os problemas do Teorema 5.12 e *vice-versa*? Se a resposta para esta questão for afirmativa, então podemos garantir que o nosso algoritmo, até agora apenas conceitualmente enunciado, é capaz de produzir uma seqüência de soluções com custo decrescente. A chave para isto está no seguinte lema.

**Lema 5.13** *Dadas matrizes factíveis para os problemas definidos no Teorema 5.11 então as matrizes*

$$\begin{pmatrix} X \\ L \\ Z \\ S \\ W \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} Z^{-1} \\ C_c Z^{-1} \\ Y^{-1} \\ Y^{-1} S Z^{-1} \\ W \end{pmatrix} \quad (5.133)$$

*são factíveis com relação aos problemas correspondentes definidos no Teorema 5.12. Reciprocamente, matrizes factíveis para os problemas definidos no Teorema 5.12 provêm as matrizes*

$$\begin{pmatrix} Y \\ F \\ Z \\ S \\ W \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} Z^{-1} \\ Z^{-1} B_c \\ X^{-1} \\ Z^{-1} S X^{-1} \\ W \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

*que são factíveis com relação aos problemas correspondentes definidos no Teorema 5.11.*

**Prova:** Estabelecemos a relação entre os Teoremas 5.11 e 5.12 mediante a inversão das transformações de variáveis (5.110–5.111) e (5.131–5.132). De certa forma, este fato já era esperado uma vez que a derivação de ambos os teoremas permite recuperar matrizes factíveis para o Teorema fundamental 4.15. ■

Antes de formular o algoritmo, percebamos que os problemas do Teorema 5.12 têm a forma dual exata das propriedades de separação discutidas na Seção 4.3.3 e que o ganho  $B_c$  se comporta com relação às matrizes (5.121) como um ganho de estimação do estado estabilizante. Outro ponto importante é que o controlador obtido a partir deste teorema toma a forma

$$\begin{aligned} C(s) &= C_c (s\mathbf{I} - A_c)^{-1} B_c \\ &= L(Z - X)^{-1} [s\mathbf{I} - S(Z - X)^{-1}]^{-1} B_c \end{aligned} \quad (5.135)$$

Finalmente, estamos prontos para enunciar o seguinte algoritmo, denominado em [56, 55, 64] de algoritmo de decomposição cruzada (do inglês *cross decomposition algorithm*). O nome é derivado da decomposição do projeto do controlador em problemas nos quais, ora a matriz de saída, ora a matriz de entrada, permanece fixa.

### Algoritmo 5.2

1. Fixar

$$C_{ck} := L_k X_k^{-1} \quad (5.136)$$

e resolver o problema de otimização convexa

$$\alpha_k := \min \{ \gamma : (5.101-5.103) \} \quad (5.137)$$

A solução ótima provê  $Y_k$  e  $F_k$  a serem utilizados no passo número 2.

2. Fixar

$$B_{ck} := Y_k^{-1} F_k \quad (5.138)$$

e resolver o problema de otimização convexa

$$\beta_k := \min \{ \gamma : (5.122-5.124) \} \quad (5.139)$$

A solução ótima provê  $X_k$  e  $L_k$  a serem utilizados no passo número 2.

3. Parar se  $\alpha_k - \beta_k < \varepsilon$ , em que  $\varepsilon > 0$  é um parâmetro que controla precisão requerida. Caso contrário, incrementar o contador  $k \leftarrow k + 1$  e voltar ao passo número 1.

Uma vez que as soluções do problema (5.137) são sempre factíveis com relação ao problema (5.139), podemos afirmar que o custo garantido  $H_2$  tem o comportamento conforme descrito no próximo corolário.

**Corolário 5.14** A seqüência gerada pelo Algoritmo 5.2 tem a seguinte propriedade

$$\beta_{k+1} \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_k \leq \alpha_k \quad (5.140)$$

Sendo o custo garantido  $H_2$  limitado inferiormente, este algoritmo converge para um ponto estacionário.

Infelizmente, não podemos adiantar a natureza deste ponto de acumulação sem uma análise mais profunda da solução. Isto ocorre devido ao caráter coordenado do algoritmo. No entanto, notemos que o número de variáveis a serem otimizadas em cada passo do algoritmo é muito superior ao número de variáveis mantidas fixas. Ainda por cima, as matrizes associadas à partição da matriz de Lyapunov e sua inversa permanecem sempre disponíveis para otimização<sup>5</sup>. Estes fatos nos fazem crer que a qualidade dos controladores obtidos por meio deste algoritmo possa ser muito boa. Investigaremos isto mais adiante, na Seção 5.5.3.

Um ponto que foi deixado de lado, até o momento, é a questão da inicialização do Algoritmo 5.2. Uma opção que nos parece adequada é a inicialização por meio do primeiro passo do Algoritmo 5.1. Em outras palavras, um ganho robusto de realimentação do estado pode, em muitas ocasiões, prover um excelente ponto de inicialização para o Algoritmo 5.2. De fato, notemos que o Algoritmo 5.1 pode ser interpretado como o primeiro passo do Algoritmo 5.2, precedido de uma inicialização particular. O comportamento deste tipo de inicialização será investigado na Seção 5.5.3. Nas poucas ocasiões em que o procedimento de inicialização via ganho robusto de realimentação do estado falhar, podemos lançar mão das seguintes desigualdades

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L' B_u' - \lambda X & A + XA'Y - L' B_u' Y - X C_y' F' + G' \\ (\star)' & A'Y + C_y' F' + YA + F C_y - \lambda Y \end{bmatrix} < 0 \quad (5.141)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.142)$$

Utilizando as mesmas transformações que deram origem aos Teoremas 5.11 e 5.12 podemos obter uma versão do Algoritmo 5.2 capaz de lidar com o problema de inicialização

$$\min \{ \lambda : (5.141-5.142) \} \quad (5.143)$$

Neste caso, os problemas a serem resolvidos nos passos número 1 e número 2 do Algoritmo 5.2 tornam-se problemas de minimização do máximo autovalor generalizado. Este tipo de problema é *quase-convexo* e sua solução ótima global também pode ser obtida por algoritmos de pontos interiores [103, 46]. O cálculo de uma solução factível para este problema é uma tarefa trivial, e o algoritmo fornecerá um controlador factível com relação aos problemas originais assim que  $\lambda$  se tornar negativo. Infelizmente, não podemos, novamente, garantir que, sempre que houver um valor de  $\lambda$  negativo que satisfaça as desigualdades matriciais não lineares (5.141-5.142), o Algoritmo 5.2 será capaz de encontrar um controlador factível.

**Exemplo 5.8** Neste exemplo, continuamos a resolver o problema formulado no Exemplo 5.7. A partir da solução factível já obtida, aplicamos o Algoritmo 5.2. Para um valor de  $\epsilon = 10^{-2}$ , este algoritmo converge em duas iterações completas, gerando a seqüência de custos decrescentes

$$\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=0}^{k=1} = \{(22.44, 22.19), (22.17, 22.17)\}$$

Como resultado da última iteração obtemos o controlador

$$C = \begin{bmatrix} -3.3282 & 0.6447 & 0.6158 & 0.6975 & 0.7464 & 0.7016 \\ 0.6442 & -0.7692 & -1.1843 & 0.9895 & 1.4878 & 1.2682 \\ -1.9450 & -0.3844 & -2.6294 & -3.3567 & 1.1096 & 0.5167 \\ -1.7074 & -0.5696 & 2.4209 & -0.1353 & -0.9238 & -0.5840 \\ \hline -0.4535 & -0.3262 & -0.4103 & -0.4374 & 0 & 0 \\ -1.0051 & -0.5547 & -0.4451 & -0.3723 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<sup>5</sup>Embora às vezes travestidas na matriz  $Z$ .

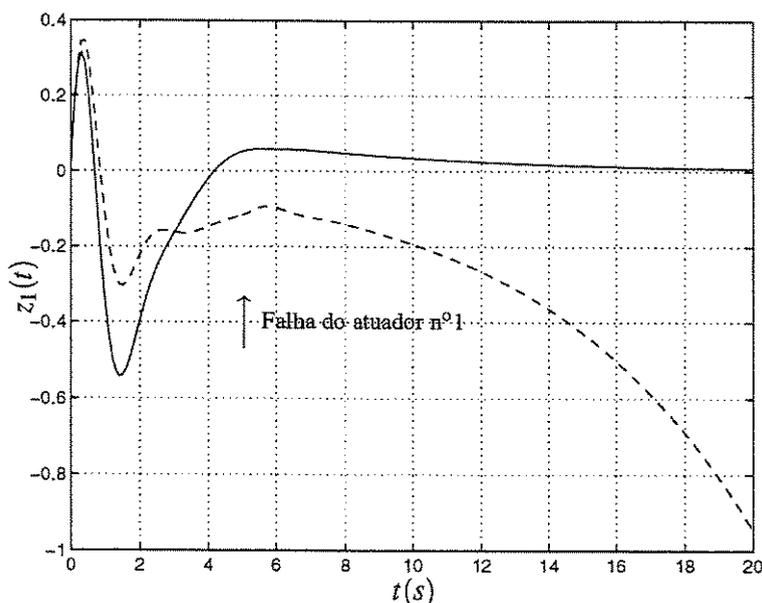


Figura 5.5: Controle seguro: simulação com falha de atuadores

Podemos verificar que este controlador é estável face a todas as falhas listadas na Tabela 5.3. Para ilustrar este fato, calculamos, para o sistema em regime normal de operação, o controlador ótimo  $H_2$  e submetemos os dois controladores à seguinte situação. Aplicamos um impulso unitário ao primeiro canal de perturbação ( $w_1$ ) e medimos a primeira saída controlada ( $z_1$ ). No instante  $t = 5s$  provocamos a quebra do atuador número 1. A simulação está na Figura 5.5. Na ocorrência da falha, o controlador ótimo  $H_2$  (linha tracejada) torna-se incapaz de estabilizar o sistema em malha fechada, enquanto o controlador robusto (linha cheia) mantém o sistema estável, sem alterar significativamente seu desempenho. ♦

## 5.5 Controle e filtragem descentralizados

O conceito de descentralização é de fundamental importância na área de análise e controle de sistemas, especialmente de sistemas de grande porte [120]. Esta área de estudo teve grande desenvolvimento nos anos setenta e início dos anos oitenta [98, 115, 90, 54, 22], quando uma série de resultados baseados em condições suficientes de análise e projeto de controladores veio a público. O procedimento geral que permeava estes métodos baseia-se na construção de funções de Lyapunov locais para os diversos subsistemas isolados que, posteriormente, são analisados na presença das interconexões. A partir deste ponto, condições suficientes de estabilidade podem ser obtidas impondo-se limites para a função de Lyapunov para todo o sistema interconectado. Este tipo de abordagem, mais adequado para a análise de sistemas de grande porte, produz procedimentos de projeto de controladores de limitada eficácia, devido ao alto grau de suficiência embutido nos procedimentos [90]. Mais tarde, obteve-se uma solução para o problema de controle descentralizado para sistemas sujeitos a realimentação do estado [59]. As condições introduzidas neste artigo são necessárias e suficientes para o projeto de controladores descentralizados na presença de matrizes de Lyapunov com estrutura bloco-diagonal. Esta estrutura implica que a estabilidade é garantida para cada subsistema, individualmente. Considerando o problema genérico de controle descentralizado, esta restrição estrutural sobre a matriz de Lyapunov constitui um fator de perda de desempenho. No artigo [25], mostramos que as condições de estabilidade estendida para sistemas discretos, discutidas na

Seção 3.2, podem contribuir para aliviar esta hipótese restritiva que ainda paira sobre o projeto de controladores descentralizados por realimentação do estado.

No que diz respeito ao problema de filtragem descentralizada, mais uma vez, a impossibilidade de se adotar uma estrutura do tipo observador de Luenberger (cuja dinâmica não provê descentralização) adiou o surgimento de soluções para este problema. Foi apenas nos artigos [57, 60] que pudemos resolvê-lo.

Tal como no problema de controle robusto, o sucesso na obtenção de métodos de projeto de controladores por realimentação do estado e de de filtros, não se reflete no projeto de controladores descentralizados por realimentação da saída. Não se conhece, ainda, nenhuma condição necessária e suficiente expressas na forma de desigualdades matriciais lineares para este problema. No entanto, mostramos nos artigos [55, 28] que os Algoritmos 5.1 e 5.2, com ligeiras modificações, podem ser utilizados com sucesso no projeto de controladores descentralizados.

### 5.5.1 Controle descentralizado por realimentação do estado

Consideremos que a o sistema (4.2–4.3) possui uma matriz de entrada do controle  $B_u$  que se encontra estruturada na forma bloco-diagonal com  $N$  blocos. Esta estrutura implica que a ação de controle correspondente a cada um destes blocos age diretamente em apenas um subconjunto do vetor de estado. Entendemos por uma lei descentralizada de controle por realimentação do estado, a injeção no sistema, por meio de cada um dos blocos de  $B_u$ , de informação proveniente apenas do subconjunto do vetor de estado a que este bloco se refere. Deste modo, basta medir localmente este subconjunto do vetor de estado para que possamos obter uma lei de controle local; nenhuma informação sobre os demais estados do sistema é necessária, daí descentralização.

O resultado fundamental no projeto de controladores descentralizados por realimentação do estado para sistemas contínuos foi formulado em [59]. Apesar de importante, seu conteúdo pode ser compreendido de maneira bastante simples. Se supusermos uma lei de controle como em (4.4), esta lei será descentralizada se a matriz de ganho  $K$  apresentar a mesma estrutura em blocos presente na matriz  $B_u$ . Desejamos, portanto, obter uma matriz de ganho com a seguinte estrutura

$$K = \text{diag}(K_1, \dots, K_N) \quad (5.144)$$

Segundo a mudança de variável (4.13), obtemos esta estrutura impondo às variáveis de otimização  $X$  e  $L$  as restrições estruturais

$$L = \text{diag}(L_1, \dots, L_N) \quad X = \text{diag}(X_1, \dots, X_N) \quad (5.145)$$

Como a inversa de uma matriz bloco-diagonal é também bloco-diagonal, tornamos o produto (4.13) capaz de gerar uma lei de controle descentralizada. Conforme citado na introdução desta seção, e segundo [59], devemos ressaltar que ao impor uma estrutura bloco-diagonal à matriz  $X$ , estamos, na realidade, impondo uma estrutura bloco-diagonal à matriz de Lyapunov do sistema. Isto significa que a estabilidade em malha fechada está assegurada distintamente para cada subsistema. Considerando o projeto de controladores para sistemas contínuos, podemos resumir estes fatos no seguinte teorema.

**Teorema 5.15** *Os métodos de projeto de controladores por realimentação do estado (4.4) para sistemas contínuos (4.2–4.3) baseados nos resultados dos Teoremas 4.2, 4.3 e 4.4 produzem controladores descentralizados mediante o acréscimo das restrições lineares (5.145) às desigualdades presentes. Este resultado assegura estabilidade distintamente a cada subsistema, devido à estrutura bloco-diagonal da matriz de Lyapunov.*

Passando à análise do problema de realimentação do estado para sistemas discretos, notemos que a condição de descentralização (5.145) restringe-se apenas à matriz  $X$ . Deste modo, utilizando as condições estendidas, nas quais há um desacoplamento entre a matriz de Lyapunov e a matriz  $X$ , podemos impor uma estrutura descentralizada ao controle sem que seja necessário utilizar uma matriz de Lyapunov bloco-diagonal. Como restrições estruturais sobre as matrizes de Lyapunov

$$P = \text{diag}(P_1, \dots, P_N) \quad E = \text{diag}(E_1, \dots, E_N) \quad (5.146)$$

são lineares, basta acrescentá-la às desigualdades existentes, se necessário for.

**Teorema 5.16** *Os métodos de projeto de controladores por realimentação do estado (4.4) para sistemas discretos (4.2–4.3) baseados nos resultados dos Teoremas 4.5 e 4.6 produzem controladores descentralizados mediante o acréscimo das restrições lineares (5.145) às desigualdades presentes. Caso desejemos impor uma estrutura bloco-diagonal à matriz de Lyapunov, basta acrescentar as restrições lineares (5.146).*

Os métodos baseados neste teorema são mais abrangentes que os do Teorema 5.15. No entanto, devemos nos lembrar de que essas condições são, mais uma vez, apenas suficientes para o projeto de controladores descentralizados. De fato, segundo os resultados em análise da Seção 3.2, não temos como garantir que todo sistema descentralizado possui uma matriz  $G$  com estrutura bloco-diagonal.

Por fim, notemos que as restrições (5.145) nos permitem obter soluções descentralizadas mesmo para problemas de controle robusto, como os da Seção 5.3. Destacamos que, mesmo nos problemas de descentralização puros, os custos devem ser interpretados como custos garantidos, uma vez que o custo real será sempre inferior aos obtidos pelos Teoremas 5.15 e 5.16. Isto decorre diretamente do caráter suficiente das restrições (5.145).

**Exemplo 5.9** Utilizamos neste exemplo os mesmos dados do Exemplo 5.6. Para efeito de simplificação, consideramos apenas o projeto de controladores descentralizados para o sistema nominal ( $\gamma = 0$  e  $a_{34}$  e  $b_{21}$  situados no meio dos intervalos de variação paramétrica). Desejamos obter controladores descentralizados por realimentação do estado que minimizem o custo garantido  $H_2$ . Aplicando o Teorema 5.16 obtemos um controlador descentralizado associado ao custo garantido  $p_P = 245.7694$ . Para obtermos uma matriz de Lyapunov com estrutura bloco-diagonal acrescentamos as restrições lineares (5.146), o que eleva o custo garantido para  $p_Q = 260.9474$ . ♦

Antes de passarmos à próxima seção, ressaltamos que a caracterização estendida (Seção 3.2) pode prover soluções atraentes a diversos outros problemas de controle por realimentação do estado com restrições de natureza estrutural. Por exemplo, podemos obter condições lineares que produzam controladores com estrutura de realimentação estática da saída [67, 30, 68]. Este resultado pode ser encontrado em [25].

### 5.5.2 Filtragem descentralizada

O problema de filtragem descentralizada pode ser encarado como dual ao problema de controle descentralizado por realimentação do estado. Obtemos filtros com estrutura descentralizada analisando a transformação de variáveis (4.83). Uma condição suficiente para obtenção de filtros descentralizados é que as matrizes

$$Q = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_N) \quad F = \text{diag}(F_1, \dots, F_N) \quad (5.147)$$

$$L = \text{diag}(L_1, \dots, L_N) \quad R = \text{diag}(R_1, \dots, R_N) \quad (5.148)$$

e

$$V = \text{diag}(V_1, \dots, V_N) \quad Z^{-T}U^{-1} = \text{diag}(\Xi_1, \dots, \Xi_N) \quad (5.149)$$

possuam estruturas bloco-diagonais. As condições (5.147–5.148) se traduzem diretamente em restrições lineares sobre as variáveis de otimização, porém, as condições (5.149) devem ser obtidas *a posteriori*, uma vez que as matrizes  $U$  e  $V$  não são variáveis de otimização.

Analisemos, primeiramente, o que ocorre no projeto de filtros contínuos. Neste caso, a matriz  $Z$  é simétrica e as matrizes  $U$  e  $V$  devem ser escolhidas de modo a satisfazer

$$VU = I - YZ^{-1} \quad (5.150)$$

Para que possamos determinar matrizes com a estrutura ditada em (5.149), basta impor

$$Y = \text{diag}(Y_1, \dots, Y_N) \quad Z = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_N) \quad (5.151)$$

Deste modo, poderemos sempre calcular matrizes  $U$  e  $V$  com estruturas bloco-diagonais e, conseqüentemente, satisfazer a restrição (5.149). Este resultado está no próximo teorema.

**Teorema 5.17** *Os métodos de projeto de filtros (4.65–4.66) para sistemas contínuos (4.62–4.64) baseados nos resultados dos Teoremas 4.8 e 4.10 produzem filtros descentralizados mediante o acréscimo das restrições lineares (5.147–5.148) e (5.151) às desigualdades presentes.*

Para o problema de filtragem descentralizada de sistemas discretos a análise é semelhante. De fato, a diferença fundamental é que a equação de determinação das matrizes  $U$  e  $V$  passa a ser

$$VU = SZ^{-T} \quad (5.152)$$

e a estrutura bloco-diagonal (5.149) pode ser obtida por meio das restrições lineares

$$S = \text{diag}(S_1, \dots, S_N) \quad Z = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_N) \quad (5.153)$$

Este é o resultado do próximo teorema.

**Teorema 5.18** *Os métodos de projeto de filtros (4.65–4.66) para sistemas discretos (4.62–4.64) baseados nos resultados dos Teoremas 4.11 e 4.13 produzem filtros descentralizados mediante o acréscimo das restrições lineares (5.147–5.148) e (5.153) às desigualdades presentes.*

É importante notarmos que a matriz  $Y$  não está sujeita a nenhum tipo de restrição. Como no problema por realimentação do estado, as matrizes derivadas da matriz de Lyapunov ( $E$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $P$ ,  $J$  e  $K$ ) também permanecem sem restrições.

### 5.5.3 Controle descentralizado por realimentação da saída

Voltemos a nossa atenção ao problema de controle descentralizado por realimentação da saída. Mais uma vez, a dificuldade de obtenção de uma parametrização convexa para este problema é a dependência da transformação de variáveis (4.156) com relação às matrizes do sistema. Este fato, que fica claro em (4.168), nos impede de obter uma estrutura descentralizada a partir de condições lineares sobre as matrizes de otimização. O maior entrave é o cálculo de uma matriz dinâmica  $A_c$  com estrutura bloco-diagonal. Percebamos que a identidade

$$VA_cU = Q - Y(A - B_uRC_y)X - YB_uL - FC_yX \quad (5.154)$$

difícilmente será obedecida caso as matrizes  $Q$  e  $A_c$  possuam estruturas bloco-diagonais<sup>6</sup>. A estratégia escolhida para abordar este problema é a mesma utilizada para obtenção dos controladores robustos da Seção 5.4: consideramos apenas controladores estritamente próprios e incorporamos os termos não-lineares provenientes de (5.154) às desigualdades matriciais lineares. A utilização dos procedimentos daquela seção para obtenção de controladores descentralizados é imediata, bastando que atentemos para a estrutura das transformações (5.111) e (5.132). Supondo que a matriz  $C_c$  (ou  $B_c$ ) a ser fixada já possui uma estrutura bloco diagonal, obtemos um controlador descentralizado por meio dos Teorema 5.11 e 5.12 introduzindo as restrições lineares

$$Z = \text{diag}(Z_1, \dots, Z_N) \quad S = \text{diag}(S_1, \dots, S_N) \quad (5.155)$$

aliadas, conforme o caso, ao conjuntos de restrições

$$Y = \text{diag}(Y_1, \dots, Y_N) \quad F = \text{diag}(F_1, \dots, F_N) \quad (5.156)$$

ou

$$X = \text{diag}(X_1, \dots, X_N) \quad L = \text{diag}(L_1, \dots, L_N) \quad (5.157)$$

Podemos resumir esta discussão no seguinte teorema.

**Teorema 5.19** *Os métodos de projeto de controladores estritamente próprios (4.65–4.66) para sistemas contínuos (4.62–4.64) baseados nos resultados dos Teoremas 5.11 e 5.12 produzem controladores descentralizados mediante o acréscimo das restrições lineares (5.155–5.157) às desigualdades presentes.*

Desta forma, podemos projetar controladores descentralizados utilizando os Algoritmos 5.1 e 5.2. A única particularidade encontra-se no passo 1 do Algoritmo 5.1, que deve ser modificado de acordo com as discussões da Seção 5.5.1 a fim de prover um ganho de inicialização descentralizado. Notemos que, mesmo neste caso, persiste a interpretação deste procedimento como um projeto por separação, no qual a existência de um controlador descentralizado por realimentação do estado consiste em uma condição necessária para obtenção do controlador descentralizado por realimentação da saída.

Encerramos esta seção apresentando uma análise do desempenho dos Algoritmos 5.1 e 5.2. Os testes são baseados na geração aleatória de sistemas lineares. Para que possamos avaliar corretamente os resultados destes ensaio devemos ser capazes de gerar sistemas instáveis em malha aberta que, com certeza, possam ser estabilizados por pelo menos um controlador por realimentação da saída que seja descentralizado e estritamente próprio. Por lidarmos com sistemas contínuos, exigimos também que o teste de estabilidade seja realizado com uma matriz de Lyapunov bloco-diagonal. Geramos sistemas com estas características seguindo os passos:

1. Gerar aleatoriamente as matrizes  $A$ ,  $B_u$ ,  $C_y$  e as matrizes com estrutura bloco-diagonal  $C_c$  e  $B_c$ . Os componentes destas matrizes devem ser obtidos por meio de um gerador de números aleatórios cuja distribuição da sequência gerada se aproxime da distribuição Gaussiana com média nula e variância unitária
2. Determinar o menor valor de  $\lambda = \lambda^*$  que torna os autovalores das matrizes

$$A - \lambda I + B_u C_c \quad A - \lambda I + B_c C_y \quad (5.158)$$

menores do que  $-0.1$ , isto é, que assegura grau de estabilidade igual a  $0.1$ .

<sup>6</sup>Com exceção do caso particular em que a matriz  $A$  apresenta um estrutura bloco-diagonal, o que reduz este problema ao projeto de  $N$  controladores para  $N$  sistemas lineares sem interconexões.

Legenda	Número de subsistemas	Dimensões					
		Subsistemas			Total		
		$n_i$	$m_i$	$p_i$	$n$	$m$	$p$
I	4	2	1	1	8	4	4
II	3	2	1	1	6	3	3
III	3	3	1	1	9	3	3
IV	3	3	1	2	9	3	6

Tabela 5.4: Ensaio numérico: dimensão dos sistemas gerados aleatoriamente

Legenda	I	II	III	IV	Total
Número de sistemas	1000	1000	1000	1000	4000 (100.0%)
Sucesso	973	965	968	993	3899 (97.5%)

Tabela 5.5: Ensaio numérico I (estabilidade): sucesso do Algoritmo 5.1

3. Descartar este conjunto de matrizes se a matriz  $(A - \lambda^*I)$  for estável. Caso contrário, redefinir

$$A \leftarrow A - \lambda^*I \quad (5.159)$$

4. Verificar, via Teorema 5.19, se existe um controlador descentralizado por realimentação da saída com  $C_c$  fixo ou  $B_c$  fixo que estabiliza o sistema em malha fechada. Em caso afirmativo, armazenar este conjunto de matrizes, caso contrário, descartá-lo.

Este procedimento de geração aleatória merece alguns comentários. Em primeiro lugar, selecionamos apenas sistemas instáveis em malha aberta. Em segundo lugar, temos certeza de que a estabilidade em malha fechada é do tipo desejado, pois utilizamos neste teste o Teorema 5.19. Embora seja possível argumentar que o uso deste teorema como instrumento de seleção dos sistemas estabilizáveis poderia eliminar parte dos sistemas estabilizáveis, acreditamos que a classe de controladores levada em consideração é extensa o suficiente para fins de seleção. Tomamos em conta que o bom desempenho apresentado por este procedimento de geração e seleção é um bom indicador de que esta hipótese pode estar correta. Além do mais, como as matrizes  $B_c$  e  $C_c$  foram geradas aleatoriamente e não são utilizadas hora alguma para efeito de inicialização dos algoritmos utilizados nos testes, acreditamos que este procedimento de geração seja adequado<sup>7</sup>.

Para cada dimensão mostrada na Tabela 5.4, geramos mil sistemas segundo este procedimento.

**Exemplo 5.10** O primeiro ensaio visa avaliar o desempenho combinado dos Algoritmos 5.1 e 5.2. Inicialmente, para cada um dos sistema gerados aleatoriamente, determinamos um controlador descentralizado por realimentação do estado segundo o passo 1 do Algoritmo 5.1 e avaliamos o sucesso do uso desta inicialização para o problema do passo 2. O resultado está apresentado na Tabela 5.5, onde vemos que foi possível obter um controlador por realimentação da saída a partir de um ganho de realimentação do estado estabilizante para mais de 97% dos sistemas testados.

<sup>7</sup>Afinal de contas, temos pouca condição de avaliar se o fato de uma certa matriz  $B_c$  (ou  $C_c$ ) ter provido um controlador estabilizante para um problema baseado no Teorema 5.19 implica, de algum modo, na potencial obtenção de controladores estabilizantes a partir de matrizes diferentes.

Legenda	I	II	III	IV	Total
Número de sistemas	27	35	32	7	101 (100.0%)
Sucesso	26	35	31	7	99 (98.0%)
Média do número de iterações	1.08	1.26	1.06	1.00	1.13

Tabela 5.6: Ensaio numérico I (estabilidade): sucesso do Algoritmo 5.2

Legenda	I	II	III	IV	Total
Número de sistemas	1000	1000	1000	1000	4000 (100.0%)
Sucesso	999	1000	999	1000	3998 (100.0%)

Tabela 5.7: Ensaio numérico I (estabilidade): sucesso dos Algoritmos 5.1 e 5.2 combinados

A todos os sistemas para os quais não pudemos obter um controlador de saída nesta primeira etapa, aplicamos o Algoritmo 5.2, redefinido para o problema de inicialização (5.143). Os resultados obtidos estão na Tabela 5.6, que mostra que apenas dois dos problemas ficaram sem solução. Um fato importante é a baixíssima média do número de iterações requerida para obtenção das soluções factíveis, que se encontra por volta de 1.1. Combinando os resultados destes dois procedimentos obtemos a Tabela 5.7. Os resultados são animadores.

Passada esta fase de inicialização, utilizamos o Algoritmo 5.2 a fim de minimizar o custo garantido  $H_2$ . O valor do critério de parada utilizado foi  $\epsilon = 0.01$ . Como não temos conhecimento dos valores ótimos globais, analisamos o desempenho deste procedimento avaliando a melhoria obtida em termos do custo garantido do controlador final, com relação ao custo garantido associado à solução inicial factível. Os dados estão na Tabela 5.8, que aponta uma melhoria de aproximadamente 23%. Notemos que, mesmo sendo a grande maioria das inicializações provenientes do ganho de estado ótimo via Algoritmo 5.1, o Algoritmo 5.2 contribui, efetivamente, para a melhoria do custo. Observemos também que o número de iterações subiu um pouco com relação ao problema de inicialização. A razão para isto é que, no problema de inicialização, não é necessário atingir um ponto estacionário para que tenhamos uma solução factível. Assim que o valor de  $\lambda$  torna-se negativo interrompemos o algoritmo. ♦

**Exemplo 5.11** No primeiro ensaio (Exemplo 5.10), apresentamos um procedimento combinado que utiliza os Algoritmos 5.1 e 5.2 em fases distintas. Este segundo experimento visa analisar, isoladamente, o desempenho do Algoritmo 5.2. Uma das finalidades é avaliar o grau de importância da inicialização provida pelo Algoritmo 5.1 no bom desempenho do Exemplo 5.10. Para tal, tomamos apenas os cem primeiros sistemas gerados aleatoriamente para cada dimensão mostrada na Tabela 5.4 e, a partir de dez

Legenda	I	II	III	IV	Total
Melhoria no desempenho (%)	27.2	23.2	23.3	20.6	23.6
Média do número de iterações	2.59	2.50	2.46	2.36	2.48

Tabela 5.8: Ensaio numérico I (custo garantido  $H_2$ ): melhoria obtida com o uso do Algoritmo 5.2

Legenda	I	II	III	IV	Total
Número de inicializações	1000	1000	1000	1000	4000 (100.0%)
Sucesso	996	982	998	1000	3976 (99.4%)
Média do número de iterações	1.36	1.30	1.41	1.32	1.35

Tabela 5.9: Ensaio numérico II (estabilidade)

Legenda	I	II	III	IV	Total
Número de inicializações	996	982	998	1000	3976
Melhoria no desempenho (%)	28.4	28.7	28.5	37.3	30.7
Média do número de iterações	2.77	2.82	2.84	2.75	2.80

Tabela 5.10: Ensaio numérico II (custo garantido  $H_2$ )

pontos iniciais diferentes<sup>8</sup>, tentamos obter soluções factíveis aplicando o Algoritmo 5.2 ao problema de inicialização (5.143). Os resultados estão mostrados na Tabela 5.9. Notemos que, com relação à Tabela 5.6, a eficiência do procedimento se manteve praticamente a mesma, porém houve um pequeno aumento na média do número de iterações.

Como no Exemplo 5.10, utilizamos o Algoritmo 5.2 para minimizar o custo garantido  $H_2$ . A fim de verificar a dispersão da solução ótima, todas as soluções factíveis obtidas na primeira fase foram utilizadas como pontos iniciais. O resultado está na Tabela 5.10. Notamos nesta tabela que, com relação à Tabela 5.8, houve um pequeno aumento da média do número de iterações. Paralelamente, o valor percentual da melhoria também aumentou. Isto pode indicar que, até mesmo do ponto de vista da otimalidade, a inicialização baseada no ganho de realimentação do estado ótimo pode ser uma boa escolha. Um dado importante que não se encontra nas tabelas é o da distribuição das soluções ótimas obtidas. Para cada grupo de soluções de um mesmo sistema, normalizamos o custo das soluções obtidas com relação à menor solução dentro deste grupo. Feito isto, avaliamos que 84% das soluções se encontram em um mesmo ótimo local, segundo a precisão estabelecida ( $\varepsilon = 0.01$ ). ♦

## 5.6 Controle com múltiplos objetivos

Quanto mais próximo ao mundo real estiver um sistema de controle, maior o número de objetivos, em geral conflitantes, que devem ser administrados pelo engenheiro de controle. Neste sentido, é de interesse desenvolver métodos de projeto que sejam capazes de lidar com estes diversos objetivos a um só tempo. No contexto de otimização convexa [15], podemos formular problemas de controle com diversos objetivos de uma maneira bastante elegante. No entanto, a solução destes problemas envolve, em geral, a solução de problemas de otimização que, embora convexos, possuem dimensão infinita; os controladores obtidos como solução destes problemas também possuem dimensões infinitas. O pior é que, se introduzimos nestes problemas uma restrição sobre a dimensão dos controladores, perdemos a propriedade fundamental da convexidade. Por estas razões, diversos autores vêm tentando adaptar as formulações de problemas de controle baseados nas desigualdades matriciais lineares para este fim. As vantagens são a ordem fixa dos controladores e a existência de eficientes métodos numéricos para obtenção das soluções.

<sup>8</sup>Nove gerados aleatoriamente mais todas as matrizes iguais a zero.

Embora as desigualdades matriciais lineares sejam uma ferramenta adequada para a análise de robustez e desempenho de sistemas lineares em diversos contextos [16], a parametrização dos controladores envolve transformações de variáveis que dificultam o projeto de controladores com múltiplos objetivos. A maioria das propriedades cujos testes podem ser convertidos em desigualdades matriciais lineares envolvem a presença de uma matriz simétrica derivada de uma função de Lyapunov. Por outro lado, a maior parte das parametrizações de controladores (veja Capítulo 4) dependem diretamente desta matriz, o que torna bastante complexa a tarefa de obter um único controlador que satisfaça diversas restrições. Para contornar esta situação, diversos autores lançam mão do projeto baseado no LSP (do inglês *Lyapunov Shaping Paradigm*) [117].

Antes de entrarmos em detalhes sobre o projeto LSP, definamos o problema a ser tratado nesta seção, cujo interesse principal é o projeto de controladores por realimentação da saída para sistemas discretos. Diversas restrições comuns aos sistemas de controle podem ser formuladas como restrições em norma  $H_2$  e  $H_\infty$ , definidas com respeito a matrizes de transferência na forma

$$H_{w_i z_i}(\zeta) := L_i H_{wz}(\zeta) R_i \quad (5.160)$$

Nesta expressão, as matrizes  $L_i$  e  $R_i$  são matrizes reais que têm o papel de selecionar conjuntos de entradas e saídas a partir de uma única matriz de transferência  $H_{wz}(\zeta)$ . Se consideramos que esta matriz  $H_{wz}(\zeta)$  corresponde ao sistemas na forma de estado (4.137–4.139), podemos obter uma realização no espaço de estado para cada uma das matrizes de transferência  $H_{w_i z_i}(\zeta)$  substituindo as matrizes  $B_w$ ,  $C_z$ ,  $D_{yw}$ ,  $D_{zu}$  e  $D_{zw}$  em (4.137–4.139) por

$$(B_w)_i := B_w R_i \quad (C_z)_i := L_i C_z \quad (5.161)$$

$$(D_{yw})_i := D_{zu} R_i \quad (D_{zu})_i := L_i D_{zu} \quad (D_{zw})_i := L_i D_{zw} R_i \quad (5.162)$$

Estas operações definem também os pares de sinais

$$w_i := R_i w \quad z_i := L_i z \quad (5.163)$$

Segundo as definições das normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , apresentadas nos Capítulos 2 e 3, as desigualdades matriciais envolvidas num projeto que leve em conta restrições nestas normas sobre  $N$  matrizes de transferência como as definidas acima, possuem dois tipos de variáveis:

- Os parâmetros do controlador.
- As matrizes instrumentais  $G_i$ ,  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Utilizando os resultados do Capítulo 4, podemos linearizar individualmente cada uma destas  $N$  restrições por meio de transformações de variáveis. Segundo a formulação usual, na qual as condições de análise não possuem a matriz adicional  $G$ , essas transformações linearizantes são obtidas diretamente em função da matriz de Lyapunov  $P$ . Assim, no contexto do LSP [117], devemos impor

$$P_i = P, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.164)$$

que tem a finalidade de assegurar a unicidade do controlador em todas as restrições. Sem dúvida alguma, esta restrição acaba introduzindo um severo grau de suficiência nos resultados, o que acaba por limitar o seu uso. Porém, se comparada a outras técnicas como, por exemplo, as baseadas na solução de equações de Riccati, esta técnica se revela útil. Os trabalhos [117, 87, 116] são exemplos da utilização deste conceito.

Com a introdução das condições estendidas, obtidas no Capítulo 3, e das correspondentes parametrizações para controladores, obtidas no Capítulo 4, baseadas na matriz adicional  $G$ , podemos aliviar as restrições presentes no projeto LSP adotando

$$G_i = G, i = 1, \dots, N \quad (5.165)$$

Esta estratégia foi chamada em [32] de GSP (do inglês *G Shaping Paradigm*). Notemos que, com esta nova restrição, mantemos livres as  $N$  matrizes de Lyapunov do sistema. Além disto, percebamos que o LSP constitui um caso particular do GSP. Isto significa que, com o projeto GSP, somos capazes de obter soluções que antes se mostravam fora de alcance do projeto LSP.

Segundo as parametrizações desenvolvidas na Seção 4.3.2, a restrição de unicidade do controlador (5.165) torna-se

$$Q_i = Q \quad F_i = F \quad L_i = L \quad R_i = R \quad (5.166)$$

$$X_i = X \quad Y_i = Y \quad S_i = S \quad (5.167)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ . Neste contexto, podemos estabelecer a relação entre o GSP e o LSP observando que a restrição fundamental do LSP (5.164) se traduz como

$$X_i = X_i' = E_i = P_i = X \quad Y_i = Y_i' = H_i = M_i = Y \quad (5.168)$$

$$G_i = G_i' = I \quad S_i = S_i' = I \quad (5.169)$$

para todo  $i = 1, \dots, N$ . Importantes graus de liberdade que podem ser explorados pelo GSP perdem-se em meio às restrições do LSP (5.168–5.169). Neste aspecto, vale a pena tecermos uma observação acerca do comportamento destes dois modelos. No projeto LSP, a introdução de uma restrição adicional deve ser satisfeita por um número constante de variáveis. Assim, os graus de liberdade a serem explorados na busca de um controlador estabilizante tendem a se esgotar rapidamente à medida em que o número de restrições aumenta. No projeto GSP, cada nova restrição introduzida no problema de otimização traz consigo as variáveis correspondentes à sua matriz de Lyapunov. Assim, em certo sentido, podemos afirmar que o número de graus de liberdade não tende a se esgotar, a não ser, obviamente, pelo esgotamento da capacidade do controlador em satisfazer as novas restrições. Uma última observação é que, tanto no projeto GSP quanto no projeto LSP, os custos preditos no problemas de projeto fornecem apenas limites superiores, ou seja, custos garantidos. Estas características estão presentes nos próximos dois exemplos, obtidos em [32]. Cabe notar que o problema clássico misto  $H_2/H_\infty$  [8, 87, 116] pode ser tratado, como será ilustrado no próximo exemplo, pela metodologia aqui proposta [32].

**Exemplo 5.12** Com relação ao sistema instável em malha aberta

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$z_1(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$z_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + w(k)$$

definimos as restrições

$$\|H_{wz_1}(\zeta)\|_2 < \alpha$$

$$\|H_{wz_2}(\zeta)\|_\infty < \gamma$$

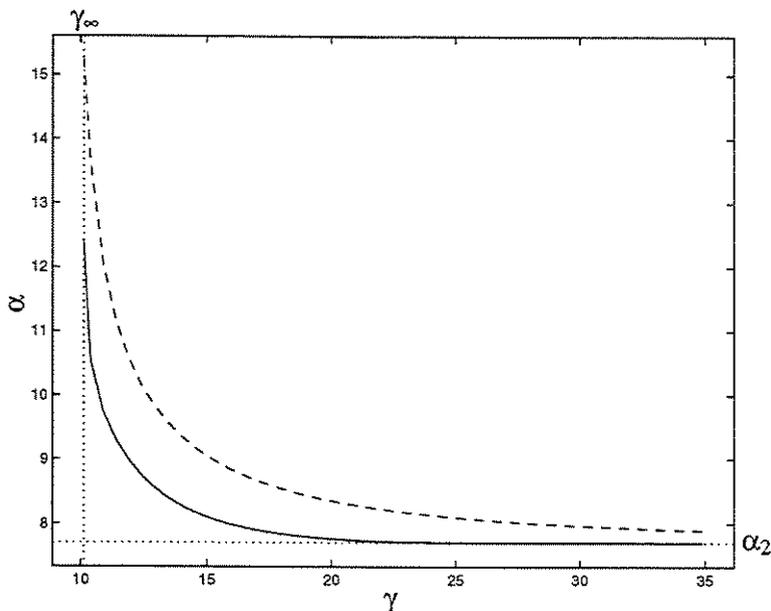


Figura 5.6: Controle misto  $H_2/H_\infty$ : custo garantido  $H_2$

Desejamos obter um controlador por realimentação da saída estritamente próprio (4.140–4.141) que minimize o valor de  $\alpha$  e, ao mesmo tempo, assegure um certo nível de robustez  $\gamma$ . Para servir de referência, calculamos o controlador ótimo  $H_\infty$  associado aos valores

$$\gamma_\infty := 10.13 \qquad \alpha_\infty := 9.45$$

Calculamos também o controlador ótimo  $H_2$  cujo desempenho é

$$\gamma_2 := 17.18 \qquad \alpha_2 := 7.70$$

Formulamos este problema com dois objetivos agrupando as restrições matriciais lineares provenientes de (4.187–4.190) e (4.197) com as restrições GSP (5.166–5.167). Resolvendo várias vezes o problema resultante desta operação, obtemos os valores mínimos de  $\alpha$  para  $\gamma$  entre  $\gamma_\infty$  e  $35 \approx 3.5\gamma_\infty$ . Este resultado encontra-se na Figura 5.6 em linha cheia. Neste mesmo gráfico, traçamos os resultados obtidos pelo LSP [117, 87] em linha pontilhada. Como esperado, o projeto GSP provê sempre melhores resultados do que o projeto LSP.

Para tentar avaliar o grau de suficiência destas abordagens, obtemos os gráficos das Figuras 5.7 e 5.8. Nestas figuras, traçamos o valor real das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  em malha fechada como funções do parâmetro de projeto  $\gamma$ . Observemos que a melhoria de desempenho obtida pelo GSP com relação ao LSP, já detectada em termos do custo garantido (Figura 5.6), está também presente no comportamento real das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  em questão. Uma característica importante mostrada nesses gráficos é que o controlador GSP consegue efetivamente atingir o valor ótimo da norma  $H_2$  ( $\alpha_2$ ) para valores pequenos de  $\gamma$ . Vale a pena lembrar que o controlador LSP só é capaz de se aproximar assintoticamente do valor de  $\alpha_2$ . Este fato torna-se ainda mais evidente ao olharmos para a norma  $H_\infty$ , que, a partir de um certo valor de  $\gamma$ , se encontra saturada no valor ótimo  $\gamma_2$ . ♦

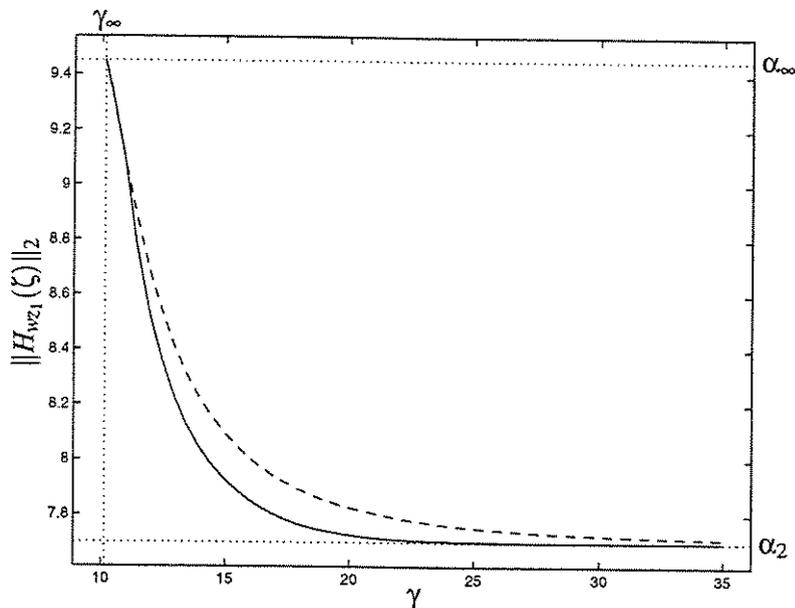


Figura 5.7: Controle misto  $H_2/H_\infty$ : desempenho  $H_2$

**Exemplo 5.13** Este exemplo ilustra um projeto com múltiplos objetivos um pouco mais complexo do que o do Exemplo 5.12. Consideramos um sistema incerto com representação de estado

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2+\delta_1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1+\delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1+\delta_3 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

na qual os parâmetros  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  representam incertezas variantes no tempo. Obtemos as matrizes nominais  $A$ ,  $B_u$  e  $C_y$  tornando os parâmetros incertos nulos.

Desejamos obter um controlador estritamente próprio por realimentação da saída que garanta robustez ao sistema em malha fechada com relação a essas incertezas e, ao mesmo tempo, apresente um bom desempenho. Trazemos o problema de robustez para o nosso contexto por meio da definição de limites para a norma  $H_\infty$  da matriz de transferência entre certas entradas e saídas, especialmente construídas de modo a colocar em evidência os parâmetros  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Consideramos o problema de desempenho por meio da definição de uma matriz de transferência cuja norma  $H_2$  deve ser minimizada. Detalhando um pouco mais o que acabamos de explicar, adicionamos ao sistema original as entradas

$$x(k+1) = Ax(k) + B_u u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w_1(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w_2(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_{x4}(k)$$

$$y(k) = C_y x(k) + w_3(k) + w_{y4}(k)$$

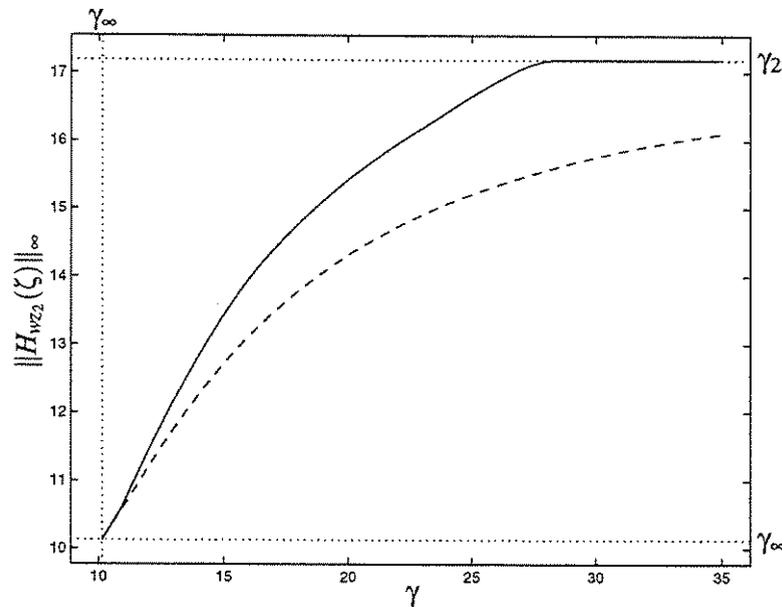


Figura 5.8: Controle misto  $H_2/H_\infty$ : desempenho  $H_\infty$ .

e as saídas

$$\begin{aligned} z_1(k) &= [1 \ 0 \ 0] x(k) \\ z_2(k) &= u(k) \\ z_3(k) &= [0 \ 1 \ 0] x(k) \\ z_4(k) &= \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nosso objetivo pode ser traduzido como a obtenção de um controlador que minimiza  $\alpha$ , definido como

$$\|H_{w_4 z_4}(\zeta)\|_2 < \alpha$$

em que  $H_{w_4 z_4}(\zeta)$  é a matriz de transferência entre a entrada

$$w_4(k) := \begin{bmatrix} w_{x4}(k) \\ w_{y4}(k) \end{bmatrix}$$

e a saída  $z_4(k)$ . Ao mesmo tempo, desejamos manter

$$\|H_{w_i z_i}(\zeta)\|_\infty < \gamma, \quad i = 1, 2, 3$$

abaixo de um certo valor  $\gamma$ , responsável pelo controle do nível de robustez. Nesta formulação, estamos prontos para aplicar o procedimento de projeto GPV. Como no Exemplo 5.12, começamos resolvendo este problema com múltiplos objetivos a partir de um valor arbitrariamente grande para  $\gamma$  e prosseguimos minimizando o valor de  $\alpha$  à medida em que diminuimos o valor de  $\gamma$ . Obtemos assim os gráficos das Figuras 5.9 e 5.10. Representamos os resultados obtidos com o projeto GSP em linha cheia e com o projeto LSP em linha tracejada.

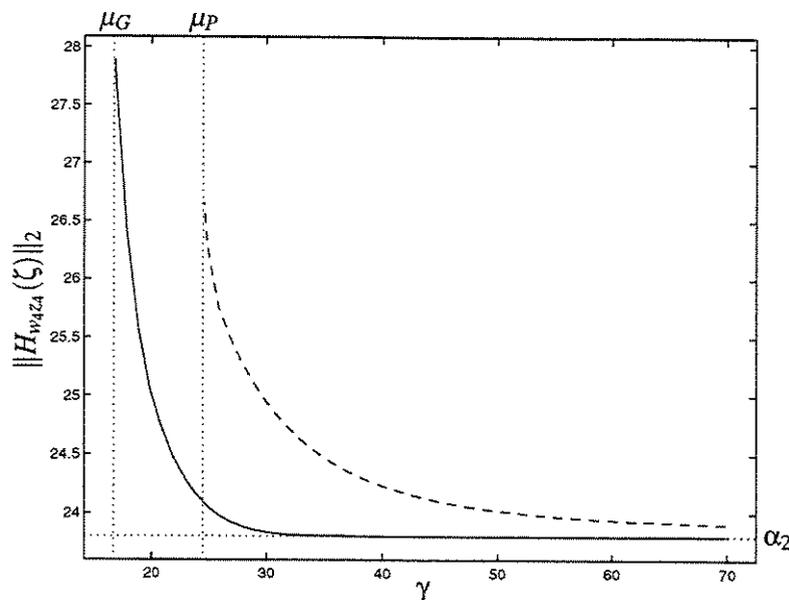


Figura 5.9: Controle com múltiplos objetivos: desempenho  $H_2$

Neste exemplo mais complexo, o valor mínimo obtido para  $\gamma$  pelas duas abordagens não coincide. Como esperado, o projeto GSP produz um valor menor do que o projeto LSP. Nem mesmo o mínimo global para  $\gamma$  pode ser facilmente calculado. Denotamos por  $\mu_G$  e  $\mu_P$  os valores mínimos de  $\gamma$  obtidos pelo controlador GSP e LSP, respectivamente. Os escalares  $\gamma_G$  e  $\gamma_P$  denotam os valores reais associados a esses limites. Os gráficos demonstram que os controladores GSP sempre provê melhor desempenho do que os controladores LSP, tanto para os custos garantidos quanto para os valores reais. Se compararmos estes gráficos com aqueles nas Figuras 5.7 e 5.8, podemos perceber que o desempenho do controlador GSP, no presente exemplo, é significativamente melhor do que o desempenho do controlador LSP. Atribuímos esta diferença, principalmente, ao maior número de restrições a serem satisfeitas pelo controlador único.

Embora tenhamos dificuldade em obter o mínimo global para o valor de  $\gamma$ , podemos calcular, facilmente, o controlador ótimo  $H_2$ , que provê os custo ótimos

$$\alpha_2 := 23.8$$

$$\gamma_2 := 14.7$$

É de se esperar que, à medida em que o valor de  $\gamma$  aumenta, nos aproximemos cada vez mais destes valores ótimos. Mais uma vez, isto é exatamente o que ocorre para o controlador GSP. Acreditamos que nenhum método com complexidade computacional semelhante disponível hoje em dia seja capaz de prover controladores de ordem fixa com tal comportamento. ♦

## 5.7 Controle com alocação de atuadores e sensores

No projeto de sistemas de controle, freqüentemente nos deparamos com a necessidade de selecionar ou simplesmente posicionar um conjunto de sensores ou atuadores. Em certas situações, uma boa escolha das linhas de atuação e medição tem mais impacto no projeto final do que a própria escolha da lei de controle; devemos estar cientes de como esta escolha afeta os limites de desempenho de um sistema a ser controlado. Neste sentido, ressaltamos a dependência das propriedades de controlabilidade e observabilidade em função dos sensores e atuadores de um sistema. Nosso interesse é desenvolver métodos de

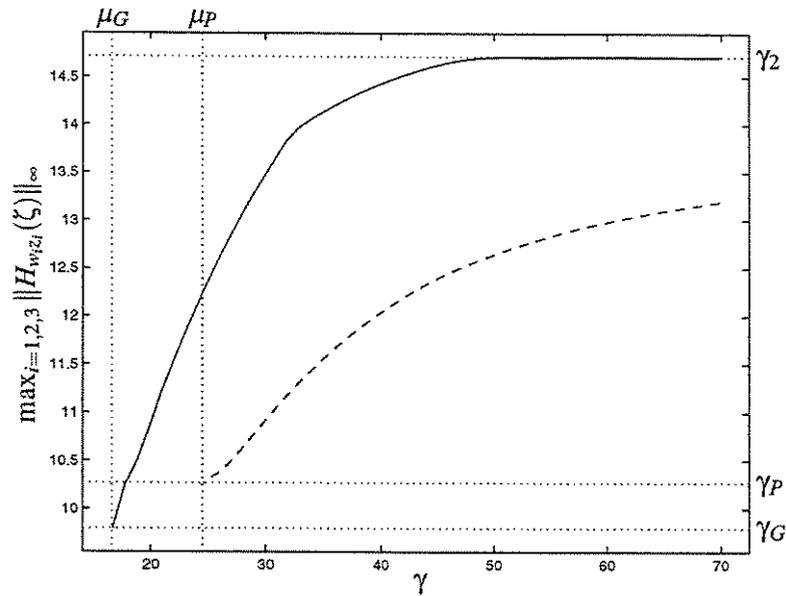


Figura 5.10: Controle com múltiplos objetivos: desempenho  $H_\infty$

projeto de controladores capazes de levar em conta a alocação dos sensores e dos atuadores.

Na literatura, encontramos dois tipos de abordagem para este problema. A primeira, que denominamos abordagem em malha aberta, divide o problema em duas etapas: a alocação dos sensores e atuadores para o sistema em malha aberta, seguida do projeto da lei de controle pelas técnicas usuais. O projeto de alocação visa “aumentar as chances de obtenção de uma boa lei de controle”, como em [81, 100, 121]. A segunda, que denominamos abordagem em malha fechada, efetua simultaneamente a alocação e o projeto da lei de controle, como em [52, 122, 97].

A principal vantagem da abordagem em malha aberta é que podemos isolar o problema de alocação do problema de projeto do controlador. Infelizmente, pela natureza disjunta do procedimento, não temos como garantir formalmente que a alocação feita em malha aberta efetivamente contribua para um bom desempenho em malha fechada. Já na abordagem em malha fechada, o desempenho do sistema torna-se função das variáveis de posicionamento e seleção, o que garante a obtenção da melhor configuração possível. Diversos autores desenvolveram métodos sub-ótimos ou baseados em procedimentos heurísticos para tratar este problema [122, 97]. No caso particular do controle por realimentação do estado, encontramos uma referência que propõe um método capaz de calcular a solução ótima global de um problema do tipo linear-quadrático [52]. Mostraremos, mais adiante, que somos capazes reproduzir este resultado utilizando as desigualdades matriciais lineares. Mostraremos ainda que é possível generalizar estes resultados no contexto da otimização em norma  $H_2$  para diversos problemas por realimentação da saída. Estes resultados estão parcialmente contidos nos artigos [29, 31].

### 5.7.1 Modelo matemático

O modelo matemático por nós adotado para realizar a análise de problemas de alocação de sensores, baseia-se na seguinte estrutura no espaço de estado

$$\dot{x} = Ax + B_u(\lambda)u \quad (5.170)$$

$$y = C_y(\gamma)x \quad (5.171)$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle e  $y \in \mathbb{R}^p$  é a saída medida. Neste modelo, as matrizes de entrada e saída dependem do vetor de variáveis lógicas  $\lambda \in \mathbb{B}^{N_B}$  e  $\gamma \in \mathbb{B}^{N_C}$  da seguinte maneira

$$B_u(\lambda) = [B_{u1}\lambda_1 \quad \cdots \quad B_{ui}\lambda_i \quad \cdots \quad B_{uN_B}\lambda_{N_B}] \quad C_y(\gamma)' = [C'_{y1}\gamma_1 \quad \cdots \quad C'_{yj}\gamma_j \quad \cdots \quad C'_{yN_C}\gamma_{N_C}] \quad (5.172)$$

Ao dizer que  $\lambda$  e  $\gamma$  são variáveis lógicas, queremos indicar que seus componentes pertencem ao conjunto discreto  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ . Assim, consideramos um modelo de *seleção* de sensores e atuadores, uma vez que toda a informação provida pelas variáveis lógicas refere-se à presença ou não de determinado sensor ou atuador. Não obstante, este modelo é flexível o bastante para que possamos tratar diversos outros problemas, incluindo-se aí problemas de posicionamento. Para esclarecermos melhor como isto pode ser feito, imaginemos que um determinado atuador deva ser alocado em um determinado número finito de posições, descritos por uma família de matrizes de entrada  $B_u \in \mathcal{B}$ . Pela natureza discreta do conjunto  $\mathcal{B}$  podemos lidar com este problema por meio do modelo (5.170–5.171) agrupando todas as, digamos,  $N_B$  matrizes pertencentes ao conjunto  $\mathcal{B}$  como colunas da matriz  $B_u(\lambda)$ , em (5.172), e definindo a restrição linear adicional sobre  $\lambda$

$$\sum_{i=1}^{N_B} \lambda_i = 1 \quad (5.173)$$

Desta maneira, modelamos o problema de posicionamento de um atuador em um conjunto discreto  $\mathcal{B}$  como um problema de seleção de no máximo um atuador do conjunto  $\mathcal{B}$ . Este modelo é capaz de lidar com alocação em conjuntos contínuos desde que as matrizes  $B(\lambda)$  e  $C(\gamma)$  sejam definidas de acordo com discretizações adequadas dos conjuntos originalmente contínuos.

Com um pouco de criatividade, e mediante a introdução de restrições lineares adicionais sobre as variáveis de seleção, podemos formular problemas variados. Fica a cargo do projetista formular de maneira adequada estas restrições adicionais que, em última análise, são as responsáveis por “moldar” o problema de seleção às necessidades de projeto. Esta dependência do problema com relação à presença das restrições pode ser entendida a partir da seguinte observação: quanto maior o número de sensores e atuadores disponíveis, maiores as chances de se obter um bom desempenho. Assim, na ausência de restrições sobre as variáveis lógicas, podemos afirmar que a solução de problemas de otimização de desempenho busca sempre envolver *todos* os sensores e atuadores disponíveis.

Nas próximas seções, consideramos que as restrições adicionais sobre as variáveis de otimização estão agrupadas em três conjuntos. Os dois primeiros são

$$\Lambda := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{B}^{N_B} \cap \Sigma\} \quad (5.174)$$

$$\Gamma := \{\gamma : \gamma \in \mathbb{B}^{N_C} \cap \Xi\} \quad (5.175)$$

em que  $\Sigma$  e  $\Xi$  são politopos convexos. O terceiro e último conjunto é definido em função do politopo convexo  $\Omega$  como

$$\Delta := \{(\lambda, \gamma) : (\lambda, \gamma) \in \Omega\} \quad (5.176)$$

e agrupa todas as restrições que envolvem as variáveis  $\lambda$  e  $\gamma$  simultaneamente. Um importante tipo de restrição que envolve simultaneamente os vetores  $\lambda$  e  $\gamma$  e que aparece freqüentemente no projeto de estruturas flexíveis [23] é

$$\lambda_i = \gamma_j, \quad (i, j) \in I \quad (5.177)$$

Esta restrição assegura que os atuadores e sensores do conjunto  $I$  devem ser selecionados em pares. Este tipo de posicionamento de sensores e atuadores é freqüentemente chamado pelo nome em inglês de estratégia de posicionamento do tipo *collocated*.

### 5.7.2 Seleção de sensores e atuadores em malha aberta

Nesta seção, mostraremos como o modelo com variáveis lógicas recém-definido pode ser utilizado para seleção de sensores e atuadores em malha aberta. Desejamos obter uma formulação capaz de contemplar os seguintes problemas:

- Maximização de uma medida da *transmissão* da entrada de controle  $u$  para a saída  $y$  [81].
- Minimização de uma medida estatística do ruído introduzido pelos sensores e atuadores [121].

No primeiro tipo de procedimento, tentamos obter um sistema em malha aberta que maximize, por exemplo, a energia do sinal de saída em resposta ao sinal de entrada. Desta forma, acredita-se que possamos projetar um controlador *a posteriori* associado a um pequeno esforço de controle (veja [81]). No segundo, tentamos obter um sistema em malha aberta cujos sensores e atuadores provejam a melhor qualidade<sup>9</sup> possível de transferência do sinal da entrada  $u$  para a saída  $y$ . Em nenhum dos casos podemos afirmar que esta seleção imponha ao desempenho em malha fechada algum grau de otimalidade.

Exploraremos o fato de que esses dois tipos de problema podem ser definidos como problemas de otimização da norma  $H_2$  da matriz de transferência entre  $u$  e  $y$  (veja [81, 121]). Trataremos diversas situações particulares distintamente, sempre procurando expressar o cálculo da norma  $H_2$  em função das variáveis lógicas. Iniciemos pelo problema de seleção de atuadores.

**Teorema 5.20** *Se a matriz  $C_y$  se encontra fixa, definindo-se os escalares*

$$q_i := \text{tr} \left( (B_u)_i' P_o (B_u)_i \right) \quad (5.178)$$

em que  $P_o = P_o' > 0$  é a solução única da equação de Lyapunov

$$A' P_o + P_o A + C_y' C_y = 0 \quad (5.179)$$

a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{uy}(s)$  pode ser calculada como

$$\|H_{uy}(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N_B} \lambda_i q_i \quad (5.180)$$

**Prova:** Provamos este teorema escrevendo a norma  $H_2$  de  $H_{uy}(s)$  na forma

$$\|H_{uy}(s)\|_2^2 = \text{tr} \left( B(\lambda)' P_o B(\lambda) \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 q_i$$

Obtemos a expressão (5.180) lembrando que  $\lambda$  é um vetor de variáveis lógicas, o que implica  $\lambda_i^2 = \lambda_i$ . ■

Desta forma, problemas de otimização em norma  $H_2$  podem ser formulados como problemas de programação linear mista, bastando para tal agregar as restrições representadas pelo conjunto  $\Lambda$ . A solução ótima global destes problemas pode ser obtida mediante o uso de algoritmos tradicionais de programação inteira mista [102] ou pelo Algoritmo B.1, descrito no Apêndice B. A formulação dual permite lidar com problemas de seleção de sensores. A prova é semelhante à prova do Teorema 5.20 e não será apresentada.

<sup>9</sup>Em termos da relação sinal/ruído.

**Teorema 5.21** *Se a matriz  $B_u$  se encontra fixa, definindo-se os escalares*

$$r_i := \text{tr} \left( (C_y)_j P_c (C_y)'_j \right) \quad (5.181)$$

em que  $P_c = P'_c > 0$  é a solução única da equação de Lyapunov

$$AP_c + P_c A' + B_u B'_u = \mathbf{0} \quad (5.182)$$

a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{uy}(s)$  pode ser calculada como

$$\|H_{uy}(s)\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N_c} \gamma_j r_j \quad (5.183)$$

A simplicidade destes teoremas não permanece no caso em que devemos selecionar simultaneamente atuadores e sensores. Como atesta o próximo teorema, nem mesmo a linearidade presente no cálculo do custo é preservada.

**Teorema 5.22** *Definindo-se os escalares*

$$qr_{i,j} := \text{tr} \left( (B_u)'_i (P_o)_j (B_u)_i \right) \quad (5.184)$$

$$rq_{i,j} := \text{tr} \left( (C_y)_j (P_c)_i (C_y)'_j \right) \quad (5.185)$$

em que  $(P_c)_i = (P_c)'_i > 0$  e  $(P_o)_j = (P_o)'_j > 0$  são as soluções das equações de Lyapunov

$$A(P_c)_i + (P_c)_i A' + (B_u)_i (B_u)'_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N_B \quad (5.186)$$

$$A'(P_o)_j + (P_o)_j A + (C_y)'_j (C_y)_j = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, N_C \quad (5.187)$$

a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{uy}(s)$  pode ser calculada como

$$\|H_{uy}(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N_B} \sum_{j=1}^{N_C} \lambda_i \gamma_j qr_{i,j} \quad (5.188)$$

ou

$$\|H_{uy}(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N_B} \sum_{j=1}^{N_C} \lambda_i \gamma_j rq_{i,j} \quad (5.189)$$

**Prova:** Provamos este teorema decompondo a matriz  $P_o$  na forma

$$P_o = \sum_{j=1}^{N_C} \gamma_j (P_o)_j$$

e calculando a norma  $H_2$  de  $H_{uy}(s)$  por meio da relação

$$\|H_{wz}(s)\|_2^2 = \text{tr} \left( B_u(\lambda)' P_o B_u(\lambda) \right) = \sum_{i=1}^{N_B} \sum_{j=1}^{N_C} \lambda_i \gamma_j \text{tr} \left( (B_u)'_i (P_o)_j (B_u)_i \right)$$

associada às soluções das equações de Lyapunov

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= A' P_o + P_o A + C_y(\gamma)' C_y(\gamma) \\ &= \sum_{j=1}^m \gamma_j \left( A'(P_o)_j + (P_o)_j A + (C_y)'_j (C_y)_j \right) \end{aligned}$$

A prova da relação dual (5.189) é semelhante e não será apresentada. ■

Nesta formulação, o custo  $H_2$  revela-se uma função quadrática e não convexa. Logo, as soluções dos problemas de otimização da norma  $H_2$  associados tornam-se inacessíveis ao Algoritmo B.1 ou aos métodos de programação mista descritos em [102]. Em alguns casos, podemos obter soluções sub-ótimas utilizando um procedimento similar ao Algoritmo 5.3, a ser descrito em detalhes na Seção 5.4.

Como o maior interesse deste trabalho é o desenvolvimento de ferramentas de projeto de controladores, encerraremos por aqui esta discussão e passaremos, logo, aos problemas de seleção malha fechada. Enfatizamos, mais uma vez, que uma das razões pelas quais daremos maior atenção aos problemas em malha fechada é que, embora os problemas em malha aberta possam ser úteis no projeto estrutural de diversos sistemas de controle, seu emprego como passo preliminar do projeto de controladores é discutível. A principal razão para isto é que não é possível garantir que o desempenho em malha fechada de sistemas projetados em dois passos apresente algum tipo de otimalidade. Apesar do argumento formal estabelecido em [81], dificilmente a seleção em malha aberta conseguirá prever a melhor seleção possível em malha fechada. Este fato será ilustrado pelos Exemplos 5.14, 5.15 e 5.16, apresentados nas seções seguintes.

### 5.7.3 Seleção de sensores e atuadores em malha fechada: realimentação do estado

Ao lidarmos com o projeto em malha fechada, nosso interesse é obter controladores que minimizem a norma  $H_2$  de uma certa matriz de transferência associada a uma representação de estado cujas matrizes de entrada do controle e da saída medida sejam modeladas como em (5.172). Antes de discutirmos as formulações destes problemas, façamos uma observação importante. Se tivéssemos acesso a um *oráculo* capaz de nos indicar os valores de  $\lambda$  e  $\gamma$  associados ao custo  $H_2$  mínimo, então o problema de obtenção dos controladores ótimos se reduziria a um problema usual de otimização em norma  $H_2$ , bastando configurar adequadamente as matrizes de entrada e saída com os valores ótimos de  $\lambda$  e  $\gamma$ . Este fato faz com que possamos concentrar o nosso estudo nas classes de controladores ótimos já tratadas no Capítulo 4, quais sejam, a realimentação linear do estado e a realimentação da saída com controladores lineares de ordem completa (veja Capítulo 4 e [21, 5]). Trataremos nesta seção do problema de realimentação do estado. O problema de realimentação da saída será abordado na próxima seção.

Desejamos obter controladores por realimentação do estado (4.4) que minimizem a norma  $H_2$  da matriz de transferência entre  $w$  e  $z$ , definida para o sistema linear contínuo (4.2–4.3) cuja matriz de entrada do controle é  $B_u = B_u(\lambda)$ , definida em (5.172). Consideramos ainda as seguintes hipóteses adicionais

$$C_2' D_{zu} = 0 \quad D_{zu}' D_{zu} > 0 \quad D_{zw} = 0 \quad (5.190)$$

em que o produto  $D_{zu}' D_{zu}$  tem a estrutura bloco-diagonal

$$D_{zu}' D_{zu} = \text{diag} \left( (D_{zu}' D_{zu})_1, \dots, (D_{zu}' D_{zu})_i, \dots, (D_{zu}' D_{zu})_{N_B} \right) \quad (5.191)$$

cujas dimensões dos blocos estão de acordo com as dimensões dos blocos da matriz  $B_u(\lambda)$ . Essas hipóteses, embora um pouco restritivas, são fundamentais para a obtenção dos resultados que apresentaremos. Notemos que, no presente caso, até mesmo a hipótese de ortogonalidade (5.190), que é comumente invocada como não sendo restritiva em diversos contextos [5], não pode ser admitida sem perda de generalidade. Se quiséssemos transformar um sistema não ortogonal num sistema equivalente, porém ortogonal, seríamos obrigados a considerar as matrizes  $A$ ,  $C_2$  e  $D_{zu}$  como dependentes da variável  $\lambda$ , o que destruiria as propriedades fundamentais sobre as quais se baseiam nossos resultados. Devemos ainda tecer um ligeiro comentário sobre a hipótese (5.191). Embora à primeira vista possamos considerá-la

extremamente forte e restritiva, notemos que a sua função é muito natural no contexto de otimização  $H_2$ . Para tal atentemos para a expansão da função de custo

$$\begin{aligned} \|H_{wz}(s)\|_2^2 &= \int_0^\infty z(t)'z(t)dt \\ &= \int_0^\infty [x(t)'C_z'C_zx(t) + u(t)'D'_{zu}D_{zu}u(t)] dt \\ &= \int_0^\infty x(t)'C_z'C_zx(t)dt + \sum_{i=1}^{N_B} \int_0^\infty u_i(t)'(D'_{zu}D_{zu})_i u_i(t)dt \end{aligned} \quad (5.192)$$

Parece claro que a missão da hipótese (5.191) é decompor o custo  $H_2$  em somas que dependam individualmente das entradas  $u_i$ . Desta forma, o custo torna-se aditivo com relação aos canais de atuação  $u_i$ , portanto, com relação às variáveis lógicas  $\lambda$ . Esta hipótese é natural, uma vez que a decisão de excluir ou não um atuador, geralmente, não deve afetar a contribuição dos demais atuadores para o custo. Neste sentido, esta hipótese corresponde à ortogonalidade em termos dos canais de atuação. Um detalhe importante é que, embora a matriz  $D_{zu}$  também dependa da variável  $\lambda$ , não denotaremos explicitamente este fato. Conforme ficará claro mais adiante, toda a informação sobre a seleção dos atuadores no problema de otimização  $H_2$  pode ficar concentrada na matriz  $B_u$ . O resultado fundamental para o projeto de controladores por realimentação do estado está contido no próximo teorema.

**Teorema 5.23** *Definindo-se as matrizes*

$$Q_i = Q'_i := (B_u)_i(D'_{zu}D_{zu})_i^{-1}(B_u)'_i \quad (5.193)$$

e as desigualdades matriciais nas variáveis  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W \in \mathbb{R}^{r \times r}$

$$\begin{bmatrix} X & B_w \\ (\star)' & W \end{bmatrix} > 0 \quad (5.194)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' - \sum_{i=1}^{N_B} \lambda_i Q_i & XC'_z \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.195)$$

o ganho de realimentação do estado (4.4) que minimiza a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é dado por (4.13) juntamente com

$$L = -(D'_{zu}D_{zu})^{-1}B_u(\lambda)' \quad (5.196)$$

calculados na solução ótima do problema de otimização semi-definida mista

$$\min_{\lambda \in \Lambda, K \in \mathcal{K}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min_{\lambda \in \Lambda} \{\text{tr}(W) : (5.194-5.195)\} \quad (5.197)$$

**Prova:** A prova deste teorema é uma aplicação da condição necessária de optimalidade (4.239) para o problema (4.20) (veja Seção 4.3.3). Segundo (4.239) e as hipóteses (5.190), a solução ótima deve obedecer

$$(B_u(\lambda)' + D'_{zu}D_{zu}L) \Phi = 0 \quad (5.198)$$

Conforme discutido na Seção 4.3.3, podemos considerar  $\Phi > 0$  para todo valor de  $\lambda$  factível. Assim, obtemos a expressão para o ganho (5.196) que, substituído no complemento de Schur da desigualdade (4.14), provê

$$AX + XA' - B_u(\lambda)'B_u(\lambda) + XC'_zC_zX < 0$$

Finalmente, aplicando o complemento de Schur a esta desigualdade, desta vez no sentido inverso, e utilizando a definição das matrizes  $Q_i$  em (5.193) obtemos (5.195). ■

A parametrização desenvolvida neste teorema não contém todos os controladores estabilizantes; apenas aqueles mapeados pelo ganho (5.196). Porém, sem esta redução de escopo, não seríamos capazes de explicitar os componentes do vetor  $\lambda$  de forma linear. Uma característica da família dos ganhos (5.196) é que, apesar de não havermos considerado a matriz  $D_{zu}$  dependente de  $\lambda$ , a hipótese (5.191) assegura a obtenção de uma realimentação de estado com as características desejadas. A entrada de controle  $u_i$  é identicamente nula toda vez que o valor de  $\lambda_i$  correspondente for nulo. Notemos que isto é decorrência da estrutura bloco-diagonal da matriz  $D'_{zu}D_{zu}$ . Por esta razão, e para simplificar a notação, não denotamos explicitamente a dependência da matriz  $D_{zu}$  com relação a  $\lambda$ . Devemos também notar que as matrizes  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, N_B$ , definidas em (5.193), provêm diretamente da estrutura definida em (5.172). Percebamos que a independência das entradas revelada na expressão do custo (5.192) está também presente na desigualdade (5.195) por intermédio do somatório dos termos em  $Q_i$ .

Antes de prosseguirmos para os resultados em controle por realimentação da saída, estabeleçamos a relação existente entre o resultado do Teorema 5.23 e a solução equivalente fornecida no artigo [52]. A vantagem desta nossa nova abordagem é que a estrutura de alocação fica incorporada a desigualdades matriciais e não mais à soluções de equações de Riccati. Isto significa que, apesar de não conseguirmos parametrizar todos os controladores por realimentação do estado, ainda temos alguns graus de liberdade que podem vir a ser explorados. Além disto, as nossas provas são praticamente imediatas, enquanto no artigo [52] é necessário recorrer a complicadas manipulações das matrizes Hamiltonianas. Uma outra vantagem é que a apresentação dos resultados em [52] é orientada de modo a fornecer um método de solução por meio de um algoritmo de decomposição do tipo Benders. Formulando o problema como um problema de otimização semi-definida mista, abrimos a possibilidade de explorar diversos métodos sub-ótimos ou heurísticos que não são acessíveis<sup>10</sup> à rígida formulação de [52] (veja Apêndice B).

#### 5.7.4 Seleção de sensores e atuadores em malha fechada: realimentação da saída

Passemos agora ao projeto de controladores por realimentação da saída (4.140–4.141). Pelas razões já discutidas, nos concentraremos no projeto de controladores lineares de ordem completa e estritamente próprios. Desejamos minimizar a norma  $H_2$  da matriz de transferência de  $H_{wz}(s)$  do sistema linear contínuo (4.137–4.139) no qual as matrizes  $B_u = B_u(\lambda)$  e  $C_y = C_y(\gamma)$  são definidas como em (5.172). Assim, como na Seção 5.7.3, impomos, além de (5.190–5.191), as hipóteses de ortogonalidade

$$B_w D'_{yw} = 0 \quad D_{yw} D'_{yw} > 0 \quad (5.199)$$

e a estrutura bloco-diagonal sobre o produto

$$D_{yw} D'_{yw} = \text{diag} \left( (D_{yw} D'_{yw})_1, \dots, (D_{yw} D'_{yw})_j, \dots, (D_{yw} D'_{yw})_{N_B} \right) \quad (5.200)$$

cujas dimensões dos blocos estão de acordo com as dimensões dos blocos da matriz  $C_y(\gamma)$ . Essas hipóteses possuem papel análogo ao desempenhado pelas hipóteses do problema de controle por realimentação do estado. Mais uma vez não denotaremos a dependência da matriz  $D_{zu}$  em função de  $\lambda$  nem mesmo de  $D_{yw}$  em função de  $\gamma$ .

A fim de simplificar a apresentação, limitar-nos-emos à escolha particular das matrizes  $U$  e  $V$  feita em (4.230). Esta escolha está associada a propriedades de separação. Conforme discutido na Seção 4.3.3

<sup>10</sup>Pelo menos não sem passar por uma reformulação.

calculamos o controlador  $H_2$  ótimo por meio das relações

$$B_c := (X^{-1} - Y)^{-1}F \quad C_c := LX^{-1} \quad A_c := A - B_c C_y(\gamma) + B_u(\lambda)C_c \quad (5.201)$$

Ao contrário do que ocorre no problema de realimentação do estado, não conseguimos formular o problema de seleção de atuadores e sensores por realimentação da saída como um problema de otimização semi-definida mista. A estratégia por nós escolhida é a de analisar todas as possíveis hipóteses simplificadoras que levem a problemas desta natureza. Tratemos do primeiro caso: a matriz  $C_y$  se encontra fixa e há seleção apenas de atuadores.

**Teorema 5.24** *Se a matriz  $C_y$  encontra-se fixa, definindo-se as desigualdades matriciais nas variáveis  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $F \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $W \in \mathbb{R}^{r \times r}$*

$$\begin{bmatrix} W & B'_w & B'_w Y + D'_{yw} F' \\ (\star)' & X & I \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.202)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' - \sum_{i=1}^{N_b} \lambda_i Q_i & X C'_z \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.203)$$

$$\begin{bmatrix} A'Y + C'_z F' + YA + F C_z & C'_z \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.204)$$

o controlador estritamente próprio (4.140–4.141) que minimiza a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é dado por (5.201) juntamente com

$$L = -(D'_{zu} D_{zu})^{-1} B_u(\lambda)' \quad (5.205)$$

calculados na solução ótima do problema de otimização semi-definida mista

$$\min_{\lambda \in \Lambda, K_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min_{\lambda \in \Lambda} \{\text{tr}(W) : (5.202-5.204)\} \quad (5.206)$$

**Prova:** A prova deste teorema é semelhante à prova do Teorema 5.23. As desigualdades apresentadas são obtidas a partir da eliminação da matriz  $L$  das desigualdades (4.209–4.213) por meio da condição de otimalidade (5.198). ■

Uma observação interessante sobre este teorema é que, na forma como apresentado, podemos desconsiderar as hipótese adicionais (5.199–5.200). Alterando a escolha das matrizes do controlador para

$$B_c := Y^{-1}F \quad C_c := L(Y^{-1} - X)^{-1} \quad A_c := A - B_c C_y(\gamma) + B_u(\lambda)C_c \quad (5.207)$$

obtemos o seguinte teorema, aplicável a problemas com seleção apenas de sensores, isto é, problemas cuja matriz  $B_u$  encontra-se fixa. A prova deste teorema pode ser obtida por procedimentos duais à da prova do Teorema 5.23 e não será apresentada.

**Teorema 5.25** *Se a matriz  $B_u$  encontra-se fixa, definindo-se as matrizes*

$$R_j = R'_j := (C_y)'_j (D_{yw} D'_{yw})^{-1} (C_y)_j \quad (5.208)$$

e as desigualdades matriciais nas variáveis  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  e  $W \in \mathbb{R}^{q \times q}$

$$\begin{bmatrix} W & C_z X + D_{zu} L & C_z \\ (\star)' & X & \mathbf{I} \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.209)$$

$$\begin{bmatrix} A'Y + YA - \sum_{j=1}^{N_c} \gamma_j R_j & Y B_w \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.210)$$

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L' B_u' & B_w \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.211)$$

o controlador estritamente próprio (4.140–4.141) que minimiza a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é dado por (5.207) juntamente com

$$F = -C_y(\gamma)'(D_{yw}D'_{yw})^{-1} \quad (5.212)$$

calculados na solução ótima do problema de otimização semi-definida mista

$$\min_{\gamma \in \Gamma, \tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min_{\gamma \in \Gamma} \{ \text{tr}(W) : (5.209-5.211) \} \quad (5.213)$$

**Prova:** Este teorema decorre da eliminação da matriz  $F$  a partir da formulação dual a (4.209–4.213)

$$\begin{bmatrix} AX + B_u L + XA' + L' B_u' & B_w \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A'Y + C_y' F' + YA + F C_y & Y B_w + F D_{yw} \\ (\star)' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} W & C_z X + D_{zu} L & C_z \\ (\star)' & X & \mathbf{I} \\ (\star)' & (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0$$

$$\text{tr}(W) < \gamma$$

Considerando as hipóteses adicionais de ortogonalidade (5.199), a eliminação da matriz  $F$  por intermédio da condição de otimalidade

$$C_y' + F D_{yw} D'_{yw} = 0 \quad (5.214)$$

fornece (5.209–5.212). ■

Novamente, a efetiva seleção dos sensores provém da estrutura bloco-diagonal definida em (5.200) e o ganho (5.212) é capaz de descrever todas as possibilidades de seleção a partir da matriz  $C_y(\gamma)$ . Na forma como este teorema foi formulado, sempre que a matriz  $B_u$  for fixa, as hipóteses adicionais (5.190–5.191) podem ser desconsideradas sem prejuízo dos resultados.

Podemos simplificar a determinação da solução ótima dualizando parcialmente os problemas de otimização obtidos. Neste caso, devemos seguir a linha de discussão da Seção 4.3.3 considerando simultaneamente as condições (5.190–5.191) e (5.199–5.200). Obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 5.26** Se a matriz  $C_y$  encontra-se fixa, definindo-se as desigualdades matriciais nas variáveis  $X = X' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W \in \mathbb{R}^{r \times r}$

$$\begin{bmatrix} W & B'_w \\ (*)' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (5.215)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' - \sum_{i=1}^{N_B} \lambda_i Q_i & XC'_z \\ (*)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.216)$$

o controlador estritamente próprio (4.140–4.141) que minimiza a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é dado por (5.201) juntamente com

$$L = -(D'_{zu}D_{zu})^{-1}B_u(\lambda)' \quad (5.217)$$

$$F = -C'_y(D_{yw}D'_{yw})^{-1} \quad (5.218)$$

e  $Y = P^{-1} + X^{-1}$ , em que  $P > 0$  é a solução da equação de Riccati

$$AP + PA' - PC'_y(D_{yw}D'_{yw})^{-1}C_yP + B_wB'_w = 0 \quad (5.219)$$

calculados na solução ótima do problema de otimização semi-definida mista

$$\alpha := \min_{\lambda \in \Lambda} \{ \text{tr}(W) : (5.215-5.216) \} \quad (5.220)$$

O valor do custo  $H_2$  ótimo pode ser calculado substituindo-se os valores das variáveis associadas à solução ótima do problema (5.220) na expressão

$$\min_{\lambda \in \Lambda, R_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \alpha + \text{tr}(D_{zu}LX^{-1}PX^{-1}L'D'_{zu}) \quad (5.221)$$

**Prova:** A prova deste corolário é fruto da análise apresentada na Seção 4.3.3 com relação ao problema de controle baseado nas desigualdades (4.232–4.236). De fato, se definimos

$$Z := Y - X^{-1}$$

obtemos a equação de Riccati (5.219), a qual corresponde a (4.253) segundo as hipóteses (5.199). Obtemos o expressão do custo em (5.221) a partir de (4.236), que provê

$$\begin{aligned} \|H_{wz}(s)\|_2^2 &= \text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Z) \\ &= \alpha + \text{tr}(C_XPC'_X) \\ &= \alpha + \text{tr}(D_{zu}LX^{-1}PX^{-1}L'D'_{zu}) \end{aligned}$$

conforme a fatoração definida em (4.257). ■

Este corolário é uma simplificação do Teorema 5.24, que teve as variáveis  $Y$  e  $F$  calculadas por meio da solução da equação de Riccati (5.219). Por dualidade obtemos o próximo corolário, correspondente ao Teorema 5.25.

**Corolário 5.27** Se a matriz  $B_u$  encontra-se fixa, definindo-se as desigualdades matriciais nas variáveis  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W \in \mathbb{R}^{q \times q}$

$$\begin{bmatrix} W & C_z \\ (*)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.222)$$

$$\begin{bmatrix} A'Y + YA - \sum_{j=1}^{N_C} \gamma_j R_j & YB_w \\ (*)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.223)$$

o controlador estritamente próprio (4.140–4.141) que minimiza a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é dado por (5.207) juntamente com

$$L = -(D'_{zu}D_{zu})^{-1}B'_u \quad (5.224)$$

$$F = -C_y(\gamma)'(D_{yw}D'_{yw})^{-1} \quad (5.225)$$

e  $X = P^{-1} + Y^{-1}$ , em que  $P > 0$  é a solução da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_u(D'_{zu}D_{zu})^{-1}B'_uP + C_zC'_z = 0 \quad (5.226)$$

calculados na solução ótima do problema de otimização semi-definida mista

$$\beta := \min_{\gamma \in \Gamma} \{ \text{tr}(W) : (5.222-5.223) \} \quad (5.227)$$

O valor do custo  $H_2$  ótimo pode ser calculado substituindo-se os valores das variáveis associadas à solução ótima do problema (5.227) na expressão

$$\min_{\gamma \in \Gamma, \tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \beta + \text{tr}(D'_{yw}F'Y^{-1}PY^{-1}FD_{yw}) \quad (5.228)$$

**Prova:** A prova deste corolário é dual à prova do Corolário 5.26. O único detalhe que gostaríamos de ressaltar é que o custo (5.228) provém da fatoração da matriz

$$\begin{aligned} B'_y B_y &= AY^{-1} + Y^{-1}A' + B_w B'_w \\ &= Y^{-1}FD_{yw}D'_{yw}F'Y^{-1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

obtida a partir da condição de otimalidade (veja (5.214))

$$A'Y + YA + YB_w B'_w Y = FD_{yw}D'_{yw}F'$$

o que completa a prova. ■

Estes resultados nos permitem formular um procedimento de seleção simultânea de atuadores e sensores para um caso particular, porém importante. Se não houver restrições que envolvam a seleção de atuadores e controladores simultaneamente, isto é, se não houver necessidade de considerar o conjunto  $\Delta$ , definido em (5.176), podemos idealizar um procedimento de projeto semelhante ao Algoritmo 5.2. Isto é, dada uma configuração inicial para os sensores, resolve-se o problema de projeto com seleção dos atuadores. Fixamos então a posição dos atuadores e resolvemos o problema de projeto dos sensores.

### Algoritmo 5.3

1. Para  $\gamma_k \in \Gamma$ , fixar

$$C_{yk} := C_y(\gamma_k) \quad (5.229)$$

e resolver o problema de otimização convexa

$$\alpha_k := \min \{ \gamma : (5.215-5.216) \} \quad (5.230)$$

2. Para  $\lambda_k \in \Lambda$ , fixar

$$B_{uk} := B_u(\lambda_k) \quad (5.231)$$

e resolver o problema de otimização convexa

$$\beta_k := \min \{ \gamma : (5.222-5.223) \} \quad (5.232)$$

3. Parar se  $\alpha_k - \beta_k < \varepsilon$ , em que  $\varepsilon > 0$  é um parâmetro que controla precisão requerida. Caso contrário, incrementar o contador  $k \leftarrow k + 1$  e voltar ao passo número 1.

Em alguns casos, este tipo de algoritmo poderá também ser utilizado para o projeto de controladores cujos problemas de seleção envolvam o conjunto  $\Delta$ . Em geral, se o conjunto  $\Delta$  contiver algum tipo de *contagem* do número de atuadores e sensores, este procedimento deve ser usado com cautela. Por exemplo, se houver uma restrição como (5.177), fica claro que a seleção dos sensores e atuadores que inicialmente satisfazem esta restrição nunca se alterará. Um outro exemplo é o caso em que a soma do número de sensores e atuadores a serem selecionados deve ser menor do que uma certa quantidade. Como o problema de controle usará todos os atuadores ou sensores disponíveis para obter o menor custo, nunca se alterará a relação entre o número de sensores e atuadores atribuída inicialmente.

Como no Algoritmo 5.2 formulamos, sem maiores dificuldades, o seguinte corolário.

**Corolário 5.28** *A seqüência gerada pelo Algoritmo 5.3 tem a seguinte propriedade*

$$\beta_{k+1} \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_k \leq \alpha_k \quad (5.233)$$

*Sendo o custo garantido  $H_2$  limitado inferiormente, este algoritmo converge para um ponto estacionário.*

Uma alternativa que provê controladores com desempenho sub-ótimo pode ser obtida por intermédio das propriedades de separação. Se repararmos bem na estrutura dos Corolários 5.26 e 5.27, notaremos que a estrutura das restrições se encontra praticamente “separável”. Por exemplo, no corolário 5.26, a equação de Riccati (5.219) possui todos os requisitos necessários para a utilização da estrutura de seleção de sensores (5.208). Um procedimento prático pode ser obtido a partir do próximo teorema.

**Teorema 5.29** *Definindo-se as desigualdades*

$$\begin{bmatrix} W_X & B'_Y \\ (\star)' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (5.234)$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' - \sum_{i=1}^{N_B} \lambda_i Q_i & XC'_z \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.235)$$

e

$$\begin{bmatrix} W_Y & C_X \\ (\star)' & Y \end{bmatrix} > 0 \quad (5.236)$$

$$\begin{bmatrix} A'Y + YA - \sum_{j=1}^{N_C} \gamma_j R_j & YB_w \\ (\star)' & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.237)$$

e as igualdades

$$B_Y = Y^{-1} C_y(\gamma)' (D_{yw} D'_{yw})^{-1} D_{yw} \quad (5.238)$$

$$C_X = D_{zu} (D'_{zu} D_{zu})^{-1} B_u(\lambda)' X^{-1} \quad (5.239)$$

um controlador estritamente próprio (4.140–4.141) que minimiza a norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é dado por

$$B_c := Y^{-1}F \quad C_c := LX^{-1} \quad A_c := A - B_c C_y(\gamma) + B_u(\lambda)C_c \quad (5.240)$$

em que

$$L = -(D'_{zu}D_{zu})^{-1}B_u(\lambda)' \quad (5.241)$$

$$F = -C_y(\gamma)'(D_{yw}D'_{yw})^{-1} \quad (5.242)$$

e as matrizes  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_X \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $W_Y \in \mathbb{R}^{q \times q}$  são as soluções de um dos problemas de otimização

$$\min_{\substack{(\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma) \in \Delta, \\ \tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min_{(\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma) \in \Delta} \{ \text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Y) : (5.234\text{--}5.237), (5.239), B_Y = B_w \} \quad (5.243)$$

ou

$$\min_{\substack{(\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma) \in \Delta, \\ \tilde{K}_c \in \mathcal{K}_c}} \|H_{wz}(s)\|_2^2 = \min_{(\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma) \in \Delta} \{ \text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Y) : (5.234\text{--}5.237), (5.238), C_X = C_z \} \quad (5.244)$$

**Prova:** Este teorema é decorrência direta do processo de dualização parcial discutido na Seção 4.3.3. Se tomamos, por exemplo,  $Z := Y$  podemos verificar que as desigualdades (5.234–5.237) do problema (5.243) são exatamente (4.232–4.236). A otimalidade provém da manutenção do acoplamento (5.239) via matriz  $C_X$ . Notemos que este acoplamento é não linear. O problema (5.244) é obtido por dualidade. ■

Conforme discutido na Seção 4.3.3, num problema  $H_2$  convencional, sem a seleção de sensores e atuadores, as soluções estabilizantes das equações de Riccati associadas às desigualdades (5.235) e (5.237) são únicas, e o controlador ótimo (porém não o custo  $H_2$  ótimo) pode ser obtido substituindo-se os termos não lineares (5.238–5.239) pelas matrizes  $B_w$  e  $C_z$ . Este resultado está no Lema 4.21. Para problemas  $H_2$  com seleção de sensores e atuadores, cada par de valores de  $(\lambda, \gamma)$  factíveis define soluções estabilizantes para equações de Riccati e os termos não lineares (5.238–5.239) devem ser, obrigatoriamente, levados em consideração na hora calcular o controlador associado ao custo ótimo. No entanto, o fato ao qual devemos prestar atenção é que, embora possamos deixar de atingir o custo  $H_2$  ótimo global, nada se perde em termos do domínio de factibilidade se simplesmente desprezarmos esse acoplamento não linear. Este procedimento sub-ótimo, contido no próximo corolário, pode ser identificado como um análogo do projeto por separação.

**Corolário 5.30** *Um controlador estritamente próprio (4.140–4.141) sub-ótimo com relação ao mínimo valor da norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wz}(s)$  é dado por (5.240–5.242) em que as matrizes  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_X \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e  $W_Y \in \mathbb{R}^{q \times q}$  são as soluções do problema de otimização semi-definida mista*

$$\min_{(\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma) \in \Delta} \{ \text{tr}(W_X) + \text{tr}(W_Y) : (5.234\text{--}5.237), B_Y = B_w, C_X = C_z \} \quad (5.245)$$

A principal vantagem do uso deste corolário é que podemos tratar simultaneamente restrições nos conjuntos  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  e  $\Delta$ . Apesar da perda da otimalidade global, o resultado obtido é, segundo a nossa experiência,

satisfatório. Percebamos que as restrições (5.234–5.235) com  $B_Y = B_w$  são exatamente as restrições do problema de realimentação do estado dadas no Teorema 5.23. Por outro lado, as restrições (5.236–5.237) com  $C_X = C_z$  são nada mais do que as restrições do problema de estimação do estado (veja Seção 4.3.3). Por esta razão, ao invocarmos o problema (5.245) estamos apenas resolvendo o problema de seleção de atuadores e sensores num contexto de separação. É interessante percebermos que este procedimento é de fato separável, isto é, pode ser dividido nas etapas de realimentação do estado mais estimação do estado, caso não tenhamos que considerar o conjunto de restrições cruzadas  $\Delta$ . O exemplo numérico, a ser apresentado em seguida, provê mais informações a este respeito.

**Exemplo 5.14** Os dados deste exemplo foram obtidos em [100]. Este exemplo foi também objeto de investigação dos artigos [81, 52, 29, 31]. O nosso objetivo é analisar diversas estratégias de controle de um satélite geo-estacionário em órbita circular envolvendo o posicionamento de atuadores e a seleção de sensores. Se supusermos que o controle da inclinação (do inglês *pitch*) é independente do controle da guinada (do inglês *roll-yaw*) obtemos as matrizes referentes às equações linearizadas da dinâmica da guinada [100]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (1+k_y) & k_y & 0 \\ -(1-k_x) & 0 & 0 & -4k_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_u = \begin{bmatrix} \frac{I_z}{I_y} \cos \beta \\ \frac{I_z}{I_x} \cos \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são, respectivamente, as velocidades angulares da guinada e rolamento e  $x_3$  e  $x_4$  são os ângulos de guinada e rolamento,

$$k_x = \frac{I_z - I_y}{I_x} \quad k_y = \frac{I_x - I_z}{I_y}$$

e  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são constantes associadas aos momentos de inércia nas três direções. Como em [81, 100] consideramos que as razões entre estas constantes são

$$\frac{I_z}{I_x} = \frac{7}{6} \quad \frac{I_x}{I_y} = 3$$

o que produz um modelo de satélite estável. Embora estável, o satélite associado a estas constantes não é assintoticamente estável, apresentado alguns pólos sobre o eixo imaginário.

Devemos escolher qual a direção mais adequada para a colocação dos atuadores, que são jatos. Esta dependência da posição está representada na matriz  $B_u$  por intermédio dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que, devido às dimensões geométricas do satélite, devem obedecer

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$$

Para gerar uma matriz  $B_u(\lambda)$  nos moldes de (5.172) nós tomamos 91 pontos igualmente distribuídos no conjunto  $\alpha \in [0, \pi/2]$ . Para que posicionemos apenas um jato incluímos a restrição linear sobre  $\lambda$

$$\sum_{i=1}^{91} \lambda_i \leq 1$$

O problema a ser inicialmente resolvido é o de selecionar  $\alpha$  e, conseqüentemente,  $\beta$  que maximiza a norma  $H_2$  em malha aberta da função de transferência  $H_{uy}(s)$  definida a partir de (5.170–5.171). Como desejamos projetar um controlador por realimentação do estado definimos

$$C_y = I_{n \times n}$$

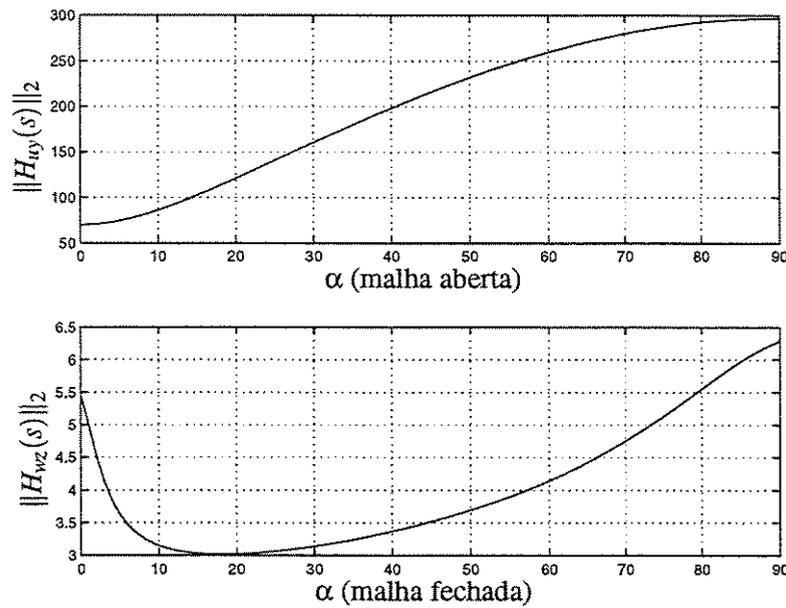


Figura 5.11: Controle por realimentação do estado com seleção de atuadores

Podemos resolver este problema com os resultados da Seção 5.7.2. Dado que o modelo não é assintoticamente estável, procedemos como em [81] e deslocamos o eixo imaginário para a direita em 0.0001. Como o número de atuadores a serem posicionados é apenas um, o valor ótimo de  $\lambda$  pode ser obtido simplesmente determinando o máximo valor de  $q_i$  calculado pelo Teorema 5.20. A solução ótima provê o valor

$$\alpha = 90^\circ \quad \|H_{uy}(s)\|_2 = 300.0$$

O primeiro gráfico da Figura 5.11 ilustra o caráter ótimo desta escolha mostrando os valores da norma  $H_2$  de  $H_{uy}(s)$  em função de  $\alpha$ .

Em seguida, para efeito de otimização em norma  $H_2$  em malha fechada definimos as matrizes

$$B_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{I}_{n \times n} \end{bmatrix} \quad C_z = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{91 \times n} \end{bmatrix} \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 91} \\ \mathbf{I}_{91 \times 91} \end{bmatrix}$$

e resolvemos o problema de minimização da norma  $H_2$  da função de transferência  $H_{wz}(s)$  para o modelo linear contínuo (4.2–4.3) por meio do Corolário 5.26. Para obter a solução global do problema (5.206) utilizamos o algoritmo de decomposição do tipo Benders apresentado no Apêndice B (Algoritmo B.1). Partindo do ponto inicial  $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$  obtemos a solução ótima em 16 iterações. A solução em malha fechada é

$$\alpha = 18^\circ \quad \|H_{wz}(s)\|_2 = 3.0$$

O segundo gráfico da Figura 5.11 mostra a norma  $H_2$  dos controladores ótimos  $H_2$  em função de  $\alpha$ . Notemos que o valor obtido para  $\alpha$  em malha aberta não garante um bom desempenho em malha fechada. O controlador  $H_2$  ótimo associado ao valor de  $\alpha$  ótimo obtido em malha aberta provê um custo  $H_2$  para  $H_{wz}(s)$  de 6.25, que é aproximadamente o dobro do valor ótimo global. Este comportamento justifica nossas ressalvas quanto ao uso de estratégias de seleção em malha aberta. ♦

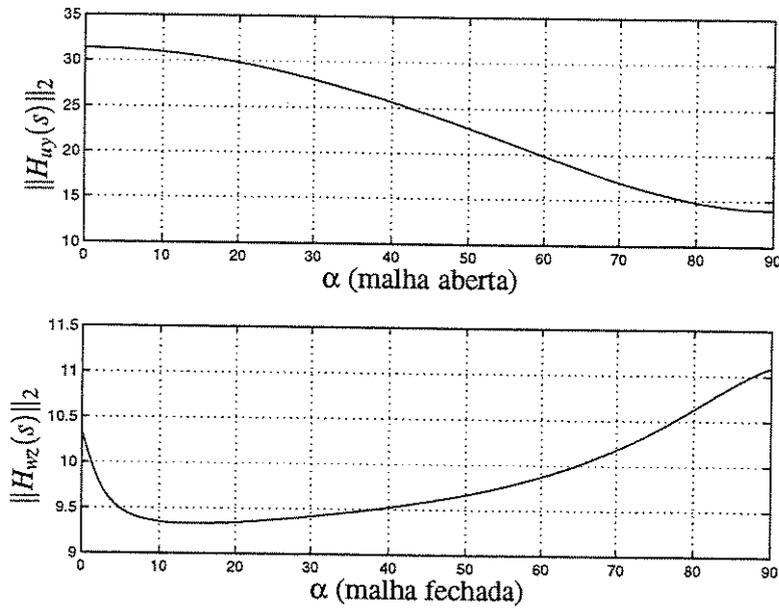


Figura 5.12: Controle por realimentação da saída com seleção de atuadores

**Exemplo 5.15** Para o mesmo modelo utilizado no Exemplo 5.14, consideramos agora o projeto de um controlador por realimentação da saída. Como em [81], consideramos que apenas o ângulo de guinada é mensurável, isto é, temos uma matriz de saída

$$C_y = [ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ]$$

Resolvendo o problema de maximização em malha aberta da norma  $H_2$  de  $H_{uy}(s)$  obtemos a solução ótima

$$\alpha = 0^\circ \qquad \|H_{uy}(s)\|_2 = 31.6$$

O primeiro gráfico da Figura 5.12 apresenta os valores da norma  $H_2$  de  $H_{uy}(s)$  em função de  $\alpha$ .

Resolvemos o problema em malha fechada tomando as mesmas matrizes definidas no Exemplo 5.14 juntamente com

$$D_{yw} = [1 \ 0_{1 \times n}]$$

Para tal, utilizamos o Corolário 5.26 e o Algoritmo B.1. Partindo novamente do ponto inicial  $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$  obtivemos o ótimo global

$$\alpha = 14^\circ \qquad \|H_{wz}(s)\|_2 = 9.33$$

em 12 iterações. Os valores mínimos da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  em função de  $\alpha$  estão no segundo gráfico da Figura 5.12. Em malha fechada, a solução do procedimento de otimização em malha aberta fornece um valor de custo sub-ótimo 10.39. É interessante notar que, com relação ao exemplo 5.14, houve apenas uma ligeira modificação no valor do ângulo ótimo, que se deslocou de  $18^\circ$  para  $14^\circ$ . Por outro lado, o valor do ângulo ótimo obtido pelo procedimento em malha aberta variou de  $90^\circ$  a  $0^\circ$ . ♦

**Exemplo 5.16** Aproveitando o modelo introduzido nos Exemplos 5.14 e 5.15, resolvemos um problema um pouco mais complexo, com seleção simultânea de sensores e atuadores. Começamos por definir a variável  $\gamma \in \mathbb{B}^6$  e a matriz de saída

$$C_y(\gamma) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 \\ -\gamma_5 & \gamma_5 & \gamma_5 & 0 \\ 0 & \gamma_6 & 0 & \gamma_6 \end{bmatrix}$$

Desejamos obter a melhor configuração para o atuador e a melhor escolha para a linha de medição implementando um controlador por realimentação da saída. Apenas um canal de medição deve ser considerado, portanto, adicionamos a restrição linear sobre  $\gamma$

$$\sum_{j=1}^6 \gamma_j \leq 1$$

Para resolver o problema de maximização em malha aberta da norma  $H_2$  da matriz de transferência  $H_{wy}(s)$ , calculamos os termos  $qr_{i,j}$  definidos no Teorema 5.22. Como devemos selecionar apenas um sensor e um atuador, o máximo global está associado ao máximo valor de  $qr_{i,j}$ . A solução ótima em malha aberta é

$$\alpha = 90^\circ \quad \gamma_{(j=5)} = 1 \quad \|H_{wy}(s)\|_2 = 302.0$$

Voltando a nossa atenção para o projeto em malha fechada, utilizamos o Algoritmo 5.3 e obtemos a solução sub-ótima

$$\alpha = 15^\circ \quad \gamma_{(j=5)} = 1 \quad \|H_{wz}(s)\|_2 = 5.14$$

Inicializamos este algoritmo com o mesmo ponto inicial utilizado nos Exemplos 5.14 e 5.15. O algoritmo converge em uma iteração e meia. O número de iterações do Algoritmo B.1, utilizado para solucionar os problemas nos passos 1 e 2 do Algoritmo 5.3, foram, respectivamente, 14, 4 e 16.

Projetamos também um controlador por meio do Corolário 5.30. Como não temos que considerar o conjunto de restrições cruzadas  $\Delta$ , o processo de obtenção deste controlador pode ser realizado em duas etapas: a solução do problema de realimentação do estado seguida da solução do problema de estimação do estado. O problema de realimentação do estado já se encontra resolvido no Exemplo 5.14, restando apenas o cálculo do estimador do estado ótimo. Utilizando o Algoritmo B.1 obtemos em 5 iterações o estimador do estado ótimo que, juntamente com a solução da realimentação do estado, obtida no Exemplo 5.14, fornece o controlador sub-ótimo

$$\alpha = 18^\circ \quad \gamma_{(j=5)} = 1 \quad \|H_{wz}(s)\|_2 = 5.16$$

Estas soluções podem ser comparadas na Figura 5.13, na qual mostramos o valor da norma  $H_2$  de  $H_{wz}(s)$  em função de  $\alpha$  para as possíveis escolhas dos sensores  $\gamma_j$ ,  $j = \{1, 3, 5\}$ . As normas de  $H_{wz}(s)$  correspondentes às escolhas  $\gamma_j$ ,  $j = \{2, 4, 6\}$ , não aparecem na figura porque seus valores são muito elevados. Notemos que a solução obtida em malha aberta corresponde a um valor de  $\|H_{wz}(s)\|_2$  que está por volta de 7.6. Este valor está muito acima do valor mínimo global. É importante ressaltar que nenhum dos procedimentos foi capaz de obter a solução ótima

$$\alpha = 32^\circ \quad \gamma_{(j=1)} = 1 \quad \|H_{wz}(s)\|_2 = 5.04$$

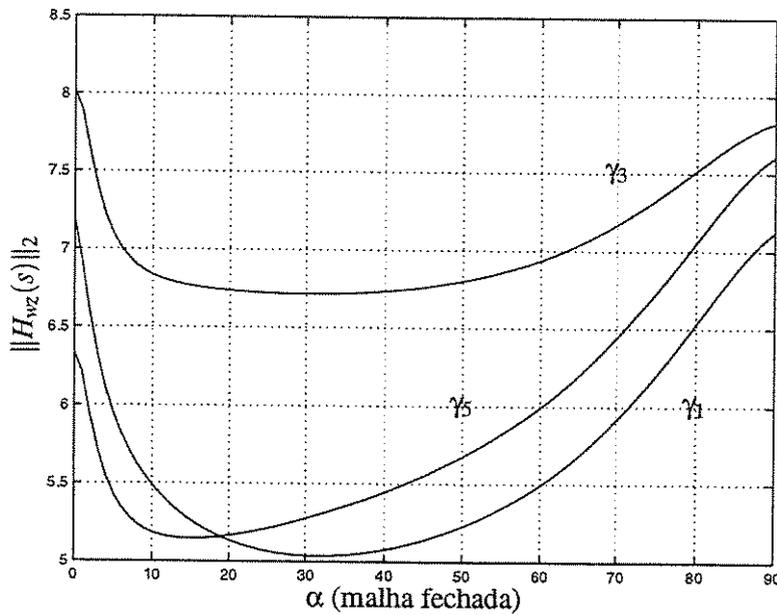


Figura 5.13: Controle por realimentação da saída com seleção simultânea de atuadores e sensores

porém os desempenhos sub-ótimos obtidos são no máximo 2% piores do que o desempenho ótimo.

Finalmente avaliamos o comportamento numérico dos procedimentos propostos. Uma maneira, digamos, ingênua de obter o ótimo global é avaliar todas as possíveis seleções para os sensores e atuadores. Neste exemplo, devemos resolver  $91 \times 6 = 546$  programas de otimização semi-definida pura. Utilizando as estratégias propostas obtemos soluções que são apenas 2% piores do que o ótimo global reduzindo o número de resoluções de problemas semi-definidos para  $14 + 4 + 16 = 34$  (Algoritmo 5.3) ou  $16 + 5 = 21$  (Corolário 5.30). Neste caso, as restrições lineares sobre as variáveis  $\lambda$  e  $\gamma$  tornam muito pequeno o custo associado à resolução dos programas lineares mistos requeridos pelo problema *mestre* do Algoritmo B.1, se comparado com o custo de resolução dos programas semi-definidos do problema *escravo* (veja também [52]).

## Capítulo 6

# Conclusões e perspectivas

Concluimos esta dissertação enumerando as nossas contribuições e delineando algumas perspectivas de extensão em pesquisa futura. Iniciemos pelas contribuições:

- Obtenção de condições necessárias e suficientes de estabilidade para sistemas contínuos e discretos cuja matriz dinâmica apresente-se na forma do produto  $AB$ . Aplicação destes resultados à análise de robustez com funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros e à análise de  $D$  estabilidade.
- Obtenção de uma condição necessária e suficiente de estabilidade para sistemas discretos, denominada condição de estabilidade estendida, que não apresenta o produto da matriz dinâmica pela matriz de Lyapunov. Aplicação à análise de robustez com funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros e extensão dos resultados para o cálculo das normas  $H_2$  e  $H_\infty$ .
- Obtenção de parametrizações convexas para os problemas de filtragem, controle por realimentação do estado e por realimentação dinâmica da saída, capazes de lidar com problemas de projeto nos diversos contextos de análise definidos no Capítulo 2 e na Seção 3.2. Apresentação de uma descrição homogênea destas parametrizações, que traça as relações com os resultados clássicos baseados na resolução de equações de Riccati. Discussão das propriedades de separação no projeto de controladores por realimentação dinâmica da saída.
- Resolução do problema de controle positivo-real por realimentação da saída.
- Resolução do problema de filtragem quadrática para sistemas com incertezas poliedrais.
- Proposição de dois procedimentos de projeto de controladores robustos por realimentação dinâmica da saída para sistemas com incertezas poliedrais. O primeiro é uma generalização do projeto por separação e o segundo é baseado em um algoritmo iterativo.
- Resolução dos problemas robustos de filtragem e controle por realimentação do estado levando em conta as condições suficientes de estabilidade com funções de Lyapunov dependentes dos parâmetros no caso discreto.
- Proposta de solução do problema de controle de sistemas discretos com múltiplos objetivos. O método proposto permite superar a restrição de unicidade das matrizes de Lyapunov utilizadas nos objetivos envolvidos. Este procedimento aplica-se ao problema particular de controle misto  $H_2/H_\infty$ , que tem espaço importante na literatura [8].

- Resolução do problema de controle  $H_2$  com seleção simultânea de sensores e atuadores em diversos contextos. Os procedimentos descritos permitem obter soluções ótimas globais sempre que houver seleção apenas dos sensores ou apenas dos atuadores. No caso geral, propomos dois procedimentos de seleção sub-ótimos: um baseado num algoritmo iterativo e outro baseado nas propriedades de separação.
- Proposta de um algoritmo capaz de obter as soluções de problemas de programação semi-definida mista. A estratégia utilizada é derivada do algoritmo de decomposição de Benders generalizado.

As possibilidades de extensão destes resultados são várias. A seguir, listamos algumas idéias que acreditamos serem as mais promissoras:

- Obtenção de análogos contínuos para as condições estendidas da Seção 3.2. Estudos preliminares indicam que esta pode ser uma tarefa complexa.
- Aplicação das condições estendidas de estabilidade à análise de sistemas com saltos markovianos e ao projeto de controladores sem observação completa do estado da cadeia de Markov.
- Desenvolvimento de condições de estabilidade e desempenho robustos e projeto de controladores para sistemas dinâmicos cujos vetores de estado estejam sujeitos a perturbações não lineares limitadas a setores. Um caso particular deste problema foi recentemente proposto em [19, 20].
- Estudo de um procedimento de projeto de controladores por realimentação estática da saída combinando realimentação estática do estado com filtragem estática. Pretendemos explorar o fato de ambos os problemas serem formulados como desigualdades matriciais lineares (veja discussão acima do Corolário 4.9, na Seção 4.2).
- Estudo do desempenho de algoritmos iterativos coordenados (do inglês *coordinate-descent*) do tipo  $K - G$  utilizando as condições estendidas da Seção 3.2. Isto é, um algoritmo em que, ora os parâmetros do filtro ou controlador ( $K$ ) se encontram fixos, ora a matriz auxiliar ( $G$ ) se encontra fixa. A idéia básica é que, dada uma matriz  $G$ , podemos formular os mais diversos problemas de filtragem e controle diretamente em função dos parâmetros do filtro ou controlador sem que haja necessidade de se fixar a matriz de Lyapunov ( $P$ ).
- Extensão dos resultados em alocação de sensores e atuadores para os demais problemas de otimização LMI, como otimização em norma  $H_\infty$ , positividade real, etc.
- Implementação cuidadosa e análise do desempenho de algoritmos para resolução de programas semi-definidos mistos, por exemplo, nos moldes do Algoritmo B.1.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. ACKERMAN, *Robust Control: systems with uncertain physical parameters*, Springer Verlag, 1993.
- [2] A. ALBERT, *Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses*, SIAM Journal on Applied Mathematics, 17 (1969), pp. 434–440.
- [3] B. D. O. ANDERSON E J. B. MOORE, *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [4] ———, *Optimal Filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979.
- [5] ———, *Optimal Control: linear quadratic methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [6] K. J. ARROW E M. MCMANUS, *A note on dynamic stability*, Econometrica, 26 (1958), pp. 448–454.
- [7] K. J. ÅSTRÖM E B. WITTENMARK, *Computer Controlled Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [8] E. BAEYENS E P. P. KHARGONEKAR, *Some examples in mixed  $H_2/H_\infty$  control*, in Proceedings of the American Control Conference, Baltimore, Maryland, 1994.
- [9] B. R. BARMISH, *Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system*, JOTA, 46 (1985), pp. 399–408.
- [10] M. S. BAZARAA, H. D. SHERALI E C. M. SHETTY, *Nonlinear Programming: theory and algorithms*, John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, 1993.
- [11] J. BERNUSSOU, J. DAAFOUZ, J. C. GEROMEL E M. C. DE OLIVEIRA, *On strict positive real systems design: guaranteed cost and robustness issues*, in Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, 1997, pp. 1299–1304.
- [12] J. BERNUSSOU, J. C. GEROMEL E M. C. DE OLIVEIRA, *On strict positive real systems design: guaranteed cost and robustness issues*, Systems & Control Letters, 36 (1999), pp. 135–141.
- [13] J. BERNUSSOU, J. C. GEROMEL E P. L. D. PERES, *A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems*, Systems & Control Letters, 13 (1989), pp. 65–72.
- [14] A. BHAYA E E. KASZKUREWICZ, *On discrete-time diagonal and D-stability*, Linear Algebra and Its Applications, 187 (1993), pp. 87–104.

- [15] S. P. BOYD E C. H. BARRATT, *Linear Controller Design: limits of performance*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [16] S. P. BOYD, L. EL GHAOUI, E. FERON E V. BALAKRISHNAN, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [17] D. CARLSON, *What are schur complements, anyway?*, *Linear Algebra and Its Applications*, 74 (1986), pp. 257–275.
- [18] C. T. CHEN, *Introduction to Linear Systems Theory*, Rinehart and Wiston, New York, NY, 1986.
- [19] Y.-C. CHU E K. GLOVER, *Bounds of the induced norm and model reduction errors for systems with repeated scalar nonlinearities*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (1999), pp. 471–483.
- [20] ———, *Stabilization and performance synthesis for systems with repeated scalar nonlinearities*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 (1999), pp. 484–496.
- [21] P. COLANERI, J. C. GEROMEL E A. LOCATELLI, *Control Theory and Design: An  $RH_2 - RH_\infty$  viewpoint*, Academic Press, 1997.
- [22] E. J. DAVISON E T. N. CHANG, *Decentralized controller design using parameter methods*, *Control Theory and Advanced Technology*, 2 (1986), pp. 131–154.
- [23] D. P. DE FARIAS, M. C. DE OLIVEIRA E J. C. GEROMEL, *Mixed  $H_2/H_\infty$  control of flexible structures*, in *Proceedings of the IFAC World Congress*, Beijing, China, 1999.
- [24] M. C. DE OLIVEIRA, *Algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares*, Tese de Mestrado, FEEC / UNICAMP, 1996.
- [25] M. C. DE OLIVEIRA, J. BERNUSSOU E J. C. GEROMEL, *A new approach to Lyapunov based controller design*. Artigo submetido.
- [26] ———, *A new discrete-time robust stability condition*. Artigo aceito para publicação em *Systems & Control Letters*.
- [27] M. C. DE OLIVEIRA, D. P. DE FARIAS E J. C. GEROMEL, *LMISol — User's Guide*, LAC / DT / FEEC / UNICAMP, 1997. <http://www.dt.fee.unicamp.br/~carvalho>.
- [28] M. C. DE OLIVEIRA E J. C. GEROMEL, *Design of decentralized dynamic output feedback controllers via a separation procedure*. Artigo submetido.
- [29] ———, *Linear output feedback controller design with joint selection of sensors and actuators*. Artigo aceito para publicação em *IEEE Transactions on Automatic Control* (em revisão).
- [30] ———, *Numerical comparison of output feedback design methods*, in *Proceedings of the American Control Conference*, vol. 1, Albuquerque, NM, 1997, pp. 72–76.
- [31] ———, *Linear output feedback controller design with joint selection of sensors and actuators*, in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, FL, 1998, pp. 4356–4361.
- [32] M. C. DE OLIVEIRA, J. C. GEROMEL E J. BERNUSSOU, *An LMI optimization approach to multiobjective and robust  $H_\infty$  controller design for discrete-time systems*. Artigo submetido.

- [33] M. C. DE OLIVEIRA, J. C. GEROMEL E L. HSU, *LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case*. Artigo aceito para publicação em *Linear Algebra and Its Applications*.
- [34] R. C. DORF E R. H. BISHOP, *Modern Control Systems*, Addison Wesley, Menlo Park, CA, 1997.
- [35] J. C. DOYLE, K. GLOVER, P. P. KHARGONEKAR E B. A. FRANCIS, *State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34 (1989), pp. 831–847.
- [36] M. M. EKANAYAKE, K. PREMARATNE E E. I. YURI, *Some corrections on 'Discrete-time positive-real lemma revisited: the discrete-time counterpart of the Kalman-Yakubovitch lemma'*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: fundamental theory and applications*, 43 (1996), pp. 707–708.
- [37] L. EL GHAOU, F. OUSTRY E M. AITRAMI, *A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (1997), pp. 1171–1176.
- [38] M. K. H. FANS, A. L. TITS E J. C. DOYLE, *Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36 (1991), pp. 25–38.
- [39] E. FERON, P. APKARIAN E P. GAHINET, *Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 (1996), pp. 1041–1046.
- [40] A. V. FIACCO E G. P. MCCORMICK, *Nonlinear Programming: sequential unconstrained minimization techniques*, John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, 1968.
- [41] B. A. FRANCIS, *A Course in  $H_\infty$  Control Theory*, Springer-Verlag, New York, NY, 1987.
- [42] M. FU, C. E. DE SOUZA E L. XIE,  *$H_\infty$  estimation for linear uncertain systems*, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2 (1992), pp. 87–105.
- [43] P. GAHINET, *Explicit controller formulas for LMI-based  $H_\infty$  synthesis*, *Automatica*, 32 (1996), pp. 1007–1014.
- [44] P. GAHINET E P. APKARIAN, *A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control*, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4 (1994), pp. 421–448.
- [45] P. GAHINET, P. APKARIAN E M. CHILALY, *Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 (1996), pp. 436–442.
- [46] P. GAHINET, A. NEMIROVSKII, A. J. LAUB E M. CHILALI, *The LMI control toolbox*, in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL, 1994, pp. 1154–1170.
- [47] P. B. GAPSKI, *Passividade no Estudo de Robustez de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo*, Tese de Doutorado, FEEC / UNICAMP, 1998.
- [48] P. B. GAPSKI E J. C. GEROMEL, *A convex approach to the absolute stability problem*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 (1994), pp. 1929–1932.

- [49] A. M. GEOFFRION, *Elements of large scale mathematical programming*, in *Perspectives on Optimization: a collection of expository articles*, A. M. Geoffrion, ed., Addison-Wesley, 1972, pp. 25–64.
- [50] —, *Generalized benders decomposition*, *JOTA*, 10 (1972).
- [51] J. C. GEROMEL, *On the determination of a diagonal solution of the Lyapunov equation*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30 (1985), pp. 404–406.
- [52] —, *Convex analysis and global optimization of joint actuator location and control problems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34 (1989), pp. 711–720.
- [53] —, *Optimal linear filtering under parameter uncertainty*, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47 (1999), pp. 168–175.
- [54] J. C. GEROMEL E J. BERNUSSOU, *Optimal decentralized control of dynamic systems*, *Automatica*, 18 (1982), pp. 545–557.
- [55] J. C. GEROMEL, J. BERNUSSOU E M. C. DE OLIVEIRA,  *$H_2$  norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control*. A ser publicado em *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [56] —,  *$H_2$  norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control*, in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, 1997, pp. 1307–1312.
- [57] J. C. GEROMEL, J. BERNUSSOU, G. GARCIA E M. C. DE OLIVEIRA,  *$H_2$  and  $H_\infty$  robust filtering for discrete-time linear systems*. Artigo submetido.
- [58] —,  *$H_2$  and  $H_\infty$  robust filtering for discrete-time linear systems*, in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, FL, 1998, pp. 632–637.
- [59] J. C. GEROMEL, J. BERNUSSOU E P. L. D. PERES, *Decentralized control through parameter space optimization*, *Automatica*, 30 (1994), pp. 1565–1578.
- [60] J. C. GEROMEL E M. C. DE OLIVEIRA,  *$H_2$  and  $H_\infty$  robust filtering for convex bounded uncertain systems*. A ser publicado em *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [61] —, *Output peak value optimization for discrete-time linear systems*, in *IFAC Symposium on Robust Control Design*, Budapest, Hungary, 1997, pp. 241–246.
- [62] —,  *$H_2$  and  $H_\infty$  robust filtering for convex bounded uncertain systems*, in *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, FL, 1998, pp. 146–151.
- [63] J. C. GEROMEL, M. C. DE OLIVEIRA E J. BERNUSSOU, *Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions*. Artigo submetido.
- [64] —, *Otimização da norma  $H_2$  de controladores dinâmicos de saída com restrições: controles robusto e descentralizado*, in *Anais do Congresso Brasileiro de Automatica*, Uberlândia, MG, Brazil, 1998, pp. 2031–2036.
- [65] J. C. GEROMEL, M. C. DE OLIVEIRA E L. HSU, *LMI characterization of structural and robust stability*, *Linear Algebra and Its Applications*, 285 (1998), pp. 69–80.

- [66] ———, *LMI characterization of structural and robust stability*, in Proceedings of the American Control Conference, San Diego, CA, 1999.
- [67] J. C. GEROMEL, C. C. DE SOUZA E R. E. SKELTON, *LMI numerical solution for output feedback stabilization*, in Proceedings of the American Control Conference, 1994, pp. 40–44.
- [68] J. C. GEROMEL, C. C. DE SOUZA E R. E. SKELTON, *Static output feedback controllers: stability and convexity*, IEEE Transactions on Automatic Control, 43 (1998), pp. 120–125.
- [69] J. C. GEROMEL E P. B. GAPSKI, *Synthesis of positive real  $H_2$  controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control, 42 (1997), pp. 988–992.
- [70] J. C. GEROMEL, P. L. D. PERES E J. BERNUSSOU, *On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, 29 (1991), pp. 381–402.
- [71] J. C. GEROMEL, P. L. D. PERES E S. R. DE SOUZA, *A convex approach to the mixed  $H_2/H_\infty$  control problem for discrete time uncertain systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, 33 (1995), pp. 1816–1833.
- [72] ———, *Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance*, IEEE Transactions on Automatic Control, 41 (1996), pp. 997–1003.
- [73] M. X. GOEMANS E D. P. WILLIAMSON, *Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming*, Journal of ACM, 42 (1995), pp. 1115–1145.
- [74] W. M. HADDAD E D. S. BERNSTEIN, *Parameter dependent Lyapunov functions and the discrete-time Popov criterion in robust analysis and synthesis*, Automatica, 30 (1994), pp. 1015–1021.
- [75] ———, *Parameter dependent Lyapunov functions and the Popov criterion in robust analysis and synthesis*, IEEE Transactions on Automatic Control, 40 (1995), pp. 536–543.
- [76] W. M. HADDAD E V. KAPILA, *Robust stabilization for discrete-time systems with slowly time-varying uncertainty*, Journal of the Franklin Institute – Engineering and Applied Mathematics, 333B (1996), pp. 71–84.
- [77] D. HERSHKOWITZ, *Recent directions in matrix stability*, Linear Algebra and Its Applications, 171 (1992), pp. 161–186.
- [78] T. IWASAKI, *Robust performance analysis for systems with structured uncertainty*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 6 (1996), pp. 85–99.
- [79] B. N. JAIN, *Guaranteed error estimation in uncertain systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 20 (1975), pp. 230–232.
- [80] C. R. JOHNSON, *Sufficient conditions for D-stability*, Journal of Economic Theory, 9 (1974), pp. 53–62.
- [81] P. T. KABAMBA, S. M. MEERKOV E E. K. POH,  *$H_2$  optimal zeros*, IEEE Transactions on Automatic Control, 39 (1994), pp. 1298–1301.

- [82] R. E. KALMAN, *The theory of optimal control and the calculus of variations*, in *Mathematical Optimization Techniques*, R. M. Bellman, ed., University of California Press, 1963, cap. 16.
- [83] N. K. KARMAKAR, M. G. C. REZENDE E K. G. RAMAKRISHNAN, *An interior point algorithm to solve computationally difficult set covering problems*, *Mathematical Programming*, 52 (1991), pp. 597–618.
- [84] E. KASZKUREWICZ E A. BHAYA, *Robust stability and diagonal Lyapunov functions*, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 14 (1993), pp. 508–520.
- [85] E. KASZKUREWICZ E L. HSU, *A note on the absolute stability of nonlinear discrete time systems*, *International Journal of Control*, 40 (1984), pp. 867–869.
- [86] P. P. KHARGONEKAR, I. R. PETERSEN E K. ZHOU, *Robust stabilization of uncertain systems: quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35 (1990), pp. 356–361.
- [87] P. P. KHARGONEKAR E M. A. ROTEA, *Mixed  $H_2/H_\infty$  control: a convex optimization approach*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39 (1991), pp. 824–837.
- [88] P. P. KHARGONEKAR, M. A. ROTEA E E. BAYENS, *Mixed  $H_2/H_\infty$  filtering*, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6 (1996), pp. 313–330.
- [89] V. KHARITONOV, *Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations*, *Differential Equations*, 14 (1979), pp. 26–35.
- [90] R. KRTOLICA E D. D. SILJAK, *Suboptimality of decentralized control of dynamic systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25 (1980), pp. 78–83.
- [91] A. M. LETOV, *Analytical controller design, Part I*, *Automation and Remote Control*, 21 (1960), pp. 303–306.
- [92] D. G. LUENBERGER, *Observing the state of a linear system*, *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8 (1964), pp. 74–80.
- [93] ———, *Optimization by Vector Space Methods*, John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, 1969.
- [94] ———, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison Wesley, 1973.
- [95] ———, *Introduction to dynamic systems*, John Wiley & Sons, Inc, 1979.
- [96] I. MASUBUCHI, A. OHARA E N. SUDA, *LMI-based controller synthesis: A unified formulation and solution*, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8 (1998), pp. 669–686.
- [97] R. K. MEHRA, *Optimization of measurement schedules and sensor designs for linear dynamic systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21 (1976), pp. 55–64.
- [98] A. N. MICHEL E R. K. MILLER, *Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems*, Academic Press, 1977.
- [99] J. E. MITCHELL, *Interior point methods for combinatorial optimization*, rel. tec., RPI Mathematical Science Report No. 217, 1995.

- [100] P. C. MÜLLER E H. I. WEBBER, *Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems*, Automatica, 8 (1972), pp. 237–246.
- [101] K. M. NAGPAL E P. P. KHARGONEKAR, *Filtering and smothing in an  $H_\infty$  setting*, IEEE Transactions on Automatic Control, 36 (1991), pp. 152–166.
- [102] G. NEMHAUSER E L. WOLSEY, *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, NY, 1988.
- [103] Y. E. NESTEROV E A. NEMIROVSKII, *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- [104] J. O'REILLY, *Observers for Linear Systems*, Academic Press, 1983.
- [105] G. PARKER E R. RARDIN, *Discrete Optimization*, Academic Press, Orlando, FL, 1988.
- [106] P. L. D. PERES E J. C. GEROMEL, *An alternate numerical solution to the linear-quadratic problem*, IEEE Transactions on Automatic Control, 39 (1994), pp. 198–202.
- [107] S. K. PERSIDSKII, *Problem on absolute stability*, Automat. Remote Control, 12 (1969), pp. 1889–1895.
- [108] I. R. PETERSEN E D. C. MACFARLANE, *Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 39 (1994), pp. 1971–1977.
- [109] ———, *Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 6 (1996), pp. 267–280.
- [110] K. PREMARATNE E E. I. YURI, *Discrete-time positive-real lemma revisited: the discrete-time counterpart of the Kalman-Yakubovitch lemma*, IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: fundamental theory and applications, 41 (1994), pp. 747–750.
- [111] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
- [112] M. A. ROTEA, *The generalized  $H_2$  problem*, Automatica, 29 (1993), pp. 373–385.
- [113] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill International, Singapore, 1987.
- [114] H. SALKIN E K. MATHUR, *Foundations of Integer Programming*, North Holland, NJ, 1989.
- [115] N. S. SANDELL, P. VARAYIA, M. ATHANS E M. G. SAFONOV, *Survey of decentralized control methods for large scale systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 23 (1978), pp. 108–128.
- [116] C. SCHERER, *Mixed  $H_2/H_\infty$  control*, in Trends in control: a european perspective, A. Isidori, ed., Springer-Verlag, Berlin, 1995, pp. 173–216.
- [117] C. SCHERER, P. GAHINET E M. CHILALI, *Multiobjective output-feedback control via LMI optimization*, IEEE Transactions on Automatic Control, 42 (1997), pp. 896–911.
- [118] U. SHAKED E C. E. DE SOUZA, *Robust minimum variance filtering*, IEEE Transactions on Signal Processing, 43 (1995), pp. 2474–2483.
- [119] U. SHAKED E Y. THEODOR,  *$H_\infty$  optimal estimation: a tutorial*, in Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, AZ, 1992.

- [120] D. D. SILJAK, *Large Scale Dynamic Systems: stability and structure*, North Holland, NJ, 1978.
- [121] R. E. SKELTON E D. CHIN, *Optimal selection of inputs and outputs in linear stochastic systems*, Journal of Astronautical Sciences, 31 (1983).
- [122] R. E. SKELTON E M. L. DELORENZO, *Selection of noisy actuators and sensors in linear stochastic systems*, Large Scale Systems, 31 (1983).
- [123] W. SUN, P. P. KHARGONEKAR E D. SHIM, *Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 39 (1994), pp. 2034–2046.
- [124] V. L. SYRMOIS, C. T. ABDALLAH, P. DORATO E K. GRIGORIADIS, *Static output feedback - a survey*, Automatica, 33 (1997).
- [125] H. A. TAHA, *Integer Programming: theory, applications and computations*, Academic Press, Orlando, FL, 1975.
- [126] H. TOKUNAGA, T. IWASAKY E S. HARA, *Multi-objective robust control with transient specifications*, in Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 1996, pp. 3482–3483.
- [127] L. VANDENBERGHE E S. P. BOYD, *Semidefinite programming*, SIAM Review, 38 (1996), pp. 49–95.
- [128] R. J. VEILLETTE, S. V. MEDANIC E W. R. PERKINS, *Design of reliable control systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 37 (1992), pp. 280–304.
- [129] M. VIDYASAGAR, *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [130] D. A. WILSON, *Convolution and Hankel operator norms for linear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, 34 (1989), pp. 94–97.
- [131] L. XIE, C. E. DE SOUZA E M. FU,  *$H_\infty$  estimation for discrete-time linear uncertain systems*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1 (1991), pp. 11–23.
- [132] L. XIE E Y. C. SOH, *Robust Kalman filtering for uncertain systems*, Systems & Control Letters, 22 (1994), pp. 123–129.
- [133] K. ZHOU, J. C. DOYLE E K. GLOVER, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

# Apêndice A

## Resultados auxiliares

Neste apêndice apresentamos a prova de dois resultados auxiliares utilizados ao longo deste trabalho. O primeiro é o *complemento de Schur* [17, 2, 16] e o segundo um lema de *eliminação* de variáveis [116]. Ambos são ferramentas úteis de manipulação das desigualdades matriciais lineares.

**Lema A.1 (Complemento de Schur)** *Considerando-se que as matrizes  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são simétricas, o conjunto*

$$\{A_{11} > 0, A_{22} > A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12}\} \quad (\text{A.1})$$

*é equivalente ao conjunto descrito pela desigualdade matricial*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

**Prova:** A matriz

$$V = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} - A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

é definida positiva se, e somente se,  $A_{11} > 0$  e

$$A_{22} > A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12}$$

Definindo a matriz não singular

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -A'_{12}A_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

cujos autovalores são todos iguais a um, temos que

$$V = T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} T'$$

Portanto, podemos concluir que (A.2) é verdadeira se, e somente se,  $V > 0$ . ■

Permutações das linhas e colunas da matriz em (A.2) permitem inverter o enunciado deste lema de modo a contemplar também a equivalência entre

$$\{A_{22} > 0, A_{11} > A_{12}A_{22}^{-1}A'_{12}\} \quad (\text{A.3})$$

e a desigualdade (A.2). Podemos ainda reformular este lema de forma a que o caráter estritos das desigualdades não seja essencial, como em [2, 16].

**Lema A.2 (Eliminação)** Considerando-se que as matrizes  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  e  $A_{33}$  são simétricas, a desigualdade

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & Q - A_{13} \\ A'_{12} & A_{22} & A_{23} \\ Q' - A'_{13} & A'_{23} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.4})$$

é factível se as desigualdades

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A'_{12} & A_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A'_{23} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.5})$$

também o forem e

$$Q := A_{13} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{23} \quad (\text{A.6})$$

**Prova:** Como  $A_{22} > 0$  podemos aplicar o Lema A.1 à desigualdade (A.4) para que obtenhamos a forma equivalente

$$\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A'_{12} & Q - A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{23} \\ Q' - A'_{13} - A'_{23}A_{22}^{-1}A'_{12} & A_{33} - A'_{23}A_{22}^{-1}A_{23} \end{bmatrix} > 0$$

Assim, com a escolha da matriz  $Q$  dada em (A.6) obtemos a condição

$$\begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A'_{12} & 0 \\ 0 & A_{33} - A'_{23}A_{22}^{-1}A_{23} \end{bmatrix} > 0$$

Para recuperarmos (A.5) basta aplicarmos a cada um dos blocos da desigualdade acima o Lema A.1 de maneira reversa. ■

Notemos que o lema acima indica que podemos eliminar a linha e a coluna associada a uma variável livre que se encontre em uma das extremidades de uma desigualdade matricial linear quebrando a desigualdade original em duas. Por variável livre entendemos uma variável pertencente a uma, e apenas uma, desigualdade matricial linear e sobre a qual não incidem restrições de nenhuma outra natureza.

Assim como ocorre no Lema A.1, permutações das linhas e colunas da matriz (A.4) permitem reformular este lema para eliminar uma variável  $Q$  que se encontre em qualquer posição dentro desta matriz, exceto na diagonal principal.

## Apêndice B

# Solução de problemas de otimização semi-definida mista

Neste apêndice, apresentamos métodos de resolução de problemas de programação semi-definida mista. Sem perda de generalidade, podemos formular qualquer problema de otimização semi-definida mista na forma<sup>1</sup>

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{I}^m} \{c'x + d'y : F(x) + G(y) \geq 0\} \quad (\text{B.1})$$

Neste problema padrão o conjunto  $\mathbb{I}$  denota qualquer conjunto finito e enumerável<sup>2</sup>, a função matricial  $F(x)$  é afim e a função  $G(y)$  é linear conforme as definições

$$F(x) := \sum_{i=1}^n F_i x_i + F_0 \quad G(y) := \sum_{j=1}^m G_j y_j \quad (\text{B.2})$$

em que  $F_i = F'_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , e  $G_j = G'_j \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

### B.1 Soluções ótimas globais

Utilizamos uma extensão do algoritmo de decomposição de Benders generalizado [50] para obter a solução ótima global do problema (B.1). Iniciamos a apresentação deste método pelo seguinte lema.

**Lema B.1** *A função projetada*

$$v(y) := \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x : F(x) + G(y) \geq 0\} \quad (\text{B.3})$$

*é uma função convexa da variável  $y$ .*

**Prova:** Dado um vetor  $y = \bar{y}$ , existe  $x = x^*$  de tal forma que  $v(y)$  atinja seu ponto de mínimo. Esta solução  $x^*$  está associada à matriz dual simétrica e definida positiva  $\Theta = \Theta^* \in \mathbb{R}^{p \times p}$ . Portanto, para qualquer vetor

<sup>1</sup>Podemos resolver problemas com desigualdades estritas definindo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno e substituindo o '0' da desigualdade em (B.1) por  $\epsilon \mathbb{I}$ .

<sup>2</sup>Com o qual certamente podemos tratar o conjunto de variáveis lógicas  $\mathbb{B}$  como um caso particular.

y temos que

$$\begin{aligned}
 v(y) &\geq c'x^* - \text{tr}(\Theta^*(F(x^*) + G(y))) \\
 &\geq v(\bar{y}) - \text{tr}(\Theta^*G(y - \bar{y})) \\
 &\geq v(\bar{y}) + \sum_{j=1}^m -\text{tr}(\Theta^*G_j)(y_j - \bar{y}_j) \\
 &\geq v(\bar{y}) + \partial V'(y - \bar{y})
 \end{aligned}$$

Nesta expressão identificamos os componente do vetor subgradiente [111]

$$\partial V_j := -\text{tr}(\Theta^*G_j), \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{B.4})$$

o que conclui esta prova. ■

A partir deste resultado podemos apresentar o *algoritmo de decomposição Benders generalizado* [50]. A idéia básica é a seguinte: encontramos a solução ótima global do problema (B.1) solucionando o problema convexo

$$\min_{y \in \Psi \cap \mathbb{I}^m} d'y + v(y) \quad (\text{B.5})$$

em que  $\Psi \in \mathbb{R}^m$  denota o domínio de factibilidade da função projetada  $v(y)$ , isto é, o subconjunto dos números reais para o qual a função  $v(y)$  pode ser definida. O problema é que, de modo geral, não temos como obter uma expressão analítica para a função  $v(y)$ . No contexto do problema (B.1) não existe outra maneira de obter  $v(y)$  do que resolvendo o problema (B.3) para todo valor de  $y \in \Psi$ . Na prática, podemos avaliar implicitamente  $v(y)$  utilizando o conceito de *linearização externa* [49] (do inglês *outer-linearization*). O seguinte algoritmo de decomposição é o resultado desta estratégia.

### Algoritmo B.1

1. Resolver o problema escravo

$$(\text{E}) \quad v^k := \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c'x : F(x) + G(y^k) \geq 0\} \quad (\text{B.6})$$

e calcular a matriz dual  $\Theta^k = \Theta^*$  associada ao ponto de mínimo. Calcular também o subgradiente  $\partial V^k$  a partir de (B.4) e definir o conjunto poliedral

$$\Psi^k := \{(y, \rho) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : \rho \geq v^k + \partial V^k(y - y^k)\} \quad (\text{B.7})$$

2. Resolver o problema mestre

$$(\text{M}) \quad \alpha^k := \min_{y \in \mathbb{I}^m} \{d'y + \rho : y \in \Psi^k \cap \Psi^k\} \quad (\text{B.8})$$

e obter sua solução ótima  $y^*$ .

3. Interromper o algoritmo se  $(\alpha^k - \alpha^{k-1}) < \varepsilon$ , em que  $\varepsilon > 0$  é um parâmetro que controla precisão requerida. Caso contrário, atribuir  $y^{k+1} = y^*$ ,  $\Psi^{k+1} := \Psi^k \cap \Psi^k$  e retornar ao passo 1.

A convergência deste algoritmo está relacionada com a convexidade da função  $v(y)$ , provada no Lema B.1. Basta sermos capazes de obter a solução ótima global do problema *mestre* para que possamos assegurar a convergência global do algoritmo. Um aspecto bastante atrativo deste algoritmo é a forma dos problemas *mestre* e *escravo*. O problema *escravo* é um *programa semi-definido* e o problema *mestre* é um *programa linear misto*; ambos podem ser resolvidos por eficientes algoritmos. O primeiro pode ser resolvido em tempo polinomial por algoritmos de pontos interiores [24, 103] e o segundo pode ter sua solução ótima global obtida por meio de diversas técnicas de programação inteira mista [102, 105, 114, 125] como, por exemplo, *branch-and-bound* ou planos de corte.

O Algoritmo B.1 pode ser inicializado a partir de qualquer ponto  $y^0 \in \Psi \cap \mathbb{I}^m$  e  $\Psi^0 = \mathbb{R}^m$ . Caso não disponhamos de nenhuma solução inicial factível para o problema *escravo* podemos adicionar variáveis extras de modo a configurar um problema de inicialização. A introdução destas variáveis de inicialização não altera as propriedades de convergência que acabamos de discutir.

Como alternativa ao procedimento de decomposição do tipo Benders podemos imaginar a construção de um algoritmo de pontos interiores integrado a estratégias do tipo *branch-and-bound* ou de planos de corte no estilo proposto em [99]. Ao contrário do que ocorre com os problemas a serem resolvidos pelo procedimento Benders, não encontramos nenhum pacote computacional capaz de implementar estas estratégias para programação semi-definida.

## B.2 Soluções sub-ótimas

Embora os sub-problemas do Algoritmo B.1 sejam problemas bem estudados, a solução do problema de programação inteira mista *mestre* pode se tornar bastante complicada. A razão para isto é que a solução de problemas desta classe não podem ser calculadas em tempo polinomial [114]. Em relação aos problemas discutidos na Seção 5.7, à medida que o número de variáveis lógicas aumenta, mais complexa se torna a solução do problema *mestre*. Esta dificuldade justifica as estratégias sub-ótimas que discutiremos nesta seção. Discutiremos, exclusivamente, a solução de problemas com variáveis lógicas, isto é, problemas na forma (B.1) para os quais  $\mathbb{I} = \mathbb{B}$ .

A primeira idéia que temos em mente ao pensarmos em simplificar a resolução de problemas com variáveis inteiras, e em particular com variáveis lógicas, é relaxarmos a restrição  $y \in \mathbb{I}^m$  via

$$0 \leq y_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (\text{B.9})$$

Após obtida uma solução para o problema relaxado, utilizamos algum tipo de arredondamento para recuperarmos o caráter lógico das variáveis. Esta estratégia torna os problemas a serem resolvidos programas semi-definidos puros. Devemos, entretanto, tomar certos cuidados com este tipo de procedimento. Nos problemas da Seção 5.7, o maior problema está em arredondar a solução real sem perder a factibilidade. Podemos entender melhor este problema lançando mão dos conceitos de controlabilidade e observabilidade. Por exemplo, se desconsideramos todas as restrições adicionais sobre as variáveis  $\lambda$  e  $\gamma$  contidas nos conjuntos  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  e  $\Delta$ , a minimização da norma  $H_2$  obriga que  $\lambda_i = \gamma_j = 1$  para todo valor de  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Em outras palavras, caso haja pelo menos uma solução para um problema de minimização da norma  $H_2$  que não apresente restrições sobre as variáveis lógicas a não ser (B.9), então, a seleção de todos os atuadores e sensores constitui a solução ótima, portanto, factível. Por outro lado, se nem mesmo esta solução *trivial* (que denotamos como  $\lambda = \mathbf{1}$ ,  $\gamma = \mathbf{1}$ ) for factível, isto é,  $(A, B(\mathbf{1}))$  não é controlável e  $(A, C_2(\mathbf{1}))$  não é observável, então não existirá nenhuma outra solução factível pois, ao tornar algum  $\lambda_i$  ou  $\gamma_j$  zero estaremos impondo ao sistema uma perda ainda maior do grau de controlabilidade ou observabilidade. Esta observação pode nos apontar uma situação com a qual podemos nos confrontar na hora de arredondar uma solução real. Por exemplo, suponhamos que tenhamos em mão uma solução factível

real em que a variável  $\lambda_i$  é diferente de zero, porém menor do que um, para um certo valor de  $i$ . Devido às propriedades estruturais do sistema a ser controlado, pode ser verdade que nós nunca possamos “arredondá-la” em direção a zero sem que o sistema perca um grau de controlabilidade. Em consequência disto, a escolha das variáveis a serem arredondadas como zero pode não ser uma tarefa simples, especialmente se os conjuntos  $\Lambda$ ,  $\Gamma$  e  $\Delta$  forem complexos.

Alternativas menos ingênuas envolvem o uso de estratégias de relaxamento mais sofisticadas. Por exemplo, podemos converter a restrição  $y_i \in \mathbb{B}$  na restrição *simétrica*  $\tilde{y}_i \in \{-1, 1\}$ . Nesta forma, podemos pensar em resolver o problema original correspondente na presença da restrição não convexa

$$\tilde{y}_i^2 = 1 \quad (\text{B.10})$$

Diversos autores têm relatado sucesso em obter algoritmos para este problema transformado. Estes algoritmos envolvem, em geral, a solução de problemas sub-ótimos nos quais a restrição (B.10) é relaxada na forma convexa

$$\tilde{y}_i^2 \leq 1 \quad (\text{B.11})$$

e a função objetivo é modificada para incluir funções de barreira [10, 94] especiais. Maiores detalhes podem ser encontrados em [99, 83].

Uma abordagem similar consiste em introduzir a variável matricial auxiliar  $Y = Y' \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e formular a restrição  $y_i \in \mathbb{B}$  na forma não convexa

$$Y_{ii} = y_i \quad (\text{B.12})$$

$$Y = yy' \quad (\text{B.13})$$

Os problemas sub-ótimos a serem resolvidos procuram relaxar a restrição (B.13) na forma convexa

$$Y \geq yy' \quad (\text{B.14})$$

que pode ser convertida em uma desigualdade linear matricial linear pelo complemento de Schur. Veja [73] para maiores informações.

Um outro aspecto importante das soluções sub-ótimas é que elas provêm limites inferiores para a função  $v(y)$ , que podem ser incorporados ao Algoritmo B.1 para acelerar a busca de soluções do problema *mestre*. Outra possibilidade é a utilização das soluções dos problemas sub-ótimos como inicialização para o Algoritmo B.1.