

Marco Aurelio Cazarotto Gomes

Filtragem Ótima para Melhorar o Desempenho de Estimadores DOA-ML

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de concentração: Telecomunicações e Telemática.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Amauri Lopes - UNICAMP
Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes - UNICAMP
Prof. Dr. Fernando Runstein - CPqD Campinas

Campinas, SP
Outubro de 2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

G585f Gomes, Marco Aurelio Cazarotto
 Filtragem ótima para melhorar o desempenho de estimadores
DOA-ML. / Marco Aurelio Cazarotto Gomes. – Campinas, SP:
[s.n.], 2009.:

 Orientador: Amauri Lopes.
 Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

 1. Teoria da estimativa. 2. Processamento de sinais.
3. Discriminadores de frequência. 4. Filtros digitais
(Matemática). 5. Verossimilhança (Estatística). I. Lopes, Amauri.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação. III. Título

Título em Inglês:	Optimum filtering to improve the performance of DOA-ML estimators.
Palavras-chave em Inglês:	Estimation theory, Signal processing, Frequency discrimination, Digital filters (Mathematics), Likelihood statistic
Área de concentração:	Telecomunicações e Telemática
Titulação:	Mestre em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Renato da Rocha Lopes, Fernando Oscar Runstein
Data da defesa:	07/10/2009
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Elétrica

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Marco Aurelio Cazarotto Gomes

Data da Defesa: 7 de outubro de 2009

Título da Tese: "Filtragem Ótima para Melhorar o Desempenho de Estimadores DOA-ML"

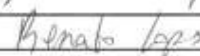
Prof. Dr. Amauri Lopes (Presidente):



Dr. Fernando Oscar Runstein:



Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes:



Resumo

Abordamos o problema de estimação de direção de chegada (DOA) de ondas planas usando um arranjo de sensores. Na literatura encontramos diversos estimadores para DOA, porém estamos considerando apenas os estimadores de Máxima Verossimilhança (ML) que geram candidatas à estimativa DOA e selecionam as melhores através do critério ML. Também estamos interessados em situações em que o espaçamento angular entre as fontes de sinal é pequeno e a relação sinal-ruído é baixa. Nesse caso temos uma degradação de desempenho associada ao efeito de limiar. Mostramos que este problema pode ser amenizado reduzindo o ruído presente na matriz de covariância dos dados recebidos (*snapshots*) utilizada para a seleção das candidatas. Propomos então modificar o processo de seleção de candidatas, utilizando uma nova matriz de covariância dos *snapshots*, calculada após uma filtragem ótima dos dados através de um filtro FIR multibanda. Propomos também modificar a função custo ML para adequá-la às dimensões da matriz de covariância filtrada e para isso apresentamos 3 opções de modificação. As simulações mostram que nossa proposta tem melhor desempenho que os métodos conhecidos, reduzindo significativamente a relação sinal-ruído de limiar.

Palavras-chave: Arranjo de Sensores, Estimação de parâmetros, Estimação DOA, Máxima Verossimilhança, Filtragem Ótima.

Abstract

We approached the estimation of direction of arrival (DOA) of plane waves using an array of sensors. In the literature there are several DOA estimators, but we considered only the maximum likelihood (ML) estimators that generate candidates for DOA estimation and select the best one through an ML criterion. We also considered situations where the signal sources are spatially closely spaced and the signal-to-noise ratio is low. In these cases a performance degradation associated with the threshold effect occur. We demonstrated that we can improve the estimation performance by reducing the noise in the received data covariance matrix used to select the candidates. Then we proposed to modify the selection process using a new data covariance matrix, computed after an optimum multiband FIR filtering of the received data. We also proposed to modify the ML cost function to adapt it to the dimensions of the new covariance matrix and we considered 3 alternatives of modification. Some simulations showed that our proposal has better performance than known DOA methods, significantly reducing the threshold SNR.

Keywords: Array of Sensors, Parameter Estimation, DOA Estimation, Maximum Likelihood, Optimum Filtering.

Agradecimentos

Agradeço

Primeiramente aos meus pais, Marcos e Dalva, e meu irmão Carlos, por todo carinho e apoio incondicional. Nada disso seria possível sem vocês.

Ao professor Amauri Lopes, não só pela orientação, mas principalmente pelo exemplo de pessoa que foi em todo esse período. Com ele aprendi muito, principalmente a ser uma pessoa melhor. Obrigado por confiar em mim.

Aos amigos do LOsTE, minha família nesses dois últimos anos. Obrigado Bixo, Cotô, Filipe, Kexada, Pasté, Rodrigo, Rubão e Tiezzi.

Aos meus antigos professores de graduação, Rony e Trevisan, por me incentivarem a continuar na vida acadêmica. Hoje vejo que todos nós estávamos certos.

A minha família pelo apoio e incentivo. Obrigado por sentirem tanto orgulho, mesmo achando que eu não mereça tanto.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

Lista de Símbolos	ix
Lista de Abreviaturas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Introdução ao Processamento de Arranjo e Estimação DOA	1
1.2 Estimação DOA	2
1.3 Métodos Derivados do Estimador de Máxima Verossimilhança	3
1.4 Objetivos do Trabalho	4
1.5 Organização dos Capítulos	5
1.6 Publicação	5
2 Modelo de sinal e de ruído e o Estimador ML	7
2.1 Modelo de Onda e do Sinal Captado no Arranjo Linear Uniforme	7
2.1.1 Considerações Sobre o Modelo de Sinal	11
2.2 Estimador ML para DOA	13
2.3 Critérios de Avaliação	17
2.3.1 Erro Quadrático Médio Estimado	18
2.3.2 Polarização Média Estimada	18
2.3.3 Limite de Cramer-Rao	19
3 Métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado	21
3.1 Reparametrização da Função Custo ML	21
3.2 Método MODE	23
3.2.1 Rearranjo da Função Custo no Método MODE	24
3.2.2 Resumo da Implementação do Algoritmo MODE	29
3.3 Método MODEX	30
3.3.1 Seleção das Raízes do MODEX	32
3.4 Método MODEX Modificado	32
3.5 Simulações e Resultados	33
3.5.1 Métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado	33
4 Filtragem Ótima para Redução de Ruído de Estimadores ML para DOA	37
4.1 Seleção Ótima	37

4.2	Proposta: filtrar os <i>snapshots</i>	39
4.2.1	Filtragem Ótima	39
4.3	Modificando a função custo do processo de seleção	44
4.3.1	Primeira Opção	44
4.3.2	Segunda Opção	45
4.3.3	Terceira Opção	46
4.4	Resumo do Método Proposto	47
4.5	Simulações e Resultados	48
5	Conclusões	55
	Referências bibliográficas	57

Lista de Símbolos

$(\cdot)^*$	- complexo conjugado de um escalar, vetor ou matriz
$(\cdot)^H$	- complexo conjugado e transposto de um vetor ou matriz
$(\cdot)^T$	- transposto de um vetor ou matriz
$(\cdot)^\dagger$	- pseudo inversa de uma matriz
$\otimes$	- produto de Hadamard
$\mathbf{a}(\omega), \mathbf{a}$	- vetor de direção
$\mathbf{A}(\omega), \mathbf{A}$	- matriz dos vetores de direção
$\mathbf{A}_E$	- versão estendida da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{b}$	- vetor de parâmetros após a reparametrização
$\hat{\mathbf{b}}$	- estimativa do vetor de parâmetros após a reparametrização
$b(z)$	- polinômio de ordem M
$\mathbf{B}$	- matriz formada pelo vetor de coeficientes $\mathbf{b}$
d	- distância entre sensores
dB	- decibel
$\mathbf{D}_\omega$	- derivada da matriz $\mathbf{A}$ em relação às frequências ω
$\mathbf{D}$	- matriz diagonal
$E\{\cdot\}$	- operador esperança estatística
$F\{\cdot\}$	- função custo
$E_m(t)$	- amplitude de um sinal variando no tempo
$\mathbf{F}_L$	- produto de $\mathbf{H}_L^H \mathbf{H}_L$
$\mathbf{G}$	- fator de Cholesky da matriz $(\hat{\mathbf{B}}^H \hat{\mathbf{B}})^{-1}$
$\mathbf{h}$	- vetor dos coeficientes do filtro
$H(z)$	- função de sistema do filtro
$\mathbf{H}_L$	- matriz de filtragem
$\mathbf{H}_{inf}$	- parte inferior da matriz $\mathbf{H}_L$
$\mathbf{H}_{sup}$	- parte superior da matriz $\mathbf{H}_L$
$\mathbf{H}_T$	- parte central da matriz $\mathbf{H}_L$
$\mathbf{I}$	- matriz identidade
$Im(\cdot)$	- parte imaginária de $(\cdot)$
K	- número de <i>snapshots</i>
k	- índice do k -ésimo <i>snapshot</i>
$\mathbf{K}$	- matriz de transformação entre os vetores $\mathbf{b}$ e β
$L(\cdot)$	- versão logarítmica da função de verossimilhança
l	- índice da l -ésima linha de determinada matriz ou vetor

M	- número de fontes
m	- índice da m-ésima fonte
MX	- índice para denotar as expressões referentes ao método MODEX
N	- número de sensores
n	- índice do n-ésimo sensor
NC	- número de combinações
NR	- número de realizações
$p(\cdot)$	- função densidade de probabilidade
$p(\cdot \cdot)$	- função densidade de probabilidade condicional
$\mathbf{P}$	- matriz de correlação dos sinais
$\hat{\mathbf{P}}^T$	- matriz de correlação estimada dos sinais
$\mathbf{P}_A$	- matriz de projeção de $\mathbf{A}$
$\mathbf{P}_B$	- matriz de projeção de $\mathbf{B}$
$\mathbf{P}_A^\perp$	- matriz de projeção ortogonal de $\mathbf{A}$
$\mathbf{Q}$	- matriz auxiliar resultante de decomposição QR
$Re(\cdot)$	- parte real de $(\cdot)$
$\mathbf{R}_y$	- matriz de covariância dos <i>snapshots</i>
$\hat{\mathbf{R}}_y$	- matriz de covariância estimada dos <i>snapshots</i>
$\mathbf{R}_z$	- matriz de covariância dos <i>snapshots</i> filtrada
$r_{n,m}$	- distância até a origem de um sistema de coordenadas
$\mathbf{r}(t), \mathbf{r}_k$	- vetor de ruído
$\mathbf{s}(t), \mathbf{s}_k$	- vetor das amplitudes complexas dos sinais
$tr\{\cdot\}$	- operador traço
$\mathbf{U}$	- matriz unitária cujas colunas são os autovetores de $\mathbf{R}_y$
$\hat{\mathbf{v}}_l$	- vetor autovetor referente a solução <i>eigenfilter</i>
$\mathbf{W}$	- matriz de covariância do ruído
$\mathbf{x}(t)$	- vetor referente à parcela de sinal
$\mathbf{y}(t), \mathbf{y}_k$	- vetor de dados (<i>snapshots</i>)
$\mathbf{z}_k$	- vetor das saídas do filtro (<i>snapshot</i> filtrado)
z_k	- sequência de saída do filtro
z_{ks}	- parcela de sinal de z_k
z_{kr}	- parcela de ruído de z_k

Letras Gregas

$\delta_{k,i}$	- função delta de Kronecker
θ_m	- ângulo de chegada (DOA) da m-ésima onda incidente
$\hat{\theta}_m$	- estimativa do ângulo de chegada (DOA) da m-ésima onda incidente
Ω_m	- frequência da onda portadora
$\hat{\omega}_{ML}$	- vetor das estimativas ML
ω	- vetor das frequências a serem estimadas
ω_m	- frequência equivalente da m-ésima onda incidente
λ_m	- comprimento de onda na direção de propagação da m-ésima onda incidente
φ_m	- fase arbitrária da m-ésima onda incidente
σ^2	- variância do ruído
$\hat{\sigma}^2$	- estimativa da variância do ruído
ϖ	- vetor de parâmetros de direção de chegada
Λ	- matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $\mathbf{R}_y$
$\hat{\Psi}$	- matriz diagonal dos M maiores autovalores de $\hat{\mathbf{R}}_y$
β	- vetor de coeficientes reais formado pela decomposição do vetor $\mathbf{b}$
Φ	- conjunto de todas as combinações possíveis das candidatas geradas

Lista de Abreviaturas

CM	-	Conditional Model - Modelo Condicional
CRB	-	Cramér-Rao Bound - Limite de Cramér-Rao
CRU	-	Circunferência de Raio Unitário
DOA	-	Direction Of Arrival - Direção de Chegada
FFT	-	Fast Fourier Transform - Transformada Rápida de Fourier
FIR	-	Finite Impulse Response - Resposta ao Impulso com duração Finita
IQML	-	Iterative Quadratic Maximum Likelihood
ML	-	Maximum Likelihood - Máxima Verossimilhança
MLE	-	Maximum Likelihood Estimator - Estimador de Máxima Verossimilhança
MODE	-	Method Of Direction Estimation
MODEX	-	MODE with EXtra roots
mse	-	Mean Square Error - Erro Quadrático Médio
rmse	-	Root Mean Square Error - Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio
SNR	-	Signal-to-Noise Ratio - Relação Sinal-Ruído
UM	-	Unconditional Model- Modelo Incondicional
var	-	Variância

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução ao Processamento de Arranjo e Estimação DOA

Sensores são dispositivos que captam algum tipo de sinal emitido por uma fonte. Podem ser usados de maneira individual ou agrupados. O arranjo de sensores trabalha com os sensores agrupados, dispostos e configurados geometricamente no espaço tendo um ponto de referência em comum. O arranjo é composto por sensores idênticos e omnidirecionais. Logo, a captação é igual para todas as direções. Sua função é a coletar amostras de sinais corrompidos por ruído. Além disso, é necessário que haja o processamento dos sinais captados [1].

O objetivo do processamento é extrair características como amplitude, frequência, fase do sinal e localização da fonte emissora. Neste trabalho abordamos este último, onde o parâmetro importante a ser obtido é o ângulo de chegada DOA (*Direction Of Arrival*).

Atualmente encontram-se aplicações de processamento de arranjo em várias áreas, como comunicações móveis, radar, sonar, medicina, geofísica, exploração geológica, radioastronomia, entre outras.

Em comunicações móveis, o objetivo do processamento do arranjo de sensores é o aumento da capacidade do sistema possibilitando uma multiplicidade de acesso [1]. Um grande desenvolvimento na área está acontecendo através das Antenas Inteligentes, em que o diagrama de irradiação é ajustado conforme a necessidade.

Em radar, uma antena de transmissão emite um tipo particular de onda. O arranjo de sensores é usado para captar o eco da onda refletida por um alvo. As técnicas de estimação obtêm os parâmetros do sinal, entre eles, o ângulo DOA [2].

Em sonar passivo, o sinal é recebido por um arranjo de hidrofones imersos no meio aquático, com o objetivo de estimar a estrutura espacial e temporal dos sinais recebidos [2].

Na tomografia, o processamento de arranjo é utilizado para obter imagens de objetos a partir da transmissão ou reflexão dos dados. Na maioria dos casos, o objeto é iluminado em diferentes direções

e a imagem é reconstruída a partir dos dados coletados [2].

Na exploração geológica, o processamento de arranjo é utilizado para determinar características físicas de uma área a ser pesquisada. Essa área geralmente é no interior da Terra, podendo existir na mesma uma reserva de minerais, por exemplo. Neste caso é captada a energia acústica que se propaga pela terra após a aplicação de um impulso gerado por uma explosão, por exemplo, de uma dinamite. O sensor utilizado é conhecido como geofone [2].

Na radioastronomia, o interesse é a identificação das fontes de rádio-emissão celestes. O arranjo neste caso, consiste de um conjunto de antenas e é utilizado para avaliar os espectros das fontes [2].

Ainda existem outras aplicações de processamento de arranjo como: controle de qualidade, automação industrial [3], etc.

1.2 Estimação DOA

Neste trabalho abordamos o problema de estimação DOA utilizando o Arranjo Linear Uniforme ou ULA (Uniform Linear Array). O arranjo será contaminado com ruído aditivo e vamos supor conhecidos o número de fontes e modelos estatísticos do sinal e do ruído.

O arranjo ULA será formado por sensores idênticos e omnidirecionais, posicionados sobre uma reta imaginária, com um mesmo espaçamento entre os sensores. Para ULA, DOA é definido de como o ângulo entre a direção de propagação da onda e a normal ao arranjo.

Os sinais captados pelo arranjo são amostrados de forma simultânea. O vetor de amostras de saída é definido como *snapshot*.

As estimativas de parâmetros em processamento de sinais de arranjo de sensores contaminados por ruído aditivo são degradadas conforme se acentuam as seguintes condições:

- diminuição da relação sinal-ruído ou SNR (Signal-to-Noise Ratio);
- maior proximidade entre os ângulos de incidência;
- menor número de sensores e de snapshots.

Para a estimação DOA, existem vários métodos que utilizam ferramentas como transformada de Fourier, decomposição em subespaços, filtros de predição linear e, no caso deste trabalho, o critério de Máxima Verossimilhança. Os métodos são classificados em duas categorias principais [3]: métodos espectrais e métodos paramétricos.

Os primeiros são chamados espectrais por utilizarem picos de uma função espectral para estimar o ângulo DOA. São clássicos, robustos e de fácil implementação através da transformada rápida de Fourier (FFT), demandando menor esforço computacional em relação a outros métodos, característica

muito importante na teoria de estimação. Em contraponto, suas estimativas não apresentam precisão adequada quando as fontes são próximas entre si.

Os métodos paramétricos, em geral, são mais robustos e eficientes, porém, apresentando maior esforço computacional e implementação mais complexa que os métodos espectrais. Assumem um modelo estatístico para os sinais. As estimativas não são obtidas através de uma função, mas sim através de um conjunto finito de parâmetros do modelo. Alguns destes métodos utilizam ferramentas que decompõem a matriz covariância estimada em uma parcela ou subespaço associado ao sinal, e outra parcela associada ao ruído. Apresentam bons desempenhos na estimação de sinais descorrelacionados. Entretanto, as estimativas são degradadas para SNR baixas. Dentre os métodos paramétricos, se destacam aqueles que utilizam o critério da Máxima Verossimilhança ou critério ML (*Maximum Likelihood*). Estes últimos serão utilizados neste trabalho e serão descritos a seguir.

1.3 Métodos Derivados do Estimador de Máxima Verossimilhança

O Estimador de Máxima Verossimilhança ou MLE (*Maximum Likelihood Estimator*) [4] se baseia na maximização da função densidade de probabilidade associada aos sinais e ruídos envolvidos. No caso DOA, se baseia na maximização da função densidade de probabilidade dos *snapshots* quando estes estão contaminados por ruído branco gaussiano. O estimador leva à minimização de uma função custo que depende da matriz covariância estimada dos *snapshots*. O ponto de mínimo deve ser determinado através de buscas multidimensionais. Entretanto essa busca demanda esforço computacional proibitivo, o que motivou o desenvolvimento de métodos baseados no critério ML, porém, com menor esforço computacional. Em seguida descreveremos alguns destes métodos alternativos.

Na década de 80 surge o método IQML (*Iterative Quadratic Maximum Likelihood*) [5], [6]. Este minimiza uma versão reparametrizada da função custo ML, através de um processo iterativo para solução de problemas intermediários de segunda ordem. O método IQML exige um esforço computacional menor que o do critério ML. Porém, apresenta problemas de convergência para mínimos locais, principalmente para pequenos valores de SNR ou poucos *snapshots*.

Já na década de 90, surge o método o MODE (*Method Of Direction Estimation*) [7]. O MODE minimiza a mesma versão reparametrizada da função custo ML, porém emprega uma decomposição da matriz de covariância dos *snapshots* em subespaços de sinal e de ruído. Sobre esta nova função custo é realizada a minimização de forma iterativa. Sua convergência é mais rápida e seu esforço computacional é menor que o do IQML. O MODE foi considerado, em meados da década de 90 [3], como um dos melhores para a estimação de DOA.

Inspirado no MODE, com o objetivo de melhorar seu desempenho, foi proposto o MODEX (*MODE with EXtra roots*) [8]. O MODEX utiliza a mesma versão reparametrizada da função custo

utilizada pelo MODE e também emprega a decomposição da matriz de covariância dos *snapshots* em subespaços de sinal e de ruído. A diferença está no fato que o MODEX propõe a geração de várias estimativas candidatas que devem ser testadas por um critério de seleção para se determinar as melhores estimativas DOA. O critério de seleção adotado é o critério ML. O desempenho é melhorado significativamente embora o esforço computacional seja cerca de duas vezes maior que o do MODE.

Recentemente, em [9] foi proposto uma alteração na forma de se obter as candidatas no MODEX, produzindo o MODEX Modificado. Nele as candidatas são geradas a partir de três soluções distintas do MODE. O critério de seleção de candidatas é o mesmo utilizado no MODEX. Este método apresenta menor esforço computacional que o MODEX e um melhor desempenho geral.

Neste trabalho vamos propor um método para melhorar alguns estimadores baseados no critério ML. Estamos interessados nos métodos de estimação DOA que selecionam candidatas através do critério ML, caso dos métodos MODEX e MODEX Modificado. Os objetivos do trabalho serão descritos a seguir.

1.4 Objetivos do Trabalho

Vamos estudar os métodos de estimação baseados no critério ML, mais especificamente, MODE, MODEX e MODEX Modificado. Através de simulações iremos analisar o desempenho destes métodos.

Após as simulações iremos analisar como poderíamos melhorar o desempenho destes estimadores. Estamos interessados em melhorar o processo de seleção de candidatas que é feito via critério ML e é utilizado nos métodos MODEX e MODEX Modificado.

Nosso primeiro passo será propor um método para análise do processo de seleção de candidatas que chamaremos Seleção Ótima. A partir de nossas conclusões iremos propor um processo de filtragem para redução do ruído, gerando uma nova matriz covariância dos *snapshots*, calculada após a filtragem ótima dos dados recebidos.

A geração das candidatas será feita através do método MODEX Modificado. Introduziremos o processo de filtragem na seleção das candidatas, otimizado de forma a maximizar a SNR na saída. Para podermos utilizar os dados após a filtragem será necessário realizar algumas modificações na função custo ML e teremos 3 opções para essa modificação. Os resultados de desempenho para estas modificações serão comparados através de simulações e será selecionada uma delas. O desempenho correspondente será comparado com aquele do MODEX Modificado. Embora todas as propostas a serem apresentadas e seus resultados se refiram ao MODEX Modificado, elas também podem ser aplicadas ao método MODEX.

1.5 Organização dos Capítulos

Os capítulos estão organizados da seguinte forma:

- **Capítulo 2:** São apresentados o Arranjo Linear Uniforme, os modelos de sinal e ruído e também o estimador de Máxima Verossimilhança. Apresentamos também os critérios de avaliação de desempenho dos métodos de estimação.
- **Capítulo 3:** Apresentamos a reparemetrização da função custo ML, o desenvolvimento e a formulação do método MODE. Além disso, descrevemos os métodos MODEX e MODEX Modificado. No fim do capítulo apresentamos os resultados de desempenho, obtidos através de simulações numéricas destes métodos.
- **Capítulo 4:** Discutimos o processo de seleção de candidatas do MODEX e MODEX Modificado através de um método chamado Seleção Ótima. Apresentamos nossa proposta de filtragem dos *snapshots* para redução do ruído presente na matriz de covariância estimada e o critério de otimização da filtragem baseado na maximização da relação sinal-ruído. Além disso, propomos ainda 3 opções para modificação na função custo ML para aplicação da proposta e discutimos os resultados de simulações.
- **Capítulo 5:** São apresentadas as conclusões do trabalho.

1.6 Publicação

Krummenauer, R.; Gomes, M. A. C.; Lopes, A.; Larzabal, P. Improving the Threshold Performance of Maximum Likelihood Estimation of Direction of Arrival, aceito para publicação na Signal Processing da Elsevier.

Capítulo 2

Modelo de sinal e de ruído e o Estimador ML

Os métodos de estimação do parâmetro DOA (*Direction Of Arrival*) podem ser utilizados em arranjos com várias geometrias [3], [10]. Neste trabalho adotaremos o arranjo linear uniforme ou ULA (*Uniform Linear Array*) tendo em vista a sua larga utilização e simplicidade de formulação.

Este capítulo apresenta os modelos de sinal e de ruído, a formulação matemática do problema DOA e o seu estimador ML, considerando que a estimação será feita a partir de amostras captadas em um arranjo linear uniforme de sensores idênticos e omnidirecionais. Apresenta ainda os critérios que serão utilizados nos próximos capítulos para avaliação do desempenho de estimadores para DOA.

2.1 Modelo de Onda e do Sinal Captado no Arranjo Linear Uniforme

Vamos supor um arranjo linear uniforme contendo N sensores espaçados de uma distância d e M fontes de sinais pontuais muito distantes do arranjo de tal forma que os sinais que chegam ao arranjo podem ser considerados ondas planas. O ângulo DOA, para o caso ULA, como dito anteriormente, é definido como ângulo entre a direção de propagação da onda e a normal ao eixo do arranjo. Supomos que a frente de onda da m -ésima fonte atinge o arranjo com um ângulo de incidência (DOA) θ_m . Essas suposições são ilustradas através da Figura 2.1.

Através ainda da Figura 2.1 concluímos que existe uma diferença de distância percorrida pela frente de onda entre o sensor n e o sensor 0. Esta distância está representada pelo segmento de reta $r_{n,m}$, sendo definida por:

$$r_{n,m} = n d \sin(\theta_m). \quad (2.1)$$

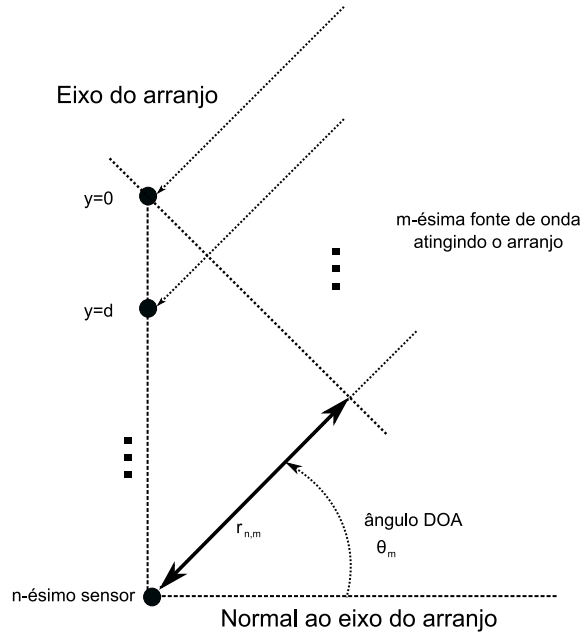


Figura 2.1: Arranjo Linear Uniforme e uma fonte de onda.

Conforme veremos a seguir, esta relação é importante para a estimação de θ_m .

Vamos supor que a m -ésima fonte produza uma onda plana dada por [2]

$$x_m(t) = E_m(t) e^{j(\Omega_m t + \frac{2\pi}{\lambda_m} r_m + \varphi_m)}, \quad (2.2)$$

onde

- $E_m(t)$ é a amplitude de um sinal variando no tempo;
- Ω_m é a frequência da onda portadora;
- λ_m é o comprimento de onda na direção de propagação;
- r_m é a distância, na direção de propagação, até a origem de um sistema de coordenadas;
- φ_m é uma fase arbitrária.

Supondo que o espaçamento entre os sensores seja menor que o comprimento de onda λ_m , conforme será discutido mais adiante, e adotando a hipótese que $E_m(t)$ varie muito lentamente em relação ao termo $e^{j\Omega_m t}$, podemos supor que a mesma amplitude $E_m(t)$ não apresente variação significativa quando observada simultaneamente em todos os sensores num dado instante de tempo.

Esta hipótese é conhecida na literatura como a suposição de sinais de faixa de frequências estreita. A razão para esta denominação é o fato de que a invariância da amplitude nos sensores corresponde a supor que a frequência máxima do sinal $E_m(t)$ é bem menor que a frequência Ω_m da portadora associada à onda incidente. Esta correspondência se dá pois a taxa de variação de um sinal no tempo está diretamente ligada à frequência máxima do seu espectro. Logo, a hipótese adotada garante que a taxa de variação de $E_m(t)$ no tempo é muito menor que a taxa de variação da portadora no tempo.

Vamos definir $x_{n,m}(t)$ como o sinal captado pelo sensor n devido à onda gerada pela m -ésima fonte. Assumindo sensores com ganhos unitários e omnidirecionais, o sinal no sensor n , tendo como referência o sensor em $y = 0$, é dado por

$$x_{n,m}(t) = E_m(t) e^{j\varphi_m} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_m} r_{n,m}} e^{j\Omega_m t}. \quad (2.3)$$

Portanto, a diferença de fase entre o sinal captado por dois sensores, tendo em conta as hipóteses anteriores, é provocada apenas pelo atraso sofrido pelo sinal entre os sensores.

Considerando o princípio da superposição e M ondas planas, obtemos:

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M x_{n,m}(t) = \sum_{m=1}^M E_m(t) e^{j\varphi_m} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_m} r_{n,m}} e^{j\Omega_m t}. \quad (2.4)$$

Supondo que todas as ondas apresentem a mesma portadora, temos $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_M = \lambda$. Assim, o coeficiente da segunda exponencial da expressão (2.4) pode ser escrito como

$$\frac{2\pi}{\lambda_m} r_{n,m} = \frac{2\pi}{\lambda} n d \sin(\theta_m). \quad (2.5)$$

Definindo

$$\omega_m = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta_m), \quad (2.6)$$

onde ω_m é dado em radianos, a expressão (2.4) pode ser reescrita como

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M E_m(t) e^{j\varphi_m} e^{jn\omega_m} e^{j\Omega_m t}. \quad (2.7)$$

Quando a fonte se localiza sobre o eixo y da Figura 2.1, temos dois casos limites de DOA, ou seja, $\theta_m = -\pi/2$ rad ou $\theta_m = \pi/2$ rad. Segundo (2.6), as frequências angulares ω_m associadas a esses limites são, respectivamente, $\omega_m = -\frac{2\pi d}{\lambda}$ e $\omega_m = \frac{2\pi d}{\lambda}$.

Considerando que, segundo o critério de biunidade para a relação em (2.6), devemos limitar os valores de ω_m de forma que $-\pi \leq \omega_m \leq \pi$, constatamos que é necessário impor $d/\lambda \leq 1/2$. Escolhemos $d = \lambda/2$ de modo a gerar a máxima variação permitida em ω_m .

Desconsiderando o termo $e^{j\Omega_m t}$, pois após a recepção o sinal é convertido à sua banda básica, a

expressão (2.7) transforma-se em

$$x_n(t) = \sum_{m=1}^M E_m(t) e^{j\varphi_m} e^{jn\omega_m}, \quad (2.8)$$

agora com $\omega_m = \pi \sin(\theta_m)$.

A expressão (2.8) pode ser interpretada como um sinal composto de M exponenciais complexas com as frequências normalizadas ω_m , fases φ_m e amplitudes $E_m(t)$. Dado que desejamos estimar os parâmetros $\omega_1, \dots, \omega_M$, podemos utilizar os conceitos de estimação de frequência no problema DOA [11], [5].

Assumindo que o sinal será contaminado por ruído, podemos escrever o sinal total em cada sensor como

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^M E_m(t) e^{j\varphi_m} e^{jn\omega_m} + r_n(t), \quad (2.9)$$

onde $r_n(t)$ é o ruído no n -ésimo sensor.

Podemos modificar a expressão (2.9), escrevendo:

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^M a_n(\omega_m) s_m(t) + r_n(t), \quad (2.10)$$

onde

$$a_n(\omega_m) = e^{jn\omega_m} \quad (2.11)$$

e

$$s_m(t) = E_m(t) e^{j\varphi_m}. \quad (2.12)$$

Utilizando notação matricial, reescrevemos a expressão (2.10) como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})\mathbf{s}(t) + \mathbf{r}(t), \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{y}(t)$ é o vetor de amostras do sinal captado nas N antenas, definido por

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ \cdots \ y_N(t)]^T \in C^{N \times 1}, \quad (2.14)$$

$\boldsymbol{\omega}$ é o vetor de parâmetros definido por

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_M]^T, \quad (2.15)$$

$\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ é a matriz dos vetores de direção, definida por

$$\mathbf{A}(\omega) = [\mathbf{a}(\omega_1) \ \mathbf{a}(\omega_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\omega_M)] \in C^{N \times M}, \quad (2.16)$$

onde, para ULA,

$$\mathbf{A}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \cdots & e^{j\omega_M} \\ e^{j2\omega_1} & \cdots & e^{j2\omega_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_1} & \cdots & e^{j(N-1)\omega_M} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

configurando uma matriz do tipo Vandermonde, $\mathbf{s}(t)$ é o vetor das amplitudes complexas dos sinais, definido por

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \cdots \ s_M(t)]^T \in C^{M \times 1}, \quad (2.18)$$

$\mathbf{r}(t)$ é o vetor de ruído, definido por

$$\mathbf{r}(t) = [r_1(t) \ r_2(t) \ \cdots \ r_N(t)]^T \in C^{(N) \times 1}. \quad (2.19)$$

O vetor $\mathbf{y}(t)$ é chamado *snapshot* e representa os sinais recebidos pelos sensores em um instante t . A estimativa DOA é geralmente realizada com base em K *snapshots*, tomados nos instantes t_k . A duração do intervalo do tempo relativo aos K *snapshots* deve ser pequena o bastante para que os ângulos de chegada não mudem significativamente. Com esta restrição e representando $\mathbf{y}(t_k)$ como $\mathbf{y}_k$, temos

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}(\omega)\mathbf{s}_k + \mathbf{r}_k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (2.20)$$

Podemos reescrever (2.20) na notação mais compacta

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\omega)\mathbf{S} + \mathbf{R}, \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_K]$, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \cdots \ \mathbf{s}_K]$ e $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \cdots \ \mathbf{r}_K]$.

2.1.1 Considerações Sobre o Modelo de Sinal

Assumimos que o número M de fontes é conhecido e é menor que o número de sensores ($M < N$). Quando M é desconhecido podem ser usadas técnicas disponíveis na literatura para sua estimação [12], [13]. Vamos trabalhar com o caso em que a matriz $\mathbf{A}$ possui posto cheio em colunas, implicando em que tais colunas são linearmente independentes, o que exige que $N > M$ [14]. Assumimos

ainda que os sinais $\mathbf{s}_k$ e os ruídos $\mathbf{r}_k$ são processos aleatórios gaussianos, complexos, independentes, ergódicos, de média zero com as seguintes características estatísticas de segunda ordem:

$$E \{ \mathbf{s}_k \mathbf{s}_i^H \} = \mathbf{P} \delta_{k,i} \quad (2.22)$$

$$E \{ \mathbf{s}_k \mathbf{s}_i^T \} = \mathbf{0} \quad (\text{para todo } k \text{ e } i) \quad (2.23)$$

$$E \{ \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i^H \} = \sigma^2 \mathbf{I} \delta_{k,i} \quad (2.24)$$

$$E \{ \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i^T \} = \mathbf{0} \quad (\text{para todo } k \text{ e } i), \quad (2.25)$$

onde $E\{\cdot\}$ é o operador esperança estatística, $\delta_{k,i}$ é a função delta de Kronecker, $(\cdot)^H$ indica o transposto conjugado do vetor ou matriz (Hermitiano), $\mathbf{P}$ é a matriz de correlação dos sinais de um mesmo *snapshot* e σ^2 é a variância desconhecida do ruído.

Por fim, os vetores de sinais $\mathbf{s}_k$ e de ruído $\mathbf{r}_i$ são descorrelacionados para todo k e i .

Na literatura são relatados dois diferentes tipos de modelo de sinal [15]:

Modelo Condicional (CM): o sinal $\mathbf{s}_k$ é aleatório ao longo dos K *snapshots*, porém a sequência $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$ é a mesma para todas realizações de experimentos distintos, e o ruído $\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^K$ varia de realização para realização. Nesta dissertação usamos este modelo;

Modelo Incondicional (UM): o sinal $\mathbf{s}_k$ é aleatório e varia de realização para realização da mesma forma que $\{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^K$.

Os modelos CM e UM são denominados, por alguns autores [15], determinístico e estocástico, respectivamente. Mas é necessário enfatizar que o modelo condicional também é estocástico. Assim a denominação CM e UM é melhor e é adotada neste trabalho.

A distribuição estatística dos dados $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^K$ para a suposição CM [15] é dada por

$$\mathbf{y}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{A} \mathbf{s}_k, \sigma^2 \mathbf{I}), \quad (2.26)$$

enquanto para a suposição UM

$$\mathbf{y}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_y), \quad (2.27)$$

onde

$$\mathbf{R}_y = E \{ \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H \}. \quad (2.28)$$

Usando (2.20), (2.22) e (2.23) podemos ainda escrever

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}. \quad (2.29)$$

Para um número finito de *snapshots*, estimamos a matriz de covariância teórica através da média aritmética

$$\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H, \quad (2.30)$$

de modo que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{R}}_y = \mathbf{R}_y \quad (2.31)$$

para ambos os modelos.

2.2 Estimador ML para DOA

O Estimador de Máxima Verossimilhança ou MLE (*Maximum Likelihood Estimator*) é um método de estimação de parâmetros clássico. A estimativa ML é o conjunto de parâmetros que maximiza a função densidade de probabilidade associada ao modelo estocástico adotado [3], [16], [14].

Iniciando a determinação do estimador ML para o problema DOA, seja $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ML} = [\omega_1 \dots \omega_M]^T$ o vetor composto pelas M estimativas DOA-ML. Este vetor é aquele que maximiza a função densidade de probabilidade conjunta dos *snapshots* observados. Assim, para derivarmos o vetor $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ML}$, precisamos determinar inicialmente a função densidade de probabilidade condicional $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\omega})$ referente a um único *snapshot*.

Retomando o modelo condicional (CM) para um *snapshot* da expressão (2.20),

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}\mathbf{s}_k + \mathbf{r}_k, \quad (2.32)$$

onde $\mathbf{r}_k$ é um processo aleatório complexo gaussiano de média zero, com matriz de covariância $\mathbf{W} = \sigma^2\mathbf{I}$, a função densidade de probabilidade do ruído $p(\mathbf{r}_k)$ é dada por [4]

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}_k) &= \frac{1}{\pi^N \det[\mathbf{W}]} \exp \left[-\mathbf{r}_k^H \mathbf{W}^{-1} \mathbf{r}_k \right] \\ &= \frac{1}{\pi^N (\sigma^2)^N} \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{r}_k^H \mathbf{r}_k \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Considerando que de (2.32) temos $\mathbf{r}_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k$, a função densidade de probabilidade de $\mathbf{y}_k$

será dada por

$$p(\mathbf{y}_k | \boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2) = \frac{1}{\pi^N (\sigma^2)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \right\}. \quad (2.34)$$

No caso de múltiplos *snapshots* independentes, precisamos da função densidade de probabilidade conjunta

$$p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi^N (\sigma^2)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \right\}. \quad (2.35)$$

A versão logarítmica da função de verossimilhança associada a $p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2)$ é definida como

$$L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2 | \mathbf{Y}) = \ln \{ p(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2) \}. \quad (2.36)$$

Usando o resultado (2.35) na expressão (2.36) obtemos

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2 | \mathbf{Y}) &= \ln \left\{ \prod_{k=1}^K \frac{1}{\pi^N (\sigma^2)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \right\} \right\} \\ &= \ln \left\{ \pi^{-NK} (\sigma^2)^{-NK} \right\} + \\ &\quad \ln \left\{ \prod_{k=1}^K \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ignorando o primeiro termo (constante) em (2.37), obtemos a versão logarítmica da função de verossimilhança para sucessivos *snapshots* independentes:

$$L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2 | \mathbf{Y}) = -NK \ln \{ \sigma^2 \} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]. \quad (2.38)$$

Devemos estimar os termos $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_K]$, σ^2 e $\boldsymbol{\omega}$. Podemos obter separadamente as estimativas de $\mathbf{S}$ e σ^2 em função de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$ e com isto concentrar a função de verossimilhança em termos de $\mathbf{A}(\boldsymbol{\omega})$. Podemos obter as estimativas de $\mathbf{S}$ e σ^2 através dos argumentos que satisfazem as igualdades

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2 | \mathbf{Y})}{\partial \mathbf{s}_k} = \mathbf{0}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2 | \mathbf{Y})}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (2.40)$$

Para o cálculo de (2.39) vamos mudar o índice k da variável de derivação $\mathbf{s}_k$ para o índice l de modo a evitar uma possível confusão no cálculo da derivada que envolve uma somatória em k .

Calculando (2.39) para $l = 1, \dots, K$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2 | \mathbf{Y})}{\partial \mathbf{s}_l} &= -\frac{\partial NK \ln\{\sigma^2\}}{\partial \mathbf{s}_l} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_l} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \right) = \mathbf{0}, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_l} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \right) &= \mathbf{0}, \\ \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_l} [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Todas as derivadas onde $l \neq k$ são naturalmente nulas. Logo, resta impor apenas que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_k} [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] = \mathbf{0}. \quad (2.44)$$

Fazendo

$$U = [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \quad (2.45)$$

$$= \mathbf{y}_k^H \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^H \mathbf{A}\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_k^H \mathbf{A}^H \mathbf{y}_k + \mathbf{s}_k^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{s}_k \quad (2.46)$$

e derivando obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}_k} &= \mathbf{0} - [\mathbf{A}^H \mathbf{y}_k]^* - \mathbf{0} + [\mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^* = \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{s}_k &= \mathbf{A}^H \mathbf{y}_k.\end{aligned}$$

Concluimos que a estimativa ML de $\mathbf{s}_k$ é dada por

$$\hat{\mathbf{s}}_k = [\mathbf{A}^H \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y}_k \quad (2.47)$$

$$= \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_k, \quad (2.48)$$

onde $\mathbf{A}^\dagger = [\mathbf{A}^H \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{A}^H$ é a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz $\mathbf{A}$.

Resolvendo agora (2.40) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{S}, \sigma^2 | \mathbf{Y})}{\partial \sigma^2} &= -\left(\frac{\partial NK \ln\{\sigma^2\}}{\partial \sigma^2} + \sum_{k=1}^K \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k] \right) \right) = 0, \quad (2.49) \\ -\frac{NK}{\sigma^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k\|_2^2 &= 0,\end{aligned}$$

$$-NK + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k\|_2^2 = 0, \quad (2.51)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{s}_k\|_2^2. \quad (2.52)$$

Usando em (2.52) a estimativa ML de $\mathbf{s}_k$ dada em (2.48), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}_k\|_2^2 \\ &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}_k\|_2^2 \\ &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \|(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\mathbf{A})\mathbf{y}_k\|_2^2 \\ &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \|\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp \mathbf{y}_k\|_2^2 \\ &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K [\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp \mathbf{y}_k]^H [\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp \mathbf{y}_k] \\ &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K [\mathbf{y}_k^H (\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp)^H \mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp \mathbf{y}_k] \end{aligned} \quad (2.53)$$

onde $\mathbf{P}_\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ é a matriz de projeção no subespaço de sinal e $\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$ é a matriz de projeção no subespaço de ruído [3], [4].

Usando as propriedades do operador de projeção

$$(\mathbf{P}_\mathbf{U})^H = \mathbf{P}_\mathbf{U} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{P}_\mathbf{U}\mathbf{P}_\mathbf{U} = \mathbf{P}_\mathbf{U} \quad (2.55)$$

em (2.53), chegamos a

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k^H \mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp \mathbf{y}_k. \quad (2.56)$$

Usando a propriedade do operador traço de uma matriz, $\text{tr}\{c\} = c$, onde c é um escalar, temos

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \text{tr}\{\mathbf{y}_k^H \mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp \mathbf{y}_k\} \\ &= \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \text{tr}\{\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \text{tr} \left\{ \mathbf{P}_A^\perp \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H \right\} \\
&= \frac{1}{N} \text{tr} \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y \}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

A função de verossimilhança (2.38) pode agora ser concentrada com respeito a σ^2 e $\{\mathbf{s}_k\}$. Considerando que ao longo do cálculo de $\hat{\sigma}^2$ constatamos que $\sum_{k=1}^K [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}_k]^H [\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\hat{\mathbf{s}}_k] = K(\text{tr}\{\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y\})$ e usando a estimativa $\hat{\sigma}^2$ obtida em (2.57) podemos escrever:

$$\begin{aligned}
L(\omega|Y) &= -NK \ln \left\{ \frac{1}{N} \text{tr} \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y \} \right\} - \frac{NK}{\text{tr} \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y \}} \text{tr} \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y \} \\
&= -NK \left[\ln \{ \text{tr} \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y \} \} + \{ \ln \{ 1/N \} \} \right] - NK
\end{aligned}$$

Dividindo os termos por NK e ignorando os termos constantes, temos finalmente

$$L(\omega|Y) \propto -\ln \{ \text{tr} \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y \} \}. \tag{2.58}$$

Lembrando que a estimativa ML de ω é a que maximiza a função $L(\omega|Y)$, e que a função logarítmica é monotônica, a estimativa ML de ω , é dada por

$$\hat{\omega}_{ML} = \arg \min_{\varpi} \text{tr} \{ \mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y \}. \tag{2.59}$$

onde ϖ denota um vetor de variáveis independentes associados aos ângulos direção de chegada.

A função $\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y$ é não-linear, não-quadrática e, em geral, é multimodal em ϖ . Assim, o cálculo da estimativa $\hat{\omega}_{ML}$ exige um esforço computacional proibitivo. Este fato, aliado ao excelente desempenho do estimador ML, motivou a pesquisa de métodos ML iterativos capazes de contornar o problema do esforço computacional. No próximo capítulo serão apresentados alguns destes métodos, bem como a comparação dos seus desempenhos. Os critérios adotados para a avaliação de desempenho serão apresentados na próxima seção.

2.3 Critérios de Avaliação

Os critérios que serão utilizados aqui para analisar o desempenho dos métodos para estimação DOA serão o erro quadrático e a polarização médios. As estimativas destes parâmetros serão obtidas mediando os resultados de vários experimentos.

A seguir definiremos e analisaremos as características destes parâmetros para o contexto DOA.

2.3.1 Erro Quadrático Médio Estimado

O desempenho dos métodos de estimação será avaliado com base nos erros das suas estimativas. O erro é definido como a diferença entre o ângulo estimado e o ângulo verdadeiro. Porém, este erro não será calculado usando as componentes ω_m de $\boldsymbol{\omega}$, definidas em (2.6), mas sim os ângulos θ_m , expresso em graus. Utilizaremos o erro quadrático médio ou mse (*mean square error*), ou seja, o valor do erro é elevado ao quadrado e acumulado a cada experimento, sendo, ao final, mediado pelo número de experimentos. Mais especificamente, utilizaremos a raiz quadrada desse erro (*root mean square error* ou *rmse*), por ser uma medida muito utilizada na literatura. Sua expressão matemática é definida como:

$$rmse \langle \hat{\theta}_m \rangle \equiv \sqrt{\frac{1}{NR} \sum_{r=1}^{NR} [(\hat{\theta}_{rm} - \theta_m)]^2}, \quad (2.60)$$

onde NR é o número de experimentos (realizações) e $\hat{\theta}_{rm}$ é a r -ésima estimativa de θ_m .

O valor da *rmse* depende diretamente do valor estimado e de vários parâmetros como: o número de sensores (N), número de fontes (M), o número de *snapshots* (K), relação sinal-ruído (SNR). Neste trabalho fixaremos todos os parâmetros, exceto a SNR . Portanto traçaremos uma curva de desempenho em relação à SNR .

Para os valores dos outros parâmetros utilizaremos um cenário clássico da literatura [8], [9], [11], [17], [18]. Trata-se de um arranjo linear uniforme com dez sensores, omnidirecionais e interespacamento de metade do comprimento de onda. Há dois sinais de banda estreita, ambos com amplitude unitária e com ângulos DOA em $\theta_1 = 10^\circ$ e $\theta_2 = 15^\circ$. O número de *snapshots* utilizado nas simulações é 100. A relação SNR é definida para cada sinal e é a relação entre a sua potência e a potência σ^2 do ruído. Como temos dois sinais com mesma amplitude, a SNR será a mesma para os dois sinais e irá variar entre -15 e 15 dB, com passo de 1 dB. Serão utilizadas 1000 simulações de Monte Carlo. A matriz de covariância do sinal é $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ (fontes totalmente descorrelacionadas). O modelo de sinal utilizado é o modelo CM apresentado neste capítulo.

2.3.2 Polarização Média Estimada

Como vimos, o erro quadrático médio (*mse*) é uma medida muito utilizada para a avaliação de métodos de estimação. Segundo [4] o *mse* é dado por

$$mse(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + (bias(\hat{\theta}))^2, \quad (2.61)$$

onde, $var(\hat{\theta})$ é variância do estimador e $bias(\hat{\theta})$ é a sua polarização, a qual é definida como:

$$bias(\hat{\theta}) = E\{\hat{\theta}\} - \theta, \quad (2.62)$$

sendo θ o valor verdadeiro.

No nosso caso, o operador esperança será substituído pela média das estimativas dos experimentos, e a polarização será calculada através da diferença entre esta média e o ângulo verdadeiro. Portanto, a polarização será calculada usando

$$bias\langle\hat{\theta}_m\rangle \equiv \left[\frac{1}{NR} \sum_{r=1}^{NR} \hat{\theta}_{rm} \right] - \theta_m. \quad (2.63)$$

Da mesma forma que para o rmse de (2.60), a polarização também depende dos ângulos estimados e de N , M , K e SNR . Novamente iremos variar o valor de SNR e fixar os valores restantes. Para os valores fixados será utilizado o mesmo cenário descrito anteriormente.

Através dos gráficos de polarização poderemos avaliar a influência da variância e da polarização na constituição do mse. Geralmente para o caso DOA, os estimadores são assintoticamente não-polarizados, mas se tornam polarizados para pequenos valores de SNR .

2.3.3 Limite de Cramer-Rao

O Limite de Cramer-Rao ou CRB (*Cramer-Rao Bound*) é a principal referência teórica em estimação de parâmetros e representa o valor mínimo que o erro quadrático médio das estimativas geradas por um estimador não-polarizado pode atingir. O CRB para o problema DOA depende de vários parâmetros como:

- número de sensores;
- número de sinais;
- SNR ;
- valores do ângulos;
- número de *snapshots*

As demonstrações e principais expressões para o caso DOA são analisadas em [15] e a expressão para o CRB referente ao modelo de sinal CM é dada por

$$CRB(\omega) = \frac{\sigma^2}{2K} \{Re[\mathbf{D}_{\omega}^H \mathbf{P}_A^{\perp} \mathbf{D}_{\omega} \otimes \hat{\mathbf{P}}^T]\}^{-1}, \quad (2.64)$$

onde $\mathbf{D}_\omega$ é a derivada da matriz $\mathbf{A}$ em relação às frequências ω , $\otimes$ (produto de Hadamard) indica multiplicação matricial elemento a elemento e $\hat{\mathbf{P}}^T$ denota a matriz de correlação dos sinais estimada.

Durante as análises de desempenho nos próximos capítulos, iremos observar que o desempenho de alguns métodos se aproximam do CRB à medida que a SNR cresce. Por outro lado, ao reduzirmos a SNR, existe uma região onde o erro quadrático médio de estimação começa a se afastar rapidamente da curva referente ao CRB. Este fenômeno é conhecido como efeito de limiar e a região de valores de SNR onde ele ocorre é a região de limiar. O objetivo principal deste trabalho é apresentar um novo estimador DOA capaz de deslocar a região de limiar para valores de SNR menores que aqueles apresentados pelos estimadores DOA-ML conhecidos.

Capítulo 3

Métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado

Conforme comentado no capítulo 2, a implementação direta do MLE para DOA, em geral, é inviável devido ao esforço computacional. Para solucionar esse problema surgiram novos métodos que aproximam a estimativa ML através de algoritmos iterativos. Neste capítulo iremos tratar de três deles, por terem excelente desempenho. O primeiro a ser abordado é o método MODE [7], que minimiza uma versão reparametrizada da função custo ML e emprega uma decomposição da matriz $\mathbf{R}_y$ em subespaços de sinal e ruído. Baseados no método MODE, com o objetivo de melhorar o desempenho, foram desenvolvidos outros dois métodos, MODEX [8] e MODEX Modificado [9]. Este capítulo apresenta a reparametrização da função custo ML-CM, o desenvolvimento do MODE, a descrição dos métodos MODEX e MODEX Modificado e por fim apresenta simulações e resultados destes estimadores.

3.1 Reparametrização da Função Custo ML

A função custo ML para o parâmetro ω foi calculada na seção 2.2 do capítulo 2 e é dada por

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_y\}. \quad (3.1)$$

A dificuldade em se usar o estimador DOA-ML é o elevado esforço computacional necessário para a minimização da sua função custo. Para resolver esse problema foi proposto [6] reparametrizar a função (3.1) em termos de um vetor de dados $\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_M]^T$, onde os elementos b_m são os coeficientes do polinômio [5]

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M = b_0 \prod_{m=1}^M (z - e^{j\omega_m}). \quad (3.2)$$

Os zeros se situam na circunferência de raio unitário (CRU), nas posições $e^{j\omega_m}$, com $m = 1, 2, \dots, M$, resultando em

$$\sum_{m=0}^M b_m e^{j(n-m)\omega_i} = 0, \quad (3.3)$$

onde $n = 1, 2, \dots, N$ e $i = 1, 2, \dots, M$. A expressão (3.3) pode ser escrita na forma matricial [6]

$$\mathbf{B}^H \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{B}^H$ é uma matriz Toeplitz definida por

$$\mathbf{B}^H = \begin{bmatrix} b_M & \dots & b_1 & b_0 & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{0} & b_M & \dots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}_{(N-M) \times N}. \quad (3.5)$$

As linhas de $\mathbf{B}^H$ (posto = $N - M$) são ortogonais às colunas de $\mathbf{A}$ (posto = M), gerando o espaço ortogonal de $\mathbf{A}$. Assim, tanto $\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp$ quanto $\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$ são projetores ortogonais do espaço nulo de $\mathbf{A}^H$, implicando em

$$\mathbf{P}_\mathbf{A}^\perp = \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H. \quad (3.6)$$

Substituindo a expressão (3.6) em (3.1), temos a nova função custo reparametrizada

$$F(\mathbf{b}) = \{\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{R}}_\mathbf{y}\}. \quad (3.7)$$

Assim, o novo estimador será

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{b} \in D} \{F(\mathbf{b})\}, \quad (3.8)$$

onde $D = \{b_m | b(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{M-m} \neq 0 \text{ para } |z| \neq 1\}$ é o conjunto que faz com que a correspondência entre o vetor de parâmetros $\mathbf{b}$ e o vetor de frequências ω seja único, desde que seja evitada a solução trivial $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

As estimativas para ω são obtidas através das raízes do polinômio $b(z)$ gerado com os coeficientes definidos em $\hat{\mathbf{b}}$.

3.2 Método MODE

O método MODE [7] é um estimador baseado no critério ML Condicional utilizando a reparametrização demonstrada na seção 3.1. O método MODE decompõe a matriz de covariância $\mathbf{R}_y$ em autovalores e autovetores:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H, \quad (3.9)$$

onde

- $\mathbf{U}$ é uma matriz unitária cujas colunas são os autovetores de $\mathbf{R}_y$
- $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $\mathbf{R}_y$ ordenados em valores decrescentes.

As $\bar{M}$ primeiras colunas de autovetores correspondentes aos $\bar{M}$ maiores autovalores serão colocadas em uma matriz $\mathbf{U}_S$, onde $\bar{M} = \min(M, \text{posto}(\mathbf{P}))$. Os autovetores restantes são alocados na matriz $\mathbf{U}_N$. Estas separações permitem reescrever (3.9) como

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{U}_S\mathbf{\Lambda}_S\mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N\mathbf{\Lambda}_N\mathbf{U}_N^H, \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{U}_S \in C^{N \times \bar{M}}$ e $\mathbf{\Lambda}_S = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\bar{M}}\} \in R^{\bar{M} \times \bar{M}}$ são associados ao subespaço de sinal e $\mathbf{U}_N \in C^{N \times (N - \bar{M})}$ e $\mathbf{\Lambda}_N = \sigma^2 \mathbf{I} \in R^{(N - \bar{M}) \times (N - \bar{M})}$ são interpretados como pertencentes ao subespaço de ruído da matriz $\mathbf{R}_y$.

Podemos demonstrar que todos os autovetores do subespaço de ruído, isto é, as colunas de $\mathbf{U}_N$, são ortogonais às colunas da matriz $\mathbf{A}$. Como consequência, as colunas de $\mathbf{U}_S$ descrevem o espaço das colunas da matriz $\mathbf{A}$ [3]. Então, com base em (3.4) também é verdade que $\mathbf{B}^H \mathbf{U}_S = \mathbf{0}$. Usando este resultado após substituir a matriz $\hat{\mathbf{R}}_y$ da expressão (3.7) pela sua decomposição em subespaços, conforme (3.10), a expressão final para a função custo do MODE é deduzida em [7] e escrita como

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{\Psi}} \hat{\mathbf{U}}_S^H\}, \quad (3.11)$$

sendo que a matriz $\hat{\mathbf{\Psi}}$ ótima, para minimizar a variância do erro de estimação, é dada por [3], [14]

$$\hat{\mathbf{\Psi}} = \text{diag} \left\{ \frac{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_1}, \frac{(\hat{\lambda}_2 - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_2}, \dots, \frac{(\hat{\lambda}_{\bar{M}} - \hat{\sigma}^2)^2}{\hat{\lambda}_{\bar{M}}} \right\}. \quad (3.12)$$

Esta estimativa usa os autovalores do subespaço de sinal, $\hat{\lambda}_i$. Uma vez que tais autovalores contêm uma parcela devido ao ruído, esta parcela é eliminada subtraindo o valor $\hat{\sigma}^2$, referente aos autovalores

do subespaço de ruído. A estimativa da variância do ruído, $\hat{\sigma}^2$, pode ser obtida calculando-se a média dos elementos da diagonal da matriz $\hat{\Lambda}_N$, ou seja,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - \bar{M}} \text{tr}\{\hat{\Lambda}_N\} = \frac{1}{N - \bar{M}} [\text{tr}\{\hat{\mathbf{R}}_y\} - \text{tr}\{\hat{\Lambda}_S\}]. \quad (3.13)$$

A função custo (3.11) é não-quadrática e não-linear em relação ao vetor $\hat{\mathbf{b}}$ e, portanto, não é possível obter uma solução analítica para o vetor $\hat{\mathbf{b}}$. Posto isso, foi proposto em [7] fazer a minimização da função (3.11) de forma iterativa. É atribuído um valor para $\mathbf{B}^H \mathbf{B}$, tornando o problema quadrático. Com isso, obtém-se uma primeira estimativa de $\mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{b}}$. Realiza-se uma segunda iteração, na qual o valor de $\hat{\mathbf{b}}$ obtido é usado para atualizar o valor de $\mathbf{B}^H \mathbf{B}$ e obtém-se um novo valor de $\hat{\mathbf{b}}$. O procedimento é repetido até que se atinja a convergência segundo algum critério de parada. Em geral o processo iterativo é iniciado com $\mathbf{B}^H \mathbf{B} = \mathbf{I}$.

Na próxima seção iremos fazer algumas manipulações algébricas na função custo (3.11) para simplificar a minimização para cada iteração.

3.2.1 Rearranjo da Função Custo no Método MODE

Ao atribuímos um valor para $\mathbf{B}^H \mathbf{B}$, geramos um problema quadrático, o qual pode ser resolvido analiticamente. Porém, ainda assim o cálculo da função custo (3.11) se mostra complicado. Em função disso, foi proposto em [7] algumas manipulações algébricas para rearranjar a expressão (3.11), simplificando o cálculo para cada iteração, conforme mostrado a seguir.

A expressão (3.11) pode ser decomposta em

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr}\{\mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S (\hat{\Psi}^{1/2} \hat{\Psi}^{1/2}) \hat{\mathbf{U}}_S^H\} \quad (3.14)$$

e utilizando a propriedade do traço $\text{tr}\{AB\} = \text{tr}\{BA\}$, temos

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr}\{(\hat{\Psi}^{1/2}) (\hat{\mathbf{U}}_S^H \mathbf{B})(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} (\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S) (\hat{\Psi}^{1/2})\}, \quad (3.15)$$

onde

$$\hat{\Psi}^{1/2} = \text{diag} \left\{ \frac{|\hat{\lambda}_1 - \hat{\sigma}^2|}{\sqrt{\hat{\lambda}_1}}, \frac{|\hat{\lambda}_2 - \hat{\sigma}^2|}{\sqrt{\hat{\lambda}_2}}, \dots, \frac{|\hat{\lambda}_{\bar{M}} - \hat{\sigma}^2|}{\sqrt{\hat{\lambda}_{\bar{M}}}} \right\}. \quad (3.16)$$

Podemos demonstrar que $(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1}$ possui simetria conjugada. Com isso, é possível aplicar a fatoração de Cholesky à mesma. Denotando por $\mathbf{G}$ o fator de Cholesky tal que

$$(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{G}^H \mathbf{G}, \quad (3.17)$$

temos que

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \text{tr}\{(\hat{\Psi}^{1/2})(\hat{\mathbf{U}}_S^H \mathbf{B})\mathbf{G}^H \mathbf{G}(\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_S)(\hat{\Psi}^{1/2})\}. \quad (3.18)$$

Seja ainda

$$\hat{\mathbf{U}}_L = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\Psi}^{1/2} = [\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_{\bar{M}}] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,\bar{M}} \\ u_{2,1} & \cdots & u_{2,\bar{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N,1} & \cdots & u_{N,\bar{M}} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^H \mathbf{u}_k &= \begin{bmatrix} b_M & b_{M-1} & \cdots & b_0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & \ddots \\ \mathbf{0} & b_M & b_{M-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,k} \\ u_{2,k} \\ \vdots \\ u_{N,k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{M+1,k} & u_{M,k} & \cdots & u_{1,k} \\ u_{M+2,k} & u_{M+1,k} & \cdots & u_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N,k} & u_{N-1,k} & \cdots & u_{N-M,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{S}_k \mathbf{b}]_{(N-\bar{M}) \times 1}; \quad 1 \leq k \leq \bar{M}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

resultando em

$$\mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_L = [\mathbf{S}_1 \mathbf{b} \mid \mathbf{S}_2 \mathbf{b} \mid \cdots \mid \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b}]_{(N-\bar{M}) \times \bar{M}}. \quad (3.21)$$

Portanto,

$$\mathbf{G} \mathbf{B}^H \hat{\mathbf{U}}_L = [(\mathbf{G} \mathbf{S}_1) \mathbf{b} \mid (\mathbf{G} \mathbf{S}_2) \mathbf{b} \mid \cdots \mid (\mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}}) \mathbf{b}]. \quad (3.22)$$

Utilizando (3.22), reescrevemos a expressão (3.18)

$$\begin{aligned} F_{MODE}(\mathbf{b}) &= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{G} \mathbf{S}_1 \mathbf{b})^H}{\vdots} \\ \frac{(\mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b})^H}{\vdots} \end{bmatrix} [\mathbf{G} \mathbf{S}_1 \mathbf{b} \mid \cdots \mid \mathbf{G} \mathbf{S}_{\bar{M}} \mathbf{b}] \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\bar{M}} (\mathbf{G} \mathbf{S}_k \mathbf{b})^H (\mathbf{G} \mathbf{S}_k \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\bar{M}} \|\mathbf{GS}_k \mathbf{b}\|^2 \\
&= \left[(\mathbf{GS}_1 \mathbf{b})^H \mid \cdots \mid (\mathbf{GS}_{\bar{M}} \mathbf{b})^H \right] \begin{bmatrix} \mathbf{GS}_1 \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{GS}_{\bar{M}} \mathbf{b} \end{bmatrix}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Usando a notação

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{GS}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{GS}_{\bar{M}} \end{bmatrix}_{\bar{M}(N-\bar{M}) \times (\bar{M}+1)}, \tag{3.24}$$

temos que

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \{\mathbf{b}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{b}\} = \|\mathbf{H} \mathbf{b}\|^2. \tag{3.25}$$

A nova expressão para estimador MODE será

$$\hat{\mathbf{b}} = \arg \min_{\mathbf{b} \in D} \{F_{MODE}(\mathbf{b})\}, \tag{3.26}$$

com $F_{MODE}(\mathbf{b})$ dada por (3.25).

Agora vamos considerar a restrição $\mathbf{b} \in D$ em (3.26). Como esta restrição complica a minimização podemos substituí-la por uma restrição de simetria complexa conjugada sobre os coeficientes de $b(z)$ [5], fazendo

$$b_m = b_{M-m}^* \quad \text{para } m = 0, 1, \dots, M. \tag{3.27}$$

Esta restrição não é necessária e nem suficiente para que os zeros do polinômio $b(z)$ estejam sobre a CRU. Mas todo polinômio $b(z)$ com raízes sobre a CRU pode ser convertido, mediante um fator multiplicativo, em um polinômio com simetria complexa conjugada. Os exemplos a seguir ilustram algum destes aspectos.

Dadas as raízes $z_1 = e^{j\omega_1}$ e $z_2 = e^{j\omega_2}$ temos o seguinte polinômio

$$b(z) = z^2 - (e^{j\omega_1} + e^{j\omega_2})z + e^{j(\omega_1+\omega_2)}, \tag{3.28}$$

o qual não apresenta simetria complexa conjugada. Entretanto, multiplicando $b(z)$ por $e^{-j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}}$, obtemos

$$e^{-j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}} b(z) = e^{-j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}} z^2 - (e^{j\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}} + e^{-j\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}})z + e^{j\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}}, \tag{3.29}$$

com simetria complexa conjugada.

Quanto à suficiência da restrição (3.27), veja o contra-exemplo a seguir:

Dadas as raízes $z_1 = \rho e^{j\omega}$ e $z_2 = \frac{1}{\rho} e^{-j\omega}$ temos o polinômio

$$b(z) = z^2 - (\rho e^{j\omega} + \frac{1}{\rho} e^{-j\omega})z + 1. \quad (3.30)$$

Portanto, há a simetria com $b_0 = b_M = 1$ mesmo com $\rho \neq 1$.

Embora a restrição simetria complexa conjugada não garanta uma estimativa de $\mathbf{b}$ pertencente ao conjunto D , tal restrição reduz significativamente o número de incógnitas em $b(z)$ conforme será demonstrado a seguir.

Com a imposição de simetria complexa conjugada, o polinômio $b(z)$ terá as seguintes formas

- M par

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{\frac{M}{2}-1} z^{\frac{M}{2}+1} + b_{\frac{M}{2}} z^{\frac{M}{2}} + b_{\frac{M}{2}-1}^* z^{\frac{M}{2}-1} + \dots + b_0^*, \quad (3.31)$$

- M ímpar

$$b(z) = b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{\frac{M-1}{2}} z^{\frac{M+1}{2}} + b_{\frac{M-1}{2}}^* z^{\frac{M-1}{2}} + \dots + b_0^*. \quad (3.32)$$

A seguir será considerada a minimização da expressão (3.26) sob a restrição (3.27). São definidos os seguintes vetores e matrizes:

1. Para M par

- $\mathbf{I}_{kpar} = \mathbf{I}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}}$
- $\text{rot90}(\mathbf{I}_{kpar}) = \mathbf{I}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}}$ girada de $90^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}}$
- $\mathbf{ze} = [0 \ \dots \ 0]_{\frac{M}{2} \times 1}^T$
- $\mathbf{K}_{par} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{kpar} & \mathbf{ze} & j\mathbf{I}_{kpar} \\ \mathbf{ze}^T & 1 & \mathbf{ze}^T \\ \text{rot90}(\mathbf{I}_{kpar}) & \mathbf{ze} & -j\text{rot90}(\mathbf{I}_{kpar}) \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$
- $\boldsymbol{\beta}_{par} = [b_{0re} \ b_{1re} \ \dots \ b_{(\frac{M}{2}-1)re} \ \mu \ b_{0img} \ b_{1img} \ \dots \ b_{(\frac{M}{2}-1)img}]^T = [\beta_0 \ \dots \ \beta_M]^T$

onde $b_m = b_{mre} + jb_{mimg}$ são as partes real e imaginária do coeficiente b_m e μ é um número real igual a $\frac{b_M}{2}$.

2. Para M ímpar

- $\mathbf{I}_{kímpar} = \mathbf{I}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}}$
- $\text{rot90}(\mathbf{I}_{kímpar}) = \mathbf{I}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}} \text{ girada de } 90^\circ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}}$
- $\mathbf{K}_{kímpar} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{kímpar} & j\mathbf{I}_{kímpar} \\ \text{rot90}(\mathbf{I}_{kímpar}) & -j\text{rot90}(\mathbf{I}_{kímpar}) \end{bmatrix}_{(M+1) \times (M+1)}$
- $\boldsymbol{\beta}_{kímpar} = [b_{0re} \ b_{1re} \ \cdots \ b_{\frac{M-1}{2}re} \ b_{0img} \ b_{1img} \ \cdots \ b_{\frac{M-1}{2}img}]^T = [\beta_0 \ \cdots \ \beta_M]^T$

Dadas estas definições, os vetores

$$\mathbf{b}_{par} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{\frac{M}{2}-1} \ b_{\frac{M}{2}} \ b_{\frac{M}{2}-1}^* \ \cdots \ b_0^*], \text{ para } M \text{ par}, \quad (3.33)$$

e

$$\mathbf{b}_{kímpar} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{\frac{M-1}{2}} \ b_{\frac{M-1}{2}}^* \ \cdots \ b_0^*], \text{ para } M \text{ ímpar}, \quad (3.34)$$

representam os coeficientes dos polinômios apresentados nas expressões (3.31) e (3.32), respectivamente. Estes vetores podem ser obtidos da seguinte forma

$$\mathbf{b}_{par} = \mathbf{K}_{par}\boldsymbol{\beta}_{par} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{b}_{kímpar} = \mathbf{K}_{kímpar}\boldsymbol{\beta}_{kímpar}. \quad (3.36)$$

Usando a designação genérica $\mathbf{K}$ para as matrizes correspondentes em (3.35) e (3.36) e fazendo $\mathbf{b} = \mathbf{K}\boldsymbol{\beta}$ na expressão (3.25), obtemos

$$\begin{aligned} F_{MODE}(\mathbf{b}) &= (\mathbf{b}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{K}^H \mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{H} \mathbf{K})^H (\mathbf{H} \mathbf{K}) \boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta}^T (\mathbf{H} \mathbf{K}_{re} + j \mathbf{H} \mathbf{K}_{img})^H (\mathbf{H} \mathbf{K}_{re} + j \mathbf{H} \mathbf{K}_{img}) \boldsymbol{\beta} \\ &= \boldsymbol{\beta}^T \left[\mathbf{H} \mathbf{K}_{re}^T \mid \mathbf{H} \mathbf{K}_{img}^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H} \mathbf{K}_{re} \\ \mathbf{H} \mathbf{K}_{img} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{HK}_{re}$ e $\mathbf{HK}_{img}$ são, respectivamente, as partes real e imaginária do produto matricial $\mathbf{HK}$.

Fazendo

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \frac{Re(\mathbf{HK})}{Img(\mathbf{HK})} \end{bmatrix}_{2M(N-M) \times (M+1)}, \quad (3.38)$$

temos que

$$F_{MODE}(\mathbf{b}) = \|\mathbf{\Omega}\mathbf{\beta}\|^2. \quad (3.39)$$

Agora é necessário analisarmos como impedir a solução trivial $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ no problema de minimização de $F_{MODE}(\mathbf{b})$. A proposta sugerida em [7] é fazermos $b_0 \neq 0$, impondo, por exemplo, que a parte real de b_0 seja diferente de zero. Vamos analisar a validade desta sugestão.

Da expressão (3.2) temos que

$$b_M = b_0 e^{j(\Theta - M\pi)}, \quad \text{com } \Theta = \sum_{m=1}^M \omega_m. \quad (3.40)$$

Impondo a restrição simetria complexa conjugada e observando os polinômios das expressões (3.31) e (3.32), verificamos que $b_M = b_0^*$ para ambos os casos. Portanto, obtemos que

$$b_M^* = b_0 = \alpha e^{j\left(\frac{M\pi - \Theta}{2}\right)}, \quad \alpha = |b_0| \neq 0, \quad (3.41)$$

onde α é arbitrário.

Fazendo $\beta_0 = 1$, ou seja, a parte real de $b_0 = 1$, evita-se a solução trivial. Entretanto, esta restrição não é consistente, pois ela elimina as situações em que $(\Theta - M\pi)$ é um múltiplo ímpar de π . Neste caso, o argumento de b_M será um múltiplo ímpar de $\pi/2$, o que implicará em $\beta_0 = 0$. Embora estas situações não sejam freqüentes, sua ocorrência faz com que alguns elementos obtidos na minimização da expressão (3.39) apresentem valores muito grandes. Neste caso, basta repetir a minimização de $F_{MODE}(\mathbf{b})$ sob a restrição $\beta_M = 1$. O uso adequado destas duas restrições é suficiente para abarcar todas as situações práticas [7].

3.2.2 Resumo da Implementação do Algoritmo MODE

A minimização de $F_{MODE}(\mathbf{b})$, sob a restrição simetria complexa conjugada, envolve os seguintes passos:

PASSO 1: Compute $u_{j,k}$ de (3.19) e defina $\mathbf{G} = \mathbf{I}$.

PASSO 2: Compute $\mathbf{H}$ e $\mathbf{\Omega}$ a partir de (3.24) e (3.38).

PASSO 3: Determine $\mathbf{\beta}$ minimizando a função quadrática $F_{MODE}(\mathbf{b})$ definida na expressão (3.39) com $\beta_0 = 1$. Para isso, faz-se o uso da decomposição QR como segue.

Dado

$$\mathbf{\Omega} = [\mathbf{\Omega}_1 \ \mathbf{\Omega}_2], \quad (3.42)$$

onde $\mathbf{\Omega}_1 \in C^{2\bar{M}(N-M) \times 1}$ e $\mathbf{\Omega}_2 \in C^{2\bar{M}(N-M) \times M}$, a decomposição QR de $\mathbf{\Omega}_2$ conduz a

$$\mathbf{\Omega}_2 = [\mathbf{Q}_1 \ \mathbf{Q}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{Q}_1 \in C^{2\bar{M}(N-M) \times M}$ e $\mathbf{R}_{y_1}$ denota uma matriz triangular superior de ordem $M \times M$.

Então a minimização é dada por

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{R}_{y_1}^{-1} \mathbf{Q}_1^H \mathbf{\Omega}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Compute $\hat{\mathbf{b}}$ através das expressões (3.35) ou (3.36).

PASSO 4: Atualize $\mathbf{B}^H \mathbf{B}$ usando $\hat{\mathbf{b}}$. Compute $\mathbf{G} = \text{Cholesky}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1}$. Repita os Passos 2, 3 e 4 até que algum critério de convergência seja satisfeito.

As estimativas para ω são os argumentos das raízes do polinômio $b(z)$ gerado com os coeficientes definidos em $\hat{\mathbf{b}}$.

Conforme poderemos observar na seção 3.5 o MODE tem bom desempenho para valores grandes de SNR. Porém, quando temos valores pequenos de SNR, por exemplo, menores que 0 dB o MODE sofre com o efeito de limiar, resultando em uma degradação rápida de desempenho. Tentando minimizar este problema foram propostos outros métodos de estimação ML-DOA, os quais serão apresentados nas próximas seções.

3.3 Método MODEX

Visando melhorar o desempenho do método MODE, preservando sua eficiência para valores grandes de SNR, foi apresentado o método MODEX (*Mode with Extra roots*) [8].

Para pequenos valores de SNR, ocorre uma degradação rápida de desempenho do MODE conforme poderemos observar na seção 3.5. É o chamado efeito de limiar e é causado pelo fato da matriz dos autovetores do subespaço de sinal estimada, $\hat{\mathbf{U}}_S$, possuir, para valores de SNR abaixo do limiar, componentes significativas no espaço nulo da matriz $\mathbf{A}$. Como consequência, o MODE tende a alocar algumas raízes em regiões distantes dos ângulos desejados, em resposta ao forte ruído presente.

Para melhorar este desempenho, o MODEX propõe a utilização de raízes extras. Devemos aumentar a ordem do polinômio $b(z)$, elevando a ordem de M para $(M + P)$. Com esse aumento,

serão geradas P raízes extras em relação às M raízes geradas pelo MODE, onde P é um inteiro tal que $0 < P < N - M$. O objetivo da utilização das raízes extras é melhorar os modelos para os subespaços de sinal e ruído. Usando o índice MX para denotar as expressões referentes ao método MODEX, o vetor de coeficientes associados ao polinômio $b_{MX}(z)$ é dado por

$$\mathbf{b}_{MX} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{M+P}]^T. \quad (3.45)$$

A matriz $\mathbf{B}_{MX}$ é definida como

$$\mathbf{B}_{MX} = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{M+P} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \ddots \\ \mathbf{0} & & b_0 & \cdots & b_{M+P} \end{bmatrix}_{N \times (M+P)}. \quad (3.46)$$

A ordem da matriz $\hat{\Psi}$ da expressão (3.12) também tem que ser alterada. A nova matriz $\hat{\Psi}_{MX}$, com dimensão estendida $(\bar{M} + P) \times (\bar{M} + P)$, é dada por

$$\hat{\Psi}_{MX} = \text{diag} \{ \hat{\Psi} \ 0 \ \cdots \ 0 \} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Utilizando (3.47), a expressão (3.11) pode ser estendida para

$$F_{MX}(\mathbf{b}_{MX}) = \{ \mathbf{P}_{\mathbf{B}_{MX}} \mathbf{U}_{MX} \hat{\Psi}_{MX} \mathbf{U}_{MX}^H \}, \quad (3.48)$$

onde $\mathbf{P}_{\mathbf{B}_{MX}} = \mathbf{B}_{MX}(\mathbf{B}_{MX}^H \mathbf{B}_{MX})^{-1} \mathbf{B}_{MX}^H$ e a matriz $\hat{\mathbf{U}}_{MX}$ é dada por

$$\hat{\mathbf{U}}_{MX} = [\hat{\mathbf{u}}_1 \ \hat{\mathbf{u}}_2 \ \cdots \ \hat{\mathbf{u}}_{M+P}]. \quad (3.49)$$

A partir das expressões (3.47) e (3.49), obtemos que

$$\hat{\mathbf{U}}_{MX} \hat{\Psi}_{MX} \hat{\mathbf{U}}_{MX}^H = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\Psi} \hat{\mathbf{U}}_S^H, \quad (3.50)$$

o que faz com que a função estendida da expressão (3.48) seja dada por

$$F_{MX}(\mathbf{b}_{MX}) = \{ \mathbf{P}_{\mathbf{B}_{MX}} \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\Psi} \hat{\mathbf{U}}_S^H \}. \quad (3.51)$$

Para encontrarmos a solução para a função custo MODEX (3.51), usamos os mesmos procedimentos utilizados para resolver a função custo MODE, como demonstrado na seção 3.2.1. As duas soluções diferem apenas em relação ao número de raízes. Ao seu final obtemos o vetor $\hat{\mathbf{b}}_{MX}$, que dá

origem ao polinômio $b(z)$, donde são extraídas as $(M + P)$ raízes.

3.3.1 Seleção das Raízes do MODEX

Para garantir o desempenho mínimo similar àquele alcançado pelo MODE, as M raízes do MODE convencional são calculadas e agrupadas com as $(M + P)$ novas raízes, levando a um conjunto de $(2M + P)$ estimativas candidatas.

A seleção das melhores M candidatas dentre todas $(2M + P)$ é feita analisando todas as possíveis combinações de M raízes via o critério ML dado por (3.1) com $\varpi \subset \Phi$, onde Φ é o conjunto de todas as combinações possíveis das raízes MODEX. Utilizamos a função custo ML (3.1), porque o MODE, o MODEX e também o MODEX Modificado que será apresentado na seção 3.4, são todos métodos baseados no critério ML que visam aproximar a estimativa ML através de procedimentos iterativos.

O número de combinações, NC , a ser analisado é condicionado pelo fato de $\mathbf{P}_A^\perp$ em (3.1) ser independente da ordem de raízes de cada combinação. Portanto, NC é dado por

$$NC = \binom{2M + P}{M} = \frac{(2M + P)!}{M!(M + P)!}. \quad (3.52)$$

O esforço computacional exigido pelo método MODEX é cerca de duas vezes maior que o exigido pelo MODE. Porém o método MODEX melhora de forma significativa o desempenho MODE na região de limiar, conforme será visto na seção 3.5.

3.4 Método MODEX Modificado

O método MODEX Modificado foi desenvolvido objetivando melhorar o processo de geração de raízes extras do MODEX [9]. O MODEX Modificado altera este processo, gerando raízes com mais qualidade, resultando em um método mais eficiente.

O que ocorre é que nem todas as $(M + P)$ raízes geradas pelo MODEX através do aumento da ordem são adequadas para a estimação DOA. Isto porque o aumento da ordem do polinômio leva, em princípio, a M raízes próximas das raízes verdadeiras ω . Porém, as P raízes são alocadas em posições distantes das verdadeiras. Logo, estas P raízes não são, em geral, boas estimativas para os parâmetros [9].

O método MODEX Modificado gera raízes extras através de soluções distintas do MODE, a partir de três restrições de não-singularidade ($\mathbf{b} \neq 0$). A primeira solução MODE é obtida impondo uma restrição do tipo $\|\beta\| = 1$ para evitar a solução trivial. Esta restrição é implementada modifi-

cando a solução MODE da expressão (3.44) e fazendo β igual ao autovetor correspondente ao menor autovalor da matriz $\Omega^H \Omega$ [19].

As outras duas soluções MODE são geradas usando outras restrições para evitar a solução trivial. Referindo-se ao problema da expressão (3.39), as restrições empregadas são $\beta_0 = 1$ e $\beta_M = 1$, denominadas de restrições lineares. Como mencionado na seção 3.2.1, uma delas é sempre correta para todos os possíveis valores dos parâmetros DOA. Cada uma das 3 restrições gera M candidatas, resultando em um total de $3M$ candidatas.

Comparando os esforços computacionais do MODEX e do MODEX Modificado, a primeira observação a ser feita é que ambos executam o algoritmo MODE. Entretanto, eles diferem significativamente na forma de gerarem as raízes extras: enquanto o MODEX executa o algoritmo MODE novamente, utilizando o vetor estendido $\mathbf{b}_{MX}$, o MODEX Modificado calcula apenas a solução da expressão (3.44) duas vezes. É necessário apenas o cálculo de (3.44), porque o MODE já calculou todas as demais expressões algébricas necessárias. Além disso, devemos alterar (3.44) de acordo com cada restrição.

Esses métodos também diferem quanto ao número de combinações a serem testadas: $[(2M + P)! / ((M + P)!M!)]$ para o MODEX e $[(3M)! / ((2M)!M!)]$ para o MODEX Modificado. Portanto, o MODEX Modificado gera um número menor de combinações se $M < P < N - M$, o que normalmente ocorre [8].

O processo de seleção de raízes do método MODEX Modificado é realizado de forma idêntica ao método MODEX.

3.5 Simulações e Resultados

Nesta seção são apresentados resultados de simulações numéricas dos métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado.

O desempenho dos estimadores será ilustrado através do cenário descrito na seção 2.3. O valor de P será igual a 4 [8]. O desempenho dos estimadores será comparado ao Limite de Cramér-Rao.

3.5.1 Métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado

Na Figura 3.1 são apresentadas as curvas de desempenho dos métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado, além do método ML. Os resultados para o método ML foram obtidos utilizando um algoritmo de busca exaustiva.

Como podemos observar, para valores grandes de SNR, as estimativas dos quatro métodos aproximam-se do limite de Cramér-Rao. A proposta do MODE era manter o desempenho do método ML.

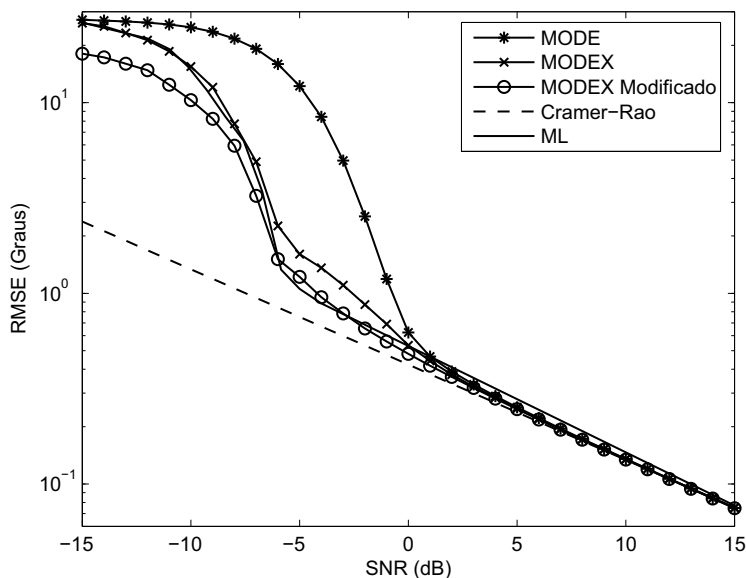


Figura 3.1: Desempenho dos métodos MODE, MODEX, MODEX Modificado e ML.

Comparando os dois métodos, vemos que o MODE teve relativo sucesso. A curva de desempenho do MODE acompanha a curva do método ML até a SNR de 0 dB, onde se inicia o efeito de limiar, ou seja, a curva de desempenho do MODE começa a se afastar do CRB, ocorrendo uma forte degradação de desempenho a partir de então. Já o MODEX melhora o desempenho do MODE, tendo resultado quase similar ao método ML. O limiar de desempenho acontece em torno de -6 dB. O MODEX Modificado mantém o desempenho apresentado pelo MODEX com SNR de limiar também em torno de -6 dB.

Para valores de SNR em torno -15 dB, a rmse do MODEX Modificado está em torno de 20° , enquanto MODE e MODEX estabilizam em torno de 30° , o mesmo acontecendo com o método ML. Portanto, a rmse do MODEX Modificado é menor, embora uma rmse de 20° é um valor muito alto pois estamos tratando de duas fontes espaçadas de 5° .

Nas Figuras 3.2 e 3.3, são apresentadas as curvas de polarização para os métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado. A Figura 3.2 apresenta a polarização para a estimação do ângulo de 10° , enquanto a Figura 3.3, se refere o ângulo de 15° . Comparando os três métodos, para o ângulo de 10° , o MODEX Modificado tem desempenho melhor, pois além de sua polarização ser menor para uma dada SNR, suas estimativas se tornam polarizadas a partir de valores menores de SNR. Em relação às estimativas para o ângulo de 15° , o MODE apresenta menor polarização, mas a mesma se inicia para valores ainda altos de SNR. O MODEX Modificado apresenta resultados semelhantes para os dois

ângulos, embora com polarização de polaridade opostas.

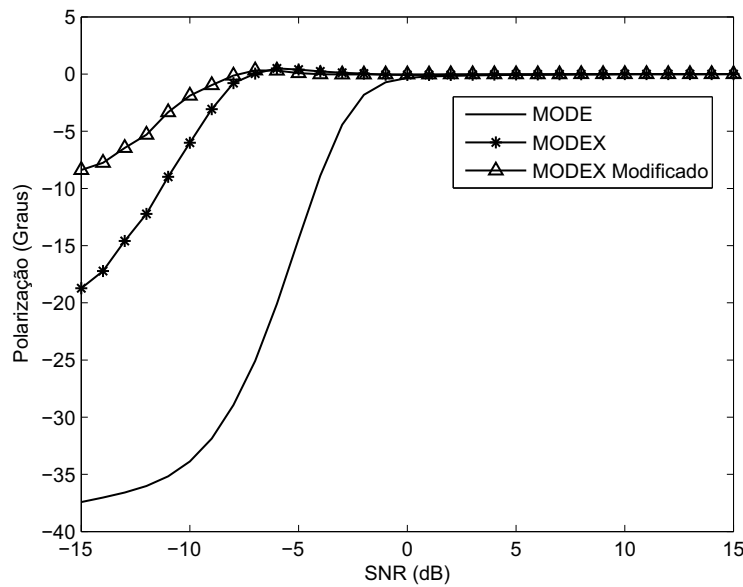


Figura 3.2: Polarização dos métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado para $\theta_1 = 10^\circ$.

Conforme observamos, os estimadores se tornam polarizados à medida que diminuimos a SNR. O valor de SNR referente ao início da polarização coincide com a SNR de limiar apresentada na Figura 3.1. Portanto, podemos afirmar que a polarização contribui para o efeito de limiar dos métodos apresentados.

Constatamos que o MODEX Modificado apresenta o melhor desempenho entre os métodos apresentados. Seu esforço computacional é menor que o do MODEX e maior que o MODE. Porém, o melhor desempenho do MODEX Modificado em comparação ao MODE compensa o incremento de esforço computacional. Portanto, podemos afirmar que o MODEX Modificado é o melhor método de estimação dentre os métodos analisados. Vale lembrar que o esforço computacional do método ML é praticamente proibitivo.

Concluimos que o MODEX Modificado é nosso melhor método de estimação DOA-ML. Entretanto, ele não apresenta resultados satisfatórios para valores de SNR menores que -6 dB. Pensando em melhorar o desempenho do MODEX Modificado, no próximo capítulo iremos estudar o seu processo de seleção de raízes. Vamos analisar através de um método que chamaremos de Seleção Ótima, se o MODEX Modificado está selecionando a melhor combinação das raízes disponíveis. Através desta análise poderemos avaliar se a causa da perda de desempenho do MODEX Modificado, para valores pequenos de SNR, está relacionada com a geração ou apenas com o processo de seleção

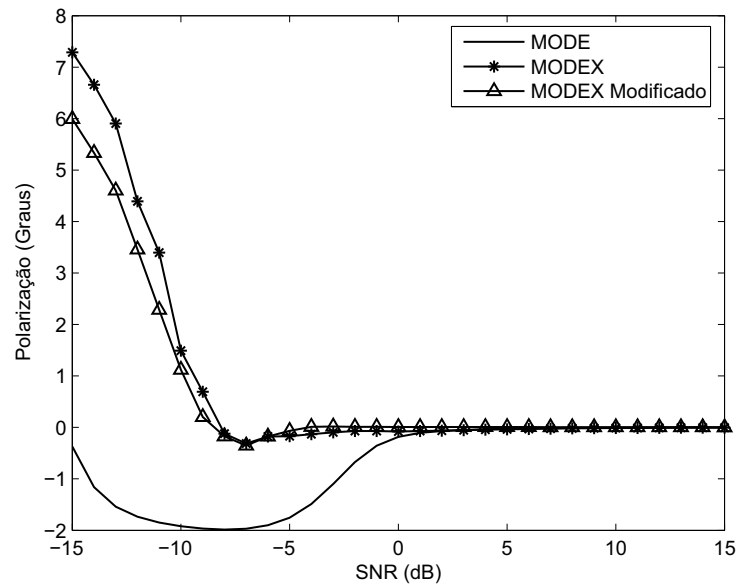


Figura 3.3: Polarização dos métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado para $\theta_2 = 15^\circ$.

das raízes. Com isso, iremos propor algumas modificações no MODEX Modificado para obter uma melhora de desempenho.

Capítulo 4

Filtragem Ótima para Redução de Ruído de Estimadores ML para DOA

Conforme comentamos no capítulo 3, o MODEX Modificado não apresenta resultados satisfatórios para valores de SNR menores que -6 dB. Pensando em melhorar seu desempenho, neste capítulo iremos discutir o processo de seleção de raízes do MODEX Modificado através de um método definido como Seleção Ótima. Iremos analisar se o MODEX Modificado seleciona a melhor combinação das raízes disponíveis. A partir de nossas conclusões e inspirados por elas, iremos propor a utilização de um filtro para reduzir a componente de ruído dos *snapshots* recebidos. Nesse capítulo serão apresentados o processo de Seleção Ótima, o processo de filtragem, iremos definir 3 novas opções de função custo e apresentar os resultados obtidos.

4.1 Seleção Ótima

Vamos agora analisar o desempenho do processo de seleção de candidatas do MODEX Modificado. Estamos interessados em investigar se esse processo seleciona a melhor combinação possível das raízes disponíveis. Estamos considerando apenas o MODEX Modificado por ser nosso melhor resultado até agora. Porém, todas as conclusões apresentadas neste trabalho também se aplicam ao MODEX.

No contexto deste trabalho, a melhor combinação é aquela que minimiza a soma do erro quadrático entre cada frequência estimada e a correspondente verdadeira. Portanto, a melhor combinação é

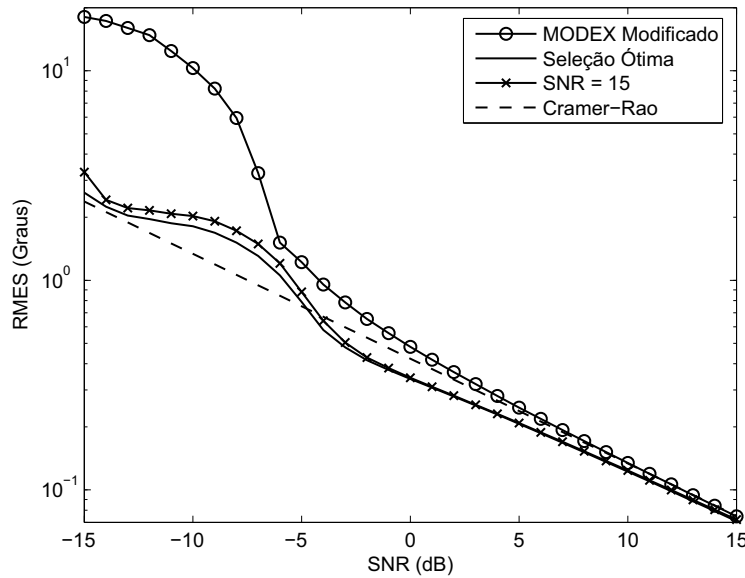


Figura 4.1: Desempenho dos métodos MODEX Modificado e Seleção Ótima.

obtida utilizando o seguinte procedimento

$$\omega_{otimo} = \arg \min_{\hat{\omega} \in \Phi} \sum_{m=1}^M (\hat{\omega}_m - \omega_m)^2, \quad (4.1)$$

onde

- Φ é o conjunto de todas as combinações possíveis das candidatas geradas
- $\hat{\omega}_m$ é o m-ésimo elemento de uma combinação $\hat{\omega} \in \Phi$
- ω_m é o parâmetro verdadeiro.

Chamaremos o processo descrito acima de Seleção Ótima. A Figura 4.1 apresenta os desempenhos do MODEX Modificado e da Seleção Ótima.

Através da Figura 4.1 podemos tirar algumas conclusões. Primeiro, o desempenho da Seleção Ótima é muito melhor do que o do MODEX Modificado quando a SNR torna-se menor que -6 dB. Em segundo lugar, o desempenho da Seleção Ótima pode ser melhor que o CRB. Finalmente, o melhor desempenho conseguido com a Seleção Ótima em relação ao MODEX Modificado permite concluir que o processo de seleção de raízes deste último não seleciona as melhores candidatas quando reduzimos a SNR a partir de cerca de 0 dB. O desempenho ruim do processo de seleção do

MODEX Modificado pode ser explicado observando que o critério ML determinístico na expressão (3.1) depende de $\mathbf{P}_A^\perp$ e $\hat{\mathbf{R}}_y$. A matriz $\mathbf{P}_A^\perp$ depende somente da combinação das raízes, as quais são as mesmas para qualquer processo de seleção. Portanto, o desempenho ruim é devido ao ruído presente em $\hat{\mathbf{R}}_y$. A fim de corroborar esta conclusão, computamos o desempenho do MODEX Modificado quando uma matriz de covariância com ruído reduzido é utilizada, isto é, para todos os valores da SNR na Figura 4.1, realizamos o processo de seleção de raízes usando a matriz de covariância correspondente à SNR de 15 dB. O desempenho correspondente, chamado seleção $SNR = 15$ na Figura 4.1, é praticamente idêntico ao da seleção ótima.

Com isto, concluímos que o desempenho do MODEX Modificado pode ser melhorado se reduzirmos a componente de ruído da matriz de covariância dos *snapshots* usada no processo de seleção.

4.2 Proposta: filtrar os *snapshots*

Verificamos na seção anterior que o Método MODEX Modificado não seleciona as melhores raízes e esse problema está relacionado com o ruído presente na matriz de covariância estimada, $\hat{\mathbf{R}}_y$. Em vista disso, iremos propor um processo para reduzir este ruído, baseado em uma filtragem dos *snapshots*.

Considerando que o problema de estimação DOA foi transformado em um problema de estimação de frequências, no modelo de *snapshot* em (2.20) o espectro de sinal é caracterizado por M componentes distintas centradas nas frequências ω_m , $m = 1, \dots, M$, enquanto a potência do ruído é constante para toda a faixa $[-\pi, \pi]$. Baseado neste modelo, podemos aplicar um filtro multibanda para cada *snapshot* preservando o sinal desejado e simultaneamente atenuando o ruído fora da banda de passagem. Para isso, o filtro multibanda deve apresentar ganho unitário nas frequências a serem estimadas e ganho menor que a unidade nas outras frequências.

O projeto de tal filtro requer o conhecimento das frequências do sinal, ou equivalentemente, o conhecimento dos ângulos DOA desconhecidos. Estes podem ser estimados utilizando algum método de estimação DOA. Poderíamos, por exemplo, utilizar as estimativas da solução MODE gerada no próprio MODEX Modificado. No entanto, este problema será resolvido automaticamente através da otimização adotada aqui, maximizando a SNR na saída do filtro, como será visto na sequência.

4.2.1 Filtragem Ótima

Nesta seção iremos apresentar os detalhes do processo de filtragem a ser aplicado a cada *snapshot*. Vamos definir um filtro FIR com função de sistema dada por

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} \dots + h_L z^{-L}. \quad (4.2)$$

Como o filtro atua sobre as amostras de cada *snapshot* e estas amostras são aquelas colhidas ao longo do conjunto de antenas em um dado instante, podemos interpretar o operador atraso z^{-1} com um atraso espacial.

A escolha de L deve levar em conta dois aspectos. Quanto maior o valor de L , maior liberdade ao processo de otimização, porém maior o esforço computacional para a filtragem e também para o processo de seleção de raízes, conforme será constatado adiante. Iremos adotar $0 < L < N$, onde o limite superior é definido pelo comprimento de $\mathbf{y}_k$.

Convolvindo a resposta ao impulso do filtro definido pela expressão (4.2) com a sequência (2.14), obtemos na saída do filtro uma sequência $\mathbf{z}_{kL}$ de comprimento $N + L$ que pode ser descrita como

$$\mathbf{z}_{kL} = \mathbf{H}_L \mathbf{y}_k, \quad (4.3)$$

onde

- $\mathbf{z}_{kL} \in C^{(N+L) \times 1}$ é o vetor das saídas do filtro (*snapshot* filtrado),
- $\mathbf{H}_L \in C^{(N+L) \times (N)}$ é a matriz de convolução, dada por

$$\mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & h_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ h_L & h_{L-1} & \cdots & \\ 0 & h_L & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & h_L \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Nosso objetivo é filtrar os snapshots para reduzir o ruído presente na matriz $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$. Para isto devemos escolher uma função de sistema $H(z)$ conveniente. O critério de escolha será a maximização da SNR na saída do filtro.

A fim de sintetizar um problema de otimização envolvendo todos os coeficientes h_i , $i = 0, 1, \dots, L$, levamos em conta somente amostras de saída do filtro que dependam de todos os coeficientes (filtro "cheio"), isto é, as amostras $z_k(l)$, $l = L + 1, \dots, N$. Tais amostras podem ser escritas como

$$z_k(l) = \mathbf{h}^H \mathbf{y}_{kl}, \quad (4.5)$$

onde $\mathbf{h} = [h_L^* \dots h_0^*]^T$, $\mathbf{y}_{kl} = [y_k(l-L) \dots y_k(l)]^T$ e $(\cdot)^*$ indica o complexo conjugado. Lembrando que $\mathbf{y}_k = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{n}_k$, obtemos

$$z_k(l) = \mathbf{h}^H \mathbf{A}_l \mathbf{x}_k + \mathbf{h}^H \mathbf{n}_{kl}, \quad (4.6)$$

onde a matriz $\mathbf{A}_l \in \mathcal{C}^{(L+1) \times M}$ é composta por $L + 1$ linhas da matriz $\mathbf{A}$, começando com $[e^{j(l-L-1)\omega_1} \dots e^{j(l-L-1)\omega_M}]$ e $\mathbf{n}_{kl} = [n(l-L) \dots n(l)]^T$.

Para obtermos a SNR média na saída do filtro precisamos da energia média do sinal e do ruído. Definindo como $z_{ks}(l)$ e $z_{kr}(l)$, as parcelas de sinal e ruído, respectivamente, a energia média do sinal é dada por

$$E\{z_{ks}(l)z_{ks}^*(l)\} = E\{\mathbf{h}^H \mathbf{A}_l \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \mathbf{A}_l^H \mathbf{h}\} \quad (4.7)$$

$$= \mathbf{h}^H \mathbf{A}_l E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H\} \mathbf{A}_l^H \mathbf{h}. \quad (4.8)$$

Lembrando que $\mathbf{P} = E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H\}$, temos finalmente

$$E\{z_{ks}(l)z_{ks}^*(l)\} = \mathbf{h}^H \mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^H \mathbf{h}. \quad (4.9)$$

Da mesma forma, a energia média do ruído na saída do filtro é dada por

$$E\{z_{kr}(l)z_{kr}^*(l)\} = E\{\mathbf{h}^H \mathbf{n}_{kl} \mathbf{n}_{kl}^H \mathbf{h}\} \quad (4.10)$$

$$= \sigma^2 \mathbf{h}^H \mathbf{h}. \quad (4.11)$$

Usando as expressões (4.9) e (4.11), a SNR média para $z_k(l)$, $l = L + 1, \dots, N$, é escrita como

$$\text{SNR}_l = \frac{\mathbf{h}^H \mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^H \mathbf{h}}{\sigma^2 \mathbf{h}^H \mathbf{h}}. \quad (4.12)$$

Como σ^2 não é função de $\mathbf{h}$, o problema a ser resolvido é

$$\mathbf{h}_{ol} = \arg \max_{\mathbf{h}} \frac{\mathbf{h}^H \mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^H \mathbf{h}}{\mathbf{h}^H \mathbf{h}}, \text{ sujeito a } \mathbf{h}^H \mathbf{h} = 1. \quad (4.13)$$

A restrição de não-trivialidade usa norma unitária, sem perda de generalidade, objetivando eliminar a indeterminação do ganho do filtro.

Para qualquer escolha de L sujeito a $0 < L < N$, conseguimos escrever a expressão para a SNR na saída envolvendo todos os coeficientes do filtro. Com isso, configuramos um problema clássico de filtragem ótima, onde temos uma solução conhecida. A solução de (4.13) é o *eigenfilter* [20] para o qual $\mathbf{h}_{ol}$ é o autovetor $\mathbf{v}_l \in \mathcal{C}^{(L+1) \times 1}$ associado ao maior autovalor da matriz $\mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^H$, ou seja,

$$\mathbf{h}_{ol} = [h_L^* h_{L-1}^* \dots h_0^*]^T = \mathbf{v}_l. \quad (4.14)$$

Esta solução é justificada também pelo fato de que a decomposição em autovalores e autovetores carrega consigo a informação de direção de chegada. Esta informação está presente nos autovetores do subespaço de sinal, mais precisamente no primeiro autovetor, ou seja, o autovetor $\mathbf{v}_l$ que utilizamos para definir o filtro [10].

Dado que o ruído é branco, $\mathbf{v}_l$ é também o autovetor associado ao maior autovalor da matriz $\mathbf{R}_{yl} = \mathbf{A}_l \mathbf{P} \mathbf{A}_l^H + \sigma^2 \mathbf{I}$. Observe que $\mathbf{R}_{yl}$ é uma submatriz de $\mathbf{R}_y$ tal que seus elementos são dados por $(\mathbf{R}_{yl})_{i,j} = (\mathbf{R}_y)_{i,j}$, para $i, j = l - L, \dots, l$. Portanto, $\mathbf{R}_{yl}$ é um bloco ao longo da diagonal principal de $\mathbf{R}_y$.

Levando em conta que não conhecemos $\mathbf{R}_y$ nem $\mathbf{R}_{yl}$, podemos usar a submatriz correspondente $\hat{\mathbf{R}}_{yl}$ da matriz de covariância $\hat{\mathbf{R}}_y$ para obter uma estimativa $\hat{\mathbf{v}}_l$ da solução ótima $\mathbf{h}_{ol} = \mathbf{v}_l$.

Dado um valor de L , podemos escolher qualquer uma das $(N - L)$ submatrizes $\hat{\mathbf{R}}_{yl}$, $l = L + 1, \dots, N$, e a solução correspondente $\hat{\mathbf{v}}_l$. Alternativamente, podemos utilizar a média das submatrizes $\hat{\mathbf{R}}_{yl}$ de acordo com

$$\hat{\mathbf{R}}_{yL} = \frac{1}{N - L} \sum_{l=1}^{N-L} \hat{\mathbf{R}}_{yl}, \quad (4.15)$$

e podemos usar a solução $\mathbf{h}_{oL} = \hat{\mathbf{v}}_L$, onde $\hat{\mathbf{v}}_L$ é o autovetor correspondente ao maior autovalor de $\hat{\mathbf{R}}_{yL}$.

Com isto, através das expressões (4.4) e (4.14) obtemos a matriz de filtragem $\mathbf{H}_L \in C^{(N+L) \times (N)}$ dada pela forma Toeplitz

$$\mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} \hat{v}_{L,L+1}^* & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{v}_{L,L}^* & \hat{v}_{L,L+1}^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ \hat{v}_{L,1}^* & \hat{v}_{L,2}^* & \cdots & \\ 0 & \hat{v}_{L,1}^* & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{v}_{L,1}^* \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

onde $\hat{v}_{L,n}^*$ indica o conjugado do n -ésimo elemento do autovetor $\hat{\mathbf{v}}_L \in C^{(L+1) \times 1}$.

A fim de ilustrar a resposta em frequência deste filtro, adotamos o mesmo cenário descrito na seção 2.3. Após o mapeamento dos ângulos de chegada ($\theta_1 = 10^\circ$ e $\theta_2 = 15^\circ$) de acordo com a expressão (2.6), obtemos as frequências normalizadas (com respeito a π) $\omega_1 = 0.1736$ e $\omega_2 = 0.2588$, respectivamente. A Figura 4.2 mostra a resposta em frequência do filtro para $L = N - 1 = 9$ e três valores de SNR, 10 dB, 0 dB e -10 dB.

Podemos observar que a resposta em frequência preserva os sinais desejados e atenua o ruído mesmo para pequenos valores de SNR. Isto comprova que mesmo para uma matriz de covariância

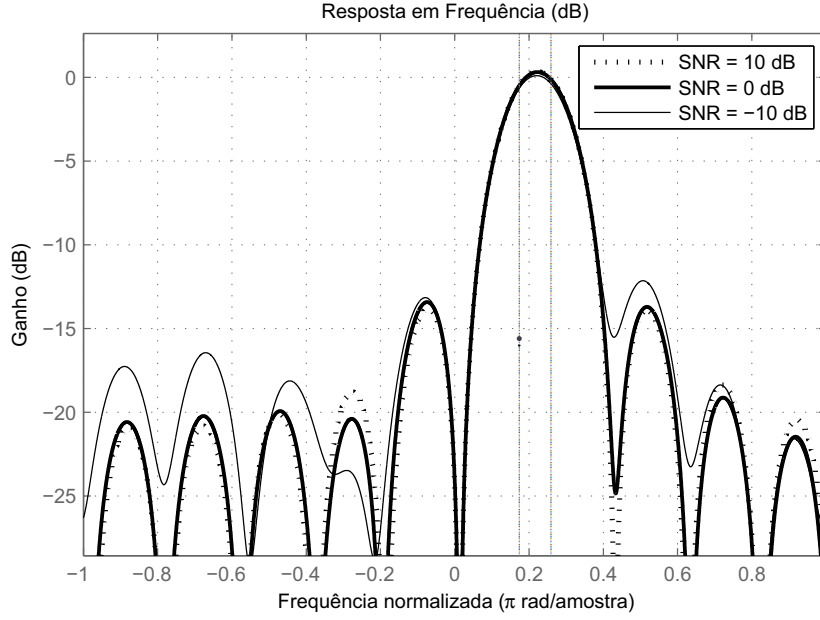


Figura 4.2: Resposta em frequência do filtro ótimo.

estimada e contaminada por ruído, como $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$, a decomposição em autovalores e autovetores preserva a informação referente à direção de chegada.

Uma vez definido o filtro ótimo, devemos agora calcular a nova matriz de covariância. Usando o vetor de *snapshot* filtrado $\mathbf{z}_{kL}$ dado por (4.3), a nova matriz de covariância estimada será

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{z}_{kL} \mathbf{z}_{kL}^H \quad (4.17)$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{H}_L \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H \mathbf{H}_L^H \quad (4.18)$$

$$= \mathbf{H}_L \left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{y}_k \mathbf{y}_k^H \right] \mathbf{H}_L^H \quad (4.19)$$

$$= \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} \mathbf{H}_L^H. \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{H}_L \in C^{(N+L) \times (N)}$ e, portanto, $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L} \in C^{(N+L) \times (N+L)}$. Com isso $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L}$ dependerá da ordem do filtro empregado.

Na sequência vamos discutir três opções de modificação na função custo ML (3.1) visando a aplicação da nossa proposta no processo de seleção de raízes do método MODEX Modificado.

4.3 Modificando a função custo do processo de seleção

De posse da matriz $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L}$ devemos usá-la no processo de seleção de candidatas, substituindo $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ na função custo ML (3.1). Mas para isto algumas questões devem ser consideradas. Primeiro, a nova matriz tem dimensões $(N + L) \times (N + L)$, as quais são maiores que as da matriz de covariância original. Segundo, referindo-se à expressão (4.3) e usando a expressão (2.20), o k -ésimo *snapshot* filtrado pode ser expresso como

$$\mathbf{z}_{kL} = \mathbf{H}_L \mathbf{A} s_k + \mathbf{H}_L \mathbf{n}_k, \quad (4.21)$$

o que implica dois inconvenientes:

1. A filtragem modifica o modelo de sinal original e conseqüentemente a matriz $\mathbf{A}$ perde sua estrutura de Vandermonde;
2. O ruído de saída se torna correlacionado e os dados de cada *snapshot* filtrado não são mais conjuntamente gaussianos. A não-gaussianidade vem do fato de que a matriz de covariância para o ruído transformado é dada por $\mathbf{W} = \sigma^2 \mathbf{H}_L \mathbf{H}_L^H$, onde $\mathbf{H}_L \mathbf{H}_L^H$ não é definida positiva. Para que os dados fossem conjuntamente gaussianos a matriz de covariância deveria ser definida positiva [4].

Todos esses fatos implicam que a função custo ML (3.1) não é válida para os dados filtrados. Como conseqüência, uma nova função custo ML deve ser obtida levando em conta as dimensões da nova matriz de covariância, o novo modelo de sinal e o ruído correlacionado não-gaussiano. Para isso, deveríamos obter a nova distribuição estatística do ruído, para assim obtermos a distribuição estatística de um *snapshot* filtrado e em seguida obter a distribuição estatística dos K *snapshots*. A partir dessas novas distribuições estatísticas obteríamos a nova função custo ML. Porém, não vamos seguir esse caminho, dada sua complexidade. Ao contrário, vamos adotar uma solução arbitrária, mas muito simples: 1 - vamos continuar a usar (3.1); 2 - para que possamos fazer isso, vamos propor 3 opções de modificação na função custo para adequa-la às novas dimensões da matriz de covariância.

As 3 opções serão descritas a seguir.

4.3.1 Primeira Opção

Vamos substituir as matrizes originais $\mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ pelas versões filtradas correspondentes $\mathbf{H}_L \mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L}$. Fazendo isso, estamos alterando o modelo de sinal e a matriz de covariância embora ainda mantendo a função custo (3.1).

Conseqüentemente, a função custo será dada por

$$F(\varpi) = \{\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L}\}, \quad (4.22)$$

onde $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} = \mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{A}}^H \widetilde{\mathbf{A}})^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}^H$ e $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}_L \mathbf{A}$.

Utilizando a expressão (4.20) e propriedades do operador traço, temos

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{H}_L^H \mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp} \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (4.23)$$

Podemos ainda escrever

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{H}_L^H (\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{A}}^H \widetilde{\mathbf{A}})^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}^H) \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (4.24)$$

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{H}_L^H \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}} - \mathbf{H}_L^H (\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{A}}^H \widetilde{\mathbf{A}})^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}^H) \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (4.25)$$

onde o termo constante $\mathbf{H}_L^H \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}$ pode ser desconsiderado para a minimização. Logo,

$$F(\varpi) = \text{tr}\{-\mathbf{H}_L^H (\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{\mathbf{A}}^H \widetilde{\mathbf{A}})^{-1} \widetilde{\mathbf{A}}^H) \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (4.26)$$

Lembrando que $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}_L \mathbf{A}$ e definindo $\mathbf{H}_L^H \mathbf{H}_L = \mathbf{F}_L \in C^{N \times N}$, temos

$$F(\varpi) = \text{tr}\{-\mathbf{F}_L \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{F}_L \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{F}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (4.27)$$

4.3.2 Segunda Opção

Nesta opção propomos usar a expressão (3.1), a matriz $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L}$ e a forma original da matriz $\mathbf{A}$ definida em (2.17). Porém, como $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L}$ tem dimensões $(N + L) \times (N)$, a adequação de dimensões será feita aumentando o número de linhas de $\mathbf{A}$ passando de N para $N + L$. Com isso o projetor $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}^{\perp}$ correspondente terá dimensões $(N + L) \times (N + L)$.

Na primeira opção utilizamos uma versão filtrada da matriz $\mathbf{A}$, alterando as características do sinal. Nesta segunda opção estamos utilizando apenas uma versão estendida da matriz $\mathbf{A}$ e, portanto, não iremos alterar sua estrutura. Em relação à matriz de covariância, estamos utilizando novamente a versão filtrada $\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{z}L}$.

Vamos definir a nova matriz como $\mathbf{A}_E \in C^{(N+L) \times M}$. Usando (4.20), a função custo será dada por

$$F(\varpi) = \text{tr}\{\mathbf{H}_L^H \mathbf{P}_{\mathbf{A}_E}^{\perp} \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{y}}\}. \quad (4.28)$$

onde $\mathbf{P}_{\mathbf{A}_E}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_E(\mathbf{A}_E^H \mathbf{A}_E)^{-1} \mathbf{A}_E^H$. Usando os mesmos passos do caso anterior chegamos a

$$F(\varpi) = \text{tr}\{-\mathbf{H}_L^H \mathbf{A}_E (\mathbf{A}_E^H \mathbf{A}_E)^{-1} \mathbf{A}_E^H \mathbf{H}_L \hat{\mathbf{R}}_y\}. \quad (4.29)$$

Para diminuir o esforço computacional propomos algumas modificações na função custo (4.29). Inicialmente o produto $\mathbf{H}_L^H \mathbf{A}_E$ é calculado como

$$\mathbf{H}_L^H \mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ol,1}^H & \mathbf{h}_{ol,2}^H & \cdots & \mathbf{h}_{ol,L+1}^H & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{ol,1}^H & \cdots & \mathbf{h}_{ol,L}^H & \mathbf{h}_{ol,L+1}^H & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{h}_{ol,L+1}^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \cdots & e^{j\omega_M} \\ e^{j2\omega_1} & \cdots & e^{j2\omega_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N+L-1)\omega_1} & \cdots & e^{j(N+L-1)\omega_M} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{H}_L^H \mathbf{A}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ol}^H \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^H \mathbf{a}_M \\ \mathbf{h}_{ol}^H e^{j\omega_1} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^H e^{j\omega_M} \mathbf{a}_M \\ \mathbf{h}_{ol}^H e^{j2\omega_1} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^H e^{j2\omega_M} \mathbf{a}_M \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{h}_{ol}^H e^{j(N+L-1)\omega_1} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{h}_{ol}^H e^{j(N+L-1)\omega_M} \mathbf{a}_M \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

onde $\mathbf{h}_{ol,i}$ é o i -ésimo elemento do vetor ótimo $\mathbf{h}_{ol}$.

Podemos escrever (4.31) como o produto de $\mathbf{A}$ na sua versão não-estendida por uma matriz diagonal $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ e^{j\omega_1} & \cdots & e^{j\omega_M} \\ e^{j2\omega_1} & \cdots & e^{j2\omega_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_1} & \cdots & e^{j(N-1)\omega_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{ol}^H \mathbf{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{ol}^H \mathbf{a}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \mathbf{h}_{ol}^H \mathbf{a}_M \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Usando (4.32) na nova função custo (4.29) temos

$$F(\varpi) = \text{tr}\{-\mathbf{AD} (\mathbf{A}_E^H \mathbf{A}_E)^{-1} (\mathbf{AD})^H \hat{\mathbf{R}}_y\}. \quad (4.33)$$

4.3.3 Terceira Opção

Nesta opção vamos usar uma versão modificada da matriz de filtragem $\mathbf{H}_L$. Esta versão modificada, denominada $\mathbf{H}_T$, terá dimensões $(N) \times (N)$ e posto (N) . Desta forma, a matriz de covariância

correspondente, após a filtragem $\mathbf{H}_T$, terá dimensões $(N) \times (N)$ e dependerá de $\mathbf{H}_T \mathbf{H}_T^H$, a qual será inversível. Logo, os elementos do *snapshot* filtrado serão conjuntamente gaussianos e a expressão (3.1) permanece válida. A matriz $\mathbf{H}_T$ será obtida por truncamento de $\mathbf{H}_L$, conforme definido a seguir.

A nova matriz de filtragem $\mathbf{H}_T$ será dada pela porção central de $\mathbf{H}_L$ como

$$\mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{sup} \\ \dots \\ \mathbf{H}_T \\ \dots \\ \mathbf{H}_{inf} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Para N par, $\mathbf{H}_{sup} \in C^{(\frac{N+L}{2}-1) \times (N)}$, $\mathbf{H}_T \in C^{(N) \times (N)}$ e $\mathbf{H}_{inf} \in C^{(\frac{N+L}{2}) \times (N)}$. Para N ímpar, $\mathbf{H}_{sup} \in C^{(\frac{N+L-1}{2}) \times (N)}$, $\mathbf{H}_T \in C^{(N) \times (N)}$ e $\mathbf{H}_{inf} \in C^{(\frac{N+L-1}{2}-1) \times (N)}$. Este procedimento de truncamento é freqüentemente utilizado em problemas de filtragem [20].

Optamos por usar a matriz $\mathbf{A}$ original, sem as alterações provocadas pela filtragem. Deste modo, esta opção sofre dos problemas gerados pelo truncamento de $\mathbf{H}_L$ e também por ignorarmos as alterações produzidas em $\mathbf{A}$ pela filtragem.

Substituindo $\mathbf{H}_T$ em (4.20) e definindo $\hat{\mathbf{R}}_{zT}$ como a matriz de covariância estimada referente a matriz $\mathbf{H}_T$, temos

$$\hat{\mathbf{R}}_{zT} = \mathbf{H}_T \hat{\mathbf{R}}_y \mathbf{H}_T^H. \quad (4.35)$$

A nova função custo será dada por

$$F(\boldsymbol{\varpi}) = \text{tr}\{\mathbf{P}_A^\perp \hat{\mathbf{R}}_{zT}\}. \quad (4.36)$$

Usando (4.35) em (4.36), temos

$$F(\boldsymbol{\varpi}) = \text{tr}\{\mathbf{H}_T^H \mathbf{P}_A^\perp \mathbf{H}_T \hat{\mathbf{R}}_y\} \quad (4.37)$$

a qual, após os mesmos passos dos casos anteriores, pode ser escrita como

$$F(\boldsymbol{\varpi}) = \text{tr}\{-\mathbf{H}_T^H \mathbf{A}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{H}_T \hat{\mathbf{R}}_y\}. \quad (4.38)$$

4.4 Resumo do Método Proposto

1. Encontrar as candidatas através do MODEX Modificado.

2. Calcular $\hat{\mathbf{R}}_{yL}$ pela expressão (4.15).
3. Fazer a decomposição de autovetores e autovalores de $\hat{\mathbf{R}}_{yL}$ (4.15).
4. Solução *eigenfilter*: $\mathbf{h}_{ol}$ é a primeira coluna da decomposição de autovetores e autovalores de (4.15).
5. Compor a matriz $\mathbf{H}_L$ (4.16).
6. Calcular a função custo referente a cada opção (4.27, 4.33, 4.38).

Devemos enfatizar que a nossa proposta é apenas um método de melhorar a seleção de raízes de métodos como MODEX e MODEX Modificado. Portanto, nosso método apenas seleciona candidatas, não sendo responsável pela geração das mesmas.

Na próxima seção iremos comparar o desempenho das 3 opções propostas.

4.5 Simulações e Resultados

Nosso primeiro objetivo é encontrar a melhor ordem L do filtro para a primeira opção proposta. Para isto traçamos curvas de desempenho para a primeira opção utilizando o mesmo cenário da Figura 3.1 e os valores de $L = 1, 2, \dots, N - 1$. A relação sinal-ruído variou de -15 a 5 dB. A Figura 4.3 mostra apenas as curvas de desempenho para $L = 5$, $L = 7$ e $L = 9$ com o objetivo de ilustrar os resultados. Com base no conjunto completo de curvas, concluímos que o melhor desempenho ocorre com $L = 7$, um pouco menor que o valor máximo $L = 9$. O desempenho com $L = 7$ é melhor comparado ao desempenho utilizando outros valores de L para SNR menores que -10 dB. Repetimos o procedimento para as outras duas opções propostas e obtivemos resultados semelhantes, com $L = 7$ também sendo a melhor ordem encontrada. Portanto, os mesmos não serão apresentados.

Iremos agora comparar o desempenho das três opções propostas usando apenas $L = 7$, já que este é o melhor valor de L para todas elas. Como podemos observar na Figura 4.4, a primeira opção apresenta melhores resultados. Recordando, nossa primeira opção substitui as matrizes $\mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{R}}_y$ pelas versões filtradas correspondentes $\mathbf{H}_L \mathbf{A}$ e $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$.

Como a nossa primeira opção produziu o melhor desempenho, iremos agora compará-la ao MODEX Modificado, usando $L = 7$. A Figura 4.5 apresenta essa comparação e também apresenta as curvas de desempenho da Seleção Ótima e o CRB. Notamos que a nossa primeira opção apresenta excelente desempenho. Enquanto a curva desempenho do MODEX Modificado se afasta do CRB a partir de uma SNR de -6 dB, a curva da nossa primeira opção mantém o desempenho até cerca de -14 dB. Além disso, nossa primeira opção tem desempenho parecido com o da Seleção Ótima, comprovando a eficiência da proposta.

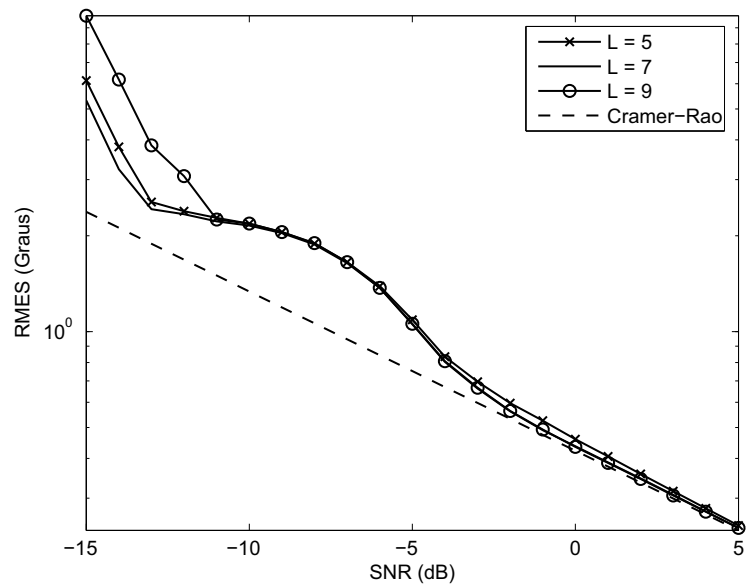


Figura 4.3: Comparação de desempenho utilizando a primeira opção proposta.

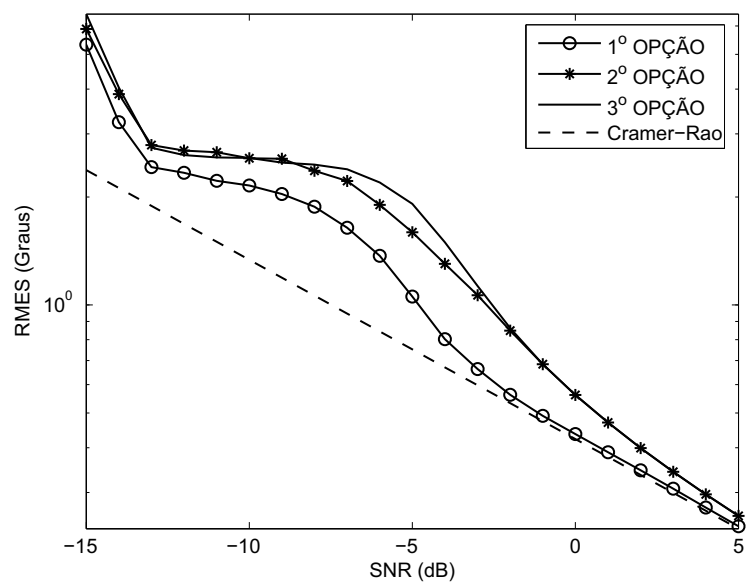


Figura 4.4: Comparação de desempenho entre as opções propostas.

Este comportamento pode ser justificado observando que a ação do filtro é semelhante a aumentar o número de sensores de N para $N + L$. Podemos observar este fenômeno através da dimensão dos *snapshots* filtrados e, conseqüentemente, através das dimensões de $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$. Entretanto, as conseqüências desse aumento artificial do número de sensores não são totalmente semelhantes aos resultados de um verdadeiro aumento do número de sensores porque a filtragem modifica as características do sinal e do ruído onde estas modificações dependem do valor L . Assim, $\hat{\mathbf{R}}_{zL}$ não tem as mesmas características de uma verdadeira matriz de covariância dos *snapshots*. Simplificando, aumentando o valor de L , temos dois efeitos contraditórios, ou seja, podemos tanto melhorar o desempenho, devido ao aumento do número de sensores, como podemos degradar o desempenho, se as modificações nas características do sinal e do ruído se tornarem exageradas. Estas interpretações sugerem que o aumento na ordem L , produz vantagens e desvantagens e que existe um valor de L que representa um bom compromisso, levando ao melhor desempenho da proposta.

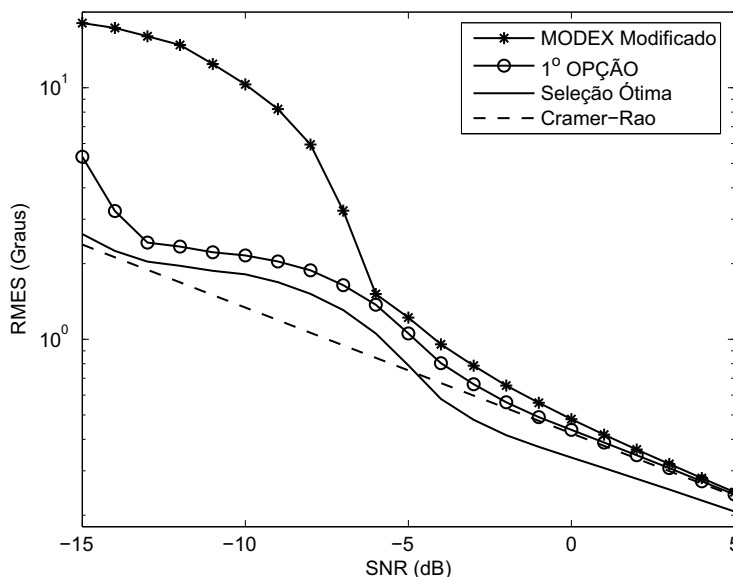


Figura 4.5: Desempenho da nossa primeira opção.

Agora vamos analisar a polarização do estimador resultante do uso da primeira opção. Nas Figuras 4.6 e 4.7 são apresentadas as curvas de polarização para a primeira opção, comparadas às polarizações dos métodos MODE, MODEX e MODEX Modificado. A Figura 4.6 apresenta a polarização para a estimação do ângulo de 10° , enquanto a Figura 4.7 se refere ao ângulo de 15° . Para os dois casos podemos afirmar que a nossa proposta apresenta os melhores resultados, o que explica, em parte, seu melhor desempenho em termos de rmse.

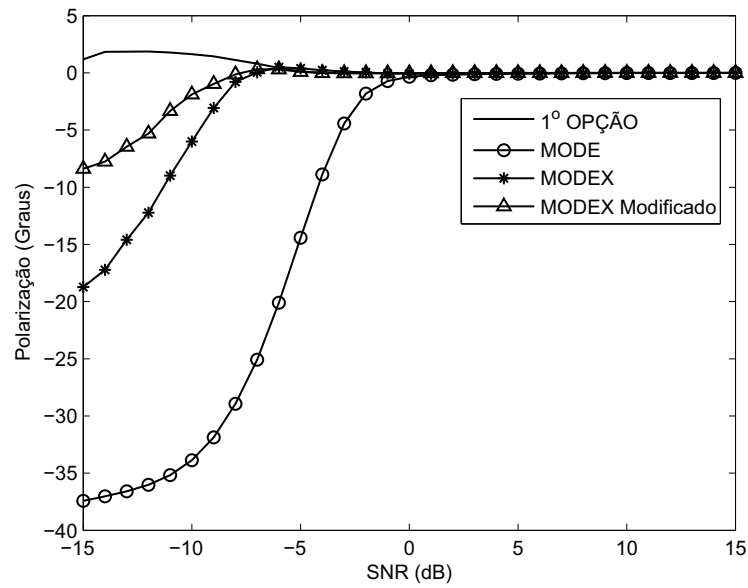


Figura 4.6: Curvas de polarização da nossa primeira opção para $\theta_1 = 10^\circ$.

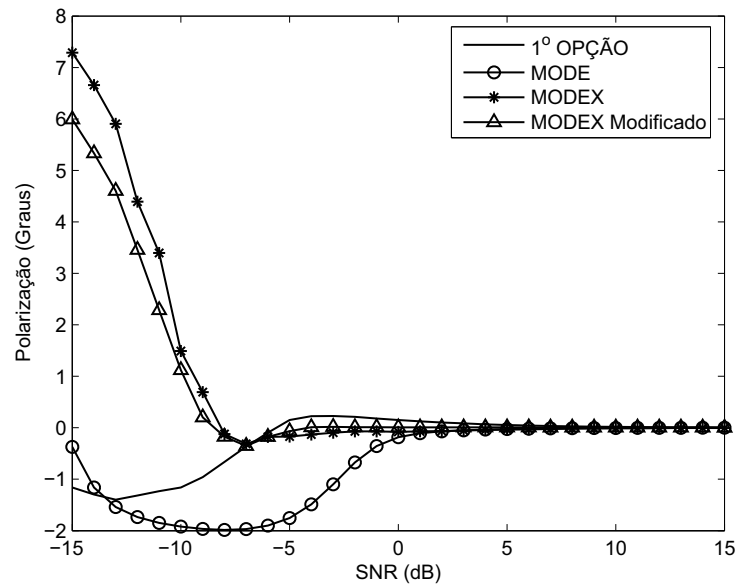


Figura 4.7: Curvas de polarização da nossa primeira opção para $\theta_2 = 15^\circ$.

Outra maneira interessante de observar a ação da filtragem é através do comportamento das superfícies da função custo original e da função custo referente à nossa primeira opção, dada por (4.27). As Figuras 4.8 e 4.9 mostram as superfícies e as curvas de nível para o mesmo cenário utilizado até agora. Utilizamos a SNR fixa no valor de -12 dB e L igual a 7. A Figura 4.8 se refere à função custo original, enquanto a Figura 4.9 se refere à nossa primeira opção. As marcas 'x' representam os ângulos DOA verdadeiros. Na Figura 4.8, os mínimos globais são indicados através de setas para enfatizar o deslocamento ocorrido devido ao efeito do ruído. Por outro lado, observamos na Figura 4.9 que os mínimos globais estão mais próximos dos ângulos DOA verdadeiros, se comparados ao caso da função custo original na Figura 4.8.

Por último, vamos analisar o esforço computacional exigido pela função custo (4.27). Em relação ao MODEX Modificado original, precisamos de cálculos adicionais para obter $\hat{\mathbf{R}}_{yL}$, $\mathbf{h}_{oL}$, $\mathbf{H}_L$ e $\mathbf{F}_L$, para cada estimação DOA e $\mathbf{A}^H \mathbf{F}_L$ para cada teste de combinação. O montante adicional de cálculo depende do valor de L mas não de uma forma simples. Por exemplo, para obter $\mathbf{h}_{oL}$ é necessário calcular a decomposição de $\hat{\mathbf{R}}_{yL}$. Entretanto, se escolhermos o valor máximo possível para L , então $\hat{\mathbf{R}}_{yL} = \hat{\mathbf{R}}_y$ e o autovetor necessário já está pronto, porque é calculado pelo MODE usado no MODEX Modificado. Além disso, não será necessária a submatriz $\hat{\mathbf{R}}_{yl}$, $l = L + 1, \dots, N$ como em (4.15). Porém, o desempenho correspondente não será o melhor possível.

A análise de desempenho baseada no *rmse* foi executada para vários outros cenários de simulação, outros valores de ângulos de chegada, 3 fontes e sinais correlacionados. Em todos os casos analisados, confirmamos a melhoria de desempenho produzida pela filtragem.

Através dessas análises concluímos que a filtragem dos *snapshots* melhora o processo de seleção das raízes disponíveis do MODEX Modificado. Nossa proposta melhora o desempenho do MODEX Modificado principalmente para valores pequenos de SNR, atenuando o efeito de limiar. Além disso, apresenta estimativas menos polarizadas. Estes fatos permitem afirmar que o aumento do esforço computacional demandado pela nossa proposta é compensado pela melhora de desempenho. Outro fato importante que devemos citar é que nossa proposta tem desempenho superior ao método ML na região de limiar. Este desempenho melhor é possível pois as condições necessárias para que o ML apresente desempenho ótimo não são encontrados na região de limiar. Por exemplo, esta é uma região onde os estimadores aqui considerados são polarizados.

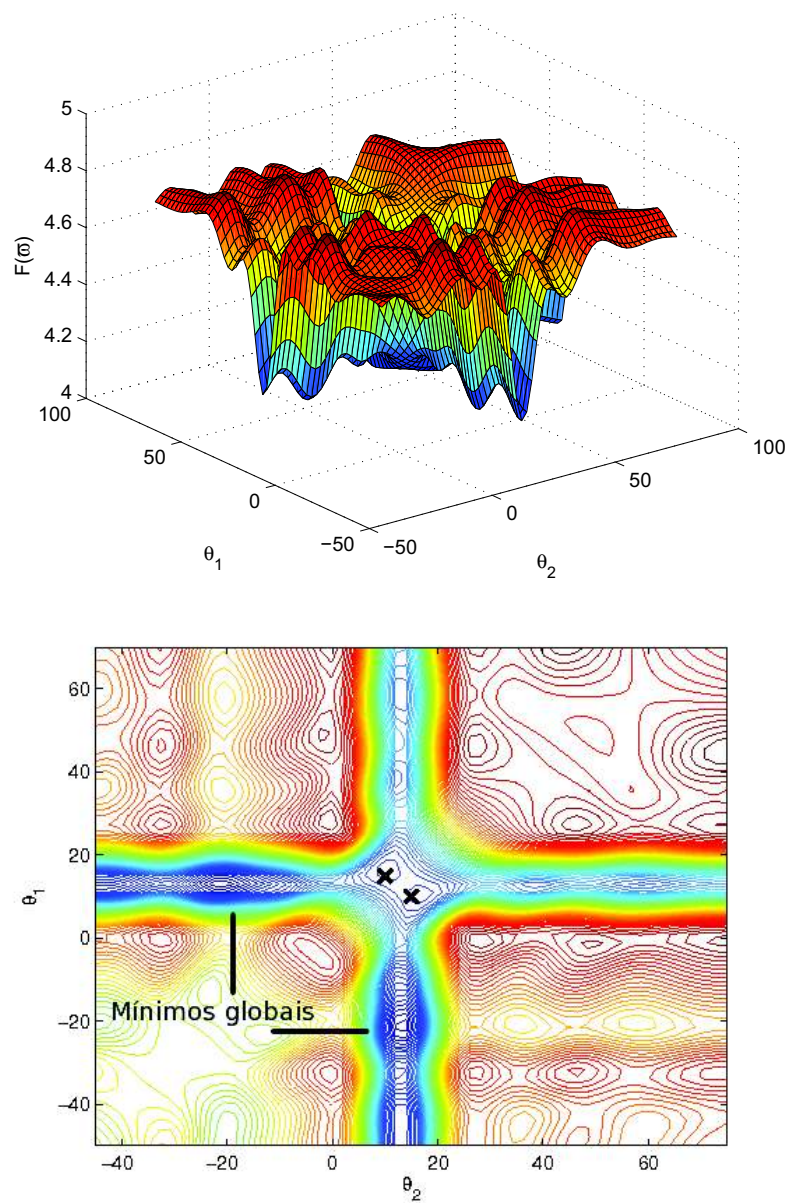


Figura 4.8: Superfície e curva de nível da função custo original.

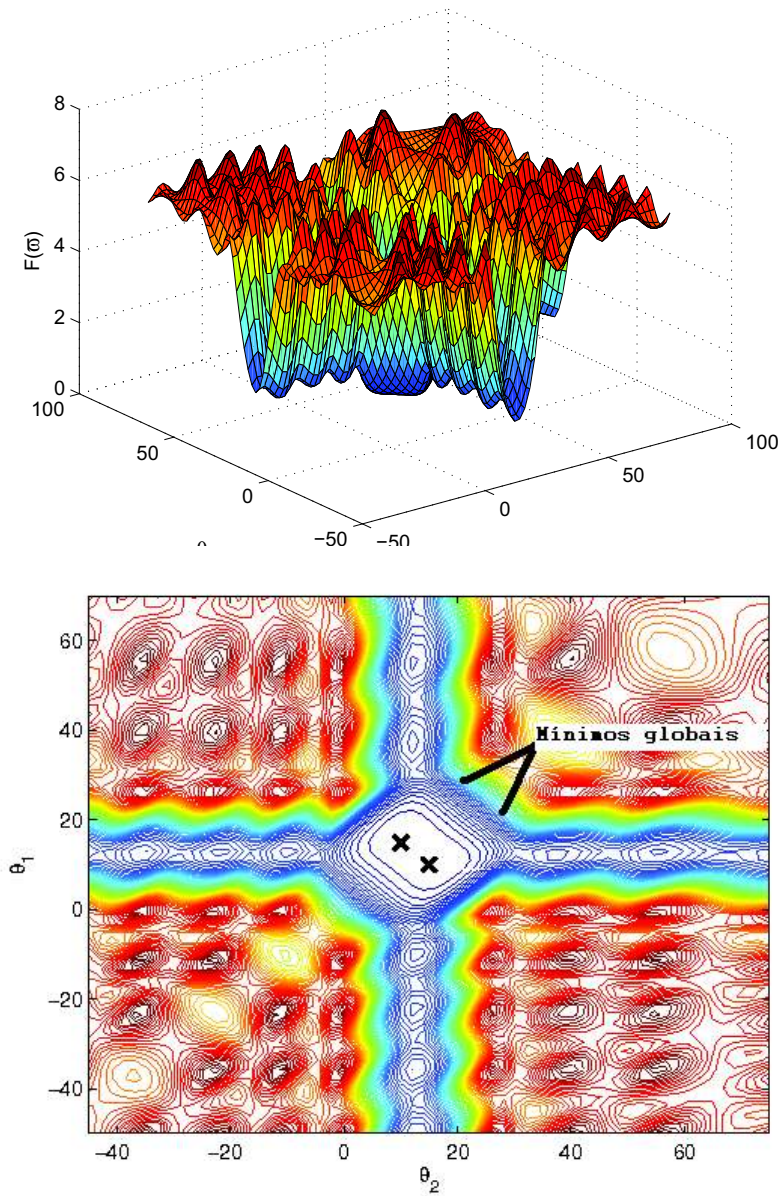


Figura 4.9: Superfície e curva de nível da função custo referente à nossa primeira opção.

Capítulo 5

Conclusões

Abordamos o problema de estimação de direção de chegada (DOA) de ondas planas usando um arranjo de sensores. Nosso interesse eram situações críticas em que o espaçamento angular entre as fontes de sinal é pequeno e a relação sinal-ruído é baixa.

Na literatura encontramos diversos estimadores para DOA, porém consideramos apenas os estimadores de Máxima Verossimilhança (ML) que geram candidatas à estimativa DOA e selecionam as melhores através do critério ML, como, por exemplo, MODEX e MODEX Modificado. Estes métodos, para as situações críticas citadas, tem uma degradação de desempenho associada ao efeito de limiar.

Analizamos o processo de seleção de raízes destes métodos através de um estudo baseado em duas estratégias, a Seleção Ótima e $\text{SNR} = 15$. Através delas constatamos que o problema do efeito de limiar poderia ser amenizado reduzindo o ruído presente na matriz de covariância dos dados recebidos (*snapshots*) no processo de seleção de raízes.

Para isso propusemos um processo de filtragem ótima através de um filtro FIR multibanda. O filtro foi definido através de um critério de otimização chamado maximização da SNR e foi aplicado aos *snapshots*. Fazendo isso obtivemos uma nova matriz de covariância filtrada, a qual tem dimensões diferentes da matriz de covariância originalmente utilizada no processo de seleção de raízes. Tornou-se necessário então alterar a função custo de modo a adequá-la às novas dimensões da matriz de covariância. Além disso, encontramos outros problemas: a filtragem modifica os modelos de sinal e de ruído e a função custo (3.1) não é mais válida. Porém, ao invés de calcularmos a nova função densidade probabilidade dos snapshots filtrados, optamos por arbitrar uma solução, onde continuamos a usar a função custo (3.1) e propusemos algumas modificações que resolvam os problemas introduzidos com o processo de filtragem. Propusemos 3 opções de modificação:

1. Utilizamos uma versão filtrada da matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{H}_L \mathbf{A}$.
2. Utilizamos uma versão estendida de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_E$.
3. Utilizamos um versão truncada da matriz $\mathbf{H}_L$, $\mathbf{H}_T$.

Como o filtro é de ordem variável, deveríamos encontrar a sua melhor ordem L e fizemos isso através de simulações numéricas. Encontramos que a melhor ordem para as três opções é $L = 7$. Comparamos as três opções entre si para encontramos a melhor opção proposta, e constatamos que a melhor é a primeira opção. A partir de então deveríamos comparar a melhor opção proposta com o MODEX Modificado para avaliarmos se realmente o processo de filtragem produz melhora de desempenho. As simulações mostraram que nossa proposta tem melhor desempenho, reduzindo significativamente a relação sinal-ruído de limiar. Além disso, a eficiência assintótica é preservada e nossa proposta ainda apresenta estimativas menos polarizadas. O cálculo e a utilização da nova função custo de seleção implicam em um pequeno aumento do esforço computacional. No entanto, o esforço computacional é válido porque melhora sensivelmente o limiar de desempenho.

As interpretações apresentadas sugerem que o melhor desempenho da nossa proposta em relação ao MODEX Modificado está relacionado com o fato de que a ação do filtro é equivalente a aumentar o número de sensores de N para $N + L$. Porém, as consequências desse aumento artificial não são totalmente semelhantes aos resultados de um verdadeiro aumento do número de sensores, porque a filtragem modifica as características do sinal e do ruído e estas modificações dependem do valor L . O aumento de L pode levar a modificações exageradas nas características do sinal e do ruído, piorando o desempenho. Portanto, existe um valor de L que representa um bom compromisso, levando ao melhor desempenho da proposta.

A conclusão geral é que a filtragem dos *snapshots* no problema DOA pode resultar em estimadores mais eficientes, quando temos relação sinal-ruído baixa.

Para o prosseguimento deste trabalho sugerimos uma investigação sobre a viabilidade do cálculo da função densidade probabilidade dos *snapshots* filtrados. Caso seja possível, esta função densidade permitirá explicitar uma nova função custo ML para a seleção de raízes, a qual substituirá aquelas funções que resultaram das modificações arbitrárias que foram propostas nesta dissertação.

Referências Bibliográficas

- [1] L. C. Godara. Applications of antenna arrays to mobile communications, Part I and Part II. *Proc. of the IEEE*, 85(7):1031–1060;1193–1245, July 1997.
- [2] S. Haykin, editor. *Array Signal Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [3] H. Krim and M. Viberg. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Magazine*, 13(4):67–94, July 1996.
- [4] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory*. Prentice Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [5] Y. Bresler and A. Macovski. Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential signals in noise. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-34(5):1081–1089, Oct. 1986.
- [6] L. L. Scharf R. Kumaresan and A. K. Shaw. An algorithm for pole-zero modeling and spectral analysis. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-34(3):637–640, June 1986.
- [7] P. Stoica and K. C. Sharman. Novel eigenanalysis method for direction estimation. *IEE Proceedings part F (Radar and Signal Processing)*, 137(1):19–26, Feb. 1990.
- [8] A. B. Gershman and P. Stoica. New MODE-based techniques for direction finding with an improved threshold performance. *Signal Processing*, (76):221–235, 1999.
- [9] A. Lopes, I. S. Bonatti, P. L. D. Peres, and C. A. Alves. Improving the MODEX algorithm for direction estimation. *Signal Processing*, 83(9):2047–2051, Sept. 2003.
- [10] Harry L. Van Trees. *Optimum Array Processing. Part IV of Detection, Estimation and Modulation Theory*. John Willey and Sons, New York-USA, 2002.

- [11] C. A. Alves. *Análise Teórica e Experimental de Métodos de Estimação de DOA e de Estimação de Frequência com Alta Resolução*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP, Campinas-SP-Brasil, Jul. 2004.
- [12] Wax, M. e Kailath, T. Determining the number of sources by information methods. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, ASSP-34:387–392, Apr. 1985.
- [13] Kaveh, M., Wang, H. e Hung, H. On the theoretical performance of a class of estimators of the number of narrow-band sources. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, ASSP-35:1350–1352, Sept. 1987.
- [14] P. Stoica and K. C. Sharman. Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation. *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 38(7):1132–1143, July 1990.
- [15] P. Stoica and A. Nehorai. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-38(10):1783–1795, Oct. 1990.
- [16] S. M. Kay. *Modern Spectral Estimation - Theory and Application*. Prentice Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [17] R. Krummenauer. Filtragem ótima na estimação de direção de chegada de ondas planas usando arranjo de sensores. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP, Campinas-SP-Brasil, Jul. 2007.
- [18] F.J. Silva. Uso de filtragem em métodos de estimação de DOA através de arranjo de sensores. Master's thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação - UNICAMP, Campinas-SP-Brasil, Jul. 2007.
- [19] V. Nagesha and S. Kay. On frequency estimation with the IQML algorithm. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 42(9):2509–2513, Sept. 1994.
- [20] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall Information and System Sciences Series, Englewood Cliffs, NJ, 2nd edition, 1991.