



# Regulação Robusta de Tráfego em Linhas de Metrô

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

**Silvino Soares Corrêa**

Engenheiro Eletricista - FTEN/UFMT

Mestre em Engenharia Elétrica - FEEC/UNICAMP

em 24 de setembro de 1999 perante a banca examinadora

Prof. Dr. Basílio Ernesto Almeida Milani	Orientador
Prof. Dr. Henrique Pacca Loureiro Luna	UFMG/BH
Dr <sup>a</sup> . Eunice Luvizotto Medina Pissolato	Fund. CPqD
Prof. Dr. Akebo Yamakami	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Raul Vinhas Ribeiro	FEEC/UNICAMP

Campinas - SP  
1999

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por SILVINO SOARES CORRÊA e aprovada pela Comissão Julgada em 24/09/1999.  
*Basílio e Milani*  
Orientador

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
V.	EX
T.º DE SE	39393
PREÇO	229,99
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	29,11,00
DATA	09/11/99
N.º CPD	

CM-00136845-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C817r      Corrêa, Silvino Soares  
             Regulação robusta de tráfego em linhas de metrô /  
             Silvino Soares Corrêa.--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

            Orientador: Basílio Ernesto Almeida Milani.  
             Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
             Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
             Computação.

            1. Metrô. 2. Controle em tempo real. 3. Programação  
             linear. I. Milani, Basílio Ernesto Almeida. II.  
             Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
             Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

# Resumo

Esta tese trata do problema de regulação robusta de tráfego em linhas de metrô, considerando de forma explícita as incertezas do modelo de tráfego e as limitações sobre suas variáveis de estado e controle. É assumido que os limites sobre as variáveis do modelo são definidos por poliedros convexos fechados simétricos e o domínio dos parâmetros incertos definido pelos pontos extremos de um poliedro convexo compacto. Para solução do problema de regulação, são propostas duas formulações: controle linear invariante no tempo e controle não linear calculado em tempo real. Em ambos os casos, explorando propriedades estruturais do modelo de tráfego, é mostrado que a lei de controle tem a forma de realimentação de estados, estrutura bi-diagonal, sendo facilmente obtida da solução de pequenos problemas de programação linear. Os resultados obtidos são aplicáveis às linhas de metrô atuais.

# Abstract

This thesis is concerned with the problem of robust traffic regulation for metro lines, considering explicitly the traffic model uncertainties and limits on its variables. It is assumed limits on model variables defined by symmetrical convex closed polyhedra and uncertain parameters domain defined by the extreme points of a convex compact polyhedron. Two approaches are proposed for solution of the regulation problem: linear time-invariant control and nonlinear control computed in real-time. In both cases, exploring structural properties of traffic model, it is showed that the control law has a state feedback form, bi-diagonal structure, being easily obtained solving small linear programming problems. The results are applicable to nowadays metro lines.

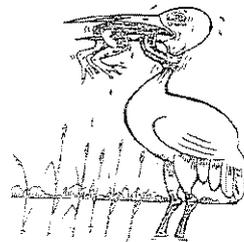
A  
Bruno  
&  
Nicole

## AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças à colaboração direta ou indireta de muitas pessoas. Manifestamos nossa gratidão a todas elas e de forma particular:

- ao Prof. Dr. Basílio E. A. Milani que jamais deixou de incentivar, foi mais que professor e orientador, foi amigo;
- aos meus familiares pelo incentivo, apoio e o tempo que deixei de conviver com eles;
- aos colegas da ETF-MT, em especial, à *Prof<sup>a</sup>* Eliane M. B. Abido pelo incentivo e ajuda, à *Prof<sup>a</sup>* MSc. Ana Maria L. Rispoli pela revisão, ao Prof. Dr. Wilson Conciane pelo apoio e à Direção da Escola pela liberação;
- aos colegas da UFMT, destacando-se, os professores Hamilton, Mateus, Lambert e Apôlonio;
- a CAPES e a Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UFMT por um ano de bolsa integral e um ano de meia bolsa.

Jamais desista !



# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução Geral</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Proposição e Roteiro da Tese . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Os Modelos de Tráfego</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução . . . . .	9
2.2	Descrição do Tráfego de Trens . . . . .	10
2.3	Modelo de Sasama e Okhawa . . . . .	13
2.4	O Modelo de Tempo Real (MTR) . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Regulação do Tráfego de Trens</b>	<b>25</b>
3.1	Introdução . . . . .	25
3.2	Modelo de Tráfego de Trens . . . . .	28

3.3	Regulação de Variância Mínima (RVM) . . . . .	30
3.4	Regulação Robusta com Restrições (RRR) . . . . .	32
3.4.1	Formulação do Problema RRR . . . . .	33
3.4.2	Solução do Problema RRR . . . . .	36
3.5	Regulação Ótima Minimax com Restrições (ROMC) . . . . .	49
3.5.1	Formulação do Problema ROMC . . . . .	49
3.5.2	Solução do Problema ROMC . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Exemplos Numéricos e Simulações</b>	<b>63</b>
4.1	Dados Utilizados . . . . .	64
4.2	Regulação por Variância Mínima (RVM) . . . . .	66
4.2.1	Política de regulação de alto desempenho . . . . .	66
4.2.2	Política de regulação econômica . . . . .	69
4.3	Regulação Robusta com Restrições (RRR) . . . . .	73
4.4	Regulação Ótima Minimax com Restrições ROMC . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>85</b>

# Lista de Figuras

2.1	Linha de metrô aberta com $N$ plataformas . . . . .	11
2.2	Linha de metrô fechada com $N$ plataformas . . . . .	11
2.3	Linha de metrô comercial com $2N - 2$ plataformas operando em regime aberto . . . . .	12
2.4	Vetor de estado dos modelos MRP, MRT e MTR . . . . .	24
3.1	Linha de metrô aberta com $N$ plataformas . . . . .	28
4.1	Linha de metrô aberta com $N$ plataformas . . . . .	64
4.2	RVM de alto desempenho ( $p = 1$ ; $q = \frac{1}{25}$ ) . . . . .	68
4.3	RVM de alto desempenho com saturação de controle ( $p = 1$ ; $q = \frac{1}{25}$ )	69
4.4	RVM econômica ( $p = 1$ ; $q = 25$ ) . . . . .	71
4.5	RVM econômica ( $p = 1$ ; $q = 5$ ) . . . . .	72
4.6	RRR de alto desempenho ( $p = 1$ ; $q = \frac{1}{5}$ ) . . . . .	76

4.7	RRR econômica ( $p = 1$ ; $q = 5$ ) . . . . .	79
4.8	ROMC de alto desempenho ( $p = 1$ ; $q = \frac{1}{5}$ ) . . . . .	82
4.9	ROMC econômica ( $p = 1$ ; $q = 5$ ) . . . . .	83

# Capítulo 1

## Introdução Geral

### 1.1 Motivação

O que prejudicou os centros das cidades brasileiras, e antes delas as americanas, pode ser desdobrado numa série de fatores, mas também pode ser concentrado num só, o automóvel. O automóvel teve, de saída, um duplo efeito. Por um lado, congestionou, poluiu e aumentou o barulho nas ruas centrais. Por outro, encorajou as pessoas que podiam ter um carro próprio a morar e criar locais de trabalho mais longe. A verdade é que os centros das cidades, com suas ruas estreitas, convivem mal com eles. Para evitar os congestionamentos, costuma-se restringir a circulação, seja com a proibição de estacionamento, seja com a criação

de calçadas. Como no Brasil quem tem carro não gosta de transporte coletivo, e o transporte coletivo também não faz muito para que se goste dele, quem pode não vai mais ao centro, ou reduz suas idas ao mínimo.

Cinco mil novos automóveis por dia entram em circulação no Brasil. Isso significa mais congestionamento nas cidades. Qual a solução? Mais transporte coletivo. Os pobres moram longe e gastam um tempo absurdo, três, quatro ou cinco horas por dia, em condução. Qual a solução? Mais transporte coletivo, e mais eficiente. O transporte nas cidades é assunto socialmente tão relevante quanto a educação e a saúde. É economicamente tão importante quanto o treinamento e o aprimoramento da mão-de-obra. Em outras palavras, não é apenas questão de ser mais humano, ou generoso. É também de ser eficiente, algo que de saída fica difícil se o trabalhador perde um tempo precioso em seus deslocamentos e chega cansado ao trabalho. [34]

O que esperar de usuários que perdem de duas a três horas para ir ao serviço, que viajam em trens e ônibus mal conservados, sujos, desconfortáveis e escassos, onde as mulheres são vítimas de assédio sexual grosseiro? [17]

A ansiedade dos usuários, que os leva ao stress e à revolta, passa pelo tempo de espera e de viagem e se torna mais crítica, com altas taxas de desconforto. Já

o tempo de viagem desconfortável, como ocorre nos ônibus e trens suburbanos, amplia as filas do sistema de saúde, conforme foi constatado em pesquisa do Instituto Battelle, de Zurique. No Brasil, esse desconforto tem levado o proprietário de automóvel a optar pelo transporte individual, em prejuízo da qualidade do trânsito. [17]

Os metrô do Rio de Janeiro e de São Paulo deram uma lição de civilidade e de respeito ao cidadão, mostrando que é absolutamente factível elevar o nível de serviço prestado à população. O metrô deu o exemplo dos direitos iguais, transportando com eficiência e conforto todos os cidadãos, independentemente de nível social. Ele proporcionou à sociedade um referencial de qualidade e é, de fato, o sistema de transporte que permite a retirada de automóveis das ruas e enfrenta as enchentes sem problemas. [17]

O metrô surgiu no século XIX, em Londres, como uma linha subterrânea com tecnologia do tipo locomotiva à vapor. Posteriormente, a tração elétrica foi adotada pelos metrô das principais metrópoles européias e norte-americanas, representando grande avanço tecnológico em transportes de massa. [14]

Na década de 70, surgiram os modernos metrô pesados, com composições para transportar até dois mil passageiros. A eletrônica de potência permitiu maior

regulação dos motores e o uso sistemático do computador facilitou a automação das operações e a supervisão dos trens através de um Centro de Controle. Isto possibilitou atingir velocidades acima de 100Km/h e sensível redução do intervalo entre as composições nas estações. [14]

Não há especialista que negue o valor do metrô. Trata-se de um sistema que reúne muitas vantagens: é seguro, rápido, serve a muita gente, não polui, não congestiona e nem agride a paisagem urbana. Porém possui duas severas desvantagens: é caro e demora para ser construído. Entretanto, a experiência mostra que, por mais caro e demorado que seja, ampliar a rede de metrô é um investimento de retorno econômico e social garantido. [37]

A urgência do problema aconselha que sejam igualmente tentadas soluções visando a melhoria operacional da malha metroviária existente, com utilização de técnicas modernas de controle e otimização para obter maior capacidade de transporte e qualidade do serviço para os usuários.

A operação do tráfego de trem em uma linha de metrô pode ser dividida em duas etapas: planejamento e controle.

O planejamento utiliza dados históricos da demanda de passageiros na linha. Seu produto é o Programa Horário da Linha [16], [4], que corresponde, em geral,

a um compromisso entre os seguintes objetivos:

- satisfazer a demanda de passageiros, mantendo a ocupação dos trens dentro de níveis aceitáveis;
- satisfazer restrições de conexão com outros sistemas de transporte;
- minimizar custos operacionais, tais como, número de trens, energia, tripulação, etc...

O controle do tráfego é feito durante a operação comercial da linha, e tem por objetivo manter os trens trafegando de acordo com o Programa Horário da Linha e conduzir condições de tráfego perturbado a uma situação operacional aceitável.

[30], [9], [33], [1], [36], [10] e [11].

## **1.2 Proposição e Roteiro da Tese**

O objetivo desta dissertação é o estudo do problema de controle do tráfego de trem em linhas de metrô, mais precisamente, o problema de regulação do tráfego de trens em referência ao Programa Horário Nominal da Linha.

A matéria se distribui ao longo dos capítulos da seguinte forma:

- **Capítulo 2** : São apresentados e analisados modelos de tráfego de trens em linhas de metrô, disponíveis na literatura. Os modelos combinam características de sistemas movidos a eventos discretos, dentro de uma formulação de variáveis de estado, convenientes para tratamento do problema de regulação do tráfego de trens em linhas de metrô. Na apresentação é dada ênfase para os seguintes aspectos: estabilidade, restrições sobre as variáveis de controle e incertezas do modelo.
  
- **Capítulo 3** : São apresentadas e discutidas três formulações alternativas para o problema de regulação do tráfego de trens. Primeiramente é apresentada uma formulação conhecida na literatura [9], [33], onde o problema de regulação de tráfego é tratado como um problema de variância mínima de sistemas lineares. O resultado é uma lei de controle na forma de realização de estado, invariante no tempo, com estrutura bi-diagonal, fácil de calcular e realizar. Nesta formulação não são consideradas as incertezas do modelo de tráfego quanto às restrições sobre suas variáveis. Em seguida, é proposta uma formulação nova onde o problema de regulação de tráfego é tratado como um problema de regulação robusta de sistemas lineares incertos, com limites sobre suas variáveis de controle, estado e perturbações

externas. O resultado é uma lei de controle na forma de realimentação de estado, invariante no tempo e estrutura bi-diagonal, fácil de ser realizada. Explorando características do modelo de tráfego, é demonstrado que a lei de controle é obtida da solução de pequenos problemas de programação linear, independentes, relacionados um para um com as plataformas da linha. Finalmente é proposta uma formulação também nova, onde o problema de regulação de tráfego é tratado como um problema de controle preditivo minimax, um passo à frente, de um sistema linear incerto, com restrições nas suas variáveis de saída, controle e perturbações externas. O resultado é uma lei de controle não linear, na forma de realimentação de estados, estrutura bi-diagonal e fácil de ser realizada. É demonstrado que a lei de controle é facilmente calculada, em tempo real, resolvendo um pequeno problema de programação linear cada vez que um trem chega a uma plataforma da linha. Do ponto de vista de cálculo e realização, as leis de controle fornecidas por qualquer uma das três formulações são aplicáveis às linhas de metrô da atualidade.

- **Capítulo 4** : São apresentados resultados numéricos de simulação para ilustrar e comparar o desempenho das leis de controle obtidas com as três

formulações de regulação de tráfego apresentadas no Capítulo anterior.

- **Capítulo 5** : Fecha este trabalho com conclusões sobre os resultados obtidos e sugestões para futuros desenvolvimentos.

# Capítulo 2

## Os Modelos de Tráfego

### 2.1 Introdução

O tráfego de trens em uma linha de metrô é caracterizado pelos instantes de chegada e partida, nas plataformas de embarque e desembarque de passageiros, dos trens em circulação na linha. É também nas plataformas da linha, que a viagem dos trens é controlada através da designação do tempo de parada na plataforma e o perfil de velocidade no percurso entre plataformas.

Neste capítulo apresentaremos modelos de tráfego de trens em linhas de metrô, combinando as características de um sistema movido a eventos discretos, dentro de uma formulação de variáveis de estado, que na literatura [16], [1] e [9] têm se

mostrado adequados para os tratamentos de problema de programação e controle do tráfego metroviário.

## 2.2 Descrição do Tráfego de Trens

Considere um conjunto de trens ordenados, percorrendo uma linha de metrô, constituída por uma seqüência de plataformas onde cada trem deve parar, para que passageiros possam subir e descer. Cada trem e cada plataforma são caracterizados por um número, e cada trem que entra na linha segue a seqüência de plataformas numeradas, que é a mesma para todos os trens na linha. Em cada plataforma, a seqüência de trens é ordenada e é a mesma para todas as plataformas. Essas são as características das linhas seqüenciais que podem ser divididas em duas sub-classes: linhas de regime aberto e linhas de regime fechado.

*As linhas de regime aberto* são definidas como uma seqüência de  $N$  plataformas com  $M$  trens operando. Os índices das plataformas variam de 1 a  $N$  e dos trens de 1 a  $M$ . Os trens são inseridos na plataforma 1 e saem da linha na plataforma  $N$  (figura 2.1).

*As linhas de regime fechado* possuem  $N$  plataformas (índice de 1 a  $N$ ) e  $M$  trens (índice de 1 a  $M$ ) operando. A plataforma 1 é conectada a plataforma  $N$  e a

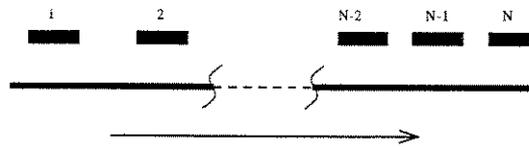


Figura 2.1: Linha de metrô aberta com  $N$  plataformas

seqüência de trens rodando é  $1,2,\dots,M,1,2,\dots$  enquanto a seqüência de plataformas é  $1,2,\dots,N,1,2,\dots$ . De acordo com a estrutura da linha, as variáveis relativas à plataforma 1 dependem da evolução passada do tráfego e são influenciadas pelas variáveis relativas à plataforma  $N$  (figura 2.2).

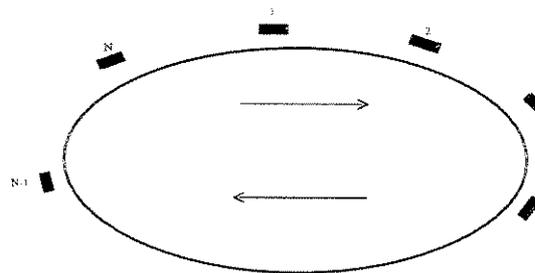


Figura 2.2: Linha de metrô fechada com  $N$  plataformas

Neste trabalho nos dedicaremos à análise do tráfego em linhas de metrô operando em regime aberto, porque a maioria das linhas comerciais, embora sejam fechadas do ponto de vista físico, operam como linha aberta. Considere, por exemplo, a configuração clássica de uma linha com duas vias entre duas estações

terminais A e B (uma via para cada direção) (figura 2.3). No trajeto AB os números das plataformas são  $1, 2, \dots, N$  e no trajeto BA  $N, N+1, \dots, 2N-2, 1$ . Os  $(N-2)$  pares de plataformas  $\{(2, 2N-2), \dots, (N-1, N+1)\}$  correspondem às  $(N-2)$  estações físicas com duas plataformas cada. A e B são duas estações terminais com cruzamento de vias, possibilitando o retorno de trens. Se a seqüência de  $M$  trens está operando periodicamente no circuito ABA, esta linha pode ser considerada como uma linha fechada com  $(2N-2)$  plataformas. Por outro lado, se em uma das estações terminais (por exemplo a estação A) existir pelo menos um trem reserva, isto garante as saídas de trens na plataforma 1 (um) no horário nominal, fazendo com que esta linha possa ser considerada linha operando em regime aberto (Figura 2.3).

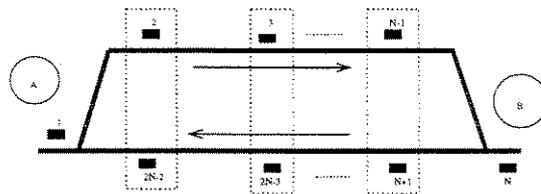


Figura 2.3: Linha de metrô comercial com  $2N - 2$  plataformas operando em regime aberto

*Notação.* Ao longo deste trabalho, usaremos a notação de dois índices para

identificar as variáveis relativas a um dado trem, em uma dada plataforma: o índice superior refere-se ao número do trem e o índice inferior ao número da plataforma. Esses índices tem valores máximos repectivamente  $M$  e  $N$ . Com essa convenção de índices, dois trens sucessivos podem ser identificados, sem perda de generalidade, por  $i$  e  $i + 1$ , com ( $1 \leq i \leq M$ ) o trem  $i + 1$  segue o trem  $i$  e duas plataformas sucessivas pelos índices  $k$  e  $k + 1$  com ( $1 \leq k \leq N$ ).

## 2.3 Modelo de Sasama e Okhawa

Sasama e Okhawa [30] propõem o seguinte modelo.

Considere  $M$  trens (índice superior  $i = 1, \dots, M$ ) e uma linha com  $N$  plataformas (índice inferior  $k = 1, \dots, N$ ).

Considere:

$t_k^i$  : instante da partida do  $i$ -ésimo trem da  $k$ -ésima plataforma

$r_k^i$  : tempo de percurso do  $i$ -ésimo trem entre as  $k$ -ésima e  $(k + 1)$ -ésima plataformas

$s_k^i$  : tempo de parada do  $i$ -ésimo trem na  $k$ -ésima plataforma

Obviamente, o instante da partida do trem  $i$  da  $(k + 1)$ -ésima plataforma é

dados por:

$$t_{k+1}^i = t_k^i + r_k^i + s_{k+1}^i$$

O tempo de percurso  $r_k^i$  pode ser modelado como

$$r_k^i = R_k + u_k^i + w1_k^i$$

onde  $R_k$  é o tempo nominal do percurso entre as  $k$ -ésima e  $(k + 1)$ -ésima plataformas e  $u_k^i$  é a ação do controle, aplicado ao  $i$ -ésimo trem entre as plataformas  $k$  e  $k + 1$ , para diminuir ( $u_k^i < 0$ ) ou aumentar ( $u_k^i > 0$ ) o tempo de percurso e  $w1_k^i$  é um termo de perturbação.

O tempo de parada  $s_k^i$  depende do intervalo entre a partida do trem anterior e a chegada do trem atual. Modelos sofisticados para determinar esse tempo de parada têm sido apresentados na literatura (veja por exemplo,[9]) usando teoria de fila. Contudo, supor que esse tempo seja linear é perfeitamente aceitável: o tempo de parada aumenta proporcionalmente com o número de passageiros que irão entrar no trem, isto é, com o tempo decorrido desde a partida do último trem até a chegada do atual, supondo também que a chegada dos passageiros ocorra

aleatoriamente.

Desta forma, o tempo de parada  $s_k^i$  pode ser modelado como

$$s_k^i = a_k^i(t_k^i - s_k^i - t_k^{i-1}) + D + w2_k^i \quad (2.1)$$

onde:  $D$  é o tempo de parada mínimo em uma plataforma, quando ninguém entra no trem e as portas são fechadas logo que possível e  $a_k^i$  é a taxa de atraso, representando o efeito, no tempo de parada, do intervalo de tempo decorrido desde a partida do último trem e  $w2_k^i$  é um termo de perturbação.

Definindo

$$c_k^i = \frac{a_k^i}{1 + a_k^i} \quad (2.2)$$

$$b_k^i = \frac{1}{1 + a_k^i} \quad (2.3)$$

e relacionando com (2.1) temos:

$$s_k^i = c_k^i(t_k^i - t_k^{i-1}) + b_k^i D + b_k^i w2_k^i \quad (2.4)$$

Definindo o horário nominal representando a operação sem nenhum controle ou perturbação ( $u_k^i = 0$  e  $v_k^i = 0$ ), isto é:

$$T_{k+1}^i = T_k^i + R_k + c_{k+1}^i(T_{k+1}^i - T_{k+1}^{i-1}) + b_{k+1}^i D$$

Definindo

$$w_k^i = w1_k^i + w2_k^i \quad ; \quad v_k^i = b_k^i w_k^i \quad (2.5)$$

Definindo também  $x_k^i = t_k^i - T_k^i$  como o desvio do tempo de partida  $t_k^i$  do seu valor nominal  $T_k^i$ , temos:

$$(1 - c_{k+1}^i)x_{k+1}^i + c_{k+1}^i x_{k+1}^{i-1} = x_k^i + u_k^i + v_k^i \quad (2.6)$$

A equação (2.6) constitui a equação básica de transferência do  $i$ -ésimo trem da  $k$ -ésima para  $k + 1$ -ésima plataforma.

Nessas relações  $D, R_k, c_k^i$  e  $b_k^i$  são parâmetros característicos da linha e do material rodante.  $D$  é um parâmetro definido pela política operacional da linha e  $R$  é definido pelas características do material rodante e traçado geométrico da

linha. A taxa  $a_k^i$  ( e portanto  $c_k^i$  e  $b_k^i$ ) devem ser estimados através de medidas do fluxo de passageiros chegando na plataforma e o tempo necessário para embarque dos mesmos nos trens.

Na equação (2.6), é importante notar que:

- Os parâmetros  $c_k$ , são naturalmente incertos, dada sua relação com a demanda de passageiros que é aleatória;
- os termos de perturbação  $v_k^i$  são aleatórios;
- as variáveis de controle  $u_k^i$  são restritas em valor e dependem das características do material rodante e traçado da linha.

A representação na forma de variáveis de estado, da equação (2.6), é conveniente para utilização de modernas técnicas de controle.

a) '*Método Recorrente por Plataforma*' (MRP)

Em forma matricial temos:

$$X_{k+1} = A_k X_k + A_k U_k + A_k V_k \quad (2.7)$$

Onde:

$X_k$  é o vetor dos desvios de todos os trens na  $k$ -ésima plataforma.

$U_k$  é o vetor de controle aplicado na  $k$ -ésima plataforma

$V_k$  é o vetor de perturbação.

Mais precisamente, para  $k = 1, \dots, N$

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^M \end{bmatrix}, U_k = \begin{bmatrix} u_k^1 \\ u_k^2 \\ \vdots \\ u_k^M \end{bmatrix}, V_k = \begin{bmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \\ \vdots \\ v_k^M \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

e  $A_k = C_{k+1}^{-1}$ , onde  $C_{k+1}$  é a seguinte matriz bidiagonal.

$$C_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 - c_{k+1} & & & \\ c_{k+1} & 1 - c_{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & c_{k+1} & 1 - c_{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A ordem da representação de estado é o número de trens. A matriz dinâmica  $A_k$  é triangular inferior com autovalores igual a  $1/(1 - c_{k+1})$ . Considerando que  $0 < c_k < 1$  (2.2), os autovalores de  $A_k$  estão todos fora do círculo unitário, o que

caracteriza um sistema instável que necessita de controle para ser operado.

b) '*Modelo Recorrente por Trem*' (MRT)

Este pode ser escrito na forma matricial

$$X_{i+1} = \tilde{A}X_i + \tilde{B}U_i + \tilde{B}V_i, \quad i \geq 2 \quad (2.10)$$

onde:

$X_i$  é o vetor das perturbações do  $i$ -ésimo trem para a  $(k+1)$ -ésima plataforma

$U_i$  é o vetor de controle aplicado ao  $i$ -ésimo trem

$V_i$  é o vetor perturbação.

Mais precisamente,

$$X_i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_K^i \end{bmatrix}, U_i = \begin{bmatrix} u_0^i + x_0^i \\ u_1^i + x_1^i \\ \vdots \\ u_{K-1}^i + x_{K-1}^i \end{bmatrix}, V_i = \begin{bmatrix} v_0^i \\ v_1^i \\ \vdots \\ v_{K-1}^i \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 - c_1 & & & \\ -1 & 1 - c_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & -1 & & 1 - c_k \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.12)$$

$$\tilde{A} = \tilde{B} \begin{bmatrix} -c_1 & & & \\ & -c_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -c_k \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A equação (2.10) descreve a evolução dos desvios dos instantes de partidas em todas as plataformas do  $i$ -ésimo ao  $(i + 1)$ -ésimo trem, com as condições iniciais correspondente aos desvios do primeiro trem.

É importante notar que a matriz  $\tilde{A}$  tem autovalores iguais a  $\frac{-c_k}{1 - c_k}$ .

Fazendo  $U_i = 0$ , temos os controles a serem aplicados ao trem  $i$  dados por:

$$[u_0^i u_1^i \cdots u_{k-1}^i] = -[x_0^i x_1^i \cdots x_{k-1}^i] \quad (2.14)$$

que tem a forma de realimentação de estados. Isto corresponde a aplicar ao trem  $i$ , quando este está na plataforma  $k$ , um controle  $u_k^i$  oposto ao seu estado nessa plataforma.

Com  $U = 0$ , a matriz de estado de (2.10) é  $\tilde{A}$  (2.13), que possui autovalores  $\frac{-c_k}{1-c_k} < 1$ , para  $0 \leq c_k < 0.5$ . Nestas condições, (2.14) é estabilizante para o sistema (2.10).

## 2.4 O Modelo de Tempo Real (MTR)

A equação (2.6) é equivalente a

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{1-c_{k+1}}x_k^i - \frac{c_{k+1}}{1-c_{k+1}}x_{k+1}^{i-1} + \frac{1}{1-c_{k+1}}u_k^i + \frac{1}{1-c_{k+1}}v_k^i \quad (2.15)$$

Assim, em forma matricial, podemos ter:

$$X_{j+1} = AX_j + BU_j + BV_j \quad (2.16)$$

onde

$$X_j = \begin{bmatrix} x_1^{j-1} \\ x_2^{j-2} \\ \vdots \\ x_k^{j-k} \end{bmatrix}, U_j = \begin{bmatrix} u_0^j \\ u_1^{j-1} \\ \vdots \\ u_{k-1}^{j-k+1} \end{bmatrix}, V_j = \begin{bmatrix} v_0^j \\ v_1^{j-1} \\ \vdots \\ v_{k-1}^{j-k+1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

e matrizes dinâmicas  $A$  e  $B$  possuem formas simples (bidiagonal e diagonal, respectivamente).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-c_1}{1-c_1} & & & 0 \\ \frac{1}{1-c_2} & \frac{-c_2}{1-c_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{1-c_k} & & \frac{-c_k}{1-c_k} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-c_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{1-c_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{1-c_k} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Pode ser visto na equação (2.15) que o termo  $x_k^i$  é multiplicado pelo fator  $\frac{1}{1-c_{k+1}} > 1$  para obtenção de  $x_{k+1}^i$ . Isto significa que mesmo na ausência de desvio

do trem  $i - 1$  na plataforma  $k + 1$ , sem controle na plataforma  $k$ , o desvio do trem  $i$  na plataforma  $k + 1$  será maior que o seu desvio na plataforma  $k$ , caracterizando comportamento de um sistema instável.

Outra propriedade interessante desta última formulação é que os componentes do vetor estado são conhecidos quase que simultaneamente ou podem ser estimados facilmente. Por causa do requisito de segurança do tráfego, (por exemplo: em trecho entre duas plataformas só pode estar no máximo um trem) os desvios  $x_i^j$  ( $j$ -ésimo trem na  $i$ -ésima plataforma) e  $x_{i+1}^{j-1}$  (trem anterior e próxima plataforma) são conhecidos num curto espaço de tempo. Estas propriedades tornam possível uma implementação prática, em tempo real, de uma lei de controle de realimentação de estado. Por esta razão, nós chamamos este modelo de “Modelo de tempo real” (MTR), e é o que adotaremos neste trabalho.

Se observarmos em (2.15) a (2.19), veremos que a estrutura diagonal da matriz  $B$  (2.19), faz com que  $x_{k+1}^i$ , do ponto de vista de controle, dependa apenas de  $u_k^i$ , caracterizando um sistema descentralizado de comando.

Na figura (2.4) é representada, de forma esquemática, uma matriz  $EX$ , contendo a evolução dos instantes de partida de  $M$  trens, ao longo das  $N$  plataformas de uma linha operando em regime aberto. Pode ser verificado que: o vetor de

estado do modelo MRP corresponde às linhas da matriz  $EX$ ; o vetor de estado do modelo MRT corresponde às colunas da matriz  $EX$  e o vetor estado do modelo MTR é composto pelos componentes da diagonal secundária da matriz  $EX$ .

$$EX = \begin{bmatrix} x_0^1 & x_0^2 & & x_0^i & & & x_0^M & \rightarrow MTR \\ x_1^1 & x_1^2 & & x_1^i & & & x_1^M & \\ x_2^1 & & & & & & x_2^M & \\ & & & & & & & \\ & & & x_{k+1}^{j-1} & & & & \rightarrow MRP \\ & & & & & & & \\ x_N^1 & x_N^2 & & x_N^i & & & x_N^M & \\ & & & \downarrow & & & & \rightarrow MRT \end{bmatrix}$$

Figura 2.4: Vetor de estado dos modelos MRP, MRT e MTR

## Capítulo 3

# Regulação do Tráfego de Trens

### 3.1 Introdução

Conforme visto no Capítulo 2, o tráfego de trens em uma linha de metrô apresenta comportamento instável e é descrito por modelo contendo significativa parcela de incertezas, porque depende da demanda de passageiros e perturbações ao longo das viagens dos trens, ambos de natureza aleatória.

Do ponto de vista dos passageiros, é necessário controlar o tráfego de trens de forma a diminuir o tempo de espera nas estações e limitar a lotação máxima dos trens. Isto é obtido mantendo os intervalos entre trens sucessivos tão próximos quanto possível de seus valores nominais. Por outro lado, se considerarmos co-

nexão com outros sistemas de transporte, a entrada e saída de trens na linha em função da variação da demanda de passageiros ao longo do período de operação comercial, o tráfego de trens deve ser controlado de forma que os horários dos trens também sejam mantidos próximos de seus valores nominais. Considerando ainda o interesse de minimizar custos operacionais por parte dos operadores da linha, o controle dos trens também não deve se afastar dos valores nominais requeridos pelo Programa Horário da Linha. [16], [4].

A ação de controle consiste de instruções dadas aos trens, aumentando ou diminuindo os tempos de parada nas estações e/ou a velocidade nos percursos inter-estações. O controle é limitado naturalmente por restrições de velocidade máxima, tempo mínimo de parada e regras de segurança impostas pela sinalização da linha. As regras de segurança e a lotação máxima desejada para os trens impõem restrições, respectivamente, sobre o intervalo mínimo e máximo entre dois trens consecutivos. Essas limitações resultam em restrições aos desvios horários dos trens em relação ao previsto no Programa Horário da Linha.

Assim sendo, o controle de tráfego, para bem operar uma linha metroviária, deve representar uma solução de compromisso entre os três objetivos cujas variações devem ser minimizadas (horário, intervalo entre trens e esforço de controle) e que seja também robusta frente às incertezas do modelo de tráfego, respeitando

as restrições sobre suas variáveis.

Neste capítulo, baseados no modelo de tráfego de tempo real MTR na seção 2.4, apresentaremos três formulações alternativas para o problema de regulação do tráfego de trens em uma linha de metrô operando em regime aberto. Inicialmente, será apresentada uma formulação de variância mínima proposta por [9], [33], que não considera as incertezas do modelo de tráfego e as restrições sobre suas variáveis de estado/controlado. Em seguida, serão propostas duas novas formulações, considerando as incertezas do modelo bem como as restrições sobre suas variáveis de estado/controlado. A primeira delas, fornece uma lei de controle na forma de realimentação de estado, linear, invariante no tempo. A segunda da nova formulação, fornece uma lei de controle, também na forma de realimentação de estado, mas não linear e variante no tempo, devendo ser calculada em tempo real, toda vez que um trem chegar a uma plataforma da linha.

Ao longo deste capítulo, bem como no restante deste trabalho, utilizaremos a seguinte convenção: para duas matrizes reais  $n \times m$   $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ ,  $A \leq B$  é equivalente a  $a_{ij} \leq b_{ij}$  para todo  $i, j$  tal que  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ .  $A \geq 0$  é equivalente a  $a_{ij} \geq 0$  e  $|A| = (|a_{ij}|)$ .

### 3.2 Modelo de Tráfego de Trens

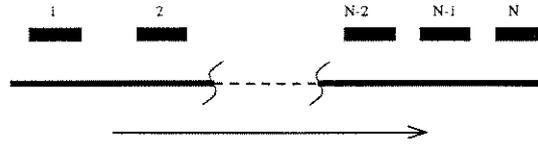


Figura 3.1: Linha de metrô aberta com  $N$  plataformas

Consideraremos uma linha de metrô operando em regime aberto com  $N$  plataformas, conforme figura (3.1), descrita pelo Modelo de Tempo Real discutido no capítulo anterior:

$$X_{j+1} = A(C)X_j + B(C)U_j + B(C)V_j \quad (3.1)$$

$$X_j = \begin{bmatrix} x_1^{j-1} & x_2^{j-2} & \dots & x_N^{j-N} \end{bmatrix}^T \quad (3.2)$$

$$U_j = \begin{bmatrix} u_0^j & u_1^{j-1} & \dots & u_{N-1}^{j-N+1} \end{bmatrix}^T \quad (3.3)$$

$$V_j = \begin{bmatrix} v_0^j & v_1^{j-1} & \dots & v_{N-1}^{j-N+1} \end{bmatrix}^T \quad (3.4)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{bmatrix}^T \quad (3.5)$$

$$A(C) = \begin{bmatrix} a_1(c_1) & & & \mathbf{0} \\ b_2(c_2) & a_2(c_2) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & b_N(c_N) & a_N(c_N) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$B(C) = \begin{bmatrix} b_1(c_1) & & & \mathbf{0} \\ & b_2(c_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & b_N(c_N) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$a_k(c_k) = -\frac{c_k}{(1 - c_k)} \quad ; \quad k = 1 : N \quad (3.8)$$

$$b_k(c_k) = \frac{1}{(1 - c_k)} \quad ; \quad k = 1 : N \quad (3.9)$$

onde:  $X_j$ ,  $U_j$ ,  $V_j$  são vetores de dimensões  $(N, 1)$ , representando respectivamente o estado, o controle e as perturbações externas do sistema;  $x_k^i$  representa o desvio do instante de saída do trem  $i$  na plataforma  $k$  relativo ao programa horário nominal;  $u_k^i$  representa a variação relativa ao programa horário nominal do tempo de percurso entre as plataformas  $k$  e  $k + 1$ , mais o tempo de espera na plataforma  $k$ , comandados ao trem  $i$  na plataforma  $k$  e  $c_k$  representa a razão de variação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$ , relativa à variação do intervalo entre trens sucessivos nessa plataforma.

### 3.3 Regulação de Variância Mínima (RVM)

Uma larga variedade de critérios de desempenho podem ser considerados dependendo do propósito do controle. Nesse sentido, Van Breusegem e outros [9], [33] propõem o seguinte critério quadrático:

$$J = pX_{j+1}^T X_{j+1} + q(X_{j+1} - X_j)^T (X_{j+1} - X_j) + U_j^T U_j \quad (3.10)$$

Pode ser verificado que este critério corresponde a um critério de controle preditivo de um passo [18], onde: o primeiro termo penaliza o desvio do horário

nominal; o segundo termo penaliza o desvio do intervalo de tempo entre trens, sendo, portanto, relativo ao tempo médio de espera dos passageiros e da concentração dos mesmos nos trens; o terceiro termo é a medida da amplitude da ação de controle, sendo zero para horário nominal. Os valores dos coeficientes  $p > 0$  e  $q > 0$  dependem do propósito do controle e refletem o compromisso a ser alcançado entre os objetivos da regulação .

**Definição 3.1** : *Problema de Regulação de Variância Mínima (RVM): Determinar  $U$  que minimiza o critério de desempenho (3.10) sujeito às equações do modelo (3.1)-(3.9).*

**Proposição 3.1** [9],[33] : *A solução de RVM é uma lei de controle na forma de realimentação de estado, dada por:*

$$U_j = -[I_N + (p + q)B^T B]^{-1}[(p + q)B^T A - qB^T]X_j \quad (3.11)$$

onde  $I_N$  representa a matriz identidade de dimensão  $N$  padrão. Devido à estrutura diagonal da matriz  $B$ (3.7), é fácil verificar que os componentes de  $U_j$  são dados por:

$$u_k^i = -g_{k+1}x_k^i + f_{k+1}x_{k+1}^{i-1} \quad (3.12)$$

onde:

$$g_{k+1} = \frac{p + q}{p + q + (1 - c_{k+1})^2}$$

$$f_{k+1} = \frac{p + qc_{k+1}}{p + q + (1 - c_{k+1})^2}$$

Isto significa que o controle aplicado ao trem  $i$  entre as plataformas  $k$  e  $k + 1$  é uma combinação linear de dois desvios de instantes de partida:  $x_k^i$  e  $x_{k+1}^{i-1}$ , que são respectivamente, desvio do trem  $i$  na plataforma  $k$  e desvio do trem anterior ( $i - 1$ ) na próxima plataforma ( $k + 1$ ).

Este caráter local da lei de controle é de suma importância para sua implementação prática. Pode ser verificado que se o critério de desempenho envolvesse mais passos de predição, este caráter local seria perdido.

### 3.4 Regulação Robusta com Restrições (RRR)

A principal limitação da formulação RVM é não tratar de forma explícita aspectos importantes do problema de regulação de tráfego: incertezas do modelo

de tráfego, restrições técnicas e operacionais nas variáveis de estado e controle e estabilidade do sistema controlado.

Para suprir essa falta, em [10], [11], é proposta uma formulação de regulação robusta com restrições do tráfego de trens. A lei de controle tem a mesma forma que a da RVM e é obtida através da solução de um problema de programação linear, de solução trabalhosa, dado o porte das linhas de metrô atuais. Também devido à dificuldade de solução, a robustez é tratada de forma conservativa.

A seguir é proposta uma formulação aperfeiçoada de regulação robusta com restrições do tráfego de trens, menos conservativa que [10], [11] e cujo resultado é obtido através da solução de pequenos problemas de programação linear, independentes, relacionados um para um com as plataformas da linha.

### 3.4.1 Formulação do Problema RRR

A aleatoriedade da demanda de passageiros torna o vetor de parâmetros  $C$  incerto, o qual será aqui considerado restrito ao poliedro:

$$C^L \leq C \leq C^U \quad (3.13)$$

onde  $C^L, C^U \in \mathbb{R}^N$ ,  $0 < C^L \leq C^U < 1$ .

As perturbações  $V_j$  são também limitadas e serão consideradas restritas ao poliedro:

$$-\eta \leq V_j \leq \eta \quad (3.14)$$

onde  $\eta \in \mathfrak{R}^N$ ,  $\eta > 0$ .

Fatores técnicos e operacionais impõem limites ao controle  $U_j$ , o qual será considerado restrito ao poliedro:

$$-\rho \leq U_j \leq \rho \quad (3.15)$$

onde  $\rho \in \mathfrak{R}^N$ ,  $\rho \geq 0$ .

Requisitos de ocupação dos trens e regras de segurança impõem limites sobre a variação admissível do intervalo entre dois trens sucessivos  $(X_{j+1} - X_j)$ , que será considerada restrita ao poliedro:

$$-\zeta \leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta \quad (3.16)$$

onde  $\zeta \in \mathfrak{R}^N$ ,  $\zeta > 0$ .

Para garantir a estabilidade no sentido de Lyapunov do tráfego de trens na linha de metrô, o estado  $X_j$ , ao longo de toda a trajetória do sistema (3.1), deverá

ficar restrito ao poliedro:

$$-\delta \leq X_j \leq \delta \quad (3.17)$$

onde  $\delta \in \mathfrak{R}^N$ ,  $\delta > 0$ . Isto corresponde assumir que (3.17) é positivamente invariante com respeito ao sistema (3.1) [5], [25], que é equivalente a requerer que

$$-\delta \leq X_{j+1} \leq \delta \quad (3.18)$$

deva ser satisfeito para todo  $X_j$  em (3.17).

Considere as equações do sistema (3.1), as restrições (3.15)-(3.18) e uma lei de controle de realimentação de estado linear invariante:

$$U_j = FX_j \quad (3.19)$$

**Definição 3.2** : *Regulação robusta com restrições (RRR): Obter uma matriz  $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  tal que para todo  $C$  (3.13),  $V_j$  (3.14),  $X_j$  (3.17),  $j \geq 0$ , as seguintes restrições são satisfeitas conjuntamente:*

$$\begin{aligned}
X_{j+1} &= [A(C) + B(C)F]X_j + B(C)V_j \\
-\delta &\leq X_{j+1} \leq \delta \\
-\rho &\leq U_j \leq \rho \\
-\zeta &\leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta
\end{aligned} \tag{3.20}$$

### 3.4.2 Solução do Problema RRR

Considere a transformação linear,

$$y = T_0 z \tag{3.21}$$

$$y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^t ; T_0 \in \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^{t \times s} ; z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^s$$

onde  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{T}_0$ ,  $\mathcal{Z}$  são conjuntos convexos fechados.

**Definição 3.3 :** O conjunto  $\mathcal{Z}$  é chamado de admissível robusto para a transformação linear (3.21) com respeito a  $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_0)$ , se  $y \in \mathcal{Y}$  para todos  $z \in \mathcal{Z}$  e  $T_0 \in \mathcal{T}_0$ . No caso de  $T_0$  perfeitamente conhecido,  $\mathcal{Z}$  é chamado de admissível para (3.21), com respeito a  $\mathcal{Y}$

Considere  $\mathcal{T}_0$  dado pelo poliedro convexo e compacto:

$$\mathcal{T}_0 = \left\{ T_0 : T_0 = \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j T_0^j ; \lambda_j \geq 0 ; \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j = 1 \right\} \quad (3.22)$$

onde  $T_0^j \in \mathbb{R}^{t \times s}$  são os pontos extremos do conjunto. Considere também  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$  definidos pelos poliedros convexos simétricos

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^s ; -\eta \leq Qz \leq \eta\} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^t ; -\zeta \leq Ry \leq \zeta\} \quad (3.24)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{q \times s}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{r \times t}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^q$  e  $\zeta \in \mathbb{R}^r$ .

**Lema 3.1** : *O poliedro  $\mathcal{Z}$  (3.23) é admissível robusto para a transformação linear (3.21) com respeito a  $\mathcal{Y}$  (3.24) e  $\mathcal{T}_0$  (3.22), se e somente se para todo  $j$  tal que  $1 \leq j \leq N_T$  exista uma matriz  $M_j$  tal que:*

$$M_j Q = R T_0^j \quad (3.25)$$

$$|M_j| \eta \leq \zeta \quad (3.26)$$

**Prova:**

*Necessidade:* Substituindo (3.21) em (3.24), temos:

$$RT_0 z \leq \zeta \quad (3.27)$$

Se  $\mathcal{Z}$  (3.23) é admissível robusto para (3.21) com respeito a (3.22), (3.24), o poliedro definido por (3.23) deve estar contido no poliedro definido por (3.27) para todo  $T_0 \in \mathcal{T}_0$ . Isto é possível se e somente se existe uma matriz  $K$  tal que [20]:

$$KQ = RT_0 \quad (3.28)$$

$$|K|\eta \leq \zeta \quad (3.29)$$

Assumindo  $M_j = K$  para cada ponto extremo  $T_0^j$ , as equações (3.28), (3.29) podem ser expressas como (3.25), (3.26).

*Suficiência :* Considerando (3.25), (3.26) válidas, e escalares  $\lambda_j$  tais que:

$$\lambda_j \geq 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j = 1 \quad (3.30)$$

Como  $\lambda_j \geq 0$ , as seguintes combinações são válidas:

$$\lambda_j M_j Q = \lambda_j R T_0^j$$

$$\lambda_j |M_j| \eta \leq \lambda_j \zeta$$

Conseqüentemente,

$$\left( \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j M_j \right) Q = R \left( \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j T_0^j \right) \quad (3.31)$$

$$\left| \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j M_j \right| \eta \leq \left( \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j \right) \zeta \quad (3.32)$$

Assumindo  $K = \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j M_j$ , as equações (3.22), (3.30), (3.31), (3.32) levam a (3.28), (3.29), válidas para  $T_0 \in \mathcal{T}_0$  genérico, o que torna a conclusão da prova trivial.  $\square$

Sejam as matrizes diagonais:

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \text{diag}[\gamma_{x1} \ \gamma_{x2} \ \cdots \ \gamma_{xN}] \\ \Gamma_h &= \text{diag}[\gamma_{h1} \ \gamma_{h2} \ \cdots \ \gamma_{hN}] \\ \Gamma_u &= \text{diag}[\gamma_{u1} \ \gamma_{u2} \ \cdots \ \gamma_{uN}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sem perda de generalidade, as equações (3.14), (3.17)-(3.20), podem ser colocadas na seguinte forma:

$$-\begin{bmatrix} \delta \\ \eta \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} I_N & \\ & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$X_{j+1} = [A + BF \quad B] \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$X_{j+1} - X_j = [A + BF - I_N \quad B] \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$U_j = \begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$-\Gamma_x \delta \leq X_{j+1} \leq \Gamma_x \delta \quad (3.38)$$

$$-\Gamma_h \zeta \leq X_{j+1} - X_j \leq \Gamma_h \zeta \quad (3.39)$$

$$-\Gamma_u \rho \leq U_j \leq \Gamma_u \rho \quad (3.40)$$

$$0 \leq \Gamma_x, \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \quad (3.41)$$

onde  $I_N$  é a matriz identidade  $N \times N$ .

Considerando as relações (3.13), (3.33)-(3.41), a seguinte proposição dá condições necessárias e suficientes para a solução de RRR.

**Proposição 3.2 :** *RRR tem solução se e somente se os seguintes  $N$  conjuntos independentes de restrições tiverem uma solução factível.*

- Conjunto de restrições 1

$$\begin{aligned}
|f_{1,1} - c_1^U| \delta_1 - (1 - c_1^U) \delta_1 \gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\
|f_{1,1} - c_1^L| \delta_1 - (1 - c_1^L) \delta_1 \gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\
|f_{1,1} - 1| \delta_1 - (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\
|f_{1,1} - 1| \delta_1 - (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\
|f_{1,1}| \delta_1 - \rho_1 \gamma_{u1} &\leq 0 \\
0 \leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} &\leq 1
\end{aligned} \quad (3.42)$$

- Conjuntos de restrições  $k ; k = 2 : N$

$$\begin{aligned}
|f_{k,k} - c_k^U| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \delta_k \gamma_{xk} &\leq -\eta_k \\
|f_{k,k} - c_k^L| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \delta_k \gamma_{xk} &\leq -\eta_k \\
|f_{k,k} - 1| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} &\leq -\eta_k \\
|f_{k,k} - 1| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} &\leq -\eta_k \\
|f_{k,k}| \delta_k + |f_{k,k-1}| \delta_{k-1} - \rho_k \gamma_{uk} &\leq 0 \\
0 &\leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1
\end{aligned} \tag{3.43}$$

**Prova:**

Usando a Definição 3.3 (conjuntos robustamente admissíveis) e a Definição 3.2, (RRR) pode ser equivalentemente reformulada como: Achar  $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  tal que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

- o poliedro definido por (3.34) é robustamente admissível para as transformações (3.35) e (3.36) com respeito ao poliedro definido por (3.38), (3.13) e (3.39), (3.13) respectivamente;
- o poliedro definido por (3.34) é admissível para a transformação (3.37) com respeito ao poliedro definido por (3.40).

Conseqüentemente, usando o Lema 3.1 pode ser verificado que RRR tem solução se somente se, para todo  $C$  satisfazendo (3.13), o seguinte conjunto de restrições tem solução factível:

$$\begin{aligned}
 H(C) &= A(C) + B(C)F \\
 |H(C)|\delta &\leq \Gamma_x\delta - |B(C)|\eta \\
 Z(C) &= A(C) + B(C)F - I_N \\
 |Z(C)|\delta &\leq \Gamma_h\zeta - |B(C)|\eta \\
 |F|\delta &\leq \Gamma_u\rho \\
 0 &\leq \Gamma_x, \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Substituindo (3.6)-(3.9) em (3.44), devido à estrutura diagonal da matriz  $B(C)$ , [6] e  $0 < C^L \leq C \leq C^U < 1$ , após algumas manipulações algébricas, pode ser verificado que as restrições (3.44) são decompostas nos seguintes  $N$  conjuntos de restrições independentes.

- Conjunto de restrições 1

$$\begin{aligned}
|f_{1,1} - c_1|\delta_1 - (1 - c_1)\delta_1\gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\
|f_{1,1} - 1|\delta_1 - (1 - c_1)\zeta_1\gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\
|f_{1,1}|\delta_1 - \rho_1\gamma_{u1} &\leq 0 \\
0 &\leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1
\end{aligned} \tag{3.45}$$

- Conjuntos de restrições  $k$  ;  $k = 2 : N$

$$\begin{aligned}
|f_{k,k} - c_k|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - (1 - c_k)\delta_k\gamma_{xk} &\leq -\eta_k \\
|f_{k,k} - 1|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - (1 - c_k)\zeta_k\gamma_{hk} &\leq -\eta_k \\
|f_{k,k}|\delta_k + |f_{k,k-1}|\delta_{k-1} - \rho_k\gamma_{uk} &\leq 0 \\
0 &\leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Os conjuntos de restrições  $k = 1 : N$  (3.45), (3.46) são factíveis para todo  $c_k$  satisfazendo (3.13) se e somente se, eles são simultaneamente factíveis para  $c_k = c_k^U$  e  $c_k = c_k^L$ , Lema 3.1, o que conclui a prova.  $\square$

Pode ser verificado em (3.45), (3.46) que a matriz  $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  solução do RRR possui a maioria dos elementos nulos, exceto possivelmente os componentes  $f_{k,k}$ ,  $k = 1 : N$ ,  $f_{k,k-1}$ ,  $k = 2 : N$ , mostrando a mesma estrutura bi-diagonal da matriz

$A(C)$  (3.7).

Baseado na Proposição 3.2, a matriz  $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  solução do RRR pode ser facilmente obtida pela solução dos seguintes  $N$  problemas reduzidos de programação matemática independentes:

$$\min J_1 = \delta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1} \quad (3.47)$$

Sujeito a

$$|f_{1,1} - c_1^U| \delta_1 - (1 - c_1^U) \delta_1 \gamma_{x1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1} - c_1^L| \delta_1 - (1 - c_1^L) \delta_1 \gamma_{x1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1} - 1| \delta_1 - (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1} - 1| \delta_1 - (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1}| \delta_1 - \rho_1 \gamma_{u1} \leq 0$$

$$0 \leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1$$

$$\min J_k = \delta_k \gamma_{xk} + p \zeta_k \gamma_{hk} + q \rho_k \gamma_{uk} \quad (3.48)$$

Sujeito a

$$|f_{k,k} - c_k^U| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k} - c_k^L| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k} - 1| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k} - 1| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k}| \delta_k + |f_{k,k-1}| \delta_{k-1} - \rho_k \gamma_{uk} \leq 0$$

$$0 \leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1$$

onde  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$  são escalares usados para ponderação relativa de  $\gamma_{xk}$ ,  $\gamma_{hk}$ ,  $\gamma_{uk}$ .

Das equações (3.38)-(3.41), devido à independência dos problemas (3.47), (3.48), pode ser verificado que a solução desses corresponde à otimização do índice de desempenho global da linha, dada pela soma ponderada de normas  $L_1$ :

$$J_j = \mathbf{1}_N^T [ |X_{j+1}| + p |X_{j+1} - X_j| + q |U_j| ] \quad (3.49)$$

onde:  $\mathbf{1}_N$  é um vetor de dimensão  $(N \times 1)$  com as componentes iguais a 1.

Nos problemas (3.47),(3.48) pode ser verificado que, no ponto de ótimo, as seguintes condições são satisfeitas:

$$0 \leq f_{k,k} \leq 1 \quad ; \quad k = 1 : N \quad (3.50)$$

$$-1 \leq f_{k,k-1} \leq 0 \quad ; \quad k = 2 : N \quad (3.51)$$

Considere também a seguinte mudança de variáveis, normalmente usada em programação linear [19]:

$$\begin{aligned} f_{k,k} - c_k^U &= y_k^{U+} - y_k^{U-} \\ |f_{k,k} - c_k^U| &\leq y_k^{U+} + y_k^{U-} \\ f_{k,k} - c_k^L &= y_k^{L+} - y_k^{L-} \\ |f_{k,k} - c_k^L| &\leq y_k^{L+} + y_k^{L-} \\ y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Usando (3.50)-(3.52) e manipulações algébricas rotineiras, os problemas de programação matemática (3.47), (3.48) podem ser facilmente transformados nos problemas equivalentes de programação linear:

PL 1

$$\min J_1 = \delta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1}$$

Sujeito à

$$f_{1,1} - y_1^{U+} + y_1^{U-} = c_1^U$$

$$f_{1,1} - y_1^{L+} + y_1^{L-} = c_1^L$$

$$(y_1^{U+} + y_1^{U-}) \delta_1 - (1 - c_1^U) \delta_1 \gamma_{x1} \leq -\eta_1$$

$$(y_1^{L+} + y_1^{L-}) \delta_1 - (1 - c_1^L) \delta_1 \gamma_{x1} \leq -\eta_1$$

$$(-y_1^{U+} + y_1^{U-} - c_1^U + 1) \delta_1 - (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq -\eta_1$$

$$(-y_1^{L+} + y_1^{L-} - c_1^L + 1) \delta_1 - (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq -\eta_1$$

$$f_{1,1} \delta_1 - \rho_1 \gamma_{u1} \leq 0$$

$$0 \leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 ; y_1^{L+}, y_1^{L-}, y_1^{U+}, y_1^{U-} \geq 0$$

PL  $k$  ;  $k = 2 : N$ 

$$\min J_k = \delta_k \gamma_{xk} + p \zeta_k \gamma_{hk} + q \rho_k \gamma_{uk}$$

Sujeito à

$$f_{k,k} - y_k^{U+} + y_k^{U-} = c_k^U$$

$$f_{k,k} - y_k^{L+} + y_k^{L-} = c_k^L$$

$$(y_k^{U+} - y_k^{U-}) \delta_k + (f_{k,k-1} + 1) \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k$$

$$(y_k^{L+} - y_k^{L-}) \delta_k + (f_{k,k-1} + 1) \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k$$

$$(-y_k^{U+} + y_k^{U-} - c_k^U + 1) \delta_k + (f_{k,k-1} + 1) \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k$$

$$(-y_k^{L+} + y_k^{L-} - c_k^L + 1) \delta_k + (f_{k,k-1} + 1) \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k$$

$$f_{k,k} \delta_k - (f_{k,k-1}) \delta_{k-1} - \rho_k \gamma_{uk} \leq 0$$

$$0 \leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 ; y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} \geq 0$$

### 3.5 Regulação Ótima Minimax com Restrições (ROMC)

A formulação RRR fornece uma lei de controle de realimentação linear, invariante no tempo. A invariância da lei de controle certamente facilita sua realização. No entanto, tendo que satisfazer todo o poliedro no espaço de estado (3.17), nas proximidades da origem, pode vir a oferecer um desempenho de regulação inferior ao de uma lei de controle não linear, calculada em função do estado atual.

Nesse sentido, a seguir propomos uma formulação de controle preditivo [18] ótimo minimax, um passo à frente, com restrições, para o problema de regulação do tráfego de trens.

#### 3.5.1 Formulação do Problema ROMC

Seja um sistema incerto discreto no tempo:

$$x(k+1) = A(w)x(k) + B(w)u(k) \quad (3.53)$$

$$u(k) = F(x(k))x(k) \quad (3.54)$$

$$w \in \mathcal{W} \subset \mathfrak{R}^s \quad (3.55)$$

onde:  $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathfrak{R}^m$  são, respectivamente, o estado do sistema e entrada de controle;  $F(x(k))$  é uma matriz de realimentação de estados possivelmente não linear;  $w$  é desconhecido e  $\mathcal{W}$  é um conjunto compacto.

**Lema 3.2** : *O sistema em malha fechada (3.53)-(3.55) é robustamente assintoticamente estável [12], [2], [25] se a seguinte condição é válida para todo  $w \in \mathcal{W}$  e  $x(k) \in \mathfrak{R}^n$  :*

$$|A(w) + B(w)F(x(k))|\beta < \beta \quad (3.56)$$

onde  $\beta \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\beta > 0$  é um vetor dado.

Este Lema pode ser facilmente provado, mostrando que a função linear proposta  $\Psi : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  é uma função de Lyapunov para o sistema (3.53)-(3.55) [5]:

$$\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{|x_i|}{\beta_i} \right\} \quad (3.57)$$

onde  $x_i$  e  $\beta_i$  representam, respectivamente, as  $i$ -ésimas componentes de  $x$  e de um dado vetor real  $\beta > 0$ .

Considere as equações do sistema (3.1)-(3.9) e uma lei de controle por realimentação de estados, possivelmente não linear:

$$U_j = F_j X_j \quad (3.58)$$

Para garantir a estabilidade assintótica robusta do tráfego de trens na linha metroviária, de acordo com o Lema 3.2, para todo  $C$  (3.13), a lei de realimentação (3.58) deverá satisfazer:

$$|A(C) + B(C)F_j|\beta \leq \lambda\beta \quad (3.59)$$

onde:  $\beta \in \mathfrak{R}^n, \lambda \in \mathfrak{R}, \beta > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  são dados. O parâmetro  $\lambda$  especifica o índice de convergência desejado para o sistema controlado.

Para avaliar o desempenho da regulação, considere o critério dado pela soma ponderada de normas  $L_1$  de  $X_{j+1}, X_{j+1} - X_j, U_j$ :

$$J_j = \mathbf{1}_N^T [ |X_{j+1}| + p|X_{j+1} - X_j| + q|U_j| ] \quad (3.60)$$

onde  $p, q$  são escalares positivos para ponderação relativa dos componentes do critério.

**Definição 3.4** : *Regulação Ótima Minimax com Restrições (ROMC):* Dados o critério de desempenho  $J_j$  (3.60) e um vetor de estado  $X_j$ , determinar uma matriz  $F_j \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  solução do seguinte problema de programação matemática minimax:

$$\min_{F_j} \max_{V_j, C} J_j \quad (3.61)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= [A(C) + B(C)F_j]X_j + B(C)V_j \\ -\zeta &\leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$|A(C) + B(C)F_j| \beta \leq \lambda \beta$$

$$-\rho \leq F_j X_j \leq \rho$$

$$-\eta \leq V_j \leq \eta \quad (3.63)$$

$$C^L \leq C \leq C^U$$

### 3.5.2 Solução do Problema ROMC

Considere as restrições lineares:

$$-\zeta \leq Gz + Ev \leq \zeta \quad (3.64)$$

$$-\eta \leq v \leq \eta \quad (3.65)$$

onde:  $z \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in \mathbb{R}^p$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\zeta \geq 0$ ,  $\eta \geq 0$ .

**Lema 3.3** : *Um vetor  $z$  é uma solução factível das restrições (3.64) para todo  $v$  satisfazendo (3.65) se e somente se  $z$  é também uma solução factível das seguintes restrições:*

$$|E|\eta - \zeta \leq Gz \leq \zeta - |E|\eta \quad (3.66)$$

**Prova:**

As restrições (3.65), (3.64) podem ser escritas de forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ -I_p \end{bmatrix} v \leq \begin{bmatrix} \eta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$\begin{bmatrix} E \\ -E \end{bmatrix} v \leq \begin{bmatrix} \zeta - Gz \\ \zeta + Gz \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Um vetor  $z$  é uma solução factível de (3.64) para todo  $v$  satisfazendo (3.65) se e somente se qualquer  $v$  que satisfaz (3.67) também satisfaz (3.68). Isto é possível

se e somente se existem matrizes  $M^+ > 0$ , e  $M^- > 0$ , tais que [20]:

$$M^+ \geq 0 \quad ; \quad M^- \geq 0 \tag{3.69}$$

$$(M^+ - M^-) = E$$

$$(M^+ + M^-)\eta \leq \zeta - Gz \tag{3.70}$$

$$(M^+ + M^-)\eta \leq \zeta + Gz$$

De (3.69), empregando uma propriedade usual em programação linear [19], tem-se:

$$|E| \leq M^+ + M^- \tag{3.71}$$

Substituindo (3.71) em (3.70), a prova pode ser facilmente concluída.  $\square$ .

Sejam as matrizes diagonais:

$$\begin{aligned} \Gamma_x &= \text{diag}[\gamma_{x1} \ \gamma_{x2} \ \cdots \ \gamma_{xN}] \\ \Gamma_h &= \text{diag}[\gamma_{h1} \ \gamma_{h2} \ \cdots \ \gamma_{hN}] \\ \Gamma_u &= \text{diag}[\gamma_{u1} \ \gamma_{u2} \ \cdots \ \gamma_{uN}] \end{aligned} \tag{3.72}$$

Considere também o critério de desempenho ROMC (3.60), (3.61) e as restrições (3.62), (3.63). A proposição a seguir fornece um método computacional descentralizado eficiente para solução de ROMC.

**Proposição 3.3 :** *Dado um vetor de estado  $X_j = (x_i)$ , a solução correspondente  $F_j = (f_{i,j})$  de ROMC é dada pela solução dos  $N$  problemas independentes de programação linear de ordem reduzida (MP) a seguir :*

MP 1

$$\begin{aligned}
 & \min \beta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1} \\
 & |f_{1,1} - c_1^U| \beta_1 \leq (1 - c_1^U) \lambda \beta_1 \\
 & |f_{1,1} - c_1^L| \beta_1 \leq (1 - c_1^L) \lambda \beta_1 \\
 & \eta_1 - (1 - c_1^U) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1^U) x_1 \leq (1 - c_1^U) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1 \\
 & \eta_1 - (1 - c_1^L) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1^L) x_1 \leq (1 - c_1^L) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1 \\
 & \eta_1 - (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1 \\
 & \eta_1 - (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1 \\
 & -\rho_1 \gamma_{u1} \leq f_{1,1} x_1 \leq \rho_1 \gamma_{u1} \\
 & \gamma_{x1} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

MP  $k$  ;  $k = 2 : N$

$$\begin{aligned}
& \min \beta_k \gamma_{xk} + p \zeta_k \gamma_{hk} + q \rho_k \gamma_{uk} \\
& |f_{k,k} - c_k^U| \beta_k + |f_{k,k-1} + 1| \beta_{k-1} \leq (1 - c_k^U) \lambda \beta_k \\
& |f_{k,k} - c_k^L| \beta_k + |f_{k,k-1} + 1| \beta_{k-1} \leq (1 - c_k^L) \lambda \beta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^U) \beta_k \gamma_{xk} \leq (f_{k,k} - c_k^U) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^U) \beta_k - \eta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^L) \beta_k \gamma_{xk} \leq (f_{k,k} - c_k^L) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^L) \beta_k - \eta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} \leq (f_{k,k} - 1) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} \leq (f_{k,k} - 1) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
& -\rho_k \gamma_{uk} \leq f_{k,k} x_k + f_{k,k-1} x_{k-1} \leq \rho_k \gamma_{uk} \\
& \gamma_{xk} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1
\end{aligned} \tag{3.74}$$

**Prova:**

ROMC pode ser equivalentemente definido como o seguinte problema de minimização:

$$\min_{F_j} J_j \tag{3.75}$$

sujeito às restrições (3.62) que devem ser satisfeitas para todos  $C$ ,  $V_j$  (3.63). Conseqüentemente, usando (3.72), sem perda de generalidade tem-se:

$$\min \mathbf{1}_N^T [\Gamma_x \beta + p \Gamma_h \zeta + q \Gamma_u \rho] \tag{3.76}$$

sujeito às seguintes restrições, que devem ser satisfeitas para todos  $C$ ,  $V_j$

(3.63):

$$\begin{aligned} -\Gamma_x\beta &\leq [A(C) + B(C)F_j]X_j + B(C)V_j \leq \Gamma_x\beta \\ -\Gamma_h\zeta &\leq [A(C) + B(C)F_j - I_N]X_j + B(C)V_j \leq \Gamma_h\zeta \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} |A(C) + B(C)F_j|\beta &\leq \lambda\beta \\ -\rho &\leq F_jX_j \leq \rho \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$0 \leq \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \quad ; \quad \Gamma_x \geq 0$$

Baseado no Lema 3.3, as restrições (3.77) podem ser substituídas por:

$$\begin{aligned} |B(C)|\eta - \Gamma_x\beta &\leq [A(C) + B(C)F_j]X_j \leq \Gamma_x\beta - |B(C)|\eta \\ |B(C)|\eta - \Gamma_h\zeta &\leq [A(C) + B(C)F_j - I_N]X_j \leq \Gamma_h\zeta - |B(C)|\eta \end{aligned} \quad (3.79)$$

que devem ser satisfeitas para todos  $C$  (3.63).

Substituindo (3.6)-(3.9) em (3.76), (3.78), (3.79), devido à estrutura diagonal da matriz  $B(C)$  [6] e  $0 < C^L \leq C \leq C^U < 1$ , após algumas manipulações algébricas, pode ser verificado que MP (3.76), (3.78), (3.79) pode ser decomposto nos seguintes  $N$  MPs independentes, de ordem reduzida, cujas restrições devem ser satisfeitas para todos  $C$  (3.63):

MP 1

$$\begin{aligned}
& \min \beta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1} \\
& |f_{1,1} - c_1| \beta_1 \leq (1 - c_1) \lambda \beta_1 \\
& \eta_1 - (1 - c_1) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1) x_1 \leq (1 - c_1) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1 \\
& \eta_1 - (1 - c_1) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1 \\
& -\rho_1 \gamma_{u1} \leq f_{1,1} x_1 \leq \rho_1 \gamma_{u1} \\
& \gamma_{x1} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1
\end{aligned} \tag{3.80}$$

MP  $k$  ;  $k = 2 : N$ 

$$\begin{aligned}
& \min \beta_k \gamma_{xk} + p \zeta_k \gamma_{hk} + q \rho_k \gamma_{uk} \\
& |f_{k,k} - c_k| \beta_k + |f_{k,k-1} + 1| \beta_{k-1} \leq (1 - c_k) \lambda \beta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k) \beta_k \gamma_{xk} \leq (f_{k,k} - c_k) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k) \beta_k \gamma_{xk} - \eta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k) \zeta_k \gamma_{hk} \leq (f_{k,k} - 1) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
& -\rho_k \gamma_{uk} \leq f_{k,k} x_k + f_{k,k-1} x_{k-1} \leq \rho_k \gamma_{uk} \\
& \gamma_{xk} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Os conjuntos de restrições (3.80), (3.81) são afins em  $c_k$ . Conseqüentemente eles são factíveis para todos  $c_k$  satisfazendo(3.63) se e somente se eles são simul-

taneamente factíveis para  $c_k = c_k^U$  e  $c_k = c_k^L$ , o que conclui a prova.  $\square$

Dos MPs (3.73), (3.74), pode ser verificado que, no ponto de ótimo, as seguintes condições devem ser válidas:

$$0 \leq f_{k,k} \leq 1 \quad ; \quad k = 1 : N \quad (3.82)$$

$$-1 \leq f_{k,k-1} \leq 0 \quad ; \quad k = 2 : N \quad (3.83)$$

Considere também a seguinte mudança de variáveis, usual em programação linear [19]:

$$\begin{aligned} f_{k,k} - c_k^U &= y_k^{U+} - y_k^{U-} \\ |f_{k,k} - c_k^U| &\leq y_k^{U+} + y_k^{U-} \\ f_{k,k} - c_k^L &= y_k^{L+} - y_k^{L-} \\ |f_{k,k} - c_k^L| &\leq y_k^{L+} + y_k^{L-} \\ y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Usando (3.82)-(3.84), os MPs (3.73), (3.74) são facilmente transformáveis nos seguintes problemas equivalentes de programação linear:

PL 1

$$\begin{aligned}
& \min \beta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1} \\
& f_{1,1} - y_1^{U+} + y_1^{U-} = c_1^U \\
& f_{1,1} - y_1^{L+} + y_1^{L-} = c_1^L \\
& (y_1^{U+} + y_1^{U-}) \beta_1 \leq (1 - c_1^U) \lambda \beta_1 \\
& (y_1^{L+} + y_1^{L-}) \beta_1 \leq (1 - c_1^L) \lambda \beta_1 \\
& \eta_1 - (1 - c_1^U) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1^U) x_1 \leq (1 - c_1^U) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1 \\
& \eta_1 - (1 - c_1^L) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1^L) x_1 \leq (1 - c_1^L) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1 \\
& \eta_1 - (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1 \\
& \eta_1 - (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1 \\
& -\rho_1 \gamma_{u1} \leq f_{1,1} x_1 \leq \rho_1 \gamma_{u1} \\
& \gamma_{x1} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 \quad ; \quad y_1^{L+}, y_1^{L-}, y_1^{U+}, y_1^{U-} \geq 0
\end{aligned}$$

PL  $k$  ;  $k = 2 : N$ 

$$\begin{aligned}
& \min \beta_k \gamma_{xk} + p \zeta_k \gamma_{hk} + q \rho_k \gamma_{uk} \\
& f_{k,k} - y_k^{U+} + y_k^{U-} = c_k^U \\
& f_{k,k} - y_k^{L+} + y_k^{L-} = c_k^L \\
& (y_k^{U+} + y_k^{U-}) \beta_k + (f_{k,k-1} + 1) \beta_{k-1} \leq (1 - c_k^U) \lambda \beta_k \\
& (y_k^{L+} + y_k^{L-}) \beta_k + (f_{k,k-1} + 1) \beta_{k-1} \leq (1 - c_k^L) \lambda \beta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^U) \beta_k \gamma_{xk} \leq (y_k^{U+} - y_k^{U-}) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^U) \beta_k - \eta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^L) \beta_k \gamma_{xk} \leq (y_k^{L+} - y_k^{L-}) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^L) \beta_k - \eta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} \leq (y_k^{U+} - y_k^{U-} - 1 + c_k^U) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
& \eta_k - (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} \leq (y_k^{L+} - y_k^{L-} - 1 + c_k^L) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
& -\rho_k \gamma_{uk} \leq f_{k,k} x_k + f_{k,k-1} x_{k-1} \leq \rho_k \gamma_{uk} \\
& \gamma_{xk} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \quad ; \quad y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} \geq 0
\end{aligned}$$

Pode ser verificado em (3.73), (3.74) que a matriz  $F_j \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  solução de ROMC, com exceção possivelmente de  $f_{k,k}$ ,  $k = 1 : N$ ,  $f_{k,k-1}$ ,  $k = 2 : N$ , tem todos seus outros componentes nulos, apresentando portanto a mesma estrutura bi-diagonal da matriz  $A(C)$  (3.6). De (3.2)-(3.3), (3.58), (3.74), pode ser verificado que o controle aplicado ao trem  $j$  na plataforma  $k$  é dado por:

$$u_k^j = f_{k+1,k} x_k^j + f_{k+1,k+1} x_{k+1}^{j-1}$$

Quando o controle  $u_k^j$  é aplicado,  $x_k^j$  é conhecido,  $x_{k+1}^{j-1}$  é também conhecido ou pode ser facilmente previsto. Fazendo  $x_{k+1} = x_{k+1}^{j-1}$ ,  $x_k = x_k^j$ ,  $f_{k+1,k}$  e  $f_{k+1,k+1}$  podem ser calculados resolvendo o problema de programação linear correspondente a MP  $k + 1$  (3.74).

ROMC pode, portanto, ser implementado em tempo real como um sistema de controle descentralizado por plataforma da linha: cada vez que um trem chegar a uma plataforma, uma vez medidos ou estimados o atraso do trem na plataforma e o do trem precedente na plataforma seguinte na linha, a ação de controle é calculada, resolvendo o pequeno problema de programação linear associado à plataforma em questão.

Pela facilidade de cálculo e estrutura de controle local, as leis de controle fornecidas pelas formulações RVM, RRR e ROMC são aplicáveis sem dificuldade às linhas de metrô atuais.

# Capítulo 4

## Exemplos Numéricos e Simulações

Neste Capítulo serão apresentados exemplos numéricos que ilustram o desempenho dos resultados apresentados no Capítulo anterior.

Podemos destacar duas políticas de controle para operação de um sistema metropolitano: uma privilegia a economia operacional (econômica) e a outra privilegia o desempenho do sistema em detrimento do custo operacional (alto desempenho). A estratégia utilizada depende da política da companhia em relação aos passageiros, o horário de operação (horário de pico de demanda ou não) e a necessidade de conexão com outro sistema de transporte que torna importante o cumprimento

dos horários. Os exemplos apresentados neste Capítulo levam em consideração essas duas políticas.

## 4.1 Dados Utilizados

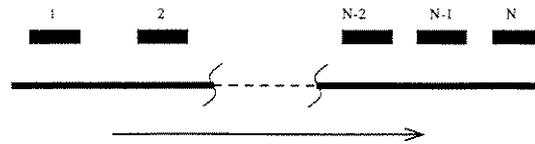


Figura 4.1: Linha de metrô aberta com  $N$  plataformas

Considere uma linha metroviária com  $N = 10$  plataformas figura 4.1 e vetor de parâmetros incertos  $C$  delimitados por:

$$C^U = \begin{bmatrix} .200 & .210 & .250 & .200 & .120 & .150 & .250 & .170 & .180 & .125 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$C^L = \begin{bmatrix} .180 & .189 & .225 & .180 & .108 & .135 & .225 & .153 & .162 & .112 \end{bmatrix}$$

Considere também que os vetores de perturbações  $V_j$ , controle  $U_j$  e intervalo

entre trens  $(X_{j+1} - X_j)$  são delimitados respectivamente por:

$$\eta = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} 62 & 62 & 62 & 62 & 62 & 62 & 62 & 62 & 62 & 62 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar o desempenho em malha fechada obtido com os diferentes tipos de regulação , serão apresentados um conjunto de 100 (cem) resultados de simulações dos intervalos  $(x_k^j - x_k^{j-1})$ , controles  $u_k^j$  e atrasos  $x_k^j$  de um trem  $j$  ao longo das plataformas da linha, a partir da condição inicial

$$X_0 = \begin{bmatrix} 31 & -31 & 0 & -31 & 31 & 0 & 0 & 30 & -30 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Nessas simulações é considerado que os componentes dos parametros  $C$  e perturbações externas  $V$  são variáveis aleatórias, uniformemente distribuídas dentro dos poliedros delimitados respectivamente por (4.1) e (4.2).

## 4.2 Regulação por Variância Mínima (RVM)

A formulação RVM não considera as perturbações externas e as limitações sobre as variáveis de estado e controle. O critério de desempenho adotado é:

$$J_v = X_{j+1}^T X_j + p(X_{j+1} - X_j)^T (X_{j+1} - X_j) + qU_j^T U_j \quad (4.4)$$

e é assumido que o vetor  $C$  é perfeitamente conhecido, dado por:

$$C = (C^U + C^L)/2$$

### 4.2.1 Política de regulação de alto desempenho

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (4.4):

$$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{25}$$

Para o controle  $U_j = FX_j$ , a matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.5874 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9874 & 0.5922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9885 & 0.6117 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9871 & 0.5874 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.9845 & 0.5484 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9855 & 0.5630 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9885 & 0.6117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9861 & 0.5727 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9864 & 0.5776 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9847 & 0.5508 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

É importante notar que a matriz  $F$  tem uma estrutura bi-diagonal, permitindo que o controle seja implementado de forma descentralizado nas estações da linha.

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 4.2. Podemos verificar que o controle na primeira plataforma tem valor  $u_1 \cong -50$ , que está bem fora do intervalo admissível de controle  $[-20, 20]$ . Os valores do intervalo entre trens satisfazem às restrições estabelecidas. Esses resultados são coerentes com a política de alto desempenho adotada que privilegia o desempenho em detrimento do custo de controle.

Dado que o controle a ser aplicado não pode ultrapassar seus limites, na figura 4.3 são apresentados os resultados de simulação obtidos considerando o controle saturado dentro do intervalo admissível  $[-20, 20]$ .

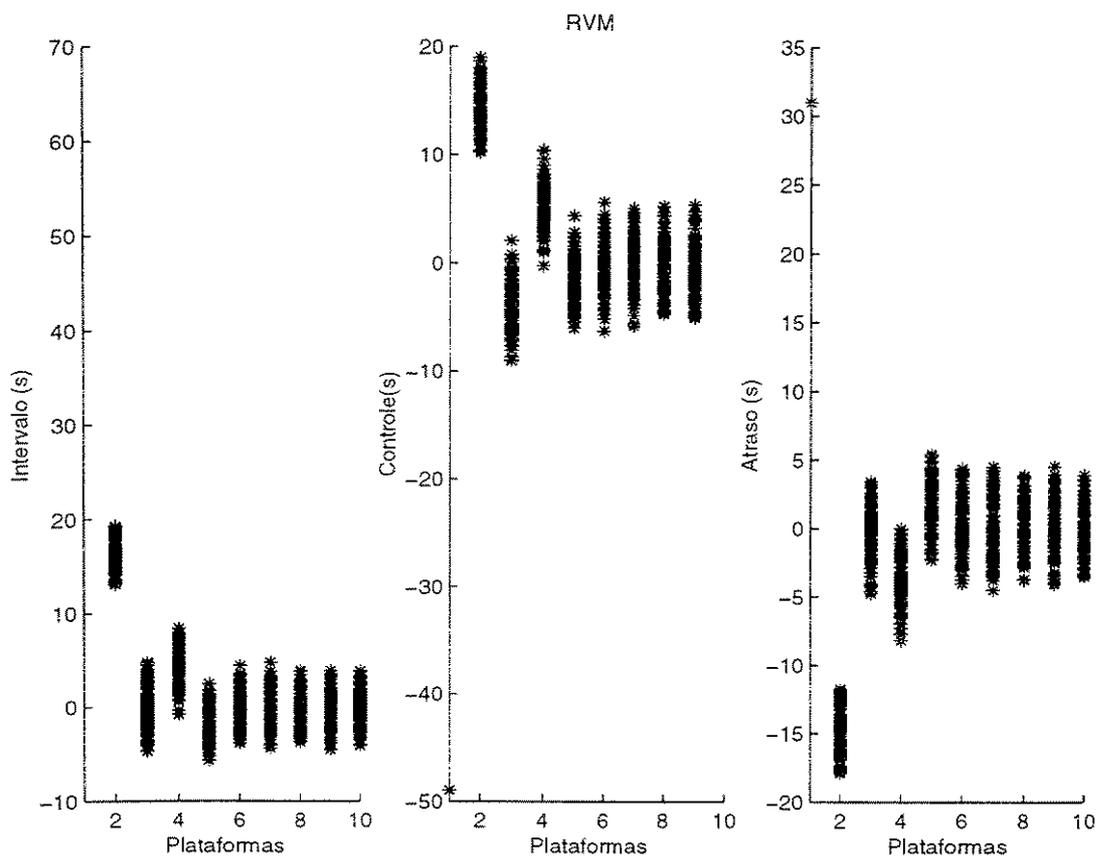


Figura 4.2: RVM de alto desempenho ( $p = 1$  ;  $q = \frac{1}{25}$ )

Podemos ver que a saturação do controle é aceita sem prejudicar o desempenho do sistema controlado ou sua estabilidade, sendo este um resultado importante a favor da utilização desta abordagem de controle.

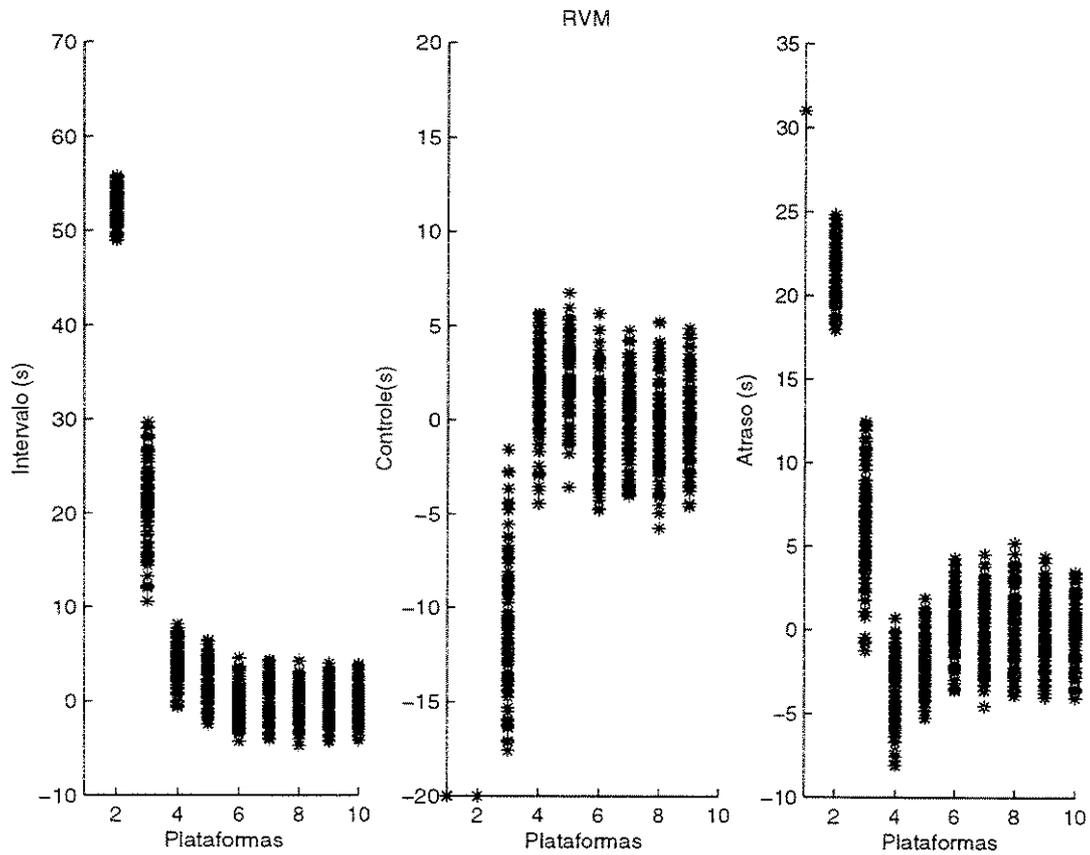


Figura 4.3: RVM de alto desempenho com saturação de controle ( $p = 1$ ;  $q = \frac{1}{25}$ )

### 4.2.2 Política de regulação econômica

Para uma política econômica foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (4.4):

$$p = 1 \quad ; \quad q = 25$$

A matriz de controle por realimentação de estado obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.0647 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1110 & 0.0666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1210 & 0.0749 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1087 & 0.0647 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0925 & 0.0515 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0981 & 0.0561 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1210 & 0.0749 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1022 & 0.0593 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1043 & 0.0611 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0934 & 0.0522 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 4.4. Podemos notar que o controle está dentro de seus limites mas, nos gráficos referentes ao intervalo entre trens e atraso, pode ser verificado que o sistema controlado é instável, com os valores do atraso e intervalo aumentando progressivamente ao longo da seqüência de plataformas.

Este resultado é bem previsível, dado o caráter econômico da regulação e a não consideração, na formulação do problema, das incertezas do modelo e da condição de estabilidade do sistema controlado. Uma forma de contornar o problema de estabilidade é tentar uma ponderação do critério de desempenho que favoreça um pouco mais o controle. Considerando  $p = 1$  e  $q = 5$ , a matriz de controle obtida foi:

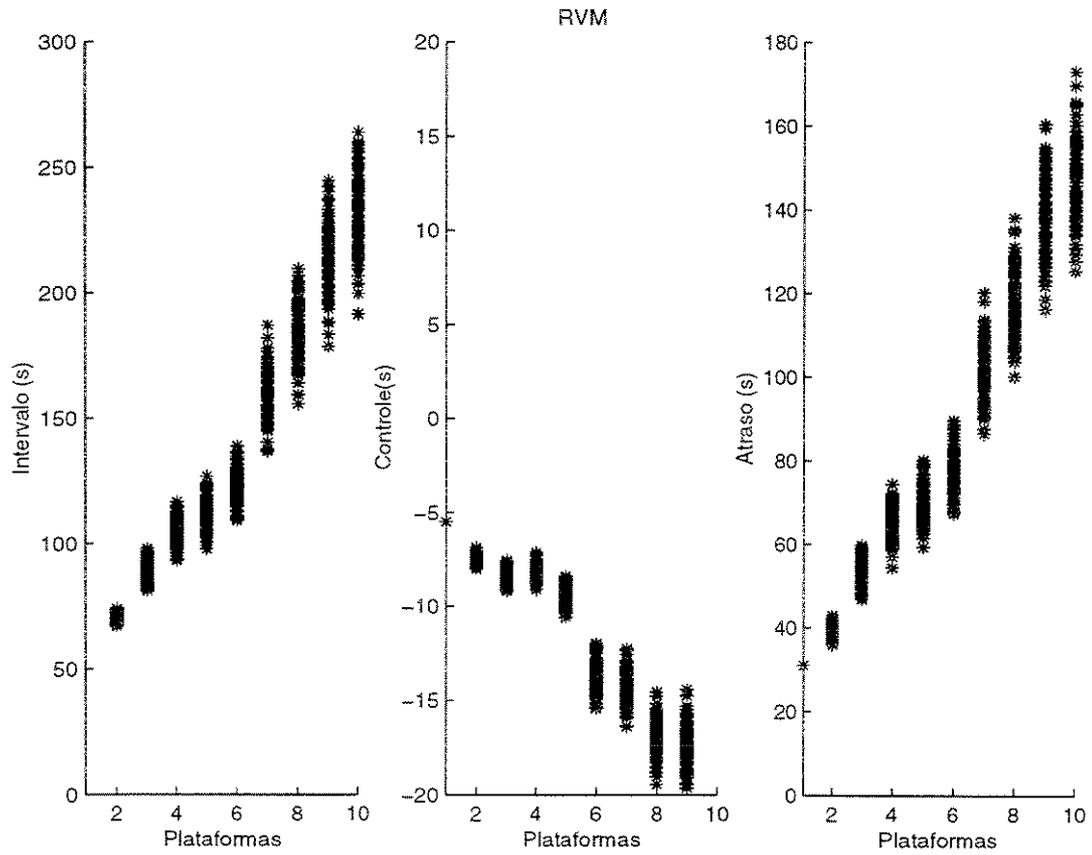


Figura 4.4: RVM econômica ( $p = 1$  ;  $q = 25$ )

$$F = \begin{bmatrix} 0.2254 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3844 & 0.2306 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4077 & 0.2523 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3788 & 0.2254 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3376 & 0.1880 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3524 & 0.2013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4077 & 0.2523 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3627 & 0.2106 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3680 & 0.2155 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.3400 & 0.1902 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A figura 4.5 apresenta os resultados de simulação onde pode ser visto que o sistema é estável, próximo de seu limite de estabilidade. Pode ser notado que a qualidade da regulação é precária, sendo o sistema muito sensível às incertezas e perturbações do modelo.

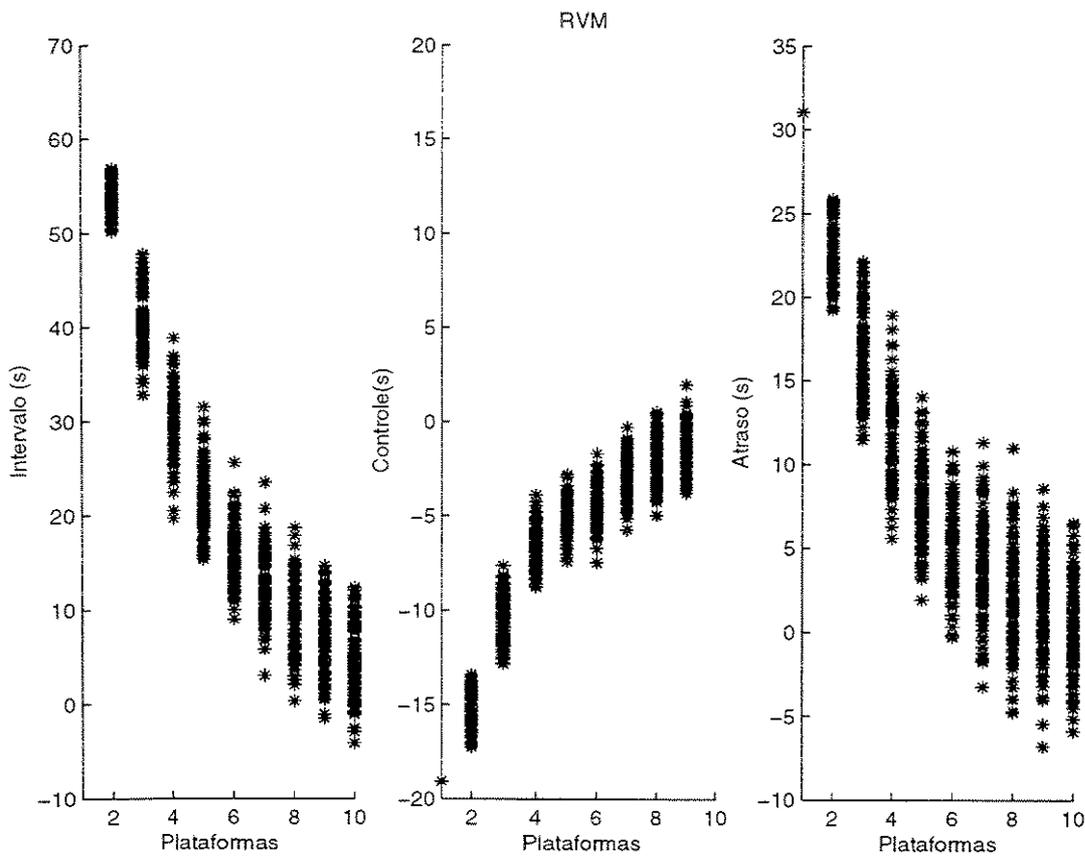


Figura 4.5: RVM econômica ( $p = 1$  ;  $q = 5$ )

### 4.3 Regulação Robusta com Restrições (RRR)

Nesta abordagem, conforme descrita no Capítulo 3, a sua formulação leva em consideração, de forma explícita, as incertezas nos parâmetros, restrições de controle e perturbações externas seguintes:

$$-\zeta \leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta$$

$$-\rho \leq U_j \leq \rho$$

$$-\eta \leq V_j \leq \eta$$

com  $\zeta$ ,  $\rho$  e  $\eta$  dados em (4.3),(4.2).

O critério de desempenho da regulação (3.49) é dado pela soma ponderada de normas  $L_1$ .

$$J_j = \mathbf{1}_N^T [ |X_{j+1}| + p|X_{j+1} - X_j| + q|U_j| ] \quad (4.8)$$

Adicionalmente, para garantir a estabilidade no sentido de Lyapunov, ao longo

da trajetória do sistema, o vetor de estado é considerado restrito ao poliedro

$$-\delta \leq X_j \leq \delta \quad (4.9)$$

definido por

$$\delta = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (4.8):

$$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{5}$$

Note que as ponderações acima, para o critério de desempenho linear da RRR, são equivalentes às ponderações  $(1 \text{ e } \frac{1}{25})$  utilizadas para o critério de desempenho quadrático da RVM.

Utilizando um vetor de estados inicial

$$X_0 = [ 30 \quad -30 \quad 0 \quad -30 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 30 \quad -30 \quad 0 ]^T$$

compatível com as restrições sobre o estado  $X$  (4.9), (4.10), a matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0.1922 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6666 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6667 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6666 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6666 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6666 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6667 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6666 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6666 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6666 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 4.6. Conforme esperado, podemos notar que o controle, o intervalo entre trens e o atraso satisfazem as restrições do problema. Comparando os gráficos nas figuras 4.3 e 4.6, podemos verificar que RRR apresenta desempenho de regulação do intervalo entre trens e atraso equivalente à RVM mas com um esforço de controle bem inferior. Estes resultados mostram a maior eficácia de RRR na utilização dos recursos de controle disponíveis.

Comparando os gráficos nas figuras 4.6 e 4.3, podemos verificar que RRR, com esforço de controle significativamente menor, apresenta desempenho de regulação

de intervalo entre trens e atraso equivalente ao da RVM. Isto mostra que RRR usa melhor que RVM o espaço de controle disponível.

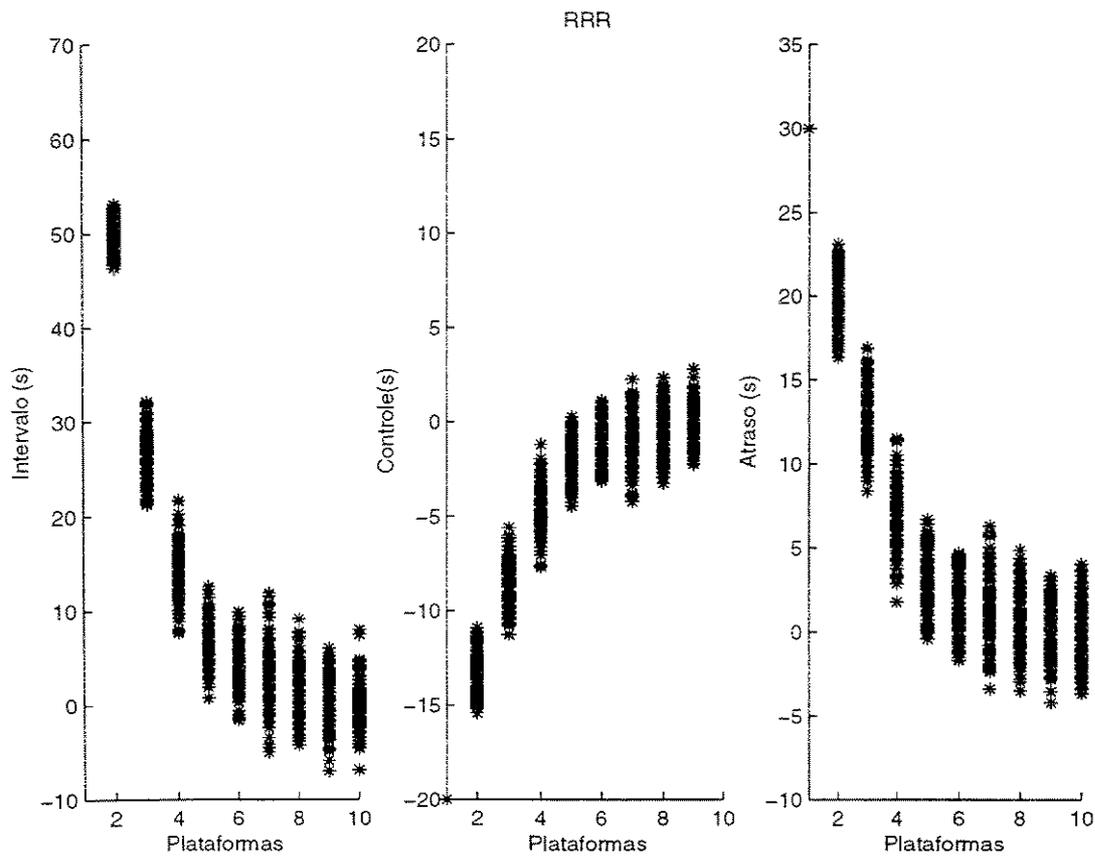


Figura 4.6: RRR de alto desempenho ( $p = 1$  ;  $q = \frac{1}{5}$ )

Para uma política de regulação econômica foi adotada a seguinte ponderação

do critério de desempenho (4.8):

$$p = 1 \quad ; \quad q = 5$$

A matriz de controle por realimentação de estado obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5867 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6667 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5667 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4067 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4667 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6667 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5067 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5267 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4167 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 4.7. Podemos observar que o controle é menor que o aplicado na política de regulação de alto desempenho, com uma conseqüente diminuição do desempenho de regulação e dispersão maior do intervalo entre trens e atraso.

Um inconveniente da abordagem RRR é a necessidade de especificar um poliedro de restrições (4.9),(4.10) sobre o estado do sistema, que é uma restrição artificial, não existente na formulação original do problema de regulação. Por

exemplo, com os dados utilizados nesta seção, para um poliedro de estados (4.9), delimitado por:

$$\delta = \begin{bmatrix} 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 & 31 \end{bmatrix}$$

levemente superior ao (4.10), o problema RRR não admite solução factível. Ou seja, a escolha dos limites (4.10) afeta a solução do problema e o desempenho de regulação obtido.

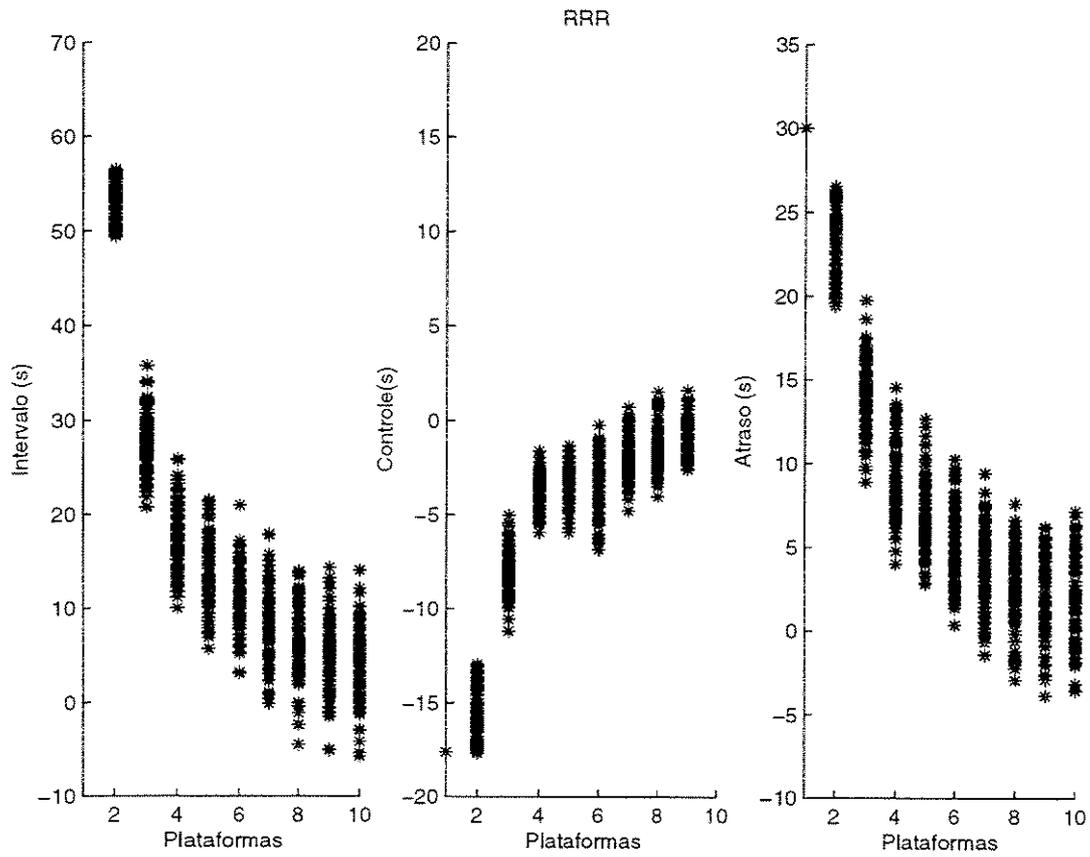


Figura 4.7: RRR econômica ( $p = 1$  ;  $q = 5$ )

## 4.4 Regulação Ótima Minimax com Restrições

### ROMC

Nesta abordagem, conforme descrito no Capítulo 3, para evitar o conservadorismo da política RRR e utilizar da melhor maneira os recursos disponíveis de controle, o cálculo do controle aplicado ao trem em cada plataforma é feito em tempo real utilizando as informações de estado vigentes no momento. Com isso, não existe uma matriz de realimentação de estado invariante no tempo calculada a priori, como nas outras regulações. A formulação deste problema leva em consideração, de forma explícita, as incertezas nos parâmetros, restrições no controle e perturbações externas iguais às RRR.

Para a função de Lyapunov que garanta a estabilidade do sistema serão assumidos os seguintes parâmetros

$$\beta = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

e índice de convergência

$$\lambda = 0.80$$

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (4.8):

$$p = 1 \ ; \ q = \frac{1}{5}$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 4.8. Comparando os gráficos nas figuras 4.3, 4.6 e 4.8, podemos verificar que ROMC apresenta desempenho de regulação do intervalo entre trens e atraso superior à RVM e RRR.

Para uma política econômica, foi adotada a ponderação de critério de desempenho (4.8):

$$p = 1 \ ; \ q = 5$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 4.9. Podemos ver, comparando os gráficos de atraso e intervalo entre trens nas figuras 4.8, 4.9 que, conforme previsto, o desempenho de regulação da política econômica é inferior ao da política de alto desempenho.

Analisando os gráficos do esforço de controle, notamos um detalhe interessante: a política econômica começa gastando menos controle para eliminar os

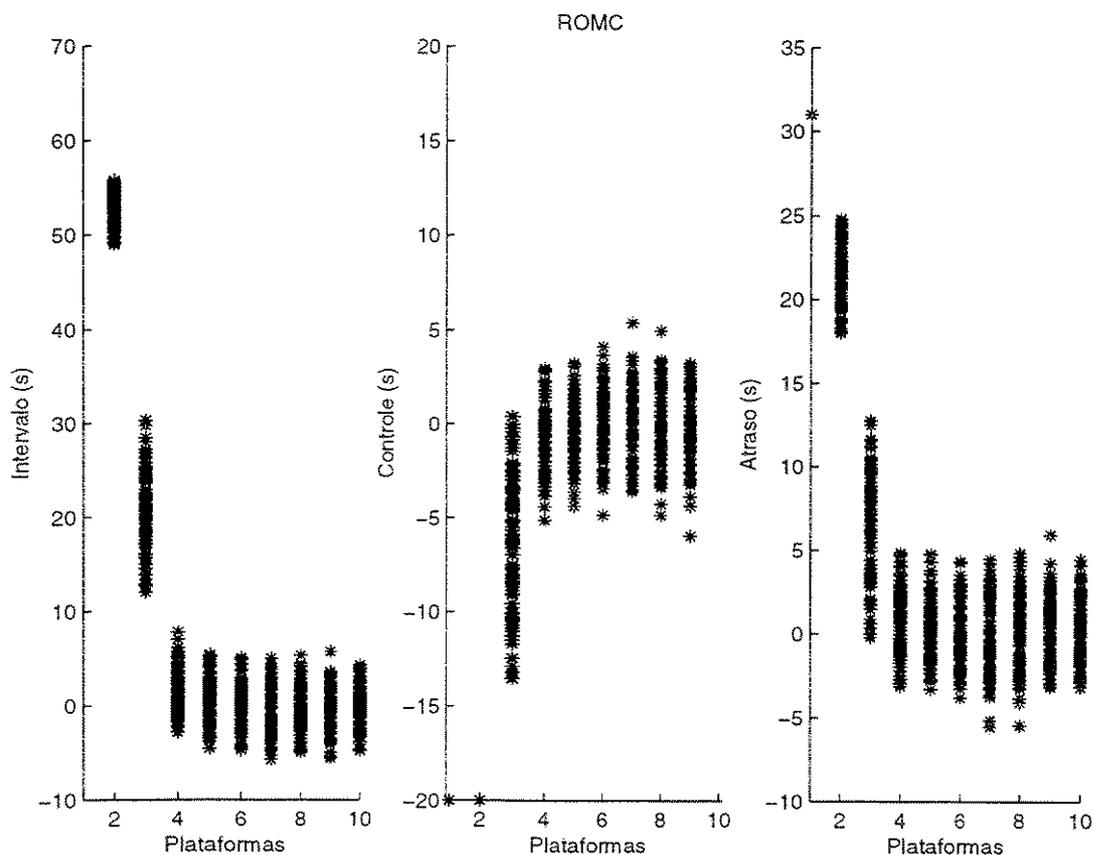


Figura 4.8: ROMC de alto desempenho ( $p = 1$  ;  $q = \frac{1}{5}$ )

desvios no atraso e intervalo entre trens (ver plataformas 1 e 2). No entanto, esta economia inicial prejudica o desempenho de regulação do sistema, fazendo que nas plataformas seguintes (3 a 9) seja consumido um esforço de controle maior para a obtenção de um desempenho de regulação claramente inferior. Ou seja, a política econômica tem um gasto global de controle superior ao da política de alto desempenho, ao mesmo tempo que apresenta desempenho de regulação, em

todos os aspectos, inferior ao da política de alto desempenho. Este paradoxo se deve ao fato do índice de desempenho adotado ser de um passo, não considerando portanto todo o horizonte de operação.

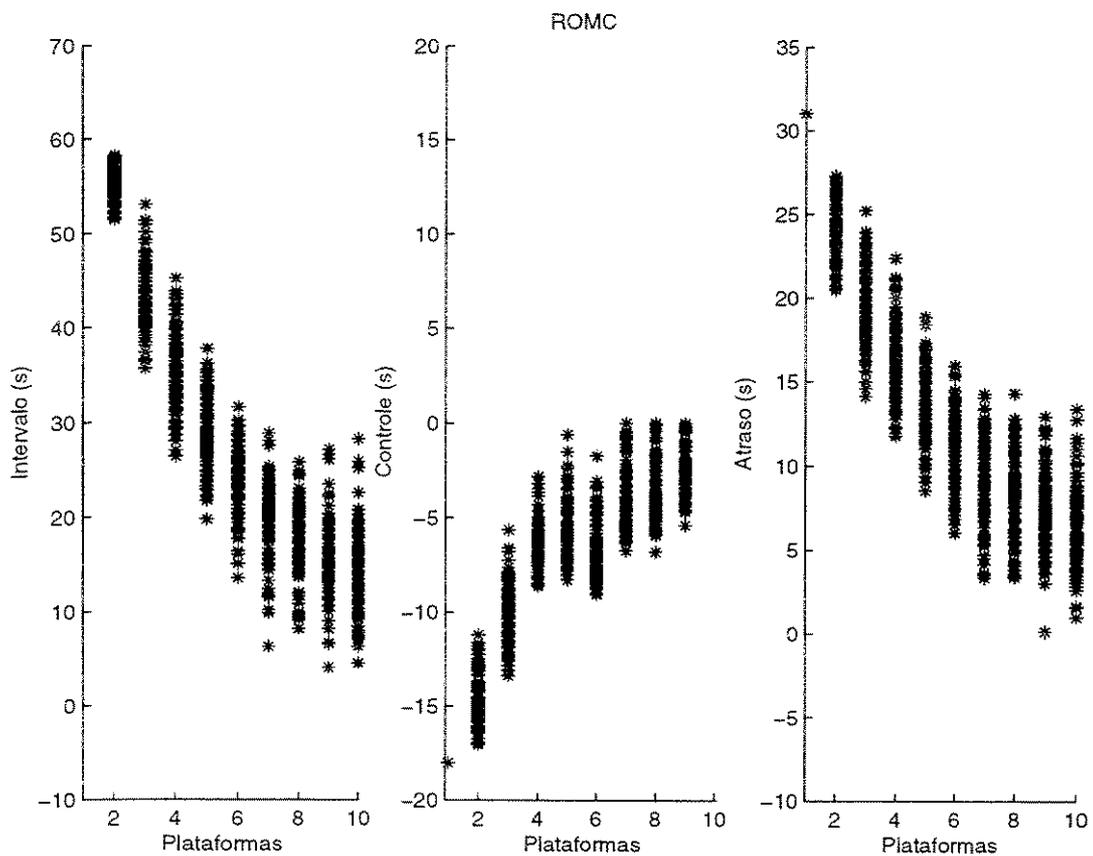


Figura 4.9: ROMC econômica ( $p = 1$  ;  $q = 5$ )

# Capítulo 5

## Conclusão

Esta dissertação tratou do problema de regulação do tráfego de trens em linhas de metrô operando em regime aberto, utilizando o modelo de tráfego de tempo real desenvolvido por Van Breusegem e outros. Foram consideradas, de formas explícitas, as incertezas do modelo de tráfego e as limitações sobre suas variáveis de estado e controle. Os limites sobre as variáveis de estado, controle e perturbações externas foram caracterizados por poliedros simétricos, convexos, fechados e limitados. O domínio dos parâmetros incertos foi caracterizado por um poliedro convexo, fechado e limitado, definido por seus pontos extremos.

Foram propostas duas formulações alternativas para o problema de regulação de tráfego:

- RRR: problema de regulação robusta de sistema linear incerto com restrições. Como critério de desempenho foi utilizada uma soma ponderada de normas  $L_1$  dos desvios dos instantes de saída das plataformas, dos intervalos entre sucessivos trens e esforços de controle correspondentes. Para solução do problema, foi proposto um método computacional eficaz, utilizando programação linear e resultados sobre admissibilidade robusta envolvendo poliedros convexos fechados e transformações lineares com parâmetros incertos. Explorando características estruturais do modelo de tráfego, o método fornece uma matriz de realimentação de estados com estrutura bi-diagonal, invariante no tempo, obtida da solução de pequenos problemas de programação linear, independentes entre si, relacionados um para um com as plataformas de passageiros da linha de metrô.
- ROMC: regulação ótima minimax de sistema linear incerto com restrições. O critério de desempenho a ser minimizado é o pior caso, considerando todas as incertezas, de uma soma ponderada de normas  $L_1$  das previsões, um passo a frente, dos desvios dos instantes de saída das plataformas, dos intervalos entre sucessivos trens e esforços de controle correspondentes. Para solução do problema, foi proposto um método computacional eficaz uti-

lizando programação linear, baseado em resultados sobre admissibilidade robusta de poliedros convexos fechados e funções de Lyapunov lineares por partes. Explorando características estruturais do modelo de tráfego, é mostrado que a solução do problema minimax é uma matriz de realimentação de estados bi-diagonal, função do estado atual do sistema, que pode ser eficientemente calculada em tempo real, resolvendo um pequeno problema de programação linear, sempre que um trem chegar em uma plataforma da linha.

Estudos de simulação mostraram que as formulações RRR e ROMC podem oferecer resultados com desempenho geral nitidamente superiores à formulação de variância mínima, RVM, proposta anteriormente por Van Breusegem e outros, que não considera de forma explícita as incertezas do modelo de tráfego e as restrições sobre suas variáveis. Para políticas operacionais de alto desempenho, devido à variação de sua lei de controle, em função do estado atual do sistema, a formulação ROMC apresentou desempenho geral superior ao da formulação RRR, cuja lei de controle é invariante, devendo portanto satisfazer a todos os estados dentro da região admissível do problema de regulação. No entanto, para políticas operacionais econômicas, o desempenho geral de RRR foi superior ao de ROMC. Este aparente paradoxo é devido ao critério de desempenho formado por previsões

de apenas um passo à frente, conferindo à lei de controle de ROMC um caráter imediatista, economizando controle no presente, sem levar em consideração o futuro. Finalmente, em condições equivalentes de requisitos de desempenho, por sua lei de controle pertencer a uma classe mais geral, a região admissível de ROMC contém a região de RRR. Em outros termos, ROMC pode fornecer solução em situações que RRR é ineficaz.

Pela facilidade de cálculo e estrutura de controle local, as leis de controle fornecidas pela formulações RVM, RRR e ROMC, são igualmente aplicáveis às linhas de metrô da atualidade. Os resultados aqui apresentados podem ser estendidos em muitos aspectos, dentre os quais destacamos:

- RRR e ROMC podem ser facilmente modificadas para considerar os limites sobre as variáveis do modelo de tráfego caracterizados por poliedros assimétricos;
- Extensão de RRR e ROMC para linhas de metrô operando em regime fechado;
- Aperfeiçoamento do modelo de tráfego de trens para considerar, além do evento de saída dos trens das plataformas da linha, também o evento da chegada dos trens. O tratamento deste evento adicional permite estimação

parcial das perturbações aditivas, reduzindo seu efeito negativo sobre o desempenho de regulação de formulações como RRR e ROMC;

- Estudo de estratégias de controle preditivo de múltiplos passos à frente;
- Desenvolvimento de uma formulação de regulação de tempo real adaptativa;
- Estudo do problema integrado de programação e regulação do tráfego de trens.

# Bibliografia

- [1] Araya, S.; Sone, S., “Traffic dynamics of automated transit systems with pre-established schedules”, *IEEE Trans. Syst., Man Cybern.*, vol. 14, pp. 677-687, julho 1984.
  
- [2] Barmish, B.R. - *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Co., 1994, USA.
  
- [3] Bazaraa, M.S.; Shetty C.M.; *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, New York. 1979.
  
- [4] Bergamaschi, F.A.; Milani, B.E.A.; Hsin, T.C. - “Geração de Horários de Despacho de Trens em Linhas de Transporte Metroferroviário”, *Anais do IV Congresso Brasileiro de Automática*, Campinas S.P., 1982.

- [5] Bitsoris, G. - "Positively Invariant Polyhedral Sets of Discrete-Time Linear Systems" - *Int. J. Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1713-1726, June 1988.
- [6] Bitsoris, G. - "On the Linear Decentralized Constrained Regulation Problem of Discrete-Time Dynamical Systems", *Information and Decision Technologies*, Vol. 14, pp. 299-239, 1988.
- [7] Blanchini, F.; Feedback Control for Linear Time-Invariant Systems with State and Control Bounds in the Presence of Disturbances. *IEEE Trans. on Auto. Cont.*, Vol.35, No.11, pp.1231-1234, 1990.
- [8] Blanchini, F.; Constrained Control for Uncertain Linear Systems. *J. of Optim. Theory and Applic.*, Vol.71, No.3, pp. 465-484, 1991.
- [9] Campion, G.; Van Breusegem, V.; Pinson, P.; Bastin, G., "Traffic Regulation of an Underground Railway Transportation System By State Feedback", *Optimal Control Application & Methods*, vol. 6, pp. 385-402, 1985.
- [10] Carvalho, A.N.; Milani, B.E.A.; "Regulação Ótima de Tráfego em Linhas de Metrô com Restrições no Estado e Controle." Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SOBRAPO, Campinas SP, 1993.

- [11] Carvalho, A.N.; Milani, B.E.A.; “Regulação Robusta de Linhas Metroviárias Sujeitas a Restrições no Estado e Controle.” Anais do 6<sup>o</sup> Congresso Latino Americano de Controle Automático ( e 10<sup>o</sup> CBA ), SBA, Rio de Janeiro RJ, 1994.
- [12] Chen, C.T. - Linear System Theory and Design, Saunders HBJ, 1984, USA.
- [13] Chu, K.C., “Optimal decentralized regulation of a string of coupled systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-19, pp. 243-246, junho 1974.
- [14] Confederação Nacional da Indústria; *O transporte nas megacidades brasileiras*, Conselho para Assuntos de Energia, Rio de Janeiro, 1994.
- [15] Corrêa, S.S.; Milani, B.E.A., “Regulação Robusta Descentralizada de Linhas Metroviárias”. *XI Congresso Brasileiro de Automática*, vol. 3, pp. 1643-1648, Setembro 1996.
- [16] Cury, J. E.; Gomide, F. A.; Mendes, M. J., “A methodology for generation of optimal schedules for an underground railway system”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-25, no. 2, pp. 217-222, Abril 1980.
- [17] Dowell, Fernando Mac; “Revolta dos Transportes”, *Veja*, Edição 1468, pp. 30, 30 de outubro de 1996.

- [18] Garcia, C.E; Morari, M.; "Model Predictive Control: Theory and Practice - a Survey", *Automatica*, vol. 25, no. 3, 1989.
- [19] Gill, P.E.; Murray, W.; Wright, M.W.- *Practical Optimization*, Academic Press, GB, 1981.
- [20] Hennet, J.C. - "Une Extension du Lemme de Farkas et son Application au Problème de Regulation Linéaire sous Contraintes", *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.308, Série I, pp. 415-419, 1989.
- [21] Hennet, J.C.; Castelan, E.B.; Robust Invariant Controllers for Constrained Linear Systems. Proc. 1992 ACC, Chicago IL, USA, Vol.2, pp. 993-997, 1992.
- [22] Levine, W. S.; Athans, M., "On the optimal error regulation of a string of moving vehicles", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-11, pp. 355-361, 1966.
- [23] Melzer, S.; Kuo, B. C., "A closed form solution for the optimal error regulation of a string of moving vehicles", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-16, pp. 50-52, Fev. 1971.

- [24] Milani, B.E.A.; Carvalho A.N.; Robust Optimal Linear Regulator Design for Discrete-Time Systems Under State and Control Constraints. Proc. IFAC Symposium on Robust Control, Rio de Janeiro RJ, Brazil, pp.273-278, 1994.
- [25] Milani, B.E.A.; Castelan, E.B.; Tarbouriech, S.; "Linear Regulator Design for Bounded Uncertain Discrete-Time Systems with Additive Disturbances." Proceedings of the 1996 IFAC World Congress, San Francisco CA, USA, 1996.
- [26] Milani B.E.A.; Corrêa, S.S.; "On-Line Minimax Optimal Regulation of Metro Lines." IASTED International Conference CONTROL 97, Cancun, México, 1997.
- [27] Milani, B. E. A.; Corrêa, S. S., "Decentralized Robust Regulation of Metro Lines", *Proc. American Control Conference*, pp. 218,219, June 1997.
- [28] Milani, B.E.A.; Corrêa S.S.; "Regulação em Tempo Real de Linhas Metroviárias." Anais do 12<sup>o</sup> Congresso Brasileiro de Automática, SBA, Uberlândia MG, 1998.
- [29] Peppard, L. E.; Gourishankar, V., "Optimal control of a string of moving vehicles", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-15, pp. 386-387, junho

1970.

- [30] Sasama, H.; Ohkawa, Y., "Floating traffic control for public transportation systems", *Proc. 4th IFAC Conf. on Contr. and Transport. Syst.*, Baden-Baden, April 1983.
- [31] Sznaier, M.; A Set Induced Norm Approach to the Robust Control of Constrained Systems. *SIAM J. on Control and Optimization*, Vol.31, No.3, pp.733-746, 1993.
- [32] Tarbouriech, S.; Burgat, C.; Note on Stability Properties of Some Linear Discrete-Time Systems. *J. Math. Anal. and Applic.*, Vol.187, No.2, pp.700-704, 1994.
- [33] Van Breusegem, V.; Campion, G.; Bastin, G. - "Traffic Modeling and State Feedback Control for Metro Lines", *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 36, no. 7, July 1991.
- [34] Varella, Flávia; Toledo, Roberto Pompeu de; "Transporte: No Contrafluxo", *Veja*, 02 de outubro de 1996.

- [35] Vassilaki, M.; Hennet, J.C.; Bitsoris, G.; Feedback Control of Linear Discrete-Time Systems under State and Control Constraints. *Int. J. of Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1727-1735, 1988.
- [36] Yoshikawa, T.; Oka, H.; Hanafusa, H., "Decentralized control of moving vehicles on a loop line", em *Proc. IFAC conf. Large Scale Syst.*, Warsaw, Poland, pp. 183-188, 1983.
- [37] Zaratini, Carlos Alberto; "Fontes de Financiamento do Metrô de São Paulo", *Revista dos Transportes Públicos*, no. 69, São Paulo, 1995.