



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Códigos Treliça baseados em partições de reticulados: propriedades estruturais e determinação de códigos ótimos

por

Emília de Mendonça Rosa

Licenciada em Matemática - UNESP/Rio Claro

Mestre em Matemática - IMECC/UNICAMP

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Walter da Cunha Borelli (Orientador)

Prof. Dr. Trajano Pires da Nóbrega - IBILCE/UNESP

Prof. Dr. Walter Godoy Júnior - CEFET/PR

Prof. Dr. Reginaldo Palazzo Júnior - FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Jaime Portugheis - FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Bartolomeu Uchoa Neto - FEEC/UNICAMP (suplente)

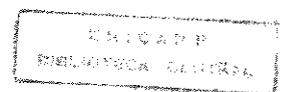
Prof. Dr. Renato Baldini - FEEC/UNICAMP (suplente)

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Elétrica.

20 de Agosto de 1999

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por Emília de Mendonça Rosa e aprovada pela Comissão Julgada em 20/8/1999

W. Borelli
Orientador



9919608

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.º	
TORNO	39377
PROC.	229/99
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	09/11/99
N.º CPD	

CM-00136654-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R71c Rosa, Emília de Mendonça
Códigos treliça baseados em partições de reticulados: propriedades estruturais e determinação de códigos ótimos / Emília de Mendonça Rosa--Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Walter da Cunha Borelli.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Códigos de controle de erros. 2. Teoria da codificação. 3. Algoritmos. 4. Teoria dos grupos. 5. Teoria dos reticulados. 6. Otimização matemática. I. Borelli, Walter da Cunha. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

*Aos meus pais, Samuel e Dirce,
que me ensinaram o valor da vida.*

Agradecimentos

A Deus, pela sustentação da minha vida durante os anos que me dediquei a este trabalho.

Aos meus pais, por me apoiarem e por orarem por mim constantemente, com muito amor.

Ao meu orientador, Dr. Walter C. Borelli, pela amizade dedicada e pela segura condução deste trabalho, sempre com muito otimismo e compreensão.

Ao querido Euro Júnior, por caminhar comigo, com paciência e amor.

À minha irmã Raquel, pois as conquistas da vida seriam vazias sem afeto.

Aos meus irmãos, cunhadas e sobrinhos, pelo carinho e incentivo.

Às amigas, Magda, Margarete, Cládia, Sidnéia e Edméia, pelo companheirismo.

Aos irmãos queridos, da Igreja Presbiteriana Redentor, pelas inúmeras demonstrações de carinho.

Aos parentes e amigos, pelas palavras de encorajamento.

Aos docentes do Departamento de Matemática da Unesp de Bauru, por possibilitarem a mim, com grande esforço pessoal, afastamentos indispensáveis ao bom termo deste trabalho.

Aos amigos, docentes do Departamento de Telemática da FEEC-Unicamp, por contribuições valiosas a este trabalho e à minha vida.

À banca examinadora, pela atenção e zelo com que dispôs-se à julgar esta tese.

À CAPES, pelo auxílio financeiro concedido.

RESUMO:

Inserida na teoria matemática dos códigos corretores de erro e, em particular, para esquemas de modulação codificada que utilizam códigos treliça baseados em partições de reticulados, esta tese introduz os novos conceitos de subconjuntos especiais e suas matrizes norma GN, com o objetivo de propor um algoritmo eficiente para a procura exaustiva, e determinação, de novos códigos treliça ótimos. Propriedades estruturais dos códigos treliça são estabelecidas, e uma classe de equivalência é proposta, assim como é proposto, um algoritmo de determinação de seus espectros de pesos. Apresenta-se, em detalhes, vários exemplos abordando os diversos temas trabalhados, bem como, uma extensa lista com novos códigos treliça q -ários ótimos e seus ganhos de codificação.

PALAVRAS-CHAVE: Códigos Treliça, Códigos Convolucionais, Partições de Reticulados, Cosets, Procura Exaustiva, Códigos Ótimos.

ABSTRACT:

Inserted in the mathematical theory of the error correcting codes and, in particular, for coded modulation schemes using trellis codes based on lattices partitions, this thesis introduces the new concepts of special subsets and the norm-matrix GN, with the objective of proposing an efficient algorithm for the exhaustive search, and determination, of new optimum trellis codes. Some trellis codes structural properties are established, being proposed an equivalence class and an algorithm for determination of their weight spectra. Several examples with the proposed algorithms are presented in details, as well as an extensive list with new optimum q-ary trellis codes and corresponding code gains.

KEY WORDS: Trellis Codes, Convolutional Codes, Lattice Partitions, Cosets, Optimum Codes, Search Algorithm.

PUBLICAÇÕES:

- Rosa,E.M. e Borelli,W.C. Procedimentos Simples para a Procura de Códigos Ótimos, através de Matrizes Geradoras Representadas por Cosets. *XIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Vol.2, pp.655-660, Curitiba, Brasil, 1996.
- Rosa,E.M., Borelli,W.C. and Farrell,P.G. Special Subsets and Optimum Codes Based on Lattices and Cosets. *International Symposium of the Informations Theory (ISIT'97)*, p.521, Ulm, Germany, 1997.
- Rosa,E.M., Borelli,W.C. e Farrell,P.G. Novos Procedimentos para a Procura de Códigos Ótimos Binários Baseados em Partições de Reticulados.*XV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pp.479-483, Recife, Brasil, 1997.
- Rosa,E.M., Borelli,W.C. and Farrell,P.G. A Formalized Optimum Code Search for q-ary Trellis Codes. *IEEE Global Telecommunications Conference(GLOBECOM'97)*, Phoenix, USA, 1997. ISBN CD-ROOM: 0-7803-4201-1 (S26p5).
- Rosa,E.M., Borelli,W.C. e Farrell,P.G. Algoritmo Geral para a Procura de Códigos Treliça Ótimos, Baseados em Partições de Reticulados. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*, 13(1):14-21, Julho 1998.

Índice

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO	1
1.2	ORGANIZAÇÃO DA TESE	3
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	6
2.1	INTRODUÇÃO	6
2.2	RETICULADOS ALGÉBRICOS E SUAS PARTIÇÕES	6
2.2.1	PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/2\mathbb{Z}^2$ (4 COSETS)	9
2.2.2	PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 COSETS)	10
2.3	CÓDIGOS TRELIÇA	13
2.4	CONCLUSÃO	17
3	SUBCONJUNTOS ESPECIAIS	18
3.1	INTRODUÇÃO	18
3.2	LIMITANTES DO d_{free} : Δ_{inf} E Δ_{sup}	20
3.3	SUBCONJUNTOS ESPECIAIS DE MATRIZES GERADORAS	23
3.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS DE SUBCONJUNTOS ESPECIAIS:	28
3.5	CONCLUSÃO	32
4	ALGORITMO DE PROCURA EXAUSTIVA DE CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS	34
4.1	INTRODUÇÃO	34

4.2	ALGORITMO DE PROCURA DOS MELHORES CÓDIGOS TRELIÇA DENTRO DE UM SUBCONJUNTO ESPECIAL	36
4.2.1	FASE INICIAL	36
4.2.2	VERIFICAÇÕES SIMPLES ENVOLVENDO Δ_{sup} E d_{free}	36
4.2.3	FINAL DO ALGORITMO: APRESENTAÇÃO DE UM CÓDIGO COM d_{free} MÁXIMO	38
4.3	ALGORITMO DE PROCURA DE CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS	39
4.3.1	FASE INICIAL: TABELA ORDENADA DE NORMAS E COSETS E ESCOLHA DE UMA GN	39
4.3.2	CÁLCULO DOS VALORES MÁXIMOS DE Δ_{inf} E Δ_{sup} PARA GN	39
4.3.3	NOVA ESCOLHA DE GN	40
4.3.4	FINAL DO ALGORITMO: APRESENTAÇÃO DE UM CÓDIGO TRELIÇA ÓTIMO	41
4.4	PARTIÇÕES DE RETICULADOS E TABELAS DE COSETS	41
4.4.1	PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 COSETS):	43
4.4.2	PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ (32 COSETS):	43
4.4.3	PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$ (64 COSETS):	44
4.4.4	PARTIÇÃO $\mathcal{A}_2/3\mathcal{A}_2$ (9 COSETS):	49
4.4.5	PARTIÇÃO $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$ (27 COSETS)	50
4.5	EXEMPLOS NUMÉRICOS COM O ALGORITMO DE PROCURA DE CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS	54
4.5.1	ESQUEMA SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_2	54
4.5.2	ESQUEMA SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_3	56
4.5.3	ESQUEMA SOBRE O ANEL \mathbb{Z}_4 :	60
4.6	NOVOS CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS	61
4.6.1	ESQUEMAS SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_2 :	63
4.6.2	ESQUEMAS SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_3 :	68
4.6.3	ESQUEMAS SOBRE O ANEL \mathbb{Z}_4 :	69

4.7	CONCLUSÃO	71
5	UMA CLASSE DE EQUIVALÊNCIA E ESPECTRO DE PESOS DE CÓDIGOS TRELIÇA	73
5.1	INTRODUÇÃO	73
5.2	UMA CLASSE DE CÓDIGOS EQUIVALENTES EM UM SUBCONJUNTO ESPECIAL	74
5.3	EXEMPLOS NUMÉRICOS	77
5.3.1	CÓDIGOS TRELIÇA SOBRE \mathbb{Z}_2 :	77
5.3.2	CÓDIGOS TRELIÇA SOBRE \mathbb{Z}_3 :	80
5.4	ALGORITMO PARA A DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE PESOS DE UM CÓDIGO TRELIÇA	82
5.4.1	CONSTRUÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DE ENTRADA	82
5.4.2	DETERMINAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS VÁLIDAS	85
5.4.3	CÁLCULO, CLASSIFICAÇÃO E CONTAGEM, DO PESO DOS CAMINHOS FECHADOS	87
5.4.4	APRESENTAÇÃO DO ESPECTRO DE PESOS (FINAL DO ALGORITMO)	88
5.5	EXEMPLOS NUMÉRICOS DE ESPECTROS DE PESOS	88
5.5.1	PARTIÇÃO DE RETICULADOS $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 COSETS)	89
5.5.2	PARTIÇÃO DE RETICULADOS $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 COSETS)	96
5.6	CONCLUSÃO	99
6	CONCLUSÃO	100
6.1	INTRODUÇÃO	100
6.2	ANÁLISE E COMENTÁRIOS	101
6.3	PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS	103
A	ARTIGOS PUBLICADOS	104
A.1	ANAIS DO TELEMÓ'96 - CURITIBA - BRASIL - 1996	104
A.2	ANAIS DO ISIT'97 - ULM - ALEMANHA - 1997	105
A.3	ANAIS DO SBT'97 - RECIFE - BRASIL - 1997	106
A.4	ANAIS DO GLOBECOM'97 - PHOENIX - USA - 1997	107

A.5 REVISTA DA SBT (VOL.13) - JULHO DE 1998 108

BIBLIOGRAFIA 109

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS DO TRABALHO

Com o trabalho de Ungerboeck [31], em 1977, tem início uma nova linha de pesquisa, a Modulação Codificada, inserida na Teoria de Códigos. Nela é proposto que os dois processos, codificação e modulação, sejam tratados juntos, como uma mesma entidade. Após esse trabalho, muitos pesquisadores colaboraram na estruturação dessa nova linha de pesquisa, podendo-se destacar, dentre outros, os seguintes artigos: Ungerboeck [32], Conway & Sloane [12], Wei [[34],[35]], Calderbank & Sloane [[9],[10],[11]] e Forney [[15],[16],[18]]. Recentemente, Forney & Ungerboeck publicaram uma compilação das idéias principais da Teoria de Informação e Codificação, incluindo uma seção completa e atualizada sobre Modulação Codificada [17].

Os esquemas de codificação estão divididos em dois grupos:

1) TCM (Trellis Code Modulation): cujos codificadores envolvidos geram códigos convolucionais [[1],[2],[3],[4],[5],[11],[25],[35]]; e

2) BCM (Block Code Modulation): cujos codificadores envolvidos geram códigos de bloco [[4],[8],[22]].

Esta tese está inserida no contexto dos códigos TCM, aqui chamados, simplificada, de Códigos Treliça. Visa contribuir para a área, através da sistematização de um algoritmo

eficiente de procura de códigos treliça ótimos, cujas matrizes geradoras são baseadas em partições de reticulados algébricos, como definidas por Calderbank & Sloane [11], em cujo artigo os autores, para alguns esquemas específicos, apresentaram matrizes geradoras de códigos treliça ótimos, obtidas através de uma combinação, não explícita, de cálculos manuais e computacionais.

Estudos preliminares do referido artigo, juntamente com as idéias de subconjuntos especiais para os códigos de Ungerboeck [[31],[32]], introduzidas por W.C. Borelli [[6],[7],[13]], resultaram na proposta de procedimentos simples para a determinação das matrizes geradoras de códigos treliça ótimos [27] (Apêndice A.1). Os resultados desse trabalho motivaram o aprofundamento de estudos nesta direção, sendo propostos, em seguida, os subconjuntos especiais para os códigos treliça, e suas respectivas matrizes norma GN associadas [29] (Apêndice A.2). Os parâmetros de limitação do d_{free} , obtidos considerando-se a matriz GN, determinam quando o subconjunto especial associado, possui os melhores códigos treliça (quanto ao d_{free}); mediante este fato, foram propostos novos procedimentos para a escolha adequada dos subconjuntos especiais [26] (Apêndice A.3), sendo determinados, primeiramente, os “melhores” possíveis, chegando-se até os “piores”, isto é, subconjuntos especiais cuja probabilidade de possuir um código ótimo é nula. A busca dos códigos treliça ótimos, proposta nesta tese, foi realizada a partir dos melhores subconjuntos especiais, sendo que, através de verificações simples, descarta-se os piores, sem quase nenhum esforço computacional. Tais procedimentos conferem à procura, de caráter exaustivo, a eficiência almejada. A sistematização dessa procura foi proposta através de algoritmos [[28],[30]] (Apêndice A.4 e A.5).

A implementação do algoritmo, comprovou os resultados apresentados em [11], e motivou a procura de novos códigos treliça ótimos, para esquemas com maior número de cosets na partição de reticulados, e com maior número de símbolos no alfabeto de entrada. Os novos códigos ótimos q-ários obtidos, foram apresentados em [28] (Apêndice A.4).

Nesta tese, nos capítulos 3 e 4, são abordados os conteúdos resumidos dos artigos já publicados (Apêndices A.1 - A.5), com maior nível de detalhamento, na apresentação dos

subconjuntos especiais e do algoritmo de procura de códigos treliça ótimos, bem como, nos exemplos de suas aplicações.

Outra vertente que motivou esta tese, é aquela que contempla as propriedades estruturais dos códigos, tais como, espectros de pesos e equivalências. A determinação dos espectros de pesos, para os códigos treliça, foi sistematizada em um algoritmo, cuja implementação possibilitou a observação do comportamento dessa função, a partir da variação do comprimento máximo dos caminhos fechados no diagrama de treliça do código convolucional associado.

Uma classe de equivalência foi proposta sendo que, a mesma, apresenta-se como uma aplicação direta das estruturas algébricas aos códigos treliça, através da atuação de um grupo diedral sobre suas matrizes geradoras.

As propriedades estruturais abordadas, classe de equivalência e espectro de peso, representam os mais recentes resultados desta tese, não tendo sido ainda, submetidos à comunidade científica.

1.2 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Este trabalho está dividido em seis capítulos e um apêndice, nos quais pode-se observar a evolução obtida no decorrer do desenvolvimento desta tese.

O capítulo 2 destina-se à apresentação de conceitos e definições da literatura existente, utilizados na tese; e visa estabelecer uma notação padrão, que facilite a compreensão deste texto. O conteúdo do capítulo foi dividido em seções que enfocam, os reticulados e suas partições (seção 2.2), e os códigos treliça (seção 2.3).

No capítulo 3 define-se os subconjuntos especiais de matrizes geradoras de Códigos Treliça baseados em partições de reticulados.

A idéia da utilização dos subconjuntos especiais, aparece primeiramente, nos trabalhos de W.C. Borelli [[6],[7],[13]], sendo consideradas matrizes geradoras binárias de códigos convolucionais, baseados em partições (“set partitioning”) da constelação de sinais, propostas por Ungerboeck [[31],[32]]. Os trabalhos de Markman [24] e Gonçalves & Palazzo [19],

utilizam extensões dos algoritmos propostos em [6], para obtenção de códigos ótimos em aplicações específicas dos códigos de Ungerboeck.

Os subconjuntos especiais, propostos no capítulo, constituem-se de matrizes geradoras de um código treliça, com os seguintes parâmetros: k_1 símbolos de entradas, V memórias no codificador convolucional, um alfabeto q -ário de símbolos de entrada (anéis com q elementos, denotados por \mathbb{Z}_q) e uma partição de reticulados.

Ao introduzir os subconjuntos especiais, para códigos treliça, define-se limitantes para o d_{free} do código convolucional (seção 3.2), envolvido na estrutura do código treliça. Procedimentos simples, para a determinação dos subconjuntos especiais, foram propostos inicialmente [27] (Apêndice A.1), cuja evolução pode ser observada no artigo [26] (Apêndice A.3), bem como, de modo detalhado, no capítulo 3 (seção 3.3).

O capítulo 4 apresenta o algoritmo geral de procura exaustiva de códigos treliça ótimos baseados em cosets e partições de reticulados (seção 4.3), o qual incorpora os procedimentos introduzidos para códigos treliça sobre \mathbb{Z}_2 , propostos em [[27],[26]], e generaliza a procura para alfabetos q -ários. As novas características incorporadas ao algoritmo e mostradas no capítulo, proporcionam uma procura exaustiva, realizada com muita eficiência.

Partições de reticulados com grande número de cosets, assim como, alfabetos q -ários de símbolos de entrada, são utilizados neste trabalho, com o objetivo de obter-se, novos códigos treliça ótimos. Tais resultados foram organizados em tabelas na seção 4.6 [28] (Apêndice A.4).

Um dos objetivos do capítulo 5, é a demonstração da existência de uma classe de equivalência dentre os códigos treliça considerados. A demonstração dessa classe, apresentada em detalhes na seção 5.2, é uma aplicação, dentre as muitas, da Teoria de Grupos à Teoria de Modulação Codificada. Tendo em vista a grande utilidade do espectro de pesos de um código, no tocante a determinação de limitantes para a probabilidade de erro, apresenta-se um algoritmo para a determinação do espectro de pesos dos códigos treliça (seção 5.4) e exemplos numéricos, enfocando a utilização do algoritmo (seção 5.5).

As considerações finais deste trabalho, bem como, as propostas para trabalhos futuros,

são apresentadas no capítulo 6.

Visando a comodidade do leitor, o apêndice contém cópias dos dois artigos [[26],[27]], apresentados em congressos nacionais da SBT (1996 e 1997) (Apêndice A.1 e A.3); de um artigo [30], publicado na revista da SBT (julho de 98) (Apêndice A.5) e dois artigos [[29],[28]], apresentados em congressos internacionais, um no International Symposium of the Information Theory-ISIT'97 (Apêndice A.2) e o outro no IEEE Global Telecommunications Conference-GLOBECOM'97 (Apêndice A.4).

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo, apresentar conceitos existentes na literatura, estabelecendo-se uma notação padrão, facilitando assim, a compreensão do texto.

A seção 2.2, apresenta definições que envolvem reticulados algébricos e suas principais propriedades. Apresenta também, um estudo detalhado da partição do reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, ao considerar-se o subreticulado $\Lambda' = \theta\mathbb{Z}^2$. Outras partições de reticulados, são apresentadas na seção 4.4 (capítulo 4).

Baseado no trabalho de Calderbank & Sloane [11], a seção 2.3, apresenta os conceitos fundamentais sobre os Códigos Treliça, cuja estrutura envolve os códigos convolucionais e as partições de reticulados.

2.2 RETICULADOS ALGÉBRICOS E SUAS PARTIÇÕES

Os **reticulados algébricos**, são compostos por pontos do espaço N-dimensional (\mathbb{R}^N), arranjados de modo regular. Por exemplo, na fig.2.1 apresenta-se o reticulado \mathbb{Z}^2 (do espaço bidimensional \mathbb{R}^2), sendo que cada elemento do reticulado possui coordenadas inteiras, ou

seja,

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \iff x_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2\}. \quad (2.1)$$

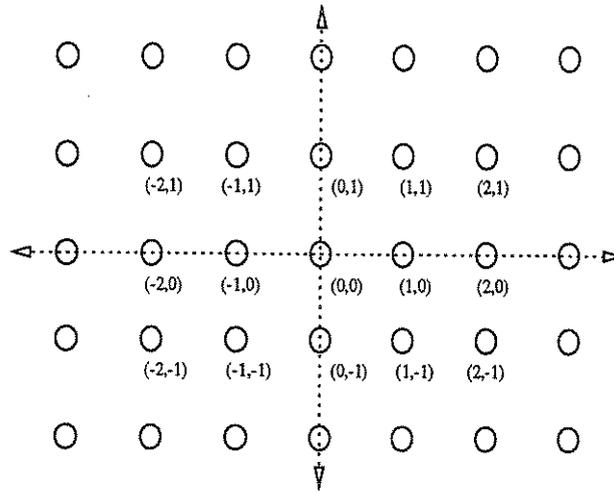


Figura 2.1: *Reticulado \mathbb{Z}^2 .*

Um **subreticulado** $\Lambda' \subseteq \Lambda$, é um subconjunto de pontos de Λ , fechado para as operações do espaço vetorial Λ .

Dado um subreticulado $\Lambda' \subseteq \Lambda$, pode-se induzir uma partição de reticulados, denotada por Λ/Λ' , cujos elementos são chamados de **classes laterais da partição**. Tais elementos podem ainda ser chamados de **cosets**, ou **transladados de Λ'** . Cada classe lateral pode ser expressa através do seguinte conjunto (eq.2.2):

$$\Lambda' + c = \{\lambda' + c; \lambda' \in \Lambda', c \notin \Lambda'\}. \quad (2.2)$$

Dois elementos quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, pertencem ao mesmo coset, $\Lambda' + c$, da partição de

reticulados, se e somente se, satisfazem a seguinte propriedade 2.3:

$$\lambda_1 - \lambda_2 \in \Lambda'. \quad (2.3)$$

Desta forma o coset $\Lambda' + c$, pode ser representado por λ_1 ou λ_2 , ou ainda qualquer um de seus outros elementos. Em cada coset distinto da partição de reticulados, escolhe-se um elemento para representá-lo. Tal elemento é dito **líder do coset**, o qual neste trabalho, foi escolhido considerando-se, a menor distância euclidiana entre os elementos do referido coset e a origem do reticulado Λ .

O número de cosets distintos em uma determinada partição de reticulados, pode ser determinada através do seguinte resultado, da álgebra linear [23]:

Proposição 1 *Sejam Λ um reticulado de \mathbb{R}^n e \mathcal{M} uma matriz inversível $n \times n$, com entradas inteiras. Então $\mathcal{M}\Lambda$ é um subreticulado de Λ , com $|\det(\mathcal{M})|$ cosets.*

Essa quantidade de cosets distintos, de uma partição de reticulados Λ/Λ' , é denotada por $|\Lambda/\Lambda'|$.

Uma **constelação** com m sinais, pode ser representada num reticulado Λ , através de um conjunto dos m elementos do reticulado, mais próximos da origem do reticulado, considerando a distância euclidiana. A fig.2.5, apresenta constelações com 8, 16 e 32 sinais. Em geral, representa-se a constelação, de tal modo que, o número de elementos em cada um dos cosets da partição de reticulados considerada, seja o mesmo.

Definição 1 *Sejam Λ um reticulado n -dimensional, e um elemento $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Lambda$. Define-se como **norma de x** , o valor dado pela eq.2.4:*

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \quad (2.4)$$

Considerando a definição 1, obtém-se o seguinte resultado:

Proposição 2 *Sejam Λ um reticulado n -dimensional, e um elemento $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Lambda$.*

Tem-se que:

$$1) \|x\| \geq 0$$

$$2) \|x\| = 0 \iff x = 0.$$

Em um reticulado Λ , pode-se portanto, definir a **distância quadrática** entre dois de seus elementos, da seguinte forma:

Definição 2 *Sejam Λ um reticulado n -dimensional e $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, dois elementos desse reticulado. A **distância quadrática de x à y** é dada pela eq.2.5:*

$$d^2(x, y) = \|x - y\| \quad (2.5)$$

A **distância intra-coset** é definida como sendo o valor da menor distância Euclidiana obtida, ao considerar-se, todos os elementos de um mesmo coset da partição.

A **distância da partição**, denotada por d_2 , é dada pela expressão 2.6:

$$d_2 = \min\{d^2(x, y) | \forall x, y \in \Lambda', x \neq y\}, \quad (2.6)$$

ou seja, d_2 é o quadrado da distância intra-coset, considerando-se o subreticulado Λ' .

Considerando-se um reticulado Λ e subreticulados, Λ'_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, sendo que, Λ'_i também é subreticulado de Λ'_j , sempre que $i < j$, define-se uma **cadeia de partição de reticulados**, através da expressão 2.7:

$$\Lambda/\Lambda'_1/\dots/\Lambda'_m. \quad (2.7)$$

2.2.1 PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/2\mathbb{Z}^2$ (4 COSETS)

Sejam o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ (fig.2.1) e o subreticulado $\Lambda' = 2\mathbb{Z}^2$ (fig.2.2), cuja matriz da transformação linear, é dada por:

$$2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

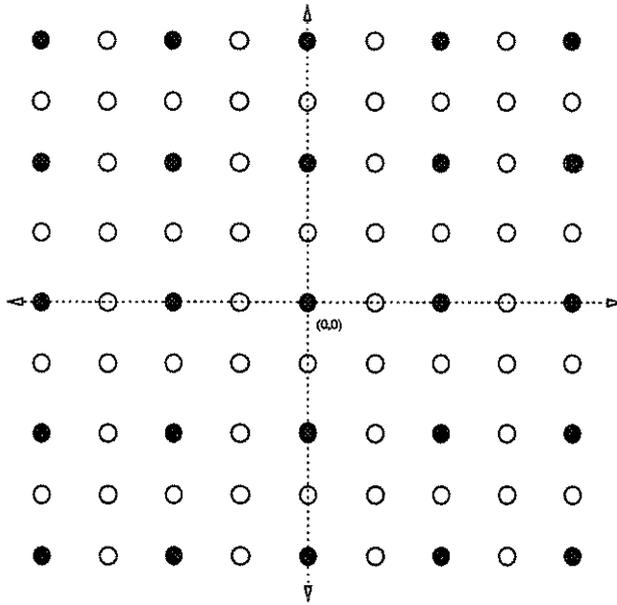


Figura 2.2: *Subreticulado $2\mathbb{Z}^2$.*

Seja a partição $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/2\mathbb{Z}^2$ (fig.2.3). Observa-se que essa partição possui 4 cosets distintos, podendo ser representados por: $2\mathbb{Z}^2 = 2\mathbb{Z}^2 + (0,0)$; $2\mathbb{Z}^2 + (1,0)$; $2\mathbb{Z}^2 + (0,1)$; $2\mathbb{Z}^2 + (1,1)$. Para simplificar, pode-se representar cada coset distinto da partição por seu líder, isto é, a partição pode ser expressa através da tabela mostrada na fig.2.3. A terceira coluna da referida tabela (fig.2.3), foi obtida a partir da definição 1, considerando os líderes de cada coset.

As duas menores distâncias obtidas entre elementos de um mesmo coset, desta partição, são: 2 e $2\sqrt{2}$. Assim, tem-se que a distância da partição é $d_2 = \min\{2^2, (2\sqrt{2})^2, \dots\} = 4$.

2.2.2 PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 COSETS)

Sejam o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e o subreticulado $\Lambda' = \theta\mathbb{Z}^2$ (fig.2.4), onde a transformação linear θ é dada por:

$$\theta = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

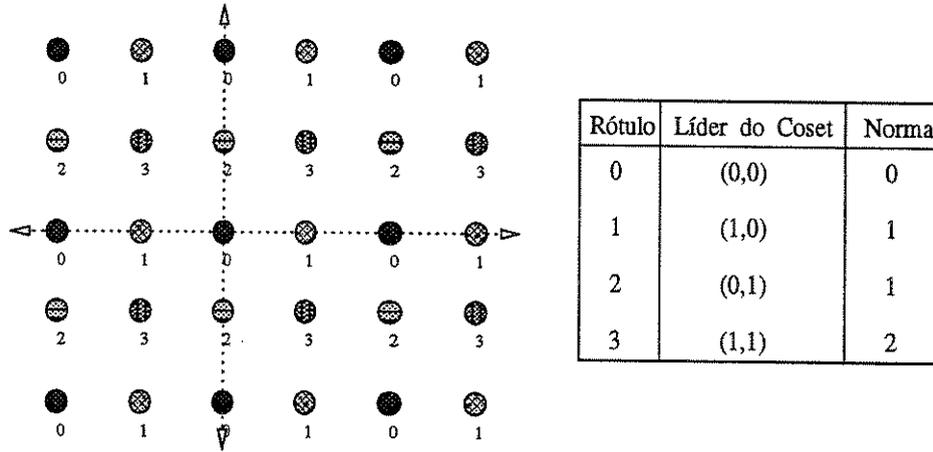


Figura 2.3: Partição de reticulados $\mathbb{Z}^2/2\mathbb{Z}^2$ (4 cosets).

Considere a partição $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$, apresentada na fig.2.5, na qual está mostrada uma tabela, contendo os 8 cosets distintos dessa partição.

Observa-se que os elementos (3,1) e (-1,1) estão no mesmo coset, visto que:

$$(3, 1) - (-1, 1) = (4, 0) \in \Lambda' = \theta\mathbb{Z}^2.$$

Portanto, qualquer um, dos dois pares ordenados, pode ser escolhido como líder do coset de rótulo 2.

A tabela da fig.2.5, apresenta os líderes de cosets, e o rotulamento, utilizado em [11]. Ressalta-se que, o rotulamento é uma função que associa um único coset, à cada ponto do reticulado Λ , dado por uma n-upla do espaço vetorial \mathbb{R}^n .

A distância da partição, neste caso, é dada por:

$$d_2 = \min\{(2\sqrt{2})^2, 4^2, \dots\} = 8.$$

Ressalta-se que ao considerar-se, o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e os subreticulados $\Lambda'_1 = 2\mathbb{Z}^2$ e $\Lambda'_2 = 4\mathbb{Z}^2$, tem-se a seguinte cadeia de partição, conforme eq.2.7:

$$\mathbb{Z}^2/2\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2.$$

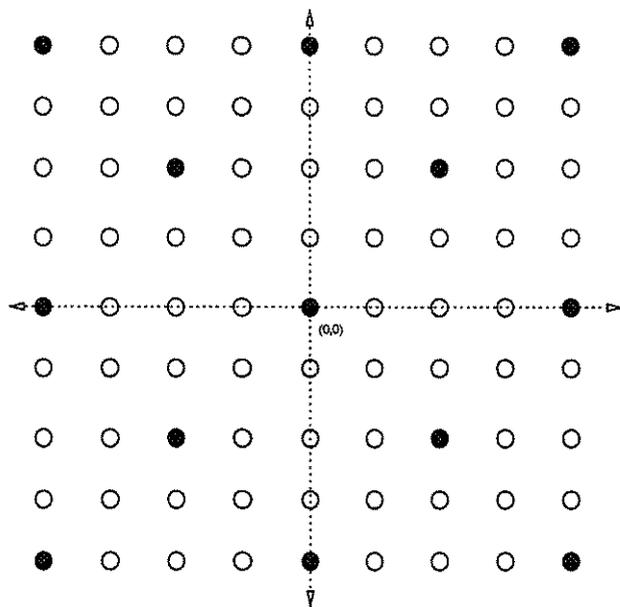


Figura 2.4: *Subreticulado $\theta\mathbb{Z}^2$.*

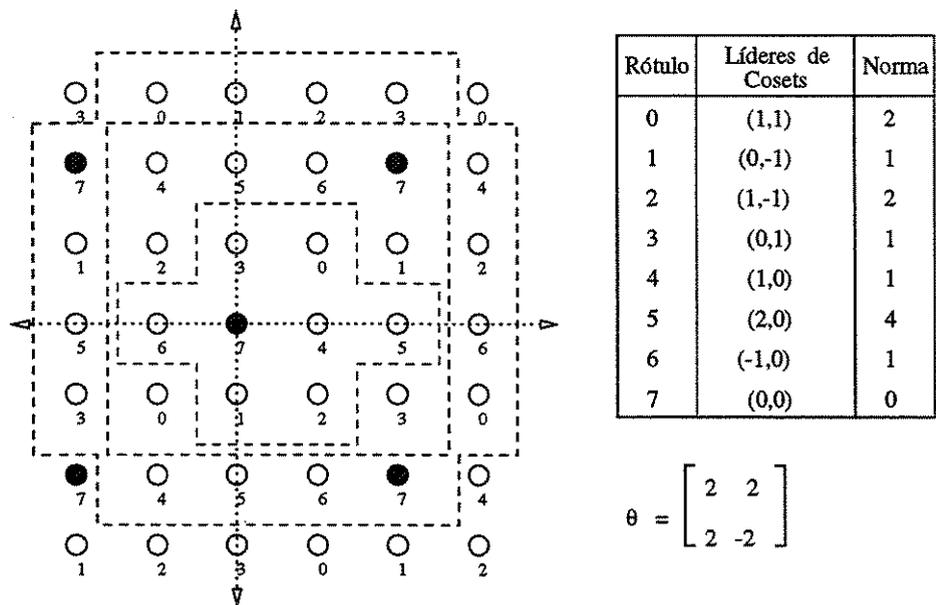


Figura 2.5: *Partição de reticulados $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 cosets)*

2.3 CÓDIGOS TRELIÇA

Esta seção apresenta definições, e conceitos, contidos no trabalho de Calderbank & Sloane [11].

Considere a estrutura apresentada na fig.2.6, a qual representa o codificador de um código treliça. O referido codificador transforma uma sequência de $k = k_1 + k_2$ símbolos de um alfabeto \mathcal{A} , em uma sequência de símbolos de saída, os quais mapeiam uma constelação, num reticulado Λ do \mathbb{R}^n .

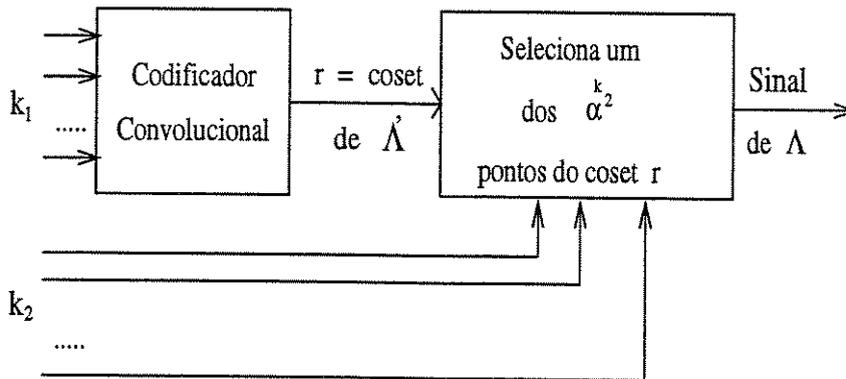


Figura 2.6: *Estrutura do Codificador de um Código Treliça [11]*

Considerando-se uma partição de reticulados, Λ/Λ' , tem-se que a sequência de símbolos de saída do codificador do código treliça (fig.2.6), está associada à um ponto do coset r , da partição. Dos k ($k_1 + k_2$) símbolos de entrada, os k_1 primeiros, são codificados pelo código convolutacional e escolhem um coset da partição. Os k_2 restantes, não são codificados e são utilizados na escolha de um ponto específico, dentre os α^{k_2} existentes, no coset r , previamente determinado.

Considere \mathcal{A} um anel finito, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ um subreticulado e G a matriz geradora de um código convolutacional, com k_1 símbolos de entrada de \mathcal{A} e V memórias, sendo apenas um símbolo de saída r , correspondente a um coset (g_{ij}) da partição de reticulados Λ/Λ' .

A taxa do código convolucional é

$$\rho_1 = k_1 \log_2 \alpha \text{ bits/coset}, \quad (2.8)$$

e a taxa fracionária é dada pela eq.2.9:

$$\rho_2 = k_1 \log_2 \alpha / \log_2 |T|, \quad (2.9)$$

onde $\alpha = |A|$ e $|T|$ é o número de saídas possíveis sendo α^{k_1} o número de entradas possíveis. O codificador pode determinar até α^{k_1+V} cosets distintos.

A taxa do código treliça, é dada pela eq.2.10:

$$\rho = \frac{k_1 + k_2}{n} \quad (2.10)$$

A figura 2.7, apresenta a estrutura genérica do codificador convolucional com V memórias, distribuídas de modo uniforme, entre as k_1 entradas, sendo $v = \max_{1 \leq j \leq k_1} \{v_j\}$, onde v_j é o número de memórias em cada entrada do codificador.

Define-se $g_{v_j} = 0$, sempre que $v_j < v$.

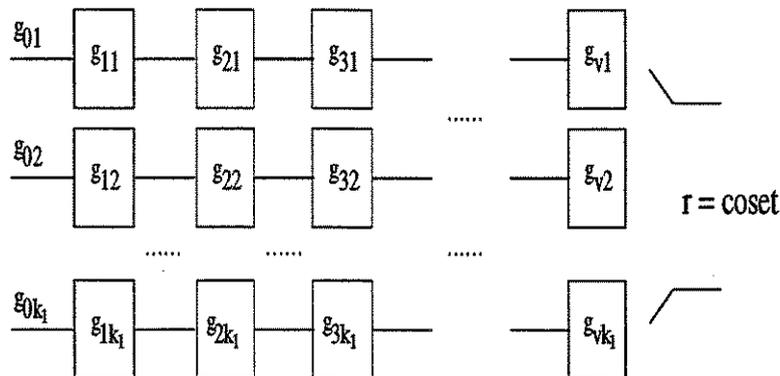


Figura 2.7: Estrutura do Código Convolucional

Definição 3 Denomina-se **matriz geradora do código convolucional**, envolvido na estrutura do Código Treliça, a matriz G que tem cosets \mathbf{g}_{ij} em suas colunas, isto é,

$$G = [\mathbf{g}_{vk_1} \dots \mathbf{g}_{v1} \mid \dots \mid \mathbf{g}_{1k_1} \dots \mathbf{g}_{11} \mid \mathbf{g}_{0k_1} \dots \mathbf{g}_{01}]. \quad (2.11)$$

Considerando-se a matriz geradora G (def.3), e os k_1 símbolos de entrada, do alfabeto \mathcal{A} , define-se a saída do codificador convolucional, como sendo o coset dado pela eq.2.12:

$$r = \sum_{i=0}^v \sum_{j=1}^{k_1} u_{ij} \mathbf{g}_{ij} \quad (2.12)$$

onde $u_{ij} \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{g}_{ij} \in \Lambda/\Lambda'$.

Utilizando-se a definição da norma de um elemento do reticulado (eq.2.4), obtém-se que:

Definição 4 A norma de um coset é o valor dado por:

$$\|\mathbf{g}_{ij}\| = \sum_k x_{ijk}^2,$$

onde $k = 1, 2, \dots, \dim(\Lambda)$ e x_{ijk} são as coordenadas Euclidianas, do líder do coset \mathbf{g}_{ij} , no reticulado $\Lambda \in \mathbb{R}^n$.

Os esquemas de codificação, envolvendo um codificador convolucional e uma partição de reticulados, possuem duas distâncias distintas, em sua estrutura, a saber: a distância mínima livre do código convolucional (d_{free}) e a distância da partição (eq.2.6), denotada por d_2 . O d_{free} de um código convolucional é obtido a partir das métricas dos caminhos fechados da treliça desse código, sendo que neste trabalho, a métrica de cada ramo da referida treliça é dada pela norma do coset r atribuído ao ramo, através da combinação das colunas da matriz geradora G . Assim define-se, a **distância mínima quadrática de um código treliça**, do seguinte modo:

Definição 5 Seja um esquema de codificação, envolvendo um código treliça baseado em uma partição de reticulados, gerado por uma matriz G (def.3). A **distância mínima quadrática**

do código treliça é dada pela eq.2.13:

$$d = \min\{d_{free}, d_2\} \quad (2.13)$$

onde d_{free} é o valor mínimo, dentre as métricas dos caminhos fechados com início e final, no estado S_0 da treliça do código convolucional, e d_2 é a distância da partição (eq.2.6).

Para um esquema de codificação dado pelos parâmetros (k_1, k_2, V, q) e uma partição de reticulados, pode-se considerar, a priori, muitos códigos treliça distintos, bastando realizar a modificação dos cosets da matriz geradora G . A definição a seguir, estabelece o conceito de **código treliça ótimo**.

Definição 6 *Seja um esquema de codificação dado pelos parâmetros (k_1, V, q) e uma partição de reticulados. Um código treliça, desse esquema, é dito **código treliça ótimo**, quando a sua distância mínima quadrática d (eq.2.13) é máxima, considerando-se as distâncias d , obtidas para os demais códigos treliça, do mesmo esquema de codificação.*

A maximização da distância mínima quadrática d , necessariamente, envolve a maximização da distância mínima livre (d_{free}), do código convolucional, pois d_2 tem valor fixado pela partição.

O aumento do número de memórias de um codificador convolucional, pode proporcionar um valor maior para o d_{free} , pois o aumento das memórias acarreta um acréscimo visto que no número de ramos dos caminhos mínimos da treliça. Desta forma os parâmetros, (k_1, V, q) e a partição de reticulados, Λ/Λ' , são considerados de modo que os esquemas de codificação, gerem códigos convolucionais onde $d_{free} \leq d_2$.

Os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos, são obtidos através da comparação com esquemas não codificados e dados pela eq.2.14:

$$G = 10 \log_{10} \left(\frac{d^u}{P^u} / \frac{d^c}{P^c} \right) \quad (2.14)$$

onde d^u e P^u , são a distância e a energia do esquema não codificado, e P^c , a energia referente ao esquema codificado, cuja distância $d^c = d$ (eq.2.13).

Estas definições serão utilizadas no capítulo 4, seção 4.6, na elaboração de tabelas de ganho de codificação (ex:figs 4.20 e 4.22, para os esquemas de codificação considerados).

2.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentados conceitos e definições da literatura, que serão utilizados nos demais capítulos desta tese.

Uma apresentação detalhada de duas partições do reticulado \mathbb{Z}^2 , partições com 4 e 8 cosets, foi inserida na seção 2.2, tendo em vista, a utilização dos mesmos princípios, nas demais partições de reticulados, apresentadas no capítulo 4 (seção 4.4). Os códigos treliça, seus conceitos e notações, foram apresentados na seção 2.3.

Capítulo 3

SUBCONJUNTOS ESPECIAIS

3.1 INTRODUÇÃO

Os códigos treliça e as matrizes geradoras G (eq.2.11 - capítulo 2), baseadas em partições de reticulados [11], estão univocamente associados. Desta forma, um determinado código treliça possui uma única matriz geradora G , sendo que, o número de suas colunas é dado pelos parâmetros, k_1 (número de dígitos de entradas) e V (número de memórias), do codificador convolucional envolvido na estrutura geral do código treliça considerado. As colunas da matriz geradora são constituídas por líderes de cosets da partição de reticulados.

Considerando-se uma partição de reticulados Λ/Λ' e um codificador convolucional, conforme Calderbank & Sloane [11], obtem-se um universo muito grande de matrizes geradoras G de códigos treliça, a saber $(\beta^{V+k_1} - 1)$, onde β é o número de cosets da partição. Por exemplo, para a partição de reticulados com 8 cosets, $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (fig.2.5 - capítulo 2) e um codificador convolucional de 2 entradas e 2 memórias, ter-se-ia um universo de 4.095 matrizes geradoras distintas.

Um dos objetivos deste trabalho é determinar, dentro do universo de matrizes geradoras G , matrizes geradoras de códigos treliça ótimos (códigos com valor máximo para a distância mínima quadrática d), sendo dados os parâmetros (k_1, V) , um alfabeto q -ário de símbolos de entrada e a partição de reticulados Λ/Λ' . A procura dessas matrizes geradoras, se realizada

de modo exaustivo (quanto a quantidade de matrizes existentes), demanda muito tempo de busca. Propõe-se portanto, uma procura exaustiva, porém otimizada, para os esquemas de modulação codificada considerados. Com tal finalidade, introduz-se primeiramente, o conceito de matriz norma GN (eq.3.5), à qual está associada um subconjunto de matrizes geradoras G , cujas normas de suas colunas são aquelas que compõem a matriz GN, respectivamente.

Para um determinado esquema e uma partição de reticulados, determina-se matrizes norma GN distintas e portanto, distintos subconjuntos associados. Tais subconjuntos são denominados **subconjuntos especiais** e constituem uma partição do conjunto de todas as matrizes geradoras possíveis ao esquema.

Baseando-se em características fundamentais das matrizes norma GN, dadas através da escolha de limitantes para o d_{free} do código convolucional associado, e em verificações simples, pode-se selecionar os “melhores” subconjuntos especiais, quanto à probabilidade de possuírem ao menos uma matriz geradora de um código treliça ótimo. A procura proposta inicia-se pelos melhores subconjuntos especiais, chegando-se até os “piores”, que são os subconjuntos especiais cuja probabilidade de possuírem códigos ótimos é nula.

Na escolha do limitante superior para o d_{free} considera-se que, os caminhos fechados da treliça do código convolucional com início e final no estado zero (S_0), possuem métricas, iguais ou superiores, ao valor do d_{free} , ou seja, ao considerar-se o mínimo dentre as métricas de um conjunto finito de caminhos fechados, fica determinado um limitante superior para o d_{free} de um código convolucional. Neste trabalho, o limitante superior do d_{free} é denotado por Δ_{sup} e sua formalização está apresentada na seção 3.2.

Considerando ainda, os caminhos fechados da treliça do código convolucional (início e final em S_0), observa-se que possuem, em sua constituição, um dos ramos que partem do estado S_0 e um dos ramos que regressam a esse estado (fig.3.1). Desta forma, ao somar-se as métricas desses dois ramos referidos, obtem-se um valor inferior à métrica do caminho.

A definição do limitante inferior para o d_{free} , denotado por Δ_{inf} (seção 3.2), está baseada nesse fato, considerando-se entretanto, a métrica mínima dentre todos os ramos que partem de S_0 , bem como, a métrica mínima dentre todos os ramos que regressam ao estado S_0 da

treliça; obtendo-se assim a generalização da definição proposta.

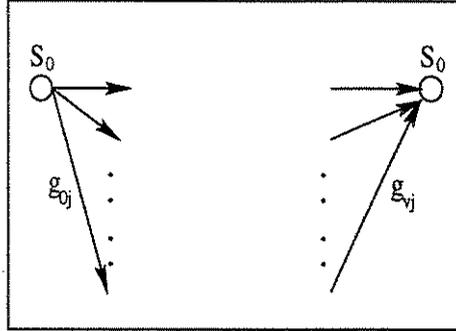


Figura 3.1: *Primeiros e últimos ramos dos caminhos fechados em S_0*

Na seção 3.3 apresenta-se procedimentos para a escolha adequada, e ordenada, dos melhores subconjuntos especiais, o que garante eficiência ao algoritmo de procura de códigos treliça ótimos (capítulo 4). Apresenta-se também, um exemplo numérico enfatizando a construção da tabela ordenada de normas e cosets introduzida em [26](Apêndice A.3). Tal tabela norteia a escolha sistematizada das matrizes norma GN.

Exemplos numéricos de subconjuntos especiais de matrizes geradoras G de códigos treliça, são apresentados na seção 3.4.

3.2 LIMITANTES DO d_{free} : Δ_{inf} E Δ_{sup}

Os caminhos fechados não nulos da treliça do codificador convolucional, envolvido na estrutura do código treliça, estão associados às sequências de dígitos de entrada, cujo primeiro bloco de k_1 dígitos pertence ao conjunto dado pela eq.3.1:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}_l) = (u_{l_{k_1}}, \dots, u_{l_1}) \mid (\mathbf{u}_l) \neq (0), \\ (\mathbf{u}_l) \in \mathcal{A}^{k_1}, l = 1, \dots, \alpha^{k_1} - 1 \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

onde $(0) = (0, 0, \dots, 0)$.

Por exemplo, considerando-se um codificador convolucional com 2 entradas e $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_2$ este conjunto será: $\mathcal{U} = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

Se o codificador possui 3 memórias, a treliça apresenta 8 estados, sendo que os caminhos fechados de menor número de ramos, estão associados, neste caso, às sequências semi-infinitas, $1\ 0\ 0\ 0\ \dots$; $0\ 1\ 0\ 0\ \dots$ e $1\ 1\ 0\ 0\ \dots$; chamadas **sequências mínimas**. A fig.3.2 mostra estes caminhos, sendo seus ramos, rotulados com os bits de entrada, em cada caso.

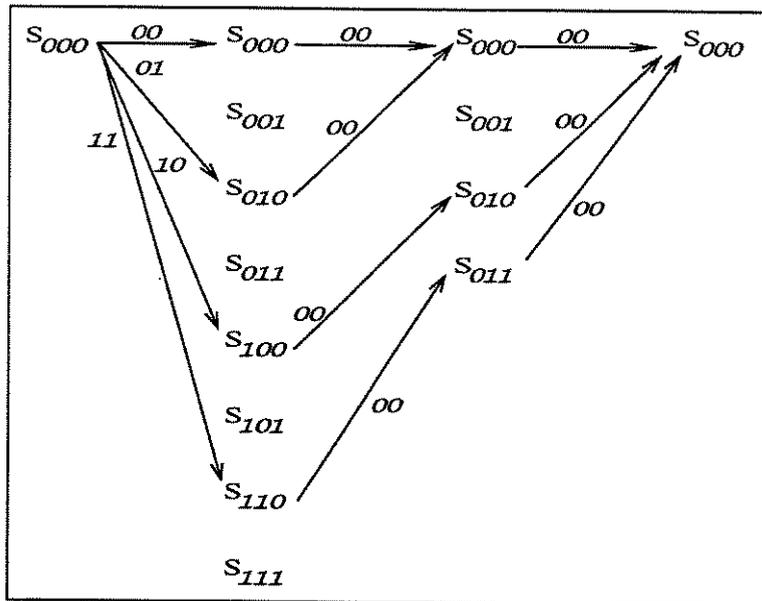


Figura 3.2: Caminhos fechados obtidos a partir das sequências mínimas de entradas $1\ 0\ 0\ 0\ \dots$, $0\ 1\ 0\ 0\ \dots$, e $1\ 1\ 0\ 0\ \dots$

Em geral, para quaisquer k_1 e V , pode-se formalizar as definições de Δ_{inf} e Δ_{sup} , através das equações 3.2 e 3.4:

$$\Delta_{inf} = \min_{\{\mathbf{u}_1\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^s u_{1j} \mathbf{g}_{vj} + \sum_{j=s+1}^{k_1} u_{1j} \mathbf{g}_{(v-1)j} \right\| \right\} + \min_{\{\mathbf{u}_1\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{1j} \mathbf{g}_{0j} \right\| \right\} \quad (3.2)$$

onde $\{u_i\} \in \mathcal{U}$, sendo que os cosets $g_{0j} \in \Lambda/\Lambda'$ estão associados aos ramos que partem do estado S_0 e os demais, associados aos ramos que regressam a esse estado da treliça (fig.3.1). O parâmetro s da eq.3.2 é dado pela eq.3.3:

$$s = V - [k_1(v - 1)] \quad (3.3)$$

O limitante superior, neste trabalho, é definido a partir do conjunto dos caminhos fechados associados às sequências mínimas de entrada, ou seja:

$$\Delta_{sup} = \min_{\{u_i\}} \left\{ \sum_{i=0}^v \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{i,j} g_{ij} \right\| \right\}. \quad (3.4)$$

onde $g_{ij} = 0$ sempre que não existe a memória associada a tal coluna, sendo que o somatório interno refere-se à métrica de cada ramo do caminho considerado, enquanto que o somatório externo, determina a métrica do caminho.

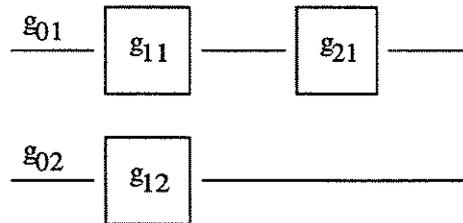


Figura 3.3: *Estrutura de um codificador convolucional com 2 entradas e 3 memórias.*

Exemplificando, considere o codificador convolucional (fig.3.3), com $k_1 = 2$ e $V = 3$.

A matriz geradora G , em sua forma genérica para este exemplo é dada por:

$$G = [g_{21} \mid g_{12} \ g_{11} \mid g_{02} \ g_{01}].$$

Para $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_2$, a eq.3.2 transforma-se em:

$$\Delta_{inf} = \min \left\{ \begin{array}{l} \|0.\mathbf{g}_{21} + 1.\mathbf{g}_{12}\|, \\ \|1.\mathbf{g}_{21} + 0.\mathbf{g}_{12}\|, \\ \|1.\mathbf{g}_{21} + 1.\mathbf{g}_{12}\| \end{array} \right\} + \min \left\{ \begin{array}{l} \|0.\mathbf{g}_{01} + 1.\mathbf{g}_{02}\|, \\ \|1.\mathbf{g}_{01} + 0.\mathbf{g}_{02}\|, \\ \|1.\mathbf{g}_{01} + 1.\mathbf{g}_{02}\| \end{array} \right\}$$

e a eq.3.4, para o mesmo esquema, transforma-se em:

$$\Delta_{sup} = \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^2 \|0.\mathbf{g}_{i1} + 1.\mathbf{g}_{i2}\|, \\ \sum_{i=0}^2 \|1.\mathbf{g}_{i1} + 0.\mathbf{g}_{i2}\|, \\ \sum_{i=0}^2 \|1.\mathbf{g}_{i1} + 1.\mathbf{g}_{i2}\| \end{array} \right\},$$

sendo $\mathbf{g}_{22} = 0$, neste caso.

3.3 SUBCONJUNTOS ESPECIAIS DE MATRIZES GERADORAS

Dados os parâmetros que compõem um código treliça, (k_1, k_2, V) (fig.2.6 - capítulo 2) e uma partição de reticulados Λ/Λ' , tem-se as matrizes geradoras de códigos convolucionais (eq.2.11 - capítulo 2):

$$G = [\mathbf{g}_{vk_1} \dots \mathbf{g}_{v1} | \dots | \mathbf{g}_{1k_1} \dots \mathbf{g}_{11} | \mathbf{g}_{0k_1} \dots \mathbf{g}_{01}].$$

Considere as normas dos cosets \mathbf{g}_{ij} ($i = 0, 1, \dots, v$; $j = 1, \dots, k_1$) da partição de reticulados e a matriz dada na eq.3.5:

$$GN = [\|\mathbf{g}_{vk_1}\| \dots \|\mathbf{g}_{v1}\| | \dots | \|\mathbf{g}_{0k_1}\| \dots \|\mathbf{g}_{01}\|]; \quad (3.5)$$

a qual é chamada de **matriz-norma**, introduzida em [29] (Apêndice A.2).

A matriz-norma GN possui um conjunto de matrizes geradoras associadas G, tais que as normas dos líderes de cosets contidos em suas colunas, são, respectivamente, as colunas da matriz-norma GN.

O conjunto de todas as matrizes geradoras, baseadas em uma determinada partição de

reticulados, pode ser dividido em subconjuntos disjuntos, sendo cada um associado a uma única matriz-norma GN.

As colunas da matriz GN podem ser escolhidas, de modo que possibilitem a maximização dos limitantes do d_{free} (eq.3.2 e 3.4), caracterizando assim, os melhores subconjuntos especiais (melhores valores de d_{free}). As escolhas de GN não são únicas, logo é fundamental a sistematização das mesmas, para que a busca dos códigos treliça ótimos, comece pelos melhores subconjuntos especiais e chegue até os piores, de modo econômico, ou seja, minimizando a quantidade de subconjuntos especiais a serem investigados na procura (capítulo 4).

Os procedimentos básicos para essa escolha eficaz das matrizes GN e portanto, dos subconjuntos especiais, foram inicialmente propostos em [27] (Apêndice A.1), sendo que, em seguida foram propostos novos procedimentos [26] (Apêndice A.3), que reforçam a idéia da sistematização dessa escolha, propondo a construção de uma tabela, chamada **Tabela Ordenada de Normas e Cosets** (fig.3.4 e fig.4.17 - capítulo 4).

Para que o Δ_{inf} seja maximizado é necessário escolher, para as k_1 primeiras e últimas colunas de GN, os blocos de normas $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$, que possibilitem os maiores valores da expressão (3.6):

$$\max_{\mathbf{g}_{ij} \in \Lambda/\Lambda'} \left\{ \min_{\{\mathbf{u}_i\} \neq \{0\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{ij} \mathbf{g}_{ij} \right\| \right\} \right\}, \quad (3.6)$$

sendo o mínimo tomado na expressão, considerando os elementos do conjunto \mathcal{U} (blocos de bits de entrada), e o máximo, calculado dentre todos os cosets distintos satisfazendo ao mesmo conjunto de normas, $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$.

A maximização do Δ_{sup} está associada, não somente às k_1 primeiras e últimas colunas de GN, mas também, às suas colunas intermediárias; as quais são compostas de blocos de k_1 colunas e/ou um bloco com s colunas (eq.3.3).

Desta forma, a tabela ordenada de normas e cosets é fundamental para que se procedam as escolhas adequadas da matriz-norma GN, passando a ser apresentada a seguir, juntamente

com um exemplo para a partição $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (fig.2.5 - capítulo 2), onde ($k_1 = 2, \mathcal{A} = \mathbb{Z}_2$).

Seja Λ/Λ' uma partição de reticulados dada, \mathcal{A} um alfabeto q -ário de dígitos de entradas e um codificador convolucional com k_1 entradas. Para exemplificar, seja $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$, partição apresentada na fig.2.5, a qual contém uma constelação de sinais composta de 32 pontos, mapeada a partir da partição, considerando-se a transformação linear θ , e uma tabela contendo: o rótulo do coset, o líder do mesmo e sua respectiva norma. Este rotulamento é o mesmo apresentado por Calderbank & Sloane [11].

O objetivo da tabela ordenada de normas e cosets é listar, com segurança, todos os conjuntos de k_1 normas, valorizando a ordem de precedência de cada conjunto, quanto ao valor da eq.3.6 (do maior para o menor). A organização da tabela está baseada em blocos de 5 colunas, sendo a primeira para a alocação do conjunto de k_1 normas.

Na coluna 2, colocam-se todas as possíveis combinações de k_1 líderes de cosets (uma em cada linha do bloco), cujas normas estejam alocadas na coluna 1. Por exemplo, na tabela da fig.3.4, no bloco 2 destacado, tem-se 4 linhas na coluna 2, isto se deve ao fato da partição (fig.2.5) possuir 2 cosets distintos com norma 2, perfazendo o total de 4 combinações possíveis.

Considerando-se cada combinação listada na coluna 2 e os k_1 dígitos de entradas possíveis de \mathcal{A} , constrói-se a terceira coluna da tabela. O valor da norma do coset dado pela eq.3.7,

$$\sum_{j=1}^{k_1} u_{ij}g_{ij} \quad (3.7)$$

é alocado na linha da combinação considerada e na posição referente à entrada utilizada. Exemplo: no bloco 2 da fig.3.4, tem-se as normas 2,2,0, na linha da combinação dos cosets (1,1) e (1,1), respectivamente às entradas (1,0), (0,1) e (1,1).

A quarta coluna é obtida ao se considerar o mínimo entre os valores de cada linha (eq.3.8), da coluna 3,

$$\min_{(\mathbf{u}_1) \neq (0)} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l_j} \mathbf{g}_{ij} \right\| \right\} \quad (3.8)$$

e a coluna 5, é obtida considerando-se o valor máximo, dentre aqueles da coluna 4, que é exatamente o valor da eq.3.6.

Os blocos referentes aos conjuntos de normas, $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$, que representam os mesmos valores em ordem reversa, são omitidos, pois representam repetição do bloco de linhas dado por $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$, exceto pela ordem de apresentação da terceira coluna.

Após a listagem de todos os blocos possíveis, procede-se uma ordenação decrescente dos blocos, quanto ao valor obtido na quinta coluna. Através desta ordenação, pode-se automatizar a determinação dos subconjuntos especiais, pois a escolha adequada das matrizes-norma GN, está associada aos primeiros blocos da tabela.

A primeira matriz-norma a ser escolhida é então, aquela que possui o primeiro bloco de normas, $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$, da tabela ordenada de normas e cosets, nas k_1 primeiras, e últimas, colunas, maximizando assim o Δ_{inf} . Nas colunas intermediárias, coloca-se o primeiro bloco de normas, repetido tantas vezes quanto se fizer necessário. Caso o número de colunas intermediárias na matriz GN não seja múltiplo de k_1 , retira-se as $k_1 - s$ (eq.3.3) menores normas do bloco, colocando-o para preencher as colunas intermediárias restantes.

Por exemplo, para um codificador com 3 memórias ($k_1 = 2$) e a tabela da fig.3.4, a primeira matriz-norma GN escolhida será:

$$GN = \left[\overbrace{4 \quad | \quad 2}^{k_1 \text{ primeiras}} \quad \underbrace{4}_{\text{intermediária}} \quad | \quad \overbrace{4 \quad 2}^{k_1 \text{ últimas}} \right].$$

Os procedimentos não descartam a possibilidade de que, o subconjunto especial possua matrizes geradoras de códigos catastróficos, e/ou códigos que não ocupem todos os cosets da partição considerada. Referente a GN acima, as matrizes G do subconjunto especial associado geram códigos treliça que escolhem apenas os cosets pares da partição. Esses códigos treliça não serão considerados neste trabalho, pois pode-se trocar a partição por

$k_1 = 2$	8 cosets	$A = GF(2)$		
$\{N_2, N_1\}$	Líderes dos Cosets	$(1,0), (0,1), (1,1)$	$\min \{ . \}$	eq. (3.5)
$\{4, 2\}$	$(0,2), (1,1)$	4 , 2 , 2	2	2
	$(0,2), (1,-1)$	4 , 2 , 2	2	
$\{2, 2\}$	$(1,1), (1,1)$	2 , 2 , 0	0	2
	$(1,1), (1,-1)$	2 , 2 , 4	2	
	$(1,-1), (1,1)$	2 , 2 , 4	2	
	$(1,-1), (1,-1)$	2 , 2 , 0	0	
$\{1, 1\}$	$(1,0), (1,0)$	1 , 1 , 4	1	1
	$(1,0), (0,1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(1,0), (-1,0)$	1 , 1 , 0	0	
	$(1,0), (0,-1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,1), (1,0)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,1), (0,1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,1), (-1,0)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,1), (0,-1)$	1 , 1 , 0	0	
	$(-1,0), (1,0)$	1 , 1 , 0	0	
	$(-1,0), (0,1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(-1,0), (-1,0)$	1 , 1 , 4	1	
	$(-1,0), (0,-1)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,-1), (1,0)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,-1), (0,1)$	1 , 1 , 4	1	
	$(0,-1), (-1,0)$	1 , 1 , 2	1	
	$(0,-1), (0,-1)$	1 , 1 , 4	1	
$\{4, 1\}$	$(0,2), (0,1)$	4 , 1 , 1	1	1
	$(0,2), (1,0)$	4 , 1 , 1	1	
	$(0,2), (0,-1)$	4 , 1 , 1	1	
	$(0,2), (-1,0)$	4 , 1 , 1	1	
$\{2, 1\}$	$(1,1), (1,0)$	2 , 1 , 1	1	1
	$(1,1), (0,1)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,1), (-1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,1), (0,-1)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,-1), (1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,-1), (0,1)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,-1), (-1,0)$	2 , 1 , 1	1	
	$(1,-1), (0,-1)$	2 , 1 , 1	1	
$\{0, 1\}$	$(0,0), (0,1)$	0 , 1 , 0	0	0
	$(0,0), (1,0)$	0 , 1 , 0	0	
	$(0,0), (0,-1)$	0 , 1 , 0	0	
	$(0,0), (-1,0)$	0 , 1 , 0	0	
$\{4, 4\}$	$(0,2), (0,2)$	4 , 4 , 0	0	0
$\{0, 0\}$	$(0,0), (0,0)$	0 , 0 , 0	0	0

←
BLOCO 2

Figura 3.4: Tabela de Cosets e Normas com a partição $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 cosets).

uma com menos cosets. Desta maneira, esta é descartada, fazendo-se uma nova escolha de GN. As novas matrizes norma são obtidas através da troca de normas, primeiramente das colunas intermediárias, de acordo com os blocos subsequentes da tabela ordenada de normas e cosets. Logo, a próxima GN a ser escolhida é:

$$GN = [4 \mid 2 \ 2 \mid 4 \ 2],$$

que também escolhe apenas os cosets pares, pois, para obter-se todos os cosets na saída do codificador, é necessário neste caso, cuja partição possui 8 cosets, pelo menos uma coluna com norma ímpar.

Assim a nova matriz-norma escolhida será:

$$GN = [4 \mid 2 \ 1 \mid 4 \ 2].$$

Caso seja necessário novas escolhas para GN, primeiro esgota-se as possibilidades de trocas para as colunas intermediárias, considerando-se também os conjuntos de normas $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$, nas demais ordens possíveis; procedendo-se, logo após, a troca das primeiras e/ou últimas colunas, conforme apresentado no Algoritmo de Procura Exaustiva de Códigos Treliza Ótimos, na seção 4.2 do capítulo 4.

3.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS DE SUBCONJUNTOS ESPECIAIS:

Nos dois exemplos a serem apresentados, considera-se um codificador convolucional com $k_1 = 2$, e a partição $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ da fig.2.5 (capítulo 2). O objetivo desses exemplos é uma maior familiaridade com os subconjuntos especiais, sendo que diferenças entre esquemas com 3 e 4 memórias, serão destacadas.

Propriedades de partições de reticulados (capítulo 2), mostram que o líder de coset considerado não altera o cálculo do coset de saída r , pois são observadas as características do mapeamento. Por exemplo, considere os pares (1,-1) e (1,3), líderes diferentes para o coset 2, e o par (1,1), líder do coset 0. Calculando a soma entre os cosets 0 e 2 obtem-se:

a) $(1, 1) + (1, -1) = (1, 0)$, que representa o coset 4;

b) $(1, 1) + (1, 3) = (1, 4) \cong (1, 0)$, utilizando-se a congruência módulo 4.

Para um código convolucional com 3 memórias (fig.3.3), a matriz geradora é dada pela expressão:

$$G = [\mathbf{g}_{21} \mid \mathbf{g}_{12} \ \mathbf{g}_{11} \mid \mathbf{g}_{02} \ \mathbf{g}_{01}],$$

pois as duas últimas colunas referem-se as entradas do codificador, e as demais estão associadas às memórias.

Considerando a seguinte matriz norma, $GN = [4 \mid 2 \ 1 \mid 4 \ 2]$, tem-se que, o subconjunto especial associado a ela possui 16 matrizes geradoras. Pois, como mostra a tabela da fig.2.5, a partição conta com: 1 coset de norma 4, 2 de norma 2 e 4 de norma 1. A seguir, são listadas as matrizes geradoras do subconjunto:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad G_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad G_9 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad G_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad G_{15} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{16} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para a matriz geradora G_1 , e as equações 3.2 e 3.4, obtem-se os seguintes valores dos limitantes do d_{free} :

$$\begin{aligned} \Delta_{inf} &= \min\{\|0.(0, 1) + 1.(2, 0)\|, \|1.(0, 1) + 0.(2, 0)\|, \|1.(0, 1) + 1.(2, 0)\|\} + \\ &\quad + \min\{\|0.(1, 1) + 1.(2, 0)\|, \|1.(1, 1) + 0.(2, 0)\|, \|1.(1, 1) + 1.(2, 0)\|\} = \\ &= \min\{4, 2, 2\} + \min\{2, 4, 2\} = 2 + 2 = 4; \\ \Delta_{sup} &= \min \left\{ \begin{array}{l} \|0.(1, 1) + 1.(2, 0)\| + \|0.(0, 1) + 1.(1, 1)\| + \|0.(2, 0)\|, \\ \|1.(1, 1) + 0.(2, 0)\| + \|1.(0, 1) + 0.(1, 1)\| + \|1.(2, 0)\|, \\ \|1.(1, 1) + 1.(2, 0)\| + \|1.(0, 1) + 1.(1, 1)\| + \|1.(2, 0)\|, \end{array} \right\} = \\ &= \min\{6, 7, 7\} = 6. \end{aligned}$$

Neste trabalho, o cálculo do d_{free} utiliza o Algoritmo de Viterbi [33], sendo que $d_{free} = 5$ para a matriz G_1 . Considerando-se as outras 15 matrizes geradoras G e refazendo-se os cálculos, para cada uma delas, obtem-se sempre os mesmos valores, $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = 6$. Este fato não é verificado para quaisquer parâmetros dados, como mostra o próximo exemplo.

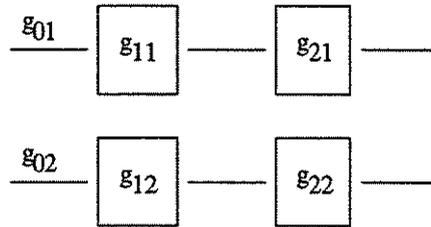


Figura 3.5: Associação dos líderes de cosets com a estrutura de um codificador convolucional de 2 entradas e 3 memórias

Seja agora, um codificador convolucional com 4 memórias, ilustrado na fig.3.5, cuja matriz geradora G é dada pela eq.2.11 (capítulo 2):

$$G = [g_{22} \ g_{21} \mid g_{12} \ g_{11} \mid g_{02} \ g_{01}].$$

Para a matriz-norma

$$GN = [4 \ 2 \mid 1 \ 1 \mid 2 \ 4],$$

o subconjunto especial associado, possui 64 matrizes geradoras. Utilizaremos apenas 3 matrizes para mostrar que, em um mesmo subconjunto especial, pode-se obter diferentes valores para os limitantes do d_{free} .

A) Matriz geradora $G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$

para a qual tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta_{inf} &= \min \left\{ \begin{array}{l} \|0 \cdot g_{21} + 1 \cdot g_{12}\|, \\ \|1 \cdot g_{21} + 0 \cdot g_{12}\|, \\ \|1 \cdot g_{21} + 1 \cdot g_{12}\| \end{array} \right\} + \min \left\{ \begin{array}{l} \|0 \cdot g_{01} + 1 \cdot g_{02}\|, \\ \|1 \cdot g_{01} + 0 \cdot g_{02}\|, \\ \|1 \cdot g_{01} + 1 \cdot g_{02}\| \end{array} \right\} = \\ &= \min\{2, 4, 2\} + \min\{2, 4, 2\} = 4; \end{aligned}$$

$$\Delta_{sup} = \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^2 \|0 \cdot g_{i1} + 1 \cdot g_{i2}\|, \\ \sum_{i=0}^2 \|1 \cdot g_{i1} + 0 \cdot g_{i2}\|, \\ \sum_{i=0}^2 \|1 \cdot g_{i1} + 1 \cdot g_{i2}\| \end{array} \right\} = \min\{2 + 1 + 4, 4 + 1 + 2, 2 + 4 + 2\} = 7.$$

Ativando o algoritmo do cálculo do d_{free} para o código treliça gerado por G_1 , obtém-se $d_{free} = 6$.

$$\text{B) Matriz geradora } G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\Delta_{inf} = 4$, pois os cosets representados nas duas primeiras, e últimas, colunas não foram alterados.

A mudança realizada nas colunas intermediárias, resulta num valor diferente para o $\Delta_{sup}(G_2) = \min\{2 + 1 + 4, 4 + 1 + 2, 2 + 2 + 2\} = 6$. Visto que o d_{free} é sempre menor, ou igual, ao Δ_{sup} , este não poderá exceder o valor 6; assim não excederá o valor do d_{free} do código treliça gerado por G_1 .

Ressalta-se que, no Algoritmo de procura de Códigos Treliça Ótimos (capítulo 4), tal matriz é descartada, sem que o cálculo do d_{free} seja ativado, pois seu valor não excederá o d_{free} obtido para a matriz geradora G_1 .

$$\text{C) Matriz geradora } G_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\Delta_{inf} = 4$, e $\Delta_{sup} = \min\{2 + 1 + 4, 4 + 1 + 2, 2 + 0 + 2\} = 4$.

Pela definição dos limitantes do d_{free} tem-se que $\Delta_{inf} \leq d_{free} \leq \Delta_{sup}$, para qualquer código treliça considerado, logo, neste caso, o valor do d_{free} é 4. Ressalta-se que este é o menor valor possível para o d_{free} , dentro deste subconjunto especial.

3.5 CONCLUSÃO

Neste capítulo, foram propostos e apresentados, com grande nível de detalhes, nas seções 3.2 e 3.3, os conceitos de: subconjuntos especiais de matrizes geradoras G , sendo determinados os “melhores” subconjuntos (baseados nos limitantes Δ_{inf} e Δ_{sup}), matriz-norma GN e tabela ordenada de normas e cosets, associados à esquemas de modulação codificada, considerando

os parâmetros (k_1, V, q) e a partição de reticulados Λ/Λ' . Esses conceitos foram abordados nos artigos [[27],[29],[26]], que encontram-se nos Apêndices A.1, A.2 e A.3.

Na seção 3.3 apresenta-se um exemplo numérico, mostrando-se a construção da tabela ordenada de normas e cosets, fundamental na sistematização da escolha das matrizes norma GN e conseqüentemente, dos respectivos subconjuntos especiais; um segundo exemplo, da tabela ordenada de normas e cosets, está apresentado em [28] (Apêndice A.4), considerando-se a partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 cosets), o anel finito \mathbb{Z}_4 como alfabeto de dígitos de entrada e codificadores convolucionais com uma entrada ($k_1 = 1$); e um outro exemplo, está apresentado em [30] (Apêndice A.5), utilizando-se a partição de 27 cosets ($\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$), o corpo finito \mathbb{Z}_3 e $k_1 = 1$, sendo $\Gamma = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

A seção 3.4 traz exemplos numéricos, de subconjuntos especiais de matrizes geradoras, cuja finalidade está em proporcionar familiaridade com o conceito, bem como ressaltar diferenças interessantes, ao considerar-se codificadores convolucionais com 3 e 4 memórias, e 2 entradas; evidenciando assim, a importância dos limitantes, Δ_{inf} e Δ_{sup} , do d_{free} .

A utilização dos conceitos de subconjuntos especiais, apresentados neste capítulo, são essenciais na otimização da procura dos códigos treliça ótimos, a qual é apresentada em forma de algoritmo no capítulo 4.

Capítulo 4

ALGORITMO DE PROCURA EXAUSTIVA DE CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS

4.1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste capítulo é a apresentação de um algoritmo de procura exaustiva eficiente, de códigos treliça ótimos, em cuja estrutura (fig.2.6 - capítulo 2) estão envolvidos, o codificador convolucional e a partição de reticulados.

A seção 4.3 apresenta o algoritmo, que representa a sistematização da procura exaustiva proposta neste trabalho, sendo considerados todos os subconjuntos especiais, possíveis à um esquema, dado pelos parâmetros (k_1, V, q) e a partição de reticulados Λ/Λ' .

A procura dos códigos treliça ótimos, tem início com a determinação das matrizes norma G_N e seus respectivos subconjuntos especiais de matrizes geradoras G (seção 4.3.1 - fase inicial), realizada a partir dos conceitos e procedimentos apresentados no capítulo 3. Escolhida a matriz norma G_N e portanto, um subconjunto especial a ser investigado, busca-se nele, os melhores códigos treliça.

A sistematização dessa fase da procura, dentro de um subconjunto especial, está apresentada em forma de algoritmo na seção 4.2. O algoritmo possui dois momentos cruciais para o descarte de matrizes geradoras G , sem que haja o acionamento do algoritmo de

determinação do d_{free} de forma desnecessária. São eles:

a) um teste de catastrofidade, visto que neste trabalho, deseja-se somente códigos treliça ótimos não catastróficos; juntamente com um teste que verifica a determinação de todos os cosets da partição dada (seção 4.2.1);

b) um teste comparativo, entre o valor obtido para o Δ_{sup} de uma matriz G e o valor do d_{free} previamente obtido (seção 4.2.2).

Ressalta-se, que a formalização do Δ_{sup} pode ser simples (ex: apenas um caminho fechado da treliça) ou mais complexa (ex: eq.3.4, capítulo 3). Porém as formulações alteram a eficiência desse parâmetro, no teste (b) mencionado, conforme mostra a discussão apresentada em [27] (Apêndice A.1).

A procura de códigos treliça ótimos encerra-se, quando restarem apenas os “piores” subconjuntos especiais de matrizes geradoras G , para serem investigados, ou seja, quando $\Delta_{sup}(GN) \leq d_{free}$ já obtido, para quaisquer das matrizes norma GN restantes. O algoritmo apresenta o valor máximo possível para a distância mínima quadrática d de um código treliça no esquema considerado e suas respectivas matrizes G e GN .

A distância mínima de um código treliça $d = \min\{d_{free}, d_2\}$ (eq.2.13 - capítulo 2), é limitada pela distância euclidiana quadrática mínima, d_2 , entre dois sinais pertencentes ao mesmo coset, da partição do reticulado. Visando-se o aumento da distância d , propõe-se partições com maior número de cosets, as quais são apresentadas na seção 4.4.

A seção 4.5 apresenta exemplos numéricos, detalhando o funcionamento do algoritmo de procura proposto na seção 4.3, utilizando-se diferentes esquemas q -ários.

Com a implementação do algoritmo de procura proposto, obteve-se novos códigos treliça ótimos [[26],[28]] (Apêncices A.3 e A.4). Tais códigos estão apresentados na seção 4.6, através de uma divisão em subseções, a qual considera o anel q -ário de dígitos de entrada com $q = 2, 3$ e 4 .

4.2 ALGORITMO DE PROCURA DOS MELHORES CÓDIGOS TRELIÇA DENTRO DE UM SUBCONJUNTO ESPECIAL

Considere um subconjunto especial representado pela matriz norma GN, determinada segundo os procedimentos propostos na seção 3.3 (capítulo 3). O algoritmo proposto nesta seção, tem como objetivo, selecionar um código convolucional, cujo valor do d_{free} seja o maior, dentre todos os códigos, do subconjunto especial considerado. Ressalta-se, que o código selecionado não é catastrófico e determina todos os cosets da partição de reticulados, na saída do codificador convolucional.

A figura 4.1 apresenta o fluxograma do algoritmo, cujos principais passos são apresentados detalhadamente nas seções 4.2.1 à 4.2.3.

4.2.1 FASE INICIAL

Nesta fase estão incluídas, a primeira escolha de uma matriz G, realizada a partir da Tabela Ordenada de Normas e Cosets (seção 3.3, capítulo 3) e a realização do teste de catastrofidade do código treliça gerado por G, bem como a verificação da utilização de todos os cosets da partição. O teste e a verificação, podem resultar no descarte imediato, ou não, da matriz G. Caso a matriz seja descartada procede-se uma nova escolha de matrizes geradoras (caso exista), refazendo-se os testes. Se porém, a matriz G não é descartada prontamente, passa-se ao próximo passo do algoritmo.

4.2.2 VERIFICAÇÕES SIMPLES ENVOLVENDO Δ_{sup} E d_{free}

Determina-se o valor do Δ_{sup} para a matriz geradora G, utilizando a eq.3.4. Este valor é comparado com o d_{free} já obtido, cujo valor, ou é igual ao do Δ_{inf} do primeiro subconjunto especial a ser analisado, ou é o maior d_{free} já obtido, dentre os subconjuntos especiais investigados anteriormente.

Se $\Delta_{sup}(G) > d_{free}$, aciona-se a determinação do d_{free} para o código gerado por essa

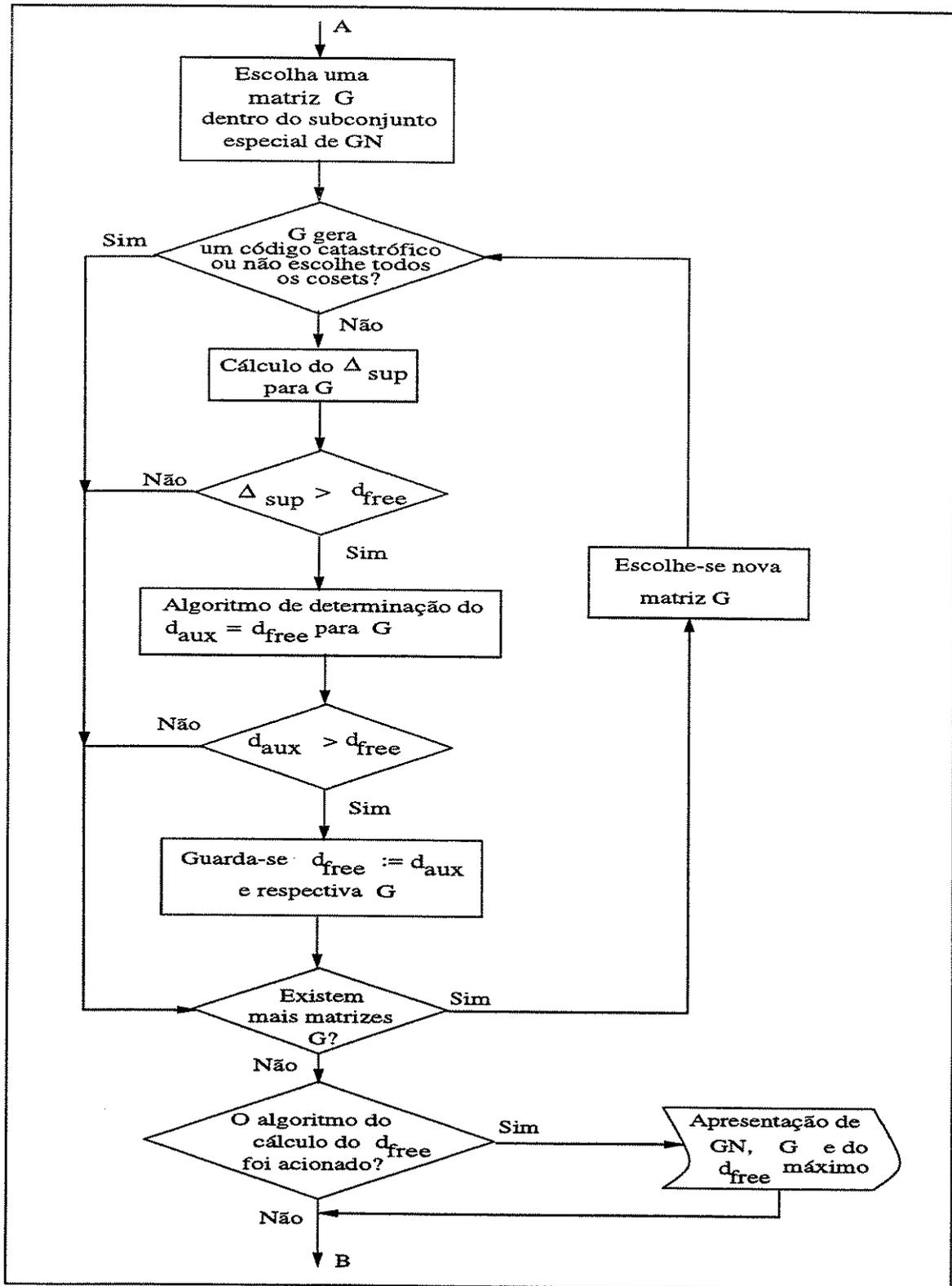


Figura 4.1: Fluxograma da Procura dos Melhores Códigos em um Subconjunto Especial

matriz G . Pode-se, exemplo, utilizar o Algoritmo de Viterbi [[14],[30]] para isso. Sempre que o valor do novo d_{free} determinado é superior ao anteriormente obtido, guarda-se o maior valor, na variável d_{free} , assim como, armazena-se as respectivas matrizes G e GN . O prosseguimento do algoritmo é determinado por uma nova escolha para a matriz geradora G , caso seja possível, refazendo-se, em seguida, os testes mencionados na fase inicial.

Caso contrário ($\Delta_{sup}(G) \leq d_{free}$), descarta-se a matriz geradora G e prossegue-se o algoritmo, com uma nova G , se existir essa possibilidade.

A determinação do Δ_{sup} é fundamental nesse algoritmo, tendo em vista que seu cálculo (eq.3.4) é muito menos complexo do que a determinação do d_{free} dos códigos convolucionais envolvidos, pois o mesmo envolve apenas um conjunto finito de caminhos. Desta maneira a determinação do d_{free} deixará de ser efetuada para os códigos “ruins”, isto é, cujo limitante superior é menor, ou igual, ao d_{free} obtido no decorrer do algoritmo.

4.2.3 FINAL DO ALGORITMO: APRESENTAÇÃO DE UM CÓDIGO COM d_{free} MÁXIMO

O código gerado pela matriz G armazenada, pode ser um código treliça ótimo do esquema considerado, caso o algoritmo de determinação do d_{free} tenha sido acionado, ao menos uma vez, com efetiva armazenagem de uma nova matriz geradora G , visto que é um dos melhores códigos desse subconjunto especial. Se o acionamento da determinação do d_{free} não foi realizado, o código treliça ótimo está em outro subconjunto especial.

Ressalta-se que o algoritmo é exaustivo, quanto a escolha das matrizes geradoras G , porém não o é, quanto a utilização do algoritmo de determinação do d_{free} ; pois o mesmo, somente é acionado nos casos em que $\Delta_{sup} > d_{free}$ anteriormente obtido, sendo portanto, restrito à uma fração (pequena) de matrizes geradoras G de “bons” códigos treliça.

4.3 ALGORITMO DE PROCURA DE CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS

A figura 4.2 apresenta o fluxograma do algoritmo de procura de códigos ótimos, o qual é uma evolução das versões apresentadas em [[26],[28],[30]] (Apêndices A.3, A.4 e A.5).

Os detalhes do algoritmo estão apresentados em subseções, sendo a primeira (fase inicial) neste caso, processada apenas uma vez.

4.3.1 FASE INICIAL: TABELA ORDENADA DE NORMAS E COSETS E ESCOLHA DE UMA GN

A partir da partição Λ/Λ' e da tabela de líderes de cosets e normas correspondentes (ex.: fig. 2.5 - capítulo 2)), constrói-se a tabela ordenada de normas e cosets (ex.: fig. 3.4), considerando-se os conjuntos de normas $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$.

Em seguida, coloca-se nas k_1 primeiras e últimas colunas de GN, o primeiro conjunto de normas da tabela ordenada e nas colunas intermediárias de GN, também, tantas vezes quanto fizer-se necessário. Se não for possível colocar-se o conjunto todo (se o número de colunas intermediárias não é múltiplo de k_1) retira-se do conjunto de normas, as $(k_1 - s)$ menores (eq.3.3), obtendo-se o número exato de colunas intermediárias restantes.

4.3.2 CÁLCULO DOS VALORES MÁXIMOS DE Δ_{inf} E Δ_{sup} PARA GN

Baseando-se na possibilidade de matrizes geradoras G de um mesmo subconjunto especial possuírem diferentes valores para o Δ_{inf} e Δ_{sup} , (seção 3.4 - capítulo 3), é importante o cálculo dos valores máximos assumidos pelos referido limitantes do d_{free} , dentro do subconjunto especial escolhido.

Neste cálculos, pode-se utilizar a Tabela Ordenada de Normas e Cosets:

- a) para determinar o valor máximo do Δ_{inf} : considera-se a soma dos valores obtidos na última coluna da tabela, dos blocos referentes às k_1 primeira e últimas colunas de GN;
- b) para o valor máximo do Δ_{sup} : utiliza-se a coluna 3 da tabela. Para cada um dos blocos de k_1 normas (iniciando-se pelas últimas colunas de GN e fazendo $g_{vj} = 0$, para

$j = s + 1, \dots, k_1$ (eq.3.3 - capítulo 3)), toma-se o maior valor (considerando todas as linhas) referente ao primeiro elemento $\{u_i\} \in \mathcal{U}$ (eq.3.1 - capítulo 3) de dígitos de entrada. O somatório desses valores obtidos é reservado. Procede-se da mesma forma, para os demais elementos de \mathcal{U} ; sendo que o menor valor dentre todos é o valor máximo do Δ_{sup} para a GN escolhida.

Por exemplo: para os parâmetros $k_1 = 2, V = 4, q = 2, \Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$, seja o subconjunto especial associado à

$$GN = [\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 1 \\ & & 2 & 2 \end{array}].$$

Obtem-se que: $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$, pois os blocos envolvidos são os dois primeiros da tabela (fig.3.4 - capítulo 3) e

$$\begin{aligned} \Delta_{sup} &= \min\{(2 + 1 + 4), (2 + 1 + 2), (4 + 4 + 2)\} \\ &= \min\{7, 5, 10\} = 5. \end{aligned}$$

tendo em vista, que neste cálculo estão envolvidos os três primeiros blocos $\{(4, 2); (2, 2); (1, 1)\}$ da referida tabela.

Ressalta-se que o algoritmo de procura dos melhores códigos treliça dentro de um subconjunto especial (seção 4.2), somente será utilizado para os subconjuntos especiais, tais que o Δ_{sup} máximo para GN é superior ao d_{free} anteriormente obtido. Desta forma, está se descartando imediatamente todos os subconjuntos de matrizes geradoras G , com d_{free} menores, sem a necessidade da determinação de seus valores.

4.3.3 NOVA ESCOLHA DE GN

Nesta fase, apenas uma das etapas abaixo é realizada, conforme a existência de novas possibilidades de escolha, sendo observada a ordem de precedência.

a) Se for possível, substitui-se as colunas intermediárias da GN anterior, por nova escolha do conjunto de normas, sempre observando-se a ordem subsequente dos conjuntos segun-

do a tabela ordenada de normas e cosets, utilizando inclusive, as outras ordens possíveis dos conjuntos $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$ (ex: $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$). Escolhida uma nova GN, retorna-se à subseção 4.3.2. Caso contrário, segue-se para a etapa(b).

b) Se for possível, troca-se o conjunto de normas que compõem as k_1 últimas colunas de GN, utilizando o próximo bloco de normas da tabela ordenada. Para as colunas intermediárias, retoma-se a primeira combinação utilizada, voltando, a seguir para a subseção 4.3.2. Caso contrário, segue-se para a etapa(c).

c) Troca-se o conjunto de normas que compõe o primeiro bloco de k_1 colunas de GN, retoma-se a primeira combinação de normas utilizada para as demais colunas, voltando, a seguir à subseção 4.3.2.

4.3.4 FINAL DO ALGORITMO: APRESENTAÇÃO DE UM CÓDIGO TRELIÇA ÓTIMO

A determinação do código ótimo e do d_{free} máximo para um dado conjunto de parâmetros, (k_1, V, q) e partição de reticulados Λ/Λ' , é obtida ao esgotar-se as possibilidades de novas escolhas para GN, isto é, o algoritmo sempre determina um código treliça ótimo.

Ressalta-se que a procura de códigos ótimos realizada é exaustiva, quanto à escolha das matrizes-norma GN e das matrizes geradoras G, ou seja, procura-se de maneira eficiente, em todos os subconjuntos especiais cuja probabilidade de conter um código ótimo seja grande, sendo necessária a determinação do d_{free} , para uma fração mínima de matrizes geradoras G.

4.4 PARTIÇÕES DE RETICULADOS E TABELAS DE COSETS

A distância mínima, d , dos códigos treliça, é limitada, conforme mostra a eq.2.13 (capítulo 2), pela distância euclidiana mínima quadrática d_2 , a qual está, por sua vez, diretamente ligada ao número de cosets da partição de reticulados considerada.

Visando-se esquemas que possibilitem, maiores valores para d , construiu-se partições

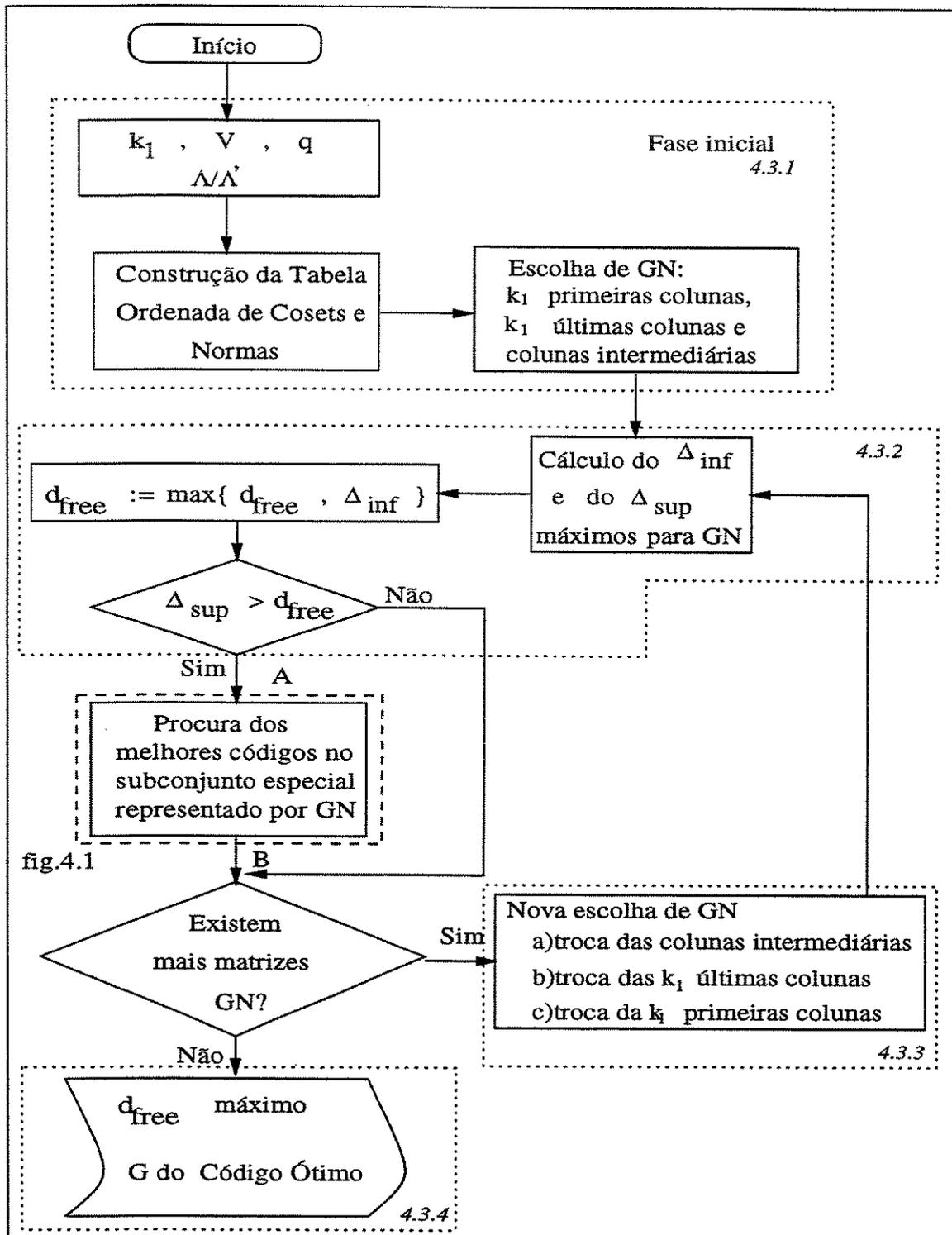


Figura 4.2: Fluxograma do Algoritmo de Procura de Códigos Ótimos Q-ários

com maior número de cosets, baseando-se na construção das partições de reticulados apresentadas, resumidamente em [11], e em detalhes no capítulo 2 (partição $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$) e nesta seção (partições $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ e $\mathcal{A}_2/3\mathcal{A}_2$). As novas partições construídas, estão igualmente, apresentadas detalhadamente, nesta seção.

Todas as partições apresentadas nesta seção, derivam-se dos reticulados \mathbb{Z}^2 e \mathcal{A}_2 , e fazem parte dos esquemas utilizados nas seções 4.5 e 4.6.

4.4.1 PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 COSETS):

Para obter-se a partição com 16 cosets, considera-se o reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ e o subreticulado $\Lambda' = 4\mathbb{Z}^2$ [11], isto é,

$$(x, y) \in \Lambda' \iff \exists(x_1, y_1) \in \mathbb{Z}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4I_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

A fig.4.3 apresenta constelações de 16, 32 e 64 sinais, mapeadas por tal partição; apresentando também, uma tabela contendo: o rótulo, a norma e um líder, de cada coset distinto da partição.

Quanto à quantidade de cosets por norma, a partição possui um coset de norma nula e um de norma 8 (norma máxima da partição). Possui ainda, 2 cosets com norma 4 e 4 para cada uma das seguintes normas: 1, 2 e 5.

A partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ possui distância $d_2 = 16$.

4.4.2 PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ (32 COSETS):

Neste caso, o sub-reticulado considerado é $\Lambda' = \Phi\mathbb{Z}^2$, o qual é determinado ao aplicar-se a transformação linear, Φ , ao reticulado \mathbb{Z}^2 , sendo:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

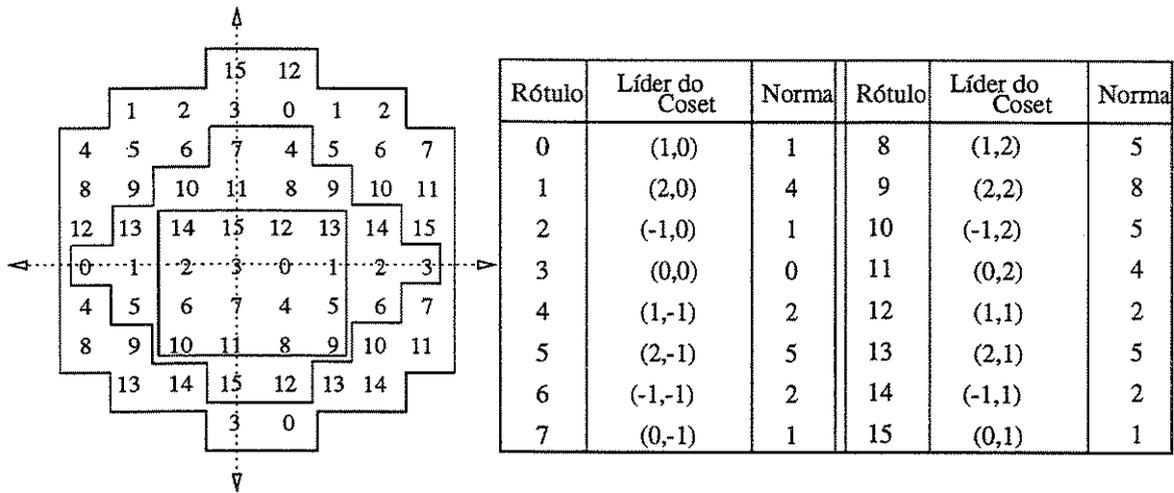


Figura 4.3: Partição de reticulados $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 cosets)[11].

A fig.4.4 mostra constelações com 32 e 64 sinais, sendo que o mapeamento proporciona $d_2 = 32$.

Os cosets da partição possuem norma inferior à 16, exceto o coset 1, conforme mostra a tabela da fig.4.5. A quantidade de cosets, por norma distinta da partição, está apresentada na tabela da fig.4.6.

4.4.3 PARTIÇÃO $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$ (64 COSETS):

Para obter-se a partição com 64 cosets, considera-se $\Lambda' = 8I_2\mathbb{Z}^2 = 8\mathbb{Z}^2$, como subreticulado de \mathbb{Z}^2 .

O rotulamento, bem como, os líderes e normas, dos cosets da partição estão apresentados na fig.4.7. As constelações marcadas na fig.4.8 possuem 64, 128 e 256 sinais, respectivamente.

A tabela da fig.4.9, mostra a quantidade de cosets para cada norma diferente, da partição. Tem-se que $d_2 = 64$.

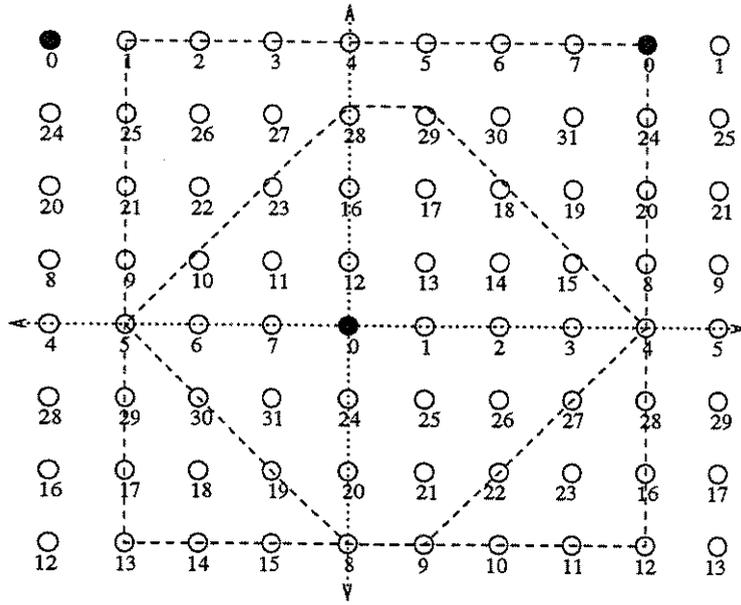


Figura 4.4: Partição de reticulados $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ (32 cosets).

Rótulo	Líder de Coset	Norma	Rótulo	Líder de Coset	Norma
0	(0,0)	0	16	(0,2)	4
1	(1,0)	1	17	(1,2)	5
2	(2,0)	4	18	(2,2)	8
3	(3,0)	9	19	(3,2)	5
4	(4,0)	16	20	(4,2)	4
5	(5,0)	9	21	(5,2)	5
6	(6,0)	4	22	(6,2)	8
7	(7,0)	1	23	(7,2)	5
8	(5,0)	9	24	(4,4)	1
9	(1,5)	10	25	(5,4)	2
10	(2,5)	5	26	(6,4)	5
11	(3,5)	2	27	(7,4)	10
12	(4,5)	1	28	(0,4)	9
13	(5,5)	2	29	(1,4)	10
14	(6,5)	5	30	(2,4)	5
15	(7,5)	10	31	(3,4)	2

Figura 4.5: Tabela de cosets da partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ (32 cosets).

Quantidade de Cosets	Norma	Rótulo dos Cosets
1	16	4
4	10	9, 15, 27, 29
4	9	3, 5, 8, 28
2	8	18, 22
8	5	10, 14, 17, 19, 21, 23, 26, 30
4	4	2, 6, 16, 20
4	2	11, 13, 25, 31
4	1	1, 7, 12, 24
1	0	0

Figura 4.6: Tabela com a quantidade de cosets para cada norma da partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$.

Rótulo	Líder de Coset	Norma									
0	(0,0)	0	16	(0,6)	4	32	(0,4)	16	48	(0,2)	4
1	(1,0)	1	17	(1,6)	5	33	(1,4)	17	49	(1,2)	5
2	(2,0)	4	18	(2,6)	8	34	(2,4)	20	50	(2,2)	8
3	(3,0)	9	19	(3,6)	13	35	(3,4)	25	51	(3,2)	13
4	(4,0)	16	20	(4,6)	20	36	(4,4)	32	52	(4,2)	20
5	(5,0)	9	21	(5,6)	13	37	(5,4)	25	53	(5,2)	13
6	(6,0)	4	22	(6,6)	8	38	(6,4)	20	54	(6,2)	8
7	(7,0)	1	23	(7,6)	5	39	(7,4)	17	55	(7,2)	5
8	(0,7)	1	24	(0,5)	9	40	(0,3)	9	56	(0,1)	1
9	(1,7)	2	25	(1,5)	10	41	(1,3)	10	57	(1,1)	2
10	(2,7)	5	26	(2,5)	13	42	(2,3)	13	58	(2,1)	5
11	(3,7)	10	27	(3,5)	18	43	(3,3)	18	59	(3,1)	10
12	(4,7)	17	28	(4,5)	25	44	(4,3)	25	60	(4,1)	17
13	(5,7)	10	29	(5,5)	18	45	(5,3)	18	61	(5,1)	10
14	(6,7)	5	30	(6,5)	13	46	(6,3)	13	62	(6,1)	5
15	(7,7)	2	31	(7,5)	10	47	(7,3)	10	63	(7,1)	2

Figura 4.7: Tabela de cosets da partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$ (64 cosets).

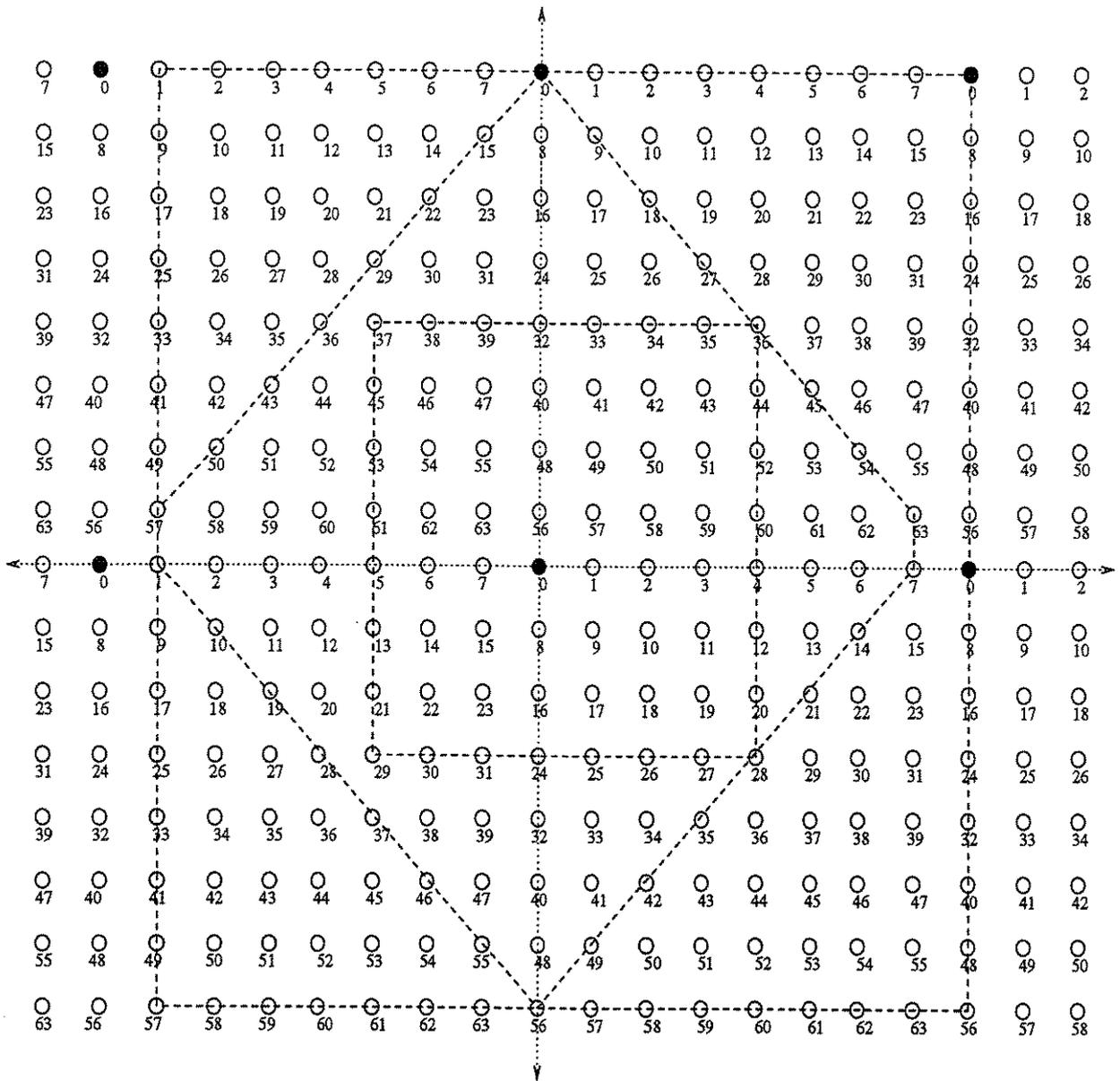


Figura 4.8: Partição de reticulados $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$ (64 cosets).

Quantidade de Cosets	Norma	Rótulo dos Cosets
1	32	36
4	25	28, 35, 37, 44
4	20	20, 34, 38, 52
4	18	27, 29, 43, 45
4	17	12, 33, 39, 60
2	16	4, 32
8	13	19, 21, 26, 30, 42, 46, 51, 53
6	10	11, 13, 25, 31, 47, 59
4	9	3, 5, 24, 40
4	8	18, 22, 50, 54
1	5	10, 14, 17, 23, 49, 55, 58, 62
4	4	2, 6, 16, 48
4	2	9, 15, 57, 63
2	1	1, 7, 8, 56
1	0	0

Figura 4.9: Tabela com a quantidade de cosets para cada norma da partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$.

4.4.4 PARTIÇÃO $\mathcal{A}_2/3\mathcal{A}_2$ (9 COSETS):

A partição apresentada nesta subsecção, considera o reticulado $\Lambda = \mathcal{A}_2$, o qual é obtido de \mathbb{Z}^2 , através da transformação linear dada pela eq.4.2:

$$(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2 \iff \left(\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2, \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_2\right) \in \mathcal{A}_2. \quad (4.2)$$

O ponto $(\xi_1, \xi_2) = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$, é levado ao ponto $(1 - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \in \mathcal{A}_2$, cuja norma é $\|(\xi_1, \xi_2)\| = \|(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})\| = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Da mesma forma, os pontos da primeira coluna da tabela da fig.4.10, são transformados nos pontos da segunda coluna, respectivamente. Como o conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 0); (0, 1)\}$ é base para o reticulado \mathbb{Z}^2 , tem-se portanto, no conjunto das imagens de \mathcal{B} , pela transformação linear dada, uma base para o reticulado \mathcal{A}_2 , isto é, $T(\mathcal{B}) = \{(1, 0); (\frac{-1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})\}$. Portanto, a transformação linear altera o ângulo entre os dois vetores da base, de 90° para 120° , conforme mostra a fig.4.11.

Ponto de \mathbb{Z}^2	Ponto de \mathcal{A}_2	Norma
(1, 0)	(1, 0)	1
(0, 1)	(-1 / 2 , $\sqrt{3} / 2$)	1
(1, 1)	(1 / 2 , $\sqrt{3} / 2$)	1
(1, -1)	(3 / 2 , - $\sqrt{3} / 2$)	3
(-1, 1)	(- 3 / 2 , $\sqrt{3} / 2$)	3
(-1, -1)	(1 / 2 , - $\sqrt{3} / 2$)	1
(-1, 0)	(-1, 0)	1
(0, -1)	(1 / 2 , - $\sqrt{3} / 2$)	1

Figura 4.10: Tabela da transformação linear entre os reticulados \mathbb{Z}^2 e \mathcal{A}_2 .

Considerando o subreticulado $\Lambda' = 3\mathcal{A}_2 = 3I_2\mathcal{A}_2$, a fig.4.12 apresenta as constelações de 9, 27, 81 e 243 sinais, e também a tabela dos cosets do mapeamento [11]. Ressalta-se

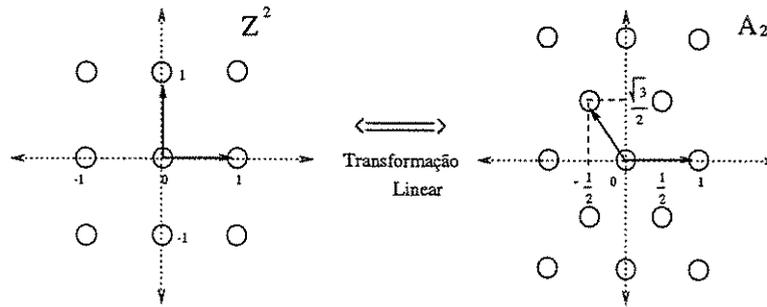


Figura 4.11: Representação das bases dos reticulados \mathbb{Z}^2 e \mathcal{A}_2 .

que, por facilidade de notação, os líderes de cosets desta tabela, estão representados por suas coordenadas em \mathbb{Z}^2 . Observa-se que esta partição possui um coset com norma nula, 2 cosets distintos com norma máxima, igual a 3, e os demais, com norma 1.

4.4.5 PARTIÇÃO $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$ (27 COSETS)

Esta é uma nova partição de reticulados, provinda de \mathcal{A}_2 ao considerar-se o sub-reticulado $\Lambda' = \Gamma\mathcal{A}_2$, sendo

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A fig.4.13 mostra, as constelações com 27, 81 e 243 sinais e a tabela dos cosets. As coordenadas dos líderes de cosets, apresentadas na tabela da fig.4.14, são as suas respectivas coordenadas no reticulado \mathbb{Z}^2 .

A tabela da fig.4.15 apresenta as quantidades de cosets para cada norma da partição.

Rótulo	Líder de Coset	Norma
0	(0,0)	0
1	(1,0)	1
2	(1,1)	1
3	(0,1)	1
4	(-1,0)	1
5	(-1,-1)	1
6	(0,-1)	1
7	(1,-1)	3
8	(-1,1)	3

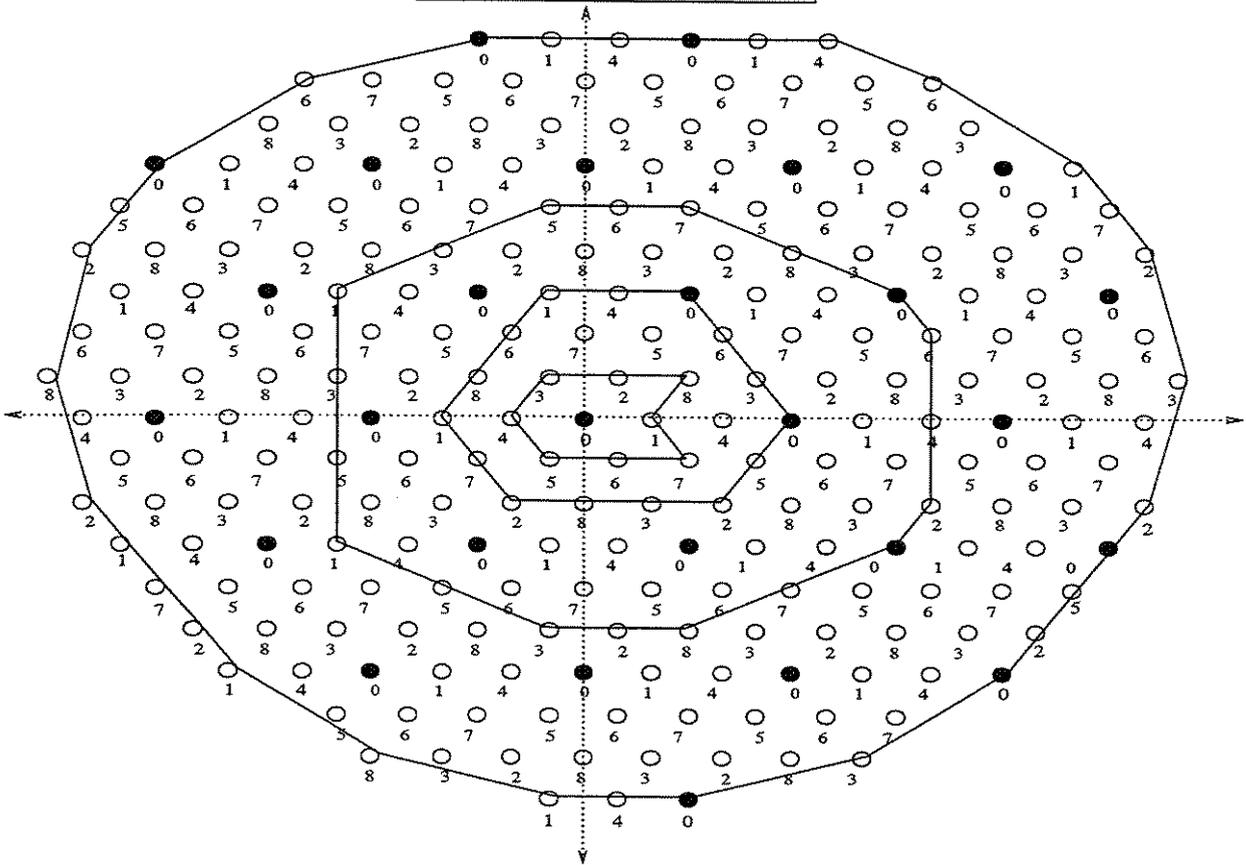


Figura 4.12: Partição de reticulados $A_2/3A_2$ (9 cosets).

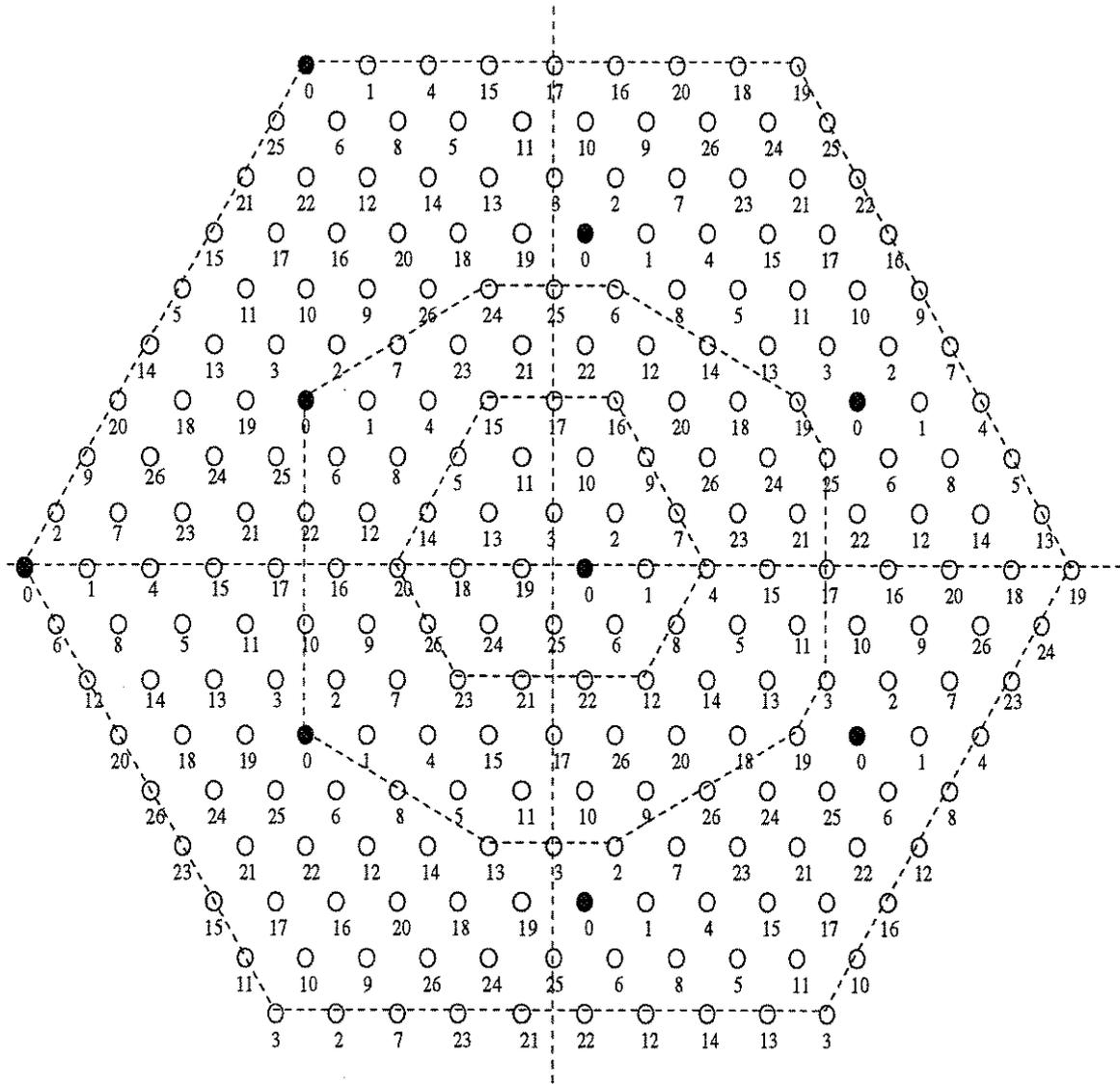


Figura 4.13: *Partição de reticulados $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$ (27 cosets).*

Rótulo	Líder do Coset	Norma	Rótulo	Líder do Coset	Norma	Rótulo	Líder do Coset	Norma
0	(0,0)	0	9	(2,2)	2	18	(-2,0)	2
1	(1,0)	1	10	(1,2)	3	19	(-1,0)	1
2	(1,1)	1	11	(0,2)	2	20	(3,3)	9
3	(0,1)	1	12	(0,-2)	2	21	(-2,-2)	2
4	(2,0)	2	13	(-1,1)	3	22	(-1,-2)	3
5	(-1,2)	7	14	(1,-2)	7	23	(-3,-2)	7
6	(0,-1)	1	15	(0,3)	9	24	(-2,-1)	3
7	(2,1)	3	16	(2,3)	7	25	(-1,-1)	1
8	(2,-1)	3	17	(1,3)	7	26	(3,2)	7

Figura 4.14: Tabela de cosets partição $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$ (27 cosets).

Quantidade de Cosets	Norma	Rótulo dos Cosets
2	9	15, 20
6	7	5, 14, 16, 17, 23, 26
6	3	7, 8, 10, 13, 22, 24
6	2	4, 9, 11, 12, 18, 21
6	1	1, 2, 3, 6, 19, 25
1	0	0

Figura 4.15: Tabela com a quantidade de cosets para cada norma da partição $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$.

4.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS COM O ALGORITMO DE PROCURA DE CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS

4.5.1 ESQUEMA SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_2

Este exemplo aparece, resumidamente, em [26](Apêndice A.3). O esquema considerado envolve um codificador com $k_1 = 2$ entradas e $V = 4$ memórias (fig.3.5, capítulo 3), e a partição de reticulados $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 cosets) mostrada na fig.2.5 (capítulo 2).

Considera-se, portanto, a tabela ordenada de normas e cosets, apresentada na fig.3.4.

Neste caso, a matriz-norma possui $(k_1 + V) = 6$ colunas, ou seja:

$$GN = [\|\mathbf{g}_{22}\| \|\mathbf{g}_{21}\| \mid \|\mathbf{g}_{12}\| \|\mathbf{g}_{11}\| \mid \|\mathbf{g}_{02}\| \|\mathbf{g}_{01}\|]$$

A primeira matriz-norma GN, determinada pelo algoritmo (seção 4.3), é aquela que possui o primeiro bloco de normas, da Tabela Ordenada de Normas e Cosets, $\{4, 2\}$, nas duas, primiras e últimas, colunas, bem como nas colunas intermediárias, ou seja:

$$GN = [4 \ 2 \mid 4 \ 2 \mid 4 \ 2].$$

Utilizando-se, as definições dos limitantes do d_{free} , Δ_{inf} (eq.3.2) e Δ_{sup} (eq.3.4 - capítulo 3), calcula-se os seus valores máximos (seção 4.3.2) para o subconjunto especial associado a GN considerada. Obtem-se que, $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = 6$. Como as normas utilizadas em GN, são todas pares, as matrizes geradoras do subconjunto especial não acarretam a escolha de todos os cosets da partição.

Desta maneira, esta matriz GN é descartada. O mesmo ocorre, neste exemplo, para qualquer matriz GN que não possua, pelo menos, uma coluna com norma ímpar, caso das matrizes:

$$[4 \ 2 \mid 2 \ 4 \mid 4 \ 2] \quad e \quad [4 \ 2 \mid 2 \ 2 \mid 4 \ 2].$$

Assim, a matriz-norma que aciona o algoritmo computacional de determinação do d_{free} ,

pela primeira vez, é:

$$GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 4 \ 2],$$

cujo $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{5, 9, 8\} = 5$.

Acionado o algoritmo computacional de determinação do d_{free} , obtem-se, pelo menos um código com $d_{aux} = 5$, para este subconjunto especial. Faz-se $d_{free} = 5$, guardando-se as respectivas matrizes, G e GN.

Para a nova escolha de GN, mantem-se, as colunas 1, 2, 5 e 6 e troca-se, sequencialmente, as colunas intermediárias 3 e 4, iniciando pelos melhores valores da tabela ordenada (fig. 3.4 - capítulo 3), os quais são (4,1), (1,4), (2,1), (1,2), (0,1), (1,0) e (0,0). As matrizes-norma GN obtidas, possuem $\Delta_{sup} = 5$, exceto as duas últimas, cujo $\Delta_{sup} = 4$. Como o d_{free} desses subconjuntos especiais não pode superar o d_{aux} já obtido, descarta-se prontamente, tais subconjuntos especiais, sem que seja acionado, o algoritmo computacional da determinação do d_{free} .

A próxima matriz GN, é obtida alterando-se a ordem das normas das duas últimas colunas, retornando-se, em seguida, à primeira combinação de normas para as demais colunas, ou seja, $GN = [4 \ 2 \ | \ 4 \ 2 \ | \ 2 \ 4]$, que é descartada, pois não escolhe todos os cosets. O mesmo ocorre para as duas próximas matrizes escolhidas: $GN = [4 \ 2 \ | \ 2 \ 4 \ | \ 2 \ 4]$ e $GN = [4 \ 2 \ | \ 2 \ 2 \ | \ 2 \ 4]$.

Escolhe-se então, a seguinte matriz-norma: $GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 2 \ 4]$, sendo que, $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{7, 7, 8\} = 7$. Inspeccionado o subconjunto especial de GN, obtem-se no máximo, $d_{aux} = 6$. Faz-se $d_{free} = 6$ e guarda-se estas novas matrizes G e GN.

Novamente, mantendo-se as colunas 1, 2, 5 e 6 e trocando as colunas 3 e 4, sequencialmente, pelos valores (4,1), (1,4), (2,1), (1,2), (1,0),(0,1) e (0,0), as matrizes-norma GN resultantes, possuem $\Delta_{sup} \leq 5$. Como esse valor é menor do que o d_{free} já obtido, são prontamente descartadas.

As próximas escolhas para matrizes GN são $[4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$ e $[4 \ 2 \ | \ 4 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$, as quais possuem $\Delta_{sup} = 5$ e portanto, são prontamente descartadas.

A nova GN escolhida é $[4 \ 2 \ | \ 1 \ 4 \ | \ 2 \ 2]$, cujo $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{8, 7, 7\} = 7$.

Investigando-se tal subconjunto especial, obtem-se no máximo, $d_{aux} = 5$ e portanto descarta-se GN, visto que já obteve-se, $d_{free} = 6$.

As matrizes-norma $[4 \ 2 \ | \ 2 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$, e $[4 \ 2 \ | \ 1 \ 2 \ | \ 2 \ 2]$ implicam em $\Delta_{sup} \leq 6$, sendo portanto descartadas.

Para $GN = [2 \ 4 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 4 \ 2]$, tem-se que $\Delta_{inf} = 4$, $\Delta_{sup} = \min\{7, 7, 8\} = 7$, e $d_{aux} = 6$ (igual ao d_{free} já obtido). Descarta-se GN.

A seguir, considera-se a matriz-norma $GN = [2 \ 4 \ | \ 4 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$, para a qual $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{8, 7, 7\} = 7$. Obtem-se $d_{aux} = 5$ e assim, descarta-se essa GN.

As demais matrizes-normas para o esquema considerado:

$$[2 \ 4 \ | \ 2 \ 1 \ | \ 2 \ 2], \dots, [2 \ 4 \ | \ 0 \ 0 \ | \ 2 \ 2], [2 \ 2 \ | \ 4 \ 2 \ | \ 4 \ 2], \dots, [0 \ 0 \ | \ 4 \ 4 \ | \ 0 \ 0],$$

possuem Δ_{sup} inferiores ao valor obtido para o d_{free} , e portanto são todas prontamente descartadas.

Com isto, esgota-se todos os possíveis subconjuntos especiais para este esquema de códigos treliça de parâmetros $(k_1, V, q) = (2, 4, 2)$. Um código treliça ótimo, $d_{free} = 6$, foi obtido no subconjunto especial representado pela matriz-norma $GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 2 \ 4]$ e cuja matriz geradora é

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Em resumo, para este esquema, de um universo de 4095 possíveis formas para a matriz-norma GN, inspecionou-se, com efetivo acionamento do algoritmo de determinação do d_{free} , os subconjuntos especiais associados à apenas cinco delas. Os 4090 subconjuntos restantes foram prontamente descartados. Isto representa uma pequena fração de matrizes-norma GN, ou seja, 0,1% das mesmas.

4.5.2 ESQUEMA SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_3

Este esquema aparece em [30] (Apêndice A.5).

Considera-se um codificador com $k_1 = 1$ entrada e $V = 2$ memórias (fig.4.16), e a partição de reticulados $\Lambda/\Lambda' = \mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$ (27 cosets) mostrada nas figs.4.13 e 4.14 (seção 4.4).

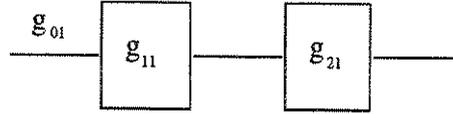


Figura 4.16: Estrutura de um codificador convolucional com 1 entrada e 2 memórias.

A tabela ordenada de normas e cosets, apresentada na fig.4.17, foi obtida a partir da partição $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$, segundo os procedimentos propostos na seção 3.3 (capítulo 3).

Como o alfabeto de dígitos de entrada é \mathbb{Z}_3 , tem-se que $\mathcal{U} = \{(1), (2)\}$ (eq.3.1 - capítulo 3).

As matrizes norma GN da forma $GN = [\|g_{21}\| \|g_{11}\| \|g_{01}\|]$, são escolhidas, segundo o algoritmo de procura de códigos (seção 4.3), na ordem a seguir, sendo que:

$$\Delta_{inf} = \min\{\|g_{01}\|, \|2g_{01}\|\} + \min\{\|g_{21}\|, \|2g_{21}\|\},$$

$$\Delta_{sup} = \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^2 \|g_{i1}\| \\ \sum_{i=0}^2 \|2g_{i1}\| \end{array} \right\}.$$

1) $GN = [9 \ 9 \ 9]$, $\Delta_{inf} = 9 + 9 = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{27, 27\} = 27$. Esta matriz GN é descartada sem o acionamento do algoritmo computacional de determinação do d_{free} , juntamente com todas as matrizes geradoras G associadas ao subconjunto especial, pois não acarretam a escolha de todos os cosets da partição na saída do codificador.

2) $GN = [9 \ 3 \ 9]$, $\Delta_{inf} = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{21, 21\} = 21$. Descartada pelo mesmo motivo da GN anterior.

$k_1 = 1$; 27 cosets ; $A = GF(3)$				
Norma	Lider do Coset	$\ g_{ij}\ , \ 2g_{ij}\ $	$\min \{ . \}$	Eq. (3.5)
{ 9 }	(3,3)	9 , 9	9	9
	(0,3)	9 , 9	9	
{ 3 }	(2,1)	3 , 3	3	3
	(2,-1)	3 , 3	3	
	(1,2)	3 , 3	3	
	(-1,1)	3 , 3	3	
	(-1,-2)	3 , 3	3	
	(-2,-1)	3 , 3	3	
{ 2 }	(2,0)	2 , 7	2	2
	(2,2)	2 , 7	2	
	(0,2)	2 , 7	2	
	(0,-2)	2 , 7	2	
	(-2,0)	2 , 7	2	
	(-2,-2)	2 , 7	2	
{ 7 }	(-1,2)	7 , 1	1	1
	(1,-2)	7 , 1	1	
	(2,3)	7 , 1	1	
	(1,3)	7 , 1	1	
	(-3,-2)	7 , 1	1	
	(3,2)	7 , 1	1	
{ 1 }	(1,0)	1 , 2	1	1
	(1,1)	1 , 2	1	
	(0,1)	1 , 2	1	
	(0,-1)	1 , 2	1	
	(-1,0)	1 , 2	1	
	(-1,-1)	1 , 2	1	
{ 0 }	(0,0)	0 , 0	0	0

Figura 4.17: Tabela Ordenada de Normas e Cosets

3) $GN = [9 2 9]$, $\Delta_{inf} = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{20, 25\} = 20$. Descarta-se esta GN, igualmente 'as duas matrizes anteriores.

4) $GN = [9 7 9]$, $\Delta_{inf} = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{25, 19\} = 19$. Descartada pelo mesmo motivo das anteriores.

5) As matrizes-norma $[9 1 9]$, $[9 0 9]$ possuem o mesmo $\Delta_{inf} = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{19, 20\} = 19$ e 18, respectivamente. Descarta-se estas matrizes, pois também não acarretam a escolha de todos os cosets da partição.

6) As matrizes-norma $[9 9 3]$ e $[9 3 3]$, implicam em um mesmo $\Delta_{inf} = 12$, e $\Delta_{sup} = 21$ e 15, respectivamente. Como também não acarretam a escolha de todos os cosets, são descartadas.

7) $GN = [9 2 3]$, $\Delta_{inf} = 12$ e $\Delta_{sup} = \min\{14, 19\} = 14$. O subconjunto especial é inspecionado e um código com matriz geradora G obtém $d_{aux} = 14$. Faz-se $d_{free} = 14$ e guarda-se G e GN.

8) $GN = [9 7 3]$ e $GN = [9 1 3]$ possuem $\Delta_{sup} = 13$. Logo são prontamente descartadas, pois $\Delta_{sup} < d_{free}$ já obtido.

9) $GN = [9 9 2]$, $\Delta_{inf} = 11$ e $\Delta_{sup} = \min\{20, 25\}$, não escolhe todos os cosets da partição, portanto é descartada.

10) $GN = [9 3 2]$ e $GN = [9 2 2]$, com $\Delta_{sup} = 14$ e 13, respectivamente. Descartadas prontamente, pois $\Delta_{sup} \leq d_{free}$ obtido anteriormente.

11) $GN = [9 7 2]$, $\Delta_{inf} = 12$ e $\Delta_{sup} = \min\{18, 17\}$. Investigado o subconjunto das matrizes geradoras G, obtém-se $d_{aux} = 16$, o qual é máximo até o momento. Faz-se $d_{free} = 16$ e guarda-se as correspondentes G e GN.

12) As matrizes-norma $[3 9 9]$, ..., $[3 0 9]$, $[3 9 3]$, ..., $[3 0 3]$, $[3 9 2]$, ..., $[3 0 2]$, $[3 9 7]$, ..., $[3 0 7]$, $[3 9 1]$, ..., $[3 0 1]$, $[2 9 9]$, ..., $[0 1 0]$, são todas descartadas, visto que, ou não acarretam a escolha de todos os cosets, ou possuem

$$\Delta_{sup} \leq d_{free} = 16.$$

Assim são esgotadas todas as possibilidades para as matrizes-norma GN e matrizes geradoras G de todos os subconjuntos especiais possíveis para este esquema. A procura para códigos treliça ternários, com parâmetros $(k_1, V) = (1, 2)$ e 27 cosets na partição, é concluída com a apresentação de um código convolucional ótimo, gerado por G, com $d_{free} = 16$,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad GN = [9 \ 7 \ 2].$$

Salienta-se que de um universo de 215 formas possíveis para a matriz norma GN, 213 são prontamente descartadas, sem que haja o efetivo cálculo do d_{free} para nenhuma das matrizes geradoras contidas nestes 213 subconjuntos especiais.

4.5.3 ESQUEMA SOBRE O ANEL \mathbb{Z}_4 :

Este exemplo aparece, em detalhes, em [30](Apêndice A.5). O esquema considera um codificador convolucional com $k_1 = 1$ entradas e $V = 2$ memórias (fig.4.16), e a partição $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (fig.4.3), que possui 16 cosets. A tabela da fig.4.18 apresenta, de forma resumida, os resultados da aplicação do algoritmo de procura de códigos treliça ótimos, quanto ao descarte das matrizes-norma GN.

A tabela (fig.4.18) compreende dois grupos de matrizes-norma:

a) dos subconjuntos especiais associados à GN, que são prontamente descartados, pois o valor máximo obtido para o limitante superior, Δ_{sup} , não excede o d_{free} anteriormente obtido;

b) dos subconjuntos especiais associados à GN, que são inspecionados (seção 4.2).

Dentre os subconjuntos do grupo (b), um aciona o algoritmo computacional de determinação do d_{free} (primeira coluna), enquanto que o outro não, visto que todas as suas matrizes geradoras, G, geram códigos catastróficos ou que não escolhem todos os cosets da partição considerada no esquema.

Os subtotais apresentados na tabela (fig.4.18), mostram que de 215 subconjuntos possíveis, 214 são descartados sem a efetiva determinação de d_{free} , o que significa, que apenas um dos subconjuntos especiais determina o d_{free} máximo para este esquema, isto é, $d_{free} = 12$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad GN = [5 \ 2 \ 5].$$

GN de subconjuntos especiais inspecionados		GN de subconjuntos especiais prontamente descartados ($\Delta_{sup} \leq d_{free}$)
Acionado a determinação do d_{free}	Determinação do d_{free} não acionada	
[5 2 5] <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 2px; display: inline-block;"> $d_{free} = 12$ </div>	[5 5 5]	[5 1 5] [5 8 5] [5 4 5] [5 5 2] [5 2 2] [5 1 5] etc
Subtotal = 1	Subtotal = 214	

Figura 4.18: Tabela de resultados da simulação do algoritmo de procura ao considerar-se $k_1 = 1$, $V = 2$, $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$

4.6 NOVOS CÓDIGOS TRELIÇA ÓTIMOS

Os resultados obtidos, através da implementação do algoritmo de procura de códigos treliça ótimos (seção 4.3), foram mostrados de maneira compilada em [26] (Apêndice A.3), considerando-se esquemas sobre o corpo \mathbb{Z}_2 , e em [28] (Apêndice A.4), para esquemas q-ários, com $q = 2, 3$ e 4 .

Nesta seção os resultados estão agrupados, segundo o alfabeto de dígitos de entrada, e mostrados através de dois tipos de tabelas:

1) Novos Códigos Treliça Ótimos: figuras 4.19, 4.21, 4.23, 4.25, 4.27, 4.29, 4.31, 4.33, 4.35;

2) Ganhos de Codificação: figuras 4.20, 4.22, 4.24, 4.26, 4.28, 4.30, 4.32, 4.34, 4.36.

Nas tabelas dos códigos treliça, estão fixos os seguintes parâmetros: número de entradas do codificador convolucional, k_1 , e a partição de reticulados. Os esquemas apresentam a variação do número de memórias, V , enquanto $d_{free} \leq d_2$ (eq.2.13). Essas tabelas mostram um dos subconjuntos especiais, onde o algoritmo de procura (seção 4.3) encontra, pelo menos, um código treliça ótimo, apresentando também, a respectiva matriz geradora G , do código (última coluna). As colunas intermediárias, de tais tabelas, mostram o valor máximo para o Δ_{sup} e o d_{free} obtido, para cada esquema.

Nas tabelas de ganhos de codificação, a notação utilizada é segundo [11] (apresentada na seção 2.3 - capítulo 2). Os ganhos de codificação, considerando-se os códigos treliça ótimos, foram obtidos pela comparação com esquemas não codificados, e através da eq.2.14:

$$\mathcal{G} = 10 \log_{10} \left(\frac{d^u}{P^u} / \frac{d^c}{P^c} \right)$$

sendo d^u e P^u , a distância e a energia do esquema não codificado, e P^c , a energia referente ao esquema codificado, cuja distância ($d^c = d$ eq.2.13) altera-se conforme a variação do número de estados da treliça do codificador convolucional envolvido. Observa-se que o ganho de codificação de cada esquema tende a crescer, a medida que aumenta-se o número de entradas não codificadas, k_2 . A taxa ρ é dada pela eq.2.10:

$$\rho = \frac{k}{n} = \frac{(k_1 + k_2)}{n}$$

onde n é a dimensão do reticulado.

4.6.1 ESQUEMAS SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_2 :

Nesta subseção, todos os esquemas apresentados envolvem codificadores convolucionais com $k_1 = 2$. Ressalta-se que os esquemas que consideram apenas uma entrada ($k_1 = 1$), possuem $d \geq d_2 = 8$, não importando o número de memórias, e portanto de estados considerados.

A tabela da fig.4.19 mostra os códigos treliça ótimos, obtidos ao considerar-se a partição $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (fig.2.5 - capítulo 2). Salienta-se que, o exemplo numérico (de uso do algoritmo de procura) apresentado na seção 4.5.1, refere-se ao esquema listado na terceira linha da referida tabela ($V = 4$).

A tabela da fig.4.20 apresenta os ganhos de codificação relativos aos códigos treliça ótimos, listados na fig.4.19. Os ganhos de codificação apresentados nesta tabela, coincidem com os apresentados em [11].

As figuras 4.21 e 4.22 referem-se a resultados obtidos considerando-se a partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$, as figuras 4.23 e 4.24 referem-se a partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ e as figuras 4.25 e 4.26, à partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$.

Considerando-se a partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$, obtêm-se os resultados mostrados nas figuras 4.23 e 4.24.

Os resultados mostrados nas figuras 4.25 e 4.26, foram obtidos ao considerar-se a partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$.

TABELA II

V	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	4 1 2 4	3	3	0 0 1 0 2 1 1 2
03	4 2 1 2 4	6	5	0 1 0 0 1 2 1 1 2 1
04	4 2 1 1 2 4	6	6	0 1 1 0 1 0 2 1 0 1 1 2
05	4 2 4 1 2 4 2	7	6	0 1 0 0 1 0 1 2 1 2 1 1 2 1
06	2 4 2 0 1 2 2 2	7	7	1 0 1 0 0 1 1 1 -1 2 1 0 1 1 1 -1 1
07	2 4 2 0 1 2 2 2 4	8	7	1 0 1 0 0 1 1 1 0 -1 2 1 0 1 1 1 1 2
08	4 2 2 2 0 2 1 2 2 2	9	8	0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 -1 1 1 1 0 1 0 -1 1 -1

Figura 4.19: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 2$ e partição $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (fig.2.5-cap.2).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Codificado P	$d=3$ 4 Estados	$d=5$ 8 Estados	$d=6$ 16 Estados	$d=7$ 64 Estados	$d=8$ 256 Estados
0	1.0	4/2	1.5	0.000	2.218	3.010	3.680	4.260
1	1.5	4/5	2.5	1.761	3.979	4.771	5.441	6.021
2	2.0	4/10	5.0	1.761	3.979	4.771	5.441	6.021
3	2.5	4/20	10.25	1.463	4.084	4.664	5.333	5.913
4	3.0	4/42	20.5	1.866	4.013	4.876	5.545	6.125
5	3.5	4/82	40.687	1.794	4.157	4.804	5.474	6.054

Figura 4.20: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.19).

V	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	5 2 4 8	9	7	1 1 0 2 2 1 2 2
03	5 4 2 8 4	11	11	2 0 1 2 0 1 2 1 2 2
04	8 4 2 5 8 4	13	12	2 2 1 1 2 0 2 0 1 2 2 2
05	8 4 2 2 5 8 4	14	13	2 0 1 1 2 2 0 2 2 1 -1 1 2 2
06	8 4 2 2 5 5 4 4	15	14	2 2 1 1 1 1 0 0 2 0 1 1 2 2 2 2
07	8 4 2 5 2 5 5 4 4	18	15	2 2 1 1 1 1 1 0 0 2 0 1 2 1 2 2 2 2
08	8 4 5 5 5 5 5 2 4 8	24	16	2 2 -1 2 1 2 1 1 0 2 2 0 2 -1 2 1 2 1 2 2

Figura 4.21: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 2$ e partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (fig.4.3).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / P$	Codificado P	$d=7$ 4 Estados	$d=11$ 8 Estados	$d=12$ 16 Estados	$d=13$ 32 Estados	$d=15$ 128 Estados	$d=16$ 256 Estados
0	1.0	4/2	2.5	1.461	3.424	3.802	4.150	4.771	5.051
1	1.5	4/5	5.0	2.430	4.393	4.771	5.119	5.740	6.021
2	2.0	4/10	10.25	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
3	2.5	4/20	20.5	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
4	3.0	4/42	40.687	2.568	4.531	4.909	5.257	5.878	6.158
5	3.5	4/82	81.594	2.452	4.415	4.793	5.140	5.762	6.042

Figura 4.22: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.21).

v	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
03	8 16 4 5 10	21	18	2 0 0 2 1 2 4 2 5 3
04	16 8 9 4 10 10	22	22	0 2 0 0 1 1 4 2 5 6 3 3
05	16 8 10 10 9 10 10	28	25	0 2 3 1 0 1 1 4 2 7 3 3 3 3
06	10 10 16 8 5 9 10 10	34	28	3 3 0 2 1 0 1 1 7 7 4 6 2 3 3 3
07	10 10 8 9 9 5 5 10 10	34	32	3 1 2 0 0 1 1 1 1 7 5 2 3 3 2 2 3 3

Figura 4.23: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 2$ e partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ (fig.4.4).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Codificado P	$d = 18$ 8 Estados	$d = 22$ 16 Estados	$d = 25$ 32 Estados	$d = 28$ 64 Estados	$d = 32$ 128 Estados
0	1.0	4/2	5.0	2.553	3.424	3.979	4.472	5.052
1	1.5	4/5	10.25	3.415	4.286	4.841	5.333	5.913
2	2.0	4/10	20.5	3.415	4.286	4.841	5.333	5.913
3	2.5	4/20	40.687	3.448	4.319	4.874	5.367	5.947
4	3.0	4/42	81.594	3.648	4.519	5.075	5.567	6.147

Figura 4.24: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.23).

V	GN	A_{sup}	d_{free}	G
04	32 16 4 10 13 17	43	43	4 0 2 3 3 1 4 4 0 7 2 4
05	32 16 17 25 13 20 20	61	51	4 0 7 4 5 2 2 4 4 4 3 2 4 4
06	32 16 13 17 13 17 20 20	65	56	4 4 3 1 2 1 2 2 4 0 6 4 3 4 4 4
07	32 16 5 20 20 17 5 20 20	73	64	4 4 2 4 4 1 1 2 2 4 0 1 6 2 4 2 4 4

Figura 4.25: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 2$ e partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$ (fig.4.8).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Codificado P	$d = 43$ 16 Estados	$d = 46$ 32 Estados	$d = 54$ 64 Estados	$d = 62$ 128 Estados	$d = 64$ 256 Estados
0	1.0	4/2	10.25	3.217	3.510	4.206	4.806	4.944
1	1.5	4/5	20.5	4.186	4.479	5.175	5.775	5.913
2	2.0	4/10	40.687	4.219	4.512	5.209	5.809	5.947
3	2.5	4/20	81.594	4.208	4.501	5.197	5.797	5.935

Figura 4.26: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.25).

4.6.2 ESQUEMAS SOBRE O CORPO \mathbb{Z}_3 :

Neste caso, os esquemas envolvem codificadores convolucionais com $k_1 = 1$ e partições, cujo reticulado é $\Lambda = \mathcal{A}_2$. As tabelas das fig.4.27 e 4.28, referem-se à esquemas que consideram a partição de reticulados, $\Lambda/\Lambda' = \mathcal{A}_2/3\mathcal{A}_2$, com 9 cosets (fig.4.12).

O exemplo numérico apresentado na seção 4.5.2, usa o esquema da primeira linha da tabela da fig.4.29, considerando-se a partição $\Lambda/\Lambda' = \mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$, com 27 cosets. A tabela da fig.4.30 apresenta os ganhos de codificação obtidos pelo uso dos códigos treliça ótimos, mostrados na fig.4.29.

v	GN	Λ_{sup}	d_{free}	G
02	3 1 3	7	7	1 0 1 2 1 2
03	3 1 3 3	10	8	1 0 1 1 2 1 2 2
04	3 3 1 3 3	13	9	2 1 0 1 1 1 2 1 2 2

Figura 4.27: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 1$ e partição $\mathcal{A}_2/3\mathcal{A}_2$ (fig.4.12).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Codificado P	d = 7 9 Estados	d = 8 27 Estados	d = 9 81 Estados
1	1.58	4/5.33	3.75	3.957	4.537	5.049
2	2.37	4/17.407	11.275	4.316	4.896	5.408
3	3.16	4/53.333	33.519	4.447	5.027	5.539

Figura 4.28: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.27).

V	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	9 7 2	18	16	0 1 0 3 3 2
03	9 2 7 9	24	24	0 0 1 0 3 2 3 3
04	9 3 2 7 9	36	28*	3 2 1 0 0 0 0 2 4 3

*Para esse esquema $d_2 < 28$.

Figura 4.29: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 1$ e partição $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$ (fig.4.13).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Codificado P	$d = 16$ 9 Estados	$d = 24$ 27 Estados	$d = 27$ 81 Estados
1	1.58	4/5.33	11.275	2.767	4.528	5.039
2	2.37	4/17.407	33.519	3.175	4.936	5.447

Figura 4.30: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.29).

4.6.3 ESQUEMAS SOBRE O ANEL \mathbb{Z}_4 :

Nesta subseção estão apresentados os resultados obtidos para esquemas que envolvem codificadores convolucionais com uma entrada, $k_1 = 1$. As partições consideradas são obtidas do reticulado $\Lambda = \mathbb{Z}^2$, apresentadas nas subseções 4.4.1 à 4.4.3.

Os resultados estão mostrados nas tabelas:

a) Códigos Treliça Ótimos:

- Fig.4.31 para a partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$;
- Fig.4.33 para a partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$;
- Fig.4.35 para a partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$.

b) Ganhos de Codificação:

- Fig.4.32 para a partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$;
- Fig.4.34 para a partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$;
- Fig.4.36 para a partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$.

V	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	5 2 5	12	12	1 1 1 2 1 2
03	5 8 2 5	16	14	3 2 1 1 2 2 1 2
04	5 8 2 5 5	20	16	2 2 1 2 1 3 2 1 1 2

Figura 4.31: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 1$ e partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (fig.4.3).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Codificado P	$d = 12$ 16 Estados	$d = 14$ 64 Estados	$d = 16$ 128 Estados
0	1.0	4/2	2.5	3.802	4.472	5.052
1	2.0	4/10	10.25	4.664	5.333	5.591
2	3.0	4/42	40.687	4.909	5.579	6.158

Figura 4.32: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.31).

V	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	10 5 10	20	20	1 1 1 5 2 3
03	10 4 5 10	29	28	1 0 1 1 3 6 2 3
04	10 16 4 5 10	36	32	3 0 0 1 1 7 4 2 6 3

Figura 4.33: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 1$ e partição $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ (fig.4.4).

k_2	Taxa ρ	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Codificado P	$d = 20$ 16 Estados	$d = 28$ 64 Estados	$d = 32$ 128 Estados
0	1.0	4/2	5.0	3.010	4.472	5.052
1	2.0	4/10	20.5	3.872	5.333	5.913
2	3.0	4/42	81.594	4.106	5.567	6.147

Figura 4.34: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.33).

V	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	13 25 20	40	40	4 3 2 6 4 3
03	20 25 13 20	56	54	4 3 2 2 6 4 3 4
04	20 5 18 5 20	68	64	6 2 5 2 2 4 7 3 1 4

Figura 4.35: Tabela de códigos treliça ótimos com $k_1 = 1$ e partição $\mathbb{Z}^2/8\mathbb{Z}^2$ (fig.4.8).

k_2	Taxa p	Não Codif. $\frac{u}{d} / \frac{u}{p}$	Codificado P	d = 40 16 Estados	d = 54 64 Estados	d = 64 128 Estados
0	1.0	4/2	10.25	2.903	4.206	4.944
1	2.0	4/10	40.687	3.905	5.209	5.947
2	3.0	4/42	163.19	4.105	5.409	6.147

Figura 4.36: Tabela com os ganhos de codificação dos códigos treliça ótimos (fig.4.35).

4.7 CONCLUSÃO

O capítulo 4 apresentou o algoritmo de procura de códigos treliça ótimos, de maneira detalhada e didática, nas seções 4.2 e 4.3. O conteúdo destas seções foi abordado, resumidamente, nos artigos [[28],[30]] (Apêndices A.4 e A.5).

Com a implementação do algoritmo proposto (seção 4.3), pôde-se realizar a procura de códigos treliça ótimos, considerando-se partições de reticulados com grande número de cosets. As partições utilizadas foram mostradas, em detalhes, na seção 4.4 e os resultados obtidos foram apresentados na seção 4.6, sendo que as tabelas encontram-se listadas em [28] (Apêndice A.4).

Na seção 4.5 mostrou-se exemplos numéricos, que elucidam o algoritmo de procura proposto, evidenciando-se o caráter exaustivo do algoritmo, assim como, seu o alto grau de eficiência; pois o algoritmo gera todos os subconjuntos especiais possíveis, em cada esquema (dados k_1, V, q e Λ/Λ') descartando:

- a) subconjuntos completos de matrizes G (sem no entanto gerá-las), sempre que $\Delta_{sup}(GN) \leq d_{free}$ obtido anteriormente, isto é, os “piores” subconjuntos especiais, ou

b) grande parte das matrizes geradoras G dos “melhores” subconjuntos especiais, para as quais o $\Delta_{sup}(G)$ não excede o d_{free} já obtido. Isto ocorre nos casos onde a assertiva (a), para a matriz norma GN, não verificar-se.

O algoritmo de procura apresentado neste capítulo, não leva em conta, a equivalência de códigos treliça, dentro de um mesmo subconjunto especial, assunto que será um dos temas propostos no capítulo 5.

Capítulo 5

UMA CLASSE DE EQUIVALÊNCIA E ESPECTRO DE PESOS DE CÓDIGOS TRELIÇA

5.1 INTRODUÇÃO

Uma questão importante, na Teoria de Códigos, é a determinação de códigos equivalentes, para um esquema de codificação dado.

A seção 5.2 deste capítulo, tem o objetivo de apresentar uma **classe de equivalência** de Códigos Treliça baseados em partições de reticulados, gerados por matrizes G , em cujas colunas estão os líderes de cosets da partição.

A equivalência dos códigos treliça, é obtida através da utilização de transformações lineares planas, suas características e propriedades, o que aponta a estreita afinidade entre as Estruturas Algébricas, neste caso em particular, a Teoria de Grupos, e a Teoria de Códigos Treliça.

Dois exemplos numéricos são apresentados na seção 5.3, os quais elucidam os conceitos abordados na seção 5.2, isto é, eles apresentam a equivalência demonstrada, considerando-se esquemas com os corpos \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 (alfabetos de dígitos de entrada).

A existência de tal equivalência, dentre os códigos treliça de um mesmo subconjunto especial, foi também comprovada a partir da determinação do espectro de pesos dos códigos (para um comprimento L fixo, dos caminhos fechados da treliça, com início e final no estado zero). Um algoritmo de determinação do espectro de pesos de um código treliça está apresentado na seção 5.4, por meio de subseções e exemplos elucidativos de cada passo.

Na seção 5.5 são apresentadas tabelas, que evidenciam a evolução do espectro de pesos, para alguns códigos treliça ótimos e não ótimos, utilizando-se a variação do comprimento máximo L , dos caminhos fechados da treliça do código.

5.2 UMA CLASSE DE CÓDIGOS EQUIVALENTES EM UM SUBCONJUNTO ESPECIAL

Seja Λ um reticulado de dimensão n e $\Lambda' \subseteq \Lambda$ um subreticulado. Os cosets da partição Λ/Λ' , são representados por seus líderes, da seguinte forma $\mathbf{g}_{ij} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, onde x_l é a l -ésima coordenada euclidiana ($l = 1, \dots, n$). Assim os cosets são elementos do espaço vetorial Λ/Λ' , cujo conjunto de escalares é dado pelo alfabeto de entrada, \mathcal{A} . As operações, definidas nesse espaço vetorial, são: soma de cosets (coordenada à coordenada) e multiplicação de cosets por elementos do alfabeto de bits de entrada.

Definição 7 *Sejam uma partição de reticulados de dimensão n e o coset (da referida partição) $\mathbf{g}_{ij} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Lambda/\Lambda'$. Defina-se uma família de transformações lineares $\Psi_s(\mathbf{g}_{ij}) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dadas por:*

$$\begin{cases} y_s = -(x_s), & \text{para algum } s \in \{1, \dots, n\} \\ y_s = (x_s), & \text{para os demais.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Proposição 3 Para uma dada partição de reticulados, uma transformação linear Ψ_s e um coset $\mathbf{g}_{ij} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Lambda/\Lambda'$ tem-se que:

$$\|\Psi_s(\mathbf{g}_{ij})\| = \|\mathbf{g}_{ij}\|.$$

Prova:

Conforme a definição de norma, eq.2.4 (capítulo 2), tem-se que:

$$\|\Psi_s(\mathbf{g}_{ij})\| = \sum_{l=1}^n y_l^2, \text{ para } \mathbf{g}_{ij} \in \Lambda/\Lambda'. \quad (5.2)$$

Utilizando a definição 7, a eq.5.2 transforma-se em:

$$\begin{aligned} \|\Psi_s(\mathbf{g}_{ij})\| &= \sum_{l=1}^{s-1} x_l^2 + (-x_s)^2 + \sum_{l=s+1}^n (x_l)^2 = \\ &= \sum_{l=1}^n x_l^2 = \|\mathbf{g}_{ij}\| \end{aligned}$$

■

Corolário 1 Nas mesmas condições da proposição 1, tem-se que:

$$1) \quad \left\| \sum_{i,j} u_{ij} \Psi_s(\mathbf{g}_{ij}) \right\| = \left\| \sum_{i,j} u_{ij} \mathbf{g}_{ij} \right\| \quad (5.3)$$

$$2) \quad \|\Psi_s \circ \Psi_r(\mathbf{g}_{ij})\| = \|\mathbf{g}_{ij}\| \quad (5.4)$$

Definição 8 Dois códigos convolucionais são ditos **códigos equivalentes** se seus espectros de peso são idênticos. **Notação:** $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}'$.

Teorema 1 Seja \mathcal{C} um código convolucional com k_1 entradas e V memórias, gerado pela matriz

$$G = [\mathbf{g}_{vk_1} \dots \mathbf{g}_{v1} \mid \dots \mid \mathbf{g}_{1k_1} \dots \mathbf{g}_{11} \mid \mathbf{g}_{0k_1} \dots \mathbf{g}_{01}].$$

Sejam Φ uma transformação linear dada por uma composição finita de Ψ_r (definição 7) e $\Phi(G)$ a matriz geradora dada por:

$$\Phi(G) = [\Phi(\mathbf{g}_{vk_1}) \dots \Phi(\mathbf{g}_{v1}) | \dots | \Phi(\mathbf{g}_{0k_1}) \dots \Phi(\mathbf{g}_{01})], \quad (5.5)$$

a qual é obtida, através da substituição de cada um dos cosets da matriz G , pela respectiva imagem, segundo a transformação linear Φ .

O código convolucional \mathcal{C}' (gerado pela matriz $\Phi(G)$) é equivalente ao código \mathcal{C} .

Prova:

A métrica de um ramo da treliça do código \mathcal{C} , de matriz geradora G , é dada pela norma do coset r obtido na eq.5.6:

$$r = \sum_{i,j} u_{ij} \mathbf{g}_{ij} \quad (5.6)$$

sendo u_{ij} a sequência de bits de entrada referente ao ramo dado e \mathbf{g}_{ij} , os líderes de cosets pertencentes à matriz G .

Ressalta-se que, a treliça do código convolucional depende unicamente dos parâmetros k_1 e V ; e a sequência de bits de entrada u_{ij} (eq.5.6) determina um único ramo dessa treliça.

Considerando a sequência u_{ij} , e a matriz geradora $G' = \Phi(G)$, tem-se um coset, ao qual denota-se r' , dado por:

$$r' = \sum_{i,j} u_{ij} \Phi(\mathbf{g}_{ij}) \quad (5.7)$$

Utilizando-se propriedades de transformações lineares na eq.5.7, tem-se:

$$r' = \sum_{i,j} u_{ij} \Phi(\mathbf{g}_{ij}) = \Phi\left(\sum_{i,j} u_{ij} \mathbf{g}_{ij}\right) = \Phi(r).$$

Logo $\|r'\| = \|\Phi(r)\|$.

Aplicando-se então, a proposição 1, obtém-se que $\|r'\| = \|r\|$.

Como r e r' , são cosets referentes ao mesmo ramo das treliças dos códigos convolucionais \mathcal{C} e \mathcal{C}' , respectivamente, obtém-se que, as treliças dos códigos são idênticas, ou seja, os códigos possuem o mesmo espectro de pesos, independentemente do comprimento máximo dos caminhos fechados da treliça (com início e final no estado zero).

Conforme a definição 8, os códigos \mathcal{C} e \mathcal{C}' são equivalentes. ■

Observação: Considere-se a família de transformações lineares $\beta_{r,s}$ dada por:

$$\beta_{r,s}(\mathbf{g}_{ij}) = (y_1, \dots, y_n); \text{ onde } \begin{cases} y_l = x_l \quad \forall l \neq r, s \\ y_r = x_s \\ y_s = x_r \end{cases} \quad (5.8)$$

A proposição 3 e seus respectivos corolários, são igualmente válidos para essa família $\beta_{r,s}$ definida (eq.5.8).

5.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Esta seção, tem por objetivo, apresentar exemplos numéricos, que explicitam a classe de equivalência proposta na seção 5.2.

O primeiro exemplo, utiliza a partição do reticulado \mathbb{Z}^2 , que possui 8 cosets, isto é, $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (seção 2.2 - capítulo 2). O outro, apresenta a classe de equivalência proposta, para as partições do reticulado \mathcal{A}_2 (seção 4.4 - capítulo 4).

5.3.1 CÓDIGOS TRELIÇA SOBRE \mathbb{Z}_2 :

Seja o esquema do código treliça, de parâmetros $k_1 = 2, V = 4$, (fig.3.5 - capítulo 3), alfabeto $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_2$ e partição $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$, mostrada na fig.2.5 (capítulo 2). Considere-se as transformações lineares definidas à seguir, para um coset qualquer, $\mathbf{g}_{ij} = (x_1, x_2)$, da partição:

$$\Psi_2(\mathbf{g}_{ij}) = (x_1, -x_2), \text{ que é a reflexão segundo o eixo-x; e}$$

$\rho(\mathbf{g}_{ij}) = (-x_2, x_1)$, a qual representa a rotação de 90° e pode ser dada pela composição das funções $\beta_{1,2}$ e Ψ_2 , da seguinte forma:

$$\rho(\mathbf{g}_{ij}) = (\beta_{1,2} \circ \Psi_2)(\mathbf{g}_{ij}).$$

Nas tabelas 1 e 2 da figura 5.1, estão apresentadas as imagens das transformações.

TABELA 1

Rótulo	Líder do Coset	$\Psi_2(\mathbf{g}_{ij})$	Rótulo
0	(1,1)	(1,-1)	2
1	(0,-1)	(0,1)	3
2	(1,-1)	(1,1)	0
3	(0,1)	(0,-1)	1
4	(1,0)	(1,0)	4
5	(2,0)	(2,0)	5
6	(-1,0)	(-1,0)	6
7	(0,0)	(0,0)	7

TABELA 2

Rótulo	Líder do Coset	$\rho(\mathbf{g}_{ij})$	Rótulo
0	(1,1)	(-1,1)	2
1	(0,-1)	(1,0)	4
2	(1,-1)	(1,1)	0
3	(0,1)	(-1,0)	6
4	(1,0)	(0,1)	3
5	(2,0)	(2,0)	5
6	(-1,0)	(0,-1)	1
7	(0,0)	(0,0)	7

Figura 5.1: Tabelas com as imagens das transformações lineares Ψ_2 e ρ .

Conforme os conceitos e as definições utilizadas na literatura [[21],[23]], define-se:

$$\begin{cases} id(\mathbf{g}_{ij}) = \mathbf{g}_{ij} \\ \Psi_2 \circ \rho(\mathbf{g}_{ij}) = \Psi_2(\rho(\mathbf{g}_{ij})); \\ \rho^2(\mathbf{g}_{ij}) = \rho \circ \rho(\mathbf{g}_{ij}) \end{cases} \quad \forall \mathbf{g}_{ij} \in \Lambda/\Lambda' \quad (5.9)$$

Utilizando as definições contidas na eq.5.9 e alguns cálculos simples, verifica-se que:

$$\rho^4 = id = (\Psi_2)^2 \quad e \quad \rho \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \rho^3.$$

Desta maneira, através da Teoria de Grupos [20], verifica-se que as transformações

consideradas geram um grupo algébrico denominado **diedral**, a saber:

$$D_8 = \{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \Psi_2, \Psi_2 \circ \rho, \Psi_2 \circ \rho^2, \Psi_2 \circ \rho^3\}.$$

Para o codificador convolucional ($k_1 = 2, V = 4$) da fig.3.5 (capítulo 30, considere o subconjunto especial de matrizes geradoras, associado à matriz norma dada por:

$$\begin{aligned} GN &= [\|g_{22}\| \|g_{21}\| \|g_{12}\| \|g_{11}\| \|g_{02}\| \|g_{01}\|] = \\ &= [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]. \end{aligned}$$

A partir da fig.2.5 (capítulo 2), escolhe-se os cosets para compor uma das matrizes geradoras pertencentes à esse subconjunto especial; por exemplo:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando-se as transformações lineares do diedral D_8 , obtem-se as 8 matrizes geradoras distintas (fig.5.2), correspondentes a 8 códigos equivalentes (mesmo espectro de pesos), segundo o teorema 1.

Desta forma pode-se particionar, esse subconjunto especial de matrizes geradoras em 8 grupos, pois o mesmo possui 64 matrizes geradoras distintas.

A tabela da fig.5.3 apresenta uma matriz geradora de cada um dos 8 grupos possíveis de códigos equivalentes, juntamente com o espectro de pesos do referido grupo, considerando o comprimento máximo de 9 ramos nos caminhos fechados da treliça (total de 10.011 caminhos considerados).

$\text{id}(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\Psi_2(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
$\rho(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\Psi_2(\rho(G_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
$\rho^2(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\Psi_2(\rho^2(G_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
$\rho^3(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	$\Psi_2(\rho^3(G_1)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

OBS: $(x, 3) \equiv (x, -1)$ e $(3, y) \equiv (-1, y)$

Figura 5.2: Matrizes geradoras obtidas a partir de G_1 .

5.3.2 CÓDIGOS TRELIÇA SOBRE \mathbb{Z}_3 :

A fig.4.13 (seção 4.4 - capítulo 4) apresenta uma partição do reticulado \mathcal{A}_2 com 27 cosets, cujas coordenadas euclidianas, se relacionam com o mapeamento da constelação através da transformação linear, dada pela eq.4.2 (capítulo 4):

$$(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2 \iff (\xi_1 - 1/2\xi_2, \sqrt{3}/2\xi_2) \in \mathcal{A}_2.$$

Analogamente ao exemplo 5.3.1, considere as seguintes transformações lineares: uma rotação ρ e uma reflexão Ψ_l , adequadas à partição considerada neste caso, isto é, de modo que:

$$\rho(\mathbf{g}_{ij}), \Psi_l(\mathbf{g}_{ij}) \in \mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2, \quad \forall \mathbf{g}_{ij} \in \mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2.$$

Por exemplo, tomando ρ , a rotação de 60° e Ψ_l a reflexão pela reta que contém os cosets 0 e 2. Desta maneira, gera-se uma classe de códigos equivalentes com 12 elementos, visto que: $\rho^6 = \text{id} = (\Psi_l)^2$. Desta forma, o grupo diedral D_{12} (eq.5.10), atua nesta partição de

reticulados, $\mathcal{A}_2/\Gamma\mathcal{A}_2$, proporcionando a equivalência proposta.

$$D_{12} = \{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \Psi_l, \Psi_l \circ \rho, \Psi_l \circ \rho^2, \Psi_l \circ \rho^3, \Psi_l \circ \rho^4, \Psi_l \circ \rho^5\}. \quad (5.10)$$

5.4 ALGORITMO PARA A DETERMINAÇÃO DO ESPECTRO DE PESOS DE UM CÓDIGO TRELIÇA

O fluxograma do algoritmo para a determinação do espectro de pesos, de um Código Treliça, proposto nesta seção, é apresentado na fig.5.4, proporcionando uma visão abrangente do algoritmo. As marcações mostradas na fig.5.4, representam as subseções, as quais comentam em detalhes, passos importantes do algoritmo.

5.4.1 CONSTRUÇÃO DAS SEQUÊNCIAS DE ENTRADA

Seja o esquema do código treliça, com os seguintes parâmetros: k_1 bits de entrada e V memórias, no codificador convolucional; o alfabeto de entrada $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_q$ e a partição Λ/Λ' . Cada caminho da treliça do código, está associado à uma sequência de bits de entradas. Os caminhos fechados, de comprimento l ($l \leq L$), com início e final no estado zero, podem ser associados à sequências onde, o bloco inicial de k_1 bits é não nulo e, após uma determinada quantidade de blocos, possivelmente não nulos, todos os demais blocos de bits de entrada, são nulos, o que implica que, mesmo desprezando os blocos nulos do final, o comprimento de cada sequência é superior a V/k_1 .

Para a construção das sequências necessita-se, portanto, de alguns parâmetros:

- 1) L : o comprimento máximo em ramos, dos caminhos fechados da treliça, com início e final no estado zero;
- 2) \mathcal{A} : o alfabeto de entrada do codificador convolucional.

Note que, o comprimento mínimo dos caminhos fechados, com início e final no estado zero, é sempre superior à V/k_1 . Por exemplo: se $V=3$ e $k_1 = 2$ então o comprimento dos caminhos é superior à 1.5 ramos, i.e., $L \geq 2$. Sendo que cada bloco de k_1 bits de entrada,

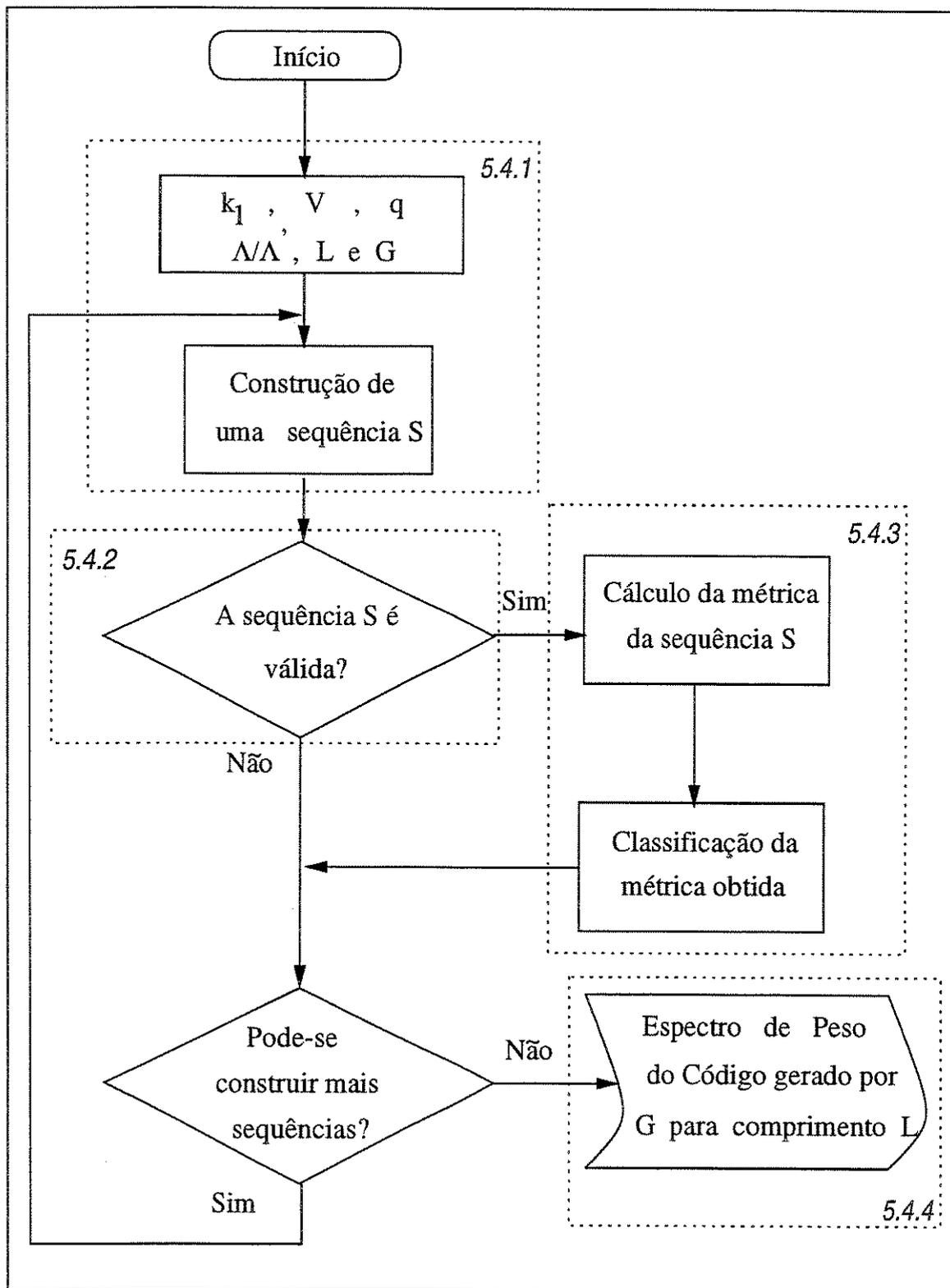


Figura 5.4: Fluxograma do Algoritmo para a Determinação do Espectro de Pesos de um Código.

está associado à um ramo da treliça e o número máximo de memórias por entrada é v ($\max\{v_i\}, i = 1, \dots, k_1$), a quantidade máxima de blocos de k_1 bits da sequência de entrada, é de:

a) $(L - v)$, se $V \equiv 0 \pmod{k_1}$; ou

b) $(L - v + 1)$, caso contrário; sendo que o bloco a ser acrescido, possui os primeiros $(V - vk_1)$ bits nulos.

Exemplo: Esquema com $(k_1, V) = (2, 3)$ e $L = 4$ ramos.

As sequências de entrada possuem no máximo, 3 blocos de 2 bits, assim inicia-se pelas sequências com 1 bloco de 2 bits (não nulos, simultaneamente):

$$S_{01} = 0\ 1 \quad S_{02} = 1\ 0 \quad S_{03} = 1\ 1$$

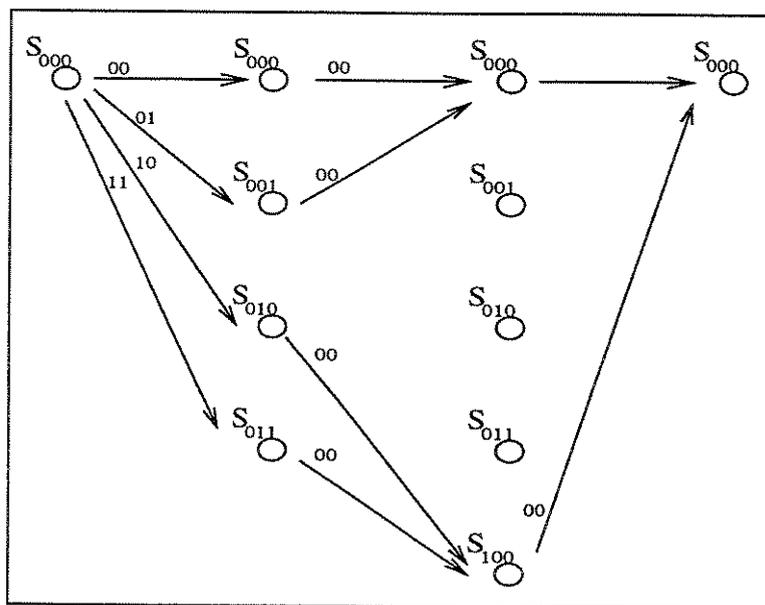


Figura 5.5: Representação dos caminhos fechados associados às sequências S_{01} , S_{02} e S_{03}

Conforme mostra a figura 5.5, a sequência S_{01} é a única, que corresponde a um caminho

fechado de comprimento $l = 2$. As demais produzem caminhos de comprimento $l = 3$.

Considere-se as sequências com 2 blocos de 2 bits de entrada, as quais representam caminhos fechados, com início e final em S_0 , de comprimentos $l = 3$ e 4 (fig 5.6).

São elas:

$$\begin{aligned} S_{04} &= 01\ 01 & S_{05} &= 10\ 01 & S_{06} &= 11\ 01 \\ S_{07} &= 01\ 10 & S_{08} &= 10\ 10 & S_{09} &= 11\ 10 \\ S_{10} &= 01\ 11 & S_{11} &= 10\ 11 & S_{12} &= 11\ 11 \end{aligned}$$

Finalmente, considere-se as sequências com 3 blocos de 2 bits. As sequências cujo último bloco é diferente de 01, representam caminhos fechados de comprimento $l = 5$, que não interessa nesse exemplo, pois $l \leq L = 4$. Assim considere-se somente, as sequências cujo último bloco é 01, pois representam os caminhos fechados de comprimento 4.

Assim tem-se a seguinte lista das sequências:

$$\begin{aligned} S_{13} &= 01\ 00\ 01 & S_{14} &= 10\ 00\ 01 & S_{15} &= 11\ 00\ 01 \\ S_{16} &= 01\ 01\ 01 & S_{17} &= 10\ 01\ 01 & S_{18} &= 11\ 01\ 01 \\ S_{19} &= 01\ 10\ 01 & S_{20} &= 10\ 10\ 01 & S_{21} &= 11\ 10\ 01 \\ S_{22} &= 01\ 11\ 01 & S_{23} &= 10\ 11\ 01 & S_{24} &= 11\ 11\ 01 \end{aligned}$$

Tem-se 24 sequências construídas, sendo necessário ainda, verificar se todas são **válidas**, isto é, se todas as sequências produzem caminhos fechados distintos. No exemplo, a sequência $S_{01} = 01$ e a sequência $S_{13} = 010001$, representam o mesmo caminho fechado, com $l = 2$, que parte de S_0 com o ramo representado por 01 e volta a esse estado, com o ramo representado por 00.

5.4.2 DETERMINAÇÃO DAS SEQUÊNCIAS VÁLIDAS

Sempre que, $V \equiv 0 \pmod{k_1}$, tem-se o mesmo número de memórias, v , em todas as entradas do codificador convolucional. Caso contrário, uma ou mais entradas (até o máximo de $k_1 - 1$), possuem $v - 1$ memórias.

A **sequência é válida** se:

a) Para $V \equiv 0 \pmod{k_1}$, a sequência possui, no máximo, $v - 1$ blocos nulos consecutivos;

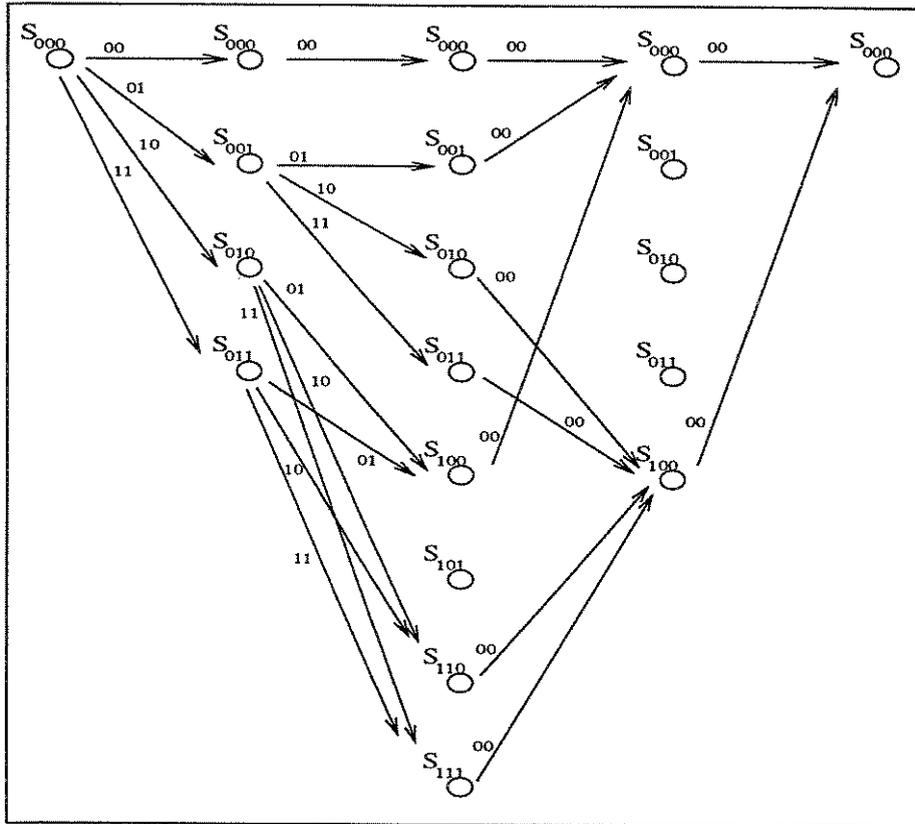


Figura 5.6: Representação dos caminhos fechados associados às seqüências S_{04}, \dots, S_{12}

b) Caso contrário, a sequência possui, no máximo, $(v - 2)$ blocos nulos consecutivos, após um bloco com os $(V - vk_1)$ primeiros bits nulos (exceto o bloco todo nulo) e, no máximo, $(v - 1)$ blocos nulos consecutivos, após os demais blocos.

No exemplo, tem-se que a sequência S_{13} não é válida, pois possui um bloco nulo após o bloco 01, sendo que as sequências S_{14} e S_{15} são válidas, visto que o bloco nulo está após os blocos 10 e 11.

As demais sequências são igualmente válidas, pois não possuem blocos nulos.

5.4.3 CÁLCULO, CLASSIFICAÇÃO E CONTAGEM, DO PESO DOS CAMINHOS FECHADOS

O objetivo dessa fase do algoritmo, é a determinação do número de caminhos com mesma métrica, a partir do d_{free} do código.

Procede-se, portanto, a determinação da métrica associada à cada caminho fechado representado por uma sequência de entrada válida. Para cada sequência de entrada válida calcula-se o coset (equação 2.12 - capítulo 2) e a respectiva métrica, para cada ramo do correspondente caminho fechado representado na treliça do código.

A soma das métricas obtidas, para todos os ramos que compõem um mesmo caminho fechado, é a métrica associada ao caminho considerado. Classifica-se o caminho segundo sua métrica.

Esse passo do algoritmo é repetido, para todas as sequências válidas de entrada, do esquema considerado. A classificação final dos caminhos, quanto à métrica de cada um e suas quantidades, constituem o espectro de pesos desejado.

Exemplo: Esquema com $(k_1, V) = (2, 3)$ e $L = 4$. A matriz geradora

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e a sequência válida de entrada (seção 5.4.1):

$$S_{15} = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,$$

obtem-se o seguinte valor, como métrica do caminho representado pela sequência escolhida:

$$P(S_{15}) = \|1(2, 0)+1(1, 1)\|+\|1(1, 1)+1(0, 1)\|+\|1(2, 0)+1(2, 0)\|+\|1(1, 1)\| = 2+1+0+2 = 5.$$

5.4.4 APRESENTAÇÃO DO ESPECTRO DE PESOS (FINAL DO ALGORITMO)

Refazendo os cálculos para as demais sequências válidas, obtem-se o seguinte espectro de pesos, para todos os caminhos fechados, de comprimento l , $l \leq L = 4$:

Métricas	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	Total
Quantidade de Caminhos	4	2	5	5	4	1	1	0	1	0	23

Note que, existem 23 sequências válidas de entrada neste exemplo. Isto ocorre, pois apenas a sequência S_{13} não é válida.

5.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS DE ESPECTROS DE PESOS

O objetivo desta seção é apresentar tabelas e gráficos construídos a partir dos resultados obtidos, através da implementação do algoritmo proposto na seção anterior, utilizando vários códigos treliça. O enfoque está na evolução dos espectros de pesos, quanto ao aumento gradativo do comprimento máximo L , dos caminhos fechados da treliça (com início e final no estado S_0).

Os resultados estão divididos em dois exemplos, dada a diferença da partição de reticulados utilizada em cada um dos esquemas envolvidos.

5.5.1 PARTIÇÃO DE RETICULADOS $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 COSETS)

Seja o esquema de codificação com os parâmetros, $(k_1, V, q) = (2, 4, 2)$, e a partição de reticulados $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (fig.2.5 - capítulo 2).

Considere-se o subconjunto especial, associado à matriz norma $GN = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$, que possui 64 matrizes geradoras G , distintas, divididas em 8 grupos, representados pelas matrizes G_i $i \in \{1, \dots, 8\}$ (fig.5.3), conforme a classe de equivalência proposta na seção 5.2.

As tabelas das figuras 5.7 à 5.14, apresentam os espectros de pesos dos grupos mostrados na fig.5.3, respectivamente. A quantidade de caminhos fechados da treliça do codificador convolucional, para cada um dos grupos, está listada, sendo consideradas as variáveis, métrica e comprimento máximo L , do caminho fechado.

Conforme apresentado no capítulo 3 (seção 3.3), as métricas dos caminhos fechados da treliça nunca são inferiores ao limitante inferior do subconjunto especial, Δ_{inf} , sendo que, neste caso, $\Delta_{inf} = 4$ (seção 3.4). Desta forma as tabelas (figs 5.7-5.14), iniciam as métricas pelo valor 4.

O codificador convolucional envolvido neste esquema de codificação possui duas memórias ($v = 2$) em cada uma de suas entradas, logo o menor caminho fechado possui comprimento $l = 3$. Assim, inicia-se as tabelas por $L=3$.

A fig.5.7, apresenta o espectro do grupo de códigos ótimos equivalentes, representados por G_1 , cujo d_{free} é 6. Na fig.5.8 o d_{free} obtido é 4, na fig.5.9 tem-se $d_{free} = 5$, ocorrendo o mesmo, para as figuras 5.10, 5.11 e 5.14. Nas outras duas, tem-se $d_{free} = 4$.

Comparadas, as tabelas das figuras 5.10 e 5.11, observa-se que os grupos de matrizes geradoras, representados por G_4 e G_5 , são equivalentes, visto que possuem o mesmo espectro de pesos, para cada comprimento máximo L dado.

As áreas hachuradas nas tabelas, indicam as quantidades, de caminhos fechados da treliça, que tornaram-se estáveis, à medida que L cresce. Nota-se que, o espectro de pesos da matriz do código treliça ótimo G_1 (fig.5.7), torna-se estável, primeiramente, para as menores métricas, o que significa que, para maiores valores de L , a quantidade de caminhos fechados com a métrica igual ao d_{free} , tem grande probabilidade de permanecer fixa em 13 caminhos,

valor atingido já com L=8.

A título de comparação, foi construído o gráfico mostrado na fig.5.15, com os espectros de pesos das matrizes geradoras G_1 e G_7 , considerando-se a última linha (L=10) de suas tabelas (figs 5.7 e 5.13).

$$\text{Matrizes geradora } G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma GN} = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$$

Métrica Comprimento Máximo																																
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32			
L=3			1	2																												
L=4			2	6	2	0	1	0	1																							
L=5			5	10	8	8	6	2	4	4	1																					
L=6			9	16	16	32	31	20	22	16	12	6	1	0	0	2																
L=7			12	24	34	74	99	96	98	82	66	56	24	10	9	4	6	2														
L=8			13	30	64	152	228	300	361	352	323	280	217	128	67	48	34	28	10	2	2	0	1									
L=9			13	32	97	270	462	718	1049	1218	1277	1256	1086	870	602	386	256	170	136	64	19	16	7	6	1							
L=10			13	32	124	400	820	1504	2492	3434	4183	4652	4589	4168	3551	2624	1825	1320	885	598	358	180	95	50	41	14	2	2				

Figura 5.7: Espectro de Pesos do Código Treliça Ótimo, gerado pela matriz G_1 .

$$\text{Matrizes geradora } G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma GN} = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$$

Métrica Comprimento Máximo	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
L=3			1	2																									
L=4	1	0	2	4	2	0	1	2																					
L=5	1	0	4	6	8	10	8	6	3	2																			
L=6	1	0	6	12	17	30	31	32	21	18	13	0	0	0	2														
L=7	2	0	6	16	35	60	97	120	109	96	68	40	15	12	15	4	1												
L=8	2	0	8	16	54	120	219	324	389	404	337	264	193	124	77	56	40	12	1										
L=9	2	0	11	18	65	192	407	750	1062	1340	1381	1250	1054	796	628	424	322	200	70	20	3	16							
L=10	3	0	11	20	75	244	673	1442	2481	3592	4451	4778	4540	4072	3425	2738	2102	1484	937	460	220	120	52	24	8	4			

Figura 5.8: Espectro de Pesos do Código Treliça não ótimo, gerado pela matriz G_2 .

$$\text{Matrizes geradora } G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma GN} = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$$

Métrica Comprimento Máximo	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
L=3				2	1																								
L=4		2	1	2	4	2	1																						
L=5		2	4	6	8	10	9	4	2	0	1	2																	
L=6		2	5	14	26	28	26	24	24	18	5	6	5																
L=7		2	7	20	48	76	88	98	101	94	66	32	26	20	10	6	1	0	1										
L=8		2	8	28	72	144	233	322	370	348	311	276	201	124	85	58	36	14	3	4	1								
L=9		2	8	34	102	236	468	782	1077	1252	1265	1192	1092	856	581	416	290	182	91	36	23	16	7	2	1				
L=10		2	8	36	127	350	807	1578	2552	3520	4331	4650	4455	4104	3492	2656	1913	1304	875	574	303	148	92	46	21	8	1	2	1

Figura 5.9: Espectro de Pesos do Código Treliça não ótimo, gerado pela matriz G_3 .

$$\text{Matrizes geradora } G_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma GN} = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$$

Métrica Comprimento Máximo	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
	L=3			1	2																								
L=4			2	5	3	0	1	1																					
L=5		1	4	8	8	9	7	4	4	2	1																		
L=6		2	6	14	19	27	34	25	19	17	12	5	1	2															
L=7		3	7	22	41	65	100	105	91	86	69	48	29	15	10	5	1												
L=8		2	7	27	71	140	227	306	361	360	316	274	212	146	89	50	32	12	3	3	2								
L=9		2	8	31	96	235	467	740	1022	1245	1284	1221	1089	875	649	425	275	173	86	44	25	14	3	3	1				
L=10		2	9	36	117	332	800	1532	2447	3455	4232	4571	4589	4214	3526	2757	1971	1338	883	523	292	166	94	42	13	9	5	1	

Figura 5.10: Espectro de Pesos do Código Treliça não ótimo, gerado pela matriz G_4 .

$$\text{Matrizes geradora } G_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma GN} = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$$

Métrica Comprimento Máximo	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
	L=3			1	2																								
L=4			2	5	3	0	1	1																					
L=5		1	4	8	8	9	7	4	4	2	1																		
L=6		2	6	14	19	27	34	25	19	17	12	5	1	2															
L=7		2	7	22	41	65	100	105	91	86	69	48	29	15	10	5	1												
L=8		2	7	27	71	140	227	306	361	360	316	274	212	146	89	50	32	12	3	3	2								
L=9		2	8	31	96	235	467	740	1022	1245	1284	1221	1089	875	649	425	275	173	86	44	25	14	3	3	1				
L=10		2	9	36	117	332	800	1532	2447	3455	4232	4571	4589	4214	3526	2757	1971	1338	883	523	292	166	94	42	13	9	5	1	

Figura 5.11: Espectro de Pesos do Código Treliça não ótimo, gerado pela matriz G_5 .

$$\text{Matrizes geradora } G_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma } GN = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$$

Métrica \ Comprimento Máximo	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
L = 3	1	0	0	2																									
L = 4	1	0	1	2	3	4	1																						
L = 5	1	0	3	8	6	12	9	4	3	0	2																		
L = 6	1	0	5	12	20	28	28	28	29	20	3	4	5																
L = 7	1	0	9	18	36	72	82	112	96	75	42	26	24	6	0	1													
L = 8	1	0	10	26	57	136	204	288	370	364	340	318	222	120	86	56	29	12	0	0	1								
L = 9	1	0	12	28	86	220	412	692	1015	1220	1298	1294	1163	920	624	428	300	168	74	20	19	16	0	0	1				
L = 10	1	0	12	32	108	328	690	1412	2349	3288	4207	4694	4678	4352	3769	2836	1960	1340	852	540	252	120	76	28	23	8	0	0	1

Figura 5.12: Espectro de Pesos do Código Treliça não ótimo, gerado pela matriz G_6 .

$$\text{Matrizes geradora } G_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma } GN = [4 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 4]$$

Métrica \ Comprimento Máximo	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
L = 3	1	0	0	2																									
L = 4	1	0	1	2	3	4	1																						
L = 5	2	0	3	6	6	10	11	6	2	2																			
L = 6	2	0	3	10	19	34	27	30	30	14	5	4	4	0	1														
L = 7	3	0	3	12	36	74	95	100	113	63	40	20	14	11	4	4													
L = 8	3	0	3	12	60	130	203	316	402	376	335	300	184	110	91	60	31	16	8										
L = 9	4	0	3	14	76	204	371	718	1101	1320	1333	1266	1080	820	621	412	316	192	92	50	8	8	0	2					
L = 10	4	0	3	14	92	264	619	1402	2478	3468	4417	4858	4503	4092	3529	2716	1997	1472	991	522	288	132	47	30	10	8			

Figura 5.13: Espectro de Pesos do Código Treliça não ótimo, gerado pela matriz G_7 .

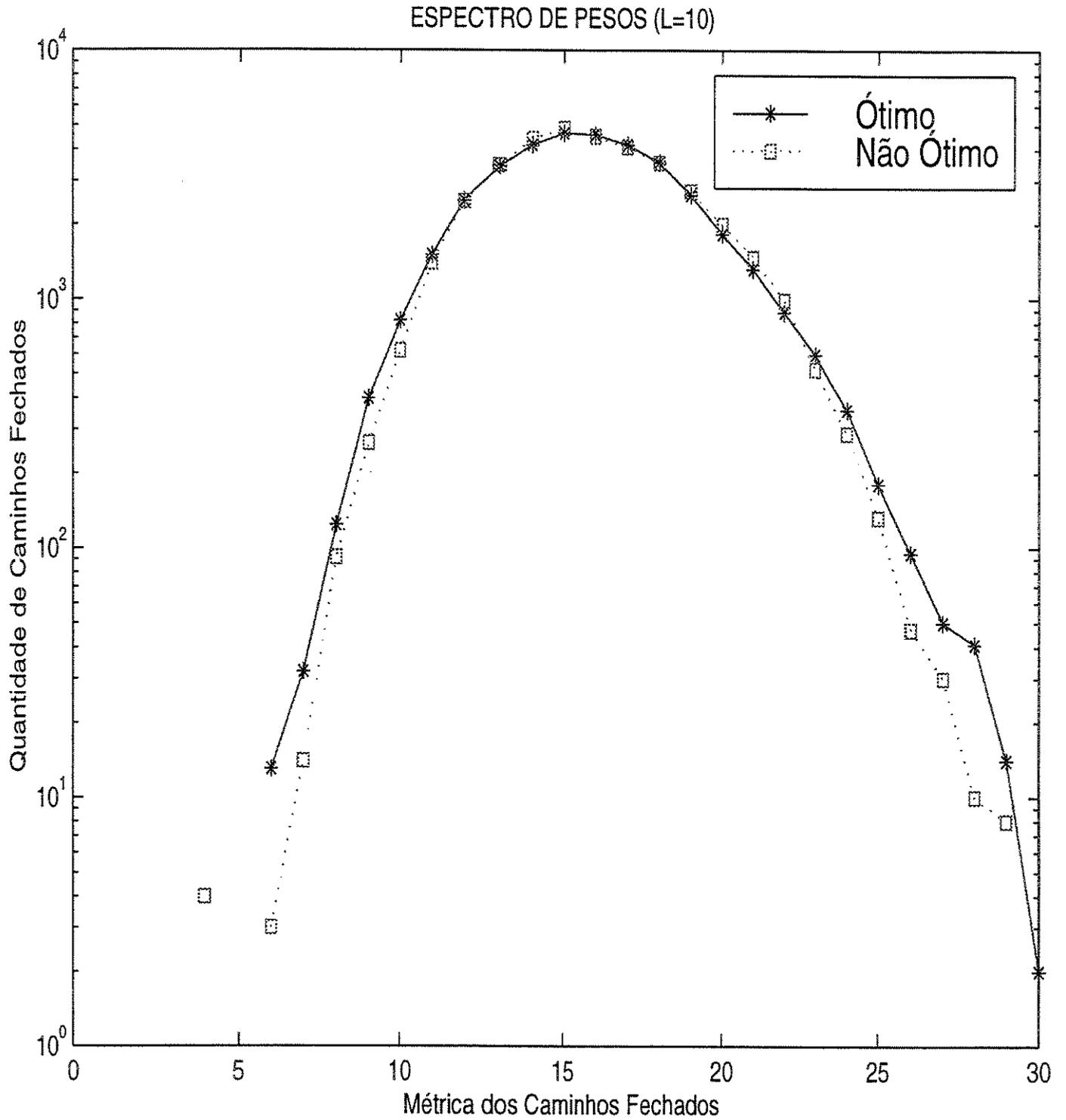


Figura 5.15: *Espectros de Pesos dos Códigos Treliças, com $(k_1, V, q) = (2, 4, 2)$ e a partição $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ (8 cosets).*

5.5.2 PARTIÇÃO DE RETICULADOS $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 COSETS)

Seja o esquema de codificação, com os parâmetros, $(k_1, V, q) = (2, 4, 2)$, e a partição de reticulados $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (fig.4.3 - capítulo 4).

Considere-se o subconjunto especial, associado à matriz norma $GN = [8 \ 4 \ 2 \ 5 \ 8 \ 4]$, que possui 64 matrizes geradoras G , distintas, divididas em 8 grupos, conforme a classe de equivalência proposta na seção 5.2, visto que o grupo que atua, gerando os códigos treliça equivalentes é o grupo diedral D_8 (o mesmo do exemplo anterior).

As tabelas dos espectros de pesos de dois códigos (um ótimo e um não ótimo), mostradas nas figuras 5.16 e 5.17, apresentam a quantidade de caminhos fechados da treliça do codificador convolucional, envolvido neste esquema de codificação, para cada uma das métricas do intervalo de 10 à 35.

O codificador convolucional envolvido neste esquema de codificação possui duas memórias ($v = 2$) em cada uma de suas 2 entradas, logo $L=3$ é o menor comprimento a ser considerado. A tabela apresenta L no intervalo de 3 à 10.

Comparadas, as tabelas das figuras 5.16 e 5.17, observa-se que as quantidades de caminhos fechados da treliça, tornam-se estáveis, mais rapidamente, no caso do código ótimo (fig.5.16), sendo que, para $L=10$, tem-se estáveis as quantidades de caminhos fechados com métricas inferiores à $d_{free}(GN) + 6 = 18$, enquanto que para o código não ótimo (fig.5.17), tem-se apenas a estabilidade das quantidades de caminhos fechados para métricas inferiores à $d_{free}(GN) + 2 = 14$.

O código gerado por G_1 , da fig.5.16, é ótimo com $d_{free} = 12$, conforme mostra a tabela de códigos ótimos da fig.4.21 (capítulo 4). O outro código, gerado por G_2 (fig.5.17), é não ótimo, pois possui $d_{free} = 10$.

O gráfico apresentado na fig.5.18, foi obtido através das últimas linhas de cada uma das tabelas (figs 5.16 e 5.17), mostrando a irregularidade da curva apresentada pelo espectro de pesos do código não ótimo, para $L=10$, dando a impressão de ser, a curva do código ótimo, uma espécie de curva “média” da anterior.

$$\text{Matrizes geradora } G_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma } GN = [8 \ 4 \ 2 \ 5 \ 8 \ 4]$$

Métrica Comprimento Máximo	Métrica																																					
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35												
L=3				2	0	0	0	0	1																													
L=4				2	4	4	0	0	1	0	1																											
L=5			4	2	4	10	4	4	3	0	2	0	1	6	4	2	2																					
L=6			4	10	8	10	12	12	7	12	14	8	11	6	21	22	10	12	4																			
L=7			4	10	24	18	16	30	15	32	38	48	74	40	40	66	51	46	48	30	18	12	4	8	8	2												
L=8			4	10	24	42	36	38	63	76	82	120	162	204	199	142	191	170	129	194	170	148	120	64	68	50												
L=9			4	10	24	42	80	70	87	186	202	296	324	404	606	520	555	650	564	590	645	690	726	600	442	414												
L=10			4	10	24	42	80	150	159	226	438	608	752	916	1078	1440	1607	1622	2158	2222	2135	2446	2391	2612	2470	2030												

Figura 5.16: Espectro de Pesos do Código Treliça ótimo, gerado pela matriz G_1 , com $(k_1, V, q) = (2, 4, 2)$ e a partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 cosets).

$$\text{Matrizes geradora } G_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz norma } GN = [8 \ 4 \ 2 \ 5 \ 8 \ 4]$$

Comprimento Máximo	Quantidade de caminhos por Métrica																																						
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35													
L=3				2	0	0	0	0	1																														
L=4		2	0	0	2	0	4	0	0	3	0	1																											
L=5		2	0	4	2	0	10	0	4	5	0	10	0	1	6	0	2	2																					
L=6		2	0	6	2	4	14	0	28	5	4	38	0	21	14	1	22	2	4	10	0	2	4																
L=7		2	0	8	2	16	14	4	58	5	48	56	4	120	16	32	106	3	62	40	6	44	8	8	20	0	2												
L=8		2	0	8	2	26	14	28	74	9	168	62	68	290	20	269	198	45	394	59	130	280	16	148	116	18	86												
L=9		2	0	8	2	30	14	68	80	45	298	66	360	420	104	978	244	493	1134	114	1068	655	234	1120	216	384	710												
L=10		2	0	8	2	32	14	102	80	149	378	114	912	476	652	1940	356	2461	1874	846	4238	971	2342	3869	588	3430	2098												

Figura 5.17: Espectro de Pesos do Código Treliça não ótimo, gerado pela matriz G_2 , com $(k_1, V, q) = (2, 4, 2)$ e a partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 cosets).

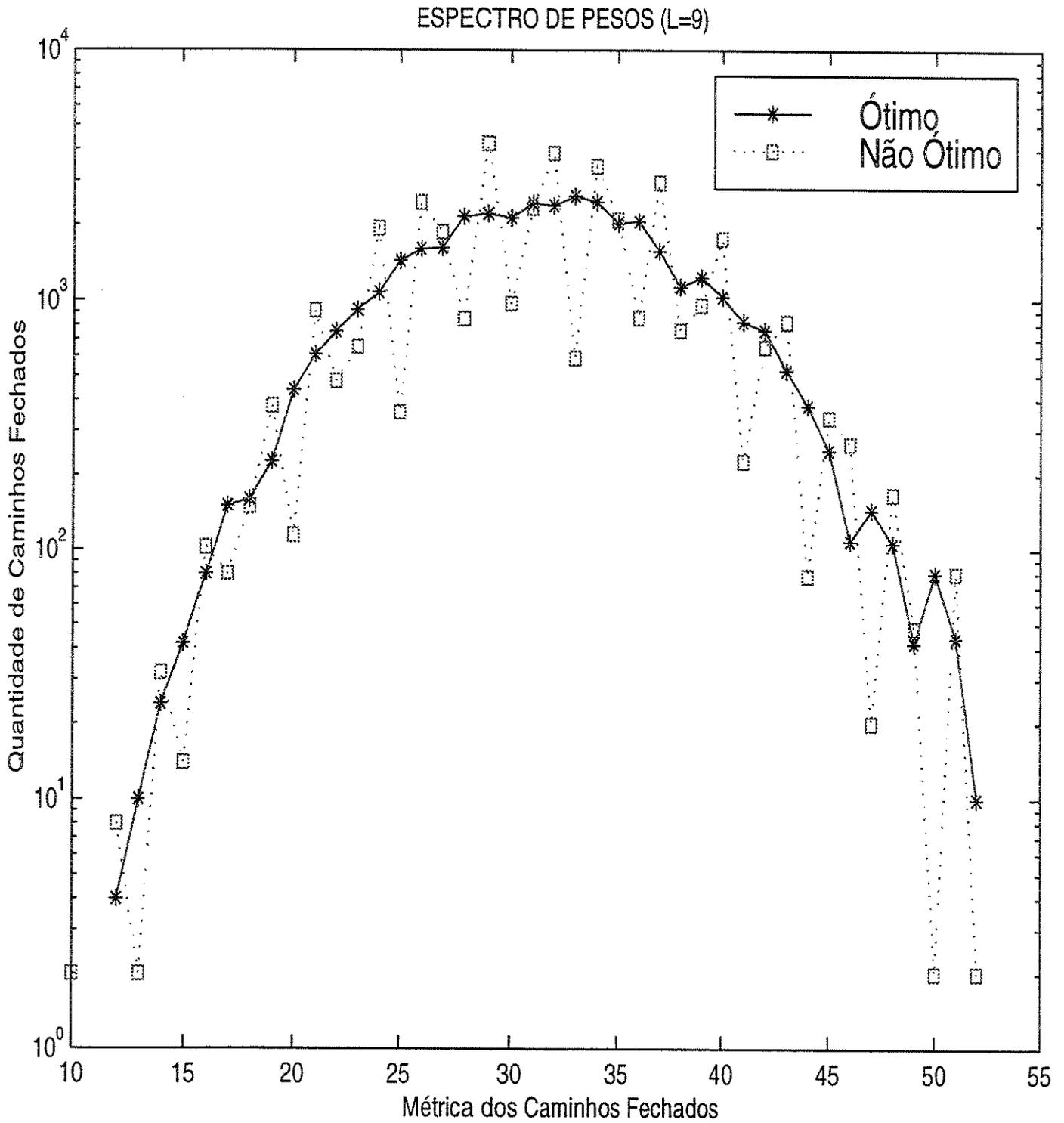


Figura 5.18: *Espectros de Pesos dos Códigos Treliças, com $(k_1, V, q) = (2, 4, 2)$ e a partição $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 cosets).*

5.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentou-se, na seção 5.2, uma classe de equivalência para Códigos Treliça, baseados em partições de reticulados, cujas matrizes geradoras G , estão descritas pelos líderes de cosets da partição.

Essa classe de equivalência foi obtida, através da aplicação de conceitos algébricos, envolvendo a Álgebra Linear e as Estruturas Algébricas (particularmente os grupos diedrais), reafirmando, desta maneira, a estreita ligação entre Álgebra e Teoria dos Códigos.

No exemplo apresentado na seção 5.3.1, fica claro que a busca dos códigos treliça com melhores d_{free} dentro dos subconjuntos especiais, considerando os parâmetros $k_1 = 2$, $V = 4$, $\Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$, poderá ser realizada em apenas 12,5% das matrizes geradoras em cada subconjunto especial.

Desta maneira, o uso da classe de equivalência proposta, poderá otimizar significativamente a procura de códigos treliça ótimos [[26],[28],[30]] (Apêndices A3, A4 e A5).

A determinação do espectro de pesos dos Códigos Treliça, baseados em partições de reticulados, proposta pelo algoritmo apresentado na seção 5.4, não apenas é uma importante ferramenta na determinação de limitantes na probabilidade de erro para tais códigos; como também, comprova a classe de equivalência apresentada, e demonstrada, neste capítulo.

O algoritmo para a determinação do espectro de pesos dos Códigos Treliça, foi apresentado detalhadamente, trazendo em cada subseção, um exemplo da fase descrita.

A seção 5.5 apresentou exemplos, envolvendo a utilização do algoritmo para a determinação do espectro de pesos dos Códigos Treliça. Tais exemplos, foram mostrados na forma de tabelas, as quais evidenciam a evolução dos espectros, levando-se em consideração, a variação do comprimento máximo L , dos caminhos fechados da treliça do código, e a métrica obtida para esses caminhos.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

6.1 INTRODUÇÃO

Esta tese foi resultado da evolução de estudos, visando propor um algoritmo eficiente de procura de códigos treliça ótimos, baseados em partições de reticulados.

Seus resultados e contribuições podem ser sintetizados, nos seguintes objetivos:

- 1) Determinação otimizada e conclusiva, portanto eficiente, de códigos treliça ótimos;
- 2) análise de aplicações das estruturas algébricas à teoria dos códigos treliça;
- 3) determinação dos espectros de pesos de códigos treliça.

Este capítulo, destina-se a uma discussão final, com o propósito de ressaltar os pontos relevantes, desta pesquisa, assim como propor novas diretrizes, visando trabalhos futuros.

O conteúdo dos capítulo 3 (subconjuntos especiais) e 4 (algoritmo de procura), foram publicados, resumidamente, nos anais de dois congressos internacionais e dois nacionais, e em um periódico nacional (Apêndices A.1 à A.5), sendo que, nesta tese, abordou-se esses temas com maior detalhamento, trazendo-se também, exemplos que elucidam a utilização dos conceitos e algoritmos propostos. O material do capítulo 5, contém os mais recentes resultados, ainda não submetidos à comunidade científica.

6.2 ANÁLISE E COMENTÁRIOS

Nesta tese, foi proposta uma procura exaustiva e eficiente, dos códigos treliça ótimos baseados em partições de reticulados, sendo dados os parâmetros do esquema considerado (k_1 , V , q e uma partição de reticulados).

A determinação dos espectros de pesos e equivalências dos códigos treliça, também foram propostas, visto que constituem importantes propriedades estruturais dos códigos em geral.

Nos dois primeiros capítulos, objetivou-se inserir o leitor no contexto geral do trabalho, apresentando a motivação, e divisão em capítulos, dos temas abordados, bem como, apresentando a fundamentação teórica, e notação básica, para conceitos da literatura pertinentes a esta tese.

No terceiro capítulo foram propostos conceitos de fundamental importância, para a eficiência da procura proposta, destacando-se dentre outros, os subconjuntos especiais, definidos a partir dos limitantes do d_{free} do código convolucional (Δ_{inf} e Δ_{sup}), e associados a matriz-norma GN. Esses conceitos constituem-se em efetivas contribuições desta tese, sendo os mesmos, abordados nos artigos [[27],[29],[26]] (Apêndices A.1, A.2 e A.3), de forma resumida.

A importância dos limitantes do d_{free} , Δ_{inf} e Δ_{sup} , ficou evidenciada nos exemplos numéricos de subconjuntos especiais de matrizes geradoras G , sendo também ressaltadas as nuances diferenciadoras dos procedimentos propostos, quanto aos parâmetros do codificador convolucional (o número de entradas k_1 e de memórias V).

O algoritmo da procura proposta foi apresentado no capítulo 4, podendo-se salientar, o modo detalhado e didático, da abordagem do tema. Constitui-se, portanto, numa das contribuições fundamentais desta tese. Ressalta-se que, também este tema, foi abordado resumidamente nos artigos [[28],[30]] (Apêndices A.4 e A.5).

Com a implementação do algoritmo proposto, pôde-se realizar a procura de códigos treliça ótimos, considerando-se partições de reticulados com grande número de cosets e alfabetos q -ários de símbolos de entrada.

Exemplos numéricos, que elucidam o uso do algoritmo de procura proposto, foram apresentados, os quais possuem dados que evidenciam o caráter exaustivo da procura e o alto grau de otimização alcançado. Observa-se que o algoritmo gera todos os subconjuntos possíveis, em cada esquema de codificação (dados k_1, V, q e Λ/Λ'), descartando-se:

a) subconjuntos completos de matrizes G (sem ao menos gerá-las), sempre que $\Delta_{sup}(GN) \leq d_{free}$, considerando-se um d_{free} previamente obtido; ou

b) grande parte das matrizes geradoras G (para as quais o Δ_{sup} não excede o d_{free} já obtido), dos subconjuntos especiais, quando a assertiva acima, para matriz norma GN , não verifica-se.

A classe de equivalência dos códigos treliça proposta, e demonstrada, no capítulo 5, realiza uma partição em cada um dos subconjuntos especiais associados às matrizes norma GN , possíveis a um esquema considerado. A incorporação dessa equivalência, e devida implementação, ao algoritmo de busca dos códigos treliça com d_{free} máximos, dentro dos “melhores” subconjuntos especiais, poderá otimizar a procura dos códigos treliça ótimos, aqui proposta, como pode-se observar claramente, através do exemplo proposto na seção 5.3.1.

Esta classe de equivalência foi obtida, através da aplicação de conceitos algébricos, envolvendo a álgebra linear e as estruturas algébricas (particularmente os grupos diedrais), reafirmando-se, a estreita ligação entre Álgebra e Teoria dos Códigos.

Um outro tema do capítulo 5, foi a determinação dos espectros de pesos de códigos treliça baseados em partições de reticulados, o qual pode constituir-se numa importante ferramenta, para a determinação de limitantes da probabilidade de erro desses códigos.

Ressalta-se que os muitos exemplos numéricos, abordando os diversos temas desenvolvidos nesta tese, foram inseridos no texto, com a finalidade de torná-lo didático, facilitando a compreensão dos leitores; bem como, visando contribuir, como material de referência à novas pesquisas e projetos, na área.

6.3 PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

A pesquisa descrita nesta tese pode motivar novos trabalhos na área, visto ser possível destacar os seguintes pontos em aberto:

- 1) Determinação de novas classes de equivalência, dentre os códigos treliça.
- 2) Otimização do algoritmo de procura de códigos treliça ótimos, através da implementação da equivalência dos códigos treliça, proposta nesta tese (capítulo 5), assim como outras equivalências, que venham a ser determinadas.
- 3) Utilização de reticulados no espaço vetorial \mathbb{R}^3 , obtendo-se eventualmente, partições cuja distância d_2 , seja superior às obtidas nesta pesquisa. Tal resultado, proporcionaria novos esquemas de códigos treliças, podendo-se eventualmente obter melhorias nos ganhos de codificação.
- 4) Extensão dos conceitos, propostos por este trabalho, à teoria dos BCM (Block Code Modulation). Com isso, poder-se-ia realizar estudos comparativos, a partir dos resultados obtidos para os códigos treliça apresentados nesta tese.

Apêndice A

ARTIGOS PUBLICADOS

A.1 ANAIS DO TELEMO'96 - CURITIBA - BRASIL - 1996

Procedimentos Simples para a procura de Códigos Ótimos, através de matrizes geradoras representadas por cosets.

Emília de Mendonça Rosa - emilia@dt.fee.unicamp.br
Depto de Matemática - Fac.Ciências - Unesp
Av.Edmundo C. Coubbe,s/n - 17100-000 - Bauru - S.P.

Walter da Cunha Borelli - borelli@dt.fee.unicamp.br
Depto de Telemática - Fac. de Eng.Elétrica - Unicamp
Cxp:6101 - 13081-970 - Campinas - S.P.

Resumo: Baseado nos trabalhos de Forney[3] e Calderbank e Sloane[2], este artigo sugere procedimentos básicos simples, para a determinação de subconjuntos especiais de matrizes geradoras de códigos convolucionais com k_1 símbolos de entrada e V memórias, matrizes estas representadas através de cosets de uma partição de reticulados. É proposto ainda, um algoritmo de procura de códigos ótimos nos subconjuntos especiais, o qual propicia a redução do tempo de busca.

Visto que um pequeno acréscimo de memórias no codificador acarreta um grande aumento de matrizes a serem consideradas nos referidos subconjuntos especiais, sugere-se uma maneira geral de reduzir a quantidade de matrizes nesses subconjuntos. São também apresentados alguns exemplos que elucidam os resultados deste trabalho.

1 Introdução:

Considere um código treliça que transforma uma sequência de símbolos de um alfabeto A em uma sequência de pontos de saída, os quais são obtidos a partir de um reticulado Λ no \mathcal{R}^n . O conjunto formado pelas saídas possíveis, constituem a constelação.

Seja A um corpo finito, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ um sub-reticulado, G a matriz geradora de um código convolucional com k_1 símbolos de entrada de A e apenas um símbolo de saída, que é um coset (g_{ij}) da partição de reticulados Λ/Λ' .

Seja v_i o número de memórias por entrada, $i \in \{1, k_1\}$ e $v = \max_i\{v_i\}$. G é representada,

conforme[2], da seguinte forma:

$$G = [g_{vk_1} \dots g_{v1} | \dots | g_{1k_1} \dots g_{11} | g_{0k_1} \dots g_{01}],$$

$g_{ij} \in \Lambda/\Lambda'$. Define-se a saída,

$$r = \sum_{i=0}^v \sum_{j=1}^{k_1} u_{ij} g_{ij}$$

e a norma de um coset $\|g_{ij}\| \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_k x_{ijk}^2)^2$, onde x_{ijk} são as coordenadas euclidianas do coset g_{ij} no reticulado Λ ($k = 1, 2, \dots, \dim(\Lambda)$), conforme em [2]. Note que o coset da saída depende dos k_1 símbolos de entrada (u_{ij}) , e dos V símbolos de entradas prévios (memórias).

A taxa do código convolucional é $k_1 \log_2 \alpha$ bits/coset, onde $\alpha = |A|$; assim a taxa fracionária é $\rho \stackrel{\text{def}}{=} k_1 \log_2 \alpha / \log_2 |T|$ onde $|T|$ é o

número de saídas possíveis sendo α^{k_1} o número de entradas possíveis. O codificador pode determinar até α^{k_1+V} cosets distintos.

A estrutura do código treliça considerado é apresentada na figura 1, sendo que este possui $k = k_1 + k_2$ bits de entrada e um ponto da constelação como saída. Como já citado, k_1 são os bits a serem codificados pelo código convolucional adotado, sendo este o objeto de investigação deste trabalho, e k_2 são os símbolos de entrada que não serão codificados, utilizados na escolha de um ponto específico do coset previamente escolhido pelo codificador convolucional.

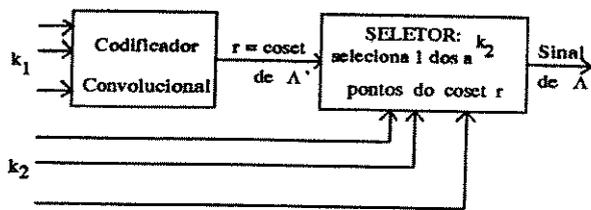


Figura 1: Estrutura do Código Treliça

Durante todo este trabalho, um código é dito ótimo quando este possui o maior d_{free} , dentre todos os que atendem ao esquema. Ressalta-se ainda, que o sub-reticulado é obtido de Z^2 através do endomorfismo $\theta = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2 Subconjuntos Especiais de Matrizes Geradoras:

Como todos os caminhos fechados da treliça de um código convolucional, considerando os que partem e voltam ao estado inicial do codificador, passam por algum dos ramos que partem do referido estado e ainda por algum dos que voltam a este estado, pode-se definir um parâmetro (Δ_{inf}), que limita inferiormente o d_{free} . Sabendo-se que o d_{free} é limitado superiormente pela métrica de um caminho, ou

pelo mínimo das métricas de vários, define-se outro parâmetro (Δ_{sup}), a partir desta idéia.

$$\text{Portanto } \Delta_{inf} \leq d_{free} \leq \Delta_{sup}.$$

A determinação das matrizes geradoras de bons códigos (d_{free} grande), envolve uma escolha adequada das colunas, a qual deve priorizar, através de combinações das mesmas, a obtenção de todos os cosets da partição utilizada, bem como a maximização dos parâmetros Δ_{sup} e Δ_{inf} . A partir das escolhas para os parâmetros acima citados, obtem-se conjuntos com um número reduzido de matrizes geradoras, dentre os quais existem matrizes que geram códigos ótimos. A esses conjuntos denominamos "subconjuntos especiais". A idéia da utilização destes conjuntos aparece nos trabalhos [1, 4 e 5], para matrizes geradoras binárias de códigos convolucionais e em [6], para matrizes geradoras representadas por cosets.

2.1 Quando $k_1 = 1$.

$$G = [g_{v1} \mid \dots \mid g_{11} \mid g_{01}]$$

Sejam

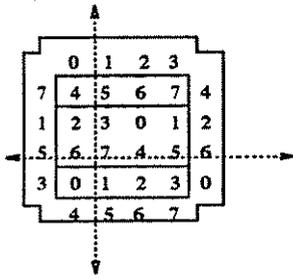
$$\Delta_{inf} = \|g_{01}\| + \|g_{v1}\| \quad e \quad \Delta_{sup} = \sum_{i=0}^V \|g_{i1}\|.$$

Note que os valores considerados no Δ_{inf} são as normas referentes aos ramos, de saída e chegada no estado zero, pelo qual passam todos os caminhos da treliça correspondente. A escolha feita para Δ_{sup} , foi motivada pelo fato de ser esta expressão, a que representa o caminho com menor número de ramos e que está associada à seguinte sequência de entrada: (1,0,0,...,0).

Procedimento básico:

-tomar a primeira e a última colunas, g_{v1} e g_{01} , com maior norma possível (onde V é o número de memórias do codificador);

-tomar uma das colunas de G, com norma ímpar de maior valor.



coset	representante	norma
0	(1,1)	2
1	(0,-1)	1
2	(1,-1)	2
3	(0,1)	1
4	(1,0)	1
5	(0,2)	4
6	(-1,0)	1
7	(0,0)	0

Figura 2: Constelação de 8, 16 e 32 pontos para $\mathcal{Z}^2/\theta\mathcal{Z}^2$

Exemplo 01) Seja $V = 2$.

Neste caso G possui 3 blocos com uma coluna cada, $G = [g_{21} | g_{11} | g_{01}]$.

Para $A = GF(2)$ tem-se 4 estados e no máximo $2^{V+k_1} = 8$ cosets distintos. Seja a partição $\mathcal{Z}^2/\theta\mathcal{Z}^2$ (Figura 2); segundo o procedimento proposto toma-se g_{01} com norma 4 e as demais sendo que, $\|g_{21}\| = 2$ e $\|g_{11}\| = 1$, para que todos os cosets sejam gerados pelo codificador.

Assim $\Delta_{inf} = 6$, $\Delta_{sup} = 7$. O d_{free} calculado para este código é 7. Uma das 8 representações possíveis para G é:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obs: Note que havendo acréscimo do número de memórias, o grau de liberdade para a escolha das colunas da matriz geradora G aumenta; assim pode ser conveniente formar um conjunto com mais de uma expressão (representando caminhos fechados na treliça) e tomar o mínimo dentre elas como definição para Δ_{sup} .

Exemplo 02) Seja $V=5$.

A matriz G tem 06 colunas.

$$G = [g_{51} | g_{41} | g_{31} | g_{21} | g_{11} | g_{01}].$$

Conforme o procedimento proposto, toma-se 2 colunas com norma 4 (g_{51}, g_{01}) e uma com

Δ_{sup}	19	18	17	16
numero de matrizes	12	6	12	*
d_{free} maximo	14	14	16	*

Total de busca: 30 matrizes

d_{free} maximo: 16 * nao considere.

Figura 3: Quantidade de matrizes utilizando uma única expressão no cálculo do Δ_{sup} .

norma 1. Para a escolha de todos os cosets da partição $\mathcal{Z}^2/\theta\mathcal{Z}^2$ (Figura 2), é preciso que G tenha também, uma coluna com norma 2 ou duas com norma 1, cuja norma da soma das duas seja 2. Para o parâmetro Δ_{sup} definido, tem-se o valor máximo de 19 (2 colunas com norma 4, 1 com norma 2 e a outra com norma 1, dentre as 4 livres). Fazendo a diminuição gradativa deste valor, até que o mesmo seja menor ou igual ao d_{free} já conseguido, obtem-se a tabela da figura 3.

Observa-se que, neste caso, ao se tomar mais uma expressão para definir o Δ_{sup} e mantendo valores próximos para os elementos deste parâmetro, obtem-se a tabela da figura 4:

$$\Delta_{sup} \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^V \|g_{i1}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i1} + g_{j1}\| \end{array} \right\}, j = i + 1.$$

Elevando-se o valor da primeira expressão para 18, o valor da segunda expressão será 12 ou 14, que não interessa; e tomando colunas de forma que o primeiro seja 19, o segundo será 14. Assim não há mais possibilidades de melhoria do d_{free} obtido.

2.2 Quando $k_1 = 2$.

$$G = [g_{v2} g_{v1} | g_{(v-1)2} g_{(v-1)1} | \dots | g_{02} g_{01}]$$

Neste caso, existem α^{k_1} ramos saindo do estado inicial e chegando ao referido estado. Assim faz-se necessário reestruturar os

Δ_{sup}	$\min\{17,18\}$	$\min\{17,16\}$	$\min\{16,16\}$
numero de matrizes	2	8	*
d_{free} máximo	13	16	*

Total de busca: 10 matrizes

d_{free} máximo: 16

* não considerado.

Figura 4: Quantidade de matrizes utilizando duas expressões no cálculo do Δ_{sup}

parâmetros Δ_{inf} e Δ_{sup} , seguindo os mesmos princípios.

$$\text{Seja } \Delta_{inf} = \delta_0 + \delta_1, \quad \text{onde}$$

$$\delta_0 = \min\{\|g_{01}\|, \|g_{02}\|, \|g_{01} + g_{02}\|\},$$

que representa a menor norma associada aos ramos de saída do estado zero e δ_1 o mínimo entre as normas associadas aos ramos de chegada no referido estado.

Na representação do δ_1 e do Δ_{sup} , deve-se considerar as diferenças obtidas pela paridade do número de memórias.

a) **V par** (ou $\equiv 0(\text{mod}k_1)$): Sejam

$$s = V/k_1,$$

$$\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\|g_{s1}\|, \|g_{s2}\|, \|g_{s1} + g_{s2}\|\},$$

$$\Delta_{sup} \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^s \|g_{i1}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i2}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i1} + g_{i2}\| \end{array} \right\}$$

b) **V ímpar** (ou $\equiv 1(\text{mod}k_1)$): Sejam

$$s = (V + 1)/k_1 \quad \text{e} \quad r = s - 1;$$

$$\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\|g_{s1}\|, \|g_{r2}\|, \|g_{s1} + g_{r2}\|\} \quad \text{e}$$

$$\Delta_{sup} \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^s \|g_{i1}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i2}\| \\ \|g_{i1}\| + \sum_{i=0}^r \|g_{i1} + g_{i2}\| \end{array} \right\}.$$

Obs: Foram tomadas na definição do Δ_{sup} apenas 3 expressões, as quais estão relacionadas às 3 sequências distintas daquela toda nula,

segundo os dois primeiros bits das entradas do codificador, ou seja, as sequências $(1,0,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$ e $(1,1,0,\dots,0)$.

Procedimento proposto:

-tomar as duas últimas colunas de G (g_{02} e g_{01}) com maior norma possível, de modo a maximizar δ_0 ;

-tomar as duas primeiras colunas de G (g_{s2} e g_{s1} para V par e g_{s1} e g_{r2} para V ímpar), com maior norma possível, de modo a maximizar δ_1 ;

-tomar pelo menos uma coluna com norma ímpar de maior valor.

Exemplo 03) Considerando $V = 3$ e a partição $Z^2/\theta Z^2$, obtem-se:

$G = [g_{21} \ g_{12} \ g_{11} \ | \ g_{02} \ g_{01}]$, onde uma das possibilidades de G é: $\|g_{21}\| = \|g_{02}\| = 4$, $\|g_{12}\| = \|g_{01}\| = 2$ e ainda $\|g_{11}\| = 1$, ou seja,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = 5$. Como qualquer dos demais caminhos da treliça passa por uma soma dupla não nula ou uma outra coluna cuja norma é não nula, além daquelas consideradas em Δ_{inf} , tem-se que $d_{free} = 5$. Portanto G é uma matriz geradora de código ótimo[2].

Exemplo 04) Para $V = 4$ e a mesma partição, a matriz G tem 6 colunas, distribuídas em 3 blocos com 2 colunas cada:

$$G = [g_{22} \ g_{21} \ | \ g_{12} \ g_{11} \ | \ g_{02} \ g_{01}].$$

Ao iniciar a escolha das colunas da matriz G , toma-se cosets, de modo que $\Delta_{sup} = \min\{8, 7, 7\} = 7$, isto é, as duas primeiras com norma 2 cuja soma tem norma 4, as duas últimas com norma 2 e 4, e as duas restantes com normas 1 e 4. Para estas matrizes o d_{free} máximo obtido foi 5. Para $\Delta_{sup} = \min\{7, 7, 8\} = 7$, toma-se $G =$

[2 4 | 1 1 | 4 2](representação de G segundo a norma das colunas), onde a soma das duas colunas de norma 1, possui norma 4. Calculando temos: $d_{free} = 5$. Para $\Delta_{sup} = \min\{7, 7, 6\} = 6$ e G como anteriormente, sendo que agora a soma das duas colunas de norma 1, possui norma 2, obtem-se $d_{free} = 6$, que é o máximo para este esquema[2].

Observa-se que tomando cosets cuja valorização das primeiras expressões consideradas na definição do Δ_{sup} aumenta, ocorre uma diminuição do valor da última expressão considerada, podendo-se obter valores menores que o d_{free} já conseguido.

2.3 Quando $k_1 = 3$.

$$G = [g_{v3} \ g_{v2} \ g_{v1} \ | \ \dots \ | \ g_{13} \ g_{12} \ g_{11} \ | \ g_{03} \ g_{02} \ g_{01}]$$

Sejam

$$\delta_0 = \min \left\{ \begin{array}{l} \|g_{01}\|, \|g_{02}\|, \|g_{03}\|, \|g_{01} + g_{02}\|, \\ \|g_{01} + g_{03}\|, \|g_{02} + g_{03}\|, \\ \|g_{01} + g_{02} + g_{03}\| \end{array} \right\}$$

e $\Delta_{inf} = \delta_0 + \delta_1$.

Tem-se aqui, 3 casos a considerar:

a) $V \equiv 0(\text{mod } k_1)$:

Seja $s = V/k_1$

$$\delta_1 = \min \left\{ \begin{array}{l} \|g_{s1}\|, \|g_{s2}\|, \|g_{s3}\|, \|g_{s1} + g_{s2}\|, \\ \|g_{s1} + g_{s3}\|, \|g_{s2} + g_{s3}\|, \\ \|g_{s1} + g_{s2} + g_{s3}\| \end{array} \right\}$$

$$\Delta_{sup} = \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^s \|g_{i1}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i2}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i3}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i1} + g_{i2}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i1} + g_{i3}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i2} + g_{i3}\| \\ \sum_{i=0}^s \|g_{i1} + g_{i2} + g_{i3}\| \end{array} \right\}$$

Obs: Nesta escolha para o Δ_{sup} foram consideradas as 7 expressões obtidas a partir das seqüências de entrada, diferentes e não nulas, apenas nos 3 primeiros bits.

b) $V \equiv 1(\text{mod } k_1)$: Seja $s = (V + 2)/k_1$ e $r = s - 1$.

$$\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \begin{array}{l} \|g_{s1}\|, \|g_{r2}\|, \|g_{r3}\|, \|g_{s1} + g_{r2}\|, \\ \|g_{s1} + g_{r3}\|, \|g_{r2} + g_{r3}\|, \\ \|g_{s1} + g_{r2} + g_{r3}\| \end{array} \right\}$$

e para Δ_{sup} o mínimo do conjunto de expressões considerando as 7 seqüências citadas na observação anterior.

c) $V \equiv 2(\text{mod } k_1)$: Seja $s = (V + 1)/k_1$ e $r = s - 1$.

$$\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \min \left\{ \begin{array}{l} \|g_{s1}\|, \|g_{s2}\|, \|g_{r3}\|, \|g_{s1} + g_{s2}\|, \\ \|g_{s1} + g_{r3}\|, \|g_{s2} + g_{r3}\|, \\ \|g_{s1} + g_{s2} + g_{r3}\| \end{array} \right\}$$

e Δ_{sup} segundo as mesmas seqüências.

Procedimento:

- tomar as 3 últimas colunas de G, com norma máxima possível, de modo a maximizar δ_0 ;
- tomar as 3 primeiras colunas de G, com norma máxima possível, de modo a maximizar δ_1 ;
- tomar uma coluna com norma ímpar de maior valor.

3 Algoritmo de procura dentro as matrizes cosets:

1) Escolhida uma matriz geradora segundo o procedimento sugerido na seção 2, calcula-se o Δ_{sup} e o d_{free} referentes a esta matriz.

2) Guarda-se o d_{free} e escolhe-se outra matriz segundo o mesmo procedimento.

3) Calcula-se o Δ_{sup} para esta nova matriz, caso o Δ_{sup} seja menor ou igual ao d_{free} do código anterior desconsidera-se esta nova matriz e sem maiores considerações, retorna-se ao passo (2). Caso contrário calcula-se o d_{free} para a nova matriz, comparando-o com o anteriormente obtido. Guarda-se o maior valor

e a matriz referente a este, retornando-se em seguida ao passo (2).

O cálculo do d_{free} neste trabalho foi realizado segundo o Algoritmo de Viterbi.

4 Conclusão:

Dado um esquema de codificação (número de entradas e memórias existentes) existe a necessidade da determinação de bons códigos. Tais esquemas podem estar inseridos em contextos maiores, como por exemplo, os códigos treliça obtidos por Calderbank e Sloane em [2]. Este trabalho contribui no sentido de se obter uma considerável redução no conjunto das matrizes geradoras possíveis [1,4,5 e 8], que aqui são representadas através de cosets. Nos "subconjuntos especiais", considerando expressões adequadas para o Δ_{inf} e o Δ_{sup} (seção 3), promove-se a procura de matrizes geradoras de códigos ótimos.

Observando os procedimentos básicos, nota-se que de acordo com o aumento do número de memórias, aumenta exponencialmente o número de matrizes a serem consideradas na procura; logo é conveniente aumentar o conjunto de expressões que compõem a definição do Δ_{sup} , visto que isto fornece uma redução no número de combinações das colunas das matrizes a serem consideradas.

Através de outros exemplos [6] observa-se que quanto maior o número de cosets distintos na partição considerada maior é o d_{free} obtido. Porém para fins de adequação aos Códigos Treliça [2], nem sempre é conveniente tomar-se partições com mais cosets, visto que a taxa de codificação fica reduzida provocando ganhos assintóticos menores, em comparação com esquemas não codificados.

Ressalta-se que neste trabalho, a partir dos procedimentos propostos e as combinações

das normas das colunas, os resultados obtidos foram realizados manualmente, exceto a determinação do d_{free} (algoritmo de Viterbi), dada a simplicidade dos procedimentos e algoritmo propostos, mesmo ao considerar-se esquemas de relativa complexidade (quanto ao número de entradas e de memórias).

5 Bibliografia:

- [1] Borelli, W.C. *Convolutional Codes for Multi-Level Data Transmission*. Tese de Doutorado. University of Kent at Canterbury. June 1983.
- [2] Calderbank, A.R. and Sloane, N.J.A. *New Trellis Codes based on Lattices and Cosets*. IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-33, pp.177-195, Mar.1987.
- [3] Forney Jr, G.D. *Coset codes - Parte I and II*. IEEE Trans. Inform. Theory, Vol.34, N.05, pp.1123-1187, Sept 1988.
- [4] Gonçalves, O.G.C e Palazzo Jr., R. *Determinação e análise de codificadores TCM ótimos es estruturas reticulares de 2 dimensões*. Anais do IX Simp. Brasileiro de Telecomunicações-SBT, pp.6.3.1-6.3.6, Setembro de 1991.
- [5] Markman, I. *Esquemas de Modulação Codificada em 3 e 4 dimensões*. Tese de Mestrado. UNICAMP. Campinas 1987.
- [6] Rosa, E.M. Tese de Doutorado em preparação.
- [7] Ungerboeck, G. *Trellis Coded Modulation with Redundant Signal Sets, Part I and II*. IEEE Commun. Mag., 25, pp.5-22, 1987.
- [8] Ungerboeck, G. *Channel Coding with Multilevel/Phase Signals*. IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-28, pp.55-67, Jan.1982.

A.2 ANAIS DO ISIT'97 - ULM - ALEMANHA - 1997

Special Subsets and Optimum Codes based on Lattices and Cosets

E.M. Rosa¹(Unesp/BR)

W.C. Borelli (Unicamp/BR)

P.G. Farrell (Univ. of Manchester/UK)

emiliamr@azul.bauru.unesp.br

borelli@dt.fee.unicamp.br

farrell@man.ac.uk

Abstract — This paper introduces the concept of special subsets [4] when applied to generator matrices based on lattices and cosets as presented by Calderbank and Sloane [1]. By using the special subsets we propose a non exhaustive code search for optimum codes. Although non exhaustive, the search always results in optimum codes for given $(k_1, V, \Lambda/\Lambda')$. Tables with binary and ternary optimum codes to partitions of lattices with 8, 9 e 16 cosets, were obtained.

I. SUMMARY

Following the concepts and notations as in Calderbank & Sloane[1], for a particular set of norm values for cosets \mathcal{G}_{ij} let $GN = [\|g_{vk_1}\| \dots \|g_{v1}\| \dots \mid \|g_{0k_1}\| \dots \|g_{01}\|]$ be the norm-matrix associated to the set of generator matrices G for which the cosets-representatives have been associated to norm values as in matrix GN . We shall call as special subsets of generator matrices G to those associated to norm-matrices GN with the best possible norm-values. The codes within a special subset are chosen such that their d_{free} shall be bounded as in the following: $\Delta_{lw} \leq d_{free} \leq \Delta_{up}$. The lower bound Δ_{lw} may be seen as to be the metric associated with the common edges that belong to all closed paths that leave and merge to the zero-state of the trellis. Hence for a given set of values for k_1 and V we shall define $\Delta_{lw} = \delta_0 + \delta_1$, with $\delta_0 = \min\{\|\sum_{j=1}^{k_1} u_j g_{0j}\|\}$ e $\delta_1 = \min\{\|\sum_{j=1}^{k_1} u_j g_{vj}\|\}$ where $(u_1, \dots, u_{k_1}) \in \mathcal{Z}_q^{k_1}$. Besides, the upper bound Δ_{up} may be set either to the metric of any single zero-state closed path or to the minimum metric of a set of zero-state closed paths in the trellis. The latter in general shall represent a tighter upper bound on d_{free} which would correspond (in a good way) to special subsets with smaller quantities of (better) codes. The idea to make use of these special subsets appeared in [4] applied to Ungerboeck's technique of set partitioning and in [[2],[3]] for generator matrices based in lattices and cosets.

Constructing a special subset: 1) Choose the cosets norms with the best possible values to represent the first k_1 and also the last k_1 columns of norm-matrix GN , in order to maximize both δ_0 and δ_1 in the expression for Δ_{lw} . 2) In a similar manner choose the remaining columns of GN so as to both maximize Δ_{up} and to be sure that every coset of Λ/Λ' would appear on the output of the convolutional encoder.

The optimum code search algorithm: 1) After determining a norm-matrix GN , make either $d_{aux} = \Delta_{lw}$ (at the beginning) or d_{aux} equal to previous d_{free} . 2) Take one generator matrix G , as a coset-representative of GN . 3) For this G check whether all cosets would appear at the encoder output. If not, return to step (2). 4) In case the code generated by G is catastrophic, return to step (2). If not evaluate the closed-path expressions for Δ_{up} taking its minimum value. 5) If $\Delta_{up} \leq d_{aux}$, discard this matrix and return to step (2).

Otherwise calculate $d_{free}(G)$ and compare with d_{aux} . Keep the greatest value in d_{aux} , the respective matrix G and Δ_{up} . While existing another representative G for the same GN return to step (2); otherwise proceed to next step. 6) At this point the special subset associated to GN chosen at step (1), has been completed. Hence, if $\Delta_{up} > d_{free}$, the algorithm should return to step (1), choose a new matrix GN either with the same value for Δ_{up} (if the case) or with the next lower value for Δ_{up} . This should repeat itself until $\Delta_{up} = d_{free} + 1$, when the algorithm would stop and an optimum code for the entire class of codes for the same values of k_1 and V , would be found.

Results: The proposed special subset procedure and associated optimum code search may be generalized for any values of k_1 , V and some others Λ/Λ' . It also can be used for the search of optimum non binary codes[3]. In the full paper some new binary and ternary codes are listed and tables with the coding gains are given such as the ones in Fig.1.

TABLE IV - Coding Gain for $k_1=1$ and $Z^2 / 4Z^2$

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	d=7 4 States	d=11 8 States	d=12 16 States	d=13 32 States	d=15 128 States	d=16 256 States
0	1.0	4/2	2.5	1.461	3.424	3.802	4.150	4.771	5.051
1	1.5	4/5	5.0	2.490	4.393	4.771	5.119	5.740	6.021
2	2.0	4/10	10.25	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
3	2.5	4/20	20.5	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
4	3.0	4/42	40.687	2.568	4.531	4.909	5.257	5.878	6.158
5	3.5	4/82	81.374	2.452	4.415	4.793	5.140	5.762	6.042

TABLE V - Coding Gain for $k_1=1$ and $A^2 / 3A^2$

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	d=7 9 States	d=8 27 States	d=9 81 States
1	1.0	4/5.33	3.75	3.957	4.537	5.049
2	1.5	4/17.407	11.275	4.316	4.896	5.408
3	2.0	4/53.333	33.519	4.447	5.027	5.539

Fig. 1: Coding Gains for 16 cosets(binary codes) and 9 cosets(ternary codes).

REFERENCES

- [1] A.R.Calderbank & N.J.A.Sloane, "New Trellis Codes based on Lattices and Cosets," *IEEE Trans. Inform.Theory*, Vol.IT-33, pp.177-195, Mar.1987.
- [2] E.M.Rosa & W.C.Borelli, "Simple Procedures for Searching Optimum Codes through the Generator Matrices presented by Cosets" (in portuguese), *XIV Brazilian Symposium on Telecommunication*, Vol.2, pp.655-660, Curitiba, PR, Brazil, July 1996.
- [3] E.M.Rosa, *Ph.D. Thesis*(in preparation), DT/FEEC/Unicamp, Campinas, SP, Brazil.
- [4] P.G.Farrell, R.G.C.Williams, W.C.Borelli & L.H.C.Lee, "Codulation Techniques with Block and Convolutional Codes," *International Symposium on Information and Coding Theory - ISICT'87*, pp.215-234, Campinas, SP, Brazil, July 1987.

¹This work was partially supported by PICD/CAPES

A.3 ANAIS DO SBT'97 - RECIFE - BRASIL - 1997

Novos Procedimentos para a Procura de Códigos Ótimos Binários baseados em Partições de Reticulados*

E.M. Rosa* , W.C. Borelli† e P.G. Farrell‡

*Dept of Mathematics - Fac. of Sciences - Unesp - Bauru - SP, emilia@dt.fee.unicamp.br

†Dept of Telematics - Feec - Unicamp - Campinas - SP, borelli@dt.fee.unicamp.br

‡Dept of Elect. Eng., Univ. of Manchester - Manchester, farrell@man.ac.uk

Resumo

Este artigo propõe uma escolha eficaz dos subconjuntos especiais [2] e [3], introduzindo novos procedimentos para a determinação de matrizes-norma mais adequadas. Os subconjuntos especiais se constituem de matrizes geradoras de códigos convolucionais binários, representadas por cosets de uma partição de reticulados. Para qualquer par de valores úteis para os parâmetros, bits de entrada e comprimento de memória dos codificadores convolucionais, (k_1, V) , tais orientações sistematizam os procedimentos básicos introduzidos em [2] e torna a busca de códigos ótimos mais rápida e eficiente do que em [3]. Novos códigos binários e seus ganhos de codificação são apresentados para os casos de 8, 16, 32 e 64 cosets na partição de reticulados, \mathcal{Z}^2/Λ' , no espaço bidimensional.

1 Introdução

Seguindo os conceitos e notações como em [1] e [2], para um par de parâmetros dados (k_1, V) e utilizando o conjunto das normas associadas aos cosets \mathbf{g}_{ij} de uma partição de reticulados, pode-se definir a seguinte matriz [3]:

$$GN = [\| \mathbf{g}_{vk_1} \| \dots \| \mathbf{g}_{v1} \| \dots | \| \mathbf{g}_{0k_1} \| \dots \| \mathbf{g}_{01} \|], \quad (1)$$

denominada **matriz-norma** e associada às matrizes geradoras [1], $G = [\mathbf{g}_{vk_1} \dots \mathbf{g}_{v1} | \dots | \mathbf{g}_{0k_1} \dots \mathbf{g}_{01}]$ de um conjunto finito de códigos convolucionais.

Denomina-se **subconjunto especial de GN**, ao conjunto de matrizes geradoras G associadas à matriz-norma GN , quando esta é construída de forma que maximize os limitantes inferior e superior, Δ_{inf} e Δ_{sup} , do d_{free} dos códigos gerados por elas.

Tome o seguinte conjunto de blocos de bits de entrada:

$$U = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{u}_1\} = (u_{l_{k_1}}, \dots, u_{l_1}) \mid \{\mathbf{u}_1\} \neq \{0\}, \\ \{\mathbf{u}_1\} \in \mathcal{A}^{k_1}, l = 1, \dots, \alpha^{k_1} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

por exemplo, considere $k_1 = 2$ e $\mathcal{A} = GF(2)$, então,

$$U = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}\}. \quad (3)$$

*Este trabalho tem sido parcialmente suportado pelo PICD/CAPEs.

As sequências de entrada do tipo, $\{u_{l_{k_1}}, \dots, u_{l_1}, 0, \dots, 0\}$, se referem aos caminhos fechados de comprimento mínimo na treliça correspondente.

As definições [2], dos parâmetros Δ_{inf} e Δ_{sup} , podem ser generalizadas para quaisquer valores de k_1 e V pelas seguintes expressões:

$$\Delta_{inf} = \min_{\{\mathbf{u}_1\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l_j} \mathbf{g}_{vj} \right\| \right\} + \min_{\{\mathbf{u}_1\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l_j} \mathbf{g}_{0j} \right\| \right\} \quad (4)$$

e

$$\Delta_{sup} = \min_{\{\mathbf{u}_1\}} \left\{ \sum_{i=0}^v \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l_j} \mathbf{g}_{ij} \right\| \right\}. \quad (5)$$

Em geral, pode-se considerar mais caminhos fechados da treliça para a definição do Δ_{sup} , o que poderá proporcionar maior rapidez na obtenção de um código ótimo [[2],[4]].

Neste trabalho, diferentemente de [3], propomos procedimentos que tornam mais rápida e eficiente a escolha dos subconjuntos especiais mais adequados, nos quais será feita a busca dos códigos binários ótimos para cada par de parâmetros (k_1, V) dados e partição de reticulados de \mathcal{Z}^2 .

2 Procedimentos para uma escolha eficaz de subconjuntos especiais

Considere uma partição do reticulado \mathcal{Z}^2 , calcule a expressão (6) para cada conjunto possível de normas $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$:

$$\max_{\mathbf{g}_{ij} \in \Lambda/\Lambda'} \left\{ \min_{\{\mathbf{u}_1\} \neq \{0\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l_j} \mathbf{g}_{ij} \right\| \right\} \right\}, \quad (6)$$

onde o mínimo em (6) é tomado considerando os elementos do conjunto \mathcal{U} (blocos de bits de entrada), e o máximo na expressão é calculado dentre os conjuntos de cosets cujas normas são as mesmas: $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$.

Construa uma tabela com os valores da expressão (6) ordenados de forma decrescente, associando-os aos conjuntos correspondentes de normas $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$, bem como aos líderes de cosets utilizados. Para a partição $\mathcal{Z}^2/4\mathcal{Z}^2$, tem-se como exemplo a Tabela I apresentada na Fig.1. Nesta tabela omitimos os conjuntos de normas que representam os mesmos valores em ordem reversa, $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$, pois

significam, neste caso uma repetição de valores para a expressão (6), exceto pela ordem de apresentação das colunas referentes às entradas $\{1, 0\}$ e $\{0, 1\}$.

O par de parâmetros, (k_1, V) , determina o número de colunas da matriz geradora G , bem como da matriz-norma, GN . As primeiras e últimas k_1 colunas, se referem aos ramos da treliça que chegam e partem do estado zero, sendo estas, as colunas envolvidas na definição do Δ_{inf} . Logo, tome o melhor conjunto de normas para representar as primeiras e últimas colunas da matriz-norma GN .

Na maximização do Δ_{sup} está envolvida também, a escolha das colunas intermediárias de GN , assim sendo, deve-se escolher tais colunas, a partir da melhor possibilidade para os conjuntos de normas.

Procedendo desta maneira, a matriz-norma GN escolhida, determina um subconjunto especial a ser considerado no algoritmo de procura de códigos ótimos. Se o algoritmo exigir nova escolha para a matriz-norma GN , deve-se percorrer a tabela, escolhendo, sempre os melhores conjuntos de normas ainda possíveis, para serem colunas de GN , sendo primeiramente esgotadas as possibilidades para suas colunas intermediárias.

(N2, N1)	Líderes dos Cosets	{1,0}, {0,1}, {1,1}	min (.)	Eq. (6)
{4,2}	(0,2),(1,1)	4 . 2 . 2	2	2
	(0,2),(1,-1)	4 . 2 . 2	2	
{2,2}	(1,1),(1,1)	2 . 2 . 0	0	2
	(1,1),(1,-1)	2 . 2 . 4	2	
	(1,-1),(1,1)	2 . 2 . 4	2	
	(1,-1),(1,-1)	2 . 2 . 0	0	
{1,1}	(1,0),(1,0)	1 . 1 . 4	1	1
	(1,0),(0,1)	1 . 1 . 2	1	
	(1,0),(-1,0)	1 . 1 . 0	0	
	(1,0),(0,-1)	1 . 1 . 2	1	
	(0,1),(1,0)	1 . 1 . 2	1	
	(0,1),(0,1)	1 . 1 . 2	1	
	(0,1),(-1,0)	1 . 1 . 2	1	
	(0,1),(0,-1)	1 . 1 . 0	0	
	(-1,0),(1,0)	1 . 1 . 0	0	
	(-1,0),(0,1)	1 . 1 . 2	1	
	(-1,0),(-1,0)	1 . 1 . 4	1	
	(-1,0),(0,-1)	1 . 1 . 2	1	
	(0,-1),(1,0)	1 . 1 . 2	1	
	(0,-1),(0,1)	1 . 1 . 4	1	
(0,-1),(-1,0)	1 . 1 . 2	1		
(0,-1),(0,-1)	1 . 1 . 4	1		
{4,1}	(0,2),(0,1)	4 . 1 . 1	1	1
	(0,2),(1,0)	4 . 1 . 1	1	
	(0,2),(0,-1)	4 . 1 . 1	1	
	(0,2),(-1,0)	4 . 1 . 1	1	
{2,1}	(1,1),(1,0)	2 . 1 . 1	0	1
	(1,1),(0,1)	2 . 1 . 1	4	
	(1,1),(-1,0)	2 . 1 . 1	1	
	(1,1),(0,-1)	2 . 1 . 1	1	
	(1,-1),(1,0)	2 . 1 . 1	1	
	(1,-1),(0,1)	2 . 1 . 1	1	
	(1,-1),(-1,0)	2 . 1 . 1	1	
(1,-1),(0,-1)	2 . 1 . 1	1		
{4,4}	(0,2),(0,2)	8 . 4 . 0	0	0

Figura 1: Tabela I; $k_1 = 2$, $A = Z_2$ e $Z^2/4Z^2$

3 Algoritmo geral para a determinação de Códigos Ótimos

A partir do par de parâmetros (k_1, V) e de uma partição de reticulados, apresenta-se nesta seção, um resumo do algoritmo geral de busca de códigos ótimos, ressaltando as alterações realizadas no algoritmo proposto em [2]. O algoritmo completo e detalhado se encontra em [3].

Utilize as orientações propostas na seção 2, para obter uma matriz-norma GN . Tome, no subconjunto especial associado à GN , a matriz geradora G constituída de líderes de coset que apresentem valores máximos para a expressão (6), como na Tabela I, e realize testes, primeiramente, quanto a determinação de todos os cosets na saída do codificador convolucional; e depois, quanto a catastrofidade do código gerado por G . A matriz G é descartada prontamente, sempre que seja apresentado algum resultado negativo nos testes. Neste caso tome nova matriz geradora G , no referido subconjunto especial e refaça os testes.

Calcula-se o d_{free} , para a primeira matriz G não descartada nos testes, guardando o valor obtido e a referida matriz G . Para as demais matrizes geradoras que porventura ainda existirem no subconjunto especial, calcula-se o Δ_{sup} , comparando-o ao d_{free} já obtido, sendo que novo cálculo do d_{free} se fará necessário apenas quando $\Delta_{sup} > d_{free}$. Neste caso, guarda-se o máximo entre os d_{free} calculados e a respectiva matriz geradora G .

Inspecionadas todas as matrizes existentes no subconjunto especial, obtem-se o d_{free} máximo possível para tal subconjunto.

O próximo passo constitui em nova escolha para a matriz-norma, GN , a qual será prontamente descartada sempre que, o valor máximo para Δ_{sup} no subconjunto especial de GN for menor ou igual ao d_{free} já obtido. Caso contrário, repete-se todo o processo de inspeção no subconjunto especial associado a GN , a partir da matriz geradora G que apresente este valor de Δ_{sup} .

Esgotadas todas as possibilidades de escolha das matrizes GN , fica determinado o d_{free} máximo, bem como um código binário ótimo para o universo completo dos códigos treliça, fixados os valores de k_1 e V , e uma partição de reticulados de Z^2 .

4 Exemplo Numérico:

Considere a partição $Z^2/\Theta Z^2$, com 8 cosets, e o par de parâmetros $(k_1, V) = (2, 4)$. Usando a Tabela I e o fato de que uma das colunas deve conter norma ímpar, as matrizes-norma, neste caso, foram obtidas na seguinte ordem:

a) $GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 4 \ 2]$, $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{5, 9, 8\} = 5$. Inspecionado o subconjunto especial associado, obtem-se, pelo menos, um código com $d_{free} = 5 = d_{aux}$.

b) Mantidas as colunas 1, 2, 5 e 6 como em (a) e trocando as colunas 3 e 4, sequencialmente, pelos valores (4,1), (1,4), (2,1) e (1,2), as matrizes GN resultantes possuem todas, $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$ e $\Delta_{sup} = 5$, o qual é igual ao d_{aux} já

obtido, logo são prontamente descartadas.

c) $GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 2 \ 4]$, $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{7, 7, 8\} = 7$. Inspecionado o subconjunto especial de GN, obtem-se, no máximo, $d_{free} = 6 = d_{aux}$.

d) Mantidas as colunas 1, 2, 5 e 6 como em (c) e trocando as colunas 3 e 4, sequencialmente, pelos valores (4,1), (1,4), (2,1) e (1,2), as matrizes GN resultantes possuem todas, $\Delta_{sup} = 5$, o qual é menor que o d_{aux} . Portanto são prontamente descartadas.

e) As matrizes GN:

$$[4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 2 \ 2] \ e \ [4 \ 2 \ | \ 4 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$$

possuem $\Delta_{sup} = 5$ e portanto, prontamente descartadas.

f) $GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 4 \ | \ 2 \ 2]$, $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{8, 7, 7\} = 7$. Dentre as matrizes geradoras do subconjunto especial de GN, obtem-se, no máximo, $d_{free} = 5$ e portanto é descartada, visto que $d_{aux} = 6$ já foi obtido.

g) As matrizes GN:

$$[4 \ 2 \ | \ 2 \ 1 \ | \ 2 \ 2] \ e \ [4 \ 2 \ | \ 1 \ 2 \ | \ 2 \ 2]$$

possuem $\Delta_{sup} = 5$ e 6, sendo igualmente descartadas.

h) $GN = [2 \ 4 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 4 \ 2]$, $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{7, 7, 8\} = 7$. Dentre as matrizes geradoras do subconjunto especial de GN, obtem-se, no máximo, $d_{free} = 6$, igual ao d_{aux} .

i) $GN = [2 \ 4 \ | \ 4 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$, $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{8, 7, 7\} = 7$. Obtem-se, no máximo, $d_{free} = 5$. As demais matrizes $[2 \ 4 \ | \ 4 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$, $[2 \ 4 \ | \ 4 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$, ..., $[2 \ 4 \ | \ 4 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$, possuem Δ_{sup} menores que o d_{aux} obtido.

Portanto para o par de parâmetros $(k_1, V) = (2, 4)$ tem-se $d_{free} = d_{aux} = 6$, para um código no subconjunto especial de $GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 2 \ 4]$

Observe que para códigos binários e a partição com 8 cosets, de um universo de 4095 possíveis formas para a matriz-norma GN, inspecionamos, com efetivo cálculo do d_{free} , os subconjuntos especiais associados à apenas cinco delas.

5 Resultados para Códigos Binários

Diferentemente de [3], com as matrizes-normas GN escolhidas de acordo com a sessão 2, a procura de códigos ótimos foi realizada para várias partições de \mathcal{Z}^2 , sendo obtidos novos códigos ótimos binários. Tais resultados foram organizados em tabelas e figuras, do seguinte modo:

- constelações e partições: Figs 2, 3, 4 e 5.

- tabelas com novos códigos ótimos: Figs 6, 7, 8 e 9; para todos os códigos, $k_1 = 2$.

- tabelas de ganhos de codificação: Figs 10, 11, 12 e 13. Nestas tabelas considerou-se como em [1], a taxa ρ do código treliça, $\rho = (\frac{k_1 + k_2}{2})$ bits por dimensão, no espaço bidimensional.

6 Conclusões

Uma escolha sistemática das matrizes-norma GN, garante maior eficiência ao algoritmo de procura de [3], tornando possível sua utilização para códigos maiores e partições com maior número de cosets.

Como mostrado no exemplo numérico a eficiência do algoritmo aumenta em muito, pois a grande maioria das candidatas às melhores matrizes GN são descartadas prontamente em testes bastante rápidos.

Sistematizada a procura, através dos novos procedimentos, foram obtidos novos códigos ótimos binários para codificadores convolucionais com até 256 estados em suas treliças e partições com até 64 cosets.

Notou-se que para mesmos valores da taxa ρ , há uma tendência de melhoria do ganho de codificação, quando consideradas partições com maior número de cosets. Tal procedimento entretanto, envolve uma complexidade adicional na determinação dos subconjuntos especiais, dado o acréscimo do universo de possibilidades para as matrizes-norma, GN.

Referências

- [1] Calderbank, A.R. e Sloane, N.J.A. *New Trellis Codes based on Lattices e Cosets*. IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. IT-33, pp.177-195, Mar.1987.
- [2] Rosa, E.M. e Borelli, W.C. *Procedimentos Simples para a procura de Códigos Ótimos, através de Matrizes Geradoras representadas por Cosets*. XIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações. Vol.2, pp.655-660, Curitiba, PR, Brasil, Julho 1996.
- [3] Rosa, E.M., Borelli, W.C. e Farrell, P.G. *Special Subsets and Optimum Codes based on Lattices and Cosets*. ISIT97, Ulm, Germany, June 29 - July 4, 1997.
- [4] Rosa, E.M. Ph.D. Thesis (em preparação) - DT/FEEC/ Unicamp - Campinas - SP - Brasil.

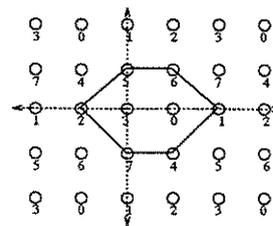


Figura 2: Constelação mínima para partição de \mathcal{Z}^2 com 8 cosets[1].

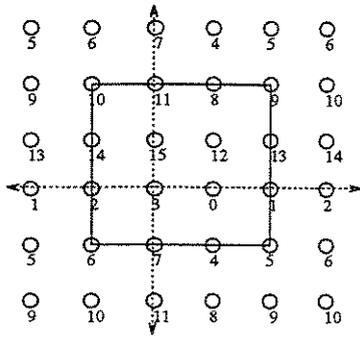


Figura 3: Constelação mínima para partição de \mathbb{Z}^2 com 16 cosets[1].

TABELA II

v	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	4 1 2 4	3	3	0 0 1 0 2 1 1 2
03	4 2 1 2 4	6	5	0 1 0 0 1 2 1 1 2 1
04	4 2 1 1 2 4	6	6	0 1 1 0 1 0 2 1 0 1 1 2
05	4 2 4 1 2 4 2	7	6	0 1 0 0 1 0 1 2 1 2 1 1 2 1
06	2 4 2 0 1 2 2 2	7	7	1 0 1 0 0 1 1 1 -1 2 1 0 1 1 -1 1
07	2 4 2 0 1 2 2 2 4	8	7	1 0 1 0 0 1 1 1 0 -1 2 1 0 1 1 1 1 2
08	4 2 2 2 0 2 1 2 2 2 2	9	8	0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 -1 1 1 1 0 1 0 -1 1 -1

Figura 6: Códigos Ótimos Binários para partição de \mathbb{Z}^2 com 8 cosets.

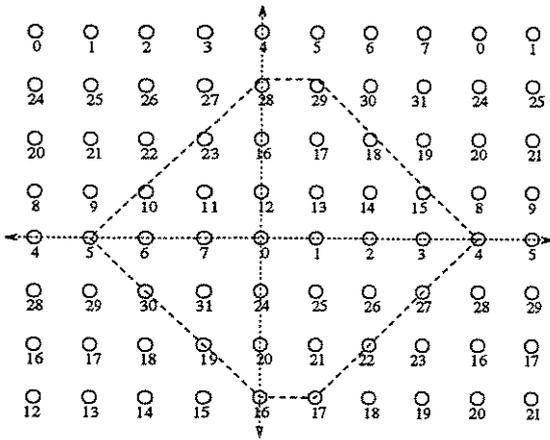


Figura 4: Constelação mínima para partição de \mathbb{Z}^2 com 32 cosets.

TABELA III

v	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
02	5 2 4 8	9	7	1 1 0 2 2 1 2 2
03	5 4 2 8 4	11	11	2 0 1 2 0 1 2 1 2 2
04	8 4 2 5 8 4	13	12	2 2 1 1 2 0 2 0 1 2 2 2
05	8 4 2 2 5 8 4	14	13	2 0 1 1 2 2 0 2 2 1 -1 1 2 2
06	8 4 2 2 5 5 4 4	15	14	2 2 1 1 1 1 0 0 2 0 1 1 2 2 2 2
07	8 4 2 5 2 5 5 4 4	18	15	2 2 1 1 1 1 1 0 0 2 0 1 2 1 2 2 2 2
08	8 4 5 5 5 5 5 2 4 8	24	16	2 2 -1 2 1 2 1 1 0 2 2 0 2 -1 2 1 2 1 2 2

Figura 7: Códigos Ótimos Binários para partição de \mathbb{Z}^2 com 16 cosets.

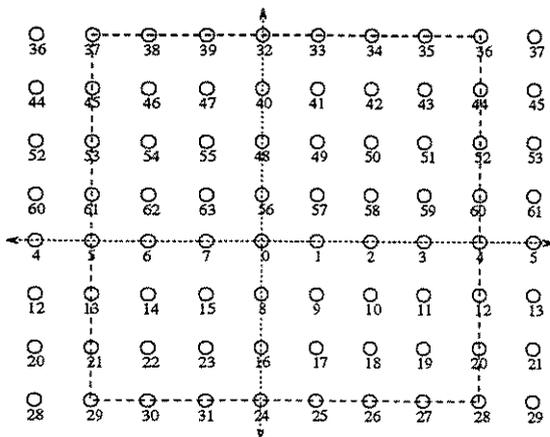


Figura 5: Constelação mínima para partição de \mathbb{Z}^2 com 64 cosets.

TABELA IV

v	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
03	8 1 6 4 5 1 0	21	18	2 0 0 2 1 2 4 2 5 3
04	1 6 8 9 4 1 0 1 0	22	22	0 2 0 0 1 1 4 2 5 6 3 3
05	1 6 8 1 0 1 0 9 1 0 1 0	28	25	0 2 3 1 0 1 1 4 2 7 3 3 3 3
06	1 0 1 0 1 6 8 5 9 1 0 1 0	34	28	3 3 0 2 1 0 1 1 7 7 4 6 2 3 3 3
07	1 0 1 0 8 9 9 5 5 1 0 1 0	34	32	3 1 2 0 0 1 1 1 1 7 5 2 3 3 2 2 3 3

Figura 8: Códigos Ótimos Binários para partição de \mathbb{Z}^2 com 32 cosets.

TABELA V

v	GN	Δ_{sup}	d_{free}	G
04	3 2 1 6 4 1 0 1 3 1 7	43	43	4 0 2 3 3 1 4 4 0 7 2 4
05	3 2 1 6 1 7 2 5 1 3 2 0 2 0	61	51	4 0 7 4 5 2 2 4 4 4 3 2 4 4
06	3 2 1 6 1 3 1 7 1 3 1 7 2 0 2 0	65	56	4 4 3 1 2 1 2 2 4 0 6 4 3 4 4 4
07	3 2 1 6 5 2 0 2 0 1 7 5 2 0 2 0	73	64	4 4 2 4 4 1 1 2 2 4 0 1 6 2 4 2 4 4 4

Figura 9: Códigos Ótimos Binários para partição de \mathbb{Z}^2 com 64 cosets.

TABELA VI

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / P$	Coded P	d = 3 4 States	d = 5 8 States	d = 6 16 States	d = 7 64 States	d = 8 256 States
0	1.0	4/2	1.5	0.000	2.218	3.010	3.680	4.260
1	1.5	4/5	2.5	1.761	3.979	4.771	5.441	6.021
2	2.0	4/10	5.0	1.761	3.979	4.771	5.441	6.021
3	2.5	4/20	10.25	1.463	4.084	4.664	5.333	5.913
4	3.0	4/42	20.5	1.866	4.013	4.876	5.545	6.125
5	3.5	4/82	40.687	1.794	4.157	4.804	5.474	6.054

Figura 10: Tabela de Ganhos de Codificação para 8 co-sets.[1]

TABELA VII

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / P$	Coded P	d = 7 4 States	d = 11 8 States	d = 12 16 States	d = 13 32 States	d = 15 128 States	d = 16 256 States
0	1.0	4/2	2.5	1.461	3.424	3.802	4.150	4.771	5.051
1	1.5	4/5	5.0	2.430	4.393	4.771	5.119	5.740	6.021
2	2.0	4/10	10.25	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
3	2.5	4/20	20.5	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
4	3.0	4/42	40.687	2.568	4.531	4.909	5.257	5.878	6.158
5	3.5	4/82	81.594	2.452	4.415	4.793	5.140	5.762	6.042

Figura 11: Tabela de Ganhos de Codificação para 16 co-sets.[3]

TABELA VIII

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / P$	Coded P	d = 18 8 States	d = 22 16 States	d = 25 32 States	d = 28 64 States	d = 32 128 States
0	1.0	4/2	5.0	2.553	3.424	3.979	4.472	5.052
1	1.5	4/5	10.25	3.415	4.286	4.841	5.333	5.913
2	2.0	4/10	20.5	3.415	4.286	4.841	5.333	5.913
3	2.5	4/20	40.687	3.448	4.319	4.874	5.367	5.947
4	3.0	4/42	81.594	3.648	4.519	5.075	5.567	6.147

Figura 12: Tabela de Ganhos de Codificação para 32 co-sets.

TABELA IX

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / P$	Coded P	d = 43 16 States	d = 51 32 States	d = 56 128 States	d = 64 256 States
0	1.0	4/2	10.25	3.217	3.958	4.364	4.944
1	1.5	4/5	20.5	4.186	4.927	5.333	5.913
2	2.0	4/10	40.687	4.219	4.960	5.367	5.947
3	2.5	4/20	81.594	4.208	4.949	5.355	5.935

Figura 13: Tabela de Ganhos de Codificação para 64 co-sets.

A.4 ANAIS DO GLOBECOM'97 - PHOENIX - USA - 1997

A Formalized Optimum Code Search for q-ary Trellis Codes

E.M. Rosa*

Univ. of State of São Paulo - UNESP - Brazil

emiliamr@bauru.unesp.br

W.C. Borelli*

Univ. of Campinas - UNICAMP - Brazil

borelli@dt.fee.unicamp.br

P.G. Farrell

Univ. of Manchester - England

farrell@man.ac.uk

Abstract — This paper gives a formalization for q-ary codes of the search algorithm [3] for optimum codes based on lattices and cosets [1]. With a more efficient and an automated algorithm it also has been possible to extend the search for larger convolutional encoder parameters and lattices partitions. New optimum binary, ternary and quaternary trellis codes are listed together with their coding gains.

I. INTRODUCTION

Following the concepts and notations as in [1], the structure of a trellis code is given in Fig.1, for a given finite ring \mathcal{A} and a sublattice $\Lambda' \subseteq \Lambda$. The generator matrix G of the convolutional coder may be represented in terms of cosets belonging to the partition of lattices Λ/Λ' , i.e: $G = [g_{vk_1} \dots g_{v1} | \dots | g_{1k_1} \dots g_{11} | g_{0k_1} \dots g_{01}]$, where $\mathbf{g}_{ij} = (x_{ij1}, x_{ij2}) \in \Lambda/\Lambda'$, with Euclidian coordinates in the two-dimensional space encoder parameter k_1 , is the number of input symbols; v_j is the length of memory in input j , $j = 1, \dots, k_1$; the encoder overall memory length is $V = \sum_{j=1}^{k_1} v_j$ and the encoder output, coset r , is given as: $r = \sum_{i=0}^v \sum_{j=1}^{k_1} u_{ij} g_{ij}$, with $u_{ij} \in \mathcal{A}$.

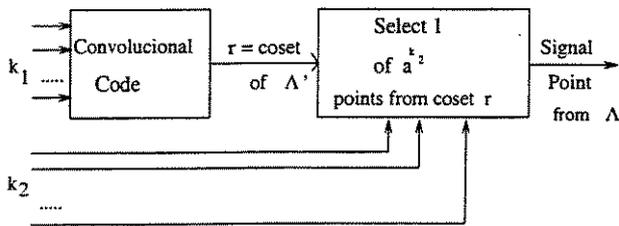


Fig. 1: Overall Trellis Code, [1].

The rate of the convolutional code is $k_1 \log_2 q$ bits/coset, where $q = |\mathcal{A}|$ and the encoder has q^V states. The overall rate of the trellis code is $k \log_2 q$ bits/output symbol or $\rho = (k/2) \log_2 q$ bits/dimension.

As in [3] let a special subset of good codes (large d_{free}) with generator matrices G associated to the same norm-matrix $GN = [\|g_{vk_1}\| \dots \|g_{v1}\| \dots | \|g_{0k_1}\| \dots \|g_{01}\|]$ with the best possible norm values, where $\|\mathbf{g}_{ij}\| = \sum_{l=1}^2 x_{ijl}^2$.

*This work was partially supported by PICD, CAPES.

The codes within a special subset are chosen such that their d_{free} shall be bounded as in the following:

$$\Delta_{lw} \leq d_{free} \leq \Delta_{up}. \quad (1)$$

The lower bound Δ_{lw} may be seen as to be the metric associated with the common edges that belong to all closed paths that leave and merge to the zero-state of the trellis.

Let \mathcal{U} be the set of the all possible blocks of k_1 input symbols excluding the all-zero input symbol, i.e.,

$$\mathcal{U} = \left\{ \left\{ \mathbf{u}_l \right\} = (u_{lk_1}, \dots, u_{l1}) \mid \left\{ \mathbf{u}_l \right\} \neq \{0\}, \left\{ \mathbf{u}_l \right\} \in \mathcal{A}^{k_1}, l = 1, \dots, q^{k_1} \right\}. \quad (2)$$

Hence for a given pair of values (k_1, V) , Δ_{lw} may be expressed as:

$$\Delta_{lw} = \min_{\{\mathbf{u}_l\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{lj} \mathbf{g}_{vj} \right\| \right\} + \min_{\{\mathbf{u}_l\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{lj} \mathbf{g}_{0j} \right\| \right\}. \quad (3)$$

On the other hand, the upper bound Δ_{up} on d_{free} , may be set either to the metric of any single zero-state closed path or to the minimum metric of a set of zero-state closed paths in the trellis. For instance considering only the closed paths associated to finite input sequences of the form $\{u_{1k_1}, \dots, u_{l1}, 0, \dots, 0\}$, the expression for Δ_{up} would be written as:

$$\Delta_{up} = \min_{\{\mathbf{u}_l\}} \left\{ \sum_{i=0}^v \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{ij} \mathbf{g}_{ij} \right\| \right\}. \quad (4)$$

In order to have a non-exhaustive code search but yet always ending up with an optimum code (largest d_{free}) for any set of input parameters $(k_1, V, \Lambda/\Lambda')$, norm-matrices must be carefully chosen as to jointly maximize and tighten the bounds on d_{free} .

Unlike [3] when the norm-matrices were chosen by hand calculations in this paper, the determination of good candidates for matrices GN is done in a more efficient way and has been completely automated. This has resulted in a reduced and faster computer search allowing it to be extended for the q-ary codes and also for partitions with larger quantities of cosets.

II. THE AUTOMATED SEARCH ALGORITHM FOR Q-ARY OPTIMUM CODE

For a given set of encoder parameters (k_1, V) and for a specific partition Λ/Λ' , construct a table with all the representatives

cosets, $\mathbf{g}_{ij} \in \Lambda/\Lambda'$, and corresponding norm-values; for a numerical example, see section III. The algorithm follows:

1) For each possible set of norm values $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$ evaluate the expression:

$$\max_{\mathbf{u}_{ij} \in \Lambda/\Lambda'} \left\{ \min_{\{u_i\} \neq \{0\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_j \mathbf{g}_{ij} \right\| \right\} \right\}. \quad (5)$$

While the minimum in (5) is taken considering the input-block set \mathcal{U} as in (2), the maximum in (5) is evaluated amongst all sets of cosets with the same norm values $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$.

2) Construct a table like the one in Fig.3, with the values, for expression (5), ordered from its maximum down to its minimum.

3) Take the best possible set of norm values to represent the first k_1 and also the last k_1 columns of norm-matrix GN in order to maximize expression (3) for Δ_{lw} .

4) In a similar manner choose the intermediate columns of GN aiming to maximize a simple expression like (4) for Δ_{up} or a more general one and constituted of a larger set of closed paths in the trellis [2].

5) According to steps (3) and (4) take one generator matrix G formed up by the representatives cosets with sets of norm-values $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$ as in norm-matrix GN.

6) Evaluated expressions (3) and (4) for Δ_{lw} and Δ_{up} , respectively.

7) If $\Delta_{lw} = \Delta_{up}$, make $d_{free} = \Delta_{up}$, keep generator matrix G and return either step (4) to changer, if still the case, the set of intermediate columns or step (3) to change the sets of first and last k_1 columns of norm-matrix GN. Otherwise ($\Delta_{lw} < \Delta_{up}$, make either $d_{aux} = \Delta_{lw}$ (at the beginning) or d_{aux} equal to previous d_{free} .

8) If $\Delta_{up} > d_{aux}$ and for actual G check whether all cosets would appear at the encoder output and whether the code generated by G is non-catastrophic, continue. If not, choose a new matrix G, if the case, and return to step (6); otherwise return to either step (4) or step (3).

9) Calculate $d_{free}(G)$ and compare with d_{aux} . Keep the greatest value in d_{aux} , the respective matrix G. While existing another representative G for the same GN return to step (6); otherwise proceed to next step.

10) While existing another GN return to step (4) ou step (3); otherwise the algorithm would stop and an optimum code for the entire class of codes for the same values of k_1 and V, would have been found.

III. NUMERICAL EXAMPLE:

In the following we summarize the application of the optimum code search for quaternary codes, $q = 4$, $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_4$, $k_1 = 1$, $V = 2$ and $\Lambda/\Lambda' = \mathcal{Z}^2/4\mathcal{Z}^2$.

After creating Table 1 and Table 2, the norm-matrices GN were generated by the algorithm in the following sequence:

1) $GN = [5 \ 5 \ 5]$, $\Delta_{inf} = 4 + 4 = 8$ and $\Delta_{sup} = \min\{15, 12, 15\} = 12$. This GN is discarded together with all the associated matrices G in the special subset, as for not a single one passed step (8) of the algorithm.

2) $GN = [5 \ 2 \ 5]$, $\Delta_{inf} = 4 + 4 = 8$ and $\Delta_{sup} = \min\{12, 16, 12\} = 12$. The associated special subset was inspected and an optimum code found with $d_{free} = 12$.

3) $GN = [5 \ 1 \ 5]$, $\Delta_{inf} = 4 + 4 = 8$ and $\Delta_{sup} = \min\{11, 12, 11\} = 11$. All codes within this subset would have d_{free} less than 11, and therefore lesser than the value 12 obtained

before. Matrix GN is discarded at once, without any further effort.

4) $GN = [5 \ 8 \ 5]$, $\Delta_{inf} = 4 + 4 = 8$ and $\Delta_{sup} = \min\{18, 8, 18\} = 8$. All codes would have $d_{free} = 8$ and therefore matrix GN is discarded at once.

5) $GN = [5 \ 4 \ 5]$, $\Delta_{inf} = 4 + 4 = 8$ and $\Delta_{sup} = \min\{14, 8, 14\} = 8$. This matrix GN is also discarded at once.

6) $GN = [5 \ 5 \ 2]$, $\Delta_{inf} = 4 + 2 = 6$ e $\Delta_{sup} = \min\{12, 16, 12\} = 12$. The better code in this subset would have $d_{free} \leq 12$, value already obtained and therefore GN is discarded at once. All other matrices GN in sequence would be as in the following: $[5 \ 2 \ 2]$, ..., $[5 \ 4 \ 2]$, $[2 \ 5 \ 2]$, ..., $[2 \ 2 \ 2]$, etc. They all have $\Delta_{sup} \leq d_{free} = 12$ and therefore discarded at once.

Therefore for quaternary codes and a partition with 16 cosets, from a universe of 215 possible forms for norm-matrix GN, 214 were discarded promptly and for only one special subsets the algorithm for calculating d_{free} was activated only for the special subset represented by $GN = [5 \ 2 \ 5]$.

IV. RESULTS:

The automated optimum code search has been applied for several trellis codes structures and new binary, ternary and quaternary were found. The results were organized in tables and figures as in the following:

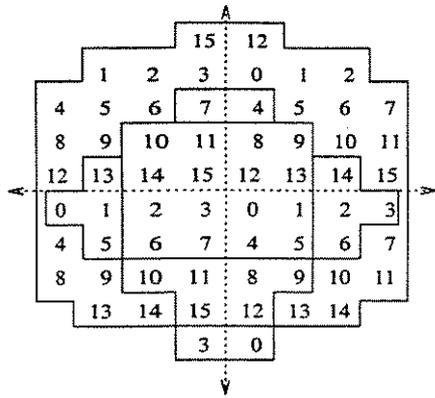
- the signal constelations and partitions: Figs 2, 4, 5, 6 and 7.
- tables with new optimum codes: Figs 8, 9, 10, 11, 12, 13 and 14.
- tables with the coding gains: Figs 15, 16, 17, 18, 19 20 and 21.

V. CONCLUSIONS

This paper presented a formalized and efficient code search algorithm for large and q-ary trellis codes. Extensive tables with new optimum codes were given together with their coding gains, for the cases of binary codes (16 and 32 cosets), ternary codes (9 and 27 cosets) and quaternary codes(16, 32 and 64 cosets).

REFERENCES

- [1] A.R.Calderbank & N.J.A.Sloane, "New Trellis Codes based on Lattices and Cosets," *IEEE Trans. Inform.Theory*, Vol.IT-33, pp.177-195, Mar.1987.
- [2] E.M.Rosa, *Ph.D. Thesis*(in preparation), DT/FEEC/Unicamp, Campinas, SP, Brazil.
- [3] E.M.Rosa, W.C.Borelli & P.G. Farrell, "Special Subsets and Optimum Codes based os Lattices and Cosets", accept in *1997 IEEE International Symposium on Information Theory*, in June 29 - July 04, 1997.



Signal Constellations of sizes 16, 32 and 64.

TABLE I

Label	Coset Representative	Coset Norm	Label	Coset Representative	Coset Norm
0	(1,0)	1	8	(1,2)	5
1	(2,0)	4	9	(2,2)	8
2	(-1,0)	1	10	(-1,2)	5
3	(0,0)	0	11	(0,2)	4
4	(1,-1)	2	12	(1,1)	2
5	(2,-1)	5	13	(2,1)	5
6	(-1,-1)	2	14	(-1,1)	2
7	(0,-1)	1	15	(0,1)	1

Fig. 2: Table for $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_4$ and $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 cosets).

TABLE II

Norm	Coset Representative	$\ g_{ij}\ , \ 2g_{ij}\ , \ 3g_{ij}\ $	min $\{u\}$	max $\{g_{ij}\}$
{ 5 }	(1,2)	5, 4, 5	4	4
	(2,1)	5, 4, 5	4	
	(-1,2)	5, 4, 5	4	
	(2,-1)	5, 4, 5	4	
{ 2 }	(1,1)	2, 8, 2	2	2
	(-1,-1)	2, 8, 2	2	
	(-1,1)	2, 8, 2	2	
	(1,-1)	2, 8, 2	2	
{ 1 }	(1,0)	1, 4, 1	1	1
	(-1,0)	1, 4, 1	1	
	(0,1)	1, 4, 1	1	
	(0,-1)	1, 4, 1	1	
{ 8 }	(2,2)	8, 0, 8	0	0
{ 4 }	(0,2)	4, 0, 4	0	0
	(2,0)	4, 0, 4	0	

Fig. 3: Table for expression (5), $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_4$, $k_1 = 1$ e $\mathbb{Z}^2/4\mathbb{Z}^2$ (16 cosets).

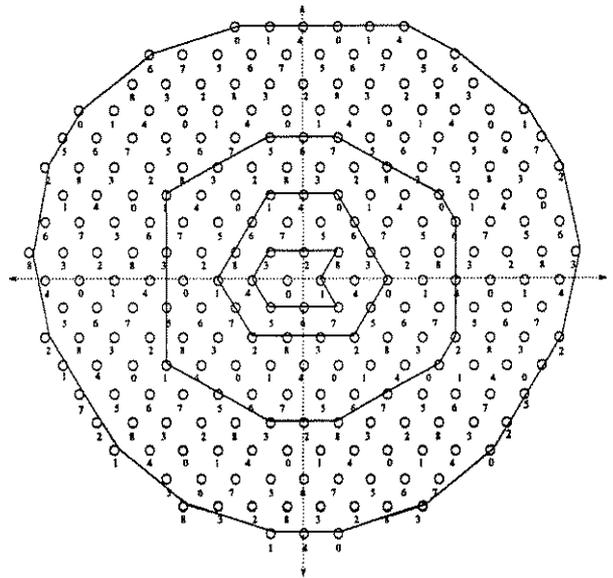


Fig. 4: Signal Constellations of size 9, 27, 81 and 243 for $A_2/3A_2$ (9 cosets).

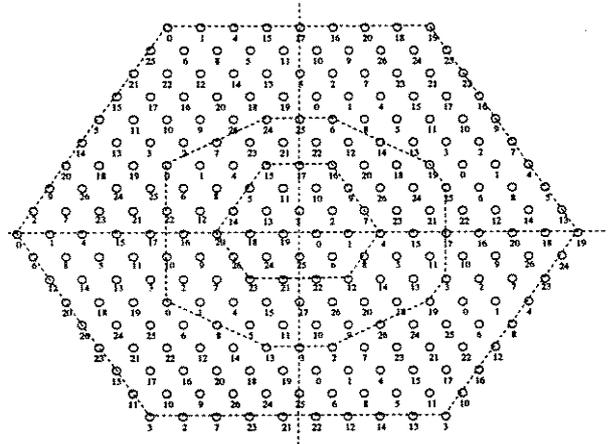


Fig. 5: Signal Constellations of size 27, 81 and 243 for $A_2/9A_2$ (27 cosets).

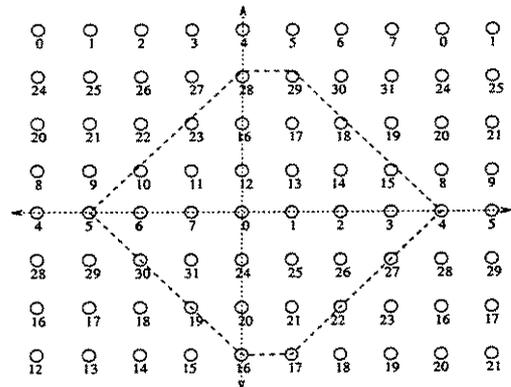


Fig. 6: Signal Constellations of size 32 and 256 for $\mathbb{Z}^2/\Phi\mathbb{Z}^2$ (32 cosets).

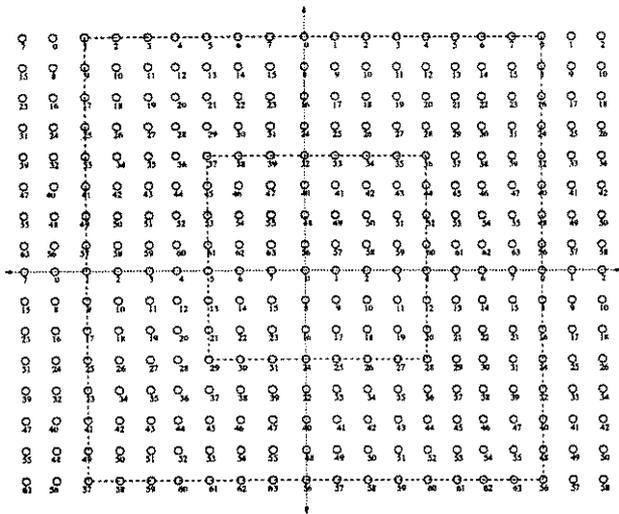


Fig. 7: Signal Constellations of size 64 and 256 for $Z^2/8Z^2$ (64 cosets).

TABLE III

v	GN	Δ_{up}	d_{free}	G
02	5 2 4 8	9	7	1 1 0 2 2 1 2 2
03	5 4 2 8 4	11	11	2 0 1 2 0 1 2 1 2 2
04	8 4 2 5 8 4	13	12	2 2 1 1 2 0 2 0 1 2 2 2
05	8 4 2 2 5 8 4	14	13	2 0 1 1 2 2 0 2 2 1 -1 1 2 2
06	8 4 2 2 5 5 4 4	15	14	2 2 1 1 1 1 0 0 2 0 1 1 2 2 2 2
07	8 4 2 5 2 5 5 4 4	18	15	2 2 1 1 1 1 1 0 0 2 0 1 2 1 2 2 2 2
08	8 4 5 5 5 5 5 2 4 8	24	16	2 2 -1 2 1 2 1 1 0 2 2 0 -2 -1 2 1 2 1 2 2

Fig. 8: Optimum Binary Codes for $k_1 = 2$ and $Z^2/4Z^2$ (16 cosets).

TABLE IV

v	GN	Δ_{up}	d_{free}	G
03	8 16 4 5 10	21	18	2 0 0 2 1 2 4 2 5 3
04	16 8 9 4 10 10	22	22	0 2 0 0 1 1 4 2 5 6 3 3
05	16 8 10 10 9 10 10	28	25	0 2 3 1 0 1 1 4 2 7 3 3 3 3
06	10 10 16 8 5 9 10 10	34	28	3 3 0 2 1 0 1 1 7 7 4 6 2 3 3 3
07	10 10 8 9 9 5 5 10 10	34	32	3 1 2 0 0 1 1 1 1 7 5 2 3 3 2 2 3 3

Fig. 9: Optimum Binary Codes for $k_1 = 2$ and $Z^2/\Phi Z^2$ (32 cosets).

TABLE V

v	GN	Δ_{up}	d_{free}	G
02	3 1 3	7	7	1 0 1 2 1 2
03	3 1 3 3	10	8	1 0 1 1 2 1 2 2
04	3 3 1 3 3	13	9	2 1 0 1 1 1 2 1 2 2

Fig. 10: Optimum Ternary Codes for $k_1 = 1$ and $A_2/3A_2$ (9 cosets).

TABLE VI

v	GN	Δ_{up}	d_{free}	G
02	9 2 3	14	14	0 1 0 3 2 2
03	9 2 3 9	23	23	0 0 1 0 3 2 2 3
04	9 2 3 7 9	30	27	3 2 1 0 0 0 0 2 4 3

Fig. 11: Optimum Ternary Codes for $k_1 = 1$ and $A_2/9A_2$ (27 cosets).

TABLE VII

v	GN	Δ_{up}	d_{free}	G
02	5 2 5	12	12	1 1 1 2 1 2
03	5 8 2 5	16	14	3 2 1 1 2 2 1 2
04	5 8 2 5 5	20	16	2 2 1 2 1 3 2 1 1 2

Fig. 12: Optimum 4-ary codes for $k_1 = 1$ and $Z^2/4Z^2$ (16 cosets).

TABLE VIII

v	GN	Δ_{up}	d_{free}	G
02	10 5 10	20	20	1 1 1 5 2 3
03	10 4 5 10	29	28	1 0 1 1 3 6 2 3
04	10 16 4 5 10	36	32	3 0 0 1 1 7 4 2 6 3

Fig. 13: Optimum 4-ary codes for $k_1 = 1$ and $Z^2/\Phi Z^2$ (32 cosets).

TABLE IX

v	GN	Δ_{up}	d_{free}	G
02	13 25 20	40	40	4 3 2 6 4 3
03	20 25 13 20	56	54	4 3 2 2 6 4 3 4
04	20 5 18 5 20	68	64	6 2 5 2 2 4 7 3 1 4

Fig. 14: Optimum 4-ary codes for $k_1 = 1$ and $Z^2/8Z^2$ (64 cosets).

TABLE X

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	$d = 7$ 4 States	$d = 11$ 8 States	$d = 12$ 16 States	$d = 13$ 32 States	$d = 15$ 128 States	$d = 16$ 256 States
0	1.0	4/2	2.5	1.461	3.424	3.802	4.150	4.771	5.051
1	1.5	4/5	5.0	2.430	4.393	4.771	5.119	5.740	6.021
2	2.0	4/10	10.25	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
3	2.5	4/20	20.5	2.323	4.286	4.664	5.012	5.633	5.913
4	3.0	4/42	40.687	2.568	4.531	4.909	5.257	5.878	6.158
5	3.5	4/82	81.594	2.452	4.415	4.793	5.140	5.762	6.042

Fig. 15: Table of Coding Gain for $\mathcal{A} = GF(2)$, $k_1 = 2$ and $\mathcal{Z}^2/4\mathcal{Z}^2$ (16 cosets).

TABLE XI

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	$d = 18$ 8 States	$d = 22$ 16 States	$d = 25$ 32 States	$d = 28$ 64 States	$d = 32$ 128 States
0	1.0	4/2	5.0	2.553	3.424	3.979	4.472	5.052
1	1.5	4/5	10.25	3.415	4.286	4.841	5.333	5.913
2	2.0	4/10	20.5	3.415	4.286	4.841	5.333	5.913
3	2.5	4/20	40.687	3.448	4.319	4.874	5.367	5.947
4	3.0	4/42	81.594	3.648	4.519	5.075	5.567	6.147

Fig. 16: Table of Coding Gain for $\mathcal{A} = GF(2)$, $k_1 = 2$ and $\mathcal{Z}^2/\Phi\mathcal{Z}^2$ (32 cosets).

TABLE XII

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	$d = 7$ 9 States	$d = 8$ 27 States	$d = 9$ 81 States
1	1.58	4/5.33	3.75	3.957	4.537	5.049
2	2.37	4/17.407	11.275	4.316	4.896	5.408
3	3.16	4/53.333	33.519	4.447	5.027	5.539

Fig. 17: Table of Coding Gain for $\mathcal{A} = GF(3)$, $k_1 = 1$ and $\mathcal{A}_2/3\mathcal{A}_2$ (9 cosets).

TABLE XIII

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	$d = 16$ 9 States	$d = 24$ 27 States	$d = 27$ 81 States
1	1.58	4/5.33	11.275	2.767	4.528	5.039
2	2.37	4/17.407	33.519	3.175	4.936	5.447

Fig. 18: Table of Coding Gain for $\mathcal{A} = GF(3)$, $k_1 = 1$ and $\mathcal{A}_2/9\mathcal{A}_2$ (27 cosets).

TABLE XIV

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	$d = 12$ 16 States	$d = 14$ 64 States	$d = 16$ 128 States
0	1.0	4/2	2.5	3.802	4.472	5.052
1	2.0	4/10	10.25	4.664	5.333	5.913
2	3.0	4/42	40.687	4.909	5.579	6.158

Fig. 19: Table of Coding Gain for $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_4$, $k_1 = 1$ and $\mathcal{Z}^2/4\mathcal{Z}^2$ (16 cosets).

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	$d = 20$ 16 States	$d = 28$ 64 States	$d = 32$ 128 States
0	1.0	4/2	5.0	3.010	4.472	5.052
1	2.0	4/10	20.5	3.872	5.333	5.913
2	3.0	4/42	81.594	4.106	5.567	6.147

Fig. 20: Table of Coding Gain for $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_4$, $k_1 = 1$ and $\mathcal{Z}^2/\Phi\mathcal{Z}^2$ (32 cosets).

TABLE XVI

k_2	Rate ρ	Uncoded $\frac{u}{d} / \frac{u}{P}$	Coded P	$d = 40$ 16 States	$d = 54$ 64 States	$d = 64$ 128 States
0	1.0	4/2	10.25	2.903	4.206	4.944
1	2.0	4/10	40.687	3.905	5.209	5.947
2	3.0	4/42	163.19	4.105	5.409	6.147

Fig. 21: Table of Coding Gain for $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_4$, $k_1 = 1$ and $\mathcal{Z}^2/8\mathcal{Z}^2$ (64 cosets).

A.5 REVISTA DA SBT (VOL.13) - JULHO DE 1998

Algoritmo Geral para a Procura de Códigos Treliça Ótimos baseados em Partições de Reticulados

E.M. Rosa*, W.C. Borelli† e P.G. Farrell‡

* Departamento de Matemática - Fac. de Ciências - Unesp - Bauru - SP, emilia@bauru.unesp.br

† Departamento de Telemática - Feec - Unicamp - Campinas - SP, borelli@dt.fee.unicamp.br

‡ Departamento de Eng. Elétrica, Univ. of Manchester - U.K., farrell@man.ac.uk

Resumo: Neste artigo é proposto um algoritmo geral de procura de códigos treliça ótimos q-ários, baseados em reticulados e suas partições, o qual incorpora os procedimentos introduzidos para códigos binários em [[2],[4]], e generaliza a procura de códigos ótimos para alfabetos que são anéis com q elementos, Z_q . Novas características foram incorporadas ao algoritmo, proporcionando uma procura de códigos ótimos mais rápida e eficiente do que em [[3],[4],[5]]. Exemplos numéricos de aplicação do algoritmo para um esquema binário com a partição $Z^2/\theta Z^2$ e para um esquema ternário com a partição $A_2/9A_2$, são apresentados em detalhes.

Abstract: In this paper a general algorithm for the search of optimum q-ary trellis codes, based on lattices and cosets, is proposed. The algorithm incorporates the procedures introduced for binary codes in [[2],[4]] and generalizes the search for alphabets that are rings with q elements, Z_q . New characteristics were incorporated to the algorithm, providing a faster and more efficient search for the optimum codes than in [[3],[4],[5]]. Numerical examples are presented in details for binary scheme with the $Z^2/\theta Z^2$ partition and for a ternary scheme with the $A_2/9A_2$ partition.

Palavras-chave: Códigos Treliça, Códigos Convolucionais, Partições de Reticulados, Cosets, Códigos Ótimos, Algoritmo de procura.

I. INTRODUÇÃO

Seja a estrutura geral do codificador de um código treliça, como em [1] e que é mostrado na fig.1, o qual transforma uma sequência de símbolos de um alfabeto \mathcal{A} em uma sequência de símbolos de saída, os quais mapeiam

uma constelação num reticulado Λ do \mathcal{R}^n .

Considere \mathcal{A} um anel finito, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ um subreticulado, G a matriz geradora de um código convolucional com k_1 símbolos de entrada de \mathcal{A} e apenas um símbolo de saída, r , correspondente a um coset (g_{ij}) da partição de reticulados Λ/Λ' .

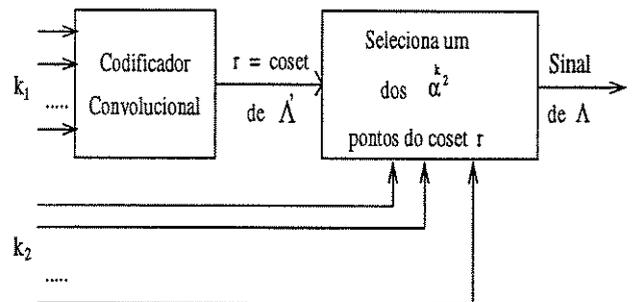


Fig. 1. Estrutura do Codificador de um Código Treliça[1]

O codificador do código treliça, possui $k = k_1 + k_2$ bits de entrada e um ponto da constelação como saída, sendo k_1 , os bits codificados pelo código convolucional e k_2 , os símbolos de entrada não codificados, os quais são utilizados na escolha de um ponto específico dentre os α^{k_2} pontos do coset, previamente escolhido pelo codificador convolucional.

A taxa do código convolucional é $k_1 \log_2 \alpha$ bits/coset e a taxa fracionária é $\rho \stackrel{\text{def}}{=} k_1 \log_2 \alpha / \log_2 |T|$ onde $\alpha = |A|$ e $|T|$ é o número de saídas possíveis sendo α^{k_1} o número de entradas possíveis. O codificador pode determinar até α^{k_1+V} cosets distintos.

A fig.2 apresenta a estrutura genérica do codificador convolucional com k_1 entradas e $v = \max_{1 \leq j \leq k_1} \{v_j\}$; v_j é o número de memórias em cada entrada do codificador, onde $g_{vj} = 0$, sempre que $v_j < v$.

Denomina-se [1] **matriz geradora** do código convolucional envolvido na estrutura do Código Treliça, a matriz

G que tem cosets \mathbf{g}_{ij} como suas colunas:

$$G = [\mathbf{g}_{v k_1} \dots \mathbf{g}_{v 1} | \dots | \mathbf{g}_{1 k_1} \dots \mathbf{g}_{1 1} | \mathbf{g}_{0 k_1} \dots \mathbf{g}_{0 1}] \quad (1)$$

Define-se como saída do codificador convolucional, o coset

$$r = \sum_{i=0}^v \sum_{j=1}^{k_1} u_{ij} \mathbf{g}_{ij} \quad (2)$$

onde $u_{ij} \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{g}_{ij} \in \Lambda/\Lambda'$.

A norma de um coset é definida como $\|\mathbf{g}_{ij}\| \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_k x_{ij_k}^2)^{1/2}$, onde $k = 1, 2, \dots, \dim(\Lambda)$; x_{ij_k} são as coordenadas Euclidianas do coset \mathbf{g}_{ij} no reticulado Λ [1].

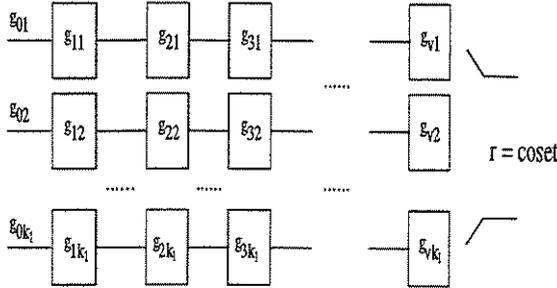


Fig. 2. Estrutura do Código Convolucional

A distância mínima de um código treliça é definida em [1] pela expressão

$$d = \min\{d_{free}, d_2\}$$

sendo d_{free} o valor mínimo dentre as métricas dos caminhos fechados com início, e final, no estado zero da treliça e d_2 , a distância Euclidiana quadrada mínima, obtida entre os pontos de um mesmo coset da partição de reticulados. Dados os valores de k_1, k_2, V, q , e uma partição específica de reticulados, defini-se **código treliça ótimo** como sendo o que possui o valor máximo para a distância mínima d . A maximização da distância mínima d , necessariamente, passa pela maximização do parâmetro d_{free} do código convolucional, pois d_2 tem valor fixado pela partição.

O aumento do número de memórias de um codificador convolucional pode proporcionar um valor maior para o d_{free} do código gerado. Desta forma os parâmetros, (k_1, V, q) e a partição, Λ/Λ' , são considerados de modo que os esquemas gerem códigos convolucionais onde $d_{free} \leq d_2$.

Este artigo propõe um algoritmo geral de procura de códigos convolucionais ótimos q-ários, o qual é apresentado na seção III, de maneira bastante detalhada. O algoritmo incorpora e generaliza os procedimentos apresentados em [[2],[4]], visto que se procura códigos convolucionais não catastróficos com d_{free} máximo, i.e., códigos

ótimos, binários [4] e q-ários [[2],[5],[6]] para um dado conjunto de parâmetros (k_1, V, q) e uma dada partição de reticulados Λ/Λ' .

II. SUBCONJUNTOS ESPECIAIS DE MATRIZES GERADORAS

Seja Δ_{inf} , um limitante inferior para o d_{free} de um código convolucional, formado pela soma da menor métrica dentre os ramos que chegam ao estado zero, (S_0), com a menor métrica dentre os ramos que partem do referido estado.

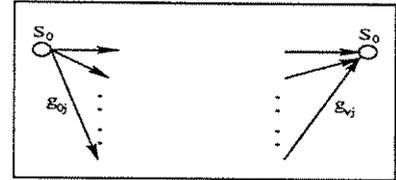


Fig. 3. Limitante inferior para o d_{free}

Por outro lado a métrica de um caminho fechado qualquer da treliça limita superiormente o d_{free} do código convolucional. Portanto considere o parâmetro, Δ_{sup} , como sendo a menor métrica obtida a partir de um conjunto finito de caminhos fechados da treliça (caminhos com início e fim no estado S_0), como mostrado na fig.4.

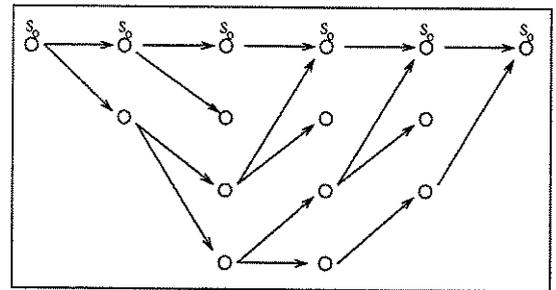


Fig. 4. Limitante superior para o d_{free}

A determinação das matrizes geradoras de bons códigos convolucionais (códigos não catastróficos com d_{free} grande), envolve uma escolha adequada de suas colunas, a qual deve propiciar a maximização dos parâmetros Δ_{inf} e Δ_{sup} , bem como, possibilitar a obtenção de todos os cosets da partição utilizada, na saída do codificador convolucional. A partir desta escolha obtém-se **subconjuntos especiais** [2] com um número reduzido de matrizes geradoras, dentre os quais existem matrizes que geram códigos ótimos (d_{free} máximo).

Cada subconjunto especial de matrizes geradoras G (1),

pode ser representado por uma matriz-norma GN [3],

$$GN = [\|g_{v k_1}\| \dots \|g_{v 1}\| \dots \mid \|g_{0 k_1}\| \dots \|g_{0 1}\|] \quad (3)$$

na qual, as colunas são escolhidas dentre as normas dos cosets da partição, de forma que maximizem os limitantes, Δ_{inf} e Δ_{sup} , do d_{free} dos códigos gerados pelas matrizes G pertencentes ao subconjunto especial.

A. Definições do Δ_{inf} e Δ_{sup} dos Subconjuntos Especiais

Dado o conjunto de blocos de bits de entrada:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{u}_l\} = (u_{l k_1}, \dots, u_{l 1}) \mid \{\mathbf{u}_l\} \neq \{0\}, \\ \{\mathbf{u}_l\} \in \mathcal{A}^{k_1}, l = 1, \dots, \alpha^{k_1} \end{array} \right\}, \quad (4)$$

As definições [2], dos parâmetros Δ_{inf} e Δ_{sup} , podem ser generalizadas para quaisquer valores de k_1 e V pelas seguintes expressões:

$$\Delta_{inf} = \min_{\{\mathbf{u}_l\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l j} g_{v j} \right\| \right\} + \min_{\{\mathbf{u}_l\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l j} g_{0 j} \right\| \right\} \quad (5)$$

onde os cosets g_{0j} estão associados aos ramos que partem do estado S_0 e os g_{vj} , aos que chegam a esse estado da treliça, conforme fig.3 e

$$\Delta_{sup} = \min_{\{\mathbf{u}_l\}} \left\{ \sum_{i=0}^v \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l j} g_{i j} \right\| \right\} \quad (6)$$

sendo que dentre todas as sequências de símbolos de entrada, nesta expressão utilizou-se somente aquelas associadas aos caminhos fechados cujo número de ramos na treliça correspondente é mínimo.

Em geral pode-se considerar mais caminhos fechados da treliça para a definição do Δ_{sup} o que poderá proporcionar maior rapidez na obtenção de um código ótimo [[2],[6]].

Supondo o caso de $k_1 = 2$ e $\mathcal{A} = GF(2)$, as expressões (4), (5) e (6) ficariam reduzidas a:

$$\mathcal{U} = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}\};$$

$$\Delta_{inf} = \min \left\{ \begin{array}{l} \|0.g_{v1} + 1.g_{v2}\|, \\ \|1.g_{v1} + 0.g_{v2}\|, \\ \|1.g_{v1} + 1.g_{v2}\| \end{array} \right\} + \min \left\{ \begin{array}{l} \|0.g_{01} + 1.g_{02}\|, \\ \|1.g_{01} + 0.g_{02}\|, \\ \|1.g_{01} + 1.g_{02}\| \end{array} \right\}$$

$$= \min \left\{ \begin{array}{l} \|g_{v2}\|, \\ \|g_{v1}\|, \\ \|g_{v1} + g_{v2}\| \end{array} \right\} + \min \left\{ \begin{array}{l} \|g_{02}\|, \\ \|g_{01}\|, \\ \|g_{01} + g_{02}\| \end{array} \right\};$$

$$\Delta_{sup} = \min \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^v \|0.g_{i1} + 1.g_{i2}\|, \\ \sum_{i=0}^v \|1.g_{i1} + 0.g_{i2}\|, \\ \sum_{i=0}^v \|1.g_{i1} + 1.g_{i2}\| \end{array} \right\}$$

$$= \min \left\{ \sum_{i=0}^v \|g_{i2}\|, \sum_{i=0}^v \|g_{i1}\|, \sum_{i=0}^v \|g_{i1} + g_{i2}\| \right\}.$$

B. Procedimentos para uma escolha eficaz dos subconjuntos especiais

a) Dada uma partição de reticulados, calcule a expressão:

$$\max_{g_{ij} \in \Lambda/\Lambda'} \left\{ \min_{\{\mathbf{u}_l\} \neq \{0\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l j} g_{i j} \right\| \right\} \right\}, \quad (7)$$

para cada conjunto possível de normas $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$ dos cosets g_{ij} , onde o mínimo é tomado, considerando os elementos do conjunto \mathcal{U} (blocos de bits de entrada), e o máximo na expressão é calculado dentre os líderes de cosets satisfazendo a um mesmo conjunto de normas.

b) A partir dos valores obtidos, construa a **Tabela Ordenada de Cosets e Normas** constituída de 5 colunas (**conjunto de normas** $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$; **conjunto de k_1 líderes de cosets**; **conjunto de blocos de bits de entrada**, $\{\mathbf{u}_l\}$; $\min_{\{\mathbf{u}_l\} \neq \{0\}} \left\{ \left\| \sum_{j=1}^{k_1} u_{l j} g_{i j} \right\| \right\}$; **valor da expressão (7)**) e tantos blocos de linhas, quantas forem os conjuntos possíveis de k_1 normas da partição (excetuando o conjunto todo nulo). O número de linhas em cada bloco é determinado pelas combinações, dentre os líderes de cosets distintos, para um mesmo conjunto de normas $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$. Os blocos são ordenados de forma decrescente, quanto ao valor da expressão (7) e obtidos através dos mesmos procedimentos.

Para exemplificar, considere $q = 2$, $k_1 = 2$ e a partição $\mathcal{Z}^2/\theta\mathcal{Z}^2$ conforme a fig.5. Seja o conjunto de normas $\{N_2, N_1\} = \{2, 2\}$, bloco 2 da tabela ordenada (fig.6), a qual está dividida em 7 blocos de linhas, referentes aos conjuntos $\{N_2, N_1\}$. O conjunto $\{2, 2\}$ apresenta 4 possibilidades de combinações de líderes de cosets, para esta partição (coluna 2 do bloco 2), pois a mesma possui 2 cosets com norma igual a 2. Como $\mathcal{A} = \mathcal{Z}_2$ e $\mathcal{U} = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 1\}\}$ obtem-se a terceira coluna da tabela fazendo as combinações $|\sum_{i=1}^{k_1} u_{ij} g_{ij}|$. A

penúltima coluna é obtida da anterior, considerando o valor mínimo da linha; e a última, apresenta o valor máximo (7), dentre os valores da coluna anterior.

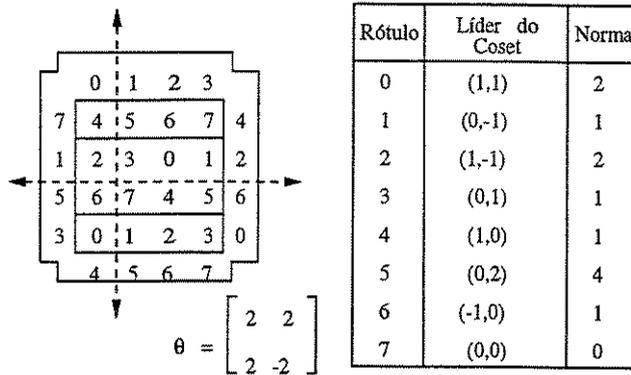


Fig. 5. Partição $\mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$ e tabela de líderes e normas(8 cosets)

c) Os blocos referentes aos conjuntos de normas, $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$, que representam os mesmos valores em ordem reversa, são omitidos, pois representam repetição do bloco de linhas dado por $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$, exceto pela ordem de apresentação da terceira coluna.

d) O par de parâmetros, (k_1, V) , determina o número de colunas da matriz geradora G , bem como da matriz-norma, GN . As k_1 primeiras e últimas colunas, se referem aos ramos da treliça que chegam e partem do estado zero(fig.3), sendo estas, as colunas envolvidas na definição do Δ_{inf} (5). Logo, escolha o melhor conjunto de normas para representá-las na matriz-norma GN , de modo que o valor obtido na expressão seja máximo.

As colunas intermediárias de GN , influenciam na maximização do Δ_{sup} (6), e devem ser escolhidas a partir dos primeiros blocos de normas listados na tabela ordenada.

Procedendo deste modo, a matriz-norma GN escolhida, determina um subconjunto especial a ser considerado no algoritmo de procura de códigos ótimos.

III. ALGORITMO GERAL DE PROCURA DE CÓDIGOS ÓTIMOS Q-ÁRIOS

A figura 7 apresenta o fluxograma do algoritmo de procura de códigos ótimos, o qual é uma evolução das versões apresentadas em [[2],[3],[4],[5]].

Os detalhes do algoritmo estão apresentados em subseções (A-F), sendo que as duas primeiras se referem aos passos do algoritmo de procura que estão inseridos na fase inicial do mesmo, sendo portanto processados apenas uma vez.

$k_1 = 2$	8 cosets	$A = GF(2)$		
$\{N_2, N_1\}$	Líderes dos Cosets	(1,0), (0,1), (1,1)	min { . }	eq. (3.5)
$\{4, 2\}$	(0,2),(1,1)	4, 2, 2	2	2
	(0,2),(1,-1)	4, 2, 2	2	
$\{2, 2\}$	(1,1),(1,1)	2, 2, 0	0	2
	(1,1),(1,-1)	2, 2, 4	2	
	(1,-1),(1,1)	2, 2, 4	2	
	(1,-1),(1,-1)	2, 2, 0	0	
	(1,0),(1,0)	1, 1, 4	1	
$\{1, 1\}$	(1,0),(0,1)	1, 1, 2	1	1
	(1,0),(0,1)	1, 1, 2	1	
	(1,0),(-1,0)	1, 1, 0	0	
	(1,0),(0,-1)	1, 1, 2	1	
	(0,1),(1,0)	1, 1, 2	1	
	(0,1),(0,1)	1, 1, 2	1	
	(0,1),(-1,0)	1, 1, 2	1	
	(0,1),(0,-1)	1, 1, 0	0	
	(-1,0),(1,0)	1, 1, 0	0	
	(-1,0),(0,1)	1, 1, 2	1	
	(-1,0),(-1,0)	1, 1, 4	1	
	(-1,0),(0,-1)	1, 1, 2	1	
	(0,-1),(1,0)	1, 1, 2	1	
	(0,-1),(0,1)	1, 1, 4	1	
	(0,-1),(-1,0)	1, 1, 2	1	
(0,-1),(0,-1)	1, 1, 4	1		
$\{4, 1\}$	(0,2),(0,1)	4, 1, 1	1	1
	(0,2),(1,0)	4, 1, 1	1	
	(0,2),(0,-1)	4, 1, 1	1	
	(0,2),(-1,0)	4, 1, 1	1	
$\{2, 1\}$	(1,1),(1,0)	2, 1, 1	1	1
	(1,1),(0,1)	2, 1, 1	1	
	(1,1),(-1,0)	2, 1, 1	1	
	(1,1),(0,-1)	2, 1, 1	1	
	(1,-1),(1,0)	2, 1, 1	1	
	(1,-1),(0,1)	2, 1, 1	1	
	(1,-1),(-1,0)	2, 1, 1	1	
(1,-1),(0,-1)	2, 1, 1	1		
$\{0, 1\}$	(0,0),(0,1)	0, 1, 0	0	0
	(0,0),(1,0)	0, 1, 0	0	
	(0,0),(0,-1)	0, 1, 0	0	
	(0,0),(-1,0)	0, 1, 0	0	
$\{4, 4\}$	(0,2),(0,2)	4, 4, 0	0	0
$\{0, 0\}$	(0,0),(0,0)	0, 0, 0	0	0

Fig. 6. Tabela Ordenada de Cosets e Normas

A. Construção da Tabela Ordenada de Cosets e Normas

A partir da partição Λ/Λ' e da tabela de líderes de cosets e normas correspondentes (ex.: fig.5), construa a Tabela Ordenada de Cosets e Normas (ex.: fig.6), considerando os conjuntos de normas $\{N_{k_1}, \dots, N_1\}$ (Seção II).

B. Escolha da matriz-norma GN

1) Coloque nas k_1 primeiras e últimas colunas de GN, o primeiro conjunto de normas da tabela ordenada.

2) Coloque nas colunas intermediárias de GN, o primeiro conjunto de normas, tantas vezes quanto se fizer necessário, e, não sendo possível colocar o conjunto todo (caso o número de colunas intermediárias não seja múltiplo de k_1) retire do mesmo, as menores normas, até a obtenção do número exato de colunas.

C. Cálculo dos valores máximos de Δ_{inf} e Δ_{sup} para GN

A partir da Tabela Ordenada de Cosets e Normas, calcula-se a expressão (5), para o Δ_{inf} , considerando o valor máximo da quarta coluna da referida tabela. No cálculo do maior valor para a expressão do Δ_{sup} (6), considere os valores máximos da terceira coluna, para cada bloco de bits de entrada, de cada conjunto de normas envolvido.

Por exemplo, seja $GN = [4 \ 2 \ | \ 1 \ 1 \ | \ 2 \ 2]$ ($k_1 = 2, V = 4, q = 2, \Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2$). No cálculo da expressão (5), estão envolvidos os dois primeiros blocos de linhas da tabela ordenada. O primeiro, referente às colunas $\{\|g_{22}\| \ \|g_{21}\|\}$ e o segundo, às colunas $\{\|g_{02}\| \ \|g_{01}\|\}$. Note que, a quarta coluna do primeiro bloco da tabela possui o mesmo valor nas duas linhas, o que não ocorre no segundo bloco, sendo então considerado o valor máximo, que é 2. Obtem-se então:

$$\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4.$$

Para calcular o valor máximo do Δ_{sup} , estão envolvidos os três primeiros blocos, correspondendo respectivamente, às colunas $\{\|g_{22}\| \ \|g_{21}\|\}$, $\{\|g_{02}\| \ \|g_{01}\|\}$ e $\{\|g_{12}\| \ \|g_{11}\|\}$. Em cada um desses blocos, considere o maior valor para cada bloco de bits de entrada. Assim

$$\begin{aligned} \Delta_{sup} &= \min\{(2 + 1 + 4), (2 + 1 + 2), (4 + 4 + 2)\} \\ &= \min\{7, 5, 10\} = 5. \end{aligned}$$

D. Procura dos Melhores Códigos em um Subconjunto Especial

O fluxograma apresentado na figura 8 descreve esta fase do algoritmo de procura de códigos ótimos.

Uma matriz-norma GN, que represente um subconjunto especial de matrizes geradoras G, onde todos os códigos são, ou catastróficos ou não impliquem a escolha de todos os cosets da partição, é prontamente descartada, sem que o algoritmo de determinação do d_{free} seja acionado uma única vez.

E. Nova Escolha de GN

Nesta fase, apenas uma das etapas abaixo é realizada, conforme a existência de novas possibilidades de escolha, sendo observada a ordem de precedência.

a) Se for possível, substitua as colunas intermediárias da GN anterior, por nova escolha do conjunto de normas, sempre observando-se a ordem subsequente dos conjuntos segundo a Tabela Ordenada de Cosets e Normas, utilizando inclusive a ordem reversa dos conjuntos $\{N_1, \dots, N_{k_1}\}$. Escolhida nova GN, retorne à subseção C. Caso contrário, etapa (b) a seguir.

b) Se for possível, troque o conjunto de normas que compõem as k_1 últimas colunas de GN, utilizando o próximo bloco de normas da tabela ordenada. Para as colunas intermediárias, tome a primeira combinação utilizada e continue o algoritmo de procura (subseção C). Caso contrário, etapa(c).

c) Troque o conjunto de normas que compõe o primeiro bloco de k_1 colunas de GN, retome a primeira combinação de normas utilizada para as demais colunas e continue (subseção C).

F. Apresentação do Código Ótimo (final do algoritmo)

A determinação do código ótimo e do d_{free} máximo para um dado conjunto de parâmetros, (k_1, V, q) e partição de reticulados é obtida ao se esgotar as possibilidades de nova escolha de GN, i.e., o algoritmo sempre determina um código ótimo. Ressalta-se que a procura de códigos ótimos realizada é exaustiva quanto à escolha das matrizes-norma GN e das matrizes geradoras G, ou seja, procura-se em todos os subconjuntos especiais possíveis, utilizando entretanto, o cálculo do d_{free} , para uma fração mínima de matrizes geradoras $G[[3],[4],[5],[6]]$.

IV. EXEMPLOS NUMÉRICOS

A. Códigos Treliça Binários:

$$k_1 = 2; V = 4; q = 2; \Lambda/\Lambda' = \mathbb{Z}^2/\theta\mathbb{Z}^2 \quad (8 \text{ cosets})$$

Este exemplo aparece, resumidamente, em [4].

A partir da partição e da tabela de líderes de cosets e normas (fig.5), construiu-se, segundo a seção II.B, a

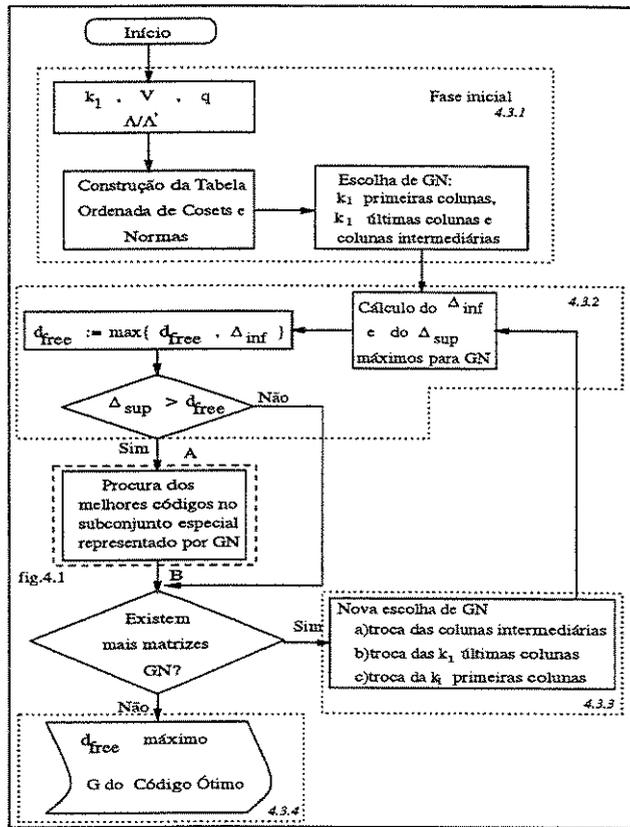


Fig. 7. Fluxograma do Algoritmo de Procura de Códigos Ótimos Q-ários

Tabela Ordenada de Cosets e Normas, apresentada na fig.6.

A matriz-norma possui $k_1 + V$ colunas, logo:

$$GN = [\|g_{22}\| \|g_{21}\| \mid \|g_{12}\| \|g_{11}\| \mid \|g_{02}\| \|g_{01}\|]$$

A primeira matriz-norma GN determinada pelo algoritmo apresentado na seção anterior, é :

$$GN = [4 \ 2 \mid 4 \ 2 \mid 4 \ 2],$$

cujo $\Delta_{inf} = 4$ e $\Delta_{sup} = 6$.

Porém qualquer combinação de colunas das matrizes geradoras G do subconjunto de GN, produz um coset de norma par. Logo as matrizes geradoras determinam códigos que não utilizam todos os cosets da partição considerada.

Desta maneira, a matriz GN considerada é descartada. O mesmo ocorre, neste exemplo, para qualquer matriz GN que não possua, pelo menos, uma coluna com norma ímpar. Assim as matrizes-norma são geradas na seguinte ordem:

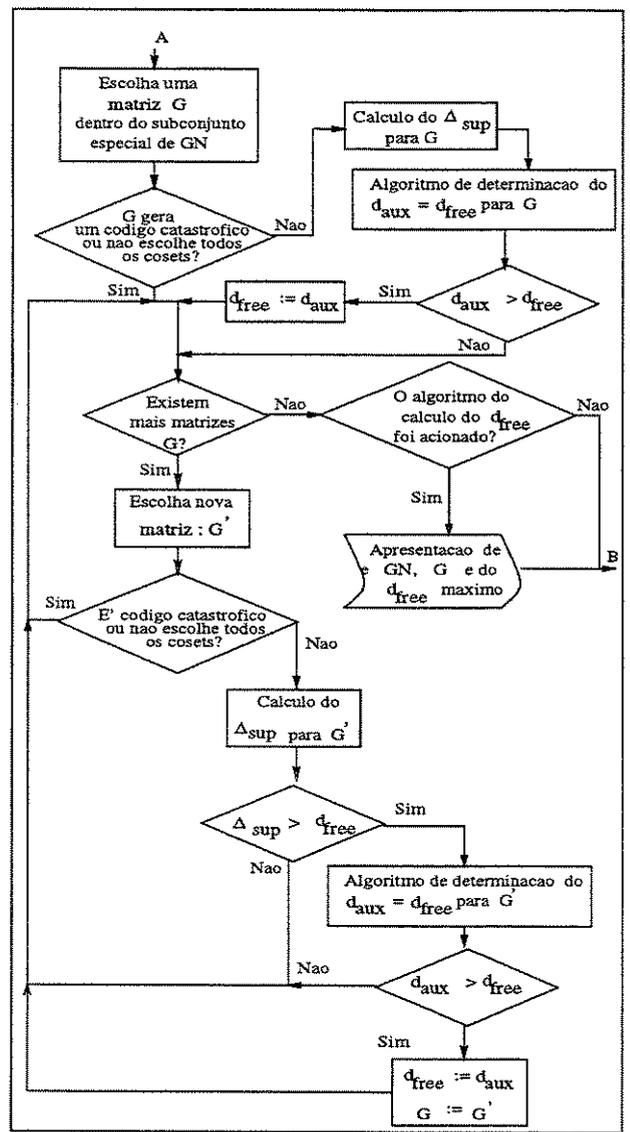


Fig. 8. Fluxograma da Procura dos Melhores Códigos em um Subconjunto Especial

1) $GN = [4 \ 2 \mid 1 \ 1 \mid 4 \ 2]$, $\Delta_{inf} = 2 + 2 = 4$ e $\Delta_{sup} = \min\{5, 9, 8\}$. Acionado o algoritmo do cálculo do d_{free} para este subconjunto especial, obtém-se, pelo menos um código com $d_{aux} = 5$. Faz-se $d_{free} = 5$, guardando também a matriz geradora correspondente, G.

2) Mantidas as colunas 1, 2, 5 e 6 e trocando as colunas 3 e 4, sequencialmente, a partir dos melhores valores da tabela ordenada (fig.6), que são (4,1), (1,4), (2,1), (1,2), (0,1) e (1,0), tem-se matrizes GN com $\Delta_{sup} = 5$, exceto a última que tem $\Delta_{sup} = 4$. Como o d_{free} desses subconjuntos especiais não podem superar o d_{aux} já ob-

$k_1=1$; 27 cosets ; $A=GF(3)$				
Norma	Lider do Coset	$\ g_{ij}\ , \ 2g_{ij}\ $	$\min \{ \cdot \}$	Eq. (3.5)
(9)	(3,3)	9 , 9	9	9
	(0,3)	9 , 9	9	
(3)	(2,1)	3 , 3	3	3
	(2,-1)	3 , 3	3	
	(1,2)	3 , 3	3	
	(-1,1)	3 , 3	3	
	(-1,-2)	3 , 3	3	
	(-2,-1)	3 , 3	3	
(2)	(2,0)	2 , 7	2	2
	(2,2)	2 , 7	2	
	(0,2)	2 , 7	2	
	(0,-2)	2 , 7	2	
	(-2,0)	2 , 7	2	
	(-2,-2)	2 , 7	2	
(7)	(-1,2)	7 , 1	1	1
	(1,-2)	7 , 1	1	
	(2,3)	7 , 1	1	
	(1,3)	7 , 1	1	
	(-3,-2)	7 , 1	1	
	(3,2)	7 , 1	1	
(1)	(1,0)	1 , 2	1	1
	(1,1)	1 , 2	1	
	(0,1)	1 , 2	1	
	(0,-1)	1 , 2	1	
	(-1,0)	1 , 2	1	
	(-1,-1)	1 , 2	1	
(0)	(0,0)	0 , 0	0	0

Fig. 10. Tabela Ordenada de Cosets e Normas

$\Delta_{sup} = \min\{27, 27\}$. Esta matriz GN é descartada sem o acionamento do cálculo do d_{free} , juntamente com todas as matrizes geradoras G associadas ao subconjunto especial, pois não possibilitam a escolha de todos os cosets da partição na saída do codificador.

2) $GN = [9 \ 3 \ 9]$, $\Delta_{inf} = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{21, 21\}$. Descartada pelo mesmo motivo da anterior.

3) $GN = [9 \ 2 \ 9]$, $\Delta_{inf} = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{20, 25\}$. Descartada pelo mesmo motivo da anterior.

4) $GN = [9 \ 1 \ 9]$, $\Delta_{inf} = 18$ e $\Delta_{sup} = \min\{19, 20\}$. Descartada pelo mesmo motivo da anterior.

5) As matrizes-norma $GN = [9 \ 9 \ 3]$ e $GN = [9 \ 3 \ 3]$, implicam em $\Delta_{inf} = 12$, e $\Delta_{sup} = 21$ e 18, respectivamente. Como também não escolhem todos os cosets, são descartadas.

6) $GN = [9 \ 2 \ 3]$, $\Delta_{inf} = 12$ e $\Delta_{sup} = \min\{14, 19\}$. O subconjunto especial é inspecionado e um

código com $d_{aux} = 14$ é obtido. Faz-se $d_{free} = 14$ e guarda-se G.

7) As matrizes-norma $GN = [9 \ 7 \ 3]$ e $GN = [9 \ 1 \ 3]$ possuem $\Delta_{sup} = 13$. Logo são prontamente descartadas, pois $\Delta_{sup} < d_{free}$ já obtido.

8) $GN = [9 \ 9 \ 2]$, não escolhe todos os cosets da partição, portanto é descartada.

9) $GN = [9 \ 3 \ 2]$ e $GN = [9 \ 2 \ 2]$. Descartadas prontamente, pois $\Delta_{sup} \leq d_{free}$ obtido anteriormente.

10) $GN = [9 \ 7 \ 2]$, $\Delta_{inf} = 12$ e $\Delta_{sup} = \min\{18, 17\}$. Investigado o subconjunto das matrizes G obtem-se $d_{aux} = 16$, o qual é máximo até o momento. Faz-se $d_{free} = 16$ e guarda-se G.

11) As matrizes $GN = [3 \ 9 \ 9]$, $[3 \ 3 \ 9]$, $[3 \ 2 \ 9]$, $[3 \ 7 \ 9]$, $[3 \ 1 \ 9]$, $[3 \ 9 \ 3]$, bem como todas as demais são descartadas prontamente pois, ou não escolhem todos os cosets, ou possuem $\Delta_{sup} \leq d_{aux}$.

Assim são esgotadas todas as possibilidades para as matrizes-norma GN e matrizes geradoras G de todos os subconjuntos especiais possíveis para este esquema. A procura para códigos treliça ternários, com parâmetros $(k_1, V) = (1, 2)$ e 27 cosets na partição, é concluída com a apresentação de um código convolucional ótimo, gerado por G, com $d_{free} = 16$,

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad GN = [9 \ 7 \ 2] .$$

Salienta-se que de um universo de 215 formas possíveis para a matriz norma GN, 213 são prontamente descartadas, sem que haja o efetivo cálculo do d_{free} para todas as matrizes geradoras contidas nestes 213 subconjuntos especiais.

V. CONCLUSÃO

O algoritmo geral proposto, determina códigos convolucionais ótimos, envolvidos na estrutura dos códigos treliça [1] baseados em cosets e partições de reticulados. O mesmo incorpora os procedimentos propostos em [[2],[4]] e generaliza a procura, quanto ao alfabeto de entrada, podendo ser um anel com q elementos [5].

Com relação as suas versões anteriores [[2],[3],[4],[5]], a apresentação do algoritmo, aqui realizada (seção III), é bastante precisa e detalhada, tendo como características fundamentais, a construção da Tabela Ordenada de Cosets e Normas (seção II) e sua utilização, tanto na escolha

eficaz da matriz-norma GN (seção III.B e E), quanto no cálculo dos valores máximos para Δ_{inf} e Δ_{sup} para um subconjunto especial (seção III.C). Estas características salientam, ainda mais, o caráter exaustivo de procura de códigos ótimos, visto que, se esgotam todas as possibilidades para as matrizes-norma GN e matrizes geradoras G de todos os subconjuntos especiais para um dado código treliça.

A procura de melhores códigos em um subconjunto especial (seção III.D) é apresentada, através de um fluxograma (fig.8), destacado do algoritmo geral, o que permite uma completa visão desta fase, sem o prejuízo da visão total do algoritmo proposto.

Ressalta-se também que, dentro dos subconjuntos especiais, o cálculo do d_{free} é acionado para uma fração mínima de matrizes geradoras, neles contidas. Este fato pôde ser observado nos exemplos apresentados neste artigo para códigos treliça binários (seção IV. A e B), no exemplo para códigos treliça quaternário, apresentado em [5] e em outros exemplos em [6].

VI. AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente suportado por uma bolsa PICD/CAPES para a professora E.M. Rosa.

REFERENCES

- [1] Calderbank, A.R. e Sloane, N.J.A. *New Trellis Codes based on Lattices e Cosets*. IEEE Trans. Inform.Theory, Vol.IT-33, pp.177-195, Mar.1987.
- [2] Rosa, E.M. e Borelli, W.C. *Procedimentos Simples para a procura de Códigos Ótimos, através de Matrizes Geradoras representadas por Cosets*. XIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Vol.2, pp.655-660, Curitiba, PR, Brasil, Julho 1996.
- [3] Rosa, E.M., Borelli, W.C. e Farrell, P.G. *Special Subsets e Optimum Codes based on Lattices e Cosets*. International Symposium of the Informations Theory (ISIT'97), p.521, Ulm, Germany, June 29 - July 4, 1997.
- [4] Rosa, E.M., Borelli, W.C. e Farrell, P.G. *Novos Procedimentos para a Procura de Códigos Ótimo Binários baseados em Partições de reticulados*. XV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, pp.479-483, Recife, PE, Brasil, Setembro 1997.
- [5] Rosa, E.M., Borelli, W.C. e Farrell, P.G. *A Formalized Optimum Code Search for q-ary Trellis Codes*. IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM'97), S26p5, ISBN CD-ROM: 0-7803-4201-1, Phoenix, Arizona, USA, Nov.1997.
- [6] Rosa, E.M. Ph.D. Thesis (em preparação) - DT/FEEC/ Unicamp - Campinas - SP - Brasil.

EMILIA M. ROSA: Professora da Faculdade de Ciências da UNESP/Bauru desde 1990; atualmente é Professora MS-2 do Departamento de Matemática da FC/UNESP. Graduou-se em Matemática, no ano de 1986 pela UNESP, Rio Claro-SP; obteve título de Mestre em

Matemática em 1990 pelo IMECC/UNICAMP e; atualmente é aluna regular do Curso de Doutorado em Eng.Elétrica - FEEC/UNICAMP, Campinas-SP. Áreas de pesquisa de atual interesse: Teoria de Informação e codificação: Estruturas algébricas e geométricas para codificação e modulação combinadas (TCM e BCM); Códigos de bloco e convolucionais para transmissão de dados clássica e de multi-usuários; Teoria dos Números.

WALTER C. BORELLI: Professor da Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP desde 1973; atualmente é Professor MS-5 do Departamento de Telemática da FEEC/UNICAMP. Obteve o título de Engenheiro Elétrico em 1972 pela EESC-USP, São Carlos-SP; de Mestre em Engenharia Elétrica em 1975 pela FEC/UNICAMP e de Ph.D. em Eng. Eletronica e de Comunicações em 1983, pela Universidade de Kent, Canterbury, Inglaterra. Áreas de pesquisa de atual interesse: a) Teoria de informação e codificação: Estruturas algébricas e geométricas para codificação e modulação combinadas (TCM e BCM); Códigos de bloco e convolucionais para transmissão de dados clássica e de multi-usuários; Análise e síntese de circuitos digitais para codificadores e decodificadores de sistemas para correção de erros. b) Especificação, simulação e validação de sistemas complexos: Protocolos para redes ATM; BISDN, Multimídia e Redes sem fio; Eng. de Software; Manufatura; Banco de dados e etc.

P.G. FARRELL: Head of Communications Research Group / Electrical Engineering Division / Faculty of Science and Engineering / The University of Manchester-UK. Concerned with all aspects of digital communication systems theory and practice. These include error control coding for all types of communication and information storage systems, multifunctional coding, multiple access techniques applied to personal and mobile communication and broadband networks, security and cryptographic protocols, performance analysis and simulation of communication systems, and autonomous systems.

Bibliografia

- [1] S. Benedetto. Rotational invariance of Trellis Codes. Grup Codes and decoders. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 42(3):766–778, May 1996.
- [2] S. Benedetto and et al. Geometrically Uniform Multidimensional PSK Trellis Codes. *Electronics Letters*, 28(14):1286–1288, Jul 1992.
- [3] E. Biglieri, P.J. Divsalar, D. asnd McLane, and M.K. Simon. *Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications*. New York: Macmillan , 1991.
- [4] E. Biglieri and M. Luise. *Coded Modulation and Bandwidth-Efficient Transmission*. Elsevier Science Publishers B.V. - Amsterdam, Netherlands , 1991.
- [5] E. Biglieri and A. Spalvieri. Performance Evaluation of Coded Modulation Schemes based on Binary Lattices. *IEEE Trans. Communication*, 43(2-4):269–276, Feb-Apr 1995.
- [6] W.C. Borelli. *Convolutional Codes for Multi-Level Data Transmission*. PhD thesis, University of Kent, England, July 1983.
- [7] W.C. Borelli, H.F. Rashvand, and P.G. Farrell. Convolutional Codes for Multilevel Modems. *Electronic Letters*, 17(9):331–333, 1981.
- [8] A.G. Burr. Block versus Trellis - An Introduction to Coded Modulation. *Electronics & Communication Eng. Journal*, 5(4):240–248, Aug 1993.
- [9] A.R. Calderbank and J.E. Mazo. A new description of trellis codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-30:784–791, 1984.

- [10] A.R. Calderbank and N.J.A. Sloane. Four-dimensional modulation with an eighth-state trellis code. *Bell Syst. Tech. Journal*, 64:1005–1018, 1985.
- [11] A.R. Calderbank and N.J.A. Sloane. New Trellis Codes based on Lattices e Cosets. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-33:177–195, Mar 1987.
- [12] J.H. Conway and J.A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer, New York, USA, 1988.
- [13] P.G. Farrell, R.G.C. Williams, W.C. Borelli, and L.H.C. Lee. Codulation Techniques with Block and Convolutional Codes. In *Intenational Symposium of the Informations and Coding Theory (ISICT'87)*, pages 215–234, Campinas, Brazil, 1987.
- [14] G.D. Forney Jr. The Viterbi Algorithm. *IEEE Proc.*, 61(3):268, Mar 1973.
- [15] G.D. Forney Jr. Coset Codes: I-Introduction and Geometrical Classification. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 34(5):1123–1151, Sep 1988.
- [16] G.D. Forney Jr. Coset Codes: II-Binary Lattices and Related Codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 34(5):1152–1187, Sep 1988.
- [17] G.D. Forney Jr and G. Ungerboeck. Modulation and Coding for Linear Gaussian Channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 44(6):2384–2415, Oct 1998.
- [18] G.D. Forney Jr and L. Wei F. Multidimensional constellations-Part I: Introduction, figures of merit, and generalized cross constellation. *IEEE J.Select. Areas Commun.*, 7:877–892, Aug 1989.
- [19] O.G.C. Gonçalves and R. Palazzo Jr. Determinação e análise de codificadores TCM ótimos de estruturas reticulares de 2 dimensões. In *IX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pages 6.3.1–6.3.6, 1991.
- [20] M. Hall Jr. *The Theory of Groups*. Macmillan - New York, 1959.
- [21] I.N. Herstein. *Topics in Algebra*. Waltham, MA:Ginn and Co., 1964.

- [22] L.H. Isaksson, M. amd Zetterberg. Block-Coded M-PSK Modulation over GF(M). *IEEE Trans. Inform. Theory*, 39(2):337–346, Mar 1993.
- [23] E.L. Lima. *Álgebra Linear*. LTD, Rio de Janeiro, 1997.
- [24] I. Markman. Esquemas de modulação codificada em 3 e 4 dimensões. Master's thesis, Universidade de Campinas, Junho 1987.
- [25] S.S. Pietrobon. New TCM Codes for 4PSK-2PSK Modulation. *Electronics Letters*, 30(17):1383–1284, Aug 1994.
- [26] E.M. Rosa, W. C. Borelli, and P. G. Farrell. Novos Procedimentos para a Procura de Códigos Ótimo Binários baseados em Partições de reticulados. In *XV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pages 479–483, Recife,Brazil, 1997.
- [27] E.M. Rosa, W.C. Borelli, and P.G. Farrell. Procedimentos Simples para a procura de Códigos Ótimos, através de Matrizes Geradoras representadas por Cosets. In *XIV Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, pages 655–660, Curitiba,Brazil, 1996. Vol. 2.
- [28] E.M. Rosa, W.C. Borelli, and P.G. Farrell. A Formalized Optimum Code Search for q-ary Trellis Codes. In *IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM'97)*, Phoenix,USA, 1997. ISBN CD-ROOM: 0-7803-4201-1, S26p5.
- [29] E.M. Rosa, W.C. Borelli, and P.G. Farrell. Special Subsets e Optimum Codes based on Lattices e Cosets. In *Intenational Symposium of the Informations Theory (ISIT'97)*, page 521, Ulm,Germany, 1997.
- [30] E.M. Rosa, W.C. Borelli, and P.G. Farrell. Algoritmo Geral para a Procura de Códigos Treliça Ótimos, baseados em Partições de reticulados. *Revista da Sociedade Brasileira de Telemática*, 13(1):14–21, Jul 1998.
- [31] G. Ungerboeck. Channel Coding and Multilevel/Phase Signals. May 10th, 1977.

- [32] G Ungerboeck. Channel Coding with Multilevel Phase Signals. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-28(1):55–67, 1982.
- [33] A.J. Viterbi. Error Bouds for Convolutional Codes and an Asymptotically Optimum Decoding Algorithm. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-13(2):260, Apr 1967.
- [34] L. Wei F. Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space - II: Nonlinear codes. *IEEE Select. Areas Commun.*, SAC-2:672–686, 1984.
- [35] L. Wei F. Trellis-Coded Modulation using multidimensional Constellations. *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-33:483–501, Jul 1987.