UNICAMP

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes
LCSI **Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes**

Controle Multivariável: Superfícies de Riemann, Diagramas de Ganho e Análise no Espaço de Freqüências

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

Carlos Mendes Richter
Engenheiro Eletricista - UFSM/RS

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura
Orientador - FEEC/UNICAMP/SP

Julho de 1997

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por Carlos Mendes Richter e aprovada pela Comissão Julgada em 31/07/1997
Orientador

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes

LCSI **Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes**

Tese: **Controle Multivariável: Superfícies de Riemann, Diagramas de Ganho e Análise no Espaço de Freqüências**

Autor: **Carlos Mendes Richter**

Orientador: **Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura**

Aprovada em 31 de julho de 1997 pela banca examinadora

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente)

Prof. Dr. Celso José Munaro - UFES/ES

Prof. Dr. Álvaro Geraldo Badan Palhares - FEEC/UNICAMP

RESUMO

Este trabalho trata da análise de sistemas de controle monovariável e multivariável através das superfícies de Riemann. É mostrado que a representação total destas superfícies abrange quatro dimensões, e novas representações são apresentadas em gráficos bidimensionais e tridimensionais. São propostas generalizações das representações já existentes, como lugar das raízes, diagramas de ganho, diagramas de Nyquist, de Bode e de Nichols, bem como dos respectivos diagramas complementares. São propostas novas formas de determinação de margens de fase e margens de ganho dos sistemas de controle monovariável, sendo estendidos os conceitos para o caso multivariável com base no critério generalizado de estabilidade de Nyquist. Para os casos monovariável e multivariável é mostrado que as margens de estabilidade podem ser determinadas diretamente sobre diversas representações de superfícies de Riemann, e para diversos valores de ganho de realimentação negativa ou positiva, com tratamento único. São estabelecidos para os casos monovariável e multivariável novos gráficos de margens de estabilidade em função do ganho de realimentação negativa ou positiva, que são novas ferramentas de auxílio para análise e projeto de sistemas de controle realimentados.

Palavras-Chave: Controle Multivariável, Superfícies de Riemann, Margens de Estabilidade.

ABSTRACT

This work deals with monovariable and multivariable control systems analysis through Riemann surfaces. It is shown that a complete Riemann surface representation has dimension four, and new representations are presented in two-dimensional and three-dimensional plots. Generalizations of the existing representations, like root-locus, gain plots, Nyquist, Bode and Nichols diagrams, are proposed. New phase and gain margin determination methods are proposed for monovariable systems, and the concepts are extended to the multivariable case using the generalized Nyquist stability criterion. For both monovariable and multivariable cases, it is shown that gain and phase margins can be determined directly over several Riemann surface representations for several values of negative or positive feedback gains using an unique approach. New stability margin plots, functions of negative or positive feedback gain, are established, which are new aiding tools for analysis and synthesis of feedback control systems.

Key-Words: Multivariable Control, Riemann Surfaces, Stability Margins.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO 1

1. ANÁLISE GRÁFICA DE SISTEMAS DE CONTROLE 3
   1.1. Breve Histórico 3
   1.2. Diagrama Polar 5
   1.3. Diagrama de Bode 15
   1.4 Diagrama de Nichols 22
   1.5. Lugar das Raízes 27
   1.6. Diagramas de Ganho 34

2. SUPERFÍCIES DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL 46
   2.1. Superfície-k de Riemann e Lugar das Raízes em Sistemas de Controle Monovariável 46
   2.2. Método Proposto para Cálculo e Graficação de Superfície-k de Riemann em Sistemas de Controle Monovariável 48
      2.2.1. Graficação Usual de Superfície-k de Riemann no Plano-s 51
      2.2.2. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F *versus* Magnitudes de k 53
      2.2.3. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G *versus* Ângulos de k 58
      2.2.4. Nova Graficação, de Superfície-k de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica *versus* Ângulo de Fase 61
      2.2.5. Novas Representações para Superfície-k de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais 63
   2.3. Superfície-s de Riemann e Diagramas de Resposta em Freqüência em Sistemas de Controle Monovariável 69
   2.4. Método Proposto para Cálculo e Graficação de Superfície-s de Riemann em Sistemas de Controle Monovariável 70
      2.4.1. Graficação Usual de Superfície-s de Riemann no Plano-g(s) 72
      2.4.2. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F *versus* Magnitudes de s 74
      2.4.3. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G *versus* Ângulos de s 76
      2.4.4. Nova Graficação, de Superfície-s de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica *versus* Ângulo de Fase 78
      2.4.5. Novas Representações para Superfície-s de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais 79

3. SUPERFÍCIES DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL 83
3.1. Superfície-k de Riemann e Lugar das Raízes em Sistemas de Controle Multivariável 84
3.2. Método Proposto para Cálculo e Graficação de Superfície-k de Riemann em Sistemas de Controle Multivariável 87
3.2.1. Graficação Usual de Superfície-k de Riemann no Plano-s 90
3.2.2. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F *versus* Magnitudes de k 92
3.2.3. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G *versus* Ângulos de k 97
3.2.4. Nova Graficação, de Superfície-k de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica *versus* Ângulo de Fase 100
3.2.5. Novas Representações para Superfície-k de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais 102
3.3. Superfície-s de Riemann e Diagramas de Resposta em Freqüência em Sistemas de Controle Multivariável 109
3.4. Método Proposto para Cálculo e Graficação de Superfície-s de Riemann em Sistemas de Controle Multivariável 110
3.4.1. Graficação Usual de Superfície-s de Riemann no Plano-G(s) 113
3.4.2. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F *versus* Magnitudes de s 115
3.4.3. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G *versus* Ângulos de s 120
3.4.4. Nova Graficação, de Superfície-s de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica *versus* Ângulo de Fase 126
3.4.5. Novas Representações para Superfície-s de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais 129

4. MARGENS DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL E MULTIVARIÁVEL USANDO SUPERFÍCIES DE RIEMANN 135
4.1. Margens de Estabilidade de Sistemas de Controle Monovariável 135
4.1.1. Margens de Estabilidade usando Superfícies-k de Riemann 135
4.1.2. Determinação nas Novas Graficações de Superfície-k de Riemann 144
4.1.3. Novas Representações em função do Ganho k de Realimentação 148
4.1.4. Determinação das Margens de Estabilidade com o Auxílio das Superfícies-s de Riemann 153
4.2. Margens de Estabilidade de Sistemas de Controle Multivariável 159
4.2.1. Margens de Estabilidade usando Superfícies-k de Riemann 159
4.2.2. Determinação nas Novas Graficações de Superfície-k de Riemann 168
4.2.3. Novas Representações em função do Ganho k de Realimentação 175
4.2.4. Determinação das Margens de Estabilidade com o Auxílio das Superfícies-s de Riemann 182

5. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES 188

APÊNDICES 192
Apêndice 1 - Discriminante de uma Função Algébrica 192
Apêndice 2 - Lista de Funções Implementadas no MATLAB 194

BIBLIOGRAFIA 197

INTRODUÇÃO

Propomos nesta dissertação que a representação total das superfícies-s e superfícies-ℓ de Riemann [41-43,55] acontece em quatro dimensões, por se tratar de aplicações conformes de uma variável complexa em uma função complexa [1,11,16,19,24,59,61]. Consideramos para isto que a representação gráfica de uma variável complexa acontece em duas dimensões: o plano complexo. Assim, nossa proposta é que para ter uma visualização mais precisa e realística das superfícies de Riemann, devemos poder representá-las de várias formas, usando gráficos bidimensionais e tridimensionais para que possamos imaginar as quatro dimensões envolvidas.

A generalização gráfica das superfícies de Riemann é válida tanto para os sistemas de controle monovariável quanto para os sistemas de controle multivariável. Mostramos no Capítulo 1 representações existentes, tanto de resposta em freqüência, como os diagramas de Nyquist, Bode e Nichols, quanto de lugar das raízes, como a representação no plano-s e em forma de diagramas de ganho [26-35,46,47]. Propomos uma nova representação para o lugar das raízes, apresentando o plano-s em forma de magnitude logarítmica em dB *versus* ângulo de fase em graus. No Capítulo 2, apresentamos as formas gráficas existentes para superfícies-s e superfícies-ℓ de Riemann de sistemas de controle monovariável, e propomos para elas novas graficações, generalizando todos os gráficos mostrados no Capítulo 1. De forma similar, apresentamos no Capítulo 3 as graficações existentes para superfícies-s e superfícies-ℓ de Riemann de sistemas de controle multivariável, e propomos novas graficações, generalizando também para este caso os gráficos apresentados no Capítulo 1. Propomos que as superfícies-ℓ de Riemann passem a ser chamadas de superfícies-k de Riemann, para unificar a notação com aquela usada nas representações de lugar das raízes — em função do ganho de realimentação.

São estudados no Capítulo 1 conceitos e formas já existentes para determinação das margens de estabilidade, ou seja, as margens de fase e de ganho. É primeiramente abordado o caso monovariável, e depois é feita a extensão dos conceitos para o caso multivariável usando o critério generalizado de estabilidade de Nyquist [5,37,39,42,44,45]. O Capítulo 4

faz a retomada deste tema, sendo dedicado a mostrar as ligações entre as medidas de estabilidade e as superfícies de Riemann, tanto para sistemas de controle monovariável quanto para sistemas de controle multivariável. São desenvolvidos novos métodos de determinação das margens de estabilidade em função de ganho variável em realimentação negativa ou positiva, e são apresentadas novas formas gráficas a partir destes métodos.

Este trabalho trata da análise de sistemas de controle lineares, invariantes, totalmente controláveis e observáveis, pretendendo demonstrar a utilidade das superfícies de Riemann ou de partes delas em análise e projeto de sistemas de controle, tanto no caso monovariável quanto no caso multivariável.

As convenções utilizadas são apresentadas no decorrer do texto à medida que se tornam necessárias. Os modelos de sistemas de controle monovariável e multivariável que são utilizados na dissertação são apresentados no decorrer do Capítulo 1. Sendo considerados apenas sistemas lineares invariantes totalmente controláveis e observáveis, os modelos representam totalmente os sistemas, tanto quando expressos em espaço de estado quanto quando em função ou matriz de transferência. No caso multivariável, os zeros de transmissão [10,12,21,22,40,52,57,58,63] são aqueles que apresentam a propriedade de bloqueio de transmissão como acontece com os zeros no caso monovariável, e são os valores da freqüência complexa s que diminuem o posto ou rank da matriz de transferência.

É apresentado no Apêndice 1 o algoritmo de Sansone e Gerretsen [59] para o cálculo do discriminante de uma função algébrica [1,11,16,19,24,59,61]. É através do discriminante que são calculados os pontos de ramificação e, por conseqüência, os cortes de uma superfície de Riemann representativa de um sistema de controle multivariável.

Foi utilizado o *software* MATLAB no decorrer do trabalho, e algoritmos e funções desenvolvidos foram implementados neste *software*. Os gráficos também foram todos feitos no MATLAB. O Apêndice 2 apresenta uma descrição sucinta das funções implementadas, e que foram utilizadas no desenvolvimento desta dissertação.

CAPÍTULO 1

ANÁLISE GRÁFICA DE SISTEMAS DE CONTROLE

1.1. BREVE HISTÓRICO

Análise e projeto de sistemas de controle tiveram muitos impulsionamentos nos últimos anos, e muitos são os que contribuíram para eles [38]. Ressaltamos entretanto alguns pesquisadores cujos trabalhos deram passos marcantes para a Teoria de Controle, particularmente no contexto desta dissertação.

Nyquist, em 1932 [49], determinou a estabilidade de sistemas realimentados a partir de representações gráficas dos sistemas sem realimentação, dando um novo impulso na teoria baseada na resposta em freqüência. Bode, em 1940 [6], representou três dimensões em dois gráficos bidimensionais. Em datas próximas, Nichols e Black representaram de forma inovadora o Plano-GH(s). Evans, em 1948 [15], trouxe uma representação direta para os pólos dos sistemas e seus percursos à medida que se aumenta o ganho de realimentação.

Estes avanços foram notáveis e extremamente significativos para a Teoria de Controle, conforme podemos ver em [7,8,13,25,45,50]. Entretanto os sistemas abordados, lineares, invariantes e monovariáveis (com apenas uma entrada e uma saída), são um subconjunto do universo dos sistemas, que de forma genérica pode ser considerado não-linear, variante e multivariável.

Os sistemas lineares, que são o foco do nosso estudo, passaram a partir do final da década de 50 a ser estudados na sua forma multivariável, quando trabalhos notáveis foram feitos. Exemplo disso são os estudos de Rosenbrock [56,58], com os Arranjos Diretos de Nyquist (DNA = 'Direct Nyquist Arrays') e os Arranjos Inversos de Nyquist (INA = 'Inverse Nyquist Arrays').

MacFarlane, em 1970 [37], generalizou o critério de estabilidade de Nyquist para o caso multivariável [5,37,39,42,44,55], mostrando que um sistema multivariável quadrado ao ser realimentado através de uma matriz identidade, pode ter sua estabilidade verificada através de um conjunto de contornos de Nyquist, um para cada autovalor da matriz de transferência. Deste critério generalizado de estabilidade de Nyquist, MacFarlane e Belletrutti [5,39] fizeram uma nova representação para a resposta em freqüência dos sistemas de controle multivariável, através dos autovalores da matriz de transferência $G(j\omega)$, que foram chamados de lugares característicos. Esta nova representação, permitiu a generalização dos gráficos tradicionais de Nyquist, Bode e Nichols/Black

para o caso multivariável. MacFarlane e Belletrutti lançaram [5,39] um método de projeto multivariável por lugares característicos, baseado no alinhamento da matriz de transferência em altas freqüências para garantir desacoplamento, e na aplicação de um compensador aproximadamente comutativo para dar estabilidade e desempenho a cada lugar característico como se fosse a resposta individual de um sistema de controle monovariável. Dissertação de Mestrado envolvendo estes conceitos foi apresentada por Maurício Silva [60] na FEC/UNICAMP em 1984.

Outro avanço no estudo de sistemas de controle multivariável foi a representação em forma de superfícies-s de Riemann, apresentada por MacFarlane e colaboradores a partir de 1977 [41-43,55]. Através de curvas de magnitude constante e curvas de ângulo de fase constante, a variável complexa s é totalmente mapeada pela aplicação complexa GH(s), e este mapeamento necessita de tantas cópias de plano complexo quantas forem as entradas e saídas do sistema. As cópias distintas de plano complexo são chamadas de folhas da superfície de Riemann. Este estudo tornou mais claras as diferenças no tratamento de sistemas de controle monovariável e multivariável, sendo a diferença fundamental que uma função de transferência g(s) é analítica em s e uma matriz de transferência G(s) é algébrica em s [1,11,16,19,24,59,61].

MacFarlane apresentou também as superfícies-ℓ de Riemann, onde a variável complexa ℓ representa o negativo do inverso do ganho k de realimentação do sistema, e então acontece o mapeamento dos pólos complexos do sistema realimentado. Também aqui são necessárias tantas folhas quantas forem as entradas e saídas do sistema. Preferimos nesta dissertação nomear estas superfícies como superfícies-k de Riemann, por darem estas a generalização complexa do ganho real k do lugar das raízes de Evans.

Em 1990, Kurfess e Nagurka [26-35,46,47] abriram um novo caminho na representação do lugar das raízes: os Diagramas de Ganho. Através desta nova representação eles conseguiram acabar com certas ambigüidades inevitáveis na representação usual de lugar das raízes multivariável [20,23,45,51].

Apresentamos neste capítulo as representações utilizadas para sistemas de controle, inicialmente para o caso monovariável, e depois estendemos as representações para o caso multivariável. Tratamos neste trabalho apenas de sistemas de controle lineares, estacionários, totalmente controláveis e observáveis.

Exemplificaremos neste capítulo e no seguinte os sistemas de controle monovariável com dois modelos didáticos e extremamente simples, visando a fácil compreensão. São eles: $g1(s) = (s+3)/\{(s+1)(s+2)\}$ e $g2(s) = 1/\{s(s+1)(s+2)\}$.

Sistemas de controle multivariável serão exemplificados neste capítulo através de dois modelos distintos: o primeiro representa um reator químico instável, e foi apresentado em

[41] por MacFarlane e Kouvaritakis. O segundo, que será utilizado extensivamente no Capítulo 3 para mostrar as superfícies de Riemann, foi apresentado por MacFarlane e Postlethwaite em [43]. Os modelos utilizados serão descritos no decorrer do texto.

1.2. DIAGRAMA POLAR

São várias as formas estabelecidas de graficação de sistemas de controle monovariável [7,8,13,25,50]. Uma das mais antigas é a graficação direta da resposta em freqüência de g(s) substituindo os valores reais positivos ω em $s = j\omega$, sendo $j = \sqrt{-1}$ o imaginário puro.

Nas figuras 1.2.1 e 1.2.2 a seguir estão representados os diagramas polares respectivamente para $g1(s) = (s+3)/\{(s+1)(s+2)\}$ e $g2(s) = 1/\{s(s+1)(s+2)\}$.

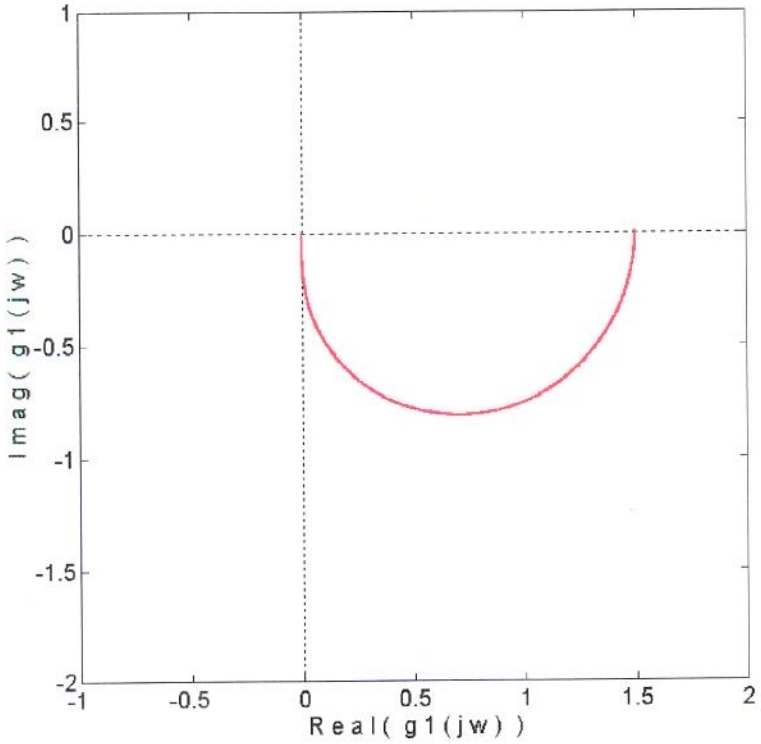


Figura 1.2.1 - Diagrama Polar de $g1(s) = (s+3)/\{(s+1)(s+2)\}$.

Através do diagrama de resposta em freqüência do sistema não-realimentado g(s), no caso de realimentação negativa e unitária, ou do diagrama de resposta em freqüência da malha direta gh(s) = g(s)h(s), no caso de dinâmica na realimentação representada por h(s), podemos usar o critério de estabilidade de Nyquist para inferir sobre a estabilidade do sistema realimentado. Duas medidas no diagrama de resposta em freqüência de g(s) ou gh(s) podem nos ajudar nesta tarefa — são as margens de estabilidade do sistema: margem de ganho e margem de fase. Na Figura 1.2.3 mostramos a

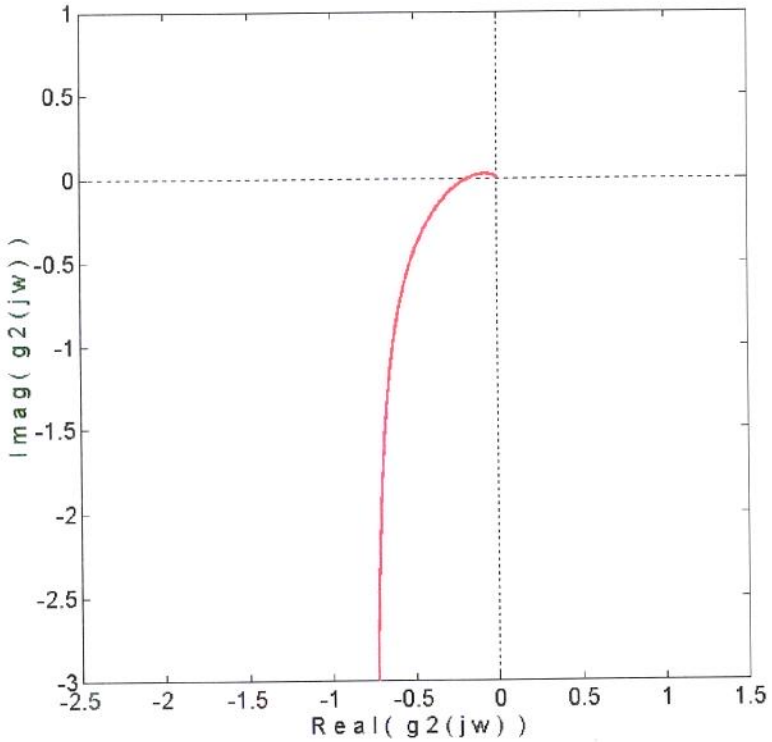


Figura 1.2.2 - Diagrama Polar de g2(s) = 1/{s(s+1)(s+2)}.

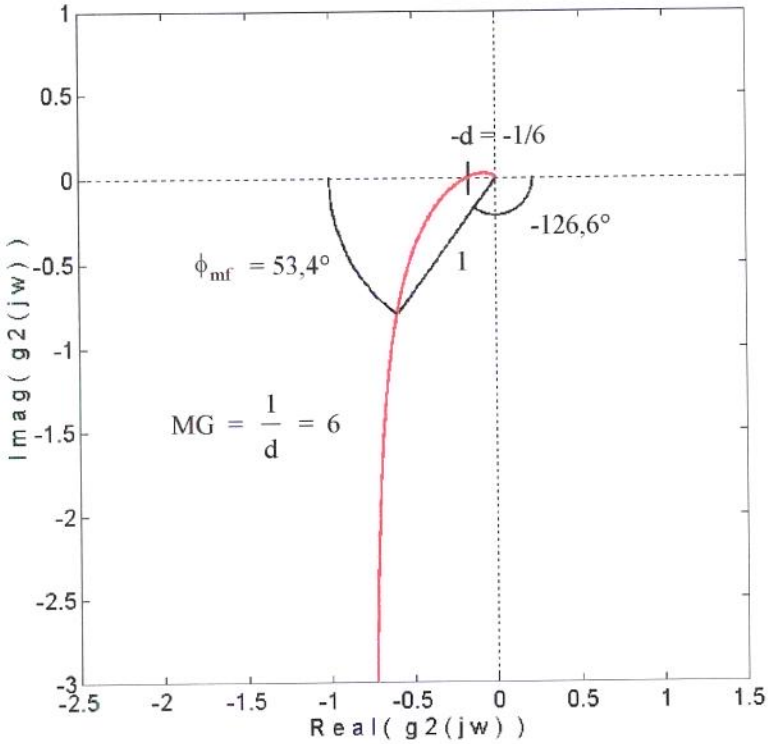


Figura 1.2.3 - Diagrama Polar de g2(s), *com indicação da margem de ganho,* MG = 6, *e da margem de fase, de* 53,4°.

forma usual de determinação da margem de ganho e da margem de fase de um sistema monovariável. A margem de ganho representa o quanto se deve aumentar o ganho de g(s) para que o sistema chegue no limite de estabilidade (neste caso, seis vezes), e a margem de fase é o quanto de atraso de

fase adicional se pode aplicar ao ponto com magnitude 1, antes da instabilidade (neste caso 53,4°).

A representação de sistemas de controle multivariável passou por mudanças para se adequar à teoria algébrica necessária [38] para resolver o problema de projeto, ou seja, realimentação e compensação. Inicialmente, a resposta em freqüência destes sistemas era representada pela superposição das respostas em freqüência dos elementos da matriz de transferência do sistema multivariável. A Figura 1.2.4 mostra o diagrama polar do modelo G(s) de um reator químico, com duas entradas e duas saídas, apresentado por MacFarlane e Kouvaritakis em [41]. Chamaremos este sistema de Sistema 1.

O modelo do Sistema 1 tem a seguinte representação de estado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathrm{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathrm{B}\,\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathrm{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathrm{D}\,\mathbf{u}(t) \end{cases}, \qquad \text{onde}$$

$$\begin{cases} \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1{,}38 & -0{,}2077 & 6{,}715 & -5{,}676 \\ -0{,}5814 & -4{,}29 & 0 & 0{,}675 \\ 1{,}067 & 4{,}273 & -6{,}654 & 5{,}893 \\ 0{,}048 & 4{,}273 & 1{,}343 & -2{,}104 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5{,}679 & 0 \\ 1{,}136 & -3{,}146 \\ 1{,}136 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Em forma de matriz de transferência, o modelo do Sistema 1 é:

$$\mathrm{G(s)} = \frac{1}{\Delta_0(\mathrm{s})} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(\mathrm{s}) & \Gamma_{12}(\mathrm{s}) \\ \Gamma_{21}(\mathrm{s}) & \Gamma_{22}(\mathrm{s}) \end{bmatrix}, \qquad \text{onde}$$

$$\begin{cases} \Delta_0(\mathrm{s}) = \mathrm{s}^4 + 11{,}67\,\mathrm{s}^3 + 15{,}75\,\mathrm{s}^2 - 88{,}31\,\mathrm{s} + 5{,}514 \\ \Gamma_{11}(\mathrm{s}) = 29{,}2\,\mathrm{s} + 263{,}3 \\ \Gamma_{12}(\mathrm{s}) = -3{,}146\,\mathrm{s}^3 - 32{,}62\,\mathrm{s}^2 - 89{,}83\,\mathrm{s} - 31{,}81 \\ \Gamma_{21}(\mathrm{s}) = 5{,}679\,\mathrm{s}^3 + 42{,}67\,\mathrm{s}^2 - 68{,}84\,\mathrm{s} - 106{,}8 \\ \Gamma_{22}(\mathrm{s}) = 9{,}43\,\mathrm{s} + 15{,}15 \end{cases} . \tag{1.2.2}$$

A Figura 1.2.5 mostra os quatro elementos da matriz G(s) do Sistema 1 separados. Rosenbrock [56,58] criou um método de projeto baseado nesta representação — os Arranjos Diretos de Nyquist (DNA = 'Direct Nyquist Arrays'), e outro similar usando a representação da resposta em freqüência dos elementos da matriz inversa $\mathrm{Q(s)} = [\mathrm{G(s)}]^{-1}$ — os Arranjos Inversos de Nyquist (INA = 'Inverse Nyquist Arrays'. A Figura 1.2.6 mostra os elementos individuais da matriz Q(s) do Sistema 1. Tanto projeto por DNA quanto projeto por INA usam características de diagonalidade da matriz para inferir sobre a estabilidade do sistema realimentado, através de círculos sobrepostos aos elementos da diagonal, chamados de bandas de Gershgorin.

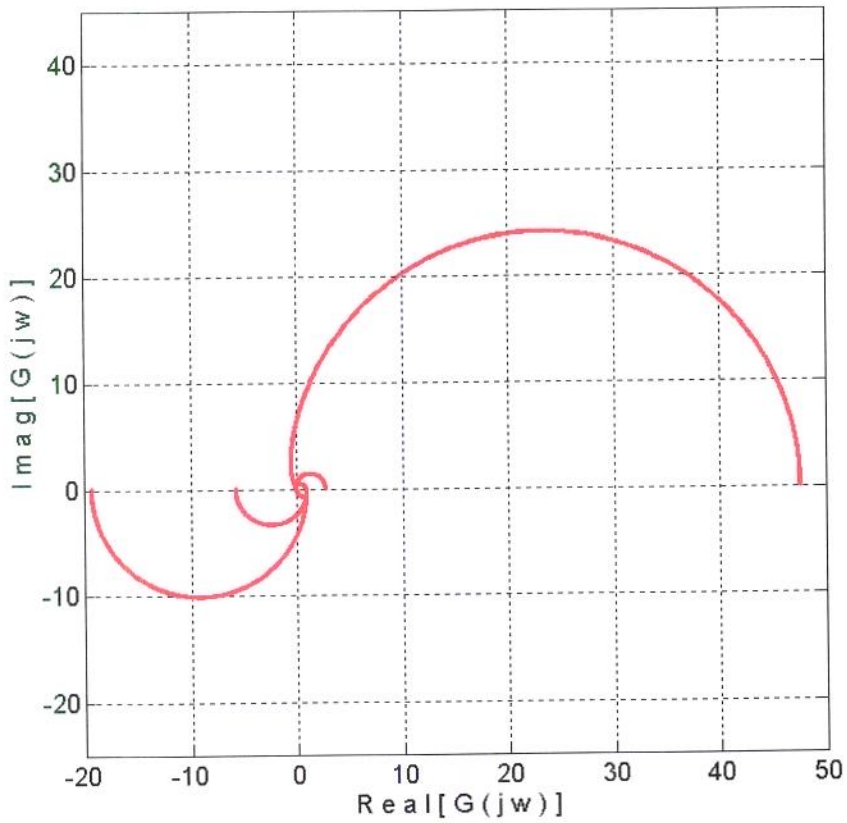


Figura 1.2.4. Diagrama Polar de um reator químico (Sistema 1). Os quatro elementos da matriz de transferência G(s) *aparecem todos no mesmo gráfico.*

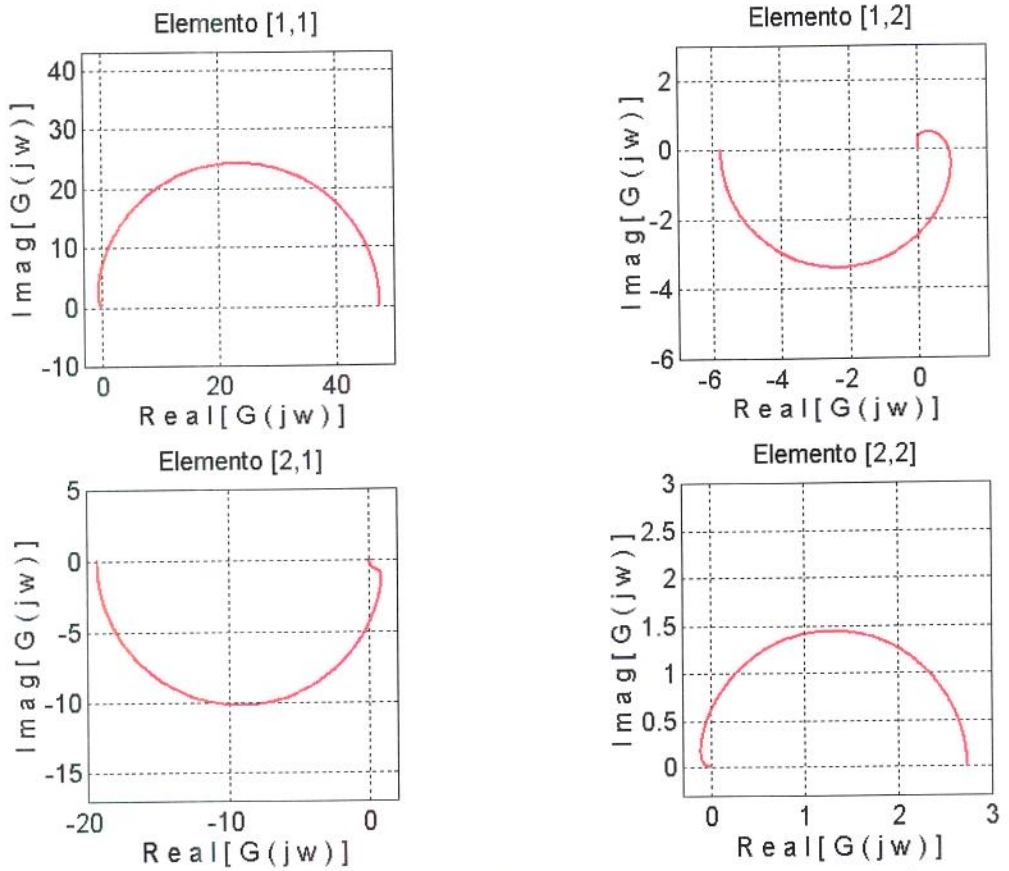


Figura 1.2.5. Diagrama Polar do Sistema 1, mas com os quatro elementos da matriz de transferência G(s) *em gráficos separados, como usado para projeto por DNA.*

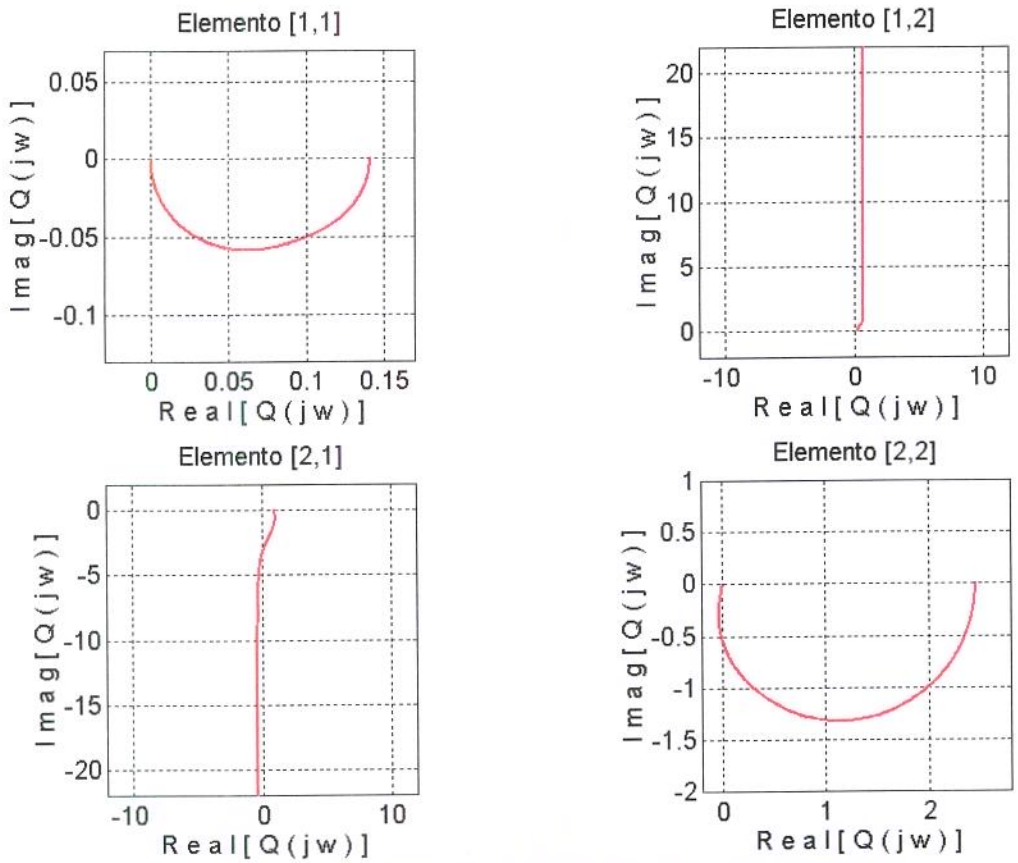


Figura 1.2.6. Diagrama polar dos quatro elementos da matriz inversa Q(s) *do Sistema 1, como usado para projeto por INA.*

Método inovador de projeto multivariável no espaço freqüencial surgiu com base nas características algébricas da matriz de transferência G(s), foi o método dos lugares característicos apresentado por MacFarlane e Belletrutti [5,39], e baseado no critério generalizado de estabilidade de Nyquist [5,37,39,42,44,55]. A representação da resposta em freqüência do sistema passa com este método a ser não mais as curvas dos elementos da matriz de transferência G(s), mas as curvas dos autovalores desta matriz, à medida que aumenta a freqüência complexa s = jω. Por serem ganhos complexos de mesma natureza, representaremos os lugares característicos, ou seja, autovalores de G(s), no plano complexo G(s). A Figura 1.2.7 mostra os dois lugares característicos da matriz G(s) do Sistema 1. Como um deles atinge magnitudes muito maiores que o outro, é conveniente representá-los separadamente, como mostrado na Figura 1.2.8.

Com base nos lugares característicos, pode-se inferir sobre a estabilidade do sistema realimentado usando o critério generalizado de Nyquist. Pelo critério, para que o sistema de controle multivariável com realimentação unitária, ou seja, realimentado com uma matriz identidade, seja estável, a soma dos circundamentos no sentido anti-horário ao redor do ponto crítico (-1+j0) do Plano-G(s), feitos por cada lugar característico, deve ser igual ao número de pólos de G(s) no semi-plano direito do Plano-s.

No exemplo do Sistema 1, G(s) tem os seguintes pólos: {-8.666; -5.057; +0.06351; +1.991}, que são as raízes da equação característica $\Delta_0(s)$ da Equação (1.2.2). Assim, P = 2 é o número de pólos no semi-plano direito do Plano-s, ou seja, com parte real positiva.

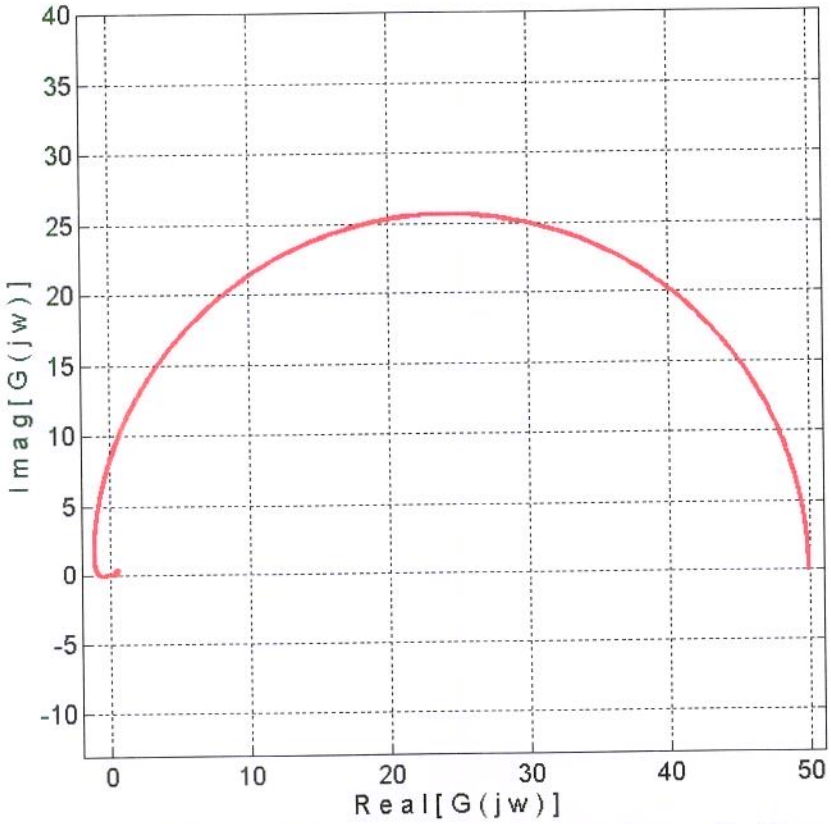


Figura 1.2.7. Diagrama polar dos lugares característicos do Sistema 1, ou seja, autovalores da matriz de transferência G(s). *Note-se a diferença de magnitudes atingida pelas duas curvas.*

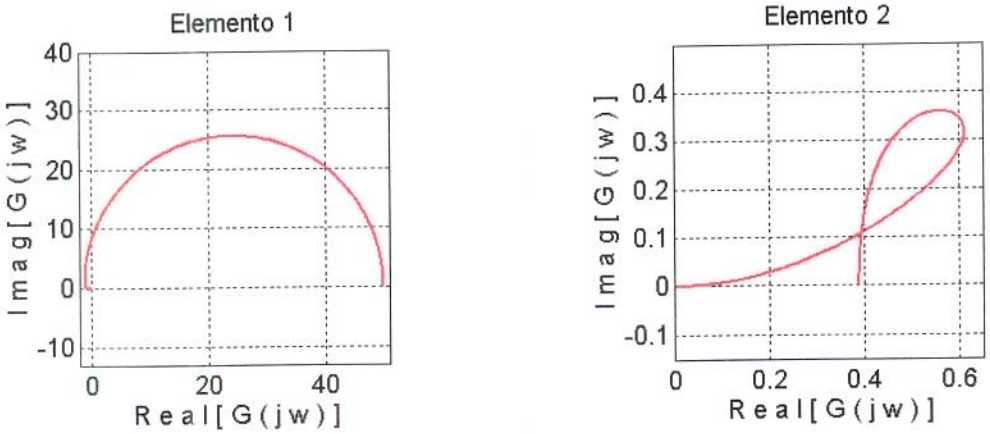


Figura 1.2.8. Representação separada dos dois lugares característicos da matriz de transferência G(s) *do Sistema 1, onde fica aparente a diferença de magnitudes entre o primeiro e o segundo lugar característico.*

A Figura 1.2.9 apresenta um *zoom* da Figura 1.2.7 mostrando os lugares característicos do Sistema 1 perto da origem. Com base nestas figuras, é possível contar o número de circundamentos do ponto crítico (-1+j0) que cada lugar característico faz. Na verdade, nenhum deles circunda o ponto crítico, e podemos contar o número total de circundamentos como sendo N = 0, o que caracteriza a instabilidade do sistema realimentado, considerando que teremos dois pólos de malha no semi-plano direito do plano-s.

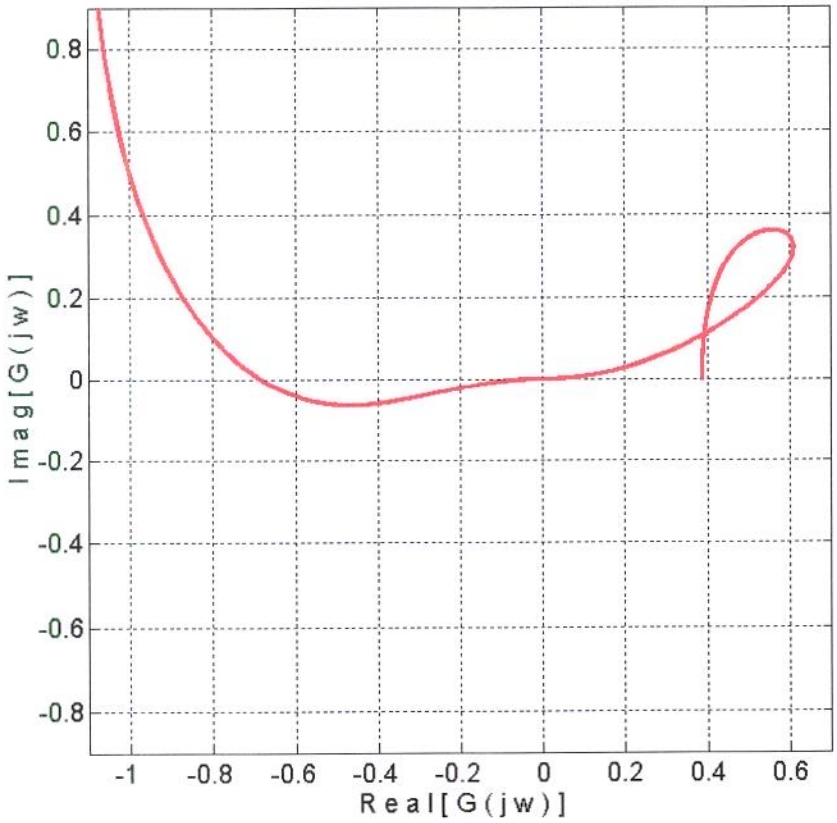


Figura 1.2.9. Zoom *dos lugares característicos da Figura 1.2.7 ao redor da origem do Plano-*G(jω) *do Sistema 1.*

Se aumentássemos entretanto o ganho de G(s), o primeiro lugar característico passaria a circundar duas vezes no sentido anti-horário o ponto crítico, e então o número total de circundamentos no sentido horário seria $N = -2$, onde o sinal negativo caracteriza circundamentos no sentido anti-horário. Conclui-se então que ao aumentar o ganho do sistema como um todo, ele passa a ser estável, pois $N = -P = -2$. É claro que esta característica é necessária mas não suficiente para o bom desempenho de um sistema de controle multivariável, que além das características necessárias aos sistemas de controle monovariável, deve apresentar algumas características a mais. Mas a estabilidade relativa pode ser verificada da mesma forma como vista para o caso monovariável.

A Figura 1.2.10 mostra que no Sistema 1 o lugar característico número 1 ($lc_1(s)$) tem margem de ganho $MG = 1{,}463$ e margem de fase $\phi_{mf} = -19{,}70°$. A interpretação destes dados é que se aumentarmos o ganho de $lc_1(s)$ como um todo por um fator maior que MG, este lugar característico passará a contribuir para a estabilidade do sistema. Igualmente, se ao invés de mudarmos o ganho de $lc_1(s)$, adiantarmos sua fase por um fator maior que 19,70° na região de magnitude unitária, também este lugar característico contribuirá para estabilidade. O lugar característico número 2 ($lc_2(s)$) não foi representado porque com a realimentação negativa considerada ele sempre contribui para a estabilidade do sistema como um todo.

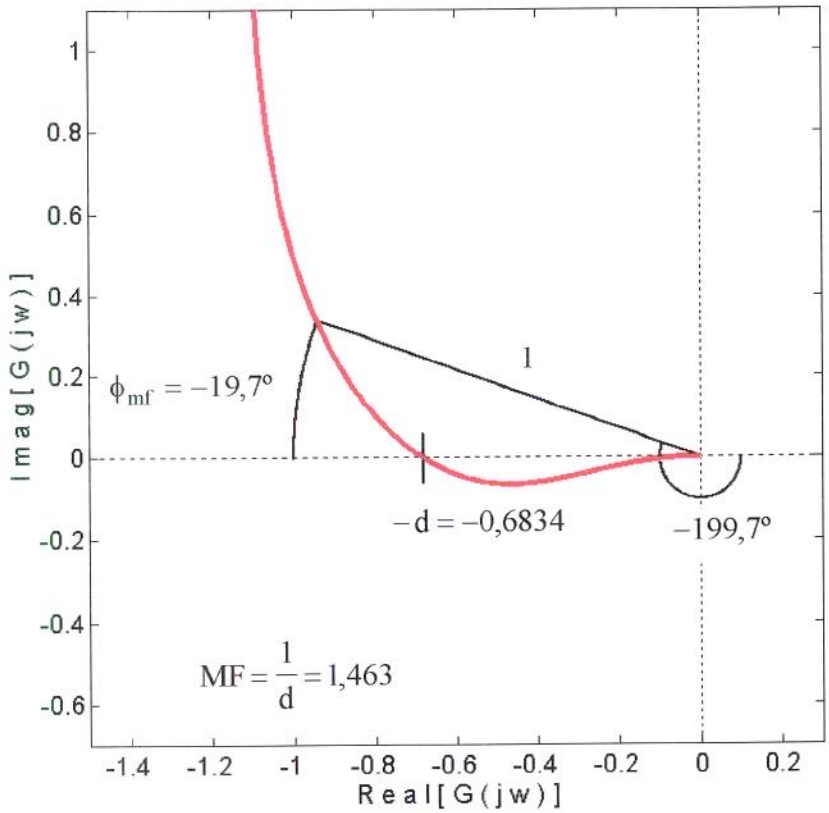


Figura 1.2.10. Margem de ganho MG *e margem de fase* ϕ_{mf} *do primeiro lugar característico do Sistema 1. O segundo lugar característico não apresenta estabilidade relativa.*

Apresentaremos agora os lugares característicos de um outro sistema clássico da literatura, que chamaremos de Sistema 2. Este sistema foi apresentado por MacFarlane e Postlethwaite em [43], e apresenta particularidades interessantes ao nosso relato.

O modelo do Sistema 2 tem a seguinte matriz de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{1{,}25(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} (s-1) & s \\ -6 & (s-2) \end{bmatrix} . \qquad (1.2.3)$$

Este sistema claramente tem pólos em -1 e -2. Quanto aos zeros de transmissão [10,12,21,22,40,52,57,58,63], que são os valores que reduzem o posto ou rank de G(s), este sistema não tem nenhum. Os elementos têm zeros, é claro, mas estes não apresentam a característica de bloqueio de transmissão para o sistema como um todo. Interessa-nos neste exemplo verificação da estabilidade relativa via critério generalizado de Nyquist.

A Figura 1.2.11 mostra os lugares característicos do Sistema 2 já com as margens de fase representadas. Ambas as curvas começam no semi-eixo real negativo quando $\omega=0$, e terminam na origem quando $\omega\to\infty$. Entretanto apenas a curva maior apresenta estabilidade relativa, com margens de fase $\phi_{mf1} = -40{,}36°$ e $\phi_{mf2} = -124{,}59°$.

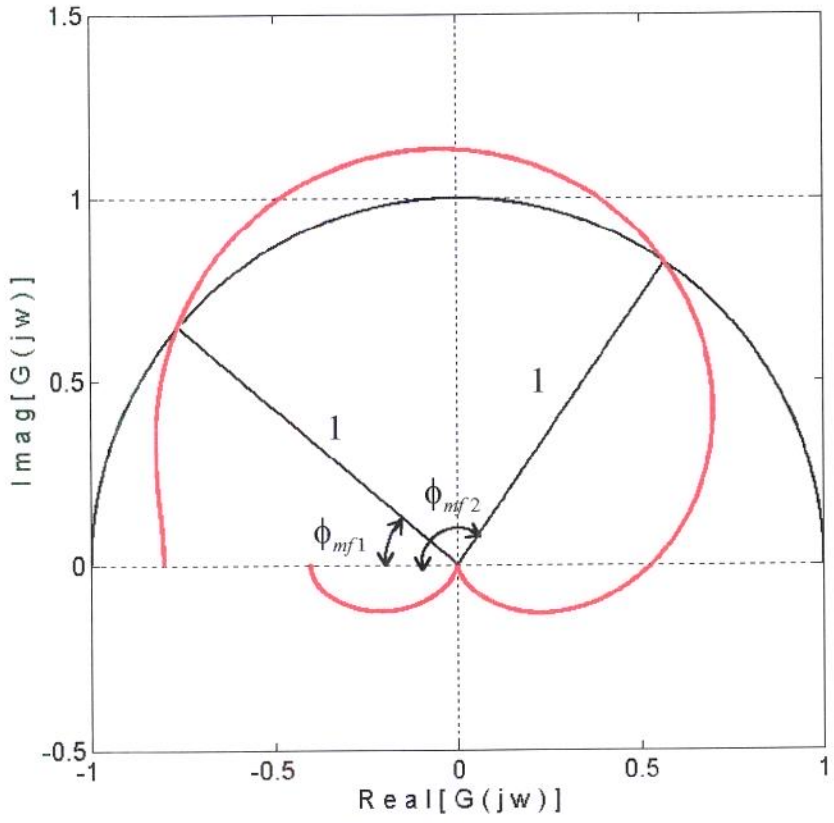


Figura 1.2.11. Lugares Característicos do Sistema 2. O lugar característico maior apresenta duas margens de fase: $\phi_{mf1} = -40{,}36°$ *e* $\phi_{mf2} = -124{,}59°$.

As margens de ganho do Sistema 2 são apresentadas na Figura 1.2.12, onde são representados os contornos completos de Nyquist. Segundo o critério generalizado de Nyquist, cada lugar característico contribui com um contorno, e o número total de circundamentos do ponto crítico (-1+j0) é a soma dos circundamentos do ponto crítico de cada contorno.

O primeiro lugar característico tem margem de ganho $MG_1 = 1{,}25$, e não contribui com nenhum circundamento do ponto crítico. O segundo lugar característico tem margem de ganho $MG_2 = 2{,}5$, e também não contribui com nenhum circundamento do ponto crítico.

Como o Sistema 2 não tem pólos com parte real positiva, ou seja, P = 0, e o número total de circundamentos do ponto crítico é N = 0, então podemos concluir que ao aplicar realimentação de saída negativa e unitária, o sistema se manterá estável. Caso apliquemos realimentação com ganho maior que 1,25 e menor que 2,5, então o primeiro lugar característico contribuirá com um circundamento do ponto crítico no sentido horário, enquanto que o segundo não circundará o ponto crítico. O resultado será N = +1, e o sistema com este ganho de realimentação será instável, tendo um pólo no semi-plano direito do plano(s). Finalmente, se aplicarmos um ganho maior que 2,5, então o primeiro lugar característico contribuirá com um circundamento do ponto crítico no sentido horário, enquanto que o segundo lugar característico contribuirá com um circundamento no sentido anti-horário. Como resultado, N = 1 - 1 = 0, o que significa que o sistema voltou à estabilidade, pois N = P = 0. Na Figura 1.2.12 estão identificadas regiões como A, B, C e D, com N de acordo com os circundamentos de Nyquist caso aquela região circunde o ponto crítico.

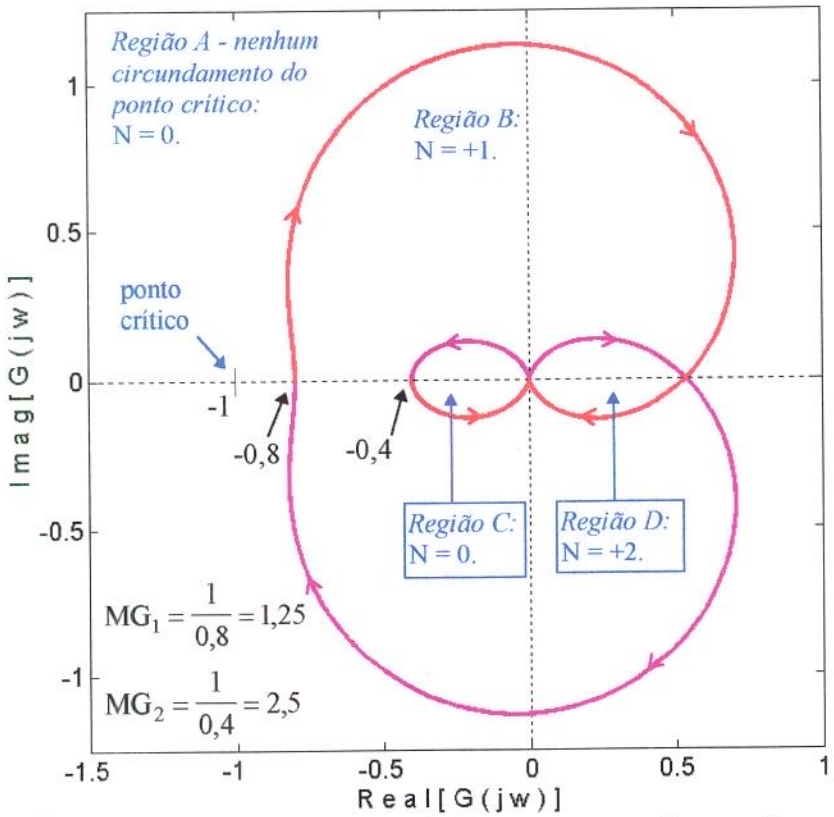


Figura 1.2.12. Contornos completos de Nyquist para o Sistema 2, mostrando em vermelho os lugares característicos, que são os autovalores da matriz de transferência para G(jω), *ou seja,* eig[G(jω)], *ω > 0, e em magenta as porções complexas conjugadas,* eig[G(−jω)], *com ω > 0.*

1.3. DIAGRAMA DE BODE

O diagrama de Bode consiste em dois gráficos semilogarítmicos para representação do número complexo g(jω) em função da variação da freqüência ω, em radianos por segundo. O primeiro gráfico representa a magnitude logarítmica em decibels ($20\cdot\log|g(j\omega)|$, dB) em função da freqüência ω, e o segundo gráfico representa o ângulo de fase em graus ($\arg(g(j\omega))$) também em função da freqüência ω. O eixo horizontal dos dois gráficos, que é o eixo da freqüência ω, é logarítmico. A Figura 1.3.1 mostra o Diagrama de Bode — magnitude e fase *versus* freqüência complexa, de g1(s) = (s+3) / {(s+1)(s+2)}. Na Figura 1.3.2 aparece o Diagrama de Bode de g2(s) = 1 / {s(s+1)(s+2)}, e na Figura 1.3.3 o diagrama de Bode de g2(s) tem as indicações de margem de ganho em dB, $MG_{dB} = 20\log(MG) = 20\cdot\log(6) = 15{,}56$ dB, e de margem de fase em graus, $\phi_{mf} = 53{,}4°$. Nota-se nesta figura que a determinação da margem de ganho se faz na freqüência onde o ângulo de fase é -180°, e a determinação da margem de fase se faz na freqüência onde se tem 0 dB.

A representação de sistemas de controle multivariável em diagrama de Bode pode ser feita elemento por elemento da matriz de transferência ou usando os lugares característicos. Representaremos os diagramas de bode do sistemas de controle multivariável G(s) exemplificados em forma de lugares característicos. Assim, o Sistema 1, apresentado nas Equações (1.2.1) e (1.2.2) é mostrado na Figura 1.3.4: os dois lugares característicos ao mesmo tempo. O primeiro lugar característico, $lc_1(j\omega)$, tem nas baixas freqüências magnitude maior que o segundo, $lc_2(j\omega)$, e nas altas freqüências tem maior variação de ângulo. A Figura 1.3.5 mostra a forma de determinação da margem de ganho $MF_{dB} = 20\log|MF|$, dB e da margem de fase ϕ_{mf} do primeiro lugar característico do Sistema 1. A determinação é feita de forma idêntica à determinação destas mesmas grandezas em sistemas de controle monovariável. A margem de ganho calculada é $MF_{dB} = 20\log|1{,}463| = 3{,}307$ dB.

A Figura 1.3.6 mostra o diagrama de Bode dos lugares característicos do Sistema 2, apresentado na Equação (1.2.3). É fácil identificar os pontos que passam por 0 dB no lugar característico de maior magnitude. A partir das fases correspondentes, verifica-se as margens de fase. Assim, na freqüência ω = 0,2187 rad/s a fase é -220,36°, e portanto a margem de fase é -40,36°. Já na freqüência ω = 1,2306 rad/s a fase é -304,59°, havendo portanto a margem de fase de -124,59°. As margens de ganho são +1,94 dB e +7,96 dB.

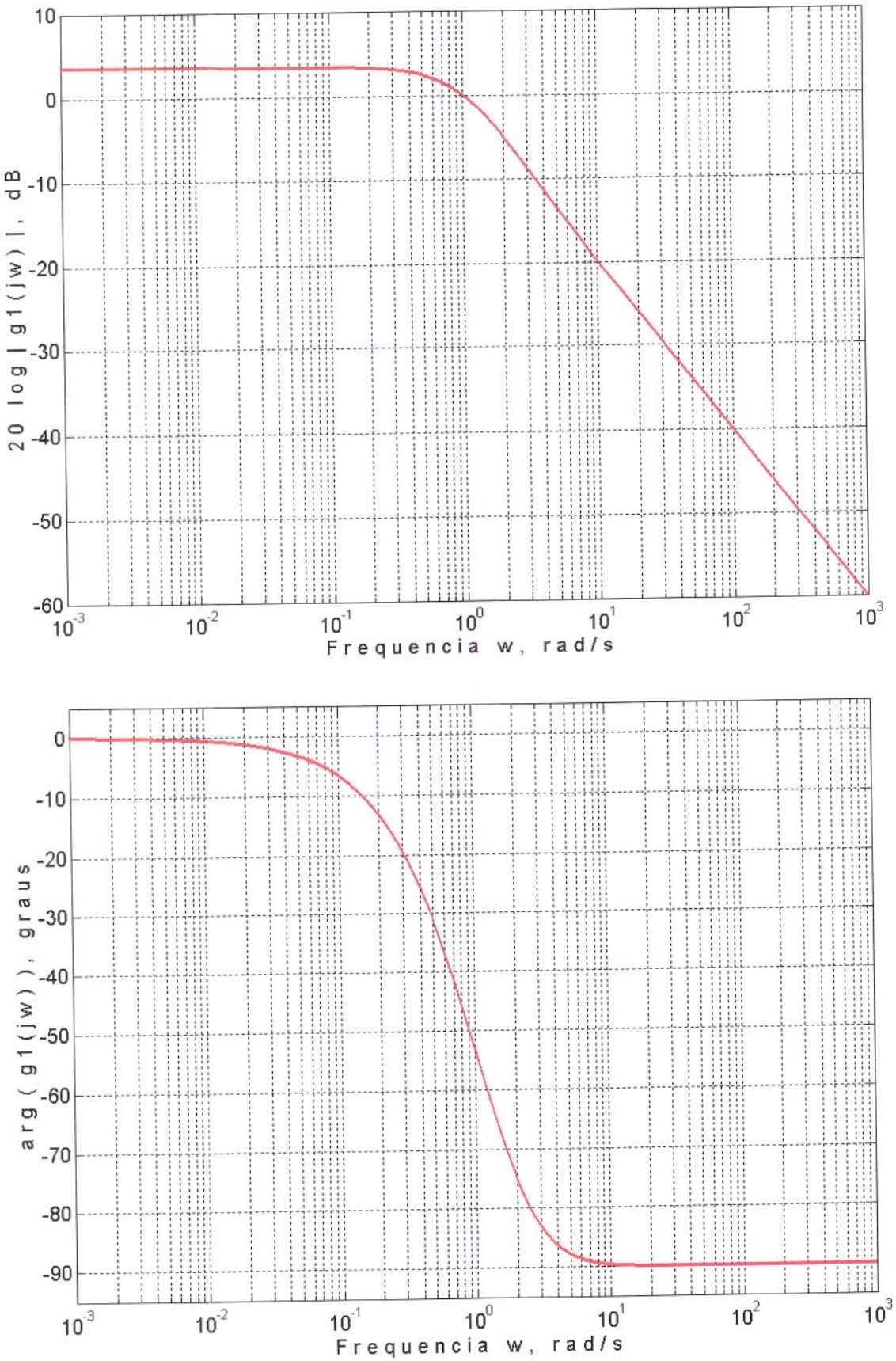


Figura 1.3.1 - Diagrama de Bode de g1(s) = (s+3) / {(s+1)(s+2)}. *O ganho para baixas freqüências é* 20 log(3/2) = 3,52 dB, *e não há razão para determinação de margem de ganho porque para qualquer ganho positivo o sistema será estável.*

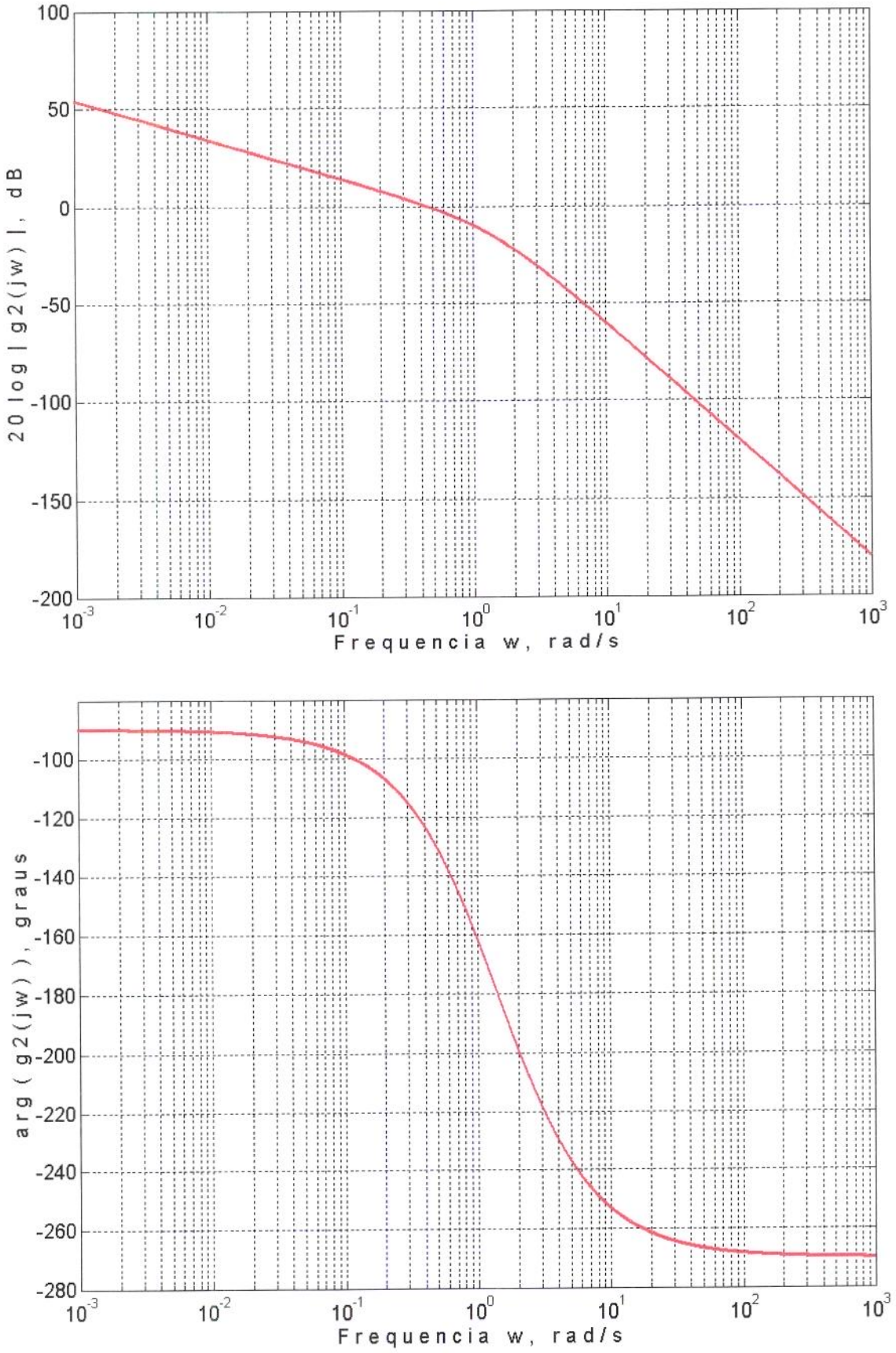


Figura 1.3.2 - Diagrama de Bode de g2(s) = 1 / {s(s+1)(s+2)}. *Deve-se notar aqui que a curva de fase cruza por* -180°, *onde será determinada a margem de ganho. A margem de fase será determinada na freqüência de cruzamento por* 0 dB.

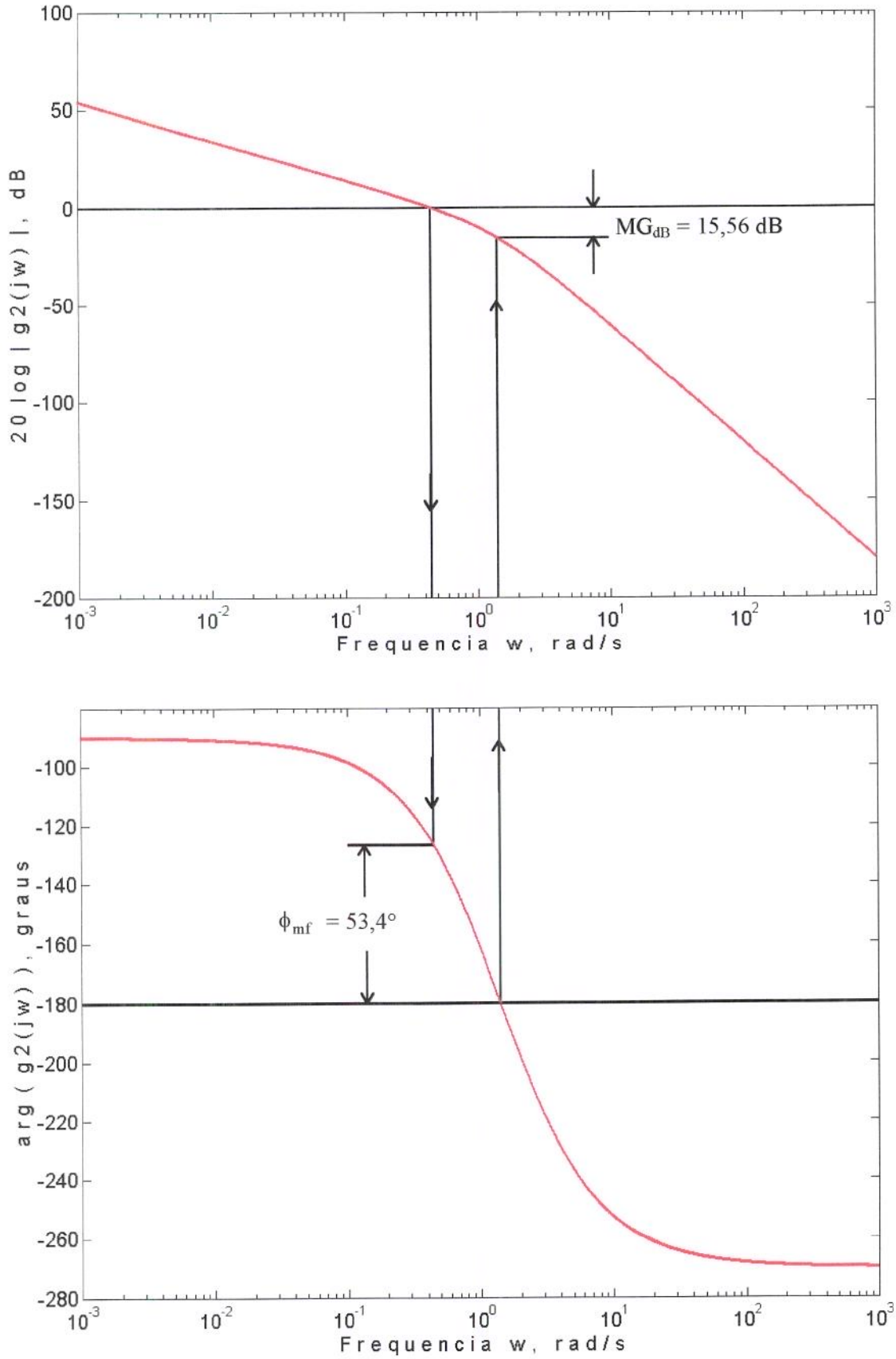


Figura 1.3.3 - Determinação de margem de ganho e margem de fase em g2(s). *A margem de ganho, de* 15,56 dB, *é determinada na freqüência de cruzamento por* -180°, *e a margem de fase, de* 53,4°, *é determinada na freqüência de cruzamento por* 0 dB.

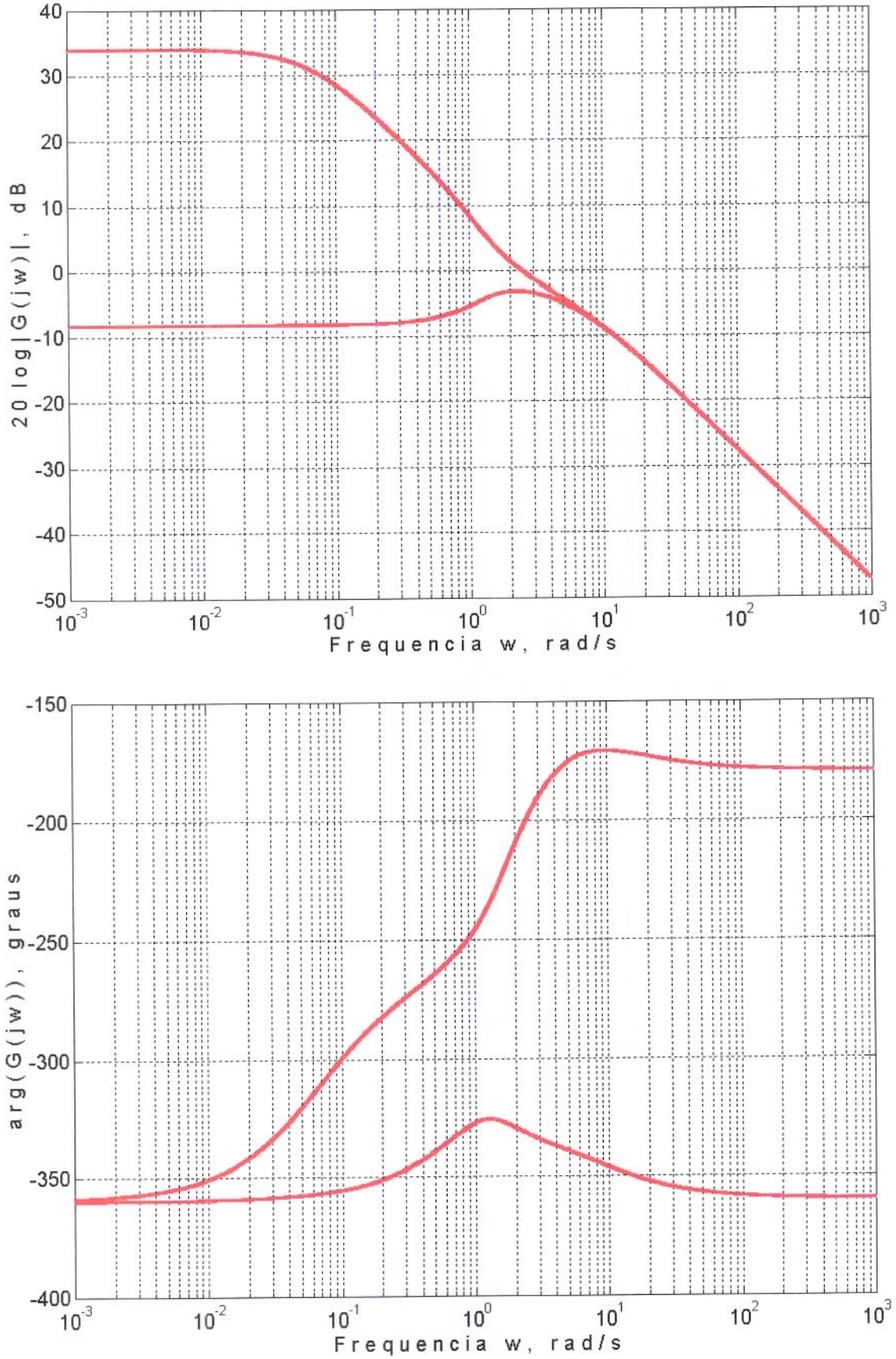


Figura 1.3.4. Diagrama de Bode dos dois lugares característicos do Sistema 1, multivariável: $lc_1(j\omega)$ *tem maior magnitude nas baixas freqüências, e* $lc_2(j\omega)$ *tem pequena variação de ângulo ao longo de todas as freqüências.*

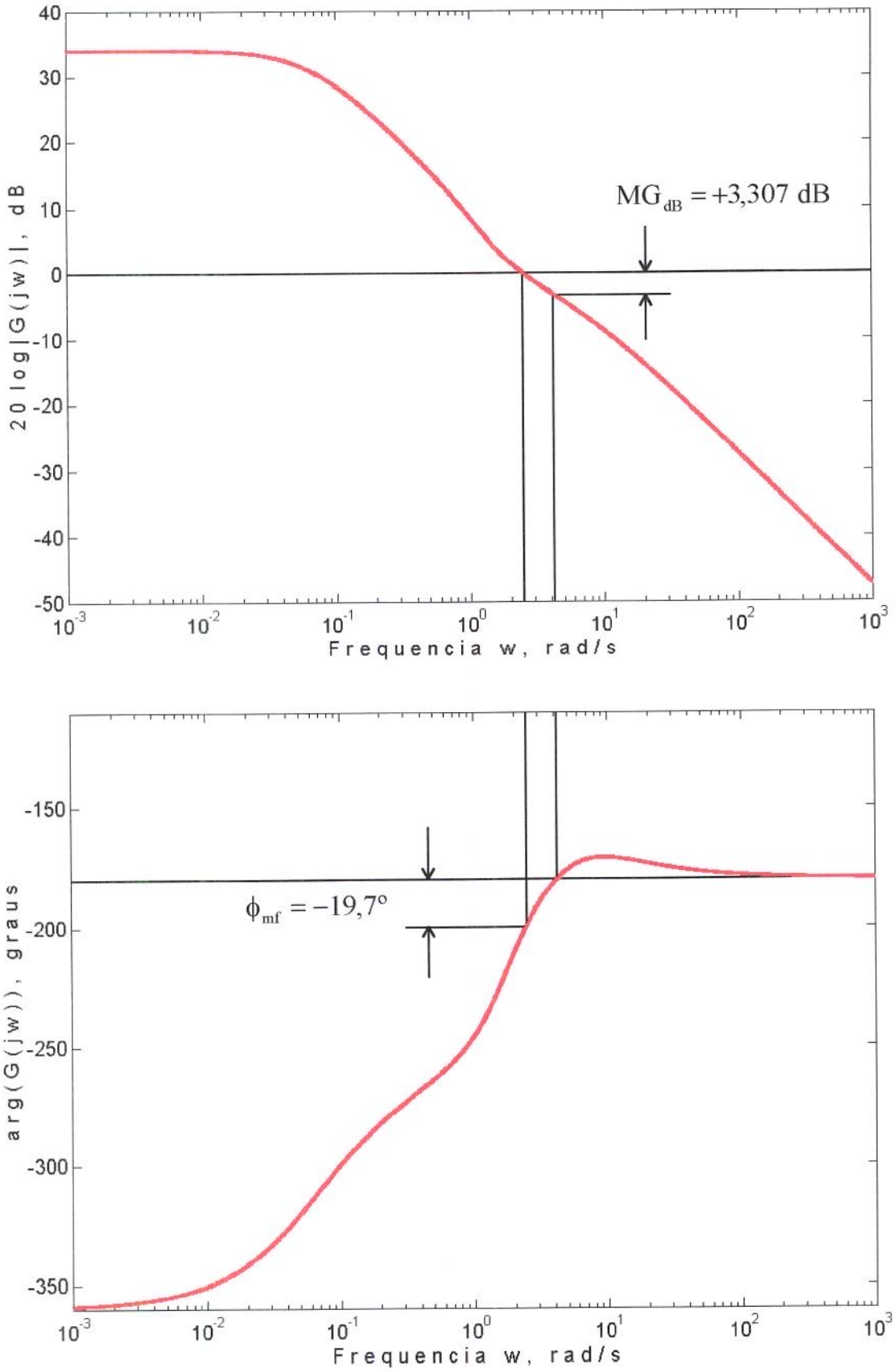


Figura 1.3.5. Determinação das margens de ganho e de fase de $lc_1(j\omega)$ *do Sistema 1 no diagrama de Bode. A margem de ganho é* $MG_{dB} = 3{,}307$ dB *e a margem de fase é* $\phi_{mf} = -19{,}7°$.

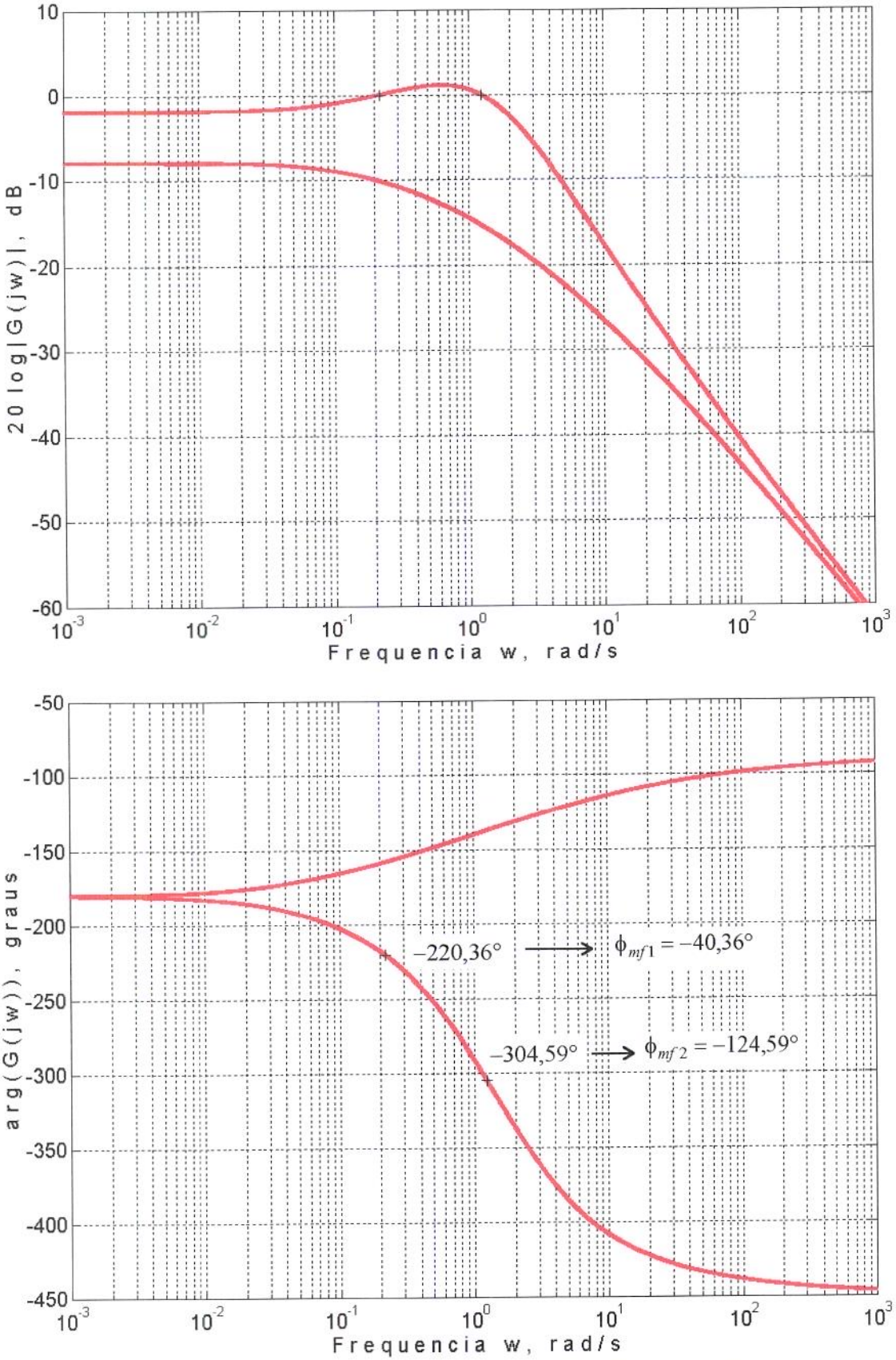


Figura 1.3.6. Diagrama de Bode dos Lugares Característicos do Sistema 2. Estão indicados no diagrama de magnitudes os pontos com 0 dB, a partir dos quais se verificam nos pontos correspondentes do diagrama de fases, as fases e conseqüentes margens de fase, como indicado.

1.4. DIAGRAMA DE NICHOLS

O diagrama de Nichols de um sistema de controle monovariável g(s) apresenta módulo logarítmico em dB *versus* ângulo de fase em graus de g(jω). Desta forma, este diagrama representa as mesmas variáveis do diagrama de Bode, mas com a exclusão da variável de freqüência ω. Assim como o diagrama polar, o diagrama de Nichols é uma representação dos números complexos g(jω) à medida que ω varia, ou seja, ele representa o mesmo plano complexo g(jω) representado pelo diagrama polar, só que de forma diferente. O diagrama polar e o diagrama de Nichols representam então um espaço bidimensional — o plano complexo g(jω), enquanto que o diagrama de Bode representa em dois gráficos bidimensionais um espaço tridimensional: o plano complexo g(jω) (magnitude logarítmica e fase) em função da freqüência ω que o gerou.

Na Figura 1.4.1 temos o diagrama de Nichols de g1(s) = (s+3) / {(s+1)(s+2)}, e na Figura 1.4.2 o diagrama de Nichols de g2(s) = 1 / {s(s+1)(s+2)}. Na Figura 1.4.3 temos as medidas de margem de ganho, 15,56 dB, e margem de fase, 53,4°, de g2(jω) no gráfico de Nichols.

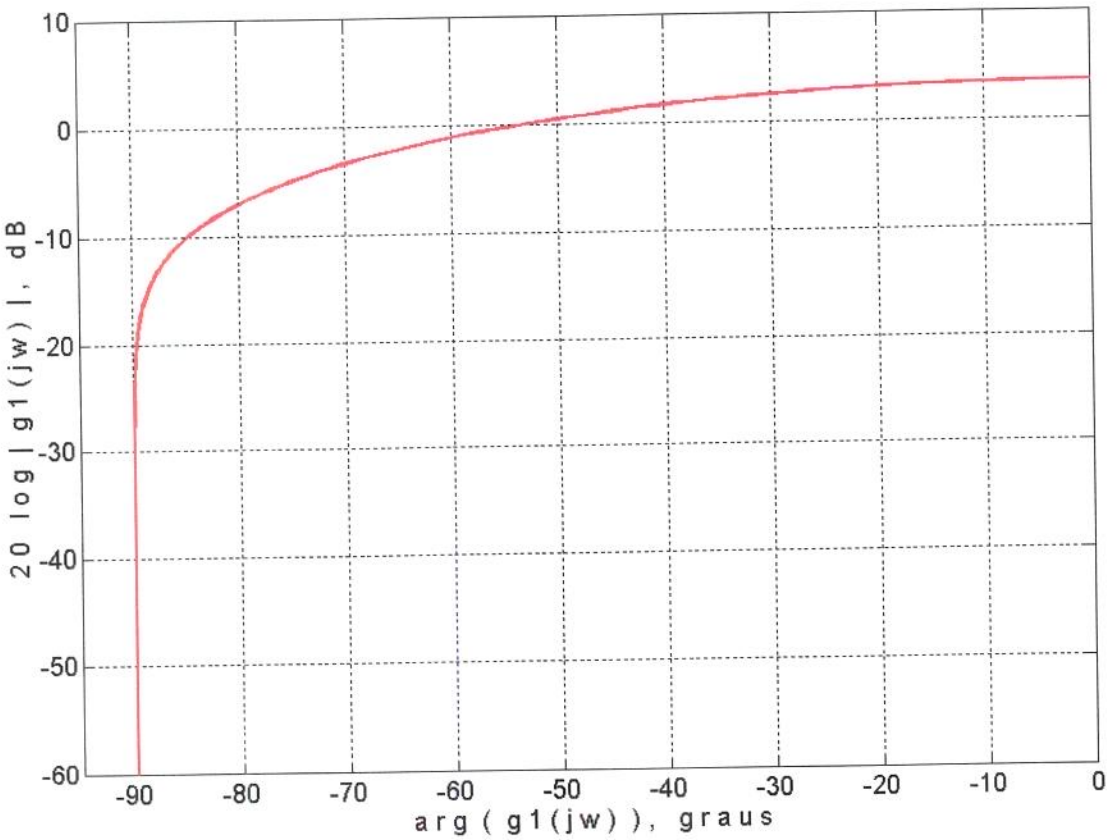


Figura 1.4.1. Diagrama de Nichols de g1(s) = (s+3) / {(s+1)(s+2)}.

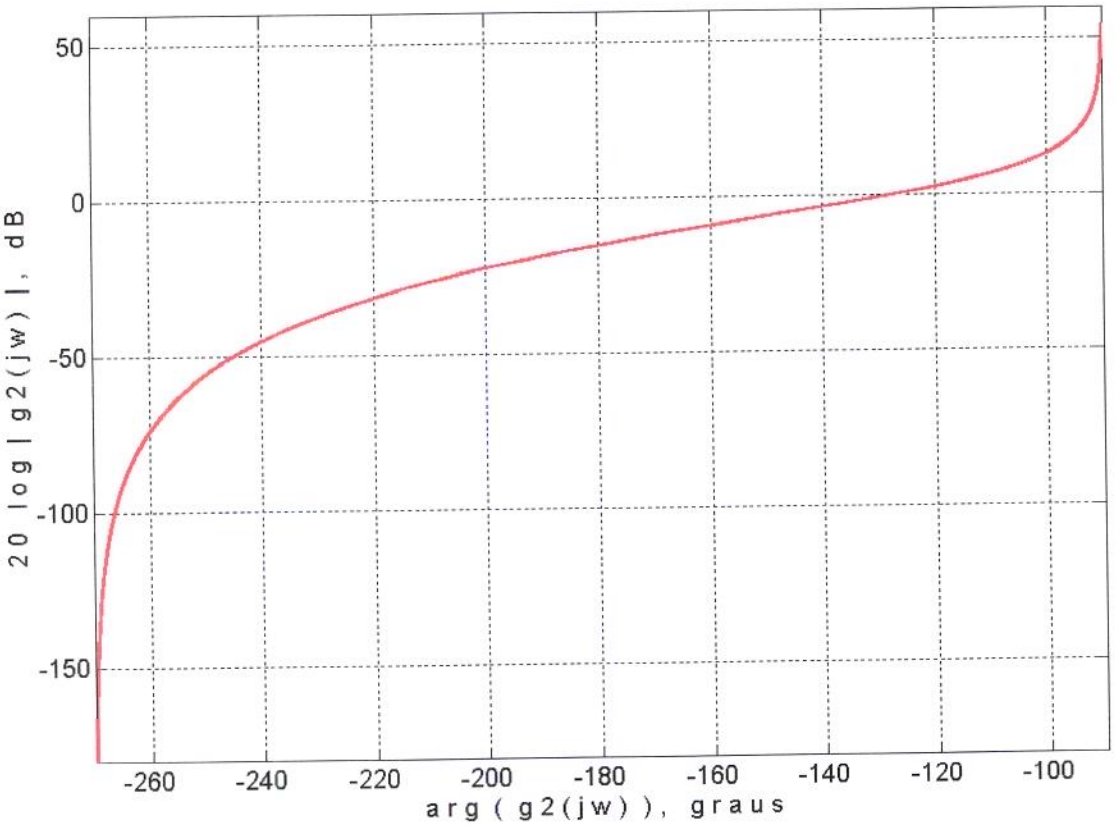


Figura 1.4.2. Diagrama de Nichols de g2(s) = 1 / {s(s+1)(s+2)}.

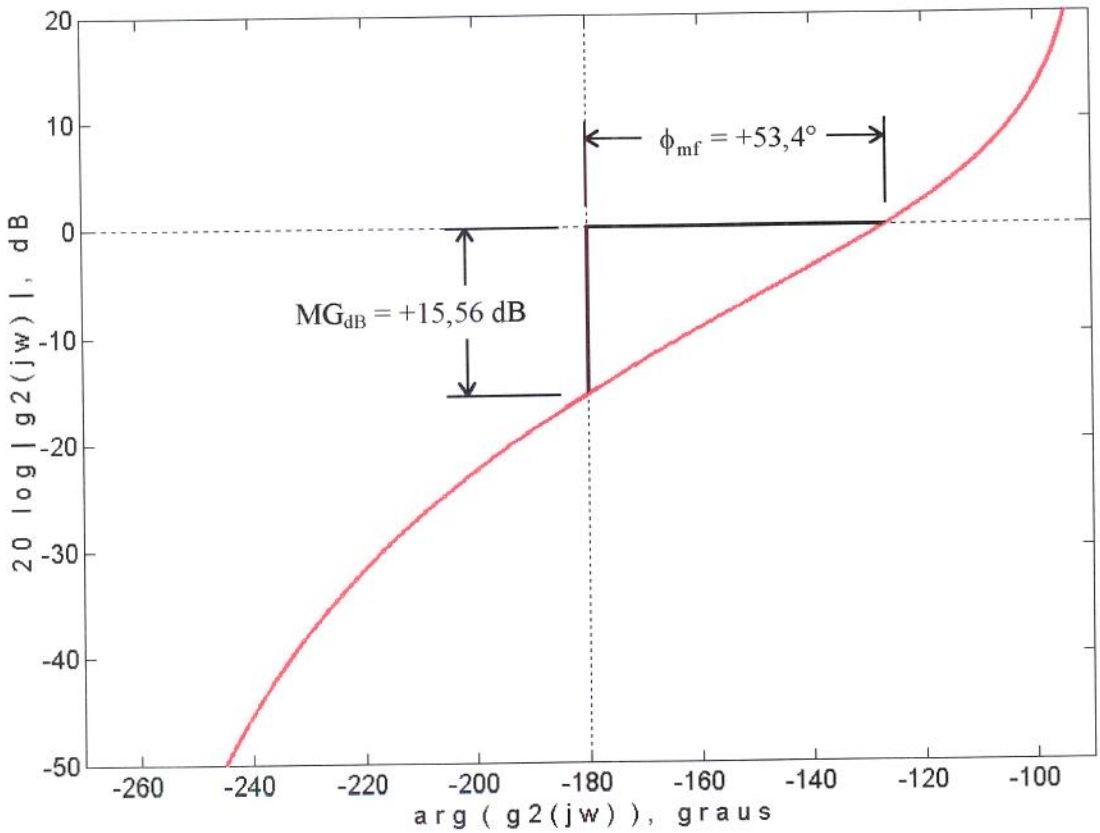


Figura 1.4.3. Margem de ganho e margem de fase de g2(s).

Em sistemas de controle multivariável, como o Sistema 1 das Equações (1.2.1) e (1.2.2), pode-se representar as curvas de resposta em freqüência elemento por elemento da matriz de transferência G(s), ou então apenas os lugares característicos. A Figura 1.4.4 mostra o diagrama de Nichols dos dois lugares característicos de G(s) do Sistema 1. Na figura fica aparente a grande variação de magnitude e fase de $lc_1(j\omega)$ em oposição a $lc_2(j\omega)$, que tem sua resposta restrita a uma pequena região do gráfico. Os ângulos de fase poderiam ter sido determinados com 360° a mais, por se tratar de lugares geométricos como visto nas Figuras 1.2.7 e 1.2.8, na Seção 1.2. Entretanto, optou-se por representar os ângulos de fase com estes atrasos, por se tratar de sistema com quatro pólos e dois zeros de transmissão. Os zeros de transmissão deste sistema estão em {-5,039; -1,192}. Há na literatura muitos estudos e algoritmos para determinação dos zeros em sistemas de controle multivariável, dos quais ressaltamos os apresentados em [10,12,21,22,40,52,57,58,63]. Assim, podemos considerar que $lc_1(s)$ sofre influência destes zeros de forma definitiva, sofrendo avanço de 180° na fase, enquanto que $lc_2(s)$ não sofre muita influência deles. Obviamente, se G(s) fosse diagonal, então estas influências seriam fáceis de determinar e haveria a certeza desta influência sobre um ou outro lugar característico, que seria exatamente um elemento da diagonal de G(s), como se G(s) fosse um conjunto de sub-sistemas de controle monovariável.

A Figura 1.4.5 mostra detalhe do primeiro lugar característico, $lc_1(s)$, do modelo G(s) do Sistema 1. Nela pode-se ver a determinação no diagrama de Nichols das margens de ganho e de fase deste lugar característico. Pode-se ver na Figura 1.4.4 que o segundo lugar característico do sistema, $lc_2(s)$, está longe do ponto crítico (0dB, -180°), não havendo condições de circundamento. Já $lc_1(s)$, com mais ganho pode provocar circundamentos do ponto crítico. Obviamente, para enxergar isto, devemos plotar não só $lc_1(j\omega)$ como também $lc_1(-j\omega)$. Estes aspectos serão mais detalhadamente explorados no Capítulo 4.

O outro exemplo de sistema de controle multivariável é o Sistema 2, cuja matriz de transferência G(s) está na Equação (1.2.3). A Figura 1.4.6 mostra o diagrama de Nichols dos dois lugares característicos do sistema. Estão marcados no traçado do maior lugar característico os pontos onde se verifica as margens de fase. As margens de ganho são verificadas nos pontos com -180° das duas curvas. Como elas têm -1,93 dB e -7,95 dB no ponto com -180°, as margens de ganho são respectivamente de +1,93 dB e +7,95 dB.

A Figura 1.4.7 mostra no diagrama de Nichols os circundamentos completos como mostrado na Figura 1.2.12 no diagrama polar. Pode-se ver aí as regiões de circundamentos.

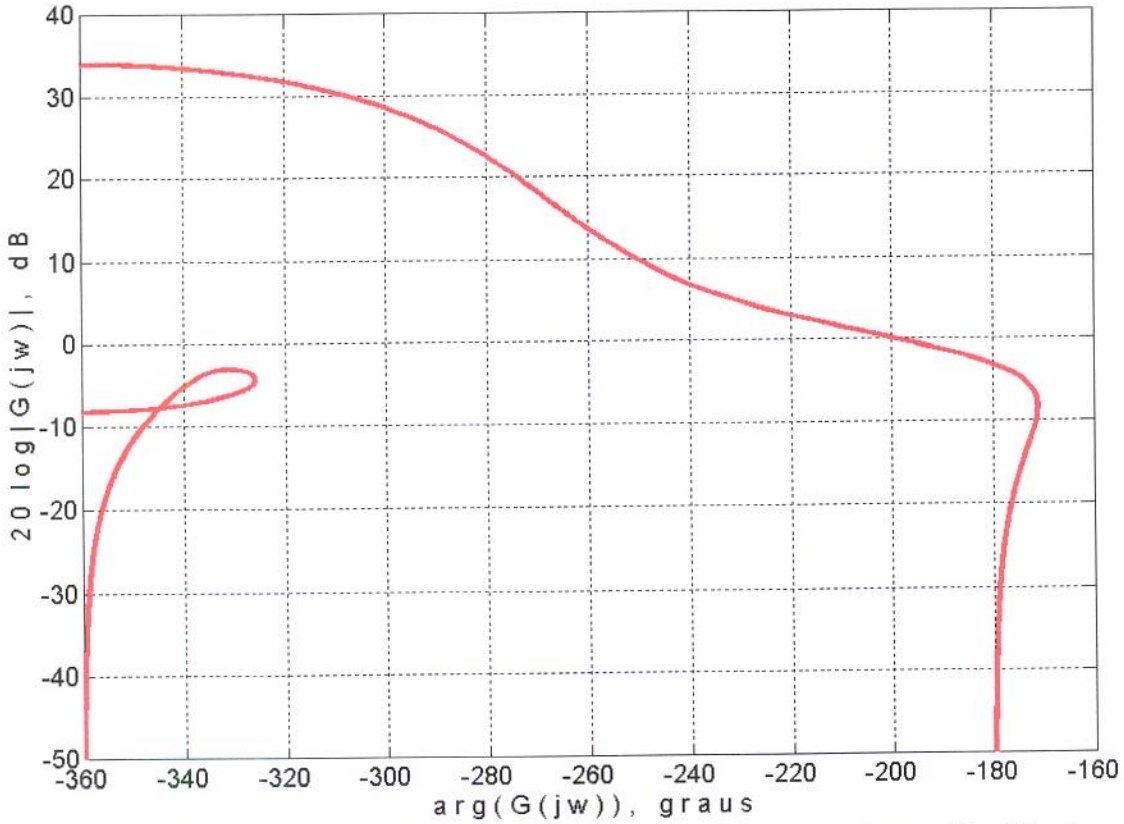


Figura 1.4.4. Diagrama de Nichols do sistema de controle multivariável G(s)*, mostrando seus dois lugares característicos.*

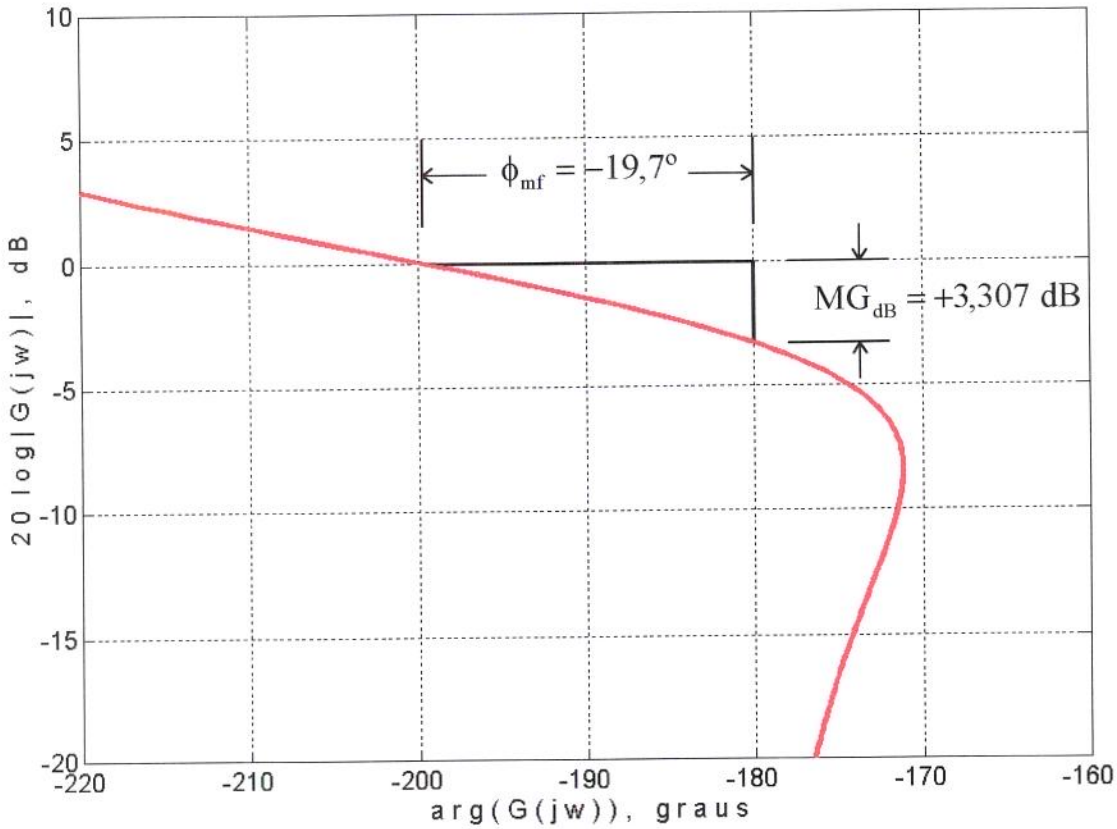


Figura 1.4.5. Detalhe do primeiro lugar característico, $lc_1(s)$*, do sistema de controle multivariável* G(s)*, mostrando a determinação das margens de ganho e de fase.*

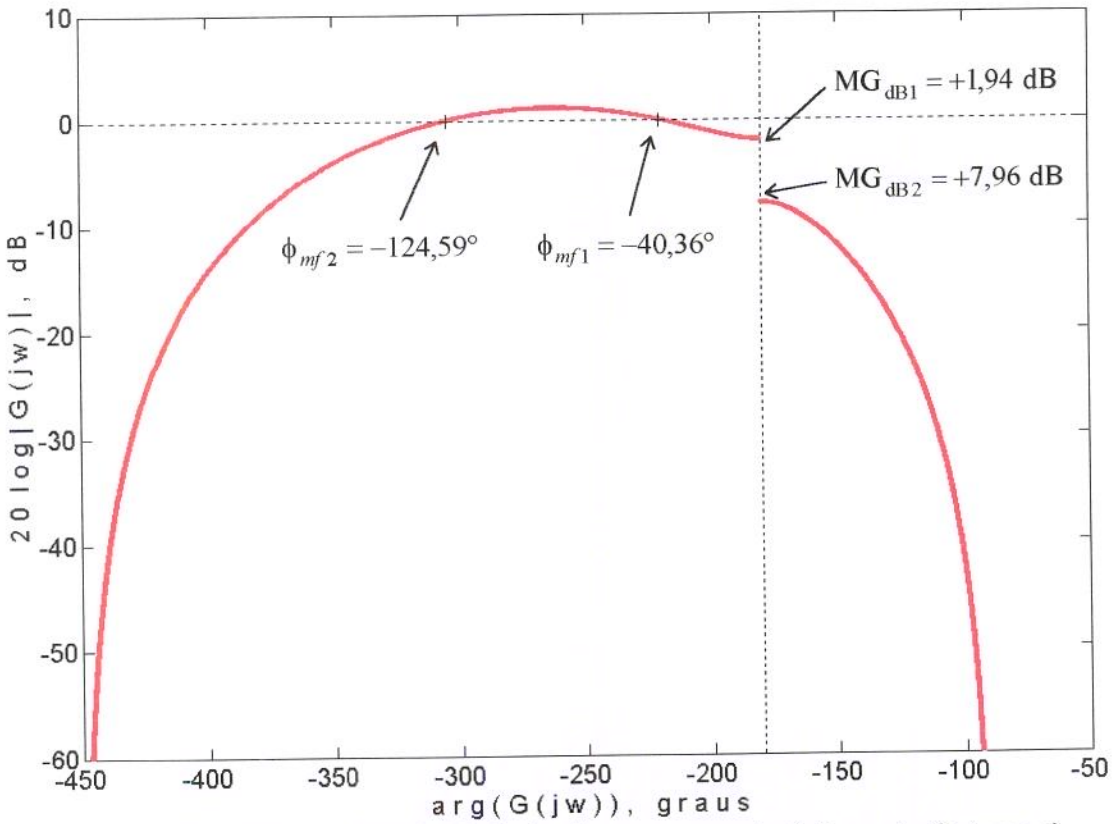


Figura 1.4.6. Diagrama de Nichols: lugares característicos do Sistema 2. São mostradas as margens de ganho e de fase do sistema.

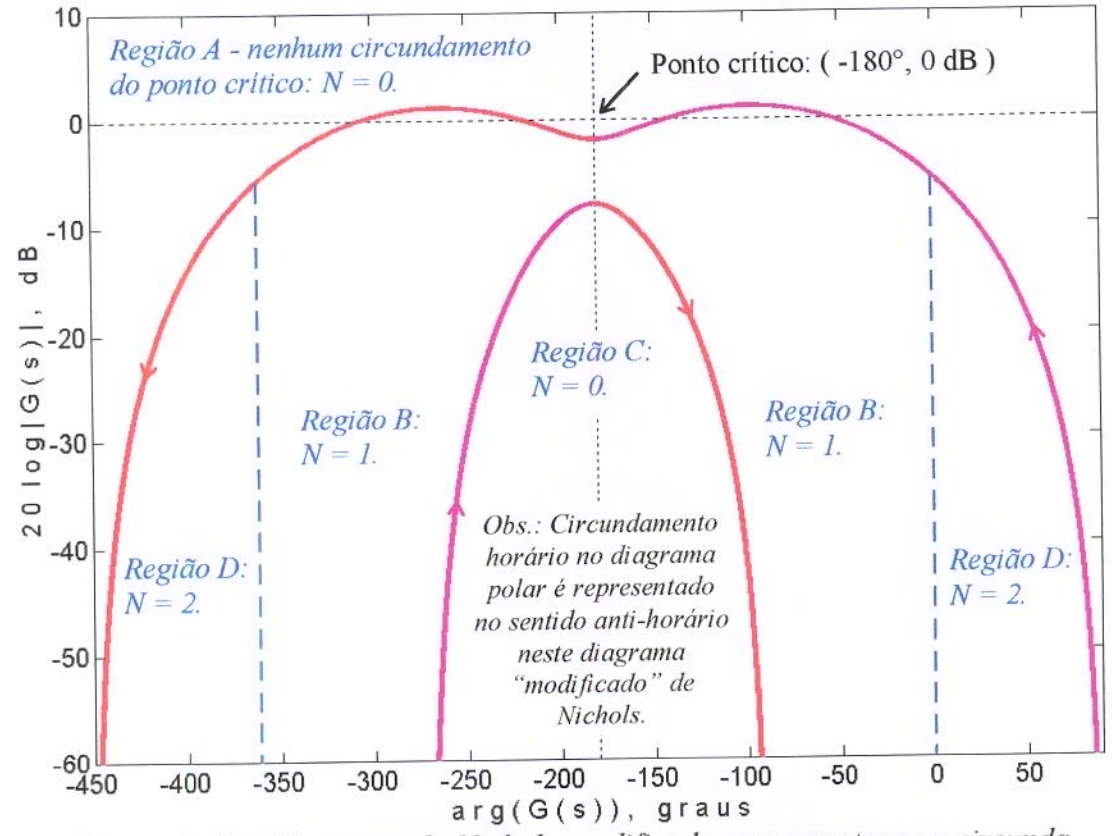


Figura 1.4.7. Diagrama de Nichols modificado para mostrar os circundamentos completos de Nyquist. O sistema não circunda o ponto crítico (Região A: N = 0). Mas se a região B (N = 1) circundasse o ponto crítico, o sistema seria instável. Igualmente na região D (N = 2). Finalmente, na Região C (N = 0) o sistema seria estável novamente.

1.5. LUGAR DAS RAÍZES

Para um sistema de controle monovariável g(s) com ganho k na realimentação negativa, e $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$, o lugar das raízes de g(s) é o gráfico dos caminhos percorridos pelos pólos do sistema realimentado $h(s) = g(s) / \{1 + k \cdot g(s)\}$. Cada caminho é um ramo do lugar das raízes de g(s). A graficação aproximada "à mão" do lugar das raízes de sistemas de controle monovariável não necessita de muitos cálculos; apenas a aplicação das regras estabelecidas é suficiente para graficar os ramos do lugar das raízes de g(s).

As Figuras 1.5.1 e 1.5.2 mostram os gráficos respectivos do lugar das raízes de g1(s) e g2(s). Nestes gráficos pólos são representados por '✖' e zeros representados por '○'. Os pontos indicados por um quadrado verde '□' são as localizações dos pólos de h1(s) e h2(s) quando k for a unidade. Vemos então que, tanto g1(s) quanto g2(s), ao receberem realimentação negativa e unitária permanecem estáveis, o que confirma as informações de estabilidade baseadas nas margens de ganho e de fase. No caso de h1(s), com k = 1, os pólos dominantes ficam em $s_0 = -2 \pm j1$, o que significa que a freqüência natural é $\omega_n = \sqrt{5} = 2{,}23$ rad/s, e o fator de amortecimento é $\zeta = \cos(26{,}57^\circ) = 0{,}89$.

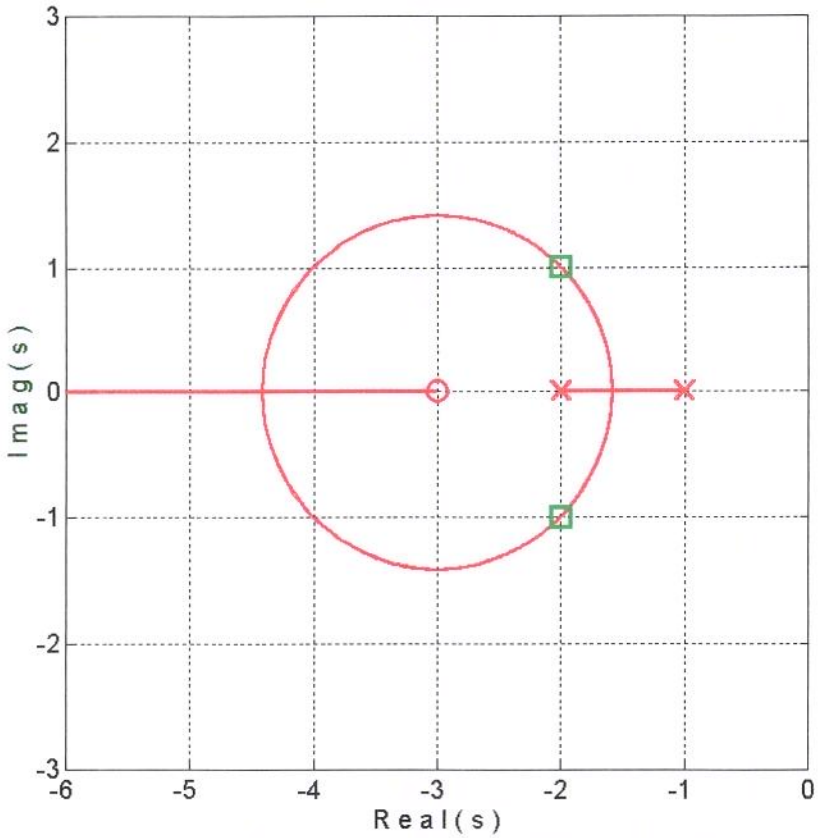


Figura 1.5.1. Lugar das Raízes de g1(s) = (s+3) / {(s+1)(s+2)}.

Seguindo as regras de graficação de sistemas de controle monovariável, em g2(s) os três ramos tendem assintoticamente para o infinito, com os seguintes ângulos: +60°, -60° e ±180°. Considera-se que existam "zeros infinitos" para onde tendem os pólos excedentes, e as assíntotas são retas de apoio que indicam a localização destes zeros infinitos. Pode-se graficar então as três assíntotas, sendo que elas começam em um ponto C, chamado centróide das assíntotas. No caso monovariável, este ponto fica sempre no eixo real. O cálculo de C é feito da seguinte forma:

$$C = \frac{\sum(\text{pólos}) - \sum(\text{zeros})}{N_P - N_Z} = \frac{\sum(\text{pólos}) - \sum(\text{zeros})}{N_A}, \qquad (1.5.1)$$

onde

N_P = número de pólos,

N_Z = número de zeros,

$N_A = N_P - N_Z$ = número de assíntotas.

Neste caso teremos C = -1.

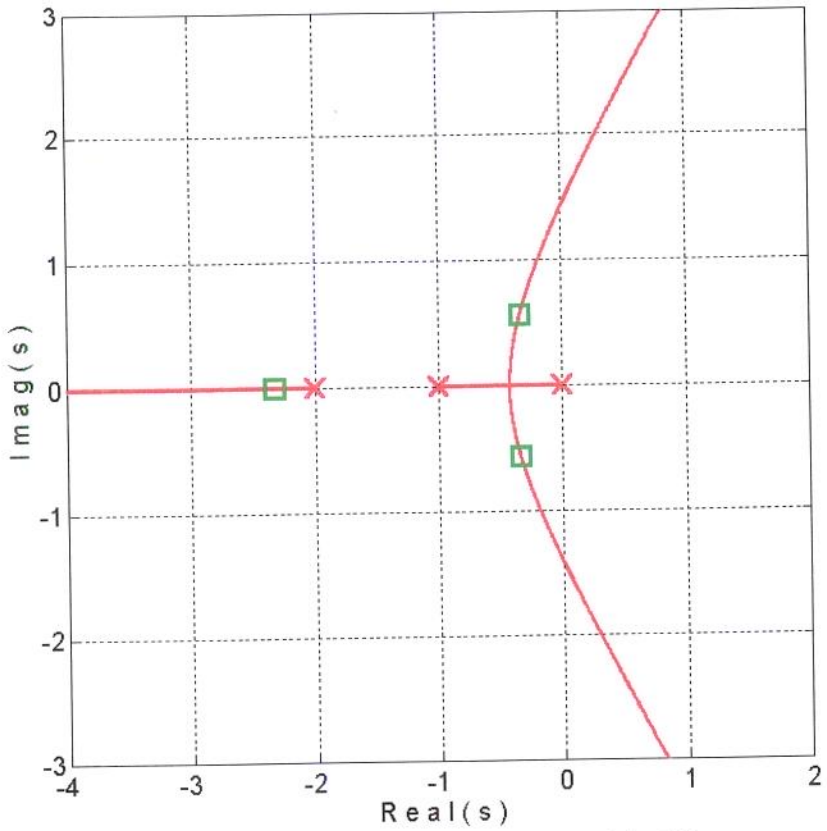


Figura 1.5.2. Lugar das Raízes de g2(s) = 1 / {s(s+1)(s+2)}.

A Figura 1.5.3 mostra o lugar das raízes de g2(s) com as assíntotas e o centróide em -1, representado por um losango verde '◇'. (O centróide, neste caso, está sobreposto a um dos pólos de g2(s).)

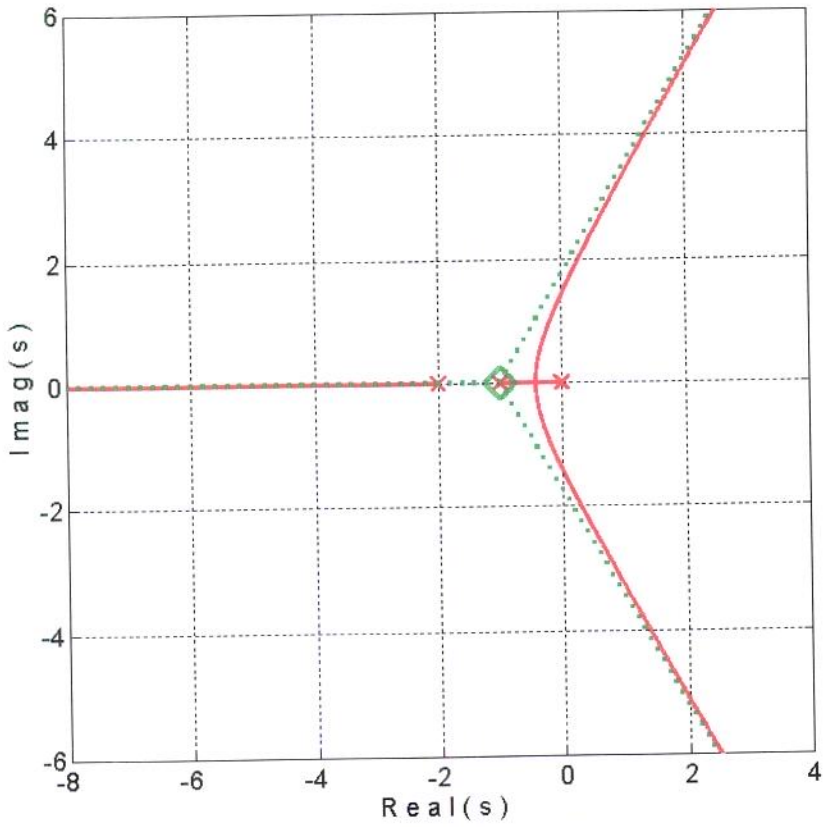


Figura 1.5.3. Lugar das Raízes de g2(s), *mostrando centróide e assíntotas.*

Em se tratando de sistemas de controle multivariável, embora o lugar das raízes seja definido em função de uma realimentação $K = k \cdot I$, onde I é a matriz identidade e k é o ganho escalar, as regras aplicáveis para o caso monovariável nem sempre são aplicáveis. No exemplo do Sistema 1, representado pelas Equações (1.2.1) e (1.2.2), não é possível identificar pela graficação do lugar das raízes que se trata de sistema de controle multivariável. Já no caso do Sistema 2, representado pela Equação (1.2.3), é até difícil compreender o lugar das raízes, por mais simples que a princípio possa parecer.

Voltando ao Sistema 1, a Figura 1.5.4 mostra o lugar das raízes onde aparecem quatro pólos, em { -8,666 ; -5,057 ; +0,06351 ; +1,991 } e dois zeros de transmissão em { -5,039 ; -1,192 }. As referências [10,12,21,22,40,52,57,58,63] mostram como são classificados os vários tipos de zeros de um sistema de controle multivariável, e como fazer para calculá-los. Ainda mais, no estudo do lugar das raízes multivariável [20,23,45,51], os pólos que vão para o infinito são ditos irem para os zeros infinitos, os quais recebem uma classificação: zeros infinitos de primeira, segunda, terceira, etc. ordens. Se houver, por exemplo, zeros infinitos de terceira ordem, isto significa que há três assíntotas reunidas por um pivô (nome dado ao centróide no caso multivariável), formando uma configuração de Butterworth [55, p.109] (também chamada "característica de Butterworth" por Wonham [64, p.295]), ou seja, fazendo um

espraiamento uniforme no plano-s complexo. Ainda, os pivôs podem aparecer na forma de pares complexos conjugados, fazendo conjuntos complexos conjugados de assíntotas no plano-s. Em sistemas de controle monovariável, se houver n zeros infinitos, todos eles estarão associados ao mesmo pivô (o centróide), e serão de ordem n. Em sistemas de controle multivariável, os zeros não são necessariamente todos associados ao mesmo pivô, havendo conjuntos de zeros infinitos de ordens diferentes. Pode por exemplo aparecer um zero infinito de primeira ordem indo para $-\infty$, e dois zeros infinitos de segunda ordem, indo para $\pm j\infty$. Este estudo é bastante complexo, e gera ainda no tempo de hoje muitos estudos sob o nome de lugar das raízes assintótico.

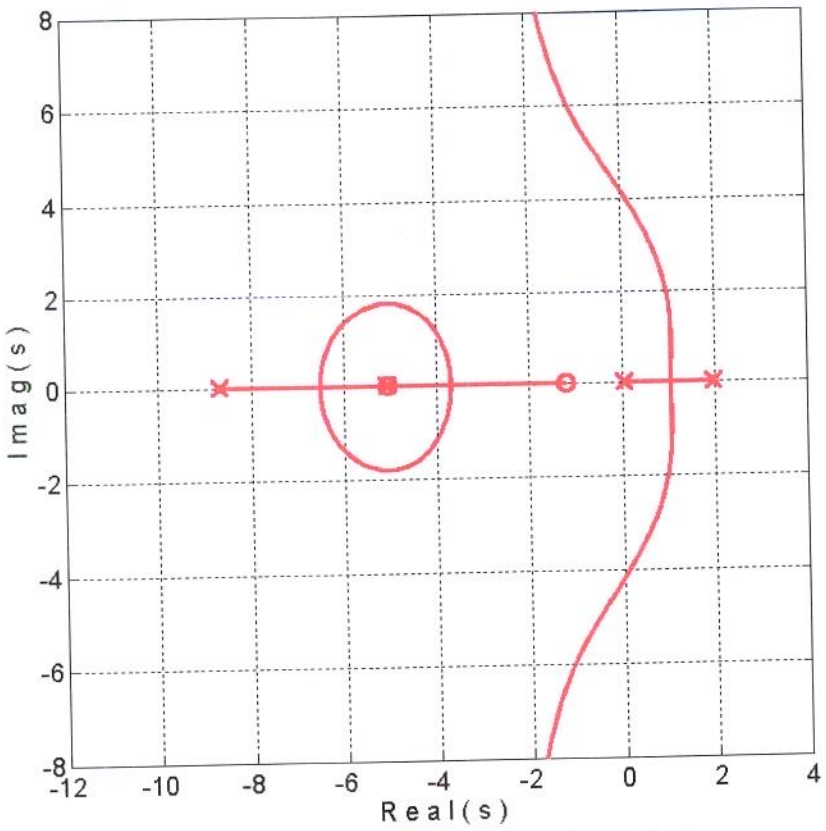


Figura 1.5.4. Lugar das Raízes do Sistema 1, multivariável.

Exemplifiquemos então o que foi explicado com os Sistemas 1 e 2. O Sistema 1 é um sistema multivariável onde as dificuldades não aparecem, pois há apenas dois zeros infinitos, e eles são de segunda ordem. Assim, o comportamento é semelhante ao dos sistemas de controle monovariável. A Figura 1.5.5 mostra com quadrados verdes '□' a localização dos pólos com realimentação unitária: o sistema é instável. Mostra também a localização do único pivô com um losango verde '◇' e das duas assíntotas, tracejadas em verde, que têm ângulos de ±90°. O pivô está em -2,717 , e embora a Equação (1.5.1) não seja para sistemas de controle multivariável, neste caso ela funciona.

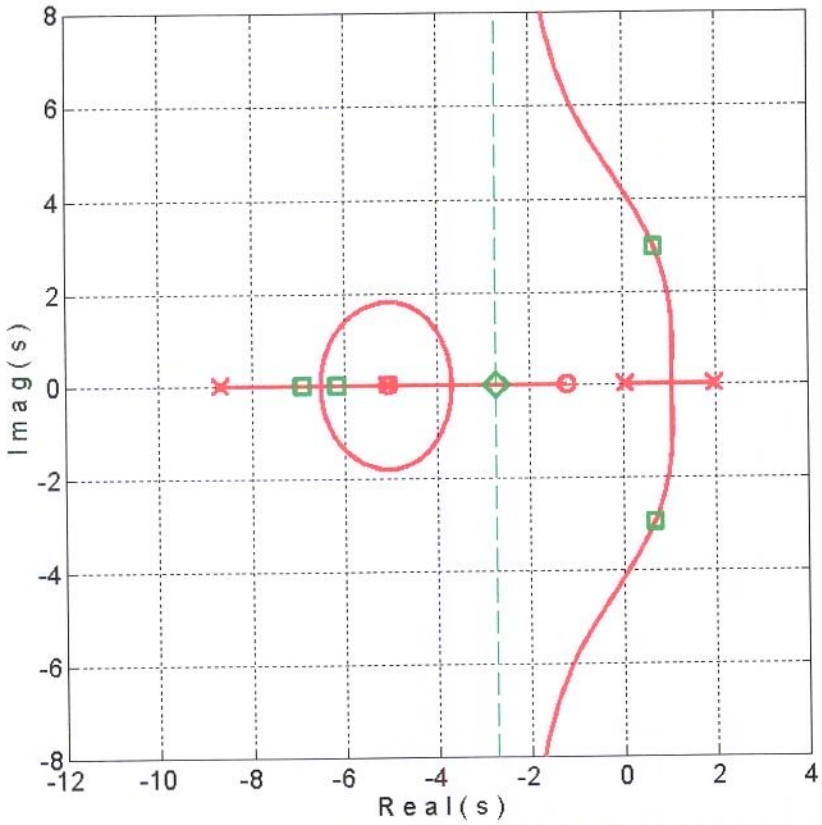


Figura 1.5.5. Lugar das raízes do sistema de controle multivariável G(s) *chamado Sistema 1, mostrando em verde a localização dos pólos do sistema com realimentação negativa e unitária, e as assíntotas partindo do pivô em -2,717.*

O Sistema 2 é um sistema de controle multivariável com dificuldades já na visualização: não é possível identificar com clareza os ramos do lugar das raízes. A Figura 1.5.6 mostra o lugar das raízes do Sistema 2, onde aparecem com um "xis" vermelho '✖' os pólos em -1 e -2. Na verdade, o ramo que parte do pólo em -2 vai para a esquerda, tendendo assintoticamente para $-\infty$. Já o ramo que parte do pólo em -1, vai inicialmente para a direita, chegando até o ponto $+(1/24) = +0{,}042$ (que na teoria de superfícies de Riemann receberá o nome de ponto de corte), e depois toma a direção contrária, tendendo para a esquerda, assintoticamente para $-\infty$. Isto burla drasticamente algumas "regras" ou características que conhecemos para lugar das raízes monovariável, porque neste caso, um ramo não só está cruzando sobre si mesmo, mas à medida que o ganho de realimentação k, $k \in \mathbf{R}$, e $k > 0$, aumenta, o ramo volta a lugares por onde já passou. Ainda mais: o Sistema 2 tem dois pólos e nenhum zero de transmissão. Esperar-se-ia que os dois pólos seguissem assíntotas com $\pm 90°$, caracterizando dois zeros infinitos de segunda ordem. Não é o que acontece, porque o sistema tem dois zeros infinitos de primeira ordem, independentes entre si. Assim, cada zero

infinito tem sua própria assíntota, e elas foram coincidentes sobre o semi-eixo real negativo do plano-s.

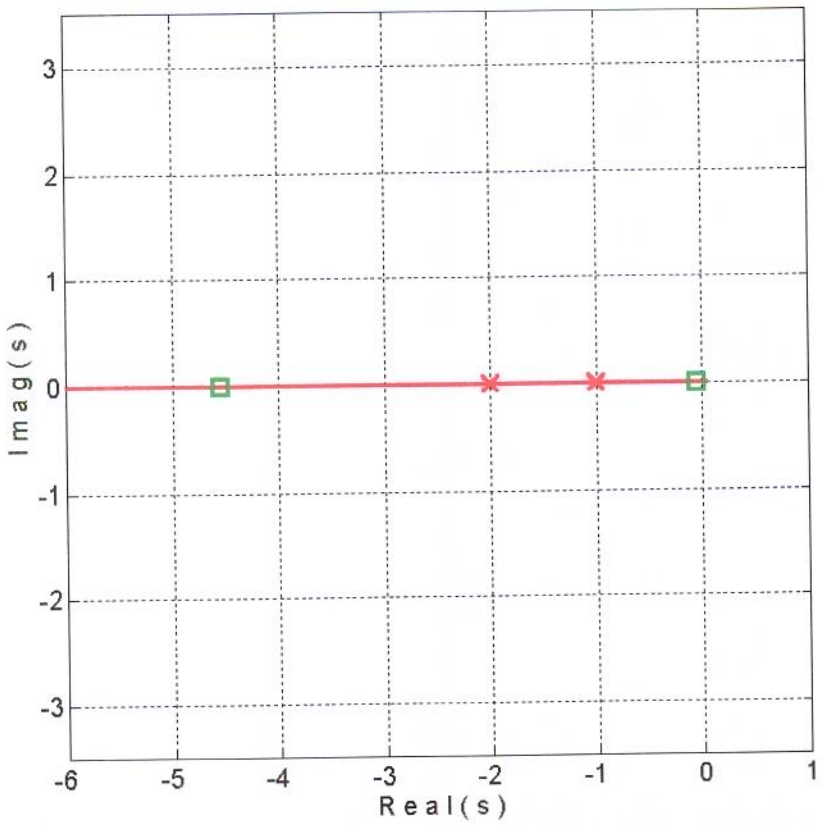


Figura 1.5.6. Lugar das raízes do Sistema 2, sistema de controle multivariável com dois pólos em -1 e -2 e dois zeros infinitos de primeira ordem. Com k = 1 *os pólos do sistema realimentado estão nos quadrados verdes.*

A Figura 1.5.6 mostra com quadrados verdes '□' a localização dos pólos do sistema com realimentação unitária. Com k = 1, o sistema não é instável, mas é possível imaginar que haja estabilidade relativa, como já mostrado no diagrama polar. Na verdade, o sistema tem um pólo no semi-plano direito do plano-s para valores de k entre 1,25 e 2,5. Isto está plenamente de acordo com as margens de ganho mostradas na Figura 1.2.13 e a aplicação do critério generalizado de Nyquist verificados na Seção 1.2.

Para ilustrar ainda mais sobre as assíntotas do Sistema 2, a Figura 1.5.7 mostra o lugar das raízes complementar, conceito muito usado por Kuo [25], e proposto originalmente por Narendra [48]. O lugar das raízes complementar é a graficação dos ramos do sistema quando o ganho k, k $\in$ **R,** é negativo. Assim como usamos até agora a cor vermelha para o

lugar das raízes no plano-s, convencionaremos a utilização da cor magenta para distinguir o lugar das raízes complementar. Novamente, no lugar das raízes complementar é possível verificar que os pólos tendem para zeros infinitos de primeira ordem. Seguindo as regras de lugar das raízes complementar, estes zeros infinitos estão em posições opostas no plano-s aos zeros infinitos do lugar das raízes convencional. Assim, os dois pólos tendem assintoticamente para $+\infty$ à medida que o ganho k tende a $-\infty$.

No lugar das raízes complementar do Sistema 2 é possível ver que para algum valor de ganho negativo o sistema passa para a instabilidade, com seus dois pólos no semi-plano direito do plano-s. Isto está novamente de acordo com os circundamentos de Nyquist generalizado mostrados na Figura 1.2.12, onde é possível ver que os lugares característicos passam pelo eixo real positivo do plano-G(s) no valor +0,5333. Voltando ao lugar das raízes complementar, é com o ganho $k = -(1/0{,}5333) = -1{,}8751$ que os ramos passam pelo eixo imaginário do plano-s na Figura 1.5.7. Assim, há uma margem de ganho de 1,8751 para a realimentação "positiva". No gráfico da Figura 1.2.12 a região de instabilidade para $k < -1{,}8751$ é representada pela região de dois circundamentos, com $N = 2$.

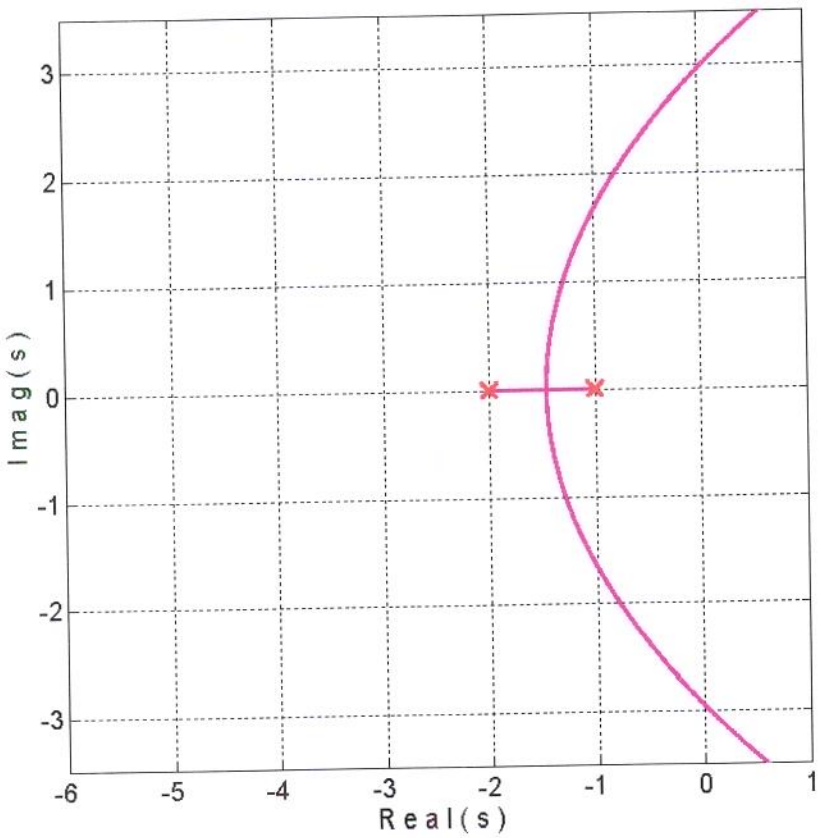


Figura 1.5.7. Lugar das raízes complementar do Sistema 2. O sistema se torna instável com $k \leq -1{,}8751$.

1.6. DIAGRAMAS DE GANHO

Devido à dificuldade de interpretação inerente aos gráficos do lugar das raízes de sistemas de controle multivariável, Kurfess e Nagurka [26-35,46,47] criaram gráficos de magnitude logarítmica e ângulo de fase dos pólos do sistema realimentado, em função do ganho k de realimentação, representado em escala logarítmica. Estes gráficos, batizados de diagramas de ganho, dão para o lugar das raízes uma informação mais completa que o gráfico tradicional do lugar das raízes, uma vez que este dá uma informação bidimensional no plano-s, enquanto que o diagrama de ganho dá em dois gráficos bidimensionais a informação completa, tridimensional, incluindo o ganho $k \in \mathbf{R}^+$ como parâmetro.

A Figura 1.6.1 mostra o diagrama de ganho de $g1(s) = (s+3) / \{(s+1)(s+2)\}$ e a Figura 1.6.2 mostra o diagrama de ganho de $g2(s) = 1 / \{s(s+1)(s+2)\}$.

No diagrama de ganho é possível ver a tendência assintótica dos pólos do sistema realimentado quando $k \to +\infty$. Na Figura 1.6.1 vemos que um dos ramos de g1(s) estabiliza em $20 \log|-3| = 9{,}542$ dB, e $\pm 180°$, ou seja, tende ao zero em $(-3) = |-3| \angle \pm 180°$. O outro ramo se torna uma reta com + 20 dB/década, com ângulo de fase fixo em $\pm 180°$. Esta é a tendência assintótica: o pólo deste ramo tende a $\infty \angle \pm 180° = -\infty$, crescendo 10 vezes cada vez que se multiplica k por 10.

Na Figura 1.6.2 os três ramos de g2(s) tendem para as três assíntotas: uma com +60°, outra com -60° (ou +300°) e a outra com ±180°. O crescimento de cada pólo é +(20/3) dB/década = +6,667 dB/década, significando que cada vez que k é multiplicado por 10, os pólos têm módulo multiplicado por $\sqrt[3]{10} = 2{,}154$.

A Figura 1.6.3 apresenta em verde a representação das assíntotas de g2(s) como descrito. Evidencia-se então [28,29] que para um sistema com n assíntotas, os n pólos que tendem a estas assíntotas o fazem na razão $\sqrt[n]{k}$. No exemplo, com $n = 3$, é necessário um crescimento de $10^3 = 1000$ vezes em k para que os pólos cresçam $\sqrt[3]{1000} = 10$ vezes. Na figura, isto fica claro com o crescimento de 20 dB nos pólos a cada três décadas de crescimento em k.

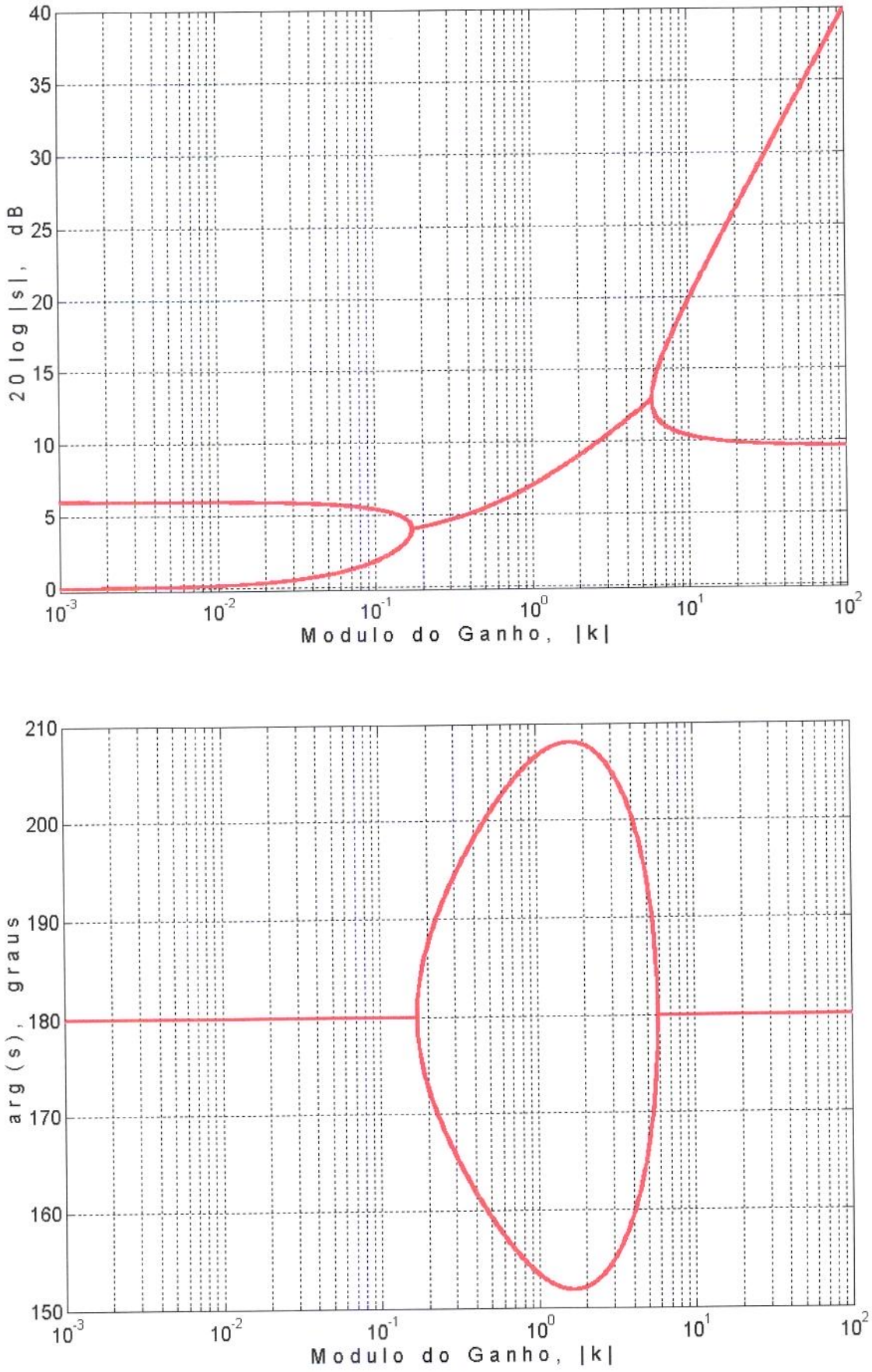


Figura 1.6.1. Diagrama de Ganho de g1(s) *– magnitude em* dB *e ângulo de fase em graus em função do módulo do ganho* k.

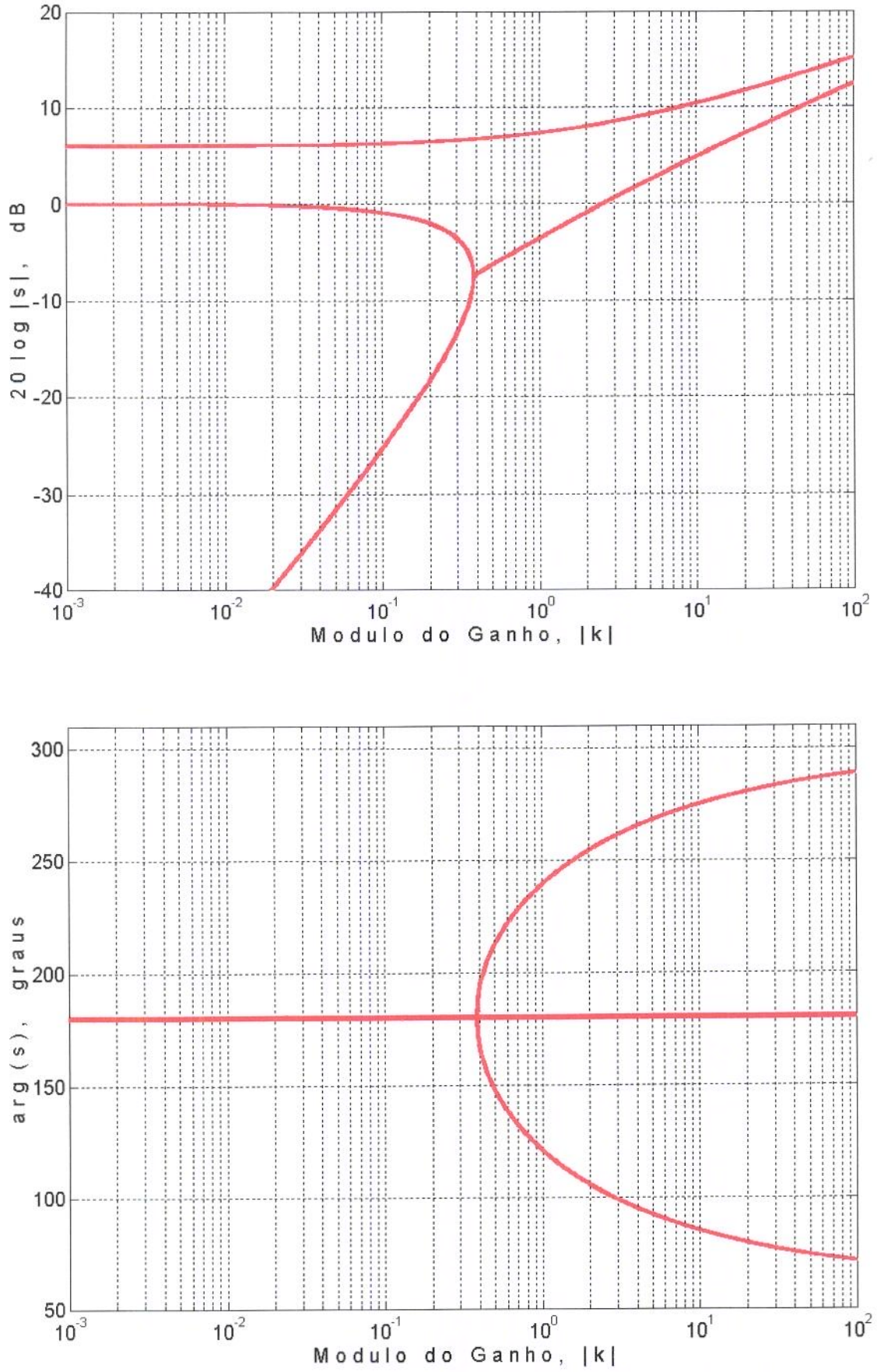


Figura 1.6.2. Diagrama de Ganho de g2(s). *Evidencia-se aí um ramo com* 180°, *e dois ramos complexos a partir de* k = 0,385.

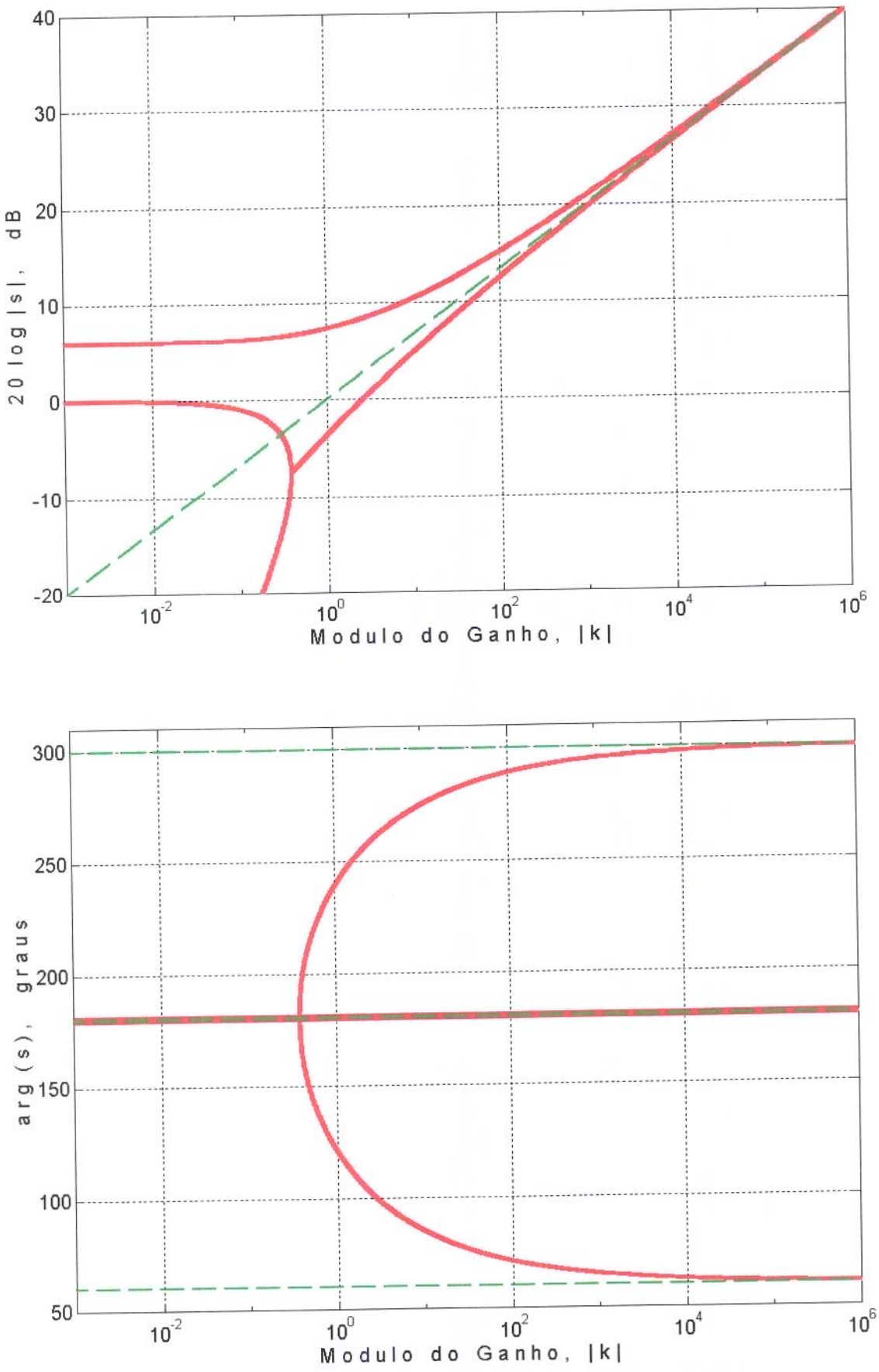


Figura 1.6.3. A tendência assintótica dos pólos do sistema realimentado fica evidente no diagrama de ganho de g2(s). *As retas tracejadas representam as assíntotas.*

O estudo da estabilidade dos sistemas realimentados é tão ou mais fácil no diagrama de ganho quanto no lugar das raízes convencional. Sabemos que um sistema realimentado se torna instável quando para algum valor do ganho k algum pólo atinge o semi-plano direito do plano-s, passando pelo limite de estabilidade representado pelo eixo imaginário-jω. Em termos de diagrama de ganho, pólos no semi-plano direito têm ângulos na faixa equivalente ao intervalo entre -90° e +90°. Se o gráfico de ângulos de fase de s estiver em torno de +180°, como no diagrama de ganho de g1(s) da Figura 1.6.1, por exemplo, então se pode considerar como região de instabilidade a região fora da faixa entre +90° e +270°. Assim, o sistema g1(s) ao receber a realimentação representada no diagrama de ganho da Figura 1.6.1 não sairá da estabilidade para os valores considerados de k, ou seja, para $k > 0$, $k \in \mathbf{R}$. Já o sistema g2(s) se torna instável a partir de algum valor de realimentação. Para determinar o valor de realimentação que coloca o sistema no limite de estabilidade, o gráfico de ângulos de fase do diagrama de ganho da Figura 1.6.2 foi refeito na Figura 1.6.4, com duas retas pretas para delimitação das regiões de estabilidade e instabilidade do sistema realimentado g2(s). Assim, é fácil identificar que o sistema atinge o limite de estabilidade em k = 6, e fica instável com valores maiores de k. Na realidade, este é o valor da margem de ganho MG = 6 do sistema com realimentação unitária (k = 1), como visto na Seção 1.2.1 e verificado no diagrama polar da Figura 1.2.3.

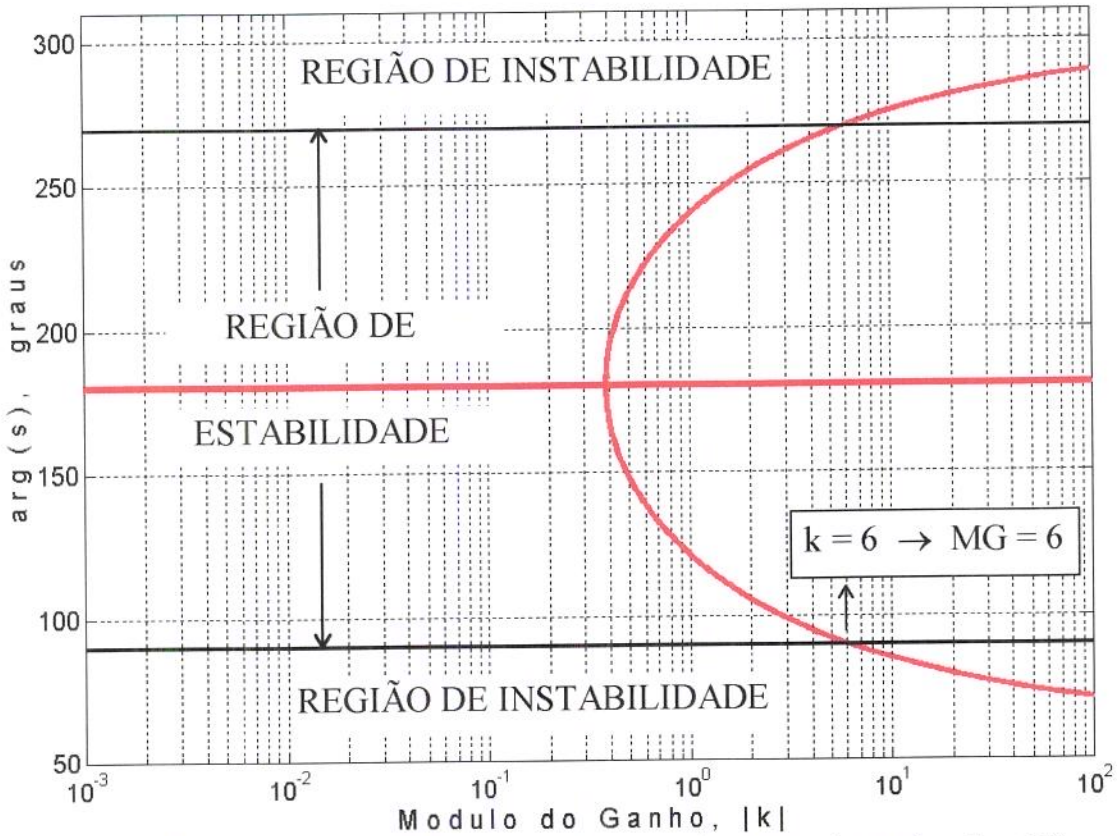


Figura 1.6.4. Gráfico de ângulos de fase do diagrama de ganho de g2(s) apresentado na Figura 1.6.2. Os pólos do sistema realimentado entram na região de instabilidade a partir de k = 6.

Sistemas de controle multivariável podem ter seus lugares das raízes representados em forma de diagramas de ganho da mesma forma que os sistemas de controle monovariável. E veremos a seguir que tanto sistemas complexos como o Sistema 1, representado pelas Equações (1.2.1) e (1.2.2), quanto sistemas com lugar das raízes ambíguo como o Sistema 2, representado pela Equação (1.2.3), têm fácil interpretação e mais informação que o lugar das raízes convencional, quando representado por diagramas de ganho.

A Figura 1.6.5 mostra o diagrama de ganho do Sistema 1. Nele é possível identificar que os dois pólos que têm magnitudes maiores tendem para os dois zeros, e permanecem durante toda a variação do ganho $k \in \mathbf{R}^+$ em regiões com ângulos de fase iguais ou próximos a 180°. Na verdade, eles partem dos pólos de malha-aberta em -8,666 e -5,057 com +18,76 dB e +14,08 dB e 180° e chegam nos zeros em -5,039 e -1,192 com +14,05 dB e +1,526 dB e também 180°. Já os dois pólos de magnitudes menores partem dos pólos de malha-aberta em +1,991 e +0,06351 com +5,981 dB e -23,94 dB e 0°, com ganho $k = 0{,}1544$ passam a ser iguais e com ganho maior passam a ser complexos conjugados, tendo mesmo valor em dB e ângulos de fase negativos um em relação ao outro. A tendência assintótica do Sistema 1 está mostrada na Figura 1.6.6, onde as linhas tracejadas em verde representam as mesmas assíntotas representadas no lugar das raízes da Figura 1.5.5. As assíntotas crescem 20 dB/década e têm ângulos de ±90°. Assim, com altos ganhos, dois pólos em questão crescem 10 vezes cada vez que k cresce 10 vezes. É possível também identificar na Figura 1.6.6 a estabilidade relativa do Sistema 1. A partir de $k = 1{,}463$ os dois pólos que tendem para as assíntotas assumem ângulos fora da região de instabilidade de ±90°. Assim, fica confirmada a margem de fase $MG = +1{,}463$ do sistema achada via critério generalizado de Nyquist na Seção 1.2 e mostrada na Figura 1.2.10, e a interpretação de que a partir do ganho $k = 1{,}463$ o sistema realimentado se tornaria estável.

Em termos de lugar das raízes de sistemas de controle multivariável, o Sistema 2 apresentou problemas quanto à possível identificação dos ramos na Figura 1.5.5. O diagrama de ganho deste sistema está representado na Figura 1.6.7, mostrando com precisão e sem margem para falsas interpretações, por onde passam os pólos do sistema realimentado à medida que aumenta o ganho k de realimentação. O ramo que parte de -2 começa o diagrama de ganho com $20 \log |-2| = +6{,}021$ dB e 180°. Este ramo permanece sempre com 180°, e passa a crescer assintoticamente a uma taxa de +20 dB/década. Este ramo parte então de -2 tende assintoticamente para $-\infty$, sempre sobre o semi-eixo real negativo do plano-s. O outro ramo, que parte do pólo em -1, tem inicialmente sua magnitude diminuída, mantendo 180°.

Isto significa que ele se aproxima da origem do plano-s. Quando o ramo chega muito perto da origem, a magnitude em dB cai muito, tendendo a -∞ dB e uma variação de ângulo de 180° para 0° em k = 1,25, o que significa que o ramo atinge a origem. À medida que o ganho aumenta, o ramo passa para o semi-eixo real positivo do plano-s. Isto é representado no diagrama de ganho pelo ângulo de fase de 0°. Com 0° o ramo atinge um valor máximo de -27,60 dB, o que no lugar das raízes significa que o ramo atinge o ponto +0,04167. Depois, a magnitude em dB do ramo volta a cair, significando que o ramo no lugar das raízes muda de sentido sobre o eixo real, tendendo para a esquerda. Novamente, o ramo passa pela origem, com k = 2,5, passando para a esquerda da origem, o que é caracterizado pela passagem de ângulo de fase de 0° para 180°. Finalmente, o ramo tende para -∞, porque no diagrama de ganhos ele permanece com 180° e cresce assintoticamente com +20 dB/década. A faixa de valores de ganho 1,25 < k < 2,5 em que um dos ramos fica à direita da origem no plano-s, ou seja, tem 0° no diagrama de ganho, confirma as margens de fase de 1,25 e 2,5 achadas na Seção 1.2, e mostrada na Figura 1.2.12.

É possível representar o lugar das raízes complementar de um sistema através de diagramas de ganho. A Figura 1.6.8 mostra esta representação para o Sistema 2. Os ramos estão representados em magenta, seguindo convenção adotada na seção dos lugares das raízes, e o lugar das raízes complementar do Sistema 2 foi mostrado em magenta na Figura 1.5.6. Na Figura 1.6.8 é possível identificar que com | k | = 1,8751 o sistema realimentado se torna instável, porque os ramos que inicialmente tinham ±180°, passam com este valor de | k | para dentro da região de instabilidade entre -90° e +90°. Assim, com k negativo, é possível identificar também uma margem de ganho, de 1,8751. Olhando para a Figura 1.2.13, podemos também obter esta informação, porque os lugares característicos passam pelo semi-eixo real positivo em +0,5333, o que significa que com um ganho k < - (1/0,5333), ou seja, k < -1,8751, o sistema passa a ter dois circundamentos: N = 2.

Tendo mostrado separadamente o diagrama de ganho do lugar das raízes do Sistema 2 na Figura 1.6.7, e o diagrama de ganho do lugar das raízes complementar na Figura 1.6.8, mostramos na Figura 1.6.9 que é possível mostrar em um único diagrama de ganho tanto o lugar das raízes quanto o lugar das raízes complementar. Isto nos dá a informação completa do sistema para qualquer valor positivo ou negativo do ganho k ∈ **R**. Novamente, os ramos do lugar das raízes, para os quais k é positivo, são representados em vermelho, e os ramos do lugar das raízes complementar, para os quais k é negativo, são representados em magenta.

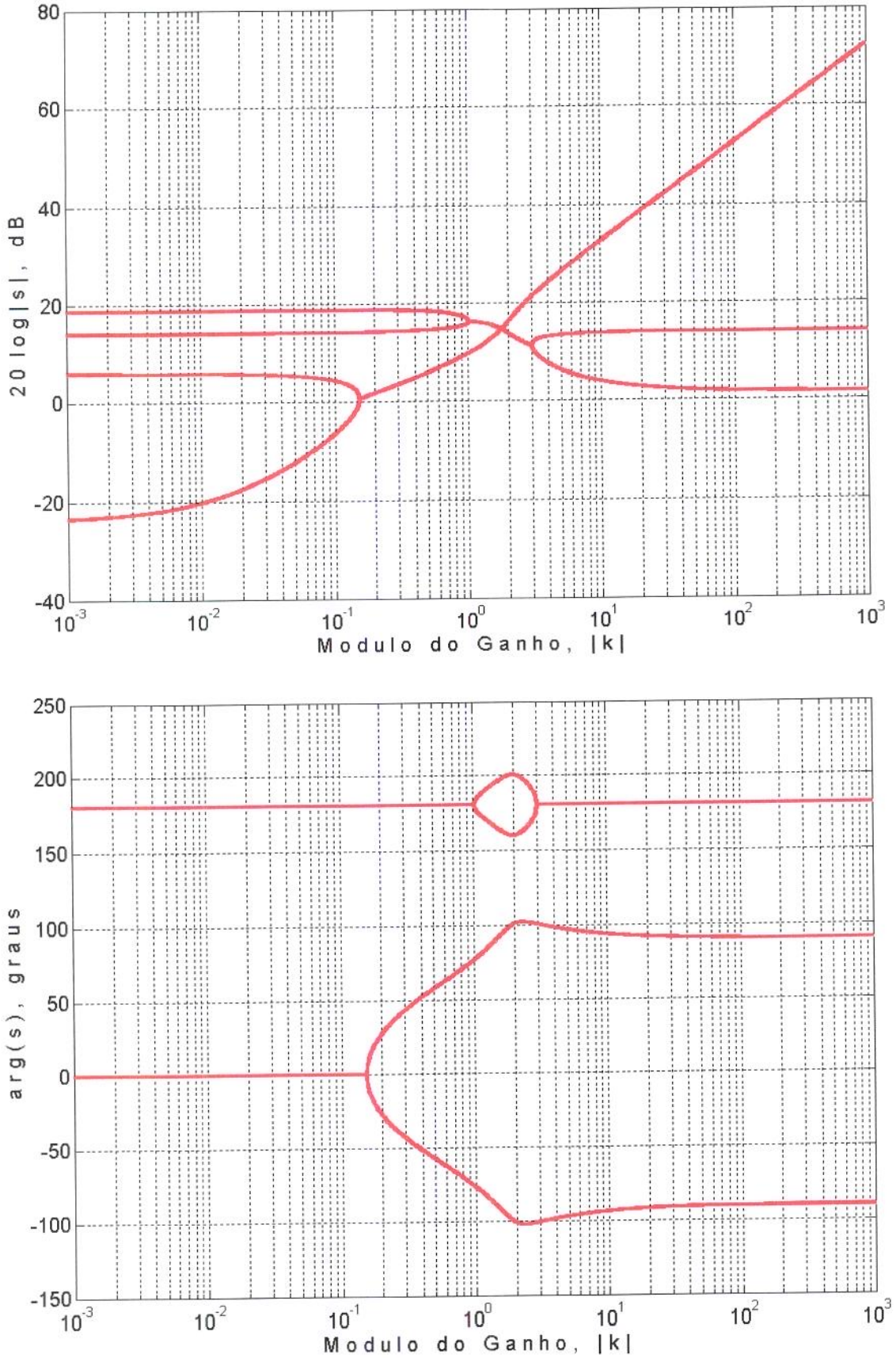


Figura 1.6.5. Diagrama de ganho do sistema de controle multivariável Sistema 1. É possível identificar claramente de onde partem os pólos com pequenos valores de k, *e para onde vão quando* k *aumenta.*

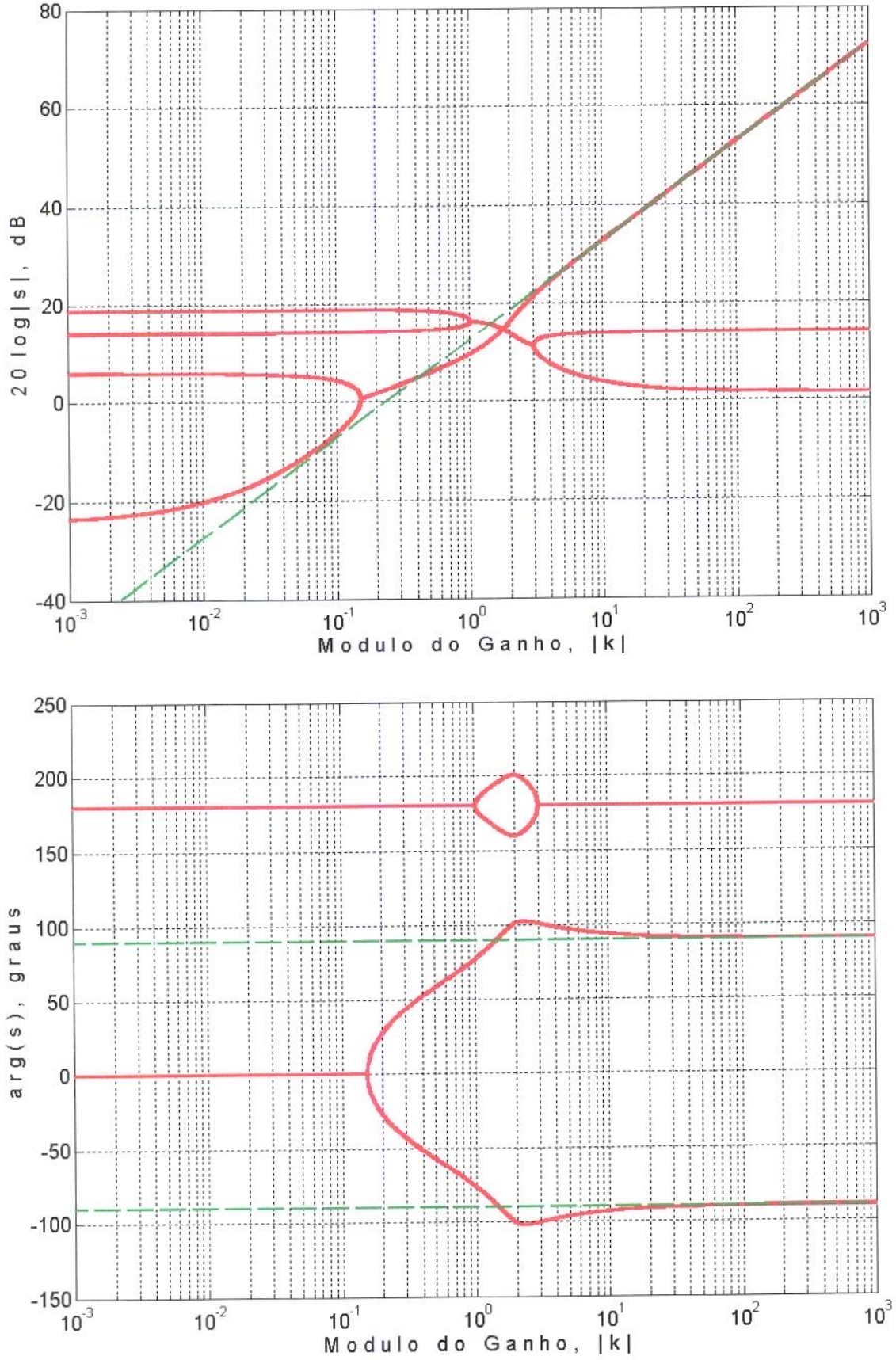


Figura 1.6.6. Diagrama de ganho do Sistema 1 mostrando em verde as assíntotas do sistema.

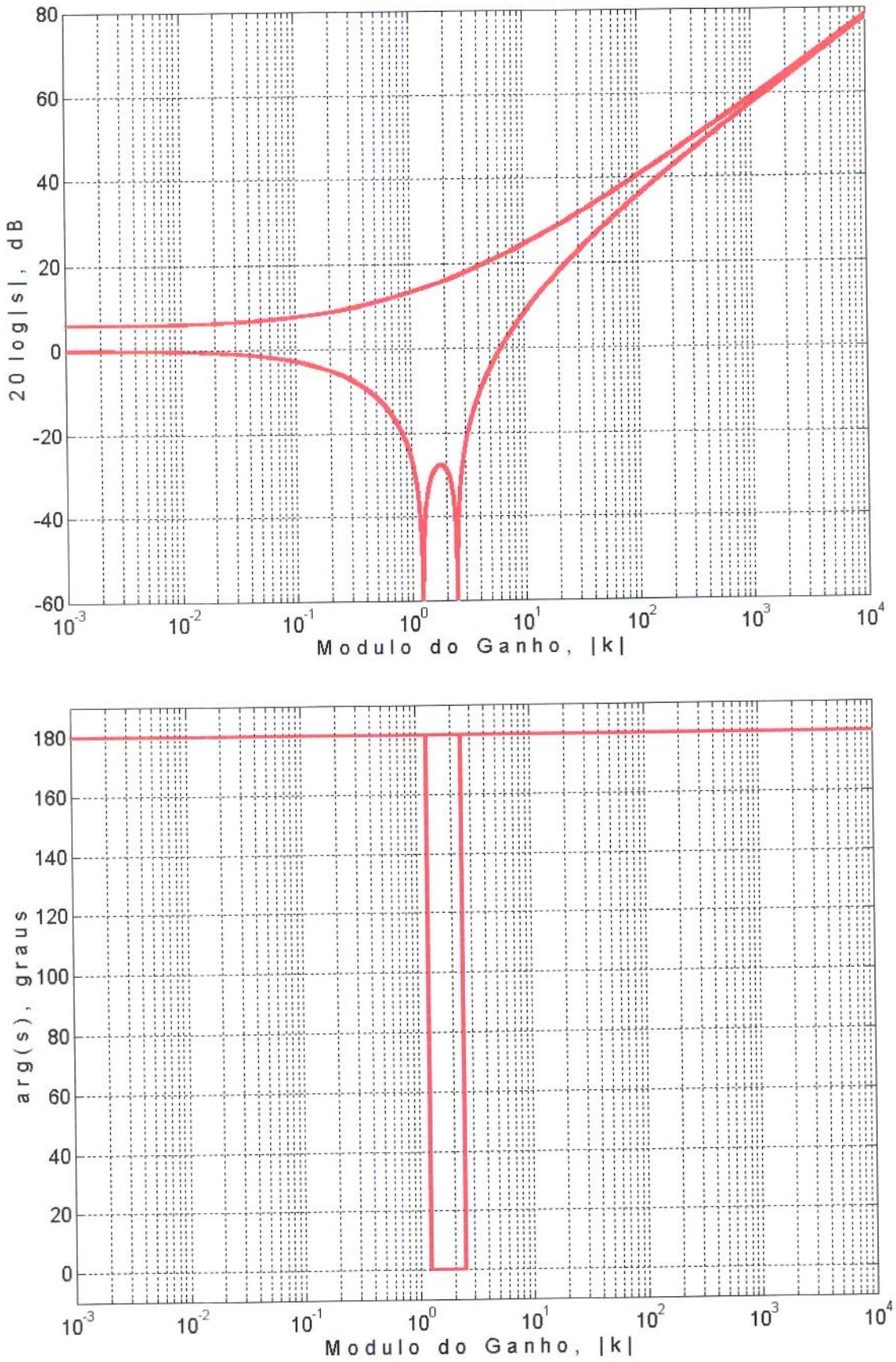


Figura 1.6.7. Diagrama de ganho do sistema de controle multivariável Sistema 2. Nesta graficação não há margem para interpretações dúbias, como existe na graficação convencional do lugar das raízes deste sistema.

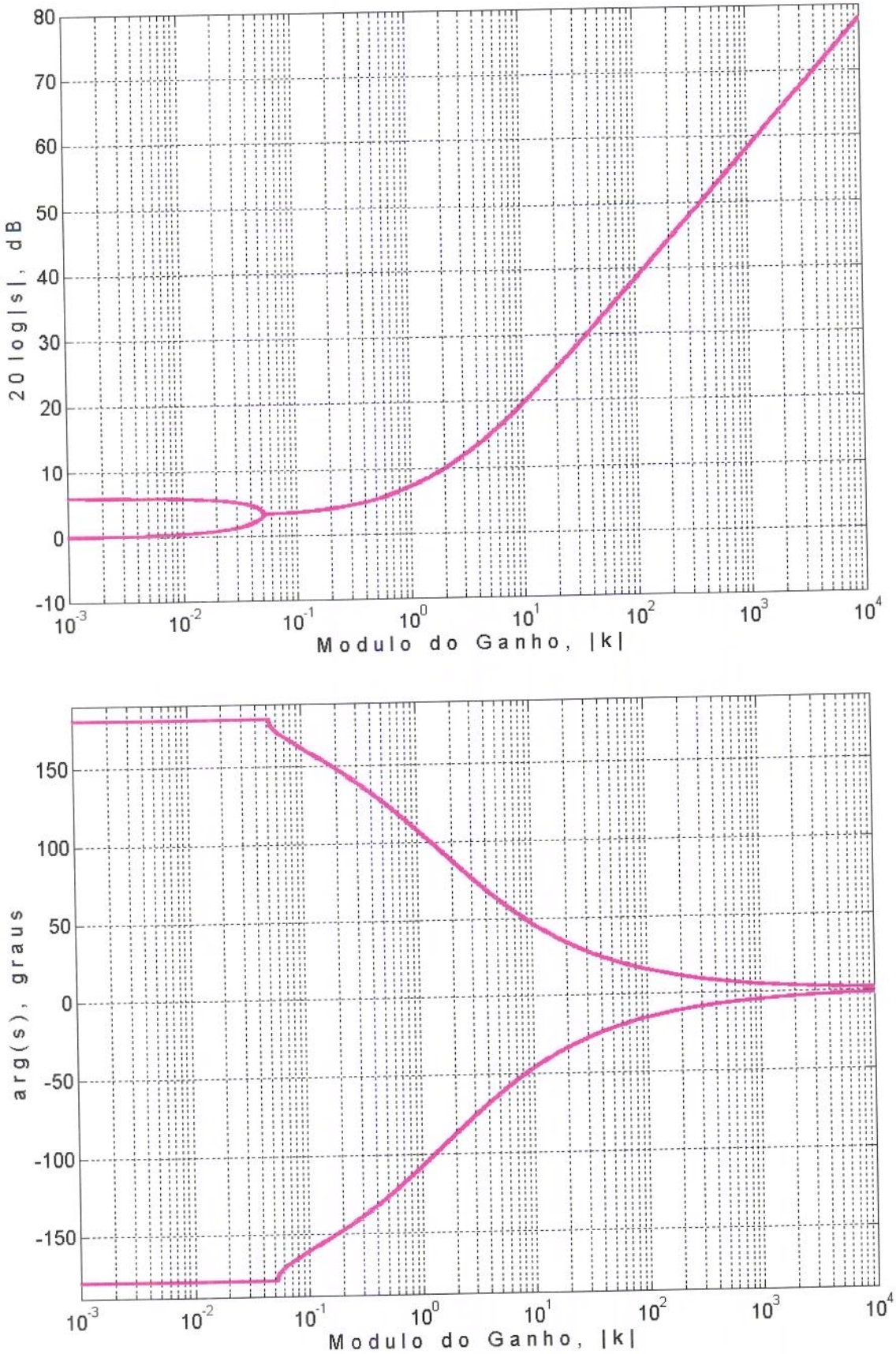


Figura 1.6.8. Diagrama de ganho complementar do Sistema 2, representando o lugar da raízes complementar do sistema. São mostrados valores de | k |, *mas* k *neste caso é negativo.*

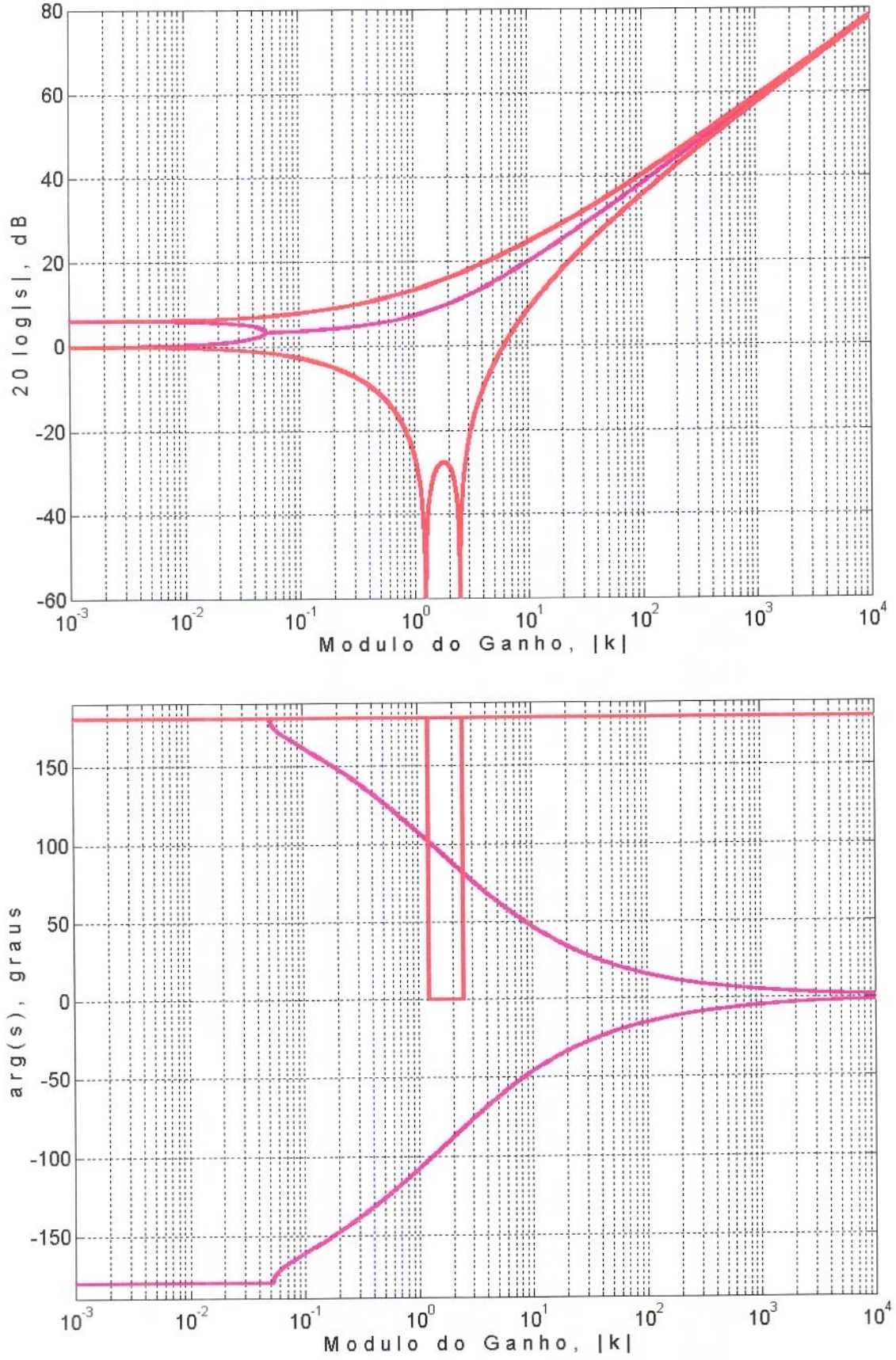


Figura 1.6.9. Representação conjunta em diagrama de ganho do lugar das raízes, em vermelho, e do lugar das raízes complementar, em magenta, do Sistema 2. Para o lugar das raízes, k *é positivo, e para o lugar das raízes complementar,* k *é negativo.*

CAPÍTULO 2

SUPERFÍCIES DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL

Superfícies de Riemann [1,11,16,19,24,59,61] entraram na teoria de controle [41-43,55] para resolver situações dúbias em sistemas de controle multivariável. Entretanto, elas são aplicáveis igualmente aos sistemas de controle monovariável, e com a facilidade de conterem apenas uma folha de plano complexo. Mostraremos neste capítulo como podem ser graficadas as superfícies-k e superfícies-s de Riemann de um sistema de controle monovariável. Todas as representações gráficas clássicas de sistemas de controle monovariável estudadas no Capítulo 1 estão contidas neste conjunto de curvas que mostraremos. No Capítulo 4 será mostrado que mesmo para sistemas de controle monovariável há utilidade no uso de superfícies de Riemann ou partes delas em análise e projeto.

2.1. *SUPERFÍCIE-K DE RIEMANN E LUGAR DAS RAÍZES EM SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL*

Seja o sistema da Figura 2.1.1, onde $g(s) = n(s) / d(s)$ é a função de transferência de malha aberta. Os pólos de g(s) são as raízes ou zeros da equação característica $d(s) = 0$. Inserindo na malha de realimentação um ganho $k \in \mathbf{R}$, teremos uma função de transferência de malha fechada $h(s) = g(s)/\{1 + k \cdot g(s)\}$. O ganho k pode igualmente ser inserido em cascata com g(s), mudando apenas a regulação.

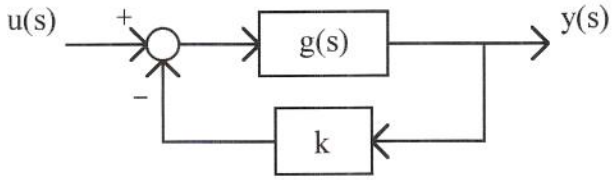


Figura 2.1.1. Sistema de controle monovariável com planta g(s) *e realimentação negativa com ganho* k, $k \in \mathbf{R}^+$.

Assim, para cada valor real de k pertencente ao intervalo $[0,+\infty)$, os pólos de h(s) serão as raízes da equação característica de malha fechada

$$d(s) + k \cdot n(s) = 0. \tag{2.1.1}$$

Colocando estes valores de raízes no plano-s teremos o gráfico do lugar das raízes de g(s). Rearranjando (2.1.1) teremos

$$\frac{d(s)}{n(s)} = -k\,, \tag{2.1.2}$$

o que origina a condição angular do gráfico do lugar das raízes: qualquer ponto $\bar{s} \in \mathbf{C}$ (no plano-s) que satisfaça a condição angular

$$\arg[d(\bar{s}) / n(\bar{s})] = \pm 180^{\circ}, \tag{2.1.3}$$

pertence ao lugar das raízes de g(s), e o valor de ganho $\bar{k} \in \mathbf{R}$ que gera o pólo $\bar{s}$ é dado por

$$\bar{k} = \left|\frac{d(\bar{s})}{n(\bar{s})}\right|. \tag{2.1.4}$$

Conhecendo as propriedades do lugar das raízes para o caso monovariável, sabemos que, para um sistema de ordem n, a cada valor $\bar{k} \in \mathbf{R}^{+}$ de ganho corresponderão n valores $\bar{s}_i \in \mathbf{C}$ de pólos de h(s) no plano-s. Sabemos, ainda, que não haverá cruzamento de curvas no plano-s, ou seja, a cada valor $\bar{s} \in \mathbf{C}$ no gráfico do lugar das raízes corresponderá um único valor $\bar{k} \in \mathbf{R}^{+}$.

A generalização dos valores de ganho fazendo com que k possa ser qualquer número complexo nos possibilitará construir a superfície de Riemann de g(s). Assim, para cada valor $\bar{k} \in \mathbf{C}$ de ganho corresponderão n valores $\bar{s}_i \in \mathbf{C}$ no plano-s. Da mesma forma, a qualquer valor $\bar{s} \in \mathbf{C}$ no plano-s corresponderá um único valor $\bar{k} \in \mathbf{C}$. Deste modo, para um dado $\bar{k} = |\bar{k}|\arg(\bar{k})$, os $\bar{s}_i \in \mathbf{C}$ correspondentes serão as raízes da Equação (2.1.1), e para qualquer valor $\bar{s} \in \mathbf{C}$ no plano-s, o valor $\bar{k} \in \mathbf{C}$ correspondente será dado por:

$$\arg(\bar{k}) = \arg\left[\frac{d(\bar{s})}{n(\bar{s})}\right] \pm 180^{\circ} \quad \text{e} \tag{2.1.5}$$

$$|\bar{k}| = \left|\frac{d(\bar{s})}{n(\bar{s})}\right|. \tag{2.1.6}$$

2.2. MÉTODO PROPOSTO PARA CÁLCULO E GRAFICAÇÃO DE SUPERFÍCIE-K DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL

Como descrito anteriormente, a graficação do lugar das raízes de sistemas de controle monovariável depende de encontrarmos um valor $\overline{s}$ que satisfaça a condição angular $\arg(1/g(\overline{s})) = \pm 180°$. Entretanto, para a graficação dos lugares das raízes de forma computacional, é necessário que se faça uma metodologia diferente: estipula-se valores para $k \in \mathbf{R}$, $k > 0$, e a partir destes valores calcula-se as raízes da equação característica de $g(s) = n(s) / d(s)$, ou seja, $d(s) + k \cdot n(s) = 0$. Assim, os lugares das raízes ou pólos do sistema realimentado $h(s) = g(s) / \{1 + k \cdot g(s)\}$, são calculados como raízes de $d(s) + k \cdot n(s) = 0$, $k \in \mathbf{R}$ no intervalo $[0,+\infty)$.

No caso de graficação das superfícies-ℓ de Riemann descritas por MacFarlane e Postlethwaite [41-43,55], onde $\ell = -1/k$, podemos pensar, como fizemos acima para os lugares das raízes, em achar um $\overline{s} \in \mathbf{C}$ que satisfaça a condição do ramo que está sendo calculado. Chamaremos estas superfícies de Riemann de superfícies-k de Riemann, considerando que o que importa em um sistema é o ganho k. MacFarlane e Postlethwaite propuseram um método de graficação de superfícies de Riemann fazendo um mapeamento através de linhas retas verticais e horizontais atravessando o plano-s. Este método, embora matematicamente correto, torna a realização computacional muito difícil e complicada.

Propomos então um método de graficação de superfícies-k de Riemann para sistemas de controle monovariável: a generalização do método computacional já bem estabelecido para os lugares das raízes, ou seja, o cálculo das raízes da equação característica $d(s) + k \cdot n(s) = 0$ para cada valor de $k \in \mathbf{C}$ que quisermos. Definiremos no plano complexo da variável ganho k curvas de ângulos constantes e curvas de módulos constantes. Estas curvas serão aplicadas à equação característica, e as raízes da equação característica gerarão *n* curvas no plano complexo da variável s, onde *n* é a ordem do sistema.

A Figura 2.2.1 mostra as curvas do plano complexo da variável k com ângulos constantes. É importante notar que a curva com ângulo de k em 0° (curva vermelha) é a que gera os ramos do lugar das raízes, que no plano complexo da variável s são representados com o ângulo ±180°, porque é o ângulo $\arg[1/g(s)] = \arg(-k)$. Da mesma forma, a curva de k com +30° gerará no plano-s os ramos de -150° da superfície-k de Riemann, porque $\arg(-k) = \arg(k) \pm 180°$. Assim, é preferível colocar os ângulos arg(-k) no plano complexo k.

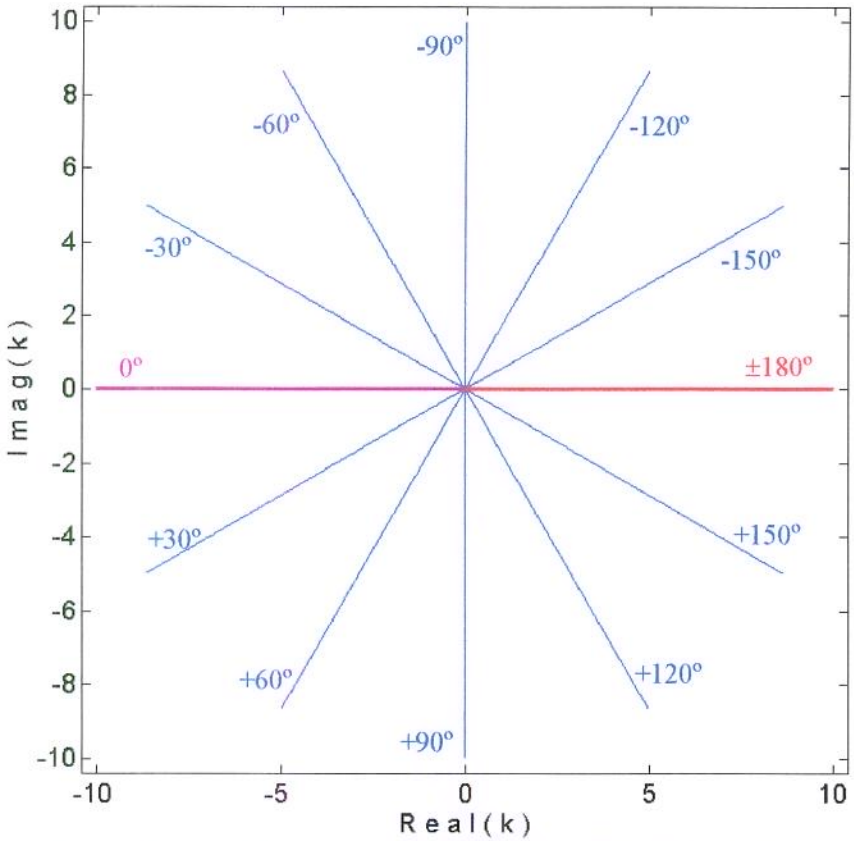


Figura 2.2.1. Curvas de k *com ângulos de fase constantes para superfície-k de Riemann. Por questão de compatibilidade com a notação de lugar das raízes, os ângulos mostrados são de* (−k).

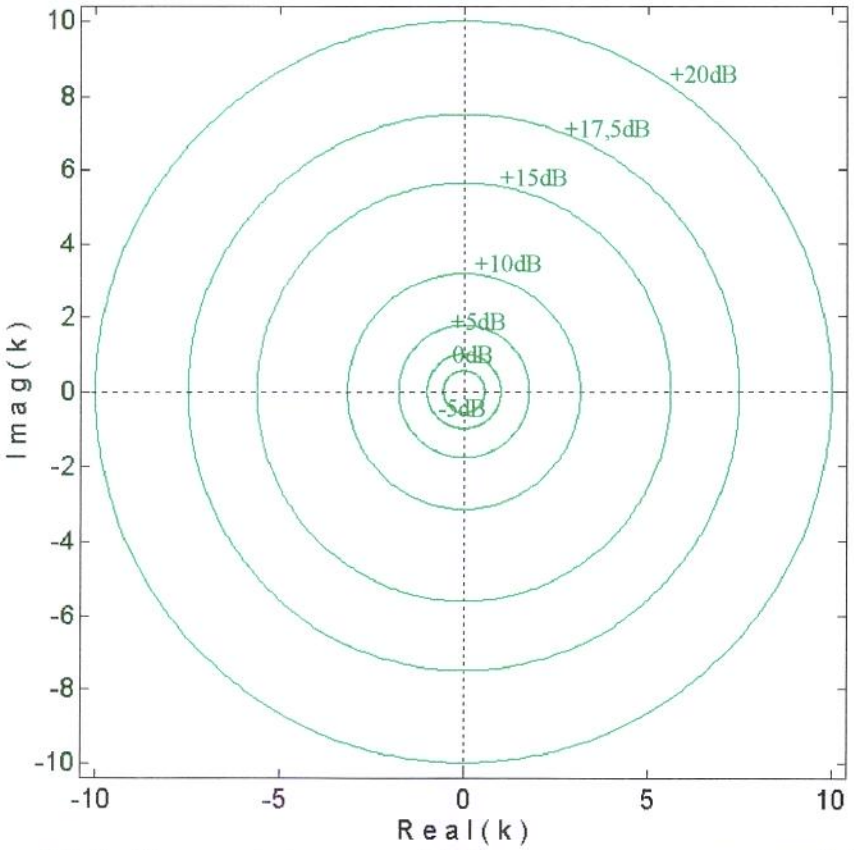


Figura 2.2.2. Curvas de k *com módulos constantes para superfície-k de Riemann.*

É claro que para haver coincidência entre o ângulo da curva no gráfico e o ângulo mostrado, deveríamos fazer o gráfico da variável complexa (-k), que é a variável que realmente empresta o ângulo à curva.

A Figura 2.2.2 mostra as curvas do plano-k com módulo constante. Neste caso, $|+k| = |-k|$, e não há chance para enganos. Por facilidade, os valores são representados em decibels, ou seja, $20 \cdot \log|k|$, em dB. Exemplificando, a curva com magnitude 10 tem +20dB, e assim por diante. Os ramos gerados no plano-s serão identificados com a mesma magnitude em dB.

Estudaremos então as superfícies de Riemann a partir da variável k usada normalmente no cálculo e graficação dos lugares das raízes, ao invés da variável $\ell = -1/k$. Assim, as Figuras 2.2.1 e 2.2.2 mostram as curvas de $k \in \mathbf{C}$ para o cálculo dos ramos da superfície-k de Riemann de um sistema de controle monovariável. Na Figura 2.2.1 estão representadas curvas-k de ângulos constantes em 0°, +30°, +60°, +90°, +120°, +150°, ±180°, -150°, -120°, -90°, -60°, e -30°. Na Figura 2.2.2 estão representadas curvas-k de módulos constantes, assinaladas em decibels: curvas de -5 dB, 0 dB, +5 dB, +10 dB, +15 dB e +20 dB. Desta forma, cada curva servirá para determinar valores para a variável $k \in \mathbf{C}$, usados por sua vez para achar valores de s que formarão curvas no plano-s através de uma aplicação conforme $\Psi(k,s) = d(s) + k \cdot n(s) = 0$. Sendo assim, haverá um mapeamento do plano complexo na variável-k para o plano complexo na variável-s, resultando em uma família de curvas originada por módulos constantes de k e outra família de curvas originada por ângulos constantes de k. A curva em s originada pela curva de k com ângulo constante em 0° ((-k) com ±180°) é a curva dos ramos de lugar das raízes do sistema de controle, ou seja, dos pólos do sistema realimentado com ganho $k > 0$, $k \in \mathbf{R}$.

Para simplificar a notação, e fazendo uma analogia com a carta de Nichols (embora sem relação matemática com esta), chamaremos as curvas originadas por módulos constantes da variável complexa k de **Curvas-G** da superfície-k de Riemann, onde **G** (que indica ganho constante) assumirá os valores correspondentes a 20log|k|, em decibels (dB). Igualmente, as curvas originadas por ângulos constantes da variável complexa k serão chamadas de **Curvas-F** da superfície-k de Riemann, onde **F** (que indica fase constante) assumirá os valores correspondentes a arg(-k), em graus. Observa-se que na superfície-k de Riemann resultante no plano-s, as curvas-G de ganhos constantes serão assinaladas em decibels (dB), podendo estes ser calculados diretamente por $G = 20\log|k|$ decibels. Já as curvas-F de ângulos de fase constantes serão assinaladas em graus, sendo que estes deverão ser calculados através de

F = arg(1/g(s)). De forma equivalente para a variável k, os ângulos deverão ser calculados por F = arg(-k) = ±180° - arg(-k). Isto faz com que para uma curva de k com ângulo constante em 30°, devemos assinalar a curva resultante no plano-s com -150°. Esta forma de cálculo dos valores-F nas curvas de ângulo constante serve para que os lugares das raízes coincidam com a curva F = ±180°. Isto faz com que o que estamos descrevendo aqui seja totalmente compatível com a teoria já estabelecida de lugar das raízes. E para maior facilidade na identificação destas curvas, estabelecemos uma convenção de cores na graficação delas: as curvas-G serão todas graficadas em verde, as curvas-F genericamente serão graficadas em azul, sendo que duas curvas-F terão cores próprias a curva-F com F = ±180°, por representar o lugar das raízes do sistema de controle, será graficada em vermelho, e a curva-F com F = 0°, por representar o lugar das raízes complementar, será graficada em magenta.

Exemplificaremos o que foi descrito acima para o caso monovariável com uma das funções de transferência utilizadas no Capítulo 1:

$$g1(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}. \qquad (2.1.1)$$

Para esta função de transferência, vamos graficar a superfície-k de Riemann das freqüências complexas s em função dos ganhos complexos k. Usaremos as curvas descritas nas Figuras 2.2.1 e 2.2.2 para fazer o mapeamento $\Psi(k,s) = d(s) + k \cdot n(s) = 0$, obtendo portanto n valores de s para cada valor de k usado, onde n é a ordem do sistema.

2.2.1. Graficação Usual de Superfície-k de Riemann no Plano-s

A superfície-k de Riemann no plano-s está graficada na Figura 2.2.3, onde temos assinaladas as curvas-F originadas por ângulos constantes e as curvas-G originadas por módulos constantes da variável k, novamente ressalvando de que os módulos e ângulos são emprestados da variável complexa (-k). As curvas-F assinaladas com o ângulo ±180° são os ramos dos lugares das raízes do sistema, ou seja, dos pólos de $h(s) = g(s) / \{1 + k \cdot g(s)\}$.

A Figura 2.2.4 mostra em detalhe a região dos pólos em {-1;-2} e do zero em {-3}. Deve-se notar que uma vez que o sistema é de ordem dois (n = 2, havendo portanto dois pólos), para cada valor de k no plano-k, surgem dois valores de s no plano-s, e então para cada curva no plano-k são originadas duas curvas no plano-s. Isto fica bem aparente nas curvas-F de ângulos constantes, havendo dois ramos assinalados com cada ângulo.

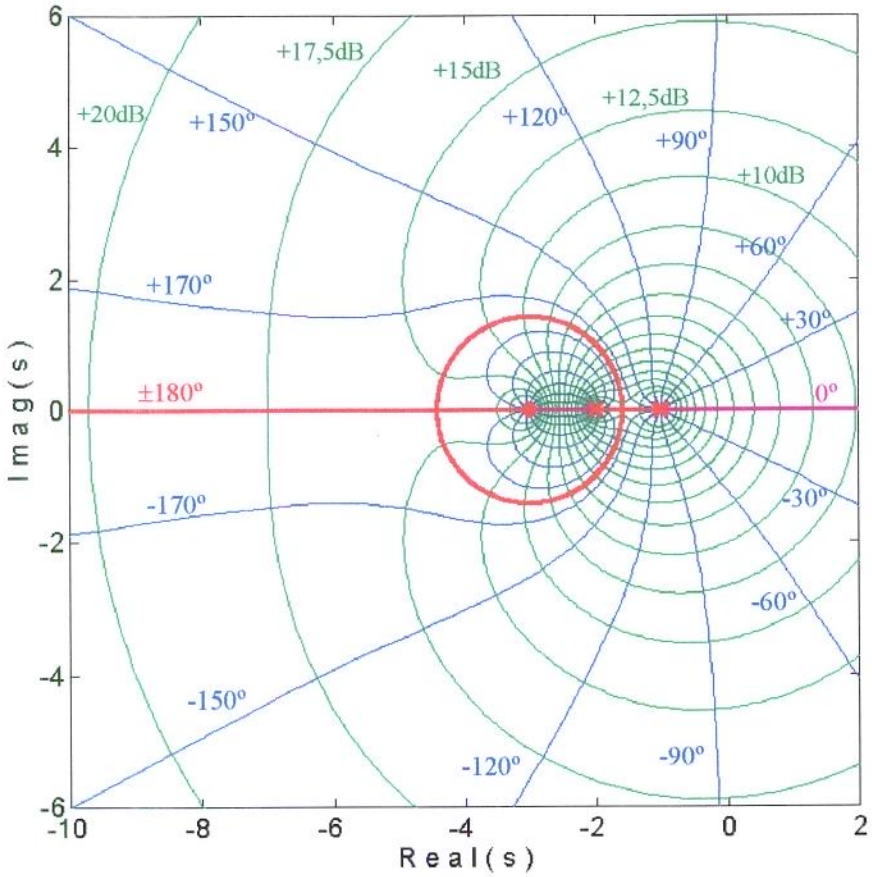


Figura 2.2.3. Superfície-k de Riemann de um sistema de controle monovariável $g1(s) = (s+3)/\{(s+1)(s+2)\}$.

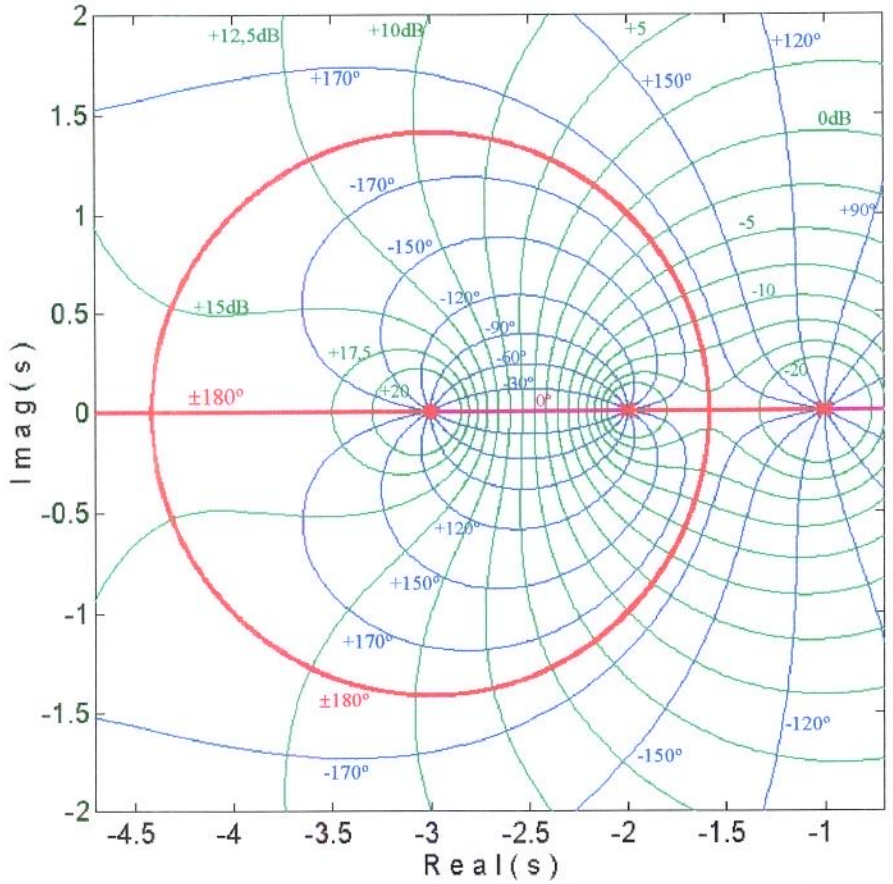


Figura 2.2.4. Zoom *da superfície-k de Riemann do sistema* $g1(s) = (s+3)/\{(s+1)(s+2)\}$.

2.2.2. *Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F* versus *Magnitudes de k*

Apresentamos a seguir generalização para superfície-k de Riemann da representação de diagramas de ganho. A graficação apresentada por Kurfess e Nagurka consta de dois gráficos. No primeiro são representados os módulos em dB das variáveis-s que formam os pólos do sistema de controle realimentado, em função do módulo dos ganhos k em escala logarítmica. No segundo gráfico são representados os ângulos em graus das mesmas variáveis-s do primeiro gráfico, também em função do módulo dos ganhos k em escala logarítmica. Na prática, Kurfess e Nagurka fazem para o lugar das raízes uma representação análoga àquela criada por Bode para a resposta em freqüência.

Neste trabalho generalizamos os gráficos de Kurfess e Nagurka para poder representar ramos de ângulos diferentes de ±180°, ou seja, para representar uma família de curvas-F de ângulos de fase constantes da variável complexa k. Assim, nos gráficos que apresentamos a seguir são representadas genericamente em azul as curvas-F, mas incluindo também em vermelho os ramos do lugar das raízes, para os quais F = ±180°, e em magenta os ramos do lugar das raízes complementar, para os quais F = 0°.

A Figura 2.2.5 mostra os módulos das curvas-F de ângulos de fase constantes, em decibels *versus* ganho k em escala logarítmica. Estas mesmas curvas já foram apresentadas no plano-s nas Figuras 2.2.3 e 2.2.4, e os resultados podem ser comparados. Na Figura 2.2.5 fica evidente o início das curvas-F com k pequeno, a partir dos pólos em $20\log|-1| = 0$ dB e $20\log|-2| = 6{,}02$ dB, e a tendência assintótica delas, com os mesmos módulos das curvas dos lugares das raízes - metade delas com alto ganho k tendendo ao zero em $20\log|-3| = 9{,}54$ dB, e apresentando inclinação nula no gráfico, e a outra metade tendendo ao infinito com inclinação de +20 dB por década.

A Figura 2.2.6 apresenta os ângulos das curvas-F *versus* os módulos dos ganhos k em escala logarítmica. Cada ponto pertencente a uma curva-F no plano-s foi representado como módulo (Figura 2.2.5) e ângulo (Figura 2.2.6) de s *versus* módulo de k. Na Figura 2.2.6 fica evidente que todas as curvas-F começam em ±180° (representado na Figura por +180°), sendo que metade das curvas-F volta a ter +180° com altos valores de ganho | k |, e a outra metade tende a se espraiar com ângulos diferenciados num espalhamento uniforme.

A Figura 2.2.7 mostra com mais detalhe os módulos das curvas-F da Figura 2.2.5, para que possamos identificar F em cada uma. As curvas-F em vermelho têm F = ±180° - são os ramos dos lugares das raízes.

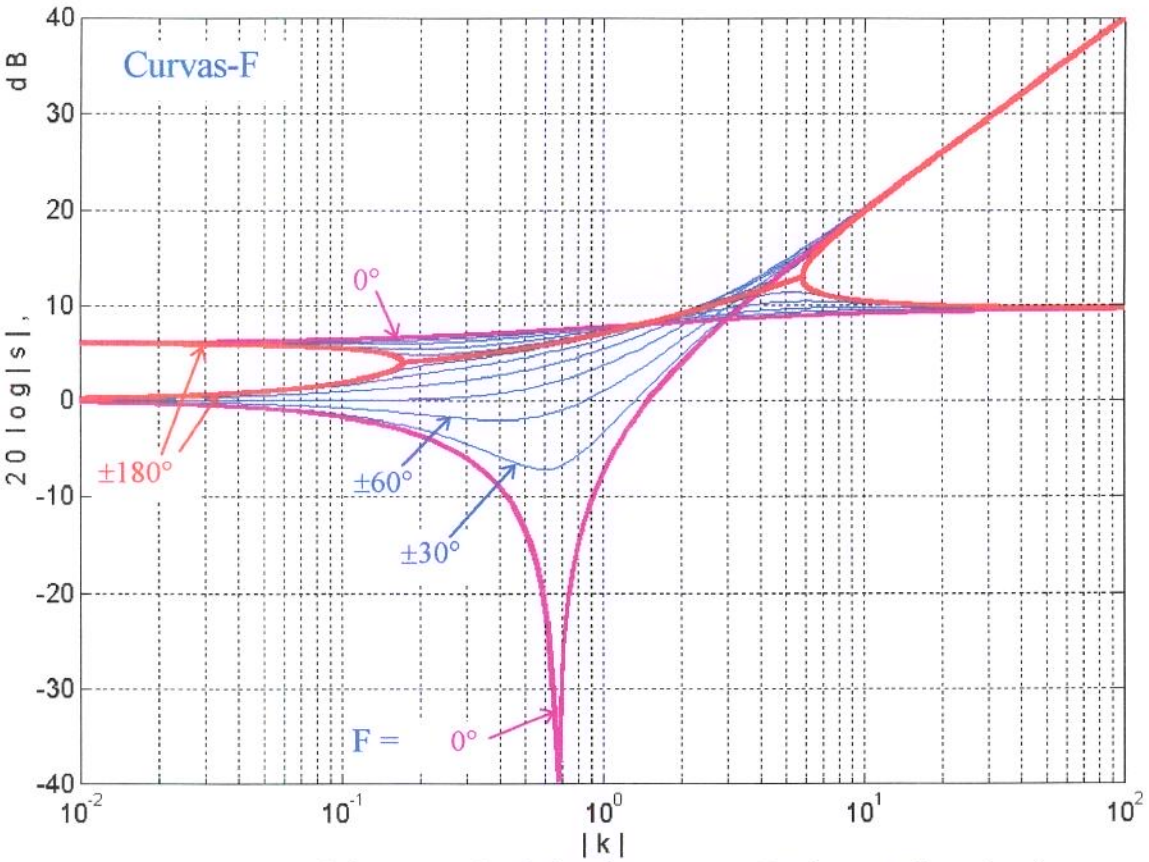


Figura 2.2.5. Módulos em decibels das curvas-F de ângulos de fase constantes, versus *módulo do ganho* k, *para* g1(s).

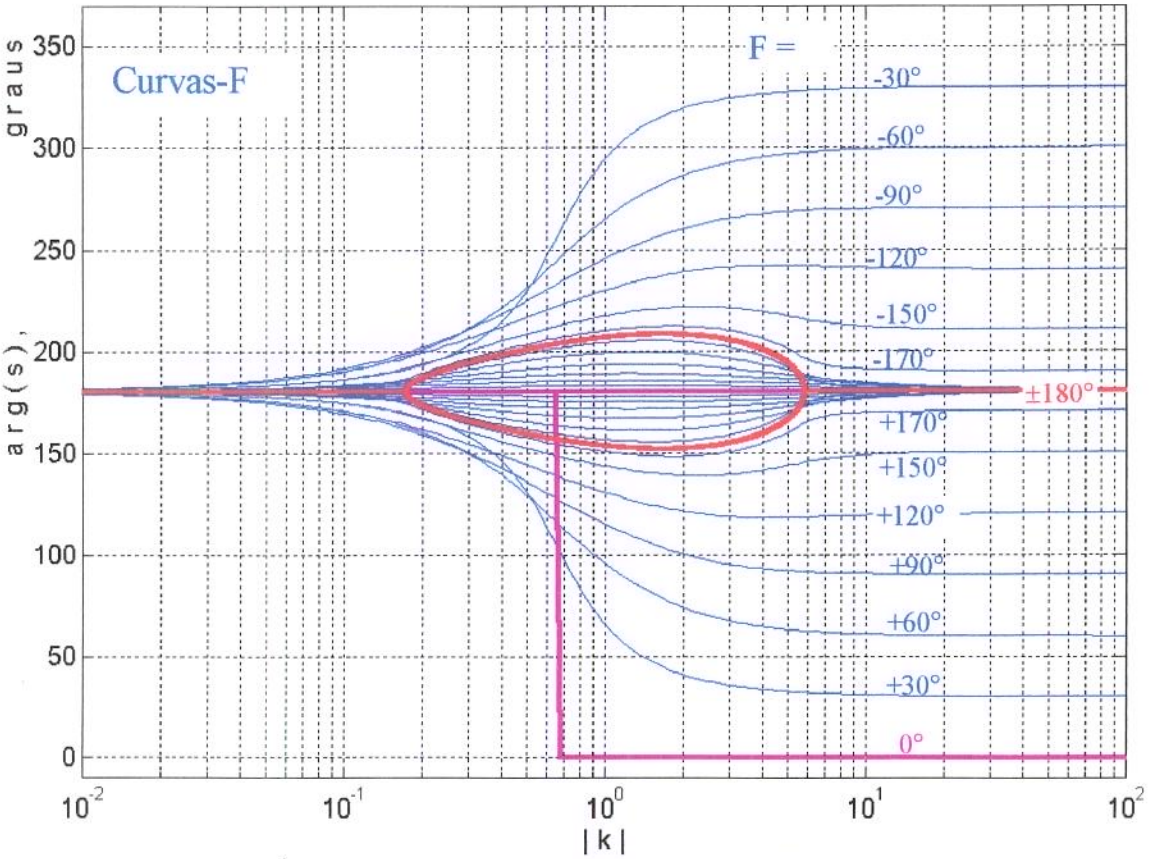


Figura 2.2.6. Ângulos de fase em graus das curvas-F de ângulos de fase constantes, versus *módulo do ganho* k, *para* g1(s).

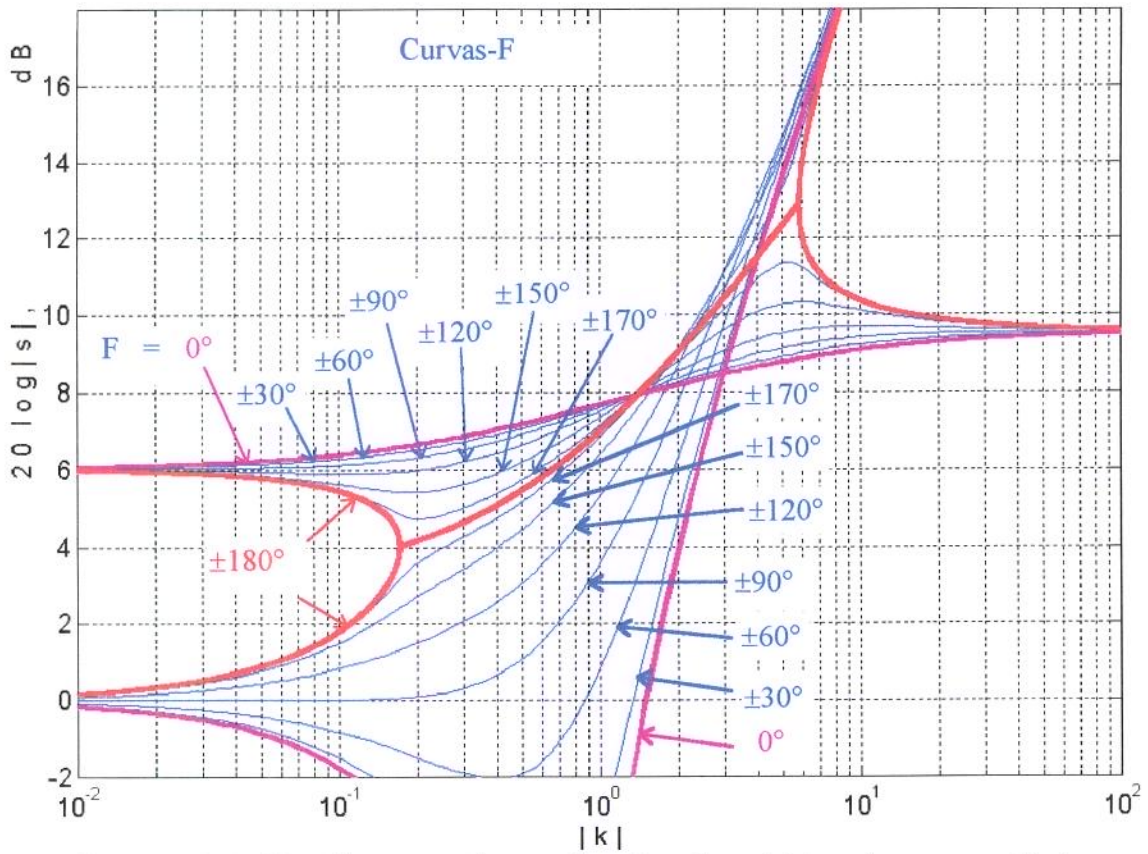


Figura 2.2.7. Detalhamento das graficações de módulos das curvas-F de g1(s) *apresentadas na Figura 2.2.5.*

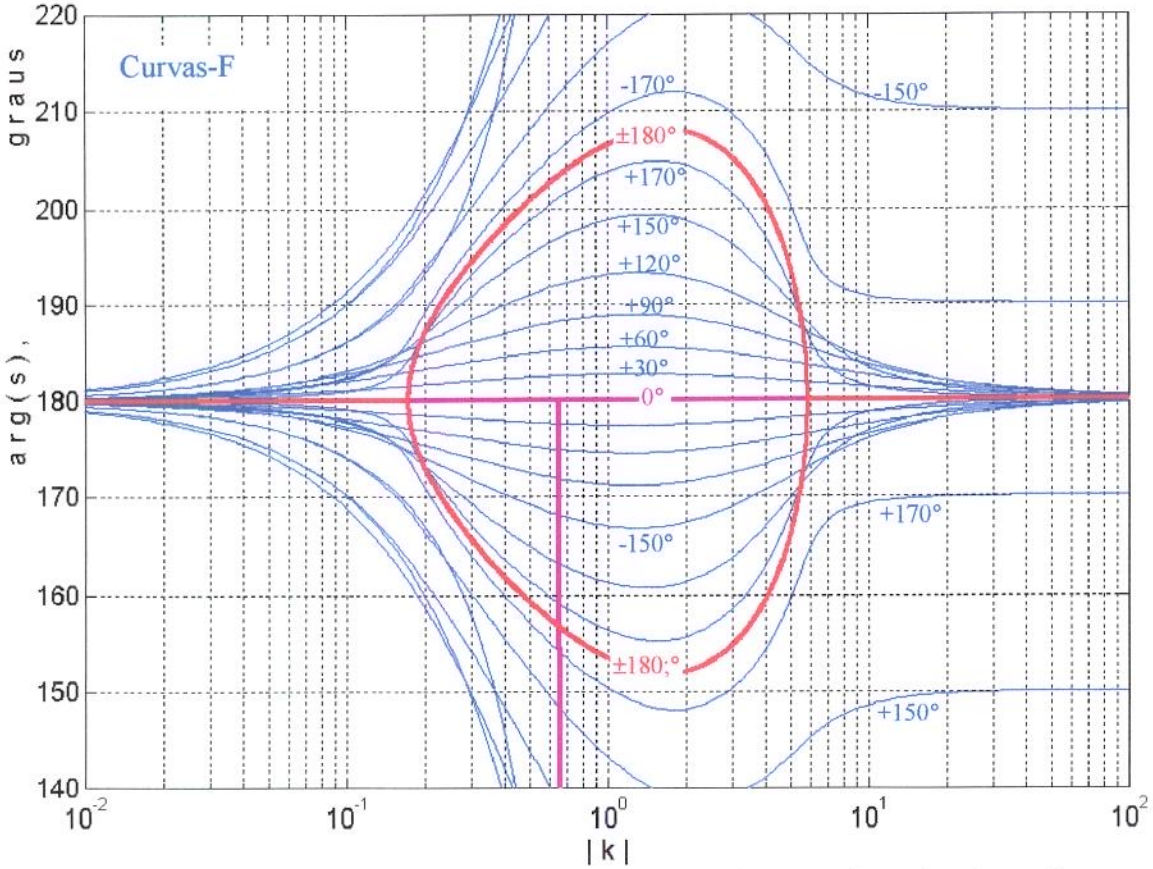


Figura 2.2.8. Detalhamento das graficações de ângulos de fase das curvas-F apresentadas na Figura 2.2.6.

A Figura 2.2.8 mostra em detalhe a região de 180° das curvas-F da Figura 2.2.6. Nesta figura fica evidente a existência de duas curvas-F para cada ângulo assinalado da variável (-k). As curvas-F de ângulos negativos (entre 0° e -180°) são exatamente simétricas às de ângulos positivos em relação à reta de +180° do gráfico. As curvas apresentadas em vermelho têm $F = \pm 180°$, ou seja, são os ramos do lugar das raízes do sistema, e as apresentadas em magenta têm $F = 0°$, ou seja, são os ramos do lugar das raízes complementar.

Nas Figuras 2.2.6 e 2.2.8 fica evidente que há dois conjuntos de curvas-F: um primeiro conjunto que inicia no pólo em $20\log|-2| = 6{,}02$ dB, com 180°, e acaba no zero em $20\log|-3| = 9{,}54$ dB, com inclinação nula, e também com 180°, e um segundo conjunto que inicia no pólo em $20\log|-1| = 0$ dB, com 180°, e acaba no infinito com inclinação de +20 dB/década, cada curva tendendo a estabilizar com um ângulo diferente num espalhamento uniforme. O primeiro destes conjuntos de curvas-F está representado separadamente na Figura 2.2.9, e o segundo na Figura 2.2.10.

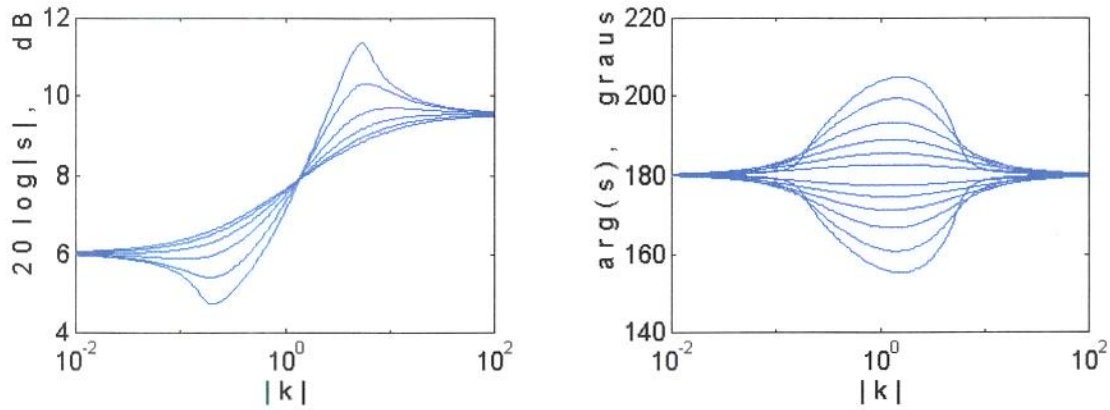


Figura 2.2.9. Curvas-F que partem do pólo em $20\log|-2| = +6{,}02$ dB e tendem ao zero em $20\log|-3| = +9{,}54$ dB.

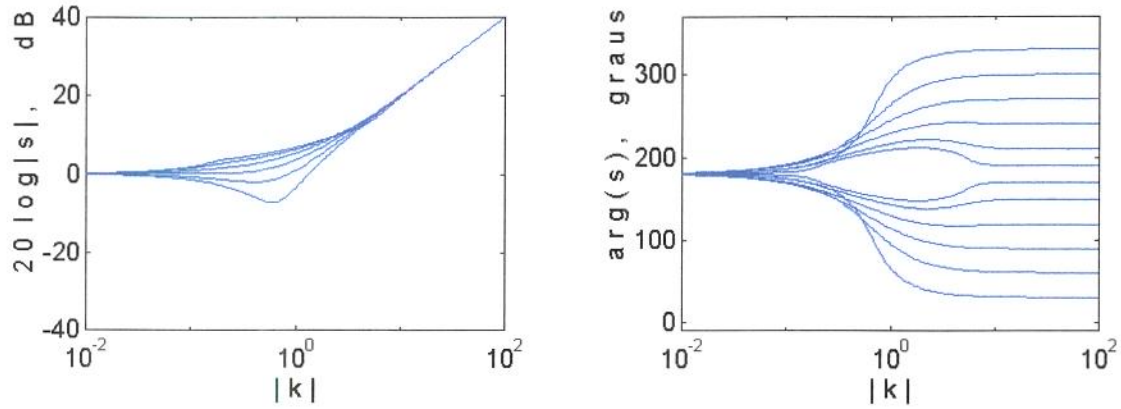


Figura 2.2.10. Curvas-F que partem do pólo em $20\log|-1| = 0$ dB e tendem ao infinito, com inclinação constante de +20 dB/década, e num espraiamento uniforme de ângulos.

Comparando as Figuras 2.2.9 e 2.2.10 com as curvas-F de ângulos constantes no plano-s apresentadas nas Figuras 2.2.3 e 2.2.4, fica evidente que as curvas-F que voltam aos 180° são aquelas que se originaram no pólo em -2 e tendem ao zero em -3, enquanto que as curvas-F que se espraiam uniformemente são aquelas que tendem ao infinito, numa configuração que no plano-s pode ser facilmente identificada como uma configuração de Butterworth [55,64], ou seja, tendem ao infinito dividindo o plano-s em partes iguais, fazendo ângulos iguais entre si.

A Figura 2.2.11 mostra em detalhe a curva-F de F = 0°, ou seja, o lugar das raízes complementar do sistema. Podemos ver que com $k \in \mathbf{R}^-$ um dos pólos do sistema realimentado viaja desde o pólo de malha-aberta em -2, ou seja, +6,02 dB e ±180°, até o zero do sistema em -3, ou seja, +9,54 dB e ±180°. O outro pólo viaja desde o pólo de malha aberta em -1, ou seja, 0 dB e 0°, passa pela origem (onde o valor em dB cai e há a transição de ±180° para 0°), e finalmente tende assintoticamente para +∞, com +20 dB/década e 0°.

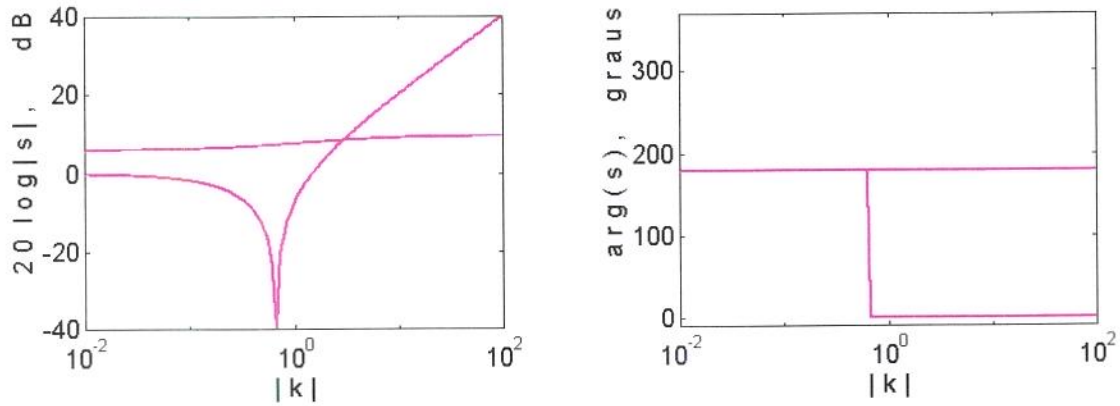


Figura 2.2.11. Curvas-F de F = 0°, ou seja, lugar das raízes complementar de g1(s)*, representado em diagrama generalizado de ganho.*

A Figura 2.2.12 mostra finalmente a curva-F de F = ±180°. Este é o diagrama de ganho do sistema como apresentado por Kurfess e Nagurka, com $k \in \mathbf{R}^+$. Esta figura é igual à Figura 1.6.1 apresentada no Capítulo 1, e evidencia que os pólos do sistema realimentado partiram de -1 e -2, ou seja, 0 dB e +6,02 dB com ±180°, tornaram-se complexos conjugados e depois voltaram ao semi-eixo real negativo, sendo que um foi para o zero em -3, ou seja, +9,54 dB e ±180°, e o outro teve tendência assintótica para -∞, com taxa de crescimento de +20 dB/década e ângulo de fase ±180°.

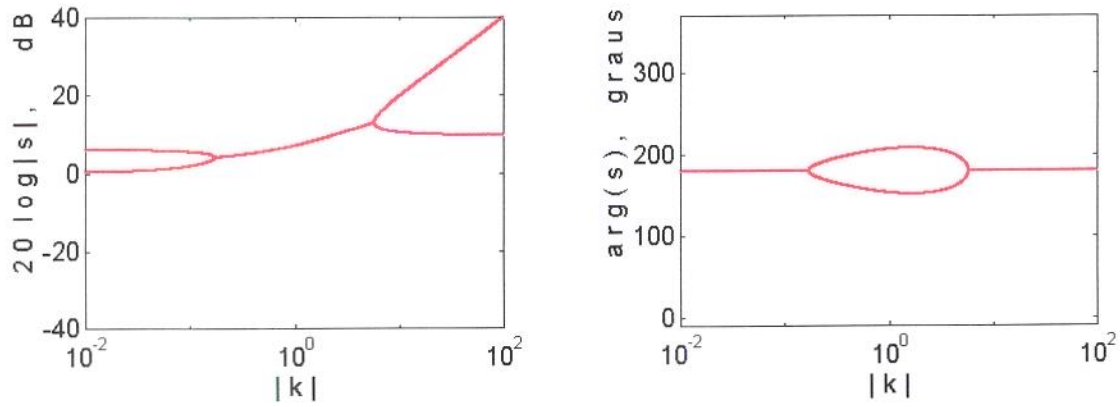


Figura 2.2.12. Curvas-F de F = ±180°, ou seja, lugar das raízes de g1(s), *representado em forma diagrama de ganho.*

2.2.3. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G versus Ângulos de k

Os ramos de ângulos constantes da variável-k na superfície-k de Riemann (curvas-F) apresentados nas Figuras 2.2.3 e 2.2.4, foram representados nas Figuras 2.2.5 a 2.2.10 em forma de módulo em decibels e ângulo de fase em graus, *versus* ganho da variável-k. Já os ramos de módulos constantes da variável-k, que são as curvas-G, não podem ser representados nos mesmos gráficos. Criamos então gráficos específicos para as curvas-G de magnitudes constantes da variável-k. Estes gráficos são dos módulos em decibels e dos ângulos de fase em graus das variáveis-s das curvas-G, *versus* ângulos da variável-k, em graus.

A Figura 2.2.13 apresenta os módulos em decibels das curvas-G da variável-s, em função dos ângulos em graus do ganho complexo k, cujo módulo permanece constante. Cada curva-G da variável-s é formada a partir de uma curva de k com ganho constante G = 20 log|k|, dB. Na Figura 2.2.14 são apresentados os ângulos em graus das curvas-G da variável-s, em função dos ângulos de k.

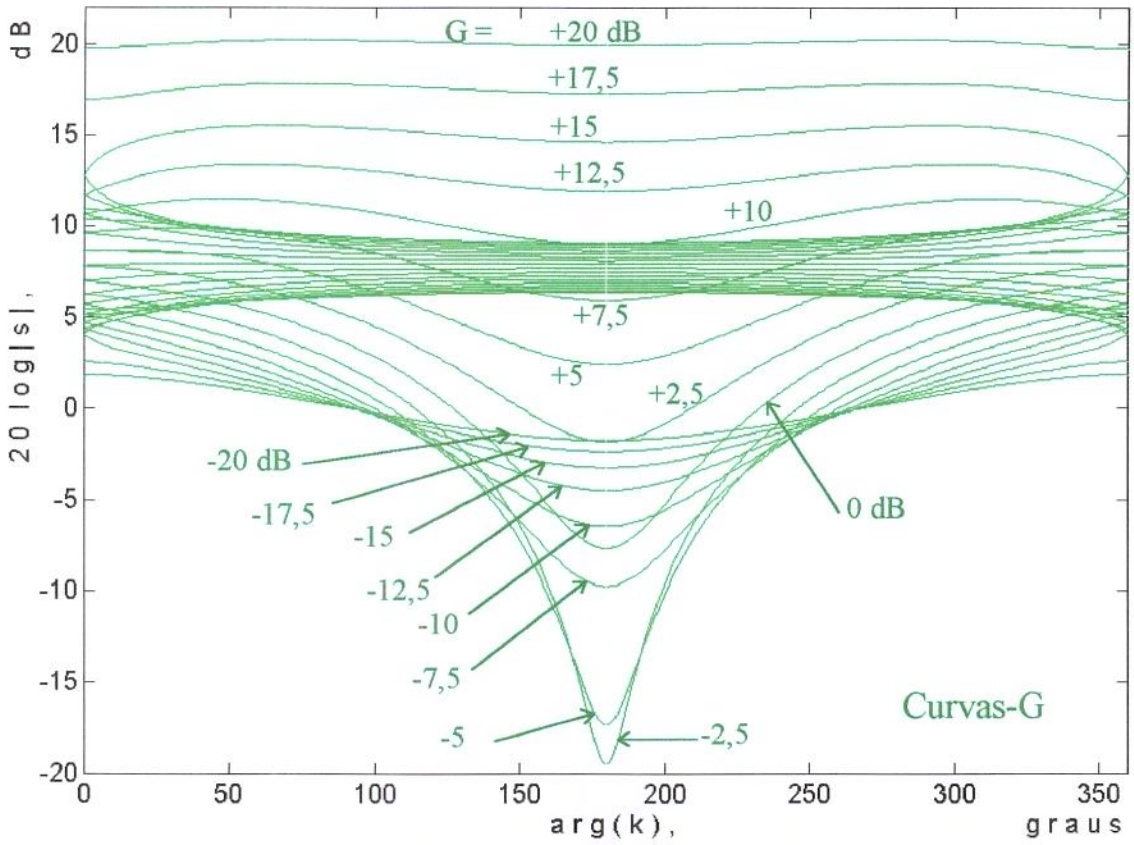


Figura 2.2.13. Módulos em decibels das curvas-G de ganhos constantes, versus *ângulo de fase do ganho* k, *em graus, de* g1(s).

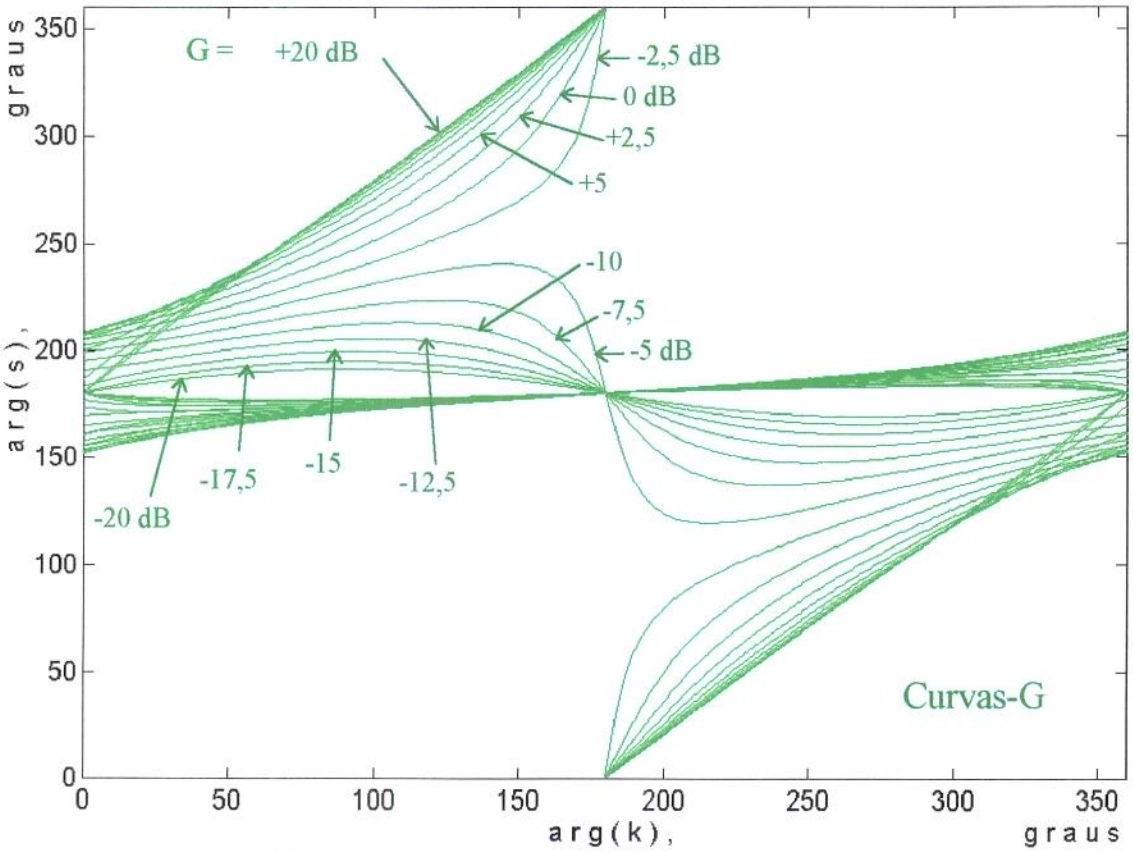


Figura 2.2.14. Ângulos em graus das curvas-G de ganhos constantes, versus *ângulo de fase do ganho* k, *em graus, de* g1(s).

Para que possamos identificar no plano-s das Figuras 2.2.3 e 2.2.4 as curvas-G representadas aqui em função de arg(k), representamos separadamente dois conjuntos de curvas-G nas Figuras de 2.2.15 e 2.2.16. Na Figura 2.2.15 estão graficadas as curvas-G entre -20 dB e -5 dB. Estas curvas, por estarem muito próximas dos pólos em -1 e -2, circundando-os, não cruzam o eixo imaginário e portanto não circundam a origem do plano-s. Pode-se ver na graficação de ângulos de fase destas curvas-G que durante toda a variação de ângulo da variável k, os ângulos de fase destas curvas não variam muito, permanecendo sempre em torno de 180°. Na Figura 2.2.16 temos as curvas-G com G entre -2,5 dB e +20 dB. Estas curvas já se distanciam mais dos pólos, tendendo a rodear o plano-s com valores grandes de ganho. À medida que G cresce, criam-se algumas curvas-G restritas à região do zero em -3. Estas curvas apresentam ganhos entre 9 dB e 11 dB, e pequenas variações angulares, em torno de 180°.

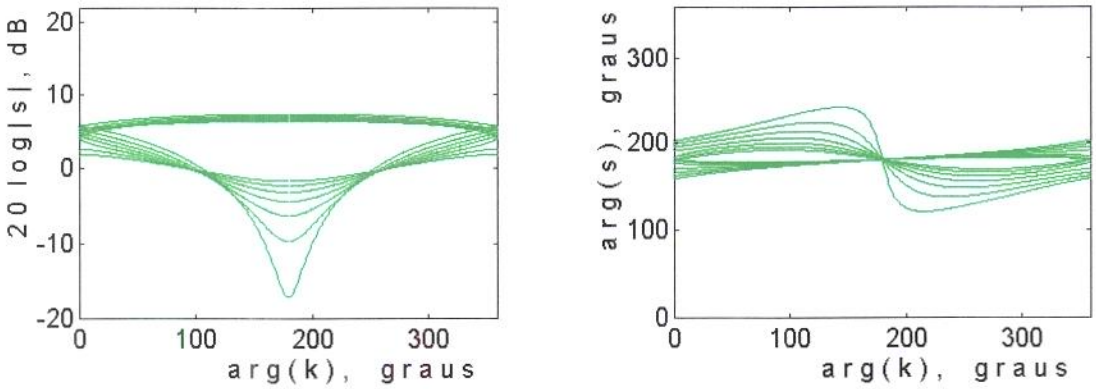


Figura 2.2.15. Curvas-G de g1(s) *com valores pequenos de ganho* G = 20·log|k| *entre -20 dB e -5 dB. Estas curvas rodeiam os dois pólos em -1 e -2.*

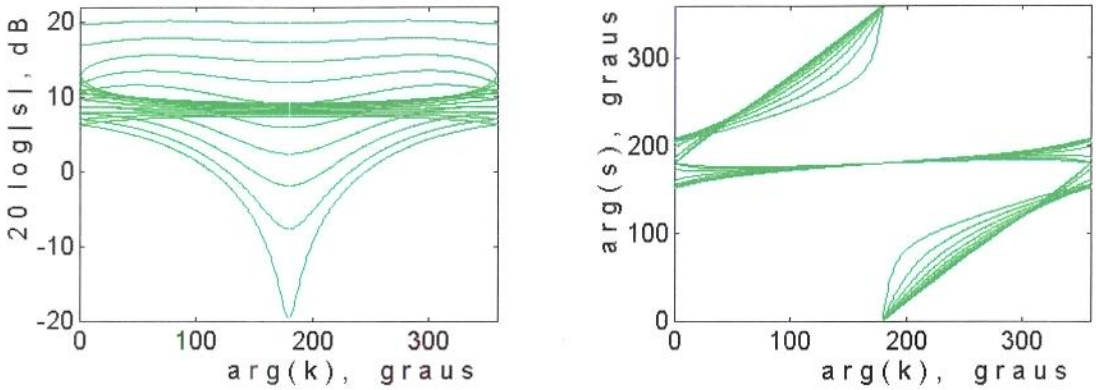


Figura 2.2.16. Curvas-G de g1(s) *com valores crescentes de G, entre -2,5 dB e +20 dB. Estas curvas se subdividem em dois grupos: um primeiro grupo tende a rodear o zero em -3 e apresenta pequenas variações de ângulo de fase, e outro grupo tende a rodear o plano-s, com valores grandes de magnitude em dB.*

2.2.4. *Nova Graficação, de Superfície-k de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica* versus *Ângulo de Fase*

Na Figura 2.2.17 apresentamos a mesma superfície-k de Riemann da Figura 2.2.3, mas ao invés de representar o plano-s diretamente, representamos magnitudes de s em decibels *versus* ângulos de fase de s em graus. Esta é uma representação do plano-s semelhante à representação do plano-g(s) criada por Nichols para graficar a resposta em freqüência.

Esta nova graficação da superfície-k de Riemann inclui o lugar das raízes. Pode-se facilmente graficar em separado o lugar das raízes usando este mesmo tipo de gráfico. A Figura 2.2.18 mostra com mais detalhe as curvas-F de ±180°, em vermelho. Nesta figura também é possível identificar com clareza os dois pólos e o zero do sistema. O pólo em -1 tem 0 dB e 180° e o pólo em -2 tem 6,021 dB e 180°. A exemplo do lugar das raízes convencional, os pólos são representados com um "xis" '✖'. O zero em -3 também aparece no gráfico: ele tem 9,542 dB e 180°, e é identificado com um círculo: 'O'.

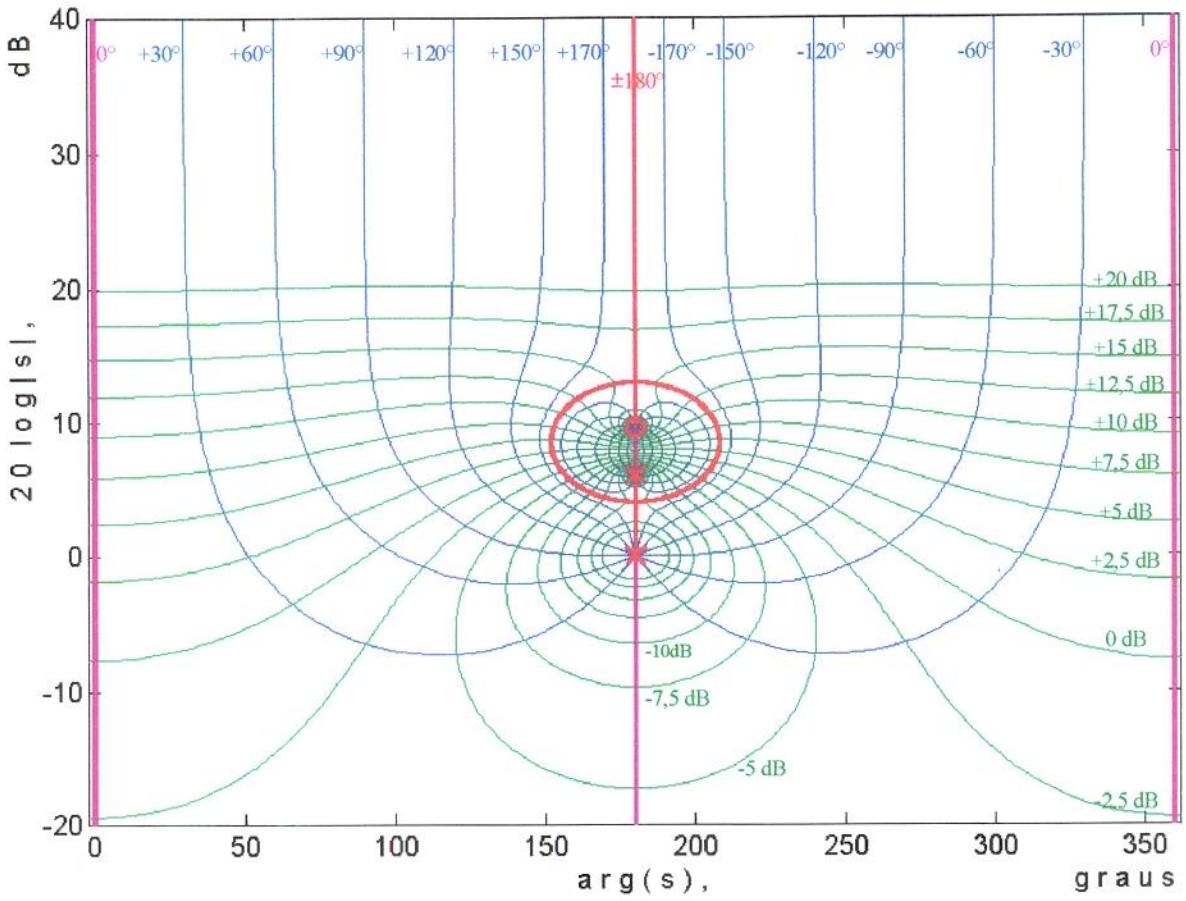


Figura 2.2.17. Módulos em decibels versus *ângulo de fase em graus da variável-s das Curvas-G e Curvas-F do sistema* g1(s).

Apenas a origem do plano-s não pode ser representada neste gráfico. O lugar das raízes complementar, por exemplo, tem um dos seus ramos passando pela origem. Os ramos do lugar das raízes complementar são representados em magenta (F = 0°), e o ramo que passa pela origem parte do pólo em -1 e vai em direção à origem. Isto é representado no novo gráfico com uma curva magenta vertical para baixo a partir de 0 dB e 180°, que é o pólo. Depois de passar a origem, o ramo tende ao infinito no eixo real. Isto é representado com uma curva magenta vertical em 0° que atravessa o gráfico (teoricamente desde -∞ dB até +∞ dB). Esta mesma curva pode ser representada em 360° — o lugar geométrico é o mesmo. O gráfico da Figura 2.2.17 mostra as curvas descritas. Na verdade o ramo que passa pela origem tem o trecho à direita da origem duplamente representado: a curva magenta com 0° e a curva magenta com 360° são equivalentes. Isto coloca em evidência a característica de repetição do gráfico. Afinal, o mesmo lugar geométrico pode ser representado com um ângulo θ, ou então com (θ + 360°), ou ainda (θ - 360°). Podemos considerar então que o extremo esquerdo do gráfico "encosta" no extremo direito.

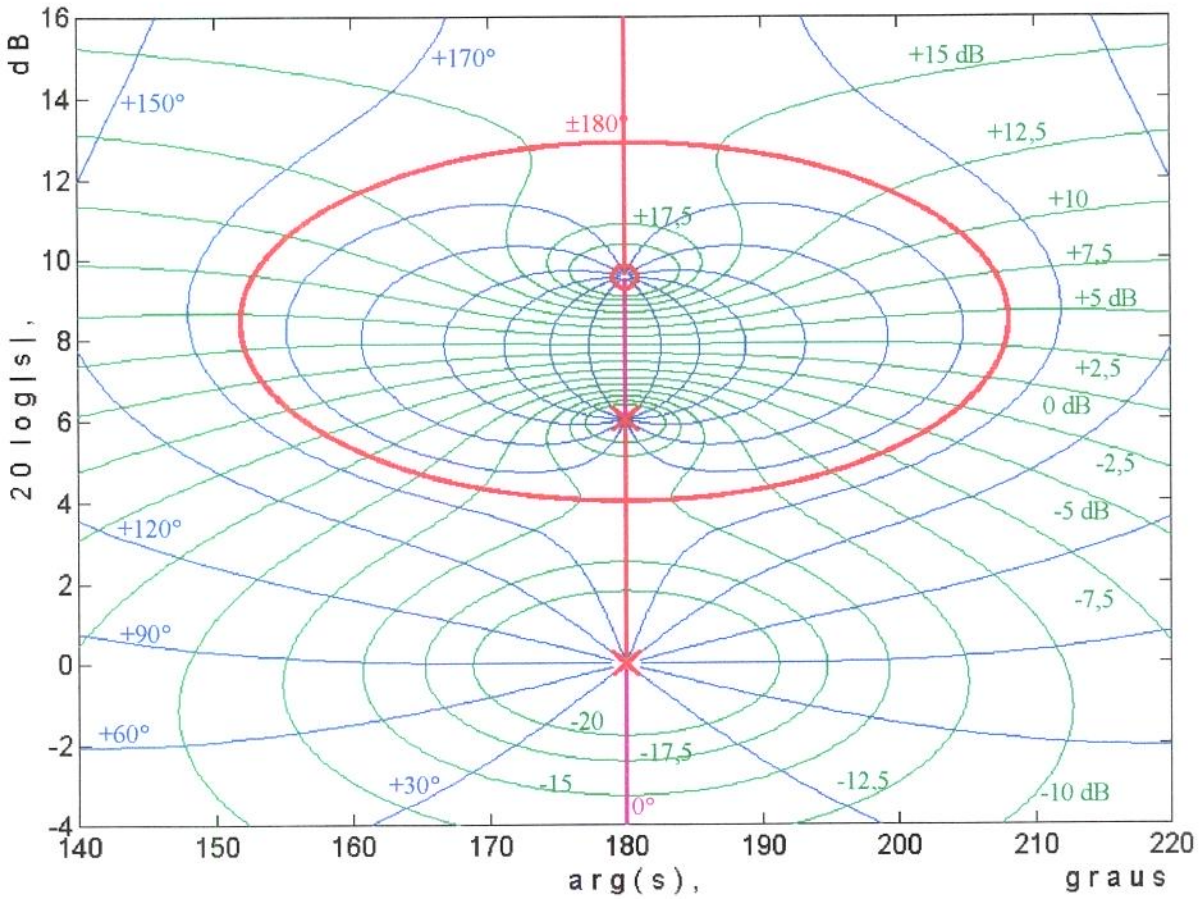


Figura 2.2.18. Curvas-F e Curvas-G da Figura 2.2.17, apresentando com maior detalhe a região dos pólos e do zero de g1(s).

2.2.5. Novas Representações para Superfície-k de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais

Depois de vermos todas as graficações bidimensionais de superfícies-k de Riemann nas seções anteriores, podemos pensar um pouco nas possíveis representações tridimensionais. Sabemos que a importância deste tipo de gráfico não está na precisão dos dados mostrados, e sim na melhor visualização do gráfico com uma dimensão a mais, fazendo com que consigamos nos dar conta das ligações existentes entre as diversas curvas graficadas, algumas dificilmente identificáveis quando não lidamos com todas as dimensões envolvidas, que no caso de superfícies-k de Riemann são 4: duas da variável ganho k e duas da variável freqüência complexa s.

A primeira graficação que sugerimos é a graficação tridimensional da superfície-k de Riemann representada no plano-s. As duas dimensões normais são as partes real e imaginária da variável s, como apresentado na Seção 2.2.1. A terceira dimensão, a ser acrescentada, seria o módulo em dB do ganho de realimentação k. O gráfico começaria com as curvas-F todas nos pólos de malha-aberta com valores negativos bem grandes para k em dB. À medida que o ganho vai aumentando, as curvas-F vão passando por curvas-G. Cada curva-G fica em um plano-s com posição definida por G. Se $G = 0$ dB, por exemplo, a curva-G correspondente fica em um plano-s definido em $20\log|k| = 0$ dB, ou seja, $|k| = 1$. Em um gráfico assim, é claro que a dimensão do ângulo de fase de k não apareceria. Neste gráfico, ainda, seria possível ver o lugar das raízes tridimensional, com a curva-F de $\pm 180°$ variando seus valores em s à medida que a terceira dimensão, o ganho k, varia.

Outra graficação que sugerimos é uma graficação que poderíamos chamar de dual da anterior. Faríamos uma graficação em três dimensões do plano-s, com sua parte real e sua parte imaginária, como descrito na Seção 2.2.1, e do ângulo de fase da variável k. Neste gráfico seria possível ver todas as variações das curvas-G. As curvas-F, apesar de graficadas, ficariam restritas a um segundo plano, por se apresentarem como planos bidimensionais no gráfico tridimensional.

Seguindo agora para a generalização do diagrama de ganho apresentada na Seção 2.2.2, seria possível acrescentar uma terceira dimensão a cada gráfico: o ângulo de fase de k. A idéia é semelhante à representação de Bode para a resposta em freqüência ou a representação do diagrama de ganho para lugar das raízes. Dois gráficos de dimensão 2 representam bem um espaço de dimensão 3. Poderíamos então representar 4 dimensões em dois gráficos de 3 dimensões cada. O primeiro destes gráficos seria das magnitudes em dB da variável-s em função das magnitudes de k e do ângulos de fase de k. O segundo gráfico seria

dos ângulos de fase em graus da variável-s em função das magnitudes de k e dos ângulos de fase de k.

Para dar uma idéia de como seria um gráfico assim, mostramos na Figura 2.2.19 o mesmo gráfico da Figura 2.2.5, onde são graficadas as curvas-F de g1(s): magnitudes em dB da variável-s em função das variações de magnitude da variável-k. A terceira dimensão que seria acrescentada aparece implícita no gráfico da Figura 2.2.19, porque as curvas-G estão superpostas ao gráfico, representadas com retas, porque elas têm variações de magnitude mantendo a magnitude do ganho k. As curvas-G são geradas a partir da variação dos ângulos de fase de k. Esta seria a terceira dimensão.

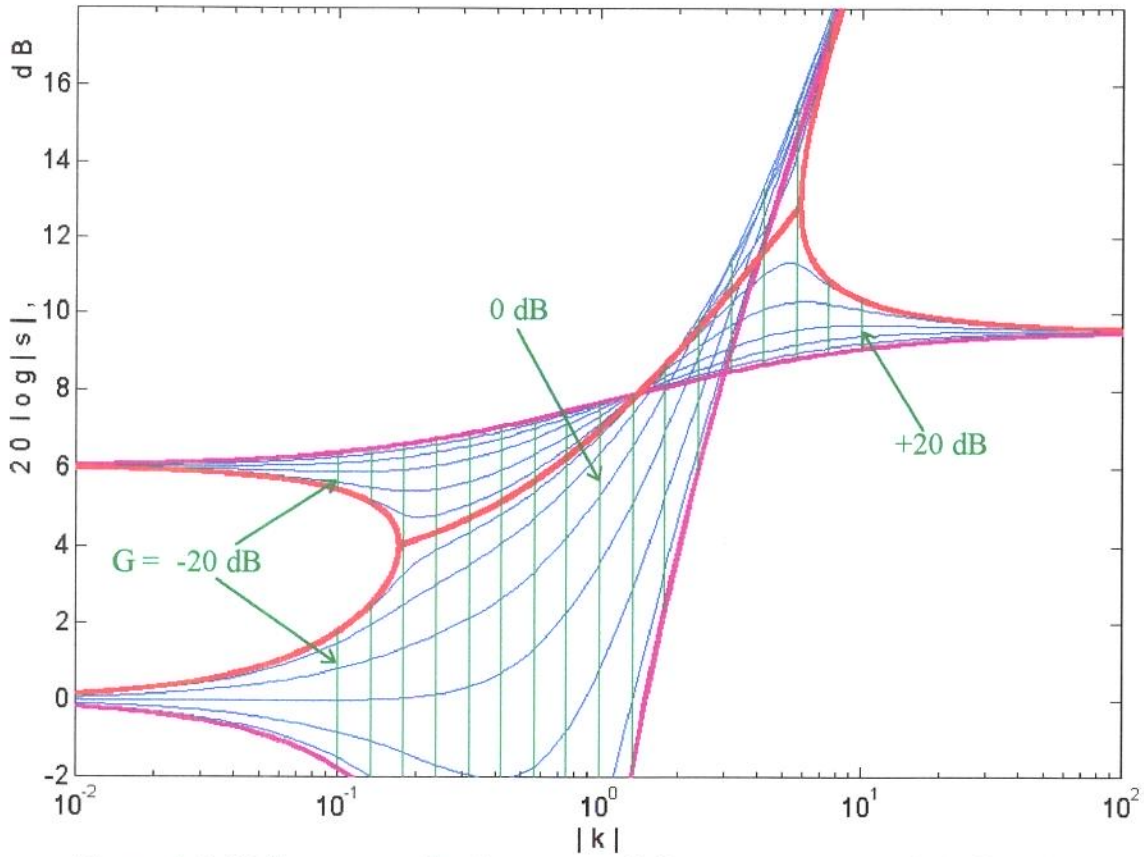


Figura 2.2.19. Representação das curvas-G (retas verticais verdes) de g1(s) *no diagrama de magnitudes em dB das curvas-F em função da variação de magnitude de k. Em um gráfico tridimensional com módulo de k e ângulo de k, as curvas-G e as curvas-F suas variações de magnitude bem representadas.*

O gráfico da Figura 2.2.20 é o mesmo da Figura 2.2.6, onde são graficados os ângulos de fase em graus das curvas-F de g1(s) em função das variações de magnitude do ganho k. As curvas-G são representadas através de retas com magnitudes de k constantes. As variações de ângulo de fase k seriam representadas na terceira dimensão.

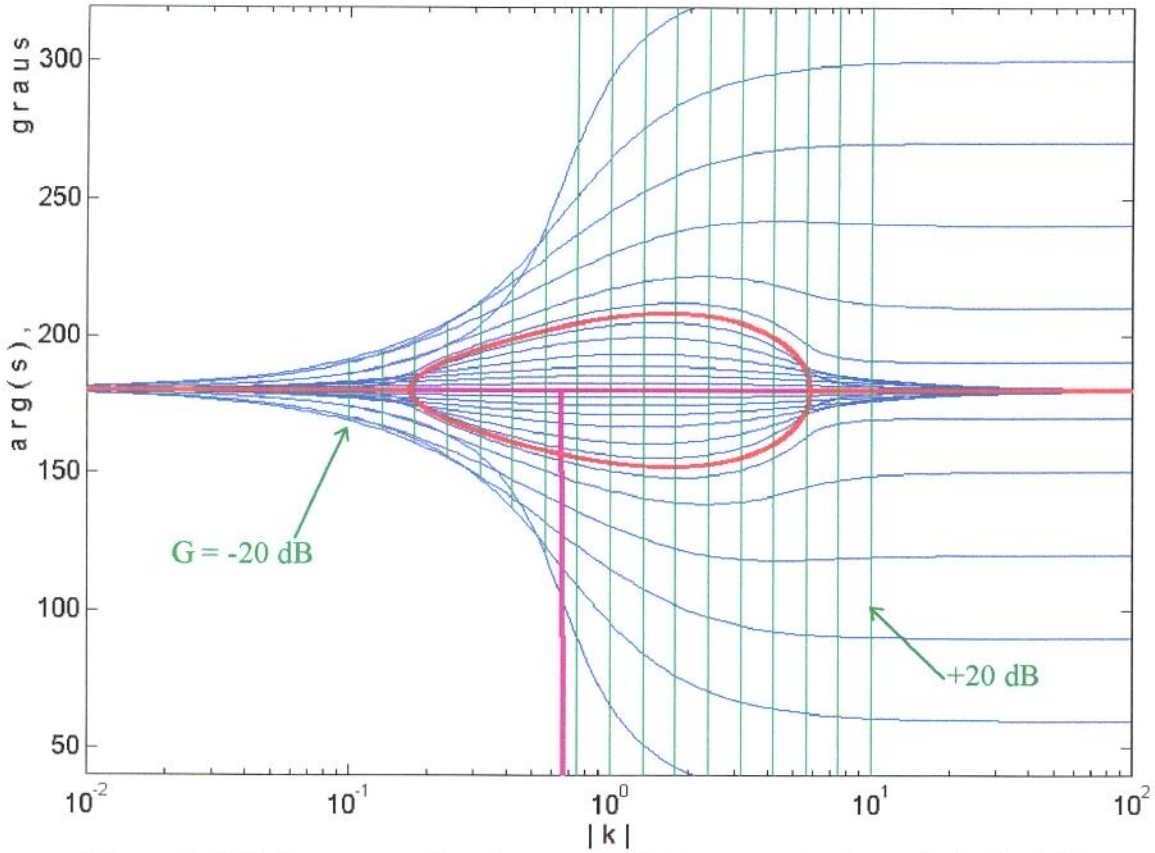


Figura 2.2.20. Representação das curvas-G (retas verticais verdes) de g1(s) *no diagrama de ângulos de fase em graus das curvas-F em função da variação de magnitude de k. Em um gráfico tridimensional com módulo de k e ângulo de k, as curvas-G e as curvas-F suas variações ângulo de fase bem representadas.*

Nas Figuras 2.2.19 e 2.2.20 foram representadas as curvas-G (verdes) desde G = -20 dB ate G = +20 dB, com espaçamento uniforme de 2,5 dB entre elas. A curva-G de G = -20 dB, por exemplo aparece onde está indicado $|k| = 10^{-1} = 0{,}1$. Já a curva-G de G = +20 dB aparece onde está indicado $|k| = 10^{+1} = 10$.

Analogamente aos gráficos das Figuras 2.2.19 e 2.2.20, que situam as curvas-G em gráficos das curvas-F, podemos representar as curvas-F em gráficos das curvas-G. Assim, a Figura 2.2.21 vem da Figura 2.2.13 e representa em verde as magnitudes em dB das curvas-G de g1(s) em função dos ângulos de fase da variável ganho k. Representa em azul as magnitudes em dB das curvas-F em retas sem variação do ângulo de fase de k. Também a Figura 2.2.22 vem da Figura 2.2.14 e representa em verde os ângulos de fase em graus das curvas-G de g1(s) em função dos ângulos de fase de k. Em azul estão representados os ângulos de fase das curvas-F em retas verticais azuis, pois cada curva-F mantém o valor do ganho k.

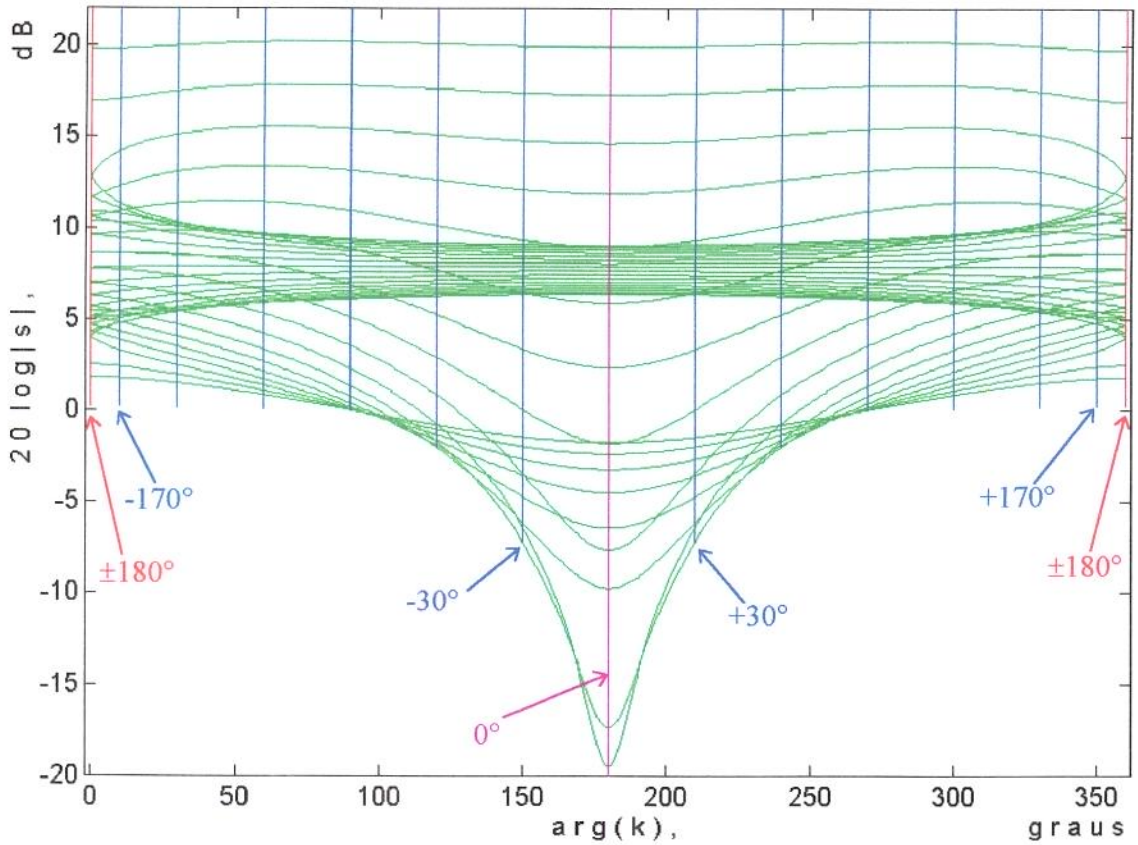


Figura 2.2.21. Magnitudes das curvas-F de g1(s) *em gráfico de magnitudes das curvas-G* versus *variação dos ângulos de fase de k.*

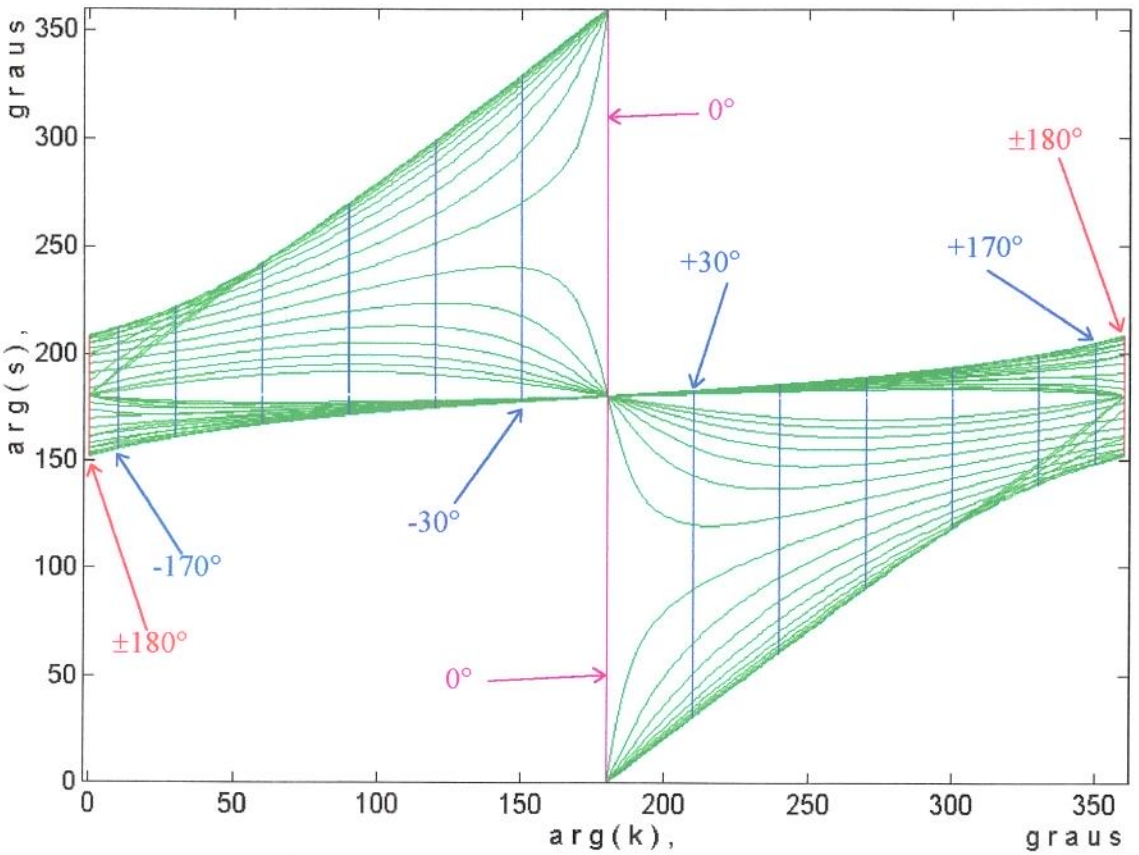


Figura 2.2.22. Ângulos de fase das curvas-F de g1(s) *em gráfico das fases das curvas-G* versus *variação dos ângulos de k.*

É possível identificar nas Figuras 2.2.21 e 2.2.22 onde estão todas as curvas-F de g1(s). Uma vez que o ângulo F é o ângulo emprestado da variável (-k), então podemos considerar que F = [±180° - arg(k)]. Desta forma, a curva representada onde arg(k) = 0° é a curva-F de F = ±180°, ou seja, o lugar das raízes, e está representada em vermelho. Estão representadas logo após as curvas de F = -170°, -150°, -120°, -90°, -60°, -30°, 0°, +30°, +60°, +90°, +120°, +150° e +170°. A curva magenta em arg(k) = 180° é a curva-F de F = 0°, ou seja, o lugar das raízes complementar. A curva do lugar das raízes, com F = ±180°, aparece repetida em arg(k) = +360°.

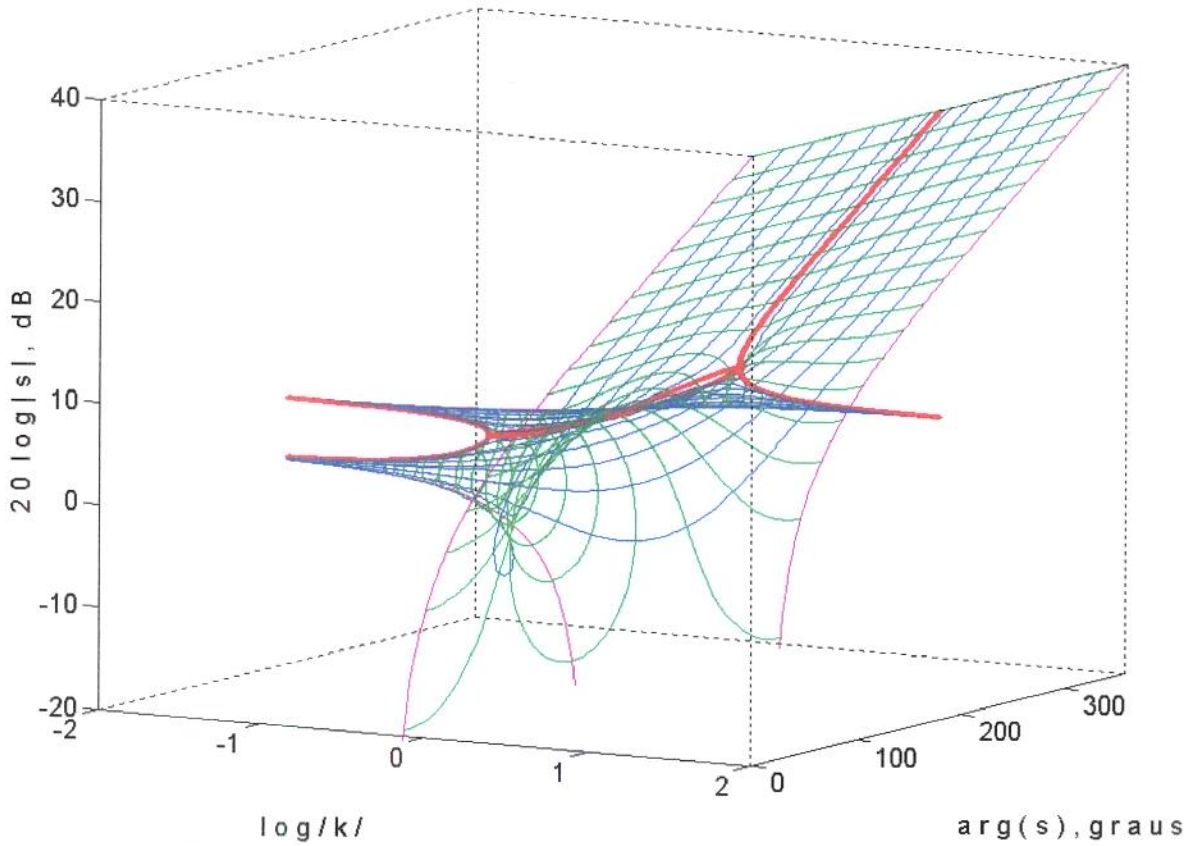


Figura 2.2.23. Representação completa tridimensional da superfície-k de Riemann, em função das variações no módulo de k.

Finalizando, podemos acrescentar uma dimensão aos gráficos da Seção 2.2.4. Podemos representar magnitude em dB e ângulo de fase em graus da variável-s em função de variações na magnitude do ganho k, ou então em função de variações nos ângulos de fase do ganho k. A Figura 2.2.23 mostra a representação completa, ou seja, com curvas-G e curvas-F, da superfície-k de Riemann de g1(s), em função das variações de magnitude em k. É possível ver que embora o espaço bidimensional do plano-s seja totalmente preenchido pelas superfícies-k (como nas Seções 2.2.1 e 2.2.4), o espaço tridimensional não é totalmente preenchido, podendo ser identificados formatos bem definidos para a superfície-k de Riemann. Nesta figura foram usadas curvas-G desde -40 dB até +40 dB.

Sempre que quisermos, podemos graficar apenas uma parte da superfície-k de Riemann. Exemplo disto, é o gráfico tridimensional do lugar das raízes representado em forma de diagrama de ganho, mostrado na Figura 2.2.24. Neste gráfico usamos sombreamento abaixo das curvas vermelhas para facilitar a identificação de posição tridimensional dos ramos do lugar das raízes. Além disto, podemos identificar no gráfico tridimensional três planos bem definidos: o primeiro, na base do gráfico, é obtido com a supressão da magnitude de s. A projeção da curva tridimensional dá o gráfico de fase do diagrama de ganho. Outro plano, é o plano do fundo, onde o ângulo de fase de s foi suprimido. A projeção da curva tridimensional dá o gráfico de magnitude do diagrama de ganho. Finalmente, o terceiro plano é o plano que aparece à esquerda, onde foi suprimida a variável de magnitude de k. A projeção da curva tridimensional dá o plano-s modificado, com magnitude de s em dB em função dos ângulos de fase de s em graus. É o lugar das raízes representado como foi apresentado na Seção 2.2.4.

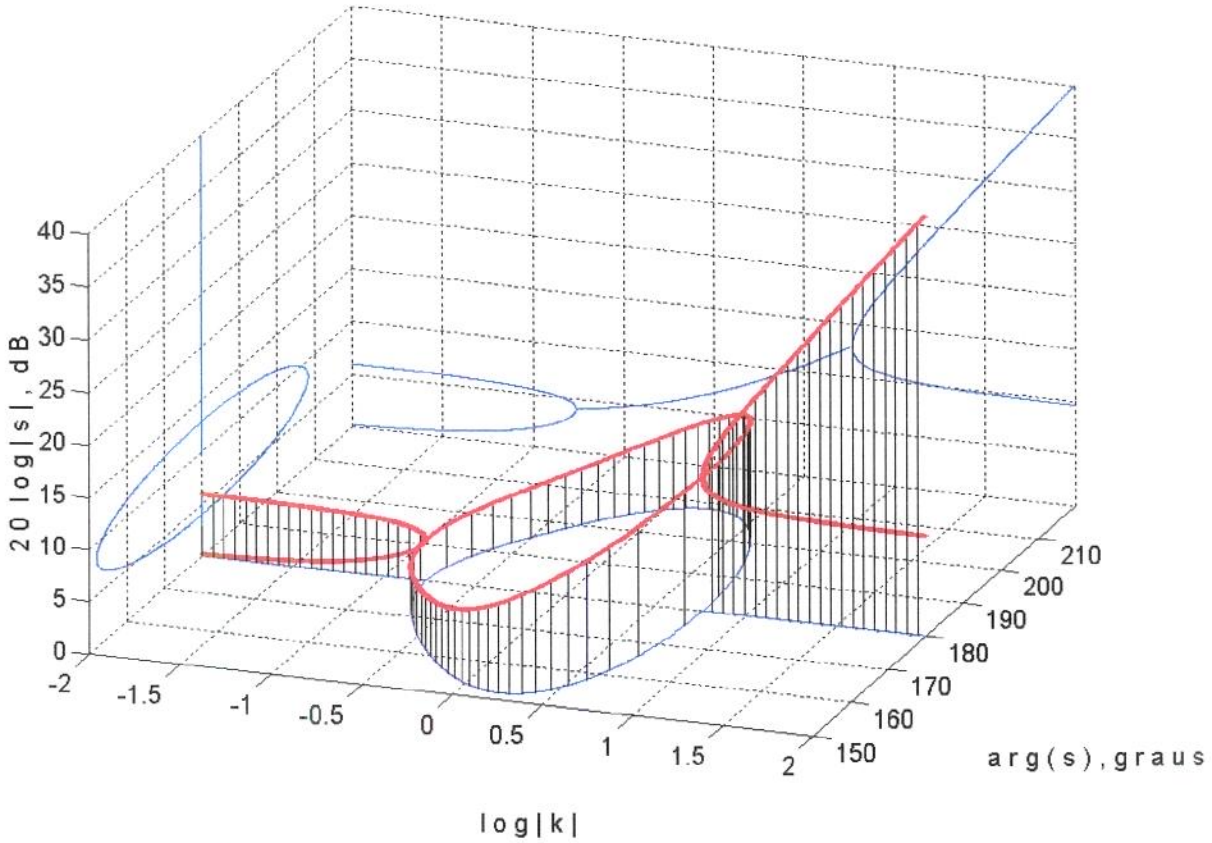


Figura 2.2.24. Esta figura mostra em três dimensões os dois planos dos diagramas de ganho de g1(s)*, que em superfícies-k de Riemann chamamos de curvas-F de F = 180º, e ainda o plano-s modificado com magnitude de s em dB* versus *ângulo de s em graus, também com a curva-F de F = 180º.*

2.3. SUPERFÍCIE-S DE RIEMANN E DIAGRAMA DE NYQUIST EM SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL

A superfície-s de Riemann de um sistema de controle monovariável é calculada através do mapeamento conforme do plano complexo-s no plano complexo-g(s), onde g(s) é a função de transferência do sistema.

A superfície-s de Riemann é a aplicação direta da função de transferência, e representa a generalização das graficações de resposta em freqüência, onde $s = j\omega$.

Seja o sistema descrito na Figura 2.1.1 da seção 2.1, e que mostramos novamente na Figura 2.3.1. O objetivo final é inferir sobre a estabilidade do sistema realimentado $h(s) = g(s) / \{1 + k \cdot g(s)\}$ quando o ganho de realimentação é $k = +1$, ou seja, o sistema tem realimentação negativa e unitária, tendo então $h(s) = g(s) / \{1 + g(s)\}$. Para um sistema assim, é válida a aplicação do critério de estabilidade de Nyquist sobre o gráfico de resposta em freqüência do sistema não-realimentado $g(s)\big|_{s=j\omega} = g(j\omega)$. Este assunto foi estudado no Capítulo 1, onde foram graficadas curvas de resposta em freqüência e verificadas as margens de estabilidade do sistema, chegando à determinação da estabilidade do sistema realimentado como descrito acima.

A superfície-s de Riemann é composta por curvas em g(s) onde a cada valor $\overline{s} \in \mathbf{C}$ do plano complexo-s corresponde um valor $\overline{g} = g(\overline{s})$, $\overline{g} \in \mathbf{C}$, no plano complexo-g(s).

Desta forma, é possível formar curvas no plano-g(s) a partir de curvas no plano-s com ângulo constante ou módulo constante. A superfície-s é graficada no mesmo plano-g(s) onde é graficada a curva de resposta em freqüência $g(j\omega)$, sendo que esta curva em particular é aquela em que a variável s assume o valor $s = j\omega$ e o ângulo $\arg(s) = +90°$.

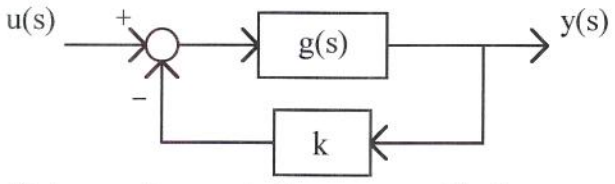


Figura 2.3.1. Sistema de controle monovariável com planta g(s) *e realimentação negativa com ganho* k, $k \in \mathbf{R}^+$.

2.4. MÉTODO PROPOSTO PARA CÁLCULO E GRAFICAÇÃO DE SUPERFÍCIE-S DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL

De acordo com a seção anterior, propomos para a graficação da superfície-s de Riemann de um sistema de controle monovariável g(s) a definição de curvas com ângulos constantes no plano-s, s ∈ **C**, como visto na Figura 2.4.1, e curvas com módulos constantes no plano-s, s ∈ **C**, como visto na Figura 2.4.2.

A Figura 2.4.1 mostra as curvas do plano-s com os seguintes ângulos: 0°, +30°, +60°, +90°, +120°, +150°, ±180°, -150°, -120°, -90°, -60° e -30°. As curvas geradas no plano-g(s) serão chamadas **Curvas-F** da superfície-s de Riemann, como alusão à fase constante de s, onde **F** serve para identificar a curva. No caso de superfície-s de Riemann, o próprio ângulo da variável s será o ângulo representativo da curva. Assim, por exemplo, quando arg(s) = +30°, então a curva-F gerada no plano-g(s), será representada por F = +30°. Como caso particular, quando s = jω, então arg(s) = +90°, e a curva-F com F = +90° é a curva de resposta em freqüência g(jω) do sistema de controle.

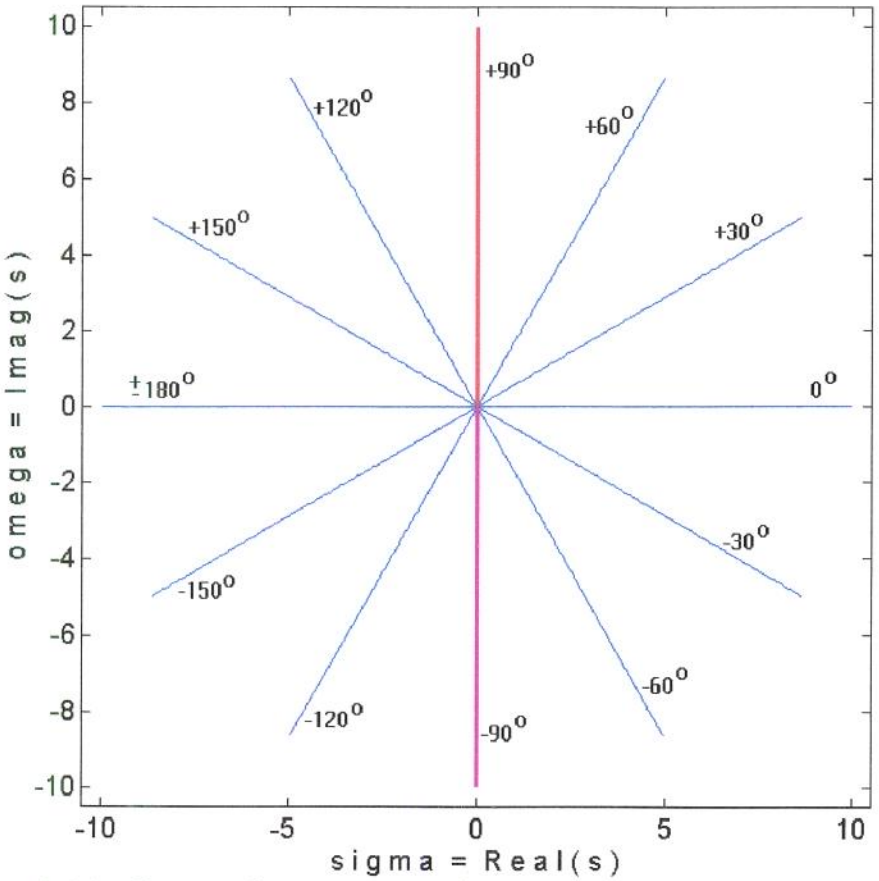


Figura 2.4.1. Curvas de s com ângulos constantes para superfície-s de Riemann

A Figura 2.4.2 mostra as curvas do plano-s com os seguintes módulos em decibels: -5 dB, 0 dB, +5 dB, +10 dB, +17,5 dB e +20 dB. Estas curvas geram no plano-g(s) curvas que serão chamadas **Curvas-G** da superfície-s de Riemann, como alusão ao ganho constante de s, onde **G** serve para identificar a curva. Assim, quando $20\log|s| = +20$ dB, então a curva-G gerada no plano-g(s) é a curva de G = +20 dB.

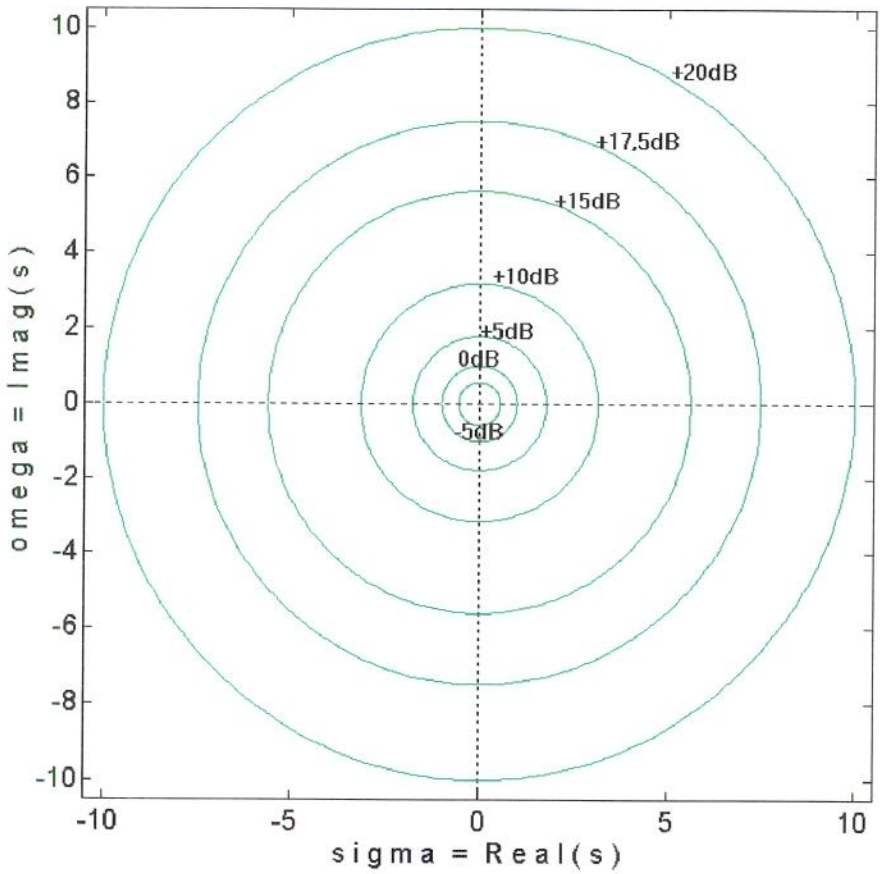


Figura 2.4.2. Curvas de s com módulos constantes para superfície-s de Riemann

Desta forma, o mapeamento completo do plano complexo-s gera o mapeamento completo do plano complexo-g(s) em função das Curvas-G e Curvas-F da superfície-s de Riemann, representada no plano-g(s).

Mais uma vez usaremos uma convenção de cores nas curvas das figuras com o objetivo de facilitar a rápida identificação. Assim, as curvas-G serão representadas em verde, da mesma forma como foram representadas em verde as curvas de magnitude constante da variável s, na Figura 2.4.2. Já as curvas-F genericamente serão representadas em azul, como o são as curvas de s na Figura 2.4.1. Haverá duas curvas-F destacadas com cores especiais: a curva-F com F = +90°, que corresponde à resposta em freqüência g(jω), será representada em vermelho, e a curva-F com F = -90°, que corresponde ao complexo conjugado da resposta em freqüência g(-jω) = conj[g(jω)], será representada em magenta.

2.4.1. Graficação Usual de Superfície-s de Riemann no Plano-g(s)

Exemplificaremos as superfícies-s de Riemann de sistemas de controle monovariável usando o mesmo sistema g1(s) = (s+3) / { (s+1) (s+2) } já utilizado para a graficação das superfícies-k de Riemann.

A superfície-s de Riemann do sistema de controle monovariável g1(s) tem sua graficação na forma convencional mostrada na Figura 2.4.3. Nela é possível identificar em verde as curvas-G, geradas a partir de magnitudes constantes de s, e em azul as curvas-F, geradas a partir de ângulos constantes de s. A curva em magenta é a curva-F com F = -90°, de g1(-jω), e a curva em vermelho é a curva de resposta em freqüência g1(jω) de g1(s), onde F = +90°. A superfície-s de Riemann graficada desta forma é a generalização do diagrama polar do sistema, como apresentado no Capítulo 1, Figura 1.2.1.

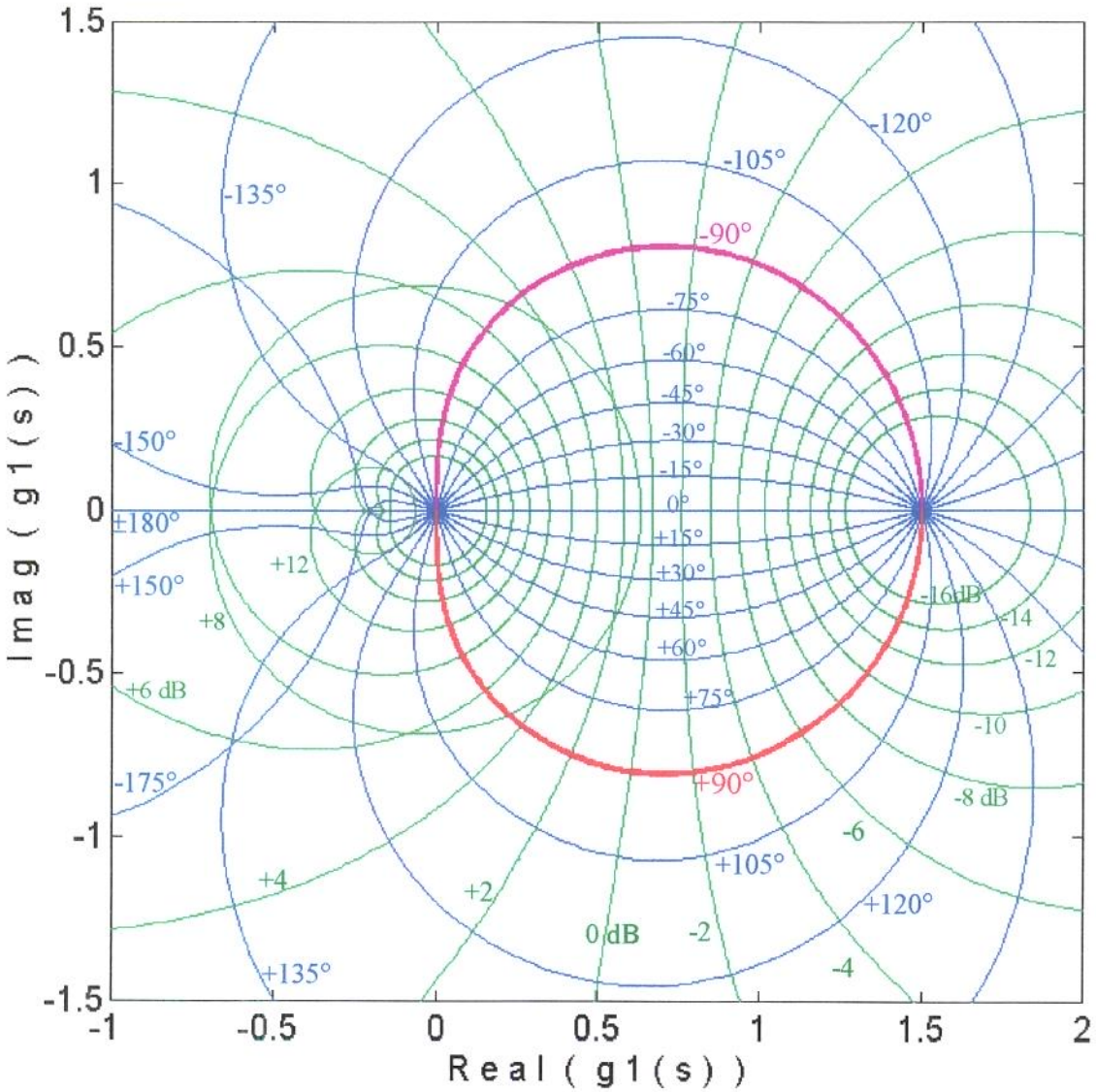


Figura 2.4.3. Superfície-s de Riemann do sistema de controle monovariável g1(s) = (s+3) / { (s+1) (s+2) }.

A Figura 2.4.4 mostra uma extensão maior da mesma superfície-s de Riemann da Figura 2.4.3, sendo então possível identificar as curvas que atingem maiores magnitudes. Cabe ressaltar que todo o plano-g(s) está repleto de curvas-G e curvas-F, mas foram escolhidos valores para G entre -16 dB e +16 dB, espaçados de 2 dB entre eles, e foram escolhidos para F valores entre 0° e ±180°, espaçados de ±15°, para representar a superfície.

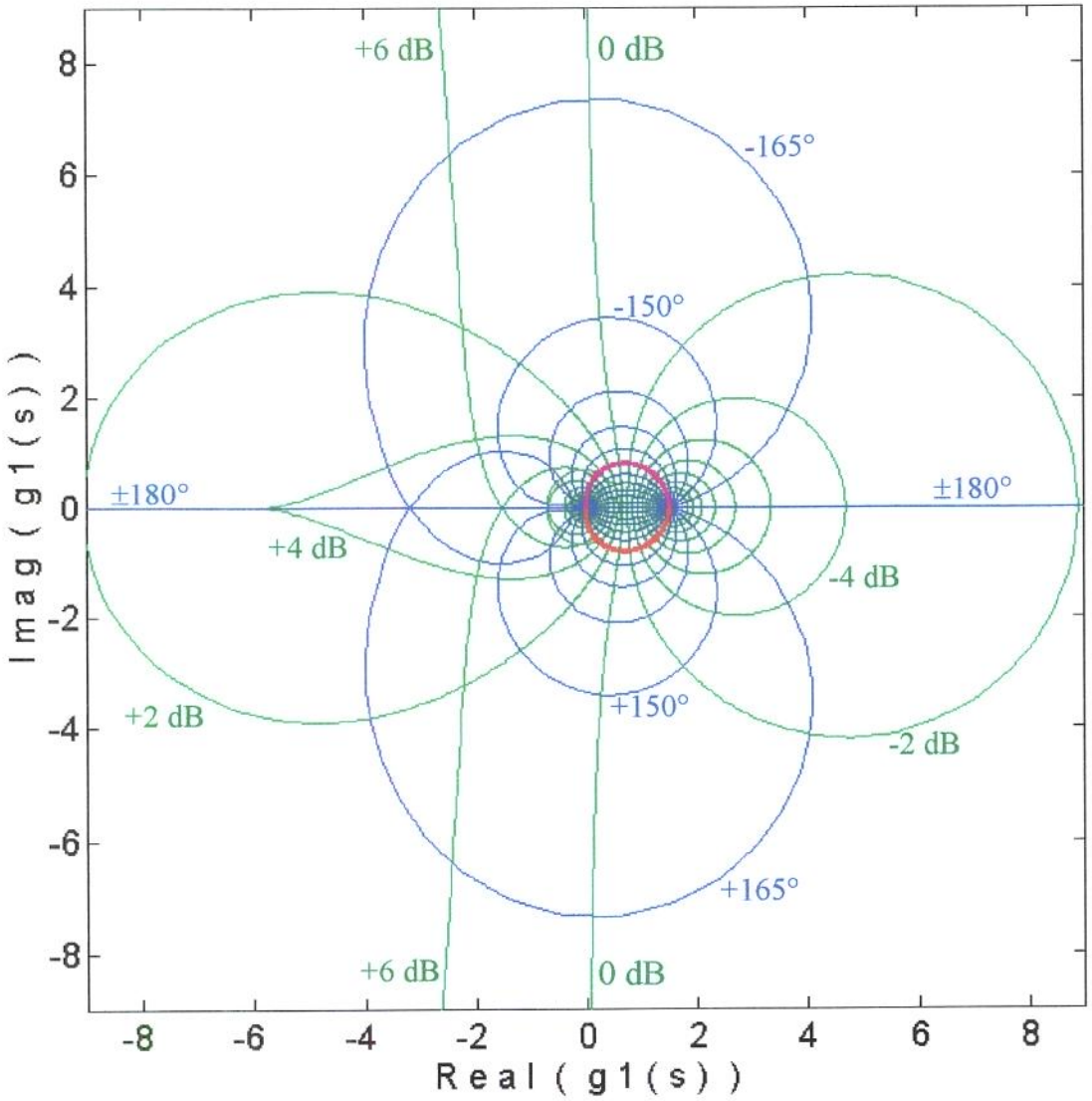


Figura 2.4.4. Visão mais abrangente da superfície-s de Riemann de g1(s).

Na Figura 2.4.3 é possível ver que a curva de G = +8 dB dá duas voltas ao redor da origem. Isto pode ser explicado através da utilização do Teorema de Cauchy, ou Princípio do Argumento [36-41]. Consideremos que seja usado no plano-s um contorno Γ_s que percorra no sentido horário uma das curvas de módulo constante de s. O resultante contorno $\Gamma_{g(s)}$ no plano-g(s) é a curva-G correspondente na superfície-s de Riemann do sistema. Apliquemos o Teorema de Cauchy, e teremos o número de circundamentos da origem que o contorno $\Gamma_{g(s)}$ correspondente terá. Assim, como g1(s)

tem dois pólos, em -1 e -2, e um zero, em -3, então as curvas-G com G menor que 20 log|-1| = 0 dB não circundarão a origem, porque uma curva no plano-s com módulo constante menor que 1 não circunda nem os pólos nem o zero. Da mesma forma, curvas-G com G entre 0 dB e +6,02 dB (= 20 log|-2|) terão um circundamento da origem; curvas-G com G entre +6,02 dB e +9,54 dB (= 20 log|-3|) circundarão duas vezes a origem, e curvas-G com G maior que +9,54 dB circundarão a origem apenas uma vez. A curva de G = +8 dB é o resultado de um circundamento no plano-s que envolve os dois pólos e não envolve o zero, e isto explica as duas voltas ao redor da origem.

2.4.2. *Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F* versus *Magnitudes de s*

Apresentamos nesta seção a generalização para superfície-s de Riemann da representação de diagrama de Bode. Esta graficação apresenta não só a curva de resposta em freqüência, com F = +90°, como todas as outras curvas-F.

A Figura 2.4.5 apresenta dois gráficos: o primeiro, de magnitudes em decibels do ganho complexo g1(s), em função dos módulos das freqüências complexas s que geraram estes ganhos, e o segundo, de ângulos de fase do ganho complexo g1(s) em função também dos módulos das freqüências complexas s. Como descrito antes, a informação é de dimensão quatro, e esta representação apresenta apenas três. Foi retirada a variável ângulo de fase de s, restando as outras três: módulo de s, módulo de g1(s) e ângulo de fase de g1(s). Entretanto, a informação de ângulo de s ainda aparece de forma implícita quando expressamos nas curvas-F o valor do ângulo de s que gerou a curva.

Na Figura 2.4.5 é possível identificar em vermelho a curva-F de +90°, correspondente à resposta em freqüência g1(jω), da mesma forma como descrito no Capítulo 1 e graficado na Figura 1.3.1. Fica claro na Figura 2.4.5 que todas as curvas-F têm a mesma origem, quando |s| é muito pequeno, no ponto de +3,52 dB e 0°. Este ponto é o ponto +1,5 do plano-g(s), e pode ser visto no plano-g(s) da Figura 2.4.3. Já quando |s| é muito grande, todas as curvas-F tendem à origem do plano-g(s) numa aproximação com divisão uniforme de ângulos: as curvas-F chegam na origem de todas as direções. Esta micro-região ao redor da origem do plano-g(s) pode ser considerada como formando uma configuração de Butterworth.

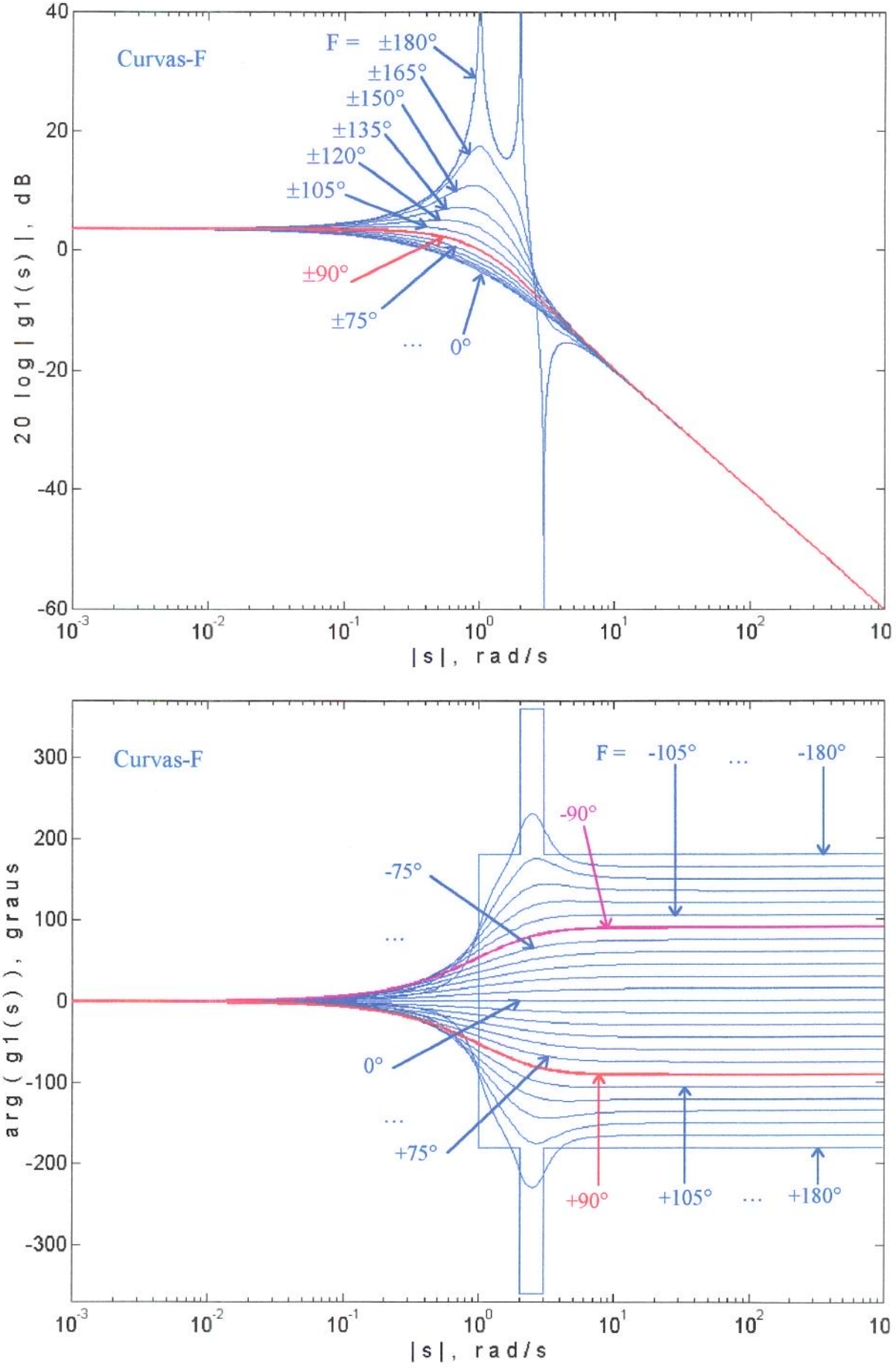


Figura 2.4.5. Generalização do diagrama de Bode para as curvas-F da superfície-s de Riemann de g1(s).

2.4.3. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G versus Ângulos de s

Nos gráficos abaixo representaremos mais uma vez três das quatro dimensões envolvidas nas superfícies-s de Riemann do sistema de controle monovariável g1(s) usado como exemplo. A exemplo da generalização do diagrama de Bode apresentada na Seção 2.4.2, graficaremos curvas de magnitude em dB e ângulo de fase em graus do ganho complexo g1(s). Mas agora, como as curvas a serem representadas são as curvas-G, estas curvas serão graficadas em função da variação dos ângulos da variável complexa s.

A Figura 2.4.6 apresenta o gráfico de magnitudes em dB das curvas-G em função dos ângulos da variável s. Variamos s de 0° a +360° para representar completamente a curva fechada em s representada na Figura 2.4.2. Assim, as curvas-G serão também curvas fechadas no plano-g(s).

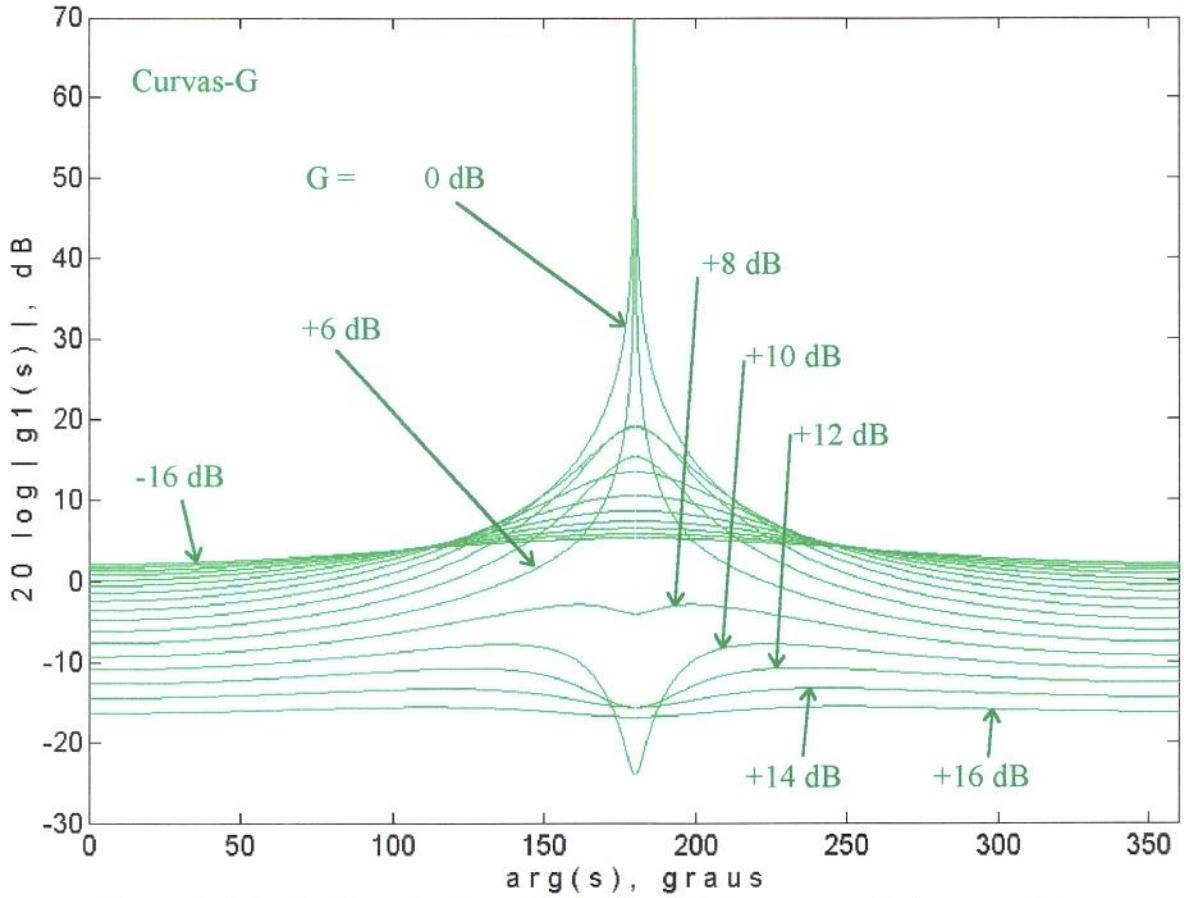


Figura 2.4.6. Gráfico das magnitudes em dB das curvas-G da superfície-s de Riemann de g1(s)*, em função da variação de ângulo de s.*

A informação tridimensional se completa na Figura 2.4.7, que apresenta os ângulos de fase das curvas-G em função da variação de ângulo de s.

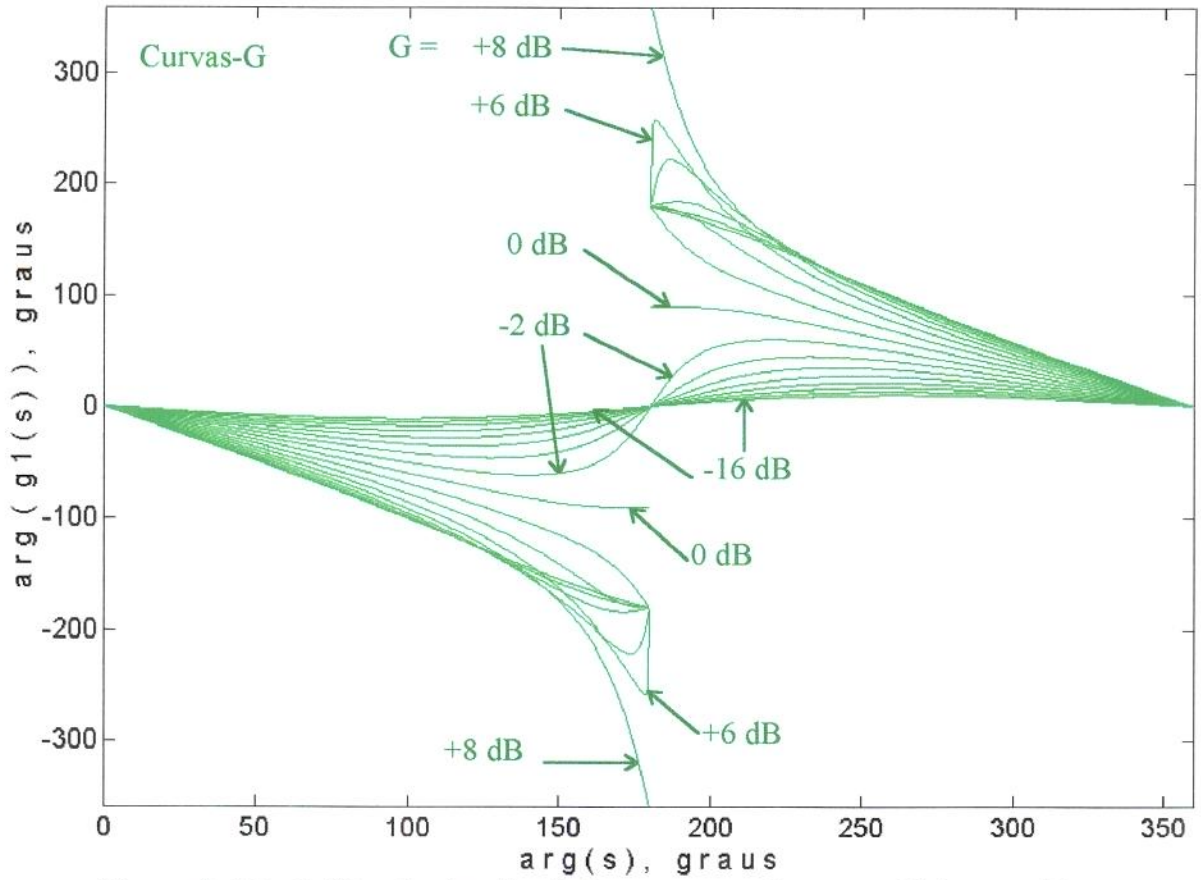


Figura 2.4.7. Gráfico dos ângulos de fase em graus das curvas-G da superfície-s de Riemann de g1(s), *em função da variação de ângulo de s.*

É importante notar que há curvas que não circundam a origem, permanecendo com ângulos perto de 180°, há curvas que circundam a origem uma vez, e que estão representadas na Figura 2.4.7 da seguinte forma: enquanto arg(s) aumenta de 0° até +180°, estas curvas (com 0 dB < G < +6,02 dB ou G > +9,54 dB, como descrito anteriormente) variam de 0° até -180°. A representação na figura é truncada, mas é fácil imaginar que um ponto em -180° pode ser representado em +180° por isto significar o mesmo lugar geométrico no plano-g(s). Assim, quando arg(s) varia desde +180° até +360°, estas curvas variam de +180° até 0°. Há outras curvas que dão duas voltas ao redor da origem (com +6,02 dB < G < +9,54 dB, como descrito anteriormente). Isto é representado com o ângulo de fase destas curvas variando desde 0° (para arg(s) = 0°) até -360° (para arg(s) = +180°), e tendo a continuação truncada para +360°, que representa o mesmo lugar geométrico que o representado por -360°. Assim, a continuação varia desde +360° (para arg(s) = +180°) até 0° (para arg(s) = +360°). Isto representa uma variação total de -720°, com duas voltas ao redor da origem, e no sentido contrário do circundamento feito no plano-s, onde os ângulos variaram desde 0° até +360°.

Fica claro que a representação da Figura 2.4.7 não é única. Poderíamos, representar continuamente cada curva. Isto significaria apenas um trabalho computacional a mais para separar as curvas de acordo com a classificação de valores de G.

2.4.4. *Nova Graficação, de Superfície-s de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica* versus *Ângulo de Fase*

Apresentamos nesta seção uma generalização para superfícies-s de Riemann do tradicional diagrama de Nichols, onde a curva de resposta em freqüência g(jω) é graficada em forma de magnitude g(jω) *versus* ângulo de fase de g(jω). Na verdade, como o gráfico representa de uma forma diferente todo o plano complexo-g(s), então tanto as curvas-F quanto as curvas-G podem ser igualmente representadas. A representação da superfície-s de Riemann do sistema é completa em termos de plano-g(s). O que não fica representado são informações de variação da variável freqüência complexa s que gerou as curvas de ganho complexo g(s).

A Figura 2.4.8 mostra esta nova representação, onde ficam claros os traçados das curvas-G em verde e das curvas-F em azul, sendo que a curva-F em magenta representa F = -90°, ou seja, g(-jω), e a curva em vermelho representa realmente a curva de resposta em freqüência g(jω) como graficada no diagrama de Nichols, conforme podemos ver na Figura 1.4.1 do Capítulo 1.

É possível ver neste gráfico algumas situações particulares. As curvas-G principalmente têm seu traçado mostrado de forma mais esclarecedora neste gráfico. Por exemplo, as curvas com G < 0 dB giram em torno do ponto com +3,52 dB e 0°, que no plano-g(s) é o ponto +1,5. Estas curvas não circundam a origem, que neste gráfico não é realmente representada, situando-se em algum ponto com -∞ dB e qualquer ângulo. A curva com 0 dB começa no gráfico com +∞ dB e -90°, e acaba com +∞ dB e +90°. Isto acontece porque esta curva-G passa exatamente através do pólo em -1, que é um ponto singular de g1(s) para o qual |g1(s)| = ∞.

As curvas com G entre 0 dB e +6,02 dB descrevem uma variação de ângulo de 360°, o que representa uma volta ao redor da origem. Note que a curva de G = 6 dB, está muito próxima de +6,02 dB, e por isto quase tende ao infinito. De fato, se graficássemos a curva com G = +6,02 dB, esta tenderia ao infinito como a curva de 0 dB. Isto porque a curva no plano-s com módulo 2 passa exatamente através do pólo de g1(s) em -2.

A curva G = +8 dB varia desde -360° até +360°, descrevendo uma variação de 720°. Isto exemplifica o fato das curvas-G entre +6,02 dB e +9,54 dB darem duas voltas ao redor da origem. Uma curva com G = +9,54 dB deve passar pela origem, porque a curva em s passa pelo zero em -3.

Finalmente, as curvas-G com G > +9,54 dB circundam apenas uma vez a origem.

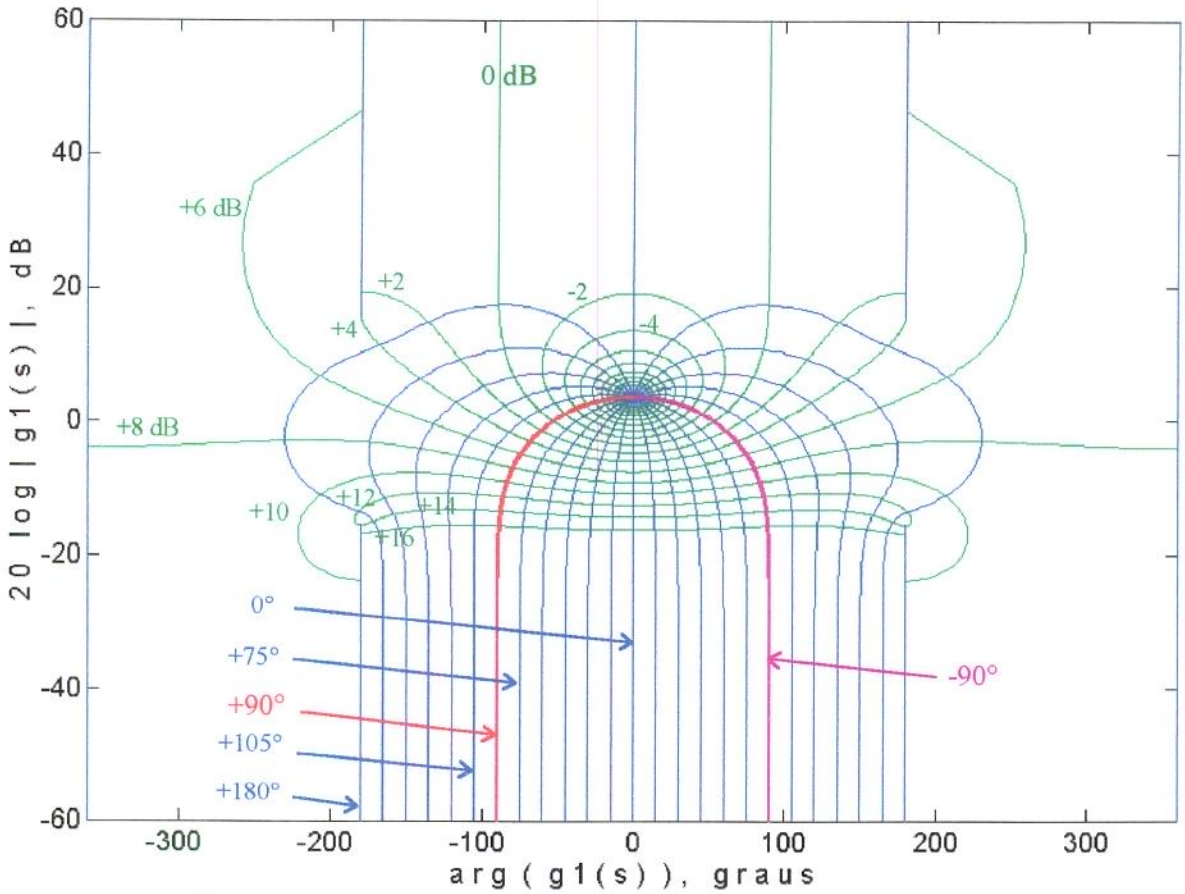


Figura 2.4.8. Generalização do diagrama de Nichols para superfície-s de Riemann, com curvas-G e curvas-F, do sistema g1(s).

2.4.5. Novas Representações para Superfície-s de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais

É possível representar tridimensionalmente qualquer conjunto de três, das quatro dimensões envolvidas nas superfícies-s de Riemann de um sistema de controle. Entretanto, algumas representações não facilitam muito a nossa compreensão. Este será o caso, por exemplo, se graficarmos tridimensionalmente estas três variáveis: { real(s), imag(s), real(g(s)) }, ou então substituirmos real(g(s)) por imag(g(s)). Mas algumas representações facilitam em muito a nossa compreensão. Ressaltaremos então uma representação que nos parece bastante esclarecedora: a representação da magnitude de s em escala logarítmica, da magnitude de g(s) em dB e do ângulo de fase de g(s) em graus. Esta curva tridimensional engloba as curvas bidimensionais das Seções 2.4.2, 2.4.3 e 2.4.4.

Iniciaremos mostrando as curvas-F como graficadas na Seção 2.4.2. Se representássemos nestas curvas as curvas-G, elas seriam retas verticais por não variarem com o módulo de s. Isto está representado na Figura 2.4.9. Já a Figura 2.4.10 mostra a representação das curvas-F nos gráficos das curvas-G representados na Seção 2.4.3.

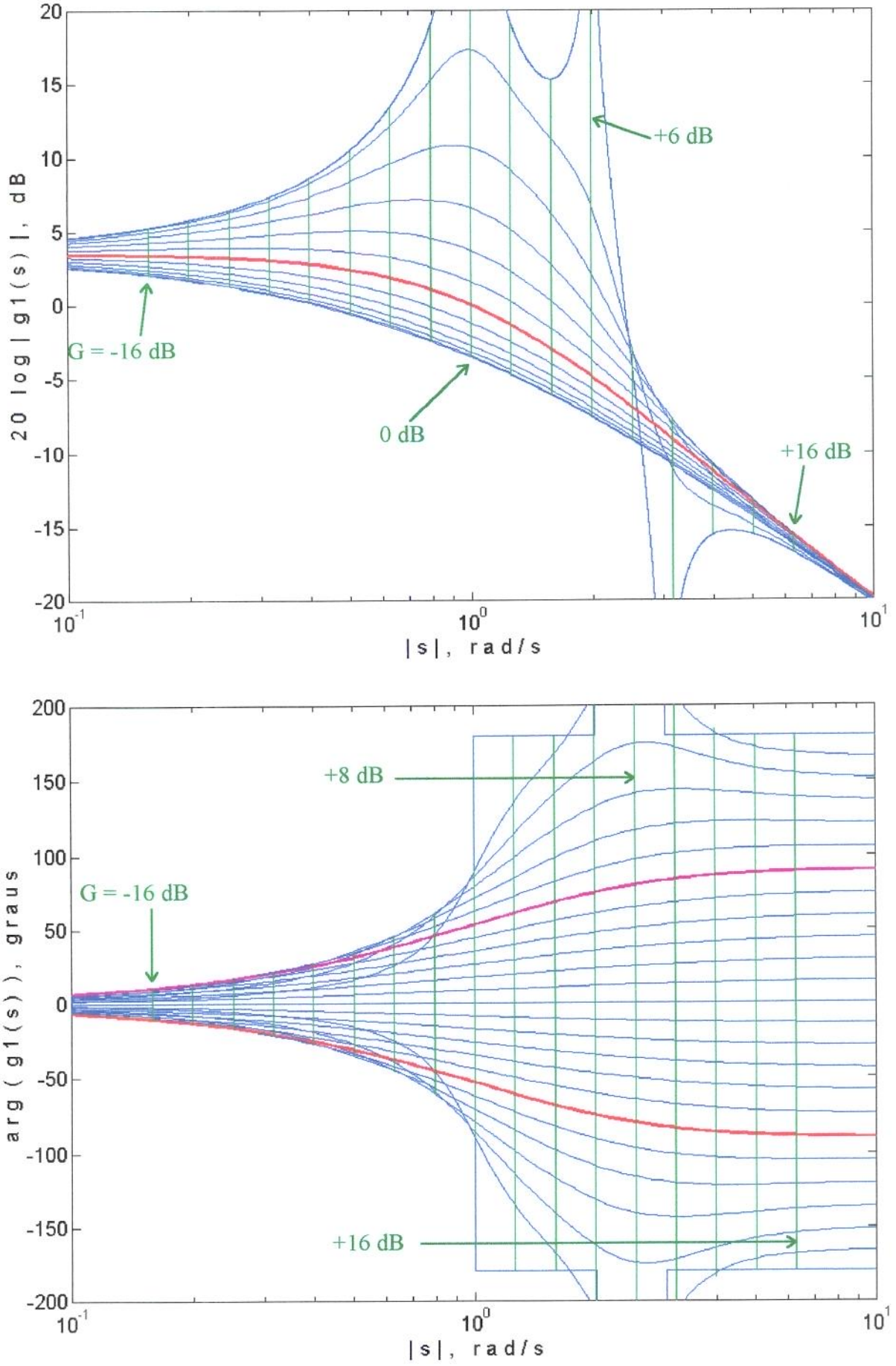


Figura 2.4.9. Representação das curvas-G de g1(s) *entre -16 dB e +16 dB sobre as graficações de curvas-F da Seção 2.4.2.*

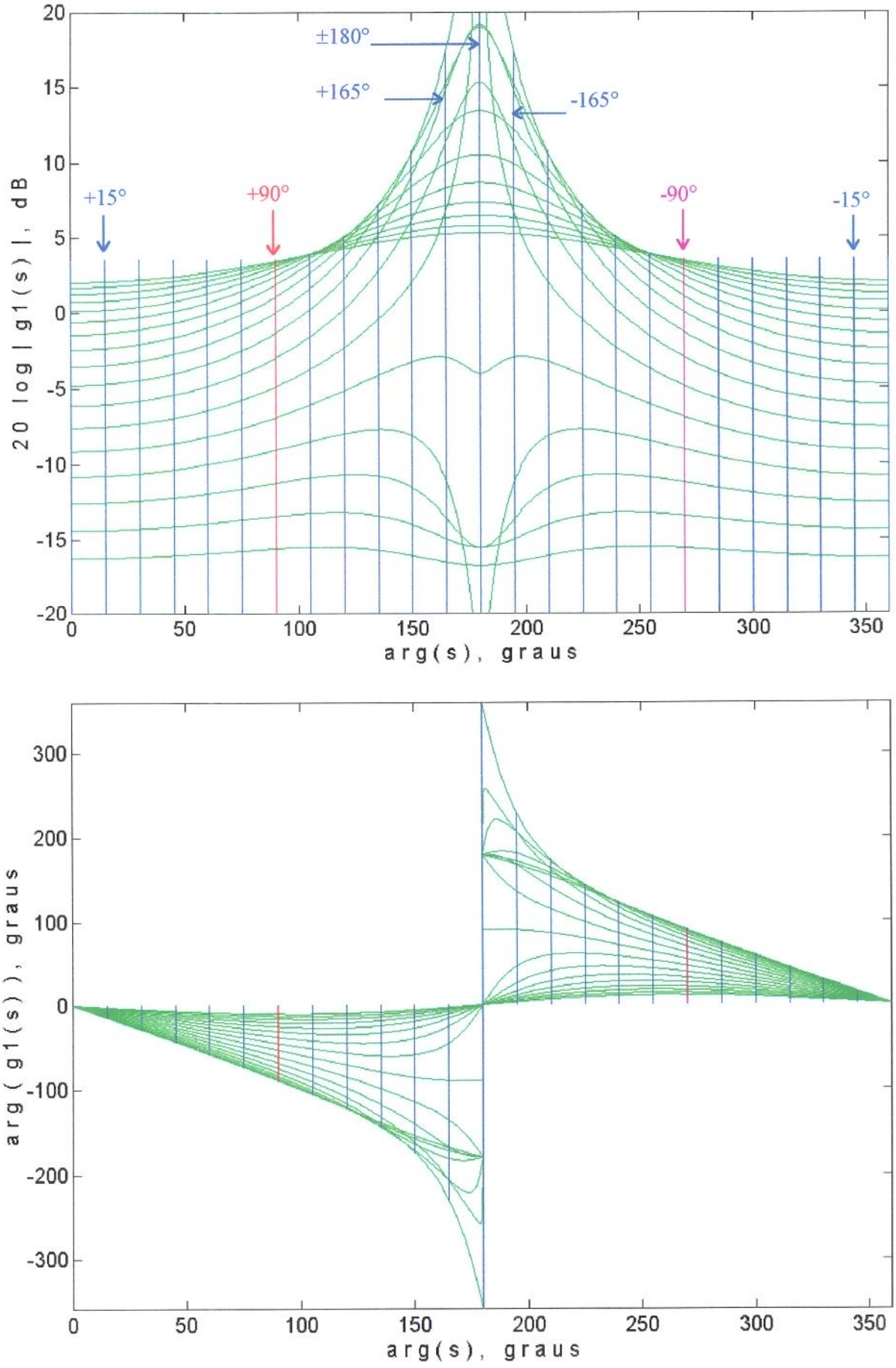


Figura 2.4.10. Representação das curvas-F de g1(s) *nos gráficos das curvas-G como apresentados na Seção 2.4.3.*

A Figura 2.4.11 mostra finalmente a representação tridimensional que generaliza as graficações das seções anteriores. A generalização só não é completa porque as curvas-G não estão representadas em função dos ângulos de s, como na Seção 2.4.3 e na Figura 2.4.10. Entretanto, é possível ter uma boa idéia do comportamento da superfície-s de Riemann do sistema apenas com a variação em magnitude de s.

Na verdade, o gráfico da Figura 2.4.11 representa de forma tridimensional os gráficos generalizados de Bode e Nichols. O diagrama generalizado de Nichols é a projeção desta curva tridimensional no plano do fundo à esquerda, onde aparecem apenas as variáveis arg(g1(s)), em graus, e 20log|g1(s)|, em dB. Já o diagrama generalizado de Bode tem uma de suas curvas como resultado da projeção da curva tridimensional no plano da direita, com 20log|g1(s)|, em dB, em função do módulo de s, em escala logarítmica. A outra curva do diagrama generalizado de Bode é o resultado da projeção da curva tridimensional no plano inferior, onde aparece arg(g1(s)), em graus, em função do módulo logarítmico de s.

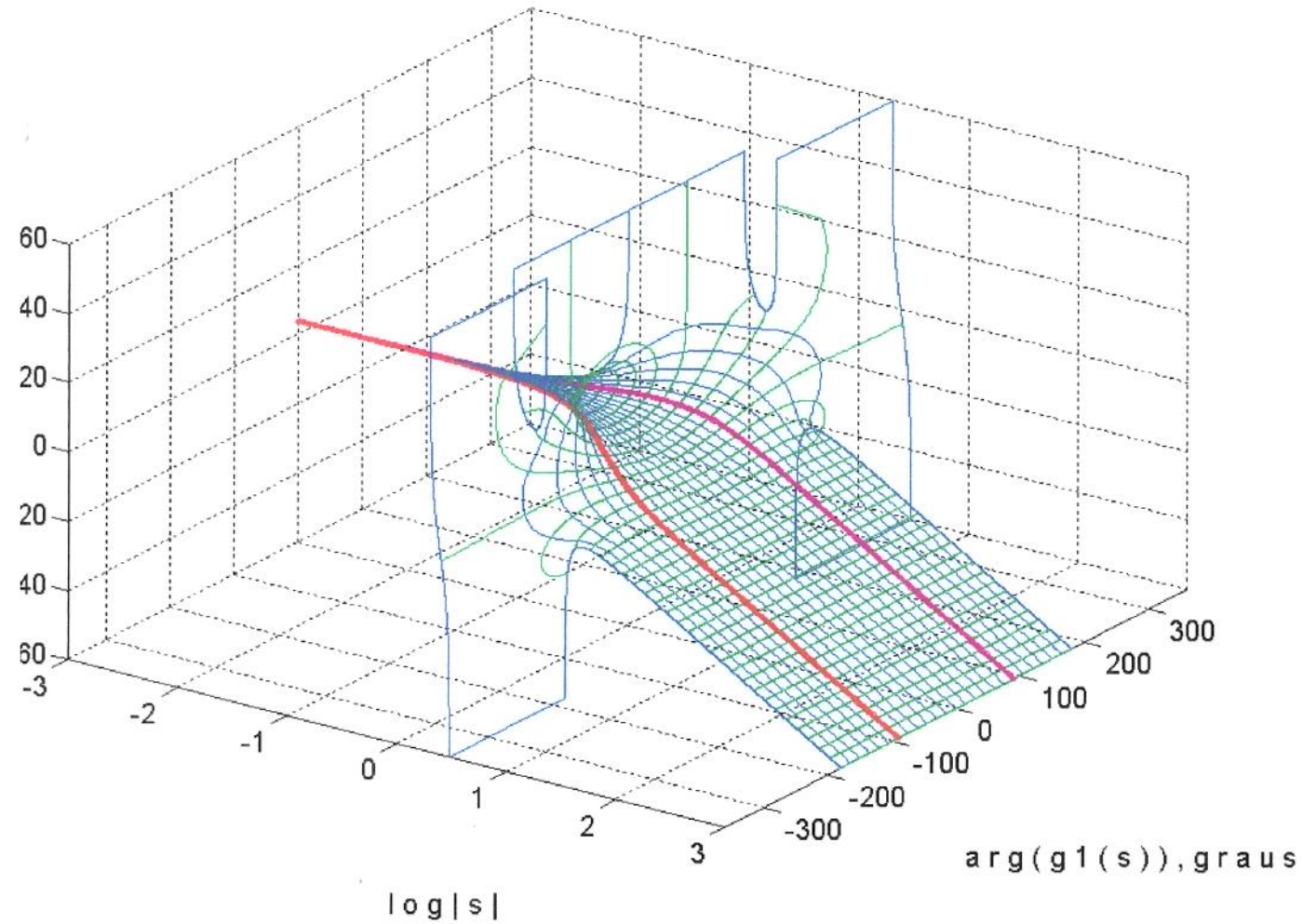


Figura 2.4.11. Generalização tridimensional dos diagramas de Bode e Nichols em superfície-s de Riemann do sistema g1(s).

CAPÍTULO 3

SUPERFÍCIES DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL

Superfícies de Riemann [1,11,16,19,24,59,61] foram introduzidas na teoria de controle multivariável por MacFarlane e seus colaboradores nos anos 70 [41-43,55], com o objetivo de estudar o caso matemático genérico para depois poder compreender os casos particulares complicados, como por exemplo, uma teoria e até uma graficação que descrevessem o comportamento do lugar das raízes dos sistemas de controle, comportamento este tão conhecido no caso monovariável, e tão surpreendente no caso multivariável, exigindo regras totalmente novas [20,23,42,45,51]. Também com o objetivo de chegar ao caso mais genérico para depois procurar compreender os casos particulares, mostraremos neste capítulo como podem ser calculadas e graficadas superfícies de Riemann de sistemas de controle multivariável, representando separadamente ou em conjunto suas folhas, sempre com o objetivo de tornar a compreensão tão fácil quanto possível. As superfícies-k de Riemann são a generalização do lugar das raízes, onde k de real positivo passa a ser complexo. As superfícies-s de Riemann são a generalização da resposta em freqüência em forma de lugares característicos, onde s deixa de ser apenas $j\omega$ para ser qualquer número complexo $s = \sigma + j\omega$.

O cálculo dos cortes das superfícies de Riemann mereceu estudo detalhado por causa da importância que eles têm nessas superfícies como delimitadores das curvas. Além disso, a representação dos cortes na graficação convencional das superfícies de Riemann é relativamente simples: basta traçar uma reta de um ponto de ramificação a outro, ou então traçar uma reta de um ponto de ramificação para o infinito. Já nas novas graficações a representação dos cortes acabou tendo um desafio a mais: não bastam os pontos do corte na superfície de Riemann em si — é necessário saber os valores da variável independente que geram os pontos do corte. Assim, foi necessário o desenvolvimento de um algoritmo que a partir de pontos na superfície de Riemann nos levasse aos valores da variável independente que geraram estes pontos. Dada uma curva na superfície de Riemann estudada, é então possível determinar uma ou mais curvas correspondentes no plano da variável independente. Este algoritmo se mostrou muito útil não só no cálculo dos cortes, para o qual foi desenvolvido, mas também no cálculo das margens de estabilidade do sistema ao ser realimentado, no Capítulo 4.

3.1. SUPERFÍCIE-K DE RIEMANN E LUGAR DAS RAÍZES EM SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL

No caso monovariável cada ponto $\bar{s} \in \mathbf{C}$ do plano-s corresponde a um único valor $\bar{k} \in \mathbf{C}$ que o gerou, e as funções que descrevem este caso são chamadas funções analíticas, pelo fato de serem funções racionais em s, analíticas em todo o plano-s, com exceção apenas dos pólos da função, que são considerados pontos singulares. Já no caso multivariável, para um sistema com *m* entradas e *m* saídas, cada ponto $\bar{s} \in \mathbf{C}$ do plano-s corresponde a *m* valores de ganho complexo $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_m$ que o criaram, sendo então necessárias funções algébricas para descrever o sistema. Devido ao fato de que *m* valores distintos de k implicarão no mesmo ponto no plano-s, o mapeamento de k deverá ser feito em *m* gráficos distintos no plano-s. O conjunto dos *m* gráficos, chamados folhas, formará a superfície-k de Riemann do sistema.

Uma propriedade importante destas folhas é o fato de que será escolhido um número determinado de retas, ou no eixo real, ou paralelas ao eixo imaginário, as quais serão chamadas de cortes. Estes cortes serão delimitados por **pontos de ramificação ('branch points')**, e uma curva, seja de ângulo constante ou de ganho constante, ou até uma curva qualquer poderá estar parte em uma folha, parte em outra. A passagem de uma folha para a outra é feita através de algum corte, que representa uma reta de ligação entre o domínio complexo de uma folha e o de outra.

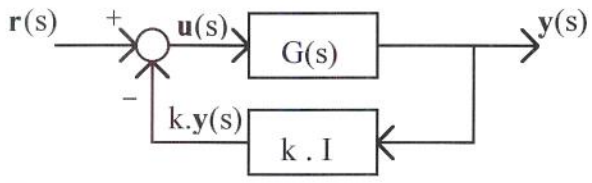


Figura 3.1.1 - Sistema de controle multivariável realimentado, com planta G(s) *e ganho de realimentação* $K = k \cdot I$, *o que restringe a realimentação ao escalar* k.

A Figura 3.1.1 apresenta a configuração de realimentação de saída que será considerada para os sistemas de controle multivariável a serem estudados. Será estudado apenas o caso de sistema quadrado, ou seja, com o mesmo número *m* de entradas e saídas. A matriz de transferência de malha fechada é $H(s) = [I + kG(s)]^{-1} G(s)$. Para achar os pólos de H(s) na forma de matriz de transferência é computacionalmente complexo. Por isto, é usada a representação em espaço de estado de H(s). Para chegar até esta, devemos primeiro representar G(s) em espaço de estado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) , \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad B \in \mathbf{R}^{n\times m}, \\ C \in \mathbf{R}^{m\times n}, \quad D \in \mathbf{R}^{m\times m}, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

e onde n é a ordem de G(s), que tem m entradas e m saídas.

A representação de H(s) é derivada da Equação (3.1.1) e da equação de $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) - k\,\mathbf{y}(t) . \tag{3.1.2}$$

Substituindo (3.1.2) na equação de saída em (3.1.1), teremos:

$$\mathbf{y}(t) = C\,\mathbf{x}(t) + D\,\mathbf{r}(t) - kD\,\mathbf{y}(t) ,$$

e portanto

$$(I + kD)\mathbf{y}(t) = C\,\mathbf{x}(t) + D\,\mathbf{r}(t) ,$$

o que resulta em:

$$\mathbf{y}(t) = (I + kD)^{-1} C\,\mathbf{x}(t) + (I + kD)^{-1} D\,\mathbf{r}(t). \tag{3.1.3}$$

Substituindo (3.1.3) em (3.1.2), teremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{r}(t) - k\,\mathbf{y}(t) \\ &= \mathbf{r}(t) - k\left\{ \left[(I + kD)^{-1} C\right]\mathbf{x}(t) + \left[(I + kD)^{-1} D\right]\mathbf{r}(t) \right\} \\ &= \left[-k(I + kD)^{-1} C \right] \mathbf{x}(t) + \left[I - k(I + kD)^{-1} D \right] \mathbf{r}(t) . \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Ao substituir (3.1.4) na equação de estado de (3.1.1), teremos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left[A - k\,B\,(I + kD)^{-1} C \right] \mathbf{x}(t) + B \left[I - k(I + kD)^{-1} D \right] \mathbf{r}(t) . \tag{3.1.5}$$

Finalmente, juntando as Equações (3.1.3) e (3.1.5), teremos a representação completa do sistema realimentado H(s) como mostrado na Figura (3.1.1):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_H\mathbf{x}(t) + B_H\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_H\mathbf{x}(t) + D_H\mathbf{r}(t) , \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A_H = A - kB\,(I - kD)^{-1} C \\ B_H = B\left[I - k(I + kD)^{-1} D\right] \\ C_H = (I + kD)^{-1} C \\ D_H = (I + kD)^{-1} D . \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Sendo H(s) como descrito em (3.1.6), então, para algum valor específico de ganho $k = \bar{k} \in \mathbf{C}$ os pólos $s = \bar{s}_i \in \mathbf{C}$ do sistema realimentado são os autovalores da matriz $A_H = \left[A - \bar{k}B\,(I - \bar{k}D)^{-1} C\right]$. Assim, podemos montar a equação dos autovalores $s = \bar{s}_i$ e correspondentes autovetores $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}_i \in \mathbf{C}^n$ de A_H:

$$A_H\,\bar{\mathbf{v}}_i = \left[A - \bar{k}\,B\,(I - \bar{k}D)^{-1} C\right]\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{s}_i\,\bar{\mathbf{v}}_i . \tag{3.1.7}$$

Assim, os $s = \bar{s}_i$, $i = 1, \ldots, n$, são as raízes de

$$\det\left[sI - A_H\right] = \det\left[sI - A + \bar{k}\,B\,(I - \bar{k}D)^{-1} C\right] = 0 , \tag{3.1.8}$$

que é a equação característica de H(s).

Em linguagem computacional:

$$\bar{s}_i = \mathrm{eig}(A_H)\ ,\ i = 1,\ldots,n, \quad \text{e} \quad A_H = \left[A - \bar{k}B\left(I - \bar{k}D\right)^{-1}C\right]. \tag{3.1.9}$$

No caso particular em que G(s) seja estritamente próprio, ou seja, tenha mais pólos do que zeros de transmissão, então $D \equiv 0$, ficando o cálculo dos autovalores em (3.1.9) mais simples:

$$\bar{s}_i = \mathrm{eig}(A_H)\ ,\ i = 1,\ldots,n, \quad \text{e} \quad A_H = \left[A - \bar{k}BC\right]. \tag{3.1.10}$$

Caso queiramos obter, a partir de um valor $s = \bar{s}$ no plano-s que valores $k = \bar{k}_i\ ,\ i = 1,\ldots,m$ podem gerá-lo, então deveremos partir da Equação (3.1.8) e conseguir alguma maneira de obter k em função de s. Como não se pode isolar k, a única maneira que encontramos para este fim foi a numérica. Implementamos um algoritmo de aproximações sucessivas que obtém os valores de k a partir de um valor de s.

Se quisermos, entretanto, obter k a partir de s em um sistema estritamente próprio ($D \equiv 0$), então a Equação (3.1.8) se reduz a:

$$\det\left[sI - A_H\right] = \det\left[sI - A + \bar{k}BC\right] = 0\ . \tag{3.1.11}$$

Neste caso, querendo obter k em função de s, poderemos inverter a Equação (3.1.11):

$$\det\left[\bar{s}I - A + \bar{k}BC\right] = \det\left[\bar{k}BC - (A - \bar{s}I)\right] = 0\ . \tag{3.1.12}$$

Assim, obteremos k como autovalor generalizado [44-45] de BC e $A_K = [A - \bar{s}I]$:

$$\bar{k}_i = \mathrm{eig}(A_K, BC)\ ,\ i = 1,\ldots,m. \tag{3.1.13}$$

Se obtivermos os valores de s em função de valores que atribuirmos a k, poderemos obter as curvas da superfície-k de Riemann de G(s). Entretanto, demonstramos acima que podemos atribuir valores a s e obter valores de k, indo pelo caminho inverso. Isto nos será particularmente útil em duas situações. A primeira, neste capítulo, na obtenção da informação completa dos cortes da superfície-k de Riemann do sistema G(s) estudado: obteremos valores de k que geraram pontos de corte no plano-s. Esta informação é imprescindível para a representação dos cortes nas novas graficações de superfícies-k de Riemann que vamos mostrar.

A segunda situação em que será útil obter k a partir de s será utilizada no Capítulo 4, e servirá para a obtenção de margens de estabilidade do sistema.

3.2. MÉTODO PROPOSTO PARA CÁLCULO E GRAFICAÇÃO DE SUPERFÍCIE-K DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL

A graficação das superfícies-k de Riemann de sistemas de controle multivariável difere daquela já descrita para sistemas de controle monovariável essencialmente na possibilidade de uma curva-F poder cruzar com ela mesma no plano-s. Isto pode gerar situações dúbias até na graficação do lugar das raízes, que é a curva-F com F = ±180°. Exemplo disso foi dado com o Sistema 2, descrito pela Equação 1.2.3, no Capítulo 1, e cujo lugar das raízes está graficado na Figura 1.5.6. Um dos ramos do lugar das raízes desse sistema parte para a direita, e depois volta para a esquerda, encobrindo a si próprio e ao outro ramo. Este mascaramento do lugar das raízes não acontece na graficação do lugar das raízes em forma de diagrama de ganho, como visto na Figura 1.6.7, também no Capítulo 1.

A superfície-k de Riemann de um sistema de controle multivariável é feita com o uso de curvas de magnitude constante do ganho k, como as da Figura 2.2.2 do Capítulo 2, e curvas de ângulo de fase constante do ganho k, como as da Figura 2.2.1 do Capítulo 2. As curvas de magnitude constante no plano complexo-k gerarão no plano-s curvas que denominamos de **curvas-G** (em alusão ao ganho constante da variável independente k), e as curvas de ângulo de fase constante no plano complexo-k gerarão no plano-s curvas que denominamos de **curvas-F** (em alusão à fase constante da variável independente k). Como feito no Capítulo 2, usaremos uma convenção de cores na qual as **curvas-G** serão graficadas em verde, e as **curvas-F** serão graficadas em azul, com exceção das curvas-F com F = ±180°, que serão graficadas em vermelho por serem o lugar das raízes do sistema, gerado a partir da curva com arg(k) = 0°, e das curvas-F com F = 0°, que serão graficadas em magenta por serem o lugar das raízes complementar, gerado a partir da curva com arg(k) = ±180°.

A determinação de cortes em uma superfície-k de Riemann de sistema de controle multivariável serve para que os ramos do lugar das raízes nunca se cruzem, ou mais genericamente, as curvas-F, de ângulos de fase constantes, e as curvas-G, de ganhos constantes, nunca se cruzem ou passem por cima de si próprias. Uma curva-F ou curva-G, ao passar por um corte, migra automaticamente de uma folha para outra da superfície-k de Riemann, evitando os cruzamentos. É claro que teremos que representar a superfície-k de Riemann com tantas cópias de plano-s, ou folhas da superfície-k de Riemann, quantas necessário. Nosso trabalho se restringe a sistemas quadrados, com *m* entradas e *m* saídas. Neste caso, serão necessárias *m* folhas da superfície-k de Riemann.

Foi desenvolvido um algoritmo, e criada para ele uma função chamada "sepfolha", que faz a separação de uma curva em seções. O algoritmo implementado foi aplicado com sucesso igualmente às curvas-F e às curvas-G. Determinado o corte, a curva é considerada inicialmente na "Folha 1" da superfície-k de Riemann. Foram utilizados no algoritmo princípios básicos de geometria analítica para determinar a passagem pelo corte. Em havendo uma passagem pelo corte, significa que a curva passou para a "Folha 2". Se houver outra passagem pelo corte, significará a passagem para a "Folha 3", e assim por diante, até no máximo m folhas. As seções pertencentes a folhas diferentes são armazenadas em variáveis diferentes. São geradas também seções correspondentes da variável independente k para que tenhamos a informação completa, que é de dimensão 4, ou seja, partes real e imaginária da variável independente k e partes real e imaginária da variável dependente s.

O cálculo dos cortes é feito através da determinação dos **pontos de ramificação ('branch points')**. Se houver um ponto de ramificação no eixo real, então o corte fica em cima do próprio eixo real, partindo do ponto de ramificação e indo até $+\infty$. Se houver dois pontos de ramificação complexos conjugados, pode-se escolher se haverá um único corte unindo verticalmente estes dois cortes ou haverá dois cortes complexos conjugados, cada um com parte real igual à do ponto de ramificação, mas ambos tendendo a se distanciarem, com parte imaginária tendendo a $+\infty$ para o corte superior e $-\infty$ para o corte inferior. Ainda, dois pontos de ramificação no eixo real delimitarão um corte entre eles. Não são muitas as situações, e são bem explicadas nos textos de MacFarlane e seus colaboradores [41-43,55] e nos livros matemáticos a respeito [1,11,16,19,24,59,61].

Os **pontos de ramificação** que determinam os cortes têm seu cálculo feito através da determinação da **equação característica do sistema**, que no caso de G(s) (m x m), ou seja, com m entradas e m saídas, é:

$$\det[g(s)\,I_m - G(s)] = a_0(s)\,g^m(s) + a_1(s)\,g^{m-1}(s) + \ \ldots\ + a_m(s) = 0\,, \qquad (3.2.1)$$

onde os coeficientes $\{a_i(s) : i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\}$ são funções racionais em s.

Se acharmos o máximo denominador comum $d(s)$ dos $\{a_i(s) : i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\}$, então a **equação característica** pode ser colocada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta(g,s) &= d(s)\cdot\det[g(s)\,I_m - G(s)] \\ &= b_0(s)\,g^m(s) + b_1(s)\,g^{m-1}(s) + \ \ldots\ + b_m(s) = 0\,, \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

onde os coeficientes $\{b_i(s) : i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\}$ são polinômios em s. A função de uma variável

complexa g(s) definida na Equação (3.2.2) é chamada uma **função algébrica**. Assim, G(s) é associada à função algébrica g(s), que é a equação dos autovalores de G(s).

A partir dos coeficientes $\{b_i(s) : i = 0, 1, ..., m\}$ da função algébrica g(s), podemos determinar o **discriminante** $D_g(s)$ de G(s). Há dois algoritmos bem estabelecidos para este cálculo. Um, de Barnett [2], e o outro de Sansone e Gerretsen [59]. Utilizamos este último, que está transcrito no Apêndice 1.

Finalmente, os **pontos de ramificação** são as raízes de

$$D_g(s) = 0 \ . \tag{3.2.3}$$

Traçaremos adiante nesta seção as superfícies-k de Riemann do Sistema 2, descrito no Capítulo 1 pela Equação (1.2.3). Para este sistema, a Equação (3.2.1) fica:

$$\det[g(s)\,I_m - G(s)] = 1\,g^2(s) - \frac{(2s-3)}{1{,}25(s+1)(s+2)}\,g(s) + \frac{1}{(1{,}25)^2(s+1)^2(s+2)^2} = 0 \ , \tag{3.2.4}$$

e o denominador comum dos $\{a_i(s) : i = 0, 1, ..., m\}$ é:

$$d(s) = (1{,}25)^2(s+1)^2(s+2)^2 . \tag{3.2.5}$$

Assim, a equação característica pode ser colocada na forma da Equação (3.2.2):

$$\Delta(g,s) = \left[(1{,}25)^2(s+1)(s+2)\right]g^2(s) + \left[-1{,}25(2s-3)\right]g(s) + 1 = 0 \ , \tag{3.2.6}$$

e o discriminante, calculado através do algoritmo mostrado no Apêndice 1, fica:

$$D_g(s) = (1{,}25)^2(-24s+1) = 0 \ , \tag{3.2.7}$$

cuja raiz é o **ponto de ramificação**:

$$s = +\frac{1}{24} = +0{,}04167 \ . \tag{3.2.8}$$

Pode-se provar [09] que existe outro **ponto de ramificação** em:

$$s = +\infty . \tag{3.2.9}$$

O corte no plano-s fica então no intervalo [+1/24 ; +∞).

3.2.1. Graficação Usual de Superfície-k de Riemann no Plano-s

Antes de mostrarmos a graficação usual de superfície-k de Riemann com suas folhas, mostraremos como fica o plano-s se colocarmos a superfície-k completa, sem efetuar os cortes. A Figura 3.2.1 mostra exatamente isto para o Sistema 2, e como se pode ver, é difícil até mesmo identificar as curvas, porque elas se sobrepõem. As Figuras 3.2.2 e 3.2.3 mostram a graficação usual desta superfície. Elas mostram a folha 1 e a folha 2, respectivamente. O corte aparece em ambas as folhas em preto, se estendendo no eixo real desde $s = +(1/24) = 0{,}04167$ até $s \to \infty$, que são os pontos de ramificação. As curvas-G e curvas-F que atingem o corte na folha 1 têm sua continuidade na folha 2.

Com o conjunto das duas folhas desta superfície de Riemann, é possível identificar a trajetória do lugar das raízes do Sistema 2, cujos ramos são as curvas-F com $F = \pm 180°$, em vermelho nos gráficos. O ramo que parte do pólo em -2 segue para a esquerda, tendendo assintoticamente para $-\infty$. Já o ramo que parte do pólo em -1 segue inicialmente para a direita, alcançando o corte no ponto de ramificação $s = +(1/24)$. Neste ponto acontece a passagem da folha 1 para a folha 2. Já na folha 2, o ramo volta para a direita, tendendo assintoticamente para $-\infty$, como o outro ramo.

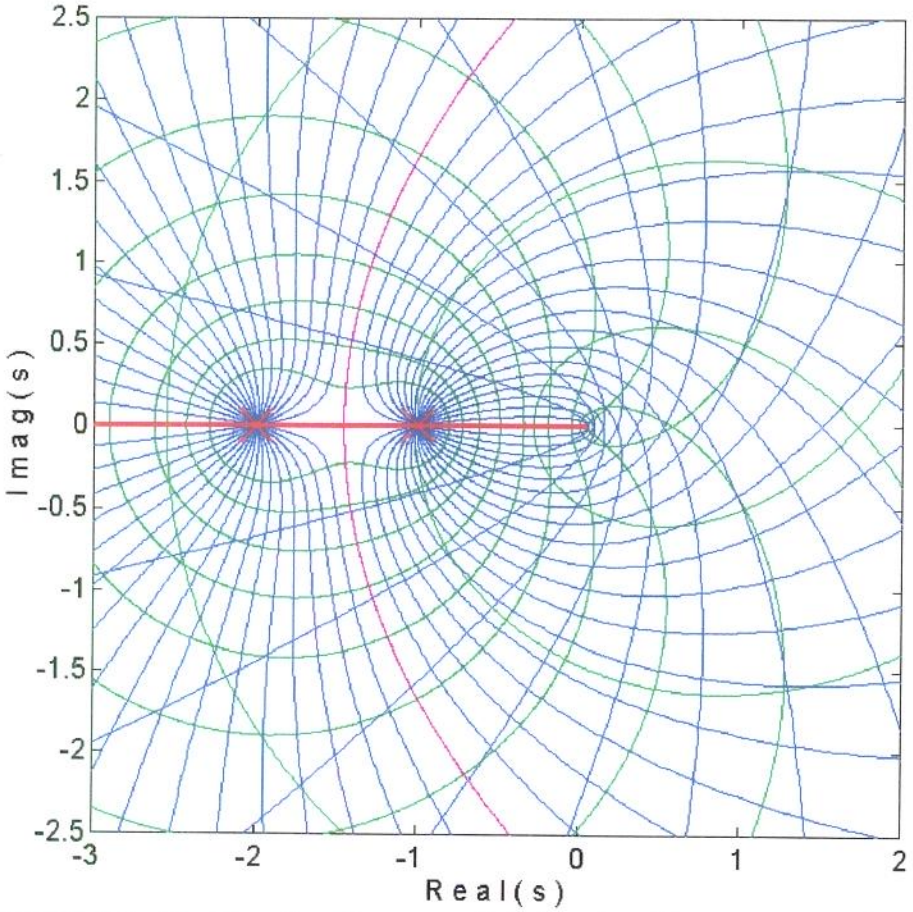


Figura 3.2.1. Graficação da superfície-k de Riemann completa do Sistema 2, sem mostrar cortes nem distinguir folhas.

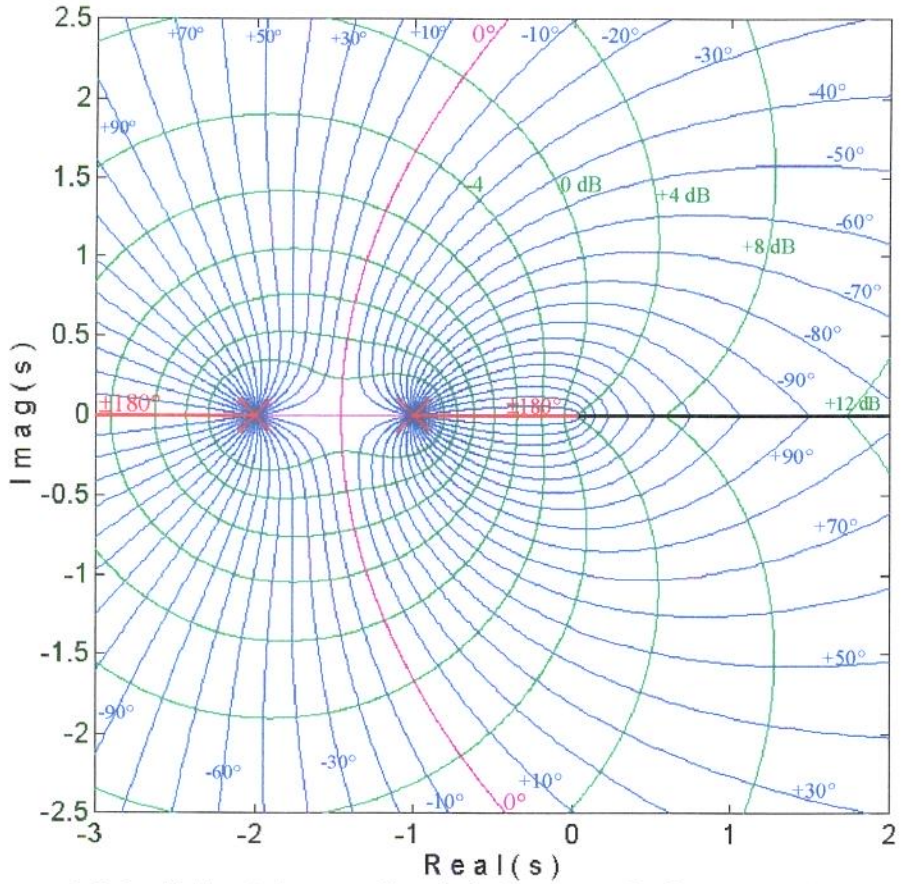


Figura 3.2.2. Folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. As curvas-G e curvas-F que atingem o corte terão continuidade na folha 2.

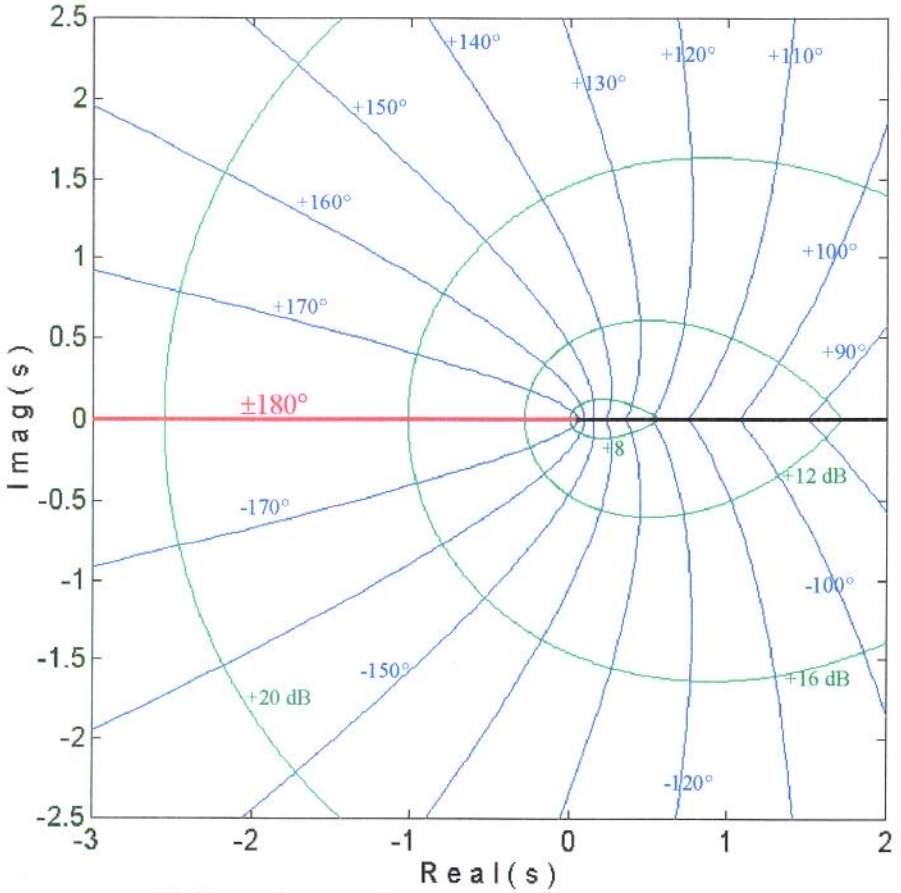


Figura 3.2.3. Folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. As curvas que atingiram o corte na folha 1 têm continuidade nesta folha.

3.2.2. *Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F* versus *Magnitudes de k*

A Figura 3.2.4, abaixo, mostra a nova graficação, que é a generalização dos diagramas de ganho para todas as curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2.

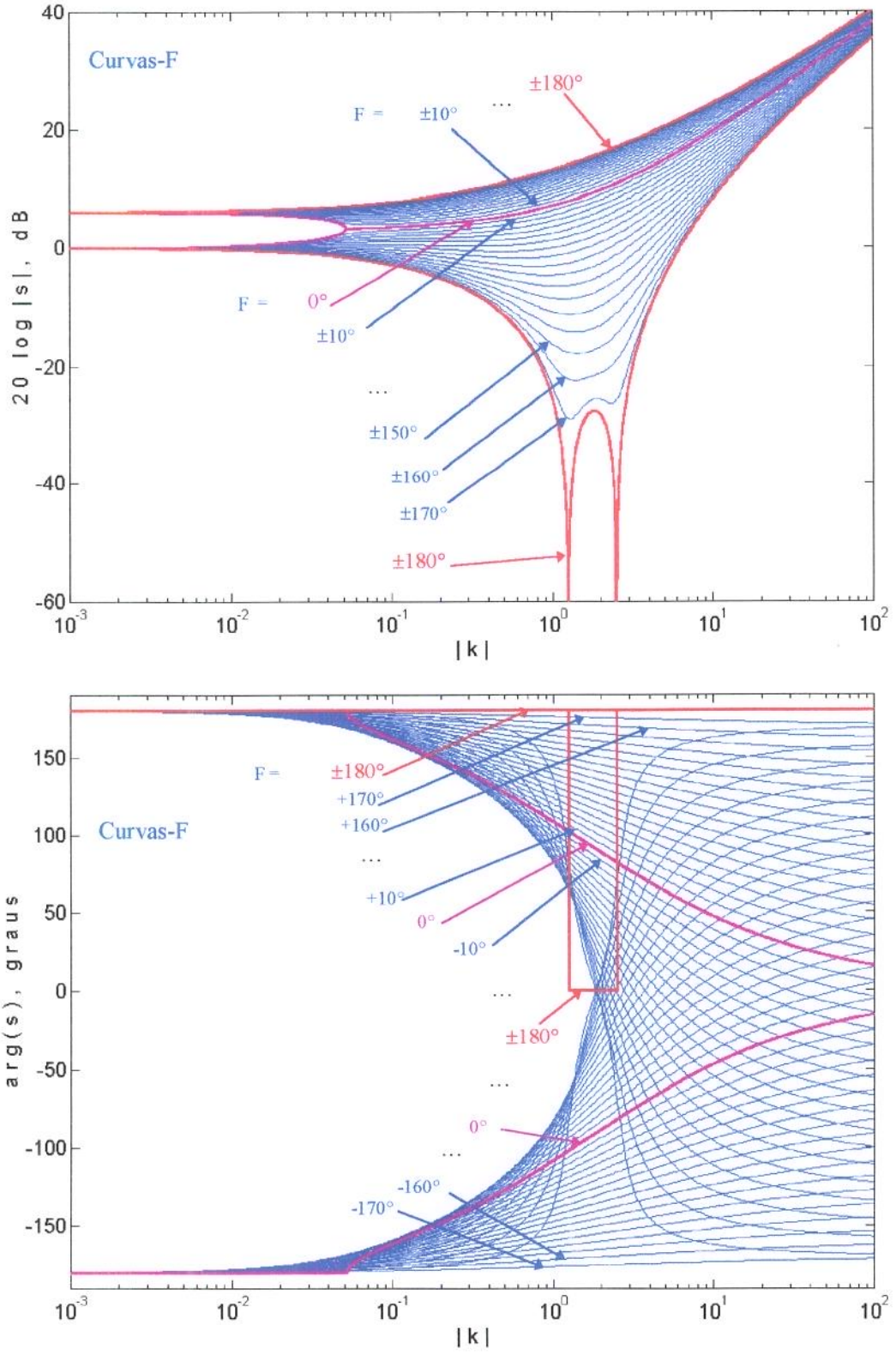


Figura 3.2.4. Magnitudes e ângulos das curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2, em função da magnitude do ganho k.

Uma vez determinada a localização do único corte existente na superfície-k de Riemann do Sistema 2, e sendo este um sistema estritamente próprio ($D \equiv 0$), então foi utilizada a fórmula da Equação 3.1.13 para determinar os valores de k que geram pontos de s no corte. O resultado está apresentado na Figura 3.2.5, salientando que para cada ponto $s = \bar{s}$ no plano-s são gerados dois autovalores generalizados $\bar{k}_1$ e $\bar{k}_2$ no plano-k, mas como o corte no plano-s é no eixo real, ou seja, neste caso $\bar{s} \in \mathbf{R}$, então $\bar{k}_1 = \bar{k}_2^* \in \mathbf{C}$, ou seja, os dois valores gerados de k são complexos conjugados.

Podemos ver na Figura 3.2.5 que existe um valor de k no eixo real nesta curva. Na verdade, este valor, que é $k = +1{,}8124$, faz com que um dos ramos do lugar das raízes ($\arg(k) = 0°$, e portanto $F = \pm 180°$) chegue ao corte em $s = +(1/24)$.

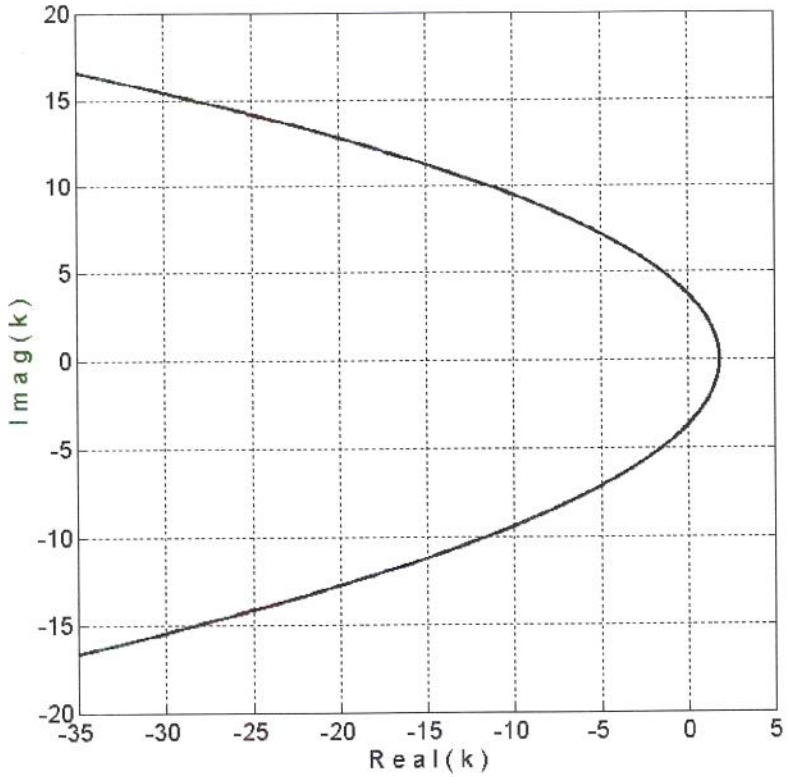


Figura 3.2.5. Curva no plano complexo-k responsável por pontos no corte da superfície-k de Riemann do Sistema 2.

A Figura 3.2.6 mostra em preto a curva do corte no diagrama das curvas-F. Optamos por representar as curvas de ângulos de fase todas partindo de +180° para que as curvas não se entrelaçassem. Assim, é possível identificar tanto nas curvas de magnitude quanto nas de ângulos de fase regiões delimitadas pela representação do corte pertencentes à folha 1 ou à folha 2 da superfície-k de Riemann. No diagrama de magnitudes em dB vemos que apenas algumas curvas passam pelo corte. Com valores pequenos de ganho k todas as curvas estão

na folha 1. Quando o ganho aumenta e fica acima de | k | = 1,8124, que é o primeiro ponto de k formador do corte, algumas curvas passam por este indo para a folha 2.

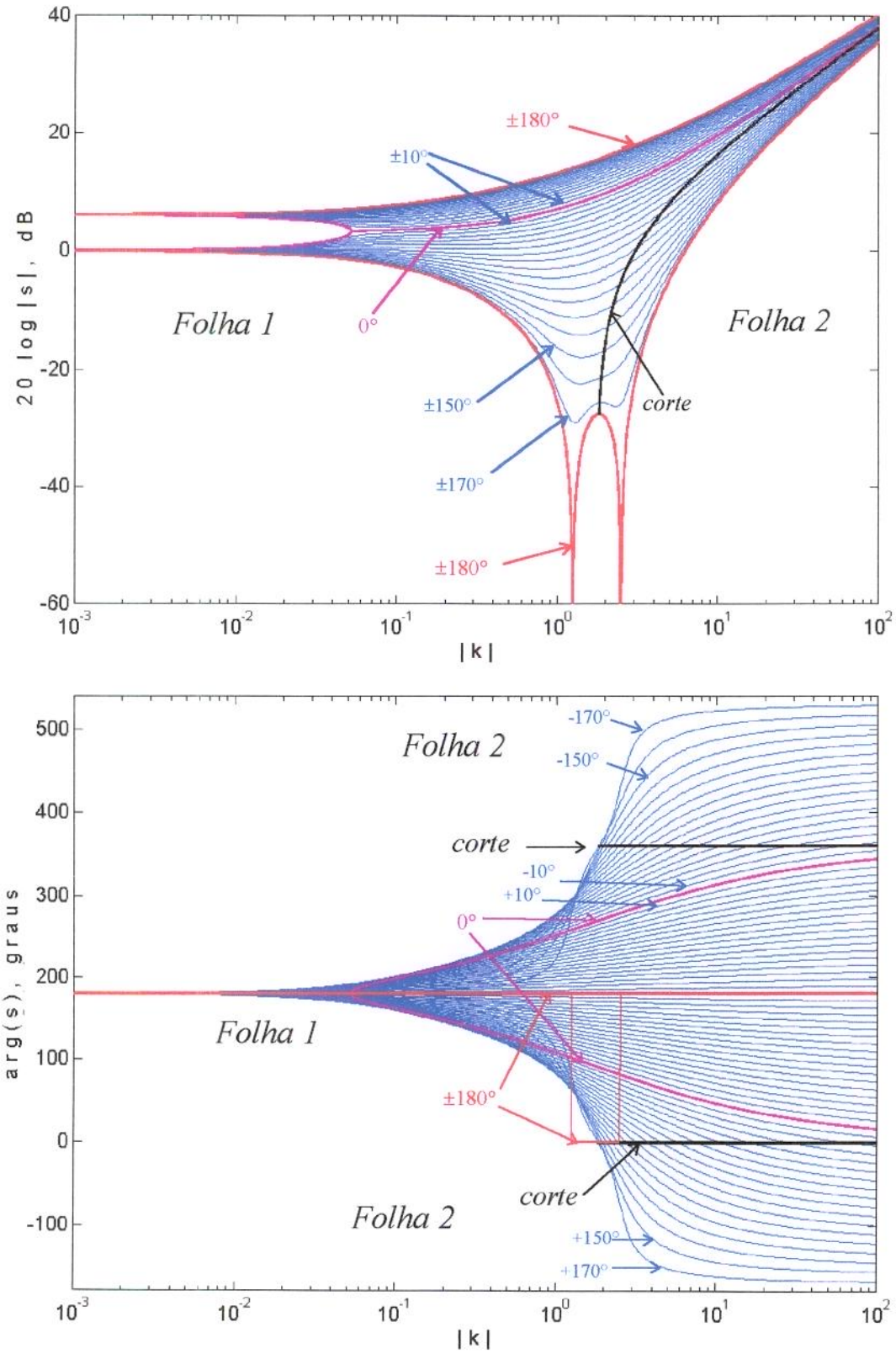


Figura 3.2.6. Diagrama da Figura 3.2.4 mostrando a representação do corte. A curva de ângulos de fase foi modificada para que as curvas não se entrelaçassem, facilitando a identificação das folhas por região.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

A Figura 3.2.7 mostra separadamente a folha 1 das curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2. O ramo do lugar das raízes (em vermelho) que parte de 6,02 dB e 180°, ou seja, -2 no plano-s, tende ao infinito. O outro, que parte de 0 dB e 180°, ou seja, -1 no plano-s, passa por zero em k = 1,25 e atravessa o corte em k = 1,8124.

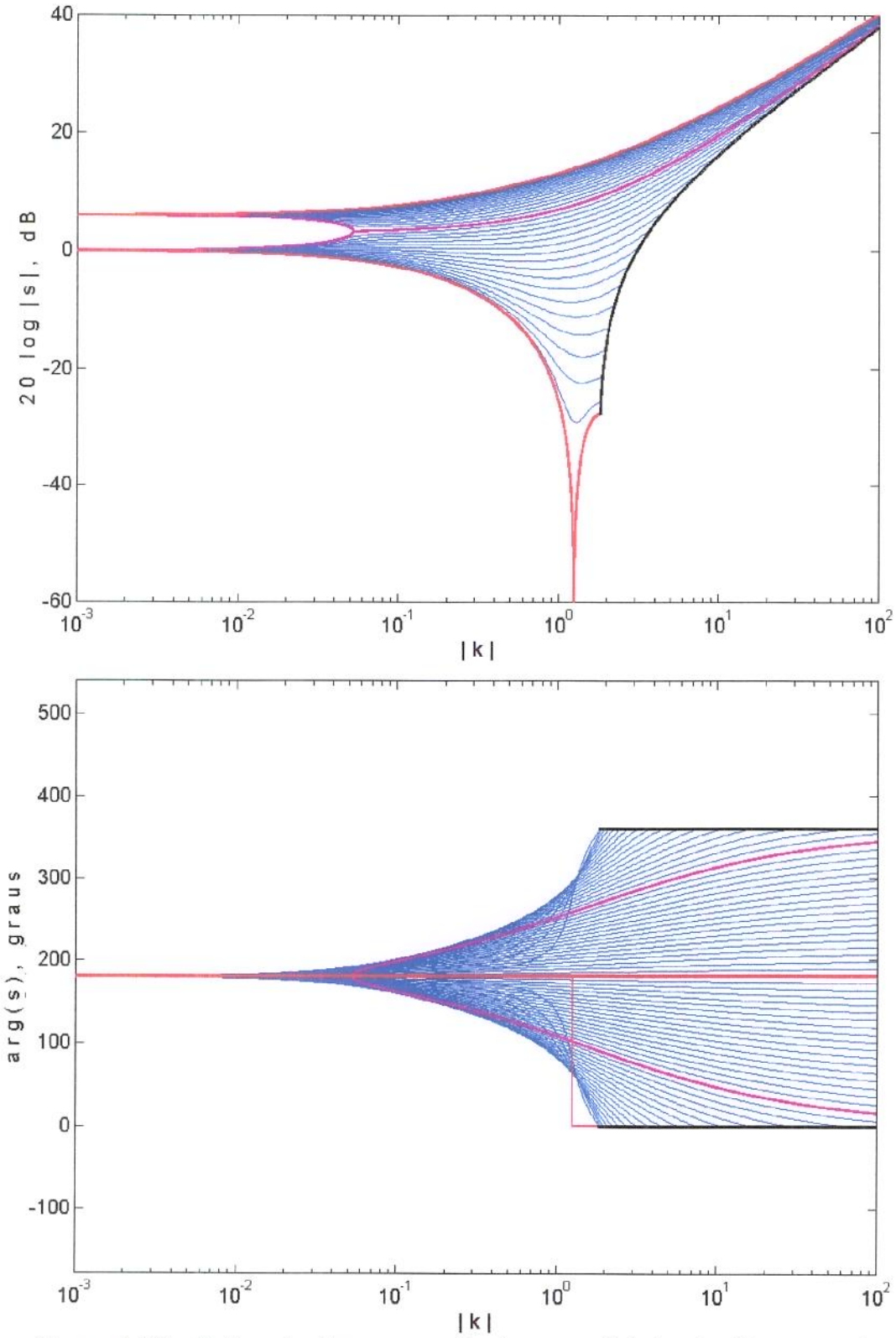


Figura 3.2.7. Folha 1 das curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Podemos ver que apenas a metade das curvas passa através do corte, ou seja, passa da folha 1 para a folha 2.

A Figura 3.2.8 mostra separadamente a folha 2 das curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2. O ramo do lugar das raízes (em vermelho) que passa por zero na folha 1, ao chegar na folha 2 diminui novamente, passando novamente pela origem em k = 2,5. Depois, tende assintoticamente ao infinito com 180° da mesma forma que o ramo que permanece na folha 1.

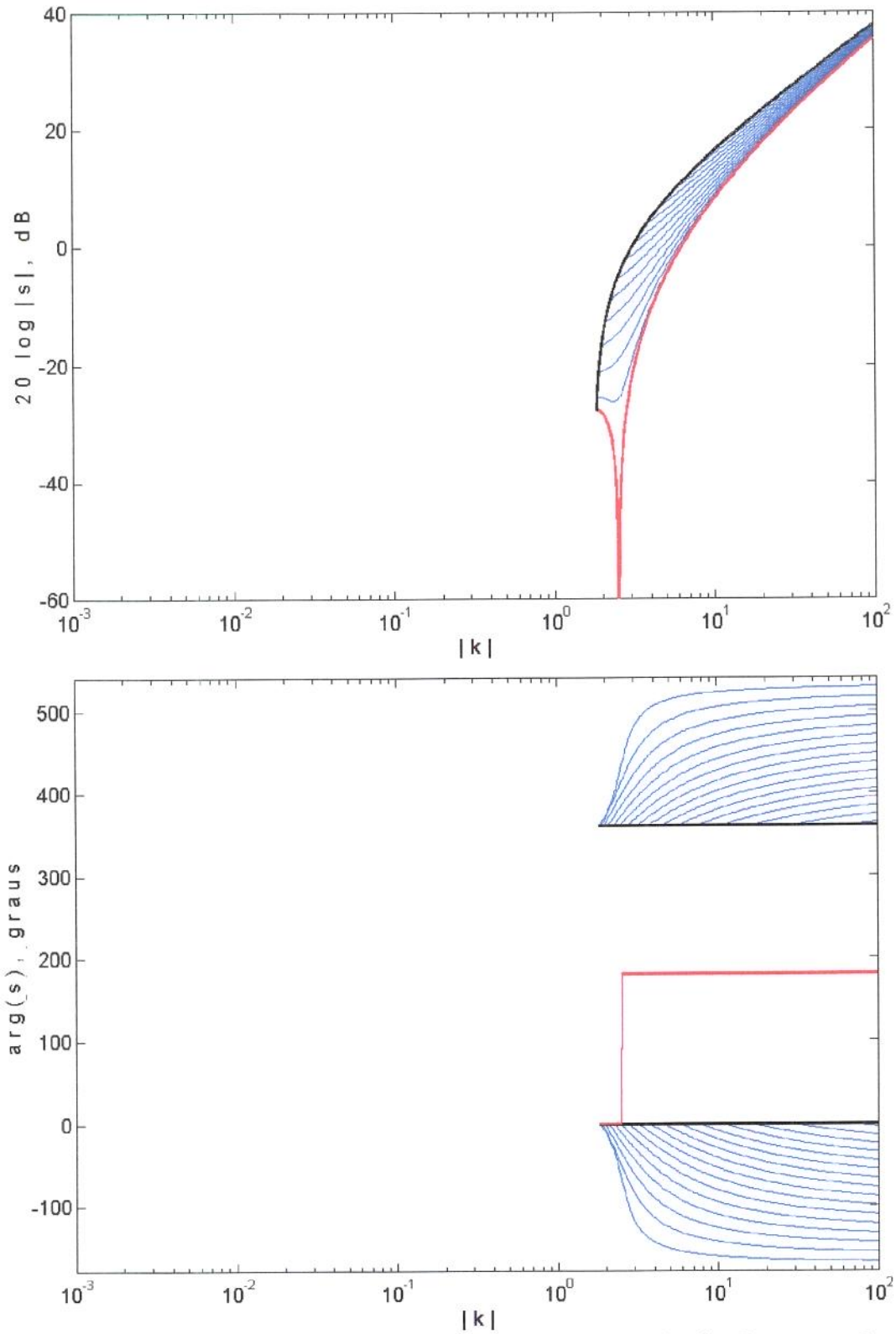


Figura 3.2.8. Folha 2 das curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Metade das curvas passa através do corte na Figura 3.2.7, passando da folha 1 para a folha 2, aqui representada.

3.2.3. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G versus Ângulos de k

A Figura 3.2.9, abaixo, mostra uma nova graficação para as curvas-G da superfície-k de Riemann do Sistema 2. A figura mostra a localização do corte, em preto. Este foi obtido a partir das informações de s, mas também dos respectivos valores de k na Figura 3.2.5.

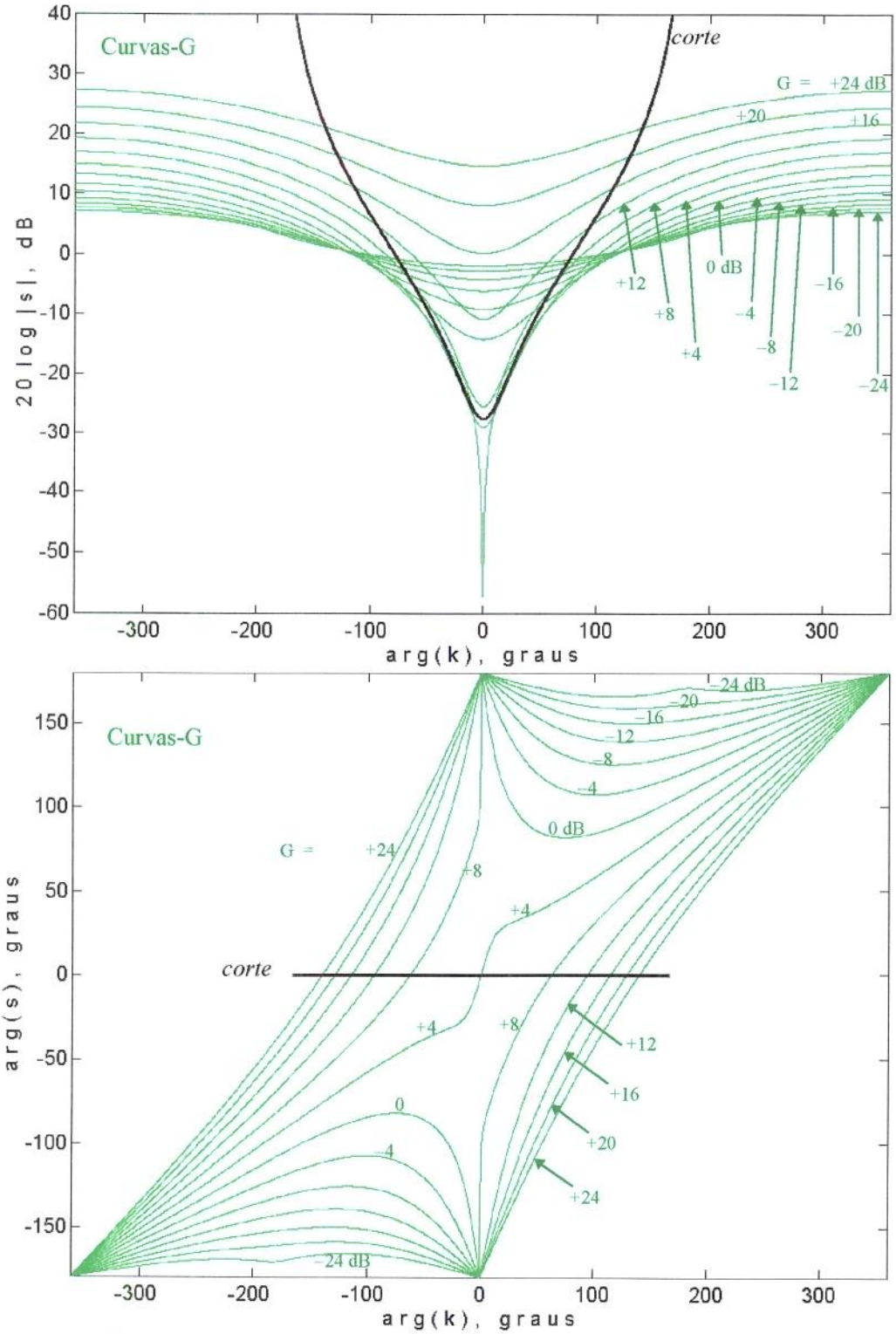


Figura 3.2.9. Magnitudes e ângulos da curvas-G da superfície-k de Riemann do Sistema 2, em função das fases do ganho k.

A Figura 3.2.10 mostra separadamente a folha 1 das curvas-G da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Apenas as curvas com valores maiores de G atravessam o corte. As outras não tocam nele. Devemos, é claro, olhar os dois diagramas: magnitude e fase de s em função dos ângulos de k, para enxergar isto.

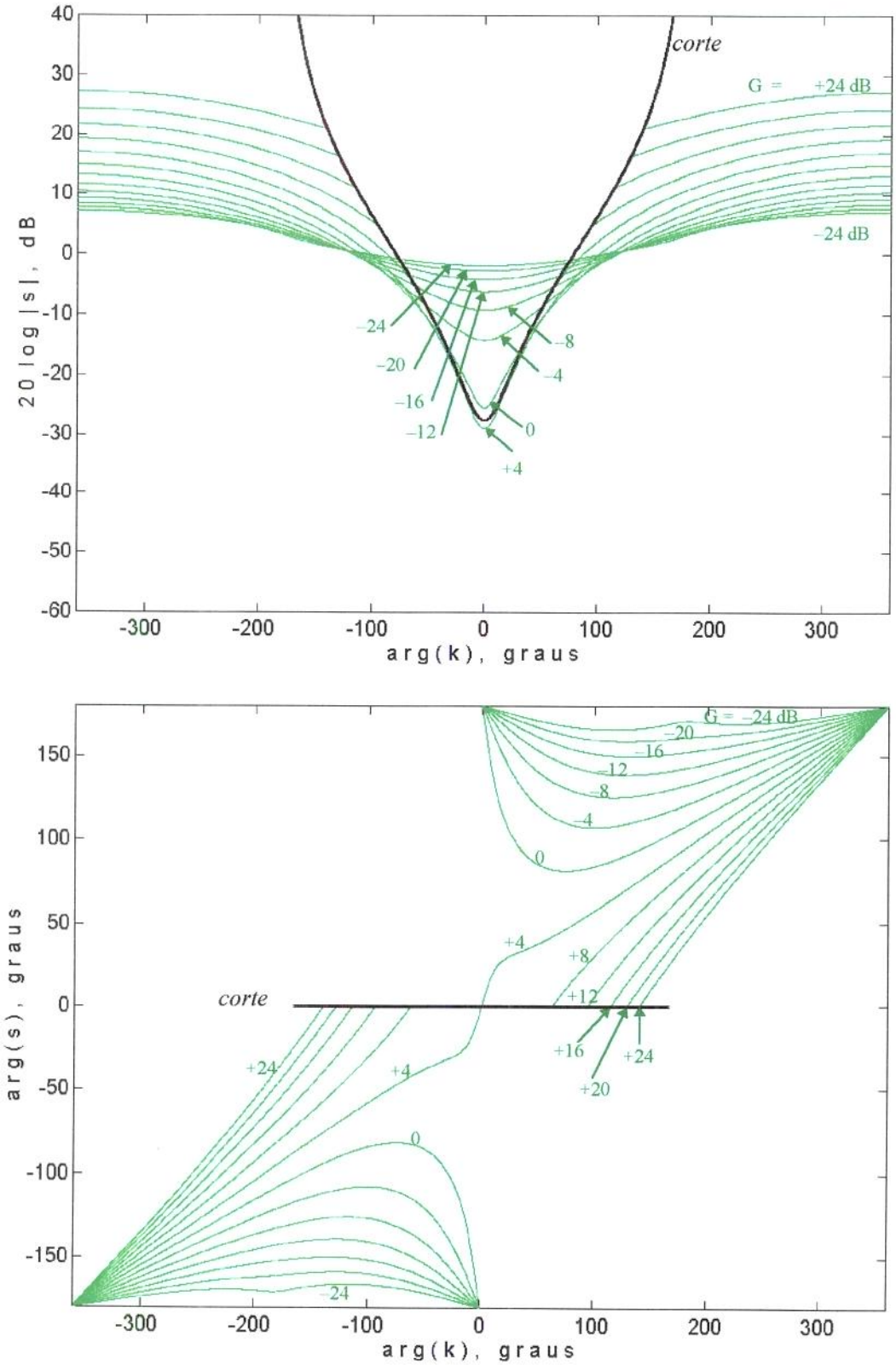


Figura 3.2.10. Folha 1 das curvas-G da superfície-k de Riemann do Sistema 2. As curvas-G com G *entre +8 dB e +24 dB mudam de folha.*

A Figura 3.2.11 mostra separadamente a folha 2 das curvas-G da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Apenas curvas-G com valores de G maiores que 20 log | 1,8124 | = +5,165 dB é que cruzam o corte, entrando na folha 2. Isto porque o valor 1,8124 é o menor valor de | k | capaz de gerar algum s no corte como mostra a curva da Figura 3.2.5.

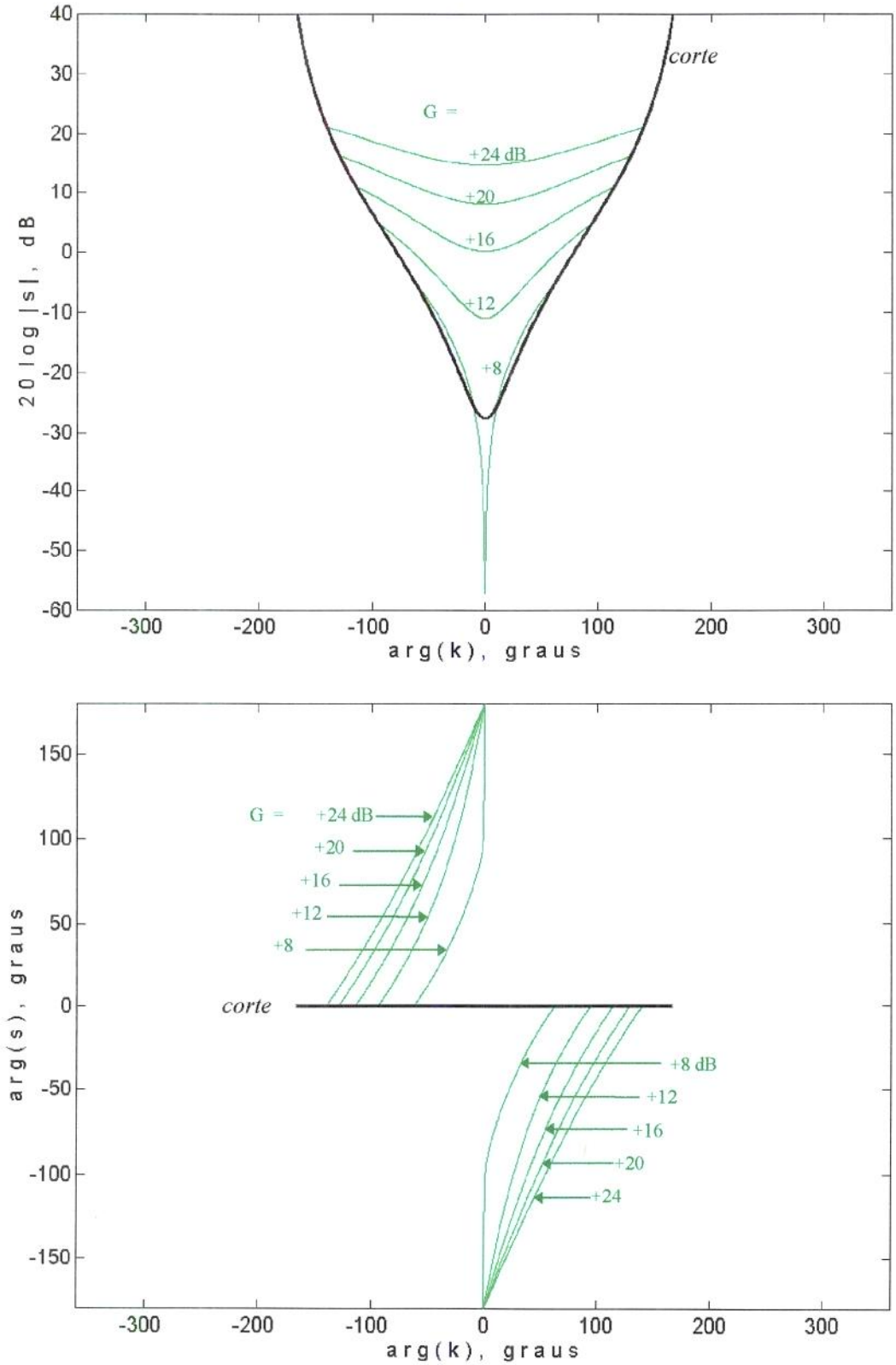


Figura 3.2.11. Folha 2 das curvas-G da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Apenas as curvas-G com G > +5,165 passam para esta folha.

3.2.4. *Nova Graficação, de Superfície-k de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica* versus *Ângulo de Fase*

Apresentamos aqui para o caso multivariável, através do exemplo do Sistema 2, a mesma representação que já foi apresentada para o caso monovariável no Capítulo 2, Seção 2.2.4. Lá como aqui, a nova graficação consiste em uma representação diferente do plano-s. Ao invés de termos como eixos as partes real e imaginária da variável complexa s, teremos como eixos a magnitude em dB e o ângulo de fase em graus da variável complexa s. Como salientado no Capítulo 2, esta nova graficação do plano-s é semelhante àquela de Nichols para o plano-G(s) da resposta em freqüência.

A Figura 3.2.12 exemplifica esta nova graficação para o Sistema 2. Fica aparente no exemplo uma vantagem desta graficação sobre a tradicional. Apesar de estar representada essencialmente a mesma informação bidimensional contida no plano complexo-s, na nova graficação, como vemos na Figura 3.2.12 pode-se evitar o cruzamento das curvas, podendo-se então ver as duas folhas da superfície-k de Riemann sem os equívocos provocados pela graficação equivalente apresentada na Figura 3.2.1. A representação tradicional tem que necessariamente apresentar as duas folhas da superfície-k de Riemann em gráficos separados, como os das Figuras 3.2.2 e 3.2.3.

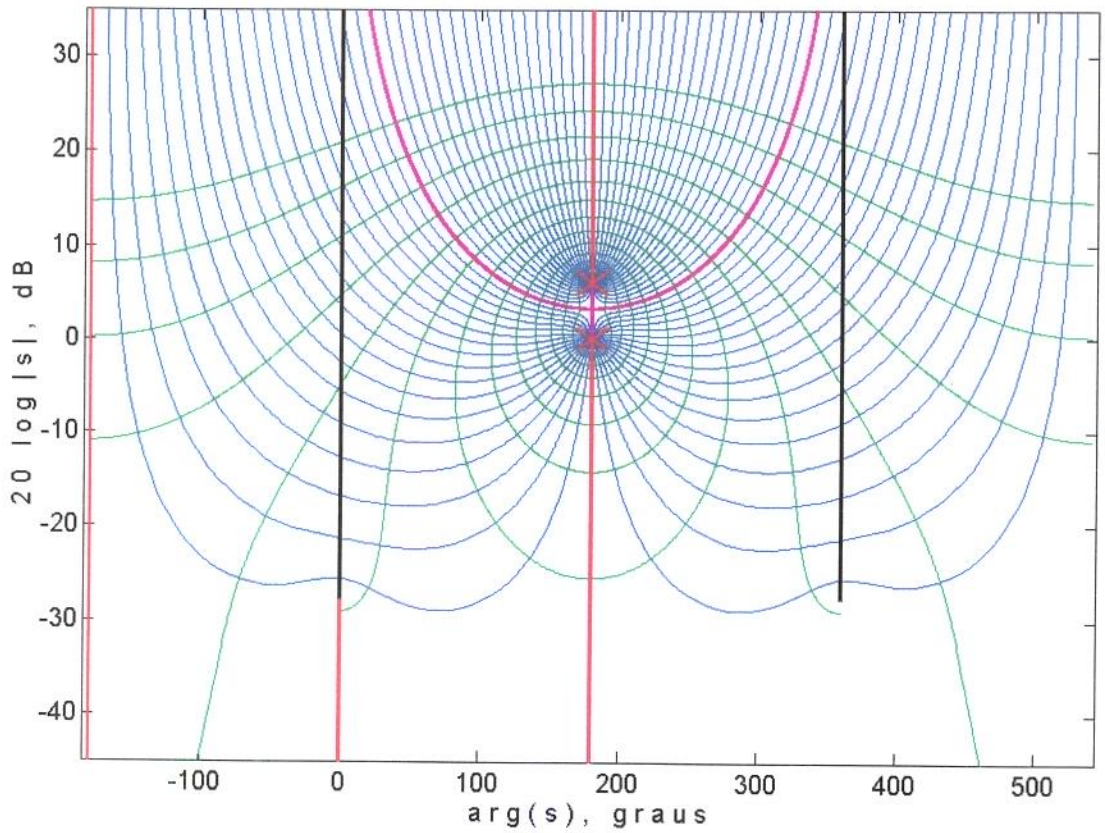


Figura 3.2.12. Nova representação da superfície-k de Riemann para o Sistema 2. As duas folhas são representadas no mesmo gráfico.

Podemos, é claro, separar as duas folhas da superfície-k de Riemann do Sistema 2 em gráficos diferentes. A Figura 3.2.13 mostra a folha 1 e a Figura 3.2.14 mostra a folha 2.

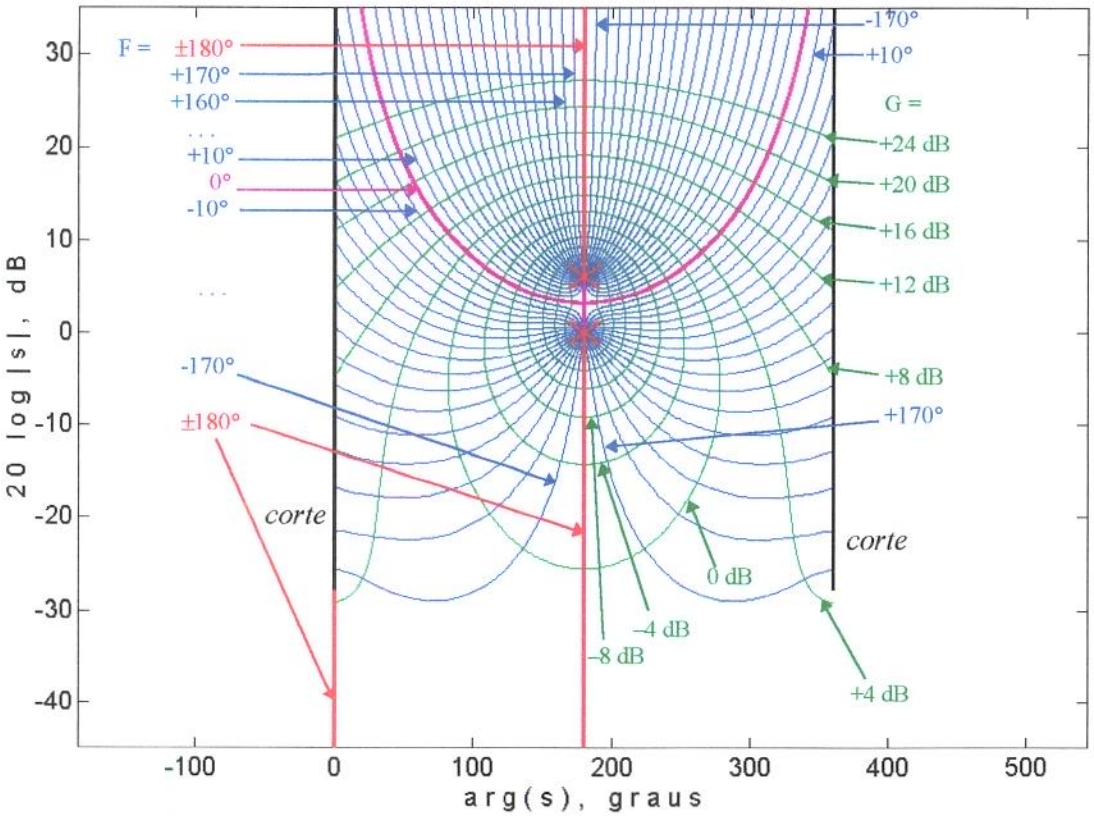


Figura 3.2.13. Folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Pode-se ver os ramos dos lugares das raízes em vermelho.

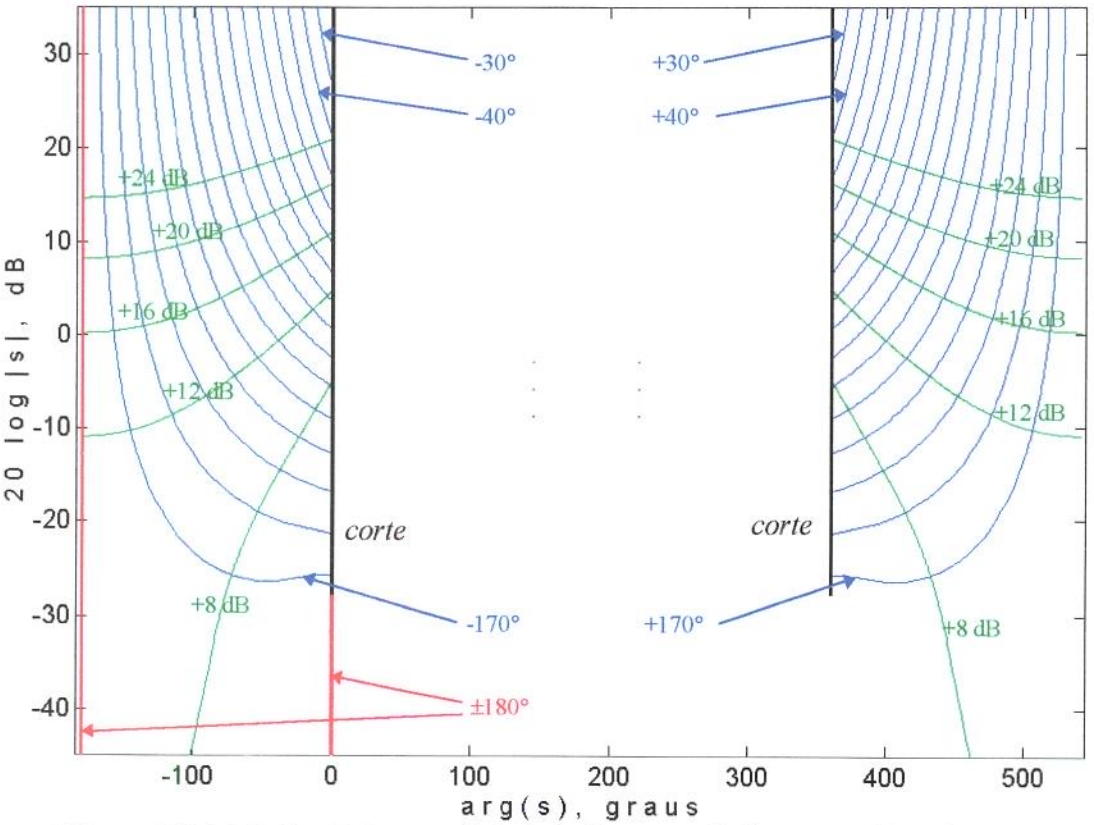


Figura 3.2.14. Folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Um dos ramos do lugar das raízes começa na folha 1 e continua na folha 2.

Podemos ver nas Figuras 3.2.12 e 3.2.13, na folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2, a representação dos pólos com um "xis" em vermelho. Podemos também ver, nas Figuras 3.2.12 a 3.2.14, os ramos dos lugares das raízes do sistema, representados em vermelho. Assim, se quisermos, ao invés de representar toda a superfície-k de Riemann, podemos representar o lugar das raízes do sistema através desta nova graficação. Nas figuras podemos identificar claramente os dois ramos do lugar das raízes do Sistema 2. O primeiro, partindo do pólo em +6,02 dB e 180°, ou seja, s = -2, vai para o infinito com os mesmos 180°, sem variação de ângulo. O outro ramo, parte com 180° de 0 dB, ou seja, s = -1, diminui sua magnitude passando pela origem do plano-s em -∞ dB (não representado no gráfico), depois volta a aumentar sua magnitude, mas com 0°, ou seja, já estando à direita da origem do plano-s. Ao atingir o corte (que está representado em preto com 0° e 360°), com 0° e +5,165 dB, o ramo passa da folha 1, Figura 3.2.13, para a folha 2, Figura 3.2.14. Na folha 2, o ramo diminui de magnitude, passando novamente pela origem, e variando de 0° para ±180°. Na Figura 3.2.14 o ramo reaparece com -180° para não haver superposição de curvas.

3.2.5. Novas Representações para Superfície-k de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais

Lembramos novamente que a informação completa das superfícies-k de Riemann tem quatro dimensões: duas da variável independente ganho complexo k, e duas da variável dependente freqüência complexa s. Assim, cada gráfico bidimensional que fizemos mostrou duas e omitiu outras duas das dimensões envolvidas.

As representações bidimensionais duplas, ou seja, com dois gráficos bidimensionais, garantem a representação de três dimensões, mas fica ainda faltando uma. É claro que juntando mais gráficos bidimensionais, poderíamos representar a dimensão que ainda falta. Poderíamos ainda representar as quatro dimensões envolvidas na forma de dois gráficos tridimensionais. É claro que os gráficos tridimensionais não nos dão muita precisão, mas para que possamos melhor compreender as superfícies-k de Riemann, esta seria uma saída.

Na representação tridimensional das superfícies-k de Riemann, optamos por mostrar as duas dimensões da variável complexa s em função de apenas uma dimensão da variável complexa k: a magnitude. A Figura 3.2.15 mostra para o Sistema 2 a superfície-k de Riemann no plano-s, com parte real e parte complexa de s em função da magnitude do ganho k,

expressa no gráfico em forma de logaritmo de | k |. A projeção deste gráfico no plano-s, omitindo a dimensão de k, nos leva ao gráfico da Figura 3.2.1, com a única diferença de que no gráfico abaixo o corte está representado, em preto. A Figura 3.2.16 mostra a representação da folha 1 da superfície-k de Riemann no gráfico tridimensional, e a Figura 3.2.17 mostra a representação da folha 2 da mesma superfície em função da magnitude logarítmica de k.

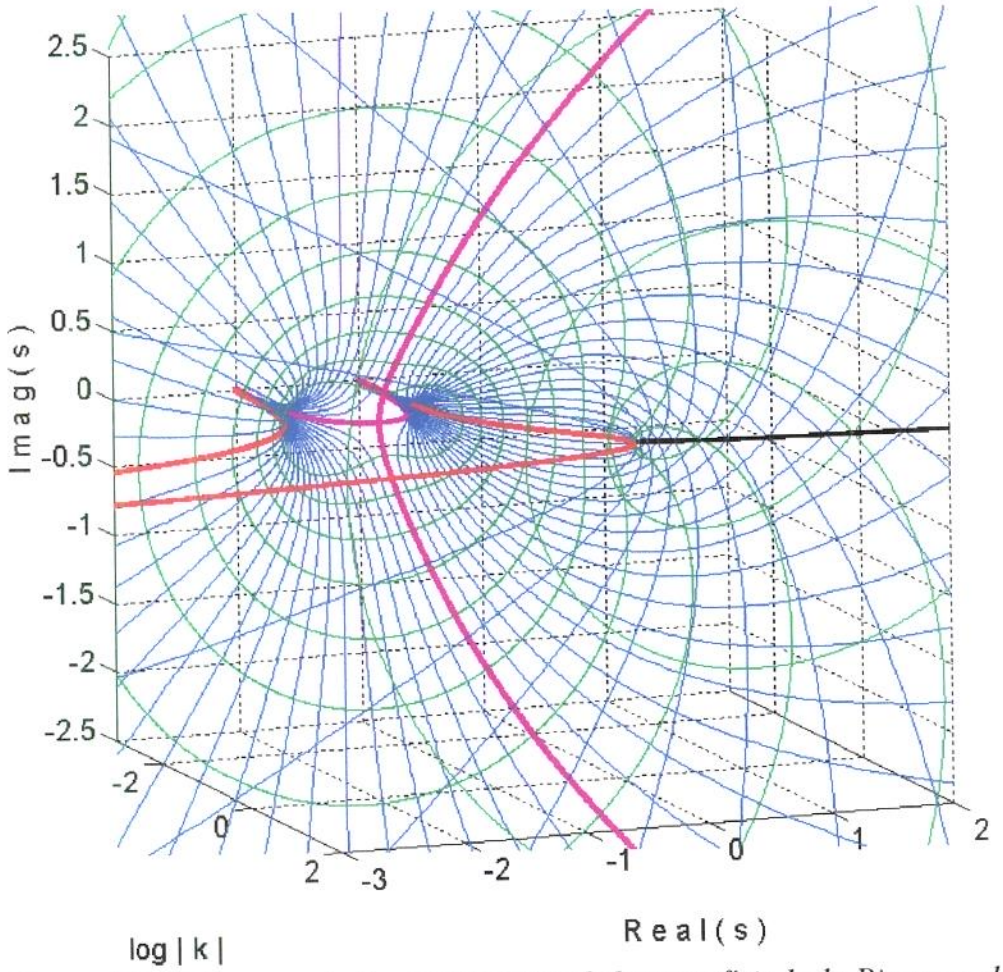


Figura 3.2.15. Representação tridimensional da superfície-k de Riemann do Sistema 2, com o plano-s em função de log | k |.

Outra graficação tridimensional possível é a graficação conjunta dos dois gráficos apresentados na Seção 3.2.3, graficando tanto as curvas-G lá representadas quanto as curvas-F. A Figura 3.2.18 mostra os mesmos gráficos das curvas-G do Sistema 2 apresentadas na Figura 3.2.9 da Seção 3.2.3, mas mostrando os planos onde ficariam representadas as curvas-F nestes gráficos. A partir desta figura é possível imaginar um gráfico tridimensional com magnitude de s em dB e ângulo de fase de s em função do ângulo de fase de k.

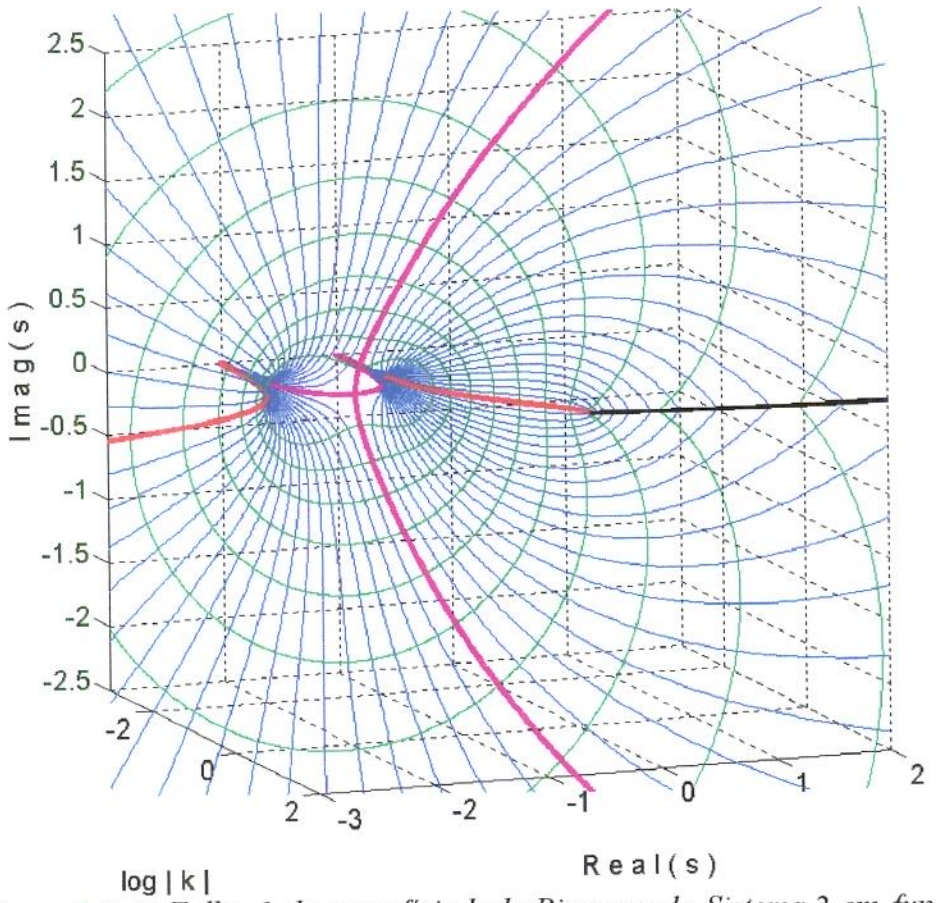


Figura 3.2.16. Folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2 em função de log | k |.

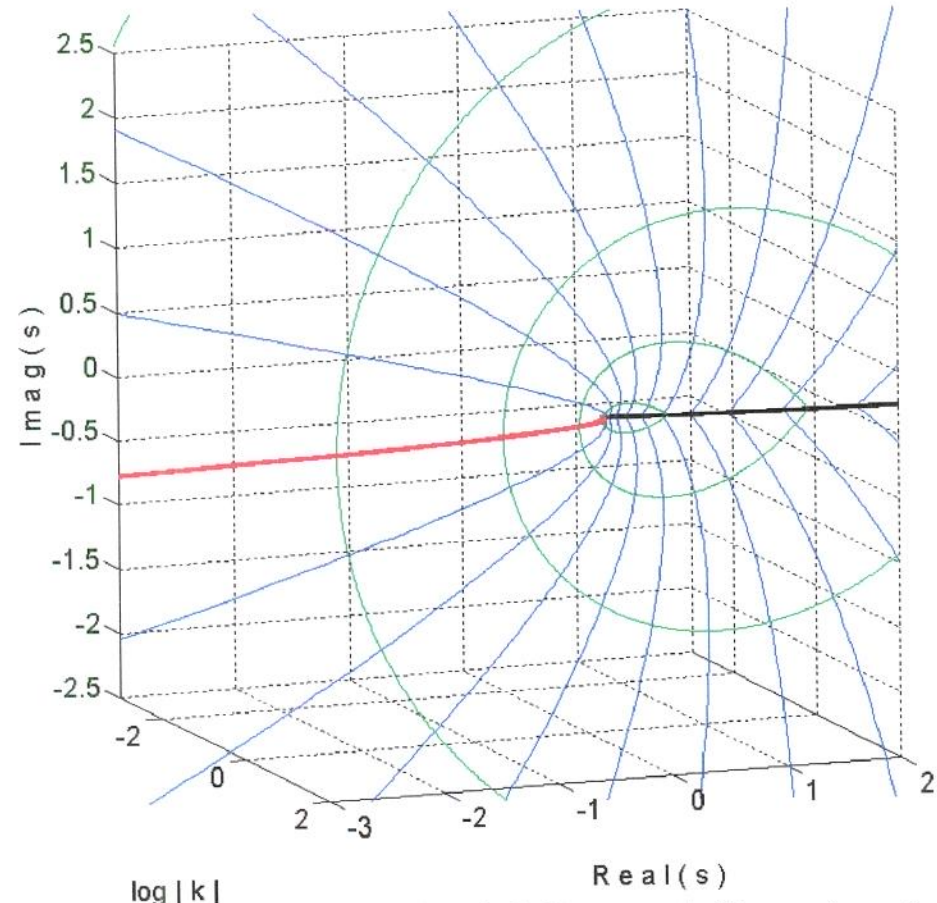


Figura 3.2.17. Folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2 em função de log | k |.

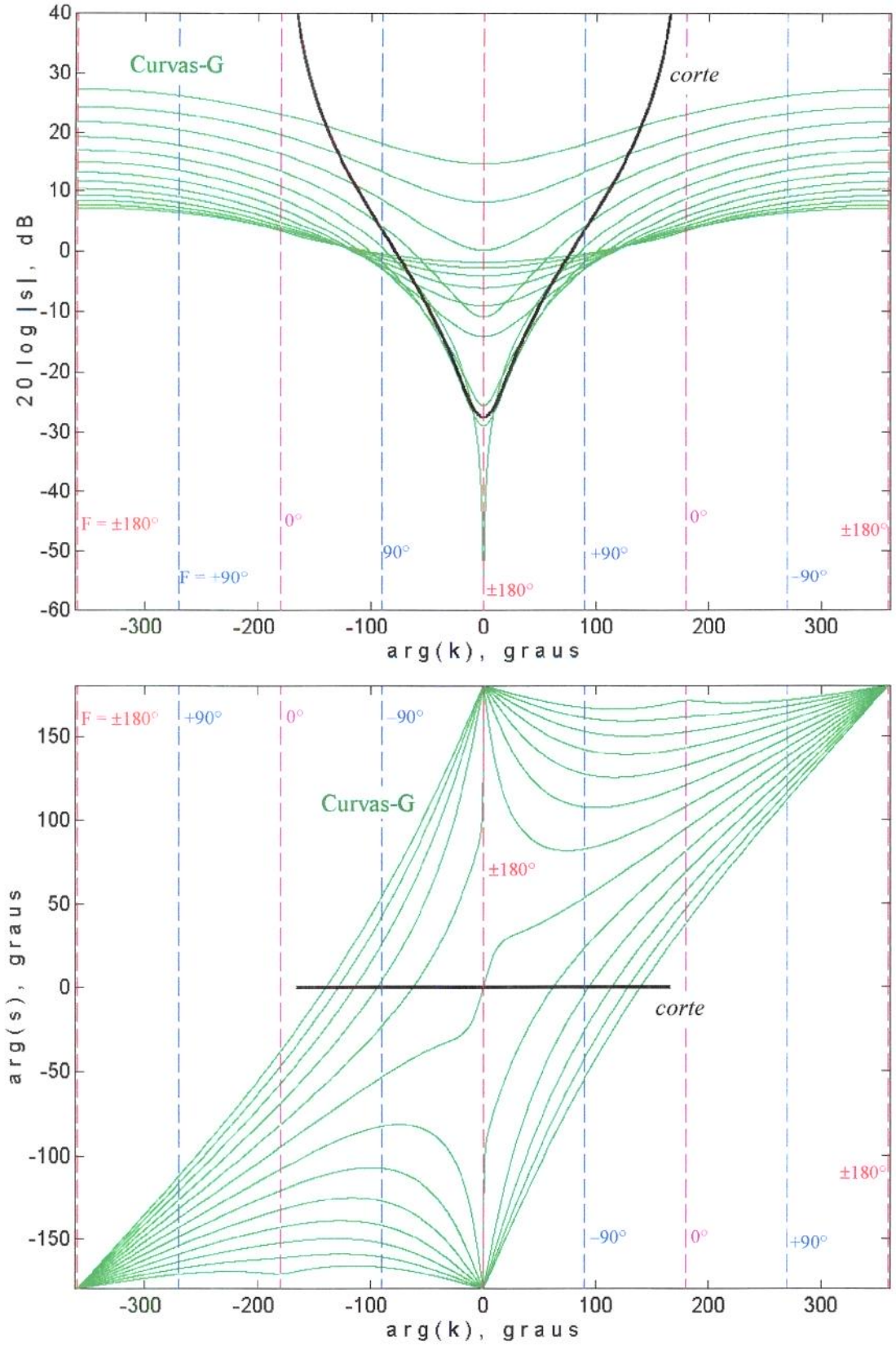


Figura 3.2.18. Retas verticais indicando a localização das curvas-F nos gráficos das curvas-G da Figura3.2.9.

É possível também a graficação conjunta dos dois gráficos apresentados na Seção 3.2.2, graficando tanto as curvas-F lá representadas quanto as curvas-G. A Figura 3.2.19 mostra os mesmos gráficos das curvas-F do Sistema 2 apresentadas na Figura 3.2.6 da Seção

3.2.2, mas mostrando os planos onde ficariam representadas as curvas-G nestes gráficos. A partir desta figura é possível imaginar um gráfico tridimensional com magnitude de s em dB e ângulo de fase de s em função do módulo de k.

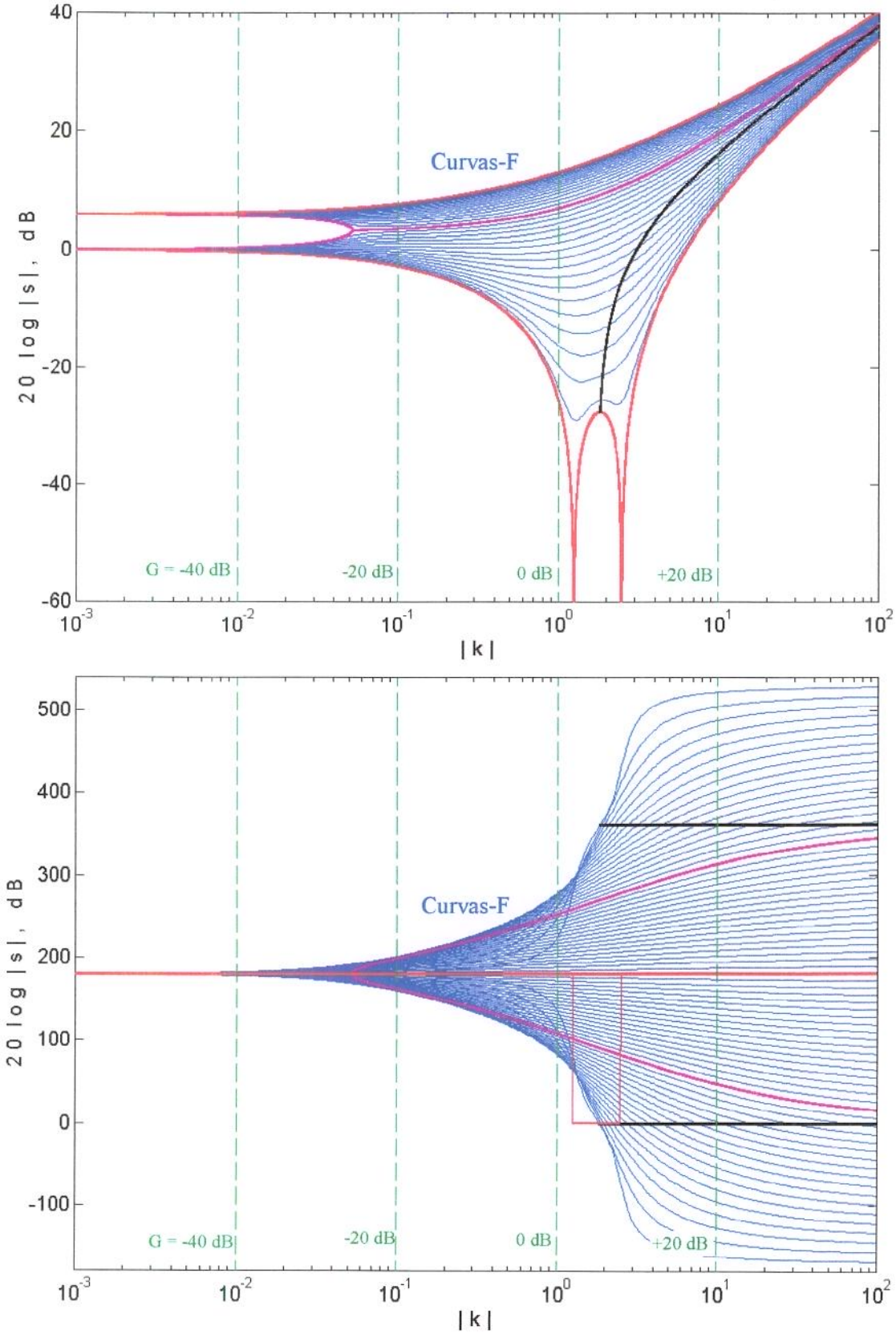


Figura 3.2.19. Retas verticais indicando a localização das curvas-G nos gráficos das curvas-F da Figura3.2.6.

A representação tridimensional dos gráficos da Figura 3.2.19 está graficada na Figura 3.2.20, abaixo. Nela é possível distinguir que a magnitude de s em dB está no eixo vertical, o ângulo de fase de s em graus está no eixo horizontal da direita, e a magnitude logarítmica de k está no eixo horizontal da esquerda. Assim, o primeiro gráfico da Figura 3.2.19 é a projeção do gráfico da Figura 3.2.20 no plano que suprime o ângulo de fase de s. Já o segundo gráfico da Figura 3.2.19 é a projeção do gráfico da Figura 3.2.20 no plano que suprime a magnitude de s em dB. Finalmente, a projeção do gráfico da Figura 3.2.20 no plano que suprime a variação de magnitude de k, então teremos o gráfico da Figura 3.2.12, da Seção 3.2.4.

A representação da Figura 3.2.20 contém essencialmente a mesma informação que a da Figura 3.2.15. Entretanto, há muito mais clareza na identificação das curvas e da superfície tridimensional que se forma ao representarmos a superfície-k de Riemann desta forma. Há também a vantagem de identificar a continuidade das curvas nas duas folhas, sem equívocos. A Figura 3.2.21 mostra a folha 1 e a Figura 3.2.22 mostra a folha 2.

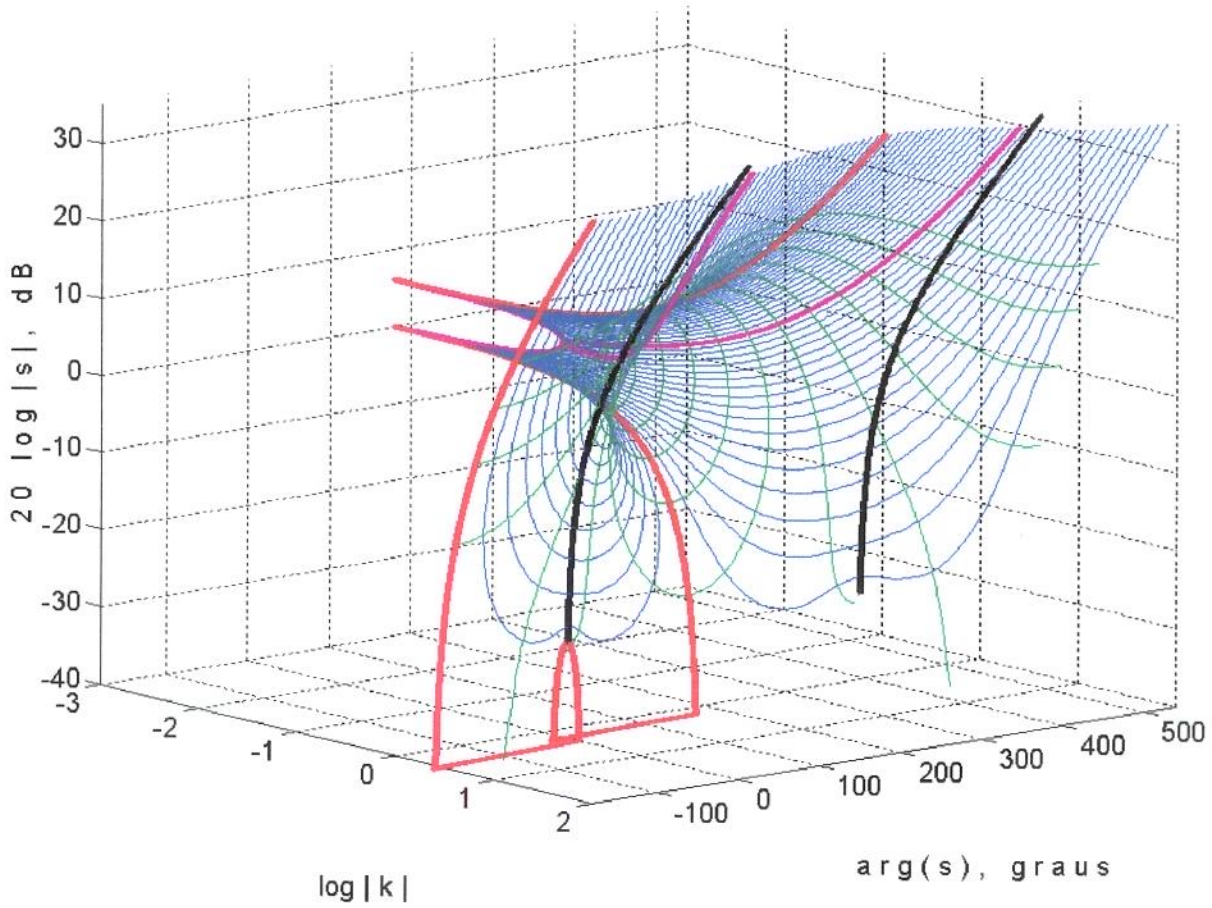


Figura 3.2.20. Representação tridimensional da superfície-k de Riemann do Sistema 2, juntando em um só os dois gráficos bidimensionais apresentados na Figura 3.2.6, Seção 3.2.2.

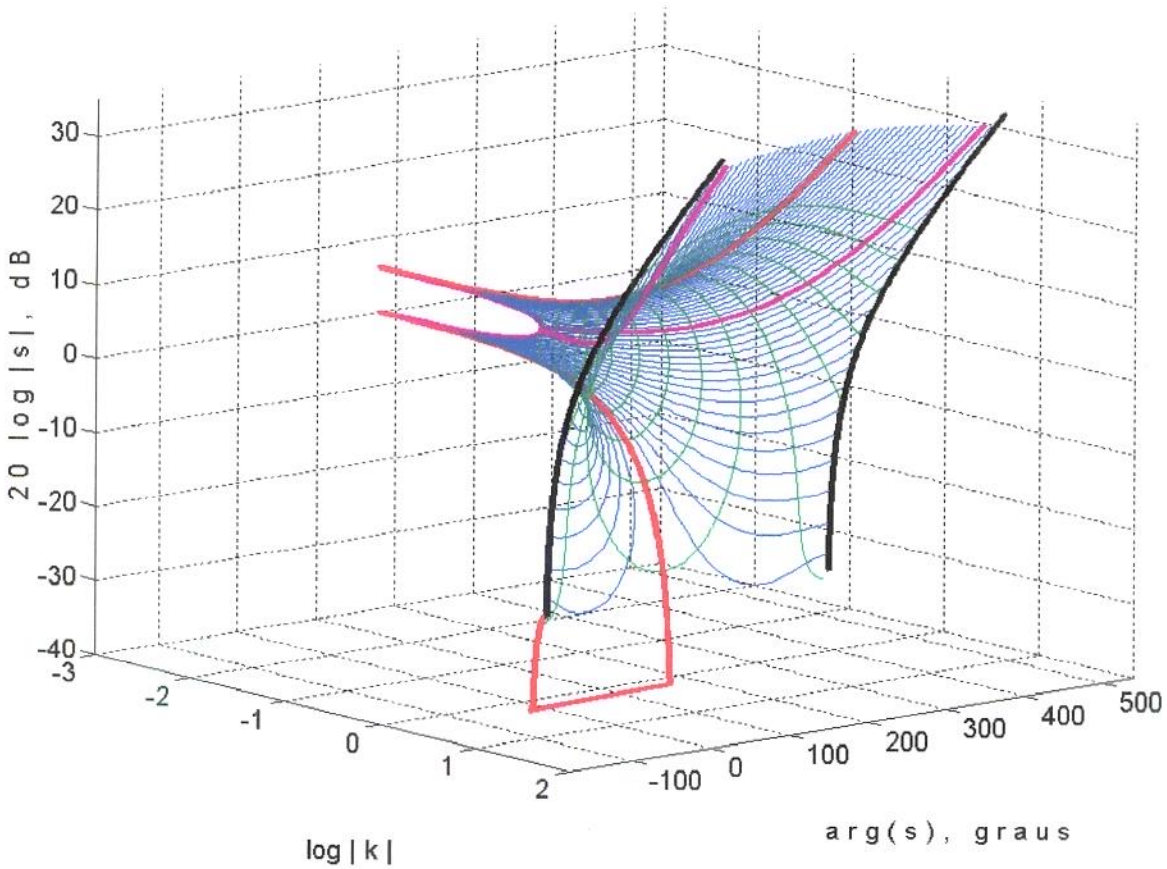


Figura 3.2.21. Folha 1 do gráfico tridimensional da superfície-k de Riemann do Sistema 2 apresentada na Figura 3.2.20.

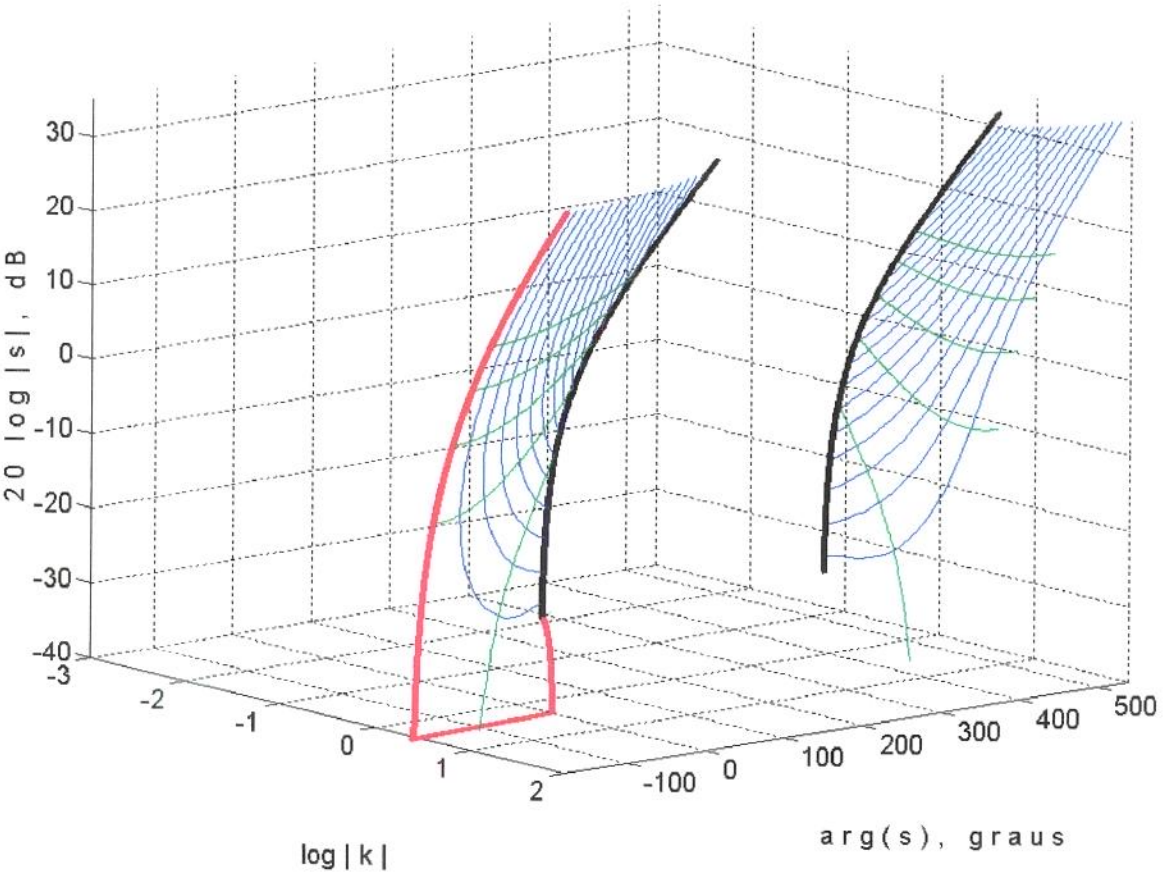


Figura 3.2.22. Folha 2 do gráfico tridimensional da superfície-k de Riemann do Sistema 2 apresentada na Figura 3.2.20.

3.3. SUPERFÍCIE-S DE RIEMANN E LUGARES CARACTERÍSTICOS EM SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL

A superfície-s de Riemann de um sistema de controle multivariável é calculada através do mapeamento conforme do plano complexo-s no plano complexo-G(s), onde ao invés de serem colocados os valores da matriz de transferência G(s) do sistema, são colocados os valores dos autovalores de G(s). Assim, a superfície-s de Riemann no caso multivariável é a generalização dos lugares característicos do sistema, que são os autovalores de G(s) quando $s = j\omega$, e representam a resposta em freqüência do sistema. Chamaremos de g(s) estes lugares característicos generalizados para qualquer $s \in \mathbf{C}$.

No caso monovariável cada ponto $\bar{s} \in \mathbf{C}$ do plano-s gerará um único valor $g(\bar{s}) \in \mathbf{C}$, e as funções que descrevem este caso são chamadas funções analíticas. Já no caso multivariável, para um sistema G(s) com *m* entradas e *m* saídas, cada ponto $\bar{s} \in \mathbf{C}$ do plano-s vai gerar *m* valores complexos $\bar{g}_i = g_i(\bar{s}) = \text{eig}_i[G(\bar{s})]$ a serem graficados no plano-G(s): $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_m$. São então necessárias funções algébricas para descrever o sistema. Da mesma forma como descrito para as superfícies-k de Riemann, são necessárias *m* folhas do plano complexo-G(s) para formar a superfície-s de Riemann. Novamente também, a passagem de uma curva de uma folha para outra é feita através do corte, e este é delimitado pelos pontos de ramificação, que serão calculados para as superfície-s de Riemann na próxima seção.

Usando as matrizes da representação de estado $G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$, para cada valor $\bar{s} \in \mathbf{C}$, os *m* autovalores $g = \bar{g}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ de G(s) são raízes da seguinte equação:

$$\det[gI - G(s)] = \det[gI - C(\bar{s}I - A)^{-1} B - D] = 0 \,. \qquad (3.3.1)$$

Através da equação acima, podemos obter os autovalores $g_i(s)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ da matriz de transferência G(s). Entretanto nos cortes da superfície-s de Riemann o que temos são os valores de g(s), e para podermos representar os cortes nas novas graficações é necessário obter os valores de s que geraram os cortes. Não podendo isolar em (3.3.1) a variável $s = \bar{s}$ em função de g, restam-nos métodos numéricos. Implementamos um algoritmo usando aproximações sucessivas para este fim. O algoritmo foi testado e utilizado com sucesso.

3.4. MÉTODO PROPOSTO PARA CÁLCULO E GRAFICAÇÃO DE SUPERFÍCIE-S DE RIEMANN EM SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL

A superfície-s de Riemann de um sistema de controle multivariável é feita com o uso de curvas de magnitude constante da freqüência complexa s, como as da Figura 2.4.2 do Capítulo 2, e curvas de ângulo de fase constante da freqüência complexa s, como as da Figura 2.4.1 do Capítulo 2. As curvas de magnitude constante no plano complexo-s gerarão no plano-G(s) curvas de autovalores g(s) que denominamos de **curvas-G** (em alusão a ganho constante da variável independente s), e as curvas de ângulo de fase constante no plano complexo-s gerarão no plano-G(s) curvas de autovalores g(s) que denominamos de **curvas-F** (com alusão a fase constante da variável independente k). Como no Capítulo 2, usaremos a convenção de cores na qual as **curvas-G** serão graficadas em verde, e as **curvas-F** serão graficadas em azul, com exceção das curvas-F com F = +90°, que serão graficadas em vermelho por serem os lugares característicos g(s) = g(jω) do sistema, gerados a partir da curva de s = +jω, com arg(s) = +90°, e das curvas-F com F = -90°, que serão graficadas em magenta por serem os complexos conjugados conj[g(jω)] = g(-jω) dos lugares característicos, gerados a partir da curva de s = -jω, com arg(s) = -90°.

Uma curva-F ou curva-G de superfície-s de Riemann de um sistema de controle multivariável, ao passar por um corte, migra automaticamente de uma folha para outra da superfície-s de Riemann, da mesma forma como já descrito na Seção 3.2 para as superfícies-k de Riemann. Assim, a superfície-s de Riemann de um sistema G(s) (m x m), ou seja, com m entradas e m saídas, terá m cópias do plano-G(s), que são chamadas **folhas da superfície** de Riemann.

Foi utilizado para gerar as folhas da superfície-s de Riemann o mesmo algoritmo de separação de seções das curvas-G e curvas-F que foi utilizado para gerar as folhas da superfície-k de Riemann, como descrito na Seção 3.2. O algoritmo usado foi colocado na função "sepfolha". Seções de curvas-G e curvas-F pertencentes a folhas diferentes da superfície-s de Riemann, assim como as seções correspondentes das curvas da variável independente s, são separadas pela função em variáveis diferentes. Desta forma é possível graficar independentemente tanto as folhas da superfície-s de Riemann quanto os valores de s que geraram estas folhas. Para usar a função é necessário saber a localização do(s) corte(s) no plano-G(s).

O cálculo dos cortes na superfície-s de Riemann de um sistema de controle multivariável é feito através da determinação dos **pontos de ramificação ('branch points')**, de maneira semelhante àquela descrita na Seção 3.2 para as superfícies-k de Riemann. Os pontos de ramificação da superfície-s de Riemann são calculados através da determinação da **equação característica do sistema**, a mesma que foi utilizada para as superfícies-k de Riemann. A diferença estará nas variáveis. Para superfície-k de Riemann obtivemos a equação característica como um polinômio em g(s) e com coeficientes polinomiais em s. Inverteremos a situação das variáveis g(s) e s para a superfície-s de Riemann. Assim, a **equação característica** será expressa como um polinômio em s e com coeficientes polinomiais em g(s).

A equação a seguir descreve a equação característica como polinômio em g(s):

$$\det[g(s)\,I_m - G(s)] = a_0(s)\,g^m(s) + a_1(s)\,g^{m-1}(s) + \ \ldots\ + a_m(s) = 0\,, \qquad (3.4.1)$$

onde os coeficientes $\{a_i(s) : i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\}$ são funções racionais em s.

Se acharmos o máximo denominador comum $d(s)$ dos $\{a_i(s) : i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, então a **equação característica** pode ser colocada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta(g,s) &= d(s)\cdot\det[g(s)\,I_m - G(s)] \\ &= b_0(s)\,g^m(s) + b_1(s)\,g^{m-1}(s) + \ \ldots\ + b_m(s) = 0 \end{aligned} \qquad (3.4.2)$$

onde os coeficientes $\{b_i(s) : i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\}$ são polinômios em s.

Podemos reescrever a **equação característica** de G(s) expressa em (3.4.2) assim:

$$\nabla(s,g) = \Delta(g,s) = c_0(g)\,s^n + c_1(g)\,s^{n-1} + \ \ldots\ + c_n(g) = 0 \qquad (3.4.2)$$

onde os coeficientes $\{c_i(g) : i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ são polinômios em g = g(s).

A partir dos coeficientes $\{c_i(g) : i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ da função algébrica $\nabla(s,g)$, podemos determinar o **discriminante** $D_s(g)$ de G(s). Utilizamos o algoritmo de Sansone e Gerretsen [59], mostrado no Apêndice 1, para a determinação deste discriminante.

Finalmente, os **pontos de ramificação** da superfície-s de Riemann são as raízes de

$$D_s(g) = 0 \ . \tag{3.4.3}$$

Traçaremos adiante nesta seção as superfícies-s de Riemann do Sistema 2, descrito no Capítulo 1 pela Equação (1.2.3). Para este sistema, a Equação (3.4.2) já foi descrita em (3.2.6), na Seção 3.2, que é reescrita abaixo:

$$\begin{aligned} \Delta(g,s) &= \left[(1{,}25)^2(s+1)(s+2)\right]g^2(s) + \left[-1{,}25(2s-3)\right]g(s) + 1 = 0 \\ &= \left[1{,}5625\,s^2 + 4{,}6875\,s + 3{,}125\right]g^2(s) + \left[-2{,}5s + 3{,}75\right]g(s) + 1 = 0 \ . \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

A partir da equação acima, podemos rapidamente chegar a $\nabla(s,g)$:

$$\nabla(s,g) = \left[1{,}5625\,g^2\right]s^2 + \left[4{,}6875\,g^2 - 2{,}5\,g\right]s + \left[3{,}125\,g^2 + 3{,}75\,g + 1\right] = 0 \tag{3.4.5}$$

e o discriminante, calculado através do algoritmo mostrado no Apêndice 1, fica:

$$D_s(g) = (1{,}25)^3(1{,}25\,g - 24)g^3 = 0 \ , \tag{3.4.6}$$

cujas raízes são os **pontos de ramificação** da superfície-s de Riemann:

$$\left\{ \ g = 0 \ ; \quad g = 0 \ ; \quad g = 0 \ ; \quad g = 19{,}2 \ \right\} \ . \tag{3.4.7}$$

Assim, a superfície-s de Riemann do Sistema 2 tem um **corte** no plano-G(s), e ele fica no intervalo [0 ; +19,2].

3.4.1. Graficação Usual de Superfície-s de Riemann no Plano-G(s)

A superfície-s de Riemann de um sistema de controle multivariável com m entradas e m saídas compreende m cópias de plano complexo-G(s), onde são graficadas as curvas-G e curvas-F. Estas são determinadas a partir da freqüência complexa s. As curvas de s da Figura 2.4.1 do Capítulo 2 geram as curvas-F, e as curvas de s da Figura 2.4.2 geram as curvas-G. No plano-G(s) são graficados os autovalores $g_i(s)$, $i = 1, ..., m$, da matriz de transferência G(s).

A Figura 3.4.1 mostra as curvas-G e curvas-F do Sistema 2, que tem 2 entradas e duas saídas, tendo portanto duas folhas na superfície-s de Riemann. O cálculo do corte foi descrito anteriormente, e é delimitado pelos pontos de ramificação 0 e +19,2. Na Figura 3.4.1 o corte aparece em preto, e é possível ver que tanto curvas-G quanto curvas-F o atravessam. As curvas em vermelho são os lugares característicos $g_i(j\omega)$ do sistema, como mostrados na Figura 1.2.11 do Capítulo 1. A Figura 3.4.2 mostra a folha 1 e a Figura 3.4.3 mostra a folha 2 da superfície-s de Riemann do Sistema 2, como graficada tradicionalmente. As curvas-G e curvas-F que chegam no corte na folha 1 continuam sua trajetória na folha 2.

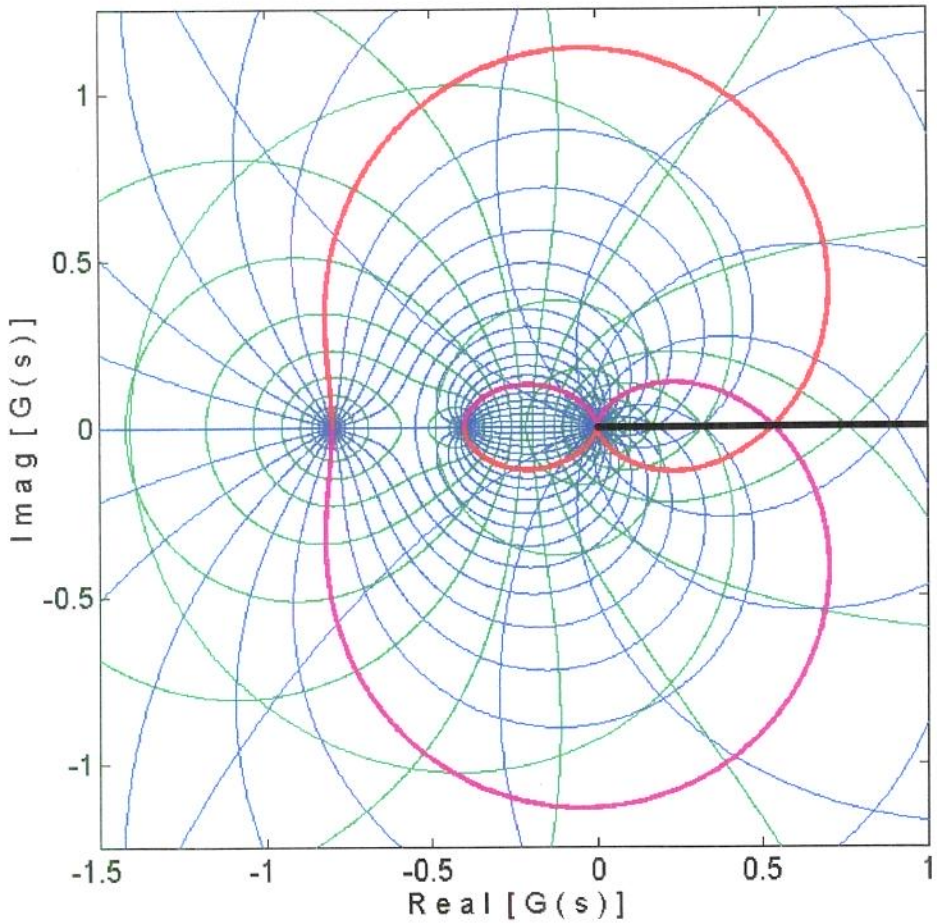


Figura 3.4.1. Superfície-s de Riemann do Sistema 2, com as folhas 1 e 2 sobrepostas.

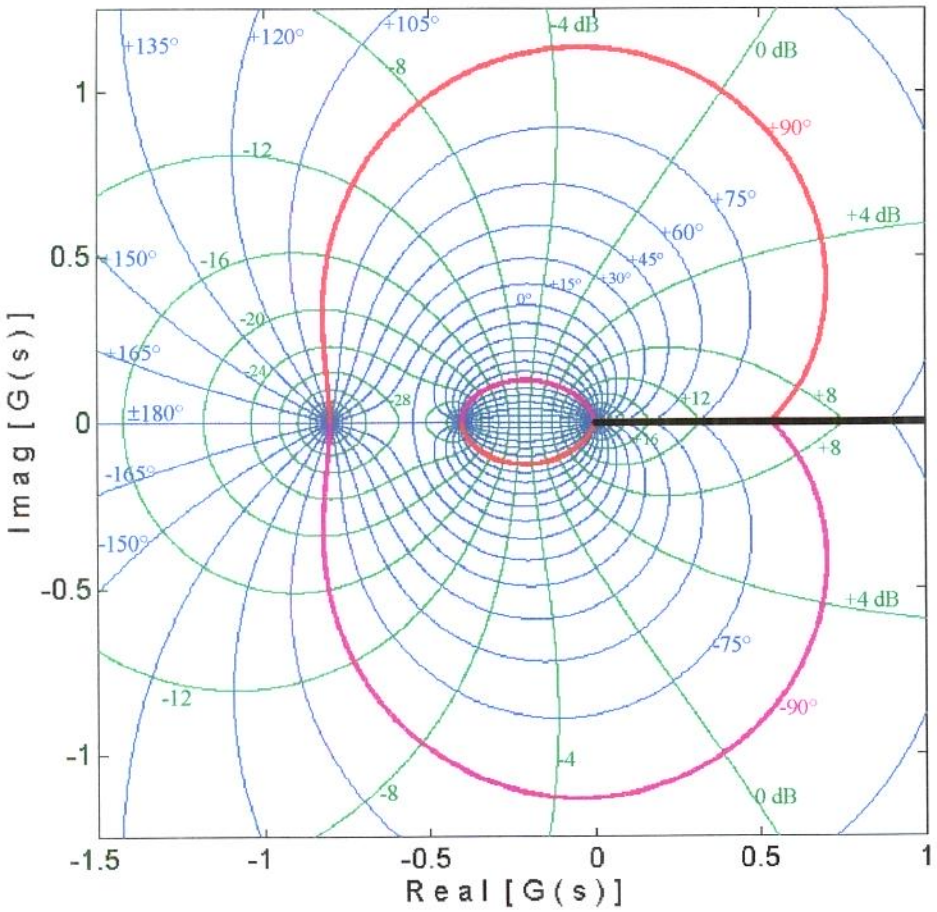


Figura 3.4.2. Folha 1 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

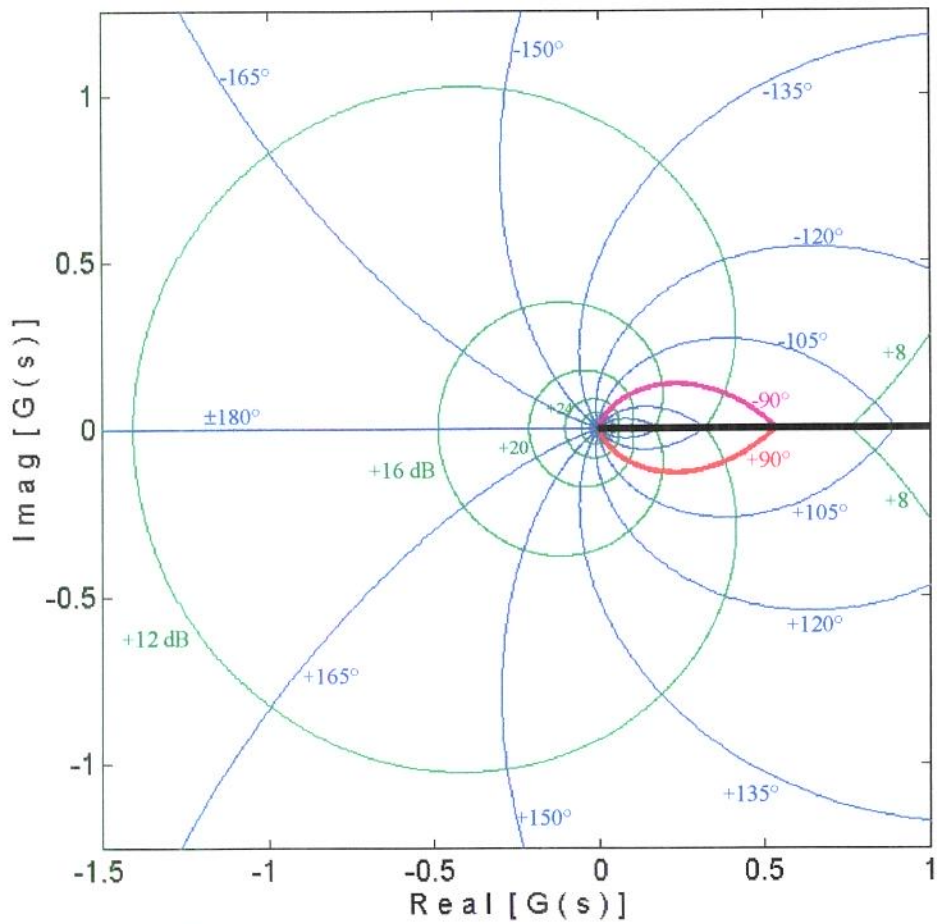


Figura 3.4.3. Folha 2 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

3.4.2. Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-F versus Magnitudes de s

As Figuras 3.4.4 e 3.4.5 mostram as curvas-F do Sistema 2 na forma de magnitudes em dB e ângulos de fase em graus *versus* magnitude de s em rad/s, em escala logarítmica. Esta é a generalização do diagrama de Bode do sistema, como se pode ver na Figura 1.3.6 do Capítulo 1, onde apenas os lugares característicos foram graficados. A Figura 3.4.6 é a repetição da Figura 3.4.5, mas com os ângulos de fase de algumas curvas-F rotacionados em 360°, o que no plano-G(s) não representa mudança de lugar geométrico. Entretanto, a graficação da Figura 3.4.6 permite uma melhor visualização das curvas, sem as sobreposições existentes na Figura 3.4.5. Assim, podemos identificar claramente no conjunto das Figura 3.4.4 e 3.4.6 as regiões pertencentes à folha 1, antes das curvas-F passarem pelo corte, e as regiões pertencentes à folha 2, depois de passarem por ele, à medida que cresce a magnitude de s.

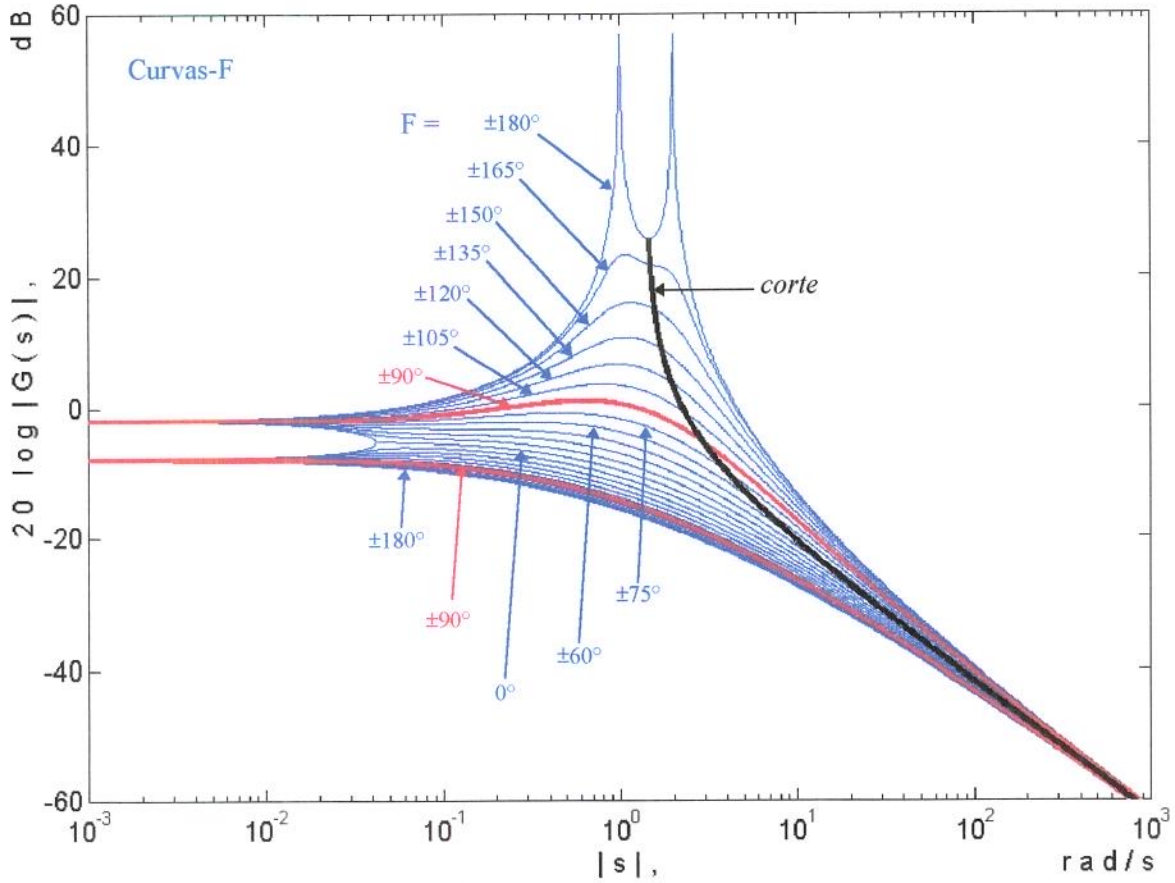


Figura 3.4.4. Gráfico das magnitudes em dB das curvas-F da superfície-s de Riemann do Sistema 2, em função de | s |, em rad/s.

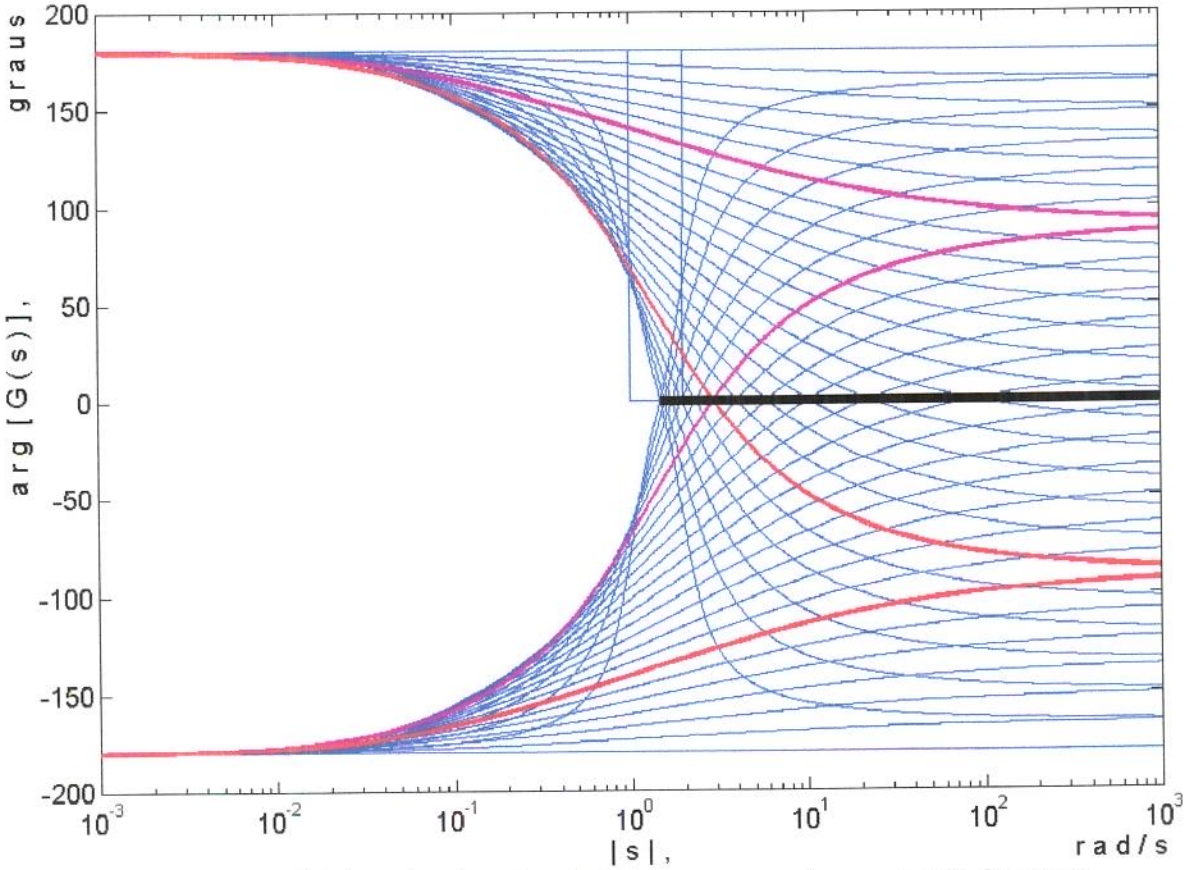


Figura 3.4.5. Gráfico dos ângulos de fase em graus das curvas-F da superfície-s de Riemann do Sistema 2, em função de | s |, em rad/s.

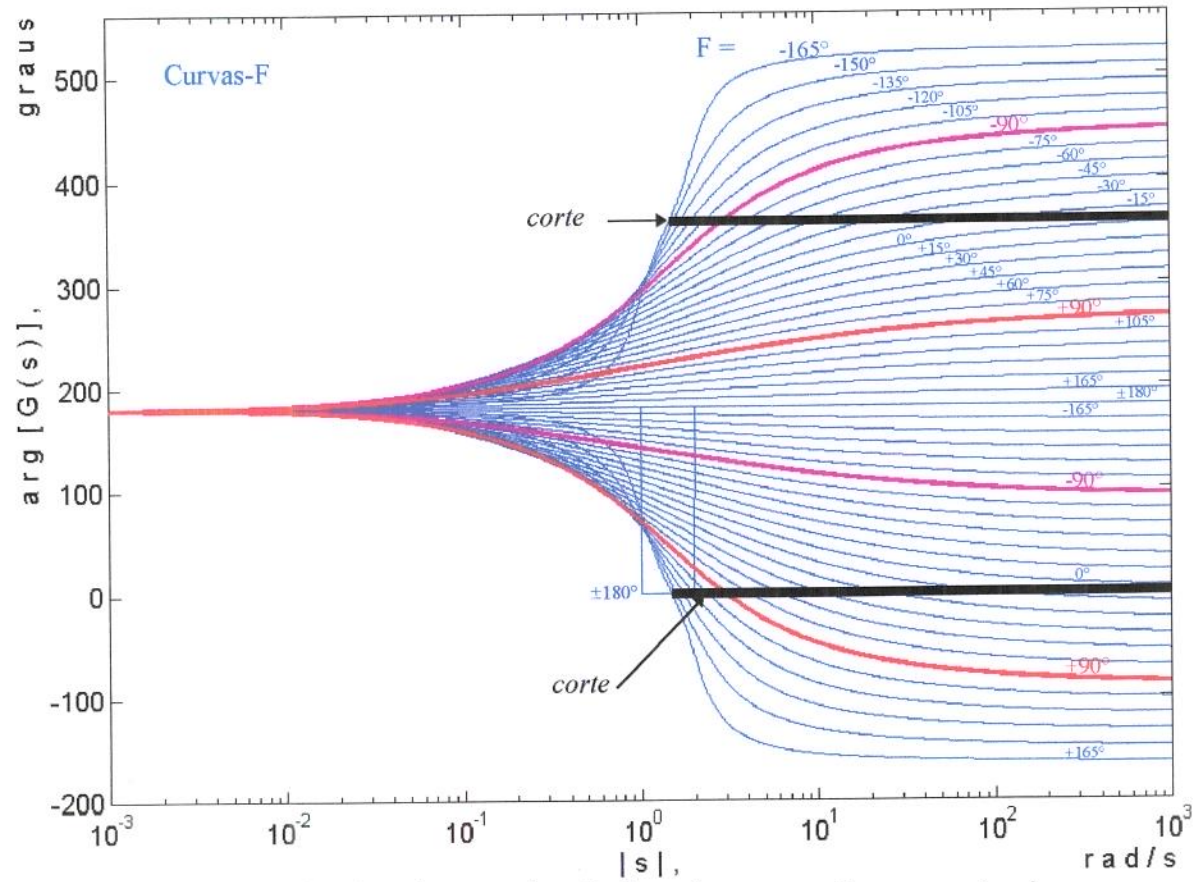


Figura 3.4.6. Gráfico dos ângulos de fase das curvas-F, com mais clareza nas curvas, sem as sobreposições existentes na Figura 3.4.5.

O corte está representado em preto nas Figuras 3.4.4 a 3.4.6, e foi calculado como já descrito na Seção 3.3: foram determinados os pontos do plano-s responsáveis por pontos no corte no plano-G(s). As curvas dos pontos no plano-s responsáveis pelo corte no plano-G(s) são mostradas na Figura 3.4.7. Uma vez que o corte no plano-G(s) está no eixo real, a cada ponto do corte são gerados dois pontos complexos conjugados no plano-s, gerando duas curvas complexas conjugadas, simétricas em relação ao eixo real. O ponto s = -1,4583 é o único ponto no próprio eixo real do plano-s, e corresponde ao ponto de ramificação +19,2 no plano-G(s). O outro ponto de ramificação no plano-G(s) é a origem, que é alcançada com | s | → ∞.

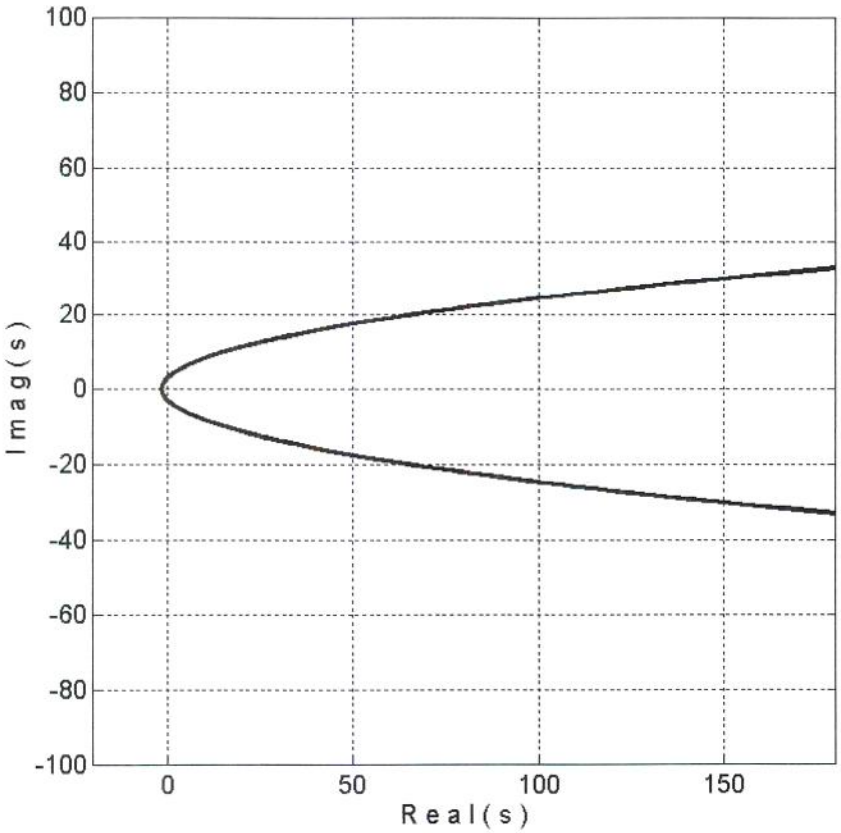


Figura 3.4.7. Curvas no plano-s responsáveis pelo corte no plano-G(s). O menor valor de | s | *está no semi-eixo real negativo:* -1,4583.

As Figuras 3.4.8 e 3.4.9 mostram as curvas-F das Figuras 3.4.4 e 3.4.6 na folha 1 da superfície-s de Riemann do Sistema 2, e as Figuras 3.4.10 e 3.4.11 mostram as curvas-F na folha 2. Assim, temos a noção exata dos trechos das curvas-F que pertencem a cada uma das folhas da superfície-s de Riemann do sistema.

Se quiséssemos representar as curvas-G nos gráficos aqui apresentados, elas apareceriam em forma de retas verticais no valor de magnitude de s correspondente. Assim, a curva com G = -20 dB seria uma vertical em | s | = 0,01 rad/s, e assim por diante.

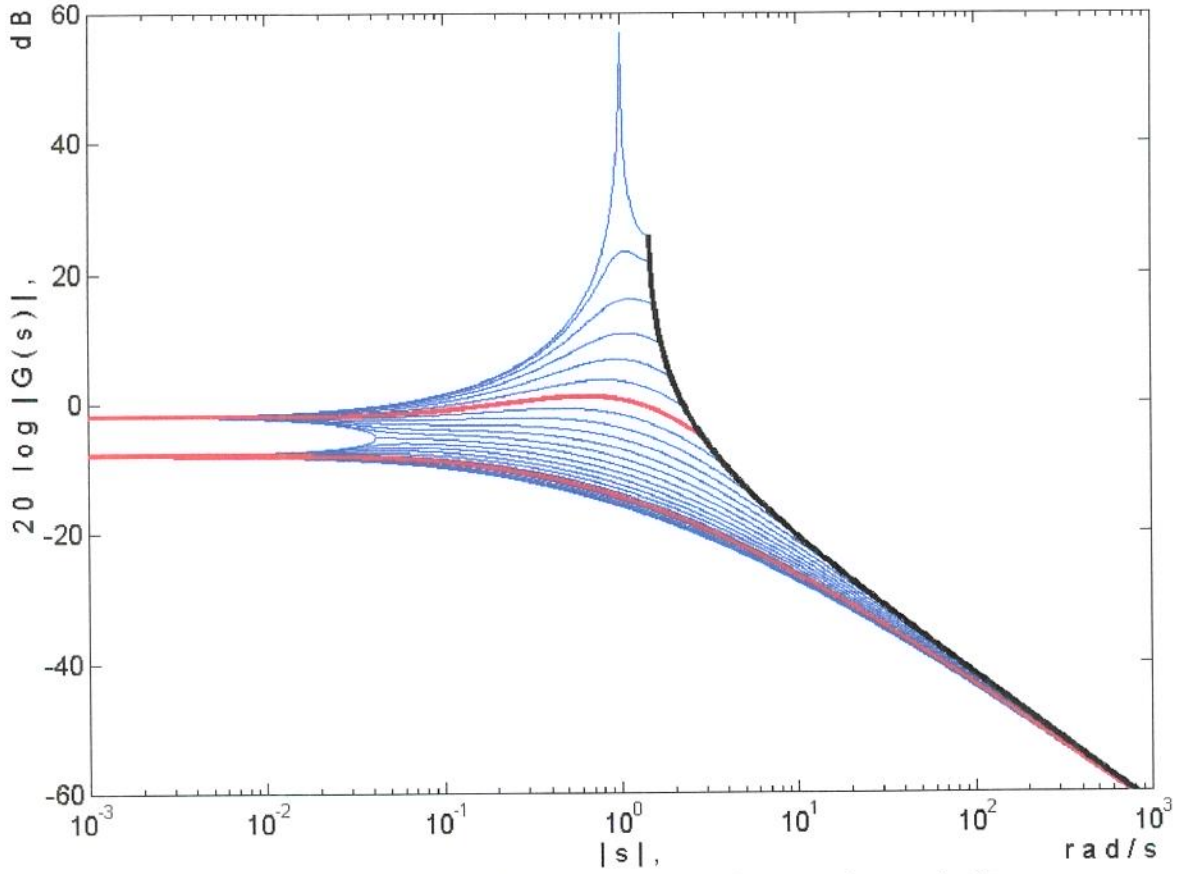


Figura 3.4.8. Magnitudes em dB das curvas-F da superfície-s de Riemann na folha 1.

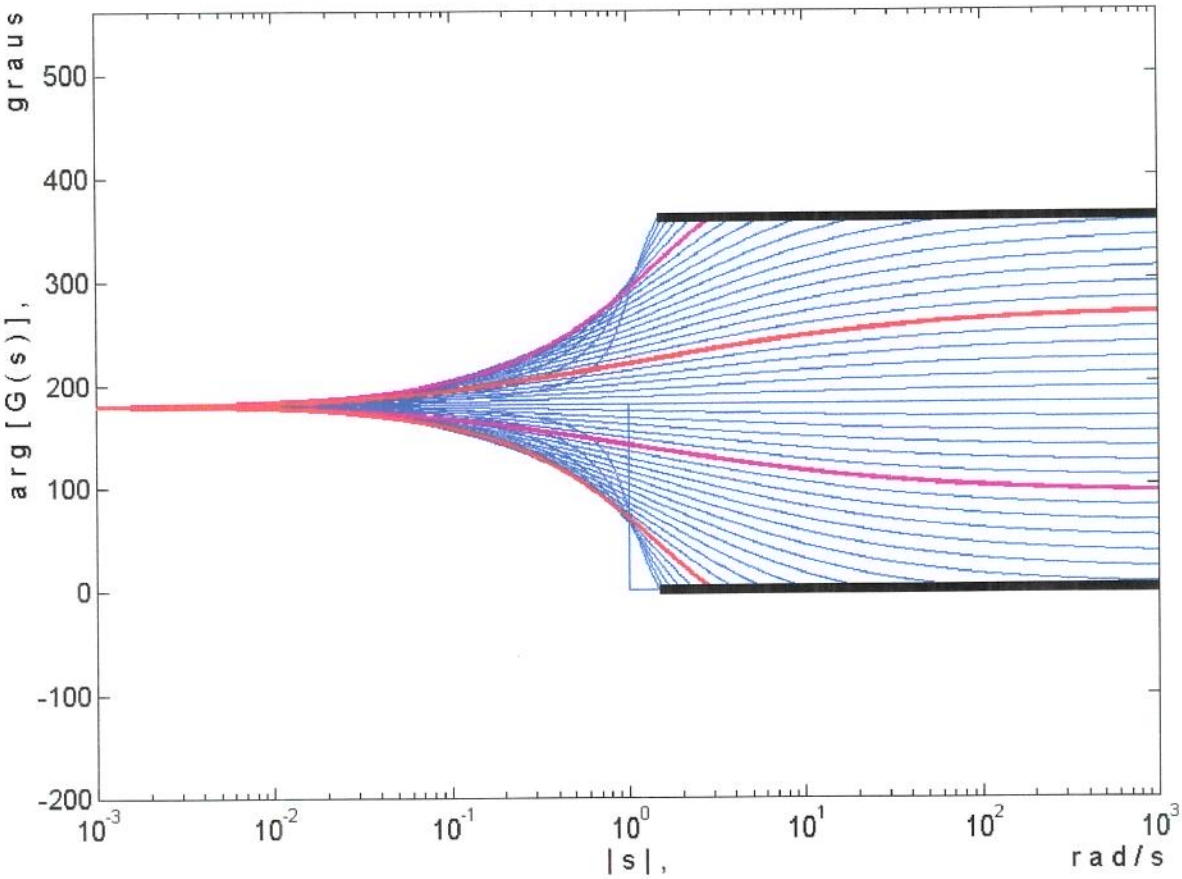


Figura 3.4.9. Ângulos de fase em graus das curvas-F da superfície-s de Riemann na folha 1, de acordo com a Figura 3.4.6.

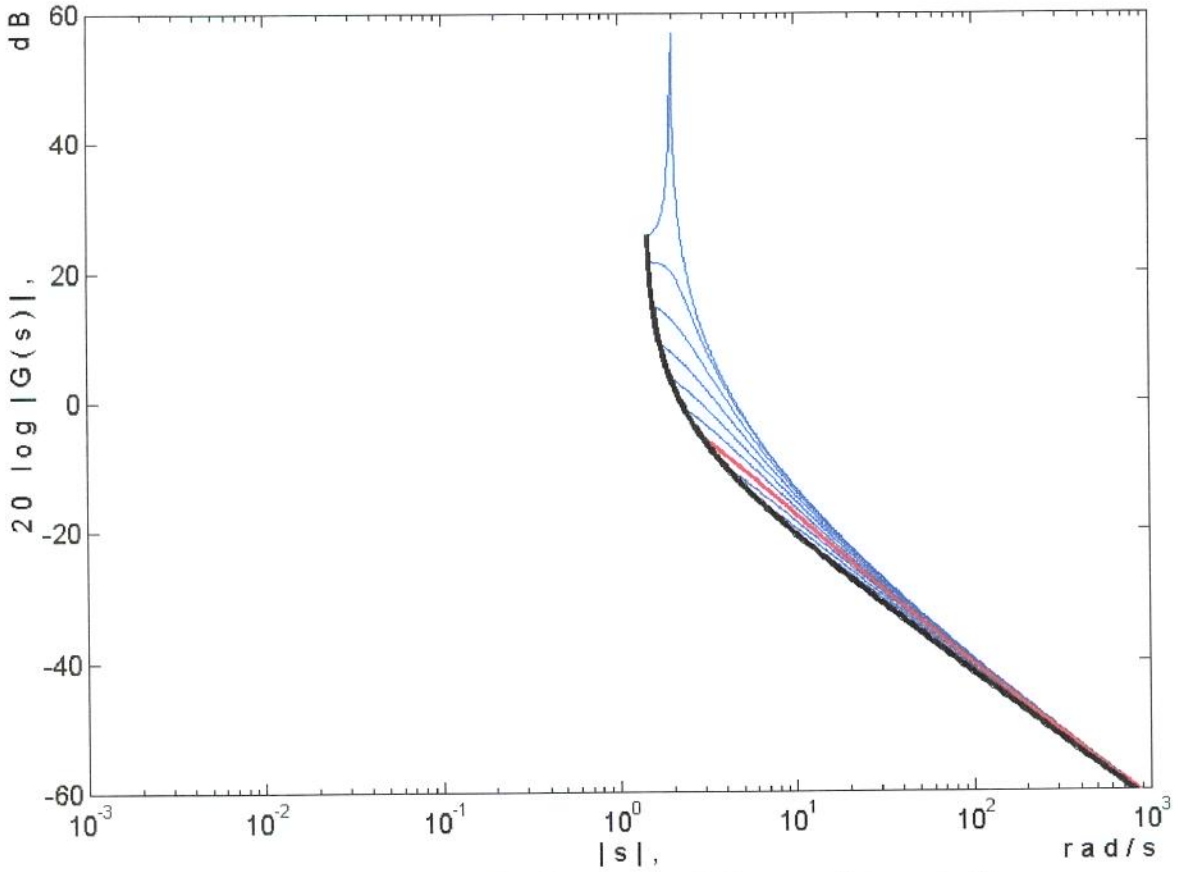


Figura 3.4.10. Magnitudes em dB das curvas-F da superfície-s de Riemann na folha 2.

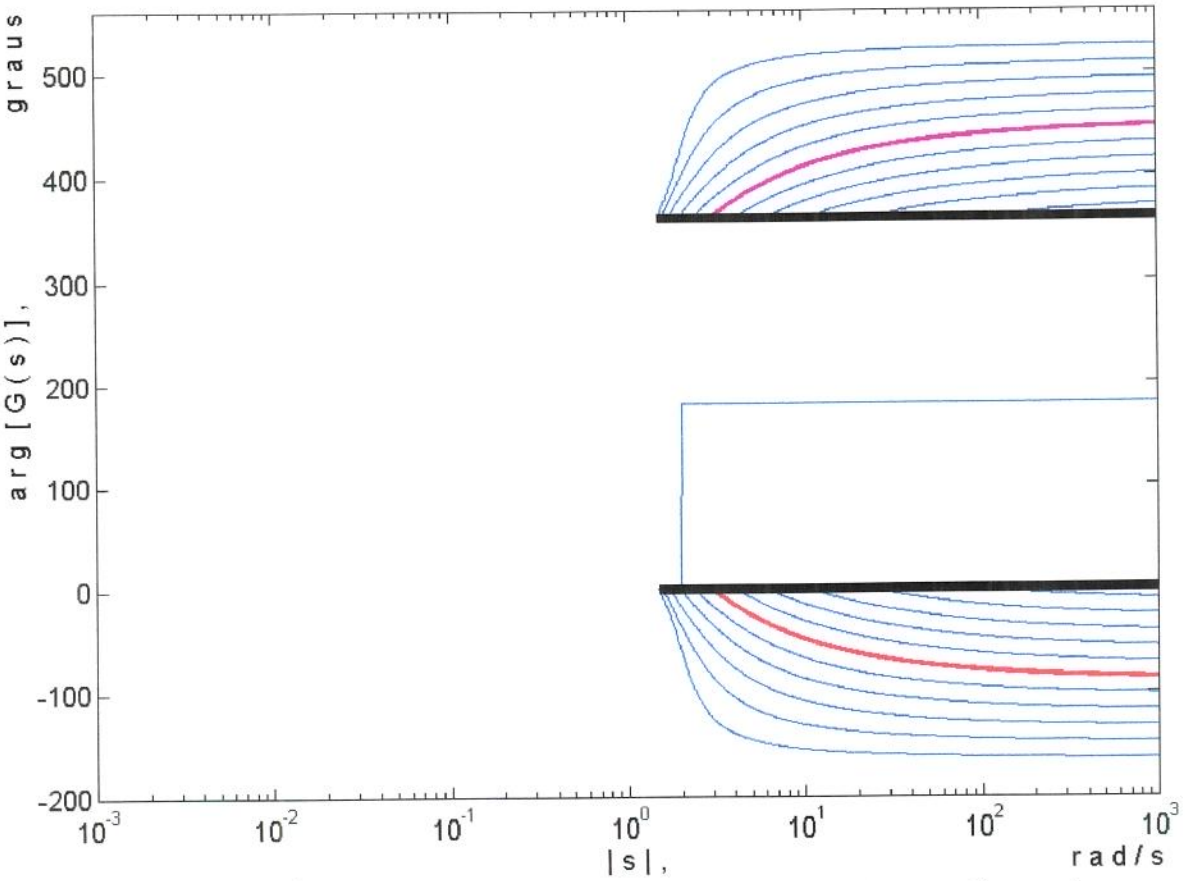


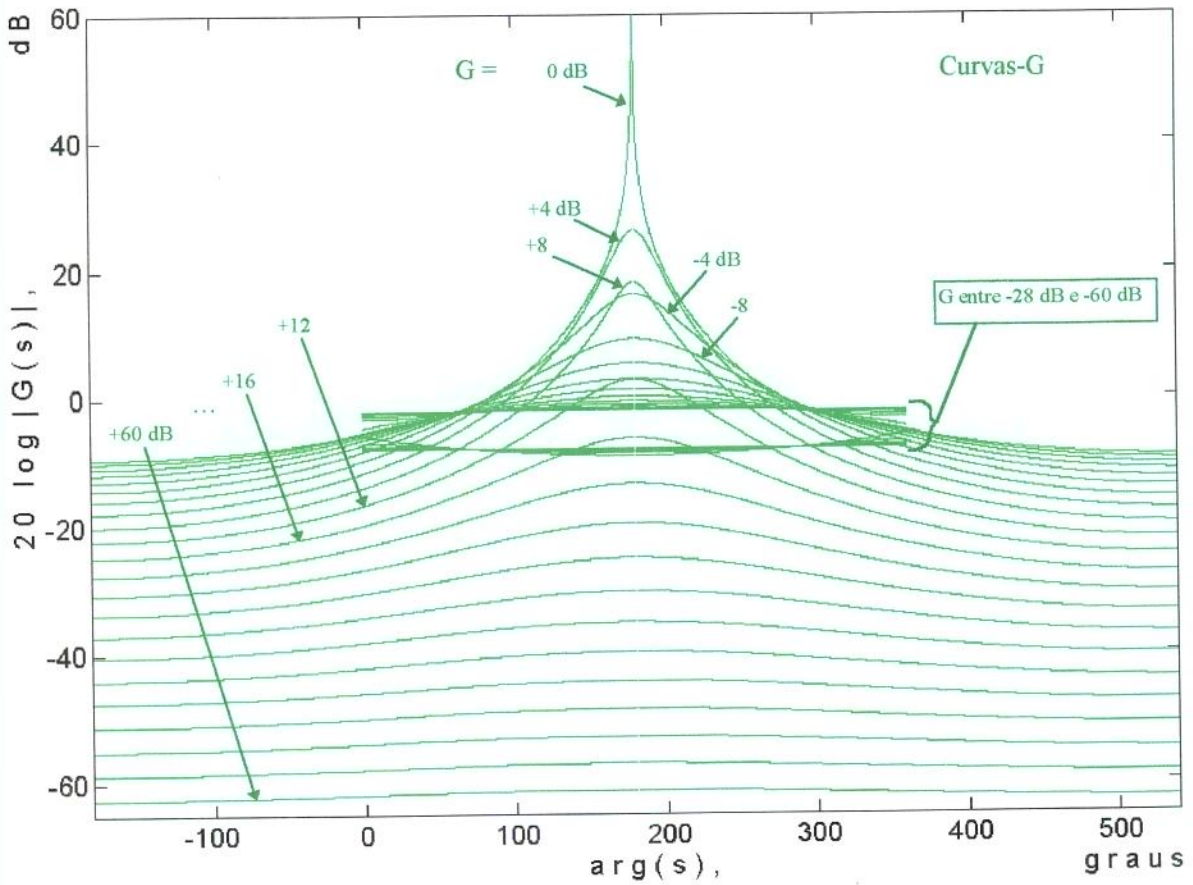
Figura 3.4.11. Ângulos de fase em graus das curvas-F da superfície-s de Riemann na folha 2, de acordo com a Figura 3.4.6.

3.4.3. *Nova Graficação, de Magnitudes e Ângulos das Curvas-G* versus *Ângulos de s*

A Figura 3.4.12 mostra a graficação das curvas-G da superfície-s de Riemann do Sistema 2, em forma de magnitudes em dB e ângulos de fase em graus, em função do ângulo de fase de s em graus. Nela podemos ver três conjuntos distintos de curvas. Num primeiro conjunto, que poderíamos chamar de dominante no gráfico, as curvas percorrem um total de 540° nos valores de arg(s). Destas curvas, algumas não circundam a origem no plano-G(s), outras dão uma volta ao redor da origem e outras dão duas voltas. Há ainda dois outros conjuntos pequenos de curvas que só aparecem com arg(s) entre 0° e 360°. Estes dois conjuntos só dão uma volta ao redor da origem no plano-G(s). Um deles pode ser identificado com magnitudes em torno de -2 dB e o outro com magnitudes em torno de -8 dB. Podemos identificá-las na folha 1 da graficação tradicional da superfície-s de Riemann da Figura 3.4.2, como sendo as curvas-G que circundam o ponto -0,8 (= -1,94 dB), que são as curvas com aproximadamente -2 dB, e as curvas-G que circundam o ponto -0,4 (= -7,96 dB), que são as curvas com aproximadamente -8 dB. Estas curvas não dão nenhuma volta no plano-G(s).

A Figura 3.4.13 mostra em detalhe o conjunto de curvas-G que circunda o ponto -0,8 no plano-G(s), e a Figura 3.4.14 mostra em detalhe o conjunto que circunda o ponto -0,4 no plano-G(s). Estes dois conjuntos têm G muito pequeno e pertencem à folha 1 da superfície-s de Riemann, como pode ser verificado na Figura 3.4.3.

A Figura 3.4.15 mostra o conjunto dominante de curvas da Figura 3.4.12. Todas estas curvas só se fecham depois de terem percorrido 720° no ângulo de s. O corte nesta figura foi calculado a partir das informações em G(s) e em s, usando os valores da Figura 3.4.7. Nem todas as curvas-G atravessam o corte, que está representado em preto na Figura 3.4.15. Podemos identificar neste grupo as curvas com $G \leq 0$ dB, que não circundam a origem. Estas curvas não passam pelo corte, pertencendo inteiramente à folha 1. A curva com G = 0 dB tem sua magnitude tendendo ao infinito, e o ângulo de fase sofre uma descontinuidade, passando abruptamente de +90° para -90°. Esta curva também não passa pelo corte, pertencendo só à folha 1. A curva com G = +4 dB dá uma volta ao redor da origem. Esta passa pelo corte, pertencendo parte à folha 1 e parte à folha 2 da superfície-s de Riemann do sistema. Finalmente as curvas com $G \geq +8$ dB dão duas voltas ao redor da origem. Estas também passam pelo corte, pertencendo parte à folha 1 e parte à folha 2.



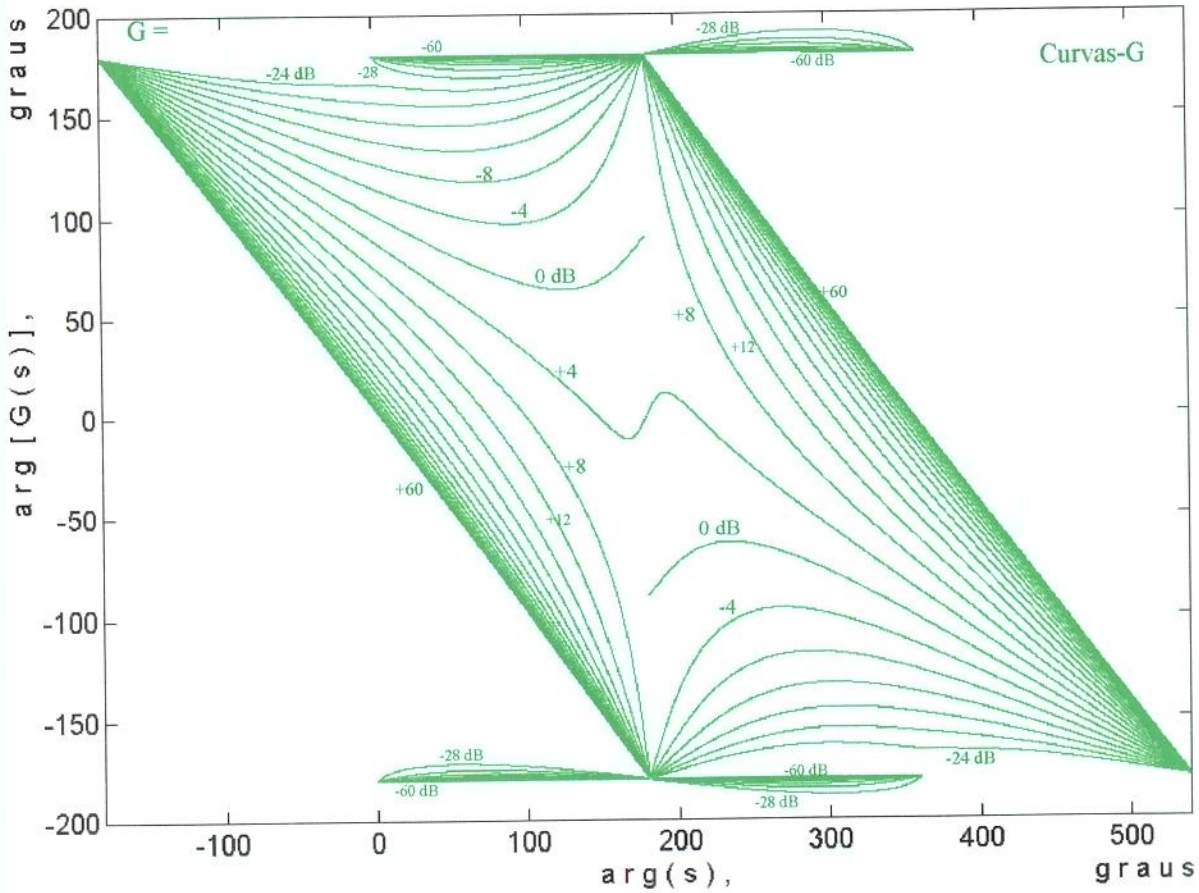


Figura 3.4.12. Magnitudes em dB e fases em graus das curvas-G da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

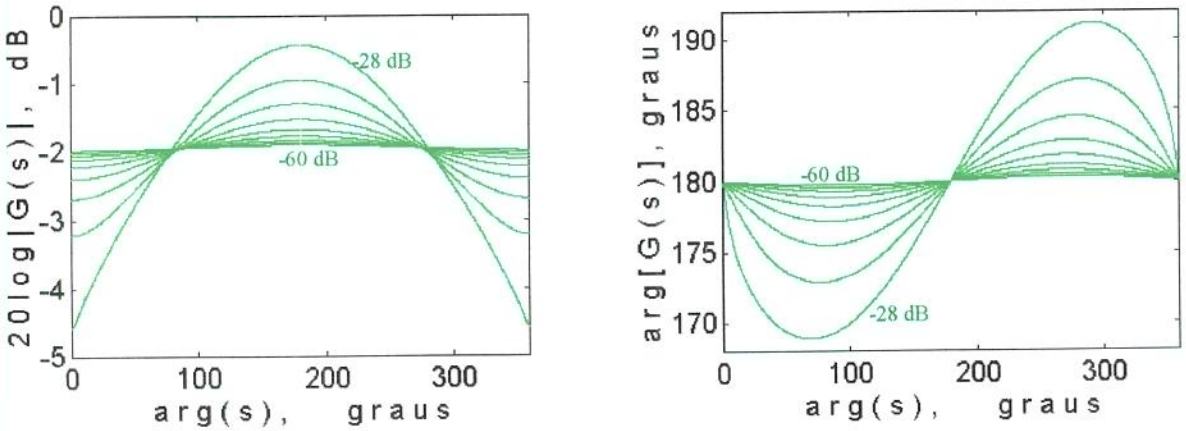


Figura 3.4.13. Curvas-G da superfície-s de Riemann do Sistema 2, em torno do ponto -0,8 *do plano-G(s), com pequenos valores de* G.

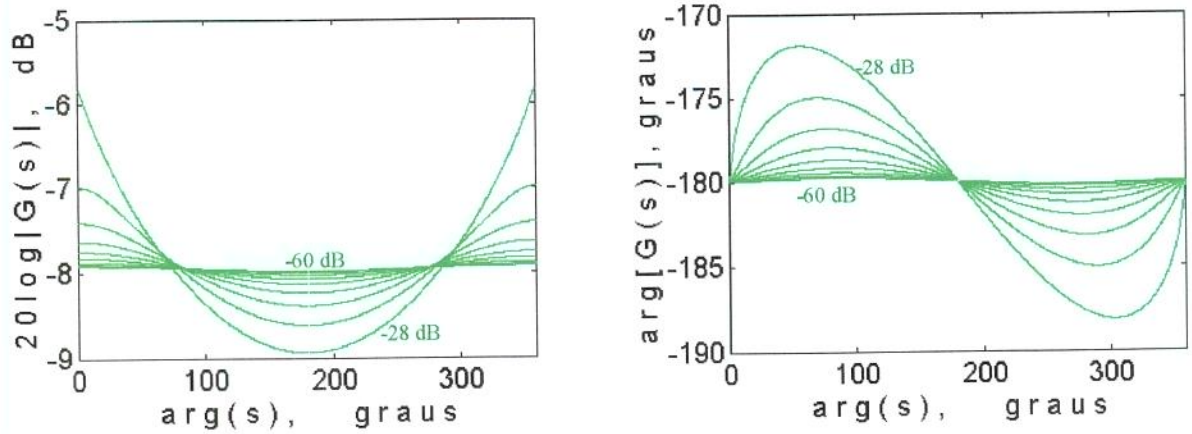
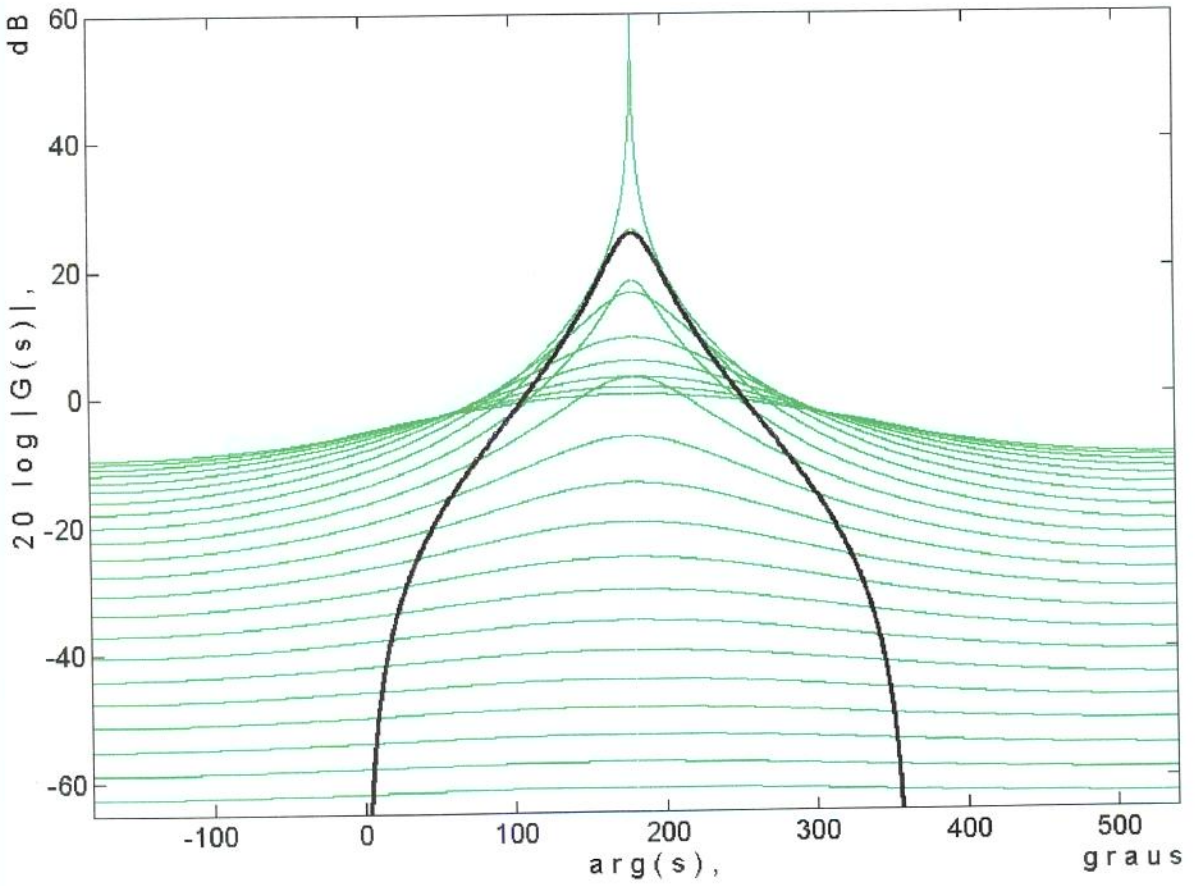


Figura 3.4.14. Curvas-G da superfície-s de Riemann do Sistema 2, em torno do ponto -0,4 *do plano-G(s), com pequenos valores de* G.

A Figura 3.4.16 mostra a representação das curvas-G da Figura 3.4.15 na folha 1, e a Figura 3.4.17 mostra a representação delas na folha 2.



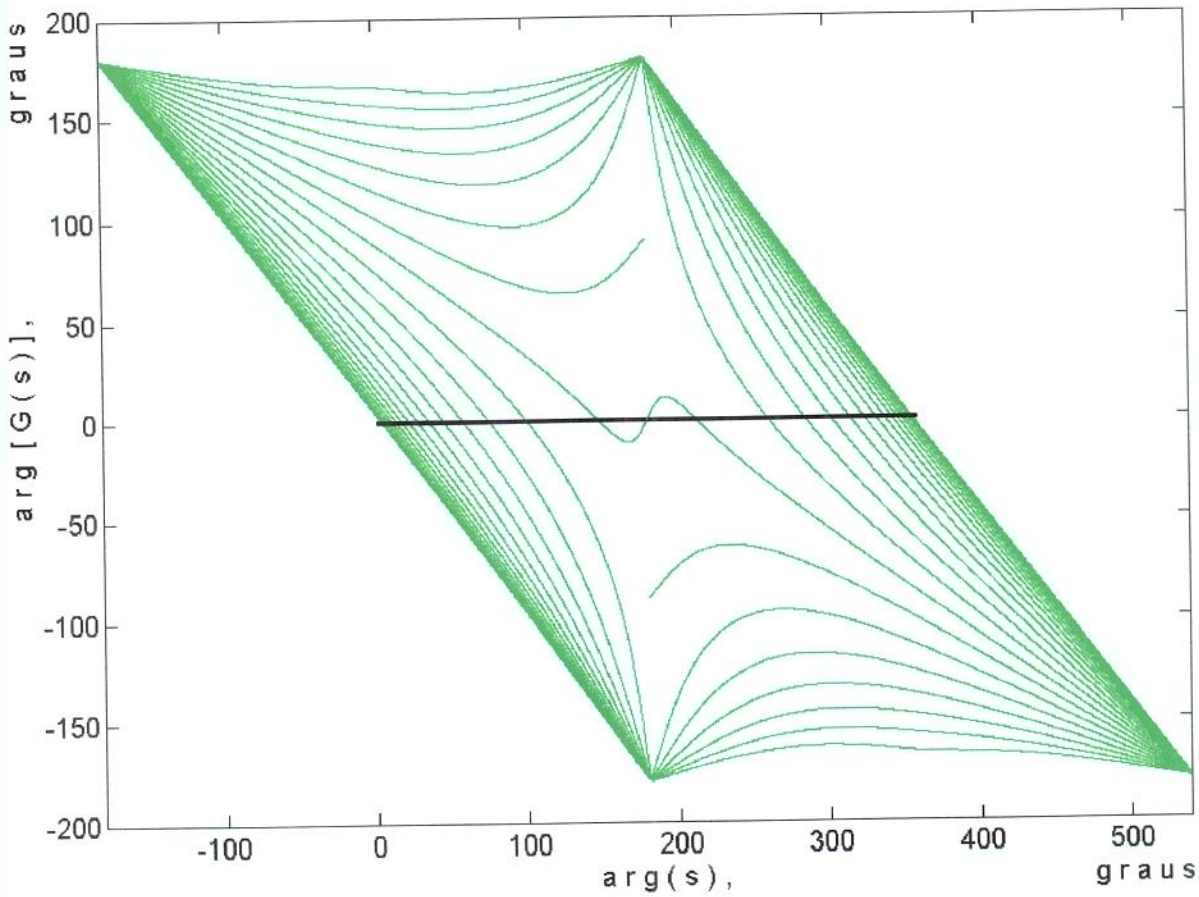
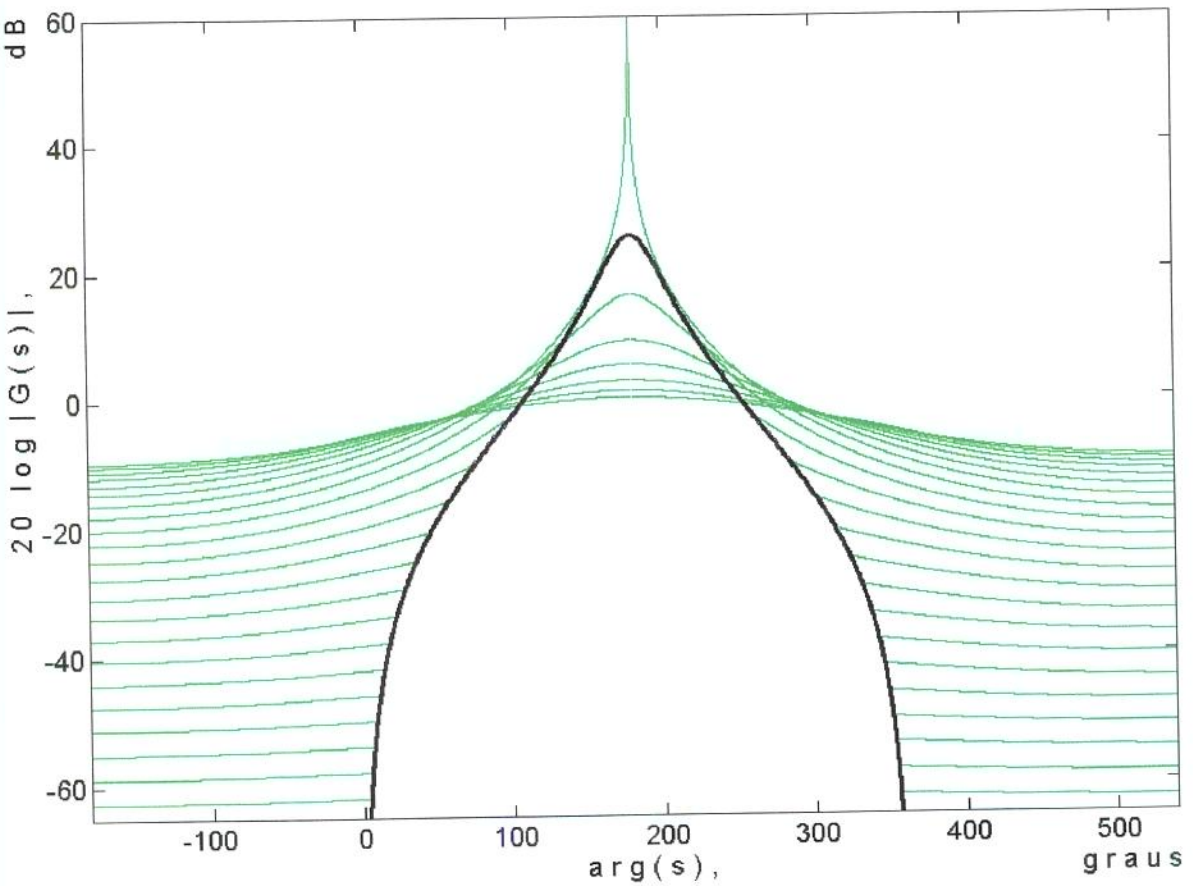


Figura 3.4.15. Curvas-G da superfície-s de Riemann do Sistema 2 com valores maiores de G.



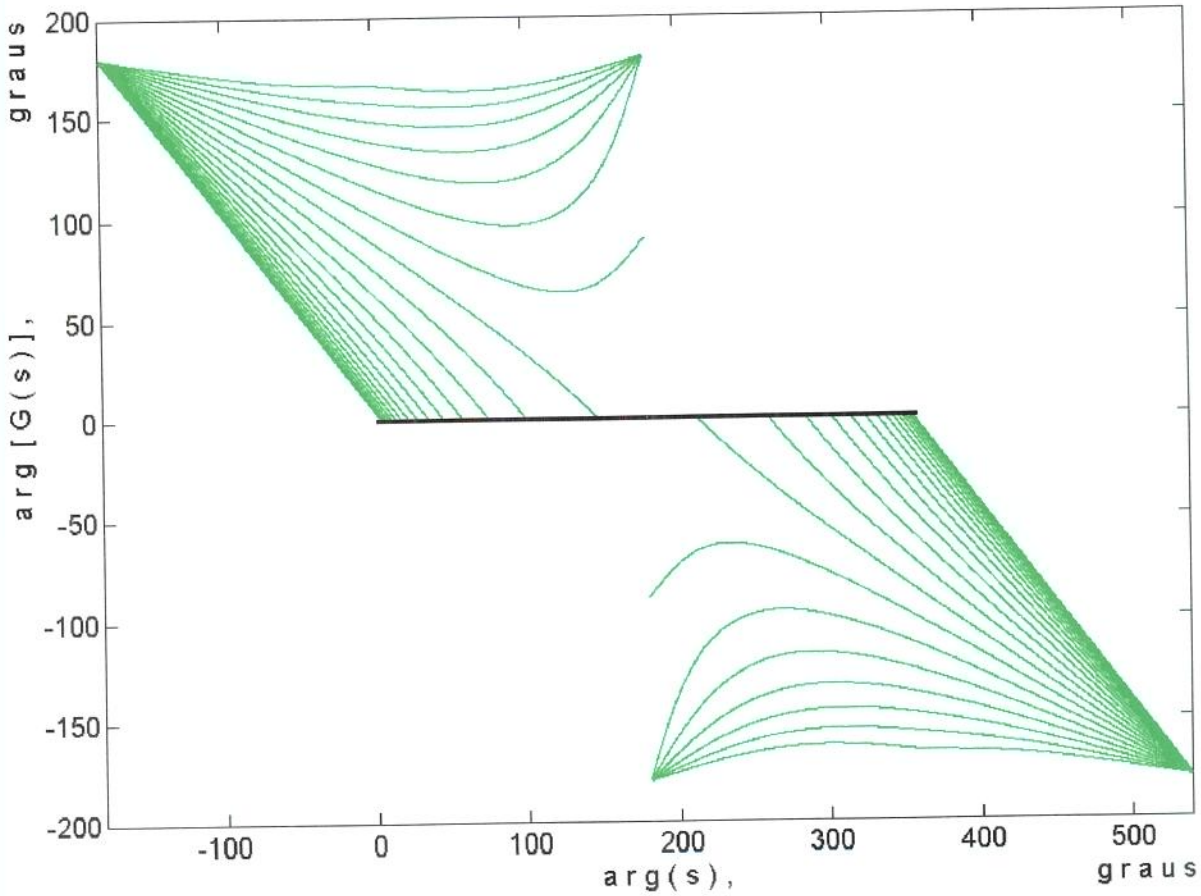
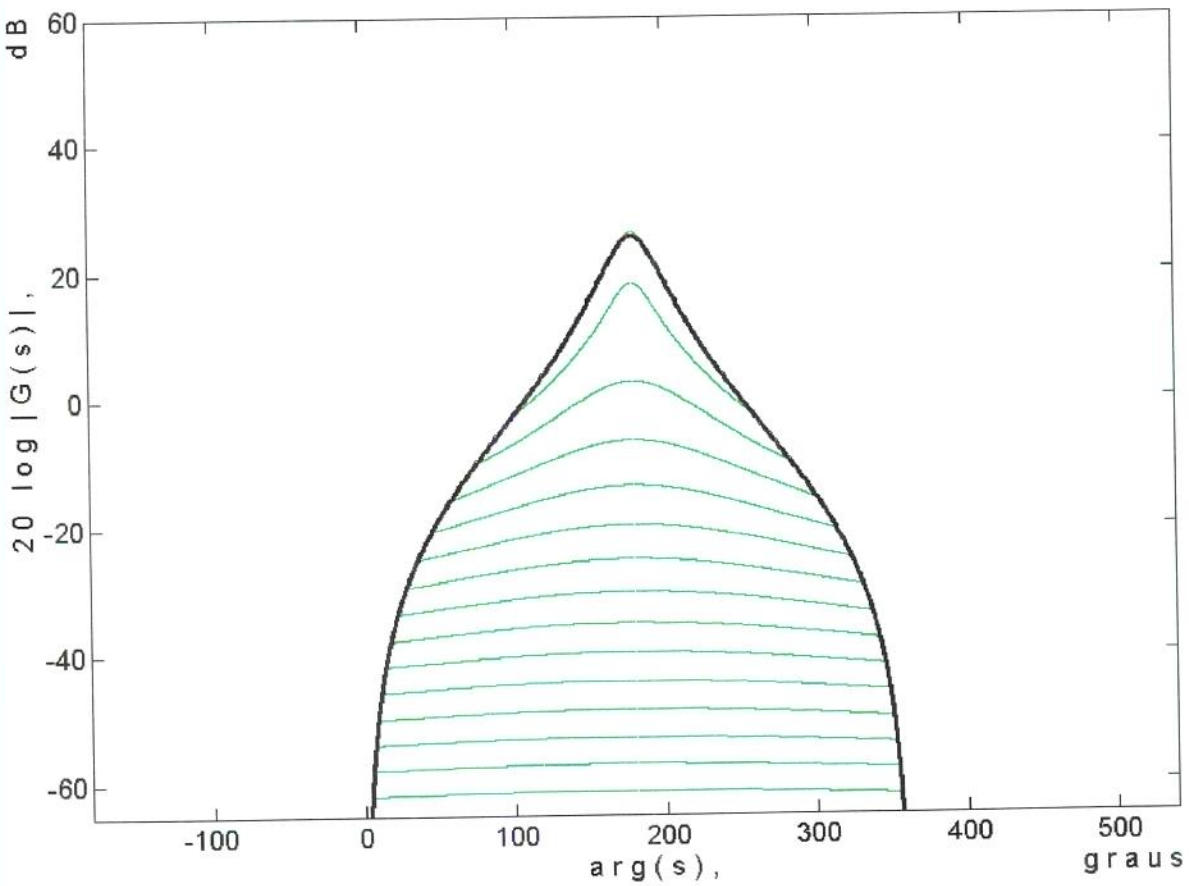


Figura 3.4.16. Curvas-G da Figura 3.4.15 na folha 1 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.



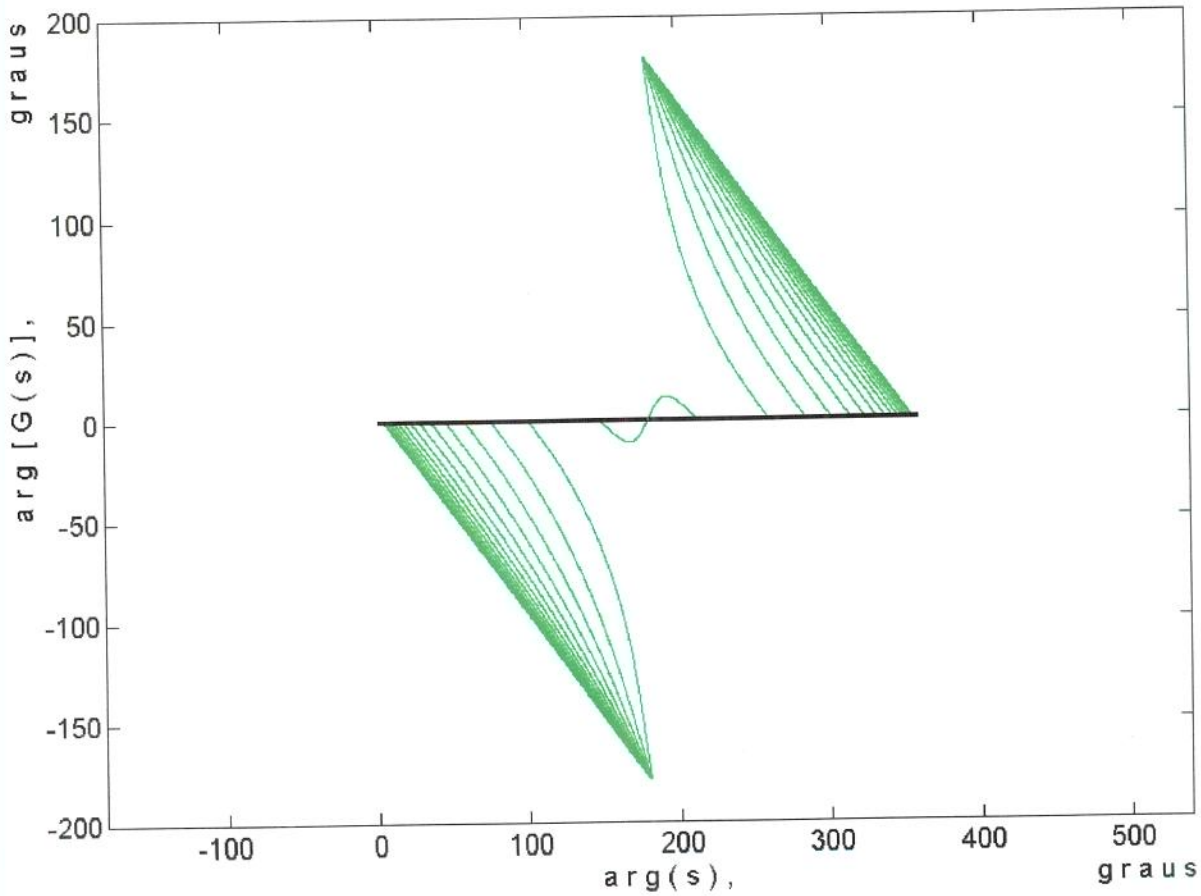


Figura 3.4.17. Curvas-G da Figura 3.4.15 na folha 2 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

3.4.4. *Nova Graficação, de Superfície-s de Riemann em Diagrama de Magnitude Logarítmica* versus *Ângulo de Fase*

Apresentamos aqui a generalização para superfície-s de Riemann do diagrama de Nichols. O plano-G(s) é todo mapeado, mas em termos de magnitude logarítmica *versus* ângulo de fase dos autovalores $g_i(s)$ de G(s) que formam as curvas-G e curvas-F.

A Figura 3.4.18 mostra para o Sistema 2 esta nova visualização da superfície-s de Riemann. Na figura podemos ver uma vantagem desta para a graficação tradicional apresentada nas Figuras 3.4.2 e 3.4.3: as duas folhas podem ser mostradas num único gráfico, e podemos optar por sobrepor ou não as curvas das duas folhas. Isto porque em termos de lugar geométrico, as curvas das duas folhas são realmente sobrepostas, mas nesta nova graficação podemos aplicar um deslocamento de ângulo de fase de ±360°, de forma a representar o mesmo lugar geométrico em lugares diferentes do gráfico. Assim, a continuidade das curvas fica muito mais clara do que ao representarmos as duas folhas em separado. É claro que temos esta opção também na nova graficação. As Figuras 3.4.19 e 3.4.20 mostram respectivamente as folhas 1 e 2 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

Outro detalhe interessante é o aparecimento de duas curvas representativas do corte. Na verdade as duas curvas, em preto nas figuras, são geometricamente uma só que recebeu o deslocamento de ±360°, usando o mesmo artifício utilizado para discernir as folhas diferentes da superfície. O corte começa no ponto de ramificação em 0 no plano-G(s), que não pode ser graficado neste gráfico, mas fica num ponto com -∞ dB e 0°, ou 360°, ou qualquer outro ângulo $[k\cdot(360°)]$, onde k = ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... O outro ponto de ramificação fica em $20\cdot\log(19{,}2) = 25{,}67$ dB, com o mesmo ângulo do outro ponto de ramificação. O resultado é uma reta vertical desde -∞ dB até +25,67 dB, que pode ser representada em qualquer ângulo $[k\cdot(360°)]$.

As curvas das Figuras 3.4.18 a 3.4.20 ficaram centralizadas em +180°, ou seja, no semi-eixo real negativo do plano-G(s). A Figura 3.4.21 mostra com detalhe a folha 1 nesta região. Nela é possível ver os pontos de partida dos autovalores $g_i(s)$ com valores muito pequenos de $|\,s\,|$: as curvas-G com valores negativos, abaixo de G = -8 dB, circundam dois pontos distintos com 180°: o primeiro tem -1,94 dB, e é o ponto -0,8 do plano-G(s), e o segundo tem -7,96 dB, sendo o ponto -0,4 do plano-G(s). Estes dois pontos podem ser vistos claramente no plano-G(s), como mostrado na folha 1 da superfície-s de Riemann na Figura 3.4.2.

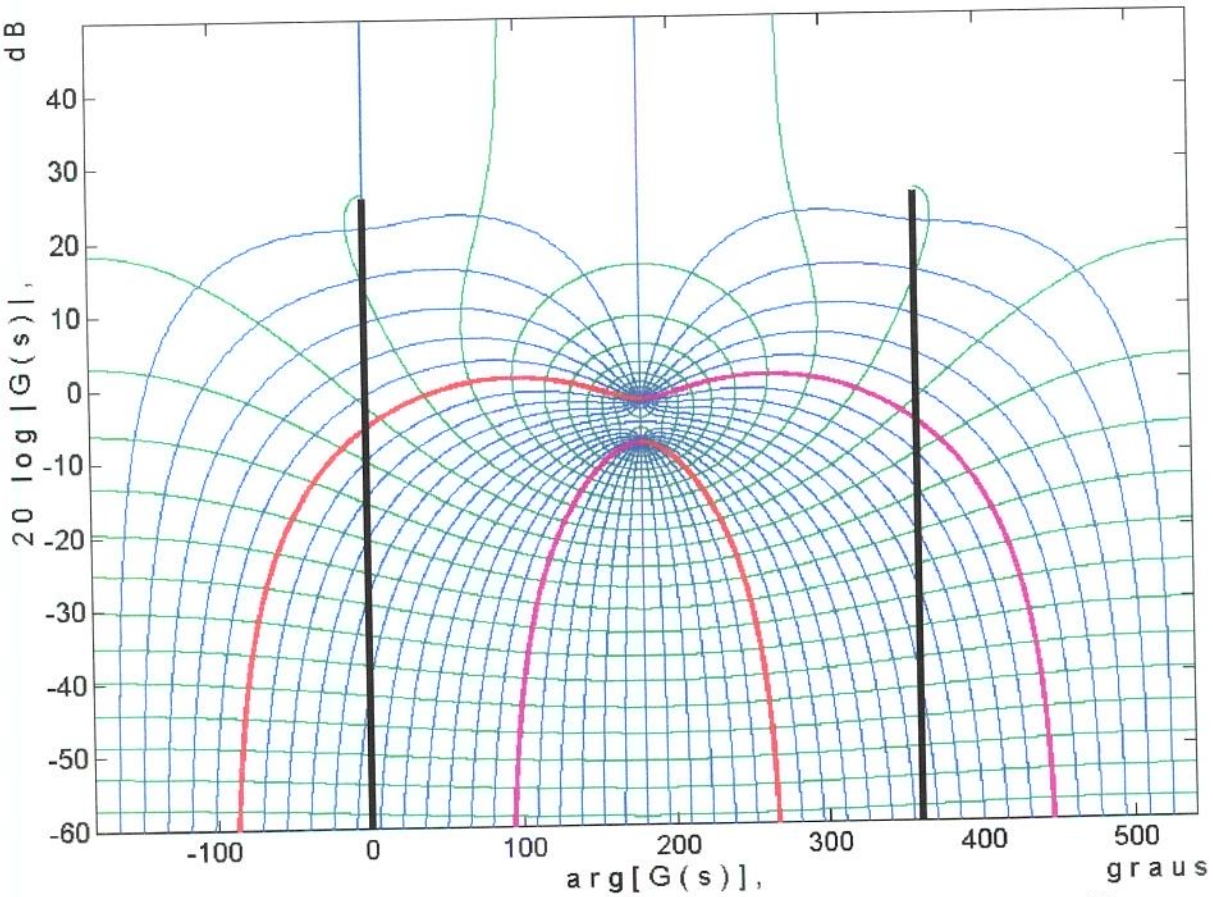


Figura 3.4.18. Superfície-s de Riemann do Sistema 2, com magnitudes em dB versus ângulos de fase em graus, das curvas-G e curvas-F.

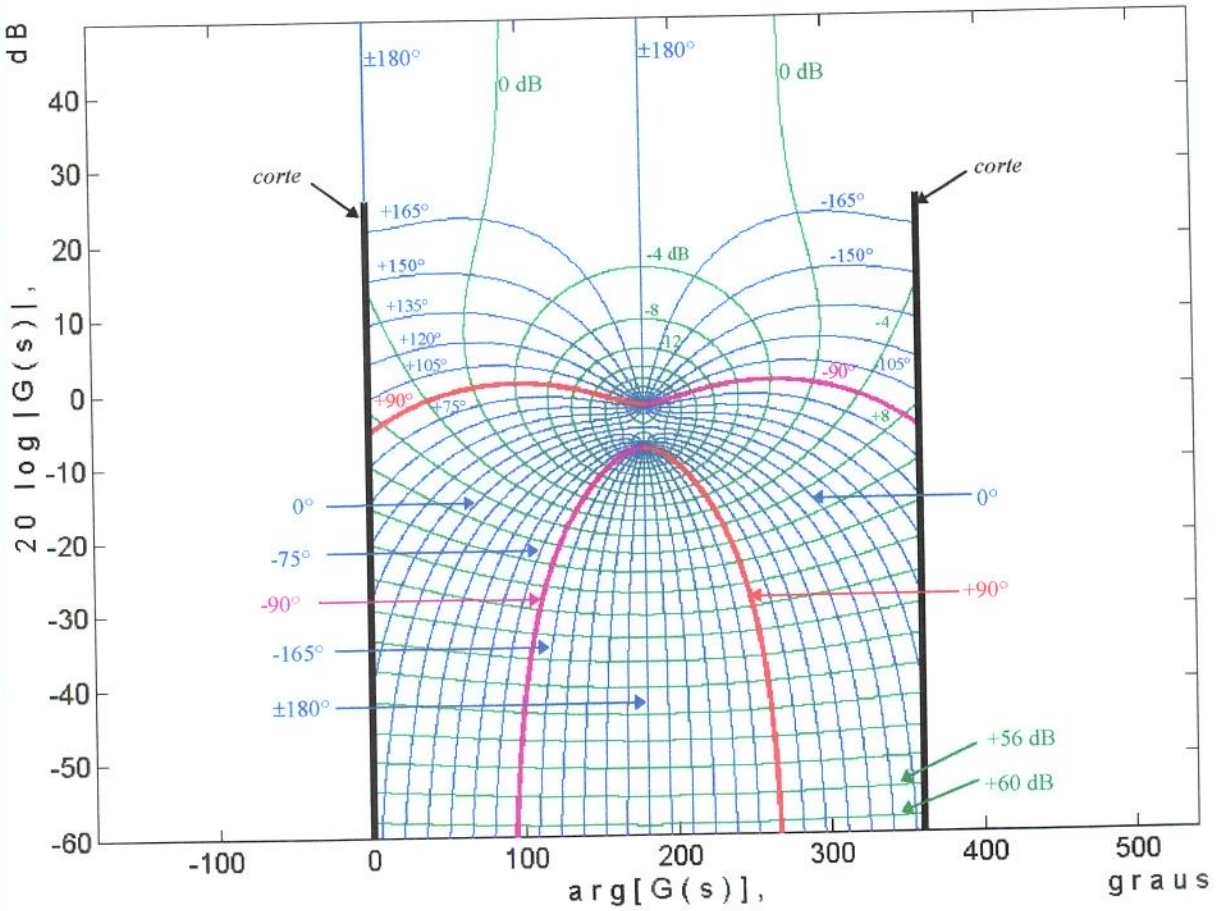


Figura 3.4.19. Folha 1 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

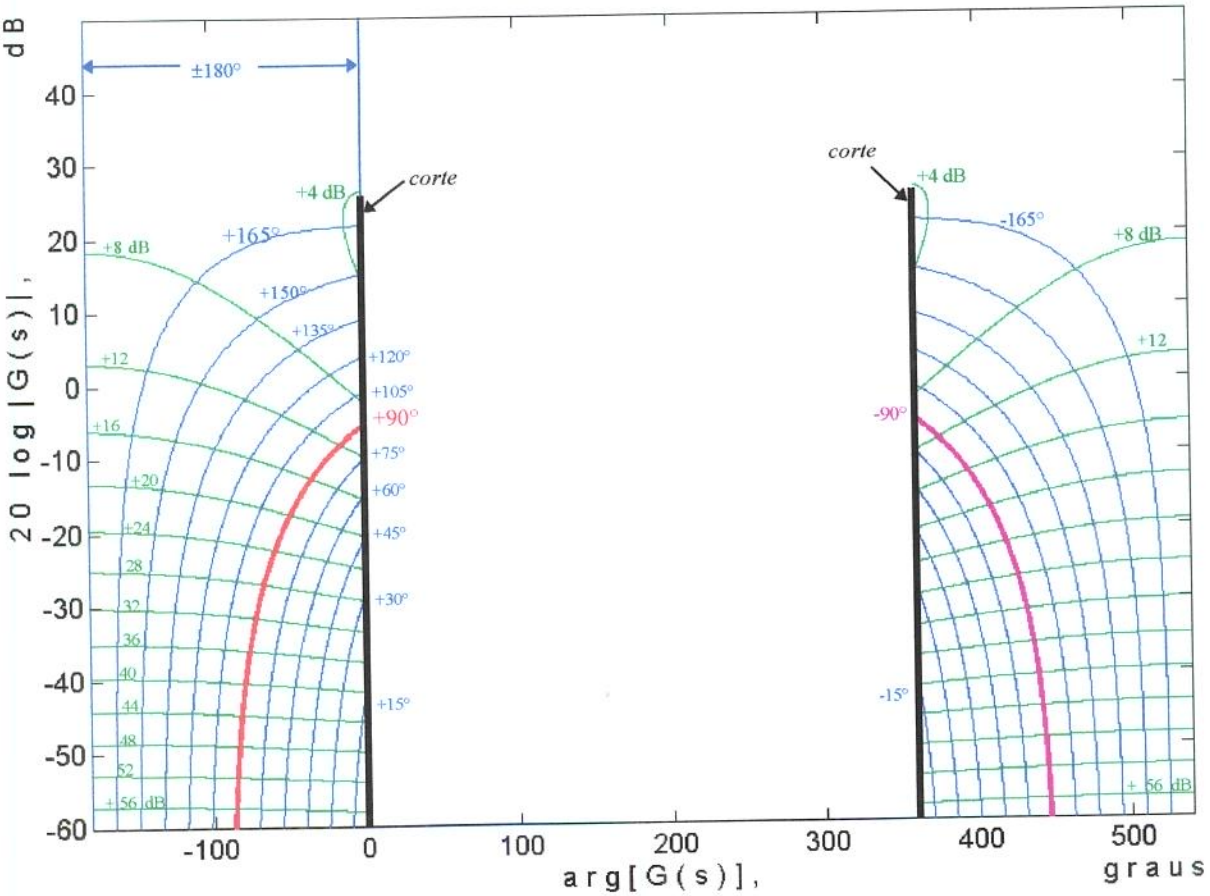


Figura 3.4.20. Folha 2 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

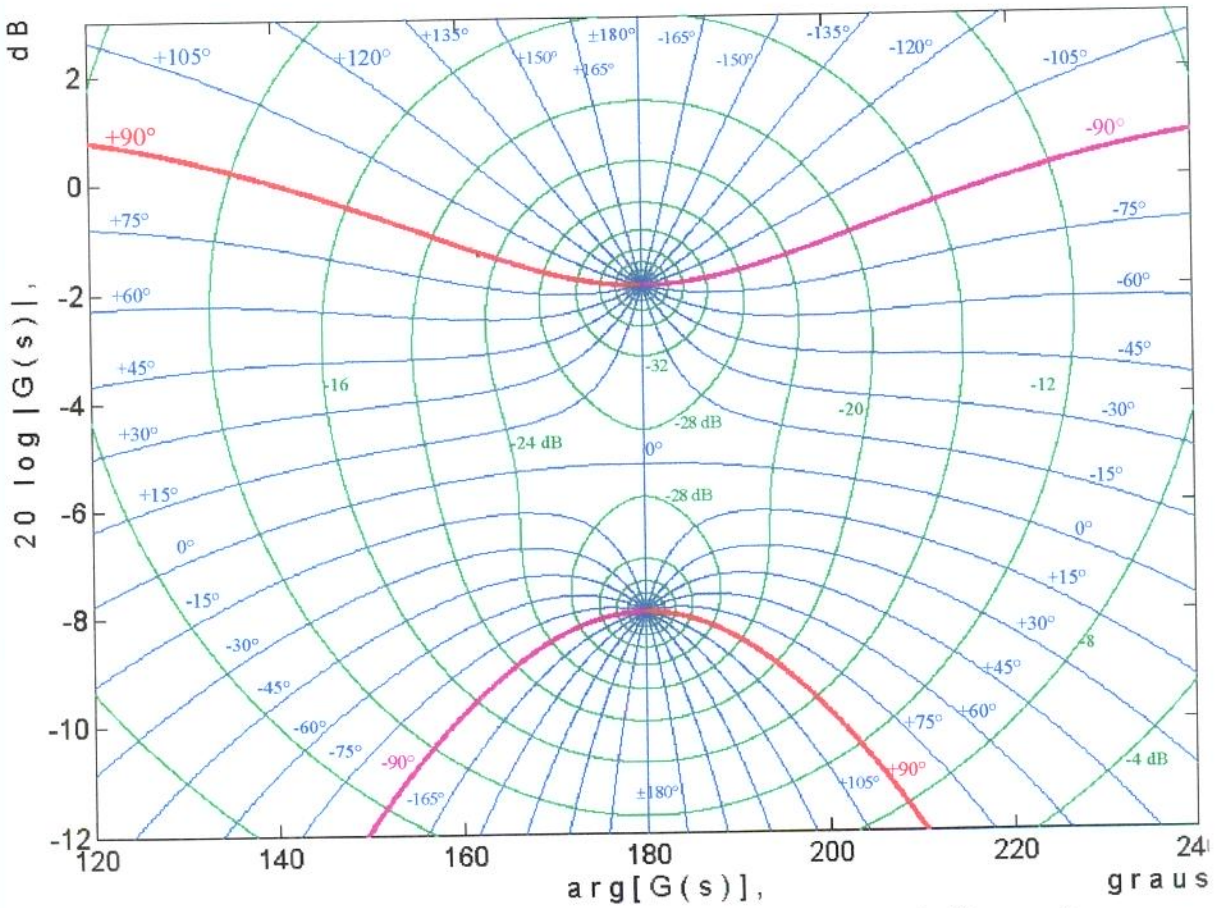


Figura 3.4.21. Detalhe da folha 1 da superfície-s de Riemann do Sistema 2.

3.4.5. Novas Graficações de Superfície-s de Riemann, usando Gráficos Tridimensionais

Finalizando o Capítulo 3, mostramos aqui algumas opções para a graficação tridimensional das superfícies-s de Riemann de sistemas de controle multivariável que julgamos interessantes. Embora não possamos representar num único gráfico todas as quatro dimensões envolvidas (duas da variável complexa s e duas da função complexa eig[G(s)]), podemos obter gráficos tridimensionais úteis omitindo o ângulo de fase da variável s. A maioria das graficações bidimensionais apresentadas anteriormente pode ser melhor compreendida com o auxílio das graficações que descrevemos a seguir.

A Figura 3.4.22 mostra a representação da superfície-s de Riemann do Sistema 2, com as curvas-G e curvas-F no plano-G(s), e variando em função da magnitude logarítmica de s. O corte também está representado. Nesta figura, a projeção da curva no plano do fundo, causando a eliminação da dimensão de magnitude de s, gera o gráfico da Figura 3.4.1. As Figuras 3.4.23 e 3.4.24 mostram respectivamente as folhas 1 e 2 da superfície mostrada na Figura 3.4.22. Novamente, a projeção destas curvas eliminando a variável s gera os gráficos das Figura 3.4.2 e 3.4.3 respectivamente.

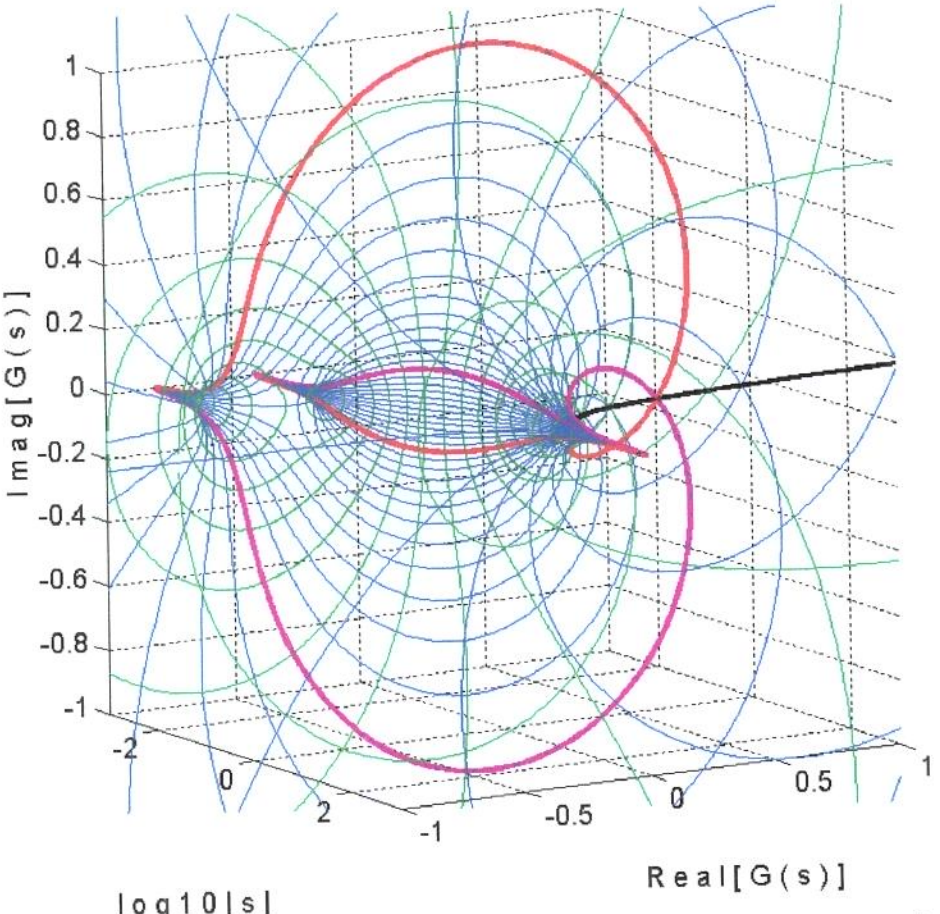


Figura 3.4.22. Representação tridimensional das duas folhas da superfície-s de Riemann do Sistema 2, em função da magnitude logarítmica de s.

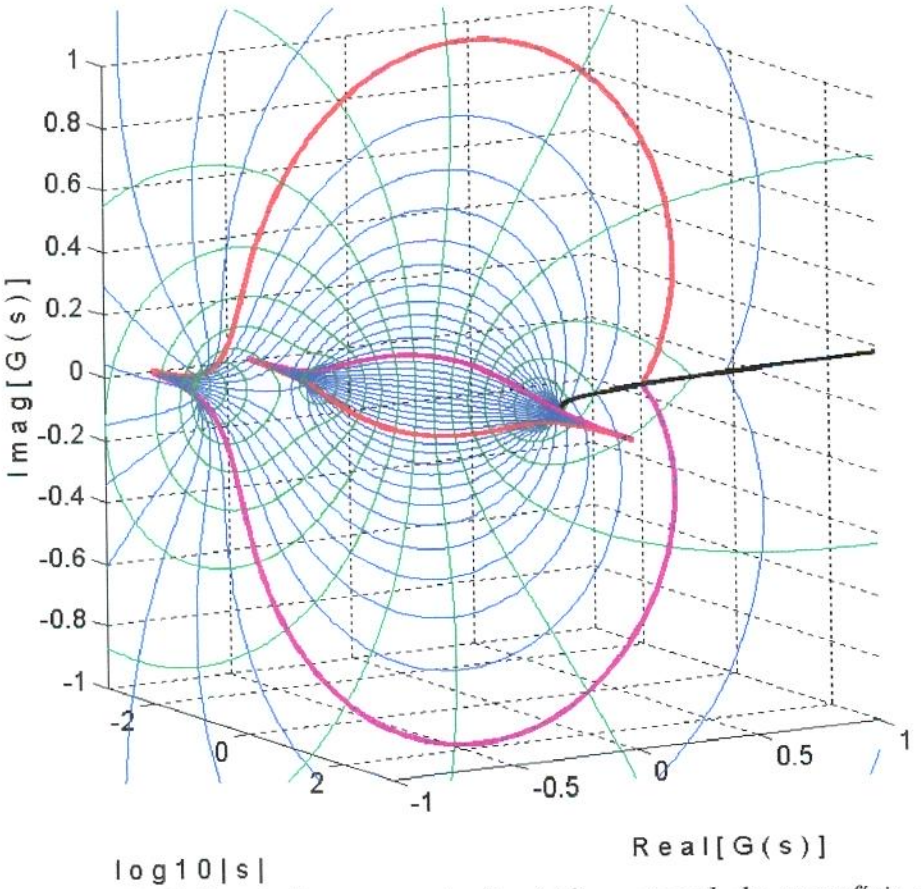


Figura 3.4.23. Folha 1 da representação tridimensional da superfície-s de Riemann do Sistema 2, como na Figura 3.2.22.

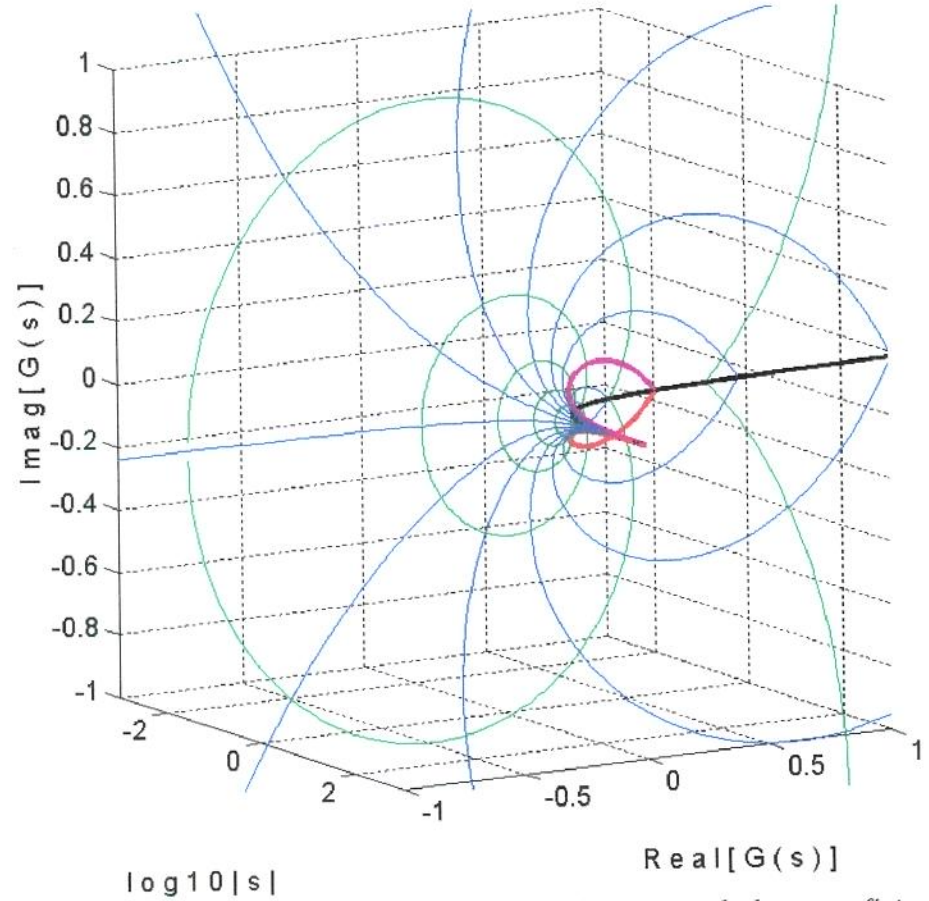


Figura 3.4.24. Folha 2 da representação tridimensional da superfície-s de Riemann do Sistema 2, como na Figura 3.2.22.

A Figura 3.4.25 mostra a representação da superfície-s de Riemann do Sistema 2 na forma de magnitudes em dB e ângulos de fase em graus das curvas-G e curvas-F em função da variação da magnitude logarítmica de s. A projeção deste gráfico eliminando a dimensão de s gera um gráfico equivalente ao da Figura 3.4.18, com a diferença de que o artifício do deslocamento de fase de algumas curvas para evitar superposições de folhas não foi utilizado aqui: todas as curvas estão representadas dentro do intervalo entre -180° e +180° de $\arg[g_i(s)]$.

A generalização dos diagramas de ganho para todas as curvas-F apresentada na Sub-Seção 3.4.2 pode ser obtida pelas projeções adequadas da Figura 3.4.25. O diagrama de magnitudes em dB em função das variações de s é obtido retirando a dimensão de ângulo de fase arg[G(s)]. O resultado é o gráfico da Figura 3.4.4 com o aparecimento das curvas-G como retas verticais. O diagrama de ângulos de fase em graus em função das variações de s é obtido retirando a dimensão de magnitude de | G(s) | em dB. O resultado é o gráfico da Figura 3.4.5 com o aparecimento das curvas-G como retas verticais.

As Figuras 3.4.26 e 3.4.27 mostram respectivamente as folhas 1 e 2 do gráfico da Figura 3.4.25. A análise destes gráficos torna claro o entrelaçamento de curvas que acontece

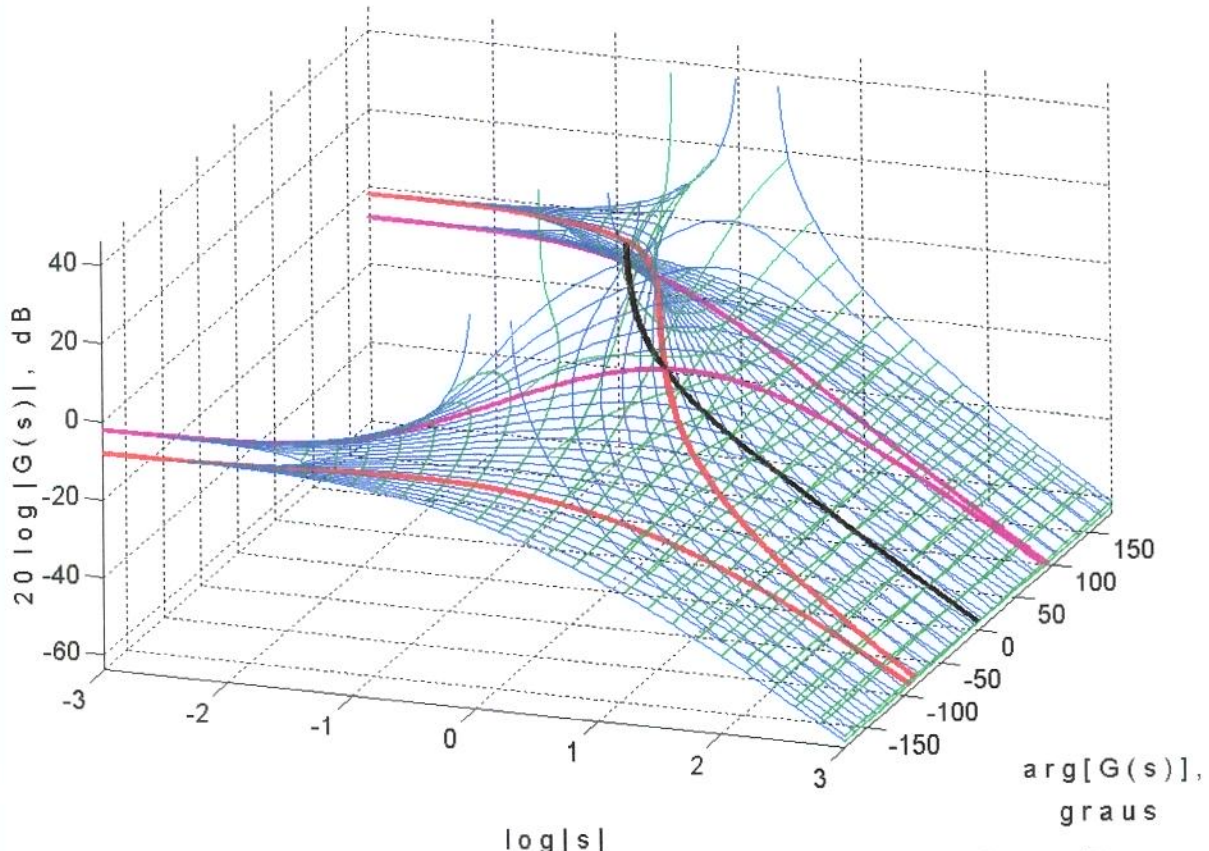


Figura 3.4.25. Superfície-s de Riemann do Sistema 2, com magnitudes em dB e fases em graus das curvas-G e curvas-F em função da magnitude logarítmica de s.

no corte, o que torna necessário na graficação tradicional no plano-G(s) a representação das folhas em separado.

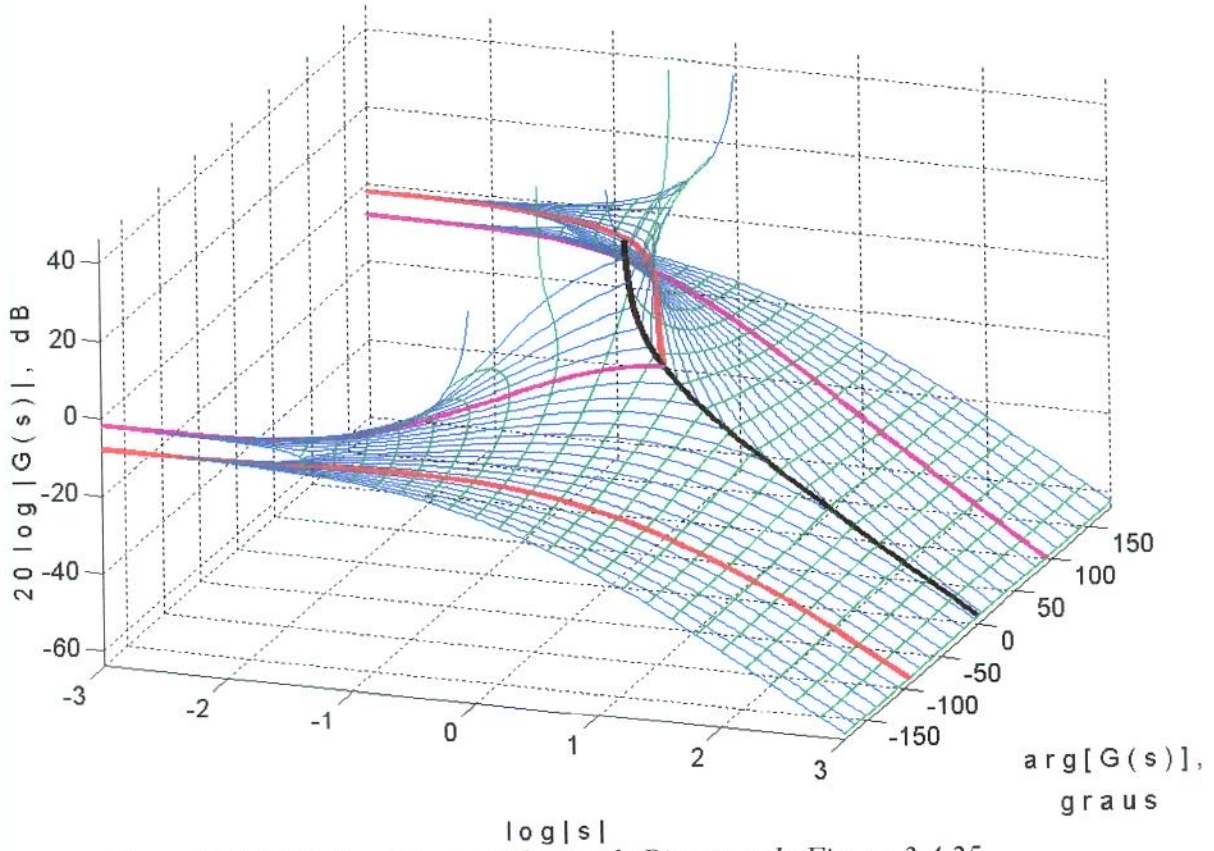


Figura 3.4.26. Folha 1 da superfície-s de Riemann da Figura 3.4.25.

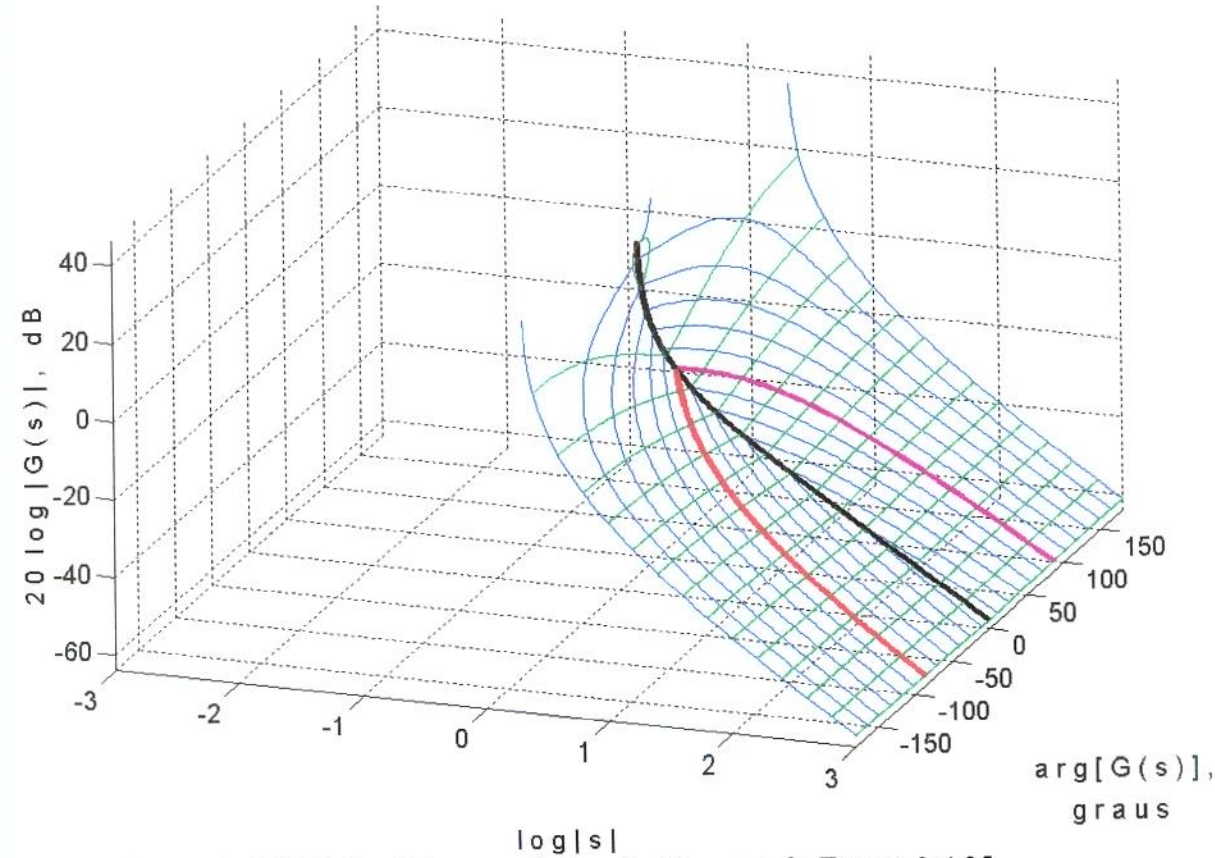


Figura 3.4.27. Folha 2 da superfície-s de Riemann da Figura 3.4.25.

A Figura 3.4.28 apresenta um ângulo mais frontal para o gráfico da Figura 3.4.25, facilitando a visualização do diagrama generalizado de Nichols, que é a visão frontal mostrada na Figura 3.4.29. Esta figura é a mesma graficação da Figura 3.4.18.

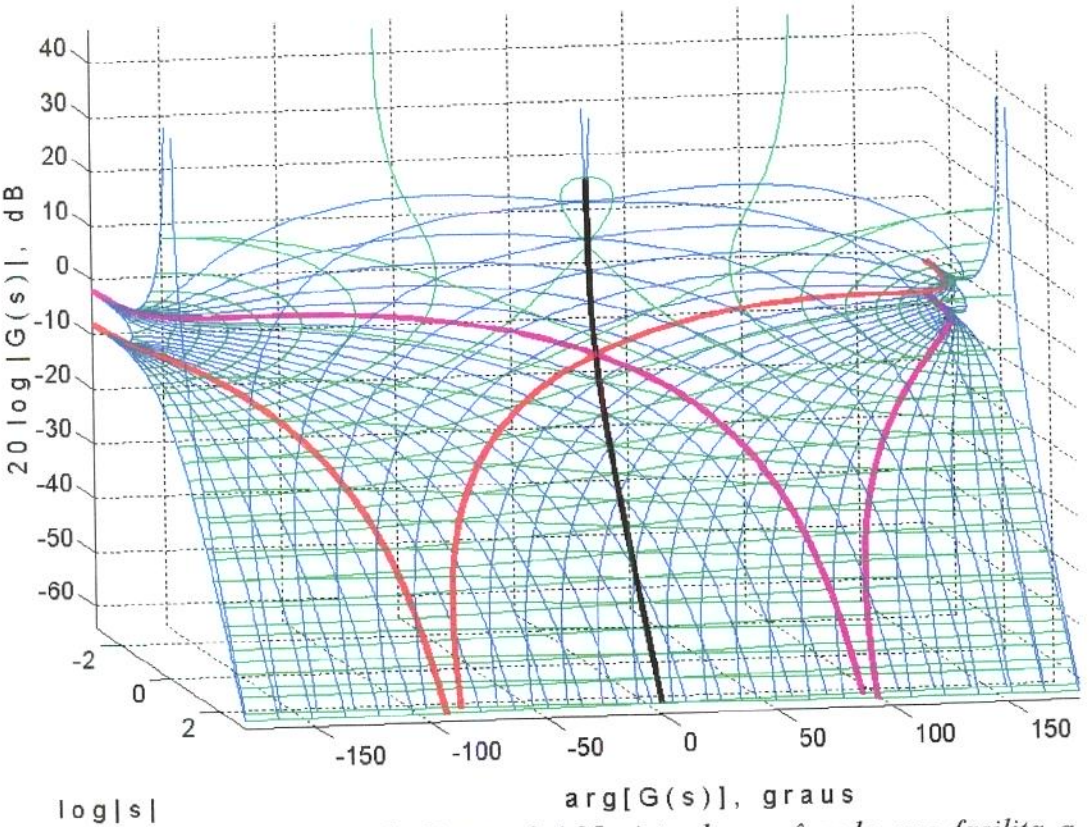


Figura 3.4.28. Gráfico da Figura 3.4.25 visto de um ângulo que facilita a visualização do gráfico generalizado de Nichols.

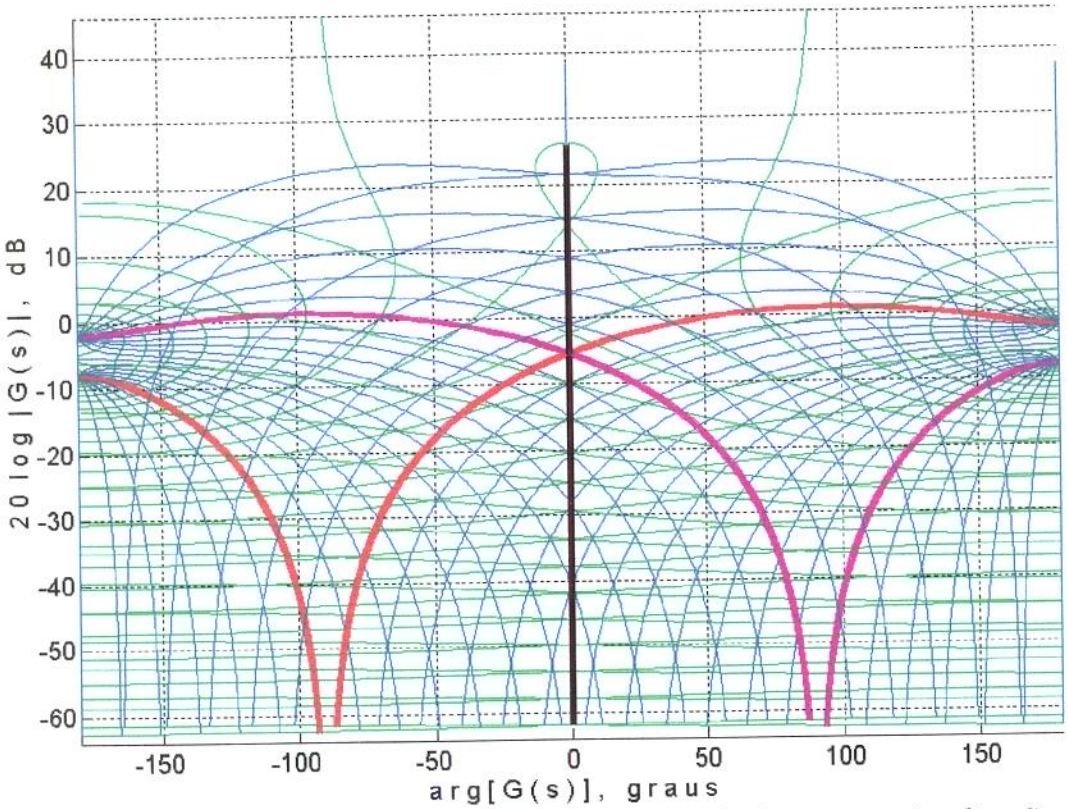


Figura 3.4.29. Gráfico generalizado de Nichols, obtido com a visualização frontal do gráfico da Figura 3.4.28.

A Figura 3.4.30 mostra as outras duas projeções possíveis para a Figura 3.4.25, chegando à graficação das curvas-F das Figuras 3.4.4 e 3.4.5, mas com as curvas-G também representadas.

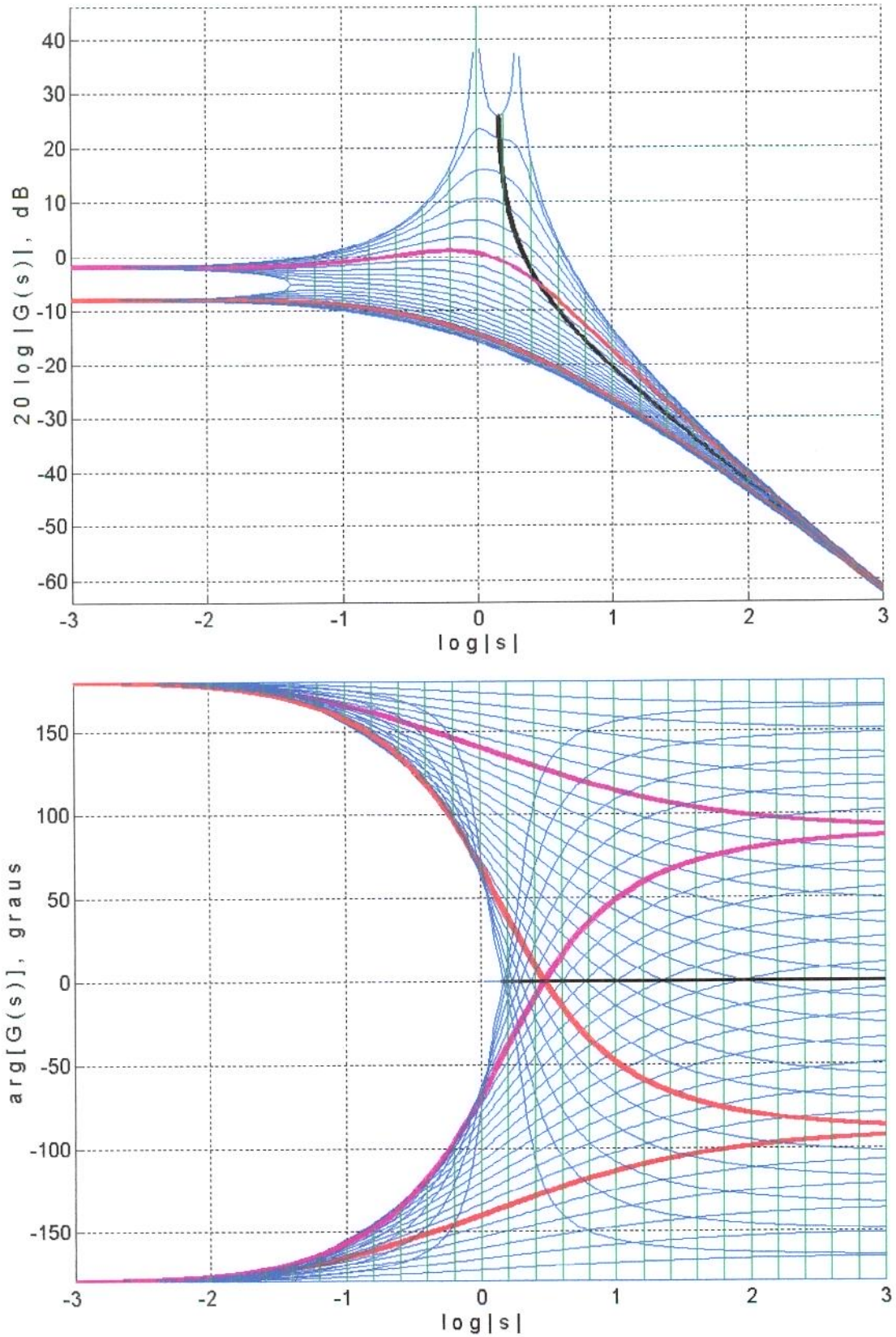


Figura 3.4.30. Diagrama de ganho generalizado para todas as curvas-F do Sistema 2, mostrando também as curvas-G.

CAPÍTULO 4

MARGENS DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE USANDO SUPERFÍCIES DE RIEMANN

Neste capítulo mostraremos algumas relações das Curvas-G e Curvas-F das superfícies-k e superfícies-s de Riemann com medidas de estabilidade de sistemas de controle monovariável e multivariável. Formas de determinação de margens de ganho e margens de fase serão derivadas matematicamente, e depois serão mostradas determinações gráficas dessas grandezas.

4.1. MARGENS DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE MONOVARIÁVEL

4.1.1. Margens de Estabilidade usando Superfícies-k de Riemann

Seja o sistema de controle monovariável descrito no Capítulo 2, e mostrado novamente na Figura 4.1.1. A função de transferência de malha aberta é $g(s) = n(s) / d(s)$, e o sistema total tem função de transferência de malha fechada $h(s) = g(s)/\{1 + k \cdot g(s)\}$. Os pólos de g(s) são as raízes ou zeros da equação característica de malha aberta $d(s) = 0$, e os pólos de h(s) são as raízes da equação característica de malha fechada:

$$d(s) + k \cdot n(s) = 0 , \qquad (4.1.1)$$

onde $k \in \mathbf{R}^+$.

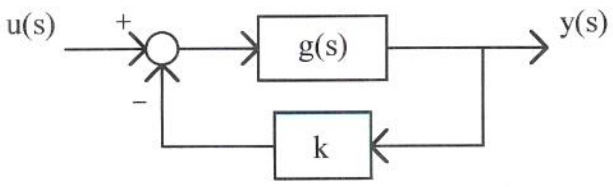


Figura 4.1.1. Sistema de controle monovariável com planta g(s) *e realimentação negativa com ganho* k, $k \in \mathbf{R}^+$.

Se o sistema tiver realimentação unitária, ou seja, se k = 1, então a margem de fase ϕ_{mf} do sistema será o atraso de fase necessário no gráfico de resposta em freqüência g(jω) para que o ponto com magnitude unitária passe pelo ponto crítico (-1+j0). Assim, se ω_c é o valor de freqüência para o qual $|g(j\omega_c)|=1$, e se o ângulo de $g(j\omega_c)$ for $\phi_g(\omega_c) = \arg[g(j\omega_c)]$, então

$$\phi_{mf} = 180° + \phi_g(\omega_c) \qquad (4.1.2)$$

é a margem de fase do sistema com realimentação unitária.

Se o sistema tiver realimentação com ganho k real positivo, então a margem de fase deverá ser calculada incluindo o valor de k, ou seja, levando em conta todo o ganho da malha de realimentação. Assim, para um determinado valor de k, denominaremos $\omega_c(k)$ como a freqüência para a qual $|k\cdot g(j\omega_c(k))|=1$, e o ângulo fase de $g(j\omega_c(k))$ será $\phi_g(\omega_c(k)) = \arg[g(j\omega_c(k))]$. A equação apresentada em (4.1.2) para a margem de fase poderá então ser reformulada para:

$$\phi_{mf}(k) = 180° + \phi_g(\omega_c(k)), \qquad (4.1.3)$$

e haverá um valor de margem de fase para cada valor real positivo do ganho k.

Agora consideremos uma situação hipotética na qual fosse possível aplicar uma realimentação com ganho k complexo, com módulo $\bar{k} = |k|$ e ângulo $\phi_k = \arg(k)$. O ângulo de $[k\cdot g(j\omega)]$ seria formado pela soma do ângulo de k com o ângulo de $g(j\omega)$:

$$\arg[k\cdot g(j\omega)] = \phi_k + \arg[g(j\omega)]. \qquad (4.1.4)$$

Se para um determinado ganho k com módulo $\bar{k} = |k|$, o ângulo de fase aplicado for $\phi_k = -\phi_{mf}(\bar{k})$, calculado com a Equação (4.1.3), então na Equação (4.1.4) o ângulo $\arg[k\cdot g(j\omega_c(\bar{k}))]$ será -180°:

$$\begin{aligned} \arg[k\cdot g(j\omega_c(\bar{k}))] &= \phi_k + \arg[g((j\omega_c(\bar{k}))] \\ &= -\phi_{mf}(\bar{k}) + \arg[g((j\omega_c(\bar{k}))] \\ &= -\{\,180° + \arg[g((j\omega_c(\bar{k}))]\,\} + \arg[g((j\omega_c(\bar{k}))] \\ &= -180°. \end{aligned} \qquad (4.1.5)$$

Isto indica que o sistema hipotético com este ganho complexo de realimentação teria seu gráfico de resposta em freqüência passando pelo ponto crítico (-1+j0). Pelo critério de estabilidade de Nyquist, tal sistema teria algum de seus pólos no eixo imaginário do plano-s. Este fato pode ser aproveitado para determinar na superfície-k de Riemann a margem de fase para alguns valores do ganho k.

Como exemplo, determinemos a margem de fase de um sistema como o mostrado na Figura 4.1.1, em que g(s) = g1(s) = (s+3) / {(s+1)(s+2)} e k = 1. A margem de fase deste sistema é $\phi_{mf} = +126{,}87°$. Se aplicarmos ao sistema um ganho de realimentação k complexo com módulo $\overline{k} = |k| = 1$ e ângulo $\phi_k = -\phi_{mf} = -126{,}87°$, correspondendo em coordenadas retangulares a k = -0,6 -j0,8, e verificarmos os pólos do sistema h(s) realimentado com este k, teremos:

$$h(s) = \frac{g(s)}{1 + k \cdot g(s)} = \frac{\left(n(s)/d(s)\right)}{1 + k \cdot \left(n(s)/d(s)\right)} = \frac{n(s)}{d(s) + k \cdot n(s)} \; ;$$

$$h(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2) + k(s+3)} = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2 + k \cdot s + 3k} = \frac{s+3}{s^2 + (3+k)s + (2+3k)} \; ;$$

$$h(s) = \frac{s+3}{s^2 + (2{,}4 - j0{,}8)s + (0{,}2 - j2{,}4)} \; . \qquad (4.1.6)$$

Os pólos do sistema assim realimentado serão as raízes do denominador de h(s):

$$\{ \text{ Pólos de h(s) } \} = \{ \; -2{,}4 - j0{,}2 \; ; \; 0 + j1 \; \}. \qquad (4.1.7)$$

Como esperado, h(s) está no limite da estabilidade com uma das raízes no eixo imaginário do plano-s.

O ponto s = 0 + j1 apresentado no exemplo como um dos pólos do sistema hipotético h(s) (formado a partir de um ganho k complexo), pode ser visto em destaque na superfície-k de Riemann de g1(s) da Figura 4.1.2: é o ponto "***c***". Podemos ver no gráfico que o ponto "***c***" está sobre a curva-G de 0 dB: este ponto foi obtido com um ganho k com módulo 1, portanto 0 dB. Além disso, o ponto está situado entre a curva-F de +30° e a curva-F de +60°. Pela localização no gráfico, é possível imaginar que o ponto poderia estar sobre uma curva-F de aproximadamente +55°. Ora, se $F \cong +55°$, podemos saber o ângulo de k, porque sabemos do Capítulo 2 que F = arg(-k). Assim, espera-se que $\phi_k = \arg(k) = F - 180° \cong +55° - 180° \cong -125°$. O ângulo exato de k para o ponto "***c***" é na verdade $\phi_k = -\phi_{mf} = -126{,}87°$, como calculado anteriormente.

Podemos exemplificar a mesma situação descrita acima com outro valor de ganho k: $k = \overline{k} = 0{,}7499$. A margem de fase do sistema com este ganho é +150,12°. Aplicando então um ganho k complexo com módulo |k| = 0,7499 e ângulo arg(k) = -150,12°, algum pólo de h(s) estará no eixo imaginário do plano-s. Realmente, os pólos de h(s) com este k complexo (k = -0,6502 - j0,3736), são { -2,3498 - j0,1034 ; 0 + j0,4770 }. O pólo de h(s) no eixo imaginário do plano-s aparece também na superfície-k de Riemann de g1(s) da Figura 4.1.2: é

o ponto "***b***", que aparece sobre a curva-G com G = 20log|0,7499| = -2,5 dB.

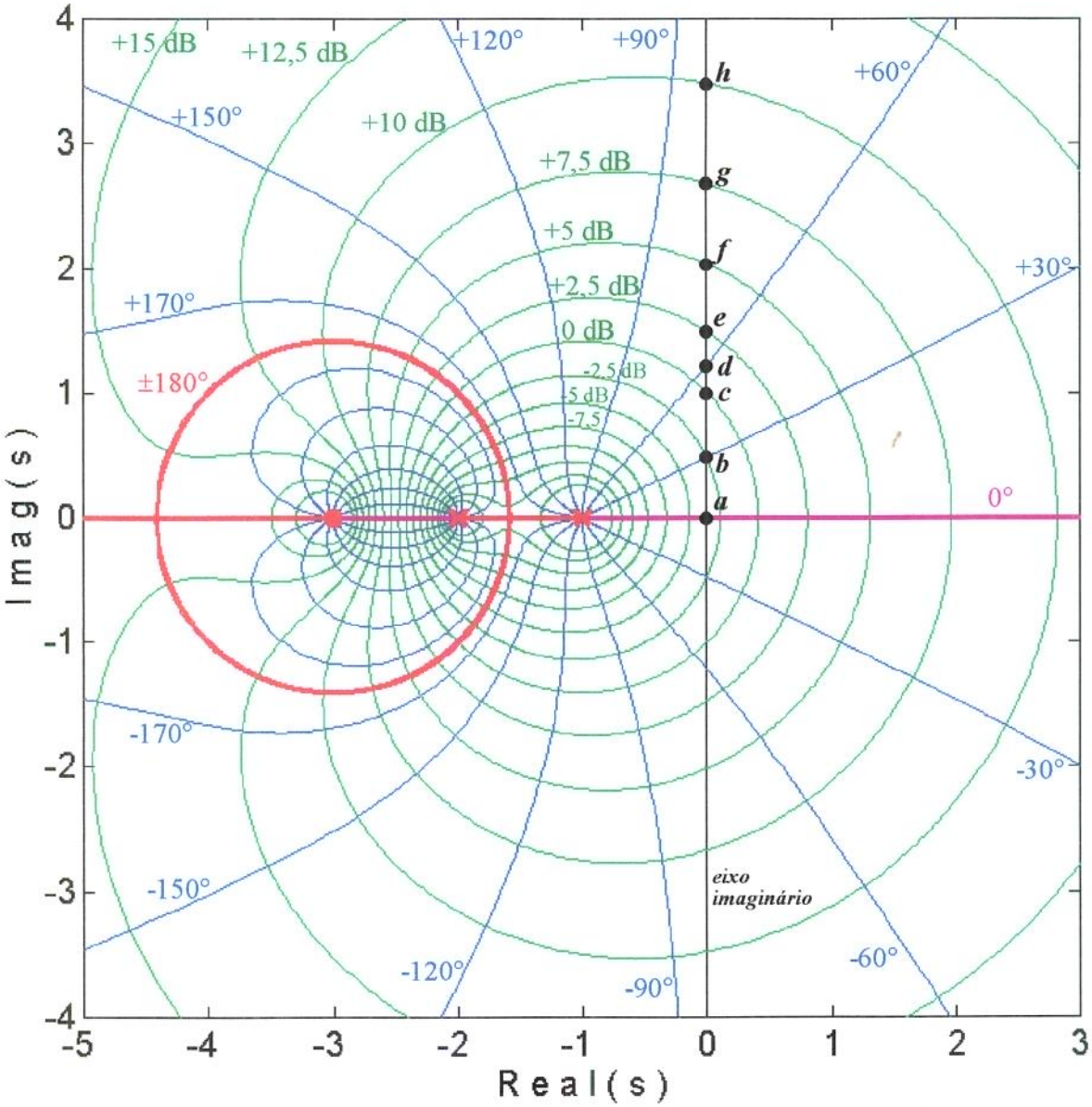


Figura 4.1.2. Determinação de margens de ganho e margens de fase na superfície-k de Riemann de g1(s)*, tanto para realimentação negativa* ($k \in \mathbf{R}^+$) *quanto realimentação positiva* ($k \in \mathbf{R}^-$).

Com base no que foi exposto e nos exemplos, podemos concluir que sempre que acharmos a margem de fase de um sistema realimentado com um determinado ganho $\bar{k}$ real positivo, se substituirmos este ganho $\bar{k}$ por um ganho k complexo, com módulo $\bar{k}$ e ângulo $\phi_k = -\phi_{mf}$ (o negativo da margem de fase), então o sistema hipoteticamente realimentado com este ganho complexo k terá um de seus pólos no eixo imaginário do plano-s. Inversamente, se acharmos um ganho complexo k com módulo $\bar{k}$ e ângulo ϕ_k, que coloca no eixo imaginário do plano-s um dos pólos de h(s) realimentado com este k complexo, a margem de fase de h(s) realimentado com ganho $\bar{k}$ real positivo será $\phi_{mf} = -\phi_k$.

Assim, a superfície-k de Riemann contém a informação das margens de fase do sistema com qualquer valor de ganho de realimentação. Basta verificar os cruzamentos das curvas-G e curvas-F com o eixo imaginário do plano-s. A Figura 4.1.2 mostra oito pontos, nomeados de "***a***" a "***h***". A tabela 4.1.1 mostra os valores envolvidos, tanto os aproximados graficamente quanto os calculados matematicamente. O resultado é que temos uma boa aproximação das margens de fase determinadas graficamente para os diferentes valores de ganho de realimentação. No ponto "***b***", por exemplo, há o cruzamento da curva-G de -2,5 dB com a curva-F de +30° no eixo imaginário do plano-s. Como G = -2,5 dB, então o ganho k envolvido é $k = 10^{(-2,5/20)} = 0,7499$. A margem de fase para este valor de ganho é determinada a partir do valor da curva-F envolvida, que é F = +30°. Como F = arg(-k), e ϕ_{mf} = -arg(k), então arg(k) = -150° e ϕ_{mf} = +150°. O valor exato da margem de fase do ponto "***b***" é ϕ_{mf} = +150,12°, que é um valor muito próximo do determinado graficamente: o ponto não estaria exatamente sobre a curva-F de +30°, e sim sobre uma curva-F de +29,88°.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Ponto	G, dB	F, graus	k_{dB}, dB	| k |	arg(k), graus	ϕ_{mf}, graus, esperada, com k= | k |	ϕ_{mf}, graus, com k= | k |	MG_{dB}, dB, com k= | k |
a	≈-3,5	0°	-3,5218	0,6667	-180,00°	+180°	+180,00°	+∞
b	-2,5	≈+30°	-2,5000	0,7499	-150,12°	+150°	+150,12°	+∞
c	0	≈+55°	0,0000	1,0000	-126,87°	+125°	+126,87°	+∞
d	≈1,0	+60°	+1,1630	1,1433	-120,00°	+120°	+120,00°	+∞
e	+2,5	≈+68°	+2,5000	1,3334	-113,66°	+112°	+113,66°	+∞
f	+5,0	≈+75°	+5,0000	2,0277	-104,91°	+105°	+104,91°	+∞
g	+7,5	≈+80°	+7,5000	2,3714	-99,02°	+100°	+99,02°	+∞
h	+10	≈+85°	+10,0000	3,4792	-95,16°	+95°	+95,16°	+∞

Tabela 4.1.1. Valores de margem de ganho e margem de fase calculados a partir dos pontos assinalados na superfície-k de Riemann mostrada na Figura 4.1.2, do sistema monovariável g1(s).

A Tabela 4.1.1 permite uma análise mais detalhada dos pontos mostrados na Figura 4.1.2, nomeando na coluna ***1*** o ponto analisado, e mostrando: na coluna ***2*** o valor em dB da curva-G sobre a qual está o ponto (≈ significa que o valor é aproximado); na coluna ***3*** o valor em graus da curva-F sobre a qual está o ponto (≈ significa que o valor é aproximado); nas colunas ***4*** e ***5*** o valor exato do módulo do ganho complexo k que gerou o ponto, primeiro em dB (k_{dB}), e depois em módulo (| k |); na coluna ***6*** o ângulo exato do mesmo ganho k

complexo; na coluna *7* o valor esperado de margem de fase ϕ_{mf}, em graus, gerado a partir do valor de F na coluna *3*; na coluna *8* o valor exato da margem de fase ϕ_{mf}, em graus, para o ganho de realimentação expresso na coluna *5*; e finalmente na coluna *9* o valor da margem de ganho em dB (MG_{dB}), para o mesmo ganho | k | expresso na coluna *5*.

Com base nos dados da superfície-k de Riemann de g1(s) mostrados na Tabela 4.1.1, podemos achar uma forma eficiente de determinação da margem de fase de um sistema de controle monovariável a partir do gráfico da superfície-k de Riemann deste sistema. Devemos primeiramente determinar o valor em dB do ganho k de realimentação que se quer aplicar ao sistema. Devemos identificar na superfície-k de Riemann (de forma aproximada se necessário) o ponto de cruzamento da curva-G correspondente (com G igual ao valor de k em dB) com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem do plano-s. Identificando o valor da curva-F à qual pertence o ponto (usando aproximação se necessário), teremos o ângulo de k complexo que gera um pólo do sistema realimentado sobre o ponto estudado, e então a margem de fase ϕ_{mf} do sistema para o ganho que se quer aplicar será:

$$\phi_{mf} = \pm 180° - F. \qquad (4.1.8)$$

Devemos ainda interpretar duas situações especiais que podem acontecer em relação ao cálculo da margem de fase pela superfície-k de Riemann. A primeira situação especial aparece quando a curva-G relativa ao ganho k para o qual queremos calcular ϕ_{mf} não cruza o eixo imaginário do plano-s, estando toda a curva no semi-plano esquerdo do plano-s. Neste caso, não há atraso no ângulo ϕ_k do ganho k complexo que gere pólos de h(s) com parte real maior ou igual a zero, ou seja, h(s) para este ganho será sempre estável apesar de qualquer atraso adicional no ângulo de k. Neste caso, a margem de fase poderá ser considerada $\phi_{mf} = +\infty$. Este é o caso, por exemplo, para k = 0,5623, que tem k_{dB} =20log|0,5623| = -5dB. Podemos ver na Figura 4.1.2 que curva-G de -5dB não cruza o eixo imaginário do plano-s, estando toda à esquerda deste eixo. A margem de fase é então $\phi_{mf} = +\infty$. O segundo caso especial é o caso em que a curva-G relativa ao ganho k pretendido não cruza o eixo imaginário do plano-s por estar totalmente à direita deste, no semi-plano direito do plano-s. Neste caso, não há avanço de fase em k que estabilize o sistema realimentado h(s). Assim, podemos considerar $\phi_{mf} = -\infty$, como forma de caracterizar sistema instável para aquele determinado ganho k. Não há pontos nesta situação no sistema g1(s).

A margem de ganho tem sua determinação já bem estabelecida para o lugar das raízes, mas também é fácil de determinar na superfície-k de Riemann do sistema. Para determinarmos

a margem de ganho MG_{dB}, em dB, de um sistema de controle monovariável com ganho k real positivo, devemos determinar nos ramos do lugar das raízes, ou seja, nas curvas-F de ±180° (representadas em vermelho na superfície-k de Riemann), o ponto de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. Devemos determinar o valor de G para este ponto. O valor encontrado de G é a própria margem de ganho MG_{dB}, em dB, para k = 1, com k_{dB} = 0 dB. Para valores diferentes de k, devemos seguir a equação:

$$MG_{dB} = G - k_{dB} . \qquad (4.1.9)$$

Assim, se por exemplo acharmos G = +10 dB e quisermos saber a margem de ganho quando aplicarmos um ganho k = 2, então devemos transformar k em k_{dB} e aplicar na Equação 4.1.9. Assim teremos: MG_{dB} = 10 - 20log(2) = 10 - 6,0206 = +3.9794. A Tabela 4.1.1 mostra as margens de ganho para todos os pontos assinalados na superfície-k de Riemann de g1(s) da Figura 4.1.2. Uma vez que os ramos do lugar das raízes (curvas-F de ±180°, em vermelho) não vão para o semi-plano direito do plano-s, então g1(s) terá margem de ganho infinita para qualquer ganho k real positivo. Isto significa que se pode aumentar indefinidamente o ganho k sem tirar h(s) da estabilidade. A coluna ***9*** da Tabela 4.1.1 mostra MG_{dB} = +∞ dB para todos os pontos.

Caso estejamos interessados na margem de fase do sistema com realimentação positiva, podemos, ao invés de aplicar realimentação positiva, considerar valores negativos do ganho real k, e o gráfico do lugar das raízes, em vermelho, dará lugar ao gráfico do lugar das raízes complementar, em magenta. A margem de fase de um sistema com ganho k negativo também é facilmente determinada graficamente com o uso da superfície-k de Riemann do sistema. Chamaremos a margem de fase do sistema com k real negativo de margem de fase complementar, e a representaremos com o símbolo ϕ_{mfc}. A margem de fase complementar será então determinada como o atraso de fase necessário ao sistema $k \cdot g(s)$ com ganho k real negativo, para que sua resposta em freqüência $[k \cdot g(j\omega)]$ alcance o ponto crítico (-1+j0), fazendo com que algum dos pólos do sistema realimentado alcance o eixo imaginário. Assim, também podemos equacionar a margem de fase complementar em termos de F. Escolhemos o módulo em dB do ganho k real negativo desejado, determinamos a curva-G correspondente na superfície-k de Riemann do sistema, e determinamos o valor de F correspondente ao ponto da curva-G no semi-eixo imaginário positivo ou na origem. A margem de fase complementar do sistema com o ganho k desejado é:

$$\phi_{mfc} = 0° - F = -F. \qquad (4.1.10)$$

A Tabela 4.1.2 relaciona as margens de fase complementares para os pontos nomeados de "***a***" a "***h***" da superfície-k de Riemann do sistema g1(s), apresentando nas suas colunas informações semelhantes àquelas da Tabela 4.1.1, apenas com as seguintes mudanças: nas colunas ***7*** e ***8*** são apresentadas respectivamente a margem de fase complementar ϕ_{mfc} (em graus) aproximada e exata para cada ponto; e na coluna ***9*** é apresentada a margem de ganho complementar MGC_{dB} (em dB) para cada ponto. O ponto "***a***", por exemplo, indica que [k· g1(s)] ao ter k = -0,6667, com k_{dB} = -3,5218 dB, gerará um sistema realimentado h(s) no limite da estabilidade: como "***a***" tem F = 0°, ϕ_{mfc} = - F = 0°. Já o ponto "***b***" tem F = +29,88° (valor exato), tendo portanto ϕ_{mfc} = -29,88°, o que significa que h(s) é instável ao receber o ganho negativo k = -0,7499.

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Ponto	G, dB	F, graus	k_{dB}, dB	| k |	arg(k), graus	ϕ_{mfc}, graus, esperada, com k=-| k |	ϕ_{mfc}, graus, com k=-| k |	MGC_{dB}, dB, com k=-| k |
a	≈-3,5	0°	-3,5218	0,6667	-180,00°	0°	0,00°	0,0000
b	-2,5	≈+30°	-2,5000	0,7499	-150,12°	-30°	-29,88°	-1,0218
c	0	≈+55°	0,0000	1,0000	-126,87°	-55°	-53,13°	-3,5218
d	≈1,0	+60°	+1,1630	1,1433	-120,00°	-60°	-60,00°	-4,6848
e	+2,5	≈+68°	+2,5000	1,3334	-113,66°	-68°	-66,34°	-6,0218
f	+5,0	≈+75°	+5,0000	2,0277	-104,91°	-75°	-75,09°	-8,5218
g	+7,5	≈+80°	+7,5000	2,3714	-99,02°	-80°	-80,98°	-11,0218
h	+10	≈+85°	+10,0000	3,4792	-95,16°	-85°	-84,84°	-13,5218

Tabela 4.1.2. Valores de margem de ganho complementar e margem de fase complementar calculados a partir dos pontos assinalados na superfície-k de Riemann mostrada na Figura 4.1.2, do sistema monovariável g1(s).

Da mesma forma como apresentado para margem de fase, a margem de fase complementar tem duas situações especiais em que a curva-G envolvida não toca o eixo imaginário no plano-s da superfície-k de Riemann do sistema. Na primeira situação especial, a curva-G está totalmente à esquerda do eixo imaginário, e o sistema com a realimentação negativa escolhida é estável, tendo $\phi_{mfc} = +\infty$. Este é o caso, em g1(s), para qualquer k negativo com $|k| < 0{,}6667$, ou $k_{dB} < -3{,}5218$ dB. Por exemplo, para k = -0,5623 ou k_{dB} = -5 dB, a curva-G correspondente tem G = -5 dB, e podemos ver no gráfico da Figura 4.1.2 que esta curva está totalmente à esquerda do eixo imaginário. Para este ganho, $\phi_{mfc} = +\infty$. Na segunda situação especial, a curva-G para o ganho desejado está totalmente à

direita do eixo imaginário, e $\phi_{mfc} = -\infty$, indicando instabilidade de h(s). Em g1(s) não há esta situação.

A margem de ganho complementar MGC_{dB} , em dB, de um sistema de controle monovariável com ganho k real negativo, pode também ser determinada através da superfície-k de Riemann do sistema. Para isto, devemos determinar nos ramos do lugar das raízes complementar, ou seja, na curva-F de 0° (representada em magenta na superfície-k de Riemann), o ponto de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. Devemos determinar o valor de G para este ponto. O valor encontrado de G é a própria margem de ganho complementar MGC_{dB} , em dB, para k = -1, com $k_{dB} = 0$ dB. Para valores diferentes de k, devemos seguir a equação:

$$MGC_{dB} = G - k_{dB} . \qquad (4.1.11)$$

Assim, na superfície-k de Riemann de g1(s) da Figura 4.1.2 vemos que o ponto de cruzamento da curva-F de 0° com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem é o ponto "***a***", que fica na origem do plano-s, e sabemos das tabelas que para este ponto G = -3,5218 dB (valor exato). Assim, para k = -1 com $k_{dB} = 0$ dB, a margem de ganho complementar do sistema será $MGC_{dB} = G - k_{dB} = G - 0$ dB = -3,5218 dB, e o sistema realimentado será instável. Já para um sistema com o ganho do ponto "***a***", ou seja, com k = -0,6667 e $k_{dB} = -3,5218$ dB, a margem de ganho complementar será $MGC_{dB} = G - k_{dB} = (-3,5218) - (-3,5218) = 0$ dB, indicando limite de estabilidade. Para um sistema com o ganho do ponto "***b***", ou seja, com k = -0,7499 e $k_{dB} = -2,5$ dB, a margem de ganho complementar será $MGC_{dB} = (-3,5218) - (-2,5) = -1,0218$ dB, indicando instabilidade de h(s). Concluímos que h(s) só será estável com ganho k de realimentação negativo se $|k| < 0,6667$, ou seja, $k_{dB} < -3,5218$ dB. Na Tabela 4.1.2, coluna ***9***, vemos que para k negativo o ganho do ponto "***a***" coloca h(s) no limite da estabilidade, e os ganhos dos outros pontos analisados, todos com margens de ganho complementares maiores que -3,5218 dB, colocam h(s) na instabilidade.

O desenvolvimento descrito foi inspirado no trabalho de Kurfess e Nagurka [26-35,46,47]. Embora sem a comprovação matemática aqui mostrada, eles deram uma contribuição muito importante na determinação das margens de estabilidade via diagramas de ganho. Cavicchi [9] também contribui para a determinação das margens de fase de sistemas de controle monovariável.

4.1.2. Determinação nas Novas Graficações de Superfície-k de Riemann

Podemos determinar margens de fase e de ganho para sistemas de controle monovariável através das novas graficações apresentadas no Capítulo 2. O mesmo sistema de controle monovariável g1(s) será usado para a exemplificação dos resultados.

A Figura 4.1.3 repete a Figura 2.2.6 do Capítulo 2, mas ressaltando nos ângulos de fase das curvas-F de g1(s) o cruzamento destas curvas com o semi-eixo imaginário positivo, para o qual propusemos a determinação das margens de estabilidade na superfície-k de Riemann. Identificamos na curva os pontos "***a***", "***b***" e "***d***", que são os mesmos pontos identificados na superfície da Figura 4.1.2. Mas antes mesmo de identificar as margens a partir destes pontos identificados, determinemos as regiões de estabilidade, como expresso para diagramas de ganho por Kurfess e Nagurka [26-35,46,47] e descrito no Capítulo 1. O sistema realimentado será assintoticamente estável se e somente se todos os seus pólos estiverem no semi-plano esquerdo do plano-s, o que corresponde nos diagramas de ganho à região de ângulos fora da faixa entre -90° e +90°. O limite de estabilidade se dá no eixo imaginário, que na Figura 4.1.3 pode ser representado como uma horizontal em +90° para o semi-eixo imaginário positivo, e -90° para o semi-eixo imaginário negativo.

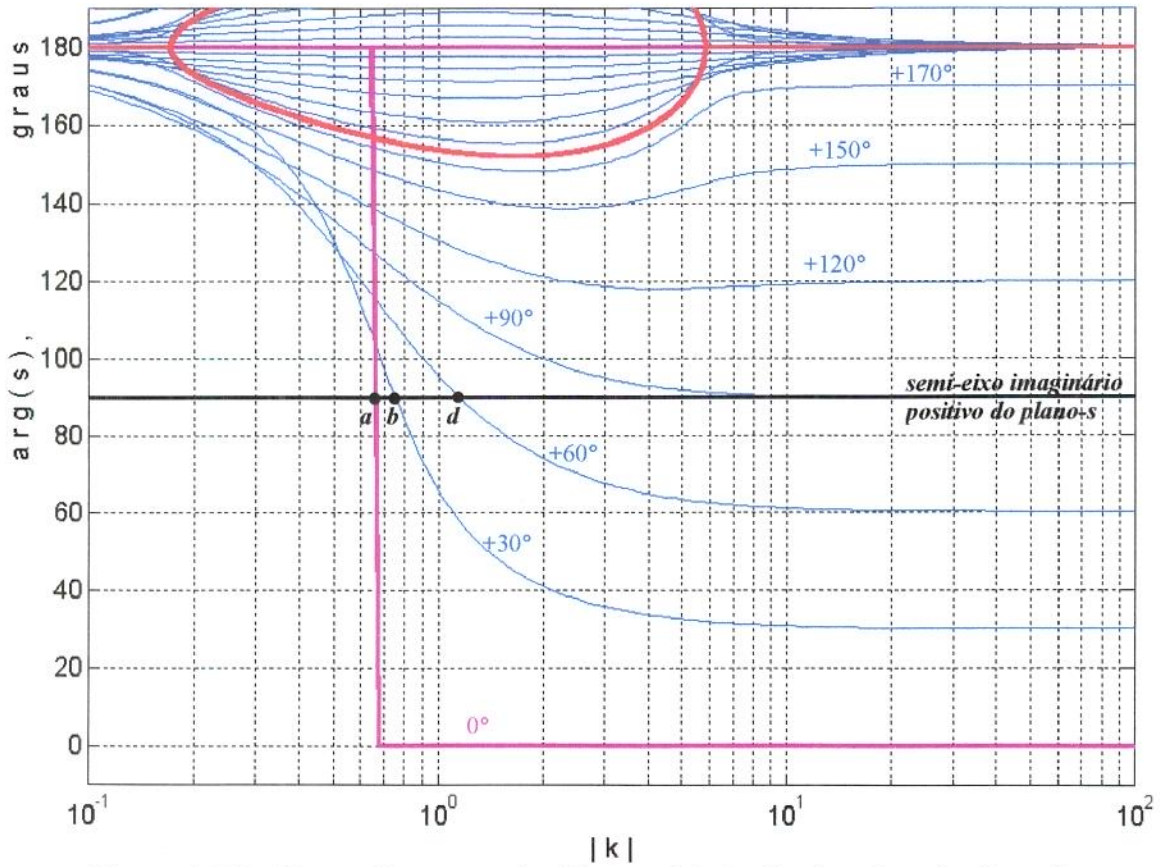


Figura 4.1.3. Zoom da curva da Figura 2.2.6, de ângulos de fase das curvas-F para g1(s). *Pode-se identificar margens de ganho e de fase.*

Com base nestas informações, podemos dizer que g1(s) tem margem de ganho infinita, MG = $+\infty$ (onde MG é a margem de ganho absoluta, e MG_{dB} é a margem de ganho em dB), porque com qualquer ganho de realimentação as curvas-F de ±180°, ramos do lugar das raízes (representadas em vermelho), não cruzam a horizontal de +90°, ficando fora da região de instabilidade entre -90° e +90°, como se pode ver no gráfico da Figura 4.1.3. Podemos também dizer, já com referência ao ponto "***a***" do gráfico, que a margem de ganho complementar é MGC = 0,6667. Isto porque o ponto "***a***" é o ponto de cruzamento do lugar das raízes complementar (curvas-F com 0°, representadas em magenta) com a horizontal de +90°, e o módulo do ganho neste ponto é | k | = 0,6667. Assim, se aplicarmos um ganho de realimentação k negativo com módulo menor que este, o sistema realimentado será estável, e se o módulo de k negativo for maior que este, o sistema realimentado será instável. É claro que podemos a partir daí determinar a margem de ganho complementar com qualquer módulo de ganho negativo aplicado. Por exemplo, se o ganho aplicado é k = -10, a margem de ganho complementar será MGC = 0,6667 / 10 = 0,06667, significando que se deve reduzir neste valor o ganho k negativo para que o sistema se torne estável. Isto é equivalente à discussão da sub-seção anterior, onde MGC_{dB} era calculada em função de k_{dB}.

Aplicando um ganho k = +0,6667, que é em módulo o ganho do ponto "***a***", a margem de fase do sistema será $\phi_{mf} = +180°$, porque o ponto apresenta o cruzamento da curva com F = 0° com o eixo de +90°. Assim, pela sub-seção anterior $\phi_{mf} = 180° - F$. Da mesma forma, aplicando um ganho k = +0,7499, que é o ganho do ponto "***b***", a margem de fase do sistema será $\phi_{mf} = 180° - 30° = +150°$, porque o ponto tem F = +30°. Aplicando k = +1,1630, que é o ganho do ponto "***d***", a margem de fase será $\phi_{mf} = 180° - 60° = +120°$, porque o ponto tem F = +60°.

Novamente, as margens de fase complementares podem ser identificadas para estes três pontos. O ponto "***a***" indica que com k = -0,6667 a margem de fase complementar será $\phi_{mfc} = 0°$. Os pontos "***b***" e "***d***" indicam respectivamente que com k = -0,7499 haverá $\phi_{mfc} = -30°$ e com k = -1,1630 haverá $\phi_{mfc} = -60°$.

Pode-se determinar na Figura 4.1.3 a margem de fase e a margem de fase complementar de qualquer ponto intermediário, para o qual a curva-F não está representada. Basta para isto fazer uma aproximação do valor de F no ponto sobre a horizontal de +90° com o | k | desejado.

Outro gráfico a partir do qual podemos tirar algumas informações de estabilidade é o gráfico da Figura 4.1.4, que repete a Figura 2.2.14 do Capítulo 2, mas ressaltando nos ângulos de fase das curvas-G de g1(s) o cruzamento destas curvas com o semi-eixo

imaginário positivo, representado no gráfico como uma reta horizontal em +90°. Vale ressaltar que as regiões de estabilidade definidas por Kurfess e Nagurka para diagramas de ganho continuam valendo para estes gráficos, fora da região entre -90° e +90°, porque as curvas-G, da mesma forma como as curvas-F, são curvas do plano-s.

Podemos identificar no gráfico da Figura 4.1.4 os pontos denominados como "***b***", "***c***", "***e***", "***f***", "***g***" e "***h***". O ponto "***b***" do gráfico tem, por exemplo, arg(k) ≅ +210°, o que é o mesmo lugar geométrico no plano-k complexo para um ponto com arg(k) ≅ -150°. Assim, a margem de fase indicada pelo ponto "***b***" do gráfico é $\phi_{mf} \cong +150°$, e vale para $k_{dB} = -2{,}5$ dB, ou seja, k = +0,7499. Isto está de acordo com os resultados da Tabela 4.1.1. Para realimentação positiva, o ponto "***b***", indica $\phi_{mfc} \cong -30°$, o que está de acordo com os resultados da Tabela 4.1.2. O ponto "***c***" tem arg(k) ≅ +234°, que pode ser considerado para os cálculos arg(k) ≅ -126°. Assim, a margem de fase para $k_{dB} = 0$ dB, ou k = +1, é $\phi_{mf} \cong +126°$, e a margem de fase complementar para um ganho negativo k = -1 é $\phi_{mfc} \cong -54°$.

Os pontos "***e***", "***f***", "***g***" e "***h***" da Figura 4.1.4, da mesma forma como os pontos "***b***" e "***c***", indicam para seus ganhos respectivos margens de fase e margens de fase complementares de acordo com aqueles apresentados nas Tabelas 4.1.1 e 4.1.2.

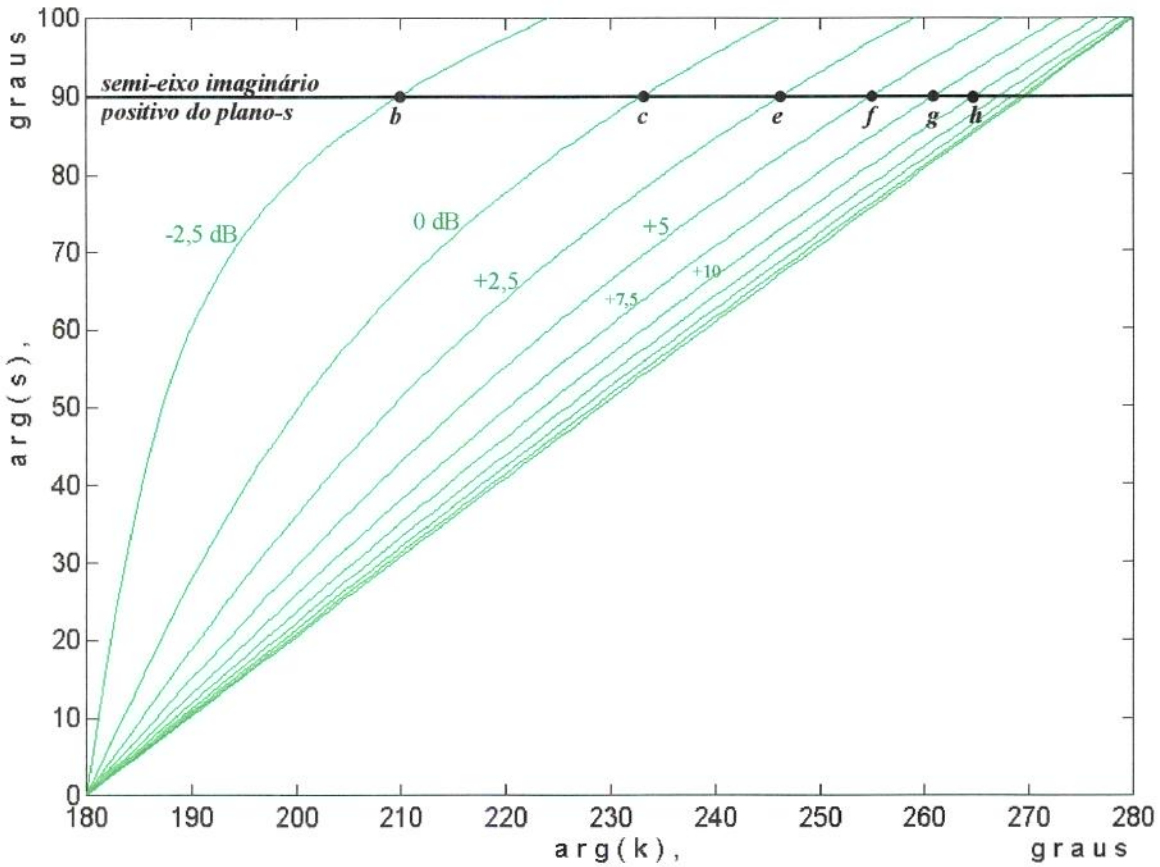


Figura 4.1.4. Zoom da curva da Figura 2.2.14, de ângulos de fase das curvas-G de g1(s). *Pode-se identificar margens de fase.*

O último gráfico do Capítulo 2 que vamos reproduzir aqui é o gráfico da Figura 4.1.5, abaixo, que é um zoom do gráfico da Figura 2.2.17, ressaltando as curvas-G e curvas-F do diagrama modificado do plano-s da superfície-k de Riemann de g1(s) que cruzam pela reta vertical com ângulo +90°. Esta curva, em preto no gráfico, representa o semi-eixo imaginário positivo do plano-s. Assim, novamente, podemos identificar os pontos nomeados de "***b***" a "***h***", e podemos determinar, pelos valores correspondentes de F nos pontos, as margens de fase e margens de fase complementares para os ganhos em dB determinados por G nos pontos. Se fôssemos identificar ponto a ponto, os valores seriam bem próximos daqueles apresentados nas Tabelas 4.1.1 e 4.1.2. A margem de ganho do sistema é claramente MG = +∞, porque os ramos do lugar das raízes, curvas-F com F = ±180°, não atravessaram a curva vertical de +90°, limite de estabilidade para as raízes do sistema realimentado. Já a margem de fase complementar não pôde ser determinada neste gráfico porque o ponto "***a***" é a origem do plano-s, único ponto que não pode ser representado neste tipo de gráfico.

Analisando os gráficos das Figuras 4.1.3, 4.1.4 e 4.1.5, vemos que as margens de ganho são melhor determinadas a partir do gráfico da Figura 4.1.3, que é a generalização do diagrama de ganho. Na Figura 4.1.5 é possível identificar margens de ganho, desde que o ponto para a análise não seja a origem do plano-s, como ocorreu com o ponto "***a***".

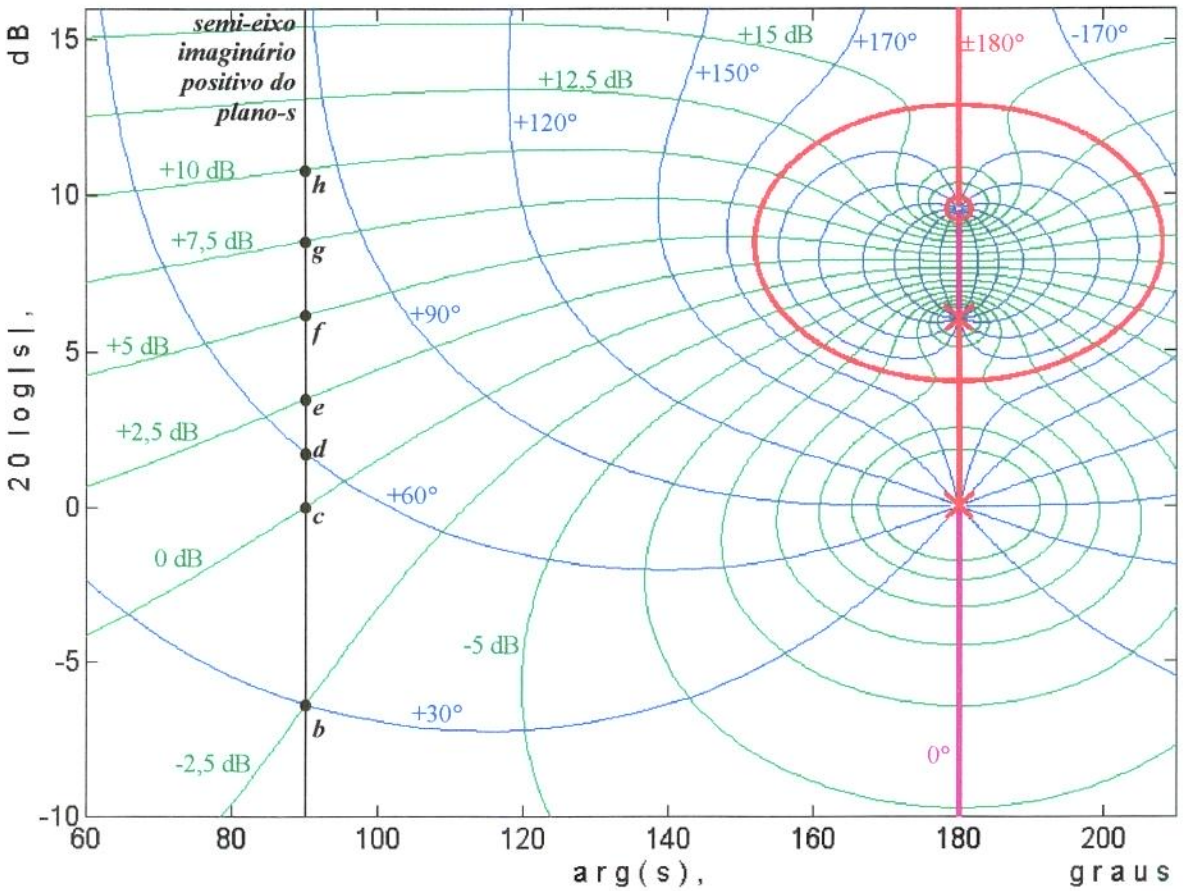


Figura 4.1.5. Zoom da Figura 2.2.17, com o diagrama modificado do plano-s da Superfície-k de Riemann de g1(s).

4.1.3. Novas Representações em Função do Ganho k de Realimentação

Vamos agora mudar o enfoque do estudo. Ao invés de olhar para as curvas-G e curvas-F da superfície-k de Riemann no plano-s, vamos ver as curvas correspondentes no plano-k. Denominaremos como curvas-G_k as curvas no plano-k geradoras de curvas-G no plano-s, e curvas-F_k as curvas no plano-k geradoras de curvas-F no plano-s. A codificação de cores será mantida: curvas-G_k em verde, e curvas-F_k em azul, vermelho (para $F_k = \pm 180°$) ou magenta (para $F_k = 0°$).

Podemos determinar a curva de valores de ganho k complexo que gera pólos do sistema realimentado h(s) no eixo imaginário. Se o sistema não realimentado g(s) for estritamente próprio, e for representado em espaço de estado pelas matrizes A, B, C e D, então a matriz D será zero, e será possível determinar a curva de k que gera pólos de s no semi-eixo imaginário positivo ou na origem do plano-s através de autovalores generalizados, conforme mostrado no Capítulo 3, Equações (3.1.11-13). Para isto, basta estipular $s = j\omega$, $\omega \in \mathbf{R}^+$, e achar os valores de k. Se g(s) não for estritamente próprio, teremos que recorrer a métodos numéricos para a obtenção de valores de k que geram pólos de h(s) no semi-eixo imaginário positivo ou na origem do plano-s. Foram implementadas funções para os dois casos.

Exemplificaremos usando o sistema g1(s), que é estritamente próprio. A Figura 4.1.6 mostra curvas-G_k e curvas-F_k no plano-k complexo, curvas estas que geram as curvas-G e curvas-F respectivamente no plano-s da superfície-k de Riemann do sistema. Além destas curvas, há na figura uma curva em preto em destaque. Esta é a curva de valores de k que geram pólos do sistema realimentado no semi-eixo imaginário positivo do plano-s da superfície-k de Riemann de g1(s). Assim, realimentando g1(s) com qualquer um dos ganhos complexos k da curva em preto da figura, algum dos pólos do sistema realimentado terá parte real zero e parte imaginária positiva. Ao percorrer a curva em preto com valores de k, algum dos pólos do sistema realimentado estará percorrendo o semi-eixo imaginário positivo do plano-s, fazendo com que os pontos enumerados de "***a***" a "***h***" na Figura 4.1.2 e nas subseqüentes, sejam alcançados. A Figura 4.1.6 enumera pontos com as mesmas letras para identificar os ganhos k complexos que geram os pontos respectivos na Figura 4.1.2.

Esta é uma nova maneira de identificar a estabilidade de um sistema realimentado: através dos ganhos k complexos que colocam o sistema realimentado no limite da estabilidade. Como as margens de estabilidade mostradas nas Tabelas 4.1.1 e 4.1.2 são baseadas nos valores de G e F dos pontos, e $G_k = G$ e $F_k = F$ nos pontos correspondentes nos dois planos complexos (plano-k e plano-s), então na curva da Figura 4.1.6, e com o auxílio

das curvas-G_k e curvas-F_k é possível identificar as margens de estabilidade de g1(s) da mesma forma mostrada para os pontos no eixo imaginário da Figura 4.1.2. Podemos identificar nos pontos da Figura 4.1.6 que os valores correspondentes para $G = G_k$ e $F = F_k$ mostrados nas Tabelas 4.1.1 e 4.1.2 permanecem inalterados, e portanto as margens de estabilidade também.

A margem de ganho de g1(s) é determinada da seguinte forma: como a curva vermelha de $F_k = \pm 180°$ não cruza com a curva em preto, não há estabilidade relativa e a margem de ganho do sistema é infinita. Já a margem de ganho complementar pode ser identificada através do ponto "***a***", que é o cruzamento da curva em preto com a curva magenta de $F_k = 0°$. Como para este ponto $G_k \cong -3{,}5$ dB, então a margem de ganho complementar de g1(s), com k = -1 (e $k_{dB} = 0$ dB), é $MGC_{dB} \cong -3{,}5$ dB.

A determinação de margens de fase e margens de fase complementares é feita da mesma forma a partir dos valores de G e F da Figura 4.1.2, e mostradas nas tabelas.

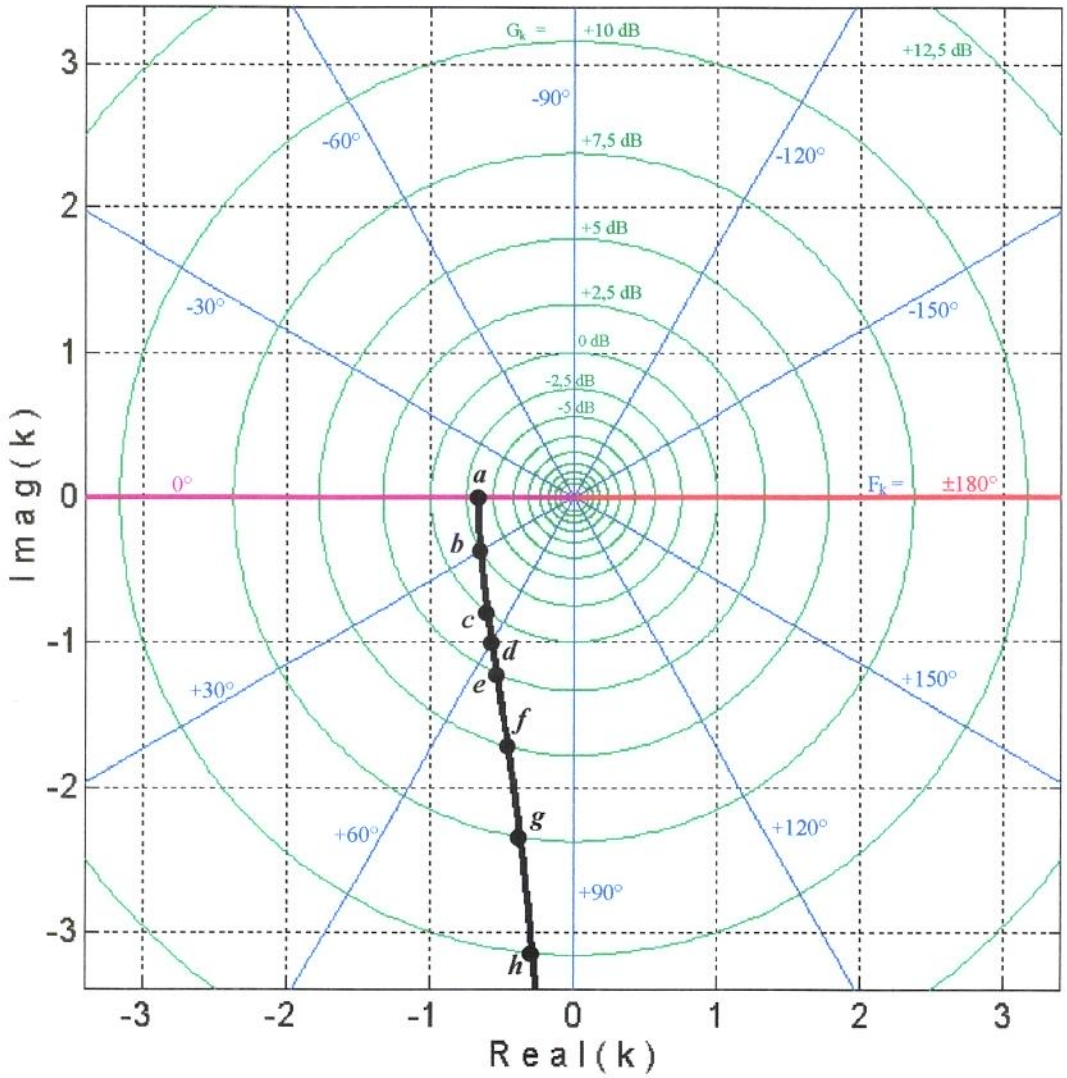


Figura 4.1.6. Curva de k (em preto), que gera pontos no semi-eixo real positivo do plano-s da superfície-k de Riemann de g1(s). *As curvas-G_k são as que geram as curvas-G da superfície-k, e as curvas-F_k são as que geram as curvas-F da superfície-k.*

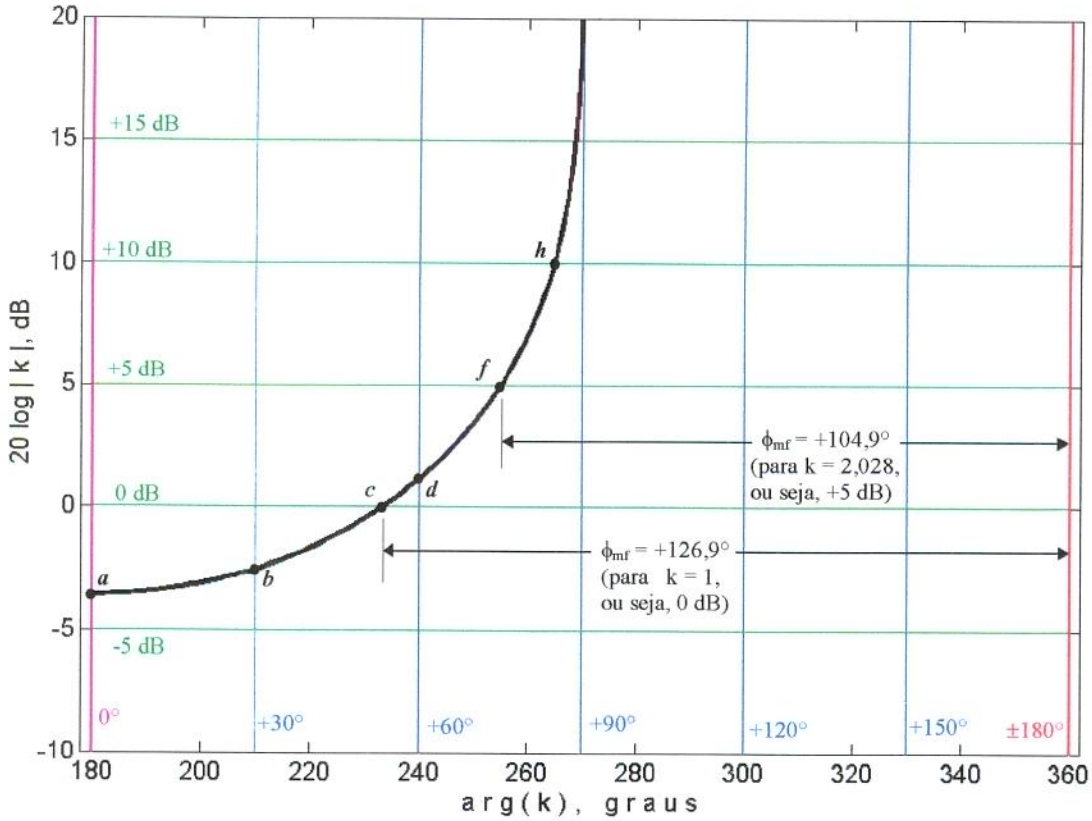


Figura 4.1.7. Plano-k da Figura 4.1.6 representado em ângulos em graus e magnitudes em dB da variável complexa k. *As curvas-G_k são horizontais e as curvas-F_k são verticais. A curva em preto tem valores de* k *que colocam o sistema no limite da estabilidade.*

A Figura 4.1.7 mostra o plano modificado da variável k da Figura 4.1.6. Na abscissa está o ângulo de fase arg(k), em graus, e na ordenada está o módulo em dB de k, $k_{dB} = 20\log|\,k\,|$. A curva em preto representa os valores de ganho k que colocam algum pólo do sistema realimentado com g1(s) no semi-eixo imaginário positivo do plano-s, colocando o sistema realimentado no limite da estabilidade. Neste gráfico as curvas-G_k são horizontais e as curvas-F_k são verticais. Isto facilita a determinação gráfica das margens de estabilidade do sistema. Como exemplo estão determinadas as margens de fase nos ganhos $k_{dB} = 0$ dB (ponto "***c***") e $k_{dB} = +5$ dB (ponto "***f***"). Note que a margem de fase para um determinado valor de ganho pode ser determinada como a distância para a direita até alcançar a curva-F_k de ±180°. Se a distância for para a esquerda, a margem de fase é negativa. Da mesma forma, a margem de fase complementar pode ser determinada como a distância para a direita até alcançar a curva-F_k de 0°. Para $k_{dB} = 0$ dB (ponto "***c***"), por exemplo, como se deve percorrer 53,1° para a esquerda para alcançar a curva-F_k de 0 dB, então a margem de fase complementar para este ganho é -53,1°.

Com base na determinação gráfica descrita para margens de fase e margens de fase complementares, pode-se fazer um gráfico específico para a margem de fase e outro para a margem de fase complementar. Estes estão representados nas Figuras 4.1.8 e 4.1.9.

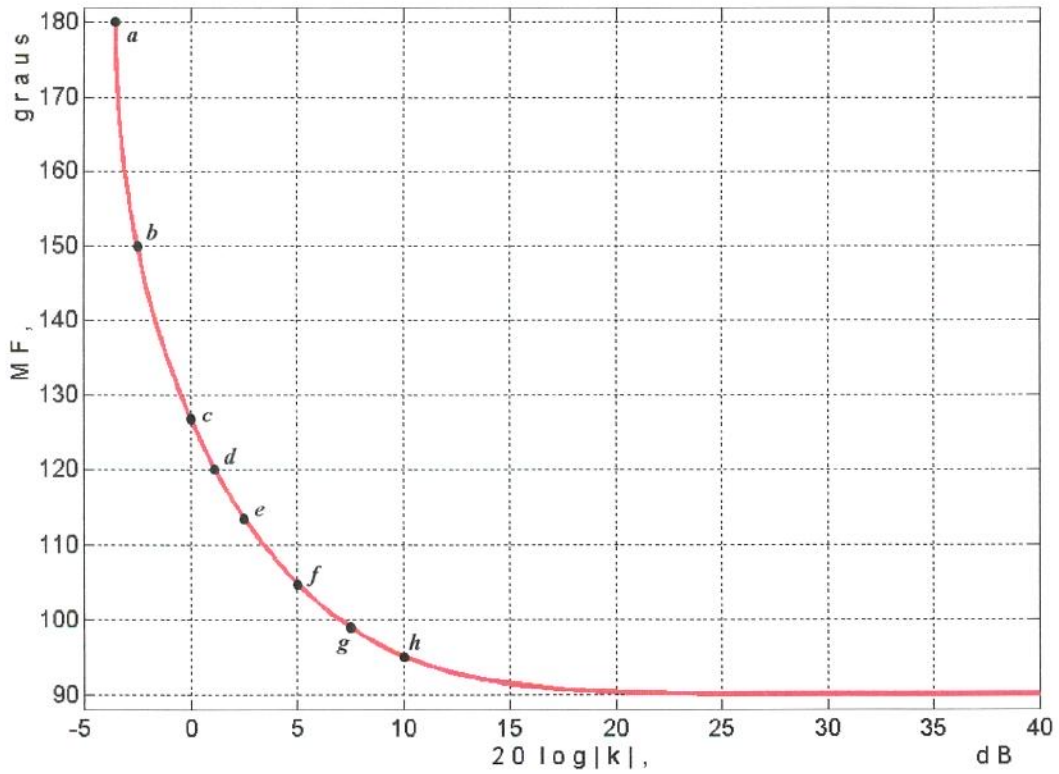


Figura 4.1.8. Curva de margem de fase ϕ_{mf} = MF *em graus, em função do módulo do ganho* k *em dB, para o sistema monovariável* g1(s).

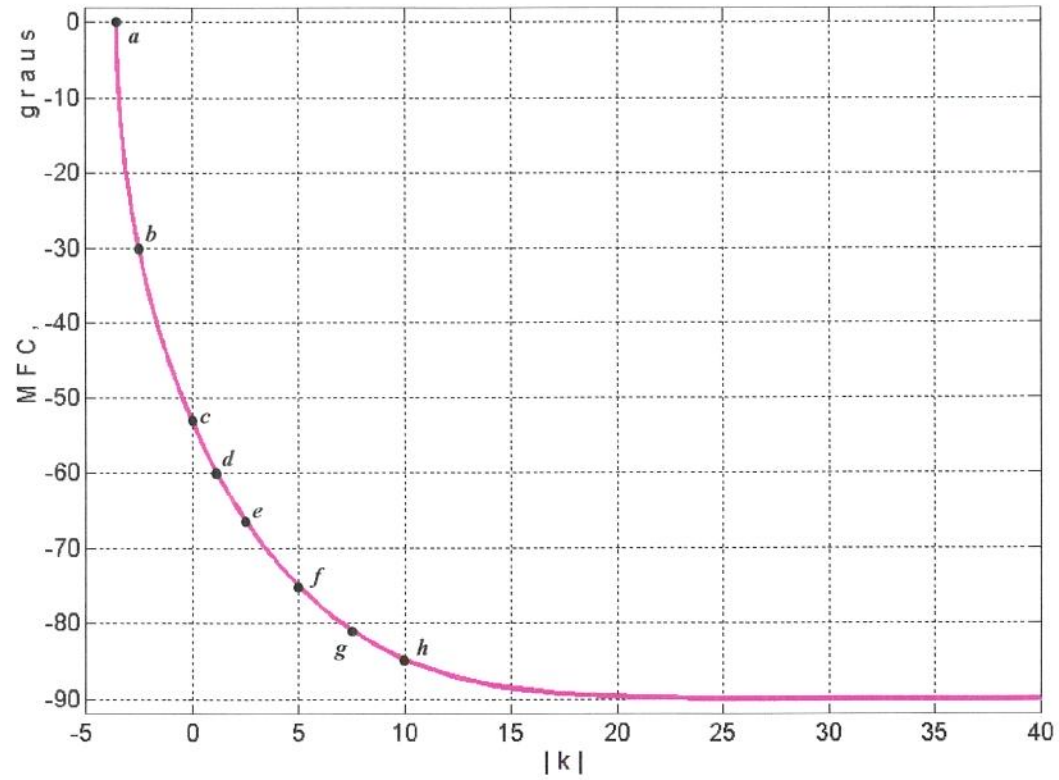


Figura 4.1.9. Curva de margem de fase complementar ϕ_{mfc} = MFC *em graus, em função do módulo do ganho* k *em dB, para* g1(s).

A Figura 4.1.8 mostra a variação da margem de fase de g1(s) em função da variação do valor do ganho k_{dB}. Pode-se ver na figura que com o ganho de aproximadamente -3,5 dB

(ponto "***a***"), a margem de fase é $\phi_{mf} = +180°$, com o ganho de -2,5 dB (ponto "***b***"), $\phi_{mf} \cong +150°$, e assim por diante.

A Figura 4.1.9 mostra a variação da margem de fase complementar de g1(s) em função da variação do ganho k_{dB}. Pode-se ver na figura que com o ganho de aproximadamente -3,5 dB (ponto "***a***"), a margem de fase complementar é $\phi_{mf} = 0°$, com o ganho de -2,5 dB (ponto "***b***"), $\phi_{mf} \cong -30°$, e assim por diante.

Finalmente, com base no ponto "***a***" da Figura 4.1.7, é possível graficar a margem de ganho complementar em função do ganho k de realimentação. O ponto "***a***" mostra que para o ganho $k_{dB} = -3,52$ dB (k = -0,6667), a margem de ganho complementar é $MGC_{dB} = 0$ dB. A partir deste valor, cada vez que se acrescenta algum valor em dB a k_{dB}, deve-se reduzir o mesmo valor à margem de ganho complementar.

A Figura 4.1.10 mostra a curva da margem de ganho complementar MGC_{dB} = MGCDB em dB em função da variação do ganho k negativo, expressa em dB com k_{dB}. O ponto de partida desta curva é o ponto "***a***", que tem $MGC_{dB} = 0$ dB para $k_{dB} = -3,52$ dB. A partir daí, traça-se uma reta com inclinação -1, uma vez que se deve diminuir a margem de ganho complementar em dB na mesma medida que se aumenta o valor de k_{dB}. Pode-se ver na curva os valores de MGC_{dB} para outros pontos, como por exemplo, para o ganho -2,5 dB do ponto "***b***" o valor é -1,02 dB, e para o ganho 0 dB do ponto "***c***", o valor é -3,52 dB.

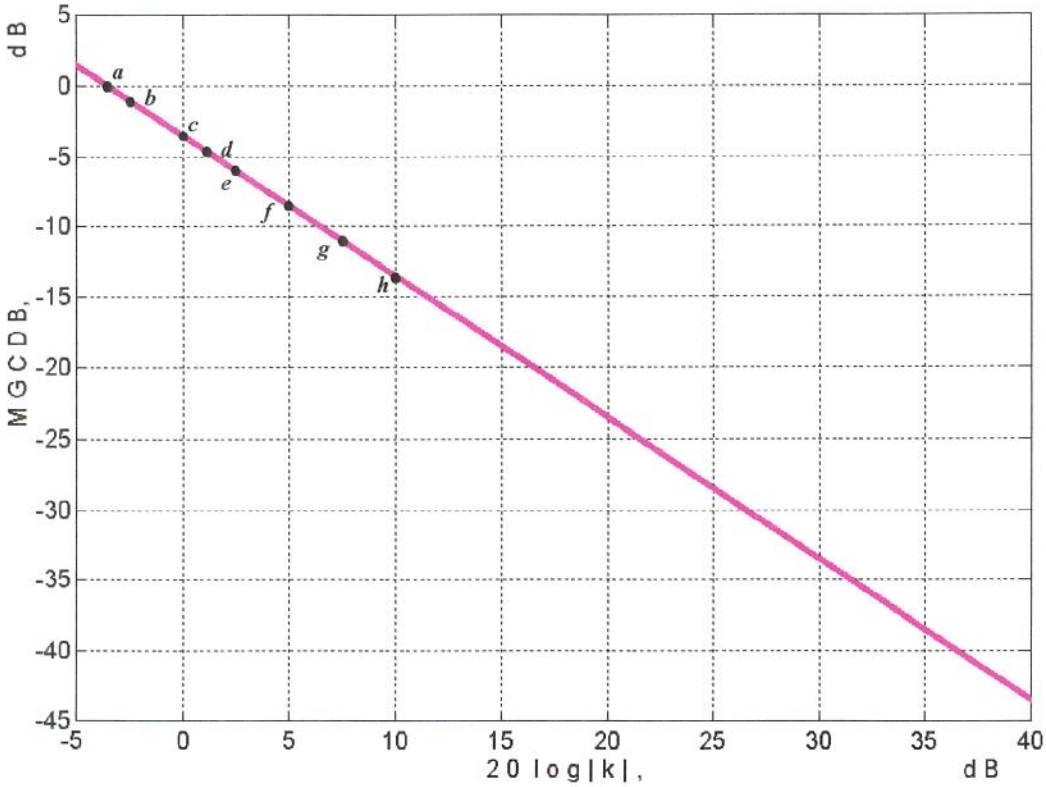


Figura 4.1.10. Curva de margem de ganho complementar MGC_{dB} = MGCDB *em dB, em função do módulo do ganho* k *em dB, para* g1(s).

4.1.4. Determinação das Margens de Estabilidade com o Auxílio das Superfícies-s de Riemann

A margem de ganho e a margem de fase foram originalmente definidas no gráfico de resposta em freqüência de um sistema. Em termos de superfície-s de Riemann, isto significa que estas margens são definidas em termos da curva-F de +90°, que para o sistema de controle monovariável g1(s) é a curva g1(jω), com $\omega \in \mathbf{R}^+$.

Usando curvas de k·g1(jω) e variando o valor de k, que pode ser real positivo ou negativo, podemos obter curvas como as mostradas com linhas sólidas na Figura 4.1.11. A figura mostra em vermelho curvas geradas com k real positivo, e em azul curvas geradas com k real negativo. As curvas tracejadas são as curvas geradas com ω negativo, correspondendo às curvas-F de -90°. Estas curvas foram traçadas para completar o contorno de Nyquist para cada valor de k. Para facilitar o trabalho de identificação, foi traçado um círculo de raio unitário com centro na origem. Este círculo cruza o ponto crítico (-1+j0) do plano complexo, identificado na figura com uma cruz verde.

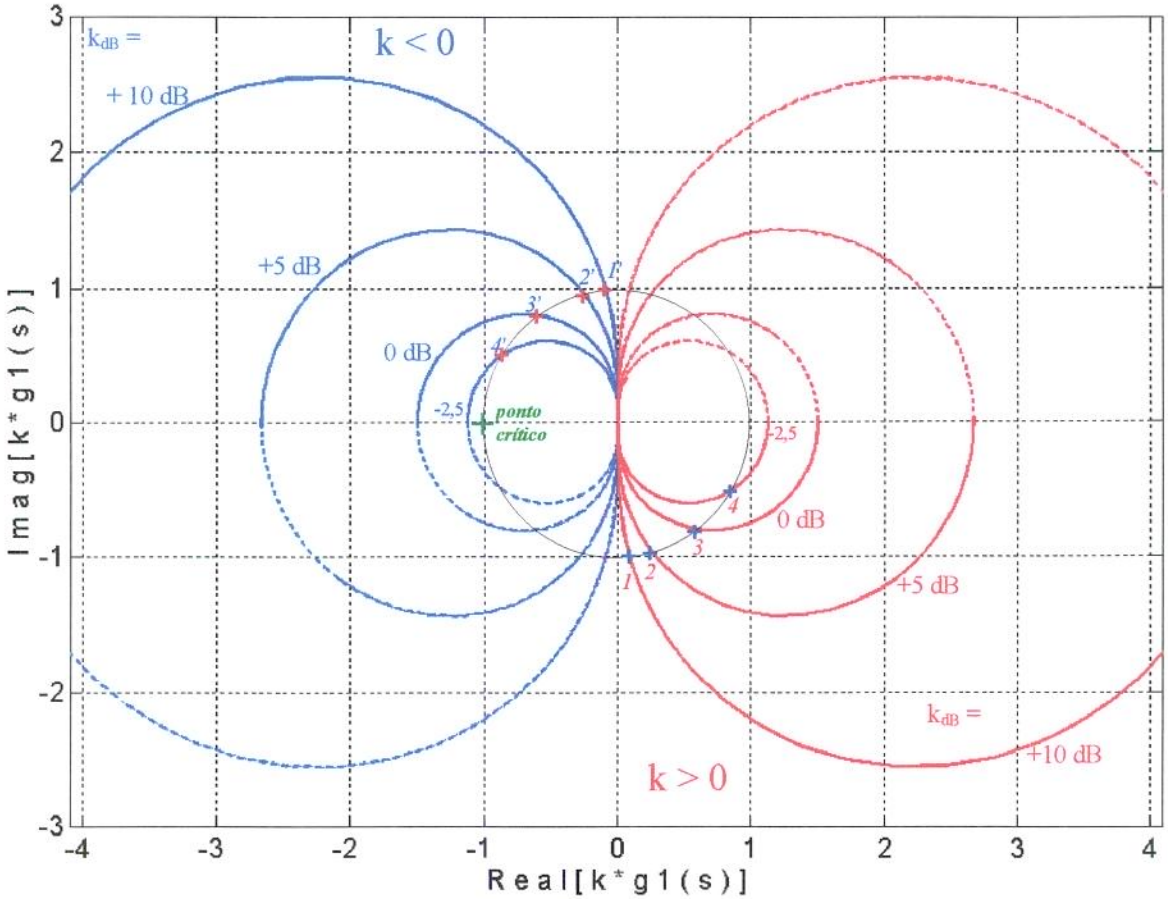


Figura 4.1.11. Contornos de Nyquist de k·g1(s), *para vários valores de* k, *que estão indicados em dB, com* k_{dB}. *As curvas vermelhas correspondem a valores positivos de* k, *e as curvas azuis correspondem a valores negativos de* k.

Aplicando o critério de estabilidade de Nyquist a qualquer dos contornos em vermelho, para os quais o ganho k é positivo, podemos ver que se pode aumentar indefinidamente este ganho sem que o ponto crítico seja circundado. Isto significa que a margem de ganho é sempre infinita para ganhos k reais positivos. Já quando aplicamos ganhos k reais negativos, o circundamento do ponto crítico depende do módulo de k. Temos na Figura 4.1.11 o módulo de k indicado em dB, com k_{dB}. Vemos que quanto maior o valor de k_{dB} nos circundamentos azuis, mais longe do ponto crítico fica o ponto do circundamento sobre o semi-eixo real negativo. Assim, quanto maior o ganho k, menor a margem de ganho. Podemos determinar qual o valor exato de ganho k real negativo que faz com que o circundamento atravesse o ponto crítico. O valor deste ganho será a margem de ganho complementar de g1(s), ou a margem de ganho complementar de $k \cdot g1(s)$ com k = -1. Este valor é -3,52 dB. É fácil então compreender que circundamentos com k negativo e com $k_{dB} < -3,52$ dB passam à direita do ponto crítico, indicando sistemas realimentados estáveis. Para o contorno com $k_{dB} = 0$ dB, a margem de fase complementar será $MGC_{dB} = -3,52$ dB. Já para outro valor de k_{dB}, a margem de fase complementar será -3,52 dB menos o valor de k_{dB}. Por exemplo, se $k_{dB} = +5$dB, então $MGC_{dB} = -8,52$ dB, e se $k_{dB} = -5$ dB, então $MGC_{dB} = +1,48$ dB.

A partir dos circundamentos da Figura 4.1.11 é possível determinar margem de fase ou margem de fase complementar para um determinado valor de k, expresso em dB com k_{dB}. Para as curvas em vermelho, por exemplo, os pontos com magnitude um da resposta em freqüência $k \cdot g1(j\omega)$ estão indicados sobre o círculo unitário. A margem de fase ϕ_{mf} é medida como o ângulo de atraso de fase necessário para que o ponto de magnitude um atinja o ponto crítico (-1 + j0).

Assim, com ganho k positivo, o ponto "*1*" indica que para $k_{dB} = +10$ dB, teremos $\phi_{mf} = +95,16°$; o ponto "*2*" indica que para $k_{dB} = +5$ dB, teremos $\phi_{mf} = +105,91°$; o ponto "*3*" indica que para $k_{dB} = 0$ dB, teremos $\phi_{mf} = +126,87°$; e o ponto "*4*" indica que para $k_{dB} = -2,5$ dB, teremos $\phi_{mf} = +150,12°$.

Com ganho k negativo, o ponto "*1'* " indica que para $k_{dB} = +10$ dB, teremos $\phi_{mfc} = -84,84°$; o ponto "*2'* " indica que para $k_{dB} = +5$ dB, teremos $\phi_{mfc} = -75,09°$; o ponto "*3'* " indica que para $k_{dB} = 0$ dB, teremos $\phi_{mfc} = -53,13°$; e o ponto "*4'* " indica que para $k_{dB} = -2,5$ dB, teremos $\phi_{mfc} = -29,88°$.

Com ganho k positivo e $k_{dB} < -3,52$ dB, a margem de fase é $\phi_{mf} = +\infty$, e com ganho k negativo e $k_{dB} < -3,52$ dB, a margem de fase complementar é $\phi_{mfc} = +\infty$, o mesmo valor encontrado para ϕ_{mf}.

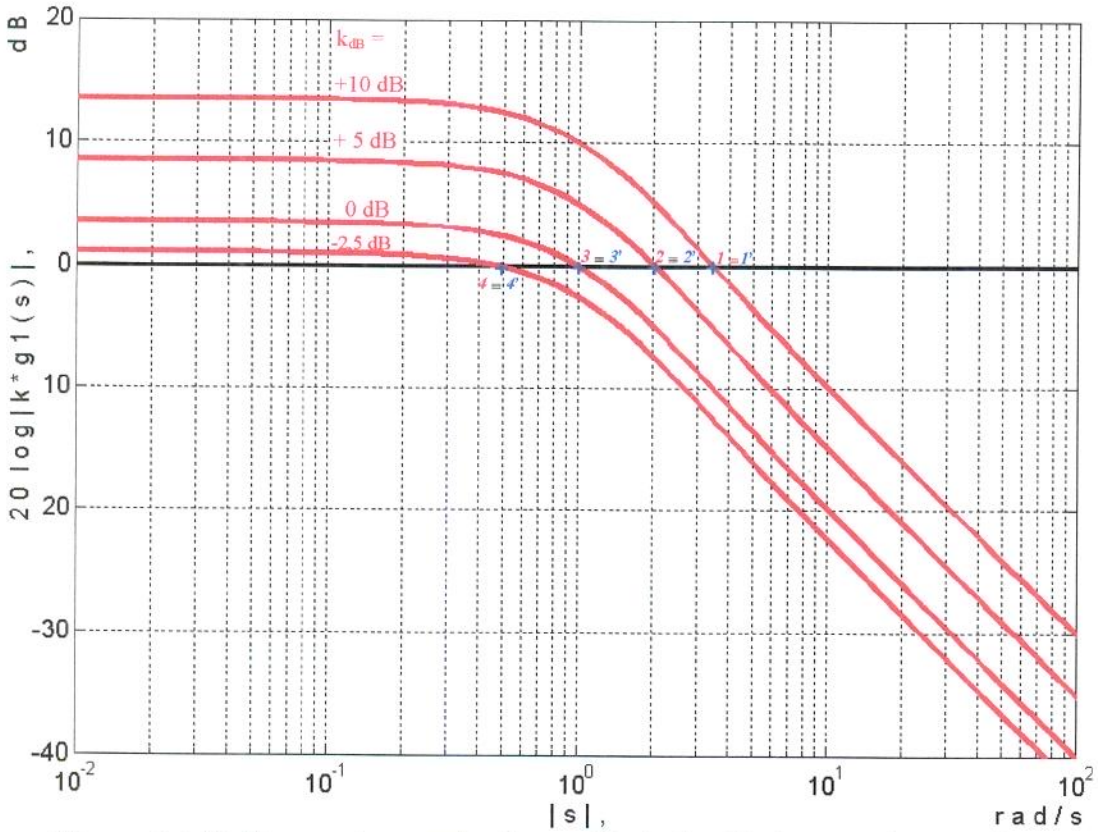


Figura 4.1.12. Curvas de magnitude em dB de $k \cdot g1(j\omega)$ *com vários valores de* k, *expressos em dB com* k_{dB}. *Curvas com* k *com sinais opostos, mas com mesmo* k_{dB}, *estão sobrepostas.*

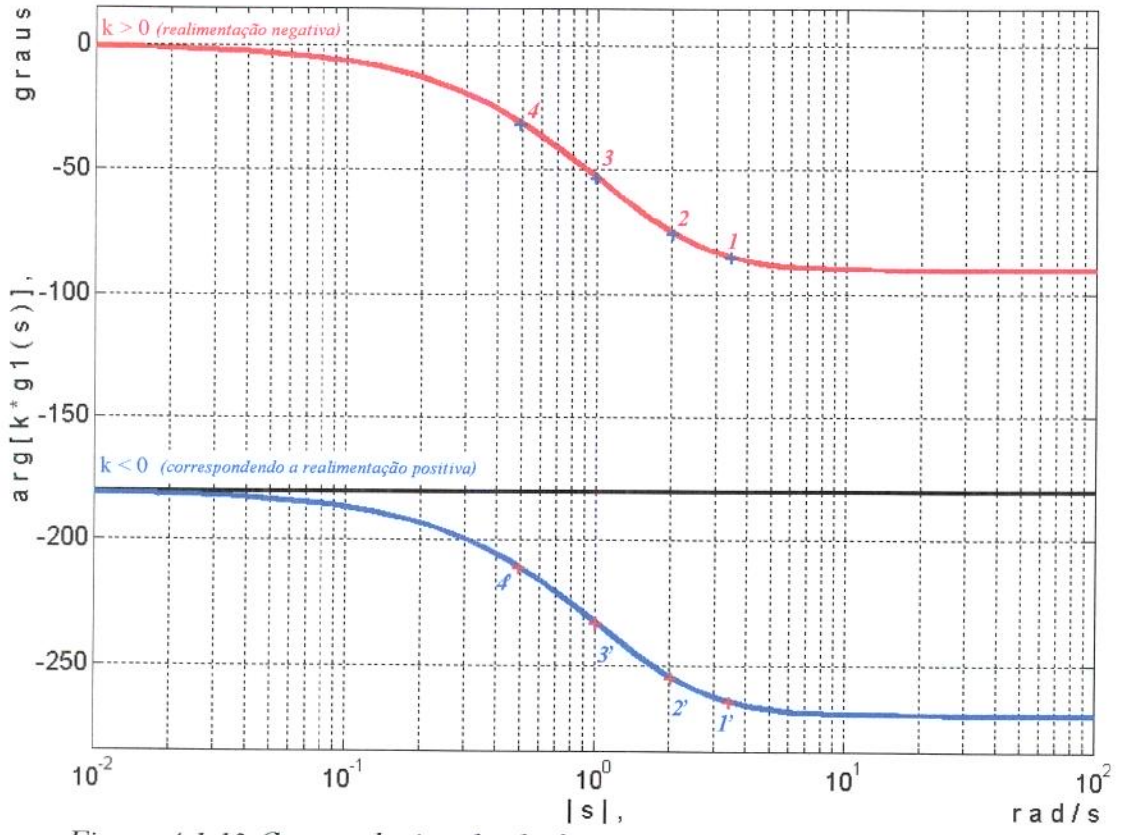


Figura 4.1.13. Curvas de ângulo de fase em graus de $k \cdot g1(j\omega)$ *com vários valores de* k, *expressos em dB com* k_{dB}. *Curvas com* k *negativo (em azul) têm um atraso adicional de 180° em relação àquelas com* k *positivo (em vermelho).*

As Figuras 4.1.12 e 4.1.13 apresentam o diagrama de Bode de k· g1(s) para os vários valores positivos e negativos de k expressos em k_{dB}. No diagrama de magnitudes da Figura 4.1.12, as curvas com mesmo k_{dB} mas com sinais opostos em k estão sobrepostas, fazendo com que haja a coincidência dos pontos: "*1*" ≡ "*1'* "; "*2*" ≡ "*2'* "; "*3*" ≡ "*3'* "; e"*4* " ≡ "*4'* ". Já no diagrama de ângulos de fase da Figura 4.1.13, todas as curvas com k positivo estão sobrepostas entre si (em vermelho), e todas as curvas com k negativo estão sobrepostas entre si (em azul), mas com um atraso de 180° em relação às curvas com k positivo.

Através dos gráficos das Figuras 4.1.12 e 4.1.13 podemos constatar novamente que para qualquer valor de ganho k positivo, a margem de ganho será infinita, porque as curvas de ângulo de fase não cruzam por -180°, tendo ângulo sempre superior. Para qualquer valor de k negativo, as curvas de ângulo de fase partem do valor -180° com $|s| \rightarrow 0$ rad/s. Assim, a margem de fase complementar é definida a partir do patamar de ganho apresentado para baixas freqüências no diagrama de magnitudes. A curva de k_{dB} = -2,5 dB tem patamar de +1,02 dB, tendo portanto uma margem de fase complementar MGC_{dB} = -1,02 dB. Da mesma forma, a curva de k_{dB} = 0 dB tem patamar de +3,52 dB, tendo então MGC_{dB} = -3,52 dB; a curva de k_{dB} = +5 dB tem patamar de +8,52 dB, tendo então MGC_{dB} = -8,52 dB; e a curva de k_{dB} +10 dB tem patamar de +13,52 dB, tendo então MGC_{dB} = -13,52 dB.

Os valores de margem de fase para as curvas com k positivo são determinados a partir das freqüências em que as curvas de magnitude cruzam por 0 dB. Identifica-se nas curvas de ângulo de fase os pontos com mesmas freqüências, e os valores de margem de fase são determinados como o atraso de fase que falta para que os pontos cheguem a -180°. Na Figura 4.1.12 podemos determinar no ponto "*1*" da curva de k_{dB} = +10 dB a margem de fase ϕ_{mf} = +95,16°, no ponto "*2*" da curva de k_{dB} = +5 dB a margem de fase ϕ_{mf} = +105,91°, no ponto "*3*" da curva de k_{dB} = 0 dB a margem de fase ϕ_{mf} = +126,87°, e no ponto "*4* " da curva de k_{dB} = -2,5 dB a margem de fase ϕ_{mf} = +150,12°. Podemos determinar da mesma forma os valores de margem de fase complementar para k negativo. Na Figura 4.1.12 podemos determinar no ponto "*1'* " da curva de k_{dB} = +10 dB a margem de fase complementar ϕ_{mfc} = -84,84°, no ponto "*2'* " da curva de k_{dB} = +5 dB a margem de fase complementar ϕ_{mfc} = -75,09°, no ponto "*3*" da curva de k_{dB} = 0 dB a margem de fase complementar ϕ_{mfc} = -53,13°, e no ponto "*4* " da curva de k_{dB} = -2,5 dB a margem de fase complementar ϕ_{mfc} = -29,88°.

Podemos graficar a margem de fase em função do módulo do ganho k positivo, com

os pontos determinados como mostrado nas Figuras 4.1.12 e 4.1.13. A Figura 4.1.14 mostra exatamente esta curva, com ϕ_{mf} = MF em graus em função de | k | em escala logarítmica. Na verdade, este gráfico é o mesmo gráfico apresentado na Figura 4.1.8, e então identificamos os pontos nomeados de "*1*" a "*4* " em função dos pontos nomeados de "***a***" a "***h***".

Podemos também graficar a margem de fase complementar em função do módulo do ganho k negativo, com os pontos determinados como mostrado nas Figuras 4.1.12 e 4.1.13. A Figura 4.1.15 mostra esta curva, com ϕ_{mfc} = MFC em graus em função de | k | em escala logarítmica. Na verdade, este gráfico é o mesmo gráfico apresentado na Figura 4.1.9, e então identificamos os pontos nomeados de "*1'* " a "*4'* " em função dos pontos nomeados de "***a***" a "***h***".

Podemos finalmente graficar a margem de ganho complementar em função do módulo do ganho k negativo, com os valores determinados como descrito a partir das Figuras 4.1.12 e 4.1.13. A Figura 4.1.16 mostra esta curva, com MGC_{dB} = MGCDB em dB em função de | k | em escala logarítmica. Este gráfico é o mesmo apresentado na Figura 4.1.10, e estão identificados os pontos nomeados de "*1'* " a "*4'* " em função dos pontos nomeados de "***a***" a "***h***".

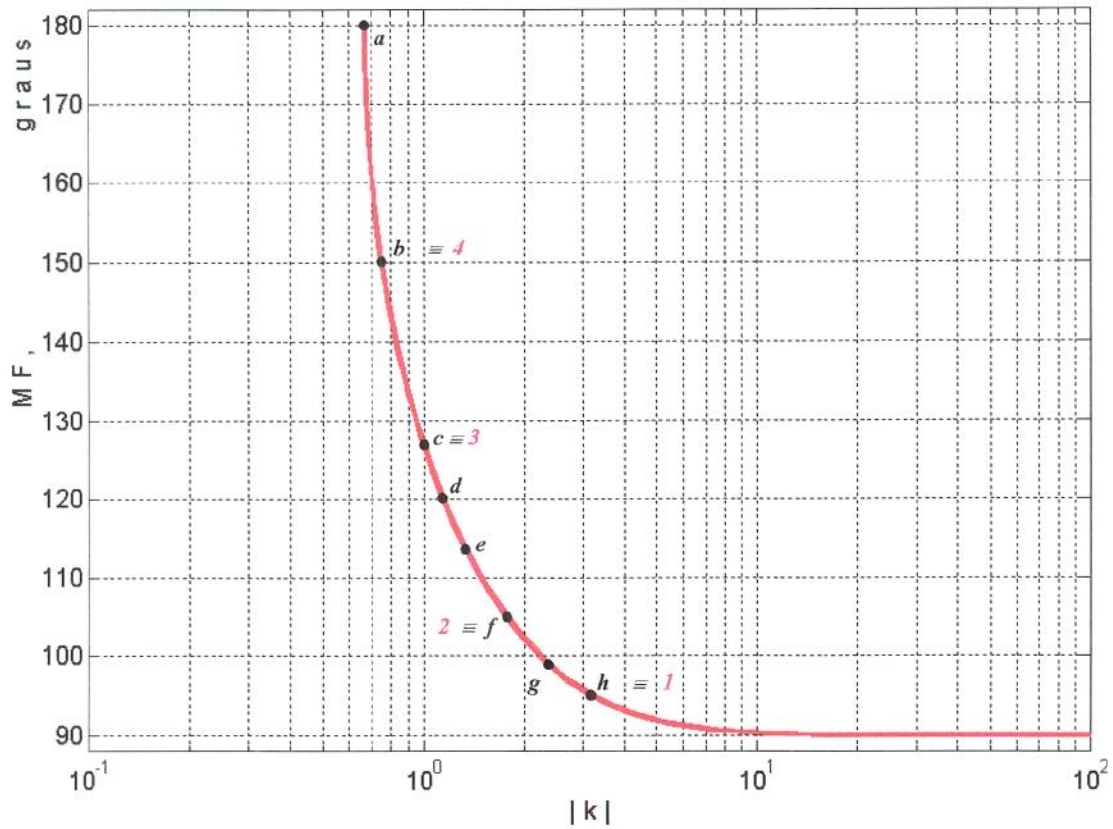


Figura 4.1.14. Curva de margens de fase ϕ_{mf} = MF *em graus, em função do módulo do ganho* k, *para o sistema monovariável* g1(s).

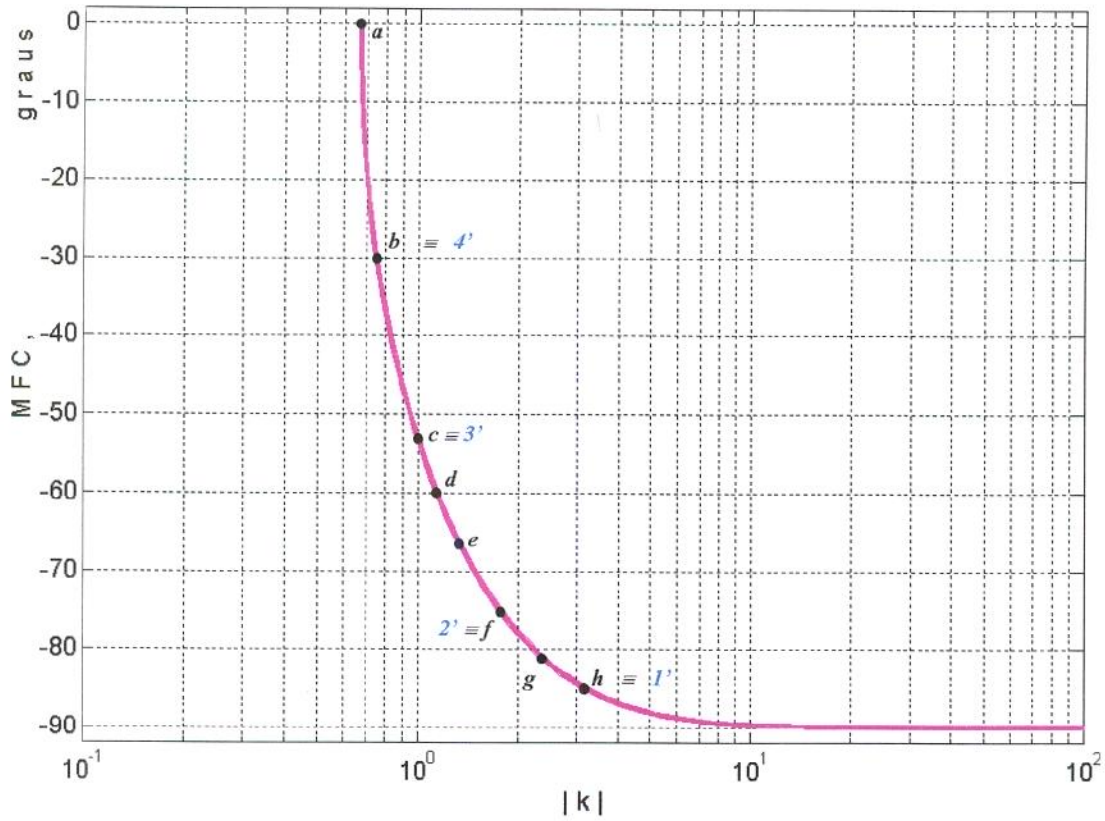


Figura 4.1.15. Curva de margens de fase complementares ϕ_{mfc} = MFC *em graus, em função do módulo do ganho* k, *para o sistema monovariável* g1(s) *ao receber realimentação positiva.*

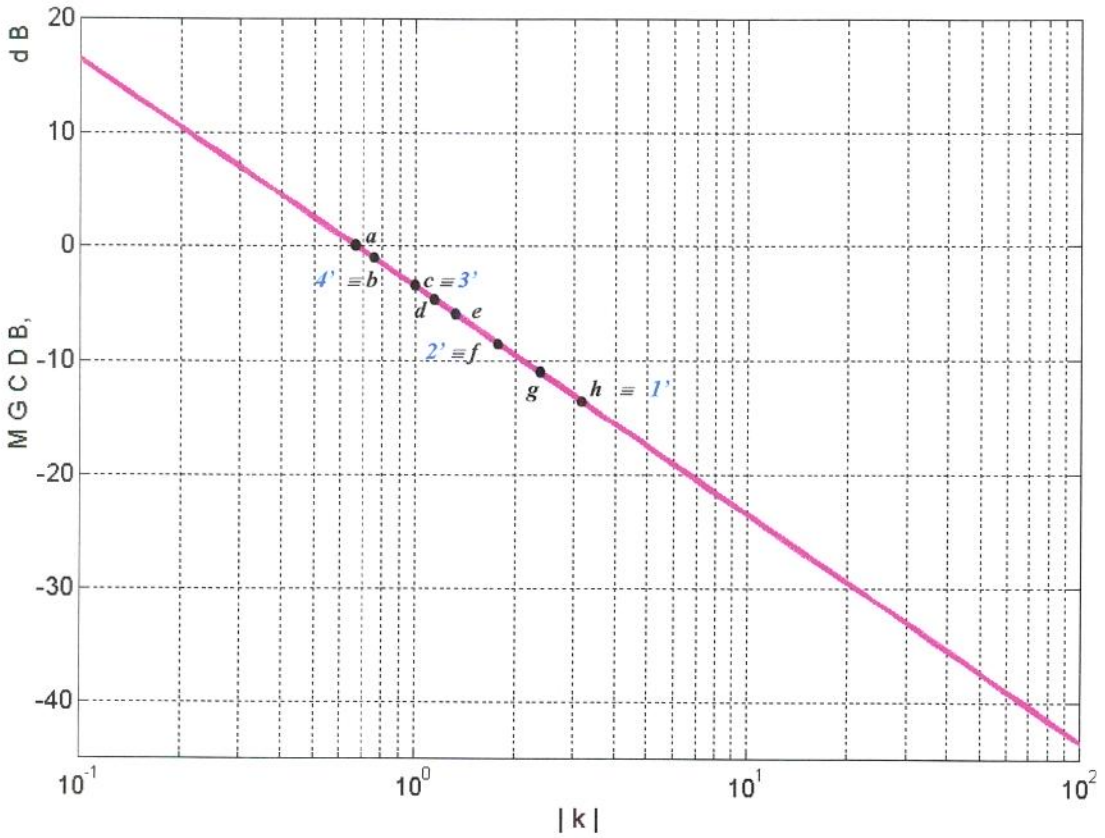


Figura 4.1.16. Curva de margens de ganho complementares MGC_{dB} = MGCDB *em dB, em função do módulo do ganho* k, *para o sistema monovariável* g1(s) *ao receber realimentação positiva.*

4.2. MARGENS DE ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL

4.2.1. Margens de Estabilidade usando Superfícies-k de Riemann

Seja o sistema de controle multivariável descrito no Capítulo 3, e mostrado novamente na Figura 4.2.1. A função de transferência de malha aberta é G(s), e o sistema total tem função de transferência de malha fechada $H(s) = [I + kG(s)]^{-1} G(s)$.

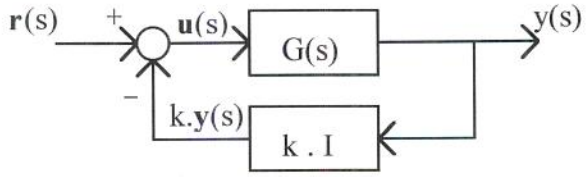


Figura 4.2.1. Sistema de controle multivariável realimentado, com planta G(s) *e ganho de realimentação* $K = k \cdot I$, *o que restringe a realimentação ao escalar* k.

A representação de G(s) em espaço de estado é:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) , \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbf{R}^{n \times m}, \\ C \in \mathbf{R}^{m \times n}, \quad D \in \mathbf{R}^{m \times m}, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

e onde *n* é a ordem de G(s), com *m* entradas e *m* saídas, e equação característica:

$$\det[sI - A] = 0 . \tag{4.2.2}$$

O sistema realimentado H(s) tem representação de estado:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A_H\mathbf{x}(t) + B_H\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_H\mathbf{x}(t) + D_H\mathbf{r}(t) , \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} A_H = A - kB\,(I - kD)^{-1} C \\ B_H = B\left[I - k(I + kD)^{-1} D\right] \\ C_H = (I + kD)^{-1} C \\ D_H = (I + kD)^{-1} D , \end{cases} \tag{4.2.3}$$

com equação característica:

$$\det[sI - A_H] = \det\left[sI - A + kB\,(I - kD)^{-1} C\right] = 0 . \tag{4.2.4}$$

Um sistema multivariável com *m* entradas e *m* saídas pode ter suas margens de fase determinadas como se fosse um conjunto de *m* sub-sistemas de controle monovariável, em que cada lugar característico representa a resposta em freqüência de um destes sub-sistemas. Assim, se o sistema tiver realimentação unitária, ou seja, se k = 1, o então as margens de fase

ϕ_{mfp}, $p = 1, 2, ..., q$ do sistema serão cada uma o atraso de fase necessário na curva de resposta em freqüência de um lugar característico $\lambda_i(j\omega) = eig_i[G(j\omega)]$, $i = 1, 2, ..., m$, para que um ponto de $\lambda_i(j\omega)$ com magnitude unitária passe pelo ponto crítico (-1+j0). O número total q de margens de fase poderá ser diferente do número total m de lugares característicos, porque um único lugar característico poderá ter mais de uma margem de fase, da mesma maneira como pode acontecer no caso monovariável. Assim, se ω_{cp} é um valor de freqüência para o qual $|\lambda_i(j\omega)| = 1$, e se o ângulo de $\lambda_i(j\omega_{cp})$ for $\phi_{\lambda i} = \arg[\lambda_i(j\omega_{cp})]$, então

$$\phi_{mfp} = 180° + \phi_{\lambda i}(\omega_{cp}) \qquad (4.2.5)$$

é a p-ésima margem de fase do sistema, relativa ao i-ésimo lugar característico, $\lambda_i(j\omega)$, do sistema com realimentação unitária.

Pode-se igualmente considerar uma única margem de fase como a margem de fase global do sistema. Esta seria aquela com o menor módulo entre as ϕ_{mfp}, ou seja, o pior caso, que é aquele em que:

$$|\phi_{mf}| = \min|\phi_{mfp}|, \qquad p = 1, 2, ..., q. \qquad (4.2.6)$$

A escolha entre considerar uma única margem de fase ou todas as margens de fase possíveis para cada lugar característico depende muito da aplicação. Por exemplo, usando o método de projeto por lugares característicos, depois de diagonalizar o sistema se deve projetar um compensador para cada lugar característico como se fosse um sistema de controle monovariável. Nesta aplicação, escolhe-se o uso das margens de fase dos lugares característicos. Em outra situação pode ser mais conveniente a determinação de uma única margem de fase para o sistema como um todo. Este é o caso, por exemplo, se estivermos interessados em determinar a estabilidade relativa do sistema realimentado. Bastará a informação do pior caso: a menor margem de fase de todos os lugares característicos.

Visto que a margem de fase global de um sistema de controle multivariável é facilmente determinada a partir das margens de fase individuais associadas aos lugares característicos do sistema, o desenvolvimento aqui é todo feito para estas últimas como forma de generalizar o trabalho.

Se o sistema tiver realimentação com ganho k real positivo, então as margens de fase associadas aos lugares característicos deverão ser calculadas incluindo o valor de k, ou seja, levando em conta o ganho da malha de realimentação. Assim, para um determinado valor de k, denominaremos $\omega_{cp}(k)$ como uma freqüência para a qual $|k \cdot \lambda_i(j\omega_{cp}(k))| = 1$, e o ângulo de

fase de $\lambda_i(j\omega_{cp}(k))$ será $\phi_{\lambda i}(\omega_{cp}(k)) = \arg[\lambda_i(j\omega_{cp}(k))]$. A equação apresentada em (4.2.5) para a margem de fase poderá então ser reformulada para:

$$\phi_{mfp}(k) = 180° + \phi_{\lambda i}(\omega_{cp}(k)) , \qquad (4.2.7)$$

e para cada valor real positivo do ganho k haverá um valor para a *p*-ésima margem de fase.

Agora consideremos uma situação hipotética na qual fosse possível aplicar uma realimentação com ganho k complexo, com módulo $\bar{k} = |k|$ e ângulo $\phi_k = \arg(k)$. A matriz de transferência G(jω), ao ser multiplicada pelo escalar complexo k, teria seus autovalores também multiplicados pelo mesmo escalar:

$$\text{eig}_i[k\cdot G(j\omega)] = k\cdot \text{eig}_i[G(j\omega)] = k\cdot \lambda_i(j\omega) , \qquad (4.2.8)$$

e o ângulo de $[k\cdot \lambda_i(j\omega)]$ seria formado pela soma do ângulo de k com o ângulo de $\lambda_i(j\omega)$:

$$\arg[k\cdot \lambda_i(j\omega)] = \phi_k + \arg[\lambda_i(j\omega)] . \qquad (4.2.9)$$

Se para um determinado ganho complexo k com módulo $\bar{k} = |k|$, o ângulo de fase aplicado for $\phi_k = -\phi_{mfp}(\bar{k})$, calculado com a Equação (4.2.7), então $\arg[k\cdot \lambda_i(j\omega_{cp}(\bar{k}))] = -180°$ na Equação (4.2.9):

$$\begin{aligned} \arg[k\cdot \lambda_i(j\omega_{cp}(\bar{k}))] &= \phi_k + \arg[\lambda_i((j\omega_{cp}(\bar{k}))] \\ &= -\phi_{mfp}(\bar{k}) + \arg[\lambda_i((j\omega_{cp}(\bar{k}))] \\ &= -\left\{ 180° + \arg[\lambda_i((j\omega_{cp}(\bar{k}))] \right\} + \arg[\lambda_i((j\omega_{cp}(\bar{k}))] \\ &= -180°. \end{aligned} \qquad (4.2.10)$$

Isto indica que o sistema hipotético com este ganho complexo de realimentação teria o gráfico de resposta em freqüência do seu *i*-ésimo lugar característico passando pelo ponto crítico (-1+j0). Pelo critério generalizado de estabilidade de Nyquist, tal sistema teria algum de seus pólos no eixo imaginário do plano-s. Este fato pode ser aproveitado para determinar na superfície-k de Riemann as margens de fase correspondentes a alguns valores do ganho k.

Como exemplo, determinemos as margens de fase de um sistema como o mostrado na Figura 4.2.1, em que G(s) é o Sistema 2 apresentado nas Equações (1.2.1) e (1.2.2) do Capítulo 1, e k = 1. Verificando o gráfico da Figura 1.2.11, no Capítulo 1, podemos ver que o lugar característico maior no gráfico tem dois pontos com módulo 1, tendo portanto duas margens de fase, e o outro lugar característico não tem nenhum ponto com módulo 1, tendo margem de fase infinita. É importante salientar que margens de fase com valores +∞ ou -∞, como consideradas no caso monovariável, podem também ser consideradas no caso

multivariável, mas a superfície-k de Riemann só dá informações sobre as margens de fase finitas, ficando ao projetista a interpretação sobre as margens infinitas a partir dos próprios lugares característicos, se assim o desejar. Voltando ao exemplo, as margens de fase para o lugar característico maior são $\phi_{mf1} = -40{,}3643°$ e $\phi_{mf2} = -124{,}5939°$. Se aplicarmos ao sistema um ganho de realimentação k complexo com módulo $\overline{k} = |k| = 1$ e ângulo $\phi_k = -\phi_{mf1} = +40{,}3643°$, os pólos do sistema H(s) realimentado com este k serão as raízes da Equação (4.2.4):

$$\{ \text{ Pólos de H(s) } \} = \{ \text{ -4,2191 - j1,2549 ; 0 + j0,2187 } \}. \qquad (4.2.11)$$

Da mesma forma, se aplicarmos ao sistema um ganho de realimentação k complexo com módulo $\overline{k} = |k| = 1$ e ângulo $\phi_k = -\phi_{mf2} = +124{,}5939°$, os pólos do sistema H(s) realimentado com este k serão:

$$\{ \text{ Pólos de H(s) } \} = \{ \text{ -2,0916 - j2,5477 ; 0 + j1,2306 } \}. \qquad (4.2.12)$$

Como esperado, em ambas as situações H(s) está no limite da estabilidade com algum dos seus pólos no eixo imaginário do plano-s.

As Figuras 4.2.2 e 4.2.3 mostram respectivamente as Folhas 1 e 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2, como apresentadas nas Figuras 3.2.2 e 3.2.3 do Capítulo 3. O eixo imaginário do plano-s foi assinalado em preto para facilitar a identificação dos pontos. Na Figura 4.2.2 é possível identificar os pólos de H(s) para as duas situações descritas em que $\phi_k = -\phi_{mfp}$, com p = 1, 2. O ponto (0 + j0,2187), assinalado com o número "***6***", e o ponto (0 + j1,2306), assinalado com o número "***15***", podem ser identificados como os pontos de cruzamento da curva-G de 0 dB com o semi-eixo imaginário positivo.

Da mesma forma como estes dois pontos foram identificados, é possível identificar outros tantos nas duas folhas da superfície-k de Riemann do Sistema 2. A Tabela 4.2.1 contém 31 pontos a partir dos quais foram identificadas margens de fase para diferentes valores de | k |, ou de k_{dB}, em dB. Todos estes pontos podem ser identificados nos gráficos das Figuras 4.2.2 e 4.2.3 a partir dos valores de F e G assinalados para cada um. Os pontos não foram todos numerados para não tornar o gráfico confuso. Os pontos de "***1***" a "***22***" pertencem à folha 1, e aparecem na Figura 4.2.2. O ponto "***22***" não aparece realmente no gráfico, mas é fácil imaginar a localização do ponto de cruzamento da curva-F de 0° com o semi-eixo imaginário positivo: ele está na posição (0 + j2,9580) na folha 1 do plano-s, tendo sido criado por um ganho k = -1,875. Os pontos de "***23***" a "***31***" pertencem à folha 2, e aparecem na Figura 4.2.3.

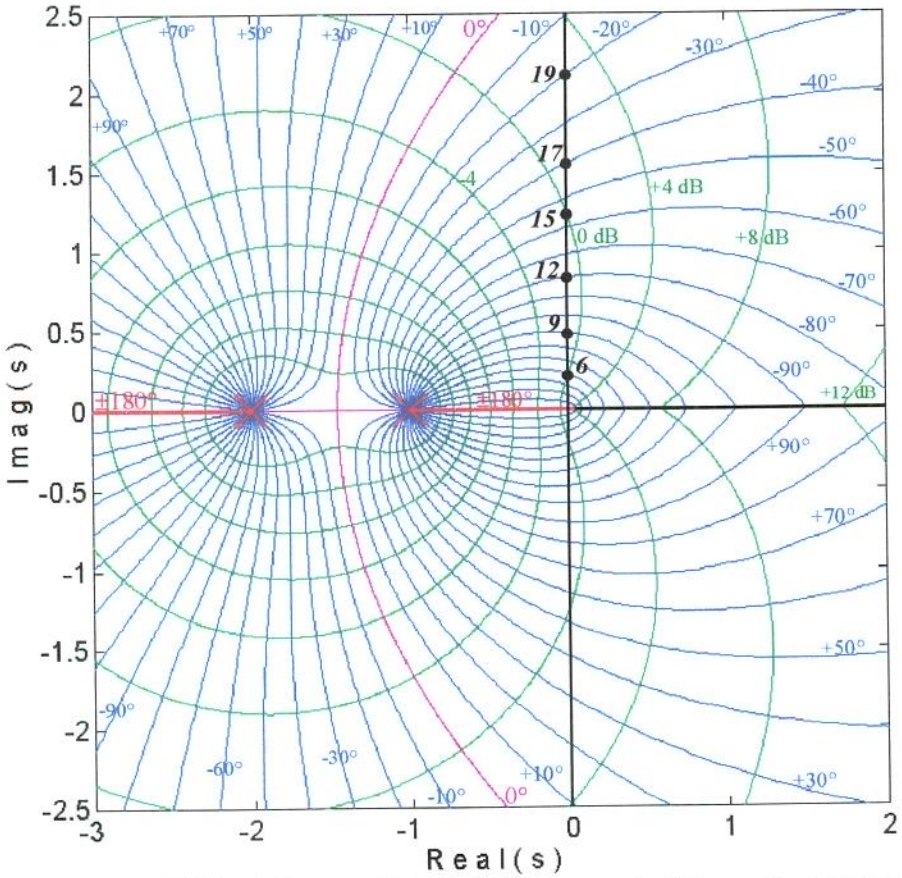


Figura 4.2.2. Folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. As curvas-G e curvas-F que atingem o corte terão continuidade na folha 2.

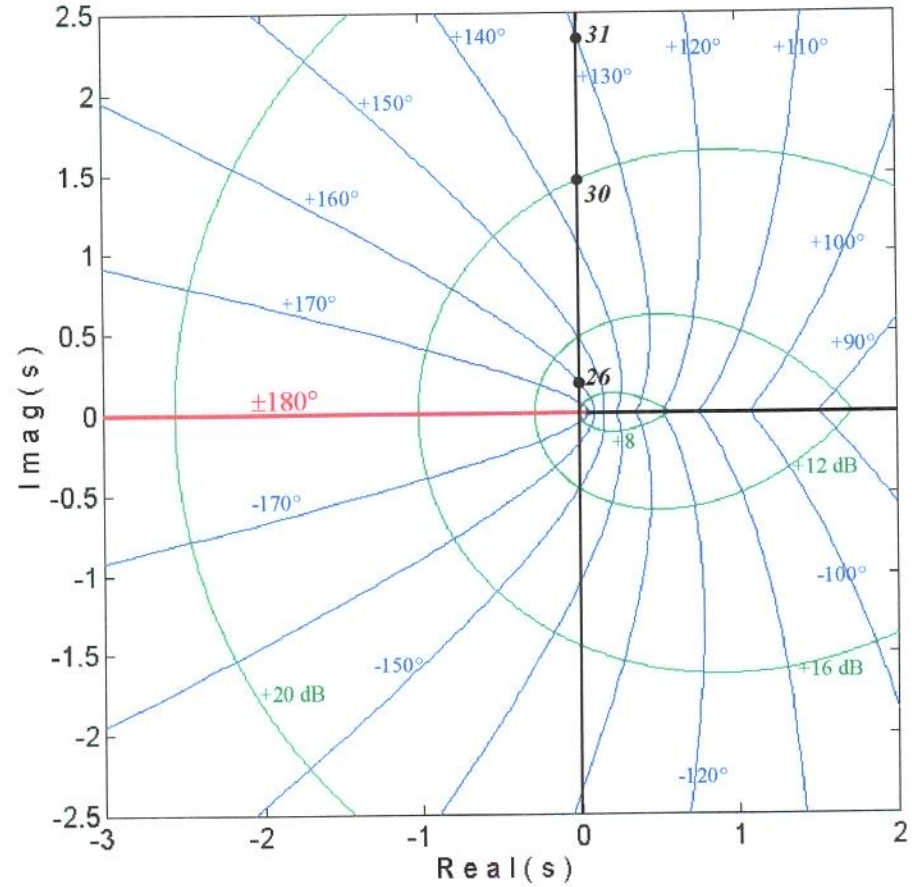


Figura 4.2.3. Folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. As curvas que atingiram o corte na folha 1 têm continuidade nesta folha.

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Ponto	F, graus	G, dB	k_{dB}, dB	| k |	arg(k), graus	ϕ_{mf}, graus, com k= | k |	ϕ_{mfc}, graus, com k= | k |
1	±180°	≈+2,0	1,9382	1,2500	0,00°	0,00°	+180,00°
2	-170°	≈+1,5	1,7085	1,2174	+10,00°	-10,00°	+170,00°
3	-160°	≈+1,0	1,1770	1,1451	+20,00°	-20,00°	+160,00°
4	-150°	≈+0,5	0,5733	1,0682	+30,00°	-30,00°	+150,00°
5	-140°	≈-0,1	0,0185	1,0021	+40,00°	-40,00°	+140,00°
6	≈-141°	0,0	0,0000	1,0000	+40,36°	-40,36°	+139,64°
7	-130°	≈-0,5	-0,4390	0,9507	+50,00°	-50,00°	+130,00°
8	-120°	≈-0,7	-0,7812	0,9140	+60,00°	-60,00°	+120,00°
9	-110°	≈-0,9	-1,0019	0,8911	+70,00°	-70,00°	+110,00°
10	-100°	≈-1,0	-1,0991	0,8811	+80,00°	-80,00°	+100,00°
11	-90°	≈-1,0	-1,0721	0,8839	+90,00°	-90,00°	+90,00°
12	-80°	≈-1,1	-0,9201	0,8995	+100,00°	-100,00°	+80,00°
13	-70°	≈-1,0	-0,6413	0,9288	+110,00°	-110,00°	+70,00°
14	-60°	≈-0,4	-0,2326	0,9736	+120,00°	-120,00°	+60,00°
15	≈-55°	0,0	0,0000	1,0000	+124,59°	-124,59°	+55,41°
16	-50°	≈+0,1	0,3111	1,0365	+130,00°	-130,00°	+50,00°
17	-40°	≈+0,9	0,9974	1,1217	+140,00°	-140,00°	+40,00°
18	-30°	≈+1,8	1,8373	1,2356	+150,00°	-150,00°	+30,00°
19	-20°	≈+2,8	2,8458	1,3877	+160,00°	-160,00°	+20,00°
20	≈-10°	+4,0	4,0000	1,5849	+169,66°	-169,66°	+10,34°
21	-10°	≈+4,0	4,0438	1,5929	+170,00°	-170,00°	+10,00°
22	0°	≈+5,5	5,4600	1,8750	+180°	-180,00°	0,00°
23	±180°	≈+8,0	7,9588	2,5000	0,00°	0,00°	-180,00°
24	≈+178°	+8,0	8,0000	2,5119	-2,82°	+2,82°	-177,18°
25	+170°	≈+8,5	8,4622	2,6492	-10,00°	+10,00°	-170,00°
26	+160°	≈+9,8	9,8314	3,1015	-20,00°	+20,00°	-160,00°
27	+150°	≈+12,0	11,8909	3,9314	-30,00°	+30,00°	-150,00°
28	≈+150°	+12,0	12,0000	3,9811	-30,45°	+30,45°	-149,55°
29	+140°	≈+14,4	14,6278	5,3876	-40,00°	+40,00°	-140,00°
30	≈+136°	+16,0	16,0000	6,3096	-44,17°	+44,17°	-135,83°
31	+130°	≈+18,0	18,1958	8,1244	-50,00°	+50,00°	-130,00°

*Tabela 4.2.1. Valores de margem de fase e margem de fase complementar calculados a partir de pontos no semi-eixo imaginário positivo ou na origem das duas folhas da superfície-k de Riemann do Sistema 2, multivariável, mostradas nas Figuras 4.2.2 e 4.2.3. Os pontos de "**1**" a "**22**" pertencem à folha 1, e os pontos de "**23**" a "**31**", pertencem à folha 2.*

Cada ponto enumerado na Tabela 4.2.1 tem identificados seus respectivos valores de G e F. O valor de G serve para identificar o módulo do ganho k que gera o ponto, e está explicitado nas colunas 4 e 5, e o valor de F serve para o cálculo da margem de fase (coluna 7) e

da margem de fase complementar (coluna 8), caso tenha sido aplicado o ganho k indicado.

Com base nos dados da superfície-k de Riemann do Sistema 2 mostrados na Tabela 4.2.1, podemos concluir que a forma de determinação de margens de fase apresentada na Seção 4.1 para os sistemas de controle monovariável pode ser utilizada para o caso multivariável. Isto significa que para determinar uma margem de fase para um determinado valor de ganho real k expresso por k_{dB} em dB, devemos achar a curva-G com $G = k_{dB}$, achando o ponto de cruzamento desta curva com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. Devemos identificar o valor correspondente de F no ponto identificado, e então aplicar a mesma fórmula apresentada para o caso monovariável:

$$\phi_{mf} = \pm 180° + F , \qquad (4.2.13)$$

onde ϕ_{mf} calculado para cada ponto de cruzamento é uma das margens de fase $\phi_{mfp}(k)$, $p = 1,...,q$ existentes no sistema para o valor estipulado de k, e apresentadas na Equação (4.2.7).

A Tabela 4.2.1 mostra na sua coluna 8 as margens de fase correspondentes aos pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s nas duas folhas da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Nela podemos ver, por exemplo, que os pontos "***6***" e "***15***", para os quais $k_{dB} = 0$ dB, ou $| k | = 1$, terão correspondentemente como margens de fase -40,36° e -124,59°. caso o ganho aplicado tenha sido k = +1.

Caso estejamos interessados na margem de fase do sistema com realimentação positiva, podemos, ao invés de aplicar realimentação positiva, considerar valores negativos do ganho k real, como feito na Seção 4.1 para o caso monovariável. Neste caso, o gráfico do lugar das raízes, em vermelho, dará lugar ao gráfico do lugar das raízes complementar, em magenta. As margens de fase de um sistema de controle multivariável com ganho k negativo são também facilmente determinadas graficamente com o uso da superfície-k de Riemann do sistema. Chamaremos a margem de fase do sistema com k real negativo de margem de fase complementar, e a representaremos com o símbolo ϕ_{mfc}. As margens de fase complementares serão então os atrasos de fase necessários ao ganho k real negativo para que algum lugar característico alcance o ponto crítico (-1+j0), fazendo com que no sistema realimentado um pólo ou par complexo de pólos alcance o eixo imaginário. Podemos também equacionar as margens de fase complementares em termos de F. Escolhemos o módulo k_{dB} em dB do ganho k real negativo desejado, determinamos a curva-G correspondente na superfície-k de Riemann do sistema, e determinamos os pontos de cruzamento da curva com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. Determinamos para cada ponto o valor correspondente de F, e então

utilizamos a mesma fórmula utilizada para os sistemas de controle monovariável:

$$\phi_{mfc} = 0° - F = -F , \qquad (4.2.14)$$

onde ϕ_{mfc} calculado para cada ponto de cruzamento é uma das margens de fase complementares $\phi_{mfc\,p}(k)$, $p = 1,...,q$, considerando haver q delas no sistema para o valor estipulado de k. Note-se que a contagem de q valores apresentada aqui não é a mesma para as margens de fase.

A Tabela 4.2.1 mostra na sua última coluna as margens de fase correspondentes aos pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s nas duas folhas da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Nela podemos ver, por exemplo, que os pontos "***6***" e "***15***", para os quais $k_{dB} = 0$ dB, ou $|k| = 1$, cujas margens de fase já foram comentadas, terão como margens de fase complementares correspondentemente +139,64° e +55,41°, caso o ganho aplicado tenha sido k = -1.

A determinação de margens de ganho de um sistema de controle multivariável na superfície-k de Riemann acontece da mesma forma descrita para o caso monovariável. Para determinar uma margem de ganho MG_{dB}, em dB, de um sistema de controle multivariável com ganho k real positivo, deve-se determinar nos ramos do lugar das raízes, ou seja, nas curvas-F de ±180° (em vermelho na superfície-k de Riemann), um ou mais pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. Deve-se determinar o valor de G para cada ponto encontrado. Cada valor de G é uma margem de ganho MG_{dB}, em dB, para k = 1, ou seja, com $k_{dB} = 0$ dB. Para valores diferentes de k, deve-se seguir a mesma equação utilizada para o caso monovariável para cada valor de G:

$$MG_{dB} = G - k_{dB} , \qquad (4.2.15)$$

onde MG_{dB} é uma das margens de ganho $MG_{dB\,p}(k)$, $p = 1,...,q$, considerando haver q margens de ganho para o sistema com o ganho estipulado k.

No exemplo do Sistema 2, há dois pontos de cruzamento de curva-F de ±180° com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. O primeiro ponto aparece na folha 1 da superfície-k de Riemann apresentada na Figura 4.2.2, e está na origem do plano-s. Este ponto está identificado na Tabela 4.2.1 como o ponto "***1*** ", e tem G = +1,9382 dB. A margem de ganho do Sistema 2 calculada a partir deste ponto, e com k = +1, é MG_{dB1} = +1,9382 dB. O segundo ponto aparece na folha 2 da superfície-k de Riemann apresentada na Figura 4.2.3, e também está na origem do plano-s. É o ponto "***23***" na Tabela 4.2.1, e tem G = +7,9588 dB.

A margem de ganho do Sistema 2 calculada a partir deste ponto, e com k = +1, é MG_{dB2} = +7,9588 dB. O Sistema 2 tem portanto estas duas margens de ganho, que em valores absolutos ficam: $MG_1 = 10^{(+1,9382/20)} = 1,25$ e $MG_2 = 10^{(+7,9588/20)} = 2,5$, que são os valores absolutos do ganho k para os respectivos pontos.

A determinação de margens de ganho complementares de um sistema de controle multivariável, ou seja, margens de ganho quando aplicado um ganho k negativo de realimentação, na superfície-k de Riemann, acontece de forma similar à descrita para margens de ganho com ganho k positivo. Ao invés de determinar pontos no lugar das raízes, ou seja, nos ramos vermelhos com F = ±180°, devemos determinar pontos no lugar das raízes complementar, ou seja, nos ramos magenta com F = 0°. Devemos determinar nestes ramos um ou mais pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. Devemos determinar o valor de G para cada ponto encontrado. Cada valor de G é uma margem de ganho complementar MGC_{dB}, em dB, para k = -1, com k_{dB} = 0 dB. Para valores diferentes de k, deve-se seguir a mesma equação utilizada para margens de ganho para cada valor de G:

$$MGC_{dB} = G - k_{dB} , \qquad (4.2.16)$$

onde MGC_{dB} é uma das margens de ganho complementares $MGC_{dBp}(k)$, $p = 1,...,q$, considerando haver q margens de ganho complementares para o sistema com o ganho k negativo estipulado. Note-se que foi utilizada a variável q para enumerar margens de fase, margens de fase complementares, margens de ganho e margens de ganho complementares, mas todas estas contagens são totalmente independentes entre si, tendo apenas sido usada a mesma notação por questão de compreensão no texto.

No exemplo do Sistema 2, há apenas um ponto de cruzamento de curva-F de 0° com o semi-eixo imaginário positivo ou a origem. O ponto aparece na folha 1 da superfície-k de Riemann, embora tenha ficado fora da Figura 4.2.2: está em (0 + j2,9580) na folha 1 do plano-s. Este ponto está identificado na Tabela 4.2.1 como o ponto "***22*** ", e tem G = +5,4600 dB. A margem de ganho complementar do Sistema 2 calculada a partir deste ponto, e com k = -1, é então MGC_{dB} = +5,4600 dB. O Sistema 2 tem, portanto apenas esta margem de ganho complementar, que em valor absoluto fica: $MGC = 10^{(+5,4600/20)} = 1,8750$, que é o valor absoluto do ganho k para o ponto "***22***".

Não temos conhecimento de bibliografia que trate de sistemas de controle multivariável com abordagem e/ou resultados semelhantes aos desta seção.

4.2.2. Determinação nas Novas Graficações de Superfície-k de Riemann

Podemos determinar margens de fase, margens de ganho, margens de fase complementares e margens de ganho complementares de um sistema de controle multivariável através das novas graficações apresentadas no Capítulo 3. A determinação destes valores será exemplificada usando o Sistema 2, que é o mesmo sistema utilizado no Capítulo 3 e também na sub-seção anterior.

A Figura 4.2.4 repete a graficação de ângulos das curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2 em função da magnitude do ganho k, como mostrada no Capítulo 3, na Figura 3.2.4. Este gráfico não faz distinção de folhas da superfície-k de Riemann, apresentando-as simultaneamente. Aparece ainda em destaque a reta horizontal em preto marcando 90° para o ângulo da variável s, o que representa o semi-eixo imaginário positivo do plano-s. Os pontos sobre os quais serão calculadas as margens de estabilidade do sistema são os pontos de cruzamento das curvas-F com esta horizontal.

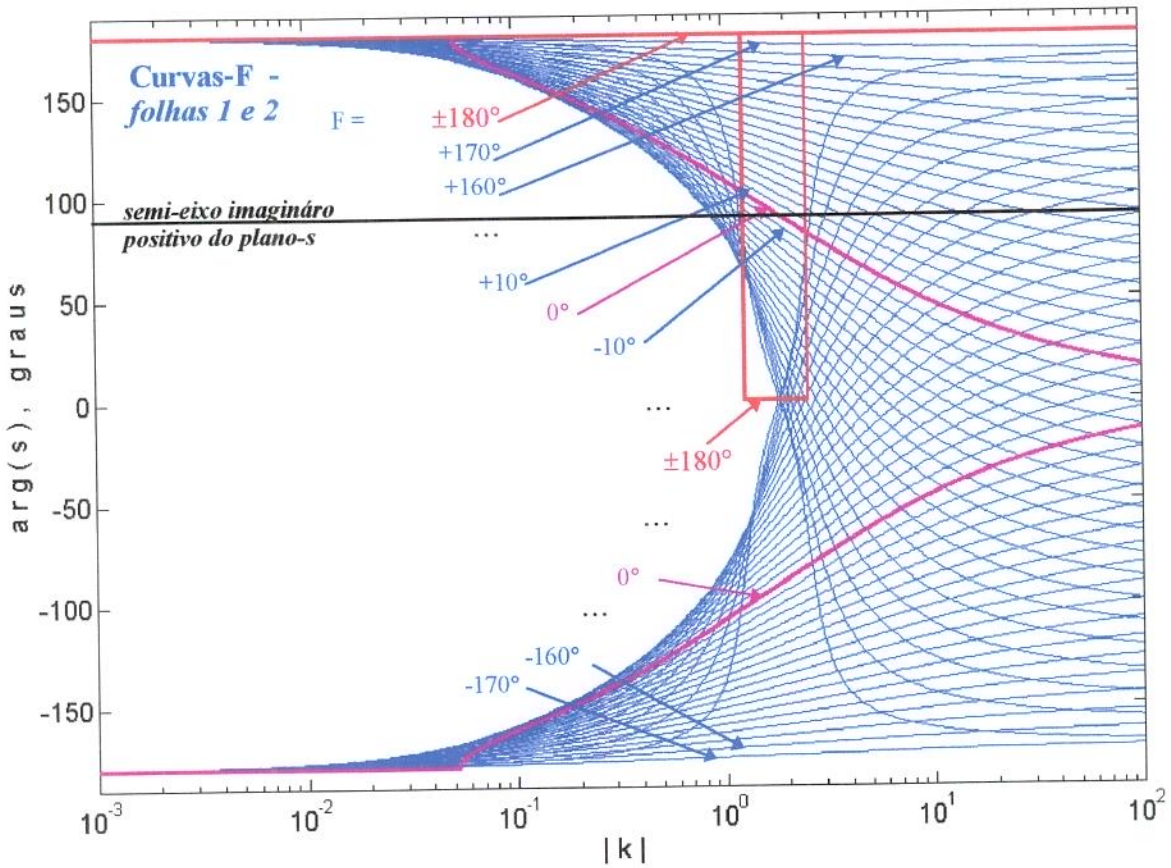


Figura 4.2.4. Ângulos das curvas-F da superfície-k de Riemann do Sistema 2, em função da magnitude do ganho k, conforme apresentado na Figura 3.2.4 no Capítulo 3, com as duas folhas representadas simultaneamente. O semi-eixo imaginário positivo do plano-s está representado como uma horizontal em +90°.

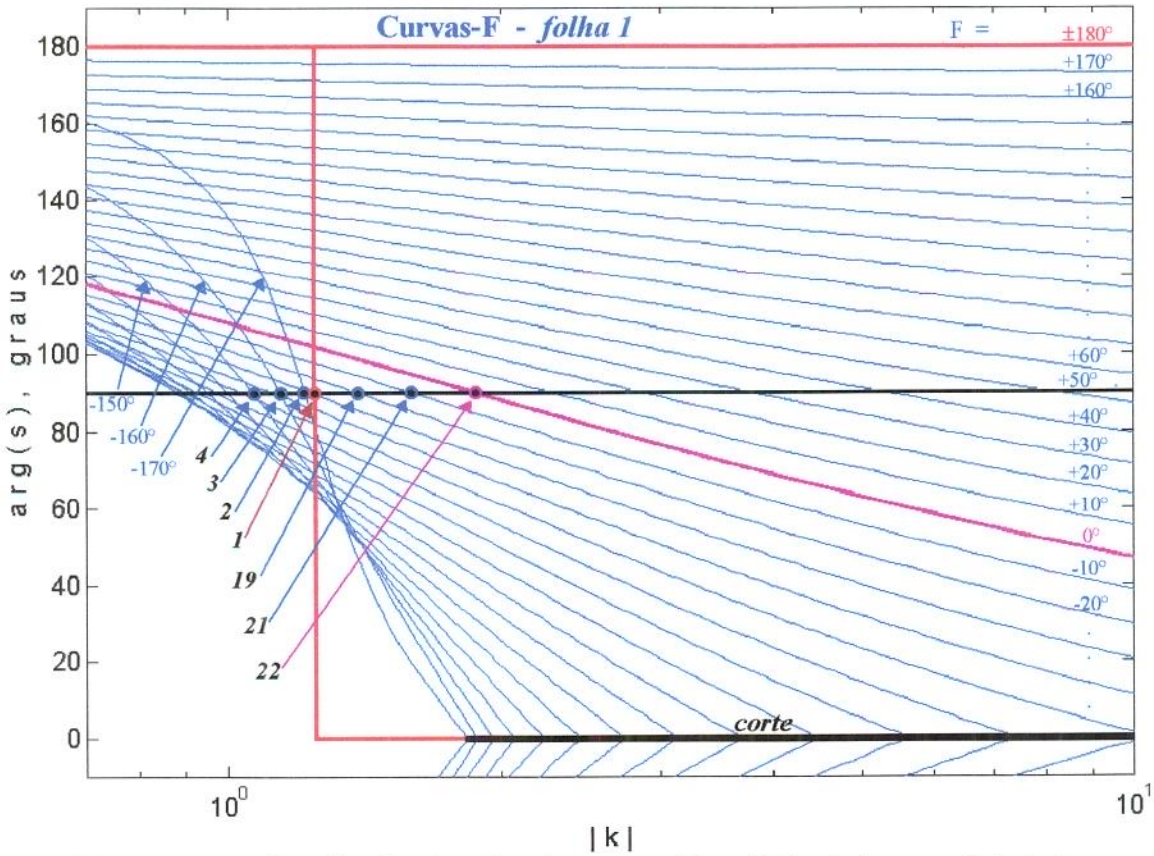


Figura 4.2.5. Detalhe dos ângulos das curvas-F na folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2, mostrando em destaque os pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s.

A Figura 4.2.5 mostra em detalhe o gráfico dos ângulos das curvas-F em função do ganho k na folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Estão ressaltados no gráfico alguns dos pontos apresentados na Tabela 4.2.1.

O ponto "*1*", sobre a curva-F de ±180°, dá uma indicação de margem de ganho para o sistema, por ser o cruzamento de um ramo do lugar das raízes com o eixo imaginário do plano-s. O ganho em que acontece este cruzamento tem módulo $|k| = 1{,}25$, o que indica uma margem de ganho absoluta $MG = 1{,}25$ para o sistema quando aplicada uma realimentação unitária, com ganho $k = +1$. Caso haja uma realimentação com ganho k real positivo diferente, deve-se calcular a nova margem de ganho MG_k dividindo a margem de ganho MG (com $k = +1$) pelo ganho desejado: $MG_k = (MG / k)$. Assim, a margem de ganho do sistema para $k = +10$ será $MG_{10} = (1{,}25/10) = 0{,}125$, e a margem de ganho do sistema para $k = 0{,}5$ será $MG_{0,5} = (1{,}25/0{,}5) = 2{,}5$. Este cálculo é equivalente ao apresentado na Equação (4.2.15), usado para cálculo da margem de ganho em dB.

Além da margem de ganho, o ponto "*1*" indica também uma margem de fase $\phi_{mf} = 0°$ para um ganho aplicado $k = +1{,}25$, e margem de fase complementar $\phi_{mfc} = +180°$ para um

ganho aplicado k = -1,25. Os outros pontos também dão indicação de margem de fase e margem de fase complementar para diferentes valores de k. O ponto "*2*", para o qual F = -170°, indica ϕ_{mf} = -10° para k = +1,2174 e ϕ_{mfc} = +170° para k = -1,2174; o ponto "*3*", para o qual F = -160°, indica ϕ_{mf} = -20° para k = +1,1451 e ϕ_{mfc} = +160° para k = -1,1451; o ponto "*4*", para o qual F = -150°, indica ϕ_{mf} = -30° para k = +1,0682 e ϕ_{mfc} = +150° para k = -1,0682; o ponto "*19*", para o qual F = -20°, indica ϕ_{mf} = -160° para k = +1,3877 e ϕ_{mfc} = +20° para k = -1,3877; o ponto "*21*", para o qual F = -10°, indica ϕ_{mf} = -170° para k = +1,5929 e ϕ_{mfc} = +10° para k = -1,5929; e o ponto "*22*", para o qual F = 0°, indica ϕ_{mf} = 0° para k = +1,8750 e ϕ_{mfc} = -180° para k = -1,8750.

O ponto "*22*", além da indicação de margem de fase e margem de fase complementar, dá a informação necessária para o cálculo de margem de ganho complementar, por ser o ponto de cruzamento do lugar das raízes complementar com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s. Uma vez que o cruzamento acontece com | k | = 1,875, a margem de ganho complementar para k = -1 será este mesmo valor: MGC = 1,875. Para valores diferentes de ganho real negativo, a margem de ganho complementar pode ser calculada dividindo a margem de ganho MGC (com k = -1) pelo ganho desejado: MGC_k = (MGC / | k |). Assim, a margem de ganho complementar do sistema para k = -10 será MGC_{-10} = (1,875/10) = 0,1875, e a margem de ganho do sistema para k = -0,5 será $MGC_{-0,5}$ = (1,875/0,5) = 3,75. Este cálculo é equivalente ao apresentado na Equação (4.2.16), usado para cálculo da margem de ganho complementar em dB.

A Figura 4.2.6 mostra em detalhe o gráfico dos ângulos das curvas-F em função do ganho k na folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Estão ressaltados no gráfico os pontos "*23*", "*25*", "*26*", "*27*", "*29*" e "*31*".

O ponto "*23*" está sobre uma curva com F = ±180°. Podemos determinar com este ponto outra margem de ganho para o sistema, que é o módulo do ganho k do ponto: MG = 2,5. Esta margem de ganho é para k = +1, mas novamente é possível recalcular esta margem para k diferente, dividindo MG pelo valor do k desejado.

Tanto o ponto "*23*" quanto os outros dão informações de margem de fase e margem de fase complementar. O ponto "*23*", que tem F = ±180°, dá a informação que com ganho k = +2,5, a margem de fase é ϕ_{mf} = 0°, e com k = -2,5, a margem de fase complementar é ϕ_{mfc} = -180°. Pelo ponto "*25*": com ganho k = 2,6492, ϕ_{mf} = +10°, e com k = -2,6492, ϕ_{mfc} = -170°. Pelo ponto "*26*": com ganho k = 3,1015, ϕ_{mf} = +20°, e com k = -3,1015, ϕ_{mfc} = -160°. Pelo ponto "*27*": com ganho k = 3,9314, ϕ_{mf} = +30°, e com k = -3,9314, ϕ_{mfc} = -150°. Pelo ponto "*29*":

com ganho k = 5,3876, ϕ_{mf} = +40°, e com k = -5,3876, ϕ_{mfc} = -140°. Pelo ponto "*31*": com ganho k = 8,1244, ϕ_{mf} = +50°, e com k = -8,1244, ϕ_{mfc} = -130°.

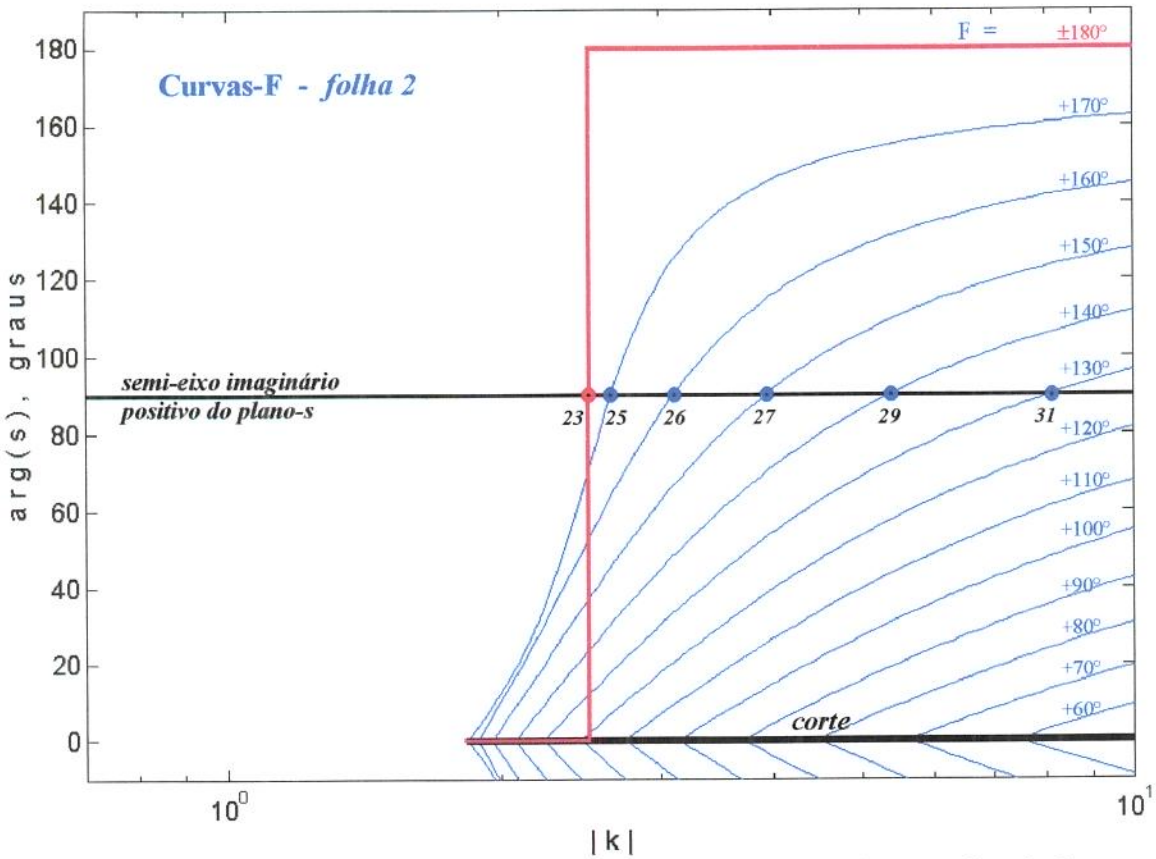


Figura 4.2.6. Detalhe dos ângulos das curvas-F na folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2, mostrando em destaque os pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s.

As Figuras 4.2.7 e 4.2.8 mostram detalhes respectivamente dos gráficos de ângulos de fase das curvas-G em função dos ângulos de fase do ganho k, mostrados nas Figuras 3.2.10 e 3.2.11 do Capítulo 3. A Figura 4.2.7 mostra os pontos de cruzamento das curvas-G com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s na folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Estão ressaltados os pontos "*6*", "*15*" e "*20*". Os pontos "*6*" e "*15*" acontecem sobre a curva com G = 0 dB, de onde se pode tirar duas margens de fase para k = +1. As margens de fase são lidas diretamente como o negativo do ângulo de fase do ganho k respectivo. Assim, as margens de fase para k = +1 são: -40,36° e -124,59°. Se for aplicado um ganho negativo com valor em dB igual ao valor de G da curva, a margem de fase complementar deve ser calculada como 180° - arg(k). Assim, as margens de fase complementares para k = -1, calculadas a partir dos dois pontos, são: +139,64° e +55,41°. O ponto "*20*" dá as informações de margem de fase e margem de fase complementar para ganhos com módulo em dB igual a +4 dB, ou seja, k_{dB} = +4 dB, o que significa $|k| = 10^{(+4/20)} = 1{,}5849$. Assim, para k = +1,5849, temos ϕ_{mf} = -169,66°, e para k = -1,5849, temos ϕ_{mfc} = +10,34°.

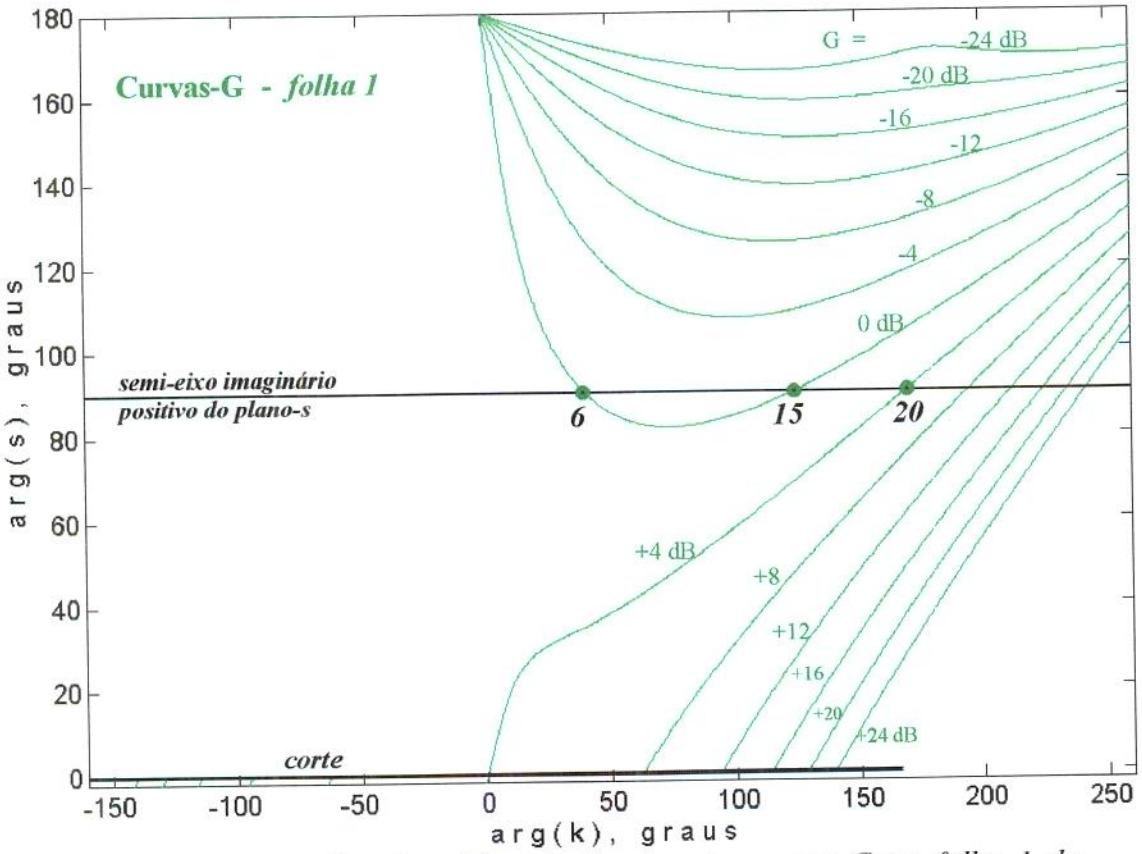


Figura 4.2.7. Detalhe do gráfico de ângulos das curvas-G na folha 1 da superfície-k de Riemann do Sistema 2, mostrando pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s.

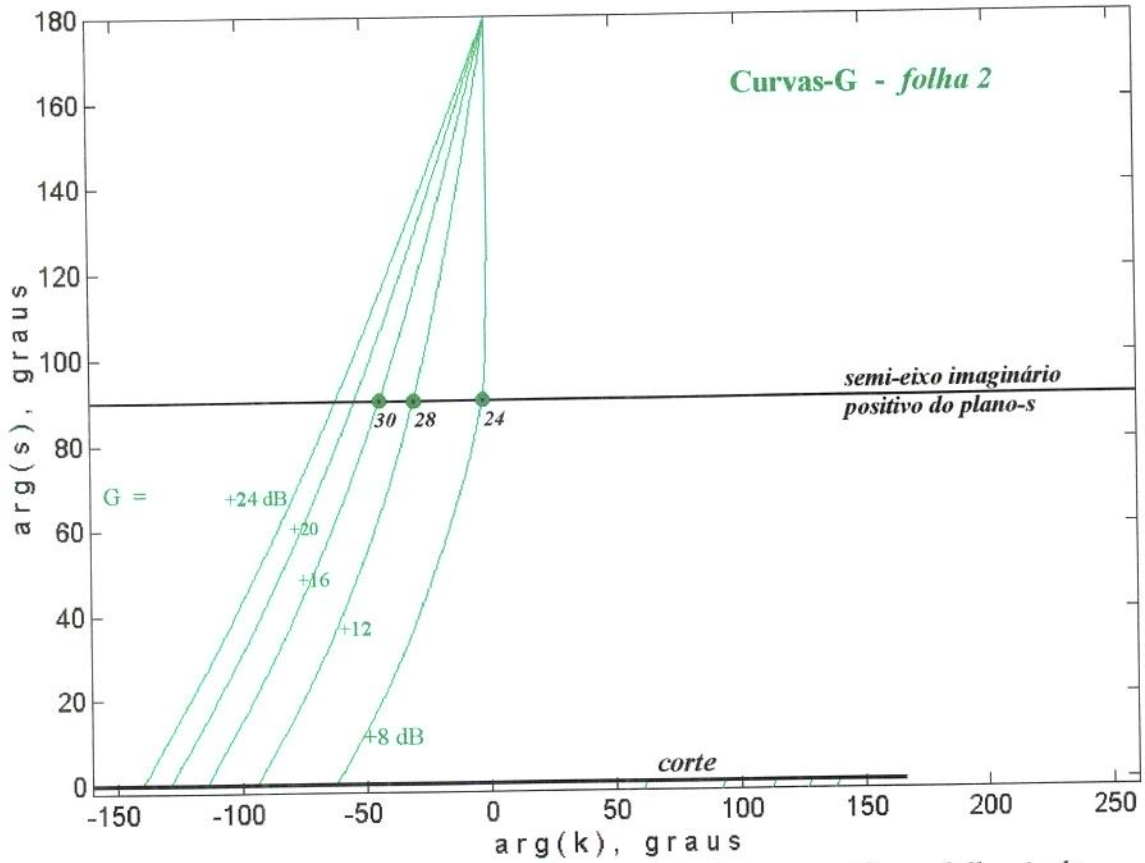


Figura 4.2.8. Detalhe do gráfico de ângulos das curvas-G na folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2, mostrando pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s.

A Figura 4.2.8 mostra os pontos de cruzamento das curvas-G com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s na folha 2 da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Estão ressaltados os pontos "***24***", "***28***" e "***30***". O ponto "***24***" dá a informação de margem de fase $\phi_{mf} = +2{,}82°$ para um ganho $k = +10^{(+8/20)} = +2{,}5119$, e de margem de fase complementar $\phi_{mfc} = -177{,}18°$ para um ganho $k = -10^{(+8/20)} = -2{,}5119$. Pelo ponto "***28***" tem-se que $\phi_{mf} = +30{,}45°$ para $k = +10^{(+12/20)} = +3{,}9811$, e $\phi_{mfc} = -177{,}18°$ para $k = -3{,}9811$. Pelo ponto "***30***" tem-se que $\phi_{mf} = +44{,}17°$ para $k = +10^{(+16/20)} = +6{,}3096$, e $\phi_{mfc} = -135{,}83°$ para $k = -6{,}3096$.

Finalmente, as Figuras 4.2.9 e 4.2.10 mostram detalhamentos das folhas 1 e 2 respectivamente da superfície-k de Riemann do Sistema 2 no plano-s modificado, representado em forma de magnitudes em dB e ângulos em graus da variável complexa s. O gráfico da Figura 4.2.9 é o detalhamento do gráfico da Figura 3.2.13 do Capítulo 3, com destaque para a região do semi-eixo imaginário positivo do plano-s, representado pela vertical preta em +90°. Já o gráfico da Figura 4.2.10 é um detalhamento modificado do gráfico da Figura 3.2.14 do Capítulo 3, porque as curvas apresentadas na Figura 4.2.10 com ângulos de s entre 0° e +180° são as mesmas curvas que foram representadas na Figura 3.2.14 com ângulos de s entre +360° e +540°, que, é claro, representam os mesmos lugares geométricos no plano complexo s.

Na Figura 4.2.9 estão ressaltados os pontos "***2***", "***3***", "***4***", "***6***", "***9***", "***15***" e "***22***". Este gráfico, apresenta os pontos tanto das curvas-F quanto das curvas-G com mais clareza que os anteriores, e mais clareza até que no gráfico da Figura 4.2.2. Assim, os dados apresentados na Tabela 4.2.1, que foram calculados matematicamente, poderão ser melhor aproximados quando determinados a partir deste gráfico do que a partir dos gráficos anteriores. O único ponto que não pode ser representado no gráfico é a origem do plano-s, onde está o ponto "***1***". Podemos entretanto "seguir" a curva-F, que começa como uma vertical em +180°, e depois continua como também como uma vertical em 0°. O ponto "***1***" pode ser imaginado passando por +90° com ganho infinitamente negativo em dB, e pelo gráfico podemos identificar que este ponto acontece com G entre 0 dB e +4 dB. Com um gráfico mais detalhado para valores negativos poderemos ter mais precisão para esta aproximação.

Na Figura 4.2.10 estão ressaltados os pontos "***25***", "***26***", "***27***", "***28***", "***29***", "***30***" e "***31***". Podemos ver neste gráfico que o ponto "***27***" está sobre a curva-F de +150° e o ponto "***28***" está sobre a curva-G de +12 dB, sendo pontos diferentes. Este detalhamento não pode ser bem visualizado no gráfico da Figura 4.2.3.

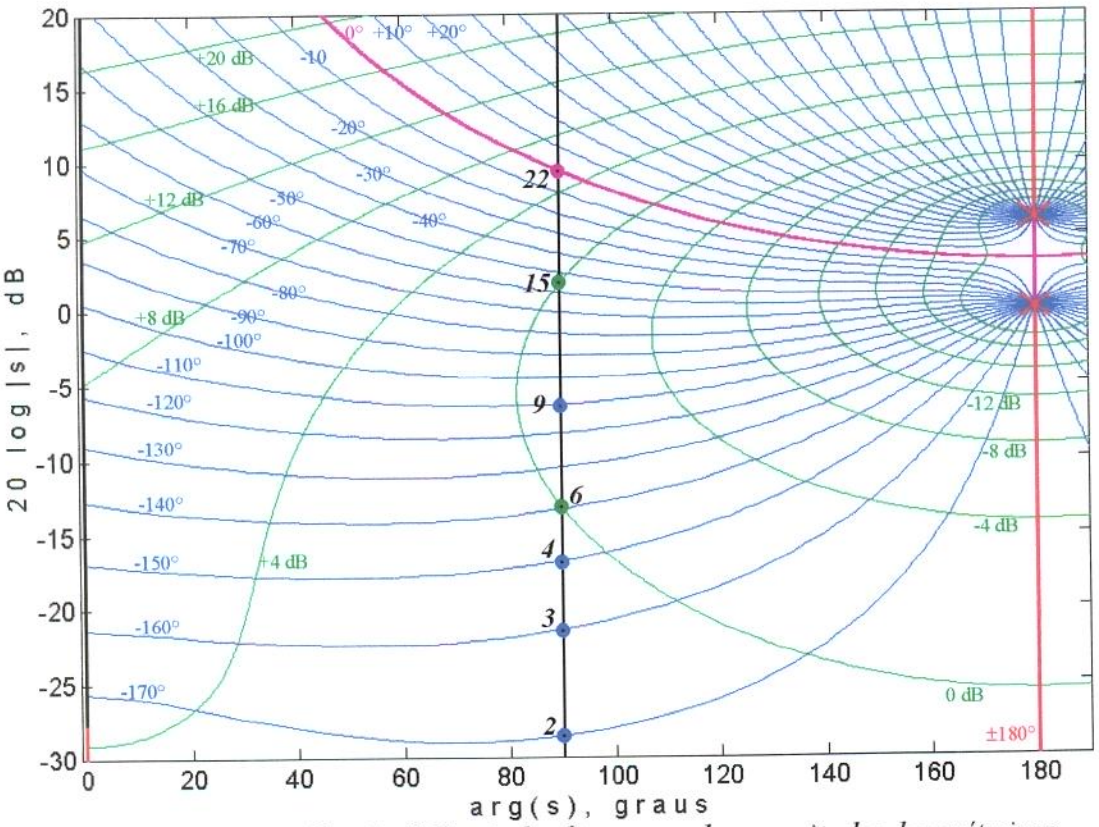


Figura 4.2.9. Detalhe da folha 1 do diagrama de magnitudes logarítmicas versus *ângulos de fase da superfície-k de Riemann do Sistema 2, mostrando em destaque os pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s.*

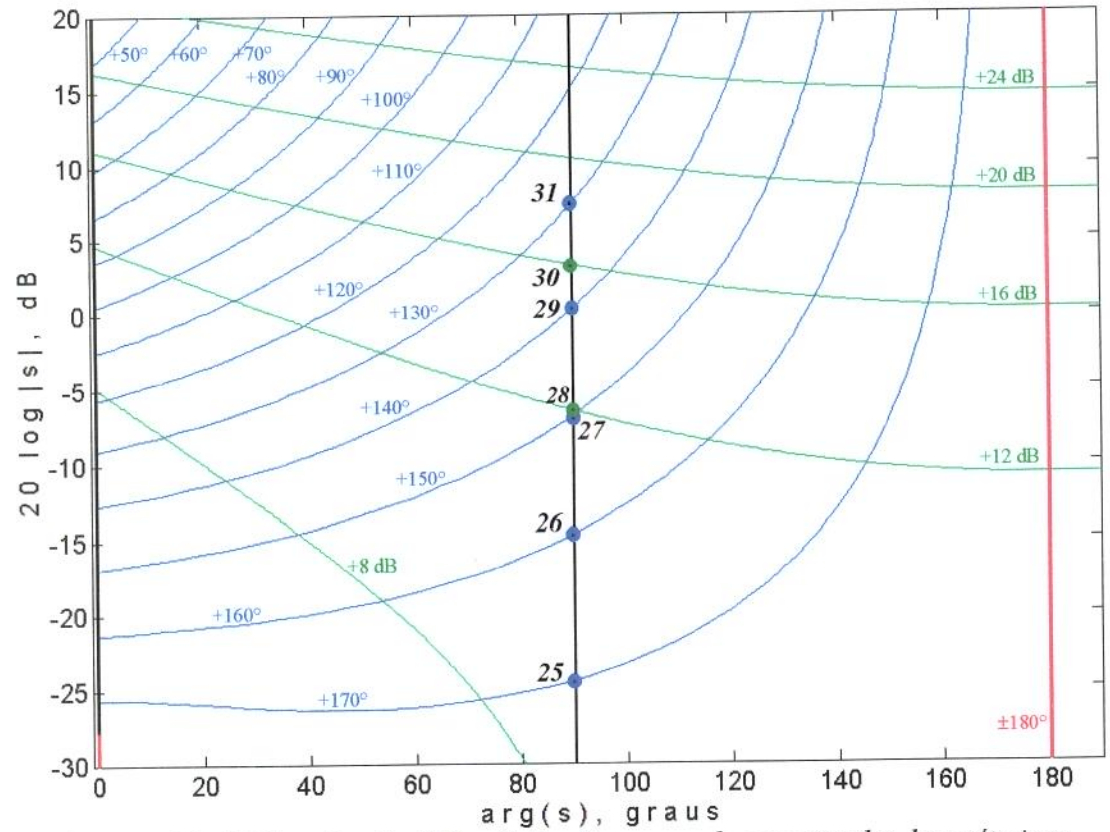


Figura 4.2.10. Detalhe da folha 2 do diagrama de magnitudes logarítmicas versus *ângulos de fase da superfície-k de Riemann do Sistema 2, mostrando em destaque os pontos de cruzamento com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s.*

4.2.3. Novas Representações em Função do Ganho k de Realimentação

Como fizemos na sub-seção 4.1.3 para o caso monovariável, podemos mudar o enfoque do estudo também para o caso multivariável. Ao invés de olharmos para as curvas-G e curvas-F da superfície-k de Riemann no plano-s, vamos ver as curvas correspondentes no plano-k. Denominaremos como curvas-G_k as curvas no plano-k geradoras de curvas-G no plano-s, e curvas-F_k as curvas no plano-k geradoras de curvas-F no plano-s. A codificação de cores será mantida: curvas-G_k em verde, e curvas-F_k em azul, vermelho (para $F_k = \pm 180°$) ou magenta (para $F_k = 0°$).

Podemos determinar a curva de valores de ganho k complexo que gera pólos do sistema realimentado H(s) no eixo imaginário. Se o sistema não realimentado G(s) for estritamente próprio, e for representado em espaço de estado pelas matrizes A, B, C e D, então a matriz D será identicamente nula, e será possível determinar a curva de k que gera pólos de s na origem ou no semi-eixo imaginário positivo do plano-s através de autovalores generalizados, conforme mostrado no Capítulo 3, Equações (3.1.11-13). Para isto, basta estipular $s = j\omega$, $\omega \in \mathbf{R}^+$, e achar os valores de k. Se G(s) não for estritamente próprio, teremos que recorrer a métodos numéricos para a obtenção de valores de k que geram pólos de H(s) no semi-eixo imaginário positivo ou na origem do plano-s. Foram implementadas funções para os dois casos.

Exemplificaremos usando o Sistema 2, que é estritamente próprio. A Figura 4.2.11 mostra curvas-G_k e curvas-F_k no plano-k complexo, curvas estas que geram as curvas-G e curvas-F respectivamente nas duas folhas do plano-s da superfície-k de Riemann do sistema. Além destas curvas, há na figura duas curvas em preto em destaque. Esta é a curva de valores de k que geram pólos do sistema realimentado na origem ou no semi-eixo imaginário positivo do plano-s da superfície-k de Riemann. Assim, realimentando o sistema com qualquer um dos ganhos complexos k da curva em preto da figura, algum dos pólos do sistema realimentado terá parte real zero e parte imaginária positiva ou zero. Ao percorrer a curva em preto com valores de k, algum dos pólos do sistema realimentado estará percorrendo a partir da origem o semi-eixo imaginário positivo do plano-s, fazendo com que os pontos enumerados de "*1*" a "*31*" nas Figuras 4.2.9 e 4.2.10 e nas subseqüentes, sejam alcançados. Os pontos que geram aqueles enumerados podem ser identificados através do cruzamento das curvas em preto com as curvas-G_k e curvas-F_k correspondentes.

Esta é uma nova maneira de identificar a estabilidade de um sistema multivariável realimentado: através dos ganhos k complexos que colocam o sistema realimentado no limite

da estabilidade. Como as margens de estabilidade mostradas na Tabela 4.2.1 são baseadas nos valores de G e F dos pontos, e $G_k = G$ e $F_k = F$ nos pontos correspondentes nos dois planos complexos (plano-k e plano-s), então na curva da Figura 4.2.11, e com o auxílio das curvas-G_k e curvas-F_k, é possível identificar através dos pontos das curvas pretas as margens de estabilidade do sistema.

No gráfico da Figura 4.2.11 podemos identificar os pontos "*1*" e "*23*", que estão sobre a curva-F_k de ±180°, indicando que estes pontos geram pontos do lugar das raízes (ramos F de ±180° na superfície-k de Riemann do sistema) no eixo imaginário. Através destes dois pontos, que estão sobre curvas-G_k respectivas de aproximadamente 2 dB e 8 dB, podemos dizer que o Sistema 2 ao receber realimentação com ganho $k = +1$ terá duas margens de ganho, de aproximadamente +2 dB e +8 dB. Na realidade, olhando o valor exato de $|k|$ para os pontos na Tabela 4.2.1, vemos que estas margens de ganho são exatamente 1,9382 dB e 7,9588 dB, e que a aproximação encontrada no gráfico é válida.

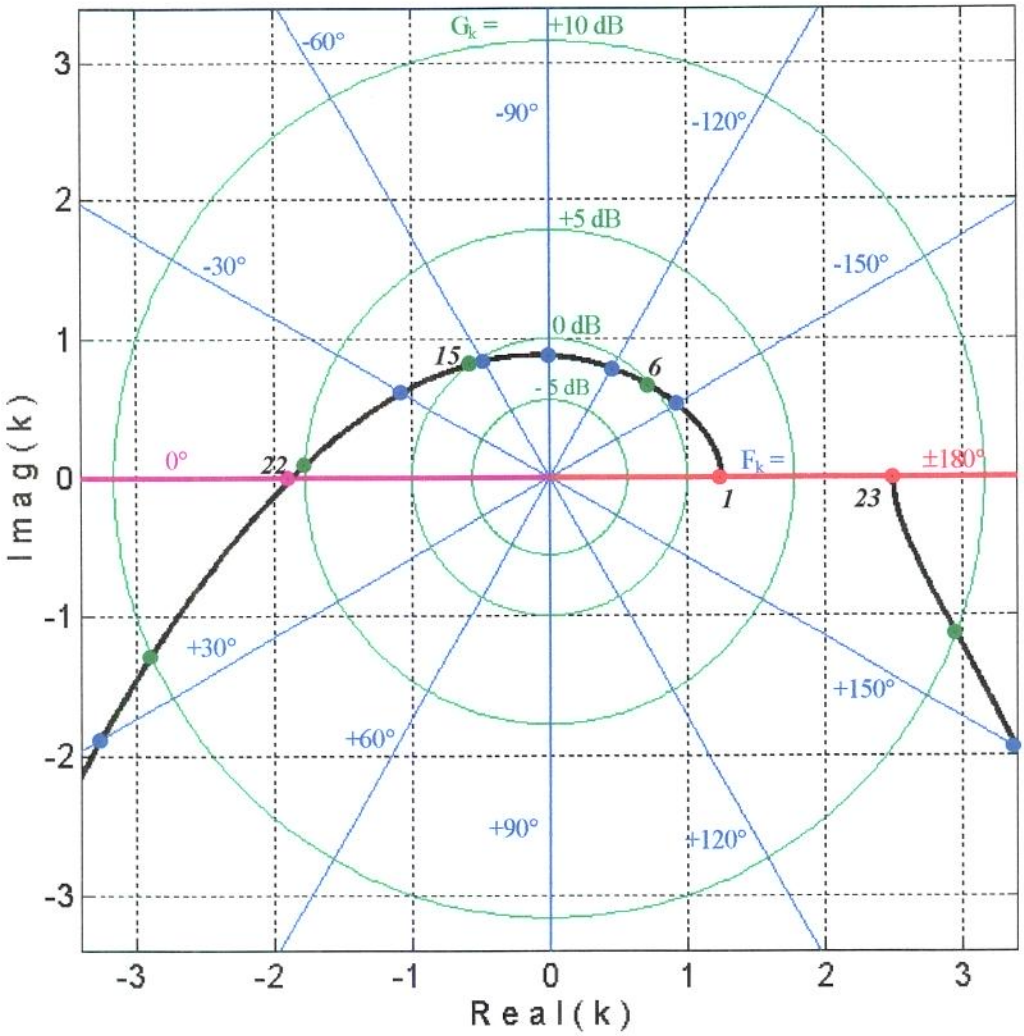


Figura 4.2.11. Curvas de k (em preto), que geram pontos no semi-eixo real positivo do plano-s da superfície-k de Riemann do Sistema 2. As curvas-G_k são as que geram as curvas-G da superfície-k, e as curvas-F_k são as que geram as curvas-F da superfície-k.

Outros pontos facilmente identificáveis na Figura 4.2.11 são os pontos "***6***" e "***15***", de cruzamento com a curva-G_k de 0 dB. Estes pontos têm respectivamente F_k de aproximadamente -140° e -55°, o que significaria margens de fase aproximadas de -40° e -125° para ganho k = +1. Estes valores estão realmente próximos dos valores exatos apresentados na Tabela 4.2.1 para estes pontos, que são -40,36° e -124,59°. Para ganho k = -1, a aproximação também pode ser verificada: os pontos "***6***" e "***15***" dão respectivamente uma aproximação de margem de fase complementar de +140° e +55°, valores bem próximos dos valores exatos apresentados na Tabela 4.2.1, que são +139,64° e +55,41°.

A Figura 4.2.12 mostra no plano-k as mesmas curvas da Figura 4.2.11, mas com escala diferente para mostrar valores maiores de k. Através das curvas das Figuras 4.2.11 e 4.2.12 é possível identificar pontos para determinação de margens de estabilidade do Sistema 2 para diversos valores do ganho k de realimentação.

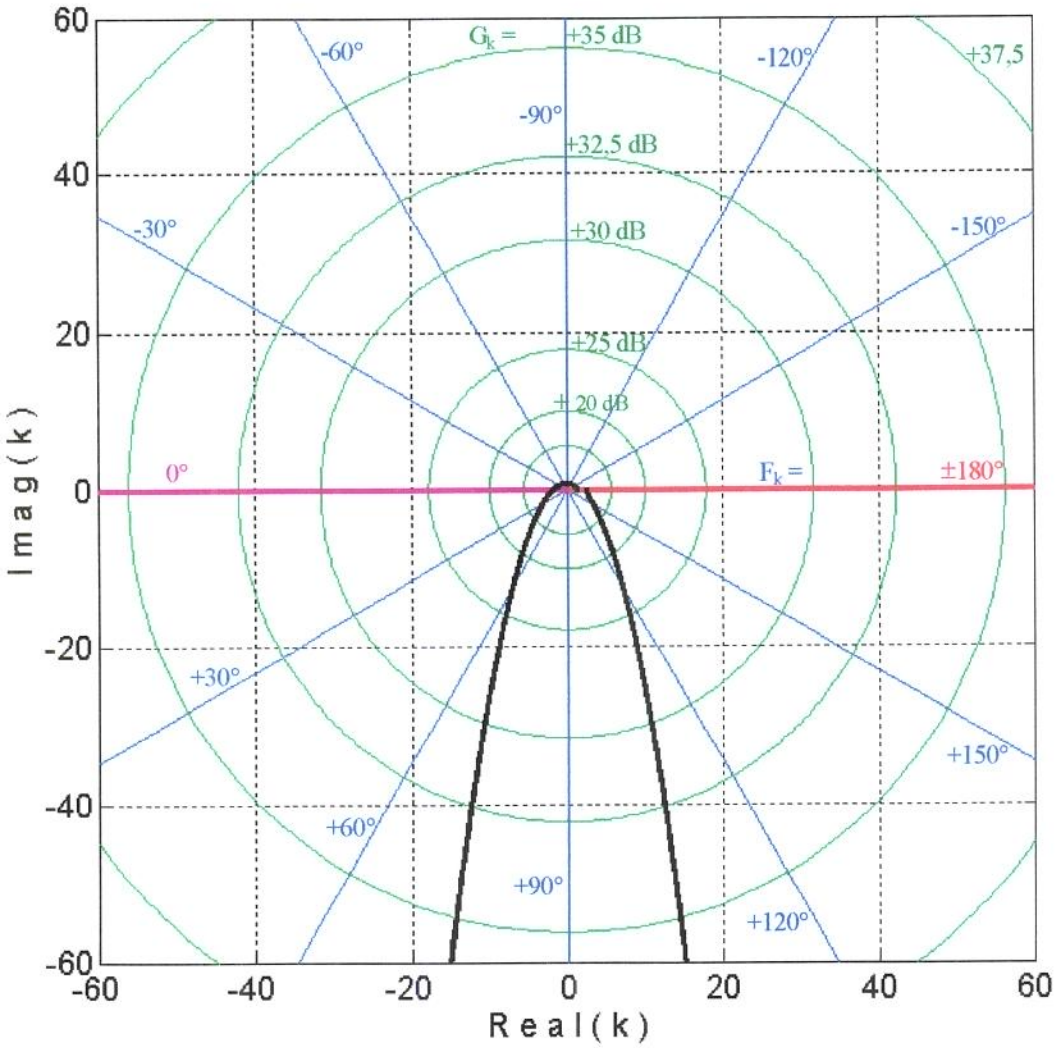


Figura 4.2.12. Curvas de k (em preto), que geram pontos no semi-eixo real positivo do plano-s da superfície-k de Riemann do Sistema 2. Este gráfico repete o gráfico da Figura 4.2.11, mas com escala diferente para mostrar valores maiores de k.

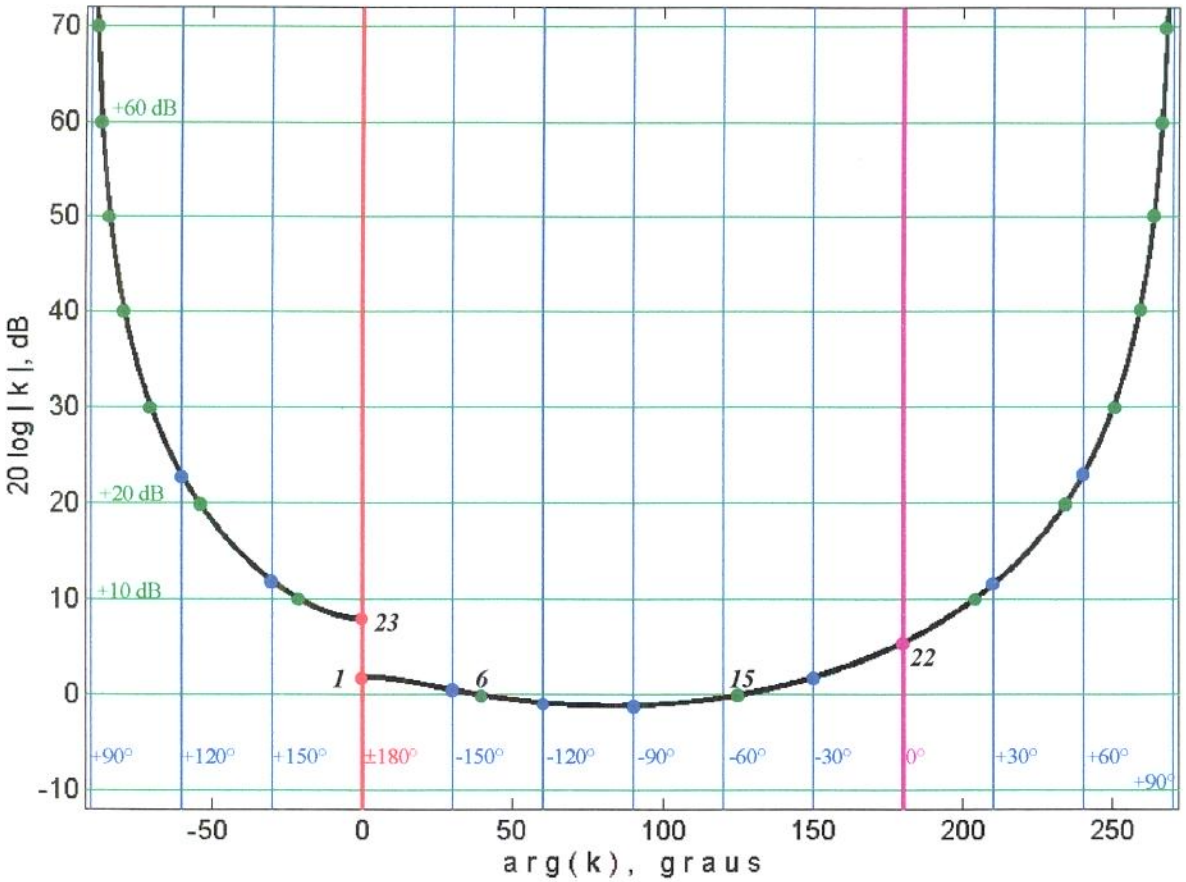


Figura 4.2.13. Plano-k da Figura 4.2.11 representado em ângulos em graus e magnitudes em dB da variável complexa k. *As curvas-G_k são horizontais e as curvas-F_k são verticais. As curvas em preto têm valores de* k *que colocam o Sistema 2 no limite da estabilidade.*

A Figura 4.2.13 mostra o plano modificado da variável k das Figuras 4.2.11 e 4.2.12. Na abscissa está o ângulo de fase arg(k), em graus, e na ordenada está o módulo em dB de k, $k_{dB} = 20\log| k |$. As curvas em preto representam os valores de ganho k que colocam algum pólo do Sistema 2 realimentado na origem ou no semi-eixo imaginário positivo do plano-s, colocando o sistema realimentado no limite da estabilidade. Neste gráfico as curvas-G_k são horizontais e as curvas-F_k são verticais. Isto facilita a determinação gráfica das margens de estabilidade do sistema. Como exemplo, podemos rever os pontos "*1*" e "*23*", e ver que as margens de ganho para k = +1 podem ser lidas diretamente no eixo vertical. Podemos rever também os pontos "6" e "15", e ver que as margens de fase para k = +1 podem ser lidas como as distâncias dos pontos para a direita até encontrar a curva-F_k de ±180°. Como esta curva está à esquerda dos pontos, as margens de fase são negativas. Através dos mesmos pontos, podemos ver que as margens de fase complementares para k = -1 podem ser lidas como as distâncias dos pontos para a direita até encontrar a curva-F_k de 0°. Como esta curva está realmente à direita dos pontos, as margens de fase complementares são positivas.

Finalmente, podemos ver o ponto "*22*", que aparece também na Figura 4.2.11 sobre a curva-F_k de 0°. Através deste ponto, podemos ler a margem de ganho complementar para k = -1 diretamente no eixo vertical: aproximadamente +6 dB. Pela Tabela 4.2.1 vemos que a margem de ganho complementar exata é +5,4600 dB, que é realmente um valor próximo. É claro que uma mudança de escalas no gráfico poderá dar uma melhor aproximação do valor.

Com base na determinação gráfica descrita para margens de fase e margens de fase complementares, pode-se fazer um gráfico específico para a margem de fase e outro para a margem de fase complementar. Estes estão representados nas Figuras 4.2.14 e 4.2.15. Estas curvas mostram a variação das margens em função do módulo do ganho k. Os gráficos apresentam na ordenada os valores de margens finitas existentes para o ganho cujo módulo está indicado na abscissa. Margens infinitas devem ser estipuladas pelo projetista, quando desejado ou necessário. Como exemplos podemos ver nas curvas da Figura 4.2.14 que para $k_{dB} = 0$ dB haverá duas margens de fase, -40,36° e -124,59°, e que para $k_{dB} = +40$ dB os valores das margens de fase serão +78,88° e -258,88°. Salientamos que cada uma destas curvas representa as margens de fase de um dos lugares característicos do Sistema 2, sendo portanto possível ver que para $k_{dB} = 0$ dB as duas margens de fase são de um único lugar característico, enquanto que para $k_{dB} = +40$ dB cada margem de fase é de um dos lugares característicos.

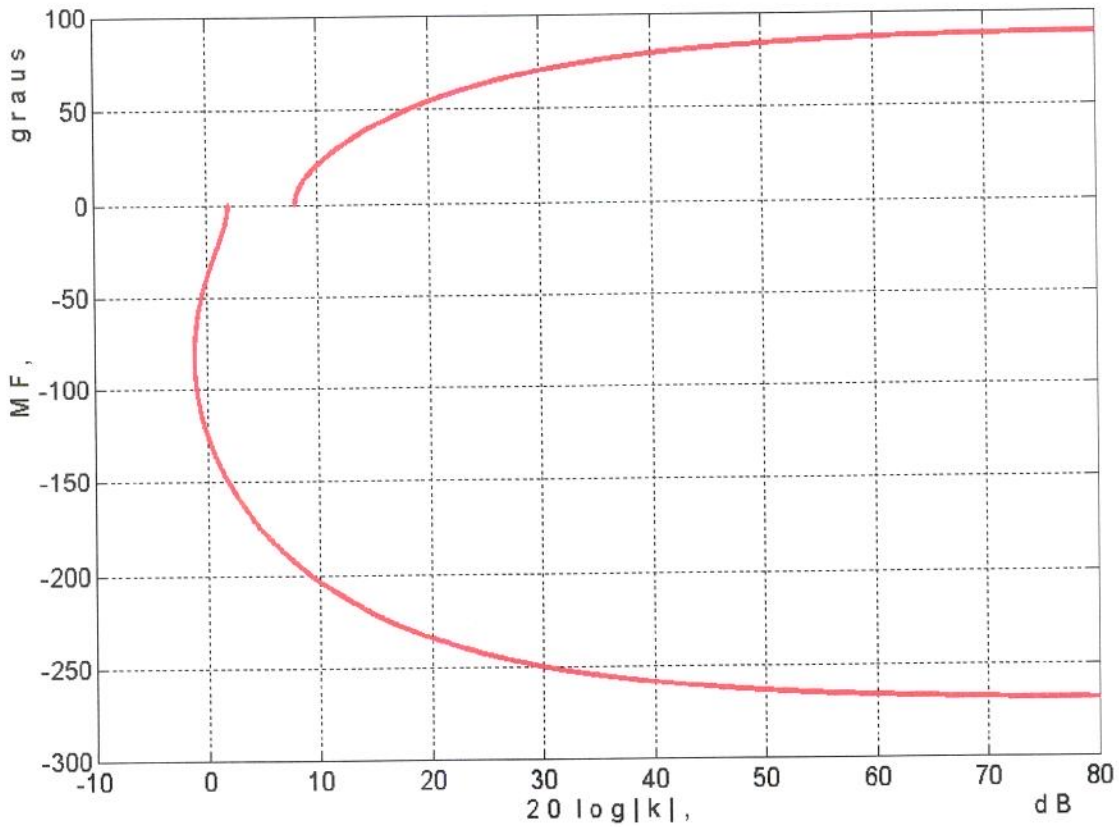


Figura 4.2.14. Curvas de margens de fase ϕ_{mf} = MF em graus, em função do módulo do ganho k *em dB, para o Sistema 2, multivariável.*

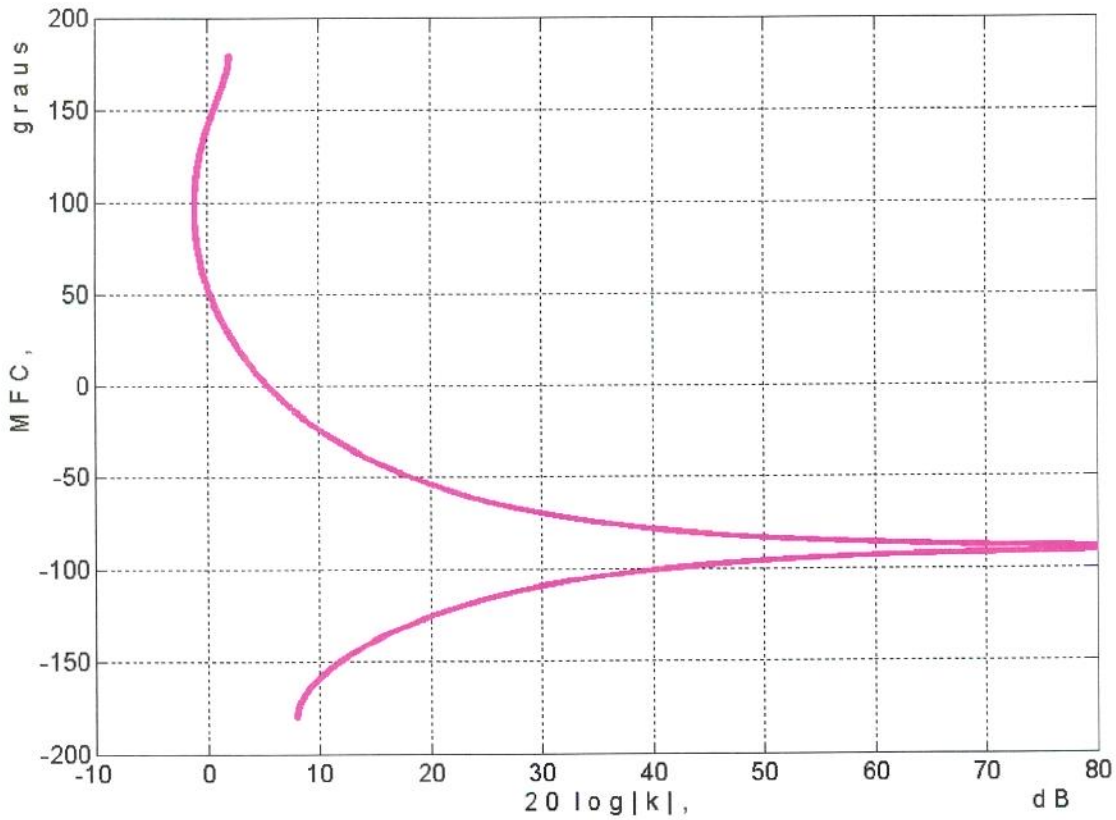


Figura 4.2.15. Curvas de margens de fase complementares ϕ_{mfc} = MFC *em graus, em função do módulo do ganho* k *em dB, para o Sistema 2, multivariável.*

Podemos exemplificar a determinação das margens de fase complementares através da Figura 4.2.15 determinando os valores para k_{dB} = 0 dB, ou seja, k = -1, que são +139,64° e +55,41°, e para k_{dB} = +40 dB, ou seja, k = -100, que são -101,12° e -78,88°.

Finalmente, com base nos pontos "***1***" e "***23***" da Figura 4.2.13, é possível graficar as margens de ganho em função do ganho k positivo de realimentação, e com base no ponto "***22***" da mesma figura, é possível graficar as margens de ganho complementares em função do ganho k negativo de realimentação. A Figura 4.2.16 mostra as curvas de margens de ganho, uma contendo o ponto "***1***", com margem de ganho de +1,9382 dB, para k_{dB} = 0 dB, ou seja, k = +1, e outra contendo o ponto "***23***", com margem de ganho de +7,9588 dB, também para k_{dB} = 0 dB, ou seja, k = +1. As duas curvas têm inclinação -1, como já descrito para o caso monovariável, e como exemplo, para k_{dB} = +40 dB, as margens de ganho serão -38,0618 dB e -32,0412 dB.

A Figura 4.2.17 mostra a única curva de margens de ganho complementares, baseada no ponto "***23***", com margem de ganho complementar de +5,4600 dB, para k_{dB} = 0 dB, ou seja, k = -1. Esta curva, a exemplo das curvas de margem de ganho, também tem inclinação -1, e como exemplo, para k_{dB} = +40 dB a margem de fase complementar será -34,5400 dB.

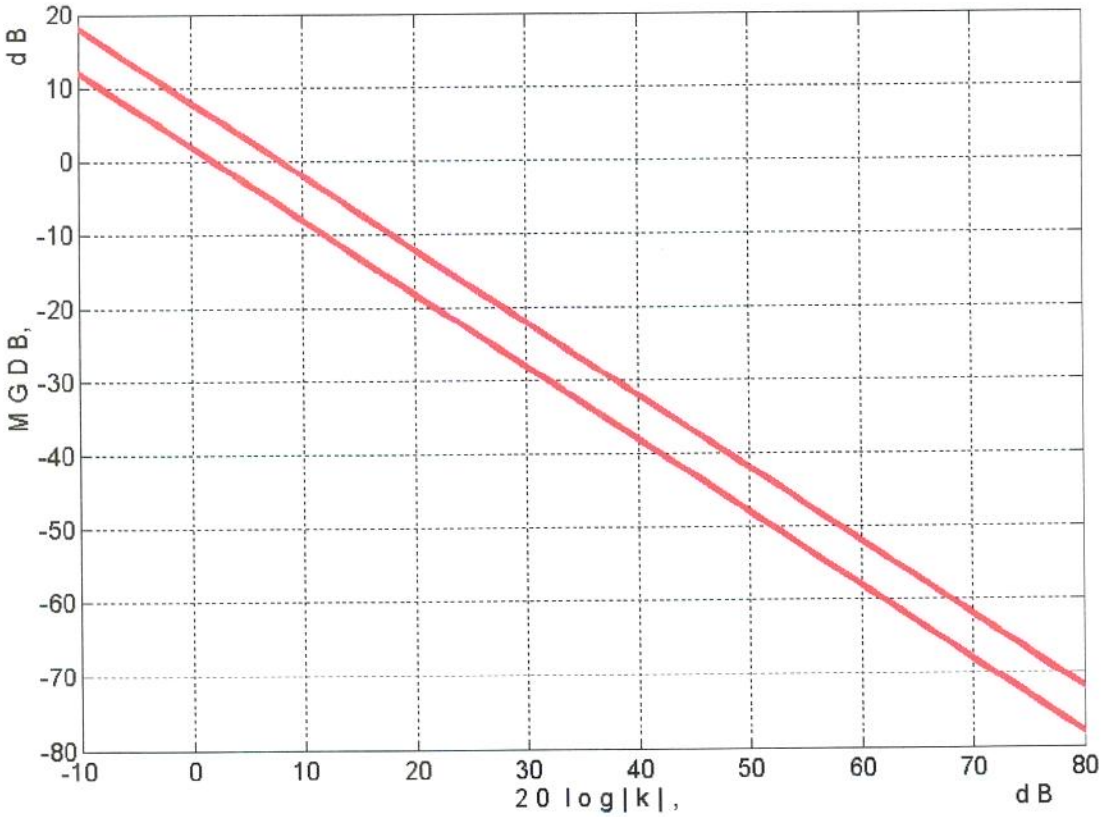


Figura 4.2.16. Curvas de margens de ganho MG_{dB} = MGDB *em dB, em função do módulo do ganho* k *em dB, para o Sistema 2, multivariável.*

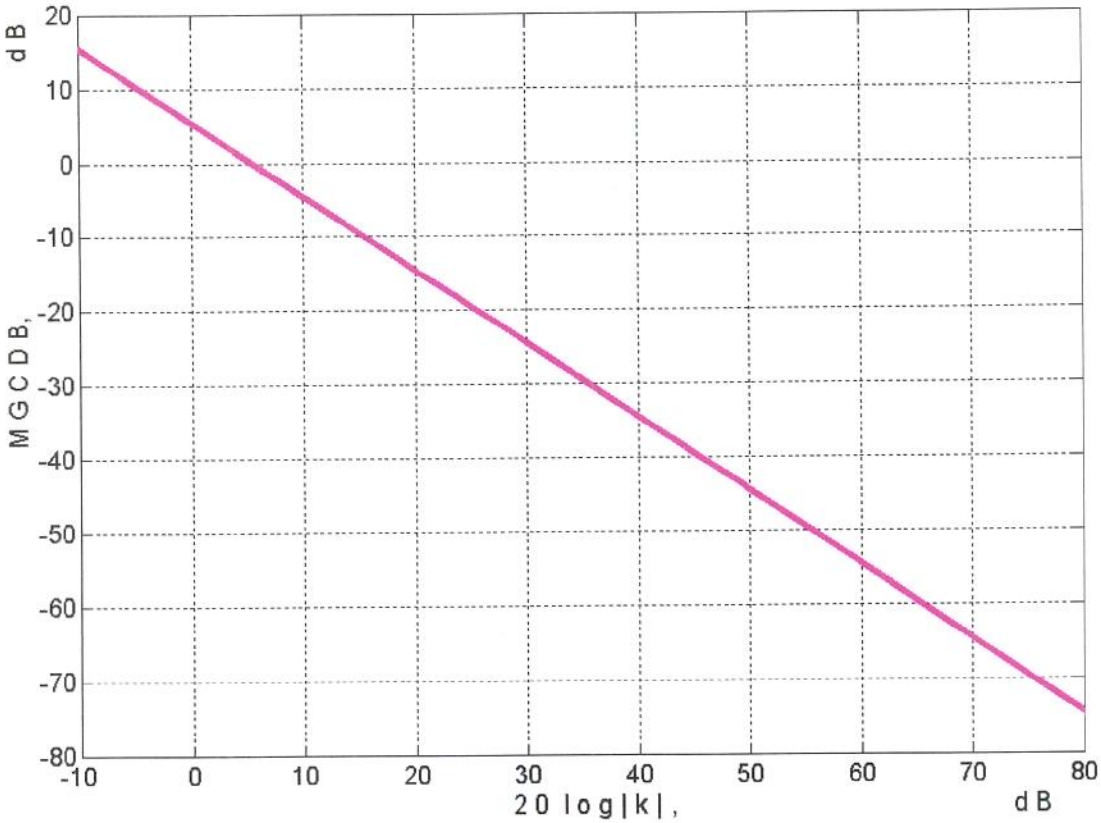


Figura 4.2.17. Curva de margens de ganho complementares MGC_{dB} = MGCDB *em dB, em função do módulo do ganho* k *em dB, para o Sistema 2, multivariável.*

4.2.4. Determinação das Margens de Estabilidade com o Auxílio das Superfícies-s de Riemann

Margens de ganho e de fase foram originalmente definidas para sistemas de controle monovariável a partir do critério de estabilidade de Nyquist, usando o gráfico de resposta em freqüência. Para sistemas de controle multivariável, as mesmas margens podem ser definidas a partir do critério generalizado de estabilidade de Nyquist, usando os gráficos dos lugares característicos $\lambda_i(j\omega)$. Em termos de superfícies-s de Riemann, isto significa que estas margens são definidas em termos das curvas-F de +90°.

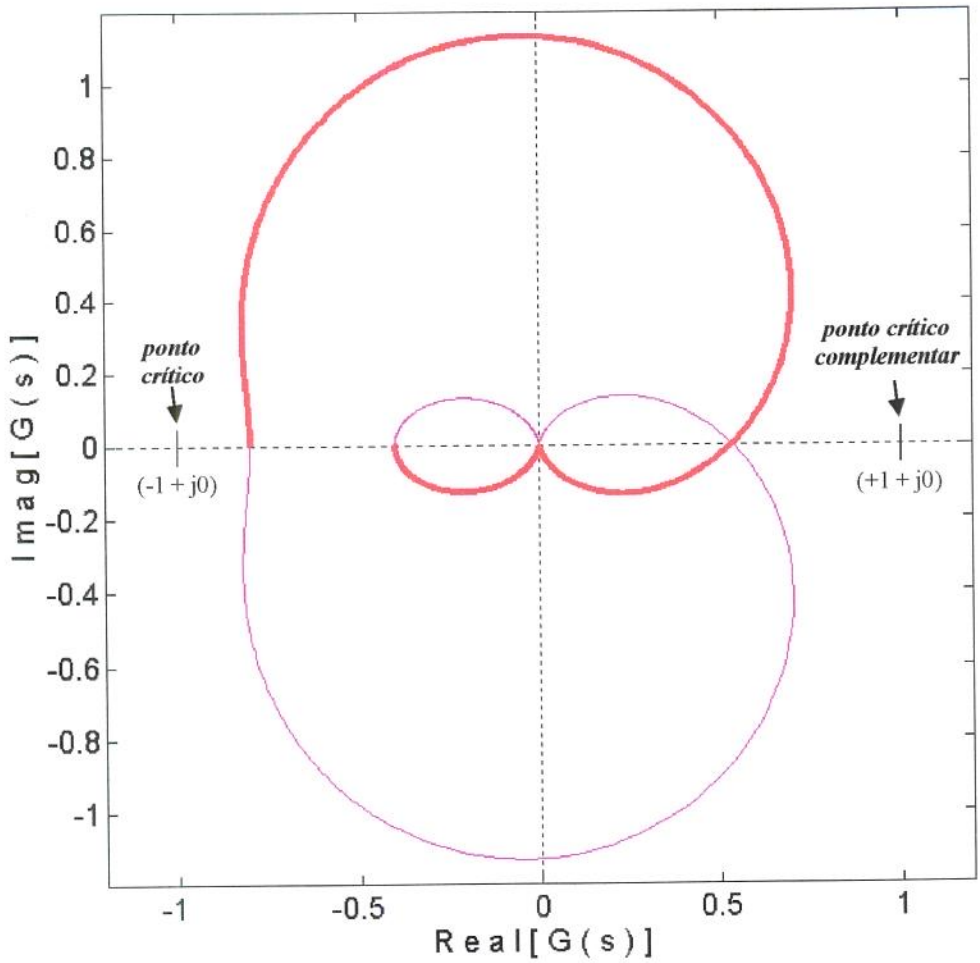


Figura 4.2.18. Contornos de Nyquist de G(s) *do Sistema 2. As curvas em vermelho correspondem aos lugares característicos* $\lambda_i(j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}^+$ *e* $i = 1, 2$ *— curvas-F de +90° da superfície-s de Riemann, e as curvas em magenta correspondem a* $\lambda_i(-j\omega)$, $\omega \in \mathbf{R}^+$ *e* $i = 1, 2$ *— curvas-F de -90° na mesma superfície.*

Usando o Sistema 2 para exemplificar a determinação das margens de estabilidade, a Figura 4.2.18 mostra novamente os contornos de Nyquist a partir dos dois lugares característicos $\lambda_i(j\omega)$, $i = 1, 2$, mostrados na Figura 1.2.12, no Capítulo 1. No caso de

realimentação com ganho k = +1, as margens de ganho e de fase são calculadas em relação ao ponto crítico (-1 + j0), como mostrado no Capítulo 1. No Sistema 2 as margens de ganho são 1,25 e 2,5. No caso de realimentação negativa com ganho k real positivo, podemos considerar o ponto crítico se movimentando sobre o semi-eixo real negativo do plano-G(s), com o valor (-1/k + j0), o que dá o mesmo efeito do aumento nas curvas proporcional ao valor de k, como apresentado na Sub-Seção 4.1.4 para o caso monovariável. Para as margens de fase, vale a mesma modificação no ponto crítico quando o ganho k real positivo varia.

Para a determinação das margens complementares no caso de realimentação com ganho k = -1, podemos utilizar o ponto (+1 +j0), que podemos chamar de ponto crítico complementar. A utilização deste ponto dá o mesmo efeito de inverter o gráfico, como mostrado para o caso monovariável na Sub-Seção 4.1.4. Assim, há apenas uma margem de ganho complementar finita para o sistema, que é 1,875. No caso de ganho real negativo, o ponto crítico complementar pode se movimentar sobre o semi-eixo real positivo do plano-G(s), com o valor (-1/k + j0). Para as margens de fase complementares, também vale a mesma modificação no ponto crítico complementar.

As Figuras 4.2.19 e 4.2.20 apresentam o diagrama de Bode do Sistema 2. A Figura 4.2.19 mostra as magnitudes em dB e a Figura 4.2.20 os ângulos de fase em graus dos lugares característicos $\lambda_i(j\omega)$, $i = 1, 2$ do sistema, ambos em função do ganho ω, em rad/s.

As margens de ganho e de fase para o sistema de controle multivariável podem ser determinadas da mesma forma que no caso monovariável, sobre as curvas dos lugares característicos. Na Figura 4.2.19 a horizontal em 0 dB está em destaque, e na Figura 4.2.20 a horizontal em -180° está em destaque, ambas em preto.

Como mostrado no Capítulo 2 através dos gráficos da Figura 1.3.6, as margens de fase do Sistema 2 são determinadas nas freqüências 0,2187 rad/s e 1,2306 rad/s, que são as freqüências em que há cruzamento das curvas de magnitude pela horizontal em 0 dB, e são -40,36° e -124,59°. As margens de ganho são determinadas nas freqüências em que há cruzamento das curvas de ângulo de fase pela horizontal em -180°. No caso do Sistema 2, as curvas começam com -180°, devendo as margens de ganho ser determinadas nas baixíssimas freqüências, e são +1,9382 dB e +7,9588 dB. No caso do sistema realimentado ter ganho k real positivo diferente de um, podemos determinar as margens de ganho e de fase modificando a posição da horizontal preta de referência que originalmente fica em 0 dB no diagrama de magnitudes. A horizontal deve ficar em $-k_{dB}$, sendo k_{dB} o valor em dB do ganho k. Assim, para ganho k = +10, por exemplo, a horizontal fica em -20log|10| = -20 dB. Para k = +10, as margens de ganho são -18,0618 dB e -12,0412 dB, e as margens de fase são +54,15° e -234,29°.

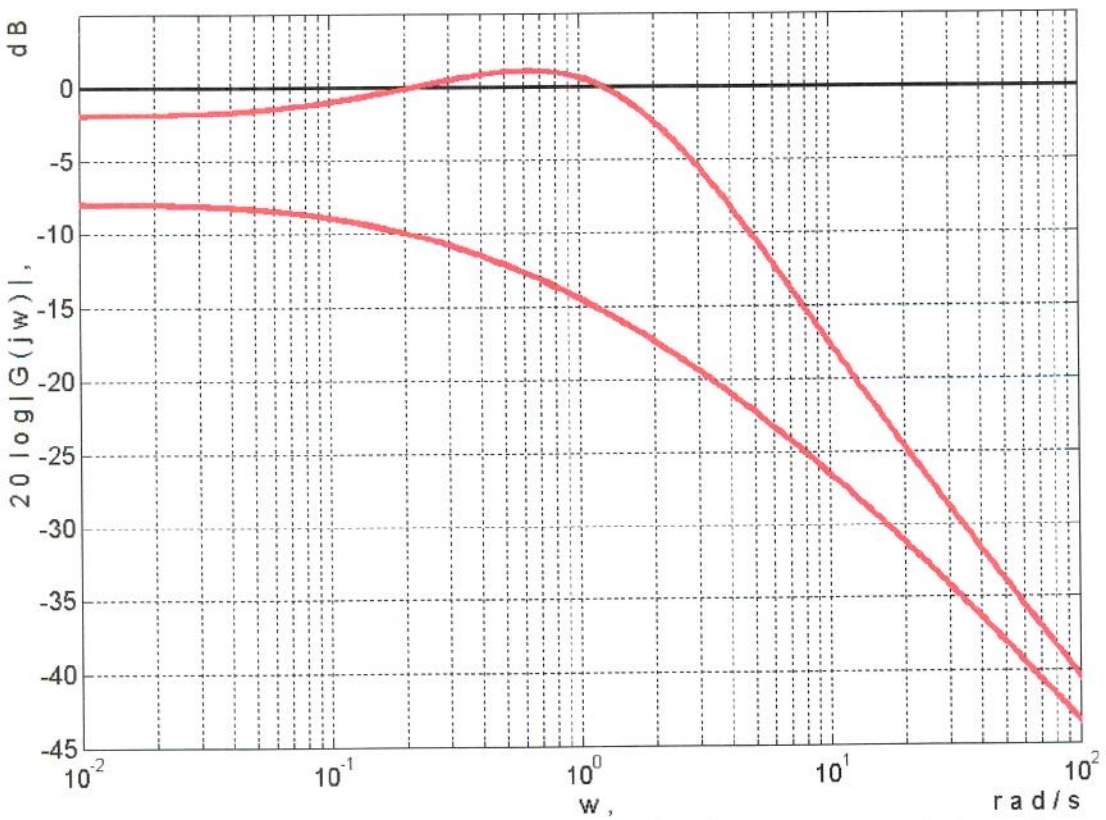


Figura 4.2.19. Curvas de magnitude em dB dos lugares característicos do Sistema 2. A horizontal em 0 dB serve de referência para a determinação das margens de fase, e para ganhos k *diferentes da unidade, esta horizontal pode mudar de posição.*

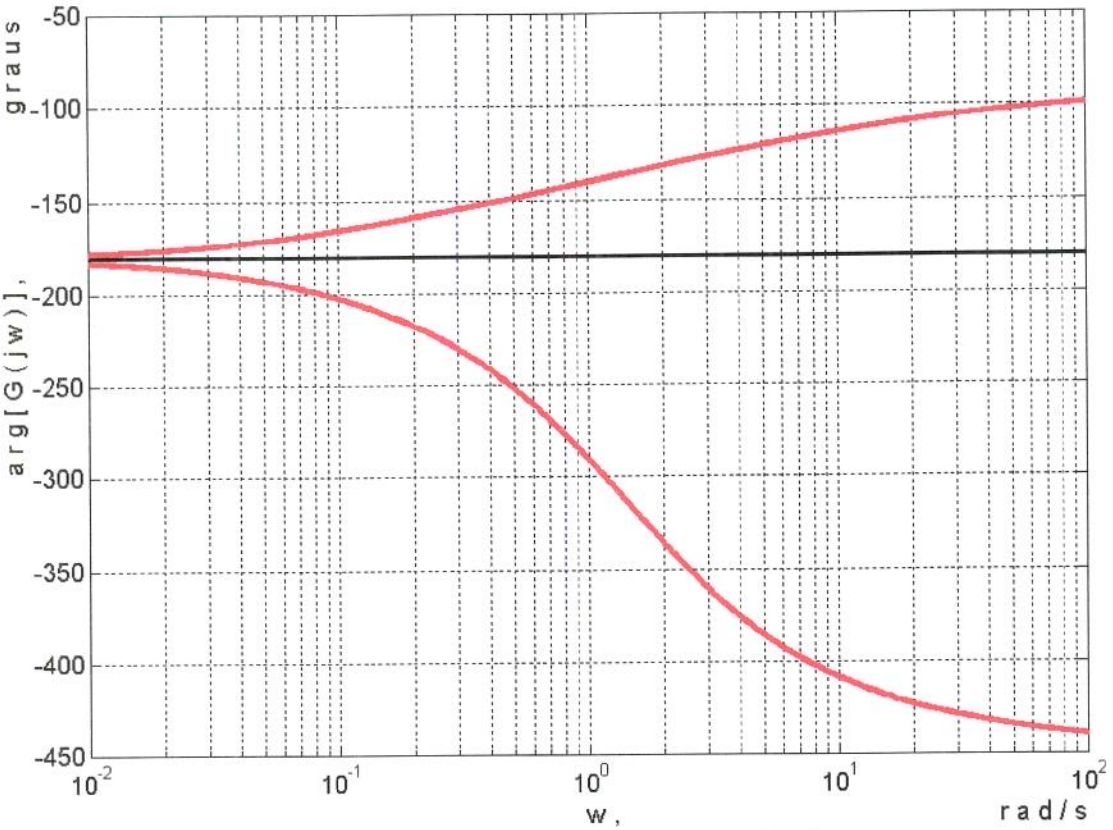


Figura 4.2.20. Curvas de ângulos de fase em graus dos lugares característicos do Sistema 2. A horizontal em -180° serve de referência para a determinação das margens de ganho.

Para a determinação das margens de ganho complementares, com k = -1, deve ser feita a partir dos pontos de cruzamento das curvas de ângulos pelas horizontais de 0° ou -360°. Isto é equivalente a atrasar ou adiantar em 180° a fase dos lugares característicos. No Sistema 2 há apenas um cruzamento por -360°, que determina a margem de ganho complementar de +5,4600 dB. A determinação das margens de fase complementares é feita a partir dos pontos de cruzamento por 0 dB, como as distâncias dos ângulos de fase para 0° ou para -360°. Há duas margens de fase complementares: +139,64° e +55,41°. No caso de ganho k real negativo diferente de -1, a horizontal de referência em 0 dB pode mudar de posição para $-k_{dB}$ para a determinação das margens complementares. Assim, por exemplo, para k = -10, a horizontal de referência fica em 20log|-10| = -20 dB, podendo então ser determinadas a margem de ganho complementar de -14,5400 dB e as margens de fase complementares de -54,29° e -125,85°.

Podemos graficar as margens de fase em função do módulo do ganho k positivo, com os pontos determinados mudando no gráfico de magnitudes a horizontal de referência do valor inicial 0 dB para $-k_{dB}$, como descrito. Assim, para qualquer ganho k real positivo podemos determinar as margens de fase. Sistematizando esta determinação, os valores podem ser colocados em um gráfico de margens de fase em função do módulo do ganho k. Este gráfico está mostrado na Figura 4.2.21 para o Sistema 2, onde as curvas são representativas das margens de fase ϕ_{mf} = MF em graus, em função de | k |, em um gráfico semi-logarítmico. Assim, podemos ver no gráfico que para | k | = 10, as margens de fase são +54,15° e -234,29°. Na verdade, este gráfico é o mesmo apresentado na Figura 4.2.14, cujos cálculos foram feitos a partir das superfícies-k de Riemann do Sistema 2.

Podemos também graficar as margens de fase complementares em função do módulo do ganho k negativo, com os pontos determinados a partir da horizontal de referência em $-k_{dB}$ no gráfico de magnitudes e da horizontal de referência em 0° ou -360° no gráfico de ângulos de fase, como descrito. A Figura 4.2.22 mostra as curvas resultantes, com ϕ_{mfc} = MFC em graus em função de | k | em escala logarítmica. Na verdade, este gráfico é o mesmo gráfico apresentado na Figura 4.2.15.

Podemos finalmente graficar as margens de ganho e margens de ganho complementares em função do módulo do ganho k, com os valores determinados como descrito, mudando a horizontal de referência de 0 dB para a posição $-k_{dB}$. A Figura 4.2.23 mostra as duas curvas de margens de ganho MG_{dB} = MGDB, em dB, e a Figura 4.2.24 mostra a única curva de margens de ganho complementares MGC_{dB} = MGCDB, em dB. Estas curvas são respectivamente as mesmas que as Figuras 4.2.16 e 4.2.17 apresentadas na Sub-Seção 4.2.3.

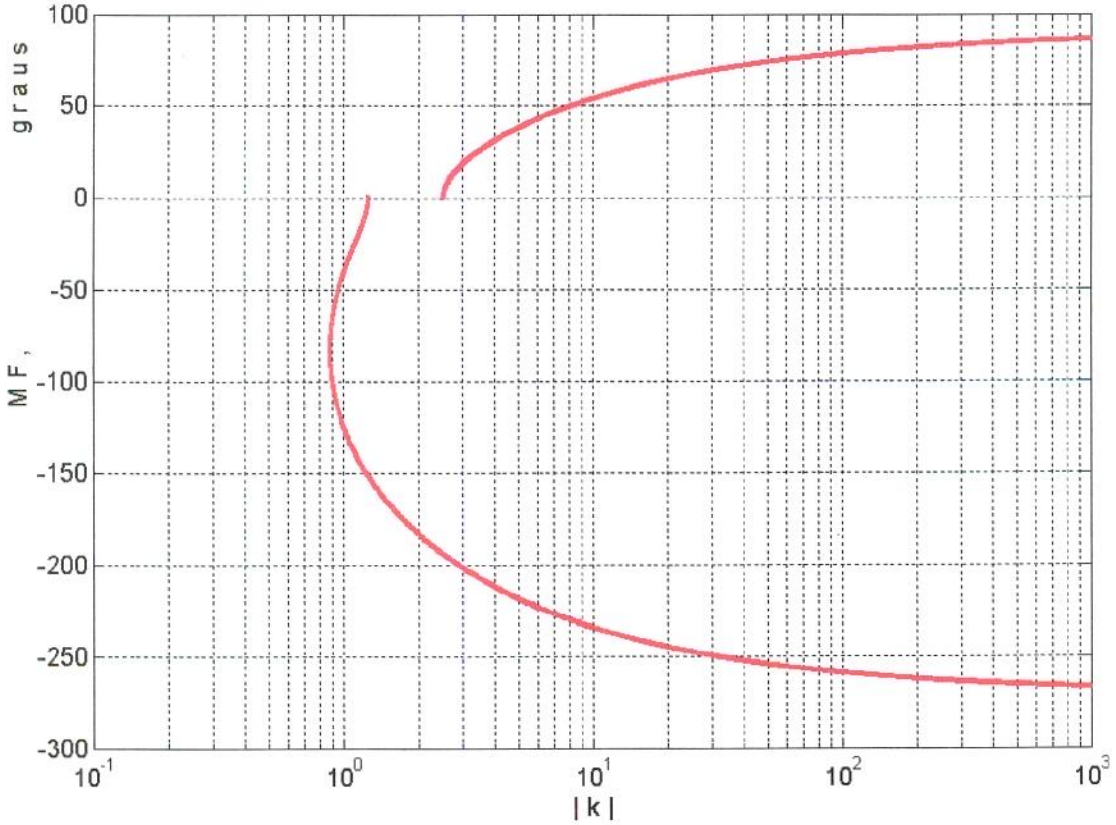


Figura 4.2.21. Curvas de margens de fase ϕ_{mf} = MF *em graus, em função do módulo do ganho* k, *para o Sistema 2, multivariável, com ganho* k *real positivo.*

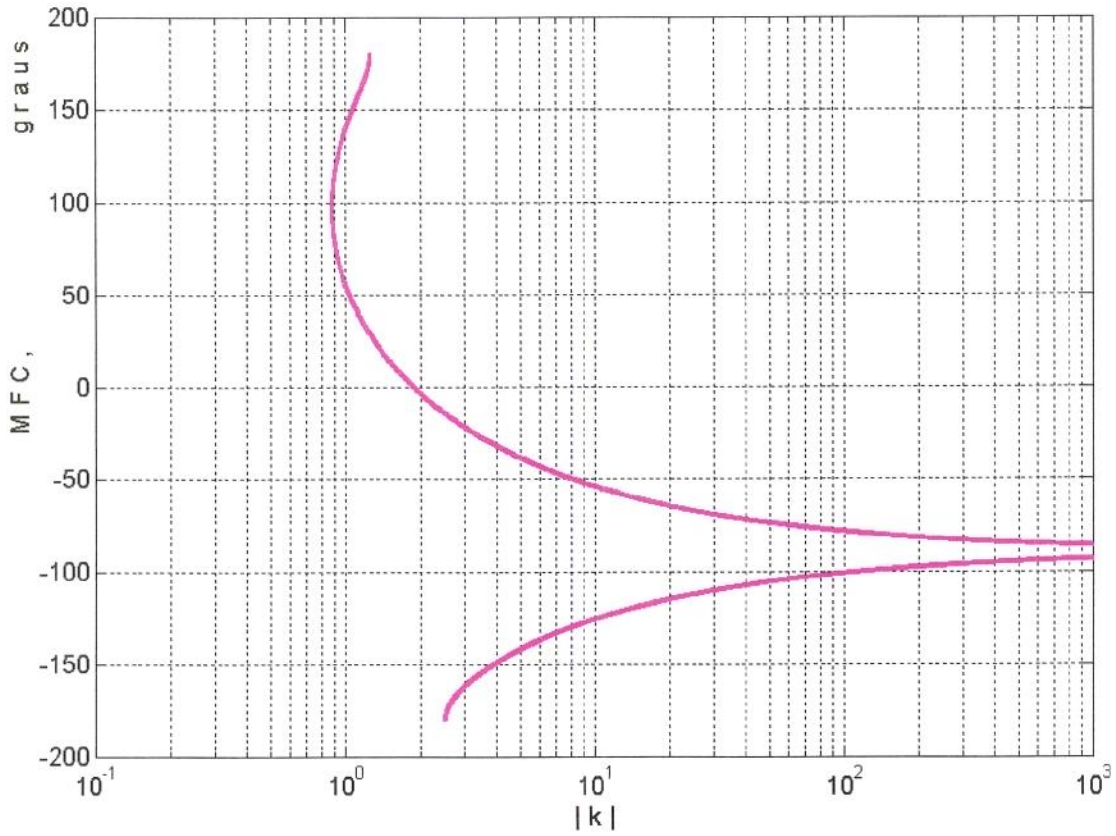


Figura 4.2.22. Curva de margens de fase complementares ϕ_{mfc} = MFC *em graus, em função do módulo do ganho* k, *para o Sistema 2, multivariável, com ganho* k *real negativo.*

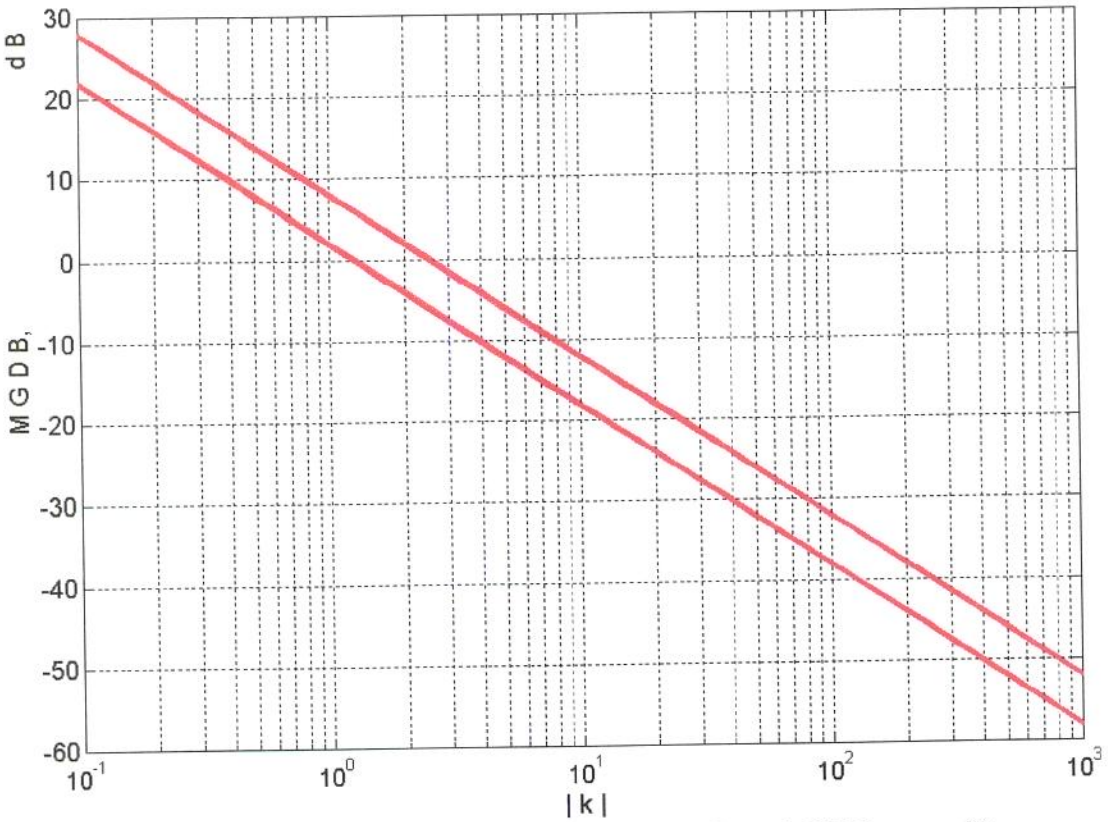


Figura 4.2.23. Curvas de margens de ganho MG_{dB} = MGDB *em dB, em função do módulo do ganho* k, *para o Sistema 2, multivariável, com ganho* k *real positivo.*

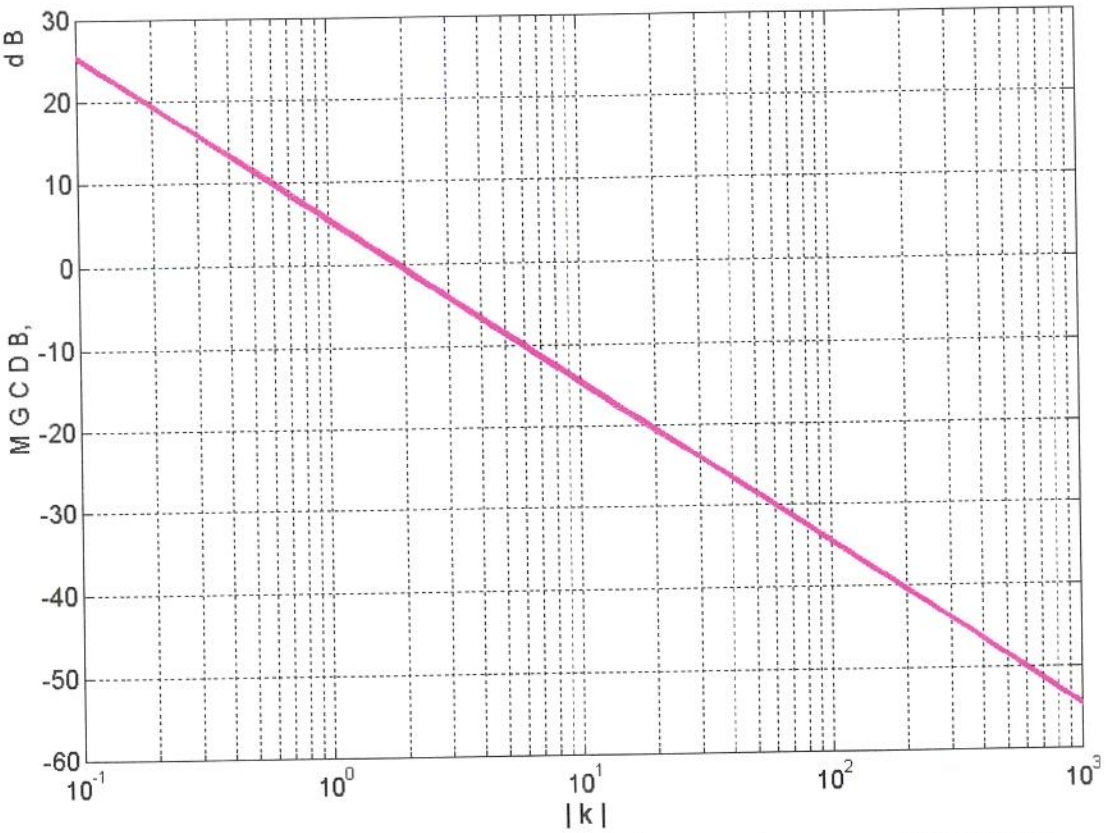


Figura 4.2.24. Curva de margens de ganho complementares MGC_{dB} = MGCDB *em dB, em função do módulo do ganho* k, *para o Sistema 2, multivariável, com ganho* k *real negativo.*

CAPÍTULO 5

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Neste trabalho foi feita uma abordagem analítica dos sistemas de controle monovariável e multivariável através de superfícies de Riemann, mostrando que estas generalizam a representação gráfica dos sistemas de controle lineares. Foi proposto que a representação total das superfícies de Riemann acontece em quatro dimensões, por se tratar de aplicação conforme de variável complexa em função complexa. Foram mostradas no decorrer do trabalho representações bidimensionais e tridimensionais que tornam a compreensão das superfícies de Riemann em aplicações de teoria de controle mais clara e concreta, evitando considerações matemáticas puramente abstratas, que tornam a compreensão mais difícil.

No Capítulo 1 foram apresentadas as representações usuais para a resposta em freqüência de sistemas de controle monovariável, sendo mostradas logo a seguir representações para a resposta em freqüência de sistemas de controle multivariável. Embora os DNA e INA de Rosenbrock tenham se constituído em um grande avanço para análise e projeto de sistemas de controle multivariável, avanço maior surgiu com a generalização do critério de Nyquist feita por MacFarlane em [37] e a representação em forma de lugares característicos, autovalores da matriz de transferência $G(j\omega)$, feita por MacFarlane e Belletrutti em [5,39]. Foi mostrado que os conceitos de margens de estabilidade ficam naturalmente estendidos, e aproveitamos para ressaltar a utilidade destes conceitos para projeto de sistemas de controle multivariável. MacFarlane e Belletrutti usam estes conceitos no método de projeto por lugares característicos, embora depois de diagonalizar a matriz de transferência para uma determinada freqüência. Os contornos de Nyquist baseados nos lugares característicos foram mostrados no diagrama de Nichols, demonstrando que o critério generalizado de Nyquist pode ser analisado neste gráfico.

Ainda no Capítulo 1 foi apresentada a representação por lugar das raízes para sistemas de controle monovariável, e foi mostrada a dubiedade desta representação para sistemas de controle multivariável, onde pode haver cruzamentos e até sobreposições nos ramos. Foi apresentada a nova representação por diagramas de ganho apresentada por

Kurfess e Nagurka, que torna a representação inequívoca. O exemplo mostrado com o Sistema 1 demonstra a necessidade do cálculo dos zeros de transmissão para o lugar das raízes de sistemas de controle multivariável.

Uma análise mais completa dos sistemas de controle multivariável certamente abrangeria a discussão dos pólos e principalmente dos diversos tipos de zeros, que foram classificados por Rosenbrock [57,58] de acordo com suas propriedades nos sistemas, tendo muitos outros autores também se dedicado ao assunto [10,12,21,22,40,52,63]. Devido entretanto às restrições que impusemos neste trabalho aos sistemas de controle multivariável, apenas os zeros de transmissão foram levados em conta. Estes podem ser calculados decompondo a matriz de transferência G(s) em sua forma de Smith-McMillan, ou usando decomposição espectral de BC quando o sistema está representado em espaço de estado, como mostrado por Kouvaritakis e MacFarlane em [21,22]. Implementamos com sucesso no MATLAB o cálculo dos zeros de transmissão por ambos os métodos. O método por decomposição espectral de BC foi utilizado por dar resultados numéricos mais precisos e confiáveis. Já o método usando a decomposição de G(s) foi implementado como conseqüência do desenvolvimento de um "*toolbox*" para tratamento de matrizes polinomiais visando a interpretação da matriz de transferência através de sua decomposição na forma de Smith-McMillan.

Nos Capítulos 2 e 3 foram apresentadas as superfícies-k e superfícies-s de Riemann para sistemas de controle monovariável e multivariável. Foram exploradas as possibilidades gráficas de representação bidimensional e apresentadas as representações tridimensionais consideradas mais esclarecedoras. Destas últimas, gráficos como os apresentados nas Figuras 2.2.23, 2.4.11, 3.2.20 e 3.4.25 mostram que as superfícies de Riemann podem ser consideradas como "objetos", ampliando as possibilidades computacionais para representá-las. A importância destas representações reside principalmente no retorno a representações mais simples, mas com uma capacidade interpretativa extremamente ampliada. Como exemplo disto, citamos o Sistema 2, cujos ramos de lugar das raízes multivariável, não bem representados no gráfico convencional apresentado na Figura 1.5.6, passam a ser muito melhor compreendidos quando representados em forma de diagramas de ganho, como mostrado na Figura 1.6.7, e ainda, a passagem dos ramos da folha 1 para a folha 2 da superfície-k de Riemann pode só pode ser compreendida nos diagramas de ganho quando vista na nova representação de superfície-k de Riemann apresentada na Figura 3.2.6. A nosso conhecimento esse emprego dos diagramas de ganho em conjunto com as superfícies-k de Riemann, além de muito conveniente, é inédito.

Uma representação inédita para lugar das raízes surgiu dos novos gráficos de superfícies-k de Riemann: é a representação dos ramos do lugar das raízes em um plano-s modificado, apresentado em forma de magnitude de s em dB em função do ângulo de s em graus. Tal representação foi exemplificada com o sistema de controle monovariável g1(s), podendo ser vista em vermelho na Figura 2.2.18, e também na representação tridimensional do lugar das raízes apresentada na Figura 2.2.24, onde duas projeções formam o diagrama de ganhos e a terceira projeção forma o novo gráfico.

A partir das superfícies-s de Riemann apresentadas nos Capítulos 2 e 3, um resultado inédito não comentado no texto, mas de grande relevância, é a determinação completa dos contornos de Nyquist de um sistema de controle monovariável ou multivariável pela simples visualização da superfície-s de Riemann do sistema. Para tanto, basta identificar as curvas-F de +90° e -90°, e depois uni-las com uma curva-G de magnitude muito pequena e outra curva-G de magnitude muito grande. No caso multivariável cada lugar característico é responsável por um contorno, sendo necessária a identificação de todos os contornos para a aplicação do critério generalizado de estabilidade de Nyquist.

Este trabalho contribuiu com a derivação e comprovação matemática de três novas técnicas para determinação das margens de estabilidade, desenvolvidas no Capítulo 4, aplicáveis para sistemas de controle monovariável e multivariável. Resultam margens de fase e de ganho em função de valores positivos de ganho k, com efeito de realimentação negativa, e margens de fase e de ganho complementares em função de valores negativos de ganho k, tendo efeito de realimentação positiva.

A primeira técnica consiste na determinação direta das margens de estabilidade sobre as superfícies-k de Riemann. Demonstrou-se que estas podem ser determinadas para qualquer valor positivo ou negativo de ganho k de realimentação a partir de pontos de cruzamento das curvas-G e curvas-F com o semi-eixo imaginário positivo do plano-s. Comparados os resultados encontrados com aqueles determinados no Capítulo 1, comprovou-se a validade da nova técnica.

A segunda técnica consiste na determinação de curvas no plano complexo-k de ganho, indicativas das margens de estabilidade do sistema. Esta técnica é baseada na determinação dos valores de ganho k complexo responsáveis por pontos no semi-eixo imaginário positivo ou na origem do plano-s da superfície-k de Riemann do sistema. Foi mostrada uma forma de determinação algébrica destes valores de k para sistemas de controle estritamente próprios, e foi mostrado que para sistemas próprios a determinação deve ser numérica. Foram implementadas e testadas funções no MATLAB com algoritmos para ambos os casos,

algébrico e numérico. O resultado destas funções é a geração de curvas no plano-k responsáveis por retas no plano-s da superfície-k de Riemann que partem da origem e percorrem o semi-eixo imaginário positivo do plano-s.

A terceira técnica consiste na construção gráfica das margens de estabilidade em função do módulo do ganho k de realimentação, resultando em curvas de margens de fase e de ganho em função da variação do módulo do ganho k, quando este for positivo, e curvas de margens de fase e de ganho complementares em função da variação do módulo do ganho k, quando este for negativo. Este resultado é obtido aplicando os mesmos algoritmos utilizados na segunda técnica para a determinação dos valores complexos de k que geram pontos no semi-eixo positivo ou na origem do plano-s da superfície-k de Riemann do sistema, e determinando as margens com base nas fórmulas apresentadas.

Como perspectivas futuras a partir dos resultados deste trabalho, podemos indicar:

— A generalização deste estudo para os sistemas de controle multivariável retangulares, ou seja, com número diferente de entradas e saídas, determinando semelhanças e diferenças no tratamento destes com os sistemas quadrados estudados.

— A determinação das margens de estabilidade de sistemas de controle multivariável através da aplicação de superfícies de Riemann a valores singulares. Há referências recentes [3,4] que tratam da determinação de margens de fase de sistemas de controle multivariável com base nos valores singulares.

Apesar deste trabalho ter se concentrado em análise, espera-se que ele possa contribuir para estudos visando tanto aspectos de síntese quanto aspectos de controle robusto [14].

APÊNDICES

APÊNDICE 1 - CÁLCULO DO DISCRIMINANTE

É reproduzido neste apêndice o algoritmo para cálculo do discriminante de uma função algébrica desenvolvido por Sansone e Gerretsen em [59].

Considere o polinômio

$$a(g) = a_0 g^n + a_1 g^{n-1} + \ \dots \ + a_n \ , \qquad n > 0$$

onde $a_i \in \mathbf{C}$; então o discriminante de a(g) é dado pela expressão

$$D(a_0, \ \dots \ , a_n) = a_0^{\,2n-2} \cdot P$$

onde P é o determinante dado por

$$P = \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \cdots & \sigma_{2n-2} \end{vmatrix}$$

e os elementos $\{\sigma_i : i = 1, 2, \dots, 2n-2\}$ são funções dos coeficientes $\{a_i : i = 0, 1, \dots, n\}$, e

$$\sigma_0 = n .$$

Os elementos $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ podem ser encontrados a partir de

$$\begin{aligned} a_1 + a_0\sigma_1 &= 0 \\ 2a_2 + a_1\sigma_1 + a_0\sigma_2 &= 0 \\ &\dots \\ (n-1)a_{n-1} + a_{n-2}\sigma_1 + \dots + a_0\sigma_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

e $\sigma_n, \ldots, \sigma_{2n-2}$ podem ser encontrados a partir de

$$\begin{aligned} a_n\sigma_0 + a_{n-1}\sigma_1 + \ldots + a_0\sigma_n &= 0 \\ a_n\sigma_1 + a_{n-1}\sigma_2 + \ldots + a_0\sigma_{n+1} &= 0 \\ &\ldots \\ a_n\sigma_m + a_{n-1}\sigma_{m+1} + \ldots + a_0\sigma_{n+m} &= 0 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Considere agora o polinômio $\Phi(g,s)$ dado por

$$\Phi(g,s) = b_0(s)g^t + b_1(s)g^{t-1} + \ldots + b_t(s).$$

O discriminante deste polinômio em g é encontrado a partir de $D_g(b_0, \ldots, b_t)$ como definido acima, substituindo $b_0, \ldots, b_t$ por $b_0(s), \ldots, b_t(s)$ respectivamente. O polinômio $\Phi(g,s)$ então tem fatores repetidos se e somente se

$$D_g(s) = b_0^{2t-2}(s) \cdot P$$

é zero, onde P é o determinante de uma matriz cujos elementos são funções dos coeficientes $\{b_i(s) : i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$.

APÊNDICE 2 - LISTA DE FUNÇÕES IMPLEMENTADAS NO MATLAB

A lista abaixo relaciona em seis tópicos funções desenvolvidas e implementadas no *software* MATLAB para utilização neste trabalho, com uma descrição sucinta do seu funcionamento ao lado. Estas funções utilizam outras funções já existentes no *software*.

A.1. SUPERFÍCIES-S DE RIEMANN (NYQUIST, BODE, NICHOLS):

```
GSA         [gae,ga,samod,sa] = gsa(a,b,c,d,s,xga)
            G(s)-Surface - Curvas de Ângulos - MultiVariável
            ga = G(sa)      ...     sa = valor complexo de s
            gae= eig(ga)    ...     samod = módulo de s
GSG         [gge,gg,sgang,sg] = gsg(a,b,c,d,s,xgg)
            G(s)-Surface - Curvas de dB - MultiVariável
            gg = G(sg)      ...     sg = valor complexo de s
            gge= eig(gg)    ...     sgang = vetor dos ângulos de s
GSABREAK    sb = gsabreak(A,B,C,D,s,,xga,erro)
            BREAK-POINT DE GSA COM ÂNGULO xga (0° OU 180°).
GSABRK      [sb,er] = gsabrk(A,B,C,D,s,erro)
            GANHOS sb DOS PONTOS DE SEPARAÇÃO (BREAK POINTS).
            erro=erro maximo admitido para os ganhos sb(i),
            dos i pontos de BREAK (separacao).
            er=erro max cometido (aprox lim: no máx 100 interações).
```

A.2. SUPERFÍCIES-K DE RIEMANN (LUGAR DAS RAÍZES, DIAG. GANHO):

```
KINSERT     kins = kinsert(k,kk)
            INSERE OS VALORES kk AO VETOR DE GANHOS k.
RLB         [r,k,er] = rlb(A,B,C,D,d1,d2,n,erro)
            ROOT-LOCUS COM BREAK POINTS (PONTOS DE SEPARACAO).
            r=rlocus, k=ganhos entre 10^d1 e 10^d2, com n pontos.
            erro=erro maximo admitido para os k(i) dos i pontos de
            separacao. ( length(k)=n+i )
            O erro maximo realmente cometido eh er.
RLBREAK     kb = rlbreak(num,den,k,erro)
            BREAK-POINT DE RLOCUS
RLBRK       [kb,er] = rlbrk(A,B,C,D,k,erro)
            GANHOS kb DOS PONTOS DE SEPARACAO (BREAK POINTS).
            erro=erro maximo admitido para os ganhos kb(i),
            dos i pontos de BREAK (separacao).
            er=erro max cometido (aprox lim: no max 100 interacoes).
RLCB        [rc,kc,er] = rlcb(A,B,C,D,d1,d2,n,erro)
            ROOT-LOCUS COMPLEMENTAR COM BREAK POINTS (PONTOS DE SEPARACAO).
            rc=rlocus comp., k=ganhos entre 10^d1 e 10^d2, com n pontos.
            erro=erro maximo admitido para os k(i) dos i pontos de
            separacao. ( length(k)=n+i )
            O erro maximo realmente cometido eh er.
RSA         [ra,ka] = rsa(a,b,c,d,k,xa)
            Curvas de Angulos - Riemann-Surface - MultiVariavel
            ra = rlocus(ka)         ...     ka = valores complexos de k.
RSG         [rg,kg] = rsg(a,b,c,d,k,xg)
            Curvas de dB - Riemann Surface - MultiVariavel
            rg = rlocus(kg)         ...     kg = valores complexos de k.
```

A.3. FOLHAS E CORTES DAS SUPERFÍCIES DE RIEMANN:

CORTE

```
[i,ic,ia,ib] = corte(a1,a2,b1,b2)
CORTE DE SEGMENTOS "a1_a2" E "b1_b2"
i = intersec(a1,a2,b1,b2)
ic = 1 se "a1_a2" e "b1_b2"   SE CORTAM   (ia=1 E  ib=1)
     0                        NAO SE CORTAM (ia=0 OU ib=0)
ia = 1   se  "i"    CORTA    "a1_a2"
     0              NAO CORTA
ib = 1   se  "i"    CORTA    "b1_b2"
     0              NAO CORTA
```

INTERCUT

```
[i,ic,ia,ib] = intercut(a1,a2,b1,b2)
CORTE DE SEGMENTOS "a1_a2" E "b1_b2"
```

```
i = intersec(a1,a2,b1,b2)
ic =    1 se "a1_a2" e "b1_b2" SE CORTAM      (ia=1 E  ib=1);
        0                      NÃO SE CORTAM  (ia=0 OU ib=0).
ia =    1    se  "i"   CORTA      "a1_a2" ;
        0              NÃO CORTA.
ib =    1    se  "i"   CORTA      "b1_b2" ;
        0              NÃO CORTA.
```

INTERSEC

```
i = intersec(a1,a2,b1,b2)
Ponto " i " de Interseccao entre as
retas " a1_a2 " e " b1_b2 "
```

LCUT

```
[lc,ap,app] = lcut(p1,p2,a)
Lado do ponto "a" em relacao ao corte "p1p2"
lp = 1 - esquerda, 0 - no corte, -1 - direita
[ap,app] = proj(p1,p2,a)
```

PROJ

```
[ap,app] = proj(p1,p2,a)
Projecao ortogonal "ap" de "a" sobre a reta "p1p2"
Retas "a_ap" prontas para plotagem em "app"
```

RLEIG

```
rl = rleig(a,b,c,d,k)
Root Locus pelos Autovalores de Ac = a - k*b*c
```

RLKEIG

```
rlk = rlkeig(a,b,c,d,s)
Root Locus   -  pelos valores no plano-s (variavel s)
                achar os ganhos rlk correspondentes
Carlos Mendes Richter  (C)  25-02-92.  (Atualiz.: 04-01-95).
```

RSDB

```
rsk = rsdb(num,den,vdb,np)
Curvas em dB - Riemann-Surfaces - Sist Monovariaveis
```

SCORTE

```
[ac,xc,nc,la,da,lc] = scorte(a,x,cut)
SEPARACAO DE a EM CORTES NAS COLUNAS DE ac.
```

```
ac = CURVAS ANTES E DEPOIS DOS CORTES = [a(1) a(2) ... ]
xc = VALORES QUE GERAM OS PONTOS ac   = [x(1) x(2) ... ]
nc = NUMERACAO DAS PASSAGENS ATRAVES DE cut
la = +1(ESQUERDA)
     -1(DIREITA)
da = pontos de interseccao
lc = lcut(cut(1),cut(2),a) - lados reais de separacao.
```

SCUT

```
[ac,nc,ls,la,da] = scut(a,cut)
SEPARACAO DE a EM CORTES NAS COLUNAS DE ac
ac = CURVAS A ESQUERDA E A DIREITA
nc = NUMERACAO DAS PASSAGENS ATRAVES DE cut
ls = la(1) - lado de separacao inicial
la = +1(ESQUERDA)
     -1(DIREITA)
da = pontos de interseccao
```

SCUT1

```
[ae,ad] = scut1(a,cut)
SEPARACAO DE CORTE:
ae - parte de a a esquerda do corte
ad - parte de a a direita do corte
```

SEPFOLHA

```
[acx,xcx,ncc,ncx,lax,dax,lcx] = sepfolha(a,x,cut)
SEPARACAO DAS CURVAS a = [a1 a2 ...] EM CORTES NAS COLUNAS DE acx.
```

```
acx = CURVAS ANTES E DEPOIS DOS CORTES  = [a1(1) a1(2) ... a2(1) a2(2) ... ]
xcx = VALORES QUE GERAM OS PONTOS acx   = [x1(1) x1(2) ... x2(1) x2(2) ... ]
ncc = NUMERO DE CORTES DE CADA CURVA    = [length(nc(1)) length(nc(2)) ... ]
ncx = NUMERACAO DAS PASSAGENS ATRAVES DE cut = [nc(1) nc(2) ... ]
lax =   +1(ESQUERDA)                   = [la(1) la(2) ... ]
        -1(DIREITA)
dax = pontos de interseccao             = [da(1) da(2) ... ]
lcx = lados reais de separacao          = [lc(1) lc(2) ... ]
      e lc(i) = lcut(cut(1),cut(2),a(i)).
Para saber mais sobre cortes, digite 'help scorte' e 'help sepfpf'.
```

```
SEPFPF          [acf,xcf,ncf,nff] = sepfpf(acx,xcx,ncc,f)
                SEPARACAO DAS CURVAS a = [a1 a2 ...] EM CORTES NAS COLUNAS DE acx.
                ------------------------------------------------------------------------
                f   = NUMERO DA FOLHA
                acf = CURVAS ANTES E DEPOIS DOS CORTES       = [a1(f) a2(f) ... ]
                xcf = VALORES QUE GERAM OS PONTOS acx = [x1(f) x2(f) ... ]
                nccf= NUMERO DE CORTES DE CADA CURVA  = [length(nc(f))]
                ncf = NUMERACAO DAS PASSAGENS ATRAVES DE cut = [nc(f)]
                nff = NUMERO DA COLUNA DE acf EM RELACAO AS COLUNAS DE acx.
                laf =   +1(ESQUERDA)                = [la(f)]
                        -1(DIREITA)
                daf = pontos de interseccao          = [da(f)]
                lcf = lados reais de separacao               = [lc(f)]
                       e lc(i) = lcut(cut(1),cut(2),a(i)).
                Para saber mais sobre cortes, digite 'help sepfolha' e 'help scorte'.
                ------------------------------------------------------------------------
```

A.4. SENSIBILIDADE (LUGAR DAS RAÍZES):

```
RLSK            [resk,imsk] = rlsk(a,b,c,d,k)
                SENSIBILIDADE DE r EM RELACAO A k
                resk = real(sk)   imsk = imag(sk)
RLSKTF          [resk,imsk] = rlsktf(num,den,k)
                SENSIBILIDADE DE r EM RELACAO A k
                resk = real(sk)   imsk = imag(sk)
```

A.5. INTERPOLAÇÃO:

```
INTELOGX        [wx,m] = intelogx(w,d,dx)
                INTERPOLAÇÃO LOGARÍTMICA - RETA EM SEMILOGX(w,d)
                       d - vetor em escala linear
                       w - vetor em escala logarítmica
                       m - inclinação de w em relação a d
INTELOGY        [dy,m] = intelogy(w,d,wy)
                INTERPOLAÇÃO LOGARÍTMICA - RETA EM SEMILOGY(d,w)
                                        OU SEMILOGX(w,d)
                       d - vetor em escala linear
                       w - vetor em escala logarítmica
                       m - inclinação de d em relação a w
INTERLOG        wx = interlog(w,d,dx)
                INTERPOLAÇÃO LOGARÍTMICA - RETA EM SEMILOGX(w,d)
                       d - vetor em escala linear
                       w - vetor em escala logarítmica
```

A.6. MARGENS DE ESTABILIDADE:

```
MARGENS         [MG,MF,WMG,WMF] = margens(gedb,gegr,w)
                Margens de Ganho (MG), em dB e de Fase (MF), em graus,
                e respect. freq. (WMG) e (WMF), em rad/s.     - SISO E MIMO!
MARGSSK         [kdb,mfk,mgk,MG,MF,WMG,WMF] = margssk(gedb,gegr,w)
                Calcula os Ganhos (kdb), em dB, que geram as
                Margens de Fase (mfk), em graus, e as
                Margens de Ganho (mgk), em dB.                - SISO E MIMO!
                GRÁFICOS: (kdb x mfk), (kdb x mgk), (mgk x mfk).
                Margens de Ganho (MG), em dB, e de Fase (MF), em graus,
                e respect. freq. (WMG) e (WMF), em rad/s.
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[01] ÁVILA, G.S.S. *"Funções de uma Variável Complexa."* Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1974.

[02] BARNETT, S. *"Matrices in Control Theory."* Van Nostrand-Reinhold, London, 1971.

[03] BAR-ON, J.R. e JONCKHEERE, E.A. "Phase Margins for Multivariable Control Systems." *Int.J.Control*, Vol.52, No.2, 1990, pp.485-498.

[04] BAR-ON, J.R. e JONCKHEERE, E.A. "Gain Margins for Multivariable Control Systems." *IEEE Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, Dec. 1990, pp.340-347.

[05] BELLETRUTTI, J.J. e MACFARLANE, A.G.J. "Characteristic Loci Techniques in Multivariable Control Systems Design." *Proc. IEE*, Vol. 118, No. 9, 1971.

[06] BODE, H.W. "Relations Between Attenuation and Phase in Feedback Amplifier Design.", *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 19, 1940, pp.421-454.

[07] BOTTURA, C.P. *"Análise Linear de Sistemas."* Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1982.

[08] BOTTURA, C.P. *"Princípios de Controle e Servomecanismos."* Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1982.

[09] CAVICCHI, T.J. "Phase-Root Locus and Relative Stability." *Lecture Notes, IEEE Control Systems*, Agosto 1996, pp. 69-77.

[10] CHEN, C.T. *"Linear System Theory and Design."* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1984.

[11] CHURCHILL, R.V. e BROWN, J.W. *"Complex Variables and Applications."* McGraw-Hill, 1990.

[12] DAVISON, E.J. e WANG, S.H. "Properties and Calculation of Transmission Zeros of Linear Multivariable Systems." *Automatica*, Vol.10, 1974, pp.643-658.

[13] DORF, R.C. *"Modern Control Systems."* Addison-Wesley, Reading, Massachussetts, 5.ed., 1989.

[14] DOYLE, J.C. e STEIN, G. "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis." *IEEE T.A.C.*, Vol.AC-26, No.1, 1981, pp.4-16.

[15] EVANS, W.R. "Graphical Analysis of Control Systems." *AIEE Trans.*, Vol. 67, 1948, pp.547-551.

[16] FUCHS, B.A. e LEVIN, V.I. *"Functions of a Complex Variable and Some of Their Applications."* Pergamon Press, London, Vol.2, 1961.

[17] GANTMACHER, F.R. *'Theory of Matrices."* Chelsea, New York, Vol.1, 1959.

[18] GOLUB, G.H. e VAN LOAN, C.F. *"Matrix Computations."* The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989.

[19] HAUSER JR., A.A. *"Variáveis Complexas com Aplicações à Física."* Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1972.

[20] KOUVARITAKIS, B. e EDMUNDS, J.M. "Multivariable Root-Loci: A Unified Approach to Finite and Infinite Zeros." *Int. J. Control*, Vol.29, No.3, 1979, pp.393-428.

[21] KOUVARITAKIS, B., e MACFARLANE, A.G.J. "Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros - Part 1. Square Systems." *Int. J. Control*, Vol. 23, No. 2, 1976, pp.149-166.

[22] KOUVARITAKIS, B., e MACFARLANE, A.G.J. "Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros - Part 2. Non-Square Systems." *Int. J. Control*, Vol. 23, No. 2, 1976, pp.167-181.

[23] KOUVARITAKIS, B. e SHAKED, U. "Asymptotic Behaviour of Root-Loci of Linear Multivariable Systems." *Int. J. Control*, Vol.23, No.3, 1976, pp.297-340.

[24] KREYSZIG, E. *"Advanced Engineering Mathematics."* John Wiley & Sons, New York, 1993.

[25] KUO, B. *"Sistemas de Controle Automático."* Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 4.ed., 1985.

[26] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "Understanding the Root Locus Using Gain Plots." *IEEE Control Systems*, Agosto 1991, pp.37-40.

[27] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "A New Visualization of the Evans Root Locus: Gain Plots." *Technical Report, Engineering Design Research Center*, Pittsburgh, 1991.

[28] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "High Gain Control System Design with Gain Plots." *Technical Report, Engineering Design Research Center*, Pittsburgh, 1991.

[29] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "A Geometric Paradigm Exposing High Gain Root Sensitivity of Single-Input Single-Output Systems." *Technical Report, Engineering Design Research Center*, Pittsburgh, 1991.

[30] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "Foundations of Classical Control Theory with Reference to Eigenvalue Geometry." *Technical Report, Engineering Design Research Center*, Pittsburgh, 1991.

[31] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "New Design Paradigms for SISO Control System Synthesis." *Technical Report, Engineering Design Research Center*, Pittsburgh, 1991.

[32] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "New Design Paradigms for MIMO Control Synthesis." *Technical Report, Engineering Design Research Center*, Pittsburgh, Março 1991.

[33] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "Gain and Phase Margins of SISO Systems from Modified Root Locus Plots." *IEEE Control Systems*, Junho 1992, pp. 123-126.

[34] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "Foundations of Classical Control Theory with Reference to Engenvalue Geometry." *Journal of the Franklin Institute*, Vol 330, No. 2, 1993, pp.213-227.

[35] KURFESS, T.R. e NAGURKA, M.L. "A Geometric Representation of Root Sensitivity." *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control - Transactions of the ASME*, Vol 116, Junho 1994, pp.305-309.

[36] LAUB, A.J. "Efficient Multivariable Frequency Response Computations." *IEEE T.A.C.* Vol.AC-26, No.2, 1981, pp.407-408.

[37] MACFARLANE, A.G.J. "Return-Difference and Return-Ratio Matrices and their Use in Analysis and Design of Multivariable Feedback Control Systems." *Proc. IEE*, Vol.117, 1970, pp.2037-2049.

[38] MACFARLANE, A.G.J. (Editor). "*Frequency Response Methods in Control Systems.*" IEEE Press, New York, 1979.

[39] MACFARLANE, A.J.G., e BELETRUTTI, J.J., "The Characteristic Locus Design Method." *Automatica*, Vol. 9, 1973, pp.575-588.

[40] MACFARLANE, A.G.J, e KARKANIAS, N. "Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems: A Survey of the Algebraic and Complex-Variable Theory." *Int. J. Control*, Vol. 24, No. 1, Julho 1976, pp.33-74.

[41] MACFARLANE, A.G.J., e KOUVARITAKIS, B. "A Design Technique for Linear Multivariable Feedback Systems." *Int. J. Control*, Vol. 25, No. 6, Junho 1977, pp.837-874.

[42] MACFARLANE, A.G.J, e POSTLETHWAITE, I. "The Generalized Nyquist Stability Criterion and Multivariable Root Loci." *Int. J. Control*, Vol. 25, No. 6, Janeiro 1977, pp.81-127.

[43] MACFARLANE, A.G.J, e POSTLETHWAITE, I. "Characteristic Frequency Functions and Characteristic Gain Functions." *Int. J. Control*, Vol. 26, No. 2, Agosto 1977, pp.265-278.

[44] MACFARLANE, A.G.J, e POSTLETHWAITE, I. "Extended Principle of the Argument." *Int. J. Control*, Vol. 27, No. 1, 1978, pp.49-55.

[45] MACIEJOWSKI, J.M. "*Multivariable Feedback Design.*" Addison-Wesley, Wokinghan, England, 1989.

[46] NAGURKA, M.L. e KURFESS, T.R. "An Alternative Geometric Perspective on MIMO Systems." *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control - Transactions of the ASME*, Vol. 115, Setembro 1993, pp. 538-543.

[47] NAGURKA, M.L. e KURFESS, T.R. "Geometric Links Among Classical Control Tools." *IEEE Trans. on Education*, Vol. 37, No. 1, Fevereiro 1994, pp. 77-83.

[48] NARENDRA, K.S. "Inverse Root-Locus, Reverse Root-Locus or Complementary Root-Locus?" *IRE Trans. on Automatic Control*, Vol.AC-6, No.3, Sep. 1961, pp.359-360.

[49] NYQUIST, H. "Regeneration Theory." *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 11, 1932, pp.126-147.

[50] OGATA, K. "*Engenharia de Controle Moderno.*" Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1985.

[51] OWENS, D.H. "*Feedback and Multivariable Systems.*" Peter Peregrinus, London, 1978.

[52] PATEL, R.V. e MUNRO, N. "*Multivariable Theory Systems and Design.*" Pergamon Press, Oxford, 1982.

[53] PETKOV, P.HR., CHRISTOV, N.D. e KONSTANTINOV, M.M. "*Computational Methods for Linear Control Systems.*" Prentice Hall, New York, 1991.

[54] POSTLETHWAITE, I. "Association Between Branch Points and Stationary Points on the Gain and Frequency Surfaces." *Int. J. Control*, Vol. 29, No. 2, 1979, pp.255-260.

[55] POSTLETHWAITE, I., e MACFARLANE, A.G.J. "*A Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems.*" Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[56] ROSENBROCK, H.H. "Design of Multivariable Control Systems Using the Inverse Nyquist Array." *Proc. Inst. Elec. Eng.*, Vol. 116, 1969, pp. 1929-1936.

[57] ROSENBROCK, H.H. *"State-Space and Multivariable Theory."* Nelson, London, 1970.

[58] ROSENBROCK, H.H. *"Computer-Aided Control System Design."* Academic Press, London, 1974.

[59] SANSONE, G. e GERRETSEN, J. *"Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable."* Wolters-Nordhoff, Groningen, Vol.2, 1969.

[60] SILVA, M.A. *"Decomposição, Análise e Síntese de Sistemas de Grande Porte."* Tese de Mestrado, FEE, UNICAMP, Campinas, 1984.

[61] SPRINGER, G. *"Introduction to Riemann Surfaces."* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[62] STEWART, G.W. *'Introduction to Matrix Computations."* Academic Press, New York, 1973.

[63] WESTREICH, D. "Computing Transfer Function Zeros of a State Space System." *Int. J. Control*, Vol. 53, No. 2, 1991, pp. 477-493.

[64] WONHAM, W.M. *"Linear Multivariable Control - A Geometric Approach."* Springer-Verlag, New York, 3.ed., 1985.