

LAC

Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Laboratório de Análise Convexa



Passividade no Estudo de Robustez de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Pedro Bulach Gapski

Mestre em Engenharia Elétrica — FEEC/UNICAMP

em 4 de dezembro de 1998 perante a banca examinadora

José C. Geromel

Orientador

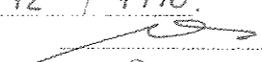
Jacques Bernussou

Liu Hsu

João Bosco Ribeiro do Val

Rafael Santos Mendes

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por Pedro Bulach Gapski e aprovada pela Comissão Julgada em 04 / 12 / 1998.


Orientador

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

1486964

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V.	Ex.
TUMBO BC/	37511
PROC.	229/99
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	29/04/99
N.º CPD	

CM-00123081-4

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA — BAE — UNICAMP

G159p Gapski, Pedro Bulach
Passividade no Estudo de Robustez de Sistemas
Lineares Invariantes no Tempo / Pedro Bulach
Gapski.— Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: José C. Geromel.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Controle (Engenharia). 2. Automação.
3. Otimização matemática. I. Geromel, José C.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

LAC

Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Laboratório de Análise Convexa



Tese : **Passividade no Estudo de Robustez
de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo**

Autor : **Pedro Bulach Gapski**

Orientador : **Prof. Dr. José C. Geromel**

Aprovada em 4 de dezembro de 1998 pela banca examinadora



Prof. Dr. José C. Geromel (Presidente)



Prof. Dr. Jacques Bernussou



Prof. Dr. Liu Hsu



Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val



Prof. Dr. Rafael Santos Mendes

Agradecimentos

Por ocasião da redação de minha tese de mestrado, eu me encontrava completamente fascinado pela elegância matemática do estudo de estabilidade em teoria de controle, e boa parte de meus agradecimentos naquele trabalho foram destinados ao meu orientador, por ter me aberto os olhos para tanta elegância. Agora, ao fim da redação de minha tese de doutorado, o Prof. J. C. Geromel também será merecedor de um agradecimento especial, mas por razões diversas. É claro que sua contribuição científica foi imprescindível, mas devo agradecer a ele principalmente por sua paciência e perseverança ao lidar com meus inúmeros erros no decorrer do trabalho, mesmo após seus alertas. Deixo aqui registrado meu agradecimento para aquele que me ensinou matemática, controle e muito mais do que isso.

O trabalho de tese é por muitas vezes muito mais solitário do que gostaríamos, e a presença de uma equipe muito boa no Departamento de Telemática em muito contribuiu em diversas conversas, técnicas ou não, para a sanidade do trabalho e do autor. Agradeço principalmente aos professores Pedro Peres, Ivanil Bonatti e Paulo Valente, e a Maurício de Oliveira, Reinaldo Martinez e Jaudelice Cavalcante pelo prazer de sua companhia durante todo o decorrer deste trabalho. Faço um agradecimento especial a Maurício de Oliveira, por seu apoio e sua contribuição em diversas discussões, técnicas e filosóficas, muitas delas regadas a cervejas e coxinhas, durante todo o decorrer deste trabalho.

Agradeço aos integrantes de minha banca de avaliação por sua contribuição para a melhora deste trabalho.

A FAPESP financiou parcialmente este trabalho de doutorado, assim como várias outras etapas de minha formação acadêmica. Sou muito agradecido a esta fundação por seu apoio.

Um grande apoio sempre me foi dado por meus pais, que souberam me educar e sempre me apoiaram em minhas decisões, por mais estranhas que elas pudessem parecer. Um agradecimento especial vai para minha esposa, Eliana, que sem dúvida foi quem mais sentiu os sábados e domingos de trabalho, mas que mesmo assim sempre me apoiou e contribuiu para que esta tese se tornasse realidade.

Resumo

Este trabalho lida com a estabilidade robusta de sistemas lineares invariantes no tempo frente a perturbações e incertezas de modelo, utilizando a técnica de passividade. Inicialmente estudamos a estabilidade robusta com a técnica de passividade. As classes de incertezas consideradas são caracterizadas, e o conceito de multiplicadores é apresentado e caracterizado para as classes de incertezas em questão. Em seguida, mostramos como é possível formular o problema da estabilidade robusta com desigualdades matriciais lineares (LMIs). Este problema é formulado e desenvolvido até sua solução. Focamos nossa atenção, a partir deste ponto, para a síntese de sistemas robustos. O problema da síntese de controladores passivos com limitantes \mathcal{H}_2 e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é apresentado e soluções são propostas. Em seguida, o problema da síntese de controladores que tornem o sistema em malha fechada passivo é discutido.

Abstract

This work deals with robust stability of linear time-invariant feedback systems against disturbances and model uncertainties, based on passivity techniques. First we discuss the robust stability of linear systems using the passivity concept. Then the uncertainty classes considered are presented and characterized, together with the multiplier concept and its characterization for the uncertainty classes. In the sequel it is shown how to formulate and solve the robust stability problem using linear matrix inequalities (LMIs). Our attention is then turned to the synthesis of robust systems. The problems of synthesis of passive controllers which also satisfy \mathcal{H}_2 and mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ criteria are analyzed, and solutions are presented. We finish with a discussion on the problem of synthesis of controllers which make the closed-loop system passive.

“Não existem contradições. Verifique suas premissas.”

Ayn Rand, em “Atlas Shrugged”

Contribuições deste trabalho

O objetivo principal deste trabalho era formular o problema de estabilidade robusta de sistemas lineares invariantes no tempo com o auxílio do teorema da passividade, com a convicção de que tal formulação permitiria compreender de forma mais apropriada uma série de resultados publicados na literatura, estes baseados em uma abordagem \mathcal{H}_∞ . O autor acredita que tal objetivo foi cumprido. As contribuições deste trabalho estão na sua maioria descritas em detalhes nos artigos fruto deste trabalho de tese, relacionados nas referências [GG98, GG97a, GG96b, GG96a, GG97b, GG].

Estágios anteriores deste trabalho podem ser encontrados em [Gap94, GG95, GG94].

Índice

I	Preliminares	2
1	Introdução	3
1.1	Introdução e Motivação	3
1.2	50 Anos de Passividade	5
2	Problemas Clássicos	7
2.1	Introdução e Motivação	7
2.2	Definições, Normas e Espaços Normados	8
2.3	Desigualdades Matriciais Lineares	15
2.4	O Problema \mathcal{H}_2	17
2.4.1	Cálculo da Norma	17
2.4.2	Cálculo do Controlador	17
2.5	O Problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	18
2.5.1	Cálculo da Norma	18
2.5.2	Cálculo do Controlador	18
3	Positividade Real	21
3.1	Introdução e Motivação	21
3.2	Preliminares	22
3.2.1	O Teorema da Passividade	24
3.2.2	Positividade Real	28
3.3	Multiplicadores	32
3.3.1	Motivação	32
3.3.2	Causalidade, estabilidade e a transformada de Laplace	33
3.3.3	Estabilidade com Multiplicadores	35
3.4	Discussão	36

II	Análise	37
4	Análise de Estabilidade	38
4.1	Introdução e Motivação	38
4.2	Estabilidade Robusta	40
4.2.1	Incertezas Não Lineares Diagonais	41
4.2.2	Incertezas Variantes no Tempo	43
4.2.3	Incertezas Paramétricas	43
4.3	Discussão	44
5	Análise Convexa de Estabilidade	45
5.1	Introdução	45
5.2	Incertezas Paramétricas	46
5.2.1	Preliminares	47
5.2.2	Análise de estabilidade com multiplicadores	50
5.2.3	Testes de Estabilidade Robusta com LMIs	55
5.2.4	Exemplo	55
5.3	Incertezas não lineares	57
5.4	Discussão	58
III	Síntese	59
6	Síntese de Controladores PR	60
6.1	Síntese de controladores com restrições \mathcal{H}_2	61
6.1.1	Introdução	61
6.1.2	Preliminares	62
6.1.3	Síntese	65
6.1.4	Exemplo	68
6.2	Síntese de Controladores SPR com restrições $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	71
6.2.1	Introdução	71
6.2.2	Definição do Problema	72
6.2.3	Síntese	76
6.2.4	Exemplo	80
6.3	Discussão	83
7	Controle PR	84
7.1	Introdução	84
7.2	Controle SPR	85

<i>ÍNDICE</i>	1
7.2.1 Realimentação de Estado	85
7.2.2 Realimentação de Saída	86
7.3 Controle SPR com Multiplicadores	87
7.3.1 Realimentação de Estado	88
7.3.2 Realimentação de Saída	89
7.4 Discussão	90
8 Conclusões	91
8.1 Conclusões Gerais	93
8.2 Problemas em Aberto e Trabalhos Futuros	93

Parte I
Preliminares

Capítulo 1

Introdução

“Evolução é uma integração da matéria e uma concomitante dissipação do movimento, durante as quais a matéria passa de uma homogeneidade indefinida, incoerente, para uma heterogeneidade definida, coerente; e durante as quais o movimento retido sofre uma transformação paralela.”

Herbert Spencer, em “First Principles”

1.1 Introdução e Motivação

A teoria de controle tem sido muito bem sucedida em relação a sistemas lineares. Uma série de técnicas permitem que controladores sejam projetados, com propriedades inclusive de otimalidade, por meio de procedimentos computacionais bem compreendidos e com desempenho previsível. Estas técnicas fazem com que o projeto de controladores lineares para sistemas lineares seja hoje um problema em grande parte resolvido, ao menos teoricamente.

Entretanto, nosso mundo é intrinsecamente não linear. Até que ponto o domínio de técnicas lineares pode ser provado eficaz? Experiências mostram que, em diversos casos, controladores lineares apresentam desempenho satisfatório em sistemas reais.

Não obstante, é necessário que empreguemos modelos mais completos de forma a aproximar melhor os sistemas que encontramos pelo mundo afora. Sem perder de foco a importância de trabalharmos com modelos lineares, por sua simplicidade de manipulação e maturidade de algoritmos e resultados, como podemos tornar nossos modelos mais próximos da realidade?

Uma forma de aproximar nossos modelos da realidade é permitindo a entrada de incertezas no modelo. O que são estas incertezas? Na maior parte das vezes, estas incertezas são nosso nome vago para a certeza de que sabemos que, apesar de utilizarmos um modelo linear, nosso sistema real não o é. Desta forma, desvios de linearidade, tais como uma saturação, podem ser levados em consideração, não como uma entidade conhecida, mas como um desvio do linear, que em geral é o caso mais simples de ser tratado. Estas incertezas, como veremos mais a frente, podem representar uma não linearidade no sistema, podem representar o desgaste mecânico, ao longo do tempo, de peças, ou ainda variações de parâmetros dos quais não se têm informações precisas. Em todos os casos desejamos poder obter um controlador linear que seja robusto a estas perturbações, que mantenha a estabilidade do sistema para aquele leque de variações em consideração.

Estas questões não são novas, e uma série de técnicas vêm sendo utilizadas para abordá-las nos últimos 50 anos. Nos últimos 10 anos, entretanto, um interesse significativo foi demonstrado em relação à estabilidade robusta, e várias técnicas foram aprimoradas, outras criadas, como o intuito de poder entender melhor estes sistemas, e em diversos casos produzir controladores para eles.

Este trabalho trata da questão de estabilidade robusta, em particular pela utilização da técnica de passividade. O autor é da opinião que esta técnica permite uma formulação mais amena para a compreensão da teoria de sistemas lineares com incertezas.

Esta técnica, como várias outras existentes na literatura, tem como base uma idéia muito simples, mas com grandes resultados se levada a fundo. Podemos entendê-la por meio de uma analogia simples com um sistema mecânico. Imagine um simples oscilador, por exemplo uma bolinha que caiu dentro da pia tampada. Ela vai de um lado para o outro, perdendo energia pelo atrito, até parar. A idéia básica é a de que um sistema que sempre perde energia tende a um ponto de equilíbrio. A técnica da passividade visa garantir a estabilidade robusta pela composição de sistemas que sempre perdem energia, ou sistemas passivos. Toda a manipulação matemática detalhada durante este trabalho tem por base esta idéia simples.

A organização deste texto é como segue. Inicialmente, tratamos de problemas clássicos que servirão de base para desenvolvimentos na linha da estabilidade por passividade (Capítulo 2). Em seguida, introduzimos mais formalmente os conceitos

de passividade, positividade real e outros conceitos associados, no Capítulo 3. Este capítulo encerra as preliminares. Em seguida abordamos o problema de análise de estabilidade, com um capítulo de base teórica (Capítulo 4), e outro com a implementação computacional destas técnicas (Capítulo 5). Passamos então para síntese de controladores, com síntese de controladores passivos (Capítulo 6), e síntese de controladores que tornam o sistema em malha fechada passivo (Capítulo 7). As conclusões do trabalho vêm a seguir.

1.2 50 Anos de Passividade

O problema de estabilidade robusta tem seu início nos problemas estudados por Lur'e na década de 40 [LP45]. Lur'e se preocupou com um problema que acabou conhecido por seu nome, o da estabilidade de sistemas lineares com uma não linearidade na malha de realimentação. Estes sistemas, conhecidos hoje por sistemas do tipo Lur'e, são os antecedentes diretos dos problemas de estabilidade robusta que vamos abordar.

O problema estudado por Lur'e era composto por um sistema linear na malha direta e por uma não linearidade na malha de realimentação. Simplificadamente, o problema de Lur'e pode ser assim enunciado: dado que a não linearidade está contida na classe \mathcal{N} , que restrições devem ser impostas à parte linear do sistema para que o sistema em malha fechada seja estável para qualquer não linearidade em \mathcal{N} ? Para exemplificar, \mathcal{N} era normalmente considerado como um setor do plano, por exemplo o primeiro e terceiro quadrantes.

Podemos mencionar características importantes deste problema:

- a estabilidade não era buscada para um sistema específico, mas para uma classe de sistemas e;
- Lur'e apresentou diversos resultados interessantes utilizando funções de Lyapunov dependentes da não linearidade, ou seja, funções de Lyapunov paramétricas [HB91, Gap94]

Grande ênfase foi dada à classe de não linearidades limitadas a um setor do plano. Desta forma esperava-se obter resultados que pudessem ser aplicados a todas as não linearidades daquela classe, sem que para isso houvesse a necessidade de um conhecimento mais apurado sobre a não linearidade específica que fazia parte da malha de realimentação. Desta época (1949) vem a famosa *conjectura de Aizermann* [Gap94], que propunha que um sistema seria absolutamente estável se ele fosse estável para cada linearidade daquela classe. Em outras palavras, Aizerman questionava as

condições sob as quais os setores de Hurwitz e de estabilidade absoluta coincidiriam. Infelizmente (ou felizmente para os pesquisadores da área), o problema não era simples assim, e a conjectura de Aizermann veio a ser derrubada em 1958 [Pli58].

Na década de 60 vários pesquisadores se debruçaram sobre este problema, sob o nome genérico de problema da estabilidade absoluta (veja [AG64] e suas referências). Desta época vem vários importantes resultados, tais como o critério de Popov [Pop61], que introduziu o conceito da análise de estabilidade pela utilização de *multiplicadores*. Outros trabalhos marcantes desta época são [NG64], que estudaram critérios com funções de Lyapunov; [Kal63] e [Yak64], que enunciaram o Lema de Kalman-Yakubovitch, relacionando os multiplicadores com funções de Lyapunov; e [Zam66a, Zam66b], que apresentou diversos resultados de estabilidade baseados na abordagem via análise funcional, entre eles o *Critério do Círculo*.

Na década de 70 todo este conhecimento foi catalisado por uma série de livros sobre o assunto [Wil71, NT73, DV75, AV77] e [Vid93, 1ª edição]

Esta classe de problemas só foi retornar à fronteira da linha de pesquisa em controle ao fim da década de 80 e início da década de 90, já associada ao problema da estabilidade robusta. Neste contexto se insere este trabalho.

Capítulo 2

Problemas Clássicos

“A lição aqui é que é insuficiente nos protegermos com leis; precisamos nos proteger com matemática.”

Bruce Schneier, em “Applied Cryptography”

2.1 Introdução e Motivação

Nosso objetivo neste capítulo é referenciar alguns problemas clássicos em teoria de controle, introduzindo alguns resultados conhecidos que serão estendidos em capítulos subsequentes. Em especial, desejamos formular os problemas \mathcal{H}_2 e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, que serão generalizados no Capítulo 6.

Nas seções seguintes apresentamos os conceitos de normas e espaços normados, desigualdades matriciais lineares e, finalmente, abordados os problemas \mathcal{H}_2 e $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

O sistema considerado neste capítulo será o seguinte:

$$\mathcal{G} = \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = C_y x + D_y w \\ z_2 = C_z x + D_z u \end{cases} \quad (2.1)$$

onde y é a saída medida e z_2 é a saída ponderada. Assumimos que $C'_y D_y = 0$ e $C'_z D_z = 0$. Assumimos também, por simplicidade, que $D_y D'_y$ e $D'_z D_z$ são inversíveis, que os pares (A, B_u) e (A, B_w) são estabilizáveis, e que os pares (A, C_y) e (A, C_z) são detectáveis [DGKF89].

2.2 Definições, Normas e Espaços Normados

Nesta seção introduzimos conceitos essenciais para as análises feitas nas seções e capítulos subsequentes. Assumimos que o leitor tem uma boa base no segundo método de Lyapunov e, portanto, apenas as definições e conceitos mais importantes serão apresentados. Por outro lado, assumimos também que o leitor tem pouca ou nenhuma familiaridade com métodos de análise funcional e, por conseguinte, apresentamos os conceitos mais detalhadamente e com maior número de exemplos. Os exemplos contêm também extensões e detalhes da teoria. Esta seção está organizada em uma série de definições e numerosos exemplos. Primeiramente, são apresentados conceitos gerais, em seguida conceitos relacionados à análise de Lyapunov e, por fim, conceitos de análise Entrada-Saída.

Apresentamos inicialmente o conceito de uma medida de distância em um espaço vetorial. Apesar de ser um conceito básico, apresentamo-lo como motivação para uma série de exemplos. Para maiores informações sobre espaços vetoriais e conceitos afins, o leitor deve consultar [ND88, LT85].

Definição 1 (Norma) *Uma norma em um espaço vetorial \mathcal{V} é uma função que associa a cada vetor v deste espaço vetorial um escalar real não negativo $\|v\|$ e que satisfaz às seguintes propriedades:*

1. $\|v\| > 0 \quad \forall v \neq 0$, e $\|v\| = 0$ se $v = 0$;
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, v$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triangular).

Exemplo Ilustrativo 1 (Normas vetoriais) *Para vetores $v \in \mathbb{C}^n$ definimos a norma p como sendo*

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |v_i|^p} \quad (2.2)$$

Em particular, as seguintes normas são muito utilizadas:

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &= |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \\ \|v\|_2 &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \\ \|v\|_\infty &= \max [|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|] \end{aligned}$$

Exemplo Ilustrativo 2 (Normas matriciais induzidas) *As normas vetoriais p induzem normas matriciais p . Sejam $v \in \mathbb{C}^n$ e $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Definimos então*

$$\|A\|_p = \max_{v \neq 0} \left\{ \frac{\|Av\|_p}{\|v\|_p} \right\} \quad (2.3)$$

Exemplo Ilustrativo 3 (Norma de Frobenius) *A norma de Frobenius ou norma Euclideana é definida como*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} \quad (2.4)$$

para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Exemplo Ilustrativo 4 (Valor singular estruturado (μ)) *Seja a matriz $\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}$ definida por*

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 I_{n_1} & & & & & \\ & \delta_2 I_{n_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \Delta_{m-1} & & \\ & & & & \Delta_m & \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

onde $n_i \in \mathbb{N}$, $\delta_i \in \mathbb{R}$, $\Delta_i \in \mathbb{C}^{q_i \times q_i}$ e I_k é a matriz identidade de dimensão k . Seja $\mu(G)$ definido por [PD93]

$$\mu(G) = \frac{1}{\min \{\bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - G\Delta) = 0\}} \quad (2.6)$$

onde $\bar{\sigma}(G)$ é definido como o valor singular máximo da matriz G . Podemos verificar que $\|A\|_\mu = \mu(G)$ não é uma norma, pois não satisfaz a desigualdade triangular.

Exemplo Ilustrativo 5 (Normas de funções no tempo) *Seja o vetor $x(t)$. Sua norma p é dada por*

$$\|x(t)\|_p = \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^p dt} \quad (2.7)$$

Convém ainda lembrar das seguintes relações:

$$\|x(t)\|_\infty = \sqrt{\sup_t x(t)'x(t)} \quad (2.8)$$

e da seguinte relação, conhecida como teorema de Parseval:

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x'(t)x(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(jw)X(jw) dw} \quad (2.9)$$

onde $X(jw)$ é a transformada de Fourier de $x(t)$. Em todos os casos supõe-se que $x(t)$ seja tal que a norma apropriada exista.

Por todo este texto, a notação $\|\cdot\|$ deve ser compreendida como a norma $\|\cdot\|_2$, salvo indicação em contrário.

Em seguida, introduzimos o conceito de *função de Lyapunov*. Apesar de não ser necessariamente uma norma, funções de Lyapunov são utilizadas como medidas da distância do estado de um sistema à origem.

Definição 2 (Função de Lyapunov) *Seja $x = x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Uma função $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função de Lyapunov se*

1. $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$, e $V(0) = 0$;
2. $V(x)$ tem derivadas parciais contínuas;
3. $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \neq 0$, e $\dot{V}(0) = 0$;
4. $V(x) \rightarrow \infty$ para $\|x\| \rightarrow \infty$;
5. $\dot{V}(x)$ é não identicamente nula em todas as soluções que não $x \equiv 0$.

Dado um sistema $\dot{\zeta} = f(\zeta)$, se existir uma função de Lyapunov $V(\zeta)$, então o ponto de equilíbrio $\zeta = 0$ é estável. Entretanto, em muitos casos, estamos interessados na estabilidade assintótica de um sistema. A estabilidade assintótica pode ser obtida pela existência de uma função de Lyapunov semelhante à acima, apenas exigindo a desigualdade estrita no item 3.

O conceito de função de Lyapunov foi introduzido por Lyapunov no fim do século XIX. Seu trabalho foi traduzido para o francês na virada do século, em Toulouse, e foi utilizado na Rússia e leste europeu na primeira metade deste século, mas só foi “descoberto” no ocidente na década de 60.

Exemplo Ilustrativo 6 Em [KB60], Kalman e Bertram praticamente introduzem no mundo ocidental a teoria de Lyapunov. Seja o sistema não-linear

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - ax_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

com $a > 0$. Definindo $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, podemos calcular \dot{V}

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2a(x_1^2 + x_2^2)^2 = -2aV^2(x)$$

que é sempre negativa a não ser que $x_1 = x_2 = 0$. Portanto, podemos concluir que o ponto $x_1 = x_2 = 0$ é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável do sistema.

O conceito de função positiva real é muito importante em teoria de sistemas, estando relacionado com diversos resultados distintos. Apresentamos a seguir uma série de condições equivalentes para a caracterização de funções com esta propriedade. Para maiores detalhes, o leitor pode consultar as fontes de cada um dos resultados abaixo.

Definição 3 (Funções positivas reais) Seja $s = \sigma + jw$. As seguintes afirmações são equivalentes [NT73]:

1. $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = C(sI - A)^{-1}B$ é positiva real;
2. $G \geq 0$;
3. $G(s)$ é SISO e $G(\sigma)$ é real e $\text{Real}\{G(s)\} \geq 0 \quad \forall \sigma > 0$;
4. $\inf_{w \in \mathbb{R}} \underline{\lambda}[G(jw) + G^*(jw)] \geq 0$ [Vid93];
5. $\exists P = P' > 0$ e $Q = Q' > 0$ tais que $A'P + PA = -Q$ e $PB = C'$.
6. $\text{Real}\{G(0)\} > 0$, $N(s)$ é Hurwitz, $D(s) + j\alpha N(s)$ é Hurwitz $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ [CDB91].

onde $\underline{\lambda}[X]$ é o autovalor mínimo de X .

Uma função estritamente positiva real requer uma caracterização ainda mais forte.

Definição 4 (Função estritamente positiva real) A função $G(s)$ é estritamente positiva real, $G > 0$, se $G(s - \epsilon)$ é positiva real, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Em seguida, apresentamos alguns dos importantes resultados obtidos por Kalman e Yakubovitch, de forma independente, na década de 60. Com este resultado, foi possível unificar os trabalhos de Popov com os resultados obtidos via função de Lyapunov para o problema de Lur'e. Conforme colocado por diversos autores, este resultado tem importância por si só.

Lema 1 (Lema de Kalman-Yakubovitch) *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, com A uma matriz Hurwitz, o par (A, b) completamente controlável, um vetor real k , um escalar real α . Então existe um vetor real q e matrizes $P = P' > 0$ e $Q = Q' \geq 0$ tais que*

$$\begin{aligned} A'P + PA &= -qq' - Q \\ Pb - k &= \sqrt{\alpha} q \end{aligned}$$

e o par (A, q') é completamente observável se e somente se $H \geq 0$, onde

$$H(s) = \frac{1}{2}\alpha + k'(sI - A)^{-1}b$$

Prova A prova pode ser encontrada em [NT73]. ■

Durante anos procurou-se estender o Lema de Kalman-Yakubovitch para o caso multivariável. Apresentamos aqui uma versão deste lema.

Lema 2 (Lema de Kalman-Yakubovitch matricial) *Sejam $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com A Hurwitz, o par (A, B) controlável, o par (A, C) observável e defina $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Então existem matrizes $P = P' > 0$, Q e W tais que*

$$\begin{aligned} A'P + PA &= -Q'Q \\ B'P + W'Q &= C \\ W'W &= D + D' \end{aligned}$$

se e somente se

$$G(jw) + G^*(jw) > 0$$

Prova A prova pode ser encontrada em [Vid93]. ■

A seguir introduzimos conceitos e notação referentes à análise funcional. São introduzidos conceitos que permitem tratar funções de normas infinitas em espaços funcionais adequados e, em seguida, são introduzidos os conceitos de *passividade* e *pequeno ganho de malha*.

Definição 5 (Espaços funcionais) Definimos o seguinte espaço funcional: \mathcal{L}_p é o espaço das funções tais que $\|f(t)\|_p < \infty$;

Definição 6 (Truncamento de Função [Vid93]) Seja f uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos f_τ como o τ -truncamento de f , ou seja, a função

$$f_\tau(t) = \begin{cases} f(t), & \forall t < \tau \\ 0, & \forall t \geq \tau \end{cases} \quad (2.10)$$

Exemplo Ilustrativo 7 (Truncamento de função) O conceito de função truncada é essencial para que possamos tratar funções “explosivas”, ou seja, funções cuja norma cresce sem limite quando $t \rightarrow \infty$. Por exemplo, seja $f(t) = e^t$. Claramente $f \notin \mathcal{L}_p$. Entretanto, $f_\tau \in \mathcal{L}_p \quad \forall \tau < \infty$.

Definição 7 (Generalização de um espaço linear normado) Definimos que a generalização de um espaço linear normado X é chamada de X_e e caracterizada como o espaço das funções cujo truncamento está em X , isto é,

$$X_e = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad e \quad f_\tau \in X \quad \forall \tau < \infty\}$$

Para este espaço, definimos sua norma generalizada como

$$\|f\|_{pe} = \begin{cases} \|f\|_p, & \text{se } f \in X \\ \infty, & \text{se } f \notin X \end{cases}$$

Definição 8 (Operador causal) Seja $M : \mathcal{L}_{pe} \rightarrow \mathcal{L}_{pe}$. Então M é causal se

$$(My)_T = (My_T)_T \quad \forall T \geq 0, \quad \forall y \in \mathcal{L}_{pe}^n$$

Definição 9 (Estabilidade \mathcal{L}_p) Seja M um operador em \mathcal{L}_{pe} . Então

1. M é \mathcal{L}_p estável se $y = Mx$, $x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow y \in \mathcal{L}_p$;
2. M é \mathcal{L}_p GF-estável se M é estável e $y = Mx$, $x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow \|y\|_p \leq \alpha_p \|x\|_p + \beta_p$, α_p e β_p constantes;
3. M é \mathcal{L}_p GFSB-estável se M é estável e $y = Mx$, $x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow \|y\|_p \leq \alpha_p \|x\|_p$, α_p constante;

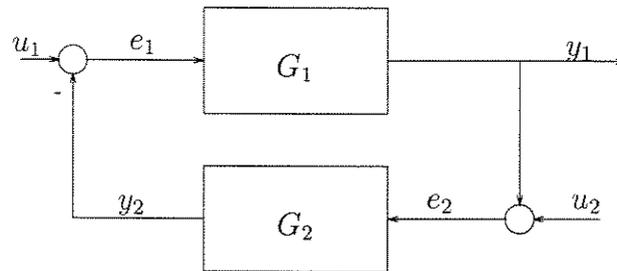


Figura 2.1: Sistema realimentado genérico.

Nos casos 2 e 3 da definição acima a constante α_p é chamada de *ganho p do operador*.

Introduzimos agora dois fortes conceitos para a estabilidade de sistemas dinâmicos, os conceitos de passividade e pequeno ganho de malha. O primeiro impõe restrições à fase do sistema, ou seja, o sistema é passivo se a diferença de fase entre entrada e saída nunca exceder $\pi/2$ radianos em módulo. O segundo restringe a ganho de malha de um sistema realimentado, e garante a estabilidade se o ganho de malha for sempre menor do que 1.

Teorema 1 (Teorema dos Pequenos Ganhos de Malha) *Seja o sistema realimentado dado por*

$$e_1 = u_1 - y_2 \quad (2.11a)$$

$$e_2 = u_2 + y_1 \quad (2.11b)$$

$$y_1 = G_1 e_1 \quad (2.11c)$$

$$y_2 = G_2 e_2 \quad (2.11d)$$

(figura 2.1, p. 14), e $p \in [1, \infty]$ fixo. Suponha que G_1 e G_2 são operadores causais e \mathcal{L}_p GFSSB-estáveis. Defina $\alpha_1 = \alpha_p(G_1)$ e $\alpha_2 = \alpha_p(G_2)$. Com estas condições o sistema dado pelas equações (2.11) é \mathcal{L}_p estável se

$$\alpha_1 \alpha_2 < 1. \quad (2.12)$$

O leitor deve notar que este teorema está diretamente relacionado com resultados de estabilidade obtidos pela análise do valor singular estruturado para incertezas estruturadas, e pela análise de pior caso obtida na teoria de \mathcal{H}_∞ . Ao atentar ao fato de que o teorema acima aplica-se inclusive ao caso de dois operadores quaisquer, o leitor pode ter uma idéia mais clara em relação à conservatividade dos resultados obtidos por μ e \mathcal{H}_∞ em sistemas lineares. Esta conservatividade provém do fato de

que na análise do problema não são levadas em conta todas as características do sistema linear em estudo.

Definição 10 (Passividade) Um operador $G : \mathcal{L}_{pe} \rightarrow \mathcal{L}_{pe}$ é passivo se

$$\langle x, Gx \rangle \geq 0 \quad \forall T \geq 0, \forall x \in \mathcal{L}_{2e}$$

e é estritamente passivo se $\exists \epsilon > 0$ tal que

$$\langle x, Gx \rangle \geq \epsilon \|x\|_{2T}^2 \quad \forall T \geq 0, \forall x \in \mathcal{L}_{2e}$$

Teorema 2 (Teorema da Passividade) Considere o sistema dinâmico da figura 2.1, p. 14, equação (2.11). Suponha que existam constantes $\delta_1, \delta_2, \epsilon_1$ e ϵ_2 tais que

$$\langle x, G_i x \rangle_T \geq \epsilon_i \|x\|_{2T}^2 + \delta_i \|G_i x\|_{2T}^2 \quad \forall T \geq 0, \forall x \in \mathcal{L}_{2e}, \quad i = 1, 2.$$

então o sistema é \mathcal{L}_{2e} GFSB-estável se

$$\delta_1 + \epsilon_2 > 0 \quad \delta_2 + \epsilon_1 > 0$$

2.3 Desigualdades Matriciais Lineares

Uma técnica muito importante que vem tomando força nos últimos anos é a de desigualdades matriciais lineares, ou LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) [BGFB94]. LMIs são, como o nome diz, desigualdades de matrizes onde as variáveis podem ser tanto matrizes quanto escalares.

Por exemplo, a desigualdade $x < -1$, para x escalar, tem como conjunto solução o conjunto dos valores tais que $-x$ é maior do que a unidade. Da mesma forma, a LMI

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} < 0$$

para x escalar, tem o mesmo conjunto solução. Note que a desigualdade matricial é tomada em função do sinal da forma quadrática associada à matriz [Str].

A formulação de problemas de controle baseados em problemas de factibilidade e otimização envolvendo LMIs tem diversas características interessantes [dO96]. Dentre elas, podemos destacar suas propriedades numéricas favoráveis para otimização. A otimização de LMIs pode ser vista como uma generalização dos métodos

de otimização linear [dO96], e uma série de algoritmos, dentre eles se destacando os algoritmos de pontos interiores, permitem sua solução em tempo polinomial. Mais ainda, o desempenho destes algoritmos não fica limitado à teoria, apresentando bons resultados na prática, com boas propriedades de escalabilidade. Desta forma, é possível resolver problemas com milhares de variáveis em computadores pessoais convencionais. Diversos pacotes, comerciais e não-comerciais, existem para a solução de problemas de LMIs [dO96].

Na verdade, dezenas de problemas importantes de teoria de controle já foram formulados como problemas de otimização envolvendo LMIs, e uma série de outros problemas foram formulados diretamente em LMIs, abrindo novas fronteiras de pesquisa [BGFB94]. A formulação de um problema como otimização envolvendo LMIs, dadas suas propriedades, implica na sua solução teórica e numérica.

Exemplo Ilustrativo 8 *Tomemos como exemplo de uma LMI aquela que é, talvez, a desigualdade mais importante de teoria de controle, a equação de Lyapunov. Para a estabilidade do sistema linear $\dot{x} = Ax$ basta testar a factibilidade da LMI*

$$A'P + PA < 0$$

para $P > 0$. Note que outras restrições, tais como uma margem de estabilidade dada por λ , podem ser inseridas imediatamente, sem prejuízo das condições de solvabilidade. Neste caso, a LMI passa a ser

$$(A + \lambda I)'P + P(A + \lambda I) < 0$$

para $P > 0$. Em [BGFB94] o leitor vai encontrar um catálogo de problemas formulados como LMIs.

As LMIs apresentam ainda uma propriedade de suma importância, sua convexidade. Isto significa que a formulação de um problema de controle como um problema de LMI com domínio convexo implica nas seguintes propriedades: se existir um ótimo, ele será encontrado, e será o ótimo global do problema de otimização; se não for possível obter um ponto ótimo, ele não existe. O leitor não deve subestimar a importância destas propriedades. Um de nossos objetivos neste trabalho foi formular tantos problemas quanto possível como problemas expressos por LMIs, devido às propriedades acima mencionadas.

2.4 O Problema \mathcal{H}_2

2.4.1 Cálculo da Norma

Considere o sistema (2.1). O cálculo da norma \mathcal{H}_2 da entrada w para a saída y pode ser feito tanto por meio do Gramiano de controlabilidade como por meio do Gramiano de observabilidade [DGKF89]. Seja L_c o gramiano de controlabilidade e L_o o gramiano de observabilidade, e suponha que $D_y = 0$. Então temos que

$$AL_c + L_cA' + B_wB_w' = 0 \quad (2.13)$$

e

$$A'L_o + L_oA + C_y' C_y = 0 \quad (2.14)$$

A norma \mathcal{H}_2 do sistema pode então ser calculada como

$$\|G\|_2^2 = \text{Tr} (C_y L_c C_y') = \text{Tr} (B_w' L_o B_w). \quad (2.15)$$

2.4.2 Cálculo do Controlador

O problema \mathcal{H}_2 pode ser formulado como se segue. Dada uma condição inicial $x(0) = 0$, desejamos encontrar a entrada u que minimiza a energia da saída, $\|z_2\|_2^2$.

A solução deste problema pode ser obtida de diversas formas [DGKF89, BGFB94], levando ao ganho constante dado por $u = -K_2x$, onde

$$K_2 = (D_z' D_z)^{-1} B_u' P_2 \quad (2.16)$$

e P_2 é a solução definida positiva da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_u(D_z' D_z)^{-1} B_u' P + C_z' C_z = 0 \quad (2.17)$$

Uma outra forma de encontrar a solução do problema linear quadrático (LQR) é pela solução de um problema de otimização baseado em LMIs [GPB91, GPS92]. Com esta formulação, a solução é dada por $u = -Kx$, onde

$$K = YQ_2^{-1} \quad (2.18)$$

onde Q_2 é a solução definida positiva de

$$\min x(0)' Q x(0) \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} AQ + QA' + B_u Y + Y' B_u' & (C_z Q + D_z Y)' \\ C_z Q + D_z Y & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.20)$$

No caso em que o estado não está disponível para o controle por realimentação, podemos utilizar um observador de estados, e prosseguir como acima. Vamos utilizar o observador que minimiza a variância do estimador de estado, obtido pelo ganho [DGKF89]

$$L_2 = S_2 C_y' (D_y D_y')^{-1} \quad (2.21)$$

onde $S_2 = S_2' > 0$ é a solução de

$$A'S + SA - SC_y'(D_y D_y')^{-1}C_y S + B_w B_w' = 0 \quad (2.22)$$

É importante mencionar que uma importante propriedade, conhecida como o princípio da separação, é verificada neste caso [DGKF89]. Esta propriedade nos permite calcular o controlador dinâmico de saída pela composição do controlador estático ótimo, dado por (2.18), e pelo observador ótimo, dado por (2.21). Em outras palavras, o problema é desacoplado, e pode ser resolvido pela combinação da solução de cada uma de suas partes.

2.5 O Problema $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

2.5.1 Cálculo da Norma

Considere mais uma vez o sistema (2.1), ainda de w para y com $D_y = 0$ e A estável. O cálculo da norma \mathcal{H}_∞ da entrada w para a saída y é feito de forma iterativa com o auxílio da matriz Hamiltoniana [DGKF89]. Para $\gamma > 0$, definimos a matriz Hamiltoniana como

$$H(G) = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_w B_w' \\ -C_y' C_y & -A' \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Então temos o resultado que $\|G\|_\infty < \gamma$ se $H(G)$ não possuir autovalores no eixo imaginário [DGKF89]. Com este resultado um procedimento iterativo para cálculo de γ pode ser efetuado.

2.5.2 Cálculo do Controlador

No problema Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ desejamos minimizar um limitante superior do custo \mathcal{H}_2 , mas mantendo um limitante pré-determinado no custo \mathcal{H}_∞ . A estrutura básica do sistema é a dada por (2.1), com uma saída adicional,

$$z_\infty = C_{z_\infty} x + D_{z_\infty} u, \quad (2.24)$$

que pondera o custo \mathcal{H}_∞ . Consideramos que $C'_{z_\infty} D_{z_\infty} = 0$ e $D'_{z_\infty} D_{z_\infty} > 0$.

Vamos trabalhar com o limitante superior do custo \mathcal{H}_2 dado pelo custo misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ enunciado em [19, p. 74] [CGL97]. Para este caso, o custo ótimo é dado por

$$J_\gamma = \inf \text{Tr} (C_z P C'_z) \quad (2.25)$$

onde o ínfimo é tomado dentre todas as matrizes $P = P' > 0$ tais que

$$AP + PA' + \gamma^{-2} P C'_{z_\infty} C_{z_\infty} P + B_w B'_w \leq 0 \quad (2.26)$$

Tomando esta definição do custo, podemos obter um controlador estático tal que J_γ seja minimizado mantendo a norma \mathcal{H}_∞ inferior ou igual a γ [KR91]. Para tanto, devemos calcular [KR91, CGL97]

$$K_\infty = (D'_z D_z)^{-1} B'_u P_\infty \quad (2.27)$$

onde $P_\infty > 0$ é a solução da equação quadrática

$$A'P + PA + C'_{z_\infty} C_{z_\infty} - P B_u (D'_0 D_0)^{-1} B'_u P + \gamma^2 P D_z D'_z P = 0 \quad (2.28)$$

Para calcular o controlador dinâmico de saída que minimiza um limitante superior para o critério misto, utilizamos um procedimento semelhante ao empregado no caso \mathcal{H}_2 . Neste caso, o observador de estados pode ser obtido pela solução $Y_\infty > 0$ da equação

$$AY + YA' + \gamma^{-2} Y C'_0 C_0 Y - Y C'_y (D_y D'_y)^{-1} C_y Y + B_w B'_w = 0 \quad (2.29)$$

de onde podemos calcular

$$L_\infty = Y_\infty C'_y (D_y D'_y)^{-1} \quad (2.30)$$

Definindo o sistema auxiliar \mathcal{F} como

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \dot{x} = A_\infty x + L_\infty D_y w + B_u u \\ z_1 = C_z x + D_z u \\ z_0 = C_0 x + D_0 u \\ u = -Kx \end{cases} \quad (2.31)$$

onde $A_\infty = A + \gamma^{-2} Y_\infty C'_0 C_0$, impomos a propriedade da separação, como no caso \mathcal{H}_2 . Consequentemente, podemos solucionar o problema do controlador dinâmico de

saída pela solução do problema estático na planta auxiliar \mathcal{F} , com custo total dado por

$$J_\gamma(\mathcal{H}) = \text{Tr} (C_0 Y_\infty C_0') + J_\gamma(\mathcal{F}) \quad (2.32)$$

Este problema também pode ser resolvido por meio de LMIs. Tomando por base a planta auxiliar \mathcal{F} , podemos obter o ganho ótimo de controle pela solução de

$$\bar{J}_\gamma = \min \text{Tr} (Z) \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} P & PC_0' - W'D_0' \\ C_0P - D_0W & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{bmatrix} A_\infty P + PA_\infty' - B_u W - W'B_u' + L_\infty D_y D_y' L_\infty' & PC_z' - W'D_z' \\ C_z P - D_z W & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.35)$$

nas variáveis Z, P, W , e $K = WP^{-1}$. Esta formulação permite a inclusão de novas restrições com muito mais facilidade. Veja a seção 6.2.3, p. 76.

Capítulo 3

Positividade Real

“Não podemos evitar a sensação de que estas fórmulas matemáticas têm uma existência independente, uma inteligência própria, e que elas são mais sábias do que nós, mais sábias mesmo que seus descobridores, e que tiramos delas mais do que foi originariamente posto nelas.”

Heinrich Hertz

3.1 Introdução e Motivação

O conceito de passividade teve sua origem em teoria de circuitos, onde esteve sempre relacionado ao conceito de dissipação de energia. De forma pouco precisa mas muito intuitiva, diz-se que um circuito é passivo se e somente se ele não gera energia. Analogamente, um circuito é estritamente passivo se ele dissipa energia. Desde cedo as relações entre passividade e estabilidade foram reconhecidas, e subsequentemente generalizadas.

Grande parte do desenvolvimento deste trabalho está baseado na simples relação entre passividade e dissipação de energia, que por sua vez se relaciona diretamente com estabilidade. Note que a interconexão de sistemas que dissipam energia também dissipa energia. Note ainda que sistemas que sempre dissipam energia tendem a um valor de energia mínimo. A utilização matematicamente precisa e consistente destas

idéias nos levará a uma poderosa teoria de estabilidade, que servirá de base aos capítulos subsequentes.

Mais especificamente, os conceitos de passividade e passividade estrita são apresentados e discutidos. Baseado nestes conceitos, o resultado fundamental deste capítulo, o teorema da passividade, é apresentado. A seguir o conceito de positividade real para sistemas lineares invariantes no tempo é apresentado, juntamente com uma série de caracterizações algébricas de positividade real. As limitações desta teoria são discutidas, e uma abordagem para contornar parcialmente estas limitações, a teoria de multiplicadores, é apresentada. Finalmente, uma relação entre estes resultados e a teoria baseada em norma \mathcal{H}_∞ é discutida.

3.2 Preliminares

Motivação

Considere um circuito linear composto por uma fonte de tensão ideal E , uma chave ideal, um indutor ideal L e um capacitor ideal C , conectados conforme a figura 3.1.

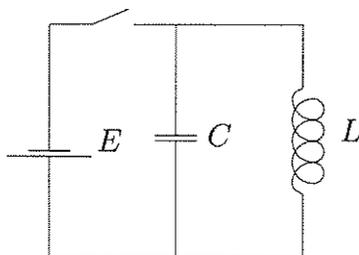


Figura 3.1: Circuito linear

Suponha que a fonte de tensão gera uma tensão constante e que, no instante $t = 0$ a chave é imediatamente fechada e reaberta. A análise da dinâmica deste circuito leva ao seguinte polinômio característico:

$$P(s) = LCs^2 + 1$$

Claramente o circuito não é assintoticamente estável, uma vez que existem oscilações em regime permanente. Em outras palavras, o sistema armazenou a energia que lhe foi fornecida.

Considere, entretanto, o mesmo circuito com os componentes L e C substituídos por componentes realizáveis, ou seja, considere que existe uma resistência em série com o indutor e uma resistência em paralelo ao capacitor. Nestas condições, a repetição de nosso breve experimento leva à

$$P(s) = LCs^2 + (R_L C + L/R_C)s + 1 + R_L/R_C$$

na qual vemos que as oscilações são amortecidas.

Em outras palavras, a substituição de componentes ideais por componentes realizáveis, que sempre dissipam energia, leva a uma configuração estável do circuito. Este argumento pode ser generalizado para circuitos mais complexos do que aquele aqui considerado. De forma geral, a solução não forçada de um circuito que sempre dissipa energia tende a zero.

Os parágrafos acima ilustram a idéia básica por trás do desenvolvimento que se segue. Estes conceitos serão generalizados para uma forma que não necessariamente deve ser interpretada como dissipação de energia.

O Operador de Truncamento

A necessidade de analisar a estabilidade de sistemas dinâmicos requer que possamos tratar sinais não limitados, isto é, sinais cuja norma tende a infinito na medida em que o tempo passa. Mais ainda, desejamos, na medida do possível, utilizar todo o ferramental matemático usual nas manipulações de sistemas. Em seu excelente trabalho [Zam66a], Zames delinea uma abordagem que se tornaria a base da teoria de passividade. Esta abordagem consiste, simplificada, em trabalhar sempre com sinais de norma finita através de seu truncamento no tempo. Desta forma sinais “explosivos,” tais como e^t , são tratados via seu truncamento, ou seja, são o mesmo sinal até um instante arbitrário T e, a partir deste instante, são identicamente nulos. As seções subsequentes deste capítulo mostrarão a eficácia da aplicação deste conceito. Note que esta abordagem pressupõe sinais que explodem em $t \rightarrow \infty$, e não se adequa bem a sinais de tempo de escape finitos.

Baseando-nos no conceito de função truncada (Definição 6), podemos definir uma série de espaços funcionais sobre os quais podemos trabalhar com funções explosivas. Estes espaços preservam várias das propriedades dos espaços \mathbb{L}_p .

Definição 11 (Espaço Estendido) *Seja \mathbb{A} um espaço linear normado. O espaço \mathbb{A}_e contém todas as funções h tais que $h_T \in \mathbb{A}$ para todo T finito. O espaço \mathbb{A}_e será chamado de extensão de \mathbb{A} .*

Note que o espaço \mathbb{A} é sempre um subconjunto de \mathbb{A}_e .

Definição de Passividade

Nesta seção exploramos o conceito de passividade, que servirá de ponto de partida para a teoria de estabilidade aqui utilizada. O leitor deve atentar para o fato de a definição de passividade requerer uma estrutura topológica complexa, explicitada na necessidade de utilização de um produto interno. Consequentemente, os conceitos de passividade apenas se aplicam diretamente a sistemas quadrados definidos em um espaço de Hilbert.

Definição 12 (Passividade[Vid93]) *Seja \mathbb{A}_e um espaço de Hilbert. Considere o operador $\mathcal{G} : \mathbb{A}_e \rightarrow \mathbb{A}_e$. \mathcal{G} é passivo se*

$$\langle x, \mathcal{G}(x) \rangle_T \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{A}_e, \forall T \geq 0. \quad (3.1)$$

O operador \mathcal{G} será estritamente passivo se ele for passivo e existir uma constante $\epsilon > 0$ tal que

$$\langle x, \mathcal{G}(x) \rangle_T \geq \epsilon \|x\|_T^2 \quad \forall x \in \mathbb{L}_{2e}, \forall T \geq 0. \quad (3.2)$$

3.2.1 O Teorema da Passividade

Baseando-nos nos resultados anteriores, é possível enunciar um poderoso teorema de estabilidade para sistemas passivos, conhecido na literatura por teorema da passividade. Este teorema foi proposto pela primeira vez por Zames [Zam66a], e foi subsequentemente generalizado por outros autores [Vid93, e referências]. Neste trabalho consideraremos o teorema da passividade não em sua forma mais genérica, mais sim em um formato adequado às nossas necessidades.

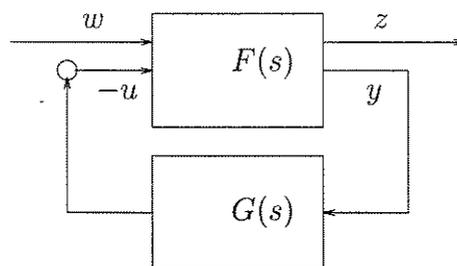


Figura 3.2: Sistema Realimentado

O sistema em estudo é apresentado na Figura 3.2. Ele é basicamente composto de dois subsistemas conectados por uma malha de realimentação. Para efeito de normalização, chamaremos o sistema na malha direta de planta. O sistema na malha de

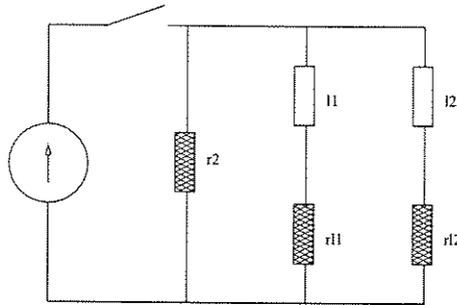


Figura 3.3: Diagrama do circuito.

realimentação pode vir a ser tanto um controlador como uma perturbação, conforme o estudo sendo exercitado.

O Teorema da Passividade propõe condições para que os sinais internos da malha de realimentação pertençam a determinados espaços sempre que as entradas pertencerem a estes espaços. Em linguagem pouco precisa, o Teorema da Passividade responde à questão: dado que a entrada é “bem comportada,” quais as condições sobre os sistemas que compõe a malha para que a saída seja “bem comportada?” Note que a saída é um sinal interno da malha.

Uma das questões que pode ser atacada com o teorema da passividade é a questão da estabilidade, tema principal de nosso estudo. Neste caso, desejamos obter condições sobre os componentes da malha de forma que, por exemplo, a saída pertença a \mathbb{L}_2 sempre que a entrada pertencer a este mesmo espaço.

Seja \mathcal{S} o sistema da Figura 3.2. Mais precisamente:

Teorema 3 (Teorema da Passividade [DV75]) *Considere $F, G : \mathbb{A}_e \rightarrow \mathbb{A}_e$. Seja o sistema dinâmico regido por*

$$y_1 = u - Fy_2 \tag{3.3}$$

$$y_2 = Gy_1 \tag{3.4}$$

Suponha que para todo $u \in \mathbb{A}$ existem soluções y_1 e $y_2 \in \mathbb{A}_e$. Com estas condições, se G é passivo, F é estritamente passivo e $u \in \mathbb{A}$, então $y_2 \in \mathbb{A}$.

Prova Desejamos mostrar que y_2 pertence a \mathbb{A} nas condições do teorema. Aplicando a desigualdade de Schwarz e utilizando a linearidade do produto interno temos

$$\begin{aligned} \langle u, y_2 \rangle_T &= \langle y_1, y_2 \rangle_T + \langle Fy_2, y_2 \rangle_T \\ &\geq \delta \|y_2\|_T^2 \end{aligned}$$

Programa Spice 1 Ilustração de circuito internamente instável.

Exemplo Ilustrativo 9 exemplo de circuito passivo

nao internamente estavel

* circuito composto por dois indutores e um resistor em paralelo

Iin 1 0 pulse (0 1)

l1 1 2 1

r11 2 0 0.000001

l2 1 3 2

r12 3 0 0.000001

r2 1 0 1

.tran 0.1 20

.plot tran v(1) i(Iin)

.end

onde δ é uma constante positiva. Como $u \in \mathbb{A}$,

$$\|u\| \|y_2\|_T \geq \delta \|y_2\|_T^2 \quad \forall T \in \mathbb{R}$$

Logo $\|y_2\|$ é limitada para todo T . Consequentemente, $y_2 \in \mathbb{A}$. ■

Um teorema de estabilidade segue diretamente se considerarmos, por exemplo, $\mathbb{A} = \mathbb{L}_2$. Note que o teorema nada diz sobre os outros sinais internos, tais como y_1 e Fy_2 . Estes sinais podem ter normas ilimitadas, ou seja, o sistema pode não exibir estabilidade interna. Este caso é melhor ilustrado com um exemplo.

Considere um circuito composto por um indutor de 1 unidade em paralelo com a combinação em paralelo de um indutor de 2 unidades e um resistor de 1 unidade (figura 3.3, página 25). Feche o circuito com uma fonte de corrente. Ao aplicarmos um pulso retangular de corrente na entrada, uma corrente residual permanece nos indutores. Uma pequena simulação Spice deste circuito é apresentada no programa 1. Note que na simulação existem dois pequenos resistores em série com os indutores. Eles são apenas para evitar singularidades na simulação.

Transportando este exemplo ao nosso linguajar, podemos definir G como sendo o indutor l1 e F como a combinação em paralelo do indutor l2 e r2. Neste caso, as condições do teorema são satisfeitas. Entretanto, como mostrado na figura 3.4, o circuito não é internamente estável, apesar de a tensão no ponto 1 ir a zero.

As sutilezas de resultados tais como o ilustrado acima mostram que o teorema acima, apesar de simples, não se adequa perfeitamente às necessidades do estudo

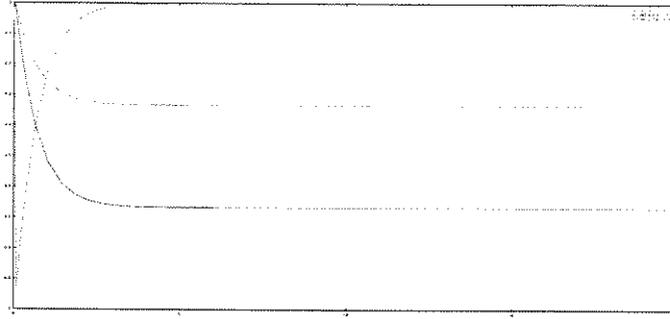


Figura 3.4: Variáveis internas do circuito. Note como as variáveis não voltam a zero.

da estabilidade de sistemas dinâmicos, uma vez que estabilidade interna é em geral desejável, quando não imprescindível, na análise e/ou projeto. Entretanto, é possível reformular o resultado acima de forma a garantir que todas as variáveis tenham norma tendendo a zero. E é precisamente isto que é feito no teorema seguinte.

Teorema 4 (Teorema da Passividade II [DV75]) *Considere as condições apresentadas no teorema 3. Mais ainda, suponha que existam constantes γ , δ_1 e δ_2 tais que*

$$\|Gx\|_T \leq \gamma \|x\|_T \quad (3.5a)$$

$$\langle x, Gx \rangle_T \geq \delta_1 \|x\|_T^2 \quad (3.5b)$$

$$\langle Fx, x \rangle_T \geq \delta_2 \|Fx\|_T^2 \quad (3.5c)$$

para todo $x \in \mathbb{A}_e$, para todo $T \in \mathbb{R}$. Com estas condições, se

$$\delta_1 + \delta_2 > 0 \quad (3.6)$$

então

$$u \in \mathbb{A} \Rightarrow y_1, y_2, Fy_2 \in \mathbb{A} \quad (3.7)$$

Vamos discutir alguns pontos antes de provar o teorema. Em primeiro lugar, conforme discutido em [DV75], este resultado vale também para sistemas discretos, bastando apenas considerar o espaço apropriado para a variável temporal.

Note ainda que o teorema apenas exige que a quantidade **total** de energia dissipada seja positiva. Não é necessário que ambos os operadores F e G dissipem energia. Por outro lado, o caso em que ambos são “passivos” é de especial interesse. Este caso é apresentado a seguir como um corolário.

Corolário 1 *O teorema 4 se verifica se G é estritamente passivo com ganho finito e F é passivo.*

Note que a condição de ganho finito é equivalente à (3.5a).

Provaremos agora o teorema 4.

Prova Para todo $u \in \mathbb{A}$ e para todo $T \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} \langle y_1, Gy_1 \rangle_T + \langle Fy_2, y_2 \rangle_T &= \langle u - Fy_2, Gy_1 \rangle_T + \langle Fy_2, Gy_1 \rangle_T \\ &= \langle u, Gy_1 \rangle_T \end{aligned}$$

Aplicando as desigualdades (3.5),

$$\delta_1 \|y_1\|_T^2 + \delta_2 \|Fy_2\|_T^2 \leq \|u\|_T \gamma \|y_1\|_T$$

Mas como $Fy_2 = u - y_1$ (por (3.3)),

$$\|u - y_1\|_T^2 \geq \|u\|_T^2 - 2\|u\|_T \|y_1\|_T + \|y_1\|_T^2$$

Substituindo (3.3) na desigualdade acima, temos

$$(\delta_1 + \delta_2) \|y_1\|_T^2 \leq \|y_1\|_T (2|\delta_2| + \delta_1) \|u\|_T + |\delta_2| \|u\|_T^2$$

Utilizando o fato que $\delta_1 + \delta_2 > 0$, a desigualdade acima pode ser reescrita como

$$\|y_1\|_T^2 \leq 2\alpha(T) \|y_1\|_T + \beta(T)$$

onde $\alpha(T)$ e $\beta(T)$ são monotonicamente crescentes e tendem a um valor finito quando $T \rightarrow \infty$, pois $u \in \mathbb{A}$. Sejam seus limites α e β , respectivamente. Temos então

$$\|y_1\|_T \leq \alpha + (\alpha^2 + \beta)^{1/2} \quad \forall T \in \mathbb{R}$$

Logo $y_1 \in \mathbb{A}$. Por (3.5) verificamos que o mesmo vale para y_2 e Fy_2 . ■

3.2.2 Positividade Real

Outro conceito importante é o de positividade real. Este conceito se aplica a funções de transferência estáveis, contrastando com o conceito de passividade, que se aplica a uma classe de operadores mais genérica.

Como veremos a seguir, a propriedade de positividade real é verificada por um teste frequencial na função de transferência do sistema, enquanto a passividade é

verificada pelo cálculo de um produto interno em um espaço estendido. Para sistemas estáveis, não há a necessidade de considerarmos o espaço estendido neste cálculo, e podemos testar sua passividade pelo cálculo do produto interno entre sua entrada e sua saída.

Quando nos limitamos a sistemas LTI, entretanto, uma forte conexão pode ser feita entre estes dois conceitos. Em se tratando de sistemas LTI, seu comportamento é em geral descrito no espaço frequencial por transformadas. Neste caso, o Teorema de Parseval permite que façamos uma ponte entre a condição temporal que caracteriza passividade e a condição frequencial que caracteriza positividade-real.

Esta conexão torna-se particularmente interessante à luz de outro conjunto de resultados conhecidos na literatura como Teorema de Kalman-Yakubovich. Por meio deste teorema é possível relacionar a condição frequencial obtida diretamente da aplicação do teorema de Parseval com um conjunto de igualdades/desigualdades matriciais lineares. O teste desta condição pode ser formulado como um problema de factibilidade de uma desigualdade matricial linear (LMI), que apresenta uma série de propriedades atraentes do ponto de vista numérico e computacional [dO96].

Estes resultados são o objeto desta seção.

Definição 13 (Positividade Real) *Um sistema estável é dito positivo real se sua parte hermitiana é não negativa no eixo imaginário.*

Seja um sistema dinâmico dado por

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.8)$$

Suponha que A é Hurwitz, que o par (A, B) é controlável e que o par (A, C) é observável. A sua função de transferência é dada por

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (3.9)$$

Definição 14 (PR) *O sistema \mathcal{G} é positivo real se*

$$H(jw) + H(jw)^* \geq 0 \quad \forall w \in [0, \infty) \quad (3.10)$$

De forma análoga, temos

Definição 15 (SPR) *O sistema \mathcal{G} é estritamente positivo real se*

$$H(jw) + H(jw)^* > 0 \quad \forall w \in [0, \infty) \quad (3.11)$$

Note que, neste caso, o sistema é estritamente próprio, ou seja, $H(j\infty) = 0$. Neste trabalho, estamos interessados na conexão entre sistemas passivos e sistemas PR. Esta conexão é dada pelo Teorema de Kalman-Yakubovitch [Vid93], e é ainda objeto de pesquisa e debates, como veremos na sequência.

A conexão entre a positividade real e a passividade de um sistema pode ser mostrada analiticamente [Vid93]. Aqui ilustramos o procedimento para familiarizar o leitor com a técnica empregada.

Seja H dada por (3.10) uma função de transferência SPR. Logo $H(jw) + H(jw)^* > 0$. Para simplificar, seja $H(s)$ escalar. Então temos que $\text{Real} \{H(jw)\} > 0$. Da definição de passividade temos que \mathcal{G} é passivo se $\langle x, \mathcal{G}x \rangle_T > 0$. Mas sabemos que

$$\langle x, \mathcal{G}x \rangle_T = \int_0^{\infty} x_T(t) (\mathcal{G}x_T)(t) dt$$

Supondo que \mathcal{G} é suficientemente “bem comportada,” a transformada de $(\mathcal{G}x_T)(t)$ é dada por $H(jw)X_T(jw)$. Pelo Teorema de Parseval, temos, para $w \in [0, \infty)$ [Vid93, p. 354]

$$\begin{aligned} \langle x, \mathcal{G}x \rangle_T &= \frac{1}{2\pi} \text{Real} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} X_T^*(jw) H(jw) X_T(jw) dw \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Real} \{H(jw)\} |X_T(jw)|^2 dw \\ &> \inf_w \text{Real} \{H(jw)\} \|X_T(jw)\|^2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Note que o teorema de Parseval nos permite vislumbrar a relação entre os dois conceitos. Nossa intenção é poder determinar se um sistema é passivo por propriedade de sua função de transferência. Lembre que o teste direto de passividade exige uma integral para cada entrada definida no espaço estendido! O procedimento acima ilustra uma propriedade mais ampla, que nos permite auferir a passividade de um sistema pelo estudo da positividade real de sua função de transferência. Ainda assim, verificar a positividade real de uma função de transferência não é tarefa trivial, ao menos à primeira vista. Entretanto, o teorema de Kalman-Yakubovitch nos dá as ferramentas analíticas necessárias para abordar este problema de uma forma mais amena à procedimentos computacionais.

O Teorema de Kalman-Yakubovitch

O Teorema de Kalman-Yakubovitch é, na verdade, o primeiro resultado de uma série de teoremas que relacionam a positividade real de um sistema linear com con-

dições algébricas impostas nas matrizes de sua realização de estados. Inicialmente obtidos na década de 60, até hoje atraem a atenção de pesquisadores em teoria de controle [LLJ90, Wen88, MD95, LJ95].

Conforme ilustrado na seção anterior, existe uma forte conexão entre a condição de passividade e a positividade real de um sistema. O Teorema de Kalman-Yakubovitch estende esta relação à realização de estados da planta, mostrando que deve existir uma certa estrutura em uma planta positiva real.

Várias versões destes resultados existem na literatura. Apresentamos uma versão SISO do resultado como referência histórica em (Lema 1), e uma versão “industrial” em (Lema 2). Outra versão, recente, pode ser encontrada em [LLJ90], mas atentando para os comentários em [MD95].

Em nosso desenvolvimento, estamos mais interessados no teste das condições de Kalman-Yakubovitch, que nos permitem verificar se uma certa função de transferência é positiva real. Estes testes podem ser formulados como LMIs, e são discutidos a seguir.

Positividade Real e LMIs

Os testes algébricos do teorema de Kalman-Yakubovitch podem ser formulados como problemas de factibilidade de LMIs. Enunciamos a seguir alguns resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

Lema 3 *Considere a função de transferência quadrada $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $X(s)$ é estritamente positiva real (SPR);

2. A é estável e

$$H(jw) + H(-jw)' > 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

3. $\exists P = P' > 0$ tal que

$$A'P + PA < 0$$

e

$$C = B'P$$

Podemos enunciar um resultado análogo para funções de transferência não estritamente próprias ($D \neq 0$).

Lema 4 *Considere a função de transferência quadrada $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

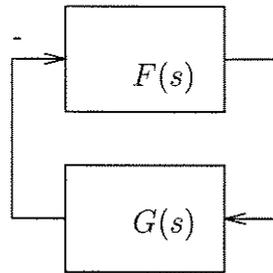


Figura 3.5: Sistema realimentado.

1. $H(s)$ é estritamente positiva real (SPR);

2. A é estável e

$$H(jw) + H(-jw)' \geq \epsilon I \quad \forall w \in [0, \infty)$$

para ϵ arbitrariamente pequeno;

3. $\exists P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & B - PC' \\ B' - CP & 2\epsilon I - (D + D') \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.12)$$

Note que, com ϵ arbitrariamente pequeno, podemos estender a definição acima ao caso em que ϵ é nulo e o sinal da LMI acima é estrito.

3.3 Multiplicadores

Em diversos casos a aplicação direta do teorema da passividade pode gerar resultados excessivamente conservativos. Tomemos, por exemplo, o teorema 3. Sua aplicação necessita que ambos os componentes da malha de realimentação sejam passivos. Esta condição é em geral demasiadamente restritiva. A utilização de multiplicadores tenta aliviar estas restrições.

3.3.1 Motivação

Considere uma malha de realimentação mostrada na figura 3.5, composta por dois subsistemas F e G . A aplicação direta do teorema da passividade exige que ambos sejam passivos para que possamos concluir a estabilidade do sistema. Suponha, agora, que tanto F quanto G possam ser decompostos em um produto de operadores.

Suponha ainda que F seja decomposto como $F = M \circ \bar{F}$, e que G seja decomposto como $G = \bar{G} \circ M^{-1}$. Pela forma da interconexão dos operadores na malha, podemos eliminar a parcela representada por M da malha, e analisar o sistema resultante, composto por \bar{F} e \bar{G} . Neste caso, teríamos que verificar a passividade de \bar{F} e \bar{G} . Note que é possível que, por exemplo, F não seja passivo, mas \bar{F} seja! Este foi o raciocínio original de Zames, que propôs esta técnica [Zam66a, Zam66b]. Esta análise está baseada na verificação que o operador que descreve a malha não se altera com a fatoração de M .

Considere agora o raciocínio inverso. Suponha que a malha original é a malha composta por \bar{F} e \bar{G} , e que desejamos estudar sua estabilidade. Se pudermos encontrar um multiplicador apropriado M tal que a malha composta por $F = M \circ \bar{F}$ e $G = \bar{G} \circ M^{-1}$ satisfaçam o teorema da passividade, poderemos concluir pela estabilidade do sistema original composto por \bar{F} e \bar{G} .

O objetivo desta seção é utilizar a técnica ilustrada acima no problema de estabilidade, verificando as condições para que sua utilização seja válida. Iniciamos com uma discussão sobre o relacionamento entre estabilidade e causalidade, que é imprescindível para uma completa compreensão dos resultados que se seguem.

3.3.2 Causalidade, estabilidade e a transformada de Laplace

O estudo de estabilidade de sistemas LTI já tem como lugar comum a utilização da transformada de Laplace. Com base na descrição frequencial de sistemas podemos inferir diversas propriedades dinâmicas das soluções das equações diferenciais da malha de realimentação. Em particular, uma das propriedades da solução extensamente estudada é a sua estabilidade.

A caracterização normalmente encontrada nos livros e salas de aula traz embutida, entretanto, uma série de hipóteses largamente aceitas, por serem ao mesmo tempo convenientes e respaldadas na observação do mundo real. Como exemplos destas hipóteses citamos a causalidade do sistema e a utilização de transformadas unilaterais. Mais especificamente, assume-se que a resposta do sistema não pode anteceder a entrada (causalidade), e que a entrada é sempre nula nos instantes que antecedem $t = 0$. Baseando-nos nestas hipóteses, podemos sempre inferir a região de convergência da transformada, o que nos permite calcular a transformada inversa de Laplace. Em parte de nosso estudo não poderemos assumir estas hipóteses, o que nos leva a uma breve discussão das relações entre causalidade, estabilidade e a transformada de Laplace.

Iniciemos com uma simples função no tempo: $e^{-at}u(t)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $u(t)$ é um

degrau unitário. Sua transformada de Laplace é calculada pela integral

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} e^{-at} u(t), dt$$

Normalmente assume-se que nada ocorre antes de $t = 0$, o que justifica alterar o limite de integração inferior de $-\infty$ para 0, o que é equivalente à multiplicação pelo degrau unitário. Ou seja, troca-se a transformada de Laplace bilateral pela transformada de Laplace unilateral. Retornando à nossa integral, vemos que sua região de convergência, neste caso, é dada por $\text{Real } \{s\} > -a$. A transformada, neste caso, é dada por

$$F(s) = \frac{1}{s + a}$$

A resposta em frequência do sistema será então dada por $F(s)$ calculada em $s = jw$, ou seja, $F(jw)$. Para um sistema estável, $F(jw)$ deve ser bem definida, o que implica que o eixo jw deve fazer parte da região de convergência da transformada. Como o sistema é causal, sua resposta impulsiva sempre fica na semi-reta positiva do eixo de tempo, e a região de convergência de sua transformada será a região à direita de seu pólo mais à direita. Com estas duas propriedades recobramos o familiar conceito que funções racionais estáveis devem ter seus pólos no semi-plano esquerdo do plano complexo, pois desta forma a região à direita do pólo mais à direita sempre conterà o eixo jw . O leitor deve notar, entretanto, que esta conclusão deve-se a ambas as propriedades em conjunto. Conforme ilustraremos a seguir, o conceito de estabilidade transcende pólos no semi-plano esquerdo, para isso bastando que as duas propriedades mencionadas não se verifiquem conjuntamente.

Retomemos nosso exemplo com a transformada $F(s) = 1/(s + a)$. Para calcularmos sua transformada inversa, precisamos conhecer sua região de convergência. Se, conforme usualmente é feito, assumirmos que o sistema em questão é estável e causal, a região de convergência será à direita de $-a$. Desta forma a resposta impulsiva de F será dada por $f(t) = e^{-at}u(t)$. Por outro lado, suponha agora que o sistema é anti-causal. Neste caso, a região de convergência é dada por $\text{Real } \{s\} < -a$, e sua resposta ao impulso é dada por $f(t) = -e^{-at}u(-t)$. Neste caso, a causalidade ou não da resposta ao impulso permite a determinação da região de convergência.

Nos casos onde temos um número maior de pólos a situação é ainda um pouco mais delicada. Considere a função de transferência

$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)(s - 2)}$$



Esta função apresenta dois pólos, um no semi-plano esquerdo e outro no semi-plano direito. Assumindo causalidade, podemos dizer imediatamente que a resposta ao impulso deste sistema será instável. Entretanto esta não é a única possibilidade. Conforme discutido acima, a determinação da resposta ao impulso depende da região de convergência da transformada, e neste caso temos três possibilidades distintas:

1. a região à direita do pólo mais à direita;
2. a região à esquerda do pólo mais à esquerda e
3. a região entre os pólos mais à esquerda e mais à direita.

Note que a questão de estabilidade não depende diretamente da localização dos pólos, mas sim da localização do eixo $j\omega$ dentro de uma das regiões. No exemplo acima, as respostas ao impulso seriam, respectivamente, causal e instável, anti-causal e instável e não causal e estável.

3.3.3 Estabilidade com Multiplicadores

Considere mais uma vez o sistema realimentado apresentado na figura 3.2. Pela introdução no loop de multiplicadores escolhidos apropriadamente, podemos fazer com que os operadores da malha direta e da malha de realimentação passem a satisfazer as condições do teorema da passividade. Basta para tanto escolher os multiplicadores de forma que o operador resultante seja passivo. Para sistemas LTI, esta propriedade pode ser obtida restringindo a fase do operador ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Conceitualmente é este raciocínio que nos permite vislumbrar a técnica de multiplicadores: escolha um multiplicador M tal que a fase do operador composto permaneça no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Para sistemas LTI, escolher um multiplicador é equivalente a escolher seus pólos e zeros. Note, entretanto, que se formos nos restringir a multiplicadores causais e estáveis, como é comum em nosso campo de trabalho, a posição dos pólos do multiplicador ficará confinada ao semi-plano esquerdo do plano complexo, restringindo a influência do multiplicador na fase do sistema. Para contornar este problema, podemos trabalhar com multiplicadores estáveis mas não causais, com pólos no semi-plano direito (veja 3.3.2).

Note que esta discussão visa apenas justificar matematicamente a possibilidade de trabalharmos com sistemas estáveis, mas que contenham pólos no semi-plano direito. Como será ilustrado no decorrer deste trabalho, o cálculo do multiplicador muitas vezes leva a funções de transferência que contém pólos no semi-plano direito (veja, por exemplo, 5.2.4). No meio de um estudo de estabilidade, isto pode soar estranho. Entretanto, existem justificativas matemáticas completas para embasar estes resultados [DV75].

3.4 Discussão

Este capítulo nos deu a base matemática necessária para que possamos continuar nosso estudo de estabilidade robusta. Este é o objetivo do próximo capítulo.

Parte II

Análise

Capítulo 4

Análise de Estabilidade

“Meu elogio será dedicado à própria mente. A mente é o homem, e o conhecimento é a mente; um homem é apenas aquilo que ele sabe.”

Francis Bacon, em “O Elogio ao Conhecimento”

4.1 Introdução e Motivação

Em diversas situações da vida real (para não dizer em todas elas), trabalhamos com modelos que são apenas aproximações do sistema físico em estudo. Em se tratando de sistemas de controle, esta situação não é diferente. A teoria de controle baseada em sistemas lineares é poderosa e eficaz, porém limitada a modelos que geralmente são apenas aproximações das equações diferenciais não lineares que modelam o comportamento dos sistemas dinâmicos.

Diante dessa situação, o projetista tem algumas possibilidades distintas de levar em consideração as diferenças entre o modelo preciso, não linear, que modela o sistema dinâmico, e o modelo linear, aproximado mas tratável numericamente, que modela o sistema de controle. Uma destas possibilidades, que encontra suporte direto nas técnicas que norteiam este trabalho, é considerar as não linearidades do modelo dinâmico como incertezas no modelo linear, e realizar o projeto de forma a garantir a estabilidade mesmo frente à presença destas incertezas e/ou não linearidades.

Obviamente podemos também considerar como incertezas do sistema linear outros parâmetros que variam no sistema físico, tais como parâmetros que variam em função de variáveis que não se encontram sob controle, ou parâmetros de medida difícil ou imprecisa.

Desta forma podemos encarar o sistema de controle como composto por dois subsistemas distintos, o primeiro dado pelo modelo linear da planta, e o segundo dado pelo modelo da incerteza, que pode vir de qualquer uma das causas mencionadas acima. Estes dois modelos podem se relacionar de diversas maneiras. Em particular, eles podem se relacionar como uma malha de realimentação como a da figura 4.1, na qual \mathcal{G} é o sistema linear e \mathcal{N} é a incerteza.

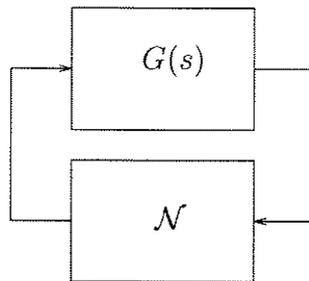


Figura 4.1: Incerteza na malha de realimentação

Neste caso, em diversas situações é possível caracterizar \mathcal{N} como um operador passivo. Nesta situação as técnicas de passividade são diretamente aplicáveis, gerando diversos testes computacionalmente eficientes de estabilidade robusta. Estes testes são apresentados neste capítulo.

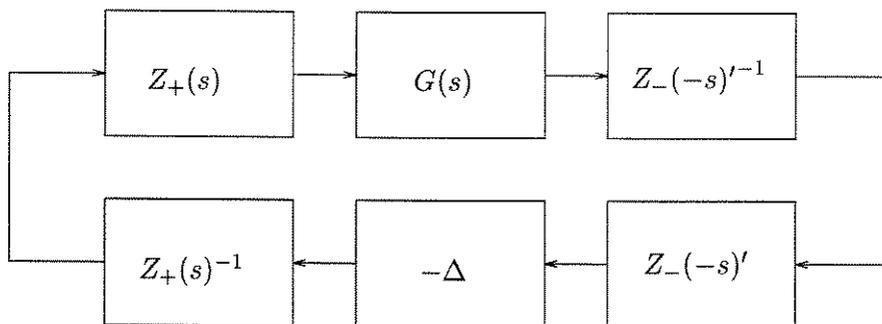


Figura 4.2: Sistema em malha fechada com multiplicador.

4.2 Estabilidade Robusta

Seja o sistema linear \mathcal{G} descrito por

$$\dot{x} = Ax + B_w w \quad (4.1a)$$

$$y = C_x x + D_w w \quad (4.1b)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y, w \in \mathbb{R}^m$, e as demais matrizes são reais e possuem dimensões compatíveis. Este sistema linear está conectado por uma malha de realimentação, conforme figura 4.1, ao sistema \mathcal{N} , dado por

$$w = -\Delta y \quad (4.2)$$

Note que Δ é um operador quadrado. Suponha que \mathcal{N} seja um sistema passivo, ou seja, suponha que \mathcal{N} satisfaça a definição 3.2, p. 24. Então a estabilidade robusta do sistema em malha fechada segue do teorema da passividade 4, p. 27 se \mathcal{G} for um sistema passivo. Este caso é o mais simples possível, pois permite concluir que o sistema é robustamente estável sem o auxílio de multiplicadores 3.3, p. 32.

Exemplo Ilustrativo 10 *Seja o sistema linear \mathcal{G}_1 caracterizado pelas matrizes $A = -1$, $B_w = 1$, $C_x = 1$ e $D_w = 0.1$. Claramente este sistema satisfaz o teorema 3, p. 31, logo \mathcal{G}_1 é estritamente passivo. Seja o sistema \mathcal{N}_1 caracterizado pelo operador Δ_1 , dado por 4.6, p. 42. Desta forma o sistema realimentado satisfaz o teorema da passividade, o que nos permite concluir que o sistema em malha fechada é estável. Mais ainda, uma vez que \mathcal{G}_1 é estritamente passivo, o sistema em malha fechada será estável frente a qualquer operador passivo \mathcal{N} .*

Em diversas situações não será possível concluir a estabilidade do sistema tão facilmente, pois o sistema \mathcal{G} em geral não será passivo. Neste caso devemos recorrer à teoria de multiplicadores, de modo que um teste mais abrangente de estabilidade possa ser realizado. De forma geral, desejamos encontrar um multiplicador que faça o sistema \mathcal{G} parecer passivo frente ao sistema \mathcal{N} .

As seções seguintes apresentam algumas soluções para o problema de estabilidade robusta baseando-se na solução do problema de otimização \mathfrak{M} :

Problema 1 (\mathfrak{M}) *Seja \mathbb{M} o conjunto dos multiplicadores factíveis para a classe de incertezas \mathbb{D} . Encontre, caso exista, o multiplicador \mathcal{M} tal que*

$$\mathcal{M} = \arg \max_{\mathcal{M}} \inf_w \{ \text{Real} \{ \mathcal{G}(jw) \mathcal{M}(jw) \} \mid \mathcal{M} \in \mathbb{M} \}. \quad (4.3)$$

O problema \mathfrak{M} pode ser interpretado como um problema de estabilidade em uma malha auxiliar, baseada nos sistemas \mathcal{G} e \mathcal{N} , conforme a figura 4.2, p. 39, onde o multiplicador é colocado na malha de realimentação. O conjunto dos multiplicadores factíveis deve ser definido em função do conhecimento sobre a classe de incertezas em questão, objeto das próximas seções. Uma vez definido o conjunto \mathbb{M} , vamos buscar um multiplicador \mathcal{M} que torne a parte real do sistema planta-multiplicador a mais positiva possível. Tal busca é realizada procurando por um multiplicador \mathcal{M} tal que, para tal \mathcal{M} , o mínimo da parte real de $\mathcal{G}(jw)\mathcal{M}(jw)$ em w seja o maior possível. Caso este mínimo seja positivo, \mathcal{M} mostra a estabilidade robusta do sistema frente a perturbações da classe \mathbb{D} .

A seguir analisaremos o problema \mathfrak{M} para alguns casos representativos de incertezas. De forma geral, mostra-se que existe uma relação entre os conjuntos \mathbb{M} e \mathbb{D} . Grosso modo, quanto maior o “tamanho” de \mathbb{D} , menor será o tamanho de \mathbb{M} , ou seja, a classe de multiplicadores factíveis é mais restrita. Mostra-se também que em diversos casos é possível transformar o problema \mathfrak{M} em um problema de otimização convexo, e desta forma enunciar condições fortes para a estabilidade do sistema realimentado.

4.2.1 Incertezas Não Lineares Diagonais

No caso de incertezas passivas não lineares, o conjunto de perturbações admissíveis \mathbb{D}^{NL} é dado por

$$\mathbb{D}^{NL} = \{\Delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \Delta \text{ é estritamente passivo}\} \quad (4.4)$$

Definimos de forma análoga o conjunto das perturbações diagonais admissíveis:

$$\mathbb{D}_D^{NL} = \{\Delta \mid \Delta \in \mathbb{D}^{NL}, \Delta \text{ é diagonal}\} \quad (4.5)$$

Para os conjuntos \mathbb{D}^{NL} e \mathbb{D}_D^{NL} , podemos definir os conjuntos \mathbb{M}^{NL} e \mathbb{M}_D^{NL} , respectivamente, que caracterizam os multiplicadores de estabilidade factíveis. Estes conjuntos caracterizam os espaços de busca para o problema \mathfrak{M} . A determinação destes conjuntos pode ser obtida diretamente de manipulações algébricas tradicionais no caso de sistemas lineares. A seguir esboçamos estas manipulações.

Considere a figura 4.2. Seja

$$Z(s) = Z_+(s)Z_-(s)$$

Pela aplicação direta do teorema da passividade, temos que o sistema realimentado será estável se os operadores das malhas direta e de realimentação forem estáveis e se

um deles for passivo e o outro estritamente passivo. Com a suposição de passividade estrita para Δ , temos que operador da malha de realimentação é dado por

$$Z_-(-s)' \bullet \Delta \bullet Z_+(s)^{-1}$$

onde $X \bullet Y$ é a composição de X e Y . Já sabemos, do capítulo 3, as condições sob as quais a estabilidade da malha acima leva à estabilidade da malha original. Resta caracterizar qual o conjunto de busca dos multiplicadores [Bal95].

Sabemos que, da passividade estrita de Δ ,

$$\Delta + \Delta^* > 0 \quad (4.6)$$

onde Δ^* é o complexo conjugado transposto de Δ . O que podemos auferir do sinal de

$$Z_-(-s)' \bullet \Delta \bullet Z_+(s)^{-1} \quad (4.7)$$

Inicialmente, vamos simplificar o problema pela aplicação do conhecimento específico que temos da incerteza. Neste caso, Δ é diagonal e não linear, de forma que temos pouca possibilidade de manipulação, visto que existe muito pouca informação sobre a incerteza. Podemos contrabalançar esta falta de informação com suposições sobre o multiplicador. Note que, neste caso, Δ é não linear. Sabemos apenas que é diagonal. Entretanto, se supormos que o multiplicador é uma matriz diagonal real, podemos aplicar a propriedade de comutação a nossos cálculos.

Vamos ao desenvolvimento. Expandindo a expressão (4.7) temos

$$Z_+^{-1} \Delta Z_-^* + [Z_+^{-1} \Delta Z_-^*]^* = Z_+^{-1} \Delta Z_-^* + Z_- \Delta^* Z_+^{-*} \quad (4.8)$$

$$= Z_+^{-1} [\Delta Z^* + Z \Delta^*] Z_+^{-*} \quad (4.9)$$

Note que estamos interessados apenas no sinal da forma quadrática acima, o que nos permite concentrar nossa atenção no termo central. Ao supormos que Z_+ e Z_- são matrizes diagonais, as matrizes acima comutam na multiplicação. Se supormos ainda que Z é real, então podemos simplificar a expressão acima para

$$\Delta Z^* + Z \Delta^* = Z (\Delta + \Delta^*) \quad (4.10)$$

de onde temos que, para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, temos que procurar $Z > 0$ diagonal real.

Definição 16 O conjunto \mathbb{M}_D^{NL} é caracterizado pelo conjunto dos operadores diagonais reais definidos-positivos.

4.2.2 Incertezas Variantes no Tempo

Utilizando um procedimento similar ao adotado acima, podemos caracterizar o conjunto das perturbações admissíveis \mathbb{D}^{VT} , dado por

$$\mathbb{D}^{VT} = \{\Delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \Delta \text{ é estritamente passivo e linear}\} \quad (4.11)$$

Definimos de forma análoga o conjunto das perturbações diagonais admissíveis:

$$\mathbb{D}_D^{VT} = \{\Delta \mid \Delta \in \mathbb{D}^{VT}, \Delta \text{ é diagonal}\} \quad (4.12)$$

A determinação do conjunto dos multiplicadores pode ser feita de forma similar à seção 4.2.1. Da passividade de $\Delta(t)$ temos que $\Delta + \Delta^* > 0$. Tomemos agora por base a equação (4.9). Supondo que Z_+ e Z_- sejam diagonais, temos que

$$\Delta Z^* + Z \Delta^* = \Delta Z^* + \Delta^* Z \quad (4.13)$$

uma vez que a multiplicação de matrizes diagonais comuta. Se supormos agora que $Z = Z^*$ obtemos

$$\Delta Z^* + \Delta^* Z = (\Delta + \Delta^*) Z \quad (4.14)$$

ou seja, com multiplicadores hermitianos o operador dado por (4.7) é positivo real se Z for positivo real, o que nos leva a concluir com uma definição:

Definição 17 *O conjunto \mathbb{M}_D^{VT} é caracterizado pelo conjunto dos multiplicadores hermitianos positivo-reais diagonais.*

4.2.3 Incertezas Paramétricas

Mais uma vez utilizando um procedimento similar ao adotado acima, podemos caracterizar o conjunto das perturbações admissíveis \mathbb{D}^P é dado por

$$\mathbb{D}^P = \{\Delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \Delta \text{ é estritamente passivo e real}\} \quad (4.15)$$

Definimos de forma análoga o conjunto das perturbações diagonais admissíveis:

$$\mathbb{D}_D^P = \{\Delta \mid \Delta \in \mathbb{D}^P, \Delta \text{ é diagonal}\} \quad (4.16)$$

Sabemos que, da passividade estrita de Δ ,

$$\Delta + \Delta^* > 0 \quad (4.17)$$

Vamos aplicar ao problema o conhecimento específico que temos da incerteza. Neste caso, Δ é diagonal e real. Consequentemente, $\Delta + \Delta^* = \Delta + \Delta' = 2\Delta > 0$. Mais ainda, (4.7) pode ser reescrita como

$$\Delta \{ Z_+(s)^{-1} Z_-(-s)' + [Z_+(s)^{-1} Z_-(-s)']^* \} \quad (4.18)$$

se supormos que Z_+ e Z_- são matrizes diagonais. A expressão dependente de Z acima pode ainda ser manipulada. Lembre-se ainda que estamos interessados no sinal de (4.18). Em virtude do sinal de Δ , nos interessa apenas o sinal da expressão dependente de Z . Com mais detalhes, temos

$$\begin{aligned} Z_+(s)^{-1} Z_-(s)^* + Z_-(s) Z_+(s)^{-*} &= Z_+^{-1} [Z_+^{-1} Z]^* + Z_+^{-1} Z Z_+^{-*} \\ &= Z_+^{-1} Z^* Z_+^{-*} + Z_+^{-1} Z Z_+^{-*} \\ &= Z_+^{-1} [Z + Z^*] Z_+^{-*} \end{aligned}$$

o que nos leva à condição suficiente $Z + Z^* > 0$. Sumarizando, temos que, para Δ diagonal e não linear, o multiplicador Z deve ser diagonal e positivo real. Este resultado será enunciado para referência a seguir.

Definição 18 *O conjunto \mathbb{M}_D^P é definido pelo conjunto dos multiplicadores diagonais positivo-reais.*

4.3 Discussão

Os resultados apresentados nos permitem caracterizar os conjuntos de multiplicadores factíveis para diversas classes de incertezas importantes. Com estas caracterizações, podemos utilizar (4.3) para verificar a estabilidade robusta de sistemas lineares. Este é o objetivo do próximo capítulo. Veja ainda [Gap94].

Capítulo 5

Análise Convexa de Estabilidade

“Não é que eles não consigam ver a solução. Eles não conseguem é ver o problema.”

G. K. Chesterton

5.1 Introdução

Mais importante do que ter técnicas para a verificação de estabilidade de sistema lineares é ter técnicas que possam ser empregadas de forma precisa e eficiente em problemas reais. O objetivo deste capítulo é mostrar como as técnicas baseadas em passividade, apresentadas no capítulo 4, podem ser utilizadas com segurança e eficiência no estudo de estabilidade de sistemas lineares.

Apresentamos formulações baseadas em problemas de factibilidade ou otimização, todas elas com restrições dadas por LMIs. A formulação dada por LMIs traz consigo várias vantagens, dentre as quais a existência de uma forte teoria como embasamento, a disponibilidade de implementações comerciais e não-comerciais de algoritmos eficientes para sua solução e, por último, mas não menos importante, uma boa escalabilidade, isto é, os métodos utilizados para a solução de problemas simples, acadêmicos, de até algumas dezenas de variáveis, podem ser utilizados para atacar problemas reais, que podem envolver milhares de variáveis, sem perda das características de convergência e desempenho.

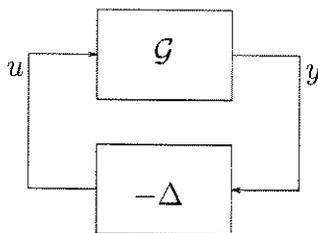


Figura 5.1: Sistema em malha fechada

Neste capítulo atacaremos as diversas classes de incerteza na ordem inversa, mostrando primeiramente a solução do problema de estabilidade robusta para incertezas paramétricas, e obtendo as soluções para os outros problemas pela simplificação desta.

5.2 Incertezas Paramétricas

A abordagem de multiplicadores em geral leva a desigualdades matriciais não-lineares, de difícil solução exata. As soluções apresentadas na literatura podem ser classificadas em dois tipos básicos. O primeiro tipo procura restringir a classe dos multiplicadores factíveis, de forma que o problema de otimização resultante seja tratável numericamente. Nos trabalhos [LSC94, BHPD94], classes de multiplicadores são propostas de forma que o problema resultante possa ser modelado por LMIs [BGFB94]. O segundo tipo de solução utiliza a classe completa de multiplicadores, e tenta resolver o problema resultante por algoritmos iterativos. Simplificadamente, algumas variáveis são fixadas, o problema é resolvido para as variáveis restantes, e o processo se repete até a convergência.

Nesta seção, mostramos que tal procedimento não é necessário para a classe das incertezas paramétricas. Os resultados aqui apresentados mostram que o problema de estabilidade com multiplicadores para incertezas paramétricas pode ser reduzido a um problema de LMIs sem nenhuma hipótese sobre os multiplicadores além de terem ordem igual ou superior à ordem da planta. Este resultado é importante por duas razões: em primeiro lugar, o resultado apresenta condições necessárias e suficientes para a existência de um multiplicador, condição esta que é suficiente para a estabilidade robusta do sistema. Em segundo lugar, a condição apresentada, baseada em LMIs, oferece um procedimento construtivo para a obtenção do multiplicador. A forma exata do multiplicador é importante, pois é utilizada em vários procedimentos de síntese.

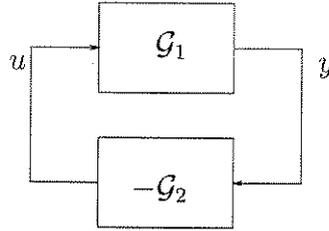


Figura 5.2: Sistema realimentado.

5.2.1 Preliminares

O sistema quadrado \mathcal{G} considerado neste capítulo é modelado por (veja figura 5.1).

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $u \in \mathbb{R}^m$. Assumimos que a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Hurwitz. A função de transferência do sistema, de ordem mínima, é dada por

$$G(s) := C(sI - A)^{-1}B + D \quad (5.2)$$

As incertezas do sistema ficam isoladas na matriz de perturbações $\Delta \in \mathbb{R}^{m \times m}$, que relaciona a entrada à saída por

$$u = -\Delta y \quad (5.3)$$

Esta matriz pertence à classe de incertezas paramétricas reais, ou seja, $\Delta \in \mathbb{D}$, onde \mathbb{D} é definido como

$$\mathbb{D} := \{\Delta : \Delta = \text{diag}[\delta_1, \dots, \delta_m], \delta_i \geq 0, i = 1 \dots m\}$$

Nosso interesse é estudar a estabilidade do sistema da figura 5.1, ou seja, desejamos encontrar condições sobre a função de transferência $G(s)$ de forma que o sistema em malha fechada seja estável para todo $\Delta \in \mathbb{D}$.

Das figuras 5.1 e 5.2, seguindo o teorema da passividade, como $\Delta \in \mathbb{D}$ é passivo, para garantir estabilidade robusta é suficiente que a função de transferência $G(s)$ seja estritamente passiva. Uma condição mais fraca é obtida pelo posicionamento de multiplicadores na malha, de forma a preservar a estabilidade da mesma (veja a figura 5.3).

Assumimos que o multiplicador $Z(s)$ tem realização de estado mínima dada por

$$\mathcal{G}_z : \begin{cases} \dot{x}_z = A_z x_z + B_z u_z \\ y_z = C_z x_z + D_z u_z \end{cases} \quad (5.4)$$

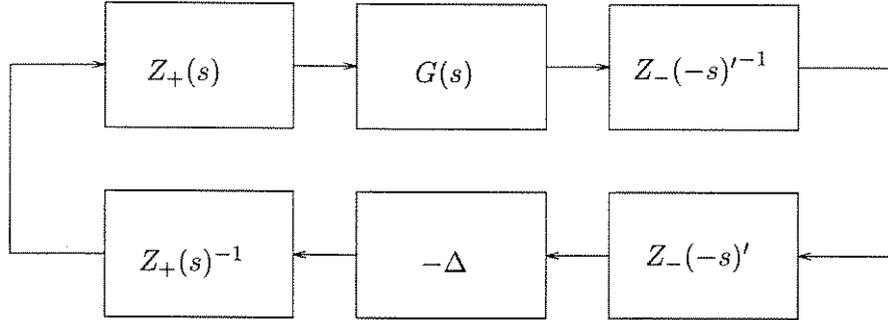


Figura 5.3: Sistema realimentado com multiplicador.

onde $x_z \in \mathbb{R}^r$, $u_z \in \mathbb{R}^m$ e $y_z \in \mathbb{R}^m$, com o inteiro r fixo mas arbitrário. As matrizes A_z, B_z, C_z e D_z , a serem determinadas, são bloco-diagonais e de dimensões compatíveis (lembre-se que $Z(s)$ deve ser diagonal). Como os requisitos dados pela aplicação da equação 3.11 às funções de transferência $Z(s) + Z^*(s)$ e $G(s)Z(s) + Z^*(s)G^*(s)$ não implicam em estabilidade, não é necessário assumir que a matriz A_z seja Hurwitz. As condições acima, entretanto, requerem que o multiplicador não tenha polos e zeros no eixo imaginário. A função de transferência do multiplicador é dada por

$$Z(s) := C_z(sI - A_z)^{-1}B_z + D_z \quad (5.5)$$

Seja a função de transferência $GZ(s) = G(s)Z(s)$. Nosso problema pode ser enunciado como

Encontre, se existir, um multiplicador racional diagonal $Z(s)$ e $\lambda > 0$, tais que $GZ(jw) + GZ^(jw) \geq \lambda I$, e $Z(jw) + Z^*(jw) \geq \lambda I$, $\forall w \in \mathbb{R}$.*

Note que a existência do multiplicador $Z(s)$ implica na existência dos fatores $Z_+(s)$ e $Z_-(s)$ tais que o sistema da figura 5.3 satisfaçam o teorema da passividade [DV75, Bal95].

Esta formulação do problema de estabilidade robusta é numericamente atraente, pois as condições de frequência são testadas diretamente por LMIs.

Neste ponto, a questão principal a ser abordada se refere ao uso da LMI (5.9) para a geração do conjunto de multiplicadores factíveis. Aparentemente isto não é possível, a menos que as matrizes A_z e C_z sejam fixadas para preservar a linearidade do problema. Entretanto, com estas matrizes fixas, a LMI resultante em P_z, B_z, D_z e λ gera apenas um subconjunto de todos os multiplicadores possíveis. Esta abordagem é utilizada por diversos autores (veja [BHPD94]), mas, como mostrado a seguir, tal restrição não é necessária.

Lema 5 (Parametrização de Multiplicadores Estritamente Passivos) *Seja r fixo. Cada elemento do conjunto de multiplicadores $m \times m$ tais que $Z(jw) + Z^*(jw) > \epsilon I$ seja verificada com $\epsilon = \lambda > 0$ é dado por $Z(s) := Y(sP_z - X)^{-1}B_z + D_z$, onde $P_z \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é uma matriz não singular e simétrica, e a LMI*

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} X' + X & B_z - Y' \\ B_z' - Y & \lambda I - D_z - D_z' \end{bmatrix} < 0 \quad (5.6)$$

nas variáveis $(X, Y, B_z, D_z, \lambda)$, com $\lambda > 0$, se verifica.

Prova A prova segue diretamente da equação 3.12, p. 32 e do fato que P_z é não singular, juntamente com a equação

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z \\ C_z \end{bmatrix} P_z \quad (5.7)$$

que tem sempre solução dados (X, Y) satisfazendo (5.6). ■

Comentário 1 *Vale a pena ressaltar que, em nosso problema, restringimos $Z(s)$ a ser diagonal. Esta restrição impõe uma estrutura bloco-diagonal nas matrizes acima. Esta restrição, entretanto, não afeta os resultados do lema 5, pois toda função de transferência diagonal tem uma realização bloco-diagonal.*

Agora nos concentraremos no problema de escolher $Z(s)$ tal que $GZ(jw) + GZ^*(jw) \geq \lambda I$, $\forall w \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$. Uma vez que a realização de $GZ(s)$ no espaço de estados é dada por

$$(A_c, B_c, C_c, D_c) = \left(\begin{bmatrix} A_z & 0 \\ BC_z & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_z \\ BD_z \end{bmatrix}, [DC_z \ C], [DD_z] \right), \quad (5.8)$$

a condição de frequência acima é equivalente à existência de uma matriz não singular $Q = Q' \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}$ e $\lambda > 0$ tais que a desigualdade matricial

$$\begin{bmatrix} QA'_c + A_cQ & B_c - QC'_c \\ B'_c - C_cQ & \lambda I - D_c - D'_c \end{bmatrix} < 0. \quad (5.9)$$

seja verdadeira. Note que, embora simples de obter, a expressão acima é de difícil solução pois, como o leitor pode imediatamente ver, ela não é linear nas variáveis matriciais, incluindo as matrizes da realização de estados do multiplicador. A seguir mostramos como a desigualdade matricial bilinear acima (BMI) pode ser solucionada por meio de uma LMI.

5.2.2 Análise de estabilidade com multiplicadores

Iniciamos a seção com discussões sobre a equação (5.9). Em particular, apresentamos algumas soluções encontradas na literatura e, em seguida, apresentamos uma solução mais geral ao problema. Conforme discutido acima, a desigualdade (5.9) é não linear nas variáveis da realização do multiplicador e na matriz aumentada Q . Sua estrutura particular, entretanto, oferece diversas informações ao analista. Como um primeiro exercício, suponha que em (5.9), restrinjamos Q à forma

$$Q = \begin{bmatrix} P_z & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

onde $P_z \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ela será equivalente, neste caso, a

$$\begin{bmatrix} P_z A'_z + A_z P_z & P_z C'_z B & B_z - P_z C'_z D' \\ BC_z P_z & PA' + AP & BD_z - PC' \\ B'_z - DC_z P_z & D'_z B' - CP & \lambda I - DD_z - D'_z D \end{bmatrix} < 0 \quad (5.10)$$

que é satisfeita somente se

$$\begin{bmatrix} PA' + AP & BD_z - PC' \\ D'_z B' - CP & \lambda I - DD_z - D'_z D' \end{bmatrix} < 0. \quad (5.11)$$

É interessante notar que a desigualdade acima depende linearmente das variáveis $P = P'$, D_z e λ e, conseqüentemente, pode ser facilmente solucionada. Note ainda que (5.11) pode ser reconhecida como uma generalização do critério do círculo multivariável. O raciocínio é o seguinte. Como a matriz A é Hurwitz, $P = P' > 0$ é uma variável auxiliar, utilizada para testar a passividade da realização

$$(A, BD_z, C, DD_z). \quad (5.12)$$

Por sua vez, esta é a realização cascata da planta $G(s)$ e de um multiplicador estático $Z(s) = D_z$. Este multiplicador caracteriza o critério do círculo generalizado. Compare os resultados acima com aqueles de [Bal95, seção 4.1].

Este ensaio mostra que a estrutura bloco diagonal da matriz Q é por demais restritiva, uma vez que não há vantagens em considerar um multiplicador dinâmico ao invés de um estático. Em outras palavras, esta restrição à matriz Q nos limita ao critério do círculo, que é equivalente a testar a estabilidade robusta do sistema frente a perturbações não lineares diagonais [Bal95].

De forma simplificada, é agora possível compreender a influência do multiplicador em (5.9). A matriz D_z pode ser vista como uma variável independente, utilizada

para testar o critério do círculo multivariável. Ou seja, podemos enxergar D_z como a realização de um multiplicador estático. Se (5.11) for factível, o sistema em malha fechada será robustamente estável. Suponha então que (5.11) seja infactível. Neste caso incluímos dinâmica no multiplicador, e esta dinâmica adiciona graus de liberdade e acopla (5.11) dentro de (5.9) de uma forma particular. A adição de dinâmica ao multiplicador, entretanto, restringe a classe de incertezas considerada [Bal95].

Algumas soluções ao problema dos multiplicadores

Na literatura, de forma geral, soluções a (5.9) são normalmente obtidas por meio de restrições ao espaço de busca dos multiplicadores. Nestes casos, algumas das matrizes são fixadas *a priori*, e o problema resultante, agora linear nas variáveis restantes, é então resolvido.

Safonov *et al.* [LSC94] considera multiplicadores da forma

$$Z(s) := \sum_{i=0}^k \Theta_i \frac{s^i}{d(-s)d(s)},$$

onde $\Theta_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ são matrizes variáveis e $d(s)$ é um polinômio de ordem k fixo, sem zeros no eixo imaginário. Como a realização acima depende linearmente das variáveis Θ_i , sua solução é simples.

Uma outra possibilidade é apresentada em [BHPD94], onde os autores consideram multiplicadores da forma

$$Z(s) = C_z(sI - A_z)^{-1}B_z(\theta) + D_z(\theta). \quad (5.13)$$

com C_z e A_z matrizes dadas *a priori*, θ um vetor de componentes reais θ_i , e $B_z(\theta)$ e $D_z(\theta)$ matrizes dependendo linearmente da variável θ . Esta escolha é equivalente a um multiplicador definido como

$$Z(s) := \sum_{i=0}^k \theta_i M_i(s), \quad (5.14)$$

onde $M_i(s)$, $i = 0 \dots k$, são matrizes de transferência fixas. Um procedimento alternativo à formulação apresentada pelos autores para a solução de (5.9) para θ pode ser encontrado em [GG94].

Em ambos os casos, as condições de positividade real estrita de Z e $G(s)Z(s)$, juntamente com a restrição de estrutura, podem ser resolvidas para as variáveis lineares que caracterizam a aproximação ao multiplicador $Z(s)$, levando a um multiplicador

no espaço de busca. Apesar de ambas as abordagens poderem levar a bons resultados, ambas dependem fortemente da escolha do espaço de busca dos multiplicadores, ou seja, da escolha de $d(s)$ ou do par (A_z, C_z) . Enquanto boas estimativas para estes parâmetros podem ser facilmente obtidas para sistemas de baixa ordem e analistas experientes, o mesmo não se verifica para sistemas de alta ordem. Consequentemente é desejável ter uma abordagem alternativa que não dependa de informações *ad hoc*. Tal abordagem será apresentada a seguir.

Uma nova solução para o problema dos multiplicadores

Nesta seção apresentamos um novo procedimento para a busca de um multiplicador tal que (5.9) seja verificada. O resultado principal é mostrar como converter (5.9) em uma LMI com respeito a todas as variáveis, incluindo aquelas utilizadas na parametrização do multiplicador no espaço de estados.

A observação chave é notar que qualquer matriz Q satisfazendo (5.9) é não singular. Mais ainda, ela sempre pode ser particionada como

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_z & P_z \Gamma \\ \Gamma' P_z & P \end{bmatrix}$$

onde P_z é uma matriz não singular, e Γ tem rank apropriado. No que se segue, nos restringiremos ao caso em que Γ tem rank completo, ou seja, estaremos buscando Q em (5.9) tal que Q_2 tenha rank completo. Note que esta restrição não parece restritiva, pois uma modificação de norma arbitrariamente pequena pode ser incluída em Q_2 de forma a satisfazer esta hipótese. Neste caso, sem perda de generalidade, dado que $r \geq n$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{r \times n}$ é a matriz

$$\Gamma := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

O teorema a seguir prova este fato de forma mais geral. Veja que com $r \geq n$, a estrutura de Q acima não apresenta qualquer conservatividade, e nos permite buscar um multiplicador por meio de um problema de programação convexa.

Teorema 5 *Seja $r \geq n$ um escalar fixo. Existe um multiplicador racional de ordem $m \times m$, $Z(s)$, satisfazendo (5.9) com $\epsilon = \lambda > 0$, se e somente se existirem matrizes X, Y, P_z, P, B_z e D_z , com P_z não singular, tais que a LMI $\mathcal{H} < 0$, com*

$$\mathcal{H} := \begin{bmatrix} X' + X & Y'B' + P_z \Gamma A' + X\Gamma & B_z - Y'D' - P_z \Gamma C' \\ BY + A\Gamma' P_z + \Gamma' X' & PA' + AP + \Gamma' Y'B' + BY\Gamma & BD_z - \Gamma' Y'D' - PC' \\ B_z' - DY - C\Gamma' P_z & D_z' B' - D Y \Gamma - CP & \lambda I - DD_z - D_z' D' \end{bmatrix},$$

seja factível. No caso afirmativo, o multiplicador $Z(s)$ é dado por

$$Z(s) = Y(sP_z - X)^{-1}B_z + D_z. \quad (5.16)$$

Prova Para a suficiência, assumamos que $\mathcal{H} < 0$ é factível e considere $Z(s)$ como sendo o multiplicador dado por (5.16) com realização de estados (A_z, B_z, C_z, D_z) , onde $A_z = XP_z^{-1}$ e $C_z = YP_z^{-1}$. Escolhendo

$$Q = \begin{bmatrix} P_z & P_z\Gamma \\ \Gamma'P_z & P \end{bmatrix},$$

após algumas manipulações algébricas temos

$$\begin{bmatrix} QA'_c + A_cQ & B_c - QC'_c \\ B'_c - C_cQ & \lambda I - D_c - D'_c \end{bmatrix} = \mathcal{H} < 0.$$

Consequentemente, com $Z(s)$ dado por (5.16), temos $GZ(jw) + GZ^*(jw) \geq \lambda I$, $\forall w \in \mathbb{R}$.

Para a necessidade, considere (A_m, B_m, C_m, D_m) como a realização de estados de um multiplicador tal que (5.9) seja satisfeita com $\lambda = \epsilon$. Logo (5.9) será satisfeita para uma matriz não singular simétrica Q , particionada como

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q'_2 & Q_3 \end{bmatrix},$$

onde Q_1 é não singular e Q_2 é (por hipótese) de rank completo de coluna. Definindo a matriz de transformação de similaridade $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ tal que

$$Q_1^{-1}Q_2 = T'\Gamma = T' \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

e as matrizes

$$\begin{aligned} X &= TA_mQ_1T', & Y &= C_mQ_1T', & P_z &= TQ_1T' \\ P &= Q_3, & B_z &= TB_m, & D_z &= D_m. \end{aligned} \quad ,$$

temos, após cansativas manipulações algébricas,

$$0 > \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} QA'_c + A_cQ & B_c - QC'_c \\ B'_c - C_cQ & \lambda I - D_c - D'_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T' & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \mathcal{H},$$

fato este que mostra a factibilidade da LMI em consideração. ■

Comentário 2 *Sustentamos que a hipótese de rank completo de Γ não causa restrições ao espaço de busca dos multiplicadores. Esta afirmativa se baseia nas equações (5.10-5.11), que mostram que o rank nulo de Γ leva ao critério do círculo. Logo, o melhor que podemos fazer é considerarmos Γ como tendo rank completo, que implica o maior número de variáveis livres de otimização, com maiores possibilidades de melhora em relação ao critério do círculo.*

Alguns comentários se fazem necessários. Em primeiro lugar, discutimos o impacto da hipótese $r \geq n$. Note que se $r \geq n$, a equação (5.17) pode sempre ser resolvida para T , dado Γ arbitrário. Isto implica que uma transformação de similaridade T satisfazendo (5.17) sempre existe. No caso em que $r < n$, entretanto, isto não mais é verdade. Se $r < n$, em geral não será possível encontrar uma transformação de similaridade com as propriedades necessárias. Em outras palavras, a existência de T depende da escolha de Γ , e uma escolha *ad-hoc* pode levar a resultados conservativos. Ressaltamos que a suficiência do teorema é também verificada neste caso.

É necessário frisar, à luz da discussão acima, que a caracterização de Γ é muito importante para o problema de estabilidade robusta. A força do teorema 5 vem da busca de um multiplicador por um problema convexo, o que é possível pela fixação da matriz Γ .

A estrutura bloco diagonal das matrizes no teorema 5, infelizmente, tem impacto significativo nos resultados. Se impormos que as matrizes no teorema 5 tenham estrutura bloco-diagonal, como necessário à seleção de um multiplicador diagonal, então a necessidade do teorema não mais será verdadeira em geral, e os graus de liberdade adicionais introduzidos ao considerarmos ao aumentarmos a matriz Γ podem ser essenciais para o obtenção de uma solução não conservativa. Esta discussão será ilustrada no exemplo apresentado mais à frente, onde será visível que o aumento dos graus de liberdade na matriz Γ reduz a conservatividade dos resultados.

Os resultados do teorema 5, juntamente com o lema 5, caracterizam a busca por um multiplicador como um problema de programação convexa, conforme enunciado no lema seguinte.

Lema 6 (Condições de Estabilidade Robusta) *Se existir um multiplicador diagonal $Z(s)$ tal que as condições do teorema 5 e do lema 5 sejam verificadas, então a malha de realimentação formada por $G(s)$ e $\Delta \in \mathbb{D}$ é robustamente estável.*

Prova Segue imediatamente do resultados mencionados e do teorema da passividade. ■

5.2.3 Testes de Estabilidade Robusta com LMIs

Nesta seção os resultados do teorema 6 são especializados para Δ paramétrico real. Definimos a matriz V como

$$V := \{X, Y, P_z, P, B_z, D_z\}.$$

Além disso, definimos o conjunto \mathbb{V} como

$$\mathbb{V} := \{(\lambda, V) : \mathcal{H}(\lambda, V) < 0, \mathcal{V}(\lambda, V) < 0\}$$

onde a dependência de \mathcal{H} e \mathcal{V} com respeito às variáveis matriciais que compõe V e a λ foi explicitada. É claro que, para cada $(\lambda, V) \in \mathbb{V}$ tais que $\lambda > 0$ e todas as variáveis em V , com exceção de P , têm estrutura bloco-diagonal compatível, o multiplicador

$$Z(s) = Y(sP_z - X)^{-1}B_z + D_z$$

será diagonal, logo satisfazendo o lema 6. Consequentemente este multiplicador garante a estabilidade robusta do sistema.

A estrutura bloco-diagonal dos elementos de V depende das dimensões envolvidas, com a restrição de que deve haver m blocos, onde m é o número de saídas de $G(s)$. Note que a estrutura bloco-diagonal das matrizes não altera a convexidade da restrição de factibilidade de $(\lambda, V) \in \mathbb{V}$.

Um simples procedimento para detectar se existe $(\lambda, V) \in \mathbb{V}$ com $\lambda > 0$ é pela solução do seguinte problema de otimização convexa:

$$\max \{\lambda : (\lambda, V) \in \mathbb{V}\} \tag{5.18}$$

Este problema é prontamente solucionado com vários pacotes de otimização de LMIs. Do ponto de vista numérico, devemos ressaltar que \mathbb{V} é um cone convexo, ou seja, $(\alpha\lambda, \alpha V) \in \mathbb{V}$ sempre que $\alpha > 0$ e $(\lambda, V) \in \mathbb{V}$. Consequentemente, nenhuma perda de generalidade é introduzida se o problema acima for normalizado. Decidimos pela normalização linear $\text{Tr}(D_z) = m$.

5.2.4 Exemplo

Este exemplo foi retirado de [BHPD94]. O problema é encontrar o maior γ tal que o sistema em malha fechada seja estável para toda perturbação diagonal real Δ tal que $\|\Delta\|_\infty \leq \gamma$. Para maiores detalhes veja [Bal95]. A função de transferência da malha direta é dada por

$$G(s) = [I - \gamma H(s)]^{-1}[I + \gamma H(s)]$$

onde

$$H(s) := \begin{bmatrix} 2 & \frac{-2s-1.6}{s+1} \\ \frac{-2s+8}{s+1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Em [Bal95], os autores usam (5.14) com funções de transferência $M_i(s)$ fixas e $k = 6$ variáveis livres, para obter um multiplicador factível diagonal de forma

$$Z(s) = \text{diag} \left\{ \frac{n_1(s)}{(s+1)^2}, \frac{n_2(s)}{(s+1)^2} \right\}$$

onde $n_1(s)$ e $n_2(s)$ são polinômios de segunda ordem. Com esta escolha de multiplicadores, estimaram o maior γ como sendo $\gamma = 0.2414$.

O mesmo problema foi resolvido com a abordagem aqui proposta. A busca pelo multiplicador foi realizada pela solução de (5.18), onde γ foi maximizado por um procedimento de biseccção. Inicialmente, com $r = n$, ou seja, com multiplicadores de primeira ordem como os elementos da diagonal de $Z(s)$, o maior γ foi calculado como $\gamma_{\max} = 0.2236$. O multiplicador ótimo, neste caso, é dado por

$$Z(s) = \text{diag} \left\{ 0.5528 \frac{s - 0.6181}{s - 0.9443}, 1.4472 \frac{s - 2.6042}{s - 2.5148} \right\}$$

Para estes dados, o índice ótimo de (5.18) é $\lambda = 4.2 \cdot 10^{-5}$.

Em seguida r foi aumentado para $2n$, ou seja, um multiplicador de segunda ordem em cada elemento da diagonal de $Z(s)$, como em [Bal95]. O valor máximo de γ aumentou para $\gamma_{\max} = 0.2423$, resultado que confirma o valor de [Bal95]. O multiplicador ótimo neste caso é

$$Z(s) = \text{diag} \left\{ 0.8184 \frac{s^2 + 0.0699s - 0.7560}{s^2 - 1.2136s - 2.5902}, 1.1816 \right\}$$

enquanto o índice ótimo de (5.18) foi obtido com o valor $\lambda = 2.5 \cdot 10^{-5}$.

Note que o algoritmo leva a um multiplicador dividido em duas partes: uma parte sem dinâmica, identificada com o critério do círculo generalizado, e uma parte com dinâmica, que leva em consideração a estrutura da perturbação Δ e as particularidades da função de transferência. Como mostrado nos dois casos acima, existe um cancelamento perfeito de pólos e zeros para $r = 2n$ e um cancelamento quase perfeito para $r = n$. Além disso, note que, neste exemplo, o aumento da dimensão para $r = 2n$ foi necessário para diminuir a conservatividade dos resultados. Sugerimos ao leitor uma comparação com o multiplicador ótimo de [Bal95].

5.3 Incertezas não lineares

Após um estudo detalhado do procedimento empregado no tratamento de incertezas paramétricas, podemos considerar o caso das incertezas não-lineares como uma simplificação dos resultados apresentados na seção 5.2. Como vamos ilustrar a seguir, para incertezas não-lineares as mesmas equações são válidas, bastando para isso que escolhamos de forma apropriada algumas das variáveis livres do caso mais geral. Ilustramos na sequência como simplificar os resultados anteriores para aplicá-los ao caso de incertezas não-lineares.

O argumento é basicamente o seguinte. Relembrando o capítulo anterior, vimos que a classe dos multiplicadores factíveis para incertezas não-lineares é mais restrita do que a classe para incertezas paramétricas. No caso das incertezas não-lineares, devemos nos ater aos multiplicadores estáticos. Ora, pela análise da formulação do caso de incertezas paramétricas, vemos que a solução do problema é dada pela solução de um problema de LMIs, no qual estão envolvidas as matrizes de realização de estados do multiplicador. Na sequência vamos mostrar que a solução do problema em questão pode ser obtida pela solução do problema de estabilidade com incertezas paramétricas, bastando para tanto supor que as matrizes de dinâmica do multiplicador são nulas.

Considere novamente o teorema 5. Em nosso caso atual, desejamos encontrar um multiplicador estático que nos permita analisar a estabilidade do sistema (seção 4.2.1). O multiplicador é dado por

$$\mathcal{M} = D_z \quad (5.19)$$

o que equivale a considerar o multiplicador dinâmico com as matrizes B_z e C_z nulas.

A realização em cascata do multiplicador com a planta \mathcal{G} (5.1) é dada por

$$\mathcal{G}_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + BD_z u \\ y = Cx + DD_z u \end{cases} \quad (5.20)$$

Aplicando o lema 4 chegamos a

$$\begin{bmatrix} AP + PA' & BD_z - PC' \\ D_z' B' - CP & -DD_z - D_z' D' \end{bmatrix} < 0 \quad (5.21)$$

que é uma LMI em P e D_z . Sua solução fornece o multiplicador estático \mathcal{M} . Compare esta solução com \mathcal{H} no teorema 5.

5.4 Discussão

Encerramos nossas considerações sobre a análise de estabilidade. Os resultados aqui apresentados nos permitem verificar a estabilidade robusta de sistemas LTI para várias classes importantes de incertezas, utilizando algoritmos computacionais eficientes e de convergência garantida. Nos próximos capítulo voltaremos nossa atenção para o problema de síntese. Vale a pena ressaltar que a análise aqui apresentada não é extensiva, deixando de considerar a relação da abordagem de estabilidade via passividade com outras abordagens presentes na literatura.

Parte III

Síntese

Capítulo 6

Síntese de Controladores PR

“Você sabe que para um matemático ele não tinha imaginação suficiente. Entretanto ele agora é um poeta e vai indo muito bem...”

Hilbert, falando de um antigo estudante.

Baseando-nos nos resultados do teorema da passividade, juntamente com as extensões possíveis com a técnica de multiplicadores, podemos analisar toda uma classe de problemas de controle onde a planta a ser controlada é sabida ser passiva. Em particular, diversas estruturas físicas apresentam modelos com esta propriedade, em particular estruturas flexíveis. Como a planta é passiva, a aplicação direta do teorema da passividade nos permite deduzir que **qualquer** controlador estritamente passivo tem a propriedade de estabilizar o sistema em malha fechada.

Desta forma o desenvolvimento de uma técnica que permita calcular controladores estritamente passivos mostra sua utilidade. Mais ainda, como será mostrado a seguir, é possível calcular controladores estritamente passivos com restrições de desempenho, de forma que o controlador obtido, além de satisfazer as restrições de estabilidade, ainda possa otimizar alguma característica de desempenho do sistema em malha fechada, tal como a norma \mathcal{H}_2 .

Neste capítulo apresentamos resultados que permitem calcular controladores estritamente passivos com restrições de desempenho dadas pelas normas \mathcal{H}_2 e mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

6.1 Síntese de controladores com restrições \mathcal{H}_2

6.1.1 Introdução

Em anos recentes a comunidade ligada à área de controle tem investido pesadamente em problemas ligados à robustez de sistemas de controle frente a perturbações exógenas e incertezas de modelo. Nos dias atuais, já existem vários resultados interessantes que, além de seu valor teórico, auxiliam o projetista a melhor adaptar seus projetos às necessidades do usuário.

Considere o teorema da passividade. Ele estabelece que a conexão de dois sistemas em realimentação negativa é estável se um deles for positivo real e o outro for estritamente positivo real. Este resultado é prontamente reconhecido como uma poderosa ferramenta em análise robusta. Seja \mathcal{P} o conjunto de todas as plantas positivas. Se um controlador estritamente positivo real for projetado para a planta nominal $P_0 \in \mathcal{P}$, então o sistema em malha fechada será estável mesmo que a planta P_0 seja substituída por qualquer outra planta $P \in \mathcal{P}$ [Vid93]. Em outras palavras, o controlador projetado para a planta nominal estabiliza robustamente todas as plantas $P \in \mathcal{P}$.

Em algumas aplicações (veja o exemplo de controle de uma estrutura flexível apresentado em [HBW94]), o sistema nominal a ser controlado tem a propriedade fundamental de ser positivo real, ou seja, $P_0 \in \mathcal{P}$, enquanto as incertezas do sistema, representadas pelo truncamento de ordem finita, são tais que a planta real $P \in \mathcal{P}$. Neste caso, se um controlador estritamente positivo real for utilizado para fechar a malha de controle, então o sistema incerto será estável. Mais ainda, qualquer perturbação que atue no sistema tal que o sistema continue positivo real será também estabilizada pelo controlador estritamente positivo real. Note que se o controlador não for estritamente positivo real, pode existir uma planta $P \in \mathcal{P}$ tal que o sistema em malha fechada seja instável.

Outros autores [LLJ88, HBW94] obtiveram condições suficientes para que o controlador clássico LQG fosse estritamente positivo real. Naturalmente estas condições impõem certas relações entre o modelo em malha aberta e o critério LQ definido pelo projetista. Na realidade, aqueles trabalhos mostram que o controlador LQG será estritamente positivo real se o critério for escolhido adequadamente. Neste trabalho, esses resultados são generalizados, mostrando como controladores estritamente positivo reais podem ser calculados mesmo para critérios que não necessariamente satisfazem as condições propostas em [LLJ88, HBW94]. São obtidas condições suficientes para a existência de controladores estritamente positivo reais sub-ótimos que minimizam um limitante da norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Este problema

é caracterizado como um problema convexo e formulado por LMIs.

6.1.2 Preliminares

Nesta seção o problema a ser resolvido é caracterizado e um breve resumo de resultados de teoria de sistemas é feito. Estes resultados são apresentados em forma apropriada à extensão feita na seção seguinte. A notação empregada é padrão.

Seja um sistema linear invariante no tempo com modelo dado por

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_2u + B_1w \\ z &= C_1x + D_{12}w \\ y &= C_2x + D_{21}u \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída medida, $w \in \mathbb{R}^r$ é a entrada de perturbação e $z \in \mathbb{R}^q$ é a saída controlada. Todas as matrizes são de dimensões compatíveis e conhecidas. Assume-se a usual hipótese de ortogonalidade, isto é, $C_1' D_{12} = 0$, $D_{12}' D_{12} > 0$, $B_1 D_{21}' = 0$ e $D_{21} D_{21}' > 0$. Assume-se também que os pares (A, B_2) e (A, B_1) são estabilizáveis e os pares (A, C_2) e (A, C_1) são detectáveis. O controlador Σ_c , com função de transferência $C(s)$, está conectado em uma configuração de realimentação negativa padrão à planta Σ , conforme a figura 6.1.

O problema a ser analisado pode ser colocado como se segue. Considere $H_{zw}(s)$, a função de transferência de malha fechada de w para z , e seja \mathcal{P} o conjunto de todas as funções de transferência SPR com dimensões apropriadas que satisfazem ao lema 3. Então queremos resolver

$$\min \{ \|H_{zw}(s)\|_2^2 : C(s) \in \mathcal{P} \}. \quad (6.2)$$

Das possíveis abordagens para este problema, duas têm sido mais extensivamente empregadas na literatura. Em [LLJ88, HBW94], condições sobre a planta em malha aberta Σ são obtidas de forma que, se (6.2) for substituído pelo problema LQG clássico

$$\min_{C(s)} \|H_{zw}(s)\|_2^2 \quad (6.3)$$

sua solução ótima $C_{LQ}(s)$ de ordem $n_c = n$ será factível e, portanto, ótima para o problema 6.2. Em outras palavras, neste caso não é necessário levar em consideração a restrição $C(s) \in \mathcal{P}$ no processo de otimização, uma vez que as condições suficientes utilizadas garantem que $C_{LQ}(s) \in \mathcal{P}$ (este resultado será mais discutido em seguida).

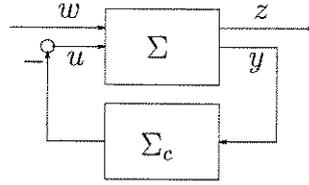


Figura 6.1: Sistema em Malha Fechada.

A outra abordagem dada a este problema é a de [JJA⁺90], onde os autores consideram $C(s)$ como um controlador arbitrário de ordem fixa. Um limitante para a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada substitui a função objetivo em (6.2). Em seguida, as condições necessárias de otimalidade são escritas em termos de 4 equações tipo Riccati e Lyapunov. É importante salientar que, mesmo no caso de controladores de ordem completa ($n_c = n$), estas equações são altamente acopladas e de difícil solução numérica. Além disso, o princípio da separação não é válido, e não existe garantia que o compensador projetado por esta técnica seja a solução ótima de (6.2).

Dada a grande dificuldade de calcular numericamente a solução ótima do problema de otimização (6.2), nosso procedimento está baseado em LMIs para a obtenção de uma solução sub-ótima para o problema (6.2). Ao contrário de [JJA⁺90], apresentamos um problema convexo que pode ser resolvido por técnicas muito eficientes de programação convexa [BGFB94]. Além disso, a abordagem não requer prévias condições de escolha como em [LLJ88, HBW94]. A idéia básica é impor uma escolha *ad-hoc* da estrutura do controlador:

$$\Sigma_c : \begin{cases} \dot{x}_c &= Ax_c + B_2u + L(y - C_2x_c) \\ u &= -Kx_c \end{cases} \quad (6.4)$$

onde a matriz $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ deve ser determinada e

$$L = L_2 = \Pi_2 C_2' (D_{21} D_{21}')^{-1} \quad (6.5)$$

onde Π_2 é a solução simétrica positiva definida da equação de Riccati

$$A\Pi_2 + \Pi_2 A' - \Pi_2 C_2' (D_{21} D_{21}')^{-1} C_2 \Pi_2 + B_1 B_1' = 0.$$

O raciocínio por trás desta escolha está baseado em dois fatos. Em primeiro lugar, ao contrário do caso geral, onde o princípio da separação não é verificado [JJA⁺90], a escolha de Σ_c como em (6.4) nos habilita a propor um procedimento numérico eficiente baseado em LMIs para a síntese de controladores SPR. Além disso, a utilização de um limitante convexo para a norma \mathcal{H}_2 do sistema realimentado permite a determinação da solução ótima global, ao invés de apenas soluções localmente ótimas,

caracterizadas por condições necessárias de otimalidade. Em segundo lugar, a escolha acima não parece ser por demais restritiva, pois, como será provado, ela recupera a solução proposta em [HBW94]. Veja o exemplo numérico na seção 6.1.4.

Da conexão de realimentação indicada na figura 6.1, assumindo que $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um ganho estabilizante para (A, B_2) , pode-se facilmente verificar que [KR91]

$$\|H_{zw}(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr} (C_1 \Pi_2 C_1') + \|H_K(s)\|_2^2 \quad (6.6)$$

onde

$$H_K(s) = (C_1 - D_{12}K)[sI - (A - B_2K)]^{-1} L_2 D_{21}$$

Notando que a função de transferência do controlador é dada por

$$C_K(s) = K[sI - (A - B_2K - L_2C_2)]^{-1} L_2, \quad (6.7)$$

então o problema em consideração (6.2) pode ser reescrito como

$$\min_K \{ \|H_K(s)\|_2^2 : C_K(s) \in \mathcal{P} \} \quad (6.8)$$

As seções seguintes são dedicadas à solução deste problema. A idéia principal é convertê-lo em um problema de otimização convexo com uma particular transformação de variáveis. Para fins de comparação, é importante ressaltar os resultados de [LLJ88, HBW94] para o caso \mathcal{H}_2 . Eles mostraram que, com as seguintes hipóteses,

1. A função de transferência em malha aberta é positiva real, isto é, existem matrizes $\Pi_0 > 0$ e $Q_0 > 0$ tais que

$$A\Pi_0 + \Pi_0 A' = -Q_0, \quad B_2 = \Pi_0 C_2'$$

2. $B_1 B_1' = Q_0 + B_2 (D_{12}' D_{12})^{-1} B_2'$

3. $D_{21} D_{21}' = D_{12}' D_{12}$

4. $C_1' C_1 > C_2' (D_{12}' D_{12})^{-1} C_2$

a solução ótima de (6.8) coincide com a solução ótima de problema LQG associado (6.3). Em outras palavras, o ganho $K = K_2$, dado por

$$K_2 = (D_{12}' D_{12})^{-1} B_2' P_2 \quad (6.9)$$

onde P_2 é a solução simétrica positiva definida de

$$A'P_2 + P_2A + C_1'C_1 - P_2B_2(D_{12}'D_{12})^{-1}B_2'P_2 = 0, \quad (6.10)$$

resolve os problemas (6.8) e (6.2). Estas hipóteses merecem alguns comentários. Elas são algo restritivas, uma vez que os dados da planta em malha aberta, em particular as matrizes C_1 e D_{12} , que definem a saída controlada, não mais podem ser escolhidos pelo projetista. De fato, a relação imposta entre as matrizes do sistema é necessária para que o LQG sem restrições tenha uma solução SPR. Nosso objetivo principal é obter uma nova forma de resolver este problema sem estas restrições.

6.1.3 Síntese

Nesta seção o problema (6.8) ou, de forma equivalente, o problema (6.2) com a estrutura de controle dada por (6.4), é considerado. A abordagem proposta pode ser interpretada como a otimização global de um limitante superior da função objetivo de (6.2). No teorema seguinte apresentamos uma solução para este problema baseada em LMIs.

Teorema 6 (Síntese de Controladores SPR) *Seja $\epsilon > 0$ um parâmetro arbitrariamente pequeno. Defina a matriz simétrica $Q_2 = B_2L_2' + L_2B_2'$. Se o problema de otimização convexo*

$$J = \min \text{Tr} (Z) \quad (6.11)$$

$$\begin{bmatrix} W & L_2D_{21} \\ D_{21}'L_2' & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.12)$$

$$\begin{bmatrix} AW + WA' - Q_2 & WC_1' - L_2D_{12}' \\ C_1W - D_{12}L_2' & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (6.13)$$

$$W(A - L_2C_2)' + (A - L_2C_2)W - Q_2 \leq -\epsilon I \quad (6.14)$$

tiver solução nas variáveis matriciais $W = W' > 0$ e $Z = Z' \geq 0$ então a matriz de ganho $K = L_2'W^{-1}$ é tal que

1. $C_K(s) \in \mathcal{P}$;
2. $\|H_K(s)\|_2^2 \leq J$.

Prova Seja (W, Z) a solução do problema de otimização acima. Como $W = W' > 0$, esta matriz é não-singular. Com $K = L_2'W^{-1}$, primeiro mostramos que esta solução gera $C_K(s)$ SPR. Para tanto, note que (6.14) pode ser reescrita como

$$(A - B_2K - L_2C_2)W + W(A - B_2K - L_2C_2)' \leq -\epsilon I < 0$$

que implica, após multiplicar ambos os lados por W^{-1} , junto com a parte 3 do lema 3, que $C_K(s)$ é SPR.

Por outro lado, com K como acima, (6.13) é equivalente a

$$(A - B_2K)'W^{-1} + W^{-1}(A - B_2K) + (C_1 - D_{12}K)'(C_1 - D_{12}K) \leq 0 \quad (6.15)$$

e (6.12) nos permite obter

$$\mathbf{Tr} (D_{21}'L_2'W^{-1}L_2D_{21}) = \mathbf{Tr} (Z) = J. \quad (6.16)$$

Finalmente, utilizando (6.16), (6.15) e o fato que K é um ganho estabilizante temos

$$\|H_K(s)\|_2^2 \leq J \quad (6.17)$$

o que conclui a prova. ■

Alguns comentários se fazem necessários. Em primeiro lugar, utilizando (6.6) e o fato que o teorema 6 leva a $C_K(s) \in \mathcal{P}$, temos que a função objetivo do problema (6.2) satisfaz

$$\|H_{zw}(s)\|_2^2 \leq J + \mathbf{Tr} (C_1\Pi_2C_1') \quad (6.18)$$

onde o limitante superior J foi minimizado sobre todas as soluções factíveis do problema de otimização convexo introduzido no teorema 6. Em segundo lugar, o controlador SPR calculado, com função de transferência

$$C(s) = L_2'W^{-1}[sI - (A - B_2L_2'W^{-1} - L_2C_2)]^{-1}L_2$$

não é, em geral, o controlador LQG ótimo. Este importante aspecto é ilustrado pelo exemplo numérico apresentado na seção seguinte. Entretanto, uma importante propriedade é que, se as hipóteses 1-4 de [HBW94] forem verificadas, então o controlador acima coincide com o controlador LQG, conforme mostrado a seguir.

Corolário 2 *Considere que as hipóteses 1-4 de [HBW94] (64) são válidas. Então o teorema 6 leva ao controlador LQG.*

Prova Sobre as hipóteses 1-4 de [HBW94], primeiro mostramos que $W = P_2^{-1} > 0$ e $Z = D_{21}'L_2'P_2L_2D_{21}$ são factíveis para as inequações (6.12-6.14). Com esta escolha, aplicando complementos de Schur à (6.12), é simples verificar que ela é satisfeita. As hipóteses 1-3 implicam que $\Pi_2 = \Pi_0$ e, portanto, $B_2 = \Pi_2C_2'$. Consequentemente, $K_2 = L_2'P_2$ e para $W = P_2^{-1}$ (6.13) é satisfeita, pois P_2 é solução da equação de

Riccati (6.10). Devido à hipótese 4, (6.14) é verificada [HBW94]. Graças a (6.16) e (6.18), o ponto factível em consideração é ótimo. ■

O corolário acima mostra que os resultados do teorema 6 são menos conservativos do que resultados relacionados da literatura. Na realidade, o problema aqui proposto é sempre factível dentro das hipóteses 1-4. Não obstante, estas hipóteses não são necessárias para que uma solução seja encontrada. Este ponto será melhor ilustrado com o exemplo apresentado.

Em [HBW94], os autores propõe uma versão mais fraca da hipótese 4, a saber,

$$\begin{aligned} C_1' C_1 &> C_2' (D_{12}' D_{12})^{-1} C_2 - \\ &\quad - [K + (D_{12}' D_{12})^{-1} C_2]' \cdot (D_{12}' D_{12}) \cdot \\ &\quad \cdot [K + (D_{12}' D_{12})^{-1} C_2] \end{aligned} \quad (6.19)$$

deve ser verificada para $K = K_2$. É claro que esta equação é implícita, uma vez que P_2 depende de C_1 e K_2 depende de P_2 . Conforme colocado em [HBW94], ela não pode ser testada *a priori*. A seguir apresentamos uma outra contribuição deste trabalho. Mostramos que a inequação acima na verdade define um subconjunto do conjunto de factibilidade do problema de otimização proposto no teorema 6.

Corolário 3 *Considere $K = L_2' W_0^{-1}$, com uma matriz arbitrária $W_0 = W_0' > 0$ tal que (6.13) e (6.19) sejam verificadas. Neste caso, $W = W_0$ é factível para (6.14).*

Prova A inequação (6.13) é equivalente a

$$AW_0 + W_0 A' - Q_2 + (W_0 C_1' - L_2 D_{12}') (C_1 W_0 - D_{12} L_2') \leq 0$$

e, com simples manipulações, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} W_0 (A - L_2 C_2)' + (A - L_2 C_2) W_0 - Q_2 &\leq - (W_0 C_1' - L_2 D_{12}') (C_1 W_0 - D_{12} L_2') \\ &\quad - L_2 C_2 W_0 - W_0 C_2' L_2'. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Por outro lado, (6.19) equivale a

$$C_1' C_1 + K' C_2 + C_2' K + K' D_{12}' D_{12} K > 0.$$

Utilizando o fato que $K W_0 = L_2'$, e multiplicando esta desigualdade em ambos os lados por W_0 , rearranjando os termos temos

$$(W_0 C_1' - L_2 D_{12}') (C_1 W_0 - D_{12} L_2') + L_2 C_2 W_0 + W_0 C_2' L_2' > 0.$$

Juntamente com (6.20), a inequação acima implica que (6.14) é verificada, o que completa a prova. ■

Este corolário tem algumas importantes implicações. Ele relaciona o teorema 6 com outras abordagens da literatura, e estabelece interessantes relações com o problema LQG. Sua mais importante implicação, entretanto, é que ele mostra que (6.19) define apenas um subconjunto do espaço factível do teorema 6. Desta forma, o teorema 6 apresenta resultados menos conservativos do que aqueles existentes na literatura.

6.1.4 Exemplo

Nesta seção um exemplo é apresentado para ilustrar as técnicas apresentadas neste trabalho. O exemplo consiste de uma haste de Euler-Bernouli com suporte simples (veja [HBW94] para detalhes). A deflexão transversal $d(p, t)$ pode ser aproximada por decomposição modal por

$$d(p, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(rp)q_r(t) \quad (6.21)$$

onde as coordenadas modais $q_r, r = 1, 2, \dots$ satisfazem

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) = \sin(rp_a)u(t) \quad (6.22)$$

com $\omega_r = r^2$, $\xi = 0.01$. Um atuador de força pontual com intensidade $u(t)$ está localizado em $p_a = 1.7279$. O sensor de velocidade está localizado na mesma posição, de forma a medir

$$\dot{d}(p_a, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(rp_a)\dot{q}_r(t) \quad (6.23)$$

Seguindo [HBW94], apenas os 5 primeiros modos são considerados. Definindo as variáveis de estado $x' = [q_1 \ \dot{q}_1 \ \dots \ q_5 \ \dot{q}_5]'$ e assumindo perturbações independentes tanto no sensor como no atuador, o modelo do sistema é dado pelas equações (6.1),

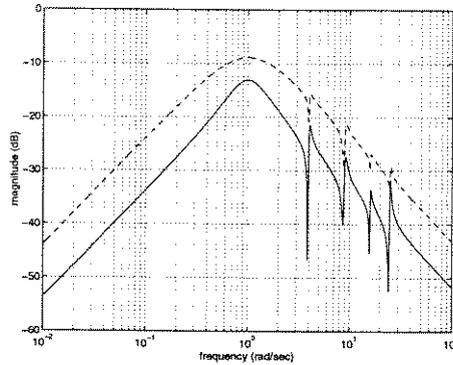


Figura 6.2: Magnitude dos controladores.

onde

$$A = \text{diag} \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\omega_r^2 & -2\xi\omega_r \end{array} \right], r = 1 \dots 5 \right\}$$

$$B_2 = C_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9877 \\ 0 \\ -0.3090 \\ 0 \\ -0.8910 \\ 0 \\ 0.5878 \\ 0 \\ 0.7071 \end{bmatrix}, \quad D_{21}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.9 \end{bmatrix}$$

$$B_1' = \begin{bmatrix} B_2' \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que o sistema dado pelas matrizes (A, B_2, C_2) é positivo real para qualquer número de modos (por exemplo, 5) considerados. Isto posto, o projeto de um controlador SPR para o modelo truncado leva a um controlador que garante a estabilização do sistema com um número arbitrário de modos. Esta propriedade de robustez é a característica mais importante do controlador proposto.

Projeto 1. O critério de performance (isto é, a saída controlada z) é definida

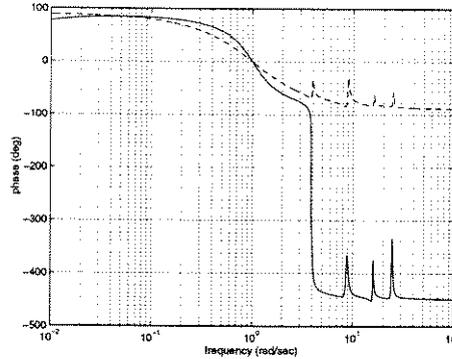


Figura 6.3: Fase dos controladores.

em termos da velocidade em $p = 2.1991$, levando às matrizes

$$C'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.8090 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.9511 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.3090 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5878 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.9 \end{bmatrix}$$

Neste caso, as hipóteses anteriores que garantem que o LQG é SPR não são todas verificadas. Em particular, é fácil notar que a hipótese 4, $C'_1 C_1 > C'_2 (D'_{12} D_{12})^{-1} C_2$ não é satisfeita. Além disso, a função de transferência $C_{LQ}(s)$ definida pelos ganhos L_2 e K_2 não é SPR (veja as figuras 6.2 e 6.3, linha sólida). O custo do LQG é $\|H_{zw}\|_2 = 1.9843$.

Com os resultados do teorema 6, um controlador SPR foi calculado (veja as figuras 6.2 e 6.3, linha tracejada), levando a um limitante superior do custo $\|H_{zw}\|_2 \leq 2.2258$. Com este controlador, o custo foi calculado como sendo $\|H_{zw}\|_2 = 2.2162$.

Escolhendo a matriz B_1 como proposto na hipótese 2 e a matriz

$$C_1 = (D'_{12} D_{12})^{-1/2} C_2$$

que satisfaz a hipótese 4, porém não estritamente, verifica-se que $C_{LQ}(s) \in \mathcal{P}$. Neste caso, o teorema 6 leva ao controlador LQG ótimo, e o limitante superior do custo coincide com o valor da norma \mathcal{H}_2 em $\|H_{zw}\|_2 = 1.8419$.

Projeto 2. O critério de performance (isto é, a saída controlada z) é definida em termos da deflexão transversal em $p = 2.1991$, gerando as matrizes

$$C'_1 = \begin{bmatrix} 0.8090 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.9511 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.3090 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5878 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Com estes dados, que claramente não satisfazem as hipóteses 1-4, os resultados de [HBW94] não se aplicam. O controlador LQG $C_{LQ}(s) \notin \mathcal{P}$ e o custo do LQG foi calculado como $\|H_{zw}\|_2 = 1.2375$. Entretanto, o teorema 6 leva a um controlador SPR, com um limitante superior do custo dado por $\|H_{zw}\|_2 \leq 1.4131$, enquanto o valor real na norma em malha fechada foi obtido como $\|H_{zw}\|_2 = 1.3856$.

6.2 Síntese de Controladores SPR com restrições $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção estendemos os resultados anteriores para o caso onde deseja-se respeitar ou otimizar um limitante superior para a norma mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ do sistema em malha fechada. O leitor poderá ver a analogia entre este caso e o caso anterior.

6.2.1 Introdução

Nesta seção propomos uma técnica para a síntese de controladores estritamente positivo-reais com a otimização de um limitante $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Esta técnica é de importância para plantas positivas reais. Note que o controlador projetado desta forma apresenta uma série de propriedades de robustez. Além daquelas provenientes da positividade-real, discutidas na seção anterior, também perturbações que não superem o inverso do limitante imposto pela norma \mathcal{H}_∞ serão rejeitadas.

Nesta seção os resultados são também generalizados para duas saídas controladas. Resultados análogos podem ser obtidos para duas entradas controladas por dualidade.

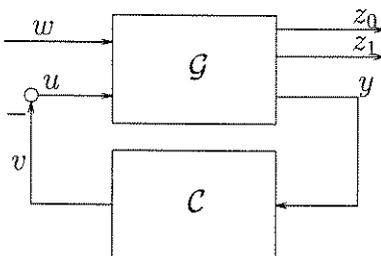


Figura 6.4: Sistema realimentado

6.2.2 Definição do Problema

A estrutura básica do sistema realimentado é semelhante à utilizada anteriormente, e é representada na figura 6.4, onde \mathcal{G} é uma planta linear e invariante no tempo. Sua descrição é dada por

$$\mathcal{G} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u \\ y = C_y x + D_y w \\ z_1 = C_z x + D_z u \\ z_0 = C_0 x + D_0 u \end{cases} \quad (6.24)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^m$ é a saída medida, $w \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de perturbações, $z_1 \in \mathbb{R}^q$ e $z_0 \in \mathbb{R}^s$ são as saídas controladas. Além disso, seja \mathcal{C} um controlador linear invariante no tempo com representação de estado dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c \end{cases}$$

Assumimos que as condições de ortogonalidade se verificam, isto é, que $C'_0 D_0 = 0$, $C'_z D_z = 0$ e $B_w D'_y = 0$, e que D_0 , D_z e D'_y têm rank de coluna completos. Os pares (A, B_w) e (A, B_u) são estabilizáveis e os pares (A, C_z) e (A, C_y) são detectáveis. Seja \mathcal{H} o sistema de malha fechada da figura 6.4 para um controlador \mathcal{C} .

Assumimos que o sistema de malha aberta \mathcal{G} é positivo real da entrada u para a saída y . Note que esta condição é necessária apenas para que as condições de robustez de malha fechada se verifiquem, uma vez que os resultados aqui expostos dela não dependem, como será mais discutido na sequência.

Por conveniência de notação, seja \mathbb{P} o conjunto de todas as $m \times m$ funções de transferência estritamente positiva-reais. Um teste simples para testarmos se $\mathcal{T} \in \mathbb{P}$

é feito pela solução do seguinte problema de programação convexa:

$$\alpha(\mathcal{T}) = \min \{ \alpha : P = P' > 0, C = B'P, A'P + PA \leq \alpha I \} \quad (6.25)$$

Consequentemente $\alpha(\mathcal{T}) < 0 \Leftrightarrow \mathcal{T} \in \mathbb{P}$.

Nosso problema alvo pode ser descrito como se segue: encontrar (se existir) um controlador SPR $\mathcal{C} \in \mathbb{P}$ tal que a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência de malha fechada de w para z_0 (H_{wz_0}) seja minimizada, enquanto a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de malha fechada de w para z_1 (H_{wz_1}) seja menor do que o limitante pré-estabelecido γ .

Da forma como foi enunciado o problema acima é de difícil solução, mesmo no caso em que a restrição $\mathcal{C} \in \mathbb{P}$ é deixada de lado, levando ao problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ clássico:

$$\inf_{\mathcal{C}} \{ \|H_{wz_0}\|_2^2 : \|H_{wz_1}\|_\infty \leq \gamma \} \quad (6.26)$$

Este problema ainda não apresenta uma solução conclusiva para a síntese de um controlador de ordem completa [Sch95, CW95].

A literatura apresenta uma adaptação de (6.26), proposta em [KR91], pela substituição da função objetivo por um limitante superior apropriado. Note que a minimização do limitante superior não necessariamente leva à solução ótima do problema inicial (6.26). Entretanto, o problema de otimização resultante é passível de ataque por abordagens numéricas. A definição do limitante superior está baseada no seguinte lema (see [Sch90]):

Lema 7 *Seja $T(s)$ a função de transferência correspondente à realização de estados $\mathcal{T} = [A, B, C, 0]$, onde o par (A, C) é detectável. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\exists P = P' > 0$ tal que

$$AP + PA' + \gamma^{-2}PC'CP + BB' \leq 0$$

2. A é Hurwitz e $\|T\|_\infty \leq \gamma$.

Note que para todo $P > 0$ satisfazendo a parte 1 do lema 7, então

$$\begin{aligned} \|T\|_2^2 &= \text{Tr} \left(C \int_0^\infty e^{At} BB' e^{A't} dt C' \right) \\ &\leq \text{Tr} (CPC') \end{aligned}$$

o que mostra que a mesma matriz positiva-definida P utilizada para caracterizar o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ também leva a um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 da mesma função de transferência. Esta propriedade sugere a definição do *custo misto* $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [BH89, KR91].

Definição 19 (Custo Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) *Seja $T(s)$ a função de transferência correspondente à realização de estados $\mathcal{T} = \left[A, B, \begin{bmatrix} C_z \\ C_0 \end{bmatrix}, 0 \right]$, onde o par (A, C_z) é detectável. O custo misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é dado por*

$$J_\gamma(\mathcal{T}) = \inf \text{Tr} (C_0 P C_0') \quad (6.27)$$

onde o ínfimo é tomado entre todas as matrizes $P = P' > 0$ satisfazendo a desigualdade

$$AP + PA' + \gamma^{-2} P C_z' C_z P + BB' \leq 0 \quad (6.28)$$

De forma análoga, $J_\gamma(\mathcal{T}) = +\infty$ nos casos onde a desigualdade acima não é factível.

Com esta definição, uma solução subótima do problema (6.26) pode ser obtida pela solução ótima global de

$$\inf_{\mathcal{C}} \{J_\gamma(\mathcal{H})\} \quad (6.29)$$

onde, como definido acima, \mathcal{H} é a função de transferência de malha fechada para um dado controlador \mathcal{C} . Mostra-se em [KR91] que o problema acima pode ser convertido em um problema convexo por uma troca de variáveis e, conseqüentemente, resolvido de forma eficiente.

Nesta seção, o mesmo limitante superior da norma \mathcal{H}_2 é adotado. Com isto em mente, o problema da síntese de um controlador SPR que minimize $J_\gamma(\mathcal{H})$ pode ser reformulado como

$$\inf_{\mathcal{C}} \{J_\gamma(\mathcal{H}) : \mathcal{C} \in \mathbb{P}\} \quad (6.30)$$

O Problema (6.30) é de difícil solução. Ele leva a um sistema fortemente acoplado de equações não-lineares, de difícil solução numérica. Duas abordagens diferentes têm sido utilizadas na literatura para atacar problemas de natureza similar a este. Em [JJA⁺90], apenas uma saída controlada é levada em consideração, e não há o limitante \mathcal{H}_∞ . Um limitante superior à norma \mathcal{H}_2 é definido, e procedimentos numéricos são utilizados para resolver diretamente as equações não-lineares acopladas

obtidas das condições necessárias de otimalidade. Como discutido em [JJA⁺90], entretanto, o princípio da separação não se verifica, e o projeto do controlador e do observador deve ser feito de forma conjunta. Em princípio, uma abordagem semelhante poderia ser utilizada no problema em questão, mas a convergência para uma solução ótima não é garantida. Uma outra abordagem é a de [HBW94], que segue a discussão traçada na seção anterior. Basicamente, os autores não levam em consideração a restrição $C \in \mathbb{P}$, e obtém condições suficientes que garantem que a solução ótima do problema misto padrão (6.29) leva a um controlador SPR.

Em nosso caso, uma abordagem sub-ótima será considerada. Desta forma, um conjunto de condições suficientes para a existência de um controlador SPR, solução sub-ótima de (6.30), serão obtidas. O ponto fundamental a ser realçado é o fato do controlador ser calculado por um problema de otimização convexo baseado em LMIs. Além disso, os resultados generalizam a abordagem de [KR91].

A idéia principal, como na seção anterior, é considerar uma estrutura *ad-hoc* para o controlador:

$$C_K : \begin{cases} \dot{x}_c = (A_\infty - L_\infty C_y - B_u K)x_c + L_\infty y \\ u = Kx_c \end{cases} \quad (6.31)$$

onde $A_\infty = A + \gamma^{-2} Y_\infty C'_z C_z$,

$$L_\infty = Y_\infty C'_y (D_y D'_y)^{-1} \quad (6.32)$$

e Y_∞ é a solução simétrica e não-negativa da equação de Riccati

$$AY_\infty + Y_\infty A' + \gamma^{-2} Y_\infty C'_z C_z Y_\infty - Y_\infty C'_y (D_y D'_y)^{-1} C_y Y_\infty + B_w B'_w = 0. \quad (6.33)$$

tal que $A_\infty - L_\infty C_y$ é Hurwitz. Esta escolha deixa claro que todos os controladores são parametrizados pela matriz de ganhos K , fato este que motiva a notação acima. Para esta classe de controladores, uma propriedade de separação importante é obtida [KR91], e será empregada na síntese do controlador SPR.

Com mais detalhes, defina o sistema de controle auxiliar

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \dot{x} = A_\infty x + L_\infty D_y w + B_u u \\ z_1 = C_z x + D_z u \\ z_0 = C_0 x + D_0 u \\ u = -Kx \end{cases} \quad (6.34)$$

que tem a seguinte função de transferência em malha fechada

$$F(s) = \begin{bmatrix} C_z - D_z K \\ C_0 - D_0 K \end{bmatrix} [sI - (A_\infty - B_u K)]^{-1} L_\infty D_y \quad (6.35)$$

Seja K qualquer ganho estabilizante tal que $\|F_{wz_1}\|_\infty \leq \gamma$. Então, de [KR91], podemos dizer que o controlador \mathcal{C}_K definido em (6.31) impõe ao sistema original a restrição de norma $\|H_{wz_1}\|_\infty \leq \gamma$ com o respectivo custo

$$J_\gamma(\mathcal{H}) = \text{Tr} (C_0 Y_\infty C_0') + J_\gamma(\mathcal{F}). \quad (6.36)$$

Com esta escolha da estrutura do controlador, o problema (6.30), dependente agora apenas de K , é equivalente ao problema de otimização

$$\inf_K \{J_\gamma(\mathcal{F}) : \mathcal{C}_K \in \mathbb{P}\}, \quad (6.37)$$

que será discutido a seguir.

6.2.3 Síntese

Nesta seção apresentamos os resultados de nossa abordagem. A idéia básica por trás desta abordagem consiste em explorar o princípio da separação obtido pela escolha da estrutura do controlador.

O resultado principal, enunciado no teorema 7 é então comparado com os resultados obtidos na seção 6.1.

Teorema 7 (Controlador Misto SPR) *Seja ϵ um parâmetro positivo arbitrariamente pequeno, e defina a matriz simétrica $Q_\infty = B_u L'_\infty + L_\infty B'_u$. Se, para algum $\gamma > 0$ dado, o problema de otimização convexo*

$$\bar{J}_\gamma = \min \text{Tr} (Z) \quad (6.38)$$

$$\begin{bmatrix} W & WC'_0 - \lambda L_\infty D'_0 \\ C_0 W - \lambda D_0 L'_\infty & Z \end{bmatrix} \geq 0 \quad (6.39)$$

$$\begin{bmatrix} A_\infty W + W A'_\infty - \lambda Q_\infty + \gamma^{-2} L_\infty D_y D'_y L'_\infty & WC'_z - \lambda L_\infty D'_z \\ C_z W - \lambda D_z L'_\infty & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (6.40)$$

$$(A_\infty - L_\infty C_y)W + W(A_\infty - L_\infty C_y)' - \lambda Q_\infty \leq -\epsilon I \quad (6.41)$$

tiver uma solução nas variáveis $\lambda > 0$, $W = W' > 0$ e $Z = Z' \geq 0$ então o controlador \mathcal{C}_K , com $K = \lambda L'_\infty W^{-1}$, é uma solução sub-ótima para o problema (6.37), isto é, $\mathcal{C}_K \in \mathbb{P}$ and $J_\gamma(\mathcal{H}) \leq \text{Tr} (C_0 Y_\infty C_0') + \gamma^2 \bar{J}_\gamma$.

Prova Primeiro mostraremos que o controlador \mathcal{C}_K é SPR.

Substituindo a expressão de K em (6.41), e notando-se que $W > 0$, temos

$$(A_\infty - L_\infty C_y - B_u K)W + W(A_\infty - L_\infty C_y - B_u K)' \leq -\epsilon I < 0$$

que implica, após a multiplicação de ambos os lados por $\sqrt{\lambda}W^{-1}$, juntamente com a parte 3 do lema 3, que $\mathcal{C}_K \in \mathbb{P}$. Note ainda que (6.40) pode ser reescrita como

$$A_\infty W + WA'_\infty - \lambda Q_\infty + \gamma^{-2}L_\infty D_y D'_y L'_\infty + (C_z W - \lambda D_z L'_\infty)'(C_z W - \lambda D_z L'_\infty) \leq 0. \quad (6.42)$$

Substituindo a expressão para K na desigualdade acima, após algumas manipulações algébricas obtemos

$$(A_\infty - B_u K)P + P(A_\infty - B_u K)' + \gamma^{-2}P(C_z - D_z K)'(C_z - D_z K)P + L_\infty D_y D'_y L'_\infty \leq 0 \quad (6.43)$$

onde $P = \gamma^2 W > 0$. Juntamente com o lema 7, esta desigualdade garante que K estabiliza assintoticamente em malha fechada a planta auxiliar \mathcal{F} e $\|F_{wz_1}\|_\infty \leq \gamma$. Realmente, suponha que exista $x \neq 0$ tal que $(A_\infty - B_u K)x = 0$. Multiplicando os dois lados a última desigualdade por P^{-1} concluímos que, para o mesmo autovetor, $Kx = 0$ e $C_z x = 0$, ou seja, o vetor x deve ser tal que $A_\infty x = 0$ e $C_z x = 0$. Isto é impossível, uma vez que (A, C_z) detectável implica que (A_∞, C_z) é também detectável. Logo \mathcal{C}_K é tal que o sistema original em malha fechada \mathcal{H} é estável e $\|H_{wz_1}\|_\infty \leq \gamma$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \gamma^2 \bar{J}_\gamma &= \gamma^2 \mathbf{Tr} (Z) \\ &= \gamma^2 \mathbf{Tr} ((C_0 W - \lambda D_0 L'_\infty)W^{-1}(C_0 W - \lambda D_0 L'_\infty)') \\ &= \mathbf{Tr} ((C_0 - D_0 K)P(C_0 - D_0 K)') \\ &\geq J_\gamma(\mathcal{F}) \end{aligned} \quad (6.44)$$

o que, junto com (6.36), completa a prova do teorema. \blacksquare

O Teorema 7 requer alguns comentários. Note que seus resultados não necessariamente capturam a solução ótima do problema (6.37). A explicação é a seguinte. Como W está restrito a ser positiva-definida, sempre existe uma matriz não negativa Z tal que (6.39) é verificada, o que mostra que esta restrição é sempre factível. As desigualdades (6.40) e (6.41) garantem que as restrições da norma \mathcal{H}_∞ e de SPR sejam respeitadas, respectivamente. A sub-otimalidade da solução vem da restrição que as duas matrizes positivo-definidas que satisfazem estas duas equações estão acopladas. Mais especificamente, se $W > 0$ satisfaz a desigualdade (6.40), então a restrição SPR deve ser satisfeita com a matriz λW^{-1} . Esta restrição é necessária para a obtenção

de um problema convexo formulado por LMIs. Mostraremos a seguir, por comparação, que os resultados não são mais conservativos do que aqueles encontrados na literatura [HBW94].

Teorema 8 ([HBW94]) *Seja a planta \mathcal{G} , com uma saída controlada, ou seja, $C_0 = C_z$ e $D_0 = D_z$, tal que*

1. $G(s)$ é positiva real, isto é, existem matrizes $Y_0 > 0$ e $Q_0 \geq 0$ tais que

$$AY_0 + Y_0A' = -Q_0, \quad Y_0C_y' = B_u \quad (6.45)$$

2. $D_z'D_z = D_yD_y'$;
3. $B_wB_w' = Q_0 + B_u(D_z'D_z)^{-1}B_u' - \gamma^{-2}Y_0C_z'C_zY_0 > 0$;
4. $C_z'C_z > C_y'(D_z'D_z)^{-1}C_y$;

então o controlador central $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, solução ótima de (6.29), é estritamente positivo real. Mais precisamente, o controlador \mathcal{C}_∞ com $K = K_\infty = (D_z'D_z)^{-1}B_u'P_\infty$, onde $P_\infty > 0$ é a solução da equação de Riccati

$$A_\infty'P_\infty + P_\infty A_\infty + C_z'C_z - P_\infty B_u(D_z'D_z)^{-1}B_u'P_\infty + \gamma^{-2}P_\infty L_\infty D_y D_y' L_\infty' P_\infty = 0, \quad (6.46)$$

é tal que $\mathcal{C}_\infty \in \mathbb{P}$ e

$$J_\gamma(\mathcal{H}_\infty) = \text{Tr}(C_z Y_\infty C_z') + \text{Tr}(D_y' L_\infty' P_\infty L_\infty D_y) \quad (6.47)$$

A prova do teorema 8 consiste em mostrar que, com as hipóteses em questão, a matriz $Y_\infty = Y_0$ é a solução de (6.33). Além disso, a matriz P_∞ que satisfaz (6.46) é tal que $A_c'P_\infty + P_\infty A_c < 0$ e $K_\infty = L_\infty'P_\infty$, onde A_c é igual a $A_\infty - L_\infty C_y - B_u K_\infty$. Em [HBW94], a versão dual do custo misto apresentado na definição 19 é utilizada. A igualdade (6.47) segue pelo fato que, por hipótese, a planta tem apenas uma saída controlada. O seguinte corolário mostra que as LMIs do teorema 7 são todas factíveis sempre que as hipóteses 1 a 4 do teorema 8 forem verificadas. Neste sentido, o teorema 7 generaliza as condições de solvabilidade do problema em questão.

Corolário 4 *Suponha que as condições do teorema 8 se apliquem. Então as LMIs do teorema 7 são factíveis.*

Prova Uma vez que a desigualdade (6.39) é sempre verificada, apenas precisamos mostrar que as desigualdades (6.40) e (6.41) são factíveis. Para tanto, considere $W = P_\infty^{-1}$ e $\lambda = 1$. Com as hipóteses em questão, $Y_\infty = Y_0$. Consequentemente, temos $K_\infty = (D'_z D_z)^{-1} B'_u P_\infty = (D_y D'_y)^{-1} C_y Y_\infty P_\infty = \lambda L'_\infty W^{-1}$. Mais ainda, utilizando complementos de Schur, juntamente com (6.46), é simples verificar que a desigualdade (6.40) é satisfeita.

Finalmente, (6.41) é verificada pois algumas manipulações a (6.46) levam a

$$(A_\infty - L_\infty C_y)' P_\infty + P_\infty (A_\infty - L_\infty C_y) - P_\infty Q_\infty P_\infty \leq -C'_z C_z + C'_y (D'_z D_z)^{-1} C_y$$

que apresenta o lado direito negativo definido pela hipótese 4. ■

Conforme apontado em [HBW94], a condição 4 no teorema 8 pode ser substituída por uma condição mais fraca,

$$C'_z C_z + K' D'_z D_z K + K' C_y + C'_y K + \gamma^{-2} K' D_y D'_y K > 0, \quad (6.48)$$

que deve ser verificada para $K = K_\infty$. É fácil ver que esta condição só pode ser testada *a posteriori*, pois P_∞ depende de C_z e K_∞ depende de P_∞ . O corolário a seguir apresenta um importante resultado. Ele mostra que a desigualdade acima define um subconjunto do espaço de factibilidade do problema convexo do teorema 7.

Corolário 5 *Considere $K = \lambda_0 L'_\infty W_0^{-1}$, onde $\lambda_0 = 1$ e $W_0 = W'_0 > 0$ são tais que (6.40) e (6.48) são verificadas. Então $W = W_0$ e $\lambda = \lambda_0$ são factíveis para a desigualdade (6.41).*

Prova A desigualdade (6.40) é equivalente a

$$\begin{aligned} A_\infty W_0 + W_0 A'_\infty - Q_\infty \\ + \gamma^{-2} L_\infty D_y D'_y L'_\infty + (C_z W_0 - D_z L'_\infty)' (C_z W_0 - D_z L'_\infty) \leq 0. \end{aligned} \quad (6.49)$$

e por meio de simples manipulações pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} (A_\infty - L_\infty C_y) W_0 + W_0 (A_\infty - L_\infty C_y)' - Q_\infty \\ \leq -(C_z W_0 - D_z L'_\infty)' (C_z W_0 - D_z L'_\infty) \\ - L_\infty C_y W_0 - W_0 C'_y L'_\infty - \gamma^{-2} L_\infty D_y D'_y L'_\infty \end{aligned} \quad (6.50)$$

Por outro lado, sabendo que $K W_0 = L'_\infty$, multiplicamos a desigualdade (6.48) por W_0 e rearranjamos os termos para obter

$$\begin{aligned} (C_z W_0 - D_z L'_\infty)' (C_z W_0 - D_z L'_\infty) \\ + L_\infty C_y W_0 + W_0 C'_y L'_\infty + \gamma^{-2} L_\infty D_y D'_y L'_\infty > 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

que mostra que (6.41) é verificada. ■

O corolário acima mostra que o teorema 7 leva a uma solução mais geral ao problema SPR misto. Na verdade, o teorema 7 pode levar a um controlador SPR mesmo que as hipóteses do teorema 8 não sejam verificadas. Esta propriedade será ilustrada no exemplo a seguir.

Note que, se deixarmos $\gamma \rightarrow \infty$, os resultados desta seção convergem aos resultados da seção anterior, levando a um controlador SPR que minimiza um limitante da norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada da entrada w para a saída controlada $z_0 = z_1$. Neste caso, definindo as novas variáveis $Z_\gamma = \gamma^2 Z$, $W_\gamma = \gamma^2 W$ e fazendo $\lambda = \gamma^{-2}$, o problema de programação convexa do teorema 7 se reduz ao dual do problema apresentado no teorema 6.

6.2.4 Exemplo

Nesta seção ilustramos os resultados anteriores com um exemplo. Considere o controle de uma estrutura flexível, mais especificamente de uma barra de seção longitudinal triangular de comprimento l , onde M_0 é a densidade linear de massa, E é o coeficiente de elasticidade de Young e A_0 é a área da seção transversal na extremidade fixa. Veja [Ger89] e suas referências para maiores detalhes. A posição da barra pode ser aproximada por

$$d(p, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(p) x_i(t) \quad (6.52)$$

onde N é o número de modos retidos no modelo, p é a posição relativa à extremidade fixa da barra e x_i é a i -ésima coordenada. A função $\phi_i(p)$ é dada por

$$\phi_i(p) = \frac{1}{\sqrt{M_0 l}} \frac{\psi_0 \left(\sqrt{M_0 / EA_0} (l - p) \omega_i \right)}{\psi_1 \left(\sqrt{M_0 / EA_0} l \omega_i \right)}$$

onde $\psi_k(\cdot)$ é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem k , e ω_i é solução de

$$\psi_0 \left(\sqrt{\frac{M_0}{EA_0}} l \omega_i \right) = 0$$

Supondo que a barra tem um sensor de velocidade e um atuador de força posicionado em sua extremidade livre, em $p_a = l$, sujeito a perturbações independentes, o

comportamento dinâmico do vetor de coordenadas $x' = [x_1 \dot{x}_1 \dots x_N \dot{x}_N]$ é dado por (6.24), com os dados como a seguir:

$$\begin{aligned} A &= \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N \right\} \\ B_u &= B_u(p_a) = [0 \quad \phi_1(p_a) \quad \dots \quad 0 \quad \phi_N(p_a)]' \\ C_y &= B_u' \\ B_w &= [B_u \quad 0] \\ D_y &= [0 \quad 1] \end{aligned}$$

Assumindo $M_0 = 1$, $EA_0 = 1$, $l = 10$ e $N = 5$, quatro projetos foram efetuados. Em todos os casos, a saída controlada z_1 define o critério de performance \mathcal{H}_∞ em termos da velocidade no ponto $p = 0.63l$, levando às matrizes

$$C_z = \begin{bmatrix} B_u'(6.3) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Para este modelo, as hipóteses do teorema 8 não podem ser simultaneamente satisfeitas. Realmente, definindo $\mathcal{T} = [A, B_u, C_y, 0]$, a solução ótima de (6.25) leva a $\alpha(\mathcal{T}) = 0$, que implica que a hipótese 1 é satisfeita com $Q_0 = 0$ e

$$Y_0 = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \omega_i^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \right\}$$

Entretanto, para satisfazer a hipótese 4, devemos considerar

$$R = C_z' C_z - C_y' (D_z' D_z)^{-1} C_y > 0$$

que leva à expressão, pela hipótese 3,

$$B_w B_w' = (1 - \gamma^{-2}) B_u (D_z' D_z)^{-1} B_u' - \gamma^{-2} Y_0 R Y_0 > 0$$

Esta condição claramente não pode ser verificada, mesmo para γ finito mas arbitrariamente grande.

Projeto 1 Sejam $\gamma = 100$, $C_0 = C_z$ e $D_0 = D_z$. Neste caso, o controlador central misto \mathcal{C}_∞ não é SPR. Apesar de as hipóteses do teorema 8 não serem satisfeitas, o controlador \mathcal{C}_K obtido pelo teorema 7 é SPR. A perda de otimalidade do controlador SPR \mathcal{C}_K é de aproximadamente 23% (veja a tabela 6.1).

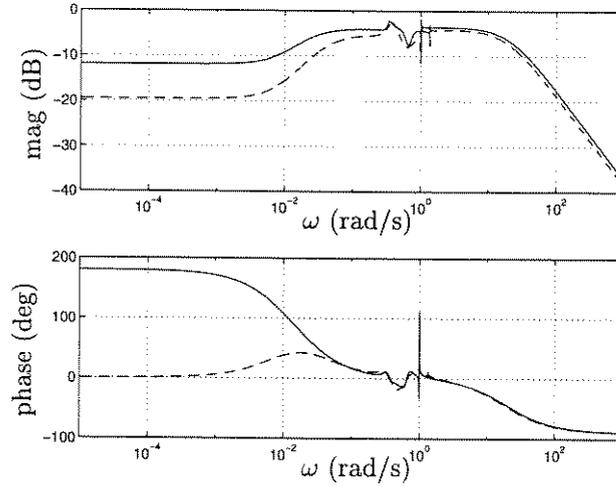


Figura 6.5: Diagrama de Bode dos controladores SPR misto (tracejado) e misto (sólido)

projeto	$\alpha(C_\infty)$	$J_\gamma(\mathcal{H}_\infty)$	$\alpha(C_K)$	$\text{Tr}(C_0 Y_\infty C_0) + \gamma^2 \bar{J}_\gamma$	λ
1	0.3169	1.1679	-0.0009	1.4362	6.48E-5
2	0.2940	1.7581	-0.0022	2.0253	7.60E-2
3	-2.66E-5	10.1798	-4.56E-5	10.1803	5.00E-5
4	2.50E-3	10.6415	-1.89E-3	11.7305	6.94E-2

Tabela 6.1: Comparação entre os projetos.

Projeto 2 Os dados são como acima, mas a atenuação \mathcal{H}_∞ é medida na mesma saída, com $\gamma = 3$. O controlador misto central $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ foi calculado, e obtivemos mais uma vez um controlador não SPR. Com o teorema 7, um controlador SPR foi obtido, e neste caso a perda de otimalidade foi reduzida para 15% (veja a tabela 6.1).

Projeto 3 Neste caso, $\gamma = 100$, e um problema misto com duas saídas, sendo C_z e D_z como antes e

$$C_0 = \begin{bmatrix} B'_u(10) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

foi estudado. O controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, solução do problema (6.29), foi mais uma vez calculado. É interessante notar que o controlador ótimo é SPR. Conforme indicado na tabela 6.1, o teorema 7 obteve aproximadamente a mesma solução.

Projeto 4 Os dados são como acima, mas com $\gamma = 3$. O controlador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, solução do problema (6.29), não é SPR. O teorema 7 leva a um controlador SPR, com perda de otimalidade em torno de 10%. A Figura 6.5 apresenta os diagramas de Bode de ambos os controladores. É fácil ver que o controlador misto \mathcal{C}_∞ não tem a fase contida no intervalo $(-90, 90)$, de acordo com a positividade de $\alpha(\mathcal{C}_\infty)$.

Em todos os casos em que os dados satisfizeram as hipóteses do teorema 8, a solução ótima do problema proposto no teorema 7 levou ao mesmo controlador.

6.3 Discussão

Neste capítulo apresentamos formas de síntese de controladores que são eles próprios positivo-reais. Tais controladores são apropriados ao caso em que já sabemos de antemão que a planta é positiva-real. No próximo capítulo tratamos do caso em que a planta não é positiva-real, e vamos estudar formas de projetar um controlador que faça o sistema em malha fechada SPR.

Capítulo 7

Controle PR

“Nós não sabíamos que não poderíamos fazê-lo, então fizemos assim mesmo.”

John Frankenheimer

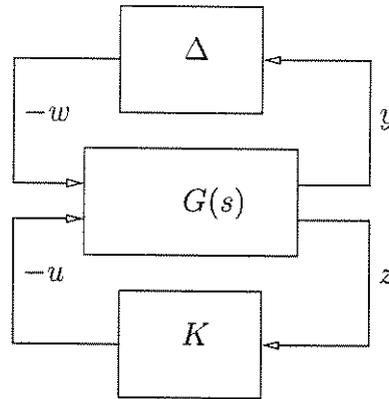
7.1 Introdução

No capítulo 6 vimos como é possível projetar controladores que são passivos. Estes controladores são úteis em problemas nos quais a planta é sabida positiva real. Neste capítulo consideramos o caso em que conhecemos propriedades da incerteza, por exemplo, que ela está restrita a um setor do plano. Em vários destes casos, é possível executar uma transformação de malha para obter um sistema equivalente, no qual a incerteza é passiva.

Uma vez que tenhamos uma incerteza passiva, a estabilidade robusta do sistema segue se a planta for estritamente passiva. Supondo que tal condição não seja verificada *a priori*, é de grande interesse o cálculo de um controlador que faça o sistema realimentado passivo frente à incerteza considerada. Este é o objetivo deste capítulo.

Já existem resultados da literatura referentes ao cálculo de um controlador que torna o sistema realimentado ESPR, ou estritamente positivo real estendido [SKS94]. Nosso objetivo, a seguir, é a análise do problema geral de tornar o sistema realimentado SPR.

Note que tornar o sistema realimentado SPR ainda é uma condição forte. Para minimizar a conservatividade dos resultados, analisamos o problema de tornar o



sistema realimentado SPR utilizando um multiplicador M .

7.2 Controle SPR

Nesta seção analisamos o problema de projeto de controladores tais que o sistema em malha fechada seja SPR. Desta forma temos robustez frente a incertezas PR.

Considere, a título de motivação, que o sistema linear \mathcal{G} está exposto a um conjunto de incertezas Δ , e que Δ é PR. Se pudermos aplicar um controlador a \mathcal{G} de forma a torná-lo SPR frente a Δ , a estabilidade robusta do sistema realimentado segue. Nossa intenção é obter uma caracterização de tal controlador.

Seja o sistema linear invariante no tempo \mathcal{G} descrito por

$$\mathcal{G} = \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \\ y = C_y x + D_w w \\ z = Cx \\ w = -\Delta y \end{cases} \quad (7.1)$$

Desejamos fazer com que \mathcal{G} seja SPR frente à Δ , ou seja, de w para y .

7.2.1 Realimentação de Estado

Suponha que o sistema (7.1) seja controlável. Buscamos um controlador \mathcal{C}

$$u = -Kx \quad (7.2)$$

que faça o sistema SPR de w para y . Reescrevendo as equações para o sistema em malha fechada temos

$$\mathcal{G}_C = \begin{cases} \dot{x} = (A - B_u K)x + B_w w \\ y = C_y x + D_w w \end{cases} \quad (7.3)$$

Podemos aplicar os resultados do Lema 4, para obter

$$\mathcal{G}_C \text{ é SPR} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (A - B_u K)P + P(A - B_u K)' & B_w - PC_y' \\ B_w' - C_y P & -D_w - D_w' \end{bmatrix} < 0$$

para algum $P = P' > 0$. Com base nesta relação, podemos enunciar o seguinte lema.

Lema 8 *Seja \mathcal{G} o sistema linear (7.1). Suponha que o par (A, B_u) é controlável. Então existe um controlador estático C , tal que $u = -Kx$ e \mathcal{G}_C é SPR se e somente se existirem matrizes $P = P' > 0$ e Y tais que*

$$\begin{bmatrix} AP + PA' - B_u Y - Y' B_u' & B_w - PC_y' \\ B_w' - C_y P & -D_w - D_w' \end{bmatrix} < 0 \quad (7.4)$$

Neste caso, $K = YP^{-1}$.

7.2.2 Realimentação de Saída

Suponha que o sistema (7.1) seja controlável. Buscamos um controlador C

$$C = \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c z \\ u = -C_c x_c \end{cases} \quad (7.5)$$

que faça o sistema SPR de y para w . Reescrevendo as equações para o sistema em malha fechada temos

$$\mathcal{G}_C = \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c C \\ -B_u C_c & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_w \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 0 & C_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x \end{bmatrix} + D_w w \end{cases} \quad (7.6)$$

Podemos mais uma vez aplicar os resultados do Lema 4. Considere que a matriz P é particionada como

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

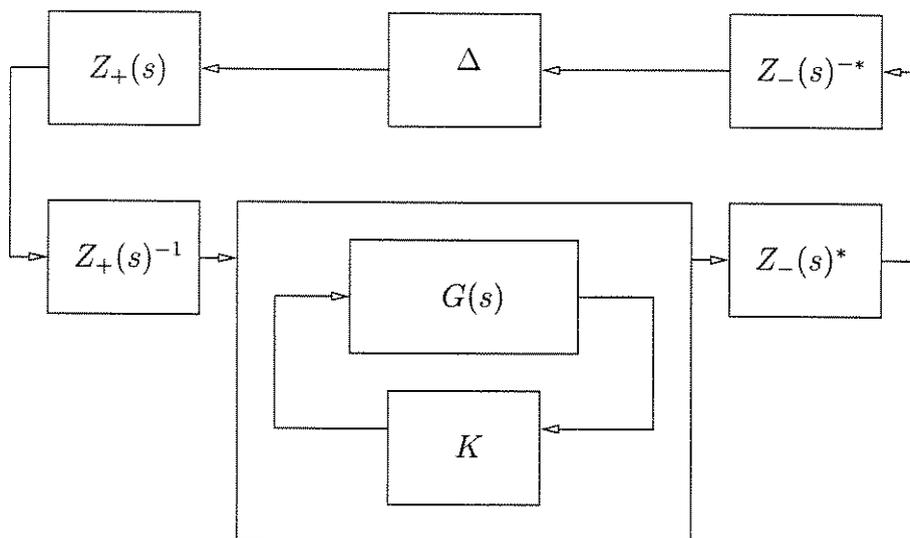


Figura 7.1: Sistema realimentado com multiplicadores.

Temos que (apenas a representação triangular superior é mostrada)

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{G}_c \text{ é SPR} \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \left[\begin{array}{ccc}
 A_c P_1 + P_1 A_c' & A_c P_2 + P_2 A_c' & -P_2 C_y' \\
 +B_c C P_2' + P_2 C' B_c' & +B_c C P_3 - P_1 C_c' B_u' & \\
 & A P_3 + P_3 A' & B_w - P_3 C_y' \\
 & -B_u C_c P_2 - P_2 C_c' B_u' & -D_w - D_w'
 \end{array} \right] < 0
 \end{aligned}$$

Uma solução baseada em LMIs para este problema é apresentada em [BGO].

7.3 Controle SPR com Multiplicadores

Muitas vezes pedir que o sistema realimentado seja SPR frente à incerteza é uma condição desnecessariamente restritiva. Nesta seção analisamos o problema de projeto de um controlador \mathcal{C} tal que o sistema em malha fechada seja SPR com o auxílio de um multiplicador M . Vamos analisar duas versões deste problema. Na primeira versão, supomos que o multiplicador é um dado do problema. Na segunda, tentamos obter o multiplicador ótimo juntamente com o controlador.

Considere o sistema da figura 7.1. Note que o multiplicador M faz parte da malha que conecta \mathcal{G} e Δ . Desejamos utilizar o controlador \mathcal{C} para melhorar as características de robustez do sistema em malha fechada.

Suponha, inicialmente, que o multiplicador M é conhecido. Por exemplo, M foi obtido pela técnica ilustrada no Capítulo 5. Neste caso, desejamos que \mathcal{C} seja tal que torne $Z^{-1}GZ$ mais positivo real, no contexto de (4.3, p. 40).

7.3.1 Realimentação de Estado

Multiplicador Estático

Considere o sistema dado na figura 7.1, com \mathcal{G} dado por (7.1). Suponha inicialmente que o multiplicador procurado é estático, isto é,

$$\mathcal{M} = D_z. \quad (7.8)$$

Desejamos encontrar \mathcal{C} dado por (7.2) tal que o sistema em malha fechada seja \mathcal{M} -SPR, ou seja, seja SPR frente a um multiplicador \mathcal{M} .

O sistema em malha fechada pode ser descrito por (7.3). Considerando que ele deve ser SPR frente ao multiplicador (7.8) temos o seguinte lema.

Lema 9 *Seja o sistema dado por (7.1). Existe um multiplicador \mathcal{M} dado por (7.8) tal que o sistema realimentado pelo controlador \mathcal{C} dado por (7.2) se e somente se existirem matrizes P , D_z e Y tais que*

$$\begin{bmatrix} AP + PA - B_u Y - Y' B'_u & B_w D_z - P C'_y \\ D'_z B'_w - C_y P & -D_z D_w - D'_w D'_z \end{bmatrix} < 0 \quad (7.9)$$

Neste caso, $K = Y P^{-1}$.

Multiplicador Dinâmico

Considere agora que \mathcal{M} é dinâmico, dado por

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \dot{x}_z = A_z x_z + B_z y \\ y_z = C_z x_z + D_z y \end{cases} \quad (7.10)$$

O sistema em malha fechada é mais uma vez dado por (7.3). Para que o sistema em malha fechada seja SPR frente ao multiplicador \mathcal{M} é necessário que o lema 4 seja

satisfeito. Considerando P da forma (7.7) temos (representação triangular inferior)

$$\begin{bmatrix} A_z P_1 + P_1 A'_z & & & \\ B_w C_z P_1 + A P'_2 & B_w C_z P_2 + P'_2 C'_z B'_w + A P_3 + P_3 A' & & \\ + B_u K P'_2 + P'_2 A'_z & + B_u K P_3 + P_3 K' B'_u & & \\ B'_z - D_w C_z P_1 - C_y P'_2 & D'_z B'_w - D_w C_z P_2 - C_y P_3 & -D_w D_z - D'_z D'_w & \end{bmatrix} < 0 \quad (7.11)$$

Note que, neste caso, existem diversos produtos de variáveis, o que torna a expressão acima não linear. Até o momento, não é do conhecimento do autor uma solução fechada, formulada através de LMIs, para este problema.

7.3.2 Realimentação de Saída

Multiplicador Estático

Podemos aplicar mais uma vez o procedimento utilizado acima. O multiplicador \mathcal{M} é dado por $\mathcal{M} = D_z$. O sistema em malha fechada é dado pela realização em cascata do multiplicador e da planta realimentada, ou seja,

$$\mathcal{G}_{c\mathcal{M}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c C \\ -B_u C_c & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_w D_z \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 0 & C_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x \end{bmatrix} + D_w D_z w \end{cases}$$

Para que o sistema em malha fechada seja SPR frente ao multiplicador \mathcal{M} é necessário que o lema 4 seja satisfeito (apenas a representação triangular superior é mostrada):

$\mathcal{G}_{c\mathcal{M}}$ é SPR

\Downarrow

$$\begin{bmatrix} A_c P_1 + P_1 A'_c & A_c P_2 + P_2 A' & -P_2 C'_y & \\ + B_c C P'_2 + P'_2 C'_c B'_c & + B_c C P_3 - P_1 C'_c B'_u & & \\ & A P_3 + P_3 A' & B_w D_z - P_3 C'_y & \\ & -B_u C_c P_2 - P'_2 C'_c B'_u & -D_w D_z - D'_z D'_w & \end{bmatrix} < 0$$

Mais uma vez identificamos diversos produtos entre variáveis. Também neste caso o autor desconhece parametrizações que permitam a solução deste problema por meio de LMIs.

Multiplicador Dinâmico

O multiplicador \mathcal{M} é dado por (5.4). O sistema realimentado de $G(s)$ e $C(s)$ é dado por (7.6). Por simplicidade, seja sua realização dada por $(A_{g_c}, B_{g_c}, C_{g_c}, D_{g_c})$. Vamos definir

$$(A_a, B_a, C_a, D_a) = \left(\begin{bmatrix} A_z & 0 \\ B_{g_c} C_z & A_{g_c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_z \\ B_{g_c} D_z \end{bmatrix}, [D_{g_c} C_z \quad C_{g_c}], [D_{g_c} D_z] \right), \quad (7.12)$$

para a realização do sistema em malha fechada. A aplicação do lema 4 é imediata, levando a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{C\mathcal{M}} \text{ é SPR} \\ \Downarrow \\ \begin{bmatrix} A_a P + P A'_a & B_a - P C'_a \\ B'_a - C_a P & -D_a - D'_a \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

Mais uma vez temos uma série de produtos entre variáveis. O autor desconhece uma parametrização que leve à solução para este problema.

7.4 Discussão

Como o leitor pode verificar, diversos dos problemas de síntese ainda se encontram em aberto, em particular os mais interessantes. É possível que existam parametrizações que levem a soluções fechadas, baseadas em LMIs, para os problemas acima. Em particular, os resultados do Capítulo 5 indicam resultados que podem vir a ter análogos para síntese. Este é um ramo de pesquisa com várias portas abertas. Mesmo que parametrizações capazes de equacionar os problemas de síntese levantados não existam, ainda é possível a investigação de propriedades da solução por outros métodos, tais como métodos numéricos ou algoritmos iterativos.

Capítulo 8

Conclusões

“A atitude experimental substitui asserções generalizadas pela análise detalhada, convicções temperamentais por investigações específicas, opiniões cuja grandeza estão em precisa relação com sua imprecisão por pequenos fatos. É dentro das ciências sociais, na moral, na política e na educação, que ainda se dá o pensamento segundo grandes antíteses, oposições teóricas de ordem e liberdade, individualismo e socialismo, cultura e utilidade, espontaneidade e disciplina, realidade e tradição. O campo das ciências físicas já esteve, certa vez, ocupado por visões ‘totais’ similares, cujo apelo emocional era inversamente proporcional a sua clareza intelectual. ... Tornou-se uma questão de aclarar uma matéria confusa atacando-a pouco a pouco. Não conheço um caso em que o resultado final tenha sido qualquer coisa parecida com uma vitória para uma ou outra entre as teorias pré-experimentais. Todas desapareceram porque se tornaram cada vez mais irrelevantes para a situação descoberta, e com sua irrelevância detectada, perderam o significado e ficaram desinteressantes.”

John Dewey, em “New Republic”

8.1 Conclusões Gerais

Neste trabalho abordamos um leque de técnicas de análise e projeto de sistemas lineares relacionado ao conceito de passividade. Sendo uma idéia intuitivamente simples, e como toda idéia simples, de difícil expressão matemática, o conceito de passividade nos permitiu formular, de forma elegante, uma série de problemas contemporâneos de teoria de controle.

Mostramos como é possível utilizar os conceitos de passividade e positividade real para a análise de estabilidade robusta de sistemas lineares invariantes no tempo. Mais ainda, pudemos formular testes de estabilidade robusta, com uma abordagem original, que puderam ser equacionados como problemas de otimização convexos, propriedade esta que garante rápida e segura convergência para a solução do problema proposto.

No campo da síntese, também pudemos formular diversos problemas de estabilidade robusta, e apresentamos soluções para problemas de síntese de controladores positivo-reais, e algumas soluções para problemas de síntese de controladores que tornem a malha positiva-real.

O autor acredita ainda na possibilidade de que este texto venha a contribuir ao estudo de sistemas lineares e passividade, por reunir em um único volume uma série de resultados que se encontram espalhados na literatura.

8.2 Problemas em Aberto e Trabalhos Futuros

Como o leitor sem dúvida percebeu, não foram poucos os problemas interessantes que ficaram sem solução, ou ainda com soluções insatisfatórias em muitos casos. Em particular, diversos problemas de síntese continuam esperando formulações e soluções mais elegantes, campo este aberto para pesquisa futura.

Este trabalho se limitou a sistemas lineares invariantes no tempo. A autor acredita que diversos dos resultados aqui apresentados podem ser estendidos para outras classes de sistemas, em particular sistemas variantes no tempo. A extensão para sistemas não lineares é também uma interessante linha de pesquisa, uma vez que a técnica da passividade se adequa perfeitamente a esta classe de sistemas.

Bibliografia

- [AG64] M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher. *Absolute Stability of Regulator Systems*. Holden-Day, Inc., 1964.
- [AV77] J. K. Aggarwal and M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems – Stability Analysis*. Dowden, Hutchinson and Ross, Inc., 1977.
- [Bal95] V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in robustness analysis with multipliers. *System & Control Letters*, 25:265–272, 1995.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [BGO] J. Bernussou, J. C. Geromel, and M. C. Oliveira. On strict positive real systems design guaranteed cost and robustness issues. to appear, *System & Control Letters*, 1999.
- [BH89] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. Lqg control with an H_∞ performance bound: a riccati equation approach. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34(3):293–305, 1989.
- [BHPD94] V. Balakrishnan, Y. Huang, A. Packard, and J. Doyle. Linear matrix inequalities in analysis with multipliers. *Proc. ACC*, 2:1228–1232, 1994.
- [CDB91] H. Chapellat, M. Dahleh, and S. P. Bhattacharyya. On robust nonlinear stability of interval control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(1):59–67, 1991.
- [CGL97] P. Colaneri, J. C. Geromel, and A. Locatelli. *Control Theory and Design – a RH_2 - RH_∞ Viewpoint*. Academic Press, 1997.
- [CW95] X. Chen and J. T. Wen. A linear matrix inequality approach to the general mixed H_2/H_∞ control problem. pages 1443–1447, 1995.

- [DGKF89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 34(8):831–847, 1989.
- [dO96] Maurício Carvalho de Oliveira. Algoritmos de pontos interiores e desigualdades matriciais lineares. *Tese de Mestrado – FEE/UNICAMP*, Março 1996.
- [DV75] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems: Input and Output Properties*. Academic Press, New York, 1975.
- [Gap94] Pedro Bulach Gapski. Análise convexa do problema da estabilidade absoluta de sistemas tipo Lur’e. *Tese de Mestrado – FEE/UNICAMP*, Junho 1994.
- [Ger89] J. C. Geromel. Convex analysis and global optimization of joint actuator location and control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34:711–720, July 1989.
- [GG] Pedro B. Gapski and José C. Geromel. Synthesis of positive real mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ controllers. submitted.
- [GG94] P. B. Gapski and J. C. Geromel. A convex approach to the absolute stability problem. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39(9):1929–1932, September 1994.
- [GG95] J. C. Geromel and P. B. Gapski. Robust analysis and synthesis of feedback systems using multipliers. *European Control Conference*, 1995.
- [GG96a] J. C. Geromel and P. B. Gapski. Síntese de controladores \mathcal{H}_2 positivo reais. *XI CBA*, 1996.
- [GG96b] J. C. Geromel and P. B. Gapski. Synthesis of positive real H_2 controllers. In *35th IEEE CDC*, 1996.
- [GG97a] P. B. Gapski and J. C. Geromel. Lmi approach to the real parametric robust stability problem with multipliers. In *American Control Conference*, 1997.
- [GG97b] J. C. Geromel and P. B. Gapski. Synthesis of positive real H_2 controllers. *IEEE Trans. Automatic Control*, 42(7), July 1997.

- [GG98] P. B. Gapski and J. C. Geromel. LMI solutions to the robust stability problem with multipliers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8:599–610, 1998.
- [GPB91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM J. Control and Optimization*, 29(2):381–402, March 1991.
- [GPS92] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. H_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 19(1):23–27, 1992.
- [HB91] W. M. Haddad and D. S. Bernstein. Parameter-dependent lyapunov functions, constant real parametric uncertainty and the popov criterion in robust analysis and synthesis – parts i and ii. *Proceedings CDC*, pages 2274–2633, December 1991.
- [HBW94] W. M. Haddad, D. S. Bernstein, and Y. W. Wang. Dissipative H_2/H_∞ controller synthesis. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39(4):827–831, 1994.
- [JJA⁺90] M. J. Jacobus, M. Jamshidi, C. Abdallah, P. Dorato, and D. S. Bernstein. Design of strictly positive real, fixed-order dynamic compensators. In *Proc. IEEE CDC*, pages 3492–3495, 1990.
- [Kal63] R. E. Kalman. Lyapunov functions for the problem of Lur’e in automatic control. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 49(2):201–205, 1963.
- [KB60] R. E. Kalman and J. E. Bertram. Control systems analysis and design via the “second method” of lyapunov, I - continuous-time systems. *J. Basic Engrg. Trans. ASME*, 82(2):371–393, 1960.
- [KR91] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea. Mixed H_2/H_∞ control: a convex optimization approach. *IEEE Trans. Automatic Control*, 36(7):824–837, July 1991.
- [LJ95] R. Lozano and S. M. Joshi. Reply to “comments on ‘strictly positive real functions revisited’ ”. *IEEE Trans. Automatic Control*, 40(10), October 1995.
- [LLJ88] R. Lozano-Leal and S. M. Joshi. On the design of dissipative lqg-type controller. *Proc. CDC*, pages 1645–1646, 1988.

- [LLJ90] R. Lozano-Leal and S. Joshi. Strictly positive real transfer functions revisited. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11(35), November 1990.
- [LP45] A. I. Lur'e and V. N. Postnikov. On the theory of stability of control systems. *Prikl. Mat. i Mehk.*, IX(5), 1945.
- [LSC94] J. H. Ly, M. G. Safonov, and R. Y. Chiang. Real/complex multivariable stability margin computation via generalized popov multipliers - LMI approach. *Proc. ACC*, 1:425–429, 1994.
- [LT85] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, second edition, 1985.
- [MD95] H. J. Marques and C. J. Damaren. Comments on “strictly positive real functions revisited”. *IEEE Trans. Automatic Control*, 40(3), March 1995.
- [ND88] B. Noble and J. Daniel. *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall, third edition, 1988.
- [NG64] K. S. Narendra and R. M. Goldwyn. A geometrical criterion for the stability of certain nonlinear nonautonomous systems. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 11(3):406–407, 1964.
- [NT73] K. S. Narendra and J. H. Taylor. *Frequency Domain Criteria for Absolute Stability*. Academic, New York, 1973.
- [PD93] A. Packard and J. C. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109, 1993.
- [Pli58] V. A. Pliss. *Certain problems in the theory of stability in the whole*. LGU, 1958.
- [Pop61] V. M. Popov. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control. *Automat. Remote Control*, 22(8):857–875, 1961.
- [Sch90] C. Scherer. H_∞ -control by state-feedback and fast algorithms for the computation of optimal H_∞ -norms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(10):1090–1099, 1990.
- [Sch95] C. W. Scherer. Multiobjective H_2/H_∞ control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40:1054–1062, 1995.

- [SKS94] W. Sun, P. P. Khargonekar, and D. Shim. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 39(10):2034–2046, 1994.
- [Str] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications*.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, second edition, 1993.
- [Wen88] J. T. Wen. Time domain and frequency domain for strict positive realness. *IEEE Trans. Automatic Control*, 33(10), October 1988.
- [Wil71] J. C. Willems. *The Analysis of Feedback Systems*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1971.
- [Yak64] V. A. Yakubovitch. Solution of certain matrix inequalities encountered in nonlinear control theory. *Soviet Mathematics*, 5(3):652–656, 1964.
- [Zam66a] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part i: conditions derived using concepts of loop-gain, conicity and positivity. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11(2):228–238, 1966.
- [Zam66b] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part ii: conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. *IEEE Trans. Automatic Control*, 11(2):228–238, 1966.