

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

*Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Maurício Alves da Silva e aprovada pela
Comissão Julgadora em 22/11/1984.*



DECOMPOSIÇÃO, ANÁLISE E SÍNTESE

DE SISTEMAS DE GRANDE PORTE

MAURÍCIO ALVES DA SILVA

Orientador: Prof.Dr. Celso P. Bottura

Tese apresentada à Faculdade
de Engenharia de Campinas, da
Universidade Estadual de Cam
pinas - UNICAMP - como parte
dos requisitos exigidos para
obtenção do título de MESTRE
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

035/85

Campinas, 1984

UNICAMP

Agradecimentos

Gostaria de expressar os mais sinceros e profundos agradecimentos a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para o êxito deste trabalho. Aos professores, pelos valiosos cursos ministrados, aos colegas pela convivência agradável, aos meus familiares pelo estímulo e encorajamento constantes.

Em particular, gostaria de registrar a minha gratidão ao Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura, que, além de orientador, revelou-se um grande amigo.

À Maria,
minha esposa
e
Bento e Izabel,
meus pais

RESUMO

Neste trabalho, propomos e sistematizamos uma metodologia para a análise e síntese de sistemas dinâmicos de grande porte. Numa primeira parte, a partir das equações dinâmicas (no espaço de estado), propomos e implementamos um método para a decomposição de um sistema genérico em subsistemas hierarquicamente interconectados. Nesta parte do trabalho fazemos uso extensivo de conceitos pertinentes à teoria de grafos, e os resultados mais importantes foram colocados em forma algorítmica, possibilitando aplicações imediatas.

Na segunda parte, o estudo prossegue em direção aos subsistemas dinâmicos, então analisados individualmente. Neste contexto, dado que os subsistemas não são necessariamente monovariáveis, foram adotadas técnicas para o tratamento de sistemas multivariáveis, pressupondo prévia linearização. Fazemos então uma apresentação da generalização de técnicas de análise e projeto ao caso multivariável (domínio da frequência). Depois de abordada a teoria, apresentamos, implementamos e calibramos um método de projeto de controladores multivariáveis para os sistemas, baseado nos lugares característicos de MacFarlane.

ÍNDICE

. Cap. I - INTRODUÇÃO	I.1
. Cap. II - DECOMPOSIÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS	II.1.
II.1. Introdução	II.1
II.2. Grafos orientados	II.3
II.3. O Particionamento de sistemas dinâmicos	II.27
II.4. Conclusões	II.41
. Cap. III - ANÁLISE E PROJETO DE CONTROLADORES DE SISTEMAS LINEARES MULTIVARIÁVEIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	III.1
III.1. Introdução	III.1
III.2. Matrizes racionais	III.4
III.3. Miscelânea	III.13
III.4. Análise da performance de um SLMR	III.16
III.5. Comutatividade aproximada e algoritmo de alinhamento	III.27
III.6. Um método de projeto baseado nos L.C.	III.48
. Cap. IV - EXEMPLO DE PROJETO	IV.1
IV.1. Introdução	IV.2
IV.2. Projeto auxiliado por computador	IV.3
IV.3. Exemplo	IV.3

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

As técnicas de identificação, análise e síntese de sistemas de pequeno porte são razoavelmente bem dominadas, possibilitando o desenvolvimento de sofisticados sistemas de controle. No entanto, a abrangência cada vez maior da teoria de sistemas e controle tem exigido o aprimoramento e/ou generalização das técnicas existentes, assim como a criação de novas técnicas indispensáveis às novas aplicações.

Neste contexto insere-se este trabalho, onde fazemos uma investigação teórica, procurando sistematizar uma metodologia para o tratamento de sistemas de grande porte. Obviamente não serão cobertos todos os aspectos necessários ao estudo de um sistema, entretanto explicitaremos ao longo do texto os itens que merecem uma análise mais detalhada e que deverão ser motivo de estudos subsequentes.

No decorrer do trabalho verificaremos que a análise de sistemas de grande porte só é viável via técnicas de CAD. Desta forma todos os algoritmos desenvolvidos deverão ser vistos como algoritmos para CAD.

A seguir além de situar nosso "ambiente de trabalho", anteciparemos em linhas gerais o conteúdo dos capítulos seguintes.

. Visão Geral do Trabalho

O estudo a ser desenvolvido pressupõe o conhecimento do modelo (no espaço de estados) do sistema dinâmico envolvido, o que quer dizer que não nos deteremos em problemas de identificação de sistemas ou mesmo em aspectos de estimação de parâmetros. Além disso, será assumido que se trata de um sistema de grande porte, e que sua análise não será viável sem a utilização de técnicas de decomposição.

Numa primeira abordagem podemos incluir as seguintes etapas para a análise e síntese de um sistema de grande porte:

1. Dado o modelo geral de um sistema, decompô-lo em subsistemas interconectados;
2. Analisar as interconexões e se possível eliminá-las;
3. Analisar individualmente cada um dos subsistemas;
4. Projetar controladores ou estruturas de compensação para cada subsistema de modo a satisfazer critérios predeterminados de desempenho;
5. Analisar o desempenho global do sistema.

Neste trabalho, abordamos basicamente três dos cinco itens acima e pretendemos esmiuçar os dois restantes em trabalhos posteriores. Assim, no Capítulo II, desenvolvemos uma metodologia bastante geral para a decomposição de sistemas dinâmicos de grande porte em subsistemas hierarquicamente interconectados. A técnica de decomposição apresentada é baseada na teoria de grafos, e o assunto foi desenvolvido de maneira auto-contida, visan

do eliminar a necessidade de consultas frequentes à bibliografia. Ao final deste capítulo, apresentamos um exemplo ilustrativo do procedimento proposto. Desta forma, o item "1" acima é coberto inteiramente no capítulo II deste trabalho.

No capítulo III apresentamos ferramentas de análise e síntese para sistemas dinâmicos multivariáveis (domínio da frequência). Seguindo a filosofia do capítulo anterior, procuramos apresentar inicialmente toda a teoria necessária ao entendimento do assunto, para então apresentarmos as técnicas de análise e projeto referidas. O desenvolvimento de tais técnicas foi baseado no método dos Lugares Característicos de MacFarlane [10],[16] e [17]. Ao final do capítulo apresentamos as linhas gerais de um algoritmo para se conduzir este tipo de abordagem de projeto.

Finalmente no capítulo IV apresentamos um exemplo de projeto, segundo esta proposta, visando ilustrar o método utilizado e comprovar a eficiência do algoritmo por nós desenvolvido. Os itens "3" e "4" citados anteriormente são varridos nestes capítulos.

Quanto aos itens "2" e "5" vale dizer que apesar de não ser nossa proposta analisá-los em pormenores, faremos alguns comentários, citando inclusive algumas sugestões para o encaminhamento da solução do problema.

DECOMPOSIÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

II.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo será analisado o problema da decomposição de sistemas dinâmicos de grande porte em subsistemas hierarquicamente interconectados. Não serão analisadas as razões que terminam a decomposição de um dado sistema, entretanto faremos menção a duas situações que frequentemente induzem à decomposição:

1. Problemas de ordem numérica: quando o sistema se apresenta suficientemente complexo ou demasiadamente grande sob o ponto de vista computacional, inviabilizando uma análise global.
2. Razões de natureza física: quando desejamos, por exemplo, identificar os vários subsistemas que compõem um dado sistema, assim como entender a maneira como estes vários subsistemas interagem.

No primeiro caso, os subsistemas resultantes da decomposição podem não apresentar qualquer significado físico, mas ainda assim a decomposição pode ser bastante oportuna em vista da redução das dimensões das equações dinâmicas envolvidas. No segundo caso, a decomposição além de simplificar a análise numérica pode também revelar importantes características do sistema sob observação.

O problema de decomposição de sistemas pode ser tratado segundo várias abordagens, entretanto algumas têm sido mais destacadas na literatura. Assim, por exemplo, as abordagens mais usuais estão apoiadas na teoria geométrica de controle, na teoria de grafos orientados e na teoria de transformações. É evidente que cada um destes enfoques apresentam vantagens e desvantagens que em primeira análise dependem do sistema focalizado. Neste trabalho será desenvolvido um método de decomposição de um sistema dinâmico de grande porte baseado na teoria de grafos orientados. É oportuno frisar que a opção por este enfoque se justifica plenamente, por exemplo, na afirmação de Kevorkian [7]: "A estrutura de um grafo orientado (digrafo) associado a um sistema dinâmico é o fator que mais contribui para a complexidade do referido sistema, uma vez que a sua estrutura e somente a sua estrutura é que determina se o sistema deve ser tratado como um todo ou se como um grupo de subsistemas independentes e/ou interconectados".

Conforme será visto no decorrer deste capítulo, nosso procedimento de particionamento é bastante geral, aplicando-se a uma ampla classe de sistemas dinâmicos. A hipótese feita é que o sistema a ser estudado possa ser representado no espaço de estados por equações da seguinte forma:

$$\dot{z} = F(z, r, t) \tag{1a}$$

$$w = H(z, t) \tag{1b}$$

onde:

$z \in R^n$: vetor de estados

$r \in R^p$: vetor de entradas

$w \in R^m$: vetor de saídas

Além disso, as funções $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ devem ser suficientemente contínuas de modo a representarem um sistema dinâmico.

Na próxima seção serão apresentados alguns conceitos básicos da teoria de grafos orientados, com o objetivo explícito de introduzir a notação a ser usada no transcorrer deste trabalho.

II.2. GRAFOS ORIENTADOS

II.2.1. Conceitos Fundamentais

Definição 1 : Um grafo orientado \mathcal{D} (digrafo = directed graph) é um par ordenado (V, E) onde V é um conjunto finito de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e E é uma relação sobre V . Os elementos de E são chamados de ramos do digrafo.

Se $(v_i, v_j) \in E$ diz-se que existe um ramo do vértice " v_i " para o vértice " v_j " no digrafo \mathcal{D} .

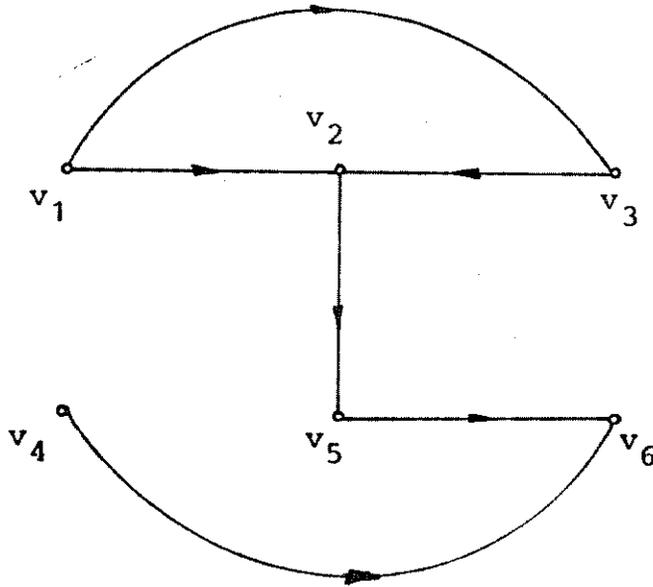
Para uma melhor visualização os digrafos são rotineiramente representados no plano através de representações gráficas como ilustrado no exemplo abaixo:

Exemplo 1:

Seja $\mathcal{D} = (V, E)$ onde $V = \{v_1, \dots, v_6\}$ e

$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_4, v_6), (v_5, v_6)\}$

então a representação de \mathcal{D} é:



Definição 2 : Uma trajetória de comprimento "k" de v_i para v_j é um subgrafo de $\mathcal{D} = (V, E)$ representada por uma seqüência de vértices distintos $(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$, tais que $(v_{i_m}, v_{i_{m+1}}) \in E$ para $0 \leq m \leq k-1$ com $v_{i_0} = v_i$ e $v_{i_k} = v_j$.

Definição 3 : Dado um digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$, diz-se que o vértice $v_j \in V$ é atingível do vértice $v_i \in V$ (denota-se por $v_i \mathcal{Q} v_j$) se existir uma trajetória de v_i para v_j . Por convenção, $v_i \mathcal{Q} v_i$ para todo "i".

OBS: É claro que a relação binária acima é transitiva, já que

$$v_i \mathcal{Q} v_j \wedge v_j \mathcal{Q} v_k \Rightarrow v_i \mathcal{Q} v_k$$

Definição 4 : Dado $\mathcal{D} = (V, E)$ diz-se que o par de vértices (v_i, v_j) é conectado fortemente se $v_i \rightarrow v_j$ e $v_j \rightarrow v_i$.

Definição 5 : Diz-se que $\mathcal{D} = (V, E)$ é conectado fortemente se todo par $(v_i, v_j) \in V \times V$ for conectado fortemente.

Conforme será visto adiante, o particionamento de um sistema dinâmico consiste basicamente na identificação dos componentes conectados fortemente de seu digrafo associado. Antes de introduzir o conceito de "conectividade forte", é oportuno lembrar as principais propriedades da Álgebra Booleana relacionadas a seguir:

Definição 6 : As operações binárias "+" e "." definidas sobre o conjunto booleano $B = \{0, 1\}$ segundo as relações:

$$0 + 0 = 0 \quad ; \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1 \quad (2a)$$

$$0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \quad ; \quad 1 \cdot 1 = 1 \quad (2b)$$

formam uma álgebra (Álgebra Booleana).

As propriedades A1-A6 seguintes podem ser facilmente verificadas:

$$A1 : a + b = b + a = d \in B$$

$$A2 : (a+b) + c = a + (b+c) = e \in B$$

$$A3 : a \cdot b = b \cdot a = f \in B$$

$$A4 : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = g \in B$$

$$A5 : (a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) = h \in B$$

$$A6 : a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = i \in B$$

As operações de adição e multiplicação de matrizes definidas sobre a álgebra booleana são idênticas à maneira usual de definição, ou seja:

Se

$$M \in B^n \times B^m \quad \text{e} \quad N \in B^n \times B^m ,$$

$$\text{então} \quad M + N = P \in B^n \times B^m \quad (3a)$$

$$\text{com} \quad p_{ij} = n_{ij} + m_{ij} \quad \forall i / 1 \leq i \leq n \\ \forall j / 1 \leq j \leq m \quad (3b)$$

$$\text{e se} \quad R \in B^n \times B^m \quad \text{e} \quad S \in B^m \times B^p ,$$

$$\text{então} \quad R \cdot S = T \in B^n \times B^p \quad (4a)$$

$$\text{com} \quad t_{ij} = \sum_{k=1}^m r_{ik} \cdot s_{kj} \quad \forall i / 1 \leq i \leq n \\ \forall j / 1 \leq j \leq p \quad (4b)$$

Lembrar que em (3b) e (4b) as operações "+" e "." são efetuadas como em (2).

A seguir são apresentadas algumas das maneiras de se representar analiticamente um dado digrafo.

Definição 7 : Dado um digrafo $D = (V, E)$ com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sua matriz adjacência $M \in \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^n$ é definida por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases}$$

Definição 8 : Dado um digrafo $D = (V, E)$ com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, sua matriz atingibilidade $A \in \mathbb{B}^n \times \mathbb{B}^n$ é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ } \mathcal{Q} \text{ } v_j \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases}$$

OBS: Para qualquer digrafo, tem-se:

$$a_{ii} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Das definições (5) e (8) vê-se que um digrafo é conectado fortemente, se e somente se " a_{ij} " for igual a "1" para todo "i" e para todo "j" tais que $1 \leq i, j \leq n$.

Será visto mais adiante que a matriz atingibilidade de um digrafo carrega toda a informação necessária para o seu particionamento. Nesse sentido será necessário construí-la, e isto poderá ser facilmente conseguido a partir da matriz adjacência correspondente, que por sua vez pode ser obtida por inspeção. Os próximos teoremas e lemas servirão de apoio para a construção de um algoritmo com esta finalidade.

Teorema 1 : Considere a matriz M^ℓ , $\ell \in \mathbb{N}^*$, então:

$$(M^\ell)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists \text{ uma trajetória de comprimento } \ell \text{ de} \\ & \text{"v}_i \text{ para "v}_j \text{"} \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (5)$$

Prova : A prova é por indução. Primeiro quando $\ell = 1$, a trajetória de comprimento "1" de "v_i" para "v_j" é justamente um ramo (v_i, v_j). Assim, (5) é verdadeiro para $\ell = 1$. Agora, façamos a hipótese que (5) seja verdadeiro para $\ell = k-1$. Então, para $\ell = k$, teremos:

$$(M^k)_{ij} = \sum_{r=1}^n (M^{k-1})_{ir} \cdot m_{rj}$$

Da definição de "+" e "." é fácil ver que $(M^k)_{ij} = 1$ se e somente se

$$\exists m / (M^{k-1})_{ir} \cdot m_{rj} = 1 \quad (6)$$

Mas por hipótese, (5) é verdadeiro para $\ell = k-1$, então (6) é equivalente a:

Existe uma trajetória de comprimento "k-1" de v_i para v_r e um ramo (v_r, v_j), que em outras palavras quer dizer que existe uma trajetória de comprimento "k" de v_i para v_j. E isto completa a prova.

Lema 1 : Dado um digrafo \mathcal{D} e sua matriz adjacência M, então:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} M^i \quad (7)$$

Prova: Desde que $A = I + M + M^2 + \dots$, onde I é a matriz identidade, vê-se que $a_{ij} = 1$, se e somente se $(M^l)_{ij} = 1$ para algum $l \in \mathbb{N}^*$, isto é, se e somente se existir uma trajetória de algum comprimento " l " de v_i para v_j .

Lema 2: Se \mathcal{D} é um dígrafo com " n " vértices, então:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} M^i \quad (8)$$

A prova deste lema pode ser imediatamente estabelecida observando-se que sempre que houver uma trajetória de v_i para $v_j \neq v_i$, então haverá uma trajetória de comprimento máximo " $n-1$ " de " v_i " para " v_j ".

Lema 3 : Se \mathcal{D} é um dígrafo com " n " vértices, então:

$$A = (I + M)^s, \quad \text{para } s \geq n-1 \quad (9)$$

Prova : Do lema 2 é claro que:

$$A = \sum_{i=0}^s M^i \quad \text{para } s \geq n-1$$

Por outro lado, se a hipótese (10) abaixo for verdadeira, então o lema "3" estará provado.

$$\text{hip.: } \sum_{i=0}^s M^i = (I + M)^s \quad \text{para } s \geq 0 \quad (10)$$

A hipótese (10) será provada por indução a seguir:

Para $s = 0$, (10) se reduz à identidade $I = I$, que é verdadeira. Suponha agora que (10) seja verdadeira para $s = \ell$, e lembre que $M + M = M$ para todas as matrizes sobre $(B, +, \cdot)$. Assim:

$$\begin{aligned} (I + M)^{\ell+1} &= (I + M)^{\ell} \cdot (I + M) = \sum_{i=0}^{\ell} M^i \cdot (I + M) = \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} M^i + \sum_{i=0}^{\ell} M^{i+1} = \sum_{i=0}^{\ell+1} M^i \end{aligned}$$

e o lema está provado.

O teorema 1 e os lemas 1 a 3 fornecem subsídios para a elaboração de um algoritmo para a obtenção da matriz atingibilidade de "A" a partir da matriz adjacência "M". Este algoritmo poderia ser, por exemplo, o seguinte:

ALGORITMO 1:

- OBJETIVO : Dado "M", encontrar "A";
- PASSO 1 : Faça $t := \min \{ t \in \mathbb{N} / 2^t \geq (n-1) \}$;
- PASSO 2 : $P := I + M$;
- PASSO 3 : $A := P^{2^t}$;

II.2.2. Decomposição de um Digrafo em Componentes conectados fortemente

Quando decompondo um dado digrafo \mathcal{D} em seus componentes conectados fortemente, é interessante verificar em primeiro lugar se o digrafo em questão é conectado fortemente, pois neste caso a decomposição não poderá ser feita e o problema estará encerrado. O teste para a verificação da conectividade do digrafo é bastante simples, e é feito a partir da matriz atingibilidade "A" associada ao digrafo, e será explicado a partir da próxima definição.

Definição 9 : Dado o digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$, a relação binária "S" sobre V é definida por $v_i S v_j$ se e somente se o par (v_i, v_j) for conectado fortemente, ou seja, se $v_i Q v_j$ e $v_j Q v_i$.

Observe que a relação "S" definida sobre V é uma relação de equivalência (propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva). Um subconjunto de V será conectado fortemente se seus elementos forem dois a dois conectados fortemente, e neste caso tal subconjunto constituirá uma classe de equivalência. A obtenção dos CCF's de um digrafo pode ser conseguida identificando-se as várias classes de equivalência de V sobre "S". A partir da matriz atingibilidade "A" do digrafo, as classes de equivalência do digrafo podem ser imediatamente determinadas, conforme mostra o teorema a seguir:

Teorema 2 : Seja $\mathcal{D} = (V, E)$ um digrafo e "A" sua matriz atingibili-
 dade. Então $v_i S v_j$ se e somente se $A_{(i)} = A_{(j)}$, onde
 $A_{(i)}$ denota a i-ésima linha de "A".

Prova : Se:

Hipótese H1 : $A_{(i)} = A_{(j)}$

Pela definição (3):

$$a_{ii} = 1 \quad , \quad \forall i = 1, \dots, n$$

então $H1 \rightarrow a_{ji} = 1$, isto é : $v_j Q v_i$

Similarmente

$$H1 \rightarrow a_{ij} = 1 \quad , \quad \text{isto é : } v_i Q v_j$$

logo, se H1 é verdadeira, então $v_i S v_j$

SOMENTE SE :

Hipótese 2 : $v_i S v_j$ (isto é, $v_i Q v_j \wedge v_j Q v_i$)

Vamos mostrar que, se $a_{jk} = 1$ para algum "k", então

$$a_{ik} = 1 \quad .$$

Ora,

$$a_{jk} = 1 \quad \leftrightarrow \quad v_j Q v_k$$

e de H2 $v_i Q v_j$

então $v_i Q v_k \leftrightarrow a_{ik} = 1$

Similarmente, podemos mostrar que

$$a_{ik} = 1 \rightarrow a_{jk} = 1 ,$$

logo, se H_2 é verdadeira, então $A_{(i)} = A_{(j)}$.

A seguir, apresenta-se um algoritmo para a obtenção das classes de equivalência "S" de um digrafo \mathcal{D} a partir da matriz a tingibilidade "A". O algoritmo será apresentado em forma de fluxo grama visando posterior codificação em ALGOL.

ALGORITMO 2:

- OBJETIVO : Encontrar as classes de equivalência de V a partir de A.

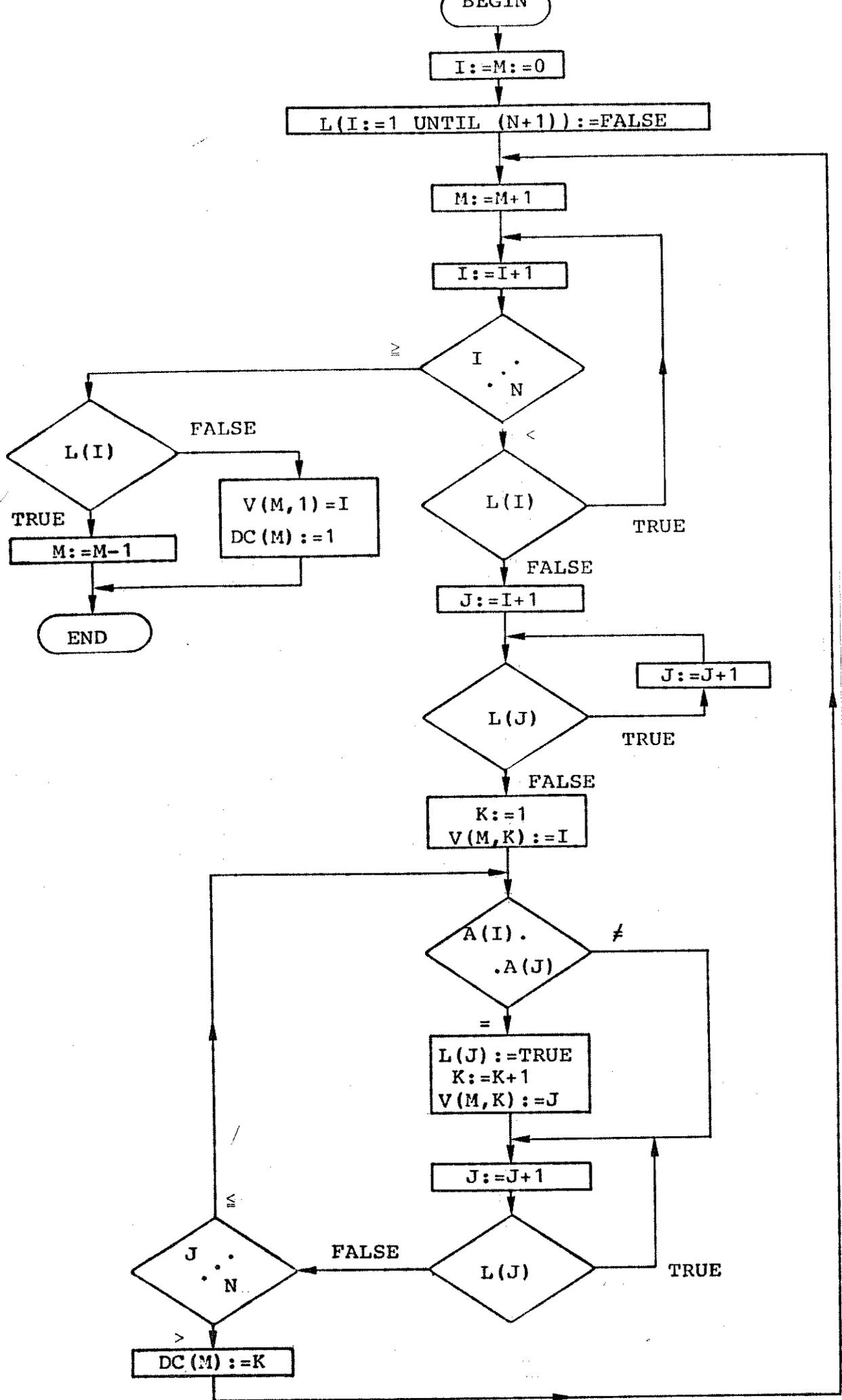
As saídas deste algoritmo são os elementos $V(M,K) = J$ e $DC(M) = K$. E devem ser interpretados da seguinte maneira:

Ex.: $V(3,6) = 10$ quer dizer que o vértice v_{10} é o sex to vértice da classe de equivalência número "3".

$DC(2) = 3$ quer dizer que a classe de equivalên cia número 2 possui "3" elementos.

Kevorkian [7] e Tarjan [6] propõem algoritmos diferen tes para a obtenção das classes de equivalência de um digrafo.

O algoritmo visto acima enumera as classes de equivalên cia " V_i " do digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$ na ordem em que elas vão surgindo na



matriz atingibilidade. Será visto na próxima seção que é possível renumerá-las de tal forma que se $v_a \in V_i$, $v_b \in V_j$ e $i < j$, então $(v_b, v_a) \notin E$. A importância desta renumeração provém do fato dela gerar uma decomposição com estrutura hierárquica, conforme será mostrado posteriormente. A seguir, são relacionados mais algumas definições e lemas acerca de digrafos, para possibilitar o desenvolvimento de mais alguns algoritmos.

Definição 10 : Dado um digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$, entende-se por circuito ou malha uma trajetória de comprimento maior que um que começa e termina num mesmo vértice $v_i \in V$. Um digrafo que não possui malha é um digrafo acíclico.

Definição 11 : Dado um digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$, diz-se que o vértice " v_i " $\in V$ é um predecessor do vértice " v_j " $\in V$ e que " v_j " é um sucessor de " v_i ", se $v_i \neq v_j$ e $(v_i, v_j) \in E$.

Lema 4 : Digrafos acíclicos possuem pelo menos um vértice que não possui predecessor.

Proposição 1 : Seja $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_\ell} = v_{i_1})$ uma malha de um digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$. Então o conjunto de vértices $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_{\ell-1}}\}$ é conectado fortemente.

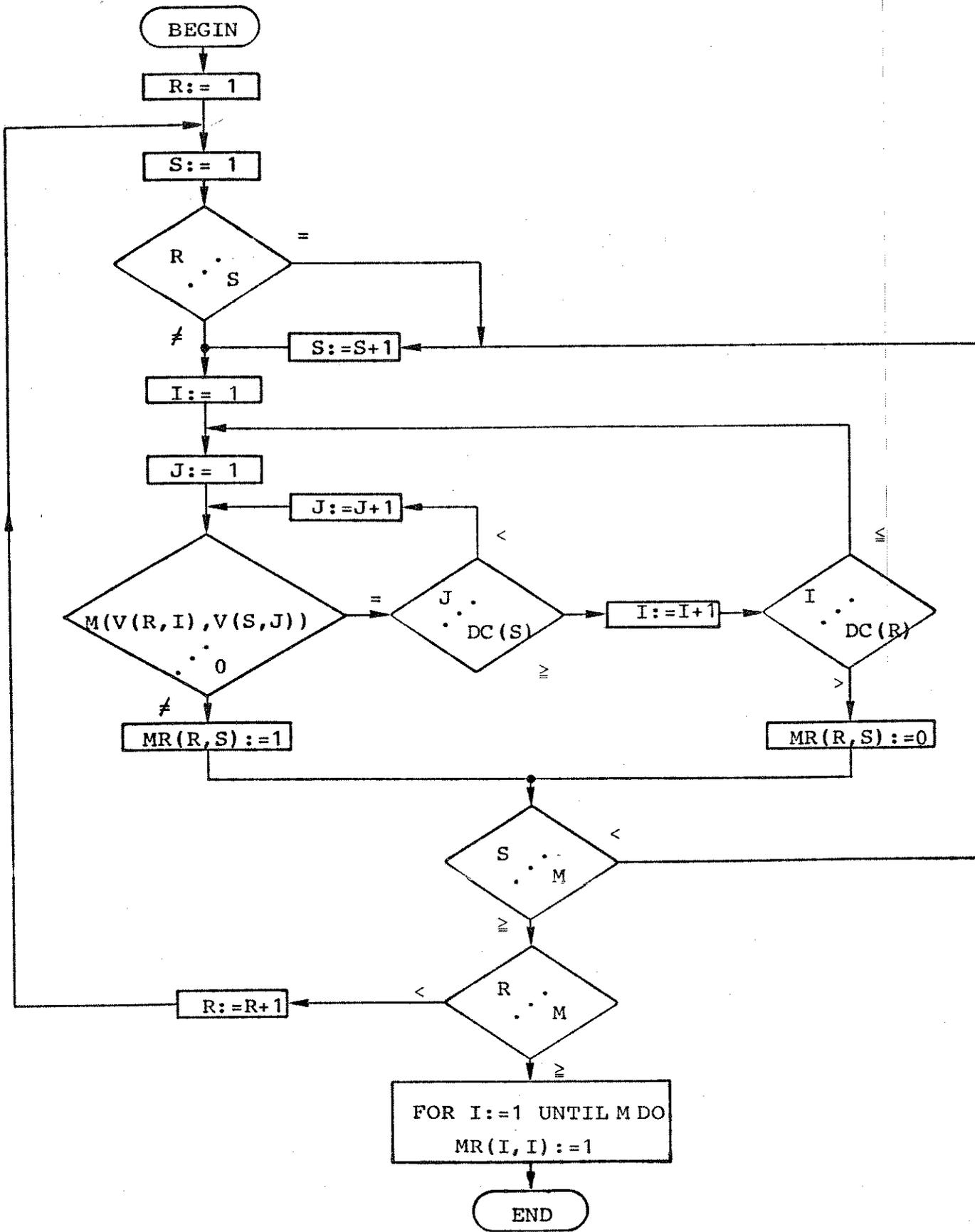
Definição 12 : Define-se o digrafo reduzido $\bar{D} = (\bar{V}; \bar{E})$ de um digrafo $D = (V, E)$ da seguinte maneira: Cada vértice V_i do conjunto \bar{V} representa uma das classes de equivalência de V sobre "S". Assim, se V_1, V_2, \dots, V_k são as classes de equivalência de V sobre "S", então $\bar{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$. Por outro lado, o conjunto de ramos \bar{E} contém um ramo (V_i, V_j) se e somente se existe $v_a \in V_i$, $v_b \in V_j$ tal que $(v_a, v_b) \in E$.

O digrafo reduzido pode ser imaginado como sendo o resultado de uma condensação do digrafo original, processada de forma que todos os vértices $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_q}\}$ de V_i , para cada $i = 1, \dots, k$, se fundem num único vértice V_i .

O algoritmo "3", a seguir, permite-nos encontrar a matriz adjacência do digrafo reduzido, a partir da matriz adjacência do digrafo original e das classes de equivalências (fornecidas pelo algoritmo anterior).

ALGORITMO 3:

- OBJETIVO : Encontrar a matriz adjacência do digrafo reduzido, a partir da matriz adjacência do digrafo original, das classes de equivalência do digrafo (original) e das dimensões destas classes;



Lema 5 : O digrafo reduzido $\bar{D} = (V, \bar{E})$ de qualquer digrafo D é acíclico.

Prova : (Por absurdo).

Suponha o contrário, isto é, que existe uma malha $(V_{i_1}, \dots, V_{i_m}, V_{i_{m+1}} = V_{i_1})$ em \bar{D} . Isto significa que \bar{E} contém os ramos $(V_{i_1}, V_{i_2}), \dots, (V_{i_m}, V_{i_1})$. Pela definição de \bar{E} , isto implica que existem vértices $v_{i_j}^{(1)}, v_{i_j}^{(2)}$ em V_{i_j} , $j = 1, \dots, m$, com a seguinte propriedade: o conjunto primitivo E contém os ramos:

$$(v_{i_1}^{(2)}, v_{i_2}^{(1)}), (v_{i_2}^{(2)}, v_{i_3}^{(1)}), \dots, (v_{i_{m-1}}^{(2)}, v_m^{(1)}), (v_m^{(2)}, v_1^{(1)})$$

Sendo V_{i_j} uma classe de equivalência sobre "s" existe uma trajetória de $v_{i_j}^{(1)}$ para $v_{i_j}^{(2)}$, para $j = 1, \dots, m$. Neste caso, é fácil ver que o digrafo original $D = (V, E)$ possui o ciclo:

$$(v_{i_1}^{(1)}, v_{i_1}^{(2)}, v_{i_2}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)}, \dots, v_{i_m}^{(1)}, v_{i_m}^{(2)}, v_{i_1}^{(1)})$$

e da proposição "1" vê-se que estes vértices formam um conjunto conectado fortemente. Esta conclusão contradiz a hipótese original, já que os elementos $\{v_{i_1}^{(1)}, v_{i_1}^{(2)}\}$ pertencem a uma classe de equivalência distinta de, por exemplo $\{v_{i_2}^{(1)}, v_{i_2}^{(2)}\}$. A hipótese original é portanto falsa e o digrafo reduzido é acíclico.

II.2.3. Renumeração das Classes de Equivalência

Será mostrado agora o procedimento para a renumeração das classes de equivalência V_1, \dots, V_k de tal forma que se $v_a \in V_i$ e $v_b \in V_j$ com $i < j$, então $(v_b, v_a) \notin E$.

Para tanto considere o digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$, e encontre todas suas classes de equivalência V_1, \dots, V_k (Algoritmo 2), e então construa seu digrafo reduzido $\bar{\mathcal{D}} = (\bar{V}, \bar{E})$ (Algoritmo 3). Identifique agora todos os vértices de \bar{V} que não possuem predecessores, formando o conjunto \bar{V}_1 . Renumere os vértices de \bar{V}_1 como W_1, W_2, \dots, W_{n_1} . A seguir remova de $\bar{\mathcal{D}}$ todos os vértices de \bar{V}_1 (isto é, todos os ramos da forma (v_i, \dots) com $v_i \in \bar{V}_1$). O digrafo resultante é novamente acíclico. Identifique então a nova coleção de pontos que não possuem predecessores, formando o conjunto \bar{V}_2 : É fácil ver que se $v_i \in \bar{V}_2$, então seu predecessor pertence a \bar{V}_1 . A exemplo do passo anterior, os vértices do conjunto \bar{V}_2 são renumerados como $W_{n_1+1}, W_{n_1+2}, \dots, W_{n_2}$. Este procedimento deve ser repetido até que todos os vértices sejam exauridos.

Desta forma as classes de equivalência V_1, \dots, V_k (correspondentes aos vértices $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_k$ do digrafo reduzido) são dadas por: W_1, W_2, \dots, W_k , de tal forma que todos os predecessores de W_i se encontram nos conjuntos W_1, \dots, W_{i-1} para $i = 1, \dots, k$. Para se evitar a proliferação de símbolos, é conveniente fazer $W_i = V_i$ para $i = 1, \dots, k$, de tal forma que todos os predecessores de V_i estejam nos conjuntos V_1, \dots, V_{i-1} para $i = 2, \dots, k$. Isto significa que se $i < j$, então $(V_j, V_i) \notin \bar{E}$. Com referência ao digrafo original $\mathcal{D} = (V, E)$, isto quer dizer que se $v_a \in V_i$, $v_b \in V_j$ e $i < j$, então $(v_b, v_a) \notin E$. Este resultado pode ser colocado em forma de teorema:

Teorema 3 : O conjunto de vértices V de um dado digrafo $D = (V, E)$ pode ser particionado da seguinte maneira:

- (i) V_1, V_2, \dots, V_k são as classes de equivalência de V sobre S .
- (ii) Se $v_a \in V_i, v_b \in V_j$ e $(v_b, v_a) \in E$, então $i \geq j$.

O algoritmo "4" apresentado a seguir encerra a série de algoritmos relacionados à teoria de digrafos propriamente dita. O objetivo deste algoritmo é reordenar as classes de equivalência de V sobre " S "., a partir da matriz adjacência MR do digrafo reduzido. A saída deste algoritmo é o vetor $W(X) := J$, que deve ser interpretado da seguinte maneira:

$W(X) := J$: significa que a antiga classe $V(J)$ passará depois da reordenação a ser a classe $W(X)$.

Ou conforme discussão anterior ao teorema "3", pode-se fazer $V_i = W(I)$, para $I = 1, \dots, k$ (para se evitar a proliferação de símbolos) de modo a deixar as classes reordenadas de acordo com o teorema "3".

Observe que, embora os quatro algoritmos tenham sido apresentados separadamente, na realidade eles constituem um único, e isto pode ser evidenciado observando-se que as saídas de um correspondem às entradas dos seguintes.

ALGORITMO 4 :

- OBJETIVO : Reordenamento das classes de equivalência de um digrafo reduzido de modo a satisfazer o teorema " 3 ";

- ENTRADA : Matriz adjacência do digrafo reduzido.

A seguir são apresentados dois exemplos para ilustrar a técnica de particionamento ora proposta.

Exemplo 2:

Decompor o digrafo a seguir em seus componentes conectados fortemente.

$X := Y := 0$
 $L := J := 1$
 $TEST(A) := 0 \quad p / A = 1, \dots, k$

$I := 1$

$I \dots J$

$I \dots I$
 $TEST(A)$
 $A = 1, \dots, k$

$MR(I, J)$
 \dots
 0

$I \dots k$

$X := X + 1$
 $Y := Y + 1$
 $VSP(L, Y) := J$
 $W(X) := VSP(L, J)$

FOR $P = 1, \dots, X$
 FOR $U = 1, \dots, k$
 $MR(W(P), U) := 0$

 FOR $A = 1, \dots, X$ DO
 $TEST(B) := W(B)$

$X \dots k$

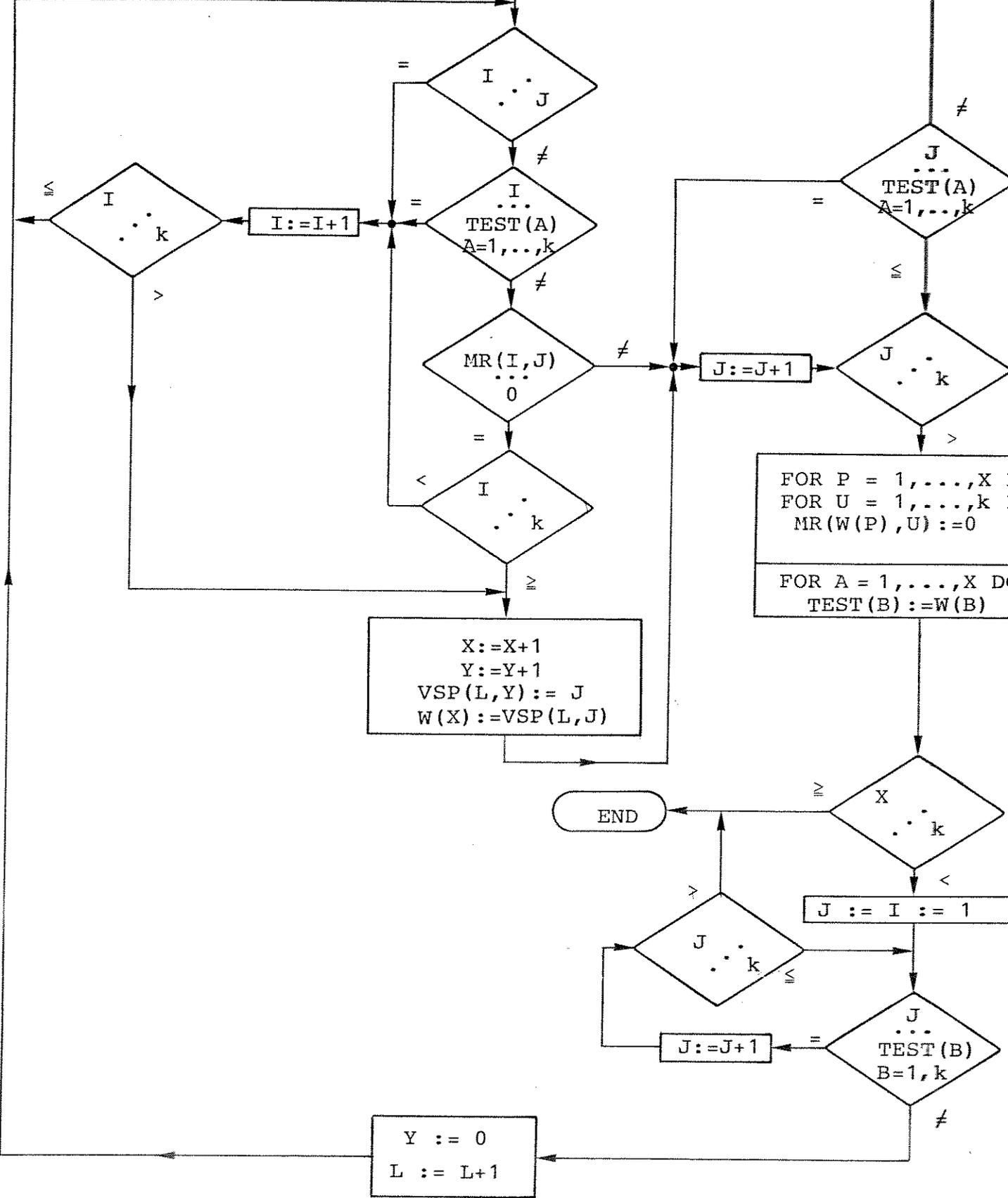
$J := I := 1$

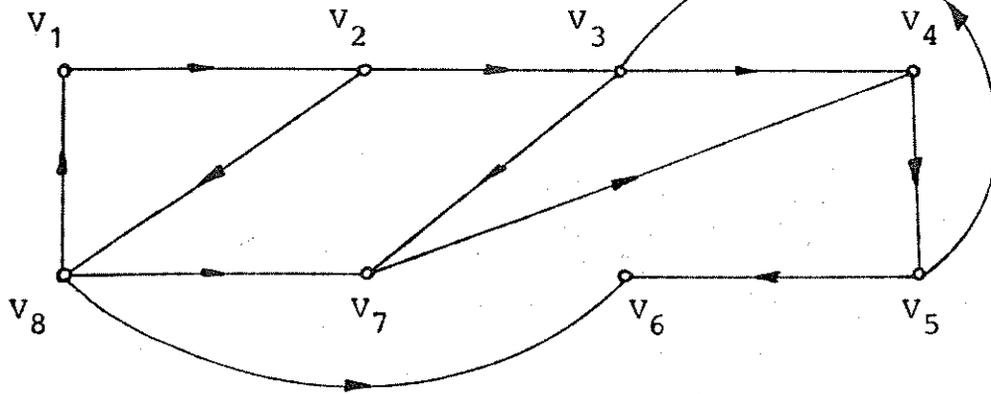
$J \dots k$

$J \dots J$
 $TEST(B)$
 $B = 1, k$

$Y := 0$
 $L := L + 1$

END





Solução : Em primeiro lugar, deve-se obter a matriz adjacência as sociada, que é:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Com a matriz adjacência e o algoritmo "1", tem-se a matriz atingi gibilidade "A", dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

As classes de equivalência de V sobre "S" encontradas pelo algoritmo "2", são:

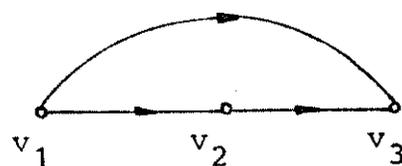
$$V_1 = \{v_1, v_2, v_8\}$$

$$V_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_7\}$$

$$V_3 = \{v_6\}$$

Seguindo a sequência proposta, deve-se encontrar a matriz adjacência do digrafo reduzido (algoritmo "3") que é dada por:

$$MR = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



E finalmente, as classes de equivalência são reordenadas conforme o teorema "3" (utilizando o algoritmo "4"), resultando:

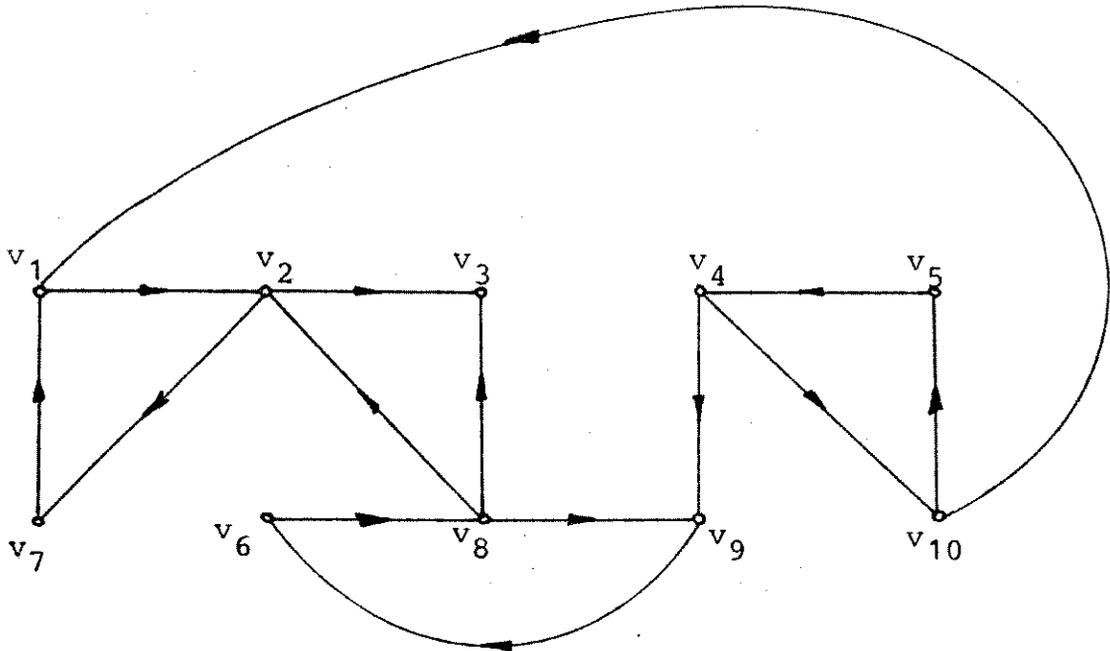
$$W(1) = V_1 = \{v_1, v_2, v_8\}$$

$$W(2) = V_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_7\}$$

$$W(3) = V_3 = \{v_6\}$$

Exemplo 3 :

Encontre os CCF's do digrafo a seguir.



Solução : Matriz adjacência "M":

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz atingibilidade "A" :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Classes de equivalência:

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_7\}$$

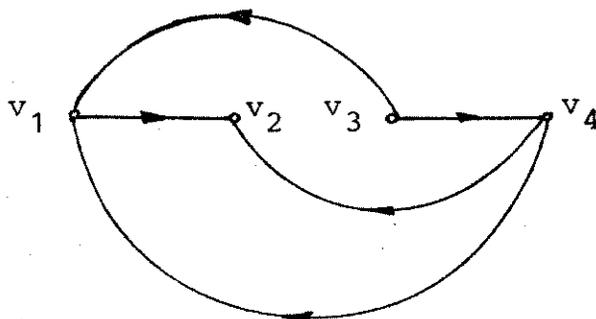
$$V_2 = \{v_3\}$$

$$V_3 = \{v_4, v_5, v_{10}\}$$

$$V_4 = \{v_6, v_8, v_9\}$$

Matriz adjacência do digrafo reduzido:

$$MR = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Reordenamento das classes de equivalência:

$$W_1 = V_3 = \{v_4, v_5, v_{10}\}$$

$$W_2 = V_4 = \{v_6, v_8, v_9\}$$

$$W_3 = V_1 = \{v_1, v_2, v_7\}$$

$$W_4 = V_2 = \{v_3\}$$

E para encerrar esta seção, uma última definição:

Definição 13 : Dado um digrafo $D = (V, E)$, seja V_1, V_2, \dots, V_k suas classes de equivalência, ordenadas de tal maneira que $(v_b, v_a) \notin E$ quando $v_a \in V_i, v_b \in V_j$ e $i < j$. Então o digrafo $(V_i, (V_i \times V_i) \cap E)$ é chamado de i-ésimo componente conectado fortemente (CCF) do digrafo. O digrafo $(V_i \cup V_j, (V_i \times V_j) \cap E)$ é chamado de ij-ésimo subgrafo de interconexão (SI) para $1 \leq i, j \leq k$.

II.3. O PARTICIONAMENTO DE SISTEMAS DINÂMICOS

II.3.1. Sistemas Dinâmicos

Esta seção será dedicada ao estudo de sistemas dinâmi

cos que possam ser representados por um conjunto de equações da forma:

$$S : \begin{cases} \dot{z} = F(z, r, t) & (1a) \\ w = H(z, t) & (1b) \end{cases}$$

onde: $z \in R^n$

$r \in R^p$

$w \in R^m$

Suponha que a solução $\phi(t, z_0, t_0)$ da equação (1a) acima exista para $t \geq t_0$ e seja unicamente determinada para cada função forçante "r(t)" e para cada conjunto de condições iniciais $z(t_0) = z_0$. Pode-se dizer que em geral a resolução da equação (1a) acima é uma tarefa difícil, podendo vir a ser mesmo impossível se a dimensão "n" do vetor z for relativamente grande. O objetivo deste capítulo é apresentar uma maneira de tratar problemas desta natureza. A idéia básica do procedimento a ser proposto consiste em se tentar uma reordenação das equações (1a-b) de tal forma que o sistema se apresente da seguinte forma:

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, L_1, t) \\ y_1 = h_1(x_1, t) \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, L_1, L_2, t) \\ y_2 = h_2(x_1, x_2, t) \\ \vdots \end{cases}$$

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, L_1, L_2, \dots, L_i, t) & (11a) \\ y_i = h_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) & (11b) \end{cases}$$

$$\text{onde: } x_i \in R^{n_i} \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^k n_i = n$$

$$L_i \in R^{p_i} \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^k p_i = p$$

$$Y_i \in R^{m_i} \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^k m_i = m$$

É transparente que se o sistema representado pelas equações (1a-b) puder ser colocado na forma (11), então a solução $\phi(t, x_0, t_0)$ poderia ser encontrada recursivamente, conforme cons_tata a análise a seguir:

- A primeira equação $\dot{x}_1 = f_1(x_1, L_1, t)$ é independente das demais e pode ser resolvida, quando conhecidas a entrada " $L_1(t)$ " e a condição inicial $x_1(t_0) = x_{10}$, resultando na solução $\phi_1(t, x_{10}, t_0)$.

- Com ϕ_1 determinada, a equação do subsistema "2" pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\dot{x}_2 = f_2(\phi_1, x_2, L_1, L_2, t)$$

e mais uma vez com $L_2(t)$ e $x_2(t_0) = x_{20}$ dados, pode-se teoricamente encontrar a função $\phi_2(t, \phi_1, x_{20}, t_0)$ que satisfaz esta equação. Daí a terceira equação poderia ser reescrita como:

$$\dot{x}_3 = \phi_3(\phi_1, \phi_2, x_3, L_1, L_2, L_3, t) = f_3(\phi_2', x_3, L_3', t)$$

$$\text{onde: } \phi_2' = \varphi_2(\phi_1, \phi_2) \quad \text{e} \quad L_3' = \psi_3(L_1, L_2, L_3)$$

- De uma maneira geral, a equação do i-ésimo subsistema seria:

$$x_i = f_i(\phi_{i-1}', x_i, L_i', t)$$

com $\phi_{i-1}' = \varphi_{i-1}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{i-1})$

e $L_i' = \psi_i(L_1, \dots, L_i)$

cuja resolução forneceria:

$$\phi_i(t, \phi_{i-1}', x_{i0}, t_0)$$

Nestas circunstâncias, vê-se que a solução $\phi(t, x_0, t_0)$ da equação (1a) pode ser obtida em "k" etapas, através da resolução ordenada dos "k" subsistemas. Tudo se passa como se a função n-dimensional ϕ pudesse ser decomposta em "k" partes exclusivas, ou seja:

$$\phi(t, x_0, t_0) = (\phi_1(t, x_{10}, t_0), \dots, \phi_k(t, x_{k0}, t_0))$$

onde cada uma das partes $\phi_i(t, x_{i0}, t_0)$ para $i = 1, \dots, k$ pode ser determinada uma a uma na sequência dada por (11).

Neste ponto da análise pode-se levantar a seguinte questão: dado um sistema dinâmico "S", como saber se as equações dinâmicas que o representam podem ser reordenadas da maneira anteriormente descrita, e em caso positivo, como levar a cabo tal reordenação? As definições a seguir objetivam criar subsídios para se responder a estas questões.

Definição 14: A matriz ocorrência "C" de um sistema do tipo (1a) é uma matriz $n \times n$, cuja i -ésima linha corresponde à função escalar F_i e cuja j -ésima coluna corresponde à variável z_j , e o elemento c_{ij} é dado por:

$$c_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se e só se } F_i \text{ depende explicitamente de } z_j \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Definição 15: Uma matriz quadrada é redutível, se ela pode ser transformada em uma forma bloco triangular (FBT) através de permutações de suas linhas e colunas. Uma matriz quadrada é irredutível se e somente se ela não é redutível. Além disso, uma matriz na forma bloco triangular (FBT) é canonicamente única, se e somente se cada uma de suas submatrizes diagonais forem irredutíveis.

O particionamento de um sistema do tipo (1a) pode ser visto como uma permutação simétrica das linhas e colunas de sua matriz ocorrência "C", processada de forma que "C" seja transformada em uma forma bloco triangular canonicamente única (FBTCU), com a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{c}
 x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdot \quad x_i \quad \cdot \quad \cdot \quad x_k \\
 C = \begin{array}{c}
 f_1 \\
 f_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 f_i \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 f_k
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & C_{11} & & & & & & \\
 \hline
 & C_{21} & C_{22} & & & & & \\
 \hline
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\
 \hline
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 \hline
 & C_{i1} & C_{i2} & \cdot & \cdot & C_{ii} & & \\
 \hline
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 \hline
 & \cdot \\
 \hline
 & C_{k1} & C_{k2} & \cdot & \cdot & C_{ki} & \cdot & \cdot & C_{kk} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}
 \tag{12}$$

onde as submatrizes C_{ij} , para $1 \leq i \leq k$ e $1 \leq j \leq i$ são de dimensões $n_i \times n_j$. Os subvetores f_i e x_i pertencem ao R^{n_i} e são tais que:

$$\sum_{i=1}^k n_i = n$$

A partir da matriz FBTCU "C" pode-se reordenar o sistema S em (1) de tal forma que suas equações se apresentem sob a forma:

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, r, t) & \text{para } 1 \leq i \leq k \\ y = h(x, t) \end{cases}$$

Por definição as submatrizes C_{ii} de dimensão $n_i \times n_i$ dadas em (12) são irreduzíveis. Desta forma, cada um dos "k" subsistemas em (13a) é irreduzível.

Antes de mostrar como permutar as linhas e colunas da matriz ocorrência "C" de forma a transformá-la em uma FBTCU, deve-se frisar que o conceito de particionamento como aqui colocado é completamente redundante quando o sistema de equações não for reduzível a subsistemas menores. Contudo a análise ora em curso visa o estudo de sistemas dinâmicos de grande porte, em assim sendo, é razoável admitir-se que o sistema sob consideração seja composto de vários subsistemas irreduzíveis.

Encerrando esta subseção apresentamos um teorema que relaciona a propriedade de irreduzibilidade de matrizes com digrafos conectados fortemente.

Teorema 4 : (Varga [5]) - Uma matriz $A(n \times n)$ é irreduzível se e somente se o digrafo $\mathcal{D}(A)$ é conectado fortemente.

Desta forma vê-se que a transformação da matriz ocorrência "C" em uma FBTCU é equivalente à determinação dos subgrafos conectados fortemente do digrafo $\mathcal{D}(A)$. Esta idéia será formalizada na próxima subseção.

II.3.2. Digrafos associados a sistemas dinâmicos

O conceito de particionamento de um sistema dinâmico será agora explorado em detalhes. Para tanto, será formalizado o conceito de digrafo associado a sistema dinâmico.

Considere novamente o sistema dinâmico representado por um conjunto de equações da forma:

$$S : \begin{cases} \dot{z} = F(z, r, t) & (1a) \\ w = H(z, t) & (1b) \end{cases}$$

onde $z \in R^n$, $r \in R^p$ e $w \in R^m$. As funções F e H são definidas de modo a descrever um sistema dinâmico.

Definição 16: A matriz de interconexão "C" do sistema dinâmico "S" dado pelas equações (1a-b) é uma matriz $q \times q$ da seguinte forma:

$$C = \begin{bmatrix} E_{(n \times n)} & G_{(n \times p)} & O_{(n \times m)} \\ O_{(p \times n)} & O_{(p \times p)} & O_{(p \times m)} \\ N_{(m \times n)} & O_{(m \times p)} & O_{(m \times m)} \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde $q = n + p + m$; e as submatrizes $E = (e_{ij})$, $G = (g_{ij})$ e $N = (n_{ij})$ são tais que:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } F_i \text{ depende explicitamente de } z_j \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (15a)$$

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } H_i \text{ depende explicitamente de } r_j \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (15b)$$

$$n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } H_i \text{ depende explicitamente de } z_j \\ 0 & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (15c)$$

Uma maneira alternativa de definir a matriz "C", poderia ser por exemplo em função de um elemento c_{ij} genérico:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \begin{cases} - \text{Para } 1 \leq i, j \leq n \text{ se } F_i \text{ depende explicitamente de } z_j \\ - \text{Para } 1 \leq i \leq n \text{ e } n+1 \leq j \leq n+p \text{ se } F_i \text{ depende explicitamente de } r_j \\ - \text{Para } n+p+1 \leq i \leq n+p+m \text{ e } 1 \leq j \leq n \text{ se } H_i \text{ depende explicitamente de } z_j \end{cases} \\ 0 & \begin{cases} - \text{De outra forma} \end{cases} \end{cases}$$

Agora será mostrado como associar um digrafo $\mathcal{D} = (V, E)$ a um sistema dinâmico do tipo daquele representado pelas equações (1a-b)-(Siljak [2]). Em primeiro lugar, constrói-se o conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ através da união dos conjuntos $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, $R = \{r_1, \dots, r_p\}$ e $W = \{w_1, \dots, w_m\}$. A relação E definida sobre o conjunto V conterá apenas pares ordenados da forma (r_j, z_i) , (z_j, z_i) e/ou (z_j, w_i) . Será desenhado um ramo de r_j para z_i sempre que a componente " r_j " do vetor de controle aparecer em $F_i(z, r, t)$ ou analogamente sempre que $e_{ij} = 1$. Da mesma forma, será desenhado um ramo de " z_j " para " z_i " sempre que a componente " z_j " do vetor de estados aparecer em $F_i(z, r, t)$, ou equivalentemente sempre que $g_{ij} = 1$. E finalmente, desenha-se um ramo de " z_j " para " w_i " sempre que a componente " z_j " do vetor " z " aparecer em $H_i(z, t)$ ou $n_{ij} = 1$.

Foi mostrado que um digrafo pode ser representado analiticamente por sua matriz adjacência M (definição 7); entretanto, construindo-se a matriz adjacência de um digrafo associado a um dado sistema dinâmico, verifica-se imediatamente que:

$$M = C^t$$

ou seja, a matriz adjacência de um digrafo associado a um dado sistema dinâmico é igual à transposta da matriz de interconexão do referido sistema.

Este resultado será importante para o particionamento de um sistema dinâmico, uma vez que dado um sistema pode-se imediatamente construir a sua matriz de interconexão, e por mera transposição tem-se a matriz adjacência do digrafo associado. E como já se sabe, a partir da matriz adjacência as classes de equivalência de V sobre "S" podem ser facilmente encontradas, já reordenadas conforme seção II.2. Com as classes de equivalência identificadas também estarão identificados os subsistemas e o problema estará resolvido. Na próxima subseção será apresentado um procedimento completo para o particionamento de um sistema dinâmico "S" qualquer em subsistemas hierarquicamente interconectados.

II.3.3. O Particionamento de um sistema dinâmico em sub sistemas hierarquicamente interconectados

Nesta subseção será apresentado uma metodologia para a decomposição de um sistema dinâmico de grande porte em subsiste

mas hierarquicamente interconectados. A única hipótese a ser feita acerca do sistema é que ele possa ser representado no espaço de estados por um conjunto de equações da forma:

$$S : \begin{cases} \dot{z} = F(z, r, t) & (1a) \\ w = H(z, t) & (1b) \end{cases}$$

onde: $z \in R^n$

$r \in R^p$

$w \in R^m$

A metodologia a ser apresentada permitirá reescrever as equações (1) da seguinte maneira:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, u_1, u_2, \dots, u_i, t) \quad (11a)$$

$$y_i(t) = h_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t) \quad \text{para } i = 1, \dots, k \quad (11b)$$

Para tanto constrói-se a matriz de interconexão "C" do sistema a partir das equações dinâmicas (1a-b), e transpondo-a obtém-se a matriz adjacência "M" do digrafo associado. A matriz "M" terá a seguinte forma:

$$M = C^t = \begin{bmatrix} E_{(nxn)}^t & O_{(n \times p)} & N_{(n \times m)}^t \\ G_{(p \times n)}^t & O_{(p \times p)} & O_{(p \times m)} \\ O_{(m \times n)} & O_{(m \times p)} & O_{(m \times m)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Se o digrafo \mathcal{D} for decomposto em seus componentes conectados fortemente, é fácil ver que cada um dos vértices " v_i " para $n+1 \leq i \leq n+p+m$ pertencerão a uma classe de equivalência distinta e unitária (já que cada um dos vértices " v_j " para $n+1 \leq j \leq n+p$ possuirá apenas ramos de saída, e analogamente cada um dos vértices " v_i " para $n+p+1 \leq i \leq n+p+m$ possuirá apenas ramos de chegada). Este inconveniente pode ser contornado decompondo-se apenas os vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ em suas classes de equivalência V_1, V_2, \dots, V_k , ordenadas e enumeradas de tal forma que se $v_a \in V_i, v_b \in V_j$ e $i < j$, então não haverá ramo de " v_b " para " v_a " em \mathcal{D} . Isto será imediatamente conseguido ao se substituir a matriz " M " pela sua submatriz E^t e então encontrar suas classes de equivalência (seção II.2).

Os vértices $\{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{n+p}\}$ serão particionados de uma maneira diferente, conforme será discorrido:

Considere a matriz GT dada por:

$$GT = \begin{bmatrix} E^t \\ \dots \\ G^t \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde G^t e E^t são as mesmas de (16).

Defina os seguintes conjuntos de índices (para $i = 1, \dots, k$).

$$P_i = \{j: n+1 \leq j \leq n+p, \mid \exists (GT)_{j\alpha} \neq 0 \text{ para algum } \alpha \text{ tal que } v_\alpha \in V_i\} \quad (18)$$

$$Q_i = \bigcup_{j=1}^i P_j \quad (19)$$

$$R_i = P_i \cap \bar{Q}_{i-1} \quad (20)$$

onde em (20) \bar{Q}_{i-1} é o conjunto complementar de Q_{i-1} em relação ao conjunto de índices $\{n+1, n+2, \dots, n+p\}$. Pode-se verificar que o conjunto " R_i " como definido em (20) é o conjunto formado pelos índices dos vértices " v_j " (para $n+1 \leq j \leq n+p$), tais que exista uma trajetória de " v_j " para algum vértice de " V_i ", mas não exista nenhuma trajetória para vértices em " V_s " quando $s < i$. Deve-se notar que " R_i " pode eventualmente ser um conjunto vazio para algum " i ".

Fazendo agora:

$$x_i = \{z_j, v_j \in V_i\} \quad (21)$$

$$f_i = \{F_j, v_j \in V_i\} \quad (22)$$

$$u_i = \{r_j, j+n \in R_i\} \quad (23)$$

então as equações (1a) podem ser colocados sob a forma (11a). E para encerrar o problema deve-se rearranjar as equações (1b) na forma (11b). Para tanto, será definida a matriz NT:

$$NT = [E^t \ ; \ N^t] \quad (24)$$

onde N^t e E^t são obtidas de (16). Considere também, para $i = 1, \dots, k$ os seguintes conjuntos de índices:

$$W_i = \{j: n+1 \leq j \leq n+m, \mid \exists (NT)_{\alpha j} \neq 0 \text{ para algum } \alpha \text{ tal que } v_\alpha \in V_i\} \quad (25)$$

$$Y_i = \bigcup_{j=i}^k W_j \quad (26)$$

$$T_i = W_i \cap \bar{Y}_{i+1} \quad (27)$$

onde em (27) \bar{Y}_{i+1} é o conjunto complementar de Y_{i+1} em relação ao conjunto $\{n+1, n+2, \dots, n+m\}$. Pode-se verificar que o conjunto " T_i " como definido em (27) é o conjunto formado pelos índices dos vértices " v_j " (com $n+1 \leq j \leq n+m$), tais que exista uma trajetória de algum vértice $v_\alpha \in V_i$ para " v_j ", mas não exista trajetória de nenhum vértice $v_\beta \in V_s$ para " v_j " quando $s > i$.

E com

$$Y_i = \{w_j, j+n \in T_i\} \quad (28)$$

$$h_i = \{H_j, j+n \in T_i\} \quad (29)$$

as equações (1b) poderão ser rearranjadas na forma (11b).

Desta forma, um sistema dinâmico representado por equações do tipo (1a-b) pode ser colocado na forma hierárquica (11a-b). Por outro lado, deve ser dito que este processo de particionamento que acabamos de apresentar pode dar origem a subsistemas que não possuam entradas e/ou saídas. Se cada subsistema tiver obrigatoriamente que possuir pelo menos uma entrada e/ou saída, sugere-se a utilização de outros algoritmos (como, por exemplo: M.E. Sezer [8]). Os subsistemas originados por estes "outros algoritmos" são em geral maiores, e a escolha de um determinado método deverá naturalmente depender do contexto no qual o problema está inserido.

II.4. CONCLUSÕES

A seguir será apresentada uma síntese do procedimento de particionamento ora proposto, seguido de um exemplo ilustrativo.

. Procedimento para decomposição de um sistema dinâmico "S" em subsistemas hierarquicamente interconectados:

Dado o sistema S:

$$\dot{z} = F(z, r, t) \quad (1a)$$

S :

$$w = H(z, t) \quad (1b)$$

com $z \in R^n$, $r \in R^p$ e $w \in R^m$.

1º PASSO: Construção da matriz de interconexão "C"

$$C = \begin{bmatrix} E & G & O \\ O & O & O \\ N & O & O \end{bmatrix}$$

2º PASSO: Obtenção da matriz adjacência associada "M"

$$M = C^t = \begin{bmatrix} E^t & 0 & N^t \\ G^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3º PASSO: Obtenção dos CCF's de E^t . Reordenação das classes de equivalência correspondentes de tal forma que se $v_a \in V_i$,

$v_b \in V_j$ e $i > j$, então \nexists ramo de v_a para v_b . (Algoritmos nºs : 1 - 2 - 3 - 4 da seção II.2).

4º PASSO: Faça

$$GT = \begin{bmatrix} E^t \\ \dots \\ G^t \end{bmatrix}$$

e defina os seguintes conjuntos (para $i = 1, \dots, k$)

$$P_i = \{j: n+1 \leq j \leq n+p/\exists (GT)_{j\alpha} \neq 0 \text{ para algum } \alpha | v_\alpha \in V_i\}$$

$$Q_i = \bigcup_{j=1}^i P_j$$

$$R_i = P_i \cap \overline{Q}_{i-1}$$

5º PASSO: Faça:

$$x_i = \{z_j, v_j \in V_i\}$$

$$f_i = \{F_j, v_j \in V_i\}$$

$$u_i = \{r_j, j+n \in R_i\}$$

6º PASSO: Faça

$$NT = [E^t \quad \vdots \quad N^t]$$

e defina para $i = 1, \dots, k$ os seguintes conjuntos de índices:

$$W_i = \{j: n+1 \leq j \leq n+m/\exists(NT)_{\alpha j} \neq 0 \text{ para algum } \alpha | v_\alpha \in V_i\}$$

$$Y_i = \bigcup_{j=i}^k W_j$$

$$T_i = W_i \cap \bar{Y}_{i+1}$$

7º PASSO: Faça:

$$y_i = \{w_j, j+n \in T_i\}$$

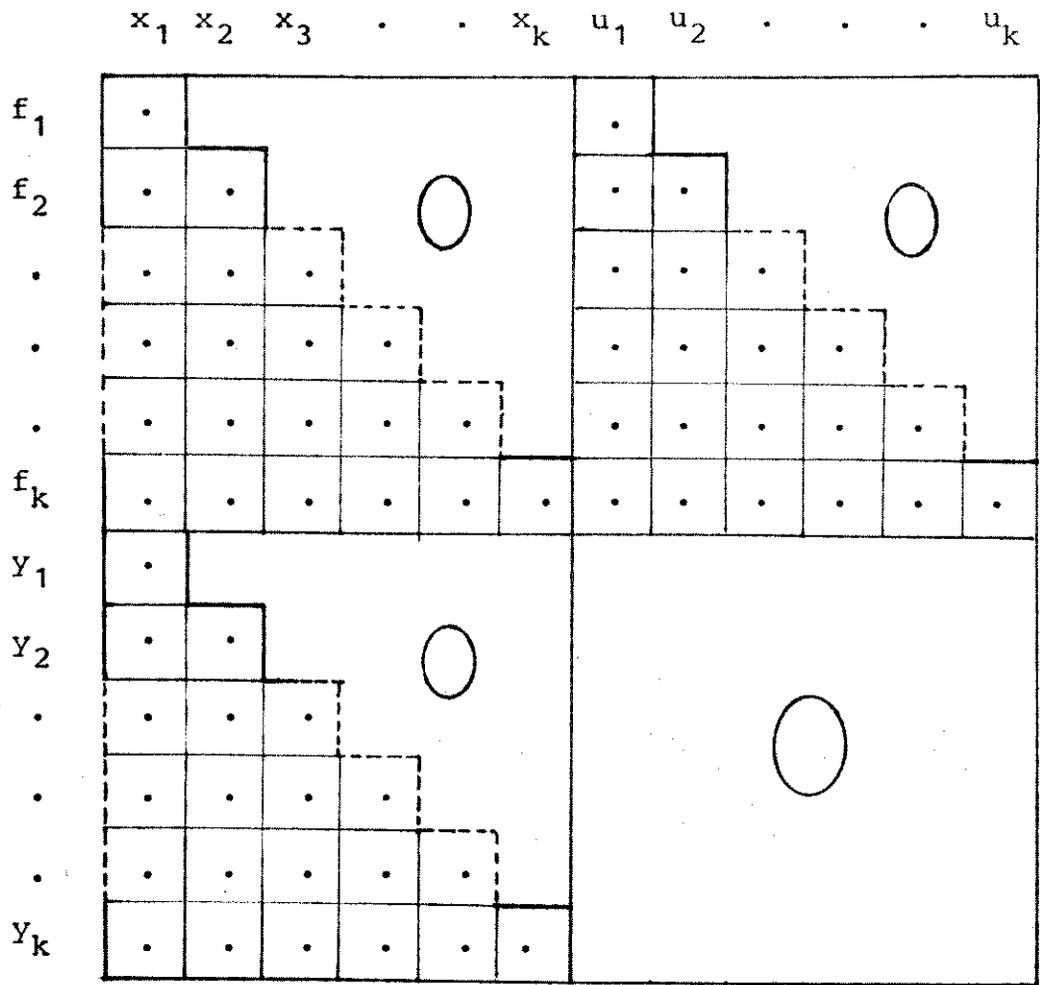
$$h_i = \{H_j, j+n \in T_i\}$$

8º PASSO: Reescreva as equações (1a-b) de acordo com as transformações dadas nos passos "5" e "7". O sistema terá então sido colocado na forma hierárquica, como desejado:

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_i, u_1, \dots, u_i, t) \\ y_i = h_i(x_1, \dots, x_i, t) \end{cases} \quad i = 1, \dots, k$$

Após a decomposição a estrutura das equações do sistema terá o aspecto apresentado na figura a seguir.

Observe que não há nenhuma perda de informação durante a utilização deste método, fato que pode ser observado no exemplo 4, dado a seguir.



Exemplo 4: Decompor o sistema representado a seguir em subsiste
mas hierarquicamente interconectados.

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \\ \dot{z}_7 \\ \dot{z}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(z_1, z_8, r_1) \\ F_2(z_1, z_2, r_2) \\ F_3(z_2, z_3, z_5, r_3) \\ F_4(z_3, z_4, z_7, r_2) \\ F_5(z_4, z_5, r_6) \\ F_6(z_5, z_6, z_8, r_5) \\ F_7(z_3, z_7, z_8, r_4) \\ F_8(z_2, z_8, r_3, r_6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(z_1) \\ H_2(z_3, z_4, z_5) \\ H_3(z_6, z_7) \\ H_4(z_2, z_8) \end{bmatrix}$$

Solução:

1º PASSO: Escrever a matriz de interconexão "C":

C =

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & & & & & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & &
 \end{bmatrix}$$

2º PASSO: Matriz adjacência do digrafo associado:

M = C^t =

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & &
 \end{bmatrix}$$

3º PASSO: Classes de equivalência reordenadas: (ver exemplo 2).

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_8\}$$

$$V_2 = \{v_3, v_4, v_5, v_7\}$$

$$V_3 = \{v_6\}$$

4º PASSO:

$$P_1 = \{9, 10, 11, 14\}$$

$$P_2 = \{11, 10, 14, 12\}$$

$$P_3 = \{13\}$$

$$Q_1 = \{9, 10, 11, 14\}$$

$$Q_2 = \{9, 10, 11, 12, 14\}$$

$$Q_3 = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

$$R_1 = \{9, 10, 11, 14\}$$

$$R_2 = \{12\}$$

$$R_3 = \{13\}$$

5º PASSO:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_8 \end{bmatrix} ; x_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_7 \end{bmatrix} ; [x_3] = [x_{31}] = [z_6]$$

$$f_1 = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_8 \end{bmatrix} ; \quad f_2 = \begin{bmatrix} f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_7 \end{bmatrix} ; \quad f_3 = [f_{31}] = [F_6]$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_6 \end{bmatrix} ; \quad u_2 = [u_{21}] = [r_4] ; \quad u_3 = [u_{31}] = [r_5]$$

6º PASSO:

$$W_1 = \{9, 12\}$$

$$W_2 = \{10, 11\}$$

$$W_3 = \{11\}$$

$$Y_1 = \{9, 10, 11, 12\}$$

$$Y_2 = \{10, 11\}$$

$$Y_3 = \{11\}$$

$$T_1 = \{9, 12\}$$

$$T_2 = \{10\}$$

$$T_3 = \{11\}$$

7º PASSO:

$$y_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_4 \end{bmatrix} ; y_2 = [y_{21}] = [w_2] ; y_3 = [y_{31}] = [w_3]$$

$$h_1 = \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_4 \end{bmatrix} ; h_1 = [h_{21}] = [H_2] ; h_3 = [h_{31}] = [H_3]$$

$$s_1 : \begin{cases} \dot{x}_{11} = f_{11}(x_{11}, x_{13}, u_{11}) \\ \dot{x}_{12} = f_{12}(x_{11}, x_{12}, u_{12}) \\ \dot{x}_{13} = f_{13}(x_{12}, x_{13}, u_{13}, u_{14}) \\ y_{11} = h_{11}(x_{11}) \\ y_{12} = h_{12}(x_{12}, x_{13}) \end{cases}$$

$$s_2 : \begin{cases} \dot{x}_{21} = f_{21}(x_{12}, x_{21}, x_{23}, u_{13}) \\ \dot{x}_{22} = f_{22}(x_{21}, x_{22}, x_{24}, u_{12}) \\ \dot{x}_{23} = f_{23}(x_{22}, x_{23}, u_{14}) \\ \dot{x}_{24} = f_{24}(x_{23}, x_{24}, x_{13}, u_{21}) \\ y_{21} = h_{21}(x_{21}, x_{22}, x_{23}) \end{cases}$$

$$s_3 : \begin{cases} \dot{x}_{31} = f_{31}(x_{23}, x_{31}, x_{13}, u_{31}) \\ y_{31} = h_{31}(x_{31}, x_{24}) \end{cases}$$

ou vetorialmente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, u_1) \\ y_1 = h_1(x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u_1, u_2) \\ y_2 = h_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) \\ y_3 = h_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

De acordo com a sequência apresentada no capítulo I, o processo de análise e síntese de sistemas de grande porte, segundo a abordagem proposta, deve ser continuado através de uma análise minuciosa das interconexões entre os vários subsistemas. O objetivo de tal análise é verificar a existência de condições para a desconexão entre os vários subsistemas.

Aparentemente a maneira mais cômoda de se conseguir esta desconexão é através da adoção de estratégias de controle multiníveis (conforme Siljak [2], quando os vetores de controle " u_j " dos subsistemas (11a-b) são divididos em duas partes, de forma que :

- . a primeira, atue a nível de subsistema, ignorando as interconexões, e
- . a segunda, a partir de informações do sistema global, atue no sentido de neutralizar as interconexões.

Segundo esta filosofia, o vetor de controle seria analiticamente dado por:

$$u_j = u_j^{\text{local}} + u_j^{\text{global}} \quad j = 2, \dots, k$$

onde $u_j^{\text{global}} = u_j(x)$

E o sistema "S" então desacoplado:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_i, u_i^{\ell}) \\ y_i = h_i(x_i) \end{cases} \quad i = 1, \dots, k \quad (30)$$

com $x_i \in R^{n_i}$, $u_i^{\ell} \in R^{p_i}$ e $y_i \in R^{m_i}$ para $i = 1, \dots, k$.

O problema todo é que, num caso geral, não se pode garantir a eliminação das interconexões, porque como dito na subseção II.3.3, o método de particionamento proposto não garante, por exemplo, a existência de "entradas" para todos os subsistemas. E mesmo que todos os subsistemas tenham entradas, não se pode, em princípio, garantir a eliminação das interconexões através da estratégia multinível acima. Qualquer que seja o caso, quando esta desconexão não puder ser feita, deve-se tentar outras alternativas, se o propósito final é a decomposição.

Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo, pode-se tentar a forma canônica de Luenberger, que apesar de mais difícil de ser obtida, apresenta uma estrutura final que favorece a eliminação das interconexões através do esquema de controle em dois níveis.

Esta rápida discussão, nos mostra que a eliminação de interconexões entre subsistemas é por si, só um problema complexo, merecendo um estudo a parte, que não poderá ser feito aqui.

Seguindo a sequência pré-estabelecida, devemos passar à análise individual de cada um dos sub-sistemas, utilizando as técnicas a serem desenvolvidas no próximo capítulo.

ANÁLISE E PROJETO DE CONTROLADORES DE SISTEMAS
LINEARES MULTIVARIÁVEIS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

III.1. INTRODUÇÃO

III.1.1. Comentários Gerais

O objetivo deste capítulo é apresentar uma técnica de projeto para controladores de sistemas lineares multivariáveis com realimentação (SLMR), baseado no Método dos Lugares Característicos de MacFarlane [10].

Sabe-se que as técnicas clássicas de projeto baseadas nos métodos de análise de resposta em frequência (Nyquist e Bode) foram e ainda são particularmente bem sucedidas, em razão de permitirem uma manipulação simultânea de parâmetros conflitantes relacionados às especificações de projeto. Por outro lado, os métodos e técnicas via espaço de estado tiveram a sua força e elegância derivados das propriedades algébricas e geométricas dos espaços vetoriais lineares. Da combinação das principais características destes dois enfoques, nasce a idéia do Método dos Lugares Característicos. E isto é conseguido pela introdução e exploração das propriedades dos espaços vetoriais lineares definidos sobre o corpo das funções de uma variável complexa.

Pode-se dizer que além do interesse intrínseco, existem pelo menos duas razões importantes para o desenvolvimento deste método:

- (i) Ele fornece uma técnica de projeto para uma ampla classe de controladores multivariáveis de processos industriais descritos por uma quantidade limitada de dados obtidos experimentalmente.
- (ii) Ele fornece uma ponte entre métodos de espaço de estado, tais como filtragem multivariável e controle ótimo e métodos de resposta em frequência até então restritos apenas a sistemas monovariáveis.

Seguindo a linha de apresentação dos capítulos anteriores, nas primeiras seções deste capítulo foram introduzidos alguns conceitos fundamentais a partir dos quais se desenvolve todo o corpo teórico necessário para suportar os algoritmos e metodologias propostas.

III.1.2. Hipóteses Adicionais

No capítulo II vimos como decompor um sistema dinâmico de grande porte em subsistemas hierarquicamente interconectados. E já no final daquele capítulo sugerimos uma maneira de se tentar eliminação das interconexões entre os vários subsistemas, através da adoção de estratégias de controle em dois níveis. Nosso objetivo naquela altura não era outro senão o de desconectar os subsistemas a fim de trabalhar em cada um deles independentemente dos demais.

Agora, nossa proposta é trabalhar a nível de subsistemas, analisando e projetando controladores para cada um deles, utilizando técnicas de resposta em frequência para sistemas multivariáveis.

Desta forma, suporemos que os subsistemas resultantes da decomposição anterior possam ser colocados na forma:

$$S_i : y_i(s) = G_i(s) \cdot u_i(s) \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

Uma vez que a técnica a ser utilizada é específica para sistemas lineares, e os subsistemas "S_i" são, a princípio não lineares, devemos linearizar cada um deles em torno de seus respectivos pontos de operação (e fazendo uma transformação de coordenadas de tal forma que a nova origem coincida com os pontos de operação de cada subsistema), teremos:

$$\delta \dot{x}_i = A_i \delta x_i + B_i \delta u_i \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

$$\delta y_i = C_i \delta x_i$$

onde as matrizes A_i, B_i e C_i são dadas por:

$$(A_i)_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial f_{\alpha}(x_i, u_i)}{\partial x_{\beta}} \right|_0$$

$$(B_i)_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial f_{\alpha}(x_i, u_i)}{\partial u_{\beta}} \right|_0$$

$$(C_i)_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial h_{\alpha}(x_i)}{\partial x_{\beta}} \right|_0$$

e como o ponto de operação é considerado como a nova origem:

$$x_i = \delta x_i$$

$$u_i = \delta u_i \quad \text{para } i = 1, \dots, k$$

$$Y_i = \delta Y_i$$

De forma que "S_i" pode ser colocado na forma:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i$$

$$Y_i = C_i x_i$$

De onde obtemos prontamente as matrizes de transferência para cada um dos subsistemas "S_i", dadas por:

$$G_i(s) = C_i \cdot (sI - A_i)^{-1} \cdot B_i \quad \text{para } i = 1, \dots, k$$

Conforme será mostrado oportunamente, as matrizes de transferência "G_i(s)" deverão ser matrizes racionais.

Nas próximas seções serão apresentados alguns resultados preliminares visando a definição da terminologia e notação a serem empregadas ao longo deste trabalho.

III.2. MATRIZES RACIONAIS

III.2.1. Terminologia

Uma matriz $G(s) = [g_{ij}(s)]$ de dimensão $(m \times m)$ é racional se seus elementos são funções racionais de "s", e neste caso escreveremos $G(s) \in R^{m \times m}(s)$. Todas as matrizes que encontraremos a partir de agora neste texto, a menos que especificando em contrário, serão matrizes racionais.

O diagrama da Fig. 1 representa uma configuração padrão de um sistema com realimentação. A partir dele apresentaremos algumas das matrizes racionais mais utilizadas no estudo de sistemas lineares multivariáveis.

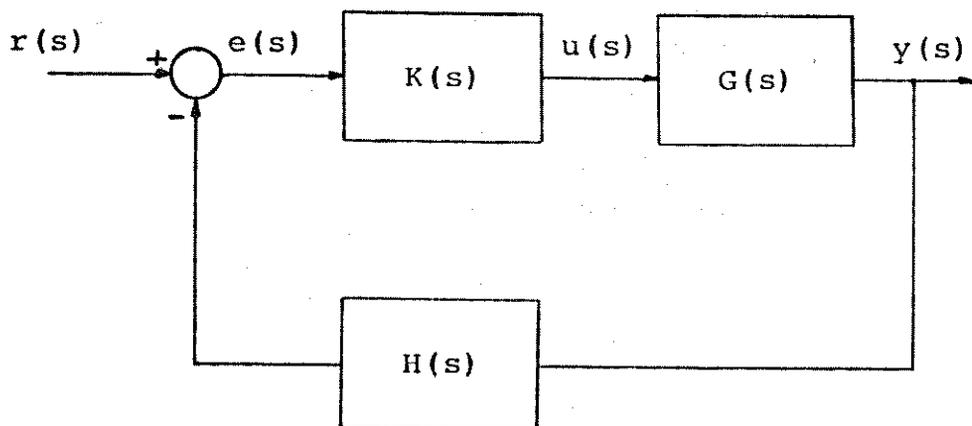


Figura 1

Terminologia:

$G(s) \in R^{m \times m}(s)$: é a matriz de transferência do processo

$K(s) \in R^{m \times m}(s)$: é a matriz de transferência do controlador

$H(s) \in R^{m \times m}(s)$: é a matriz de transferência do transdutor de realimentação

$R(s) \in R^{m \times m}(s)$: é a matriz de transferência do sistema em malha fechada

$Q(s) \in R^{m \times m}(s)$: é a matriz de transferência do canal direto

$L(s) \in R^{m \times m}(s)$: é a matriz razão de retorno

$F(s) \in R^{m \times m}(s)$: é a matriz diferença de retorno

A seguir listamos as principais relações entre estas matrizes:

$$Y(s) = G(s) \cdot u(s) \quad (1)$$

$$Q(s) = G(s) \cdot K(s) \quad (2)$$

$$L(s) = G(s) \cdot K(s) \cdot H(s) = Q(s) \cdot H(s) \quad (3)$$

$$F(s) = I + G(s) \cdot K(s) \cdot H(s) = I + Q(s) \cdot H(s) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R(s) &= (I + GKH)^{-1} \cdot GK = (I + QH)^{-1} \cdot Q \\ &= F^{-1}(s) \cdot Q(s) \end{aligned} \quad (5)$$

Sem perda de generalidade podemos considerar $H(s) = I$, ou seja, realimentação unitária, conforme diagrama da Fig. 2.

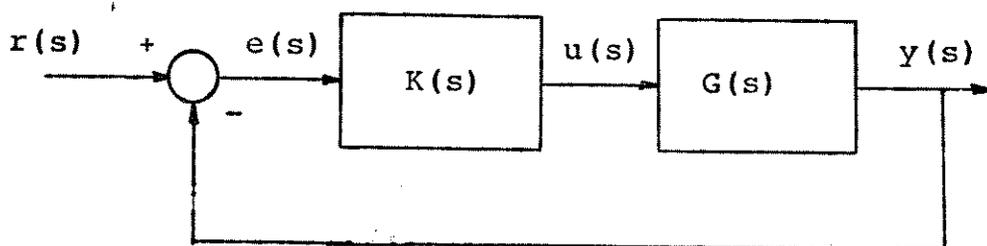


Figura 2

E as principais relações são:

$$Q(s) = L(s) \quad (6)$$

$$F(s) = I + Q(s) \quad (7)$$

$$R(s) = (I + Q)^{-1} \cdot Q = F^{-1} \cdot Q \quad (8)$$

III.2.2. Funções características

Seja $Q(s) = [q'_{ij}(s)]$ uma matriz racional, então como já vimos os elementos $q'_{ij}(s)$ são funções racionais de "s". Isto implica que para uma dada frequência $s = s_1$ a matriz $Q(s_1)$ será definida sob o corpo dos números complexos, e portanto seus autovalores certamente serão números também complexos. Representaremos o conjunto de autovalores de $Q(s_1)$ por $q_i(s_1)$, com $i = 1, \dots, \dots, m$. Vamos mostrar que em um sentido genérico os autovalores de $Q(s)$ são funções de "s". Para tanto, formemos a equação característica de $Q(s)$:

$$\det[q(s) \cdot I - Q(s)] = \Delta(q, s) \quad (9)$$

é fácil nos convenceremos que o polinômio em "q" acima, não poderá em geral ser expresso como um produto de fatores lineares em "q". Desta forma, os autovalores de $Q(s)$ não serão normalmente funções racionais de "s".

Em geral $\Delta(q, s)$ poderá ser reduzido à forma:

$$\Delta(q, s) = \Delta_1(q, s) \cdot \Delta_2(q, s) \dots \Delta_k(q, s) \quad (10)$$

onde os fatores $\Delta_i(q,s)$, $i = 1, \dots, k$ são polinômios irreduzíveis sobre o corpo das funções racionais em "s", e por conseguinte da forma:

$$\Delta_i(q,s) = q_i^{t_i}(s) + a_{i1}(s) \cdot q_i^{t_i-1}(s) + \dots + a_{it_i}(s)$$

para $i = 1, \dots, k$ (11)

onde " t_i " é o grau de $\Delta_i(q,s)$ e os coeficientes $\{a_{ij} : i = 1, \dots, k \text{ e } j = 1, \dots, t_i\}$ são funções racionais de "s".

Se $b_{i0}(s)$ é o mínimo denominador comum dos coeficientes $\{a_{ij}(s) , j = 1, \dots, t_i\}$, então a eq. (11) pode ser reescrita na forma:

$$b_{i0}(s) \cdot q_i^{t_i} + b_{i1}(s) \cdot q_i^{t_i-1} + \dots + b_{it_i}(s) = 0 \quad (12)$$

para $i = 1, \dots, k$. Os coeficientes $\{b_{ij}(s) : i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, t_i\}$ são agora polinômios em "s". A função " $q_i(s)$ " definida por (12) é uma função algébrica. As funções características de $Q(s)$ são, pois, definidas como sendo o conjunto de funções algébricas $q_i(s)$ para $i = 1, \dots, k$, e desta forma estão relacionadas ao conjunto de autovalores de $Q(s)$. Para maiores detalhes ver MacFarlane [11].

III.2.3. Superfícies de Riemann

Uma superfície de Riemann é uma generalização do plano s a uma superfície de mais de uma "folha", de tal forma que uma

função multivalente tenha um só valor correspondente a cada ponto nesta superfície. Ou seja, uma função multivalente se torna univalente sobre sua superfície de Riemann correspondente, e desta forma pode ser estudada utilizando-se a teoria das funções univalentes. Pode-se dizer que as complexidades devido à multivalência são "suavizadas" por um dispositivo geométrico.

No presente contexto estamos interessados nas superfícies de Riemann associadas a funções algébricas, que por sua vez originam-se de matrizes racionais. Suponha então que $q(s)$ seja definida pela equação:

$$b_0(s) \cdot q^t(s) + b_1(s) \cdot q^{t-1}(s) + \dots + b_t(s) = 0 \quad (13)$$

Dado o grau desta equação é "t", então a cada valor de "s", estarão associados "t" valores distintos de $q(s)$, exceto nos casos em que:

- (i) $b_0(s) = 0$ (já que neste caso o grau da eq.(13) poderá ser reduzido), ou
- (ii) a equação (13) tiver raízes múltiplas.

Esta última situação ocorrerá quando o discriminante $D_q(s)$ da eq. (13) for nulo (ver Barnett [12]). A seguir, apresentamos algumas definições ainda relativas à eq.(13).

Definição 1: Os pontos do plano-s para os quais

$b_0(s) \neq 0$ e $D_q(s) \neq 0$ são chamados de Pontos Ordinários da função característica

Definição 2: Os pontos do plano- s para os quais

$$b_0(s) = 0 \quad \text{e/ou} \quad D_q(s) = 0 \quad \text{são chamados de}$$

Pontos Críticos da Função Característica

Definição 3: Os pontos do plano- s que verificam a equação:

$$D_q(s) = 0 \quad \text{são chamados de}$$

Pontos de Ramificação da Função Característica

Na discussão que se segue, P representará o conjunto dos pontos críticos e C o corpo dos números complexos.

Em qualquer ponto ordinário do plano- s , a eq. (13) possui " t " raízes distintas. Por outro lado, a teoria das funções algébricas assegura que em qualquer região simplesmente conexa de $C - P$, os valores da função característica " $q(s)$ " formam um conjunto de funções analíticas. Cada uma destas funções recebe o nome de RAMO da função característica $q(s)$. O princípio da continuidade analítica juntamente com algumas propriedades das funções algébricas nos permite mostrar que os vários ramos de uma função característica podem ser organizados de forma a constituir uma única entidade : a função algébrica correspondente.

Teorema 1 : Uma equação algébrica irredutível da forma (13) define precisamente uma função t -valente $q(s)$ no domínio $C - P$.

Uma função elementar $f(s)$ de uma variável complexa " s " é tal que:

$$f(s): C \rightarrow C$$

Já uma função algébrica $q(s)$ definida por uma equação algébrica da forma (13) é tal que:

$$q(s) : \mathbb{R} \rightarrow C$$

onde \mathbb{R} é um domínio apropriado (ou superfície de Riemann). Tal superfície é constituída por " t " folhas do plano- s . Para a construção desta superfície, estas folhas podem ser unidas das mais variadas maneiras, podendo inclusive haver a conexão de duas folhas que estejam separadas por várias outras. Embora tal construção não possa ser realizada no espaço tridimensional, não é difícil dar uma descrição topológica perfeitamente satisfatória do processo requerido para a referida construção. (Ver, por exemplo, Springer [14]).

Suponha que uma função algébrica $q(s)$ possui " r " pontos críticos $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, e que além disso eles sejam adequadamente unidos por linhas " L " (unindo dois pontos críticos, ou um ponto crítico e o infinito). Cada uma destas linhas recebe o nome de "corte". Seja \mathbb{L} o conjunto dos números complexos sobre " L ". As soluções da eq. (13) definem um conjunto de " t " funções analíticas distintas $\{q_1(s), \dots, q_t(s)\}$ no plano cortado $C - \mathbb{L}$. Cada uma destas funções pode ser "analiticamente continuada" no corte L . Do princípio da continuidade analítica, sabemos que se uma função analítica satisfaz uma equação algébrica em uma parte de seu domínio de definição, então ela satisfará tal equação em cada região onde ela for analiticamente continuada.

Conclui-se então que:

- (i) Existem apenas "t" funções analíticas que satisfazem a equação algébrica no plano cortado $C - L$.
- (ii) Cada "continuidade analítica" de quaisquer das funções analíticas $\{q_i(s) : i = 1, \dots, t\}$ dá origem a uma função analítica que também satisfaz a equação algébrica da definição. Segue daí que o conjunto de funções analíticas associadas a um lado do corte "L" deve ser uma permutação simples do conjunto de funções analíticas associadas ao outro lado do corte. Assim, podemos identificar e ligar adequadamente as várias funções analíticas (via por exemplo, conjunto de valores calculados) que estão nos dois lados do corte.

Considere novamente a eq. (13), onde $b_0(s) \neq 0$ e $b_t(s) \neq 0$, então:

Definição 4: Polos e Zeros de funções algébricas [19]:

Os valores de "s" para os quais $b_t(s) = 0$ são chamados de zeros da função algébrica $q(s)$, e aqueles para os quais $b_0(s) = 0$ são chamados de polos da função $q(s)$.

III.2.4. Direções característicos de $Q(s)$

Vimos que podemos associar um conjunto de funções algé

bricas $q_i(s)$ a uma matriz racional $Q(s)$. Por outro lado, sabemos que a cada função algébrica $q_i(s)$ (autovalor) está associada um vetor $w_i(s)$ (função de "s") cujos elementos são funções algébricas que possuem as mesmas superfícies de Riemann que as funções características $q_i(s)$. Os vetores $w_i(s)$, $i = 1, \dots, k$, são os autovetores de $Q(s)$ associados respectivamente aos autovalores $q_i(s)$ para $i = 1, \dots, k$, e são chamados de direções características de $Q(s)$. (vide ref. [11]).

III.3. MISCELÂNEA

III.3.1. Expansões diádicas

Em qualquer ponto ordinário do plano-s a matriz $Q(s)$, de finida anteriormente, pode ser colocada na forma diádica abaixo :

$$Q(s) = \sum_{i=1}^m q_i(s) \cdot w_i(s) \cdot v_i^t(s) \quad (15)$$

onde:

- (i) As funções $\{q_i(s) : i = 1, \dots, m\}$ são funções analíticas cujos valores em qualquer frequência $s = s_1$ são os autovalores de $Q(s_1)$. Pode-se também dizer que o conjunto $q_i(s)$ é o conjunto de ramos de todas as funções algébricas associadas à matriz $Q(s)$ pela eq. "9".
- (ii) Os vetores $\{w_i(s) : i = 1, \dots, m\}$ formam um conjunto

de funções vetoriais, cujos valores em $s = s_1$ cor
respondem aos autovetores de $Q(s_1)$.

- (iii) Os vetores $\{v_i^t(s) : i = 1, \dots, m\}$ são os vetores du
ais ou recíprocos de $\{w_i(s) : i = 1, \dots, m\}$.
- (iv) A expressão (15) é definida em todos os pontos do
plano complexo, exceto no conjunto formado pelos
pontos de ramificações de todas as funções carac
terísticas de $Q(s)$.

III.3.2. Lugares dos ganhos característicos

Vimos que a cada função $\{q_i(s) : i = 1, \dots, k\}$ podemos as
sociar uma superfície de Riemann R_i . Denotemos por D o contorno
de Nyquist no plano complexo (Fig. 3).

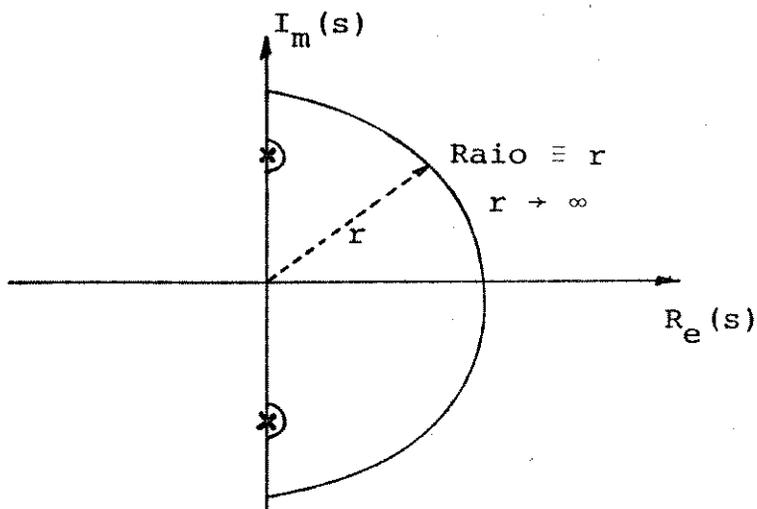


Figura 3 - Contorno de Nyquist ("D")

Agora desenhe uma cópia de "D" em cada uma das "folhas-s" que formam as superfícies R_i , para $i = 1, \dots, k$. Então teremos sobre cada uma das superfícies uma curva fechada associada ao contorno de Nyquist. O mapeamento de tais curvas fechadas no plano-q dá origem a um outro conjunto de curvas denotadas aqui por N_1, \dots, N_k , que são denominadas como os lugares característicos de $Q(s)$. (vide para maiores detalhes [15]).

Na prática os lugares característicos são gerados pela curva descrita pelos autovalores de $Q(s)$ no plano complexo, à medida que "s" percorre o contorno de Nyquist no sentido horário.

III.3.3. Generalização do critério de Nyquist

Suponha que o sistema multivariável com realimentação, mostrado na Fig. 4 não possua modos não controláveis e/ou não observáveis em malha aberta, associados à frequências no semi-plano complexo direito.

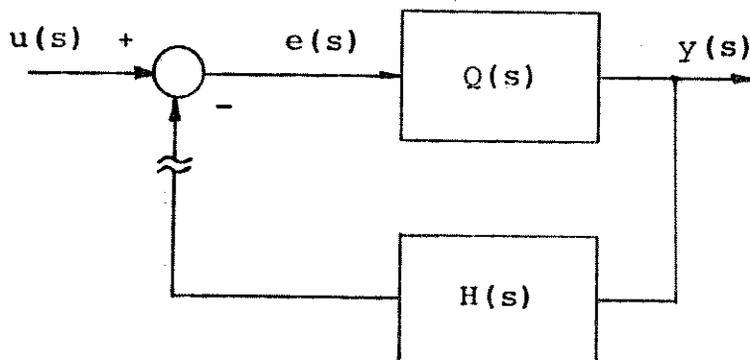


Figura 4

Teorema : A configuração acima será estável em malha fechada se e somente se a soma dos envoltimentos do ponto crítico $(-1,0)$ no sentido anti-horário pelo conjunto dos lugares característicos de $L(s)$, for igual ao número total de polos de $Q(s)$ e $H(s)$ no semi-plano complexo direito.

Uma vez que estamos trabalhando com a matriz razão de retorno $L(s)$, devemos tomar cuidado, e considerar possíveis cancelamentos entre zeros e polos dos elementos de $Q(s)$ e $H(s)$. (Para prova e demais comentários deste critério, vide [11].)

III.4. ANÁLISE DA PERFORMANCE DE UM SLMR

III.4.1. Introdução

Consideremos novamente a configuração multivariável , com realimentação da Fig. 2 (repetida abaixo), onde $G(s)$ é a matriz de transferência do processo e $K(s)$ do controlador.

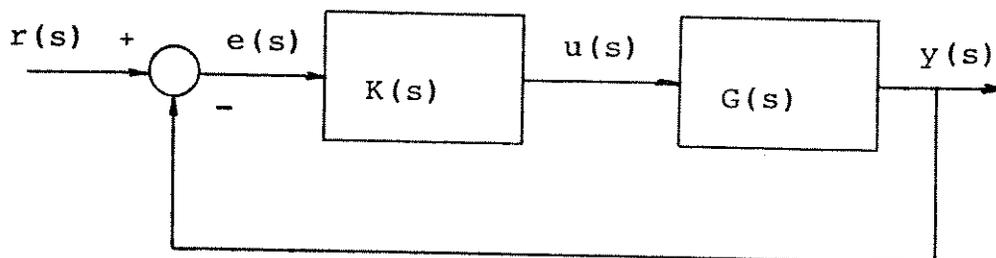


Figura 2

Sabemos que:

$$Q(s) = G(s) \cdot K(s) \quad (2)$$

$$R(s) = [I + Q]^{-1} \cdot Q(s) \quad (8)$$

e podemos facilmente verificar que se $w_i(s)$ é um autovetor (direção característica) de $Q(s)$, então ele também será um autovetor (direção característica) de $R(s)$. Além disso, para qualquer autovalor (função característica) $q_i(s)$ de $Q(s)$, existe um autovalor correspondente de $R(s)$ dado por $[q_i(s)/(1 + q_i(s))]$. Desta forma, é imediato que se dois ou mais elementos do conjunto $\{q_i/(1 + q_i) : i = 1, \dots, m\}$ forem iguais, então o mesmo se dará com os dois ou mais elementos correspondentes do conjunto $\{q_i : i = 1, \dots, m\}$. Em outras palavras, isto significa que as superfícies de Riemann associadas às matrizes $Q(s)$ e $R(s)$ são idênticas, uma vez que elas possuem os mesmos pontos de ramificações.

Vimos na subseção (III.3.1) que a matriz $Q(s)$ pode ser colocada na forma diádica em todos os pontos ordinários do plano complexo, ou seja,

$$Q(s) = \sum_{i=1}^m q_i(s) \cdot w_i(s) \cdot v_i^t(s) \quad (15)$$

Por outro lado, a expansão diádica de $R(s)$ será:

$$R(s) = \sum_{i=1}^m \frac{q_i(s)}{1 + q_i(s)} w_i(s) \cdot v_i^t(s) \quad (16)$$

Estas expressões serão bastante úteis no estudo subsequente.

III.4.2. Resposta em frequência em malha fechada

Voltemos ao sistema da Fig. 2. Suponha que o sinal de entrada seja senoidal, ou seja façamos $r(s)$ igual a $r(j\omega)$. Neste caso, o vetor de saída do sistema em malha fechada será:

$$\begin{aligned} y(j\omega) &= \sum_{i=1}^m \frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} w_i(j\omega) \cdot v_i^t(j\omega) \cdot r(j\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^m v_i^t(j\omega) \cdot r(j\omega) \cdot \frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} w_i(j\omega) \quad (17) \end{aligned}$$

Esta expressão dá uma interpretação geométrica da maneira como o sistema em malha fechada responde à uma entrada senoidal. Senão, vejamos:

- (i) O vetor de entrada $r(j\omega)$ é decomposto nas direções dos vetores característicos $\{w_i(j\omega) : i = 1, \dots, m\}$, e a componente do vetor $r(j\omega)$ dirigida ao longo da i -ésima direção característica é dada por:

$$v_i^t(j\omega) \cdot r(j\omega) \cdot w_i(j\omega)$$

- (ii) A i -ésima coordenada do vetor de saída é ponderada pelo i -ésimo autovalor de malha fechada, ou seja:

$$(i\text{-ésima coord. saída}) = \frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} \cdot$$

(i -ésima coord. entrada)

(iii) O vetor de saída $y(j\omega)$ do sistema (em malha fechada) é dado pela soma das componentes do vetor fasor de entrada : $v_i^t \cdot r$ dirigidos ao longo das direções $\{w_i(j\omega) : i = 1, \dots, m\}$, devidamente ponderadas pelos ganhos característicos de controle, ou seja:

$$y(j\omega) = \sum_{i=1}^m \frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} \cdot v_i^t(j\omega) \cdot r(j\omega) \cdot w_i(j\omega) \quad (18)$$

A importância desta expressão é que ela mostra como o desempenho do sistema em malha fechada pode ser analisado em termos do conjunto dos lugares e direções características da matriz de transferência de malha aberta $Q(s)$. Em particular, se os módulos de $q_i(j\omega)$, $i = 1, \dots, m$ forem suficientemente grandes, de tal forma que:

$$\frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} \cong 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

então:

$$y(j\omega) = \left\{ \sum_{i=1}^m w_i(j\omega) \cdot v_i^t(j\omega) \right\} \cdot r(j\omega)$$

de modo que

$$y(j\omega) \cong r(j\omega)$$

ou seja, o sinal de saída seguirá o sinal de referência de perto.

III.4.3. Interação

O termo interação é usado para traduzir o efeito de acoplamento entre os vários "canais" de um dado sistema. Em geral, para uma maior facilidade de controle, deseja-se que os sistemas possuam um baixo grau de interação, ou equivalentemente, que apenas uma determinada saída $y_i(s)$ responda significativamente a uma dada entrada $r_i(s)$, e que todas as outras saídas $y_j(s)$, $j \neq i$, permaneçam indiferentes àquela entrada.

Fazendo $s = j\omega$ em (16) teremos:

$$R(j\omega) = \sum_{j=1}^m \frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} w_i(j\omega) \cdot v_i^t(j\omega) \quad (19)$$

Suponha agora que para uma dada frequência $\omega = \omega_b$, tenhamos:

$$|q_i(j\omega_b)| \gg 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (20)$$

Então

$$R(j\omega_b) \rightarrow \sum_{j=1}^m w_i(j\omega_b) \cdot v_i^t(j\omega_b) = I \quad (21)$$

de onde concluímos que o sistema em malha fechada é "não-interativo" nesta frequência. Em baixas frequências a condição (20) pode quase sempre ser conseguida, bastando para isso que se imponha altos ganhos característicos (em módulo).

Em altas frequências, entretanto, não se pode aumentar indiscriminadamente os módulos dos lugares característicos, já

que neste caso, além das potências envolvidas aumentarem substancialmente, pode haver problemas com o critério de estabilidade de Nyquist, que usualmente exige que os módulos dos lugares característicos em altas frequências sejam pequenos. Desta forma, para grandes valores de frequência, digamos $\omega = \omega_a$, deve-se ter:

$$|q_i(j\omega_a)| \ll 1, \quad i = 1, \dots, m \quad (22)$$

e de (16) com $s = j\omega_a$, vem

$$R(j\omega_a) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{q_i(j\omega_a)}{1 + q_i(j\omega_a)} \right\} w_i(j\omega_a) \cdot v_i^t(j\omega_a)$$

e levando-se em consideração a condição (22):

$$R(j\omega_a) \rightarrow \sum_{i=1}^m q_i(j\omega_a) \cdot w_i(j\omega_a) \cdot v_i^t(j\omega_a) = Q(j\omega_a) \quad (23)$$

o que significa que apesar da realimentação, os efeitos de acoplamento em $Q(j\omega_a)$ passarão integralmente para $R(j\omega_a)$.

É claro que se conseguíssemos um método que fizesse com que a matriz $Q(s)$ se aproximasse da forma diagonal quando $|s| \rightarrow \infty$, então o problema da interação estaria resolvido.

Apresentaremos adiante uma maneira mais eficiente, do ponto de vista prático, de se eliminar as interações em altas frequências. Tal maneira, conforme será mostrado, surge de considerações geométricas, e é baseada na idéia de se tentar alinhar as direções características de $Q(j\omega)$ com o conjunto de vetores canônicos, aqui representado por:

$$E = [e_1 \ : \ e_2 \ : \ \dots \ : \ e_m] = I_m$$

Antes de apresentar o método, vejamos os fundamentos teóricos para o seu desenvolvimento. Inicialmente, suponha que apenas a i -ésima componente do vetor de referência $r(j\omega)$ seja excitada, ou seja:

$$r(j\omega) = r_i(j\omega) \cdot e_i \quad (24)$$

Por outro lado, é claro que se $w_i(j\omega) = e_i$, $i = 1, \dots, m$, então:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= R(j\omega) \cdot r(j\omega) = r_i(j\omega) \cdot R(j\omega) \cdot e_i = \\ &= r_i(j\omega) \cdot \sum_{p=1}^m \frac{q_p(j\omega)}{1 + q_p(j\omega)} w_p(j\omega) \cdot v_p^t(j\omega) \cdot e_i \end{aligned}$$

e como $w_i(j\omega) = e_i$, então:

$$v_p^t(j\omega) \cdot e_i = \delta_{ip}$$

onde δ_{ip} é o delta de Kronecker.

Logo, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= r_i(j\omega) \cdot \frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} \cdot w_i(j\omega) = \\ &= r_i(j\omega) \cdot \frac{q_i(j\omega)}{1 + q_i(j\omega)} \cdot e_i \end{aligned}$$

Desta forma, apenas a componente $y_i(j\omega)$ do vetor de saída responde à excitação $r(j\omega)$ dada por (24).

Isto nos permite concluir que se as direções características de $Q(s)$ estiverem suficientemente alinhadas com os vetores canônicos, então teremos um baixo grau de interação entre os vários canais do sistema em malha fechada.

O ângulo formado pelos vetores $w_k(j\omega)$ e pelos vetores canônicos $\{e_i : i = 1, \dots, m\}$ pode ser tomado como uma medida do grau de interação. Este ângulo é dado por;

$$\theta_i(j\omega) = \arccos \frac{|\langle w_k(j\omega) \cdot e_i \rangle|}{\|w_k(j\omega)\|} \quad (25)$$

onde por convenção "k" é escolhido de tal maneira que $w_k(j\omega)$ seja aquele autovetor que forma o menor ângulo com " e_i " na frequência " ω ".

Resumindo, em baixas frequências a interação pode ser avaliada pelos ângulos θ_i e/ou pelos módulos dos lugares característicos de $Q(j\omega)$, e em altas frequências pelos ângulos formados pelas direções características de $Q(j\omega)$ com os vetores canônicos. Através de um conjunto de gráficos relacionando:

- (i) Os módulos de $q_i(j\omega)$ versus " ω " ; e
- (ii) Os ângulos $\theta_i(j\omega)$ versus " ω " .

pode-se avaliar convenientemente a interação em qualquer intervalo de frequências de interesse.

III.4.4. Desempenho do sistema em malha fechada

A análise do desempenho do sistema da Fig. 2, conforme vimos acima, pode ser feita em termos dos lugares e direções características da matriz de transferência de malha aberta $Q(s)$. Vamos agora estabelecer as condições gerais para que o desempenho do sistema em malha fechada seja satisfatório:

- (i) O conjunto dos lugares característicos $\{q_i(j\omega) : i = 1, \dots, m\}$, deve satisfazer o critério de estabilidade de Nyquist.
- (ii) Os ganhos dos lugares característicos devem ser suficientemente grandes na faixa de frequência desejada para que o vetor de saída siga adequadamente o vetor de referência.
- (iii) Para que os ganhos característicos tenham os efeitos requeridos, o conjunto de direções características deverá ser capaz de descrever o espaço complexo m -dimensional. Se o conjunto de direções características for excessivamente distorcido, será necessário, conforme mostrado abaixo, usar um meio alternativo (conjunto de ganhos principais) para checar os ganhos do sistema.
- (iv) Os ângulos em altas frequências formados pelas direções características de $Q(j\omega)$ com os vetores canônicos devem ser suficientemente pequenos para que as interações naquelas frequências sejam mantidas dentro de limites aceitáveis.

Se estas condições forem satisfeitas, então o autovalor $q_i(j\omega)$ associado ao autovetor $w_i(j\omega)$ que mais se alinha com o j -ésimo vetor canônico e_j , pode ser considerado como uma aproximação razoável (para efeito de discussão de desempenho) da função de transferência entre a j -ésima entrada e a j -ésima saída na frequência angular " ω ". A resposta em malha fechada da j -ésima saída devido a j -ésima entrada pode então ser analisada através de inspeções de gráficos de resposta em frequência : $q_i(j\omega)X\omega$.

Se os autovetores de $Q(j\omega)$ forem aproximadamente ortogonais, então altos ganhos para $\{q_i(j\omega) : i = 1, \dots, m\}$ assegurarão uma resposta satisfatória em malha fechada, conforme equação (19). Contudo, se os autovetores forem bastante distorcidos, ou se não existir um conjunto completo de autovetores (como em certos casos de autovalores coincidentes), então não poderemos usar os autovalores de $Q(j\omega)$ para avaliar o desempenho do sistema em malha fechada. Em tais situações usaremos os conceitos de GANHOS PRINCIPAIS e de DIREÇÕES DE GANHOS PRINCIPAIS. Os ganhos principais de $Q(j\omega)$ são as raízes quadradas positivas dos autovalores de $Q^*(j\omega) \cdot Q(j\omega)$. Denotemos os ganhos principais de $Q(j\omega)$ por $\{v_i : i = 1, \dots, m\}$. É fácil verificarmos que as seguintes propriedades são verdadeiras:

(i) $v_i \in R_+$, para $i = 1, \dots, m$ (R_+ : reais não negativos)

$$(ii) v_i = \frac{\|Q \cdot m_i\|}{\|m_i\|}, \quad i = 1, \dots, m \quad (26)$$

onde " m_i " é o autovetor de Q^*Q associado ao autovalor v_i^2 .

(iii) Se os ganhos principais v_i , $i = 1, \dots, m$ forem ordenados:

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_m \quad (27)$$

então:

$$v_1 \leq \frac{\|y\|}{\|e\|} \leq v_m \quad (28)$$

onde $y = Q \cdot e$.

Justificativa:

$$\frac{\|y\|^2}{\|e\|^2} = \frac{e^* \cdot Q^* \cdot Q \cdot e}{\|e\|^2}$$

e de (28):

$$v_1^2 \leq \frac{e^* \cdot Q^* \cdot Q \cdot e}{\|e\|^2} \leq v_m^2$$

e daí:

$$v_1 \leq \frac{\|y\|}{\|e\|} \leq v_m$$

(iv) Os vetores $\{m_i : i = 1, \dots, m\}$ formam um conjunto ortogonal e são chamados de direções de ganho principal.

As direções principais formam sempre um conjunto de vetores ortogonais, o que faz com que os ganhos principais sejam úteis na avaliação da performance do sistema.

Observe que os vetores de entrada, de erro e de saída são relacionados por:

$$r = e + y$$

então:

$$\frac{\|y\|}{\|r\|} = \frac{\|y\|}{\|e+y\|} = \frac{\frac{\|y\|}{\|e\|}}{\frac{\|e+y\|}{\|e\|}} \geq \frac{\frac{\|y\|}{\|e\|}}{1 + \frac{\|y\|}{\|e\|}}$$

assim

$$\frac{\|y\|}{\|r\|} \geq \frac{1}{1 + v_m} \quad (29)$$

Daí vê-se que os ganhos principais de $Q(j\omega)$ podem ser utilizados para avaliar a performance do sistema em malha fechada, mesmo quando os autovetores de $Q(j\omega)$ formarem um conjunto de vetores distorcidos, ou quando não existir um conjunto completo de autovetores. Um conjunto de valores suficientemente grandes para os ganhos principais do operador de malha aberta $Q(j\omega)$ assegura que a saída $y(j\omega)$ "segue" a referência $r(j\omega)$ independentemente da natureza dos autovalores de $Q(j\omega)$.

III.5. COMUTATIVIDADE APROXIMADA E ALGORITMO DE ALINHAMENTO

III.5.1. Introdução

A análise da seção anterior mostrou como o comportamento de um sistema em malha fechada pode ser discutido em termos dos

lugares e direções característicos da matriz de transferência de malha aberta. Desta forma, podemos obter um conjunto de especificações para um sistema em malha aberta, a partir de um conjunto prévio de requisitos para o sistema em malha fechada. A partir disto podemos elaborar o seguinte roteiro simplificado para o projeto de um controlador $K(s)$ para um dado processo $G(s)$:

1. Estabelecer um conjunto de especificações de desempenho para o sistema (malha fechada).
2. Converter estas especificações para as equivalentes em malha aberta.
3. Projetar o controlador $K(s)$ de tal forma que $Q(s) = G(s) \cdot K(s)$.

A seqüência de projeto acima não é tão simples quanto parece, uma vez que em geral não sabemos como os autovalores (autovetores) do produto $Q(s) = G(s) \cdot K(s)$ estão relacionados aos autovalores (autovetores) das matrizes $G(s)$ e $K(s)$. Existe, entretanto, uma exceção para esta situação, que ocorre quando as matrizes em questão comutam, ou seja, quando:

$$G(s) \cdot K(s) = K(s) \cdot G(s) \quad (30)$$

Isto acontece se e somente se as matrizes $G(s)$ e $K(s)$ tiverem o mesmo conjunto de autovetores. Em tal situação, os autovalores do produto $G(s) \cdot K(s)$ serão os produtos dos autovalores de $G(s)$ pelos de $K(s)$, de tal forma que dois autovalores só serão multiplicados entre si se eles estiverem associados ao mesmo autovetor.

Conforme já discutido, as funções características de uma matriz $G(s)$ não são, em geral, funções racionais de "s". Daí, normalmente não ser possível a construção de controladores realizáveis $K(s)$ que comutem com $G(s)$ em uma frequência "s" qualquer. Além disso, mesmo quando possível, tais controladores são desnecessariamente complicados. Para superar estas dificuldades, investiguemos a possibilidade de usar controladores que sejam "aproximadamente comutativos" com o processo para determinados valores de frequência.

Para tanto, suponha que a matriz controladora $K(s)$ seja da forma:

$$K(s) = A \cdot \Lambda_k(s) \cdot B \quad (31)$$

onde "A" e "B" são matrizes reais e $\Lambda_k(s)$ é uma matriz diagonal racional. Expandindo $K(s)$ em forma diádica, teremos:

$$K(s) = \sum_{j=1}^m k_j(s) \cdot a_j \cdot b_j^t$$

onde:

$$A = [a_1 : a_2 : \dots : a_m] \quad e \quad B = \begin{bmatrix} b_1^t \\ \vdots \\ b_m^t \end{bmatrix}$$

De forma que:

$$\begin{aligned} Q(s) = G(s) \cdot K(s) &= \left\{ \sum_{i=1}^m g_i(s) \cdot w_i(s) \cdot v_i^t(s) \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^m k_j(s) \cdot a_j \cdot b_j^t \right\} = \\ &= \sum_{i,j=1}^m g_i(s) \cdot k_j(s) \cdot \{v_i^t(s) \cdot a_j\} \cdot \{w_i(s) \cdot b_j^t\} \quad (32) \end{aligned}$$

Agora suponha que para algum valor de frequência $s = s_e$, os vetores a_i e b_i^t sejam aproximações razoavelmente boas do autovetor $w_i(s_e)$

e do autovetor recíproco $v_i^t(s_e)$ respectivamente, ou seja:

$$a_i \cong w_i(s_e)$$

para $i = 1, \dots, m$

$$b_i^t \cong v_i^t(s_e)$$

Veja agora o que acontece quando aplicamos $Q(s_e)$ sobre $w_i(s_e)$:

$$\begin{aligned} Q(s_e) \cdot w_i(s_e) &= \sum_{k,j=1}^m g_k(s_e) \cdot k_j(s_e) \cdot \{v_k^t(s_e) \cdot a_j\} \cdot \{w_k(s_e) \cdot b_j^t\} \cdot w_i(s_e) \\ &\cong g_i(s_e) \cdot k_i(s_e) \cdot w_i(s_e) \end{aligned} \quad (33)$$

Observe que

$$v_j^t(s_e) \cdot a_i \cong \delta_{ij} \quad e \quad b_j^t \cdot w_i(s_e) \cong \delta_{ij}$$

Se os vetores complexos $w_i(s)$ e $v_i^t(s)$ forem tais que:

$$w_i(s) \cong a_i$$

$$v_i^t(s) \cong b_i$$

para algum $s = s_e$, então adicionalmente tem-se:

- (i) Os conjuntos de autovalores e de autovetores recíprocos do sistema compensado serão aproximadamente iguais aos conjuntos de vetores reais $\{a_i, i = 1, \dots, m\}$ e $\{b_i, i = 1, \dots, m\}$.
- (ii) Os autovalores da matriz $G(s_e) \cdot K(s_e)$ (sistema compensado) serão dados aproximadamente por $g_i(s_e) \cdot k_i(s_e)$ para $i = 1, \dots, m$.

O método desenvolvido para a manipulação dos lugares ca
 racterísticos da matriz de transferência de um processo $G(s)$ será
 baseado na introdução de controladores $K(s)$ chamados apropriada
 mente de "controladores aproximadamente comutativos". A estrutu
 ra de tais controladores, como já antecipado, é:

$$K(s) = A \cdot \Lambda_k(s) \cdot B \quad (34)$$

onde as matrizes "A" e "B" são reais e escolhidas de modo que a
 matriz $K(s)$ comute aproximadamente com $G(s)$ em alguma frequência
 previamente escolhida. Na próxima subseção veremos como escolher
 as matrizes "A" e "B" com tais propriedades. A matriz diagonal
 $\Lambda_k(s) = \text{diag}\{k_i(s), i = 1, \dots, m\}$ deve ser tal que:

$$q_i(s) \approx g_i(s) \cdot k_i(s) \quad \text{para } i = 1, \dots, m \quad (35)$$

para $s = s_e$.

A qualidade dos resultados fornecidos por este método
 dependerá do grau de alinhamento entre as direções característi
 cas e os vetores canônicos. Além disso, o intervalo de frequências
 sobre o qual o "ajuste" dos autovalores será válido, dependerá da
 taxa de variação das direções características. Em geral, pode-se
 esperar que o controlador aproximadamente comutativo dê bons res
 ultados em algum "entorno" da frequência "s" escolhida. Aconsel
 ha-se evitar a aplicação do controlador aproximadamente comutativ
 o nas proximidades dos pontos de ramificações, uma vez que aí os
 autovetores se apresentam bastante distorcidos.

III.5.2. Um procedimento de alinhamento para a substituição de bases vetoriais complexas por bases vetoriais reais

Suponha que a decomposição espectral de $G(s)$ seja dada por:

$$G(s) = W(s) \cdot \Lambda_g(s) \cdot V(s) \quad (36)$$

onde

$$W(s) = [w_1(s) : w_2(s) : \dots : w_m(s)] ; \quad V(s) = \begin{bmatrix} v_1^t(s) \\ v_2^t(s) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m^t(s) \end{bmatrix}$$

e $W(s) = V^{-1}(s)$. Sem perda de generalidade pode-se considerar que os vetores $w_i(s)$ estejam normalizados, isto é: $\|w_i\| = 1, i = 1, \dots, m$.

Se $x_i(s)$ é um vetor qualquer de comprimento unitário, então $x_i(s)$ será exatamente equivalente a $w_i(s)$ se e somente se:

$$V(s) \cdot x_i(s) = e_i \quad (37)$$

Observe que a medida que os vetores $x_i(s)$ e $w_i(s)$ vão se desalinhando, o i -ésimo componente de $V(s) \cdot x_i(s)$ vai diminuindo em relação aos outros, que agora vão se tornando diferentes de zero. Desta forma, pode-se tomar a relação entre a magnitude do i -ésimo componente do vetor $V(s) \cdot x_i(s)$ e as magnitudes de todas as outras componentes como uma medida do grau de alinhamento de um dado ve

tor x_i com o vetor $w_i(s)$ desejado. Isto nos leva a tomar como uma medida do grau de alinhamento entre os vetores " a_i " e " w_i " o quociente ϕ_i dado por:

$$\phi_i = \frac{|\langle v_i, a_i \rangle|^2}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\langle v_j, a_i \rangle|^2} \quad (38)$$

onde $\{v_i^t : i = 1, \dots, m\}$ é o conjunto de vetores duais de $\{w_i : i = 1, \dots, m\}$.

Observações:

- (i) Os argumentos dos vetores $w_i(s)$ e $v_i^t(s)$ estão sendo omitidos para não sobrecarregar a notação.
- (ii) Uma vez que todos os vetores duais $\{v_i^t : i = 1, \dots, m\}$ tomam parte na expressão (38), então maximizar ϕ_i significa não só alinhar a_i com w_i , mas ortogonalizar tanto quanto possível o vetor a_i com os vetores w_j , $j \neq i$.
- (iii) Os vetores $\{a_i : i = 1, \dots, m\}$ que maximizam respectivamente as funções $\phi_i : i = 1, \dots, m$ formam uma base vetorial real que "mais se aproxima" da base vetorial complexa $\{w_1, \dots, w_m\}$.

Agora será mostrado como escolher um vetor real " a_i " que maximize o quociente ϕ_i dado pela expressão (38).

Sabemos que:

$$|\langle v_j, a_i \rangle|^2 = \langle v_j, a_i \rangle \cdot \overline{\langle v_j, a_i \rangle} =$$

$$\begin{aligned}
&= (v_j^t \cdot a_i) \cdot (v_j^* \cdot a_i) = (a_i^t \cdot v_j) \cdot (v_j^* \cdot a_i) \\
&= a_i^t \cdot v_j \cdot v_j^* \cdot a_i
\end{aligned} \tag{39}$$

Separando as partes real e imaginária de " v_j ", tem-se:

$$\begin{aligned}
v_j &= \alpha_j + j \cdot \beta_j \\
v_j^* &= \alpha_j^t - j \cdot \beta_j^t
\end{aligned} \tag{40}$$

Substituindo (40) em (39), vem:

$$\begin{aligned}
| \langle v_j, a_i \rangle |^2 &= a_i^t \cdot (\alpha_j + j \beta_j) \cdot (\alpha_j^t - j \beta_j^t) \cdot a_i = \\
&= (a_i^t \cdot \alpha_j)^2 + (a_i^t \cdot \beta_j)^2 = a_i^t \cdot (\alpha_j \cdot \alpha_j^t + \beta_j \cdot \beta_j^t) \cdot a_i
\end{aligned} \tag{41}$$

fazendo

$$C_i = \alpha_i \cdot \alpha_i^t + \beta_i \cdot \beta_i^t \tag{42}$$

$$D_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m C_j \tag{43}$$

e a função ϕ_i fica:

$$\phi_i = \frac{a_i^t \cdot C_i \cdot a_i}{a_i^t \cdot D_i \cdot a_i} \tag{44}$$

O problema agora é encontrar um vetor real " a_i " que maximize a função ϕ_i . Para tanto, derivemos a função ϕ_i em relação a " a_i " e igualemos o resultado a zero:

$$\frac{d\phi_i}{da_i} = \frac{2 \cdot C_i \cdot a_i \cdot (a_i^t \cdot D_i \cdot a_i) - 2 \cdot D_i \cdot a_i \cdot (a_i^t \cdot C_i \cdot a_i)}{(a_i^t \cdot D_i \cdot a_i)^2} = 0$$

de onde:

$$C_i \cdot a_i \cdot (a_i^t \cdot D_i \cdot a_i) = D_i \cdot a_i \cdot (a_i^t \cdot C_i \cdot a_i)$$

$$C_i \cdot a_i = \frac{a_i^t \cdot C_i \cdot a_i}{a_i^t \cdot D_i \cdot a_i} \cdot D_i \cdot a_i$$

$$C_i \cdot a_i = \phi_i \cdot D_i \cdot a_i \tag{45}$$

assumindo que D_i seja não singular, temos:

$$D_i^{-1} \cdot C_i \cdot a_i = \phi_i \cdot a_i \tag{46}$$

e o valor de $\phi_{i_{\text{máx}}}$ será:

$$\phi_{i_{\text{máx}}} = \lambda_{\text{max}} [D_i^{-1} \cdot C_i] \tag{47}$$

Assim, o vetor real " a_i " que maximiza " ϕ_i " é exatamente o autovetor de $D_i^{-1} \cdot C_i$ associado ao autovalor máximo de $D_i^{-1} \cdot C_i$. Os vetores " a_i " assim gerados serão sempre reais, uma vez que as matrizes C_i e D_i são reais e simétricas. Ao passarmos da expressão (45) para a (46) assumimos que D_i fosse não-singular. Será mostrado adiante como proceder quando D_i for singular. Será também apresentado um algoritmo para a obtenção da base vetorial real "A" que substitua uma base complexa $G(s_e)$

O problema da determinação de vetores reais " b_i " que substituam os vetores recíprocos " v_i " é exatamente o problema dual deste que acabamos de examinar. Observe que o vetor " b_i " procurado deve ser tal que faça com que $b_i^t \cdot W$ seja tão próximo quanto possível do vetor canônico " e_i^t "; desta forma, uma simples transposição será suficiente para que o problema se apresente exatamente como no caso anterior.

III.5.3. Um procedimento de alinhamento multi-freqüências

O procedimento de alinhamento que apresentamos na subseção anterior baseia-se em um único valor de freqüência, $s = j\omega_0$. Deve-se esperar portanto que a base vetorial real "A" gerada, substitua eficientemente a base vetorial complexa apenas em algum intervalo de freqüências contendo " ω_0 ". Este fato pode se agravar bastante se, por exemplo, a taxa de variação das bases vetoriais complexas for alta nas imediações de " ω_0 ".

Em tais circunstâncias, como já dito, deve-se evitar a escolha de freqüências " ω_0 " próximas às críticas (freqüências correspondentes a pontos de ramificações). Por outro lado, ao evitar-se tais freqüências, pode-se estar selecionando alguma freqüência " ω " muito acima ou muito abaixo da freqüência " ω_0 " originalmente escolhida. Assim, por exemplo, se o algoritmo de alinhamento fosse utilizado para $\omega_1 \ll \omega_0$ ou para $\omega_2 \gg \omega_0$, os resultados poderiam deixar muito a desejar para $\omega \gg \omega_0$ e/ou para $\omega \ll \omega_0$, respectivamente.

Para superar esta dificuldade, o procedimento de alinhamento será estendido, de modo que ele produza uma base vetorial real que seja uma aproximação tão boa quanto possível da base vetorial complexa em questão, para "t" valores distintos de frequências. Vejamos como conseguir isto:

Se " a_i " fosse exatamente igual ao i -ésimo autovetor " $w_i(j\omega)$ " nas frequências $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t$, então cada um dos vetores $V(j\omega_k) \cdot a_i$ para $k = 1, \dots, t$ seria igual ao i -ésimo vetor canônico e_i e portanto o vetor E_i definido por:

$$E_i = \sum_{k=1}^t p_k \cdot V(j\omega_k) \cdot a_i$$

seria paralelo a " e_i " (p_k são constantes reais de ponderação). Dado que as componentes de E_i são somas geométricas de quantidades complexas da forma $p_k \cdot v_z^t(j\omega_k) \cdot a_i$, então a recíproca não é verdadeira, ou seja, se E_i é paralelo a " e_i ", então não podemos afirmar que " a_i " seja igual a $w_i(j\omega)$ para $\omega = \omega_k$, $k = 1, \dots, t$. Por este motivo consideraremos as somas dos quadrados dos módulos dos termos $p_k \cdot v_z^t(j\omega_k) \cdot a_i$ e definiremos E_i como sendo o vetor que contém estas somas como seus elementos, ou seja:

$$E_i = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^t |p_k \cdot v_1^t(j\omega_k) \cdot a_i|^2 \\ \sum_{k=1}^t |p_k \cdot v_2^t(j\omega_k) \cdot a_i|^2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^t |p_k \cdot v_m^t(j\omega_k) \cdot a_i|^2 \end{bmatrix}$$

A proximidade de " ε_i " em relação a " e_i " dá uma medida do grau de alinhamento entre os vetores " a_i " e " $w_i(j\omega)$ " nas vizinhanças das frequências ω_k , $k = 1, \dots, t$.

Para encontrar o vetor " a_i " que mais se ajusta ao vetor $w_i(j\omega)$ nas frequências ω_k , com $k = 1, \dots, t$, deve-se resolver o seguinte problema de maximização:

$$\text{Max}_{a_i} \tilde{\phi}_i = \frac{\sum_{k=1}^t p_k^2 \cdot |\langle v_i(j\omega_k), a_i \rangle|^2}{\sum_{k=1}^t p_k^2 \cdot \sum_{\substack{z=1 \\ z \neq i}}^m |\langle v_z(j\omega_k), a_i \rangle|^2} \quad (48)$$

Fazendo:

$$v_i(j\omega_k) = \alpha_i(j\omega_k) + j \beta_i(j\omega_k)$$

$$C_i(j\omega_k) = \alpha_i(j\omega_k) \cdot \alpha_i^t(j\omega_k) + \beta_i(j\omega_k) \cdot \beta_i^t(j\omega_k)$$

$$D_i(j\omega_k) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^m C_q(j\omega_k)$$

daí

$$\tilde{\phi}_i = \frac{\sum_{k=1}^t p_k^2 \cdot a_i^t \cdot C_i(j\omega_k) \cdot a_i}{\sum_{k=1}^t p_k^2 \cdot a_i^t \cdot D_i(j\omega_k) \cdot a_i}$$

ou ainda

$$\tilde{\phi}_i = \frac{a_i^t \cdot \tilde{C}_i \cdot a_i}{a_i^t \cdot \tilde{D}_i \cdot a_i} \quad (49)$$

onde:

$$\tilde{C}_i = \sum_{k=1}^t p_k^2 \cdot C_i(j\omega_k)$$

$$\tilde{D}_i = \sum_{k=1}^t p_k^2 \cdot D_i(j\omega_k)$$

As matrizes C_i e D_i agora aparecem como funções de " ω ", que de fato são.

A função objetivo $\tilde{\phi}_i$ tem a mesma forma que ϕ_i e portanto a solução ótima " a_i " pode ser obtida diretamente da eq. (46). desde que \tilde{C}_i e \tilde{D}_i sejam respectivamente substituídas por C_i e D_i .

O procedimento de alinhamento estendido permite projetar controladores para atuarem sobre um intervalo de frequências maior. É claro que os controladores projetados segundo o processo de alinhamento multi-frequência, embora apresentando um melhor desempenho global, tenderão a ser menos eficientes quando considerados localmente, ou seja, no entorno de alguma frequência específica. Pode-se dizer que existe um compromisso entre o desempenho global e local. A ponderação dos intervalos de frequências para os quais desejamos ou necessitamos de um alinhamento mais acurado será feita mediante a escolha apropriada dos fatores de ponderação " p_k ". No caso de ajustamento de autovetores de sistemas próprios, a escolha de " p_k " deve ser feita com cuidado, uma vez que se $p_k = 1$, para $k = 1, \dots, t$, então as baixas frequências tenderão a dominar os cálculos. Os valores de p_k devem portanto ser escolhidos de modo a compensar as atenuações dos sistemas para as altas frequências.

III.5.4. Um método alternativo para o alinhamento

O problema de alinhamento, como mostrado nas duas últimas subseções, pode ser reduzido a um problema de autovalores/ autovetores generalizado. O método proposto para a maximização das funções $\tilde{\phi}_i$ e ϕ_i depende da não singularidade de D_i e de \tilde{D}_i respectivamente, e isto pode trazer algumas dificuldades. Por esta razão será apresentado um método alternativo de alinhamento baseado na técnica dos mínimos quadrados.

Vimos que se $a_i = w_i$, então:

$$V(j\omega) \cdot a_i = e_i$$

Observe contudo que $V(j\omega)$ é uma matriz complexa, e portanto $V(j\omega) \cdot a_i$ será um múltiplo complexo de e_i mais um erro ϵ_i , ou seja:

$$V \cdot a_i = \exp(j\delta_i) \cdot e_i + \epsilon_i \quad (50)$$

onde δ_i é um ângulo. Novamente, para evitar uma notação muito carregada, os argumentos $(j\omega)$ serão omitidos. Na eq. (50) tanto a_i , quando δ_i são variáveis independentes, e devem ser escolhidas de modo a minimizar o erro ϵ_i ou alguma função conveniente deste. Um índice de performance adequado pode ser, por exemplo, a norma de ϵ_i , ou seja:

$$\psi_i = \|\epsilon_i\| = \epsilon_i^* \cdot \epsilon_i \quad (51)$$

Desta forma, de (50) vem que:

$$\epsilon_i = V \cdot a_i - \exp(j\delta_i) \cdot e_i \quad (52)$$

e com (52) em (51), temos:

$$\psi_i = (a_i^t \cdot v^* - \exp(-j\delta_i) \cdot e_i^t) \cdot (v \cdot a_i - \exp(j\delta_i) \cdot e_i) =$$

$$\psi_i = a_i^t \cdot v^* \cdot v \cdot a_i - \exp(j\delta_i) \cdot e_i^t \cdot v \cdot a_i - \exp(j\delta_i) \cdot a_i^t \cdot v^* \cdot e_i + 1$$

$$\psi_i = a_i^t \cdot v^* \cdot v \cdot a_i - \exp(-j\delta_i) \cdot v_i^t \cdot a_i - \exp(j\delta_i) \cdot a_i^t \cdot \bar{v}_i + 1 \quad (53)$$

Derivando-se ψ_i em relação a " a_i " e " δ_i ", teremos seus pontos singulares:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial a_i} = [v^* \cdot v + (v^* \cdot v)^t] \cdot a_i - \exp(-j\delta_i) \cdot v_i - \exp(j\delta_i) \cdot \bar{v}_i = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \delta_i} = j \cdot \exp(-j\delta_i) \cdot v_i^t \cdot a_i - j \cdot \exp(j\delta_i) \cdot a_i^t \cdot \bar{v}_i = 0 \quad (55)$$

Reutilizando a notação empregada em (40), (42) e (43),

tem-se:

$$v^* \cdot v = (v^* \cdot v)^t = [\bar{v}_1 \ : \ \bar{v}_2 \ : \ \dots \ : \ \bar{v}_m] \cdot \begin{bmatrix} v_1^t \\ \dots \\ v_2^t \\ \dots \\ \vdots \\ v_m^t \end{bmatrix} =$$

$$= \bar{v}_1 \cdot v_1^t + \bar{v}_2 \cdot v_2^t + \dots + \bar{v}_m \cdot v_m^t =$$

$$= \alpha_1 \cdot \alpha_1^t + \beta_1 \cdot \beta_1^t + \alpha_2 \cdot \alpha_2^t + \beta_2 \cdot \beta_2^t + \dots + \alpha_m \cdot \alpha_m^t + \beta_m \cdot \beta_m^t =$$

$$= \alpha_i \cdot \alpha_i^t + \beta_i \cdot \beta_i^t + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m (\alpha_j \cdot \alpha_j^t + \beta_j \cdot \beta_j^t) = C_i + D_i$$

de forma que:

$$[V^* \cdot V + (V^* \cdot V)^t] = 2 \cdot (C_i + D_i) = D \quad (56)$$

com (56) em (54) vem:

$$D \cdot a_i - \exp(-j\delta_i) \cdot v_i - \exp(j\delta_i) \cdot \bar{v}_i = 0$$

daí

$$a_i = D^{-1} \cdot [\exp(-j\delta_i) \cdot v_i + \exp(j\delta_i) \cdot \bar{v}_i] \quad (57)$$

e com (57) em (55)

$$j \cdot \exp(-j\delta_i) \cdot v_i^t \cdot D^{-1} (\exp(-j\delta_i) \cdot v_i + \exp(j\delta_i) \cdot \bar{v}_i) - \\ - j \cdot \exp(j\delta_i) \cdot (\exp(-j\delta_i) \cdot v_i^t + \exp(j\delta_i) \cdot v_i^*) \cdot D^{-1} \cdot \bar{v}_i = 0$$

$$\exp(-2j\delta_i) \cdot v_i^t \cdot D^{-1} \cdot v_i + v_i^t \cdot D^{-1} \cdot \bar{v}_i - v_i^t \cdot D^{-1} \cdot \bar{v}_i - \\ \exp(2j\delta_i) \cdot v_i^* \cdot D^{-1} \cdot \bar{v}_i = 0$$

$$\exp(-2j\delta_i) \cdot v_i^t \cdot D^{-1} \cdot v_i - \exp(2j\delta_i) \cdot v_i^* \cdot D^{-1} \cdot \bar{v}_i = 0 \quad (58)$$

e fazendo $v_i^t \cdot D^{-1} \cdot v_i = \rho_i \cdot \exp(j\gamma_i)$ em (58), tem-se:

$$\rho_i \cdot \exp(-j(2\delta_i - \gamma_i)) - \rho_i \cdot \exp(+j(2\delta_i - \gamma_i)) = 0$$

$$\exp(j(2\delta_i - \gamma_i)) - \exp(-j(2\delta_i - \gamma_i)) = 0$$

e lembrando que

$$\text{sen}\theta = \frac{\exp(j\theta) - \exp(-j\theta)}{2.j}$$

então:

$$\exp(j(2.\delta_i - \gamma_i)) - \exp(-j(2.\delta_i - \gamma_i)) = 2.j.\text{sen}(2.\delta_i - \gamma_i) = 0$$

e o valor ótimo é dado por:

$$\delta_i = \frac{\gamma_i}{2} \quad (59)$$

Substituindo (59) de volta em ((57)), teremos finalmente o vetor "a_i". Isto encerra o processo de alinhamento uma vez que as soluções "a_i" minimizam o índice de performance ψ_i e são dadas por:

$$A = [a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ \dots \ ; \ a_m] = D^{-1} \cdot [V^t \cdot \exp(-j \cdot 1/2 \cdot \gamma) + V^* \cdot \exp(j \cdot 1/2 \cdot \gamma)] \quad (60)$$

onde

$\gamma = \text{diag}[\gamma_i]$ γ_i é o argumento dos elementos diagonais da matriz $V \cdot D^{-1} \cdot V^t$, conforme (58).

Como na subseção III.5.2, este método também pode resolver o problema dual de encontrar uma base vetorial real B que mais se aproxima de V no sentido de minimizar a "matriz erro" E em:

$$B \cdot W = \exp(j \cdot \text{diag}\{\delta_i\}) + E \quad (61)$$

E como podemos ver, uma simples transposição nos devolve um problema exatamente análogo àquele que acabamos de analisar.

III.5.5. Algoritmo de Alinhamento

Para encerrar esta seção serão apresentadas as linhas gerais de um algoritmo de alinhamento capaz de gerar uma base vetorial real "A" a partir de uma base vetorial complexa $W(s)$, com a seguinte propriedade:

$$A \cong W(s) \quad \text{para } s = j\omega$$

Vale a pena ressaltar que deste algoritmo dependerá todo o método de projeto a ser apresentado na próxima subseção.

ALGORITMO 1:

- OBJETIVO : Obter uma base vetorial real "A" que substitua uma base vetorial complexa " $W(j\omega)$ ".
- ENTRADAS :
 - A base vetorial complexa " $W(j\omega)$ ".
 - As frequências de operações $\omega = \omega_k$, $k=1, \dots, t$.
 - Os fatores de ponderação p_k , $k=1, \dots, t$.
- SAÍDA : A base vetorial real "A" tal que $A \cong W(j\omega)$.

PASSO 1: Calcular $W(j\omega_k)$, para $k=1, \dots, t$.

PASSO 2: Calcular $V(j\omega_k) = W^{-1}(j\omega_k)$ para $k=1, \dots, t$ e escrever:

$$V(j\omega_k) = \begin{bmatrix} v_1^t(j\omega_k) \\ \dots \\ v_2^t(j\omega_k) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ v_m^t(j\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^t(j\omega_k) \\ \dots \\ \alpha_2^t(j\omega_k) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \alpha_m^t(j\omega_k) \end{bmatrix} + j \cdot \begin{bmatrix} \beta_1^t(j\omega_k) \\ \dots \\ \beta_2^t(j\omega_k) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ \beta_m^t(j\omega_k) \end{bmatrix}$$

para $k = 1, \dots, t$.

PASSO 3: IF $t=1$ THEN GOTO 4
ELSE GOTO 9

PASSO 4: Faça:

$$C_i = \alpha_i^t \cdot \alpha_i^t + \beta_i^t \cdot \beta_i^t \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

$$D_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m C_j \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

PASSO 5: !Resolução dos problemas:

$$\max_{a_i} \phi_i = \frac{a_i^t \cdot C_i \cdot a_i}{a_i^t \cdot D_i \cdot a_i} \quad \text{para } i = 1, \dots, m ;$$

Calcule $\det[D_i]$

IF $\det[D_i] \neq 0$ THEN GOTO 7
ELSE GOTO 6

PASSO 6: IF $t=1$ THEN GOTO 11

ELSE altere convenientemente " p_k "

GOTO 9

PASSO 7: Obter $D_i^{-1} \cdot C_i$ para $i = 1, \dots, m$

Calcule $\lambda_{\max} [D_i^{-1} \cdot C_i]$ para $i = 1, \dots, m$

Obter o autovetor " z_i " de $(D_i^{-1} \cdot C_i)$ associado ao autovalor $\lambda_{\max} [D_i^{-1} \cdot C_i]$ para $i = 1, \dots, m$.

PASSO 8: Faça $a_i = z_i$ para $i = 1, \dots, m$

e

$$A = [a_1 \ : \ a_2 \ : \ \dots \ : \ a_m]$$

GOTO 17

PASSO 9: Para $k = 1, \dots, t$ FAÇA:

$$C_i(j\omega_k) = \alpha_i(j\omega_k) \cdot \alpha_i^t(j\omega_k) + \beta_i(j\omega_k) \cdot \beta_i^t(j\omega_k) \quad ,$$

para $i = 1, \dots, m$.

$$D_i(j\omega_k) = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i}}^m C_q(j\omega_k)$$

$$\tilde{C}_i = \sum_{k=1}^t p_k^2 \cdot C_i(j\omega_k)$$

PASSO 15: Calcule a expressão:

$$V^t \cdot \exp(-j \gamma/2) + V^* \cdot \exp(j \gamma/2)$$

PASSO 16: A base real "A" é dada por:

$$A = [a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ \dots \ ; \ a_m] = D^{-1} \cdot [V^t \cdot \exp(-j \gamma/2) + V^* \cdot \exp(j \gamma/2)]$$

PASSO 17: FIM ;

III.6. UM MÉTODO DE PROJETO BASEADO NOS LUGARES CARACTERÍSTICOS

III.6.1. Introdução

A análise apresentada até aqui permite estudar a estabilidade e a performance de um sistema linear multivariável com realimentação através dos lugares e direções características da matriz de transferência de malha aberta do sistema, dada por $Q(s) = G(s) \cdot K(s)$. Dando continuidade a este tipo de abordagem, vamos apresentar uma técnica de projeto baseada na escolha da matriz controladora $K(s)$, que uma vez inserida no sistema promova uma alteração nos lugares e direções características do sistema de modo que eles passem a apresentar um determinado conjunto de propriedades.

Antes de entrar em detalhes do método, vamos sumarizar

brevemente as propriedades que os lugares e direções características de $G(s) \cdot K(s)$ devem apresentar.

- (i) Os lugares característicos devem satisfazer o critério de estabilidade de Nyquist.
- (ii) Os ganhos de todos os lugares característicos devem ser convenientemente grandes para baixa interação e para que o sinal de saída siga adequadamente o sinal de referência (tracking), em qualquer frequência.
- (iii) Em altas frequências os ganhos dos lugares característicos não podem, em geral, ser grandes, uma vez que isto levaria à violação do critério de estabilidade de Nyquist.
- (iv) Para reduzir a interação em altas frequências não se pode aumentar demasiadamente o ganho, deve-se ao invés disso tentar o alinhamento das direções características de $Q(s)$ com o conjunto de vetores canônicos.

Do exposto até aqui, vê-se que a idéia central do método dos lugares característicos deve basear-se em ferramentas que possibilitem a manipulação:

- (i) dos lugares característicos de $Q(s)$; e
- (ii) das direções características de $Q(s)$.

A seguir, será mostrado como processar tais manipulações.

III.6.2. Procedimento para a manipulação dos lugares característicos

A essência do procedimento para a manipulação dos lugares característicos está, conforme veremos, no algoritmo de alinhamento que apresentamos na subseção III.5.5. Desta forma, os resultados obtidos aqui dependerão enormemente da "qualidade" das matrizes geradas por aquele algoritmo.

ALGORITMO 2:

- OBJETIVO : Manipular os lugares característicos de $Q(s)$.
- ENTRADAS : -Matriz $G(s)$
-Conjunto de especificações a serem satisfeitas pelos lugares característicos de $Q(s)$.
- SAÍDA : Controlador " K_a ".

PASSO 1: Selecionar a(s) freqüência(s) de operação(ões)

$$\omega = \omega_k, \text{ para } k = 1, \dots, t$$

PASSO 2: Obter a expansão diádica de $G(j\omega)$ nas freqüências selecionadas:

$$G(j\omega_k) = W(j\omega_k) \cdot \Lambda_g(\omega_k) \cdot V(j\omega_k)$$

PASSO 3: Utilizando o algoritmo "1" encontrar uma base real "A" tal que:

$$A \cong W(j\omega_k) \quad \text{para } k = 1, \dots, t$$

PASSO 4: Utilizando novamente o algoritmo "1" encontrar a base real "B" tal que:

$$B \cong V(j\omega_k)$$

PASSO 5: Especifique os elementos $k_i(j\omega)$ de tal forma que os lugares característicos $q_i(j\omega)$, dadas por:

$$q_i(j\omega) = g_i(j\omega) \cdot k_i(j\omega) \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

possuam as propriedades desejadas.

PASSO 6: O controlador procurado é dado por:

$$K_a = A \cdot \Lambda_k(s) \cdot B$$

onde

$$\Lambda_k(s) = \text{diag}[k_1(s), k_2(s), \dots, k_m(s)]$$

PASSO 7: FIM ;

III.6.3. Procedimento para a manipulação das direções características

Se fosse possível projetar um controlador $K_h(j\omega)$ tal que

$$K_h(j\omega) = G^{-1}(j\omega) \quad \text{para todo } \omega, \text{ então:}$$

- (i) Os vetores α_i^t e β_i^t de $G(j\omega)$, $K_h(j\omega)$ seriam nulas; e
- (ii) Todas as direções características de $G(j\omega) \cdot K_h(j\omega)$, se alinharam com os vetores canônicos.

É claro que em geral não podemos realizar um controlador com estas características, uma vez que além de requerer características excessivas de avanço de fase, ele requereria ganhos característicos arbitrariamente grandes em altas frequências. Felizmente, do ponto de vista prático é suficiente que $K_h(j\omega)$ seja aproximadamente igual a $G^{-1}(j\omega)$ apenas em algum intervalo contendo a frequência $\omega = \omega_k$ escolhida. Esta é a estratégia a ser adotada, ou seja, construiremos um controlador K_h independente de " ω " que seja aproximadamente igual ao controlador $G^{-1}(j\omega)$ na frequência de operação. Considerando-se que os vetores da "base" $G^{-1}(j\omega)$ são funções contínuas de " ω ", então é razoável admitir que a base constante " K_h " escolhida permaneça aproximadamente igual à base $G^{-1}(j\omega)$ em uma vizinhança de " ω_k ".

Se for exigido que K_h seja real, o controlador poderá ser obtido novamente pelo algoritmo de alinhamento, tomando-se as seguintes precauções:

- (i) Os vetores α_i^t e β_i^t serão agora as partes reais e imaginárias da i -ésima linha da matriz $G(s)$ na frequência " s " escolhida.
- (ii) Cada um dos vetores colunas que compõem a base real K_h , devem ser precedidos por um sinal "+" ou "-" adequadamente escolhidos, a fim de obrigar as assínto

tas dos lugares das raízes do sistema a se posicionarem satisfatoriamente, e de modo a garantir que os lugares característicos satisfaçam o critério de estabilidade de Nyquist.

No caso do controlador aproximadamente comutativo, o ajuste de sinais para as colunas das "bases" "A" e "B" não foi necessário porque elas tendem a ser aproximadamente duais uma da outra, uma vez que elas são aproximações individuais das bases $W(j\omega)$ e $V(j\omega)$.

Desta forma, o algoritmo de alinhamento além de poder ser usado para o ajustamento dos ganhos característicos de $G(s)$, pode ser usado para a manipulação das direções características de $G(s)$. Vale dizer que em muitas situações práticas, o alinhamento em altas frequências das direções características de $G(s)$ com os vetores canônicos pode ser o único meio aceitável de se suprimir as interações em altas frequências.

III.6.4. Procedimento básico de projeto

A análise desenvolvida até aqui nos permite concluir que o controlador desejado a ser inserido no sistema deve atender uma série de especificações em todo o espectro de frequências. Mostraremos a seguir como proceder para que todas as especificações sejam levadas em consideração.

Consideramos inicialmente o caso em que as especificações de desempenho em malha fechada não forcem a adoção de controladores

"acurados" sobre uma faixa muito grande de frequências. Neste caso o projeto pode ser dividido em duas etapas distintas correspondendo a condições de altas e baixas frequências, respectivamente. Vejamos as características de comportamento do controlador em cada uma destas regiões de frequências.

(i) Comportamento do controlador em altas frequências:

Nestas frequências os ângulos entre as direções características do sistema compensado e os vetores canônicos devem ser reduzidos. Isto será conseguido mediante o projeto de um controlador real " K_h " que seja aproximadamente igual a $G^{-1}(j\omega)$ para alguma frequência ω_h apropriadamente alta.

(ii) Comportamento do controlador em baixas frequências:

Em baixas frequências os lugares característicos devem ser manipulados de tal forma que:

- (a) O critério de estabilidade de Nyquist seja satisfeito; e
- (b) Os ganhos dos lugares característicos sejam suficientes para assegurar um desempenho adequado.

Isto será conseguido projetando-se um controlador aproximadamente comutativo " K_b ", que efetue as manipulações desejadas sobre os lugares característicos de $Q(s)$.

Uma vez que o projeto do controlador foi dividido em duas partes, será necessário arranjar um meio de combinar os efeitos de

" K_b " e de " K_h ", de tal maneira que cada um deles opera em uma gama de freqüências própria. Em particular, será essencial assegurar que " K_h " não interfira nas características de estabilidade impostas via " K_b ", e que " K_b " por sua vez não aumente as interações em altas freqüências (então reduzidas via " K_h "). O desacoplamento em freqüência dos dois controladores pode ser conseguido de uma maneira bastante simples, fazendo-se, por exemplo, com que o controlador de baixas freqüências atue como um termo "integral". O controlador global será então um controlador proporcional mais integral (controlador PI), ou seja:

$$K(s) = \frac{\alpha}{s} \cdot K_b + K_h \quad (62)$$

onde a constante " α " é escolhida de modo que o comportamento de $K(s)$ seja adequado na região de transição das baixas para as altas freqüências. A presença do termo integral " $1/s$ " nos assegura que:

$$K(j\omega) \approx \frac{\alpha}{j\omega} \cdot K_b \quad \text{em baixas freqüências; e}$$

$$K(j\omega) \approx K_h \quad \text{em altas freqüências.}$$

Além disso, o erro em regime será nulo, uma vez que todos os lugares característicos terão ganhos tendendo ao infinito quando a freqüência " ω " tender a zero.

Na próxima subseção será considerado o caso em que o controlador necessita operar sobre uma região de freqüências maior, obrigando-nos a dispensar um tratamento mais cuidadoso para as freqüências intermediárias.

III.6.5. Procedimento extendido às frequências intermediárias

Se for necessário uma compensação dinâmica nas frequências intermediárias, então poderemos adicionar um novo fator controlador $K_m(s)$, de modo que a estrutura do controlador global resultante seja da forma:

$$K(s) = \frac{\alpha}{s} \cdot K_b + K_h \cdot K_m(s) \quad (63)$$

O fator $K_m(s)$ é um compensador de avanço de fase cujo objetivo é compensar os lugares característicos do sistema (já compensado em altas frequências) agora nas frequências intermediárias.

Para que isto seja conseguido, uma vez mais utilizaremos a técnica de comutatividade aproximada, ou seja, geraremos uma base vetorial real, através do algoritmo de alinhamento, que seja aproximadamente igual às direções características de $G(s)$ em alguma frequência intermediária adequadamente escolhida. As funções características de $K_m(s)$ deverão ser escolhidas de tal maneira que promovam os ajustes de avanço e/ou atraso de fase necessários nos ganhos e fases dos lugares característicos de $G(s) \cdot K_h$ na frequência intermediária em questão.

Para que seja evitado o efeito de sobreposição dos controladores K_h e $K_m(s)$ deveremos assegurar que:

$$K_m(j\omega) \cong I \quad \text{para} \quad \omega \geq \omega_h \quad (64)$$

Assim, o controlador global terá o seguinte comportamento:

$$K(s) \cong \begin{cases} \frac{\alpha}{s} \cdot K_b & \text{em baixas frequências} \\ K_h \cdot K_m(s) & \text{em frequências médias} \\ K_h & \text{em altas frequências} \end{cases}$$

Alternativamente, o controlador $K(s)$, dado em (63), poderia ser colocado na forma:

$$K(s) = K_h \cdot K_m(s) \cdot \left\{ \frac{\alpha}{s} \cdot K_b'' + I \right\} \quad (65)$$

onde:

$$K_b'' = K_m^{-1}(s) \cdot K_k^{-1} \cdot K_b \quad (66)$$

É útil lembrar que $K_m(s)$ tenderá a uma matriz constante em baixas frequências, onde K_b'' será computada, de sorte que K_b'' não sofrerá nenhuma variação dinâmica significativa.

Para o projeto de $K(s)$, segundo (65) devemos seguir as seguintes etapas:

- (i) Projete K_h como descrito anteriormente.
- (ii) Forme o processo compensado $G(s) \cdot K_h$ e projete um controlador aproximadamente comutativo $K_m(s)$ de modo a conseguir a compensação de avanço de fase necessária nas frequências intermediárias.
- (iii) Projete agora, para baixas frequências, um controlador aproximadamente comutativo K_b'' de modo que:

(a) O número de envoltimentos do ponto crítico pelos lugares característicos seja o necessário para assegurar a estabilidade (critério de Nyquist); e

(b) Haja um balanceamento dos ganhos característicos em baixas frequências.

(iv) Forme o controlador global:

$$K(s) = K_h \cdot K_m(s) \cdot \left\{ \frac{\alpha}{s} \cdot K_b'' + I \right\}$$

III.6.6. Conclusões

A técnica de projeto que acabamos de apresentar é uma generalização ao caso multivariável das técnicas clássicas de resposta em frequência (Bode e Nyquist) de sistemas lineares monovariáveis com realimentação, e visa:

- (i) A estabilização do sistema em malha fechada;
- (ii) A redução da interação;
- (iii) Uma melhoria do comportamento dinâmico do sistema em malha fechada.

A metodologia proposta é fundamentalmente baseada no "Algoritmo de Alinhamento", apresentado na subseção III.5.5, e desta forma os controladores resultantes serão formados por elementos bastante simples, permitindo que o controlador global seja facilmente realizável.

CAPÍTULO IV

EXEMPLO DE PROJETO

IV.1. INTRODUÇÃO

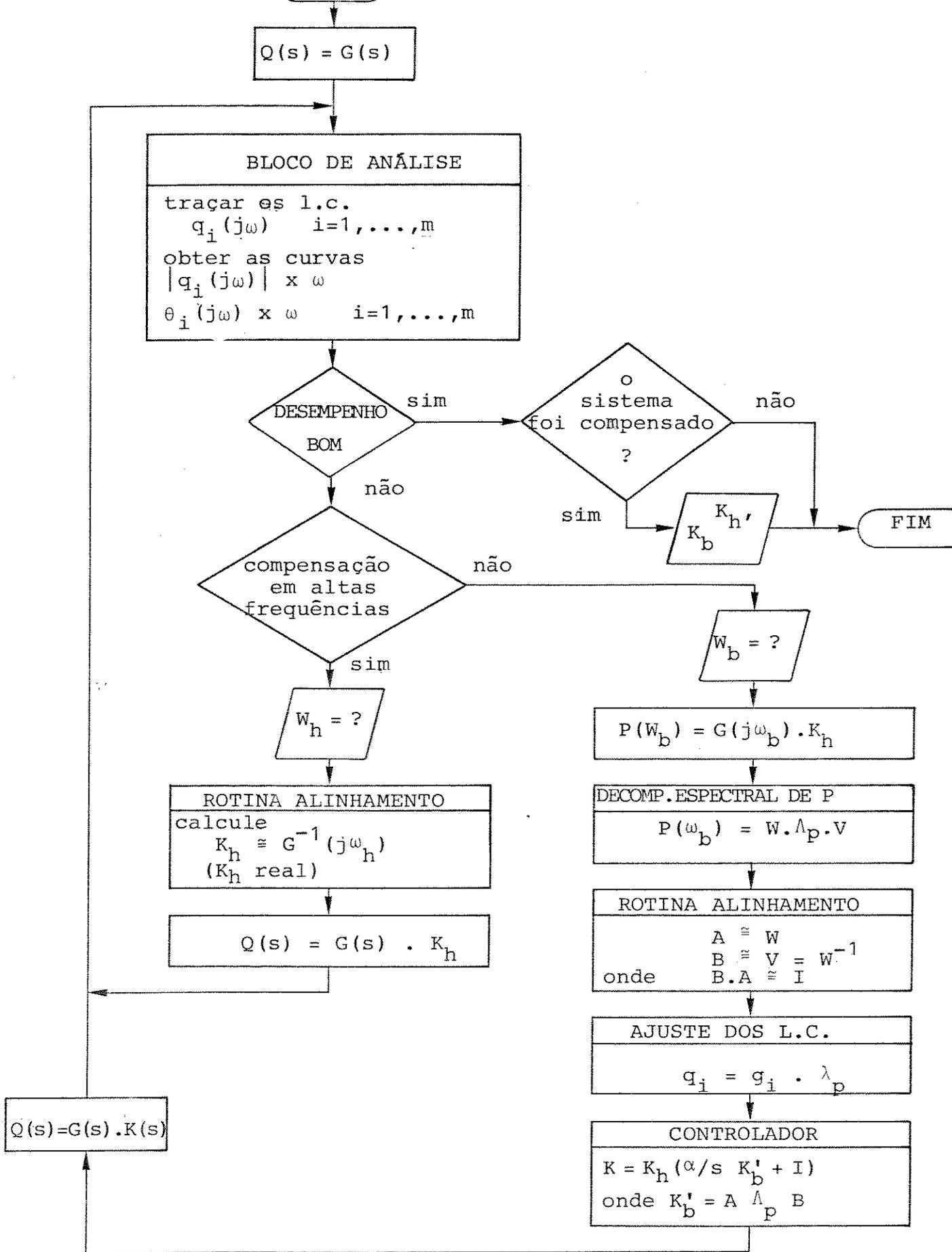
Neste capítulo, apresentamos a estrutura geral de um algoritmo para o projeto de controladores para sistemas lineares multivariáveis, segundo a abordagem discutida no capítulo anterior. A seguir, através de um exemplo clássico [16], ilustramos a técnica e validamos o algoritmo que implementamos.

IV.2. PROJETO AUXILIADO POR COMPUTADOR

A estrutura dada a seguir reflete as várias etapas de análise e decisão que fazem parte de uma sessão de projeto, para um sistema que não exige compensação nas frequências intermedias.

ALGORITMO:

OBJETIVO: Análise e projeto de controladores para sistemas multivariáveis no domínio da frequência.



ENTRADAS: - Matriz de transferência do processo
- Conjunto de especificação para o sistema em malha fechada

SAÍDA : Controlador $K(s)$

A implementação de um algoritmo desta natureza, de maneira interativa, pressupõe a existência de terminais com recursos gráficos, para que o projetista possa tomar decisões rápidas e seguras, com um esforço mínimo (Rosenbrock, [20]).

IV.3. UM EXEMPLO DE PROJETO

Considere o seguinte sistema (MacFarlane-Kouvaritakis, [16]):

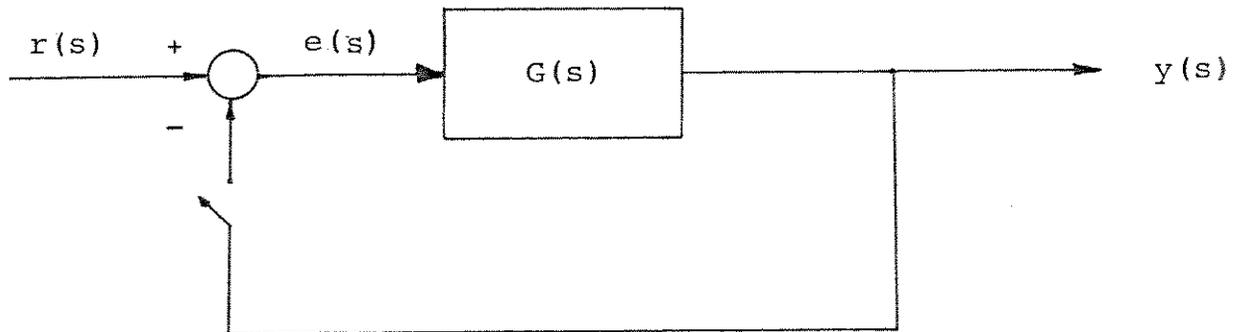


Figura 1 - Processo com realimentação unitária em malha aberta

onde:

$$G(s) = \frac{1}{p(s)} \cdot \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix}$$

com

$$p(s) = s^4 + 11,67 s^3 + 15,75 s^2 - 88,31 s + 5,514$$

$$g_{11}(s) = 29,2 s + 263,3$$

$$g_{21}(s) = -3,146 s^3 - 32,62 s^2 - 89,83 s - 31,81$$

$$g_{12}(s) = 5,679 s^3 + 42,67 s^2 - 68,84 s - 106,8$$

$$g_{22}(s) = 9,43 s + 15,15$$

Os polos do processo $G(s)$ são $\{0,06318 ; 1,991 ; -5,057 ; -8,666\}$.

Como existem dois polos alocados no semiplano direito, pelo critério (generalizado) de Nyquist, sabemos que o sistema só se rá estável em malha fechada se a somatória dos envoltimentos do ponto crítico pelos lugares característicos no sentido antihorário for dois.

A função característica de $G(s)$ é dada por:

$$\det[g \cdot I_2 - G(s)] = 0$$

ou

$$p(s) \cdot g^2 - (38,63 s + 278,45) \cdot g + 17,866(s^2 + 6,231 s + 6,0006) = 0$$

e os seus lugares característicos estão esboçados nas Figs. 2 e 3 a seguir.

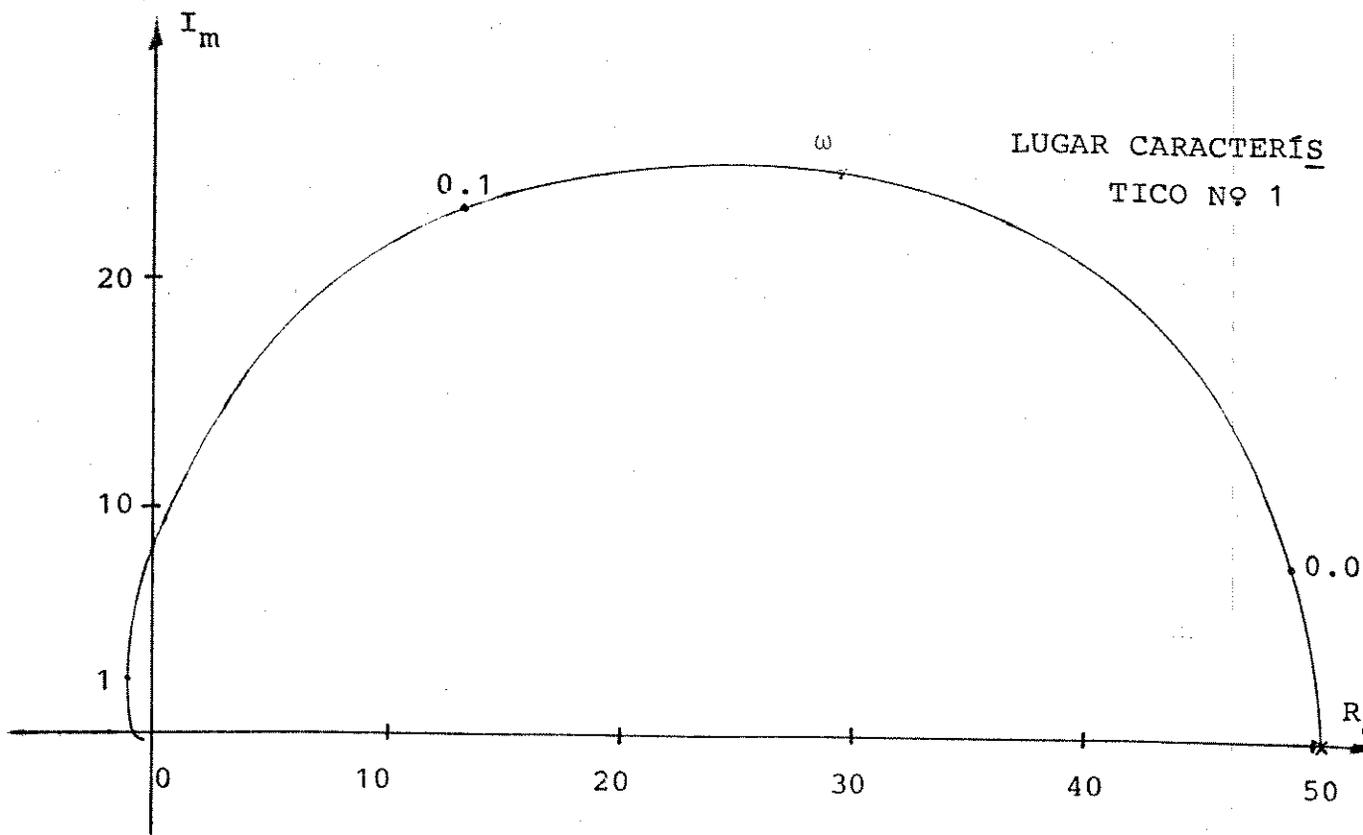


Figura 2 - Lugar característico nº1 do processo $G(s)$

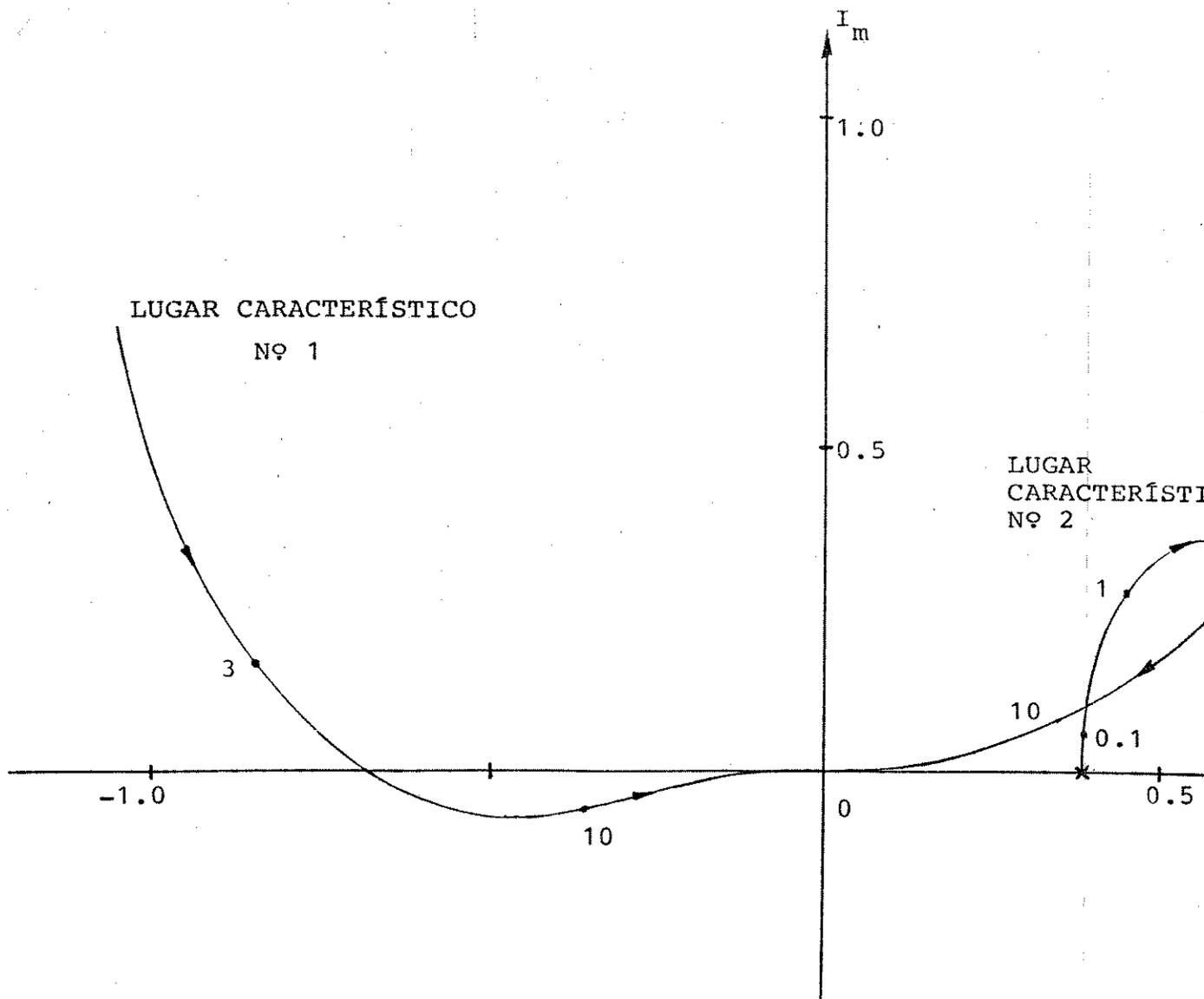


Figura 3 - Lugar característico nº 2 do processo $G(s)$

Uma rápida inspeção na Fig. 3 nos mostra que o ponto crítico $(-1;0)$ não é envolvido nenhuma vez pelos LC's, por conseguinte este sistema não será estável quando em malha fechada.

Observe que se aplicada uma realimentação negativa com um ganho de 1,5, então o ponto crítico passa a ser envolvido duas vezes no sentido antihorário pelo LC $g_1(j\omega)$. Isto, entretanto, não é o melhor que se pode conseguir. Uma análise mais detalhada (root-loci multivariável) mostra que, na melhor das hipóteses, a resposta do sistema ao degrau seria altamente oscilatória para uma realimentação proporcional.

Por outro lado, as curvas das Figs. 4 e 5 mostram que o sistema apresenta uma forte interação em altas frequências ($|q_i|_s$ pequenos e θ_i 's grandes para altas frequências).

Para $\omega > 1$ rad/s vê-se que os ângulos $\theta_i(j\omega)$ são inaceitáveis. Nesse sentido, devemos projetar um controlador K_h para reduzir os ângulos θ_i 's.

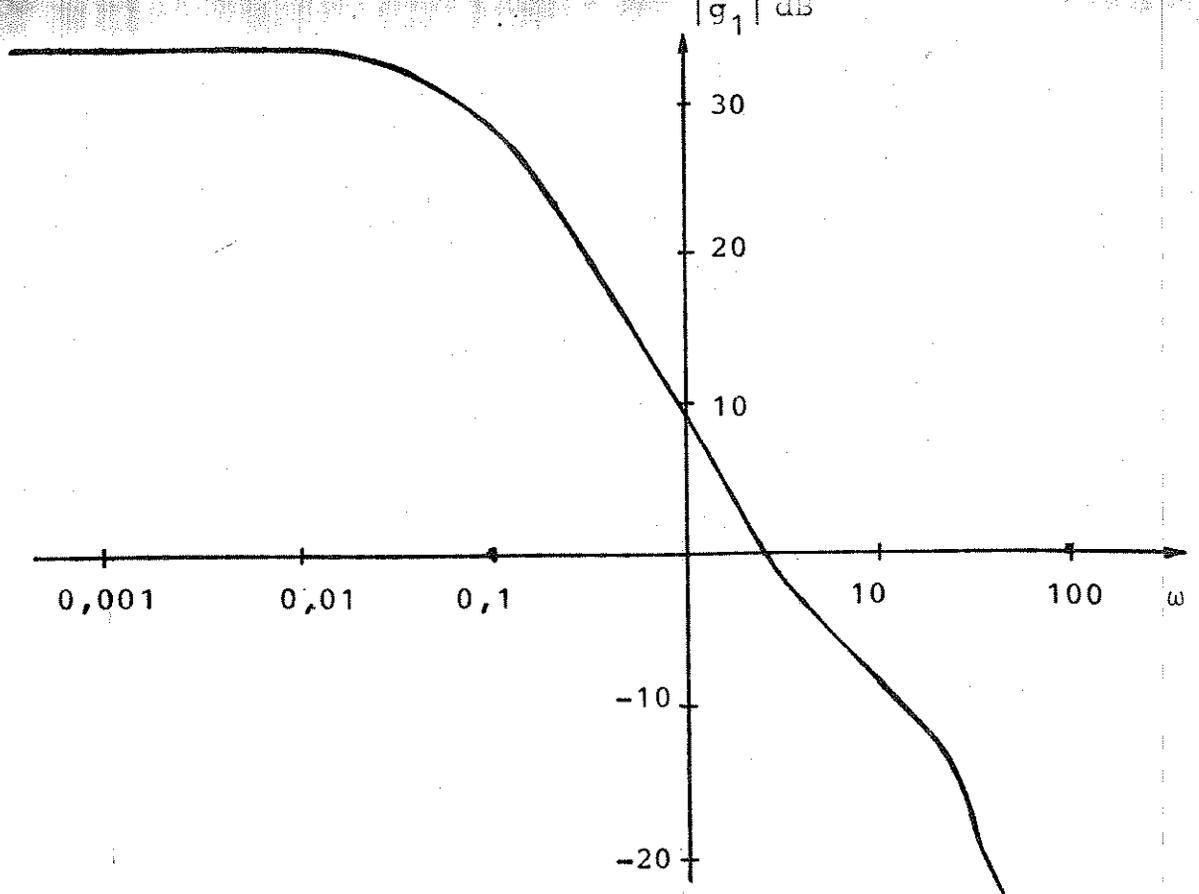
Tal controlador é dado, como já visto, por uma matriz real K_h tal que:

$$K_h \approx G^{-1}(j\omega_h)$$

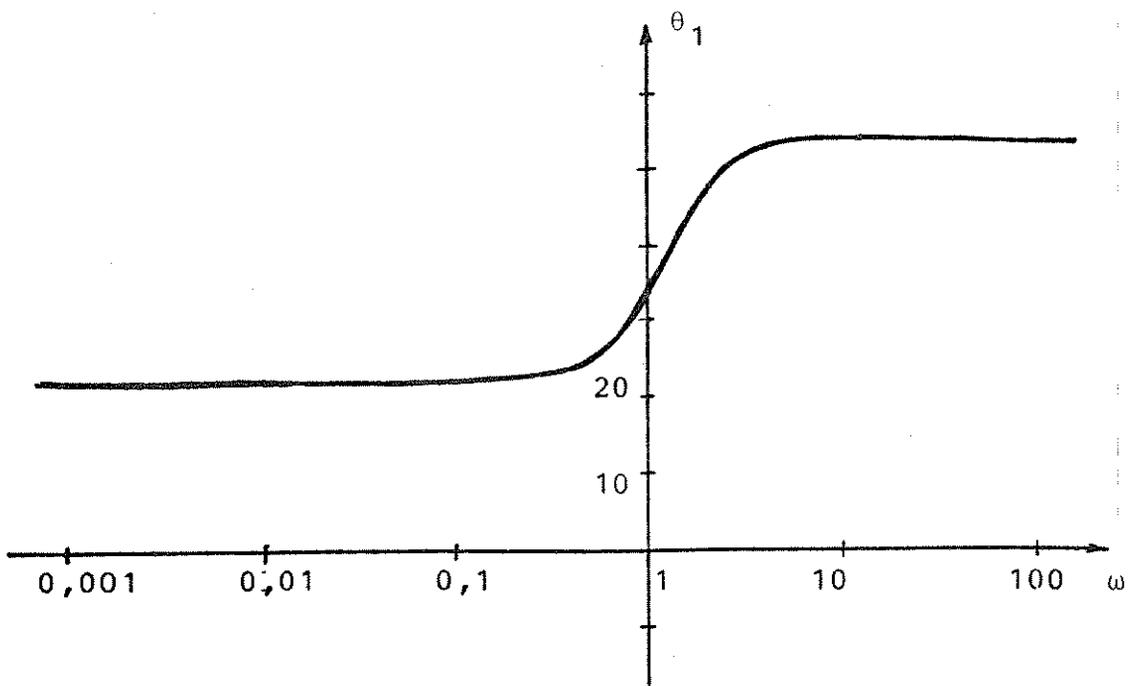
para algum $\omega = \omega_h$.

Uma investigação para as frequências $\omega > 10$ rad/s mostra que os melhores resultados são obtidos para $\omega_h = 30$ rad/s quando então, após a escolha das direções dos vetores, obtemos:

$$K_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$



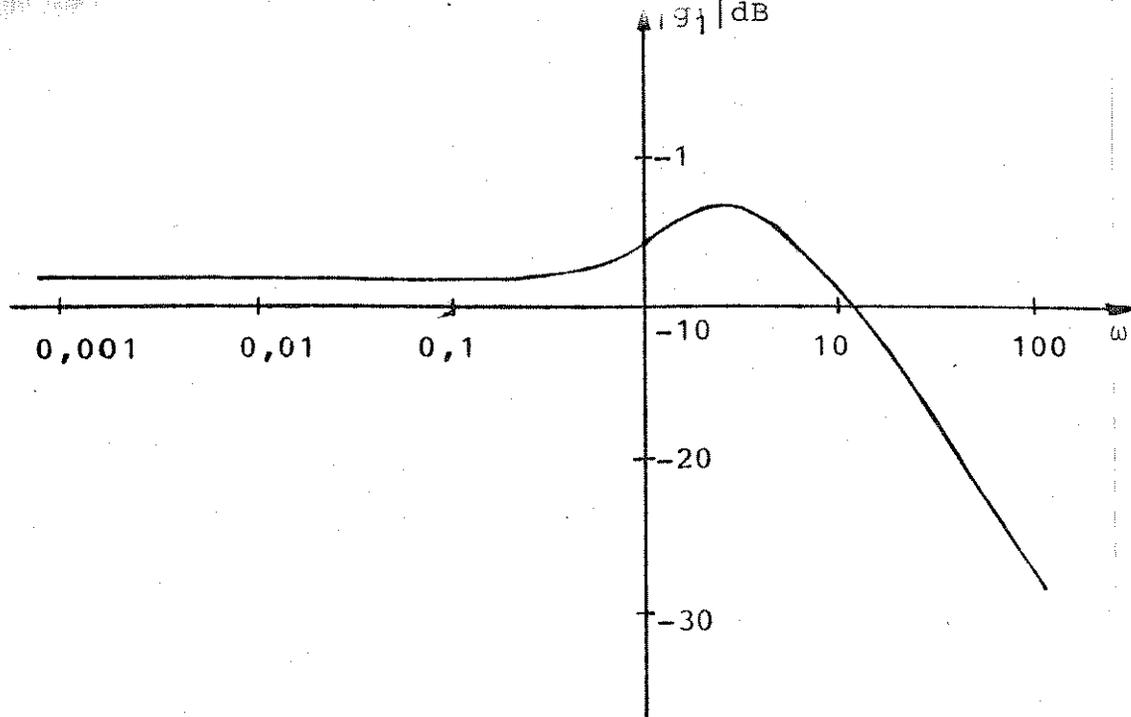
(a)



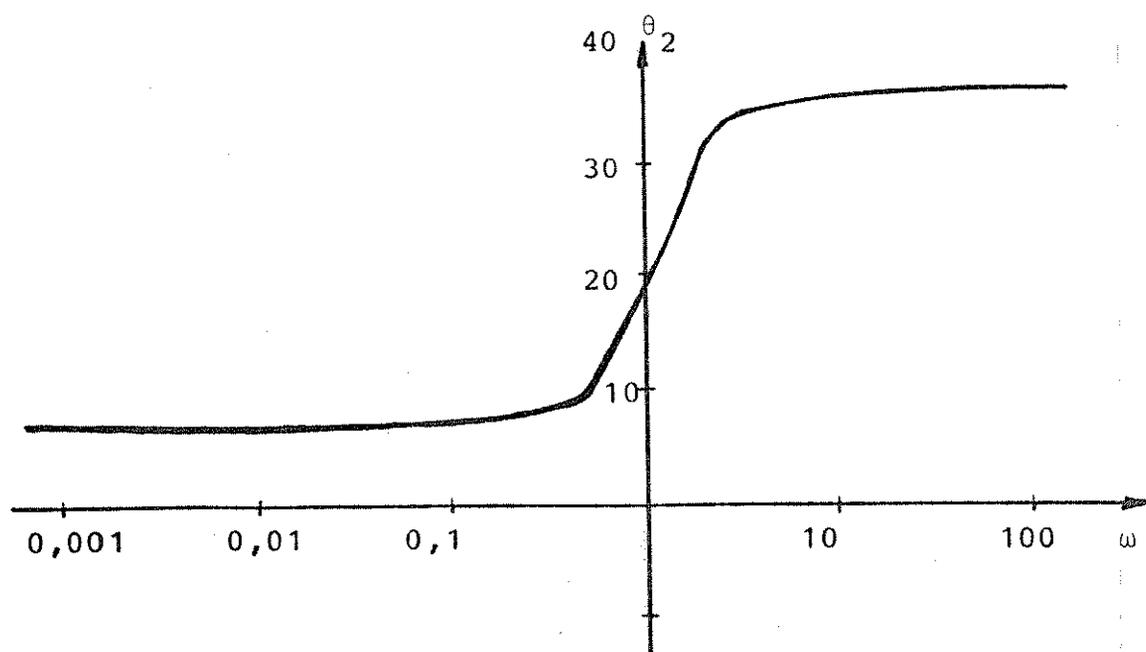
(b)

Figura 4 - a) curva do m3dulo do l.c. n9 1

b) $\theta_1 \times \omega$



(a)



(b)

Figura 5 - a) módulo do l.c. nº2

b) $\theta_2 \times \omega$

O processo compensado em altas frequências $Q(s) = G(s)$.

K_h apresentará os seguintes lugares característicos (Figs. 6 e 7):

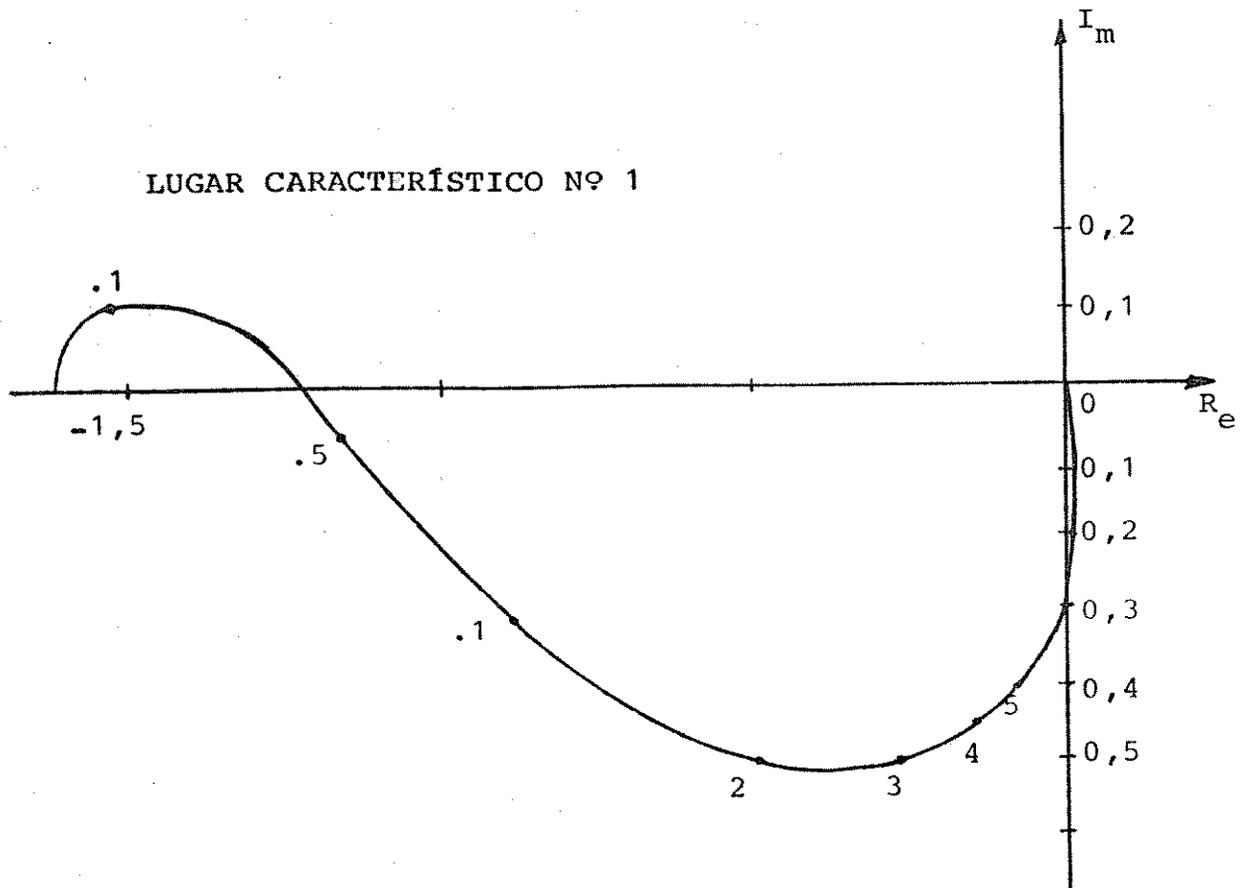
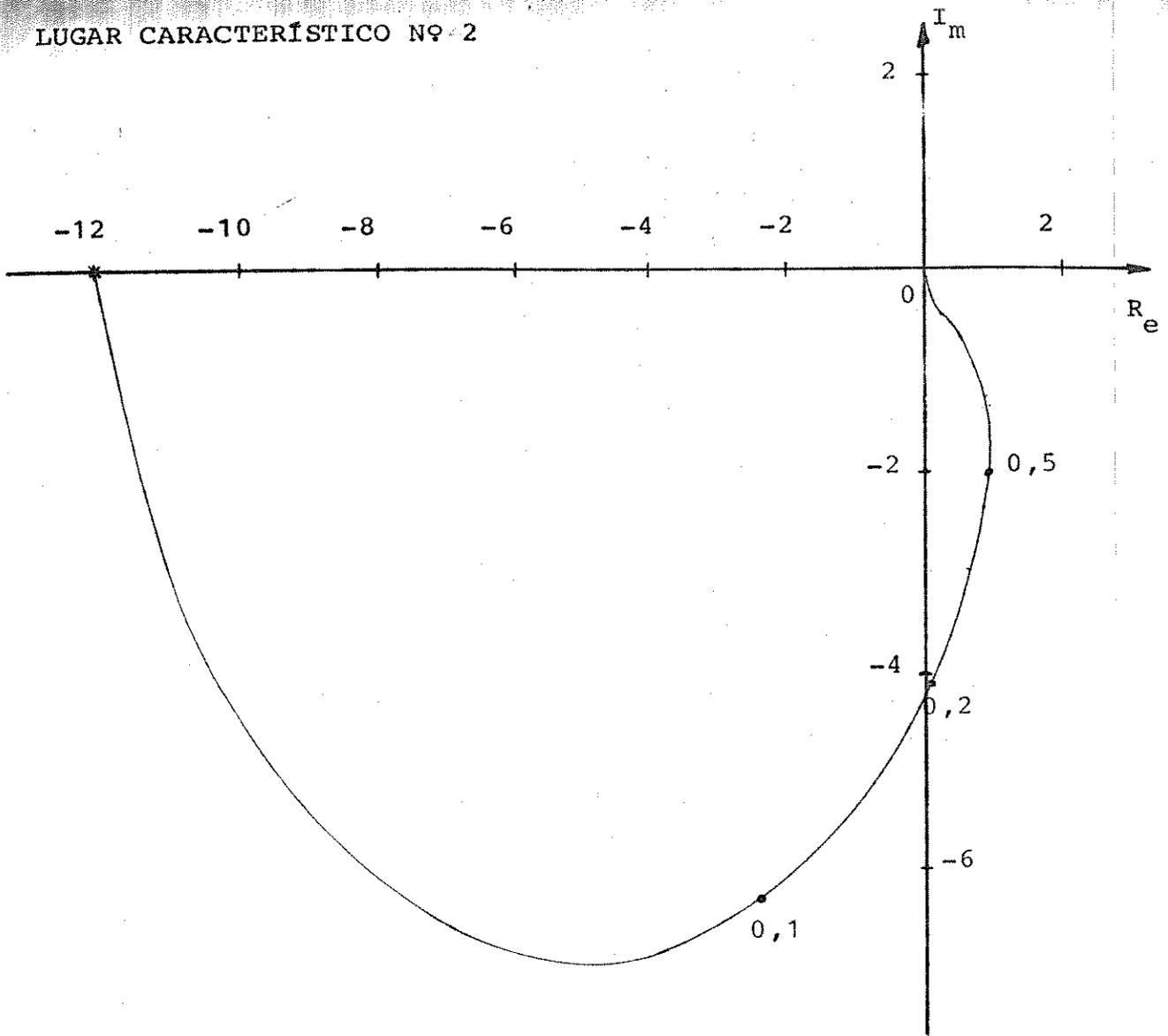
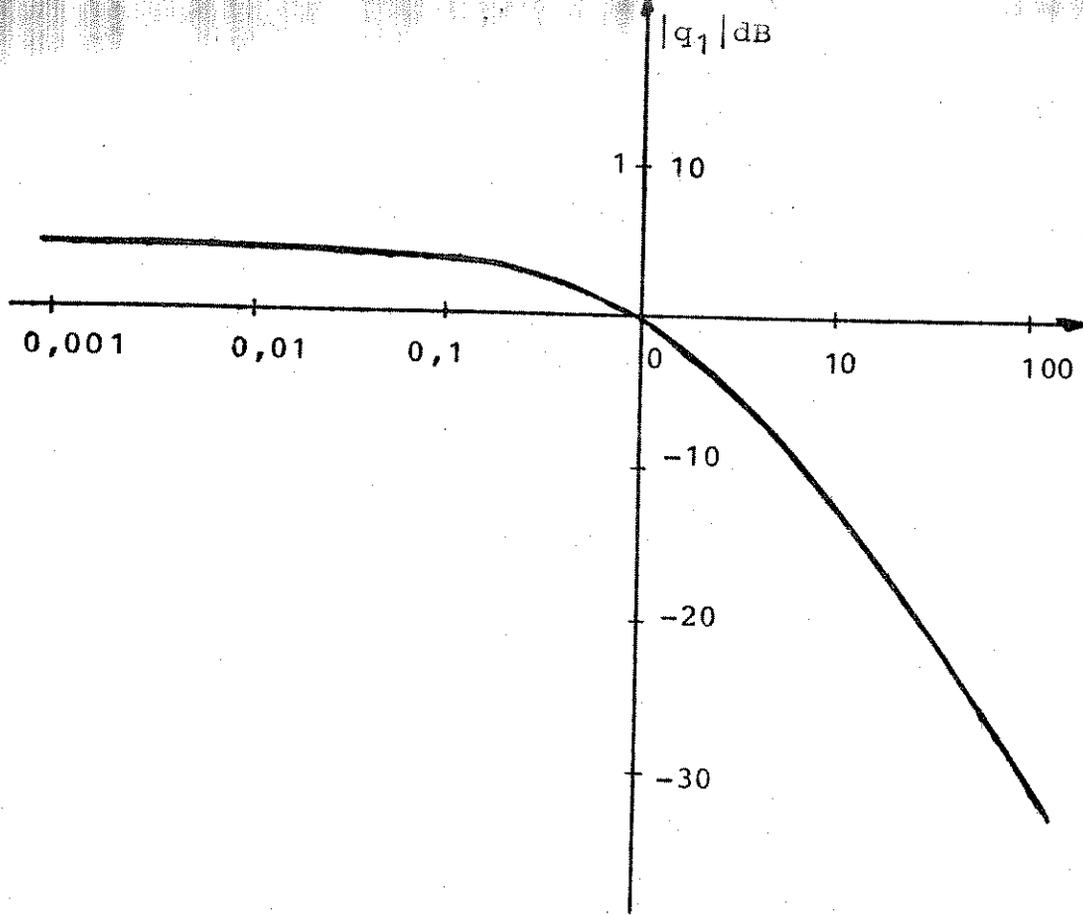


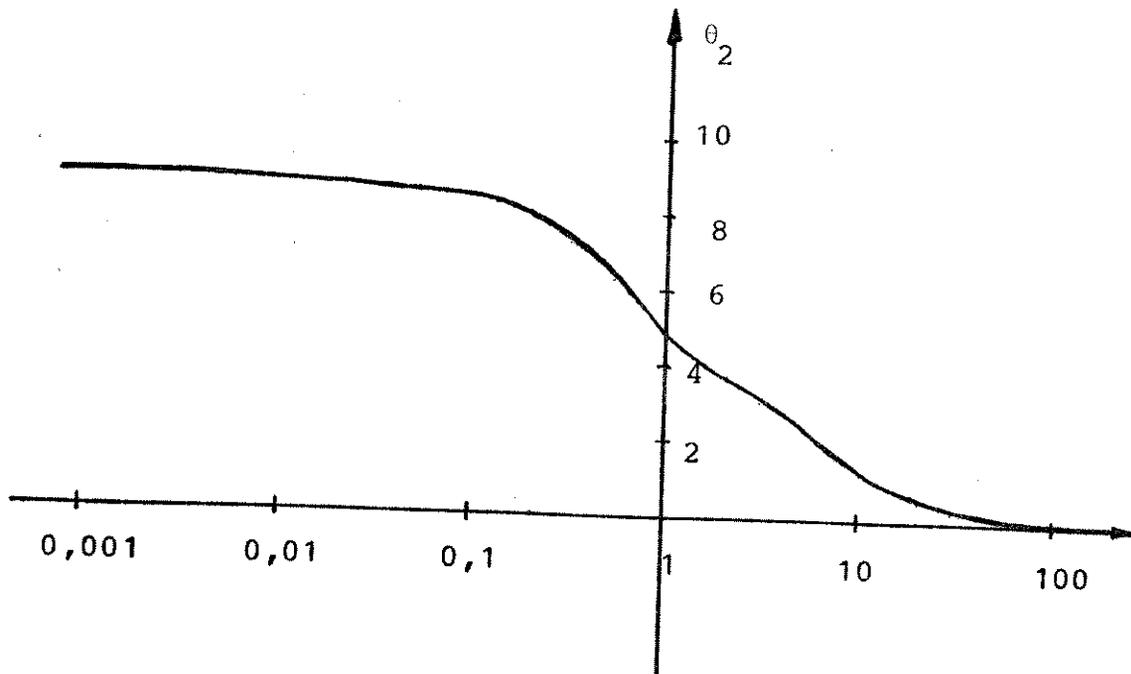
Figura 6 - l.c. nº1 de GK_h

Figura 7 - l.c. nº 2 de GK_h

A melhoria conseguida na estabilidade é visível nestas curvas. Por outro lado, a partir das Figs. 8 e 9, podemos verificar que os ângulos θ_1 são aceitáveis para $\omega > 5$ rad/s e tendem a zero para frequências maiores. Podemos então esperar a supressão de interação em altas frequências.



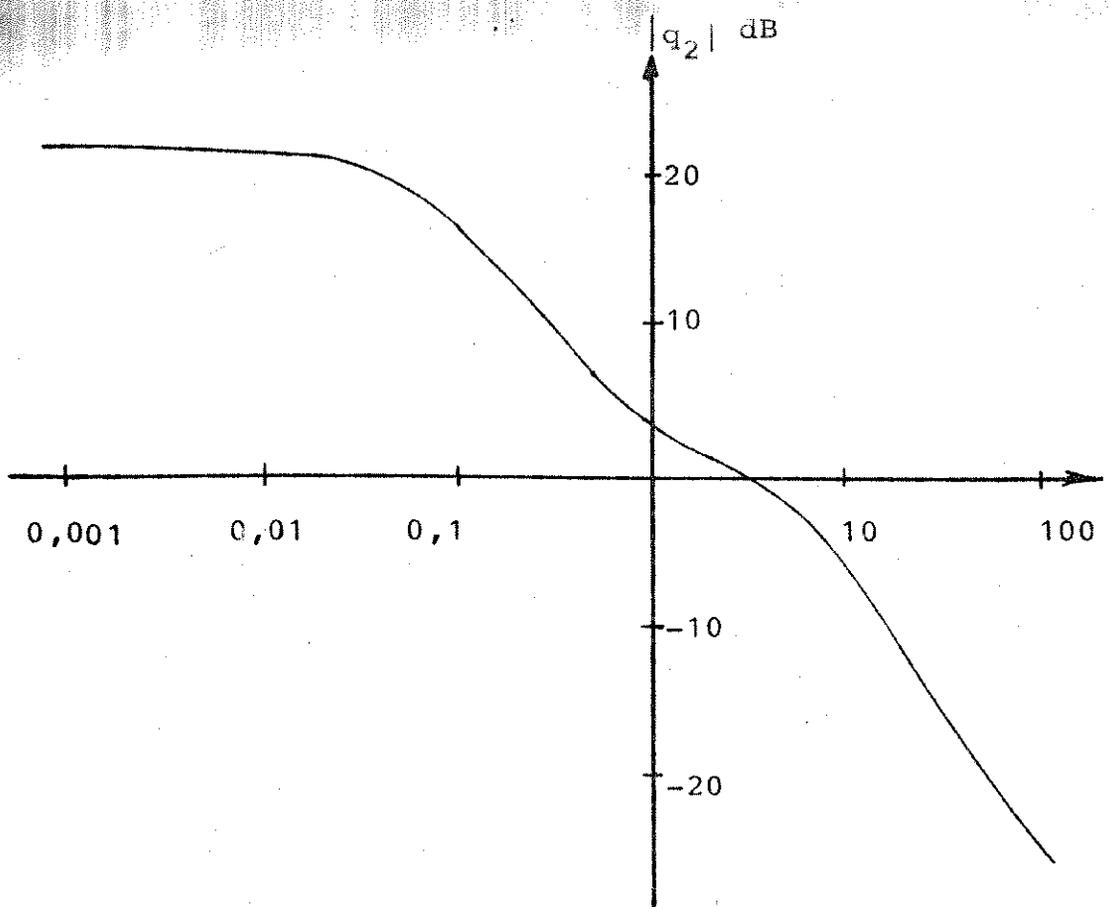
(a)



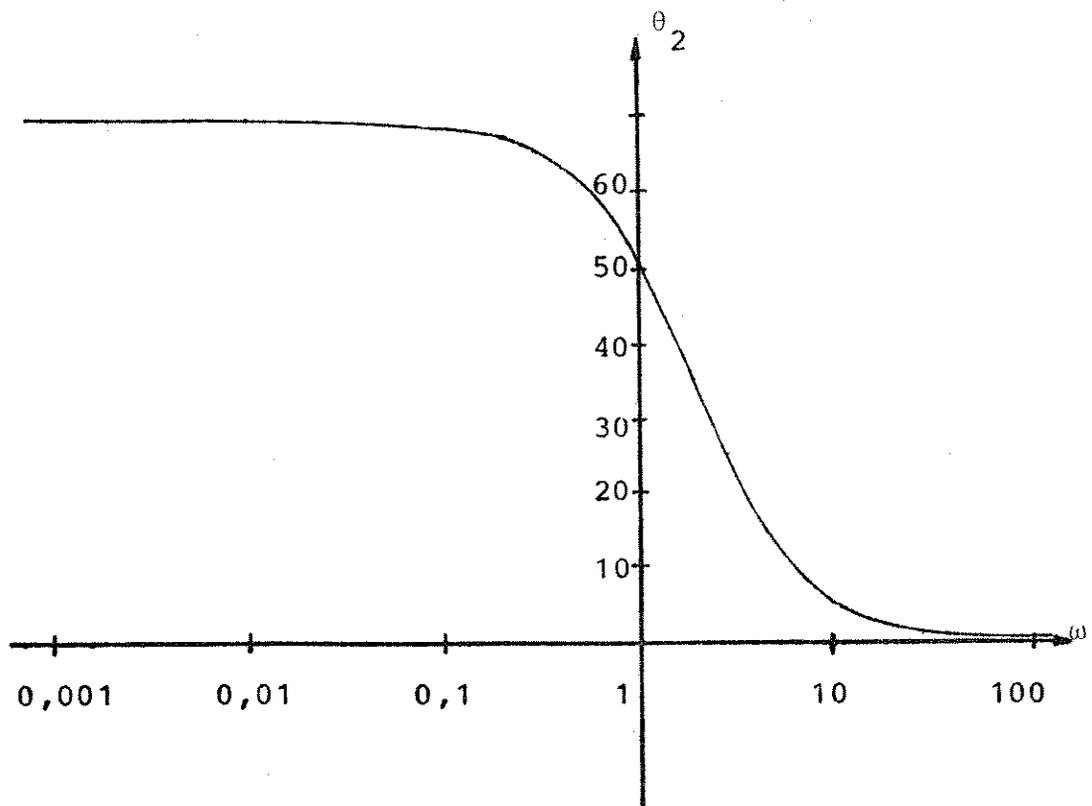
(b)

Figura 8 - a) módulo do l.c. nº 1 de GK_h

b) $\theta_1 \times \omega$ de GK_h



(a)



(b)

Figura 9 - a) módulo do l.c. nº 2 de GK_h

b) $\theta_2 \times \omega$ de GK_h

Seguindo o fluxo de projeto, devemos verificar o comportamento do sistema em baixas frequências, para então tomar as providências necessárias. A primeira coisa a ser vista é a discrepâncias entre os ganhos dos lugares característicos.

Seria desejável que eles estivessem balanceados em baixas frequências, já que isto faria com que uma injeção de ganho global (para aumentar a velocidade da resposta e para manter as rejeições de interações nas frequências para as quais as direções características estejam desalinhadas com os vetores canônicos) fosse mais eficiente. Neste sentido, construiremos um controlador a proximadamente comutativo que deverá duplicar o módulo do menor lugar característico nas imediações de $\omega = 1$ rad/s.

Para a frequência de 1,12 rad/s temos:

$$G(j1,12) \cdot K_h = \begin{bmatrix} (-0,816; -j0,169) & (-0,528; +j2,225) \\ (0,105; -j0,12) & (0,877; -j1,29) \end{bmatrix}$$

ou seja

$$G(j1,12)K_h = W(j1,12) \cdot \begin{bmatrix} (+0,89; -1,1) & 0 \\ 0 & (-0,84; -j0,36) \end{bmatrix} \cdot V(j1,12)$$

$$\text{com } W(j1,12) = \begin{bmatrix} (1; 0) & (-11,55; -4,24) \\ (-0,57; -0,64) & (1,0) \end{bmatrix}$$

$$V(j1,12) = \begin{bmatrix} (-0,028; 0,094) & (-0,723; 0,965) \\ (-0,076; 0,036) & (-0,028; 0,094) \end{bmatrix}$$

As bases W e V são substituídas por A e B, respectivamente (Algoritmo de Alinhamento).

$$A = \begin{bmatrix} 0,585 & 0,997 \\ -0,811 & -0,076 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0,099 & -1,8 \\ 1,06 & 0,76 \end{bmatrix}$$

Observe que B foi escalada de tal forma que $B.A = I$.

O compensador de baixas frequências é dado por:

$$K'_\ell = A \Lambda B = \begin{bmatrix} 0,585 & 0,997 \\ 0,811 & -0,076 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,089 & -1,3 \\ 1,06 & 0,76 \end{bmatrix}$$

$$K'_\ell = \begin{bmatrix} 2,06 & 0,76 \\ -0,08 & 0,94 \end{bmatrix}$$

Uma vez que o controlador K'_ℓ foi obtido para o sistema já compensado em altas frequências, então a expressão global do controlador resultante será:

$$K(s) = K_h \cdot (\alpha/s K'_\ell + I)$$

ou seja

$$K(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \left\{ \frac{\alpha}{s} \begin{bmatrix} 2,06 & 0,76 \\ -0,08 & 0,94 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2,06\alpha + s}{s} & \frac{0,76\alpha}{s} \\ -\frac{0,08\alpha}{s} & \frac{0,94\alpha + s}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{0,08\alpha}{s} & \frac{0,94\alpha + s}{s} \\ -\frac{2,062\alpha + s}{s} & -\frac{0,76\alpha}{s} \end{bmatrix}$$

Injetando-se um ganho adicional de 10 em cada malha, te remos um controlador final da seguinte forma:

$$K(s) = \begin{bmatrix} -\frac{0,8\alpha}{s} & \frac{9,4\alpha + 10s}{s} \\ -\frac{20,6\alpha + 10s}{s} & -\frac{7,6\alpha}{s} \end{bmatrix}$$

Para $\alpha = 1$, temos:

$$K(s) = \begin{bmatrix} -\frac{0,8}{s} & \frac{9,4 + 10s}{s} \\ -\frac{20,6 + 10s}{s} & -\frac{7,6}{s} \end{bmatrix}$$

Construindo-se os lugares característicos para o sistema compensado $G(s) K(s)$, conforme Figs. 10, 11 e 12, veremos que o sistema atende às especificações de projeto.

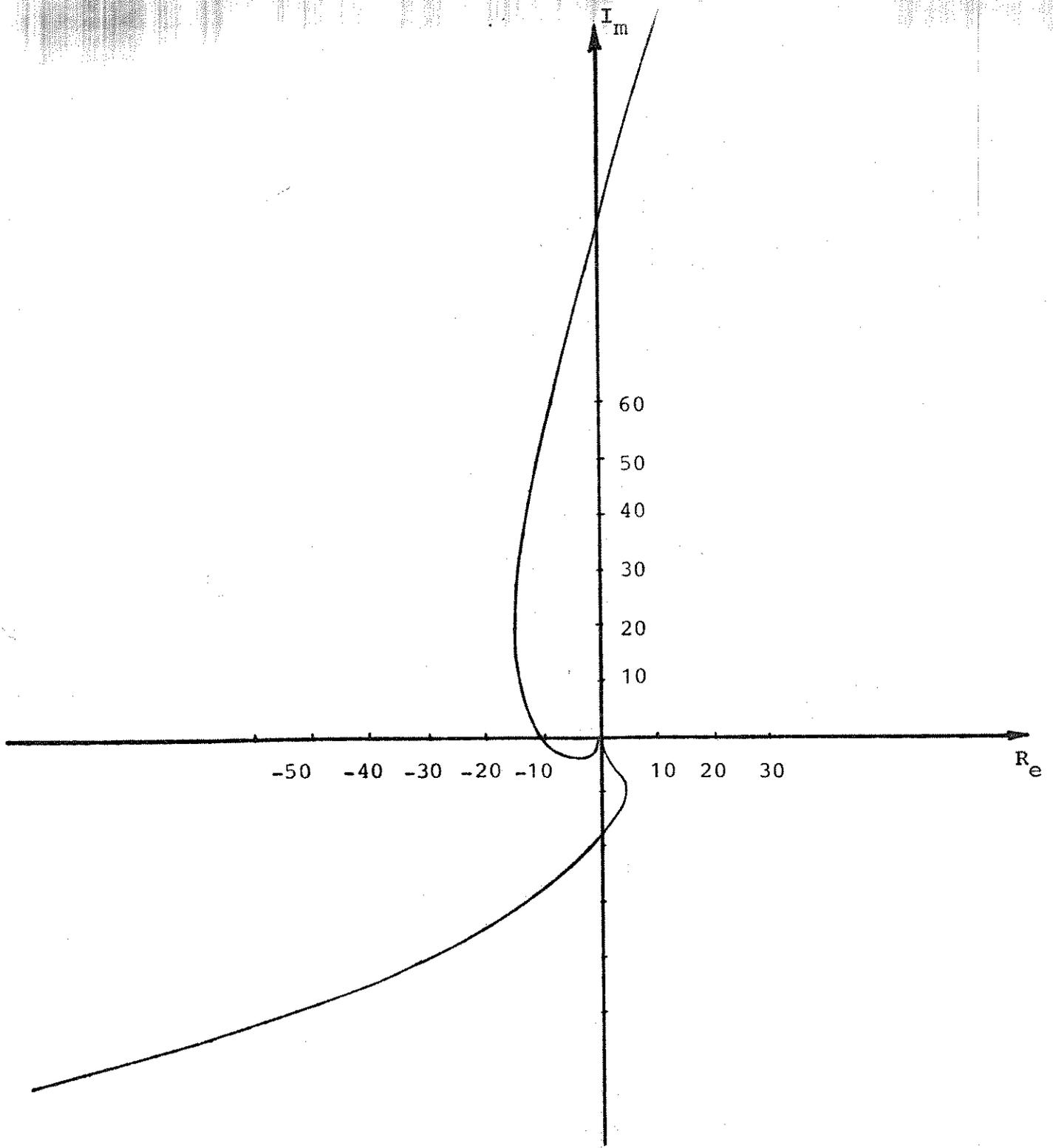
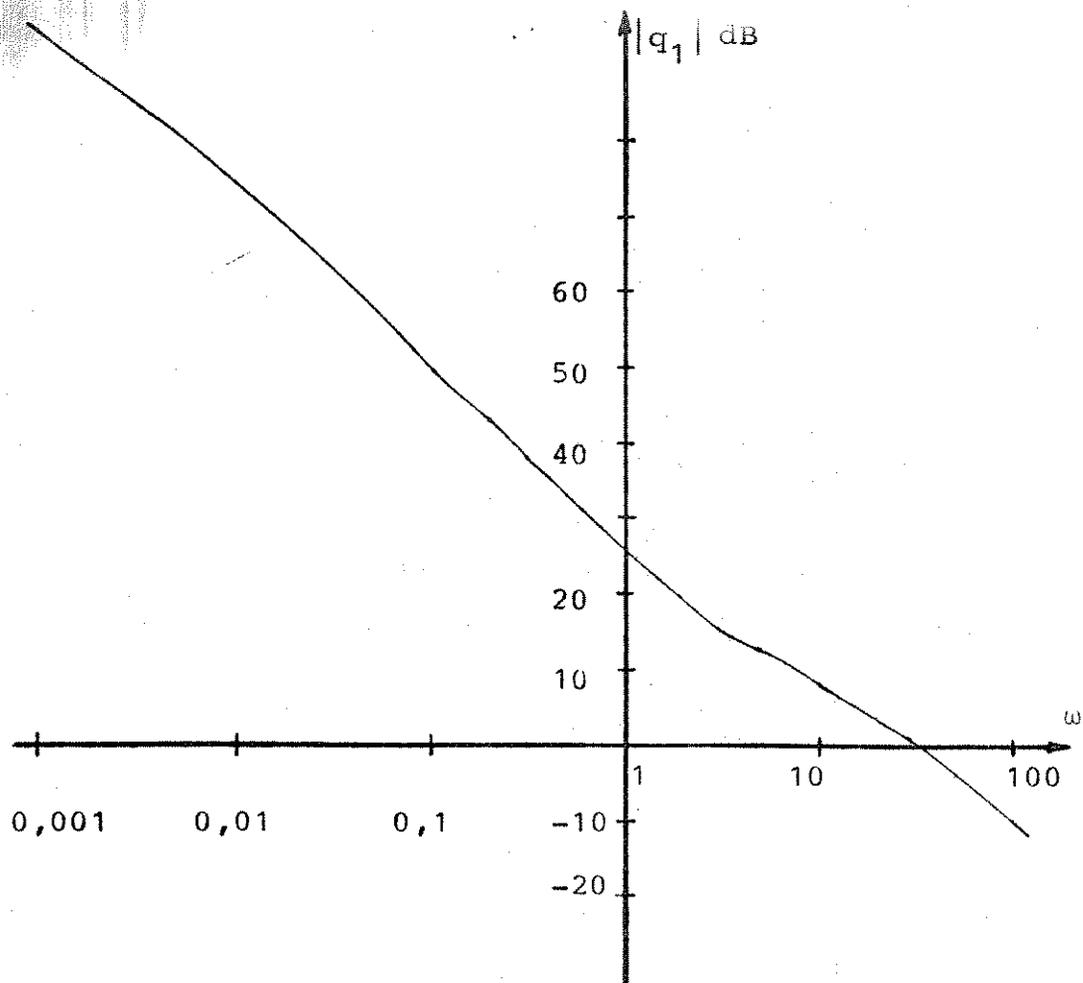


Figura 10 - l.c. final



(b)

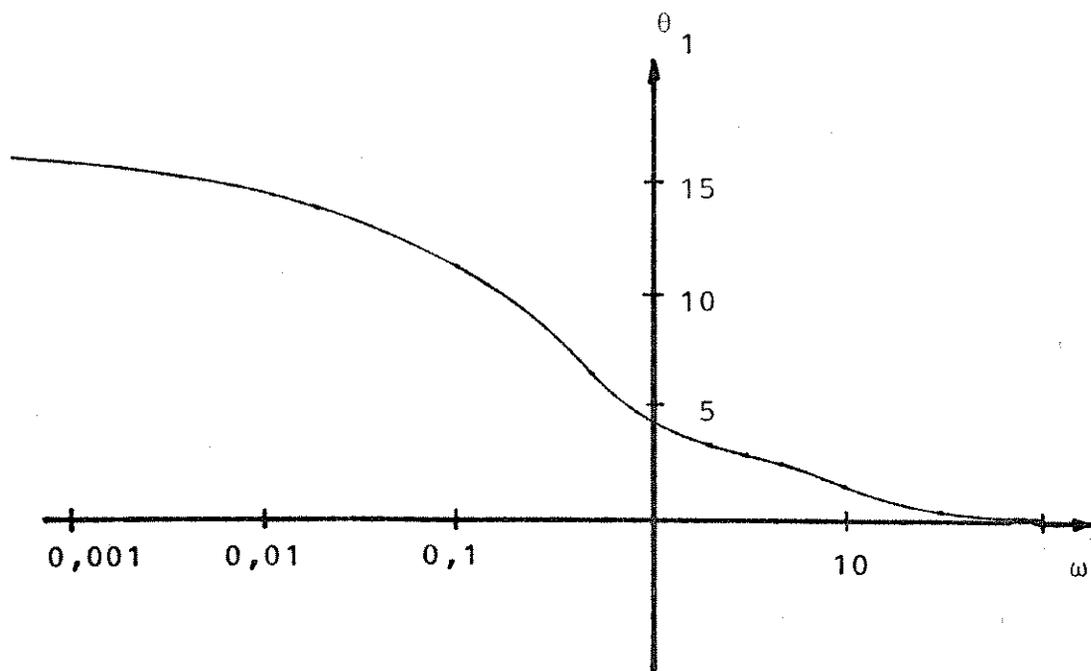


Figura 11 - $|q_1| \times \omega$ de GK final

$\theta_1 \times \omega$ de GK

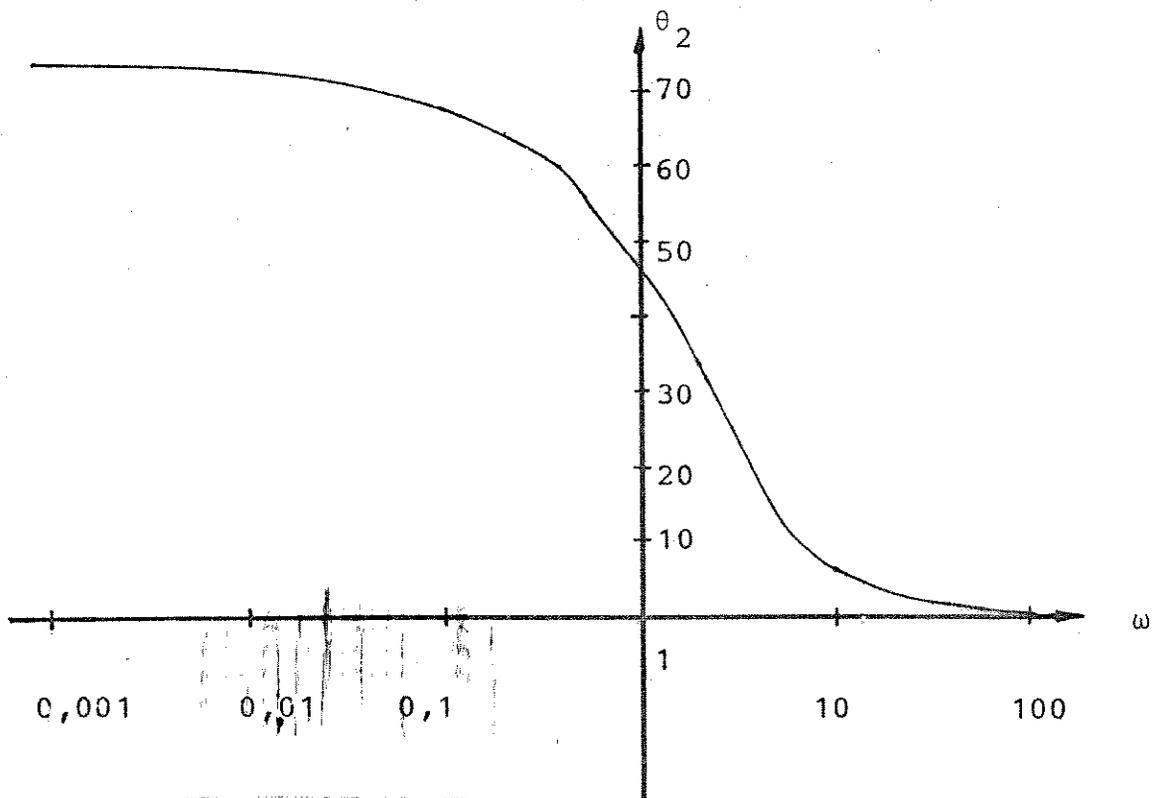
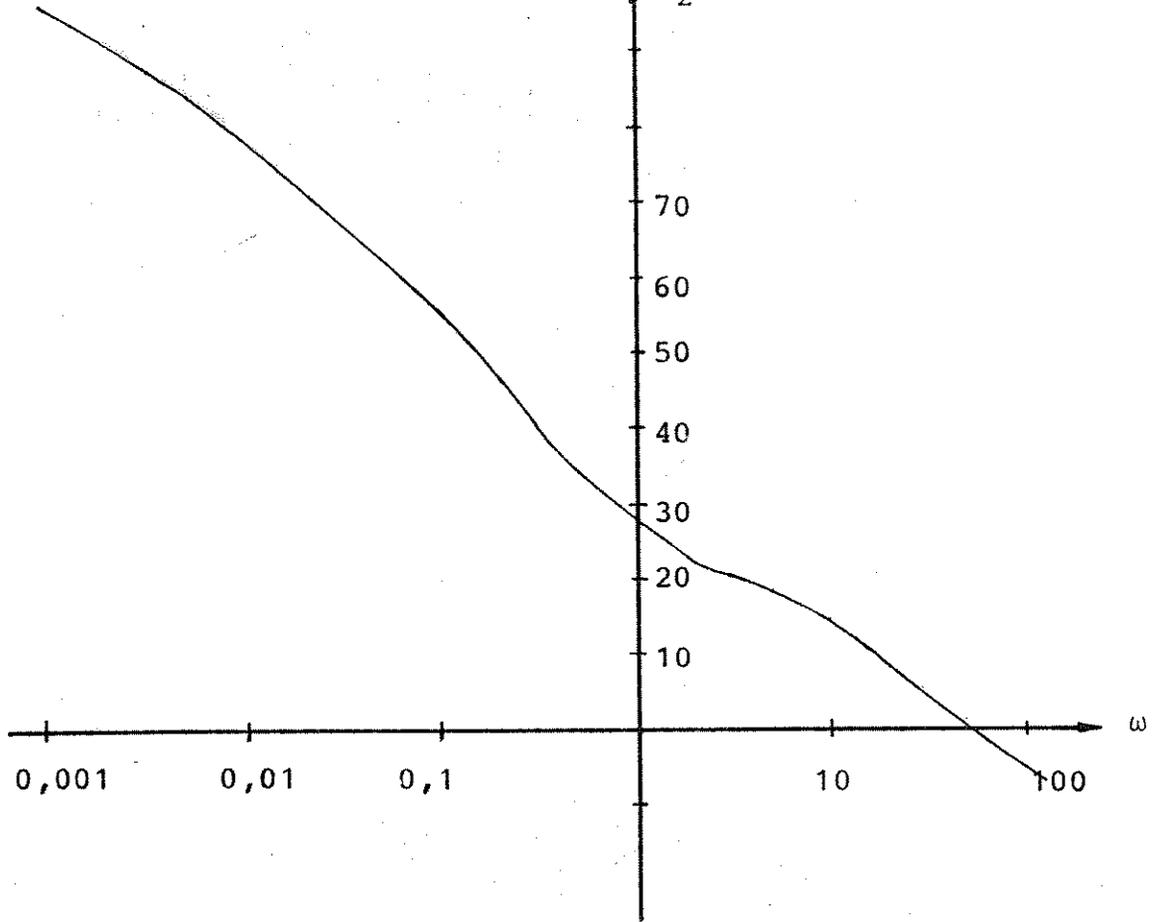


Figura 12 - l.c. nº 2 final

$\theta_2 \times \omega$ final

Observe que a banda passante, sobre a qual os ganhos característicos são grandes, é boa. Além do que, os ganhos em baixas frequências estão bem balanceados e os ângulos θ_i em altas frequências são pequenos.

Desta forma, o projeto pode ser dado por encerrado, a menos que se deseje melhorar ainda mais o desempenho do sistema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Siljak, D.D. - "On pure structure of dynamic systems", *Nonlinear analysis theory, Methods and Applications*, 1, 397-413, 1977.
- [2] Siljak, D.D. - "Large scale dynamic systems: Stability and Structure", North-Holland, 1978.
- [3] Vidyasagar, M. - "Input-output analysis of large-scale Inter-connected Systems - Decomposition, well-posedness and stability", Springer-Verlag, 1981.
- [4] Steward, D.V. - "On an approach to techniques for the analysis of the structure of large system of equations", *SIAM-Review*, Vol. 4, 321-342, 1962.
- [5] Varga, R.S. - "Matrix iterative analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [6] Tarjan, R. - "Depth-first search and linear graph algorithms", *SIAM. J. Comput*, Vol. 1, nº 2, Jun/72.
- [7] Kevorkian, A.K. - "Structural Aspects of large dynamic systems", in *Proc. 6th. IFAC - Cong Boston - MA, 1975*, pp. 19:3:1-7.
- [8] Sezer, M.E. and Siljak, D.D. - "Structural decomposition and stabilization of large-scale control systems", in *Proc. 17th. Allerton Conf.*, 1979.
- [9] Harary, F. - "Graph theory", Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

- [10] MacFarlane, A.G. and Belletrutti. - "The characteristic Locus Design Method", *Automatica*, Vol. 9, pp. 575-588, 1983.
- [11] MacFarlane, A.G. and Postlethwaite, I. - "The generalized Nyquist stability Criterion and Multivariable root, Loci - *Int. Journal Control*, 77, Vol. 25, n^o 1, pp.81-127.
- [12] Barnett, S. - "Matrices in Control Theory", London, Van Nostrand-Reinhold, 1977.
- [13] Bliss, G.A. - "Algebraic Functions", New York, Doven, 1966.
- [14] Springer, G. - "Introduction to Riemann surface", Reading, Mass., Addison-Wesley, 1957.
- [15] MacFarlane, A.G. and Postlethwaite, I. - "Characteristic frequency functions and characteristic gain functions", *Int. J. Control*, 1977, Vol. 26, n^o 2, 265-278.
- [16] MacFarlane, A.G. and Kouvaritakis - "A design techniques for linear multivariable feedback systems", *Int. J. Control*, 1977, Vol. 25, n^o 6, 837-874.
- [17] Belletrutti, J.J. and MacFarlane, A.G. - "Characteristic Loci Techniques in multivariable control system design", *Proc. IEE*, Vol. 118, n^o 8, 1971.
- [18] Edmunds, J. and Kouvaritakis, B. - "Extension of frame alignment technique and their use in the characteristic Locus design method", *Int. J. Control*, 1979, Vol.29, pp. 787-796.

- [19] MacFarlane, A.G. and N. Karcanias - "Poles and zeros of linear multivariable system: a survey of the algebraic, geometric and complex variable theory", Int. Journal Control, 1976, Vol. 24, n^o 1.
- [20] Rosenbrock, H.H. - "Computer-Aided Control System Design", London: Academic, 1974.
- [21] Gantmacher, F.R. - "Theory of Matrices", N.York-Chelsea, 1959.
- [22] MacFarlane, A.G. - "The Development of Frequency - Response Methods in Automatic Control", IEEE - T.A.C., Vol. AC-24, n^o 2, april 79.
- [23] Vidyasagar, M. - "Decomposition Techniques for Large - Scale Systems with Nonadditive Interactions : Stability and Stabilizability", IEEE - T.A.C., Vol. AC-24, n^o 4, August 1980.