

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS

O PROJETO ECONÔMICO DO GRÁFICO DE CONTROLE $\bar{X}$ PARA SISTEMAS COM DETERIORAÇÃO

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia
Elétrica, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia

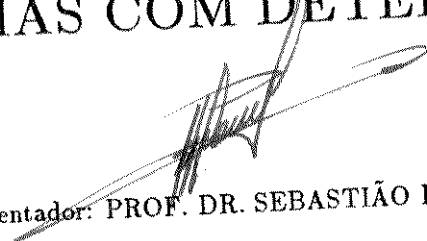
Elétrica.

Campinas, 1989

ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA
ENGENHEIRO MECÂNICO, FACULDADE DE ENGENHARIA DE
GUARATINGUETÁ-UNESP, 1979

MESTRE EM CIÊNCIAS, INSTITUTO TECNOLÓGICO DE
AERONÁUTICA, 1983

O PROJETO ECONÔMICO DO GRÁFICO DE CONTROLE $\bar{X}$ PARA SISTEMAS COM DETERIORAÇÃO



Orientador: PROF. DR. SEBASTIÃO DE AMORIM

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia
Elétrica, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia

Elétrica.

Campinas, 1989

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

À meus pais Geraldo e Magnólia
À minha esposa Vilma

AGRADECIMENTOS

Transmito, por este meio, meus sinceros agradecimentos:
ao professor Sebastião de Amorim, pela orientação e esforço constante durante o desenvolvimento deste trabalho;
aos colegas e amigos do Departamento de Produção da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, que assumiram cargas didáticas adicionais durante o meu afastamento;
aos membros da banca:

Prof. Dr. Vinícios Amaral Armentano

Prof. Dr. Sebastião de Amorim

Prof. Dr. Paulo Carneiro Bravo

Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta

Prof. Armando Infante

pelas valiosas sugestões;

a Dayse Tarricone Costa pela grande ajuda prestada na confecção das figuras e dos gráficos que aparecem neste trabalho.

O PROJETO ECONÔMICO DO GRÁFICO DE CONTROLE $\bar{X}$ PARA SISTEMAS COM DETERIORAÇÃO

RESUMO

Neste trabalho, nós consideramos o modelo básico de Duncan, para o planejamento econômico de gráficos de controle, mas com a hipótese de taxa de falha constante relaxada, de forma a admitir deterioração do processo. Sem perda de generalidade, nós tratamos dos gráficos de controle $\bar{X}$. Adotamos a distribuição de Weibull para o tempo de falha do sistema e estabelecemos três delineamentos alternativos que denominamos delineamento balanceado ou delineamento com o intervalo entre amostragens h variável, delineamento com o tamanho da amostra n variável e o delineamento com o fator de abertura k variável. O delineamento balanceado consiste em se tomar uma nova amostra no instante em que a probabilidade de ocorrência da causa assinalável, dada a sua não ocorrência até o instante da última amostragem, alcance um dado valor p_1 . O espaçamento entre amostragens torna-se, desta maneira, decrescente com o tempo. O delineamento com n variável, toma amostras pequenas no início do ciclo, quando a taxa de falha é baixa e vai aumentando n à medida que o tempo passa e a taxa de falha cresce. O delineamento com k variável estreita os limites do gráfico de controle à medida em que cresce a taxa de falha.

Em todos os casos, os delineamentos são explicitamente determinados e se mostram eficientes com respeito ao delineamento usual, por reduzirem a esperança de T_2 , o tempo entre a ocorrência de uma causa assinalável e sua detecção, para um mesmo número esperado de itens amostrados e de alarmes falsos. Eles são particularmente eficientes em situações de intensa deterioração, pequenas mudanças na média do processo e elevados custos com amostragens.

THE ECONOMIC DESIGN OF $\bar{X}$ CONTROL CHART FOR SYSTEMS WITH DETERIORATION

ABSTRACT

We consider the Duncan basic model for the economic construction of control charts, but with the assumption of constant failure rate relaxed to allow for process deterioration. Without loss of generality, we consider the $\bar{X}$ control charts. We assume a Weibull distribution for the in-control functioning time and establish three alternative designs: the balanced design or design with the interval between samples h variable, the design with the sample size n variable and the design with the width of the control limits k variable. The balanced design takes a new sample at the instant when the accumulated conditional probability of occurrence of the assignable cause, given its non-occurrence until the instant of the last sample, reaches a given fixed value p_1 . Under the assumption of process deterioration, the balanced design tends to sample at decreasing intervals.

The design with n variable takes small samples in the beginning of the cycle, when the failure rate is low and increases n with time, when the failure rate increases. The design with k variable, narrows the control chart limits when the failure rate increases.

The three designs are explicitly determined and come out to be efficient with respect to the usual design by reducing T_2 , the time between the occurrence and detection of the assignable cause, while using the same expected number of samples and provide the same expected number of false alarms. They are particularly efficient in a situation of intense process deterioration, small shifts and heavy sampling costs.

INTRODUÇÃO

Apresentamos aqui uma breve descrição do conteúdo deste trabalho.

No capítulo I, apresentamos o modelo básico de Duncan com uma breve revisão bibliográfica.

Nos capítulos II, III, IV introduzimos novos delineamentos para a construção de gráficos de controle $\bar{X}$. Estes delineamentos buscam adequar os gráficos de controle a sistemas com deterioração, no sentido de minimizar o tempo de espera entre a ocorrência de uma falha - ou causa assinalável - e a sua detecção.

No capítulo II tratamos do delineamento balanceado, que consiste em se tomar uma amostra no instante em que a probabilidade de ocorrência da causa assinalável, dada a sua não ocorrência até o instante da última amostragem, alcance um dado valor fixo p_1 . Desta forma, o delineamento balanceado toma amostras a intervalos de tempo, h , decrescentes.

O delineamento com n variável, introduzido no capítulo III, permite que o tamanho da amostra, n , varie, no sentido de se tomar amostras pequenas no início do ciclo quando a taxa de falha é baixa, e ir aumentando n à medida que o tempo passa e a taxa de falha cresce. O intervalo entre amostragens, h , é mantido constante.

O delineamento com o fator de abertura k variável, que apresentamos no capítulo IV, mantém h e n constantes, mas varia os limites de controle, estreitando-os à medida em que cresce a taxa de falha.

Finalmente, no capítulo V apresentamos as principais conclusões, e fazemos algumas sugestões para futuras pesquisas.

ÍNDICE DA MATÉRIA

I GRÁFICOS DE CONTROLE

1.1 Introdução	1-1
1.2 Descrição do modelo básico de Duncan	1-3
1.3 Revisão da literatura	1-7

II GRÁFICOS DE CONTROLE COM ESQUEMA BALANCEADO DE AMOSTRAGEM

2.1 Introdução	2-1
2.2 Determinação dos intervalos entre amostragens	2-3
2.3 O número esperado de amostras por ciclo	2-6
2.4 O tempo esperado de operação fora de controle	2-13
2.5 A eficiência relativa do delineamento B com respeito ao delineamento U	2-14
2.6 A estabilidade de $Ef_{B/U}$ com respeito ao parâmetro de forma α	2-23
2.7 A variância de T	2-60
2.8 A distribuição de T	2-64
2.9 Conclusões	2-70

III GRÁFICOS DE CONTROLE COM TAMANHO DAS AMOSTRAS CRESCENTE

3.1 Introdução	3-1
3.2 Determinação do tamanho da amostra	3-3
3.3 O número esperado de itens amostrados por ciclo	3-5
3.4 O número esperado de amostras e de alarmes falsos por ciclo	3-7

3.5 O tempo esperado de operação fora de controle	3-9
3.6 A eficiência relativa do delineamento $U1$ com relação ao delineamento U	3-9
3.7 A distribuição de T	3-15
3.8 Conclusões	3-21

IV GRÁFICOS DE CONTROLE COM LIMITES DECRESCENTES

4.1 Introdução	4-1
4.2 Determinação dos limites decrescentes de controle	4-3
4.3 O número esperado de amostras por ciclo	4-5
4.4 O número esperado de alarmes falsos	4-7
4.5 O tempo esperado de operação fora de controle	4-8
4.6 A eficiência do delineamento $U2$ com relação ao delineamento U ..	4-9
4.7 A distribuição de T	4-16
4.8 Conclusões	4-22

V CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

5.1 Conclusões	5-1
5.2 Sugestões para futuras pesquisas	5-3

APÊNDICE: ALGUNS RESULTADOS MATEMÁTICOS ÚTEIS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÍNDICE DOS GRÁFICOS

Figura 1.1: Um gráfico de controle típico	1-2
Gráfico 2.1.a: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,01$)	2-30
Gráfico 2.1.b: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,05$)	2-32
Gráfico 2.1.c: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,10$)	2-34
Gráfico 2.1.d: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,20$)	2-36
Gráfico 2.1.e: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$)	2-38
Gráfico 2.1.f: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,50$)	2-40
Gráfico 2.1.g: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,01$)	2-42
Gráfico 2.1.h: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,05$)	2-44
Gráfico 2.1.i: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,10$)	2-46
Gráfico 2.1.j: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,20$)	2-48
Gráfico 2.1.k: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$)	2-50
Gráfico 2.1.l: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,50$)	2-52
Gráfico 2.2.a: Distribuição de T (parte superior del. U , parte inferior del. B) ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$)	2-66
Gráfico 2.2.b: Distribuição de T (parte superior del. U , parte inferior del. B) ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$)	2-67
Gráfico 3.1.a: Distribuição de T (parte superior del. U , parte inferior del. $U1$) ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 3$; $n = 5$)	3-17
Gráfico 3.1.b: Distribuição de T (parte superior del. U , parte inferior del. $U1$) ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 3$; $n = 5$)	3-20

Gráfico 4.1.a: Distribuição de T (parte superior del. U , parte inferior del. $U2$) ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 3$)	4-18
---	------

Gráfico 4.1.b: Distribuição de T (parte superior del. U , parte inferior del. $U2$) ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 2$)	4-21
---	------

INDICE DAS TABELAS

Tabela 2.1: Comparação de $E_u(N_1)$ e $E_b(N_1)$	2-11
Tabela 2.2: Valores que tornam $E_u(N) = E_b(N)$ para diferentes valores de p_1	2-12
Tabela 2.3.a: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 1,5$	2-16
Tabela 2.3.b: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 2$	2-17
Tabela 2.3.c: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 2,5$	2-18
Tabela 2.3.d: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 3$	2-19
Tabela 2.3.e: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 3,5$	2-20
Tabela 2.3.f: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 4$	2-21
Tabela 2.3.g: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 4,5$	2-22
Tabela 2.4.a: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,01$)	2-29
Tabela 2.4.b: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,05$)	2-31
Tabela 2.4.c: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,10$)	2-33
Tabela 2.4.d: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,20$)	2-35
Tabela 2.4.e: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$)	2-37
Tabela 2.4.f: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,50$)	2-39
Tabela 2.4.g: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,01$)	2-41

Tabela 2.4.h: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,05$)	2-43
Tabela 2.4.i: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,10$)	2-45
Tabela 2.4.j: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,20$)	2-47
Tabela 2.4.k: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$)	2-49
Tabela 2.4.l: $Ef_{B/U}^*$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,50$)	2-51
Tabela 2.5.a: Eficiência média esperada ($\alpha = 3$; $m = 12$)	2-54
Tabela 2.5.b: Eficiência média esperada ($\alpha = 2$; $m = 18$)	2-54
Tabela 2.5.c: Eficiência média esperada ($\alpha = 2$; $m = 24$)	2-55
Tabela 2.5.d: Eficiência média esperada ($\alpha = 2$; $m = 30$)	2-55
Tabela 2.5.e: Eficiência média esperada ($\alpha = 2$; $m = 40$)	2-56
Tabela 2.5.f: Eficiência média esperada ($\alpha = 2$; $m = 50$)	2-56
Tabela 2.5.g: Eficiência média esperada ($\alpha = 3$; $m = 12$)	2-57
Tabela 2.5.h: Eficiência média esperada ($\alpha = 3$; $m = 18$)	9-57
Tabela 2.5.i: Eficiência média esperada ($\alpha = 3$; $m = 24$)	9-58
Tabela 2.5.j: Eficiência média esperada ($\alpha = 3$; $m = 30$)	9-58
Tabela 2.5.k: Eficiência média esperada ($\alpha = 3$; $m = 40$)	9-59
Tabela 2.5.l: Eficiência média esperada ($\alpha = 3$; $m = 50$)	9-59
Tabela 2.6.a: Variância de T para o delineamento U ($\alpha = 2$)	2-62
Tabela 2.6.b: Variância de T para o delineamento B ($\alpha = 2$)	2-62
Tabela 2.6.c: Variância de T para o delineamento U ($\alpha = 3$)	2-63
Tabela 2.6.d: Variância de T para o delineamento B ($\alpha = 3$)	2-63
Tabela 2.7.a: Valores de $E_u(T)$ para α entre 2 e 5	2-68

Tabela 2.7.b: Valores de $E_b(T)$ para $\alpha = 2$	2-68
Tabela 2.7.c: Valores de $E_b(T)$ para $\alpha = 3$	2-69
Tabela 3.1.a: Valores de $Ef_{U1/U}$ ($\alpha = 2; k = 3; n = 5$)	3-11
Tabela 3.1.b: Valores de $Ef_{U1/U}$ ($\alpha = 3; k = 3; n = 5$)	3-11
Tabela 3.2.a: Valores de p_1^* ($\alpha = 2; k = 3; n = 5$)	3-12
Tabela 3.2.b: Valores de p_1^* ($\alpha = 3; k = 3; n = 5$)	3-12
Tabela 3.3.a: Valores de p_2^* ($\alpha = 2; k = 3; n = 5$)	3-13
Tabela 3.3.b: Valores de p_2^* ($\alpha = 3; k = 3; n = 5$)	3-13
Tabela 3.4.a: Valores de R_{u1} ($\alpha = 2; k = 3; n = 5$)	3-14
Tabela 3.4.b: Valores de R_{u1} ($\alpha = 3; k = 3; n = 5$)	3-14
Tabela 3.5.a: Valores de n_i para o delineamento $U1$ ($\alpha = 2; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20; k = 3; n = 5$)	3-16
Tabela 3.5.b: Valores de n_i para o delineamento $U1$ ($\alpha = 3; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20; k = 3; n = 5$)	3-19
Tabela 4.1.a: Valores de $Ef^{U2/U}$ ($\alpha = 2; k = 3$)	3-19
Tabela 4.1.b: Valores de $Ef^{U2/U}$ ($\alpha = 2; k = 2$)	4-10
Tabela 4.1.c: Valores de $Ef^{U2/U}$ ($\alpha = 3; k = 3$)	4-11
Tabela 4.1.d: Valores de $Ef^{U2/U}$ ($\alpha = 3; k = 2$)	9-11

Tabela 4.2.a: Valores de p_1^* ($\alpha = 2; k = 3$)	4-12
Tabela 4.2.b: Valores de p_1^* ($\alpha = 2; k = 2$)	4-12
Tabela 4.2.c: Valores de p_1^* ($\alpha = 3; k = 3$)	4-13
Tabela 4.2.d: Valores de p_1^* ($\alpha = 3; k = 2$)	4-13
Tabela 4.3.a: Valores de R_{u2} ($\alpha = 2; k = 3$)	4-14
Tabela 4.3.b: Valores de R_{u2} ($\alpha = 2; k = 2$)	4-14
Tabela 4.3.c: Valores de R_{u2} ($\alpha = 2; k = 3$)	4-15
Tabela 4.3.d: Valores de R_{u2} ($\alpha = 3; k = 2$)	4-15
Tabela 4.4.a: Valores de f_i para o delineamento $U2$ ($\alpha = 2; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20 k = 3$)	4-17
Tabela 4.4.b: Valores de f_i para o delineamento $U2$ ($\alpha = 3; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20 k = 3$)	4-20

Capítulo I

GRÁFICOS DE CONTROLE

1.1 INTRODUÇÃO

Os gráficos de controle foram introduzidos por Shewhart, ainda nos anos 30. Com eles inicia-se o uso sistemático de técnicas estatísticas no controle da qualidade.

A base teórica dos gráficos de controle é a diferenciação das causas de variação da qualidade, em sistemáticas e aleatórias. Com a adoção do ponto de vista estatístico no acompanhamento de processos industriais, tem sido observado que certas variações na qualidade do produto pertencem à categoria das variações aleatórias. A variação aleatória é tecnicamente inevitável, pois ela é o resultado de uma infinidade de causas complexas, cada uma delas contribuindo com uma parcela insignificante para a variação total.

Além das variações aleatórias na qualidade, existem as variações produzidas por causas identificáveis - ou assinaláveis. Estas variações são relativamente grandes, e normalmente causadas por ajustes indevidos da máquina, erros do operador, defeitos na matéria prima, entre outras.

Se num processo produtivo as variações na qualidade do produto não forem devidas a causas assinaláveis, ele será considerado sob controle. Caso contrário, o processo será considerado fora de controle.

O funcionamento de um gráfico de controle pode ser explicado da seguinte maneira: amostras de tamanho fixo, n , são retiradas do processo a intervalos de tempo constantes, h . Para cada amostra uma estatística

U é calculada, e seus valores plotados sequencialmente no gráfico de controle, conforme mostra a figura 1.1. Esta estatística U pode ser, por exemplo, a fração de itens defeituosos na amostra, a média amostral de uma característica quantitativa de interesse, ou a amplitude amostral daquela característica, entre outras.

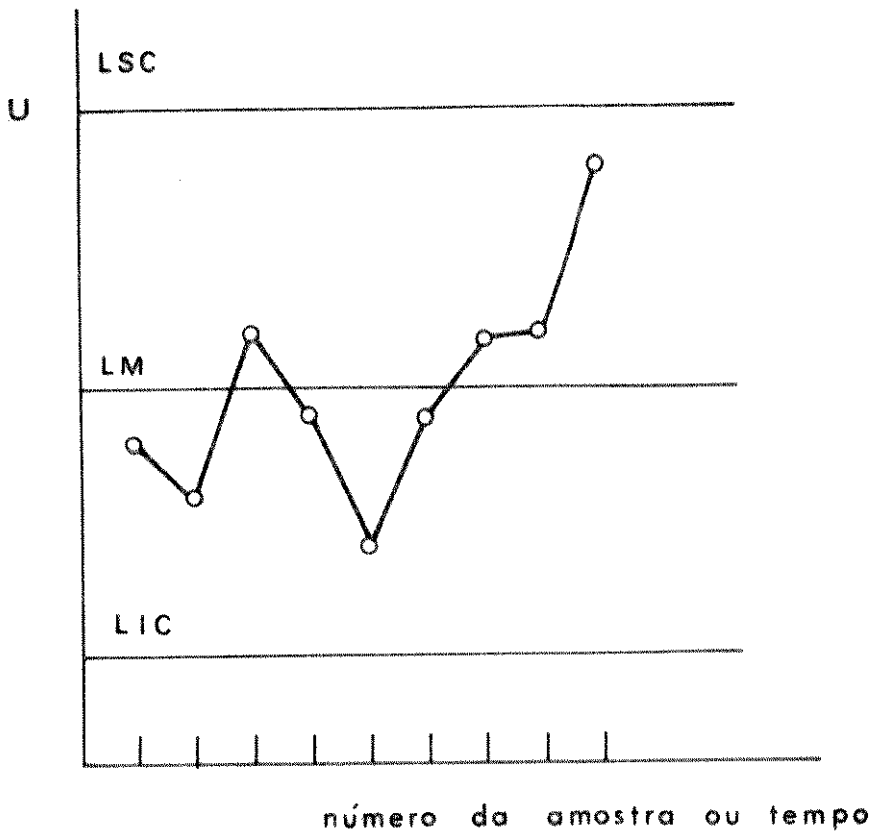


Figura 1.1: Um Gráfico de Controle Típico

O gráfico de controle contém uma linha central (LM) que representa o valor médio da estatística U , quando causas assinaláveis não estão presen-

tes. Além desta linha, existem duas outras linhas horizontais denominadas: limite superior de controle (LSC) e limite inferior de controle (LIC). Estes limites de controle são escolhidos de maneiras a que, na ausência de causas assinaláveis, praticamente todos os pontos caiam entre eles.

Com o passar do tempo, se todos os pontos vão caindo dentro dos limites, sem apresentarem um comportamento sistemático, assume-se que o processo está sob controle estatístico, e nenhuma intervenção no mesmo é necessária. Por outro lado, um ponto que cai fora daqueles limites é interpretado como uma evidência de que o processo está fora de controle, recomendando ações de investigação e correção para encontrar e eliminar as causas assinaláveis. É prática comum ligar os pontos no gráfico de controle, como na figura 1.1, para que se possa melhor visualizar como a sequência de pontos vem se distribuindo ao longo do tempo.

Evidências de que um processo não se encontra em estado de controle estatístico podem ser fornecidas também por um comportamento sistemático, ou não aleatório, dos pontos no gráfico, mesmo que nenhum deles tenha caído fora dos limites de controle.

Existe uma estreita ligação entre gráficos de controle e testes de hipótese. Essencialmente, o gráfico de controle é um teste da hipótese de que o processo está em um estado de controle estatístico. Um ponto plotado dentro dos limites é equivalente a não rejeitar a hipótese do controle estatístico, e um ponto plotado fora dos limites é equivalente a rejeição desta hipótese. Assim como nos testes de hipótese, pode-se pensar na probabilidade do erro do tipo I dos gráficos de controle, ou seja, a probabilidade de se concluir que o processo está fora de controle quando ele realmente está sob controle e, reciprocamente, na probabilidade do erro do tipo II.

1.2 DESCRIÇÃO DO MODELO BÁSICO DE DUNCAN

Tradicionalmente, os gráficos de controle têm sido planejados levando em consideração apenas critérios estatísticos. Mais especificamente, a escolha do tamanho da amostra e dos limites de controle, são feitas geralmente de forma a se controlar a probabilidade de alarmes falsos (erro tipo I), e a capacidade de detecção de falhas. O intervalo entre amostragens não tem sido tratado analiticamente, sendo normalmente determinado em função do ritmo de produção, da frequência com que o sistema sai de controle, e das

perdas associadas à operação fora de controle.

De forma sumária, o planejamento de um gráfico de controle consiste da escolha dos parâmetros tamanho da amostra n , intervalo entre amostragens h , e o fator de abertura dos limites de controle k . Por outro lado, a operação de um plano de qualidade baseado num gráfico de controle envolve custos diversos. Entre estes destacamos os custos com amostragem e inspeção, os custos associados à investigação de uma falta de controle e sua eventual correção, bem como os custos totais associados à operação do sistema fora de controle. Todos estes custos são influenciados pela escolha dos valores de n , h , e k . Desta forma é evidente que o planejamento de um gráfico de controle deve ser feito sob critérios objetivos de otimalidade econômica.

Duncan (1956) ofereceu o primeiro modelo completo para o planejamento econômico de gráficos de controle, com uma metodologia de otimização formal para determinar os parâmetros n , h , e k .

O modelo básico de Duncan assume que a distribuição da variável aleatória X , que representa o característico de qualidade mensurável, é normal com média μ e desvio padrão σ , e que existe uma única causa assinalável que ocorre após um tempo T_1 de funcionamento do sistema. Esta causa assinalável provoca um deslocamento na média μ de mais ou menos δ desvios padrões, sem alterar o desvio padrão σ . A ocorrência da causa assinalável bloqueia a ocorrência de novas causas assinaláveis até que ela seja detectada e eliminada, dando início a um novo ciclo de qualidade.

Desta forma, a probabilidade β de um alarme falso na i -ésima amostragem, dada a não ocorrência da causa assinalável até o instante desta amostragem, é:

$$\beta = 2\Phi(-k) \quad (1.1)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a distribuição acumulada da normal padrão e k é o fator de abertura dos limites de controle, isto é:

$$LSC = \mu + k\sigma/n^{1/2} \quad (1.2)$$

$$LIC = \mu - k\sigma/n^{1/2} \quad (1.3)$$

Após a ocorrência da causa assinalável, a probabilidade de que ela seja detectada na i -ésima amostragem, dada a sua não detecção até a $(i-1)$ -ésima amostragem é:

$$p_2 = \Phi(-k - \delta n^{1/2}) + \Phi(-k + \delta n^{1/2}) \quad (1.4)$$

A quantidade p_2 é o poder do teste, e $1 - p_2$ é a probabilidade do erro do tipo II.

A distribuição do tempo de ocorrência da causa assinalável, T_1 , é suposta exponencial com parâmetro θ conhecido, ou seja, $f_{T_1}(t) = (1/\theta)\exp(-t/\theta)$, logo $\theta = E(T_1)$. Portanto h , o intervalo de tempo entre amostragens, pode ser expresso em termos da probabilidade de ocorrência da causa assinalável em um intervalo entre amostragens, dada a sua não ocorrência até o início deste intervalo. Ou seja, se $t_i, i = 1, 2, 3, \dots$, forem os instantes de amostragens, $t_i = ih$, então da distribuição exponencial:

$$Pr[T_1 \leq t_i / T_1 > t_{i-1}] = 1 - \exp(-h/\theta) \quad (1.5)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$, com $t_0 = 0$.

Esta probabilidade independe de i , seja p_1 o seu valor, logo:
 $h = -E(T_1)\ln(1 - p_1)$.

Seja N_1 o número de amostras antes da ocorrência da causa assinalável e N_2 o número de amostras tomadas após a ocorrência da causa assinalável até a sua detecção no gráfico de controle, então N_1 e $N_2 - 1$ são variáveis aleatórias independentes, com distribuição geométrica de parâmetros p_1 e p_2 respectivamente. Portanto, $E(N_1) = (1 - p_1)/p_1$ e $E(N_2) = 1/p_2$.

Um ciclo de qualidade, é definido como o intervalo de tempo entre o início da produção, admitindo que o processo se encontra sob controle, até o instante em que a causa assinalável é encontrada no sistema. O modelo básico de Duncan assume que o processo não para durante a procura da causa assinalável, portanto a duração esperada de um ciclo de qualidade, $E(T)$, é dada por:

$$E(T) = [E(N_1) + E(N_2)]h + b_1n + b_2 \quad (1.6)$$

onde b_1n é o tempo necessário para tomar, inspecionar e interpretar os resultados de uma amostra de tamanho n , e b_2 é o tempo necessário para encontrar a causa assinalável no sistema.

O tempo médio de ocorrência da causa assinalável dentro de um intervalo entre amostragem é τ :

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{ih}^{(i+1)h} (t - ih) f_{T_1}(t) dt \quad (1.7)$$

$$\tau = E(T_1) \{1 + [(1 - p_1)/p_1] \ln(1 - p_1)\} \quad (1.8)$$

Os custos considerados no modelo básico de Duncan são: os custos com alarmes falsos, os custos com amostragens, os custos associados ao funcionamento do sistema fora de controle e o custo relativo a procura da causa assinalável.

Se a_3 for o custo de um alarme falso, então o custo esperado com alarmes falsos em um ciclo será igual a $a_3\beta E(N_1)$. Se a_1 e a_2 forem os custos fixo e variável com cada amostragem, então o custo esperado com amostragens por ciclo será $(a_1 + a_2n)[E(N_1) + E(N_2) + (b_1n + b_2)/h]$.

Se a_4 for o custo associado ao funcionamento do sistema fora de controle por unidade de tempo, então a esperança do custo associado ao funcionamento do sistema fora de controle por ciclo será $a_4[(1/p_2 - \tau)h + (b_1n + b_2)]$. Finalmente seja a_5 o custo esperado com a procura da causa assinalável.

Se $E(C)$ for a soma de todos os custos esperados em um ciclo, então o custo esperado por unidade de tempo será avaliado por $E(C)/E(T)$

$$E(C)/E(T) = (a_1 + a_2n)/h + \{a_3\beta E(N_1) + a_4[(1/p_2 - \tau)h + (b_1n + b_2)] + a_5\} / \{[E(N_1) + E(N_2)]h + b_1n + b_2\} \quad (1.9)$$

A minimização de (1.9) nos fornece os valores ótimos de p_1 , p_2 e n , portanto os valores ótimos dos parâmetros do gráfico de controle n , h e k .

Diferentes alterações podem ser feitas no modelo acima. Um estudo detalhado deste assunto, bem como o estudo econômico para outros tipos de gráficos de controle podem ser encontrados em Montgomery (1985).

1.3 REVISÃO DA LITERATURA

Uma revisão recente dos trabalhos que tratam do projeto econômico de gráficos de controle pode ser encontrada em Montgomery (1985). O que se pretende fazer aqui é apenas uma breve revisão dos trabalhos mais recentes que tratam do tema.

Rahim (1985) investigou o efeito de não normalidade e erros de mensuração no estudo econômico dos gráficos de controle $\bar{X}$. O característico de qualidade mensurável do produto é modelado por uma variável aleatória com função-densidade de probabilidade $f(\mu, \sigma, b_1, b_2)$. Onde μ é a média, σ^2 a variância, b_1 a medida de achatamento e b_2 a medida de assimetria. Como no modelo de Duncan, o processo está sujeito a uma única causa assinalável cujo tempo de ocorrência é descrito por uma variável aleatória com distribuição exponencial. A única causa assinalável desloca a média μ sem alterar os valores de σ , b_1 e b_2 . Cada observação contém algum desvio do valor verdadeiro devido aos erros de mensuração. Este desvio, caracterizado por viés e imprecisão, é representado por uma variável aleatória normal. Ao contrário do modelo de Duncan, Rahim assume que o processo pára durante a procura da causa assinalável. Um ciclo de produção aqui consiste de quatro períodos: (1) período em controle, (2) período fora de controle, (3) período de investigação devido a alarmes falsos e (4) período de investigação e reparo devido a alarmes verdadeiros.

A estrutura de custos engloba o custo fixo e variável com amostragens, o custo com a procura da causa assinalável quando ela existe ou não e os custos de ajuste e correção. O efeito dos parâmetros de não normalidade e erros de mensuração no projeto dos parâmetros dos gráfico de controle e na função de custos é analisado através de alguns exemplos numéricos.

Dois diferentes modelos, um no qual o processo pára durante a procura da causa assinalável e outro, em que ele continua em operação, foram comparados por Panagos, Heikes e Montgomery (1985) em termos do projeto econômico de gráficos de controle. Eles chegaram as seguintes conclusões: 1) o delineamento do processo descontínuo resulta em tamanhos de amostras maiores, limites de controle mais amplos e intervalos de tempo entre amostragens mais longos do que o delineamento do processo contínuo, independente de qual delineamento produza o mínimo custo; 2) o processo descontínuo geralmente resulta em custos menores que o processo contínuo

quando o rendimento que se obtém durante o período em que o processo permanece fora de controle é negativo; 3) quando o rendimento durante o estado de controle é alto, o processo contínuo sempre produz custos menores e a penalidade por se adotar o modelo inadequado usualmente é alta; 4) há sempre uma penalidade por se adotar o modelo inadequado. A penalidade por se utilizar o delineamento de um processo contínuo para um processo que pára durante a procura da causa assinalável, tende a ser maior que a penalidade por se utilizar o delineamento de um processo descontínuo para um processo que continua em operação durante a procura da causa assinalável. Como o modelo de Duncan de um processo contínuo é o mais conhecido, a primeira situação é mais comum de ocorrer na prática. A penalidade por se utilizar o delineamento desenvolvido para um processo contínuo, em um processo que na verdade pára durante a procura da causa assinalável, tende a ser alto; desta maneira cuidado deve ser tomado ao se utilizar um modelo econômico que troque o tipo de busca que o processo requer.

Lorenzen e Vance (1986) apresentam um método geral para se determinar o projeto econômico dos gráficos de controle. O método se aplica a todos os gráficos de controle, independente da estatística utilizada. É necessário somente determinar o valor médio da estatística quando o processo está sob controle e quando o processo está fora de controle de alguma maneira especificada. Isto é particularmente fácil quando as estatísticas plotadas são independentes. Um dos objetivos deste trabalho é unificar a notação.

Montgomery e Storer (1986) discutem e comparam dois métodos de otimização de custos na seleção dos valores dos parâmetros, n , h e k , dos gráficos de controle de Shewhart. Quando o modelo de Duncan (1956) é adotado, nove parâmetros devem ser identificados pelo modelador para definir o custo da qualidade: 1) magnitude da mudança do processo; 2) custo fixo com amostragem; 3) custo variável por unidade amostrada; 4) custo de operação fora de controle; 5) custo associado a um alarme falso; 6) custo associado a um alarme verdadeiro; 7) tempo requerido para tomar uma amostra; 8) tempo requerido para localizar uma causa assinalável; 9) tempo entre a ocorrência da causa assinalável e a amostragem subsequente. Os autores propõem um procedimento alternativo, que considera apenas os cinco primeiros parâmetros acima, e mostram que há pouca diferença entre o delineamento ótimo obtido da otimização completa com nove

parâmetros e o delineamento ótimo obtido da otimização mais simples com cinco parâmetros.

Um procedimento simples para a escolha economicamente ótima dos valores dos parâmetros dos gráficos de controle $\bar{X}$, é apresentado por Colani (1986). Este procedimento, que dispensa o uso de computador, tem as seguintes características: 1) assumindo uma taxa de produção constante, o custo por item é escolhido como o critério de otimalidade ao invés do custo por hora; 2) inspeções do sistema a cada h unidades de tempo sem proceder à inspeção por amostragem é incluída como uma alternativa.

Champ e Woodall (1987) usando cadeias de Markov, fornecem um método simples e eficiente para analisar os gráficos de controle de Shewhart com regras de controle suplementares. A regra de controle que indica se k dentre os m últimos valores de $\bar{X}$ caem no intervalo (a, b) , $a < b$, é denotada por $T(k; m; a; b)$. O gráfico $\bar{X}$ usual é denotado por $[T(1; 1; -\infty; 3), T(1; 1; 3; \infty)]$. Nove regras de controle, e combinações destas regras, foram consideradas:

Regra 1: $C_1 = \{T(1; 1; -\infty; -3), T(1; 1; 3; \infty)\}$

Regra 2: $C_2 = \{T(2; 3; -3; -2), T(2; 3; 2; 3)\}$

Regra 3: $C_3 = \{T(4; 5; -3; -1), T(4; 5; 1; 3)\}$

Regra 4: $C_4 = \{T(8; 8; -3; 0), T(8; 8; 0; 3)\}$

Regra 5: $C_5 = \{T(2; 2; -3; -2), T(2; 2; 2; 3)\}$

Regra 6: $C_6 = \{T(5; 5; -3; -1), T(5; 5; 1; 3)\}$

Regra 7: $C_7 = \{T(1; 1; -\infty; -3, 09), T(1; 1; 3, 09; \infty)\}$

Regra 8: $C_8 = \{T(2; 3; -3, 09; -1, 96), T(2; 3; 1, 96; 3, 09)\}$

Regra 9: $C_9 = \{T(8; 8; -3, 09; 0), T(8; 8; 0; 3, 09)\}$

As regras de controle suplementares tornam os gráficos de controle de Shewhart mais sensíveis a pequenas mudanças na média do processo, porém não tão sensíveis quanto os gráficos de controle das somas acumuladas.

A adoção do espaçamento entre amostragens fixo foi questionada por Reynolds, Amin, Arnold e Nachlas (1988). Eles investigaram os gráficos de controle $\bar{X}$ que adotam um intervalo entre amostragens pequeno quando o valor de $\bar{X}$ está próximo, mas, não fora dos limites de controle, e um intervalo entre amostragens longo quando o valor de $\bar{X}$ está próximo da média do processo. Os gráficos de controle com intervalos entre amostragens assim variáveis são substancialmente mais eficientes que os gráficos de controle tradicionais.

Hu (1986) considera o modelo de Duncan na situação em que o tempo de

ocorrência da causa assinalável é descrito por uma distribuição de Weibull, portanto assumindo um processo de deterioração. Considerando constante o intervalo de tempo entre amostragens, ele conclui que o delineamento ótimo é praticamente insensível à relaxação da hipótese de taxa de falha constante.

Uma questão que se pode levantar é a seguinte: O que ocorreria se, no contexto de um processo com deterioração a hipótese de amostragens a intervalos regulares, isto é h constante, ou a hipótese de amostras de tamanhos iguais, isto é n constante, ou ainda a hipótese de limites de controle constantes, isto é k constante, fosse alterada? Esta é a questão que será tratada no presente trabalho.

Capítulo II

GRÁFICOS DE CONTROLE COM ESQUEMA BALANCEADO DE AMOSTRAGEM.

2.1 INTRODUÇÃO

O estudo econômico dos gráficos de controle foi iniciado por Duncan (1956), e desde então muita atenção tem sido dada à estrutura de custos do modelo e ao desenvolvimento de algoritmos simples para a determinação dos valores ótimos dos parâmetros n , h e k . Porém, pouca atenção tem sido dada à distribuição do tempo de falha do sistema, T_1 , assumindo-se para esta variável aleatória uma distribuição exponencial. Contudo, como observado por Baker (1971), este fato parece se basear muito mais nas facilidades matemáticas geralmente associadas ao modelo exponencial, do que numa fundamentação teórica ou empírica sólida.

De um modo geral, sistemas físicos reais sofrem, com o funcionamento, um processo natural de desgaste, apresentando consequentemente uma taxa de falha crescente com o tempo. No planejamento econômico de gráficos de controle destinados a controlar sistemas desta natureza, a distribuição de T_1 não deve ser modelada por uma distribuição exponencial, pois a esta está associada uma taxa de falha constante. Neste trabalho, propomos um modelo alternativo para T_1 que incorpore algum tipo de processo de deterioração, implicando em uma taxa de falha crescente. Em particular

a distribuição de Weibull com parâmetro de forma α , apresenta uma taxa de falha proporcional a $t^{\alpha-1}$ e é uma das distribuições mais empregadas na modelagem do tempo de falha (Barlow e Proschan, 1975, p.73).

Em um estudo recente, Hu (1986) investigou a situação em que T_1 tem uma distribuição de Weibull. Porém, não questionando a adoção de valores fixos para h , n e k , chegou à conclusão de que os valores ótimos dos parâmetros do gráfico de controle $\bar{X}$ são praticamente insensíveis a esta alteração. Desta forma reforçou a convicção de que mesmo em contextos em que não tenha fundamentação física a hipótese de exponenciabilidade de T_1 , ainda assim, os valores ótimos dos parâmetros praticamente não se alteram.

Munford e Shahani (1972) propuseram para a detecção da falha de um sistema, o seguinte esquema de inspeção: Uma inspeção é realizada sempre que o tempo decorrido desde a última inspeção for tal que a probabilidade acumulada da ocorrência da falha, dada a sua não ocorrência até o instante da última inspeção, seja igual a um dado valor fixo p_1 . Em outras palavras, se t_i , é o tempo em que a i -ésima inspeção é feita, então os t_i 's são tais que: $Pr[t_i < T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i] = p_1$, para $i = 0, 1, 2, \dots$, onde $t_0 = 0$. Este esquema é então balanceado em termos da probabilidade condicional de ocorrência da falha.

O esquema balanceado de inspeção pode ser empregado como um esquema balanceado de amostragem para a determinação dos instantes de amostragens dos gráficos de controle. Nota-se que, quando T_1 tem distribuição exponencial, o intervalo de tempo entre amostragens permanece constante; portanto, neste caso, o esquema de amostragens é balanceado tanto em termos do tempo quanto em termos da probabilidade condicional de ocorrência da causa assinalável. No caso geral, dependendo de qual seja a taxa de falha da distribuição de T_1 , crescente ou decrescente, os intervalos de tempo entre amostragens serão crescentes ou decrescentes.

A suposição de que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, com $\alpha > 1$ e a adoção de um esquema balanceado de amostragem, implica em amostragens a intervalos de tempo decrescentes. Este fato vai de encontro à sólida tradição estabelecida dos esquemas de amostragens a intervalos de tempo constantes, na construção de gráficos de controle. Contudo, mostraremos neste trabalho, que o plano balanceado de amostragem apresenta elegância formal, além de algumas vantagens sobre o plano tradicional. Em particular, ele reduz o tempo médio esperado de operação do sistema fora de controle.

Na seção 2.2 definiremos os delineamentos uniforme e balanceado. Nas seções 2.2, 2.3 e 2.4 determinaremos respectivamente os instantes de amostragens, o número esperado de amostras por ciclo de qualidade, e a esperança de T_2 , para ambos delineamentos. Um ciclo de qualidade engloba dois inícios de operação, e T_2 representa o tempo em que o sistema permanece fora de controle. Na seção 2.5 mediremos a eficiência do delineamento balanceado com respeito ao delineamento uniforme em termos de T_2 , para um igual número esperado de amostras por ciclo de qualidade.

Na seção 2.6 avaliaremos a estabilidade da eficiência com respeito ao parâmetro de forma da distribuição de Weibull, suposto estimado a partir de uma amostra. Determinaremos também a eficiência média esperada para diversos tamanhos de amostras. Na seção 2.7 determinaremos as variâncias de T , onde $T = T_1 + T_2$, para ambos delineamentos, balanceado e uniforme. Na seção 2.8 a título de ilustração, faremos algumas simulações Monte Carlo do emprego dos delineamentos balanceado e uniforme, com T_1 distribuído segundo uma Weibull, para valores escolhidos de p_1 , p_2 e α . Finalmente, na seção 2.9 apresentaremos algumas conclusões gerais.

2.2 DETERMINAÇÃO DOS INTERVALOS ENTRE AMOSTRAGENS

2.2.1 POLÍTICA DE INSPEÇÃO DE MUNFORD E SHAHANI

Munford e Shahani (1972), propuseram a seguinte política de inspeção, para a detecção da falha de um sistema: Uma inspeção é realizada sempre que o tempo decorrido desde a última inspeção for tal que a probabilidade acumulada da ocorrência da falha, dada a sua não ocorrência até o instante da última inspeção, seja igual a um dado valor fixo p_1 . Em outras palavras, se T_1 é a variável aleatória que representa o instante de falha do sistema e t_i , é o tempo em que a i -ésima inspeção é realizada então:

$$Pr[t_i < T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i] = p_1, \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots \text{ onde } t_0 = 0$$

Esta política de inspeção, pode ser empregada na construção dos gráficos de controle de Shewhart, agora como um esquema de amostragem que determina os instantes de retirada de amostras. Neste caso, a única diferença que existe é a de que só se inspeciona o sistema quando o valor médio, na amostra, do característico de qualidade a que se está controlando, cai fora

dos limites de controle.

Dizemos que este esquema de amostragem, é então balanceado em termos da probabilidade condicional de ocorrência da causa assinalável, e tem a propriedade de construir intervalos entre amostragens decrescentes se a taxa de falha do sistema for crescente.

Se $F_{T_1}(T)$ é a função de distribuição de probabilidade de T_1 , então:

$$[F_{T_1}(t_i) - F_{T_1}(t_{i-1})]/[1 - F_{T_1}(t_{i-1})] = p_1 \quad (2.1)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$, onde $t_0 = 0$ e $F_{T_1}(0) = 0$.

Note que $F_{T_1}(t_1) = p_1$. A equação (2.1) pode ser reescrita como:

$$F_{T_1}(t_i) = p_1 + (1 - p_1)F_{T_1}(t_{i-1}) \quad (2.2)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$.

A equação (2.2) pode ser facilmente resolvida para t_i , fornecendo:

$$F_{T_1}(t_i) = 1 - (1 - p_1)^i \quad (2.3)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$.

Assim para um dado p_1 temos:

$$t_i = F_{T_1}^{-1}(1 - (1 - p_1)^i) \quad (2.4)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$.

2.2.2 INTERVALOS ENTRE AMOSTRAGENS

Se $T_1 \sim \text{EXP}(\theta)$, ou seja $F_{T_1}(t) = 1 - \exp(-t/\theta)$ para $t > 0$, e $\theta = E(T_1)$, então utilizando (2.4) temos:

$$t_i = -iE(T_1)\ln(1 - p_1) \quad (2.5)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$, ou:

$$t_i = ih \quad (2.6)$$

onde h é o intervalo de tempo entre amostragens:

$$h = -E(T_1)\ln(1 - p_1) \quad (2.7)$$

Assim, para o caso em que $T_1 \sim \text{EXP}(\theta)$ o delineamento amostral a intervalos constantes é também balanceado.

Se $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, ou seja, $F_{T_1} = 1 - \exp(-t^\alpha/\theta)$ para $t > 0$, então de (2.4) temos:

$$t_i = [-i\theta \ln(1 - p_1)]^{1/\alpha} \quad (2.8)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$, ou:

$$t_i = i^{1/\alpha} t_1 \quad (2.9)$$

onde:

$$t_1 = [-\theta \ln(1 - p_1)]^{1/\alpha} \quad (2.10)$$

Como para $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$:

$$E(T_1) = \theta^{1/\alpha} \Gamma(1/\alpha + 1) \quad (2.11)$$

nós podemos escrever:

$$\theta = [E(T_1)/\Gamma(1/\alpha + 1)]^\alpha$$

Substituindo (2.11) em (2.10) temos:

$$t_1 = E(T_1)[- \ln(1 - p_1)]^{1/\alpha} / \Gamma(1/\alpha + 1) \quad (2.12)$$

O intervalo de tempo h_i entre a $(i - 1)$ -ésima amostragem e a i -ésima amostragem é obtido a partir de (2.9):

$$h_i = [i^{1/\alpha} - (i - 1)^{1/\alpha}] t_1 \quad (2.13)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$. Nota-se que $h_1 = t_1$.

Para $\alpha > 1$, a taxa de falha da distribuição de Weibull é crescente, e os intervalos entre amostragens serão decrescentes.

2.2.3 DELINEAMENTO BALANCEADO E DELINEAMENTO UNIFORME

Partindo do modelo básico de Duncan, assumiremos um ciclo de qualidade, de comprimento T , como composto de duas fases diferentes: Uma na qual o processo opera sob controle, com comprimento T_1 , e outra, após

a ocorrência da causa assinalável, com o processo operando fora de controle, com comprimento T_2 . O tempo de procura e de correção da falha é considerado como sendo nulo. Portanto $T = T_1 + T_2$.

Para introduzir o processo de deterioração do sistema nós modelaremos $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, com parâmetros conhecidos, e estabeleceremos um delineamento balanceado, onde os instantes de amostragens serão dados pela expressão (2.9):

$$t_i = i^{1/\alpha} h_1$$

e a duração do i -ésimo intervalo de tempo entre amostragens pela expressão (2.13):

$$h_i = [i^{1/\alpha} - (i-1)^{1/\alpha}] h_1$$

onde de (2.12):

$$h_1 = E(T_1) [-\ln(1-p_1)]^{1/\alpha} / \Gamma(1/\alpha + 1)$$

O valor de p_1 é pré-determinado por critérios econômicos. Para efeito de comparação definiremos um delineamento uniforme que erroneamente considera $T_1 \sim \text{Exp}(\theta)$, isto é $\alpha = 1$ e $\theta = E(T_1)$. Neste caso os intervalos de tempo entre amostragens serão constantes e iguais a h , de (2.7):

$$h = -E(T_1) \ln(1-p_1)$$

O delineamento uniforme, engloba a estratégia tradicional das amostragens a intervalos de tempo constantes, portanto não leva em conta o possível processo de desgaste do sistema. O delineamento balanceado tem forte apelo prático, pois considera o processo de desgaste do sistema. Porém a execução de um plano de amostragem a intervalos de tempo decrescentes deve ser viabilizada operacionalmente. O delineamento balanceado apresenta algumas vantagens sob o delineamento uniforme. Em particular, será mostrado, que ele reduz o tempo esperado de funcionamento do sistema fora de controle, para um igual número esperado de amostragens por ciclo.

2.3 O NÚMERO ESPERADO DE AMOSTRAS POR CICLO

Para comparar o delineamento uniforme, ou U , com o delineamento balanceado, ou B , é necessário conhecer o número esperado de amostras por ciclo associado a cada um. Seja N_1 e N_2 o número de amostras tomadas respectivamente antes e depois da ocorrência da causa assinalável. O número total de amostras por ciclo será então $N = N_1 + N_2$.

2.3.1 DETERMINAÇÃO DO VALOR ESPERADO DE N PARA O DELINEAMENTO U

Sob o modelo básico de Duncan, mas com $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, nós determinaremos $E_u(N)$, o valor esperado de N sob o delineamento U . O período constante h é obtido do conhecimento de $E(T_1)$, e da suposição errada de que $T_1 \sim \text{Exp}(\theta)$, isto é, que $\alpha = 1$ e $\theta = E(T_1)$, portanto da expressão (2.7), temos:

$$h = -E(T_1) \ln(1 - p_1)$$

Se X é a variável aleatória que representa o instante de ocorrência da falha dentro de um intervalo entre amostragens, então a função densidade de probabilidade de X é expressa por:

$$f_x(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_{T_1}(ih + x) \quad (2.14)$$

Portanto:

$$E(X) = \int_0^h x f_x(x) dx \quad (2.15)$$

Substituindo (2.14) em (2.15) vem:

$$E(X) = \int_0^h x \sum_{i=0}^{\infty} f_{T_1}(ih + x) dx$$

Ou ainda:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^h x f_{T_1}(ih + x) dx \quad (2.16)$$

Lembrando que para $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$:

$$f_{T_1}(t) = (\alpha/\theta)t^{\alpha-1}\exp(-t^\alpha/\theta) \quad (2.17)$$

Portanto substituindo (2.17) em (2.16) vem:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^h x(\alpha/\theta)(ih+x)^{\alpha-1}\exp[-(ih+x)^\alpha/\theta]dx$$

Fazendo $y = (ih+x)^\alpha$ temos que:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{(ih)^\alpha}^{(ih+h)^\alpha} (y^{1/\alpha} - ih)(1/\theta)\exp(-y/\theta)dy$$

Ou:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_{(ih)^\alpha}^{(ih+h)^\alpha} (y^{1/\alpha}/\theta)\exp(-y/\theta)dy - \right. \\ \left. - ih \int_{(ih)^\alpha}^{(ih+h)^\alpha} (1/\theta)\exp(-y/\theta)dy \right\}$$

Ou:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Gamma(1/\alpha + 1)\theta^{1/\alpha} * \right. \\ * \int_{(ih)^\alpha}^{(ih+h)^\alpha} \{y^{1/\alpha}/[\Gamma(1/\alpha + 1)\theta^{1/\alpha+1}]\}\exp(-y/\theta)dy - \\ \left. - ih[\exp(-(ih)^\alpha/\theta) - \exp(-(ih+h)^\alpha/\theta)] \right\}$$

$$x + 1)\theta^{1/\alpha+1}]\}\exp(-y/\theta)dy -$$

$$i)^\alpha/\theta] - \exp[-(ih+h)^\alpha/\theta]\}$$

Entao:

$$E(X) = E(T_1) - h \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(ih)^{\alpha}/\theta] \quad (2.18)$$

Mas:

$$N_1 = (T_1 - X)/h$$

Portanto:

$$E_u(N_1) = E[(T_1 - X)/h]$$

Ou:

$$E_u(N_1) = [E(T_1) - E(X)]/h$$

Finalmente de (2.18):

$$E_u(N_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(ih)^{\alpha}/\theta] \quad (2.19)$$

Substituindo (2.11) e (2.7) em (2.19) vem:

$$E_u(N_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^{\alpha}\} \quad (2.20)$$

A expressão 2.19 pode ser obtida facilmente se N_1 for expresso por:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{\infty} I_{T_1[ih]} \quad (2.21)$$

Onde:

$$\begin{aligned} I_{T_1[ih]} &= 1 \text{ se } T_1 \geq ih \\ &= 0 \text{ se } T_1 < ih \end{aligned} \quad (2.22)$$

portanto:

$$E_u(N_1) = \sum_{i=1}^{\infty} E[I_{T_1[ih]}] \quad (2.23)$$

ou seja, de 2.22:

$$\begin{aligned} E_u(N_1) &= \sum_{i=1}^{\infty} Pr[T_1 \geq ih] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(ih)^\alpha / \theta] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Após a ocorrência da causa assinalável, seja p_2 a probabilidade que $\bar{X}$ caia fora dos limites de controle. Claro que para uma dada amostra, p_2 depende do deslocamento da média μ e do tamanho da amostra n , mas independe de i . Logo $N_2 - 1$ tem uma distribuição geométrica com parâmetro p_2 , portanto:

$$E_u(N_2) = 1/p_2 \quad (2.25)$$

O valor esperado de $N = N_1 + N_2$ é obtido de (2.20) e (2.25):

$$E_u(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} + 1/p_2 \quad (2.26)$$

2.3.2 DETERMINAÇÃO DO VALOR ESPERADO DE N SOB O DELINEAMENTO BALANCEADO

Sob o delineamento balanceado, os intervalos entre amostragens são dados por (2.12) e (2.13). Neste caso N_1 tem distribuição geométrica com valor esperado dado por:

$$E_b(N) = (1 - p_1)/p_1 \quad (2.27)$$

onde o índice b designa o delineamento balanceado. Como p_2 não depende de qual delineamento está sendo utilizado, nós temos que $E_b(N_2) = E_u(N_2)$, então $E_b(N)$ será dado por (2.25) e (2.27), ou seja:

$$E_b(N) = (1 - p_1)/p_1 + 1/p_2 \quad (2.28)$$

Note que o número de amostras tomadas após a ocorrência da causa assinalável não depende do delineamento. A diferença é que o delineamento B tende a tomar estas amostras em um menor tempo.

2.3.3 COMPARAÇÃO DE $E_u(N)$ COM $E_b(N)$

Verifica-se que $E_u(N)$ é praticamente independente do parâmetro de forma α , ao menos na região dos valores explorados. Para $\alpha = 2$ até $\alpha = 5$ e, $p_1 < 0.30$, $E_u(N) \approx E_b(N)$, como mostra a tabela 2.1.

Tabela 2.1 Comparação entre $E_u(N_1)$ e $E_b(N_1)$.
Os valores de $E_u(N_1)$ são válidos para
qualquer valor de α entre 2 e 5

p_1	$E_u(N_1)$	$E_b(N_1)$	$100 \cdot \frac{(2) - (1)}{(1)}$
0,01	98,999	99,000	0,00
0,05	18,996	19,000	0,02
0,10	8,991	9,000	0,10
0,15	5,653	5,667	0,24
0,20	3,981	4,000	0,48
0,25	2,976	3,000	0,81
0,30	2,304	2,333	1,26
0,40	1,458	1,500	2,74
0,50	0,943	1,000	6,38

A tabela 2.1 mostra que para $p_1 < 0,30$ o número esperado de amostras por ciclo é praticamente independente do delineamento que está sendo utilizado. Os dois delineamentos podem ser então comparados diretamente, em termos de $E(T_2)$, o tempo esperado de operação fora de controle. Note que T_1 é característica do processo, sendo portanto independente do delineamento.

Para valores maiores de p_1 , temos que $E_u(N)$ é sensivelmente menor que $E_b(N)$. Uma maneira de torná-los iguais é corrigir adequadamente o espaçamento entre amostragens no delineamento uniforme. Seja então, $h_c = -E(T_1)\ln(1 - q_1)$ este novo espaçamento. A tabela 2.2 fornece os

valores de q_1 , que tornam $E_u(N)$ igual a $E_b(N)$, para diferentes valores de p_1 .

Tabela 2.2 Valores de q_1 que tornam $E_u(N) = E_b(N)$ para diferentes valores de p_1

p_1	q_1
0,01	0,0100
0,05	0,0500
0,10	0,0999
0,15	0,1497
0,20	0,1993
0,25	0,2485
0,30	0,2974
0,40	0,3935
0,50	0,4866

Esta correção será utilizada quando da comparação dos delineamentos uniforme e balanceado, em termos do valor esperado de T_2 . Assim mantém-se iguais o número esperado de amostragens por ciclo sob cada delineamento.

2.4 O TEMPO ESPERADO DE OPERAÇÃO FORA DE CONTROLE

Sob a suposição de que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, o efeito do delineamento B será de reduzir o tempo esperado de operação fora de controle. Como após a correção em p_1 no delineamento U , proposto no item 2.3.3, o valor esperado de N é o mesmo para ambos delineamentos, a comparação entre os dois será feita em termos de $E(T_2)$.

2.4.1 DETERMINAÇÃO DE $E(T_2)$ PARA O DELINEAMENTO U

Neste caso, os intervalos entre amostragens são constantes e iguais a h , logo:

$$E_u(T) = hE_u(N) \quad (2.29)$$

e como $T = T_1 + T_2$ temos:

$$E_u(T_2) = E_u(T) - E(T_1) \quad (2.30)$$

Substituindo (2.29) em (2.30) vem:

$$E_u(T_2) = hE_u(N) - E(T_1) \quad (2.31)$$

Substituindo (2.7) e (2.26) em (2.31) temos:

$$E_u(T_2) = E(T) \{ -\ell n(1 - p_1) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \exp\{ -[-i * \right. \quad (2.32) \\ \left. * \Gamma(1/\alpha + 1) \ell n(1 - p_1)]^\alpha \} + 1/p_2] - 1 \}$$

Mas aplicando-se a correção proposta acima, ou seja, adotando-se h_e para o espaçamento entre amostragens ao invés de h , temos que:

$$E_u(N_1) = (1 - p_1)/p_1 \quad (2.33)$$

logo a esperança de T_2 , quando se utiliza h_e , será:

$$E_u^*(T_2) = E(T_1) \{ -\ell n(1 - q_1) [(1 - p_1)/p_1 + 1/p_2] - 1 \} \quad (2.34)$$

2.4.2 DETERMINAÇÃO DE $E(T_2)$ PARA O DELINEAMENTO B

Para determinar $E_b(T_2)$, o valor esperado de T_2 no delineamento balanceado, nós partimos de $E_b(T)$:

$$E_b(T/N) = t_N$$

De (2.9) temos:

$$E_b(T/N) = N^{1/\alpha} h_1$$

Portanto:

$$E_b(T) = h_1 E(N^{1/\alpha}) \quad (2.35)$$

e,

$$E_b(T_2) = h_1 E_b(N^{1/\alpha}) - E(T_1) \quad (2.36)$$

ou de (2.12)

$$E_b(T_2) = E(T_1) \{ [\Gamma(1/\alpha + 1)]^{-1} [-\ell n(1 - p_1)]^{1/\alpha} E_b(N^{1/\alpha}) - 1 \} \quad (2.37)$$

O cálculo numérico envolvido na determinação de $E_b(N^{1/\alpha})$ pode ser relativamente longo. Contudo, no delineamento B , N_1 e $N_2 - 1$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição geométrica, com parâmetros p_1 e p_2 respectivamente. Neste caso os cálculos podem ser significativamente reduzidos se for utilizada a expressão (A.1) para $E_b(N_1 + N_2)^{1/\alpha}$ se $p_1 \neq p_2$, ou a expressão (A.4) se $p_1 = p_2$. Ambas as expressões são dadas no Apêndice.

2.5 A EFICIÊNCIA RELATIVA DO DELINEAMENTO B COM RESPEITO AO DELINEAMENTO U

Os dois delineamentos podem agora ser comparados em termos do tempo esperado de operação fora de controle. Portanto a eficiência relativa do delineamento B com respeito ao delineamento U pode ser convenientemente definida como:

$$Ef_{B/U} = E_u(T_2)/E_b(T_2) \quad (2.38)$$

com $E_u(T_2)$ e $E_b(T_2)$ dados por (2.32) e (2.37) respectivamente.

Na determinação numérica de $E_b(T_2)$, as expressões (A.1) e (A.4) do apêndice simplificam significativamente os trabalhos de cálculo.

Como mostra a Tabela 2.1, $E(N)$ é praticamente a mesma para ambos os delineamentos, quando p_1 é pequeno. Porém quando $p_1 > 0,30$ isto não ocorre. Neste caso, deve-se ajustar o espaçamento entre amostragens do delineamento uniforme de forma que $E_u(N)$ seja igual a $E_b(N)$.

Seja então $h_e = -E(T_1)\ell n(1 - q_1)$ este novo espaçamento e, $E_u^*(T_2)$ o valor médio esperado do tempo em que o processo permanece fora de controle, quando se utiliza o delineamento uniforme com espaçamento entre amostragens h_e . A tabela 2.2 fornece os valores de q_1 , que tornam $E_u(N)$ igual a $E_b(N)$, para diferentes valores de p_1 .

Portanto, para valores de p_1 grandes a eficiência do delineamento balanceado com respeito ao delineamento uniforme será dada por

$$Ef_{B/U}^* = E_u^*(T_2)/E_b(T_2) \quad (2.39)$$

onde $E_u^*(T_2)$ é dado em (2.34)

Os valores de $Ef_{B/U}^*$ para diferentes valores de p_1 , p_2 e α são dados nas tabelas 2.3.a – 2.3.g. Estas tabelas mostram que a eficiência do delineamento balanceado com respeito ao delineamento uniforme aumenta com p_1 e α , e diminui com p_2

Tabela 2.3.a: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 1,5$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	1,50	1,86	2,09	2,50	2,81	3,06	3,48	3,83	4,13
0,03	1,28	1,50	1,65	1,91	2,11	2,27	2,55	2,78	2,97
0,05	1,21	1,38	1,50	1,71	1,87	2	2,23	2,41	2,57
0,10	1,14	1,26	1,35	1,50	1,61	1,71	1,88	2,01	2,13
0,15	1,11	1,21	1,27	1,40	1,49	1,57	1,71	1,82	1,91
0,20	1,09	1,17	1,23	1,34	1,42	1,49	1,60	1,70	1,77
0,30	1,07	1,13	1,18	1,26	1,32	1,38	1,47	1,54	1,60
0,40	1,06	1,11	1,14	1,21	1,26	1,31	1,38	1,43	1,48
0,50	1,05	1,09	1,12	1,17	1,22	1,25	1,31	1,36	1,39
0,60	1,04	1,07	1,10	1,14	1,18	1,21	1,25	1,29	1,31
0,70	1,03	1,06	1,08	1,12	1,15	1,17	1,21	1,23	1,25
0,80	1,02	1,05	1,06	1,09	1,12	1,13	1,16	1,18	1,19
0,90	1,02	1,04	1,05	1,07	1,09	1,10	1,12	1,13	1,13

Tabela 2.3.b: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 2$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	2,00	2,74	3,26	4,23	5,01	5,69	6,88	7,95	8,94
0,03	1,57	2,00	2,30	2,86	3,30	3,69	4,37	4,98	5,54
0,05	1,44	1,77	2,00	2,43	2,77	3,07	3,59	4,06	4,48
0,10	1,31	1,54	1,70	1,99	2,23	2,44	2,80	3,12	3,40
0,15	1,25	1,43	1,56	1,80	1,99	2,15	2,44	2,69	2,91
0,20	1,21	1,37	1,48	1,68	1,84	1,98	2,22	2,43	2,61
0,30	1,17	1,29	1,37	1,53	1,66	1,76	1,95	2,11	2,24
0,40	1,14	1,24	1,31	1,44	1,54	1,63	1,77	1,90	2,00
0,50	1,12	1,20	1,26	1,37	1,45	1,53	1,65	1,75	1,83
0,60	1,10	1,17	1,22	1,31	1,38	1,44	1,54	1,62	1,69
0,70	1,08	1,15	1,19	1,27	1,32	1,37	1,45	1,52	1,56
0,80	1,07	1,12	1,16	1,22	1,27	1,31	1,37	1,42	1,45
0,90	1,06	1,10	1,13	1,18	1,22	1,25	1,30	1,33	1,35

Tabela 2.3.c: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 2,5$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	2,50	3,64	4,46	6,07	7,40	8,60	10,80	12,80	14,70
0,03	1,87	2,50	2,95	3,82	4,53	5,17	6,32	7,38	8,39
0,05	1,68	2,16	2,50	3,15	3,69	4,16	5,02	5,80	6,54
0,10	1,48	1,82	2,05	2,49	2,85	3,17	3,74	4,25	4,73
0,15	1,40	1,66	1,85	2,20	2,48	2,73	3,18	3,57	3,94
0,20	1,34	1,57	1,73	2,02	2,26	2,47	2,84	3,17	3,47
0,30	1,28	1,45	1,58	1,81	1,99	2,15	2,43	2,68	2,90
0,40	1,23	1,38	1,48	1,67	1,82	1,95	2,17	2,37	2,54
0,50	1,20	1,33	1,41	1,57	1,70	1,80	1,99	2,14	2,28
0,60	1,18	1,29	1,36	1,49	1,60	1,69	1,84	1,96	2,07
0,70	1,15	1,25	1,31	1,43	1,51	1,59	1,71	1,81	1,89
0,80	1,13	1,21	1,27	1,36	1,44	1,50	1,60	1,68	1,74
0,90	1,11	1,18	1,23	1,31	1,36	1,41	1,49	1,56	1,60

Tabela 2.3.d: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 3$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	3,00	4,54	5,68	7,97	9,90	11,70	14,90	18,00	21,10
0,03	2,17	3,00	3,60	4,79	5,78	6,68	8,33	9,88	11,40
0,05	1,92	2,55	3,00	3,88	4,61	5,27	6,47	7,59	8,68
0,10	1,66	2,10	2,40	2,99	3,47	3,90	4,68	5,40	6,09
0,15	1,55	1,90	2,14	2,60	2,98	3,31	3,92	4,47	4,99
0,20	1,48	1,78	1,98	2,37	2,69	2,96	3,46	3,91	4,33
0,30	1,39	1,63	1,79	2,09	2,33	2,54	2,91	3,25	3,55
0,40	1,34	1,53	1,67	1,91	2,11	2,28	2,57	2,84	3,07
0,50	1,30	1,46	1,58	1,78	1,95	2,09	2,33	2,54	2,73
0,60	1,26	1,41	1,50	1,68	1,82	1,94	2,14	2,31	2,46
0,70	1,23	1,36	1,44	1,59	1,71	1,81	1,97	2,11	2,23
0,80	1,20	1,31	1,38	1,51	1,61	1,69	1,83	1,94	2,03
0,90	1,18	1,27	1,33	1,44	1,52	1,59	1,70	1,79	1,86

Tabela 2.3.e: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 3,5$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	3,50	5,45	6,92	9,90	12,50	14,80	19,20	23,50	27,80
0,03	2,47	3,50	4,26	5,77	7,05	8,21	10,40	12,40	14,50
0,05	2,16	2,93	3,50	4,61	5,54	6,38	7,94	9,42	10,90
0,10	1,85	2,38	2,76	3,49	4,09	4,64	5,63	6,57	7,46
0,15	1,71	2,13	2,43	3,01	3,48	3,89	4,66	5,36	6,03
0,20	1,62	1,98	2,24	2,72	3,11	3,46	4,08	4,66	5,20
0,30	1,52	1,80	2,00	2,37	2,67	2,93	3,40	3,82	4,21
0,40	1,45	1,69	1,85	2,15	2,39	2,60	2,98	3,31	3,61
0,50	1,39	1,60	1,74	2,00	2,20	2,37	2,67	2,94	3,18
0,60	1,35	1,53	1,65	1,87	2,04	2,19	2,44	2,66	2,84
0,70	1,32	1,47	1,58	1,76	1,91	2,03	2,24	2,42	2,57
0,80	1,28	1,42	1,51	1,67	1,79	1,89	2,06	2,21	2,33
0,90	1,25	1,37	1,44	1,58	1,68	1,76	1,91	2,02	2,11

Tabela 2.3.f: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 4$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	4,00	6,36	8,16	11,90	15,10	18,00	23,70	29,20	34,70
0,03	2,77	4,00	4,91	6,75	8,32	9,76	12,50	15,10	17,60
0,05	2,40	3,32	4,00	5,34	6,47	7,50	9,42	11,30	13,10
0,10	2,03	2,66	3,11	3,99	4,72	5,37	6,59	7,73	8,84
0,15	1,87	2,37	2,72	3,41	3,97	4,48	5,40	6,26	7,08
0,20	1,77	2,20	2,49	3,06	3,53	3,95	4,70	5,40	6,06
0,30	1,64	1,98	2,21	2,65	3,01	3,32	3,88	4,39	4,86
0,40	1,56	1,84	2,04	2,40	2,68	3,93	3,38	3,78	4,13
0,50	1,50	1,74	1,91	2,21	2,45	2,66	3,02	3,34	3,62
0,60	1,45	1,66	1,80	2,06	2,26	2,44	2,74	3,00	3,22
0,70	1,40	1,59	1,71	1,94	2,11	2,25	2,50	2,72	2,89
0,80	1,36	1,53	1,63	1,82	1,97	2,09	2,30	2,48	2,61
0,90	1,32	1,47	1,56	1,72	1,84	1,94	2,11	2,26	2,35

Tabela 2.3.g: Valores de $Ef_{B/U}^*$ para $\alpha = 4,5$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	4,50	7,27	9,40	13,80	17,70	21,30	28,20	35,00	41,80
0,03	3,07	4,50	5,57	7,73	9,59	11,30	14,50	17,70	20,80
0,05	2,65	3,71	4,50	6,06	7,40	8,62	10,90	13,10	15,30
0,10	2,22	2,95	3,47	4,48	5,34	6,11	7,54	8,91	10,20
0,15	2,03	2,61	3,02	3,81	4,47	5,06	6,14	7,16	8,13
0,20	1,91	2,41	2,75	3,41	3,95	4,44	5,32	6,15	6,92
0,30	1,77	2,16	2,43	2,93	3,34	3,71	4,36	4,97	5,51
0,40	1,67	2,00	2,22	2,64	2,97	3,26	3,78	4,25	4,65
0,50	1,60	1,89	2,07	2,42	2,70	2,94	3,36	3,75	4,05
0,60	1,54	1,79	1,96	2,25	2,49	2,69	3,04	3,36	3,59
0,70	1,49	1,71	1,85	2,11	2,31	2,48	2,77	3,04	3,21
0,80	1,45	1,64	1,76	1,98	2,15	2,29	2,54	2,76	2,88
0,90	1,40	1,57	1,67	1,86	2,00	2,12	2,32	2,51	2,59

2.6 ESTABILIDADE DE $Ef_{B/U}$ COM RESPEITO AO PARÂMETRO DE FORMA α

Vamos considerar aqui a situação em que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$ com α desconhecido. Neste caso, seja $\hat{\alpha}$ uma estimativa amostral de α .

Para se comparar o delineamento balanceado com o delineamento uniforme em termos de T_2 , admitindo α estimado por $\hat{\alpha}$, é necessário que a esperança de N seja igual para ambos delineamentos. Vamos então, determinar inicialmente $E_b(N)_{\hat{\alpha}}$, ou seja, o número esperado de amostras tomadas em um ciclo sob o delineamento B , quando α é estimado.

2.6.1 DETERMINAÇÃO DO VALOR ESPERADO DE N SOB O DELINEAMENTO B , QUANDO α É ESTIMADO

De (2.9) obtemos os instantes de amostragens para o delineamento B que dependem agora de $\hat{\alpha}$:

$$t_i(\hat{\alpha}) = i^{1/\hat{\alpha}} t_1(\hat{\alpha}) \quad (2.40)$$

para $i = 1, 2, \dots$, onde de (2.10):

$$t_1(\hat{\alpha}) = h_1(\hat{\alpha}) = [-\theta(\hat{\alpha}) \ln(1 - p_1)]^{1/\hat{\alpha}} \quad (2.41)$$

e de (2.11):

$$\theta(\hat{\alpha}) = [E(T_1)/\Gamma(1/\hat{\alpha} + 1)]^{\hat{\alpha}} \quad (2.42)$$

Substituindo (2.42) em (2.41) obtemos:

$$h_1(\hat{\alpha}) = E(T_1) [-\ln(1 - p_1)]^{1/\hat{\alpha}} / \Gamma(1/\hat{\alpha} + 1) \quad (2.43)$$

Inicialmente vamos determinar $E_b(N_1)_{\hat{\alpha}}$, o número esperado de amostras tomadas antes da ocorrência da falha, sob o delineamento balanceado, quando α é estimado.

Seja N_1 expresso por:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{\infty} I_{T_1[i^{1/\alpha} h_1(\hat{\alpha})]} \quad (2.44)$$

Onde:

$$\begin{aligned} I_{T_1[i^{1/\alpha}h_1(\hat{\alpha})]} &= 1 \text{ se } T_1 \geq i^{1/\hat{\alpha}}h_1(\hat{\alpha}) \\ &= 0 \text{ se } T_1 < i^{1/\hat{\alpha}}h_1(\hat{\alpha}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

portanto

$$\begin{aligned} E_b(N_1)_{\hat{\alpha}} &= \sum_{i=1}^{\infty} E[I_{T_1[i^{1/\alpha}h_1(\hat{\alpha})]}] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} Pr[T_1 \geq i^{1/\hat{\alpha}}h_1(\hat{\alpha})] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Ou seja:

$$E_b(N_1)_{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(1/\theta)i^{\alpha/\hat{\alpha}}h_1(\hat{\alpha})^{\alpha}] \quad (2.47)$$

Substituindo (2.11) e (2.43) em (2.47) obtemos:

$$\begin{aligned} E_b(N_1)_{\hat{\alpha}} &= \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[\Gamma(1/\alpha + 1)/\Gamma(1/\hat{\alpha} + 1)]^{\alpha} \\ &\quad [-i\ell n(1 - p_1)]^{\alpha/\hat{\alpha}}\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

O número esperado de amostras tomadas após a ocorrência da causa assinalável independe do delineamento e de α , portanto:

$$E_b(N_2)_{\hat{\alpha}} = E_u(N_2)_{\hat{\alpha}} = 1/p_2 \quad (2.49)$$

Como $N = N_1 + N_2$, de (2.48) e de (2.49) obtemos finalmente $E_b(N)_{\hat{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} E_b(N)_{\hat{\alpha}} &= \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[\Gamma(1/\alpha + 1)/\Gamma(1/\hat{\alpha} + 1)]^{\alpha} \\ &\quad [-i\ell n(1 - p_1)]^{\alpha/\hat{\alpha}}\} + 1/p_2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.6.2 DETERMINAÇÃO DO INTERVALO ENTRE AMOSTRAGENS PARA O DELINEAMENTO U

Para efeito de comparação, o espaçamento entre amostragens constante do delineamento uniforme será escolhido de maneira a que $E_u(N)_{\hat{\alpha}} = E_b(N)_{\hat{\alpha}}$ onde, $E_u(N)_{\hat{\alpha}}$ representa o número esperado de amostras tomadas em um ciclo sob o delineamento U , quando α é estimado. Seja $h(\hat{\alpha})$ este espaçamento, portanto de (2.6) os instantes de amostragens para o delineamento U , que dependem agora de $\hat{\alpha}$, serão dados por:

$$t_i(\hat{\alpha}) = ih(\hat{\alpha}) \quad (2.51)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$, onde de (2.7):

$$h(\hat{\alpha}) = -E(T_1)\ln(1 - p_e) \quad (2.52)$$

Portanto p_e é escolhido de maneira a que $E_u(N_1)_{\hat{\alpha}} = E_b(N_1)_{\hat{\alpha}}$, já que $N = N_1 + N_2$ e $E_u(N_2)_{\hat{\alpha}} = E_b(N_2)_{\hat{\alpha}} = 1/p_2$. A expressão de $E_u(N_1)_{\hat{\alpha}}$, que representa o número esperado de amostras tomadas antes da ocorrência da falha, sob o delineamento uniforme, quando α é estimado, é obtida de (2.19):

$$E_u(N_1)_{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[ih(\hat{\alpha})]^\alpha / \theta\} \quad (2.53)$$

substituindo (2.11) e (2.52) em (2.53) obtemos:

$$E_u(N_1)_{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-i\Gamma(1/\alpha + 1)\ln(1 - p_e)]^\alpha\} \quad (2.54)$$

A expressão de $E_b(N_1)_{\hat{\alpha}}$ é dada em (2.48).

2.6.3 DETERMINAÇÃO DE $E(T_2)$ PARA O DELINEAMENTO B QUANDO α É ESTIMADO.

Para determinar $E_b(T_2)_{\hat{\alpha}}$, o valor esperado de T_2 no delineamento balanceado, quando α é estimado, nós partimos de $E_b(T)_{\hat{\alpha}}$:

$$E_b(T/N)_{\hat{\alpha}} = t_N(\hat{\alpha}) \quad (2.55)$$

De (2.40) temos:

$$E_b(T/N)_{\hat{\alpha}} = N^{1/\hat{\alpha}} h_1(\hat{\alpha}) \quad (2.56)$$

Portanto:

$$E_b(T)_{\hat{\alpha}} = h_1(\hat{\alpha}) E_b(N^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}} \quad (2.57)$$

e como $T = T_1 + T_2$ então:

$$E_b(T_2)_{\hat{\alpha}} = h_1(\hat{\alpha}) E_b(N^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}} - E(T_1) \quad (2.58)$$

ou de (2.43):

$$E_b(T_2)_{\hat{\alpha}} = E(T_1) \{ [\Gamma(1/\hat{\alpha} + 1)]^{-1} [-\ell n(1 - p_1)]^{1/\hat{\alpha}} E_b(N^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}} - 1 \} \quad (2.59)$$

Vamos então determinar $E_b(N^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}}$:

$$E_b(N^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}} = E_b[(N_1 + N_2)^{1/\hat{\alpha}}]_{\hat{\alpha}}$$

Como:

$$\begin{aligned} Pr[N_1 = i] &= Pr[t_i(\hat{\alpha}) < T_1 \leq t_{i+1}(\hat{\alpha})] = \\ &\exp[-(1/\theta)i^{\alpha/\hat{\alpha}}h_1(\hat{\alpha})^{\alpha}] - \exp[-(1/\theta)(i+1)^{\alpha/\hat{\alpha}}h_1(\hat{\alpha})^{\alpha}] \end{aligned}$$

e $N_2 - 1$ é uma variável aleatória com distribuição geométrica de parâmetro p_2 segue:

$$\begin{aligned} E_b(N^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (i+j)^{1/\hat{\alpha}} \{ \exp[-(1/\theta)i^{\alpha/\hat{\alpha}} * \\ &* h_1(\hat{\alpha})^{\alpha}] - \exp[-(1/\theta)(i+1)^{\alpha/\hat{\alpha}}h_1(\hat{\alpha})^{\alpha}] \} p_2(1-p_2)^{j-1} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Expandindo a somatória em i de (2.60) e rearranjado os termos, após substituir (2.11) e (2.43) em (2.60) temos:

$$\begin{aligned} E_b(N^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}} &= E_b(N_2^{1/\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}} + \sum_{i=1}^{\infty} \{ E_b[(N_2 + i)^{1/\hat{\alpha}}]_{\hat{\alpha}} - \\ &- E_b[(N_2 + i - 1)^{1/\hat{\alpha}}]_{\hat{\alpha}} \} \exp\{ -[\Gamma(1/\alpha + 1)/ \\ &/ \Gamma(1/\hat{\alpha} + 1)]^{\alpha} [-i \ell n(1 - p_1)]^{\alpha/\hat{\alpha}} \} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Além disso:

$$E_b[(N_2 + i)^{1/\hat{\alpha}}]_{\hat{\alpha}} = \{ E_b[(N_2 + i - 1)^{1/\hat{\alpha}}]_{\hat{\alpha}} - i^{1/\hat{\alpha}} p_2 \} / (1 - p_2) \quad (2.62)$$

para $i = 1, 2, \dots$

A expressão recursiva (2.62) reduz em muito o tempo de cálculo de (2.61). Substituindo (2.61) em (2.59) obtemos $E_b(T_2)_{\hat{\alpha}}$.

2.6.4 DETERMINAÇÃO DE $E(T_2)$ PARA O DELINEAMENTO U QUANDO α É ESTIMADO.

Neste caso, os intervalos entre amostragens são constantes e iguais a $h(\hat{\alpha})$ logo, a duração esperada de um ciclo para o delineamento U , quando α é estimado, é dada por:

$$E_u(T)_{\hat{\alpha}} = h(\hat{\alpha}) E_u(N)_{\hat{\alpha}} \quad (2.63)$$

porém como $N = N_1 + N_2$, então $E_u(N)_{\hat{\alpha}} = E_u(N_1)_{\hat{\alpha}} + E_u(N_2)_{\hat{\alpha}}$, ou seja, de (2.49) e (2.54)

$$E_u(N)_{\hat{\alpha}} = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-i\Gamma(1/\alpha + 1)\ell n(1 - p_e)]^{\alpha}\} + 1/p_2 \quad (2.64)$$

e como $T = T_1 + T_2$, então $E_u(T_2)_{\hat{\alpha}}$, o tempo esperado em que o sistema permanece fora de controle no delineamento U , quando α é estimado, é dado por:

$$E_u(T_2)_{\hat{\alpha}} = E_u(T)_{\hat{\alpha}} - E(T_1) \quad (2.65)$$

Substituindo (2.52) e (2.64) em (2.63), e finalmente substituindo (2.63) em (2.65), obtemos:

$$E_u(T_2)_{\hat{\alpha}} = E(T_1)\{-\ell n(1 - p_e) \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-i\Gamma(1/\alpha + 1)\ell n(1 - p_e)]^{\alpha}\} + 1/p_2] - 1\} \quad (2.66)$$

2.6.5 A EFICIÊNCIA RELATIVA DO DELINEAMENTO B COM RESPEITO AO DELINEAMENTO U QUANDO α É ESTIMADO.

Os dois delineamentos são comparados em termos de T_2 , tempo de operação fora de controle. Portanto, a eficiência relativa do delineamento B com respeito ao delineamento U quando α é estimado, é convenientemente definida por:

$$Ef_{B/U}(\hat{\alpha}) = E_u(T_2)_{\hat{\alpha}} / E_b(T_2)_{\hat{\alpha}} \quad (2.67)$$

com $E_u(T_2)_{\hat{\alpha}}$ e $E_b(T_2)_{\hat{\alpha}}$ dados por (2.66) e (2.59) respectivamente.

As tabelas 2.4.a – 2.4.l fornecem os valores de $Ef_{B/U}(\hat{\alpha})$ para $\alpha = 2$ e 3 e para diferentes combinações dos valores de p_1 , p_2 e $\hat{\alpha}$. Os Gráficos 2.1.a – 2.1.l fornecem as respectivas curvas de $Ef_{B/U}(\hat{\alpha})$. Estes gráficos mostram que, dependendo da combinação de valores de p_1 e p_2 é vantajoso, em termos da eficiência, substituir ou sobreestimar o valor de α .

Tabela 2.4.a: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,01)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,95	1,042	1,040	1,038	1,037	1,036	1,036
0,90	1,085	1,080	1,078	1,075	1,073	1,071
0,85	1,129	1,121	1,117	1,112	1,108	1,106
0,80	1,173	1,162	1,155	1,148	1,142	1,139
0,75	1,216	1,200	1,191	1,181	1,172	1,167
0,70	1,256	1,235	1,222	1,208	1,196	1,189
0,65	1,290	1,262	1,245	1,226	1,208	1,198
0,60	1,315	1,278	1,256	1,230	1,205	1,190
0,55	1,323	1,276	1,247	1,213	1,178	1,115
0,50	1,308	1,248	1,211	1,166	1,118	1,085
0,48	1,294	1,228	1,187	1,137	1,083	1,045
0,46	1,273	1,201	1,157	1,102	1,040	0,997
0,44	1,245	1,167	1,119	1,059	0,990	0,942
0,42	1,209	1,126	1,074	1,008	0,932	0,878
0,40	1,165	1,077	1,021	0,950	0,867	0,807
0,38	1,112	1,018	0,959	0,884	0,801	0,741
0,36	1,049	0,951	0,890	0,810	0,727	0,667
1/3	0,949	0,848	0,784	0,702	0,619	0,559
0,31	0,847	0,750	0,686	0,614	0,521	0,461
0,29	0,750	0,650	0,586	0,514	0,421	0,361
0,27	0,646	0,550	0,486	0,414	0,321	0,261
0,25	0,536	0,430	0,366	0,284	0,201	0,141

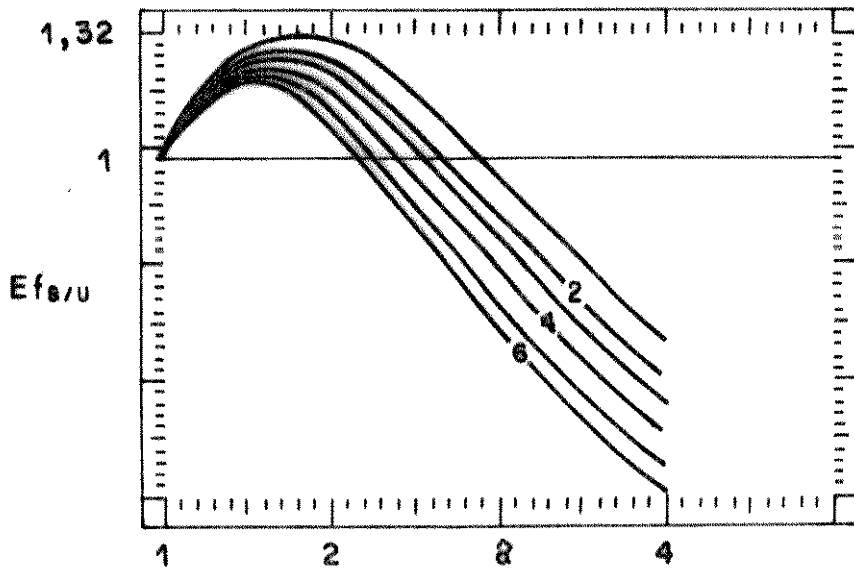


Gráfico 2.1.a: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,01$)

Tabela 2.4.b: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,05)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,95	1,059	1,053	1,049	1,045	1,041	1,039
0,90	1,122	1,109	1,101	1,091	1,082	1,078
0,85	1,190	1,168	1,155	1,144	1,125	1,117
0,80	1,262	1,230	1,211	1,189	1,167	1,155
0,75	1,338	1,294	1,268	1,237	1,207	1,191
0,70	1,417	1,359	1,325	1,284	1,243	1,221
0,65	1,496	1,423	1,379	1,326	1,273	1,242
0,60	1,573	1,481	1,426	1,359	1,290	1,248
0,55	1,642	1,529	1,461	1,378	1,288	1,233
0,50	1,696	1,559	1,476	1,373	1,260	1,188
0,48	1,710	1,563	1,473	1,362	1,239	1,160
0,46	1,718	1,561	1,465	1,345	1,212	1,124
0,44	1,719	1,552	1,449	1,321	1,177	1,082
0,42	1,712	1,534	1,425	1,289	1,134	1,031
0,40	1,695	1,507	1,392	1,248	1,083	0,972
0,38	1,665	1,469	1,348	1,196	1,022	0,906
0,36	1,622	1,418	1,292	1,134	0,953	0,832
1/3	1,538	1,327	1,198	1,034	0,848	0,724
0,31	1,437	1,225	1,094	0,931	0,745	0,621
0,29	1,328	1,119	0,990	0,830	0,644	0,520
0,27	1,198	0,996	0,867	0,720	0,534	0,410
0,25	1,046	0,858	0,729	0,582	0,396	0,272

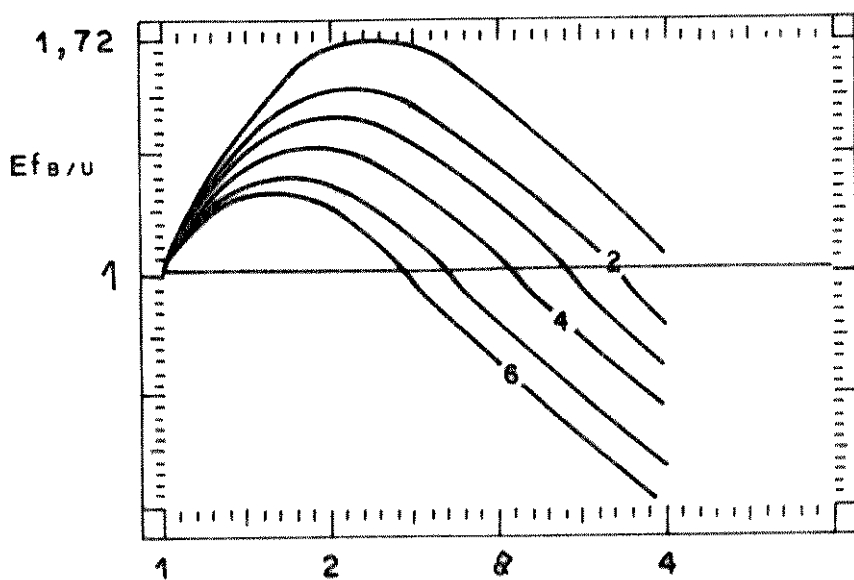


Gráfico 2.1.b: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,05)$

Tabela 2.4.c: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0, 10)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,95	1,073	1,064	1,058	1,052	1,045	1,041
0,90	1,153	1,133	1,121	1,107	1,092	1,084
0,85	1,238	1,206	1,186	1,163	1,139	1,126
0,80	1,333	1,286	1,258	1,224	1,189	1,169
0,75	1,434	1,370	1,332	1,285	1,237	1,210
0,70	1,543	1,459	1,409	1,348	1,284	1,247
0,65	1,657	1,551	1,486	1,408	1,326	1,277
0,60	1,774	1,641	1,561	1,463	1,358	1,294
0,55	1,891	1,728	1,629	1,508	1,376	1,294
0,50	1,997	1,800	1,680	1,533	1,370	1,266
0,48	2,030	1,820	1,691	1,533	1,357	1,244
0,46	2,063	1,837	1,700	1,530	1,340	1,217
0,44	2,087	1,847	1,700	1,518	1,315	1,182
0,42	2,102	1,847	1,692	1,498	1,281	1,140
0,40	2,104	1,836	1,672	1,468	1,238	1,088
0,38	2,094	1,813	1,641	1,427	1,186	1,028
0,36	2,071	1,778	1,599	1,376	1,125	0,962
1/3	2,003	1,699	1,513	1,283	1,024	0,857
0,31	1,910	1,601	1,413	1,181	0,921	0,754
0,29	1,797	1,491	1,305	1,075	0,822	0,654
0,27	1,653	1,355	1,176	0,955	0,713	0,546
0,25	1,478	1,197	1,028	0,806	0,600	0,430
0,23	1,268	1,013				
0,22	1,150	0,912				
0,21	1,028					
0,20	0,903					

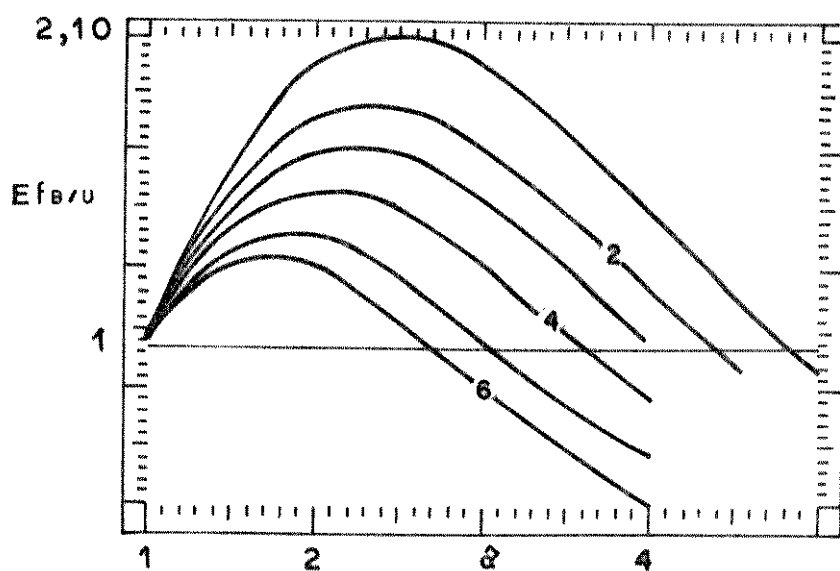


Gráfico 2.1.c: $Ef_{B/v}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0, 10)$

Tabela 2.4.d: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0, 20)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0, 10 (1)	0, 15 (2)	0, 20 (3)	0, 30 (4)	0, 50 (5)	0, 70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,95	1,094	1,081	1,073	1,063	1,053	1,047
0,90	1,197	1,170	1,152	1,131	1,108	1,094
0,85	1,311	1,266	1,238	1,203	1,166	1,144
0,80	1,440	1,374	1,333	1,282	1,228	1,196
0,75	1,578	1,488	1,432	1,363	1,289	1,245
0,70	1,732	1,613	1,540	1,450	1,352	1,293
0,65	1,898	1,746	1,653	1,537	1,412	1,335
0,60	2,075	1,884	1,767	1,623	1,465	1,367
0,55	2,259	2,023	1,879	1,702	1,506	1,383
0,50	2,437	2,152	1,978	1,763	1,525	1,373
0,48	2,505	2,198	2,011	1,780	1,524	1,360
0,46	2,568	2,239	2,039	1,792	1,517	1,341
0,44	2,626	2,275	2,061	1,798	1,505	1,316
0,42	2,670	2,297	2,071	1,791	1,481	1,281
0,40	2,708	2,314	2,074	1,779	1,451	1,240
0,38	2,726	2,312	2,061	1,751	1,408	1,189
0,36	2,729	2,296	2,034	1,712	1,355	1,129
1/3	2,687	2,236	1,963	1,630	1,262	1,032
0,31	2,606	2,145	1,868	1,530	1,161	0,932
0,29	2,491	2,031	1,755	1,420	1,057	0,835
0,27	2,334	1,884	1,615	1,290	0,941	0,731
0,25	2,123	1,695	1,440	1,134	0,810	0,619
0,23	1,857	1,464	1,233	0,957		
0,22	1,707	1,338	1,121	0,864		
0,21	1,543	1,202	1,002			
0,20	1,373	1,062	0,881			

Tabela 2.4.e: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,30)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,95	1,109	1,094	1,084	1,072	1,059	1,050
0,90	1,232	1,199	1,179	1,152	1,123	1,105
0,85	1,370	1,316	1,282	1,238	1,190	1,161
0,80	1,521	1,442	1,392	1,329	1,259	1,216
0,75	1,695	1,508	1,516	1,430	1,335	1,276
0,70	1,884	1,738	1,648	1,534	1,409	1,330
0,65	2,090	1,903	1,786	1,641	1,481	1,380
0,60	2,317	2,079	1,933	1,751	1,549	1,422
0,55	2,556	2,261	2,080	1,856	1,670	1,449
0,50	2,799	2,439	2,220	1,948	1,647	1,454
0,48	2,891	2,504	2,268	1,976	1,653	1,446
0,46	2,984	2,568	2,315	2,002	1,656	1,435
0,44	3,067	2,622	2,352	2,019	1,650	1,416
0,42	3,139	2,665	2,378	2,025	1,635	1,388
0,40	3,205	2,703	2,399	2,026	1,614	1,354
0,38	3,248	2,719	2,400	2,009	1,579	1,309
0,36	3,273	2,719	2,386	1,978	1,533	1,255
1/3	3,261	2,681	2,333	1,909	1,449	1,165
0,31	3,192	2,598	2,243	1,813	1,349	1,068
0,29	3,083	2,487	2,132	1,704	1,246	0,971
0,27	2,915	2,329	1,982	1,565	1,123	0,863
0,25	2,682	2,121	1,790	1,396	0,983	0,743
0,23	2,378	1,860	1,557	1,197		
0,22	2,198	1,710	1,424	1,008		
0,21	2,001	1,547	1,283	0,973		
0,20	1,790	1,376	1,135	0,854		

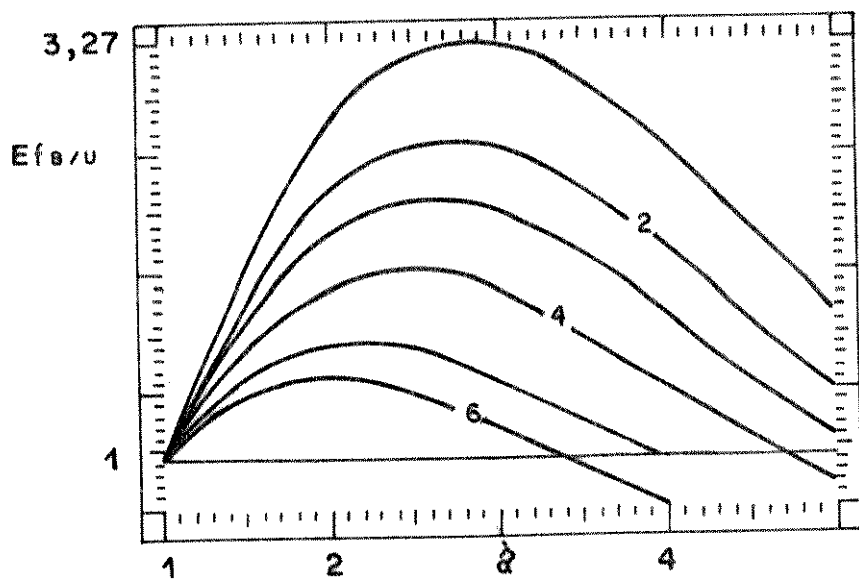


Gráfico 2.1.e: $E f_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,30)$

Tabela 2.4.f: $E f_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,50)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,95	1,135	1,117	1,105	1,089	1,071	1,066
0,90	1,288	1,248	1,222	1,187	1,147	1,135
0,85	1,461	1,395	1,351	1,294	1,228	1,205
0,80	1,659	1,559	1,494	1,410	1,313	1,277
0,75	1,880	1,739	1,649	1,534	1,401	1,346
0,70	2,131	1,942	1,822	1,669	1,494	1,412
0,65	2,409	1,162	2,006	1,810	1,586	1,469
0,60	2,718	2,401	2,204	1,956	1,676	1,513
0,55	3,054	2,657	2,411	2,105	1,761	1,537
0,50	3,404	2,914	2,614	2,242	1,829	1,533
0,48	3,544	3,014	2,691	2,292	1,849	1,522
0,46	3,686	3,115	2,768	2,340	1,867	1,504
0,44	3,820	3,207	2,835	2,378	1,876	1,478
0,42	3,943	3,288	2,892	2,407	1,876	1,444
0,40	4,061	3,363	2,943	2,430	1,870	1,402
0,38	4,156	3,418	2,974	2,435	1,851	1,349
0,36	4,228	3,451	2,987	2,425	1,819	1,286
1/3	4,277	3,457	2,969	2,381	1,753	1,185
0,31	4,247	3,402	2,901	2,301	1,665	1,079
0,29	4,160	3,305	2,801	2,198	1,567	0,977
0,27	3,995	3,146	2,648	2,057	1,443	0,863
0,25	3,734	2,914	2,436	1,871	1,290	0,740
0,23	3,372	2,606	2,162	1,641	1,112	0,610
0,22	3,150	2,423	2,002	1,510	1,014	0,544
0,21	2,899	2,218	1,825	1,368	0,910	0,477
0,20	2,624	1,997	1,636	1,218	0,803	0,411

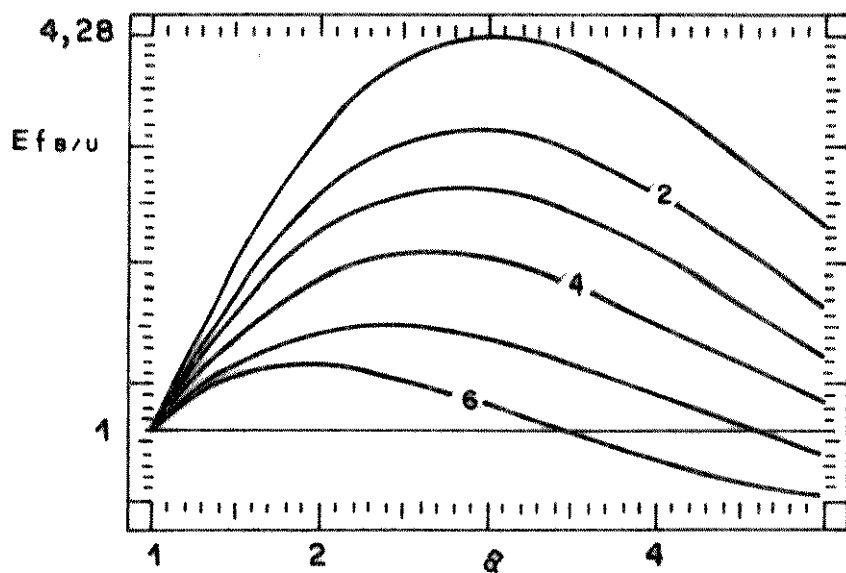


Gráfico 2.1.f: $E f_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,50)$

Tabela 2.4.g: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,01)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,85	1,161	1,155	1,151	1,148	1,144	1,143
0,80	1,223	1,214	1,209	1,203	1,199	1,196
0,70	1,360	1,343	1,333	1,323	1,314	1,310
0,60	1,510	1,480	1,463	1,445	1,428	1,420
0,50	1,652	1,602	1,573	1,541	1,509	1,493
0,46	1,696	1,634	1,598	1,557	1,516	1,493
0,44	1,712	1,644	1,604	1,557	1,510	1,483
0,42	1,723	1,647	1,602	1,549	1,495	1,464
0,40	1,726	1,643	1,593	1,533	1,471	1,434
0,39	1,725	1,637	1,585	1,521	1,455	1,414
0,38	1,721	1,629	1,574	1,507	1,435	1,391
0,37	1,715	1,618	1,560	1,489	1,412	1,364
0,36	1,706	1,604	1,543	1,468	1,386	1,334
0,35	1,694	1,587	1,523	1,443	1,356	1,299
0,34	1,678	1,567	1,499	1,415	1,321	1,261
1/3	1,665	1,551	1,481	1,394	1,296	1,232
0,32	1,634	1,514	1,439	1,346	1,241	1,170
0,31	1,606	1,480	1,403	1,305	1,194	1,119
0,30	1,573	1,443	1,362	1,260	1,143	1,063
0,29	1,535	1,400	1,317	1,211	1,088	1,004
0,28	1,491	1,353	1,266	1,156	1,028	0,941
0,27	1,442	1,300	1,211	1,098	0,966	0,875
0,26	1,386	1,241	1,151	1,035	0,899	0,806
0,25	1,324	1,178	1,086	0,968	0,830	0,735
0,24	1,257	1,109	1,016	0,898	0,760	0,665
0,23	1,182	1,034	0,943	0,823	0,685	0,590
0,22	1,102	0,954	0,863	0,743	0,605	0,510
0,21	1,017	0,869	0,778	0,658	0,520	0,425
0,20	0,926	0,778	0,687	0,567	0,429	0,334

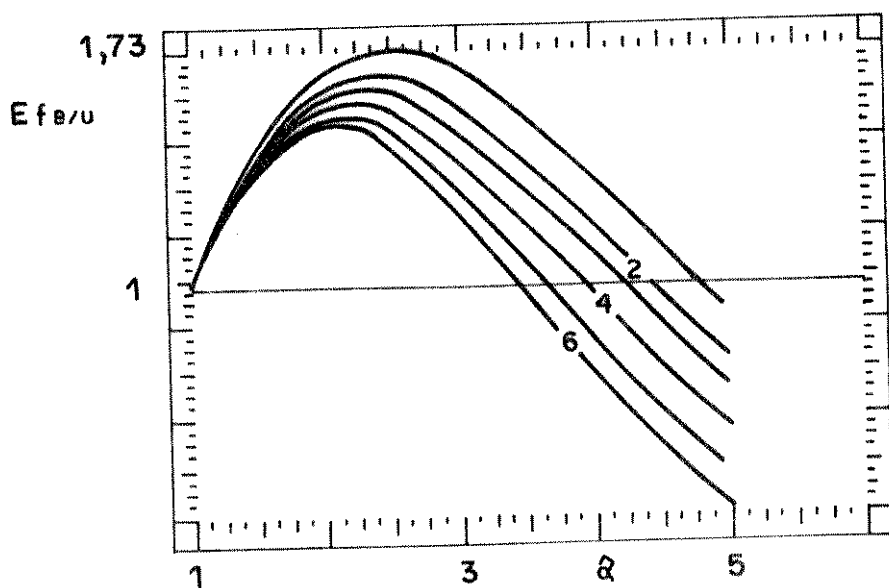


Gráfico 2.1.g: $E f_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,01)$

Tabela 2.4.h: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,05)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,85	1,217	1,197	1,184	1,171	1,158	1,152
0,80	1,305	1,275	1,275	1,238	1,219	1,210
0,70	1,508	1,454	1,422	1,386	1,352	1,335
0,60	1,752	1,663	1,612	1,553	1,495	1,465
0,50	2,031	1,894	1,913	1,719	1,624	1,572
0,46	2,145	1,983	1,888	1,775	1,659	1,593
0,44	2,201	2,025	1,921	1,797	1,670	1,595
0,42	2,253	2,063	1,950	1,815	1,674	1,590
0,40	2,301	2,095	1,973	1,825	1,670	1,576
0,39	2,323	2,109	1,981	1,828	1,665	1,565
0,38	2,343	2,121	1,988	1,828	1,657	1,552
0,37	2,361	2,131	1,992	1,825	1,646	1,535
0,36	2,377	2,137	1,994	1,819	1,631	1,514
0,35	2,389	2,141	1,992	1,810	1,614	1,490
0,34	2,398	2,141	1,987	1,798	1,592	1,462
1/3	2,402	2,139	1,981	1,787	1,576	1,441
0,32	2,404	2,129	1,964	1,761	1,537	1,394
0,31	2,399	2,116	1,945	1,735	1,503	1,353
0,30	2,388	2,097	1,921	1,704	1,463	1,308
0,29	2,371	2,072	1,891	1,668	1,419	1,258
0,28	2,346	2,040	1,855	1,625	1,369	1,203
0,27	2,313	2,001	1,811	1,577	1,314	1,144
0,25	2,218	1,896	1,701	1,459	1,189	1,013
0,24	2,154	1,830	1,633	1,390	1,118	0,942
0,23	2,078	1,754	1,557	1,314	1,042	0,868
0,21	1,885	1,568	1,376	1,140	0,878	0,713
0,20	1,768	1,459	1,272	1,043	0,791	0,634
0,19	1,637	1,340	1,160	0,941	0,702	0,555
1/6	1,279	1,024	0,872	0,688	0,493	0,377

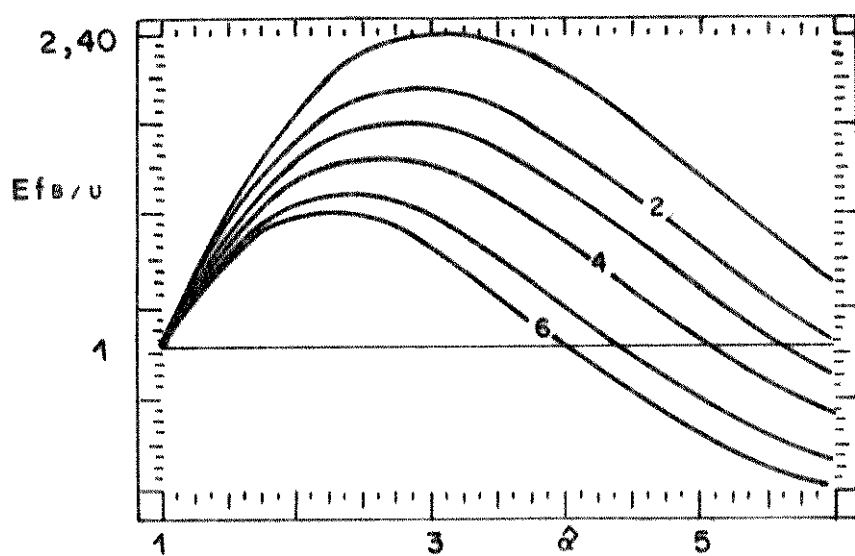


Gráfico 2.1.h: $Ef_{B/v}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,05)$

Tabela 2.4.i: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,10)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,85	1,265	1,233	1,215	1,193	1,171	1,160
0,80	1,374	1,328	1,301	1,270	1,238	1,222
0,70	1,630	1,548	1,500	1,443	1,386	1,356
0,60	1,950	1,817	1,739	1,646	1,553	1,502
0,50	2,340	2,135	2,013	1,869	1,721	1,637
0,46	2,508	2,266	2,123	1,952	1,776	1,672
0,44	2,597	2,335	2,179	1,994	1,800	1,685
0,42	2,679	2,395	2,228	2,026	1,814	1,688
0,40	2,762	1,456	2,275	2,056	1,825	1,685
0,39	2,806	2,488	2,299	2,071	1,829	1,682
0,38	2,843	2,513	2,317	2,080	1,827	1,673
0,37	2,881	2,538	2,335	2,088	1,825	1,663
0,36	2,915	2,560	2,349	2,093	1,819	1,649
0,35	2,947	2,579	2,360	2,095	1,809	1,631
0,34	2,974	2,594	2,368	2,092	1,795	1,609
1/3	2,994	2,604	2,373	2,091	1,785	1,594
0,32	3,019	2,613	2,371	2,076	1,756	1,554
0,31	3,035	2,617	2,367	2,063	1,731	1,521
0,30	3,043	2,613	2,356	2,042	1,699	1,482
0,29	3,042	2,600	2,336	2,014	1,661	1,437
0,28	3,032	2,579	2,310	1,979	1,617	1,388
0,27	3,018	2,555	2,279	1,941	1,570	1,335
0,25	2,943	2,466	2,182	1,833	1,451	1,210
0,24	2,889	2,407	2,120	1,768	1,383	1,142
0,23	2,813	2,330	2,042	1,699	1,306	1,066
0,21	2,611	2,134	1,851	1,507	1,133	0,904
0,20	2,480	2,013	1,736	1,400	1,038	0,819
0,19	2,328	1,875	1,608	1,284	0,938	0,731
1/6	1,880	1,486	1,255	0,978	0,689	2,520

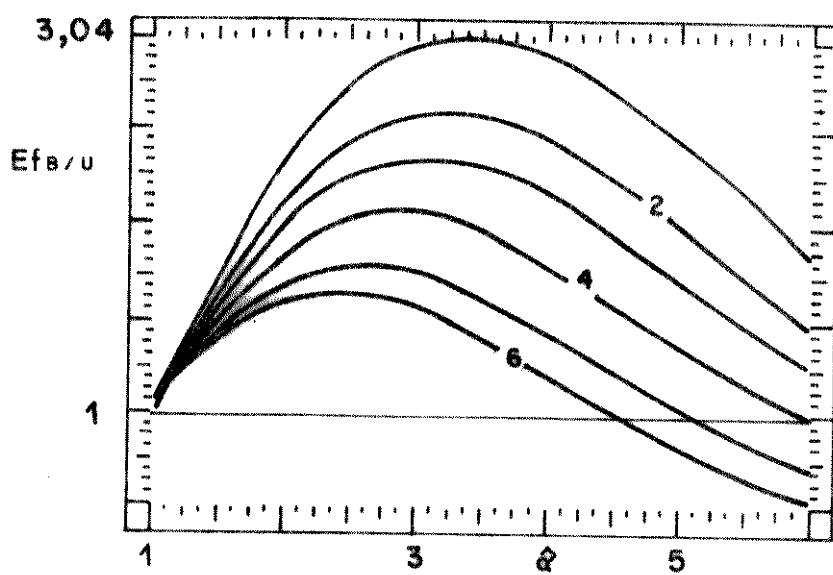


Gráfico 2.1.i: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0, 10)$

Tabela 2.4.j: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0, 20)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,85	1,337	1,292	1,265	1,231	1,196	1,177
0,80	1,478	1,413	1,373	1,324	1,274	1,346
0,70	1,820	1,701	1,629	1,541	1,451	1,401
0,60	2,262	2,066	1,948	1,805	1,658	1,575
0,50	2,826	2,519	2,335	1,115	1,885	1,750
0,46	3,083	2,719	2,502	2,242	1,968	1,806
0,44	3,219	2,824	2,589	2,306	2,008	1,830
0,42	3,355	2,927	2,671	2,365	2,041	1,846
0,40	3,489	3,026	2,750	2,419	2,067	1,854
0,39	3,554	3,074	2,787	2,443	2,077	1,855
0,38	3,623	3,123	2,826	2,468	2,087	1,854
0,37	3,687	3,169	2,860	2,489	2,093	1,850
0,36	3,748	3,211	2,891	2,506	2,095	1,842
0,35	3,812	3,255	2,923	2,524	2,097	1,834
0,34	3,866	3,290	2,947	2,533	2,091	1,818
1/3	3,903	3,314	2,963	2,540	2,087	1,807
0,32	3,968	2,352	2,986	2,545	2,071	1,778
0,31	4,009	3,374	2,997	2,542	2,054	1,751
0,30	4,046	3,393	3,004	2,536	2,032	1,721
0,29	4,072	3,401	3,002	2,521	2,003	1,684
0,28	4,087	3,399	2,990	2,497	1,967	1,641
0,27	4,090	3,386	2,969	2,466	1,925	1,592
0,25	4,055	3,327	2,895	2,375	1,818	1,478
0,24	4,004	3,269	2,833	2,309	1,749	1,408
0,23	3,936	3,196	2,759	2,233	1,673	1,334
0,21	3,722	2,989	2,556	2,039	1,492	1,166
0,20	3,574	2,852	2,428	1,921	1,388	1,073
0,19	3,387	2,686	2,274	1,784	1,272	0,973
1/6	2,817	2,198	1,837	1,411	0,974	0,726

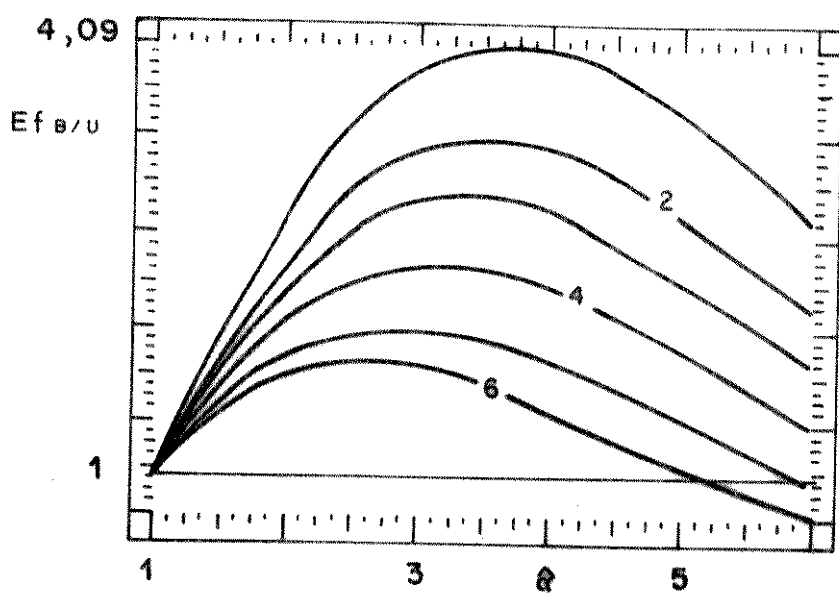


Gráfico 2.1.j: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,20)$

Tabela 2.4.k: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,30)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,85	1,393	1,340	1,306	1,264	1,219	1,193
0,80	1,564	1,485	1,435	1,374	1,309	1,271
0,70	1,980	1,833	1,742	1,630	1,513	1,444
0,60	2,528	2,281	2,130	1,947	1,755	1,643
0,50	3,239	2,846	2,610	2,325	2,024	1,845
0,46	3,573	3,106	2,825	2,488	2,131	1,917
0,44	3,744	3,235	2,931	2,565	2,178	1,944
0,42	3,925	3,372	3,042	2,645	2,224	1,970
0,40	4,106	3,507	3,150	2,721	2,265	1,988
0,39	4,197	3,574	3,202	2,756	2,282	1,994
0,38	4,288	3,640	3,254	2,791	2,298	1,998
0,37	4,374	3,702	3,302	2,821	2,309	1,997
0,36	4,465	3,767	3,351	2,852	2,321	1,997
0,35	4,548	3,824	3,394	2,877	2,327	1,991
0,34	4,631	3,880	3,435	2,900	2,331	1,982
1/3	4,682	3,915	3,459	2,913	2,330	1,974
0,32	4,782	3,980	3,504	2,933	2,325	1,954
0,31	4,852	4,023	3,532	2,943	2,316	1,934
0,30	4,907	4,054	3,549	2,944	2,299	1,906
0,29	4,958	4,080	3,561	2,939	2,278	1,875
0,28	4,996	4,095	3,563	2,926	2,249	1,838
0,27	5,019	4,097	3,553	2,902	2,212	1,794
0,25	5,006	4,052	3,490	2,819	2,109	1,684
0,24	4,972	4,005	3,437	2,759	2,045	1,619
0,23	4,916	3,941	3,369	3,688	1,972	1,548
0,21	4,694	3,725	3,158	2,486	1,785	3,376
0,20	4,526	3,572	3,015	2,356	1,673	1,277
0,19	4,324	3,393	2,850	2,211	1,551	1,172
1/6	3,656	2,782	2,347	1,786	1,217	0,898

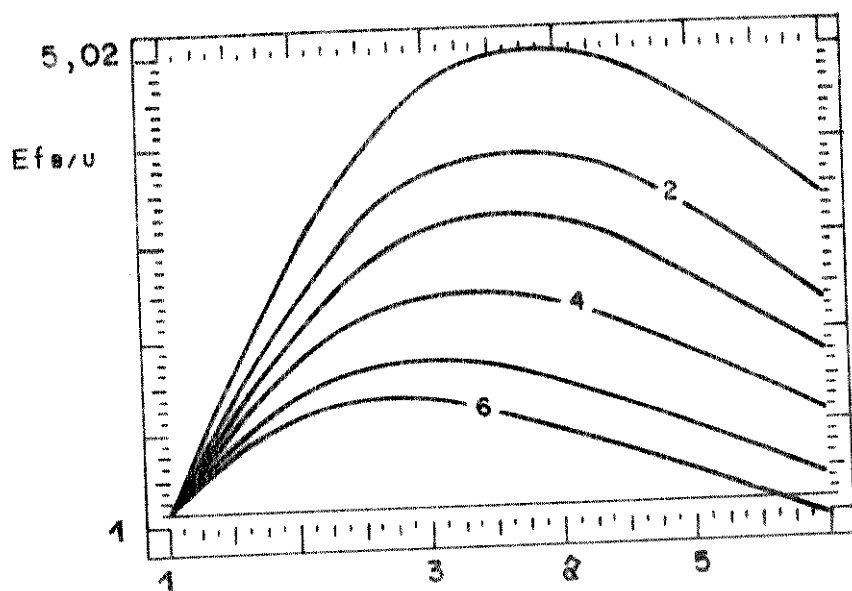


Gráfico 2.1.k: $E f_{B/V}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,30)$

Tabela 2.4.1: $E f_{B/V}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,50)$

$1/\hat{\alpha}$	p_2					
	0,10 (1)	0,15 (2)	0,20 (3)	0,30 (4)	0,50 (5)	0,70 (6)
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,85	1,492	1,426	1,383	1,327	1,265	1,228
0,80	1,712	1,611	1,547	1,465	1,374	1,319
0,70	2,263	2,068	1,946	1,794	1,627	1,527
0,60	3,003	2,666	2,458	2,203	1,927	1,760
0,50	3,982	3,433	3,101	2,696	2,262	1,998
0,46	4,448	3,789	3,392	2,912	2,398	2,085
0,44	4,695	3,975	3,544	3,022	2,464	2,124
0,42	4,947	4,163	3,694	3,129	2,525	2,158
0,40	5,210	4,358	3,849	3,237	2,585	2,189
0,39	5,345	4,457	3,928	3,291	2,614	2,202
0,38	5,475	4,550	4,000	3,340	2,638	2,211
0,37	5,610	4,648	4,077	3,391	2,662	2,221
0,36	5,740	4,740	4,147	3,436	2,682	2,226
0,35	5,870	4,832	4,217	3,481	2,701	2,230
0,34	6,001	4,923	4,286	3,523	2,717	2,231
1/3	6,081	4,978	4,326	3,547	2,724	2,228
0,32	6,244	5,088	4,406	3,593	2,735	2,221
0,31	6,356	5,161	4,458	3,620	2,738	2,210
0,30	6,463	5,230	4,505	3,642	2,735	2,195
0,29	6,556	5,286	4,541	3,655	2,726	2,174
0,28	6,637	5,332	4,567	3,659	2,709	2,147
0,27	6,706	5,367	4,583	3,655	2,686	2,115
0,25	6,772	5,378	4,564	3,603	2,607	2,025
0,24	6,764	5,350	4,526	3,554	2,550	1,967
0,23	6,727	5,298	4,467	3,489	2,482	1,900
0,21	6,531	5,098	4,268	3,295	2,302	1,736
0,20	6,354	4,936	4,117	3,159	2,186	1,635
0,19	6,119	4,730	3,929	2,996	2,052	1,523
1/6	5,297	4,043	3,325	2,494	1,667	1,313

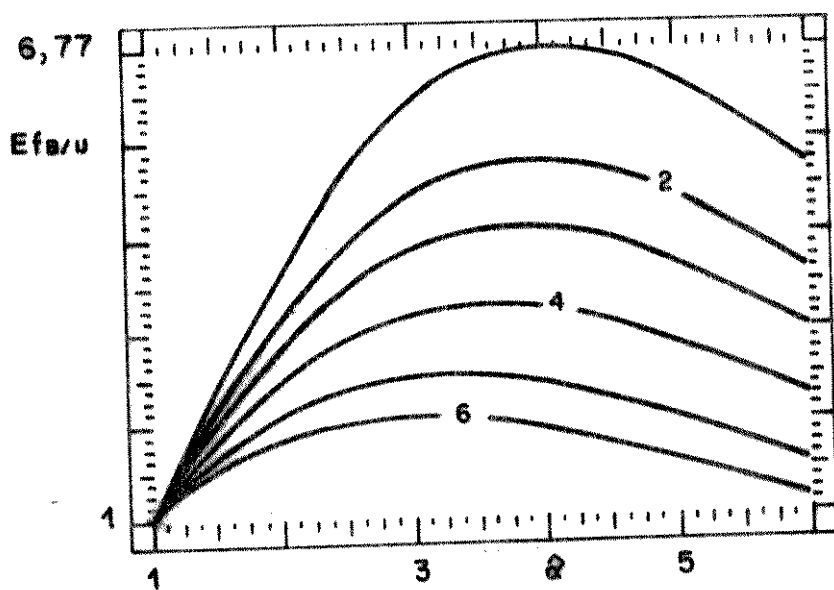


Gráfico 2.1.1: $Ef_{B/U}$ versus $\hat{\alpha}$ e p_2
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,50)$

2.6.6 EFICIÊNCIA MÉDIA ESPERADA.

Se $\hat{\alpha}$ é o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de forma α da distribuição de Weibull então, de Bain e Engelhardt (1986), temos:

$$0,822m(\alpha/\hat{\alpha})^2 \sim \chi^2(0,822(m-1)) \quad (2.68)$$

onde m é o tamanho da amostra utilizada na estimação do parâmetro de forma α da distribuição de Weibull.

Admitindo como exata a relação em (2.68), seja:

$$Pr[\hat{\alpha} > \hat{\alpha}_y] = Pr[\chi^2(0,822(n-1)) < l_y] = y \quad (2.69)$$

então $\hat{\alpha}_y$ e l_y são tais que:

$$l_y = (\alpha/\hat{\alpha}_y)^2 0,822m \quad (2.70)$$

Portanto, de posse da distribuição de qui-quadrado e da relação 2.70, podemos obter $Pr(\hat{\alpha} > \hat{\alpha}_y)$, se α e m forem conhecidos.

Seja $C = \{\hat{\alpha}_i, i = 1, 2, 3, \dots, j\}$, um conjunto de valores de $\hat{\alpha}$ para os quais se conhece a eficiência do delineamento B com respeito ao delineamento U ou seja, $Ef_{B/U}(\hat{\alpha}_i)$.

A eficiência média esperada, $Ef_{B/U}^+$, pode ser avaliada por:

$$Ef_{B/U}^+ = \sum_{i=2}^j \{ |Ef_{B/U}(\hat{\alpha}_{i-1}) + Ef_{B/U}(\hat{\alpha}_i)| / 2 \} \quad (2.71)$$

$$Pr[\hat{\alpha}_{i-1} \leq \hat{\alpha} \leq \hat{\alpha}_i]$$

As tabelas 2.5.a – 2.5.l fornecem os valores de $Ef_{B/U}^+$ para $\alpha = 2, 3$ e vários valores de m , p_1 e p_2 . Os valores de $\hat{\alpha}_i$ e de $Ef_{B/U}(\hat{\alpha}_i)$ utilizados na determinação de $Ef_{B/U}^+$ encontram-se nas tabelas 2.4.a – 2.4.l. Estas tabelas mostram que, para p_1 grande e p_2 pequeno, a eficiência média esperada pode vir a diminuir com o aumento do tamanho da amostra. Isto acontece porque, nestas situações, as maiores eficiências não são obtidas quando $\hat{\alpha} = \alpha$.

Tabela 2.5.a: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 2; m = 12)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,190	1,608	1,935	2,424	2,826	3,520
0,15	1,122	1,460	1,716	2,106	2,422	2,961
0,20	1,080	1,368	1,581	1,913	2,177	2,623
0,30	1,028	1,256	1,420	1,673	1,877	2,209
0,50	0,971	1,129	1,241	1,410	1,543	1,756
0,70	0,931	1,047	1,126	1,246	1,337	1,400

Tabela 2.5.b: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 2; m = 18)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,229	1,645	1,968	2,446	2,839	3,510
0,15	1,162	1,498	1,756	2,136	2,445	2,968
0,20	1,121	1,407	1,626	1,947	2,206	2,639
0,30	1,070	1,296	1,466	1,714	1,912	2,235
0,50	1,014	1,171	1,289	1,456	1,587	1,790
0,70	0,975	1,090	1,175	1,293	1,382	1,449

Tabela 2.5.c: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 2; m = 24)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,250	1,662	1,981	2,452	2,838	3,494
0,15	1,184	1,516	1,772	2,146	2,451	2,964
0,20	1,144	1,427	1,644	1,960	2,216	2,641
0,30	1,094	1,317	1,486	1,731	1,926	2,243
0,50	1,039	1,194	1,312	1,477	1,606	1,804
0,70	1,001	1,115	1,199	1,315	1,403	1,473

Tabela 2.5.d: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 2; m = 30)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,264	1,672	1,988	2,454	2,836	3,483
0,15	1,199	1,528	1,781	2,152	2,454	2,960
0,20	1,159	1,439	1,655	1,968	2,221	2,641
0,30	1,110	1,330	1,499	1,741	1,934	2,248
0,50	1,056	1,210	1,326	1,490	1,617	1,813
0,70	1,019	1,131	1,215	1,330	1,416	1,488

Tabela 2.5.e: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 2; m = 40)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,273	1,675	1,987	2,447	2,822	3,458
0,15	1,209	1,533	1,783	2,149	2,446	2,944
0,20	1,170	1,446	1,658	1,967	2,217	2,630
0,30	1,121	1,339	1,504	1,744	1,934	2,243
0,50	1,069	1,220	1,334	1,496	1,622	1,814
0,70	1,032	1,143	1,225	1,338	1,423	1,496

Tabela 2.5.f: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 2; m = 50)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,280	1,679	1,989	2,444	2,817	3,446
0,15	1,217	1,538	1,786	2,149	2,444	2,937
0,20	1,178	1,452	1,662	1,969	2,217	2,626
0,30	1,130	1,346	1,510	1,747	1,937	2,242
0,50	1,078	1,228	1,341	1,502	1,627	1,817
0,70	1,042	1,152	1,233	1,345	1,429	1,504

Tabela 2.5.g: Eficiência Média Esperada
($\alpha = 3; m = 12$)

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,504	2,228	2,832	3,762	4,563	6,021
0,15	1,392	1,961	2,434	3,157	3,771	4,876
0,20	1,323	1,799	2,198	2,798	3,304	4,203
0,30	1,236	1,602	1,910	2,366	2,745	3,403
0,50	1,137	1,385	1,598	1,905	2,153	2,566
0,70	1,071	1,248	1,404	1,624	1,797	2,070

Tabela 2.5.h: Eficiência Média Esperada
($\alpha = 3; m = 18$)

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,562	2,300	2,906	3,841	4,644	6,099
0,15	1,445	2,031	2,507	3,234	3,851	4,954
0,20	1,374	1,868	2,269	2,873	3,382	4,280
0,30	1,284	1,670	1,980	2,439	2,821	3,478
0,50	1,182	1,451	1,666	1,975	2,225	2,636
0,70	1,114	1,312	1,470	1,691	1,864	2,135

Tabela 2.5.i: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 3; m = 24)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,587	2,333	2,938	3,871	4,672	6,120
0,15	1,470	2,064	2,539	3,266	3,882	4,980
0,20	1,398	1,901	2,302	2,906	3,414	4,308
0,30	1,307	1,703	2,013	2,472	2,853	3,508
0,50	1,205	1,484	1,699	2,008	2,258	2,667
0,70	1,137	1,346	1,503	1,723	1,896	2,165

Tabela 2.5.j: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 3; m = 30)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,604	2,353	2,957	3,888	4,687	6,128
0,15	1,487	2,084	2,559	3,284	3,899	4,992
0,20	1,414	1,922	2,322	2,924	3,432	4,323
0,30	1,324	1,724	2,033	2,492	2,873	3,525
0,50	1,222	1,506	1,720	2,029	2,278	2,685
0,70	1,154	1,367	1,524	1,744	1,916	2,183

Tabela 2.5.k: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 3; m = 40)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,615	2,362	2,962	3,888	4,682	6,112
0,15	1,498	2,095	2,567	3,288	3,900	4,984
0,20	1,426	1,934	2,331	2,931	3,436	4,320
0,30	1,337	1,737	2,044	2,501	2,880	3,527
0,50	1,236	1,520	1,733	2,040	2,288	2,691
0,70	1,169	1,382	1,538	1,757	1,928	2,191

Tabela 2.5.l: Eficiência Média Esperada
 $(\alpha = 3; m = 50)$

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	1,625	2,370	2,969	3,892	4,684	6,108
0,15	1,508	2,104	2,575	3,294	3,900	4,985
0,20	1,437	1,943	2,340	2,938	3,442	4,323
0,30	1,348	1,747	2,054	2,509	2,887	3,532
0,50	1,247	1,531	1,743	2,050	2,297	2,699
0,70	1,181	1,394	1,549	1,767	1,938	2,199

2.7 A VARIÂNCIA DE T

Sob a suposição que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, o efeito do delineamento B é o de reduzir o tempo esperado de operação fora de controle, portanto reduz $E(T)$, tempo esperado de um ciclo. Vamos agora investigar a variância de T , $\text{VAR}(T)$.

2.7.1 DETERMINAÇÃO DE $\text{VAR}(T)$ PARA O DELINEAMENTO U

Neste caso os intervalos entre amostragens são constantes e iguais a h , portanto a variância de T para o delineamento U , $\text{VAR}_u(T)$, é expressa por:

$$\text{VAR}_u(T) = h^2 \text{VAR}_u(N) \quad (2.72)$$

Mas:

$$\text{VAR}_u(N) = E_u(N^2) - E_u(N)^2 \quad (2.73)$$

Porém, $N = N_1 + N_2$ e N_1 e N_2 são para o delineamento U variáveis aleatórias independentes, portanto:

$$\text{VAR}_u(N) = E_u(N_1^2) - E_u(N_1)^2 + E_b(N_2^2) - E_b(N_2)^2 \quad (2.74)$$

2.7.2 DETERMINAÇÃO DE $\text{VAR}(T)$ PARA O DELINEAMENTO B

Neste caso, os intervalos entre amostragens são decrescentes, e de (2.9) temos:

$$T_N = h_1 N^{1/\alpha}$$

portanto, a variância de T para o delineamento B , $\text{VAR}_b(T)$ é expressa por:

$$\text{VAR}_b(T) = h_1^2 \text{VAR}_b(N^{1/\alpha}) \quad (2.75)$$

mas:

$$\text{VAR}_b(N^{1/\alpha}) = E_b(N^{2/\alpha}) - E_b(N^{1/\alpha})^2 \quad (2.76)$$

Novamente os cálculos de (2.76) podem ser simplificados pela utilização das expressões (A.1) para $E_b[(N_1 + N_2)^{j/\alpha}]$ se $p_1 \neq p_2$, ou a expressão (A.4) se $p_1 = p_2$ onde $j = 1, 2$. Ambas as expressões são dadas no apêndice.

Portanto substituindo (2.76) em (2.75), obtemos finalmente a variância de T para o delineamento B .

As tabelas de 2.6.a - 2.6.d fornecem as variâncias de T para o delineamento U e para o delineamento B , para diferentes combinações dos valores de p_1 ou q_1 , p_2 e α . Estas tabelas mostram que a variância de T para o delineamento B é menor que a variância de T para o delineamento U .

Tabela 2.6.a: Variância de T para o delineamento *U*
($\alpha = 2$)

p_2	q_1					
	0,01	0,05	0,0999	0,1993	0,2974	0,4866
0,10	0,282	0,510	1,271	4,724	11,500	40,310
0,15	0,277	0,373	0,693	2,144	4,990	17,100
0,20	0,275	0,326	0,496	1,265	2,775	9,197
0,30	0,274	0,294	0,360	0,662	1,252	3,765
0,50	0,273	0,279	0,296	0,376	0,533	1,196
0,70	0,273	0,275	0,281	0,308	0,360	0,580

Tabela 2.6.b: Variância de T para o delineamento *B*
($\alpha = 2$)

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	0,244	0,237	0,295	0,496	0,769	1,524
0,15	0,250	0,229	0,250	0,352	0,506	0,954
0,20	0,255	0,230	0,234	0,290	0,386	0,683
0,30	0,260	0,236	0,227	0,242	0,283	0,430
0,50	0,265	0,246	0,232	0,220	0,221	0,255
0,70	0,268	0,252	0,239	0,219	0,207	0,195

Tabela 2.6.c: Variância de T para o delineamento *U*
($\alpha = 3$)

p_2	q_1					
	0,01	0,05	0,0999	0,1993	0,2974	0,4866
0,10	0,141	0,369	1,130	4,583	11,360	40,180
0,15	0,136	0,232	0,551	2,003	4,849	16,960
0,20	0,134	0,185	0,355	1,124	2,634	9,061
0,30	0,133	0,153	0,219	0,520	1,112	3,628
0,50	0,132	0,138	0,155	0,235	0,392	1,060
0,70	0,132	0,134	0,140	0,166	0,219	0,443

Tabela 2.6.d: Variância de T para o delineamento *B*
($\alpha = 3$)

p_2	p_1					
	0,01	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
0,10	0,109	0,095	0,108	0,155	0,213	0,350
0,15	0,114	0,096	0,097	0,121	0,156	0,245
0,20	0,117	0,098	0,094	0,105	0,127	0,190
0,30	0,121	0,103	0,094	0,093	0,101	0,133
0,50	0,125	0,110	0,100	0,089	0,85	0,088
0,70	0,127	0,115	0,105	0,091	0,082	0,071

2.8 A DISTRIBUIÇÃO DE T

Nesta seção, faremos uma comparação da distribuição de T , sob o delineamento B , com a distribuição de T , sob o delineamento U , para valores particulares de α , p_1 e p_2 , admitindo $E(T_1) = 1$. Esta comparação será feita com o auxílio do método de Monte Carlo, portanto os tempos de falha do sistema, T_1 , serão simulados. Os valores de $E(T)$ e $VAR(T)$ serão comparados com os resultados analíticos já obtidos para ambos delineamentos, uniforme e balanceado. A tabela 2.7.a fornece os valores de $E(T)$ para o delineamento uniforme e as tabelas 2.7.b – 2.7.c para o delineamento balanceado. As tabelas 2.6.a – 2.6.d fornecem os valores de $VAR(T)$ para ambos delineamentos, balanceado e uniforme.

2.8.1 EXEMPLO 1

Neste exemplo consideramos $\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $q_1 = 0,2974$ e $p_2 = 0,20$. Neste caso, os valores exatos de $E(T)$ e $VAR(T)$ para cada delineamento são:

$$E_u(T) = 2,59$$

$$VAR_u(T) = 2,78$$

$$E_b(T) = 1,72$$

$$VAR_b(T) = 0,39$$

Através da simulação de 1000 valores de T_1 obtivemos os seguintes resultados:

$$E_u(T) = 2,52$$

$$VAR_u(T) = 2,77$$

$$E_b(T) = 1,73$$

$$\text{VAR}_b(T) = 0,41$$

O gráfico 2.2.a apresenta na parte superior a distribuição de T , para o delineamento U , e na parte inferior a distribuição de T , para o delineamento B .

2.8.2 EXEMPLO 2

Neste exemplo consideramos $\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$; $q_1 = 0,2974$ e $p_2 = 0,20$. Neste caso, os valores exatos de $E(T)$ e $\text{VAR}(T)$ para cada delineamento são:

$$E_u(T) = 2,59$$

$$\text{VAR}_u(T) = 2,63$$

$$E_b(T) = 1,46$$

$$\text{VAR}_b(T) = 0,13$$

Através da simulação de 1000 valores de T_1 , obtivemos os seguintes resultados:

$$E_u(T) = 2,52$$

$$\text{VAR}_u(T) = 2,60$$

$$E_b(T) = 1,45$$

$$\text{VAR}_b(T) = 0,13$$

O gráfico 2.2.b apresenta na parte superior a distribuição de T , para o delineamento U , e na parte inferior a distribuição de T , para o delineamento B .

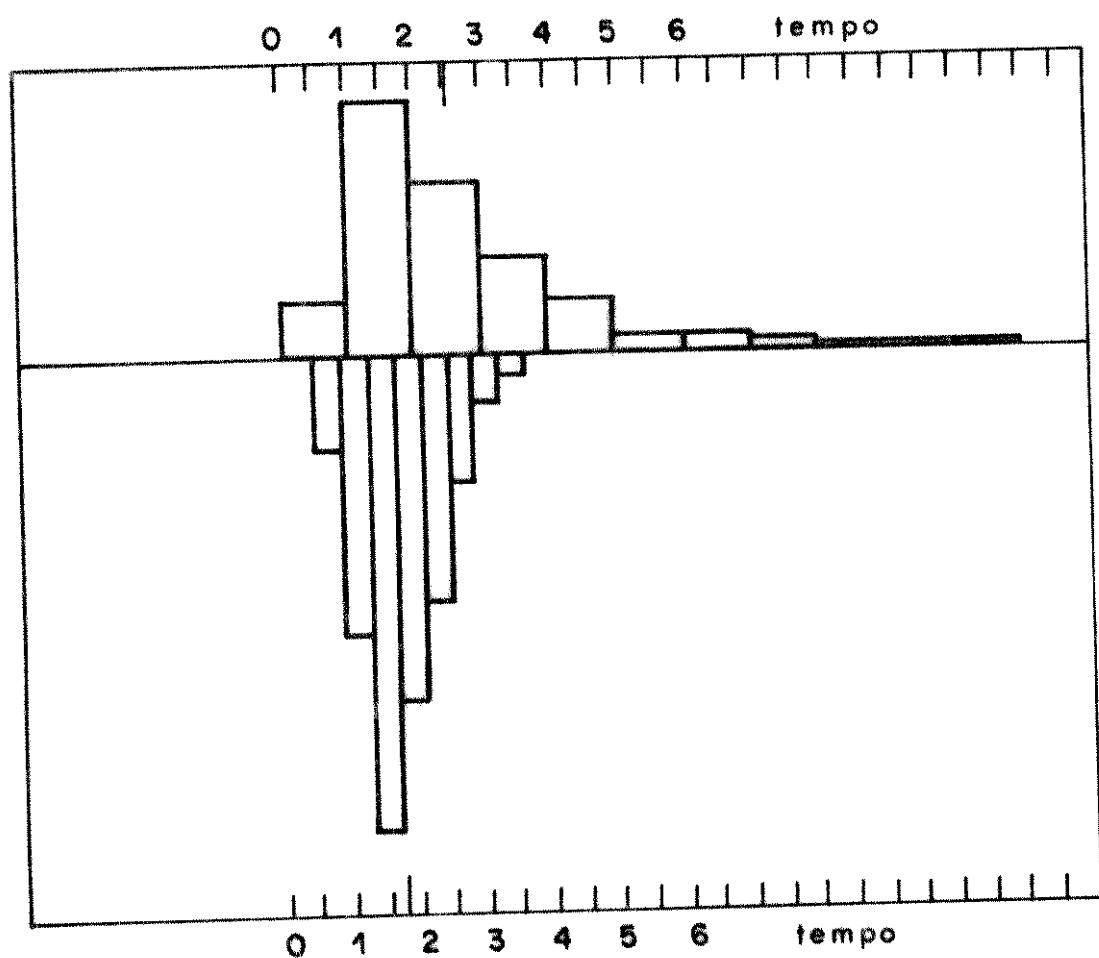


Gráfico 2.2.a Distribuição de T
(Parte superior $\Rightarrow$ delineamento de U)
(Parte inferior $\Rightarrow$ delineamento de B)
 $\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$)

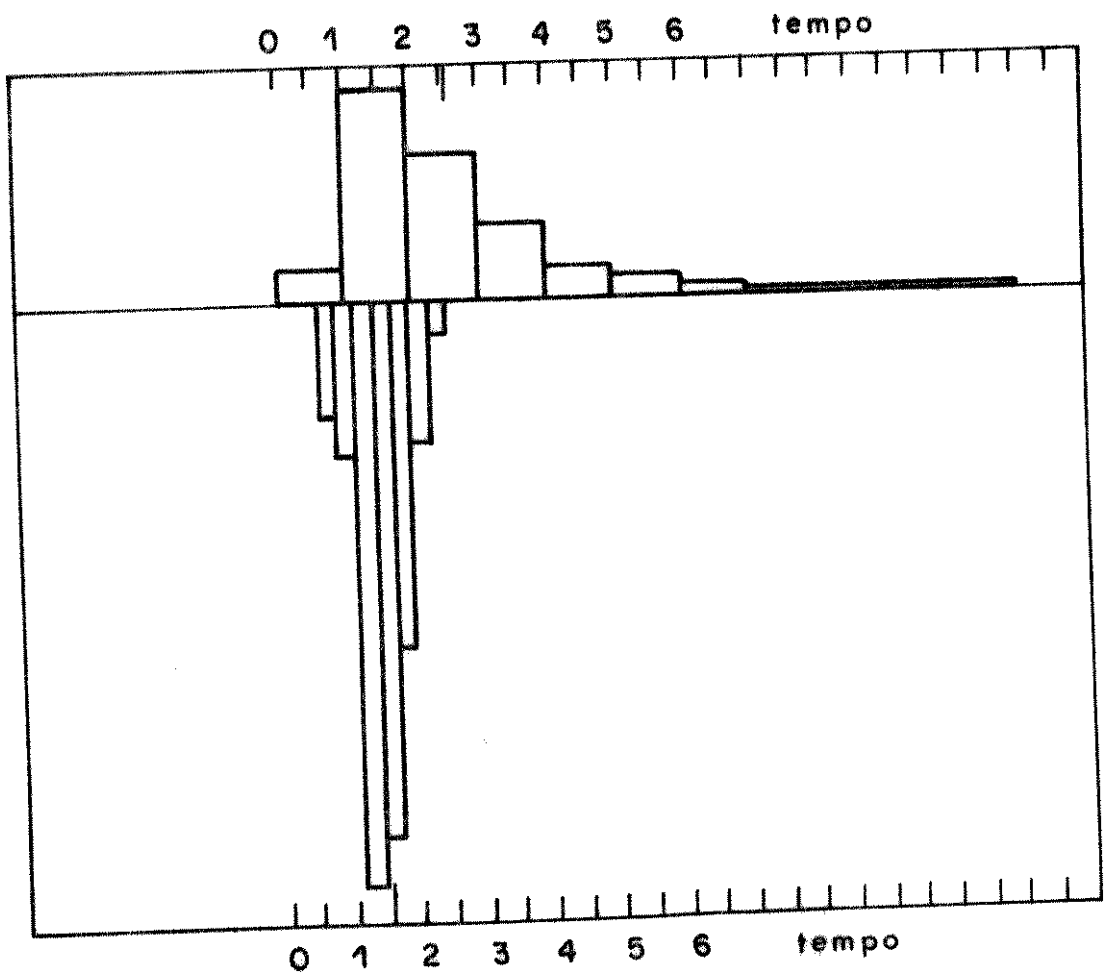


Gráfico 2.2.b Distribuição de T
(Parte superior $\Rightarrow$ delineamento de U)
(Parte inferior $\Rightarrow$ delineamento de B)
 $\alpha = 3; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20$

Tabela 2.7.a: Valores de $E_u(T)$ para α entre 2 e 5

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,0999	0,1497	0,1993	0,2974	0,3935	0,4866
0,01	2,00	4,03	6,10	11,47	17,14	23,12	36,12	50,75	67,33
0,03	1,33	2,00	2,68	4,46	6,32	8,30	12,59	17,42	22,89
0,05	1,20	1,59	2,00	3,05	4,16	5,33	7,88	10,75	14,00
0,10	1,10	1,29	1,49	2,00	2,54	3,11	4,35	5,75	7,33
0,15	1,06	1,19	1,32	1,65	2,00	2,37	3,18	4,08	5,11
0,20	1,05	1,14	1,23	1,47	1,73	2,00	2,59	3,25	4,00
0,30	1,03	1,09	1,15	1,30	1,46	1,63	2,00	2,42	2,89
0,40	1,02	1,06	1,10	1,21	1,32	1,45	1,71	2,00	2,33
0,50	1,02	1,05	1,08	1,16	1,24	1,33	1,53	1,75	2,00
0,70	1,01	1,03	1,05	1,10	1,15	1,21	1,33	1,46	1,62

Tabela 2.7.b: Valores de $E_b(T)$ para $\alpha = 2$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	1,50	2,11	2,57	3,47	4,22	4,89	6,10	7,26	8,42
0,03	1,21	1,50	1,73	2,21	2,61	2,98	3,65	4,30	4,95
0,05	1,14	1,34	1,50	1,85	2,14	2,41	2,92	3,40	3,90
0,10	1,07	1,19	1,29	1,50	1,69	1,87	2,20	2,52	2,86
0,15	1,05	1,13	1,20	1,36	1,50	1,64	1,89	2,15	2,41
0,20	1,04	1,10	1,16	1,28	1,40	1,51	1,72	1,93	2,15
0,30	1,02	1,07	1,11	1,20	1,28	1,36	1,51	1,67	1,84
0,40	1,02	1,05	1,08	1,15	1,21	1,27	1,40	1,53	1,67
0,50	1,01	1,04	1,06	1,12	1,17	1,22	1,32	1,43	1,55
0,70	1,01	1,03	1,04	1,08	1,11	1,15	1,23	1,31	1,40

Tabela 2.7.c: Valores de $E_b(T)$ para $\alpha = 3$

p_2	p_1								
	0,01	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,01	1,33	1,67	1,90	2,31	2,63	2,90	3,35	3,76	4,15
0,03	1,15	1,33	1,47	1,72	1,92	2,09	2,39	2,66	2,92
0,05	1,10	1,23	1,33	1,53	1,69	1,82	2,06	2,28	2,50
0,10	1,06	1,14	1,20	1,33	1,44	1,54	1,72	1,88	2,04
0,15	1,04	1,10	1,15	1,25	1,34	1,41	1,56	1,69	1,82
0,20	1,03	1,08	1,12	1,20	1,27	1,34	1,46	1,58	1,69
0,30	1,02	1,05	1,08	1,14	1,20	1,25	1,34	1,44	1,53
0,40	1,02	1,04	1,06	1,11	1,15	1,20	1,27	1,35	1,43
0,50	1,01	1,03	1,05	1,09	1,13	1,16	1,23	1,30	1,37
0,70	1,01	1,02	1,03	1,06	1,09	1,11	1,17	1,22	1,28

2.9 CONCLUSÕES

Foi mostrado neste capítulo que quando T_1 tem distribuição de Weibull, com parâmetro de forma $\alpha \geq 1,5$, o delineamento B para a construção dos gráficos de controle é eficiente com respeito ao delineamento U . A eficiência aumenta com α e com p_1 , e diminui com p_2 . Portanto o delineamento balanceado é particularmente interessante quando α é grande, caracterizando um processo com rápida deterioração, associado a pequenos valores de δ , ou seja, pequenos deslocamentos na média μ , e a altos custos com amostragens, sugerindo p_1 grande e n pequeno, portanto p_2 pequeno.

Um dos problemas que surge na aplicação do delineamento balanceado é a estimação do valor do parâmetro de forma da distribuição de Weibull. A eficiência do delineamento B com respeito ao delineamento U é pouco sensível a variações no valor estimado de α portanto, desde que não se cometa erros grosseiros na estimação de α o delineamento balanceado continuará, em média, a detectar a falha antes que o delineamento uniforme, para um igual número esperado de amostras tomadas em um ciclo.

A esperança de T é menor quando se utiliza o delineamento balanceado, e além disso a variância de T também é menor. Isto é vantajoso para a programação da manutenção do sistema.

Para finalizar podemos dizer que as simulações Monte Carlo confirmam os resultados teóricos obtidos para $E(T)$ e $VAR(T)$ e ainda fornecem as distribuições de T para ambos delineamentos.

Capítulo III

GRÁFICOS DE CONTROLE COM TAMANHO DAS AMOSTRAS CRESCENTE

3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo II, foi proposto o esquema balanceado de amostragem, que consiste em se tomar uma nova amostra sempre que a probabilidade de ocorrência de causa assinalável, dada a sua não ocorrência até o instante da última amostragem, alcance um dado valor fixo p_1 .

Com a hipótese que T_1 , tempo de ocorrência da causa assinalável, tem distribuição de Weibull, os intervalos de tempo entre amostragens tornam-se decrescentes. Este esquema de amostragem pode não ser operacional, em diversas situações práticas de interesse.

Neste capítulo, nós propomos então um esquema uniforme de amostragem, uniforme no sentido de manter constante o intervalo de tempo entre amostragens, porém com o tamanho das amostras variável. O tamanho das amostras varia de acordo com a taxa de falha do sistema. Com a hipótese que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$ com $\alpha > 1$, o tamanho das amostras aumenta a medida em que são realizadas as amostragens. Seja este delineamento o delineamento uniforme com n variável, ou simplesmente delineamento $U1$.

Quando da análise de uma amostra, dado que a falha não tenha ocorrido ou tenha ocorrido, porém não tenha sido ainda detectada, tem-se respectivamente uma probabilidade β de um alarme falso ou uma probabilidade p_2 de se detectar a falha. O aumento do tamanho da amostra aumenta a

probabilidade p_2 sem alterar a probabilidade β .

A Probabilidade β de um alarme falso na i -ésima amostragem, dada a não ocorrência da causa assinalável até o instante desta amostragem é:

$$\beta = 2\Phi(-k) \quad (3.1)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a distribuição acumulada da normal padrão e k é o fator de abertura dos limites de controle.

Se n_i , for o tamanho da i -ésima amostra, então os limites de controle, superior e inferior, serão:

$$\text{LSC}_i = \mu + k\sigma/n_i^{1/2} \quad (3.2)$$

$$\text{LIC}_i = \mu - k\sigma/n_i^{1/2} \quad (3.3)$$

Após a ocorrência da causa assinalável, a probabilidade de que ela seja detectada na i -ésima amostragem, dada a sua não detecção até a $(i-1)$ -ésima amostragem, depende de n_i . Seja então f_i esta probabilidade:

$$f_i = \Phi(-k - \delta n_i^{1/2}) + \Phi(-k + \delta n_i^{1/2}) \quad (3.4)$$

A probabilidade f_i aumenta a medida em que se aumenta o tamanho da amostra n_i .

De maneira análoga ao que foi feito no capítulo II, nós compararemos o delineamento uniforme com n variável, ou delineamento $U1$, com o delineamento uniforme, ou delineamento U , em termos de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle.

O delineamento uniforme, considera constante os valores dos três parâmetros n , h , k do gráfico de controle, portanto os limites de controle se mantêm constantes:

$$\text{LSC} = \mu + k\sigma/n_i^{1/2} \quad (3.5)$$

$$\text{LIC} = \mu - k\sigma/n_i^{1/2} \quad (3.6)$$

Para o delineamento U , a probabilidade β de um alarme falso e a probabilidade p_2 se detectar uma falha quando da análise de uma amostra, dado respectivamente que a falha não tenha ocorrido ou tenha ocorrido, porém não tenha sido ainda detectada, independem do instante da amostragem:

$$p_2 = \Phi(-k - \delta n_i^{1/2}) + \Phi(-k + \delta n_i^{1/2}) \quad (3.7)$$

$$\beta = 2\Phi(-k) \quad (3.8)$$

Ambos delineamentos, uniforme e uniforme com n variável, adotam intervalos entre amostragens constantes. O intervalo de tempo entre amostragens é dado por (2.7):

$$h = -E(T_1)\ln(1 - p_1)$$

Para comparar o delineamento $U1$ com o delineamento U , em termos de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle, é necessário que o número esperado de itens amostrados e o número esperado de alarmes falsos por ciclo para ambos delineamentos sejam iguais.

Nas seções 3.2, 3.3, e 3.4 determinaremos respectivamente o tamanho das amostras, o número esperado de itens amostrados por ciclo e o número esperado de amostras e de alarmes falsos por ciclo. Na seção 3.5 determinaremos a esperança de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle. Na seção 3.6 mediremos a eficiência do delineamento $U1$ com respeito ao delineamento U , em termos de T_2 .

Na seção 3.7 a título de ilustração faremos algumas simulações Monte Carlo do emprego dos delineamentos $U1$ e U , com T_1 distribuído segundo uma Weibull, para valores escolhidos de α , p_1 e p_2 . Finalmente na seção 3.8 apresentaremos algumas conclusões gerais.

3.2 DETERMINAÇÃO DO TAMANHO DAS AMOSTRAS

Novamente, partindo do modelo básico de Duncan, nós assumiremos um ciclo de qualidade, de comprimento T , como composto de duas fases diferentes: uma na qual o processo opera sob controle, com comprimento T_1 , e outra, após a ocorrência da causa assinalável, com o processo operando fora de controle, com comprimento T_2 . O tempo de procura e de correção da falha é considerado como sendo nulo. Portanto $T = T_1 + T_2$.

Para introduzir o processo de deterioração do sistema nós modelaremos $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, com parâmetros conhecidos, e estabeleceremos um delineamento uniforme com n variável, onde os instantes de amostragem serão dados pela expressão (2.6):

$$t_i = ih \quad (3.9)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$, onde de (2.7):

$$h = -E(T_1)\ln(1 - p_1) \quad (3.10)$$

Uma vez conhecido os custos envolvidos com a operação do programa de controle, ou seja: custos com amostragens, custos com alarmes falsos e os custos associados ao funcionamento do sistema fora de controle, é possível determinar o tamanho ótimo das amostras.

Seja c_1 o custo com um item amostrado, c_2 o custo com um alarme falso e c_3 o custo associado ao funcionamento do sistema fora de controle por um intervalo de tempo entre amostragens. $E_{u1}[C_i]$ representa o custo esperado da operação do programa de controle após o instante de tempo t_i dado que a falha ocorreu após este instante, onde $t_i = ih$, para $i = 0, 1, 2, \dots$, com $t_0 = 0$. O índice $u1$ indica que o delineamento $U1$ está sendo adotado. Ou seja:

$$E_{u1}[C_i] = G_{i+1} + Pr[T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i]E_{u1}[(i+1)h - T_1 / t_i < T_1 \leq t_{i+1}]c_3/h + Pr[T_1 > t_{i+1}/T_1 > t_i]\{c_2\beta + E_{u1}[C_{i+1}]\} \quad (3.11)$$

onde:

$$G_{i+1} = c_1n_{i+1}Pr[T_1 > t_{i+1}/T_1 > t_i] + Pr[T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i]\{c_3E_{u1}[N_2 - 1/N_1 = i] + c_1E_{u1}[M_2/N_1 = i]\} \quad (3.12)$$

N_1 e N_2 representam respectivamente o número de amostras tomadas antes e após a ocorrência da falha e M_2 o número de itens amostrados após a ocorrência da falha. Mas:

$$E_{u1}[N_2 - 1/N_1 = i] = (1 - f_{i+1})\{1 + E_{u1}[N_2 - 1/N_1 = i + 1]\} \quad (3.13)$$

$$E_{u1}[M_2/N_1 = i] = n_{i+1} + (1 - f_{i+1})E_{u1}[M_2/N_1 = i + 1] \quad (3.14)$$

Substituindo (3.13) e (3.14) em (3.12) vem:

$$G_{i+1} = c_1n_{i+1} + Pr[T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i](1 - f_{i+1})\{c_3[1 + E_{u1}[N_2 - 1/N_1 = i + 1] + c_1E_{u1}[M_2/N_1 = i + 1]]\} \quad (3.15)$$

para $i = 0, 1, 2, \dots$.

O valor de n_{i+1} é determinado de modo a minimizar G_{i+1} . Existe um conjunto discreto de valores possíveis para n_{i+1} , ou seja $n_{i+1} = 0, 1, 2, \dots$, e além disso $n_{i+1} \leq n_{i+2}$ para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$. Portanto, o valor ótimo de n_{i+1} que minimiza G_{i+1} pode ser determinado rapidamente por inspeção direta. Conhecido o valor de n_{i+1} , obtemos em (3.13) e (3.14) os valores de $E_{u1}[N_2 - 1/N_1 = i]$ e $E_{u1}[M_2/N_1 = i]$ respectivamente. Substituindo estes valores em (3.15) obtemos G_i como função apenas de n_i . O valor de n_i é o que minimiza G_i . Assim, recursivamente é possível obter todos os valores de n_i , para $i = 1, 2, 3, \dots$. Além disso, para efeito de cálculos, observamos que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_{u1}[N_2 - 1/N_1 = i + 1] = 0 \quad (3.16)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_{u1}[M_2/N_1 = i + 1] = \infty \quad (3.17)$$

3.3 O NÚMERO ESPERADO DE ÍTENS AMOSTRADOS POR CICLO

De maneira análoga ao desenvolvimento do capítulo II, o delineamento uniforme com n variável, ou delineamento $U1$, será comparado com o delineamento uniforme, ou delineamento U , em termos de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle. Para se fazer esta comparação é necessário conhecer o número esperado de itens amostrados em um ciclo para cada delineamento.

Seja M o número de itens amostrados em um ciclo. A esperança de M sob o delineamento U , $E_u(M)$, é obtida de (2.26) e do fato de $E_u(M) = nE_u(N)$, ou seja:

$$E_u(M) = n \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i \ln(1 - p_1)]^\alpha\} + 1/p_2 \right\} \quad (3.18)$$

onde n e p_1 são escolhidos através de critérios econômicos e determinam respectivamente o tamanho da amostra e a frequência das amostragens.

3.3.1 DETERMINAÇÃO DO VALOR ESPERADO DE M SOB O DELINEAMENTO $U1$

Sejam M_1 e M_2 o número de itens amostrados antes e após a ocorrência da causa assinalável, ou seja: $M = M_1 + M_2$. O valor esperado de M_1 sob o delineamento $U1$ é dado por:

$$E_{u1}(M_1) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i Pr[T_1 \geq t_i] \quad (3.19)$$

como $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$:

$$E_{u1}(M_1) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \exp(-t_i^\alpha / \theta) \quad (3.20)$$

de (2.11), (3.9) e (3.10) segue:

$$E_{u1}(M_1) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i \ln(1 - p_1)]^\alpha\} \quad (3.21)$$

Os valores de n_i são os que minimizam a expressão 3.15.
O valor esperado de M_2 sob o delineamento $U1$ é dado por:

$$E_{u1}(M_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}(M_2/N_1 = i) Pr[N_1 = i] \quad (3.22)$$

ou seja:

$$E_{u1}(M_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}(M_2/N_1 = i) \{Pr[T_1 > t_i] - Pr[T_1 > t_{i+1}]\} \quad (3.23)$$

portanto:

$$E_{u1}(M_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}(M_2/N_1 = i) \{\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i \ln(1 - p_1)]^\alpha\} - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1) \ln(1 - p_1)]^\alpha\}\} \quad (3.24)$$

onde os valores de $E_{u1}(M_2/N_1 = i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots$, são dados em 3.14.
Finalmente o valor esperado de M sob o delineamento $U1$ é obtido de (3.21)

e (3.24):

$$E_{u1}(M) = \sum_{i=1}^{\infty} n_i \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} \quad (3.25)$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}(M_2/N_1 = i) \{\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ln(1 - p_1)]^\alpha\}\}$$

3.4 O NÚMERO ESPERADO DE AMOSTRAS E DE ALARMES FALSOS POR CICLO

Para comparar o delineamento $U1$ com o delineamento U é necessário conhecer também o número esperado de amostras, N , e o número esperado de alarmes falsos, AF , em um ciclo sob cada delineamento.

O valor esperado de N sob o delineamento U , $E_u(N)$ já é conhecido, de (2.26):

$$E_u(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} + 1/p_2 \quad (3.26)$$

O valor esperado de AF sob o delineamento U , $E_u(AF)$, é simplesmente:

$$E_u(AF) = \beta E_u(N_1) \quad (3.27)$$

onde $E_u(N_1)$ é dado em (2.20):

$$E_u(N_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} \quad (3.28)$$

3.4.1 DETERMINAÇÃO DO VALOR ESPERADO DE N SOB O DELINEAMENTO $U1$

Os intervalos entre amostragens do delineamento $U1$ são constantes e iguais a h , portanto $E_{u1}(N_1) = E_u(N_1)$, onde $E_{u1}(N_1)$ representa o número

esperado de amostras tomadas antes da falha sob o delineamento $U1$, de (2.20):

$$E_{u1}(N_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} \quad (3.29)$$

O número esperado de amostras tomadas após a ocorrência da causa assinalável sob o delineamento $U1$, $E_{u1}(N_2)$, é dado por:

$$E_{u1}(N_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}[N_2/N_1 = i]Pr[N_1 = i] \quad (3.30)$$

como $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$:

$$E_{u1}(N_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}[N_2/N_1 = i]\{\exp[-t_i^\alpha/\theta] - \exp[-t_{i+1}^\alpha/\theta]\} \quad (3.31)$$

de (2.11), (3.9) e (3.10) segue:

$$E_{u1}(N_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}[N_2/N_1 = i]\{\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ell n(1 - p_1)]^\alpha\}\} \quad (3.32)$$

onde os valores de $E_{u1}[N_2/N_1 = i]$ para $i = 1, 2, 3, \dots$, são dados em 3.13. Finalmente, como $N = N_1 + N_2$, então de (3.29) e (3.32) obtemos o número esperado de amostras tomadas em um ciclo sob o delineamento $U1$, $E_{u1}(N)$:

$$E_{u1}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} + \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}[N_2/N_1 = i]\{\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ell n(1 - p_1)]^\alpha\}\} \quad (3.33)$$

O valor esperado de AF sob o delineamento $U1$, $E_{u1}(AF)$, é simplesmente:

$$E_{u1}(AF) = \beta E_{u1}(N_1) \quad (3.34)$$

onde $E_{u1}(N_1)$ é dado em (3.29)

3.5 O TEMPO ESPERADO DE OPERAÇÃO FORA DE CONTROLE

Sob a suposição que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, o efeito do delineamento $U1$ será de reduzir o tempo esperado de operação fora de controle para um igual número esperado de alarmes falsos e de itens amostrados por ciclo.

Para o delineamento U , o tempo esperado de operação fora de controle já é conhecido, de (2.32):

$$E_u(T_2) = E(T_1) \{ -\ell n(1 - p_1) | \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{ -[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha \} + 1/p_2 \} - 1 \} \quad (3.35)$$

3.5.1 DETERMINAÇÃO DE $E(T_2)$ PARA O DELINEAMENTO $U1$

Desde que $T = T_1 + T_2$, segue que $E_{u1}(T_2) = E_{u1}(T) - E(T_1) = hE_{u1}(N) - E(T_1)$, onde $E_{u1}(T_2)$ representa o tempo esperado de operação fora de controle sob o delineamento $U1$. Portanto de (3.10) e (3.33):

$$E_{u1}(T_2) = E(T_1) \{ -\ell n(1 - p_1) | \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{ -[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha \} + \sum_{i=0}^{\infty} E_{u1}[N_2/N_1 = i] (\exp\{ -[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha \} - \exp\{ -[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ell n(1 - p_1)]^\alpha \}) \} - 1 \} \quad (3.36)$$

3.6 A EFICIÊNCIA DO DELINEAMENTO $U1$ COM RELAÇÃO AO DELINEAMENTO U

Para comparar o delineamento $U1$ com o delineamento U em termos de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle, é necessário que o número esperado de itens amostrados e de alarmes falsos por ciclo sejam iguais para ambos delineamentos.

Assim para cada delineamento U com valores dos parâmetros n , k e h conhecidos, portanto conhecidos os valores de p_1 e p_2 , queremos obter o delineamento $U1$ tal que:

$$E_{u1}(AF) = E_u(AF) \quad (3.37)$$

$$E_{u1}(M) = E_u(M) \quad (3.38)$$

Quando os espaçamentos entre amostragens são iguais em ambos delineamentos nem sempre é possível obter a igualdade de (3.38). Porém, alterando convenientemente o fator de abertura dos limites de controle, k , e o espaçamento entre amostragens, h , do delineamento $U1$, é possível obter as duas igualdades. Seja k_{u1} e h_{u1} respectivamente estes novos valores.

As tabelas 3.2.a - 3.2.b, 3.3.a - 3.3.b, e 3.4.a - 3.4.b fornecem respectivamente para $\alpha = 2$ e 3 , $k = 3$, $n = 5$, e diversos valores de p_1 e p_2 os valores de p_1^* , p_2^* e R_{u1} onde R_{u1} , p_1^* e p_2^* são tais que:

$$R_{u1} = c_3/c_1 \quad (3.39)$$

$$h_{u1} = -E(T_1)\ell n(1 - p_1^*) \quad (3.40)$$

$$p_2^* = \Phi(-k_{u1} - \delta n^{1/2}) + \Phi(-k_{u1} + \delta n^{1/2}) \quad (3.41)$$

Finalmente, a eficiência do delineamento $U1$ com respeito ao delineamento U , avaliada em termos de T_2 pode ser convenientemente definida por:

$$Ef_{U1/U} = E_u(T_2)/E_{u1}^*(T_2) \quad (3.42)$$

onde $E_u(T_2)$ é dado por (3.35) e $E_{u1}^*(T_2)$ é dado por (3.36) após a substituição de h por h_{u1} e de k por k_{u1} .

As tabelas 3.1.a - 3.1.b fornecem os valores de $Ef_{U1/U}$ para $\alpha = 2$ e 3 , $k = 3$, $n = 5$, e várias combinações de valores de p_1 e p_2 .

Tabela 3.1.a:Valores de $Ef_{U1/V}$
 $(\alpha = 2; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	2,89	4,79	6,50	7,79	10,37	12,90	13,56
0,15	2,25	3,42	4,35	5,04	6,21	7,64	7,64
0,20	1,84	2,80	3,33	3,76	4,44	5,32	5,10
0,30	1,69	2,11	2,42	2,60	2,86	3,27	2,95
0,40	1,50	1,78	1,93	2,09	2,18	2,35	2,07
0,50	1,40	1,56	1,64	1,73	1,79	1,84	1,58
0,60	1,29	1,40	1,44	1,46	1,54	1,54	1,32
0,70	1,23	1,28	1,29	1,31	1,33	1,21	1,15
0,80	1,15	1,16	1,18	1,19	1,20	1,11	1,07

Tabela 3.1.b:Valores de $Ef_{U1/V}$
 $(\alpha = 3; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	4,50	7,00	9,03	10,24	12,45	14,70	14,61
0,15	3,47	4,92	6,03	6,90	7,63	9,10	8,50
0,20	2,97	3,93	4,61	5,12	5,46	6,39	5,71
0,30	2,41	2,90	3,17	3,32	3,50	3,94	4,09
0,40	2,06	2,34	2,51	2,59	2,62	2,83	2,83
0,50	1,81	2,00	2,08	2,12	2,11	2,20	2,17
0,60	1,62	1,71	1,74	1,78	1,77	1,77	1,44
0,70	1,45	1,49	1,51	1,51	1,51	1,50	1,28
0,80	1,29	1,31	1,31	1,31	1,31	1,18	1,16

Tabela 3.2.a: Valores de p_1^*
 $(\alpha = 2; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,05010	0,1007	0,1494	0,2032	0,2990	0,3778	0,4980
0,15	0,05000	0,1000	0,1468	0,2044	0,2985	0,3955	0,4993
0,20	0,04995	0,1021	0,1524	0,2021	0,3020	0,4018	0,5040
0,30	0,05035	0,0994	0,1500	0,1994	0,3000	0,3990	0,5240
0,40	0,05005	0,0998	0,1460	0,2013	0,3000	0,4000	0,5340
0,50	0,04985	0,1000	0,1495	0,1940	0,2990	0,3970	0,5160
0,60	0,05025	0,0995	0,1515	0,2000	0,3002	0,3860	0,5140
0,70	0,05000	0,0997	0,1504	0,2020	0,2980	0,4140	0,5010
0,80	0,05010	0,1004	0,1502	0,2003	0,2845	0,3915	0,4990

Tabela 3.2.b: Valores de p_1^*
 $(\alpha = 3; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,05009	0,1020	0,1500	0,2075	0,3000	0,3997	0,4993
0,15	0,05001	0,1001	0,1499	0,1948	0,3012	0,3985	0,5100
0,20	0,05000	0,1001	0,1491	0,1942	0,3035	0,4015	0,5250
0,30	0,05000	0,1000	0,1508	0,1993	0,3017	0,4000	0,4720
0,40	0,05020	0,1000	0,1502	0,2000	0,3005	0,4000	0,4765
0,50	0,05012	0,1003	0,1498	0,2004	0,3020	0,3988	0,4730
0,60	0,05000	0,0997	0,1515	0,2001	0,2997	0,4017	0,5450
0,70	0,05006	0,1001	0,1510	0,2056	0,3038	0,3920	0,5100
0,80	0,05000	0,0996	0,1497	0,2010	0,2986	0,4197	0,4925

Tabela 3.3.a:Valores de p_2^*
 $(\alpha = 2; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,1001	0,1004	0,0997	0,1011	0,0997	0,0949	0,0995
0,15	0,1500	0,1500	0,1482	0,1520	0,1495	0,1486	0,1498
0,20	0,1999	0,2019	0,2016	0,2011	0,2008	0,2007	0,2015
0,30	0,3008	0,2993	0,3000	0,2996	0,3000	0,2995	0,3115
0,40	0,4001	0,3997	0,3963	0,4010	0,4000	0,4000	0,4181
0,50	0,4996	0,5000	0,4995	0,4954	0,4994	0,4983	0,5087
0,60	0,6006	0,5993	0,6014	0,6000	0,6001	0,5928	0,6073
0,70	0,7000	0,6996	0,7003	0,7013	0,6990	0,7065	0,7005
0,80	0,8002	0,8004	0,8001	0,8002	0,7934	0,7968	0,7996

Tabela 3.3.b:Valores de p_2^*
 $(\alpha = 3; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,1001	0,1012	0,1000	0,1025	0,1000	0,0999	0,0998
0,15	0,1500	0,1501	0,1499	0,1477	0,1504	0,1495	0,1532
0,20	0,2000	0,2001	0,1994	0,1969	0,2015	0,2006	0,2097
0,30	0,3000	0,3000	0,3007	0,2995	0,3009	0,3000	0,2871
0,40	0,4005	0,4000	0,4002	0,4000	0,4003	0,4000	0,3879
0,50	0,5003	0,5004	0,4998	0,5003	0,5012	0,4994	0,4856
0,60	0,6000	0,5996	0,6014	0,6001	0,5998	0,6009	0,6238
0,70	0,7001	0,7001	0,7008	0,7037	0,7020	0,6963	0,7047
0,80	0,8000	0,7996	0,7998	0,8005	0,7994	0,8073	0,7972

Tabela 3.4.a: Valores de R_{u1}
 $(\alpha = 2; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	171,9	102,34	93,75	67,58	60,94	98,44	62,70
0,15	162,5	92,19	73,44	50,78	39,06	63,09	31,25
0,20	137,5	80,08	56,25	43,75	31,04	50,78	22,60
0,30	139,8	79,69	54,69	39,06	23,64	31,25	14,49
0,40	151,6	81,25	57,81	42,19	24,92	26,82	11,36
0,50	154,5	80,51	52,34	48,05	24,22	25,86	10,79
0,60	166,4	93,94	65,63	40,63	30,16	23,91	10,80
0,70	212,5	98,16	65,63	53,13	40,63	18,77	10,28
0,80	265,6	128,31	93,75	72,19	45,21	20,28	13,05

Tabela 3.4.b: Valores de R_{u1}
 $(\alpha = 3; k = 3; n = 5)$

p_2	p_1						
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	190,6	125,8	115,63	94,53	81,25	181,25	89,84
0,15	178,1	109,4	96,88	90,63	55,47	87,50	51,56
0,20	175,0	115,6	93,75	78,13	43,75	59,38	35,16
0,30	175,0	99,3	67,97	53,13	34,38	37,50	43,75
0,40	100,0	123,5	76,56	52,34	31,25	37,50	31,25
0,50	233,6	125,0	50,00	65,63	32,81	31,25	31,25
0,60	281,3	156,3	87,50	90,63	40,63	46,88	14,45
0,70	350,0	179,7	109,38	81,25	56,25	54,69	15,63
0,80	475,0	250,0	184,77	112,50	81,25	37,58	18,75

3.7 A DISTRIBUIÇÃO DE T

Nesta seção, faremos uma comparação da distribuição de T , sob o delineamento $U1$, com a distribuição de T , sob o delineamento U , para valores particulares de α , p_1 e p_2 , admitindo $E(T_1) = 1$. Esta comparação será feita com o auxílio do método de Monte Carlo, portanto os tempos de falha do sistema, T_1 , serão simulados. Os valores de $E(T)$ serão comparados com os resultados analíticos já obtidos para ambos delineamentos, uniforme e uniforme com n variável.

3.7.1 EXEMPLO 1

Neste exemplo consideramos $\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 3$, e $n = 5$. A tabela 3.5.a fornece os valores de n_i do delineamento $U1$. Neste caso, o valor exato de $E(T)$ para cada delineamento é:

$$E_u(T) = 2,62$$

$$E_{u1}(T) = 1,36$$

Através da simulação de 1000 valores de T_1 , obtivemos os seguintes resultados:

$$E_u(T) = 2,57$$

$$\text{VAR}_u(T) = 2,74$$

$$E_{u1}(T) = 1,33$$

$$\text{VAR}_{u1}(T) = 0,22$$

Tabela 3.5.a: Valores de n_i para o delineamento $U1$
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20; k = 3; n = 5)$

<i>amostra</i> (i)	n_i
1	0
2	11
3	15
4	16
5	17
6	18
7	18
8	19
9	19
10	19
11	20
12	20
13	21

O gráfico 3.1.a apresenta na parte superior a distribuição de T , para o delineamento U , e na parte inferior a distribuição de T , para o delineamento $U1$.

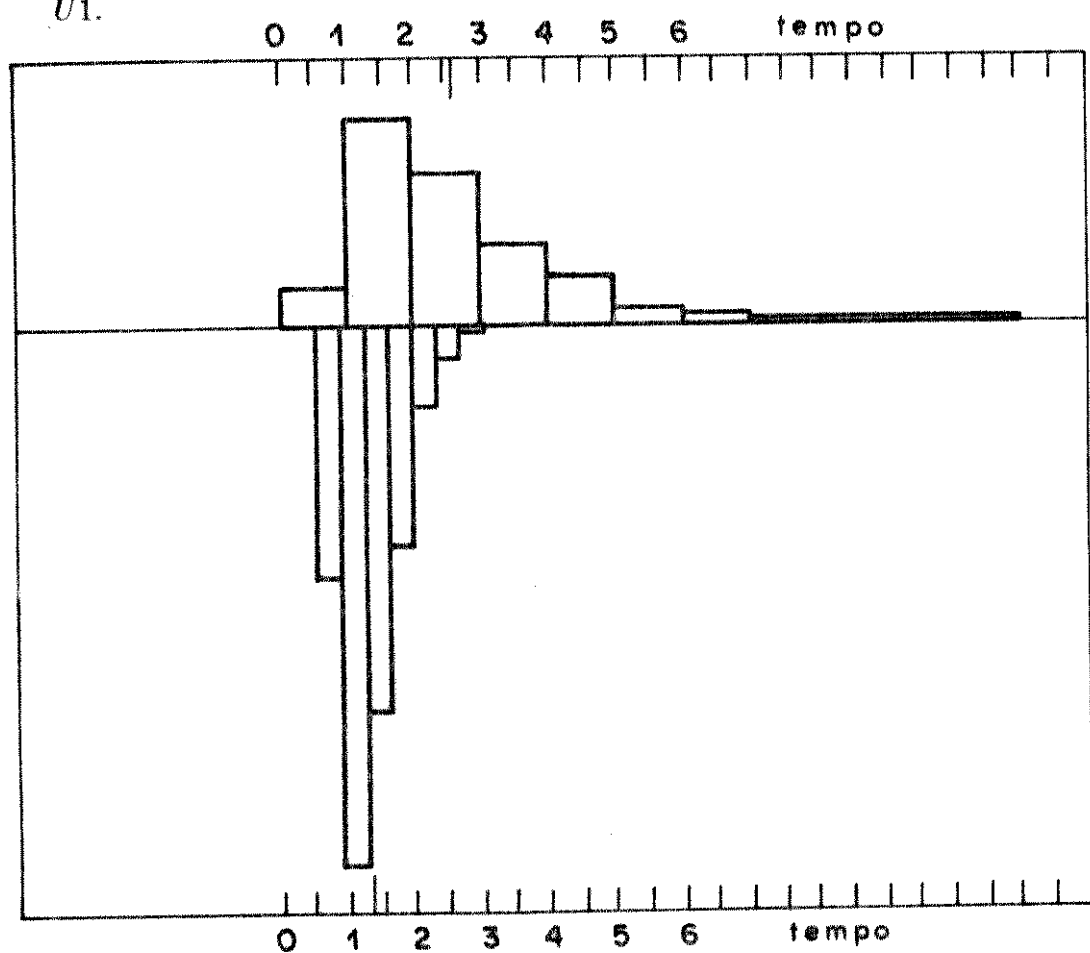


Gráfico 3.1.a: Distribuição de T
 (parte superior => delineamento U)
 (parte inferior => delineamento $U1$)
 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,2$; $k = 3$; $n = 5$)

3.7.2 EXEMPLO 2

Neste exemplo consideramos $\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 3$ e $n = 5$. A tabela 3.5.b fornece os valores de n_i do delineamento $U1$. Neste caso, o valor exato de $E(T)$ para cada delineamento é:

$$E_u(T) = 2,62$$

$$E_{u1}(T) = 1,27$$

Através da simulação de 1000 valores de T_1 , obtivemos os seguintes resultados:

$$E_u(T) = 2,65$$

$$\text{VAR}_u(T) = 2,32$$

$$E_{u1}(T) = 1,26$$

$$\text{VAR}_{u1}(T) = 0,09$$

Tabela 3.5.b: Valores de n_i para o delineamento $U1$
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20; k = 3; n = 5)$

<i>amostra</i> (i)	n_i
1	0
2	0
3	15
4	19
5	21
6	22
7	22
8	22
9	22
10	23

O gráfico 3.1.b apresenta na parte superior a distribuição de T , para o delineamento U , e na parte inferior a distribuição de T , para o delineamento $U1$.

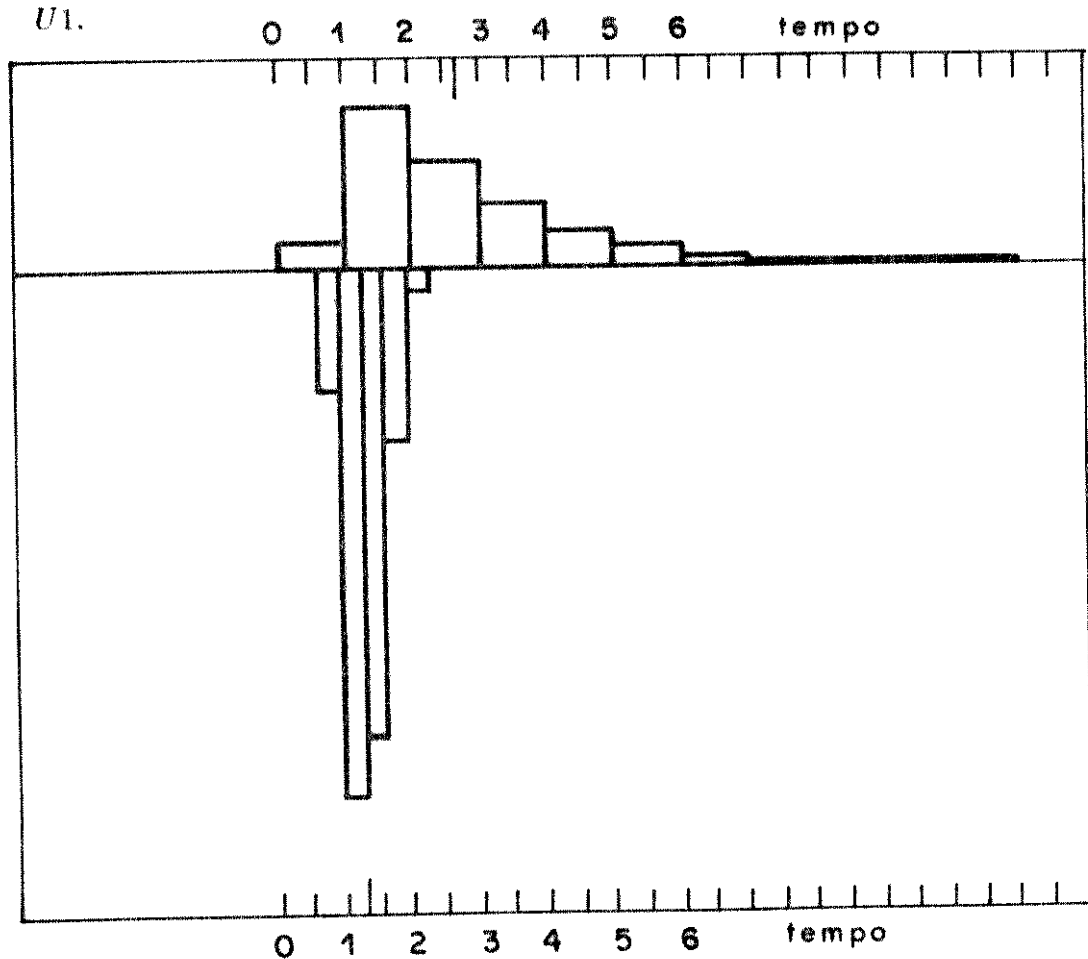


Gráfico 3.1.b: Distribuição de T
 (parte superior => delineamento U)
 (parte inferior => delineamento $U1$)
 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,2$; $k = 3$; $n = 5$)

3.8 CONCLUSÕES

As mesmas conclusões do capítulo II podem ser tiradas aqui, ou seja, o delineamento uniforme com n variável é mais eficiente que o delineamento uniforme, no sentido de detectar a falha mais rapidamente, para um mesmo número esperado de itens amostrados e de alarmes falsos por ciclo. O delineamento uniforme com n variável é particularmente eficiente quando α é grande, caracterizando um processo com rápida deterioração, associado a pequenos valores de δ e a altos custos de amostragens, sugerindo p_1 grande e p_2 pequeno.

Dependendo da combinação de valores de p_1 e p_2 , o delineamento uniforme com n variável é também mais eficiente que o delineamento balanceado proposto no capítulo 2, conforme mostram as tabelas 2.3.a, 2.3.c, 3.1.a e 3.1.b.

Além disso, o esquema uniforme de amostragem com n variável é, de modo geral, mais fácil de ser viabilizado operacionalmente do que o esquema balanceado de amostragem.

Capítulo IV

GRÁFICOS DE CONTROLE COM LIMITES DECRESCENTES

4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo II, foi proposto o esquema balanceado de amostragem, que consiste em se tomar uma nova amostra sempre que a probabilidade de ocorrência da causa assinalável, dada a sua não ocorrência até o instante da última amostragem, alcance um dado valor fixo p_1 .

Com a hipótese que T_1 , tempo de ocorrência da causa assinalável, tem distribuição de Weibull, os intervalos de tempo entre amostragens tornam-se decrescentes. Este esquema de amostragem pode não ser operacional em diversas situações práticas de interesse.

No capítulo III, foi proposto então um esquema uniforme de amostragem, uniforme no sentido de manter constante o intervalo de tempo entre amostragens, porém com o tamanho das amostras variável. O tamanho das amostras varia de acordo com a taxa de falha do sistema. Com a hipótese que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$ com $\alpha > 1$, o tamanho das amostras cresce à medida em que são realizadas as amostragens.

Neste capítulo, nós adotamos o esquema tradicional de amostragem, que mantém constante tanto o tamanho das amostras, n , quanto os intervalos de tempo entre amostragens, h . Porém, o fator de abertura dos limites de controle, k , se reduz à medida em que a taxa de falha cresce, consequentemente estes limites se estreitam. Seja este delineamento o delineamento uniforme com k variável ou simplesmente delineamento $U2$.

Quando da análise de uma amostra, dado que a falha não tenha ocorrido ou tenha ocorrido, porém não tenha sido ainda detectada, tem-se respectivamente uma probabilidade β de um alarme falso ou uma probabilidade p_2 de se detectar a falha. Ao se estreitar os limites de controle, mantendo constante o tamanho das amostras, aumenta-se tanto a probabilidade p_2 quanto a probabilidade β .

Portanto, a probabilidade de um alarme falso na i -ésima amostragem, dada a não ocorrência da causa assinalável até o instante desta amostragem depende de k_i o fator de abertura dos limites neste instante. Seja s_i esta probabilidade:

$$s_i = 2\Phi(-k_i) \quad (4.1)$$

Onde $\Phi(\cdot)$ é a distribuição acumulada da normal reduzida.

A probabilidade s_i aumenta à medida em que se diminui o valor de k_i .

Os limites de controle, superior e inferior, serão, no instante da i -ésima amostragem, dados respectivamente por:

$$LSC_i = \mu + k_i\sigma/n^{1/2} \quad (4.2)$$

$$LIC_i = \mu - k_i\sigma/n^{1/2} \quad (4.3)$$

Após a ocorrência da causa assinalável, a probabilidade de que ela seja detectada na i -ésima amostragem, dada a sua não detecção até a $(i-1)$ -ésima amostragem, depende de k_i . Seja então f_i esta probabilidade:

$$f_i = \Phi(-k_i - \delta n^{1/2}) + \Phi(-k_i + \delta n^{1/2}) \quad (4.4)$$

A probabilidade f_i aumenta à medida em que o valor de k_i se reduz.

De maneira análoga ao que foi feito no capítulo II o delineamento uniforme com k variável, ou delineamento $U2$, será comparado com o delineamento uniforme, ou delineamento U , em termos de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle.

O delineamento uniforme, considera constante os valores dos três parâmetros n , h , k do gráfico de controle, portanto os limites de controle se mantêm constantes:

$$LSC = \mu + k\sigma/n^{1/2} \quad (4.5)$$

$$LIC = \mu - k\sigma/n^{1/2} \quad (4.6)$$

Para o delineamento U , a probabilidade β de um alarme falso e a probabilidade p_2 de se detectar uma falha quando da análise de uma amostra,

dado respectivamente que a falha não tenha ocorrido ou tenha ocorrido, porém não tenha sido ainda detectada, independentem do instante da amostragem:

$$p_2 = \Phi(-k - \delta n^{1/2}) + \Phi(-k + \delta n^{1/2}) \quad (4.7)$$

$$\beta = 2\Phi(-k) \quad (4.8)$$

Ambos delineamentos, uniforme e uniforme com k variável, adotam intervalos entre amostragens constantes. O intervalo de tempo entre amostragens é dado por (2.7):

$$h = -E(T)\ell n(1 - p_1) \quad (4.9)$$

Para comparar o delineamento $U2$ com o delineamento U , em termos de T_2 , é necessário que sejam iguais, para ambos delineamentos, o número esperado de amostras e o número esperado de alarmes falsos por ciclo.

Nas seções 4.2, 4.3 e 4.4 determinaremos respectivamente os limites de controle e o número esperado de amostras e de alarmes falsos por ciclo.

Na seção 4.5 determinaremos a esperança de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle, na seção 4.6 mediremos a eficiência do delineamento $U2$ com respeito ao delineamento U .

Na seção 4.7, a título de ilustração, faremos algumas simulações Monte Carlo do emprego dos delineamentos $U2$ e U , com T_1 distribuído segundo uma Weibull, para valores escolhidos de α , p_1 e p_2 . Finalmente na seção 4.8 apresentaremos algumas conclusões gerais.

4.2 DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DECRESCENTES DE CONTROLE

Novamente, partindo do modelo básico de Duncan, nós assumiremos um ciclo de qualidade, de comprimento T , como composto de duas fases diferentes: Uma na qual o processo opera sob controle, com comprimento T_1 , e outra, após a ocorrência da causa assinalável, com o processo operando fora de controle, com comprimento T_2 , o tempo de procura e de correção da falha é considerado sem perda de generalidade, como sendo nulo. Portanto $T = T_1 + T_2$.

Para introduzir o processo de deterioração do sistema nós modelaremos $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$ com parâmetros conhecidos, e adotaremos o esquema tradicional de amostragens, porém com os limites de controle decrescentes. Seja este delineamento o delineamento uniforme com k variável ou delineamento $U2$.

Uma vez conhecidos os custos envolvidos com a operação do programa de controle, isto é: custos com amostragens, custos com alarmes falsos e os custos associados ao funcionamento do sistema fora de controle, é possível determinar o estreitamento ótimo dos limites de controle.

Seja c_1 o custo com uma amostragem, c_2 o custo com um alarme falso e c_3 o custo associado ao funcionamento do sistema fora de controle por um intervalo de tempo entre amostragens. $E_{u2}[C_i]$ representa o custo esperado de operação do programa de controle após o instante de tempo t_i dado que a falha ocorreu após este instante, onde $t_i = ih$ para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, com $t_0 = 0$. O índice $u2$ indica que o delineamento $U2$ está sendo adotado. Ou seja:

$$\begin{aligned} E_{u2}[C_i] = & c_1 + Pr[T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i] \\ & E_{u2}[(i+1)h - T_1/t_i < T_1 \leq t_{i+1}]c_3/h \\ & + Pr[T_1 > t_{i+1}/T_1 > t_i]E_{u2}[C_{i+1}] + G_{i+1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{i+1} = & Pr[T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i](c_1 + c_3)E_{u2}[N_2 - 1/N_1 = i] + \\ & + Pr[T_1 > t_{i+1}/T_1 > t_i]c_2s_{i+1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e

$$E_{u2}[N_2 - 1/N_1 = i] = (1 - f_{i+1})\{E_{u2}[N_2 - 1/N_1 = i+1] + 1\} \quad (4.12)$$

Novamente N_1 e N_2 representam o número de amostras tomadas antes e após a ocorrência da causa assinalável.

Derivando 4.11 em relação a k_{i+1} com o auxílio da regra de Leibnitz para a diferenciação de integrais, e igualando o resultado a zero obtemos o valor de k_{i+1} que minimiza os custos envolvidos com a operação do programa de controle, ou seja:

$$k_{i+1}^* = (1/\delta n^{1/2}) \ln\{[1 + (1 - 4M_{i+1}^2)^{1/2}]/(2M_{i+1})\} \quad (4.13)$$

onde

$$M_{i+1} = \frac{Pr[T_1 \leq t_{i+1}/T_1 > t_i]}{Pr[T_1 > t_{i+1}/T_1 > t_i]} \quad (4.14)$$

$$[(c_1 + c_3)/c_2]\{E_{u2}[N_2 - 1/N_1 = i + 1] + 1\}[\exp(-\delta^2 n/2)]/2$$

como $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, então:

$$M_{i+1} = \frac{\{[1 - \exp(-t_{i+1}^{1/\alpha}/\theta)]/\exp[-t_{i+1}^{1/\alpha}/\theta]\}}{[(c_1 + c_3)/c_2]\{E_{u2}[N_2 - 1/N_1 = i + 1] + 1\}[\exp(-\delta^2 n/2)]/2} \quad (4.15)$$

como $t_i = ih$, segue de (2.11) e (4.9):

$$M_{i+1} = \frac{\{[1 - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ln(1 - p_1)]^\alpha\}]/\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ln(1 - p_1)]^\alpha\}\}}{[(c_1 + c_3)/c_2]\{E_{u2}[N_2 - 1/N_1 = i + 1] + 1\}[\exp(-\delta^2 n/2)]/2} \quad (4.16)$$

Par valores de $M_{i+1} < 1/2$, G_{i+1} , como função de K_{i+1} é decrescente no intervalo $[0, K_{i+1}^*]$, e crescente no intervalo $[K_{i+1}^*, \infty]$. Para valores de $M_{i+1} \geq 1/2$, G_{i+1} é uma função crescente; portanto, neste caso, $K_{i+1}^* = 0$.

A expressão 4.13 fornece o valor de k_{i+1}^* , portanto f_{i+1}^* . Com f_{i+1}^* em 4.12 obtemos o valor de $E_{u2}(N_2 - 1/N_1 = i)$. Com este valor em 4.16 obtemos M_i^* . Finalmente com o valor M_i^* em 4.13 obtemos k_i^* . Assim recursivamente é possível obter todos os valores de k_i^* , para $i = 1, 2, 3, \dots$. Além disso, para efeito de cálculos, observamos que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_{u1}(N_2 - 1/N_1 = i + 1) = 0$$

4.3 O NÚMERO ESPERADO DE AMOSTRAS POR CICLO

Para comparar o delineamento $U2$ com o delineamento U é necessário conhecer o número esperado de amostras tomadas em um ciclo para cada delineamento.

O valor esperado de N , número de amostras tomadas em um ciclo, sob o delineamento U , $E_u(N)$, já é conhecido, de (2.26):

$$E_u(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} + 1/p_2 \quad (4.17)$$

Onde p_1 é escolhido através de critérios econômicos e determina a frequência das amostragens.

4.3.1 DETERMINAÇÃO DO VALOR ESPERADO DE N PARA O DELINEAMENTO $U2$

Os intervalos de tempo entre amostragens do delineamento $U2$ são constantes e iguais a h , portanto $E_{u2}(N_1) = E_u(N_1)$, onde $E_{u2}(N_1)$ representa o número esperado de amostras tomadas antes da ocorrência da falha sob o delineamento $U2$, ou seja, (2.20):

$$E_{u2}(N_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} \quad (4.18)$$

O número esperado de amostras tomadas após a ocorrência da causa assinalável sob o delineamento $U2$, $E_{u2}(N_2)$ é dado por:

$$E_{u2}(N_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u2}[N_2/N_1 = i]Pr[N_1 = i] \quad (4.19)$$

como $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, segue que:

$$E_{u2}(N_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u2}[N_2/N_1 = i]\{\exp[-t_i^\alpha/\theta] - \exp[-t_{i+1}^\alpha/\theta]\} \quad (4.20)$$

como $t_i = ih$, segue de (2.11) e (4.9):

$$E_{u2}(N_2) = \sum_{i=0}^{\infty} E_{u2}[N_2/N_1 = i]\{\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ln(1 - p_1)]^\alpha\}\} \quad (4.21)$$

onde os valores de $E_{u2}[N_2/N_1 = i]$ para $i = 1, 2, 3, \dots$, são dados em (4.12).

Finalmente, como $N = N_1 + N_2$, então de (4.18) e (4.21) obtemos o número esperado de amostras tomadas em um ciclo sob o delineamento $U2$, $E_{u2}(N)$:

$$E_{u2}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} + \sum_{i=0}^{\infty} E_{u2}[N_2/N_1 = i]\{\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ln(1 - p_1)]^\alpha\} - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ln(1 - p_1)]^\alpha\}\} \quad (4.22)$$

4.4 O NÚMERO ESPERADO DE ALARMES FALSOS

Para comparar o delineamento $U2$ com o delineamento U é necessário conhecer também o número esperado de alarmes falsos por ciclo para cada delineamento.

4.4.1 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO ESPERADO DE ALARMES FALSOS PARA O DELINEAMENTO U

Para o delineamento U os limites de controle são constantes, portanto $E_u(AF)$, o número esperado de alarmes falsos por ciclo sob o delineamento U , é simplesmente:

$$E_u(AF) = \beta E_u(N_1) \quad (4.23)$$

onde $E_u(N_1)$ já é conhecido, de (2.20):

$$E_u(AF) = \beta \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1) i \ln(1 - p_1)]^\alpha\} \quad (4.24)$$

4.4.2 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO ESPERADO DE ALARMES FALSOS SOB O DELINEAMENTO $U2$

Para o delineamento $U2$ os limites de controle são decrescentes, portanto a probabilidade de ocorrer um alarme falso na i -ésima amostragem será $s_i[1 - F_{T_1}(t_i)]$. Se $E_{u2}(AF)$ representa o número esperado de alarmes falsos por ciclo para o delineamento $U2$, então:

$$E_{u2}(AF) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i[1 - F_{T_1}(t_i)] \quad (4.25)$$

Para $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, teremos:

$$E_{u2}(AF) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \exp(-t_i^\alpha / \theta) \quad (4.26)$$

como $t_i = ih$, segue de (2.11) e (4.9):

$$E_{u2}(AF) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} \quad (4.27)$$

4.5 O TEMPO ESPERADO DE OPERAÇÃO FORA DE CONTROLE

Sob a suposição que $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, o efeito do delineamento $U2$ será de reduzir o tempo esperado de operação fora de controle para um igual número esperado de alarmes falsos e de amostragens por ciclo.

Para o delineamento U , o tempo esperado de operação fora de controle já é conhecido, de (2.32):

$$E_u(T_2) = E(T_1)\{-\ell n(1 - p_1)[\sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} + 1/p_2] - 1\} \quad (4.28)$$

4.5.1 DETERMINAÇÃO DE $E(T_2)$ PARA O DELINEAMENTO $U2$

Desde que $T = T_1 + T_2$, segue que $E_{u2}(T_2) = E_{u2}(T) - E(T_1) = hE_{u2}(N) - E(T_1)$, onde $E_{u2}(T_2)$ representa o tempo esperado de operação fora de controle sob o delineamento $U2$. Portanto de (4.9) e (4.22):

$$\begin{aligned} E_{u2}(T) = & E(T_1)\{-\ell n(1 - p_1)[\sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} + \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} E_{u2}[N_2/N_1 = i](\exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)i\ell n(1 - p_1)]^\alpha\} - \\ & - \exp\{-[-\Gamma(1/\alpha + 1)(i + 1)\ell n(1 - p_1)]^\alpha\})] - 1\} \end{aligned} \quad (4.29)$$

4.6 A EFICIÊNCIA DO DELINEAMENTO $U2$ COM RELAÇÃO AO DELINEAMENTO U

Para comparar o delineamento $U2$ com o delineamento U em termos de T_2 , tempo em que o sistema permanece fora de controle, é necessário que o número esperado de alarmes falsos e o número esperado de amostragens por ciclo seja igual para ambos delineamentos.

Assim, para cada delineamento U com valores dos parâmetros n , h e k conhecidos, portanto conhecidos os valores de p_1 e p_2 queremos obter o delineamento $U2$ tal que:

$$E_{u2}(N) = E_u(N) \quad (4.30)$$

$$E_{u2}(AF) = E_u(AF) \quad (4.31)$$

Alterando convenientemente o espaçamento entre amostragens, h , do delineamento $U2$ é possível obter as duas igualdades. Seja h_{u2} este novo valor.

As tabelas 4.2.a - 4.2.d e 4.3.a - 4.3.d fornecem respectivamente para $\alpha = 2$ e 3 , $k = 2$ e 3 e diversos valores de p_1 e p_2 os valores de p_1^* e R_{u2} , onde R_{u2} e p_1^* são tais que:

$$R_{u2} = (c_1 + c_3)/c_2 \quad (4.32)$$

$$h_{u2} = -E(T_1)\ell n(1 - p_1^*) \quad (4.33)$$

Finalmente, a eficiência do delineamento $U2$ com respeito ao delineamento U , avaliada em termos de T_2 pode ser convenientemente definida por:

$$Ef_{U2/U} = E_u(T_2)/E_{u2}^*(T_2) \quad (4.34)$$

onde $E_u(T_2)$ é dado por (4.28) e $E_{u2}^*(T_2)$ é dado por (4.29) após a substituição de h por h_{u2} . As tabelas 4.1.a - 4.1.d fornecem para $\alpha = 2$ e 3 , $k = 2$ e 3 e diversos valores de p_1 e p_2 os valores de $Ef_{U2/U}$.

Tabela 4.1.a: Valores de $Ef_{U2/V}$
 $(\alpha = 2; k = 3)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	1,78	2,31	2,81	3,31	3,82
0,20	1,40	1,66	1,92	1,20	2,49
0,30	1,26	1,41	1,58	1,75	1,95
0,40	1,18	1,28	1,39	1,51	1,64
0,50	1,14	1,21	1,28	1,36	1,45
0,60	1,10	1,14	1,19	1,24	1,29
0,70	1,08	1,10	1,13	1,16	1,19
0,80	1,05	1,06	1,08	1,10	1,11

Tabela 4.1.b: Valores de $Ef_{U2/V}$
 $(\alpha = 2; k = 2)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	2,09	2,80	3,46	4,10	4,75
0,20	1,54	1,87	2,20	2,52	2,85
0,30	1,35	1,55	1,74	1,95	2,16
0,40	1,25	1,37	1,50	1,64	1,78
0,50	1,18	1,26	1,35	1,44	1,53
0,60	1,14	1,19	1,24	1,30	1,36
0,70	1,10	1,13	1,16	1,20	1,24
0,80	1,07	1,08	1,10	1,12	1,14

Tabela 4.1.c: Valores de $Ef_{U2/V}$
 $(\alpha = 3; k = 3)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	2,45	3,47	4,48	5,52	6,63
0,20	1,76	2,26	2,78	3,34	3,94
0,30	1,51	1,80	2,12	2,48	2,87
0,40	1,37	1,56	1,77	2,01	2,27
0,50	1,29	1,42	1,56	1,73	1,92
0,60	1,22	1,30	1,39	1,49	1,61
0,70	1,16	1,21	1,27	1,33	1,41
0,80	1,11	1,14	1,17	1,21	1,25

Tabela 4.1.d: Valores de $Ef_{U2/V}$
 $(\alpha = 3; k = 2)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	3,02	4,35	5,63	6,95	8,30
0,20	2,03	2,66	3,28	3,93	4,61
0,30	1,69	2,06	2,44	2,84	3,27
0,40	1,50	1,74	1,98	2,25	2,54
0,50	1,38	1,53	1,70	1,88	2,08
0,60	1,29	1,39	1,49	1,61	1,74
0,70	1,21	1,27	1,34	1,41	1,49
0,80	1,14	1,18	1,21	1,25	1,29

Tabela 4.2.a: Valores de p_1^*
 $(\alpha = 2; k = 3)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,0791	0,1282	0,1640	0,1937	0,2204
0,20	0,0913	0,1636	0,2219	0,2715	0,3158
0,30	0,0955	0,1794	0,2527	0,3170	0,3751
0,40	0,0974	0,1877	0,2704	0,3458	0,4150
0,50	0,0984	0,1921	0,2802	0,3631	0,4408
0,60	0,0990	0,1953	0,2884	0,3777	0,4636
0,70	0,0994	0,1973	0,2929	0,3862	0,4775
0,80	0,0997	0,1986	0,2964	0,3923	0,4877

Tabela 4.2.b: Valores de p_1^*
 $(\alpha = 2; k = 2)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,0749	0,1181	0,1485	0,1734	0,1958
0,20	0,0893	0,1573	0,2109	0,2562	0,2968
0,30	0,0944	0,1752	0,2445	0,3047	0,3602
0,40	0,0968	0,1848	0,2643	0,3367	0,4037
0,50	0,0980	0,1907	0,2772	0,3584	0,4342
0,60	0,0987	0,1943	0,2858	0,3728	0,4567
0,70	0,0992	0,1966	0,2912	0,3834	0,4730
0,80	0,0995	0,1980	0,2953	0,3909	0,4849

Tabela 4.2.c: Valores de p_1^*
 $(\alpha = 3; k = 3)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,0715	0,1089	0,1331	0,1513	0,1665
0,20	0,0868	0,1487	0,1943	0,2302	0,2605
0,30	0,0926	0,1688	0,2303	0,2815	0,3253
0,40	0,0956	0,1800	0,2532	0,3170	0,3738
0,50	0,0970	0,1866	0,2674	0,3402	0,4066
0,60	0,0982	0,1916	0,2792	0,3613	0,4380
0,70	0,0989	0,1948	0,2869	0,3747	0,4594
0,80	0,0994	0,1968	0,2922	0,3857	0,4756

Tabela 4.2.d: Valores de p_1^*
 $(\alpha = 3; k = 2)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,0677	0,1009	0,1221	0,1379	0,1512
0,20	0,0843	0,1422	0,1844	0,2178	0,2459
0,30	0,0911	0,1638	0,2219	0,2704	0,3120
0,40	0,0945	0,1763	0,2465	0,3075	0,3616
0,50	0,0965	0,1844	0,2633	0,3346	0,3993
0,60	0,0976	0,1897	0,2754	0,3550	0,4302
0,70	0,0986	0,1935	0,2840	0,3708	0,4538
0,80	0,0992	0,1961	0,2908	0,3825	0,4724

Tabela 4.3.a: Valores de R_{u2}
 $(\alpha = 2; k = 3)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	15,57	30,31	46,53	65,70	90,28
0,20	14,26	29,05	46,03	66,95	95,02
0,30	12,46	26,05	42,06	62,09	89,65
0,40	10,68	22,72	37,20	55,55	81,18
0,50	9,13	19,65	32,43	48,93	72,03
0,60	7,30	15,88	26,49	40,29	59,91
0,70	5,64	12,38	20,78	31,93	47,82
0,80	3,96	8,75	14,78	22,88	34,53

Tabela 4.3.b: Valores de R_{u2}
 $(\alpha = 2; k = 2)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	1,130	2,027	2,921	3,896	5,057
0,20	1,095	2,142	3,282	4,628	6,343
0,30	0,975	1,984	3,130	4,527	6,369
0,40	0,844	1,761	2,831	4,160	5,964
0,50	0,711	1,508	2,462	3,673	5,350
0,60	0,581	1,248	2,060	3,109	4,577
0,70	0,449	0,976	1,628	2,480	3,693
0,80	0,316	0,692	1,162	1,786	2,691

Tabela 4.3.c: Valores de R_{u2}
 $(\alpha = 3; k = 3)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	13,60	25,31	37,75	52,22	70,44
0,20	12,77	24,94	38,38	54,53	75,87
0,30	11,31	22,75	35,54	51,19	72,34
0,40	9,74	20,00	31,70	46,05	65,64
0,50	8,34	17,37	27,77	40,66	58,26
0,60	6,62	13,99	22,62	33,37	48,06
0,70	5,09	10,85	17,72	26,28	37,97
0,80	3,53	7,60	12,49	18,59	27,11

Tabela 4.3.d: Valores de R_{u2}
 $(\alpha = 3; k = 2)$

p_2	p_1				
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,10	0,987	1,697	2,382	3,090	3,942
0,20	0,974	1,824	2,712	3,731	5,011
0,30	0,872	1,706	2,614	3,686	5,100
0,40	0,755	1,518	2,367	3,392	4,770
0,50	0,633	1,299	2,056	2,979	4,225
0,60	0,513	1,068	1,705	2,489	3,545
0,70	0,392	0,824	1,329	1,951	2,806
0,80	0,271	0,575	0,934	1,381	1,996

4.7 A DISTRIBUIÇÃO DE T

Nesta seção, faremos uma comparação da distribuição de T , sob o delineamento $U2$, com a distribuição de T , sob o delineamento U , para valores particulares de α , p_1 e p_2 , admitindo $E(T_1) = 1$. Esta comparação será feita com o auxílio do método de Monte Carlo, portanto os tempos de falha do sistema, T_1 , serão simulados. Os valores de $E(T)$ serão comparados com os resultados analíticos já obtidos para ambos delineamentos, U e $U2$.

4.7.1 EXEMPLO 1

Neste exemplo consideramos $\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; e $k = 3$. A tabela 4.4.a fornece os valores de f_i . Neste caso, o valor exato de $E(T)$ para cada delineamento é:

$$E_u(T) = 2,62$$

$$E_{u2}(T) = 1,84$$

Através da simulação de 1000 valores de T_1 , obtivemos os seguintes resultados:

$$E_u(T) = 2,60$$

$$\text{VAR}_u(T) = 3,24$$

$$E_{u2}(T) = 1,85$$

$$\text{VAR}_{u2}(T) = 0,38$$

Tabela 4.4.a: Valores de f_i para o delineamento $U2$
 $(\alpha = 2; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20; k = 3)$

<i>amostra</i> (i)	f_i
1	0,04657
2	0,11494
3	0,16250
4	0,19999
5	0,23165
6	0,25954
7	0,28483
8	0,30823
9	0,33022
10	0,35110
11	0,37110
12	0,39039
13	0,40904
14	0,42707
15	0,44424
16	0,45968
17	0,47034

O gráfico 4.1.a apresenta na parte superior a distribuição de T , sob o delineamento U , e na parte inferior a distribuição de T , sob o delineamento $U2$.

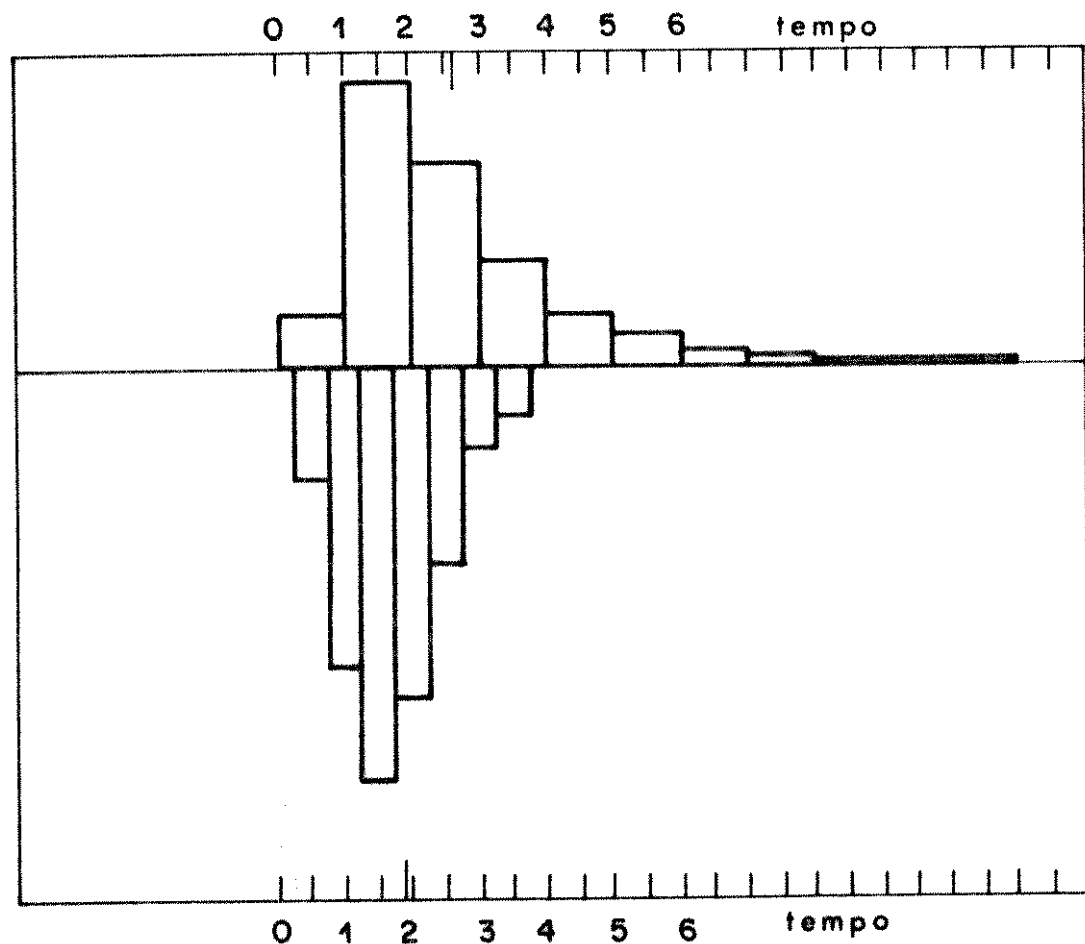


Gráfico 4.1.a: Distribuição de T
 (parte superior => delineamento U)
 (parte inferior => delineamento U2)
 ($\alpha = 2$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 3$)

4.7.2 EXEMPLO 2

Neste exemplo consideramos $\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$ e $k = 2$. A tabela 4.4.b fornece os valores de f_i . Neste caso, o valor exato de $E(T)$ para cada delineamento é:

$$E_u(T) = 2,62$$

$$E_{u2}(T) = 1,49$$

Através da simulação de 1000 valores de T_1 , obtivemos os seguintes resultados:

$$E_u(T) = 2,63$$

$$\text{VAR}_u(T) = 2,70$$

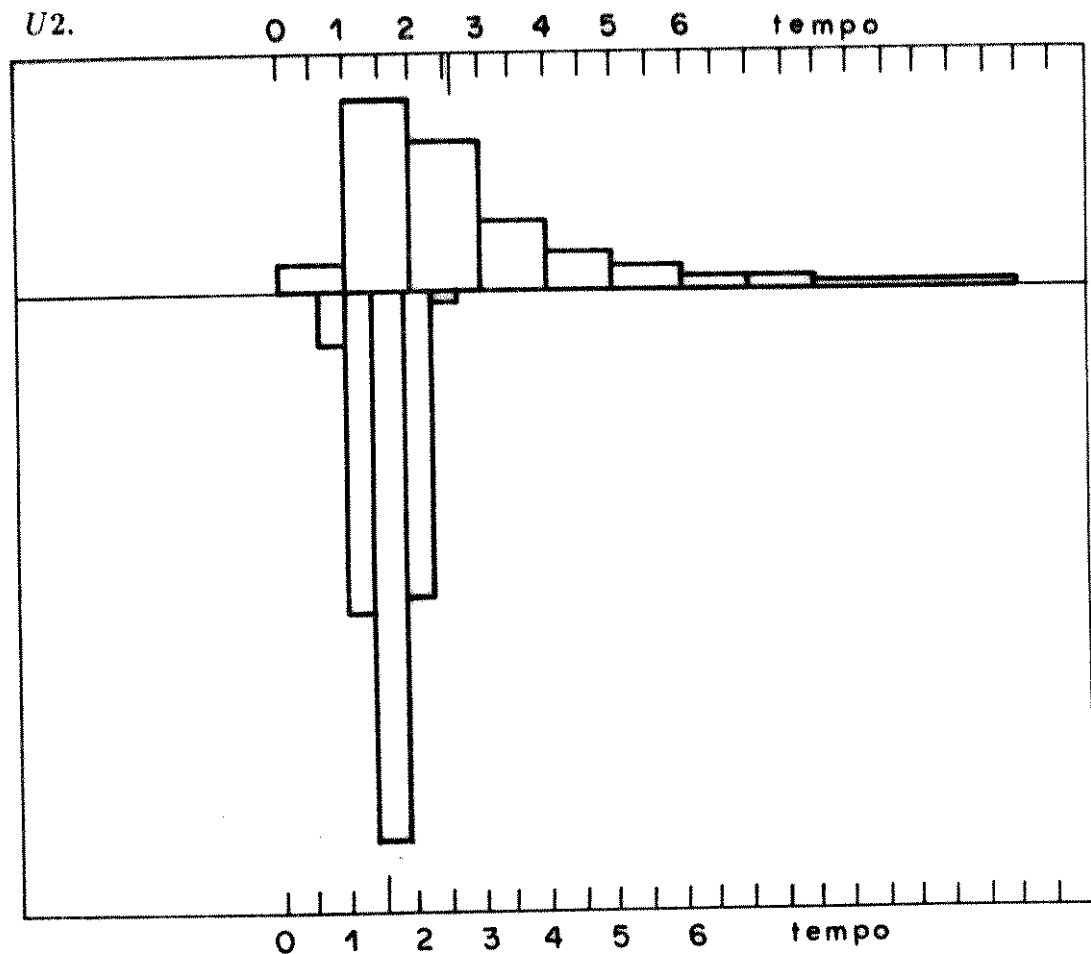
$$E_{u2}(T) = 1,49$$

$$\text{VAR}_{u2}(T) = 0,13$$

Tabela 4.4.b: Valores de f_i para o delineamento $U2$
 $(\alpha = 3; p_1 = 0,30; p_2 = 0,20; k = 2)$

<i>amostra</i> (i)	f_i
1	0
2	0,00987
3	0,05353
4	0,12416
5	0,20879
6	0,30161
7	0,40138
8	0,50858
9	0,63442
10	0,73573

O gráfico 4.1.b apresenta na parte superior a distribuição de T , sob o delineamento U , e na parte inferior a distribuição de T , sob o delineamento $U2$.



4.1.b: Distribuição de T
 (parte superior => delineamento U)
 (parte inferior => delineamento $U2$)
 ($\alpha = 3$; $p_1 = 0,30$; $p_2 = 0,20$; $k = 2$)

4.8 CONCLUSÕES

As mesmas conclusões do capítulo II e do capítulo III podem ser tiradas aqui, ou seja, o delineamento uniforme com k variável é mais eficiente que o delineamento uniforme, no sentido de detectar a falha mais rapidamente para um mesmo número esperado de amostragens e de alarmes falsos por ciclo. O delineamento $U2$ é particularmente eficiente quando α é grande, caracterizando um processo com rápida deterioração, associado a pequenos valores de δ e a altos custos de amostragens, sugerindo p_1 grande e n pequeno portanto p_2 , pequeno.

Além disso, o delineamento uniforme com k variável é tanto mais eficiente quanto mais estreitos forem os limites de controle, ou seja, quando são permitidos maiores riscos com alarmes falsos.

Ao se comparar o delineamento $U2$ com o delineamento balanceado, podemos dizer que a determinação dos instantes de amostragens do delineamento balanceado é mais simples que a obtenção dos limites decrescentes de controle do delineamento $U2$. Porém o delineamento $U2$ é mais fácil de ser viabilizado operacionalmente.

Ao se comparar o delineamento $U2$ com o delineamento $U1$, verificamos, pelas tabelas 4.1.a–4.1.d e tabelas 3.1.a e 3.1.b, que este último delineamento é mais eficiente, no sentido de detectar a falha mais rapidamente. Porém, em termos operacionais, o delineamento $U1$ apresenta uma dificuldade a mais, que está associada ao fato das amostras serem de tamanhos diferentes.

Capítulo V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

5.1 CONCLUSÕES

No estudo econômico dos gráficos de controle $\bar{X}$, normalmente são estabelecidas as seguintes hipóteses: (1) O característico de qualidade mensurável $X \sim N(\mu, \sigma)$. (2) A falha do sistema, provoca um deslocamento instantâneo na média μ , de δ desvios padrões. (3) A distribuição do tempo de falha do sistema, T_1 , é exponencial.

A hipótese da normalidade de X é verificada em um grande número de situações práticas, e mesmo nas situações em que X se afasta da normalidade, a variável $\bar{X}$ que é utilizada no gráfico de controle tende a normalidade, a medida em que o tamanho da amostra, n , aumenta. Porém, na prática, não há necessidade do n ser muito grande para que $\bar{X}$ tenha uma distribuição razoavelmente normal.

A segunda hipótese obriga que o deslocamento na média μ seja instantâneo. Em situações práticas onde se tem evidências de que a média μ se desloca lentamente, é mais aconselhável utilizar o gráfico de controle das somas acumuladas ou o gráfico da média móvel por exemplo.

A terceira hipótese trata da distribuição que modela o tempo de falha do sistema, T_1 . Quando se adota para esta distribuição a exponencial, admite-se que o sistema produtivo não sofre qualquer tipo de desgaste ou deterioração, ou seja, a sua taxa de falha permanece sempre constante ao longo do tempo. Para muitas situações práticas, onde se tem evidências de

que o sistema produtivo se desgasta ou se deteriora ao longo do tempo, é necessário alterar esta terceira hipótese.

Nesta tese, propusemos $T_1 \sim W(\alpha, \theta)$, com $\alpha > 1$, cuja taxa de falha é proporcional a $t^{\alpha-1}$ e segundo Barlow e Proschan é uma das distribuições mais empregadas na modelagem do tempo de falha (Barlow e Proschan, 1975, p.73).

Munford e Shahani (1972) propuseram para a detecção da falha de um sistema, uma política balanceada de inspeção, no sentido de manter constante a probabilidade de ocorrência da falha em um intervalo entre inspeções dada a sua não ocorrência até o início deste intervalo. No capítulo II fizemos o mesmo, propondo para os gráficos de controle de Shewhart o esquema balanceado de amostragem, de maneira que os intervalos entre amostragens tornaram-se decrescentes.

Nos capítulos III e IV, ao invés de intervalos de tempo entre amostragens decrescentes, tomamos respectivamente amostras de tamanhos crescentes e limites de controle decrescentes em função da taxa de falha do sistema.

A conclusão geral a que se chega é que: a variação do valor de qualquer um dos parâmetros, n , h e k , do gráfico de controle de Shewhart ao longo do tempo e em função da taxa de falha do sistema, torna estes gráficos mais eficientes, no sentido de detectar a falha mais rapidamente.

Os gráficos de controle com um dos parâmetros variável são principalmente mais eficientes nas situações de intensa deterioração, pequenas mudanças na média do processo e elevados custos com amostragens.

O gráfico de controle com limites decrescentes é o mais fácil de ser viabilizado operacionalmente, pois tanto o tamanho das amostras quanto o intervalo entre amostragens são mantidos constantes, portanto, não se altera o procedimento tradicional das amostragens. A maior dificuldade consiste na determinação dos limites de controle decrescentes, porém eles são determinados uma única vez.

O gráfico de controle com o tamanho das amostras crescente é o mais eficiente, porém a sua utilização é um pouco mais trabalhosa, em virtude das amostras serem de tamanhos diferentes.

O gráfico de controle com espaçamento entre amostragens decrescentes, é o mais difícil de ser utilizado, a não ser que se disponha de um dispositivo que informe os instantes de amostragens. Além disso, este gráfico não pode ser utilizado nas situações em que não é possível tomar amostras a qualquer momento.

5.2 SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Os resultados obtidos no capítulo II são gerais, no sentido de se poder utilizá-los para diferentes tipos de gráficos de controle, tais como o gráfico $\bar{X}$, o gráfico R , da amplitude, o gráfico P , da fração defeituosa, etc... .

Os resultados obtidos nos capítulos III e IV são particulares, ou seja, se aplicam apenas aos gráficos de controle $\bar{X}$, portanto novos estudos podem ser desenvolvidos com o objetivo de tornar estes resultados mais gerais.

Na prática, é comum o uso conjunto de mais de um gráfico de controle, como por exemplo o gráfico $\bar{X}$ com o gráfico R . Portanto, estudos podem ser desenvolvidos na área de projeto econômico de gráficos de controle $\bar{X}$ e R , utilizados conjuntamente, para controlar sistemas produtivos sujeitos a deterioração.

No que se refere a distribuição de Weibull, o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro de forma α , ou seja $\hat{\alpha}$, nem sempre corresponde ao melhor estimador a ser considerado no estabelecimento do delineamento balanceado. Este fato pode ser melhor observado nas curvas de eficiência apresentadas no capítulo II. Um estudo detalhado deste assunto pode levar a resultados interessantes.

APÊNDICE

ALGUNS RESULTADOS MATEMÁTICOS ÚTEIS

Nós apresentamos aquí, alguns resultados matemáticos úteis, relativos ao valor esperado de $(N_1 + N_2)^{1/\alpha}$, onde N_1 e N_2 são duas variáveis aleatórias independentes geometricamente distribuídas com parâmetros p_1 e p_2 respectivamente. $1/\alpha$ é uma constante qualquer.

Resultado 1: Assumindo $p_1 \neq p_2$, e definindo $N = N_1 + N_2$, o seguinte resultado é verificado:

$$E[N^{1/\alpha}] = [p_1/(p_1 - p_2)]E[(N_2 - 1)^{1/\alpha}] - [p_2/(p_1 - p_2)]E[N_1^{1/\alpha}] \quad (\text{A.1})$$

Prova: por definição:

$$\begin{aligned} E[N^{1/\alpha}] &= \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1 + n_2)^{1/\alpha} p_1(1 - p_1)^{n_1} p_2(1 - p_2)^{n_2-1} \\ &= \sum_{n_2=1}^{\infty} [n_2^{1/\alpha} p_1 p_2 (1 - p_2)^{n_2-1} + \\ &\quad + \sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 + n_2)^{1/\alpha} p_1(1 - p_1)^{n_1} p_2(1 - p_2)^{n_2-1}] \\ &= p_1 E[N_2^{1/\alpha}] + (1 - p_1) \\ &\quad \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 + n_2)^{1/\alpha} p_1(1 - p_1)^{n_1-1} p_2(1 - p_2)^{n_2-1} \end{aligned}$$

Agora, introduzindo a transformação $M_1 = N_1 - 1$, nós escrevemos:

$$\begin{aligned} E[N^{1/\alpha}] &= p_1 E[N_2^{1/\alpha}] + (1 - p_1) \\ &\quad \sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} (m_1 + n_2 + 1)^{1/\alpha} p_1(1 - p_1)^{m_1} p_2(1 - p_2)^{n_2-1} \end{aligned}$$

portanto:

$$E[N^{1/\alpha}] = p_1 E[N_2^{1/\alpha}] + (1 - p_1) E[(N_1 + N_2 + 1)^{1/\alpha}]$$

e, desde que $(1 - p_2)E[N_2^{1/\alpha}] = E[(N_2 - 1)^{1/\alpha}]$, obtemos:

$$E[N^{1/\alpha}] = \frac{[p_1/(1 - p_2)]E[(N_2 - 1)^{1/\alpha}] + (1 - p_1)E[(N_1 + N_2 + 1)^{1/\alpha}]}{(1 - p_2)E[(N_1 + N_2 + 1)^{1/\alpha}]} \quad (\text{A.2})$$

Similarmente, e fazendo a transformação $M_2 = N_2 - 1$, nós obtemos:

$$E[N^{1/\alpha}] = \frac{[p_2/(1 - p_1)]E[(N_1^{1/\alpha})] + (1 - p_2)E[(N_1 + N_2 + 1)^{1/\alpha}]}{(1 - p_2)E[(N_1 + N_2 + 1)^{1/\alpha}]} \quad (\text{A.3})$$

e o resultado é obtido subtraindo (A.3) de (A.2), após tê-los dividido por $(1 - p_2)$ e $(1 - p_1)$ respectivamente.

Resultado 2: Assumindo $p_1 = p_2 = p$, e definindo $N = N_1 + N_2$, o seguinte resultado é verificado:

$$E[N^{1/\alpha}] = pE[N_2^{1/\alpha+1}] \quad (\text{A.4})$$

Prova: Seja $p_1 = p_2 = p$, então $N - 1$ tem uma distribuição de Pascal com parâmetros 2 e p . Portanto, por definição $Pr(N = n) = np^2(1 - p)^{n-1}$ logo:

$$E[N^{1/\alpha}] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/\alpha+1} p^2 (1 - p)^{n-1}$$

e a expressão (A.4) segue.

- [9] MONTGOMERY, D. C. (1980), "The Economic Design of Control Charts: A Review and Literature Survey," Journal of Quality Technology, 12, No.2, 75-87.
- [10] MONTGOMERY, D. C. (1985), Introduction to Statistical Quality Control, New York: John Wiley.
- [11] MONTGOMERY, D. C., e STORER, R. H. (1986), "Economic Models and Process Quality Control," Quality and Reliability Engineering International, 2, No. 4, 221-228.
- [12] MUNFORD, A. G., e SHAHANI, A. K.(1972), "A Nearly Optimal Inspection Policy," Operational Research Quarterly, 23, No. 3, p. 373-379.
- [13] PANAGOS, M. R., HEIKES, R. G., e MONTGOMERY, D. C. (1985), "Economic Design of $\bar{X}$ Control Chart for Two Manufacturing Process Models," Naval Research Logistics Quarterly, 32, 631-646.
- [14] REYNOLDS, M. R., Jr., AMIN, R. W., ARNOLD, J. C., e NACHLAS, J. A. (1988), " $\bar{X}$ Charts With Variable Sampling Intervals," Technometrics, 30, No. 2, 181-192.
- [15] SHEWHART, W. A. (1931), Economic Control of Quality of Manufactured Product , New York: D. Van Nostrand.
- [16] RAHIM, M. A. (1985), "Economic Model of $\bar{X}$ Chart Under Non-Normality and Measurement Errors," Computers and Operations Research, 12, No. 3, 291-299.