OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS EM REGULADORES L - Q COM RESTRIÇÕES DE ESTRUTURA PARA SISTEMAS DISCRETOS

NILSON DAS NEVES
Orientador: Prof.Dr. BASILÍO E.A.MILANI

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP - como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de MESTRE EM CIÊNCIAS.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

JUNHO 1983

À minha esposa,
Cleuza
e aos meus filhos,
Marcelo,
Marcos e
Heloisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os colegas que, direta ou indiretamente, contribuiram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTO ESPECIAL

Agradeço especialmente ao meu orientador, Prof. Dr. BASÍLIO ERNESTO DE ALMEIDA MILANI, pelo apoio e incentivo, sem os quais para mim seria impossível concluir este trabalho.

ÍNDICE

I. INTRODUÇÃO GERAL

O problema do Regulador Ótimo Linear Quadrático de tempo Infinito; Regulador Ótimo L-Q, tem sido de uso muito difundido em aplicações de controle devido às facilidade oferecidas pela sua solução que é uma lei de controle na forma de realimentação, linear, invariante no tempo e independente das condições iniciais do sistema.

Nas aplicações em sistemas de grande porte, caracterizados por uma grande dispersão geográfica de seus estados e entradas de controle, as principais dificuldades de implementação da lei de controle do Regulador Ótimo L-Q são a exigência de medição completa de estado e a característica centralizada da sua estrutura de informação.

Ao se introduzir no Problema do Regulador Ótimo L-Q, limitação sobre a estrturua de informações e a medição de estado , perdemos as garantias da lei de controle ser na forma de realimentação, linear, invariante e independente das condições iniciais.

Uma solução de compromisso entre a otimalidade da lei de controle e as facilidade de sua implementação, de uso muito difundido atualmente, é a utilização do Problema do Regulador Ótimo L-Q acrescido das seguintes restrições de estrutura de controle:

- Lei de controle na forma de realimentação de saída, linear e invariante no tempo
- Estrutura de informação pré-detérminada
- Especificações sobre a condição inicial do sistema

Isto resulta em um problema de otimização de parâmetros onde as variáveis independentes são todos os elementos da matriz de realimentação admissíveis dentro da estrutura de informações adotada.

As especificações sobre a condição inicial do sistema são necessárias porque a solução do problema ainda depende das mesmas.

O "bom senso" restringe o uso deste tipo de abordagem a problemas onde uma estrutura de controle conveniente possa ser es colhida sem afetar significativamente o desempenho do sistema em relação ao do Regulador Ótimo L-Q sem as restrições de estrutura de controle.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar contribuições à formulação e com maior ênfase à solução dos problemas de otimização de parâmetros relativos à síntese de Reguladores L-Q com Restrições de Estrutura. Trataremos da seguinte classe de problemas:

- Problema de otimização de parâmetros sem restrições
- Sistema Linear Discreto e Invariante no Tempo
- Índice de Desempenho Quadrático de Tempo Infinito
- Restrições de Estrutura: Controlador na forma de realimentação de saída, invariante no tempo e com estrutura de informação predeterminado..

A utilização de modelos discretos no tempo é necessária em muitos sistemas, que mesmo sendo contínuos no tempo, possuem entradas que atuam de forma discreta no tempo ou são controlados por computadores digitais.

Os resultados aqui apresentados são extensões de resultados similares obtidos em trabalhos anteriores para sistemas lineares contínuos no tempo.

A matéria se distribui ao longo dos capítulos da seguinte forma:

O Capítulo II trata da formulação e solução do problema de otimização de parâmetros. Inicialmente é feita uma recapitulação de resultados anteriores seguida da definição formal do problema de otimização. A seguir são apresentadas expressões para o cálculo do índice de desempenho, Vetor Gradiente, Matriz Hessiana e uma aproximação definida positiva desta última. Os mesmos resultados são posteriormente obtidos para um índice de desempenho generalizado que permite tratar de forma aproximada, com eficiência, problemas considerando o caso mais desfavorável de condição inicial do sistema. Para finalizar é proposto um método de otimização especializado, do tipo Newton Modificado para solução do problema de otimização de parâmetros.

No Capítulo III são apresentadas e discutidas aplicações do método de otimização, desenvolvido no capítulo anterior, a sistemas de dimensões significativas. Em particular é apresentada uma aplicação ao controle de uma via expressa de tráfego urbano que é um caso típico de sistema de grande porte.

No Capítulo IV é feita uma recapitulação dos principais resultados obtidos. Esses resultados são discutidos em termos de suas vantagens e extensões para trabalhos futuros.

No Apêndice A são apresentados conceitos básicos sobre Sistemas lineares Invariantes no Tempo, Reguladores Ótimos L-Q de Tempo Infinito e Álgebra linear, relevantes para o assunto tratado neste trabalho.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

II.1. INTRODUÇÃO

Em trabalhos anteriores, Milani [14] tratou do problema de otimização de parâmetros em Reguladores Linear-Quadráticos de Tempo Infinito com Restrições de Estrutura para Sistemas Contínuos.

Nesses trabalhos foi feita uma abordagem unificada do cálculo em forma fechada do Índice de Desempenho, vetor Gradiente e Matriz Hessiana. Dos resultados obtidos foi desenvolvido um método de otimização do tipo Newton Modificado [13], baseado em uma aproximação definida positiva da Matriz Hessiana. O método se mostrou bastante eficiente para solução de problemas envolvendo sistemas de grande porte com grande número de parâmetros a serem otimizados. Comparado com outros métodos de uso geral como o de Fletcher-Powell [4], Fletcher-Reeves [5], Newton, Gradiente de passo adaptado utilizado em Geromel [6], com a mesma finalidade, o método proposto apresentou um desempenho computacional bastante superior. Um resultado promissor sugerido em Milani [14], foi a utilização de um índice generalizado para tratar problemas de otimização considerando o caso mais desfarável de condição inicial do sistema.

Neste capítulo são apresentadas extensões para sistemas discretos no tempo, dos resultados acima mencionados.

II.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE PARÂMETROS

O problema de otimização de parâmetros em Reguladores Lineares Quadráticos de Tempo Infinito, para sistemas discretos, neste trabalho, é o seguinte:

Dado o sistema linear, invariante no tempo

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \; ; \; x_{k0} = x_0 \qquad \text{(II.2.1)}$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k \qquad (II.2.2)$$

onde $\underline{x}_k$, $\underline{y}_k$, $\underline{u}_k$ são vetores de dimensões n, r, m respectivamente. A é de dimensão (nxn), B é de dimensão (nxm), C é de dimensão (rxn) e posto [C]=r.

Dada a lei de controle na forma de realimentação de saída, com estrutura de informação pré-estabelecida,

$$\underline{u}_k = G(\underline{\alpha})\cdot\underline{y}_k \qquad (II.2.3)$$

onde alguns elementos da matriz de realimentação $G(\underline{\alpha})$ são fixados iguais a zero e $\underline{\alpha}$ é um vetor de parâmetros de dimensão np, representando os parâmetros não nulos de $G(\underline{\alpha})$;

Determinar $\underline{\alpha}$ que minimiza o índice de desempenho quadrático,

$$J(\underline{\alpha}) = \text{traço}\{x_0 x_0{}^t W\} \qquad (II.2.4)$$

onde W é dado por:

$$W=[A+BG(\underline{\alpha})C]^t W[A+BG(\underline{\alpha})C]+Q^tQ+C^tG^t(\underline{\alpha})RG(\underline{\alpha})C \qquad (II.2.5)$$

onde R é uma matriz simétrica definida positiva, o par [A,Q] é completamente observável, a matriz $(A+BG(\underline{\alpha})C)$ é assintoticamente estável.

Nas equações (II.2.4), (II.2.5) podemos verificar que a maior parte do esforço computacional para obtenção de $J(\underline{\alpha})$ é devido à solução da equação de Liapunov (II.2.5) que é da ordem de 25 n^3 operações aritméticas de soma e multiplicação, ou seja, 25 produto de matrizes (nxn), [17].

II.3. CÁLCULO DO VETOR GRADIENTE DE $J(\underline{\alpha})$

Derivando (II.2.4) e (II.2.5) em relação a α_i, temos:

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \text{traço}\left\{\underline{x}_0\underline{x}_0{}^t \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\right\} \qquad (II.3.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \left[B \; \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \; . \; C\right]^t .W.[A+BG(\underline{\alpha})C]+[A+BG(\underline{\alpha})C]^t \; \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \; [A+BG(\underline{\alpha})C] \; +$$

$$+ \; [A+BG(\underline{\alpha})C]^t.W. \; B \; \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \; . \; C \; + \; C^t \; \frac{\partial G^t(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \; . \; R.G(\underline{\alpha})C \; +$$

$$+ \; C^t G^t(\underline{\alpha})R \; \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \; . \; C$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = [A+BG(\underline{\alpha})C]^t \; \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \; [A+BG(\underline{\alpha})C] \; + \; C^t \; \frac{\partial G^t(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i}\{B^t W[A+BG(\underline{\alpha})C]+RG(\underline{\alpha})C\}$$

$$+ \; \{[A+BG(\underline{\alpha})C]^t.WB + C^t G^t(\underline{\alpha}).R\} \; \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \; . \; C$$

ou

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = [A+BG(\underline{\alpha})C]^t \; \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \; [A+BG(\underline{\alpha})C] \; + \; C^t Z + Z^t C \qquad (II.3.2)$$

onde:

$$Z = \frac{\partial G^t(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \; \{B^t W[A+BG(\underline{\alpha})C] \; + \; RG(\underline{\alpha})C\} \qquad (II.3.3)$$

Seja

$$[A+BG(\underline{\alpha})C]U[A+BG(\underline{\alpha})C]^t + \underline{x}_0\underline{x}_0{}^t = 0 \qquad (II.3.4)$$

Aplicando o teorema (A.8.4) às eqs.(II.3.2) e (II.3.4), temos:

$$\text{traço}\left\{ \underline{x}_0\underline{x}_0{}^t \; \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} \right\} = \; \text{traço}\{(CZ^t + Z^t C)U\} \qquad (II.3.5)$$

Aplicando os teoremos (A.6.1) e (A.6.3) à (II.3.5), chega-se a:

$$\text{traço } \underline{x}_0 x_0^t \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = 2 \text{ traço}(CUZ^t)$$

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = 2 \text{ traço}(CUZ^t) \qquad i=1,2,\ldots,np \qquad \text{(II.3.6)}$$

Substituindo (II.3.3) em (II.3.6), chega-se a

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = 2 \text{ traço}\left\{CU\{B^t W[A+BG(\underline{\alpha})C] + RG(\underline{\alpha})C\}^t \cdot \frac{\partial G(\alpha)}{\partial \alpha_i}\right\} \qquad \text{(II.3.7)}$$

$i=1,2,\ldots,np$

A matriz $\partial G(\alpha)/\partial \alpha_i$ tem todos os seus elementos nulos, exceto na posição (ℓ_i, c_i), determinado pela posição de α_i em $G(\underline{\alpha})$, onde (ℓ_i, c_i) correpondem respectivamente a linha e a coluna de α_i.

Por inspenção em (II.3.7), verifica-se que:

$$\frac{\partial J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = q_{(\ell_i, c_i)} \qquad \text{(II.3.8)}$$

onde q_{ℓ_i, c_i} é o elemento (ℓ_i, c_i) da matriz

$$Q = 2\{B^t W[A+BG(\underline{\alpha})C] + RG(\underline{\alpha})C\}UC^t \qquad \text{(II.3.9)}$$

II.4. CÁLCULO DO HESSIANO DE $J(\underline{\alpha})$

Derivando (II.3.1) e (II.3.2), em relação a α_j e fazendo

$$A_1 = [A+BG(\underline{\alpha})C] \qquad \text{(II.4.1)}$$

temos

$$\frac{\partial^2 J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j \cdot \partial \alpha_i} = \text{traço}\left\{\underline{x}_0 \underline{x}_0^t \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_j \cdot \partial \alpha_i}\right\} \qquad \text{(II.4.2)}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_j\,\partial\alpha_i} = A_1{}^t\,\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_j\,\partial\alpha_i}\,A_1 + \left[B\,\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\,C\right]^t \frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\,A_1 +$$

$$+ A_1{}^t\,\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\,.\,B\,.\,\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\,.\,C +$$

$$+ C^t\,\frac{\partial Z}{\partial\alpha_j} + \frac{\partial Z^t}{\partial\alpha_j}\,.\,C \qquad \text{(II.4.3)}$$

onde

$$\frac{\partial Z}{\partial\alpha_j} = \frac{\partial G^t(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_i}\left\{B^t\,\frac{\partial W}{\partial\alpha_j}\,A_1 + (B^tWB+R)\,\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\,.\,C\right\} \qquad \text{(II.4.4)}$$

Substituindo (II.4.4) em (II.4.3) e aplicando o teorema (A.8.4) às eqs.(II.3.4) e (II.4.3), e em seguida aplicando os teoremos (A.6.1) e (A.6.3) ao resultado, chega-se a

$$\frac{\partial^2 J(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j\,.\,\partial\alpha_i} = 2\ \text{traço}\ C\ U\ A_1{}^t\left\{\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\,.\,B\,.\,\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j} + \frac{\partial W}{\partial\alpha_j}\,.\,B\,.\,\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_i}\right\} +$$

$$+ 2\ \text{traço}\left\{\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_i}\,C\ U\ C^t\,\frac{\partial G^t(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\,[B^tWB+R]\right\} \qquad \text{(II.4.5)}$$

Definindo os elementos das matrizes $H_1(\underline{\alpha})$ e $H_2(\underline{\alpha})$ de dimensão (npxnp) como

$$h_{1(i,j)} = 2\ \text{traço}\left\{C\ U\ A_1{}^t\,\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\,B\,\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\right\} \qquad \text{(II.4.6)}$$

e

$$h_{2(i,j)} = 2\ \text{traço}\left\{\frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_i}\,C\ U\ C^t\,\frac{\partial G^t(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j}\,[B^tWB+R]\right\} \qquad \text{(II.4.7)}$$

$$h_{(i,j)} = h_{1(i,j)} + h_{1(j,i)} + h_{2(i,j)} \qquad \text{(II.4.8)}$$

ou $$\frac{\partial^2 J(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j \cdot \partial \alpha_i} = H(\underline{\alpha}) = H_1(\underline{\alpha}) + H_1^{\ t}(\underline{\alpha}) + H_2(\underline{\alpha}) \qquad \text{(II.4.9)}$$

Podemos verificar facilmente por inspensão nas eqs.(II. 4.6) e (II.4.7) e chamando

$$S = [B^t WB+R] \qquad \text{(II.4.10)}$$

que $$h_{1_{(i,j)}} = f_{(\ell_j,c_j)} \qquad \text{(II.4.11)}$$

e $$h_{2_{(i,j)}} = p_{(c_i,c_j)} \cdot s_{(\ell_i,\ell_j)} \qquad \text{(II.4.12)}$$

$$F = 2B^t \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} A_1 \ UC^t \qquad \text{(II.4.13)}$$

e utilizando (II.4.1) chega-se a

$$F = 2.B^t \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} [A+BG(\underline{\alpha})C].UC^t \qquad \text{(II.4.14)}$$

e $$P = 2CUC^t \qquad \text{(II.4.15)}$$

onde $s_{(\ell_i,\ell_j)}$ é o elemento (ℓ_i,ℓ_j) da matriz S

$f_{(\ell_j,c_j)}$ é o elemento (ℓ_j,c_j) da matriz F

(ℓ_i,c_i) e (ℓ_j,c_j) são respectivamente as posições de α_i e α_j na matriz $G(\underline{\alpha})$

Convém observar que para a obtenção do par $[J(\underline{\alpha}),\nabla J(\underline{\alpha})]$ temos de resolver duas equações de Liapunov de ordem n. O esforço computacional na solução de uma equação de Liapunov é de aproximadamente $25n^3$ operações de soma e multiplicações.

Observemos ainda que uma vez obtido o par $[J(\underline{\alpha}),\nabla J(\underline{\alpha})]$, pouquíssimo esforço computacional é exigido na obtenção do Hessia no aproximado, que é obtido por simples soma e produto de matrizes.

II.5. PROPRIEDADES DA MATRIZ $H_2(\underline{\alpha})$

Teorema (2.5.1): $H_2(\underline{\alpha})$ é definida positiva se a matriz $[A+BG(\underline{\alpha})C]$ é assintoticamente estável e o par $[A+BG(\underline{\alpha})C, X_0{}^t]$ é completamente controlável.

Prova: Da equação (II.4.7) é fácil verificar que $H_2(\underline{\alpha})$ é a matriz Hessiana da função quadrática;

$$J_1(\underline{\alpha}) = \text{traço}[G(\underline{\alpha})CUC^tG^t(\underline{\alpha}).(R+B^tWB)] \qquad (II.5.1)$$

se considerarmos as matrizes U e W constantes.

Por inspensão em (II.5.1), verifica-se que:

$$J_1(\underline{\alpha}) = X_V{}^t . Y_V \qquad (II.5.2)$$

sendo $$X = G(\underline{\alpha})CUC^t \qquad (II.5.3)$$

e $$Y = R.G(\underline{\alpha}) \qquad (II.5.4)$$

onde X_V e Y_V são vetores de dimensões (m.r) contendo respectivamente os elementos dos matrizes X, Y de dimensão (m.r) armazenados por linha. Aplicando a (II.5.3) e (II.5.4) o teorema (A.7.2) temos:

$$[I_m \otimes CUC^t]\ G_V(\underline{\alpha}) = X_V \qquad (II.5.5)$$

$$((R+B^tWB) \otimes I_r) . G_V(\underline{\alpha}) = Y_V \qquad (II.5.6)$$

Substituindo (II.5.5) e (II 5.6) em (II.5.2), temos:

$$J_1(\underline{\alpha}) = G_V{}^t(\underline{\alpha})[I_m \otimes CUC^t]^t.[(R+B^tWB) \otimes I_r).G_V(\underline{\alpha})] \qquad (II.5.7)$$

Aplicando o teorema (A.7.1) a (II.5.7) temos:

$$J_1(\underline{\alpha}) = G_V^{\ t}(\underline{\alpha})[(R+B^tWB) \otimes CUC^t]G_V(\underline{\alpha}) \qquad \text{(II.5.8)}$$

Da definição do problema de otimização de parâmetros temos R é simétrico e definida positiva,e portanto $(R+B^tWB)>0$,e posto[C]=r.

Por hipótese o par $[(A+BG(\underline{\alpha})C);X_0^{\ t}]$ é completamente controlável e consequentemente pelo teorema Dual (A.5.5) o par $[(A+BG(\underline{\alpha})C]^t;X_0]$ é completamente observável. Com isto mais a estabilidade assintótica de $[A+BG(\underline{\alpha})C]$ o teorema (A.8.1) garante que $U>0$. Posto $[C]=r$ e U definido positivo, garantem que $CUC^t>0$. Com CUC^t e $(R+B^tWB)$ definidas positivas, o teorema (A.7.3) garante $(R+B^tWB)\otimes CUC^t)>0$. Logo, a forma quadrática (II.5.1) é definida positiva. Assim sendo, $H_2(\underline{\alpha})$ é definida positiva, pois é a matriz Hessiana de uma forma quadrática definida positiva.

Teorema (II.5.2): Se o par $[A,B]$ é estabilizável e o par $[A,Q]$ é detectável, então $H_1(\underline{\alpha}) = 0$ e consequentemente $H(\underline{\alpha}) = H_2(\underline{\alpha})$, quando

$$G(\underline{\alpha}).C = -(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA \qquad \text{(II.5.9)}$$

onde $-[R+B^tWB]^{-1}.B^t.W.A$ é a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito.

Prova: Substituindo (II.5.9) em (II.3.2) e (II.3.3), temos:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = [A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^t.W.A.]^t \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} [A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^t.W.A] +$$

$$+ C^t . \frac{\partial G^t(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \{B^tW[A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^t.W.A]-R(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA\} +$$

$$+\{B^tW[A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA]-R(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA\}^t \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} . C \qquad \text{(II.5.10)}$$

ou

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = [A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA]^t \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} [A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA] +$$

$$+ C^t \frac{\partial G^t(\alpha)}{\partial \alpha_i} \{B^tWA-[B^tWB+R][R+B^tWB]^{-1}.B^tWA\}+$$

$$+ \{B^tWA-[B^tWB+R][R+B^tWB]^{-1}.B^tWA\}^t \frac{\partial G(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} . C$$

Logo

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = [A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA]^t \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} [A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA] = 0 \tag{II.5.11}$$

Como o par [A,B] é estabilizável e o par [A,Q] é detectá vel, o teorema (A.9.1) garante que a matriz $[A-B(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA]$ é assintoticamente estável é portanto o teorema (A.8.1) garante que a solução de (II.5.11) é dado por

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \underline{0} \tag{II.5.12}$$

Substituindo (II.5.12) em (II.4.13), verifica - se que $H_1(\underline{\alpha}) = 0$ e consequentemente de (II.4.8) conclue-se que $H(\underline{\alpha})=H_2(\underline{\alpha})$.

Concluindo, este teorema nos mostra que, próximo ao ponto ótimo, $H_2(\underline{\alpha})$ é uma aproximação muito boa para o Hessiano de $J(\underline{\alpha})$, quando as restrições de estrutura, impostas, são fracas, ou seja,a solução do regulador L-Q com restrições de estrutura e a solução do regulador L-Q sem restrições são próximas uma da outra.

II.6. ÍNDICE DE DESEMPENHO GENERALIZADO

Conforme detalhado em Milani [14], $J_n(\underline{\alpha})=\{\text{traço}[W^{n_e}]\}^{1/n_e}$ aproxima-se superiormente de $J_\infty(\underline{\alpha}) = \lambda_M(W)$ á medida que n_e cresce onde $\lambda_M(W)$ é o maior autovalor da matriz W e J_∞ corresponde $J(\underline{\alpha})$ para o pior caso de condição inicial x_0.

Devido a essa propriedade para n_e suficientemente grande, $J_{ne}(\underline{\alpha})$ deve permitir tratar de forma aproximada o problema de otimização envolvendo o pior caso de condição inicial do sistema.

desenvolver-se-á o cálculo em forma fechada do vetor g ne $(\underline{\alpha})$; $[\nabla J_{ne}(\underline{\alpha})]$, e do Hessiano de $J_{ne}(\underline{\alpha})$; $[\partial^2(\underline{\alpha})/\partial$

i ılo do Gradiente de $J_{ne}(\underline{\alpha})$

$$J_{ne}(\underline{\alpha}) = \frac{\partial J_{ne}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} \qquad i=1,2,\ldots,np$$

Temos:

$$J_{ne}(\underline{\alpha}) = \{\text{traço}[W^{ne}]\}^{1/ne} \qquad \text{(II.6.1)}$$

$$\frac{\partial J^{ne}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{ne}\ \text{traço}[W^{ne}]\ ^{(1-ne)/ne}.\text{traço}\left\{ne\ W^{ne-1}.\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\right\}$$

$$\frac{\partial J_{ne}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \text{traço}\left\{\frac{W^{ne-1}}{\{\text{traço}\ W^{ne}\}^{(ne-1)/ne}} . \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\right\}$$

$$i=1,2,\ldots,np \qquad \text{(II.6.2)}$$

Comparando (II.6.2) com (II.3.1), temos:

$$x_0 x_0^{\ t} = \frac{W^{n_e-1}}{[\text{traço}\ W^{ne}]^{(ne-1)/ne}} \qquad \text{(II.6.3)}$$

Agora, para calcularmos $J_{ne}(\underline{\alpha})$ podemos usar a eq.(II.3. 5), substituindo (II.6.3) em (II.3.4) para o cálculo de U.

II.6.2 - Cálculo do Hessiano de $J_{ne}(\underline{\alpha})$

Temos

$$H_{ne}(\underline{\alpha}) = \frac{\partial^2 J_{ne}(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_j . \partial \alpha_i} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\ldots,np \\ j=1,2,\ldots,np \end{array} \qquad \text{(II.6.4)}$$

$$\frac{\partial^2 J_{ne}(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j \cdot \partial\alpha_i} = \text{traço}\Big\{[\text{traço } W^{ne}]^{(1-ne)/ne} . (ne-1) . W^{ne-2} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_j} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_i}$$

$$+\Big[W^{ne-1} \cdot \frac{(1-ne)}{n_e} \cdot [\text{traço } W^{ne}]^{(1-2ne)/ne} \cdot \text{traço}\Big[neW^{ne-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_j}\Big] \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\Big] + \Big[\frac{W^{ne-1}}{[\text{traço } W^{ne}]^{(ne-1)/ne}} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_j \cdot \partial\alpha_i}\Big]\Big\}$$

rearranjando os termos chega-se a:

$$\frac{\partial^2 J_{ne}(\underline{\alpha})}{\partial\alpha_j \cdot \partial\alpha_i} = (ne-1) . \text{traço}\Big[\frac{W^{ne-2}}{[\text{traço } W^{ne}]^{(ne-1)/ne}} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_j} \quad \frac{\partial W}{\partial\alpha_i} +$$

$$+ (1-ne)[\text{traço } W^{ne}]^{(1-2n)/n} . \text{traço}[W^{ne-1} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_j}\Big] \cdot$$

$$\text{traço } W^{ne-1} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_i} + \text{traço}\Big\{\frac{W^{n_e-1}}{[\text{traço } W^{ne}]^{(ne-1)/ne}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j}\Big\} \qquad \text{(II.6.5)}$$

Notando que $h_{n_{i,j}} = 2p_{1_{i,j}} + p_{2_{i,j}} + p_{3_{i,j}}$

onde $$p_{1_{i,j}} = \text{traço}\Big\{\frac{W^{n_e-1}}{[\text{traço } W^{ne}]^{(ne-1)/ne}} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha_j \, \partial\alpha_i}\Big\} \qquad \text{(II.6.7)}$$

$$p_{2_{i,j}} = (ne-1) . \text{traço}\Big\{\frac{W^{n_e-2}}{[\text{traço } W^{ne}]^{(ne-1)/ne}} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_j} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_i}\Big\} \qquad \text{(II.6.8)}$$

$$p_{3_{i,j}} = (1-ne)[\text{traço } W^{ne}]^{(1-2ne)/ne} . \text{traço } W^{n-1} \frac{\partial W}{\partial\alpha_i} \cdot$$

$$. \text{traço } W^{n-1} \cdot \frac{\partial W}{\partial\alpha_j} \qquad \text{(II.6.9)}$$

Comparando (II.6.7) com (II.4.2) vemos que para calcular $p_{1_{i,j}}$, podemos usar (II.4.8), substituindo (II.6.3) em (II.3.4) para o cálculo de U.

Assim,

$$H_n(\underline{\alpha}) = H_{n_1}(\underline{\alpha}) + H_{n_1}^t(\underline{\alpha}) + H_{n_2}(\underline{\alpha}) + H_{n_3}(\underline{\alpha}) \qquad \text{(II.6.10)}$$

onde os elementos de $H_{n_1}(\underline{\alpha})$ e $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ são obtidos de (II.4.11) e (II.4.12).

Os elementos de $H_{n_3}(\underline{\alpha})$ são dados por:

$$h_{n_{3_{i,j}}} = p_{2_{i,j}} + p_{3_{i,j}} \qquad \text{(II.6.11)}$$

De acordo com a teorema (II.5.2) para $G(\underline{\alpha}).C = -(R+B^tWB^{-1}.B^tWA)$, temos:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = 0$$

e de (II.4.11), (II.6.10), (II.6.11) conclue-se que:

$$H_{n_e}(\underline{\alpha}) = H_{n_2}(\underline{\alpha})$$

Verifica-se também que $H_{n_2}(\underline{\alpha})$ tem as mesmas propriedades de $H_2(\underline{\alpha})$. Finalizando, para $J_{ne}(\underline{\alpha})$, basta o par [A , S] ser completamente observável e existir α_0 tal que $[A+BG(\alpha_0).C]$ seja assintoticamente estável para garantir que $[A+BG(\underline{\alpha}).C]$ é assintoticamente estável em todos os passos intermediários de um método de otimização do tipo descida, começando com α_0. As mesmas condições também garantem que a solução do problema de otimização de parâmetros, com $J_{ne}(\underline{\alpha})$, resultará em um sistema controlado assintoticamente estável.

II.7. UM MÉTODO DO TIPO NEWTON-MODIFICADO

As propriedades da matriz $H_{n2}(\underline{\alpha})$, item (II.6.2) e teoremas (II.5.1) e (II.5.2), a credenciam para ser usada no seguinte algoritmo de otimização do tipo Newton-Modificado [11].

$$\underline{\alpha}_{k+1} = \underline{\alpha}_k - \beta \cdot \underline{y} \qquad \text{(II.7.1)}$$

$$H_{n_2}(\underline{\alpha}) \cdot y = \nabla J_{ne}(\underline{\alpha}) \qquad \text{(II.7.2)}$$

onde β é um escalar.

A recorrência acima deve ser inicializada com $\underline{\alpha}_0$ que estabilize assintoticamente a matriz $[A+BG(\alpha_0).C]$ e β deve ser determinado de forma a garantir $J_{ne}(\alpha_{k+1}) \leq J_{ne}(\underline{\alpha}_k)$.

Foi usado o seguinte procedimento para cálculo da recorrência (II.7.1) e (II.7.2):

1º Passo: Inicialização

Fazer $K=0$; $\beta=\beta_0$

Dado $\underline{\alpha}_0$ que estabiliza assintoticamente a matriz $[A+BG(\underline{\alpha}_0)C]$.

Calcular $J_{ne}(\underline{\alpha}_0)$; $\nabla J_{ne}(\underline{\alpha})$

2º Passo: Calcular $H_{n_e}(\underline{\alpha}_k)$

Resolver o sistema de equações lineares

$$H_{n_2}(\underline{\alpha}_k) \cdot \underline{y} = \nabla J_{ne}(\underline{\alpha}_k)$$

3º Passo: Calcular $\underline{\alpha}_{k+1} = \underline{\alpha}_k - \beta \cdot \underline{y}$

4º Passo: Calcular $J_{ne}(\underline{\alpha}_{k+1})$

<u>5º Passo: Testar se $J(\underline{\alpha}_{k+1}) \leq J(\underline{\alpha}_k)$</u>

Sim: $\beta=\beta_0$ e seguir para o passo 6

Não: $\beta=\beta/2$ e voltar para o 3º passo

<u>6º Passo: Calcular $\nabla J_{ne}(\underline{\alpha}_{k+1})$</u>

<u>7º Passo: Testar se $\| \nabla J_n(\underline{\alpha}_{k+1}) \| \leq$ tolerância</u>

Sim: parar

Não: fazer K=K+1 e voltar para o passo 2

Cada iteração do algoritmo proposto acima corresponde à solução de duas equações de Liapunov de dimensão n e à solução de um sistema simétrico de equações lineares de dimensão np.

Neste trabalho foi utilizado o método de Smith [21] para a solução da equação de Liapunov. Este método requer aproximadamente $25n^3$ somas e multiplicações na solução de uma equação de Liapunov. A solução de um sistema de equações lineares, simétrico exige $np^3/3$ operações de soma e multiplicações, para n suficientemente grande ($n \geq 10$) [3].

O método do gradiente de passo fixo, também utilizado neste trabalho e cujos resultados são comparados ao método Newton-Modificado, resolve a cada iteração, duas equações de Liapunov. Portanto, a cada iteração, o esforço computacional a mais, do método proposto, em relação ao método do gradiente de passo fixo, é a solução de um sistema simétrico de equações lineares. Conforme veremos mais adiante, no próximo capítulo, em exemplos de pequeno e grande porte, este esforço a mais é altamente compensado pela rapidez de convergência que dá ao método.

Ainda mais, dependendo dos valores de n e np este esforço a mais é praticamente desprezível. Por exemplo, para n=30 e np=50, o esforço computacional na solução das duas equações de Liapunov é da ordem de 32 vezes o esforço na solução do sistema de equações lineares simétricos.

CAPÍTULO III

EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

III.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são mostrados e analisados os resultados da aplicação do Método Newton Modificado a um sistema de pequeno porte, correspondente à regulação de temperatura da seção de uma chapa metálica e um típico sistema de grande porte, qual seja a regulação de uma via expressa urbana. Para esses mesmos exemplos são mostrados os resultados da aplicação do Método do Gradiente do passo fixo. É feita uma comparação do desempenho dos dois métodos, ressaltando-se o esforço computacional a cada iteração e o esforço global requerido, para obtenção da solução.

III.2. REGULAÇÃO DE TEMPERATURA EM UMA SECÇÃO DE CHAPA METÁLICA

A equação

$$\frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(y,t)}{\partial y^2} + u(y,t) \qquad \text{(III.2.1)}$$

descreve a difusão de calor em uma chapa metálica, com controle de temperatura, onde:

$x(y,t)$, o estado, é a temperatura numa secção transversal da chapa no instante t, a uma distância y de extremidade tomada como origem.

$u(y,t)$ é a variável de controle [18].

Discretizando (II.2.1) no espaço, chega-se a

$$\dot{\underline{x}}(t) = A.\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \ ; \ x(0) = x_0 \qquad \text{(III.2.2)}$$

A é a matriz quadrada de ordem n, dada pela tabela III. 2.A, a seguir.

Tabela III.2.A

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

B é uma matriz identidade de ordem n.

Discretizando (III.2.2) no tempo, chega-se a:

$$\underline{x}_{k+1} = A.\underline{x}_k + B\underline{u}_k \ ; \ \underline{x}_{k0} = x_0 \qquad \text{(III.2.3)}$$

onde: $\bar{A}(nxn)$, $\bar{B}(nxn)$, n=9

Os elementos de $\tilde{A}$ estão na Tabela (III.2.C) e a matriz $\bar{B}$ é dada por (III.2.7).

Para o sistema acima vamos determinar a lei de controle na forma:

$$\underline{u}_k = G(\underline{\alpha}).\underline{x}_k \qquad \text{(III.2.4)}$$

que minimiza o índice de desempenho

$$J_{ne}(\underline{\alpha}) = [\text{traço } W^{ne}]^{1/ne} \qquad \text{(III.2.5)}$$

$$[A+BG(\underline{\alpha})]^t W[A+BG(\underline{\alpha})] - W + Q^t Q + G^t(\underline{\alpha}).R.G(\underline{\alpha}) = 0 \qquad \text{(III.2.6)}$$

$G(\underline{\alpha})_{(nxr)}$ é uma matriz banda dada pela tabela (III.2.B), onde as posições assinaladas por um X, correspondem a parâmetros não nulos de $G(\underline{\alpha})$, $\underline{\alpha}$ é um vetor de dimensão np=41, contendo os elementos de $G(\underline{\alpha})$ a serem otimizados, e r=9.

$Q^tQ_{(nxn)}$, $R_{(nxn)}$ são matrizes diagonais dadas por (III.2.8) e (III.2.9) respectivamente.

Tabela III.2.B - Matriz $G(\underline{\alpha})$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	X	X	X	X					
2	X	X	X	X					
3	X	X	X	X	X				
4		X	X	X	X	X			
5			X	X	X	X	X		
6				X	X	X	X	X	
7					X	X	X	X	X
8						X	X	X	X
9						X	X	X	X

A é a matriz banda dada pela Tabela III.2.C, abaixo.

Tabela III.2.C - Matriz A

$$\begin{bmatrix}
.99 & .0096 & 0. & 0. & \cdots & 0. & 0. & 0. \\
.0096 & .98 & .0098 & 0. & \cdots & 0. & 0. & 0. \\
0. & .0098 & .98 & .0098 & \cdots & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & .0098 & .98 & \cdots & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & .0098 & \cdots & 0. & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & \cdots & .0098 & 0. & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & \cdots & .98 & .0098 & 0. \\
0. & 0. & 0. & 0. & \cdots & .0098 & .98 & .0096 \\
0. & 0. & 0. & 0. & \cdots & 0. & .0096 & .99
\end{bmatrix}$$

$$B = \text{diag } [.0099,\ .0099,\ .0099,\ \dots\ .0099] \quad \text{(III.2.7)}$$

$$Q^tQ = \text{diag } [.5,\ 1.,\ 1.,\dots\ 1.,\ .5] \quad \text{(III.2.8)}$$

$$R = .5,\ 1.,\ 1.,\ \dots\ 1.,\ .5] \quad \text{(III.2.9)}$$

Na Tabela III.2.D, abaixo, estão resumdios os resultados obtidos pelo método Newton Modificado.

Tabela III.2.D - Método Newton Modificado

ne	K*	β	$J_{ne}(\underline{\alpha})$	$\|J_{ne}(\underline{\alpha})\|$
1	1	1.	322.9432	$.538 \times 10^{-1}$
	2	1.	322.8967	$.240 \times 10^{-2}$
	3	1.	322.8966	$.784 \times 10^{-4}$
2	1		133.3504	$.482 \times 10^{-1}$
	2		133.2853	$.220 \times 10^{-2}$
	3		133.2852	$.523 \times 10^{-4}$
4.	1		91.0060	$.738 \times 10^{-1}$
	2		90.9099	$.145 \times 10^{-2}$
	3		90.9097	$.139 \times 10^{-3}$
8	1		90.1996	$.785 \times 10^{-1}$
	2		90.1003	$.209 \times 10^{-2}$
	3		90.1002	$.183 \times 10^{-3}$
Tempo de CPU PDP-10 UNICAMP			19.0 segundos independentes do n2	

K* = número da iteração do método

Nas Tabelas III.2.E e III.2.F estão resumidos os resultados obtidos pelo método do gradiente de passo fixo.

Tabela III.2.E - Método do Gradiente

ne=1

K*	β	$J_1(\underline{\alpha})$	$\|\nabla J_1(\underline{\alpha})\|$
1	2×10^{-2}	322.9432	$.538 \times 10^{-1}$
2	2×10^{-2}	322.9034	$.243 \times 10^{-1}$
3	2×10^{-2}	322.9007	$.205 \times 10^{-1}$
4	2×10^{-2}	322.9000	$.144 \times 10^{-1}$
5	2×10^{-2}	322.8998	$.190 \times 10^{-1}$
6	2×10^{-2}	322.8997	$.188 \times 10^{-1}$
7	2×10^{-2}	322.8996	$.186 \times 10^{-1}$
8	2×10^{-2}	322.8996	$.480 \times 10^{-3}$
Tempo de CPU PDP-10 UNICAMP			43.17 seg.

K* = número da iteração do método

Tabela III.2.F - Método do Gradiente

ne=4

K	β	$J_4(\underline{\alpha})$	$\|\nabla J_4(\underline{\alpha})\|$
1	2×10^{-2}	98.8337	$.556 \times 10^{-1}$
2	2×10^{-2}	98.7858	$.179 \times 10^{-1}$
3	2×10^{-2}	98.7794	$.119 \times 10^{-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮
70	2×10^{-2}	98.7438	$.992 \times 10^{-3}$
Tempo de CPU PDP-10 UNICAMP			316 seg.

Os resultados da Tabela III.2.D mostram que o método Newton Modificado convergiu com muita rapidez para a solução do problema, praticamente não se alterando com o aumento de ne de 1 pa ra 8. Este comportamento neste caso é perfeitamente compreensível, porque as restrições impostas foram bastante fracas, sendo o valor do controle ótimo sem restrições J_1^*, bastante próximo de $J_1(\underline{\alpha}^*)$.

$$J_1^* = 322.5664$$

Comparando os tempos de CPU nas Tabelas III.2.D, III.2.E, e III.2.F, vemos que o método Newton Modificado apresentou desempenho 2 a 15 vezes melhor que o Gradiente. A deteriorização do desempenho do método do gradiente com o aumento de ne de 1 para 4 foi bastante acentuada, o que o desrecomenda fortemente, quando uma boa aproximação para o problema de síntese, considerando o caso mais desfavorável de condição inicial do sistema, for necessária.

III.3. REGULAÇÃO DE UMA VIA EXPRESSA URBANA

A seguir, utilizaremos os método Newton Modificado e Gradiente de passo fixo para a solução do problema de otimização de parâmetros resultantes da síntese de um regulador L-Q com estrutura de controle "local" para um segmento de via expressa. O exemplo apresentado foi obtido através da discretização de um exemplo utilizado por Milani [14].

As equações do sistema dinâmico e índice de desempenho são dados abaixo:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \qquad \text{(III.3.1)}$$

$$\underline{u}_k = G(\underline{\alpha}_k)\cdot\underline{y}_k \qquad \text{(III.3.2)}$$

$$\underline{y}_k = C.\underline{x}_k \qquad \text{(III.3.3)}$$

$$J_{ne}(\underline{\alpha}) = [\text{traço } W^{ne}]^{1/ne} \qquad \text{(III.3.4)}$$

A estrutura de controle é dada pela matriz $G(\underline{\alpha})$ composta de np = 55 parâmetros. A posição dos elementos do vetor de parâmetros $\underline{\alpha}$ na matriz $G(\underline{\alpha})$ é apresentado na Tabela III.3.A.

O vetor de parâmetros iniciais $\underline{\alpha}_0$ é apresentado na Tabela III.3.B.

A matriz banda A (34,34), as matrizes diagonais Q (34,34), R (11,11) e C (34,34), são dadas pela Tabela III.3.C.

A matriz B de dimensão (34 x 11) é dada pela Tabela III. 3.D.

Os elementos do vetor de parâmetros ótimos (α^*) para n_e= 1 são apresentados na Tabela III.3.E.

Obtivemos:

$$J(\alpha_0) = 1627.557 \qquad \text{(III.3.5)}$$

e

$$J(\alpha^*) = 1626.536 \qquad \text{(III.3.6)}$$

O valor do índice de desempenho ótimo sem restrições, para n_e=1 é J^*.

$$J^* = 1584.612$$

Comparando $J(\alpha^*)$ com J^*, obtivemos

$$E\% = \frac{|J(\alpha^*) - J^*|}{J^*} = 2.65\%$$

Para n_e=2, os elementos do vetor de parâmetros ótimos são mostrados na Tabela III.3.H.

Tivemos:

$$J(\alpha_0) = 1091.824 \qquad \text{(III.3.7)}$$

e

$$J(\alpha^*) = 1090.672 \qquad \text{(III.3.8)}$$

O valor do índice de desempenho ótimo sem restrições para n_e=2 é

$$J^* = 1084.176$$

Comparando J^* com $J(\alpha^*)$ obtivemos um erro percentual E=0.14%.

Para o método Newton Modificado, os resultados estão apresentados nas Tabelas (III.3.F) e (III.3.G). Nessas tabelas vemos que para atingir $\| \nabla J_{ne}(\underline{\alpha}) \| \cong .8 \times 10^{-3}$, foram necessárias 4 iterações para ne=1 e 19 iterações para ne=2.

Para o método do Gradiente, os resultados estão apresentados nas Tabelas (III.3.I) e (III.3.J). Nessas tabelas,vemos que para atingir um critério de parada grosseiro; $\| \nabla J_{ne}(\alpha) \| \cong 3 \times 10^{-1}$, foram necessárias 53 iterações para ne=1 e 86 iterações para ne=2. O custo computacional indicado nessas tabelas e a sensibilidade do método, ao aumento de ne, evidenciam a sua pouco adequação , principalmente quando o caso mais desfavorável de condição inicial é testado.

Com o método de Newton, além do critério de parada atingido ser bem menos grosseiro, o custo computacional foi mais que 10 vezes menos que o do método do Gradiente.

Com a variação de ne=1 para ne=2, o número de iterações aumentou de 4 para 19, no método Newton Modificado. Este comportamento acentua-se à medida que ne cresce. A razão disto é que para o cálculo de

$$X_0 X_0^t = \frac{W^{ne-1}}{[\text{traço } W^{ne}]^{(ne-1)/ne}} \qquad \text{(III.3.9)}$$

os erros de arrendodamento crescem com ne, afetando consequentemente o Gradiente e o Hessiano aproximado.

Um outro ponto a considerar é que, como a matriz

$$S = [R + B^t W B]$$

não é diagonal, perdeu-se aparentemente a possibilidade de colocar $H_2(\underline{\alpha})$ na forma bloco diagonal (Milani [14] - Teorema 2.2, p.2.12), o que certamente aumentaria a eficiência do método Newton Modificaso, pois facilitaria a solução do sistema linear simétrico (2.7.2).

Confrontando o esforço computacional por passo entre os dois métodos, vemos que o método do Gradiente resolve duas equações de Liapunov a cada passo, enquanto o método Newton Modifica do especializado resolve duas equações de Lipaunov mais um sistema linear simétrico, além da formação do Hessiano aproximado, que nada mais é do que um produto de matrizes. Os resultados obtidos mostram que esse pequeno esforço a mais por passo é altamente compensado pela aceleração dada ao método.

Embora teoricamente $J_{ne}(\underline{\alpha})$ tenda a $\lambda_M(W)$ quando ne tende a infinito, verificamos que já para ne=2 estamos bastante próximos de $\lambda_M(W)$, uma vez que

$$J(\alpha^*) = 1090.672 \qquad (III.3.10)$$

e

$$\lambda_M(W) = 1082.289 \qquad (III.3.11)$$

Tabela III.3.A - Estrutura de Controle

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	1		2		3		4		5																									
2			6		7		8		9		10																							
3					11		12		13		14		15																					
4									16		17		18		19		20																	
5													21		22		23		24		25													
6															26		27		28		29		30											
7																	31		32		33		34		35									
8																			36		37		38		39		40							
9																							41		42		43		44		45			
10																									46		47		48		49		50	
11																									51		52		53		54		55	

i - representa as linhas da matriz $G(\underline{\alpha})$ (11 x 34)

j - representa as colunas da matriz $G(\underline{\alpha})$

As posições de $G(\underline{\alpha})$ não ocupadas por elementos de $\underline{\alpha}$ são iguais a zero.

Tabela III.3.B - Vetor α_0^t

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	.148	-.200	-.562	-.341	-.00379	-.427	-.571	-1.64	-.114	.0185
$\alpha_{(i+10)}$	-.113	-.468	-.0236	-.0180	-.0104	-.0182	-.0310	-.0623	.0413	-.0167
$\alpha_{(i+20)}$	-.0168	-.300	-.0363	-.0196	-.0177	-.0168	-.0199	-.0300	-.0237	-.00877
$\alpha_{(i+30)}$	-.0162	-.0179	-.0239	-.0557	-.0226	-.0228	.0316	-.0165	-.00928	-.00509
$\alpha_{(i+40)}$	-.0154	-.0344	-.0197	-.00587	-.00301	.00595	-.0146	-.0187	-.00851	-.00305
$\alpha_{(i+50)}$	-.00304	.00714	-.00868	-.0181	.00674					

i	$a_{i,i-4}$	$a_{i,i-3}$	$a_{i,i-2}$	$a_{i,i-1}$	$a_{i,i}$	$a_{i,i+1}$	$a_{i,i+2}$	$Q_{i,i}$
1					.915	$-0.773\text{x}10^{-1}$	$.133\text{x}10^{-2}$	1.0
2				$.246\text{x}10^{-1}$	.939	$-0.318\text{x}10^{-1}$	$.152\text{x}10^{-2}$	1.929
3			$.892\text{x}10^{-1}$	$.766\text{x}10^{-1}$	.885	$-0,851\text{x}10^{-1}$	$.132\text{x}10^{-2}$	1.000
4		$.277\text{x}10^{-2}$	$.903\text{x}10^{-1}$	$.292\text{x}10^{-1}$	.853	$-.276\ \text{x}10^{-1}$	$.715\text{x}10^{-3}$	1.924
5	$.284\text{x}10^{-2}$	$.476\text{x}10^{-2}$	$.584\text{x}10^{-1}$	$.423\text{x}10^{-1}$	1.047	$-.510\ \text{x}10^{-1}$	$.413\text{x}10^{-3}$	1.000
6	$.300\text{x}10^{-2}$	$.138\text{x}10^{-2}$	$.582\text{x}10^{-1}$	$0.118\text{x}10^{-1}$	.883	$-.149\ \text{x}10^{-1}$	$.371\text{x}10^{-3}$	1.929
7	$.0128\text{x}10^{-2}$	$.239\text{x}10^{-2}$	$.438\text{x}10^{-1}$	$0.426\text{x}10^{-1}$	.453	$-.463\ \text{x}10^{-1}$	$.416\text{x}10^{-3}$	1.000
8	$.138\text{x}10^{-2}$		$.420\text{x}10^{-1}$	$-.161\text{x}10^{-1}$	.899	$-.165\ \text{x}10^{-1}$	$.413\text{x}10^{-3}$	1.929
9		$.213\text{x}10^{-2}$	$.455\text{x}10^{-1}$	$.445\text{x}10^{-1}$	.952	$-.468\ \text{x}10^{-1}$	$.360\text{x}10^{-3}$	1.000
10	$.102\text{x}10^{-2}$		$.435\text{x}10^{-1}$	$.119\text{x}10^{-1}$	.897	$-.141\text{x}10^{-1}$		1.929
11	$.775\text{x}10^{-3}$	$.156\text{x}10^{-2}$	$.327\text{x}10^{-1}$	$.317\text{x}10^{-1}$	.964	$-.343\text{x}10^{-1}$		1.000
12	$.902\text{x}10^{-3}$	$.439\text{x}10^{-3}$	$.373\text{x}10^{-1}$	$.108\text{x}10^{-1}$	.903	$-.125\text{x}10^{-1}$		1.929
13	$.582\text{x}10^{-3}$	$.125\text{x}10^{-2}$	$.343\text{x}10^{-1}$	$.325\text{x}10^{-1}$	.965	$-.340\text{x}10^{-1}$		1.000
14	$.667\text{x}10^{-3}$	$.441\text{x}10^{-3}$	$.323\text{x}10^{-1}$	$.135\text{x}10^{-1}$	.909	$-.147\text{x}10^{-1}$	$.410\text{x}10^{-3}$	1.929
15	$.890\text{x}10^{-3}$	$.172\text{x}10^{-2}$	$.500\text{x}10^{-1}$	$.478\text{x}10^{-1}$	.949	$-.520\text{x}10^{-1}$	$.390\text{x}10^{-3}$	1.000
16	$.676\text{x}10^{-3}$	$.755\text{x}10^{-3}$	$.379\text{x}10^{-1}$	$.176\text{x}10^{-1}$	.904	$-.138\text{x}10^{-1}$	$.432\text{x}10^{-3}$	1.929
17	$.139\text{x}10^{-2}$	$.248\text{x}10^{-2}$	$.530\text{x}10^{-1}$	$.527\text{x}10^{-1}$	.947	$-.583\text{x}10^{-1}$	$.443\text{x}10^{-3}$	1.000
18	$.989\text{x}10^{-3}$	$.823\text{x}10^{-3}$	$.472\text{x}10^{-1}$	$.125\text{x}10^{-1}$	.895	$-.139\text{x}10^{-1}$		1.929
19	$.877\text{x}10^{-3}$	$.180\text{x}10^{-2}$	$.315\text{x}10^{-1}$	$.339\text{x}19^{-1}$	.968	$-.377\text{x}10^{-1}$		1.000
20	$.953\text{x}10^{-3}$	$.455\text{x}10^{-3}$	$.363\text{x}10^{-1}$	$.119\text{x}10^{-1}$	.905	$-.132\text{x}10^{-1}$	$.419\text{x}10^{-3}$	1.929
21	$.725\text{x}10^{-3}$	$.183\text{x}10^{-2}$	$.442\text{x}10^{-1}$	$.507\text{x}10^{-1}$	.950	$-.593\text{x}10^{-1}$	$.559\text{x}10^{-3}$	1.000
22	$.719\text{x}10^{-3}$	$.567\text{x}10^{-3}$	$.358\text{x}10^{-1}$	$.139\text{x}10^{-1}$	.905	$-.174\text{x}10^{-1}$	$.494\text{x}10^{-3}$	1.929
23	$.104\text{x}10^{-2}$	$.227\text{x}10^{-2}$	$.449\text{x}10^{-1}$	$.525\text{x}10^{-1}$	.952	$-.532\text{x}10^{-1}$	$.455\text{x}10^{-3}$	1.000
24	$.895\text{x}10^{-3}$	$.638\text{x}10^{-3}$	$.452\text{x}10^{-1}$	$.117\text{x}10^{-1}$	.894	$-.156\text{x}10^{-1}$	$.368\text{x}10^{-3}$	1.929
25	$.770\text{x}10^{-3}$	$.183\text{x}10^{-2}$	$.327\text{x}10^{-1}$	$.357\text{x}10^{-1}$	.954	$-.440\text{x}10^{-1}$	$.413\text{x}10^{-3}$	1.000
26	$.113\text{x}10^{-2}$	$.561\text{x}10^{-3}$	$.448\text{x}10^{-1}$	$.150\text{x}10^{-1}$	.893	$-\ 471\text{x}10^{-1}$	$.374\text{x}10^{-3}$	1.929
27	$.592\text{x}10^{-3}$	$.166\text{x}10^{-2}$	$.345\text{x}10^{-1}$	$.396\text{x}10^{-1}$	.954	$-.407\text{x}10^{-1}$	$.458\text{x}10^{-3}$	1.000
28	$.109\text{x}10^{-2}$	$.731\text{x}10^{-3}$	$.434\text{x}10^{-1}$	$.147\text{x}10^{-1}$	.896	$-.205\text{x}10^{-1}$	$.754\text{x}10^{-3}$	1.929
29	$.131\text{x}10^{-2}$	$.305\text{x}10^{-2}$	$.722\text{x}10^{-1}$	$.611\text{x}10^{-1}$	.926	$-.674\text{x}10^{-1}$	$.939\text{x}10^{-3}$	1.000
30	$.128\text{x}10^{-2}$	$.136\text{x}10^{-2}$	$.528\text{x}10^{-1}$	$.192\text{x}10^{-1}$	.885	$-.250\text{x}10^{-1}$	$.824\text{x}10^{-3}$	1.929
31	$.227\text{x}10^{-2}$	$.355\text{x}10^{-2}$	$.585\text{x}10^{-1}$	$.512\text{x}10^{-1}$	.921	$-.596\text{x}10^{-1}$	$.981\text{x}10^{-3}$	1.000
32	$.211\text{x}10^{-2}$	$.162\text{x}10^{-2}$	$.705\text{x}10^{-1}$	$.251\text{x}10^{-1}$	.866	$-.291\text{x}10^{-1}$	$.945\text{x}10^{-3}$	1.929
33	$.240\text{x}10^{-2}$	$.448\text{x}10^{-2}$	$.757\text{x}10^{-1}$	$.549\text{x}10^{-1}$	.920	$-.585\text{x}10^{-1}$		1.000
34	$.289\text{x}10^{-2}$	$.100\text{x}10^{-2}$	$.717\text{x}10^{-1}$	$.247\text{x}10^{-2}$	.866			1.929

Tabela III.3.C - Via expressa: Regulador L-Q com estrutura local
Matrizes do sistema A,Q
C = diag[1.0, 1.0, 1.0 ... 1,0]
R = diag[25.0, 25.0, 25.0 ... 25.0]

Tabela III.3.D

Matriz B

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1											
2											
3	$.471 \times 10^{-1}$										
4											
5	$.147 \times 10^{-2}$	$.512 \times 10^{-1}$									
6											
7		$.109 \times 10^{-2}$	$.488 \times 10^{-1}$								
8											
9			$.116 \times 10^{-2}$								
10											
11				$.491 \times 10^{-1}$							
12											
13											
14											
15					$.487 \times 10^{-1}$						
16											
17					$.134 \times 10^{-2}$	$.487 \times 10^{-1}$					
18											
19							$.491 \times 10^{-1}$				
20											
21							$.112 \times 10^{-2}$	$.488 \times 10^{-1}$			
22											
23								$.114 \times 10^{-2}$			
24											
25									$.488 \times 10^{-1}$		
26											
27											
28											
29										$.481 \times 10^{-1}$	
30											
31										$.150 \times 10^{-2}$	$.480 \times 10^{-1}$
32											
33											$.194 \times 10^{-2}$
34											

Tabela III.3.E - α^* para ne = 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	$-.1539$	$-.4309$	$-.2138$	$-.6017$	$-.5731$	-1.691	$-.1062$	$-.394\times10^{-1}$	$-.1309$	$-.488\times10^{-1}$
α_{i+10}	$-.1991\times10^{-1}$	$-.9466\times10^{-2}$	$-.3858\times10^{-1}$	$-.2449\times10^{-1}$	$-.3032\times10^{-1}$	$-.1889\times10^{-1}$	$-.6133\times10^{-1}$	$-.2025\times10^{-1}$	$-.1449\times10^{-1}$	$-.4085\times10^{-1}$
α_{i+20}	$-.3005\times10^{-1}$	$-.2118\times10^{-1}$	$-.2090\times10^{-1}$	$-.2455\times10^{-1}$	$-.3641\times10^{-1}$	$-.1957\times10^{-1}$	$-.1784\times10^{-1}$	$-.1944\times10^{-1}$	$-.2943\times10^{-1}$	$-.2433\times10^{-1}$
α_{i+30}	$-.2304\times10^{-1}$	$-.2322\times10^{-1}$	$-.5613\times10^{-1}$	$-.2921\times10^{-1}$	$-.1241\times10^{-1}$	$-.3256\times10^{-1}$	$-.3228\times10^{-1}$	$-.1654\times10^{-1}$	$-.2385\times10^{-1}$	$-.9709\times10^{-2}$
α_{i+40}	$-.3412\times10^{-1}$	$-.8135\times10^{-2}$	$-.4117\times10^{-2}$	$-.6662\times10^{-2}$	$-.1930\times10^{-1}$	$-.1491\times10^{-1}$	$-.7251\times10^{-2}$	$-.5814\times10^{-2}$	$-.1874\times10^{-1}$	$-.9039\times10^{-2}$
α_{i+50}	$-.3932\times10^{-2}$	$-.8454\times10^{-2}$	$-.1783\times10^{-1}$	$-.3063\times10^{-2}$	$-.7062\times10^{-2}$					

Tabela III.3.F - Método Newton Modificado

ne = 1

K	β	$Jn_e(\underline{\alpha})$	$\|\| Jn_e(\underline{\alpha}) \|\|$
1	1.0	1.627.557	0.9390483
2	1.0	1.626.543	0.8411×10^{-1}
3	1.0	1.626.536	0.5779×10^{-2}
4	1.0	1.626.536	0.4539×10^{-3}
Tempo de CPU PDP-10 UNICAMP		13:20.99	

Tabela III.3.G - Método Newton Modificado

ne = 2

K	β	$Jn_e(\underline{\alpha})$	$\| Jn_e(\underline{\alpha}) \|$
1	1.0	1.091.824	0.6979
2	1.0	1.090.976	0.7731×10^{-1}
	0.5	1.090.860	0.3560×10^{-1}
	0.25	1.090.678	0.1764×10^{-1}
	0.25	1.090.673	0.6819×10^{-2}
	0.25	1.090.672	0.4750×10^{-2}
	0.25	1.090.672	0.2335×10^{-2}
19	0.25	1.090.672	0.8799×10^{-3}
Tempo de CPU PDP-10 UNICAMP		58:32.59	

Tabela III.3.H - Parâmetros ótimos para

ne = 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_i	-.1542	-.4253	-.2389	-.6734	-.5808	-.1.716	-.1269	$-.3242\times10^{-1}$	-.1042	$-.3058\times10^{-1}$
α_{i+10}	$-.4121\times10^{-1}$	$-.2037\times10^{-1}$	$-.7883\times10^{-1}$	$-.3808\times10^{-1}$	$-.5500\times10^{-2}$	$-.1726\times10^{-1}$	$-.6613\times10^{-1}$	$-.3278\times10^{-1}$	$-.7691\times10^{-1}$	$-.3732\times10^{-1}$
α_{i+20}	$-.2314\times10^{-1}$	$-.3332\times10^{-1}$	$-.3249\times10^{-1}$	$-.3662\times10^{-1}$	$-.3789\times10^{-1}$	$-.1246\times10^{-1}$	$-.1083\times10^{-1}$	$.1661\times10^{-1}$	$-.2839\times10^{-1}$	$-.2283\times10^{-1}$
α_{i+30}	$-.2846\times10^{-1}$	$-.2182\times10^{-1}$	$-.5244\times10^{-1}$	$-.4299\times10^{-1}$	$-.1987\times10^{-1}$	$-.4274\times10^{-1}$	$-.2722\times10^{-1}$	$-.1552\times10^{-1}$	$-.3631\times10^{-1}$	$-.8829\times10^{-2}$
α_{i+40}	$-.2798\times10^{-1}$	$-.1158\times10^{-1}$	$-.5754\times10^{-2}$	$-.7068\times10^{-2}$	$-.1987\times10^{-1}$	$-.1366\times10^{-1}$	$-.6714\times10^{-2}$	$-.4510\times10^{-2}$	$-.1908\times10^{-1}$	$-.9051\times10^{-2}$
α_{i+50}	$-.4104\times10^{-2}$	$-.8189\times10^{-2}$	$-.1802\times10^{-1}$	$-.3327\times10^{-2}$	$-.6995\times10^{-2}$					

Tabela III.3.I - Método do Gradiente

ne = 1

K	β	$J_{ne}(\underline{\alpha})$	$\| J_{ne}(\underline{\alpha}) \|$
1	$1x10^{-4}$	1.627.557	0.439
2	$1x10^{-4}$	1.627.315	0.772
3	$1x10^{-4}$	1.627.149	0.648
4	$1x10^{-4}$	1.627.031	0.555
5	$1x10^{-4}$	1.626.944	0.482
6	$1x10^{-4}$	1.626.878	0.424
⋮	⋮	⋮	⋮
50	$1x10^{-4}$	1.626.544	0.382×10^{-1}
51	$1x10^{-4}$	1.626.544	0.370×10^{-1}
52	$1x10^{-4}$	1.626.543	0.358×10^{-1}
53	$1x10^{-4}$	1.626.543	0.346×10^{-1}

Tabela III.3.J - Método do Gradiente

ne = 2

K	β	$J_{ne}(\underline{\alpha})$	$\| J_{ne}(\underline{\alpha}) \|$
1	0.1×10^{-3}	1.091.824	0.697
2	"	1.091.682	0.639
3	"	1.091.564	0.587
4	"	1.091.463	0.540
5	"	1.091.378	0.498
6	"	1.091.306	0.459
7	"	1.091.245	0.424
8	"	1.091.192	0.392
⋮	"	⋮	⋮
⋮	"	⋮	⋮
⋮	"	⋮	⋮
⋮	"	⋮	⋮
⋮	"	⋮	⋮
86	0.1×10^{-3}	1.090.800	0.480×10^{-1}

CAPÍTULO IV

CONCLUSÃO GERAL

Foi apresentada uma formulação do problema de otimização de parâmetros em reguladores L-Q, com restrições de estrutura, para sistemas discretos, próprio para tratamento aproximado quando o pior caso de condição inicial deve ser considerado. Foram apresentados procedimentos para o cálculo em forma fechada do vetor Gradiente e da matriz Hessiana.

Foi proposto um método de otimização do tipo Newton Modificado que se mostrou muito bem adaptado para tratar do problema de síntese via otimização de parâmetros para a situação mais desfavorável de condição inicial. Comparado com o método do Gradiente, ele teve um desempenho muitas vezes superior. Houve problemas de erros de arrendondamento que afetaram o método, também a perda da característica bloco diagonal do Hessiano aproximado , obtida para sistemas contínuos.

Esses dois aspectos são importantes e serão tratados oportunamente em trabalhos futuros.

APÊNDICE A

A.1. INTRODUÇÃO

Este apêndice apresenta definições e resultados relacionados a Sistemas Lineares Invariantes no Tempo, Reguladores L - Q de Tempo Infinito e Álgebra Linear que são usados neste trabalho. Para maiores detalhes, veja Kwakernaak & Sivan [10], Barnett & Storey [1], Kirk [11], Ogata [16], Zadeh & Desoer [23].

A.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO DE UM SISTEMA LINEAR, DISCRETO, INVARIANTE NO TEMPO

Considerando a equação

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{x}_k \ ; \ \underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0 \tag{A.2.1}$$

onde A é uma matriz nxn, B é de dimensão nxm, invariantes no tempo, $x_k = x(k)$ e x_{k0} é o estado inicial.

A solução da eq.(A.2.1) é dada por

$$\underline{x}_k = A^{k-k_0} . \underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-k_0-j-1} . B\underline{u}_j \tag{A.2.2}$$

onde A^{k-k_0} é a matriz de transição de estado, Podemos considerar $k_0=0$ e então teremos:

$$\underline{x}_k = A^k . \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-j-1} A^{k-j-1} . Bu_j \tag{A.2.3}$$

onde $\underline{x}_0$ é o estado inicial.

A.3. DISCRETIZAÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE ESTADO CONTÍNUA

A discretização do sistema contínuo $\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t)$, cuja solução é dada por:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} . \underline{x}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)} . Bu(\tau) d\tau \tag{A.3.1}$$

utilizando o intervalo de amostragem T entre os instantes kT e (k+1)T, com uma entrada constante durante o intervalo de amostragem é dada por:

$$\underline{x}_{k+1} = e^{AT}.\underline{x}_k + \left[\int_0^T e^{A\tau}\right].d\tau .B.\underline{u}_k \qquad (A.3.2)$$

onde:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2t^2 + \frac{1}{3!} A^3t^3 + \ldots \frac{1}{k!} A^k.t^k + \ldots \qquad (A.3.3)$$

A.4. ESTABILIDADE DE SISTEMAS LINEARES, DISCRETOS, INVARIANTES NO TEMPO

Def. 1: O sistema $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$ (A.4.1)

é assintoticamente estável se todos os autovalores da matriz A têm módulo menor que a unidade. Neste caso, diremos também que a matriz A é assintoticamente estável.

Def. 2: Consideremos o sistema (A.4.1). Suponhamos que a matriz A de dimensão (nxn) tem n autovalores distintos. Definiremos então o sub-espaço estável desses sistema, ao sub-espaço real linear gerado pelos autovetores que correspondem autovalores com módulo menor que 1.

Analogamente, definimos o subespaço instável desses sistema ao subespaço real linear, gerado pelos autovetores associados a autovalores com módulo ≥ 1.

Se os autovalores de A não são todos distintos, consideremos o espaço nulo N_j de $(A-\lambda_j.I)^{mj}$ onde λ_j é o autovalor de A e mj é sua multiplicidade no polinômio característico de A.

Def. 3: O subespaço estável de (A.4.1) é o subespaço real, linear, soma direta dos espalo nulos N_j que correspondem a valores característicos de A com módulo menor que 1. Analogamente, o subespaço instável é o subespaço real, soma direta dos espaços nulos N_j, que correspondem a autovalores de A com módulo ≥ 1.

A.5. CONTROLABILIDADE, OBSERVABILIDADE E DETECTABILIDADE

Def. 4: O sistema linear, discreto, invariante no tempo

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \tag{A.5.1}$$

$$\underline{y}_k = C.\underline{x}_k \tag{A.5.2}$$

é completamente controlável se qualquer estado pode ser alcançado partindo-se do estado zero com um número finito de passos.

Def. 5: O par [A,B] é completamente controlável se o sistema correspondente for completamente controlável.

Teorema (A.5.1): O sistema (A.5.1) (A.5.2) é completamente controlável se e somente se a matriz de controlabilidade $P=[B,AB,A^2B,A^3B,\ldots,A^{n-1}.B]$ tem rank n.

Def. 6: O sistema linear (A.2.1) é estabilizável se o seu subespaço instável está contido em seu subespaço controlável. Neste caso diremos também que o par [A,B] é estabilizável.

Def. 7: O sistema (A.5.1)(A.5.2) é observável se $\underline{x}_0$ pode ser determinado do conjunto de medidas $\{\underline{y}_1,\underline{y}_2,\ldots,\underline{y}_N\}$ para algum N finito. Se isto é verdade, para qualquer instante inicial, o sistema é completamente observável.

Teorema (A.5.2): O sistema (A.5.1)(A.5.2) é completamente observável se, e somente se, a matriz de observabilidade,

$$Q = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ C^2A \\ \vdots \\ C^nA \end{vmatrix} \tag{A.5.3}$$

é de posto n.

Def. 8: O par [A,C] é completamente observável se o sistema correspondente for completamente observável.

Def. 9: O sistema (A.5.1)(A.5.2) é detectável se o seu subespaço não observável está contido no seu subespaço estável.

Def. 10: O par [A,C] é detectável se o sistema correspondente for detectável.

Def. 11: O subespaço não observável do sistema (A.5.1)(A.5.2) é o subespaço linear formado pelos estados $\underline{x}_0$ para os quais $y(kT) = 0$ para $k > k_0$.

Teorema (A.5.3): O subespaço não observável do sistema (A.5.1)(A.5.2) é o espaço nulo da matriz de observabilidade N(Q).

Teorema (A.5.4): Se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço não observável do sistema (A.5.1)(A.5.2) então $\underline{x}_k$ e $A\underline{x}_k$ também pertencem ao subespaço não observável.

Def. 13: O sistema abaixo

$$\underline{x}^*_{k+1} = A^t\underline{x}^*_k + C^t.\underline{u}^*_k \tag{A.5.4}$$

$$\underline{y}^*_k = B^t.\underline{x}^*_k \tag{A.5.5}$$

é chamado o dual do sistema (A.5.1)(A.5.2).

Teorema (A.5.5): Dado o sistema (A.5.1)(A.5.2) e seu dual (A.5.4) (A.5.5) temos:

a) O sistema (A.5.1)(A.5.2) é completamente controlável se o seu dual (A.5.4)(A.5.5) for completamente observável.

b) O sistema (A.5.1)(A.5.2) é estabilizável se e só se o seu dual (A.5.4)(A.5.5) for detectável.

A.6. TRAÇO DE UMA MATRIZ QUADRADA

Def. 14: Seja A uma matriz quadrada (nxn). Chama-se traço da matriz A à soma de seus elementos da diagonal, isto é:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (A.6.1)$$

Teorema (A.6.1): traço de (A.B) = traço de (B.A)
e traço (A+B) = traço A + traço B

Teorema (A.6.2): traço A = $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

onde λ_i são os autovalores da matriz A

Teorema (A.6.3): Dadas a matriz simétrica A e a matriz B, temos:

$$\text{traço}(A.B) = \text{traço}(A.B^t) \qquad (A.6.2)$$

A.7. PRODUTO DE KRONECKER DE MATRIZES

Def. 15: Dadas as matrizes A e B de dimensões (mxn) e (ℓxp)respectivamente, o produto do Kronecker [A x B] é dado por:

$$A \otimes B = (a_{i,j} . B) \qquad (A.6.3)$$

onde $A \otimes B$ é uma matriz de dimensão (mℓxnp) parcionada em m.n blocos conforme indicado em (A.7.1).

Teorema (A.7.1): Dadas as matrizes A,B,C,D de dimensões (mxn),(ℓxp), (nxr) e (pxq) respectivamente temos:

$$[A \otimes B]^t = A^t \otimes B^t \tag{A.7.2}$$

$$[A \otimes B].[C \otimes D] = AC \otimes BD \tag{A.7.3}$$

Teorema (A.7.2): Dadas as matrizes A,B,C de dimensões (nxn),(nxm), (mxn), respectivamente, temos:

a) $A.X = B$ é equivalente a

$$[A \otimes I_m].X_V = B_V$$

b) $XA = C$ é equivalente a

$$[I_m \otimes A^t].X_V = C_V$$

onde I_m é a matriz unidade de dimensão (mxm), X_V, B_V, C_V são vetores de dimensões (n.m) contendo respectivamente os elementos de X,B e C armazenados por linha.

Teorema (A.7.3): Dadas as matrizes A,B de dimensões (nxn) e (mxm) respectivamente, temos:

a) Os autovalores de $(A \otimes B)$ são os m.n números

$$\lambda_{ij} = \lambda_i(A).\lambda_j(B); \; i=1 \text{ até } n, \; j=1 \text{ até } m$$

b) Os autovalores de $A \otimes I_m + I_n \otimes B$ são os m.n números $\lambda_{ij} = \lambda_i(A) + \lambda_j(B)$ i=1 até n, j=1 até m, onde $\lambda_i(A)$ e $\lambda_j(B)$ representam respectivamente o i-ésimo autovalor de A e j-ésimo autovalor de B.

A.8. EQUAÇÃO DE LIAPUNOV E ÍNDICE DE DESEMPENHO QUADRÁTICO

Teorema (A.8.1): Sejam A, Q^tQ, X, matrizes de dimensões (nxn); A é assintoticamente estável (todos os autovalores com módulo menor que 1). Temos:

a) A solução da equação

$$X = A^t X A + Q^t Q \tag{A.8.1}$$

é dada por:

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^t)^k Q^t Q A^k \tag{A.8.2}$$

b) Se Q^tQ é uma matriz definida positiva ou o par $[A,Q]$ completamente observável, então X é definida positiva

Prova: a) É fácil verificar que a solução da eq.(A.8.1) é dada pela solução de regime permanente da recorrência linear estável,

$$X_{k+1} = A^t X_k A + Q^t Q \tag{A.8.3}$$

A recorrência acima é estável porque por hipótese A é assintoticamente estável.

Por inspensão em (A.8.3) é fácil verificar que

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^t)^k Q^T Q A^k$$

b) Considerando $Q^tQ > 0$ segue-se que:

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} (A^t)^k Q^t Q A^k = Q^t Q + A^t Q^t Q A + (A^t)^2 Q^t Q A^2 + \dots \tag{A.8.4}$$

Seja $\underline{x}_0 \in R^n$, $\underline{x}_0 \neq 0$

então $\underline{x}_0{}^t X \underline{x}_0 = \{\underline{x}_0{}^t Q^t Q \underline{x}_0 + \underline{x}_0{}^t A^t Q^t Q A x_0 + \underline{x}_0{}^t (A^t)^2 Q^t Q A^2 \underline{x}_0 + \dots$

como $Q^tQ > 0$ segue-se imediatamente que $X > 0$.

Se o par $[A,Q]$ é completamente observável, e $Q^tQ \geq 0$ assumindo novamente $\underline{x}_0 \in R^n$, $\underline{x}_0 \neq 0$ e supondo por absurdo $X \leq 0$, teremos:

$$\underline{x}_0{}^tQ^tQ\underline{x}_0 + \underline{x}_0{}^tA^tQ^tQA\underline{x}_0 + \underline{x}_0{}^t(A^t)^2Q^tQA^2 + \dots + \underline{x}_0(A^t)^kQ^tQA^k + \dots\} \leq 0 \qquad (A.8.5)$$

Seja $\underline{y}_k = QA^kx_0$ (A.8.6)

logo $\{\underline{y}_0{}^t.\underline{y}_0 + \underline{y}_1{}^ty_1 + \underline{y}_2{}^t.\underline{y}_2 + \dots + \underline{y}_k{}^t.y_k + \dots\} \leq 0$ (A.8.7)

Como $\underline{y}_k{}^t.y_k \geq 0$ para qualquer vetor no R^n, conclue- se que $X < 0$ é absurdo, $X=0$ também é absurdo, pois teríamos $y_k=QA^kx_0=0$ para todo $k \geq 0$, o que contradiz a hipótese do par $[A,Q]$ completamente observável. Logo, $X > 0$.

<u>Teorema (A.8.2)</u>: Dados o sistema linear, invariante no tempo e assintoticamente estável

$$\underline{x}_{k+1} = (A+BGC).\underline{x}_k \; ; \; \underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0 \qquad (A.8.8)$$

e o índice de desempenho

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}_k[S_1{}^t.S_1 + C^tG^tS_2GC].\underline{x}_k \qquad (A.8.9)$$

onde $S_2 > 0$, temos:

a) $J = \underline{x}_0{}^tW\underline{x}_0 = \text{traço}(x_0x_0{}^tW)$ (A.8.10)

onde $(A+BGC)^tW(A+BGC)-W = S_1{}^tS_1 + C^tG^tS_2GC$ (A.8.11)

b) $W > 0$ se $S_1{}^tS_1 > 0$ ou se $S_1{}^tS_1 \geq 0$ e o par $[A,S_1]$ é completamente observável.

c) Se $\underline{x}_0$ é uma variável aleatória com matriz de momentos de segunda ordem $E\{\underline{x}_0x_0{}^t\} = X_0$, temos

$$E\{J\} = \text{traço}\{X_0W\} \qquad (A.8.12)$$

<u>Prova</u>: a) A solução de (A.8.8) é dada por

$$\underline{x}_k = (A+BGC)^k.\underline{x}_0 \qquad (A.8.13)$$

Substituindo (A.8.13) em (A.8.9) temos

$$J(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{x}_0^{\,t}(A+BGC)^{k^t}.[S_1^{\,t}.S_1 + C^tG^tS_2GC](A+BGC)^k.\underline{x}_0 \qquad (A.8.14)$$

$$= \underline{x}_0^{\,t} \sum_{k=0}^{\infty} (A+BGC)^{k^t}[S_1^{\,t}.S_1 + C^tG^tS_2GC](A+BGC)^k\, \underline{x}_0 \qquad (A.8.15)$$

pelo teorema (A.8.1) temos

$$J(\underline{x}) = x_0^{\,t}Wx_0 \qquad (A.8.16)$$

onde W é a solução de:

$$(A+BGC)^tW(A+BGC)-W = (S_1^{\,t}.S_1 + C^tG^tS_2GC) \qquad (A.8.17)$$

Como $\underline{x}_0^{\,t}W\underline{x}_0$ = traço $\underline{x}_0^{\,t}W\underline{x}_0$, aplicando o teorema(A.6.1) a (A.8.16) chega-se

$$J(\underline{x}) = \text{traço}\{x_0\ x_0^{\,t}\ W\}$$

b) Se $S_1^{\,t}S_1 > 0$, temos:

$$S_1^{\,t}S_1 + C^tG^tS_2GC > 0$$

e pelo teorema (A.8.1) segue-se que $W > 0$.

Se $S_1^{\,t}.S_1 \geq 0$ e o par $[A,S_1]$ completamente observável, segue-se que:

Supondo por absurdo $W \geq 0$, como consequência deve existir $\underline{x}_0 \neq 0 \in R^n$ tal que $\underline{x}_0^{\,t}W\underline{x}_0 = 0$ (A.8.18)

Desta forma, de (A.8.15) temos:

$$S_1\underline{x}_k \quad 0 \quad 0 \leq k \leq \infty \qquad (A.8.19)$$

$$GC\underline{x}_k \quad 0 \quad 0 \leq k \leq \infty \qquad (A.8.20)$$

Substituindo esses resultados em (A.8.8), temos:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k \;;\; \underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0 \neq 0 \qquad \text{(A.8.21)}$$

e $$y = S_1\underline{x}_k \equiv 0 \qquad 0 \leq k < \infty$$

o que contradiz a hipótese de que o par $[A,S_1]$ é completamente observável. Logo $W > 0$.

c) De (A.8.10) temos

$$E\{J\} = E\{\text{traço}[\underline{x}_0\ x_0{}^t\ W]\} \qquad \text{(A.8.22)}$$

Devido à linearidade dos operadores E(•) e traço(•) segue:

$$E\{J\} = \text{traço}\{E(\underline{x}_0 . \underline{x}_0{}^t).W\} \qquad \text{(A.8.23)}$$

$$E\{J\} = \text{traço}\{X_0 W\} \qquad \text{c.q.d.} \qquad \text{(A.8.24)}$$

Teorema (A.8.3): Dado o índice de desempenho quadrático

$$J = \text{traço}\ S^tS \sum_{k=0}^{\infty} A^tQ^tQA^k$$

onde A é uma matriz (nxn) e Q é uma matriz (rxn) e o par [A,Q] é detectável; S é de dimensão (mxn) e o par $(A,S^t]$ é completamente controlável.

Se $J < \infty$ (isto é, J é finito), então A é uma matriz assintoticamente estável.

Temos:

$$J = \text{traço}\{S^tS \sum_{k=0}^{\infty} A^{t^k} Q^tQA^k\} < \infty \qquad \text{(A.8.25)}$$

Aplicando o teorema (A.6.1) a (A.8.25) temos

$$J = \text{traço}\left\{ S \sum_{k=0}^{\infty} A^{t^k} Q^tQA^k . S^t \right\} < \infty \qquad \text{(A.8.26)}$$

ou $$J = \text{traço}\left\{ \sum_{i=1}^{m} \underline{s}_i{}^t \sum_{k=0}^{\infty} A^{t^k} Q^tQA^k\ \underline{s}_i \right\} < \infty \qquad \text{(A.8.27)}$$

onde $\underline{s}_i$ é um vetor contendo a i-ésima linha da matriz S.

De (A.8.27) segue-se que:

$$J = \text{traço}\{\underline{y}_k^{\,i} \cdot (\underline{y}_k^{\,i})^t\} < \infty \tag{A.8.28}$$

onde $\underline{y}_k^{\,i}$ é a saída do sistema

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k \; ; \; \underline{x}_0 = \underline{s}_i \tag{A.8.29}$$

$$\underline{y}_k^{\,i} = Q.\underline{x}_k \tag{A.8.30}$$

Para que se cumpra (A.8.28), devemos ter

$$\lim_{k\to\infty} \underline{y}_k^{\,i} = 0 \qquad i=1,2,3,\ldots,m \tag{A.8.31}$$

observemos que

$$\lim_{k\to\infty} \underline{y}_{k+j}^{i} = 0 \tag{A.8.32}$$

para todo j finito, isto é,

$$\lim_{k\to\infty} QA^{k+j}\,\underline{s}_i = 0 \tag{A.8.33}$$

para todo j finito, em particular

$$\lim_{k\to\infty} QA^j A^k\,\underline{s}_i \; ; \; j=0 \text{ até } j=n-1 \tag{A.8.34}$$

Como o par $[A,S^t]$ é completamente controlável, a matriz

$$P = \{S^t \, , \, AS^t \, , \, A^2S^t \, , \, \ldots, \, A^{n-1}.S^t\} \tag{A.8.35}$$

tem rank n. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} QA^k\underline{x}_0 = 0 \tag{A.8.36}$$

para todo $\underline{x}_0 \; \varepsilon \; R^n$ ou

$$\lim_{k\to\infty} \begin{vmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ \vdots \\ QA^{n-1} \end{vmatrix} A^k.x_0 = 0 \tag{A.8.37}$$

isto é,

$$\lim_{k\to\infty} \begin{vmatrix} Q \\ QA \\ QA^2 \\ \vdots \\ QA^{n-1} \end{vmatrix} \underline{x}_k = 0 \qquad (A.8.38)$$

Seja $x_0 \in R^n$. Como R^n é a soma direta dos espaços observável e não observável, temos:

a) Se $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço não observável, x_k também pertence ao mesmo subespaço. E como o par $[A,Q]$ é detectável, $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço estável do sistema. Logo,

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0$$

b) $\underline{x}_0$ pertence ao subespaço observável do sistema, $\underline{x}_k$ não pertence ao espaço nulo da matriz de observabilidade e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = 0$$

Portanto, para todo $\underline{x}_0 \in R^n$, $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = 0$, ou seja, A é assintoticamente estável.

Teorema (A.8.4): Sejam A,B,W,T,S matrizes de dimensões (nxm). A estável e B,W,T,S matrizes simétricas. Então,

$$\text{traço}(SW) = \text{traço}(B.T) \qquad (A.8.39)$$

onde

$$W = A^tWA + B \qquad (A.8.40)$$

e

$$T = ATA^t + S \qquad (A.8.41)$$

Prova: Aplicando o teroema (A.8.1) à eq.(A.8.39), tem-se:

$$\text{traço}(SW) = \text{traço } S \sum_{k=0}^{\infty} (A^t)^k.B.A^k = \text{traço} \sum_{k=0}^{\infty} S(A^t)^k BA^k =$$

$$= \text{traço}\{A^k S(A^t)^k . B\} \tag{A.8.42}$$

Aplicando o teorema (A.6.1) e a seguir o teorema (A.8.1) em (A.8.41), chega-se a

$$\text{traço}\{A^k S(A^t)^k . B\} = \text{traço}\{BA^k S(A^t)^k\} = \text{traço}\{BT\}$$

portanto traço{SW} = traço{BT}

c.q.d.

A.9. PROBLEMA DO REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO DE TEMPO INFINITO

Def. (A.9.1): Dados o sistema linear, invariante no tempo

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \;;\; \underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0 \tag{A.9.1}$$

e o funcional de desempenho quadrático

$$J[\underline{u}_k] = \sum_{k=0}^{\infty} [\underline{x}_k{}^t Q^t Q \underline{x}_k + \underline{u}_k{}^t R \underline{u}_k] \tag{A.9.2}$$

onde $\underline{x}_k$ e $\underline{u}_k$ são vetores de dimensões n,m respectivamente; A,B,Q, R são matrizes reais, constantes, dimensionadas consistentemente e R é uma matriz simétrica definida positiva.

O problema de achar $\underline{u}_k$ que minimiza (A.9.2) é chamado de "Problema do Regulador Ótimo Determinístico Linear Quadrático de Tempo Infinito".

Teorema (A.9.1): Dados o sistema linear (A.9.1) e o funcional de desempenho (A.9.2), temos:

a) Se o sistema é estabilizável e o par [A,Q] é detectável, a solução do problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito é dada por:

$$\underline{u}_k = -(R+B^t WB)^{-1} . B^t WA\underline{x}_k \tag{A.9.3}$$

onde W é dada pela única solução semidefinida positiva da equação de Riccati:

$$W + A^tWA + Q - A^tWB(R+B^tWB)^{-1}B^tWA = 0 \qquad (A.9.4)$$

b) Para $\underline{u}_k = \underline{u}_k^*$, o sistema em malha fechada

$$\underline{x}_{k+1} = (A+BGC)\underline{x}_k \; ; \; \underline{x}(k_0) = \underline{x}_0 \qquad (A.9.5)$$

é assintoticamente estável se e somente se o sistema (A.9.1) é estabilizável e o par [A,Q] é detectável.

c) Se $\underline{u}_k$ é dado por

$$\underline{u}_k = -(R+B^tWB)^{-1}.B^tWA\ \underline{x}_k$$

onde W é a solução da equação de Riccati (A.9.4), o valor do funcional de desempenho (A.9.2) é dado por $J[\underline{u}_k] = x_0{}^tWx_0$.

d) A solução W da equação de Riccati (A.9.4) é definida positiva se e somente se o par [A,Q] é completamente observável.

Do teorema (A.9.1) é interessante salientar o seguinte:

a) Da equação (A.9.3) verifica-se que a lei de controle ótima é linear, invariante no tempo, na forma de realimentação de estado e independente da condição inicial do sistema.

b) A invariancia e a linearidade da lei de controle, bem como a sua independência para com a condição inicial do sistema, facilitam muito a implementação da lei de controle. Como o sistema controlado continua linear e invariante no tempo, a sua análise é também muito facilitada.

c) A lei de controle na forma de realimentação está intimamente associada a uma série de propriedades bem conhecidos, que além dos resultados apresentados no teorema (A.9.1), viabilizam sobremaneira o problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito como ferramenta para projeto de sistemas de controle:

- Alocação assintótica de pólos através da escolha apropriada do funcional de desempenho (A.9.2) [ ].
- Sistema controlado com excelente propriedades de sensitividade e robusteza de acordo com vários critérios, incluindo o das clássicas margens de ganho e fase [20], [19].
- A escolha adequada do funcional de desempenho (A.9.2) permite maximizar a validade de modelos linearização em torno de uma posição de equilíbrio estável [37],[2].

d) Do ponto de vista da implementação da lei de controle (A.9.3), suas principais desvantagens são:

- Exige medição completa do estado do sistema. Isto nem sempre é possível ou economicamente interessante.
- Na lei de controle (A.9.3), cada entrada $\underline{u}_k$ pode ser afetada por todas as saídas dos sensores $\underline{x}_k$. Em muitos sistemas, mais particularmente em sistemas de grande porte, caracterizados por grande dispersão espacial entre suas entradas de controle e seus estados, devido a problemas de custo e confiabilidade do sistema de comunicação exigido, nem sempre é possível ou economicamente viável implementar todas as malhas de realimentação requeridas pela lei de controle (A.9.3).
- Se ao problema do regulador ótimo L-Q de tempo infinito (A.9.1)(A.9.2) forem acrescentadas restrições afetando a medição completa do estado do sistema e a comunicação entre as saídas dos sensores e as entradas dos atuadores, não há mais garantia de que a lei de controle ótimo,caso possa ser obtida, tenha as interessantes propriedades (a), (b), (c).

BIBLIOGRAFIA

[1] - BARNETT,S.; STOREY,C., "Matrix Methods in Stability Theory", Thomas Nelson and Sons, Ltd., Inglaterra.

[2] - BRISON,A.E,Jr.; HO,Y.C., "Applied Optimal Control", Ginn and Co., Walthan Massachussets, USA.

[3] - DURAND,E, "Solutions Numeriques des Equations Algébriques", Masson & Cie, Éditeurs - 120, Bolivard Saint-Germain, Paris, 1971, Vol. I-II.

[4] - FLETCHER,R.; POWELL,M.J., "A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization", Computer Journal, Vol. 6, Nº 2.

[5] - FLETCHER,R.; REEVES,C.M., "Function Minimization by Conjugate Gradients", Computer Journal, Vol. 7, Nº 2.

[6] - GEROMEL,J.C.; BERNUSSON,J., "An Algorithm for Optimal Decentralized Regulation of Linear Quadratic Interconnected Systems", Automática, Vol. 14, Nº 4.

[7] - HEWER,GARY A., "An Iterative Technique for the Computation of the Steady State Gains for the Discrete Optimal Regulator", IEEE, Trans. on Automatic Control, August 1971.

[8] - KLEINMAN, DAVID L., "On Iterative Technique for Riccati Equation Computations", IEEE, Trans. on Automatic Control, Vol. AC-13, Fevereiro 1968.

[9] - KLEINMAN,DAVID L., "Stabilizing a Discrete, Constant, Linear Systems with Application to Iterative Methods for solving the Riccati Equation", IEEE, Trans. on Automatic Control, June 1974.

[10] - KWAKERNAAK,H.; SIVAN,R., "Linear Optimal Control Systems", New York, Wiley, Interscience, 1972.

.../.

[11] - KIRK,D.E., "Optimal Control Theory - An Introduction", Prentice Hall International Inc., New Jersey.

[12] - LOOSE,D.P.; HOUPT,P.K.; ATHANS,M., "Dinamic Centralized and Decentralized Estimation and Control with application to Freeway Ramp Metering", IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. AC-23, Nº 2, 1977.

[13] - LUEMBERGER,D.G., "Introduction to Linear and Nonlinear Programming". Addison-Wesley Publishing Co., USA.

[14] - MILANI,B.E.A., "Contribuição à Solução de Problemas de Otimização de Parâmetros, oriundos da Síntese de Reguladores L-Q com Restrições de Estrutura", Tese de Doutorado, DEE/FEC/UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

[15] - NEVES,N. das; MILANI,B.E.A. , "Reguladores L-Q com Restrições de Estrutura para Sistemas Discretos", IV Congresso Brasileiro de Automática, Anais, Setembro 1982.

[16] - OGATA,K., "modern Control Enginnering", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., USA.

[17] - PACE,I.S.; BARNETT,S., "Comparison of Numerical Methods for Solving Liapunov Matrix Equations", International Journal of Control, Vol. 15, Nº 5, 1972.

[18] - SAGE,A.P., "Optimum Systems Control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

[19] - SAFONOV,M.G.; ATHANS,M., "Gain and Phase Margins for Multiloops L-Q-G Regulators", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-22, Nº 2.

[20] - SANDELL,N.R. Jr.; VARAIVA,P.; ATHANS,M.; SAFONOV,M.G., "Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-23, Nº 2.

.../.

[21] - SMITH,P.G., "Numerical Solution of the Matrix Equation $AX + XA^t + B = 0$", IEEE Trans. on Automatic Control, June 1971, Vol. AC-16, Nº 3.

[22] - SMITH,R.A., "Matrix Equation $XA + BX = C$", Siam J. Appl. Math., Vol. 16, Nº 1, 1968.

[23] - ZADEH,L.A.; DESOER,C.A., "Linear System Theory", McGraw-Hill Book Co., New York, 1963.

...