



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

Aprimorando Método para Detecção de Frequências Baseado na Norma-Mínima

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação da Universidade Estadual de Campinas, Depar-
tamento de Comunicações, como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica.

Autor

Ricardo Fialho Colares
Engenheiro Eletricista pela UFC em 1992

Orientador

Prof. Dr. Amauri Lopes
Doutor em Engenharia Elétrica pela UNICAMP em 1982

Campinas, 26 de setembro de 1997.



Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por Ricardo Fialho Colares
e aprovada pela Comissão
Julgada em 26.10.97
Amauri Lopes
Orientador

4188245

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/Unicamp
	C67a
V.	Ex.
TOMBO BC/	32218
PROC.	281157
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	25/11/97
N.º CPD	

CM-00103108-0

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C67a Colares, Ricardo Fialho
 Aprimorando método para detecção de frequências baseado na norma-mínima / Ricardo Fialho Colares.-- Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Amauri Lopes
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Discriminadores de frequência. 2. Estimativa de parâmetro. 3. Filtros digitais (Matemática). I. Lopes, Amauri. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Detecção de Frequências	1
1.2	Objetivos do Trabalho	2
1.3	Organização dos Capítulos	3
2	Métodos em Predição Linear	5
2.1	Introdução	5
2.2	Predição Linear	5
2.2.1	Predição linear determinística	6
2.2.2	Predição linear não-determinística	9
2.2.3	Determinação dos parâmetros do modelo	10
2.2.4	Predição linear no domínio da frequência	13
2.3	Filtro de Erro de Predição (FEP)	14
2.3.1	Predição linear forward	15
2.3.2	Predição linear backward	18
2.3.3	Predição linear forward-backward	20
2.4	Solução de Norma-mínima	21
2.5	Conclusão	24
3	Detecção de Frequências	25
3.1	Introdução	25
3.2	Predição Linear na Detecção de Frequências	25
3.2.1	Detecção sem ruído	26
3.3	Método FBLP para Detecção de Frequências	27
3.3.1	Método FBLP sem ruído	27
3.4	O Efeito do Ruído	28
3.4.1	Distinção entre subespaços	30
3.4.2	Influência na distribuição dos zeros	31
3.4.3	Método FBLP Modificado	32
3.5	Simulações e Comparações	33
3.6	O Espectro de Norma-mínima	34
3.7	Técnicas de Estimação Baseadas em LS e SVD	36
3.8	Conclusão	37

4	Caracterizando a Solução de Norma-mínima	38
4.1	Introdução	38
4.2	Abordagem Polinomial	38
4.2.1	Generalização	41
4.3	Abordagem Através da Autocorrelação Estimada	43
4.3.1	Matriz e vetor de autocorrelação	43
4.3.2	Sinal composto por uma única exponencial complexa ($M=1$)	43
4.3.3	Sinal composto por duas exponenciais complexas ($M=2$)	45
4.4	Sinal Composto por M Exponenciais Complexas Ortogonais	48
4.4.1	Autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação	49
4.4.2	Explicitando a solução de norma-mínima	51
4.5	Outra Formulação para Solução de Norma-mínima	54
4.6	Conclusão	55
5	Caracterizando os Zeros da Solução de Norma-mínima	57
5.1	Introdução	57
5.2	Relacionando os Coeficientes do Filtro e Seus Zeros	57
5.2.1	Efeito de uma rotação sobre os zeros do preditor	58
5.2.2	Efeito do espaçamento entre as freqüências do sinal	60
5.3	Solução de Norma-mínima Aproximada	62
5.3.1	Considerações sobre a validade da aproximação	67
5.3.2	Raio médio da distribuição dos zeros	67
5.3.3	A norma do filtro preditor	69
5.4	Polinômios com Distribuição Uniforme	70
5.5	Conclusão	73
6	Novo Método de Alta Resolução	75
6.1	Introdução	75
6.2	Medidas de Desempenho e Limitações	75
6.2.1	Critério de Rayleigh	76
6.3	O Método Proposto	76
6.3.1	Motivação	76
6.3.2	Estratégia proposta	77
6.3.3	O método	84
6.3.4	Região de observação	85
6.4	Simulações	87
6.4.1	Limiar do método ML	88
6.4.2	Determinação do fator α	89
6.4.3	Robustez e desempenho do método proposto	90
6.5	Conclusão	91

CONTEÚDO

iii

7 Conclusão	92
7.1 Resumo	92
7.2 Conclusões e Contribuições por Capítulo	93
7.3 Sugestões para Trabalhos Futuros	95
Referências Bibliográficas	97

Abstract

This work is concerned with the application of the linear prediction on the discrete signals analysis, aiming the frequency estimation at low signal to noise ratios. The linear prediction is optimized using least squares criterion and each of the following forms: forward, backward, forward-backward. For each one of this cases, a minimum norm solution is obtained through singular value decomposition and a polynomial is formed using the optimized coefficients. The study of the behavior of their zeroes led to new insight into the minimum norm based frequency detection methods, allowing the proposal of a new method, based on the Modified FBLP. The simulation results have shown that this new method is able to detect frequencies at lower signal to noise ratios, even when compared with the Maximum Likelihood method.

Sumário

Este trabalho aborda a aplicação da predição linear na análise de sinais discretos. Examinaremos a sua utilização no problema de estimação de frequências de um sinal sujeito à ruído. O critério baseado nos mínimos-quadrados será utilizado para a obtenção do preditor ótimo nas formas *forward*, *backward* e *forward-backward*. A ferramenta de decomposição em valores singulares (DVS) será utilizada para a obtenção da solução de norma-mínima para esses preditores. Tal solução particular será detalhadamente estudada para investigar o comportamento dos zeros do polinômio associado ao filtro de erro de predição. A análise desenvolvida trouxe contribuições ao conhecimento dos métodos baseados na norma-mínima, as quais propiciaram a elaboração de uma proposta de um novo método para detecção de frequências baseado no método FBLP Modificado. Os resultados de simulações obtidos para o método proposto mostram uma SNR de limiar inferior àquela obtida para o método FBLP Modificado. Os resultados também indicam que o novo método é capaz de estimar frequências em SNR's inferiores àquelas obtidas mesmo para o método da Máxima Verossimilhança.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Detecção de Frequências

A estimação de frequências de um sinal composto pela soma de senóides pode ser obtida de forma simples e precisa por uma infinidade de métodos, quando dispomos de uma quantidade ilimitada de amostras do mesmo. Porém, tal cenário quase sempre não corresponde à situação prática.

O problema prático consiste, portanto, em estimar as frequências e, eventualmente, as amplitudes e fases das senóides, utilizando um número limitado de amostras do sinal.

A limitação do número de amostras disponíveis por si só constitui um obstáculo para a obtenção de estimativas confiáveis. Quando esta limitação está associada a uma baixa qualidade das amostras disponíveis, provocada pela presença de uma quantidade significativa de ruído aditivo, poucos métodos se mostram satisfatórios.

Em situações em que o espaçamento entre as frequências das senóides é maior que o recíproco do intervalo de observação do sinal, determinado pelo número de amostras disponíveis, e a relação sinal-ruído (SNR¹) é elevada, os métodos baseados na transformada de Fourier, tal como o periodograma, e os métodos paramétricos de análise espectral [6], estimam as frequências de forma precisa [15].

Para os casos em que o espaçamento entre as frequências é inferior ao recíproco do intervalo de observação do sinal e, ainda, em relações sinal-ruído inferiores a 10dB, é necessário a utilização de métodos poderosos de detecção. Dentre estes destacamos aqueles baseados em predição linear.

A predição linear, otimizada segundo o critério dos mínimos-quadrados (LS^2), pode ser utilizada para estimar frequências de senóides sujeitas a ruído branco, através dos zeros do polinômio formado pelos coeficientes do filtro de erro de predição ótimo. Visto que as amostras do sinal se relacionam de forma não-linear com as frequências das senóides, teremos um problema de otimização não-linear a ser resolvido [36].

Dentre tais métodos, destacamos o método de Norma-Mínima, proposto por Tufts e Kumaresan [40]. Este consiste no uso da predição linear em sua forma progressiva-regressiva (forward-backward) para estimar as frequências, desprezando os autovalores-autovetores da

¹do inglês Signal Noise Ratio.

²do inglês Least Squares.

matriz de correlação estimada associados ao ruído. Tal método, denominado de método FBLP³Modificado, mostra-se bastante eficiente para um cenário onde desejamos estimar senóides com frequências bem próximas entre si, em relações sinal-ruído até cerca de 10dB. Seu desempenho é próximo ao do método da máxima-verossimilhança (ML⁴), enquanto que sua complexidade computacional é menor.

Porém, uma das maiores limitações do uso do método FBLP Modificado encontra-se no seu desempenho insatisfatório para valores de relação sinal-ruído (SNR) abaixo de um determinado limiar. Esse efeito de limiar também é observado no método ML, porém para valores menores de SNR.

Devido às suas características, o método FBLP Modificado é classificado como uma técnica de alta resolução, altamente competitiva, e por esse motivo dedicaremos grande parte deste trabalho ao seu estudo.

1.2 Objetivos do Trabalho

O objetivo inicial deste trabalho foi o estudo da ferramenta de decomposição em valores singulares (SVD⁵) aplicada ao problema de detectar frequências de sinais ruidosos. Tal objetivo foi realizado em uma primeira fase do trabalho. Em uma segunda fase, nos concentramos no problema específico de detectar frequências bem próximas para valores de SNR extremamente críticos.

Procuramos apresentar a teoria dos preditores lineares, já explorada exaustivamente em trabalhos anteriores, de uma forma mais abrangente e resumida, tendo em vista não só a formação de uma base teórica para o acompanhamento do trabalho, como também estabelecer uma ponte entre as técnicas mais clássicas e mais modernas de predição.

Nesse estudo mais abrangente, propiciado pelo uso da SVD, procuramos caracterizar melhor a solução para o filtro preditor de norma-mínima, sob o ponto de vista do polinômio a ele associado e dos subespaços determinados pela matriz de autocorrelação estimada do sinal.

Destacamos especialmente o método FBLP Modificado, que consideramos ser a consagração do uso da ferramenta de decomposição em valores singulares aplicada na detecção de frequências.

Através do estudo detalhado desse método procuramos identificar as principais causas das limitações existentes para os métodos baseados na SVD. Através desse conhecimento procuramos criar uma base para novos avanços, propiciando meios para contornar tais limitações.

Como produto final desse estudo procuramos explicitar, em função dos parâmetros do sinal (frequência, amplitude e fase), os coeficientes do polinômio obtidos da solução de norma-mínima para alguns sinais particulares.

Os conhecimentos acumulados na fase de estudo e caracterização do método da Norma-Mínima, bem como os resultados de simulações exaustivas, propiciaram a elaboração da proposta de um novo método para detecção de frequências, baseado no método FBLP Modificado, com o objetivo de reduzir a SNR de limiar.

³do inglês Forward-Backward Linear Prediction.

⁴do inglês Maximum Likelihood.

⁵do inglês Singular Value Decomposition.

Nesse novo método proposto, as duas fases do trabalho se encontram e se completam, reforçando assim o sucesso da estratégia estabelecida no início.

1.3 Organização dos Capítulos

Capítulo 2

Realizamos uma revisão na teoria de predição linear segundo o critério dos mínimos-quadrados, através de suas formas determinísticas, não-determinísticas, estacionária e não-estacionária. As predições serão realizadas nos contextos forward (progressivo), backward (regressivo) e forward-backward (progressivo-regressivo).

Dentre as soluções para o filtro preditor ótimo, é dado destaque à solução de norma-mínima, obtida através da operação de decomposição em valores singulares (SVD) da matriz de dados associada ao sinal.

Capítulo 3

Destacamos aqui a utilização da predição linear na detecção de frequências de senóides na presença de ruído branco. O método FBLP para detecção de frequências, bem como sua variação, denominada de FBLP Modificado, são apresentados e seus desempenhos comparados através de simulações.

Os efeitos do ruído sobre a solução encontrada são discutidos tanto sob o ponto de vista do posicionamento dos zeros do preditor, onde conceituaremos zeros de sinal e zeros estranhos, como nos aspectos relacionados aos subespaços da matriz de dados, quando definimos subespaço de sinal e subespaço de ruído.

Capítulo 4

Aprofundamos o conhecimento da solução de norma-mínima, obtida no Capítulo 2. Abordamos essa solução, aplicada na detecção de frequências, de uma forma analítica, no intuito de explicitar os coeficientes do filtro preditor em função dos parâmetros do sinal observado (fase, amplitude, frequência).

Destacamos a obtenção das estimativas da matriz de autocorrelação para sinais compostos pela soma de exponenciais complexas não-amortecidas na ausência de ruído.

Capítulo 5

Estabelecemos relações entre os zeros do filtro preditor, os coeficientes do filtro de norma-mínima e os parâmetros desconhecidos do sinal observado. Estudamos, também, algumas aproximações para solução de norma-mínima.

Capítulo 6

Apresentamos um novo método de detecção de frequências, baseado no método FBLP Modificado, aplicado a um sinal não-amortecido com frequências bem próximas entre si e em SNR's próximas de zero dB.

Através de resultados obtidos por simulações constatamos a eficiência e robustez do método proposto, o qual permite reduzir a SNR de limiar típica do método FBLP Modificado.

Capítulo 7

Apresentamos as conclusões e as principais contribuições deste trabalho. Pesquisas futuras, sugeridas no decorrer do trabalho, também são destacadas.

Capítulo 2

Métodos em Predição Linear

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo realizar uma revisão na teoria de predição linear, mostrando todo o formalismo matemático básico, suficiente para o acompanhamento dos capítulos seguintes. Também apresentaremos a notação e resultados a serem utilizados nos demais capítulos.

A forma de abordagem escolhida pretende retomar conceitos clássicos, sem contudo afastar-se de aplicações modernas em processamento digital de sinais. Será dada maior ênfase à predição linear em sua forma determinística. Posteriormente, esse desenvolvimento será estendido para forma não determinística estacionária, através da consideração de algumas hipóteses adequadas.

O critério de otimização adotado para obtenção do filtro preditor ótimo será baseado na minimização do erro quadrático. Tal critério permitirá a obtenção de uma equação que relaciona os coeficientes do filtro ótimo com as amostras conhecidas do sinal observado, denominada *Equação Normal*.

O *Filtro de Erro de Predição* (FEP), derivado do filtro preditor através da diferença entre as amostras originais do sinal observado e a amostra predita a cada instante, será objeto freqüente de análise, bem como o desenvolvimento das soluções da equação normal referentes a esse filtro nos casos *forward*, *backward* e *forward-backward*.

Dentre as soluções para a equação normal, será dado destaque àquela obtida através da minimização da norma do vetor formado pelos coeficientes do filtro preditor (*Solução de Norma-Mínima*). Essa solução será obtida através da operação de decomposição em valores singulares (SVD) da matriz de dados associada ao sinal observado.

2.2 Predição Linear

Inicialmente analisaremos a predição linear em sua forma determinística. A predição é denominada determinística quando o sinal a ser analisado na entrada do sistema pode ser completamente determinado. Posteriormente, estenderemos os resultados para sinais aleatórios com estatísticas conhecidas. Os termos sinais e sistemas serão utilizados indistintamente, onde a utilização de um ou outro ocorrerá de acordo com o contexto.

2.2.1 Predição linear determinística

Abordaremos, agora, o problema clássico de se obter a estimativa de um sinal supostamente conhecido, representado por uma seqüência finita de amostras.

Deve ficar claro que uma vez que obtivermos sucesso em desenvolver um modelo paramétrico para o comportamento de um determinado sinal, então esse modelo poderá ser usado para várias aplicações, como no nosso caso, a predição do próprio sinal.

Um dos modelos mais poderosos atualmente para a síntese de um sinal, é aquele em que o sinal ou sua seqüência de amostras, representadas por s_n , é dado como a saída de um determinado sistema excitado por uma entrada u_n , obedecendo a seguinte relação:

$$s_n = - \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k} + G \sum_{l=0}^q b_l u_{n-l}, \quad \text{com } b_0 = 1, \quad (2.1)$$

onde a_k , $1 \leq k \leq p$, b_l , $0 \leq l \leq q$, e G são os parâmetros desse sistema. Desta forma, s_n será uma combinação linear de seus valores passados e dos valores, passados e atual, da entrada do sistema. Podemos demonstrar que o sistema em questão apresenta uma função de transferência composta por pólos e zeros. Tal modelo paramétrico é denominado ARMA¹ de ordem (p, q) , isto é, com p pólos e q zeros.

Tomando-se o modelo dado em (2.1) como um filtro, podemos notar que o sinal s_n poderá ser *predito* pela combinação *linear* das entradas e saídas passadas desse filtro. Por esses motivos temos uma *predição linear*.

Como veremos em seguida, para obtermos a predição de um sinal dado por suas amostras s_n , o problema se restringe em determinar os coeficientes do modelo para o filtro, representados por a_k e b_k , e o ganho do sistema, dado por G , para uma determinada entrada u_n .

No caso particular de um modelo só com pólos, com $b_l = 0$, para $1 \leq l \leq q$ em (2.1), s_n será dado por uma combinação linear apenas dos seus valores passados e da entrada atual do modelo, como a seguir:

$$s_n = - \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k} + G u_n. \quad (2.2)$$

O modelo dado em (2.2), derivado do modelo ARMA, é denominado de AR² de ordem p . Apesar de não ser adequado para qualquer tipo de sinal, esse modelo apresenta uma extrema simplicidade na obtenção do seu preditor associado. A escolha de um ou outro modelo dependerá das características específicas do sinal observado, bem como da complexidade permitida para representá-los [6].

Baseado em modelos de síntese para um sinal determinístico, podemos descrever os respectivos modelos para a análise do sinal. Tomando-se, portanto, as amostras do sinal s_n , como a entrada de um sistema cuja função de transferência é dada pelo recíproco da função de transferência do seu modelo de síntese, teremos como saída desse sistema uma seqüência de amostras, dadas por u_n . Podemos esperar que a função de transferência desse sistema, tomado como filtro de análise do sinal, apresentará seus pólos e zeros em posições recíprocas àquelas apresentadas por seu modelo de síntese.

¹do inglês Autoregressive Moving Average.

²denominação estatística dada a sistemas só com pólos.

Consideraremos inicialmente a análise de um sinal determinístico representado por uma seqüência de amostras s_n , as quais satisfazem um modelo AR de ordem p , dado por (2.2). Consideraremos ainda que o sinal de entrada u_n bem como a ordem do modelo utilizado para a sua síntese são desconhecidos, como é o caso de muitas aplicações práticas nas quais dispomos apenas das amostras do sinal a ser analisado. Neste caso s_n poderá ser aproximado por um outro sinal a menos de um erro. Denominando essa aproximação de \tilde{s}_n , podemos escolher então:

$$\tilde{s}_n = - \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k}. \quad (2.3)$$

O erro dessa aproximação se deve aos erros na determinação dos coeficientes a_k , erros na escolha da ordem p e erros devido ao desconhecimento da entrada u_n utilizada na síntese do sinal analisado.

Sendo assim, a expressão para o sinal de erro e_n , entre o valor predito \tilde{s}_n e o verdadeiro valor s_n , poderá ser escrita como:

$$e_n = s_n - \tilde{s}_n = s_n + \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k}. \quad (2.4)$$

Utilizando o método de otimização denominado de *Mínimos Quadrados*, estimativas dos parâmetros a_k poderão ser obtidas como o resultado da minimização da energia do sinal de erro dado em (2.4). Tratando-se do caso determinístico, o erro quadrático total será dado por:

$$E = \sum_n e_n^2 = \sum_n \left(s_n + \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k} \right)^2. \quad (2.5)$$

Desconsiderando, no momento, os limites do somatório na variável n em (2.5), temos simplesmente que E será minimizado, para os coeficientes a_k , quando:

$$\frac{\partial E}{\partial a_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq p. \quad (2.6)$$

Aplicando a condição dada em (2.6) na Expressão (2.5), obtemos:

$$\sum_{k=1}^p a_k \sum_n s_{n-k} s_{n-i} = - \sum_n s_n s_{n-i}, \quad 1 \leq i \leq p. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é conhecida como *Equação Normal Determinística*. Essa equação nos fornece um conjunto de p equações com p incógnitas, que podem ser resolvidas para os coeficientes do preditor que minimizam E em (2.5).

O erro quadrático total mínimo, para uma ordem p do preditor, pode ser obtido através da substituição do resultado da minimização dado por (2.7) na expressão original do erro total dada por (2.5), de onde obtemos:

$$E_{\min} = \sum_n s_n^2 + \sum_{k=1}^p a_k \sum_n s_n s_{n-k}. \quad (2.8)$$

Quanto aos limites do somatório, podemos distinguir dois casos de especial interesse, que dão origem aos seguintes métodos:

a) Método da Autocorrelação:

Neste caso o erro E será minimizado em todo intervalo $-\infty < n < \infty$ e as Equações (2.7) e (2.8) poderão ser substituídas, respectivamente, por:

$$\sum_{k=1}^p a_k r(k-i) = -r(i) \quad (2.9)$$

e

$$E_{\min} = r(0) + \sum_{k=1}^p a_k r(k), \quad (2.10)$$

onde, sem perda de generalidade, foi assumido que os sinais são reais e, portanto, teremos:

$$r(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n s_{n+i} = r(-i). \quad (2.11)$$

A Expressão (2.11) é conhecida como *Seqüência de Autocorrelação* do sinal s_n . A Expressão (2.9) pode ser escrita em uma forma matricial. Neste caso os termos $r(k-i)$ formam a *Matriz de Autocorrelação* do sinal que, para a definição dada em (2.11), possui forma simétrica e *Toeplitz*³[9][8].

Na prática, o sinal s_n sempre será observado em um intervalo finito. Portanto, é comum o uso de funções janelas f_w onde o produto dessa função com o sinal original dará origem a um outro sinal s'_n , com valores nulos fora de um determinado intervalo:

$$s'_n = \begin{cases} s_n f_w, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{fora} \end{cases} \quad (2.12)$$

Nesses casos, a função de autocorrelação em (2.11) será então substituída por:

$$r(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{n=0}^{N-1-i} s'_n s'_{n+i} \quad (2.13)$$

Conforme (2.13) e de acordo com o tipo de função janela utilizada poderemos obter, ainda, duas variações para o método acima: método do *pré-janelamento* e *pós-janelamento* [1][8][23].

b) Método da Covariância:

Diferente do método anterior, neste o erro E será minimizado em um intervalo finito, por exemplo $0 \leq n \leq N-1$. Nesse método são considerados conhecidos os valores do sinal s_n no intervalo $-p \leq n \leq N-1$. Desta forma serão analisadas apenas as situações em que o filtro preditor encontra-se totalmente preenchido pelas amostras disponíveis do sinal. As Equações (2.7) e (2.8) serão, portanto, substituídas por:

$$\sum_{k=1}^p a_k \varphi_{ki} = -\varphi_{0i}, \quad 1 \leq i \leq p \quad (2.14)$$

e

³todos os elementos de cada uma das diagonais são idênticos entre si.

$$E_{\min} = \varphi_{00} + \sum_{k=1}^p a_k \varphi_{0k}, \quad (2.15)$$

onde foi considerado:

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_{n-i} s_{n-k}. \quad (2.16)$$

Em uma forma matricial, os coeficientes de φ_{ki} formam a *Matriz de Covariância* do sinal que, diferente da matriz de autocorrelação, não possui forma Toeplitz [23].

2.2.2 Predição linear não-determinística

Esse tipo de predição se aplica quando o sinal s_n é resultado de um processo aleatório. Neste caso, os somatórios obtidos para as equações anteriores serão substituídos por esperanças estatísticas, dando origem ao erro quadrático médio. Assim, o valor esperado para o erro quadrático, derivado na Equação (2.5) para o caso determinístico, será:

$$E = \mathcal{E}(e_n^2) = \mathcal{E} \left(\left[s_n + \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k} \right]^2 \right). \quad (2.17)$$

Tomando-se a forma ampliada da Equação (2.17) e aplicando a mesma condição de minimização dada por (2.6), obtemos a equação normal em sua forma não-determinística:

$$\sum_{k=1}^p a_k \mathcal{E}(s_{n-k} s_{n-i}) = -\mathcal{E}(s_n s_{n-i}). \quad (2.18)$$

Conseqüentemente, o erro mínimo médio será dado por:

$$E_{\min} = \mathcal{E}(s_n^2) + \sum_{k=1}^p a_k \mathcal{E}(s_n s_{n-k}). \quad (2.19)$$

O procedimento para obtenção das esperanças nas equações anteriores dependerá da característica do processo s_n . Para um processo estacionário, teremos:

$$\mathcal{E}(s_{n-k} s_{n-i}) = r(k-i), \quad (2.20)$$

onde $r(i)$ é, agora, a seqüência de autocorrelação estatística do processo s_n . Desta forma, podemos observar que as Equações (2.18) e (2.19) apresentam formas semelhantes às Equações (2.7) e (2.8) do caso determinístico. Se ainda o processo estacionário for ergódico, as médias estatísticas poderão ser substituídas por médias temporais, e as equações para os dois casos serão idênticas [9][23].

Caso o processo não seja estacionário, teremos:

$$\mathcal{E}(s_{n-k} s_{n-i}) = r(n-k, n-i), \quad (2.21)$$

onde $r(i, k)$ é a seqüência de autocorrelação estatística do processo não-estacionário s_n . Neste caso a substituição por médias temporais não será mais possível.

Concluimos, portanto, que as várias formas de predição (determinística, não-determinística estacionária e não-estacionária) podem ser escritas de modo semelhante, sendo necessário apenas a substituição apropriada da seqüência de autocorrelação associada ao sinal. Logo, a partir de então, todas as análises e resultados obtidos para uma determinada forma poderão ser facilmente estendidos para qualquer outra.

2.2.3 Determinação dos parâmetros do modelo

Voltaremos agora ao problema da determinação dos parâmetros desconhecidos do modelo para o filtro preditor. Embora não tenhamos feito nenhuma consideração com relação ao sinal u_n , supondo o conhecimento exato dos coeficientes a_k do modelo AR de síntese do sinal para uma ordem p , podemos observar que o ganho G do sistema poderá ser obtido reescrevendo a Equação (2.4) como:

$$s_n = - \sum_{k=1}^p a_k s_{n-k} + e_n, \quad (2.22)$$

que comparada com (2.2) nos fornece:

$$Gu_n = e_n. \quad (2.23)$$

A equação em (2.23) significa que o sinal de entrada do modelo de síntese é proporcional ao sinal de erro de predição. Deve ser enfatizado que, desconsiderando-se o erro devido à escolha da ordem do preditor, para qualquer outra entrada u_n que não satisfaz (2.23), a saída do filtro de síntese será diferente do sinal original s_n . Para o filtro otimizado, a energia total do sinal de entrada u_n multiplicado pelo ganho do sistema G será igual a energia total do sinal de erro na saída do preditor, dada por E_{\min} em (2.8).

Tomando-se novamente um modelo AR para a síntese de um sinal e aplicando-se a minimização da energia do erro através do método da Autocorrelação, podemos destacar dois casos para u_n de especial interesse.

1) Impulso:

Consideremos um impulso no instante $n = 0$ como sinal de entrada para um filtro dado como modelo para um sinal s_n . Isto é, $u_n = \delta_{n0}$, onde δ_{nm} é denominada de função Delta de Kronecker, ou função impulso unitário, no instante $n = m$, e definida por:

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Para o modelo AR dado em (2.2), sua saída, ou seja, sua resposta impulsiva h_n , será:

$$h_n = - \sum_{k=1}^p a_k h_{n-k} + G\delta_{n0}. \quad (2.24)$$

Multiplicando (2.24) por h_{n-i} e aplicando o somatório em n para obtermos $\hat{r}_h(i)$, teremos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n h_{n-i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[- \sum_{k=1}^p a_k h_{n-k} + G\delta_{n0} \right] h_{n-i}$$

e, conseqüentemente:

$$\dots \hat{r}_h(i) = - \sum_{k=1}^p a_k \hat{r}_h(k-i) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\delta_{n0} h_{n-i},$$

onde, para o sistema considerado causal, podemos notar que a resposta impulsiva no instante $n-i=0$ será dada por $h_{n-i} = h_0 = G$. Portanto, teremos finalmente:

$$\hat{r}_h(i) = - \sum_{k=1}^p a_k \hat{r}_h(k-i), \quad 1 \leq |i| \leq \infty \quad (2.25)$$

e

$$\hat{r}_h(0) = - \sum_{k=1}^p a_k \hat{r}_h(k) + G^2. \quad (2.26)$$

Considerando um sistema fixo, podemos impor a condição de igualdade entre a energia contida em h_n e a energia total do sinal s_n . Sabendo, ainda, que o coeficiente centrado na origem da seqüência de autocorrelação é igual a energia total do sinal, teremos nessa condição:

$$\hat{r}_h(0) = r(0). \quad (2.27)$$

Observando (2.27), e a semelhança entre (2.25) e (2.9), poderemos relacionar a autocorrelação da resposta ao impulso $\hat{r}_h(i)$ com a autocorrelação $r(i)$ do sinal s_n , e concluir que [24]:

$$\hat{r}_h(i) = r(i). \quad (2.28)$$

Esse resultado significa que os coeficientes da seqüência de autocorrelação da resposta impulsiva do filtro de síntese, para um determinado sinal, são idênticos aos correspondentes coeficientes da seqüência de autocorrelação desse sinal. Portanto, podemos estabelecer a predição linear como a busca de um filtro de ordem p tal que os valores da autocorrelação de sua resposta impulsiva sejam iguais aos correspondentes valores da autocorrelação do sinal a ser predito.

Para determinar o ganho do sistema podemos estabelecer, através de (2.23), a igualdade entre a energia total de e_n e Gu_n , onde para $u_n = \delta_{n0}$ teremos:

$$\sum_n e_n^2 = G^2.$$

Para um preditor otimizado, podemos concluir através de (2.26) e (2.8), que o ganho G do sistema será dado por:

$$G^2 = E_{\min} = r(0) + \sum_{k=1}^p a_k r(k), \quad (2.29)$$

onde $r(k)$ é a autocorrelação do sinal s_n , e G^2 é a energia total do sinal de entrada multiplicado pelo ganho $G\delta_{n0}$.

2) Ruído Branco:

Suponha que o sinal aplicado à entrada do modelo AR para síntese de um sinal, agora aleatório, seja uma seqüência de amostras não-correlacionadas (ruído branco), com média zero e variância unitária, denominadas de w_n . Essas considerações implicam que $\mathcal{E}(w_n) = 0$, para todo n , e $\mathcal{E}(w_n w_m) = \delta_{nm}$. Portanto, o sinal \hat{s}_n na saída do sistema, considerado fixo, será um processo estacionário da forma:

$$\hat{s}_n = - \sum_{k=1}^p a_k \hat{s}_{n-k} + G w_n. \quad (2.30)$$

Para esse caso particular de sinal de entrada também podemos relacionar os sinais \hat{s}_n e s_n , onde s_n é considerado, agora, como amostras de um processo aleatório. Multiplicando (2.30) por \hat{s}_{n-i} e calculando o valor esperado em ambos os lados da equação resultante, teremos os seguintes resultados:

$$\mathcal{E}(\hat{s}_n \hat{s}_{n-i}) = \mathcal{E} \left[- \sum_{k=1}^p a_k \hat{s}_{n-k} \hat{s}_{n-i} \right] + \mathcal{E} [G w_n \hat{s}_{n-i}],$$

e, conseqüentemente:

$$\mathcal{E}(\hat{s}_n \hat{s}_{n-i}) = \hat{r}(i) = - \sum_{k=1}^p a_k \hat{r}(k-i); \quad i \geq 1 \quad (2.31)$$

e

$$\hat{r}(0) = - \sum_{k=1}^p a_k \hat{r}(k) + G^2, \quad (2.32)$$

onde mais um vez, sem perda de generalidade, foi assumido que os sinais são reais e, portanto, teremos:

$$\hat{r}(-i) = \hat{r}(i),$$

onde foi considerado o fato que a correlação dos sinais w_n e \hat{s}_{n-i} obedece as seguintes condições:

$$\mathcal{E}(\hat{s}_{n-i} w_n) = 0, \quad \text{para } i > 0$$

e

$$\mathcal{E}(\hat{s}_n w_n) = \delta_0$$

A Expressão (2.31) é conhecida, na literatura estatística, como *Equações de Yule-Walker*.

Estabelecendo uma condição equivalente ao caso determinístico, podemos impor a igualdade entre as energias médias (variâncias) de \hat{s}_n e s_n , fazendo:

$$\hat{r}(0) = r(0). \quad (2.33)$$

Teremos então, através da comparação de (2.31) com (2.9), que $\hat{r}(i) = r(i)$. Também nesse caso, para a determinação do ganho do sistema, podemos notar facilmente, através de (2.32) e (2.8), que $E_{\min} = G^2$.

Concluimos, portanto, que os valores da seqüência de autocorrelação do sinal na saída de um filtro de síntese só com pólos são os mesmos quando o sinal de entrada é um simples impulso ou um ruído branco. Esse resultado poderia ser previsto, já que ambos os tipos de sinal de entrada possuem autocorrelações idênticas.

Esse dualismo entre o sinal determinístico, representado pelo impulso, e o sinal aleatório, representado pelo ruído branco, tem sido de grande utilidade na modelagem de um processo de fala, na qual ambos os sinais são utilizados em sua síntese.

Sabemos que o sinal na saída de um filtro preditor otimizado está relacionado ao erro de predição que, por sua vez, está associado ao sinal na entrada do filtro de síntese do sinal observado. Portanto, podemos esperar que o sinal de erro apresentará características semelhantes aos dois tipos de sinais apresentados, impulso e ruído branco, ou mesmo combinações de ambos.

Quanto ao cálculo dos coeficientes a_k , vários métodos podem ser utilizados. Contudo, destacam-se por apresentarem menor esforço computacional, aqueles que melhor aproveitam a característica de simetria da matriz de autocorrelação, seja através de métodos diretos ou iterativos [10][42]. A escolha de um ou outro método dependerá das necessidades e característica da aplicação em questão [8][26].

2.2.4 Predição linear no domínio da freqüência

Até então analisamos a predição linear no domínio do tempo. Analisando a predição linear no domínio da freqüência, poderemos constatar que a mesma é basicamente uma análise adequada de correlações que se aplica em ambos os domínios. No domínio da freqüência encontra-se uma série de aplicações interessantes, dentre as quais destacaremos a *Estimação Espectral* voltada para detecção de freqüências. Poderemos também, através dessa análise, interpretar o erro de predição quanto a escolha do modelo utilizado.

Considerando mais uma vez um modelo AR, temos que sua função de transferência poderá ser obtida aplicando a transformada-Z em ambos os lados da Equação (2.2). Portanto, denominando $H(z)$ como a função de transferência do modelo de síntese, teremos:

$$H(z) = \frac{G}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}. \quad (2.34)$$

Fazendo $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}$, podemos observar que:

$$H(z) \approx \frac{1}{A(z)}. \quad (2.35)$$

Assim, teremos $A(z)$ como o *filtro inverso* ao filtro de síntese do sinal, ou seja, $A(z)$ caracteriza o filtro de análise e, em particular, o preditor.

Considerando, agora, a expressão para o erro de predição no domínio da freqüência, se aplicarmos a transformada-Z em ambos os lados da equação dada por (2.4), teremos:

$$E(z) = \left[1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k} \right] S(z) = A(z)S(z), \quad (2.36)$$

onde $E(z)$ e $S(z)$ são, respectivamente, a transformada-Z dos sinais e_n e s_n .

Definindo $P(\omega)$ como o espectro de densidade de energia do sinal s_n , teremos:

$$P(\omega) = |S(e^{j\omega})|^2, \quad (2.37)$$

e aplicando o *teorema de Parseval* na expressão do erro total a ser minimizado, obtemos:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega. \quad (2.38)$$

Usando (2.36), escrita para o caso em que $z = e^{j\omega}$, e supondo que todos os coeficientes do filtro são reais, obtemos:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\omega) A(e^{j\omega}) A(e^{-j\omega}) d\omega. \quad (2.39)$$

Seguindo o mesmo procedimento de minimização do erro E , como em (2.6), obteremos um resultado idêntico ao obtido em (2.9) para a equação normal [25]. A autocorrelação poderá ser obtida através da transformada-Z inversa do espectro de densidade de energia do sinal, como a seguir:

$$r(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\omega) \cos(i\omega) d\omega, \quad (2.40)$$

onde $P(\omega)$ foi considerado uma função real e par.

Utilizando (2.39), bem como o resultado de (2.40) e a Expressão (2.9), pode ser demonstrado que o erro mínimo E_{\min} será dado por (2.10).

2.3 Filtro de Erro de Predição (FEP)

Analisaremos aqui o filtro de predição ou, mais precisamente, o Filtro de Erro de Predição (FEP) sob um aspecto mais prático, voltado ao problema de detecção de frequências. Restringiremos o estudo ao caso de um modelo de aproximação Autoregressivo (AR) com ordem finita.

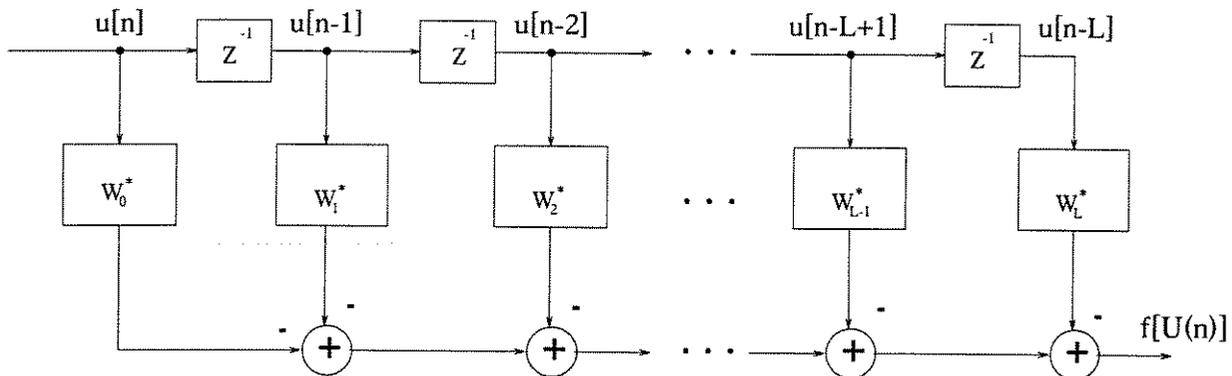
Considere um conjunto de N amostras, uniformemente espaçadas, de um sinal complexo $u(n)$, dado pela seqüência $\{u(1), u(2), u(3), \dots, u(N)\}$, como a entrada de um filtro transversal (FIR⁴) com $(L + 1)$ fatores de ganho, conforme mostra a Figura 2.1.

Pela estrutura do filtro dado na Figura 2.1, podemos observar que o sinal na sua saída será dado por:

$$f[\mathbf{U}(n)] = - \sum_{i=0}^L u(n-i) w_i^*, \quad (2.41)$$

onde $\mathbf{U}(n) = \{u(n), u(n-1), \dots, u(n-L)\}$. Para que o filtro transversal genérico da Figura 2.1 funcione como um preditor e o sinal na sua saída seja o erro da predição, devemos adicionar uma condição aos coeficientes do filtro. Esta é, em geral, dada por $w_i^* = -1$, para que sua

⁴do inglês Finite Impulse Response.

Figura 2.1: *Filtro Linear Genérico.*

saída seja proporcional ao erro entre a amostra presente no i 'ésimo fator de ganho w_i e sua aproximação obtida através do produto das amostras restantes e seus respectivos fatores de ganho. Dessa forma obteremos o filtro de erro de predição.

A energia do sinal na saída do filtro de erro de predição que devemos minimizar será dada por:

$$\mathcal{E}_L(w_0, w_1, w_2, \dots, w_L) = \sum_n |f[\mathbf{U}(n)]|^2; \quad w_i^* = -1 \quad (2.42)$$

Como a omissão dos limites do somatório na Equação (2.42) não interfere no objetivo do filtro, podemos utilizar os vários métodos de janelamento descritos na seção anterior.

Veremos a seguir que variações da condição $w_i^* = -1$, também nos permite estabelecer alguns métodos de predição já consagrados, a saber: Predição Linear Progressiva (FLP⁵), Predição Linear Regressiva (BLP⁶) e Predição Linear Progressiva-Regressiva (FBLP⁷).

2.3.1 Predição linear forward

No caso da predição forward teremos $w_0^* = -1$. Portanto, estaremos realizando uma predição linear de $u(n)$ através de suas amostras anteriores. A estrutura do filtro de erro de predição forward é dada na Figura 2.2.

A expressão do sinal na saída do filtro, denominado de $f_L(n)$, será dada por:

$$f_L(n) = u(n) - \sum_{k=1}^L w_{fk}^* u(n-k), \quad n = L+1, \dots, N, \quad (2.43)$$

onde optamos por não fazer qualquer suposição acerca do sinal $u(n)$ fora do intervalo $1, 2, \dots, N$, visto que dispomos apenas das amostras nesse intervalo. Assim, consideraremos apenas as situações em que o filtro está totalmente preenchido por amostras de $u(n)$, de acordo com o método da covariância descrito anteriormente. O subscrito L em (2.43) denota a ordem do filtro, o subscrito f o tipo de predição realizada e “*” simboliza a operação de conjugado.

⁵do inglês Forward Linear Prediction.

⁶do inglês Backward Linear Prediction.

⁷do inglês Forward Backward Linear Prediction.

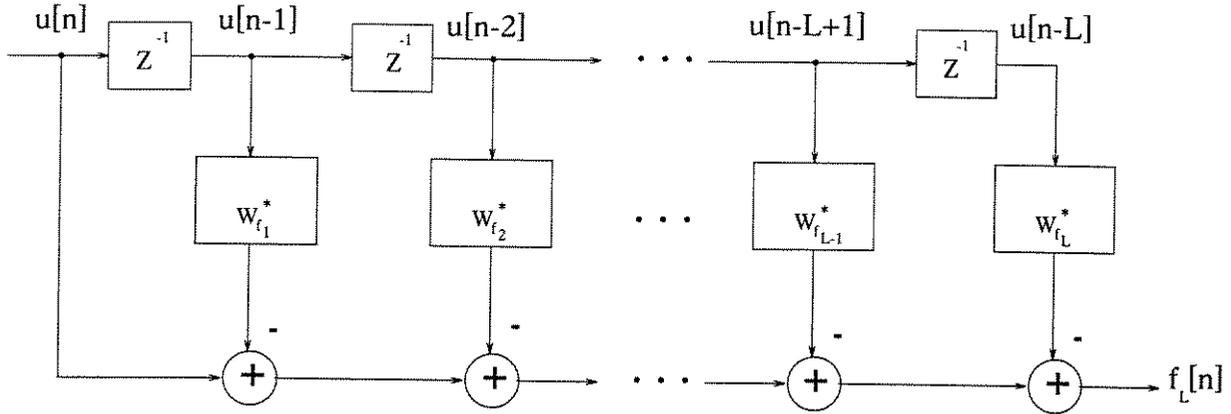


Figura 2.2: Filtro de Erro de Predição Linear Forward.

Os coeficientes w_{fk}^* do filtro são obtidos mais uma vez através da minimização do erro quadrático total, definido como:

$$\mathcal{E}_f(w_{f1}, w_{f2}, \dots, w_{fL}) = \sum_{n=L+1}^N |f_L(n)|^2, \quad \text{com } w_{f0}^* = -1. \quad (2.44)$$

Para simplificar e permitir uma notação mais concisa, definiremos a seguir alguns vetores e matrizes:

1) Vetor de ganhos do filtro transversal (w_f): dimensões $L \times 1$.

$$\mathbf{w}_f^t = [w_{f1} \ w_{f2} \ \dots \ w_{fL}]. \quad (2.45)$$

2) Vetor de entrada (u): dimensões $L \times 1$.

$$\mathbf{u}^{t(n-1)} = [u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u(n-L)]. \quad (2.46)$$

3) Vetor do erro de estimação forward (\mathcal{F}): dimensões $(N-L) \times 1$.

$$\mathcal{F}^H = [f_L(L+1) \ f_L(L+2) \ \dots \ f_L(N)]. \quad (2.47)$$

4) Vetor da resposta desejada forward (\mathbf{b}_f): dimensões $(N-L) \times 1$.

$$\mathbf{b}_f^H = [u(L+1) \ u(L+2) \ \dots \ u(N)]. \quad (2.48)$$

5) Matriz de dados forward (\mathbf{A}_f): dimensões $(N-L) \times L$.

$$\mathbf{A}_f^H = [u(L) \ u(L+1) \ \dots \ u(N-1)]. \quad (2.49)$$

Na sua forma ampliada temos:

$$\mathbf{A}_f^H = \begin{bmatrix} u(L) & u(L+1) & \dots & u(N-1) \\ u(L-1) & u(L) & \dots & u(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(1) & u(2) & \dots & u(N-L) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Nas definições acima, o sobre-escrito t denota o transposto e o sobre-escrito H , o transposto conjugado (Hermitiano).

Reescrevendo (2.43) e (2.44) em notação matricial, teremos, respectivamente, as seguintes equações:

$$f_L(n) = u(n) - \mathbf{w}_f^H \mathbf{u}(n-1), \quad n = L+1, \dots, N, \quad (2.51)$$

e

$$\mathcal{E}_f(\mathbf{w}_f) = \mathcal{F}^H \mathcal{F}, \quad (2.52)$$

onde

$$\mathcal{F}^H = \mathbf{b}_f^H - \mathbf{w}_f^H \mathbf{A}_f^H. \quad (2.53)$$

Expandindo (2.52) e diferenciando em relação a \mathbf{w}_f , obtemos [8]:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_f(\mathbf{w}_f)}{\partial \mathbf{w}_f} = -2\mathbf{A}_f^H \mathbf{b}_f + 2\mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w}_f. \quad (2.54)$$

Igualando esse resultado a zero, conforme o critério de minimização, teremos:

$$\mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w}_f = \mathbf{A}_f^H \mathbf{b}_f. \quad (2.55)$$

A Equação (2.55) é, portanto, a equação normal escrita em forma matricial. O erro mínimo pode ser obtido substituindo a solução de \mathbf{w}_f dada por (2.55) na Equação (2.52) em sua forma ampliada, de onde obtemos:

$$\mathcal{E}_{f \min}(\mathbf{w}_f) = \mathbf{b}_f^H \mathbf{b}_f - \mathbf{b}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w}_f. \quad (2.56)$$

Podemos reescrever a equação normal em (2.55) como:

$$\hat{\mathbf{R}}_f \mathbf{w}_f = \hat{\mathbf{r}}_f, \quad (2.57)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}_f$ é composto pelos elementos $\hat{r}(i)$, aqui definidos como:

$$\hat{r}(i) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} u(k+i+1)u^*(k+1), \quad -L \leq i \leq -1, \quad (2.58)$$

e $\hat{\mathbf{R}}_f$ é a matriz de correlação estimada do sinal, composta pelos elementos $\hat{r}(i, j)$, definidos como:

$$\hat{r}(i, j) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} u(k+i)u^*(k+j); \quad (-L+1) \leq i, j \leq 0. \quad (2.59)$$

Para um processo ergódico, teremos:

$$\hat{r}(i) \rightarrow r(i) \quad \text{quando } N \rightarrow \infty$$

$$\hat{r}(i, j) \rightarrow r(i, j) \quad \text{quando } N \rightarrow \infty,$$

onde $r(i)$ e $r(i, j)$ são, respectivamente, as verdadeiras seqüências de correlação de $u(n)$ para um deslocamento (i) e $(i - j)$. Considerando um sinal ergódico, teremos portanto $\hat{r}(i, j) = r(i - j)$.

Podemos notar, pela definição em (2.58), que para um processo estacionário $\hat{r}(i)$ será uma função par. Logo, teremos:

$$\hat{r}(-i) = \hat{r}(i). \tag{2.60}$$

O fator $\frac{1}{N-L}$ foi incorporado em (2.58) e (2.59) para dar o caráter de correlação segundo o estimador polarizado, onde $N - L$ representa o número de parcelas do somatório.

2.3.2 Predição linear backward

Para o caso da predição backward teremos $w_L^* = -1$. Portanto, estaremos realizando uma predição através das amostras posteriores a $u(n - L)$. A estrutura do filtro de erro de predição backward é dada na Figura 2.3, onde mais uma vez o subscrito b denota o tipo de predição utilizada.

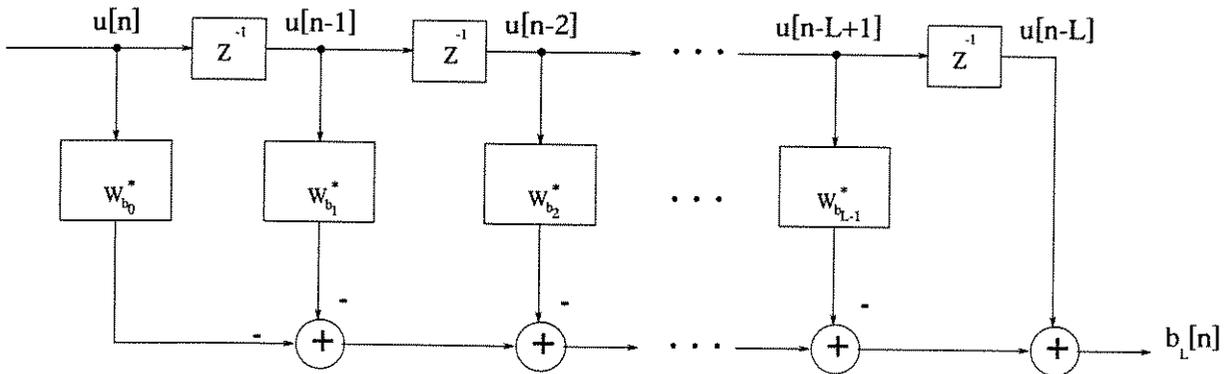


Figura 2.3: Filtro de Erro de Predição Linear Backward.

Através de uma análise da estrutura do filtro, apresentada na Figura 2.3, podemos concluir que erro de predição backward será dado por:

$$b_L(n) = u(n - L) - \sum_{k=0}^{L-1} w_{bk}^* u(n - k), \quad n = L + 1, \dots, N. \tag{2.61}$$

Os coeficientes w_{bk}^* são obtidos da mesma forma que no caso forward.

O erro quadrático total, representado por \mathcal{E}_b , será:

$$\mathcal{E}_b(w_{b0}, w_{b1}, \dots, w_{b(L-1)}) = \sum_{n=L+1}^N |b_L(n)|^2, \quad \text{com } w_{bL}^* = -1. \tag{2.62}$$

Definindo os vetores e matrizes de forma análoga ao caso forward, teremos:

1) Vetor de ganhos do filtro transversal (w_b): dimensões $L \times 1$.

$$w_b^t = [w_{b(L-1)}^* \ w_{b(L-2)}^* \ \dots \ w_{b0}^*]. \tag{2.63}$$

2) Vetor de entrada (u): dimensões $L \times 1$.

$$\mathbf{u}^t(n-L+1) = [u^*(n-L+1) \ u^*(n-L+2) \ \dots \ u^*(n)]. \quad (2.64)$$

3) Vetor do erro de estimação backward (\mathcal{B}): dimensões $(N-L) \times 1$.

$$\mathcal{B}^H = [b_L^*(L+1) \ b_L^*(L+2) \ \dots \ b_L^*(N)]. \quad (2.65)$$

4) Vetor da resposta desejada backward (\mathbf{b}_b): dimensões $(N-L) \times 1$.

$$\mathbf{b}_b^H = [u^*(1) \ u^*(2) \ \dots \ u^*(N-L)]. \quad (2.66)$$

5) Matriz de dados backward (\mathbf{A}_b): dimensões $(N-L) \times L$.

$$\mathbf{A}_b^H = [\mathbf{u}(2) \ \mathbf{u}(3) \ \dots \ \mathbf{u}(N-L+1)]. \quad (2.67)$$

Na sua forma ampliada:

$$\mathbf{A}_b^H = \begin{bmatrix} u^*(2) & u^*(3) & \dots & u^*(N-L+1) \\ u^*(3) & u^*(4) & \dots & u^*(N-L+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u^*(L+1) & u^*(L+2) & \dots & u^*(N) \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Reescrevendo (2.61) e (2.62) teremos, respectivamente, as seguintes equações:

$$b_L^*(n) = u^*(n-L) - \mathbf{w}_b^H \mathbf{u}(n-L+1), \quad n = L+1, \dots, N, \quad (2.69)$$

e

$$\mathcal{E}_b(\mathbf{w}_b) = \mathcal{B}^H \mathcal{B}, \quad (2.70)$$

onde

$$\mathcal{B}^H = \mathbf{b}_b^H - \mathbf{w}_b^H \mathbf{A}_b^H. \quad (2.71)$$

Aplicando em $\mathcal{E}_b(\mathbf{w}_b)$ o mesmo critério de minimização adotado no item anterior, teremos:

$$\mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b \mathbf{w}_b = \mathbf{A}_b^H \mathbf{b}_b. \quad (2.72)$$

Analogamente ao caso forward, a Equação (2.72) é a equação normal para o caso backward escrita em forma matricial. O erro mínimo de predição backward será portanto:

$$\mathcal{E}_{b \min}(\mathbf{w}_b) = \mathbf{b}_b^H \mathbf{b}_b - \mathbf{b}_b^H \mathbf{A}_b \mathbf{w}_b. \quad (2.73)$$

A equação normal (2.72), para um sinal ergódico, também poderá ser escrita como:

$$\hat{\mathbf{R}}_b \mathbf{w}_b = \hat{\mathbf{r}}_b, \quad (2.74)$$

onde $\hat{\mathbf{r}}_b$ e $\hat{\mathbf{R}}_b$ são definidos como no caso forward.

Podemos observar, através de (2.43) e (2.61), que apesar da semelhança entre os dois tipos de predição, os métodos FLP e BLP fornecem filtros diferentes para um mesmo conjunto de dados $\{u(1), u(2), \dots, u(N)\}$, por utilizarem esses dados de forma distinta. Também pode ser demonstrado facilmente, através de uma substituição de variáveis em (2.51) e (2.69), que para um processo estacionário o erro quadrático médio de ambos os métodos é o mesmo [9].

2.3.3 Predição linear forward-backward

Na predição forward-backward temos um meio termo entre as duas predições anteriores. Neste tipo de predição as amostras do sinal são utilizadas tanto na forma forward como na forma backward. Portanto, o resultado do filtro ótimo é obtido minimizando a soma da energia do erro de predição dos dois casos, como dado a seguir:

$$\mathcal{E}_{fb}(\mathbf{w}_{fb}) = \sum_{k=L+1}^N [|f_L(k)|^2 + |b_L(k)|^2], \quad (2.75)$$

ou seja:

$$\mathcal{E}_{fb}(\mathbf{w}_{fb}) = \mathcal{E}_f(\mathbf{w}_f) + \mathcal{E}_b(\mathbf{w}_b). \quad (2.76)$$

Tal procedimento de predição é baseado na hipótese de ergodicidade do sinal. Nessa condição, quando o número de amostras N tende a infinito, observamos que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_f &\rightarrow \mathbf{R} & \hat{\mathbf{r}}_f &\rightarrow \mathbf{r} \\ \hat{\mathbf{R}}_b &\rightarrow \mathbf{R} & \hat{\mathbf{r}}_b &\rightarrow \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Como ambas as estimativas da correlação do sinal devem convergir para o seu verdadeiro valor, teremos:

$$\hat{\mathbf{R}}_f = \hat{\mathbf{R}}_b \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{r}}_f = \hat{\mathbf{r}}_b, \quad \text{quando } N \rightarrow \infty \quad (2.78)$$

e, conseqüentemente:

$$\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_b, \quad (2.79)$$

ou seja:

$$[w_{f1} \ w_{f2} \ \cdots \ w_{fL}] = [w_{b(L-1)}^* \ w_{b(L-2)}^* \ \cdots \ w_{b0}^*].$$

Considerando a Equação (2.78) válida mesmo para N finito, a solução do filtro forward-backward é obtida minimizando (2.76) sujeita à condição $\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_b$, o que significa obter:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_f(\mathbf{w}_f)}{\partial \mathbf{w}_f} + \frac{\partial \mathcal{E}_b(\mathbf{w}_b)}{\partial \mathbf{w}_b} = 0, \quad (2.80)$$

isto é:

$$-2\mathbf{A}_f^H \mathbf{b}_f + 2\mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w}_f - 2\mathbf{A}_b^H \mathbf{b}_b + 2\mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b \mathbf{w}_b = 0. \quad (2.81)$$

Fazendo $\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_b = \mathbf{w}_{fb}$ na Equação (2.81), teremos:

$$\mathbf{A}_f^H \mathbf{A}_f \mathbf{w}_{fb} + \mathbf{A}_b^H \mathbf{A}_b \mathbf{w}_{fb} = \mathbf{A}_f^H \mathbf{b}_f + \mathbf{A}_b^H \mathbf{b}_b, \quad (2.82)$$

ou ainda em notação matricial:

$$\left[\mathbf{A}_f^H \mid \mathbf{A}_b^H \right] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f \\ \mathbf{A}_b \end{bmatrix} \mathbf{w}_{fb} = \left[\mathbf{A}_f^H \mid \mathbf{A}_b^H \right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_f \\ \mathbf{b}_b \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Denominaremos de \mathbf{A}_{fb} a matriz de dados forward-backward de dimensões $2(N-L) \times L$, definida como:

$$\mathbf{A}_{fb}^H = [\mathbf{A}_f^H \mid \mathbf{A}_b^H], \quad (2.84)$$

ou, em sua forma ampliada:

$$\mathbf{A}_{fb}^H = \begin{bmatrix} u(L) & u(L+1) & \cdots & u(N-1) & u^*(2) & u^*(3) & \cdots & u^*(N-L+1) \\ u(L-1) & u(L) & \cdots & u(N-2) & u^*(3) & u^*(4) & \cdots & u^*(N-L+2) \\ \vdots & \vdots \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(N-L) & u^*(L+1) & u^*(L+2) & \cdots & u^*(N) \end{bmatrix}$$

e de \mathbf{b}_{fb} o vetor resposta desejada forward-backward, definido como:

$$\mathbf{b}_{fb}^H = [\mathbf{b}_f^H \mid \mathbf{b}_b^H], \quad (2.85)$$

ou seja:

$$\mathbf{b}_{fb}^H = [u(L+1) \ u(L+2) \ \dots \ u(N) \ u^*(1) \ u^*(2) \ \dots \ u^*(N-L)].$$

Reescrevendo (2.83) em função de \mathbf{A}_{fb} e \mathbf{b}_{fb} , acima definidos, teremos:

$$\mathbf{A}_{fb}^H \mathbf{A}_{fb} \mathbf{w}_{fb} = \mathbf{A}_{fb}^H \mathbf{b}_{fb}. \quad (2.86)$$

Conseqüentemente, a energia mínima do erro de predição forward-backward será:

$$\mathcal{E}_{fb \min}(\mathbf{w}_{fb}) = \mathbf{b}_{fb}^H \mathbf{b}_{fb} - \mathbf{b}_{fb}^H \mathbf{A}_{fb} \mathbf{w}_{fb}. \quad (2.87)$$

Acreditamos que outras possibilidades para a condição $w_i^* = -1$, com $i = 1, \dots, L-1$, podem ser utilizadas, dando origem a outros métodos, nos quais teríamos casos intermediários entre a predição forward e backward. Porém, tais métodos ainda não foram explorados, ficando, portanto, para pesquisas futuras.

A utilização de um ou outro método dependerá da aplicação considerada. Dentre os métodos clássicos, o FBLP se destaca por oferecer uma possibilidade de utilização das amostras do sinal de forma mais completa, permitindo assim um melhor desempenho.

As soluções da equação normal dadas por (2.55), (2.72) e (2.86) serão abordadas a seguir, onde a decomposição em valores singulares será utilizada como a principal ferramenta de análise.

2.4 Solução de Norma-mínima

A solução para a equação normal será abordada, aqui, da forma mais geral possível, com ênfase no estudo das características da matriz de dados do sinal observado, por meio da sua decomposição em valores singulares.

De acordo com o teorema da decomposição em valores singulares [1][9][39][42], se \mathbf{A} é uma matriz de dimensões $m \times n$ com posto⁸ k , então é possível escrever:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^H, \quad (2.88)$$

onde \mathbf{S} é matriz diagonal de dimensões $k \times k$ composta pelos elementos $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ denominados valores singulares de \mathbf{A} , com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$, \mathbf{U} é matriz unitária⁹ de dimensões $m \times m$, cujas colunas são os autovetores de $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ e \mathbf{V} é também matriz unitária de dimensões $n \times n$, cujas colunas são os autovetores de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Conseqüentemente, temos que os autovalores não nulos de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ são dados por $\lambda_i = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Consideremos o caso geral de um sistema de n equações com n incógnitas, descritas da forma $(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{d}$, onde \mathbf{B} é uma matriz normal¹⁰ $n \times n$, λ é um escalar dado e \mathbf{d} é um vetor de dimensões $n \times 1$. Este sistema genérico de equações lineares está sujeito às seguintes alternativas [1]:

a) **Sistema com solução única:** quando $\lambda \neq \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, onde λ_j são os autovalores da matriz \mathbf{B} .

b) **Sistema com infinitas soluções:** quando $\lambda = \lambda_{k+i}$, $i = 0, 1, \dots, s-1$ e se o vetor \mathbf{d} for perpendicular a todos os autovetores \mathbf{x}_{k+i} de \mathbf{B} associados a λ_{k+i} . Isto é, o produto interno entre \mathbf{x}_{k+i} e \mathbf{d} , representado por $\langle \mathbf{x}_{k+i}, \mathbf{d} \rangle$, será nulo para $i = 0, 1, \dots, s-1$, onde s é a multiplicidade de um autovalor de \mathbf{B} .

c) **Sistema sem solução:** quando $\lambda = \lambda_{k+i}$, $i = 0, 1, \dots, s-1$ e $\langle \mathbf{x}_{k+i}, \mathbf{d} \rangle \neq 0$ para $i = 0, 1, \dots, s-1$.

No desenvolvimento das soluções para a equação normal, consideraremos sua forma dada por:

$$\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{A}^H\mathbf{b}. \quad (2.89)$$

Portanto, sendo no caso $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ uma matriz Hermitiana e quadrada de dimensões $n \times n$, logo normal, poderemos estabelecer uma equivalência ao sistema genérico acima, de onde surgirão duas situações particulares para a solução de (2.89):

1) **$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ é não-singular** ($\lambda_j \neq \lambda = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$): Neste caso, $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ possui inversa. Logo, a solução única será:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{b}. \quad (2.90)$$

2) **$\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ é singular:** Neste caso $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ não possui inversa e teremos infinitas soluções.

Através da decomposição da matriz \mathbf{A} em (2.88) podemos definir \mathbf{u}_i e \mathbf{v}_i como, respectivamente, os vetores colunas das matrizes \mathbf{U} e \mathbf{V} , que representam os autovetores de $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ e autovetores de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$. Sendo assim, os autovetores de $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ associados ao autovalor nulo, são

⁸ define o número de linhas ou colunas linearmente independentes de uma matriz.

⁹ uma matriz \mathbf{A} é unitária quando satisfaz $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{I}$.

¹⁰ uma matriz \mathbf{A} é normal quando satisfaz $\mathbf{A}^H\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$.

\mathbf{v}_j , para $j = k + 1, k + 2, \dots, n$. Conseqüentemente, $\mathbf{v}_i^H(\mathbf{A}^H \mathbf{b}) = 0$, para $i = k + 1, k + 2, \dots, n$, isto é, $\mathbf{A}^H \mathbf{b}$ sempre será ortogonal aos autovetores \mathbf{v}_j de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ associados ao autovalor nulo e não teremos uma equivalência ao caso (c).

Podemos concluir, portanto, que o sistema dado por (2.89) sempre terá solução. Esse resultado é conhecido como *teorema da unicidade*.

Dentre as infinitas soluções possíveis para a situação (2), a solução que minimiza a norma Euclidiana¹¹ do vetor \mathbf{w} será sempre escolhida em detrimento das outras. Os motivos para essa escolha estão relacionados à aplicação em detecção de frequências e serão justificados posteriormente. Esta solução é conhecida como *Solução de Norma-Mínima* e será dada por:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^\# \mathbf{A}^H \mathbf{b}, \quad (2.91)$$

O sobre-escrito $\#$ em (2.91), indica a operação de pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz [1][39], onde a pseudo-inversa de uma matriz \mathbf{A} , dada por (2.88), pode ser escrita como:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{V} \begin{bmatrix} (\mathbf{S})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^H. \quad (2.92)$$

Utilizando algumas relações entre os valores singulares e vetores singulares de \mathbf{A}^H com os respectivos autovalores e autovetores de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$, teremos:

$$(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^\# = \mathbf{V} \begin{bmatrix} (\mathbf{S})^{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^H. \quad (2.93)$$

A partir de então é fácil constatar que $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^\# \mathbf{A}^H = \mathbf{A}^\#$. Logo, teremos:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^\# \mathbf{b}. \quad (2.94)$$

Pode ser constatado que quando $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ é quadrada e não-singular, teremos:

$$(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^\#. \quad (2.95)$$

Portanto, na situação (1), a solução única também poderá ser dada por $\mathbf{w} = \mathbf{A}^\# \mathbf{b}$.

Com o objetivo de minimizar o esforço computacional, podem ser obtidas expressões alternativas equivalentes para a solução de norma mínima em (2.94). Essas expressões, obtidas através da decomposição da matriz $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} \mathbf{A}^H$ em seus autovalores e autovetores, são apresentadas a seguir:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{v}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad (2.96)$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{b}. \quad (2.97)$$

¹¹definida como a raiz quadrada da soma dos quadrados de cada elemento.

A obtenção dos autovalores e autovetores em (2.96) e (2.97) poderá ser realizada, de uma forma numericamente estável, através de algoritmos baseados na decomposição em valores singulares [17].

Dentre as vantagens da escolha da solução de norma-mínima temos que o filtro preditor, obtido por um modelo só com pólos, sempre será estável e de fase mínima [9][1]. Esse fato está relacionado à característica positiva definida da função de correlação do sinal observado.

2.5 Conclusão

Neste capítulo foram expostos os principais aspectos e conceitos da teoria de predição linear sem a pretensão de ser um tutorial, apenas servindo como referência para os desenvolvimentos dos capítulos seguintes.

A predição linear foi abordada nas formas determinística e não-determinística considerando processos estacionários e não-estacionários, tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência.

A forma determinística do preditor foi a mais utilizada nos desenvolvimentos, por apresentar uma fácil manipulação matemática e permitir a extensão de seus resultados para outras formas. Para a forma não-determinística do preditor, por tratarmos de sinais representados por um número finito de amostras com estatística desconhecida, as médias estatísticas foram substituídas por médias temporais através da hipótese de ergodicidade do sinal.

A predição aqui desenvolvida foi baseada em um modelo simples de aproximação só com pólos (AR), por se mostrar a mais adequada para a aplicação em detecção de frequências. Contudo, o modelo mais geral com pólos e zeros (ARMA) também foi apresentado.

Os métodos de janelamento mais comuns foram enunciados quando apresentamos, no domínio do tempo, a forma determinística do preditor. Dentre esses, o método da Covariância será o escolhido para o desenvolvimento da aplicação em detecção de frequências apresentada no próximo capítulo.

Os métodos de predição FLP e BLP foram apresentados destacando-se a forma da **Equação Normal**, a estrutura do **filtro de erro de predição** e a matriz de dados associada ao sinal observado. O método FBLP foi posteriormente derivado como uma combinação dos métodos FLP e BLP.

As possíveis soluções para a **Equação Normal** foram apresentadas e posteriormente particularizadas para um caso prático onde a matriz do sistema é formada por amostras do sinal observado. A solução de **norma-mínima** também foi destacada e obtida, tanto através da operação de pseudo-inversa como em suas formas alternativas, baseadas na decomposição em valores singulares da matriz de dados.

Capítulo 3

Detecção de Frequências

3.1 Introdução

Destacaremos aqui um caso particular da teoria da *Estimação Espectral* como aplicação da predição linear, na qual o espectro aproximado de um sinal será utilizado para determinação das frequências contidas no mesmo. O estudo da situação em que o sinal observado não está contaminado por ruído permitirá relacionar os parâmetros do sinal aos coeficientes do filtro preditor otimizado. Tal equacionamento nos levará a distinção dos *Zeros de Sinal* e *Zeros Estranhos* de um polinômio associado ao filtro preditor.

O método FBLP para detecção de frequências será apresentado, bem como sua variação de maior sucesso, denominada de FBLP Modificado.

Serão discutidos os efeitos da aplicação do preditor em sinais ruidosos, tanto sob o ponto de vista do posicionamento dos zeros do filtro como também os aspectos relacionados aos subespaços definidos pelo sinal, determinados a partir dos valores e vetores singulares da matriz de dados associada ao filtro preditor.

Apresentaremos também uma estratégia alternativa para obtenção das estimativas dos parâmetros do sinal observado, baseada na obtenção dos picos de uma função espectral associada ao sinal.

Ao final do capítulo serão discutidos aspectos computacionais dos algoritmos de detecção, bem como algumas técnicas mais eficientes utilizadas em métodos de alta resolução.

3.2 Predição Linear na Detecção de Frequências

A aplicação da predição linear de nosso interesse encontra-se no domínio da frequência. Tal aplicação pode ser interpretada como um caso particular de estimação de espectros, na qual estamos interessados em uma aproximação adequada do espectro original de um sinal, com o objetivo único de estimar as frequências contidas nesse sinal. Com essa finalidade, o espectro aproximado não terá o compromisso de representar fielmente o espectro do sinal em todos os pontos, porém deverá se mostrar o mais adequado para a determinação dos picos espectrais do espectro original.

Apresentaremos agora alguns resultados interessantes da aplicação dos filtros FLP, BLP e FBLP na detecção de frequências de um sinal paramétrico em duas situações distintas. Na

primeira situação analisaremos a predição de um sinal sem interferência ruidosa. Na segunda, o caso de um sinal corrompido por ruído será tratado.

3.2.1 Detecção sem ruído

Consideremos um sinal genérico composto pela soma de M exponenciais complexas, representado pelo conjunto de N amostras do sinal $\{u(n)\}$, contaminadas pela seqüência de ruído $\{w(n)\}$, como dado a seguir:

$$u(n) = \sum_{k=1}^M \sqrt{P_k} e^{(ns_k + j\theta_k)} + w(n); \quad \text{com } s_k = \beta_k + j\omega_k, \quad (3.1)$$

onde consideraremos inicialmente $w(n) = 0$, para $n = 1, 2, \dots, N$. Em (3.1), ω_k representa a frequência angular de cada exponencial, P_k a potência, β_k o fator de amortecimento e θ_k a variável aleatória da fase, com distribuição uniforme no intervalo $[0, 2\pi]$.

Consideremos agora um polinômio cujos coeficientes são os fatores de ganho de um filtro preditor forward de ordem L :

$$W_f(z) = 1 + \sum_{k=1}^L (-w_{fk}^*) z^{-k}. \quad (3.2)$$

Pode ser demonstrado que, se L satisfaz a desigualdade $M \leq L \leq (N - M)$ e se \mathbf{w}_f satisfaz $\mathbf{A}_f \mathbf{w}_f = \mathbf{b}_f$, então o polinômio $W_f(z)$ terá M de seus L zeros em e^{s_k} , $k = 1, 2, \dots, M$ [1][40].

A restrição para L tem como objetivo garantir que o sistema $\mathbf{A}_f \mathbf{w}_f = \mathbf{b}_f$ sempre apresente solução.

Para o preditor backward, teremos o polinômio:

$$W_b(z) = 1 + \sum_{k=1}^L (-w_{b(L-k)}^*) z^{-k} \quad (3.3)$$

e um resultado equivalente ao caso forward, só que neste caso $W_b(z)$ terá M de seus L zeros em $e^{-s_k^*}$, $k = 1, 2, \dots, M$, mantendo as mesmas restrições impostas a L para o caso forward. As demonstrações desses fatos podem ser encontradas em [1].

Podemos observar que tanto os M zeros de $W_f(z)$ como os de $W_b(z)$ podem ser usados para determinar os parâmetros desconhecidos s_k do sinal observado. Por esse motivo são denominados de *Zeros de Sinal*.

Como podemos notar, os zeros de sinal de $W_f(z)$ e $W_b(z)$ são recíprocos conjugados com relação à circunferência de raio unitário centrada na origem do plano complexo Z . Portanto, se a seqüência $u(n)$ for composta apenas por exponenciais não-amortecidas, então os zeros de sinal dos dois casos serão iguais.

Esses resultados nos permitem tratar o caso forward-backward como a combinação dos dois casos anteriores, onde a solução será obtida para $\mathbf{w}_f = \mathbf{w}_b$.

Para o caso forward-backward, consideraremos s_k , $k = 1, 2, \dots, M$, puramente imaginário, fazendo $\beta_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, M$, em (3.1). Portanto, se L satisfaz a desigualdade $M \leq L \leq (N - \frac{M}{2})$ e se \mathbf{w}_{fb} satisfaz $\mathbf{A}_{fb} \mathbf{w}_{fb} = \mathbf{b}_{fb}$, então o polinômio formado pelos ganhos do filtro terá M de seus zeros em $e^{s_k} = e^{-s_k^*}$, para $k = 1, 2, \dots, M$. Caso $\frac{M}{2}$ não seja inteiro, este será arredondado para o maior inteiro mais próximo.

A restrição para L no caso forward-backward ocorre pelos mesmos motivos dos casos anteriores, tendo em conta que, agora, a matriz \mathbf{A} terá dimensões $2(N-L) \times L$ e o vetor \mathbf{b} , $2(N-L) \times 1$.

Nos polinômios formados em cada caso, M de seus zeros foram caracterizados como *Zeros de Sinal* e apresentaram posições bem definidas. Por outro lado, os outros $(L - M)$ zeros restantes, denominados de *Zeros Estranhos* [1], não possuem posições definidas por estarem relacionados às possíveis soluções para a equação normal, quando $L > M$.

Na aplicação em detecção de frequências é de extrema importância a distinção entre os zeros de sinal e zeros estranhos, a fim de estimar com precisão os parâmetros do sinal. Portanto, dentre as possíveis soluções, devemos privilegiar aquelas em que os zeros estranhos não possam ser confundidos com os zeros de sinal, o que levaria a um erro nas estimativas.

Pode ser demonstrado que, na solução de norma-mínima, os $(L - M)$ zeros estranhos dos métodos FLP, BLP e FBLP estarão localizados no interior da circunferência de raio unitário e distribuídos de forma aproximadamente uniforme [1].

Embora esse comportamento dos zeros estranhos, devido à característica de fase mínima do filtro obtido, seja observado para o sinal dado em (3.1), é no caso da utilização do método FBLP, em um sinal composto por exponenciais não-amortecidas, que tal característica demonstra uma distinção mais adequada entre os dois conjuntos de zeros. Nessas condições, os zeros de sinal estarão posicionados sobre a circunferência de raio unitário, enquanto que os zeros estranhos permanecerão no seu interior.

Fica, portanto, justificada a escolha da solução de norma-mínima, bem como a utilização do método de predição forward-backward na estimação das frequências de exponenciais não-amortecidas.

3.3 Método FBLP para Detecção de Frequências

3.3.1 Método FBLP sem ruído

O método FBLP para detecção de frequências consiste dos seguintes passos:

1) Formar a matriz de dados \mathbf{A} e o vetor de respostas desejadas \mathbf{b} , a partir de N amostras disponíveis do sinal, para o filtro de erro de predição forward-backward apresentado no Capítulo 2.

2) Obter a solução de norma-mínima, $\mathbf{w} = \mathbf{A}^\# \mathbf{b}$, através da decomposição em valores singulares da matriz \mathbf{A} , por meio de uma das formas a seguir:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{v}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad \text{ou} \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{b}, \quad k = \min[2(N - L), L]. \quad (3.4)$$

3) Encontrar os zeros do polinômio $W(z)$, dado por $W(z) = 1 - \sum_{k=1}^L w_k^* z^{-k}$, onde L é a ordem do filtro utilizado.

4) Tomar os M zeros mais próximos da circunferência de raio unitário (CRU) como os zeros de sinal e deles extrair estimativas do parâmetro ω_k do sinal, para $k = 1, 2, \dots, M$.

Para o método FBLP, quanto maior a ordem do filtro (L), maior o número de zeros e mais perfeita será a tarefa de “branquear” o sinal de erro na saída do filtro, através do posicionamento dos zeros mais próximos entre si. O aumento da ordem também propicia uma maior resolução do estimador através do maior grau de liberdade dado ao conjunto de zeros. Entretanto, o número de produtos, dado por $2 \cdot (N-L)$, que formam os elementos da matriz de autocorrelação estimada $\hat{\mathbf{R}}$ diminui à medida que L cresce, tornando mais instável a obtenção dos seus autovetores e autovalores. Lang e Mclellan (1980) sugeriram, para uma melhor performance do algoritmo FBLP, o valor $L = \frac{N}{3}$ [8].

Na Figura 3.1 podemos observar, como exemplo, o diagrama dos zeros de um filtro preditor de ordem $L=24$, otimizado para um sinal sem ruído, como em (3.1) com $w(n) = 0$, composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, do qual dispomos de 25 amostras com os seguintes parâmetros:

$$P_1 = 1, 0; \quad \omega_1 = 1, 00\pi \quad \text{e} \quad \theta_1 = -1, 00\pi.$$

$$P_2 = 1, 0; \quad \omega_2 = -0, 96\pi \quad \text{e} \quad \theta_1 = -0, 79\pi.$$

Podemos identificar facilmente os zeros de sinal posicionados sobre a CRU nas posições dadas pelas frequências das exponenciais, e os zeros restantes posicionados dentro da CRU e distribuídos de forma uniforme. Verificamos, assim, que na ausência de ruído ($w(n) = 0$), o método FBLP permite detectar com precisão as frequências das exponenciais de um sinal dado por (3.1).

3.4 O Efeito do Ruído

Nos resultados apresentados até então foi considerado um sinal isento de ruído. Se considerarmos a contaminação das amostras de $u(n)$ por ruído, todo o comportamento descrito para os zeros se modificará, aumentando a dificuldade de distinção entre zeros de sinais e zeros estranhos na proporção da intensidade do ruído presente. Diante dessa dificuldade, alguns algoritmos foram propostos baseados no comportamento aproximado do caso sem ruído. Problemas de resolução e estabilidade, como veremos a seguir, também serão agravados com a presença do ruído.

Para situações onde o ruído é branco e de média nula, poderemos escrever a matriz de correlação teórica do sinal como [34]:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{V}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}, \quad (3.5)$$

onde \mathbf{V} representa a matriz composta pelos autovetores de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ e \mathbf{P} é a matriz de correlação das amplitudes das exponenciais do sinal. A variância do ruído é dada por σ_n^2 e \mathbf{I} representa a matriz identidade com dimensões $L \times L$.

A Expressão (3.5) pode ser reescrita de modo a explicitar os autovalores e autovetores associados ao sinal e ao ruído, da seguinte forma [34]:

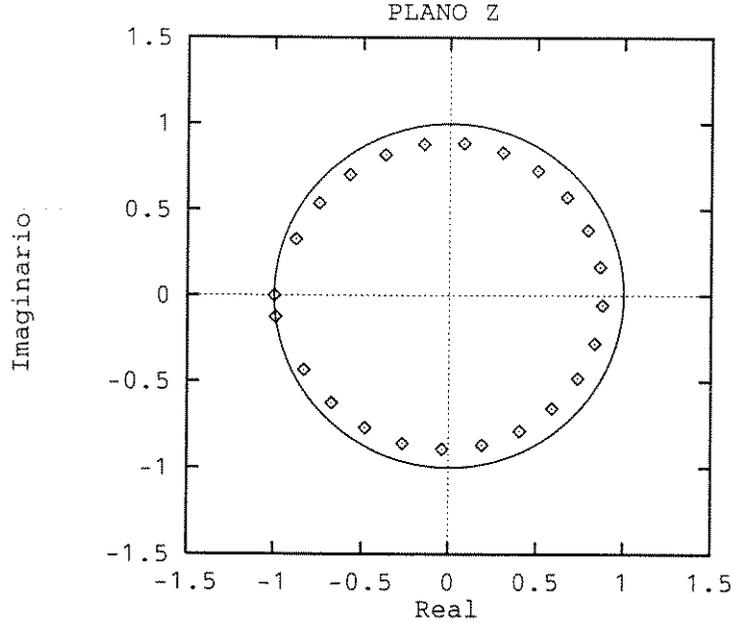


Figura 3.1: Zeros da função de transferência FBLP, $N = 25$ amostras, $L = 24$, $SNR = \infty$.

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = \sum_{i=1}^L \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \mathbf{E} \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}^H = \mathbf{E}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{E}_s^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}, \quad (3.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \dots \ \mathbf{s}_L], \\ \mathbf{E}_s &= [\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \dots \ \mathbf{s}_M], \\ \mathbf{\Lambda} &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L) \\ \mathbf{\Lambda}_s &= \text{diag}(\lambda_1^s, \lambda_2^s, \dots, \lambda_M^s), \end{aligned}$$

com $\lambda_1 = \lambda_1^s + \sigma_n^2 > \lambda_2 = \lambda_2^s + \sigma_n^2 > \dots > \lambda_M = \lambda_M^s + \sigma_n^2 > \lambda_{M+1} = \dots = \lambda_L = \sigma_n^2$. Os autovetores ortonormais de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ referentes ao sinal são dados pelas colunas de \mathbf{E}_s e seus respectivos autovalores dados pelos elementos da diagonal de $\mathbf{\Lambda}_s$. A matriz \mathbf{E} compreende tanto os autovetores de sinal como os de ruído, o mesmo ocorrendo com a matriz $\mathbf{\Lambda}$ em relação aos autovalores.

Devemos ressaltar que, em métodos de predição baseados em subespaços, a estimação dos parâmetros do sinal pode ser obtida tanto pelo subespaço definido por \mathbf{E}_s (*subespaço de sinal*), como pelo seu complemento ortogonal \mathbf{E}_N , com $\mathbf{E}_N = [\mathbf{s}_{M+1}, \mathbf{s}_{M+2}, \dots, \mathbf{s}_L]$, denominado de *subespaço de ruído* ou espaço nulo. Diferentemente dos métodos de estimação baseados na Norma-Mínima, os quais fazem uso do subespaço de sinal, o algoritmo MUSIC¹ é um exemplo de utilização do subespaço de ruído para fins de estimação espectral [8].

¹do inglês Multiple Signal Classification.

3.4.1 Distinção entre subespaços

Para uma situação sem ruído, pode ser constatado que a matriz de dados de um sinal composto pela soma de M exponenciais complexas possui posto M . Os M valores singulares não nulos da matriz de dados estão associados a M autovalores da sua matriz de autocorrelação estimada, na qual os autovalores serão dados pelos valores singulares ao quadrado. Esses M autovalores, por sua vez, estão associados aos M autovetores da matriz de autocorrelação, enquanto que os outros $(L-M)$ autovetores restantes estarão associados aos autovalores nulos.

No caso de um sinal contaminado por ruído branco aditivo, a independência entre as amostras de ruído faz com que o posto da matriz de dados se torne cheio² e, conseqüentemente, igual ao menor valor entre o número de linhas ou colunas ($\min[2(N-L), L]$) da matriz de dados. Esse valor geralmente é maior que o número de exponenciais que compõem o sinal (M). Desta forma, os valores singulares da matriz de dados anteriormente nulos para a situação sem ruído, tornam-se positivos. Observa-se que na medida em que a relação sinal-ruído decresce, a magnitude de tais valores singulares cresce, aproximando-se assim da magnitude dos M valores singulares anteriormente não nulos. Teoricamente, na presença de ruído aditivo, a potência do sinal composto torna-se maior, aumentado assim a magnitude de todos os valores singulares. Além disto, para ruído branco, teremos contribuições iguais, para cada valor singular, e proporcionais a potência do ruído.

Através dessas constatações podemos relacionar os M maiores valores singulares da matriz de dados, e seus respectivos vetores singulares, à porção de sinal referente às exponenciais complexas. Conseqüentemente, os valores e vetores singulares restantes poderão ser relacionados à parte ruidosa do sinal composto.

Podemos, então, dividir o espaço do sinal observado em dois subespaços distintos:

Subespaço de Sinal: Associado aos M maiores valores singulares e vetores singulares correspondentes da matriz de dados \mathbf{A} .

Subespaço de Ruído: Associado aos $(\min[2(N-L), L] - M)$ menores valores singulares e vetores singulares correspondentes de \mathbf{A} .

Através dessa classificação poderemos distinguir os dois subespaços para o caso em que os valores singulares de sinal apresentam magnitude superior aos demais, em uma dada relação sinal-ruído.

Devemos notar que os valores singulares associados ao ruído também participam da solução do filtro preditor de norma-mínima, rerepresentada em (3.4), através de seus valores recíprocos. Como conseqüência, teremos a instabilidade do estimador amplificada devido à pequena magnitude dos mesmos.

Quando a potência do sinal observado é da mesma ordem da potência do ruído, os valores singulares ruidosos apresentarão magnitudes comparáveis com aquelas dos valores singulares associados ao sinal. Nessa condição crítica para a relação sinal-ruído, a distinção entre os subespaços torna-se ambígua e em alguns casos impossível.

²todos os valores singulares são diferentes de zero.

3.4.2 Influência na distribuição dos zeros

Podemos observar através da Figura 3.2 que as distribuições dos zeros do filtro de erro de predição, na presença de ruído, não mais correspondem à situação de distinção apresentada no caso sem ruído. Apenas quando a relação sinal-ruído é elevada, os zeros obtidos através da solução de norma-mínima fornecerão boas estimativas para os parâmetros do sinal.

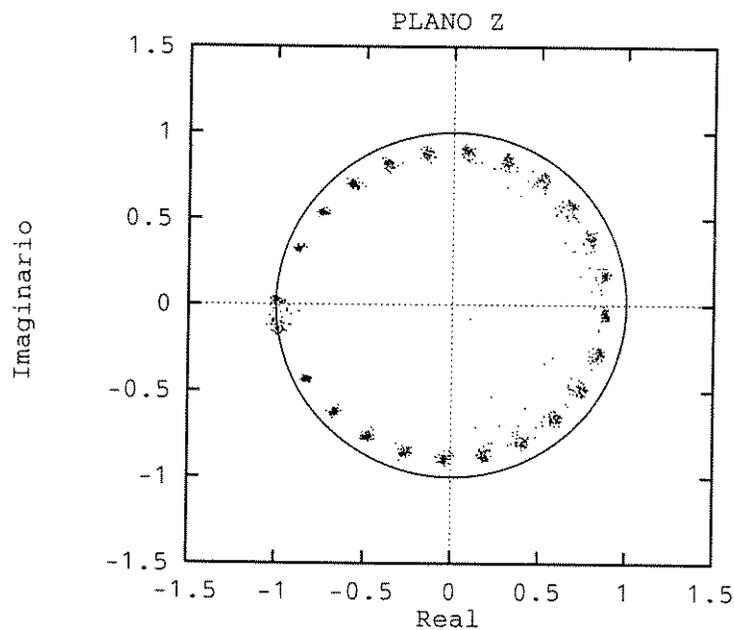


Figura 3.2: Zeros da função de transferência FBLP, $N = 25$ amostras, $L = 24$, $SNR = 10dB$. Superposição de 50 experimentos.

Para um ruído branco de média nula, observa-se flutuações nos zeros em torno das suas posições exatas, obtidas na situação sem ruído. Essas flutuações, quando observadas através de um grande número de experimentos, formam um aglomerado de zeros denominados de “clusters”. Cada “cluster” formado tem como centro geométrico aproximado o posicionamento exato de seu zero correspondente. Como era de se esperar, o diâmetro dos “clusters” formados estão diretamente relacionados com a potência do ruído presente no sinal original. Observa-se que quanto menor a relação sinal-ruído mais intensas serão as flutuações dos zeros e, conseqüentemente, maior será o diâmetro do “cluster” formado.

Para ordens elevadas do filtro, devido à participação do ruído, podem ocorrer superposição entre “clusters” vizinhos. Quando tal efeito ocorre torna-se difícil a distinção dos zeros, dificultando a detecção de frequências muito próximas entre si, comprometendo, assim, a resolução do método, bem como sua aplicação prática.

Essa instabilidade também é refletida no posicionamento dos zeros estranhos, os quais se tornam mais próximos da CRU. Tal efeito faz com que o critério de proximidade em relação à CRU falhe na busca de estimativas dos zeros de sinal, uma vez que os zeros estranhos estão mais próximos da CRU que os próprios zeros de sinal. Quando tal falha ocorre diz-se que o método FBLP atingiu seu limiar, e a relação sinal-ruído (SNR) a partir da qual o desempenho

do método deteriora-se mais rapidamente é denominada de SNR de limiar. Será mostrado posteriormente, ao compararmos os desempenhos de alguns métodos, que o método FBLP torna-se inviável quando usado para estimar frequências separadas por uma distância angular menor que o recíproco do intervalo de observação do sinal e valores baixos de relação sinal-ruído [1][40].

O comportamento descrito anteriormente não se aplica para o caso de um ruído colorido. Neste caso, teremos um total desconhecimento do seu efeito sobre o posicionamento dos zeros do preditor.

3.4.3 Método FBLP Modificado

Um dos motivos do fraco desempenho do método FBLP é o efeito produzido pelos valores singulares e vetores associados ao subespaço de ruído, presentes na solução do filtro ótimo.

Baseado no comportamento dos valores e vetores singulares na ausência do ruído, foi proposta por Tufts e Kumaresan [40] uma modificação no método FBLP original, onde se obtém uma versão de posto reduzido da matriz de dados, através da supressão dos valores singulares e respectivos vetores do subespaço de ruído. Esta proposta é conhecida como FBLP Modificado.

Esse procedimento produz um efeito semelhante a um aumento de SNR, fazendo com que o método modificado apresente melhor desempenho que o método original.

A solução de norma-mínima para o método FBLP Modificado é dada por:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{v}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{b} \quad \text{ou} \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{u}_i}{\lambda_i} \mathbf{u}_i^H \mathbf{A}^H \mathbf{b}, \quad (3.7)$$

onde tal solução, embora semelhante àquela do caso FBLP, envolve apenas os M valores e vetores singulares associados ao subespaço de sinal.

Devido à maior robustez apresentada pelo subespaço de sinal, observa-se que, em SNR moderada, seus autovalores possuem magnitudes maiores, facilitando assim sua identificação.

Pode ser observado que, para um preditor de ordem $L > M$, o valor de \mathbf{w} dado por (3.7), apesar de mais próximo de sua versão sem ruído, não mais minimiza a energia do erro de predição progressivo-regressivo (forward-backward), como ocorre no método FBLP.

Uma outra vantagem desse método está no fato de fornecer estimativas estáveis, mesmo para valores elevados de L . Tufts e Kumaresan definiram experimentalmente que $L \cong \frac{3N}{4}$ é o valor mais adequado para a ordem do preditor [40]. Lemos e Lopes mostraram que o valor ótimo para L é aquele que torna a matriz de dados \mathbf{A} mais próxima possível da forma quadrada [22].

Após a obtenção do vetor solução \mathbf{w} por uma das formulações em (3.7), o método de detecção prossegue como no caso FBLP.

Dessa forma, os M zeros de $W(z)$ mais próximos da circunferência de raio unitário (CRU) determinarão as estimativas do parâmetro ω_k do sinal observado, para $k = 1, 2, \dots, M$. Observa-se também que os $L-M$ zeros restantes estarão localizados no interior da CRU e distribuídos de forma aproximadamente uniforme [40]. Assim, esse comportamento diferenciado entre os dois conjuntos de zeros (zeros de sinal e zeros restantes) permite obter estimativas confiáveis para níveis moderados de ruído.

Concluimos, portanto, que o método da Norma-mínima proposto por Tufts e Kumaresan (1982) possui três características destacáveis. Primeiro, o método aplica a decomposição em

valores singulares na matriz resultante do uso combinado dos preditores lineares progressivo (forward) e regressivo (backward). Segundo, os menores valores singulares dessa matriz, associados ao subespaço de ruído, são ignorados. Esse procedimento constitui numa aproximação de posto reduzido da matriz original. Terceiro, o método utiliza uma ordem de predição mais elevada que o necessário, aumentando o grau de liberdade para o posicionamento dos zeros do preditor.

A aproximação de posto reduzido, bem como o aumento da ordem do preditor, podem justificar a redução de sensibilidade dos parâmetros estimados e o aumento de resolução obtidos por esse procedimento [31].

3.5 Simulações e Comparações

As simulações e comparações apresentadas nesta seção, e no decorrer deste trabalho, utilizarão um sinal ruidoso e complexo, composto pela soma de duas exponenciais com frequências angulares próximas entre si, cujo espaçamento é menor que o recíproco do intervalo de observação do próprio sinal, dado pelo número de amostras disponíveis. Tal exemplo tem sido utilizado freqüentemente em outros trabalhos, possibilitando assim comparações diretas.

EXEMPLO: $u(n) = e^{j(n\omega_1 + \theta_1)} + e^{j(n\omega_2 + \theta_2)} + w(n)$, $n = 1, 2, \dots, N$,

onde: $\omega_1 = \pi$, $\omega_2 = -0,96\pi$; $\theta_1 = -\pi$; $\theta_2 = -0,79\pi$ e $w(n)$ são amostras de ruído branco Gaussiano complexo de média nula e variância total σ^2 , tendo tanto a parte real como a imaginária uma variância $\sigma^2/2$.

Para o exemplo em questão foi utilizado um conjunto de 25 amostras de um sinal composto por duas exponenciais complexas. Portanto, teremos $N=25$ e $M=2$ na expressão para o sinal genérico dado por (3.1). Para efeito de comparação com outros resultados, a ordem do filtro foi escolhida como o valor mais próximo de $\frac{3N}{4}$ ($L=18$).

A expressão para a variância do estimador para as estimativas $\hat{\omega}_i$ será dada por:

$$\text{var}(\hat{\omega}_i) \triangleq \frac{1}{\text{num}} \sum_{k=1}^{\text{num}} \left[\hat{\omega}_{i,k} - \omega_i \right]^2, \quad (3.8)$$

onde o valor da variável num representa o número de experimentos utilizados e ω_i é o verdadeiro valor do parâmetro a ser estimado.

A Figura 3.3 apresenta o valor $10 \cdot \log(1/\text{var}(\hat{\omega}_1))$ em função da SNR em dB, com o objetivo de comparar os desempenhos dos métodos FBLP e FBLP Modificado, juntamente com os do método ML. O limite de *Cramér-Rao* (CR), que representa a menor variância teórica para o estimador das frequências, também é apresentado na Figura 3.3 para efeito de comparação. Os resultados da Figura 3.3 foram construídos a partir da realização de 500 experimentos, nos quais foram considerados apenas a estimativa de ω_1 . Tais resultados foram reproduzidos a partir de [1][40].

Podemos observar na Figura 3.3 a degradação do desempenho dos métodos à medida em que a SNR decresce. A mudança brusca da inclinação da curva de desempenho indica a SNR de limiar. Podemos observar que o menor valor de limiar para o FBLP ocorre a uma SNR de

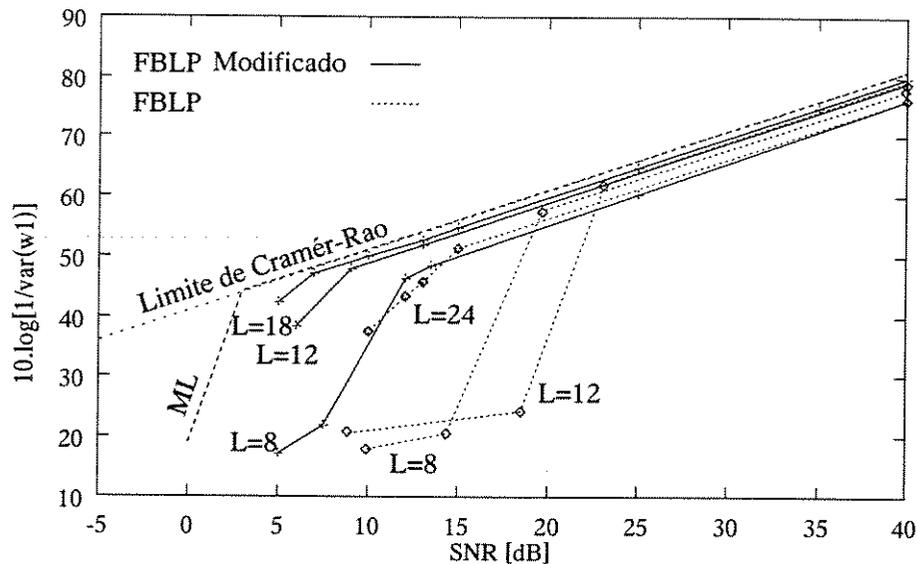


Figura 3.3: Comparação de desempenho entre os métodos FBLP, FBLP Mod. e ML.

aproximadamente 14 dB, para $L=24$. Já o limiar do FBLP Modificado encontra-se em torno de 7dB, contra aproximadamente 3dB para o método ML.

Como podemos constatar, o limite de Cramér-Rao não apresenta o efeito de limiar. Notamos ainda que, acima do limiar, o desempenho do método FBLP Modificado encontra-se bem próximo do limite CR.

Deve ser salientado que, embora o método FBLP Modificado apresente um limiar levemente maior que o do método ML, o primeiro oferece uma maior simplicidade computacional.

Na Figura 3.4 temos o diagrama de posicionamento no plano Z dos zeros do filtro obtidos pelo método FBLP Modificado, para $\text{SNR}=10$ dB e $L=18$. A figura mostra o diagrama de 50 experimentos sobrepostos, onde foram mantidas as mesmas amostras de sinal, mudando apenas o conjunto das 25 amostras do ruído $w(n)$ a cada experimento. Comparando as Figuras 3.2 e 3.4, constatamos que a utilização da matriz de dados com posto reduzido, utilizada pelo método FBLP Modificado, reduz sensivelmente as flutuações dos zeros em relação as suas posições ideais, dadas pela situação sem ruído.

Na Figura 3.5 também temos o diagrama de posicionamento dos zeros produzidos pelo método FBLP Modificado com $L=18$, agora para $\text{SNR}=5$ dB. Podemos observar que, mesmo abaixo do limiar, as frequências podem eventualmente ser estimadas corretamente, através do critério de distinção entre os zeros baseado na proximidade da CRU. Porém, na medida em que aumentamos o número de experimentos, cresce a chance de uma distribuição de zeros com um ou mais zeros estranhos mais próximos da CRU que os zeros de sinal. Neste caso surge o fenômeno de limiar.

3.6 O Espectro de Norma-mínima

Até então, nos restringimos a obter as frequências do sinal observado através da localização dos zeros do filtro de erro de predição. Na solução de norma-mínima, as frequências angulares podem também ser obtidas através de uma função espectral $S(\omega)$, definida por:

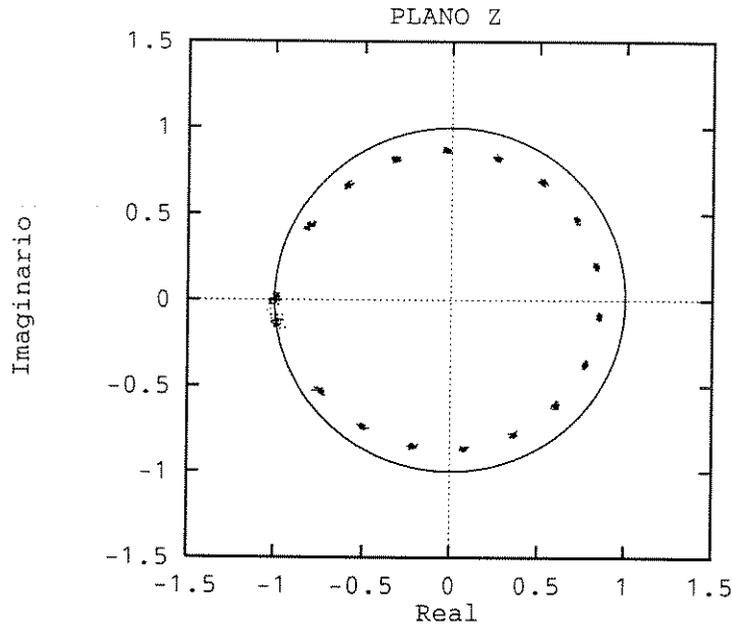


Figura 3.4: Zeros da função de transferência *FBLP Mod.*, $N = 25$ amostras, $L = 18$, $SNR = 10dB$. Superposição de 50 experimentos.

$$S(\omega) = \frac{1}{|W(\omega)|^2}, \tag{3.9}$$

com $W(\omega)$ dado por:

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{L}} W(z)|_{z=e^{j\omega}}, \tag{3.10}$$

onde $W(z)|_{z=e^{j\omega}}$ representa a resposta de amplitude do filtro, aqui denominada de espectro nulo do sinal. Podemos observar que os M zeros de sinal, localizados sobre a circunferência de raio unitário, resultam em picos na função $S(\omega)$. Desta forma, as localizações dos M picos mais altos em $S(\omega)$ podem ser tomadas como estimativas das frequências do sinal observado. Assim, ao invés de examinar os zeros de sinal, uma alternativa consiste em encontrar os picos de $S(\omega)$. A primeira abordagem é denominada de método da norma-mínima pelas raízes (“root minimum-norm”), enquanto que a última é geralmente conhecida como método da norma-mínima espectral (“spectral minimum-norm”) [34].

Demonstra-se que os erros na determinação da posição dos zeros de sinal são menores que os erros cometidos na obtenção dos picos de $S(\omega)$ [9][34]. Por esse motivo escolheremos sempre a obtenção dos parâmetros do sinal através das posições dos zeros de $W(z)$, quando o objetivo for a detecção de frequências.

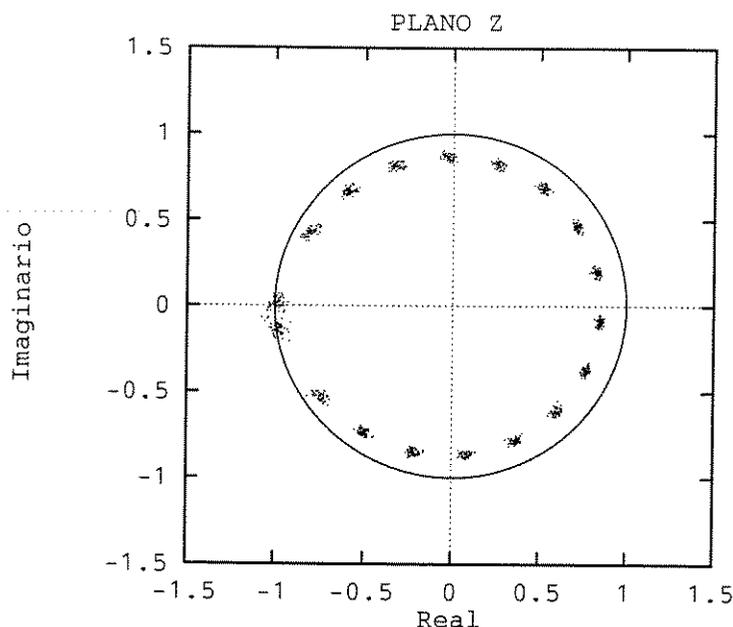


Figura 3.5: Zeros da função de transferência FBLP Mod., $N = 25$ amostras, $L = 18$, $SNR = 5dB$. Superposição de 50 experimentos.

3.7 Técnicas de Estimação Baseadas em LS e SVD

Como foi mencionado anteriormente, o primeiro parâmetro a ser estimado para um dado sinal são as frequências. Uma vez estimada as frequências, podemos usá-las para estimar o restante dos parâmetros desconhecidos (amplitude e fase).

Estimação de frequências utilizando técnicas de predição linear envolve geralmente três etapas distintas. A primeira consiste em identificar um modelo de preditor linear, utilizando os dados disponíveis. Na segunda etapa, as raízes do polinômio formado são computadas. Na etapa final é realizada a seleção de um subconjunto destas raízes que constitui o estimador das frequências desejadas.

Na primeira etapa, para a obtenção do polinômio associado ao modelo linear de predição, devemos obter a solução de um sistema linear de L equações convencional que requer $O(L^3)$ operações. Levando-se em consideração eventuais estruturas particulares do problema, como no caso de matrizes Toeplitz, que possibilitam o desenvolvimento de algoritmos recursivos como o de Levinson, podemos reduzir o número de operações para $O(L^2)$ [28].

A segunda etapa é a mais pesada computacionalmente. Qualquer informação que facilite a determinação das raízes pode levar a uma diminuição da complexidade total do método. Em geral, os procedimentos para obtenção das raízes de um polinômio de ordem L possuem complexidade $O(L^3)$ [28].

Alguns esquemas foram desenvolvidos no sentido de facilitar essa segunda etapa, dentre os quais podemos destacar dois tipos: (1) algoritmos de procura por zero sobre a circunferência de raio unitário, com complexidade $O(L^2)$; (2) esquemas envolvendo transformações polinomiais para forma real, também com complexidade $O(L^2)$ [28].

Existem vários algoritmos possíveis para a terceira etapa. Serão importantes neste trabalho os algoritmos combinados em dois passos, no qual o primeiro consiste em obter estimativas fracas para as raízes do polinômio através de um procedimento mais simples. Estas serão utilizadas como pontos de partida em algoritmos mais precisos na obtenção das estimativas finais.

3.8 Conclusão

A aplicação da predição linear em detecção de frequências foi abordada para os métodos FLP, BLP e FBLP, onde foi utilizado um modelo genérico de um sinal composto pela soma de M exponenciais complexas com frequências distintas. Através dessa aplicação ficou justificada a escolha da solução de **norma-mínima**, bem como o uso do método FBLP na detecção de sinais, cujas componentes exponenciais não apresentam amortecimento.

Destacamos ainda a importância da distinção entre **zeros de sinais** e **zeros estranhos** na estimação precisa das frequências contidas no sinal observado. Motivo pelo qual dedicaremos um capítulo ao estudo do posicionamento dos zeros do preditor.

Foram feitas algumas considerações com relação a estabilidade, resolução e limitação dos métodos de predição linear aplicados a sinais ruidosos. A estabilidade do método foi observada em situações com presença de ruído moderado. Nestas situações, a utilização de métodos de detecção baseados em predição linear apresentaram resolução comparável ao do método ML. Para situações com ruído excessivo tais métodos apresentaram um efeito de limiar, implicando em um baixo desempenho quando comparados com o método ML. Concluimos, ainda, que o comportamento das estimativas para o caso sem ruído só poderá ser tomado de uma forma aproximada em situações ruidosas.

O efeito do ruído foi analisado sob o ponto de vista do posicionamento dos zeros do preditor. Foi constatado a existência de flutuações dos zeros em relação a suas posições originais. Constatamos, também, que a intensidade dessas flutuações é inversamente proporcional à relação sinal-ruído. Tal comportamento se mostra bastante prejudicial na estimação precisa dos parâmetros do sinal observado na presença de ruído excessivo.

No caso de detecção de sinais ruidosos, a análise de subespaços, através dos valores e vetores singulares, apresenta-se como uma ferramenta poderosa ao possibilitar a divisão do sinal observado em dois subespaços: o de sinal propriamente dito e o de ruído, onde o último é o grande responsável pelo desempenho insatisfatório dos métodos de detecção. Baseado nesta ferramenta de análise, apresentamos o método FBLP Modificado que produz uma solução para o filtro de erro de predição utilizando apenas o subespaço de sinal.

Apresentamos as três etapas de um processo de estimação moderna, baseado em LS e SVD, a saber: identificação do modelo, cálculo das raízes e obtenção das estimativas. Dentre essas, a segunda etapa foi considerada a mais pesada computacionalmente.

Capítulo 4

Caracterizando a Solução de Norma-mínima

4.1 Introdução

Neste capítulo pretendemos aprofundar o conhecimento da solução de norma-mínima para a equação normal, obtida no Capítulo 2. Abordaremos essa solução aplicada na detecção de frequências de uma forma analítica, no intuito de explicitar os coeficientes do filtro preditor em função dos parâmetros do sinal observado (fase, amplitude e frequência).

Tomaremos como base um preditor do tipo *forward* e estenderemos os resultados para o preditor *forward-backward*.

Destacaremos a obtenção das estimativas da matriz de autocorrelação de sinais compostos pela soma de exponenciais complexas não-amortecidas e na ausência de ruído.

No decorrer do capítulo, serão enfatizadas as dificuldades de se obter uma solução de forma analítica para um sinal composto por um número qualquer de exponenciais complexas, bem como a influência do número de amostras disponíveis na obtenção de estimativas confiáveis.

Para obter uma generalização da matriz de autocorrelação do sinal e, conseqüentemente, uma generalização da solução de norma-mínima, a ferramenta de decomposição em valores singulares será aplicada a um caso idealizado.

Ao final do capítulo será apresentada uma outra forma para a solução de norma-mínima, baseada no espaço nulo da matriz de autocorrelação estimada.

4.2 Abordagem Polinomial

Consideremos um filtro de erro de predição *forward* de ordem L , com função de transferência $W_L(z)$, e façamos passar por esse filtro o sinal $u(n)$ dado em (3.1), com $w(n) = 0$.

Escreveremos $W_L(z)$ em sua forma fatorada:

$$W_L(z) = \prod_{k=1}^L (1 - z_k z^{-1}), \quad (4.1)$$

onde z_k , $1 \leq k \leq L$, são os L zeros de $W_L(z)$.

De acordo com a seção 3.2.1, sabemos que para o preditor operar em condições ótimas, no caso de um sinal como em (3.1), poderemos obter um conjunto de soluções fixando M de seus L zeros na posição dada pelos parâmetros de frequência (ω_k) e amortecimento (β_k) do sinal.

Podemos, então, expressar $W_L(z)$ na forma fatorada:

$$\dots\dots\dots W_L(z) = C(z) \prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1}), \quad (4.2)$$

onde z_k , $1 \leq k \leq M$, são os M zeros de sinal de $W_L(z)$ e $C(z)$ é o polinômio de ordem L-M responsável pelas infinitas combinações que determinam as posições dos L-M zeros restantes da solução ótima.

Escolheremos $C(z)$ correspondente à solução de menor norma para o vetor formado pelos coeficientes de $W_L(z)$, conforme estabelecido no Capítulo 2.

Apresentaremos inicialmente a solução de norma-mínima para um filtro preditor de segunda ordem aplicado a um sinal composto por apenas uma exponencial complexa. Neste caso, podemos escrever $u(n) = \sqrt{P_1} e^{(ns_1 + j\theta_1)}$, com $s_1 = \beta_1 + j\omega_1$. Para um filtro otimizado, podemos, então, escolher como zero de sinal $z_1 = e^{s_1} = \rho_1 e^{j\omega_1}$, onde $\rho_1 = |z_1| = e^{\beta_1}$.

O polinômio de segunda ordem $W_2(z)$, formado pelos ganhos do filtro (w_1, w_2), poderá ser expresso como:

$$W_2(z) = 1 - w_1 z^{-1} - w_2 z^{-2}. \quad (4.3)$$

Tomaremos, como solução particular para esse filtro, o par de coeficientes (w_1, w_2) que minimizam a norma Euclidiana de \mathbf{w} , definida aqui como:

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\mathbf{w}^H \mathbf{w}}. \quad (4.4)$$

Com $\mathbf{w}^H = [w_1^* \ w_2^*]$, teremos:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = w_1^* w_1 + w_2^* w_2. \quad (4.5)$$

Reescrevendo $W_2(z)$ através de seus zeros (z_1, z_2), teremos:

$$W_2(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}). \quad (4.6)$$

Expandindo os termos em parênteses de (4.6) e comparando o resultado com (4.3), obtemos:

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 + z_2 \\ w_2 &= -z_1 z_2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Substituindo as relações em (4.7) na Expressão (4.5), teremos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &= (z_1 + z_2)^*(z_1 + z_2) + (-z_1 z_2)^*(-z_1 z_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2 + z_1^* z_2 + z_2^* z_1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tomando-se $z_1 = \rho_1 e^{j\omega_1}$ como o zero associado ao sinal e $z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2}$, como o zero restante, teremos:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_2^2 + (\rho_1 e^{j\omega_1})^*(\rho_2 e^{j\phi_2}) + (\rho_2 e^{j\phi_2})^*(\rho_1 e^{j\omega_1}). \quad (4.9)$$

Agora, obter a solução de norma-mínima será equivalente a obter os valores dos parâmetros desconhecidos $\rho_2 = |z_2|$ e $\phi_2 = \arg[z_2]$, que determinam a posição do zero restante, para a situação em que a Expressão (4.9) atinge seu menor valor.

Adotando a hipótese de independência entre os parâmetros ρ_2 e ϕ_2 , poderemos minimizar $\|\mathbf{w}\|^2$ separadamente. Diferenciando primeiramente (4.9) em relação a ϕ_2 e igualando a zero, teremos:

$$\frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial \phi_2} = -2\rho_1\rho_2 \text{sen}(\phi_2 - \omega_1) = 0. \quad (4.10)$$

Considerando ainda que ρ_1 e ρ_2 são diferentes de zero, temos como condição de minimização:

$$\text{sen}(\phi_2 - \omega_1) = 0, \quad (4.11)$$

de onde obtemos:

$$\phi_2 - \omega_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \phi_2 - \omega_1 = \pi. \quad (4.12)$$

Analisando a derivada segunda para determinar o ponto de mínimo, temos:

$$\frac{\partial^2 \|\mathbf{w}\|^2}{\partial^2 \phi_2} = -2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \omega_1) \begin{cases} < 0 \text{ se } \phi_2 - \omega_1 = 0 \text{ (máximo)} \\ > 0 \text{ se } \phi_2 - \omega_1 = \pi \text{ (mínimo)}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Podemos, então, concluir que o valor de ϕ_2 , que minimiza a norma do filtro, está relacionado com a frequência presente no sinal de entrada ω_1 da seguinte forma:

$$\phi_2 = \omega_1 + \pi. \quad (4.14)$$

Minimizando agora (4.9) em relação a ρ_2 , teremos:

$$\frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial \rho_2} = 2\rho_2 + 2\rho_1^2\rho_2 + 2\rho_1 \cos(\phi_2 - \omega_1) = 0, \quad (4.15)$$

de onde obtemos:

$$\rho_2 = -\frac{\rho_1 \cos(\phi_2 - \omega_1)}{1 + \rho_1^2}. \quad (4.16)$$

Supondo, mais uma vez, que a minimização em relação a ϕ_2 independe de ρ_2 , podemos substituir o resultado $\phi_2 = \omega_1 + \pi$ de (4.14) em (4.16) para obter:

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + \rho_1^2}. \quad (4.17)$$

Podemos observar que ρ_2 em (4.17) atinge seu valor máximo para $\rho_1 = 1$. Portanto, teremos sempre $\rho_2 \leq \frac{1}{2}$. Esse resultado ilustra a característica de fase mínima do filtro preditor para exponenciais não-amortecidas, visto que teremos M zeros posicionado sobre a circunferência de raio unitário ($|z_1| = 1$) e os L-M zeros restantes no seu interior ($|z_2| \leq \frac{1}{2}$).

Podemos, agora, determinar completamente a posição do zero restante substituindo em z_2 os valores de ϕ_2 e ρ_2 , dados, respectivamente, por (4.14) e (4.17), obtendo:

$$z_2 = - \left[\frac{\rho_1}{1 + \rho_1^2} \right] e^{j\omega_1}. \quad (4.18)$$

Assim, em termos de localização dos zeros do preditor, o zero restante z_2 estará posicionado no interior da CRU, a uma distância ρ_2 do centro do plano Z e na direção oposta ao zero de sinal.

Para obtermos os coeficientes do filtro otimizado em função dos parâmetros do sinal (β_1, ω_1) , basta substituírmos z_1 e z_2 na Expressão (4.7). Assim, para $\rho_1 = e^{\beta_1}$, teremos:

$$w_1 = \left[\frac{e^{3\beta_1}}{1 + e^{2\beta_1}} \right] e^{j\omega_1} \quad (4.19)$$

$$w_2 = \left[\frac{e^{2\beta_1}}{1 + e^{2\beta_1}} \right] e^{j2\omega_1}$$

e, reescrevendo o polinômio $W_2(z)$, obtemos finalmente:

$$W_2(z) = 1 - \left[\frac{e^{3\beta_1}}{1 + e^{2\beta_1}} \right] e^{j\omega_1} z^{-1} - \left[\frac{e^{2\beta_1}}{1 + e^{2\beta_1}} \right] e^{j2\omega_1} z^{-2}. \quad (4.20)$$

Temos, portanto, em (4.20), o filtro preditor ótimo de norma-mínima para ordem 2, escrito em função dos parâmetros do sinal observado, com $M=1$.

Para o caso de uma exponencial complexa não-amortecida, teremos $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente:

$$W_2(z) = 1 - \left[\frac{1}{2} \right] e^{j\omega_1} z^{-1} - \left[\frac{1}{2} \right] e^{j2\omega_1} z^{-2}. \quad (4.21)$$

Seria interessante estender o procedimento utilizado aqui para uma ordem L qualquer. No entanto, tal análise torna-se complexa à medida que L cresce. Por isso, para a obtenção de um generalização explícita da solução de norma-mínima para uma ordem qualquer, sob o ponto de vista dos zeros do preditor, utilizaremos uma outra abordagem, que será apresentada na seção seguinte.

Para um sinal composto por mais de uma exponencial complexa, a determinação explícita da localização dos zeros restantes também torna-se muito complexa, mesmo para pequenas ordens do filtro. Por essas limitações restringiremos os resultados explícitos aos casos onde o sinal é composto por no máximo duas exponenciais complexas, ficando outros casos para pesquisas futuras.

4.2.1 Generalização

Considere novamente o sinal $u(n)$, como em (3.1), e um preditor otimizado de ordem L representado pelo polinômio $W_L(z)$, com M de seus zeros de sinal posicionados em e^{s_k} para $k = 1, 2, \dots, M$.

Podemos propor uma fatoração adequada para $W_L(z)$, como a seguir [18]:

$$W_L(z) = W_M(z)W_{L-M}(z), \quad (4.22)$$

onde

$$\begin{aligned} W_M(z) &= 1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M} \\ W_{L-M}(z) &= 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{L-M}z^{-(L-M)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Neste caso os b_i 's são conhecidos, pois os zeros de $W_M(z)$ são conhecidos. Logo, poderemos calcular os c_i 's em função dos b_i 's de tal forma que o vetor formado pelos coeficientes de $W(z)$ seja de norma-mínima.

Aplicando a transformada-Z inversa em (4.22), teremos:

$$\begin{aligned} w_L(n) &= w_M(n) * w_{L-M}(n) \\ w_L(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k b_{n-k}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0 = w_0 = 1 \\ b_i &= 0, & i > M \text{ e } i < 0 \\ c_i &= 0, & i > (L - M) \text{ e } i < 0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Observe que podemos analisar a convolução em (4.24) como uma filtragem através de um preditor, onde os c_k 's representam os coeficientes do filtro, os b_k 's formam a seqüência de entrada e $w_L(n)$ é a seqüência de erro de predição obtida na saída de tal filtro. Portanto, para os b_k 's dados, existe um filtro (dado pelos c_k 's) que minimiza o erro quadrático médio em sua saída $w_L(n)$. Assim, minimizar $\|w\|$ sujeito a $w_M(n)$ fixo é equivalente a um problema de predição linear. De acordo com o Capítulo 2, a equação normal será do tipo:

$$\mathbf{Rc} = \mathbf{r}, \quad (4.26)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de autocorrelação da seqüência de entrada $\{b_i\}$, \mathbf{c} é o vetor dos coeficientes do filtro preditor e \mathbf{r} é um vetor formado pelos elementos $r(i)$, dados por:

$$r(i) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M b_k^* b_{k+i}. \quad (4.27)$$

A solução desta equação define, portanto, o polinômio $W_{L-M}(z)$ que, conseqüentemente, para $W_M(z)$ conhecido, define completamente $W_L(z)$.

Essa solução também garante a fase mínima do filtro $W_L(z)$, visto que o filtro preditor, obtido através da solução em (4.26), será sempre de fase mínima [9].

Apesar de elucidativo, esse procedimento de generalização não permite explicitar, de forma fácil, os zeros de $W_L(z)$ em função dos parâmetros do sinal de entrada.

Até então, não levamos em consideração as limitações práticas no processo de predição. Dentre essas limitações destaca-se o número de amostras disponíveis do sinal para obtenção das estimativas de sua matriz de autocorrelação. Para permitir um melhor esclarecimento a respeito da solução de norma-mínima, estudaremos a seguir os aspectos práticos relativos à obtenção de estimativas confiáveis, utilizando a ferramenta de decomposição em valores singulares.



4.3 Abordagem Através da Autocorrelação Estimada

4.3.1 Matriz e vetor de autocorrelação

Nesta abordagem, faremos uso de um preditor do tipo *forward* para obtenção dos resultados desejados, porém tais resultados poderão ser estendidos facilmente para outros tipos de filtro, utilizando as relações apresentadas no Capítulo 2.

Considere o conjunto de N amostras de um sinal, dado por $u(n)$ em (3.1), com $w(n) = 0$, como a entrada de um filtro preditor tipo *forward* de ordem L .

Considerando $M \leq L \leq N - M$, a solução de norma-mínima para esse filtro será dada por (2.91), rerepresentada a seguir por questão de clareza:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})\# \mathbf{A}^H \mathbf{b},$$

ou seja:

$$\mathbf{w} = \hat{\mathbf{R}}\# \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.28)$$

com:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}} &= \frac{1}{(N-L)} \mathbf{A}^H \mathbf{A} \\ \hat{\mathbf{r}} &= \frac{1}{(N-L)} \mathbf{A}^H \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $\hat{\mathbf{R}}$ é a matriz de autocorrelação estimada do sinal, composta pelos elementos $\hat{r}(i, j)$, dados em (2.59):

$$\hat{r}(i, l) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} u(k-i)u^*(k-l), \quad 0 \leq i, l \leq L-1. \quad (4.30)$$

O vetor $\hat{\mathbf{r}}$ será composto pelos elementos $\hat{r}(i)$, dados em (2.58):

$$\hat{r}(i) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} u(k-i+1)u^*(k+1), \quad 1 \leq i \leq L. \quad (4.31)$$

Observando (4.28), podemos constatar que a solução de norma-mínima depende diretamente da estimativa da matriz de autocorrelação do sinal. Podemos notar ainda que tais estimativas são obtidas através de um número limitado de amostras, comprometendo assim sua representatividade quando comparada com a matriz exata, obtida para $N \rightarrow \infty$.

Analisaremos a seguir as estimativas da autocorrelação do sinal, dadas pelas matrizes $\hat{\mathbf{R}}$ e $\hat{\mathbf{r}}$, de acordo com o número de exponenciais que compõem o sinal $u(n)$.

4.3.2 Sinal composto por uma única exponencial complexa (M=1)

Considere $u(n) = \sqrt{P_1} e^{(ns_1 + j\theta_1)}$, onde $s_1 = \beta_1 + j\omega_1$. Para esse sinal, a estimativa da matriz de autocorrelação será composta pelos elementos $\hat{r}_u(i, l)$, como a seguir:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_u(i, l) &= \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} P_1 e^{(k-i)s_1 + j\theta_1} e^{(k-l)s_1^* - j\theta_1}, \quad 0 \leq i, l \leq L-1 \\
 &= \frac{P_1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{(k-i)(\beta_1 + j\omega_1)} e^{(k-l)(\beta_1 - j\omega_1)} \\
 &= P_1 e^{-(i-l)j\omega_1} e^{-(i+l)\beta_1} \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{2k\beta_1}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Fazendo:

$$q_1(N, L, \beta_1) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{2k\beta_1} = \frac{1}{N-L} \frac{e^{2\beta_1 L} - e^{2N\beta_1}}{1 - e^{2\beta_1}}, \tag{4.33}$$

teremos para os elementos da matriz $\hat{\mathbf{R}}$:

$$\hat{r}_u(i, l) = P_1 e^{-i(\beta_1 + j\omega_1)} e^{-l(\beta_1 - j\omega_1)} q_1(N, L, \beta_1). \tag{4.34}$$

Da mesma forma, o vetor $\hat{\mathbf{r}}$ será composto pelos elementos $\hat{r}_u(i)$, dados como:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_u(i) &= \frac{P_1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{(k-i+1)s_1 + j\theta_1} e^{(k+1)s_1^* - j\theta_1}, \quad 1 \leq i \leq L \\
 &= \frac{P_1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{(k-i+1)(\beta_1 + j\omega_1)} e^{(k+1)(\beta_1 - j\omega_1)} \\
 &= P_1 e^{-i(\beta_1 + j\omega_1)} e^{2\beta_1} \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{2k\beta_1}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Logo, teremos:

$$\hat{r}_u(i) = P_1 e^{-i(\beta_1 + j\omega_1)} q_2(N, L, \beta_1), \tag{4.36}$$

onde $q_2(N, L, \beta_1) = e^{2\beta_1} q_1(N, L, \beta_1)$.

Destacamos os termos $q_1(N, L, \beta_1)$ e $q_2(N, L, \beta_1)$ por representarem a participação do fator de amortecimento juntamente com o número de amostras disponíveis e a ordem do filtro utilizado.

Podemos observar por esses resultados que, quando o sinal é composto por apenas uma exponencial complexa, as estimativas de autocorrelação independem da fase.

Quando o sinal não apresenta amortecimento ($\beta_1 = 0$), teremos $q_1(N, L, \beta_1) = q_2(N, L, \beta_1) = 1$ e, conseqüentemente, as Expressões (4.34) e (4.36) poderão ser substituídas, respectivamente, por:

$$\hat{r}_u(i, l) = P_1 e^{-j(i-l)\omega_1} \tag{4.37}$$

$$\hat{r}_u(i) = P_1 e^{-j(i)\omega_1}. \quad (4.38)$$

Note que esses resultados independem de N ou de L . Portanto, podemos concluir que as estimativas obtidas para um sinal composto por apenas uma exponencial complexa não-amortecida não serão sensíveis às variações do número de amostras disponíveis ou da ordem do filtro utilizado.

4.3.3 Sinal composto por duas exponenciais complexas ($M=2$)

Consideremos, agora, que o sinal observado é composto pela soma de dois subsinais. Desta forma, teremos o sinal $u(n) = S_1(n) + S_2(n)$, onde $S_1(n) = \sqrt{P_1} e^{ns_1 + j\theta_1}$ e $S_2(n) = \sqrt{P_2} e^{ns_2 + j\theta_2}$, com $s_1 = \beta_1 + j\omega_1$ e $s_2 = \beta_2 + j\omega_2$.

Aproveitando o contexto de definições apresentado para uma exponencial complexa, teremos a matriz de autocorrelação estimada do sinal $u(n)$ formada pelos elementos $\hat{r}_u(i, l)$, para $0 \leq i, l \leq L - 1$, como a seguir:

$$\hat{r}_u(i, l) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} \left[\sqrt{P_1} e^{(k-i)s_1 + j\theta_1} + \sqrt{P_2} e^{(k-i)s_2 + j\theta_2} \right] \left[\sqrt{P_1} e^{(k-l)s_1^* - j\theta_1} + \sqrt{P_2} e^{(k-l)s_2^* - j\theta_2} \right].$$

Desenvolvendo os produtos cruzados no interior do somatório, poderemos reescrever $\hat{r}_u(i, l)$ como:

$$\hat{r}_u(i, l) = \hat{r}_{s_1}(i, l) + \hat{r}_{s_1 s_2}(i, l) + \hat{r}_{s_2 s_1}(i, l) + \hat{r}_{s_2}(i, l) \quad 0 \leq i, l \leq L - 1, \quad (4.39)$$

onde a primeira parcela corresponde a estimativa de autocorrelação referente a $S_1(n)$, a segunda refere-se a correlação cruzada de $S_1(n)$ com relação a $S_2(n)$, a terceira refere-se a correlação cruzada de $S_2(n)$ com relação a $S_1(n)$ e a última parcela corresponde a estimativa de autocorrelação de $S_2(n)$, explicitadas a seguir:

$$\hat{r}_{s_1}(i, l) = P_1 e^{(l-i)j\omega_1} \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{(2k-i-l)\beta_1} \quad (4.40)$$

$$\hat{r}_{s_1 s_2}(i, l) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} \left[\sqrt{P_1} e^{(k-i)(\beta_1 + j\omega_1) + j\theta_1} \sqrt{P_2} e^{(k-l)(\beta_2 + j\omega_2)^* - j\theta_2} \right] \quad (4.41)$$

$$\hat{r}_{s_2 s_1}(i, l) = \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} \left[\sqrt{P_2} e^{(k-i)(\beta_2 + j\omega_2) + j\theta_2} \sqrt{P_1} e^{(k-l)(\beta_1 + j\omega_1)^* - j\theta_1} \right] \quad (4.42)$$

$$\hat{r}_{s_2}(i, l) = P_2 e^{(l-i)j\omega_2} \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{(2k-i-l)\beta_2}. \quad (4.43)$$

Note que os resultados obtidos para as correlações cruzadas em (4.41) e (4.42) dependem das relações entre as frequências ω_1 e ω_2 e das fases iniciais θ_1 e θ_2 .

Uma preocupação básica nos problemas de estimação de frequência é a capacidade de resolução do método utilizado. No domínio do tempo, para comparar a capacidade de diferentes

algoritmos de estimação em resolver frequências próximas de duas componentes senoidais, é conveniente considerar o caso em que as duas componentes senoidais possuem a mesma potência média e um espaçamento máximo, no qual as duas componentes podem ser resolvidas. Estabelecendo $\omega_0 \pm \frac{1}{2} \Delta\omega_0$ como a frequência angular de cada uma das componentes, a relação $\Delta\omega_0/\omega_0$ determinará a capacidade de resolução do algoritmo de estimação [8]. Por esse motivo será útil adotar algumas convenções, dadas a seguir:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \omega_1 - \omega_2 \\ \bar{\omega} &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\end{aligned}\quad (4.44)$$

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2.$$

Assim, para $\hat{r}_{s_1 s_2}(i, l)$ e $\hat{r}_{s_2 s_1}(i, l)$, teremos:

$$\hat{r}_{s_1 s_2}(i, l) = \sqrt{P_1 P_2} e^{-j(i+l)\frac{\Delta\omega}{2}} e^{j\Delta\theta} e^{j(l-i)\bar{\omega}} \frac{1}{N-L} \left[\sum_{k=L}^{N-1} e^{(k-i)\beta_1} e^{(k-l)\beta_2} [e^{jk\Delta\omega}] \right] \quad (4.45)$$

$$\hat{r}_{s_2 s_1}(i, l) = \sqrt{P_1 P_2} e^{j(i+l)\frac{\Delta\omega}{2}} e^{-j\Delta\theta} e^{j(l-i)\bar{\omega}} \frac{1}{N-L} \left[\sum_{k=L}^{N-1} e^{(k-l)\beta_1} e^{(k-i)\beta_2} [e^{-jk\Delta\omega}] \right]. \quad (4.46)$$

Considerando apenas o caso de sinais não-amortecidos ($\beta_1 = \beta_2 = 0$), teremos após algumas manipulações:

$$\hat{r}_u(i, l) = P_1 e^{(l-i)j\omega_1} + P_2 e^{(l-i)j\omega_2} + 2e^{j(l-i)\bar{\omega}} E_1(N, L, \Delta\theta, \Delta\omega), \quad (4.47)$$

onde destacamos o termo $E_1(N, L, \Delta\theta, \Delta\omega)$ como:

$$E_1(N, L, \Delta\theta, \Delta\omega) = \frac{\sqrt{P_1 P_2}}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} \cos \left[k\Delta\omega - (i+l)\frac{\Delta\omega}{2} + \Delta\theta \right]. \quad (4.48)$$

Podemos observar em (4.48) que a função E_1 depende dos valores de N , L , $\Delta\theta$ e $\Delta\omega$. Conseqüentemente, a estimativa da autocorrelação de $u(n)$ também dependerá desses fatores, mesmo para exponenciais não-amortecidas, diferente do caso anterior ($M=1$). Essa dependência levará, portanto, a uma maior instabilidade dos estimadores obtidos para $M=2$.

Da mesma forma, temos que o vetor $\hat{\mathbf{r}}$ será composto pelos elementos $\hat{r}_u(i)$, para $1 \leq i \leq L$, dados como:

$$\begin{aligned}\hat{r}_u(i) &= \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} \left[\sqrt{P_1} e^{(k-i+1)s_1 + j\theta_1} + \sqrt{P_2} e^{(k-i+1)s_2 + j\theta_2} \right] \left[\sqrt{P_1} e^{(k+1)s_1^* - j\theta_1} + \sqrt{P_2} e^{(k+1)s_2^* - j\theta_2} \right] \\ &= \hat{r}_{s_1}(i) + \hat{r}_{s_1 s_2}(i) + \hat{r}_{s_2 s_1}(i) + \hat{r}_{s_2}(i).\end{aligned}$$

Após as substituições dadas por (4.44), teremos:

$$\hat{r}_{s_1}(i) = P_1 e^{-j(i)\omega_1} e^{(2-i)\beta_1} \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{2k\beta_1} \quad (4.49)$$

$$\hat{r}_{s_1 s_2}(i) = \sqrt{P_1 P_2} e^{-j(i)\bar{\omega}} e^{j(2-i)\frac{\Delta\omega}{2}} e^{j\Delta\theta} \frac{1}{N-L} \left[\sum_{k=L}^{N-1} e^{(k-i+1)\beta_1} e^{(k+1)\beta_2} \left[e^{jk\Delta\omega} \right] \right] \quad (4.50)$$

$$\hat{r}_{s_2 s_1}(i) = \sqrt{P_1 P_2} e^{-j(i)\bar{\omega}} e^{-j(2-i)\frac{\Delta\omega}{2}} e^{-j\Delta\theta} \frac{1}{N-L} \left[\sum_{k=L}^{N-1} e^{(k-i+1)\beta_2} e^{(k+1)\beta_1} \left[e^{-jk\Delta\omega} \right] \right] \quad (4.51)$$

$$\hat{r}_{s_2}(i) = P_2 e^{-j(i)\omega_2} e^{(2-i)\beta_2} \frac{1}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} e^{2k\beta_2}. \quad (4.52)$$

Considerando exponenciais não-amortecidas ($\beta_1 = \beta_2 = 0$), teremos após algumas manipulações:

$$\hat{r}_u(i) = P_1 e^{-j(i)\omega_1} + P_2 e^{-j(i)\omega_2} + 2e^{-j(i)\bar{\omega}} E_2(N, L, \Delta\theta, \Delta\omega) \quad (4.53)$$

onde, mais uma vez, destacamos o termo $E_2(N, L, \Delta\theta, \Delta\omega)$ como:

$$E_2(N, L, \Delta\theta, \Delta\omega) = \frac{\sqrt{P_1 P_2}}{N-L} \sum_{k=L}^{N-1} \cos \left[k\Delta\omega + (2-i)\frac{\Delta\omega}{2} + \Delta\theta \right]. \quad (4.54)$$

As mesmas considerações levantadas para função E_1 , em (4.48), valem para a função E_2 , em (4.54).

Podemos concluir que a análise das correlações envolvendo os termos cruzados torna-se mais complexa na medida em que o número de exponenciais complexas cresce. Observe que não estabelecemos nenhuma hipótese referente à interdependência entre os subsinais $S_1(n)$ e $S_2(n)$, a fim de simplificarmos os resultados obtidos até agora. Para cada situação distinta envolvendo os subsinais $S_1(n)$ e $S_2(n)$, teremos um comportamento diferenciado das correlações, dada pela soma dos cossenos em (4.48) e (4.54). A influência do parâmetro $\Delta\omega$ nas estimativas obtidas será alvo de discussão em capítulos seguintes.

Também podemos concluir que a obtenção da estimativa de autocorrelação de um sinal composto pela soma de exponenciais complexas mostra uma dependência com relação ao número de amostras utilizado. Tal dependência se apresenta em função da ordem do filtro, das diferenças de fase, de frequência e do fator de amortecimento de cada exponencial. Constatamos, ainda, que para uma única exponencial não-amortecida, as estimativas não são influenciadas por variações no número de amostras, ficando relacionadas apenas aos parâmetros do sinal.

A seguir, apresentaremos uma generalização da autocorrelação estimada para um sinal composto por M exponenciais complexas, considerando um caso teórico idealizado.

4.4 Sinal Composto por M Exponenciais Complexas Ortogonais

Na tentativa de se obter expressões mais simples para as estimativas das correlações de $u(n)$ e, conseqüentemente, para a solução de norma-mínima, consideraremos a análise de um caso teórico idealizado.

Caso teórico idealizado:

Para o caso teórico aqui idealizado, consideraremos a obtenção das estimativas das correlações através de um número suficientemente grande de amostras, bem como a hipótese de ergodicidade para o sinal estacionário $u(n)$. Desta forma, poderemos tratar essas estimativas como as próprias correlações estatísticas do sinal.

Essas considerações, aliadas à hipótese de fases aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 2\pi]$, para cada um dos subsinais que compõem o sinal $u(n)$, nos permite estabelecer a ortogonalidade para os subsinais. Desta forma, teremos tais componentes assintoticamente não-correlacionadas com o aumento do número de amostras que participam do cálculo das estimativas das correlações. Conseqüentemente, as parcelas correspondentes às correlações cruzadas entre subsinais distintos serão nulas [30].

Nestas condições podemos escrever:

$$\hat{r}_u(i, l) \cong \sum_{k=1}^M \hat{r}_{s_k}(i, l), \quad 0 \leq i, l \leq L-1,$$

onde, de (4.32), temos:

$$\hat{r}_{s_k}(i, l) = P_k e^{(l-i)j\omega_k} e^{-(i+l)\beta_k} \frac{1}{N-L} \sum_{m=L}^{N-1} e^{2m\beta_k}. \quad (4.55)$$

Da mesma forma, após algumas manipulações, teremos para os elementos de $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\hat{r}(i) \cong \sum_{k=1}^M \hat{r}_{s_k}(i), \quad 1 \leq i \leq L,$$

onde

$$\hat{r}_{s_k}(i) = P_k e^{-i(\beta_k + j\omega_k)} e^{2\beta_k} \frac{1}{N-L} \sum_{m=L}^{N-1} e^{2m\beta_k}. \quad (4.56)$$

Comparando esses resultados com aqueles da seção anterior para $M=2$, podemos notar que as funções E_1 e E_2 , obtidas em (4.48) e (4.54) respectivamente, por representarem uma soma de cossenos, poderão assumir valores no intervalo $[-\sqrt{P_1 P_2}, \sqrt{P_1 P_2}]$, dependendo dos valores de $N, L, \Delta\theta$ e $\Delta\omega$. Estes valores, adicionados às estimativas através do terceiro termo em (4.47) e (4.53), representarão um desvio com relação ao valor da autocorrelação do sinal obtido para o caso teórico idealizado, no qual $E_1(N, M, \Delta\omega, \Delta\theta) = E_2(N, M, \Delta\omega, \Delta\theta) = 0$. Portanto, para valores da função E_1 e E_2 diferentes de zero, as estimativas em (4.55) e (4.56) serão apenas aproximações das verdadeiras correlações do sinal, obtidas na prática.

Explicitando, através de (4.55) e (4.56), as matrizes $\mathbf{A}^H \mathbf{A} = (N - L) \hat{\mathbf{R}}$ e $\mathbf{A}^H \mathbf{b} = (N - L) \hat{\mathbf{r}}$ para o caso não-amortecido ($\beta_k = 0$, para $k = 1, 2, \dots, M$), teremos:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} = (N - L) \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M P_k & \sum_{k=1}^M P_k e^{j\omega_k} & \dots & \sum_{k=1}^M P_k e^{j(L-1)\omega_k} \\ \sum_{k=1}^M P_k e^{-j\omega_k} & \sum_{k=1}^M P_k & \dots & \sum_{k=1}^M P_k e^{j(L-2)\omega_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(L-1)\omega_k} & \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(L-2)\omega_k} & \dots & \sum_{k=1}^M P_k \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

e

$$\mathbf{A}^H \mathbf{b} = (N - L) \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(\omega_k)} \\ \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(2\omega_k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(L\omega_k)} \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

respectivamente.

Note que a matriz $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{A}^H \mathbf{b}$, obtidos em (4.57) e (4.58), definem completamente a solução de norma-mínima, rerepresentada em (4.28).

A consideração de algumas hipóteses, para um caso teórico idealizado, permitiu obter expressões mais simples em (4.57) e (4.58) para as estimativas da matriz de autocorrelação do sinal. Estas são particularmente adequadas para um tratamento via autovalores e autovetores, conforme veremos a seguir.

4.4.1 Autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação

Através de transformações matriciais de similaridade, temos que qualquer matriz Hermitiana composta por exponenciais complexas pode ser escrita como o produto de três outras matrizes, conforme a seguir [9][1][40][37][7]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{P} \mathbf{V}^H, \quad (4.59)$$

onde \mathbf{V} é uma matriz unitária de dimensão $L \times M$, cujas colunas são os autovetores de \mathbf{R} , e \mathbf{P} , para um caso genérico, é uma matriz Gramiana¹ das correlação das amplitudes das exponenciais, com dimensão $M \times M$ [9][1][40].

Para a matriz $\hat{\mathbf{R}}$, obtida na seção anterior, as correlações cruzadas são nulas, e conseqüentemente \mathbf{P} será diagonal.

Considerando a forma Toeplitz da matriz $\hat{\mathbf{R}}$, dada por (4.57) a menos do termo $(N - L)$, pode ser demonstrado que a matriz \mathbf{V} , após sua normalização, terá a forma a seguir [34][32]:

¹uma matriz Gramiana é formada pelo produto interno entre dois vetores.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_M \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j(\omega_1)} & e^{-j(\omega_2)} & \cdots & e^{-j(\omega_M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(L-1)\omega_1} & e^{-j(L-1)\omega_2} & \cdots & e^{-j(L-1)\omega_M} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

onde, com a hipótese de ortogonalidade, devemos ter:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_k^H \mathbf{v}_l] &= 0, & \text{para } k \neq l \\ [\mathbf{v}_k^H \mathbf{v}_k] &= 1, & \text{para } k = l. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Através da inspeção de $\hat{\mathbf{R}}$ em (4.57) e, por conseqüência de (4.60) e (4.61), temos que a matriz \mathbf{P} diagonal, por sua vez, será composta pelos elementos:

$$p_k = LP_k, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

onde P_k é o quadrado da amplitude da k 'ésima exponencial do sinal.

Observando (4.59) temos, de acordo com o *Teorema de Mercer* [9], que se os vetores coluna \mathbf{v}_k , para $k = 1, 2, \dots, M$, são os autovetores ortonormais de \mathbf{R} , então os M elementos da diagonal de \mathbf{P} serão seus autovalores. Portanto, teremos:

$$\mathbf{R}\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k,$$

onde λ_k é autovalor de \mathbf{R} . Como $\mathbf{R} = \mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{V}^H$, teremos:

$$\mathbf{R}\mathbf{v}_k = \mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{V}^H \mathbf{v}_k = \mathbf{V}\mathbf{P}[0 \cdots 1 \cdots 0]_M^t = \mathbf{V}[0 \cdots p_k \cdots 0]_M^t = \mathbf{v}_k p_k$$

Conseqüentemente, teremos:

$$\lambda_k = p_k = LP_k, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (4.62)$$

Desta forma podemos reescrever a matriz $\hat{\mathbf{R}}$ como:

$$\hat{\mathbf{R}} \cong \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H. \quad (4.63)$$

A forma de $\hat{\mathbf{R}}$ dada por (4.63) será útil quando abordarmos, na seção seguinte, a solução de norma-mínima em sua forma explícita.

Considerando a situação prática, na qual utilizamos uma versão estimada da matriz de autocorrelação teórica \mathbf{R} , obtida através da média temporal de N amostras independentes, teremos:

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{k=1}^M \hat{\lambda}_k \hat{\mathbf{v}}_k \hat{\mathbf{v}}_k^H. \quad (4.64)$$

Assim, podemos definir $\hat{\lambda}_k$ e $\hat{\mathbf{v}}_k$ como a seguir:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_k &= \lambda_k + \eta_k \\ \hat{\mathbf{v}}_k &= \mathbf{v}_k + \mathbf{e}_k,\end{aligned}\tag{4.65}$$

onde λ_k e \mathbf{v}_k são, respectivamente, os autovalores e autovetores da matriz de correlação teórica \mathbf{R} . O fator escalar η_k juntamente com o vetor \mathbf{e}_k representam os erros obtidos nas estimativas para um conjunto de N amostras independentes. Demonstra-se que assintoticamente, quando $N \rightarrow \infty$, os erros η_k e \mathbf{e}_k tornam-se variáveis aleatórias Gaussianas conjuntas, com os erros nos autovalores independente dos erros nos autovetores [34].

4.4.2 Explicitando a solução de norma-mínima

Estamos agora em condições de explicitar a solução de norma-mínima em função dos parâmetros do sinal, composto pela soma de M exponenciais complexas não-amortecidas, para o caso teórico idealizado.

Segundo (4.63), a matriz $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ pode ser escrita por:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} \cong (N - L) \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \tag{4.66}$$

onde $(N - L)\lambda_k$, com λ_k dado por (4.62), serão tomados como os autovalores de $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ e \mathbf{v}_k seus respectivos autovetores, para $k = 1, 2, \dots, M$.

A mesma aproximação pode ser utilizada para um filtro do tipo *backward* ou *forward-backward*, respeitando-se as dimensões e definições da matriz de dados \mathbf{A} . No caso do filtro *forward-backward*, devido à alteração na dimensão da matriz de dados \mathbf{A}^H ($L \times 2(N - L)$), os autovalores não nulos da matriz $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ serão dados por $2(N - L)\lambda_k$, para $k = 1, 2, \dots, M$.

Substituindo os resultados obtidos para as matrizes $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ e $\mathbf{A}^H \mathbf{b}$, dadas por (4.66) e (4.58), na solução de norma-mínima dada em (4.28), obtemos:

$$\mathbf{w} = \left((N - L) \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \# (N - L) \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(\omega_k)} \\ \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(2\omega_k)} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^M P_k e^{-j(L\omega_k)} \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

onde o subscrito $\#$ denota pseudo-inversa.

Usando a definição em (2.93) teremos:

$$\left((N - L) \sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right) \# = \left(\frac{1}{N - L} \sum_{k=1}^M \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \right).$$

Substituindo λ_k e \mathbf{v}_k obtidos, respectivamente, em (4.62) e (4.60), teremos, após algumas manipulações, a solução de norma-mínima em sua forma explícita:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_L \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \left(\sum_{k=1}^M \frac{\mathbf{v}_k}{P_k} \mathbf{v}_k^H \right) \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M P_i e^{-j(\omega_i)} \\ \sum_{i=1}^M P_i e^{-j(2\omega_i)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M P_i e^{-j(L\omega_i)} \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Expandindo os termos em (4.68) e rearranjando os somatórios, teremos:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{LP_k} e^{-j(\omega_i)} e^{jl(\omega_k - \omega_i)} \\ \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{LP_k} e^{-j2(\omega_i)} e^{j(l-1)(\omega_k - \omega_i)} \\ \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{LP_k} e^{-j3(\omega_i)} e^{j(l-2)(\omega_k - \omega_i)} \\ \vdots \\ \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{LP_k} e^{-jL(\omega_i)} e^{j(l-L+1)(\omega_k - \omega_i)} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

ou, de outra forma:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^M \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\omega_k} \\ e^{-2j\omega_k} \\ \vdots \\ e^{-(L-1)j\omega_k} \end{bmatrix} \frac{P_i}{LP_k} e^{-j(\omega_i)} e^{jl(\omega_k - \omega_i)}. \quad (4.70)$$

Podemos observar através de (4.70) que a solução de norma-mínima depende da diferença entre as freqüências angulares das exponenciais do sinal e da relação entre suas potências.

Para um sinal composto por uma única exponencial complexa não-amortecida, com freqüência angular ω_1 , poderemos simplificar a solução obtida em (4.70) fazendo $M=1$, obtendo:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} e^{-j\omega_1} \\ e^{-2j\omega_1} \\ e^{-3j\omega_1} \\ \vdots \\ e^{-Lj\omega_1} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Podemos notar que o resultado em (4.71), quando calculado para $L = 2$, é idêntico ao dado pela Expressão (4.21), obtida diretamente da minimização da norma do vetor \mathbf{w} , supondo uma solução ótima. Essa equivalência de resultados nos leva a validar a solução dada por (4.71) como solução de norma-mínima para um filtro preditor de ordem L otimizado para um sinal composto por uma única exponencial complexa não-amortecida.

Para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, com freqüências angulares ω_1 e ω_2 , fazendo $M=2$ em (4.69), teremos:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{L} e^{-j(\omega_1)} + \frac{P_2}{LP_1} e^{-j(\omega_2)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[\frac{P_1}{LP_2} e^{-j(\omega_1)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + \frac{1}{L} e^{-j(\omega_2)} \right] \\ \left[\frac{1}{L} e^{-2j(\omega_1)} + \frac{P_2}{LP_1} e^{-j(\omega_2+\omega_1)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[\frac{P_1}{LP_2} e^{-j(\omega_1+\omega_2)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + \frac{1}{L} e^{-2j(\omega_2)} \right] \\ \left[\frac{1}{L} e^{-3j(\omega_1)} + \frac{P_2}{LP_1} e^{-j(\omega_2+2\omega_1)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[\frac{P_1}{LP_2} e^{-j(\omega_1+2\omega_2)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + \frac{1}{L} e^{-3j(\omega_2)} \right] \\ \vdots \\ \left[\frac{1}{L} e^{-Lj(\omega_1)} + \frac{P_2}{LP_1} e^{-j(\omega_2+(L-1)\omega_1)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[\frac{P_1}{LP_2} e^{-j(\omega_1+(L-1)\omega_2)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + \frac{1}{L} e^{-Lj(\omega_2)} \right] \end{bmatrix}$$

Considerando potências iguais para as exponenciais complexas, isto é, $P_1 = P_2$, teremos:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{L^2} \sum_{l=0}^{L-1} \begin{bmatrix} \left[e^{-j(\omega_1)} + e^{-j(\omega_2)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[e^{-j(\omega_1)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + e^{-j(\omega_2)} \right] \\ \left[e^{-2j(\omega_1)} + e^{-j(\omega_2+\omega_1)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[e^{-j(\omega_1+\omega_2)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + e^{-2j(\omega_2)} \right] \\ \left[e^{-3j(\omega_1)} + e^{-j(\omega_2+2\omega_1)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[e^{-j(\omega_1+2\omega_2)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + e^{-3j(\omega_2)} \right] \\ \vdots \\ \left[e^{-Lj(\omega_1)} + e^{-j(\omega_2+(L-1)\omega_1)} e^{-jl(\omega_2-\omega_1)} \right] + \left[e^{-j(\omega_1+(L-1)\omega_2)} e^{-jl(\omega_1-\omega_2)} + e^{-Lj(\omega_2)} \right] \end{bmatrix}$$

Utilizando as convenções apresentadas em (4.44), teremos:

$$\mathbf{w} = \frac{e^{-j\bar{\omega}}}{L^2} \begin{bmatrix} 2L \cos(\Delta\omega/2) + \sum_{l=0}^{L-1} 2 \cos((2l+1)\Delta\omega/2) \\ 2L \cos(\Delta\omega) + \sum_{l=0}^{L-1} 2 \cos(l\Delta\omega) \\ 2L \cos(3\Delta\omega/2) + \sum_{l=0}^{L-1} 2 \cos((2l-1)\Delta\omega/2) \\ \vdots \\ 2L \cos(L\Delta\omega/2) + \sum_{l=0}^{L-1} 2 \cos((2l-(L-2))\Delta\omega/2) \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

Através da suposição de frequências angulares bem próximas entre si, poderemos simplificar a solução de norma-mínima para um sinal composto por M exponenciais complexas, dada em (4.70). Neste caso particular, consideraremos $(\omega_k - \omega_i) \rightarrow 0$, para $i, k = 1, 2, \dots, M$, e potências iguais para as exponenciais. Conseqüentemente, o resultado obtido em (4.70) será dado por:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M}{L} \sum_{i=1}^M e^{-j(\omega_i)} \\ \frac{M}{L} \sum_{i=1}^M e^{-j2(\omega_i)} \\ \vdots \\ \frac{M}{L} \sum_{i=1}^M e^{-jL(\omega_i)} \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

A situação considerada para obtenção de (4.73) se aplica perfeitamente em aplicações práticas que exigem alta resolução.

As soluções para o filtro preditor de norma-mínima obtidas em (4.70), (4.71), (4.72) e (4.73), apesar de baseadas em um caso teórico idealizado, permitem uma formulação mais simples e

bastante adequada para a análise das características dos zeros do polinômio associado. Note que essas soluções apresentam uma relação relativamente simples entre os coeficientes do filtro preditor e os parâmetros do sinal observado.

4.5 Outra Formulação para Solução de Norma-mínima

Considere a forma aumentada de uma matriz de dados genérica \mathbf{A} como:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

e a resposta impulsiva do filtro de erro de predição, dada pelo vetor \mathbf{w}' , como:

$$\mathbf{w}' = [1, \mathbf{w}^t]^t = [1 \quad w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_L]^t. \quad (4.75)$$

Utilizando (4.75) e (4.74), poderemos reescrever a equação normal, dada pela Expressão (2.55), como [3]:

$$\mathbf{A}'\mathbf{w}' = \mathbf{0}. \quad (4.76)$$

Multiplicando ambos os lados de (4.76) por $(\mathbf{A}')^H$ e definindo a matriz de autocorrelação aumentada \mathbf{R}' , de dimensões $(L+1) \times (L+1)$, como $\mathbf{R}' = (\mathbf{A}')^H \mathbf{A}'$, teremos:

$$\mathbf{R}'\mathbf{w}' = \mathbf{0}. \quad (4.77)$$

Desde que \mathbf{A}' tenha posto M , \mathbf{R}' terá M autovalores não nulos e $L - M + 1$ autovalores nulos. Portanto, reescrevendo \mathbf{R}' em (4.77) através de seus autovalores λ_k e autovetores \mathbf{v}_k , teremos:

$$\sum_{k=1}^M \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H \mathbf{w}' = \mathbf{0}. \quad (4.78)$$

Desta forma, observando (4.78), temos que a Equação (4.77) só será verdadeira se o vetor \mathbf{w}' for ortogonal aos autovetores \mathbf{v}_k de \mathbf{R}' associados aos autovalores não nulos, os quais definem o subespaço de sinal.

Portanto, sabendo que os autovetores associados ao subespaço de sinal são ortogonais aos autovetores associados aos autovalores nulos de \mathbf{R}' , podemos concluir que o vetor solução do filtro de erro de predição \mathbf{w}' deverá pertencer ao subespaço definido pelos autovetores associados aos autovalores nulos de \mathbf{R}' , denominado de espaço nulo de \mathbf{R}' [1][40].

Pode ser demonstrado que o subespaço de sinal de \mathbf{R}' é definido pelos M vetores colunados da forma a seguir [34]:

$$\mathbf{s}_i = \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega_i} & e^{2j\omega_i} & \cdots & e^{Lj\omega_i} \end{bmatrix}^t, \text{ para } i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.79)$$

Portanto, o produto interno $\langle \mathbf{w}', \mathbf{s}_i \rangle$ será nulo para $i = 1, 2, \dots, M$. Logo, teremos:

$$\langle \mathbf{w}', \mathbf{s}_i \rangle = 1 - \sum_{k=1}^L w_k^* e^{-jk\omega_i} = 0, \text{ para } i=1,2,\dots,M. \quad (4.80)$$

A Expressão (4.80) pode ser reconhecida como a função de transferência do filtro de erro de predição obtida sobre a circunferência de raio unitário em $z = e^{j\omega_i}$, para $i = 1, 2, \dots, M$. Portanto, a função $W(z)$ terá M de seus zeros localizados sobre a circunferência de raio unitário, como já havíamos mencionado anteriormente.

Vamos definir agora \mathbf{E}_s como:

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.81)$$

onde \mathbf{e}_1 é o vetor que representa a primeira linha de \mathbf{E}_s e \mathbf{E}_2 é a matriz, de dimensões $(L-1) \times M$, formada pelas linhas restantes de \mathbf{E}_s . Considerando a solução de norma-mínima, onde $[1, \mathbf{w}^t]^t$ é o vetor ortogonal ao subespaço de sinal que apresenta a menor norma Euclidiana, podemos reescrever (4.80) como:

$$[1, \mathbf{w}^H] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.82)$$

Após algumas manipulações matriciais, obtemos:

$$\mathbf{E}_2^H \mathbf{w} = -\mathbf{e}_1^H. \quad (4.83)$$

Logo, a solução de norma-mínima será dada por [12][13]:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_L \end{bmatrix}^t = -(\mathbf{E}_2^H)^{\#} \mathbf{e}_1^H = \frac{-(\mathbf{E}_2) \mathbf{e}_1^H}{(1 - \|\mathbf{e}_1\|^2)}. \quad (4.84)$$

A última igualdade em (4.84) pode ser obtida usando a ortogonalidade das colunas de \mathbf{E}_s e o lema da inversão de matriz [19].

Pode ser verificado que, apesar da formulação diferente, o resultado em (4.84) leva ao mesmo filtro obtido em (4.67), para um mesmo conjunto de autovalores e autovetores. Portanto, o conhecimento dos autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação estimada são suficientes para a determinação da solução de norma-mínima em ambas as formulações.

Assim como a solução obtida em (4.67) para um sinal dado por (3.1), a solução obtida em (4.84) é ótima e apresenta norma-mínima, tendo os zeros de sinal $z_i = e^{j\omega_i}$, para $i=1,2,\dots,M$, como raízes do polinômio $W(z)$ [34].

Através do estudo da solução de norma-mínima, explicitada por (4.67) ou (4.84), poderemos obter algumas características interessantes sobre o comportamento dos zeros do filtro de erro de predição associado ao sinal, conforme veremos no capítulo seguinte.

4.6 Conclusão

A teoria desenvolvida neste capítulo permitiu explicitar a solução de norma-mínima para preditores lineares com relação aos parâmetros do sinal, para um sinal composto pela soma de exponenciais complexas.

Observamos que, quando o número de amostras disponíveis do sinal é limitado, ocorre uma degradação na qualidade dos estimadores de correlação do sinal e, conseqüentemente, um desvio na solução de norma-mínima em relação à solução teórica obtida em condições ideais.

As expressões para os desvios dos estimadores da correlação do sinal, com relação a correlação teórica, foram obtidas para um sinal composto por duas exponenciais complexas e permitiram constatar a sua dependência com a diferença entre as frequências e as fases de cada exponencial, bem como em relação à ordem do filtro utilizado.

A solução de norma-mínima também foi obtida para um caso idealizado, através da decomposição em autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação teórica do sinal.

Os coeficientes do filtro preditor, obtidos pela solução de norma-mínima para o caso idealizado, mostraram uma relação relativamente simples com os parâmetros do sinal. Tais resultados serão úteis em capítulos seguintes quando faremos uso dessas características para a obtenção de melhores resultados na detecção de frequências de um sinal sujeito a ruído.

Os conceitos de subespaço e espaço nulo de um sinal também foram apresentados através de uma outra formulação para solução de norma-mínima. Pudemos constatar que a determinação do subespaço de um sinal ou seu complemento ortogonal, denominado de espaço nulo, definem unicamente e completamente o filtro preditor de norma-mínima a ele associado.

Capítulo 5

Caracterizando os Zeros da Solução de Norma-mínima

5.1 Introdução

Como foi enfatizado no Capítulo 3, os zeros do preditor *forward-backward* possibilita a estimação das frequências do sinal observado.

O conhecimento do comportamento desses zeros torna-se mais importante para o caso de sinais ruidosos. Neste caso, a distinção entre os zeros de sinal e estranhos não é tão simples, mesmo para sinais não-amortecidos.

Este capítulo tem como objetivo estabelecer relações simples entre os zeros do filtro preditor, os coeficientes do filtro de norma-mínima e os parâmetros desconhecidos do sinal observado. Para tanto, estudaremos algumas aproximações para solução de norma-mínima obtida no capítulo anterior.

Os resultados obtidos também poderão ser úteis em outros tipos de problemas onde a obtenção dos zeros relativos a um determinado processo é colocada como ponto de partida para a estimativa de seus parâmetros.

Ao final do capítulo será discutido o efeito da aplicação do preditor em sinais ruidosos, sob o ponto de vista da proximidade dos zeros do filtro à CRU.

5.2 Relacionando os Coeficientes do Filtro e Seus Zeros

Através dos resultados obtidos no capítulo anterior pudemos concluir que, para um sinal composto por M exponenciais complexas não-amortecidas, com frequências angulares próximas, a solução de norma-mínima para o filtro preditor estará diretamente relacionada com as frequências contidas no sinal e a ordem desse filtro, conforme a Equação (4.73).

Reescrevendo a solução em (4.73), teremos:

$$w_i = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^M e^{-j(i)\omega_k} = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^M [\cos(i\omega_k) - j\text{sen}(i\omega_k)], \quad (5.1)$$

de onde obtemos para o módulo dos coeficientes:

$$|w_i| = \frac{M}{L} \left[\sqrt{\left(\sum_{k=1}^M \operatorname{sen}(i\omega_k) \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^M \cos(i\omega_k) \right)^2} \right] \quad (5.2)$$

e para a fase:

$$\phi_i = \arctan \left(\frac{\sum_{k=1}^M \operatorname{sen}(i\omega_k)}{\sum_{k=1}^M \cos(i\omega_k)} \right). \quad (5.3)$$

Particularmente, quando $M = 2$, podemos simplificar as Expressões (5.2) e (5.3) utilizando a identidade:

$$\left[e^{-j(i)\omega_1} + e^{-j(i)\omega_2} \right] = e^{-j(i)\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)} \left[e^{-j(i)\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)} + e^{j(i)\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)} \right]. \quad (5.4)$$

Levando em conta na expressão acima que $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ e $\bar{\omega} = \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$, e substituindo o resultado em (5.1) para $M = 2$, teremos:

$$w_i = \frac{4}{L} \cos \left(i \frac{\Delta\omega}{2} \right) e^{-j(i)\bar{\omega}}, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (5.5)$$

de onde obtemos:

$$|w_i| = \frac{4}{L} \cos \left(i \frac{\Delta\omega}{2} \right) \quad (5.6)$$

e para fase:

$$\phi_i = -i \bar{\omega}. \quad (5.7)$$

Demonstraremos, no decorrer do capítulo, que um polinômio formado por coeficientes como aqueles da Expressão (5.5) possui uma distribuição de seus zeros aproximadamente uniforme e simétrica conjugada em relação ao eixo determinado por $\bar{\omega}$.

A distribuição aproximadamente uniforme dos zeros do filtro preditor é uma característica já conhecida da solução otimizada, visto que o filtro preditor funciona como um filtro “branqueador” do sinal de entrada, minimizando a potência do erro de predição. Veremos que tal uniformidade depende também do espaçamento entre as frequências contidas no sinal observado.

Quanto a simetria apresentada pela distribuição, apesar de facilmente constatada, não tem sido caracterizada ou mesmo explorada devidamente.

A seguir, apresentaremos algumas características do polinômio associado ao filtro dado pela solução de norma-mínima, denominado daqui em diante como filtro de norma-mínima. Tais características serão úteis quando abordarmos a distribuição dos zeros do preditor.

5.2.1 Efeito de uma rotação sobre os zeros do preditor

Considere um polinômio $W(z)$ de ordem L com raízes z_1, z_2, \dots, z_L . Se deslocarmos todas as raízes desse polinômio de um ângulo θ qualquer, poderemos relacioná-las a um novo polinômio $W'(z)$, também de ordem L , com raízes z'_1, z'_2, \dots, z'_L .

Escrevendo o polinômio $W(z)$ através de suas raízes, teremos:

$$\begin{aligned} W(z) &= (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \cdots (1 - z_L z^{-1}) \\ &= \prod_{i=1}^L (1 - z_i z^{-1}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Desenvolvendo o produto em (5.8), poderemos escrever os coeficientes de $W(z)$ como:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ w_1 &= z_1 + z_2 + \cdots + z_L = \sum_{i=1}^L z_i \\ w_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + \cdots + z_{L-1} z_L = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^L z_i z_j \\ w_3 &= \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^L z_i z_j z_k \\ &\vdots \\ w_L &= z_1 z_2 z_3 \cdots z_L = \prod_{i=1}^L z_i. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Após um deslocamento angular no plano Z , dado por θ , aplicado às raízes de $W(z)$, teremos $z'_1 = z_1 e^{j\theta}$, $z'_2 = z_2 e^{j\theta}$ e assim sucessivamente para todos os zeros de $W(z)$. Logo, os coeficientes de $W'(z)$ estarão relacionados aos coeficientes de $W(z)$, conforme a seguir:

$$\begin{aligned} w'_0 &= 1 \\ w'_1 &= \sum_{i=1}^L z'_i = \sum_{i=1}^L z_i e^{j\theta} = e^{j\theta} \sum_{i=1}^L z_i = e^{j\theta} w_1 \\ w'_2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^L z'_i z'_j = e^{j2\theta} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^L z_i z_j = e^{j2\theta} w_2 \\ w'_3 &= \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^L z'_i z'_j z'_k = e^{j3\theta} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^L z_i z_j z_k = e^{j3\theta} w_3 \\ &\vdots \\ w'_L &= \prod_{i=1}^L z'_i = e^{jL\theta} \prod_{i=1}^L z_i = e^{jL\theta} w_L. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Podemos concluir, então, que uma rotação no plano Z de um ângulo θ na posição das raízes de um polinômio $W(z)$, poderá ser representada por um novo polinômio $W'(z)$, cujos coeficientes serão dados por:

$$w'_i = e^{j(i)\theta} w_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, L. \quad (5.11)$$

Note que $|w'_i| = |w_i|$ para i qualquer. Conseqüentemente, teremos:

$$\|\mathbf{w}'\| = \|\mathbf{w}\|, \quad (5.12)$$

onde \mathbf{w}' e \mathbf{w} representam o vetor composto pelos coeficientes do polinômio $W'(z)$ e $W(z)$, respectivamente. O resultado em (5.12) mostra que a norma do vetor associado a um polinômio é invariante à rotação de suas raízes no plano Z .

Através de (5.5), podemos observar que a solução de norma-mínima para duas exponenciais complexas não-amortecidas pode ser escrita na forma apresentada em (5.11). Conseqüentemente, tal solução poderá ser interpretada por um outro polinômio que sofreu uma rotação em seus zeros, dada por θ . Um polinômio com essas características possui uma simetria no posicionamento de seus zeros, pois sempre poderemos escolher um valor adequado para θ em (5.11), tal que o novo polinômio de norma-mínima formado possua apenas coeficientes reais e, conseqüentemente, apresente seus zeros posicionados sobre o eixo real ou em pares complexos conjugados, tendo, assim, uma distribuição simétrica em relação ao eixo real. Podemos concluir, portanto, que a solução de norma-mínima possui uma simetria no posicionamento de seus zeros com relação a um eixo determinado por $\bar{\omega}$.

Visto que uma rotação dos zeros não afeta a norma da solução encontrada, poderemos generalizar a solução de norma-mínima para o filtro preditor, a partir de uma solução simétrica em relação ao eixo real, e posteriormente estendê-la para outras situações, com outros eixos de simetria, através de uma rotação adequada em seus coeficientes. Esse ângulo de rotação será dado por $\theta = \bar{\omega}$ e dependerá das freqüências envolvidas no sinal observado. Desta forma, a solução encontrada para exponenciais complexas conjugadas poderá ser estendida para exponenciais com freqüências quaisquer, através de uma rotação de todo conjunto de zeros do plano Z , mantendo-se constante as relações entre os espaçamentos de todos os zeros.

A partir de agora, a solução de norma-mínima, obtida para duas exponenciais complexas não-amortecidas, será interpretada como uma solução simétrica conjugada em relação ao eixo real do plano Z , com seus coeficientes deslocados por um ângulo $\theta = \bar{\omega}$, que representa a média aritmética das freqüências angulares do sinal.

Portanto, se a solução de norma-mínima para um sinal composto por duas exponenciais complexas conjugadas é dada por $W(z)$, teremos como solução de norma-mínima para este sinal, com freqüências angulares ω_1 e ω_2 , o filtro dado pelo polinômio $W'(z)$, com $\theta = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = \bar{\omega}$.

Para um sinal composto por uma exponencial complexa ($M = 1$), teremos uma distribuição dos zeros simétrica conjugada em relação ao eixo determinado pela única freqüência angular presente no sinal e, neste caso, $\theta = \omega_1$.

Para um sinal composto por mais de duas exponenciais complexas, acreditamos que a solução de norma-mínima ainda apresente uma simetria dada por uma média ponderada das freqüências angulares do sinal, porém essa constatação não é tão simples como para os casos apresentados e será deixada para pesquisas futuras.

Tais conclusões a respeito da solução de norma-mínima para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas nos permite afirmar que tal solução não depende dos valores das freqüências do sinal, mas sim da sua diferença.

Esse procedimento de generalização da solução de norma-mínima para uma forma simétrica permite, também, reduzir o esforço computacional na obtenção dos zeros do filtro preditor, através do uso de polinômios com coeficientes reais.

5.2.2 Efeito do espaçamento entre as freqüências do sinal

De acordo com os resultados do capítulo anterior, desconsiderando a diferença de fase entre cada exponencial complexa, podemos dizer que a influência do espaçamento entre as freqüências na solução de norma-mínima se deve, principalmente, à sensibilidade das estimativas da autocorrelação do sinal em relação às correlações cruzadas entre as componentes de freqüências

distintas. Esta influência pode ser constatada através das funções E_1 e E_2 apresentadas no capítulo anterior. Componentes com frequências muito próximas apresentam, naturalmente, forte correlação, enquanto que o contrário ocorre para componentes com frequências mais afastadas.

Observa-se que a diferença entre as fases iniciais das exponenciais também leva a um efeito semelhante na alteração da magnitude das correlações cruzadas, para um mesmo conjunto de frequências [41].

Analisaremos a seguir, sem perda de generalidade, conforme visto na seção anterior, a solução de norma-mínima para duas exponenciais não-amortecidas e complexas conjugadas com frequências angulares ω_1 e ω_2 , onde $\omega_1 = -\omega_2 = \omega_0$.

Tomando o polinômio $W(z)$ otimizado para esse sinal de entrada, a solução de norma-mínima poderá ser obtida fixando-se dois zeros de $W(z)$ associados ao sinal, em $z_1 = e^{-j\omega_0}$ e $z_2 = e^{j\omega_0}$, conforme a seguir:

$$\begin{aligned} W(z) &= (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})G_{L-2}(z) \\ &= (1 - 2 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) z^{-1} + z^{-2})G_{L-2}(z), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\omega_0$ e $G_{L-2}(z)$ é um polinômio de ordem $L - 2$, cujos coeficientes serão escolhidos de tal forma que a norma do vetor \mathbf{w} seja minimizada. Manteremos $\Delta\omega$ nas expressões por questão de conveniência para conclusões futuras.

Tomando como ilustração o caso em que $L = 3$, teremos:

$$G_1(z) = (1 - \rho z^{-1}), \quad (5.14)$$

onde ρ corresponde ao único zero restante da distribuição que não está diretamente associado ao sinal. Note que, para um polinômio simétrico em relação ao eixo real, devemos ter ρ posicionado sobre o eixo real do plano Z . Para que o vetor associado aos coeficientes de $W(z)$ apresente norma-mínima, devemos obter o valor de ρ adequadamente.

Substituindo (5.14) em (5.13) e explicitando os coeficientes de $W(z)$, teremos:

$$W(z) = 1 - \left(2 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) + \rho\right) z^{-1} + \left(2\rho \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) + 1\right) z^{-2} - \rho z^{-3}. \quad (5.15)$$

Logo, a norma ao quadrado do vetor \mathbf{w} , formado pelos coeficientes de $W(z)$ em (5.15), será:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = 1 + 2\rho^2 + 8\rho \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) + 4(1 + \rho^2) \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right). \quad (5.16)$$

Agora, para obter ρ que minimiza $\|\mathbf{w}\|^2$, devemos ter:

$$\frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial \rho} = 4\rho + 8 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) + 8\rho \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) = 0, \quad (5.17)$$

de onde obtemos:

$$\rho = -\frac{2 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}{\left(1 + 2 \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)\right)}. \quad (5.18)$$

Podemos notar que para cada espaçamento entre as frequências, dado por $\Delta\omega$, teremos um valor diferente para ρ que minimiza a norma do vetor w e, conseqüentemente, um posicionamento diferente para o conjunto de zeros do filtro preditor assim obtido.

Para ordens mais elevadas do filtro ($L > 3$), acreditamos que dependências semelhantes deverão ser observadas para os L-M zeros restantes, porém a relação explícita para esses casos torna-se de difícil obtenção, principalmente para um espaçamento $\Delta\omega$ qualquer. Por esse motivo, achamos conveniente separar a análise em duas situações distintas, na qual a primeira trata de casos em que as frequências do sinal se encontram próximas entre si e a outra dos casos em que as mesma se encontram bem espaçadas.

Analisaremos neste trabalho, de forma aproximada, a solução de norma-mínima apenas para a situação em que as frequências apresentam um espaçamento significativamente pequeno. Essa situação é a mais adequada para o estudo de métodos de detecção de alta resolução.

5.3 Solução de Norma-mínima Aproximada

A solução de norma-mínima genérica, apresentada em (4.68), foi obtida através da hipótese de independência entre as exponenciais que compõem o sinal. Para o caso de frequências próximas entre si, frente ao número limitado de amostras do sinal, essa hipótese falha e o resultado assim obtido não mais corresponderá a situação verdadeira. O limite para a validade de tal hipótese será discutido na seção seguinte, tomando-se como referência a aproximação aqui obtida.

Pretendemos obter a solução de norma-mínima para o caso de duas exponencias complexas, com frequências próximas, através de uma aproximação linear da solução ótima obtida em (4.73).

A aproximação proposta aqui consiste na obtenção de uma aproximação linear da função cosseno, presente em (5.5), válida para o intervalo $[0, \pi]$. Neste intervalo a função cosseno é monotonamente decrescente e poderá ser aproximada por uma reta. Tal reta será quantizada em L níveis neste intervalo, dando origem a uma função discreta em forma de escada, a qual fornecerá a aproximação desejada para a função discreta do cosseno. A Figura 5.1 mostra graficamente um esboço da aproximação considerada.

Portanto, os coeficientes do filtro preditor de ordem L serão dados, agora, da seguinte forma:

$$w_k = a + (k - 1)b, \quad 1 \leq k \leq L \quad (5.19)$$

onde a e b são variáveis reais a serem determinadas de acordo com o espaçamento angular entre as frequências do sinal na entrada do filtro.

Logo, para cada valor de $\Delta\omega$, teremos uma reta distinta do ponto $4 \cdot \cos(\Delta\omega/2)/L$ ao ponto $4 \cdot \cos(L\Delta\omega/2)/L$ para aproximar os valores da função $4 \cdot \cos(i\Delta\omega/2)/L$, para $i = 2, 3, \dots, L - 1$.

Através da Figura 5.1, temos que as variáveis a e b serão dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} a &= \frac{4}{L} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) \\ b &= -\frac{1}{(L-1)} \left[\frac{4}{L} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right) - \frac{4}{L} \cos\left(L\frac{\Delta\omega}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Devido ao processo de linearização, tais escolhas para a e b não garantem mais a minimização do erro quadrático médio da solução original. Para contornar esse problema faremos uma outra

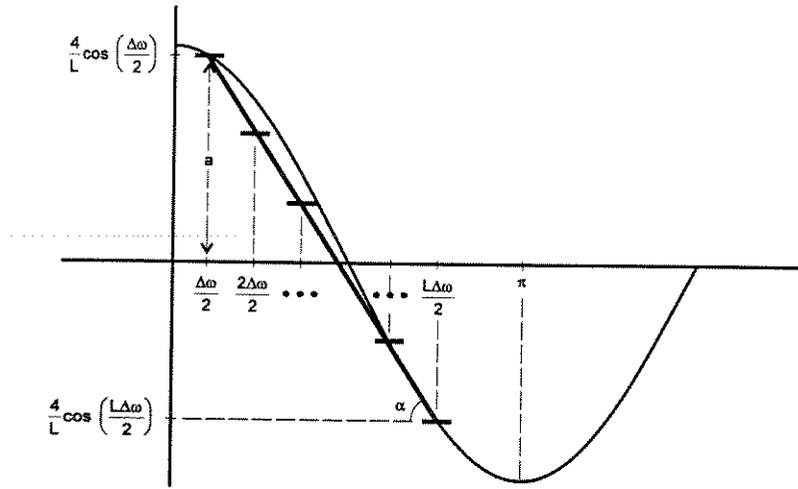


Figura 5.1: Aproximação linear para a função cosseno no intervalo $[\Delta\omega/2, L\Delta\omega/2]$.

escolha para os parâmetros da aproximação (a, b) , que garanta tal minimização e ofereça uma solução otimizada. Por questão de simplicidade, a nova escolha para a e b será obtida a seguir para um caso assintótico, em que $\Delta\omega \rightarrow 0$. A validade dos resultados obtidos para este caso será considerada na seção seguinte.

No caso de um filtro otimizado para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, podemos escolher $z_1 = e^{j\omega_1}$ e $z_2 = e^{j\omega_2}$ como os dois zeros de sinal do filtro. Considerando ainda exponenciais complexas conjugadas, teremos $z_1 = z_2^*$. Conseqüentemente, para o caso assintótico ($\Delta\omega \rightarrow 0$), teremos os dois zeros de sinal coincidentes, com $z_1 = z_2 = 1$. Neste caso, o polinômio relativo ao filtro predictor, formado pelos coeficientes dados por (5.19), poderá ser escrito como:

$$W_L(z) = (1 - z^{-1})(1 - z^{-1})G(z), \quad (5.21)$$

onde $G(z)$ é um polinômio de ordem $L - 2$ que determina a posição dos zeros restantes.

A solução de norma-mínima poderá ser então obtida através da escolha de a e b , tal que $W_L(z)$ seja divisível por $(1 - z^{-1})(1 - z^{-1})$ e apresente a menor norma possível.

Dividindo, inicialmente, $W_L(z)$ por $(1 - z^{-1})$, com $W_L(z)$ formado pelos coeficientes dados em (5.19), teremos:

$$\frac{W_L(z)}{(1 - z^{-1})} = \frac{1 - az^{-1} - (a + b)z^{-2} - \dots - (a + (L - 1)b)z^{-L}}{(1 - z^{-1})} = H(z). \quad (5.22)$$

Tomando $H(z) = 1 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_{L-1}z^{-(L-1)}$, e como $H(z)(1 - z^{-1}) = W_L(z)$, obtemos:

$$(1 + h_1z^{-1} + h_2z^{-2} + \dots + h_{L-1}z^{-(L-1)}) - (z^{-1} + h_1z^{-2} + h_2z^{-3} + \dots + h_{L-1}z^{-L}) = W_L(z), \quad (5.23)$$

que expandindo nos fornece:

$$1 - (1 - h_1)z^{-1} - (h_1 - h_2)z^{-2} - (h_2 - h_3)z^{-3} - \dots - (h_{L-1})z^{-L} = W_L(z). \quad (5.24)$$

Comparando os coeficientes de ambos os lados de (5.24), temos que:

$$\begin{array}{rcccccl}
 w_L & = & h_{L-1} & = & a + (L-1)b & \\
 w_{L-1} & = & h_{L-2} - h_{L-1} & = & a + (L-2)b & \\
 w_{L-2} & = & h_{L-3} - h_{L-2} & = & a + (L-3)b & \\
 \dots & & \vdots & & \vdots & \\
 \dots & & \vdots & & \vdots & \\
 w_2 & = & h_1 - h_2 & = & a + b & \\
 w_1 & = & 1 - h_1 & = & a. &
 \end{array} \tag{5.25}$$

Podemos concluir, através das relações em (5.25), que os coeficientes de $H(z)$ obedecem a seguinte lei de formação:

$$h_k = (L - k)a + \sum_{i=1}^{L-k} (L - i)b, \quad 1 \leq k \leq L - 1, \tag{5.26}$$

com $h_1 = 1 - a$, conforme (5.25).

Para uma divisão exata, devemos ter o resto da divisão em (5.22) igual a zero e, conseqüentemente, $h_1 = 1 - a$ conforme (5.25). Portanto, teremos uma primeira equação relacionando a e b dada por:

$$h_1 = (L - 1)a + \sum_{i=1}^{L-1} (L - i)b = 1 - a, \tag{5.27}$$

ou seja:

$$La + \sum_{i=1}^{L-1} (L - i)b = 1. \tag{5.28}$$

Dividindo agora $H(z)$, dado pelos coeficientes h_k em (5.26), por $(1 - z^{-1})$, teremos como resultado um outro polinômio $G(z)$ de ordem $L - 2$, como a seguir:

$$\frac{H(z)}{(1 - z^{-1})} = \frac{1 + (1 - a)z^{-1} + ((L - 2)a + \sum_{i=1}^{L-2} (L - i)b)z^{-2} + \dots + (a + (L - 1)b)z^{-(L-1)}}{(1 - z^{-1})} = G(z).$$

Tomando $G(z) = 1 - g_1z^{-1} - g_2z^{-2} - \dots - g_{L-2}z^{-(L-2)}$, e como $G(z)(1 - z^{-1}) = H(z)$, obtemos:

$$(1 - g_1z^{-1} - g_2z^{-2} - \dots - g_{L-2}z^{-(L-2)}) - (z^{-1} - g_1z^{-2} - g_2z^{-3} - \dots - g_{L-2}z^{-(L-1)}) = H(z), \tag{5.29}$$

que expandindo nos fornece:

$$1 + (-1 - g_1)z^{-1} + (g_1 - g_2)z^{-2} + (g_2 - g_3)z^{-3} + \dots + (g_{L-2})z^{-(L-1)} = H(z). \tag{5.30}$$

Comparando os coeficientes de ambos os lados de (5.30), temos que:

$$\begin{aligned}
 h_{L-1} &= g_{L-2} = a + (L-1)b \\
 h_{L-2} &= g_{L-3} - g_{L-2} = 2a + \sum_{i=1}^2 (L-i)b \\
 h_{L-3} &= g_{L-4} - g_{L-3} = 3a + \sum_{i=1}^3 (L-i)b \\
 &\vdots \\
 h_2 &= g_1 - g_2 = (L-2)a + \sum_{i=1}^{L-2} (L-i)b \\
 h_1 &= -1 - g_1 = 1 - a,
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

de onde concluímos que os coeficientes de $G(z)$ serão dados por:

$$g_k = \sum_{i=1}^{L-k-1} ia + \sum_{j=1}^{L-k-1} \sum_{i=1}^j (L-i)b, \quad 1 \leq k \leq L-2, \tag{5.32}$$

com $g_1 = a - 2$, conforme (5.31).

Mais uma vez, para uma divisão exata, devemos ter o resto da divisão $H(z)/(1-z^{-1})$ igual a zero e, conseqüentemente, $g_1 = a - 2$ conforme (5.31). Portanto, fazendo $g_1 = a - 2$ em (5.32), teremos, após algumas manipulações nos índices dos somatórios, uma segunda equação relacionando a e b , dada por:

$$\sum_{i=1}^{L-1} ia + \sum_{j=1}^{L-1} \sum_{i=1}^j (L-i)b = -1, \tag{5.33}$$

onde, para simplificar, fizemos uso da equação em (5.28).

As Equações (5.28) e (5.33) formam um sistema suficiente para determinar os valores de a e b . Após o desenvolvimento dos somatórios em (5.28) e (5.33), teremos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} La + \frac{(L-1)L}{2}b = 1 \\ \frac{L(L-1)}{2}a + \frac{L(L-1)(2L-1)}{6}b = -1. \end{cases} \tag{5.34}$$

Resolvendo o sistema em (5.34) para a e b , obtemos:

$$a = \frac{4}{L} \quad \text{e} \quad b = -\frac{6}{L(L-1)}. \tag{5.35}$$

Substituindo estes valores nos coeficientes do filtro em (5.19), obtemos finalmente:

$$w_k = \frac{4}{L} - (k-1) \left[\frac{6}{L(L-1)} \right], \quad 1 \leq k \leq L. \tag{5.36}$$

Verificaremos, agora, a norma do filtro dado pelos coeficientes em (5.36). Calculando o quadrado da norma do filtro, teremos:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{w}\|^2 &= \sum_{k=1}^L [a + (k-1)b]^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{L-1} (a + ib)^2 \\
 &= \sum_{i=0}^{L-1} a^2 + \sum_{i=0}^{L-1} i^2 b^2 + \sum_{i=0}^{L-1} 2iab \\
 &= La^2 + \frac{L(L-1)(2L-1)}{6} b^2 + L(L-1)ab.
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Para que essa norma seja mínima, devemos ter:

$$\frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial a} + \frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial b} = 0. \tag{5.38}$$

Portanto, calculando as derivadas parciais, obtemos:

$$\frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial a} = 2La + L(L-1)b \tag{5.39}$$

e

$$\frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial b} = L(L-1)a + \left[\frac{L(L-1)(2L-1)}{3} \right] b. \tag{5.40}$$

Note que podemos reescrever a Equação (5.38) como:

$$\left| \frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial a} \right| = \left| \frac{\partial \|\mathbf{w}\|^2}{\partial b} \right| = K, \tag{5.41}$$

onde K é um número real positivo qualquer.

Substituindo (5.39) e (5.40) em (5.41), podemos notar que, dentre as infinitas possibilidades para K que satisfazem a condição de norma-mínima em (5.41), a escolha particular para a e b quando fazemos $K = 2$ fornece uma solução idêntica àquela em (5.35), obtida através das divisões sucessivas do polinômio $W(z)$.

A aproximação da solução de norma-mínima, com a e b dados por (5.35), se refere a duas exponenciais complexas não-amortecidas com frequências angulares bem próximas uma da outra. A validade da aproximação obtida, com relação ao espaçamento entre as frequências do sinal, será discutida na seção seguinte.

Acreditamos que a condição para norma-mínima do filtro preditor, dada em (5.41), permite associar os valores de K às várias situações de espaçamento entre as frequências contidas no sinal observado. Assim sendo, outras soluções para a e b , relacionadas a um espaçamento $\Delta\omega$ qualquer, poderão ser obtidas alterando-se o valor de K adequadamente. A constatação desses fatos foi deixada para pesquisas futuras.

Embora não se encontre vantagens na utilização da aproximação desenvolvida nesta seção para a obtenção das estimativas das frequências do sinal, a mesma permite um melhor conhecimento do comportamento dos coeficientes do filtro de norma-mínima com relação a sua ordem, número de exponenciais do sinal e espaçamento entre as frequências das exponenciais

do sinal. Foi desenvolvido apenas o caso de duas exponenciais complexas não-amortecidas com um espaçamento bem pequeno entre suas frequências angulares. Porém, acreditamos que a estratégia de aproximação apresentada permite a obtenção de resultados aproximados para um número M qualquer de exponenciais complexas.

5.3.1 Considerações sobre a validade da aproximação

A aproximação obtida para a solução de norma-mínima com a linearização da função cosseno, desenvolvida na seção anterior, foi baseada na solução obtida para uma situação assintótica para o espaçamento entre as frequências ($\Delta\omega \rightarrow 0$), dada por (4.73). Neste caso, a aproximação da função cosseno por uma reta é realizada em um pequeno intervalo $\left[\frac{\Delta\omega}{2}, L\frac{\Delta\omega}{2}\right]$ e, portanto, o erro cometido com a linearização também é bastante reduzido.

Como a aproximação foi considerada válida para o intervalo $[0, \pi]$, devemos ter:

$$\frac{\Delta\omega}{2} \geq 0 \quad \text{e} \quad L\frac{\Delta\omega}{2} \leq \pi. \quad (5.42)$$

Se considerarmos, ainda, o número de amostras disponíveis do sinal como o maior valor para a ordem do filtro ($L=N$) em (5.42), então teremos:

$$\Delta\omega \leq \frac{2\pi}{N}. \quad (5.43)$$

Podemos, então, considerar a aproximação obtida para caso assintótico, aceitável para os casos sob a condição em (5.43). Estes casos estão relacionados às situações nas quais os métodos mais tradicionais falham e um método de alta resolução é necessário para realizar a distinção entre as frequências do sinal. Teoricamente, quando $\Delta\omega < \frac{2\pi}{N}$, métodos baseados na transformada de Fourier não permitem tal distinção [21].

A seguir, analisaremos outros aspectos relacionados à solução de norma-mínima, como a proximidade dos zeros em relação a circunferência de raio unitário e a magnitude da norma das soluções e aproximações obtidas, que auxiliarão na sua melhor caracterização.

5.3.2 Raio médio da distribuição dos zeros

Seja z_i , com $1 \leq i \leq L$, os zeros de um filtro preditor de norma-mínima aplicado a um sinal composto por M exponenciais complexas não-amortecidas com frequências dadas por ω_i , para $i = 1, 2, \dots, M$. Considerando um preditor otimizado para esse sinal, poderemos tomar $z_i^s = e^{j\omega_i}$, para $i = 1, 2, \dots, M$, como os zeros de sinal e $z_i^r = \rho_i e^{j\phi_i}$, para $i = 1, 2, \dots, L - M$, como os zeros restantes desse preditor.

Utilizando o coeficiente de maior ordem do polinômio associado a esses zeros, dado por w_L , teremos, através de (5.9):

$$\begin{aligned} |w_L| &= \left| \prod_{i=1}^L z_i \right| \\ &= \prod_{i=1}^M |z_i^s| \prod_{i=1}^{L-M} |z_i^r| \\ &= \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_{L-M}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

CAPÍTULO 5. CARACTERIZANDO OS ZEROS DA SOLUÇÃO DE NORMA-MÍNIMA 68

Se considerarmos um raio médio equivalente para a distribuição dos zeros restantes dado por ρ_{med} , com $\rho_{med} = \left[\prod_{i=1}^{L-M} |\rho_i| \right]^{\frac{1}{L-M}}$, teremos através de (5.44):

$$\rho_{med} = [|w_L|]^{\frac{1}{L-M}}. \quad (5.45)$$

onde ρ_{med} em (5.45) pode ser reconhecido como a média geométrica dos módulos dos zeros restantes.

Para $M = 1$, temos através de (4.71) que $|w_L| = \frac{1}{L}$ e, portanto:

$$\rho_{med} = \left(\frac{1}{L} \right)^{\frac{1}{L-1}}. \quad (5.46)$$

Para uma distribuição perfeitamente uniforme, ainda para $M = 1$, devemos ter $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{L-1} = \rho$ e portanto, $\rho_{med} = \rho$.

O valor obtido para ρ_{med} pode ser utilizado como medida de proximidade dos zeros restantes à circunferência de raio unitário. Essa informação pode auxiliar na escolha da ordem mais adequada para o filtro preditor em métodos de detecção de frequências não-amortecidas, que utilizam a proximidade dos zeros com relação a circunferência de raio unitário como critério de determinação das estimativas dos zeros de sinal, conforme apresentado no Capítulo 3.

Para $M = 2$, utilizando a aproximação obtida em (5.36), para $k = L$, teremos:

$$|w_L| = \frac{2}{L} \quad (5.47)$$

e, conseqüentemente, para o raio médio:

$$\rho_{med} = [|w_L|]^{\frac{1}{L-2}} = \left(\frac{2}{L} \right)^{\frac{1}{L-2}}. \quad (5.48)$$

Utilizando a solução de norma-mínima genérica, obtida no capítulo anterior em (4.73) para o caso assintótico, com $w_L = \frac{M}{L} \sum_{i=1}^M e^{-jL\omega_i}$, poderemos ampliar esse resultado para um sinal composto por M exponenciais complexas. Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned} |w_L| &= \left| \frac{M}{L} \sum_{i=1}^M e^{-jL\omega_i} \right| \\ &\leq \frac{M}{L} \sum_{i=1}^M |e^{-jL\omega_i}| \\ &\leq \frac{M^2}{L} \end{aligned} \quad (5.49)$$

e para o raio médio:

$$\rho_{med} \leq \left(\frac{M^2}{L} \right)^{\frac{1}{L-M}}. \quad (5.50)$$

Podemos concluir, através de (5.49), que na medida em que as frequências das exponenciais tornam-se mais próximas entre si, o valor do somatório aproxima-se do valor de M e, conseqüentemente, a expressão para o valor de ρ_{med} , dada em (5.50), aproxima-se mais da igualdade.

Considerando-se ainda as frequências das exponenciais próximas entre si, notamos, em (5.50), que para $L \rightarrow \infty$ teremos para ρ_{med} :

$$\rho_{med} = \left(\frac{M^2}{L} \right)^{\frac{1}{L-M}} \Bigg|_{L \rightarrow \infty} = \left(\frac{L}{M^2} \right)^{\frac{1}{M-L}} \Bigg|_{L \rightarrow \infty} = 1.$$

Esse resultado nos mostra que para filtros com ordens elevadas os zeros restantes tornam-se bem próximos da circunferência de raio unitário, dificultando a distinção entre esses e os zeros de sinal, no caso de um sinal composto por exponenciais complexas não-amortecidas.

Na aplicação em detecção de frequências, vista no Capítulo 3, a limitação para a ordem do filtro utilizado é dada pela instabilidade do estimador, provocada pela redução do número de produtos cruzados com o aumento da ordem, levando a uma menor representatividade da autocorrelação do sinal. Agora, podemos constatar uma outra limitação, não prevista anteriormente, para ordem do filtro, dada por ρ_{med} .

Também podemos notar, através da inspeção de (5.50), que quanto maior o número de exponenciais (M) que compõem o sinal, maior o raio médio da distribuição dos zeros restantes. Portanto, o aumento do número de frequências distintas do sinal, também agrava o problema de distinção entre os zeros.

Podemos concluir que a solução de norma-mínima aproximada, obtida na seção 5.3, apresenta coerência com os resultados obtidos para o raio médio da distribuição, pois o valor para w_L não é alterado na aproximação considerada.

5.3.3 A norma do filtro preditor

Para $M = 1$, conforme a solução apresentada no capítulo anterior em (4.71), teremos os elementos do vetor associado ao filtro preditor ótimo de norma-mínima dados por $w_i = \frac{1}{L} e^{-j(i)\omega_1}$. Logo, a norma do filtro será dada por:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = L \left(\frac{1}{L} \right)^2 = \frac{1}{L}. \quad (5.51)$$

Para $M = 2$, tomando a solução simplificada apresentada em (5.5), teremos:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{i=1}^L |w_i|^2 = \sum_{i=1}^L \left| \frac{4}{L} \cos \left(i \frac{\Delta\omega}{2} \right) e^{-j(i)\bar{\omega}} \right|^2. \quad (5.52)$$

Portanto, a norma do filtro será dada por:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{i=1}^L \left[\frac{4}{L} \cos \left(i \frac{\Delta\omega}{2} \right) \right]^2 \leq \frac{16}{L}. \quad (5.53)$$

Podemos notar que para um caso assintótico ($\Delta\omega \rightarrow 0$), teremos $\cos \left(i \frac{\Delta\omega}{2} \right) = 1$, para qualquer i , e portanto a expressão em (5.53) atingirá a igualdade.

Para $M = 2$, tomando-se agora a solução aproximada pela linearização da função cosseno, dada em (5.36), teremos, após a substituição dos valores para a e b , dados em (5.35), na expressão para norma obtida em (5.37), o seguinte resultado:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \frac{6(2L-1)}{L(L-1)} - \frac{8}{L}. \quad (5.54)$$

Podemos notar, em (5.54), que para ordens elevadas ($L \gg 1$), teremos:

$$\|\mathbf{w}\|_{L \gg 1}^2 = \left[\frac{6(2L-1)}{L(L-1)} - \frac{8}{L} \right]_{L \gg 1} \cong \frac{6(2L)}{L(L)} - \frac{8}{L} \cong \frac{4}{L}. \quad (5.55)$$

O resultado em (5.55) será sempre menor que aquele em (5.53), pois não foi obtido para um caso assintótico ($\Delta\omega \rightarrow 0$), no qual os módulos dos coeficientes, dados pela soma das exponenciais, atinge magnitude máxima.

Estendendo esse resultado para um valor de M qualquer, utilizando a solução obtida em (4.73), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &= \sum_{k=1}^L \left| \frac{M}{L} \sum_{i=1}^M e^{-jk(\omega_i)} \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^L \left(\frac{M}{L} \right)^2 \left| \sum_{i=1}^M e^{-jk(\omega_i)} \sum_{l=1}^M e^{-jk(\omega_l)} \right| \\ &= \sum_{k=1}^L \left(\frac{M}{L} \right)^2 \left| \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^M e^{-jk(\omega_i + \omega_l)} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^L \left(\frac{M}{L} \right)^2 \sum_{i=1}^M \sum_{l=1}^M |e^{-jk(\omega_i + \omega_l)}| \\ &\leq \frac{M^4}{L}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Podemos notar que o resultado em (5.56) tenderá a igualdade na medida em que o espaçamento entre as frequências presentes no sinal diminui.

5.4 Polinômios com Distribuição Uniforme

Estudaremos, agora, algumas configurações de polinômios com distribuição uniforme, os quais serão utilizados como base para o estudo da distribuição dos zeros do filtro preditor de acordo com as características do sinal de entrada.

(a) $\mathbf{H}_1(z) = (1 - (\rho e^{j\theta})^L) z^{-L}$:

Podemos constatar facilmente que esse tipo de função possui um espectro de amplitude cujo o módulo oscila regularmente entre $1 + \rho^L$ e $1 - \rho^L$. Para valores suficientemente grandes de L e considerando $\rho < 1$, a resposta de frequência desse filtro será praticamente plana.

Os zeros desse polinômio estão localizados a uma distância ρ do centro da circunferência de raio unitário e espaçados por um ângulo dado por $\frac{2\pi}{L}$. Logo, teremos como zeros de $H_1(z)$:

$$z_i = \rho e^{j\left(\theta + \frac{2\pi}{L}(i-1)\right)}, \text{ para } 1 \leq i \leq L, \quad (5.57)$$

onde θ representa o deslocamento angular inicial da distribuição, podendo assumir qualquer valor no intervalo $[0, 2\pi]$.

Sabemos de resultados anteriores que o filtro preditor ótimo, voltado para detecção de frequência, possui parte de seus zeros localizados sobre a CRU na posição angular dada pelas frequências do sinal e o restante distribuído uniformemente dentro da CRU. Desta forma, poderemos utilizar o polinômio $H_1(z)$ como modelo para um preditor genérico, o qual será modificado para obter uma aproximação de um preditor otimizado para um sinal de entrada composto por M exponencias complexas, adicionadas ou não a ruído branco.

$$(b) \mathbf{H}_2(z) = \mathbf{H}_1(z) \frac{(1 - e^{j\omega_1} z^{-1})}{(1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1})} :$$

Esse polinômio pode ser visto como um caso “degenerado” do polinômio $H_1(z)$, descrito anteriormente, onde um de seus L zeros, supostamente na direção de ω_1 , é substituído por um outro na mesma direção, porém com módulo unitário.

Poderemos utilizar o polinômio $H_2(z)$ como uma aproximação para um filtro preditor otimizado para um sinal composto por uma única exponencial complexa não-amortecida com frequência angular ω_1 , adicionada ou não a ruído branco.

Para que essa aproximação seja coerente, devemos ter um dos zeros de $H_1(z)$, em (5.57), na direção de ω_1 . Isso implica em que:

$$\theta + \frac{2\pi}{L}(i - 1) = \omega_1, \text{ para algum } i, 1 \leq i \leq L. \quad (5.58)$$

Para simplificar, sem perda de generalização, escolheremos $\theta = \omega_1$, com $z_1 = \rho e^{j\omega_1}$. Para obter explicitamente os coeficientes de $H_2(z)$, podemos notar que:

$$\frac{1}{1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho e^{j\omega_1})^k z^{-k}, \quad 0 < \rho < 1 \quad (5.59)$$

e para uma soma finita em (5.59) teremos:

$$(1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1}) \sum_{k=0}^{L-1} (\rho e^{j\omega_1})^k z^{-k} = 1 - R \quad (5.60)$$

onde R é o resto que falta para a igualdade em (5.59), considerando L finito.

Dividindo ambos os lados da Equação (5.60) por $(1 - R)(1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1})$, teremos:

$$\frac{\sum_{k=0}^{L-1} (\rho e^{j\omega_1})^k z^{-k}}{1 - R} = \frac{1}{1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1}} \quad (5.61)$$

Substituindo $R = (\rho e^{j\omega_1})^L z^{-L}$ em (5.61), teremos:

$$\frac{1}{1 - \rho e^{j\omega_1} z^{-1}} = \frac{1 + \rho e^{j\omega_1} z^{-1} + \dots + (\rho e^{j\omega_1})^{L-1} z^{-(L-1)}}{1 - (\rho e^{j\omega_1})^L z^{-L}}. \quad (5.62)$$

Substituindo, agora, (5.62) em $H_2(z)$, teremos:

$$H_2(z) = H_1(z)(1 - e^{j\omega_1} z^{-1}) \left[\frac{1 + \rho e^{j\omega_1} z^{-1} + \dots + (\rho e^{j\omega_1})^{L-1} z^{-(L-1)}}{1 - (\rho e^{j\omega_1})^L z^{-L}} \right] \quad (5.63)$$

e como $H_1(z) = (1 - (\rho e^{j\theta})^L z^{-L})$, escolhendo $\theta = \omega_1$ em (5.58), resulta:

$$H_2(z) = (1 - e^{j\omega_1} z^{-1}) \left(1 + \rho e^{j\omega_1} z^{-1} + \dots + (\rho e^{j\omega_1})^{L-1} z^{-(L-1)} \right). \quad (5.64)$$

Expandindo os termos em (5.64), obtemos:

$$H_2(z) = 1 + (\rho - 1)e^{j\omega_1} z^{-1} + \rho(\rho - 1)e^{2j\omega_1} z^{-2} + \dots + \rho^{L-2}(\rho - 1)e^{(L-1)j\omega_1} z^{-(L-1)} - \rho^{L-1} e^{jL\omega_1} z^{-L}, \quad (5.65)$$

de onde podemos concluir que os coeficientes de $H_2(z)$ serão dados por:

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_i &= \rho^{i-1}(\rho - 1)e^{j(i)\omega_1}, \quad 1 \leq i \leq L - 1 \\ h_L &= -\rho^{L-1} e^{jL\omega_1}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Desta forma, $H_2(z)$ possuirá um de seus zeros com módulo unitário na direção de ω_1 e $L-1$ zeros com módulo ρ , distribuídos de forma aproximadamente uniforme no interior da circunferência de raio unitário, como em $H_1(z)$. Quanto à uniformidade da distribuição, podemos constatar que para L suficientemente grande, o polinômio $H_2(z)$ tende a uma distribuição tão uniforme quanto a apresentada pelo polinômio original $H_1(z)$. Esse fato pode ser mostrado utilizando o conceito de raio médio de uma distribuição, apresentado anteriormente na seção 5.3.2.

Para o caso de um sinal composto por apenas uma exponencial complexa, o raio médio da distribuição dos zeros restantes é dado teoricamente por $\rho_{med} = (1/L)^{\frac{1}{L-1}}$, conforme (5.46). Como neste caso $\rho = \rho_{med}$, temos que para L grande $\rho \cong 1$ e, conseqüentemente, $h_i \cong 0$ em (5.66), para $1 \leq i \leq L - 1$. Logo, teremos:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} H_2(z) = 1 - \rho^{L-1} e^{jL\omega_1} z^{-L} = H_1(z) \quad (\rho=1, \theta=\omega_1) \quad (5.67)$$

Através de (5.66) podemos comparar o resultado obtido aqui com aquele do capítulo anterior, para a solução do filtro preditor de norma-mínima para uma exponencial complexa não-amortecida. Note que a solução de norma-mínima dada em (4.71) apresenta coeficientes com módulos iguais, enquanto que o polinômio $H_2(z)$ possui módulos decrescentes com o índice do coeficiente. Essa diferença entre os módulos de h_i propicia uma distribuição mais uniforme dos zeros, porém não minimiza a norma do filtro. Para valores da ordem do filtro suficientemente grandes, a distribuição dos zeros do preditor de norma-mínima torna-se mais uniforme, e neste caso podemos tomar $H_2(z)$ como uma boa aproximação para esse preditor.

$$(c) \mathbf{H}_3(z) = \mathbf{H}_1(z) \frac{(1 - 2 \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 2\rho \cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})z^{-1} + \rho^2 z^{-2})};$$

Como no caso anterior, esse polinômio pode ser interpretado como um outro caso “degenerado” do polinômio $H_1(z)$, em que dois de seus zeros possuem módulo unitário com posicionamento complexo conjugado. Como foi mostrado anteriormente, podemos estender o caso de frequências complexas conjugadas para frequências complexas quaisquer através de uma simples rotação das raízes do polinômio no plano Z . Assim sendo, podemos utilizar este polinômio como uma aproximação para o preditor aplicado a duas exponenciais complexas, com frequências angulares ω_1 e ω_2 , contaminadas ou não por ruído branco aditivo.

Para que a aproximação seja coerente, devemos escolher dois zeros de $H_1(z)$, em (5.57), relacionados as duas frequências angulares do sinal. Desta forma, devemos ter:

$$\begin{aligned} \theta + \frac{2\pi}{L}(i - 1) &= \omega_1 \\ \theta + \frac{2\pi}{L}(j - 1) &= \omega_2, \end{aligned} \tag{5.68}$$

para algum $i, j = 1, 2, \dots, L$, com $i \neq j$.

Conseqüentemente, teremos:

$$\frac{2\pi}{L}l = (\omega_1 - \omega_2), \quad \text{para algum } l, \quad 1 \leq l \leq L - 1. \tag{5.69}$$

Podemos observar através de (5.69) que quanto maior a ordem do filtro maiores serão as possibilidades de escolha para ω_1 e ω_2 . Essa liberdade nos permite escolher ω_1 e ω_2 tão próximos quanto possível para L suficientemente grande, confirmando assim a influência da ordem do filtro na sua capacidade de resolução.

Podemos também concluir que para L grande o polinômio do tipo $H_3(z)$ tende a uma distribuição tão uniforme quanto a apresentada por $H_1(z)$, pois:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \rho = \lim_{L \rightarrow \infty} \rho_{med} = 1 \tag{5.70}$$

e portanto:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} H_3(z) = H_3(z) = H_1(z). \tag{5.71}$$

O procedimento de análise, descrito aqui, pode ser estendido para o caso de preditores aplicados a sinais compostos por uma soma de M exponenciais complexas sujeitas a ruído branco aditivo.

A validade das aproximações apresentadas dependerão do tipo de aplicação envolvida, da informação de interesse, bem como da ordem do filtro utilizado.

5.5 Conclusão

O conhecimento das características das distribuições dos zeros do preditor se mostra de grande utilidade quando utilizamos um método de detecção de frequências baseado nas raízes do polinômio de norma-mínima, associado ao filtro ótimo. Com esse objetivo, obtivemos neste

capítulo uma relação simples entre os coeficientes do filtro preditor e seus zeros. Esse desenvolvimento mostrou que, para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, o i 'ésimo coeficiente complexo do filtro otimizado possui magnitude dada por $4 \cdot \cos(i\Delta\omega/2)/L$ e fase dada por $i(-\bar{\omega})$, onde $\bar{\omega}$ é a média aritmética das frequências contidas no sinal e $\Delta\omega$ representa a diferença entre suas frequências angulares. Através desse resultado foi possível constatar que a norma de tal solução é invariante a uma rotação de seus zeros. Através dessa invariância, concluímos que a solução de norma-mínima possui uma simetria no posicionamento de seus zeros. Para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, pudemos identificar essa simetria através de um eixo determinado pela média aritmética das frequências angulares contidas no sinal.

Ainda para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, pudemos caracterizar o efeito do espaçamento entre as frequências e concluir que sua influência está relacionada às estimativas das correlações cruzadas das exponenciais. Para frequências próximas pudemos explicitar os coeficientes do filtro em função da ordem do filtro, do número de frequências e das frequências angulares do sinal. Para um espaçamento qualquer entre as frequências, onde nenhuma hipótese é estabelecida para as estimativas das correlações cruzadas, os coeficientes também foram explicitados, porém apenas para um filtro de segunda ordem, devido à complexidade do desenvolvimento.

Foi também desenvolvida uma solução aproximada para o filtro preditor de norma-mínima, baseada na linearização de uma função cosseno. Através dessa aproximação foi possível caracterizar melhor o polinômio associado ao filtro de norma-mínima, permitindo, assim, extrair informações a respeito da capacidade de resolução dos preditores. Tal aproximação foi considerada válida para sinais com frequências angulares cujo espaçamento angular obedece a condição: $\Delta\omega \leq 2\pi/N$.

Na tentativa de melhor caracterizar as distribuições dos zeros encontradas para os preditores, apresentamos um grupo de polinômios com características particulares de uniformidade na distribuição de suas raízes complexas.

O conceito de raio médio de uma distribuição foi apresentado e pudemos estabelecer uma limitação para a ordem do filtro que, apesar de observada na aplicação em detecção de frequências, até então não tinha sido caracterizada. Ficou evidente o aumento da proximidade dos zeros em relação à CRU com o aumento da ordem do filtro utilizado. Tal comportamento é bastante indesejável na detecção de frequências não-amortecidas, principalmente na presença de ruído, tornando o critério de detecção baseado na proximidade da CRU inadequado em casos de ruído excessivo. No próximo capítulo iremos propor um novo procedimento de detecção de frequências que permitirá uma melhor distinção dos zeros de sinal, contornando assim as falhas do critério baseado na proximidade da CRU.

Capítulo 6

Novo Método de Alta Resolução

6.1 Introdução

Inicialmente, neste capítulo, apresentaremos algumas medidas de desempenho utilizadas na análise de métodos de estimação. A apresentação dessas medidas será justificada quando apresentarmos um novo método de detecção de frequências, que irá romper com algumas das limitações encontradas no método FBLP Modificado [4].

Esse novo método, baseado no método FBLP Modificado, propõe uma detecção robusta, mesmo em casos de excessiva contaminação por ruído.

Através de resultados obtidos por simulações, será possível realizar comparações com o método FBLP Modificado e constatar a eficiência do método proposto. O limite inferior de Cramér-Rao (CR) e o método ML serão utilizados mais uma vez como referências quando analisarmos o desempenho do novo método proposto.

6.2 Medidas de Desempenho e Limitações

Em geral é muito difícil computar analiticamente o desempenho de estimadores para mais de uma frequência para um número finito de amostras. Para possibilitar a obtenção de resultados semi-analíticos e por não ser possível obter soluções fechadas para estimadores de frequências, exceto para pequenas ordens, será considerada apenas a situação na qual dispomos de um número ilimitado de amostras. Esse procedimento foi utilizado em capítulos anteriores para obtenção da solução de norma-mínima.

Em geral são utilizadas duas medidas estatísticas para a análise de desempenho dos estimadores: a média e a variância do estimador. Pode ser demonstrado que a variação da média do estimador depende apenas da diferença das frequências [28]. Já a obtenção de expressões analíticas para a variância do erro do estimador é difícil mesmo para o caso assintótico. Devido às limitações deste trabalho, a obtenção de expressões analíticas para o desempenho dos estimadores estudados foram deixadas para trabalhos futuros.

Uma outra medida de comparação de desempenho muito utilizada é o limiar da relação sinal-ruído em que o desempenho do método, dado pela variância do estimador, deteriora-se mais rapidamente. As causas para tal limiar estão, em geral, relacionadas à capacidade de detecção e estabilidade de cada método.

Apresentaremos a seguir alguns conceitos relevantes ao problema de detecção de frequências próximas frente ao número de amostras disponíveis do sinal.

6.2.1 Critério de Rayleigh

A idéia de um critério de resolução foi introduzida por Lord Rayleigh (1879), quando utilizando um prisma e um espectroscópio para medir a distribuição de intensidade de uma fonte de luz monocromática. Rayleigh propôs que duas componentes de igual intensidade poderiam ser distinguidas apenas para espaçamentos entre as frequências maiores ou iguais àquele em que o primeiro máximo de uma componente atingisse o primeiro mínimo da outra, como ilustrado na Figura 6.1. Esse critério é conhecido como critério de resolução de Rayleigh.

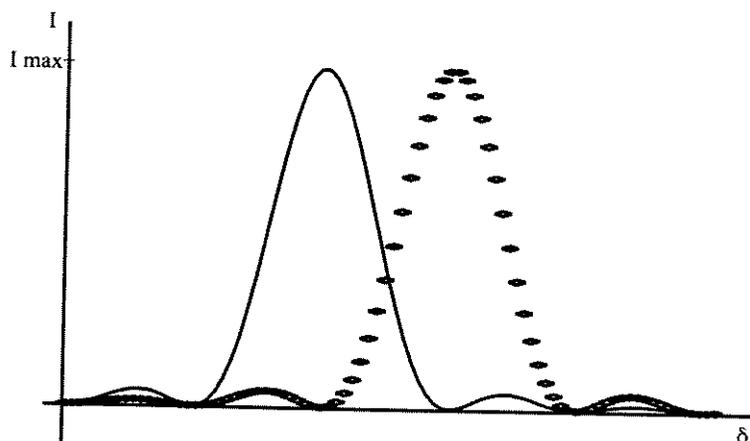


Figura 6.1: Ilustração do critério de resolução de Rayleigh (I =Intensidade luminosa e δ =Comprimento de onda).

Esse critério estabelece uma divisão entre os métodos de detecção. De um lado estão os métodos de baixa resolução, como por exemplo, aqueles baseados na Transformada de Fourier. Do outro lado estão os algoritmos de alta-resolução que superam o limite estabelecido pelo critério de Rayleigh, dentre os quais podemos citar: Máxima-entropia (ME) [20], Variância-mínima (MVDR), MUSIC, e Norma-mínima [9]. Mesmo para muito desses algoritmos, superar o limite de Rayleigh exige um controle cuidadoso das condições do problema. Isso significa que o modelo físico responsável pela geração dos dados obtidos deve aproximar-se ao máximo do modelo matemático utilizado no desenvolvimento do algoritmo, do contrário, poderemos obter um erro de estimação significativo, ou uma perda de resolução.

6.3 O Método Proposto

6.3.1 Motivação

Historicamente, tem-se dispensado uma grande atenção no sentido de aumentar a capacidade de aplicação dos métodos de estimação existentes. Essa capacidade está estreitamente relacionada à relação sinal-ruído para o limiar de detecção de cada método.

Acreditamos que uma forte motivação para esse esforço é o fato do limite de Cramér-Rao não apresentar tal efeito de limiar, induzindo a uma crença na factibilidade de imitá-lo.

Existem inúmeras estratégias voltadas para a redução da relação sinal-ruído de limiar de métodos de detecção de frequências de alta resolução. Algumas dessas estratégias não alcançaram êxito, mas permitiram o surgimento de outras de sucesso, conforme apresentaremos a seguir.

Uma estratégia de reduzir tal limiar, baseada nas características dos zeros do preditor, foi aplicada no método FLP Modificado. Tentou-se a escolha mais eficiente de um subconjunto de raízes para estimativas das frequências do sinal observado [1][2].

Nessa estratégia, aplicada na estimação de frequências de exponenciais complexas não-amortecidas, foi introduzido um fator de amortecimento fictício no sinal observado, com o objetivo de propiciar uma melhor distinção entre zeros de sinal e zeros estranhos do filtro preditor. Infelizmente, tal procedimento não se mostrou confiável em propiciar uma redução da SNR de limiar, levando a definições de subconjuntos equivocados que deterioravam bastante o desempenho do método. O completo desenvolvimento dessa estratégia pode ser encontrado em [1].

Algumas causas apontadas para o insucesso desse procedimento são: (1) o desempenho do método FLP Modificado é sempre inferior ao método FLPB Modificado; (2) o ruído, como parte do sinal observado, não possui mais espectro plano após a aplicação do fator de amortecimento fictício, comprometendo totalmente a aplicabilidade do método e (3) a tentativa de se aumentar o fator de amortecimento incorporado artificialmente ao sinal leva a uma maior correlação entre as amostras do ruído, deteriorando bastante o desempenho do método.

Tentativas equivalentes para o método BLP Modificado também não apresentaram a robustez necessária pelos mesmos motivos anteriores [1].

Para o caso particular de senóides reais, também foi utilizada uma estratégia no sentido de melhor distinguir zeros de sinal dos demais zeros, a fim de reduzir a SNR de limiar [2]. Nesse caso, foi utilizado o método FBLP Modificado e uma estratégia de distinção baseada na geometria complexa conjugada dos zeros de sinal e na proximidade dos mesmos em relação à circunferência de raio unitário, visto que os zeros estranhos também ocorrem em pares complexos conjugados. Os resultados alcançados apresentaram um limiar inferior àquele do método FBLP Modificado.

6.3.2 Estratégia proposta

O método aqui proposto também é baseado em uma estratégia mais eficiente de distinção entre os zeros de sinal e os zeros restantes do Filtro de Erro de Predição (FEP). Justifica-se assim todo o destaque dado às características dos zeros do filtro preditor, apresentadas no capítulo anterior.

A estratégia, semelhante àquela apresentada em [1], é baseada no método FBLP Modificado e consiste em um procedimento adicional com a finalidade de introduzir, artificialmente, um fator de amortecimento positivo nas exponenciais complexas que compõem o sinal. Como resultado obtemos um subconjunto de zeros candidatos a zeros de sinal, mais reduzido que o universo existente inicialmente. Após esse procedimento, será aplicada a estratégia de estimação baseada na proximidade da circunferência de raio unitário, tendo, porém, o conhecimento da localização aproximada dos zeros de sinal. Esse procedimento possibilitará obter melhores

resultados para as estimativas, levando a um aumento da capacidade de resolução para o método FBLP Modificado.

Baseado nas estreitas relações entre os coeficientes de um polinômio e suas raízes, abordadas no capítulo anterior para o polinômio de norma-mínima, iremos propor uma alteração nos coeficientes do filtro preditor para obtermos uma alteração no posicionamento dos zeros de sinal, equivalente a um amortecimento positivo.

Uma análise de sensibilidade detalhada dos efeitos de uma alteração nos parâmetros do filtro é geralmente complexa e só se aplica a casos específicos. Por outro lado, podemos obter uma grande quantidade de informações em uma análise simples de como os zeros e pólos de um filtro são afetados através das alterações dos coeficientes da função de transferência a ele associada.

A função de transferência, para um filtro de ordem L , utilizada nos desenvolvimentos a seguir, será dada por:

$$W(z) = 1 - \sum_{k=1}^L w_k z^{-k}, \quad (6.1)$$

na qual w_k , para $k = 1, 2, \dots, L$, são dados pelos elementos do vetor \mathbf{w} em (2.91).

Propomos, portanto, uma alteração nos coeficientes w_k da forma a seguir:

$$\hat{w}_k = w_k + \Delta w_k. \quad (6.2)$$

Agora, considerando o efeito de uma alteração dos coeficientes sobre a posição dos zeros, temos que o fator Δw_k adicionado a um dado coeficiente afeta todos os zeros da função de transferência $W(z)$. Para quantizar este efeito, iremos supor que todos os zeros são de primeira ordem e dados por z_i , para $i = 1, 2, \dots, L$. Desta forma, poderemos reescrever $W(z)$ como a seguir:

$$W(z) = \prod_{j=1}^L (1 - z_j z^{-1}). \quad (6.3)$$

Definiremos $\hat{W}(z)$ como o polinômio formado pelos novos coeficientes \hat{w}_k , dados em (6.2), e seus zeros como $\hat{z}_i = z_i + \Delta z_i$, para $i = 1, 2, \dots, L$. O deslocamento em relação a posição original para o i 'ésimo zero pode ser expresso em termos das alterações nos coeficientes como:

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^L \frac{\partial z_i}{\partial w_k} \Delta w_k, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (6.4)$$

Utilizando as duas formas para $W(z)$, dadas em (6.1) e (6.3), juntamente com a relação a seguir:

$$\left(\frac{\partial W(z)}{\partial z_i} \right)_{z=z_i} \frac{\partial z_i}{\partial w_k} = \left(\frac{\partial W(z)}{\partial w_k} \right)_{z=z_i}, \quad (6.5)$$

teremos:

$$\frac{\partial z_i}{\partial w_k} = \frac{z_i^{L-k}}{\prod_{j=1, j \neq i}^L (z_i - z_j)}, \quad \text{para } i, k = 1, 2, \dots, L. \quad (6.6)$$

A Equação (6.6) pode, então, ser substituída em (6.4).

A Equação (6.6) também pode ser vista como uma medida da sensibilidade do i 'ésimo zero a uma alteração no k 'ésimo coeficiente de $W(z)$.

Cada fator $(z_i - z_j)$ em (6.6) pode ser representado por um vetor no plano Z , como mostrado na Figura 6.2 para $i=1$. A magnitude do denominador da Equação (6.6) será, portanto, o produto das distâncias de todos os zeros restantes para a posição do zero z_i . Logo, se os zeros forem muito próximos uns dos outros, teremos o denominador de (6.6) com menor magnitude e, conseqüentemente, uma maior sensibilidade dos zeros às alterações nos coeficientes do filtro. Além desta constatação, podemos notar que quanto maior o número de zeros próximos maior será essa sensibilidade.

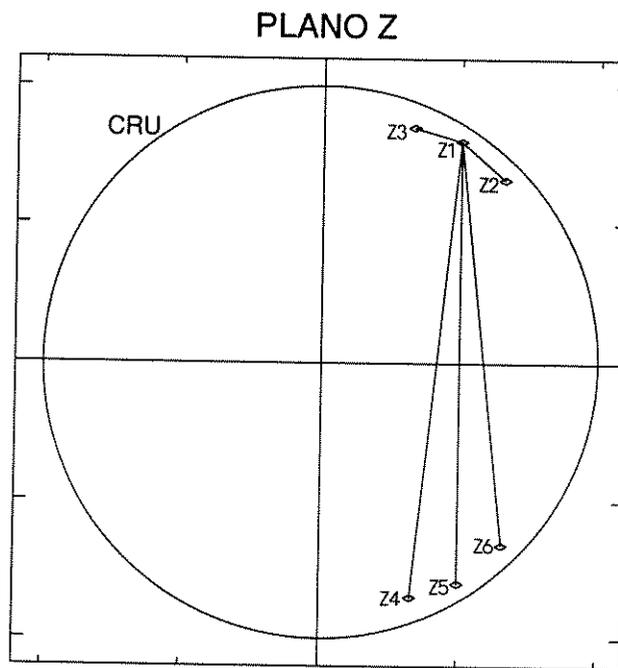


Figura 6.2: Representação vetorial das distâncias entre os zeros no plano Z em relação à z_1 .

Iremos propor uma alteração apenas no coeficiente w_0 do polinômio normalizado em (6.1), tentando com isto não alterar completamente as características da solução de norma-mínima obtida pelos coeficientes w_k , para $k = 1, 2, \dots, L$.

Considerando, inicialmente, $w_0 = 1$ e uma perturbação $\alpha < 1$, poderemos estabelecer uma variação do coeficiente w_0 da seguinte forma:

$$\Delta w_0 = (\alpha - 1)w_0, \quad (6.7)$$

onde, através de (6.2), podemos notar que αw_0 representa o novo valor para o coeficiente w_0 . Desta forma, para $\alpha < 1$, estaremos diminuindo a magnitude do coeficiente w_0 .

Utilizaremos, agora, o fato do novo polinômio formado após a perturbação em w_0 ser equivalente, em termos de suas raízes, ao polinômio obtido através de uma variação inversamente proporcional aplicada aos coeficientes restantes, mantendo w_0 inalterado. Assim sendo, as alterações, equivalentes a (6.7), para os demais coeficientes do filtro serão dadas por:

$$\Delta w_k = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)w_k, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, L. \quad (6.8)$$

Desta forma, utilizando (6.8) em (6.4), teremos uma variação Δz_i em cada raiz dada pela soma das variações individuais proporcionada por cada coeficiente.

O sinal considerado, aqui, será o mesmo utilizado nos capítulos anteriores, dado por (3.1), com $\beta_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, M$, para uma situação sem ruído ($w(n) = 0$). O polinômio $W(z)$ obtido da solução de norma-mínima terá M de seus zeros associados aos parâmetros do sinal de entrada, dados por $z_i = e^{j\omega_i}$, para $i = 1, 2, \dots, M$.

Para facilitar o desenvolvimento a seguir, estabeleceremos a hipótese de que a distribuição dos zeros é perfeitamente uniforme. Especificamente, teremos um espaçamento igual entre todos os zeros do filtro. Essa hipótese é bastante plausível para a solução de norma-mínima, conforme foi apresentado no Capítulo 5, Seção 5.4.

Devido às diferentes características apresentadas pelos zeros de sinal e zeros restantes da solução de norma-mínima, analisaremos separadamente o comportamento para cada conjunto de zeros.

Zero de Sinal

Vamos considerar o caso de uma única exponencial complexa com o zero de sinal $z_1 = e^{j\omega_1}$. Os demais $L - 1$ zeros, denominados de zeros restantes, serão posicionados no interior da CRU. Neste caso, com base nas Expressões (6.6) e (6.4) podemos escrever:

$$\Delta z_1 = \sum_{k=1}^L \frac{(e^{j\omega_1})^{L-k}}{\prod_{j=2}^L (z_1 - z_j)} \Delta w_k. \quad (6.9)$$

Analisando o denominador, $\prod_{j=2}^L (z_1 - z_j)$, como o produto de vetores de distâncias entre o zero z_1 e os demais zeros, podemos constatar que, devido à uniformidade da distribuição dos zeros, seu resultado terá argumento igual ao de z_1 . A Figura 6.3 ilustra a situação aqui considerada.

Neste caso, poderemos escrever:

$$\prod_{j=2}^L (z_1 - z_j) = \beta e^{j\omega_1}, \quad (6.10)$$

onde β é um valor positivo dado pelo produto da magnitude dos vetores distância.

A solução de norma-mínima para uma exponencial complexa é dada por (4.71). Assim, os coeficientes do polinômio $W(z)$ considerado aqui são dados por:

$$w_k = \frac{1}{L} e^{jk\omega_1}, \quad (6.11)$$

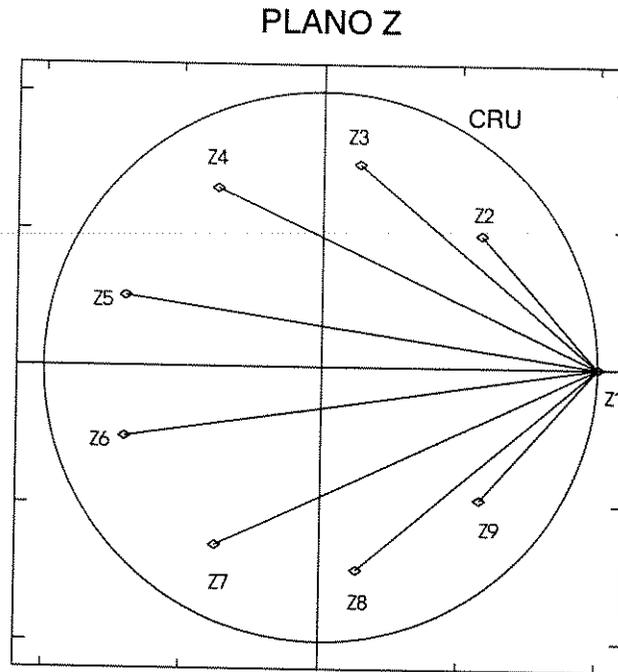


Figura 6.3: Representação dos fatores do denominador da Eq. (6.16) para um único zero de sinal (z_1) e $L=9$.

onde observamos a mudança do sinal do expoente em relação à (4.71) devido à utilização da forma (6.1) para $W(z)$.

Substituindo (6.10) em (6.9) com $\Delta w_k = (\frac{1}{\alpha} - 1)w_k$, obtemos:

$$\Delta z_1 = \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \left[\frac{(e^{j\omega_1})^{L-k}}{\beta e^{j\omega_1}} (\frac{1}{\alpha} - 1) e^{jk\omega_1} \right]. \quad (6.12)$$

Simplificando (6.12), teremos:

$$\Delta z_1 = \frac{1}{\beta} (\frac{1}{\alpha} - 1) e^{j(L-1)\omega_1}. \quad (6.13)$$

Considerando apenas uma variação em módulo, teremos para $0 < \alpha < 1$:

$$|\Delta z_1| = \frac{1}{\beta} (\frac{1}{\alpha} - 1), \quad (6.14)$$

onde $\frac{1}{\beta}$ representa o fator de sensibilidade do zero de sinal em relação a uma alteração nos coeficientes dada por Δw_k . Como $\frac{1}{\beta} > 0$, teremos um aumento do módulo do zero de sinal, pois os novos zeros são dados por $\hat{z}_i = z_i + \Delta z_i$. Este aumento é inversamente proporcional a α , provocando um efeito semelhante a um amortecimento positivo.

A generalização desse comportamento para mais de um zero de sinal será posteriormente comentada.

Zeros Restantes

Na solução de norma-mínima os zeros restantes estão distribuídos uniformemente no interior da CRU e de forma simétrica em relação ao zero de sinal (Capítulo 5, Seção 5.2). Consideremos, mais uma vez, a existência de apenas um zero de sinal dado por $z_1 = e^{j\omega_1}$. Desta forma, os L zeros do filtro serão dados por $z_i = \rho_i e^{j\theta_i}$, onde:

$$\theta_i = \frac{2\pi}{L}(i-1) + \omega_1, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, L, \quad (6.15)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho, & \text{para } i = 2, 3, \dots, L \\ \rho_i &= 1, & \text{para } i = 1, \end{aligned} \quad (6.16)$$

com $\rho < 1$. Os zeros do filtro dados dessa forma também garantem a simetria da distribuição em relação ao eixo determinado por ω_1 , que é uma característica da solução de norma-mínima dada por (4.71), comprovada no Capítulo 5.

A variação para os zeros restantes, de acordo com (6.4) e (6.6), será:

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^L \frac{(\rho e^{j\theta_i})^{L-k}}{\prod_{j=1, j \neq i}^L (z_i - z_j)} \Delta w_k, \quad i = 2, 3, \dots, L. \quad (6.17)$$

Devido à hipótese de distribuição perfeitamente uniforme dos zeros e para ordens elevadas do filtro, o resultado do produto no denominador de (6.17) poderá ser considerado equivalente àquele obtido em (6.10) para o zero de sinal, tendo a resultante, neste caso, o mesmo argumento de z_i , para $i = 2, 3, \dots, L$. Logo, poderemos escrever:

$$\prod_{j=1, j \neq i}^L (z_i - z_j) \cong \gamma e^{j\theta_i}, \quad (6.18)$$

onde γ possui as mesmas características de β em (6.10).

Substituindo (6.18) em (6.17), juntamente com Δw_k obtido através de (6.8) com w_k dado por (6.11), obtemos:

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^L \frac{1}{L} \left[\frac{(\rho e^{j\theta_i})^{L-k}}{\gamma e^{j\theta_i}} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) e^{jk\omega_1} \right], \quad i = 2, 3, \dots, L. \quad (6.19)$$

Simplificando (6.19), teremos:

$$\Delta z_i = \frac{1}{\gamma L} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \rho^L e^{j(L-1)\theta_i} \sum_{k=1}^L \left[\rho^{-1} e^{j(\omega_1 - \theta_i)} \right]^k, \quad i = 2, 3, \dots, L. \quad (6.20)$$

Analisando o somatório $\sum_{k=1}^L \left[\rho^{-1} e^{j(\omega_1 - \theta_i)} \right]^k$ em (6.20), ainda para uma distribuição perfeitamente uniforme, segundo (6.15), teremos:

$$\sum_{k=1}^L \left[\rho^{-1} e^{j(\omega_1 - \theta_i)} \right]^k = \sum_{k=1}^L \left[\rho^{-k} e^{j\left(\frac{2\pi}{L}k(1-i)\right)} \right] = \frac{1 - \rho^{-L}}{\rho e^{j\left[\frac{2\pi}{L}(i-1)\right]} - 1}. \quad (6.21)$$

Substituindo (6.21) em (6.20) com $\frac{2\pi}{L}(i-1) = (\theta_i - \omega_1)$, teremos após algumas manipulações algébricas:

$$\Delta z_i = \frac{(\rho^L - 1)}{L\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{e^{j((L-1)\theta_i + \omega_1)}}{(\rho e^{j\theta_i} - e^{j\omega_1})}. \quad (6.22)$$

Considerando apenas um variação em módulo, teremos:

$$|\Delta z_k| = \frac{(\rho^L - 1)}{L\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \left| \frac{e^{j((L-1)\theta_i + \omega_1)}}{(\rho e^{j\theta_i} - e^{j\omega_1})} \right|. \quad (6.23)$$

Portanto, devemos considerar o termo $\frac{(\rho^L - 1)}{L\gamma}$, em (6.23), como o fator de sensibilidade para os zeros restantes.

Através de (6.23), podemos constatar que quanto mais próximos da CRU menor a sensibilidade dos zeros restantes em relação à variação Δw_k . Assim, para $\rho \rightarrow 1$ teremos $|\Delta z_k| \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, observaremos a permanência dos zeros no interior da CRU e bem próximos da mesma. Este comportamento contrasta com aquele observado para os zeros de sinal, cujas magnitudes crescem sem restrições na medida em que α decresce.

Comparando (6.23) com (6.14), podemos observar a presença do fator L no denominador para a variação dos zeros restantes. Portanto, temos uma maior sensibilidade para o zero de sinal que para os zeros restantes. Também observamos uma diminuição da sensibilidade dos zeros restantes às variações dos coeficientes com o aumento da ordem do filtro.

Analisando, agora, uma situação onde um dos zeros restantes encontra-se bem próximo ao zero de sinal, teremos $z_i \cong z_1$, para algum $i = 2, 3, \dots, L$. Neste caso, devemos tomar as situações $\theta_i \rightarrow \omega_1$ e $\rho \rightarrow 1$ em (6.23).

Inicialmente, fazendo $\theta_i \rightarrow \omega_1$, teremos para $|\Delta z_k|$:

$$|\Delta z_k| = \frac{(\rho^L - 1)}{L\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \lim_{\theta_i \rightarrow \omega_1} \left| \frac{e^{j((L-1)\theta_i + \omega_1)}}{(\rho e^{j\theta_i} - e^{j\omega_1})} \right| = \frac{1}{L\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \frac{(\rho^L - 1)}{(\rho - 1)} \quad (6.24)$$

Agora, fazendo $\rho \rightarrow 1$ em (6.24), teremos:

$$|\Delta z_k| = \frac{1}{L\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{\rho^L - 1}{\rho - 1} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right).$$

Podemos notar, ainda, comparando (6.18) com (6.10), que para $\theta_i \rightarrow \omega_1$ e $\rho \rightarrow 1$, teremos:

$$\gamma \rightarrow \beta.$$

Conseqüentemente, teremos $|\Delta z_k|$ para os zeros restantes, considerados em (6.24), igual a variação para o zero de sinal, dada em (6.14). Isso significa que se existir um zero estranho próximo a um zero de sinal, esse apresentará comportamento equivalente a um zero de sinal, para uma alteração nos coeficientes do filtro preditor.

Concluimos, portanto, que os dois conjuntos de zeros se comportam de forma diferente em relação à variação dos coeficientes dada pelo fator α . Os zeros de sinal se mostram bastante

sensíveis às variações, favorecidos pela simetria apresentada pela distribuição dos zeros. Os zeros restantes, por sua vez, mostram pouca sensibilidade e uma forte tendência de convergência para a CRU, para os mesmo valores de α . A exceção ocorre para um eventual zero restante muito próximo de um zero de sinal.

Para mais de um zero de sinal próximos entre si, o comportamento será equivalente ao observado para o zero restante próximo a um zero de sinal. Já para zeros fora dessa condição, apesar de não ser o objetivo de nossa aplicação, observamos a projeção destes para alguns valores de α , conforme será discutido adiante, quando abordarmos a escolha adequada para o valor de α . Concluímos, portanto, que a variação no comportamento dos zeros se deve principalmente à simetria da distribuição, estudada no Capítulo 5.

6.3.3 O método

Baseado na diferença de comportamento dos dois conjunto de zeros analisada na seção anterior, propomos um procedimento de detecção de frequências em duas etapas, descritas a seguir.

A primeira etapa consiste na solução do filtro preditor pelo método FBLP Modificado, seguida da obtenção das raízes do polinômio alterado pelo fator α , escolhido adequadamente. O valor para o fator α deve ser escolhido com o objetivo de se obter uma melhor distinção entre os dois conjuntos de zeros. Essa distinção servirá, portanto, para definir uma região do plano Z com maior probabilidade de encontrarmos um zero de sinal, restringindo assim o subconjunto de zeros candidatos a zero de sinal. Essa região poderá conter zeros estranhos, sendo o objetivo dessa primeira etapa apenas reduzir o conjunto de zeros candidatos a zero de sinal.

A segunda etapa, por sua vez, consiste na aplicação do critério de proximidade da CRU para a escolha das estimativas dos zeros de sinal. Essa escolha será realizada sobre os zeros do filtro original contidos na região definida na etapa anterior. Desta forma, os zeros que não estiverem dentro dessa região de observação, mesmo próximos da CRU, serão rejeitados. Os zeros escolhidos como estimativas deverão estar na região definida na primeira etapa e, dentre esses, apresentar maior proximidade da CRU que os demais. O número de estimativas escolhido está relacionado ao número de exponenciais presentes no sinal e será discutido posteriormente.

A utilização dos zeros do filtro original na segunda etapa é necessária, pois os zeros de sinal do filtro alterado também sofrem variações angulares, que degradam a qualidade das estimativas. Essas variações angulares estão relacionadas ao argumento de Δz_1 em (6.13) e serão abordadas a seguir.

O esforço computacional adicional da estratégia em relação ao método FBLP Modificado consiste, principalmente, na obtenção das raízes do polinômio alterado na primeira etapa.

Deslocamento angular dos zeros de sinal

Como podemos observar na Expressão (6.13), os zeros de sinal sofrem não somente uma variação em módulo como também em seus argumentos. Conseqüentemente, teremos um deslocamento radial, dado por (6.14), e um deslocamento angular dado pelo argumento de Δz_1 em (6.13).

Conforme podemos constatar em (6.9), o argumento de Δz_1 está fortemente relacionado ao argumento de Δw_k , que por sua vez é função das frequências angulares do sinal.

Para um único zero de sinal, teremos o argumento de Δz_1 dado por $(L - 1)\omega_1$, conforme (6.13). Podemos notar que para valores de ω_1 próximo de zero, teremos uma menor variação angular dos zeros.

Para mais de um frequência contida no sinal, a solução de norma-mínima não será mais dada por (4.71). Para o caso particular de um sinal com duas frequências próximas entre si, a solução de norma-mínima poderá ser dada por (5.5). Neste caso, o argumento de Δw_k será dado por $k\bar{\omega}$. Conseqüentemente, o argumento de Δz_i estará em uma função de $\bar{\omega}$.

Ficou constatado, no Capítulo 5, Seção 5.2, que a distribuição dos zeros do filtro de norma-mínima, para sinais com até duas frequências, é simétrica em relação ao eixo dado pela média aritmética das frequências angulares. Para mais de duas frequência a existência de simetria também foi comprovada, apesar de não ter sido determinada. A alteração proposta para os coeficientes do filtro, por sua vez, ficou restrita aos módulos dos coeficientes, não alterando assim a característica de simetria do filtro original. Portanto, o filtro com os coeficientes alterados também deverá apresentar a mesma simetria do filtro original. Podemos então concluir que se existir projeção de alguns dos zeros do filtro após a alteração, essa projeção não poderá romper com a simetria da distribuição.

Portanto, para os zeros de sinal, uma perturbação nos coeficientes do filtro poderá apresentar as seguintes possibilidades: (1) os zeros serão projetados para fora da CRU sem deslocamento angular; (2) os zeros serão projetados para fora da CRU com um deslocamento angular simétrico convergente para o eixo de simetria e (3) os zeros serão projetados para fora da CRU com um deslocamento angular divergente do eixo de simetria. As três possibilidades de distribuição esperada atendem a característica de simetria. A ocorrência de uma ou outra dependerá dos seguintes fatores: afastamento entre os zeros, número de zeros de sinal e magnitude do fator de alteração α .

Concluimos que o deslocamento angular sofrido pelos zeros de sinal não interfere na determinação da região de observação, porém inviabiliza qualquer tentativa de se estimar as frequências do sinal sobre os zeros deslocados.

Uma análise mais detalhada dos deslocamentos angulares dos zeros do filtro será deixada para pesquisas futuras.

6.3.4 Região de observação

A região no plano Z a ser determinada na primeira etapa do método é crucial para o sucesso da estratégia proposta.

Essa região, denominada de região de observação, deve possuir as seguintes características desejáveis: (1) deve abranger pelo menos um zero do filtro, e neste caso esse zero deve ser um zero de sinal e (2) deve conter uma pequena fração do plano Z , abrangendo assim uma pequena quantidade de zeros candidatos a zero de sinal.

Podemos notar a necessidade de um compromisso entre as duas características desejáveis, sendo, portanto, necessário a realização de um procedimento cuidadoso para uma melhor definição dessa região e, conseqüentemente, um melhor desempenho do método proposto.

O procedimento sugerido para a obtenção da região de observação será baseado na definição de um ângulo de abertura Θ , denominado de ângulo de observação.

Ângulo de observação

O ângulo de observação Θ , com vértice no centro da CRU, será definido por sua mediatriz e um valor de abertura.

A mediatriz do ângulo de observação deverá coincidir com o argumento do zero do filtro que apresentar deslocamento para fora da CRU, após aplicada uma perturbação adequada nos coeficientes desse filtro. No caso de mais de um zero apresentar tal comportamento, a mediatriz será dada pelo eixo médio entre esses zeros. Desta forma, a mediatriz poderá ser interpretada como uma aproximação para o eixo de simetria da distribuição dos zeros original.

Essa determinação tem como objetivo garantir a presença do zero de sinal dentro da região de observação.

O valor para a abertura do ângulo de observação poderá ser obtido por uma forma direta ou iterativa.

Forma Direta

O valor para o ângulo de observação será escolhido da seguinte forma:

$$\Theta = 3(\phi_1 - \phi_2),$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 , com $\phi_1 > \phi_2$, são os argumentos dos dois zeros do filtro original mais próximos da mediatriz dos zeros que apresentaram deslocamento para fora da CRU, sendo escolhido apenas um para cada porção do plano definida pela mediatriz. O termo $(\phi_1 - \phi_2)$ representa a distância angular entre os dois zeros escolhidos.

Desta forma, a região de observação deverá abranger pelo menos dois zeros do filtro e possíveis zeros próximos destes.

O fator 3 na definição do ângulo foi baseado no fato dos dois zeros mais próximos da mediatriz serem os candidatos mais prováveis para zeros de sinal. Estes zeros estão afastados por uma distância angular $(\phi_1 - \phi_2)$. Considerando que as frequências do sinal encontram-se próximas entre si e devido a uniformidade da distribuição dos zeros, não deverá existir outros zeros próximos a cada um desses com um afastamento angular menor do que $(\phi_1 - \phi_2)$. A exceção deverá ocorrer para o caso em os zeros próximos também são zeros de sinal e nesse caso deverão pertencer à região de observação.

A forma direta defini implicitamente um ângulo de observação contendo, de forma aproximada, círculos centrados em cada um dos dois zeros com argumentos ϕ_1 e ϕ_2 .

Cada círculo representará, portanto, a área reservada para a variação do zero de sinal e determinará o limite para a distinção de cada zero de sinal dos demais zeros. Deve ficar claro que os zeros com argumentos ϕ_1 e ϕ_2 , utilizados para derivar o ângulo de observação, sempre serão candidatos a zero de sinal, mas não serão necessariamente escolhidos como estimativas na segunda etapa do método.

Forma Indireta

O ângulo de observação será definido tomando-se a mediatriz dos zeros que apresentaram deslocamento para fora da CRU como ponto de partida para sua abertura e um critério de parada adequado.

O valor para o ângulo de observação será aumentado até englobar pelo menos um zero do filtro original. Esse primeiro zero encontrado será, então, tomado como um primeiro candidato a zero de sinal. Com o aumento sistemático do ângulo de abertura mais zeros serão englobados pela região de observação e ordenadamente classificados como candidatos.

O ângulo deverá ser ampliado até abranger uma quantidade de zeros maior ou igual ao número de zeros de sinal esperados. Uma estimativa para o número de zeros de sinal esperado poderá ser obtida pelo número de zeros que sofreram um deslocamento para fora da CRU após a perturbação imposta nos coeficientes do filtro.

Não existe a necessidade de determinar precisamente o número de zeros de sinal na etapa de definição do ângulo de observação. Na verdade, esse número deverá ser superestimado para garantir que a região de observação contenha todos os verdadeiros zeros de sinal.

Devemos esclarecer que o erro na determinação do número de zeros de sinal na segunda etapa do método propiciará uma degradação no desempenho do método proposto, conforme ocorre para o método FBLP Modificado. Portanto, será considerado conhecido o número de frequências presentes no sinal observado, ficando a análise de um erro na sua estimação para trabalhos futuros.

6.4 Simulações

Mantendo os mesmos parâmetros do sinal utilizado no exemplo apresentado no Capítulo 3, Seção 3.5, temos na Figura 6.4 o diagrama da superposição dos zeros obtidos do polinômio com os coeficientes alterados, para $\alpha = 0,45$ e $\text{SNR}=5\text{dB}$. O valor para α foi obtido empiricamente como a mais favorável. A escolha do fator α será discutida posteriormente. Podemos observar, facilmente, que um dos zeros apresenta um efeito equivalente a um amortecimento positivo, destacando-se dos demais zeros que permanecem no interior da CRU. Apesar de ser esperada a projeção de dois zeros para fora da CRU, essa distribuição foi obtida devido ao grande valor escolhido para α e a proximidade dos dois zeros. Nessa situação, um único zero de sinal se deslocou para fora da CRU na direção da média aritmética das duas frequências angulares, enquanto que o outro zero de sinal permaneceu no interior da CRU na mesma posição angular do primeiro.

A Figura 6.5 mostra, para efeito de comparação, o posicionamento dos zeros do método FBLP Modificado para $\text{SNR}=5\text{ dB}$. Observe que, nesta circunstância crítica de SNR, o critério de proximidade da CRU para estimar as frequências angulares falha em alguns experimentos, uma vez que zeros estranhos podem ser tomados equivocadamente como zeros de sinal, por estarem mais próximos da CRU.

Comparando as Figuras 6.4 e 6.5, podemos constatar a sensível diferença de comportamento dos zeros. Na região onde se encontram os zeros de sinal observamos a projeção de um zero para fora da CRU, aumentando, assim, a possibilidade de distinção da região que os contém.

O gráfico da Figura 6.6 é equivalente ao gráfico da Figura 3.3 acrescido dos resultados obtidos com o método proposto, para $\text{SNR}=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15, 20, 25$ e 30dB com $\alpha = 0,45$.

Para a obtenção dos resultados para o novo método proposto utilizamos o argumento do zero projetado para fora da CRU como mediatriz do ângulo de observação. Para obtenção do ângulo de abertura foi utilizada a forma indireta, tendo-se o conhecimento, a priori, do número de

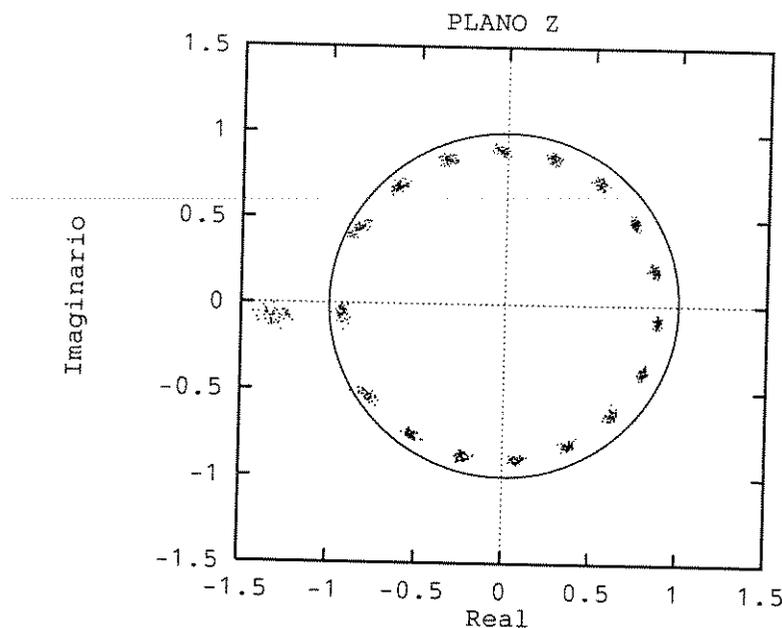


Figura 6.4: Zeros da função de transferência FBLP Mod., $N = 25$ amostras, $L = 18$, $\alpha = 0.45$, $SNR = 5dB$. Superposição de 50 experimentos.

freqüências presentes no sinal. O limiar encontrado para o método proposto, aproximadamente 1dB, foi notadamente abaixo do limiar de 3dB apresentado pelo método ML.

Apesar da Figura 6.6 apresentar apenas a variância do estimador para a freqüência ω_1 , espera-se resultados semelhantes para ω_2 , como ocorre no caso da aplicação do método FBLP Modificado tradicional.

O método proposto sugere uma perturbação apenas no coeficiente w_0 do filtro, porém algumas simulações já realizadas mostram que a técnica pode ser estendida, com vantagens, para o coeficiente w_1 .

Os resultados apresentados nas simulações servem apenas para ilustrar a capacidade da estratégia proposta. Simulações exaustivas e com variações de alguns parâmetros ainda não foram concluídas, mas já apontam para um desempenho bastante satisfatório quanto à robustez da proposta.

6.4.1 Limiar do método ML

O resultado obtido para o limiar do método proposto é surpreendente, pois o método ML é considerado o melhor estimador. No entanto, podemos observar que, considerando a variância do estimador acima de sua SNR de limiar, o método ML continua superior ao novo método proposto. A ocorrência de um limiar inferior encontrado para o método proposto se explica, portanto, pelo limite de Cramér-Rao, o qual não apresenta limiar. Desta forma, podemos concluir que o limiar está diretamente relacionado às características do método utilizado.

Acreditamos que o limiar para o método ML poderá ser estendido como foi realizado para o método FBLP Modificado. Para esse fim, poderíamos aplicar o método ML na segunda

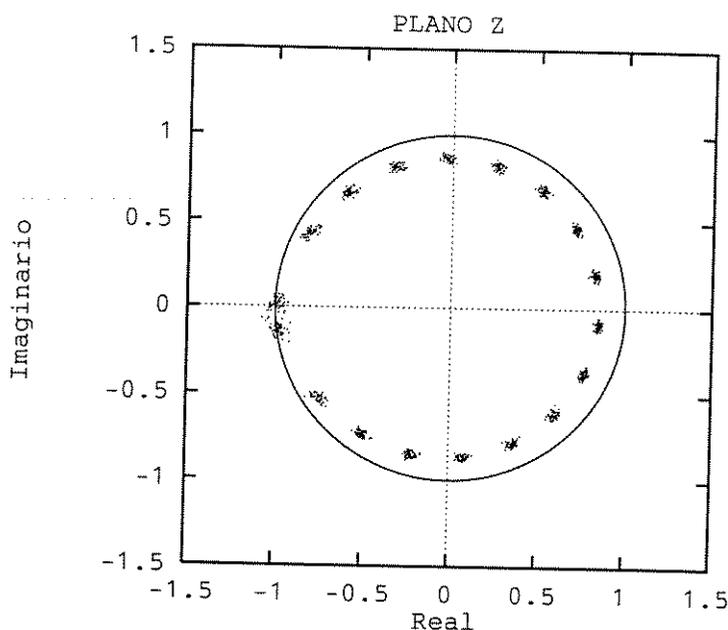


Figura 6.5: Zeros da função de transferência *FBLP Mod.*, $N = 25$ amostras, $L = 18$, $SNR = 5dB$. Superposição de 50 experimentos.

etapa do método proposto. No método ML a informação obtida na primeira etapa poderia ser utilizada para restringir a escolha do estimador ML. Essa restrição poderia ser realizada, por exemplo, através de uma filtragem do sinal através de um filtro passa-faixa, na qual essa faixa seria definida pela região de observação, para posterior avaliação do sinal filtrado pelo método ML.

O sucesso do método proposto atesta, por fim, uma má utilização da capacidade dos método de norma-mínima aplicado na detecção de frequências. Mostramos, então, ser possível, através de estratégias adicionais, obter estimativas mais adequadas.

6.4.2 Determinação do fator α

A determinação para um valor do fator de perturbação dos coeficientes do filtro, dado por α em (6.7), é importante principalmente para a determinação da mediatriz do ângulo de observação.

Portando, devemos escolher α com o menor valor suficiente para obtermos uma distinção não equivocada da região onde se encontram os supostos zeros de sinal.

Foi demonstrado que, para um único zero de sinal, a perturbação sugerida para os coeficientes do filtro faz com que esse zero se desloque para fora da CRU, podendo assim ser facilmente identificado dos demais zeros.

Para mais de um zero de sinal, próximos entre si, também ficou evidente que esses zeros apresentarão comportamento equivalente ao caso de um único zero, sendo, portanto, projetados para fora da CRU, para valores adequados de α .

Valores elevados para α (próximos a 1) implicam em uma pequena alteração nos coeficientes

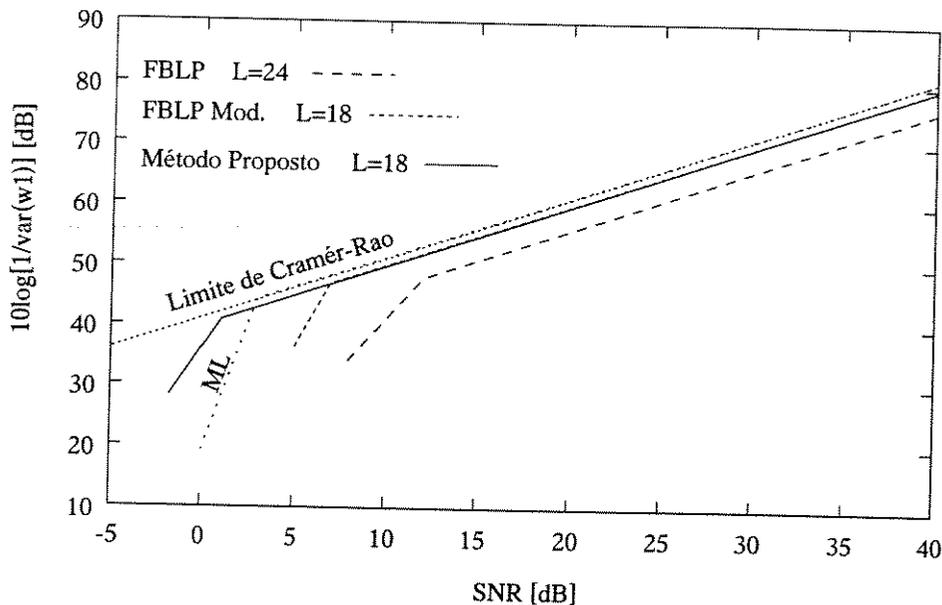


Figura 6.6: Análise de desempenho dos métodos FBLP, FBLP Mod., ML e do método proposto.

que pode não ser suficiente para propiciar uma perfeita distinção entre os dois conjuntos de zeros.

Valores muito pequenos para α (próximos a 0), por sua vez, implicam em uma grande alteração dos coeficientes que pode provocar distorções indesejáveis na posição dos zeros de sinal. Essas distorções podem fazer com que apenas um único zero de sinal seja projetado para fora da CRU, mesmo na existência de mais zeros de sinal.

Tais efeitos ocorrem devido às limitações impostas para o lugar das raízes de um polinômio com distribuição simétrica de seus zeros e pode ser melhor compreendido através do traçado do diagrama do lugar das raízes para o polinômio alterado. A ocorrência desses efeitos só prejudicará a estimativa do número de frequências do sinal, já que a determinação da mediatriz estará garantida através da projeção de um único zero.

Devemos enfatizar que na análise do efeito das perturbações dos coeficientes do polinômio, tratada aqui, utilizamos um modelo para pequenas perturbações. Outros modelos deverão ser utilizados para analisar o efeito provocado por grandes perturbações.

6.4.3 Robustez e desempenho do método proposto

A estratégia proposta é bastante robusta, pois, conforme foi demonstrado, mesmo se algum zero estranho apresentar um deslocamento para fora da CRU, equivalente ao esperado por um zero de sinal, isso só deverá ocorrer se esse estiver bem próximo ao zero de sinal, não interferindo assim na determinação da região do plano Z realizada na primeira etapa do método. A proximidade a que nos referimos, compreende uma distância angular entre os zeros menor que $2\pi/L$, pois esta é a distância angular entre os zeros esperada para uma distribuição uniforme.

Da mesma forma, para mais de um zero de sinal próximos entre si, como em uma situação que exige alta resolução do método de detecção, poderemos garantir o comportamento adequado para ambos os zeros de sinal e uma determinação adequada da região de observação.

Para zeros de sinal afastados os resultados continuam válidos, porém, a determinação da região de observação no plano Z será mais abrangente para conter todos os zeros candidatos a zero de sinal. Conseqüentemente, tal situação poderá tornar sem efeito a estratégia proposta.

Essa estratégia evita claramente a escolha equivocada de um zero de sinal, quando apenas o critério de proximidade da CRU é utilizado, o qual é o maior responsável pelo fraco desempenho do método FBLP Modificado abaixo da SNR de limiar.

O método tem como principal vantagem uma redução do limiar para o método FBLP Modificado, ampliando assim sua aplicabilidade. Podemos notar que seu desempenho é igual ao do método FBLP Modificado tradicional para relações sinal-ruído acima do limiar deste.

Os melhores resultados de desempenho para o método proposto são obtidos quando utilizado em sinais composto por frequências próximas entre si em baixa relação sinal-ruído. Nessa situação, considerando os métodos existentes para detecção de frequências, obtemos um ganho significativo com a sua utilização.

6.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas algumas medidas de desempenho utilizadas em métodos de estimação de alta resolução.

Apresentamos uma proposta para um novo método de detecção de frequências, que possibilitou estender a utilização do método FBLP Modificado além do limiar existente.

Nesse novo método, foi sugerida como estratégia uma perturbação nos coeficientes do filtro de norma-mínima, proporcionando um efeito equivalente a um amortecimento positivo nas exponenciais que compõem o sinal, com o objetivo de melhor distinguir os zeros de sinal frente aos demais. Foi demonstrado que a estratégia funciona devido ao comportamento diferenciado para os dois conjuntos de zeros, permitindo a projeção dos zeros de sinal para fora da CRU. Os resultados apresentados pelas simulações serviram para ilustrar a capacidade da estratégia proposta e comprovaram sua eficiência e robustez. O limiar encontrado para o método proposto foi de 1dB, notadamente inferior ao do método FBLP Modificado que apresentou um limiar de 7dB para as mesmas condições.

Podemos destacar no método proposto o uso das características de simetria apresentada pela solução de norma-mínima, constatada no capítulo anterior, como uma fonte de informação adicional não utilizada até então em métodos de detecção.

O sucesso do método proposto atestou, por fim, a possibilidade de redução do limiar abaixo daquele apresentado pelo método ML.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Resumo

Foram desenvolvidos neste trabalho aspectos teóricos e práticos da predição linear nos contextos *forward*, *backward* e *forward-backward*. Utilizamos o critério de mínimos-quadrados para derivar a equação normal em suas formas determinística e não-determinística.

Foi dado destaque à solução da equação normal que apresenta a menor norma Euclidiana para os coeficientes do filtro ótimo, denominada de solução de norma-mínima. Essa solução foi obtida através do estudo do teorema da decomposição em valores singulares, objetivando o cálculo da pseudo-inversa da matriz dos dados disponíveis. A solução de norma-mínima foi obtida em sua forma explícita, possibilitando um melhor conhecimento de suas características, tanto sob o ponto de vista do polinômio associado ao filtro, como em relação aos subespaços (subespaço de sinal e subespaço de ruído) definidos pela matriz de dados do sinal.

A detecção de frequências através de métodos de predição linear no contexto *forward-backward* foi a aplicação prática escolhida. Ficou demonstrado que os zeros do polinômio formado pelos coeficientes do filtro de erro de predição, dados pelo método FBLP, podem ser utilizados para estimar as frequências presentes em um sinal.

Apresentamos o método FBLP convencional e FBLP Modificado aplicado na detecção de frequências próximas de um sinal composto por uma soma de exponenciais não-amortecidas sujeitas a ruído branco aditivo. Na oportunidade, seus desempenhos e limitações foram analisados.

O comportamento da distribuição dos zeros da solução de norma-mínima foi amplamente estudado e caracterizado, permitindo assim um melhor conhecimento dos efeitos provocados por perturbações ruidosas. Os zeros do filtro foram, então, classificados em dois conjuntos: zeros de sinal e zeros estranhos.

No último capítulo, apresentamos uma novo método para detecção de frequências, baseado no método FBLP Modificado, que propicia uma diminuição da SNR de limiar deste método.

Através de simulações pudemos realizar análises e comparações do método proposto com os métodos convencionais, que confirmaram a eficiência e robustez da proposta.

7.2 Conclusões e Contribuições por Capítulo

Capítulo 2

Foram expostos os principais aspectos e conceitos da teoria de predição linear.

A forma determinística do preditor foi a mais utilizada nos desenvolvimentos por apresentar uma fácil manipulação matemática e permitir a extensão de seus resultados para a forma não-determinística estacionária. Para a forma não-determinística do preditor, as médias estatísticas foram substituídas por médias temporais através da hipótese de ergodicidade do sinal.

A predição desenvolvida foi baseada em um modelo de aproximação só com pólos (AR), por se mostrar a mais adequada para a aplicação em detecção de frequências.

Como uma contribuição deste capítulo, podemos citar a forma de apresentação da teoria de predição linear, que realiza uma ponte entre os conceitos clássicos apresentados em [23] e a abordagem moderna de [8].

Contribuímos, também, com a apresentação de uma outra formulação para solução de norma-mínima, baseada no conceito de espaço nulo, a qual se mostrou bastante elegante e compacta.

Capítulo 3

A aplicação da predição linear em detecção de frequências foi abordada para os métodos FLP, BLP e FBLP. Através dessa aplicação, ficou justificada a escolha da solução de **norma-mínima**, bem como o uso do método FBLP na detecção de sinais, onde suas componentes exponenciais não apresentam amortecimento.

Destacamos ainda, nesse capítulo, a importância da distinção entre **zeros de sinal** e **zeros estranhos** na estimação precisa das frequências contidas no sinal observado.

Foi constatado a existência de flutuações dos zeros em relação a suas posições originais em situações ruidosas. Tal comportamento se mostra bastante prejudicial na estimação precisa dos parâmetros do sinal na presença de ruído excessivo.

No caso de detecção de sinais ruidosos, a análise de subespaços, através dos valores e vetores singulares, torna-se uma ferramenta poderosa ao possibilitar a divisão do sinal em dois subespaços: o de sinal propriamente dito e o de ruído, onde o último se apresenta como o grande responsável pelo desempenho insatisfatório dos métodos de detecção. Baseado nesta ferramenta de análise, apresentamos o método FBLP Modificado que produz uma solução para o filtro de erro de predição utilizando apenas o subespaço de sinal.

Na comparação entre técnicas de estimação baseadas em LS e SVD, pudemos concluir que essa última é superior à primeira, principalmente em situações onde a SNR é baixa.

Capítulo 4

A teoria desenvolvida nesse capítulo permitiu a obtenção da solução de norma-mínima para preditores lineares em uma forma genérica e explícita, quando aplicada a um sinal composto pela soma de exponenciais complexas.

Através da obtenção das estimativas das correlações para um sinal composto pela soma de exponenciais complexas, foi possível analisar as dependências da solução de norma-mínima em

relação ao número de amostras disponíveis, ordem do filtro, número de exponenciais complexas e seus parâmetros, como frequências, amplitudes e fases.

A obtenção desses resultados também possibilitou explicitar os coeficientes do filtro preditor de ordem L , bem como o posicionamento de seus zeros para sinais compostos por uma ou duas exponenciais complexas não-amortecidas. Para sinais amortecidos tal abordagem limitou-se a um preditor de segunda ordem, devido à complexidade envolvida em ordens maiores.

Capítulo 5

O conhecimento das características das distribuições dos zeros do preditor se mostrou de grande utilidade quando utilizamos um método de detecção de frequências baseado nas raízes do polinômio de norma-mínima, associado ao filtro ótimo (“root minimum-norm”). Com esse objetivo, obtivemos nesse capítulo uma relação simples entre os coeficientes do filtro preditor e seus zeros. Esse desenvolvimento mostrou que, para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, o i ésimo coeficiente complexo do filtro otimizado possui magnitude dada por $4 \cdot \cos(i\Delta\omega/2)/L$ e fase dada por $i(-\bar{\omega})$, onde $\bar{\omega}$ é a média aritmética das frequências contidas no sinal e $\Delta\omega$ representa a diferença entre suas frequências angulares.

Como uma contribuição importante, temos a constatação de que a norma de tal solução é invariante a uma rotação de seus zeros. Através dessa invariância, concluímos que a solução de norma-mínima possui uma simetria no posicionamento de seus zeros. Para um sinal composto por duas exponenciais complexas não-amortecidas, pudemos identificar essa simetria através de um eixo determinado pela média aritmética das frequências angulares contidas no sinal.

A definição do conceito de raio médio de uma distribuição dos zeros do preditor de norma-mínima, assim como sua quantização, permitiu equacionar a ordem do filtro e o número de exponenciais do sinal com a proximidade dos zeros estranhos à CRU. Esse equacionamento contribuiu para um melhor entendimento dos efeitos indesejáveis observados na estimação de frequências não-amortecidas através do uso de um preditor forward-backward, baseada no critério de proximidade à CRU.

Também integram as contribuições desse capítulo o desenvolvimento de uma solução de norma-mínima aproximada, através de uma linearização dos resultados reais, bem como a apresentação de polinômios com distribuições de zeros uniformes.

Capítulo 6

Como contribuição final deste trabalho, foi apresentada a proposta de um novo método para detecção de frequências bem próximas entre si em valores extremamente baixos para SNR. O novo método proposto, baseado no método FBLP Modificado, amplia a utilização desse método para valores de SNR abaixo dos limiares existentes. O limiar encontrado para o método proposto foi de 1dB, notadamente inferior ao do método FBLP Modificado, que apresentou um limiar de 7dB para as mesmas condições. A característica de alta resolução do método FBLP Modificado, aliada à ampliação de sua aplicabilidade, credencia o novo método proposto como uma técnica competitiva com o método ML.

7.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

No decorrer da apresentação deste trabalho sempre procuramos destacar a possibilidade de pesquisas futuras.

No Capítulo 2 apresentamos as formas de predição forward, backward e forward-backward, através da variação da condição $w_i^* = -1$. Acreditamos que outras possibilidades para a condição podem ser utilizadas, dando origem a outras formas de predição, nas quais teríamos casos intermediários entre a predição forward e backward.

No Capítulo 3 discutimos a influência do ruído na distribuição dos zeros do preditor. Acreditamos que o estudo mais detalhado do comportamento dos zeros propiciará avanços em técnicas de detecção de frequências baseadas nas raízes. Como sugestão, podemos citar uma melhor caracterização dos “clusters” formados pelos zeros sobrepostos para um grande número de experimentos. Acreditamos que a forma geométrica de tais “clusters” está estreitamente relacionada ao ruído presente no sinal, servindo, portanto, como fonte de informação adicional dos efeitos provocados pelo ruído, mesmo no caso de ruído colorido. Essas informações, por sua vez, possibilitarão alterações nas técnicas de detecção com o objetivo de diminuir os efeitos indesejáveis.

No Capítulo 5 procuramos caracterizar a solução de norma-mínima através dos coeficientes do polinômio associado. Observamos que tais coeficientes apresentam uma estreita relação com os parâmetros do sinal (frequência, amplitude e fase). Em alguns casos pudemos explicitar tais coeficientes e concluir que seus módulos estão relacionados ao número de frequências distintas presentes no sinal e seus argumentos relacionados ao espaçamento angular entre as frequências.

Baseado nas estreitas relações entre os coeficientes do filtro preditor e os parâmetros do sinal observado, acreditamos que a utilização dos coeficientes obtidos da solução de norma-mínima como uma seqüência de entrada para um novo filtro preditor possibilitará a obtenção de informações adicionais com respeito ao sinal observado. Através das estimativas da amplitude dessa seqüência poderíamos obter o número de frequências distintas presentes no sinal observado. Além disso, também poderíamos obter o espaçamento angular entre as frequências do sinal observado através das estimativas das frequências dessa seqüência.

Ainda no Capítulo 5, explicitamos as correlações estimadas para um sinal genérico composto pela soma de M exponenciais complexas. Pudemos constatar uma forte dependência dessas estimativas com a ordem do filtro, número de amostras disponíveis do sinal, diferença de fase e de frequências das exponenciais. Acreditamos que uma análise mais cuidadosa dessas estimativas permitirá explicar resultados de desempenho superior para os estimadores, quando esses fatores forem escolhidos adequadamente. Visto que tais estimativas são resultado de uma soma finita, uma condição favorável será dada pela soma de períodos inteiros das frequências presentes no sinal, considerando suas fases iniciais.

No Capítulo 6, quando apresentamos a proposta de um novo método para detecção de frequências, destacamos apenas uma estratégia de perturbação do coeficiente. Acreditamos que outras possibilidades de perturbação propiciem resultados satisfatórios. Como sugestão, destacamos a perturbação apenas no coeficiente w_1 do filtro, por ter seu argumento diretamente relacionado ao eixo de simetria da distribuição dos zeros.

Outros procedimentos voltados para uma melhor estimação dos parâmetros do sinal estão em estudo. Dentre eles, destacamos a manipulação dos subespaços definidos pelos autovetores e autovalores da matriz de dados associada ao sinal [5][35]. Acreditamos ser possível obter um

melhor desempenho dos métodos de detecção de frequências baseados em predição linear no contexto *forward-backward*, não através da completa extração dos autovalores e autovetores do subespaço de ruído, como no método FBLP Modificado, mas sim através de outras combinações, com o objetivo de escolher um subespaço mais adequado para representar o sinal observado. Esse procedimento deve se tornar mais atrativo com o aumento da intensidade do ruído presente no sinal. Para ruído com potência comparada a do sinal, a distinção entre o subespaço de sinal e de ruído, realizada pelo método FBLP Modificado, pode se tornar impossível.

A influência da fase inicial das exponenciais no desempenho dos métodos de estimação é um assunto importante na análise da performance de métodos de alta resolução [33][11]. Tal influência merece um destaque maior.

Após a realização deste trabalho, torna-se um desafio a utilização dos resultados aqui obtidos para fins de explicitar a performance estatística dos métodos de detecção de frequências baseados na ferramenta de decomposição em valores singulares. Até o presente momento temos o conhecimento de resultados referentes a obtenção do erro médio quadrado das estimativas de tais métodos apenas assintoticamente. Essas análises são não-lineares, tornando qualquer tratamento teórico de sua performance muito difícil. Por isso, a utilização de procedimentos semi-analíticos, baseados nos resultados obtidos neste trabalho, pode ser bastante útil.

O estudo do posicionamento dos zeros após uma perturbação foi abordado de uma forma simples no Capítulo 6, para permitir o desenvolvimento do método proposto. Sugerimos uma análise mais detalhada desse comportamento através da técnica do lugar das raízes, onde um traçado detalhado da posição dos zeros no plano Z poderá ser obtido para cada valor da perturbação α proposta [16].

Com o aumento da capacidade de resolução dos métodos estudados, surge a preocupação, antes em segundo plano, da aplicabilidade desses métodos em tempo real. A utilização de procedimentos numéricos mais eficientes computacionalmente tem sido abordado com frequência e por uma infinidade de áreas. Como sugestão, temos as transformações polinomiais adequadas que levam a uma redução do esforço computacional requerido para a obtenção de suas raízes [27]. O uso de modelos de predição linear simétrica [38] é um exemplo desse tipo de transformação. Nesse sentido, os estudos desenvolvidos neste trabalho fornecem uma boa base para o conhecimento das características do polinômio resultante da solução de norma-mínima, facilitando, assim, a análise de tais transformações. Os algoritmos adaptativos também poderão ser uma alternativa de estudos para aplicação em tempo real [29][14].

Referências Bibliográficas

- [1] **ANTUNES, E.J.B.** : *Detecção de Frequências através de Predição Linear*, Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Maio de 1992.
- [2] **ANTUNES, E.J.B. and LOPES, A.** : *Frequencies estimation of real sinusoids*, International Symposium on Signals, Systems and Electronics, ISSSE'92, Paris, France, 1-4 September 1992.
- [3] **CADZOW, J. A., BASEGHI, B. and HSU, T.** : *Singular-value decomposition approach to time series modelling*, IEE Proceedings, pp. 332-40, vol. 130, Part. F, n^o3, April 1983.
- [4] **COLARES, R. F. e LOPES, A.** : *Melhorando a Detecção de Frequências via Predição Linear*, 13^o Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 13^o SBT, Águas de Lindóia, SP, Brazil, Setembro de 1995.
- [5] **DE MOOR, B.** : *The Singular Value Decomposition and Long and Short Spaces of Noisy Matrices* , IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 2826-37, vol. 41, n^o9, September 1993.
- [6] **DE WITT B., A. S. e LOPES, A.** : *Métodos de Estimação dos Parâmetros dos Modelos ARMA para Análise Espectral*, Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Junho de 1992.
- [7] **GOLUB, G. and VAN LOAN, C.** : *Matrix Computations*, second ed. Baltimore, MD: John Hopkins University Press, 1989.
- [8] **HAYKIN, S.** : *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [9] **HAYKIN, S.** : *Modern Filters*, Macmillan Publishing Company, New York, 1989.
- [10] **HILDEBRAND, F.B.** : *Introduction to Numerical Analysis*, New York, NY: MacGraw-Hill, 1956.
- [11] **HUA, Y. and SAKAR, T. K.** : *Perturbation Analysis of TK Method for Harmonic Retrieval Problems*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 228-40, vol. 36, n^o2, February 1988.

- [12] **JEFFRIES, D. J. and FARRIER, D. R.** : *Asymptotic results for eigenvector methods*, IEE Proceedings, pp. 589-94, vol. 132, Part. F, n^o7, December 1985.
- [13] **KAVEH, M. and BARABELL, A. J.** : *The Statistical Performance of the MUSIC and the Minimum-Norm Algorithms in Resolving Plane Waves in Noise*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 331-41, vol. 34, n^o2, April 1986.
- [14] **KAY, S. M.** : *Accurate Frequency Estimation at Low Signal-to-Noise Ratio*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 540-47, vol. 32, n^o3, June 1984.
- [15] **KAY, S. M.** , *Modern Spectral Estimation: Theory and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [16] **KISHIDA, K., YAMADA, S. and SUGIBAYASHI, N.** : *Observation Noise and Zero Loci of a Time Series Model*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 2269-73, vol. 41, n^o6, June 1993.
- [17] **KLEMA, V. C. and LAUB, A. J.** : *The Singular Value Decomposition: It's Computation an Some Applications*, IEEE Transactions on Automatic Control, pp. 164-76, Vol. 25, 1980.
- [18] **KUMARESAN, R.** : *On the Zeros of the Linear Prediction-Error Filter for Deterministic Signals*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 217-20, vol. 31, n^o1, February 1983.
- [19] **KUMARESAN, R. and TUFTS, D. W.** : *Estimating the Angle of Arrival of Multiple Plane Waves*, IEEE Transactions on AES, pp. 134-39, vol. 19, 1983.
- [20] **LACOUME, J. L., GHARBI, M., LATOMBE, C. and NICOLAS, J. L.** : *Close Frequency Resolution by Maximum Entropy Spectral Estimators*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 977-83, vol. 32, n^o5, October 1984.
- [21] **LANG, S. W. and McCLELLAN, J. H.** : *Frequency Estimation with Maximum Entropy Spectral Estimators*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 716-24, vol. 28, n^o6, December 1980.
- [22] **LEMOS, R.P. and LOPES, A.** : *Métodos de Alta Resolução com Restrição de Sub-espaço para Detecção de Freqüências*, Tese de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica da UNICAMP, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Março de 1995.
- [23] **MAKHOUL, J.** : *Linear Prediction: A Tutorial Review*, Proceedings of the IEEE, pp. 561-80, vol. 63, n^o4, April 1975.
- [24] **MAKHOUL, J.** : *Spectral Analysis of Speech by Linear Prediction*, IEEE Transactions on Audio Electroacoustic, pp. 140-48, vol. 21, June 1973.
- [25] **MAKHOUL, J. and WOLF, J. J.** : *Linear Prediction and the Spectral Analysis of Speech*, Bolt Beranek and Newman Inc., Cambridge, Mass., August 1972.

- [26] MARPLE, S.L., Jr. : *Digital Spectral Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.
- [27] McCORMICK, W. S. and LANSFORD, J. L. : *Efficient Parallel Rooting of Complex Polynomials on the Unit Circle*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 2347-51, vol. 39, n^o10, October 1991.
- [28] MOUSTAKIDES, G. V. and BERBERIDIS, K. : *New Efficient LS and SVD Based Techniques for High-Resolution Frequency Estimation*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 85-94, vol. 43, n^o1, January 1995.
- [29] ORFANIDIS, S. J. and VAIL, L. M. : *Zero-Tracking Adaptive Filters*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 1566-72, vol. 34, n^o6, December 1986.
- [30] PAPOULIS, A. : *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, third ed. New York, NY: MacGraw-Hill, Inc., 1991.
- [31] RAO, B. D. : *Perturbation Analysis of an SVD-Based Linear Prediction Method for Estimating the Frequencies of Multiple Sinusoids*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 1026-35, vol. 36, n^o7, July 1988.
- [32] RAO, B. D. : *Lowering the Threshold SNR of Singular Value Decomposition Based Methods*, Proceedings of IEEE ICASSP, pp. 2472-75, 1988.
- [33] RAO, B. D. V. : *An Explanation to the Limitation Observed in the Kumaresan-Prony Algorithm*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 1338-40, vol. 34, n^o5, October 1986.
- [34] RAO, B. D. and HARI, K. V. S. : *Statistical Performance analysis of the minimum-norm method*, IEE Proceedings, pp. 125-34, vol. 136, Part. F, n^o3, June 1989.
- [35] ROY, R., PAULRAJ, A. and KAILATH, T. : *ESPRIT - A Subspace Rotation Approach to Estimation of Parameters of Sinusoids in Noise*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 1340-42, vol. 34, n^o5, October 1986.
- [36] SORENSON, H. W. : *Least-squares estimation: from Gauss to Kalman*, IEEE Spectrum, pp. 63-68, July 1970.
- [37] STEWART, G.W. : *Introduction to Matrix Computations*, New York, NY: Academic Press, Inc., 1973.
- [38] STOICA, P. and NEHORAI, A. : *The Poles of Symmetric Linear Prediction Models Lie on the Unit Circle*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 1344-46, vol. 34, n^o5, October 1986.
- [39] TUFTS, D. W. and KUMARESAN, R. : *Singular Value Decomposition and Improved Frequency Estimation Using Linear Prediction*, IEEE Transactions on ASSP, pp. 671-75, vol. 30, n^o4, August 1982.

- [40] **TUFTS, D.W.** and **KUMARESAN, R.** : *Estimation of Frequencies of Multiple Sinusoids: Making Linear Prediction Perform Like Maximum Likelihood* , Proceedings of the IEEE, pp. 975-89, vol.70, n^o9, September 1982.
- [41] **WILKES, D. M.** and **CADZOW, J. A.** : *The Effects of Phase on High-Resolution Frequency Estimators*, IEEE Transactions on Signal Processing, pp. 1319-30, vol. 41, n^o3, March 1993.
- [42] **WILKINSON, J.H.** and **REINSCH, C.** : *Linear Algebra*, Vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1971.