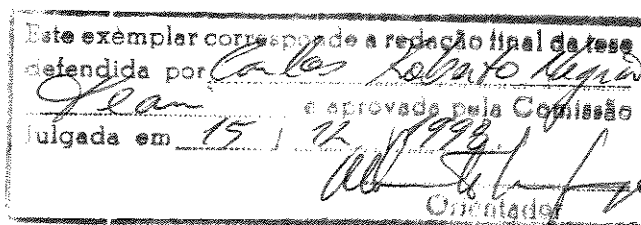


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA E MICROELETRÔNICA

**TESTE PARAMÉTRICO DE CIRCUITOS
INTEGRADOS, UMA ABORDAGEM SISTÊMICA
BASEADA NA DINÂMICA NÃO LINEAR**

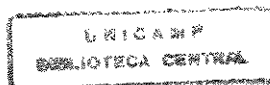
Autor : Carlos Roberto Negrão Teani

Orientador : Alberto Martins Jorge



Tese apresentada como parte dos pré requisitos exigidos para obtenção do título de doutor em engenharia elétrica na modalidade eletrônica e comunicações. Este projeto de pesquisa foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

Dezembro de 1998



9904063

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
V	Ex.
TECNOLOGIA	36493
PROD.	229/99
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	05/02/99
N.º CPD	

CM-00120719-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

T222t Teani, Carlos Roberto Negrão
 Teste paramétrico de circuitos integrados, uma abordagem
 sistêmica baseada na dinâmica não linear. / Carlos Roberto Negrão
 Teani.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Alberto Martins Jorge.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
 Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Circuitos integrados - Testes. 2. Teorias não-lineares. 3.
 Medidas elétricas. I. Jorge, Alberto Martins. II. Universidade
 Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
 Computação. III. Título.

Agradecimentos

As novas idéias surgem e temos que ter força para explorá-las; ambas as etapas são fruto da convivência e apoio daqueles que nos amam.

Agradeço à minha esposa Cleidemar e aos meus filhos Márcia e Roberto pelos sacrifícios suportados neste período de nossas vidas, pelo amor que nos uniu e permitiu que este trabalho fosse realizado.

Ao Luiz e Aparecida, meus pais, pela confiança e força transmitidas ao longo desta jornada.

Ao Martins, meu orientador e grande amigo, que soube iluminar os caminhos nos momentos mais difíceis.

Ao amigo Carlos Ribeiro pelas brilhantes sugestões, ajuda nas medidas e pelas fotomicrografias.

Ao Sr. Alsuério pela revisão ortográfica do texto - os erros ainda presentes são de minha inteira responsabilidade.

Aos professores Badan e Celso Bottura pelas longas e agradáveis conversas sobre os comportamentos dos sistemas testados.

Aos amigos Eduardo Bassanello e Marcos Marcondes que, com muito entusiasmo, sempre me apoiaram e vibraram com cada etapa conquistada ao longo destes anos de pesquisa e medidas no laboratório.

Ao CTI pela permissão de utilizar as instalações e equipamentos de medidas no período em que ainda estávamos montando o laboratório do DEMIC.

À FAPESP pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

Sumário

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Circuitos Integrados - um tipo especial de produto	2
1.2 Defeitos de concepção	4
1.3 Defeitos de fabricação	4
1.3.1 O circuito funciona ? => Teste funcional	5
1.3.2 O circuito apresenta algum problema potencial ?	5
1.4 Defeitos de operação	7
1.5 OBJETIVO DO TRABALHO	7
1.6 JUSTIFICATIVA PARA UTILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES	8
1.6.1 Definição de sistemas não lineares	8
1.6.2 Definição de sistema linear	8
1.6.3 Outras definições genéricas	9
1.6.4 Quanto à diferença de abordagem nos testes lineares e não lineares	10
2. NOÇÕES BÁSICAS DE SISTEMAS NÃO LINEARES	13
2.1 Métodos de análise	13
2.1.1 Alguns conceitos básicos	13
2.1.2 Mapeamento contraído (ou ponto fixo de Banach)	16
2.1.3 Equações diferenciais não lineares	18
2.2 Análise para sistemas de segunda ordem	22
2.2.1 Noção de campo vetorial	23
2.2.2 Método da linearização	24
2.2.3 Soluções periódicas	25
2.2.4 Método de aproximação analítica para o estudo de trajetória fechada	29
2.2.5 Método da série de potências	30
2.2.6 Método da perturbação singular	34
2.3 Considerações sobre a análise dos sistemas não lineares	37
3. SOBRE A ESTABILIDADE DOS SISTEMAS NÃO LINEARES	39
3.1 Estabilidade de Lyapunov	Erro!
3.1.1 Definições de Estabilidade	39
3.1.2 Derivada de uma função ao longo da trajetória de uma equação diferencial	43
3.2 Método direto de Lyapunov	45
3.3 Considerações sobre o método direto de Lyapunov	47
3.4 Estabilidade nos sistemas lineares	49
3.4.1 A estabilidade nos sistemas lineares autônomos	49
3.4.2 A estabilidade nos sistemas não autônomos	50
3.4.3 A estabilidade nos sistemas periódicos	51

3.5 Considerações sobre a análise de sistemas lineares.....	52
3.6 Os expoentes característicos de Lyapunov.....	52
3.6.1 Definição de expoente característico de Lyapunov.....	53
3.7 Considerações sobre o expoente de Lyapunov.....	56
4 . A INSTRUMENTAÇÃO DE TESTE	59
4.1 A montagem de testes.....	59
4.2 A relação do instrumental utilizado.....	60
4.3 Relação do instrumental de apoio.....	61
4.4 Medidor do espaço de estados observáveis	61
4.5 Medidor de mapa de Poincaré	63
4.5.1 O mapa de Poincaré.....	63
4.5.2 O painel do instrumento.....	65
4.6 Medidor de bifurcações.....	67
4.7 Analisador dinâmico de sinais.....	69
4.8 Analisador de densidade espectral de potência	70
4.9 Sobre a documentação completa dos equipamentos	71
4.10 ANÁLISE DE REPETIBILIDADE E REPRODUTIBILIDADE	71
4.10.1 Alguns conceitos básicos sobre medidas.....	72
4.10.2 O procedimento de análise de R&R.....	73
4.10.3 O experimento realizado	73
4.10.4 Modelamento do sistema de teste	74
4.10.5 Análise da estabilidade do sistema	75
4.10.6 A escolha do ponto de medida.....	78
4.10.7 A seleção dos diodos para ensaio.....	80
4.10.8 O parâmetro a ser medido	82
4.10.9 Os resultados das medidas de R&R.....	83
4.11 Comentários sobre os resultados.....	89
5 . APLICAÇÃO DA METODOLOGIA	91
5.1 DESCRIÇÃO DO CIRCUITO DE TESTE.....	91
5.1.1 O comparador de tensão "folded cascode".....	93
5.1.2 Modelo do comparador para grandes sinais.....	94
5.1.3 Análise dos pontos de equilíbrio do comparador.....	97
5.1.4 O "Driver" de corrente.....	99
5.1.5 O modelo do "driver" para grandes sinais	100
5.1.6 Análise dos pontos de equilíbrio do "driver".....	102
5.1.7 O conversor D/A.....	103
5.1.8 O modelo do conversor	104
5.1.9 Análise dos pontos de equilíbrio do conversor.....	106
5.2 Os testes realizados nos circuitos	108

5.2.1 Testes realizados nos amplificadores operacionais.....	108
5.2.2 Testes realizados no converso D/A.....	115
 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	 121
6.1 Quanto ao tempo de teste	121
6.2 Quanto ao procedimento de análise preliminar	121
6.3 Quanto à identificação das causas de rejeição.....	122
6.4 Conclusão.....	122
6.5 Sugestões para trabalhos futuros	123
 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 124

Resumo

Buscando alternativa para a realização de testes paramétricos de circuitos em linha de produção, os quais consomem percentual significativo dos recursos, é demonstrada a viabilidade da aplicação de teste sistêmico para este fim.

O método baseia-se no comportamento dinâmico não linear dos dispositivos, comportamento este que é analisado através de mapas obtidos do espaço de estado do sistema dinâmico.

Os resultados obtidos demonstram que é possível a identificação de pequenas diferenças paramétricas entre dispositivos e portanto a aplicação do método para testes do tipo passa/não-passa em linha de produção, com redução do tempo de teste sem perda de testabilidade.

Abstract

Considering the fact that parametric test in integrated circuits manufacturing line is expensive and time consuming, a systemic go/no-go test type has been developed for time reduction.

Using the dynamic nonlinear behavior of the electronic devices, the space states is studied through maps to identify parametric deviations of the device under test.

The results show the feasibility of the method without reduction of the testability.

1. INTRODUÇÃO

FIAT ... desde então o homem vem aprendendo as leis da natureza e tirando proveito delas, seja na construção de moradias, transporte, transformação e transmissão de energia, ciências médicas e biológicas, comunicações e, principalmente, a transmissão, processamento e armazenamento de informações.

Este aprendizado é transformado em produtos, que são colocados à disposição da sociedade e adquiridos com base em relações comerciais e especificações técnicas bem definidas. Para dois produtos funcionalmente equivalentes, tem maior valor social aquele que apresenta o desempenho prometido cada vez que é utilizado, e continua a apresentá-lo ao longo de toda a sua vida pretendida [1, cap. 6].

Com o amadurecimento da sociedade, as indústrias passaram a dedicar parte significativa de seus recursos para a verificação das características funcionais e de desempenho dos seus produtos, o teste final, evitando desta forma serem alvos de pendengas jurídicas e verem seus produtos rejeitados pelos consumidores.

No Brasil as relações de consumo são reguladas pela lei nº 8.078/90, o Código de Defesa do Consumidor, que trata de maneira clara e direta da responsabilidade do produtor e do comerciante nos defeitos e vícios de produtos [2].

Mais importante que as relações regionais entre produtor e consumidor, são as relações globais, pois o país que não tem a sua força produtiva inserida dentro do contexto comercial globalizado, está fadado à degradação econômica e, conseqüentemente, social.

Este quadro faz com que os testes e verificações de produtos sejam cada vez mais importantes; no entanto as limitações de custo de produção exigem que as atividades de teste sejam mínimas.

Considerando o fato de que a atividade de teste não agrega valor ao produto, pode-se classificar o teste como sendo um mal necessário.

1.1. Circuitos Integrados - um tipo especial de produto

No caso particular da produção de dispositivos semicondutores, em particular circuitos integrados, que são produzidos aos milhões sendo cada um deles testado pelo menos duas vezes, o custo da atividade de teste é um fator relevante na competitividade comercial.

O propósito da atividade de teste é responder a três perguntas básicas :

- ⇒ O circuito funciona ?
- ⇒ O circuito oculta algum problema potencial ?
- ⇒ O circuito apresenta plena capacidade de funcionamento dentro das especificações técnicas prometidas ?

Estas perguntas devem ser respondidas para o ciclo de vida completo do produto, desde a etapa de desenvolvimento até a sua utilização no campo, conforme ilustrado na figura 1-1 [3].

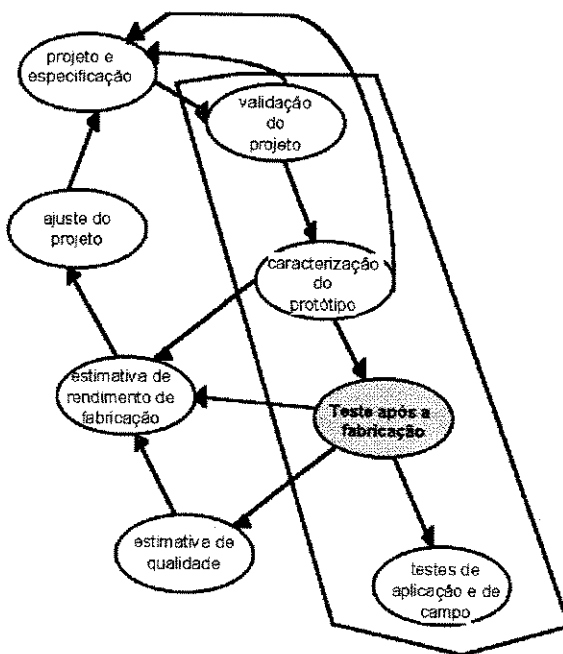


Figura 1-1: Fluxo de testes na vida do produto

Nota-se que existe um relacionamento intenso entre as atividades, sendo que o processo se desenvolve a partir de cada uma das etapas de teste.

No entanto o grande volume de recursos, tempo e dinheiro, está concentrado na atividade de teste após a fabricação, em cinza na figura.

No ano de 1997, três grandes empresas de equipamentos de testes venderam US\$ 44562 milhões em equipamentos e serviços [4; 5; 6], o que é quinze vezes maior que toda a receita líquida das empresas que operaram no Brasil com extração de minerais metálicos no ano de 1994 [7].

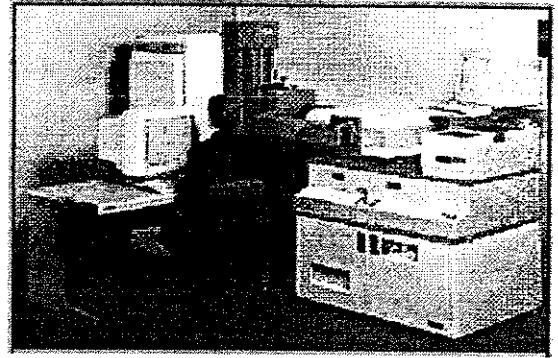


Figura 1-2 - Estação de teste paramétrico

Testes efetuados de maneira rápida mas que não detectam problemas existentes, tem pouca valia pois não permitem a correção dos problemas a contento. Estes testes são eficientes, porém pouco eficazes.

A realização de testes exaustivos em cada uma das etapas de vida do produto pode apresentar um custo e uma demanda de tempo proibitivos, inviabilizando a comercialização, seja pela questão do preço de venda ou por ter chegado tardiamente ao mercado. Este seria um procedimento eficaz sob o ponto de vista de detecção de problemas, mas pouco eficiente no processo como um todo.

Cabe ainda ressaltar que a ocorrência de falha em um circuito nada mais é que a manifestação de um defeito, sendo que o defeito pode ter três origens distintas:

- defeitos de concepção;
- defeitos de fabricação e
- defeitos de operação.

1.2. Defeitos de concepção.

São gerados pelos arquitetos e projetistas dos circuitos, através da proposta de utilização de tecnologia, topologia ou dimensionamento inadequados às funções que se pretende implementar.

Estes defeitos devem ser detectados na fase de testes de validação do projeto, antes da fabricação de protótipos, sendo realizada através de simuladores.

A etapa de validação de projeto apresenta uma grande facilidade para a realização de testes, pois todos os nós do circuito estão disponíveis para verificação, sem nenhuma influência de medidores externos, pois os simuladores disponibilizam todos os valores calculados.

Cabe ressaltar que nesta etapa já é possível criar um dicionário de falhas através da introdução controlada de defeitos no modelo, e da observação de resultados.

1.3. Defeitos de fabricação.

Estes defeitos podem ser observados pela primeira vez na etapa de caracterização de protótipos, etapa esta onde os modelos assumidos na fase de validação de projeto serão verificados.

Todos os problemas encontrados até a etapa de caracterização de protótipos podem ser realimentados para os projetistas e o projeto ou processo revistos.

O grande peso dos defeitos de fabricação é sentido quando o circuito está em produção em grande escala. Nesta etapa os testes são realizados em 100% da produção em pelo menos duas oportunidades: na lâmina antes do encapsulamento e depois do componente encapsulado.

Para que lâminas contendo problemas grosseiros de fabricação não ocupem tempo dos testadores automáticos, padrões de testes são verificados,

e os resultados das verificações determinam se as lâminas serão submetidas aos testes ou não.

Nos testes após a fabricação em massa, as três perguntas fundamentais devem ser respondidas rapidamente e de forma confiável.

1.3.1. O circuito funciona ? => Teste funcional.

O teste funcional, realizado em condições nominais de uso, serve para a identificação de falhas catastróficas. Se um amplificador não está amplificando, um filtro não está filtrando ou uma memória não retém as palavras nela escritas, o teste pode ser finalizado e o circuito sob teste marcado como ruim.

É realizado com a aplicação de vetores de teste (seqüência de palavras binárias em circuitos digitais e valores de tensão e/ou frequência para analógicos), e o enquadramento das saídas dentro de padrões pré definidos.

Caracteriza-se pela rapidez com que é realizado, porém não traz nenhuma informação sobre os valores paramétricos dos circuitos testados ou problemas potenciais escondidos no circuito.

As duas outras perguntas que devem ser respondidas é que demandam um grande tempo de teste e a utilização de técnicas especiais para serem respondidas.

1.3.2. O circuito apresenta algum problema potencial ?

O circuito apresenta a sua capacidade completa ?

=> Teste de deficiências e testes paramétricos.

A característica deste teste depende fundamentalmente da natureza do circuito a ser testado.

1.3.2.1.Circuitos digitais:

Estes circuitos, em função de tipicamente apresentarem uma grande quantidade de componentes, componentes estes utilizados entre corte e saturação e as relações entre as funções internas envolverem lógica puramente digital, apresentam basicamente os seguintes parâmetros de interesse:

- consumo de corrente;
- limiares de chaveamento;
- capacidade de drenagem e fornecimento de corrente;
- tempos de atraso de propagação e de acesso;
- tempos de subida e de descida.

A utilização de multiplexadores lógicos internos permite , sem prejuízo significativo aos valores dos parâmetros medidos, o acesso a um grande número de nós do circuito, através da utilização de poucos pinos adicionais no circuito integrado. A técnica de projeto de circuitos digitais que permite este tipo de teste é conhecida como DFT (*Design For Testability*), conforme H. Fujiwara em "Logic Testing and Design for Testability", MIT Press, 1985.

O DFT permite a identificação de falhas localizadas (*location fault*) no circuito; no entanto questiona-se a sua utilidade, uma vez que o circuito integrado não pode ser reparado. A única possível utilidade, seria a identificação de falhas de modo comum, que permitiriam a realimentação desta informação aos projetistas do processo e do circuito para eventuais correções. No entanto, espera-se que este tipo de falha já não ocorra na etapa de fabricação em alta escala.

1.3.2.2.Circuitos analógicos:

Estes circuitos apresentam uma infinidade de tipos de aplicações, e os testes paramétricos devem ser realizados em função da natureza da aplicação do circuito. Um amplificador operacional deve ser verificado com relação à tensão offset de entrada, corrente offset de entrada, corrente de polarização de entrada, razão de rejeição de modo comum, etc.

Outros circuitos, tais como um filtro ativo, podem apresentar outros parâmetros de interesse distintos dos citados anteriormente.

Os circuitos analógicos tipicamente trabalham na região de operação linear (aproximadamente linear) dos componentes, e o acesso aos nós internos do circuito pode alterar drasticamente o comportamento dos mesmos.

1.3.2.3.Circuitos mistos:

Estes circuitos apresentam uma porção analógica e outra digital, que interagem em funcionamento.

A utilização destes circuitos tem se popularizado em virtude da evolução das tecnologias de fabricação, e a demanda de aplicações que exigem o processamento digital de sinais analógicos (Digital Signal Processing - DSP). As aplicações típicas são na síntese e reconhecimento de voz, controles automáticos, sistemas de comunicações de voz e dados, etc.

A técnica normalmente utilizada no teste deste tipo de circuito consiste em se testar as partes analógica e digital separadamente. Esta técnica permite que os procedimentos adequados sejam aplicados a cada uma das partes, no entanto despreza a interação entre as partes.

1.4. Defeitos de operação

A ocorrência deste tipo de defeito pode ser minimizada através da ampla divulgação das características técnicas e limites de operação do produto.

1.5. OBJETIVO DO TRABALHO

Este trabalho tem por objetivo demonstrar que é possível a realização de testes paramétricos de linha de produção em circuitos integrados, digitais, analógicos e de sinais mistos, através de análise sistêmica não linear.

As vantagens da análise sistêmica não linear são :

- ⇒ análise de muitos parâmetros simultaneamente, reduzindo o tempo de teste;
- ⇒ redução da complexidade do aparato de teste;
- ⇒ testes realizados nos pinos funcionais do circuito, dispensando pinos e subcircuitos especiais para testes;
- ⇒ sensibilidade às interações entre parâmetros.

Cabe ressaltar que a metodologia apresentada não se propõe a indicar valores absolutos dos parâmetros dos circuitos, mas sim em categorizá-los para fins de classificação comercial ou rejeição de componentes.

1.6. JUSTIFICATIVA PARA UTILIZAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

1.6.1. Definição de sistemas não lineares.

Sistemas não lineares são definidos de uma forma bastante simples e genérica :

- ⇒ **Sistemas não lineares são sistemas que não são lineares ou não são necessariamente lineares. [8, cap. 1]**

Esta definição não tem nenhuma valia, a menos que saibamos o que é sistema linear.

1.6.2. Definição de sistema linear.

Um sistema é linear se a ele é aplicável o princípio da superposição [9, cap. 1; 10, cap. 1].

O princípio da superposição impõe a independência entre as entradas e saídas do sistema.

Se tivermos, por exemplo, um sistema linear com duas entradas e uma saída, poderemos determinar a resposta do sistema a uma das variáveis variando o seu valor e mantendo a outra fixa.

A resposta global do sistema linear às duas variáveis, poderá ser obtida pela combinação linear das duas respostas obtidas de forma independente.

Um sistema linear é, portanto, aditivo e escalonável [11, cap. 2] :

$$y = T\{x_1, x_2, \dots, x_n\};$$

$$T\{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\} = a_1T\{x_1\} + a_2T\{x_2\} + \dots + a_nT\{x_n\} \quad \text{Eq. 1-1}$$

onde :

y = resposta do sistema;

T{ } = transformação linear;

x_i = variável de entrada i;

a_i = constante arbitrária i.

1.6.3. Outras definições genéricas

[12, cap. 2; 10, cap. 4; 8, cap. 1]

- a) **Sistema forçado** - Sistema com sinal de entrada;
- b) **Sistema não forçado** - Sistema que não tem sinal de entrada;
- c) **Sistema autônomo** - Sistema que não depende explicitamente do tempo;

- d) **Sistema não autônomo** - Sistema que depende explicitamente do tempo;
- e) **Estado de um sistema** - O estado de um sistema é uma estrutura matemática constituída por um conjunto de n variáveis, $x_1(t), \dots, x_n(t)$, chamadas variáveis de estado, tal que os valores iniciais $x_i(t_0)$ deste conjunto e as excitações do sistema $u_j(t)$ sejam suficientes para descrever univocamente a resposta do sistema para $t > t_0$;
- f) **Vetor de estado** - Vetor n -dimensional cujos elementos são as variáveis de estado de um dado sistema;
- g) **Espaço de estado** - Espaço n -dimensional no qual as componentes do vetor de estado representam eixos do seu sistema de coordenadas;
- h) **Trajétoria de estado** - A trajetória de estado é definida como sendo a curva produzida no espaço de estado pela evolução temporal do vetor de estado.

1.6.4. Quanto à diferença de abordagem nos testes lineares e não lineares.

Na grande maioria dos testes paramétricos, os procedimentos são realizados com base no princípio da superposição, ou seja, todas as variáveis de entrada são mantidas em valores constantes e bem definidos, exceto uma que é utilizada para analisar a resposta do circuito.

Em seguida o procedimento é repetido para outra variável, e assim sucessivamente. Após várias medidas o circuito está parametricamente caracterizado, sendo aceito e comercialmente classificado com base nos valores dos parâmetros, ou então rejeitado.

Na abordagem não linear, que foi desenvolvida neste trabalho, o teste é realizado no circuito polarizado de tal forma a constituir um sistema não linear, buscando-se fortes interações entre os parâmetros internos do circuito e eliminando a independência entre as variáveis de entrada.

Através de poucos, preferencialmente um único, estímulos de entrada, a trajetória dos estados observáveis é analisada e relacionada à globalidade dos parâmetros internos.

Em função da forte interação entre os parâmetros, a alteração de qualquer um deles provocará alterações na trajetória dos estados observáveis que, com base em padrões de trajetórias, constituem a base para classificação comercial ou rejeição do componente.

A grande vantagem desta abordagem, quando comparada com a abordagem linear, consiste na redução do tempo de teste em linha de produção, pois algumas poucas análises de estímulo e resposta, associadas a uma máscara de trajetória de estados - que chamaremos de dicionário de falhas - são suficientes para caracterizar parametricamente o circuito.

A dificuldade do método fica por conta do fato que os sistemas não lineares não são precisamente definidos e não são tratáveis de maneira genérica. Os modelamentos dos circuitos não permitem prever o comportamento não linear dos mesmos, seja por limitações dos modelos, ou mesmo porque as equações diferenciais não lineares não apresentam, em geral, soluções fechadas genéricas [12, parte I].

O surgimento de mudanças no movimento assintótico de sistemas dinâmicos não lineares, as bifurcações, e até o aparecimento do comportamento caótico [12, parte I] tornam crítica a escolha das condições de medida e a interpretação dos resultados.

A manipulação do modelo do circuito para definição do procedimento de testes exige uma análise, ao menos qualitativa e aproximada, do sistema de equações diferenciais não lineares, pois nem mesmo a estabilidade do sistema pode ser garantida a priori [13; 14; 15; 16; 17, cap.3; 8, cap. 5].

A noção básica de análise de sistemas não lineares é fundamental para que os engenheiros de testes - talvez auxiliados por matemáticos e físicos de testes - possam delinear corretamente os procedimentos de verificação em linha de produção.

2. NOÇÕES BÁSICAS DE SISTEMAS NÃO LINEARES

[18; 8 ,cap. 2 a 4; 19; 20; 21]

A formulação genérica utilizada para um sistema não linear é :

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{X}(t), \mathbf{u}(t)], \forall t \geq 0, \quad \text{Eq. 2-1}$$

t denota tempo, $\mathbf{X}(t)$ denota o valor da função $\mathbf{X}(\cdot)$ no tempo t , sendo um vetor n -dimensional; $\mathbf{u}(t)$ é definido de forma similar, sendo um vetor m -dimensional.

As seguintes convenções são adotadas :

$$t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m;$$

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

2.1. Métodos de análise

Em virtude da inexistência de formas fechadas para as soluções dos sistemas não lineares, o método de análise qualitativo é muito importante para se ter um sentimento do comportamento do sistema, identificação de trajetórias do sistema e regimes oscilatórios.

Para que o estudo pudesse evoluir, foi necessária uma revisão na álgebra, principalmente buscando-se a interpretação física de cada conceito, para que pudessem ser utilizados como elementos indicadores do comportamento do sistema.

2.1.1. Alguns conceitos básicos

a) **Espaço linear normado** : Um espaço linear normado é um par ordenado $(X, ||\bullet||)$ onde X é um espaço linear vetorial e $||\bullet||:X \rightarrow \mathbf{R}$ é uma função real (norma) definida em X tal que os seguintes axiomas são válidos :

$$||x|| \geq 0, \forall x \in X; ||x|| = 0 \text{ se e somente se } x = 0_X. \quad \text{Eq. 2-2}$$

$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||, \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}. \quad \text{Eq. 2-3}$$

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in X. \quad \text{Eq. 2-4}$$

b) **Convergência** : Uma seqüência $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ em um espaço linear normado $(X, ||\bullet||)$ é dito que converge para $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||x_i - x_0|| < \varepsilon \quad \forall i \geq N. \quad \text{Eq. 2-5}$$

c) **Seqüência de Cauchy** : Uma seqüência $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ em um espaço linear normado $(X, ||\bullet||)$ é chamada de seqüência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um número inteiro $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||x_i - x_j|| < \varepsilon, \text{ sempre que } i, j \geq N. \quad \text{Eq. 2-6}$$

d) **Definição** : Um espaço linear normado $(X, ||\bullet||)$ é chamado de **espaço linear completo**, ou **espaço de Banach** se toda seqüência de Cauchy em $(X, ||\bullet||)$ converge para um elemento de X .

Os conceitos apresentados nos ajudam a entender a forma de medir o tamanho de um vetor em um espaço n-dimensional, ou seja, a norma.

A noção de convergência será muito utilizada na determinação de equilíbrios do sistema.

e) **Definição** : Sejam $(X, \|\bullet\|_X)$ e $(Y, \|\bullet\|_Y)$ dois espaços lineares normados, e suponha $f: X \rightarrow Y$. Então a função f é dita **contínua em** $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ tal que

$$\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon, \text{ sempre que } \|x - x_0\|_X < \delta \quad \text{Eq. 2-7}$$

f é dita **contínua** se é contínua em todo $x \in X$,

f é dita **uniformemente contínua** se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\|_Y < \varepsilon, \text{ sempre que } \|x - y\|_X < \delta \quad \text{Eq. 2-8}$$

O conceito de continuidade é muito utilizado nas análises de sistemas não lineares, pois a possibilidade de existência e unicidade de solução do sistema não linear está intimamente ligada à continuidade da função do sistema.

f) **Definição** : Seja $\|\bullet\|$ uma dada norma em C^n . Então para cada matriz $A \in C^{n \times n}$, a quantidade $\|A\|_i$, definida por

$$\|A\|_i = \sup_{x \neq 0, x \in C^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad \text{Eq. 2-9}$$

é chamada de **norma induzida da matriz** A correspondendo ao vetor norma $\|\bullet\|$.

A norma induzida pode ser interpretada como o ganho do mapeamento linear correspondente a A . Ou ainda, suponha uma bola unitária fechada em C^n

$$B = \{x \in C^n : \|x\| \leq 1\}$$

$\|A\|_i$ pode ser imaginado como a menor bola em C^n que cobre completamente a imagem de B em A .

g) Definição : Seja $||\bullet||_i$ uma norma matricial induzida em $C^{n \times n}$. Então a medida matricial correspondente é a função $\mu(\bullet) : C^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por

$$\mu(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{||\mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{A}||_i - 1}{\varepsilon} \quad \text{Eq. 2-10}$$

A medida matricial corresponde à derivada direcional de $||\bullet||_i$, avaliada em relação à matriz identidade na direção A.

Se λ é um autovalor de $\mathbf{A} \in C^{n \times n}$, então

$-\mu(-\mathbf{A}) \leq \text{Re } \lambda \leq \mu(\mathbf{A})$, o que é uma propriedade interessante, uma vez que nos informa os limites da parte real dos autovalores de uma matriz. Esta técnica pode vir a ser utilizada na exploração de comportamento de sistemas no que tange à estabilidade.

2.1.2. Mapeamento contraído (ou ponto fixo de Banach)

Contração global : Seja $(X, ||\bullet||)$ um espaço de Banach e seja $T: X \rightarrow X$. Suponha que exista uma constante $\rho < 1$ tal que

$$||Tx - Ty|| \leq \rho ||x - y||, \forall x, y \in X \quad \text{Eq. 2-11}$$

sob estas condições, existe exatamente um $x^* \in X$ tal que $Tx^* = x^*$. Para cada $x_0 \in X$, a seqüência $\{x_n\}$ definida por

$$x_{n+1} = Tx_n \quad \text{Eq. 2-12}$$

converge para x^* , e ainda

$$||x^* - x_n|| \leq \rho^n / (1 - \rho) ||Tx_0 - x_0|| \quad \text{Eq. 2-13}$$

Um operador T que satisfaça a condição acima é conhecido como uma contração, pois as imagens de x e y são mais próximas que x e y.

Se a condição é válida para todo o espaço X , então a contração é chamada de global, se for restrita a uma região, é chamada de local.

Para um sistema que satisfaça esta condição, é garantida a existência e unicidade da solução.

Estes resultados são interessantes, pois a configuração de circuitos de tal forma que as condições acima sejam satisfeitas não é uma tarefa difícil e garantem a unicidade da solução do sistema.

O exemplo da figura 2-1 ilustra o caso para um circuito simples, cuja função de transferência $V \times V_1$ é apresentada na figura 2-2.

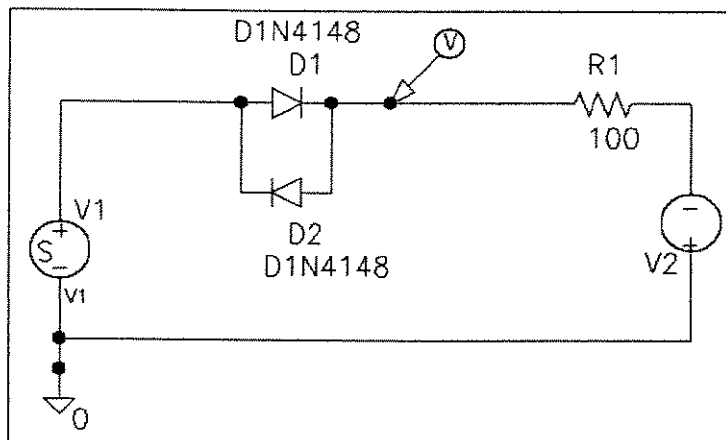


Figura 2-1 : Circuito de exemplo de mapeamento contraído

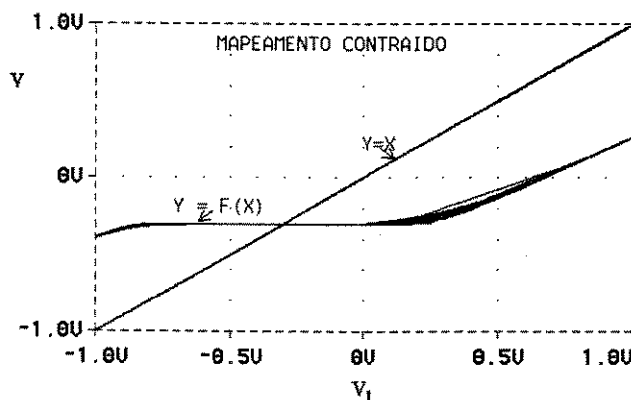


Figura 2-2: Mapeamento contraído

A simulação de uma série convergente foi realizada através da conexão da saída (tensão V) à entrada, por intermédio de uma linha de transmissão com atraso de 0,5ms.

O plano de fase do sistema é apresentado a seguir para condição inicial de 1V e 10 ms de tempo de simulação. Nota-se a convergência para o ponto de equilíbrio :

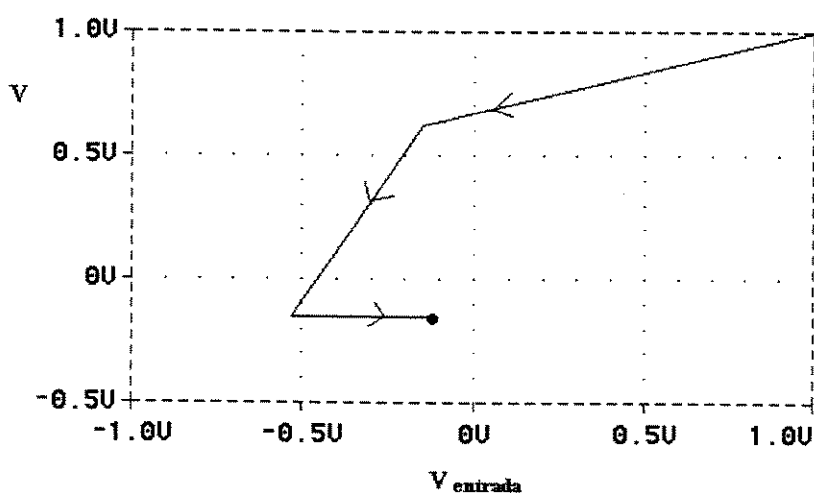


Figura 2-3: Convergência da série

2.1.3. Equações diferenciais não lineares

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{X}(t)], t \geq 0; \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{f}: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{Eq. 2-14}$$

A existência e unicidade da solução do sistema acima não é garantida, a menos que algumas restrições sejam impostas para $\mathbf{f}$.

Esta talvez seja a maior preocupação neste trabalho, uma vez que a reprodutibilidade é um parâmetro fundamental para um testador. É esperado que os resultados de testes semelhantes, em condições semelhantes, tenham resultados semelhantes.

Se existe solução para a equação 2-14 no intervalo $[0, T] \Rightarrow X(\bullet) \in C^0[0, T]$, tal que $X(\bullet)$ é diferenciável e a equação diferencial é válida em todo o intervalo, se $X(\bullet)$ é solução no intervalo $[0, T]$ e f é contínua; então :

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f[\mathfrak{Z}, X(\mathfrak{Z})] d\mathfrak{Z}, t \in [0, T] \quad \text{Eq. 2-15}$$

i) **Teorema da existência e unicidade locais** [8, cap. 2]: Suponha que a equação f seja contínua em t e X , e que existem constantes finitas T, r, h , e k tais que

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq k ||x - y||, \forall x, y \in B, \forall t \in [0, T] \quad \text{Eq. 2-16}$$

Esta condição é chamada de condição de Lipschitz, sendo a menor constante k que satisfaça esta condição chamada de constante de Lipschitz.

$$||f(t, X_0)|| \leq h, \forall t \in [0, T]. \quad \text{Eq. 2-17}$$

$$B = \{X \in \mathbb{R}^n : ||X - X_0|| \leq r\}. \quad \text{Eq. 2-18}$$

Então a equação diferencial tem uma única solução no intervalo $[0, \delta]$ sempre que δ for suficientemente pequeno para satisfazer as equações 2-19 e 2-20 :

$$h\delta \exp(k\delta) \leq r \text{ e} \quad \text{Eq. 2-19}$$

$$\delta \leq \min \{T, \rho/k, r/(h+hr)\}, \rho < 1. \quad \text{Eq. 2-20}$$

Esta condição é válida para um δ suficientemente pequeno e uma bola em torno do equilíbrio X_0 . A adoção desta condição pode levar o sistema a ter um comportamento quase linear, não manifestando o tipo de comportamento que desejamos estimular, ou seja, que a resposta dinâmica do sistema dependa da interação de um grande número de parâmetros internos do circuito. Para que este fenômeno possa se manifestar plenamente, desejamos que o sistema tenha um comportamento fortemente não linear, podendo ocorrer a necessidade de se excursionar até regiões mais distantes do ponto de equilíbrio.

Para que isto seja possível, é necessária a busca de condições mais gerais para o tratamento do sistema.

ii) **Corolário** : considerando uma equação diferencial não linear, e supondo $f(t,X)$ continuamente diferenciável em qualquer parte, então existe um número único $\delta_{\max} = \delta_{\max}(X_0)$, que pode ser igual a infinito, para o qual a equação tem uma solução única no intervalo $[0, \delta_{\max})$ e nenhum intervalo maior. Se $\delta_{\max}$ é finito, então $\|X(t)\| \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \delta_{\max}$; neste caso diz-se que o sistema tem um tempo de fuga finito.

iii) **Teorema da existência e unicidade globais** [8, cap.2]: Suponha que para cada $T \in [0, \infty)$ existem constantes k_T e h_T tais que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k_T \|x - y\|, \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,T] \quad \text{Eq. 2-21}$$

$$\|f(t,X_0)\| \leq h_T, \forall t \in [0,T]. \quad \text{Eq. 2-22}$$

Então a equação diferencial não linear tem exatamente uma solução no intervalo $[0, \infty)$.

OBS.: Solução no intervalo $[0, \infty)$, quer dizer solução no intervalo $[0,T]$ para todo T finito.

Nota-se que podem existir condições adequadas para teste, uma vez que :

(a) ou o teste é realizado em um intervalo de tempo inferior ao tempo de fuga do sistema,

(b) ou o intervalo $[0,T]$ pode ser confortavelmente grande para que possa conter o teste,

(c) ou o sistema é autônomo.

Supondo que f satisfaz o teorema de existência e unicidade globais, então para cada $z \in \mathbf{R}^n$ e cada $T \in [0, \infty)$ existe exatamente um elemento $z_0 \in \mathbf{R}^n$ tal que a solução única em $[0, T]$ da equação diferencial

$$\dot{X} = f[t, X(t)], X(0) = z_0 \quad \text{Eq. 2-23}$$

satisfaz $X(t) = z$.

Supondo que f satisfaz o teorema da existência e unicidade globais, e seja $T \in [0, \infty)$ especificado, então para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon, t) > 0$ tal que o seguinte é verdade:

Suponha X_0 e $Y_0 \in \mathbf{R}^n$ que satisfazem

$$|| X_0 - Y_0 || < \delta(\varepsilon, t) \quad \text{Eq. 2-24}$$

Suponha que $X(\bullet)$ e $Y(\bullet)$ são soluções de

$$\dot{X} = f[t, X(t)], X(0) = X_0 \quad \text{Eq. 2-25}$$

$$\dot{Y} = f[t, Y(t)], Y(0) = Y_0 \quad \text{Eq. 2-26}$$

Então

$$|| X(\bullet) - Y(\bullet) ||_c \leq \varepsilon. \quad \text{Eq. 2-27}$$

Nota-se a existência de dependência da solução às condições iniciais.

Esta dependência pode ser utilizada como parâmetro de teste, restando ainda uma grande preocupação com a estabilidade do sistema, ou seja, o intervalo $[0, T]$ para o qual as condições acima são válidas.

Como exemplo de um circuito que apresenta um tempo de fuga finito, utilizaremos o mesmo circuito do exemplo anterior, porém com o ganho da

malha de realimentação aumentado, figura 2-4, causando uma instabilidade para as condições iniciais utilizadas.

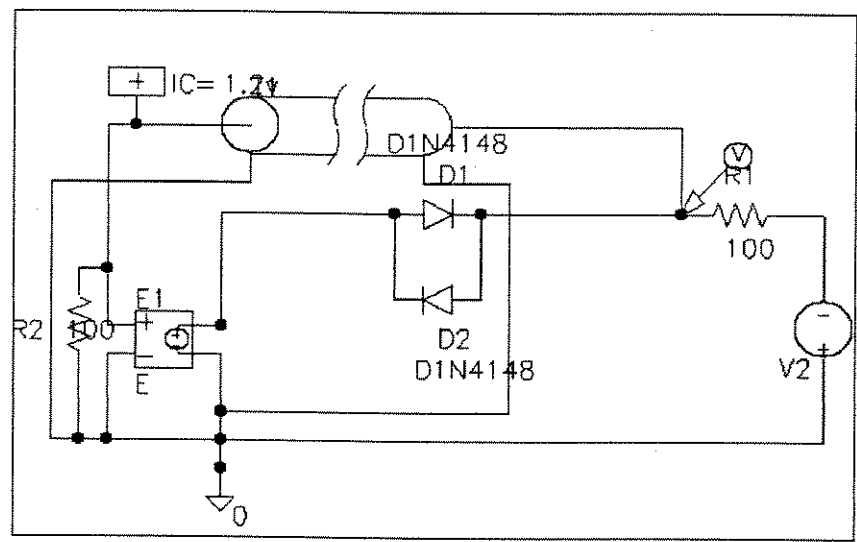


Figura 2-4: Circuito realimentado

Para condições iniciais diferentes, o mesmo circuito, mantendo-se o ganho de realimentação, apresenta comportamento radicalmente diferente, conforme ilustrado nas figuras 2-5 e 2-6.

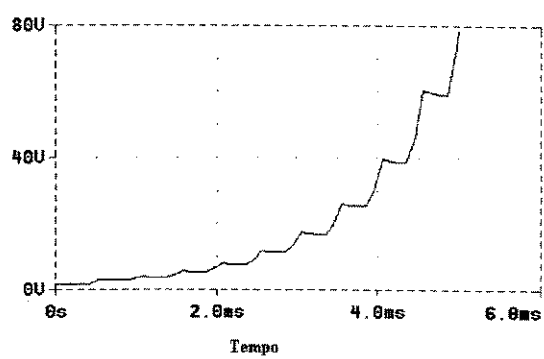


Figura 2-5 : Evolução para condição inicial = 1V

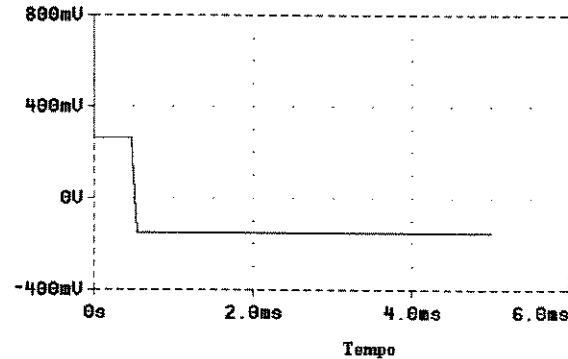


Figura 2-6: Evolução para condição inicial = 0,8V

2.2. Análise para sistemas de segunda ordem

Sistemas de segunda ordem permitem a análise da trajetória da solução em um gráfico plano relacionando as variáveis de estado.

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{f}_1[t, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)], \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{f}_2[t, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)] \quad \text{Eq. 2-28}$$

A análise é baseada no gráfico do plano de estado, também chamado de trajetória do plano de estado.

No caso particular em que a equação acima assume a forma

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) \quad \text{Eq. 2-29}$$

o plano de estado recebe o nome de plano de fase.

O plano de fase não apresenta nenhuma informação explícita em relação ao tempo.

De maneira geral, o gráfico do plano de estado pode explicitar ou omitir o parâmetro tempo.

2.2.1. Noção de campo vetorial :

i) **Definição** : Uma função $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ é dita suave se $f(x_1, x_2)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em relação a todas as combinações de x_1 e x_2 .

ii) **Definição**: Uma função $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ é chamada de campo vetorial se ambos os seus componentes são funções suaves. Um vetor $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$ é chamado de equilíbrio do campo vetorial f se $f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$ não é um equilíbrio de f , então a direção do campo vetorial no ponto $\mathbf{X}$ é denotado por $\theta_f(\mathbf{X})$ e é definido como

$$\theta_f(\mathbf{X}) = \text{Atan}[f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X})] \quad \text{Eq. 2-30}$$

iii) Definição :

$\text{Atan}(a,b) = \theta \in [0,2\pi)$ tal que

$$\cos \theta = a/(a^2 + b^2) , \text{ sen } \theta = b/(a^2 + b^2) \quad \text{Eq. 2-31}$$

Se X é a solução de

$\dot{x}_1(t) = f_1[t, x_1(t), x_2(t)], \dot{x}_2(t) = f_2[t, x_1(t), x_2(t)]$, $X = (x_1, x_2)$ é um ponto em $\mathbf{R}^2$, se C é uma trajetória de solução passando por X , então o vetor $f(X)$ é tangente a C em X .

A análise através de campos vetoriais pode ser um método empírico muito útil na definição do ponto de operação do circuito sob teste, uma vez que o testador será um sistema de medida virtual, totalmente integrado ao sistema de informática do laboratório. Considerando um sistema autônomo, que certamente será a maioria, senão todos, dos sistemas analisados, pode-se traçar o campo vetorial em diversas regiões do plano de estados e fazer inferências sobre os pontos de equilíbrios do sistema.

2.2.2. Método da linearização

O método da linearização consiste em linearizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio e determinar o comportamento do sistema não linear através da análise do sistema linear resultante. A análise é válida, exceto para centros, na proximidade da região de equilíbrio.

Supondo-se $(0,0)$ um equilíbrio do sistema, f_1 e f_2 continuamente diferenciáveis na vizinhança do equilíbrio

$$a_{ij} = [\delta f_i / \delta x_j] , i, j = 1, 2 \quad \text{Eq. 2-32}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2-33}$$

OBS. - Se o ponto de equilíbrio for distinto de (0,0), o sistema de coordenada pode ser mudado para que o equilíbrio seja representado por (0,0).

Expandindo-se em série de Taylor

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(0,0) + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1(x_1, x_2) \quad \text{Eq. 2-34}$$

como (0,0) é um equilíbrio na origem, $f_1(0,0) = 0$.

$$f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1(x_1, x_2) \quad \text{Eq. 2-35}$$

$$f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2(x_1, x_2) \quad \text{Eq. 2-36}$$

$r_1(x_1, x_2)$ e $r_2(x_1, x_2)$ representam o resto da expansão e neles estão contidas as diferenças entre o comportamento do sistema não linear e a aproximação linear.

A análise dos restos pode ser uma técnica muito interessante de testes, pois a diferença entre restos traz a informação da diferença entre as interações dos parâmetros dos circuitos sob teste.

Temos então, associado ao sistema não linear, um sistema linear

$$\dot{\mathfrak{J}}_1 = a_{11}\mathfrak{J}_1 + a_{12}\mathfrak{J}_2, \dot{\mathfrak{J}}_2 = a_{21}\mathfrak{J}_1 + a_{22}\mathfrak{J}_2 \quad \text{Eq. 2-37}$$

A linearização está baseada no fato da matriz A não ter nenhum autovalor com parte real nula, o que corresponde a uma solução periódica não amortecida, sendo que os resíduos têm influência considerável sobre este comportamento no sistema não linear original.

As relações entre os equilíbrios do sistema não linear e o linear associado são correspondentes, exceto para centro.

O comportamento do sistema não linear, quando o linear associado apresenta um centro, não é previsível, pois neste caso existem autovalores de A que apresentam parte real nula.

O comportamento do sistema não linear vai depender fundamentalmente dos restos da linearização. Em virtude deste fato, talvez testes realizados em equilíbrios que aparecem como centros no sistema linear associado sejam bastante ricos para os propósitos de nosso trabalho.

2.2.3. Soluções periódicas

Considere o sistema de equações não lineares

$$\dot{x}_1 = x_2 + \alpha x_1(\beta - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \alpha x_2(\beta - x_1^2 - x_2^2). \quad \text{Eq. 2-38}$$

Este sistema pode ser decomposto em duas parcelas ortogonais

$$\dot{X} = f(X) + g(X) \quad \text{Eq. 2-39}$$

onde

$$f(X) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}, \quad g(X) = \alpha(\beta - x_1^2 - x_2^2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2-40}$$

f é exatamente o campo vetorial do sistema, enquanto g está sempre alinhado com o vetor X .

Em coordenadas polares

$$r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \phi = \text{Atan}(x_1, x_2) \quad \text{Eq. 2-41}$$

a equação do sistema assume a forma

$$\dot{r} = \alpha r(\beta - r^2), \quad \dot{\phi} = -1. \quad \text{Eq. 2-42}$$

O sistema apresenta apenas uma solução periódica não trivial, $r = \beta$.

Se $\alpha > 0$, qualquer solução com $r(0) \neq 0$ aproxima-se da solução periódica com $t \rightarrow \infty$.

É comum referir-se à solução periódica não trivial como ciclo limite.

i) **Definição** : Seja $X(\bullet)$ uma trajetória de solução de um sistema. Um ponto $Z \in \mathbf{R}^2$ é chamado um ponto limite desta trajetória se existe uma sequência $\{t_i\}$ em $\mathbf{R}_+$, tal que $t \rightarrow \infty \Rightarrow X(t_i) \rightarrow Z$.

O conjunto de todos os pontos limites de uma trajetória é chamado de conjunto limite e é denotado por L .

OBS. : Um ponto limite de uma trajetória é um ponto no qual a trajetória passa arbitrariamente próximo muitas vezes, conforme o tempo evolui.

Para exercitar as técnicas relativas aos sistemas de ordem 2, vamos utilizar o circuito a seguir :

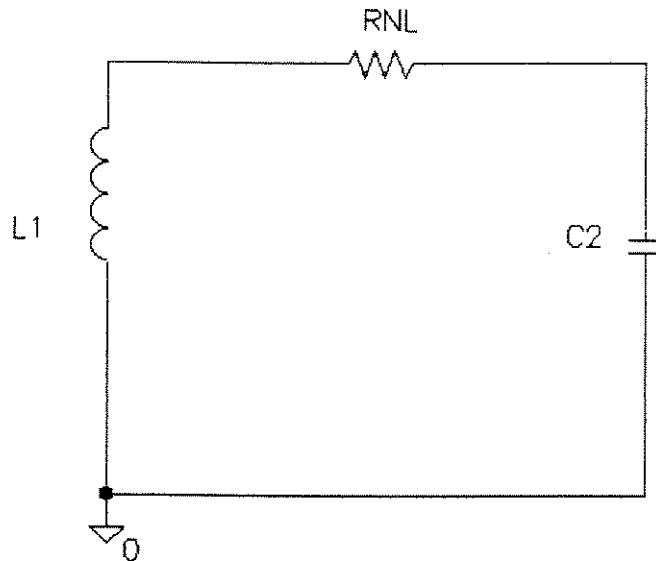


Figura 2-7: Circuito RLC não linear

Onde RNL representa um resistor não linear com a seguinte relação $V \times I$:

$$V(I) = 0,019 I^3 - 0,17 I^2 + 0,38 I \quad \text{Eq. 2-43}$$

correspondendo ao gráfico da figura 2-8.

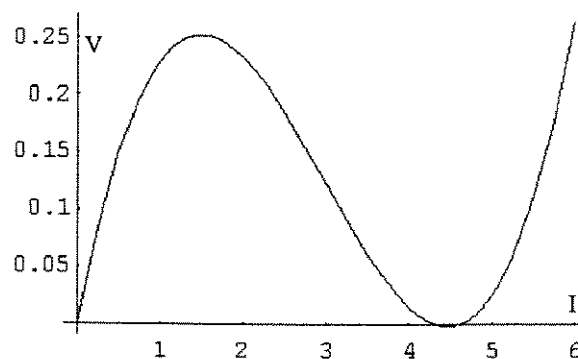


Figura 2-8: Relação VXI do sistema não linear

O sistema é autônomo e não forçado, sendo descrito na equação 2-44

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-1(0.019x_2^2 - 0.17x_2 + 0.38)}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2-44}$$

onde x_1 representa a tensão no capacitor e x_2 a corrente no indutor.

Aplicando-se o método da linearização temos o sistema linear equivalente descrito na equação 2-45

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-0.38}{L} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2-45}$$

que para $L=10\mu\text{H}$ e $C=10\mu\text{F}$, apresenta os seguintes autovalores:

$$\lambda_1 = -19000 + 25278,4 I, \lambda_2 = -19000 - 25278,4 I$$

que corresponde a um sistema com equilíbrio do tipo foco estável (autovalores complexos com parte real negativa).

O sistema não linear também apresenta um foco estável, conforme esperado.

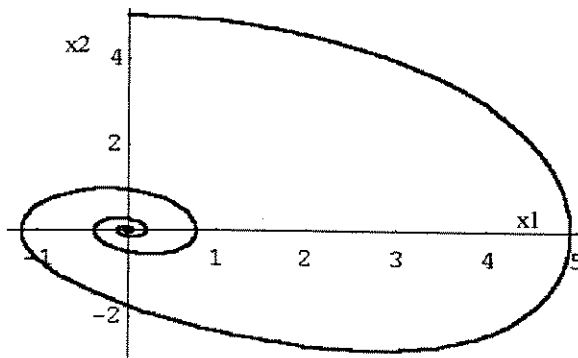


Figura 2-9: Plano de fase do sistema não linear

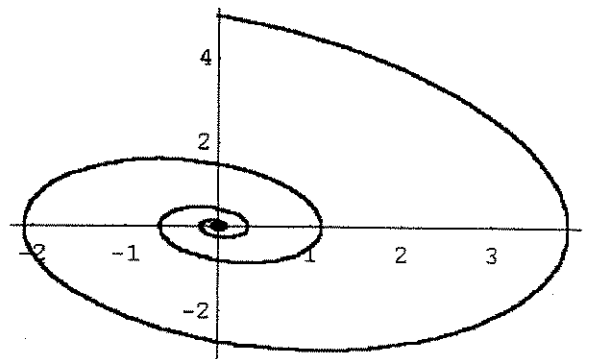


Figura 2-10: Plano de fase do sistema linear associado

O tratamento para soluções periódicas, bem como o estudo de estabilidades, é realizado mais para a frente neste trabalho, através da aplicação de ferramentas mais adequadas.

2.2.4. Método de aproximação analítica para o estudo de trajetória fechada.

Dado um sistema $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$, e uma função continuamente diferenciável $V: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, define-se $\dot{V}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ por

$$\dot{V} = \delta V / \delta x_1 f_1(x_1, x_2) + \delta V / \delta x_2 f_2(x_1, x_2) \quad \text{Eq. 2-46}$$

A função $\dot{V}$ é conhecida como a derivada de V ao longo da trajetória do sistema.

Agora suponhamos que somos capazes de encontrar um domínio D em $\mathbf{R}^2$ tal que $\dot{V}(x_1, x_2) \equiv 0$, $\forall X \in D$. Seja $(x_{10}, x_{20}) \in D$, e seja C a solução da trajetória do sistema originada a partir de (x_{10}, x_{20}) . A hipótese de $\dot{V}(x_1, x_2) \equiv 0$, $\forall X \in D$ implica que $V(x_1, x_2)$ é constante ao longo de C .

$$V[x_1(t), x_2(t)] = V(x_{10}, x_{20}), \forall t \geq 0. \quad \text{Eq. 2-47}$$

Consideremos o conjunto $S = \{(x_1, x_2): V(x_1, x_2) = V(x_{10}, x_{20})\}$

Então C é um subconjunto de S . Em particular, se S é uma curva fechada, então C é uma curva fechada e é igual a S .

Para exemplificar este caso, vamos utilizar um tanque LC, ou seja, um oscilador harmônico simples.

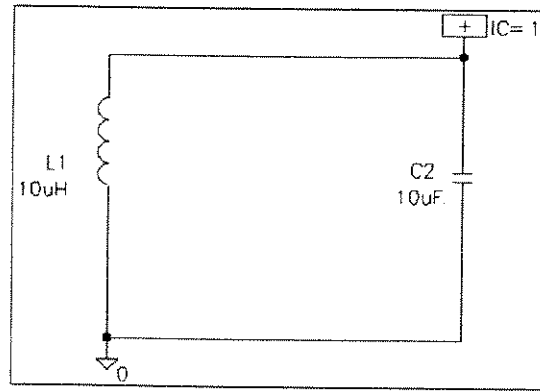


Figura 2-11: Tanque LC ideal

Temos então

$$x_1 = q \text{ (carga no capacitor)} \quad \text{Eq. 2-48}$$

$$x_2 = \dot{x}_1 \text{ (corrente no indutor)} \quad \text{Eq. 2-49}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC} x_1 \quad \text{Eq. 2-50}$$

Se escolhermos $V(x_1, x_2) = \frac{1}{LC} x_1^2 + x_2^2$, teremos

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{2}{LC} x_1 x_2 + 2x_2 \left(-\frac{1}{LC} x_1\right) \equiv 0 \quad \text{Eq. 2-51}$$

portanto $V(x_1, x_2) = C$, define uma curva fechada para $C > 0$, portanto o sistema exibe uma trajetória contínua fechada para $\frac{1}{LC} x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{LC} x_{10}^2 + x_{20}^2$

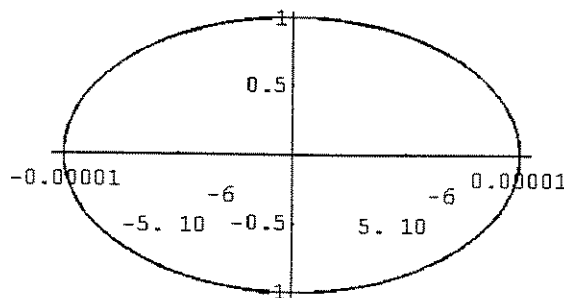


Figura 2-12: Trajetória de fase do sistema LC ideal

OBS. - Nem sempre é possível encontrar facilmente a função V , mas quando é possível o método indica a existência da trajetória fechada do sistema.

2.2.5. Método da série de potências

Este método é aplicável a sistemas autônomos de equações diferenciais. É cheio de dificuldades matemáticas, mas funciona razoavelmente bem.

Considere a equação diferencial

$$\ddot{y} + y + \mu y^3 = 0, \mu \text{ pequeno} \quad \text{Eq. 2-52}$$

$$y(0) = a, \dot{y}(0) = 0 \quad \text{Eq. 2-53}$$

Se $\mu = 0$ a solução do sistema é

$$y_0(t) = a \cos t. \quad \text{Eq. 2-54}$$

Se $\mu \neq 0$ podemos expressar a solução do sistema como uma série de potência em μ , na forma

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots \quad \text{Eq. 2-55}$$

A técnica consiste em substituir a equação expandida em série no sistema original e igualar os coeficientes de todas as potências de μ a zero.

No entanto é necessário que a manipulação matemática seja feita com cuidado, pois alguns $y_i(\cdot)$ podem conter termos seculares (do tipo $t \sin t$ ou $t \cos t$).

Desenvolvendo-se o método para o sistema acima

$$\ddot{y}_0 + y_0 = 0, y_0(0) = a, \dot{y}_0(0) = 0 \quad \text{Eq. 2-56}$$

$$\ddot{y}_1 + y_1 + y_0^3 = 0, y_1(0) = 0, \dot{y}_1(0) = 0 \quad \text{Eq. 2-57}$$

Resolvendo-se o sistema acima para $y_0(t) = a \cos t$

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -y_0^3 = -a^3 \cos^3 t = -\frac{3a^3}{4} \cos t - \frac{a^3}{4} \cos 3t \quad \text{Eq. 2-58}$$

A solução da equação diferencial acima é

$$y_1(t) = -\frac{3a^3}{8} t \sin t - \frac{a^3}{32} \cos t + \frac{a^3}{32} \cos 3t \quad \text{Eq. 2-59}$$

Note que surgiu o termo secular $t \sin t$ no desenvolvimento.

Descevendo-se o sistema original por uma primeira aproximação em μ temos :

$$y(t) \approx y_0(t) + \mu y_1(t) \quad \text{Eq. 2-60}$$

$$y(t) \approx (1 - \mu a^3/32) \cos t - 3 \mu a^3/8 t \sin t + \mu a^3/32 \cos 3t \quad \text{Eq. 2-61}$$

No entanto a aproximação acima é inaceitável, pois contém uma função não limitada em t . O termo secular foi originado em virtude da substituição do termo y_0 no cálculo de y_1 , corresponder a uma excitação do sistema na frequência natural de ressonância.

A técnica para aliviar este problema consiste em supor que o sistema tem uma solução periódica com frequência angular igual a ω , que pode ser expandida como uma série de potências em μ .

$$\omega^2 = 1 + \mu \varepsilon_1(a) + \mu^2 \varepsilon_2(a) + \dots \quad \text{Eq. 2-62}$$

que pode ser reescrito como

$$1 = \omega^2 - \mu \varepsilon_1(a) - \mu^2 \varepsilon_2(a) - \dots \quad \text{Eq. 2-63}$$

Cabe ressaltar que a dependência da frequência com a condição inicial é explícita.

Substituindo-se a equação acima e a expansão de $y(t)$ em série de μ no sistema original e rearranjando-se os termos

$$\ddot{y}_0 + \omega^2 y_0 = 0, y_0(0) = a, \dot{y}_0(0) = 0 \quad \text{Eq. 2-64}$$

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 y_1 = -y_0^3 + \varepsilon_1 y_0, y_1(0) = 0, \dot{y}_1(0) = 0 \quad \text{Eq. 2-65}$$

Resolvendo-se o sistema, agora para

$$y_0(t) = a \cos \omega t \quad \text{Eq. 2-66}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + \omega^2 y_1(t) &= a^3 \cos^3 \omega t + \varepsilon_1 a \cos \omega t \\ &= -\frac{3a^3}{4} \cos \omega t - \frac{a^3}{4} \cos 3\omega t + \varepsilon_1 a \cos \omega t. \end{aligned} \quad \text{Eq. 2-67}$$

Desta forma a solução de $y_1(\cdot)$ não contém nenhum termo secular.

Igualando-se os coeficientes de $\cos \omega t$ a zero, temos $\varepsilon_1(a) = 3/4 a^3$

Com esta condição a solução de $y_1(t)$ é

$$y_1(t) = -a^3/(32 \omega^2) \cos \omega t + a^3/(32 \omega^2) \cos 3\omega t \quad \text{Eq. 2-68}$$

onde $\omega^2 = 1 + 3/4 \mu a^3$

Finalmente a solução aproximada para o sistema é

$$y(t) = a \cos \omega t - a^3/(32 \omega^2) \cos \omega t + a^3/(32 \omega^2) \cos 3\omega t \quad \text{Eq. 2-69}$$

Nota-se que este método é repleto de complicações matemáticas, mas possibilita a previsão de resultados para sistemas não lineares com soluções periódicas.

Vamos ilustrar o procedimento para um circuito LC, porém com C não linear, da forma

$$C(q) = C_0/(1 + \mu q^2) \quad \text{Eq. 2-70}$$

A equação diferencial do sistema é

$$\ddot{q} + 1/LC q + \mu/LC q^3 = 0 \quad \text{Eq. 2-71}$$

A simulação do circuito apresenta resultado compatível com o previsto, estando a terceira harmônica bastante evidenciada, conforme demonstrado na figura 2-13.

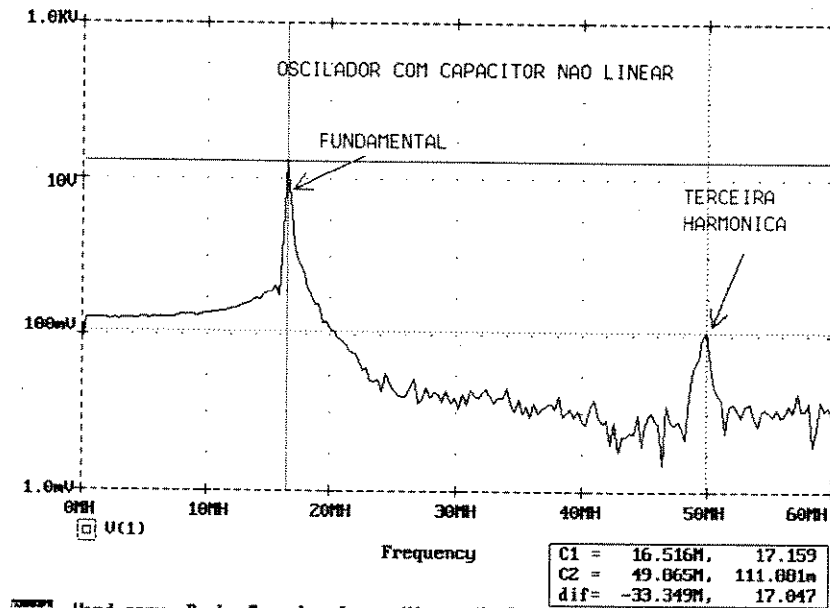


Figura 2-13: Componentes de freqüência do circuito LC não linear

Existem vários outros métodos para análise aproximada das soluções das equações não lineares, alguns dos quais pode ter aplicação em sistemas de medidas integrados com equipamentos de processamento de dados.

O método das funções equivalentes pode ser útil na definição da arquitetura do arranjo de teste.

Este método consiste na substituição de um elemento não linear, por um linear "equivalente" invariante com o tempo, o qual é de alguma forma a melhor aproximação possível do sistema não linear.

2.2.6. Método da perturbação singular

Este método é indicado para estudo de sistemas com parâmetros parasitas.

A ordem dinâmica dos sistemas muda ao se desconsiderar certos elementos.

Considere o sistema de equações não lineares

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{Eq. 2-72}$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad \text{Eq. 2-73}$$

onde $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{g}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Para qualquer valor de ε diferente de zero o sistema apresenta $n+m$ equações diferenciais.

No entanto se $\varepsilon = 0$ o sistema torna-se um conjunto de n equações diferenciais e m equações algébricas.

Resolvem-se as m equações algébricas e obtem-se uma expressão explícita de $\mathbf{Y}$ em termos de $\mathbf{X}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{h}(\mathbf{X}) \quad \text{Eq. 2-74}$$

onde $\mathbf{h}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, portanto

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}[\mathbf{X}, \mathbf{h}(\mathbf{X})] . \quad \text{Eq. 2-75}$$

O processo de igualar ε a zero é chamado de perturbação singular, uma vez que este procedimento altera a ordem do sistema.

Este procedimento pode ser bastante útil, pois as diferenças de comportamento entre o circuito simulado, desconsiderando-se os parâmetros parasitas, e o circuito realizado pode fornecer muita informação sobre os parâmetros parasitas.

Imagine um circuito conforme a figura 2-14, sendo D1 um diodo túnel

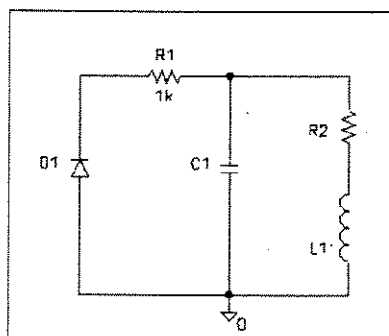


Figura 2-14: Circuito com diodo túnel

A resistência dinâmica do diodo túnel será denotada por $-R_d$, sendo a capacitância parasita denotada por ε .

As variáveis de estado do sistema são

x_1 = corrente no indutor L_1

x_2 = tensão no capacitor C_1

y = tensão na capacitância parasita.

A matriz dinâmica do sistema (pequenos sinais) é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \varepsilon y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{C_1} & \frac{R_1 C_1}{R_2} & \frac{R_2 C_1}{R_2 - R_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2-76}$$

Fazendo-se $\varepsilon = 0$, temos

$$y = -\frac{R_d}{R_2 R_d} x_2 \quad \text{Eq. 2-77}$$

e o modelo simplificado fica

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & \frac{1}{L_1} \\ -1 & -1 \\ \frac{1}{C_1} & \frac{(R_2 - R_d) C_1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 2-78}$$

A análise da matriz simplificada indica que se $0 < R_d < R_2$, o sistema será assintoticamente estável. No entanto, para ε positivo e suficientemente grande, o sistema original é instável.

Esta diferença de comportamento é um indicador sensível de parâmetro parasita, que em um circuito real pode inclusive ser a interação entre diversos parâmetros parasitas, ou efeitos de ordem superior de parâmetros principais.

2.3. Considerações sobre a análise dos sistemas não lineares

É importante ter em mente que a análise de um sistema não linear submetido a teste, apesar de não ser mandatória, pode fornecer importantes informações sobre os melhores pontos de polarização para realização das medidas, bem como a influência que determinadas alterações paramétricas podem provocar no comportamento do sistema.

Estas informações também podem ser obtidas de forma empírica; no entanto, em virtude da dificuldade de se inferir sobre o comportamento dos sistemas não lineares, esta tarefa pode consumir muito tempo e não levar a nenhuma conclusão aproveitável.

Recomenda-se sempre uma análise prévia para que seja adquirido um "sentimento" do sistema e, posteriormente, que o comportamento previsto seja verificado na prática e os ajustes realizados de forma empírica.

3. SOBRE A ESTABILIDADE DOS SISTEMAS NÃO LINEARES

Em virtude dos sistemas não lineares apresentarem grande variedade de comportamentos, nem sempre facilmente previsíveis, é importante que se faça a análise de estabilidade do sistema.

Sob o ponto de vista de teste, é importante que o sistema tenha comportamento estável, porém os pontos de instabilidade tais como pontos de bifurcações das trajetórias dos estados observáveis, podem ser pontos notáveis de caracterização paramétrica de componentes.

3.1. Estabilidade de Lyapunov

O matemático russo A. M. Lyapunov (1892) introduziu as definições básicas de estabilidade na forma que utilizamos hoje em dia, além de ter provado diversos teoremas. A abordagem de Lyapunov permite o estudo de equações diferenciais arbitrárias [23, cap. I].

3.1.1. Definições de Estabilidade

Tendo como objeto de estudo as equações diferenciais vetoriais :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}[t, \mathbf{X}(t)], t \geq 0 \quad \text{Eq. 3-1}$$

$\mathbf{X}(t) \in \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{f}: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ é contínua .

É assumido que a equação acima tem uma única solução para cada condição inicial, que é o caso de $\mathbf{f}$ que satisfaz a condição global de Lipschitz [8, seção 2.4.1].

Seja $\mathbf{S}(t, t_0, \mathbf{X}_0)$ a solução da equação diferencial correspondente à condição inicial $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$, avaliada no tempo t .

$$\frac{d}{dt}S(t, t_0, X_0) = f[t, S(t, t_0, X_0)], \forall t \geq 0; S(t_0, t_0, X_0) = X_0 \quad \text{Eq. 3-2}$$

Propriedades :

$$a) S(t_0, t_0, X_0) = X_0, \forall X_0 \in \mathbf{R}^n$$

$$b) S[t, t_1, S(t_1, t_0, X_0)] = S(t, t_0, X_0), \forall t \geq t_1 \geq t_0 \geq 0, \forall X_0 \in \mathbf{R}^n$$

$X_0 \in \mathbf{R}^n$ é um equilíbrio do sistema se

$$f(t, t_0) = 0, \forall t \geq 0 \quad \text{Eq. 3-3}$$

então

$$S(t, t_0, X_0) = X_0, \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad \text{Eq. 3-4}$$

Em palavras, se o sistema é iniciado em um equilíbrio, vai permanecer indefinidamente no equilíbrio até que um estímulo externo o desloque.

Grande parte da teoria de Lyapunov trata do comportamento da função $S(t, t_0, X_0)$ quando $X_0 \neq 0$, porém quando está próximo do equilíbrio.

i) **Definição :**

Um equilíbrio é estável se, para cada $\varepsilon > 0$ e para cada $t_0 \in \mathbf{R}_+$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que

$$||X_0|| < \delta = \delta(\varepsilon, t_0) \Rightarrow ||S(t, t_0, X_0)|| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad \text{Eq. 3-5}$$

O equilíbrio é uniformemente estável se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$||X_0|| < \delta = \delta(\varepsilon), t_0 \geq 0 \Rightarrow ||S(t, t_0, X_0)|| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad \text{Eq. 3-6}$$

Em palavras, a solução da equação a partir de qualquer condição inicial dentro de uma bola de raio δ , estará dentro de uma bola de raio ε .

Para sistemas autônomos, que será o enfoque do nosso trabalho, não existe diferença entre estabilidade e estabilidade uniforme.

Um equilíbrio 0 não é estável se para algum $\varepsilon > 0$, nenhum $\delta > 0$ pode ser encontrado de tal forma que satisfaça a condição de equilíbrio.

ii) **Definição :**

a) O equilíbrio 0 é atrativo se para cada $t_0 \in \mathbf{R}_+$, existe um $\eta(t_0)$ tal que

$$||X_0|| < \eta(t_0) \Rightarrow S(t_0+t, t_0, X_0) \rightarrow 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty. \quad \text{Eq. 3-7}$$

b) O equilíbrio 0 é uniformemente atrativo se existe um número $\eta > 0$ tal que

$$||X_0|| < \eta, t_0 \geq 0 \Rightarrow S(t_0+t, t_0, X_0) \rightarrow 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty \text{ uniformemente em } X_0, t_0. \quad \text{Eq. 3-8}$$

Cabe observar que para um equilíbrio ser uniformemente atrativo, a aproximação tem que ter uma razão uniforme.

Para que um equilíbrio seja atrativo, é necessário que seja isolado, ou seja, existe uma vizinhança do equilíbrio na qual não existe qualquer outro equilíbrio.

c) O equilíbrio é assintoticamente estável se é estável e atrativo.

d) O equilíbrio é uniforme e assintoticamente estável se é uniformemente estável e uniformemente atrativo.

e) O equilíbrio 0 é exponencialmente estável se existem constantes, $r, a, b > 0$ tais que

$$||S(t_0+t, t_0, X_0)|| < a ||X_0|| \exp(-bt), \forall t, t_0 > 0, \forall X_0 \in B_r \quad \text{Eq. 3-9}$$

onde B_r é uma bola de raio r .

As definições seguintes não estão limitadas ao fato da análise ser realizada próxima do equilíbrio, tendo portanto um caráter global.

f) O equilíbrio 0 é global, uniforme e assintoticamente estável se

(I) é uniformemente estável

(II) para cada par de números positivos M, ε , com M arbitrariamente grande e ε arbitrariamente pequeno, existe um número finito $T = T(M, \varepsilon)$ tal que

$$||X_0|| < M, t_0 \geq 0 \Rightarrow ||S(t_0+t, t_0, X_0)|| < \varepsilon, \forall t \geq T(M, \varepsilon) \quad \text{Eq. 3-10}$$

g) O equilíbrio 0 é globalmente exponencialmente estável se existem constantes $a, b > 0$ tais que

$$||S(t_0+t, t_0, X_0)|| < a ||X_0|| \exp(-bt), t_0 > 0, \forall X_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{Eq. 3-11}$$

Para que o equilíbrio seja globalmente estável, é necessário que seja o único equilíbrio do sistema.

iii) **Definição** : Uma função $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é da classe K se é contínua, estritamente crescente e $\phi(0) = 0$. É da classe L se é contínua em $[0, \infty)$, estritamente decrescente, $\phi(0) < \infty$ e $\phi(r) \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$.

iv) **Teorema** [8, cap. 4]: O equilíbrio 0 de um sistema é estável se e somente se, para cada $t_0 \in \mathbb{R}_+$, existe um número $d(t_0)$ e uma função ϕ_{t_0} da classe K tal que

$$||S(t, t_0, X_0)|| \leq \phi_{t_0}(||X_0||), \forall t \geq t_0, \forall X_0 \in B_{d(t_0)} \quad \text{Eq. 3-12}$$

v) **Lema**: O equilíbrio 0 de um sistema é atrativo, se e somente se, para cada $t_0 > 0$ existe um número $r(t_0) > 0$, e para cada $X_0 \in B_{r(t_0)}$ existe uma função σ_{t_0, X_0} da classe L tais que

$$||S(t_0+t, t_0, X_0)|| \leq \sigma_{t_0, X_0}(t), \forall t \geq 0, \forall X_0 \in B_{r(t_0)} \quad \text{Eq. 3-13}$$

O equilíbrio é uniformemente atrativo se r e σ são independentes de t_0, X_0 .

vi) **Definição :**

Uma função $V: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ é dita uma função localmente definida positiva se

(a) é contínua

(b) $V(t,0) = 0 \forall t \geq 0$

(c) Existe uma constante $r > 0$ e uma função α da classe K tal que

$$\alpha(|X|) \leq V(t,X), \forall t \geq 0, \forall X \in B_r \quad \text{Eq. 3-14}$$

V é decrescente se existe uma constante $r > 0$ e uma função β da classe K tais que

$$V(t,X) \leq \beta(|X|), \forall t \geq 0, \forall X \in B_r \quad \text{Eq. 3-15}$$

V é uma função definida positiva se

$$\alpha(|X|) \leq V(t,X), \forall t \geq 0, \forall X \in \mathbf{R}^n \quad \text{Eq. 3-16}$$

V é radialmente ilimitada se

$$\alpha(|X|) \leq V(t,X), \forall t \geq 0, \forall X \in \mathbf{R}^n \quad \text{Eq. 3-17}$$

para alguma função contínua α (não necessariamente da classe K) com a seguinte propriedade

$$\alpha(r) \rightarrow \infty \text{ conforme } r \rightarrow \infty .$$

V é uma função localmente definida negativa se $-V$ é localmente definida positiva.

3.1.2. Derivada de uma função ao longo da trajetória de uma equação diferencial.

Seja a equação diferencial

$$\dot{X}(t) = f[t, X(t)], \forall t \geq 0. \quad \text{Eq. 3-18}$$

Suponha $V: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tendo derivadas parciais contínuas. Então $V[t, X(t)]$ é diferenciável em relação a t .

i) **Definição:**

Seja $V: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ contínua e diferenciável em relação a todos os seus argumentos, e ∇V denota o gradiente de V em relação a X . A função

$\dot{V}: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ é definida por

$$\dot{V}(t, X) = \delta V(t, X) / \delta t + \nabla V(t, X) f(t, X) \quad \text{Eq. 3-19}$$

e é chamada de derivada de V ao longo da trajetória de

$$\dot{X}(t) = f[t, X(t)], \forall t \geq 0.$$

Um conjunto $M \subseteq \mathbf{R}^n$ é chamado de **conjunto invariante** de uma equação diferencial se para cada $X_0 \in M$ existe um $t_0 \in \mathbf{R}_+$ tal que $S(t, t_0, X_0) \in M, \forall t \geq t_0$.

Um equilíbrio ou qualquer solução periódica, é um conjunto invariante.

Suponha $X_0 \in \mathbf{R}^n, t_0 \in \mathbf{R}_+$. Então um ponto $p \in \mathbf{R}^n$ é chamado de um **ponto limite** da trajetória $S(t, t_0, X_0)$ se existe uma sequência $\{t_i\}$ de números reais em $[t_0, \infty)$ tal que $t_i \rightarrow \infty$ e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|p - S(t_i, t_0, X_0)\| = 0 \quad \text{Eq. 3-20}$$

O conjunto de todos os pontos limites de $S(t, t_0, X_0)$ é chamado de **conjunto limite** de $S(t, t_0, X_0)$ e é denotado por $\Omega(t_0, X_0)$.

ii) **Definição :** A distância entre um ponto x e um conjunto Ω fechado e não vazio é definida como

$$d(x, \Omega) = \min_{y \in \Omega} \|x - y\|. \quad \text{Eq. 3-21}$$

iii) **Definição:** Suponha que 0 é um equilíbrio atrativo do sistema . O domínio de atração $D(0)$ é definido como

$$D(0) = \{X_0 \in \mathbb{R}^n: S(t, 0, X_0) \rightarrow 0 \text{ conforme } t \rightarrow \infty\} . \text{ Eq. 3-22}$$

Um sistema pode ter mais de um equilíbrio, neste caso cada equilíbrio tem seu próprio domínio de atração.

iv) **Definição:** Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$ um dado conjunto. Dois pontos x e y são ditos conectados em S se existe um caminho entre x e y totalmente contido em S .

Todo o conjunto S é dito conectado, se cada par de pontos em S é conectado em S .

Se 0 é um equilíbrio atrativo de um sistema, então $D(0)$ é aberto, conectado e invariante.

3.2. *Método direto de Lyapunov* [24; 8, cap. 5; 23, cap. 5-14,]

Considere um sistema “isolado” (no sentido de que não existe nenhuma força externa agindo no sistema).

$$\dot{X}(t) = f[t, X(t)], \forall t \geq 0, X(t) \in \mathbb{R}^n, f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{Eq. 3-23}$$

suponha que possam ser identificados vários estados de equilíbrio do sistema, sendo 0 um destes equilíbrios. Agora suponha que é possível definir a função energia total do sistema, que tem a propriedade de ser zero na origem e positiva em qualquer outro ponto..

Em outras palavras, a função tem um mínimo local, ou global, em 0.

Se o sistema, o qual encontra-se originalmente no estado de equilíbrio 0, é perturbado para um novo valor inicial diferente de zero, então existem diversas possibilidades :

a) Se a dinâmica do sistema é tal que a energia do sistema não aumenta com o tempo, então o nível de energia nunca será superior ao valor positivo inicial. Dependendo da natureza da função energia, isto pode ser suficiente para concluir que o equilíbrio 0 é estável.

b) Se a dinâmica do sistema é tal que a energia do sistema é monotonicamente decrescente com o tempo e a energia é eventualmente reduzida a zero, isto pode ser suficiente para concluir que o equilíbrio 0 é assintoticamente estável.

c) Se a energia continua a crescer além do valor inicial, pode ser possível concluir que o equilíbrio 0 é instável.

A teoria de Lyapunov exige a busca de uma função que satisfaça algumas propriedades específicas. Esta função é conhecida como função de Lyapunov, sendo a generalização da função energia para um sistema.

i) **Teorema** [8, cap. 5]: O equilíbrio 0 de um sistema é estável se existe uma função localmente definida positiva (lpdf), continuamente diferenciável (C^1)

$V: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ e uma constante $r > 0$ tais que

$$\dot{V}(t, \mathbf{X}) \leq 0, \forall t > t_0, \forall \mathbf{X} \in B_r \quad \text{Eq. 3-24}$$

Onde $\dot{V}$ é avaliada ao longo da trajetória do sistema.

ii) **Teorema** [8, cap. 5]: O equilíbrio 0 de um sistema é uniformemente estável, se é estável para $\forall t \geq 0$.

A função V é conhecida como uma função de Lyapunov, ou candidata a função de Lyapunov.

a) Se V é C^1 lpdf, então é chamada de candidata a função de Lyapunov.

b) Se para um sistema particular V satisfaz o teorema da estabilidade, então V é uma função de Lyapunov.

iii) **Teorema** [8, cap. 5]: O equilíbrio 0 de um sistema é uniforme e assintoticamente estável se existe uma função V , C^1 lpdf, tal que $-\dot{V}$ é uma lpdf.

Este teorema proporciona uma forma de se estimar o domínio de atração.

Se $V(X) > 0$, $\dot{V}(X) < 0$, $\forall X \neq 0$ em S (S é um conjunto aberto, conetado contendo 0 e $S \in \mathbf{R}^n$), então qualquer conjunto invariante do sistema contido em S está também contido em $D(0)$, porém S não está necessariamente contido em $D(0)$.

iv) **Definição:** Conjunto nível da função de Lyapunov, $L_V(c)$ é definido como o componente conetado de $M_V(c)$ contendo 0 , onde

$$c \in \mathbf{R}_+$$

$$M_V(c) = \{ X \in \mathbf{R}^n: V(X) \leq c \}$$

Eq. 3-25

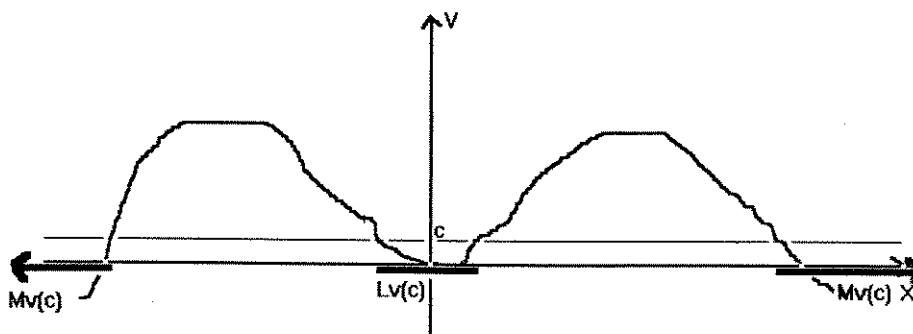


Figura 3-1: Componentes de $M_V(c)$

3.3. Considerações sobre o método direto de Lyapunov

A mudança de comportamento nas proximidades de um ponto de equilíbrio, a passagem de um domínio de atração para outro, com eventual volta ao domínio original ou mudança da natureza do equilíbrio de estável para instável podem ser indicadores poderosos no procedimento de teste.

O método direto de Lyapunov, análise de estabilidade baseada na função energia do sistema, facilita muito o trabalho com circuitos eletrônicos, pois estas funções são, pelo menos em primeira aproximação, muito exploradas nas análises de circuitos.

Como exemplo de aplicação é apresentada a análise da função energia do circuito RLC.

$$V(i(t), v(t)) = \frac{1}{2} Li^2(t) + \frac{1}{2} Cv^2(t) \quad \text{Eq. 3-26}$$

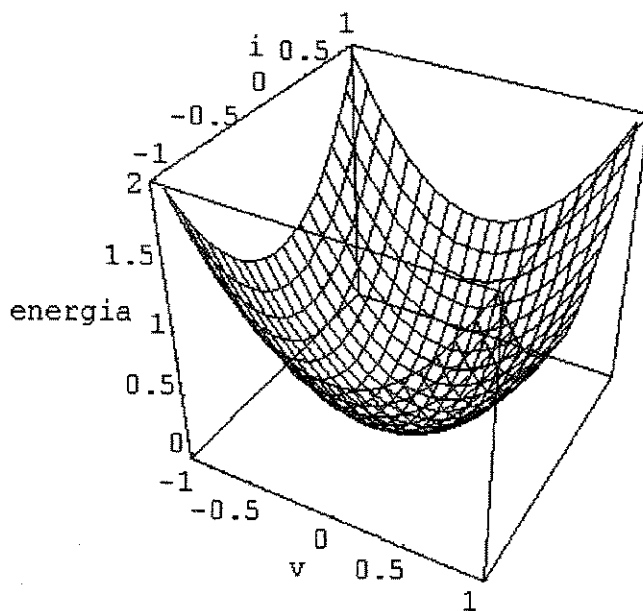


Figura 3-2 : Gráfico da função de Lyapunov para o circuito

Nota-se claramente que a origem é o ponto de mínima energia, portanto o ponto de equilíbrio do sistema.

Naturalmente, para circuitos não lineares mais complexos, podem surgir alguns mínimos locais em diferentes partes da superfície, ou eventualmente do hiperplano, que representa a função de Lyapunov. A visualização destes mínimos pode ser um bom indicativo para definição dos pontos de polarização e amplitude da perturbação aplicada no procedimento de teste.

3.4. Estabilidade nos sistemas lineares

Este assunto tem sido amplamente discutido [9; 10; 25; 27; 8, cap.5; 23, cap. 17-65] por ter dominado o campo de interesse da engenharia, portanto vamos apenas relembrar alguns conceitos.

Para o sistema descrito pela equação diferencial vetorial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), t \geq 0 \quad \text{Eq. 3-27}$$

onde 0 é um equilíbrio isolado e $\mathbf{A}(t)$ é não singular para algum $t \geq 0$, a solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad \text{Eq. 3-28}$$

$\Phi(.,.)$ é a matriz de transição de estado associada a $\mathbf{A}(.)$ e é a única solução da equação

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0 \quad \text{Eq. 3-29}$$

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \forall t_0 \geq 0 \quad \text{Eq. 3-30}$$

3.4.1. A estabilidade nos sistemas lineares autônomos

Neste caso temos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad \text{Eq. 3-31}$$

A matriz de transição de estado do sistema autônomo é

$$\Phi(t, t_0) = \exp[\mathbf{A}(t - t_0)] \quad \text{Eq. 3-32}$$

O equilíbrio 0 do sistema autônomo é globalmente exponencialmente estável se e somente se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ tem partes reais negativas.

O equilíbrio 0 do sistema é estável se e somente se nenhum autovalor de $\mathbf{A}$ tem parte real positiva.

3.4.2. A estabilidade nos sistemas não autônomos

Considerando o sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), t \geq 0 \quad \text{Eq. 3-33}$$

A estabilidade do sistema variante com o tempo pode ser estudada com base na matriz de transição de estado.

O equilíbrio 0 é estável se e somente se

$$\sup_{t \geq t_0} \|\Phi(t, t_0)\|_i := m(t_0) < \infty \quad \text{Eq. 3-34}$$

O equilíbrio 0 é uniformemente estável se e somente se

$$\sup_{t_0 \geq 0} m(t_0) := m_0 < \infty \quad \text{Eq. 3-35}$$

O equilíbrio 0 é globalmente uniformemente assintoticamente estável se e somente se

a) $m_0 < \infty$;

b) $\| \phi(t_0+t, t_0) \|_i \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, uniformemente em t_0 .

Cabe ressaltar que estes teoremas são genéricos e aplicáveis também aos sistemas autônomos.

Devido ao fato de ser, em geral, impossível derivar-se uma expressão analítica para ϕ , as equações acima têm um objetivo conceitual. Na prática a estabilidade dos sistemas não autônomos podem ser melhor analisadas através do método direto de Lyapunov.

A análise de sistemas não autônomos não será necessária para a definição de testes paramétricos de circuitos em linha de produção, pois dentro do tempo de teste não existe nenhuma variação temporal significativa nos parâmetros dos circuitos. No entanto, caso o conceito deste trabalho seja aplicado em testes de confiabilidade [27], este tipo de análise pode se tornar importante.

3.4.3. A estabilidade nos sistemas periódicos

Suponha um sistema periódico com período $T > 0$, então

$$A(t+T)=A(t), \forall t \geq 0. \quad \text{Eq. 3-36}$$

A matriz de transição de estado do sistema tem a forma

$$\phi(t, t_0)=\psi(t, t_0)\exp[M(t - t_0)] \quad \text{Eq. 3-37}$$

onde M é uma matriz constante e ψ é periódica com período $T \geq 0$.

Neste caso λ é um autovalor de M se e somente se $\exp(\lambda T)$ é um autovalor de $\phi(T,0)$.

Dado um sistema periódico, o equilíbrio 0 do sistema é uniformemente assintoticamente estável se e somente se todos os autovalores de $\phi(T,0)$ são menores que 1. O equilíbrio 0 é uniformemente estável se e somente se nenhum autovalor de $\phi(T,0)$ é maior que 1.

3.5. Considerações sobre a análise de sistemas lineares

Considerando que um sistema não linear pode ser linearizado em torno de um dado ponto de equilíbrio, e seu comportamento analisado em torno deste ponto, a análise de sistemas lineares pode ser útil para se inferir sobre o comportamento dos sistemas não lineares em torno de equilíbrios.

A linearização de um sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]$ é definida da seguinte forma :

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=0} \quad \text{Eq. 3-38}$$

onde A denota a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ no ponto 0 .

Da definição de matriz Jacobiana temos

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{Eq. 3-39}$$

então

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}_1(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0 \quad \text{Eq. 3-40}$$

Rearranjando os termos teremos a expressão da expansão de $f(\cdot)$ em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio 0.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \quad \text{Eq. 3-41}$$

Obtendo desta forma o sistema linearizado $\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$ em torno do equilíbrio, podendo ser inferido o comportamento do sistema não linear conforme já discutido no capítulo 2 deste trabalho.

3.6. Os expoentes característicos de Lyapunov [17, cap. 3; 12, cap. II, 28]

Sistemas não lineares podem apresentar comportamento caótico [14; 15; 29; 30; 31;], e observamos em nossos experimentos que, nestes casos, é difícil a utilização dos dados para efeito de testes. Em regime caótico existe a geração de uma quantidade tão grande de informações que fica praticamente impossível distingui-las de ruído.

No entanto as características da rota de transição do sistema em direção ao caos, tais como pontos de duplicação de período e, até mesmo, o ponto de transição para o caos, podem ser referências notáveis no processo de teste.

A medida da taxa de divergência de trajetórias no espaço de estados é realizada através da determinação dos expoentes característicos de Lyapunov ou números de Lyapunov.

3.6.1. Definição de expoente característico de Lyapunov

Dado um sistema dinâmico contínuo em um espaço n -dimensional, podemos acompanhar a evolução temporal de um volume esférico n -dimensional infinitesimal que envolve as condições iniciais. A esfera vai tornar-se um n -elipsóide devido à natureza deformante do fluxo da trajetória

de estado, em outras palavras, as expansões e contrações do fluxo diferem nas n dimensões.

Temos então

$$\|y_0 - x_0\| \leq \varepsilon_0(x_0) \quad \text{Eq. 3-42}$$

onde x_0 é o estado inicial, y_0 denota os estados iniciais vizinhos; $\varepsilon_0(x_0)$ é o raio infinitesimal da esfera n -dimensional, com eixos principais denotados por $\varepsilon_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_k(t)$ e são definidos por :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_0(x_0)}, i = 1, \dots, n \quad \text{Eq. 3-43}$$

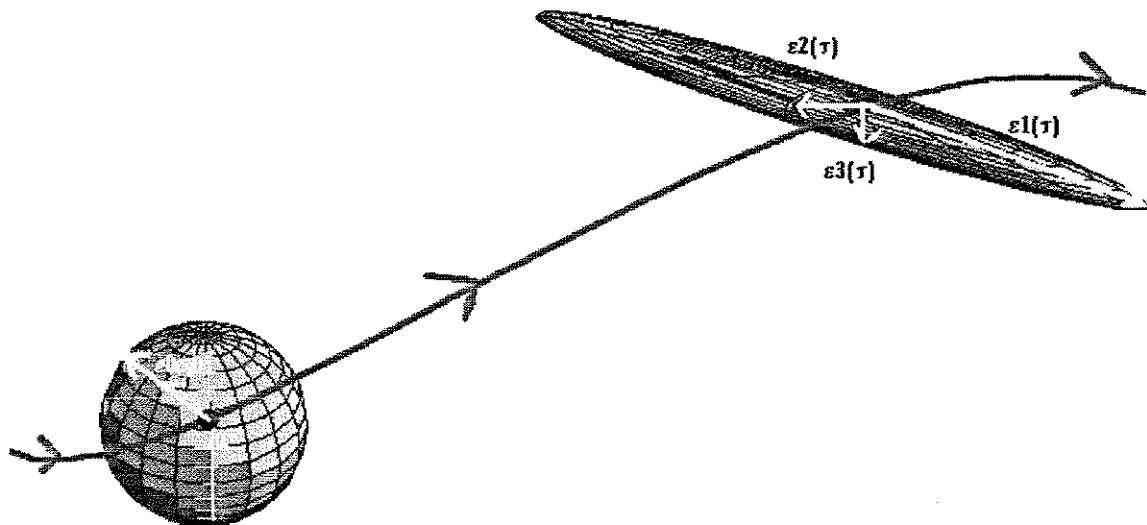


Figura 3-3 : Evolução de um elemento de volume esférico ao longo do tempo

Cada eixo sofre deformação diferente, sendo que a partir de 3-49 temos

$$\varepsilon_i(t) \sim \varepsilon_0(\mathbf{x}_0)e^{\lambda_i t} \quad \text{Eq. 3-44}$$

Portanto a existência de um ou mais coeficientes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas, e para uma solução caótica é necessária a existência de pelo menos um $\lambda_i > 0$.

A evolução temporal do elemento de volume é dada por

$$\delta V(t) = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i(t) \quad \text{Eq. 3-45}$$

portanto

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i t\right) \quad \text{Eq. 3-46}$$

A soma dos expoentes de Lyapunov nos fornece a velocidade média de divergência do espaço de fase, portanto em um sistema dissipativo temos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \quad \text{Eq. 3-47}$$

Após o transiente, a trajetória no espaço de fase vai ocorrer em um conjunto limite de volume zero, um atrator.

Citando como exemplo um sistema de três dimensões, $n=3$, podemos ter os seguintes atratores :

- a) ponto fixo se os expoentes são todos negativos $(-, -, -)$;
- b) um ciclo limite se um dos expoentes é nulo e os outros negativos $(0, -, -)$;
- c) um toro T^2 se dois dos expoentes são nulos e o outro, obrigatoriamente, negativo $(0, 0, -)$;
- d) um atrator estranho se um dos expoentes é positivo, tendo associado um expoente nulo ao longo da trajetória $(+, 0, -)$.

A expansão exponencial associada a um expoente de Lyapunov positivo é incompatível com a noção de um atrator limitado, a menos que algum processo de dobra da trajetória ocorra aproximando trajetórias que tenderiam a ficar muito separadas. Cada expoente positivo reflete uma direção na qual o sistema se estende e dobra de forma repetitiva, o que elimina a correlação de estados próximos no atrator impossibilitando a previsão do comportamento do sistema, ou seja, o caos.

Wolf [28] apresenta o expoente de Lyapunov como sendo a medida da taxa com que o sistema gera ou destrói informações.

3.7. Considerações sobre o expoente de Lyapunov

É interessante que se faça a determinação dos expoentes de Lyapunov para o sistema sob teste, evitando-se desta forma trabalhar em condições de caos, ou muito próximo desta condição.

A determinação destes expoentes a partir de dados experimentais não é simples, principalmente porque as contrações e expansões ocorrem muito rapidamente e os conjuntos de dados experimentais são limitados e contaminados com ruído. A combinação destes fatores faz com que a tentativa simples de se computar as alterações temporais nas dimensões do espaço de fase fiquem invalidadas pelas limitações da representação numérica nos sistemas digitais.

Em 1985 Wolf [28; 17, cap. 3] apresentou um algoritmo que possibilita a determinação dos expoentes de Lyapunov a partir de uma série temporal, com base na reconstrução do atrator e sucessivas ortonormalizações dos eixos do elemento de volume ao longo da evolução da trajetória do sistema. Cabe ressaltar que este algoritmo também não apresenta resultados plenamente confiáveis para conjuntos pequenos de dados e contaminados com ruído, porém é um indicador.

Outra forma de se identificar uma possível situação de caos, é a visualização do espectro de frequência da série temporal obtida do testador. Caso exista um espectro muito rico em frequências com amplitudes significativamente maiores que o ruído de fundo do sistema de medidas, é um bom indicador de caos.

4. A INSTRUMENTAÇÃO DE TESTE

O objetivo deste trabalho não foi o de construir um testador para linha de produção, mas sim demonstrar que o comportamento não linear dos componentes pode ser utilizado para fins de testes paramétricos sistêmicos.

Todo o instrumental foi desenvolvido para fins de pesquisa, tendo como principal objetivo a identificação e medida dos comportamentos não lineares, bem como o estudo da variação destes comportamentos em função das variações paramétricas nos componentes.

Decidiu-se utilizar a filosofia de instrumentação virtual, ou seja, através de interfaces de hardware entre o aparato de teste e um microcomputador, as funções dos instrumentos são criadas a partir de programas específicos.

4.1. A montagem de testes

Os dispositivos sob testes (DST), bem como os circuitos específicos de conexão direta com o DST foram acomodados em uma caixa de alumínio, sendo as conexões dos sinais internos realizadas com cabos coaxiais de baixo ruído e conectores coaxiais também de baixo ruído.

O sistema foi construído de tal forma a permitir a fácil substituição dos circuitos específicos de conexão direta com o DST.

A interface da montagem de testes com o instrumental de aquisição e geração de sinais foi realizada através de conectores BNC e cabos coaxiais com terminações BNC-BNC, todos de baixo ruído, exceto para alimentação contínua, para a qual foram utilizados conectores tipo banana.

A montagem de testes, bem como toda a instrumentação utilizada durante os testes, estavam aterradas no terra de referência de medidas do laboratório.

4.2. A relação do instrumental utilizado

- i) Sistema de aquisição de dados : Osciloscópio HP54503A - 500MHz
Digitizing Oscilloscope - de quatro canais e com interface HP-IB.
Este é um equipamento com resolução de 10 bits, fundo de escala selecionável de 40mV a 50V.
- ii) Sistema de geração de estímulo : Gerador de funções HP33120A -
15MHz Function/Arbitrary Waveform Generator - com interface HP-IB. Equipamento com saída ajustável até 10V em 50Ω ,
resolução de 10mV e distorção harmônica melhor que -60dB.
- iii) Sistema de alimentação contínua : Fonte de alimentação HP
E3631A - Triple Output DC Power Supply - com interface HP-IB.
Equipamento com duas saídas de até 25V/25W com 50 mV de
resolução no ajuste, e uma saída de até 6V/30W com resolução de
até 10mV no ajuste.
- iv) Monitor de temperatura da montagem : Termômetro digital
TempTec com resolução de 0,05 C;
- v) Controlador do sistema de teste : Microcomputador Blaster -
Pentium 233MHz - com adaptador HP-IB e software LabVIEW 4.0
da National Instruments.

O esboço de interconexão dos instrumentos é apresentado a seguir :

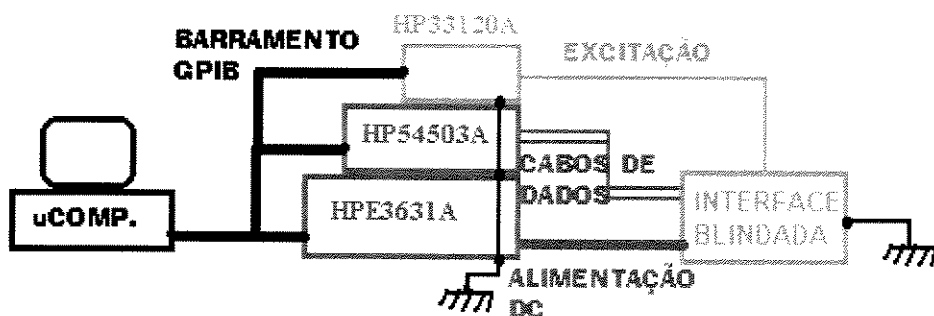


Figura 4-1: Esboço de interconexão dos equipamentos

4.3. Relação do instrumental de apoio

Em virtude de se estar desenvolvendo um método de testes e, principalmente, deste método não ter um caráter de medida específica de parâmetros mas sim a identificação da mudança em relação a um padrão de algum parâmetro no sistema, foi fundamental a utilização de instrumentação de apoio para medida paramétrica da forma tradicional.

- i) Medidor paramétrico de semicondutores : HP4145B - Semiconductor Parametric Analyzer - com interface HP-IB;
- ii) Ponte RLC : GenRad 1619 - RLC Digibridge.

4.4. Medidor do espaço de estados observáveis

Este é o principal instrumento para análise do comportamento dos sistemas, tendo servido de base para o desenvolvimento de todos os outros equipamentos. Através da aquisição simultânea dos quatro canais do osciloscópio, é possível estudar a relação entre os estados observáveis.

O equipamento permite também o controle das fontes de estímulo e de alimentação contínua, além da facilidade de gravação dos dados adquiridos em arquivo, na forma de planilha, para análise mais detalhada.

O esboço do painel do medidor de estados observáveis é apresentado na figura 4-2.

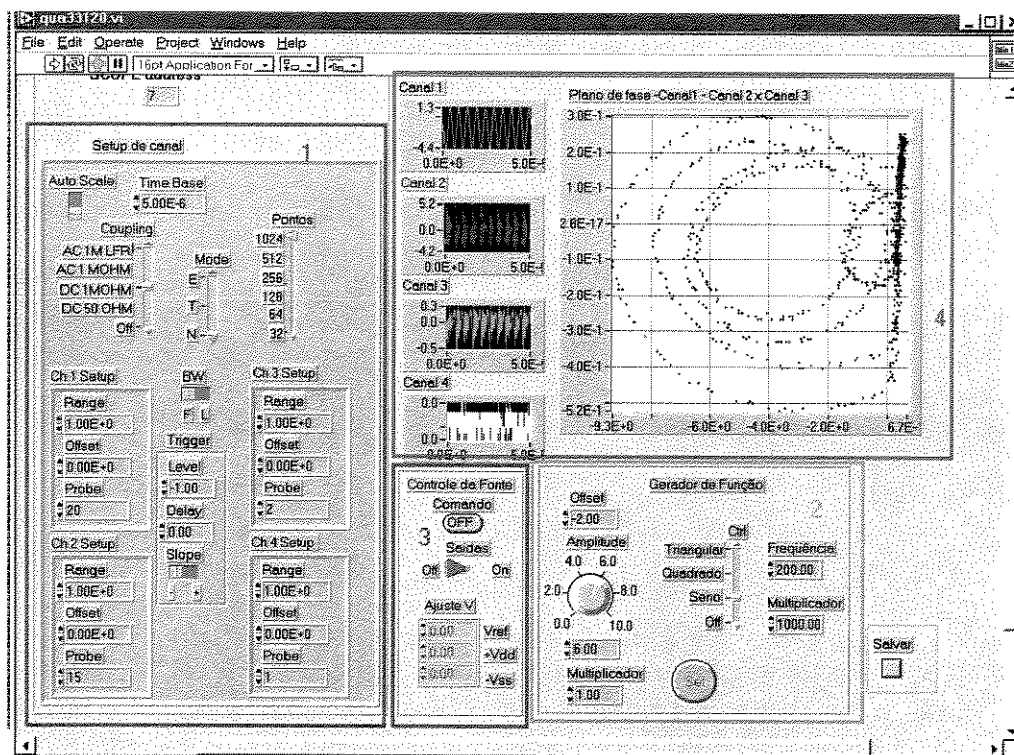


Figura 4-2: Painel do medidor de estados observáveis

Na região 1 do painel encontram-se os controles do osciloscópio, sendo a taxa de amostragem, número de pontos amostrados e as condições de trigger comuns para todos os canais. Existe controle independente para cada canal somente para ajuste da resolução vertical.

Na região 2 do painel ficam os controles do gerador de funções. Os valores de forma de onda, frequência, amplitude e offset podem ser definidos nos controles, sendo que o comando de ajuste só será efetivo após pressionar o botão rotulado como SET.

A região 3 do painel realiza o controle da fonte de alimentação contínua, permitindo o ajuste independente de cada uma das saídas da fonte. Existe também a possibilidade, através do comando SAÍDAS (ON - OFF), de desabilitar ou habilitar as três saídas simultaneamente; os comandos somente são efetivos após pressionar o botão rotulado como COMANDO.

Na região 4 encontram-se as telas de visualização dos sinais adquiridos, sendo quatro telas pequenas para visualização de cada um dos canais no domínio do tempo, e uma tela grande para apresentar a relação entre dois estados observáveis selecionados.

Na região 5 fica o botão que aciona o comando de salvar a planilha com os sinais amostrados. Quando este comando é acionado, uma janela de diálogo é aberta para definir o caminho e nome do arquivo de dados.

Este testador não realiza nenhum tipo de processamento no sinal amostrado, tendo a função apenas de permitir a visualização dos sinais, a relação entre eles e salvá-los em arquivo.

4.5. Medidor de mapa de Poincaré

O mapa de Poincaré é um recurso para facilitar o estudo da evolução do vetor de estados, em espaço de estados n-dimensionais, para sistemas dinâmicos periódicos.

4.5.1. O mapa de Poincaré

É uma técnica clássica de análise de sistemas dinâmicos contínuos, substituindo-se o fluxo de um sistema dinâmico n-dimensional por um sistema discreto (n-1)-dimensional. A denominação de mapa é utilizada para sistemas dinâmicos que evoluem no tempo de forma discreta.

$$\mathbf{x}_{i+1} = F_{\mu}(\mathbf{x}_i) \quad \text{Eq. 4-1}$$

onde $\mathbf{x}$ representa um vetor n-dimensional, F é uma transformação, μ é um parâmetro de controle e i representa passos temporais fixos e discretos, ou passagens sucessivas por uma superfície de seção do fluxo.

Para um sistema autônomo periódico, com período mínimo T , e ciclo limite Γ , seja x^* um ponto no ciclo limite e Σ um hiperplano $(n-1)$ -dimensional transversal a Γ em x^* .

A trajetória que emana de x^* vai interceptar Σ na vizinhança de x^* a aproximadamente cada T segundos, então o fluxo ϕ_t e Σ definem um mapeamento P de uma vizinhança $U \subset \Sigma$ de x^* em uma outra vizinhança $V \subset \Sigma$ de x^* . P é o mapa de Poincaré do sistema autônomo. [15; 17, cap. 2; 12, cap. IV].

O mapa de Poincaré é um difeomorfismo [8, cap. 7], portanto é inversível e diferenciável.

Desta forma é possível a análise geométrica do sistema de forma mais simplificada, ou seja, se tivermos um sistema de ordem 3, podemos estudar a dinâmica deste sistema através da impressão de pontos em um plano. Esta filosofia pode ser a base para a implementação de um sistema de testes paramétricos, do tipo passa/não passa, em linha de produção; a definição de regiões no plano onde devem ocorrer e não podem ocorrer a incidência de pontos pode ser um critério para aceitação, classificação e rejeição de circuitos.

A seguir são apresentadas figuras, extraídas de um experimento realizado com um circuito série RLC não linear, que será detalhado na seção 4.10.3, e que ilustram o conceito.

Neste espaço de estados são relacionadas a tensão de excitação do sistema (V_{ent}), a tensão no capacitor não linear (V_c) e a corrente através do sistema (I).

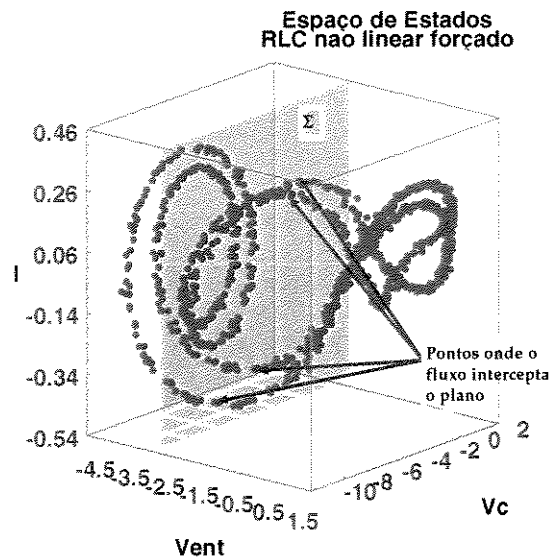


Figura 4-3: Ilustração do espaço de estados

4.5.2. O painel do instrumento

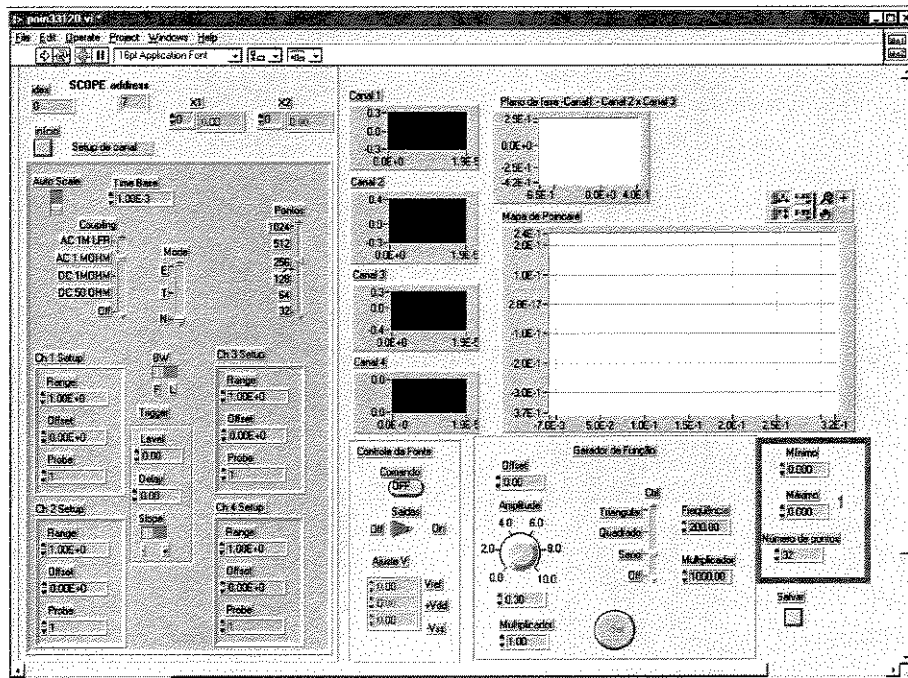


Figura 4-4: Painel do medidor de mapa de Poincaré

Este medidor tem as mesmas funções básicas do anterior, sendo a região 1, marcada em vermelho no painel, a única diferença funcional. Nesta região estão os controles de ajuste da espessura e posição do elemento de

volume, perpendicular à direção de variação da função forçante, na qual serão capturados os pontos do mapa.

O instrumento apresenta duas limitações básicas em relação a obtenção do mapa de Poincaré, a saber :

- a) O mapa não é obtido a partir de uma superfície Σ , mas sim a partir de um elemento de volume Ω . Esta limitação é imposta pelo fato de, em sistemas reais de medidas, termos que definir limites de tensão dentro dos quais os pontos serão capturados.
- b) O elemento de volume não está posicionado necessariamente perpendicular à trajetória do fluxo na região do cruzamento, mas sim perpendicular à direção do estado de referência, para o qual são definidos os limites de tensão para captura dos pontos.

Estas duas limitações fazem com que, nos casos em que a trajetória cruza o elemento de volume de forma oblíqua, seja definida uma seqüência de pontos dentro do elemento de volume Ω , conforme ilustrado na figura 4-5.

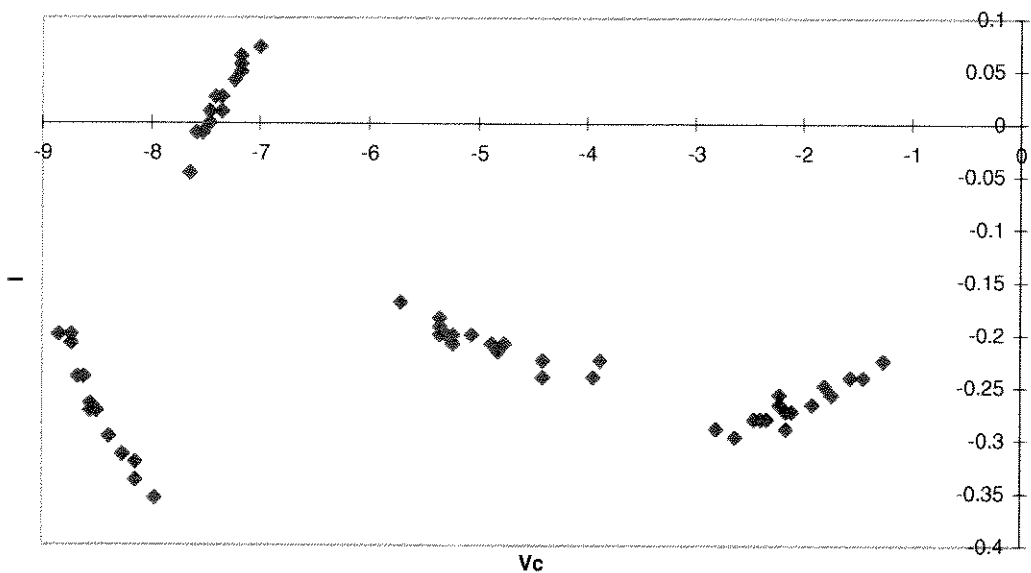


Figura 4-5: Mapa de Poincaré

4.6. Medidor de bifurcações

Um sistema dinâmico é dito estruturalmente estável se pequenas perturbações não alteram topologicamente o fluxo resultante. No entanto alguns sistemas dinâmicos perdem a estabilidade estrutural em função de um parâmetro de controle [12, cap. III; 15; 31; 32; 33; 34; 35].

Podemos então representar o sistema da seguinte forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad \text{Eq. 4-2}$$

onde μ é parâmetro de controle ($\mu \in \mathbb{R}$).

As soluções do sistema dependem tanto do tempo quanto de μ e, alterando-se o parâmetro de controle, pode-se alterar a posição e/ou as características qualitativas dos pontos estacionários. Os autovalores do sistema podem ser representados da seguinte forma

$$\lambda_n = \alpha_n(\mu) \pm i\beta_n(\mu) \quad \text{Eq. 4-3}$$

Como as partes reais dos autovalores dependem do parâmetro de controle, alterando μ pode-se alterar o sinal de um α e como consequência alterar a estabilidade do sistema.

O valor de μ para o qual ocorre a mudança qualitativa na topologia do fluxo é chamado de ponto crítico - μ_c - e diz-se que o sistema sofreu uma bifurcação neste ponto.

A identificação destes pontos pode ser bastante útil para a definição das polarizações de teste e, principalmente, para sabermos quão distante de um comportamento caótico o sistema se encontra.

O medidor de bifurcações é uma derivação do medidor de mapa de Poincaré, onde uma dada região restrita do mapa é analisada em função da alteração de um dado parâmetro de controle, seja ele a amplitude da

excitação, offset ou frequência. O parâmetro escolhido é variado automaticamente dentro de limites definidos pelo usuário, o diagrama de bifurcação é traçado e pode ser salvo em arquivo.

O painel do instrumento é apresentado na figura 4-6.

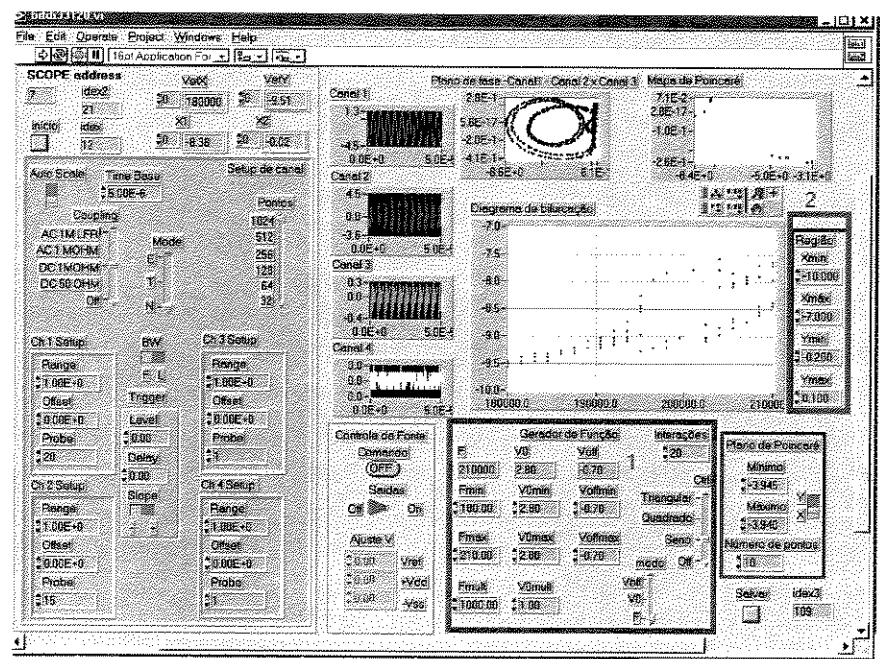


Figura 4-6: Medidor de bifurcações

Este testador é uma adaptação do medidor de mapa de Poincaré, apresentando as seguintes alterações funcionais :

- i) A região 1, em vermelho, contém os controles para varredura automática dos parâmetros ajustáveis do gerador de função, seja amplitude, frequência ou offset. Os limites de varredura do parâmetro selecionado para análise, bem como o número de pontos do diagrama de bifurcação são definidos neste campo.
- ii) A região 2, em azul, apresenta os controles para definição da região do mapa de Poincaré que será analisada.

Este é um equipamento auxiliar para o estudo da estabilidade do sistema, tendo grande valor para definição das condições de teste.

4.7. Analisador dinâmico de sinais

É outro equipamento de apoio ao trabalho de pesquisa, servindo principalmente para caracterização de dispositivos nos moldes tradicionais, para posterior análise e comparação pelo método proposto neste trabalho.

Através deste equipamento é determinada a resposta em frequência, em módulo e fase, do dispositivo sob teste. Os vetores de estímulo e resposta são amostrados pelo osciloscópio, ajustados por uma janela de Hamming e posteriormente realizada a transformada complexa de Fourier dos sinais [11, cap. 5 a 9].

A relação complexa entre o valor de saída pelo de entrada na frequência de excitação nos dá a resposta em módulo e fase do sistema.

O painel do instrumento é apresentado na figura 4-7.

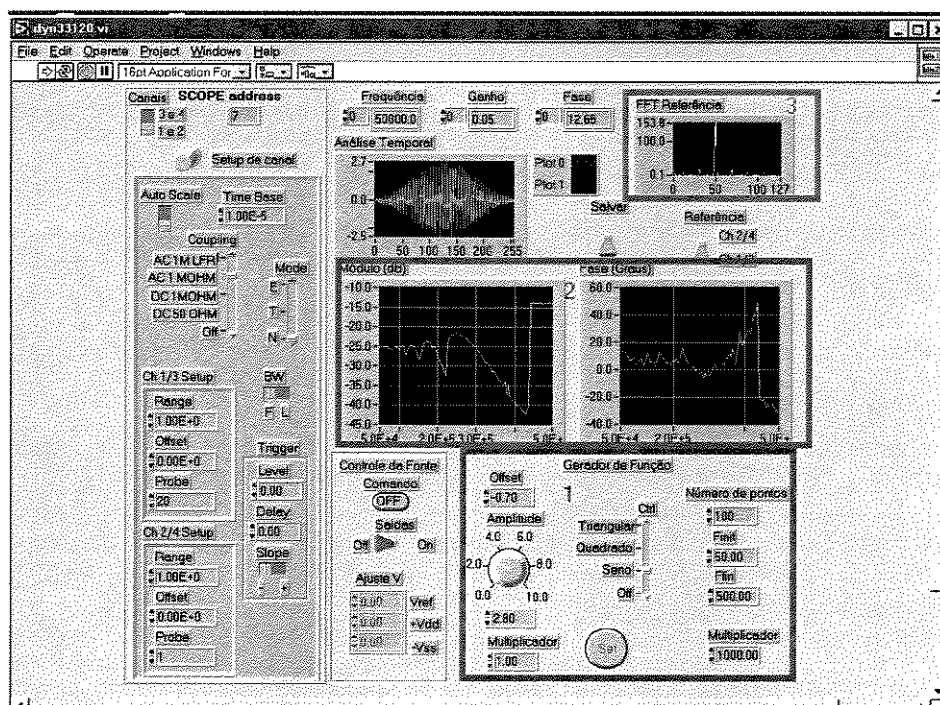


Figura 4-7: Analisador dinâmico de sinais

- i) Na região 1, em vermelho, temos os controles de amplitude, offset e varredura de frequência do sinal de estímulo.

- ii) A região 2, em azul, contém os mostradores das respostas do sistema em módulo e fase.
- iii) Na região 3, em roxo, é apresentada a transformada de Fourier do sinal de estímulo para referência de medida. Esta referência é importante para verificar a expansão da escala de frequência e possível ocorrência de aliasing durante o processo de medida, o que viria a invalidar os dados.

4.8. Analisador de densidade espectral de potência.

O último equipamento desenvolvido foi um analisador de densidade espectral de potência, implementado com base na transformada discreta de Fourier dos sinais amostrados [11, cap. 9], com a finalidade de verificar o espectro dos sinais das séries temporais obtidas nos testes.

O espectro de frequência fornece informações importantes sobre o sistema, indicando a resposta não linear do sistema através da presença de harmônicas, o surgimento de subharmônicas quando da ocorrência de bifurcações, comportamento quase-periódico e alargamento do espectro de frequências quando da ocorrência do comportamento caótico [12, cap. IV; 15; 30; 32; 33]

A a figura 4-8 apresenta o painel do instrumento.

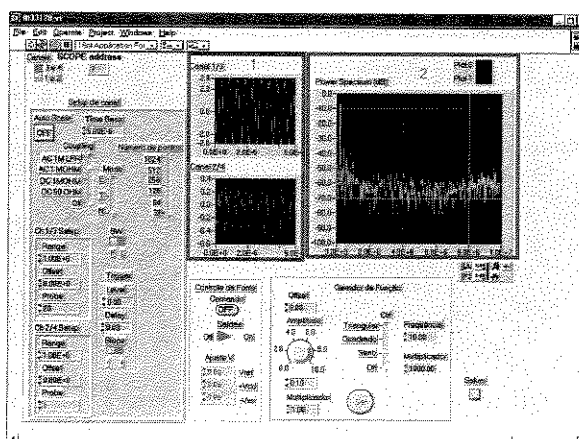


Figura 4-8: Medidor de densidade espectral de potência

Este medidor é uma adaptação do medidor de espaço de estados observáveis, sendo que os sinais amostrados são multiplicados por uma janela de Hamming [11, cap. 7] e posteriormente são determinadas as densidades espectrais de potência.

- i) A região 1, em vermelho, no painel apresenta os sinais no domínio do tempo, antes da multiplicação pela janela.
- ii) A região 2, em azul, apresenta o gráfico da densidade espectral de potência dos sinais medidos.

4.9. Sobre a documentação completa dos equipamentos

A documentação completa sobre a implementação e operação dos equipamentos está disponível no relatório interno do Departamento de Eletrônica e Microeletrônica - DEMIC - da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP, Relatório LABM 1/98.

4.10. ANÁLISE DE REPETIBILIDADE E REPRODUTIBILIDADE

Conforme discutido nos capítulos anteriores, as soluções dos sistemas não lineares apresentam evoluções nem sempre previsíveis e com tendência a instabilidade no espaço de estado.

Considerando que o objetivo deste trabalho é a discussão de um método de medidas paramétricas de componentes com base no comportamento sistêmico não linear, surge a preocupação com relação ao fato de que testes realizados em um mesmo componente, em condições idênticas, devem apresentar o mesmo resultado.

A abordagem deste assunto foi feita com base em um procedimento adotado pelas indústrias, em linha com as recomendações da QS9000, que é a análise de repetibilidade e reprodutibilidade (R&R) do sistema de medidas [36].

4.10.1. Alguns conceitos básicos sobre medidas

i) Precisão : é a diferença entre a média de várias medidas realizadas por um dado instrumento em um padrão e o valor real da grandeza no padrão. Quanto menor a diferença mais acurado é o sistema.

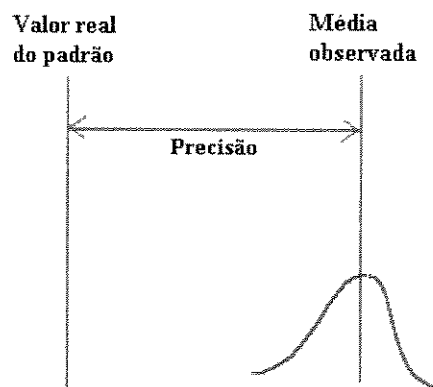


Figura 4-9: Precisão

ii) Repetibilidade : Corresponde à variação nas medidas obtidas em um equipamento, quando utilizado diversas vezes por um operador, medindo características idênticas das mesmas partes. Quanto menor a variabilidade das medidas mais repetitivo é o sistema.

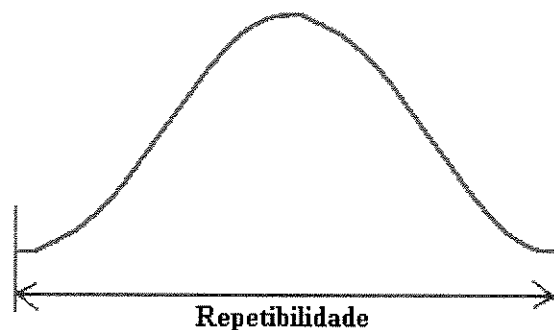


Figura 4-10: Repetibilidade

iii) Reprodutibilidade : É a variação na média das medidas realizadas por operadores distintos nas mesmas partes e no mesmo equipamento. Quanto menor a variação, melhor a reprodutibilidade do sistema.

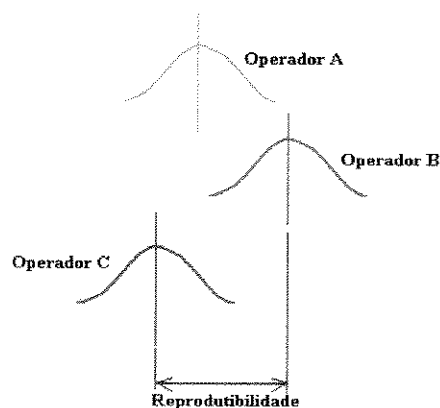


Figura 4-11: Reprodutibilidade

iv) Estabilidade : É a variação total nas medidas, precisão, repetibilidade ou reprodutibilidade, obtidas nas mesmas partes quando são feitas medidas da mesma característica ao longo do tempo. Quanto menor a variação, maior a estabilidade do sistema.

v) Linearidade : Corresponde à diferença nos valores da precisão ao longo da faixa de operação do equipamento. Este conceito não tem aplicação no método proposto uma vez que trabalhamos alterações qualitativas da trajetória no espaço de fases.

4.10.2.O procedimento de análise de R&R

A análise de R&R é realizada a partir dos dados obtidos das medidas realizadas por um grupo de operadores, mais de um, em um conjunto de peças, as quais são medidas mais de uma vez por cada operador em um dado equipamento.

A partir do conjunto de dados são determinadas as diferenças de médias de medidas entre operadores (reprodutibilidade), a variabilidade das medidas e as fontes de variação (repetibilidade do equipamento, diferença entre operadores ou devido às diferenças entre as peças medidas).

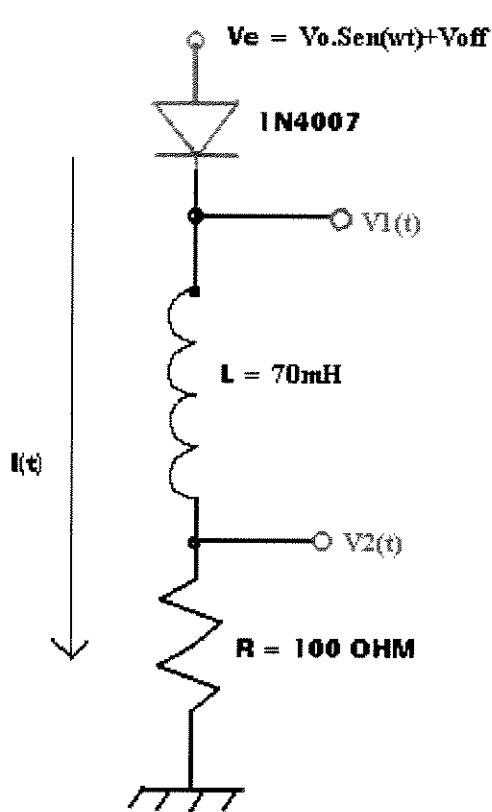
As medidas são realizadas conforme um plano experimental, podendo ter a seqüência de medidas aleatorizadas, dependendo das facilidades experimentais.

As medidas foram realizadas por dois operadores medindo cinco peças, três vezes cada peça, totalizando trinta procedimentos de medidas.

4.10.3.O experimento realizado

Para conduzir a análise de R&R do sistema de medidas foi escolhido um circuito diodo - capacitor - resistor série, um RLC não linear, pela simplicidade de implementação e análise.

O diagrama do circuito é apresentado na figura 4-12.



A capacitância de depleção do diodo é dada por

$$C = \frac{C_0}{\left(1 - \frac{V_d}{\phi}\right)^{1/n}}$$

onde C_0 corresponde ao valor da capacitância de depleção para polarização nula, V_d é a tensão na junção, ϕ é o potencial de junção e $1/n$ é um coeficiente que depende do perfil de dopagem da junção [37, cap. 2].

Figura 4-12 : Objeto de teste para R&R

4.10.4.Modelamento do sistema de teste

O modelo do sistema para $1/n = 0,5$ (junção abrupta), $V_d(t) = X_1$ e $i(t)= X_2$ é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\left(1-\frac{x_1}{\phi}\right)^{1/2}}{C_0(2\phi-x_1)} I_0(e^{x_1/V_T}-1) & \frac{2\phi\left(1-\frac{x_1}{\phi}\right)^{3/2}}{C_0(2\phi-x_1)} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-2\phi\left(1-\frac{x_1}{\phi}\right)^{1/2}}{C_0(2\phi-x_1)} \bullet I_0(e^{x_1/V_T}-1) \\ \frac{V_e}{L} \end{bmatrix}$$

Eq. 4-4: Modelo Matemático do sistema

onde $V_T = KT/q$, sendo K a constante de Boltzman, T a temperatura absoluta na junção e q a carga elementar.

Nota-se claramente que a matriz de transição de estado apresenta elementos dependentes do valor de X_1 . Ainda mais, a transição do estado X_2 é dependente de X_1 . Temos também um resíduo, que pode ser importante na proximidade da condução do diodo, que é dependente de X_1 .

4.10.5. Análise da estabilidade do sistema

Para a análise da estabilidade do sistema devemos analisar os pontos de equilíbrio, ou seja, os pontos para os quais as derivadas das variáveis de estado são nulas. A determinação das raízes das equações de estado indicam dois pontos de estabilidade, sendo um a solução trivial do sistema ($X_1 = 0$ e $X_2 = 0$) e o outro na plena condução ($X_1 = 0,75$ e $X_2 = 0,0075$).

Com base no modelo proposto não foi determinado nenhum ponto de equilíbrio na região de polarização reversa.

Utilizando o método da linearização em torno do ponto de equilíbrio (0,0), obtemos os seguintes autovalores :

$$\lambda_{1,2} = -7,14 \times 10^2 \pm 6,9 \times 10^5 i$$

o que indica que o equilíbrio é um foco estável (autovalores complexos com partes reais negativas).

Para obtermos mais detalhes sobre o comportamento do sistema próximo da origem devemos aplicar o método da série de potências, com as seguintes considerações :

- i) na origem a condutância do diodo é nula, portanto o circuito resume-se a um RLC;
- ii) para pequenas variações de tensão em torno da origem a capacitância de depleção varia muito pouco, sendo modelada como $C = C_0 / (1 + \mu q)^m$, onde μ (com unidade 1/Coulomb) é um número pequeno, q é a carga no capacitor e m é o coeficiente relativo ao gradiente de dopagem na junção.

Equacionando-se o sistema com base na carga do capacitor, temos o seguinte modelo aproximado para a junção abrupta:

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC_0} q + \frac{1}{LC_0} \mu q^2 \left(1 - \frac{\mu q}{2} \right) = \frac{v}{L} \quad \text{Eq. 4-5}$$

Para $\mu = 0$, $q(0) = a$ e $\dot{q}(0) = 0$, o sistema não forçado associado apresenta uma solução da forma

$$q_0(t) = A e^{-\sigma t} \cos(\omega t) \quad \text{Eq. 4-6}$$

Evoluindo-se no método, conforme descrito no item 2.2.5 deste trabalho, concluímos que $q(t)$ tem a forma

$$q(t) = B e^{-\sigma t} \left[C \cos(\omega t) + D \cos(2\omega t) + E \cos(3\omega t) \right]$$

Eq. 4-7

onde A, B, C, D, E e σ são constantes.

O espectro de frequências estimado de $q(t)$ é ilustrado na figura 4-13.

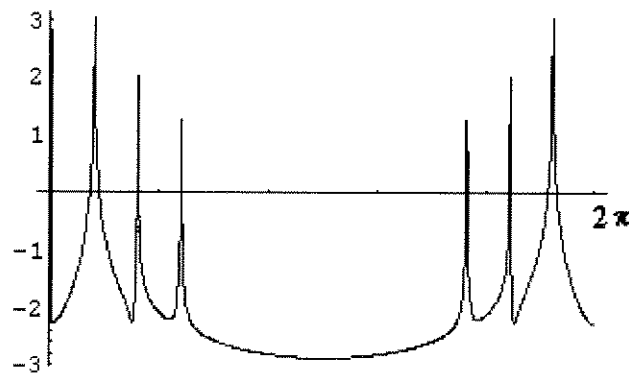


Figura 4-13 : Transformada discreta de Fourier da carga $q(t)$

Naturalmente se adotarmos mais termos da série na aproximação de $C(q)$ teremos um espectro bem mais rico em frequências. Deve-se esperar, ao menos, um regime quase periódico do sistema.

Para o equilíbrio $(0,75, 0,0075)$, o diodo está em plena condução, portanto temos apenas um circuito RL, que apresenta um ponto fixo como solução.

Cabe ressaltar que em nosso modelo não consideramos a capacitância de difusão, que certamente acrescenta mais uma dimensão no sistema, enriquecendo a sua dinâmica. No entanto a análise realizada já nos proporciona um bom sentimento do comportamento do circuito sob teste.

Nas figuras 4-14 e 4-15 são apresentados os resultados obtidos da resolução numérica do sistema experimentalmente, e a figura 4-16 apresenta o espectro de tensão no diodo.

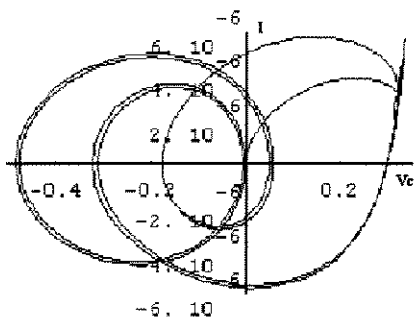


Figura 4-14 : $V_c \times I$ - Resolução numérica do modelo

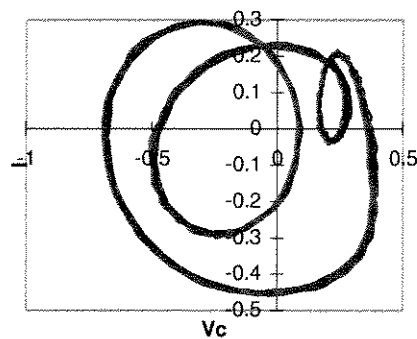


Figura 4-15 : $V_c \times I$ - Experimental

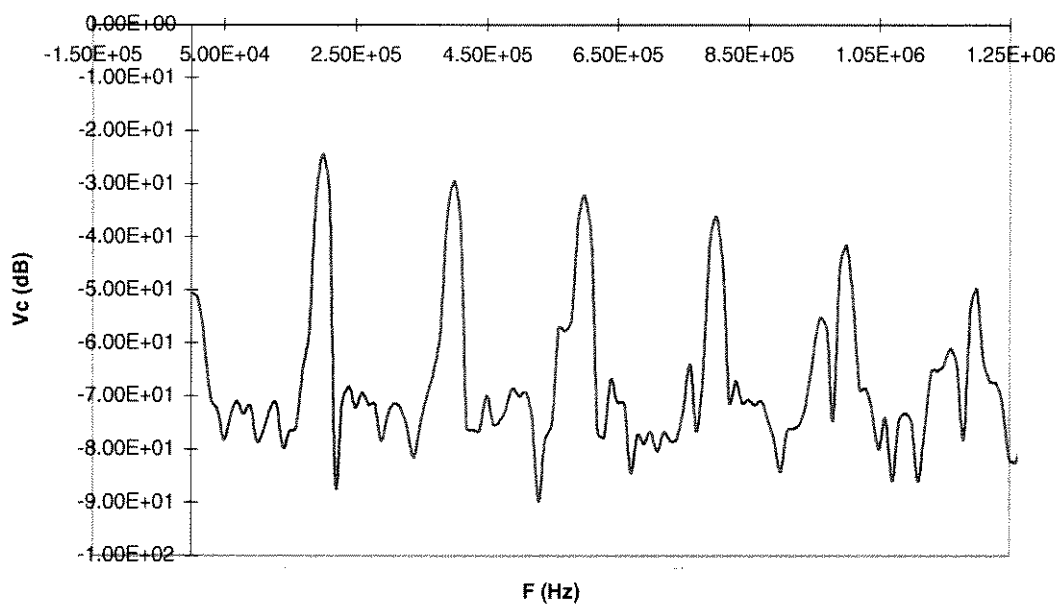


Figura 4-16 : Espectro de V_c - Experimental

4.10.6.A escolha do ponto de medida

Já sabemos que o circuito sob teste apresenta condições de estabilidade, ao menos dentro dos limites analisados numérica e experimentalmente, resta agora definir o ponto de operação para realização das medidas.

Foram realizadas varreduras de frequência, amplitude do sinal de excitação e offset, com o medidor de bifurcação, para melhor visualização do comportamento global do sistema.

Através desta varredura foi possível identificar pontos de bifurcações de duplicação de período, sendo a região entre a primeira e segunda bifurcações candidata a ponto de teste.

As figuras 4-17, 4-18 e 4-19 ilustram os resultados experimentais.

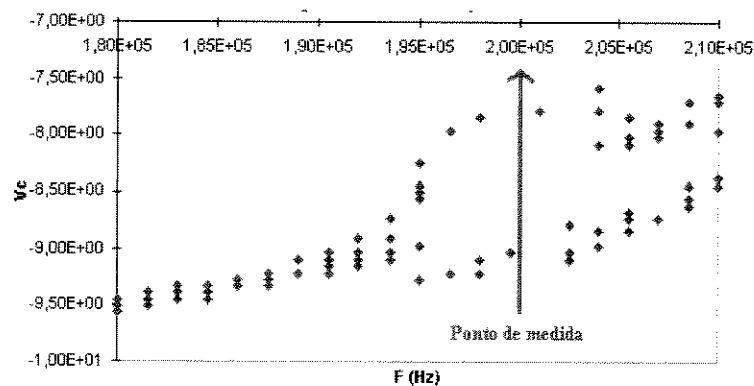


Figura 4-17 : Análise de bifurcação para $V_0 = 5V_p$ e Offset = $-1,5V @ 27\text{ C} \pm 0,4C$

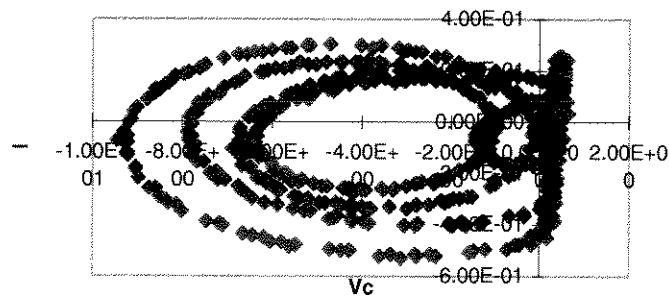


Figura 4-18 : Plano de estados no ponto de medida

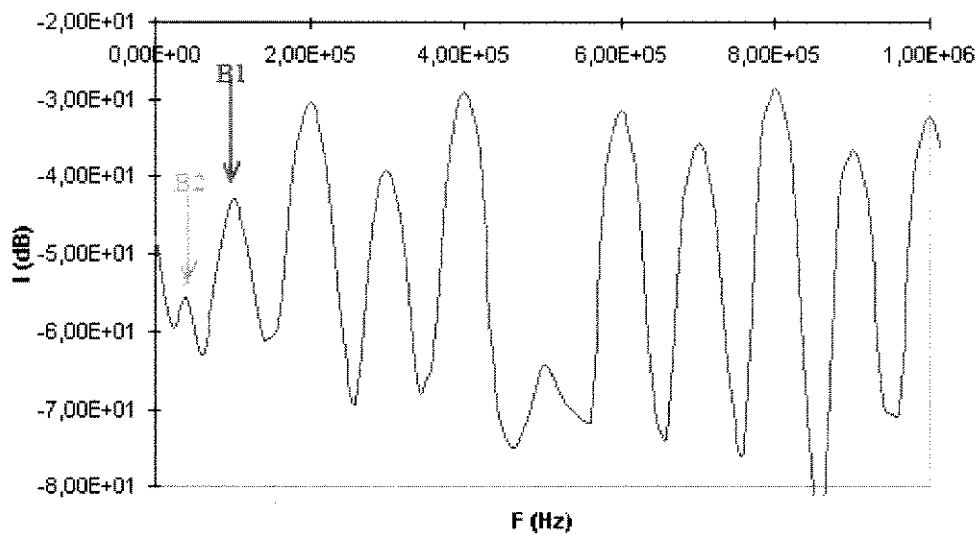


Figura 4-19 : Espectro da corrente (I) no ponto de medida

Nota-se no espectro de freqüências da corrente que a primeira bifurcação (B1) de duplicação de período está bastante evidente, existindo um leve indício da existência de uma segunda bifurcação (B2).

O expoente de Lyapunov, calculado com base no algoritmo de Wolf [28] apresenta convergência para valores entre $-1,5 \times 10^4$ e $-3,5 \times 10^4$ Bits/seg, o que indica a ausência de comportamento caótico.

A convergência do cálculo da série é apresentado na figura 4-20 :

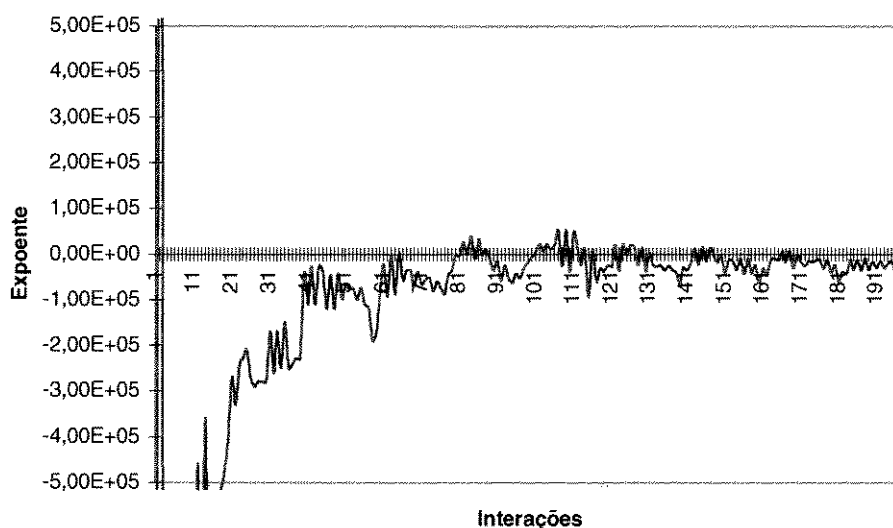


Figura 4-20 : Convergência do cálculo do expoente - série com 1024 pontos, atrator reconstruído com dimensão 3 e atraso de 10, propagação de 5 pontos; intervalo de amostragem = $4,88 \times 10^{-8}$ seg.

Com base nos dados obtidos, foram definidas as seguintes condições de ensaio :

- i) Diodo : 1N4007;
- ii) $R = 100 \, \Omega$;
- iii) $L = 70 \, \text{mH}$;
- iv) Frequência de medida = 200KHz;
- v) Amplitude = 5Vp;
- vi) Offset = -1,5V
- vii) Temperatura = $27 \, \text{C} \pm 0,4 \, \text{C}$.

4.10.7.A seleção dos diodos para ensaio.

Os diodos foram selecionados de uma fita com 100 amostras, de um mesmo lote de fabricação, onde todos foram caracterizados na região direta e reversa com o medidor paramétrico HP 4145B.

Dentre os 100 diodos caracterizados, foram escolhidos 5 para realizar o experimento, sendo que seus parâmetros tipificam o lote. Para os cinco diodos selecionados foram realizadas as medidas de $C \times V$ na região reversa.

Os dados obtidos são ilustrados nas figuras 4-21, 4-22 e 4-23.

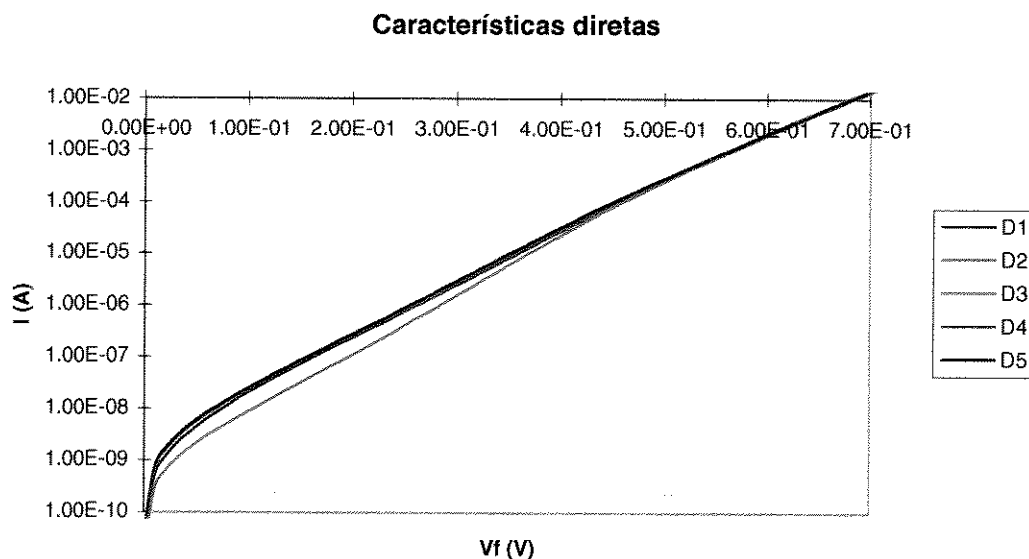


Figura 4-21 : Características I x V diretas dos 5 diodos do experimento

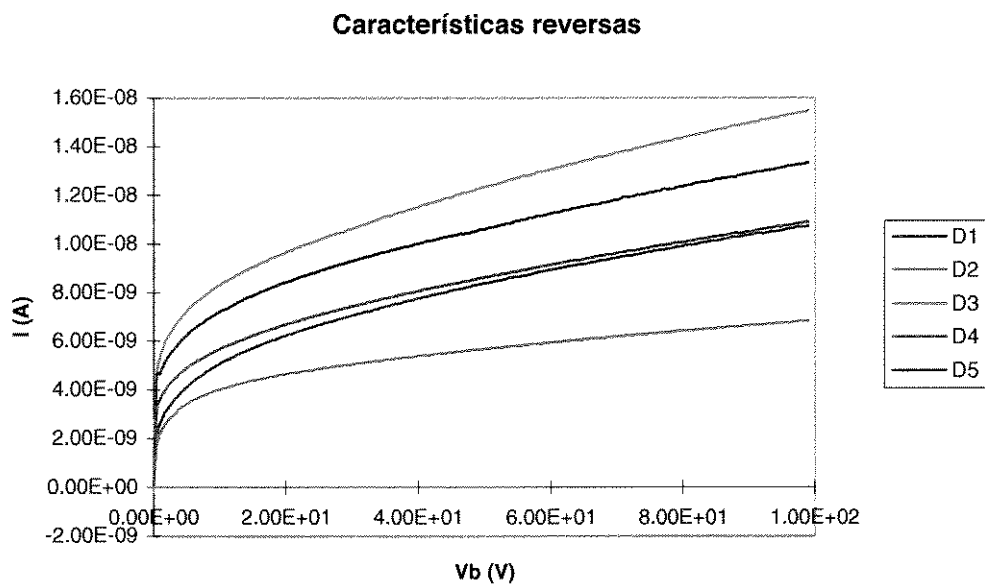


Figura 4-22 : Características I X V reversas dos 5 diodos do experimento

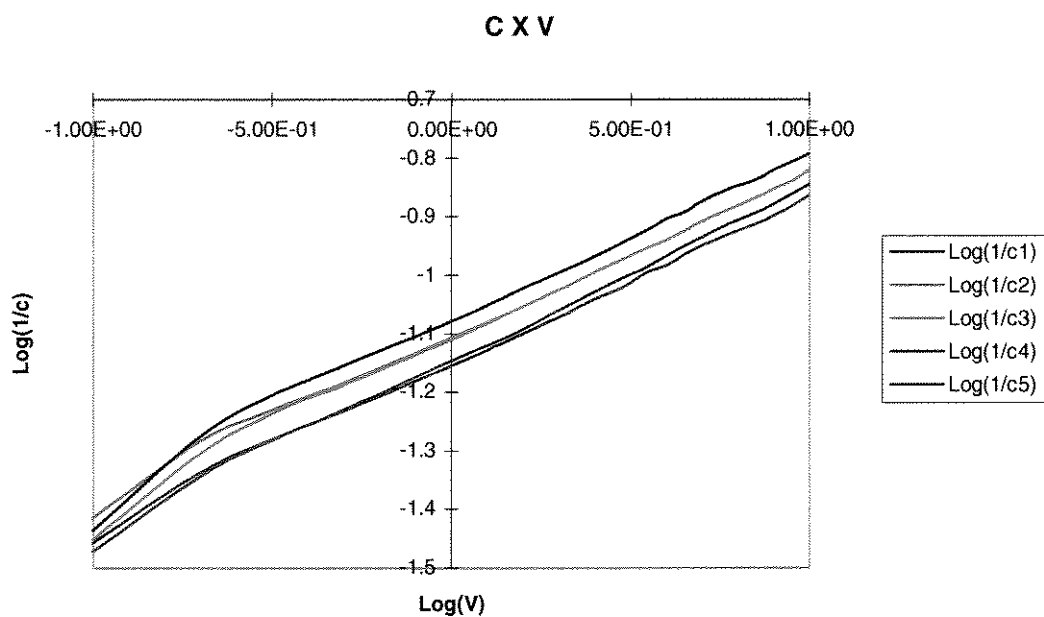


Figura 4-23 : Característica de C X V dos 5 diodos do experimento

	1/n
D1	0,30
D2	0,29
D3	0,29
D4	0,28
D5	0,28

Tabela 4-1 : Coeficientes relativos aos gradientes de dopagens nas junções

Nota-se que, como era de se esperar para diodos produzidos em um mesmo lote, as características são muito semelhantes.

4.10.8.O parâmetro a ser medido.

Conforme discutido no capítulo 6 deste trabalho, o parâmetro de medida será a localização dos pontos no mapa de Poincaré.

Como no nosso caso não temos exatamente um ponto por cruzamento do mapa, mas sim uma seqüência de pontos, os cálculos estatísticos serão realizados com base no baricentro da seqüência, ponderando desta forma a possibilidade de ocorrerem dobras dentro do volume de controle.

Para facilitar os cálculos de R&R das medidas, será utilizado apenas um dos cruzamentos com a superfície, e serão verificados os deslocamentos das coordenadas X e Y do baricentro do cruzamento.

Este procedimento não leva em conta alterações topológicas tais como rotação em torno do baricentro, alargamento ou estreitamento da seqüência, mas apresenta uma quantidade de informações, com simplicidade conveniente, suficiente para a análise estatística desejada.

Para efeito de testes de dispositivos em linhas de produção certamente a utilização de regiões de incidência e não incidência de pontos é um procedimento mais adequado, tanto pela velocidade de análise quanto pela maior quantidade de informações que traz.

A figura 4-24 ilustra os conceitos.

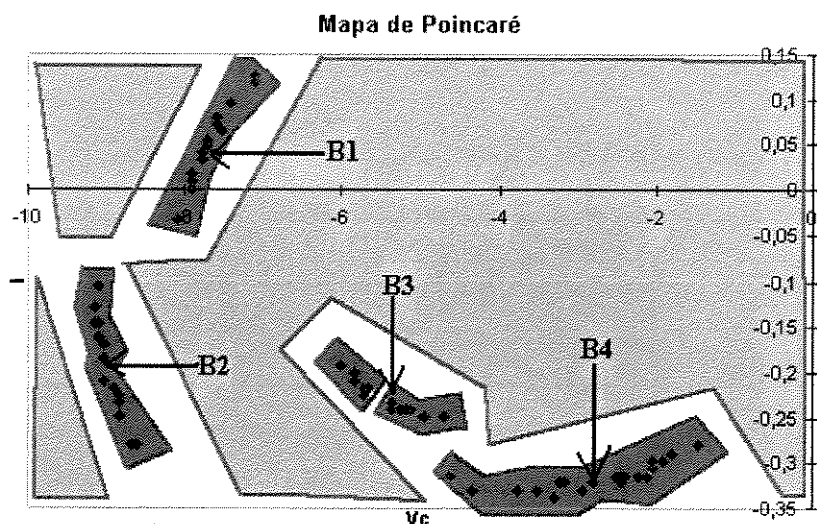


Figura 4-24 : Máscaras de teste no mapa de Poincaré

Neste exemplo pode-se imaginar as regiões cor de rosa como sendo a de incidência obrigatória de pontos para aprovação, a região azul a de rejeição em caso de incidência de pontos e a região branca pode ser mapeada para classificação paramétrica. As setas pretas no exemplo indicam os baricentros das seqüências.

4.10.9.Os resultados das medidas de R&R

As medidas foram realizadas com base na tabela 4-1, apresentada no início deste capítulo, tendo sido realizadas seqüencialmente por operador/dispositivo/repetição :

Op1/D1/M1; Op1/D2/M1; ...; Op1/D5/M3; Op2/D1/M1; ...; Op2/D5/M3.

A medida seqüencial não aleatoriza o processo, mas o torna mais facilmente realizável.

Os cálculos de R&R foram realizados nas condições selecionadas de medidas, descritas anteriormente, com o volume de referência definido entre -3,945V e -3,340V medidos perpendiculares ao eixo da tensão de excitação. O baricentro escolhido para análise foi o denotado por B1 na figura 4-24.

Os resultados indicam que não existe nenhuma diferença significativa entre as médias das medidas dos operadores, sendo as medidas altamente reprodutíveis, ficando todo o erro de medida por conta da repetibilidade do sistema. A tabela 4-2 apresenta os resultados.

Análise da coordenada X do baricentro 1			
	σ estimado	Variância estimada	Porcentagem do total
Repetibilidade	0,108976	0,0118757	100,0
Reprodutibilidade	0	0	0
R&R combinado	0,108976	0,0118757	100,0
Análise da coordenada Y do baricentro 1			
	σ estimado	Variância estimada	Porcentagem do total
Repetibilidade	0,188348	0,0354748	100,0
Reprodutibilidade	0	0	0
R&R combinado	0,188348	0,0354748	100,0

Tabela 4-2 : Resultados de R&R

A análise do valor obtido para a repetibilidade foi conduzida através de uma análise de variância [1, cap. 3 e 4], cujos resultados são apresentados na tabela 4-3.

Análise de variância para a coordenada X do baricentro 1					
Origem da variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média quadrática	Razão F	Nível de significância
Operador	0,004320	1	0,004320	0,401	0,5399
Diodos	0,731286	4	0,182821	16,958	0,0000
Medidas	0,047406	2	0,023703	2,199	0,1347
Resíduo	0,237173	22	0,010780		
Análise de variância para a coordenada Y do baricentro 1					
Origem da variação	Soma dos quadrados	Graus de liberdade	Média quadrática	Razão F	Nível de significância
Operador	0,010046	1	0,010046	0,372	0,5548
Diodos	0,801292	4	0,200323	7,411	0,0006
Medidas	0,220317	2	0,110158	4,075	0,0312
Resíduo	0,594668	22	0,027030		

Tabela 4-3 : Análise de variância para os dados de repetibilidade

Nota-se na tabela de análise de variância que o nível de significância para a hipótese de igualdade entre as médias apresenta um valor nulo para o caso dos diodos. Este resultado indica que a fonte de variação nas medidas é a diferença de características entre os diodos.

As figuras 4-25 e 4-26 ilustram os resultados da análise :

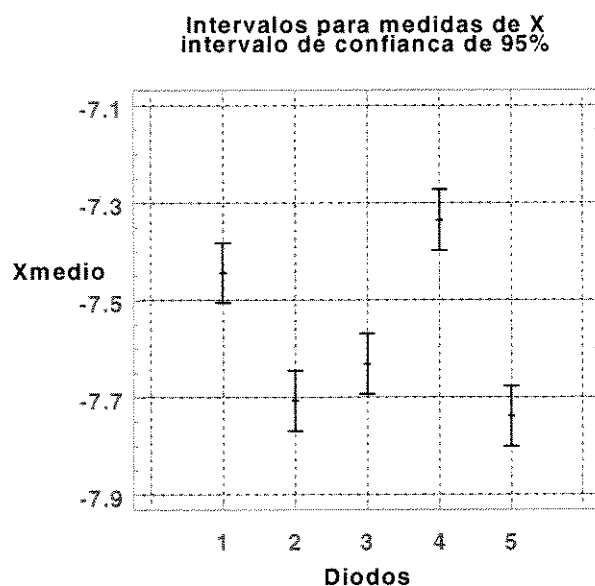


Figura 4-25: Médias e intervalos para X

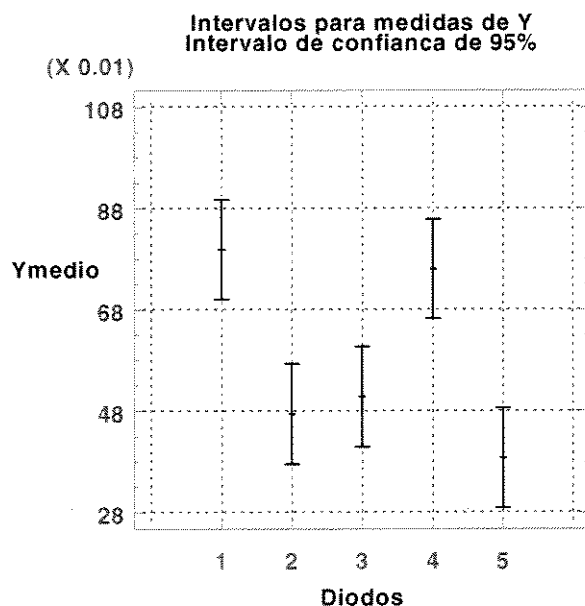


Figura 4-26 : Médias e intervalos para Y

Existem dois grupos distintos de diodos, um constituído por D1 e D4, sendo o outro constituído por D2, D3 e D5.

A análise da topologia do mapa nos permite identificar diferenças mesmo entre os diodos D2 e D3, que apresentam característica de capacitância muito próximas, porém apresentam a maior diferença em termos de características reversas.

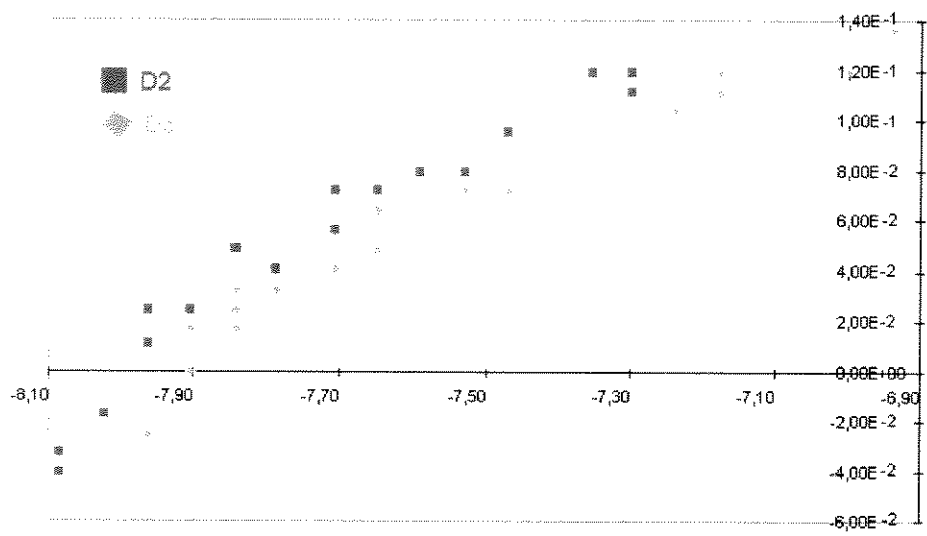


Figura 4-27 : Diferenças topológicas entre D2 e D3

Para efeito de verificação dos resultados, foram utilizados dois outros diodos, um 1N4007 encapsulado em vidro - denotado por DV - e de origem de fabricação distinta da do lote de teste, e outro 1N4007 do mesmo lote, porém que teve parte do encapsulamento e selante removidos - denotado por DA - para expor uma pequena área da junção.

As curvas características destes dois diodos são apresentadas nas figuras 4-28, 4-29 e 4-30, tendo como referência o D1, cujas características são centradas em relação ao lote de teste.

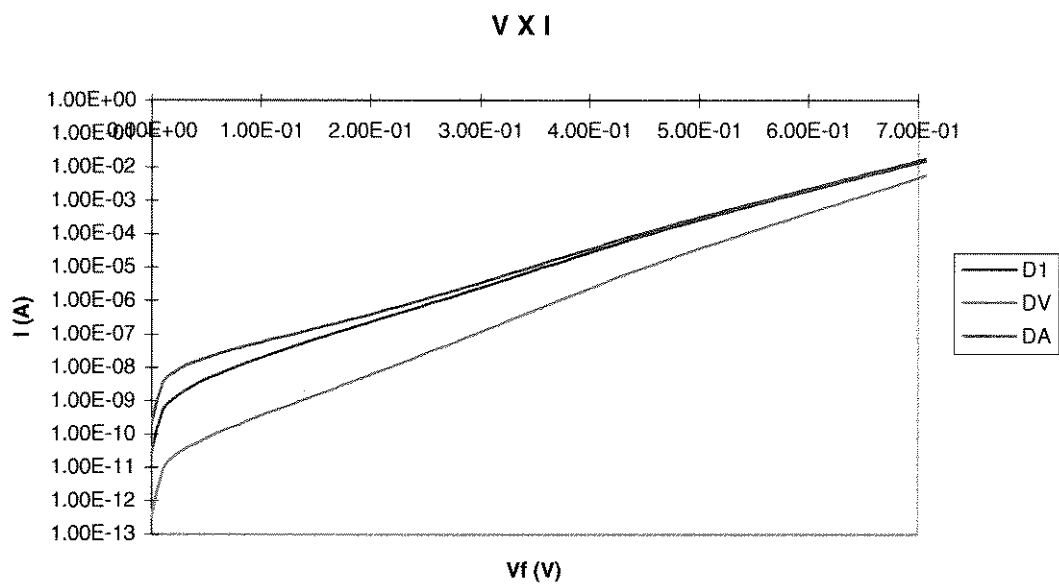


Figura 4-28 : Características diretas dos diodos de prova

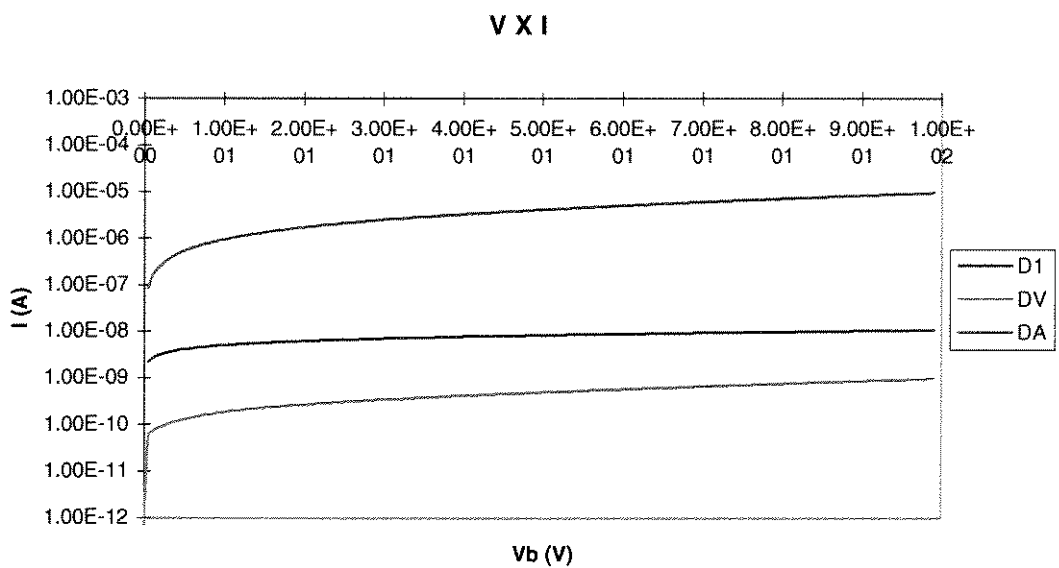


Figura 4-29: Características reversas dos diodos de prova

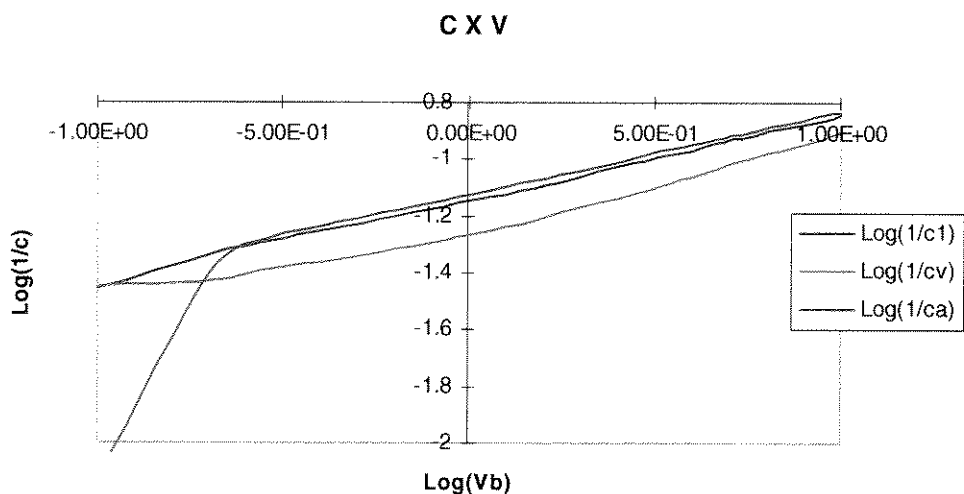


Figura 4-30 : C X V dos diodos de prova, $1/n_v = 0,38$ e $1/n_a = 0,29$

Os mapas de Poincaré dos três diodos, apresentados sobrepostos na figura 4-31, apresentam diferenças topológicas significativas, inclusive o desaparecimento da bifurcação para o diodo com a junção exposta.

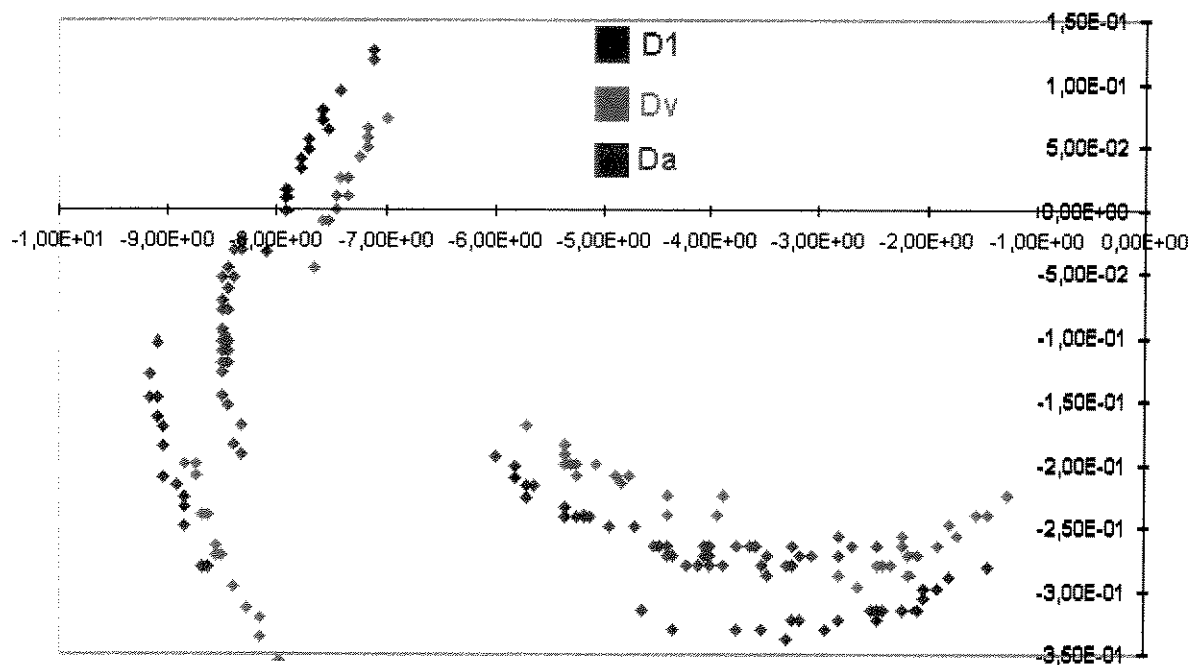


Figura 4-31 : Mapas de Poincaré para os diodos de prova

4.11. Comentários sobre os resultados

Os resultados demonstram que o sistema de medida apresenta características de repetibilidade e reprodutibilidade compatíveis com as grandezas a que se propõe medir.

A medida de precisão não tem significado para o nosso estudo, pois não existe um padrão reconhecido para estes tipos de resultados.

A medida de estabilidade foi realizada em três oportunidades no intervalo de duas semanas, sendo que os resultados de repetibilidade e reprodutibilidade não se alteraram ao longo deste tempo. Cabe ressaltar que variações de temperatura dentro 1,5 C já são suficientes para provocar alterações mensuráveis nas medidas.

5. APLICAÇÃO DA METODOLOGIA

A aplicação do método proposto foi realizada através de testes em um circuito integrado especialmente projetado para este fim. O projeto do CI foi necessário para que pudéssemos ter controle das características paramétricas dos dispositivos sob teste, alguns dos quais com alterações propositas, outro com possibilidade de acesso aos nós internos para permitir alterações.

O circuito foi fabricado pela AMS, com tecnologia CMOS 1.2 μ m - poço n [38]- através do Programa Multi Usuários (PMU) da FAPESP. Este programa permite que diversos projetos de circuitos, contidos em um único conjunto de máscaras, sejam submetidos à fabricação simultaneamente, sendo que os projetistas recebem um número limitado de amostras para os testes de verificação de seus projetos.

5.1 DESCRIÇÃO DO CIRCUITO DE TESTE

O circuito em questão, código FAPESP16.DMC, apresenta as seguintes estruturas :

- a) um comparador de tensão "folded cascode" [39] com todos os parâmetros dentro dos valores nominais de projeto;
- b) um comparador de tensão semelhante ao do item a), porém com um transistor do par diferencial de entrada alterado;
- c) um comparador de tensão semelhante ao do item a), porém com um transistor do "cascode" de saída alterado;
- d) um "driver" de corrente com todos os parâmetros dentro dos valores nominais de projeto;
- e) um "driver" de corrente semelhante ao do item d), porém faltando um dos transistores canal p da saída;
- f) um conversor D/A, do tipo R-2R invertido, com acesso externo aos nós da malha de conversão;

g) uma fonte de tensão para polarização.

A figura 5-1 ilustra a fotomicrografia do CI.

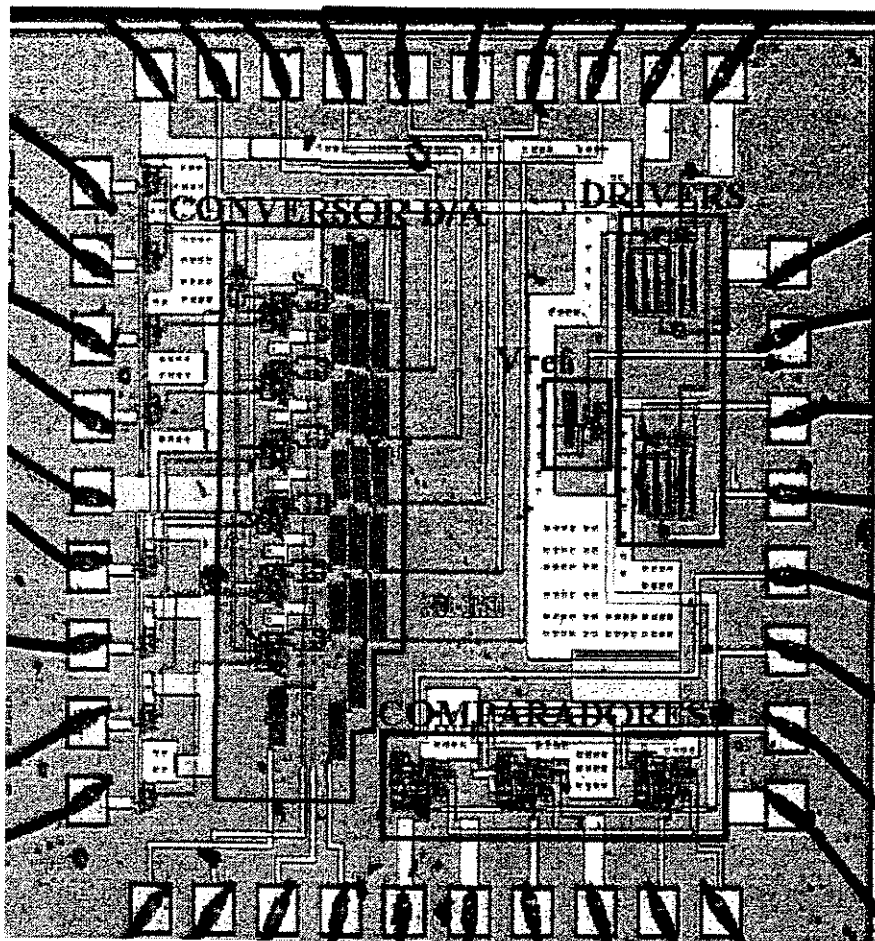


Figura 5-1 - Fotomicrografia do FAPESP16.DMC, indicando os elementos do circuito

Através das combinações de "drivers" e comparadores, pode-se implementar diversos amplificadores operacionais, com parâmetros nominais de projeto ou com alterações paramétricas conhecidas. As alterações paramétricas no conversor D/A podem ser realizadas através da adição de componentes externos ligados aos nós da malha de conversão.

Com base nas combinações de elementos deste circuito, além de adição de componentes externos, foram realizados os testes de verificação da metodologia proposta.

5.1.1 O comparador de tensão “folded cascode”

Esta configuração de circuito foi escolhida pelo fato de ser de fácil implementação na tecnologia CMOS e permitir um alto ganho de tensão em malha aberta. A possibilidade de alto ganho foi o fator fundamental na escolha, pois o circuito analógico foi projetado para ser fabricado em uma tecnologia predominantemente utilizada para circuitos digitais, para a qual não existia histórico disponível de aplicação em circuitos analógicos; portanto o desempenho final do circuito era uma grande preocupação.

O diagrama esquemático do comparador é apresentado na figura 5-2, com os valores nominais de dimensionamento (L e W) indicados. Na figura 5-3 é apresentada a fotomicrografia do comparador com todos os elementos nominais.

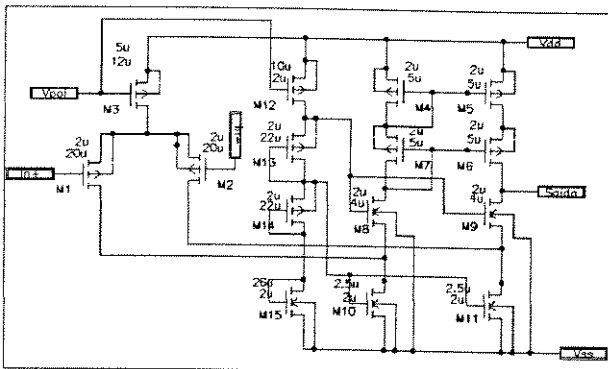


Figura 5-2 - Comparador com dimensionamento nominal de projeto

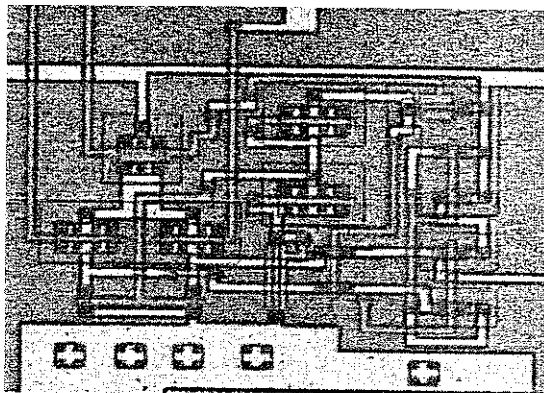


Figura 5-3 - Fotomicrografia do comparador nominal

As alterações realizadas nos outros dois comparadores foram :

- comparador com entrada alterada : alteração na relação W/L do transistor M1 de 20/2 para 15/2;
- comparador com saída alterada : alteração na relação W/L do transistor M5 de 5/2 para 2/2.

Estas implementações de projeto tem por objetivo a simulação de defeitos que podem ocorrer ao longo do processo de fabricação e que, apesar

de não impossibilitarem o funcionamento do dispositivo, causam falhas paramétricas.

5.1.2 Modelo do comparador para grandes sinais

Para a realização dos testes com base na metodologia proposta faz-se necessária a análise do circuito para grandes sinais, uma vez que o mesmo será excitado com sinais que o levem a um comportamento não linear.

O modelo é apresentado na figura 5-4, onde os transistores foram substituídos por fontes de corrente controladas por tensão, resistor e capacitância parasita em paralelo.

A capacitância parasita indicada é composta pelas capacitâncias de interligação, independentes da tensão sobre o capacitor, e uma parcela dependente da tensão, composta pelas junções dreno-corpo e, quando aplicável, fonte-corpo.

A dependência da capacitância de junção reversamente polarizada já foi amplamente explanada no capítulo 4 deste trabalho.

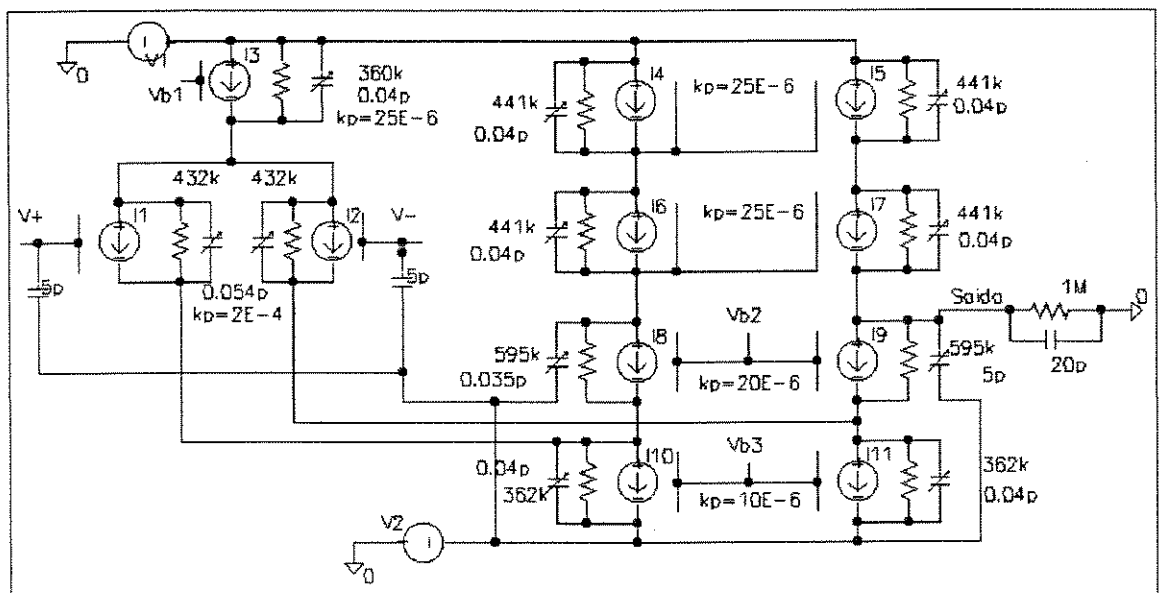


Figura 5-4 - Modelo físico do comparador com carga

Os valores indicados na figura 5-4 foram estimados com base nos dados de processo fornecidos nas bibliotecas da AMS [40], com o circuito no ponto nominal de polarização e entradas em 0V.

A equação 5-1 apresenta a matriz de transição de estados para o modelo acima descrito, considerando todos os transistores operando dentro da região de saturação, longe da condição de inversão fraca e desprezando-se a influência não linear das capacitâncias parasitas.

Os estados do sistema são as tensões nos capacitores do modelo apresentado na figura 5-4.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(R,C) & -f_1(R,C) & f_2(R,C,K_p,x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_1(R,C) & f_1(R,C) & f_3(R,C,K_p,x) & -f_3(R,C,K_p,x) \\ -f_1(R,C) & -f_1(R,C) & f_2(R,C,K_p,x) & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1(R,C) & -f_1(R,C) & -f_3(R,C,K_p,x) & f_3(R,C,K_p,x) \\ f_1(R,C) & f_1(R,C) & -f_2(R,C,K_p,x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -f_1(R,C) & -f_1(R,C) & f_3(R,C,K_p,x) & f_3(R,C,K_p,x) \\ 0 & 0 & 0 & -f_3(R,C,K_p,x) & 0 & f_3(R,C,K_p,x) & 0 & f_1(R,C) & 0 & -f_6(R,C,K_p,x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_4(R,C,K_p,x) & -f_1(R,C) & -f_4(R,C,K_p,x) & f_1(R,C) & 0 & f_1(R,C) & 0 & -f_6(R,C,K_p,x) \\ 0 & 0 & 0 & f_3(R,C,K_p,x) & 0 & -f_3(R,C,K_p,x) & 0 & f_1(R,C) & 0 & -f_6(R,C,K_p,x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f_4(R,C,K_p,x) & f_1(R,C) & f_4(R,C,K_p,x) & -f_1(R,C) & 0 & f_1(R,C) & 0 & -f_6(R,C,K_p,x) \\ 0 & 0 & 0 & f_3(R,C,K_p,x) & 0 & f_3(R,C,K_p,x) & 0 & -f_1(R,C) & 0 & f_6(R,C,K_p,x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f_4(R,C,K_p,x) & f_1(R,C) & -f_4(R,C,K_p,x) & f_1(R,C) & 0 & -f_1(R,C) & 0 & f_6(R,C,K_p,x) \\ f_1(R,C) & -f_1(R,C) & f_2(R,C,K_p,x) & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1(R,C) & f_1(R,C) & -f_3(R,C,K_p,x) & -f_3(R,C,K_p,x) \\ -f_1(R,C) & f_1(R,C) & f_2(R,C,K_p,x) & 0 & 0 & 0 & 0 & f_1(R,C) & f_1(R,C) & -f_3(R,C,K_p,x) & -f_3(R,C,K_p,x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix}$$

Equação 5-1 - Matriz de transição de estado do modelo simplificado do comparador

Os elementos da matriz tem as formas indicadas abaixo, sendo os índices "l" e "c" relativos às linhas e colunas :

a) $f_1(R,C) = \frac{1}{R_c * C_{lc}};$

b) $f_2(R,C,K_p,x) = \frac{1}{R_c * C_{lc}} + \frac{2 * K_{p2}}{C_{lc}} (V_- + V_{TP}) + \frac{2 * K_{p1}}{C_{lc}} (V_+ + V_{TP}) - \frac{K_{p1} + K_{p2}}{C_{lc}} x_c;$

c) $f_3(R,C,K_p,x) = \frac{1}{R_c * C_{lc}} - \frac{2 * K_{pc}}{C_{lc}} V_{TP} + \frac{K_{pc}}{C_{lc}} x_c;$

d) $f_4(R,C,K_p,x) = \frac{2 * K_{p(c+1)}}{C_{lc}} V_{TP} - \frac{K_{p(c+1)}}{C_{lc}} x_c;$

e) $f_5(R,C,K_p,x) = \frac{1}{R_c * C_{lc}} + \frac{1}{R_{(c-2)} * C_{lc}} + \frac{2 * K_{p(c-2)}}{C_{lc}} (V_{B2} - V_{TN}) - \frac{K_{p(c-2)}}{C_{lc}} x_c;$

f) $f_6(R,C,K_p,x) = \frac{1}{R_{(c-2)} * C_{lc}} + \frac{2 * K_{p(c-2)}}{C_{lc}} (V_{B2} - V_{TN}) - \frac{K_{p(c-2)}}{C_{lc}} x_c.$

Os sub índices "c" e "l", correspondentes às colunas e linhas da matriz, relacionam os elementos aos componentes do circuito conforme indexados na figura 5-2. A definição dos componentes é dada a seguir :

- a) R_n = resistor que representa o efeito de modulação de canal [39] do n-ésimo transistor do circuito;
- b) C_{nm} = capacitância efetiva na n-ésima linha e m-ésima coluna da matriz;
- c) K_{pn} = coeficiente da transcondutância ($\mu \cdot C_{ox} \cdot W/L$) [39] do n-ésimo transistor do circuito;
- d) V_+ e V_- são as tensões nas entradas não inversora e inversora, respectivamente;
- e) V_{TP} e V_{TN} são as tensões limiares dos transistores canal p e canal n, relativos ao transistor cujo K_p os multiplicam;
- f) V_{B2} = tensão de polarização nas portas dos transistores M_8 e M_9 no circuito;
- g) x_n = n-ésimo estado do sistema.

Observando-se a composição dos elementos da matriz de transição de estado do sistema, nota-se que se trata de um sistema não linear, conforme descrito no capítulo 2 deste trabalho, pois os elementos não são constantes e são dependentes de estados do próprio sistema bem como dos valores das tensões de estímulo.

Cabe ressaltar que o nosso modelo matemático não leva em conta as componentes não lineares das capacitâncias, bem como o fato de que alguns dos transistores sofrem transições nas condições de polarização, passando da região de saturação para a região triodo [39], causando alterações importantes na dinâmica do sistema.

O estado x_9 corresponde à tensão de saída do comparador, sendo portanto facilmente observável, e foi utilizado na condução dos testes.

5.1.3 Análise dos pontos de equilíbrio do comparador

Através da matriz de transição de estados, e dos valores nominais de polarização do circuito, pode-se identificar os pontos de equilíbrio do sistema impondo-se $\dot{\mathbf{X}} = 0$.

Realizando a análise para os pontos de equilíbrio com significado físico para o sistema, podemos observar alterações na característica do equilíbrio em função do ponto de polarização do circuito.

Para $V_+ = V_- = 0$ e $K_{p1} = K_{p2}$ obtemos os seguintes autovalores para o sistema:

$\{-7,06 \times 10^8 + 3,43 \times 10^9 I, -7,06 \times 10^8 - 3,43 \times 10^9 I, -2,94 \times 10^9, -1,30 \times 10^9, -9,47 \times 10^8, -5,67 \times 10^7, -4,96 \times 10^7, -8,35 \times 10^4, 1,85 \times 10^4 + 9,24 \times 10^3 I, 1,85 \times 10^4 - 9,24 \times 10^3 I, -5,65 \times 10^3\}$;

Para $V_+ = 50\text{mV}$, $V_- = 0$ e $K_{p1} = K_{p2}$, que corresponde ao limite de validade do modelo, obtemos os seguintes autovalores para o sistema:

$\{-6,62 \times 10^8 + 3,51 \times 10^9 I, -6,62 \times 10^8 - 3,51 \times 10^9 I, -2,94 \times 10^9, -1,35 \times 10^9, -9,76 \times 10^8, -5,67 \times 10^7, -4,92 \times 10^7, 6,24 \times 10^5 + 7,08 \times 10^5 I, 6,24 \times 10^5 - 7,08 \times 10^5 I, -1,75 \times 10^5, -5,88 \times 10^3\}$.

Nota-se que para ambos os casos ocorre a existência de atratores estranhos, conforme descrito no capítulo 3 deste trabalho, e que suas características sofrem alterações significativas com a mudança de polarização. A presença do atrator estranho implica na existência de estados não correlacionados, que podem ser interpretados como "ruído" na saída do sistema.

A validade deste modelo fica limitada pela transição na região de operação dos transistores internos ao circuito, porém proporciona um indicativo valioso da existência de manifestações não lineares mensuráveis que podem ser utilizadas nos procedimentos de teste.

A resposta real do sistema apresenta, além do comportamento previsto, os efeitos das capacitâncias de junção, que contribuem com 15% a 50% do total das capacitâncias parasitas, e das transições dos transistores para região triodo.

As figuras 5-5 e 5-6 apresentam os gráficos temporais e espectros de freqüências da tensão de saída do comparador para ambas entradas ligadas a terra, bem como o ruído de fundo do sistema de medidas.

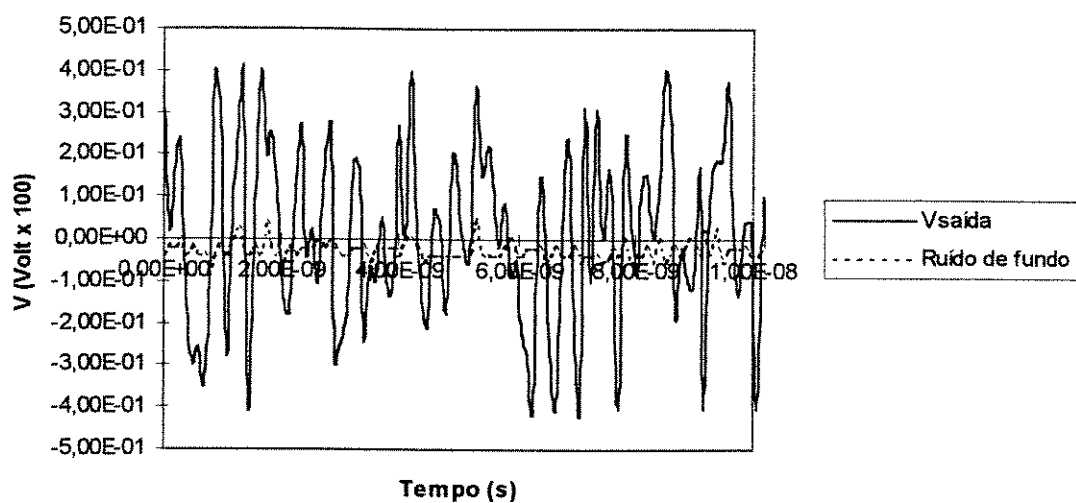


Figura 5-5 - Representação temporal

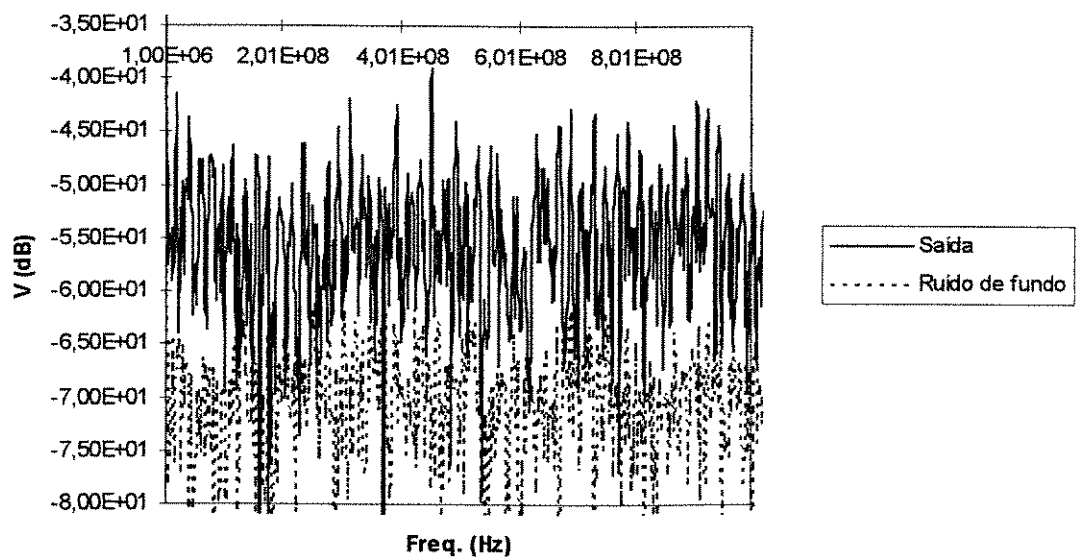


Figura 5-6 - Representação em frequência

Os coeficientes de correlação linear [41] entre os sinais de saída do comparador e ruído de fundo são 0.04 para análise temporal e 0.06 para análise em frequência, indicando a independência linear entre os sinais.

A sequência de pequenas “explosões” observadas na saída do comparador é um comportamento inerente ao circuito e previsível através do modelo utilizado.

5.1.4 O “Driver” de corrente

O “driver” utilizado consiste de um amplificador em fonte comum com carga ativa e deslocadores de nível, excitando uma saída em “push-pull”, conforme ilustrado nas figuras 5-7 e 5-8.

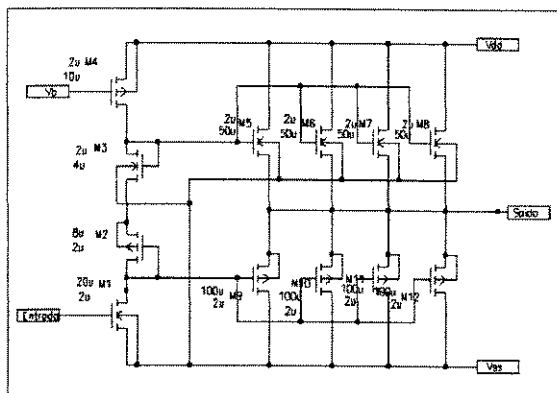


Figura 5-7 - Diagrama do "driver" com os parâmetros nominais de projeto

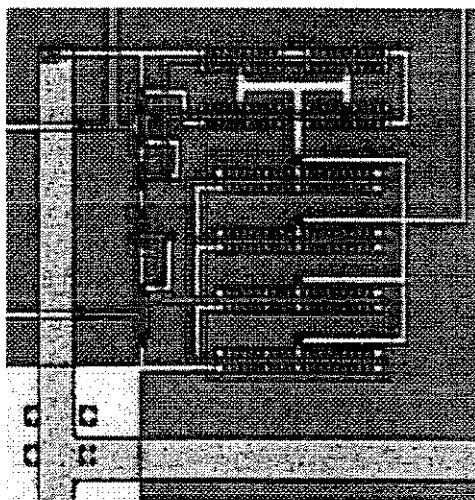


Figura 5-8 - Fotomicrografia do "driver"

O "driver" alterado tem a mesma configuração apresentada nas figuras 5-7 e 5-8, porém somente com três transistores canal p na etapa de saída.

5.1.5 O modelo do "driver" para grandes sinais

De forma semelhante ao comparador, foi realizado o modelamento do "driver", conforme ilustrado na figura 5-9.

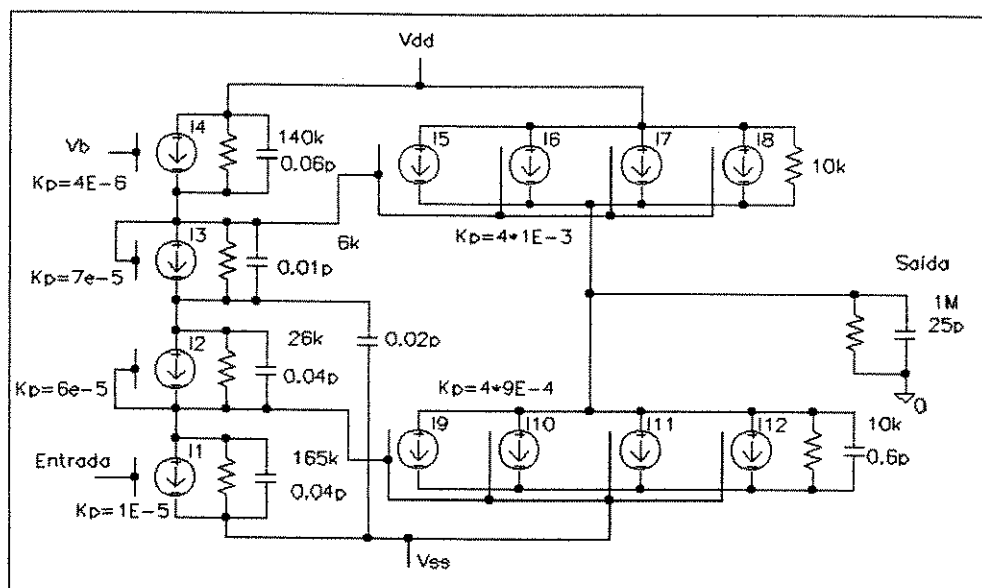


Figura 5-9 - Modelo físico do "driver" de corrente

A matriz de transição de estado para o sistema é apresentada na equação 5-2, onde não foram considerados os efeitos não lineares das capacitâncias, cabendo ressaltar que os transistores M1 e M4 operam na região triodo [39] para entrada nula.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1(R, C, K, x) & f_2(R, C, K, x) & f_2(R, C, K, x) & f_1(R, C, K, x) & 0 \\ f_1(R, C, K, x) & -f_2(R, C, K, x) & f_2(R, C, K, x) & f_1(R, C, K, x) & 0 \\ f_1(R, C, K, x) & f_2(R, C, K, x) & -f_2(R, C, K, x) & f_1(R, C, K, x) & 0 \\ f_1(R, C, K, x) & f_2(R, C, K, x) & f_2(R, C, K, x) & -f_1(R, C, K, x) & 0 \\ f_3(C, K, x) & 0 & 0 & -f_4(C, K, x) & -f_5(R, C, K, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Equação 5-2- Modelo matemático do "driver"

Os elementos da matriz têm as formas indicadas a seguir, sendo os índices "l" e "c" relativos às linhas e colunas :

$$a) f_1(R, C, K, x) = \frac{1}{R_c C_{lc}} + \frac{K_{pc}(v_{gsc} - V_{Tc})}{C_{lc}} - \frac{K_{pc}}{C_{lc}} * x_c;$$

$$b) f_2(R, C, K, x) = \frac{1}{R_c C_{lc}} - \frac{2 * K_{pc} * V_T}{C_{lc}} + \frac{K_{pc}}{C_{lc}} * x_c;$$

$$c) f_3(C, K, x) = \frac{2 * K_{p6}(x_6 - V_t)}{C_{lc}} - \frac{K_{p6}}{C_{lc}} * x_c;$$

$$d) f_4(C, K, x) = \frac{2 * K_{p5}(x_6 + V_t)}{C_{lc}} - \frac{K_{p5}}{C_{lc}} * x_c;$$

$$e) f_5(R, C, K, x) = \frac{1}{R_6 C_{lc}} + \frac{1}{R_5 C_{lc}} - \frac{2 * K_{p5}(x_4 - V_T)}{C_{lc}} - \frac{2 * K_{p6}(x_1 + V_T)}{C_{lc}} + \frac{K_{p6} - K_{p5}}{C_{lc}} * x_6$$

Os sub índices "c" e "l", correspondentes às colunas e linhas da matriz, relacionam os elementos aos componentes do circuito conforme indexados na figura 5-8. A definição dos componentes é dada a seguir :

- a) R_n = resistor que representa o efeito de modulação de canal [39] do n-ésimo transistor do circuito;
- b) C_{nm} = capacitância efetiva na n-ésima linha e m-ésima coluna da matriz;
- c) K_{pn} = coeficiente da transcondutância ($\mu * C_{ox} * W/L$) [39] do n-ésimo transistor do circuito;
- d) V_T é a tensão limiar do transistor relativa ao K_p que a multiplica;
- e) x_n = n-ésimo estado do sistema.

Nota-se através da análise dos elementos da matriz que o sistema é não linear, conforme descrito no capítulo 2 deste trabalho.

O estado observável do sistema é o x_6 , correspondendo à saída do circuito.

5.1.6 Análise dos pontos de equilíbrio do "driver"

Para $V_{\text{entrada}} = 0$ temos os seguintes autovalores :
 $\{-7,76 \times 10^9, -1,60 \times 10^9, 9,58 \times 10^8, 7,36 \times 10^7, -9,36 \times 10^6\}$.

Para $V_{\text{entrada}} = 1\text{V}$ temos os seguintes autovalores :
 $\{-7,66 \times 10^9, -1,907 \times 10^7, 4,06 \times 10^8, -1,29 \times 10^8, -7,64 \times 10^6\}$.

Nota-se para ambos os casos a ocorrência de atratores estranhos conforme descrito no capítulo 3 deste trabalho.

As figuras 5-10 e 5-11 apresentam o sinal de saída do "driver" para entrada nula e ruído de fundo do sistema de testes em função do tempo de da frequência.

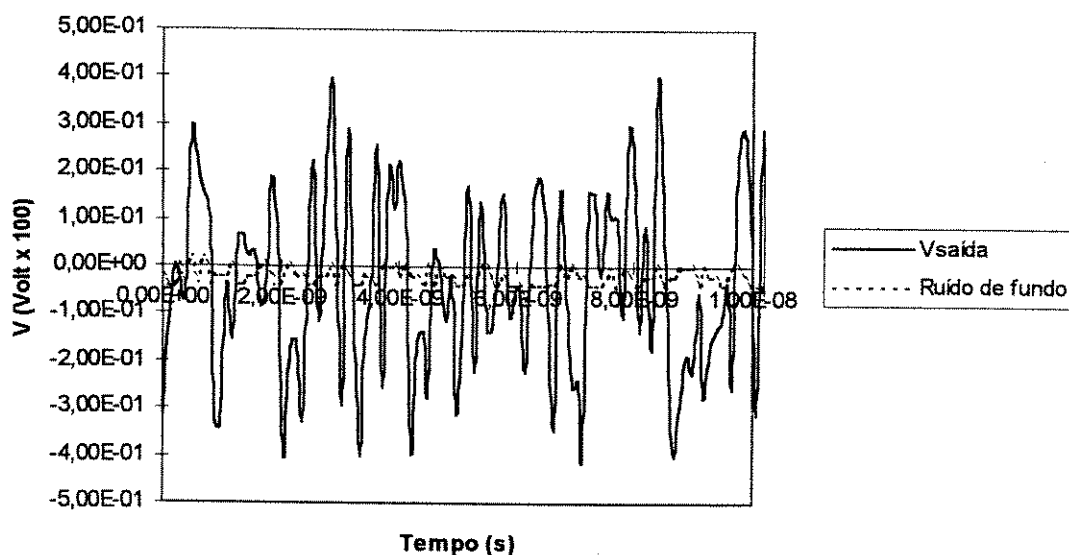


Figura 5-10 - Representação temporal

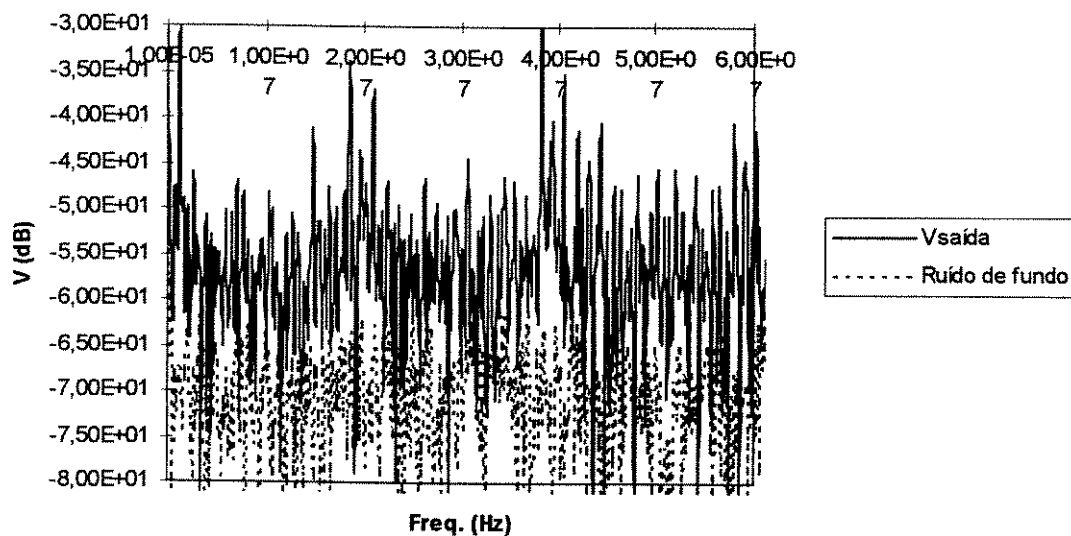


Figura 5-11 - Representação em frequência

Os coeficientes de correlação linear entre o sinal de saída do "driver" e o ruído de fundo do sistema são menores que 0.05 para ambas as representações, indicando que o comportamento observado na tensão de saída é inerente ao circuito do "driver".

5.1.7 O conversor D/A

O conversor foi implementado utilizando a técnica R2R invertido, com seis bits, possibilitando acesso aos nós internos da malha de conversão, conforme ilustrado na figura 5-12.

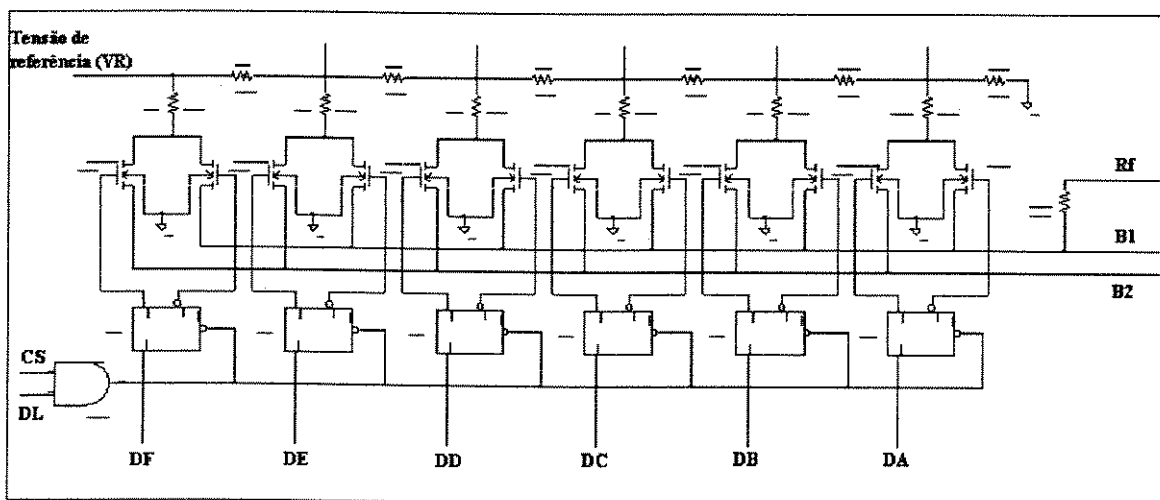


Figura 5-12 - Conversor D/A de 6 bits

As figuras 5-13 e 5-14 apresentam a fotomicrografia de algumas células, bem como o modelo simplificado de uma célula do conversor.

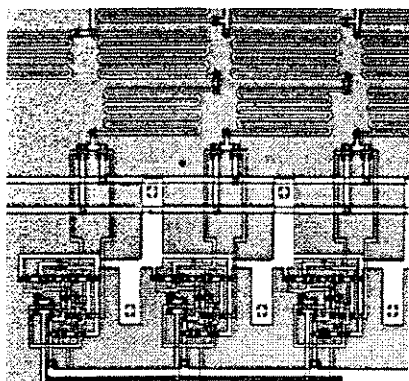


Figura 5-13 - Células do conversor

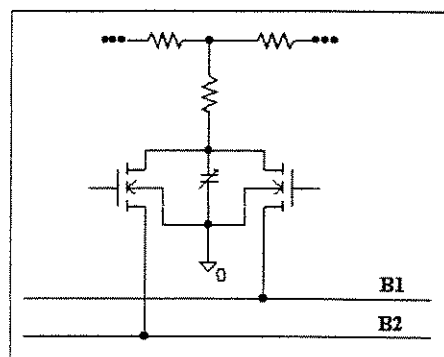


Figura 5-14 - Modelo simplificado da célula

O processo de conversão ocorre com base nas parcelas de corrente chaveadas por cada uma das células nas linhas B1 ou B2, figura 5-14. Estas linhas correspondem à saída do conversor, podendo ser ligadas às entradas de um amplificador operacional com realimentação resistiva que fornecerá uma tensão de saída proporcional à parcela de corrente chaveada, por exemplo, para a linha B1.

Alterações podem ser realizadas no circuito de conversão pela introdução de componentes externos, tais como resistores e/ou capacitores, conectados aos pontos disponíveis da malha de conversão. A alteração de parâmetros dos transistores e do circuito de chaveamento pode ser realizada pela variação da tensão de substrato [39].

5.1.8 O modelo do conversor

Considerando o processo de conversão como a ocorrência de chaveamento de parcelas de corrente de uma das linhas da saída do conversor para outra, e que ambas as linhas encontram-se no mesmo potencial, deve-se estudar a transição dos transistores da célula, um do corte

para plena condução e outro no sentido inverso. Somente neste momento existirá variação de tensão sobre as capacitâncias de dreno e, como consequência, uma parcela de corrente drenada da fonte de referência que não participará da corrente de conversão.

A equação 5-3 apresenta o modelo matemático do sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{lc} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} \\ 0 & f_{lc} & -f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} \\ 0 & f_{lc} & f_{lc} & -f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} \\ 0 & f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} & -f_{lc} & f_{lc} \\ 0 & f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} & f_{lc} & -f_{lc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Equação 5-3- Matriz de transição de estado do conversor D/A

Os índices "l" corresponde à linha e "c" à coluna da matriz, cada função f_{lc} tem a seguinte forma :

$$f_{lc} = \frac{\left[1 - R_{lc} * K_{pc} \left(\sum v_{gs} - 2 * v_t - x_c \right) \right]}{R_{lc} \left[C_f - \frac{C_0 * x_c}{\eta \phi \left(1 + \frac{x_c}{\phi} \right)^{\eta+1/\eta}} + \frac{C_0}{\left(1 + \frac{x_c}{\phi} \right)^{1/\eta}} \right]} \quad \text{Equação 5-4}$$

Os significados dos termos são descritos abaixo :

- a) K_{pc} = Coeficiente de transcondutância correspondente aos transistores da célula "c";
- b) R_{lc} = resistência equivalente relativa à linha "l" e coluna "c" da matriz;
- c) v_{gs} = soma dos v_{gs} dos transistores da célula "c";

- d) v_t = tensão limiar dos transistores;
- e) C_f = parcela fixa da capacitância parasita na célula;
- f) C_0 = capacitância de dreno para polarização zero;
- g) η = coeficiente relativo ao perfil da junção dreno-substrato;
- h) ϕ = potencial de barreira da junção dreno-substrato;
- i) x_n = tensão nos drenos dos transistores da célula "n".

Nota-se que os elementos da matriz são dependentes dos estados internos do circuito, sendo portanto a matriz não linear.

5.1.9 Análise dos pontos de equilíbrio do conversor

Considerando que em regime um dos transistores da célula estará em plena condução e que os potenciais nas linhas de saída são iguais e com valor 0; e também que durante a transição de cada palavra digital os estados tendem ao valor dos nós da malha resistiva a que estão conectados, foram analisados os equilíbrios 0 e $\{V_R, V_R/2, V_R/4, V_R/8, V_R/16, V_R/32\}$, onde V_R representa a tensão de referência de conversão.

Os autovalores para o equilíbrio 0 são :

$\{-3,56 \times 10^8, -1,52 \times 10^8, -1,29 \times 10^8 + 1,77 \times 10^7, -1,29 \times 10^8 - 1,77 \times 10^7, -7,58 \times 10^7, -6,39 \times 10^7\}$.

Os autovalores para $\{V_R, V_R/2, V_R/4, V_R/8, V_R/16, V_R/32\}$, com $V_R = -3V$ são:

$\{-3,62 \times 10^8, -1,67 \times 10^8, -1,38 \times 10^8 + 1,38 \times 10^7, -1,38 \times 10^8 - 1,38 \times 10^7, -7,58 \times 10^7, -6,68 \times 10^7\}$.

Durante as transições existirá uma parcela de corrente drenada da fonte de tensão de referência que é correspondente à tensão de deslocamento através das capacitâncias, não constituindo a corrente de conversão. O valor

desta corrente retrata as transições dos estados internos do circuito, e foi a grandeza selecionada para realização dos testes.

Chaveamentos das palavras digitais a uma frequência próxima ao limite de resposta do sistema, farão com que o perfil de estabilização dos estados tenham comportamento ligeiramente distinto entre respostas consecutivas, conforme ilustrado nas figuras 5-15 e 5-16.

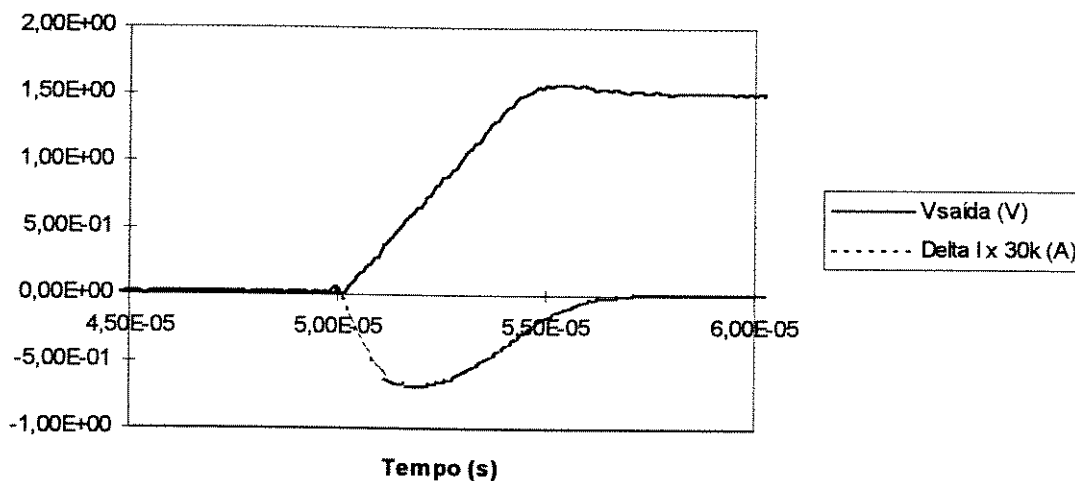


Figura 5-15 - Tensão de saída e variação de corrente da fonte de referência do conversor na transição 0 para 3Fh

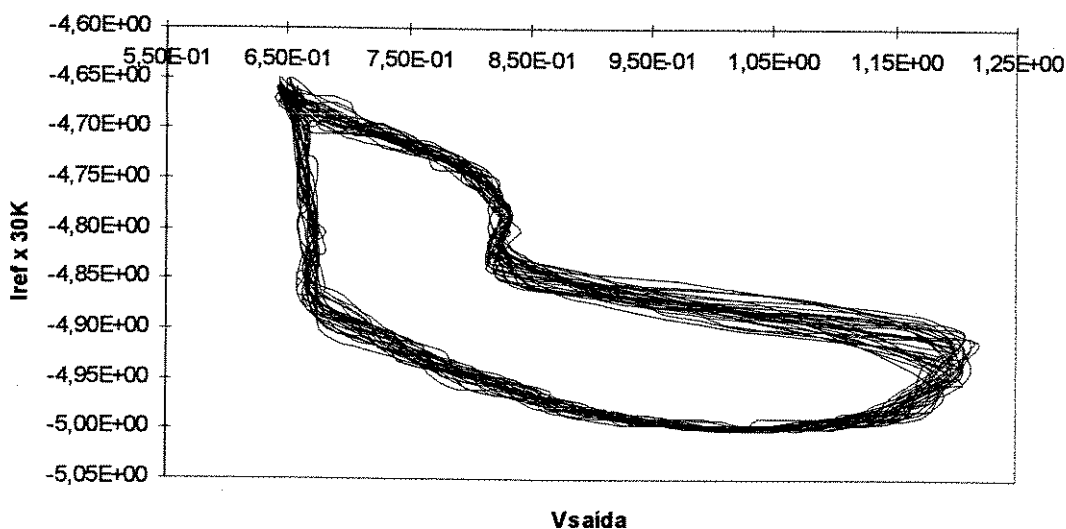


Figura 5-16 - Relação entre a tensão de saída do conversor e a corrente da fonte de tensão de referência para 300k transições por segundo.

5.2 Os testes realizados nos circuitos

Para que fosse possível a caracterização dos circuitos nas diversas combinações de elementos e demonstrada a validade da metodologia proposta neste trabalho, foram realizadas algumas medidas paramétricas da forma tradicional e posteriormente aplicado os testes paramétricos com enfoque sistêmico.

5.2.1 Testes realizados nos amplificadores operacionais

Os amplificadores operacionais utilizados nos testes foram realizados pelas combinações dos comparadores de tensão e drivers existentes no circuito de teste, a saber :

- a) Comparador Normal - Driver Normal, denotado por N-N;
- b) Comparador Normal - Driver Alterado, denotado por N-A;
- c) Comparador com Entrada Alterada - Driver Normal, denotado por EA-N;
- d) Comparador com Saída Alterada - Driver Normal, denotado por SA-N.

5.2.1.1 Medidas paramétricas tradicionais

5.2.1.1.1 Tensão offset de entrada (Vio)

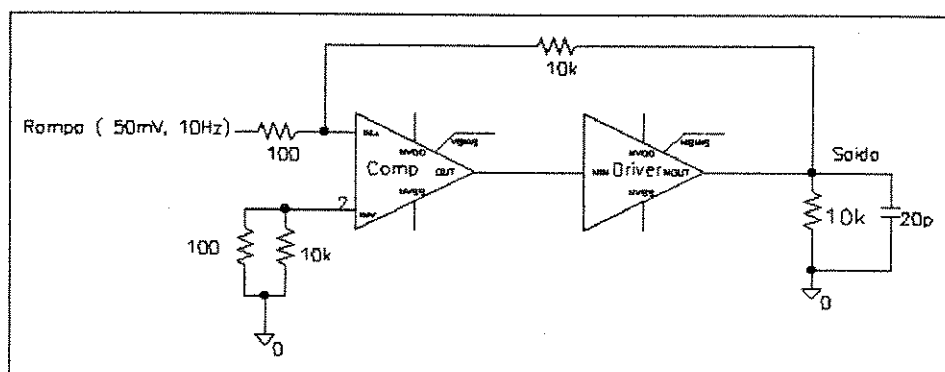


Figura 5-17 - Circuito de teste de offset de entrada

CONFIGURAÇÃO	OFFSET
Normal - Normal	-4mV
Normal - Alterado	-4mV
Entrada Alterada - Normal	-8mV
Saída Alterada - Normal	120mV

Tabela 5-1 - Resultados dos testes de offset de entrada

5.2.1.1.2 Resposta em frequência (G_v , B_1 e ϕ)

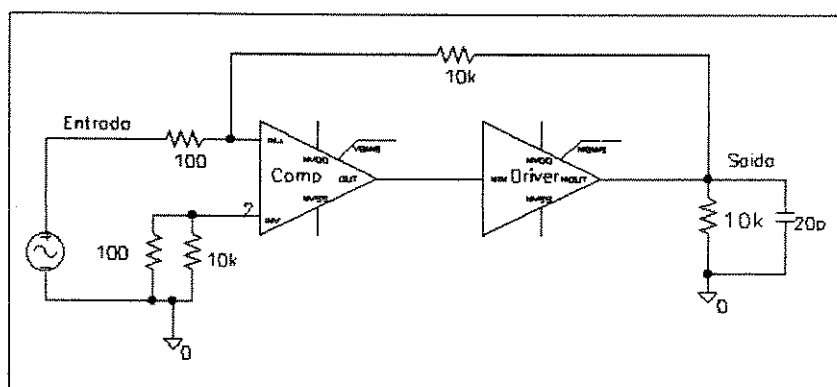


Figura 5-18 - Circuito de teste de resposta em frequência

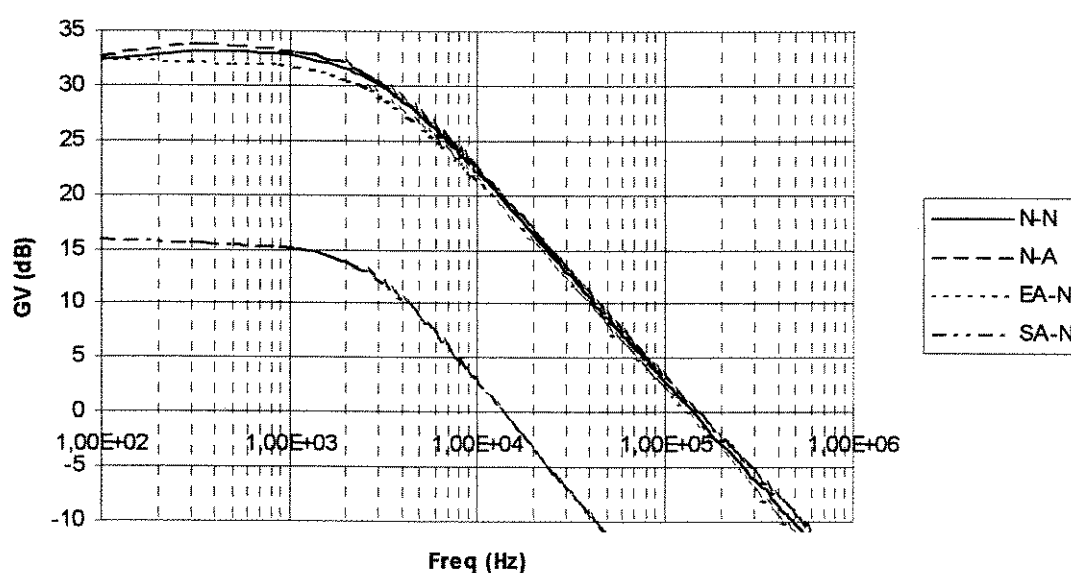


Figura 5-19 - Módulo do ganho em dB

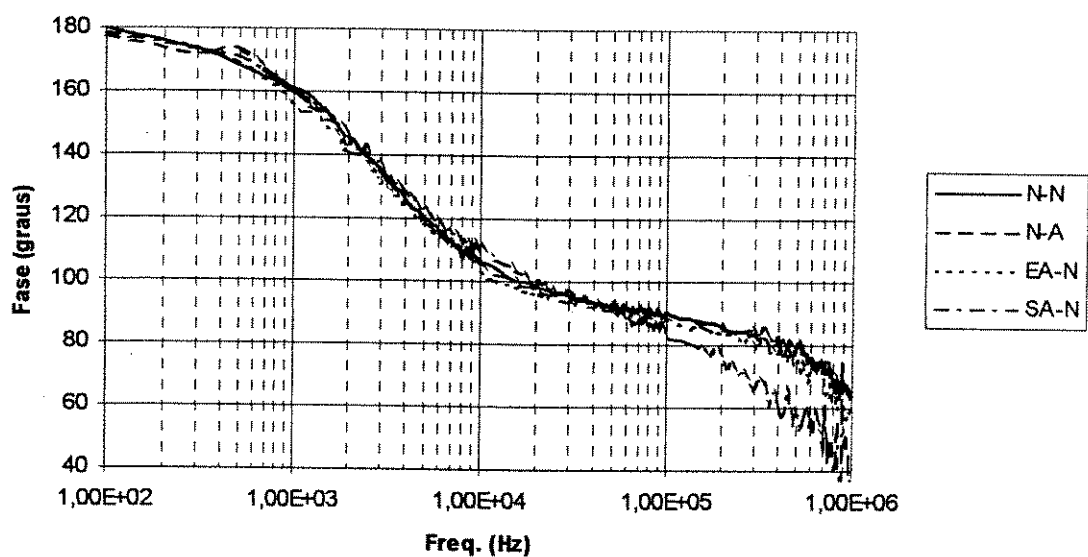


Figura 5-20 - Fase do sistema em graus

CONFIGURAÇÃO	GANHO DC MALHA ABERTA
Normal - Normal	37,2dB
Normal - Alterado	37,7dB
Entrada Alterada - Normal	37,6dB
Saída Alterada - Normal	16,6dB

Tabela 5-2 - Ganho DC do amplificador operacional em malha aberta

5.2.1.1.3 Rejeição de modo comum (CMRR)

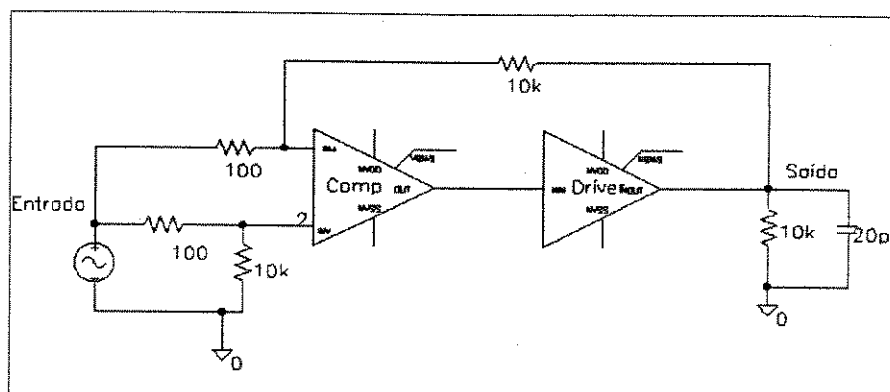


Figura 5-21 - Circuito de teste para medida de rejeição de modo comum

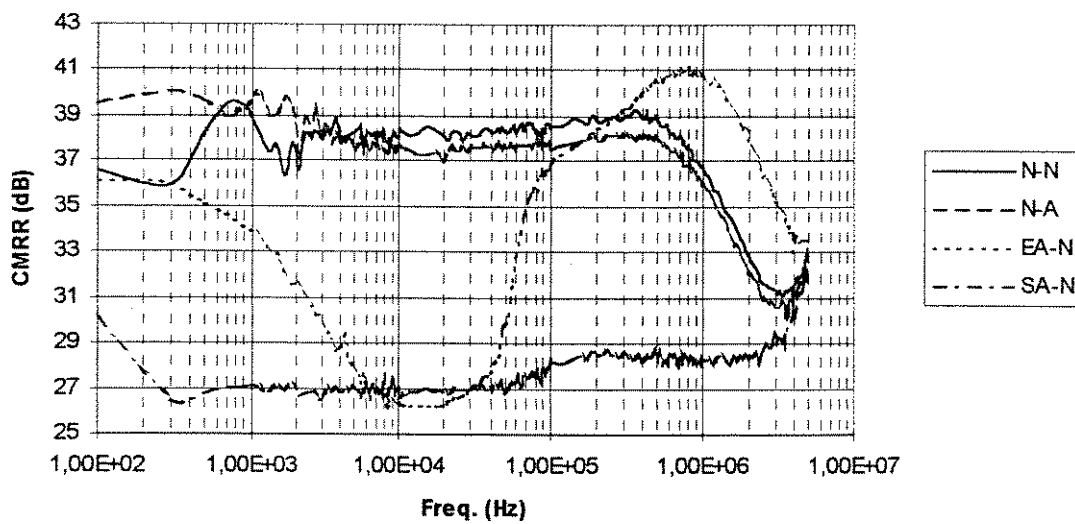


Figura 5-22 - Rejeição de modo comum em dB

5.2.1.1.4 Máxima variação pico a pico da tensão de saída (VOM), Banda de máxima variação na saída (BOM) e Taxa de Variação da tensão de saída (SR)

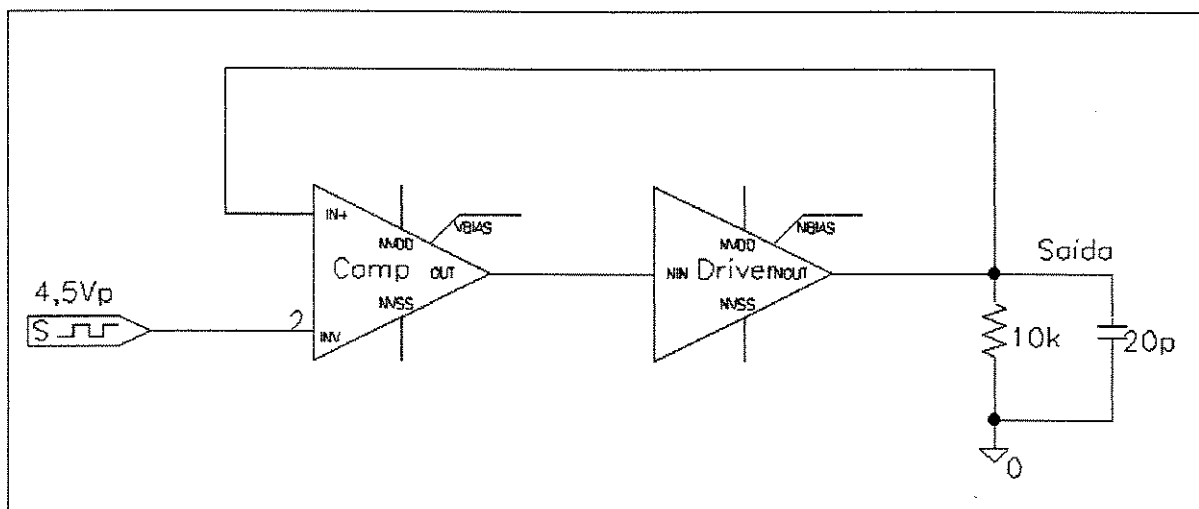


Figura 5-23 - Circuito de teste para variação de tensão de saída

CONFIGURAÇÃO	VOM (V)	BOM (kHz)	SR (V/ μ s)
N-N	-1,62 a 2,31	18	0,19
N-A	-1,65 a 2,35	18	0,19
EA-N	-1,60 a 2,34	18	0,20
SA -N	-1,68 a 2,46	25	0,37

Tabela 5-3 - Testes de variação de tensão de saída

5.2.1.2 Teste paramétrico com abordagem sistêmica não linear

Para a realização dos testes paramétricos foi necessária a utilização de uma configuração de circuito que evidencia as ocorrências de manifestações não lineares no sistema.

Em virtude do conjunto comparador-driver de corrente (amplificador operacional) apresentar um polo dominante real em torno de 3kHz, foram acrescentados componentes no circuito de testes de tal forma a deslocar os polos do sistema e acrescentar-lhes componentes imaginárias. Este procedimento, cujo circuito de testes é apresentado na figura 5-24, impõe um comportamento oscilatório amortecido, em frequência mais alta, onde as manifestações não lineares ficam mais evidentes, sendo a resposta em frequência para a combinação normal-normal apresentada na figura 5-25.

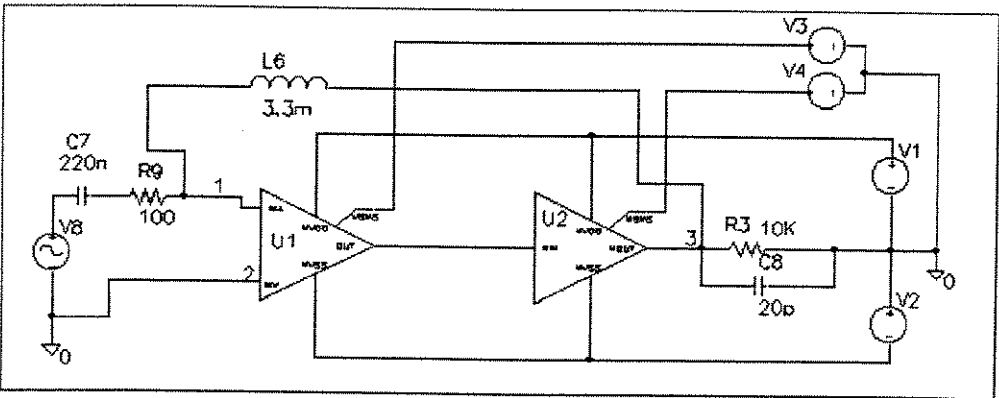


Figura 5-24 - Configuração de teste paramétrico não linear

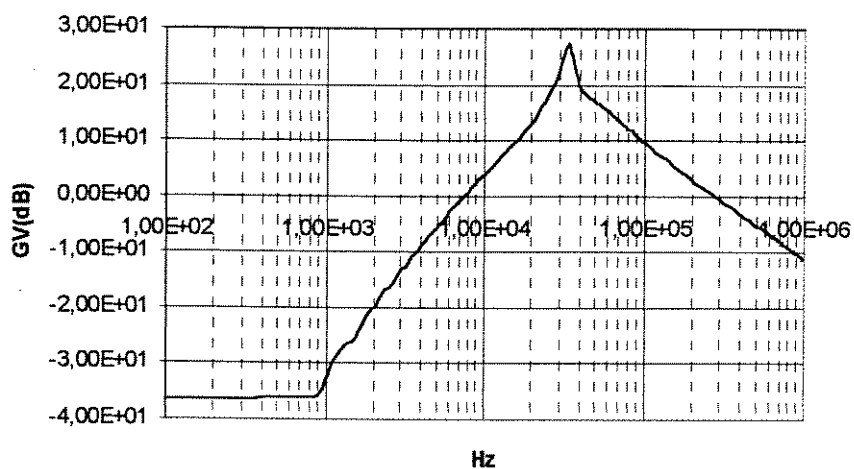


Figura 5-25 - Resposta em frequência do sistema de testes

O espectro de potência do sinal de saída para a combinação normal-normal quando o sistema é estimulado com um sinal de 200mV e 65kHz é apresentado na figura 5-26 e o atrator reconstruído é apresentado na figura 5-27.

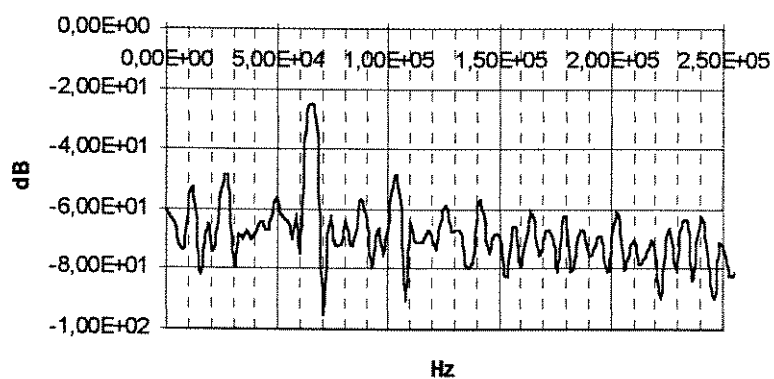


Figura 5-26 - Densidade espectral de potência do sinal de saída

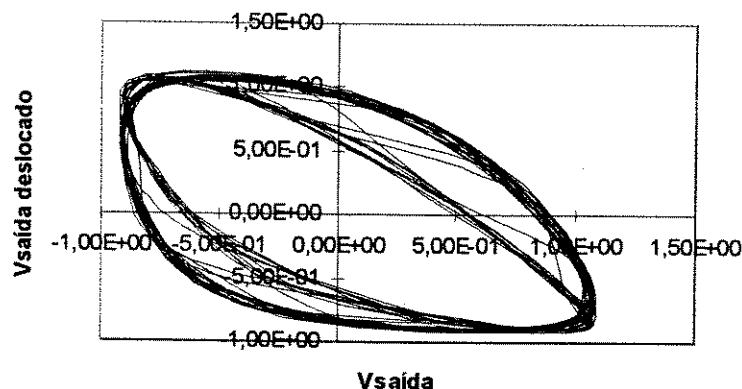


Figura 5-27 - Atrator reconstruído

O teste paramétrico não linear é realizado através da obtenção do mapa de Poincaré no diagrama de fase que relaciona a tensão de entrada e a tensão de saída, sendo o volume de interceptação definido com referência à tensão de entrada entre os valores 0,215e 0,225 V. A figura 5-28 ilustra o resultado do teste paramétrico para as quatro combinações testadas; cabe ressaltar que cada um dos resultados foi ligeiramente deslocado em relação ao ponto de interceptação (referenciado à tensão de entrada) para evitar a sobreposição dos pontos.

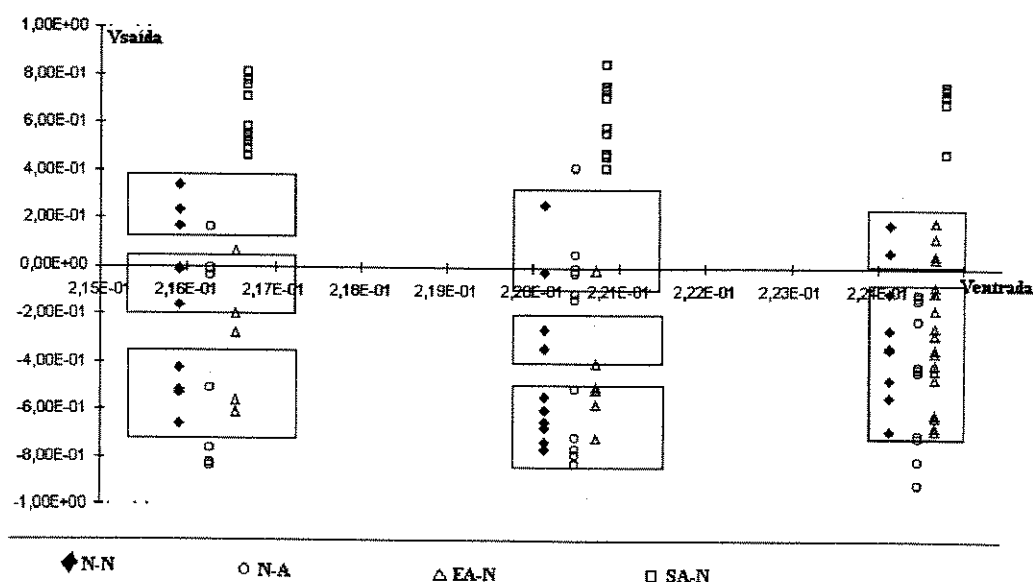


Figura 5-28 - Resultado do teste paramétrico não linear para as quatro combinações de amplificadores operacionais testadas

Os retângulos apresentados na figura 5-28 sugerem uma possível máscara de aceitação no teste paramétrico. Nota-se que através destes resultados mesmo as pequenas diferenças entre os dispositivos, como é o caso do N-N e N-A, podem ser identificadas.

5.2.2 Testes realizados no conversor D/A

Os testes foram realizados com o circuito normal e três alterações no circuito do conversor, a saber:

- a) circuito normal - denotado por N;
- b) introdução de um resistor de $56k\Omega$ em paralelo com o resistor que conecta a terceira e quarta células de conversão- denotado por R. Este resistor tem o valor de $10k\Omega$ na malha;
- c) introdução de um capacitor de $10pF$ entre o nó da terceira célula de conversão e terra - denotado por CT;
- d) introdução de um capacitor de $10pF$ em paralelo com o resistor que conecta a terceira e quarta células de conversão - denotado por C.

5.2.2.1 Medidas paramétricas tradicionais

Estas medidas foram realizadas com $-3V$ de tensão de referência, correspondendo a uma altura de degrau de $47mV$.

5.2.2.1.1 Erro de quantização

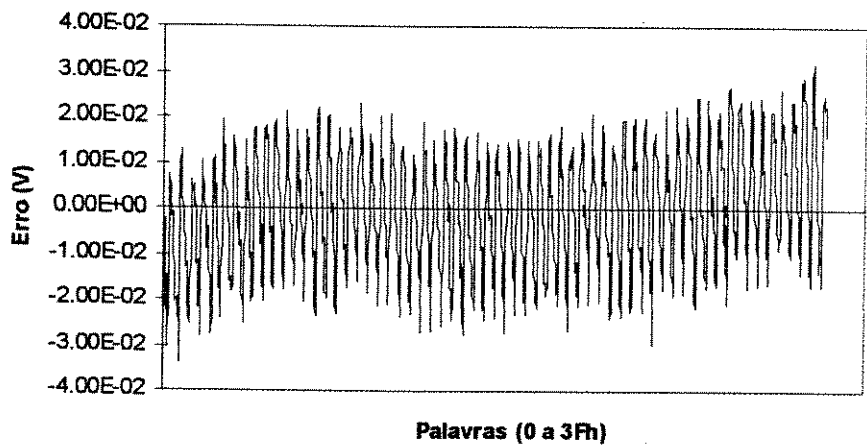


Figura 5-29 - Erro de quantização para os circuitos N, CT e C

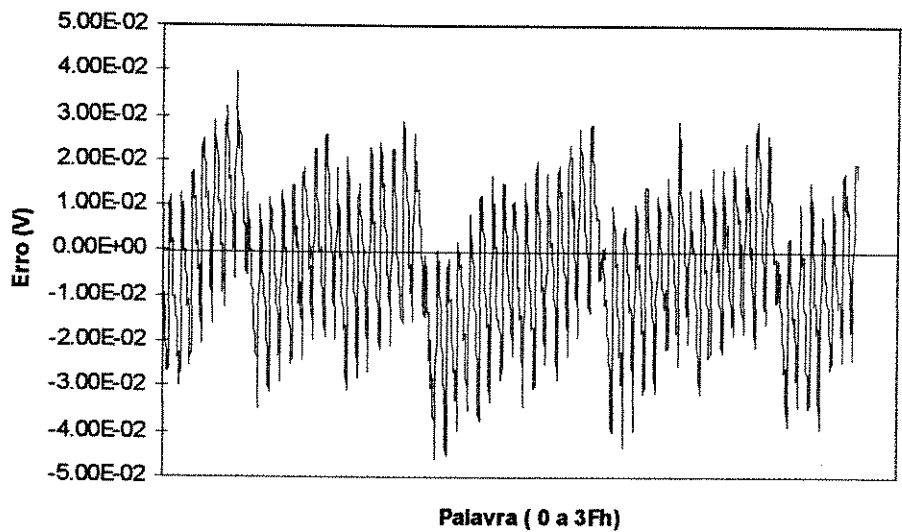


Figura 5-30 - Erro de quantização para o circuito R

5.2.2.1.2 Taxa de conversão

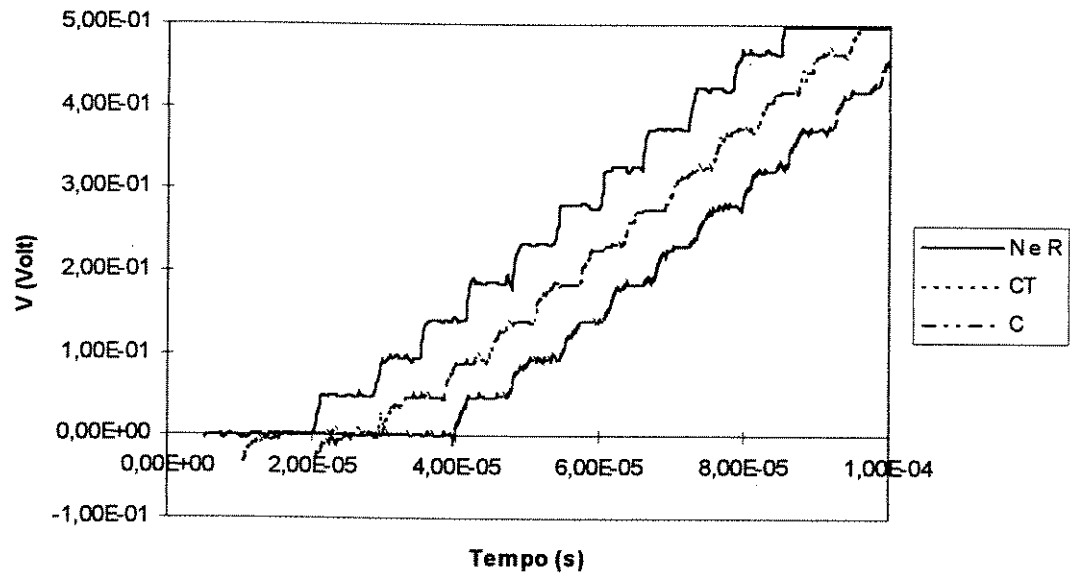


Figura 5-31 - Resposta para 138k transições /segundo

5.2.2.1.3 Atraso

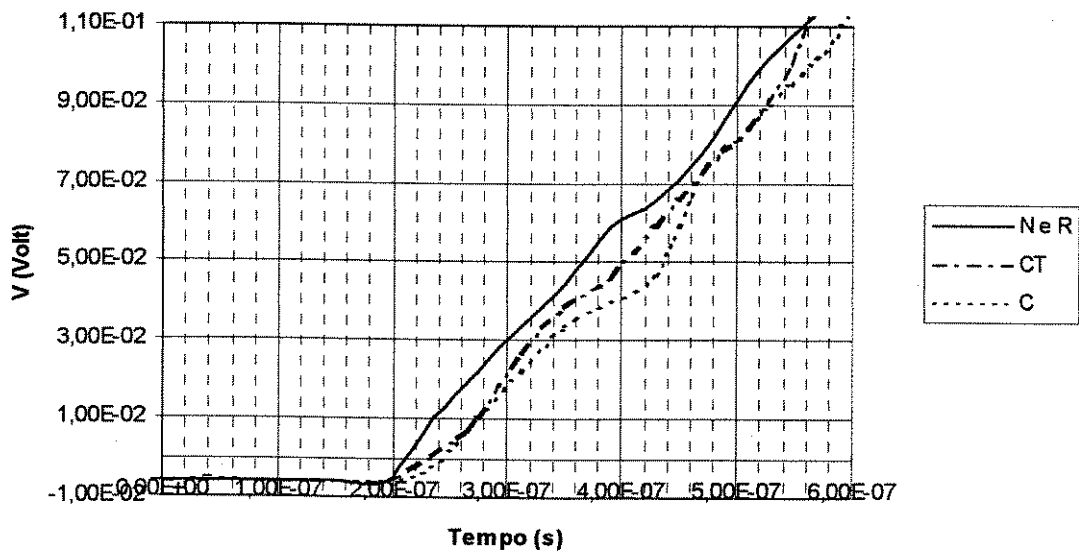


Figura 5-32 - Atraso da resposta em relação a uma transição 0-> 3Fh

5.2.2.2 Teste paramétrico com abordagem sistêmica não linear

A configuração do circuito para realização do teste é apresentada na figura 5-29, onde foi introduzido um resistor de 10kΩ em série com a fonte de referência com os objetivos de se obter o sinal de corrente drenada da fonte e eliminar a dependência da primeira célula de conversão em relação às outras células.

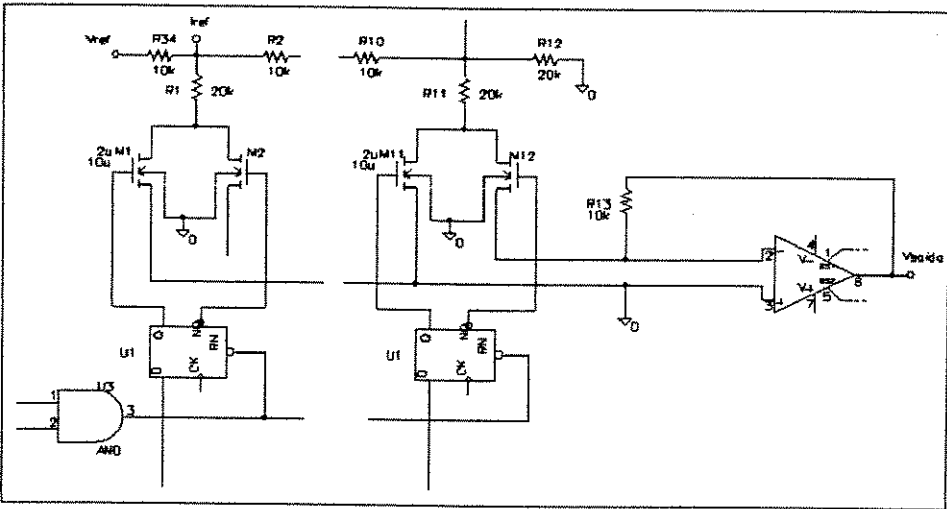


Figura 5-33 - Configuração para teste paramétrico não linear

Os sinais utilizados para o teste são a corrente drenada da fonte de referência e a tensão de saída do conversor. O espectro de potência do sinal de corrente para 50k transições 0 -> 3F por segundo, para o circuito normal, é apresentado na figura 5-34.

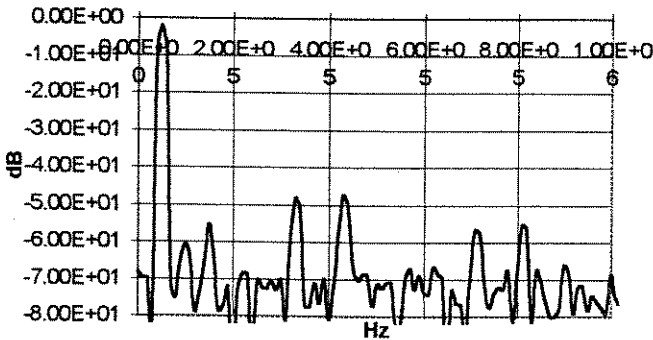


Figura 5-34 - Espectro de potência para o circuito normal a 50K transições por segundo

O mapa de Poincaré utilizado para a realização do teste foi obtido a partir do diagrama de fase do sinal de tensão de saída do conversor e o sinal de corrente drenada da fonte. O volume de intercepção foi definido entre 1,460 e 1,462V (foi utilizada uma amplificação de 5x no sina de saída para melhorar a resolução da medida), sendo o resultado apresentado na figura 5-35.

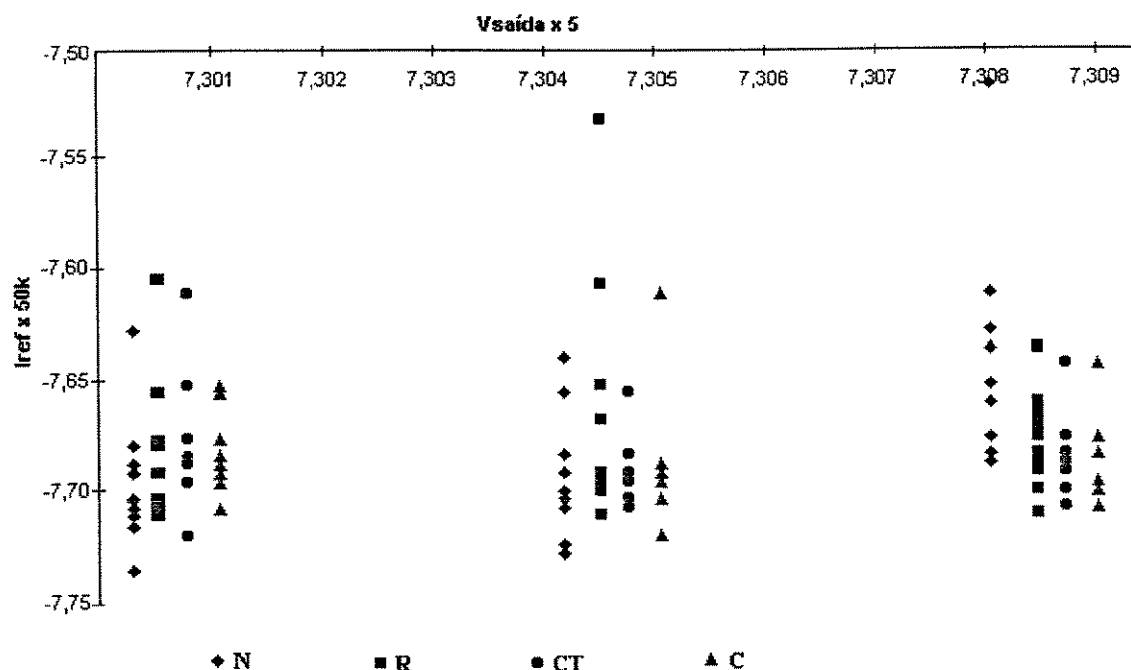


Figura 5-35 - Resultado do teste paramétrico para o conversor D/A

Os resultados permitem identificar diferenças entre os circuitos que não foram detectadas pelos testes tradicionais, como é o caso dos circuitos CT e C, vide os conjuntos de pontos que interceptam o volume em 7,300 e 7,304V.

6. Considerações finais e conclusão

Algumas observações realizadas durante as etapas de testes são comentadas a seguir.

6.1 Quanto ao tempo de teste

O tempo gasto para obtenção do mapa de Poincaré com 32 pontos no caso do amplificador operacional, número este que demonstrou ser suficiente para uma análise conclusiva dos resultados, está entre 50 e 100ms para uma excitação de 50kHz. Somando-se a este tempo o intervalo para análise dos resultados, o tempo total de teste não deverá ultrapassar 200ms por dispositivo para a análise paramétrica.

6.2 Quanto ao procedimento de análise preliminar

O procedimento de análise preliminar, no qual são definidas as condições iniciais e de estímulo para o teste e os comportamentos são previstos, deve ser feito com cautela, principalmente quando se utilizam simuladores de circuitos para a análise. Em virtude dos circuitos serem forçados a funcionar em condições fortemente não lineares e os simuladores realizarem a análise linear por partes, agravado pela propagação de erros numéricos, os resultados das simulações se aproximam dos comportamentos observados somente em condições muito particulares.

Durante os experimentos realizados foi possível notar que a alteração da tolerância relativa de cálculo do simulador, parâmetro este ajustável, leva a previsões completamente diferentes para o mesmo circuito sob as mesmas condições de excitação.

Recomenda-se que a análise seja realizada algebricamente, os pontos de equilíbrio sejam estimados a partir do modelo não linear e que se exercite experimentalmente o circuito para a confirmação dos comportamentos previstos.

Caso algum espectro de frequência dos estados observáveis apresente alargamento ou muitas componentes importantes próximas, ou não seja possível observar ciclos distintos nos planos de fase, ou ainda o cálculo do expoente de Lyapunov não apresente convergência ou a apresente para valores positivos, recomenda-se buscar uma outra região de testes, pois os valores obtidos nesta região correspondem a um comportamento caótico ou então é somente ruído.

6.3 Quanto à identificação das causas de rejeição

Nem sempre é possível relacionar causa e efeito nos testes paramétricos não lineares, sendo que sua aplicação fica restrita aos testes do tipo passa/não-passa em linhas de produção.

6.4 Conclusão

O método de teste utilizando abordagem sistêmica explorando a dinâmica não linear dos circuitos, demonstrou ser capaz de identificar diferenças paramétrica nos circuitos testados. Foi possível a realização de testes em circuitos puramente analógico e de sinais mistos.

O tempo de teste paramétrico é menor que metade do tempo gasto para o mesmo fim nos testes sequenciais tradicionais.

Com base nos resultados obtidos, todos suportados por fundamentos teóricos plausíveis, fica demonstrada a viabilidade da utilização do

comportamento sistêmico não linear para a realização de testes do tipo passa/não-passa.

6.5 Sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho demonstrou a viabilidade de uma metodologia de testes, criando assim muito espaço para novos trabalhos na área, tais como :

- i) desenvolvimento de um equipamento de teste paramétrico não linear que seja utilizável em uma linha de produção;
- ii) comparação de resultados de testes de confiabilidade e de campo de componentes testados pelo método proposto e pelo método tradicional;
- iii) análise de testabilidade de circuitos puramente digitais e de sinais mistos mais complexos, tais como microprocessadores, microcontroladores, DSPs e similares;
- iv) análise de custo benefício quanto à implantação de um método passa/não- passa para circuitos integrados em linha de produção;
- v) desenvolvimento de métodos de análise e simuladores não lineares que facilite o trabalho de definição das condições de teste;
- vi) desenvolvimento de algoritmo de análise de mapas visando a redução do tempo de processamento do resultado do teste.

7. Referências bibliográficas

- [1] Teani, C. R. N. , "Planejamento de Experimento Aplicado ao Processo de Fabricação de Componentes", Dissertação de Mestrado - UNICAMP - 1995
- [2] Oliveira, J. , "Código de Proteção e Defesa do Consumidor", Editora Saraiva - São Paulo - 1990
- [3] Huertas, J. L. , "Test and Design for Testability of Analog and Mixed-signal Integrated Circuits : An Introduction", X Congresso da Sociedade Brasileira de Microeletrônica - 1995
- [4] Hewlet-Packard, "1997 Annual Report Financial Review" - 1998
- [5] Teradyne, "Tem-year Summary" - 1998
- [6] GenRad, "1997 Financial Report" - 1998
- [7] Pesquisa Industrial Anual - IBGE - 1994
- [8] Vidyasagar, M., "Nonlinear System Analysis", Prentice-Hall - NJ - 1993
- [9] Bottura, C. P., "Análise Linear de Sistemas", Guanabara Dois - RJ - 1982
- [10] Kuo, B. C., "Automatic Control System", Prentice-Hall - NJ - 1982
- [11] Oppenheim, A. V., Schafer, R. W., "Discrete-Time Signal Processing", Prentice-Hall - NJ - 1989
- [12] Fiedler-Ferrara, N., Prado, C. P. C. , "Caos : Uma Introdução", Edgard Blücher Ltda - São Paulo - 1994
- [13] Venkatasubramanian, V., Saberli, A., Lin, Z. , "On the Validity of Solutions and Equilibrium Points in a Nonlinear Network", IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 43, No. 3, March 1996, pp. 233-235
- [14] Ruelle, D., "Strange Attractors", The Mathematical Intelligencer 2 - Springer-Verlag - 1980, pp. 37-48
- [15] Cvitanovic', P., "Universality in Chaos", Adam Hilger - Bristol - 1989
- [16] Buonomo, A., Bello, C., Greco, O., "A Criterion of Existence and Uniqueness of the Stable Limit Cycle in Second-Order Oscillators", IEEE

Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-30, No. 9, September 1983, pp. 680-683

- [17] Chua, L. O., Parker, T. S., "Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems", Springer-Verlag - NY- 1989
- [18] Aggarwal, J. K., "Notes on Nonlinear Systems", Van Nostrand Reinhold Co. - 1972
- [19] Parker, T. S., Chua, L. O., "Chaos : a tutorial for Engineers", IEEE Proceedings 75 - 1987 - p. 982
- [20] Stewart, H. B., "Nonlinear Dynamics and Chaos", Willwey - NY - 1986
- [21] Enns, R. H., McGuire, G. C., "Nonlinear Physics with Maple for Scientists and Engineers", Birkhäuser - Boston - 1997
- [22] Churchill, R. V., "Variáveis Complexas e Suas Aplicações", McGraw-Hill do Brasil Ltda - São Paulo - 1978
- [23] Lyapunov, A. M., "The General Problem of the Stability of Motion", Taylor & Francis - London - 1992
- [24] Lefschetz, S., "Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications", Academic Press - 1961
- [25] D'Azzo, J. J., Houpis, C. H., "Análise e Projetos de Sistemas de Controle Lineares", Guanabara Dois - Rio de Janeiro - 1978
- [26] Chen, C. T., "Introduction to Linear System Theory", Holt, Rinehart and Winston Inc. - NY - 1970
- [27] Pallerosi, C. A. , "Confiabilidade : A Quarta Dimensão da Qualidade", No Prelo - 1998
- [28] Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, L., Vastano, J. A., "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", Physica 16D - North-Holland - Amsterdam - 1985, pp. 285-317
- [29] Feigenbaum, M., "Universal Behavior in Nonlinear Systems", Los Alamos Science 1 - Los Alamos - 1980, pp. 4-27
- [30] Tomita, K., "Chaotic Response of Nonlinear Oscillators", Physics Reports 86, No. 3 - North-Holland - 1982, pp. 113-167

- [31] Cascais, J., Dilão, R., Costa, A. N., "Chaos and Reverse Bifurcation in RLC Circuit", Physics Letters 93A, No. 5 - North-Holland - 1982, pp. 213-216
- [32] Feigenbaum, M., "The Transition to Aperiodic Behavior in Turbulent System", Communications on Mathematics and Physics 77 65, 1980
- [33] Libchaber, A., Maurer, J., "A Rayleigh Bénard Experiment : Helium in a Small Box", Proceedings of the NATO A.S.I.N.P.P.T.I. - 1982 - p. 259
- [34] Testa, J., Pérez, J., Jeffries, C., "Evidence of Universal Chaotic Behavior of a Dynamic Nonlinear Oscillator", Physics Review Letter 48 714 - 1982
- [35] Newell, T. C., Kovanis, V., Gravielides, A., Bennett, P., "Observation of The Concurrent Creation and Annihilation of Periodic Orbits in a Nonlinear RLC Circuit", Physical Review E, 54 4 - 1996 - pp. 3581-3590
- [36] American Society for Quality Control, "Measurement Systems Analysis Reference Manual", A.I.A.G. - 1990
- [37] Sze, S. M., "Physics of Semiconductor Devices", John Wiley & Sons - NY - 1981
- [38] Eshraghian, K., Weste, N., "Principles of CMOS VLSI Design : A System Perspective", Addison-Wesley - 1993
- [39] Gray, P. R., Meyer, R. G., "Analysis and Design of Analog Integrated Circuits", John Wiley & Sons - 1993
- [40] Austria Mikro Systeme International, "1.2 μ m CMOS Design Rules - Revision E" - Austria - 1996
- [41] Box, G. E. P., Hunter, W. G., Hunter, J. S., "Statistics for Experimenters" - John Wiley & Sons - NY - 1978