

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE MÁQUINAS COMPONENTES E SISTEMAS INTELIGENTES

CONTROLE DESCENTRALIZADO: TÉCNICAS E APLICAÇÃO AO CONTROLE
DA QUALIDADE DA ÁGUA DE RIOS

Este exemplar corresponde à defesa final da tese
defendida por Angel Fernando Torrico Cáceres

Julgadora em 29 de 05 de 92 pela Comissão

Belarmino Bittencourt
Orientador

ANGEL FERNANDO TORRICO CÁCERES

ORIENTADOR:

PROF. DR. CELSO PASCOLI BOTTURA

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual de Campinas - UNICAMP,
como parte dos requisitos exigidos
para a obtenção do título de Mestre
em Engenharia Elétrica

MAIO 1992

Este trabalho é dedicado a:

Mi papá Humberto (em memória)

Mi mamá Maria (em memória)

Minha esposa Vaneide

Meu filho Pedro Enrique

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Bottura, pelo apoio e estímulo constante, excelente orientação, valorização do meu trabalho e amizade.

Aos professores do DMCSI, em especial ao prof. Gilmar, pelas dicas certas e colaboração.

Aos colegas e amigos do DMCSI, pela amizade e colaboração.

A minha esposa Vaneide, pela compreensão e estímulo.

Aos amigos e funcionários da FEE, que me fazem sentir em casa.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), e ao Fundo de Apoio ao Ensino e à Pesquisa (FAEP), pela ajuda financeira.

RESUMO

Neste trabalho são pesquisadas técnicas de estabilização descentralizada e multinível e de controle ótimo descentralizado para sistemas dinâmicos interconectados. Nas técnicas de estabilização descentralizada e multinível, são utilizadas funções de Lyapunov, tanto escalar como vetorial, para encontrar condições suficientes de estabilidade. São pesquisadas duas técnicas de controle descentralizado: controle descentralizado perto do ótimo com um pré-especificado grau de estabilidade e controle descentralizado seguidor do modelo. Também são analisados modelos para a qualidade da água nos rios, especificamente da concentração de oxigênio (DBO e OD). São feitas aplicações de controle descentralizado para o controle da qualidade da água nos rios.

ABSTRACT

Decentralized multilevel stabilization and decentralized optimal control technics for interconnected dynamic systems are studied in this work. For the determination of sufficient stability conditions, Lyapunov scalar and vector functions are utilized in the decentralized multilevel stabilization technics. Two decentralized control technics: near optimal decentralized control with a pre-specified degree of stability and model-following decentralized control are studied. Models for water quality in rivers, specifically for oxygen concentration (BOD and DO) are analysed. Applications of decentralized control for river water quality are made.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO GERAL	1-1
CAPÍTULO 2 - ALGUNS CONCEITOS DE ESTABILIDADE E CONTROLE ÓTIMO ...	2-1
2.1 Introdução.....	2-1
2.2. Estabilidade e segundo método de Lyapunov.....	2-1
2.2.1 Estabilidade.....	2-2
2.2.2 Funções definidas positivas.....	2-4
2.2.3 Teoremas de Lyapunov.....	2-5
2.2.4 Teorema de Corduneanu.....	2-9
2.2.5 Método da decomposição-agregação.....	2-10
2.3 Otimização de sistemas lineares com um pré-especificado grau de estabilidade.....	2-11
2.3.1 Resumo dos resultados do controle ótimo do regulador quadrático com horizonte infinito.....	2-12
2.3.2 Alocação dos polos em malha fechada na região $R(s) < \alpha$	2-14
CAPÍTULO 3 - TÉCNICAS DE ESTABILIZAÇÃO DESCENTRALIZADA E MULTINÍVEL E DE CONTROLE ÓTIMO DESCENTRALIZADO	3-1
3.1 Introdução.....	3-1
3.2 Controle descentralizado utilizando teoria e conceitos de funções de Lyapunov.....	3-2
3.2.1 Controle descentralizado por meio de funções escalares de Lyapunov.....	3-2

3.2.2	Controle descentralizado via funções vetoriais de Lyapunov.....	3-9
3.2.3	Estabilização exponencial descentralizada de sistemas de grande porte.....	3-15
3.2.3.1	Descrição do problema.....	3-15
3.2.3.2	Técnicas de estabilização via descentralização..	3-17
3.2.4	Estabilização exponencial multinível de sistemas de grande porte.....	3-23
3.2.4.1	Descrição do problema.....	3-23
3.2.4.2	Caso das interconexões lineares e invariantes no tempo.....	3-24
3.2.4.3	Caso das interconexões não lineares e variantes no tempo.....	3-27
3.3	Controle descentralizado perto do ótimo com um pré-especificado grau de estabilidade.....	3-34
3.3.1	Introdução.....	3-34
3.3.2	Formulação do problema.....	3-35
3.3.3	Estrutura computacional hierárquica.....	3-40
3.3.4	Condições de estabilidade para o método.....	3-47
3.3.5	Análise do método e conclusões.....	3-53
3.4	Controle descentralizado seguidor do modelo.....	3-54
3.4.1	Introdução.....	3-54
3.4.2	Formulação do problema.....	3-55
3.4.3	Escolha do modelo rústico.....	3-57
3.4.4	Modificação nas interconexões do modelo rústico.....	3-59
3.4.5	Implementação do controle.....	3-63
3.4.6	Conclusões.....	3-64

CAPÍTULO 4 - CONTROLE ÓTIMO DESCENTRALIZADO DO NÍVEL DE POLUIÇÃO

NOS RIOS	4-1
4.1 Introdução.....	4-1
4.2 O problema da qualidade da água nos rios.....	4-2
4.3 Balanço de oxigênio nos rios.....	4-5
4.3.1 Decomposição biológica da matéria orgânica.....	4-5
4.3.2 Desoxigenação devida ao DBO.....	4-7
4.3.3 Reoxigenação (reaeração atmosférica).....	4-8
4.3.4 Reoxigenação por fotossíntese.....	4-9
4.3.5 Desoxigenação devida aos depósitos de lodos.....	4-9
4.4 Modelamento do OD e DBO nos rios.....	4-10
4.4.1 Reservatório reator de mistura contínua.....	4-11
4.4.2 Modelos do DBO e OD para um segmento de rio.....	4-13
4.4.3 Considerações de regime.....	4-17
4.5 Controle descentralizado de dois segmentos de rio sem atraso de transporte.....	4-18
4.5.1 Considerações de regime.....	4-19
4.5.2 Resultados da nossa implementação.....	4-22
4.6 Controle do OD e DBO para um sistema com três segmentos de rio.....	4-27
4.6.1 Considerações de regime e formulação do problema.....	4-27
4.6.2 Cálculo dos compensadores dinâmicos e resultados de simulação.....	4-34
4.7 Conclusões.....	4-42

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

Nos tempos atuais, sistemas de grande porte fazem parte da nossa sociedade; temos por exemplo: sistemas de potência, sistemas ecológicos, redes de tráfego urbano, sistemas econômicos, etc. Para tais sistemas, em muitos casos, um controle global pode não ser aconselhável (ou ser impossível), seja pela complexidade, tamanho, ou separação geográfica do sistema. É nestas situações que surge, como solução alternativa, a teoria e a prática do controle descentralizado. A idéia principal deste tipo de controle, é a de decompor o "sistema global", em subsistemas interconectados (ou pode já o sistema global ter esta estrutura), associando a cada subsistema um controlador local, que utiliza somente informações do subsistema, de tal forma que quando aplicados os controles locais, estes garantam a estabilidade e/ou um desempenho desejado para o sistema global.

Neste trabalho são analisadas técnicas de estabilização descentralizada e multinível e de controle ótimo descentralizado, para sistemas dinâmicos interconectados. Também são analisados modelos para a qualidade da água nos rios, especificamente os referentes aos fenômenos e/ou reações que envolvem a concentração de oxigênio na água (DBO e OD). A estes modelos são aplicadas as técnicas de controle descentralizado, de forma a manter níveis desejados de

concentração de oxigênio em segmentos de rios.

No segundo capítulo são apresentados alguns conceitos de estabilidade e otimização de sistemas. Recapitulamos o segundo método de Lyapunov [24,25,1], e a otimização de sistemas lineares com um grau pré-especificado de estabilidade [10]. Pretendemos com este capítulo, formular conceitos que são utilizados nos capítulos subsequentes.

O terceiro capítulo trata da estabilização e do controle de sistemas dinâmicos interconectados. Para este objetivo são analisadas técnicas de estabilização descentralizada e multinível [2,9,23], e técnicas de controle descentralizado [12,4]. As condições suficientes para a estabilização de sistemas dinâmicos interconectados são analisadas por meio de funções de Lyapunov, tanto escalares como vetoriais. São consideradas duas situações para as interconecções: lineares e invariantes no tempo, e não lineares e variantes no tempo. Em ambas situações, para os projetos dos controladores locais, é utilizada a teoria de controle ótimo (problema do regulador quadrático linear), escolhendo como funções de Lyapunov para o sistema global, aquelas compostas pelas soluções das equações de Riccati de cada subsistema isolado. No caso da estabilização descentralizada, os controladores locais podem garantir a estabilidade do sistema global, sempre que as interconecções satisfaçam certas condições. No caso do controle multinível, é utilizado um segundo nível de controle, que trata as interconecções como perturbações que devem ser diminuídas ou eliminadas. Cabe notar que para o projeto dos controladores locais não são tomadas em conta as interconecções. Um melhor desempenho para o sistema global, e que utilize um controle descentralizado, pode ser obtido pela utilização de duas técnicas de controle ótimo

descentralizado, que aqui são analisadas, e que são: controle descentralizado perto do ótimo com um pré-especificado grau de estabilidade [4] e controle descentralizado seguidor do modelo [4]; a primeira é realizada por meio de uma computação hierárquica de três níveis, e a segunda por meio de controladores dinâmicos locais.

No quarto capítulo, são aplicadas algumas técnicas de controle descentralizado, para o controle do nível de poluição dos rios. Para efeitos de controle e simulação, são analisados detalhadamente os efeitos e fenômenos que acontecem na água dos rios, especialmente os fatores que causam a diminuição e adição de oxigênio. É então obtido um modelo para os fenômenos de reoxigenação e desoxigenação (OD e DBO) para um segmento de rio. Este modelo é utilizado para os projetos dos controles descentralizados.

No último capítulo são apresentadas algumas conclusões referentes às técnicas aqui estudadas, e à aplicação de controles descentralizados ao controle da qualidade da água nos rios, assim como também são mencionados temas de pesquisa e trabalhos futuros nesta área.

ALGUNS CONCEITOS DE ESTABILIDADE E CONTROLE ÓTIMO

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos brevemente conceitos de estabilidade e otimização de sistemas, necessários para a análise e o projeto dos controladores apresentados nos capítulos 3 e 4. Na secção 2.2 é recapitulado o segundo método de Lyapunov, também chamado de métodos diretos; este tema pode ser encontrado em [24], [25], e [1] entre outros; na secção 2.3 é analisada a otimização de sistemas lineares com um pré-especificado grau de estabilidade, seguindo o trabalho de Anderson e Moore [10].

2.2 Estabilidade e segundo método de Lyapunov

Nesta secção recapitularemos brevemente as principais definições e resultados concernentes à estabilidade de sistemas (descritos por equações diferenciais) e ao segundo método de Lyapunov.

Uma das vantagens fundamentais do método de Lyapunov, é não precisarmos da solução matemática do modelo para o estudo da estabilidade do sistema; isto explica o qualificativo de direto ao método; o princípio do método de Lyapunov é relativamente simples, e pode ser introduzido por considerações de energia, da seguinte forma:

Consideremos um sistema físico isolado; é possível expressar a sua energia E em termos do vetor de estado x ; supondo que temos

somente um ponto de equilíbrio e que $dE/dt < 0$ (sistema dissipativo), para todo x , o ponto de equilíbrio é estável e a energia deve decrescer ao longo das trajetórias até alcançar o valor mínimo no ponto de equilíbrio; o segundo método de Lyapunov é baseado numa generalização deste fato. Para sistemas puramente matemáticos, entretanto, não há uma maneira simples de definir uma "função de energia"; para contornar esta dificuldade, Lyapunov introduziu a chamada função de Lyapunov, uma função de energia fictícia. A idéia é, entretanto, mais geral que a de energia, e é aplicável de forma mais ampla. De fato, qualquer função escalar que satisfaz as hipóteses dos teoremas de estabilidade de Lyapunov, é uma função de Lyapunov.

Se o princípio do método é relativamente simples, a sua aplicação vem trazer um problema delicado que é a determinação das funções de Lyapunov $V(x)$. Isto é fartamente discutido na literatura correspondente. Apresentamos apenas algumas definições importantes referentes à estabilidade de sistemas.

2.2.1 Estabilidade

Restringiremos nossa atenção a sistemas invariantes descritos por:

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad , \quad t \geq 0 \quad (2.2.1)$$

$x \in R^n$, $f(\cdot) : R^n \longrightarrow R^n$ é uma função contínua que satisfaz as condições de Lipschitz (unicidade das soluções de (2.2.1)).

Seja $x(t, x_0)$ solução única de (2.2.1), com a origem x_0 em $t=0$, e $\|x\|$ uma norma euclideana de x . Sem perda de generalidade podemos supor que a origem é o ponto de equilíbrio. A estabilidade é comumente entendida para uma situação onde o sistema está originalmente em equilíbrio, e se perturbado, retorna no transcurso do tempo ao

equilíbrio. Isto é, a distância entre o processo perturbado e o equilíbrio tende a zero no transcurso do tempo; isto será enunciado nas seguintes definições, onde consideramos o ponto de equilíbrio como sendo $x(0) = 0$; na realidade o ponto de equilíbrio pode não se encontrar na origem, e é possível redefinir o problema de forma a tratar essas situações.

Definição 2.1

O ponto de equilíbrio de (2.2.1) $x(0) = 0$ é estável se para todo $\varepsilon > 0$, se existe um $\delta(\varepsilon)$ tal que para $\|x_0\| < \delta(\varepsilon) \implies \|x(t, x_0)\| < \varepsilon$
 $\forall t \geq 0$.

Definição 2.2

O ponto de equilíbrio de (2.2.1) é assintoticamente estável se é estável e se existe um $\eta > 0$ tal que

para $\|x_0\| \leq \eta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$

Definição 2.3

O ponto de equilíbrio de (2.2.1) é exponencialmente estável se existe um $\sigma > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

para $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon) \implies \|x(t, x_0)\| \leq \varepsilon e^{-\sigma t}$

A interpretação geométrica das definições anteriores é dada na figura 2.1

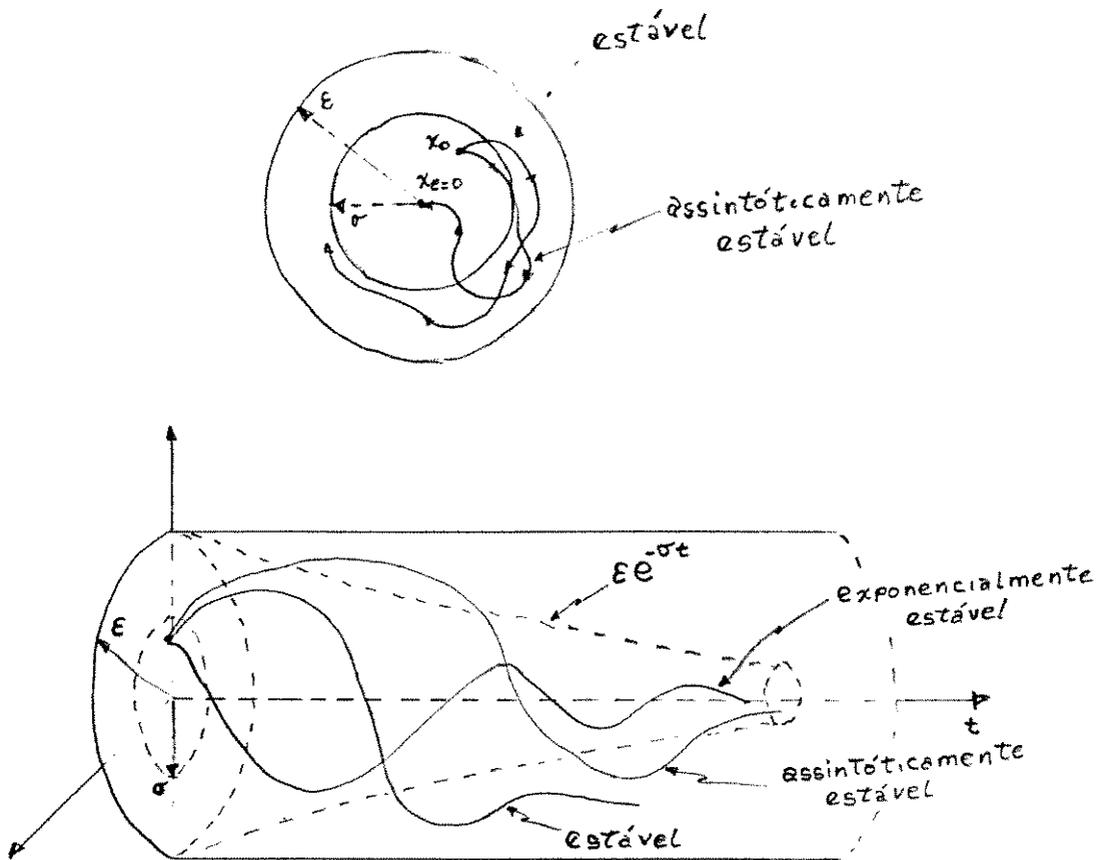


FIGURA 2.1

2.2.2 Funções definidas positivas

Abordaremos as definições referentes às funções ditas da classe k [25].

Definição 2.4

Uma função contínua $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, é da classe k se $\varphi(0) = 0$ e φ é estritamente crescente no intervalo da definição .

Consideramos principalmente as funções escalares $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas:

Definição 2.5

A função $V(x)$ é definida positiva se $V(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $V(x)=0$ se e somente se $x=0$.

Definição 2.6

A função $V(x)$ é semidefinida positiva se $V(x) \geq 0$ para todo $x \in R^n$.

A definição 2.5 pode ser enunciada com base na definição 2.4 da seguinte maneira:

$V(x)$ é uma função definida positiva se existe uma função φ que pertence à classe k tal que:

$$V(x) \geq \varphi(\|x\|) , \quad \forall x \in R^n$$

2.2.3 Teoremas de Lyapunov

Nas aplicações do segundo método de Lyapunov, estuda-se o sinal do incremento em relação ao tempo de uma função $V(t) = V[x(t)]$, com $x(t)$ solução de (2.2.1); esta relação pode ser calculada como:

$$\dot{V}_+(t)_+ = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{V(t+\delta t) - V(t)}{\delta t} \right\}$$

Se $V(\cdot)$ é diferenciável então podemos escrevê-la como:

$$\dot{V}_+(t)_+ = \dot{V}(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

Considerando a função $V(x(t))$, onde $x(t)$ é a solução de (2.2.1), temos:

$$V(x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{V(x(t+\delta t)) - V(x(t))}{\delta t} \right\} \quad (2.2.2)$$

Desenvolvendo $x(t)$ em série de Taylor em torno de t , e tomando uma aproximação de primeira ordem temos:

$$x(t+\delta t) \cong x(t) + \left. \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=t} \delta t \quad (2.2.3)$$

De (2.2.3) e (2.2.1) em (2.2.2) temos:

$$\dot{V}_+(x) = \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{V(x(t)+\delta t f(x)) - V(x(t))}{\delta t} \right\}$$

No caso de V ser diferenciável temos:

$$\dot{V}_+(x) = \dot{V}(x) = \nabla V(x)^t f(x) \quad (2.2.4)$$

Teorema 2.1

Se existe uma função definida positiva $V(x)$ tal que:

- a) $\varphi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varphi_2(\|x\|)$
- b) $\dot{V}(x) \leq 0$

onde φ_1 e φ_2 são duas funções pertencentes à classe k , o ponto de equilíbrio $x=0$ de (2.2.1) é estável.

Prova

Para dada uma condição inicial x_0 , no tempo $t=0$, encontramos a solução de (2.2.1) no tempo $t>0$ como $x(t, x_0)$. Integrando $\dot{V}(x)$ temos:

$$V(x(t, x_0)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(\tau, x_0)) d\tau \leq 0 \quad (2.2.5)$$

O segundo membro da equação é negativo pela hipótese b), portanto a integral será negativa para todo $t>0$; pela hipótese a) e (2.2.5) temos:

$$\varphi_1(\|x(t, x_0)\|) \leq V(x(t, x_0)) \leq \varphi_2(\|x_0\|) \quad (2.2.6)$$

Para todo $\varepsilon > 0$, escolhemos $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\varphi_2(\delta) \leq \varphi_1(\varepsilon)$; se $\|x_0\| \leq \delta(\varepsilon)$, pela definição das funções φ_i , $i=1,2$ e (2.2.6) temos:

$$\varphi_1(\|x(t, x_0)\|) \leq \varphi_2(\|x_0\|) \leq \varphi_2(\delta) \leq \varphi_1(\varepsilon)$$

portanto $\|x(t, x_0)\| \leq \varepsilon$ para todo $t > 0$.

Teorema 2.2

Se existe uma função definida positiva $V(x)$ tal que:

$$a) \varphi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varphi_2(\|x\|) \quad (2.2.7)$$

$$b) \dot{V}(x) \leq -\varphi_3(\|x\|) \quad (2.2.8)$$

onde φ_i , $i=1,2,3$ pertencem à classe k , então o ponto de equilíbrio $x=0$ de (2.2.1) é assintoticamente estável.

Prova

Como $\varphi_3 \geq 0$, pelo teorema anterior o ponto de equilíbrio é estável.

Por outra parte, de b) temos:

$$V(x(t, x_0)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(\tau, x_0)) d\tau \leq - \int_0^t \varphi_3(\|x(\tau, x_0)\|) d\tau \quad (2.2.9)$$

para todo $t \geq 0$, pela hipótese a) e (2.2.9) temos:

$$\varphi_1(\|x(t, x_0)\|) \leq \varphi_2(\|x_0\|) - \int_0^t \varphi_3(\|x(\tau, x_0)\|) d\tau$$

como $\varphi_1 \geq 0$ temos: $\varphi_2(\|x_0\|) \geq \int_0^t \varphi_3(\|x(\tau, x_0)\|) d\tau$

Seja $\|x_0\| \leq \eta$, $\eta > 0$

$$\infty > \varphi_2(\eta) \geq \varphi_2(\|x_0\|) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi_3(\|x(\tau, x_0)\|) d\tau$$

que implica: $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0$

Teorema 2.3

Se existe uma função definida positiva tal que:

$$a) \mu_1 \|x\| \leq V(x) \leq \mu_2 \|x\| \quad (2.2.10)$$

$$b) \dot{V}(x) \leq -\mu_3 \|x\| \quad (2.2.11)$$

onde $\mu_i > 0$ (reais), $i=1,2,3$, o ponto de equilíbrio $x=0$ de (2.2.1) é exponencialmente estável.

Prova

Como feito anteriormente podemos escrever:

$$V(x(t, x_0)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(\tau, x_0)) d\tau \leq \int_0^t \mu_3 (-\|x(\tau, x_0)\|) d\tau \quad (2.2.12)$$

de (2.2.10) temos $\frac{(-V(x))}{\mu_2} \geq (-\|x\|)$, de (2.2.12) temos:

$$V(x(t, x_0)) - V(x_0) = - \int_0^t \mu_3 \|x(\tau, x_0)\| d\tau \leq - \int_0^t \frac{\mu_3}{\mu_2} V(x(\tau, x_0)) d\tau$$

$$V(x(t, x_0)) - V(x_0) \leq - \int_0^t \frac{\mu_1}{\mu_2} V(x(\tau, x_0)) d\tau$$

$$dV(x) \leq - \frac{\mu_1}{\mu_2} V(x) dt \implies \ln \left(\frac{V(x)}{V(x_0)} \right) \leq - \frac{\mu_1}{\mu_2} t, \text{ ou podemos escrever}$$

$$V(x(t, x_0)) \leq V(x_0) \exp\left[-\frac{\mu_1}{\mu_2} t\right]; \text{ de (2.2.10) temos:}$$

$$\|x(t, x_0)\| \leq \frac{V(x_0)}{\mu_1} \exp(-\sigma t) \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \|x_0\| \exp(-\sigma t) = \varepsilon \|x_0\| \exp(-\sigma t)$$

pela definição 2.3 o ponto de equilíbrio é exponencialmente estável.

2.2.4 Teorema de Corduneanu

Seja $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, uma função definida positiva tal que:

$$\dot{V}(x) \leq h(V(x)) \tag{2.2.13}$$

para uma solução de (2.2.1). Consideremos o sistema dinâmico escalar, chamado de sistema de comparação, definido como:

$$\dot{w} = h(w) \tag{2.2.14}$$

e que é suposta ter solução única, para todo $w(0) = w_0 \geq 0$. Supondo que $w=0$ é um ponto de equilíbrio isolado de (2.2.14). Então:

a) Se existem duas funções da classe k , φ_1 e φ_2 , tal que:

$\varphi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varphi_2(\|x\|)$; e se o sistema de comparação é estável, então o ponto de equilíbrio do (2.2.1) é estável.

b) Se existem duas funções da classe k , φ_1 e φ_2 , tal que:

$\varphi_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varphi_2(\|x\|)$, e se o sistema de comparação é assintoticamente estável, então o ponto de equilíbrio de (2.2.1) é assintoticamente estável.

c) Se existem μ_1 e μ_2 reais positivos tal que:

$\mu_1 \|x\| \leq V(x) \leq \mu_2 \|x\|$, e se o sistema de comparação é exponencialmente estável, então o ponto de equilíbrio de (2.2.1), é exponencialmente estável.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [24].

A aplicação destas técnicas globais, para a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos de grande porte, é difícil, e algumas vezes impossível, devido à complexidade e ao tamanho do sistema. Assim a análise de estabilidade, neste caso, pode ser conduzida por técnicas de decomposição-agregação [1,2, 24], que utilizam o chamado sistema de comparação vetorial. Este método de análise será considerado a seguir.

2.2.5 Método da decomposição-agregação

A idéia principal é a de que um outro "sistema dinâmico de comparação" (extensão do teorema de Corduneanu para o caso vetorial), pode ser construído via funções vetoriais de Lyapunov com as mesmas propriedades de estabilidade do sistema original. Para este método, sistemas dinâmicos de grande porte devem ser decompostos em subsistemas, para os quais as funções de Lyapunov para cada subsistema, possam ser obtidas mais facilmente do que no caso do sistema global. Então das informações de cada subsistema isolado e das interconexões, técnicas de agregação podem ser aplicadas para gerar o sistema de comparação, permitindo assim, o estudo da estabilidade via tal sistema de comparação.

Este método de estudo pode ser descrito nos seguintes passos:

a) Escolha da função vetorial de Lyapunov $V(x)=[V_1(x), \dots, V_N(x)]$, onde $V_i(x)$ representa a função de Lyapunov de cada subsistema isolado,

e N é o número dos subsistemas. A escolha da função $V(x)$ constitui o problema de agregação, e pode ser baseada em considerações físicas ou matemáticas.

b) Construção do sistema de comparação; pode ser realizada utilizando a função vetorial de Lyapunov e as informações sobre as interconexões de cada subsistema isolado.

c) Estudo da estabilidade do sistema de comparação, que têm as mesmas propriedades do sistema original.

As referências sugeridas para este tema são [1,2,6,24,34].

2.3 OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM UM PRÉ-ESPECIFICADO GRAU DE ESTABILIDADE

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.3.1)$$

com uma lei de controle linear da forma

$$u = -Kx \quad (2.3.2)$$

onde A, B, K são matrizes constantes $n \times n$, $n \times r$, $r \times n$ respectivamente, x é vetor de estado de dimensão $n \times 1$, e u é o vetor de controle de dimensão $r \times 1$.

Em geral, não é possível minimizar um índice de desempenho quadrático e, ao mesmo tempo, alocar pólos arbitrariamente em malha fechada. Já com a otimização de sistemas com um pré-especificado grau $\alpha > 0$ de estabilidade, é possível minimizar um índice de desempenho quadrático, e ao mesmo tempo assegurar que os pólos em malha fechada estejam no lado esquerdo da linha $R(s) = -\alpha$ do plano complexo S . Isto será mostrado a seguir.

2.3.1 Resumo dos resultados do controle ótimo do regulador quadrático com horizonte infinito

No problema do regulador quadrático com horizonte infinito temos que minimizar o seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_0^{\infty} 1/2(x^t Q x + u^t R u) dt \quad (2.3.3)$$

sujeito à equação (2.3.1); a matriz Q é uma matriz constante simétrica semidefinida positiva e R é uma matriz constante simétrica definida positiva.

O par (A,B) deve ser completamente controlável, pelo seguinte motivo: se (A,B) não é completamente controlável, os estados incontroláveis podem ser colocados para fora do índice de desempenho, pelo fato de estes estados, não serem afetados pela lei de controle u; e a contribuição desses estados no índice de desempenho pode ser infinita, fazendo que o problema de otimização não tenha sentido; ou pode acontecer também que esses estados sejam assintoticamente estáveis e que a sua contribuição ao índice seja finita.

O controle u que minimiza o índice de desempenho é uma lei linear [26] dada por:

$$u = - R^{-1} B^t P x \quad (2.3.4)$$

onde P é uma matriz simétrica definida positiva, solução da equação de Riccati:

$$A^t P + P A - P B R^{-1} B^t P + Q = 0 \quad (2.3.5)$$

O valor do índice de desempenho quando a lei de controle ótimo é utilizada é dado por $x_0^t P x_0$; a estabilidade do sistema em malha fechada

é considerada no seguinte teorema:

Teorema 2.3.1

Se o par (A,B) é estabilizável e o par (A,H) é detetável, (H) é uma matriz tal que $Q = H^t H$, então existe um único controle ótimo u^0 que minimiza (2.3.3) e que pode ser expresso como uma realimentação linear de estados:

$$u^0 = - K^0 x(t) \quad , \text{ onde } K^0 = R^{-1} B^t P^0$$

P^0 é a única matriz solução da equação de Riccati (2.3.5).

Por outra parte, a matriz de estado em malha fechada $A-BK^0$ é uma matriz estável.

Para a prova deste teorema ver [8].

A equação matricial de Riccati pode ter muitas soluções para P , porém sob as condições do teorema 2.3.1, somente uma dessas soluções é semidefinida positiva. Se o par (H,A) é observável, então P^0 é uma matriz definida positiva.

A escolha da solução (semidefinida) definida positiva é determinada pelas condições para a estabilidade assintótica do sistema. De fato, a equação de Riccati pode ser escrita como uma equação de Lyapunov com respeito ao sistema em malha fechada:

$$(A-BK^0)^t P + P(A-BK^0) + Q + K^{0t} R K^0 = 0$$

onde $Q + K^{0t} R K^0$ é pelo menos uma matriz semidefinida positiva. Em conformidade com o segundo método de Lyapunov, se a matriz P^0 é positiva semidefinida e o par $(A-BK^0, M)$ é detectável, onde $M^t M = Q + K^{0t} R K^0$, então $A-BK^0$ é uma matriz estável.

2.3.2 Alocação dos polos em malha fechada na região $R(s) < \alpha$

Consideremos o seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} (x^t Q x + u^t R u) dt \quad (2.3.6)$$

onde Q e R são matrizes semidefinida e definida positiva respectivamente.

Fazendo $\hat{x} = x e^{\alpha t}$ e $\hat{u} = u e^{\alpha t}$ e substituindo em (2.3.1), obtemos a seguinte equação equivalente:

$$\dot{\hat{x}} = (A + \alpha I)\hat{x} + B\hat{u}, \quad \hat{x}(t_0) = e^{\alpha t_0} x_0 \quad (2.3.7)$$

e o índice de desempenho fica como:

$$J = \int_0^{\infty} (\hat{x}^t Q \hat{x} + \hat{u}^t R \hat{u}) dt \quad (2.3.8)$$

Restringiremos a nossa atenção aos sistemas completamente controláveis. Para (A, B) completamente controlável, o controle que minimiza o índice de desempenho (2.3.8) sujeita a (2.3.7), é dado por:

$$\hat{u} = - \hat{K} \hat{x} \quad (2.3.9)$$

onde $\hat{K} = R^{-1} B^t \hat{P}$, e \hat{P} é solução única da equação de Riccati:

$$P(A + \alpha I) + (A + \alpha I)^t P - P B R^{-1} B^t P + Q = 0$$

De (2.3.9) temos:

$$u = -\hat{K}x$$

e o sistema em malha fechada será:

$$\dot{x} = (A - B\hat{K})x$$

Desta forma, vemos que a construção da lei de controle não é mais difícil do que o cálculo do controle para o caso em que $\alpha = 0$.

Como anteriormente, supomos que a matriz $Q = H^t H$, é tal que o par (A, H) é completamente observável. A estabilidade assintótica para o sistema dado pela equação (2.3.7) está assegurada. Este sistema em malha fechada é:

$$\dot{\hat{x}} = (A - B\hat{K} + \alpha I)\hat{x}$$

e como os polos deste sistema têm parte real negativa, temos:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A - B\hat{K} + \alpha I)) < 0$$

portanto $\operatorname{Re}(\lambda_i(A - B\hat{K})) + \alpha < 0$, ou

$$\operatorname{Re}[\lambda_i(A - B\hat{K})] < -\alpha,$$

onde $\lambda_i(\cdot)$ é o i -ésimo autovalor do argumento.

Então os autovalores de $A - B\hat{K}$ possuem parte real menor que $-\alpha$; desta forma o sistema é estabilizado exponencialmente, com grau α .

CAPÍTULO 3

TÉCNICAS DE ESTABILIZAÇÃO DESCENTRALIZADA E MULTINÍVEL E DE CONTROLE ÓTIMO DESCENTRALIZADO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos técnicas de estabilização descentralizada e multinível e de controle descentralizado para sistemas de grande porte. Nas secções 3.2.1 e 3.2.2 são estudados métodos de controle descentralizado que utilizam funções de Lyapunov tanto escalar como vetorial para sistemas lineares e invariantes no tempo [2]; na secção 3.2.3 analisamos métodos para sistemas com interconecções não lineares [9]; e na secção 3.2.4 é analisado o caso do controle multinível [24]. Na secção 3.3 é apresentado o método de controle descentralizado perto do ótimo baseado no trabalho de Hassan [12]; por se tratar de um problema com restrições matriciais, o cálculo do ganho para o controle descentralizado é realizado numa estrutura hierárquica de três níveis de computação e por último na secção 3.4 o controle descentralizado é realizado por meio de compensadores dinâmicos [4].

3.2 CONTROLE DESCENTRALIZADO UTILIZANDO TEORIA E CONCEITOS DE FUNÇÕES DE LYAPUNOV

Utilizaremos técnicas de controle ótimo para a estabilização de cada subsistema isolado, possibilitando o projeto de um conjunto de controladores descentralizados que estabilizem o sistema global. Para tal objetivo, funções de Lyapunov serão usadas como ferramenta de projeto de modo a obter condições suficientes para a estabilidade do sistema global.

3.2.1 Controle descentralizado por meio de funções escalares de Lyapunov

Consideremos o problema de estabilização descentralizada de sistemas de grande porte lineares e invariantes no tempo.

Temos o seguinte sistema S descrito como uma interconecção de N subsistemas S_1, S_2, \dots, S_N que é representado por:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.1)$$

$x_i \in R^{n_i}$ é o vetor de estado do i -ésimo subsistema,

$u_i \in R^{m_i}$ é o vetor de controle ; $A_i \in R^{n_i \times n_i}$, $B_i \in R^{n_i \times m_i}$,

$A_{ij} \in R^{n_i \times n_j}$ matrizes de interconecção constantes.

Todos os pares (A_i, B_i) são supostos controláveis. O termo $A_{ij} x_j$ representa o efeito do j -ésimo subsistema sobre o i -ésimo subsistema.

O problema agora é encontrar um controlador descentralizado u_i da forma:

$$u_i = -G_i x_i \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3.2.2)$$

que minimiza um índice de desempenho J_i , que assegure a estabilidade do sistema global S dado por (3.2.1).

Considerando os subsistemas desacoplados isolados $S_1^0, S_2^0, \dots, S_N^0$ nos quais todas as interações são adotadas serem nulas, isto é:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.2.3)$$

cada subsistema $S_1^0, S_2^0, \dots, S_N^0$ descrito por (3.2.3) pode ser estabilizado exponencialmente com um grau α pré-especificado da mesma maneira que em (2.3) do capítulo anterior.

Para tal objetivo, associamos um índice de desempenho definido por:

$$J_i = \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} (x_i^t Q_i x_i + u_i^t R_i u_i) dt \quad (3.2.4)$$

onde $Q_i \in R^{n_i \times n_i}$ e $R_i \in R^{m_i \times m_i}$ são matrizes semidefinida positiva e definida positiva respectivamente. O índice de desempenho para o sistema global é dado por:

$$J = \sum_{i=1}^N J_i \quad (3.2.5)$$

Isto é, cada subsistema é otimizado com respeito a seu próprio índice de desempenho, indiferentemente da conduta dos outros subsistemas.

Então o vetor de controle é dado por:

$$u_i = - R_i^{-1} B_i^t K_i x_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.2.6)$$

onde K_i é uma matriz simétrica definida positiva, solução da equação matricial de Riccati:

$$A_i^t K_i + K_i A_i - K_i (B_i R_i^{-1} B_i^t) K_i + 2\alpha K_i + Q_i = 0 \quad (3.2.7)$$

Utilizando o vetor de controle dado por (3.2.6), os subsistemas em malha fechada serão dados por:

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i R_i^{-1} B_i^t K_i) x_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.8)$$

Cada um desses subsistemas isolados tem a propriedade: $x_i e^{\alpha t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, isto é: são exponencialmente estabilizados com o grau de estabilidade α .

O sistema global utilizando os controles dados por (3.2.6) é descrito por:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^tK)x + A_c x \quad (3.2.9)$$

onde $x^t = [x_1^t, x_2^t, \dots, x_N^t]$, $u^t = [u_1^t, u_2^t, \dots, u_N^t]$

$$A = \text{diag}(A_i) \quad ; \quad B = \text{diag}(B_i) \quad ; \quad A_c = [A_{ij}]$$

$$n = \sum_{i=1}^N n_i \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$R^{-1} = \text{diag}(R_i^{-1}) \quad , \quad K = \text{diag}(K_i)$$

Por causa das interconecções A_c , este controle descentralizado

por ele mesmo não garante a estabilidade assintótica do sistema global. Portanto para que o sistema com este controle seja assintoticamente estável, precisamos satisfazer certas condições, que em nosso caso, se obtidas serão suficientes. Para tal objetivo fazemos uso do segundo método de Lyapunov; nos seguintes teoremas são dadas essas condições.

Teorema 3.2.1

O sistema original (3.2.1) pode ser estabilizado na forma descentralizada pelo controle $u = -R^{-1}B^tKx$, se a matriz

$$M = 2\alpha K + W - (KA_c + A_c^tK) \text{ é uma matriz definida positiva,}$$

onde: $W = Q + KBR^{-1}B^tK$

Prova

A prova é baseada na teoria de Lyapunov. Considere a função positiva definida de Lyapunov $V(x)$, composta pela somatória de funções de Lyapunov para cada subsistema isolado dadas por:

$$V_i(x_i) = x_i^t K_i x_i \quad (3.2.10)$$

A função de Lyapunov para o sistema global será dada por:

$$V(x) = \sum_{i=1}^N V_i(x_i) = \sum_{i=1}^N x_i^t K_i x_i = x^t K x \quad (3.1.11)$$

onde $K = \text{diag}(K_i)$ e x é o vetor de estado global. Derivando (3.2.11) e substituindo (3.1.9) temos:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t K x + x^t K \dot{x}$$

$$\dot{V}(x) = ([A - BR^{-1}B^tK + A_c]x)^t K x + x^t K [A - BR^{-1}B^tK + A_c]x$$

$$\dot{V}(x) = x^t (A^t - (BR^{-1}B^tK)^t + A_c^t) K x + x^t (KA - KBR^{-1}B^tK + KA_c) x$$

$$\dot{V}(x) = x^t (A^t K - 2KBR^{-1}B^tK + KA + A_c^t K + KA_c) x \quad (3.2.12)$$

Como os K_i são soluções das equações de Riccati (3.2.7), podemos escrever essas equações na forma compacta :

$$A^t K + KA - KBR^{-1}B^tK + 2\alpha K + Q = 0$$

$$\Rightarrow A^t K + KA - 2KBR^{-1}B^tK = -2\alpha K - Q - KBR^{-1}B^tK = -2\alpha K - W$$

Substituindo em (3.2.12) temos:

$$\dot{V}(x) = -x^t (2\alpha K + W - [KA_c + A_c^t K]) x \quad (3.2.13)$$

Para que (3.2.13) seja uma função definida negativa, e desta forma o sistema assintoticamente estável, a matriz

$$M = 2\alpha K + W - [KA_c + A_c^t K] \quad (3.2.14)$$

deve ser definida positiva.

Testar se esta matriz é definida positiva pode ser difícil, para sistemas de grande porte. A seguir apresentamos um corolário que dá uma condição suficiente, para a estabilidade assintótica do sistema.

Corolário 3.2.1

Uma condição suficiente para que M seja uma matriz definida positiva, e assim o sistema global assintoticamente estável, é dada por:

$$2\alpha \inf_i \lambda_{\min}(K_i) + \inf_i \lambda_{\min}(W_i) > 2 \|A_c\| \sup_i \lambda_{\max}(K_i) \quad (3.2.15)$$

Prova

Para que M seja uma matriz definida positiva temos que ter $x^t M x > 0$ para todo x ; utilizando (3.2.14) temos:

$$x^t M x = 2\alpha x^t K x + x^t W x - x^t [K A_c + A_c^t K] x > 0 \quad ; \text{como}$$

$$\lambda_{\min}(K) \|x\|^2 \leq x^t K x \leq \lambda_{\max}(K) \|x\|^2$$

$$\implies 2\alpha \lambda_{\min}(K) \|x\|^2 \leq 2\alpha x^t K x \quad (3.2.16)$$

$$\lambda_{\min}(W) \|x\|^2 \leq x^t W x \leq \lambda_{\max}(W) \|x\|^2 \quad (3.2.17)$$

$$x^t [K A_c + A_c^t K] x = 2 x^t K A_c x \leq 2 \|x^t K A_c x\| \leq 2 \|x\| \|K\| \|A_c\| \|x\| = 2 \|A_c\| \|K\| \|x\|^2$$

$$x^t [K A_c + A_c^t K] x \leq 2 \|A_c\| \sqrt{\lambda_{\max}(K K^t)} \|x\|^2 = 2 \|A_c\| \lambda_{\max}(K) \|x\|^2$$

$$\implies -2 \|A_c\| \lambda_{\max}(K) \|x\|^2 \leq -x^t [K A_c + A_c^t K] x \quad (3.2.18)$$

Somando as desigualdades (3.2.16), (3.2.17) e (3.2.18) temos:

$$\begin{aligned} 0 < 2\alpha \lambda_{\min}(K) \|x\|^2 + \lambda_{\min}(W) \|x\|^2 - 2 \|A_c\| \lambda_{\max}(K) \|x\|^2 \\ \leq 2\alpha x^t K x + x^t W x + x^t [K A_c + A_c^t K] x \end{aligned}$$

portanto temos:

$$2\alpha\lambda_{\min}(K)\|x\|^2 + \lambda_{\min}(W)\|x\|^2 > 2\|A_c\|\lambda_{\max}(K)\|x\|^2 \quad \text{ou}$$

$$2\alpha\lambda_{\min}(K) + \lambda_{\min}(W) > 2\|A_c\|\lambda_{\max}(K)$$

Agora como:

$$\lambda_{\min}(K) = \inf_i \lambda_{\min}(K_i)$$

$$\lambda_{\min}(W) = \inf_i \lambda_{\min}(W_i)$$

$$\lambda_{\max}(K) = \sup_i \lambda_{\max}(K_i)$$

a condição suficiente para que M seja uma matriz definida positiva é dada por:

$$2\alpha \inf_i \lambda_{\min}(K_i) + \inf_i \lambda_{\min}(W_i) > 2\|A_c\| \sup_i \lambda_{\max}(K_i)$$

Exemplo 3.1

Seja o sistema S formado por 3 subsistemas [24]:

$$S_1: \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_3$$

$$S_2: \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} x_3$$

$$S_3: \dot{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x_2$$

Calculamos os ganhos do controle descentralizado seguindo o procedimento anterior, para um $\alpha=3$, e com os índices de desempenho dados por:

$$Q_1=Q_2=Q_3= I_2 \quad , \quad R_1=R_3=1 \quad \text{e} \quad R_2= I_2$$

As soluções da equação de Riccati dos subsistemas são:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 6.9142 & -0.3036 \\ -0.3036 & 0.9303 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0.7720 & 0.2062 \\ 0.2062 & 0.8554 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 2.0973 & -0.1819 \\ -0.1819 & 0.2933 \end{bmatrix}$$

A matriz M resultante da equação 3.2.14 é:

$$M = \begin{bmatrix} 86.1854 & 2.3208 & -3.3208 & -7.0174 & -6.2458 & 0.4855 \\ 2.3208 & 6.9746 & -1.4474 & 0.5251 & 0.2731 & -1.0770 \\ -3.5395 & -1.4474 & 11.6766 & 5.4930 & -2.7783 & -0.2477 \\ -7.0174 & 0.5251 & 5.4930 & 18.2217 & -0.2062 & 0.3246 \\ -6.2458 & 0.2731 & -2.7783 & -0.2062 & 28.2582 & -0.2376 \\ 0.4855 & -1.0770 & -0.2477 & 0.3246 & -0.2376 & 2.8094 \end{bmatrix}$$

os autovalores de M são:

$$\lambda(M) = [87.8037, 28.5632, 19.7873, 2.4331, 6.3238, 9.2151]$$

e M é uma matriz definida positiva, portanto o sistema é assintoticamente estável, pelo teorema 3.2.1. As matrizes ganho são dadas por:

$$G_1 = [6.6106 \quad 0.6267]$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 2.3160 & 0.6187 \\ 0.8250 & 3.4215 \end{bmatrix}, \quad G_3 = [3.8308 \quad 0.2228]$$

As condições dadas pelos teoremas 3.2.1 e pelo corolário 3.2.1 garantem a estabilidade assintótica do sistema global, porém não fornecem nenhuma medida sobre o grau de estabilidade do sistema global. Na seção 3.1.4 será estudada uma forma de obter estabilidade exponencial com grau α para o sistema global.

3.2.2 Controle descentralizado via funções vetoriais de Lyapunov

Este método é baseado na construção de uma função vetorial de

Lyapunov composta por funções escalares de Lyapunov de cada subsistema isolado; mediante essa função é possível determinar uma condição suficiente para a estabilidade do sistema global, permitindo dessa maneira o projeto de controladores descentralizados que asseguram a estabilidade assintótica do sistema global.

Consideremos o sistema global dado pela equação (3.2.1); seguindo o mesmo procedimento da secção anterior, podemos encontrar controladores $u_i = -G_i x_i$ de tal maneira que cada subsistema isolado seja estabilizado exponencialmente com um grau pré-especificado de estabilidade α .

Definimos a função vetorial de Lyapunov, que está composta de funções de Lyapunov de cada subsistema da seguinte maneira:

$$V(\hat{\Omega}) = \begin{bmatrix} V_1(\hat{\Omega}_1) \\ \vdots \\ V_N(\hat{\Omega}_N) \end{bmatrix} \quad \text{onde } x_i \text{ são os estados do } i\text{-ésimo subsistema}$$

e $\hat{\Omega}_i = x_i e^{\alpha t}$, $V_i(\hat{\Omega}_i)$ é a sua função de Lyapunov definida por:

$$V_i(\hat{\Omega}_i) = \sqrt{\hat{\Omega}_i^t K_i \hat{\Omega}_i}$$

onde K_i é a solução da equação de Riccati (3.2.7)

A seguir apresentamos um teorema que dá uma condição suficiente para garantir a estabilidade assintótica do sistema global, construindo um sistema de comparação, como foi analisado no capítulo anterior.

Teorema 3.2.2

O sistema linear interconectado de grande porte dado pelas

equações (3.2.1), pode ser estabilizado assintoticamente na forma descentralizada pelos controles u_i dados pelas equações (3.2.6), se a matriz L com elementos l_{ij} definidos por :

$$l_{ij} = \left. \begin{array}{l} \frac{-\lambda_m([K_i A_i + A_i^t K_i]/2 + \alpha K_i + Q_i)}{\lambda_m(K_i)} \quad \text{para } i=j \\ \frac{\lambda_m(K_i) \|A_{ij}\|}{\sqrt{\lambda_m(K_i)} \sqrt{\lambda_m(K_j)}} \quad \text{para } i \neq j \end{array} \right\} \quad (3.2.19)$$

for uma matriz definida negativa.

Prova

Escolhemos V_i para cada subsistema como:

$$V_i = \sqrt{\hat{x}_i^t K_i \hat{x}_i} \quad (3.2.20)$$

onde

$$\dot{\hat{x}}_i = (A_i + \alpha I_i) \hat{x}_i + B_i \hat{u}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N A_{ij} \hat{x}_j \quad ; \quad \hat{u}_i = -R_i^{-1} B_i^t K_i \hat{x}_i \quad ; \quad \hat{x}_i = \hat{x}_i e^{\alpha t}$$

onde

$$\hat{u}_i = u_i e^{\alpha t} \quad ; \quad \hat{x}_j = x_j e^{\alpha t} \quad \text{e } I_i \text{ é a matriz identidade de dimensão } n_i$$

Derivando (3.2.20), temos:

$$\dot{V}_i = 2 \sqrt{\frac{1}{\hat{x}_i^t K_i \hat{x}_i}} \left[\hat{x}_i^t K_i \dot{\hat{x}}_i + \hat{x}_i^t K_i \hat{x}_i \right]$$

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2V_i} \left[((A_i + \alpha I_i) \hat{x}_i + B_i \hat{u}_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{x}_j)^t K_i \hat{x}_i + \hat{x}_i^t K_i [(A_i + \alpha I_i) \hat{x}_i + B_i \hat{u}_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{x}_j] \right]$$

Substituindo u_i dado por (3.2.6) obtemos:

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2V_i} \left[\hat{X}_i^t (A_i^t K_i + \alpha K_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^t K_i) \hat{X}_i + \left[\sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{X}_j \right]^t K_i \hat{X}_i + \right.$$

$$\left. \hat{X}_i^t (K_i A_i + \alpha K_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^t K_i) \hat{X}_i + \hat{X}_i^t K_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{X}_j \right]$$

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2V_i} \left[\hat{X}_i^t (A_i^t K_i + K_i A_i + 2\alpha K_i - 2K_i B_i R_i^{-1} B_i^t K_i) \hat{X}_i + 2\hat{X}_i^t K_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{X}_j \right]$$

Como K_i é a solução da equação de Riccati dada pela equação (3.2.7)

temos

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2V_i} \left[\hat{X}_i^t (-Q_i - K_i B_i R_i^{-1} B_i^t K_i) \hat{X}_i + 2\hat{X}_i^t K_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{X}_j \right]$$

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2V_i} \left[-2\hat{X}_i^t \left(\frac{Q_i + K_i B_i R_i^{-1} B_i^t K_i}{2} \right) \hat{X}_i + 2\hat{X}_i^t K_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{X}_j \right]$$

como

$$\frac{1}{2} (Q_i + K_i B_i R_i^{-1} B_i^t K_i) = \frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i, \text{ temos}$$

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2V_i} \left[-2\hat{X}_i^t \left(\frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i \right) \hat{X}_i + 2\hat{X}_i^t K_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \hat{X}_j \right]$$

onde

$$\frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i \text{ é uma matriz definida positiva.}$$

Para $x^t W x$, sendo W matriz semidefinida positiva, é válida a relação

$$\lambda_m(W) \|x\|^2 \leq x^t W x \leq \lambda_M(W) \|x\|^2 ; \text{ portanto temos}$$

$$-2\lambda_m \left(\frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i \right) \|\hat{x}_i\|^2 \geq -2\hat{x}_i^t \left(\frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i \right) \hat{x}_i \quad (3.2.21)$$

como

$$2\hat{x}_i^t K_i \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j \leq 2\|\hat{x}_i^t K_i\| \sum_{j=1}^N \|A_{ij} \hat{x}_j\| \leq 2\|\hat{x}_i^t\| \|K_i\| \sum_{j=1}^N \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\| \quad (3.2.22)$$

Dividindo as relações (3.2.21) e (3.2.22) por $2V_i$ e somando-as temos

$$\dot{V}_i \leq \frac{1}{2V_i} \left[-2\lambda_m \left(\frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i \right) \|\hat{x}_i\|^2 + 2\|\hat{x}_i^t\| \|K_i\| \sum_{j=1}^N \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\| \right]$$

Como $x^t W x \leq \lambda_M(W) \|x\|^2 \Rightarrow \|x\|^2 \geq \frac{x^t W x}{\lambda_M(W)}$; $W \geq 0$ temos, para

$$V_i^2 \leq \lambda_M(K_i) \|\hat{x}_i\|^2 \Rightarrow \|\hat{x}_i\|^2 \geq \frac{V_i^2}{\lambda_M(K_i)}$$

$$\|K_i\| = \lambda_M(K_i) \quad \text{e} \quad \|\hat{x}_j\| \leq \frac{V_j}{\sqrt{\lambda_m(K_j)}}$$

A relação para \dot{V}_i pode ser escrita como:

$$\dot{V}_i \leq \frac{1}{V_i} \left[-\lambda_m \left(\frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i \right) \frac{V_i^2}{\lambda_M(K_i)} + \right.$$

$$\left. \frac{V_i}{\sqrt{\lambda_m(K_i)}} \lambda_M(K_i) \sum_{j=1}^N \|A_{ij}\| \frac{V_j}{\sqrt{\lambda_m(K_j)}} \right]$$

$$\dot{V}_i \leq -\lambda_m \left(\frac{K_i A_i + A_i^t K_i}{2} + \alpha K_i + Q_i \right) \frac{V_i}{\lambda_M(K_i)} + \frac{\lambda_M(K_i)}{\sqrt{\lambda_m(K_i)}} \sum_{j=1}^N \|A_{ij}\| \frac{V_j}{\sqrt{\lambda_m(K_j)}}$$

ou

$$\dot{V}_i \leq l_{ii} V_i + (l_{i1} V_1 + l_{i2} V_2 + \dots + l_{iN} V_N) \quad , i=1,2,\dots,N$$

Escrevendo na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & & l_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & & l_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \dot{V} \leq L V$$

Então o sistema será assintoticamente estável se L for uma matriz definida positiva.

Exemplo 3.2

Consideramos o sistema S de quarta ordem composto de dois subsistemas, S_1 e S_2 :

$$s_1: \dot{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0.15 & 0 \end{bmatrix} x_2$$

$$s_2: \dot{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 \\ 2 & -0.8 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix} x_1$$

Este sistema é instável na ausência de controle, sendo os autovalores $\lambda(A) = [0.8948, -0.0487, -1.0256, -0.6206]$

Os ganhos do controle descentralizado foram calculados para um $\alpha=0$, com as matrizes dos índices de desempenho dadas por:

$$Q_1 = Q_2 = 2I_2 \quad \text{e} \quad R_1 = R_2 = 1$$

Os cálculos do método foram realizados programando em Matlab; os resultados são:

$$G_1 = [1.4824 \quad 0.1975] \quad \text{e} \quad G_2 = [3.0848 \quad 0.5735]$$

$$L = \begin{bmatrix} -0.6448 & 0.2525 \\ 0.5011 & -0.3250 \end{bmatrix}$$

$\lambda(L) = [-0.8749, -0.0949]$, portanto L é uma matriz definida negativa, e pelo teorema 3.2.2 o sistema com este controle é assintoticamente estável.

A seguir estudaremos o caso da estabilização exponencial de sistemas de grande porte com interconecções não lineares; especificamente estudaremos as condições de estrutura ou de limites de norma para se obter condições suficientes que assegurem a estabilidade exponencial do sistema global.

3.2.3 Estabilização exponencial descentralizada de sistemas de grande porte

Nesta secção estudamos os métodos para estabilizar exponencialmente sistemas de grande porte com interconecções lineares e não lineares por meio de realimentação de estados descentralizados baseados no trabalho do Sundareshan [9].

O sistema global é estabilizado para um desejado grau α , por meio de um conjunto de controladores descentralizados, que são projetados para estabilizar exponencialmente seus próprios subsistemas quando isolados. Então condições suficientes são formuladas utilizando funções escalares de Lyapunov.

3.2.3.1 Descrição do problema

Consideremos um sistema de grande porte S que pode ser descrito como uma interconecção de N subsistemas S_1, S_2, \dots, S_N :

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + h_i(t, x) \quad , \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.2.23)$$

$x_i \in R^{n_i}$, é o vetor de estado do i -ésimo subsistema S_i

u_i é a sua função de controle ; $h_i(t,x)$ denota a interconecção do resto do sistema sobre S_i ; A_i, B_i são matrizes constantes.

Queremos estabilizar o sistema global, por meio de realimentação de estados descentralizados, para um grau $\alpha > 0$ de estabilidade; para tal objetivo as entradas $u_i(t) = \Phi_i(t,x)$ desejáveis devem ser tais que todas as soluções do sistema compensado:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i \Phi_i(t,x) + h_i(t,x) \quad , i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.24)$$

satisfaçam $x_i(t) e^{\alpha t} \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow \infty$.

A solução deste problema não é simples, devido às seguintes razões [9] :

1) As funções de interconecção $h_i(t,x)$ fazem o sistema global S não linear, e a implementação de algoritmos para a estabilização exponencial do sistema em muitos casos é extremamente complicada.

2) Quando um algoritmo é satisfatório, o elevado processamento de dados devido à alta dimensão do sistema dificulta a determinação do controle $\Phi_i(t,x)$.

3) Outro problema característico deste controle é a avaliação de informações de todos os outros subsistemas para cada controlador.

Por estas razões é conveniente conduzir a análise num ambiente descentralizado, isto é, requeremos gerar os controles $u_i(t)$ para cada subsistema como uma função dos seus próprios estados $x_i(t)$. Tais restrições sobre a estrutura de informação, dão uma elevada

complexidade, mesmo no caso de sistemas lineares de baixa ordem.

A principal filosofia seguida por este método de análise, é a caracterização das funções de interconecção como sinais de perturbação atuando contra a autonomia dos subsistemas individuais.

O método adotado na derivação desses resultados, garante um grau de robustez ao sistema e pode conduzir-nos a uma técnica mais eficiente de estabilização, por meio de controle multinível.

3.2.3.2 Técnicas de estabilização via descentralização

Suporemos os pares (A_i, B_i) completamente controláveis. Quando as funções de interconecção $h_i(t, x)$, são adotadas nulas, os subsistemas desacoplados são descritos pelas equações lineares:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.25)$$

Associamos um índice de desempenho para cada subsistema dado por:

$$J_i = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{2\alpha t} (x_i^t Q_i x_i + u_i^t R_i u_i) dt \quad (3.2.26)$$

onde Q_i é uma matriz $R^{n_i \times n_i}$ semidefinida positiva, e R_i é matriz definida positiva $R^{m_i \times m_i}$, Q_i pode ser fatorada como $Q_i = D_i^t D_i$ e D_i é tal que o par (A_i, D_i) é completamente observável.

A lei de controle ótimo para cada subsistema isolado é dada por:

$$u_i = -R_i^{-1} B_i^t P_i x_i \quad (3.2.27)$$

onde P_i é a solução da equação de Riccati:

$$[A_i + \alpha I_i]^t P_i + P_i [A_i + \alpha I_i] - P_i B_i R_i B_i^t P_i + Q_i = 0 \quad (3.2.28)$$

Pelas conclusões do capítulo 2 temos que cada subsistema isolado é assintoticamente estável com grau α .

O sistema em malha fechada pode ser escrito como:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^tP)x + h(t,x) \quad (3.2.29)$$

onde $A = \text{diag}(A_i)$, $B = \text{diag}(B_i)$, $P = \text{diag}(P_i)$

$h(t,x) = [h_1(t,x), \dots, h_N(t,x)]^t$

A seguir enunciaremos as condições suficientes para que o sistema global seja também assintoticamente estável com grau α .

Teorema 3.2.3

Se for possível expressar o vetor de interconecção $h(t,x)$ como:

$$h(t,x) = [U(t,x) - S(t,x)]Px(t) \quad (3.2.30)$$

onde $U : R \times R^n \longrightarrow R^{n \times n}$ é uma matriz anti-simétrica e

$S : R \times R^n \longrightarrow R^{n \times n}$ matriz simétrica, com a matriz

$$T(t,x) = W + 2PS(t,x)P \text{ semidefinida positiva} \quad (3.2.31)$$

onde $W = Q + PBR^{-1}B^tP$

então o sistema global será estável exponencialmente com grau α .

Prova

Escolhemos $V(x) = x^t P x$ como uma função de Lyapunov.

Como os P_i são matrizes definidas positivas, temos que $V(x)$ é uma

matriz definida positiva; derivando $V(x)$, temos:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x}$$

Substituindo (3.2.29) temos:

$$\dot{V}(x) = [(A - BR^{-1}B^tP)x + h]^t P x + x^t P [(A - BR^{-1}B^tP)x + h]$$

$$\dot{V}(x) = x^t (A^t P + PA - 2PBR^{-1}B^t) x + h^t P x + x^t P h$$

Da equação (3.2.28) temos:

$$A^t P + PA - 2PBR^{-1}B^t + 2\alpha P = -(Q + PBR^{-1}B^tP) = -W$$

Portanto

$$\dot{V}(x) = -x^t (2\alpha P + W) x + x^t P h + h^t P x \quad (3.2.32)$$

Substituindo (3.2.30) temos:

$$\dot{V}(x) = -x^t (2\alpha P + W) x + x^t P [U(t, x) - S(t, x)] P x + x^t P [U(t, x)^t - S(t, x)] P x$$

$$\dot{V}(x) = -x^t (2\alpha P + W) x + x^t P [U(t, x) + U(t, x)^t] P x - x^t 2PS(t, x) P x$$

$$\dot{V}(x) = -x^t (2\alpha P + W + 2PS(t, x) P) x$$

Se $T = W + 2PS(T, x)P$ for uma matriz semidefinida positiva, temos:

$$\dot{V}(x) \leq -2\alpha V(x) \quad , \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

$$e^{2\alpha t} \dot{V}(x) \leq -2\alpha e^{2\alpha t} V(x) \implies \frac{d}{dt} \left\{ V(x) e^{2\alpha t} \right\} \leq 0 \quad , \quad t \geq t_0$$

$V(x)e^{2\alpha t}$ é decrescente, portanto para $t \geq t_0$ temos

$$V(x_0)e^{2\alpha t_0} \geq V(x)e^{2\alpha t} \implies V(x) \leq V(x_0)e^{-2\alpha(t-t_0)}$$

$$x^t P x \leq x_c^t P x_0 e^{-2\alpha(t-t_0)} \implies x^t P x - x_c^t P x_0 e^{-2\alpha(t-t_0)} \leq 0$$

$$\text{Como } \lambda_m(P) \|x\|^2 \leq x^t P x \leq \lambda_M(P) \|x\|^2$$

$$\text{e } \lambda_m(P) \|x_0\|^2 \leq x_0^t P x_0 \leq \lambda_M(P) \|x_0\|^2$$

$$-\lambda_M(P) \|x_0\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \leq -x_0^t P x_0 e^{-2\alpha(t-t_0)} \leq -\lambda_m(P) \|x_0\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)}$$

$$\lambda_m(P) \|x\|^2 - \lambda_M(P) \|x_0\|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \leq x^t P x - x_c^t P x_0 e^{-2\alpha(t-t_0)} \leq 0$$

portanto

$$\|x\| \leq \frac{\lambda_M(P)^{1/2}}{\lambda_m(P)^{1/2}} \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \|x\| \leq \beta \|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)} \text{ para todo } t \geq t_0$$

com

$$\beta = \frac{\lambda_M(P)^{1/2}}{\lambda_m(P)^{1/2}}$$

Assim o sistema é assintoticamente estável com grau α .

As equações matriciais (3.2.30) e (3.2.31), podem parecer complicadas de serem cumpridas, porém uma variedade de alternativas e condições simples, pode ser facilmente obtida. Como exemplo notemos que uma condição suficiente para que a matriz $T(t, x)$ seja semidefinida positiva é que $S(t, x)$ seja também semidefinida positiva.

No caso de termos as funções de interconecção lineares temos:

$$h_i(t, x) = \sum_{j=1}^N h_{ij}(t) x_j(t) \quad (3.2.33)$$

A condição requerida será a fatorização da matriz $H(t) = [h_{ij}]$ da seguinte forma:

$$H(t) = [U(t) - S(t)]P$$

onde $U: R \rightarrow R^{n \times n}$ é uma matriz anti-simétrica e

$S: R \rightarrow R^{n \times n}$ é uma matriz simétrica semipositiva definida.

Condições alternativas para estabilização descentralizada, que não estão restritas à arranjos estruturais das interconecções, podem tomar em conta a força das interconecções (ou magnitude do fluxo das informações) entre os vários subsistemas. Essas condições são dadas no seguinte teorema.

Teorema 3.2.4

Se as funções de interconecção $h_{ij}(t, x)$ satisfazem às inequações:

$$\|h_{ij}\| \leq \sum_{j=1}^N \xi_{ij} \|x_j\| \quad (3.2.34)$$

para todo $(t, x) \in R^{n+1}$, $i=1, 2, \dots, N$, onde ξ_{ij} são números não

negativos, e $\xi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_{ij}$; então se :

$$\min_i (\lambda_m(U_i)) \geq 2\xi \max_i (\lambda_M(P_i)) \quad (3.2.35)$$

o sistema global descrito por (3.2.23) será assintoticamente estável com grau α .

Prova

A prova é quase idêntica à do teorema anterior. Escolhendo a função de Lyapunov $V(x) = x^t(t)Px(t)$, sua derivada em relação ao tempo, de (3.2.32), será:

$$\dot{V}(x) = -2\alpha x^tPx - x^tWx + 2h^tPx$$

Como P é definida positiva, uma condição para que $V(x)$ tenha derivada negativa é:

$$x^tWx \geq 2h^tPx \quad \text{para todo } x \in R^n.$$

Utilizando a condição (3.2.34) temos:

$$\begin{aligned} \|h(t, x)\| &\leq \sum_{i=1}^N \|h_i(t, x)\| \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_{ij} \|x_j\| = \\ &= \sum_{i=1}^N (\xi_{i1} \|x_1\| + \dots + \xi_{iN} \|x_N\|) \leq \|x\| \sum_{i=1}^N \xi_{i1} + \dots + \|x\| \sum_{i=1}^N \xi_{iN} = \xi \|x\| \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \lambda_m(W) \|x\|^2 &\leq x^tWx \leq \lambda_M(W) \|x\|^2 \\ 2h^t(t, x)Px &\leq 2\|h\| \|P\| \|x\| \leq 2\xi \|P\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -2h^t P x &\geq -2\xi \|P\| \|x\|^2 \\ x^t W x &\geq \lambda_m(W) \|x\|^2 \end{aligned} \right\} \text{somando temos}$$

$$0 \leq \lambda_m(W) \|x\|^2 - 2\xi \|P\| \|x\|^2 \leq x^t W x - 2h^t P x$$

ou seja

$$\lambda_m(W) \geq 2\xi \lambda_M(P) \quad (\|P\| = \sqrt{\lambda_M(P P^t)})$$

$$\min_i \lambda_m(W_i) \geq 2\xi \max_i \lambda_M(P_i)$$

3.2.4 ESTABILIZAÇÃO EXPONENCIAL MULTINÍVEL DE SISTEMAS DE GRANDE PORTE

Esta secção está baseado nos trabalhos de Siljak e Sundareshan [9] e [23], onde um controle multinível realimentado é utilizado para a otimização de sistemas de grande porte, e o acoplamento entre os subsistemas não é necessariamente fraco. Controladores locais são utilizados para otimizar cada subsistema, ignorando as interconecções. Então um controlador global num segundo nível, pode ser aplicado para minimizar o efeito das interconecções e melhorar o índice de desempenho do sistema global.

3.2.4.1 Descrição do problema

Consideremos o sistema (3.2.23) da secção anterior.

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + h_i(t, x) \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3.2.23)$$

Otimizamos cada subsistema isolado com o índice de desempenho dado por (3.2.26).

Os subsistemas em malha fechada são estabilizados

exponencialmente para um dado α , porém o sistema global não necessariamente está estabilizado para esse α .

3.2.4.2 Caso das interconecções lineares e invariantes no tempo

Suponhamos primeiramente que as interconecções são lineares e invariantes no tempo, isto é:

$$h_i(t, x) = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j$$

Então cada controle $u_i(t, x)$ pode ser definido como:

$$u_i(t, x) = -K_i x_i - \sum_{j=1}^N K_{ij}^g x_j$$

onde $K_i = R_i^{-1} B_i^T P_i$, e P_i é solução da equação (3.2.28); o primeiro termo é o controle descentralizado do i -ésimo subsistema, e o segundo termo é fornecido pelo segundo nível de controle. Podemos escrever, então, o controle do i -ésimo subsistema como:

$$u_i(t, x) = u_i^l + u_i^g$$

$$\text{onde } u_i^l = -K_i x_i \text{ e } u_i^g(x) = -\sum_{j=1}^N K_{ij}^g x_j$$

Chamando $K^l = \text{diag}(K_i)$, e $K^g = [K_{ij}^g]$, podemos escrever o controle global como:

$$u(t, x) = -K^l x - K^g x$$

O esquema de aplicação deste controle é dado na figura 3.1.

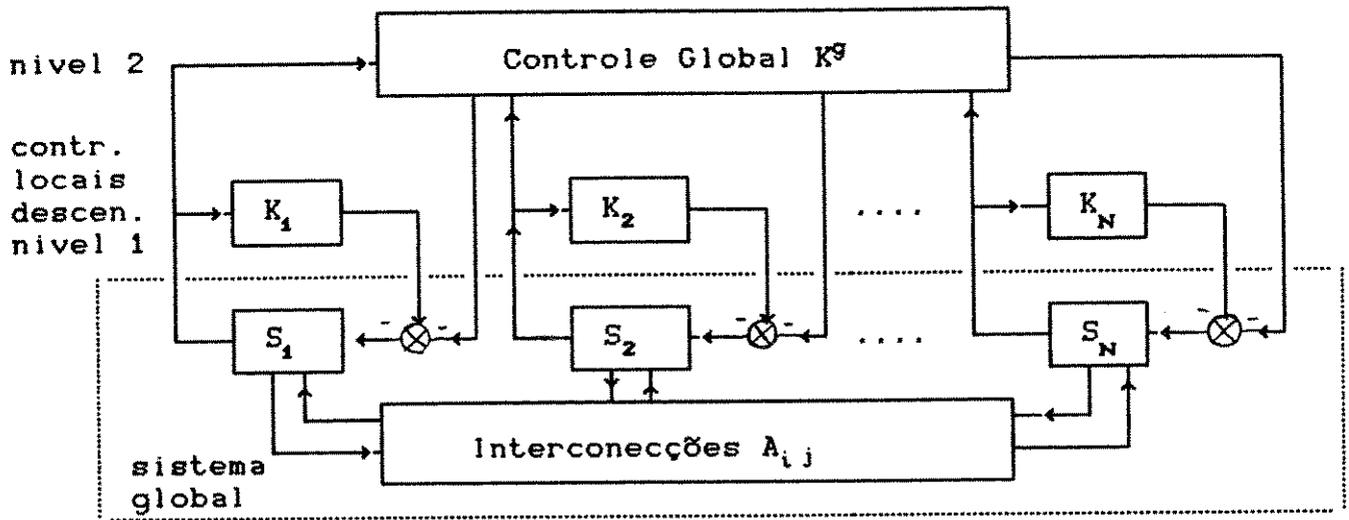
Aplicando este controle ao sistema global obtemos:

$$\dot{x} = (A - Bk^l)x + (H - BK^g)x$$

Para que o sistema seja estabilizado exponencialmente, podemos exigir que a norma do segundo termo do sistema seja a menor possível; Para isso escolhemos a matriz K^g tal que minimize $\|(H - BK^g)x\|$.

A solução deste problema é bem conhecida. Ela é dada pela matriz $K^g = B^+H$, onde B^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose de B , que é dada por: $B^+ = (B^tB)^{-1}B^t$.

Quando B é uma matriz quadrada e não singular, essa escolha se resume a $K^g = B^{-1}H$, conduzindo a uma perfeita neutralização das interconecções.



Controle multinível

FIGURA 3.1

Exemplo 3.3 Consideremos o sistema de quarta ordem [7] dado por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2.00 & 0.10 & 0.01 & 0 \\ 0.20 & -1.00 & 0.10 & -0.50 \\ 0.05 & 0.15 & 1.00 & 0.05 \\ 0 & -0.20 & -0.25 & -1.20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1.00 & 0 \\ 0.10 & 0 \\ 0 & 0.50 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} u$$

com um índice de desempenho dado por:

$$Q = \text{diag}(2, 1, 1, 2) \quad \text{e} \quad R = \text{diag}(1, 2)$$

Utilizamos o método multinível para o controle deste sistema; dividimos este sistema em dois subsistemas de ordem 2 como mostrado na equação diferencial acima.

As soluções das equações de Riccati, dos subsistemas desacoplados são:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4.4402 & 0.0933 \\ 0.0933 & 0.4991 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 16.6065 & -0.1007 \\ -0.1007 & 0.8241 \end{bmatrix}$$

A matriz B^* , pseudo-inversa, é dada por:

$$B^* = (B^t B)^{-1} B^t = \begin{bmatrix} 0.9901 & 0.0990 & & \\ & 0 & 0 & 1.6000 & 0.8000 \end{bmatrix}$$

As matrizes ganho, descentralizada e multinível, são dadas por:

$$K^l = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.4495 & 0.1432 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.1390 & 0.0778 \end{bmatrix}$$

$$K^g = \begin{bmatrix} & & 0.0198 & -0.0495 \\ 0.0800 & 0.0800 & & \end{bmatrix}$$

Na figura 3.2, as trajetórias dos estados, obtidas pelo controle multinível, são comparadas às obtidas pela utilização de um controle ótimo global.

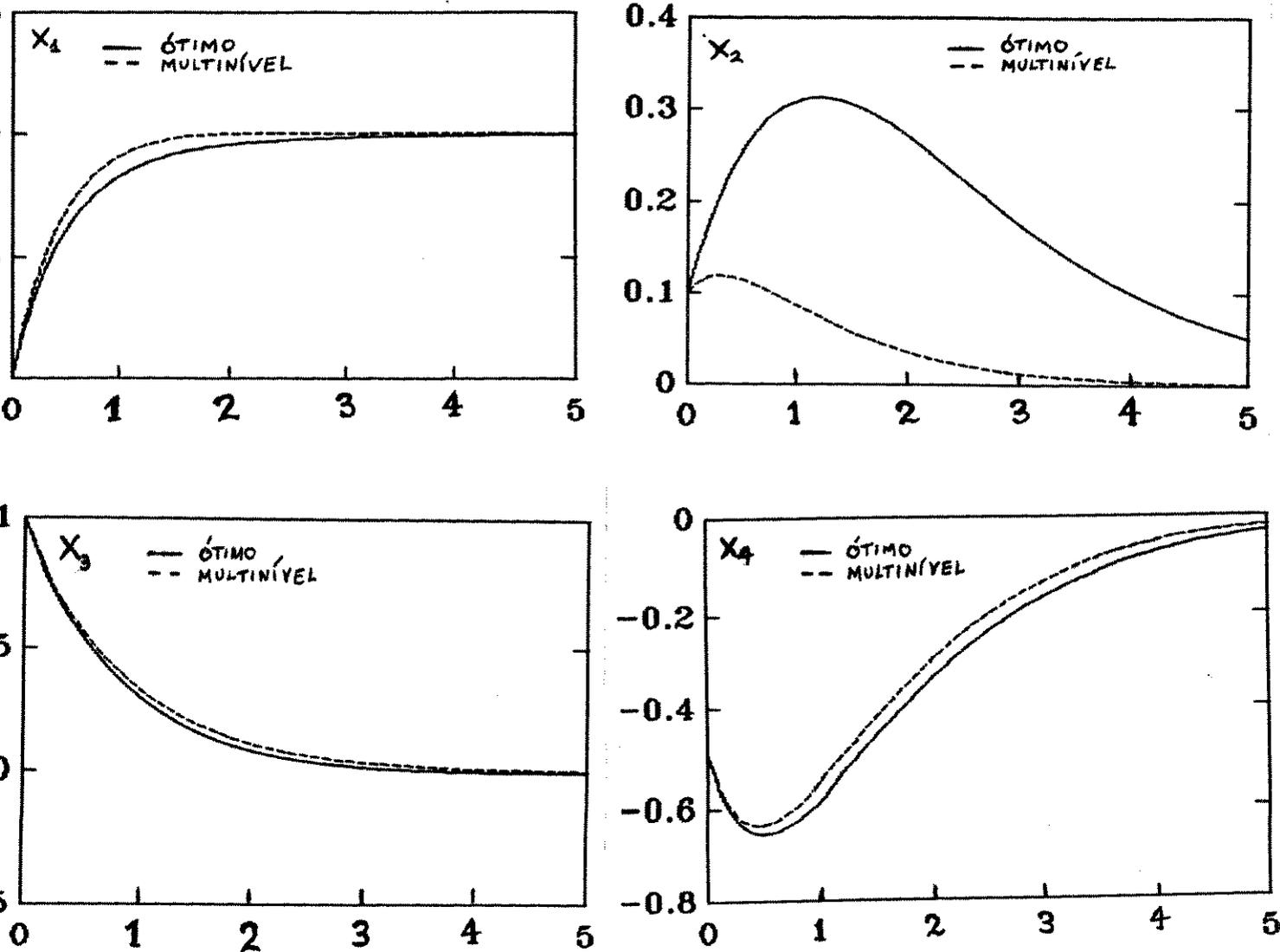


figura 3.2

3.2.4.3 Caso das interconecções não lineares e variantes no tempo

Consideremos agora o caso das interconecções serem não lineares e variantes no tempo. Neste caso o controle u_i^g será projetado de forma a diminuir o efeito das interconecções.

Seja o controle u_i da seguinte forma:

$$u_i(t, x) = u_i^l(x_i) + u_i^g(t, x)$$

com u_i dado pela equação (3.2.27); o controle u_i^g é uma desejada função de realimentação de estados gerada num segundo nível de controle. Aplicado este controle ao sistema (3.2.23) temos:

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i k_i^l) x_i + h_i(t, x) + B_i u_i^g(t, x) \quad i=1, 2, \dots, N$$

Definindo u_i^g como $u_i^g(t, x) = -\mu_i(t, x)$, o sistema em malha fechada será:

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i k_i^l) x_i + (h_i(t, x) - B_i \mu_i(t, x)) \quad i=1, 2, \dots, N$$

ou equivalentemente o sistema composto global será:

$$\dot{x} = [A - BK^l]x + [h(t, x) - B\mu(t, x)]$$

onde:

$$\mu^t = [\mu_1^t, \mu_2^t, \dots, \mu_N^t] \quad \text{e} \quad B = \text{diag}(B_i)$$

Pela seleção adequada de $\mu(t, x)$ podemos modificar o efeito das interconexões de forma a satisfazer as condições dos teoremas 3.2.3 ou 3.2.4, obtendo o arranjo simétrico (3.2.30) ou reduzir a magnitude das interconexões para satisfazer a inequação (3.2.34). Temos assim mais flexibilidade na escolha do controle.

Da mesma forma que no caso anterior, se B é uma matriz quadrada não singular, o controle dado por:

$$\mu(t, x) = B^{-1}h(t, x)$$

neutraliza completamente o efeito das interconexões, e o sistema (3.2.23) é exponencialmente estável com grau α .

Quando as interconexões são lineares, isto é, $h(t, x) = H(t)x(t)$,

o seu efeito pode ser neutralizado minimizando a norma:

$$\min_{\mu(t)} \|H(t)x(t) - B\mu(t)\|^2$$

Esta norma pode ser escrita como :

$$x(t)^t H(t)^t H(t)x(t) - \mu(t)^t B^t H(t)x(t) - x(t)^t H(t)^t B\mu(t) + \mu(t)^t B^t B\mu(t)$$

ou

$$x(t)^t H(t)^t H(t)x(t) - 2x(t)^t H(t)^t B\mu(t) + \mu(t)^t B^t B\mu(t) \quad (3.2.36)$$

Derivando (3.2.36) em relação a μ e igualando a zero temos:

$$-2[x(t)^t H(t)^t B]^t + 2B^t B\mu(t) = 0 \quad \text{ou}$$

$$B^t B\mu(t) = B^t H(t)x(t) \quad (3.2.37)$$

Se B tem posto coluna completo, e o $\text{Posto}[BH] = \text{Posto}[B]$, o controle $\mu(t,x)$ pode ser selecionado como:

$$\mu(t,x) = (B^t B)^{-1} B^t H(t)x(t)$$

que torna o modulo $\|H(t)x(t) - B\mu(t)\|$ nulo. Por outra parte, quando o $\text{posto}[BH] > \text{Posto}[B]$, temos:

$$\|H(t)x(t) - B\mu(t)\| \leq \|h(t,x)\|$$

causando uma redução na parte direita da equação (3.2.35). Quando B não é de posto completo, $\mu(t)$ pode ser selecionado como:

$$\mu(t,x) = B^+ H(t)x(t)$$

onde B^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose de B, e $K^g = B^+ H(t)$.

A seguir aplicamos este método para o controle de dois pêndulos invertidos acoplados por uma mola.

Exemplo 3.4

Consideremos o sistema formado por dois pêndulos invertidos acoplados por uma mola, mostrado na figura 3.3

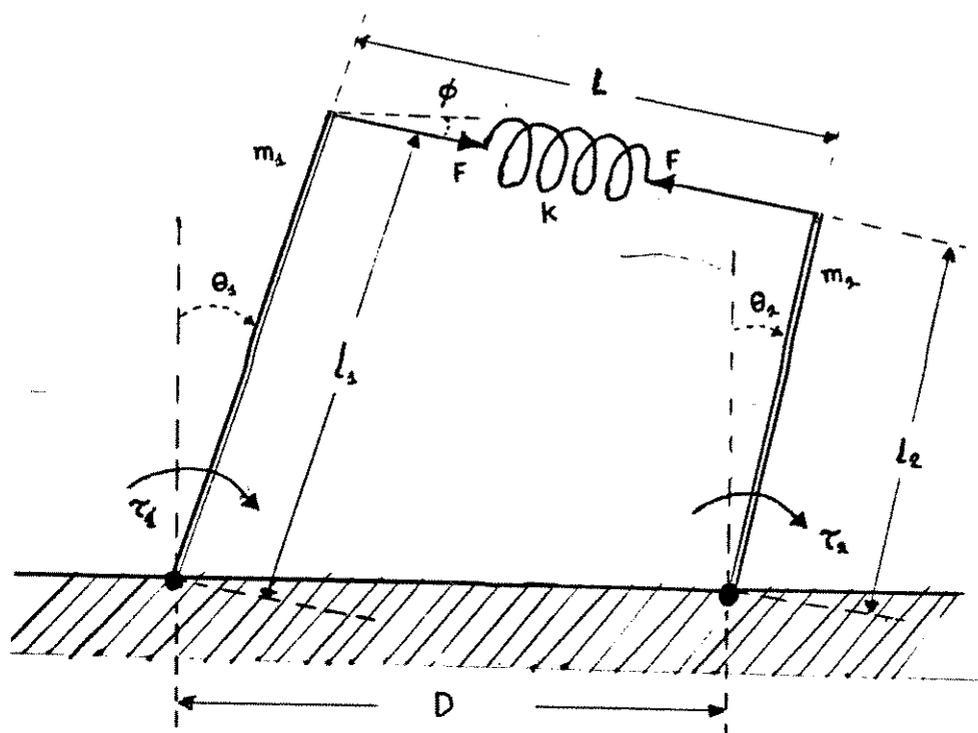


figura 3.3

onde as variáveis são:

θ_i - deslocamento angular do pêndulo i , $i=1,2$;

τ_i - torque de controle para o pêndulo i , $i=1,2$;

F - força da mola;

L - comprimento da mola;

ϕ - inclinação da mola com a horizontal;

e as constantes são:

l_i - Comprimento do pêndulo i , $i=1,2$;

m_i - massa do pêndulo i , $i=1,2$;

D - distância entre os dois pêndulos;

k - constante da mola.

Consideramos que cada pêndulo tem a sua massa distribuída. O comprimento da mola é escolhida de tal forma que $F = 0$ quando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, o que implica que $(\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2)^t$ é um ponto de equilíbrio do sistema se $\tau_1 = \tau_2 = 0$. Supomos que a massa da mola é zero.

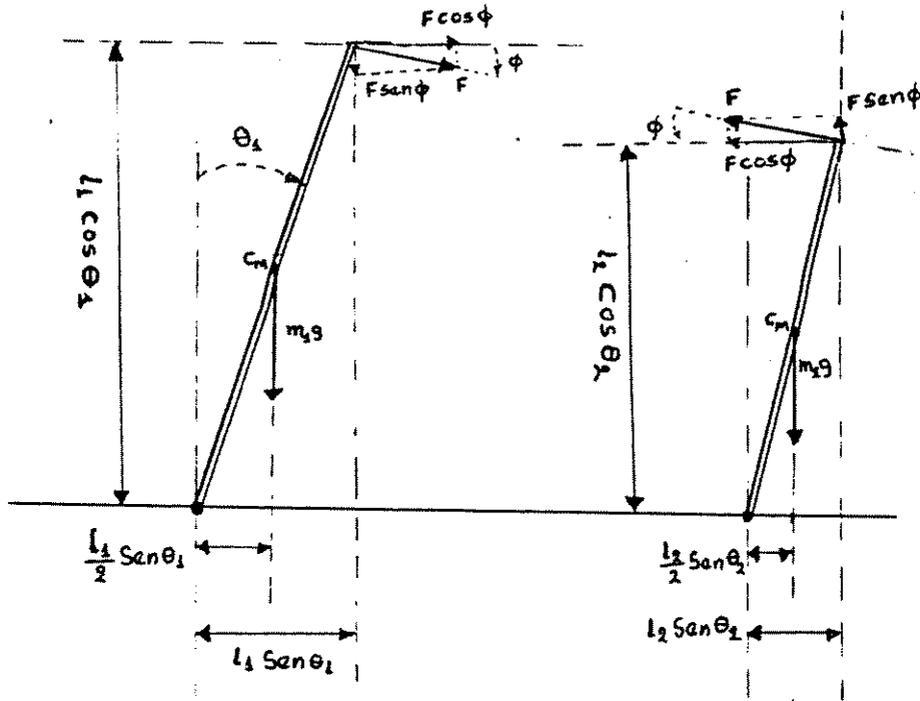


figura 3.4

Pelas equações para o diagrama de corpo livre mostrado na figura 3.4 temos:

$$m_1 (l_1/2) \ddot{\theta}_1 = \tau_1 + m_1 g (l_1/2) \text{sen} \theta_1 + l_1 F \cos(\theta_1 - \phi), \quad (3.2.38)$$

$$m_2 (l_2/2) \ddot{\theta}_2 = \tau_2 + m_2 g (l_2/2) \text{sen} \theta_2 - l_2 F \cos(\theta_1 - \phi),$$

onde g é a constante de gravidade

$$F = k(L - [D^2 + (l_2 - l_1)^2]^{1/2})$$

$$L = [(D+l_2 \text{sen}\theta_2 - l_1 \text{sen}\theta_1)^2 + (l_2 \text{cos}\theta_2 - l_1 \text{cos}\theta_1)^2]^{1/2}$$

e

(3.2.39)

$$\phi = \text{arctang} \left[\frac{l_1 \text{cos}\theta_1 - l_2 \text{sen}\theta_2}{D+l_2 \text{sen}\theta_2 - l_1 \text{sen}\theta_1} \right]$$

Chamando $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$ e $x_4 = \dot{\theta}_2$, as equações (3.2.8) podem de escritas como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2/m_1 l_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2/m_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \\ 0 \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (3.2.40)$$

onde:

$$h_2 = g[\text{sen}(x_1) - x_1] + \frac{2F}{m_2} \text{cos}(x_1 - \phi)$$

$$h_4 = g[\text{sen}(x_3) - x_3] - \frac{2F}{m_2} \text{cos}(x_3 - \phi)$$

Temos dois subsistemas que estão mostrados pelas linhas tracejadas. Associamos a cada subsistema um índice de desempenho:

$$J_1 = \int_0^{\infty} (m_1 g x_1^2 + m_1 x_2^2 + \tau_1^2) dt \quad e \quad J_2 = \int_0^{\infty} (m_2 g x_3^2 + m_2 x_4^2 + \tau_2^2) dt$$

(3.2.41)

Podemos notar que os índices de desempenho foram escolhidos de forma a terem um significado físico: representam as energias potencial e cinética, e a energia do controle, respectivamente.

De (3.2.41), podemos escrever as matrizes de ponderação como:

$$Q_1 = \text{diag}(m_1 g, m_1) \quad , \quad R_1 = 1 \quad ; \quad Q_2 = \text{diag}(m_2 g, m_2) \quad , \quad R_2 = 1 \quad .$$

Adotando os valores numéricos:

$$l_1 = 1[m]$$

$$l_2 = 0.8[m]$$

$$m_1 = 1 [\text{kg}]$$

$$m_2 = 0.8 [\text{kg}]$$

$$D = 1.2 [\text{m}]$$

$$g = [\text{m}/\text{seg}^2]$$

$$k = 0.02 [\text{N}/\text{m}]$$

as matrizes dos subsistemas desacoplados são:

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9.8 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.125 \end{bmatrix}$$

e os índices de desempenho dos subsistemas são:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 9.8 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 1, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 9.84 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad R_2 = 1$$

As soluções da equação de Riccati de cada subsistema isolado são:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 19.9016 & 5.3573 \\ 3.3573 & 1.7113 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 9.8574 & 2.3488 \\ 2.3488 & 0.7503 \end{bmatrix}$$

O ganho do controle local é dado por:

$$K^1 = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 10.7146 & 3.4227 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7.3401 & 2.3447 \end{array} \right]$$

Para encontrar o controle multinível de forma a anular as interconexões observamos que a equação:

$$h(t, x) - B\mu(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \\ 0 \\ h_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1(t, x) \\ \mu_2(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

têm como soluções:

$$\mu_1(t, x) = (1/2)h_2 = (1/2)[9.8(\text{sen}(x_1) - x_1) + 2F\cos(x_1 - \phi)]$$

$$\mu_2(t, x) = (1/3.125)h_4 = (1/3.125)[9.8(\text{sen}(x_3) - x_3) - 2F\cos(x_3 - \phi)]$$

onde:

$$F=k\left[\left(3.08-2.4\text{sen}(x_1)+1.92\text{sen}(x_2)-1.6\text{cos}(x_1-x_2)\right)^{1/2}-1.217\right]$$

$$\phi = \text{arctang}\left[\frac{\text{cos}(x_1) - 0.8\text{cos}(x_2)}{1.2 - \text{sen}(x_1) + 0.8\text{sen}(x_2)}\right]$$

Notamos que com este controle anulamos completamente as interconecções, obtendo assim um controle ótimo para o problema.

3.3 CONTROLE DESCENTRALIZADO PERTO DO ÓTIMO COM UM PRÉ-ESPECIFICADO GRAU DE ESTABILIDADE

3.3.1 Introdução

Calcular um controle descentralizado sem levar em conta as interações entre os subsistemas pode levar a um desempenho insatisfatório ou mesmo instável; Hassan e Singh [16] sugeriram um enfoque alternativo para o cálculo da matriz ganho de realimentação que é restrita a ser uma matriz bloco-diagonal. Nesta tese fazemos um estudo e implementação deste método.

O controle ótimo para o sistema global requer a realimentação de todos os estados do sistema; aqui reduziremos nossa demanda de forma que o controle descentralizado seja capaz de obter um bom desempenho sub-ótimo. Para tomar em conta o efeito das interconecções no sistema, e ao mesmo tempo obter um controle descentralizado, precisamos restringir a matriz ganho a ser uma matriz bloco diagonal; neste sentido é preciso resolver um problema de otimização com restrições. Para tal objetivo, utilizamos uma estrutura hierárquica de três níveis de computação; por meio desta estrutura é possível decompor o problema e reduzi-lo no primeiro nível a subproblemas de dois valores de contorno.

Este controle é dependente das condições iniciais, porém nas experiências realizadas comprovamos que ele é insensível a pequenas variações nas condições iniciais.

Para o cálculo da matriz ganho descentralizado é preciso computação extra, em comparação com a requerida para a cálculo da matriz ganho ótima centralizada, porém de menor complexidade. Este fato pode ser compensado pelo custo menor requerido na implementação do controle descentralizado.

Finalizando, é encontrada uma condição suficiente, derivada pelo método de Lyapunov, para a estabilidade do sistema global, garantindo assim um grau pre-é especificado de estabilidade para o sistema global.

3.3.2 Formulação do problema

Considere um sistema dinâmico interconectado de N subsistemas descrito pela equação:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j + d_i \quad , i = 1, 2, \dots, N$$

onde x_i é vetor de estado do i-ésimo subsistema de dimensão R^{n_i} , u_i seu vetor de controle de dimensão R^{m_i} , d_i é uma perturbação conhecida.

As matrizes A_i , B_i e A_{ij} são matrizes constantes de dimensões adequadas.

Para incorporar perturbações estruturais (Siljak 1978), a equação acima pode ser escrita como:

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} x_j + d_i \quad , i = 1, 2, \dots, N \quad (3.3.1)$$

onde e_{ij} são elementos da matriz de interconecção E definida em [1],

que é uma matriz continua no tempo; no intervalo de $0 \leq e_{ij}(t) \leq 1$; esta equação permite incorporar qualquer perturbação estrutural que possa ocorrer durante a operação do sistema.

Projetamos o controle utilizando a teoria de controle ótimo, de modo que minimize um índice de desempenho quadrático, que é a somatória dos índices de desempenho de cada subsistema. Para que o sistema exiba um grau de estabilidade α pré-especificado, formulamos o índice de desempenho da seguinte maneira [10]:

$$\min J = \sum_{i=1}^N 1/2 \int_0^T e^{2\alpha t} (\| x_i - x_i^d \|_{Q_i}^2 + \| u_i \|_{R_i}^2) dt \quad (3.3.2)$$

T é maior do que 4 constantes de tempo do sistema de tal forma que este alcance o regime permanente.

Para converter este problema numa forma quadrática linear padrão definimos:

$$\hat{x}_i = e^{\alpha t} x_i, \quad \hat{u}_i = e^{\alpha t} u_i \quad (3.3.3)$$

$$\Rightarrow \dot{\hat{x}}_i = \alpha e^{\alpha t} x_i + e^{\alpha t} \dot{x}_i \quad (3.3.4)$$

Utilizando (3.3.3) e (3.3.1) em (3.3.4) temos:

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{A}_i \hat{x}_i + B_i \hat{u}_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j + \hat{d}_i \quad (3.3.5)$$

onde:

$$\hat{A}_i = A_i + \alpha I_i \quad \text{e} \quad \hat{d}_i = e^{\alpha t} d_i$$

O índice de desempenho (3.3.2) pode ser reescrito como:

$$\min J = \sum_{i=1}^N 1/2 \int_0^T (\| \hat{x}_i - \hat{x}_i^d \|^2_{Q_i} + \| \hat{u}_i \|^2_{R_i}) dt \quad (3.3.6)$$

onde: $\hat{x}_i^d = e^{A_i t} x_i^d$

Assim a solução do problema de otimização, dada pelas equações (3.3.1) e (3.3.2), pode ser obtida pela solução do problema de otimização dados pelas equações (3.3.5) e (3.3.6). Em [17] demonstra-se que a solução ótima deste problema pode ser alcançada por meio de um controle multinível, dado pela seguinte lei de controle:

$$\hat{u}_i(t) = - G_{bi} \hat{x}_i - \sum_{j=1}^N e_{ij} T_{ij} \hat{x}_j - \hat{\xi}_i$$

onde $G_{bi} = -R_i^{-1} B_i^t P_i$, e P_i é a solução da equação local de Riccati do i-ésimo subsistema:

$$A_i^t P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^t P_i + Q_i = 0$$

O valor da matriz T_{ij} é calculado num nível hierárquico [17]; para nosso objetivo, vamos supor o nosso sistema como perfeitamente conectado, de modo que $e_{ij} = 1$.

Reescrevendo este controle na forma global, temos:

$$\hat{u}(t) = - G_b \hat{x} - T \hat{x} - \hat{\xi} \quad (3.3.7)$$

onde $G_b = \text{diag}(G_{bi})$; T é uma matriz completa, que otimiza o sistema num segundo nível de controle. Então o índice de desempenho ótimo será dado por:

$$J_{opt} = 1/2 \int_0^T (\|\hat{x} - \hat{x}^d\|_Q^2 + \|(G_b + T)\hat{x} + \hat{\xi}\|_R^2) dt \quad (3.3.8)$$

$$Q = \text{diag}(Q_i), \quad R = \text{diag}(R_i)$$

Para calcular o controle descentralizado, a matriz T é restringida a ser uma matriz diagonal T_d ; substituindo T_d na equação acima, obtemos o seguinte índice de desempenho:

$$J = 1/2 \int_0^T \left\{ \|\hat{x} - \hat{x}^d\|_Q^2 + \|(G_b + T_d)\hat{x} + \hat{\xi}\|_R^2 \right\} dt \quad \text{ou}$$

$$J = 1/2 \int_0^T \left\{ \|\hat{x} - \hat{x}^d\|_Q^2 + \|\hat{x}\|_W^2 + 2\hat{x}^t G_b^t \hat{\xi} + 2\hat{x}^t T_d^t \hat{\xi} + \hat{\xi}^t R \hat{\xi} \right\} dt \quad (3.3.9)$$

$$\text{onde } W = G_b^t R G_b + G_b^t R T_d + T_d^t R G_b + T_d^t R T_d.$$

Colocando a equação (3.3.5) na forma global, e substituindo o controle (3.3.7) temos:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + B\hat{u} + H\hat{x} + \hat{D} = \hat{A}\hat{x} - B(G_b\hat{x} + T_d\hat{x} + \hat{\xi}) + H\hat{x} + \hat{D}$$

onde $\hat{D} = e^{o\alpha} D$, D é o vetor de perturbação constante global e $H = [A_{ij}]$, matriz completa.

Tomando $\hat{z} = H\hat{x}$ como uma nova restrição, o objetivo é encontrar uma matriz diagonal T_d de forma que o índice de desempenho (3.3.9)

seja minimizado. O problema pode ser enunciado como:

$$\min_{T_d} J = 1/2 \int_0^T \left\{ \|\hat{x} - \hat{x}^d\|_Q^2 + \|\hat{x}\|_W^2 + 2\hat{x}^t G_b^t \hat{\xi} + 2\hat{x}^t T_d^t \hat{\xi} + \hat{\xi}^t R \hat{\xi} \right\} dt$$

sujeito a:

$$\dot{\hat{x}} = (\hat{A} - B G_b) \hat{x} + \hat{z} - B T_d \hat{x} + \hat{d} - \hat{\xi} \quad (3.3.10)$$

$$\hat{z} = H \hat{x} \quad (3.3.11)$$

onde $W = G_b^t R G_b + G_b^t T_d + T_d^t R G_b + T_d^t T_d$.

A matriz B é uma matriz de dimensão $n \times n$; se na prática B é de dimensão menor que $n \times n$, podem ser introduzidos controles adicionais, de tal forma que os elementos correspondentes em B , que multiplicam esses controles, sejam zeros. Veremos mais adiante que desta forma possibilitamos a decomposição do problema.

Minimizaremos o índice de desempenho J com T_d diagonal, fazendo as seguintes definições:

A_d matriz com elementos da diagonal, e A^o com elementos fora da diagonal de $\hat{A} - B G_b$, respectivamente.

B_d e B^o matrizes consistindo dos elementos da diagonal e fora da diagonal de B , respectivamente.

Q_d e Q^o matrizes consistindo dos elementos da diagonal de Q , e de fora dela, respectivamente.

G_b^d e G_b^o matrizes ganho de ordem $n \times n$, com elementos da diagonal e de fora da diagonal de G_b respectivamente.

A equação W pode ser escrita como :

$$W = (G_b + T_d)^t R (G_b + T_d) = (G_b^d + G_b^o + T_d)^t R (G_b^d + G_b^o + T_d)$$

Chamando $F = G_b^d + T_d$, temos $W = (F + G_b^0)^t R (F + G_b^0)$ e substituindo na equação (3.3.9), depois de algumas operações matemáticas chegamos ao seguinte problema de minimização:

$$\min J = 1/2 \int_0^T \left\{ \|\hat{x} - \hat{x}^d\|_{Q_d}^2 + \hat{x}^t F^t R F \hat{x} + 2\hat{x}^t G_b^t R \hat{z} + \hat{z}^t R \hat{z} + g(\hat{x}, F) \right\} dt \quad (3.3.12)$$

onde: $g(\hat{x}, F) = \|\hat{x} - \hat{x}^d\|_{Q^0}^2 + 2\hat{x}^t F^t R G_b^0 \hat{x} + \hat{x}^t G_b^0 R G_b^0 \hat{x} \quad (3.3.13)$

sujeito a:

$$\dot{\hat{x}} = (A_d + A^0)\hat{x} + \hat{z} - (B_d + B^0)T_d\hat{x} + \hat{D} \text{ ou}$$

$$\dot{\hat{x}} = A_d\hat{x} - B_d T_d \hat{x} + y(\hat{x}, \hat{z}, T_d) \quad (3.3.14)$$

$$\hat{z} = H\hat{x}$$

onde $\hat{D} = \hat{a} - B\hat{z}$ e $y(\hat{x}, \hat{z}, T_d) = A^0\hat{x} + \hat{z} - B^0 T_d \hat{x} + \hat{D} \quad (3.3.15)$

3.3.3 Estrutura computacional hierárquica para projetar o controle descentralizado

é utilizado um tipo de algoritmo desenvolvido por Hassan e Singh para o princípio da predição para sistemas não lineares [18]; este tipo de algoritmo hierárquico envolve certas restrições lineares adicionais, de forma a decompor o problema de otimização num número de subproblemas independentes, para certas trajetórias fixadas num segundo nível. A idéia é melhorar essas trajetórias, usando um tipo de algoritmo de ponto fixo.

Assim são introduzidas as restrições adicionais seguintes:

$$T_d^* = T_d \quad \text{e} \quad \hat{x}^* = \hat{x} .$$

Substituindo essas restrições de uma forma que seja conveniente para decompor o problema, introduzimos essas restrições no índice de desempenho (3.3.12); o problema de otimização pode ser formulado em função dessas restrições da seguinte maneira.

$$\min J = \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \|\hat{X} - \hat{X}^d\|_{Q_d}^2 + \hat{X}^{*t} F R F \hat{X}^* + 2\hat{X}^{*t} G_b^t R \hat{\xi} + 2\hat{X}^{*t} T_d^t R \hat{\xi} + \hat{\xi}^t R \hat{\xi} + g(\hat{X}^*, F^*) \right\} dt \quad (3.3.16)$$

sujeito a :

$$\dot{\hat{X}} = A_d \hat{X} - B_d T_d \hat{X}^* + y(\hat{X}^*, \hat{Z}, T_d^*) \quad (3.3.17)$$

$$\hat{Z} = H \hat{X} \quad (3.3.11)$$

$$T_d^* = T_d \quad (3.3.18)$$

$$\hat{X}^* = \hat{X} \quad (3.3.19)$$

onde: $g(\hat{X}^*, F^*) = \|\hat{X}^* - \hat{X}^d\|_{Q^0}^2 + 2\hat{X}^{*t} F^{*t} R G_b^0 \hat{X}^* + \hat{X}^{*t} G_b^{0t} R G_b^0 \hat{X}^*$ (3.3.20)

e $y(\hat{X}^*, \hat{Z}, T_d^*) = A^0 \hat{X}^* + \hat{Z} - B^0 T_d^* \hat{X}^* + \hat{D}$ (3.3.21)

Para resolver este problema modificado escrevemos o Hamiltoniano global como:

$$H = \frac{1}{2} \|\hat{X} - \hat{X}^d\|_{Q_d}^2 + \frac{1}{2} \hat{X}^{*t} F^t R F \hat{X}^* + \hat{X}^{*t} G_b^t R \hat{\xi} + \hat{X}^{*t} T_d^t R \hat{\xi} + \frac{1}{2} \hat{\xi}^t R \hat{\xi} + \frac{1}{2} g(\hat{X}^*, F^*) + \lambda^t [A_d \hat{X} - B_d T_d \hat{X}^* + y(\hat{X}^*, \hat{Z}, T_d^*)] + \pi^t [H \hat{X} - \hat{Z}] + \beta^t [\hat{X} - \hat{X}^*] + \sum_{j=1}^n \gamma_i (T_{d_i} - T_{d_i}^*) \quad (3.3.22)$$

onde:

$$n = \sum_{i=1}^N n_i$$

e onde π, β , e γ_i são multiplicadores de Lagrange utilizados para satisfazer as restrições de igualdade $\hat{Z} = H\hat{X}$, $\hat{X}^* = \hat{X}$ e $T_d^* = T_d$. Note que T_d é uma matriz diagonal de forma que podemos associar a cada restrição $T_{d_i} = T_{d_i}^*$ seu respectivo multiplicador escalar de Lagrange γ_i ; dessa forma não teremos que melhorar as funções matriciais no primeiro nível.

Das condições necessárias de otimalidade obtemos as seguintes relações, para o Hamiltoniano (3.3.22):

$$\frac{\partial H}{\partial \pi} = 0, \implies \hat{Z} = H\hat{X} \quad (3.3.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{Z}} = 0, \implies \lambda - \pi = 0, \implies \lambda = \pi \quad (3.3.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0, \implies \hat{X}^* - \hat{X} = 0, \quad (3.3.19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma_i} = 0, \implies T_{d_i}^* = T_{d_i} \quad (3.3.24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{X}^*} = 0, \implies \frac{\partial}{\partial \hat{X}^*} \left\{ \frac{1}{2} \hat{X}^{*t} F^t R F \hat{X}^* + \hat{X}^{*t} T_d^t R \hat{X} + \frac{1}{2} g(\hat{X}^*, T_d^*) + \lambda^t [-B_d T_d \hat{X}^* + y(\hat{X}^*, \hat{Z}, T_d^*)] + \beta^t (\hat{X} - \hat{X}^*) \right\} = 0$$

obtendo a relação:

$$\beta = (F^t R F + Q^0 + F^{*t} R G_b^0 + G_b^{0t} R G_b^0) \hat{X}^* - Q^0 \hat{X}^d + T_d^t R \hat{X} + (A^{0t} - T_d^{*t} B^{0t} - T_d^t B_d^t) \lambda \quad (3.3.25)$$

$$\frac{\partial H}{\partial T_d^*} = \frac{\partial}{\partial T_d^*} \left\{ \hat{X}^{*t} F^{*t} R G_b^o \hat{X}^* + \lambda^t y(\hat{X}^*, Z, T_d^*) - \sum_{i=1}^n \gamma_i T_{di}^* \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T_d^*} \left\{ \hat{X}^{*t} (G_b^d + T_d^*) R G_b^o \hat{X}^* - \lambda^t B^o T_d^* \hat{X}^* - \sum_{i=1}^n \gamma_i T_{di}^* \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T_d^*} \left\{ (\hat{X}^{*t} G_b^o R - \lambda^t B^o) T_d^* \hat{X}^* - \sum_{i=1}^n \gamma_i T_{di}^* \right\}$$

$$T_d^* \hat{X}^* = \begin{bmatrix} T_{d1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & T_{dn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1^* \\ \vdots \\ \hat{x}_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^* & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{x}_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{d1}^* \\ \vdots \\ T_{dn}^* \end{bmatrix}$$

$$T_d^* \hat{X}^* = X \bar{T}_d^* \quad \text{assim a derivada parcial fica sendo:}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial T_d^*} ([R G_b^o \hat{X}^* - B^o \lambda]^t X \bar{T}_d^* - \gamma^t \bar{T}_d^*) = 0$$

$$\Rightarrow X^t [R G_b^o \hat{X}^* - B^o \lambda] - \gamma = 0; \text{ se chamamos } [R G_b^o \hat{X}^* - B^o \lambda] = \bar{v}$$

$$\Rightarrow (X \text{ matriz diagonal}) X^t \bar{v} = [\hat{x}_1^* v_1 \quad \hat{x}_2^* v_2 \quad \dots \quad \hat{x}_n^* v_n]^t$$

$$\Rightarrow X^t \bar{v} = \text{diag}[\bar{v} \hat{X}^{*t}] \quad \Rightarrow \gamma = \text{diag}([R G_b^o \hat{X}^* - B^o \lambda] \hat{X}^{*t}) \quad (3.3.26)$$

$$\frac{\partial H}{\partial T_d} = \frac{\partial}{\partial T_d} \left\{ \frac{1}{2} \hat{X}^{*t} F^t R F \hat{X}^* + \hat{X}^{*t} T_d^t R \hat{X}^* - \lambda^t B_d T_d \hat{X}^* + \sum_{i=1}^n \gamma_i T_{di} \right\} = 0$$

Vamos restringir a matriz de ponderação R a ser diagonal, para podermos quebrar a derivada da seguinte forma:

$$\frac{\partial H}{\partial T_d} = \frac{\partial}{\partial T_d} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \hat{x}_i^{*2} (G_{bi}^d + T_{di})^2 R_i + \sum_{i=1}^n \hat{x}_i^* T_{di} R_i \hat{x}_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{di} T_{di} \hat{x}_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i T_{di} \right\}$$

Derivando com respeito a T_{d_i} temos:

$$\frac{\partial H}{\partial T_{d_i}} = \hat{x}_i^{*2} R_i (G_{b_i}^d + T_{d_i}) + \hat{x}_i^* R_i \xi_i - \lambda_i B_{d_i} \hat{x}_i^* + \gamma_i = 0$$

Chamando $v_i = R_i \xi_i$ temos:

$$T_{d_i} = -G_{b_i}^d - \frac{1}{R_i \hat{x}_i^{*2}} (\hat{x}_i^* v_i - \lambda_i B_{d_i} \hat{x}_i^* + \gamma_i) \quad (3.3.27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{\hat{x}}$$

$\dot{\hat{x}} = A_d \hat{x} - B_d T_d \hat{x}^* + y(\hat{x}^*, \hat{z}, T_d^*)$; se y_i é o i -ésimo componente de y , a equação acima pode ser escrita como:

$$\dot{\hat{x}}_i = A_{d_i} \hat{x}_i - B_{d_i} T_{d_i} \hat{x}_i^* + y_i, \text{ substituindo } T_{d_i} \text{ temos:}$$

$$\dot{\hat{x}}_i = A_{d_i} \hat{x}_i + B_{d_i} G_{b_i}^d \hat{x}_i^* + \frac{B_{d_i} v_i}{R_i} + \frac{B_{d_i} \gamma_i}{R_i \hat{x}_i^{*2}} - \frac{B_{d_i} \lambda_i}{R_i} + y_i(\hat{x}^*, \hat{z}, T_d^*) \quad (3.3.28)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} = -\dot{\lambda}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} = Q_d(\hat{x} - \hat{x}^d) + G_b^t R \xi + A_d^t \lambda + H^t \pi + \beta = -\dot{\lambda}$$

Chamando:

$$\bar{r} = G_b^t R \xi \text{ e } \bar{k} = H^t \pi \quad (3.3.29)$$

a equação acima pode ser escrita como:

$$\dot{\lambda} = -Q_d(\hat{x} - \hat{x}^d) - \bar{r} - A_d \lambda - \bar{k} - \beta \quad \text{ou na forma escalar:}$$

$$\lambda_i = -Q_{d_i}(x_i - \bar{x}_i) - r_i - A_{d_i}\lambda_i - k_i - \beta_i \quad (3.3.30)$$

Para poder decompor nosso problema numa estrutura hierárquica de três níveis de computação, temos que fixar trajetórias no terceiro e segundo níveis. Num processo de predição das trajetórias, satisfazemos as condições de otimalidade para as trajetórias do primeiro nível; a seguir, temos que satisfazer as condições de otimalidade para o segundo nível, com os dados fornecidos pelo primeiro nível; caso não satisfaçam às condições, é calculado uma nova e melhor predição dos dados do segundo nível, para logo serem fornecidos ao primeiro nível; este processo de melhoramento das trajetórias se repete até que sejam satisfeitas as condições de otimalidade do primeiro e segundo níveis. Com os dados fornecidos pelo primeiro e segundo níveis, testamos se satisfazem as condições de otimalidade para as trajetórias do terceiro nível; caso não satisfaçam melhoramos as trajetórias do terceiro nível fornecendo-as ao segundo e primeiro níveis; o processo anterior se repete até que todas as condições de otimalidade do primeiro, segundo e terceiro níveis sejam satisfeitas.

No terceiro nível serão melhoradas as predições das trajetórias \hat{Z} e \bar{k} , no segundo nível serão melhoradas as trajetórias \hat{x}^* , $T_{d,\beta}^*$ e γ , no primeiro nível são calculadas as trajetórias \hat{x} , T_d e λ .

São fornecidas as trajetórias \hat{Z} , \bar{k} , \hat{x}^* , $T_{d,\beta}^*$ e γ ao primeiro nível; resolvemos primeiro para as equações (3.3.28) e 3.3.29), para este problema de contorno de dois pontos com valores terminais conhecidos. A solução para λ_i sera dada pela seguinte relação:

$$\lambda_i = P_i \hat{x}_i + \eta_i \quad (3.3.31),$$

onde P_i e η_i são trajetórias a determinar.

$$\dot{\lambda} = \dot{P}_i \hat{X}_i + P_i \dot{\hat{X}}_i + \dot{\eta}_i \quad ==>$$

$$-Q_{d_i} (\hat{X}_i - \hat{X}_i^d) - r_i - A_{d_i} (P_i \hat{X}_i + \eta_i) - k_i - \beta_i = \dot{P}_i \hat{X}_i + P_i \left\{$$

$$A_{d_i} \hat{X}_i + B_{d_i} G_{b_i}^d \hat{X}_i^* + \frac{B_{d_i} v_i}{R_i} + \frac{B_{d_i} \gamma_i}{R_i \hat{X}_i^*} - \frac{B_{d_i}^2 (P_i \hat{X}_i + \eta_i)}{R_i} + y_i(\hat{X}_i^*, Z, T_d^*) \right\} + \dot{\eta}_i$$

Rearranjando termos chegamos a:

$$(\dot{P}_i + Q_i + A_{d_i} P_i + P_i A_{d_i} - \frac{P_i B_{d_i}^2 P_i}{R_i}) \hat{X}_i +$$

$$(\dot{\eta}_i + A_{d_i} \eta_i - \frac{P_i B_{d_i}^2 \eta_i}{R_i} + P_i B_{d_i} G_{b_i}^d \hat{X}_i^* + \frac{P_i B_{d_i} \gamma_i}{R_i \hat{X}_i^*} + \frac{P_i B_{d_i} v_i}{R_i} + P_i y_i + r_i + k_i + \beta_i + Q_{d_i}) = 0$$

Para que isto seja válido para todo \hat{X}_i , temos que resolver as seguintes equações diferenciais:

$$\dot{P}_i = -2A_{d_i} P_i + \frac{P_i^2 B_{d_i}^2}{R_i} - Q_{d_i} \quad , \quad P_i(T) = 0 \quad (3.3.32)$$

$$\dot{\eta}_i = (-A_{d_i} + \frac{P_i B_{d_i}^2}{R_i}) \eta_i - P_i (B_{d_i} G_{b_i}^d \hat{X}_i^* + \frac{B_{d_i} \gamma_i}{R_i \hat{X}_i^*} + \frac{B_{d_i} v_i}{R_i} + y_i) - r_i - k_i - \beta_i + Q_{d_i} \hat{X}_i^d \quad (3.3.33)$$

$$\eta_i(T) = 0$$

O algoritmo para este método é dado a seguir:

ALGORITMO

- Passo 1 Fornecemos as condições iniciais \hat{z}_r e \bar{k}_r ao terceiro nível e fazemos $r=1$ (r índice de iteração)
- Passo 2 Fornecemos as trajetórias iniciais $\hat{x}_l^*, T_{dl}^*, \beta_l, \gamma_l$ ao segundo nível e fazemos o índice da iteração $l=1$
- Passo 3 Com os dados $\hat{x}_l^*, T_{dl}, \beta_l, \gamma_l$, obtidos no passo 2 calculamos P_i, η_i das equações (3.3.32) e (3.3.33); substituindo em (3.3.31) e resolvendo (3.3.28) obtemos \hat{x}_l ; dessa forma, de (3.3.31) obtemos λ_l , e por substituição obtemos T_{dl} da equação (3.3.27).
- Passo 4 Substituindo os valores obtidos no passo 3 (\hat{x}, λ, T_d) nas equações (3.3.19), (3.3.24), (3.3.25) e (3.3.26) obtemos os novos valores $\hat{x}_{l+1}^*, T_{dl+1}^*, \beta_{l+1}$ e γ_{l+1} ; se a norma da diferença entre $(\hat{x}_{l+1}^*, \hat{x}_l^*), (T_{dl+1}^*, T_{dl}^*), (\beta_{l+1}, \beta_l)$ e (γ_{l+1}, γ_l) não for suficientemente pequena, forneceremos os novos valores preditos ao passo 2; caso contrário, vamos ao nível 3 e calculamos \hat{z}_{r+1} e \bar{k}_{r+1} das equações (3.3.11) e (3.3.29). Se a norma da diferença de (z_{r+1}, z_r) e $(\bar{k}_{r+1}, \bar{k}_r)$ for suficientemente pequena, armazenaremos T_d como a matriz ganho descentralizada, caso contrário voltamos ao passo 2 com os valores de \hat{z}_{r+1} e \bar{k}_{r+1} como novos valores melhorados preditos.

3.3.4 Condições de estabilidade para o método

A estabilidade de sistemas dinâmicos interconectados, com controladores completamente descentralizados, tem sido estudada por Siljak [1], que obteve condições suficientes para garantir a estabilidade do sistema global. Também para um sistema que não

satisfaz estas condições, [1] propôs um segundo nível de controle que pode melhorar a estabilidade e o índice de subotimalidade do sistema. Seguindo um procedimento similar, apresentamos uma condição suficiente para que o método estabilize o sistema, e demostramos que este controle melhora o índice de subotimalidade do sistema.

Teorema 3.3.1 O controle:

$$\hat{u}_i(t) = -G_{bi}\hat{x}_i - e_{ii}T_{di}\hat{x}_i - \hat{\xi}_i \quad i=1,2,\dots,N \quad (3.3.34)$$

com T_{di} matriz ganho descentralizado do i -ésimo subsistema, aplicado ao sistema (3.3.1), resulta no sistema em malha fechada dado pela equação:

$$\dot{\hat{x}}_i = A_i\hat{x}_i - B_iG_{bi}\hat{x}_i - B_ie_{ii}T_{di}\hat{x}_i + \sum_{j=1}^N e_{ij}A_{ij}\hat{x}_j + d_i - B_i\hat{\xi}_i \quad (3.3.35)$$

Ele será exponencialmente estável com grau α , se a seguinte condição é satisfeita:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|H_{ij}\| \leq \frac{\min_i \lambda_m(W_i)}{\max_i \lambda_M(P_i)} + \frac{\min_i a_i \sum_{j=1}^N e_{ij}}{\max_i \lambda_M(P_i)} \quad (3.3.36)$$

onde:

$$W_i = Q_i + P_i R_i^{-1} B_i^T P_i \quad (3.3.37)$$

e P_i é a solução da equação de Riccati $A_i^T P_i + P_i A_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^T P_i + Q_i = 0$;

H_{ij} e a_i são definidos como:

$$H = (-\hat{A} + BG_b + BT) \quad (3.3.38)$$

$$a_i = \|P_i B_i T_{di}\|$$

Prova

Consideramos a minimização da equação (3.3.6) sujeita à equação (3.3.5), supondo a estrutura da interconecção entre os subsistemas ideal (não existem perturbações estruturais). Obtemos o seguinte sistema em malha fechada:

$$\dot{\hat{x}} = (\hat{A} - BG_b - BT)\hat{x} - B\hat{e} + \hat{d} \quad \text{ou} \quad \dot{\hat{x}} = (\hat{A} - BG_b - BT)\hat{x} + \hat{D} \quad (3.3.39)$$

onde $\hat{D} = \hat{d} - B\hat{e}$

Se este sistema é estável, e se o tempo final for suficientemente grande, teremos: $\hat{x} \rightarrow 0$ e $\hat{x} \rightarrow \hat{x}^d$ quando $t \rightarrow \tau$. Então em $t = \tau$ (τ tempo final) teremos:

$$\hat{D}(\tau) = -(\hat{A} - BG_b - BT)\hat{x}^d(\tau)$$

$$\text{ou} \quad \hat{D}(t) = -(\hat{A} - BG_b - BT)\hat{x}^d(t) \quad (3.3.40)$$

Primeiramente é provada estabilidade do sistema quando somente os ganhos de realimentação G_{bi} são aplicados. A seguir apresenta-se a prova para quando T_d também é aplicado, e finalmente por meio de comparação analisamos o índice de desempenho.

Estabilidade do sistema quando são aplicados somente os ganhos G_{bi}

Consideremos a função de Liapunov dada por:

$$V = \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \hat{x}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.3.41)$$

Como os P_i são matrizes definidas positivas, devemos encontrar a condição na qual \dot{V} seja pelo menos definida negativa. Suporemos que o tempo final τ é suficientemente grande e que a matriz de interconecção E , tenha elementos \bar{e}_{ij} . Derivando V temos:

$$dV/dt = \sum_{i=1}^N \left\{ \dot{\hat{x}}_i^t P_i \hat{x}_i + \hat{x}_i^t P_i \dot{\hat{x}}_i \right\}$$

$$dV/dt = \sum_{i=1}^N \left\{ [(\hat{A}_i - B_i G_{bi}) \hat{x}_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j + \hat{D}_i]^t P_i \hat{x}_i + \hat{x}_i^t P_i [(\hat{A}_i - B_i G_{bi}) \hat{x}_i + \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j + \hat{D}_i] \right\} \text{ onde } G_{bi} = B_i R_i^{-1} B_i^t P_i$$

$$dV/dt = \sum_{i=1}^N \left\{ [\hat{x}_i^t (\hat{A}_i^t - P_i B_i R_i^{-1} B_i^t) P_i \hat{x}_i] \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^N e_{ij} \hat{x}_j^t A_{ij}^t P_i \hat{x}_i \right\} +$$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \hat{D}_i^t P_i \hat{x}_i \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{x}_i^t P_i [(\hat{A}_i - B_i R_i^{-1} B_i^t) P_i] \hat{x}_i \right\} + \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j \right\} +$$

$$\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \hat{D}_i$$

Como $\hat{x}_j^t A_{ij}^t P_i \hat{x}_i = \hat{x}_i^t P_i A_{ij} \hat{x}_j$ e $\hat{D}_i^t P_i \hat{x}_i = \hat{x}_i^t P_i \hat{D}_i$ temos:

$$dV/dt = \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{x}_i^t (\hat{A}_i^t P_i + P_i \hat{A}_i + 2P_i B_i R_i^{-1} B_i^t P_i) \hat{x}_i \right\} + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \hat{D}_i$$

$$dV/dt = \sum_{i=1}^N \left\{ \hat{x}_i^t (-Q_i - P_i B_i R_i^{-1} B_i^t P_i) \hat{x}_i \right\} + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \hat{D}_i$$

Das equações (3.3.37), (3.3.38) e (3.3.40) temos:

$$dV/dt = - \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|_{W_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j - 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N H_{ij} \hat{x}_j^d(t)$$

Utilizaremos as seguintes desigualdades:

$$\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i^t P_i\| \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\| \leq \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i^t\| \sum_{j=1}^N e_{ij} P_i \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\|$$

$$\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j \leq \sum_i \sum_j e_{ij} \|\hat{x}_i^t\| \|P_i\| \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\| \leq \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i^t\| \|P_i\| \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\|$$

Como $\|\hat{x}_i\| \leq \sum_{j=1}^N \|\hat{x}_j\|$ temos $\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^N \|P_i\| \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2$

$$\|P_i\| = (\lambda_M(P_i^t P_i))^{1/2} = \lambda_M(P_i)$$

$$\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^N \lambda_M(P_i) \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2 \leq \max_i \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2 \quad (3.3.42)$$

$$\sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|_{W_i}^2 \geq \min \lambda(W_i) \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|^2 \quad \text{ou} \quad - \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|_{W_i}^2 \leq - \min \lambda(W_i) \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|^2 \quad (3.3.43)$$

$$\sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T P_i \sum_{j=1}^N H_{ij} \hat{x}_j^d \leq \text{Max } \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|H_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2 \quad (3.3.44)$$

Somando as desigualdades (3.3.42), (3.3.43) e (3.3.44) temos:

$$-\sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|_{W_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j - 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^T P_i \sum_{j=1}^N H_{ij} \hat{x}_j^d(t) \leq$$

$$-\min \lambda(W_i) \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|^2 + 2 \text{Max } \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2 + 2 \text{Max } \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|H_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2 \leq 0$$

de onde resulta:

$$2 \text{Max } \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2 + 2 \text{Max } \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|H_{ij}\| \|\hat{x}_j\|^2 \leq \min \lambda(W_i) \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_j\|^2$$

$$2 \text{Max } \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| + 2 \text{Max } \lambda_M(P_i) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|H_{ij}\| \leq \min \lambda(W_i)$$

que pode ser escrito como:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} \|A_{ij}\| + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \|H_{ij}\| \leq \frac{1}{2} \frac{\min \lambda_m(W_i)}{\text{Max } \lambda_M(P_i)} \quad (3.3.45)$$

Desde que $\|e_{ij}\| \leq \|\bar{e}_{ij}\|$ elemento a elemento, a equação acima assegura a estabilidade assintótica do sistema, para qualquer matriz de interconexão E.

Estabilidade do sistema global quando T_d é também aplicado

Considerando a mesma função de Lyapunov acima temos:

$$\begin{aligned}
 dV/dt = & - \sum_{i=1}^N \|\hat{x}_i\|_{w_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N e_{ij} A_{ij} \hat{x}_j + 2 \sum_{i=1}^N \hat{x}_i^t P_i \sum_{j=1}^N H_{ij} \hat{x}_j^d(t) - \\
 & - 2 \sum_{i=1}^N x_i^t P_i B_i e_{ii} T_{di} x_i \quad (3.3.46)
 \end{aligned}$$

desde que:

$$\sum_{i=1}^N x_i^t P_i B_i T_{di} x_i e_{ii} \geq \min_i a_i \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 e_{ii}$$

Para que dv/dt seja semidefinida negativa, teremos que satisfazer:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_{ij} f_{ij} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \leq \frac{1}{2} \frac{\min_i \lambda_m(w_i)}{\max_i \lambda_M(P_i)} + \frac{\min_i a_i \sum_{i=1}^N e_{ii}}{\max_i \lambda_M(P_i)} \quad (3.3.47)$$

Temos novamente que se $|e_{ij}| \leq |\bar{e}_{ij}|$, elemento a elemento, a expressão acima assegura a estabilidade assintótica global do sistema para qualquer matriz de interconecção E.

Comparando as expressões nas equações (3.3.45) e (3.3.47), podemos ver que T_d tem o efeito de estabilizar o sistema, dado que a expressão (3.3.47) é menos restritiva.

3.3.5 Análise do método e conclusões

Para o cálculo do ganho de controle descentralizado, é necessário primeiramente calcular o ganho de realimentação de cada subsistema, de modo que cada subsistema exiba isoladamente um grau de estabilidade pré-especificado α . Essa matriz ganho é utilizada no projeto como um dado conhecido do problema, sendo posteriormente modificada pela

matriz diagonal T_d , tomando em conta assim as interconecções dos subsistemas. Este controle é de natureza subótima devido à restrição imposta à matriz ganho T_d .

O algoritmo utilizado é do tipo predição e sua convergência pode ser provada usando uma técnica similar à utilizada em [2]. O algoritmo é simples devido a que nos segundo e terceiro níveis são utilizadas simples substituições, e no primeiro nível são efetuadas operações para soluções de equações diferenciais escalares.

O cálculo completo do projeto do controle descentralizado é feito off-line, e implementado on-line; os ganhos do controle são dependentes das condições iniciais, porém nas simulações efetuadas os ganhos são relativamente insensíveis a pequenas variações nas condições iniciais.

Finalizando, na seção (3.3.4) é encontrada uma condição suficiente para a estabilidade do sistema global; podemos notar que a condição que leva em conta a matriz ganho T_d é menos restritiva do que aquela na qual as interações não são tomadas em conta.

3.4 CONTROLE DESCENTRALIZADO SEGUIDOR DO MODELO

3.4.1 Introdução

Nesta seção será estudado um método para obter um controlador descentralizado para sistemas de grande porte, com os subsistemas linearmente interconectados, utilizando um modelo de baixa ordem para as interconecções, aqui denominado "modelo rústico".

Existem dois possíveis caminhos para o tratamento da idéia de se ter um modelo das interconecções. A primeira possibilidade, é a de começar pela escolha de um modelo rústico para as interconecções, e baseados neste modelo calcularmos as trajetórias das interconecções e matrizes ganho, melhorando subsequentemente este modelo on-line. A

segunda possibilidade aceita as matrizes ganho obtidas para o modelo rústico escolhido inicialmente, e então modifica on-line as trajetórias das interconecções estimadas do modelo rústico. Tendo estimado as trajetórias das interconecções, é possível computar um controle completamente descentralizado.

Aqui estaremos concentrados na segunda possibilidade, que está baseada no trabalho de Hassan e Singh [4], formulando e desenvolvendo o método do modelo seguidor, para obter um controle descentralizado, que leva o sistema a uma trajetória desejada constante.

3.4.2 formulação do problema

Consideremos o seguinte problema de otimização de N sistemas linearmente interconectados:

$$\min J = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \|x_i - x_i^d\|_{Q_i}^2 + \|u_i\|_{R_i}^2 \right\} dt \quad (3.4.1)$$

$$\text{sujeito a: } \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + C_i z_i + d_i \quad (3.4.2)$$

$$z_i = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j \quad (3.4.3)$$

onde N é o número de subsistemas, $i = 1, 2, \dots, N$

x_i^d é o valor de regime desejado para o subsistema i,

x_i é o vetor de estado de dimensão n_i do i-ésimo subsistema,

u_i é vetor de controle de dimensão m_i ,

z_i é o vetor de interconecção de dimensão q_i ,

d_i é um vetor de perturbação conhecida.

Também supomos que o par (A_i, B_i) é completamente controlável.

Suponhamos inicialmente que z_i pode ser representado pelo

seguinte modelo de equação dinâmica:

$$\dot{z}_i = A_{zi} z_i + z_{di} \quad (3.4.4)$$

onde:

$$z_{di} = -A_{zi} z_i^d \quad \text{e} \quad z_i^d = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j^d \quad (3.4.5)$$

A escolha de A_{zi} e z_{di} será discutida posteriormente.

Modificamos nosso problema de otimização na forma aproximada seguinte:

$$\min J = \sum_{i=1}^N \int_0^{\infty} (\|y_i - y_i^d\|_{Q_{yi}}^2 + \|u_i\|_{R_i}^2) dt \quad (3.4.6)$$

$$\text{sujeito a: } \dot{y}_i = A_{yi} y_i + B_{yi} u_i + d_{yi} \quad (3.4.7)$$

onde:

$$y_i = \begin{bmatrix} x_i \\ z_i \end{bmatrix}, \quad A_{yi} = \begin{bmatrix} A_i & C_i \\ 0 & A_{zi} \end{bmatrix}$$

$$B_{yi} = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Q_{yi} = \begin{bmatrix} Q_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{yi} = \begin{bmatrix} d_i \\ z_{di} \end{bmatrix}, \quad y_i^d = \begin{bmatrix} x_i^d \\ z_i^d \end{bmatrix}$$

A matriz ganho resultante para o controle deste problema de otimização linear quadrático, depende da matriz escolhida A_{zi} e leva em conta as trajetórias z_i , porque o controle u_i , para resolver o problema, depende de x_i e z_i . Para aplicações reais, muitas vezes não é possível a avaliação das variáveis de interconecção; por esse

motivo, precisamos achar uma maneira de estimar as trajetórias z_i ; aqui não tentaremos melhorar o modelo para as interconecções, em vez disso tentaremos modificar as trajetórias de z_i .

Para alcançar esse objetivo, nos confrontamos com dois problemas a serem solucionados, ou pelo menos para encontrar a melhor solução possível.

O primeiro problema é a escolha do modelo rústico; dependendo da natureza e do condicionamento do modelo global, essa escolha pode ser simples ou complicada.

O segundo problema é como modificar as interações do modelo rústico, de forma a ter-se uma estimativa confiável das interconecções.

Esses problemas serão discutidos a seguir.

3.4.3 Escolha do modelo rústico

Escolha de A_{z_i} :

Discutiremos em primeiro lugar o método sugerido por Hassan e Singh [4]; eles escolhem um modelo rústico de baixa ordem para as interconecções; ilustraremos por meio de um exemplo dado em [4], da seguinte maneira.

Seja a matriz global $A_g = A+CL$, dada por.

$$A_g = A + CL = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & 0 & 0 \\ \hline a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array} \right]$$

onde $A = \text{diag}(A_i)$ e CL é a matriz composta do resto do sistema global.

Se o sistema está subdividido em dois subsistema, como indicado pelas linhas tracejadas, observamos que a quarta coluna no "domínio" do primeiro subsistema tem elementos iguais a zero; então eliminamos a coluna e fila correspondentes ao quarto estado da matriz, logo embaixo do subsistema 2; este procedimento repete-se se mais colunas forem iguais a zero. A seguir fazemos o mesmo procedimento para o segundo subsistema.

Neste exemplo, o modelo rústico será dada pelas matrizes :

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_9 \end{bmatrix}, \quad A_{z1} = \begin{bmatrix} a_{55} & a_{59} \\ a_{95} & a_{99} \end{bmatrix}, \quad z_2 = x_1, \quad A_{z2} = a_{11}$$

Este método fornece um bom modelo para o caso onde os elementos escolhidos são dominantes nas filas de A. Para outros exemplos, a escolha de A_{zi} pode conduzir a um periodo longo de correção on-line.

O segundo método da escolha de A_{zi} é sugerido em [3]; ele utiliza uma alocação de polos, de forma que eles se aloquem no semiplano esquerdo do plano complexo; por exemplo, podemos fazer que A_{zi} seja uma matriz diagonal, com elementos negativos escolhidos de forma que na simulação os resultados sejam razoáveis.

Escolha de z_{di}

O valor de z_{di} do modelo rústico é escolhido de forma a obtermos no regime valores desejados para as interconecções; no regime temos $\dot{z}_i=0$; os valores de z_{di} são dados na equação (3.4.5); notamos que o seu cálculo depende de A_{zi} e do conhecimento dos valores de regime dos outros subsistemas.

3.4.4 Modificação nas interconecções do modelo rústico

Supondo que o par (A_{y_i}, B_{y_i}) é controlável, resolvemos o problema formulado pelas equações (3.4.6) e (3.4.7), que é um problema linear quadrático que segue uma trajetória constante com perturbação conhecida; a solução ótima para este problema é dada pelo seguinte controle realimentado [27]:

$$u_i^* = -R_i^{-1} B_{y_i}^t P_i y_i - R_i^{-1} B_{y_i}^t P_i V_i \quad (3.4.8)$$

onde P_i é a solução da equação de Riccati:

$$A_{y_i}^t P_i + P_i A_{y_i} - P_i B_{y_i} R_i^{-1} B_{y_i}^t P_i + Q_{y_i} = 0$$

e V_i é solução da equação resultante quando $t \rightarrow \infty$:

$$\dot{V}_i + (A_{y_i} - B_{y_i} R_i^{-1} B_{y_i}^t P_i)^t V_i + P_i d_{y_i} - Q_{y_i} y_i^d = 0$$

Chamando $\xi_i = R_i^{-1} B_{y_i}^t P_i V_i$ e $G_i = R_i^{-1} B_{y_i}^t P_i$, a lei de controle pode ser escrita como:

$$u_i^* = -G_i y_i - \xi_i, \text{ ou de uma forma particionada:}$$

$$u_i^* = -[G_{i1} \mid G_{i2}] \begin{bmatrix} x_i \\ z_i \end{bmatrix} - \xi_i \text{ ou}$$

$$u_i^* = -G_{i1} x_i - G_{i2} z_i - \xi_i \quad (3.4.9)$$

Observamos que este controle está em função do modelo aproximado para as interconecções z_i e dos estados do próprio subsistema.

Como as trajetórias das interconecções z_i são obtidas do modelo rústico, precisamos melhorar essas trajetórias on-line. Para fazer isto, consideramos um modelo do subsistema cujas entradas sejam as \hat{z}_i provenientes do modelo rústico, que é consistente com um conhecimento a priori que temos do sistema:

$$\dot{\hat{x}}_i = A_i \hat{x}_i + B_i u_i + C_i \hat{z}_i + d_i \quad (3.4.10)$$

onde \hat{x}_i é o vetor de estado estimado do modelo do subsistema.

Substituímos no controle dado por (3.4.9), o valor de z_i pelo valor estimado \hat{z}_i do modelo rústico; teremos então um controle completamente descentralizado; substituindo este controle no modelo do subsistema dado pela equação (3.4.10) e no subsistema (3.4.2), temos então as seguintes equações:

$$\dot{x}_i' = (A_i - B_i G_{i1}) x_i' + C_i z_i - B_i G_{i2} \hat{z}_i - B_i \xi_i$$

Chamando $\hat{A}_i = A_i - B_i G_{i1}$ temos:

$$\dot{x}_i' = \hat{A}_i x_i' + C_i z_i - B_i G_{i2} \hat{z}_i - B_i \xi_i \quad (3.4.11)$$

$$\dot{\hat{x}}_i' = (A_i - B_i G_{i1}) \hat{x}_i' + C_i \hat{z}_i - B_i G_{i2} \hat{z}_i - B_i \xi_i$$

$$\dot{\hat{x}}_i' = \hat{A}_i \hat{x}_i' + (C_i - B_i G_{i2}) \hat{z}_i - B_i \xi_i \quad (3.4.12)$$

subtraindo as equações (3.4.11) e (3.4.12) temos:

$$(\dot{x}_i' - \dot{\hat{x}}_i') = \hat{A}_i (x_i' - \hat{x}_i') + C_i (z_i - \hat{z}_i)$$

Chamando os vetores erro:

$$\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i \quad (3.4.13)$$

$$\tilde{z}_i = z_i - \hat{z}_i \quad (3.4.14)$$

temos:

$$\dot{\tilde{x}}_i = \hat{A}_i \tilde{x}_i + C_i \tilde{z}_i \quad (3.4.15)$$

Nosso objetivo é fazer com que o vetor erro \tilde{x}_i tenda para zero no transcurso do tempo ; para tal objetivo utilizaremos \tilde{z}_i como um controle realimentado, de forma a obter uma trajetória assintoticamente estável do vetor erro \tilde{x}_i ; o projeto sera feito utilizando a teoria de controle ótimo.

Construimos outro problema de otimização da seguinte maneira:

$$\min \tilde{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\|\tilde{x}_i\|_{H_i}^2 + \|\tilde{z}_i\|_{S_i}^2) dt \quad (3.4.16)$$

onde H_i e S_i são matrizes semidefinida positiva e definida positiva respectivamente.

Temos então, um problema linear quadrático dado pelas equações (3.4.16) e (3.4.15) ; a solução deste problema é dada por:

$$z_i^* = -S_i^{-1} C_i^T K_i \tilde{x}_i \quad (3.4.17)$$

onde K_i é solução da equação Riccati:

$$\hat{A}_i^T K_i + K_i \hat{A}_i - K_i C_i S_i^{-1} C_i^T K_i + H_i = 0$$

Notemos que dependendo das matrizes H_i e S_i podemos obter uma solução adequada para nosso problema, possibilitando a

escolha de um projeto conveniente para o problema.

Das equações (3.4.14) e (3.4.17) podemos obter uma melhor aproximação para as trajetórias estimadas z_i :

$$z_i = \hat{z}_i - S_i^{-1} C_i^t K_i \tilde{x}_i \quad (3.4.18)$$

O termo $- S_i^{-1} C_i^t K_i \tilde{x}_i$ dá a modificação on-line das trajetórias das interconecções do modelo rústico.

3.4.5 Implementação do controle descentralizado

Para a implementação do controle utilizamos a trajetória estimada modificada de z_i , dada pela equação (3.4.18); assim o controle para o subsistema sera dado por:

$$u_i = -G_{i1} x_i - G_{i2} (\hat{z}_i - S_i^{-1} C_i^t K_i \tilde{x}_i) - \xi_i \quad (3.4.19)$$

Aplicando ao subsistema dinâmico temos:

$$\dot{x}_i = (A_i - B_i G_{i1}) x_i - B_i G_{i2} [\hat{z}_i - S_i^{-1} C_i^t K_i (x_i - \hat{x}_i)] - B_i \xi_i + C_i z_i + d_i$$

$$\dot{x}_i = \hat{A}_i x_i + C_i z_i - B_i G_{i2} [\hat{z}_i - S_i^{-1} C_i^t K_i (x_i - \hat{x}_i)] + D_i \quad (3.4.20)$$

$$\text{onde } D_i = d_i - B_i \xi_i$$

\hat{x}_i é fornecido pelo modelo do sistema; utilizando o controle dado por $u_i = -G_{i1} \hat{x}_i - G_{i2} \hat{z}_i - \xi_i$, a equação dinâmica é dada por:

$$\dot{\hat{x}}_i = \hat{A}_i \hat{x}_i + (C_i - B_i G_{i2}) \hat{z}_i - B_i \xi_i + d_i \quad (3.4.21)$$

\hat{z}_i é fornecido pelo modelo rústico:

$$\dot{\hat{z}}_i = A_{zi} \hat{z}_i + z_{di}$$

Representamos a implementação desse controle na figura 3.4.1 .

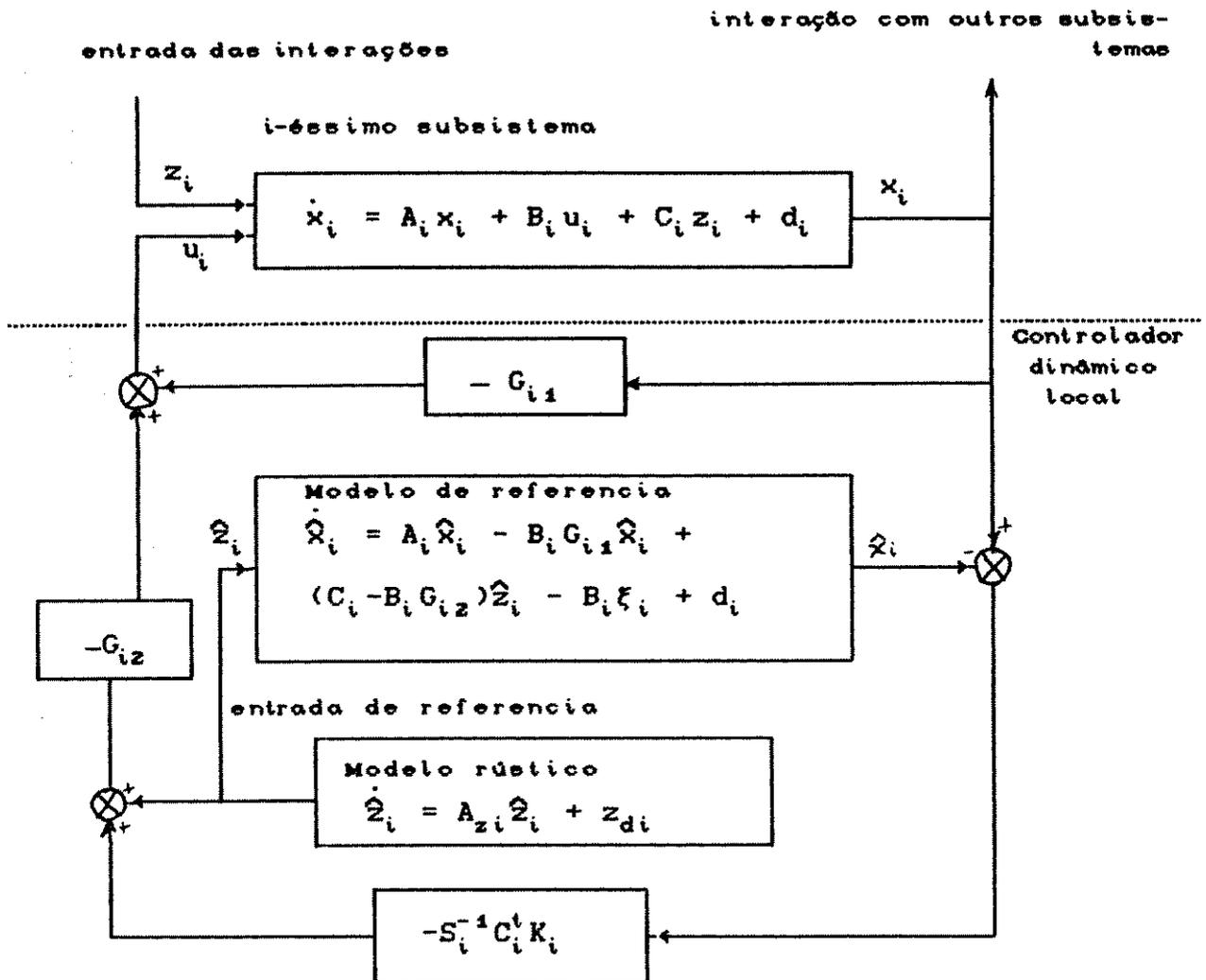


fig 3.4.1 controlador dinâmico local

3.4.6 Controle descentralizado seguidor de modelo: Análise e conclusões

Neste método de projeto de controle descentralizado podemos destacar os seguintes fatos.

a) O controle é completamente descentralizado, portanto não precisa informações do resto do sistema.

b) O controle projetado é independente das condições iniciais do sistema, portanto não é preciso recalcular ou modificar as matrizes ganho.

c) Para os cálculos de projeto do controlador são só necessárias operações de ordem menor do que a do sistema global, porque o modelo rústico é de baixa ordem; ele é feito subsistema por subsistema.

d) O controlador é Robusto no sentido de Siljak [1], isto é o sistema permanece estável sob perturbações estruturais.

e) As interconecções são melhoradas on-line utilizando a técnica do modelo seguidor.

f) A eficácia deste controle depende da escolha do modelo rústico A_{zi} , porém aceita uma certa flexibilidade devido a que as estimativas das interconecções são corrigidas no transcurso do tempo, pelo canal de realimentação.

CAPÍTULO 4

CONTROLE ÓTIMO DESCENTRALIZADO DO NÍVEL DE POLUIÇÃO NOS RIOS

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são aplicadas técnicas de controle descentralizado ao controle do nível de poluição nos rios.

Na seção 4.2 discutimos o problema da qualidade da água nos rios, pretendendo situar as causas e impactos no meio ambiente, decorrentes da poluição da água nos rios. Estudamos também os parâmetros que desempenham um papel importante no equilíbrio ecológico nas águas dos rios; concluimos, então que o oxigênio dissolvido (OD) e a demanda bioquímica de oxigênio (DBO), parâmetros relacionados entre si, precisam ser mantidos dentro de níveis específicos, de forma a tornar aceitável a qualidade da água nos rios. O nosso controle, então, será direcionado de forma a manter esses parâmetros dentro desses níveis. Para tal objetivo precisamos de modelos das reações e fenômenos que ocorrem dentro dos rios, especialmente dos parâmetros OD e DBO.

Na seção 4.3, serão discutidos modelos desses fatores, e na seção 4.4 serão aplicados métodos de controle descentralizado para manter o nível de poluição de segmentos do rio Cam (Inglaterra). Finalizando, são feitos comentários e conclusões sobre esta aplicação, bem como são citados projetos e trabalhos futuros nesta área de aplicação.

4.2 O problema da qualidade da água nos rios

Existem várias formas de perturbar o equilíbrio ecológico das águas nos rios, quase sempre feitas por nós humanos; entre elas podemos citar: o esgoto sem tratamento fornecido pelas grandes cidades, os efluentes das indústrias sem tratamento adequado, os agrotóxicos dos campos agrícolas carregados pelas chuvas, etc. Os impactos destas perturbações nos rios podem ser vistos em muitos exemplos como: a morte da vida aquática nos rios (peixes, algas, bactérias, ...), ou os problemas de saúde causados tanto para o ser humano como para os demais seres vivos dependentes direta ou indiretamente dessas águas. Estes problemas, muitas vezes foram julgados serem consequência inevitável de uma comunidade em desenvolvimento; somente depois de reconhecer sérios impactos na saúde das pessoas, como resultado de descargas de esgoto sem controle nos rios, é que foram feitos grandes avanços no tratamento das águas residuárias, principalmente na água para consumo humano; porém esta e outras perturbações afetam também o equilíbrio ecológico no habitat aquático e nos seres vivos dependentes destas águas.

São vários os fatores que causam "poluição" nos rios; na verdade o significado da palavra poluição no que concerne aos rios, é um pouco controvertido; podemos interpretá-la, como um estado indesejável da água; em [27] a poluição é definida como "materiais na água que interferem de forma irracional com um ou mais usos benéficos da água". Esta definição, pode ser interpretada de várias maneiras, se analisada especificamente; por exemplo, a água dos rios utilizados para satisfazer propósitos municipais de água potável pode não ser satisfatória para a vida dos peixes. Então precisamos estabelecer

metas e objetivos de forma a satisfazer certos tipos de necessidades de forma coerente.

Do ponto de vista de administração e controle da poluição dos rios, existe uma política (nos Estados Unidos, por exemplo) de preservação das águas nos rios dentro de níveis de qualidade aceitáveis, para manter pelo menos a vida aquática de algumas espécies de peixes. Neste sentido faz-se necessária a avaliação de normas e especificações de qualidade das águas nos rios, entrando em jogo municípios e indústrias que descarregam esgotos nos rios.

Pela impossibilidade de ter estações de tratamento que satisfaçam todas as especificações dos parâmetros, de forma a ter uma qualidade de água ideal, e como os recursos dos municípios e de algumas indústrias são limitados, nas normas e especificações para a qualidade da água, são selecionados somente alguns "parâmetros" importantes: este é o caso da concentração das matérias que demandam oxigênio (DBO), e o oxigênio dissolvido (OD) nos rios. A seguir são citadas algumas formas e/ou elementos que causam poluição [27] nos rios:

- a) agentes infecciosos e tóxicos
- b) substâncias que demandam oxigênio
- c) substâncias químicas persistentes
- d) plantas nutrientes
- e) substâncias minerais e químicas causando problemas específicos
- f) matéria em suspensão
- g) substâncias radiativas
- j) temperatura

Comentaremos brevemente os dois primeiros tipos de poluição, por

serem os mais frequentes nos rios que passam por comunidades grandes.

a) Agentes infecciosos e tóxicos - Causam impactos na saúde das pessoas quando bebem tal água, ou servem como veículo de enfermidades: cólera, disenteria, febre tifóide, etc. A melhoria das águas potáveis, o tratamento das águas residuais e o tratamento sanitário em geral têm contribuído para o decréscimo desses impactos na saúde, em muitos países desenvolvidos, que até os têm erradicado, porém eles permanecem endêmicos em alguns países subdesenvolvidos. Agentes tóxicos como o mercúrio, arsênico, pesticidas, afetam também a saúde humana e a dos peixes; neste caso é necessário controlar as fontes desses agentes ou mesmo suprimi-las.

b) Substâncias que demandam oxigênio - Muitas substâncias químicas orgânicas, são utilizadas por microorganismos nos cursos d'água, como fontes de energia e como substâncias químicas necessárias para o seu crescimento. Esses microorganismos precisam do oxigênio dissolvido na água; portanto um crescimento indiscriminado leva à diminuição do oxigênio dissolvido, podendo causar sérios problemas às outras formas de vida aquática, como aos peixes e algas. A adição de materiais que demandam oxigênio nos cursos d'água pode causar uma total diminuição do OD, causando a morte de todos os peixes, e o crescimento indiscriminado de microorganismos pode causar mau cheiro na água e nos arredores.

Por muito tempo, a diminuição do OD e o controle de materiais que demandam oxigênio (DBO) nas descargas de águas residuárias receberam uma atenção prioritária de agências reguladoras. Por esta razão, o

teste do DBO permanece como uma medida importante para a avaliação das características das águas residuárias nos cursos d'água. Este teste é um método prático e direto, porém demorado, de medida de oxigênio consumido durante a estabilização bioquímica da matéria orgânica. A atenção devotada ao DBO e ao OD não está motivada pelos impactos na saúde pública, porém à saúde da vida aquática, de forma a garantir a vida de tipos desejados de peixes, proteger interesses recreacionais e garantir características estéticas das águas. Precisamos, então, conhecer os fenômenos e comportamentos que ocorrem dentro dos rios, em especial do OD; a seguir faremos um pequeno estudo neste sentido.

4.3 Balanço de oxigênio nos rios

Uma vez esclarecidos os motivos pelos quais o OD é de suma importância no controle da qualidade da água, precisamos estudar os fenômenos e reações que envolvam o OD de forma direta ou indireta.

4.3.1 Decomposição biológica da matéria orgânica

Nas águas não poluídas dos rios, a comunidade biológica é altamente diversa, isto é, existe diversidade de organismos vivos, porém relativamente poucos de cada. Cada espécie tem seu próprio metabolismo, formando uma cadeia alimentar equilibrada. Quando é adicionada uma matéria orgânica, microorganismos fazem uso dela, recebendo energia e consumindo elementos químicos necessários para seu crescimento. O resultado final dessas reações bioquímicas é a reprodução e crescimento de novas células (síntese), redução na concentração de elementos químicos utilizados por eles (biodegradação), e o despejo de derivados secundários; alguns derivados podem ser compostos orgânicos simples que servem como fonte

de alimento para outros organismos, os quais conduzem a outras reações similares, produzindo mais células e depois a biodegradação das substâncias orgânicas.

A repetição do processo frequentemente é acompanhada por passos sucessivos, satisfazendo às necessidades metabólicas de muitas espécies, degradando substâncias orgânicas complexas em outras simples, e liberando na água produtos secundários e substâncias químicas. Nesta cadeia de reações bioquímicas, cada espécie, extrai seu suprimento alimentício dos membros precedentes da cadeia, e liberta produtos secundários para o uso dos que a seguem.

Demanda de oxigênio nos rios

Nas reações bioquímicas, para satisfazer o metabolismo dos microorganismos, são utilizadas algumas substâncias químicas dissolvidas na água, sendo um dos mais importantes o oxigênio dissolvido OD. Podemos colocar o metabolismo dos microorganismos como dois processos que se desenvolvem concomitantemente [28]:

a) Síntese:

Alimento + microorganismos + energia \longrightarrow maior número de microorganismos + resíduos nitrogenados

b) Respiração:

Carboidratos + oxigênio \longrightarrow dióxido de carbono + água +
energia

A energia requerida por a) é suprida por b); assim um aumento de a) corresponde a um aumento de b); combinando os processos metabólicos, podemos escrever a seguinte relação:

Alimento + microorganismos + oxigênio → maior número de microorganismos + resíduos nitrogenados + dióxido de carbono + água

Esta relação expressa o princípio básico de todos os processos de estabilização da matéria orgânica, incluindo não só aqueles devidos aos organismos aeróbios como os devidos aos anaeróbios.

Para o balanço do oxigênio, temos que levar em consideração as reações e/ou fenômenos que incrementam ou diminuem o OD; as reações que utilizam o oxigênio, são denominadas reações de desoxigenação; e as que adicionam oxigênio de reoxigenação (reaeração).

4.3.2 Desoxigenação devida ao DBO

Os processos metabólicos de cada organismo são bastante variados; portanto, uma relação matemática que expresse a demanda de oxigênio desses fenômenos de forma global e exata, é complicada (se obtida); então os modelos das reações de desoxigenação resultantes das atividades de muitos tipos de organismos, metabolizando uma ampla variedade de compostos orgânicos, ainda até hoje são empíricos.

Muitos tipos de relações empíricas foram propostos para descrever estes fenômenos; uma relação amplamente utilizada até hoje, é a proposta por Streeter e Phelps (1925). Eles descobriram que a taxa do DBO pode ser descrita com uma razoável aproximação, pela aplicação de uma relação matemática relativamente simples, porém flexível:

$$\frac{dL}{dt} = -k_1 L \quad (4.3.1)$$

onde

L = DBO remanescente no instante t [mg/l]

k_1 = constante de decaimento do DBO [dia^{-1}].

4.3.3 Reoxigenação (reaeração atmosférica)

Este processo de adição de oxigênio nos rios é baseado na transferência de ar para dentro da água, através da superfície de interface água-ar; este é um processo físico-químico que ocorre continuamente na interface líquido-gás. Moléculas de oxigênio a alta velocidade penetram na interface, transferindo gás do ar para dentro da água. Simultaneamente, algumas moléculas do OD na água, escapam através da superfície para a atmosfera. Movimentos em ambas direções têm lugar com taxas que são dependentes da pressão, temperatura e outras variáveis. Quando não existe demanda de oxigênio, este processo alcança um equilíbrio dinâmico, no qual as taxas de transferência são iguais. É então alcançada uma concentração de oxigênio de regime, cujo valor é denominado de "nível de saturação".

Quando a concentração do OD é diminuída abaixo do nível de saturação, ocorre uma redução na taxa de escape do oxigênio (da água para o ar). Por outra parte, a taxa de oxigênio que entra na água, continua a mesma; somente a concentração na água é modificada, produzindo uma adição resultante de oxigênio, substituindo em parte ou totalmente a perda devida à deoxigenação.

O modelo mais utilizado para descrever este processo é:

$$\frac{dq}{dt} = K_1 \frac{A}{V} (q^s - q) \quad (4.3.2)$$

onde

q = concentração do OD na água

q^* = concentração de saturação do OD

K_L = coeficiente de transferência

A = área da interface (superfície do rio)

V = volume do líquido

4.3.4 Reoxigenação por fotossíntese

Refere-se à adição de oxigênio por meio da ação biológica das plantas verdes, especialmente das algas. Estas plantas verdes contêm clorofila, sendo possível, através da energia da luz solar, produzir novas células utilizando o dióxido de carbono, como uma fonte de carbono, e liberando oxigênio na água. As algas também consomem oxigênio para respirar, porém a quantidade de oxigênio produzido é de aproximadamente 1.5 vezes a taxa de oxigênio que utilizam para respirar. Como o oxigênio é produzido durante a luz do dia e elas utilizam oxigênio para respirar a todo instante, existe uma variação diurna do OD. Esta forma de produção de oxigênio é de natureza bioquímica e não segue o mesmo modelo da reaeração atmosférica. Os modelos propostos até hoje não são muito aceitos e nós não a levaremos em conta em nosso trabalho atual.

4.3.5 Deoxigenação devida aos depósitos de lodos

Lodo depositado no fundo do rio pode exercer uma significativa demanda de oxigênio. O oxigênio é introduzido por difusão para uma camada fina na interface lodo-água, dando lugar a reações aeróbias, com uma conseqüente diminuição de oxigênio, como ilustrado na figura 4.1; ocorre também difusão de matéria orgânica, produto da biodegradação anaeróbia que acontece no lodo, que incrementa a matéria orgânica no rio. Para estes fenômenos, modelos de ordem zero, para a

taxa de consumo de oxigênio, são frequentemente adotados.

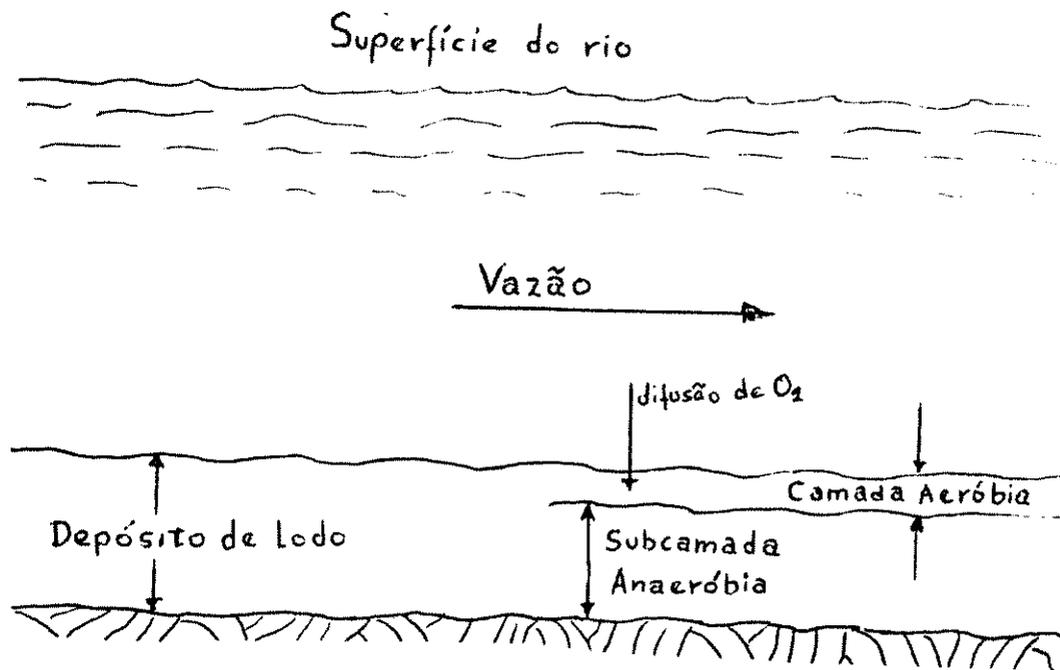


figura 4.1

4.4 Modelamento do OD e do DBO nos rios

Na secção anterior estudamos de forma separada os fenômenos e reações que acontecem nos rios e cursos d'água; nesta secção serão encontradas relações matemáticas (equações diferenciais) que descrevam o balanço de DBO e OD, levando em consideração os efeitos de reoxigenação e deoxigenação. Muitos modelos para DBO e OD nos rios seguem os modelos clássicos de Streeter-Phelps, os quais têm sido modificados por outros [20,11,12,23]; aqui seguiremos o mesmo raciocínio.

Existem modelos que descrevem o comportamento das concentrações de OD e DBO para um ponto de descarga de DBO num rio; porém, um rio tem vários pontos de descarga de poluentes na sua total extensão; nestas circunstâncias, precisamos de um modelo operacional que descreva os fenômenos e/ou reações de uma forma mais detalhada e exata. Este modelo pode ser construído pela divisão do rio em

segmentos de comprimento adequado, e que para os nossos propósitos de controle, incluam um efluente de controle (pode ser o efluente de uma estação de tratamento), como feito em [7,22,29]; a figura 4.2 ilustra esta divisão.

Consideramos cada segmento de rio, como sendo um reservatório reator agitado de fluxo contínuo, ou "continuous-flow stirred-tank reactors" (CFSTR); então o rio será descrito como uma cascata de reatores (CFTSRs) [19]; também ilustrada na figura 4.2.

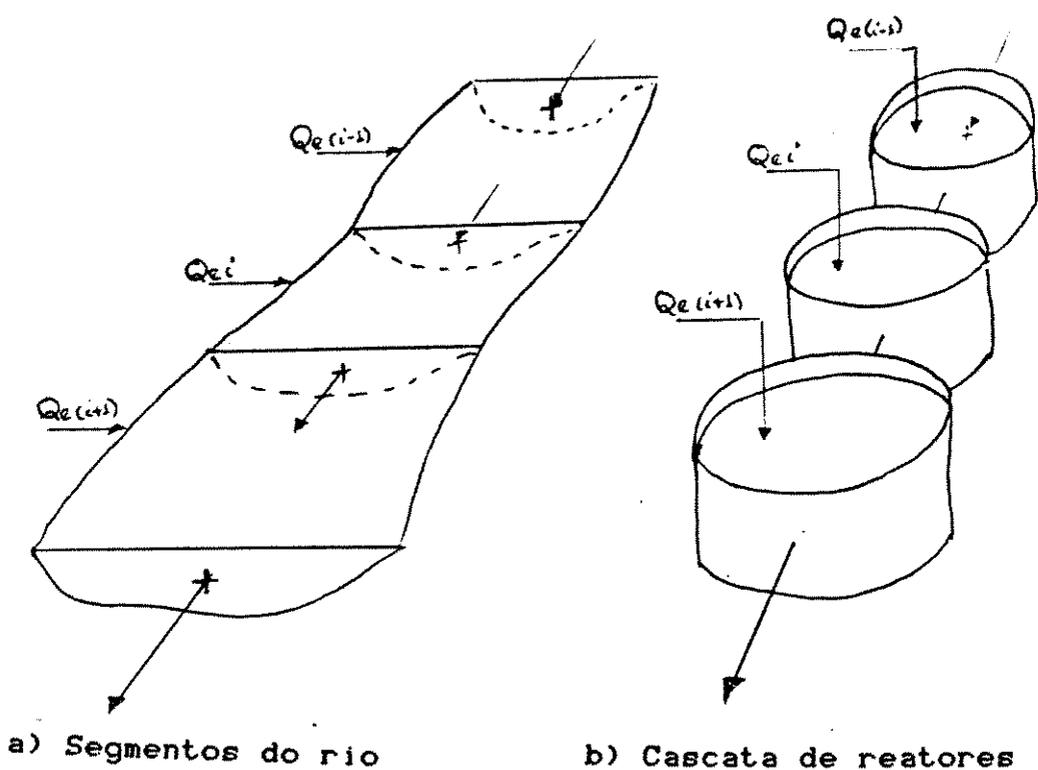


figura 4.2

Antes de continuar daremos os principais resultados e suposições sobre um reservatório reator de mistura contínua.

4.4.1 Reservatório reator agitado de fluxo contínuo

Neste reator não existem gradientes de concentração dentro do sistema. A matéria que entra é instantânea e uniformemente dispersada

em todo o reator. Portanto, a concentração do material é exatamente a mesma em qualquer ponto dentro do reator; um estudo mais detalhado referente a este tipo de reator, pode ser encontrado em Bottura [33] e em [19].

O balanço de matéria para uma matéria q, para o reator mostrado na figura 4.3, é dado por :

$$\frac{dC_q V}{dt} = QC_{qi} - QC_q + r_q V \quad (4.4.1)$$

onde

C_q = concentração da matéria q no reator, [mgr/litro]

V = volume do reator, [litro]

Q = vazão, [litros/dia]

C_{qi} = concentração de entrada da matéria q, [mgr/litro]

r_q = taxa de reação da matéria q, [mgr/litro*dia]

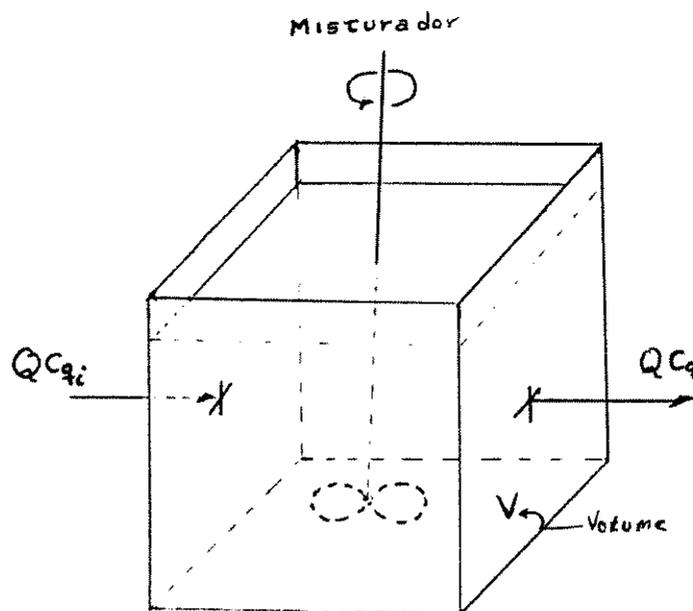


figura 4.3

A suposição de mistura imediata no reator, não é real para o caso do segmento de rio. Esta suposição será contornada pela utilização de modelos com atraso de transporte, que explicaremos posteriormente.

4.4.2 Modelos de DBO e OD para cada segmento de rio

Como cada segmento é considerado ser um reservatório reator agitado de fluxo contínuo, pode ser feito um estudo de forma separada para ele.

Na figura 4.4 são mostradas todas as entradas e saídas das concentrações do DBO e OD, assim como as reações envolvidas. Os símbolos representam:

Q_{i-1} e Q_i vazões nos segmentos $i-1$ e i respectivamente

Q_{oi} = vazão de efluente de controle no segmento i

K_{li} = taxa da remoção do DBO por biodegradação no segmento i

L_{i-1} e L_i concentrações de DBO nos segmentos $i-1$ e i respectivamente

m_i = concentração de DBO que entra no segmento i pelo efluente de controle

q_{i-1} e q_i concentrações de OD nos segmentos $i-1$ e i respectivamente

K_{ri} = taxa de reaeração atmosférica do segmento i

V_i = volume do segmento i

η_i = taxa de variação na concentração de OD devida ao lodos do segmento i

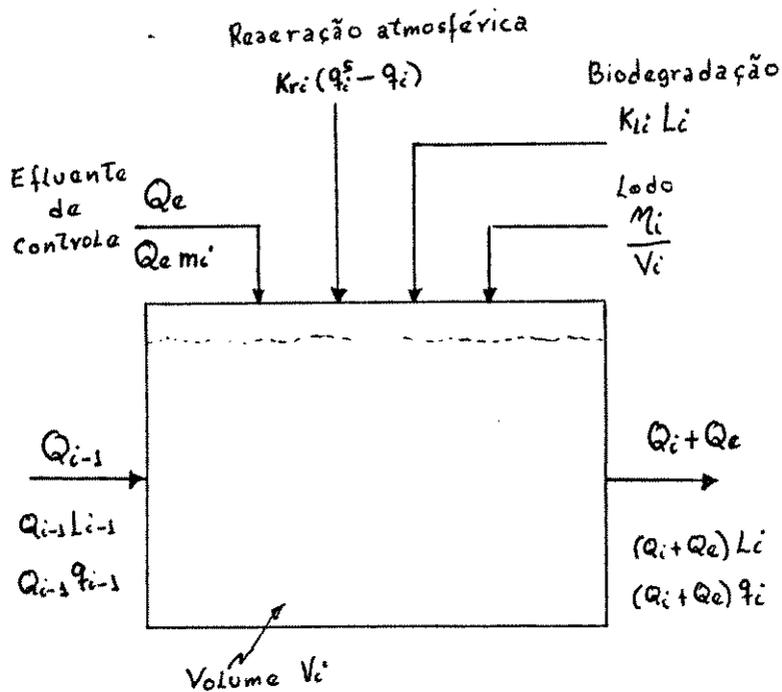


figura 4.4

Primeiro analisamos o caso de não haver o efluente de controle Q_e , e também, supomos não haver reações de reoxigenação e desoxigenação. Então os balanços de matéria para o DBO e OD ficam:

$$\frac{dL_i}{dt}v_i = Q_{i-1}L_{i-1} - Q_iL_i \quad , \quad \frac{dq_i}{dt}v_i = Q_{i-1}q_{i-1} - Q_iq_i$$

Considerando agora o efluente de controle Q_e , supondo ainda não haver reações de reoxigenação e desoxigenação, os balanços de matéria ficam:

$$\frac{dL_i}{dt}v_i = (Q_{i-1}L_{i-1} + Q_e m_i) - (Q_i + Q_e)L_i \quad (4.4.2)$$

$$\frac{dq_i}{dt} V_i = Q_{i-1} q_{i-1} - (Q_i + Q_{oi}) q_i \quad (4.4.3)$$

Dividindo as equações (4.4.2) e (4.4.3) por V_i , obtemos equações diferenciais que descrevem as variações das concentrações do DBO e OD com o tempo.

Tomando em conta as reações de desoxigenação e reoxigenação, às equações (4.4.2) e (4.4.3) são adicionados os termos referentes aos efeitos da: biodegradação da matéria orgânica (DBO), reseração atmosférica, e demanda de oxigênio requerida pelo lodo. Os balanços de matéria do DBO e OD do i-ésimo segmento ficam então como:

DBO (L)

$$\frac{dL_i}{dt} = -K_{li} L_i + \frac{Q_{i-1}}{V_i} L_{i-1} - \frac{(Q_i + Q_{oi})}{V_i} L_i + \frac{m_i Q_{oi}}{V_i} \quad (4.4.4)$$

OD (q)

$$\frac{dq_i}{dt} = K_{ri} (q_i^* - q_i) + \frac{Q_{i-1}}{V_i} q_{i-1} - \frac{(Q_i + Q_{oi})}{V_i} q_i - K_{li} L_i - \frac{\eta_i}{V_i} \quad (4.4.5)$$

Cabe notar que neste modelo não foram incluídos os efeitos de fotossíntese, adição de matéria orgânica por causa de chuvas, e sedimentação de matéria orgânica (DBO) nos rios. Ressaltamos que o termo $-K_{li} L_i$ na equação (4.4.5) é adicionado para descrever o consumo de oxigênio devido à biodegradação da matéria orgânica (DBO).

Neste modelo supomos dispersão imediata da matéria, fato que não acontece na realidade; para contornar este problema, pode-se adotar no modelo, um atraso de transporte entre os segmentos, para as

concentrações de entrada, L_{i-1} e q_{i-1} . Em [21] são dadas três formas de representar estes atrasos, que são:

1) modelo sem atraso de transporte

$$\begin{aligned} L_{i-1} &= L_{i-1}(t) \\ q_{i-1} &= q_{i-1}(t) \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

2) modelo com atraso puro

$$\begin{aligned} L_{i-1} &= L_{i-1}(t-\zeta) \\ q_{i-1} &= q_{i-1}(t-\zeta) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

onde

$$\zeta = \frac{V_i}{q_{i-1}}$$

3) modelo com atraso distribuído

$$\begin{aligned} L_{i-1} &= \sum_{j=1}^m a_j L_{i-1}(t-\phi_j) \\ q_{i-1} &= \sum_{j=1}^m a_j q_{i-1}(t-\phi_j) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

onde

$$\sum_{j=1}^m a_j = 1 \quad \text{média de } \phi_j = \phi_0, \quad \phi_1 < \phi_2 < \dots < \phi_m$$

No modelo sem atraso, os estados L_{i-1} e q_{i-1} do $(i-1)$ -ésimo segmento afetam os estados do i -ésimo segmento imediatamente. O modelo de atraso puro adota que existe um tempo de atraso puro entre os segmentos adjacentes. Isto é, os estados do $(i-1)$ -ésimo segmento afetam os estados do i -ésimo segmento depois de ϕ_0 dias. O modelo de atraso distribuído, indica que para $j=1,2,\dots,m$, as frações a_j de

DBO e OD do $(i-1)$ -ésimo segmento, no tempo $(t-\phi_i)$, chegam no i -ésimo segmento no tempo t ; isto é, os atrasos de transportes são distribuídos no tempo entre ϕ_1 e ϕ_m . A figura 4.5 mostra a distribuição em relação ao tempo.

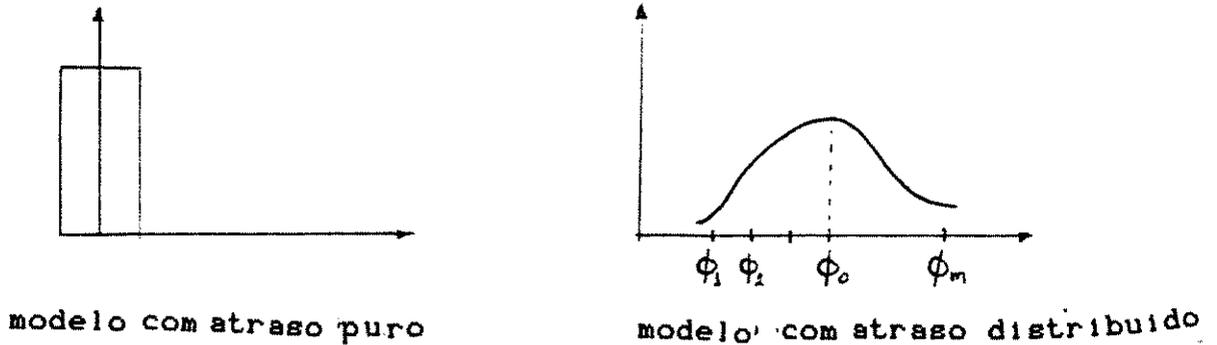


figura 4.5

Tamura [21] mostrou que é possível uma descrição mais realística de um rio com múltiplos poluentes supondo que cada segmento esteja separado do próximo por um atraso distribuído. Isto devido a que em muitos casos, o modelo possibilita explicar melhor a dispersão dos poluentes que de fato ocorre nos rios.

Na secção 4.5 utilizamos o modelo sem atraso, para o controle de dois segmentos de rio e na secção 4.6 é utilizado o modelo com tempo de atraso distribuído, para três segmentos de rio.

4.4.3 Considerações de regime

Antes de considerar o problema do controle, é necessário definir os valores desejáveis das variáveis a serem controladas. Esses valores devem ser consistentes com a dinâmica do sistema. Os valores de regime para cada segmento devem obedecer $dL_i/dt=0$, $dq_i/dt=0$, fornecendo os valores desejados de L_i^* , L_{i-1}^* , q_i^* , q_{i-1}^* , m_i^* , e m_{i-1}^* . Nós especificamos níveis de regime do OD para cada segmento, sendo os

níveis de regime do DBO fornecidos pela resolução das equações (4.4.4) e (4.4.5) igualadas a zero.

Para obtermos um controle que alcance os valores de regime, definimos uma função custo da seguinte maneira [22]:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_f} (L_i - L_i^*)^2 S_{i1} + (q_i - q_i^*)^2 S_{i2} + r_i (m_i - m_i^*)^2 dt \quad (4.4.9)$$

Ao minimizar este índice de desempenho estamos assegurando que :

1) O custo do controle é minimizado , em virtude do termo

$$r_i (m_i - m_i^*)^2 .$$

2) L_i e q_i não excedam os limites superior e inferior dados por

$(L_i^* \pm L_i^{**})$ e $(q_i^* \mp q_i^{**})$. Isto pode ser realizado pela escolha apropriada das ponderações S_{i1} e S_{i2} .

Neste estágio, é importante mencionar que a forma da implementação do controle, o efluente de descarga controlada, ainda não foi determinada. Podemos implementar o controle pela variação da vazão Q_{ei} , ou pela variação na concentração do DBO fornecida pelo efluente. Se considerarmos a vazão Q_{ei} , os efluentes têm que ser tratados com níveis padronizados de DBO e armazenados em reservatórios, para logo serem descarregados no rio de uma forma controlada, definida pela lei de controle; esta implementação tornará o sistema variante no tempo. Nós consideramos como a variável de controle o DBO adicionado pelo efluente m_i .

4.5 Controle descentralizado de dois segmentos de rio sem atraso de transporte

Nesta secção utilizaremos o método de controle descentralizado

perto do ótimo dado na secção 3.3 , para dois segmentos do rio Cam na Inglaterra.

Foram achados os seguintes coeficientes, para um segmento do rio Cam [22]:

$$\begin{aligned}
 K_{ri} &= 0.2 \text{ [dia}^{-1}\text{]} \\
 K_{li} &= 0.32 \text{ [dia}^{-1}\text{]} \\
 \frac{\eta_i}{V_i} &= 0.1 \text{ [mg/litro][dia}^{-1}\text{]} \\
 q_i^* &= 10 \text{ [mg/litro]} \quad ; \\
 Q_{oi}/V_i &= 0.1 \quad ; \quad Q_i/V_i = Q_{i-1}/V_i = 0.9
 \end{aligned}
 \tag{4.5.1}$$

Adotando esses valores para cada segmento, as equações (4.4.4) e (4.4.5) podem ser escritas como:

$$\frac{dL_i}{dt} = -1.32L_i + 0.9L_{i-1} + 0.1m_i
 \tag{4.5.2}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = -0.32L_i - 1.2q_i + 0.9q_{i-1} + 1.9
 \tag{4.5.3}$$

As equações (4.5.2) e (4.5.3) podem ser escritas em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ q_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} m_i + \begin{bmatrix} 0.9L_{i-1} \\ 0.9q_{i-1} + 1.9 \end{bmatrix}
 \tag{4.5.4}$$

4.5.1 Considerações de regime

Os valores de regime desejáveis para cada segmento são adotados [22] como:

$$L_o^* = 0 \text{ [mg/litro]} \quad \text{e} \quad q_o^* = 10 \text{ [mg/litro]}$$

para o segmento 0 (estes valores implicam que o segmento é bastante limpo);

para os segmentos 1 e 2 respectivamente temos os níveis de OD, $q_1^* = 8$ [mg/litro] e $q_2^* = 6$ [mg/litro].

Os valores de regime de DBO para os segmentos 1 e 2 são encontrados resolvendo as equações:

$$\begin{aligned} -1.32L_i^* + 0.9L_{i-1}^* + 0.1m_i^* &= 0 \\ -0.32L_i^* - 1.2q_i^* + 0.9q_{i-1}^* + 1.9 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

$i = 1, 2$

fornecendo:

$$\begin{aligned} L_1^* &= 4.06, \quad L_2^* = 5.94, \quad m_1^* = 53.5, \quad m_2^* = 41.9 \\ L_0^* &= 0, \quad q_0^* = 10, \quad q_1^* = 8, \quad q_2^* = 6 \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

No modelo consideramos que os segmentos de rio estão separados uns dos outros sem atraso de transporte; portanto a equação de estado para os dois segmentos será dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 & 0 & 0 \\ -0.32 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & -1.32 & 0 \\ 0 & 0.9 & -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ q_1 \\ L_2 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9L_0 \\ 0.9q_0 + 1.9 \\ 0 \\ 1.9 \end{bmatrix} \quad (4.5.7)$$

Utilizando os valores de regime dados em (4.5.6), definimos novas variáveis de controle, que representam os desvios do controle desejado, como:

$$\begin{bmatrix} \delta m_1 \\ \delta m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 - m_1^* \\ m_2 - m_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 - 53.5 \\ m_2 - 41.9 \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

A escolha destas variáveis de controle implica que o sistema opera nos seus valores de regime nominais, m_i^* , L_i^* , q_i^* , $i=1,2$; o acionamento do controle ocorre quando surgem desvios em L_i e q_i , pela variação dos incrementos δm_i . Com estas variáveis de controle, o modelo do sistema vem a ser:

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 & 0 & 0 \\ -0.32 & -1.2 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & -1.32 & 0 \\ 0 & 0.9 & -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ q_1 \\ L_2 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m_1 \\ \delta m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.35 \\ 10.9 \\ 4.19 \\ 1.9 \end{bmatrix} \quad (4.5.9)$$

Para forçar o sistema a seguir uma trajetória de referência constante sobre um intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, mediante uma lei de controle ótimo, definimos um índice de desempenho como:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ 2(L_1 - 4.06)^2 + (q_1 - 8)^2 + 2(L_2 - 5.94)^2 + (q_2 - 6)^2 + \delta m_1^2 + \delta m_2^2 \right\} dt \quad (4.5.10)$$

Cada segmento do rio é considerado um subsistema, de modo que o sistema formado pelos dois segmentos, têm seus subsistemas separados geograficamente; A seguir são dados os resultados obtidos por nós,

para o projeto do controle descentralizado utilizando a técnica dada no capítulo 3, seção 3.3.

4.5.2 Resultados da implementação

A resolução deste método foi implementada em estação de trabalho Apollo do Laboratório de Sistemas Inteligentes do DMCSI FEE-UNICAMP, na linguagem Pascal.

1) ganhos de cada subsistema isolado:

$$S_1: \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta m_1 + \begin{bmatrix} 5.35 \\ 10.9 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ 4(L_1 - 4.06)^2 + 2(q_1 - 8)^2 + 2\delta m_1^2 \right\} dt$$

$$S_2: \begin{bmatrix} \dot{L}_2 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta m_2 + \begin{bmatrix} 4.19 \\ 1.9 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ 4(L_2 - 5.94)^2 + 2(q_2 - 6)^2 + 2\delta m_2^2 \right\} dt$$

$$g_1 = [0.0768 \quad 0.0053]^t = g_2, \quad \xi_1 = -0.2702, \quad \xi_2 = -0.7618$$

onde:

$u_i = -g_i x_i - \xi_i$, é o controle ótimo de cada subsistema isolado.

2) Preparação dos dados para o emprego do algoritmo

Definimos $G_i = \text{diag}(g_i)$ $i=1,2$, e $\xi = [\xi_1, \xi_2]^t$.

Adotamos o grau $\alpha = 0$

A matriz B de controle e a matriz ganho G_b são modificadas, de forma a que tenham a mesma ordem que o sistema global, da seguinte maneira:

$$B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_b = \begin{bmatrix} 0.0768 & -0.0053 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0768 & -0.0053 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz T_d é definida como:

$$T_d = \begin{bmatrix} T_{d1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{d3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

T_{d2} e T_{d4} são nulas

3) Os resultados obtidos para as trajetórias T_{d1} e T_{d3} são mostrados nas figuras 4.6 e 4.7. A aplicação deste controle implica em ganhos de realimentação variantes no tempo; para termos uma lei de controle realimentado constante, adotamos uma matriz constante T_d com os valores $T_{d1} = 0.045$ e $T_{d3} = 0.0136$, obtidos por meio de uma reta que passa pelos pontos de regime; isto é mostrado nas figuras 4.6 e 4.7, pelas linhas tracejadas.

Com estes valores de regime, a matriz de ganhos descentralizados é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 0.1218 & -0.0053 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0904 & -0.0053 \end{bmatrix}$$

Observamos que este controle descentralizado, para este exemplo, apresenta um comportamento subótimo muito bom, quando aplicado no sistema global. Os comportamentos das trajetórias são mostrados nas figuras 4.8 a 4.11. A seguir apresentamos uma aplicação do método de controle descentralizado seguidor do modelo, apresentado na secção 3.2 do capítulo 3, para o caso de três segmentos de rio, adotando um atraso de transporte distribuído.

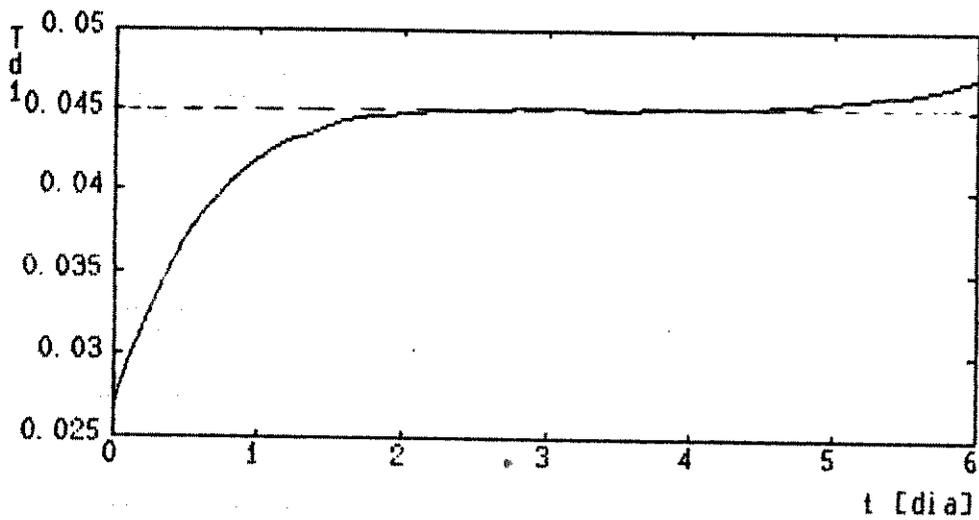


fig 4.6 trajetória T_{d1}

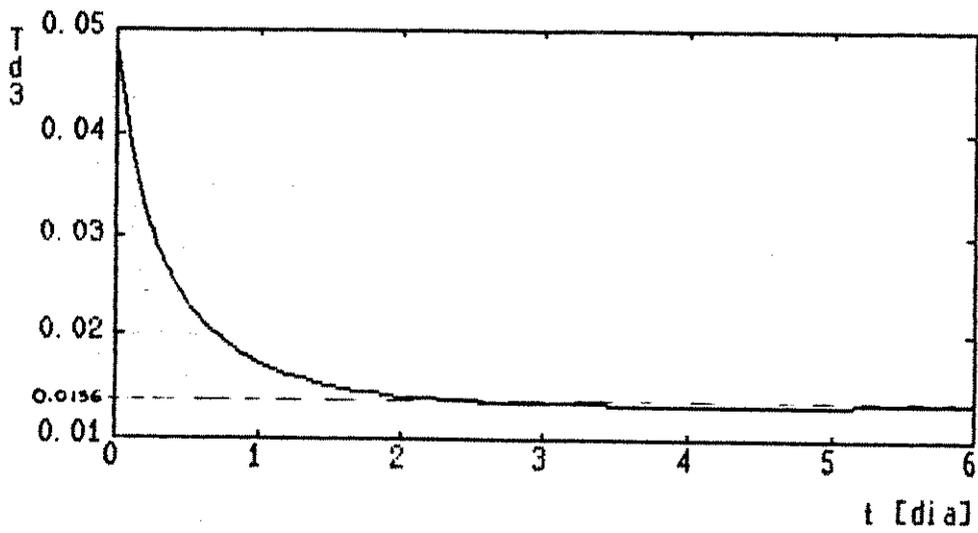


fig 4.7 trajetória T_{ds}

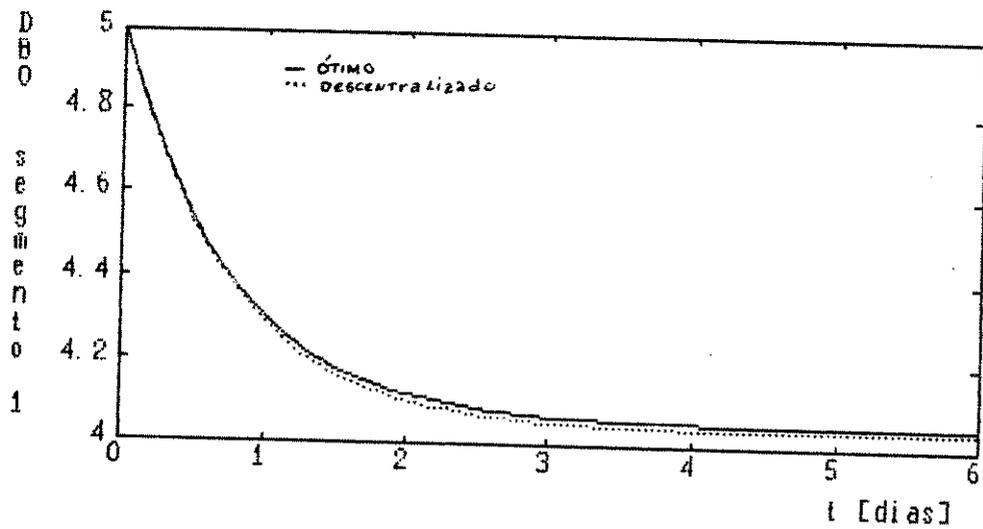


fig 4.8 L1 (DBO) descentralizado e global

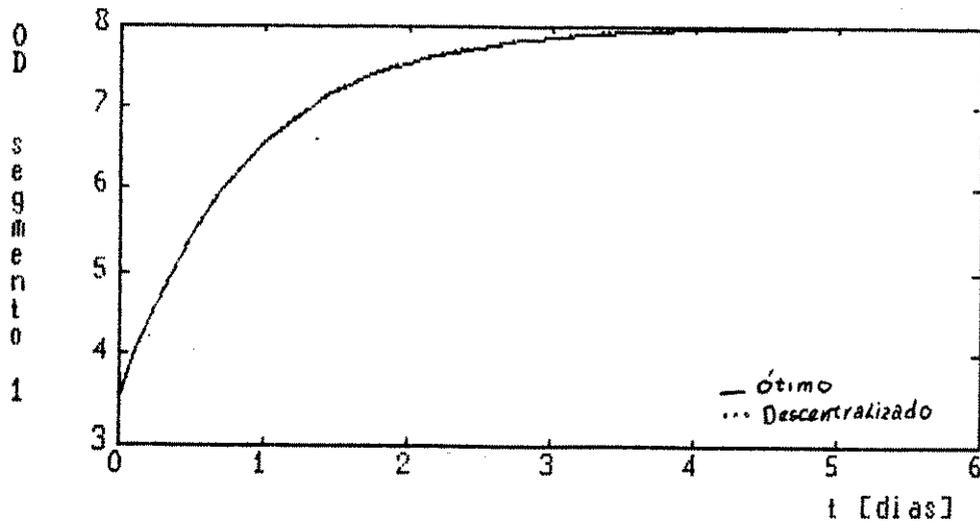


fig 4.9 q1 (OD) descentralizado e global

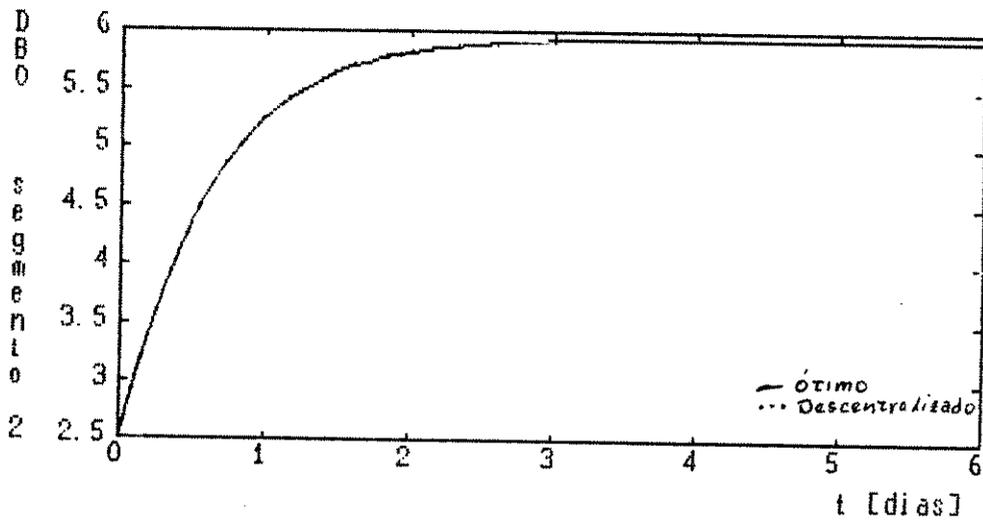


fig 4.10 L_2 (DBO) desc. e global

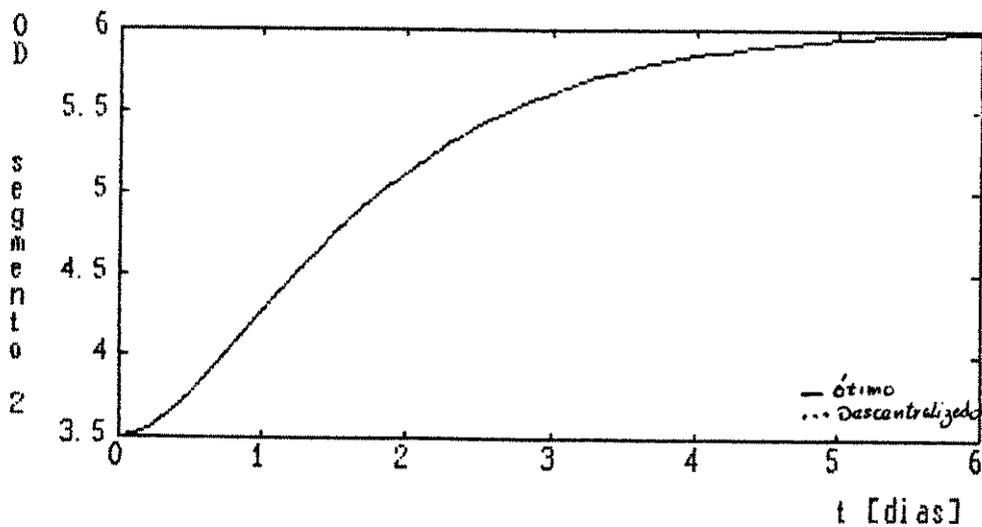


fig 4.11 q_2 (OD) desc. e global

4.6 Controle de OD e DBO para um sistema com três segmentos de rio

Nesta secção aplicaremos a técnica de controle descentralizado seguidor de modelo dada no capítulo 3, para o caso de três segmentos do rio Cam, adotando um tempo de atraso distribuído entre os segmentos. Pelo fato de só dispormos de dados de um segmento do rio Cam, adotamos esses dados, para os três segmentos de rio. Os programas para o cálculo dos controladores dinâmicos descentralizados e simulação foram implementados num microcomputador AT 386 do DMCSI-FEE utilizando o pacote computacional Matlab.

4.6.1 Considerações de regime e formulação do problema

Substituindo os dados do segmento do rio Cam (4.5.1), nas equações (4.4.4) e (4.4.5), obtemos a equação diferencial (4.5.4),

para cada subsistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{L}_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i \\ q_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} m_i + \begin{bmatrix} 0.9L_{i-1} \\ 0.9q_{i-1} + 1.9 \end{bmatrix} \quad (4.5.4)$$

Suporemos o atraso de transporte distribuido entre cada subsistema, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L_{i-1} &= \sum_{j=1}^3 a_j L_{i-1}(t-\phi_j) \\ q_{i-1} &= \sum_{j=1}^3 a_j q_{i-1}(t-\phi_j) \quad i=2,3 \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} L_0 &= 0 \text{ [mg/litro]} \quad e \quad q_0 = 10 \text{ [mg/litro]} \\ \phi_1 &= 0, \quad \phi_2 = 0.5 \quad e \quad \phi_3 = 1 \text{ [dias]} \\ a_1 &= 0.15, \quad a_2 = 0.7, \quad a_3 = 0.15 \end{aligned}$$

Observamos que no regime permanente ($t > 8$ [dias]), teremos os valores:

$$L_{i-1} = L_{i-1}^* \quad e \quad q_{i-1} = q_{i-1}^*$$

As condições de regime para os dois primeiros segmentos são iguais as do exemplo anterior (secção 4.3), ou seja :

$$\begin{aligned} L_1^* &= 4.06, \quad L_2^* = 5.94, \quad m_1^* = 53.5, \quad m_2^* = 41.9 \\ L_0^* &= 0, \quad q_0^* = 10, \quad q_1^* = 8, \quad q_2^* = 6 \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Definimos $m_1 = m_1^* + \delta m_1$ e $m_2 = m_2^* + \delta m_2$

Com esses valores de regime podemos escrever as seguintes equações diferenciais para os dois primeiros subsistemas (segmentos):

$$\dot{L}_1 = -1.32L_1 + 0.1\delta m_1 + 5.35 \quad (4.6.3)$$

$$\dot{q}_1 = -0.32L_1 - 1.2q_1 + 10.9 \quad (4.6.4)$$

$$\dot{L}_2 = 0.9 \sum_{j=1}^2 a_j L_1(t-\phi_j) - 1.32 L_2 + 0.1\delta m_2 + 4.19 \quad (4.6.5)$$

$$\dot{q}_2 = 0.9 \sum_{j=1}^2 a_j q_1(t-\phi_j) - 0.32L_2 - 1.2q_2 + 1.9 \quad (4.6.6)$$

De forma similar ao exemplo anterior, calculamos o valor de regime do DBO para o valor de regime do OD do terceiro segmento, dado por $q_3^* = 4.69$; temos então:

$$-1.32L_3^* + 0.9L_2^* + 0.1m_3^* = 0$$

$$-0.32L_3^* - 1.2q_3^* + 0.9q_2^* + 1.9 = 0$$

Obtemos $L_3^* = 5.22$ e $m_3^* = 1.558$ [mg/litro].

Definindo $m_3 = m_3^* + \delta m_3$ e substituindo em em (4.5.4), para $i=3$ temos:

$$\dot{L}_3 = 0.9 \sum_{j=1}^2 a_j L_2(t-\phi_j) - 1.32L_3 + 0.1\delta m_3 + 1.558 \quad (4.6.7)$$

$$\dot{q}_3 = 0.9 \sum_{j=1}^2 a_j q_2(t-\phi_j) - 0.32L_3 - 1.2q_3 + 1.9 \quad (4.6.8)$$

O sistema descrito pelas equações (4.6.3) a (4.6.8) é nominalmente de dimensão infinita, no espaço de estado. Por outra parte, é possível obter uma boa aproximação finita, pela expansão dos atrasos em uma série de Taylor, tomando os três primeiros termos da série, como feito em [2] [12] e [22]. Como exemplo consideremos a equação (4.6.5); ela pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 = 0.9(0.15L_1(t) + 0.7L_1(t-0.5) + 0.15(L_1(t+1))) - 1.32L_2 \\ + 0.1\delta_{m2} + 4.19 \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Nesta equação temos dois atrasos; serão introduzidos 4 estados adicionais, $L_4, L_5, L_6,$ e L_7 ; definimos $L_4 = L_1(t-0.5)$; então a sua transformada de Laplace será:

$$L_4(s) = L_1(s)e^{-0.5s} = L_1(s) [1 + 0.5s + \frac{0.25}{2}s^2 + \dots]^{-1}$$

Tomando somente os primeiros três termos da série, temos:

$$L_4(s) = \frac{L_1(s)}{1 + 0.5s + \frac{0.25}{2}s^2}$$

No tempo temos

$$L_1(t) = L_4(t) + 0.5\dot{L}_4(t) + 0.125\ddot{L}_4(t)$$

$$\text{definindo } \dot{L}_4(t) = L_5(t) \quad (4.6.10)$$

Temos:

$$\dot{L}_5(t) = 8L_1(t) - 8L_4(t) - 4L_5(t) \quad (4.6.11)$$

Definindo $L_6(t) = L_1(t-1)$ e expandindo em série de Taylor temos:

$$\begin{aligned} \text{Taylor} \\ \Rightarrow L_6(s) = L_1(s)e^{-1s} = L_1(s)[1 + s + 0.5s^2]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tempo} \\ \Rightarrow L_6(t) + \dot{L}_6(t) + 0.5\ddot{L}_6(t) = L_1(t) \end{aligned}$$

$$\text{Definindo } \dot{L}_6(t) = L_7(t) \quad (4.6.12)$$

Temos:

$$\dot{L}_7(t) = 2L_1(t) - 2L_6(t) - 2L_7(t) \quad (4.6.13)$$

Assim a equação (4.6.5) pode ser escrita como:

$$\dot{L}_2 = 0.135L_1 + 0.63L_4 + 0.135L_6 - 1.32L_2 + 0.16m_2 + 4.19 \quad (4.6.14)$$

Seguindo o mesmo raciocínio que utilizamos para encontrar as equações (4.6.10) a (4.6.14), calculamos as equações diferenciais do OD do segundo subsistema, que são dadas por:

$$\dot{q}_2 = 0.135q_1 + 0.63q_4 + 0.135q_6 - 0.32L_2 - 1.2q_2 + 1.9 \quad (4.6.15)$$

$$\dot{q}_4 = q_5 \quad (4.6.16)$$

$$\dot{q}_5 = 8q_1 - 8q_4 - 4q_5 \quad (4.6.17)$$

$$\dot{q}_6 = q_7 \quad (4.6.18)$$

$$\dot{q}_7 = 2q_1 - 2q_6 - 2q_7 \quad (4.6.19)$$

onde $q_4(t) = q_1(t-1)$ e $q_6(t) = q_1(t-1)$.

Para o terceiro subsistema, obtemos as seguintes equações diferenciais para o DBO e OD :

DBO

$$\dot{L}_3 = 0.135L_2 + 0.63L_8 + 0.135L_{10} - 1.32L_3 + 0.1\delta m_1 + 1.558 \quad (4.6.20)$$

$$\dot{L}_8 = L_9 \quad (4.6.21)$$

$$\dot{L}_9 = 8L_2 - 8L_8 - 4L_9 \quad (4.6.22)$$

$$\dot{L}_{10} = L_{11} \quad (4.6.23)$$

$$\dot{L}_{11} = 2L_2 - 2L_{10} - 2L_{11} \quad (4.6.24)$$

onde $L_8(t) = L_9(t-0.5)$ e $L_{10}(t) = L_3(t-1)$

OD

$$\dot{q}_3 = 0.135q_2 + 0.63q_8 + 0.135q_{10} - 0.32L_3 - 1.2q_3 + 1.9 \quad (4.6.25)$$

$$\dot{q}_8 = q_9 \quad (4.6.26)$$

$$\dot{q}_9 = 8q_2 - 8q_8 - 4q_9 \quad (4.6.27)$$

$$\dot{q}_{10} = q_{11} \quad (4.6.28)$$

$$\dot{q}_{11} = 2q_2 - 2q_{10} - 2q_{11} \quad (4.6.29)$$

onde $q_8(t) = q_9(t-0.5)$ e $q_{10}(t) = q_3(t-1)$.

Com as variáveis acrescentadas, o sistema original de sexta ordem ficou com ordem 22, com os subsistemas organizados da seguinte forma:

Primeiro subsistema

$$S_1: \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 \delta m_1 + d_1$$

$$S_1: \begin{bmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ q_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta m_1 + \begin{bmatrix} 5.35 \\ 10.9 \end{bmatrix}$$

Segundo subsistema

$$S_2: \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 \delta m_2 + C_2 z_2 + d_2$$

$$z_2 = L_{21} x_1$$

onde

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.32 & 0.63 & 0 & 0.132 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.32 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2 & 0.63 & 0 & 0.135 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = [L_2 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad q_2 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7]^t$$

$$d_2 = [4.19 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.135 & 0 & 8 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.135 & 0 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}^t$$

$$L_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Terceiro subsistema

$$S_3: \quad \dot{x}_3 = A_3 x_3 + B_3 \delta m_3 + C_3 z_3 + d_3$$
$$z_3 = L_{32} x_2$$

onde

$$A_3 = A_2 \quad ; \quad B_3 = B_2 \quad ; \quad C_3 = C_2$$

$$x_3 = [L_3 \quad L_8 \quad L_p \quad L_{10} \quad L_{11} \quad q_3 \quad q_8 \quad q_p \quad q_{10} \quad q_{11}]^t$$

$$d_3 = [1.558 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1.9 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t$$

$$L_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.6.2 Cálculo dos compensadores dinâmicos e resultados de simulação

Primeiro subsistema

No primeiro subsistema não existe interconecção dos outros subsistemas. Portanto projetamos o controle sem compensação dinâmica da seguinte maneira:

$$\min J_1 = \int_0^{\infty} (\|x_1 - x_1^d\|_{Q_1}^2 + \|\delta m_1\|_{R_1}^2) dt$$

$$\text{s. a.} \quad \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 \delta m_1 + d_1$$

$$x_1^d = [4.06 \quad 8]^t, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = 1$$

Obtemos a lei de controle dada por $\delta m_1 = -K_1 x_1 - \xi_1$

onde

$$K_1 = [0.0768 \quad -0.0053] \quad , \quad \xi_1 = 0.2702$$

Segundo subsistema

Os valores de regime para os estados dinâmicos adicionais, podem ser encontradas da seguinte maneira:

como no regime $L_4 = L_1(t-0.5)$; teremos $L_4^* = L_1^*$
de $\dot{L}_4 = L_5$ temos $L_5^* = 0$.

Foram encontradas as seguintes condições de regime para o segundo subsistema:

$$L_4^* = 4.06 \quad , \quad L_5^* = 0 \quad , \quad L_6^* = 4.06 \quad , \quad L_7^* = 0$$
$$q_4^* = 8 \quad , \quad q_5^* = 0 \quad , \quad q_6^* = 8 \quad , \quad q_7^* = 0$$

Então os valores desejados do segundo subsistema serão:

$$x_2^d = [5.94 \quad 4.06 \quad 0 \quad 4.06 \quad 0 \quad 6 \quad 8 \quad 0 \quad 8 \quad 0]^t$$

Para que o controle alcance estes valores definimos o seguinte índice de desempenho a ser minimizado:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\|x_2 - x_2^d\|_{Q_2}^2 + \|\delta m_2\|_{R_2}^2) dt$$

onde Q_2 e R_2 são adotados como:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = 1$$

Seguindo o mesmo método de escolha do modelo rústico dado em [4], o modelo rústico será:

$$\hat{z}_2 = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \hat{z}_2 + \hat{z}_{dz}, \quad \text{onde} \quad \hat{z}_{dz} = - \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} z_2^d = \begin{bmatrix} 5.36 \\ 10.9 \end{bmatrix}$$

$$z_2^d = L_{21} x_1^d$$

Para o problema de otimização do erro escolhemos:

$$H_2 = I_{10} \quad \text{e} \quad S_2 = I_2$$

Aplicando o método citado encontramos o controle dinâmico descentralizado dado por:

$$u_2 = -G_{21} x_2 - G_{22} [\hat{z}_2 - S_2^{-1} C_2^t K_2 \tilde{x}_2] - \xi_2$$

onde

$$g_{21} = [0.0768 \quad 0.0172 \quad 0.0032 \quad 0.0054 \quad 0.0016 \quad -0.0053 \quad -0.0019 \\ -0.0005 \quad -0.0008 \quad -0.0003]^t$$

$$g_{22} = [0.0156 \quad -0.0032]^t$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.1021 & 0.5269 & 0.6335 & 0.2697 & 0.3733 & -0.0133 & -0.0094 \\ -0.0245 & -0.0096 & -0.0008 & -0.0027 & 0.0003 & 0.1115 & 0.5322 \\ & & & & -0.0010 & -0.0035 & 0.0001 \\ & & & & 0.6340 & 0.2714 & 0.3731 \end{bmatrix}$$

$$\xi_2 = -0.5321$$

Terceiro subsistema

Foram encontradas as seguintes condições de regime para o terceiro subsistema:

$$L_8^* = 5.94, \quad L_\phi^* = 0, \quad L_{10}^* = 5.94, \quad L_{11}^* = 0 \\ q_8^* = 6, \quad q_\phi^* = 0, \quad q_{10}^* = 6, \quad q_{11}^* = 0$$

Então os valores desejados do segundo subsistema serão:

$$x_9^d = [5.23 \quad 5.94 \quad 0 \quad 5.94 \quad 0 \quad 4.69 \quad 6 \quad 0 \quad 6 \quad 0]^t$$

Para que o controle alcance estes valores, definimos o seguinte índice de desempenho a ser minimizado:

$$J_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\|x_3 - x_3^d\|_{Q_3}^2 + \|\delta m_3\|_{R_3}^2) dt$$

onde

$$Q_3 = Q_2 \quad e \quad R_3 = R_2$$

Seguindo o mesmo método de escolha do modelo rústico dado em [4], o modelo rústico será:

$$\dot{\hat{z}}_3 = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \hat{z}_3 + \hat{z}_{ds}, \quad \text{onde} \quad \hat{z}_{ds} = - \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} z_3^d = \begin{bmatrix} 7.8408 \\ 9.1008 \end{bmatrix}$$

$$z_3^d = L_{32} x_2^d$$

Para o problema de otimização do erro escolhemos:

$$H_3 = I_{10} \quad e \quad S_3 = I_2$$

Aplicando o método encontramos o controle dinâmico descentralizado dado por:

$$u_3 = -G_{31} x_3 - G_{32} [\hat{z}_3 - S_3^{-1} C_3^t K_3 \tilde{x}_3] - \xi_3$$

onde:

$$G_{31} = \begin{bmatrix} 0.0768 & 0.0172 & 0.0032 & 0.0054 & 0.0016 & -0.0053 & -0.0019 \\ & & & & & -0.0005 & -0.0008 & -0.0003 \end{bmatrix}^t$$

$$G_{32} = [0.0156 \quad -0.0032]^t$$

$$K_g = \begin{bmatrix} 0.1021 & 0.5269 & 0.6335 & 0.2697 & 0.3733 & -0.0133 & -0.0094 \\ -0.0245 & -0.0096 & -0.0008 & -0.0027 & 0.0003 & 0.1115 & 0.5322 \\ & & & & -0.0010 & -0.0035 & 0.0001 \\ & & & & 0.6340 & 0.2714 & 0.3731 \end{bmatrix}$$

$$\xi_g = -0.5684$$

Para efeito de simulação foram adotadas as seguintes condições iniciais:

$$x_{01} = [10 \ 7 \ 0]^t$$

$$x_{02} = [5.94 \ 4.06 \ 0 \ 4.06 \ 0 \ 6 \ 8 \ 8 \ 0]^t$$

$$x_{03} = [5.53 \ 5.94 \ 0 \ 5.94 \ 0 \ 4.69 \ 6 \ 0 \ 6 \ 0]^t$$

As figuras 4.10 a 4.15 mostram as respostas do sistema quando é aplicado o controle descentralizado seguidor do modelo, e quando é aplicado um controle ótimo global. Podemos observar que o controle descentralizado consegue boas trajetórias subótimas, comparadas às ótimas.

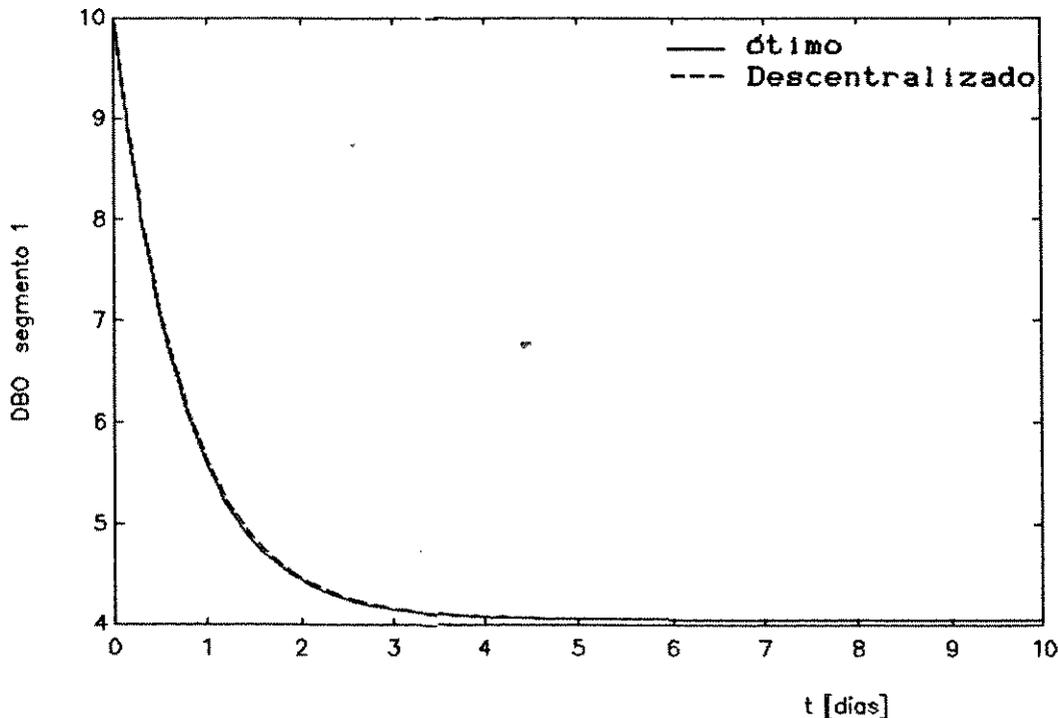


fig 4.10 nível de DBO do primeiro segmento

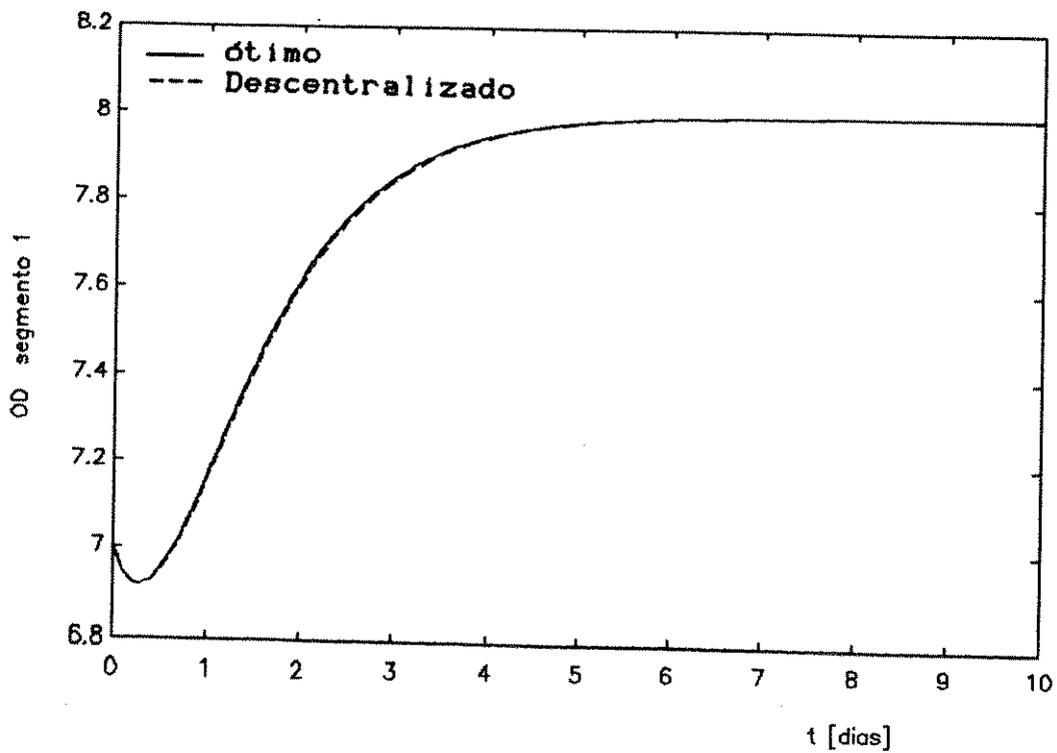


fig. 4.11 nível de OD do primeiro segmento

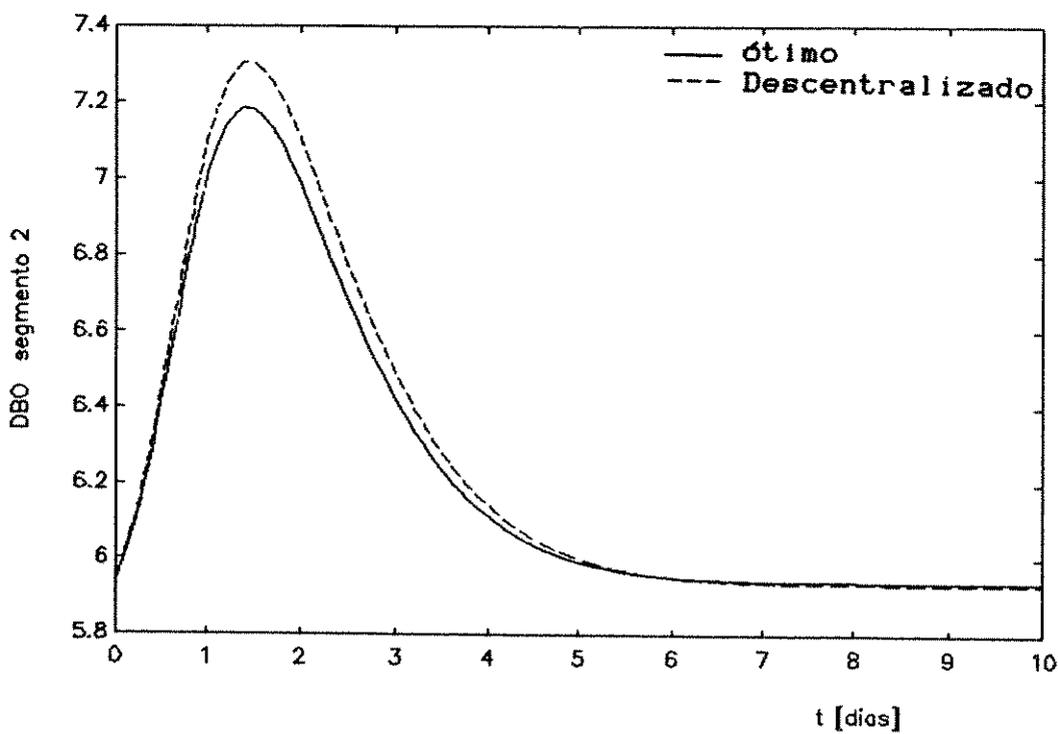


fig 4.12 nível de DBO do segundo segmento

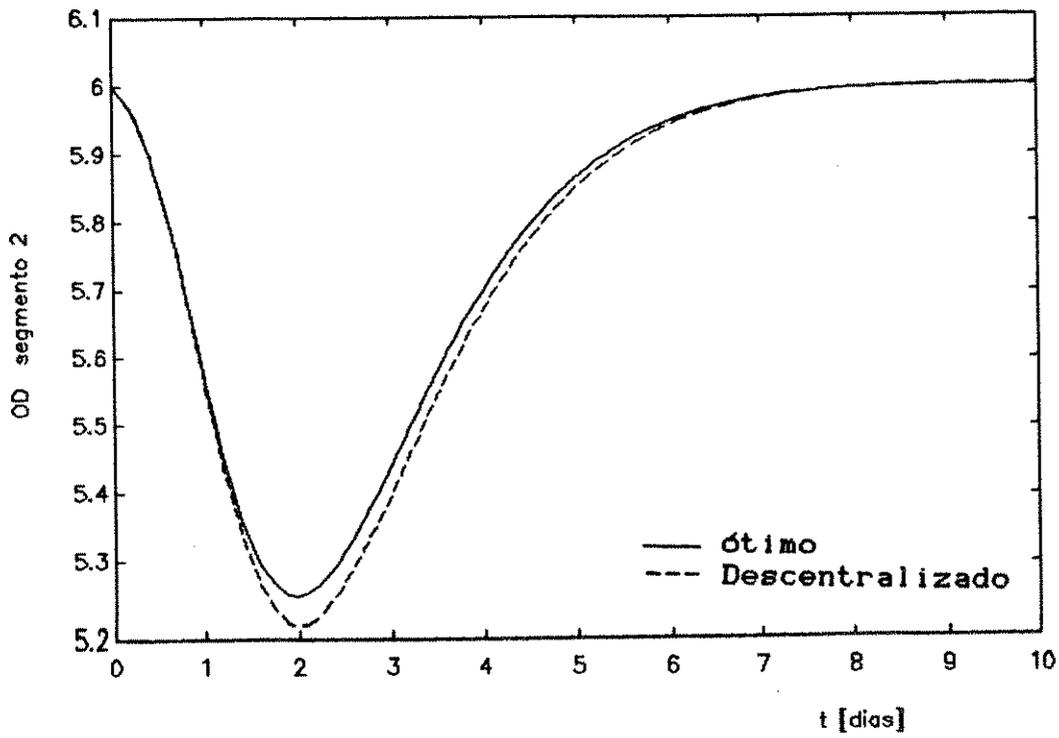


fig 4.13 nível de OD do segundo segmento

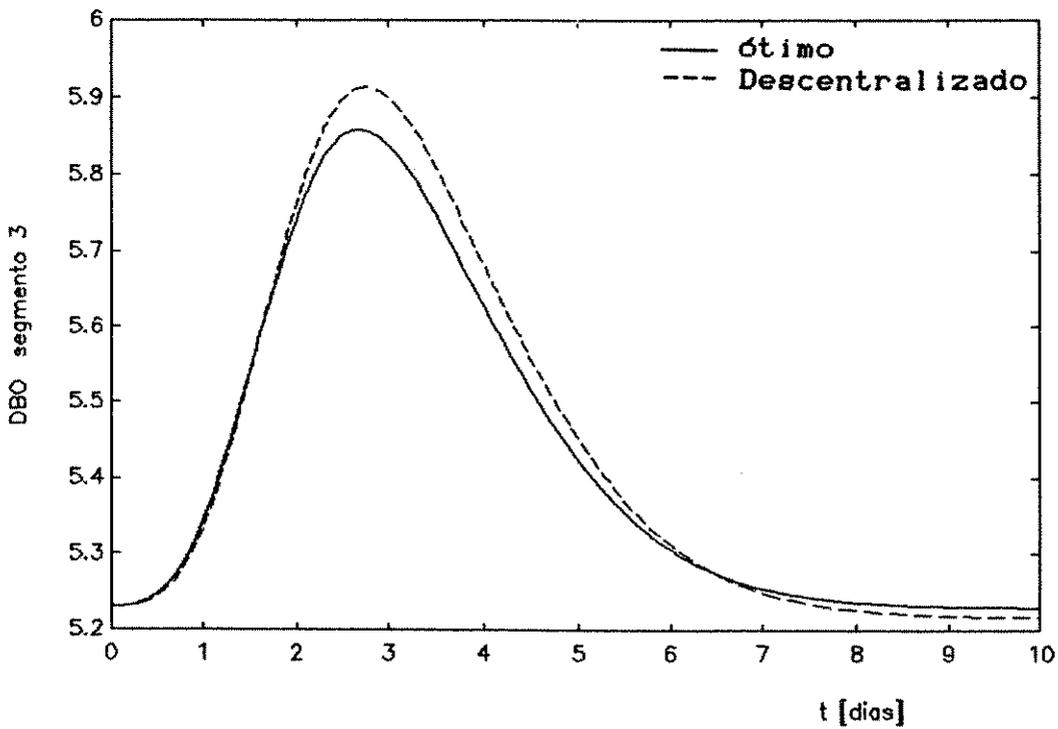


fig 4.14 nível DBO do terceiro segmento

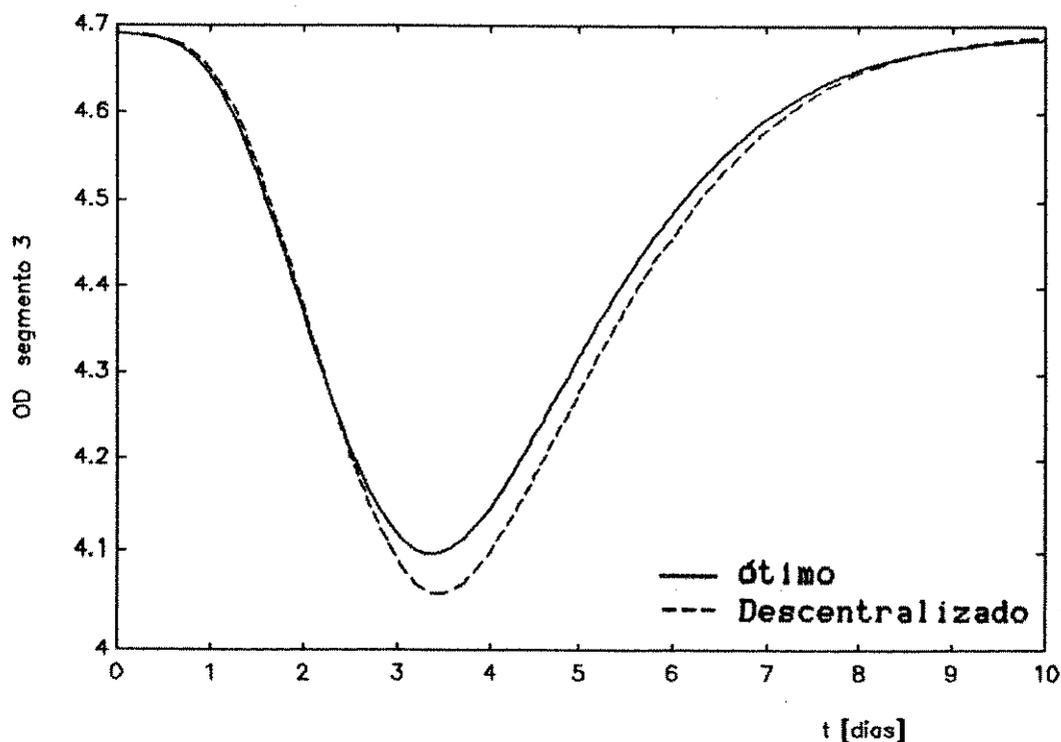


fig. 4.15 nível de OD do terceiro segmento

4.7 Conclusão

Para o controle da poluição da água nos rios, decorrente da diminuição da concentração de oxigênio nos rios, foram necessários, modelos dos parâmetros DBO e OD. Estes modelos obtidos, se adequam para a implementação do controle, sendo somente feitas considerações de regime. Segundo a literatura neste campo, esses modelos se comportam em forma satisfatória para fins de simulação, e pelas experiências de simulação realizadas, é possível um controle automático para este problema. Devido às restrições geográficas entre as estações de tratamento, é conveniente um controle descentralizado; nós elegemos duas técnicas para o projeto do controle descentralizado, controle descentralizado com um grau pré-especificado de estabilidade e

e controle descentralizado seguidor do modelo. Estas duas técnicas têm em comum o fato de otimizararem índices de desempenho, que podem levar em conta a otimização dos recursos ou os custos de controle, que podem ser enormes. Nas experiências de simulação, não é levado em consideração o tempo que é tomado para o teste do DBO, que dura em média de 3 a 5 dias; a implementação destes controladores, é portanto ainda não factível.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

As técnicas para controle descentralizado e multinível aqui estudadas, são somente uma amostra das muitas já existentes na literatura de controle. Escolhemos técnicas que julgamos estarem entre as mais simples e compreensíveis, e que no projeto utilizam teoria de controle ótimo.

Para a estabilização e controle de sistemas de grande porte, são utilizadas técnicas de controle descentralizado e/ou multinível. Cabe fazer notar que nos restringimos à classe de sistemas dinâmicos interconectados, supondo então, o sistema já decomposto.

No caso da estabilização descentralizada (capítulo 3), são encontradas condições que devem ser obedecidas pelos controles locais e pelas interconecções. O projeto para cada controlador é simples, já que utiliza somente informações a nível de cada subsistema, sem tomar em conta as interconecções dos outros subsistemas. Uma vez obtidos estes controles locais, são analisadas as condições suficientes para a estabilidade do sistema global. Existem algumas limitações para a análise das condições suficientes, pois as análises das funções de Lyapunov, são restritivas em certo grau; portanto se estas condições, não são satisfeitas, isto não implica que o controle descentralizado obtido não estabilize o sistema. Algumas condições alternativas podem ser encontradas em [1,6].

O controle descentralizado perto do ótimo [4], é dependente das condições iniciais, porém apresenta insensibilidade a pequenas variações delas, e pode apresentar um esforço computacional off-line maior ao precisado no controle centralizado. Este fato é compensado pela implementação do controle on line, e pela menor complexidade dos cálculos envolvidos. Para a obtenção dos controles locais do método de controle descentralizado seguidor do modelo, são necessários cálculos de ordem menor que a do sistema global. Este método, não segue uma estratégia definida, e um conhecimento a priori para a resposta desejada do sistema, é de fundamental importância, sendo necessárias práticas de simulação para a escolha do modelo rústico e para a modificação das interconexões.

Os modelos dos parâmetros (DBO e OD) para a qualidade da água nos rios, são de fácil aplicação para fins de controle e simulação, porém por se tratarem de sistemas que mudam constantemente de "estrutura", por exemplo: volume, taxa de remoção do DBO, precisam ser constantemente atualizados. Estes modelos são amplamente utilizados, para o monitoramento real dos rios, já um controle automático real, pelas referências nossas, ainda não existe. Das experiências de simulação, podemos constatar a possibilidade de um controle descentralizado para o controle da qualidade da água nos rios, sempre que seja possível um teste rápido do DBO, e que os efluentes de controle consigam variar as concentrações do DBO de forma a satisfazer as leis de controle.

Por último destacamos como possíveis temas de pesquisa futura:

- Controle em tempo real da qualidade da água nos rios
- controle distribuído da qualidade da água nos rios

- Aplicações das técnicas apresentadas a outros sistemas de grande porte
- Estudo e implementação de outras técnicas de controle descentralizado
- Sofisticação dos modelos da qualidade da água nos rios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Siljak, D.D. - "Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure", North-Holland, 1978.
- [2] M.S. Mahmoud, M.F. Hassan, M.G. Darwish - "Large-scale control systems: theories and techniques", Marcel Dekker, New York, 1985.
- [3] Chen Yuliu, M.G. Singh - "Certain practical considerations in the model-following method of decentralised control", IEE Proc., Vol.128, Pt. D, No. 4, July 1981, pp. 149 -155
- [4] M.F. Hassan, M.G. Singh - "Decentralised controller with online interaction trajectory improvement", IEE Proc., Vol.127, Pt. D, No.3, May 1980, pp.142-148
- [5] M.F. Hassan, M.G. Singh, A. Titli - "A near optimal decentralised controller with a pre-specified degree of stability", Automatica, 1979 Vol. 15 pp. 483-484
- [6] Siljak, D.D - "Decentralised control of complex systems", Mathematics in Science and Engineering Vol. 128, Academic press 1991.
- [7] M. Jamshidi - "Large scale systems: modelling and control", North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1983
- [8] H. Kwakernaak, R. Sivan - "Linear optimal control systems", John Wiley & Sons, Inc. 1972.
- [9] M.K. Sundareshan - "Exponential stabilization of large-scale systems: decentralised and multilevel schemes", IEEE Transactions SMC, June 1977, pp. 478-482

- [10] B.D.O. Anderson, J.B. Moore - "Linear systems optimisation with prescribed degree of stability", IEEE Proc., Vol. 116, No. 12, December 1969. pp. 2083-2087.
- [11] M.G. Singh, and A. Titli - "Systems: decomposition, optimization and control". Pergamon press, Oxford, 1978.
- [12] Hassan, M.F., - "Optimisation et commande hierarchisee des system dynamiques interconnectes", These de Doctorat d'Etat, Toulouse, France, 1978.
- [13] M.F. Hassan, and M.G. Singh - "Stability and performance of multilevel controllers under structural perturbations : Part II. Stabilization under any structural perturbation", IEE Proc. 127, Pt D, No 5, Sept. 1980, pp. 214-219.
- [14] N.R. Sandell, Jr., P. Varaiya, M. Athans, M.G. Safonov - "Survey of decentralised control methods for large scale systems", IEEE Transactions on Automatic control, Vol. AC-23, No 2. april 1978, pp. 108-128.
- [15] C.A. Markland - "Optimal model-following control-system synthesis techniques", IEEE Proc., Vol. 117, No. 3, march 1970, pp. 623-627
- [16] M.F. Hassan, and M.G. Singh - "A hierarchical structure for computing near optimal decentralized control", IEEE SMC-8, No 7, July 1978, pp 575-579.
- [17] M.G. Sing, M.F. Hassan, A. Titli - "A feedback solution for large interconnected dynamical systems using the prediction principle", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Vol SMC-6, 1976, pp. 223-239
- [18] M.F. Hassan, M.G. Singh - "Optimisation of nonlinear systems using a new two level method", Automatica 12, 261, 1976

- [19] G. Tchobanoglous, E.D. Schroeder - "Water quality", series on water quality, vol. 1, Addison-Wesley, 1985.
- [20] P. Young, B. Beck, M.G. Singh - "the modeling and control of pollution in rivers systems", rep. CUED/B-control/TR32, Cambridge university, 1972.
- [21] H. Tamura - "A discrete dynamic model with distributed transport delays and its hierarchical optimisation for preserving stream quality", IEEE trans. sys. man. cybern. SMC [5], sept. 1976.
- [22] M.G. Singh - "River pollution control", Int. J. Sys. Sci., vol 6, No 1, 1975, pp 9-21.
- [23] D.D. Siljak and M.K. Sundareshan - "A multilevel optimization of large-scale dynamic systems", IEEE transactions on automatic control, february 1976, pp 79-84.
- [24] J. C. Geromel - "Contribution a L'étude des systemes dynamiques interconnectes Aspects de decentralisation", these de doctorat d'Etat, Toulouse, France, 1979.
- [25] W. Hahn - "Stability of motion", Springer Verlag, 1967.
- [26] D. E. Kirk - "Optimal control theory An introduction", Prentice - Hall, inc., 1970.
- [27] J. C. Lamb - "Water quality and its control", John Wiley & Sons, inc., 1985.
- [28] S. A. Silva, D. D. Mara - "Tratamentos biológicos de águas residuárias: Lagoas de estabilização", ABES, 1979.
- [29] A. James, ed. - "An introduction to water quality modelling", Jhon Wiley 1984.
- [30] L. N. Garcez - "Elementos de Engenharia Hidraulica e Sanitária", 2da. edição, Edgar Blucher, 1969.

- [31] P. Youg, B. Beck - "The modelling of water quality in a river system", Automatica, Vol. 10, pp 445-468, 1974.
- [32] M. G. Singh - "Decentralised control", North Holland publishing company, 1981.
- [33] C. P. Bottura - "Análise linear de sistemas", Guanabara dois, 1981.
- [34] A. N. Michel, R. K. Miller - "Qualitative analysis of large scale dynamical systems", Ac. Press, N. York, 1977.