



Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Microonda e Óptica

**Feixes Localizados em Pinças Ópticas com Partículas
Convencionais e Metamateriais**

Autor: Leonardo André Ambrosio

Orientador: Hugo Enrique Hernández Figueroa

Co-Orientador: Michel Zamboni Rached

Trabalho apresentado à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Comissão Examinadora

Hugo Enrique Hernández Figueroa

Leonardo Lorenzo Bravo Roger

Jose Joaquín Lunazzi

Antônio Sérgio Bezerra Sombra

Antônio Romeiro Sapienza

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Am18f Ambrosio, Leonardo André
 Feixes localizados em pinças ópticas com partículas
 convencionais e metamateriais / Leonardo André
 Ambrosio. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.

 Orientadores: Hugo Enrique Hernández Figueroa,
 Michel Zamboni Rached.

 Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

 1. Feixes de laser. 2. Metamateriais. 3. Pinças óticas.
4. Difração. 5. Eletromagnetismo. I. Figueroa, Hugo
Enrique Hernández. II. Rached, Michel Zamboni. III.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Localized beams in optical tweezers with conventional and
metamaterial particles

Palavras-chave em Inglês: Laser beams, Metamaterials, Optical tweezers, Diffraction,
Electromagnetism

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Leonardo Lorenzo Bravo Roger, Jose Joaquín Lunazzi, Antônio
Sérgio Bezerra Sobre, Antônio Romeiro Sapienza

Data da defesa: 31/08/2009

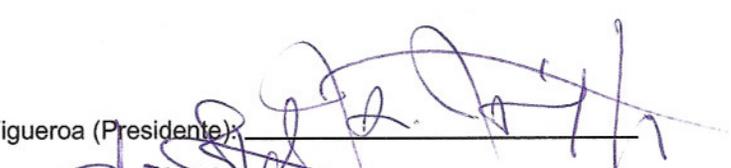
Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

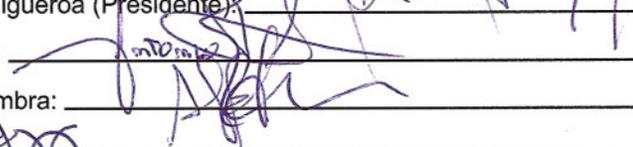
COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Leonardo André Ambrosio

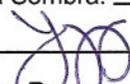
Data da Defesa: 31 de agosto de 2009

Título da Tese: "Feixes Localizados em Pinças Ópticas com Partículas Convencionais e Metamateriais"

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernandez Figueroa (Presidente): 

Prof. Dr. Antonio Romeiro Sapienza: 

Prof. Dr. Antônio Sérgio Bezerra Sombra: 

Prof. Dr. José Joaquin Lunazzi: 

Prof. Dr. Leonardo Lorenzo Bravo Roger: 

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela existência, e ao Mestre querido pelo amor incondicional por todos nós.

A minha mãe, pelo exemplo que me deu em cada atitude, em cada gesto e em cada olhar que rendeu ao mundo. Que ela sempre se orgulhe de mim, através dos tempos.

A minha companheira de vida, Mariana, que faz da vida um momento suave na eternidade.

Aos meus irmãos Rafael e Natália e ao meu pai, Paulo, pelos anos de convívio, aprendizado, amizade e amor fraterno.

Ao meu orientador e amigo Hugo Figueroa, pelo apoio e confiança que sempre depositou em mim, muitas vezes mais do que eu mesmo depositaria.

Ao meu coorientador Michel, pela capacidade de achar soluções e sugerir caminhos que muitas vezes se encontravam nebulosos demais para minha inteligência.

À Fapesp, pelo apoio financeiro.

E, por fim, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a existência desta monografia.

“Ajuizado serás, não supondo que sabes o que ignoras” (Sócrates)

Resumo

Nesta tese, abordamos aplicações de feixes localizados em FSO – *Free Space Optics* – e em pinças ópticas, com ênfase maior para o segundo. No primeiro caso, mostramos que é possível pré-determinar o padrão de intensidade longitudinal através de elementos ópticos adequadamente modelados em suas funções de fase: os áxicons. Assim, estes feixes poderiam ser usados para alinhar o link. No caso de pinças ópticas, exploramos a idéia de que, em breve, será possível a construção de partículas esféricas homogêneas, na escala micrométrica, com índice de refração negativo (as chamadas *DNG particles*, ou *Double-Negative particles*), e verificamos as propriedades de aprisionamento óptico tanto para feixes gaussianos quanto para feixes localizados, no regime de óptica geométrica e no caso mais geral da teoria eletromagnética. A idéia de que partículas são atraídas para regiões de alta intensidade quando seu índice de refração é maior do que o do meio, e para regiões de baixa intensidade quando este índice é menor, embora válida para partículas convencionais – aquelas com índice de refração positivo -, deve ser revista para partículas DNG.

Abstract

In this thesis, we explore some applications of localized beams in FSO – *Free Space Optics* – and optical tweezers, greater emphasis been given to the second one. For FSO, we show that it is possible to choose the desired longitudinal intensity pattern by using optical elements adequately modeled in their phase functions: the axicons. In this way, these beams could be uses for optical alignment of the link. In the case of optical tweezers, we investigate the possibility that it will soon be possible to design and build homogeneous spherical particles, in the micron scale, with negative refractive index (the so called DNG particles, or Double-Negative particles), and we verify some properties related to optical trapping, both for Gaussian and Bessel beams, in the optics ray regime and in the more general electromagnetic case. The idea that particles with refractive index higher than the medium in which it is immersed is attracted to regions of high intensity, whereas it is attracted to regions of low intensity when its refractive index is lower than the medium, although valid for conventional particles – those with positive refractive index – must be revisited for DNG particles.

Sumário

Lista de Figuras	xvii
Lista de Tabelas	xxiv
Capítulo 1	1
Introdução	1
Capítulo 2	5
Ondas Localizadas	5
2.1 Introdução	5
2.2 A equação de onda	8
2.3 Soluções da Equação de Onda: Feixes e Pulsos Gaussianos	10
2.4 Soluções da Equação de Onda: Feixe de Bessel	13
2.5 Soluções da Equação de Onda: Pulsos Localizados	16
2.6 A Decomposição Bidirecional	18
2.6.1 A Expansão Bidirecional	19
2.6.2 Soluções Localizadas (Pulsos) Usando a Decomposição Bidirecional	22
2.7 Exemplo de Aplicação – Comunicações Ópticas no Espaço Livre	26
2.7.1 Aplicações de Ondas Localizadas em FSO	29
2.8 Comentários e Conclusões	46
2.9 Referências Deste Capítulo	48
Capítulo 3	53
Pinças Ópticas	53
3.1 Introdução	53
3.2 Forças em Pinças Ópticas: Óptica Geométrica	56
3.2.1 Aprisionamento em z (Longitudinal)	58
3.2.2 Aprisionamento em y (Radial)	60
3.3 Forças em Pinças Ópticas: Regime de Rayleigh-Gans	62
3.4 Óptica Geométrica: Pinças Ópticas para Partículas Metamateriais com $ n_2 > n_1$	63
3.4.1 Cálculo Teórico das Forças Gradiente e de Espalhamento para um Único Raio	65

3.4.2 Fatores de Espalhamento (Q_z), Gradiente (Q_g) e Total (Q_t): Variação em Função do Ângulo de Incidência	67
3.4.3 Forças Totais em Função do Ângulo γ	68
3.4.4 Forças Totais em Função da Distância r (Foco-Centro)	70
3.4.4 Forças Totais em Função da Relação $n = n_1/n_2$ (Índice Relativo)	73
3.5 Óptica Geométrica: Pinças Ópticas para Partículas Metamateriais com $ n_2 < n_1$	75
3.6 Conclusões.....	80
3.7 Referências Deste Capítulo.....	81
Capítulo 4	83
Teoria Eletromagnética para Pinças Ópticas.....	83
4.1 Introdução.....	83
4.2 Vetores Esféricos Harmônicos.....	85
4.3 Expansão de uma Onda Arbitrária em Harmônicos Esféricos Vetores.....	87
4.4 Cálculo de A_{emn} , A_{omn} , B_{emn} e B_{omn} para Ondas Planas.....	88
4.4.1 B_{emn} e A_{omn}	89
4.4.1 B_{omn} e A_{emn}	89
4.5 Campos \mathbf{E} e \mathbf{H} como Expansões em Harmônicos Esféricos.....	92
4.6 Os Fatores de Forma e as Seções de Choque.....	94
4.7 Extensão da Teoria Eletromagnética para Feixes Gaussianos.....	96
4.7.1 Introdução.....	96
4.7.2 Fatores de Forma para Feixes Gaussianos	96
4.7.3 Forças Totais para Feixes Gaussianos Usando os Fatores de Forma.....	99
4.8 Comentários e Conclusões.....	100
4.9 Referências Deste Capítulo.....	100
Capítulo 5	105
Feixes de Bessel em Pinças Ópticas.....	105
5.1 Introdução.....	105
5.2 Integral Localizada e Fatores de Forma para Feixes Localizados.....	106
5.3 Formulação Geral da Expansão dos Campos Incidentes para Feixe Ordinário com Centro da Partícula no Eixo Óptico.....	108
5.4 Forças Ópticas no Regime de Óptica Geométrica.....	115

5.4.1 Forças Totais para Feixes Localizados.....	117
5.4.2 Comentários	122
5.5 Polarizações para Feixes Localizados.....	123
5.5.1 Polarização a Partir do Potencial Vetor.....	128
5.5.2 Polarização a Partir da Componente E_z	129
5.5.3 Resultados e Conclusões	129
5.6 Referências Deste Capítulo.....	132
Conclusões	135
Apêndice A.....	137
Apêndice B.....	141
Apêndice C.....	143
Códigos em Fortran.....	143
C.1 Forças para Feixes Gaussianos.....	143
C.2 Trechos para Feixes Localizados.....	151
Apêndice D.....	155
Trabalhos Publicados pelo Autor	155
Axicons in FSO Systems.....	159
Manipulating Gradient Forces on Optical Tweezers Using Bessel Beams.....	165
Gradiente Forces on Optical Tweezers for Conventional and Metamaterial Particles using Bessel Beams.....	169
Trapping Double Negative Particles in the Ray Optics Regime Using Optical Tweezers with Focused Beams.....	175
Optical Forces in the Ray Optics Regime for Metamaterial Particles Trapped by Optical Tweezers.....	181

Lista de Figuras

- Fig. 2.1.** Os primeiros feixes localizados usavam aberturas anulares para a criação do efeito não-difrativo..... 7
- Fig. 2.2.** A solução da equação de onda (2.13), com o espectro (2.14), pode ser interpretado no plano $\vec{k} = \hat{e}_\rho k_\rho + \hat{e}_z k_z$ como uma superposição de ondas planas, sendo que as mais intensas possuem, como predominante, o número de onda longitudinal k_z 11
- Fig. 2.3.** Um feixe gaussiano (a) com “spot” central inicial de $\Delta\rho_0 = 60 \mu\text{m}$, para $\lambda = 1064 \text{ nm}$, dobra sua largura transversal inicial (veja (b))após cerca de 1,8 cm. Na abertura, o padrão de intensidade transversal é dado por uma função gaussiana $\psi_{fg}(\rho, z = 0; t) = \exp(-\rho^2/4a^2)$ 12
- Fig. 2.4.** Um pulso gaussiano com “spot” central inicial de $\Delta\rho_0 = 60 \mu\text{m}$, para $\lambda = 1064 \text{ nm}$, apresenta as mesmas características de alargamento espacial que o feixe gaussiano, sendo truncado no tempo devido à superposição em frequência destes feixes. (a) $ct = 0$; (b) $ct = 0,09 \text{ m}$; (c) $ct = 0,18 \text{ m}$ e (d) $ct = 0,27 \text{ m}$ 13
- Fig. 2.5.** A solução da equação de onda (2.13), com o espectro (2.18), pode ser interpretada – uma vez estabelecida uma relação linear entre ω e k_ρ , ou ω e k_z - no espaço $\vec{k} = \hat{e}_x k_x + \hat{e}_y k_y + \hat{e}_z k_z$ como uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se encontram na superfície de um cone de ângulo de vértice θ , que é o ângulo de áxicon..... 14
- Fig. 2.6.** O feixe de Bessel truncado pela abertura de raio 3,5 mm e sua distribuição de intensidade usando a integral de difração de Rayleigh-Sommerfeld I (2.20). O feixe de Bessel ideal (2.19) é uma boa aproximação da solução real dentro do limite $\rho \ll R$ e obedecida a condição em (2.2) para Z_{max} . O mesmo “spot” de $60 \mu\text{m}$ e o mesmo comprimento de onda $\lambda = 1064 \text{ nm}$ do feixe gaussiano foram usados, com um ângulo de áxicon de $0,0068 \text{ rad}$. Soluções não-difrativas mantém seus padrões de intensidade por distâncias muito maiores – no caso, cerca de 19 vezes..... 16
- Fig. 2.7.** Um pulso tipo X se propaga do ponto P_1 ao ponto P_2 dentro de um tempo t . Embora a velocidade do pico central seja superluminal, $v > c$, a energia propaga-se das regiões laterais – R na figura - com velocidade c . As ondas localizadas, devido ao próprio efeito da difração, conseguirá se propagar por longas distâncias, autoregenerando-se até a distância Z_{max} , dada por (2.2)..... 17
- Fig. 2.8.** Pulso X ordinário (2.25), com $a = 3 \text{ m}$ e $V = 1,1c$. O pico central é regenerado pela energia lateral da onda. Ao se difratar, ela se auto-reconstrói..... 18

Fig. 2.9. (a) Com $V \geq c$, nossas soluções ficam confinadas, no plano (ω, k_z) , à região sombreada delimitada pelas retas $\omega = \pm V k_z$. (b) Ao fazermos as alterações de parâmetros (2.31), temos no plano (z, t) que as nossas soluções se confinam na região sombreada delimitada pelas retas $t = \pm z/V$, correspondentes à $\alpha = 0$ e $\beta = 0$	19
Fig. 2.10. (a) A solução tipo X ordinário – solução clássica – possui espectro de frequências centralizado em torno de $\omega = 0$. (b) Primeira derivada do pulso X ordinário (a), i.e., $m = 1$. Pulsos tipo X com $m > 0$ possuem, além de uma maior localização em torno do ponto central $(\rho, \zeta) = (0, 0)$, um espectro de frequências deslocado para bandas mais altas. Em ambos os casos, $a = 1$ m e $V = 5c$	23
Fig. 2.11. O espectro (2.35), com $m = 10$ e $V = 5c$. Devido ao fator α^m , o espectro é deslocado para frequências mais elevadas, centralizado em $\omega_M = mV/a$. Os resultados foram normalizados. (a) $\omega_M = 1,3636 \times 10^{11}$ rad/s, (b) $\omega_M = 1,2500 \times 10^{11}$ rad/s, (c) $\omega_M = 1,1538 \times 10^{11}$ rad/s, (d) $\omega_M = 1,0700 \times 10^{11}$ rad/s e (e) $\omega_M = 10^{11}$ rad/s.....	24
Fig. 2.12. Componentes não-causais ocorrem em pulsos superluminais “focus-wave modes”, SFWM, já que a suposição $\beta = \beta' > 0$ implica em um número de onda longitudinal que pode ser negativo. O comprimento de banda para estas componentes é de $\Delta\omega_{nc} = V\beta'$, enquanto que para $kz > 0$ o comprimento de banda equivale ao do espectro (2.35), i.e., $\Delta\omega = V/a$. Para que estas componentes não-causais sejam desprezíveis – evitando soluções contrapropagantes -, $\Delta\omega \gg \Delta\omega_{nc}$, e portanto, $a \ll b' \ll 1$	24
Fig. 2.13. (a) A solução tipo X ordinário – solução clássica – possui espectro de frequências centralizado em torno de $\omega = 0$. (b) Primeira derivada do pulso X ordinário (a), i.e., $m = 1$. Pulsos tipo X com $m > 0$ possuem, além de uma maior localização em torno do ponto central $(\rho, \zeta) = (0, 0)$, um espectro de frequências deslocado para bandas mais altas. Em ambos os casos, $a = 1$ m e $V = 5c$	25
Fig. 2.14 – Arquitetura ponto-à-ponto. Outras arquiteturas, como malhas parciais e ponto-à-multiponto, também são comumente encontradas.....	27
Fig. 2.15 – Geometria de difração usada na derivação da integral de difração de Fresnel.....	30
Fig. 2.16 – Telescópio de Galileo com (a) a característica de aberração esférica, (b) e (c) as frentes-de-onda, respectivamente, sem e com aberração, (d) e (e) seus padrões de intensidade até $z = 1000$ m e (f) a intensidade transversal em $z = 500$ m, mostrando o padrão pseudo-Bessel do feixe.....	33
Fig. 2.17 – Áxicon linear com amplitude uniforme na entrada e seus padrões de intensidade. (a), (b) e (c) representam a intensidade ao longo da propagação para $d_1 = 500$ m e $d_2 = 750, 1000$ e 1250 m, respectivamente. O item (d) seria o caso em que não há elemento óptico, ou $\varphi(r) = 0$. A divergência do feixe deve ser implementada para uma visualização mais realista, mas é notável o ganho em intensidade, em cerca de 30 vezes no pior caso – item (c).....	37
Fig. 2.18 – Áxicon linear com amplitude gaussiana na entrada e seus padrões de intensidade. (a), (b) e (c) representam a intensidade ao longo da propagação para $d_1 = 1000$ m e $d_2 = 1058, 1116$ e 1174 m, respectivamente.....	39

Fig. 2.19 – Áxicon logarítmico com amplitude uniforme na entrada e seus padrões de intensidade para $d_1 = 500$ m e $d_2 =$ (a) 750, (b) 1000 e (c) 1250 m, respectivamente.....	41
Fig. 2.20 – Áxicon logarítmico com amplitude gaussiana na entrada e seus padrões de intensidade para $d_1 = 1000$ m e $d_2 =$ (a) 1058, (b) 1116 e (c) 1174 m, respectivamente.....	42
Fig. 2.21 – Em distâncias reduzidas, a óptica geométrica fornece uma boa aproximação para os raios emergentes de áxicons lineares (a) e logarítmicos (b). A abertura possui $R = 5$ mm, $d_1 = 100$ mm e $d_2 = 200$ mm, para um comprimento-de-onda $\lambda = 1550$ nm.....	42
Fig. 2.22 – Função $n(r)$ do GRIN axicon necessário para gerarmos a mesma função $\varphi(r)$ fornecida pelo telescópio de Galileo com aberração esférica.....	44
Fig. 2.23 – Função $n(r)$ do GRIN axicon necessário para gerarmos a mesma função $\varphi(r)$ fornecida pelo axicon linear não-anular para o caso da figura 2.16 (b).....	44
Fig. 2.24 – Função $n(r)$ do GRIN axicon necessário para gerarmos a mesma função $\varphi(r)$ fornecida pelo axicon linear não-anular para o caso da figura 2.18 (b).....	45
Fig. 2.25 – Padrões de intensidade e índice de refração para GRIN áxicons, onde (a) e (b) referem-se a uma abertura de 5 cm, com $\lambda = 850$ nm, e (c) e (d) para 5 mm e com o mesmo comprimento de onda. Note que (b) e (d) são idênticos, concluindo que a perturbação da intensidade em relação à equação (2.66) independe do áxicon. A mesma espessura de 5 mm foi assumida em ambos os casos, com $n(0) = 1,68$	45
Fig. 2.26. Superposição de feixes de Bessel com diferentes velocidades. Uma focalização espaço-temporal criada em $t = 6,66$ ns e em $z = 2$ m mostrando a intensidade $ \psi ^2$ - normalizada - resultante da superposição. O feixe mais rápido, com $V = 1,005c$ é o último a ser enviado, enquanto que o mais lento, com $V = 1,001c$, é o primeiro. A amplitude em $t = 6,66$ ns é cerca de 41 vezes maior do que o inicial.....	47
Fig. 3.1. (a) Um feixe pode acelerar partículas dielétricas usando a pressão de radiação, variando seus momentos. (b) Este mesmo princípio pode ser explorado na captura de partículas usando dois lasers alinhados um para o outro (contrapropagantes), anulando o efeito da aceleração devido ao cancelamento das forças aplicadas por ambos.....	55
Fig. 3.2. (a) A força lateral resultante é para o centro do feixe. A variação de momento dos fótons move a partícula para regiões de maior intensidade. (b) Uma força para cima é criada ao focalizarmos um feixe. Ela é proporcional ao gradiente da intensidade e tende a deslocar a partícula para o foco.....	55
Fig. 3.3. Um raio de luz, de potência P , incide sobre a superfície de uma esfera sob ângulo θ em relação à normal, sofrendo múltiplas e sucessivas refrações. Cada feixe refratado terá uma potência menor, e a força em cada direção – neste caso, para simplificação, escolhemos apenas duas coordenadas cartesianas – será a contribuição das forças individuais de cada raio espalhado.....	57
Fig. 3.4. (a) Polarização paralela. (b) Polarização perpendicular. Quanto maior o ângulo de incidência, mais significativa se torna a força gradiente. Assim, raios mais próximos à lente focalizadora contribuem mais significativamente para o aprisionamento de	

partículas microscópicas, independente da polarização do feixe. A magnitude da força gradiente torna-se maior já para ângulos aproximadamente acima de 6° . A partícula de poliestireno possui índice de refração $n_2 = 1,61$, e é considerada imersa em água, onde $n_1 = 1,33$	59
Fig. 3.5. (a) Aprisionamento longitudinal. A força gradiente resultante empurra a partícula na direção do foco, enquanto a força de espalhamento tende a afastá-la. Em geral, pinças ópticas trabalham com forças de espalhamento muito pequenas, o que resulta em uma força total direcionada para o foco, onde se encontra a região de maior intensidade. (b) Uma partícula encontra-se deslocada horizontalmente do foco. Neste caso, a força vetorial total direciona-se novamente para a região do foco.....	59
Fig. 3.6. Em equilíbrio, uma partícula com índice de refração relativo $n = 1.2$ encontra-se deslocada verticalmente de S_E , devido à força de espalhamento (proporcional ao fator Q_s) negativa que continua a existir mesmo quando foco e centro da esfera coincidem [7]. Q_g e Q são proporcionais à força gradiente e à $[Q_g^2 + Q_z^2]^{1/2}$, respectivamente.....	61
Fig. 3.7. Inversão da Lei de Snell para um meio metamaterial. O raio refratado encontra-se no mesmo semi-plano que o raio incidente (o semi-plano compreende a porção abaixo da normal à interface entre os dois meios). Esta inversão é responsável por fenômenos interessantes quando consideramos a captura óptica de uma partícula metamaterial.....	64
Fig. 3.8. Óptica geométrica para dois feixes incidentes. (a) $ n_2 > n_1$. (b) $ n_2 < n_1$. A variação de momento do feixe causa uma força na partícula. As forças F_1 e F_2 se referem às refrações de raios em uma partícula convencional (linhas sólidas), enquanto que F_1' e F_2' são para o caso metamaterial (linhas tracejadas).....	65
Fig. 3.9. Óptica geométrica para esfera metamaterial. A existência do “ângulo negativo” altera as forças ópticas para um raio incidente.....	67
Fig. 3.10. Fatores Q_z , Q_g e Q_{mag} em função do ângulo de incidência θ . (a) Caso $n_2 > 0$ e $n_2 > n_1$. (b) Caso $n_2 < 0$ e $ n_2 > n_1$. Valores positivos indicam forças da direção positiva dos eixos da figura 3.9.....	67
Fig. 3.11. Novo sistema de coordenadas. O ângulo γ entre o vetor posição do foco do feixe em relação ao centro da esfera pode variar, dando-nos uma medida da força total em x e z dependendo da posição do foco.....	69
Fig. 3.12. Em vermelho sólido, força gradiente total em função do ângulo $0 \leq \gamma \leq 360^\circ$. Como era de se esperar observando a figura 3.8, no caso metamaterial as forças possuem magnitudes maiores.....	69
Fig. 3.13. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	70
Fig. 3.14. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	71
Fig. 3.15. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul	

tracejado, força de espalhamento.....	71
Fig. 3.16. Quanto maior a distância entre foco e e centro da partícula, maior é a contribuição de raios com ângulo de incidência maior para as forças totais de espalhamento e gradiente.....	72
Fig. 3.17. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/ n_2 $ para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	74
Fig. 3.18. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/ n_2 $ para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	74
Fig. 3.19. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/ n_2 $ para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	74
Fig. 3.20. Módulo das forças totais gradiente (vermelho sólido) e de espalhamento (tracejada) continuam a existir para (b) uma partícula metamaterial mesmo quando $n = 1$, o que não ocorre quando esta partícula possui índice de refração positivo.....	75
Fig. 3.21. Fatores $Q_S = Q_z$, e Q_g em função do ângulo de incidência θ . (a) Caso $n_2 > 0$ e $n_2 > n_1$. (b) Caso $n_2 < 0$ e $ n_2 > n_1$. Valores positivos indicam forças da direção positiva dos eixos da figura 3.9.....	75
Fig. 3.22. Em vermelho sólido, força gradiente total em função do ângulo $0 \leq \gamma \leq 360^\circ$. No caso metamaterial, a força total gradiente continua sendo de atração mesmo quando o índice de refração da partícula é inferior ao do meio que o envolve. Em (a) e (b), o caso não-metamaterial para $n_2 > n_1$ e $n_2 < n_1$, respectivamente. Em (c) e (d), o equivalente para metamaterial.....	76
Fig. 3.23. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	77
Fig. 3.24. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	77
Fig. 3.25. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	78
Fig. 3.26. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/ n_2 $ para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	79
Fig. 3.27. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/ n_2 $ para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	79
Fig. 3.28. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação n	

$= n_1/n_2$ para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.....	80
Fig. 4.1. Coordenadas esféricas. O centro da partícula de raio a está localizado na origem do sistema de coordenadas.....	84
Fig. 4.2. Sistema de coordenadas. O foco do feixe encontra-se sobre o plano xy , enquanto que a partícula está situada com seu centro na origem.....	98
Fig. 4.3. Forças (a) atrativas e (b) repulsivas, para polarizações paralelas (linhas tracejadas) e perpendiculares (linhas sólidas).....	100
Fig. 4.4. Forças gradientes para polarização paralela do feixe gaussiano com $\lambda = 1064$ nm, “spot” de 500 nm e $a = 3\mu\text{m}$ (tracejada), $4,5\mu\text{m}$ (traço-ponto) e $6\mu\text{m}$ (sólida).....	101
Fig. 4.5. Equivalente à figura 4.3 para uma partícula metamaterial. Note que, para estas relações entre índices de refração, não há a inversão das forças quando o índice relativo passa a ser menor que 1 e, da mesma forma que a óptica geométrica, tanto em (a) quanto em (b), a força passa a ser repulsiva conforme a distância entre a partícula e o foco aumenta.....	101
Figura 5.1. Partícula centrada na origem e feixe localizado ordinário deslocado ao longo do eixo x	106
Figura 5.2. Intersecção entre as curvas Le (azul tracejado) e Ld (vermelho sólido) para casos convencional e metamaterial com $ n_2 /n_1 = 1,62/1,33$	116
Figura 5.3. Intersecção entre as curvas Le (azul tracejado) e Ld (vermelho sólido) para casos convencional e metamaterial para $ n_2 /n_1 = 1,02/1,33$. As curvas foram truncadas para ângulos maiores que o ângulo de reflexão total.....	116
Figura 5.4. Partícula centrada na origem e feixe localizado ordinário deslocado de ρ_0 com um ângulo ϕ_0 em relação ao eixo x	118
Figura 5.5. Padrão de intensidade para feixe localizado.....	118
Figura 5.6. Mesmo quando a partícula está casada com o meio, forças ópticas continuam sendo exercidas sobre a mesma quando ela é metamaterial.....	119
Figura 5.7. Forças ópticas para $p = 0$ quando $ n_2 /n_1 = 1,62/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade.....	120
Figura 5.8. Forças ópticas para $p = 0$ quando $ n_2 /n_1 = 1,02/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade, embora haja inversão no sentido da força apenas no caso convencional.....	120
Figura 5.9. Mesmo quando a partícula está casada com o meio, forças ópticas continuam sendo exercidas sobre a mesma quando ela é metamaterial. Caso $p = 1$ na eq. (5.29).....	121
Figura 5.10. Forças ópticas para $p = 1$ quando $ n_2 /n_1 = 1,62/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade.....	121

Figura 5.11. Forças ópticas para $p = 0$ quando $ n_2 /n_1 = 1,02/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade, embora haja inversão no sentido da força apenas no caso convencional.....	122
Figura 5.12. Sistema de coordenadas “linha” do feixe e “sem linha” da partícula. O feixe possui seu eixo óptico deslocado de x_0 ao longo do eixo x	124
Figura 5.13. Forças gradientes para um feixe de Bessel ordinário no regime de óptica geométrica (linhas tracejadas) com $a = 10\lambda$, e no caso eletromagnético com $a = 2,3\lambda$ (linhas sólidas), para (a) partícula convencional e (b) metamaterial, ambas com $ n_2 /n_1 = 1,62/1,33$, usando (5.40) e (5.41).....	130
Figura 5.14. Forças gradientes para um feixe de Bessel ordinário no regime de óptica geométrica (linhas tracejadas) com $a = 10\lambda$, e no caso eletromagnético com $a = 2,3\lambda$ (linhas sólidas), para (a) partícula convencional e (b) metamaterial, ambas com $ n_2 /n_1 = 1,21/1,33$, usando (5.40) e (5.41).....	130
Figura 5.15. Forças ópticas ao longo de x (força gradient) para $n = 1.22$ e s (spot de nosso feixe de Bessel ordinário) = $28.9 \mu\text{m}$ para uma partícula convencional com raio $a = 10\lambda$, calculadas usando óptica geométrica (linhas tracejadas) e a teoria eletromagnética (linha sólida) através dos fatores de forma. Três posições de equilíbrio estável, i.e., de captura óptica, são vistas para $x_0 \sim 0, 46$ and $84 \mu\text{m}$	131
Figura 5.16. Aprisionamento para uma esfera metamaterial com $ n = 1$. O padrão de aprisionamento é análogo ao da figura 5.15, assemelhando-se a um padrão de Bessel. Segundo a óptica geométrica, os raios incidentes ainda são refletidos/refratados conforme estes incidem sobre a partícula (ver figura 5.6 para comparação). Na teoria eletromagnética, o fenômeno de espalhamento é observado.....	131

Lista de Tabelas

Tab. 2.1. Características dos pulsos SSP e SMPS.....	26
Tab. 2.2 – Código Internacional de Visibilidade para condições climáticas e precipitações com suas visibilidades e perdas, em dB/km a 785 nm.....	29

Capítulo 1

Introdução

Desde o aparecimento das primeiras ciências naturais até hoje, sempre existiu uma Ciência onde os fenômenos acontecem com exatidão, com parâmetros conhecidos e comportamentos equacionados. As perdas não existem, e o sistema, que por vezes é isolado do mundo exterior, consegue se auto manter em suas atividades. Esta ciência, obviamente, não descreve fatos reais, mas se baseia em um universo ideal para desenvolver suas teorias.

Se muito embora ela seja incapaz de descrever os fenômenos físicos tais como os conhecemos, é fato que graças a ela o homem consegue se aprofundar no entendimento do Universo. Os processos intrínsecos à natureza, bem como os criados pelo próprio homem, não sendo conhecidos à priori, foram inicialmente abstraídos. Foi assim que, a partir de um átomo indivisível e esférico, símbolo da grandeza Divina da simplicidade e perfeição, surgiu a então mecânica quântica, onde a probabilidade nos dá uma idéia de como funciona o microcosmos não observável aos nossos olhos. Movimentos circulares e esferas perfeitas também foram usados pelos antigos para astros e planetas, e hoje nem a mecânica clássica newtoniana é suficiente para descrever certos fenômenos macroscópicos. O mundo relativístico passou a fazer parte do nosso conhecimento, onde tempo e espaço se interligam, indissociáveis, através do espaço material.

Quando nos iniciamos na escola, deparamo-nos com várias situações ideais. Energias são completamente convertidas em formas variadas, sem dissipações. Situações onde o sistema considerado não possui ao menos contato com o mundo exterior são constantemente encontradas. Temperaturas invariáveis, pressões sempre constantes, Medicina, Biologia, Química, Física, todas surgiram deste mundo antes de encontrar bases reais e sólidas, construídas com a argamassa de muitas experimentações e constatações de um mundo em que tudo se conecta tanto, e de tal

forma, que as variáveis não nos permitem, por enquanto, um equacionamento fechado e conclusivo.

Os fenômenos eletromagnéticos sofreram o mesmo processo. Cargas elétricas pontuais, interações isoladas de partículas, fontes ideais de correntes e muitas outras abstrações ideais permitiram um conhecimento considerável de situações reais mais complexas. A força eletromagnética, a mais abundante e presente entre as quatro forças atuantes que conhecemos, possui como base o conjunto de equações matemáticas, com profundas implicações físicas ideais e reais, baseadas em seus campos elétrico e magnético. Conhecidas atualmente como as Equações de Maxwell [13] (quando James C. Maxwell apresentou seu tratado, eram 20 equações com 20 incógnitas a serem determinadas), elas compõem uma das maiores obras artísticas já criadas pelo homem para descrever o universo real que nos cerca.

Existem muitas soluções analíticas para as equações de Maxwell; entre elas, as ondas planas são as mais conhecidas. Quaisquer soluções posteriores podem ser obtidas como uma superposição das mesmas, através de determinadas transformações de Fourier. Assim surgiram feixes gaussianos, Laguerre-gaussianos, Hermite-gaussianos, etc., além de seus pulsos associados. Embora tais ondas planas sejam abstrações que por vezes possamos, localmente, tomá-las como válidas, suas superposições interagem com o mundo real e/ou a matéria de formas específicas. Efeitos de difração – alargamento espacial – e dispersão – alargamento temporal – afetam pulsos e feixes propagantes. O primeiro caso é fator limitante para qualquer aplicação onde se requer que um feixe ou pulso mantenha a sua localização transversal, como por exemplo, em comunicações ópticas no espaço livre [14], imagens ópticas [15], litografia óptica [16,17], pinças ópticas [18,19], etc. Já no que se refere à dispersão, qualquer aplicação onde se requer que o feixe ou pulso mantenha sua abertura temporal, como em sistemas ópticos de comunicação [20], por exemplo, deve levar este efeito em conta.

Devido às limitações impostas por esses fenômenos, é de grande importância o desenvolvimento de técnicas que possibilitem amenizá-los.

As chamadas ondas localizadas (ou *localized waves* - LW), também conhecidas como *ondas não-difrativas*, surgiram neste sentido; de fato, é uma tentativa de se obter feixes e pulsos capazes de resistirem à difração por longas distâncias no espaço livre. Tais soluções da equação de onda (e também das equações de Maxwell) foram obtidas primeiramente na teoria, e pouco tempo

depois já estavam sendo produzidas em laboratório. Hoje as ondas localizadas são uma realidade teórica e experimental, e não mais aplicadas apenas ao vácuo, mas também aos meios materiais (lineares ou não), onde se mostraram capazes de resistir também ao fenômeno da dispersão. O mundo ideal das ondas localizadas ingressava de vez na realidade física.

Esta tese, baseada em estudos sobre feixes localizados, está dividida da seguinte forma:

- No segundo capítulo, apresentamos uma revisão da teoria de ondas localizadas: como são geradas e quais suas características e propriedades que serão importantes para o desenvolvimento das seções subseqüentes. Como exemplo de aplicação, explicamos como feixes pseudo-Bessel podem ser convenientemente modelados através de elementos ópticos adequados: os áxicons e os áxicons de índice de refração gradual, aplicando-os em comunicações ópticas no espaço livre. Os resultados apresentados compreendem o primeiro ano de doutorado e representam a contribuição inicial deste trabalho;

- No terceiro capítulo, trataremos das pinças ópticas - instrumentos que se utilizam de lasers para a captura de partículas microscópicas – no regime de óptica geométrica, simples de ser analisado, tanto para partículas convencionais quanto para partículas supostamente metamateriais (esta palavra, ao longo do texto, será indistintamente usada como sinônimo para materiais que possuem um índice de refração negativo), sobre as quais entraremos em maiores detalhes. Embora partículas convencionais sejam vastamente estudadas na literatura, o emprego de partículas metamateriais no aprisionamento óptico é novidade, e os resultados para estas partículas são pioneiros;

- No quarto capítulo, apresentamos uma revisão da teoria mais complexa para as pinças ópticas – tanto para ondas planas quanto para feixes gaussianos -, no regime mais geral da teoria eletromagnética na captura de partículas. Esta situação é complicada e envolvente, exigindo tratamentos complexos para o cálculo de forças ópticas de captura, coeficientes de Mie, seções de choque, etc.;

- O quinto capítulo engloba os desenvolvimentos anteriores para o cálculo das forças ópticas em pinças ópticas quando utilizamos feixes localizados, seja no regime de óptica geométrica, seja para o caso mais amplo da teoria eletromagnética. Verificaremos que a formulação mais geral não nos fornece soluções analíticas, ao contrário de quando nos utilizamos de simplificações e aproximações, embora paguemos o preço por isso. Além disso, compararemos nossas simulações

da teoria eletromagnética com o caso mais simples da óptica geométrica, para feixes localizados. Nossas contribuições englobam toda a análise metamaterial, i.e., todos os resultados de forças ópticas e suas conseqüentes conclusões para o aprisionamento de partículas com índice de refração negativo e,

- por fim, apresentamos nossas conclusões finais, além de sugestões para trabalhos futuros.

Devido à grande quantidade de referências e pela forma de apresentação dos capítulos, optou-se por inserir, ao fim de cada capítulo, as referências bibliográficas citadas no mesmo. Além de facilitar a consulta ao longo da leitura, isso também nos permitiu especificarmos algumas referências de forma mais detalhada; por exemplo, citar um livro mais de uma vez, explicitando a página em que o assunto é abordado pelo mesmo.

Capítulo 2

Ondas localizadas

2.1 Introdução

As propagações ondulatórias sofrem, invariavelmente, um alargamento espacial gradativo de seu formato inicial. Este fenômeno, conhecido como difração, afeta ondas que viajam em meios homogêneos bi ou tridimensionais, podendo ser um fator limitante em diversas aplicações onde uma certa localização espacial seja desejada.

Historicamente, a primeira menção à difração remonta a Leonardo da Vinci, por volta de 1500, em seus estudos sobre a câmera obscura, embora uma descrição acurada sobre o fenômeno só tenha aparecido em 1665, com as observações do físico e matemático italiano Francesco Maria Grimaldi, editados em um livro dois anos após a sua morte [1]. Desde então, a difração vem sendo detalhadamente caracterizada, seja pela teoria ondulatória, seja pela teoria corpuscular.

A amenização de seus efeitos é importante em diversas aplicações que requerem uma certa localização espacial de feixes e/ou pulsos como, por exemplo, comunicações ópticas no espaço livre [2], imagens ópticas [3], litografia óptica [4,5], pinças eletromagnéticas [6,7], etc..

Foi neste sentido que as ondas localizadas¹ tornaram-se alternativas interessantes, pois são capazes de resistir aos efeitos da difração por longas distâncias, mantendo seu formato inicial.

Entre as aplicações acima, uma vem chamando interesse da comunidade científica, que são as pinças ópticas, sobre a qual desenvolveremos o projeto de tese. Mas antes, faremos uma breve introdução à teoria das ondas (feixes e pulsos) localizadas.

¹ Também chamadas de *ondas não-difrativas* embora a difração continue a ocorrer naturalmente, evidenciando o caráter regenerativo de tais ondas.

No caso eletromagnético, uma solução monocromática com localização espacial para a equação de onda bem conhecida é a onda plana, cujo padrão transversal de campo se mantém, indefinidamente, através de um meio homogêneo sem fontes e suposto ilimitado, como o vácuo. Entretanto, tal solução é ideal. Na prática, porém, só é possível obter uma boa localização dentro de certos limites, haja visto seus truncamentos, na geração, por aberturas – fontes - finitas, acarretando efeitos de difração na borda e, conseqüentemente, distorcendo o sinal propagante, que se diverge e se alarga.

Em 1941, entretanto, Stratton [8] encontrou um conjunto de soluções² ψ_n , também monocromáticas, para a equação de onda escalar em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , cujos padrões transversais eram dados por funções de Bessel ordinárias $Z_n(\cdot)$:

$$\psi_n = e^{in\theta} Z_n\left(\sqrt{k^2 - k_z^2} r\right) e^{\pm ik_z z - i\omega t}. \quad (2.1)$$

Nota-se de (2.1) que, para uma propagação em z , existe uma concentração de campo ao redor deste eixo, cuja distribuição transversal de intensidade dependerá, além da própria distância r ao eixo, do número de onda transversal (radial) $k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ de acordo com um padrão de Bessel³. Uma vez que as funções de Bessel não são quadraticamente integráveis, cada solução particular de (2.1) possui energia infinita; logo, não podem ser realizadas na prática. Esta característica indesejável para uma solução não difrativa fez com que as soluções propostas por Stratton não recebessem a devida atenção por mais de 45 anos.

Se por um lado as funções escalares (2.1) necessitassem de aberturas infinitas para que tivéssemos uma solução localizada para uma propagação indefinida no espaço, quase meio século foi necessário para que os primeiros experimentos com aberturas finitas fossem realizados. Em 1987, Durnin [9] comparou as características de propagação de feixes gaussianos com feixes de Bessel⁴ truncados, gerados por aberturas anulares como a da Fig. 2.1. Os resultados, mesmo para um arranjo experimental simples, mostraram que um feixe localizado poderia se propagar por

² Embora Stratton tenha usado o método de separações de variável para determinar ψ_n , determiná-la-emos através de uma transformada de Fourier-Bessel para a equação de onda escalar, em coordenadas cilíndricas.

³ A notação desta equação segue aquela adotada por Stratton. No entanto, em nossas deduções, optamos por adotar a conveção (ρ, ϕ, z) para as coordenadas cilíndricas.

⁴ Durnin usou o feixe localizado mais simples possível, o feixe de Bessel de ordem zero, que possui simetria azimutal e é dado por uma função de Bessel $J_0(\cdot)$.

uma distância 28 vezes maior do que os feixes convencionais antes de perder sua localização transversal. Embora a difração continuasse a ocorrer normalmente, estes novos feixes possuíam a capacidade de compensar seus efeitos através de sua auto-reconstrução, sendo que energia lateral era constantemente fornecida para o centro, recompondo o pico central de intensidade. Como foi demonstrado por Durnin, no caso em que $k_p \sim (\omega/c)(a/f)$, a e f sendo, respectivamente, o raio da abertura anular e o foco da lente, e sabendo-se que $k_p = (\omega/c)\sin\theta$, a distância máxima para a qual o feixe ainda é capaz de se reconstruir é dado, segundo a Fig. 2.1, como

$$Z_{\max} = \frac{R}{\tan \theta}, \quad (2.2)$$

sendo R o raio da abertura, e θ conhecido como *ângulo de áxicon*. Esse feixe, atualmente, pode ser gerado por áxicons iluminados por feixes gaussianos [10], holografia [11,12] e, para feixes de ordens superiores, por cristais biaxiais ou até mesmo por áxicons⁵ [13].

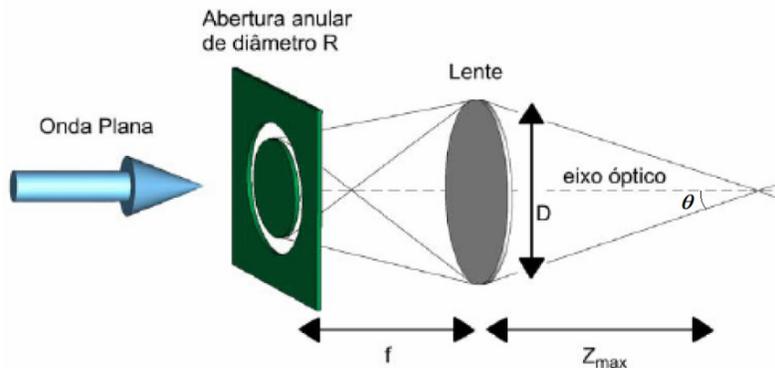


Fig. 2.1. Os primeiros feixes localizados usavam aberturas anulares para a criação do efeito não-difrativo.

Em 1983, Brittingham [14] demonstrou teoricamente que as equações de Maxwell no vácuo admitiam a existência de pulsos não difrativos com velocidades⁶ $V = c$ (onde c é a velocidade de uma onda plana no meio em questão, sendo a velocidade do som, no caso acústico, da luz, no caso eletromagnético, etc.), porém novamente com energia infinita. Dois anos depois, entretanto, Sezginer [15] obteria, teoricamente, estes pulsos, só que com energia finita devido ao truncamento, e limitados em suas propriedades não difrativas de acordo com (2.2).

⁵ Neste caso, o áxicon é iluminado com um feixe Laguerre-Gaussiano.

⁶ Ondas localizadas com velocidade $V = c$ são chamadas de *luminais*. Caso $V < c$, ou $V > c$, elas são ditas, respectivamente, *sub-* e *super-luminais*.

Pulsos não difrativos superluminais ($V > c$), apareceram alguns anos depois, quando Lu [16,17] superpôs feixes de Bessel com mesma velocidade de fase, obtendo pulsos que se propagam com velocidade maior que a velocidade de uma onda plana no meio em questão. Embora o nome possa sugerir, devemos frisar que nenhum efeito superluminal ocorre de fato [18-20], já que a energia – ou informação – não se propaga através do eixo central, mas é fornecida constantemente pelas regiões laterais destes pulsos os quais, devido ao formato particular, receberam o nome de *pulsos tipo X*. Rapidamente, Lu já aplicava, na prática, as ondas X em ultrasonografia [21,22].

A teoria dos pulsos localizados cresceu com as soluções do tipo onda X para as equações de Maxwell [23], sua geração para o caso óptico [24] e na região de microondas [25]. Novas soluções superluminais foram apresentadas através do método da decomposição bidirecional [26], até então usado apenas para o caso $V = c$, luminal.

Para entendermos algumas características das ondas localizadas, veremos como se obter feixes não difrativos usando-se uma transformada de Fourier-Bessel para a equação de onda, e as generalizaremos para pulsos superluminais, através da decomposição bidirecional. Por fim, faremos alguns comentários referentes a soluções que podem ser muito interessantes em pinças ópticas.

2.2 A Equação de Onda

Vamos nos ater à equação de onda homogênea de uma função escalar $\psi(x, y, z; t)$ ⁷:

$$\square^2 \psi(x, y, z; t) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, y, z; t) = 0. \quad (2.3)$$

Neste ponto, é bom procedermos à conversão para coordenadas cilíndricas. Lembramos que numa pinça óptica usual, por exemplo, nada mais temos do que um laser – geralmente com intensidade gaussiana - gerado por uma abertura circular. Assim, reescrevemos (2.3) como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\rho, \phi, z; t) = 0. \quad (2.4)$$

⁷ O tratamento da função de onda vetorial é mais complexo, e não entra nos nossos objetivos. Sobre o assunto, recomendamos a referência [27].

Considerando que o meio de propagação é o espaço-livre, podemos escrever a solução $\psi(\rho, \phi, z; t)$ em termos de uma transformada de Fourier-Bessel na variável ρ e duas transformadas de Fourier nas variáveis z e t para simetria azimutal:

$$\psi(\rho, \phi, z; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) dk_{\rho} d\omega dk_z. \quad (2.5)$$

Em (2.5), os números de onda transversal e longitudinal são representados por k_{ρ} e k_z , $J_n(\cdot)$ é a função de Bessel ordinária de ordem n , ω é a frequência angular da onda e $\bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega)$ é a transformada de $\psi(\rho, \phi, z; t)$.

A substituição de (2.5) em (2.4) deve nos levar à uma relação entre k_{ρ} , k_z e ω . Ao fazer a substituição, temos que efetuar as derivadas parciais espaciais e temporal de $\psi(\rho, \phi, z; t)$ dada por (2.5). Após alguns cálculos, temos que as derivadas são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \psi(\rho, \phi, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} [J_n(k_{\rho} \rho)] e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \left\{ -k_{\rho}^2 J_n(k_{\rho} \rho) + \frac{n^2}{\rho^2} J_n(k_{\rho} \rho) - \frac{k_{\rho}}{2\rho} (J_{n-1}(k_{\rho} \rho) - J_{n+1}(k_{\rho} \rho)) \right\} \times \\ &\quad \times e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \phi, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [J_n(k_{\rho} \rho)] e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \left\{ \frac{k_{\rho}}{2\rho} (J_{n-1}(k_{\rho} \rho) - J_{n+1}(k_{\rho} \rho)) \right\} \times \\ &\quad \times e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi(\rho, \phi, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} [e^{-in\phi}] e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \\ &= -\frac{n^2}{\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi(\rho, \phi, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{-in\phi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[e^{ik_z z} \right] e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \\ &= -k_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(\rho, \phi, z; t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{-in\phi} e^{ik_z z} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[e^{-i\omega t} \right] \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \\ &= -\frac{\omega^2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Logo, de (2.6)-(2.10) em (2.4),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} k_{\rho} \left\{ -k_{\rho}^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right\} e^{-in\phi} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \bar{\psi}_n(k_{\rho}, k_z, \omega) d\omega dk_{\rho} dk_z = 0, \quad (2.11)$$

o que nos leva à seguinte relação:

$$k_{\rho}^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (2.12)$$

De posse de (2.12), temos que qualquer solução da equação de onda (4) pode ser escrita, de acordo com (2.5), como

$$\psi(\rho, \phi, z; t) = \int_0^{\omega/c} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho} J_n(k_{\rho} \rho) e^{-in\phi} e^{i\sqrt{\omega^2/c^2 - k_{\rho}^2} z} e^{-i\omega t} S_n(k_{\rho}, \omega) dk_{\rho} d\omega, \quad (2.13)$$

onde $S_n(k_{\rho}, \omega)$, que aqui representa o espectro espaço-temporal de $\psi(\rho, \phi, z; t)$. Escolhas adequadas de $S_n(k_{\rho}, \omega)$ podem nos fornecer soluções conhecidas e interessantes, como feixes e pulsos gaussianos, além das que aqui nos é foco de interesse, as ondas localizadas.

2.3 Soluções da Equação de Onda: Feixe e Pulso Gaussianos

Talvez o feixe mais comum e usado seja o feixe gaussiano, que pode ser obtido fazendo-se a seguinte escolha para $S_n(k_{\rho}, \omega)$:

$$S_n(k_{\rho}, \omega) = 2a^2 e^{-a^2 k_{\rho}^2} \delta(\omega - \omega_0) \delta(n). \quad (2.14)$$

Em (2.14), tomaremos a como uma constante positiva. Nosso feixe, então, será monocromático em $\omega = \omega_0$ e, como já era esperado em termos de superposição de ondas planas, propagando-se em todas as direções, as mais intensas destas ondas possuem o número de onda longitudinal k_z como predominante. Esta característica pode ser vista no plano $\vec{k} = \hat{e}_\rho k_\rho + \hat{e}_z k_z$ da Fig. 2.2, ilustrando a característica gaussiana.

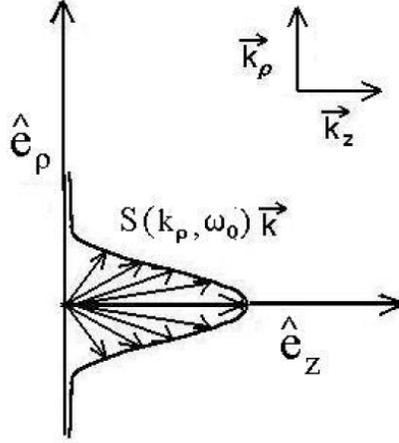


Fig. 2.2. A solução da equação de onda (2.13), com o espectro (2.14), pode ser interpretado no plano $\vec{k} = \hat{e}_\rho k_\rho + \hat{e}_z k_z$ como uma superposição de ondas planas, sendo que as mais intensas possuem, como predominante, o número de onda longitudinal k_z .

Vamos substituir (2.14) em (2.13) fazendo $n = 0$, i.e., considerando apenas a função de Bessel ordinária. Com isso, teremos a solução gaussiana já conhecida e apresentada no Apêndice B

$$\psi_{fg}(\rho, z; t) = \frac{a^2}{\left(a^2 + \frac{iz}{2k_0}\right)} \exp\left(\frac{-\rho^2}{4\left(a^2 + \frac{iz}{2k_0}\right)}\right) e^{ik_0(z-ct)}, \quad (2.15)$$

com $k_0 = \omega_0/c$. Podemos ver, conforme a Fig. 2.3, que este feixe alarga-se progressivamente ao longo da propagação, dobrando sua largura inicial a uma distância $z_d = \sqrt{3}k_0\Delta\rho_0^2/2$, sendo $\Delta\rho_0 = 2a$. Note que, quanto menor for a largura inicial $\Delta\rho_0$, mais rápido este tipo de feixe irá se degradar.

Em geral, este é o tipo de feixe comumente usado em micromanipulação de moléculas e organelas biológicas, como por exemplo, um feixe colimado Nd:YAG operando em 1064 nm, i.e., na faixa do infra-vermelho próximo.

O pulso gaussiano pode ser obtido através de uma superposição de feixes gaussianos em frequência usando, em (2.13), o espectro da forma

$$S_n(k_\rho, \omega) = \frac{2ba^2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2 k_\rho^2} e^{-b^2(\omega - \omega_0)^2} \delta(n), \quad (2.16)$$

com a e b constantes positivas. Fazendo a substituição de (2.16) em (2.13) com $n = 0$, e usando a aproximação paraxial, encontraremos

$$\psi_{pg}(\rho, z, t) = \frac{a^2}{\left(a^2 + \frac{iz}{2k_0}\right)} \exp\left(\frac{-\rho^2}{4\left(a^2 + \frac{iz}{2k_0}\right)}\right) \exp\left(\frac{-(z - ct)^2}{4c^2 b^2}\right), \quad (2.17)$$

A Fig. 2.4 nos mostra o truncamento temporal, bem como o alargamento espacial sofrido, que possui as mesmas características vistas para o feixe gaussiano.

Passemos agora às soluções localizadas da equação de onda. Primeiramente, veremos o feixe de Bessel, e então aplicaremos o método da decomposição bidirecional, superpondo feixes de Bessel axialmente simétricos, para encontrarmos pulsos localizados, entre eles o pulso X ordinário.

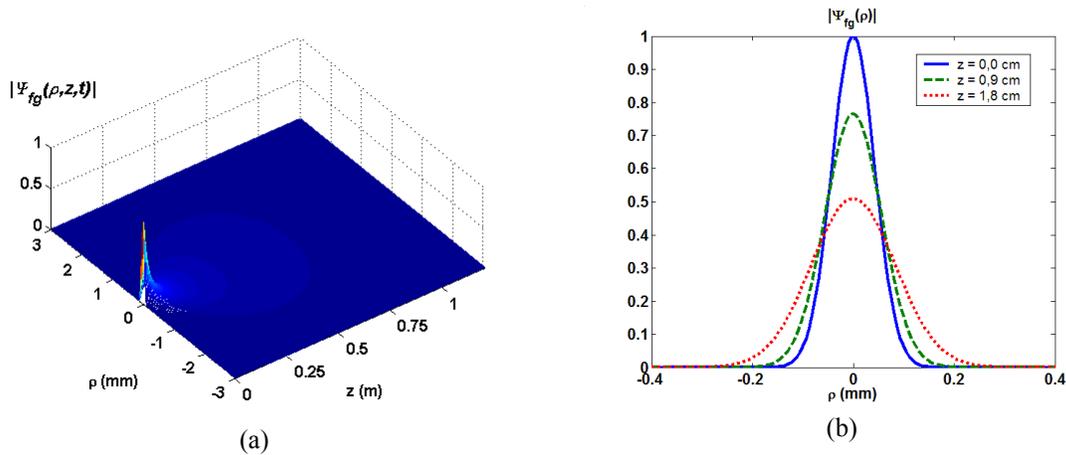


Fig. 2.3. Um feixe gaussiano (a) com “spot” central inicial de $\Delta\rho_0 = 60 \mu\text{m}$, para $\lambda = 1064 \text{ nm}$, dobra sua largura transversal inicial (veja (b)) após cerca de 1,8 cm. Na abertura, o padrão de intensidade transversal é dado por uma função gaussiana $\psi_{fg}(\rho, z = 0; t) = \exp(-\rho^2/4a^2)$.

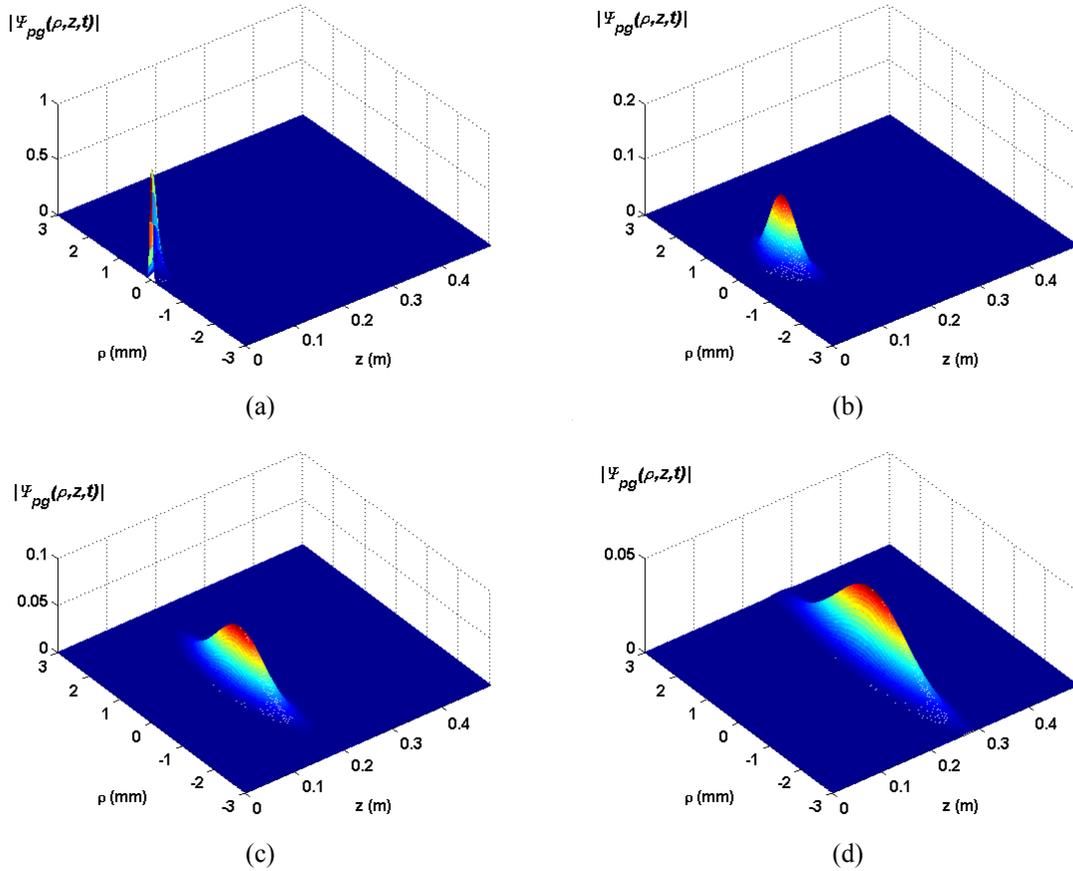


Fig. 2.4. Um pulso gaussiano com “spot” central inicial de $\Delta\rho_0 = 60 \mu\text{m}$, para $\lambda = 1064 \text{ nm}$, apresenta as mesmas características de alargamento espacial que o feixe gaussiano, sendo truncado no tempo devido à superposição em frequência destes feixes. (a) $ct = 0$; (b) $ct = 0,09 \text{ m}$; (c) $ct = 0,18 \text{ m}$ e (d) $ct = 0,27 \text{ m}$.

2.4 Soluções da Equação de Onda: Feixe de Bessel

Quando apresentarmos o método da decomposição bidimensional, veremos que para se obter uma solução não-difrativa, é imperativo termos um acoplamento espaço-temporal linear entre ω e k_ρ , ou ainda, entre ω e k_z . Consideremos, desta forma, o seguinte espectro:

$$S_n(k_\rho, \omega) = \frac{\delta\left(k_\rho - \frac{\omega}{c} \sin\theta\right)}{k_\rho} \delta(\omega - \omega_0) \delta(n). \quad (2.18)$$

De (2.12), temos imediatamente que $k_z = (\omega/c)\cos\theta$, e em termos de superposição de ondas planas, vemos que seus vetores de onda correspondentes encontram-se na superfície de um cone

no espaço $\vec{k} = \hat{e}_x k_x + \hat{e}_y k_y + \hat{e}_z k_z$ de ângulo de vértice θ , como mostrado na Fig. 2.5. Este ângulo é chamado de ângulo de áxicon, devido ao elemento óptico mais simples e que primeiro foi usado para gerar feixes de Bessel com simetria axial, o áxicon [28].

A solução monocromática de (2.13), com o espectro (2.18), é o feixe de Bessel ordinário

$$\psi_{JB}(\rho, z; t) = J_0\left(\frac{\omega_0}{c} \rho \sin \theta\right) \exp\left(i \frac{\omega_0}{c} \cos \theta \left(z - \frac{c}{\cos \theta} t\right)\right), \quad (2.19)$$

o qual possui velocidade de fase $v_{fase} = c/\cos \theta$ e um padrão transversal, independente da componente longitudinal z , dado por uma função de Bessel ordinária. Seu “spot” corresponde ao raio para o qual ocorre o primeiro zero desta função de Bessel; logo, $\Delta\rho_0 = 2,405c/(\omega \sin \theta)$, para qualquer z .

Obviamente, (2.19) representa uma solução ideal, sendo que na prática, como já o dissemos, tais feixes são gerados por aberturas finitas, sendo que, dentro dos limites impostos por (2.2), ela ainda representa aproximadamente o feixe de Bessel truncado (abertura finita) na região $\rho \ll R$ quando comparada com integrais de difração (Kirchhoff ou Rayleigh-Sommerfeld).

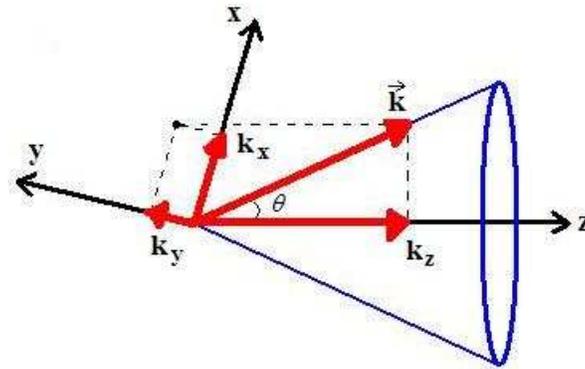


Fig. 2.5. A solução da equação de onda (2.13), com o espectro (2.18), pode ser interpretada – uma vez estabelecida uma relação linear entre ω e k_ρ , ou ω e k_z - no espaço $\vec{k} = \hat{e}_x k_x + \hat{e}_y k_y + \hat{e}_z k_z$ como uma superposição de ondas planas cujos vetores de onda se encontram na superfície de um cone de ângulo de vértice θ , que é o ângulo de áxicon.

O valor da profundidade de campo Z_{\max} pode ser comparado com a propagação de um feixe gaussiano sob as mesmas condições de geração. Assim, para os mesmos valores de “spot”, $\Delta\rho_0 = 60 \mu\text{m}$, de comprimento de onda, $\lambda = 1064 \text{ nm}$, temos um feixe de Bessel semelhante ao da figura 2.6 onde, ao contrário do caso ideal, usou-se a integral de Rayleigh-Sommerfeld do tipo I [29]:

$$\psi_{\text{BRSI}}(\rho, z) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \psi_{\text{JB}}(\xi, \eta) \frac{\exp(-ikR)}{R^2} d\xi d\eta, \quad (2.20)$$

onde as coordenadas da abertura Σ são (ξ, η) , R é a distância entre o ponto (ρ, z) e um ponto na abertura. O valor de $\psi_{\text{JB}}(\xi, \eta)$ é dado fazendo-se $z = t = 0$ em (2.19), i.e., $\psi_{\text{JB}}(\xi, \eta) = J_0((\omega_0/c)\rho \sin\theta)$ na abertura Σ .

Observando a figura 2.6, é nítida a localização transversal de intensidade. Sendo $\Delta\rho_0 = 2,405c/(\omega \sin\theta)$, o ângulo de áxicon valerá $\theta = 0,0068 \text{ rad}$ e, conseqüentemente, teremos uma profundidade de campo de $Z_{\max} = 51,56 \text{ cm}$. O feixe de Bessel, para este comprimento de onda, mantém-se rigidamente por uma distância 19 vezes maior que o feixe gaussiano, depois da qual ele se torna incapaz – devido ao truncamento (abertura finita) - de recompor seu pico central de intensidade usando energia advinda das regiões laterais. Feixes de Bessel de ordem superiores apresentam vantagens análogas, já que (2.2) continua válida para qualquer ordem $n > 0$.

Assim, em aplicações onde desejamos uma maior profundidade de campo e/ou uma certa localização transversal, os feixes de Bessel apresentam-se como uma importante alternativa. Em particular, veremos que os feixes de Bessel possuem certas características indisponíveis nos atuais sistemas ópticos de micromanipulação, como auto-reconstrução após passar por um obstáculo - o que permite a captura simultânea de diversas partículas ao longo do eixo de propagação -, a capacidade de captura múltipla de partículas de tamanhos diferentes devido às suas estruturas anulares radiais de intensidade. A primeira contribuição de nossos estudos [30], como veremos, foi mostrar que um ajuste adequado de feixes de Bessel de ordens diferentes, quando usados para armadilhas ópticas, possibilita um deslocamento da micropartícula perpendicular ao eixo central, explorando suas estruturas anulares de picos e vales de intensidade, gerando forças ópticas radiais.

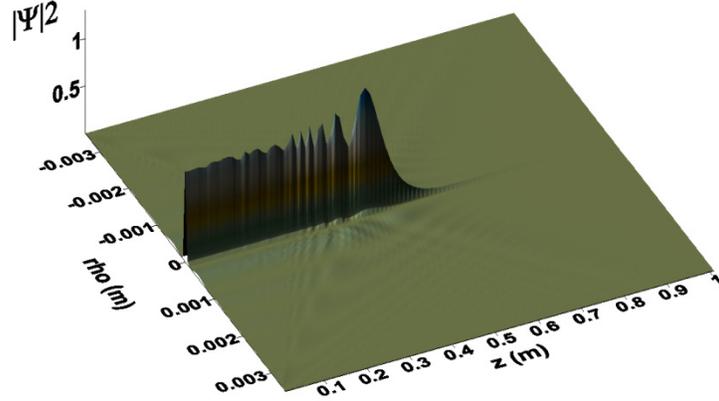


Fig. 2.6. O feixe de Bessel truncado pela abertura de raio 3,5 mm e sua distribuição de intensidade usando a integral de difração de Rayleigh-Sommerfeld I (2.20). O feixe de Bessel ideal (2.19) é uma boa aproximação da solução real dentro do limite $\rho \ll R$ e obedecida a condição em (2.2) para Z_{\max} . O mesmo “spot” de 60 μm e o mesmo comprimento de onda $\lambda = 1064$ nm do feixe gaussiano foram usados, com um ângulo de áxicon de 0,0068 rad. Soluções não-difrativas mantêm seus padrões de intensidade por distâncias muito maiores – no caso, cerca de 19 vezes.

Finalmente, feixes de ordem superior poderiam ser escritos, de forma análoga à (2.19), como

$$\psi_{fB_n}(\rho, z; t) = J_n\left(\frac{\omega_0}{c} \rho \sin \theta\right) \exp(-in\phi) \exp\left(i\frac{\omega_0}{c} \cos \theta \left(z - \frac{c}{\cos \theta} t\right)\right), \quad (2.21)$$

2.5 Soluções da Equação de Onda: Pulsos Localizados

O pulso localizado mais simples de ser obtido, teórica e experimentalmente, é o pulso tipo X ordinário. Se supomos um espectro $S_n(k_\rho, \omega)$

$$S_n(k_\rho, \omega) = \frac{\delta\left(k_\rho - \frac{\omega}{c} \sin \theta\right)}{k_\rho} F(\omega) \delta(n), \quad (2.22)$$

mantendo o acoplamento linear espaço temporal (através da função delta de Dirac) e supondo que este espectro segue um certo padrão a ser definido por $F(\omega)$, nossa solução deixa de ser monocromática, e (2.13) é escrita como:

$$\psi_{pB_X}(\rho, z; t) \equiv \psi_{pB_X}(\rho, z - Vt) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) J_0\left(\frac{\omega_0}{c} \rho \sin \theta\right) \exp\left(i \frac{\omega_0}{c} \cos \theta \left(z - \frac{c}{\cos \theta} t\right)\right) d\omega. \quad (2.23)$$

De (2.23), podemos inferir que tais pulsos localizados possuem uma velocidade de grupo $V = c/\cos \theta > c$, por se tratarem de superposições de feixes com mesma velocidade de fase. Entretanto, frisamos novamente não haver nenhum efeito superluminal já que, da mesma forma que os feixes de Bessel, estes pulsos tipo X mantêm seu formato através de energia provinda das regiões laterais (ver Fig. 2.7). E esta energia se propaga à velocidade c . Apesar disto, os pulsos localizados tipo X são comumente chamados de *pulsos localizados superluminais*.

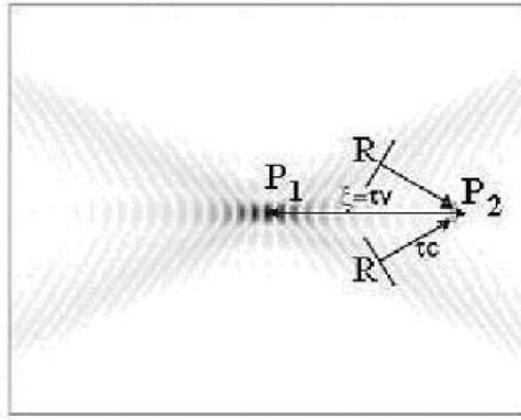


Fig. 2.7. Um pulso tipo X se propaga do ponto P_1 ao ponto P_2 dentro de um tempo t . Embora a velocidade do pico central seja superluminal, $v > c$, a energia propaga-se das regiões laterais – R na figura - com velocidade c . As ondas localizadas, devido ao próprio efeito da difração, conseguirá se propagar por longas distâncias, autoregenerando-se até a distância Z_{max} , dada por (2.2).

A solução para o pulso X ordinário proposto inicialmente por J.-y. Lu [16] é obtida escolhendo-se o seguinte espectro de frequências:

$$F(\omega) = H(\omega) \frac{a}{V} \exp\left(-\frac{a}{V} \omega\right), \quad (2.24)$$

onde $H(\omega)$ é a função degrau de Heaviside, e a uma constante positiva que descreve o decaimento em frequência. $F(\omega)$ é, claramente, uma função que decai para altas frequências. De (2.24) em (2.23), e substituindo a expressão obtida em (2.13), encontramos

$$\psi_{pB_{X0}}(\rho, \zeta = z - Vt) \equiv X = \frac{a}{\sqrt{(a - i\zeta)^2 + \left(\frac{V^2}{c^2} - 1\right) \rho^2}}, \quad (2.25)$$

o qual, devido ao espectro $F(\omega)$, é constituído de baixas frequências. O formato observado na Fig. 8 justifica o nome de pulso X para estas soluções localizadas.

O método da decomposição bidirecional surgiu também no início da década de 90 [18,31-35], juntamente com as primeiras soluções para pulsos localizados. Embora tenha sido desenvolvido para o caso luminal, $V = c$, uma generalização posterior, feita por Zamboni-Rached *et al.* [26], incluiu também o caso superluminal.

Passemos, então, à análise deste método generalizado.

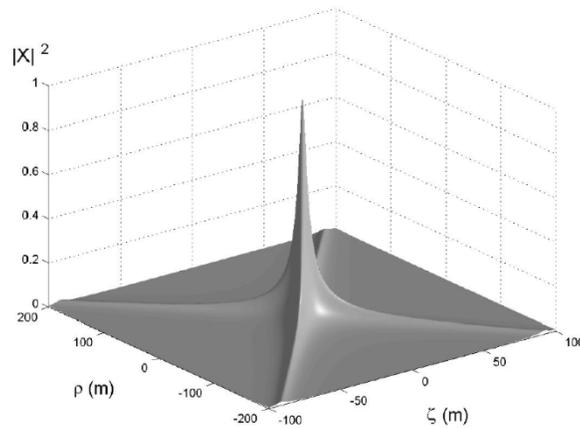


Fig. 2.8. Pulso X ordinário (2.25), com $a = 3$ m e $V = 1,1c$. O pico central é regenerado pela energia lateral da onda. Ao se difratar, ela se auto-reconstrói.

2.6 A Decomposição Bidirecional

O método da decomposição bidirecional, inicialmente proposto para ondas luminiais e posteriormente generalizado para o caso superluminal [18,26,31-35], possibilitou a obtenção de uma gama de novos pulsos com espectros em altas frequências. Até então, as superposições de feixes de Bessel – como o caso do pulso X ordinário – forneciam soluções da equação de onda cujos espectros concentravam-se em baixas frequências. Assim, ao invés de nos atermos a soluções para casos particulares, faremos uma pequena apresentação deste método, que nos fornece novas soluções de pulsos superluminais para o caso óptico.

2.6.1 A Expansão Bidirecional

Vamos considerar a solução localizada com simetria axial (19), reescrevendo-a como

$$\psi(\rho, z; t) = J_0(k_\rho \rho) e^{ik_z z} e^{-i\omega t}, \quad (2.26)$$

que é análoga à (2.1), com $n = 0$ e padrão transversal dado pela função de Bessel ordinária.

A condição (2.12),

$$k_\rho^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2, \quad (2.27)$$

com $k_\rho^2 \geq 0$, implica que estamos excluindo soluções não físicas e tomando apenas as soluções propagantes – o que automaticamente exclui também as soluções evanescentes. No plano (ω, k_z) , considerando $V \geq c$, a condição (2.27) nos confina à região entre as retas $\omega = \pm V k_z$, como mostra a Fig. 2.9(a).

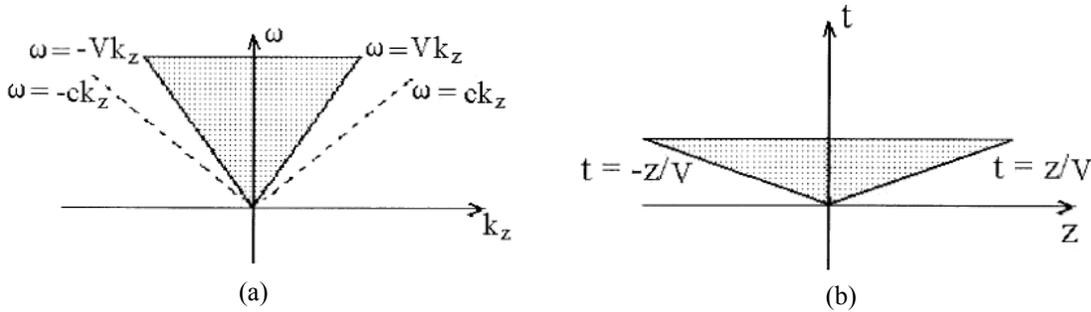


Fig. 2.9. (a) Com $V \geq c$, nossas soluções ficam confinadas, no plano (ω, k_z) , à região sombreada delimitada pelas retas $\omega = \pm V k_z$. (b) Ao fazermos as alterações de parâmetros (2.31), temos no plano (z, t) que as nossas soluções se confinarão na região sombreada delimitada pelas retas $t = \pm z/V$, correspondentes à $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Superposições de feixes de Bessel $\psi(\rho, z; t)$ com simetria axial com a condição (2.27) podem ser escritas, de forma geral, como

$$\Psi(\rho, z; t) = \int_0^\infty dk_\rho \int_0^\infty d\omega \int_{-\omega/c}^{+\omega/c} dk_z \psi(\rho, z; t) \delta\left(k_\rho - \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2}\right) \Phi'(\omega, k_z; k_\rho). \quad (2.28)$$

Conforme será visto nos exemplos, são as funções peso $\Phi'(\omega, k_z; k_\rho)$ que nos fornecerão, após uma mudança dos parâmetros ω , k_z e k_ρ , os pulsos com espectros deslocados para frequências mais altas.

Podemos fazer uma mudança de parâmetros em (2.26), reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \psi(\rho, z; t) &= J_0(k_\rho \rho) e^{i(k_z z - \omega t)} = J_0(k_\rho \rho) \exp\left(\frac{k_z z}{2} + \frac{k_z z}{2} - \frac{\omega t}{2} - \frac{\omega t}{2}\right) \\
 &= J_0(k_\rho \rho) \exp\left[\left(\frac{\omega z}{2V} - \frac{\omega z}{2V}\right) + \left(\frac{k_z V^2 t}{2V} - \frac{k_z V^2 t}{2V}\right) + \left(\frac{k_z z}{2} + \frac{k_z z}{2} - \frac{\omega t}{2} - \frac{\omega t}{2}\right)\right] \\
 &= J_0(k_\rho \rho) \exp\left[\left(\frac{1}{2V}\right)\left[(\omega z - \omega V t + k_z V z - k_z V^2 t) - (\omega z + \omega V t - k_z V z - k_z V^2 t)\right]\right] \quad (2.29) \\
 &= J_0(k_\rho \rho) \exp\left[\left(\frac{1}{2V}\right)(\omega + k_z V)(z - V t) - \left(\frac{1}{2V}\right)(\omega - k_z V)(z + V t)\right], \\
 &= J_0(k_\rho \rho) e^{i(\alpha \zeta - \beta \eta)}
 \end{aligned}$$

e então, temos os feixes de Bessel nos parâmetros α e β ,

$$\psi(\rho, \zeta, \eta) = J_0(k_\rho \rho) e^{i(\alpha \zeta - \beta \eta)}, \quad (2.30)$$

sendo

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2V}(\omega + k_z V) \\ \beta = \frac{1}{2V}(\omega - k_z V). \\ \zeta = z - V t \\ \eta = z + V t \end{cases} \quad (2.31)$$

As variáveis ζ e η são chamadas de *variáveis do cone- V* (“ V -cone variables”), e este procedimento é chamado de método da decomposição bidirecional generalizada, e é válida para os casos luminal e superluminal $V \geq c$, ambos permitidos por (2.27). A região sombreada da Fig. 2.9(b) é delimitada por duas retas – que formam o cone- V – as quais, no plano (ω, k_z) da Fig. 2.9(a), correspondem às retas $\omega \pm V k_z = 0$, i.e., às retas $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

Substituindo as duas primeiras expressões de (2.31) em (2.27), temos a nova condição

$$\begin{aligned}
 k_\rho^2 &= \frac{V^2}{c^2}(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 \\
 &= (\alpha + \beta)^2 \left(\frac{V^2}{c^2} - 1 \right) + 2\alpha\beta \left(\frac{V^2}{c^2} + 1 \right)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

novamente com $k_\rho^2 \geq 0$ para evitarmos soluções não-físicas. Vale ressaltar que a velocidade dos pulsos obtidos terão uma velocidade superluminal V , a qual podemos relacionar com o ângulo de áxicon θ . Lembrando que $V = c/\cos\theta$, temos as relações⁸

$$\begin{aligned}
 \cos\theta &= \frac{c}{V}; \\
 \text{sen}\theta &= \frac{\sqrt{(V/c)^2 - 1}}{V/c}; \\
 \tan\theta &= \sqrt{(V/c)^2 - 1}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Este método é justificável por transformar (2.28) em uma integral mais simples de se resolver⁹:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\rho, \zeta, \eta) &= \int_0^\infty dk_\rho \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta J_0(k_\rho \rho) e^{i\alpha\zeta} e^{-i\beta\eta} \times \\
 &\quad \times \delta\left(k_\rho - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 \left(\frac{V^2}{c^2} - 1 \right) + 2\alpha\beta \left(\frac{V^2}{c^2} + 1 \right)}\right) \Phi'(\alpha, \beta; k_\rho)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

A decomposição bidirecional generalizada permitiu obter novas soluções localizadas. Dependendo da função espectral $\Phi'(\alpha, \beta; k_\rho)$, tais soluções poderiam ser deslocadas em frequência, sendo adequadas para acústica, microondas, óptica, etc. Assim, pulsos ópticos não difrativos com energias finitas poderiam ser realizados experimentalmente.

Vejamos, então, algumas soluções propostas [26].

⁸ Na verdade, no método da decomposição bidirecional, as únicas soluções que podem ser associadas a um ângulo de áxicon são aquelas onde, no espectro em (2.34), aparece um delta de Dirac $\delta(\beta)$, como no caso do pulso tipo X.

⁹ Devemos notar que tanto (2.27) quanto a integração (2.28), como também mostrado na Fig. 2.9(a), inclui as soluções contrapropagantes, i.e., soluções com número de onda longitudinal k_z negativo. A integral (2.34) nas variáveis α e β de 0 à ∞ também permite tais soluções, já que $\alpha, \beta \geq 0$ correspondem, no plano (ω, k_z) , a nos confinarmos em $-\omega/V \leq k_z \leq \omega/V$. De acordo com [26], as funções espectrais $\Phi'(\alpha, \beta; k_\rho)$ são escolhidas de forma a minimizar ou eliminar a contribuição de valores negativos de k_z , i.e., das soluções contrapropagantes, evitando componentes não-causais.

2.6.2 Soluções Localizadas (Pulsos) Usando a Decomposição Bidirecional

Para finalizar esta seção, apresentamos algumas soluções usando a decomposição direcional. Evitaremos, entretanto, deduções desnecessárias, ressaltando apenas os aspectos mais importantes e válidos para nossos objetivos.

- Pulsos tipo X

O pulso (2.25) pode ser generalizado através do método da decomposição bidirecional, usando, em (2.34), um espectro $\Phi'(\alpha, \beta; k_\rho)$ do tipo

$$\Phi'(\alpha, \beta; k_\rho) \equiv \Phi'(\alpha, \beta) = \alpha^m \delta(\beta) \exp(-a\alpha), \quad (2.35)$$

onde α é uma constante positiva e, de acordo com a função delta de Dirac, o parâmetro $\beta = 0$, o que equivale à integração ao longo da reta $k_\rho = \alpha$ em (2.34), com $\omega = V k_z$. A substituição de (2.35) em (2.34) nos fornece infinitas soluções do tipo X:

$$\psi_{X,m}(\rho, \zeta) = (-i)^m \frac{d^m}{d\zeta^m} \left[(a - i\zeta)^2 + \left(\frac{V^2}{c^2} - 1 \right) \rho^2 \right]^{-1/2}, \quad (2.36)$$

que é análoga à (2.25) para o caso $m = 0$. Quanto maior m , mais o pulso se torna localizado ao redor de seu ponto central. A Fig. 2.10 ilustra esta localização para $m = 0$ e $m = 1$. Embora, como visto, o pulso tipo X ordinário ($m = 0$) forneça soluções cujo espectro situa-se em baixas frequências – e com comprimento $\Delta\omega = V/a$, ao incluímos o fator α^m , o espectro é deslocado – supondo m grande ou a/V pequeno - para frequências mais elevadas e centralizado em $\omega_M = mV/a$, como mostra a Fig. 2.11 para $m = 10$.

Se o parâmetro β em (2.35) não for nulo¹⁰, teremos as soluções do tipo “focus-wave modes” superluminais.

¹⁰ Embora sem uma comprovação formal, pode-se ver que além de não-nulo, β deve ser um parâmetro positivo. Esta característica encontra-se implícita na Fig. 2.9(a), através da região sombreada, e pela integração em (2.34). Ver nota de rodapé 6.

- Pulsos tipo “focus-wave modes” (SFWM)

Vamos considerar uma função delta de Dirac em (2.35) do tipo $\delta(\beta - \beta')$, com $\beta' > 0$ e $\beta'^2 \approx 0$ (esta segunda condição possibilita uma solução analítica para a integral (2.35)). Neste caso, a inclusão de um valor positivo não-nulo para o parâmetro β implica em considerarmos, na integral em (2.34), valores de k_z negativos, i.e., ondas contrapropagantes, o que implica em componentes não-causais. Este fato pode ser desprezado se impusermos a condição $a \ll 1$, tornando desprezível a contribuição de tais componentes. A Fig. 2.12 esclarece esta situação.

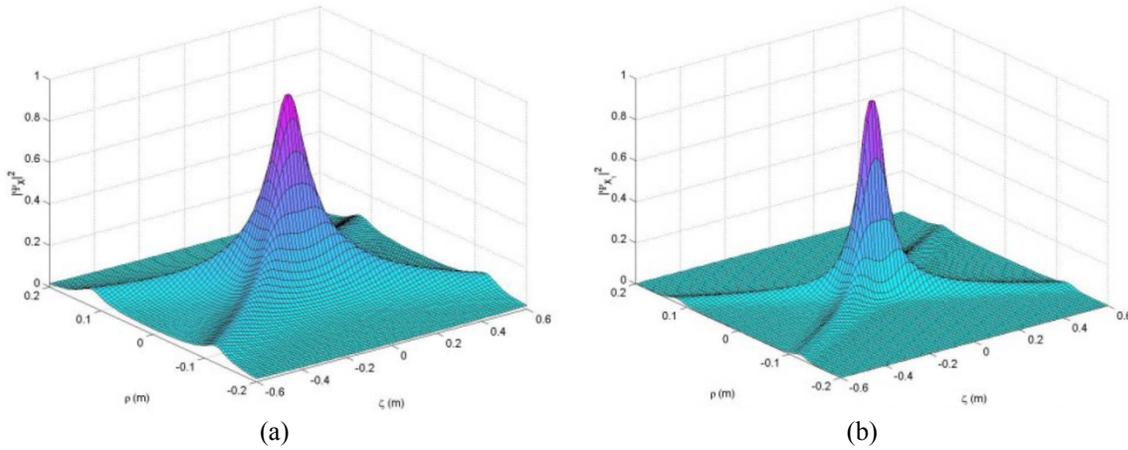


Fig. 2.10. (a) A solução tipo X ordinário – solução clássica – possui espectro de freqüências centralizado em torno de $\omega = 0$. (b) Primeira derivada do pulso X ordinário (a), i.e., $m = 1$. Pulsos tipo X com $m > 0$ possuem, além de uma maior localização em torno do ponto central $(\rho, \zeta) = (0, 0)$, um espectro de freqüências deslocado para bandas mais altas. Em ambos os casos, $a = 1$ m e $V = 5c$.

Com $m = 0$ e as condições anteriores, a nova função espectral $\Phi'(\alpha, \beta)$, quando substituída em (2.34), fornece-nos as soluções analíticas:

$$\psi_{SFWM}(\rho, \zeta, \eta) = e^{-i\beta'\eta} X \exp\left\{ \frac{\beta'(V^2/c^2 + 1)}{V^2/c^2 - 1} [(a - i\zeta) - X^{-1}] \right\}, \quad (2.37)$$

onde X corresponde à (2.36) com $m = 0$, i.e., $X = [(a - i\zeta)^2 + (V^2/c^2 - 1)\rho^2]^{-1/2}$.

Soluções SFWM são interessantes já que, como β' é não-nulo positivo, $\omega \geq V\beta'$, elas podem ser usadas para construir pulsos de alta freqüência (regiões de microondas ou óptica, por exemplo).

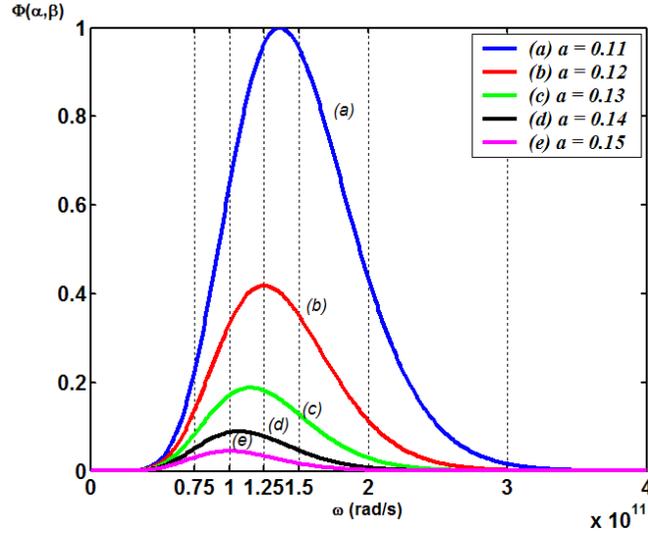


Fig. 2.11. O espectro (2.35), com $m = 10$ e $V = 5c$. Devido ao fator a^m , o espectro é deslocado para frequências mais elevadas, centralizado em $\omega_M = mV/a$. Os resultados foram normalizados. (a) $\omega_M = 1,3636 \times 10^{11}$ rad/s, (b) $\omega_M = 1,2500 \times 10^{11}$ rad/s, (c) $\omega_M = 1,1538 \times 10^{11}$ rad/s, (d) $\omega_M = 1,0700 \times 10^{11}$ rad/s e (e) $\omega_M = 10^{11}$ rad/s.

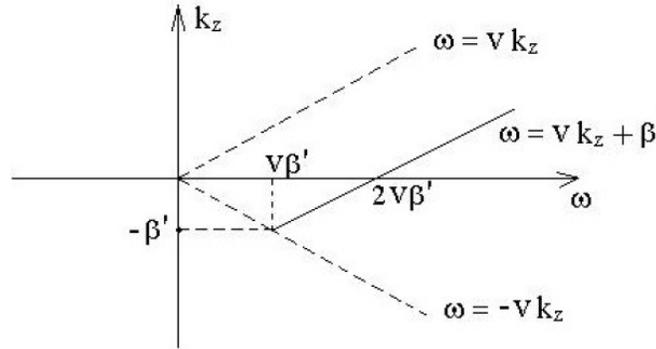


Fig. 2.12. Componentes não-causais ocorrem em pulsos superluminais “focus-wave modes”, SFWM, já que a suposição $\beta = \beta' > 0$ implica em um número de onda longitudinal que pode ser negativo. O comprimento de banda para estas componentes é de $\Delta\omega_{nc} = V\beta'$, enquanto que para $k_z > 0$ o comprimento de banda equivale ao do espectro (2.35), i.e., $\Delta\omega = V/a$. Para que estas componentes não-causais sejam desprezíveis – evitando soluções contrapropagantes -, $\Delta\omega \gg \Delta\omega_{nc}$, e portanto, $\alpha \ll \beta' \ll 1$.

- Pulsos com energia finita

Em [26], duas soluções superluminais analíticas, ambas com energias finitas, são apresentadas: pulsos tipo “splash” (*SSP – Superluminal “Splash Pulses”*) e pulsos tipo espectro de potência modificado (*SMPS – Superluminal “Modified Power Spectrum”*). Ambas são construídas

escolhendo-se espectros $\Phi'(\alpha, \beta)$ não mais com funções delta de Dirac em β , mas sim com funções exponenciais do tipo $\Phi'(\alpha, \beta) \propto B(\beta) = e^{-b(\beta-\beta_0)}$, com β e β_0 constantes positivas. A Tab. 2.1 mostra as principais características destes pulsos.

Não vamos aqui entrar em seus detalhes – principalmente no que se refere a problemas de causalidade, como visto para o caso anterior SFWM -, mas devemos frisar que certas condições devem ser impostas às constantes a e b . Vale ressaltar que, por se tratarem de soluções finitas, elas não possuem mais uma profundidade de campo infinita, como pode ser visto na figura 2.13 através do decaimento em amplitude sofrido por ambas.

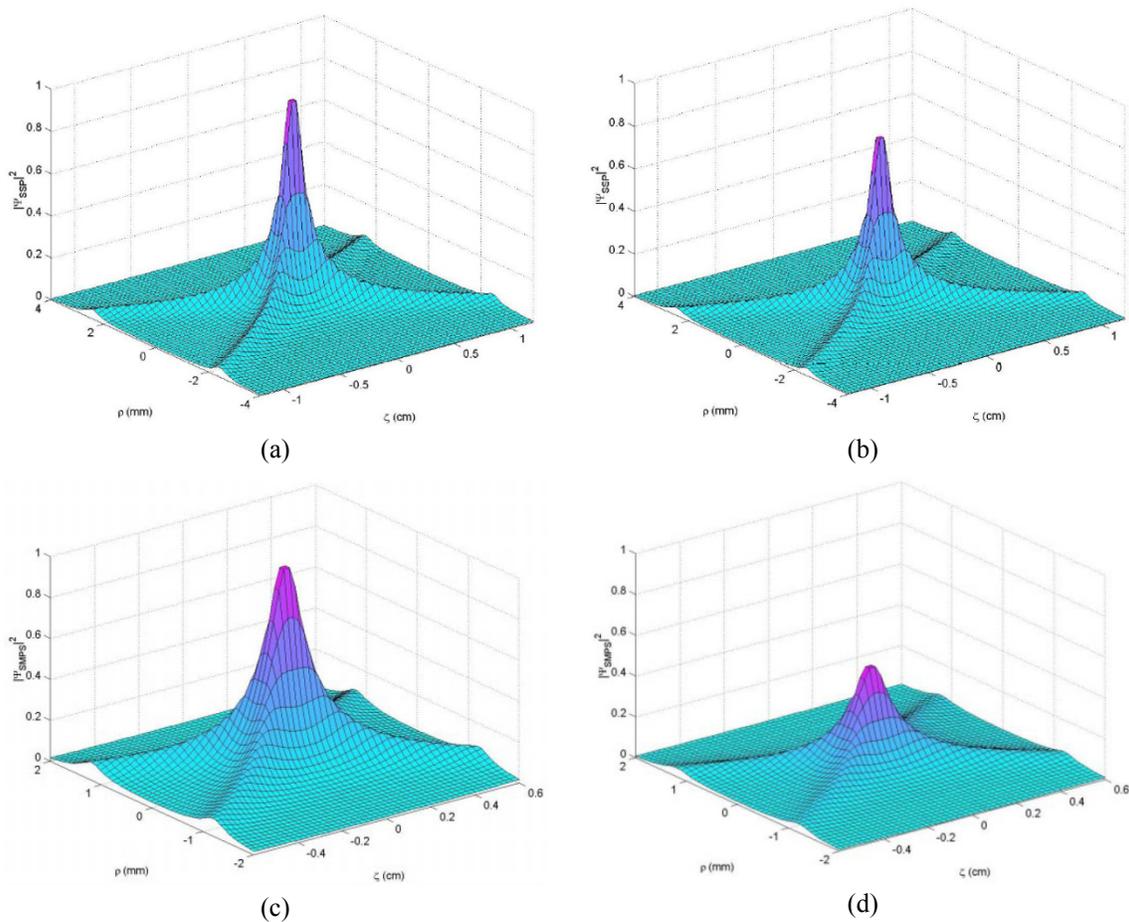


Fig. 2.13. (a) A solução tipo X ordinário – solução clássica – possui espectro de freqüências centralizado em torno de $\omega = 0$. (b) Primeira derivada do pulso X ordinário (a), i.e., $m = 1$. Pulsos tipo X com $m > 0$ possuem, além de uma maior localização em torno do ponto central $(\rho, \zeta) = (0, 0)$, um espectro de freqüências deslocado para bandas mais altas. Em ambos os casos, $a = 1$ m e $V = 5c$.

Enquanto pulsos SSP e X são constituídos de espectros de baixas frequências, os pulsos SMPS e SFWM possuem seus espectros deslocados para mais altas frequências, adequados para aplicações em microondas e/ou óptica, escolhendo-se valores de V e b_0 adequados.

	SSP	SMPS
Espectro $B(\beta)$	$B(\beta) = e^{-b\beta}$	$B(\beta) = \begin{cases} e^{-b(\beta-\beta_0)}, & \beta \geq \beta_0 \\ 0, & 0 \leq \beta < \beta_0 \end{cases}$
Solução $\psi(\rho, \zeta, \eta)$	$\psi_{SSP}(\rho, \zeta, \eta) = \frac{X}{b + i\eta - Y}$	$\psi_{SMPS}(\rho, \zeta, \eta) = X \frac{\exp[(Y - i\eta)\beta_0]}{b - (Y - i\eta)}$
$Y = \frac{V^2/c^2 + 1}{V^2/c^2 - 1} [(a - i\zeta) - X^{-1}]$		

Tab. 2.1. Características dos pulsos SSP e SMPS.

2.7 Exemplo de Aplicação – Comunicações Ópticas no Espaço Livre

Óptica no espaço livre significa a transmissão de sinais ópticos através do espaço livre, no caso o ar. Também chamado de FSO, este sistema de telecomunicações ainda pouco expressivo no Brasil apresenta-se como uma alternativa vantajosa para preencher o gargalo na infra-estrutura de telecomunicações da chamada última milha, onde a fibra óptica pode ter seu uso limitado pelo alto custo e longo tempo de instalação, a qual deve ser feita ajustando-se à própria infra-estrutura urbana (rede de água, construções subterrâneas, etc.).

Essa não é, entretanto, sua única possibilidade de uso. Além de sua utilização na rede de acesso - última milha -, conectando usuários finais a provedores de internet ou a outras redes de velocidades mais rápida, sistemas FSO podem fazer parte na extensão de redes metropolitanas, no provimento de infra-estrutura temporária ou ainda na redundância de enlaces, como backup de um sistema de fibra óptica.

Ao contrário da fibra óptica, que é um meio previsível, o espaço livre possui fatores e variáveis impossíveis de serem controladas. Desse modo, a tecnologia do sistema FSO deve ser capaz de contornar, com certo sucesso, as perdas de energia durante a propagação, garantindo que o sinal não seja interrompido dentro de uma faixa de erro aceitável.

A figura 2.14 ilustra, resumidamente, um link FSO com seus principais componentes [36]. Nela, vemos um transmissor e um receptor, alinhados de forma tal que a abertura do receptor possa identificar e decodificar convenientemente o sinal transmitido.

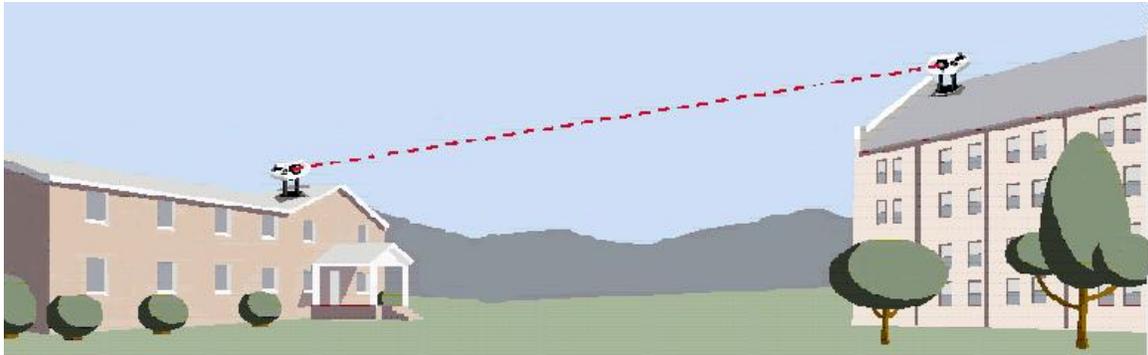


Fig. 2.14 – Arquitetura ponto-à-ponto. Outras arquiteturas, como malhas parciais e ponto-à-multiponto, também são comumente encontradas

Normalmente, a arquitetura do link pode ser mais complexa; além da ponto-à-ponto, que é o caso ilustrado, malhas parciais e ponto-à-multiponto são também freqüentes. No caso mais simples, embora tenhamos uma conexão dedicada e uma maior banda passante, seu escalonamento é mais difícil. Malhas parciais já apresentam redundância, e sua confiabilidade e facilidade na adição de novos nós à rede são restritas a menores distâncias entre os mesmos.

Finalmente, a arquitetura ponto-à-multiponto permite, além do menor custo, a fácil adição de novos nós, todavia com uma banda passante às vezes bem mais reduzidas.

Sistemas FSO são operados comercialmente, em comprimentos de onda de 750 nm, 810 nm ou 852 nm, devido à disponibilidade de lasers de baixo custo e receptores PIN e avalanche (*Avalanche Photo Diode - APD*) com elevadas sensibilidades. Lasers semicondutores são, comercialmente, os de maiores destaques. Entre eles, encontramos os LEDs (lasers emissores de luz), tipicamente empregados para distâncias mais curtas com taxas de até 155 Mbps. Além de baratos, possuem uma vida longa e, em caso de alguns materiais, como o arsenato de gálio (GaAs), os comprimentos-de-onda emitidos caem na janela atmosférica em torno de 850 nm. Os feixes são tipicamente gaussianos.

Dependendo da aplicação, esses sistemas podem operar em taxas de até 2,5 Gb/s. Entretanto, a rápida demanda por largura de banda, principalmente em aplicações de telecomunicações, tem impulsionado a operação desses sistemas na janela de 1550 nm, em que os níveis de potência

óptica de lasers são mais elevados, o que, em conjunto com a utilização de amplificadores ópticos a fibra dopada com Érbio (*Erbium-Doped Fiber Amplifier - EDFA*), permite transmissões de longa distância.

As partículas existentes na atmosfera, como vapor d'água, moléculas de oxigênio e de nitrogênio, além de partículas de poeira e aerossóis em geral, podem contribuir de forma significativa na absorção e no espalhamento de fótons em infravermelho que se propagam na atmosfera. Em regiões poluídas e também de altas densidades populacionais, como nas grandes cidades, efeitos de turbulência podem ser aumentados por variações climáticas pontuais.

O impacto do espalhamento e da absorção na transmissão de luz na atmosfera pode ser descrito pela Lei de Beer. Assim, a atenuação total da transmissão, τ , de radiação na atmosfera em função da distância z é dada por

$$\frac{I_R}{I_0} = \tau = e^{-\gamma z}, \quad (2.38)$$

onde I_R / I_0 é a razão entre a intensidade detectada no receptor em z , I_R , e a intensidade inicial na fonte, I_0 , e γ é o coeficiente de atenuação, que representa a soma dos coeficientes de espalhamento, α , e de absorção, β , molecular e por aerossol. Desta forma, escrevemos:

$$\gamma = \alpha_m + \alpha_a + \beta_m + \beta_a. \quad (2.39)$$

Típicos valores de γ são de 0,1 (0,43 dB/km) para ar limpo, 1 (4,3 dB/km) para névoa e 10 (43 dB/km) para neblina [37]. Uma descrição detalhada sobre os diversos problemas associados a absorções e espalhamentos pode ser encontrada facilmente na literatura [38-41]. Valores típicos de visibilidade e perdas por atenuação são fornecidos pelo Código de Visibilidade Internacional [42-44] e, para $\lambda = 785$ nm, encontram-se listados na tabela 2.2.

Condição Climática	Precipitação		Visibilidade	α (dB/km) (785 nm)
	mm/hr			
Nebulina muito densa			0 m	
			50 m	-339.6
Nebulina Espessa			200 m	-84.9
Nebulina Moderada			500 m	-34.0
Nebulina Leve	Tempestade	100	770 m	-20.0
			1 km	-14.2
Nebulina Fraca	Chuva Pesada	25	1.9 km	-7.1
			2 km	-6.7
Névoa	Chuva Média	12.5	2.8 km	-4.6
			4 km	-3.0
Névoa Leve	Chuva Leve	2.5	5.9 km	-1.8
			10 km	-1.1
Limpo	Garoa	0.25	18.1 km	-0.6
			20 km	-0.53
Muito Limpo			23 km	-0.46
			50 km	-0.21

Tab. 2.2 – Código Internacional de Visibilidade para condições climáticas e precipitações com suas visibilidades e perdas, em dB/km a 785 nm.

2.7.1 Implementações de Ondas Localizadas em FSO

Consideremos o princípio de Huygens-Fresnel em coordenadas cartesianas, que pode ser escrito como

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos \theta ds, \quad (2.40)$$

onde U representa uma função escalar, que pode ser qualquer componente cartesiana do campo elétrico \mathbf{E} ou magnético \mathbf{H} , $U(P_1)$ é o valor da função na abertura, i.e., na saída do transmissor, em determinado ponto P_1 , $U(P_0)$ o valor em determinada distância longitudinal, z , e transversal, r . Aqui, k é o vetor de onda da onda incidente, com comprimento-de-onda associado λ , e r_{01} é a

distância entre P_1 e P_0 , sendo θ o ângulo formado por r_{01} e z . A integral é feita sobre a abertura Σ , e $U(P_0)$ é nulo para pontos exteriores à abertura. A figura 2.15 ilustra a situação. Como $\cos\theta = z/r_{01}$, temos então

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (2.41)$$

com $r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, e supondo $r_{01} \gg \lambda$.

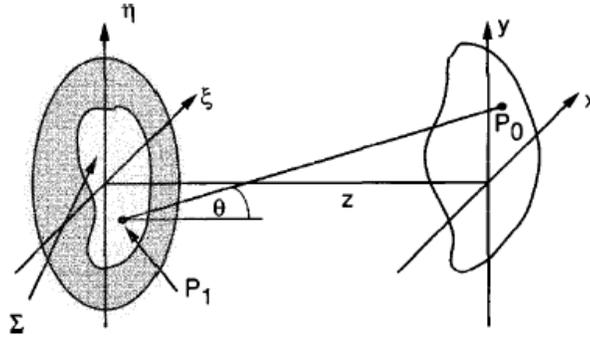


Fig. 2.15 – Geometria de difração usada na derivação da integral de difração de Fresnel.

Podemos usar uma expansão binomial em r_{01} retendo apenas os dois primeiros termos desta expansão, e após alguma álgebra, podemos escrever:

$$U(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.42)$$

com $h(x, y) = \frac{e^{jkz}}{j\lambda z} \exp\left[\frac{jk}{2z}(x^2 + y^2)\right]$. A eq. (2.42) é conhecida como *Integral de Difração de Fresnel*, válida para a região do chamado *campo próximo* e supondo uma aproximação paraxial.

Para aberturas circulares, como será o caso em estudo, a integral de Fresnel deve ser manipulada, convertendo-a em uma integração cilíndrica. Após feita tal manipulação, consideremos a intensidade do feixe, que é uma relação direta com $U(P_0)$, $I(P_0) = |U(P_0)|^2$, e escrevemos, para qualquer ponto (r', z) ao longo da propagação:

$$I(r', z) = \left(\frac{k}{z}\right)^2 \left| \int_{\rho}^R \exp\left\{j\left[\frac{kr^2}{2z} + \varphi(r)\right]\right\} J_0\left(\frac{kr'r}{z}\right) r dr \right|^2, \quad (2.43)$$

Na eq. (2.43), J_0 é a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, r' a distância transversal em relação ao eixo óptico e r o raio da abertura, variando de ρ (se $\rho \neq 0$, então temos uma abertura anular) a R .

Aqui vale uma ressalva sobre a eq. (2.43). Nela, estamos supondo uma fase adicional – função de fase - $\varphi(r)$. Ela foi incluída como sendo a função de transferência para um elemento óptico acoplado à saída do transmissor. Assim, por exemplo, a inclusão de uma lente com distância focal f seria representada por $\varphi(r) = -(k/2f)r^2$, e um axicon por $\varphi(r) = -(1 + d_2^2/R^2)^{-1/2} r$.

Temos então que determinar a perda de potência¹¹, e a faremos inicialmente para o caso do Telescópio de Galileo. Em seguida, simularemos casos em que existe a geração de feixes localizados através de áxicons com padrões de intensidade ao longo do eixo óptico pré-estabelecidos, usando para tanto leis geométricas de conservação de energia, além de áxicons com índices de refração variáveis.

(a) Telescópio de Galileo

O telescópio de Galileo [45] produz uma característica não-difrativa atribuída à aberração esférica associada à lente divergente (ocular), supondo uma lente convergente livre de aberrações de qualquer ordem. A determinação analítica do fator de aberração esférica necessário para um controle efetivo da intensidade ao longo do eixo óptico é morosa [46]; portanto, faremos aqui uma breve comparação entre o padrão de intensidade gerado por telescópios com e sem aberração, supondo uma aberração padrão para lentes usuais.

Assim, a aberração esférica é introduzida nas equações supondo dados experimentais já fornecidos. Se ela for mais acentuada na borda da lente e nula em seu centro, a figura 2.16 (a)

¹¹ todas estas atenuações respondem pela perda de potência óptica ao longo da transmissão, que pode ser escrita como $P_{rec} = P_{trans} \left[A_{recep} / (Div \cdot z)^2 \right] \exp(-\gamma z)$, onde P_{rec} é a parcela da potência transmitida P_{trans} que chega ao receptor, z é a distância do enlace, Div representa a divergência do feixe e A_{recep} representa a área do receptor responsável pela detecção do sinal.

ilustra uma possível situação para uma lente usual. O modelo adotado para esta aberração é semelhante ao descrito em [45]:

$$g(\rho) = \begin{cases} c_1 \rho^2 & \text{para } 0 \leq \rho < 2,5 \\ c_2 \rho^2 + c_3 \rho + c_4 & \text{para } 2,5 \leq \rho \leq 5 \end{cases} \quad (2.44)$$

com $c_1 = 0,08$, $c_2 = -0,08$, $c_3 = 0,80$ e $c_4 = -1,00$, e uma abertura de raio $R = 5$ cm foi considerada.

Supondo $\lambda = 850$ nm e os mesmos valores utilizados em [45] no modelamento do telescópio (foco e demais constantes aberrativas), as funções de fase $\varphi(r)$ para o caso sem e com aberração são ilustrados, respectivamente, nas figuras 2.16 (b) e (c). Na figura 2.16 (d) e (e), vemos o padrão de intensidade para estes dois, segundo (2.43). A intensidade na saída do transmissor foi suposta uniforme e constante, embora amplitudes ligeiramente gaussianas sejam mais reais.

Neste caso, a abertura finita nos fornece um padrão transversal pseudo-Bessel quando introduzimos a aberração esférica (figura 2.16 (f)), para $z = 500$ m), e é evidente a maior extensão deste feixe. As oscilações são naturais, devido à ausência de técnicas de apodização que eliminem efeitos de borda e à existência de raios paraxiais ao eixo óptico. O uso de aberturas anulares pode corrigir tais variações de intensidade, ao custo de perda de potência transmitida; para sistemas FSO, não vemos vantagens em usar tais técnicas.

Na saída do telescópio, a aberração esférica criou uma frente-de-onda curvada em relação à frente-de-onda parabólica esperada, tanto maior a defasagem quanto maior a distância do eixo óptico. Portanto, teremos um comprimento focal associado a esta frente-de-onda, e feixes não-difrativos - semelhantes aos feixes de Bessel - podem ser obtidos para distâncias consideráveis da fonte.

Um fato a ser observado é que, embora tal método seja financeiramente viável e de simples implementação, não foi necessária uma técnica de controle desta aberração [45-47]. Embora a distância longitudinal onde a intensidade se comporta como um feixe não-difrativo varie em função de lentes de raios maiores e no uso de maiores raios de abertura do transmissor, bem como de diferentes características aberrantes, não é possível, até onde sabemos, variar a característica aberrante, para uma mesma lente.

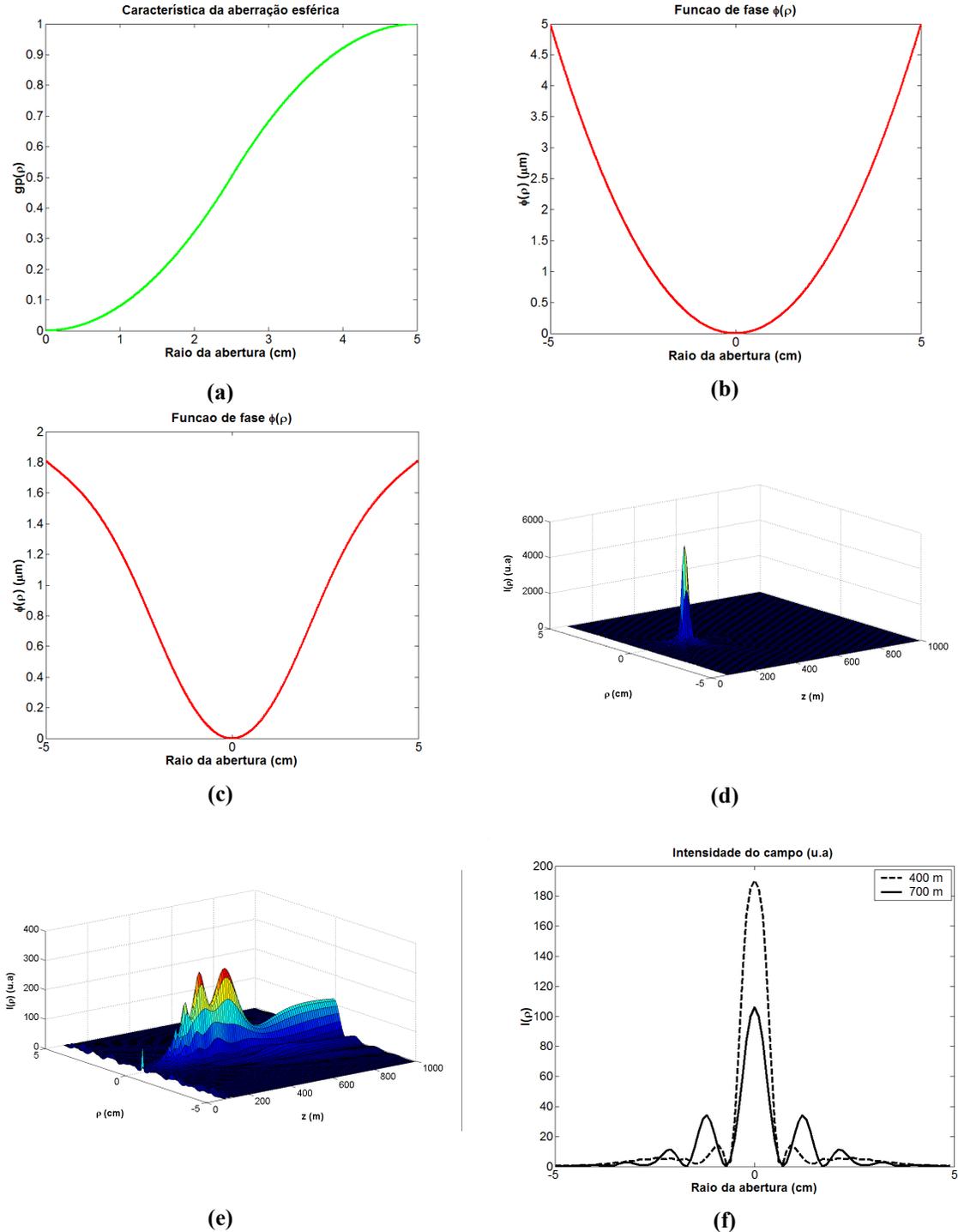


Fig. 2.16 – Telescópio de Galileu com (a) a característica de aberração esférica, (b) e (c) as frentes-de-onda, respectivamente, sem e com aberração, (d) e (e) seus padrões de intensidade até $z = 1000$ m e (f) intensidades transversais em $z = 400$ e 700 m, mostrando o padrão pseudo-Bessel do feixe.

Para sistemas FSO, telescópios de Galileu se apresentam como uma técnica interessante e viável, pois permitem atingir o receptor com uma intensidade maior do que se usarmos os atuais

feixes gaussianos com suas perdas de difração, diminuindo a potência emitida e transmitindo informações a maiores distâncias com a mesma abertura geométrica, garantindo a linha de visada. Alguns sistemas atuais possuem, acoplados ao transmissor, telescópios semelhantes, embora ainda não saibamos com exatidão se estes possuem algum tipo de aberração ou se servem apenas para colimar o feixe.

Para termos a mesma divergência que o feixe gaussiano, entretanto, ainda é necessária uma análise mais detalhada. Acredita-se que a própria divergência do feixe seja suficiente para garantir o alargamento transversal do sinal, que sofrerá perda de intensidade, mas que será compensada, até certo ponto, pela aberração esférica.

Quando consideramos aberturas com amplitudes gaussianas, observamos que o efeito da aberração é menor, haja visto que, onde a frente-de-onda na abertura sofre a maior influência da aberração, é justamente o local onde a intensidade inicial é menor.

É possível projetarmos um telescópio de Galileo cuja lente divergente nos forneça exatamente a aberração necessária para um determinado padrão de intensidade [48,49].

(b) Sistemas FSO com Áxicons

O termo “áxicon” foi escolhido por John McLeod [50,51] para descrever o novo elemento óptico por ele desenvolvido. Ele explorou vários métodos para difratar a luz de tal forma a convergê-la linearmente no eixo óptico. Funções de transmitância de fase podem ser obtidas tais que obtenhamos distribuições de intensidade axiais arbitrárias.

Para determinar a função de fase (associada à transmitância) usaremos a característica de conservação de energia para o eixo óptico. Assim, consideremos um incremento infinitesimal dr ao longo do raio da abertura e, para problemas de simetria cilíndrica, podemos, em uma primeira aproximação, considerar que os raios que partem deste anel infinitesimal de largura dr atingirão um elemento dz do eixo óptico, e, não havendo perdas, concluímos que a energia existente no anel da abertura será totalmente transmitida para o elemento em dz . Podemos escrever, então:

$$2\pi P_r(r)rdr = \pm P_z(z)dz, \quad (2.45)$$

sendo $P_\sigma(r)$ a densidade de potência bidimensional na abertura ($1/m^2$) e $P_z(r)$ a densidade de potência axial unidimensional ($1/m$).

É válido dizer que esta é uma idealização e que aqui não é levado em consideração possíveis efeitos de difração em dz , e a quantidade $P_z(r)$ pode ser interpretada como uma primeira aproximação da intensidade real ao longo do eixo óptico que resultaria de uma integral de difração. Ao integrarmos (2.45) sobre a abertura e ao longo de z , obtemos:

$$2\pi \int_{\rho}^R P_\sigma(r) r dr = \int_{d_1}^{z(r)} P_z(z) dz, \quad (2.46)$$

onde, se o áxicon for não-anular, $\rho = 0$. O sinal positivo foi escolhido em (2.45), considerando assim que os raios não se cruzam durante a propagação [52].

Ao determinarmos os padrões de intensidade desejados, e encontrada a função longitudinal $z(r)$, a função de fase pode ser obtida a partir da equação:

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -\sin \theta = -\frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2(r)}}. \quad (2.47)$$

Portanto:

$$\varphi(r) = -\int \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2(r)}} dr \quad (2.48)$$

No caso de aproximação paraxial, o valor do ângulo entre z e o raio é muito pequeno, e podemos escrever (2.47) como

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -\sin \theta \cong \tan \theta = -\frac{r}{z(r)}, \quad (2.49)$$

e a eq. (2.48) é reescrita como

$$\varphi(r) = -\int \frac{r}{z(r)} dr. \quad (2.50)$$

Consideraremos aqui os casos com amplitude uniforme e também gaussianda na entrada, para dois casos particulares de interesse: áxicons lineares e áxicons logarítmicos.

Áxicons lineares

1) Amplitude uniforme da entrada

Áxicons lineares são projetados para que tenhamos um padrão de intensidade ao longo do eixo óptico tal que seu valor cresce linearmente com a distância. Façamos

$$P_\sigma(r) = P_\sigma = \text{const. e } P_z(z) = cz, \quad (2.51)$$

onde c é constante, $d_1 \leq z \leq d_2$ é o comprimento focal de interesse.

Substituindo (2.51) em (2.46) e (2.48) obtemos:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{1+A} \left[(1+A)r^2 + (d_1^2 - A\rho^2) \right]^{1/2} + \text{cte1}, \quad (2.52)$$

com $A = (d_2^2 - d_1^2)/(R^2 - \rho^2)$ e

$$\text{cte1} = \frac{1}{1+A} \left[d_1^2 - A\rho^2 \right]^{1/2}, \quad (2.53)$$

escolhido de tal forma que $\varphi(r=0) = 0$. Esta constante não influencia no padrão de intensidade, já que não é função de r e pode ser colocado para fora da integral em (2.43). Este caso é uma generalização de [52] quando $\rho \neq 0$. A eq. (2.52) recai automaticamente na solução clássica para um áxicon quando fazemos $d_1 = 0$:

$$\varphi(r) = -\left(1 + \frac{d_2^2}{R^2}\right)^{-1/2} r, \quad (2.54)$$

Impondo (2.52) em (2.43) e efetuando a simulação numérica para $d_1 = 500$ m, $d_2 = 750, 1000$ e 1250 m, $\rho = 0$, $R = 5$ cm e $\lambda = 850$ nm, observamos o padrão de intensidade mostrado na figura 2.17 para cada valor de d_2 , juntamente com o padrão que seria visto quando da ausência do áxicon. O padrão linear é perturbado devido às interferências indesejadas.

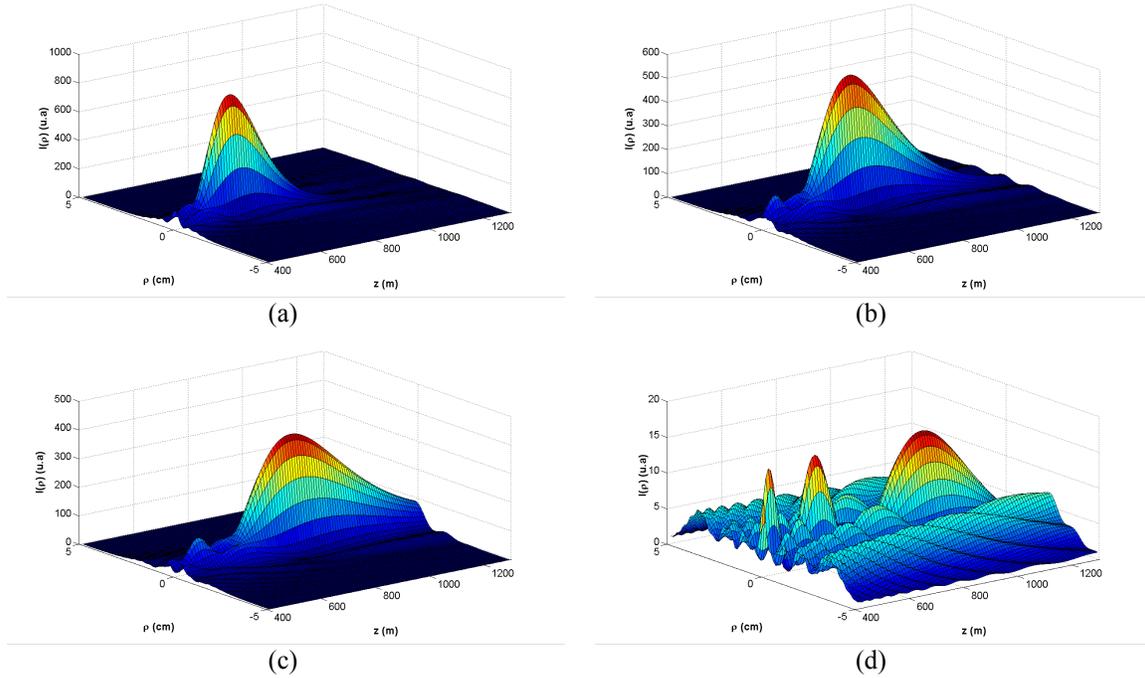


Fig. 2.17 – Áxicon linear com amplitude uniforme na entrada e seus padrões de intensidade. (a), (b) e (c) representam a intensidade ao longo da propagação para $d_1 = 500$ m e $d_2 = 750, 1000$ e 1250 m, respectivamente. O item (d) seria o caso em que não há elemento óptico, ou $\varphi(r) = 0$. A divergência do feixe deve ser implementada para uma visualização mais realista, mas é notável o ganho em intensidade, em cerca de 30 vezes no pior caso – item (c).

2) Amplitude gaussiana na entrada

Façamos agora

$$P_\sigma(r) = P_\sigma(1 + b^2 r^2)^{-1/2} \text{ e } P_z(z) = cz, \quad (2.55)$$

onde c e P_σ são constantes, $d_1 \leq z \leq d_2$ é novamente o comprimento focal de interesse. A eq. (2.55) para $P_\sigma(r)$ é aproximação de uma amplitude gaussiana para pequenas variações de amplitude. Aqui, foi considerado que a amplitude na borda do áxicon não ultrapassa 0.85 vezes o valor no centro do mesmo, garantindo a aproximação

Suponha a função Ψ tal que $0,85 \leq \Psi < 1$:

$$\Psi = \frac{P_{\sigma}(r = R)}{P_{\sigma}(r = 0)} \quad (2.56)$$

Com (2.56), encontramos para b a seguinte função:

$$b = \pm \sqrt{\frac{1 - \Psi^2}{R^2 \Psi^2}} \quad (2.57)$$

Substituindo (2.55) em (2.46) e (2.48), e após alguns cálculos morosos, obtemos:

$$\varphi(r) = - \left\{ \left[r^2 + A(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{Ab}{2} \log \left| \frac{2}{Ab} \left[r^2 + A(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{Ab^2} (b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1 \right| \right\} + cte2 \quad (2.58)$$

onde $A = (d_2^2 - d_1^2) / \left[(b^2 R^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (b^2 \rho^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]$ e $\Theta = d_1^2 - A(b^2 \rho^2 + 1)^{1/2}$. Aqui, “log” implica em logaritmo neperiano. Com as mesmas considerações feitas para o caso anterior, temos

$$cte2 = \left\{ [A + \Theta]^{\frac{1}{2}} - \frac{Ab}{2} \log \left| \frac{2}{Ab} [A + \Theta]^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{Ab^2} + 1 \right| \right\} \quad (2.59)$$

Novamente impondo (2.58) em (2.43) e efetuando a simulação numérica para $d_1 = 1000$ m, $d_2 = 1058, 1116$ e 1174 m, $\rho = 0$, $R = 5$ cm e $\lambda = 850$ nm, observamos o padrão de intensidade mostrado na figura 2.18 para cada valor de d_2 , (o padrão que seria visto quando da ausência do áxicon é o mesmo que o da figura 2.17(d)). O padrão linear é perturbado devido às interferências indesejadas. Neste caso, foi respeitada a aproximação gaussiana com $\Psi = 0,85$.

O primeiro fato a ser observado é a diminuição da intensidade ao longo do eixo óptico quando comparada com o caso anterior quando z se aproxima de d_2 . Também, quanto maior a diferença $d_2 - d_1$, menor a intensidade ao longo do eixo óptico. Embora em regiões intermediárias entre d_2 e d_1 o comportamento da intensidade apresente certa semelhança com um padrão linear, como no caso da figura 2.17, amplitudes gaussianas sofrem deformações significativas devido às flutuações originadas dos feixes próximos ao centro do axicon e dos efeitos de difração na borda.

Além disso, considerando o padrão de reconstrução do feixe da lateral para o centro, estamos diminuindo a energia necessária para a recomposição do feixe ao longo da propagação; portanto, o efeito linear é atenuado. Ainda assim, o ganho na amplitude da intensidade em relação a $\varphi(r)=0$ é notório.

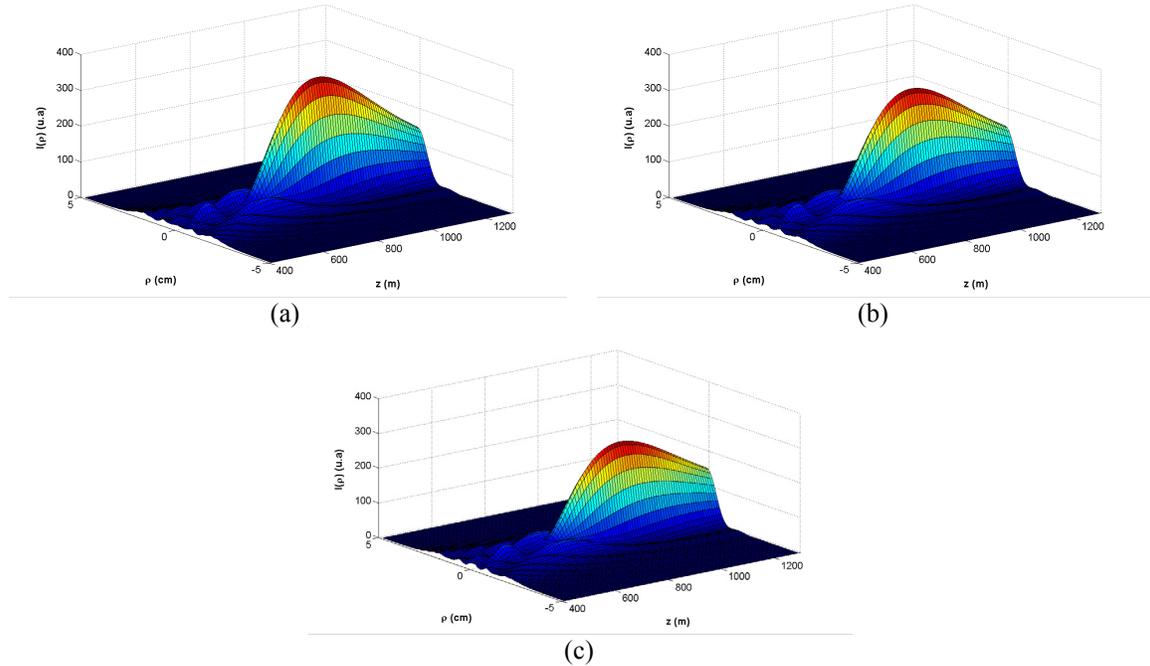


Fig. 2.18 – Áxicon linear com amplitude gaussiana na entrada e seus padrões de intensidade. (a), (b) e (c) representam a intensidade ao longo da propagação para $d_1 = 1000$ m e $d_2 = 1058, 1116$ e 1174 m, respectivamente.

Áxicons logarítmicos

Áxicons logarítmicos mantêm um padrão de intensidade constante ao longo do eixo óptico. Este nome pode ser considerado inadequado, pois o termo “logarítimo” refere-se a um caso particular e simplificado, em que este elemento é representado com uma função de fase com um termo logarítimo. O próprio axicon linear anteriormente analisado possuía termos logarítmicos. Manteremos a nomenclatura utilizada na literatura.

Reutilizamos as eqs. (2.45) – (2.50) e determinamos as funções de fase para o caso em que impomos

$$P_z(z) = P_z = cte \quad (2.60)$$

Novamente, somente usamos áxicons cujos raios não se cruzam (*forward axicon*) durante suas propagações (sinal positivo em (2.45)). Abriremos mão da aproximação paraxial para $\varphi(r)$, muito embora a própria integral de difração de Fresnel seja válida somente para aproximações deste tipo. Isto foi feito porque, como já estamos no caso em que $z \gg r$, ao determinarmos a função de fase via, seu valor será muito próximo do obtido através da eq. (2.50).

Para amplitude uniforme, fazemos $P_\sigma(r) = P_\sigma = \text{const.}$, e substituímos este valor novamente nas eqs. (2.46) à (2.48), obtendo:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{2A} \log \left| 2A \left[A^2 r^4 + \Xi r^2 + (d_1^2 - 2A\rho^2 d_1 + A^2 \rho^4) \right]^{1/2} + 2A^2 r^2 + \Xi \right| + \text{cte3} \quad (2.61)$$

onde $A = (d_2 - d_1)/(R^2 - \rho^2)$, $\Xi = 1 + 2Ad_1 - 2A^2 \rho^2$ e

$$\text{cte3} = \frac{1}{2A} \log \left| 2A (d_1^2 - 2A\rho^2 d_1 + A^2 \rho^4) + \Xi \right| \quad (2.62)$$

foi escolhido de tal forma que $\varphi(r=0) = 0$.

Já para amplitudes gaussianas, embutimos outra vez a eq. (2.55) para $P_\sigma(r)$ com $0,85 \leq \Psi < 1$, e chegamos à uma função de fase um tanto quanto complexa:

$$\varphi(r) = -\frac{1}{E} \left\{ \left[Er^2 + C(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta' \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{Cb}{2\sqrt{E}} \log \left| \frac{2\sqrt{E}}{Cb} \left[Er^2 + C(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta' \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2E}{Cb^2} (b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1 \right| \right\} + \text{cte4} \quad (2.63)$$

com $A = (d_2 - d_1) / \left[(b^2 R^2 + 1)^{\frac{1}{2}} - (b^2 \rho^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right]$, $\Theta' = d_1^2 + 2A^2 + A^2 b^2 \rho^2 - 2Ad_1 (b^2 \rho^2 + 1)^{1/2}$,

$E = 1 + A^2 b^2$ e $C = 2A \left[d_1 - A(b^2 \rho^2 + 1)^{1/2} \right]$. A constante *cte4* vale

$$\text{cte4} = \frac{1}{E} \left\{ \left[C + \Theta' \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{Cb}{2\sqrt{E}} \log \left| \frac{2\sqrt{E}}{Cb} \left[C + \Theta' \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{2E}{Cb^2} + 1 \right| \right\} \quad (2.64)$$

Impondo (2.61) e (2.63) em (2.43) e efetuando as mesmas simulações numéricas anteriores, agora para $\lambda = 1550$ nm encontramos os padrões de intensidade mostrados nas figuras 2.19 e 2.20, respectivamente, para amplitudes uniforme e gaussiana. Infelizmente, para grandes distâncias o

padrão desejado – seja uma intensidade linearmente crescente, ou constante – não é obtido. Na realidade, as equações para as funções de fase foram deduzidas segundo leis de óptica geométrica e de conservação de energia, sem levar em conta fenômenos de interferência. Entretanto, uma análise rigorosa baseada na teoria de onda torna-se inviável quando desejamos um resultado analítico, como foi feito para as eqs. (2.52), (2.58), (2.61) e (2.63). Para sermos específicos, façamos um áxicon com raio $R = 5$ mm $d_1 = 100$ mm e $d_2 = 200$ mm, para $\lambda = 1550$ nm. A figura 2.21 ilustra o padrão de intensidade tanto para o caso linear quanto logarítmico, e fica evidente que a óptica geométrica se apresenta com uma boa aproximação, e as funções de fase produzem com mais nitidez a intensidade desejada. As oscilações da intensidade ao longo de z podem ser reduzidas usando-se áxicons anulares com funções de transmitância adequadas, simulando a devida apodização [53].

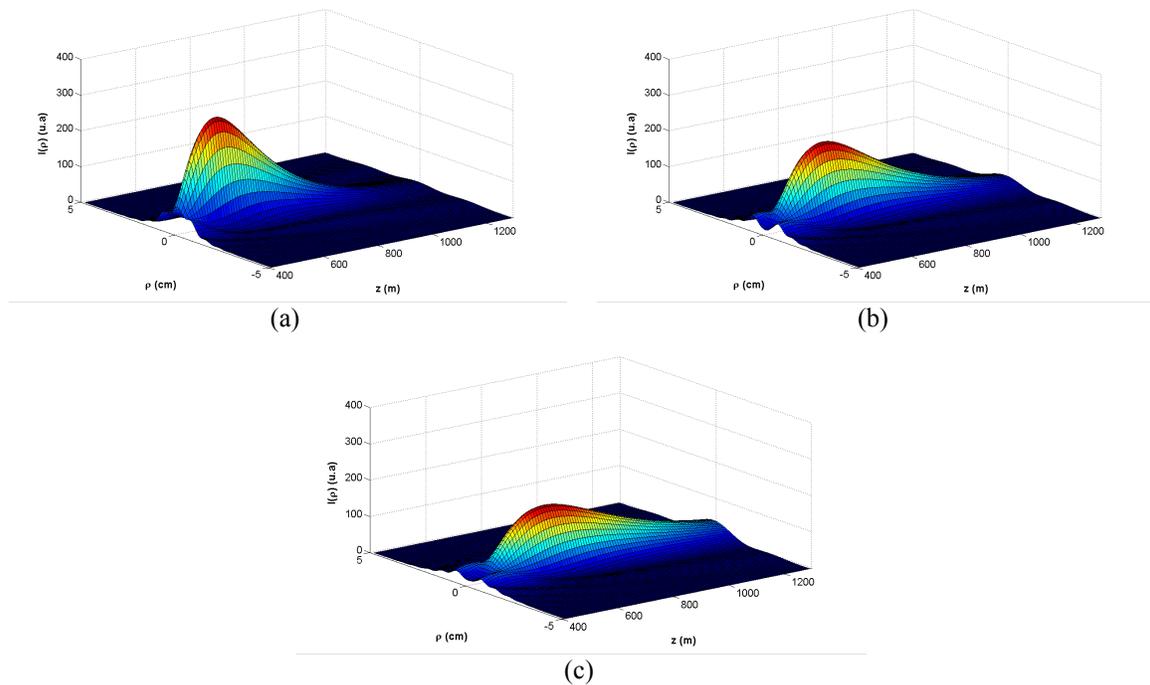


Fig. 2.19 – Áxicon logarítmico com amplitude uniforme na entrada e seus padrões de intensidade para $d_1 = 500$ m e $d_2 =$ (a) 750, (b) 1000 e (c) 1250 m, respectivamente.

Ainda assim, o uso de áxicons para sistemas FSO pode ser uma alternativa eficaz na transmissão de sinais ópticos. Comercialmente, telescópios de Galileo são mais interessantes financeiramente, muito embora suas dimensões físicas possam levar a efeitos indesejados, como uma maior necessidade de controle mecânico para manter a linha de visada, evitando oscilações

do sistema. Por outro lado, dependendo da configuração desejada, áxicons lineares e/ou logarítmicos são de difícil fabricação, embora suas dimensões espaciais sejam bem menores.

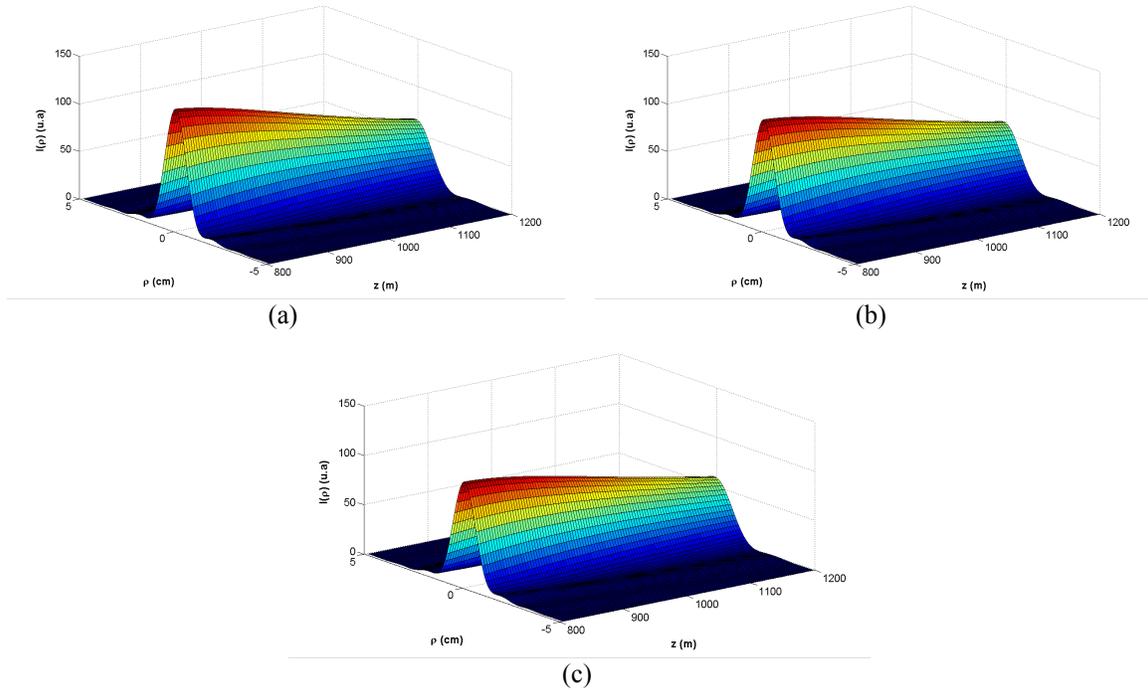


Fig. 2.20 – Áxicon logarítmico com amplitude gaussiana na entrada e seus padrões de intensidade para $d_1 = 1000$ m e $d_2 =$ (a) 1058, (b) 1116 e (c) 1174 m, respectivamente.

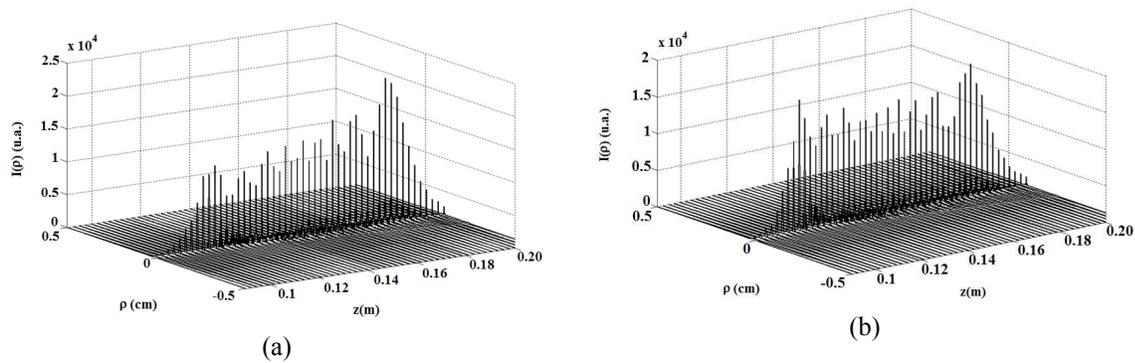


Fig. 2.21 – Em distâncias reduzidas, a óptica geométrica fornece uma boa aproximação para os raios emergentes de áxicons lineares (a) e logarítmicos (b). A abertura possui $R = 5$ mm, $d_1 = 100$ mm e $d_2 = 200$ mm, para um comprimento-de-onda $\lambda = 1550$ nm.

GRIN áxicons – índice de refração variável

Áxicons com índice de refração variável foram primeiramente propostos e desenvolvidos em [54], no ano de 2000. Relativamente recentes, estes novos áxicons respondem pela função de fase $\varphi(r)$ através do ajuste adequado e controlado do índice de refração do material de que é feito.

Lentes GRIN, de forma geral, são usadas para focalizar e colimar luz dentro de uma variedade de componentes de fibras ópticas. A variação do índice de refração, do centro para a borda, possibilita que lentes com espessura fixas colimem a luz emitida por uma fibra óptica, ou ainda que focalizem um feixe incidente para dentro da mesma. Isto porque os raios luminosos podem ser suavemente e continuamente redirecionados para um ponto de foco (no caso mais específico, um GRIN áxicon possui um foco estendido). A estrutura interna deste índice gradual pode reduzir drasticamente a necessidade de superfícies curvas, resultando em uma geometria simples e compacta.

Atualmente, estas lentes são usadas em uma gama de produtos que requerem componentes passivos e/ou ativos. Fabricantes de componentes passivos usam lentes GRIN em multiplexadores por divisão de comprimento de onda, atenuadores e switches ópticos. Em componentes ativos, estas lentes são usadas em acoplamentos fibra-detectores ou laser-fibra. Elas também são próprias para acoplar a saída de lasers de diodo às fibras ópticas, uma vez que podem efetuar correção de aberração sem sistemas multielementos complexos ou lentes esféricas, sendo uma alternativa econômica e especial para as lentes convencionais.

Usando a aproximação de lentes finas para GRIN áxicons, o argumento do caminho óptico de um raio nos leva a uma variação do índice de refração n dada por (aqui, é suposta uma variação fraca de n):

$$n(r) = n(0) + \frac{\varphi(r)}{t} \quad (2.65)$$

onde t é a espessura do axicon, invariável em relação à r . Este tipo de axicon é também chamado de *GRIN axicon radial*. O valor de $n(r)$ é maior que $n(0)$, como pode ser verificado observando que as funções de fase são negativas.

Em [54], uma descrição detalhada é feita para um comprimento focal desejado, e através da aproximação paraxial (2.49), o primeiro GRIN axicon foi testado experimentalmente.

Suponha, por exemplo, os casos das figuras 2.16, 2.17 b) e 2.19 b). Para a primeira delas, a frente de onda com aberração em c) pode ser substituída por um GRIN áxicon cuja característica $n(r)$ varia segundo (2.65), para $n(0)=1.68$ e $t = 5$ mm. A figura 2.22 nos mostra que a variação fraca para o índice de refração é respeitada. Para as demais figuras, representando áxicons lineares e logarítmicos, e supondo a mesma espessura e índice de refração inicial, a função $n(r)$ varia, respectivamente, conforme as figuras 2.23 e 2.24.

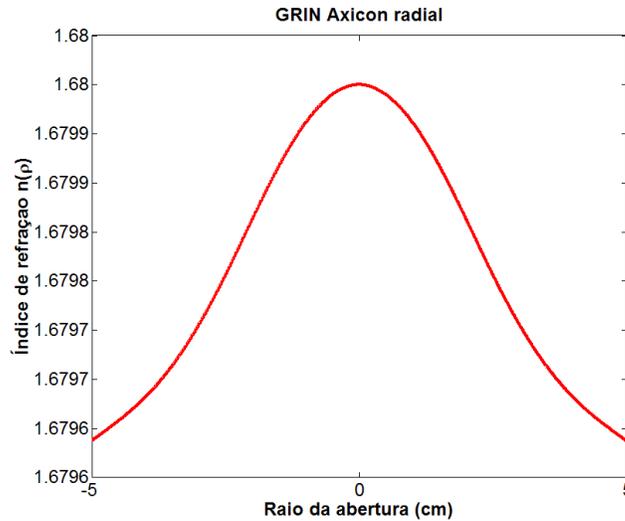


Fig. 2.22 – Função $n(r)$ do GRIN axicon necessário para gerarmos a mesma função $\phi(r)$ fornecida pelo telescópio de Galileu com aberração esférica.

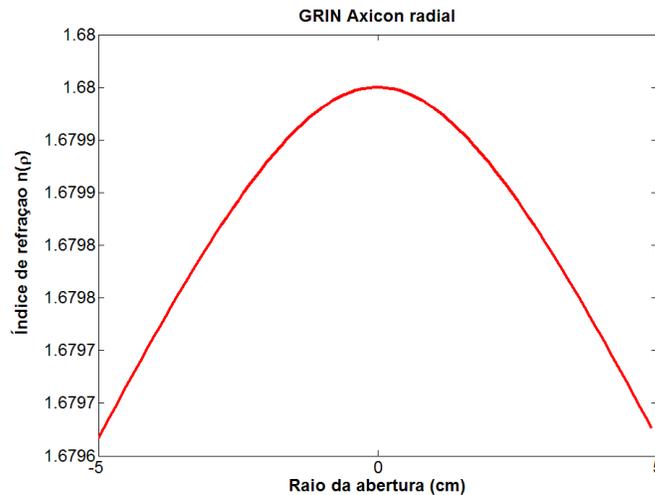


Fig. 2.23 – Função $n(r)$ do GRIN axicon necessário para gerarmos a mesma função $\phi(r)$ fornecida pelo axicon linear não-anular para o caso da figura 2.17 (b).

Para finalizar, considere um áxicon logarítmico que nos gere um padrão de intensidade cuja focalização seja feita ao longo dos segmentos:

$$I = \begin{cases} I_0, & 100 \leq z \leq 110, 260 \leq z \leq 270, 420 \leq z \leq 430 \text{ m} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.66)$$

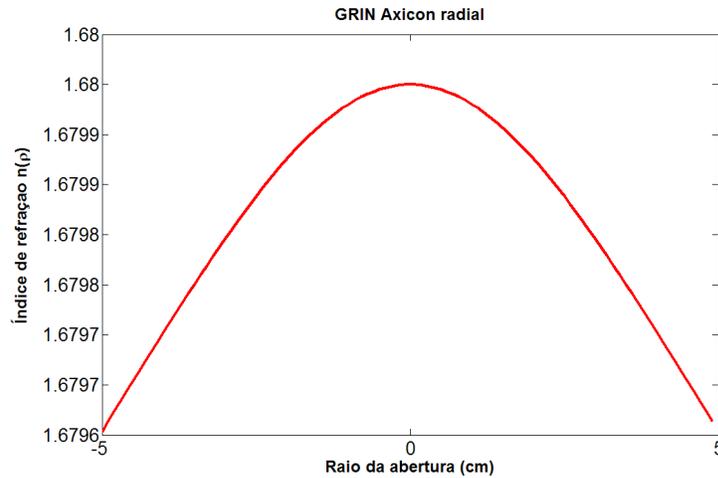


Fig. 2.24 – Função $n(r)$ do GRIN axicon necessário para gerarmos a mesma função $\phi(r)$ fornecida pelo axicon linear não-anular para o caso da figura 2.19 (b).

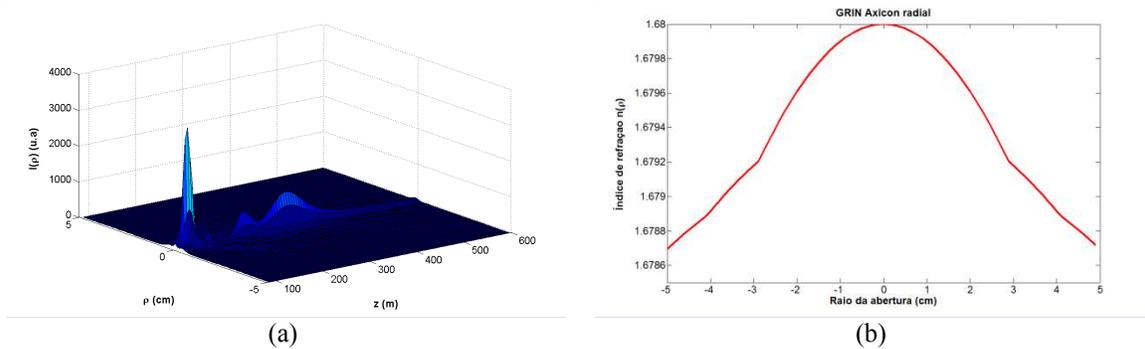


Fig. 2.25 – Padrões de intensidade e índice de refração para GRIN áxicons, onde (a) e (b) referem-se a uma abertura de 5 cm, com $\lambda = 850$ nm. Uma espessura de 5 mm foi assumida, com $n(0) = 1,68$

Obviamente, como visto anteriormente, não conseguiremos um padrão de intensidade constante como desejado, haja visto as interferências e oscilações por efeitos de borda e raios paraxiais. As figuras 2.25 (a) e (b) ilustram o padrão de intensidade e a característica $n(r)$ para este áxicon. Se por um lado o projeto de áxicons com n fixo é dificultado pela complexidade da função de fase que desejamos implementar, GRIN áxicons apresentam uma facilidade de

manipulação para virtualmente qualquer padrão de intensidade que calculemos. Existem empresas nacionais que já possuem técnicas de fabricação destes elementos ópticos, e em alguns países os primeiros GRIN áxicons radiais começam a ser comercializados.

2.8 Comentários e Conclusões

Como vimos, existe uma característica intrínseca das ondas – feixes e pulsos – localizadas de resistirem aos efeitos da difração, propagando-se por distâncias maiores que os feixes comuns, como os gaussianos, por exemplo. Esta resistência pode ser explicada pela auto-reconstrução destas ondas através do fornecimento constante de energia advinda de regiões laterais, esta, por sua vez, viajando com velocidade luminal $V = c$ para o caso das ondas superluminais, sem implicações de não-causalidade (propagação superluminal da energia, ou informação).

Esta propriedade de auto-reconstrução [55], aliás, já se mostrou útil em várias aplicações. Em comunicações ópticas no espaço livre, por exemplo, feixes pseudo-Bessel demonstraram serem eficientes no contorno dos efeitos de interferência atmosférica [46,47]. Em pinças ópticas, inclusive, já se demonstrou que feixes de Bessel podem aprisionar, longitudinalmente ao eixo de propagação, diversas partículas em seqüência [56], o que se torna algo difícil mesmo para um feixe gaussiano, focalizado e com alto gradiente de intensidade de campo.

Um tipo de superposição de feixes de Bessel muito interessante foi desenvolvido em 2004 por Zamboni-Rached [57], e ficou conhecido como “*frozen waves*”. Trata-se de um método simples para obtenção de envelopes de amplitudes estacionárias, cujo padrão de intensidade longitudinal pode ser previamente escolhido, dentro de certo limite¹², superpondo-se feixes de Bessel com mesma frequência, mas diferentes números de onda longitudinais. Estas novas soluções estáticas para a equação de onda podem ter aplicações interessantes em pinças ópticas, guiamento atômico, bisturis ópticos e acústicos, etc. Devemos frisar, aliás, a grande contribuição deste pesquisador – e coorientador deste trabalho – na área de ondas localizadas e suas aplicações em meios dispersivos, guias-de-ondas, fibras ópticas, etc. [58-63].

Pulsos tipo X focalizados [64] também possuem possíveis aplicações de interesse em eletromagnetismo e óptica, e se baseiam na superposição espaço-temporal de feixes de Bessel,

¹² Obviamente, o limite máximo – ou distância máxima - L_{max} para que possamos ter um padrão previamente escolhido em $0 < L < L_p$ será dado pelo feixe de Bessel com a menor profundidade de campo $Z = L_{max}$ em (2.2). Além deste valor ($L > Z$), o padrão não será devidamente formado.

cada um com uma determinada velocidade e emitidos em tempos distintos. Com isso, em um ponto (uma região do espaço) previamente escolhido como na Fig. 2.26, a intensidade resultante desta superposição de feixes se torna muito alta, criando ao seu redor uma região de considerável gradiente de intensidade, ideal para aplicações em bisturis ópticos.

O exemplo de aplicações em FSO foi objeto de estudo durante o primeiro ano do doutorado. Sobre este tema, salientamos o nosso artigo aceito no IMOC'07 (*International Microwave and Optics Conference*), em Salvador, intitulado “Axicons in FSO Systems” e que foi anexado junto à esta tese (Apêndice D – Trabalhos Publicados pelo Autor). Uma ampliação deste artigo se encontra em andamento para publicação em revista conceituada da Capes.

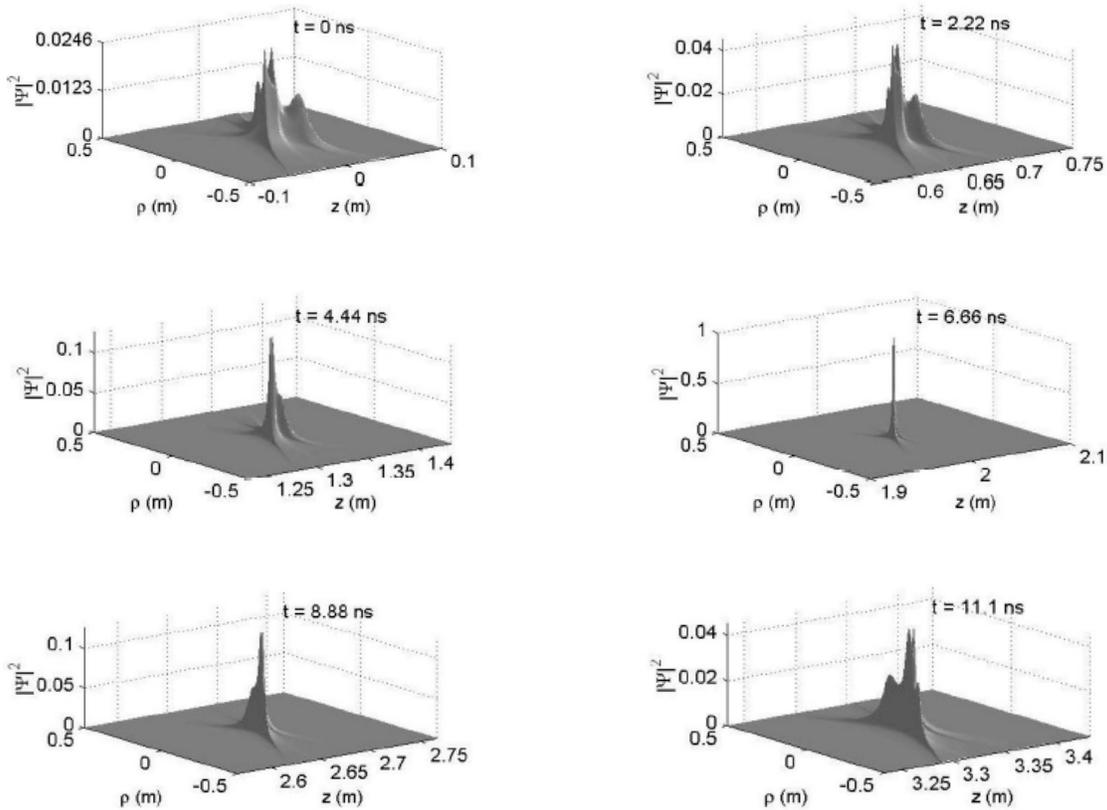


Fig. 2.26. Superposição de feixes de Bessel com diferentes velocidades. Uma focalização espaço-temporal criada em $t = 6,66$ ns e em $z = 2$ m mostrando a intensidade $|\psi|^2$ - normalizada - resultante da superposição. O feixe mais rápido, com $V = 1,005c$ é o último a ser enviado, enquanto que o mais lento, com $V = 1,001c$, é o primeiro. A amplitude em $t = 6,66$ ns é cerca de 41 vezes maior do que o inicial.

2.9 Referências Deste Capítulo

- [1] M. Born e E. Wolf, “Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light”, Cambridge Univ. Pr., 6.ed, pg. 370, 1998.
- [2] H. A. Willebrand e B. S. Ghuman, “Fiber Optics Without Fiber”, *IEEE Spectrum*, vol. 38, no. 8, 2001.
- [3] J. W. Goodman, “Introduction to Fourier Optics”, McGraw-Hill, 2.ed., cap. 6, 1996.
- [4] S. Okazaki, “Resolution limits of optical lithography”, *Journal of Vacuum Science and Technology B*, vol. 9, no. 6, pp. 2829-2833, 1991.
- [5] T. Ito e S. Okazaki, “Pushing the limits of lithography”, *Nature*, vol. 406, no. 6799, pp. 1027-1031, 2000.
- [6] A. Ashkin, J. Dziedzic, J. E. Bjorkholm e S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles”, *Opt. Lett.*, vol. 11, pp. 288-290, 1986.
- [7] J. E. Curtis, B. A. Koss e D. G. Grier, “Dynamic holographic optical tweezers”, *Opt. Commun.*, vol. 207, pp. 169-175, 2002.
- [8] J. A. Stratton, “Electromagnetic Theory”, Mc Grow-Hill, New York, cap. 6, pg. 356, 1941.
- [9] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, no. 4, 1987.
- [10] R. M. Herman e T. A. Wiggins, “Production and uses of diffractionless beams”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 8, pp. 932-942, 1991.
- [11] A. Vasara, J. Turunen e A. T. Friberg, “Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 6, pp. 1748-1754, 1989.
- [12] R. P. MacDonald, J. Chrostowski, S. A. Boothroyd e B. A. Syrett, “Holographic Formation of a Diode Laser Non-Diffracting Beam”, *Appl. Opt.*, vol. 32, pp. 6470-6474, 1983.
- [13] Sobre cristais biaxiais, vide T. A. King, W. Hogervorst, N. S. Kazak, N. A. Khilo e A. A. Ryzhevich, “Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals”, *Opt. Commun.*, vol. 187, no. 4, pp. 407-414, 2001. Para axicons, vide J. Arlt e K. Dholakia, “Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon”, *Opt. Commun.*, vol. 177, pp. 297-301, 2000.
- [14] J. N. Brittingham, “Focus wave modes in homogeneous Maxwell’s equations: transverse electric field”, *J. Appl. Phys.*, vol. 54, pp. 1179-1189, 1983.
- [15] A. Sezginer, “A general formulation of focus wave modes”, *J. Appl. Phys.*, vol. 57, pp. 678-683, 1985.

- [16] J.-y. Lu e J. F. Greenleaf, “Nondiffracting X-waves: Exact solutions to free-space scalar wave equation and their finite aperture realizations”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 39, pp. 19-31, 1992.
- [17] J.-y. Lu e J. F. Greenleaf, “Experimental verification of nondiffracting X-waves”, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 39, pp. 441-446, 1992.
- [18] R. W. Ziolkowski, I. M. Besieris e A. M. Shaarawi, “Aperture realizations of exact solutions to homogeneous wave equations”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 75-87, 1993.
- [19] A. M. Shaarawi e I. M. Besieris, “On the superluminal propagation of X-shaped localized waves”, *J. Phys. A*, vol. 33, pp. 7227-7254, 2000.
- [20] A. M. Shaarawi e I. M. Besieris, “Relativistic causality and superluminal signaling using X-shaped localized waves”, *J. Phys. A*, vol. 33, pp. 7255-7263, 2000.
- [21] J.-y. Lu, H.-H. Zou e J. F. Greenleaf, “Producing deep depth of field and depth independent resolution in NDE with limited diffraction beams”, *Ultrasonic Imaging*, vol. 15, pp. 134-149, 1993.
- [22] J.-Y. Lu, H.-H. Zou e J. F. Greenleaf, “Biomedical ultrasound beam forming”, *Ultrasound in Medicine and Biology*, vol. 20, pp. 403-428, 1994.
- [23] E. Recami, “On Localized X-shaped superluminal solutions to Maxwell equations”, *Physica A*, vol. 252, pp. 586-610, 1998.
- [24] P. Saari e K. Reivelt, “Evidence of X-shaped propagation-invariant localized light waves”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, pp. 4135-4138, 1997.
- [25] D. Mugnai, A. Ranfagni e R. Ruggeri, “Observation of superluminal behaviors in wave propagation”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 4830-4833, 2000.
- [26] M. Zamboni-Rached, E. Recami e H. E. Hernández-Figueroa, “New localized superluminal solutions to the wave equations with finite total energies and arbitrary frequencies”, *Eur. Phys. J. D*, vol. 21, pp.217-228, 2002.
- [27] Z. Bouchal e M. Olivík, “Non-diffractive vector Bessel beams”, *J. Modern Opt.*, vol. 42, no. 8, pp. 1555-1566, 1995.
- [28] J. H. McLeod, “The axicon: a new type of optical element”, *J. Opt. Soc. Am.* vol. 44, no. 8, p.592, 1954.
- [29] J. W. Goodman, “Introduction to Fourier Optics”, McGraw-Hill, New York, 2.ed., cap. 4, p. 66, 1998.

- [30] L. A. Ambrosio, M. Zamboni-Rached e H. E. Hernández-Figueroa, “Manipulating optical gradient forces on optical tweezers using Bessel beams”, submetido ao IMOC’2007, jun/2007.
- [31] R. W. Ziolkowski, “Localized transmission of electromagnetic energy”, *Phys. Rev. A*, vol. 39, pp. 2005-2033, 1989.
- [32] R. W. Ziolkowski, “Localized wave physics and engineering”, *Phys. Rev. A*, vol. 44, pp. 3960-3964, 1991.
- [33] I. M. Besieris, A. M. Shaarawi e R. W. Ziolkowski, “A bidirectional traveling plane wave representation of exact solutions of the scalar wave equation”, *J. Math. Phys.*, vol. 30, pp. 1254-1269, 1989.
- [34] A. M. Shaarawi, I. M. Besieris e R. W. Ziolkowski, “A novel approach to the synthesis of nondispersive wave packet solutions to the Klein-Gordon and Dirac equations”, *J. Math. Phys.*, vol. 31, pp. 2511-2519, 1990.
- [35] R. Donnelly e R. W. Ziolkowski, “Designing localized waves”, *Proc. Roy. Soc. London A*, vol. 440, pp. 541-565, 1993.
- [36] Ver www.freespaceoptic.com/images/PALQuickInstall.ppt
- [37] J. M. Wallace and P. V. Hobbs, “Atmospheric Science: An Introductory Survey”, Academic Press, Orlando, 1977.
- [38] I. I. Kim, B. McArthur, and E. Korevaar, “Comparison of laser beam propagation at 785 nm and 1550 nm in fog and haze for optical wireless communications”, *Optical Access Incorporated*, San Diego, CA.
- [39] S. Bloom, “The Physics of Free-Space Optics”, PhD Chief Technical Officer AirFiber, Inc.
- [40] X. Zhu and J. M. Kahn, “Free-Space Optical Communication Through Atmospheric Turbulence Channels”, *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 50, No. 8, 2002.
- [41] E. J. McCartney, “Optics of the Atmosphere”, J. Wiley & Sons, New York, 1976.
- [42] J. M. Wallace and P. V. Hobbs, “Atmospheric Science: An Introductory Survey”, Academic Press, Orlando, 1977.
- [43] T. S. Chu and D. C. Hogg, “Effects of precipitation on propagation at 0.63, 3.5, and 10.6 microns,” *Bell Syst. Tech. J.*, Vol. 47, pp. 723-759, 1968.
- [44] Isaac I. Kim and Eric Korevaar, “Availability of Free Space Optics (FSO) and hybrid FSO/RF systems”, *Optical Access Incorporated*, San Diego, CA.

- [45] T. Aruga, “Generation of long-range nondiffracting narrow light beams”, *Appl. Opt.*, vol. 36, no. 16, pp. 3762-3768, 1997.
- [46] T. Aruga, S. Wing Li, “Super high resolution for long-range imaging”, *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 13, pp. 2795-2799, 1999.
- [47] T. Aruga, *et al.*, “Nondiffracting narrow light beam with small atmospheric turbulence-influenced propagation”, *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 15, pp. 3152-3156, 1999.
- [48] Z. Jaroszewicz e J. Morales, “Lens axicons: systems composed of a diverging aberrated lens and a perfect converging lens”, *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 15, no. 9, pp. 2383-2390, 1998.
- [49] Z. Jaroszewicz e J. Morales, “Lens axicons: systems composed of a diverging aberrated lens and a converging aberrated lens”, *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 16, no. 1, pp. 191-197, 1999.
- [50] J. H. McLeod, “The Axicon: A New Type of Optical Element”, *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 44, no. 8, pp. 592-597, 1954.
- [51] J. H. McLeod, “Axicon and Their Uses”, *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 50, no. 2, pp. 166-169, 1960.
- [52] J. Sochaki *et al.*, “Nonparaxial design of generalized axicons”, *Appl. Opt.*, vol. 31, no. 25, pp. 5326-5330, 1992.
- [53] Z. Jaroszewicz, J. Sochaki *et al.*, “Apodized annular-aperture logarithmic axicon: smoothness and uniformity of intensity distributions”, *Opt. Lett.*, vol. 18, no. 22, pp. 1893-1895, 1993.
- [54] D. J. Fischer *et al.*, “Design and manufacture of a gradient-index axicon”, *Appl. Opt.*, vol. 39, no.16, pp. 2687-2694, 2000.
- [55] Z. Bouchal, J. Wagner, and M. Chlup, “Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam”, *Opt. Commun.*, vol. 151, pp. 207-211, 1998.
- [46] T. Aruga, S. Wing Li, “Super high resolution for long-range imaging”, *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 13, pp. 2795-2799, 1999.
- [46] T. Aruga, *et al.*, “Nondiffracting narrow light beam with small atmospheric turbulence-influenced propagation”, *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 15, pp. 3152-3156, 1999.
- [56] V. Garcés-Chaves, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett e K. Dholakia, “Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam”, *Nature*, vol. 419, no. 6903, pp. 145-147, 2002.

- [57] M. Zamboni-Rached, “Stationary optical wave fields with arbitrary longitudinal shape by superposing equal frequency Bessel beams: Frozen Waves”, *Opt. Express*, vol. 12, no. 17, 2004.
- [58] M. Zamboni-Rached, “Ondas Localizadas, Estrutura e Aplicações”, Tese de Mestrado, IFGW, Unicamp, 2000.
- [59] M. Zamboni-Rached, “Ondas Localizadas Aplicadas a Meios Difrativos/Dispersivos”, Tese de Doutorado, FEEC, Unicamp, 2004.
- [60] M. Zamboni-rached, E. Recami and F. Fontana, “Localized superluminal solutions to Maxwell equations propagating along a normal-sized waveguide”, *Phys. Rev. E*, vol. 64, 066603, 2001.
- [61] M. Zamboni-rached, K. Z. Nobrega, E. Recami and H. E. Hernández F., “Superluminal X-shaped beams propagating without distortion along a coaxial guide”, *Phys. Rev. E*, vol. 66, 036620, 2002.
- [62] M. Zamboni-rached, E. Recami and F. Fontana, “Superluminal localized solutions to Maxwell equations propagating along a waveguide: The finite-energy case”, *Phys. Rev. E*, vol. 67, 036620, 2003.
- [63] M. Zamboni-rached, K. Z. Nobrega, E. Recami and H. E. Hernández F., “Localized Superluminal solutions to the wave equation in (vacuum or) dispersive media, for arbitrary frequencies and with adjustable bandwidth”, *Optics Communications*, vol. 226, pp. 15-23, 2003.
- [64] M. Zamboni-Rached, “Focused X-shaped pulses”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 21, no. 8, 2004.

Capítulo 3

Pinças Ópticas

3.1 Introdução

J. Maxwell, em seu tratado de eletromagnetismo em 1873, sugeriu que a luz pudesse exercer uma força sobre a matéria [1], fato que foi comprovado experimentalmente anos mais tarde, em 1901, por Lebedev [2]. Segundo Maxwell, em um meio no qual ondas se propagam existe uma pressão na direção normal às mesmas, e numericamente igual à energia contida por unidade de volume. Era a pressão de radiação.

Pressão de radiação é uma força por unidade de área, atuando em um objeto devido à variação de momento da luz. Como a luz consiste de fótons, ao serem refletidos por um obstáculo, se estes fótons sofrem variação de momento, de acordo com a segunda lei de Newton, então uma força de reação deve aparecer sobre este obstáculo. Em determinadas situações, como veremos, esta força pode ser suficiente para mover este obstáculo. Esta é a principal idéia por trás de qualquer armadilha ou guiamento óptico: um desvio da luz – variação de momento em seus fótons – ocasiona uma variação de momento na partícula que causou tal desvio.

As pinças ópticas são instrumentos que usam esta propriedade eletromagnética de transferência de momento para capturar pequenas partículas, o que a torna uma ferramenta muito útil em diversas áreas de pesquisa, principalmente biológicas, como tendência natural dos últimos anos.

Os primeiros experimentos envolvendo armadilhas ópticas ocorreram por volta de 1970, com os estudos de A. Ashkin e demais pesquisadores da Bell Labs. Inicialmente, eles demonstraram

que partículas dielétricas¹³ poderiam ser aceleradas ou aprisionadas usando pressão de radiação [3]. No primeiro caso, um laser de argônio com perfil gaussiano e comprimento de onda $\lambda = 0.5145 \mu\text{m}$, operando em modo TEM_{00} com raio $w_0 = 6.2 \mu\text{m}$, foi capaz de acelerar partículas de raios da ordem de alguns microns de diâmetro, suspensos em água. No segundo caso, dois destes lasers, alinhados e direcionados um ao outro, atingiam as partículas dielétricas, que eram capturadas através da formação de um poço de potencial óptico. A Fig. 3.1 mostra esquematicamente ambos os experimentos realizados.

Até 1986, as armadilhas ópticas eram construídas basicamente de duas formas: com dois lasers, como no experimento anterior; ou usando levitação através de um único laser. Neste último caso, forças gravitacionais ou eletrostáticas equilibravam a partícula, que permanecia suspensa [4,5]. Nesse ano, porém, foi demonstrado que um único feixe poderia servir como armadilha [6]. Para tanto, a variação de momento da partícula não era mais ocasionada pelas forças de espalhamento – pressão de radiação devido à reflexão – mas devido a gradientes de intensidade do feixe. Os fótons, ao atravessarem pequenas esferas dielétricas com índice de refração maior que o do meio externo, eram refratados e desviados, transferindo momento. Posteriormente, as forças presentes neste processo foram calculadas para o regime de óptica geométrica [6], onde o diâmetro D da partícula é muito maior que o comprimento de onda λ da luz ($D \approx 10\lambda$ ou maior). As forças de espalhamento apontando na direção do feixe incidente, devido à reflexão, e as forças gradientes que forçavam o deslocamento das partículas em direção a regiões de maior intensidade, devido à refração, conforme a Fig. 3.2. Assim, o aprisionamento óptico deveria ocorrer quando houvesse uma força gradiente muito maior que a força de espalhamento.

Como a armadilha óptica está associada a um gradiente de intensidade, feixes colimados deveriam ser usados. Ainda mais, armadilhas tridimensionais requeriam uma focalização destes feixes, criando uma região de alta intensidade e de alto gradiente de campo. Lasers na faixa do infravermelho passaram a ser usados, evitando danos nas moléculas e partículas sob estudo. Como os feixes mais próximos às bordas da lente focalizadora contribuíam mais significativamente para a armadilha, microscópios de grandes aberturas numéricas foram acoplados aos aparatos experimentais.

¹³ Como veremos, as partículas neste caso possuíam um índice de refração maior que o meio circunvizinho. Sem isso, as partículas não seriam capturadas na região da Fig. 4.1, mas deslocar-se-iam para regiões de menor intensidade de campo. Um feixe gaussiano operando no modo TEM_{01} poderia ser usado para capturar em seu centro transversal (eixo de propagação) uma partícula com índice de refração menor do que o do meio.

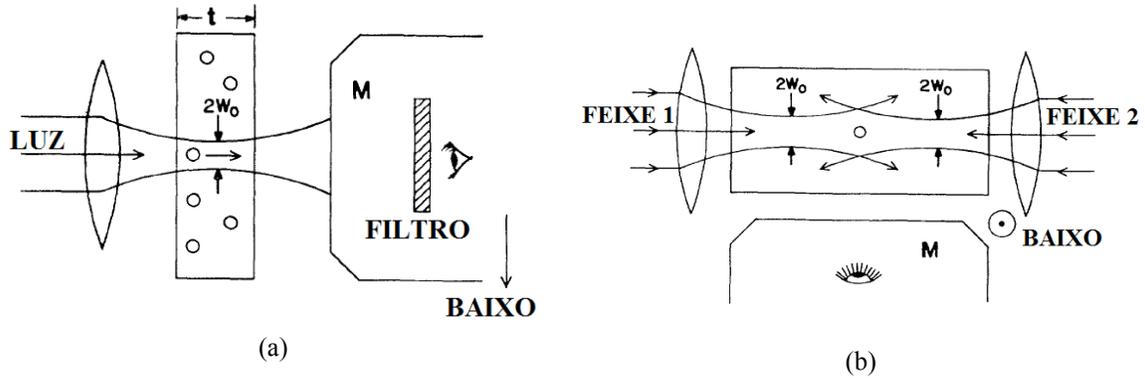


Fig. 3.1. (a) Um feixe pode acelerar partículas dielétricas usando a pressão de radiação, variando seus momentos. (b) Este mesmo princípio pode ser explorado na captura de partículas usando dois lasers alinhados um para o outro (contrapropagantes), anulando o efeito da aceleração devido ao cancelamento das forças aplicadas por ambos.

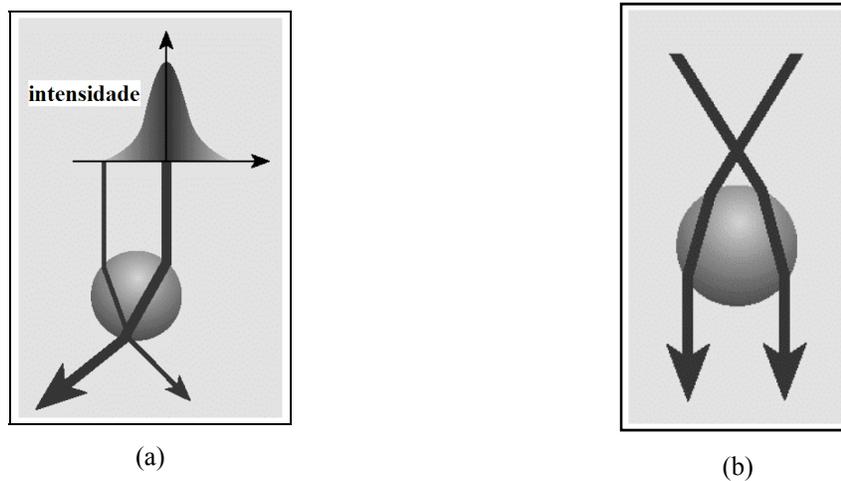


Fig. 3.2. (a) A força lateral resultante é para o centro do feixe. A variação de momento dos fótons move a partícula para regiões de maior intensidade. (b) Uma força para cima é criada ao focalizarmos um feixe. Ela é proporcional ao gradiente da intensidade e tende a deslocar a partícula para o foco.

O cálculo das duas forças – espalhamento e gradiente – para os regimes de Rayleigh e Mie são mais complexos, e podem ser feitos a partir do tensor de Maxwell, que é uma derivação das leis de conservação da energia e do momento eletromagnéticos [8,9]. Alternativamente, podemos usar a densidade de força eletromagnética [10]. A segunda alternativa é mais atraente, já que automaticamente nos fornece uma separação entre ambas as forças.

Este capítulo detalhará o funcionamento básico de uma pinça óptica convencional, inicialmente para partículas dielétricas em regime de óptica geométrica e, posteriormente, para o caso $D \leq \lambda$

em campos eletromagnéticos arbitrários e invariantes no tempo. Terminaremos com algumas aplicações e conclusões.

3.2 Forças em Pinças Ópticas: Óptica Geométrica

Neste regime, podemos decompor o feixe de luz em raios individuais, cada um com determinada intensidade, direção e estado de polarização, propagando-se em linha reta em um meio com índice de refração uniforme. Lembramos, antes, que cada fóton deste raio possuirá um momento \vec{p} cuja magnitude vale

$$|\vec{p}| = \frac{h}{\lambda}, \quad (3.1)$$

onde h é a constante de Planck e λ o comprimento de onda do raio. A intensidade da luz é determinada pelo número de fótons que passam através de uma dada área por unidade de tempo. O fluxo de momento dos fótons, para cada raio de intensidade dada pelo vetor de Poynting \vec{S} , é

$$d\left(\frac{d\vec{p}_{total}}{dt}\right) \equiv d\vec{F} = \left(\frac{n_1}{c}\right)\vec{S}dA, \quad (3.2)$$

Sendo n_1 o índice de refração do meio externo à partícula¹⁴, c a velocidade da luz, \vec{p}_{total} o momento total dos fótons e dA um elemento de área, normal à \vec{S} . Portanto, a força total para este raio pode ser escrita em função de sua potência P como

$$|\vec{F}| = \left(\frac{n_1}{c}\right) \int \vec{S}dA = \left(\frac{n_1}{c}\right)P. \quad (3.3)$$

Então, cada raio exercerá uma força, segundo (3.3), proporcional à sua potência e ao índice de refração do meio no qual se encontra. Ao atingir a partícula, entretanto, este raio sofrerá múltiplas reflexões e refrações, dependendo do ângulo θ de incidência, de forma que a força total sobre a partícula será a soma de contribuições devido a cada raio refletido – de potência PR – e ao número infinito de raios refratados emergentes de potência cada vez menor – PT^2 , PT^2R , ..., PT^2R^n , devido às sucessivas refrações. Aqui, R e T são, respectivamente os coeficientes de reflexão e transmissão de Fresnel na superfície da partícula em ângulo θ . Observe a Fig. 3.3.

¹⁴ A menos quando explicitado, referiremo-nos apenas a partículas esféricas.

$$F_{tot} = \frac{n_1 P}{c} [1 + R \cos 2\theta] + i \frac{n_1 P}{c} R \sin 2\theta - \frac{n_1 P}{c} T^2 e^{i\alpha} \left[\frac{1}{1 - R e^{i\beta}} \right]. \quad (3.7)$$

Da Fig. 3.3, é fácil verificar que $\alpha = 2\theta - 2r$ e que $\beta = \pi - 2r$. Assim, substituindo estes valores de α e β em (3.7), racionalizando o último termo e tomando por fim as partes real e imaginária, chegamos finalmente à

$$\begin{aligned} F_y = F_g &= \frac{n_1 P}{c} \left\{ R \sin 2\theta - \frac{T^2 [\sin(2\theta - 2r) + R \sin 2\theta]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\} \\ F_z = F_S &= \frac{n_1 P}{c} \left\{ 1 + R \cos 2\theta - \frac{T^2 [\cos(2\theta - 2r) + R \cos 2\theta]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ainda segundo a Fig. 3.3, a componente F_z de força aponta na direção do raio incidente, e é a *força de espalhamento* F_S para este único raio e, de forma similar, a componente F_y , que aponta perpendicularmente ao raio incidente, é a *força gradiente* F_g . Para feixes, devemos somar as contribuições, para a força total, de cada raio individual.

Observando (3.8), imediatamente podemos inferir que, no caso de um raio com incidência normal, $\theta = r = 0$, independente da polarização do feixe. Quando isto ocorre, a força gradiente torna-se nula, e somente a força de espalhamento atua na partícula, na direção de propagação do feixe. É a pressão de radiação. Conforme o ângulo de incidência aumenta, a força gradiente também exerce maior influência do deslocamento da partícula. A Fig. 3.4 mostra como ambas as forças (normalizadas à 1) dependem do ângulo de incidência, tanto para polarização perpendicular quanto para paralela. Uma grande abertura numérica ($\theta_{\max} = 70^\circ$) foi suposta, e fica evidente que os raios mais inclinados - próximos à borda da lente focalizadora – contribuem mais significativamente para uma armadilha óptica. Isso explica o uso de lentes com grandes aberturas numéricas.

Vamos supor que nosso feixe é focalizado e axialmente simétrico, e analisaremos dois casos: foco (aprisionamento) ao longo do eixo z e foco (aprisionamento) ao longo do eixo y .

3.2.1 Aprisionamento em z (Longitudinal)

Vamos supor que o foco f de nosso laser encontra-se ao longo do eixo z a uma distância S acima da partícula, como mostrado na Fig. 3.5(a). Nela, embora somente um raio seja mostrado explicitamente, mostramos as orientações das forças gradiente e de espalhamento de dois raios

simétricos em relação à normal da superfície esférica. Os raios novamente incidem sobre a partícula com um ângulo de incidência θ .

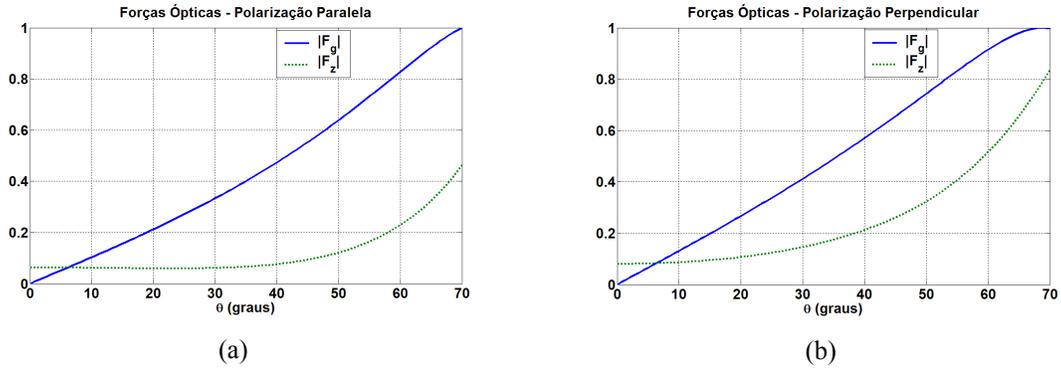


Fig. 3.4. (a) Polarização paralela. (b) Polarização perpendicular. Quanto maior o ângulo de incidência, mais significativa se torna a força gradiente. Assim, raios mais próximos ao eixo da lente focalizadora contribuem mais significativamente para o aprisionamento de partículas microscópicas, independente da polarização do feixe. A magnitude da força gradiente torna-se maior já para ângulos aproximadamente acima de 6° . A partícula de poliestireno possui índice de refração $n_2 = 1,61$, e é considerada imersa em água, onde $n_1 = 1,33$.

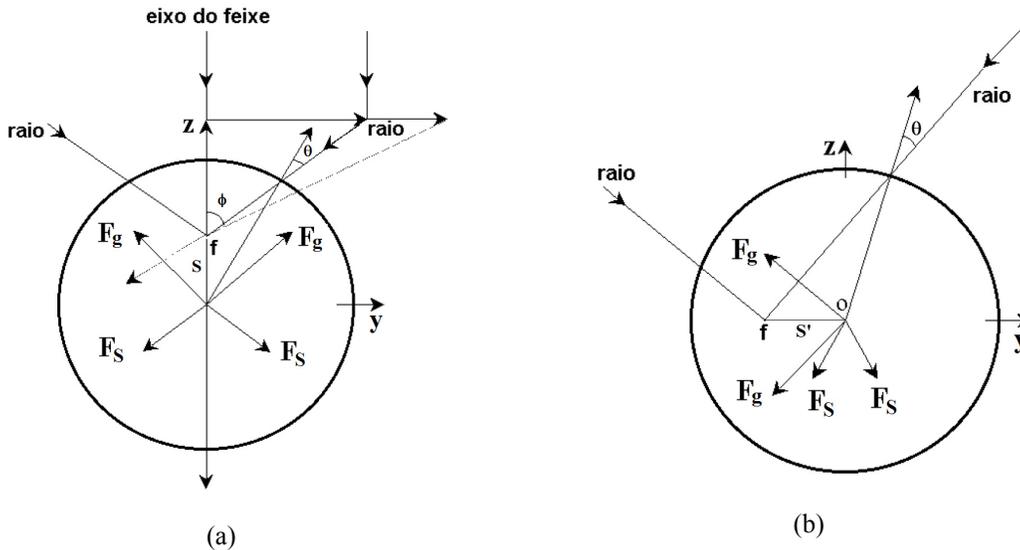


Fig. 3.5. (a) Aprisionamento longitudinal. A força gradiente resultante empurra a partícula na direção do foco, enquanto a força de espalhamento tende a afastá-la. Em geral, pinças ópticas trabalham com forças de espalhamento muito pequenas, o que resulta em uma força total direcionada para o foco, onde se encontra a região de maior intensidade. (b) Uma partícula encontra-se deslocada horizontalmente do foco. Neste caso, a força vetorial total direciona-se novamente para a região do foco.

Por razões de simetria, fica claro que a força resultante é axial¹⁵, já que as componentes perpendiculares ao eixo do feixe se anulam. Assim, cada raio contribuirá com uma componente de F_s em z de $F_{sz} = F_s \cos\phi$ e de F_g em z de $F_{gz} = -F_g \sin\phi$. É natural que, se S estiver abaixo do centro da esfera, F_{gz} inverterá o sinal, enquanto que F_{sz} continuará positiva. Assim, sendo a força de espalhamento, em uma primeira aproximação, bem menor que a força gradiente, a partícula invariavelmente tenderá para a região de maior intensidade de campo.

O gráfico da Fig. 3.6¹⁶ ilustra as forças de espalhamento, gradiente e total sobre uma partícula de poliestireno, como na Fig. 3.4, e mostra que a força total é tanto maior, em módulo, quanto mais afastada a esfera se encontra do foco. Valores negativos da distância S mostram valores negativos de força total, já que $|F_{gz}| > |F_{sz}|$. Se $S = 0$, a partícula está com seu centro exatamente sobre o foco do feixe. Entretanto, como já foi visto na Fig. 3.4, a força de espalhamento nunca será nula, tendendo a deslocá-la ligeiramente da posição $S = 0$. Assim, em equilíbrio, a partícula possui seu centro no ponto S_E .

3.2.2 Aprisionamento em y (radial)

Voltemos à Fig. 3.5 (b), que mostra uma esfera distante horizontalmente S' do foco do feixe. Embora para esta configuração devemos levar em conta a polarização do feixe incidente para calcularmos a força total, podemos inferir que a força gradiente F_g possuirá apenas uma componente F_{gy} na direção $-y$, e a partícula será atraída na direção do foco.

Entretanto, a força de espalhamento F_s terá uma componente em $F_{sz} +z$. Isso não significa que a partícula será afastada verticalmente do foco. Inicialmente, de fato, existirá este deslocamento vertical. Porém, como visto no item anterior, assim que isto ocorrer, uma força aparecerá tendendo a trazer a partícula ao ponto S_E da Fig. 3.6.

Portanto, no caso geral em que o foco não se encontra nem vertical nem horizontal ao centro da esfera, forças radiais e verticais, devidas principalmente à força gradiente atuante, forçarão à partícula a uma posição de equilíbrio. A armadilha óptica está feita.

¹⁵ Já que nosso feixe é axialmente simétrico e com eixo de propagação que passa pelo centro da esfera.

¹⁶ O resultado é expresso em termos dos fatores adimensionais Q_s , Q_g e $Q_t = (Q_g^2 + Q_s^2)^{1/2}$, onde $F = Q(n_1 P/c)$. O fator de qualidade Q depende da direção em que a força é medida. Para pinças ópticas, fatores de qualidade da ordem de $Q = 0,3$ podem ser obtidos perpendicularmente à direção de propagação do feixe. Note que $Q = 2$ para um raio refletido perpendicularmente por um espelho totalmente refletor.

Pode-se demonstrar que se a partícula tivesse um índice de refração menor do que o do meio em que se acha imersa, as forças gradientes tenderão a deslocá-la para regiões de menor intensidade do feixe. Assim, um feixe gaussiano será capaz de aprisionar tais partículas se operar em modos como, por exemplo, TEM_{10} , que nos fornece um anel de intensidade em cuja região central – eixo do feixe - possui um vale de intensidade. Partículas de índice de refração relativo $n = n_2/n_1 < 1$ podem ser capturadas em três dimensões se estiverem próximas ao foco. No anel, partículas com $n > 1$ também podem ser capturadas.

As forças para feixes gaussianos dentro do regime da óptica geométrica já foram exaustivamente determinadas [7,12,13]. Esses cálculos, usando a Lei de Snell e fórmulas de Fresnel para coeficientes de reflexão e transmissão, todavia, não levam em consideração partículas de tamanhos distintos, já que a frente de fase da onda incidente é considerada sem alteração de formato no foco.

Quando abrimos mão deste regime, cálculos mais envolventes se fazem presentes. Podemos tentar determinar tais forças via tensor de Maxwell, que é uma derivação da conservação de momento e de energia, ou via densidade de força eletromagnética.

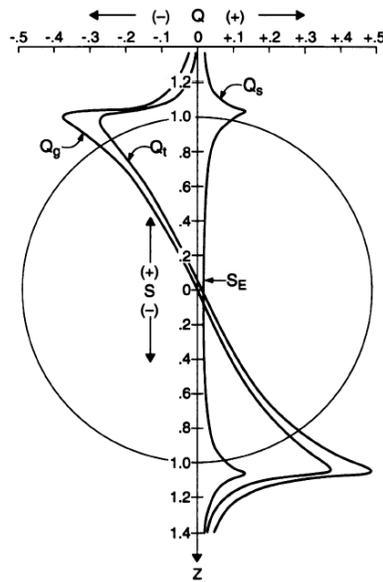


Fig. 3.6. Em equilíbrio, uma partícula com índice de refração relativo $n = 1.2$ encontra-se deslocada verticalmente de S_E , devido à força de espalhamento (proporcional ao fator Q_s) negativa que continua a existir mesmo quando foco e centro da esfera coincidem [7]. Q_g e Q são proporcionais à força gradiente e à $[Q_g^2 + Q_z^2]^{1/2}$, respectivamente.

A seguir, mostraremos uma derivação da força gradiente atuante em uma pinça óptica usando o segundo caso acima, considerando partículas dielétricas de formatos arbitrários em campos também arbitrários. A transferência de momento devido ao espalhamento não será considerado, haja visto que a força causada neste caso é bem menor do que a força gradiente em uma pinça óptica. Entretanto, uma expansão da teoria de Rayleigh-Debie incluindo espalhamentos de segunda ordem fornece resultados muito próximos aos constatados na prática, e será comentada ao final deste capítulo.

3.3 Forças em Pinças Ópticas: Regime de Rayleigh-Gans

Embora a óptica geométrica nos forneça considerações importantes acerca de partículas muito maiores que o comprimento de onda do feixe incidente, é no regime de Rayleigh que vamos encontrar soluções para as forças de espalhamento e gradiente para partículas dielétricas muito menores que este comprimento de onda¹⁷. Para tanto, consideremos a densidade de força eletromagnética para uma partícula dielétrica polarizável,

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \nabla] \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \times \mathbf{B}_m(\mathbf{r}, t). \quad (3.9)$$

onde \mathbf{E}_m e \mathbf{B}_m são, respectivamente, os campos elétrico e magnético em um meio homogêneo (no caso, o meio externo à partícula). A densidade de momento de dipolo, $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, relaciona-se com o campo elétrico \mathbf{E}_m através do tensor de polarizabilidade α ¹⁸:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_m \alpha \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t), \quad (3.10)$$

sendo ε_m é a permissividade do meio externo. Em 2001, Rohrbach e Stelzer [14] demonstraram que a densidade de força média no tempo (período de $T = 1/\omega$) poderia também ser expressa como a soma vetorial de forças gradiente e de espalhamento, dadas por

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_{\text{grad}}(\mathbf{r}) + \mathbf{f}_{\text{esp}}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha n_m}{2c} \nabla I_m(\mathbf{r}) + \alpha n_m \frac{\Delta m(\mathbf{r})}{\Delta t}. \quad (3.11)$$

¹⁷ Neste regime, supõe-se que, sendo $m = n_2/n_1$ o índice de refração relativo, a condição $4\pi a \ll \lambda/|m-1|$ é satisfeita.

¹⁸ No caso de uma partícula dielétrica isotrópica muito menor que o comprimento-de-onda em que $m = n_2/n_1$, $\alpha = 3(m^2 - 1)/(m^2 + 2)$.

Ao contrário do regime de óptica geométrica, fica clara a dependência da força gradiente do gradiente da intensidade do feixe incidente. Já a força de espalhamento depende claramente da taxa de variação da densidade de momento sendo, entretanto, em muitos casos práticos, bem menor que a força gradiente, com a captura óptica ocorrendo principalmente no plano perpendicular ao eixo do feixe.

Assim, vamos considerar a força total $\mathbf{F}_{\text{grad}}(\mathbf{r})$, que pode ser obtida integrando a parcela correspondente a densidade de força gradiente em (3.11) sobre todos os elementos de volume dV da partícula dielétrica, cuja área superficial possui versor unitário \mathbf{n}_A apontando para fora:

$$\mathbf{F}_{\text{grad}}(\mathbf{r}) = \iiint_V \mathbf{f}_{\text{grad}}(\mathbf{r}) dV' = \iiint_V \frac{\alpha n_m}{2c} \nabla I_m(\mathbf{r}') dV' = \frac{\alpha n_m}{2c} \oint_A I_m(\mathbf{r}') \mathbf{n}_A dA. \quad (3.12)$$

Soluções analíticas para a equação (3.12) podem ser obtidas para alguns casos, como veremos no capítulo seguinte para uma esfera dielétrica incidida por alguns feixes localizados de baixa ordem.

3.4 Óptica Geométrica: Pinças Ópticas para Partículas Metamateriais com $|n_2| > n_1$

Materiais com índice de refração negativo começaram a serem produzidos no final da década de 90 [19], embora as predições teóricas datem de 1968, com o trabalho pioneiro de Veselago [20]. Neste ano, Veselago propôs a existência hipotética de materiais com permissividade e permeabilidade negativas, e demonstrou teoricamente que o vetor de Poyting e a velocidade de fase apontam em sentidos opostos, o que nos leva à inversão da Lei de Snell (o ângulo refratado é negativo) e do efeito Čerenkov, entre outros.

Para os nossos propósitos, é interessante observar essa inversão da Lei de Snell, como mostra a figura 3.7. Quando a partícula é metamaterial, o raio refratado se encontra no mesmo semi-plano do raio incidente, ao contrário do caso convencional, que é no mesmo semi-plano do raio refletido.

Desta forma, podemos esperar diferenças sutis no cálculo das forças gradiente e de espalhamento no regime de óptica geométrica, e devemos esperar resultados diferentes da equação (3.8). Para um entendimento maior, faremos o cálculo destas duas forças inicialmente para um único raio, considerando posteriormente a força total, somatória da contribuição

individual de todos os raios do feixe, analisando as diferenças que ocorrem conforme mudamos a distância entre o foco do feixe e o centro de nossa partícula, quando aumentamos a relação entre os índices de refração $n = n_2/n_1$, e também quando mudamos a orientação angular entre o foco e o centro da partícula. Antes, porém, observemos a figura 3.8, que nos mostra o comportamento de dois raios incidentes e os respectivos raios refratados quando a partícula – no caso, uma esfera – é metamaterial ou não. No primeiro caso, $|n_2| > n_1$; no segundo, $|n_2| < n_1$.

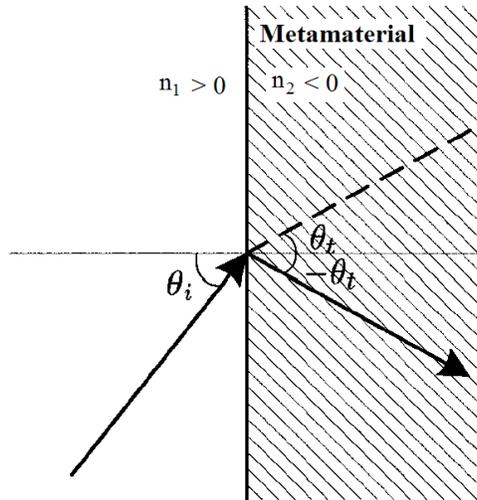


Fig. 3.7. Inversão da Lei de Snell para um meio metamaterial. O raio refratado encontra-se no mesmo semi-plano que o raio incidente (o semi-plano compreende a porção abaixo da normal à interface entre os dois meios). Esta inversão é responsável por fenômenos interessantes quando consideramos a captura óptica de uma partícula metamaterial.

Para $|n_2| > n_1$, há a possibilidade de captura óptica, seja a partícula metamaterial (raios em vermelho) ou não (raios em verde dentro da esfera). No caso de a partícula ser metamaterial, **uma força maior** atuará na partícula.

Para $|n_2| < n_1$, é impossível capturar uma partícula que não seja metamaterial em regiões de maior intensidade do feixe focalizado incidente. Aparentemente, entretanto, se a partícula for metamaterial, existe uma chance de captura, que dependerá das intensidades dos raios incidentes, em função do ângulo de incidência. Note que o raio 1 produz uma força que tende a deslocar a partícula na direção do foco.

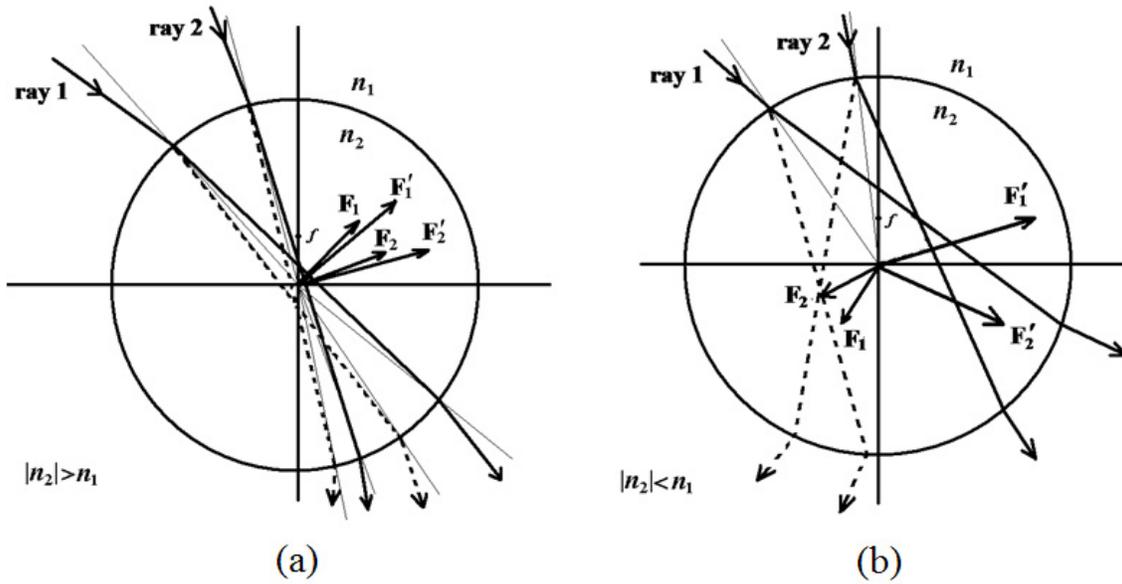


Fig. 3.8. Óptica geométrica para dois feixes incidentes. (a) $|n_2| > n_1$. (b) $|n_2| < n_1$. A variação de momento do feixe causa uma força na partícula. As forças F_1 e F_2 se referem às refrações de raios em uma partícula convencional (linhas sólidas), enquanto que F_1' e F_2' são para o caso metamaterial (linhas tracejadas).

3.4.1 Cálculo Teórico das Forças Gradiente e de Espalhamento para um Único Raio

Embora a figura 3.3 nos mostre os múltiplos raios refletidos e refratados, esta situação se altera para uma esfera metamaterial, como pode ser visto na figura 3.9 com algumas alterações das notações. Os novos múltiplos raios refletidos e refratados são devidos à negatividade da partícula metamaterial.

Ao contrário do que foi feito no capítulo anterior, adiantamos que todas as simulações foram feitas com raios circularmente polarizados¹⁹.

Da figura 3.9, notamos agora que $\alpha = 2\theta + 2r$ e $\beta = \xi = \pi + 2r$. Ao contrário de (3.4) e (3.5), teremos agora as novas forças em função de α e β ,

¹⁹ No cálculo das forças para este caso, considerou-se a raiz quadrada das forças, ao quadrado, de polarização paralela e perpendicular, i.e., $F_{circ} = \sqrt{F_{perp}^2 + F_{para}^2}$. Para polarização paralela, a refletividade é dada por $R = (\tan(\theta - r)/\tan(\theta + r))^2$ e, para polarização perpendicular, $R = (\sin(\theta - r)/\sin(\theta + r))^2$. Em ambos os casos, a transmissividade vale $T = 1 + R$. R e T são os coeficientes de Fresnel.

$$F_z = F_S = \frac{n_1 P}{c} \left[\frac{n_1 P R}{c} \cos(\pi + 2\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_1 P}{c} T^2 R^n \cos(\alpha + n\beta) \right], \quad (3.13)$$

e

$$F_y = F_g = 0 - \left[\frac{n_1 P R}{c} \sin(\pi + 2\theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_1 P}{c} T^2 R^n \sin(\alpha + n\beta) \right]. \quad (3.14)$$

Novamente no plano complexo, temos

$$F_{tot} = \frac{n_1 P}{c} [1 + R \cos 2\theta] + i \frac{n_1 P R}{c} \sin 2\theta - \frac{n_1 P}{c} T^2 \sum_{n=0}^{\infty} R^n e^{i(\alpha + n\beta)}, \quad (3.15)$$

e então:

$$F_{tot} = \frac{n_1 P}{c} [1 + R \cos 2\theta] + i \frac{n_1 P R}{c} \sin 2\theta - \frac{n_1 P}{c} T^2 e^{i\alpha} \left[\frac{1}{1 - R e^{i\beta}} \right]. \quad (3.16)$$

Notemos as inversões de sinais, que traduzem a existência de um ângulo de $2r$ entre os dois raios refratados quando a partícula é metamaterial, e quando não é. Efetuando os mesmos passos do item anterior, iremos encontrar, ao contrário de (3.8),

$$\begin{aligned} F_z = F_S = \frac{n_1 P}{c} Q_S &= \frac{n_1 P}{c} \left\{ 1 + R \cos 2\theta - \frac{T^2 [\cos(2\theta + 2r) + R \cos(2\theta)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\} \\ F_y = F_g = \frac{n_1 P}{c} Q_g &= \frac{n_1 P}{c} \left\{ R \sin 2\theta - \frac{T^2 [\sin(2\theta + 2r) + R \sin(2\theta)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Lembramos que os coeficientes de refletividade e de transmissividade são os mesmos, seja a esfera metamaterial ou não. Com isso, nas fórmulas para R e T devemos tomar cuidado para usarmos apenas os módulos dos índices de refração para quando os mesmo são negativos.

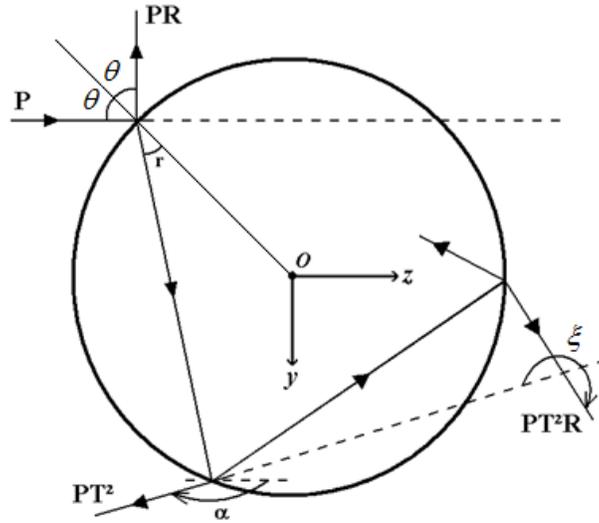


Fig. 3.9. Óptica geométrica para esfera metamaterial. A existência do “ângulo negativo” altera as forças ópticas para um raio incidente.

3.4.2 Fatores de Espalhamento (Q_z), Gradiente (Q_g) e Total (Q_{mag}): Variação em Função do Ângulo de Incidência²⁰

Suponha um raio com potência P , incidente conforme o sistema de coordenadas das Figs. 3.3 e 3.9, sofrendo, a partir de então, múltiplas reflexões. Tomemos como valores de simulação $n_2 = 1,61$ e $n_1 = 1,33$. As variações das forças de espalhamento e gradiente em função do ângulo de incidência para este raio aparecem na figura 3.10.

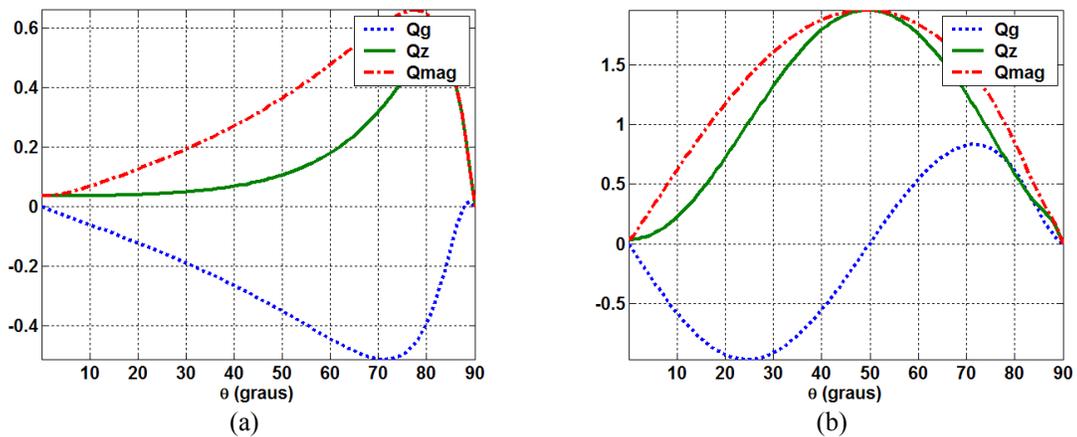


Fig. 3.10. Fatores Q_z , Q_g e Q_{mag} em função do ângulo de incidência θ . (a) Caso $n_2 > 0$ e $n_2 > n_1$. (b) Caso $n_2 < 0$ e $|n_2| > n_1$. Valores positivos indicam forças da direção positiva dos eixos da figura 3.9.

²⁰ Sendo $F_s = (n_1 P/c) Q_z$ e $F_g = (n_1 P/c) Q_g$, $Q_{mag} = \sqrt{Q_z^2 + Q_g^2}$.

Quando a partícula não é metamaterial, uma dificuldade pode existir para se obter uma boa armadilha para raios que incidem sob um ângulo θ de incidência acima de aproximadamente 80° , já que a magnitude da força de espalhamento é maior que a força gradiente. Além disso, vemos que Q_z é na direção $+z$, i.e., tendendo a afastar a partícula do foco.

No caso metamaterial, vemos que a força gradiente é maior que a força de espalhamento para um raio incidindo sob um ângulo menor que 25° . Para raios com $\theta > 50^\circ$, a força gradiente também tende a afastar a partícula do foco.

3.4.3 Forças Totais em Função do Ângulo γ ²¹

Vamos variar o ângulo γ entre o centro da esfera e o eixo de propagação do feixe, mostrado na figura 3.11. Supomos que a distância do foco ao centro da esfera de raio a é de $0,5a$.

Desta figura 3.11 vemos que, para $\gamma = 0$, o foco está ao longo do eixo z (valores negativos), e quando $\gamma = 90^\circ$ a partícula está ao longo do eixo x (valores negativos). Logo, no primeiro caso, existe uma força total tendendo a mover a partícula para baixo, na direção do foco. Quando $\gamma = 90^\circ$, a partícula sofre apenas uma força no sentido negativo de x . Os comportamentos para $\gamma = 180^\circ$ e 270° se justificam de forma análoga, sendo positivas pois direcionadas para o foco que se encontra em posições de z e x positivas.

Consideramos um vetor \mathbf{r} que aponta do foco ao centro da esfera. O feixe incidente possui o eixo z como eixo de propagação, e um raio incidente possui um ângulo de incidência σ em relação à normal à interface. δ representa o vetor distância entre o foco e o ponto na superfície da esfera onde o raio incide, e \mathbf{a} é o vetor raio. Note a troca dos eixos: agora, estamos no plano x - z .

Como era de se esperar, no caso metamaterial, tais forças são maiores (ver figura 3.12 onde forças de espalhamento estão em linhas tracejadas). Isto se justifica devido à maior variação de momento sofrida pelos raios incidentes, conforme mostram as figuras 3.10 (a) e (b).

²¹ A força total na esfera devido ao feixe é dada por $\mathbf{F} = \iint_{\theta \phi} \vec{F} \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\phi / \iint_{\theta \phi} \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\phi$, onde $\vec{F} = F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$. Para esta e as demais seções, o ângulo de incidência não é mais θ , mas σ , sendo θ e ϕ reservados para coordenadas esféricas.

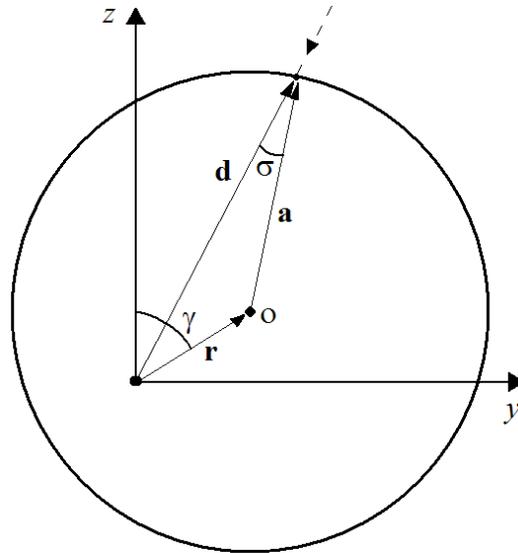


Fig. 3.11. Novo sistema de coordenadas. O ângulo γ entre o vetor posição do foco do feixe em relação ao centro da esfera pode variar, dando-nos uma medida da força total em x e z dependendo da posição do foco.

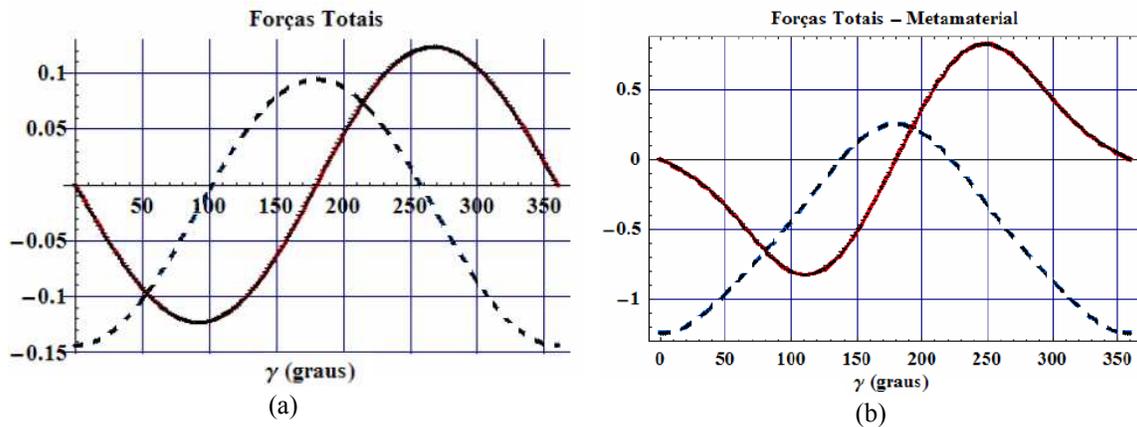


Fig. 3.12. Em sólido, força gradiente total em função do ângulo $0 \leq \gamma \leq 360^\circ$. Como era de se esperar observando a figura 3.8, no caso metamaterial as forças possuem magnitudes maiores.

Um fato interessante é a transição entre valores positivos e negativos da força de espalhamento. Para o caso não-metamaterial, a força total em z é positiva entre 100° e 260° , o que indica uma força não-atrativa entre foco e centro para $90^\circ < \gamma < 100^\circ$ e $260^\circ < \gamma < 270^\circ$. No caso metamaterial, entretanto, esta força não-atrativa ao longo de z ocorre para $90^\circ < \gamma < 135^\circ$ e $225^\circ < \gamma < 270^\circ$. Isto mostra que mesmo quando o centro da esfera e o foco estão no mesmo plano horizontal ($z = 0$), uma força de espalhamento tende a deslocar a partícula para uma posição fora do plano horizontal do foco, como previsto e demonstrado para uma partícula não-metamaterial

[7]. Este deslocamento, entretanto, pode ser maior no caso metamaterial. A força ao longo de x é simétrica.

3.4.4 Forças Totais em Função da Distância r (Foco-Centro)

Vamos variar a distância r entre o foco e o centro da esfera, para $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ e $\gamma = 180^\circ$ (respectivamente, figuras 3.13, 3.14 e 3.15).

As figuras 3.13 à 3.15 mostram as forças totais gradiente (em vermelho sólido) e de espalhamento (azul tracejado) para diferentes posições do foco, e variando-se a distância r deste para o centro da partícula, com $0 < r < a$, onde a é o raio da partícula. Nelas, temos em (a) o comportamento usual, em que a partícula possui índice de refração positivo e maior que o meio externo. Nota-se que, para $r = 0$, i.e., quando foco e centro da esfera coincidem, embora a força gradiente seja nula, existe sempre uma pequena força de espalhamento tendendo a empurrar a esfera. Isto se deve às reflexões dos raios incidentes, que transferem um momento para a partícula de forma a sempre empurrá-la. Esta característica pode ser vista tanto na figura 3.10(a) – a força de espalhamento nunca é nula, independente do ângulo de incidência -, quanto na figura 3.12(a) para $\gamma = 90^\circ$ ou 270° , situações em que o foco está no mesmo plano horizontal em que o centro da partícula.

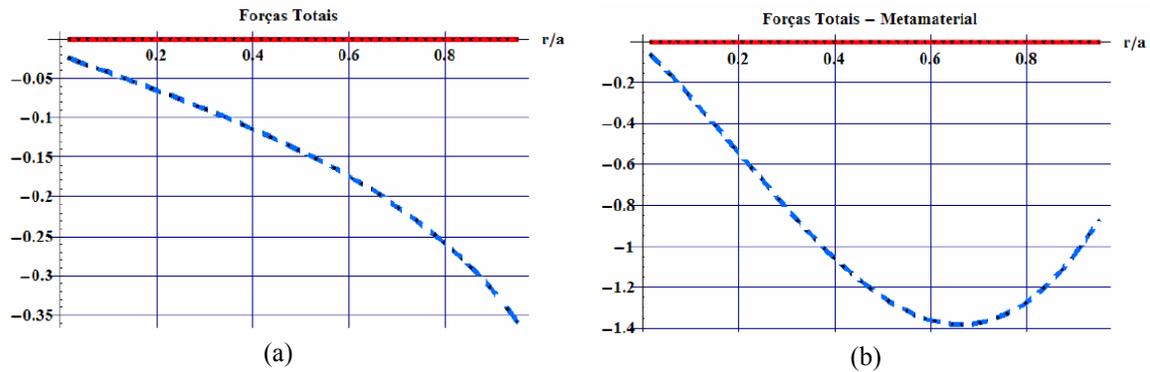


Fig. 3.13. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

Um detalhe importante é que, na figura 3.10 (a), a força de espalhamento é positiva pois está na mesma direção do raio incidente. Já para a figura 3.12 (a), a força total de espalhamento é negativa devido à escolha do sistema de coordenadas – vide figura 3.11 -, onde o eixo z está ao longo do eixo do feixe, porém em sentido oposto à sua propagação.

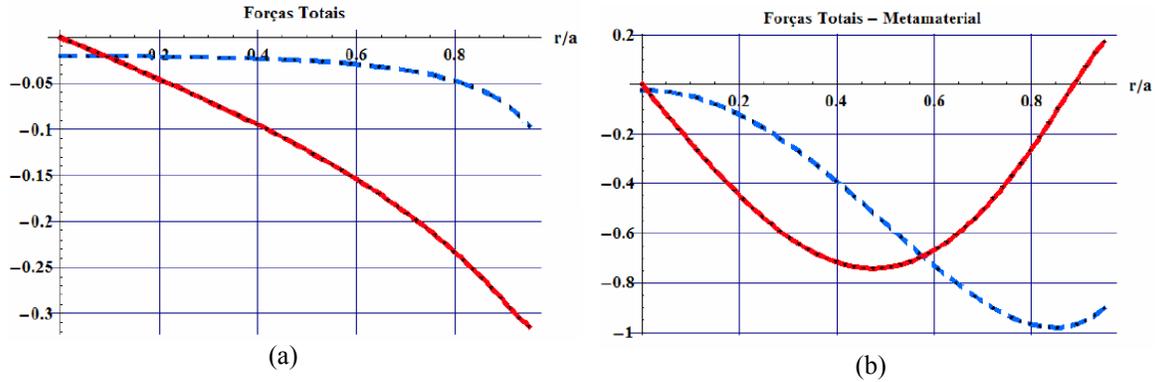


Fig. 3.14. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

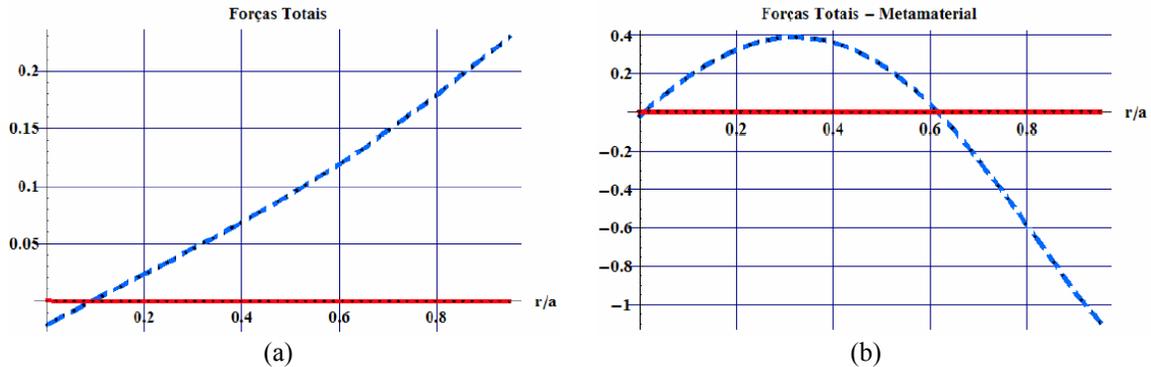


Fig. 3.15. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

Ainda sobre este caso em que a partícula não é metamaterial, exceto nos casos em que $\gamma = 0^\circ$ ou 180° , ambas as componentes da força total aumentam com o aumento da razão r/a , i.e., conforme o foco se distancia do centro da esfera. Isto é plausível quando se observa conjuntamente as figuras 3.10 (a) e 3.16. Nelas, vemos que, quanto maior a razão r/a , maior é a contribuição de raios com ângulo de incidência mais altos, o que eleva tanto a força gradiente quanto a força de espalhamento para cada raio individualmente. A figura 3.14 (a) mostra esta característica. Obviamente, conforme demonstrado por Ashkin [7], quando $r/a > 1$, a força total de aprisionamento diminui rapidamente, perdendo assim a característica de captura.

Entretanto, quando observamos as figuras 3.13 (b), 3.14 (b) e 3.15 (b), vemos que, para partículas metamateriais, o aprisionamento óptico pode apresentar certas características particulares até então não observadas. Comentemos uma à uma. Já adiantamos, todavia, que também neste caso a força total de espalhamento nunca será nula quando $r = 0$.

A figura 3.13 (b) possui uma força total gradiente nula, como era de se esperar para $\gamma = 0^\circ$. A força de espalhamento é negativa, o que proporciona o deslocamento vertical da partícula na direção do foco, que se encontra abaixo de seu centro. Porém, vemos que esta força começa a diminuir não para $r/a > 1$, mas já para $r/a > 0,65$, o que mostraria uma diminuição na eficácia do aprisionamento. Ainda assim, quando comparamos em termos de magnitude, a força total ainda é bem maior que para uma partícula usual. Portanto, em termos gerais, mesmo para $0,65 < r/a < 1$ como neste caso, a eficácia no aprisionamento de uma partícula metamaterial é maior, fato que já era previsto devido às magnitudes das forças individuais de espalhamento e gradiente serem maiores (vide figura 3.10).

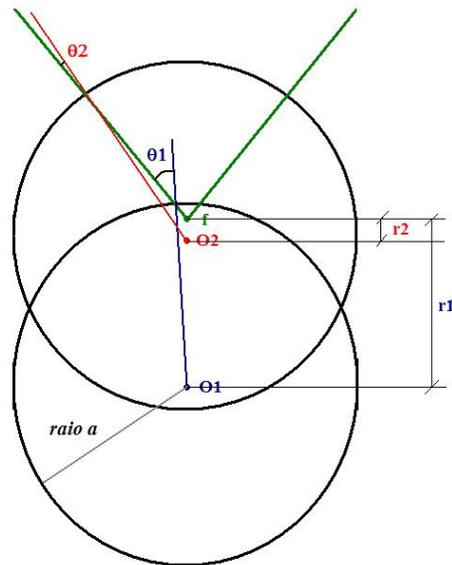


Fig. 3.16. Quanto maior a distância entre foco e e centro da partícula, maior é a contribuição de raios com ângulo de incidência maior para as forças totais de espalhamento e gradiente.

Vejam agora a figura 3.14 (b). Novamente, quando r/a tende a 1, a força de espalhamento decresce. Esta força, entretanto, é sempre negativa, evidenciando que a partícula não terá uma posição de equilíbrio no plano horizontal do foco, mas ligeiramente abaixo do mesmo. A força total gradiente atinge, para este caso, um pico máximo de $\approx -0,75$, sendo mais que o dobro do que observado para o caso usual quando $r/a \rightarrow 1$. Entretanto, esta maior eficiência se verifica apenas para $0 < r/a < 0,8$, sendo que, entre 0,8 e 0,9, o aprisionamento passa a ser mais ineficaz. Um fato curioso é a inversão da força total gradiente para $r/a > 0,9$. Isto significa que, para distâncias acima desta, as forças atuantes nas partículas passam a ser repulsivas, e a armadilha deixa de existir.

Um fato talvez ainda mais surpreendente pode ser visto na figura 3.15 (b), onde existe um ponto onde a força total torna-se nula. Este ponto - próximo de $r/a = 0,62$ -, todavia, é um ponto de equilíbrio instável, sendo que, para esta situação, quando o foco estiver sob um ângulo $\gamma = 180^\circ$ e a uma distância $r/a > 0,62$, a força total será de repulsão. Para distâncias menores, esta força será de atração, e o aprisionamento óptico ocorrerá.

Assim, as características de aprisionamento para uma partícula metamaterial são bem diferentes das observadas até então para partículas com índice de refração positivo, quando, em módulo, ambas possuem um índice de refração maior que o do meio externo. Entretanto, uma vez feita a captura de uma partícula metamaterial, tal captura será muito mais eficaz, já que as forças restauradoras são maiores. Podemos, já de antemão, esperar comportamentos interessantes para o caso em que $|n_2| < n_1$ para uma partícula metamaterial quando, para o caso usual, não há captura em regiões de alta intensidade, mas sim em regiões de baixa intensidade.

3.4.5 Forças Totais em Função da Relação $n = n_1/|n_2|$ (Índice Relativo)

Vamos variar a relação $n = n_1/n_2$ entre os índices de refração do meio externo n_1 , e da partícula n_2 , mantendo $r = 0,5a$, novamente para $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ e $\gamma = 180^\circ$. Os resultados para $0.5 < n < 1$ são, respectivamente, as figuras 3.17, 3.18 e 3.19.

O primeiro fato esperado é termos, para o caso não-metamaterial, uma força total nula quando $n = 1$, já que isto ocorre quando os índices de refração forem iguais, ou ainda, tratem-se de meios iguais. Essa verificação é automática nas figuras 3.17 (a), 3.18 (a) e 3.19 (a).

Quando a partícula é metamaterial, entretanto, a força não deve se anular quando $n = 1$, dependendo do ângulo γ , já que os raios transmitidos sofrerão desvio de ângulo. Sendo θ_i o ângulo incidente e θ_t o ângulo de transmissão, isto implica em $\theta_t = -\theta_i$, ao contrário do caso anterior em que $\theta_t = \theta_i$. Isto é verificado através das figuras 3.17 (b), 3.18 (b) e 3.19 (b), como é de se esperar.

Seja a esfera metamaterial ou não, da figura 3.18 vemos que a força gradiente será atrativa para uma relação $n > \sim 0,3$. Entretanto, a captura será tanto mais eficaz quanto mais os índices de refração do meio externo e da partícula forem próximos, em módulo ($n \approx 0,85$).

O fato de a força total não ser nula para $n = 1$ no caso metamaterial já era de se esperar, e a figura 3.20 mostra, em módulo, o comportamento equivalente à figura 3.10. Vale lembrar que nesta última figura tínhamos $n = 1.33/1.61 = 0,83$.

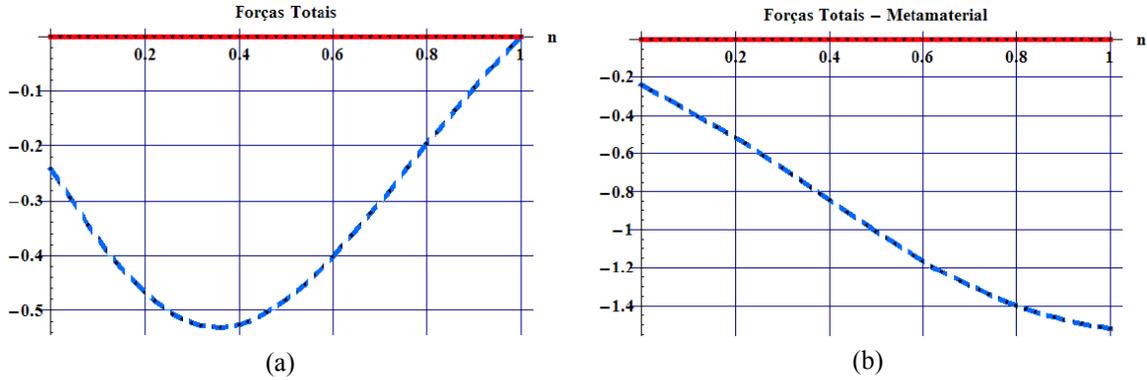


Fig. 3.17. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/|n_2|$ para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

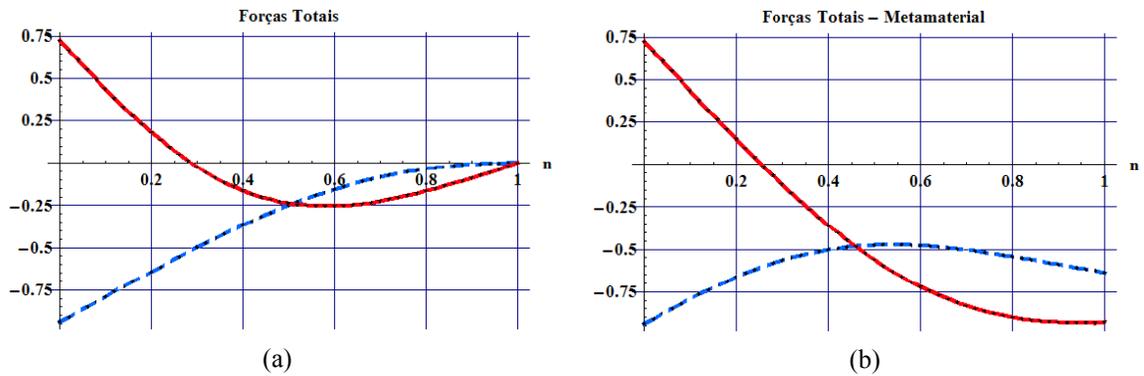


Fig. 3.18. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/|n_2|$ para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

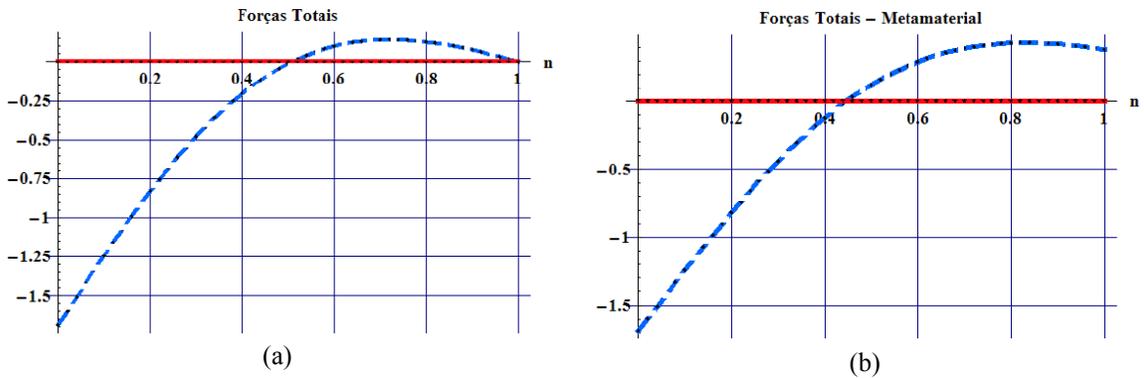


Fig. 3.19. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/|n_2|$ para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

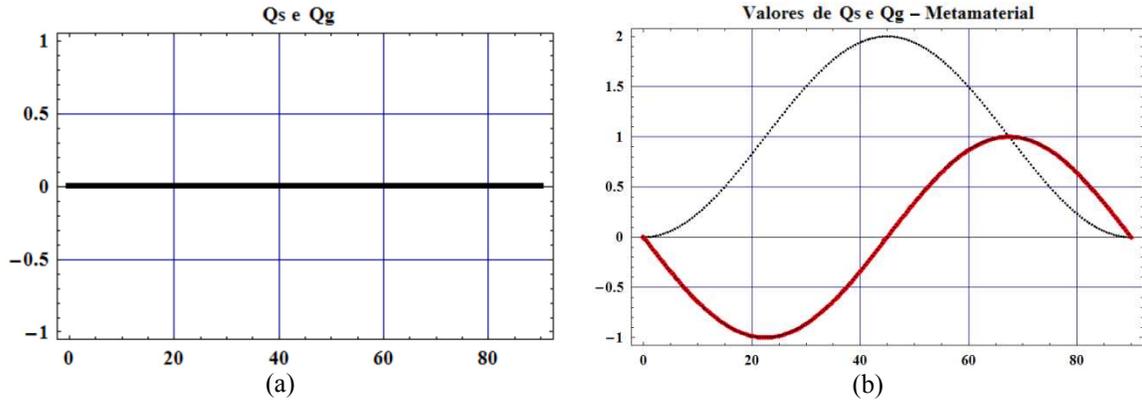


Fig. 3.20. Módulo das forças totais gradiente (vermelho sólido) e de espalhamento (tracejada) continuam a existir para (b) uma partícula metamaterial mesmo quando $n = 1$, o que não ocorre quando esta partícula possui índice de refração positivo.

3.5 Óptica Geométrica: Pinças Ópticas para Partículas Metamateriais com $|n_2| < n_1$

Quando o índice de refração da partícula é menor que o do meio, sabe-se que ela tende a ser deslocada para regiões de menor intensidade, devido ao gradiente da mesma. Porém, isto é válido apenas para partículas com índice de refração positivo (ϵ e μ positivos). Para partículas com índice de refração negativo, a situação deve ser vista com maior cautela.

A figura 3.8 (b) nos mostra a existência de ângulos de refração maiores que os ângulos de incidência e, se por um lado o equacionamento seja o mesmo que o caso anterior ($|n_2| > n_1$), obviamente os resultados para as equações (3.17) serão diferentes. Vejamos a figura 3.21, em que temos o comportamento equivalente à figura 3.10, supondo $|n_2| = 1,21$ e $n_1 = 1,33$.

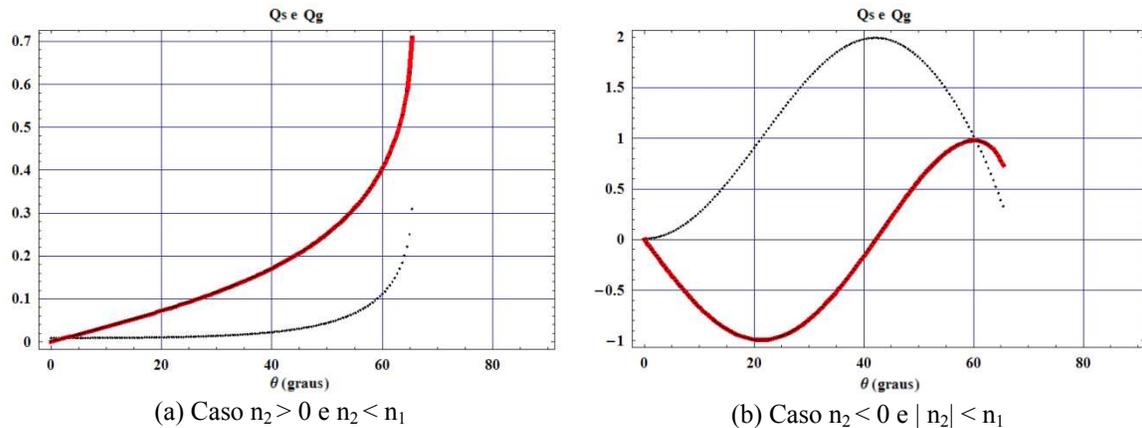


Fig. 3.21. Fatores $Q_S = Q_z$ e Q_g em função do ângulo de incidência θ . (a) Caso $n_2 > 0$ e $n_2 < n_1$. (b) Caso $n_2 < 0$ e $|n_2| < n_1$. Valores positivos indicam forças na direção positiva dos eixos da figura 3.9.

Para $n_2 > 0$, a força gradiente, que era negativa, torna-se positiva, evidenciando que este raio sempre implicará em uma força de repulsão. É de se esperar uma força total – tanto de espalhamento quanto gradiente – repulsiva.

Entretanto, quando a partícula é metamaterial, vemos que as forças se comportam de maneira análoga ao que foi visto para o caso em que $|n_2| > n_1$. Assim, o equivalente à figura 3.12 é ilustrado na figura 3.22.

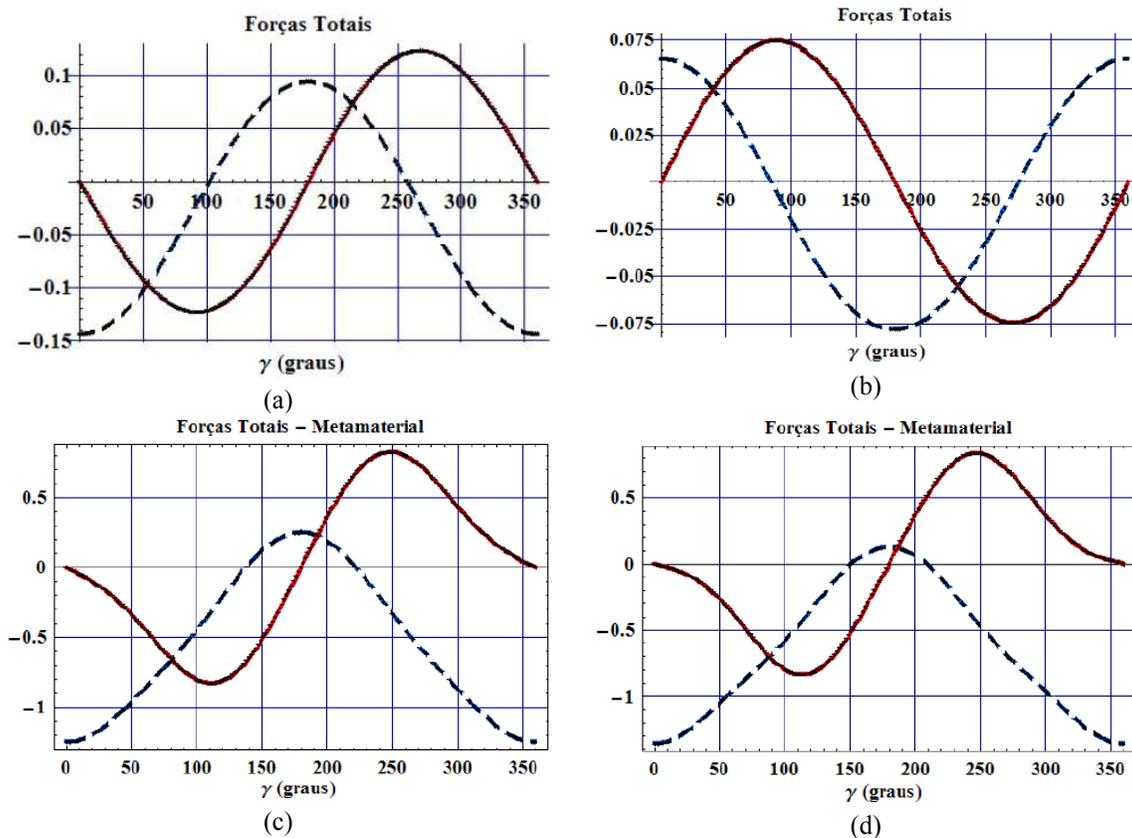


Fig. 3.22. Em vermelho sólido, força gradiente total em função do ângulo $0 \leq \gamma \leq 360^\circ$. No caso metamaterial, a força total gradiente continua sendo de atração mesmo quando o índice de refração da partícula é inferior ao do meio que o envolve. Em (a) e (b), o caso não-metamaterial para $n_2 > n_1$ e $n_2 < n_1$, respectivamente. Em (c) e (d), o equivalente para metamaterial.

Variando a distância entre o foco e o centro da esfera, temos o equivalente ao caso anterior, mostrado nas figura 3.23-3.25, em que repetimos os resultados das figuras 3.13, 3.14 e 3.15, para melhor visualização.

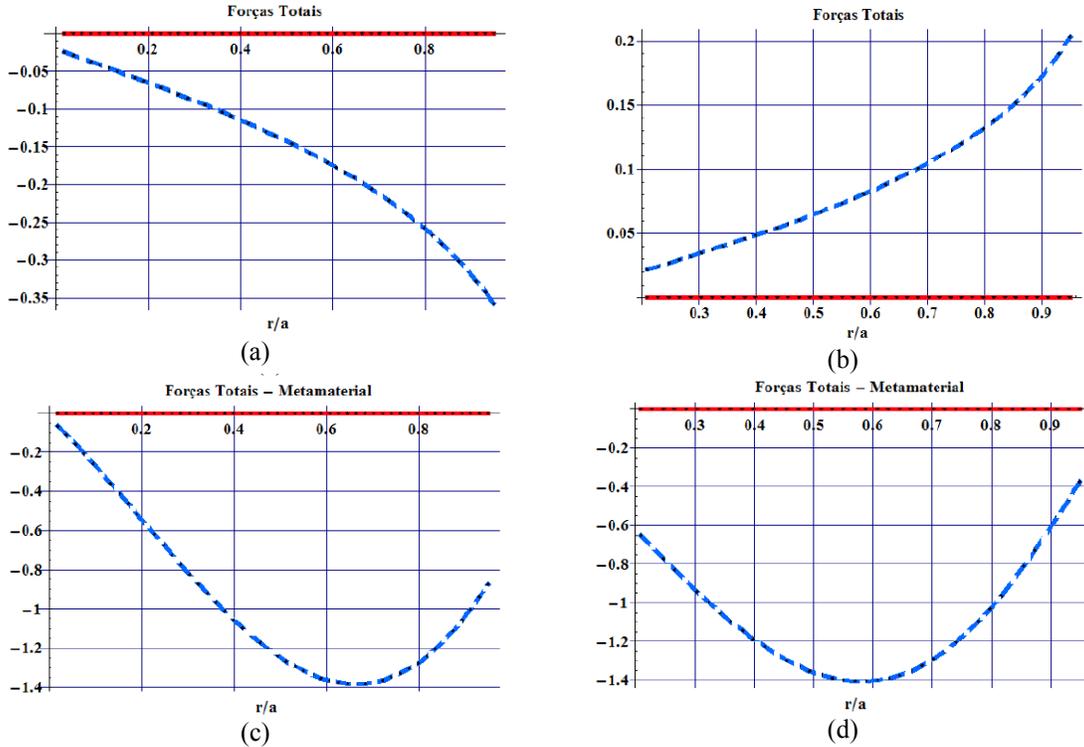


Fig. 3.23. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

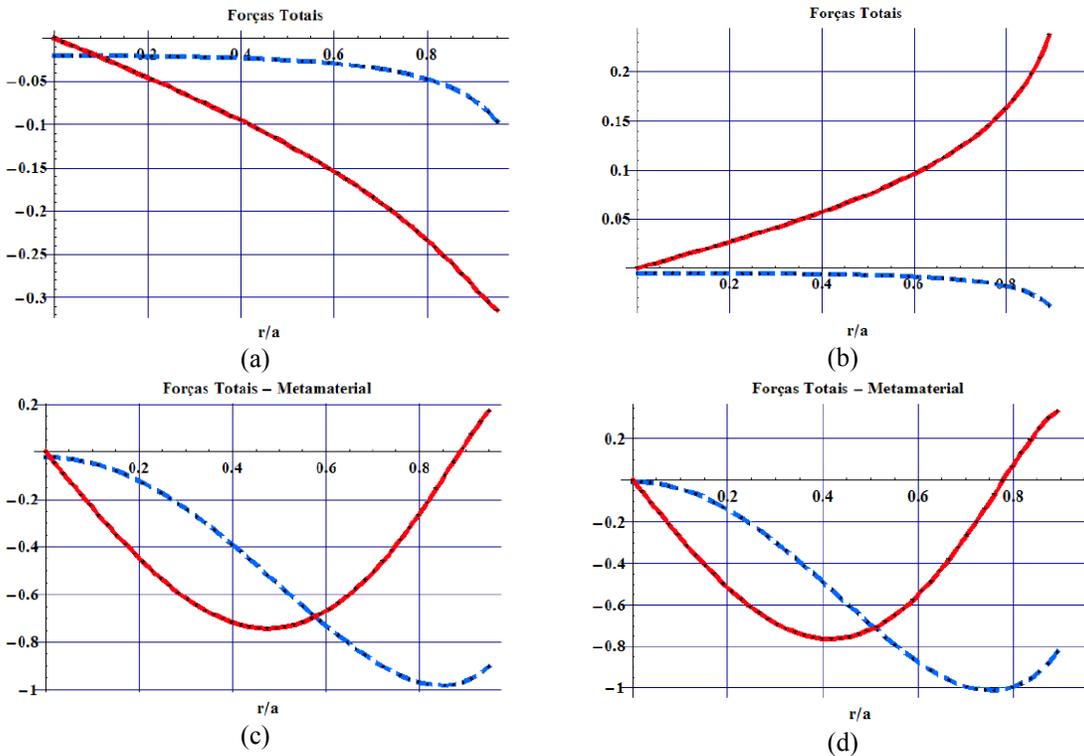


Fig. 3.24. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

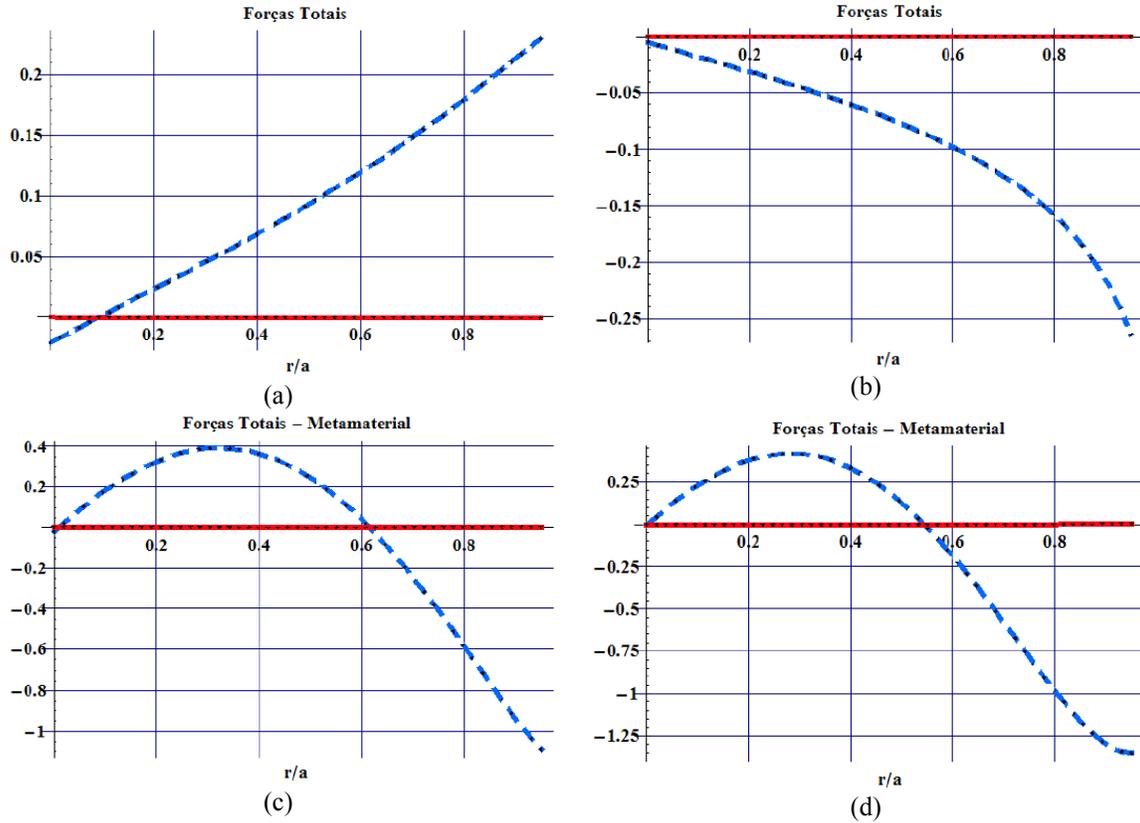


Fig. 3.25. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da distância entre foco e centro para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

Os gráficos para forças ópticas resultantes da variação do índice de refração relativo (figuras 3.17-3.19) são complementados para $n > 1$ nas figuras 3.26-3.28,

Por fim, um comentário sobre as figuras de 3.21 à 3.28, em que consideramos um índice de refração relativo maior que 1. Em todas elas, as forças gradiente e de espalhamento para o caso metamaterial não sofrem inversão de sinal quando passamos de $n > 1$ para $n < 1$, ao contrário de partículas com índice de refração positivo, cujas forças invertem o sinal, i.e., a força passa de atrativa para regiões de mais alta intensidade para atrativa para regiões de menor intensidade. Logo, estas figuras sugerem novas propriedades de captura, que deveriam ser verificadas na prática. Surge, entretanto a dificuldade tecnológica atual de se fabricar uma partícula metamaterial isotrópica e homogênea para as dimensões consideradas.

Entretanto, devemos lembrar que a própria fabricação de materiais com índice de refração negativo era algo impensável há anos atrás, e hoje uma vastidão de aplicações são potencialmente vislumbradas, militarmente ou academicamente, e até mesmo comercialmente.

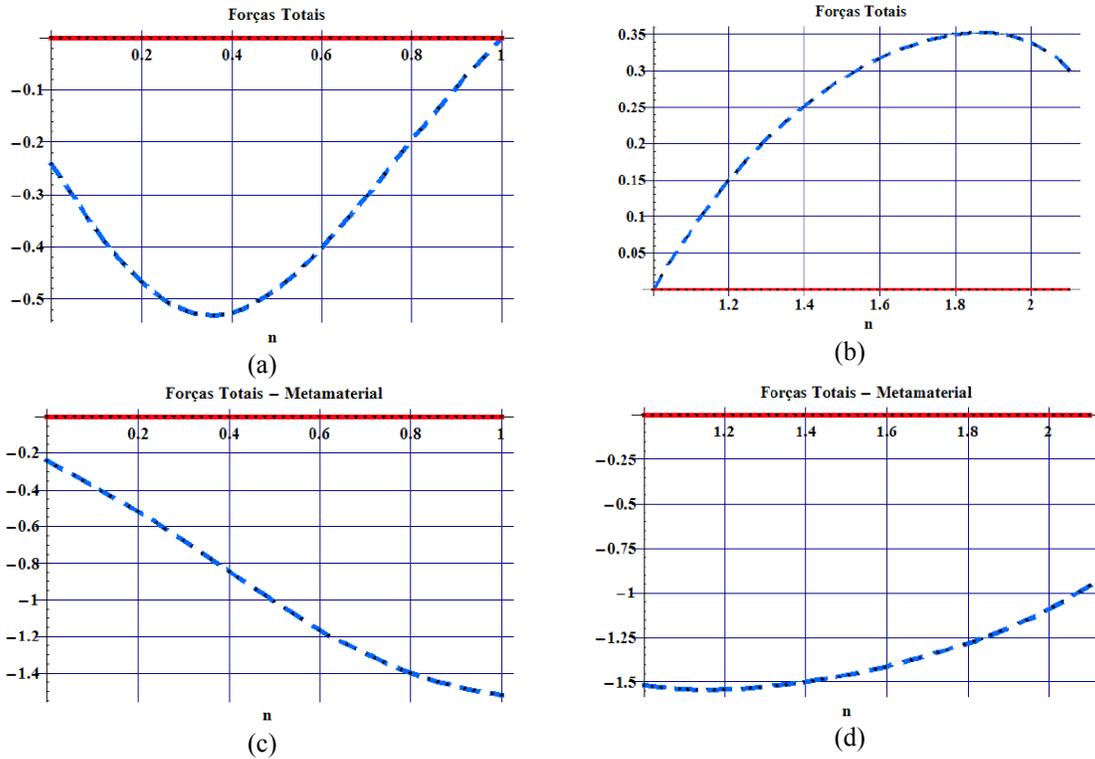


Fig. 3.26. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/n_2$ para $\gamma = 0^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

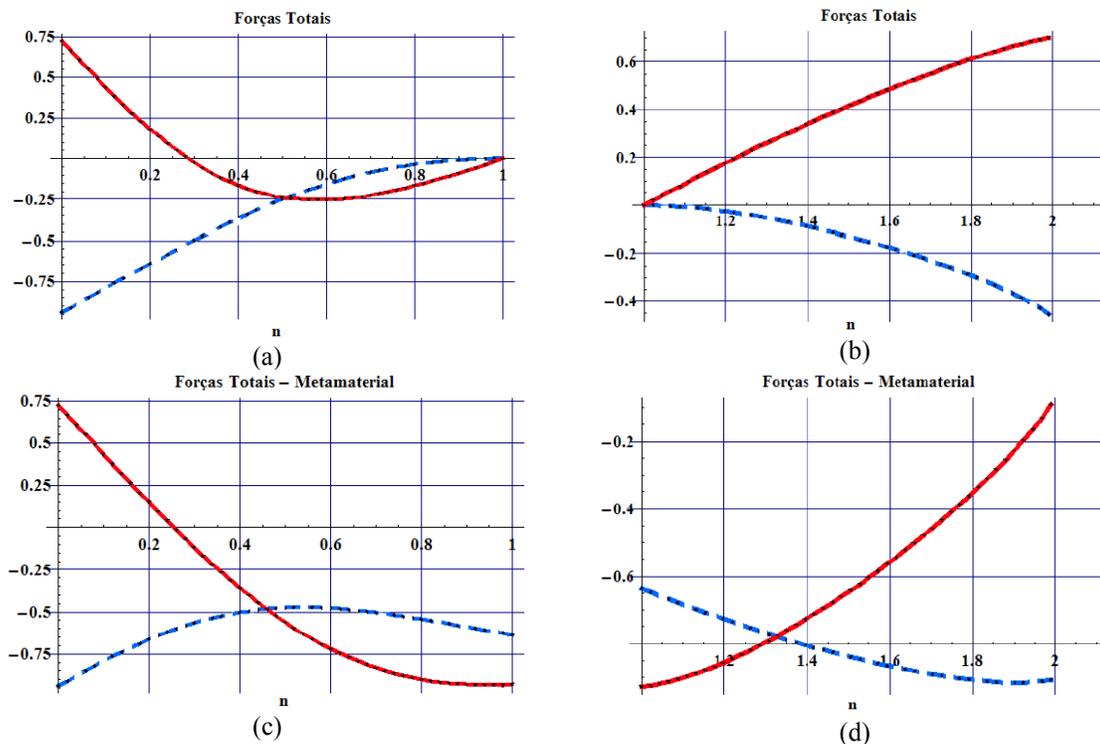


Fig. 3.27. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/n_2$ para $\gamma = 90^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

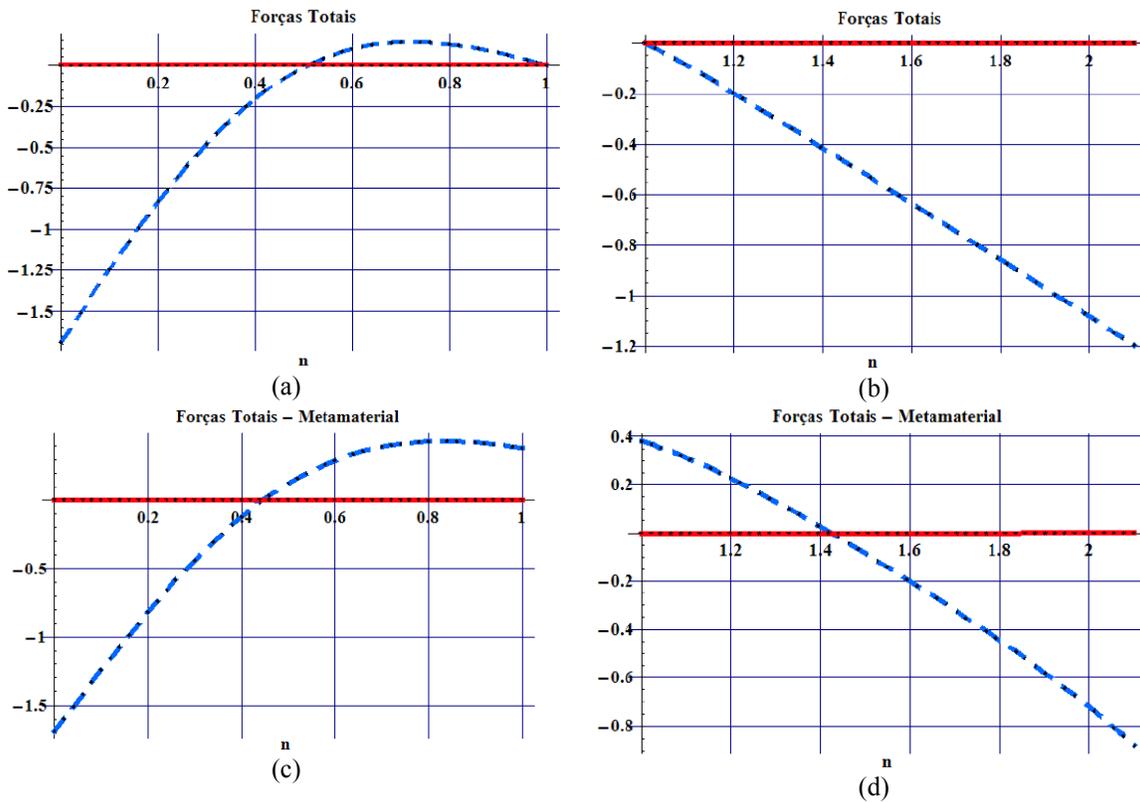


Fig. 3.28. Variação das forças totais de espalhamento e gradiente em função da relação $n = n_1/|n_2|$ para $\gamma = 180^\circ$. Em vermelho sólido, força total gradiente e, em azul tracejado, força de espalhamento.

3.6 Conclusões

Novas características de captura óptica foram demonstradas para partículas metamateriais, no regime de óptica geométrica. Até onde sabemos, trata-se do primeiro estudo sistemático da captura de tais partículas, e alguns dos resultados que aqui constam foram apresentados na forma de um pôster sob o título de “Optical Forces in the Ray Optics Regime for Metamaterial particles Trapped by Optical Tweezers”, no *Workshop on Frontiers in Nanophotonics and Plasmonics*, Guarujá/SP, 2007, e anexados no Apêndice D.

Um artigo, intitulado “Trapping Double-Negative Particles in the Ray Optics Regime Using Optical Tweezers with Focused Beams”, contendo os principais resultados deste capítulo, foi submetido à *Optics Express* para publicação e também se encontra no Apêndice D.

3.7 Referências Deste capítulo

- [1] J. C. Maxwell, “Treatise on Electricity and Magnetism”, vol. 2, p. 391, § 792 (Energy and Stress of Radiation), Oxford, 1873.
- [2] P. N. Lebedev, “Experimental examination of light pressure”, *Ann. Der Physik*, vol. 6, p. 433, 1901.
- [3] A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 24, pp. 154-159, 1970.
- [4] A. Ashkin e J. M. Dziedzic, “Optical levitation by radiation pressure”, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 19, pp. 283-285, 1971.
- [5] A. Ashkin e J. M. Dziedzic, “Optical levitation of liquid drops by radiation pressure”, *Science (Wash. DC)*, vol. 187, pp. 1073-1075, 1975.
- [6] A. Ashkin, J. Dziedzic, J. E. Bjorkholm e S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles”, *Opt. Lett.*, vol. 11, pp. 288-290, 1986.
- [7] A. Ashkin, “Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime”, *Biophys. J.*, vol. 61, pp. 569-582, 1992.
- [8] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics”, *Wiley, New York*, 2.ed., p. 236, 1975.
- [9] P. Mulser, “Radiation pressure on microscopic bodies”, *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, pp. 1814-1829, 1985.
- [10] A. Rohrbach e E. H. K. Stelzer, “Radiation pressure on microscopic bodies”, *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, pp. 1814-1829, 1985.
- [11] H. C. Van de Hulst, “Light Scattering by Small Particles”, Dover Press, New York, cap. 12, 1981.
- [12] M. C. Williams, “Optical Tweezers: Measuring Piconewton Forces”, Northeastern University, 2002.
- [13] R. Gussgard, T. Lindmo e I. Brevik, “Calculation of the trapping force in a strongly focused laser beam”, *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 9, no. 10, pp. 1922-1930, 1992.
- [14] A. Rohrbach e E. H. K. Stelzer, “Radiation pressure on microscopic bodies”, *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 2, pp. 1814-1829, 1985.
- [15] L. A. Ambrosio, M. Zamboni-Rached e H. E. Hernández-Figueroa, “Axicons in FSO Systems”, submetido ao IMOC’2007, jun/2007.

- [16] V. Garcés-Chavez, K. Volke-Sepulveda, S. Chavez-Cerda, W. Sibbett, and K. Dholakia, “Transfer of orbital angular momentum to an optically trapped low-index particle”, *Phys. Rev. A*, vol. 66, 063402, 2002.
- [17] K. Volke-Sepulveda, V. Garces-Chavez, S. Chavez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia, “Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam”, *J. Opt. B-Quantum Semicl. Opt.*, vol. 4, pp. S82-S89, 2002.
- [18] V. Garcés-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, “Optical levitation in a Bessel light beam”, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 4001-4003, 2004.
- [19] D. R. Smith et al., “Composite Medium with Simultaneously Permeability and Permittivity”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, no. 18, pp. 4184-4187, 2000.
- [20] V. G. Veselago, “The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ϵ and μ ”, *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509-514, 1968.

Capítulo 4

Teoria Eletromagnética para Pinças Ópticas

4.1 Introdução

São poucas as soluções exatas para problemas de espalhamento conhecidos. Entre elas, encontramos o problema de espalhamento por uma esfera, onde o campo (onda) incidente é representado em coordenadas esféricas através de uma expansão em vetores esféricos harmônicos, que são soluções vetoriais da equação de onda.

Estes vetores esféricos, por sua vez, podem ser obtidos se conhecermos uma solução escalar para a equação de onda em coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0, \quad (4.1)$$

onde (r, θ, ϕ) representa um ponto em relação ao centro (origem) de uma partícula esférica, como mostrado na figura 4.1, e k é o número de onda.

Por separação de variáveis, supomos uma solução do tipo $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ que, quando substituída em (4.1), e após alguma álgebra, leva-nos às seguintes equações:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [(kr)^2 - n(n+1)]R = 0 \quad (4.4)$$

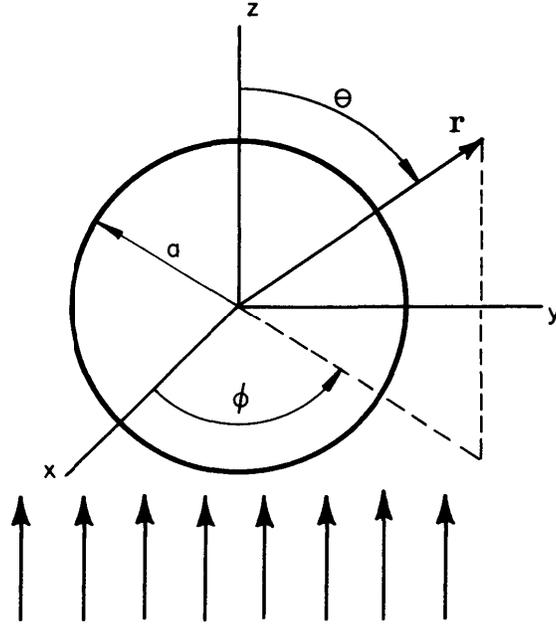


Fig. 4.1. Coordenadas esféricas. O centro da partícula de raio a está localizado na origem do sistema de coordenadas.

As soluções linearmente independentes de (4.2) são as funções seno e cosseno, enquanto que para (4.3) as soluções são os polinômios associados de Legendre de primeira espécie, $P_n^m(\cos \theta)$, de grau m ($0, 1, 2, \dots$) e ordem n ($m, m+1, \dots$). Quando $m = 0$, estes polinômios se reduzem às funções de Legendre $P_n(\cos \theta)$ [1]. A equação para a parte radial nos leva às funções esféricas de Bessel, $z_n(kr) \equiv z_n(\rho)$ ²², de forma que a solução $\psi(r, \theta, \phi)$ para (4.1) será dada por

$$\begin{cases} \psi_{emn} = \cos(m\phi)P_n^m(\cos \theta)z_n(\rho) \\ \psi_{omn} = \sin(m\phi)P_n^m(\cos \theta)z_n(\rho) \end{cases} \quad (4.5)$$

sendo que os sub-índices “e” e “o” representam soluções pares e ímpares envolvendo, respectivamente, os termos cosseno e seno para a dependência azimutal), tal que $\psi_{mn} = \psi_{emn} + i\psi_{omn} = Y_{nm}(\theta, \phi)z_n(\rho)$, com $Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi}$ representando os harmônicos esféricos.

²² A escolha adequada das funções esféricas de Bessel dependerá da interpretação física do problema. No caso, se os campos são incidentes, espalhados ou internos à partícula.

4.2 Vetores Harmônicos Esféricos

Os vetores esféricos harmônicos \mathbf{M} e \mathbf{N} gerados por ψ_{emn} e ψ_{omn} devem satisfazer à equação de onda vetorial em coordenadas esféricas [2]. Assim, teremos²³:

$$\mathbf{M}_{emn} = \nabla \times (\mathbf{r} \psi_{emn}), \quad \mathbf{M}_{omn} = \nabla \times (\mathbf{r} \psi_{omn}) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{N}_{emn} = \frac{\nabla \times (\mathbf{M}_{emn})}{k}, \quad \mathbf{N}_{omn} = \frac{\nabla \times (\mathbf{M}_{omn})}{k} \quad (4.7)$$

Assim, para \mathbf{M}_{emn} e \mathbf{M}_{omn} ²⁴:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{emn} &= \nabla \times (\mathbf{r} \psi_{emn}) = \mathbf{r}(0) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{k}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\rho}{k} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \right) \right] \\ &\quad - \hat{\boldsymbol{\phi}} \left[\frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho}{k} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \right) \right], \\ \mathbf{M}_{emn} &= -\frac{m}{\sin \theta} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos(m\phi) \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{omn} &= \nabla \times (\mathbf{r} \psi_{omn}) = \mathbf{r}(0) + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{k}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\rho}{k} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \right) \right] \\ &\quad - \hat{\boldsymbol{\phi}} \left[\frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho}{k} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \right) \right], \\ \mathbf{M}_{omn} &= \frac{m}{\sin \theta} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin(m\phi) \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] z_n(\rho) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Para as componentes radiais de \mathbf{N}_{emn} e \mathbf{N}_{omn} :

$$\mathbf{N}_{emn}|_r = \frac{1}{k} \nabla \times (\mathbf{M}_{emn})|_r = \frac{1}{k} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{d}{d\theta} (\sin \theta \mathbf{M}_{emn}|_\phi) - \frac{d}{d\phi} (\mathbf{M}_{emn}|_\theta) \right].$$

Sendo $d(\sin \theta \mathbf{M}_{emn}|_\phi)/d\theta = -\cos(m\phi) z_n(\rho) d[\sin \theta dP_n^m(\cos \theta)/d\theta]/d\theta$ e

$$d\mathbf{M}_{emn}|_\theta/d\phi = -(m^2/\sin \theta) \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho):$$

²³ Ver Apêndice A para maiores detalhes.

²⁴ Em coordenadas esféricas, $\nabla \times \mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \hat{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right] + \hat{\boldsymbol{\phi}} \left[\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$

$$\mathbf{N}_{emn}|_r = \frac{1}{k} \frac{1}{r \sin \theta} (-\cos(m\phi)z_n(\rho)) \left[\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) \right].$$

Porém, os polinômios associados de Legendre são soluções da seguinte equação diferencial [3]:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin \theta} P_n^m(\cos \theta) = -n(n+1) \sin \theta P_n^m(\cos \theta), \quad (4.10)$$

o que, substituído na equação anterior, após algumas simplificações, fornece-nos

$$\mathbf{N}_{emn}|_r = n(n+1) \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho}. \quad (4.11)$$

Observando a semelhança entre (4.8) e (4.9), concluímos, de forma análoga, que, para a paridade ímpar:

$$\mathbf{N}_{omn}|_r = n(n+1) \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho}. \quad (4.12)$$

Para as componentes $\mathbf{N}_{emn}|_\theta$ e $\mathbf{N}_{omn}|_\theta$, efetuando os rotacionais, $\mathbf{N}_{emn}|_\theta = (1/kr^2 \sin \theta) \partial \mathbf{M}_{emn}|_\phi / \partial r$ e $\mathbf{N}_{omn}|_\theta = (1/kr^2 \sin \theta) \partial \mathbf{M}_{omn}|_\phi / \partial r$. Assim, efetuando as derivadas, vamos encontrar

$$\mathbf{N}_{emn}|_\theta = \cos(m\phi) \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)]. \quad (4.13)$$

e

$$\mathbf{N}_{omn}|_\theta = \sin(m\phi) \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)]. \quad (4.14)$$

Por fim, temos as seguintes componentes em ϕ de \mathbf{N} :

$$\mathbf{N}_{emn}|_\phi = -\frac{m}{\sin \theta} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)]. \quad (4.15)$$

e

$$\mathbf{N}_{omn}|_\phi = \frac{m}{\sin \theta} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)]. \quad (4.16)$$

Logo, os vetores harmônicos esféricos \mathbf{N} são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{emn} = n(n+1)\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)\frac{z_n(\rho)}{\rho}\hat{\mathbf{r}} + \cos(m\phi)\frac{d}{d\theta}[P_n^m(\cos\theta)]\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho z_n(\rho)]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ - \frac{m}{\sin\theta}\sin(m\phi)P_n^m(\cos\theta)\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho z_n(\rho)]\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{omn} = n(n+1)\sin(m\phi)P_n^m(\cos\theta)\frac{z_n(\rho)}{\rho}\hat{\mathbf{r}} + \sin(m\phi)\frac{d}{d\theta}[P_n^m(\cos\theta)]\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho z_n(\rho)]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ + \frac{m}{\sin\theta}\cos(m\phi)P_n^m(\cos\theta)\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho z_n(\rho)]\hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

4.3 Expansão de Uma Onda Arbitrária em Harmônicos Esféricos Vetoriais

Uma vez obtidos os vetores \mathbf{M} e \mathbf{N} , vamos expandir um campo \mathbf{E}_i incidente, arbitrário:

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n,m}^{\infty} [B_{emn}\mathbf{M}_{emn} + B_{omn}\mathbf{M}_{omn} + A_{emn}\mathbf{N}_{emn} + A_{omn}\mathbf{N}_{omn}]. \quad (4.19)$$

Os coeficientes B_{emn} , B_{omn} , A_{emn} e A_{omn} podem ser obtidos sabendo-se que os vetores esféricos harmônicos obedecem às seguintes condições de ortogonalidade:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{M}_{em'n'} \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad \forall m, m', n, n' \quad (4.20.a)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{M}_{emn} \cdot \mathbf{M}_{em'n'} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad m = 0, n \neq n' \quad (4.20.b)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{M}_{omn} \cdot \mathbf{M}_{om'n'} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad m = 0, n \neq n' \quad (4.20.c)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{N}_{emn} \cdot \mathbf{N}_{em'n'} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad m = 0, n \neq n' \quad (4.20.d)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{N}_{omn} \cdot \mathbf{N}_{om'n'} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad m = 0, n \neq n' \quad (4.20.e)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{M}_{om'n'} \cdot \mathbf{N}_{omn} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad \forall m, m', n, n' \quad (4.20.f)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{N}_{om'n'} \cdot \mathbf{N}_{emn} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad \forall m, m', n, n' \quad (4.20.g)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{M}_{em'n'} \cdot \mathbf{N}_{emn} \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad \forall m, m', n, n' \quad (4.20.h)$$

Assim, multiplicando (4.19) por $\mathbf{M}_{em'n'} \sin\theta$ e integrando em θ e ϕ :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{em'n'} \sin\theta d\theta d\phi = \sum_{n,m}^{\infty} B_{emn} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{M}_{emn} \cdot \mathbf{M}_{em'n'} \sin\theta d\theta d\phi.$$

As propriedades de ortogonalidade de $\cos m\phi$ e $\sin m\phi$ implicam que todos os vetores harmônicos de diferentes ordens m são mutuamente ortogonais. Dessa consideração, e de (4.20.b),

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi = B_{emn} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi .$$

$$\therefore B_{emn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} . \quad (4.21)$$

De forma análoga, encontramos os coeficiente B_{omn} , A_{omn} e A_{emn} :

$$B_{omn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (4.22) \quad A_{emn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (4.23)$$

$$A_{omn} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} \quad (4.24)$$

4.4 Cálculo de A_{emn} , A_{omn} , B_{emn} e B_{omn} para Ondas Planas.

As equações (4.21)-(4.24) são válidas para qualquer tipo de campo incidente, e nosso trabalho se resumirá em obtê-los para os casos em que o campo \mathbf{E}_i representa uma onda plana, um feixe gaussiano, ou ainda um feixe localizado ordinário²⁵. Independente do tipo de onda com a qual lidamos, é freqüente trabalharmos com uma onda se propagando na direção z positiva, polarizada em x . Para uma onda plana, portanto, temos o campo incidente

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{ikz} \hat{\mathbf{x}} = E_0 e^{ikr \cos \theta} (\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}), \quad (4.25)$$

²⁵ Vale lembrar que o feixe localizado (ou feixe de Bessel) ordinário consiste de um padrão transversal de intensidade dado por uma função de Bessel $J_0(\cdot)$, que possui simetria azimutal. Feixes localizados de ordem superior apresentam complexidades matemáticas que serão vistas mais adiante. Estas complexidades fazem com que adotemos métodos numéricos para determinação dos coeficientes A e B do campo incidente, bem como dos seus respectivos para os campos espalhado e dentro da esfera (partícula a ser aprisionada).

4.4.1 B_{emn} e A_{omn}

Substituindo (4.25) em (4.21) e usando (4.8):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi &= - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \cos \phi E_0 e^{ikr \cos \theta} \frac{m}{\sin \theta} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \sin \theta d\theta d\phi \\
 &+ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \phi E_0 e^{ikr \cos \theta} \left(\cos(m\phi) \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] z_n(\rho) \right) \sin \theta d\theta d\phi \\
 &= -E_0 z_n(\rho) \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin(m\phi) d\phi \int_0^\pi m \cos \theta e^{ikr \cos \theta} P_n^m(\cos \theta) d\theta \\
 &+ E_0 z_n(\rho) \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos(m\phi) d\phi \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] \sin \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Como $\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin(m\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos(m\phi) d\phi = 0$ para qualquer m ,

$$B_{emn} = 0, \text{ para qualquer } m \text{ e } n. \quad (4.26)$$

Para A_{omn} , podemos reconhecer novamente dependências azimutais da forma $\cos \phi \sin m\phi$ e $\sin \phi \cos m\phi$ as quais, quando integradas, nos levam a

$$A_{omn} = 0, \text{ para qualquer } m \text{ e } n. \quad (4.27)$$

4.4.2 B_{omn} e A_{emn}

Para calcular B_{omn} , determinemos primeiramente o numerador de (4.22) fazendo o produto escalar de \mathbf{E}_i com \mathbf{M}_{omn} :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} &= \left(E_0 e^{ikr \cos \theta} \cos \theta \cos \phi \right) \left(\frac{m}{\sin \theta} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \right) + \\
 &+ \left(E_0 e^{ikr \cos \theta} \sin \phi \right) \left(\sin(m\phi) \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] z_n(\rho) \right) \\
 &= E_0 z_n(\rho) \left\{ \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} e^{ikr \cos \theta} P_n^m(\cos \theta) \right) (\cos \phi \cos(m\phi)) + \left(e^{ikr \cos \theta} \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] \right) (\sin \phi \sin(m\phi)) \right\}
 \end{aligned}$$

Ao integrarmos sobre o ângulo sólido $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, as integrais de $\cos \phi \cos(m\phi)$ e $\sin \phi \sin(m\phi)$ nos fornecem um fator π apenas quando $m = 1$, sendo nulas caso contrário. Em θ , teremos as seguintes integrais:

$$\int_0^\pi \cos \theta e^{ikr \cos \theta} P_n^m(\cos \theta) d\theta d\phi \quad \text{e} \quad \int_0^\pi \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] d\theta d\phi$$

Assim:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{o1n} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= E_0 z_n(\rho) \pi \int_0^\pi \left(\cos \theta P_n^1(\cos \theta) + \sin \theta \frac{d}{d\theta} [P_n^1(\cos \theta)] \right) e^{ikr \cos \theta} d\theta \\ &= E_0 z_n(\rho) \pi \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta P_n^1(\cos \theta) \right] e^{ikr \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

As funções associadas de Legendre P_n^m estão associadas com a m -ésima derivada do polinômio de Legendre $P_n(\cos \theta)$: $P_n^m(\cos \theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} d^m P_n(\cos \theta) / d \cos \theta^m$. Para $m = 1$, $P_n^1(\cos \theta) = \sin \theta dP_n(\cos \theta) / d \cos \theta = -dP_n(\cos \theta) / d\theta$. Logo,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi = -E_0 z_n(\rho) \pi \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \right] e^{ikr \cos \theta} d\theta$$

Os polinômios de Legendre são soluções de (4.3) para $m = 0$, com $\Theta(\theta) = P_n(\cos \theta)$ e, portanto, podemos simplificar a integral acima, reescrevendo-a como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi = n(n+1) \pi E_0 z_n(\rho) \int_0^\pi P_n(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

Da tabela de integrais, vamos encontrar $\int_0^\pi P_n(\cos \theta) e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{2j_n(kr)}{i^{-n}}$ e finalmente²⁶,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{o1n} \sin \theta d\theta d\phi = 2n(n+1) \pi \frac{E_0 z_n(\rho) j_n(\rho)}{i^{-n}}$$

Para o denominador de (4.22), teremos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z_n(\rho) z_{n'}(\rho) (mm' \cos(m\phi) \cos(m'\phi)) \left(\frac{P_n^m(\cos \theta) P_{n'}^{m'}(\cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta d\phi \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z_n(\rho) z_{n'}(\rho) (\sin(m\phi) \sin(m'\phi)) \left(\frac{d}{d\theta} [P_n^m(\cos \theta)] \frac{d}{d\theta} [P_{n'}^{m'}(\cos \theta)] \right) \sin \theta d\theta d\phi \end{aligned}$$

²⁶ A função esférica de Bessel $j_n(\rho)$ é dada por $j_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_n(\rho)$.

Novamente, as integrais em ϕ nos impõem $m = m'$ e um fator multiplicativo π . Como $m = 1$ para o numerador de (4.22), aqui também teremos $m = m' = 1$. Logo

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi = \pi z_n(\rho) z_{n'}(\rho) \int_0^\pi \left(\frac{P_n^1(\cos \theta) P_{n'}^1(\cos \theta)}{\sin \theta} + \frac{d}{d\theta} [P_n^1(\cos \theta)] \frac{d}{d\theta} [P_{n'}^1(\cos \theta)] \sin \theta \right) d\theta$$

De (4.3) para $\Theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta) \equiv P_n^m$, após alguma manipulação algébrica, vamos encontrar que

$$2 \sin \theta \left(\frac{P_n^1 P_{n'}^1}{\sin^2 \theta} + \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} \right) = 2n(n+1) P_n^1 P_{n'}^1 \sin \theta + \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_n^1}{d\theta} P_{n'}^1 + \sin \theta \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} P_n^1 \right)$$

$$2 \int_0^\pi \left(\frac{P_n^1 P_{n'}^1}{\sin \theta} + \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} \sin \theta \right) d\theta = 2n(n+1) \int_0^\pi P_n^1 P_{n'}^1 \sin \theta d\theta + \left(\sin \theta \frac{dP_n^1}{d\theta} P_{n'}^1 + \sin \theta \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} P_n^1 \right) \Big|_0^\pi$$

Como $P_n^1(1) = P_n^1(-1) = 0$,

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left(\frac{P_n^1 P_{n'}^1}{\sin \theta} + \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} \sin \theta \right) d\theta = n(n+1) \int_0^\pi P_n^1 P_{n'}^1 \sin \theta d\theta$$

Da ortogonalidade das funções associadas de Legendre [4], sendo $\delta_{n,n'}$ a função delta de Kronecker:

$$\int_0^\pi P_n^1 P_{n'}^1 \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \delta_{n,n'} = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \delta_{n,n'}$$

$$\therefore \int_0^\pi \left(\frac{P_n^1 P_{n'}^1}{\sin \theta} + \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_{n'}^1}{d\theta} \sin \theta \right) d\theta = \frac{2[n(n+1)]^2}{2n+1} \delta_{n,n'}$$

Assim²⁷,

$$B_{omn} = B_{o1n} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{2n(n+1)\pi \frac{E_0 z_n(\rho) j_n(\rho)}{i^{-n}}}{\pi z_n(\rho) z_n(\rho) \frac{2[n(n+1)]^2}{2n+1}} = i^n \left[\frac{E_0(2n+1)}{n(n+1)} \right] \quad (4.28)$$

²⁷ O cancelamento das funções esféricas de Bessel que se segue só é possível porque, para campos incidentes, $z_n(\rho) = j_n(\rho)$, uma vez que rejeitamos $y_n(\rho)$ por seu comportamento na origem.

O procedimento para o cálculo de A_{emn} é análogo, porém com complicações algébricas devido às integrações que surgem. Assim, para não nos perdermos em contas, afirmaremos apenas que, para estes coeficientes, podemos deduzir que

$$A_{emn} = A_{e1n} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} = (-i) i^n \left[\frac{E_0 (2n+1)}{n(n+1)} \right] = -i B_{o1n} \quad (4.29)$$

4.5 Campos E e H Como Expansões em Harmônicos Esféricos.

Uma vez determinados os coeficientes da expansão em vetores harmônicos esféricos, o campo incidente \mathbf{E}_i de uma onda plana é dado pela substituição de (4.26)-(4.29) em (4.19)²⁸:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}) \right]. \quad (4.30)$$

Usamos as equações de Maxwell, encontramos para o campo magnético incidente:

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E}_i = \frac{1}{i\omega\mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \nabla \times (\mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}) \right].$$

Como os vetores \mathbf{M} e \mathbf{N} obedecem às relações

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{M} = \frac{\nabla \times \mathbf{N}}{k}, \quad (4.31)$$

temos que $\nabla \times \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} = k\mathbf{N}_{o1n}^{(1)}$ e $\nabla \times \mathbf{N}_{e1n}^{(1)} = k\mathbf{M}_{e1n}^{(1)}$. Assim,

$$\mathbf{H}_i = -\frac{k}{\omega\mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \nabla \times (\mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e1n}^{(1)}) \right].$$

$$\mathbf{H}_i = -\frac{k}{\omega\mu} E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (\mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + i\mathbf{N}_{o1n}^{(1)}) \right], \quad (4.32)$$

onde k é o número de onda do meio através do qual o campo incidente se propaga.

²⁸ O sobrescrito (1) indica que os vetores harmônicos esféricos são tomados com $z_n(\rho) = j_n(\rho)$.

Dentro da partícula o campo deve ser finito, o que nos leva a desconsiderar, para $z_n(\rho)$, funções de Bessel de segunda espécie ($y_n(\rho)/Y_n(\rho)$ ou $n_n(\rho)/N_n(\rho)$). As mesmas condições de ortogonalidade dos harmônicos esféricos nos levam a expressões para o campo interno com uma forma análoga ao campo incidente:

$$\mathbf{E}_d = \sum_{n=1}^{\infty} \left[E_n (C_{1n} \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - iD_{1n} \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}) \right] \quad (4.33)$$

$$\mathbf{H}_d = -\frac{k_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[E_n (D_{1n} \mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + iC_{1n} \mathbf{N}_{o1n}^{(1)}) \right] \quad (4.34)$$

Para o campo espalhado devemos usar funções de Hankel

$$\begin{cases} h_n^{(1)} = j_n(\rho) + iy_n(\rho) \\ h_n^{(2)} = j_n(\rho) - iy_n(\rho) \end{cases} \quad (4.35)$$

Contudo, é possível mostrar que apenas $h_n^{(1)}(\rho)$ representa ondas esféricas que se propagam para fora da partícula. Das propriedades das funções de Hankel (aproximações assintóticas para $h_n^{(1)}(\rho)$ e $dh_n^{(1)}(\rho)/d\rho$), o campo espalhado pode ser escrito como

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n=1}^{\infty} \left[E_n (iA_{1n} \mathbf{N}_{e1n}^{(3)} - B_{1n} \mathbf{M}_{o1n}^{(3)}) \right] \quad (4.36)$$

$$\mathbf{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \left[E_n (iB_{1n} \mathbf{N}_{o1n}^{(3)} + A_{1n} \mathbf{M}_{e1n}^{(3)}) \right] \quad (4.37)$$

Em (4.33) e (4.34), (4.36) e (4.37), k_1 e μ_1 são, respectivamente, o número de onda e a permeabilidade da partícula. Os coeficientes A_{1n} , B_{1n} , C_{1n} e D_{1n} para campos espalhados e dentro da partícula, quando normalizados em função dos coeficientes do campo incidente, são conhecidos como **coeficientes de Mie**, e são determinados através das condições de contorno para campos tangenciais na interface partícula-meio externo.

O sobrescrito “(3)” representa vetores harmônicos esféricos com $z_n(\rho) = h_n^{(1)}(\rho)$ e $E_n = i^n E_0 (2n + 1)/[n(n + 1)]$.

Usando as condições de contorno para campos tangenciais em $r = a$ ($a =$ raio da partícula) $(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_d) \times \hat{\mathbf{r}} = (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_d) \times \hat{\mathbf{r}} = 0$:

$$\begin{aligned}
 E_{i\theta} + E_{s\theta} &= E_{d\theta} & E_{i\phi} + E_{s\phi} &= E_{d\phi} \\
 H_{i\theta} + H_{s\theta} &= H_{d\theta} & H_{i\phi} + H_{s\phi} &= H_{d\phi}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Efetuada a álgebra necessária a partir das eqs. (4.30), (4.32)-(4.34), (4.36) e (4.37), usando (4.8), (4.9), (4.17), (4.18) e (4.35), chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{cases}
 j_n(ka) = B_n h_n^{(1)}(ka) + C_n j_n(k_1 a) \\
 \frac{k}{\mu} j_n(ka) = \frac{k}{\mu} A_n h_n^{(1)}(ka) + \frac{k_1}{\mu_1} D_n j_n(k_1 a) \\
 \frac{[kaj_n(ka)]'}{ka} = A_n \frac{[kah_n^{(1)}(ka)]'}{ka} + D_n \frac{[k_1 aj_n(k_1 a)]'}{k_1 a} \\
 \frac{k}{\mu} \frac{[kaj_n(ka)]'}{ka} = B_n \frac{k}{\mu} \frac{[kah_n^{(1)}(ka)]'}{ka} + C_n \frac{k_1}{\mu_1} \frac{[k_1 aj_n(k_1 a)]'}{k_1 a}
 \end{cases} \tag{4.39}$$

Para estas quatro equações linearmente independentes, definamos $x = ka = 2\pi Na/\lambda$ e $m = k_1/k = N_1/N$, onde N e N_1 são, respectivamente, os índices de refração do meio externo e da partícula. Dessa forma, $k_1 a = mka = mx$, e as expressões (4.39) podem ser resolvidas para os quatro coeficientes de Mie, fornecendo-nos

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{A_{1n}}{E_n} = \frac{m^2 \mu \psi_n(mx) \psi_n'(x) - \mu_1 \psi_n(x) \psi_n'(mx)}{m^2 \mu \psi_n(mx) \xi_n'(x) - \mu_1 \xi_n(x) \psi_n'(mx)} \\
 B_n &= \frac{B_{1n}}{E_n} = \frac{\mu_1 \psi_n(mx) \psi_n'(x) - \mu \psi_n(x) \psi_n'(mx)}{\mu_1 \psi_n(mx) \xi_n'(x) - \mu \xi_n(x) \psi_n'(mx)} \\
 C_n &= \frac{C_{1n}}{E_n} = \frac{\mu_1 \xi_n(x) \psi_n'(x) - \mu_1 \psi_n(x) \xi_n'(x)}{\mu \xi_n(x) \psi_n'(mx) - \mu_1 \psi_n(mx) \xi_n'(x)} \\
 D_n &= \frac{D_{1n}}{E_n} = \frac{m \mu_1 \xi_n(x) \psi_n'(x) - m \mu_1 \psi_n(x) \xi_n'(x)}{\mu_1 \xi_n(x) \psi_n'(mx) - m^2 \mu \psi_n(mx) \xi_n'(x)}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

onde nos utilizamos das funções de Ricatti-Bessel $\psi_n(x) = \rho j_n(\rho)$ e $\xi_n(x) = \rho h_n^{(1)}(\rho)$, sendo que as derivadas em (4.40) devem ser tomadas em relação aos argumentos de cada uma destas funções.

4.6 Os Fatores de Forma e as Seções de Choque

Na seção anterior, definimos os coeficientes de Mie em termos dos coeficientes de uma onda plana. Vamos generalizar as expressões dos campos para escrevermos as forças ópticas atuando

sobre a nossa partícula através das seções de choque. Para tanto vamos definir os campos E e H, respectivamente, para as ondas incidente, interior à esfera e espalhada como [5]

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n,m}^{\infty} \left(g_{n,TE}^m \mathbf{M}_{omn}^{(1)} - i g_{n,TM}^m \mathbf{N}_{emn}^{(1)} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_i = -\frac{k}{\mu\omega} \sum_{n,m}^{\infty} \left(g_{n,TM}^m \mathbf{M}_{emn}^{(1)} + i g_{n,TE}^m \mathbf{N}_{omn}^{(1)} \right) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{E}_d = \sum_{n,m}^{\infty} \left(c_n^m \mathbf{M}_{omn}^{(1)} - i d_n^m \mathbf{N}_{emn}^{(1)} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_d = -\frac{k_1}{\mu_1\omega} \sum_{n,m}^{\infty} \left(d_n^m \mathbf{M}_{emn}^{(1)} + i c_n^m \mathbf{N}_{omn}^{(1)} \right) \quad (4.42)$$

$$\mathbf{E}_s = \sum_{n,m}^{\infty} \left(i a_n^m \mathbf{N}_{emn}^{(3)} - b_n^m \mathbf{M}_{omn}^{(3)} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_s = -\frac{k}{\mu\omega} \sum_{n,m}^{\infty} \left(a_n^m \mathbf{M}_{emn}^{(3)} + i b_n^m \mathbf{N}_{omn}^{(3)} \right), \quad (4.43)$$

de tal forma que $A_n \equiv a_n = a_n^m / g_{n,TM}^m$, $B_n \equiv b_n = b_n^m / g_{n,TE}^m$, $C_n \equiv c_n = c_n^m / g_{n,TE}^m$, $D_n \equiv d_n = d_n^m / g_{n,TM}^m$. Os coeficientes $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$, são conhecidos como **fatores de forma** e, uma vez determinados, podemos calcular as seções de choque para as forças de pressão de radiação exercidas por pinças ópticas. Trata-se, entretanto, de processo moroso [6-8], e nos limitaremos a afirmar que as expressões para as seções de choque nas direções x , y e z da força de captura da pinça óptica valerão²⁹:

$$C_{pr,z} = \frac{\lambda^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=-n}^n \left(\frac{1}{(n+1)^2} \frac{(n+1+|p|)!}{(n-|p|)!} \operatorname{Re} \left[\left(a_n + a_{n+1}^* - 2a_n a_{n+1}^* \right) g_{n,TM}^p g_{n+1,TM}^{p*} + \left(b_n + b_{n+1}^* - 2b_n b_{n+1}^* \right) g_{n,TE}^p g_{n+1,TE}^{p*} \right] + \frac{p}{n^2(n+1)^2} \frac{(n+|p|)!}{(n-|p|)!} \operatorname{Re} \left[i \left(2a_n b_n^* - a_n - b_n^* \right) g_{n,TM}^p g_{n,TE}^p \right] \right) \quad (4.44)$$

$$C = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{m=p-1 \neq 0}^{\infty} \left(\frac{(n+p)!}{(n-p)!} \left[\left(S_{m,n}^{p-1} + S_{n,m}^{-p} - 2U_{m,n}^{p-1} - 2U_{n,m}^{-p} \right) \left(\frac{1}{m^2} \delta_{m,n+1} - \frac{1}{n^2} \delta_{n,m+1} \right) + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \delta_{n,m} \left(T_{m,n}^{p-1} - T_{n,m}^{-p} - 2V_{m,n}^{p-1} + 2V_{n,m}^{-p} \right) \right] \right) \quad (4.45)$$

As seções de choque em x e y são dadas, respectivamente por $C_{pr,x} = \operatorname{Re}[C]$ e $C_{pr,y} = \operatorname{Im}[C]$.

Em (4.44) e (4.45), usamos as seguintes definições:

$$\begin{cases} U_{n,m}^p = a_n a_m^* g_{n,TM}^p g_{m,TM}^{p+1*} + b_n b_m^* g_{n,TE}^p g_{m,TE}^{p+1*} \\ V_{n,m}^p = i b_n a_m^* g_{n,TE}^p g_{m,TM}^{p+1*} - i a_n b_m^* g_{n,TM}^p g_{m,TE}^{p+1*} \\ S_{n,m}^p = (a_n + a_m^*) g_{n,TM}^p g_{m,TM}^{p+1*} + (b_n + b_m^*) g_{n,TE}^p g_{m,TE}^{p+1*} \\ T_{n,m}^p = i (b_n + a_m^*) g_{n,TE}^p g_{m,TM}^{p+1*} - i (a_n + b_m^*) g_{n,TM}^p g_{m,TE}^{p+1*} \end{cases} \quad (4.46)$$

²⁹ As referências de coordenadas são aquelas dadas pela figura 1. Assim, forças na direção z serão sempre forças ao longo do eixo óptico, enquanto que forças no plano xy serão sempre forças gradientes.

A seguir, apresentaremos os cálculos de forças ópticas em esferas na escala micrométrica utilizando feixes gaussianos e localizados (ou de Bessel), tanto para óptica geométrica quanto para a teoria eletromagnética acima.

4.7 Extensão da Teoria Eletromagnética para Feixes Gaussianos

4.7.1 Introdução

Desde o surgimento das quatro equações fundamentais do eletromagnetismo, a possibilidade de a luz exercer força sobre a matéria foi explorada tanto teoricamente [9] quando experimentalmente [10]. Coube, entretanto, aos trabalhos pioneiros de Ashkin o surgimento das primeiras armadilhas ópticas, o que impulsionou um novo rumo para pesquisas na área biológica [11-15]. Os princípios de funcionamento das pinças ópticas já foram detalhados no capítulo 4. Agora utilizaremos a teoria eletromagnética para determinar as forças ópticas na sua forma mais geral, i.e., escreveremos os feixes gaussianos como expansões em harmônicos esféricos, determinando os coeficientes - para seus campos incidentes - que se relacionam, como visto, com os coeficientes de Mie, determinantes no cálculo das seções de choque.

4.7.2 Fatores de Forma para Feixes Gaussianos

Para encontrarmos os fatores de forma, devemos primeiramente expressar os campos incidente \mathbf{E} e \mathbf{H} de um feixe gaussiano como em (4.41). Um feixe focalizado e paraxial deste tipo pode ser descrito na aproximação de Davis com a polarização na direção x , embora tal aproximação não constitua uma solução das equações de Maxwell. Como não é nosso objetivo deduzir todo o equacionamento, afirmamos que, em coordenadas cartesianas, teremos

$$E_x = i\omega\psi_0 e^{ikz} \quad E_y = 0 \quad E_z = 0 \quad (4.47)$$

$$H_x = 0 \quad H_y = \frac{ik}{\mu}\psi_0 e^{ikz} \quad H_z = 0, \quad (4.48)$$

onde $\psi_0 = ie^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{i-2\zeta}} / (i-2\zeta)$, com $\xi = x/\omega_0$, $\eta = y/\omega_0$ e $\zeta = z/(k\omega_0^2)$, sendo ω_0 “spot size” ou “beam size” do feixe.

Uma proposta para determinar os fatores de forma $g_{n,TM}^m$ e $g_{n,TE}^m$ é através da aproximação da integral localizada, proposta por Gouesbet e bem validada [7,16]. Tal aproximação baseia-se em um paralelo entre a teoria eletromagnética de Mie e a posição de um raio da óptica geométrica, e seu procedimento pode ser resumido nas quatro etapas abaixo [17]:

- 1) Expandem-se as componentes radiais de campo elétrico e magnético em coordenadas esféricas, $E_r(r, \theta, \phi)$ e $H_r(r, \theta, \phi)$, em modos azimutais E_r^m e H_r^m , respectivamente; cada modo azimutal possui o sobrescrito m , que é proporcional a $e^{im\phi}$;
- 2) Removem-se as dependências de onda planas para as expressões resultantes de E_r^m e H_r^m , respectivamente, $E_0 \sin \theta e^{-ikr \cos \theta}$ e $H_0 \sin \theta e^{-ikr \cos \theta}$. Como resultado, E_r^m e H_r^m nos levam, respectivamente, a F_r^m e I_r^m ;
- 3) Aplica-se a F_r^m e I_r^m um operador localização \hat{G} , que faz a substituição a $R = kr \Rightarrow (n+1/2)$ e $\theta \Rightarrow \pi/2$;
- 4) Multiplicam-se as expressões resultantes pelos seguintes fatores de normalização:

$$Z_n^0 = \frac{2n(n+1)i}{2n+1} \quad \text{e, para } m \neq 0, \quad Z_n^m = \left(\frac{-2i}{2n+1} \right)^{|m|-1} \quad (4.49)$$

Para a etapa 1), teremos

$$E_r^m = \frac{1}{2\pi} e^{im\phi} \int_0^{2\pi} E_r(r, \theta, \phi') \exp(-im\phi') d\phi' \quad (4.50)$$

$$H_r^m = \frac{1}{2\pi} e^{im\phi} \int_0^{2\pi} H_r(r, \theta, \phi') \exp(-im\phi') d\phi' \quad (4.51)$$

Os fatores de forma serão, então, dados por $g_{n,TM}^m = Z_n^m \hat{G}(F_r^m)$ e $g_{n,TE}^m = Z_n^m \hat{G}(I_r^m)$ e, em termos das componentes radiais do campo incidente³⁰,

$$g_{n,TM}^m = \frac{Z_n^m}{2\pi E_0} \int_0^{2\pi} \hat{G}[E_r(r, \theta, \phi)] \exp(-im\phi) d\phi \quad (4.52)$$

³⁰ Isto foi possível usando-se as equações (5.41) e observando o fato de que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{M} = 0$. Assim, fazendo o produto escalar de (41) com \mathbf{r} , podemos calcular $g_{n,TM}^m$ a partir de \mathbf{E}_i e $g_{n,TE}^m$ a partir de \mathbf{H}_i .

$$g_{n,TE}^m = \frac{Z_n^m}{2\pi H_0} \int_0^{2\pi} \hat{G}[H_r(r, \theta, \phi)] \exp(-im\phi) d\phi \quad (4.53)$$

Transformando os campos em (4.47) e (4.48) em coordenadas esféricas, e perfazendo as quatro etapas acima, os fatores de forma são encontrados supondo que a partícula se encontre na origem de nosso sistema de coordenadas, enquanto que o foco para o feixe situa-se em algum ponto $\{x_0, y_0, 0\}$, ou seja, sobre o plano xy , como mostra a figura 4.2.

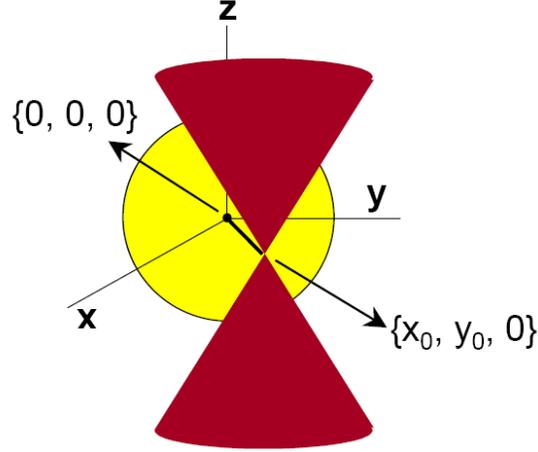


Fig. 4.2. Sistema de coordenadas. O foco do feixe encontra-se sobre o plano xy , enquanto que a partícula está situada com seu centro na origem.

Dessa forma, encontraremos, para o caso particular em que o foco do feixe se encontra sobre o eixo x ($\phi_0 = 0$, $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{n,TM}^0 = \left(\frac{n(n+1)i}{n+1/2} \right) e^{-\left(\frac{\rho_0^2}{\omega_0^2} + s^2(n+1/2)^2 \right)} I_1(Q) \\ g_{n,TM}^{m \neq 0} = \left(\frac{-ie^{\mp i\phi_0}}{n+1/2} \right)^{|m|-1} e^{-\left(\frac{\rho_0^2}{\omega_0^2} + s^2(n+1/2)^2 \right)} [I_{|m|-1}(Q) + I_{|m|+1}(Q)] \\ g_{n,TE}^0 = 0 \\ g_{n,TE}^{m \neq 0} = \frac{\pm 1}{i} \left(\frac{-ie^{\mp i\phi_0}}{n+1/2} \right)^{|m|-1} e^{-\left(\frac{\rho_0^2}{\omega_0^2} + s^2(n+1/2)^2 \right)} [I_{|m|-1}(Q) - I_{|m|+1}(Q)] \end{array} \right. \quad (4.54)$$

Já para deslocamentos ao longo do eixo y ($\phi_0 = \pi/2$, $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = y_0$):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 g_{n, TM}^0 = 0 \\
 g_{n, TM}^{m \neq 0} = \left(\frac{-ie^{\mp i\phi_0}}{n+1/2} \right)^{|m|-1} e^{-\left(\frac{\rho_0^2}{\omega_0^2} + s^2 (n+1/2)^2 \right)} \left[I_{|m|-1}(Q) - I_{|m|+1}(Q) \right] \\
 g_{n, TE}^0 = \left(\frac{n(n+1)i}{n+1/2} \right) e^{-\left(\frac{\rho_0^2}{\omega_0^2} + s^2 (n+1/2)^2 \right)} I_1(Q) \\
 g_{n, TE}^{m \neq 0} = \frac{\pm 1}{i} \left(\frac{-ie^{\mp i\phi_0}}{n+1/2} \right)^{|m|-1} e^{-\left(\frac{\rho_0^2}{\omega_0^2} + s^2 (n+1/2)^2 \right)} \left[I_{|m|-1}(Q) + I_{|m|+1}(Q) \right]
 \end{array} \right. \quad (4.55)$$

onde, em (4.54) e (4.55), $s = 1/(k\omega_0)$, $Q = 2s(n+1/2)(\rho_0/\omega_0)$ e $I_p(Q)$ são as funções modificadas de Bessel³¹.

As forças ópticas, exercidas sobre a partícula para um feixe focalizado, são calculadas através das seções de choque, computando-se os coeficientes de Mie para campos espalhados de acordo com (4.43), substituindo os valores para a_n e b_n em (4.44) e (4.45) e usando dos resultados obtidos para $g_{n, TM}^m$ e $g_{n, TE}^m$.

4.7.3 Forças Totais para Feixes Gaussianos Usando os Fatores de Forma

Inserindo os fatores de forma de (4.54) e (4.55) em (4.45), podemos determinar as seções de choque perpendicular e paralela ao movimento da partícula, i.e., ao deslocamento. Um programa foi desenvolvido em Fortran, e o código se encontra transcrito no Apêndice C. Consideremos, por exemplo, um caso real em que um feixe gaussiano com comprimento de onda $\lambda = 1064$ nm incide sobre uma partícula de raio $a = 4,5$ μm imersa em um meio com índice de refração 1,33³². A figura 4.3(a) nos mostra o comportamento da força gradiente para polarização paralela (deslocamento ao longo do eixo x, tracejada) e perpendicular (deslocamento ao longo do eixo y, sólida) para o caso em que o índice de refração da partícula é de $n_1 = 1,62$ (i.e., um índice relativo de $\sim 1,22$), enquanto o caso (b) se refere à situação $n_2 = 1,21$ (índice relativo de $\sim 0,91$). Como previsto, há a inversão das forças, i.e., as forças passam de atrativas para repulsivas. Note que, a partir de aproximadamente 4,15 μm a força sobre a partícula diminui, o que é de se esperar dado

³¹ O cálculo dos fatores de forma é moroso, e é sugerido ao leitor que consulte a dedução mais simples encontrada na literatura [5].

³² Devido aos valores de comprimento de onda e raio da partícula, este caso não satisfaz às condições de óptica geométrica. Além disso, como $4\pi a |n_2/n_1|/\lambda = 11.34$, a condição para regime de Rayleigh-Gans, $4\pi a \ll \lambda/|n_2/n_1|$ também não é satisfeita.

que o “spot” de $0,5 \mu\text{m}$. Isso é confirmado pela figura 4.4 para partículas com diferentes raios, mas mantendo o mesmo “spot” e comprimento de onda do feixe gaussiano incidente, somente para a polarização paralela.

Consideremos agora o caso metamaterial, em que assumimos uma partícula possuindo os mesmos valores do índice de refração, em módulo, que o caso convencional da figura 4.3, além do mesmo raio. Os resultados são mostrados na figura 4.5, e podemos compará-los àqueles já obtidos para a óptica geométrica (figuras 4.24 (c) e (d), respectivamente, para o caso em que $\gamma = 90^\circ$). Salientamos novamente o cuidado na interpretação: aqui, forças atrativas são positivas; no caso do capítulo 4, tais forças eram negativas.

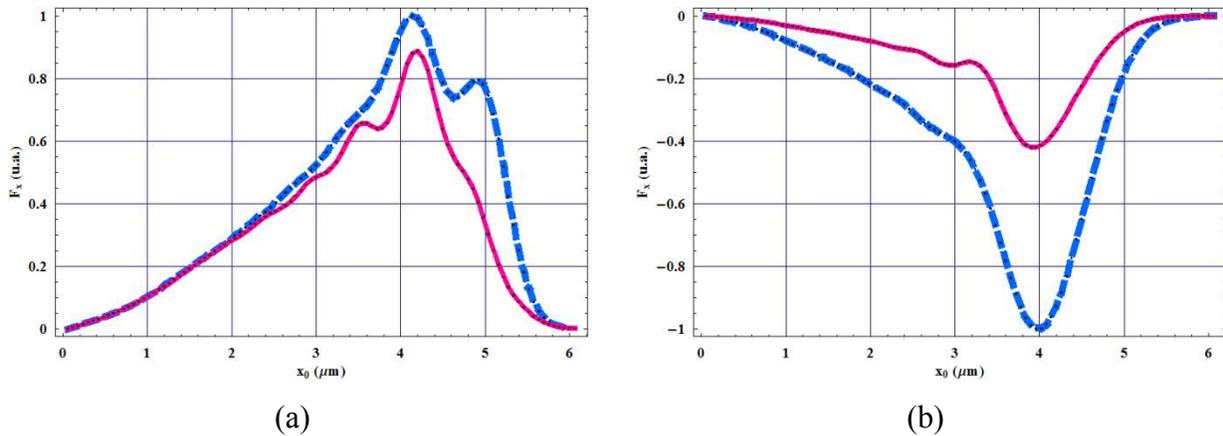


Fig. 4.3. Forças (a) atrativas e (b) repulsivas, para polarizações paralelas (linhas tracejadas) e perpendiculares (linhas sólidas).

4.8 Comentários e Conclusões

O aprisionamento óptico para partículas metamateriais é distinto daquele observado até então para partículas convencionais. Acreditamos que, pela primeira vez, estas características são evidenciadas teórica e computacionalmente.

Entretanto, estamos supondo que tais partículas – esféricas – são homogêneas, o que de fato é algo difícil de se obter atualmente, com as dimensões aqui empregadas. Vale ressaltar, todavia, que este impedimento é puramente tecnológico e que, assim como Veselago teorizou materiais com índice de refração negativo em uma época em que tal fato era mera especulação [18], pensamos que partículas metamateriais podem, futuramente, encontrar aplicações interessantes em áreas biológicas.

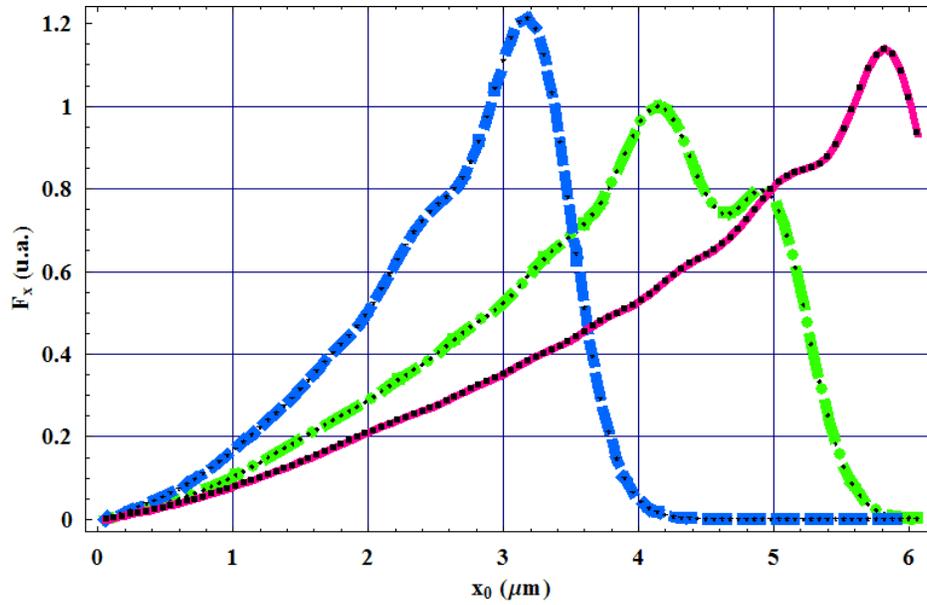


Fig. 4.4. Forças gradientes para polarização paralela do feixe gaussiano com $\lambda = 1064$ nm, “spot” de 500 nm e $a = 3\mu\text{m}$ (tracejada), $4,5\mu\text{m}$ (traço-ponto) e $6\mu\text{m}$ (sólida).

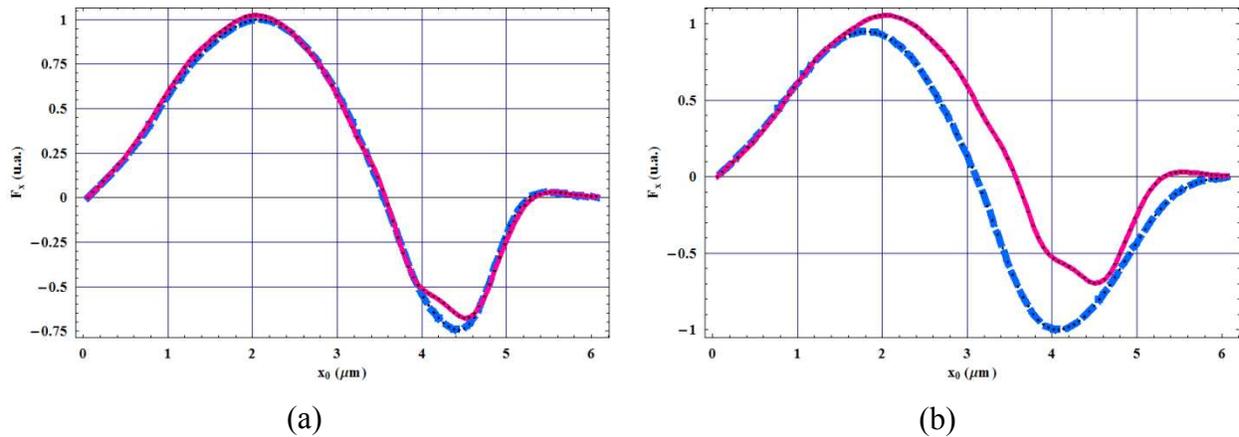


Fig. 4.5. Equivalente à figura 4.3 para uma partícula metamaterial. Note que, para estas relações entre índices de refração, não há a inversão das forças quando o índice relativo passa a ser menor que 1 e, da mesma forma que a óptica geométrica, tanto em (a) quanto em (b), a força passa a ser repulsiva conforme a distância entre a partícula e o foco aumenta.

As características aqui observadas para o aprisionamento por pinças ópticas foram compiladas em artigo submetido à revista *Optics Express*, intitulado “**Trapping Double Negative Particles in the Ray Optics Regime Using Optical Tweezers with Focused Beams**”, que se encontra no Apêndice D.

A possível não inversão da força gradiente para uma partícula metamaterial quando o índice de refração relativo (em módulo) n passa de $|n| > 1$ para $|n| < 1$ é fato novo, bem como o aparecimento de forças repulsivas para o caso $n > 1$ (vide novamente a figura 4.5). Para o primeiro caso, devemos esperar tal comportamento para qualquer feixe incidente, independente do seu padrão de intensidade. É o que verificaremos para os feixes localizados no próximo capítulo, tanto na óptica geométrica quanto através do cálculo dos coeficientes de Mie e dos fatores de forma.

Assim, a afirmativa usualmente encontrada na literatura de que “*partículas com índice de refração (aqui embutimos o “em módulo”) maior que o do meio em que se encontra submersa serão atraídas para regiões de alta intensidade do feixe, enquanto que, se a mesma possuir um índice de refração (também “em módulo”) menor, para regiões de baixa intensidade*” perde o seu significado, se não especificarmos a que tipo de partículas nos referimos.

4.9 Referências Deste capítulo

- [1] G. Arfken, “Mathematical Methods for Physicists”, Academic Press, Inc., 3.ed, pg. 668, 1985.
- [2] C. F. Bohren, D. R. Huffman, “Absorption and Scattering of Light by Small Particles”, John Wiley & Sons, pag. 84, 1983.
- [3] G. Arfken, “Mathematical Methods for Physicists”, Academic Press, Inc., 3.ed, pg. 666, 1985.
- [4] G. Arfken, “Mathematical Methods for Physicists”, Academic Press, Inc., 5.ed, pg. 776, 2001.
- [5] A. Fontes, “Sistema de Micromanipulação e Microanálise com Pinças Ópticas”, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, IFGW, tese de doutorado, 2004.
- [6] J. P. Barton, D. R. Alexander, S. A. Schaub, “Theoretical Determination of Net Radiation Force and Torque for a Spherical Particle Illuminated by a Focused Beam”, *J. Appl. Phys.* 66(10), pg. 4594, 1989.
- [7] K. F. Ren, G. Gréhan, G. Gouesbet, “Radiation Pressure Forces Exerted on a Particle Arbitrarily Located in a Gaussian Beam by using the Generalized Lorenz-Mie Theory, and Associated Resonance Effects”, *Opt. Com.* 108, pg. 343, 1994.
- [8] K. F. Ren, G. Gréhan, G. Gouesbet, “Symmetry relations in generalized Lorenz-Mie Theory”, *J. Opt. Soc. Am. A* 11(6), pg. 1812, 1994.
- [9] J. C. Maxwell, “Treatise on Electricity and Magnetism”, vol. 2, p. 391, § 792 (Energy and Stress of Radiation), Oxford, 1873.
- [10] P. N. Lebedev, “Experimental examination of light pressure”, *Ann. Der Physik*, vol. 6, p. 433, 1901.
- [11] A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 24, pp. 154-159, 1970.
- [12] A. Ashkin e J. M. Dziedzic, “Optical levitation by radiation pressure”, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 19, pp. 283-285, 1971.
- [13] A. Ashkin e J. M. Dziedzic, “Optical levitation of liquid drops by radiation pressure”, *Science (Wash. DC)*, vol. 187, pp. 1073-1075, 1975.

- [14] A. Ashkin, J. Dziedzic, J. E. Bjorkholm e S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles”, *Opt. Lett.*, vol. 11, pp. 288-290, 1986.
- [15] A. Ashkin, “Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime”, *Biophys. J.*, vol. 61, pp. 569-582, 1992.
- [16] G. Gouesbet, G. Gréhan e B. Maheu, “Localized interpretation to compute all the coefficients g_n^m in the generalized Lorenz-Mie theory”, *J. Opt. Soc. Am. A* 7 (6), pg. 998, 1990.
- [17] K. F. Ren, G. Gouesbet e G. Gréhan, “Integral localized approximation in generalized Lorenz-Mie theory”, *Appl. Opt.*, vol. 37, no. 19, 1998.
- [18] V. G. Veselago, “The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ϵ and μ ”, *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509-514, 1968.

Capítulo 5

Feixes de Bessel em Pinças Ópticas

5.1 Introdução

No capítulo anterior determinamos as seções de choque para um feixe arbitrário que incide sobre uma partícula esférica e homogênea. Também revimos como os fatores de forma são calculados através da aproximação de Gouesbet, baseado no princípio da localização de Van de Hulst, e como as forças ópticas são alteradas quando a partícula apresenta índice de refração negativo.

Aqui, determinaremos os coeficientes de forma para um feixe de Bessel. A tentativa de se formular uma solução analítica para o caso mais geral da teoria eletromagnética se mostrará infrutífera. Embora possamos calcular os fatores de forma para o caso em que o centro da partícula se encontra em algum ponto do eixo óptico do feixe – apenas para um feixe ordinário -, verificaremos que um leve deslocamento da mesma nos leva a integrais, até onde pudemos verificar, não-tabeladas. Cálculos numéricos se fazem necessários, e a polarização do campo elétrico passa a ser indispensável à análise, efetuando-se um tratamento vetorial do feixe incidente.

Utilizando a óptica geométrica, adaptaremos os cálculos das forças ópticas para um feixe localizado, impondo o padrão de intensidade de Bessel diretamente na potência P . Ao contrário do feixe focalizado, em que somente uma fração da superfície da partícula era atingida pelo cone de raios (limitados no espaço pela abertura numérica da lente), supomos que todo um hemisfério da mesma seja atingido, i.e., a partícula está “imersa” em um padrão de intensidade de Bessel.

5.2 Integral Localizada e Fatores de Forma para Feixes Localizados

A aproximação da integral localizada pode ser usada no caso de feixes localizados. Consideremos, para tanto, que um feixe localizado ordinário encontra-se deslocado em relação à origem (onde novamente a partícula está centrada) ao longo do eixo x , conforme visto na figura 5.1, tal que $\phi_0 = 0$. Neste caso, $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0$, e se supomos a mesma polarização dos casos anteriores para onda plana e feixes gaussianos, a componente radial de campo elétrico valerá³³

$$E_r = J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_t r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi, \quad (5.1)$$

onde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta$, $k_\rho = k \sin \theta_a$ é a componente transversal do número de onda, $k_t = k \cos \theta_a$ a respectiva componente longitudinal e θ_a é o ângulo de áxicon [1].

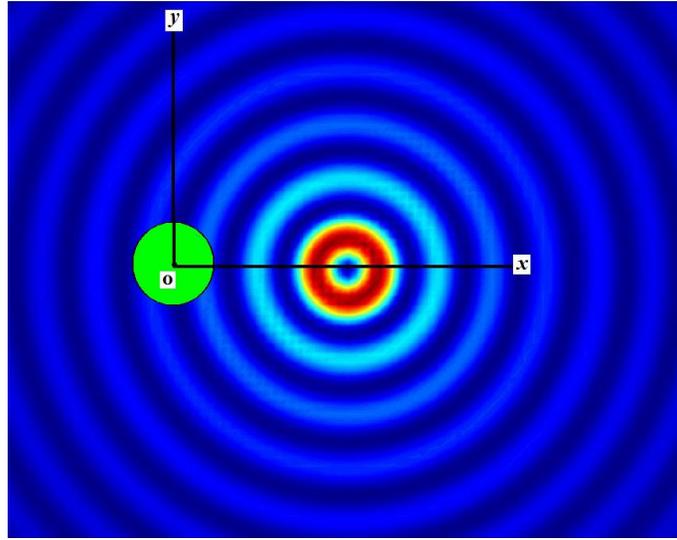


Figura 5.1. Partícula centrada na origem e feixe localizado ordinário deslocado ao longo do eixo x .

Das propriedades das funções de Bessel [2]³⁴:

$$E_r = \sum_{m'=0}^{\infty} \varepsilon_{m'} J_{m'}(k_\rho r \sin \theta) J_{m'}(k_\rho \rho_0) \cos m' \phi e^{ik_t r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi.$$

³³ Este campo origina-se da suposição de polarização em x e propagação em z , tal que

$$\mathbf{E} = \hat{x} J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_t r \cos \theta}.$$

³⁴ $J_0 \left(\sqrt{Z^2 + z^2 - 2Zz \cos \phi} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(Z) J_m(z) \cos m \phi$, onde $\varepsilon_m = 1$ para $m = 0$ e $\varepsilon_m = 2$ caso contrário.

Expandindo E_r em componentes azimutais,

$$E_r^m = \frac{1}{2\pi} e^{im\phi} e^{ik_r r \cos \theta} \sin \theta \sum_{m'=0}^{\infty} \varepsilon_{m'} J_{m'}(k_\rho r \sin \theta) J_{m'}(k_\rho \rho_0) \int_0^{2\pi} \cos m' \phi \cos \phi e^{-im\phi} d\phi.$$

$$\therefore E_r^0 = \frac{1}{4} \varepsilon_1 J_1(k_\rho r \sin \theta) J_1(k_\rho \rho_0) e^{ik_r r \cos \theta} \sin \theta \quad (5.2)$$

$$E_r^{m \neq 0} = \frac{1}{4} e^{ik_r r \cos \theta} \sin \theta \left[\varepsilon_{m+1} J_{m+1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m+1}(k_\rho \rho_0) + \varepsilon_{m-1} J_{m-1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m-1}(k_\rho \rho_0) \right] \quad (5.3)$$

Assim, eliminando as partes que se referem à onda plana, conforme etapa 2), teremos $F_r^0 = (1/4) \varepsilon_1 J_1(k_\rho r \sin \theta) J_1(k_\rho \rho_0)$ e, para o caso mais geral em que $m \neq 0$, $F_r^{m \neq 0} = (1/4) \left[\varepsilon_{m+1} J_{m+1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m+1}(k_\rho \rho_0) + \varepsilon_{m-1} J_{m-1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m-1}(k_\rho \rho_0) \right]$.

Das etapas 3) e 4), chegamos a

$$g_{n, TM}^0 = Z_n^0 \hat{G}(F_r^0) = i \frac{n(n+1)}{n+1/2} \frac{1}{4} \varepsilon_1 J_1[(n+1/2) \sin \theta_a] J_1(k_\rho \rho_0 \sin \theta_a) \quad (5.4)$$

$$g_{n, TM}^{m \neq 0} = Z_n^0 \hat{G}(F_r^{m \neq 0}) = \left[\frac{-1}{n+1/2} \right]^{|m|-1} \frac{1}{4} \left[\varepsilon_{m-1} J_{m-1}[(n+1/2) \sin \theta_a] J_{m-1}(k_\rho \rho_0 \sin \theta_a) + \varepsilon_{m+1} J_{m+1}[(n+1/2) \sin \theta_a] J_{m+1}(k_\rho \rho_0 \sin \theta_a) \right] \quad (5.5)$$

Para os fatores de forma $g_{n, TE}^m$, calculamos o campo magnético H_r a partir de $\mathbf{H} = \hat{y} E_x(k_z/\omega\mu)$:

$$H_r = \frac{k_z}{\omega\mu} \sin \theta \sin \phi \sum_{m'=0}^{\infty} \varepsilon_{m'} J_{m'}(k_\rho r \sin \theta) J_{m'}(k_\rho \rho_0) \cos m' \phi e^{ik_r r \cos \theta}.$$

Logo,

$$H_r^m = \frac{1}{2\pi} \frac{k_z}{\omega\mu} e^{im\phi} e^{ik_r r \cos \theta} \sin \theta \sum_{m'=0}^{\infty} \varepsilon_{m'} J_{m'}(k_\rho r \sin \theta) J_{m'}(k_\rho \rho_0) \int_0^{2\pi} \cos m' \phi \sin \phi e^{-im\phi} d\phi.$$

$$\therefore H_r^0 = 0 \quad (5.6)$$

$$H_r^{m \neq 0} = \frac{i}{4} \frac{k_z}{\omega\mu} e^{ik_r r \cos \theta} \sin \theta \left[\varepsilon_{m+1} J_{m+1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m+1}(k_\rho \rho_0) - \varepsilon_{m-1} J_{m-1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m-1}(k_\rho \rho_0) \right] \quad (5.7)$$

Novamente eliminando as dependências de onda plana, encontramos $I_r^0 = 0$ e $I_r^{m \neq 0} = (ik_z/4\omega\mu) \left[\varepsilon_{m+1} J_{m+1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m+1}(k_\rho \rho_0) - \varepsilon_{m-1} J_{m-1}(k_\rho r \sin \theta) J_{m-1}(k_\rho \rho_0) \right]$.

Portanto, aplicando o operador \hat{G} e procedendo de forma análoga à anterior, temos os seguintes fatores de forma $g_{n, TE}^m$:

$$g_{n,TE}^0 = 0 \quad (5.8)$$

$$g_{n,TE}^{m \neq 0} = Z_n^0 \hat{G}(I_r^{m \neq 0}) = \left[\frac{-i}{n+1/2} \right]^{|m|-1} \frac{1}{4} \left[\frac{\varepsilon_{m-1} J_{m-1} [(n+1/2) \text{sen } \theta_a] J_{m-1}(k\rho_0 \text{sen } \theta_a) -}{\varepsilon_{m+1} J_{m+1} [(n+1/2) \text{sen } \theta_a] J_{m+1}(k\rho_0 \text{sen } \theta_a)} \right] \quad (5.9)$$

As equações (5.4), (5.5), (5.8) e (5.9) poderiam ser escritas para uma polarização do campo elétrico em y , como o fizemos para feixes gaussianos. Trata-se, porém, de questão de simetria, e que não altera as conclusões apresentadas adiante. Os fatores de forma desta seção são aproximações, e é bom termos uma teoria generalizada para feixes localizados.

5.3 Formulação Geral da Expansão dos Campos Incidentes para Feixe Ordinário com Centro da Partícula no Eixo Óptico

Supondo novamente uma polarização em x , um campo elétrico associado a um feixe localizado ordinário é escrito em coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i = & \hat{\mathbf{r}} J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \text{sen } \theta \cos \phi + \\ & \hat{\boldsymbol{\theta}} J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \cos \theta \cos \phi - , \\ & \hat{\boldsymbol{\phi}} J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \text{sen } \phi \end{aligned} \quad (5.10)$$

Façamos os quatro produtos escalares $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn}$, $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn}$, $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{omn}$ e $\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{emn}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn} = & (E_r M_{remn} + E_\theta M_{\theta emn} + E_\phi M_{\phi emn}) = E_\theta M_{\theta emn} + E_\phi M_{\phi emn} \\ = & J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \cos \theta \cos \phi \left(-\frac{m}{\text{sen } \theta} \text{sen } m\phi P_n^m(\cos \theta) z_n(ka) \right) - \\ & J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \text{sen } \phi \left(-\cos m\phi [P_n^m(\cos \theta)] z_n(ka) \right) \\ = & J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} z_n(ka) \left\{ \begin{array}{l} -m \cos \theta \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\text{sen } \theta} \text{sen } m\phi \cos \phi \\ -\frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \cos m\phi \text{sen } \phi \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} &= (E_r M_{romn} + E_\theta M_{\theta omn} + E_\phi M_{\phi omn}) = E_\theta M_{\theta omn} + E_\phi M_{\phi omn} \\
 &= J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \cos \theta \cos \phi \left(\frac{m}{\sin \theta} \cos m \phi P_n^m(\cos \theta) z_n(ka) \right) - \\
 &J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \sin \phi \left(-\sin m \phi \left[P_n^m(\cos \theta) \right]' z_n(ka) \right) \\
 &= J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} z_n(ka) \left\{ \begin{aligned} &m \cos \theta \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \cos m \phi \cos \phi \\ &+ \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \sin m \phi \sin \phi \end{aligned} \right\} \\
 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{emn} &= (E_r N_{remn} + E_\theta N_{\theta emn} + E_\phi N_{\phi emn}) = E_r N_{remn} + E_\theta N_{\theta emn} + E_\phi N_{\phi emn} \\
 &= J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi [n(n+1)] \cos m \phi P_n^m(\cos \theta) \left[\frac{z_n(ka)}{ka} \right] + \\
 &J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \cos \theta \cos \phi \cos m \phi \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} + \\
 &J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} m \sin \phi \sin m \phi \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} + \\
 &= J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \left\{ \begin{aligned} &[n(n+1)] \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \cos \phi \cos m \phi \left[\frac{z_n(ka)}{ka} \right] \\ &+ \cos \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \cos \phi \cos m \phi \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} \\ &+ m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin \phi \sin m \phi \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} \end{aligned} \right\} \\
 \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{omn} &= (E_r N_{romn} + E_\theta N_{\theta omn} + E_\phi N_{\phi omn}) = E_r N_{romn} + E_\theta N_{\theta omn} + E_\phi N_{\phi omn} \\
 &= J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \sin \theta \cos \phi [n(n+1)] \sin m \phi P_n^m(\cos \theta) \left[\frac{z_n(ka)}{ka} \right] + \\
 &J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \cos \theta \cos \phi \sin m \phi \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} + \\
 &J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} m \sin \phi \cos m \phi \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} + \\
 &= J_0 \left[k_\rho \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \phi} \right] e^{ik_r r \cos \theta} \left\{ \begin{aligned} &[n(n+1)] \sin \theta P_n^m(\cos \theta) \cos \phi \sin m \phi \left[\frac{z_n(ka)}{ka} \right] \\ &+ \cos \theta \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \cos \phi \sin m \phi \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} \\ &+ m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \sin \phi \cos m \phi \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Ao substituírmos os produtos escalares acima nas equações para os coeficientes A e B , devemos efetuar integrações em θ e em ϕ . Entretanto, supondo $\rho \gg \rho_0$, tal que podemos desprezar os termos em cosseno e ρ_0^2 dentro da função de Bessel $J_0(\cdot)$, e observando as equações acima, a única dependência em ϕ vem de produtos de cossenos e senos. Da ortogonalidade destas funções, encontramos³⁵:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{emn} d\theta d\phi = 0, \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{o1n} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \pi z_n(ka) \int_0^\pi J_0(\sin \theta_a ka \sin \theta) e^{ibka \cos \theta} \left\{ \cos \theta P_n^1(\cos \theta) + \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta \right\} d\theta \\ &= \pi z_n(ka) \mathfrak{S}_A \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{e1n} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \pi n(n+1) \frac{z_n(ka)}{ka} \int_0^\pi J_0(\sin \theta_a ka \sin \theta) P_n^1(\cos \theta) e^{ibka \cos \theta} \sin^2 \theta d\theta + \\ &\pi n(n+1) \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} \int_0^\pi J_0(\sin \theta_a ka \sin \theta) \left\{ \sin \theta \cos \theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + P_n^1(\cos \theta) \right\} e^{ibka \cos \theta} d\theta \\ &= \pi n(n+1) \frac{z_n(ka)}{ka} \mathfrak{S}_B + \pi n(n+1) \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} \mathfrak{S}_C \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde $b = \cos \theta_a$.

Para a integral \mathfrak{S}_A , das propriedades dos polinômios de Legendre, $P_n^1(\cos \theta) = -dP_n(\cos \theta)/d\theta$ e $d[\sin \theta dP_n(\cos \theta)/d\theta]/d\theta = -n(n+1)P_n(\cos \theta)\sin \theta$, o que nos permite escrever

³⁵ Entre todos os produtos de senos e cossenos em ϕ , temos $\int_0^{2\pi} \cos \phi \sin m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \cos m\phi \sin \phi d\phi = 0$ para

qualquer m e $\int_0^{2\pi} \cos \phi \cos m\phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin m\phi \sin \phi d\phi = \pi$ para $m = 1$.

$$\mathfrak{T}_A = \int_0^\pi J_0(\text{sen } \theta_a ka \text{ sen } \theta) \frac{d[\text{sen } \theta P_n^1(\cos \theta)]}{d\theta} = n(n+1) \int_0^\pi J_0(\text{sen } \theta_a ka \text{ sen } \theta) P_n^m(\cos \theta) e^{ibka \cos \theta} \text{sen } \theta d\theta$$

Para obtermos uma solução analítica, expandimos a função ordinária de Bessel em polinômios de Legendre, $J_0(\text{sen } \theta_a ka \text{ sen } \theta) = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} P_{n'}(\cos \theta)$, tal que, sendo $x = \cos \theta$,

$$\int_{-1}^1 J_0(\text{sen } \theta_a ka \sqrt{1-x^2}) P_n(x) dx = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \int_{-1}^1 P_{n'}(x) P_n(x) dx = a_{n'} \frac{2}{2n+1} \delta_{n,n'}$$

$$\therefore a_{n'} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 J_0(\text{sen } \theta_a ka \sqrt{1-x^2}) P_{n'}(x) dx$$

A integral acima não é tabelada, e exige manipulação algébrica. Expandimos, então, a função de Bessel em potências do argumento da função de Bessel:

$$J_0(\text{sen } \theta_a ka \sqrt{1-x^2}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!s!} \left(\frac{\text{sen } \theta_a ka}{2} \right)^{2s} (1-x^2)^s.$$

Substituindo a somatória na integral acima,

$$a_{n'} = \frac{2n+1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!s!} \left(\frac{\text{sen } \theta_a ka}{2} \right)^{2s} \int_{-1}^1 (1-x^2)^s P_{n'}(x) dx$$

e, da tabela de integrais [3], encontramos finalmente

$$a_{n'} = \frac{2n+1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!s!} \left(\frac{\text{sen } \theta_a ka}{2} \right)^{2s} 2^{n'} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+s, 1+s, \frac{1+n'}{2} \\ 1+n', \frac{1-n'}{2}, \frac{3}{2} + \frac{2s+n'}{2}, 1 + \frac{2s-n'}{2} \end{matrix} \right], \quad (5.15)$$

Com estes coeficientes determinados, $\mathfrak{T}_A = n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \int_{-1}^1 P_{n'}(\cos \theta) P_n(\cos \theta) e^{ibkax} dx$.

Entretanto, novamente não temos esta integral tabelada, o que nos leva a expandir os polinômios de Legendre em séries de potência em função do argumento x :

$$P_{n'}(x) = \frac{1}{2^{n'}} \sum_{k=0}^{[n'/2]} \frac{(-1)^k (2n'-2k)!}{k!(n'-k)!(n'-2k)!} x^{n'-2k} \quad \text{e} \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^l (2n-2l)!}{l!(n-l)!(n-2l)!} x^{n-2l}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_A &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} x^{(n+n')-2(k+l)} e^{ibkax} dx \\ &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} \int_{-1}^1 x^{(n+n')-2(k+l)} e^{ibkax} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \sum_{k=0}^{\lfloor n'/2 \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)!k!(n'-k)!(n'-2k)!} \times \\
 &\times \left\{ \int_{-1}^1 x^{(n+n')-2(k+l)} \cos(bkax) dx + i \int_{-1}^1 x^{(n+n')-2(k+l)} \operatorname{sen}(bkax) dx \right\},
 \end{aligned}$$

Recorrendo novamente à tabela de integrais [4],

$$\left\{ \begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^{(n+n')-2(k+l)} \cos(bkax) dx &= \sum_{q=0}^{(n+n')-2(k+l)} q! \binom{(n+n')-2(k+l)}{q} \frac{1}{(bka)^{q+1}} \\
 &\quad \left\{ \operatorname{sen} \left(bka + \frac{q\pi}{2} \right) - i \cos \left(bka + \frac{q\pi}{2} \right) \right\} \\
 \int_{-1}^1 x^{(n+n')-2(k+l)} \operatorname{sen}(bkax) dx &= - \sum_{q=0}^{(n+n')-2(k+l)} q! \binom{(n+n')-2(k+l)}{q} \frac{(-1)^{(n+n')-2(k+l)-q}}{(bka)^{q+1}} \\
 &\quad \left\{ \operatorname{sen} \left(-bka + \frac{q\pi}{2} \right) - i \cos \left(-bka + \frac{q\pi}{2} \right) \right\}
 \end{aligned} \right. \quad (5.16)$$

∴

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_A &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \sum_{k=0}^{\lfloor n'/2 \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)!k!(n'-k)!(n'-2k)!} \times \\
 &\times \left\{ \begin{aligned}
 &\sum_{q=0}^{(n+n')-2(k+l)} q! \binom{(n+n')-2(k+l)}{q} \frac{1}{(bka)^{q+1}} \left\{ \operatorname{sen} \left(bka + \frac{q\pi}{2} \right) - i \cos \left(bka + \frac{q\pi}{2} \right) \right\} - \\
 &i - \sum_{q=0}^{(n+n')-2(k+l)} q! \binom{(n+n')-2(k+l)}{q} \frac{(-1)^{(n+n')-2(k+l)-q}}{(bka)^{q+1}} \left\{ \operatorname{sen} \left(-bka + \frac{q\pi}{2} \right) - i \cos \left(-bka + \frac{q\pi}{2} \right) \right\}
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_A &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \sum_{k=0}^{\lfloor n'/2 \rfloor} \sum_{l=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)!k!(n'-k)!(n'-2k)!} \times \\
 &\sum_{q=0}^{(n+n')-2(k+l)} q! \binom{(n+n')-2(k+l)}{q} \frac{1}{(bka)^{q+1}} \left\{ \begin{aligned}
 &\left[\operatorname{sen} \left(bka + \frac{q\pi}{2} \right) - i \cos \left(bka + \frac{q\pi}{2} \right) \right] - \\
 &- (-1)^{(n+n')-2(k+l)-q} \left[\operatorname{sen} \left(-bka + \frac{q\pi}{2} \right) - i \cos \left(-bka + \frac{q\pi}{2} \right) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Passemos agora à segunda integral, \mathfrak{I}_B :

$$\mathfrak{I}_B = \int_0^{\pi} J_0(\operatorname{sen} \theta_a ka \operatorname{sen} \theta) P_n^1(\cos \theta) e^{ibka \cos \theta} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \int_0^{\pi} P_{n'}(\cos \theta) P_n^1(\cos \theta) \operatorname{sen}^2 \theta e^{ibkax} d\theta$$

Usando o fato de que $P_n^1(\cos \theta) = -dP_n(\cos \theta)/d\theta = \sin \theta (dP_n(\cos \theta)/d \cos \theta)$ ou $P_n^1(x) = \sqrt{1-x^2} dP_n(x)/dx$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_B &= -\sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \int_{-1}^1 P_{n'}(x) P_n^1(x) (1-x^2) e^{ibkax} \left(-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \int_{-1}^1 P_{n'}(x) \sqrt{1-x^2} [P_n(x)]' (1-x^2) e^{ibkax} \left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \int_{-1}^1 P_{n'}(x) [P_n(x)]' (1-x^2) e^{ibkax} dx \end{aligned}$$

Para a última integral acima, usamos a seguinte fórmula de recorrência para polinômios de Legendre, $[P_n(x)]'(1-x^2) = (n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)]$. Efetuando a substituição,

$$\mathfrak{T}_B = (n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \left\{ \int_{-1}^1 P_{n'}(x) P_n(x) x e^{ibkax} dx - \int_{-1}^1 P_{n'}(x) P_{n+1}(x) x e^{ibkax} dx \right\}$$

Usando as expansões anteriores para polinômios de Legendre,

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_B &= (n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \left\{ \frac{1}{2^{n'+n}} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} x^{(n'+n)-2(k+l)+1} e^{ibkax} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^{n'+n+1}} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[(n+1)/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n+2-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n+1-l)!(n+1-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} x^{(n'+n+1)-2(k+l)} e^{ibkax} dx \right\} \\ &= (n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \left\{ \frac{1}{2^{n'+n}} \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} \int_{-1}^1 x^{(n'+n)-2(k+l)+1} e^{ibkax} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2^{n'+n+1}} \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[(n+1)/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n+2-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n+1-l)!(n+1-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} \int_{-1}^1 x^{(n'+n+1)-2(k+l)} e^{ibkax} dx \right\} \end{aligned}$$

As integrais são resolvidas de acordo com as equações (5.16), de onde obteremos, após alguma álgebra, o seguinte valor para \mathfrak{T}_B :

$$\mathfrak{T}_B = (n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \left\{ \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} S_q \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[(n+1)/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n+2-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n+1-l)!(n+1-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} S_q \right\}, \quad (5.18)$$

onde

$$\begin{aligned} S_q &= \int_{-1}^1 x^{(n'+n+1)-2(k+l)} e^{ibkax} dx = \int_{-1}^1 x^{(n'+n)-2(k+l)+1} e^{ibkax} dx \\ &= \sum_{q=0}^{(n+n')-2(k+l)+1} q! \binom{(n+n')-2(k+l)+1}{q} \frac{1}{(bka)^{q+1}} \left\{ \left[\sin\left(bka + \frac{q\pi}{2}\right) - i \cos\left(bka + \frac{q\pi}{2}\right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{(n+n')-2(k+l)+1-q} \left[\sin\left(-bka + \frac{q\pi}{2}\right) - i \cos\left(-bka + \frac{q\pi}{2}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Para a integral $\mathfrak{I}_C = \int_0^\pi J_0(\text{sen } \theta_a ka \text{ sen } \theta) \left\{ \text{sen } \theta \cos \theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} + P_n^1(\cos \theta) \right\} e^{ibka \cos \theta} d\theta$, façamos

o seguinte rearranjo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} [\text{sen } \theta P_n^1(\cos \theta)] &= \cos \theta P_n^1(\cos \theta) + \text{sen } \theta \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} && \times \cos \theta \\ \frac{d}{d\theta} [\text{sen } \theta P_n^1(\cos \theta)] \cos \theta &= P_n^1(\cos \theta) - P_n^1(\cos \theta) \text{sen}^2 \theta + \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \text{sen } \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore P_n^1(\cos \theta) + \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \text{sen } \theta \cos \theta = n(n+1)P_n^1(\cos \theta) \text{sen } \theta \cos \theta + P_n^1(\cos \theta) \text{sen}^2 \theta$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_C &= \int_0^\pi J_0(\text{sen } \theta_a ka \text{ sen } \theta) \{ n(n+1)P_n^1(\cos \theta) \text{sen } \theta \cos \theta + P_n^1(\cos \theta) \text{sen}^2 \theta \} e^{ibka \cos \theta} d\theta \\ \Rightarrow \mathfrak{I}_C &= n(n+1) \int_0^\pi J_0(\text{sen } \theta_a ka \text{ sen } \theta) P_n^1(\cos \theta) \text{sen } \theta \cos \theta e^{ibka \cos \theta} d\theta + \mathfrak{I}_B \end{aligned} \quad (5.19)$$

A equação (5.19) apresenta uma integração análoga à \mathfrak{I}_A , apenas diferindo por um fator de $\cos \theta$ no integrando. Procedendo, então, conforme os passos anteriores,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_C &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \int_{-1}^1 P_{n'}(x) P_n(x) x e^{ibkax} dx + \mathfrak{I}_B \\ &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} x^{(n'+n)-2(k+l)+1} e^{ibkax} dx \\ &= n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} \int_{-1}^1 x^{(n'+n)-2(k+l)+1} e^{ibkax} dx \end{aligned}$$

Como $\int_{-1}^1 x^{(n'+n)-2(k+l)+1} e^{ibkax} dx = S_q$, chegamos finalmente a

$$\mathfrak{I}_C = n(n+1) \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'} \frac{1}{2^{n'+n}} \sum_{k=0}^{[n'/2]} \sum_{l=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+l} (2n-2l)! (2n'-2k)!}{l!(n-l)!(n-2l)! k!(n'-k)!(n'-2k)!} S_q + \mathfrak{I}_B, \quad (5.20)$$

De (5.11)-(5.14), juntamente com os valores de $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{omn}|^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi$ e $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{emn}|^2 \text{sen } \theta d\theta d\phi$ da seção 2, chegamos aos valores dos coeficientes³⁶:

³⁶ Como estamos tratando do campo incidente, a função esférica de Bessel, nesse caso, vale $z_n(ka) = j_n(ka)$.

$$B_{emn} = 0 \quad (5.21)$$

$$B_{omn} = B_{o1n} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{omn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{omn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{\pi z_n(ka) \mathfrak{S}_A}{\pi [z_n(ka)]^2 \frac{2[n(n+1)]^2}{2n+1}} = \frac{(2n+1) \mathfrak{S}_A}{z_n(ka) 2[n(n+1)]^2} \quad (5.22)$$

$$A_{emn} = A_{e1n} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{emn} \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{emn}|^2 \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{\pi n(n+1) \frac{z_n(ka)}{ka} \mathfrak{S}_B + \pi \frac{[kaz_n(ka)]'}{ka} \mathfrak{S}_C}{\frac{\pi}{(ka)^2} \frac{2[n(n+1)]^2}{2n+1} \left[n(n+1)(z_n(ka))^2 + ([kaz_n(ka)]')^2 \right]} \quad (5.23)$$

$$A_{omn} = 0 \quad (5.24)$$

5.4 Forças Ópticas no Regime de Óptica Geométrica

Antes de aplicarmos as fórmulas dos capítulos anteriores para calcular as forças ópticas a partir dos fatores de forma e coeficientes de Mie, façamos uma analogia com a óptica geométrica, onde mostramos as forças ópticas para partículas materiais ou metamateriais, no caso de um feixe focalizado (gaussiano). A teoria consistia no cálculo das forças gradiente e de espalhamento para um único raio, sendo posteriormente integrada sobre toda a superfície da partícula.

Para pinças ópticas, as forças gradiente (perpendicular ao eixo óptico) e de espalhamento (paralela) eram dadas, no caso convencional, por

$$F_z = F_s = \frac{n_1 P}{c} Q_s = \frac{n_1 P}{c} \left\{ 1 + R \cos 2\theta - \frac{T^2 [\cos(2\theta - 2r) + R \cos(2\theta)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\} \quad (5.25)$$

$$F_y = F_g = \frac{n_1 P}{c} Q_g = \frac{n_1 P}{c} \left\{ R \sin 2\theta - \frac{T^2 [\sin(2\theta - 2r) + R \sin(2\theta)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\}, \quad (5.26)$$

enquanto que, para o caso metamaterial, tínhamos uma sutil diferença de sinal:

$$F_z = F_s = \frac{n_1 P}{c} Q_s = \frac{n_1 P}{c} \left\{ 1 + R \cos 2\theta - \frac{T^2 [\cos(2\theta + 2r) + R \cos(2\theta)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\} \quad (5.27)$$

$$F_y = F_g = \frac{n_1 P}{c} Q_g = \frac{n_1 P}{c} \left\{ R \sin 2\theta - \frac{T^2 [\sin(2\theta + 2r) + R \sin(2\theta)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2r} \right\}. \quad (5.28)$$

Apesar da pequena diferença entre os dois casos, as conseqüências eram facilmente observadas: dependendo do ângulo de incidência do raio, a força gradiente poderia inverter de sinal, passando de atrativa para repulsiva, ou vice-versa. Ou seja, a força gradiente passava por um zero, sendo que o valor do ângulo de incidência dependeria do índice de refração relativo. Assim, para que a força gradiente seja nula, devemos resolver a equação para o ângulo de incidência θ , $L_e = R \sin 2\theta(1 + R^2 + 2R \cos 2r) = T^2 [\sin(2\theta + 2r) + R \sin(2\theta)] = L_d$. Os coeficientes de Fresnel (R e T) dependem exclusivamente de θ e r , sendo r o ângulo de transmissão, relacionado com θ em função da Lei de Snell. Para um índice de refração relativo $|n_2/n_1| = 1,62/1,33$, as figuras 5.2 e 5.3 mostram as curvas associadas aos termos à esquerda e à direita dessa equação.

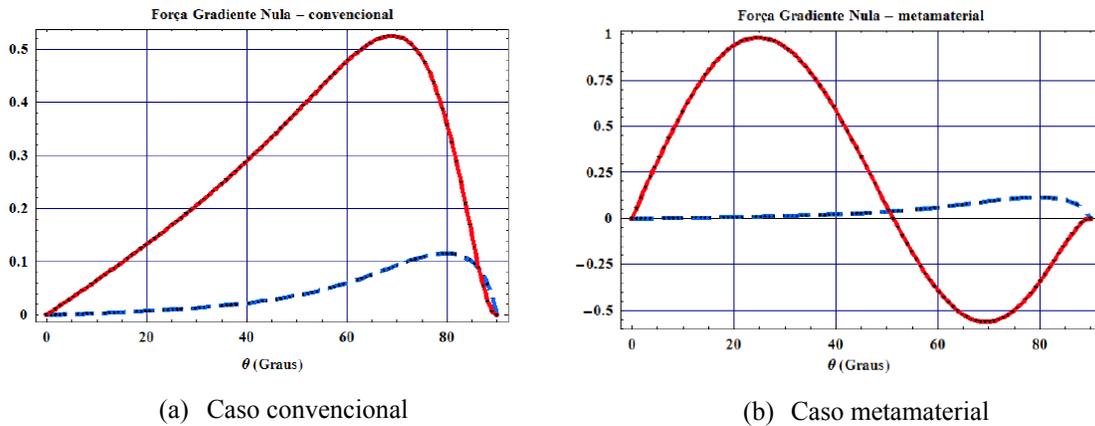


Figura 5.2. Intersecção entre as curvas L_e (azul tracejado) e L_d (vermelho sólido) para casos convencional e metamaterial com $|n_2/n_1| = 1,62/1,33$.

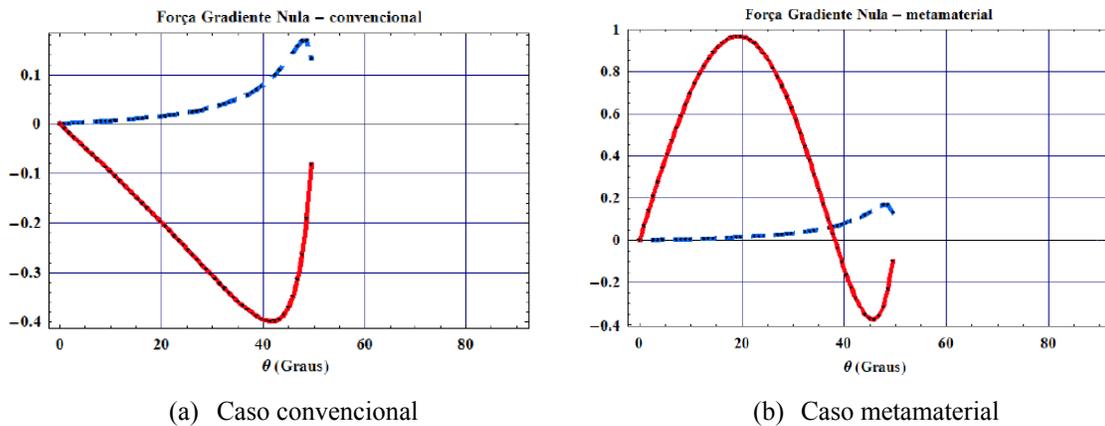


Figura 5.3. Intersecção entre as curvas L_e (azul tracejado) e L_d (vermelho sólido) para casos convencional e metamaterial para $|n_2/n_1| = 1,02/1,33$. As curvas foram truncadas para ângulos maiores que o ângulo de reflexão total.

Esta observação é importante para as conclusões futuras: **a força gradiente DE CADA RAIOS, para o caso metamaterial, ao contrário do que ocorre no caso convencional, não inverte de sentido quando o índice de refração relativo n passa, em módulo, de $n > 1$ para $n < 1$.** Isso não implica, necessariamente, que a força gradiente **total** não possa ter um padrão diferente, já que os ângulos de refração/reflexão serão diferentes para diferentes valores do índice de refração relativo. Deve ficar claro, porém, que a intensidade da força total será diferente, dependendo do índice relativo, já que a quantidade de raios que atravessam a partícula também variará.

5.4.1 Forças Totais para Feixes Localizados

Para feixes focalizados, a geometria do problema envolvia uma mudança de coordenadas para cada raio incidente, já que os mesmos incidiam na superfície da esfera com diferentes ângulos em relação ao eixo óptico. Aqui, entretanto não há essa necessidade, devendo apenas associar ao valor da potência P nas eqs. (5.25)-(5.28) o devido padrão de intensidade de uma função de Bessel. Supondo que cada raio incida sobre a partícula segundo as figuras 3.3 e 3.9, a potência P que devemos introduzir nas equações citadas pode ser escrita como

$$P = \left| J_p \left(k_\rho \sqrt{(r \sin \theta)^2 + \rho_0^2} - 2(r \sin \theta) \rho_0 \cos(\phi - \phi_0) \right) \right|^2 \quad (5.29)$$

A figura 5.4 nos mostra uma vista do problema quando o sistema de referência é o da partícula. Note, entretanto, que ao fazermos $\phi_0 = 90^\circ$, estamos invertendo o sentido do eixo y referente às figuras 3.3 e 3.9³⁷. Devido à simetria do problema, é indiferente na óptica geométrica a escolha do ângulo ϕ_0 .

Para as simulações a seguir, escolhemos $\theta_a = 0,0141$ rad, $\lambda = 1064$ nm (com isso, o *spot* do feixe de Bessel é de, aproximadamente, $29 \mu\text{m}$ – a figura 5.5 apresenta os padrões de potência para $p = 0$ e $p = 1$), $a = 10\lambda$, de forma que a condição para óptica geométrica seja satisfeita. A primeira simulação foi feita para o caso casado ($n_1 = 1,33$) e discutido anteriormente, sendo que a figura 5.6 apresenta os resultados para os casos convencional e metamaterial (a potência em (5.29) é função de Bessel $J_0(\cdot)$, i.e, $p = 0$).

³⁷ Isto significa que, para esta seção, forças gradientes negativas são *repulsivas*., como foi feito no capítulo 3.

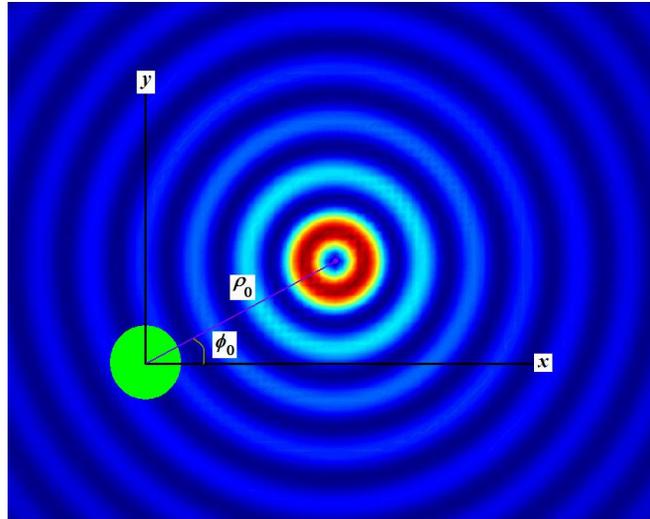


Figura 5.4. Partícula centrada na origem e feixe localizado ordinário deslocado de ρ_0 com um ângulo ϕ_0 em relação ao eixo x .

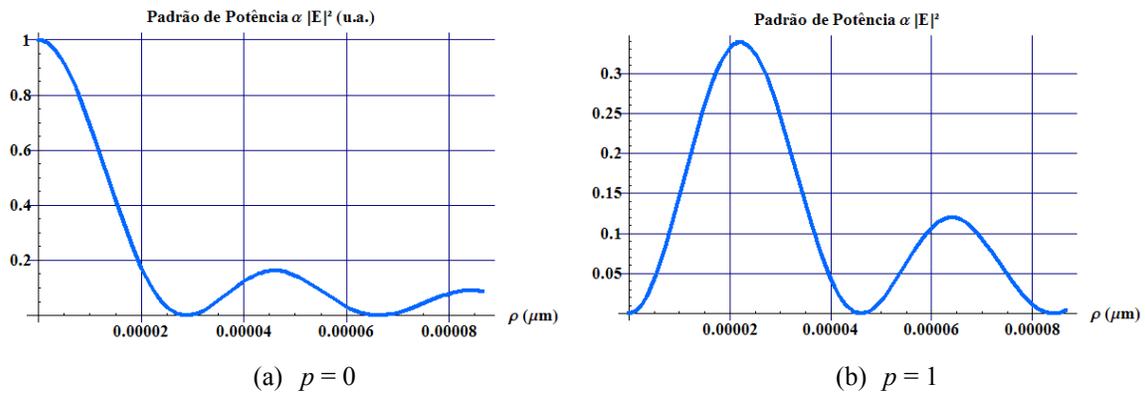
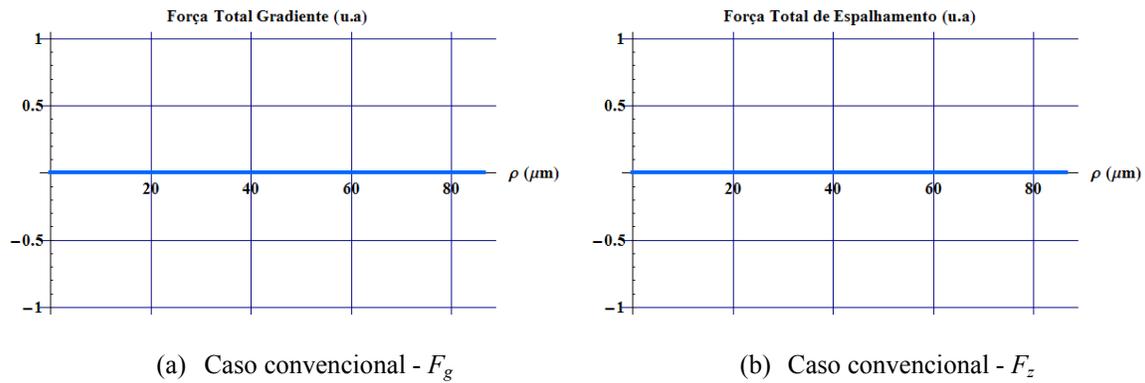


Figura 5.5. Padrão de intensidade para feixe localizado.



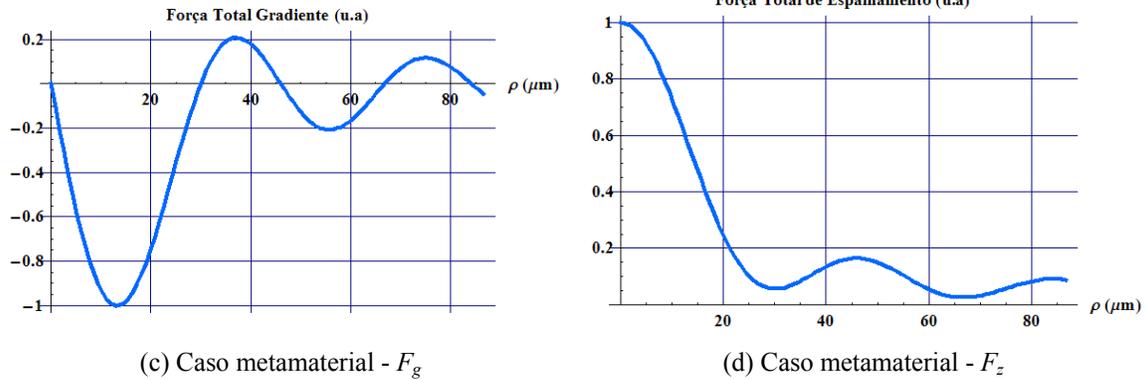
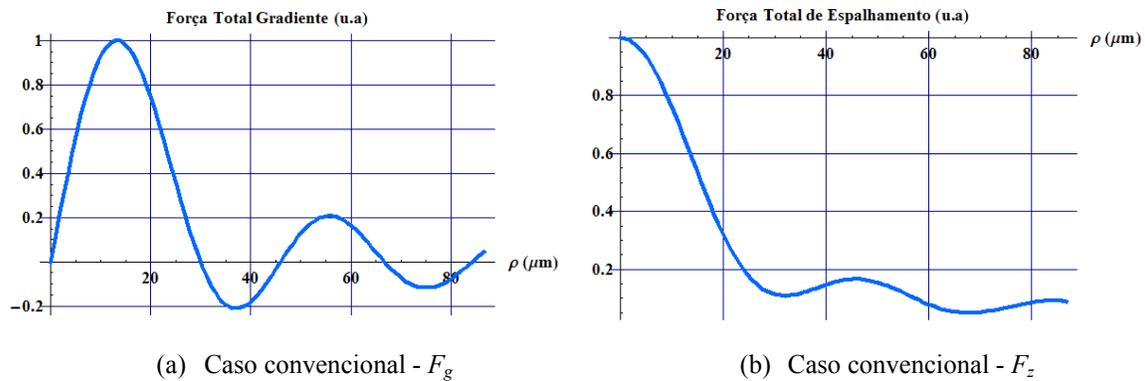


Figura 5.6. Mesmo quando a partícula está casada com o meio, forças ópticas continuam sendo exercidas sobre a mesma quando ela é metamaterial.

Observe que, como é de esperar, as forças são nulas para o caso convencional, embora tanto a força de espalhamento quanto gradiente variem conforme mudamos a distância entre o eixo óptico do feixe e o centro da partícula³⁸.

As figuras 5.7 e 5.8 mostram as forças ópticas para $|n_2|/n_1 = 1,62/1,33$ e $|n_2|/n_1 = 1,02/1,33$, respectivamente, ainda para $p = 0$ em (5.29). As forças foram normalizadas em função dos valores máximos da força gradiente convencional (para as forças gradientes convencional e metamaterial) e da força de espalhamento convencional (para as forças de espalhamento convencional e metamaterial). O mesmo procedimento será usado para as demais simulações.



³⁸ Como existe simetria neste problema, é arbitrária a escolha de ϕ_0 . Lembramos que, seguindo a formulação para o feixe gaussiano, trata-se de um feixe com polarização circular.

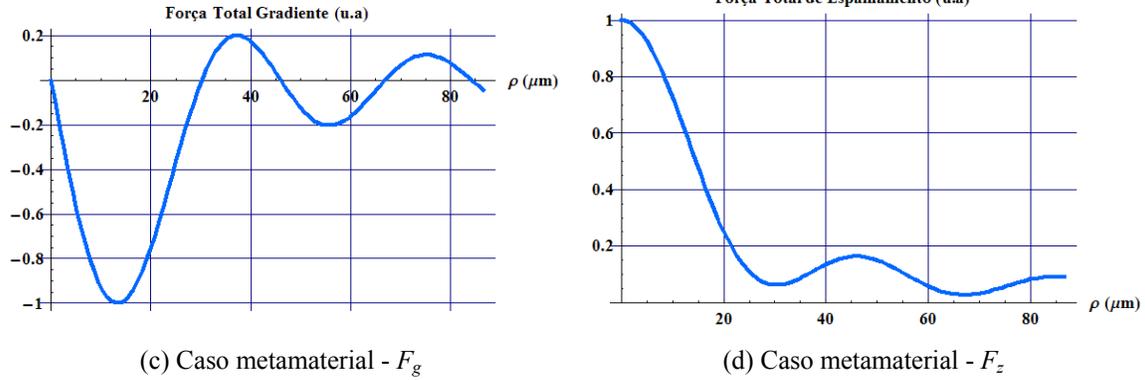


Figura 5.7. Forças ópticas para $p = 0$ quando $|n_2|/n_1 = 1,62/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade.

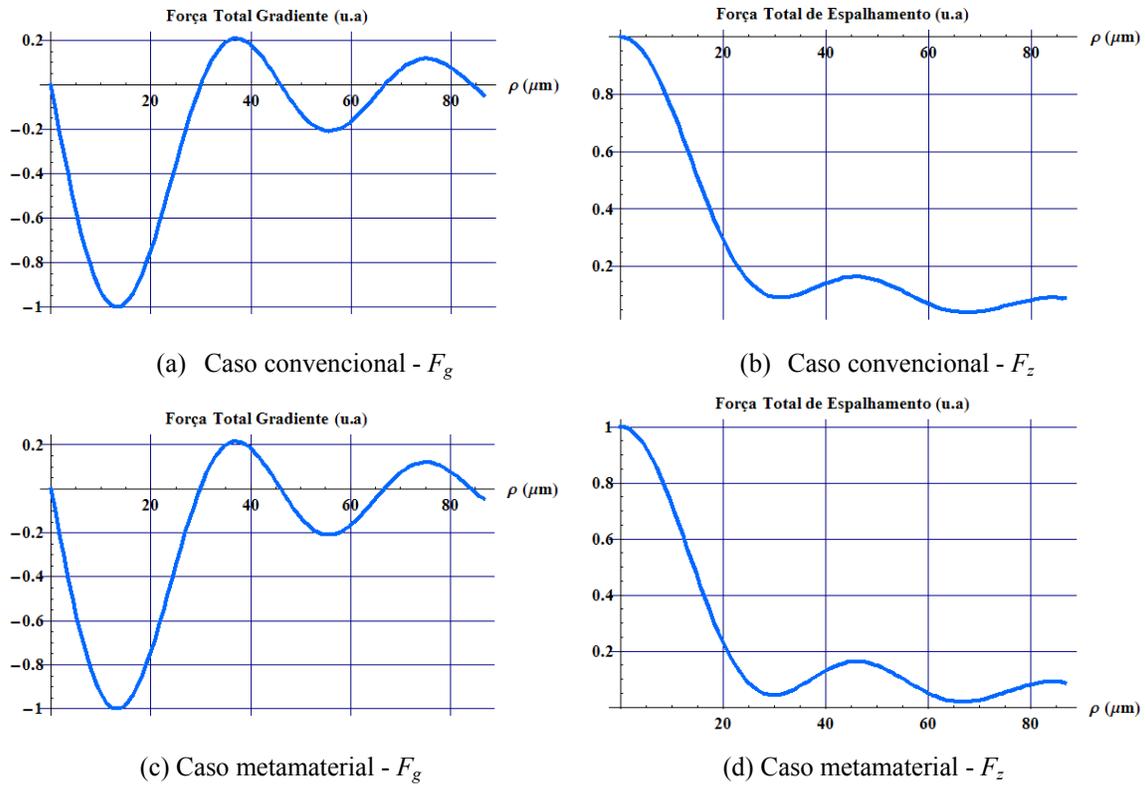


Figura 5.8. Forças ópticas para $p = 0$ quando $|n_2|/n_1 = 1,02/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade, embora haja inversão no sentido da força apenas no caso convencional.

Os padrões para a força óptica no caso em que $p = 1$ em (5.29) são mostrados nas figuras de 5.9 a 5.11, usando os mesmos valores para as simulações das figuras 5.6 a 5.8 para $p = 0$.

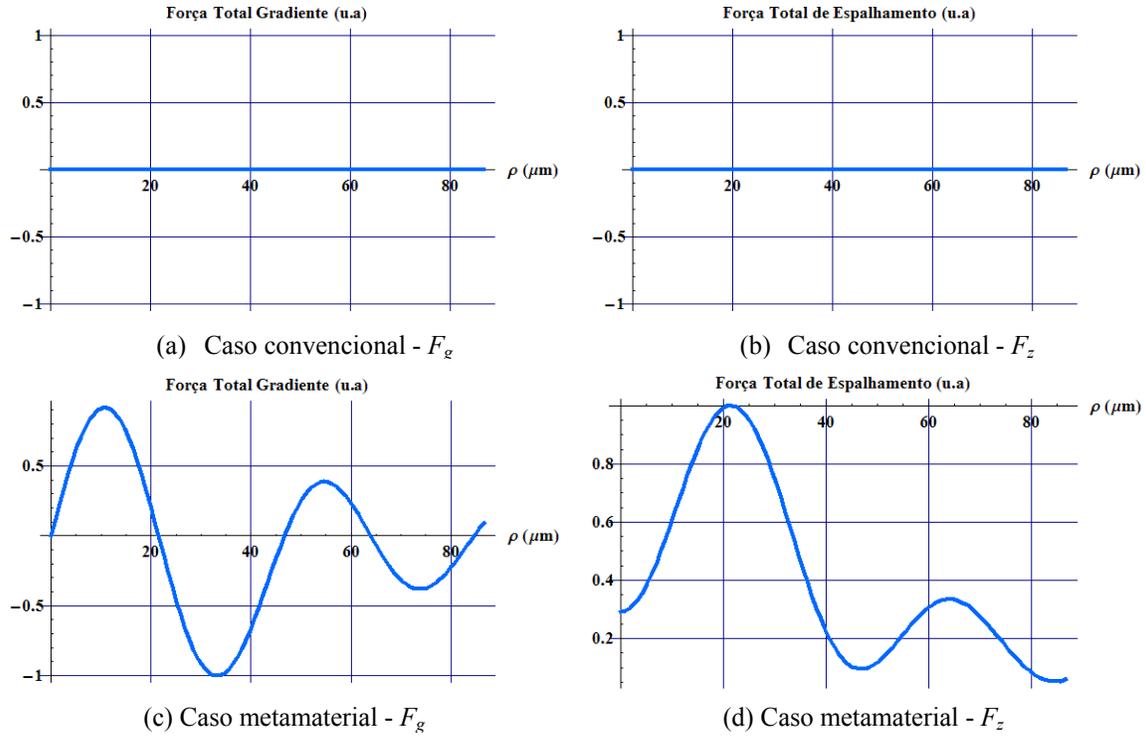


Figura 5.9. Mesmo quando a partícula está casada com o meio, forças ópticas continuam sendo exercidas sobre a mesma quando ela é metamaterial. Caso $p = 1$ na eq. (5.29).

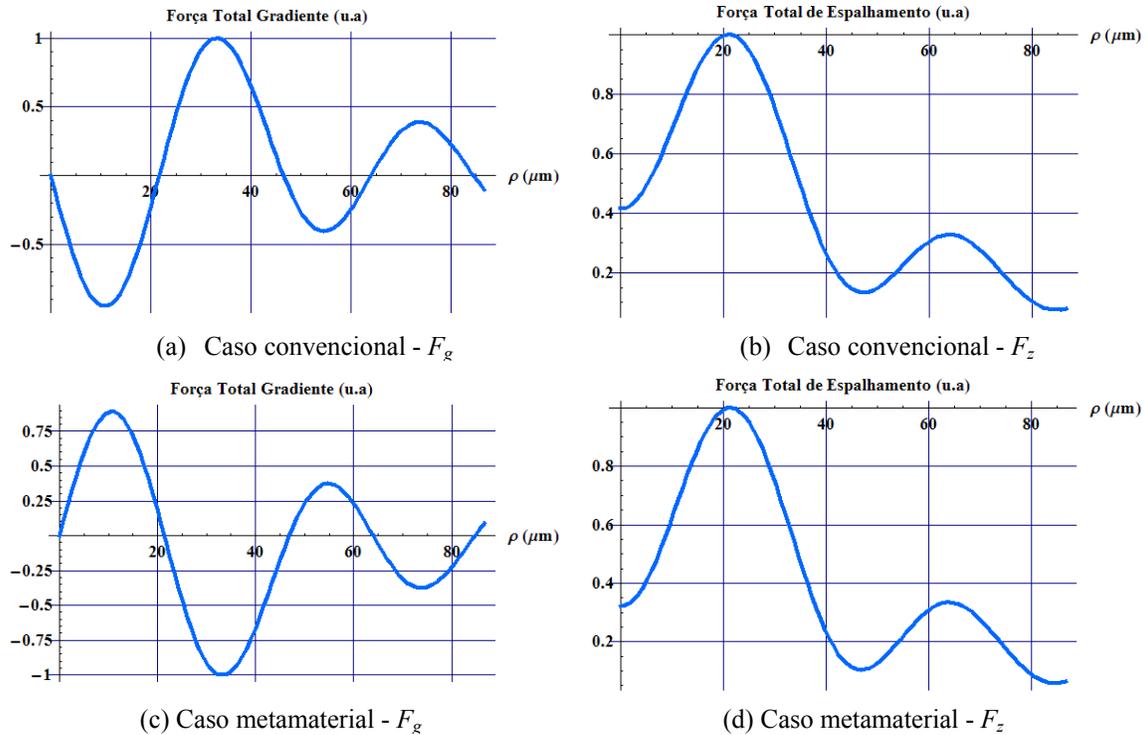


Figura 5.10. Forças ópticas para $p = 1$ quando $|n_2|/n_1 = 1,62/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade.

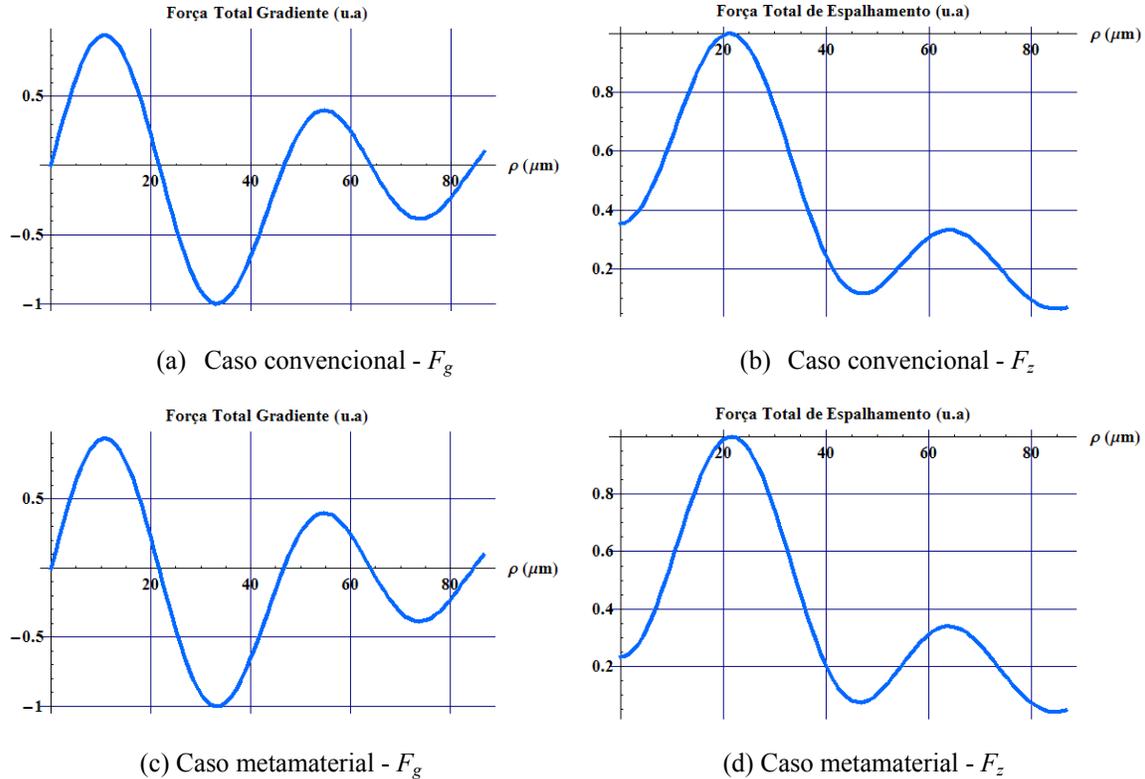


Figura 5.11. Forças ópticas para $\rho = 0$ quando $|n_2/n_1| = 1,02/1,33$. Note que a força gradiente se anula sempre que a partícula se encontra em uma região de máximo ou mínimo local de intensidade, embora haja inversão no sentido da força apenas no caso convencional.

5.4.2 Comentários

O feixe gaussiano apresenta apenas uma região de alta intensidade e, portanto, uma única região de captura (no caso convencional, se o índice de refração da partícula fosse menor que o do meio externo, então as forças a direcionava para regiões de baixa intensidade: a partícula seria repelida do foco).

No caso de um feixe localizado, tanto no regime de óptica geométrica quanto no regime de Rayleigh-Gans estudado em um artigo por nós apresentado em congresso [16], vamos encontrar várias regiões possíveis para aprisionamento óptico (regiões onde a força gradiente se anula). Se observarmos que forças gradientes negativas se referem a uma repulsão na direção do eixo óptico e, se positivas, à atração, uma partícula convencional com $n_2 > n_1$ poderá ser capturada nas diversas regiões de **MÁXIMOS LOCAIS** de intensidade, enquanto que, para $n_2 > n_1$, a partícula, ao invés de ser repelida como no caso gaussiano, ainda pode ser capturada em regiões de baixa

intensidade. Isso pode ser observado nas figuras 5.7, 5.8, 5.10 e 5.11 e verificado experimentalmente [17-19]. Vale ressaltar que encontramos possíveis localizações de captura (força gradiente nula) em regiões de mínimos locais de intensidade. Tratam-se, todavia, de regiões de equilíbrio instável, o que anula a possibilidade de captura óptica.

No caso metamaterial, a inversão de $n_2/n_1 > 1$ para $n_2/n_1 < 1$ não altera a direção em que a força é exercida sobre a partícula e, ainda que estejamos trabalhando com raios, fica evidente, através das figuras 5.6 e 5.9, a existência de forças mesmo quando a partícula está casada com o meio, revelando a variação de momento linear de cada feixe os quais, em conjunto, causam o aparecimento de tal força. Os campos espalhados por metamateriais têm sido atualmente estudados para aplicações em camuflagens em frequências de microondas [19,20].

Nossa conclusão sobre este item é que, *ao contrário do que foi visto para um feixe gaussiano, as forças ópticas sobre uma partícula metamaterial, para os feixes localizados estudados, comportam-se sempre como partículas convencionais para um índice relativo menor que 1, sendo atraídas para regiões de baixa intensidade.*

Tal conclusão necessita de maiores aprofundamentos, já que mudanças neste comportamento podem ocorrer quando a relação a/s (raio da partícula e spot do feixe de Bessel), ou o índice relativo n_2/n_1 , variem.

5.5 Polarizações para Feixes Localizados

É natural que, quando o regime de óptica geométrica falha e temos que tratar o fenômeno de aprisionamento óptico através da teoria eletromagnética explanada do item 5.3 ou de alguma matemática equivalente, a polarização do feixe incidente desempenhe papel importante na força resultante sobre a partícula. Para feixes com simetria cilíndrica, a escolha do campo incidente com sua polarização deve satisfazer à equação de onda vetorial em coordenadas esféricas e, neste ponto, deveríamos questionar quais escolhas de polarização seriam experimentalmente simples de serem implementadas.

De forma geral, verificamos na literatura que, em grande parte, os trabalhos experimentais se concentram em gerar feixes localizados ordinários usando áxicons, estruturas anulares ou holografia, tendo como conseqüência que o feixe assim obtido é uma solução da equação de onda *escalar*. No caso de feixes de ordem superior, estes são gerados usando um modelador de luz

espacial, áxicons iluminados com feixes do tipo Laguerre-Gauss ou fazendo um feixe de Bessel passar por um cristal uniaxial ou biaxial.

Podemos obter soluções vetoriais usando polarizadores áxicons. Neste caso, por exemplo, polarizações radiais e azimutais são produzidas através de luz inicialmente polarizada, ou não. Porém, observando a equação (4.1), somos obrigados a levar em consideração para nossa análise dois sistemas distintos de coordenadas: um para o feixe de Bessel incidente e outro para a partícula.

A figura 5.12 mostra os dois sistemas adotados. Para o feixe, adotamos o sistema “linha” e, para a esfera a ser aprisionada, o sistema “sem linha”. O feixe pode se afastar da origem O (centro da partícula) em qualquer direção, mas iremos assumir somente um deslocamento em x , x_0 , descrito vetorialmente como $\vec{x}_0 = \mathbf{x}_0 = x_0 \hat{a}_x = (x_0 \cos \phi) \hat{a}_\rho - (x_0 \sin \phi) \hat{a}_\phi$. Visto de cima, temos o caso bidimensional da figura 4. Adotaremos os versores $(\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z)$, $(\hat{a}_\rho, \hat{a}_\phi, \hat{a}_z)$ e $(\hat{a}_r, \hat{a}_\theta, \hat{a}_\phi)$ para o sistema da partícula em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente, e $(\hat{a}'_x, \hat{a}'_y, \hat{a}'_z)$, $(\hat{a}'_\rho, \hat{a}'_\phi, \hat{a}'_z)$ e $(\hat{a}'_r, \hat{a}'_\theta, \hat{a}'_\phi)$ para o sistema do feixe. É possível escrever $(\hat{a}'_\rho, \hat{a}'_\phi, \hat{a}'_z)$ em termos de $(\hat{a}_\rho, \hat{a}_\phi, \hat{a}_z)$ notando que

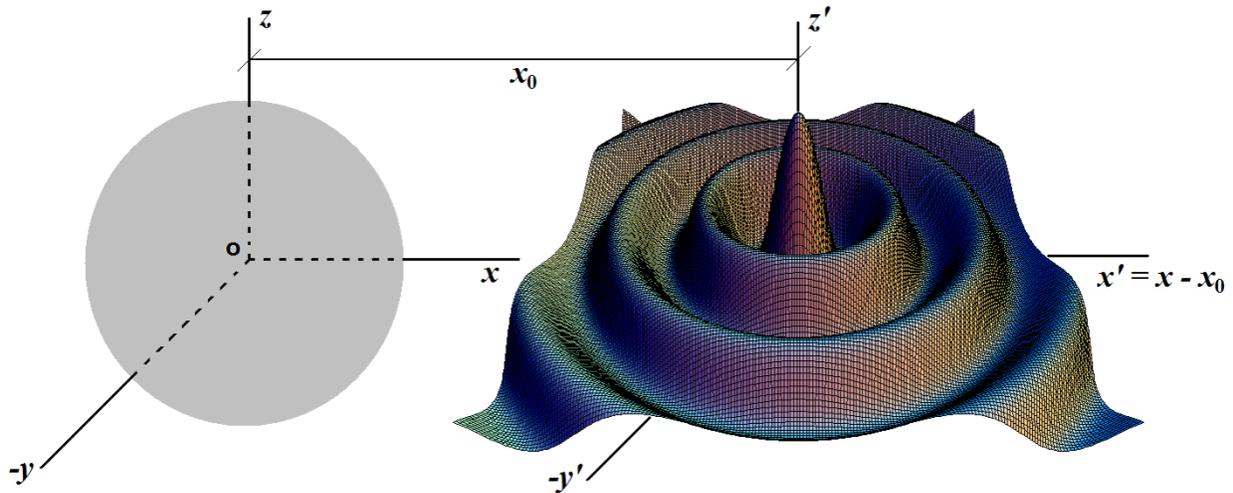


Figura 5.12. Sistema de coordenadas “linha” do feixe e “sem linha” da partícula. O feixe possui seu eixo óptico deslocado de x_0 ao longo do eixo x .

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}'_{\rho} = \frac{\rho \hat{a}_{\rho} - x_0 \hat{a}_{x_0}}{|\rho \hat{a}_{\rho} - x_0 \hat{a}_{x_0}|} = \frac{\rho \hat{a}_{\rho} - x_0 \hat{a}_x}{\rho'} \\ \hat{a}'_z = \hat{a}_z \\ \hat{a}'_{\phi} = \hat{a}'_z \times \hat{a}'_{\rho} = \hat{a}_z \times \left(\frac{\rho \hat{a}_{\rho} - x_0 \hat{a}_x}{\rho'} \right) = \frac{\rho}{\rho'} \hat{a}_{\phi} - \frac{x_0}{\rho'} \hat{a}_y \end{array} \right. , \quad (5.30)$$

Sendo $\hat{a}_y = \sin \phi \hat{a}_{\rho} + \cos \phi \hat{a}_{\phi}$,

$$\hat{a}'_{\phi} = -\frac{x_0 \sin \phi}{\rho'} \hat{a}_{\rho} + \left(\frac{\rho - x_0 \cos \phi}{\rho'} \right) \hat{a}_{\phi}, \quad (5.31)$$

Além disso, um ponto (ρ', ϕ', z') é escrito no sistema *sem linha* através da seguinte transformação, que pode ser facilmente obtida:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = \sqrt{\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \cos \phi} = \sqrt{(r \sin \theta)^2 + x_0^2 - 2r \sin \theta x_0 \cos \phi} \\ \phi' = \tan^{-1} \left(\frac{\rho \sin \phi}{\rho \cos \phi - x_0} \right) \\ z' = z \end{array} \right. , \quad (5.32)$$

Os conjuntos de equações (5.30)-(5.32) são usados na descrição de um feixe incidente com campo elétrico arbitrário

$$\mathbf{E}_i(\rho', \phi', z') = E'_{\rho}(\rho', \phi', z') \hat{a}'_{\rho} + E'_{\phi}(\rho', \phi', z') \hat{a}'_{\phi} + E'_z(\rho', \phi', z') \hat{a}'_z \quad (5.33)$$

para o descrever no sistema da partícula na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(\rho, \phi, z) = & \left[E'_{\rho}(\rho, \phi, z) \left(\frac{\rho - x_0 \cos \phi}{\sqrt{\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \cos \phi}} \right) - E'_{\phi}(\rho, \phi, z) \left(\frac{x_0 \sin \phi}{\sqrt{\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \cos \phi}} \right) \right] \hat{a}_{\rho} + \\ & \left[E'_{\rho}(\rho, \phi, z) \left(\frac{x_0 \sin \phi}{\sqrt{\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \cos \phi}} \right) + E'_{\phi}(\rho, \phi, z) \left(\frac{\rho - x_0 \cos \phi}{\sqrt{\rho^2 + x_0^2 - 2\rho x_0 \cos \phi}} \right) \right] \hat{a}_{\phi} + \\ & E'_z(\rho, \phi, z) \hat{a}_z \end{aligned} \quad (5.34)$$

O campo magnético é expresso de forma idêntica à (5.34), que é geral para quaisquer componentes de campo E'_{ρ} , E'_{ϕ} e E'_z .

A proposta de um campo elétrico incidente polarizado em x (feito anteriormente) satisfaz à equação de onda vetorial, mas não é um método geral de análise. Esclarecemos que esta escolha foi motivada pela literatura existente, onde a questão de expansão em harmônicos esféricos vetoriais é feita geralmente em ondas planas polarizadas também em x . A expansão para feixes gaussianos também aparece com essa polarização. Dessa forma, fomos levados à escolha imediata do continuísmo, por facilidade.

Existem, entretanto, formas mais elegantes de se tratar o problema. Aliás, podemos enxergar o problema pensando na facilidade teórica ou na questão prática.

Assim, no caso de feixes localizados, encontramos na literatura diversos artigos e trabalhos envolvendo soluções escalares, onde temos apenas um padrão transversal não-difrativo segundo uma função de Bessel. Apesar das diversas aplicações práticas, não representam soluções da equação de onda vetorial. Matematicamente, entretanto, são diversas as formas de dedução de novas soluções vetoriais a partir de soluções escalares.

Entre as mais simples, podemos supor que uma solução escalar não-difrativa (que pode ser qualquer função escalar cujo padrão transversal de propagação não sofra alterações, i.e., difração) corresponde a uma das componentes do potencial vetor \mathbf{A} . Dessa forma, os campos elétrico e magnético ficariam determinados através das relações envolvendo os potenciais V e \mathbf{A} ³⁹, i.e., $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial\mathbf{A}/\partial t$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, com $V = -c^2 \int \nabla \cdot \mathbf{A} dt$.

Outra forma de obtermos soluções não-difrativas vetoriais é impondo uma solução escalar como sendo uma componente de campo (elétrico). Como exemplo, supondo uma simetria cilíndrica com propagação em z (sendo β o número de onda longitudinal), se nossa solução escalar nada mais é que a componente $E_z(\rho, \phi, z)$ de campo elétrico, das equações de Maxwell teremos os campos para o modo TM_z ⁴⁰ [21]:

³⁹ Aqui entramos na questão do calibre a ser usado, dada a liberdade no divergente de \mathbf{A} . De forma geral, a determinação dos campos usando este método é facilitada usando-se o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

⁴⁰ O mesmo procedimento vale para os modos TE_z : À componente z do campo magnético é atribuída nossa solução escalar não-difrativa, valendo a dualidade dos campos.

$$\begin{aligned}
 \nabla_T E_z \times \hat{\mathbf{z}} - j\beta \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T &= -j\omega\mu \mathbf{H}_T \\
 \nabla_T H_z \times \hat{\mathbf{z}} - j\beta \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{H}_T &= j\omega\varepsilon \mathbf{E}_T \\
 \nabla_T \times \mathbf{E}_T + j\omega\mu \hat{\mathbf{z}} H_z &= 0 \\
 \nabla_T \times \mathbf{H}_T - j\omega\varepsilon \hat{\mathbf{z}} E_z &= 0 \\
 \nabla_T \cdot \mathbf{E}_T - j\beta E_z &= 0 \\
 \nabla_T \cdot \mathbf{H}_T - j\beta H_z &= 0
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

Este método foi usado por Romea e Kimura [22] na obtenção de soluções vetoriais supondo ordem zero para a função de Bessel (feixes ordinários), com subseqüentes estudos referentes às polarizações radiais e azimutais [23,24].

Talvez a análise mais geral para obtenção de soluções não-difrativas vetoriais – para meio sem fontes - ainda seja aquela apresentada por Bouchal e Olivík [25]. Neste artigo, são examinados feixes de Bessel vetoriais, de qualquer ordem, tanto como soluções da equação de Helmholtz (equação de onda *vetorial*, claro), quanto da superposição de componentes vetoriais do espectro angular. O potencial vetor \mathbf{A} é escrito como uma superposição de solução da equação de Helmholtz vetorial, utilizando-se de uma solução Φ da respectiva equação escalar e de um vetor constante arbitrário \mathbf{u} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\omega} \sum_n (\alpha_n \mathbf{M}_n + \beta_n \mathbf{N}_n + \gamma_n \mathbf{L}_n), \tag{5.36}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= \nabla \Phi, \\
 \mathbf{M} &= \nabla \times \mathbf{u} \Phi \\
 \mathbf{N} &= \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Assim, para \mathbf{A} solenoidal e propagação também em z , o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (1/2) [\mathbf{U}(\mathbf{r}) e^{-i\alpha t} + \mathbf{U}^*(\mathbf{r}) e^{i\alpha t}]$ terá associado às suas soluções, funções vetoriais da forma $\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \sum_n (\alpha_n \mathbf{M}_n + \beta_n \mathbf{N}_n)$ e, em termos destas funções, temos os casos de polarização mais comumente utilizados: azimutal, radial, linear e circular.

Apresentamos a seguir dois tipos de polarizações que calculamos:

5.5.1 Polarização a Partir do Potencial Vetor

Seja para a aproximação de Gouesbet, seja para o caso mais geral do capítulo 5, podemos determinar os fatores de forma apenas pelos campos radiais em coordenadas esféricas no sistema da partícula. Para isso, vamos supor que o vetor potencial \mathbf{A} seja

$$\mathbf{A} = A'_z \hat{a}'_z = J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \hat{a}'_z. \quad (5.38)$$

Das relações envolvendo os potenciais V e \mathbf{A} , i.e., $\mathbf{E} = -\nabla V - \partial\mathbf{A}/\partial t$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, com $V = -c^2 \int \nabla \cdot \mathbf{A} dt$, temos

$$V = c \cos \theta_a J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z} e^{-i\omega t} \quad (5.39)$$

e, omitindo a dependência temporal, obtemos

$$\begin{cases} E'_\rho = -\frac{ck_\rho \cos \theta_a}{2} [J_{\nu-1}(k_\rho \rho') - J_{\nu+1}(k_\rho \rho')] e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z} \\ E'_\phi = i \frac{vc \cos \theta_a}{\rho} J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z} \\ E'_z = i\omega \text{sen}^2 \theta_a J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z} \end{cases} \quad (5.40)$$

e

$$\begin{cases} B'_\rho = -i \frac{v}{\rho} J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z} \\ B'_\phi = \frac{k_\rho}{2} [J_{\nu-1}(k_\rho \rho') - J_{\nu+1}(k_\rho \rho')] e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z} \\ B'_z = 0 \end{cases} \quad (5.41)$$

As forças ópticas são determinadas fazendo-se a mudança de sistema de referência, usando (5.40) e (5.41) em (5.34) com as devidas mudanças nos versores das bases e das coordenadas, e determinando-se os campos radiais no sistema da partícula $E_r = \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_r$ e $H_r = \mathbf{H}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_r$.

5.5.2 Polarização a partir da componente E_z

Neste caso, omitindo a dependência temporal $e^{-i\omega t}$, fazemos

$$\mathbf{E} = E'_z \hat{\mathbf{a}}'_z = J_\nu(k_\rho \rho') e^{-iv\phi'} e^{ik_z z} \hat{\mathbf{a}}'_z. \quad (5.42)$$

e, das equações de Maxwell para meios simples sem perdas, encontramos

$$\begin{cases} H'_\rho = -\frac{\nu}{\omega\mu\rho} J_\nu(k_\rho \rho') e^{-iv\phi'} e^{ik_z z} \\ H'_\phi = i \frac{k_\rho}{2\omega\mu} [J_{\nu-1}(k_\rho \rho') - J_{\nu+1}(k_\rho \rho')] e^{-iv\phi'} e^{ik_z z} \\ H'_z = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

5.5.3 Resultados e Conclusões

Um código para cálculo dos fatores de forma para um feixe de Bessel ordinário ($\nu = 0$ nas equações de (5.40) a (5.43)) é descrito no Apêndice C para o caso em que a polarização é determinada pelo potencial vetor (item 5.5.1). Com este código, consideremos um feixe localizado com dois possíveis ângulos de áxicon: $0,81^\circ$ e $3,80^\circ$. Com estes valores estamos impondo uma relação entre raio da partícula e comprimento de onda, respectivamente, de 10λ e $2,13\lambda$, mantendo o *spot* do feixe constante em, aproximadamente, $2,89 \mu\text{m}$.

Os resultados para um índice relativo $|n| > 1$ estão na figura 5.13 e, para $|n| < 1$, na figura 5.14. A figura 5.15 mostra que tanto o cálculo da óptica geométrica quanto o cálculo eletromagnético através das seções de choque são equivalentes, comprovando nosso código para uma partícula convencional. No caso metamaterial (vide figura 5.16), mesmo quando $|n| = 1$, forças ópticas continuam atuando sobre a partícula. Embora aqui a interpretação para o deslocamento seja

através de fenômenos de espalhamento, o resultado final é o mesmo que aquele da óptica geométrica: partículas metamateriais não seguem a regra do índice de refração relativo como determinantes para o deslocamento na direção de regiões de altas ou baixas intensidades.

Esta conclusão, análoga ao caso do feixe gaussiano, foi sintetizada recentemente em um artigo, submetido ao IMOC 2009 - *International Microwave and Optics Conference* -, e que aguarda aprovação.

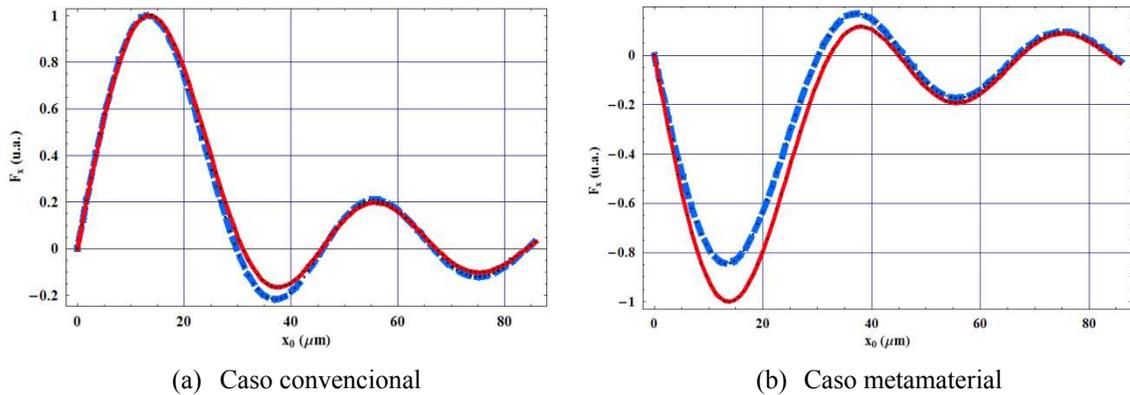


Figura 5.13. Forças gradientes para um feixe de Bessel ordinário no regime de óptica geométrica (linhas tracejadas) com $a = 10\lambda$, e no caso eletromagnético com $a = 2,3\lambda$ (linhas sólidas), para (a) partícula convencional e (b) metamaterial, ambas com $|n_2|/n_1 = 1,62/1,33$, usando (5.40) e (5.41).

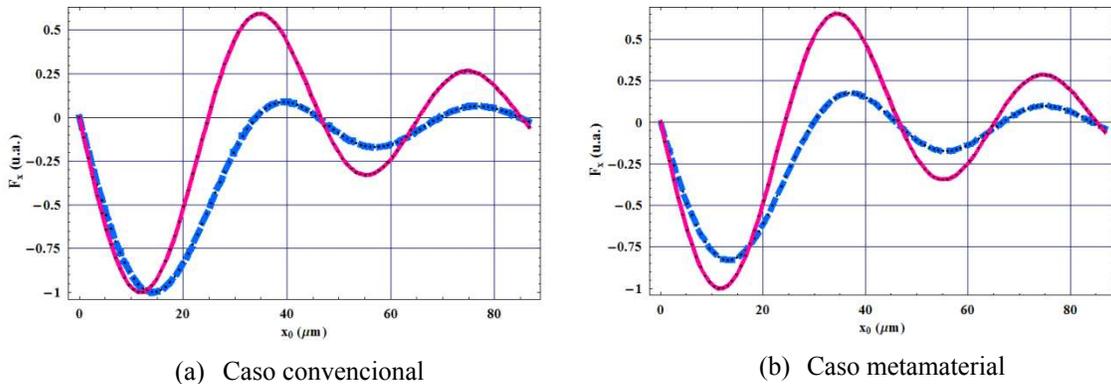


Figura 5.14. Forças gradientes para um feixe de Bessel ordinário no regime de óptica geométrica (linhas tracejadas) com $a = 10\lambda$, e no caso eletromagnético com $a = 2,3\lambda$ (linhas sólidas), para (a) partícula convencional e (b) metamaterial, ambas com $|n_2|/n_1 = 1,21/1,33$, usando (5.40) e (5.41).

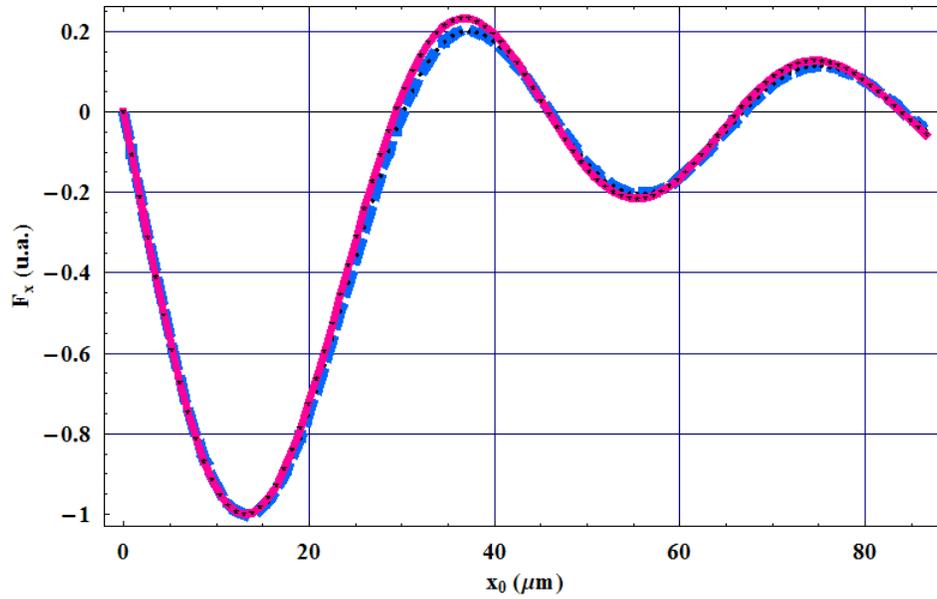


Figura 5.15. Forças ópticas ao longo de x (força gradient) para $n = 1.22$ e s (spot de nosso feixe de Bessel ordinário) $= 28.9 \mu\text{m}$ para uma partícula convencional com raio $a = 10\lambda$, calculadas usando óptica geométrica (linhas tracejadas) e a teoria eletromagnética (linha sólida) através dos fatores de forma. Três posições de equilíbrio estável, i.e., de captura óptica, são vistas para $x_0 \sim 0, 46$ and $84 \mu\text{m}$.

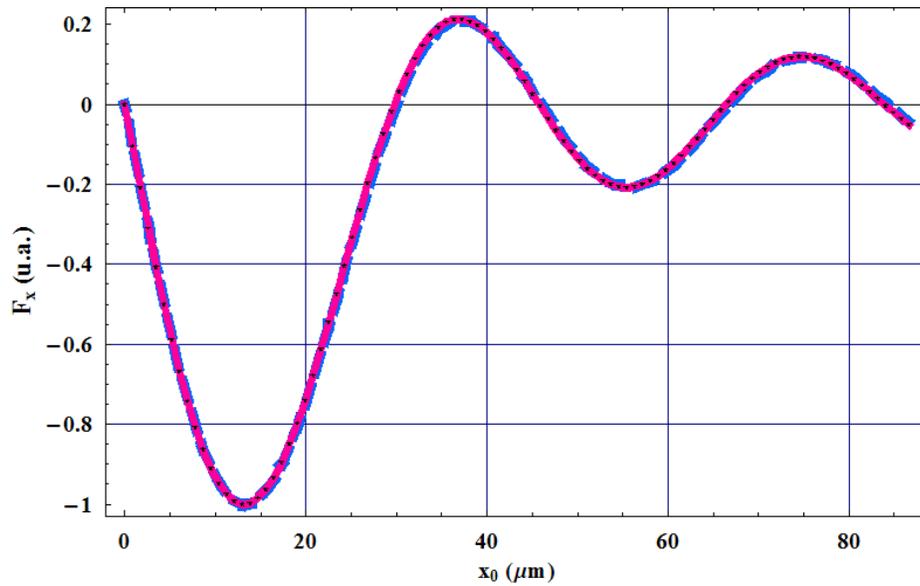


Figura 5.16. Aprisionamento para uma esfera metamaterial com $|n| = 1$. O padrão de aprisionamento é análogo ao da figura 5.15, assemelhando-se a um padrão de Bessel. Segundo a óptica geométrica, os raios incidentes ainda são refletidos/refratados conforme estes incidem sobre a partícula (ver figura 5.6 para comparação). Na teoria eletromagnética, o fenômeno de espalhamento é observado.

5.6 Referências Deste Capítulo

- [1] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, no. 4, 1987.
- [2] G. N. Watson, “A Treatise on the Theory of Bessel Functions”, 2.ed., Cambridge, University Press, pg. 359, 1944.
- [3] A. P. Pridnikov, A. Brychkov, O. I. Marichev, “Integraly I Ryady Special'nye Funkcii”, vol. 3, pg. 163 (14), 2003.
- [4] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, “Table of Integrals, Series and Products”, 5.ed., item 2.633, integrals 1 e 2, 1994.
- [5] J. P. Barton, D. R. Alexander, S. A. Schaub, “Internal and near-surface electromagnetic fields for a spherical particle irradiated by a focused laser beam”, *J. Appl. Phys.* 64(4), pg. 1632, 1988.
- [6] A concise presentation of the generalized Lorenz-Mie theory for arbitrarily location of the scatterer in a arbitrary incident profile”, *J. Optics*, vol. 19, no. 2, pg. 59, 1988.
- [7] J. A. Lock, G. Gouesbet, “Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. I. On-axis beams”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, no. 9, pg. 2503, 1994.
- [8] G. Gouesbet, J. A. Lock, “Rigorous justification of the localized approximation to the beam-shape coefficients in generalized Lorenz-Mie theory. II. Off-axis beams”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, no. 9, pg. 2516, 1994.
- [9] J. A. Lock, “Improved Gaussian beam-scattering algorithm”, *Appl. Opt.*, vol. 34, no. 3, pg. 559, 1995.
- [10] L. B. Felsen, N. Marcuvitz, “Radiation and Scattering of Waves”, *Prentice Hall Microwaves and Fields Series*, cap. 4, 1973.
- [11] V. G. Veselago, “The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ϵ and μ ”, *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509-514, 1968.
- [12] A. L. Pokrovsky, A. L. Efros, “Diffraction theory and focusing of light by a slab of left-handed material”, *Physica B*, 338, pg. 333, 2003.

- [13] R. W. Ziolkowski, “Pulsed and CW Gaussian beam interactions with double-negative metamaterial slabs”, *Opt. Express*, vol. 11, pg. 662, 2003.
- [14] J. B. Pendry, “Negative refraction makes a Perfect Lens”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 18, 2000.
- [15] A. Ashkin, “Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime”, *Biophys. J.*, vol. 61, pp. 569-582, 1992.
- [16] L. A. Ambrosio, M. Zamboni-Rached e H. E. Hernández-Figueroa, “Manipulating optical gradient forces on optical tweezers using Bessel beams”, IMOC’2007, set/2007.
- [17] V. Garcés-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, “Optical levitation in a Bessel light beam”, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 4001-4003, 2004.
- [18] V. Garcés-Chaves, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett e K. Dholakia, “Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam”, *Nature*, vol. 419, no. 6903, pp. 145-147, 2002.
- [19] J. Arlt, V. Garcés-Chaves, W. Sibbett, K. Dholakia, “Optical micromanipulation using a Bessel light beam”, *Opt. Comm.*, 197, pg. 239, 2001.
- [19] D. Schurig, J. B. Pendry et al., “Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies”, *Science*, vol. 314, no. 5801, pg. 977, 2006.
- [20] H. Chen, B. I. Wu, B. Zhang, J. A. Kong, “Electromagnetic Wave Interactions with a Metamaterial Cloak”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, no. 6, 2007.
- [21] S. J. Orfanidis, “Electromagnetic Waves and Antennas”, cap. 8, eq. (8.1.5), Rutgers University, 2002.
- [22] Z. Bouchal e M. Olivík, “Non-diffractive vector Bessel beams”, *Journal of Modern Optics*, Vol. 42, no. 8, pp. 1555-1566, 1995.
- [23] R. D. Romea e W. D. Kimura, *Phys. Rev. D*, Vol. 42, pág. 1807, 1990.
- [24] S. C. Tidwell, D. H. Ford e W. D. Kimura, *Opt. Engineering*, Vol. 31, pág. 1257, 1992.
- [25] R. H. Jordan e D. G. Hall, *Optics Lett.*, Vol. 19, pág. 427, 1994.

Conclusões

Feixes localizados vêm encontrando cada vez mais aplicações nas diversas áreas da engenharia elétrica e, nesta tese, exploramos alguns usos em potencial: FSO e Pinças Ópticas.

No primeiro caso, existia no projeto inicial a idéia de implementação experimental de um link dentro da Unicamp. Entretanto, alguns fatores limitantes nos impediram de seguir adiante. Logo, uma continuidade natural para nosso estudo seria a viabilidade de testá-lo na prática em algum link de FSO disponível para pesquisas. Sobre este fato, destacamos que tal link deve se tornar realidade em breve. Então, os elementos ópticos por nós projetados poderiam ser projetados para testar as diversas funções de fase por nós analisadas. Acreditamos no bom alinhamento que os feixes de Bessel poderiam nos proporcionar. Para transmissão de dados, entretanto, o alargamento espacial é um fator desejável, porém limitante quando se usa tais feixes. É notório que, para esta aplicação, o fator não-difrativo se torne, até certo ponto, indesejável.

No caso de Pinças Ópticas, o aparato experimental já existe na Unicamp (IFGW) e poderia ser aproveitado através de uma adaptação simples: a inclusão de um elemento óptico (áxicon) devidamente projetado em suas dimensões para ser acoplado ao sistema de captura óptica (feixe incidente, microscópio e objetiva). Porém, quando nos voltamos para uma partícula metamaterial, deparamo-nos com sua viabilidade física, por razões óbvias: a necessidade de fabricar uma estrutura metamaterial homogênea esférica na escala micrométrica.

Como comentamos durante a tese, atualmente seria muito difícil conceber tal objeto com as dimensões desejadas. Entretanto, devemos lembrar que a teoria muitas vezes necessita de tempo para ser validada. Inclusive, a própria teoria sobre partículas com índice de refração negativo, datada do final dos anos 60, teve que esperar até a década de 90 para ser validada na prática.

Nossa contribuição se concentra no fato de que, para tais partículas, as características de aprisionamento óptico não são as mesmas que para partículas convencionais, i.e., que apresentam índice de refração positivo.

Assim, não é imediato afirmar que partículas com índice de refração maior que o meio externo são atraídas para regiões de alta intensidade do feixe, e quando o índice é menor, para regiões de baixa intensidade. Claro que isto é válido para partículas convencionais mas, ao verificarmos a relação entre o índice da partícula metamaterial, em módulo, com o do meio, isso pode ser falso.

Não entramos a fundo na questão das polarizações, e nos limitamos ao caso simples de um feixe de Bessel ordinário (função de Bessel de ordem zero). Uma sugestão para trabalhos futuros seria uma exploração mais a fundo das polarizações e, no caso de feixes de ordem superior, um estudo sobre as características não apenas das forças radiais (ou gradientes), mas do momento angular que surge naturalmente da falta de simetria azimutal.

Usando a teoria eletromagnética para obter soluções analíticas para os fatores de forma de feixes de Bessel, fomos levados à simulação numérica, pela dificuldade de se tratar integrais não-tabeladas. O método de ponto de sela não era aplicável a este caso devido aos valores dos números de onda radial e longitudinal, i.e., o termo exponencial complexo $e^{ik_z z}$ não era suficientemente oscilatório em relação ao restante do integrando, por exemplo, de (5.12) e (5.14). Além disso, eram os harmônicos esféricos $Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta)e^{im\phi}$ que se tornavam altamente oscilatórios para graus muito altos ($m \gg 1$ para o termo complexo $e^{im\phi}$).

Todos os cálculos para a teoria eletromagnética do capítulo 6 foram verificados em seus limites de óptica geométrica, e podemos concluir que, uma vez que haja tecnologia suficiente para produzir partículas metamateriais, nossos estudos poderão ser descartados ou confirmados em seus resultados. Esperamos que ocorra o último.

Apêndice A

No formalismo desta tese, usamos uma equação de onda escalar em coordenadas esféricas, seguindo a simetria do problema proposto (ver fig. 1):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0, \quad (1)$$

Esta equação, na sua forma simplificada, para um sistema genérico de coordenadas, é escrita como

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad (2)$$

A solução para (1) ou (2), também escalar, é obtida através do método de separação de variáveis, e foi apresentada no relatório na eq. (5), reproduzida abaixo:

$$\begin{cases} \psi_{emn} = \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \\ \psi_{omn} = \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \end{cases} \quad (3)$$

Estas duas soluções, denominadas par e ímpar, respectivamente, podem ser agrupadas como $\psi = \psi_{emn} + i\psi_{omn} = e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho)$. Aliás, toda a dedução constante no relatório partia dessa suposição, citada também logo após a inclusão dessas equações.

Um campo eletromagnético harmônico em meio simples (isotrópico, linear e homogêneo), entretanto, deve obedecer às equações de onda vetorial

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

A análise a seguir é puramente matemática. Suponha que, dada uma solução escalar Φ e um vetor constante \mathbf{a} arbitrário, nós construamos uma função vetorial \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{a}\Phi) \quad (5)$$

Este novo vetor, assim como os campos elétrico e magnético, são solenoidais⁴¹. Usando este fato, e identidades vetoriais⁴², obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{a}(\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi)] \quad (6)$$

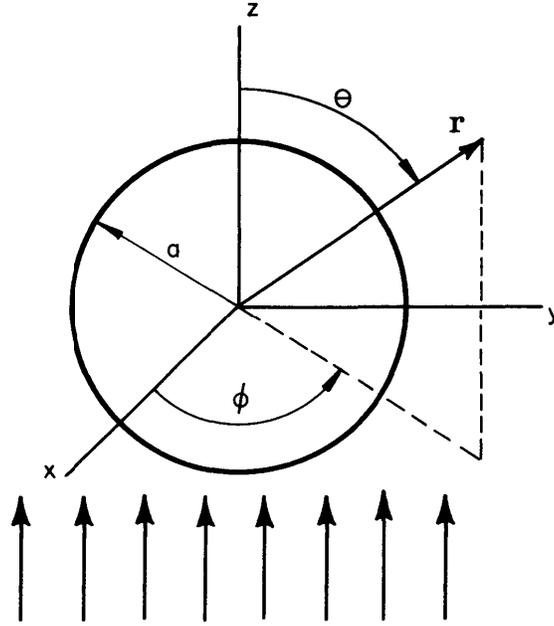


Figura 1. Um feixe incide sobre uma partícula esférica. O centro da partícula de raio a está localizado na origem do sistema de coordenadas esféricas.

Assim, se Φ satisfizer à equação de onda escalar (homogênea), então o vetor \mathbf{M} também irá satisfazer à equivalente vetorial. Além disso, é possível construir uma outra função vetorial $\mathbf{N} = (\nabla \times \mathbf{M})/k$ ⁴³. Este novo vetor também é solenoidal, e satisfaz à equação de onda vetorial (homogênea) se Φ for solução de (2).

⁴¹ Em um meio simples sem fontes, os campos elétrico e magnético são solenoidais devido à inexistência de densidades de carga e de correntes. O vetor \mathbf{M} , já que o divergente do rotacional é sempre nulo, também é solenoidal.

⁴² Aqui, usamos as seguintes identidades: $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ e $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

⁴³ Ou, equivalentemente, $\nabla \times \mathbf{N} = k\mathbf{M}$

Nota-se algo de interessante nesse processo: os vetores \mathbf{M} e \mathbf{N} possuem todas as propriedades associadas aos campos eletromagnéticos. Logo, podemos reduzir nosso problema de obtenção das equações de campo para um problema mais simples, i.e., encontrando soluções para a equação de onda escalar.

A escolha do vetor constante \mathbf{a} é arbitrária, e depende do problema considerado. Entretanto, se escolhermos $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ (vetor radial segundo fig. 1), então \mathbf{M} será uma solução para a equação de onda vetorial *em coordenadas esféricas*.

Apêndice B

Dado o espectro $S_n(k_\rho, \omega) = 2a^2 e^{-a^2 k_\rho^2} \delta(\omega - \omega_0) \delta(n)$ e substituindo-o em (2.13):

$$\begin{aligned} \psi(\rho, z; t) &= \int_0^{\omega_0/c} k_\rho J_0(k_\rho \rho) e^{iz\sqrt{\omega_0^2/c^2 - k_\rho^2}} e^{-i\omega_0 t} 2a^2 e^{-a^2 k_\rho^2} dk_\rho \\ &= e^{-i\omega_0 t} 2a^2 \int_0^{\omega_0/c} k_\rho J_0(k_\rho \rho) e^{iz[\omega_0^2/c^2 - k_\rho^2]^{1/2}} e^{-a^2 k_\rho^2} dk_\rho \end{aligned} \quad (1)$$

Usando a aproximação paraxial

$$z \left[\frac{\omega_0}{c} \left(1 - \frac{c^2 k_\rho^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2} \right] = z \frac{\omega_0}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2 k_\rho^2}{\omega_0^2} \right) = z \left(k_0 - \frac{1}{2} \frac{k_\rho^2}{k_0} \right), \quad (2)$$

onde $k_0 = \omega_0/c$. Então, a equação (1) se reduz a

$$\psi(\rho, z; t) = e^{-i\omega_0 t} 2a^2 \int_0^{\omega_0/c} k_\rho J_0(k_\rho \rho) e^{-k_\rho^2 \left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right]} e^{izk_0} dk_\rho. \quad (3)$$

A integral em (3) encontra forma tabelada como se segue:

$$\int_0^\infty (k_\rho)^{\nu+1} J_\nu(Ak_\rho) e^{-p^2 k_\rho^2} dk_\rho = A^\nu (2p^2)^{-\nu-1} e^{-a^2/4p^2}. \quad (4)$$

Vamos supor que o integrando em (3) não possui contribuição significativa para $k_\rho > \omega_0/c$.

Assim, de (4) e (3):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k_\rho J_0(\rho k_\rho) e^{-\left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right] k_\rho^2} dk_\rho &\approx \int_0^{\omega_0/c} k_\rho J_0(\rho k_\rho) e^{-\left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right] k_\rho^2} dk_\rho \\ &= \left(2 \left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right] \right)^{-1} e^{-\rho^2/4 \left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right]}. \end{aligned} \quad (5)$$

Portanto, encontramos para o feixe gaussiano:

$$\psi(\rho, z; t) = e^{-i\omega_0 t} 2a^2 \frac{e^{-\rho^2/4 \left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right]}}{2 \left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right]} e^{ik_0 z}. \quad (6)$$

∴

$$\psi(\rho, z; t) = e^{ik_0(z-ct)} \frac{a^2}{\left[a^2 + \frac{iz}{2k_0} \right]} e^{-\rho^2/4 \left[a^2 + iz \frac{1}{2k_0} \right]}, \quad (7)$$

que é a solução apresentada como a equação (2.15).

No caso do pulso, a análise é um pouco mais envolvente, mas a mesma idéia aqui apresentada para o feixe pode ser estendida na obtenção da equação (2.17).

Apêndice C

Códigos em Fortran

C.1 Forças para Feixes Gaussianos

Os códigos abaixo geram as seções de choque em x , y e z para um feixe gaussiano. O programa principal (forças.for) chama o arquivo de entrada entrada.i).

1) ARQUIVO DE ENTRADA “ENTRADA.I”

```

** m_max, n_max (máximos valores de m e n - grau e ordem do Polinômio associado de
Legendre) **
71 71

** p_max (iteração para cálculo das seções de choque em x e y) **
70

** distpf (máxima distância do eixo óptico - ou foco - ao centro da partícula) e passo
até distpf **
6.0D-6 101

** lambda (nm), deslocamento (1 -> em x; 2 -> em y) e spot (nm) **
1064.0D0 1 500

** Raio da partícula (um), permissividade e permeabilidade relativas **
3.0D0 3.0D0 1.0D0

** 0 - Partícula Convencional; 1 - Partícula Metamaterial **
0

```

2) PROGRAMA PARA CÁLCULO DAS SEÇÕES DE CHOQUE

```

c =====
c Definição de variáveis no corpo principal do programa.
c =====

implicit real*8 (a-h,o-z)

parameter (nb=500,mm=400,nn=400)

real*8 pi,tetamin,tetamax,fimin,fimax,vluz,nfator,mfator,
* eps0,epsrel,mi0,mirel,raiop,axicon,lambda,eps,mip,w,

```

```

*      konda, AA, BB, krho, kz, alfa, spot, dfi, dteta, arglegendre,
*      distpf, argbessel0, BJ0, BJ1, rhol, fil, zl, fator, argrct,
*      indrel, valxj, dvalxj, valmxj, dvalmxj, mnfator, pfator,
*      nmnfator, Cz, Cx, Cy, distmax, fat1, fat2, fat3, SCz (nb) ,
*      SCx (nb) , SCy (nb) , maxcx, maxcy, maxcz, phi0, w0, ss, Qf,
*      sinal, termoexp, BMI (0:250)

common /ddelta_rho/delta_rho/PPMV/PMV/SSPHERICAL/SPHERICAL
*      /BBJ0/BJ0/BBJ1/BJ1/ffator/fator/ddeltak/deltak
*      /DDRICJ/DRICJ/RRICJ/RICJ/EEDTY/EDTY/EERTY/ERTY
*      /DDHK1/DHK1/HHnk1/HNK1/mnmnfator/mnfator/nmnmnfator
*      /nmnfator/BBMI/BMI

integer mmax, pmax, nmax, nteta, nfi, kk, i, j, fonte, contx, conty, deltak,
*      meta, p, passopf, desloc

complex*16 jj, SPHERICAL, Ea, Ha, Erhol, Efil, Ezl, Hrhol, Hfil, Hzl,
*      Amn (-mm:mm, -nn:nn) , Bmn (-mm:mm, -nn:nn) , ContA, ContB,
*      grafamn, grafbmn, maxAmn, maxBmn, HNK1, DHK1, mieA (nn) ,
*      mieB (nn) , mieC (nn) , mieD (nn) , valxh1,
*      dvalxh1, valmxh1, dvalmxh1, Upnm1, Vpnm1,
*      Spnm1, Tpnm1, Upnm2, Vpnm2, Spnm2, Tpnm2, choque

c      =====
c      OBS.: Arquivo entrada.i definido a priori.
c      Os demais, arquivos .txt e .m, são gerados pelo programa.
c      =====

open(11, file='entrada.i')

c      =====
c      Arquivos de saída.
c      =====

open(49, file='coefamn.m')
open(50, file='coefbmn.m')
open(51, file='amnorm.m')
open(52, file='bmnorm.m')
open(53, file='miea.m')
open(54, file='mieb.m')
open(55, file='miec.m')
open(56, file='mied.m')
open(57, file='choquez.m')
open(58, file='choquex.m')
open(59, file='choquey.m')
open(60, file='info.txt')

c      *****
c      *
c      *   L E I T U R A   D O S   D A D O S   D E   E N T R A D A   *
c      *
c      *****

read(11, *)

```

```

        read(11,*)mmax,nmax
read(11,*)
read(11,*)
        read(11,*)pmax
read(11,*)
read(11,*)
        read(11,*)distmax,passopf
read(11,*)
read(11,*)
        read(11,*)lambda,desloc,w0
read(11,*)
read(11,*)
        read(11,*)raiop,epsrel,mirel
read(11,*)
read(11,*)
        read(11,*)meta

c *****
c *****
c *
c *          P R I N C I P A L          *
c *
c *****
c *****

pi=acos(-1.0D0)
jj=(0.0D0,1.0D0)

c Unidades ajustadas
lambda=lambda*1.0D-9
raiop=raiop*1.0D-6
eps0=8.85D-12
mi0=4*pi*1.0D-7

c Parâmetros eletromagnéticos da partícula
epsp=eps0*epsrel
mip=mi0*mirel
indrel=1.62/1.33

c Demais parâmetros
vluz=3.0D8
w=2*pi*vluz/lambda
konda=w/vluz

c Parâmetros do feixe gaussiano para fatores de forma
w0=w0*1.0D-9
ss=1/(konda*w0)

write(60,*)'*****'
write(60,*)'** Informações da simulação **'
write(60,*)'*****'
write(60,*)
write(60,*)'Comprimento de onda = ',lambda
write(60,*)'Índice de refração relativo = ',indrel
write(60,*)'Raio da partícula = ',raiop
write(60,*)'Distancia maxima foco-centro = ',distmax
write(60,*)'FEIXE GAUSSIANO COM APROXIMACAO DE DAVIS POLARIZADO EM X'
write(60,*)'Spot = ',w0
write(60,*)

if (meta.eq.1) then
        write(60,*)'***** PARTICULA METAMATERIAL *****'
end if

```

```

if (meta.eq.0) then
  write(60,*)'***** PARTICULA CONVENCIONAL *****'
end if

c *****
c *
c * C Á L C U L O   D E   Amn E Bmn *
c *
c *****

write(49,*)'Amn=['
write(50,*)'Bmn=['
write(57,*)'Cz=['
write(58,*)'Cx=['
write(59,*)'Cy=['

do kk=1,passopf
  SCz(kk)=0.0D0
  SCx(kk)=0.0D0
  SCy(kk)=0.0D0
end do

do kk=1,passopf
  do j=1,nmax

c          SCz(j)=0.0D0
c          SCx(j)=0.0D0
c          SCy(j)=0.0D0
          do i=-j,j,1
            contx=j
            conty=i
            Amn(contx,conty)=0.0D0
            Bmn(contx,conty)=0.0D0
          end do
        end do

do j=1,nmax-1
  do i=-j,j
    nfator=j
    mfator=i
    contx=j
    conty=i
    if (desloc.eq.1) then
      phi0=0
    end if
    if (desloc.eq.2) then
      phi0=pi/2
    end if
    Qf=2*ss*(j+0.5D0)*distpf/w0
    termoexp=exp(-(distpf**2/w0**2+ss**2*(j+0.5)**2))
    if (i.eq.abs(i)) then
      sinal=1
    end if
    if (i.eq.(-abs(i))) then
      sinal=-1
    end if
    CALL MIKNA(nmax+1,Qf)

    if (i.eq.0) then
      Bmn(contx,conty)=(jj*j*(j+1)/(j+0.5))*cos(phi0)*termoexp*BMI(1)
      Amn(contx,conty)=(jj*j*(j+1)/(j+0.5))*sin(phi0)*termoexp*BMI(1)
    end if
  end do
end do

```

```

        if (i.ne.0) then
            Bmn(contx,conty)=(-jj*exp(-jj*sinal*phi0)/(j+0.5))**(abs(i)-1)*
* termoexp*(BMI(abs(i)-1)+exp(-2*jj*sinal*phi0)*BMI(abs(i)+1))
            Amn(contx,conty)=-jj*sinal*(-jj*exp(-jj*sinal*phi0)/(j+0.5))**
* (abs(i)-1)*termoexp*(BMI(abs(i)-1)-exp(-2*jj*sinal*phi0)*
* BMI(abs(i)+1))
            end if

            write(49,*)i,j,real(Amn(contx,conty)),
*             imag(Amn(contx,conty)),abs(Amn(contx,conty))
            write(50,*)i,j,real(Bmn(contx,conty)),
*             imag(Bmn(contx,conty)),abs(Bmn(contx,conty))
        end do
    end do

    maxAmn=0.0D0
    maxBmn=0.0D0
    do j=1,nmax
        do i=-j,j
            contx=j
            conty=i
            if (abs(Amn(contx,conty)).gt.(abs(maxAmn))) then
                maxAmn=Amn(contx,conty)
            end if
            if (abs(Bmn(contx,conty)).gt.(abs(maxBmn))) then
                maxBmn=Bmn(contx,conty)
            end if
        end do
    end do

    if (maxAmn.eq.(0.0D0)) then
        maxAmn=1.0D0
    end if
    if (maxBmn.eq.(0.0D0)) then
        maxBmn=1.0D0
    end if

    do j=1,nmax
        do i=-j,j
            contx=j
            conty=i
c             Amn(contx,conty)=Amn(contx,conty)/abs(maxAmn)
c             Bmn(contx,conty)=Bmn(contx,conty)/abs(maxBmn)
            write(51,*)i,j,abs(Amn(contx,conty))/abs(maxAmn)
            write(52,*)i,j,abs(Bmn(contx,conty))/abs(maxBmn)
        end do
    end do

c *****
c *
c * C Á L C U L O   D O S   C O E F I C I E N T E S   D E   M I E *
c *
c *****

    if (kk.eq.1) then

        if (meta.eq.1) then
            mip=-mip
        end if

        write(53,*)'MieA=['
        write(54,*)'MieB=['

```

```

write(55,*) 'MieC=['
write(56,*) 'MieD=['

do j=1,nmax

    argrct=konda*raiop
    call MRCTJ(j,argrct)
    valxj=RICJ
    dvalxj=DRICJ
    call MRCTJ(j,indrel*argrct)
    valmxj=RICJ
    dvalmxj=DRICJ
    call HANK1(j,argrct)
    valxh1=HNK1
    dvalxh1=DHK1
    call HANK1(j,indrel*argrct)
    valmxh1=HNK1
    dvalmxh1=DHK1

    mieA(j)=(indrel*mi0*valmxj*dvalxj - mip*valxj*dvalmxj)/
*           (indrel*mi0*valmxj*dvalxh1 - mip*valxh1*dvalmxj)

    mieB(j)=(mip*valmxj*dvalxj - indrel*mi0*valxj*dvalmxj)/
*           (mip*valmxj*dvalxh1 - indrel*mi0*valxh1*dvalmxj)

    mieC(j)=indrel*(mip*valxh1*dvalxj - mip*valxj*dvalxh1)/
*           (indrel*mi0*valxh1*dvalmxj - mip*valmxj*dvalxh1)

    mieD(j)=(indrel*mip*valxh1*dvalxj - indrel*mip*valxj*dvalxh1)/
*           (mip*valxh1*dvalmxj - indrel*mi0*valmxj*dvalxh1)

    write(53,*)mieA(j)
    write(54,*)mieB(j)
    write(55,*)mieC(j)
    write(56,*)mieD(j)

end do

write(53,*)'];'
write(54,*)'];'
write(55,*)'];'
write(56,*)'];'
end if

c *****
c *
c * C Á L C U L O   D A   S E Ç Ã O   D E   C H O Q U E   E M   Z *
c *
c *****

Cz=0.0D0
Cx=0.0D0
Cy=0.0D0
choque=0.0D0

do i=1,nmax-1
    do p=-i,i

        nfator=i
        pfator=p

        call rfator(nfator,abs(pfator))
        fator=1/fator
    
```

```

call fatorial(nfator+1,abs(pfator))
call nfatorial(nfator,abs(pfator))

Cz=Cz+(lambda**2/pi)*(1/(nfator+1)**2)*(mnfator/nmnfator)*
* real((mieA(i)+conjg(mieA(i+1))-2*mieA(i)*conjg(mieA(i+1))))*
* Bmn(nfator,pfator)*conjg(Bmn(nfator+1,pfator))+
* (mieB(i)+conjg(mieB(i+1))-2*mieB(i)*conjg(mieB(i+1))))*
* Amn(nfator,pfator)*conjg(Amn(nfator+1,pfator))+
* p*((2*nfator+1)/(nfator**2*(nfator+1)**2)*fator*
* real(jj*(2*mieA(i)*conjg(mieB(i))-mieA(i)-conjg(mieB(i))))*
* Bmn(nfator,pfator)*Amn(nfator,pfator))

end do
end do
SCz(kk)=Cz
write(57,*) distpf,Cz

c *****
c *
c * S E Ç Õ E S   D E   C H O Q U E   E M   X   E   E M   Y *
c *
c *****
do p=1,pmax
do j=p,nmax

if ((p-1).ne.(0.0D0)) then

do i=(p-1),mmax

nfator=j
mfator=i
pfator=p

call rfator(nfator,pfator)
fator=1/fator
call kronecker(i,j+1)
fat1=deltak
call kronecker(i+1,j)
fat2=deltak
call kronecker(i,j)
fat3=deltak

Upnm1=mieA(i)*conjg(mieA(j))*Bmn(mfator,pfator-1)*
* conjg(Bmn(nfator,pfator))+
* mieB(i)*conjg(mieB(j))*Amn(mfator,pfator-1)*
* conjg(Amn(nfator,pfator))

Upnm2=mieA(j)*conjg(mieA(i))*Bmn(nfator,-pfator)*
* conjg(Bmn(mfator,-pfator+1))+
* mieB(j)*conjg(mieB(i))*Amn(nfator,-pfator)*
* conjg(Amn(mfator,-pfator+1))

Vpnm1=jj*mieB(i)*conjg(mieA(j))*Amn(mfator,pfator-1)*
* conjg(Bmn(nfator,pfator))-
* jj*mieA(i)*conjg(mieB(j))*Bmn(mfator,pfator-1)*
* conjg(Amn(nfator,pfator))
Vpnm2=jj*mieB(j)*conjg(mieA(i))*Amn(nfator,-pfator)*
* conjg(Bmn(mfator,-pfator+1))-
* jj*mieA(j)*conjg(mieB(i))*Bmn(nfator,-pfator)*
* conjg(Amn(mfator,-pfator+1))

Spnm1=(mieA(i)+conjg(mieA(j)))*Bmn(mfator,pfator-1)*
* conjg(Bmn(nfator,pfator))+

```

```

*      (mieB(i)+conjg(mieB(j))) *Amn(mfator,pfator-1) *
*      conjg(Amn(nfator,pfator))
Spnm2=(mieA(j)+conjg(mieA(i))) *Bmn(nfator,-pfator) *
conjg(Bmn(mfator,-pfator+1)) +
*      (mieB(j)+conjg(mieB(i))) *Amn(nfator,-pfator) *
*      conjg(Amn(mfator,-pfator+1))

Tpnm1=jj*(mieB(i)+conjg(mieA(j))) *Amn(mfator,pfator-1) *
conjg(Bmn(nfator,pfator)) -
*      jj*(mieA(i)+conjg(mieB(j))) *Bmn(mfator,pfator-1) *
*      conjg(Amn(nfator,pfator))
Tpnm2=jj*(mieB(j)+conjg(mieA(i))) *Amn(nfator,-pfator)
*      *conjg(Bmn(mfator,-pfator+1)) -
*      jj*(mieA(j)+conjg(mieB(i))) *Bmn(nfator,-pfator) *
*      conjg(Amn(mfator,-pfator+1))

choque=choque+fator*((Spnm1+Spnm2-2*Upnm1-2*Upnm2) *
* ((1/mfator**2)*fat1-(1/nfator**2)*fat2)+
* ((2*nfator+1)/(nfator**2*(nfator+1)**2))*fat3*
* (Tpnm1-Tpnm2-2*Vpnm1+2*Vpnm2))

end do

end if

end do
end do

Cx=(lambda**2/(2*pi))*real(choque)
Cy=(lambda**2/(2*pi))*imag(choque)

SCx(kk)=Cx
SCy(kk)=Cy

write(58,*) distpf,Cx
write(59,*) distpf,Cy

distpf=distpf+distmax/passopf

```

c Fim do loop em kk (distpf=distpf+passopf)

```

end do

maxcx=0.0D0
maxcy=0.0D0
maxcz=0.0D0
do kk=1,passopf
  if (abs(SCx(kk)).gt.maxcx) then
    maxcx=abs(SCx(kk))
  end if
  if (abs(SCy(kk)).gt.maxcy) then
    maxcy=abs(SCy(kk))
  end if
  if (abs(SCz(kk)).gt.maxcz) then
    maxcz=abs(SCz(kk))
  end if
end do

write(58,*) '];'
write(59,*) '];'
write(57,*) '];'

write(58,*) 'Cxnorm={'

```

```

write(59,*)'Cynorm={'
write(57,*)'Cznorm={'

do kk=1,passopf
    write(58,*)-SCx(kk)/maxcx,', '
    write(59,*)-SCy(kk)/maxcy,', '
    write(57,*)-SCz(kk)/maxcz,', '
end do

write(58,*)');'
write(59,*)');'
write(57,*)');'
write(49,*)'];'
write(50,*)'];'
print *,'FIM'
print *

stop
end

```

C.2 Trechos para Feixes Localizados

Os códigos abaixo podem facilmente serem implementados usando o programa anterior. Chamando um novo arquivo de entrada (entrada1.i), o programa principal (forças.for) calcula as seções de choque em x, y e z baseados nos novos fatores de forma que definem o feixe localizado.

1) ARQUIVO DE ENTRADA “ENTRADA1.I”

```

** m_max, n_max (máximos valores de m e n - grau e ordem do Polinômio associado de
Legendre) **
71 71

** p_max (iteração para cálculo das seções de choque em x e y) **
70

** distpf (máxima distância do eixo óptico - ou foco - ao centro da partícula) e passo
até distpf **
8.66549D-6 100

** teta_min (graus) teta_max (graus) e passos em teta (coordenada angular esférica para
integração numérica) **
0.0D0 180.0D0 100

** fi_min (graus) fi_max (graus) e passos em fi (coordenada azimutal esférica para
integração numérica) **
0.0D0 360.0D0 100

** ângulo de áxicon (rad), lambda (nm) **
0.0141D0 1064.0D0

** Raio da partícula (um), permissividade e permeabilidade relativas **
0.4D0 3.0D0 1.0D0

** 1 - formulação para A=(Az)âz, 2 - formulação para E=(Ez)âz (feixe de Bessel
ordinário) É a variável "fonte" **

```

1

**** 0 - Partícula Convencional; 1 - Partícula Metamaterial ****

1

2) TRECHO PARA FATORES DE FORMA DO FEIXE LOCALIZADO

```

c*****
c*
c* C Á L C U L O   D E   Amn E Bmn *
c*
c*****
do kk=1,passopf

  do j=1,nmax
    SCz(j)=0.0D0
    SCx(j)=0.0D0
    SCy(j)=0.0D0
    do i=-j,j,1
      contx=i+j+1
      conty=j
      Amn(contx,conty)=0.0D0
      Bmn(contx,conty)=0.0D0
    end do
  end do

do j=1,nmax-1
  do i=-j,j

    nfator=j
    mfator=i
    contx=i+j+1
    conty=j

c CHAMA SUBROTINA RFATOR QUE CALCULA UM FATORIAL.
    call rfator(nfator,abs(mfator))

    ContA=(0.0D0,0.0D0)
    ContB=(0.0D0,0.0D0)

    if (j.ge.10) then
      tetamin=0.1
      tetamax=0.95*pi
      if (j.ge.15) then
        tetamin=0.18
        tetamax=0.93*pi
        if (j.ge.20) then
          tetamin=0.32
          tetamax=0.88*pi
          if (j.ge.30) then
            tetamin=0.5
            tetamax=0.8*pi
            if (j.ge.48) then
              tetamin=0.57
              tetamax=0.77*pi
            end if
          end if
        end if
      end if
    end if
  end if
end if

```

```

do fi=fimin+dfi/(1.0D9),fimax,dfi

do teta=tetamin+dteta/(1.0D9),tetamax,dteta

rhol=sqrt(raiop**2*sin(teta)**2+distpf**2-2*raiop*
* sin(teta)*distpf*cos(fi))

if (distpf.eq.(0.0D0)) then
  if (fi.eq.(0.0D0)) then
    fil=0.0D0
  end if
  if (fi.eq.(pi/2)) then
    fil=-pi/2
  end if
  if (fi.eq.(3*pi/2)) then
    fil=-pi/2
  end if
  if (fi.eq.(2*pi)) then
    fil=-pi/2
  end if
  if (teta.eq.(0.0D0)) then
    fil=fi
  end if
end if
if (distpf.eq.(0.0D0)) then
  if (fi.ne.(0.0D0)) then
    if (fi.ne.(pi/2)) then
      if (fi.ne.(3*pi/2)) then
        if (fi.ne.(2*pi)) then
          if (teta.ne.(0.0D0)) then
            fil=datan(raiop*sin(teta)*sin(fi)/
* (raiop*sin(teta)*cos(fi)-distpf))
          end if
        end if
      end if
    end if
  end if
end if
if (distpf.ne.(0.0D0)) then
  fil=datan(raiop*sin(teta)*sin(fi)/(raiop*sin(teta)*
* cos(fi)-distpf))
end if

zl=raiop*cos(teta)
arglegendre=cos(teta)

c CHAMA ROTINA QUE CALCULA POLINÔMIOS ASSOCIADOS DE LEGENDRE
CALL MLPMV(abs(i),nmax,j,arglegendre)
c CHAMA ROTINA QUE CALCULA FUNÇÃO ORDINÁRIA DE BESSEL
argbessel0=krho*rhol
CALL MJY01A(argbessel0)

```

c fonte = 1 equivale a uma fonte com o vetor potencial só com componente Az

```

if (fonte.eq.1) then
  Erhol=- (AA/2) * (-BJ1-BJ1) * exp(-jj*0.0D0*fil) *
* exp(jj*kz*zl)
  Efil=jj*(0.0D0*vluz*AA/rhol)*BJ0*exp(-jj*0.0D0*fil)*
* exp(jj*kz*zl)/(vluz*krho)
  Ezl=jj*w*BB**2*BJ0*exp(-jj*0.0D0*fil)*exp(jj*kz*zl)
* / (vluz*krho)
  Hrhol=- (jj*0.0D0/(rhol*mi0))*BJ0*exp(jj*0.0D0*fil)*
* exp(jj*kz*zl)/(vluz*krho)

```

```

      Hfil=(krho/(2*mi0))*(-BJ1-BJl)*exp(-jj*0.0D0*fil)*
*      exp(jj*kz*zl)/(vluz*krho)
      Hzl=0.0D0
      Ea=(Erhol*(raiop-distpf*cos(fi))/rhol-Efil*
*      (distpf*sin(fi)/rhol))*sin(teta)+
*      Ezl*cos(teta)
      Ha=(Hrhol*(raiop-distpf*cos(fi))/rhol-Hfil*
*      (distpf*sin(fi)/rhol))*sin(teta)+
*      Hzl*cos(teta)
    end if

```

c fonte = 3 equivale a uma onda plana incidente com polarização em x.

```

      if (fonte.eq.3) then
        Ea=exp(jj*konda*raiop*cos(teta))*cos(fi)*sin(teta)
        Ha=exp(jj*konda*raiop*cos(teta))*cos(fi)*sin(teta)
      end if

      ContA=ContA+Ha*PMV*exp(-jj*i*fi)*sin(teta)*dteta*dfi
      ContB=ContB+Ea*PMV*exp(-jj*i*fi)*sin(teta)*dteta*dfi

    end do
  end do
c CHAMA ROTINA QUE CALCULA FUNÇÕES ESFÉRICAS DE BESSEL jv(n)
  CALL MSPHJ(j,konda*raiop)

  Amn(contx,conty)=- (jj*fator*ContA*w*mip*raiop*(2*j+1)
*  / (j*(j+1)*SPHERICAL)) / (2369.17879727087)
*  Bmn(contx,conty)=-jj*(fator*ContB*konda*raiop*(2*j+1)
*  / (j*(j+1)*SPHERICAL)) / 6.2844419442361

```

```

end do
end do
maxAmn=0.0D0
maxBmn=0.0D0
do j=1,nmax
  do i=-j,j,1

    contx=i+j+1
    conty=j
    if (abs(Amn(contx,conty)).gt.(abs(maxAmn))) then
      maxAmn=Amn(contx,conty)
    end if
    if (abs(Bmn(contx,conty)).gt.(abs(maxBmn))) then
      maxBmn=Bmn(contx,conty)
    end if
  end do
end do
if (maxAmn.eq.(0.0D0)) then
  maxAmn=1.0D0
end if
if (maxBmn.eq.(0.0D0)) then
  maxBmn=1.0D0
end if

```

Apêndice D

Trabalhos Publicados pelo Autor

1 – “Axicons in FSO Systems”

AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. ; ZAMBONI-RACHED, M. . Axicons in FSO Systems. In: IMOC'07 International Microwave and Optoelectronics Conference, 2007, Salvador. Proceedings of International Microwave and Optoelectronics Conference, 2007.

Este artigo estuda a possibilidade de se usar áxicons em sistemas FSO. O comportamento de feixes pseudo-Bessel gerados por áxicons do tipo “logarítmico” e “linear”, com ou sem bloqueios, é analisado através da integral de difração de Huygens-Fresnel em coordenadas cilíndricas. Também mostramos que áxicon com índice de refração variável (*GRIN axicon – Gradient Index axicon*), quando bem projetados, podem ser usados para se escolher adequadamente o padrão de intensidade ao longo do eixo de propagação, o que pode ser uma nova técnica para alinhamento dos equipamentos.

2 – “Manipulating Gradient Forces on Optical Tweezers using Bessel Beams”

AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. ; ZAMBONI-RACHED, M. . Manipulating Gradient Forces on Optical Tweezers using Bessel Beams. In: IMOC'07 International Microwave and Optoelectronics Conference, 2007, Salvador. Proceedings of International Microwave and Optoelectronics Conference, 2007.

Neste artigo, nós mostramos como se pode mudar o equilíbrio estável de uma partícula capturada por pinças ópticas através da variação da intensidade de feixes de Bessel superpostos e de ordens distintas. As forças gradientes atuando em partículas de diferentes raios são determinadas, e os resultados teóricos indicam ser possível combinar feixes de Bessel de tal forma que uma partícula possa ser manipulada na direção ou na direção contrária ao centro do feixe, explorando o padrão anular de intensidade, sem deslocamento mecânico dos lasers.

3 – “Gradient Forces on Optical Tweezers for Conventional and Metamaterial Particles using Bessel Beams”

AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, Gradient Forces on Optical Tweezers for Conventional and Metamaterial Particles using Bessel Beams. In: IMOC'09 International Microwave and Optoelectronics Conference, 2009, Belém, PA. Proceedings of International Microwave and Optoelectronics Conference, 2009.

Determinando numericamente os coeficientes de Mie e os coeficientes (fatores) de forma para um feixe de Bessel incidente, nós mostramos os efeitos da polarização do campo elétrico na captura de partículas convencionais e metamateriais, calculando as forças gradientes. Algumas comparações entre fenômenos de espalhamento e o regime de óptica geométrica são feitos. Com isso, mostramos que, ao contrário do regime de óptica geométrica, não é sempre possível prever se a partícula será ou não atraída para regiões de maior intensidade do feixe simplesmente conhecendo o índice de refração relativo.

4 – “Trapping Double Negative Particles in the Ray Optics Regime Using Optical Tweezers with Focused Beams”

AMBROSIO, L. A. AND HERNÁNDEZ-FIGUEROA. Trapping Double Negative Particles in the Ray Optics Regime Using Optical Tweezers with Focused Beams. In: Submetido à Optics Express, em análise.

Neste artigo, exploramos as habilidades das pinças ópticas para aprisionar partículas esféricas duplamente negativas (a palavra metamaterial é aqui trocada pelo termo “*DNG particle*” ou “*Double Negative particle*”, i.e, partículas cuja permeabilidade e permissividade são ambas negativas), analisando algumas características teóricas interessantes que não são observáveis em partículas convencionais, i.e., com índice de refração positivo. O regime de óptica geométrica é adotado como primeira aproximação e, embora tal regime seja bem simples e limitado, sua validade é bem confirmada por experimentos com partículas convencionais (células biológicas e moléculas) capturadas por feixes focalizados. As simulações aqui realizadas confirmam que, mesmo para óptica geométrica, partículas DNG apresentam características de aprisionamento não-usuais.

5 – Demais trabalhos durante o doutorado”

AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. . Optical Forces in the Ray Optics Regime for Metamaterial Particles Trapped by Optical Tweezers. In: Workshop Frontiers in Nanophotonics and Plasmonics, 2008, Guarujá. Workshop Frontiers in Nanophotonics and Plasmonics, 2008. (EM ANEXO NESTE APÊNDICE, AO FINAL)

AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. ; SILVA, H. T . Guided Modes in Metamaterial Slabs. Revista de la Facultad de Ingeniería. Universidad de Tarapacá, v. 14, p. 291-298, 2006.

SANTOS, C. H. S. ; GOLÇALVES, M. S. ; AMBROSIO, L. A. ; BUCK, R. M. ; FREITAS JÚNIOR, I. J. ; HERNÁNDEZ, M. G. F. ; CHRISTOFOLLETTI, L. ; MARINI, A. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. . Novo Simulador Eletromagnético Tridimensional e Multi-Plataforma para Analisar Efeitos Biológicos. In: 13 SBMO Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica e 8 CBMag Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo, 2008, Florianópolis. 13 SBMO Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica, 2008.

ZAMBONI-RACHED, M. ; AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. . Finite Aperture Realization of the Diffraction Attenuation Resistent Beams. In: IMOC'07 International Microwave and Optoelectronics Conference, 2007, Salvador. Proceedings of International Microwave and Optoelectronics Conference, 2007.

SANTOS, C. H. S. ; AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. . The Benefits of Heterogeneous Beowulf Cluster on the Human Head SAR Simulatiuon. In: IMOC'05 International Microwave and Optoelectronics Conference, 2005, Brasília. Proceedings of International Microwave and Optoelectronics Conference, 2005.

SANTOS, C. H. S. ; AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. . Método FDTD Paralelo para Simulações SAR na Cabeça Humana. In: II Workshop EDS - Unicamp, 2005, Campinas. II Workshop EDS, 2005.

AMBROSIO, L. A. ; SANTOS, C. H. S. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. . How to build a Beowulf Cluster Applied o Computational Eletromagnetics. 2007. (Apresentação de Trabalho/Conferência ou palestra). IMOC'07 International Microwave and Optoelectronics Conference, 2007, Salvador.

ZAMBONI-RACHED, M. ; AMBROSIO, L. A. ; HERNÁNDEZ-FIGUEROA, H. E. . Subluminal Localized Waves. In: Progress in Eletromagnetics Research Symposium, 2008, Cambridge. Localized Waves, 2008.

Axicons in FSO Systems

Leonardo A. Ambrosio[†], Michel Zamboni-Rached^{††}, Carlos H. S. Santos[†] and Hugo E. Hernández-Figueroa[†], *IEEE Senior Member*

[†]Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC), Departamento de Microonda e Óptica (DMO), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Av. Albert Einstein, 400, 13083-970 – Campinas – SP

^{††}Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Santo André – SP.

Abstract — This paper studies the possibility of using axicons in Free Space Optics (FSO) systems. The behavior of the pseudo-Bessel beams generated by “logarithmic” and “linear” axicons, with or without stops, was analyzed through the Huygens-Fresnel integral of diffraction in cylindrical coordinates. We also show that GRIN (Gradient Index) axicons, when well designed, could be used in order to choose the intensity pattern along the propagation axis, which could be a new technique for the alignment equipment.

Index Terms — Bessel functions, diffraction, graded index optics, lenses, optical communication.

I. INTRODUCTION

Free-space optical communication systems are still not fully exploited, though this technology arises as an excellent option for several applications, in particular, the so-called last mile. For interconnecting costumers over a last mile link, the advantages of free-space optics (FSO) include ease of implementation, manipulation and mechanical maintenance, low cost compared with fibers, higher bandwidths and no license requirements. Several kilometers can be reached with availabilities up to practically 100 %.

Almost a decade ago, Aruga [1] proposed a method to control the wavefront associated with the transmitted wave using a simple Galilean Telescope. In that work, almost non-diffracting beams (pseudo-bessel beams) were obtained by an appropriate choice of a spherical aberration associated with the diverging lens of the telescope. His subsequent works [2,3] showed that these beams suffered much less atmospheric interferences compared to collimated or focalized beams, and propagation distances up to 50 km were theoretically predicted. In this case, for the same power radiated by the transmitter, these long-range pseudo-bessel beams are advantageous when compared to the conventional Gaussian beams usually adopted in FSO systems.

Although lens with aberrations presents characteristics of extended focus, thus making the reconstruction of the beam along the longitudinal axis of propagation, an improved approach for obtaining non-diffracting patterns would be the use of axicons. Proposed by McLeod in 1954 [4], these optical elements transform the incident wave – usually a plane or Gaussian one – into a Bessel beam, or more generally, a non-

diffracting beam with also an extended focus. This happens because the incident beam suffers a change in its wave front, and a non-diffracting pattern is achieved after leaving the conical surface of the axicon such that it propagates without distortion for a maximum distance z_{\max} , when it decays. In fact, diffraction occurs normally, and the term “non-diffracting” should be taken carefully. The energy propagates from the wave’s lateral wings to the optical axis, and it is this lateral energy that reconstructs and maintains the wave’s main lobe intact; after the maximum distance, no lateral energy is available for further reconstruction and the wave suddenly collapses.

It can be easily shown that the maximum distance depends on the axicon angle γ through the relation $z_{\max} = R/\tan \gamma$, R being the axicon radius.

Nevertheless, this is not a general rule, for it is possible to determine the adequate phase function necessary for creating almost any desirable intensity pattern at the optical axis, and such possibilities include the so-called linear and logarithmic axicons. The former can increase the intensity linearly, whereas the latter keeps it uniform along a pre-fixed distance. As an alternative, gradient index axicons [5] – known as GRIN axicons – with an index of refraction that exhibits a specific transverse profile can also accomplish virtually any intensity profile at the longitudinal axis.

This paper presents a theoretical and numerical modeling of these axicons for FSO, based on the Huygens-Fresnel principle for calculating the beam at a certain distance from the transmitter, considered herein as a cylindrical aperture.

II. THEORETICAL ANALYSIS

When the distance is much larger than wavelength, we can determine the propagating wave, generated by a finite aperture, at any point in a lossless space by solving the Huygens-Fresnel integral:

$$U(x,y) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{S_0} U(\xi,\eta) \frac{e^{jkR}}{R^2} d\xi d\eta \quad (1)$$

where $U(x,y,z)$ represents a scalar function, which can be any component of the electric or magnetic fields, $U(\xi,\eta)$ is the

field distribution at the finite aperture, i.e., at the end of the transmitter, λ is the wavelength and k is the wave number associated with the propagating disturbance and S_0 is the area of the aperture. Here, $R = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ is the distance between a point at the aperture and another one on the lossless medium where $U(x, y, z)$ is to be calculated.

For our purposes, if $R \gg \lambda$ we can expand R in a power series [6]. Let us suppose that the transmitter emits an azimuthally symmetric perturbation with a phase function $\phi(r)$, valid for $\rho_a \leq r \leq \rho$, where ρ is the radius of the aperture (if $\rho_a \neq 0$, then we have an annular aperture), and that we are interested in the intensity of the transmitted wave. As an example, $\phi(r) = -(k/2f)r^2$ for a lens with focal distance f , and $\phi(r) = -(1 + d^2/\rho^2)^{-1/2}r$ for a plano-convex axicon with focal length d . With this in mind, (1) can be used to specify the intensity $I(r', z) = |U(x, y, z)|^2$ at point (r', z) , in cylindrical coordinates, as

$$I(r', z) = \left(\frac{k}{z} \right)^2 \left| \int_{\rho_a}^{\rho} \exp \left\{ j \left[\frac{kr^2}{2z} + \phi(r) \right] \right\} J_0 \left(\frac{kr'r}{z} \right) r dr \right|^2 \quad (2)$$

J_0 being the zeroth-order Bessel function, r' the transversal distance to the optical axis.

So, if we want a certain intensity pattern along the optical axis of the FSO system, we should first find the adequate phase function $\phi(r)$ for the problem in question. The actual technology allows the design of almost any required optical element to correctly fit (2), and even though our purpose is focused in this optical system, this theory could be extended to any situation where a certain energy distribution is to be used.

To find the phase function, we shall use the characteristic of energy conversion at the optical axis. Consider an infinitesimal increment dr for the radius of the aperture and, for azimuthally symmetrical problems we may consider, in a first approximation, that the rays leaving this infinitesimal annular ring of width dr cross and longitudinal element dz of the optical axis at a specific point. With no losses, the energy from the ring is transferred to this element dz so that we may write, for the total energy transferred [7],

$$2\pi \int_{\rho_a}^{\rho} P_{\sigma}(r) r dr = \int_{d_1}^{z(r)} P_z(z) dz \quad (3)$$

In (3), $P_{\sigma}(r)$ is the bidimensional power density at the aperture (units of $1/m^2$) and $P_z(r)$ the unidimensional axial power density (units of $1/m$). This is, of course, an idealization, as possible diffraction effects are not taken into account. We could say, then, that $P_z(r)$ is a first-order approximation of the real intensity at the optical axis. The phase function can be found as [8]

$$\phi(r) = - \int \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2(r)}} dr \quad (4)$$

Now, it is a simple task to solve (2), once $P_{\sigma}(r)$ and $P_z(r)$ are known. Usually, the power density $P_{\sigma}(r)$ possesses a Gaussian profile, typical of lasers. Assuming that $P_z(r)$ is linear with z , we should find a phase function of a typical linear axicon, whereas supposing a constant $P_z(r)$, (4) gives us the phase function of a logarithmic axicon. Although one could be tempting to assume paraxial approximation at this point, so that (4) would be simplified, it is noteworthy that (2) includes longitudinal distances that could be close to the transmitter, so that non-paraxial solutions to the phase functions are to be found.

Suppose that the following pattern for the intensity is desired for a linear axicon with Gaussian profile at the aperture:

$$P_{\sigma}(r) = P_{\sigma} (1 + b^2 r^2)^{-1/2} \text{ and } P_z(z) = cz, \quad (5)$$

where c and P_{σ} are constants, and b is chosen in such a way as to guarantee that $P_{\sigma}(r)$ is a good approximation of a Gaussian profile (note that this formula is valid if the relation $\Psi = P_{\sigma}(r = \rho)/P_{\sigma}(r = 0) \geq 0.85$ (this would be equivalent to $d_1/d_2 \geq 0.85$) is satisfied, which allow us to write $b^2 = (1 - \Psi^2)/\rho^2 \Psi^2$). For $d_1 \leq z \leq d_2$ we have, after substitution of (5) in (3) and placing $z(r)$ in (4),

$$\phi(r) = - \left\{ \begin{array}{l} \left[r^2 + A(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta \right]^{\frac{1}{2}} - \\ \frac{Ab}{2} \ln \left| \frac{2}{Ab} \left[r^2 + A(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta \right]^{\frac{1}{2}} + \right| + \\ \frac{2}{Ab^2} (b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1 \end{array} \right\} + cte \quad (6)$$

In (6), $A = (d_2^2 - d_1^2) / \left[\sqrt{b^2 \rho^2 + 1} - \sqrt{b^2 \rho_a^2 + 1} \right]$ and $\Theta = d_1^2 - A \sqrt{b^2 \rho_a^2 + 1}$. The last term cte can be freely chosen, and we will take it to be such that it makes $\phi(r = 0) = 0$, i.e., $cte = \left\{ [A + \Theta]^{\frac{1}{2}} - \frac{Ab}{2} \ln \left| \frac{2}{Ab} [A + \Theta]^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{Ab^2} + 1 \right| \right\}$. Automatically, for an logarithmic axicon, we take $P_z(z) = c$ and the same Gaussian approximation in (5), so that, for $d_1 \leq z \leq d_2$, we have the following phase front :

$$\phi(r) = - \frac{1}{E} \left\{ \begin{array}{l} \left[Er^2 + C(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta' \right]^{\frac{1}{2}} - \\ \frac{Cb}{2\sqrt{E}} \log \left| \frac{2\sqrt{E}}{Cb} \left[Er^2 + C(b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \Theta' \right]^{\frac{1}{2}} + \right| + \\ \frac{2E}{Cb^2} (b^2 r^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + 1 \end{array} \right\} + cte_2 \quad (7)$$

with $A = (d_2 - d_1) / \left[\sqrt{b^2 \rho^2 + 1} - \sqrt{b^2 \rho_a^2 + 1} \right]$, $E = 1 + A^2 b^2$, $C = 2A \left[d_1 - A \sqrt{b^2 \rho^2 + 1} \right]$ and the last term inside the brackets $\Theta' = d_1^2 + 2A^2 + A^2 b^2 \rho^2 - 2Ad_1 (b^2 \rho^2 + 1)^{1/2}$. As before, cte_2 is such that we have $\phi(r=0) = 0$.

II. SIMULATION RESULTS

The paraxial versions of (6) and (7) were already used in the literature [9,10] for propagation of a few meters, and it was shown that apodization techniques were necessary for eliminating undesired fluctuations of the intensity, whereas central stops (that could be a simple masking opaque disk centered within the axicon, creating an annular-aperture), when well designed, could also serve as a means of smoothing the pattern along the optical axis. For Gaussian intensity profiles at the end of the transmitter, it is even more difficult to achieve a pre-chosen intensity when compared to uniform intensity profiles. The performance of a Galilean telescope, for example, is drastically affected when one passes from uniform to Gaussian profiles.

Lens with spherical aberration generates almost non-diffraction beams due to the phase shift occurred at its edges, which helps reconstructing them. Together with other aberrations, they can be regarded as a special case of (4). Central stops have optimum results when its radius obeys the relation: $r_s = (d_1/d_2)\rho$. This is quite prohibitive in cases when d_1 is of the order of d_2 , since it is equivalent to an unnecessary waste of power. Apodization, however, follows from more complicated equations, and for our purposes, it can be discarded without loss of generality.

Let us consider a common FSO system with $\lambda = 1300$ nm with a transmitter of radius $\rho = 5$ cm without any stops or apodization techniques. Suppose, moreover, that we want a constant intensity pattern between $d_1 = 500$ m and $d_2 = 600$ m, thus satisfying the condition: $d_1/d_2 \geq 0.85$. The resulting phase function $\phi(r)$ can be appreciated in Fig. 1, while the simulated intensity is shown in Fig. 2. Although the constant profile could not be exactly observed, one could be tempting to compare it with the case of no coupling between an optical element and the transmitter. Fig. 3 shows such results, and a clear advantage, at least when concerning the intensity (we would as well refer to it as the emitted power), is immediately recognized.

Looking at Figs. 2 and 3, we must consider the fact that this almost non-diffracting beam along a pre-established longitudinal distance possesses a peak intensity of almost 27 times that of conventional methods. Obviously, this could be a serious problem when going over exposure limits and safety standards. On the other hand, it is possible to greatly diminish the power emitted by the transmitter.

One of the important features of these beams is their capability of overcoming the effects of atmospheric absorption

[3], reconstructing their shapes after being scattered or attenuated by obstacles as aerosols or water drops. The so-called Bessel beams, which are non-diffracting solutions of the scalar wave equation and that can be regarded as special cases of (2) for a specific phase function, for example, are known to have these properties [11].

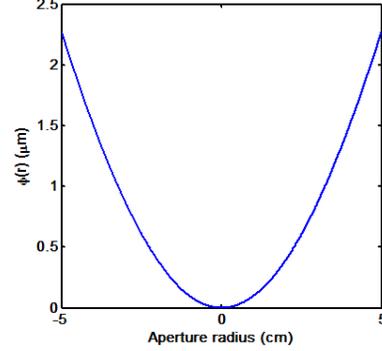


Fig. 1. For a constant intensity profile at $500\text{m} < z < 600\text{m}$, an almost parabolic phase function is needed. Obviously, the more we diminish the difference $d_2 - d_1$, the more $\phi(r)$ resembles a transfer function of a spherical lens.

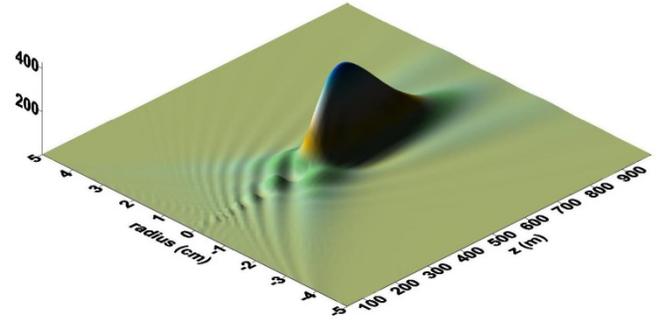


Fig. 2. Intensity profile (arbitrary units), for a logarithmic axicon, supposing a constant pattern at $500\text{m} < z < 600\text{m}$. Due to diffraction, the phase function will not recover the exactly predicted profile.

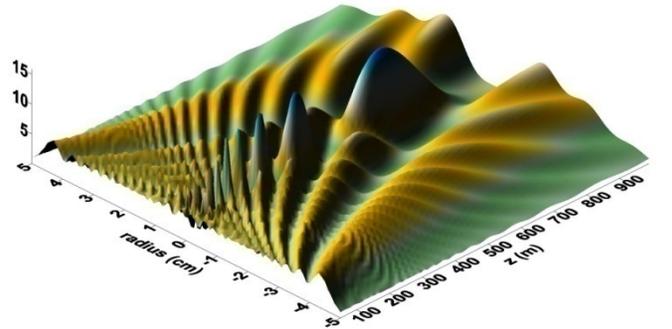


Fig. 3. Intensity profile (arbitrary units), in the absence of an optical element at the transmitter. The peak intensity is almost 27 times smaller than the corresponding one obtained using a logarithmic axicon, see Fig. 2.

We should notice, however, a delicate point about the reliability of using such beams for FSO. As it can be seen in Fig. 2, these beams are well confined in strict region of space, more precisely, about the longitudinal axis. This is quite disturbing, since, in this type of communication, one usually needs the beam to have some divergence, allowing for possible instabilities that would cause the loss of the line-of-sight. On the other hand, quite collimated beams are used on tracking and adjustment systems so that we could provide this alignment of the system with a simple inclusion of an adequate optical element.

One can find almost the same intensity distribution as in Fig. 2 for a linear axicon, for our approximation cannot predict the exactly solution of (2), i.e., the energy conservation fails for long distances from the aperture. For instance, let us choose a shorter distance, say, $85\text{m} < z < 100\text{m}$, with all the other parameters as before. Taking the constant c of $P_z(r)$ to be $d_1/d_2 = 0.85$, Figs. 4 and 5 show the intensity distribution with and without a stop of $r_s = (d_1/d_2)\rho \approx 4.1667\text{ cm}$, respectively, when we couple a linear axicon to the transmitter. In this case, the smoothing process can be clearly observable. An adequate apodization could be further used to enhance the approximation.

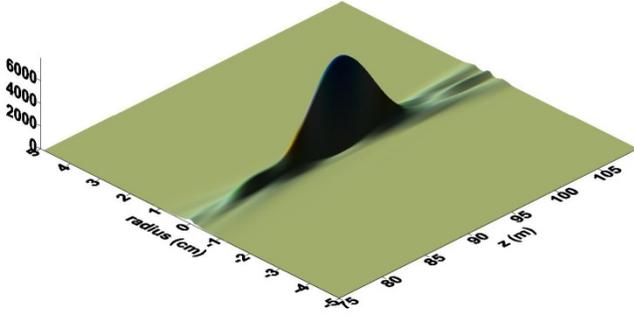


Fig. 4. Intensity distribution (arbitrary units) for a linear axicon having $c = d_1/d_2 = 0.85$ for $85\text{m} < z < 100\text{m}$.

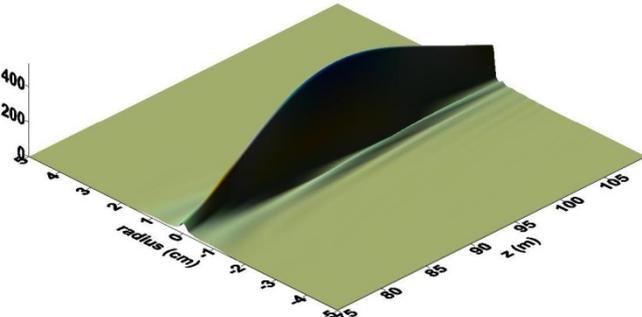


Fig. 5. Even with a stop of $r_s = 4.1667\text{ cm}$, the peak intensity is of the order of the intensity with no optical element at all.

An alternative to conventional lens could be used for generating the phase functions just mentioned. These

alternatives, also known as GRIN axicons, have the same thickness but different transversal index of refraction, and this is what accounts for the phase difference and, therefore, a specific $\phi(r)$. Once we have established this function, it is straightforward to determine how this GRIN axicon would have to be built. Usually, this can be done by a thin-lens optical path-length argument [12] and, for our purposes, the thin lens index equation can be written as

$$n(r) = n(0) - \frac{\phi(r)}{t} \quad (8)$$

where t is the thickness of the GRIN axicon and $n(0)$ is the index at its center, known *a priori*.

As a final example, let us make $t = 5\text{mm}$, and $n(0) = 1.68$. The solution of (8) for the linear axicon of Fig. 4 is the function plotted in Fig. 6. Notice that the index decay as it goes far from the optical axis. Current technology permits to accurately fabricate this kind of GRIN axicon.

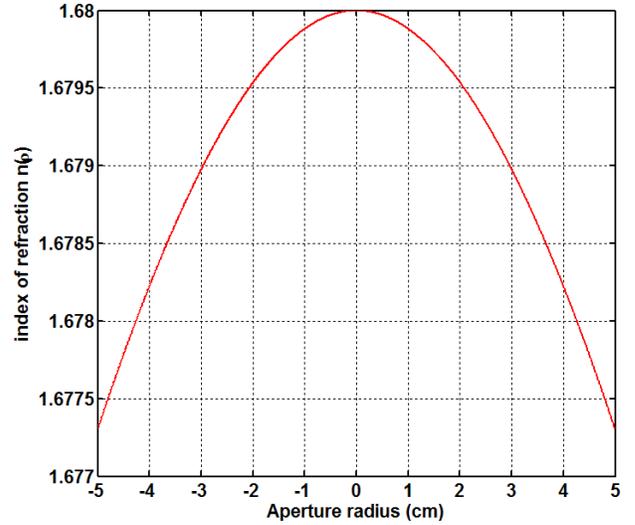


Fig. 6. Index of refraction for a GRIN axicon. It gives the same phase function $\phi(r)$ for the linear axicon of Fig. 4.

III. CONCLUSIONS

A simple theory for designing a phase function that generates almost non-diffracting beams was presented, using the characteristic of energy conservation at the optical axis to predict the intensity profile of these propagating beams. Linear and logarithmic axicons were analyzed using the Huygens-Fresnel principle, and it was shown that, due to diffraction, the approximation of energy conservation cannot predict the real phase function.

The results showed that the peak intensity is increased when compared to other conventional methods, and this implies that one could work with lower emitting power. As for the narrow characteristic of these beams, this comes as another possible alternative for alignment and tracking. Stops and

apodization techniques could be used to smooth the intensity and give us a pattern closer to the designed profile.

This work was supported by FAPESP – *Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Ensino do Estado de São Paulo*, under contracts 2005/54265-9 (Ph D grant) and 2005/51689-2 (CePOF, Optics and Photonics Research Center).

REFERENCES

- [1] T. Aruga, “Generation of long-range nondiffracting narrow light beams”, *Appl. Opt.*, vol. 36, no. 16, pp. 3762-3768, 1997.
- [2] T. Aruga, S. Wing Li, “Super high resolution for long-range imaging”, *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 13, pp. 2795-2799, 1999.
- [3] T. Aruga, *et al.*, “Nondiffracting narrow light beam with small atmospheric turbulence-influenced propagation”, *Appl. Opt.*, vol. 38, no. 15, pp. 3152-3156, 1999.
- [4] J. H. McLeod, “The axicon: a new type of optical element”, *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 44, pp. 592-597, 1954.
- [5] D. J. Fischer, C. J. Harkrider and D. T. Moore, “Design and manufacture of a gradient-index axicon”, *Appl. Opt.*, vol. 39, no. 16, pp. 2687-2694, 2000.
- [6] J. Goodman, “Introduction do Fourier Optics”, *McGraw-Hill*, 2. edição, pag. 65, 1996.
- [7] D. Marcuse, “Principles of Optical Fiber Measurements”, *Academic Press*, New York, pp. 167-169, 1981.
- [8] J. Sochaki, A. Kolodziejczyk, Z. Jaroszewicz, and S. Bará, “Nonparaxial design of generalized axicons”, *Appl. Opt.*, vol. 31, no. 25, pp. 5326-5330, 1992.
- [9] J. Sochaki, Z. Jaroszewicz, L. R. Staronski, and A. Kolodziejczyk, “Annular-aperture logarithmic axicon”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, no. 8, pp. 1765-1768, 1993.
- [10] Z. Jaroszewicz, J. Sochaki, A. Kolodziejczyk, and L. R. Staronski, “Apodized annular-aperture logarithmic axicon: smoothness and uniformity of intensity distributions”, *Opt. Lett.*, vol. 18, no. 22, pp. 1893-1895, 1993.
- [11] Z. Bouchal, J. Wagner, and M. Chlup, “Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam”, *Opt. Commun.*, vol. 151, pp. 207-211, 1998.
- [12] D. J. Fischer *et al.*, “Design and manufacture of a gradient-index axicon”, *Appl. Opt.*, vol. 39, no.16, pp. 2687-2694, 2000.

Manipulating Gradient Forces on Optical Tweezers using Bessel Beams

Leonardo A. Ambrosio[†], Michel Zamboni-Rached^{††}, and Hugo E. Hernández-Figueroa[†], *IEEE Senior Member*

[†]Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC), Departamento de Microonda e Óptica (DMO), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Av. Albert Einstein, 400, 13083-970 – Campinas – SP

^{††}Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Santo André – SP.

Abstract — In this paper, we show how one can change the stable equilibrium of a particle trapped into by optical tweezers through the intensity variation of superposed Bessel beams with different orders. The gradient forces acting on particles of different radii are determined, and the theoretical results indicate that it is possible to combine Bessel beams in such a way that a particle can be manipulated into or out the centre of the beam by exploiting their ring-shaped intensity patterns, without any mechanical displacement of the lasers.

Index Terms — Bessel beams, optical tweezers, optical manipulation.

I. INTRODUCTION

In the year of 1970, A. Ashkin performed the first experiments on optical trapping by the forces of radiation pressure [1,2], opening a new and exciting area of research in the physical sciences. Dielectric particles in the micron or submicron scale, much larger than the wavelength, could be trapped using the assumption that light photons possess momentum. If light is reflected or scattered from a surface, then the momentum of each photon is changed, which would account for a force, according to Newton's second law. Although the existence of the radiation pressure was proved at the beginning of the twentieth century [3], it took about seventy years to this light feature be used in manipulating dielectric particles and individual atoms by either two-beam traps [1] or levitation traps [4,5]. In this case, the stability was guaranteed by requiring gravity or electrostatic forces.

If the size of the particle is much larger than the wavelength, a second type of force can be described by Newton's second law. This happens when light traverses a dielectric particle and is refracted changing its direction and, consequently, its momentum. In this case, if the particle possesses an index of refraction greater than that of the surrounding media, the net force tends to pull it into the centre of the beam, radial to the direction of propagation. In 1986, Ashkin also proved that three-dimensional trapping of a dielectric particle was also possible for a single, highly focused beam [6], and since then, optical tweezers has found interesting applications in manipulating biological cells, such as trapping of viruses and bacteria [7], induced cell fusion [8], studies of chromosome movement [9] and cellular microscopy [10].

Recently, optical manipulation of particles using Bessel beams was demonstrated [11]. These beams are solutions of the Helmholtz equation, independent of the propagation

direction and with a cross-sectional profile of a set of concentric rings [12,13]. Although these solutions are commonly referred as non-diffracting beams, this can be quite controversial. In fact, their central maxima are resistant to the diffractive spreading, but this happens in expense of the lateral energy that helps to continuously reconstruct them. Ideal Bessel beams cannot be realized experimentally, as it possesses infinite energy. But truncated solutions are possible within a predetermined range, after which the beam would spread and decay.

Due to their ring structure, Bessel beams have the ability of trapping simultaneously both high and low refractive index particles [14-16] in their bright rings and dark regions, respectively. Furthermore, because of the absence of a specific focus, they can trap several particles along their axis [17].

In this paper, we calculate radial forces on dielectric particles by superposing Bessel beams with different orders of Bessel functions. Theoretical analyses, followed by simulations, show that it is possible to dislocate the points of stable equilibrium, manipulating particles by suitable changes in the intensities of such beams.

II. THEORETICAL ANALYSIS

Suppose an incident beam impinges on a small homogeneous non-absorbing dielectric particle, of radius a much smaller than the wavelength λ , and with an index of refraction n_d . The total force per unit volume exerted on this particle can be written as [18]

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\alpha n_m}{2c} \nabla I_m(\mathbf{r}) + \alpha n_m \frac{\Delta m(\mathbf{r})}{\Delta t}, \quad (1)$$

where c is the speed of light in vacuum, n_m is the index of refraction of the surrounding medium, $\Delta m(\mathbf{r})/\Delta t$ is the change of momentum density per unit time, $\alpha = 3(m^2 - 1)/(m^2 + 2)$ is the polarizability of the particle with $m = n_d/n_m$ and $I_m(\mathbf{r})$ is the intensity pattern of the incident beam. If one considers that the Rayleigh-Gans approximation is satisfied, i.e., $|m - 1| \ll 1$ and $4\pi a \ll \lambda/|m - 1|$, the second term on the right side of eq. (1), corresponding to light scattering by the particle, can be neglected.

If we have an incident linearly polarized n th-order Bessel beam, for example, in the form

$$E(r, \phi, z) = E_0 J_n(k_t r) e^{im\phi} e^{ik_z z}, \quad (2)$$

with k_z being the longitudinal wave number associated to the propagation along the optical axis z , and ϕ the azimuthal angle with m an integer, its intensity is proportional to $J_n^2(kr)$, r being the distance from the centre of the beam to the centre of the particle, and k_t the transverse wave number of the beam. Performing the integration of (1) over the volume of the particle (hereafter assumed as a sphere), and after some manipulations we find the force exerted over the particle due to the total field:

$$F(\mathbf{r}) \propto I_{\max, n} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_{2n}(2f(r, \theta, \varphi) \sin \xi) \sin^2 \theta \cos \varphi d\xi d\varphi d\theta. \quad (3)$$

In (3), $I_{\max, n}$ is the maximum value of the n th-order Bessel beam intensity, θ and φ are spherical coordinates referred to a system centered at the centre of the particle, ξ is an auxiliary variable for the integration [19] and $f(r, \theta, \varphi)$ writes as

$$f(r, \theta, \varphi) = \left[(k_t r)^2 + (k_t a)^2 \sin^2 \theta + 2(k_t r)(k_t a) \sin \theta \cos \varphi \right]^{1/2}. \quad (4)$$

Note that the total field is proportional to the intensity's highest value, which could occur at the centre of the beam for $n = 0$, or at some distance r from it for $n \neq 0$. We could go further, and calculate the total force when two or more Bessel beams are presented by using superposition in (2). Obviously, each Bessel beam would contribute according to its intensity, and interesting situations may arise if we can control, in real time, such contributions. It is worthy to say that, in evaluating (3), negative forces pull the particle radially to the centre of the beam, whereas positive forces push it away. As it is known, points of stable equilibrium would be possible every time we have, besides $F(\mathbf{r})=0$ at a specific point, restoring forces close to that point, bringing the particle back to its initial position.

II. SIMULATION RESULTS

The simplest case that we can analyze happens when two Bessel beams of $n = 0$ and $n = 1$ are superposed, and their axial axes are coincident. Such simplicity is not only algebraic, but includes the experimental realization, because zero-order Bessel beams can be easily generated by annular apertures, optical elements as axicons or holography, while high-order Bessel beams are achieved with crystals that present some anisotropy, as biaxial crystals, for example [20]. Fig. 1 shows the results for a small-size sphere of $k_t a = 0.10$ (for simplicity, we have used $k_t = k$) when $I_{\max, 1}$ is normalized to 0.9, 0.60, 0.3 and 0, with corresponding normalized $I_{\max, 0} = 0, 0.3, 0.60$ and $0.9 I_{\max, 1}$. The horizontal axis is proportional to the distance from the particle to the centre of the beam. It can be seen that the points of stable equilibrium, marked with arrows, are shifted to different positions. Therefore, a particle initially at such points tends to

be shifted as well, being dislocated toward the centre of the beam. This situation would be reversed if we keep $I_{\max, 0}$ fixed and normalized while varying $I_{\max, 1}$, implying on a shift outwards.

In Fig. 1(c), we can notice a transition along this process. This happens because the zero-order Bessel beam intensity becomes higher than that of the first-order beam. This causes the fastest shifts toward the optical axis of these beams, before and after which, the shift slows down.

Naturally, this situation can be more complicated in practice. The azimuthal displacement is not predicted in this case, for real Bessel beams may have imperfections in their concentric symmetric rings, causing the particle to rotate about the beam axis. It must also be emphasized that the velocity in which the intensity is varied may cause the particle to escape from the trap, due to the presence of hydrodynamic forces.

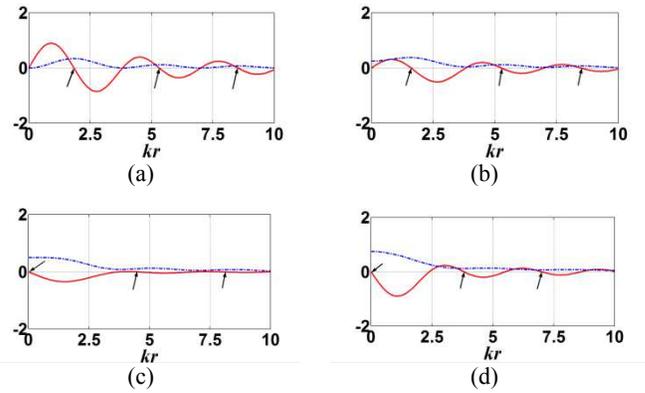


Fig. 1. Intensity (dashed) and force (solid) calculations with $ka = 0.1$ for (a) $I_{\max, 1} = 0.9$ and $I_{\max, 0} = 0$, (b) $I_{\max, 1} = 0.6$ and $I_{\max, 0} = 0.3$, (c) $I_{\max, 1} = 0.3$ and $I_{\max, 0} = 0.6$ and (d) $I_{\max, 1} = 0$ and $I_{\max, 0} = 0.9$. The points of stable equilibrium are shifted towards the origin.

To visualize the influence of the particle size to the resulting optical force, let us suppose $k_t a = 1.5$ and 3.5 . The results for these situations are shown in Figs. 2 and 3, respectively. The same intensity variation for $I_{\max, 0}$ and $I_{\max, 1}$ was assumed. The stable equilibrium points are still being for $k_t a = 1.5$, but disappear almost completely for $k_t a = 3.5$. This suggests that larger particles would not be shifted, but rather, they would tend to be stretched in an unusual way, with some parts of it experiencing a stronger force. Again, the situation is reversed if we interchange $I_{\max, 0}$ and $I_{\max, 1}$.

The linear variation of the intensities would be restricted, in practice, to the experimental setup available. If one were to control the intensity of only one Bessel beam, keeping the other fixed, independent laser beams would have to be used. A polarizer, for example, does not permit such flexibilities.

Finally, it should be pointed that the situation in Fig. 1 coincides with similar results in the literature [20], except for

the fact that here the reference for positive radial force is assumed to be the radial versor pointing away from the beam centre, not towards it.

Higher-order Bessel beams could also be combined, with similar results. But in this case, there would be no stable equilibrium points around the origin, as these beams possess dark regions of intensity at this region. But as an illustrative example, it can be seen in Fig. 4 that the displacement of the particle is smoothed, being shifted without a great variation in its velocity.

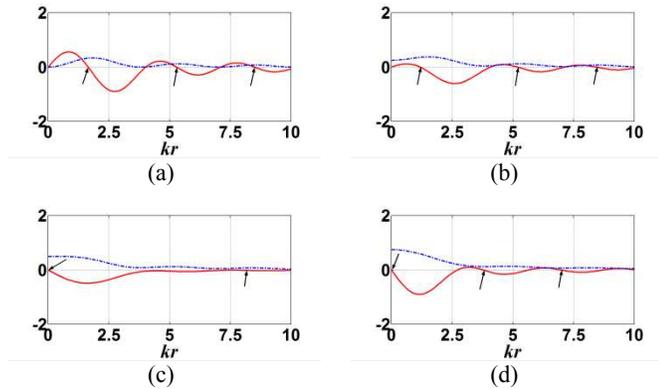


Fig. 2. Intensity (dashed) and force (solid) calculations with $ka = 1.5$. The same intensities for each Bessel beam as for Fig. 1 were considered.

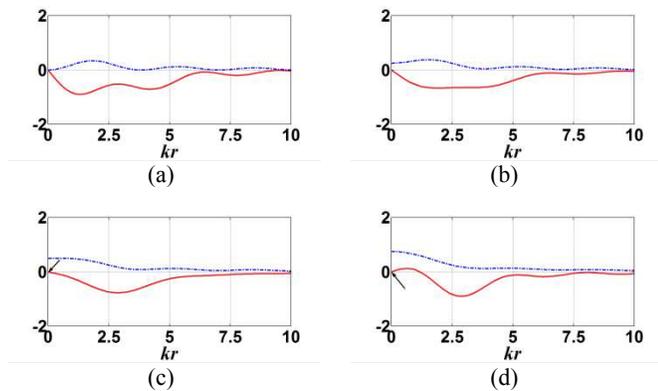


Fig. 3. Intensity (dashed) and force (solid) calculations with $ka = 3.5$. The intensities were considered as before. Note the almost complete absence of equilibrium points. For the size assumed, it may be possible to stretch the particle.

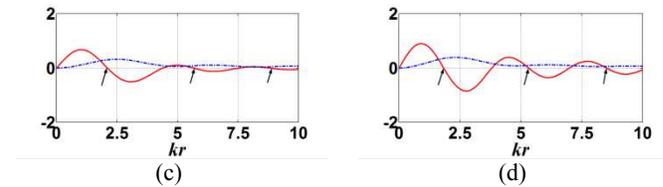
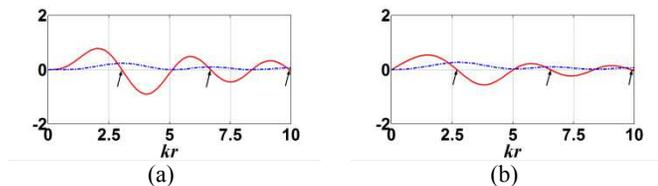


Fig. 4. Two Bessel beams of first- and second-order, with $ka = 0.1$. The combination of high-order Bessel beams can shift the particle without annulling the points of stable equilibrium, as noticed before. This is because these beams all have dark regions of intensity around their optical axis, and their varying combinations results in a smoothed transition when the peaks of intensity are interchanged.

IV. CONCLUSIONS

A simple method for calculating the total force exerted by superposed Bessel beams on dielectric spheres of different radii, but restricted to the Rayleigh-Gans regime, or even in geometrical optics was presented. This force was shown to be dependent of the intensity of each beam individually, and this allowed for the computation of possible points of stable equilibrium.

The results suggest that optical manipulation can be realized in the radial direction with multiple Bessel beams, just by controlling its intensities. Depending on the size of the particles, they may shift toward or away from the axial axis of the beams, which were considered coincident. Larger particles can experience different force intensities along their radial length. This suggests a further investigation so as to understand at what extent one could perform elasticity measurements on dielectric particle including, for example, biological cells and molecules.

This work was supported by FAPESP – *Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Ensino do Estado de São Paulo*, under contracts 2005/54265-9 (L. A. A.'s Ph D grant) and 2005/51689-2 (CePOF, Optics and Photonics Research Center).

REFERENCES

- [1] A. Ashkin, "Acceleration and trapping of particles by radiation pressure", *Phys. Rev. Lett.*, 24, pp. 156-159, 1970.
- [2] A. Ashkin, "Atomic-beam deflection by resonance-radiation pressure", *Phys. Rev. Lett.*, 24, pp. 1321-1324, 1970.
- [3] P. N. Lebedev, "Experimental examination of light pressure", *Ann. Der Physik*, vol. 6, p. 433, 1901.
- [4] A. Ashkin and J. M. Dziedzic "Optical levitation by radiation pressure", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 19, pp. 283-285, 1971.
- [5] A. Ashkin and J. M. Dziedzic, "Optical levitation of liquid drops by radiation pressure", *Science (Wash. DC)*, vol. 187, pp. 1073-1075, 1975.
- [6] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm and S. Chu, "Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles", *Opt. Lett.*, vol. 11, pp. 288-290, 1986.
- [7] A. Ashkin and J. M. Dziedzic, "Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria", *Science*, vol. 235, pp. 1517-1520, 1987.

- [8] R. W. Steubing, S. Cheng, W. H. Wright, Y. Numajiri, and M. W. Berns, "Laser induced cell fusion in combination with optical tweezers: the laser cell fusion trap", *Cytometry*, vol. 12, pp. 505-510, 1991.
- [9] M. W. Berns, W. H. Wright, B. J. Tromberg, G. A. Profeta, J. J. Andrews, and R. J. Walter, "Use of a laser-induced optical force trap to study chromosome movement on the mitotic spindle", *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 86, pp. 7914-7918, 1989.
- [10] V. Emiliani *et al.*, "Wave front engineering for microscopy of living cells", *Opt. Express*, vol. 13, pp. 1395-1405, 2005.
- [11] J. Arlt, V. Garces-Chavez, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Optical micromanipulation using a Bessel light beam", *Opt. Commun.*, vol. 197, pp. 239-245, 2001.
- [12] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberli, "Diffraction-free beams", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1499-1501, 1987.
- [13] J. Durnin, "Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 651-654, 1987.
- [14] V. Garces-Chavez, K. Volke-Sepulveda, S. Chavez-Cerda, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Transfer of orbital angular momentum to an optically trapped low-index particle", *Phys. Rev. A*, vol. 66, 063402, 2002.
- [15] V. Garces-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, "Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam", *Nature*, vol. 419, p. 145, 2002.
- [16] K. Volke-Sepulveda, V. Garces-Chavez, S. Chavez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia, "Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam", *J. Opt. B-Quantum Semicl. Opt.*, vol. 4, pp. S82-S89, 2002.
- [17] V. Garces-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, "Optical levitation in a Bessel light beam", *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 4001-4003, 2004.
- [18] A. Rohrbach and E. H. K. Stelzer, "Optical trapping of dielectric particles in arbitrary fields", *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 18, no. 4, pp. 839-853, 2001.
- [19] A. N. Rubinov *et al.*, "Localization of spherical particles under the action of gradient forces in the field of a zero-order Bessel beam. Rayleigh-Gans approximation", *J. Appl. Spectr.*, vol. 70, no. 4, pp. 565-572, 2003.
- [20] T. A. King *et al.*, "Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals", *Opt. Commun.*, vol. 187, pp. 407-414, 2001.

Gradient Forces on Optical Tweezers for Conventional and Metamaterial Particles Using Bessel Beams

Leonardo A. Ambrosio[†] and Hugo E. Hernández-Figueroa[†], *IEEE Senior Member*

[†]Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC), Departamento de Microonda e Óptica (DMO), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Av. Albert Einstein, 400, 13083-970 – Campinas – SP

Abstract — By numerically evaluating the beam-shape and the Mie coefficients for an incident Bessel Beam, we show the effects of the polarization of the electric field in trapping both conventional and metamaterial particles by calculating the gradient forces exerted on them. Some comparisons between scattering phenomena and the ray optics regime for optical trapping are made. We conclude that, contrary to the conventional case of positive refractive index, the gradient forces acting on a metamaterial particle may not invert when the relative refractive index n goes from $|n| > 1$ to $|n| < 1$.

Index Terms — Metamaterials, Vector Bessel beams, Optical tweezers,.

I. INTRODUCTION

In the year of 1970, A. Ashkin performed the first experiments on optical trapping by the forces of radiation pressure [1,2], opening a new and exciting area of research in the physical sciences. Dielectric particles in the micron or submicron scale, much larger than the wavelength, could be trapped using the assumption that light photons possess momentum. Although the existence of the radiation pressure was proved at the beginning of the twentieth century, it took about seventy years to this light feature be used in manipulating dielectric particles and individual atoms by either two-beam traps [1] or levitation traps [3,4].

Since the first three-dimensional trapping of a dielectric particle using a single, highly focusing beam [5], optical tweezers has found interesting applications in manipulating biological cells, such as trapping of viruses and bacteria [6], induced cell fusion [7], studies of chromosome movement [8] and cellular microscopy [9].

More recently, optical manipulation of particles using Bessel beams was demonstrated [10]. These beams are solutions of the Helmholtz equation, independent of the propagation direction and with a cross-sectional profile of a set of concentric rings [11,12].

Due to their ring structure, Bessel beams have the ability of trapping simultaneously both high and low refractive index particles [13-15] in their bright rings and dark regions, respectively. Furthermore, because of the absence of a specific focus, they can trap several particles along their axis [16].

In a recent work [17], we have shown the behavior of a metamaterial particle under the influence of a Gaussian Beam for optical trapping. However, results were presented only for the more simple case of the ray optics regime.

Metamaterials [18] are man-made compounds with both negative permeability and permittivity. Its recent interest in scientific community has been growing since its first applications were theoretically predicted, followed by experiments in various areas in engineering and physics, such as subwavelength focusing [19], antennas, couplers and resonators, etc. (for a review see, for example, [20,21]).

In this paper, we numerically evaluate the beam-shape coefficients describing the incident beam, in which case is a Bessel beam of arbitrary order ν , i.e., $J_\nu(x)$, extending our previous results beyond the ray optics regime. The Mie coefficients determine the forces on the particle, particularly the transversal (gradient) forces, the ones we are interested in.

II. THEORETICAL ANALYSIS

The geometry of our problem is depicted in figure 1, where an arbitrary homogeneous dielectric particle, of radius a , has its center at the origin O of our coordinate system (the unprimed system of reference (x,y,z) , or (r,θ,ϕ) , while the longitudinal axis of the incident beam is along z' . Notice that the primed system (r',θ',ϕ') is shift a distance x_0 from O . As this distance varies, the particle is impinged by the various annular disks of intensity of our Bessel beam.

The beam-shape coefficients as given in the unprimed system are [22]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{n,TM}^m \\ \mathbf{g}_{n,TE}^m \end{pmatrix} = \frac{i^{n+1} (n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{R}{\psi_n^{(1)}(R)} \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} E_r/E_0 \\ H_r/H_0 \end{pmatrix} P_n^{|m|}(\cos\theta) \exp(-im\phi) \sin\theta d\phi d\theta, \quad (1)$$

where $R = kr$, k is the wavenumber of the incident beam and $\psi_n^{(1)}(R)$ is the Ricatti-Bessel function of type 1. We must point out that the apparent R -dependence in (1) can be eliminated using orthogonal relationships of the Ricatti-Bessel functions. For numerically evaluating (1), the radial components of the vector Bessel beam, E_r and H_r , must be given.

To write E_r and H_r for an arbitrary polarization, consider the incident electric and magnetic fields in cylindrical coordinates,

$\mathbf{E}(\rho', \phi', z') = E'_\rho \hat{a}_\rho + E'_\phi \hat{a}_\phi + E'_z \hat{a}_z$ and $\mathbf{H}(\rho', \phi', z') = H'_\rho \hat{a}_\rho + H'_\phi \hat{a}_\phi + H'_z \hat{a}_z$ in the primed system. By geometric considerations, after some algebra, one finds for the situation depicted in figure 1 that both radial components for \mathbf{E} and \mathbf{H} can be referred to the unprimed system and written as

$$\begin{pmatrix} E_r(r, \theta, \phi) \\ H_r(r, \theta, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{E'_\rho}{H'_\rho} \right) \left(\frac{r \sin \theta - x_0 \cos \phi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta + x_0^2 - 2rx_0 \sin \theta \cos \phi}} \right) \\ \left(\frac{E'_\phi}{H'_\phi} \right) \frac{x_0 \sin \phi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \theta + x_0^2 - 2rx_0 \sin \theta \cos \phi}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \theta + \left(\frac{E'_z}{H'_z} \right) \cos \theta. \end{pmatrix} \quad (2)$$

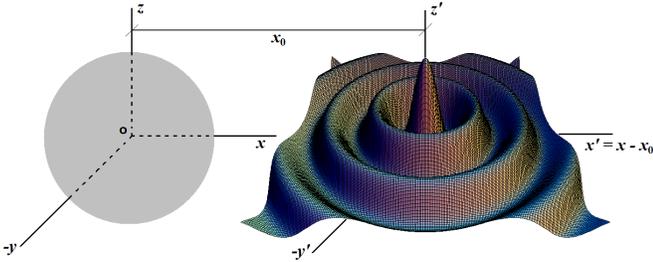


Fig. 1. Coordinate systems for our problem. We can associate an unprimed system of coordinates for the particle, whereas for the incident beam the primed system is a coordinate system shifted from x_0 along the x axis. It is easy to determine the transformation rules from Cartesian to spherical or cylindrical coordinates for both systems. The relationship between them is immediately found.

In what follows, let us consider the case in which the vector potential has only the z component (we have assumed $+z$ propagation), i.e.,

$$\mathbf{A} = A_z \hat{a}_z = J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z'} e^{-i\omega t}. \quad (3)$$

Calculating the scalar potential ϕ by using the relation $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c^2)(\partial\phi/\partial t)$ and imposing Maxwell equations, we find, for this polarization, that the components of the electric and magnetic fields, omitting the time dependence $\exp(-i\omega t)$ for simplicity, reads

$$\begin{aligned} E'_\rho &= -\frac{ck_\rho \cos \theta_a}{2} [J_{\nu-1}(k_\rho \rho') - J_{\nu+1}(k_\rho \rho')] e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z'} \\ E'_\phi &= i \frac{\nu c \cos \theta_a}{\rho'} J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z'} \\ E'_z &= i\omega \sin^2 \theta_a J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z'} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} H'_\rho &= -i \frac{\nu}{\mu_0 \rho'} J_\nu(k_\rho \rho') e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z'} \\ H'_\phi &= \frac{k_\rho}{2\mu_0} [J_{\nu-1}(k_\rho \rho') - J_{\nu+1}(k_\rho \rho')] e^{-i\nu\phi'} e^{ik_z z'} \\ H'_z &= 0. \end{aligned}$$

In eq. (4), θ_a is the axicon's angle for a Bessel beam of ν -th order, μ_0 is the permeability of the medium exterior to the particle and $k_\rho = k \sin \theta_a$ and $k_z = k \cos \theta_a$ are the radial and longitudinal components of the wave vector, respectively.

But the optical forces must be calculated in the particle's coordinate system, i.e., the unprimed system. So, in (4), the following transformation rules, all derivable from figure 1, must be used:

$$\begin{aligned} \rho' &= \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + x_0^2 - 2rx_0 \sin \theta \cos \phi} \\ \phi' &= \tan^{-1} \left(\frac{r \sin \theta \sin \phi}{r \sin \theta \cos \phi - x_0} \right) \\ z'_z &= r' \cos \theta' = r \cos \theta = z. \end{aligned} \quad (5)$$

As we shift the beam to x_0 , we can expect optical forces acting along the x axis (or, equivalently, $x' = x - x_0$). The symmetry of the problem leads us to consider only this component of the total force in the frame of the ray optics regime. To simplify this work, only the x -components are numerically evaluated. In this case, the lengthy formula to be computed for the cross section in this direction is [23] given in equation (6) below, where the constants $S_{m,n}^P$, $T_{m,n}^P$, $U_{m,n}^P$

and $V_{m,n}^P$ are related to both Mie and beam-shape coefficients, and can be found elsewhere [22].

It is worth to say that several polarizations can be realized [24], like circularly or elliptically polarized beams, but we shall limit us to the case stated by eq. (3). We could as well have used an incident vector beam with only the x or z component for the electric field, thus satisfying the vector wave equation.

II. SIMULATION RESULTS

For our purposes, we can simplify our problem by considering $\nu = 0$ in (3), taking as the incident beam an ordinary Bessel beam, thus imposing $E'_\phi = H'_\rho = 0$. With this, substituting (4) in (2), we can compute (1), although this numerical evaluation is quite time consuming due to the highly oscillatory behavior of the associated Legendre functions $P_n^{|m|}(\cos \theta)$ and $e^{-im\phi}$ as m and n increase. A *fortran* routine was written for performing the fine mesh integrals.

$$C_x = \text{Re} \left\{ \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=p}^{\infty} \sum_{m=p-1 \neq 0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{(n-p)!} \left[(S_{m,n}^{p-1} + S_{n,m}^{-p} - 2U_{m,n}^{p-1} - 2U_{n,m}^{-p}) \left(\frac{1}{m^2} \delta_{m,n+1} - \frac{1}{m^2} \delta_{n,m+1} \right) + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \delta_{n,m} (T_{m,n}^{p-1} - T_{n,m}^{-p} - 2V_{m,n}^{p-1} + 2V_{n,m}^{-p}) \right] \right\}, \quad (6)$$

Figure 2 shows numerical computations of (6) for a particle whose relative refractive index is $n = 1.22$, with $a = 10\lambda$, $\lambda = 1064$ nm. These parameters were chosen to make the simulations close to what is found in optical tweezers applications, where the surrounding medium is usually found to have a refractive index of 1.33, so that our spherical particle possesses a refractive index of about 1.62. The wavelength also follows the optical window where no damage is observed for biological particles. The incident Bessel beam was designed with $\theta_a = 0.0141$ rad - a spot of about $s = 2.405c/(\omega a) = 28.9 \mu\text{m}$ -, ω being the angular frequency of the beam and c the speed of light. The extended focus for this type of beam is intrinsically dependent upon θ_a : as it increases, the length of the extended focus diminishes (we shall not be concerned about it, for we suppose the particle is always under its influence; otherwise, it would be nonsense to speak of an “incident Bessel beam”).

It is known that the trapping can occur at every point of stable equilibrium where the intensity of the beam is a maximum (if we had chosen $n < 1$, then the force would be inverted, i.e., the particle would experience attractive forces towards regions of low intensities). Positive forces means that the force is attractive - $+x$ direction -, directed towards the optical axis of the beam, and repulsive forces happens whenever its value becomes negative. For example, in figure 2 optical trapping is achieved for $x_0 \sim 30$ and $67 \mu\text{m}$.

Now consider a particle with $n = 1$. It is obvious that no force would be observed at all. In the ray optics regime, it is easy to prove that any ray that impinges the particle would not suffer any deviation in its direction, i.e., no change in momentum would occur. But for metamaterials, the Mie coefficients no longer goes to zero, and figure 3 reveals such characteristic, for the optical forces continues to trap the particle in the same way as if it were a conventional particle not matched with the surrounding medium (see [17] for the ray optics regime and a Gaussian beam). The conclusion is simple: for this situation, metamaterial particles are directed away from the optical axis of the beam when the relative refractive index is -1 .

Finally, we go beyond the ray optics regime by making a of the order of λ . We expect the same principal behavior seen in our previous analysis for a Gaussian beam: gradient forces do not always invert when we go from a relative refractive index $n > 1$ to $n < 1$. This can be confirmed by figures 4 (a) and (b) for two different relations between a and λ , $a/\lambda = 10$ and $a/\lambda = 2.3$. All forces were normalized.

Although one might think that, as the refractive index of the particle is always less than that of the medium (because its value is always negative), the particle would always be directed away from the optical axis of the beam, this conclusion is wrong, as can be seen in figure 5 (a) for a Gaussian beam with $|n| = 1.62/1.33$ and (b) with $|n| = 1.21/1.33$. Notice that, for this case, gradient forces in a

metamaterial particle will always push the particle towards the optical axis, as long as the distance between this axis and the center of the particle is less than approximately $0.75a$.

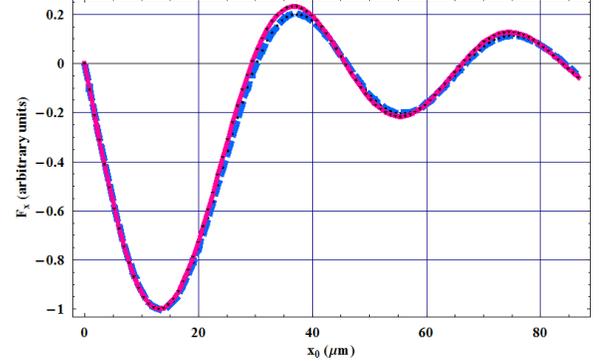


Fig. 2. Optical forces along x (gradient force) for $n = 1.22$ and s (spot of our ordinary Bessel beam) = $28.9 \mu\text{m}$ for a conventional particle with $a = 10\lambda$ for both ray optics regime (dashed line) and using eq. (6). Three trapping points, where the particle is under stable equilibrium, are seen for $x_0 \sim 0, 46, 84 \mu\text{m}$.

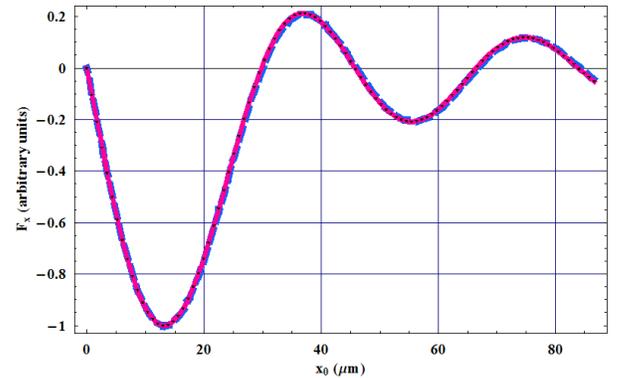
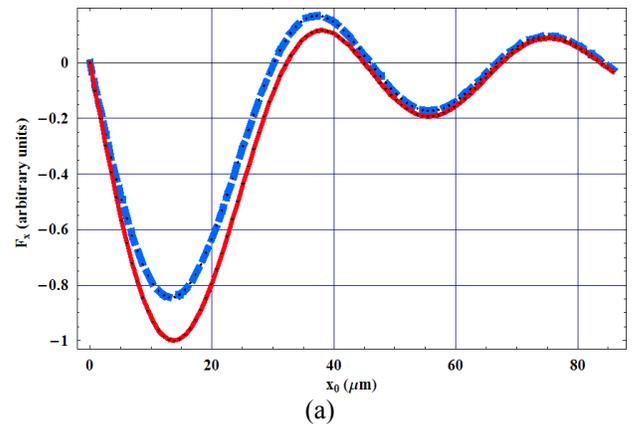


Fig. 3. Trapping for a metamaterial particle with $|n| = 1$. In the ray optics regime interpretation, the incident rays are still refracted as they impinge the metamaterial particle. In the electromagnetic theory, the phenomenon of scattering is observed.



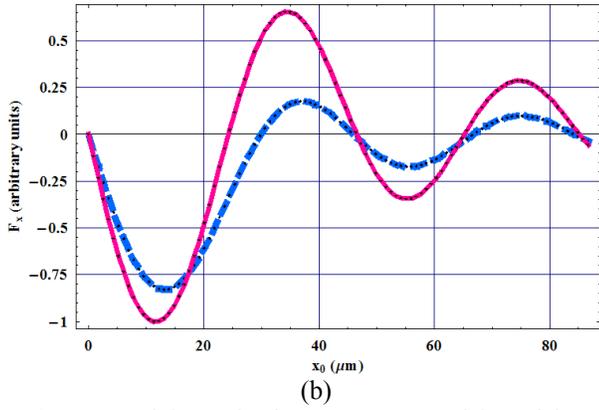


Fig. 4. A Bessel beam impinges a metamaterial particle with a relative refractive index (modulus) of (a) $n = 1.62/1.33$ and (b) $n = 1.21/1.33$. In both cases, results are seen for $a = 10\lambda$ (dashed line) and $a = 2.3\lambda$ (solid lines). Gradient forces retain their attractive-repulsive pattern towards regions of high intensities when we go from $|n| > 1$ to $|n| < 1$, a fact that would not be observed for conventional particles.

IV. CONCLUSIONS

Numerical computations of the gradient forces in optical tweezers were performed for an incident ordinary Bessel beam for both conventional and metamaterial particles. As far as we know, this work shows, for the first time, that if metamaterial particles could be manufactured, it could be trapped just like conventional ones, although some new behaviors must be expected.

The conclusions made for a conventional particle are not applicable when we deal with double negative particles, as the forces does not obey those classical conclusions that, when $n > 1$, the particle is directed to regions of high intensity, whereas for $n < 1$, it is *always* attracted to nulls of intensity.

Although micro-spheres made of negative refractive index are not experimentally available, their feasibility is just a matter of time. We believe that the manipulation of metamaterial particles using optical tweezers can be useful in biological applications. Further studies may confirm this possibility.

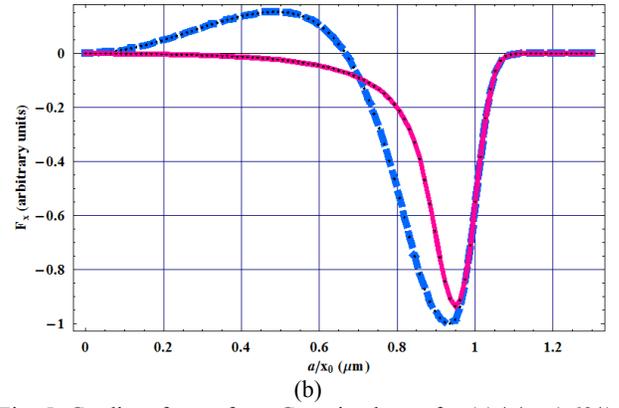
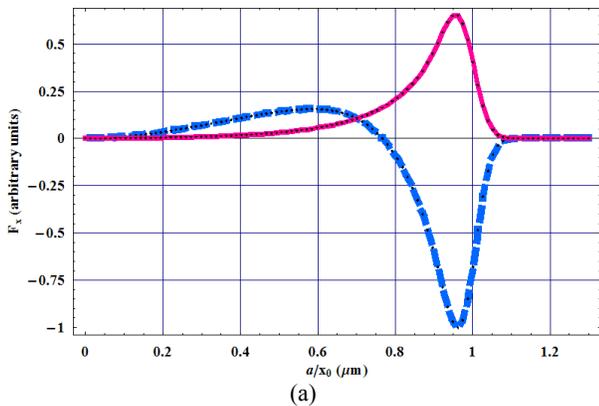


Fig. 5. Gradient forces for a Gaussian beam for (a) $|n| = 1.62/1.33$ and (b) $|n| = 1.21/1.33$. In both cases, $a = 10\lambda$. Solid lines indicate that the particle has positive refractive index, while dashed lines are used for forces on a metamaterial particle.

This work was supported by FAPESP – *Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Ensino do Estado de São Paulo*, under contracts 2005/54265-9 (L. A. A.’s Ph. D grant) and 2005/51689-2 (CePOF, Optics and Photonics Research Center).

REFERENCES

- [1] A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.*, 24, pp. 156-159, 1970.
- [2] A. Ashkin, “Atomic-beam deflection by resonance-radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.*, 24, pp. 1321-1324, 1970.
- [3] A. Ashkin and J. M. Dziedzic “Optical levitation by radiation pressure”, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 19, pp. 283-285, 1971.
- [4] A. Ashkin and J. M. Dziedzic, “Optical levitation of liquid drops by radiation pressure”, *Science (Wash. DC)*, vol. 187, pp. 1073-1075, 1975.
- [5] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm and S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles”, *Opt. Lett.*, vol. 11, pp. 288-290, 1986.
- [6] A. Ashkin and J. M. Dziedzic, “Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria”, *Science*, vol. 235, pp. 1517-1520, 1987.
- [7] R. W. Steubing, S. Cheng, W. H. Wright, Y. Numajiri, and M. W. Berns, “Laser induced cell fusion in combination with optical tweezers: the laser cell fusion trap”, *Cytometry*, vol. 12, pp. 505-510, 1991.
- [8] M. W. Berns, W. H. Wright, B. J. Tromberg, G. A. Profeta, J. J. Andrews, and R. J. Walter, “Use of a laser-induced optical force trap to study chromosome movement on the mitotic spindle”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, vol. 86, pp. 7914-7918, 1989.
- [9] V. Emiliani *et al.*, “Wave front engineering for microscopy of living cells”, *Opt. Express*, vol. 13, pp. 1395-1405, 2005.
- [10] J. Arlt, V. Garces-Chavez, W. Sibbett, and K. Dholakia, “Optical micromanipulation using a Bessel light beam”, *Opt. Commun.*, vol. 197, pp. 239-245, 2001.
- [11] J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H Eberli, “Diffraction-free beams”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 1499-1501, 1987.
- [12] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 651-654, 1987.
- [13] V. Garces-Chavez, K. Volke-Sepulveda, S. Chavez-Cerda, W. Sibbett, and K. Dholakia, “Transfer of orbital angular

- momentum to an optically trapped low-index particle”, *Phys. Rev. A*, vol. 66, 063402, 2002.
- [14] V. Garces-Chavez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, “Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam”, *Nature*, vol. 419, p. 145, 2002.
- [15] K. Volke-Sepulveda, V. Garces-Chavez, S. Chavez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia, “Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam”, *J. Opt. B-Quantum Semicl. Opt.*, vol. 4, pp. S82-S89, 2002.
- [16] V. Garces-Chavez, D. Roskey, M. D. Summers, H. Melville, D. McGloin, E. M. Wright, and K. Dholakia, “Optical levitation in a Bessel light beam”, *Appl. Phys. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 4001-4003, 2004.
- [17] L. Ambrosio and H. E. Hernández-Figueroa, “Trapping metamaterial particles in the ray optics regime using optical tweezers”, *in preparation*, available only by email.
- [18] V. G. Veselago, “The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ ”, *Sov. Phys. Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509-514, 1968.
- [19] J. B. Pendry, “Negative refraction makes a perfect lens”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 3966-3969, 2000.
- [20] N. Engheta and R. W. Ziolkowski, “Metamaterials – Physics and Engineering Explorations”, IEEE press, Wiley-Interscience, 2006.
- [21] N. Engheta and R. W. Ziolkowski, “A positive future for Double-negative metamaterials”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Special Issue on Metamaterial Structures, Phenomena and Applications, vol. 53, no. 4 (part II), pp. 1535-1556, 2005.
- [22] K. F. Ren, G. Gréhan and G. Gouesbet, “Symmetry relations in generalized Lorenz-Mie Theory”, *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 11, no. 6, pp. 1812-1817, 1994.
- [23] A. Fontes, “Sistema de Micromanipulação e Microanálise com Pinças Ópticas”, *Ph.D. Thesis*, IFGW/UNICAMP, 2004.
- [24] Z. Bouchal and M. Olivík, “Non-diffractive vector Bessel beams”, *J. Modern Opt.*, vol. 42, no. 8, pp. 1555-1566, 1995.

Trapping Double Negative Particles in the Ray Optics Regime Using Optical Tweezers with Focused Beams

L. A. Ambrosio[†] and H. E. Hernández-Figueroa[†]
leo@dmo.fee.unicamp.br, hugo@dmo.fee.unicamp.br

[†] *School of Electrical and Computer Engineering (FEEC), University of Campinas (Unicamp), Department of Microwave and Optics (DMO), 13083-970 – Campinas/SP, Brazil*

Abstract: The capabilities of optical tweezers to trap DNG (double negative) spherical particles, with both negative permittivity and permeability, are explored in detail by analyzing some interesting theoretical features not seen in particles possessing positive refractive index. The ray optics regime is adopted and, although this regime is quite simple and limited, its validity is already known and tested for conventional particles such as biological cells and molecules trapped by highly focused beams. Simulation results confirm that even for ray optics, DNG particles present unusual and interesting trapping characteristics.

References

1. A. Ashkin, “Acceleration and trapping of particles by radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 156-159, 1970.
 2. A. Ashkin, “Atomic-beam deflection by resonance-radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 1321-1324, 1970.
 3. A. Ashkin and J. M. Dziedzic “Optical levitation by radiation pressure”, *Appl. Phys. Lett.* **19**, 283-285, 1971.
 4. A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm and S. Chu, “Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles”, *Opt. Lett.* **11**, 288-290, 1986.
 5. A. Ashkin and J. M. Dziedzic, “Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria”, *Science* **235**, 1517-1520, 1987.
 6. R. W. Steubing, S. Cheng, W. H. Wright, Y. Numajiri, and M. W. Berns, “Laser induced cell fusion in combination with optical tweezers: the laser cell fusion trap”, *Cytometry* **12**, 505-510, 1991.
 7. M. W. Berns, W. H. Wright, B. J. Tromberg, G. A. Profeta, J. J. Andrews, and R. J. Walter, “Use of a laser-induced optical force trap to study chromosome movement on the mitotic spindle”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **86**, 7914-7918, 1989.
 8. V. Emiliani *et al.*, “Wave front engineering for microscopy of living cells”, *Opt. Express* **13**, 1395-1405, 2005.
 9. V. G. Veselago, “The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ϵ and μ ”, *Soviet Physics Uspekhi* **10**, no. **4**, 509-514, 1968.
 10. D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser and S. Schultz, “Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and permittivity”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, **18**, 2000.
 11. J. B. Pendry, “Negative Refraction Makes Perfect Lens”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, **18**, 2000.
 12. N. Engheta and R. W. Ziolkowski, “Metamaterials – Physics and Engineering Explorations”, *IEEE press*, Wiley-Interscience, 2006.
 13. N. Engheta and R. W. Ziolkowski, “A positive future for Double-negative metamaterials”, *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Special Issue on Metamaterial Structures, Phenomena and Applications **53**, **4** (part II), 1535-1556, 2005.
 14. A. Ashkin, “Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime”, *Biophys. J.* **61**, 569-582, 1992.
-

1. Introduction

In 1970, A. Ashkin [1,2] performed the first experiments on optical trapping by the forces of radiation pressure, opening a new and exciting research area in the physical sciences. Although the existence of the radiation pressure was proved at the beginning of the twentieth

century, it took about seventy years so that this radiation could be used in manipulating dielectric particles and individual atoms by either two-beam traps or levitation traps [3].

Since three-dimensional trapping of dielectric particles was demonstrated for a single, highly focused beam [4], optical tweezers has found interesting applications in manipulating biological cells, such as trapping of viruses and bacteria [5], induced cell fusion [6], studies of chromosome movement [7] and cellular microscopy [8].

Another interesting area of research began in 1968 with Veselago [9] and his first considerations on materials possessing both theoretical negative permittivity and permeability. But his theoretical hypothesis had to wait about 30 years when the first experiments, based on periodic array of interspaced conducting nonmagnetic split ring resonators and continuous wires, showed double negative (DNG) behaviors in the microwave regime [10]. Since then, diverse applications appear, such as perfect lens and subwavelength focusing [11], antennas, couplers and resonators, etc. (see, for example, [12,13]).

In this work, we make some considerations about what would happen if one places an optical tweezers in a (so far) hypothetical DNG sphere of the order of one micron. In the ray optics regime, a conventional material with index of refraction higher (less) than the medium would experience a force toward (away from) regions of high intensity of the beam. As we shall see, this is not necessarily the case when we deal with a DNG sphere.

2. Theoretical Analysis

Consider a sphere possessing either a positive or a negative index of refraction, and suppose that two distinct rays impinge it at different angles, (Figs. 1(a) and (b)). Part of the ray is reflected, and part is transmitted into the particle, according to Snell's law and energy considerations. If we assume negative refractive index, the rays deviate inversely ("negative" angle [9]) when it enters the particle, which can be represented by dashed lines. The point f is the focus of the beam.

In both cases, the expected path followed by the rays in a conventional medium results in repulsive forces \mathbf{F}_1 and \mathbf{F}_2 for $n_1 > n_2$ and the particle is directed away from their axis; for $n_1 < n_2$, these forces become attractive, and the particle tends to be aligned with the optical axis.

However, the situation becomes more complicated for a DNG particle, where simple rays, depending on their angle of incidence, could cause an attractive or a repulsive force for the case $n_1 > |n_2|$. This could be explained in terms of geometric considerations using Fig. 1(a), or by recalling the change of momentum as directly related to the produced force, using vector notation. In any case, the new force \mathbf{F}_1' is directed along the bisector of the triangle formed by ray 1 and its transmitted rays. To explain this result mathematically, we can calculate these forces just as they were calculated for a conventional particle based on Fig. 1(c) where an incident ray with power P hits the particle with an angle σ to the normal of its surface. The difference from past considerations [14] lies on the distinct paths for the infinite series of transmitted and reflected rays when that particle has a negative refractive index.

Consider the gradient force F_g to be the y -component of the vector force that points in a direction perpendicular to the axis of the ray, and the scattering force F_s to be the component along this axis. As a result of the negative angle of refraction, we find

$$F_g = \frac{n_1 P}{c} \left\{ R \sin 2\theta_i - \frac{T^2 [\sin(2\theta_i + 2\theta_t) + R \sin 2\theta_i]}{1 + R^2 + 2R \cos 2\theta_i} \right\} \quad (1)$$

$$F_s = \frac{n_1 P}{c} \left\{ 1 + R \cos 2\theta_i - \frac{T^2 [\cos(2\theta_i + 2\theta_t) + R \cos 2\theta_i]}{1 + R^2 + 2R \cos 2\theta_i} \right\}, \quad (2)$$

where c is the speed of light in vacuum, R and T are the Fresnel coefficients of reflection and transmission, respectively. Due to the difference of $2\theta_i$ for the first transmitted ray, there is a change in sign in the argument of both cosine and sine of $(2\theta_i + 2\theta_t)$ when compared to

conventional particles, resulting in different forces. To illustrate this situation, consider Fig. 2, where F_g and F_S are plotted as functions of θ_i , supposing a highly focused beam with an numerical aperture of 66° , typical of the microscopes used in experimental setups. A circularly polarized beam has been assumed, and we have imposed $n_1 = 1.33$ for the medium, $|n_2| = 1.62$ (Figs. 2(a) and (b)) or $|n_2| = 1.21$ (Figs. 2(c) and (d)).

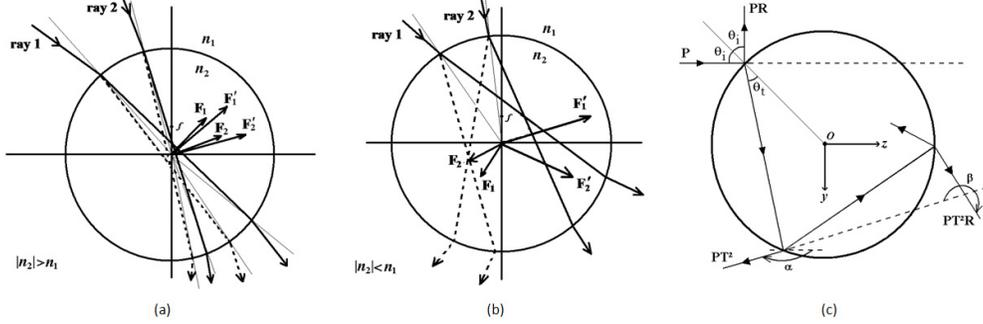


Fig. 1. Geometric optics when (a) the medium possesses an refractive index n_1 higher than the modulus of the refractive index of the sphere, $|n_2|$, and (b) the inverse case. In (a), transmitted angles are greater than the incident ones, whereas for (b) those angles are smaller. Stronger forces act on the particle when it is DNG, due to a more intense variation of the momentum of the ray. In (c), a series of infinite rays appears when the incident ray, with power P , hits the DNG particle ($n_1 > |n_2|$ or vice-versa).

For Figs. 2(a) and (c) the particle has positive refractive index and F_g (solid lines) is directed toward the ray's axis - tending to bring it closer to the ray itself - for $n_2 > n_1$, or away from this axis - repulsive force - for $n_2 < n_1$. The scattering force (dashed lines) is always positive, growing in magnitude for higher angles of incidence, as expected.

As for Figs. 2(b) and (d), however, the scattering force is highest for intermediate angles of incidence, and attractive gradient force occurs only for low angles of incidence, with a peak at $\theta_i \approx 25^\circ$. One important characteristic of DNG particles is that, at least in the ray optics regime, gradient forces do not change sign if we change from $|n_2| < n_1$ to $|n_2| > n_1$.

If we explore the case $|n_2| < n_1$, one can conclude by looking at Figs. 2(c) and (d) that, as the beam has its maximum intensity along its optical axis, the forces exerted in the particle will be repulsive when its index n_2 is positive and, for a metamaterial, although the scattering force is attractive, the gradient component of the total force for a ray will be either attractive or repulsive, depending on the angle of incidence.

b. Total Forces as functions of the angle γ

Next, we sum Eqs. (1) and (2) over all incident rays that composes the beam. So, we are interested in obtaining the surface integral of all individual forces, i.e., the total force $\mathbf{F} = F_y \hat{y} + F_z \hat{z}$ when the converging cone of the beam is restricted within $0 \leq \theta \leq \theta_{\max}$, $\theta_{\max} = 66^\circ$ being the numerical aperture of the lens. In this new coordinate system, shown in Fig. 3, it is possible to completely determine the total force \mathbf{F} .

Let us vary the angle γ , for $|\mathbf{r}| = 0.5a$ and the same refractive index used before, again normalizing the forces over $n_1 P/c$. The results for a conventional dielectric particle with $n_2 = 1.62$ is shown in Fig. 4(a), while the DNG case can be appreciated in Fig. 4(b). Physical interpretations for the first case are found elsewhere [14].

Compared to the conventional case, the situation for a DNG particle is almost the same. But we can see from Fig. 4(b) that, considering the behavior of the scattering total force, the points of stable equilibrium would appear only about $\gamma = 135^\circ$ and 235° , and the range of repulsive scattering force is found for $90^\circ < \gamma < 135^\circ$ and $235^\circ < \gamma < 270^\circ$. Besides that, now the maximum values for the gradient force does not happen at $\gamma = 90^\circ$ and 270° , as in the

conventional case, but for $\gamma \approx 120^\circ$ and 240° instead. Finally, note the difference in magnitude for both plots, showing a more effective trapping for DNG particles or, in other words, that the same trapping effectiveness could be achieved for a DNG particle using less incident power.

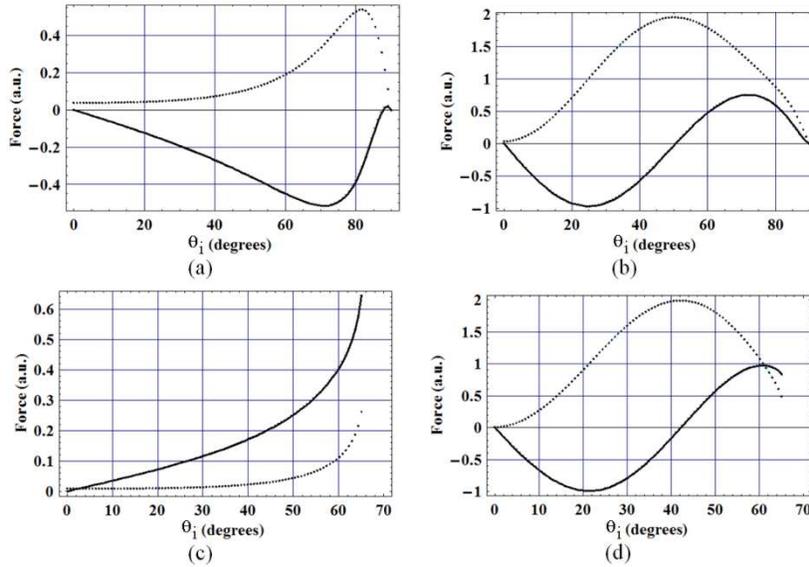


Fig. 2. Normalized (over $n_1 P/c$) values of F_g (solid) and F_S (dashed), for both conventional case ((a) and (c)) and DNG case ((b) and (d)) with $n_1 = 1.33$. The refractive indexes are: (a) $n_2 = 1.62$; (b) $n_2 = -1.62$; (c) $n_2 = 1.21$ and (d) $n_2 = -1.21$.

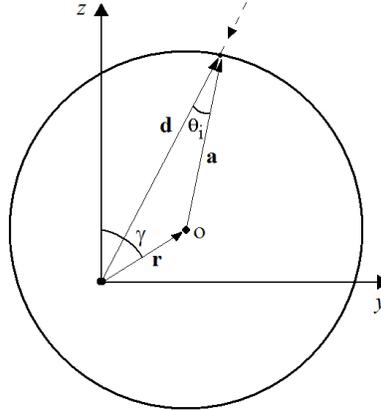


Fig. 3. The total scattering and gradient forces for a focused collimated beam will depend on the angle γ between the z -axis and the distance vector \mathbf{r} , directed from the focus of the beam to the centre of the sphere of radius a .

But besides this fact, the situation turns out to be more interesting when we consider that the particle has a refractive index lower (in modulus) than that of the medium where. For conventional particles, this would result in an inversion of the forces relative to the x and z -axis (see Fig. 4(c)), thus proving that particles where $n_2 > n_1$ are shifted toward regions of high intensity of the beam whereas, for $n_2 < n_1$, towards regions of nulls of intensity, i.e., far away from the optical axis and the focus.

When a DNG particle has a refractive index $|n_2| < n_1$, the total forces does not change sign, as shown in Fig. 4(d). Thus, and at least in theory, optical trapping for this kind of particle is unaffected when the relative refractive index changes from $n = |n_2|/n_1 > 1$ to $n' = 1/n < 1$.

c. Total Forces as functions of $r = |r|$

Let us change the distance r between the focus of the beam and the centre of the sphere for three different angles $\gamma = 0^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ and $\gamma = 180^\circ$. Fig. 5 shows the forces for DNG particles.

An important detail is that, in Fig. 2(a) the scattering force is positive, or repulsive, because it is oriented in the same direction of the incident ray. As for Fig. 4(a), due to the system of coordinates chosen - see Fig. 3 -, in which the z -axis is oppositely directed along the optical axis of the beam (against its direction of propagation), repulsiveness is represented by negative forces. Other characteristics can be found elsewhere (see [1-5] and [14]).

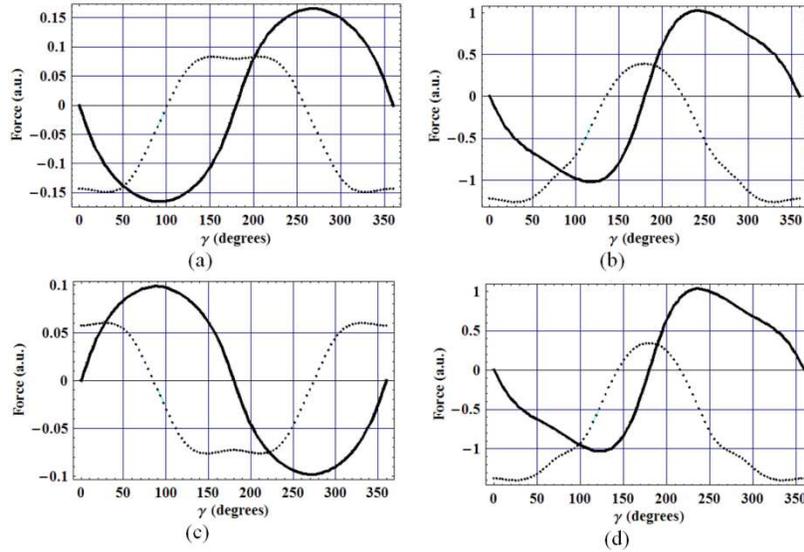


Fig. 4. Scattering (dashed) and gradient (solid) total forces as functions of the angle γ for $n_1 = 1.33$. (a) $n_2 = 1.62$; (b) $n_2 = -1.62$; (c) $n_2 = 1.21$ and (d) $n_2 = -1.21$.

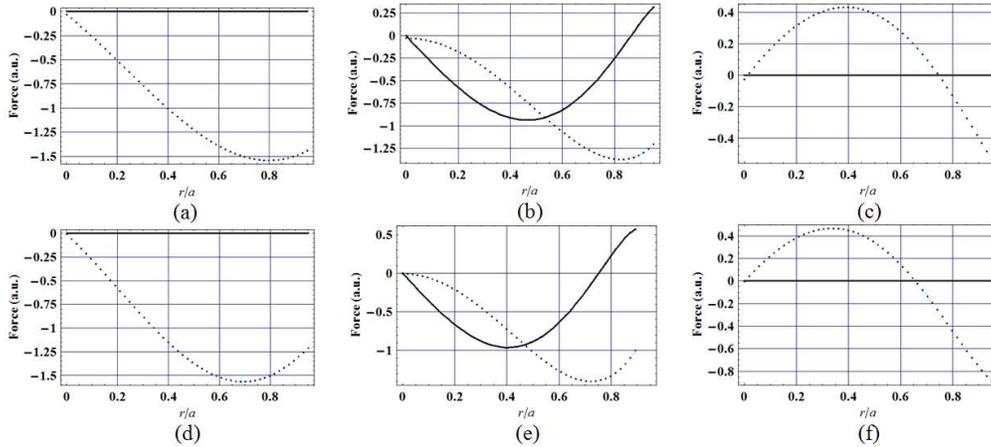


Fig. 5. Scattering (dashed) and gradient (solid) total forces for a DNG particle as functions of r , for (a) and (d) $\gamma = 0^\circ$; (b) and (e) $\gamma = 90^\circ$; (c) and (f) $\gamma = 180^\circ$. For (a) – (c), $|n_2| = 1.62$ and $n_1 = 1.33$. For (d) – (f), $|n_2| = 1.21$ and $n_1 = 1.33$. Both components of the total force F are inverted when $|n_2|$ becomes lower than n_1 . Compared to the conventional case, the inversion of the total forces does not occur, while new behaviors - that did not exist for conventional particles – can be seen.

As seen in Figs. 5(a) – (c), optical trapping for metamaterial particles can present certain particular features not observable until now. Let us pose one feature by one.

As expected, the gradient total force is zero for $\gamma = 0^\circ$. In this case, the scattering force is negative (scattering total forces will never be zero for $r = 0$), giving the vertical displacement of the particle towards the focus, located just below its center. We can see that this force diminishes not for $r/a \approx 1$, but instead for $r/a > 0.78$, revealing a trapping efficiency diminishment. Yet, comparing the diminishment in magnitude with the conventional case, the total force is still much higher than the one for a conventional particle. Therefore, in general, even in this case for $0.78 < r/a < 1$, the efficiency in trapping is higher when the particle presents negative refractive index (a better look in Fig. 4 could have already given this conclusion, as total gradient and scattering forces are higher in cases (b) and (d) than in (a) and (c), respectively).

Now, let us go back to figure 5(b). Again, the scattering force decreases when $r/a \rightarrow 1$; however, this force is always negative, meaning that the particle will not have a point of stable equilibrium in the same horizontal plane of the focus; rather, this position will be slightly down. The gradient force reaches a maximum peak of ≈ -0.9 arbitrary units (a.u.), more than twice that for a conventional particle when $r/a \rightarrow 1$. A curious fact is the inversion of the gradient force when $r/a > 0.88$. This means that, for distances above $r/a = 0.88$, forces acting on this particle become repulsive, and no trapping is achieved.

Maybe more surprising is the point of zero total force in figure 5(c). This point – close to $r/a = 0.73$ – is, indeed, an unstable point. If we were capable of placing a metamaterial particle under $\gamma = 180^\circ$ and $r/a > 0.73$, the total force would be repulsive. For shorter distances between focus and centre of the sphere, it would become more attractive. It must be emphasized that this situation is quite hypothetical and, experimentally, placing a DNG particle in this unstable point is practically unrealizable.

So, the trapping characteristics for a DNG particle are very different from those observed until now for a positive index particle, even when, in modulus, they have the same refractive index, higher than that of the external environment. But once the trapping of a metamaterial particle is done, this shall be much stronger, since the restoring forces are stronger.

The same comments that were made, concerning the inversion of the direction of scattering and gradient forces relative to the chosen coordinates are applicable: a conventional particle tends to regions of high intensities of the beam when the relative index of refraction is $n = n_2/n_1 > 1$ and, to $n' = 1/n < 1$, to regions of lower intensities, i.e., the particle is repelled; for DNG particles, the trapping characteristics are conserved when we go from $n = |n_2|/n_1 > 1$ to $n' = 1/n < 1$ (Figs. 5(d)-(f)).

Distinct behaviors of a DNG particle in an optical tweezers can occur. The scattering and gradient forces for a single ray have been calculated, and they show completely different characteristics from the conventional case - positive refractive index. In our simulations, we have shown that a DNG particle may tend to regions of high intensity of a Gaussian beam even if its refractive index is (in modulus) lower than that of the medium.

When the total scattering and gradient forces are simulated, some characteristics that had not been observed for non-DNG particles were shown. We have not found, so far, any contribution of this kind in the literature, relating the capabilities of optical tweezers to trap DNG particles in the ray optics regime.

Although micro-spheres made of both negative permeability and permittivity are not experimentally available yet, their feasibility is just a matter of time. We believe that the manipulation of such particles can be useful in biological applications. Further studies may confirm this possibility.

This work was supported by FAPESP – *Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Ensino do Estado de São Paulo*, under contracts 2005/54265-9 (L. A. Ambrosio's Ph D grant) and 2005/51689-2 (CePOF, Optics and Photonics Research Center).

Optical Forces in the Ray Optics Regime for Metamaterial Particles Trapped by Optical Tweezers

Leonardo A. Ambrosio and Hugo E. Hernández-Figueroa, Departamento de Microonda e Óptica (DMO), Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação (FEEC), Unicamp, Brazil, Av. Albert Einstein, 400, 13083-970 – Campinas – SP. This work was supported by FAPESP, under contracts 2005/54265-9 (Ph D grant) and 2005/51689-2 (CePOF, Optics and Photonics Research Center).

Abstract — We explore the idea of using optical tweezers for trapping metamaterial particles of micrometer sizes, showing that unusual behaviors may happen, compared with particles possessing positive index of refraction, in the ray optics regime.

In contrast to the known relations [1], the new scattering (acting in the direction of the optical axis of the incident ray) and gradient (perpendicular to this axis) forces, F_s and F_g , acting in this particle for a single ray can be respectively written as

$$F_s = \frac{n_1 P}{c} \left\{ 1 + R \cos 2\sigma - \frac{T^2 [\cos(2\sigma + 2\zeta) + R \cos(2\sigma)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2\zeta} \right\}$$

$$F_g = \frac{n_1 P}{c} \left\{ R \sin 2\sigma - \frac{T^2 [\sin(2\sigma + 2\zeta) + R \sin(2\sigma)]}{1 + R^2 + 2R \cos 2\zeta} \right\}$$

where P is the incident power, c the speed of light, σ and ζ are the angles of incidence and refraction, n_1 the index of refraction of the medium and R and T the reflection and transmission Fresnel coefficients. The difference from [1] happens because of the inversion of Snell's Law [2]. Total forces are obtained by integrating all rays over the impinged surface of the particle.

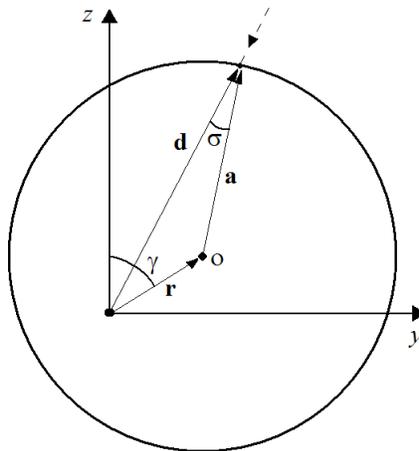


Fig. 1. A ray with angle s of incidence. The distance r between the centre C of the metamaterial sphere and the focus O of the beam is always less than the radius a . The angle g between the vector \mathbf{r} and the longitudinal axis z of the beam can be varied so that the gradient and scattering total forces can be observed for quite different situations.

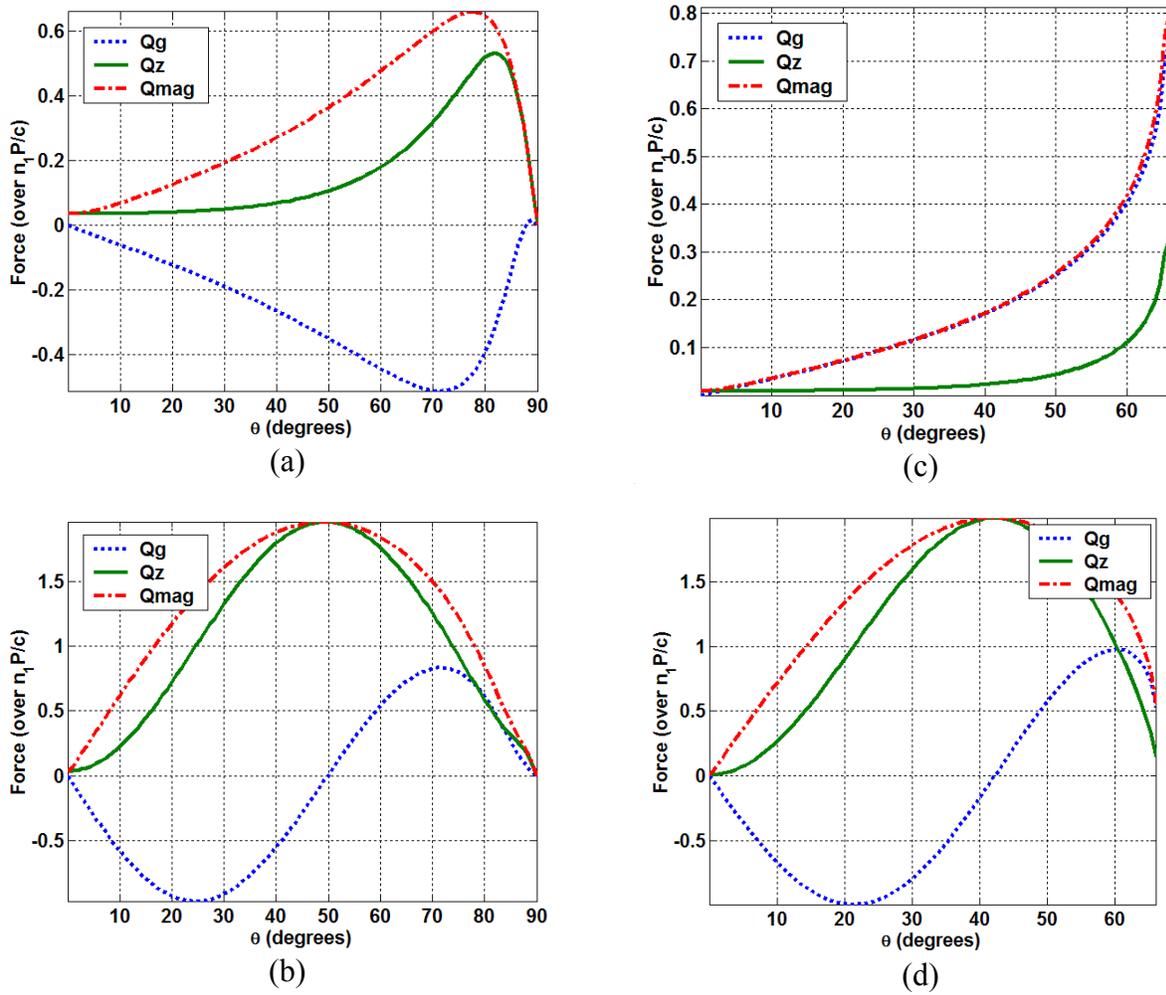
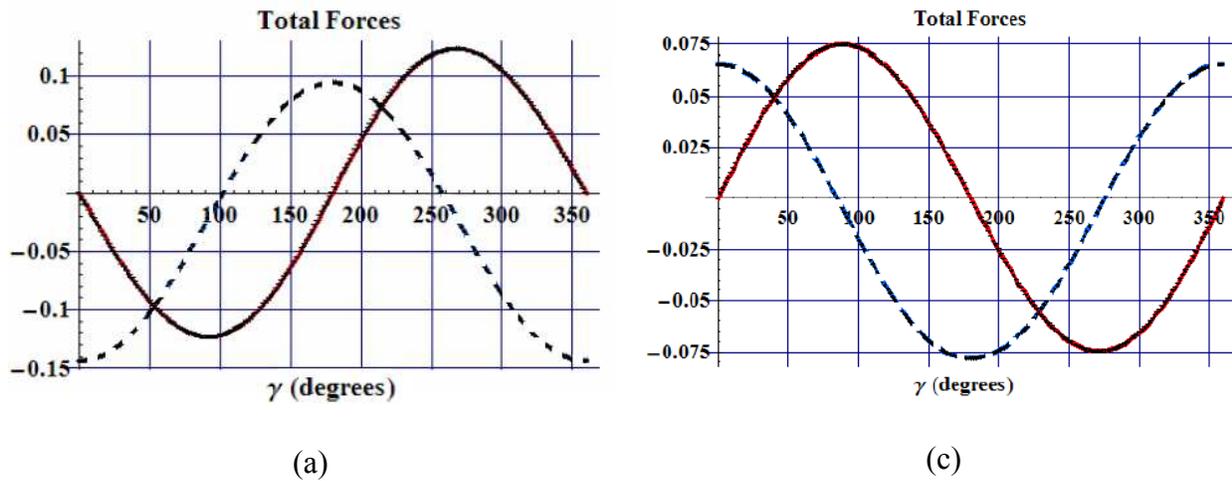


Fig. 2. Normalized (over $n_1 P/c$) values of F_g and F_s , for both (a) conventional case, $n_2 = 1.61$ and $n_1 = 1.33$, and (b) metamaterial case, $n_2 = -1.61$ and $n_1 = 1.33$. The total force is also shown in both plots. (c) and (d) are the equivalent of (a) and (b), respectively, for $n_2 = 1.21$ and $n_1 = 1.33$.



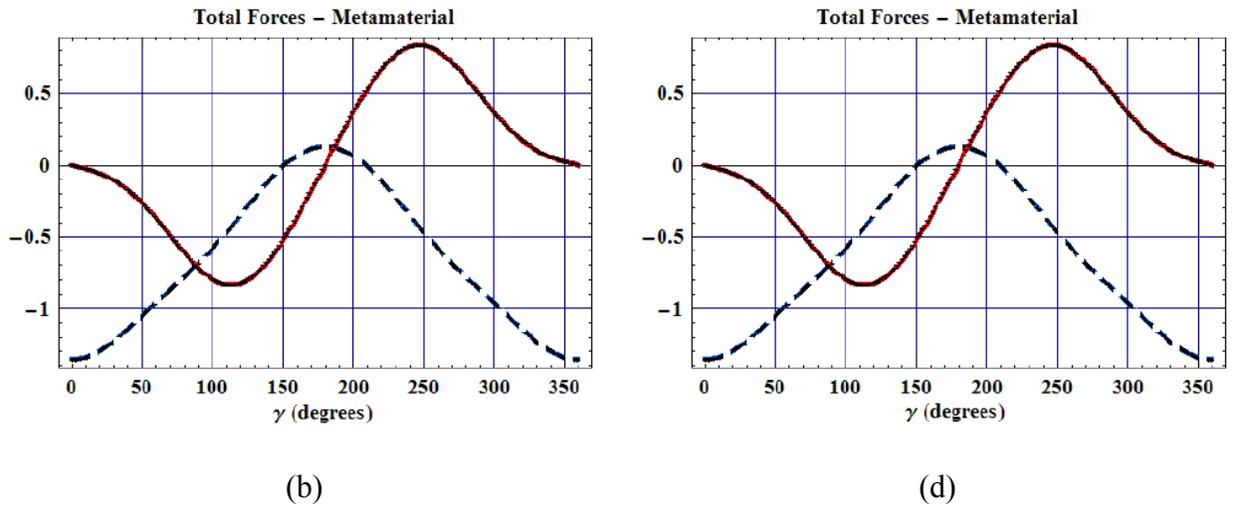
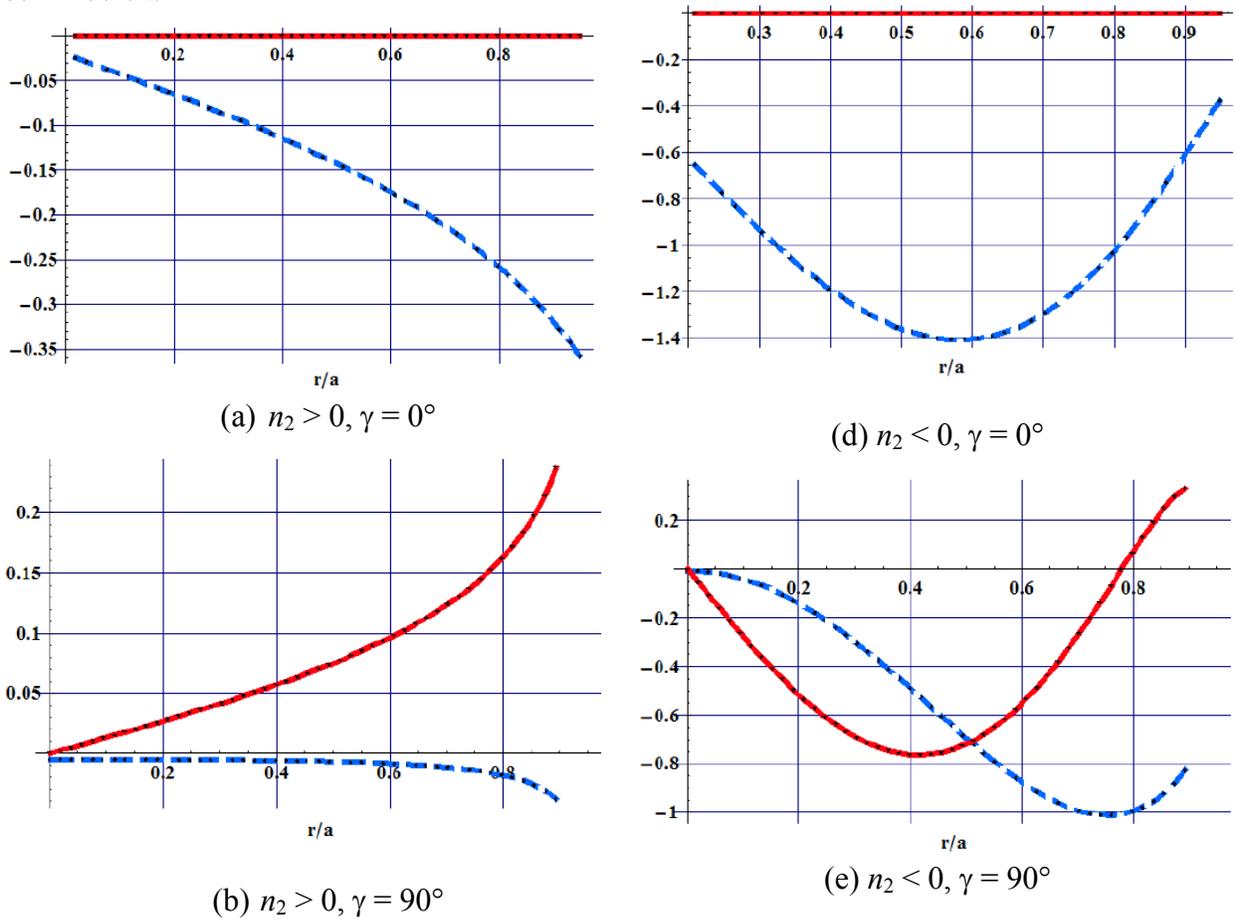
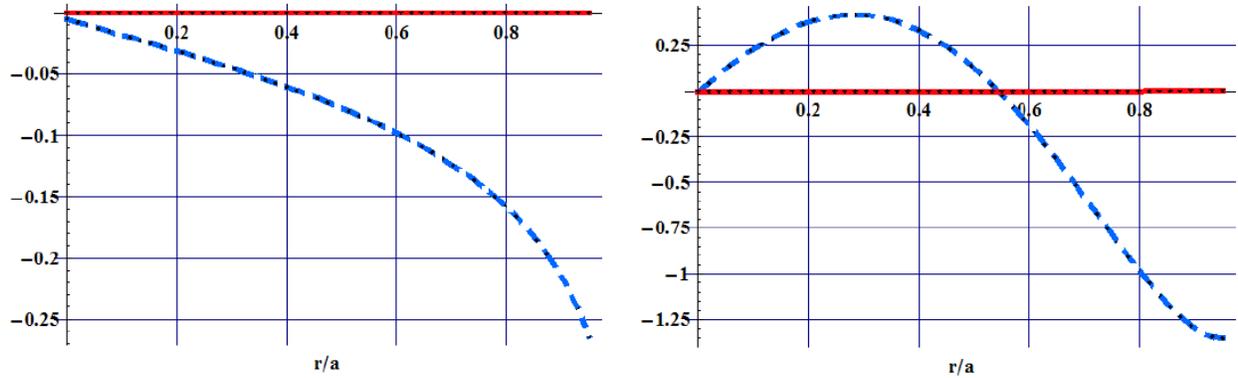


Fig. 3. Scattering (blue) and gradient (red) total forces as functions of g . For (a) and (b), $|n_2| = 1.61$ and $n_1 = 1.33$. For (c) and (d), $|n_2| = 1.21$ and $n_1 = 1.33$.




 (c) $n_2 > 0, \gamma = 180^\circ$

 (f) $n_2 < 0, \gamma = 180^\circ$

Fig. 4. Normalized (over $n_1 P/c$) scattering (blue lines) and gradient (red lines) total forces, as functions of the distance between the focus and the center of the sphere. Unusual behaviors for metamaterial particles (right column). The index of refraction of the particle and the medium are $|n_2| = 1.21$ and $n_1 = 1.33$ (water medium), respectively.

References

- [1] A. Ashkin, "Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime", *Biophys. J.*, vol. 61, pp. 569-582, 1992.
- [2] V. G. Veselago, "The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ϵ and m ", *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, pp. 509-514, 1968.