



# MODELAMENTO E ANÁLISE DE GUIAS DIELÉTRICOS PLANARES ATRAVÉS DO MÉTODO FDTD

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação  
da Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Comunicações,  
como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

**Mestre em Engenharia Elétrica**

Autor

**Frederico Pina Venturini**  
Engenheiro Eletricista - INATEL - 1993

Orientador

**Prof. Dr. Leonardo de Souza Mendes**  
PhD in Electrical Engineering - Syracuse University - 1992

Campinas, 24 de abril de 1998.

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por <u>Frederico Pina Venturini</u> em defesa realizada pela Comissão Julgada em <u>24 / 04 / 1998</u> <u>Mendes</u> Orientador
--

3823045

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	J/UNICAMP
	V568m
V	0
TÍT.	6,35806
PREZ.	395,98
	0 <input type="checkbox"/> 0 <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	13/11/98
N.º CPU	

CM-00118486-3

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V568m      Venturini, Frederico Pina  
Modelamento e análise de guias dielétricos planares  
através do método FDTD. / Frederico Pina Venturini.--  
Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Leonardo de Souza Mendes  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Eletromagnetismo. 2. Diferenças finitas. 3. Ondas  
eletromagnéticas. 4. Maxwell, Equações de. 5. Guias de  
ondas dielétricos. I. Mendes, Leonardo de Souza. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

À Djenane, Eduarda,  
Hebe e Antônio.

## MEUS AGRADECIMENTOS

- a Deus por mais esta oportunidade de aprendizagem;
- aos meus Pais pelo amor e afeto constantes;
- à minha Mulher pelo carinho, apoio, estímulo e paciência;
- ao Prof. Leonardo pela orientação, amizade, paciência e compreensão ao longo da realização deste trabalho;
- aos Amigos que me acolheram, auxiliaram e com os quais aprendi muito pessoal e profissionalmente, em especial ao Amorim, Jackson, Marcelo, Moisés e Surerus;
- ao CNPq pelo apoio financeiro recebido.

## RESUMO

Apresentamos neste trabalho a formulação do método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) para a análise das características de propagação de estruturas dielétricas planares bidimensionais (guia *slab* e acoplador direcional). Uma solução direta das equações de Maxwell dependentes do tempo é procurada, substituindo-se as derivadas parciais contidas nos operadores diferenciais por diferenças finitas. Para isso é necessário realizar inicialmente a discretização espacial e temporal do problema, em células e passos discretizados de tempo, respectivamente, obtendo-se as equações de diferenças finitas que simularão a propagação da onda desejada. A formulação foi desenvolvida para análise de materiais lineares não dispersivos. É feito inicialmente um estudo teórico das características das estruturas analisadas e do método FDTD, apresentando-se em seguida os resultados obtidos nas simulações realizadas.

## ABSTRACT

In this work a finite-difference time-domain method formulation to the analysis of propagation characteristics in bidimensional dielectric planar structures (slab waveguide and directional coupler) is presented. A direct solution of Maxwell's equations is searched, replacing the partial derivative enclosed in the differential operators by finite differences. To reach this solution it is necessary to discretize space and time, in the form of space cells and time steps, respectively, to obtain the finite difference equations that will simulate the wave propagation desired. The formulation was developed to analyze linear nondispersive materials. The theoretical aspects involved in the analysis of the structures and the FDTD method are initially discussed and then the results obtained in the simulations are presented.

# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras e Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Análise de Guias Dielétricos Planares</b>	<b>3</b>
2.1 Equações de Maxwell .....	4
2.1.1 A Equação de Onda .....	5
2.2 Guia de Onda Dielétrico Planar - Guia <i>Slab</i> .....	6
2.2.1 Modos do Guia de Onda Planar - Discussão Geral .....	8
2.2.2 Modos Confinados no Guia <i>Slab</i> .....	10
2.2.3 Modos TE .....	11
2.3 Acopladores Direcionais Baseados em Guias <i>Slab</i> .....	16
2.3.1 Modos Compostos do Acoplador Direcional .....	17
2.4 Referências Bibliográficas .....	20
<b>3 O Método das Diferenças Finitas no Domínio dos Tempos</b>	<b>21</b>
3.1 Conceitos Fundamentais .....	22
3.2 O Método FDTD para Meios Isotrópicos Não-Dispersivos - O Algoritmo de Yee .....	23
3.3 Critérios de Precisão e Estabilidade .....	27
3.4 Análise da Dispersão Numérica .....	28
3.4.1 Comparação com o Caso de Dispersão Ideal .....	30
3.5 Condições de Contorno .....	33
3.6 Condições de Excitação do Método FDTD .....	36
3.6.1 Fonte de Onda Plana .....	36
3.6.2 Fonte de Onda Dura .....	36
3.6.3 Formulação Campo Total/Campo Espalhado .....	37
3.7 Referências Bibliográficas .....	40

<b>4</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>41</b>
4.1	O Guia <i>Slab</i> .....	41
4.1.1	Formulação do Problema.....	42
4.1.2	Aplicação do Método FDTD .....	42
4.2	O Acoplador Direcional.....	48
4.2.1	Aplicação do Método FDTD .....	48
4.3	Estrutura Proposta.....	55
4.4	Referências Bibliográficas.....	58
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>59</b>
<b>APÊNDICE A: Dedução e Análise das Condições de Contorno Absorvente</b>		<b>61</b>
A.1	Equação de Onda Unidirecional .....	61
A.1.1	Dedução Através do Fatoramento da Equação de Onda Unidirecional..	62
A.2	Análise do Coeficiente de Reflexão .....	66
A.3	Simulação Numérica.....	67
A.4	Referências Bibliográficas.....	72

# LISTA DE FIGURAS E TABELAS

Figura 2.1 - Geometria do guia dielétrico planar .....	7
Figura 2.2 - Soluções gerais para o guia planar .....	9
Figura 2.3 - Solução gráfica para a condição de guiamento dos modos $TE$ .....	14
Figura 2.4 - Perfil do modo dominante ( $TE_0$ ) para vários valores de $(k_x)_0 h$ .....	15
Figura 2.5 - Perfil do modo $TE_1$ para vários valores de $(k_x)_1 h$ .....	15
Figura 2.6 - (a) Esboço de um acoplador direcional mostrando o fluxo de potência nos canais adjacentes. (b) Perfil da intensidade da luz guiada para várias distâncias propagadas. Escala de intensidade arbitrária.....	17
Figura 2.7 - Esquemático do acoplador direcional.....	17
Figura 3.1 - Célula básica de Yee .....	26
Figura 3.2 - Variação da velocidade de fase em função do ângulo de incidência .....	32
Figura 3.3 - Variação da velocidade de fase em função da discretização da malha FDTD.....	32
Figura 3.4 - Domínio bidimensional para propagação de onda $TE$ .....	34
Figura 3.5 - Esquema de excitação usando superfície virtual para conectar as regiões de campo total e campo espalhado.....	36
Figura 3.6 - Componentes de campo numa malha $TE$ bidimensional.....	36
Figura 4.1 - Guia $slab$ modelado em duas dimensões .....	43
Figura 4.2 - Distribuição espacial do campo no plano de incidência .....	43
Figura 4.3 - Variação temporal do campo $E_y$ ao longo do eixo $z$ ( $i=40$ ), para 40, 120 e 200 passos de tempo.....	45
Figura 4.4 - Distribuição espacial do campo $E_y$ para $n = 200$ passos de tempo .....	46
Figura 4.5 - Distribuição de potência para $n = 200$ passos de tempo.....	46
Tabela 4.1 - Relação $k_x h$ em função do índice de refração do guia.....	47

Figura 4.6 - Perfil do modo dominante $TE_0$ para vários valores da relação $k_v h$ . Linhas contínuas para resultado teórico e linhas tracejadas para resultado obtido através da simulação FDTD .....	48
Figura 4.7 - Acoplador direcional modelado através do método FDTD.....	49
Figura 4.8 - Obtenção de $\beta_1$ e $\beta_2$ através de solução numérica .....	49
Figura 4.9 - Solução exata dos modos $TE$ simétricos e assimétricos do acoplador direcional com $n_1 = n_3 = n_5 = 1$ , $n_2 = n_4 = 1,5$ , $d_2 = d_4 = 0,25 \mu m$ , $2S_3 = 0,30 \mu m$ e $\lambda = 1,0 \mu m$ .....	50
Tabela 4.2 - Comparação entre os valores exatos e simulados de $L$ para vários valores de $2S_3$	51
Figura 4.10 - Magnitude de $E_y$ ao longo do <i>slab</i> 1 (linha contínua) e <i>slab</i> 2 (linha pontilhada) para $2S_3 = 0,30 \mu m$ .....	52
Figura 4.11 - Magnitude de $E_y$ ao longo do <i>slab</i> 1 (linha contínua) e <i>slab</i> 2 (linha pontilhada) para $2S_3 = 0,35 \mu m$ .....	52
Figura 4.12 - Magnitude de $E_y$ ao longo do <i>slab</i> 1 (linha contínua) e <i>slab</i> 2 (linha pontilhada) para $2S_3 = 0,40 \mu m$ .....	53
Figura 4.13 - Comparação entre a distribuição transversal de $E_y$ exata (linha contínua) e simulada (linha tracejada), após o comprimento de acoplamento .....	54
Figura 4.14 - Distribuição espacial do campo elétrico para um acoplador direcional com $2S_3 = 0,30 \mu m$ .....	54
Figura 4.15 - Esquemático da estrutura proposta.....	55
Figura 4.16 - Distribuição do campo $E_y$ para a estrutura proposta, possuindo $n_1 = 1,5$ .....	56
Figura 4.17 - Distribuição do campo $E_y$ para a estrutura proposta, possuindo $n_1 = 1,7$ .....	57
Figura A.1 - Domínio computacional cartesiano .....	62
Figura A.2 - Coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência para condição de contorno absorvente de segunda ordem .....	67
Figura A.3 - Domínio computacional .....	68

Figura A.4 - Perfil temporal do pulso de excitação .....	69
Figura A.5 - Configuração do campo elétrico para vários passos de tempo.....	70
Figura A.6 - Erro local normalizado para 100 passos de tempo .....	71
Figura A.7 - Erro Global .....	72

# CAPÍTULO I

## 1. INTRODUÇÃO

O grande interesse nas comunicações ópticas surgiu nos anos 60 com a invenção do laser, uma fonte óptica coerente que possibilitou o uso de uma nova porção do espectro eletromagnético de frequências. Como todas as invenções de sucesso, o laser permitiu o incremento de ordens de magnitude nas aplicações existentes de um campo maturado e abriu novos campos e novas aplicações.

Um dos campos mais excitantes na área das comunicações ópticas é a óptica integrada, que surgiu devido à necessidade de se miniaturizar os dispositivos utilizados. Ela engloba assuntos tais como guiamento de ondas, acoplamento modal, chaveamento, modulação e outros. Para desempenhar estas funções, a óptica integrada envolve outras tecnologias, possibilitando a combinação de componentes ópticos, eletro-ópticos e elétricos num mesmo substrato, aumentando a flexibilidade e o escopo do componente óptico integrado.

Métodos precisos podem ser utilizados na simulação dos componentes ópticos integrados, permitindo maneiras de se explorar novas idéias para dispositivos sem a necessidade de custos com fabricação e testes.

O objetivo deste trabalho é realizar a análise de duas estruturas muito utilizadas na óptica integrada:

- o guia *slab*;
- o acoplador direcional.

Para isso, utiliza-se o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) na determinação do comportamento do sinal óptico propagante nestas estruturas. Apesar de ser conceitualmente simples, este método fornece alta precisão no modelamento de uma variedade de problemas de interação de ondas eletromagnéticas. Ele busca uma solução numérica das equações de Maxwell no domínio temporal sujeito às condições de contorno impostas pelas estruturas.

No Capítulo 2 realiza-se o estudo teórico do comportamento do guia *slab* e do acoplador direcional, enfocando princípio de funcionamento e análise das soluções modais admitidas.

No Capítulo 3 apresenta-se a formulação FDTD para meios lineares, isotrópicos e não dispersivos, abordando-se aspectos como precisão e estabilidade, dispersão numérica, condições de contorno e condições de excitação do método.

No Capítulo 4 apresenta-se a formulação utilizada nas simulações realizadas e os resultados numéricos obtidos para os casos do guia *slab* e do acoplador direcional, validando estes resultados através da comparação com previsões teóricas. Após a validação do método FDTD, ele é aplicado na análise de uma estrutura dielétrica planar proposta.

No Capítulo 5 apresentam-se as conclusões sobre o trabalho realizado e propostas de trabalhos futuros nesta mesma linha de pesquisa.

No Apêndice A realiza-se um estudo detalhado sobre a derivação das condições de contorno utilizadas pelo método FDTD, analisando-se o coeficiente de reflexão e realizando-se simulação para verificação do seu desempenho.

# CAPÍTULO II

## 2. ANÁLISE DE GUIAS DIELÉTRICOS PLANARES

A óptica integrada tem se tornado um dos tópicos mais excitantes no campo das comunicações ópticas. Neste capítulo serão apresentadas duas estruturas importantes na óptica integrada, estudando-se suas características funcionais.

Inicialmente, na Seção 2.1, realiza-se uma breve revisão das equações de Maxwell, seguida da derivação da equação de onda para guias de onda dielétricos. Na Seção 2.2 faz-se a apresentação do guia de onda dielétrico planar (guia *slab*), envolvendo seu princípio de funcionamento, a análise das soluções modais admitidas e um estudo dos modos *TE* guiados por esta estrutura, onde obtém-se a solução dos campos eletromagnéticos, a condição de guiamento e a constante de propagação modal. Finalmente, na Seção 2.3, é feita a análise do acoplador direcional, obtendo-se os modos compostos da estrutura e a distância de troca de energia.

## 2.1 EQUAÇÕES DE MAXWELL

As relações entre os campos elétrico e magnético, cargas e correntes, e suas relações com as ondas eletromagnéticas, são governadas por leis físicas. Estas leis foram derivadas através de vários experimentos realizados por diferentes investigadores e colocadas em sua forma final por James Clerk Maxwell, em 1863, sendo conhecidas a partir de então como equações de Maxwell. Para um meio genérico, utilizando o sistema de unidades MKS, elas são dadas por [1]

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_o \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mu_o \vec{M} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_o \vec{E} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_o \vec{E} = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mu_o \vec{H} = -\nabla \cdot \mu_o \vec{M} \quad (2.4)$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são os vetores de campo elétrico e magnético,  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  são as correspondentes densidades de fluxo elétrico e magnético,  $\vec{P}$  e  $\vec{M}$  são as polarizações elétrica e magnética induzidas, e  $\epsilon_o$  e  $\mu_o$  são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo. A densidade de corrente  $\vec{J}$  e densidade de carga  $\rho$  representam as fontes do campo eletromagnético. As densidades de fluxo  $\vec{D}$  e  $\vec{B}$  surgem em resposta aos campos elétrico e magnético,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , que se propagam pelo meio, e se relacionam através de relações constitutivas, dadas por:

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} = \mu_o (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.6)$$

Num meio linear, isotrópico e não dispersivo,  $\vec{P}$  relaciona-se com  $\vec{E}$  através de

$$\vec{P} = \epsilon_o \chi_e \vec{E} \quad (2.7)$$

e, de modo similar,  $\vec{M}$  relaciona-se com  $\vec{H}$  através de

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.8)$$

onde  $\chi_e$  e  $\chi_m$  são as susceptibilidades elétrica e magnética.

Relacionando (2.5) com (2.7) e (2.6) com (2.8), obtém-se

$$\varepsilon = \varepsilon_o(1 + \chi_e) \quad (2.9)$$

$$\mu = \mu_o(1 + \chi_m) \quad (2.10)$$

onde  $\varepsilon$  é a permissividade elétrica e  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio em questão.

As equações de Maxwell podem, então, ser reescritas como

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \vec{H} \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.12)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0 \quad (2.14)$$

### 2.1.1 A EQUAÇÃO DE ONDA

As equações de Maxwell podem ser modificadas com o intuito de deduzir equações mais adequadas para certas aplicações, permitindo-se obter a equação que descreve a propagação de ondas eletromagnéticas. Para um meio dielétrico ( $\mu = \mu_o$ ) isento de cargas ( $\vec{J} = \rho = 0$ ), tomando-se o rotacional de (2.11) e substituindo-se em (2.12), obtém-se:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_o \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

Utilizando-se a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (2.16)$$

e definindo-se o índice de refração  $n$  como sendo

$$n(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 + \chi_e(\vec{r})} \quad (2.17)$$

reescreve-se (2.15) na forma

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.18)$$

onde  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$  é a velocidade da luz no vácuo. A equação de onda é obtida quando o meio é uniforme, isto é, não há variação espacial de  $\epsilon$  ( $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ), e é dada por

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2(\vec{r})}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

Considerando um campo  $\vec{E}$  monocromático harmônico no tempo da forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \quad (2.20)$$

e substituindo em (2.19), obtém-se a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k_0^2 n^2(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (2.21)$$

onde  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = (2\pi/\lambda)$  é o número de onda no vácuo.

## 2.2 GUIA DE ONDA DIELÉTRICO PLANAR - GUIA *SLAB*

Linhas de transmissão são usadas para confinar a energia associada a uma onda dentro de uma dada região do espaço e guiá-la numa determinada direção. Frequentemente, estas linhas de transmissão são associadas a estruturas metálicas (p.ex: guias de microondas). Entretanto, tal guiamento também pode ser feito pelos chamados guias dielétricos.

O princípio de funcionamento dos guias dielétricos é baseado no fenômeno da reflexão interna total, explicado com o auxílio da lei de Snell [2][3], dada por:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad (2.22)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  ( $n_1 < n_2$ ) são os índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente. A reflexão interna total ocorre quando um raio óptico propaga-se do meio mais refringente para o meio menos refringente, incidindo na interface entre eles com um ângulo acima do ângulo crítico. O ângulo crítico é obtido fazendo-se  $\theta_1 = 90^\circ$  em (2.22). Seja uma segunda interface entre o meio 2 e um meio com índice de refração  $n_3 < n_2$  situada a uma distância  $2h$  abaixo da primeira interface. Com isso, cria-se uma nova estrutura capaz de guiar a luz através de sucessivas reflexões totais nas interfaces superior e inferior. Esta estrutura é o guia *slab* (ou planar) mostrado na Figura 2.1 .

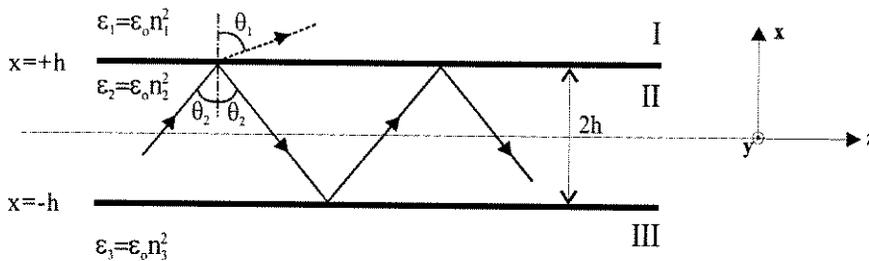


Figura 2.1 - Geometria do guia dielétrico planar

Com o intuito de simplificar a análise desta estrutura, o problema será reduzido para duas dimensões. Isto é feito admitindo-se comprimento infinito em uma de suas direções (p.ex:  $y$ ), de forma que  $\partial/\partial y = 0$ . Será assumido, ainda, que a onda se propaga na direção  $\pm z$ , e que a estrutura é infinita nesta direção.

As características deste guia podem ser analisadas tratando-o como um problema de contorno, onde a solução modal é obtida resolvendo-se a equação de onda e aplicando-se as condições de contorno. Outra forma de se analisar as características de guiamento é através da óptica geométrica. Este método é mais simples e fornece uma noção física maior das características de propagação, sem prover os detalhes da análise modal. Leitores interessados podem recorrer à referência [4] para uma revisão detalhada deste método.

## 2.2.1 MODOS DO GUIA DE ONDA PLANAR - DISCUSSÃO GERAL

Um pré-requisito para o entendimento de interações em guias de onda é o conhecimento das propriedades dos modos guiados. Pode-se definir um modo guiado como sendo uma configuração de campos eletromagnéticos, que mantêm sua distribuição espacial transversa à medida que se propaga. O modo de um guia dielétrico, operando numa frequência  $\omega$ , é solução da equação de Helmholtz dada pela equação (2.21).

Assumindo que o campo elétrico possui variação da forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y) \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} \quad (2.23)$$

obtem-se a partir de (2.21)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \vec{E}(x, y) + [k_o^2 n^2(\vec{r}) - \beta^2] \cdot \vec{E}(x, y) = 0 \quad (2.24)$$

Fazendo  $\partial/\partial y = 0$  em (2.24), e escrevendo separadamente as equações para as regiões I, II e III ( Figura 2.1 ), tem-se [5]:

$$\text{Região I:} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot E(x, y) + [k_o^2 n_1^2 - \beta^2] \cdot E(x, y) = 0 \quad (2.25)$$

$$\text{Região II:} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot E(x, y) + [k_o^2 n_2^2 - \beta^2] \cdot E(x, y) = 0 \quad (2.26)$$

$$\text{Região III:} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot E(x, y) + [k_o^2 n_3^2 - \beta^2] \cdot E(x, y) = 0 \quad (2.27)$$

onde  $E(x, y)$  é a componente cartesiana de  $\vec{E}(x, y)$ . Na nossa formulação esta componente encontra-se na direção  $y$ .

A natureza destas soluções será analisada em função da constante de propagação  $\beta$ , numa determinada frequência de operação  $\omega$ . Assumindo-se  $n_2 > n_3 > n_1$ , verifica-se que quando  $\beta > k_o n_2$ , segue de, (2.25) a (2.27), que  $(1/E) \cdot (\partial^2 E / \partial x^2) > 0$ , e portanto  $E(x)$  é exponencial nas três camadas, conforme regime (a) da Figura 2.2. Verifica-se que o

campo cresce sem limites fora da camada central, não sendo uma solução fisicamente realizável.

Para  $k_0 n_2 > \beta > k_0 n_3$ , correspondente aos regimes (b) e (c) da Figura 2.2, segue de (2.26), que a solução é senoidal na região II, desde que  $(V_E) \cdot \left( \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right) < 0$ , e exponencial nas regiões I e III. A energia carregada por estes modos é confinada nas vizinhanças da camada II, e, conseqüentemente, serão chamados de modos guiados ou confinados pelo guia planar. A condição necessária de existência destes modos é que  $k_0 n_2 > \beta > k_0 n_3, k_0 n_1$ , ou seja,  $n_2 > n_3, n_1$ .

Soluções modais para  $k_0 n_3 > \beta > k_0 n_1$  (item (d) da Figura 2.2), apresentam comportamento exponencial na região I e senoidal nas regiões II e III. Estes são os chamados modos radiantes no substrato. E para  $k_0 n_1 > \beta > 0$  (item (e) da Figura 2.2), a solução é senoidal nas três camadas. Estes são os chamados modos radiantes do guia de onda.

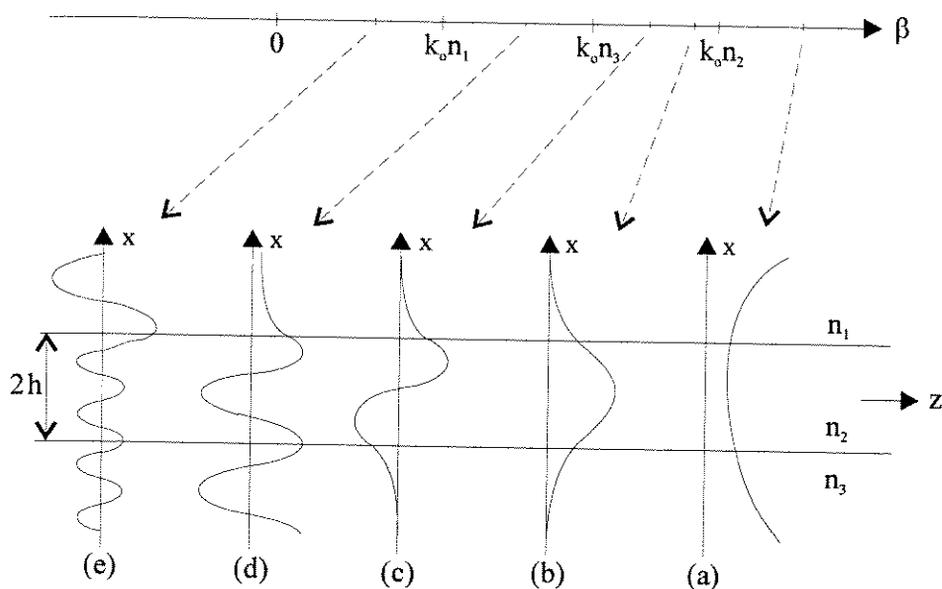


Figura 2.2 - Soluções gerais para o guia planar

## 2.2.2 MODOS CONFINADOS NO GUIA *SLAB*

Para melhor entendimento do comportamento das soluções modais, será considerado por simplicidade o guia *slab* simétrico, onde  $n_1 = n_3$ . A camada central possui índice  $n_2 > n_1$  e ocupa a região  $-h < x < +h$ .

Considerando-se uma onda com variação harmônica no tempo da forma  $e^{j\omega t}$  e variação nula na direção  $y$  ( $\partial/\partial y = 0$ ), as equações de Maxwell (2.11) e (2.12) se reduzem a:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega \mu H_x \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega \mu H_y \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega \mu H_z \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -j\omega \varepsilon E_x \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega \varepsilon E_y \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega \varepsilon E_z \quad (2.33)$$

Por inspeção de (2.28) a (2.33), nota-se que existem dois tipos de soluções consistentes. Um tipo contendo apenas as componentes  $E_y, H_x$  e  $H_z$ , sendo chamado de modo transversal elétrico, ou modo *TE*, uma vez que o campo elétrico é normal à direção de propagação da onda. O segundo tipo, envolvendo as componentes  $H_y, E_x$  e  $E_z$ , é chamado de modo transversal magnético, ou modo *TM*, por possuir o campo magnético normal à direção de propagação.

A análise dos modos  $TM$  segue de forma análoga a análise dos modos  $TE$ , sendo encontrada nas referências [1][4][6]. Este trabalho detém-se apenas na análise dos modos  $TE$ .

### 2.2.3 MODOS TE

Devido à simetria do guia em relação ao plano  $x = 0$ , as soluções obtidas para os modos  $TE$  (ou  $TM$ ), podem ser pares (simétricas) ou ímpares (assimétricas). Para as soluções pares, tem-se:

$$E_y(x, z, t) = E_y(-x, z, t) \quad (2.34)$$

enquanto que para as soluções ímpares:

$$E_y(x, z, t) = -E_y(-x, z, t) \quad (2.35)$$

A solução para o campo elétrico guiado, pode ser escrita na forma [6]:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} B \cdot e^{-\alpha_x x} \cdot e^{-j\beta z} & , x \geq h \\ A \cdot \begin{cases} \cos(k_x \cdot x) \\ \text{sen}(k_x \cdot x) \end{cases} \cdot e^{-j\beta z} & , |x| \leq h \\ \pm B \cdot e^{+\alpha_x x} \cdot e^{-j\beta z} & , x \leq -h \end{cases} \quad (2.36)$$

onde a escolha superior ou inferior dos campos na região do núcleo corresponde às soluções pares ou ímpares, respectivamente. As constantes  $A$  e  $B$  estão relacionadas entre si através das condições de contorno das componentes tangenciais de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  em  $x = \pm h$ . Com o auxílio de (2.36) e (2.30), obtém-se a componente tangencial de  $\vec{H}$ , dada por:

$$H_z(x, z) = -\frac{j}{\omega \mu} \begin{cases} \alpha_x \cdot B \cdot e^{-\alpha_x x} \cdot e^{-j\beta z} & , x \geq h \\ \pm k_x \cdot A \cdot \begin{cases} \text{sen}(k_x \cdot x) \\ \cos(k_x \cdot x) \end{cases} \cdot e^{-j\beta z} & , |x| \leq h \\ \mp \alpha_x \cdot A \cdot e^{+\alpha_x x} \cdot e^{-j\beta z} & , x \leq -h \end{cases} \quad (2.37)$$

Tomando-se vantagem da simetria, torna-se necessário estabelecer as condições de contorno somente em  $x = +h$ , obtendo para os modos pares:

$$E_y : \quad B.e^{-\alpha_x \cdot h} = A.\cos(k_x \cdot h) \quad (2.38)$$

$$H_z : \quad \alpha_x \cdot B.e^{-\alpha_x \cdot h} = k_x \cdot A.\sen(k_x \cdot h) \quad (2.39)$$

Dividindo-se (2.39) por (2.38) obtém-se a condição de guiamento:

$$\tan(k_x \cdot h) = \frac{\alpha_x}{k_x} \quad (\text{modos pares}) \quad (2.40)$$

De maneira análoga, deduz-se a condição de guiamento para os modos ímpares:

$$\cot(k_x \cdot h) = -\frac{\alpha_x}{k_x} \quad (\text{modos ímpares}) \quad (2.41)$$

A solução (2.36) deve satisfazer à equação de onda (2.25) e (2.26). Desta forma, as seguintes relações devem ser obedecidas:

$$\beta^2 - \alpha_x^2 = k_o^2 n_1^2 \quad (2.42)$$

$$\beta^2 + k_x^2 = k_o^2 n_2^2 \quad (2.43)$$

Combinando-se estas duas últimas equações, tem-se:

$$\frac{\alpha_x}{k_x} = \frac{\sqrt{(\Delta k \cdot h)^2 - (k_x \cdot h)^2}}{k_x \cdot h} \quad (2.44)$$

onde  $\Delta k^2 = k_o^2 \cdot (n_2^2 - n_1^2)$ .

Através de (2.40), (2.41) e (2.44), são obtidas as condições de guiamento para os modos pares e ímpares, dadas por:

$$\tan(k_x \cdot h) = \frac{\sqrt{(\Delta k \cdot h)^2 - (k_x \cdot h)^2}}{k_x \cdot h} \quad (\text{modos pares}) \quad (2.45)$$

$$\cot(k_x \cdot h) = -\frac{\sqrt{(\Delta k \cdot h)^2 - (k_x \cdot h)^2}}{k_x \cdot h} \quad (\text{modos ímpares}) \quad (2.46)$$

As equações (2.45) e (2.46) podem ser resolvidas numericamente (através do uso de técnicas iterativas) ou graficamente. Apesar de fornecer um resultado aproximado, o método gráfico apresenta uma interpretação física melhor das características de propagação dos modos guiados.

A solução gráfica é obtida traçando-se os dois lados da condição de guiamento em função do parâmetro  $k_x \cdot h$ , conforme Figura 2.3, onde os pontos de interseção representam as soluções admitidas.

Seja a  $p$ -ésima solução modal denominada por  $(k_x)_p$ . Generalizando para os modos pares e ímpares,  $(k_x)_p$  deverá satisfazer a relação:

$$\frac{p\pi}{2} < (k_x)_p h < (p+1)\frac{\pi}{2} \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.47)$$

onde os modos  $p=0, 2, 4, \dots$  são pares e os modos  $p=1, 3, 5, \dots$  são ímpares.

A partir da relação de dispersão na região central do guia (eq.(2.43)), uma vez determinado  $(k_x)_p$ , pode-se obter a constante de propagação associada ao  $p$ -ésimo modo, através de:

$$\beta_p = \sqrt{k_o^2 n_2^2 - (k_x)_p^2} \quad (2.48)$$

Para um dado guia *slab* (parâmetros  $n_1, n_2$  e  $h$  fixos), decrescendo-se  $\omega$ ,  $\alpha_x/k_x$  move-se em direção à origem e as interseções são perdidas, exceto a interseção com o primeiro ramo da função tangente. Este é o modo dominante (ou fundamental) da estrutura, denominado  $TE_o$  ( $p=0$ ).

Será examinado em detalhes, o comportamento modal em dois limites:

### Límite I. Limite de baixa frequência

Da Figura 2.3, observa-se que a solução para o  $p$ -ésimo modo é perdida quando

$$(k_x)_p h \longrightarrow \frac{p\pi}{2} \quad (2.49)$$

Nesta condição,  $(\alpha_x)_p \longrightarrow 0$ . Este limite é conhecido como limite de corte. À medida que este limite se aproxima para um modo qualquer, os campos nas regiões I e III

se estendem mais e mais além do núcleo do guia.

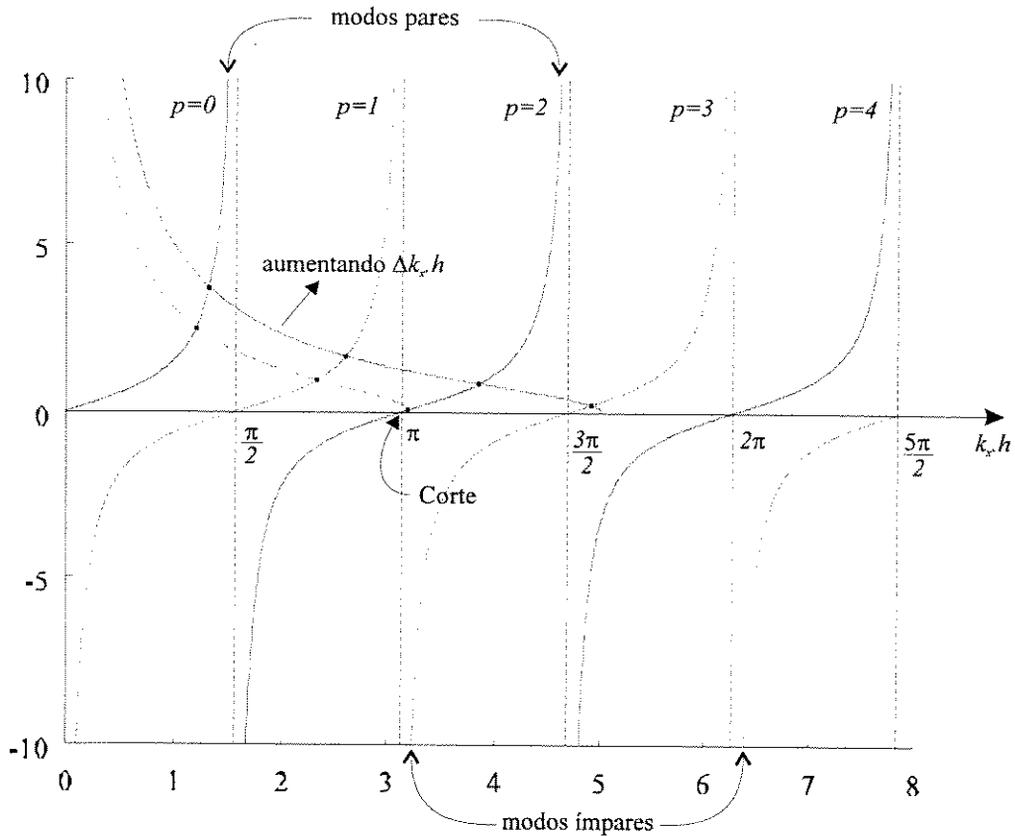


Figura 2.3 - Solução gráfica para a condição de guiamento dos modos *TE*

À medida que a frequência decresce, menos modos se propagam pelo guia. A frequência para a qual um dado modo deixa de propagar, é chamada frequência de corte, dada por:

$$f_{cp} = \frac{p}{4h} \cdot \frac{c}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.50)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

### Limite II. Limite de alta frequência

Da Figura 2.3, observa-se que para frequências suficientemente altas

$$(k_x)_p h \longrightarrow (p+1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (2.51)$$

Nesta situação, os campos estão quase que totalmente contidos no núcleo do guia,

decaindo rapidamente acima e abaixo do mesmo.

As Figuras 2.4 e 2.5 ilustram o perfil do campo elétrico para os modos  $TE_0$  e  $TE_1$ , respectivamente, para vários valores da relação  $(k_x)_p h$ , onde pode-se observar o comportamento do campo desde o limite de baixa até o limite de alta frequência. As linhas pontilhadas situadas em  $x/h = \pm 1$  delimitam a região central do guia.

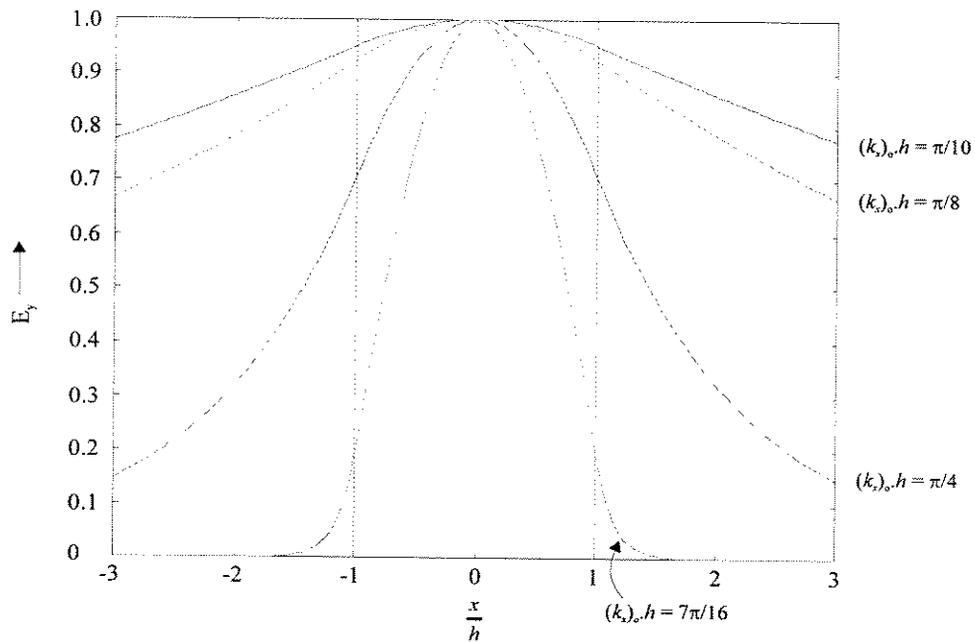


Figura 2.4 - Perfil do modo dominante ( $TE_0$ ) para vários valores de  $(k_x)_0 h$

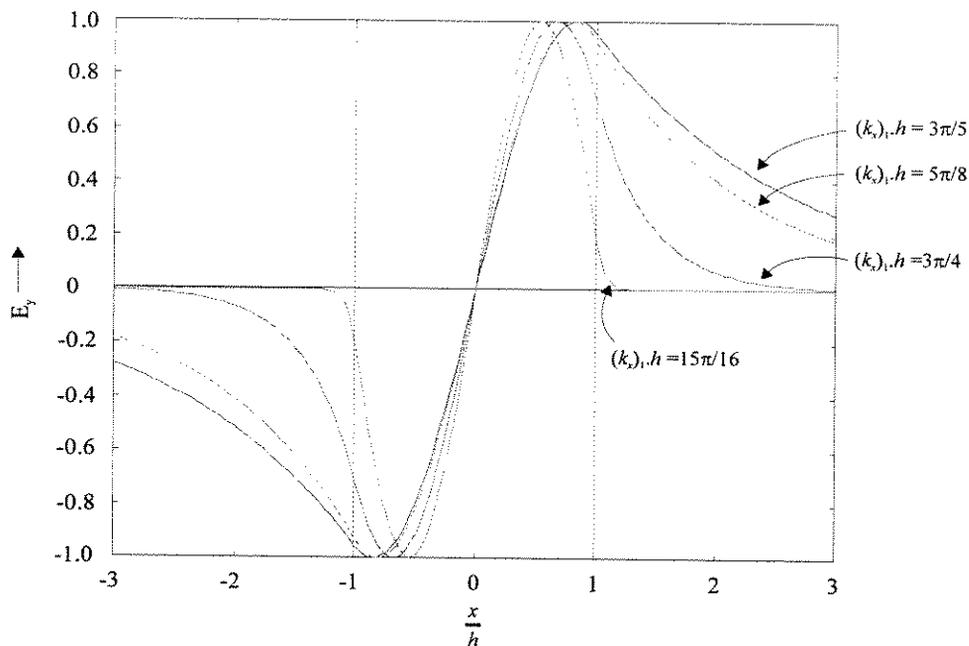


Figura 2.5 - Perfil do modo  $TE_1$  para vários valores de  $(k_x)_1 h$

## 2.3 ACOPLADORES DIRECIONAIS BASEADOS EM GUIAS *SLAB*

A troca de potência entre modos guiados por estruturas adjacentes é conhecida como acoplamento direcional. Os acopladores direcionais são importantes para muitas aplicações em óptica integrada, incluindo divisão de potência, modulação, chaveamento, seleção de frequência e seleção de polarização.

Como visto anteriormente, o campo eletromagnético dos modos guiados decai exponencialmente na região externa ao núcleo do guia *slab*. Desta forma, se dois guias são dispostos paralelamente um ao outro, uma parcela do campo de um dos guias alcança o outro guia, interagindo com o campo guiado por este último. Será mostrado a seguir que é possível obter-se uma completa transferência de potência entre os guias através deste mecanismo de acoplamento. Para isto, é necessário apenas que os guias sejam síncronos, isto é, possuam as mesmas constantes de propagação quando considerados isoladamente (ausência de acoplamento). O acoplamento entre guias não síncronos pode ser realizado, estando esta análise fora do escopo deste trabalho. A Figura 2.6 ilustra um acoplador direcional formado por vários guias adjacentes.

Para os *slabs* síncronos, há sempre duas soluções dos modos compostos que possuem constantes de propagação aproximadamente iguais àquelas dos dois modos dos guias *slabs* isolados. Estes dois modos da estrutura composta possuem simetria par e ímpar, se os dois *slabs* são idênticos. Quando os modos compostos possuem constantes de propagação  $\beta_1$  e  $\beta_2$  ligeiramente diferentes, suas fases relativas irão reverter numa distância  $L$ , chamada de distância de troca de energia ou distância de acoplamento, dada por

$$L = \frac{\pi}{|\beta_1 - \beta_2|} \quad (2.52)$$

havendo, neste ponto, a completa transferência de energia entre os guias *slab*.

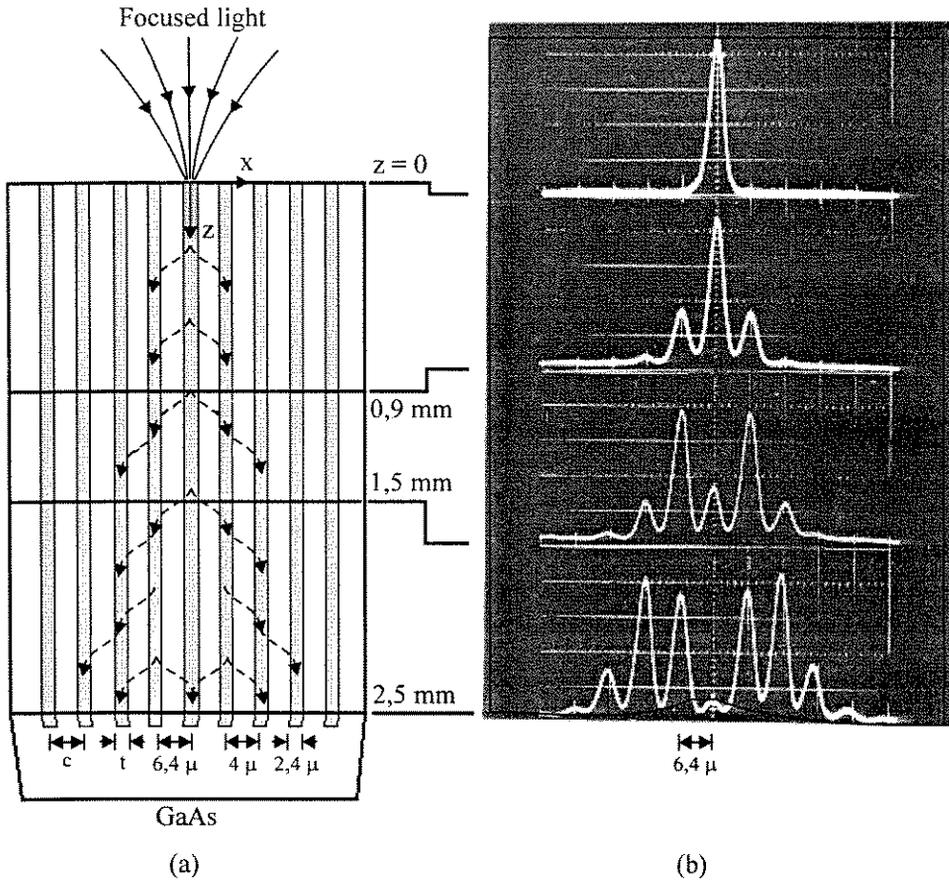


Figura 2.6 - (a) Esboço de um acoplador direcional mostrando o fluxo de potência nos canais adjacentes (b) Perfil da intensidade da luz guiada para várias distâncias propagadas. Escala de intensidade arbitrária

### 2.3.1 MODOS COMPOSTOS DO ACOPLADOR DIRECIONAL

O acoplador direcional, composto por dois guias *slab* dispostos paralelamente, é esquematizado na Figura 2.7 .

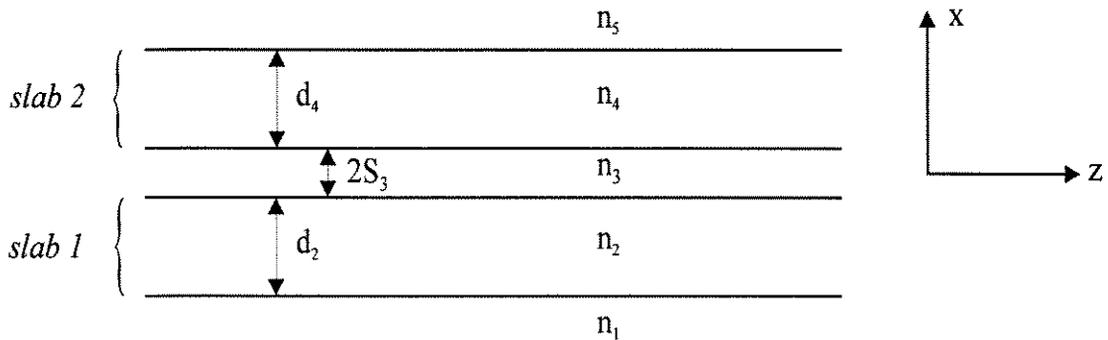


Figura 2.7 - Esquemático do acoplador direcional

Será considerado que os *slabs* são idênticos e, desta forma,  $n_2 = n_4 > n_1 = n_3 = n_5$  e  $d_2 = d_4$ . O espaçamento entre o núcleo dos *slabs* é  $2S_3$ .

Para o modo *TE*, a componente  $E_y$  nas cinco regiões do espaço é definida como sendo[7]:

$$E_y = \begin{cases} A_1 \cdot e^{-\alpha_1(x-S_3-d_2)} & \text{para } x \geq S_3 + d_2 \\ A_2 \cdot \cos[k_{2x}(x-S_3-\frac{d_2}{2})] + A_3 \cdot \text{sen}[k_{2x}(x-S_3-\frac{d_2}{2})] & \text{para } S_3 + d_2 \geq x \geq S_3 \\ A_4 \cdot e^{-\alpha_3x} + A_5 \cdot e^{\alpha_3x} & \text{para } -S_3 \leq x \leq S_3 \\ A_6 \cdot \cos[k_{4x}(x+S_3+\frac{d_4}{2})] + A_7 \cdot \text{sen}[k_{4x}(x+S_3+\frac{d_4}{2})] & \text{para } -S_3 \leq x \leq -S_3 - d_4 \\ A_8 \cdot e^{\alpha_5(x+S_3+d_4)} & \text{para } x \leq -(S_3 + d_4) \end{cases} \quad (2.53)$$

onde

$$k_{jx} = \sqrt{n_j^2 \cdot k_0^2 - \beta^2} \quad , j=2, 4 \quad (2.54)$$

$$\alpha_j = \sqrt{\beta^2 - n_j^2 \cdot k_0^2} \quad , j=1, 3, 5 \quad (2.55)$$

As componentes de campo magnético  $H_x$  e  $H_z$  são dadas pelas equações (2.28) e (2.30), respectivamente.

Os coeficientes  $A_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$  são obtidos através do estabelecimento das condições de contorno para as componentes de campo nas direções  $y$  e  $z$ . Desta forma:

$$H_z = \frac{j}{\omega \mu_0} \begin{cases} -\alpha_1 \cdot A_1 \cdot e^{-\alpha_1(x-S_3-d_2)} & \text{para } x \geq S_3 + d_2 \\ \{-k_{2x} \cdot A_2 \cdot \text{sen}[k_{2x}(x-S_3-\frac{d_2}{2})] + k_{2x} \cdot A_3 \cdot \cos[k_{2x}(x-S_3-\frac{d_2}{2})]\} & \text{para } S_3 + d_2 \geq x \geq S_3 \\ -\alpha_3 \cdot A_4 \cdot e^{-\alpha_3x} + \alpha_3 \cdot A_5 \cdot e^{\alpha_3x} & \text{para } -S_3 \leq x \leq S_3 \\ \{-k_{4x} \cdot A_6 \cdot \text{sen}[k_{4x}(x+S_3+\frac{d_4}{2})] + k_{4x} \cdot A_7 \cdot \cos[k_{4x}(x+S_3+\frac{d_4}{2})]\} & \text{para } -S_3 \leq x \leq -S_3 - d_4 \\ \alpha_5 \cdot A_8 \cdot e^{\alpha_5(x+S_3+d_4)} & \text{para } x \leq -(S_3 + d_4) \end{cases} \quad (2.56)$$

Estabelecendo-se as condições de contorno para  $E_y$  e  $H_z$ , obtém-se:

a) Para  $x = S_3 + d_2$ :

$$A_1 - A_2 \cos(k_{2x} d_2 / 2) - A_3 \sin(k_{2x} d_2 / 2) = 0 \quad (2.57)$$

$$-\alpha_1 A_1 + k_{2x} A_2 \sin(k_{2x} d_2 / 2) - k_{2x} A_3 \cos(k_{2x} d_2 / 2) = 0 \quad (2.58)$$

b) Para  $x = S_3$ :

$$A_2 \cos(k_{2x} d_2 / 2) - A_3 \sin(k_{2x} d_2 / 2) - A_4 e^{-\alpha_3 S_3} - A_5 e^{\alpha_3 S_3} = 0 \quad (2.59)$$

$$k_{2x} A_2 \sin(k_{2x} d_2 / 2) + k_{2x} A_3 \cos(k_{2x} d_2 / 2) + \alpha_3 A_4 e^{-\alpha_3 S_3} - \alpha_3 A_5 e^{\alpha_3 S_3} = 0 \quad (2.60)$$

c) Para  $x = -S_3$ :

$$A_4 e^{\alpha_3 S_3} + A_5 e^{-\alpha_3 S_3} - A_6 \cos(k_{4x} d_4 / 2) - A_7 \sin(k_{4x} d_4 / 2) = 0 \quad (2.61)$$

$$-\alpha_3 A_4 e^{\alpha_3 S_3} + \alpha_3 A_5 e^{-\alpha_3 S_3} + k_{4x} A_6 \sin(k_{4x} d_4 / 2) - k_{4x} A_7 \cos(k_{4x} d_4 / 2) = 0 \quad (2.62)$$

d) Para  $x = -(S_3 + d_4)$ :

$$A_6 \cos(k_{4x} d_4 / 2) - A_7 \sin(k_{4x} d_4 / 2) - A_8 = 0 \quad (2.63)$$

$$k_4 A_6 \sin(k_{4x} d_4 / 2) + k_4 A_7 \cos(k_{4x} d_4 / 2) - \alpha_5 A_8 = 0 \quad (2.64)$$

As condições de contorno podem ser representadas na seguinte notação matricial:

$$CA = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{\mu=1}^8 c_{v\mu} A_\mu = 0 \quad v = 1, 2, 3, \dots, 8 \quad (2.65)$$

onde os termos não nulos da matriz são:

$$c_{11} = -c_{78} = 1 \quad c_{12} = -c_{32} = -\cos(k_{2x} d_2 / 2) \quad c_{13} = c_{33} = -\sin(k_{2x} d_2 / 2)$$

$$c_{21} = -\alpha_1 \quad c_{22} = c_{42} = k_{2x} \sin(k_{2x} d_2 / 2) \quad c_{23} = -c_{43} = -k_{2x} \cos(k_{2x} d_2 / 2)$$

$$c_{34} = -c_{55} = -e^{-\alpha_3 S_3} \quad c_{35} = -c_{54} = -e^{\alpha_3 S_3} \quad c_{44} = c_{65} = \alpha_3 e^{-\alpha_3 S_3}$$

$$c_{45} = c_{64} = -\alpha_3 e^{\alpha_3 S_3} \quad c_{56} = -c_{76} = -\cos(k_{4x} d_4/2) \quad c_{57} = c_{77} = -\text{sen}(k_{4x} d_4/2)$$

$$c_{66} = c_{86} = k_{4x} \text{sen}(k_{4x} d_4/2) \quad c_{67} = -c_{87} = -k_{4x} \cos(k_{4x} d_4/2) \quad c_{88} = -\alpha_5$$

O sistema de equações homogênea (2.57)-(2.64) tem solução somente quando

$$|C| = 0 \quad (2.66)$$

Costuma-se expandir este determinante 8 x 8 com o intuito de obter-se uma equação explícita em função de  $\beta$ . No entanto, o mesmo não possui uma expansão simples, embora 36 dos seus 64 elementos sejam nulos. É mais fácil obter-se soluções numéricas a partir do determinante na sua forma original, particularmente, se dispõe-se de rotinas para cálculo de determinantes. Uma vez que  $\beta$  tenha sido encontrado a partir de (2.66), pode-se fazer  $A_1 = 1$  e omitir a equação (2.64), para obter-se os demais coeficientes  $A_j$ ,  $j = 2, 3, \dots, 8$ . Desta forma, obtém-se a exata distribuição de campo para o modo  $\beta$ .

## 2.4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H.A.Haus, *Waves and Fields in Optoelectronics*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.
- [2] G.Kaiser, *Optical Fiber Communications*, McGraw-Hill, 1991.
- [3] S.Ramo, J.R.Whinnery, T.Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, Wiley, 1994.
- [4] C.A.Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, Wiley, 1989.
- [5] A.Yariv, *Optical Electronics*, Saunders College Publishing, 1991.
- [6] D.L.Lee, *Electromagnetics Principle of Integrated Optics*, Wiley, 1986.
- [7] D.Marcuse, *Directional Coupler Made of Nonidentical Asymmetric Slabs. Part I: Synchronous Couplers*, J.Lightwave Technology, vol.15, no.1, pp 113-118.
- [8] D.Marcuse, *Light Transmission Optics*, V.N.Reinhold Company, 1982.

# CAPÍTULO III

## 3. O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NO DOMÍNIO DO TEMPO

O método das diferenças finitas no domínio do tempo foi proposto inicialmente por Kane S. Yee [1], em 1966, para meios isotrópicos não dispersivos. Tornou-se um método bastante difundido no estudo do espalhamento, guiamento e interação de campos eletromagnéticos com diversos tipos de meios e estruturas devido à sua simplicidade conceitual, aliada à robustez e precisão. Uma solução direta das equações de Maxwell dependentes do tempo é procurada, substituindo-se as derivadas parciais contidas nos operadores diferenciais por diferenças finitas centradas. Para isso, é necessário realizar inicialmente a discretização espacial e temporal do problema, em células e passos discretos de tempo, respectivamente, obtendo em seguida as equações de diferenças finitas utilizadas na simulação do problema.

Os fundamentos básicos para um bom entendimento do método serão revistos inicialmente na Seção 3.1. A Seção 3.2 apresenta as equações de Maxwell na forma geral para meio linear, isotrópico e não dispersivo, onde a formulação de Yee é aplicada. Na Seção 3.3 estudam-se os critérios de precisão e estabilidade do método. A Seção 3.4 mostra uma análise da dispersão numérica associada ao método. A Seção 3.5 realiza um estudo inicial das condições de contorno e a Seção 3.6 aborda as condições de excitação do método FDTD.

### 3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

As equações rotacionais de Maxwell no domínio do tempo, pertencem à classe de equações diferenciais hiperbólicas de primeira ordem. A solução analítica deste tipo de equação é uma função  $F(x,y,z,t)$  de suas coordenadas espaciais e da variável temporal, obtida com base nos valores iniciais considerados e nas condições de contorno impostas pelo problema que se deseja resolver[2].

O método das diferenças finitas consiste em substituir as derivadas parciais por razões entre diferenças num pequeno intervalo, ou seja,  $\partial F/\partial i$ ,  $i = x, y, z, t$  é substituída por  $\delta F/\delta i$  onde  $\delta i$  é pequeno. Com isso, transforma-se a função contínua no tempo e espaço  $F$  em uma função discreta, de forma que um ponto  $P$  deste espaço contínuo passe a ser representado por:

$$P(x, y, z) \longrightarrow P(i\delta_x, j\delta_y, k\delta_z) = P(i, j, k) \quad (3.1)$$

e uma função por:

$$F(x, y, z, t) \longrightarrow F(i\delta_x, j\delta_y, k\delta_z, n\delta_t) = F^n(i, j, k) \quad (3.2)$$

onde  $\delta_x, \delta_y$  e  $\delta_z$  são os incrementos espaciais nas coordenadas  $x, y, z$ , respectivamente, e  $\delta_t$  é o incremento temporal, sendo  $i, j, k$  e  $n$  inteiros.

Quando uma função contínua  $F(x)$  e suas derivadas são finitas e contínuas em  $x$ , tem-se, pelo teorema de Taylor, que

$$F(x+\delta_x) = F(x) + \delta_x \frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{2} \delta_x^2 \frac{d^2F(x)}{dx^2} + \frac{1}{6} \delta_x^3 \frac{d^3F(x)}{dx^3} + \dots \quad (3.3)$$

Para um valor pequeno de  $\delta_x$ , tem-se que  $\delta_x^2 \ll \delta_x$ , e assim

$$F(x+\delta_x) = F(x) + \delta_x \frac{dF(x)}{dx} + O(\delta_x^2) \quad (3.4)$$

onde  $O(\delta_x^2)$  é o erro de truncamento obtido com a aproximação, indicando a existência

de termos de  $\delta_x$  de ordem maior ou igual a 2.

A partir da equação (3.4), obtém-se:

$$\frac{dF(x)}{dx} \cong \frac{F(x+\delta_x) - F(x)}{\delta_x} \quad (3.5)$$

Pode-se aproximar, da mesma maneira, as derivadas parciais espacial e temporal da função  $F^n(i, j, k)$  fazendo

$$\frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x} \cong \frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i+1, j, k) - F^n(i, j, k)}{\delta_x} \quad (3.6)$$

e

$$\frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} \cong \frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1}(i, j, k) - F^n(i, j, k)}{\delta_t} \quad (3.7)$$

### 3.2 O MÉTODO FDTD PARA MEIOS ISOTRÓPICOS NÃO DISPERSIVOS - O ALGORITMO DE YEE

As equações de Maxwell para um meio linear, isotrópico e não dispersivo, isento de fontes de corrente elétrica ou magnética e cujas relações constitutivas são independentes do tempo, são dadas por:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.11)$$

Em coordenadas retangulares, (3.8) e (3.9) podem ser escritas como

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (3.17)$$

Este sistema de equações diferenciais parciais forma a base para a aplicação do algoritmo FDTD proposto por Yee. O algoritmo obtém uma solução simultânea para os campos elétrico e magnético, o que a torna mais precisa e robusta para uma grande variedade de estruturas, quando comparada com soluções obtidas para apenas uma componente de campo, através da equação de onda.

Yee separou o problema de se obter a solução do conjunto de equação (3.12)-(3.17) em duas partes:

- discretização espacial
- discretização temporal

Na discretização espacial, o espaço tridimensional contínuo é subdividido em várias células elementares, de lados  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  e  $\delta_z$ , onde são distribuídas convenientemente as 6 componentes de campo a serem calculadas. A Figura 3.1 apresenta a célula básica de Yee, com as componentes de campo dispostas adequadamente.

A continuidade das componentes tangenciais de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  é satisfeita naturalmente ao longo da interface entre materiais diferentes, não sendo necessário nenhum esforço adicional para casar as condições de contorno nestas interfaces.

É importante notar que cada componente de campo elétrico é circulada por 4 componentes de campo magnético, e vice-versa. Este arranjo, além de permitir a substituição das derivadas parciais por diferenças finitas, possui a geometria adequada para a implementação das leis de Faraday e Ampère na forma integral, a nível de espaço discretizado [3].

Na discretização temporal as componentes de campo  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são calculadas usando-se o esquema *leapfrog*, onde as componentes  $\vec{E}$  são calculadas para um determinado instante de tempo, com base nos valores das componentes de campo  $\vec{H}$  previamente conhecidos. Em seguida, calculam-se as componentes de campo  $\vec{H}$  com base nos valores recentemente calculados das componentes  $\vec{E}$ . Este ciclo torna-se a repetir até que o último passo de tempo seja alcançado.

Com base na célula básica de Yee (Figura 3.1) e substituindo as equações (3.6) e (3.7) no conjunto de equações (3.12)-(3.17), obtém-se:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \frac{\delta_t}{\mu(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})} \cdot \left[ \frac{E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\delta_z} - \frac{E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\delta_y} \right] \quad (3.18)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) + \frac{\delta_t}{\mu(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2})} \cdot \left[ \frac{E_z^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2})}{\delta_x} - \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\delta_z} \right] \quad (3.19)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{\delta_t}{\mu(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k)} \cdot \left[ \frac{E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\delta_y} - \frac{E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\delta_x} \right] \quad (3.20)$$

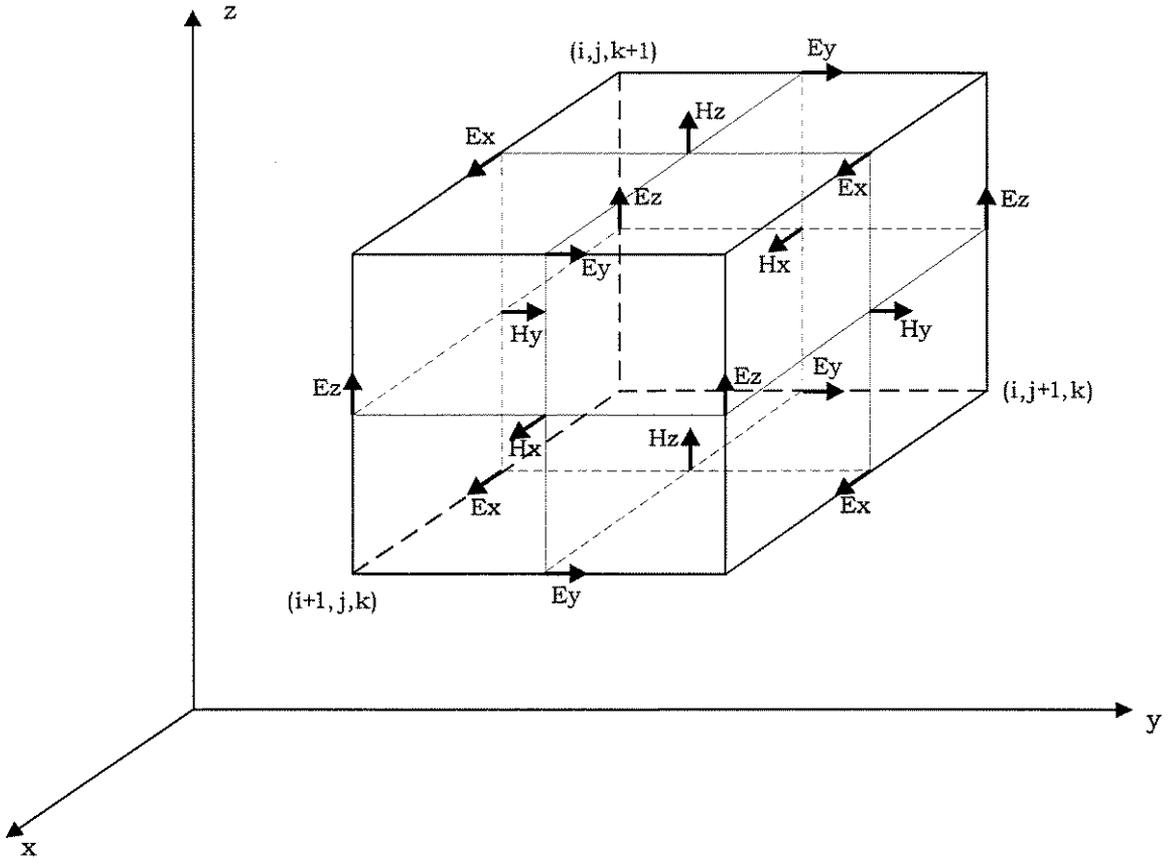


Figura 3.1 - Célula básica de Yee

$$E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) = E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + \frac{\delta_t}{\epsilon(i + \frac{1}{2}, j, k)} \cdot \left[ \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\delta_y} - \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2})}{\delta_z} \right] \quad (3.21)$$

$$E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) = E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + \frac{\delta_t}{\epsilon(i, j + \frac{1}{2}, k)} \cdot \left[ \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})}{\delta_z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\delta_x} \right] \quad (3.22)$$

$$E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) = E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + \frac{\delta_t}{\epsilon(i, j, k + \frac{1}{2})} \cdot \left[ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})}{\delta_x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})}{\delta_y} \right] \quad (3.23)$$

onde  $\varepsilon(i, j, k)$  e  $\mu(i, j, k)$  são, respectivamente, a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética no ponto  $(i, j, k)$ .

Convém observar que o parâmetro  $\varepsilon(i, j, k)$  está relacionado com a componente  $\vec{E}$ , enquanto que  $\mu(i, j, k)$  está relacionado com a componente  $\vec{H}$ . Pode-se, desta forma, definir uma estrutura qualquer simplesmente através da correta especificação destes parâmetros materiais ponto a ponto.

O sistema de equações (3.18)-(3.23) é definido como propagador [4], possuindo a função de atualizar a distribuição de campo dentro de uma região computacional, de um intervalo de tempo  $t = n$  para  $t = n + 1$ . Esta operação é feita com base nos valores iniciais, excitação e condições de contorno.

Este algoritmo possui ainda a vantagem de ser totalmente explícito, ou seja, para a atualização de uma componente qualquer, conhece-se, a priori, todas as quantidades envolvidas no cálculo.

### 3.3 CRITÉRIOS DE PRECISÃO E ESTABILIDADE

Na discretização espacial e temporal das equações de Maxwell, a escolha dos valores  $\delta_i$ ,  $i = x, y, z$  e  $\delta_t$  é feita visando a precisão e estabilidade do algoritmo, respectivamente.

A precisão é assegurada fazendo com que  $\delta_i$  seja pequeno quando comparado ao comprimento de onda, de forma a não haver grande variação entre duas componentes de campo adjacentes. Para uma malha ordinária (*coarse mesh*), tem-se  $\delta_i = \lambda / 10$ , obtendo-se com isso uma imprecisão de 7% na solução obtida, devido à aproximação feita nas derivadas espaciais. Numa discretização fina (*fine mesh*), com  $\delta_i = \lambda / 20$ , este valor cai para menos de 2% [5].

Para que a estabilidade do método seja garantida, Taflove [6] demonstrou que deve-se satisfazer a seguinte relação entre o incremento temporal e espacial

$$\delta_t \leq \frac{1}{c_{max}} \cdot \left( \frac{1}{\delta_x^2} + \frac{1}{\delta_y^2} + \frac{1}{\delta_z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

onde  $c_{max}$  é a máxima velocidade de fase da onda no meio.

Para uma malha bidimensional ( $\delta_x = \delta_y = \delta$ ), pode-se reescrever (3.24) como sendo

$$C = \frac{c_{max} \cdot \delta_t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad (3.25)$$

onde  $C$  é o número de Courant. Um valor usual, e que será adotado nas simulações desenvolvidas neste trabalho, é  $C = 0,5$ .

### 3.4 ANÁLISE DA DISPERSÃO NÚMERICA

O algoritmo definido pelo sistema de equações de diferenças finitas (eq.(3.18)-(3.23)), causa dispersão da onda simulada na malha computacional. Isto é, a velocidade de fase da onda numérica na malha FDTD pode diferir da velocidade da luz no vácuo  $c$ , variando em função do comprimento de onda, direção de propagação e discretização espacial da malha. Esta dispersão numérica pode levar a resultados não-físicos, tais como distorções de pulsos, anisotropia artificial e pseudo-refração. É um fator no modelamento FDTD que deve ser levado em conta para entender sua operação e limites de precisão.

A dedução da relação de dispersão, é feita substituindo-se a solução trivial de uma onda plana monocromática nas equações de diferenças finitas, como proposto em [7]. Reduzindo-se o problema para duas dimensões, assumindo variação nula na direção  $y$  ( $\partial/\partial_y = 0$ ) no conjunto de equações (3.12)-(3.17), e discretizando-se as equações correspondentes ao modo  $TE$ , obtém-se:

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,k)}{\delta_t} = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{E_y^n(i,k+\frac{1}{2}) - E_y^n(i,k-\frac{1}{2})}{\delta_z} \right) \quad (3.26)$$

$$\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i, k)}{\delta_t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{E_y^n(i + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i - \frac{1}{2}, k)}{\delta_x} \right) \quad (3.27)$$

$$\frac{E_y^{n+1}(i, k) - E_y^n(i, k)}{\delta_t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k - \frac{1}{2})}{\delta_z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, k)}{\delta_x} \right) \quad (3.28)$$

Assume-se, ainda, a seguinte solução trivial para uma onda plana monocromática propagando-se no modo  $TE$ :

$$H_x^n(I, K) = H_{x0} \cdot e^{j(k_x I \delta_x + k_z K \delta_z - \omega n \delta_t)} \quad (3.29)$$

$$H_z^n(I, K) = H_{z0} \cdot e^{j(k_x I \delta_x + k_z K \delta_z - \omega n \delta_t)} \quad (3.30)$$

$$E_y^n(I, K) = E_{y0} \cdot e^{j(k_x I \delta_x + k_z K \delta_z - \omega n \delta_t)} \quad (3.31)$$

onde  $k_x$  e  $k_z$  são, respectivamente, as componentes  $x$  e  $z$  do vetor de onda numérico, e  $\omega$  é a frequência angular da onda. Substituindo-se, então, o conjunto de equações (3.29)-(3.31) no conjunto de equações (3.26)-(3.28), e resolvendo-se para  $H_{x0}$ ,  $H_{z0}$  e  $E_{y0}$ , obtém-se:

$$H_{x0} = -\frac{\delta_t E_{y0}}{\mu \delta_z} \cdot \frac{\text{sen}(k_z \delta_z / 2)}{\text{sen}(\omega \delta_t / 2)} \quad (3.32)$$

$$H_{z0} = \frac{\delta_t E_{y0}}{\mu \delta_x} \cdot \frac{\text{sen}(k_x \delta_x / 2)}{\text{sen}(\omega \delta_t / 2)} \quad (3.33)$$

$$E_{y0} \text{sen}\left(\frac{\omega \delta_t}{2}\right) = \frac{\delta_t}{\varepsilon} \cdot \left[ \frac{H_{z0}}{\delta_x} \text{sen}\left(\frac{k_x \delta_x}{2}\right) - \frac{H_{x0}}{\delta_z} \text{sen}\left(\frac{k_z \delta_z}{2}\right) \right] \quad (3.34)$$

Substituindo (3.32) e (3.33) em (3.34), resulta:

$$\left[ \frac{1}{c\delta_t} \cdot \text{sen}\left(\frac{\omega \delta_t}{2}\right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{\delta_x} \text{sen}\left(\frac{k_x \delta_x}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\delta_z} \text{sen}\left(\frac{k_z \delta_z}{2}\right) \right]^2 \quad (3.35)$$

que é a relação de dispersão do algoritmo de Yee para uma onda *TE* bidimensional.

A forma geral para a relação de dispersão do algoritmo de Yee em três dimensões é dada por:

$$\left[ \frac{1}{c\delta_t} \cdot \text{sen}\left(\frac{\omega \delta_t}{2}\right) \right]^2 = \left[ \frac{1}{\delta_x} \text{sen}\left(\frac{k_x \delta_x}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\delta_y} \text{sen}\left(\frac{k_y \delta_y}{2}\right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\delta_z} \text{sen}\left(\frac{k_z \delta_z}{2}\right) \right]^2 \quad (3.36)$$

### 3.4.1 COMPARAÇÃO COM O CASO DE DISPERSÃO IDEAL

A relação de dispersão analítica para uma onda plana num meio contínuo sem perdas é dada por:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (3.37)$$

Pode-se mostrar que (3.36) e (3.37) são idênticas no limite quando  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  e  $\delta_t \rightarrow 0$ . Isto sugere que a dispersão numérica pode ser reduzida a qualquer grau desejado, desde que se utilize uma malha FDTD “fina” o suficiente.

Para mostrar quantitativamente a dependência da dispersão numérica em relação à discretização da malha, será tomado como exemplo o caso bidimensional *TE*, assumindo por simplicidade  $\delta_x = \delta_z = \delta$  e propagação da onda num ângulo  $\alpha$  com relação ao eixo  $z$  positivo (  $\therefore k_z = k \cdot \cos(\alpha)$  ;  $k_x = k \cdot \text{sen}(\alpha)$  ). Desta maneira, (3.35) pode ser reescrita como:

$$\left( \frac{\delta}{c\delta_t} \right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\omega \delta_t}{2}\right) = \text{sen}^2\left(\frac{\delta k \text{sen}(\alpha)}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{\delta k \cos(\alpha)}{2}\right) \quad (3.38)$$

Pode-se resolver (3.38) para o vetor de onda  $k$ , em qualquer ângulo de propagação  $\alpha$ , aplicando o método iterativo de Newton. Assim:

$$k_{i+1} = k_i - \frac{\sin^2(A k_i) + \sin^2(B k_i) - C}{A \cdot \sin(2 A k_i) + B \cdot \sin(2 B k_i)} \quad (3.39)$$

onde  $k_{i+1}$  é a estimativa atualizada de  $k$ ,  $k_i$  é a estimativa anterior, e  $A$ ,  $B$ , e  $C$  são coeficientes determinados em função do ângulo de propagação:

$$A = \frac{\delta \cos(\alpha)}{2} \quad ; \quad B = \frac{\delta \sin(\alpha)}{2} \quad ; \quad C = \left(\frac{\delta}{2\delta_t}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega \delta_t}{2}\right) \quad (3.40)$$

Uma simplificação adicional é conseguida normalizando-se  $\delta$  com relação ao comprimento de onda no espaço livre  $\lambda_0$ , que é equivalente a normalizar  $\lambda_0$  à unidade ( $\lambda_0 = 1$ ). Com isso, um bom valor para  $k_0$  (valor inicial do método de Newton) é  $2\pi$ , o número de onda do modo correspondente no espaço livre. Neste caso, a velocidade de fase numérica  $v_p$ , é dada por

$$\frac{v_p}{c} = \frac{2\pi}{k_{final}} \quad (3.41)$$

onde  $k_{final}$  é o resultado final do método iterativo de Newton.

A Figura 3.2 ilustra a variação da velocidade de fase numérica, em função do ângulo de propagação, para três resoluções de malha diferentes:  $R = 5$  células /  $\lambda$ ,  $R = 10$  células /  $\lambda$  e  $R = 20$  células /  $\lambda$ . Para cada resolução, manteve-se o passo de tempo  $\delta_t = c \cdot \delta / 2$ . Observa-se que, para as três resoluções, a velocidade de fase numérica é sempre menor que  $c$ , tendo valor máximo em  $45^\circ$  (incidência oblíqua), e mínimo em  $0^\circ$  e  $90^\circ$  (incidência ao longo do eixo Cartesiano), e se aproxima do caso ideal à medida que a malha se torna mais fina. Isto representa uma anisotropia na velocidade de fase numérica, que é inerente ao algoritmo de Yee.

Na Figura 3.3, está apresentada a variação da velocidade de fase numérica em função do tamanho da célula utilizada, para ângulos de incidência fixos  $0^\circ$  ( $90^\circ$ ) e  $45^\circ$ . Novamente a relação  $\delta_t = c \cdot \delta / 2$  é mantida para cada resolução. Nota-se que a velocidade de fase numérica para cada ângulo de incidência, diminui à medida que a resolução da ma-

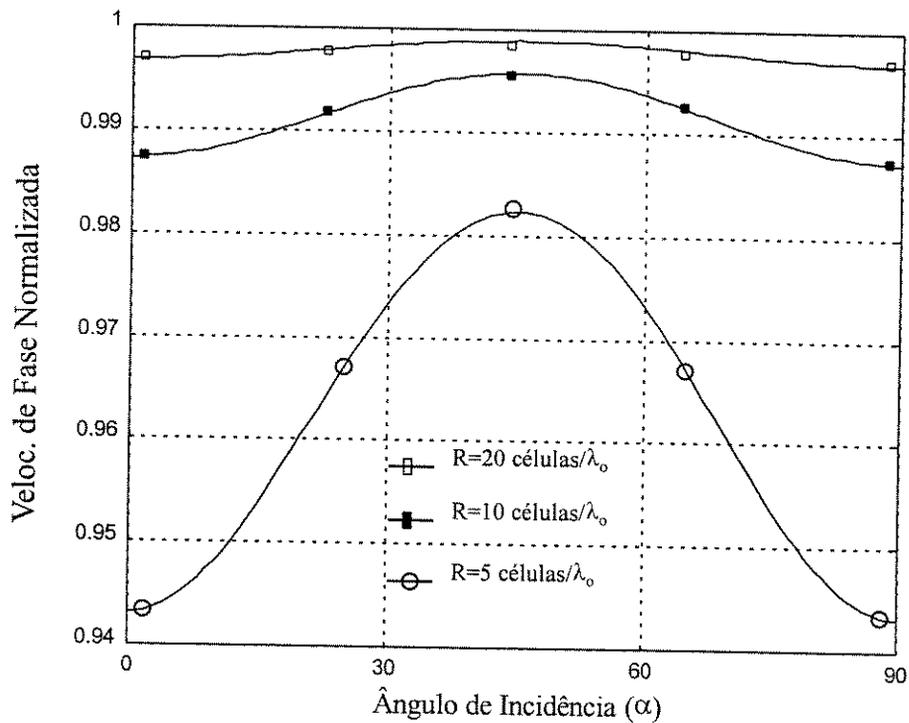


Figura 3.2- Variação da velocidade de fase em função do ângulo de incidência

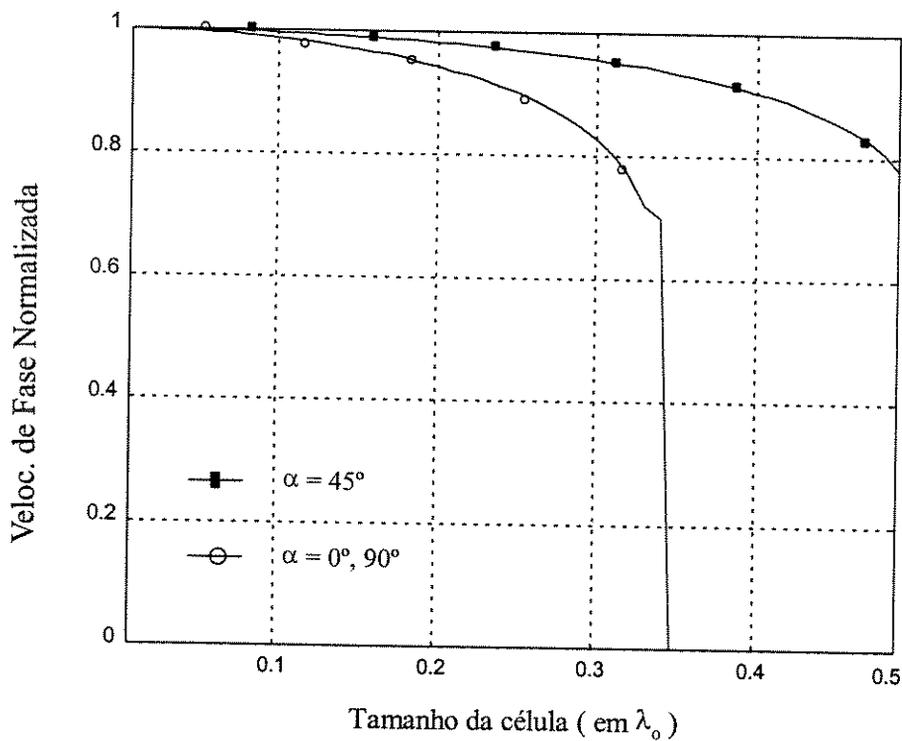


Figura 3.3 - Variação da velocidade de fase em função da discretização da malha FDTD

lha é piorada (aumentando-se  $\delta$ ), atingindo um certo limiar a partir do qual a velocidade de fase vai para zero e a onda não mais se propaga na malha FDTD, representando um efeito de filtragem numérica passa-baixa, que também é inerente ao algoritmo de Yee.

### 3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Como visto anteriormente, no método FDTD as equações de Maxwell são discretizadas no tempo e espaço e resolvidas numa sequência progressiva no tempo, através de cálculos alternados dos campos elétricos e magnéticos, simulando a propagação da onda eletromagnética num meio ilimitado.

Uma vez que não há máquina com quantidade de memória ilimitada, uma condição de contorno deve ser implementada para limitar o domínio em que os campos são computados.

Tal condição não pode ser obtida a partir do algoritmo FDTD, pois este utiliza um esquema de diferença central que requer o conhecimento de campos situados a meia célula de cada lado, no ponto em que o método é aplicado. Por isso, a diferença central não pode ser aplicada na fronteira do domínio, uma vez que ficaria faltando informação da célula externa.

A escolha do tipo de condição de contorno aplicada depende do tipo de problema a ser analisado com o método. Para problemas de autovalores, isto é, guiamento, devemos utilizar condições de contorno *duras* onde qualquer onda incidente no plano formado pelo limite computacional é refletida. Neste caso, as componentes tangenciais de campo elétrico e as componentes normais de campo magnético devem ser nulas no limite computacional. Por exemplo, para uma onda incidindo no plano  $i=0$  do limite computacional, tem-se:

$$E_y^n(0, j + \frac{1}{2}, k) = 0 \quad (3.42)$$

$$E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2}) = 0 \quad (3.43)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(0, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = 0 \quad (3.44)$$

Para o caso de problemas ilimitados (ex: espalhamento de ondas eletromagnéticas), deve-se utilizar uma condição de contorno que simule a propagação da onda para fora do limite computacional, com o mínimo de reflexão possível. Tal condição é chamada de condição de contorno *absorvente*.

Para maior simplicidade e compreensão da análise, seja o domínio bidimensional representado na Figura 3.4, onde propaga-se uma onda *TE*.

Em cada coordenada ( $x$  e  $z$ ) a malha é truncada, sendo envolvida por dois planos normais ao eixo em questão. Tem-se, desta forma, quatro contornos situados nos planos  $x = 0$ ,  $x = it$ ,  $z = 0$  e  $z = kt$ . Nota-se claramente, pela Figura 3.4, que as componentes de campo  $\vec{H}$  podem ser avaliadas através das equações de diferenças finitas. Entretanto, o mesmo não ocorre com as componentes de campo  $\vec{E}$ , devido à necessidade do conhecimento do valor de uma componente de campo  $\vec{H}$  situada fora do domínio. Desta forma, a condição de contorno absorvente é aplicada apenas para as componentes de campo  $\vec{E}$ .

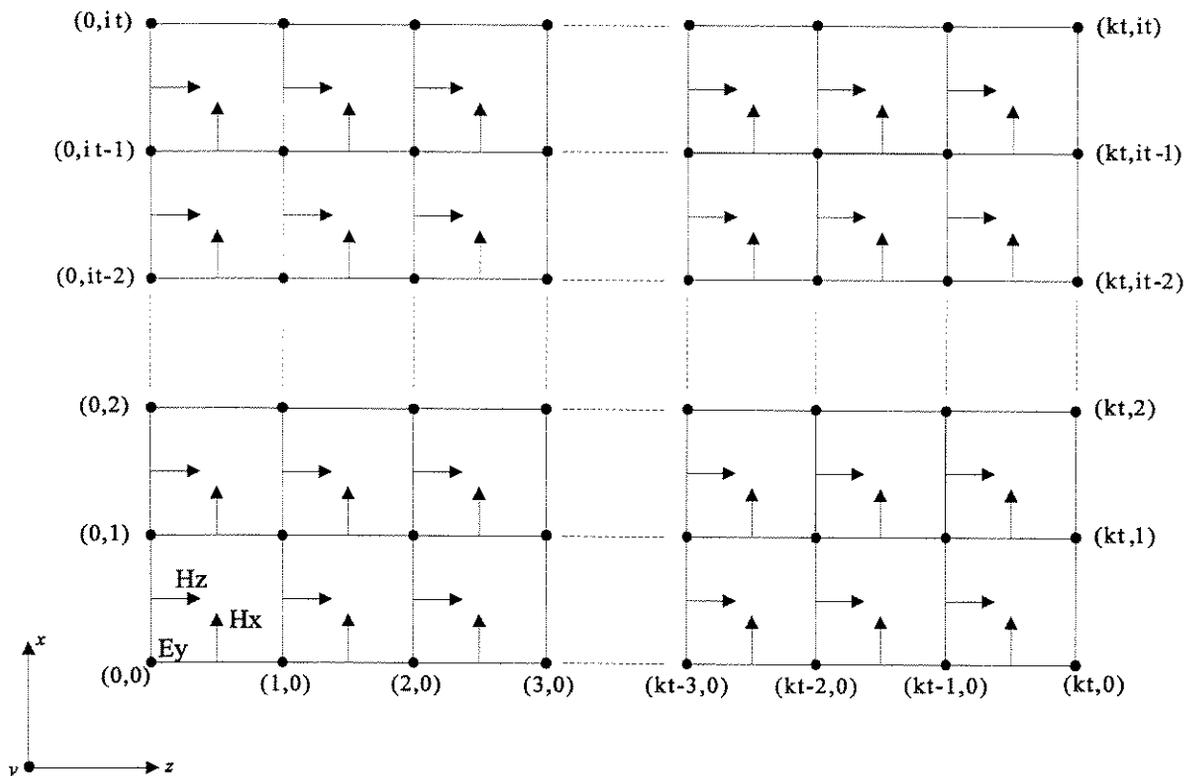


Figura 3.4 - Domínio bidimensional para propagação de onda *TE*

Tais condições são obtidas partindo-se da equação de onda, até chegar na equação de onda unidirecional, que permitirá a propagação da onda apenas para fora do domínio computacional. A formulação proposta por Mur [8] é a mais popular. É comumente chamada de contorno absorvente de Mur de 1ª ou 2ª ordem, dependendo da ordem de aproximação utilizada para estimar o campo na fronteira.

A aproximação de 1ª ordem (caso bidimensional), para um contorno absorvente situado no plano  $x = 0$ , é dada por [8]:

$$E_y^{n+1}(0, k) = E_y^n(1, k) + \frac{c_o \delta_t - \delta}{c_o \delta_t + \delta} \cdot [E_y^{n+1}(1, k) - E_y^n(0, k)] \quad (3.45)$$

onde  $c_o$  é a velocidade de propagação no meio,  $\delta_x = \delta_z = \delta$  e  $0 \leq k \leq kt$ . A referência [9] apresenta uma comparação entre os contornos duro e absorvente de 1ª ordem, para uma onda gaussiana incidente.

A aproximação de 2ª ordem é dada por

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}(0, k) = & -E_y^{n-1}(1, k) + \frac{c_o \delta_t - \delta}{c_o \delta_t + \delta} \cdot [E_y^{n+1}(1, k) + E_y^{n-1}(0, k)] + \frac{2\delta}{c_o \delta_t + \delta} \cdot [E_y^n(0, k) + \\ & + E_y^n(1, k)] + \frac{(c_o \delta_t)^2}{2\delta (c_o \delta_t + \delta)} \cdot [E_y^n(0, k+1) - 2E_y^n(0, k) + E_y^n(0, k-1) + \\ & + E_y^n(1, k+1) - 2E_y^n(1, k) + E_y^n(1, k-1)] \end{aligned} \quad (3.46)$$

As equações (3.45) e (3.46) são diretamente aplicáveis no método FDTD, e a partir delas, obtém-se facilmente expressões semelhantes para os outros planos de truncamento.

É importante observar que no caso de utilizar-se a aproximação de 2ª ordem, haverá problema na implementação da mesma nas quinas do domínio. Para solucionar este problema, deve-se aplicar a aproximação de 1ª ordem nestes pontos, e a de 2ª ordem no restante da fronteira. Serão utilizadas neste trabalho apenas condições absorventes de 2ª ordem, por serem mais precisas do que as de 1ª ordem e, também, pela facilidade de implementação.

No Apêndice A é mostrada, com detalhes, a obtenção da condição de contorno absorvente, além de ser feita uma análise do coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência da onda no contorno. São realizadas ainda simulações com o intuito de quantificar o erro introduzido pelo contorno absorvente.

### 3.6 CONDIÇÕES DE EXCITAÇÃO DO MÉTODO FDTD

Como visto anteriormente, o método FDTD resolve um problema de valor inicial onde uma dada distribuição de campo, num instante  $t = n$ , é atualizada para o instante  $t = n + 1$ . Considerando todas as componentes de campo nula para  $t \leq 0$ , devemos implementar um esquema de excitação adequado para analisar o problema de interesse.

Ao longo destes anos foram propostas algumas formas de se implementar a excitação do método, que serão discutidas a seguir.

#### 3.6.1 FONTE DE ONDA PLANA

Foi originalmente usada por Yee, sendo implementada através da especificação do valor de cada componente de campo  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  na malha, sendo por isso classificada como uma fonte de onda não compacta. Este tipo de excitação possui a desvantagem de aumentar o esforço computacional, devido à grande quantidade de dados armazenados durante a simulação.

#### 3.6.2 FONTE DE ONDA DURA

Foi desenvolvida por volta de 1973 com o intuito de se obter uma fonte de onda compacta (necessidade de poucas componentes de campo  $\vec{E}$  ou  $\vec{H}$  localizadas na malha para implementar a fonte). É obtida designando-se a função temporal desejada para uma determinada componente de campo. Por exemplo, para uma malha unidimensional  $TE$ , pode-se estabelecer uma fonte de onda *dura* em  $E_y$ , no ponto  $ks$  da malha, gerando-se uma onda senoidal contínua de frequência  $f_o$ , que é ligada em  $n = 0$ . Assim:

$$E_y|_{ks}^n = E_0 \cdot \text{sen}(2\pi f_0 n \delta_t) \quad (3.47)$$

A evolução no tempo deve ser continuada até que passe o transiente, ou seja, até que o estado permanente senoidal para da fonte (3.47) seja alcançado. Há, entretanto, uma problemática. À medida que a evolução no tempo é continuada, se uma onda numérica eventualmente retorna para a localização da fonte na malha, esta sofrerá uma retroreflexão não física, passando a se propagar na direção da estrutura modelada e interferindo na simulação. Isto se dá devido ao fato da componente de campo  $E_y$  ser especificada no ponto  $ks$  sem considerar uma possível parcela refletida; daí o nome fonte de onda *dura* (*hard source*).

### 3.6.3 FORMULAÇÃO CAMPO TOTAL/CAMPO ESPALHADO

Foi a primeira fonte de onda plana compacta a obter êxito em todos os aspectos. Esta formulação se baseia na linearidade das equações de Maxwell e na decomposição dos campos elétrico e magnético em

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{esp} \quad (3.48)$$

$$\vec{H}_{tot} = \vec{H}_{inc} + \vec{H}_{esp} \quad (3.49)$$

onde  $\vec{E}_{inc}$  e  $\vec{H}_{inc}$  são os valores dos campos incidentes, que são conhecidos em todos os passos de tempo, e  $\vec{E}_{esp}$  e  $\vec{H}_{esp}$  são os valores dos campos espalhados. A aproximação em diferenças finitas pode ser aplicada com igual validade para as componentes de campo total, incidente ou espalhado. Os códigos FDTD podem usar esta propriedade para dividir a malha em duas regiões distintas, separadas por uma superfície virtual usada para conectar os campos em cada região [10], como ilustrado na Figura 3.5.

Região 1, é chamada de região de *campo total*. Nesta região é assumido que o algoritmo de Yee opera apenas nas componentes de campo total. É nela que está inserida a estrutura de interesse.

Região 2, é chamada região de *campo espalhado*, por só conter componentes de

campo espalhado (não há campo incidente nesta região). A malha externa que circunda a região 2, é usada para implementar as condições de contorno absorventes.

As componentes de campo incidente são calculadas somente ao longo da superfície virtual que conecta as regiões 1 e 2.

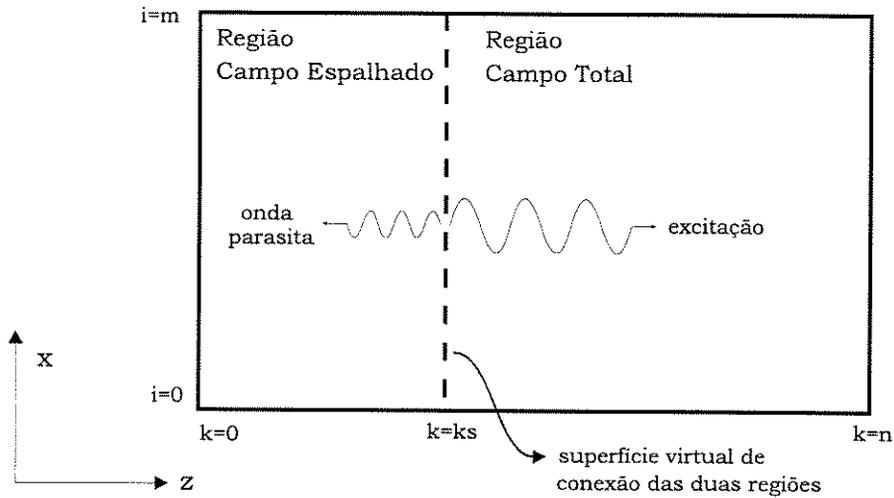


Figura 3.5 - Esquema de excitação usando superfície virtual para conectar as regiões campo total e campo espalhado

Será analisado, a seguir, a implementação desta formulação para uma onda *TE* bidimensional. Seja a Figura 3.6:

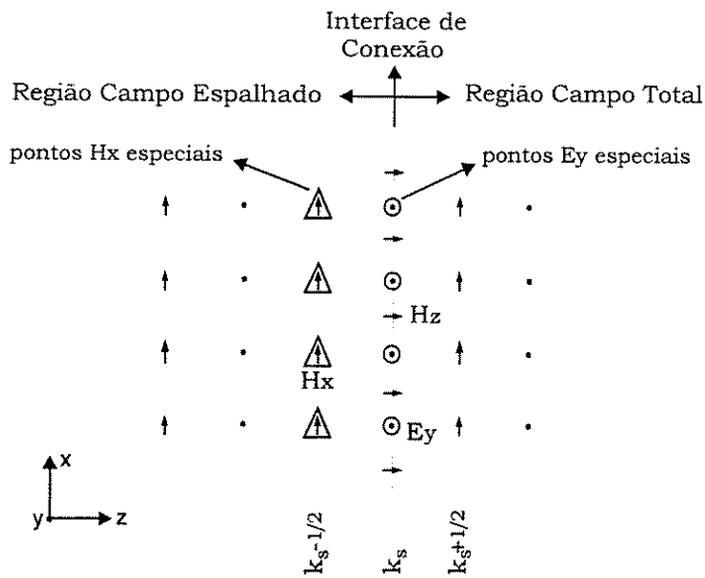


Figura 3.6 - Componentes de campo numa malha *TE* bidimensional

As componentes de campo total  $E_{y,tot}$  e  $H_{z,tot}$  estão localizadas exatamente na interface de conexão, situadas no ponto  $k = k_s \delta$ . Assumindo um meio dielétrico perfeito e aplicando-se o algoritmo de Yee para atualização da componente de campo  $E_y$ , ao longo de  $k = k_s \delta$ , tem-se:

$$E_{y,tot}^{n+1}(i, k_s) = E_{y,tot}^n(i, k_s) + \frac{\delta_t}{\epsilon_o \cdot \delta} \left( H_{x,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_s + \frac{1}{2}) - H_{x,esp}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2}) + H_{z,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, k_s) - H_{z,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k_s) \right) \quad (3.50)$$

No entanto, a equação (3.50) é inconsistente, visto que não é correto realizar uma subtração entre valores de campo total e espalhado. Pode-se resolver este problema usando-se os valores de campo incidente, que são assumidos como conhecidos ou calculáveis. Com o auxílio de (3.49), pode-se alterar (3.50) de modo a torná-la consistente, fazendo:

$$E_{y,tot}^{n+1}(i, k_s) = E_{y,tot}^n(i, k_s) + \frac{\delta_t}{\epsilon_o \cdot \delta} \left( H_{x,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_s + \frac{1}{2}) - H_{x,esp}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2}) + H_{z,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, k_s) - H_{z,tot}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k_s) \right) - \frac{\delta_t}{\epsilon_o \cdot \delta} \cdot H_{x,inc}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2}) \quad (3.51)$$

Para completa implementação desta formulação, deve-se tratar adequadamente as componentes de campo  $H_x$  situadas meia célula antes da interface entre as duas regiões. Aplicando-se o algoritmo de Yee para atualização de  $H_{x,esp}^{n-\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2})$ , obtém-se:

$$H_{x,esp}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2}) = H_{x,esp}^{n-\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2}) + \frac{\delta_t}{\mu_o \cdot \delta} \left[ E_{y,tot}^n(i, k_s) - E_{y,esp}^n(i, k_s - 1) \right] \quad (3.52)$$

que também é inconsistente. Com o auxílio de (3.48), pode-se modificar (3.52) para deixá-la consistente, obtendo-se finalmente

$$H_{x,esp}^{n+\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2}) = H_{x,esp}^{n-\frac{1}{2}}(i, k_s - \frac{1}{2}) + \frac{\delta_t}{\mu_o \cdot \delta} \left[ E_{y,tot}^n(i, k_s) - E_{y,esp}^n(i, k_s - 1) \right] - \frac{\delta_t}{\mu_o \cdot \delta} \cdot E_{y,inc}^n(i, k_s) \quad (3.53)$$

Juntas (3.51) e (3.53) estabelecem e conectam, de forma adequada, uma região de campo total/espalhado para uma onda *TE* bidimensional que se propaga no sentido positivo de  $z$ . A atualização das componentes  $H_{z,tot}^{n-\frac{1}{2}}(i, k_s)$  é feita usando-se a fórmula original, por só haver envolvimento de componentes de campo total.

### 3.7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] K.S.Yee, *Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media*, IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol 14, pp 302-307, 1966.
- [2] M.E.V.Segatto, *Aplicação do Método das Diferenças Finitas no Domínio dos Tempos a Meios Giroelétricos Dispersivos: Plasma Magnetizado*, Unicamp, Tese de Mestrado, 1994.
- [3] A.Taflove, *Review of the formulation and applications of the finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures*, Wave Motion, vol 10, pp 547-582, 1988.
- [4] S.T.Chu, W.P.Huang, S.K.Chaudhuri, *Simulation and analysis of waveguide based optical integrated circuits*, Computer Physics Communications, vol 68, pp 451-484, 1991.
- [5] A.Taflove, K.R.Umashankar, *Review of FD-TD numerical modeling of electromagnetic wave scattering and radar cross section*, Proceedings of the IEEE, vol 77, nº 5, pp 682-699, 1989.
- [6] A.Taflove, M.E.Brodwin, *Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations*, IEEE Trans on Microwave Theory and Techniques, nº 8, pp 623-630, 1975.
- [7] A.Taflove, *Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, 1995.
- [8] G.Mur, *Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations*, IEEE Trans on Electromagnetic Compatibility, nº 4, pp 377-382, 1981.
- [9] A.A.Machado, *Análise da propagação de sólitons ópticos usando FDTD*, Unicamp, Tese de Mestrado, 1995.
- [10] K.Umashankar, A.Taflove, *A novel method to analyse electromagnetic scattering of complex objects*, IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-24, nº 4, pp 397-405, 1982.

# CAPÍTULO IV

## 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Serão realizados, neste capítulo, o modelamento e a análise das estruturas apresentadas no Capítulo 2, o guia *slab* e o acoplador direcional, através da aplicação do método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD).

As estruturas consideradas são compostas por material dielétrico linear não-dispersivo. Os resultados obtidos são apresentados em termos da variação espacial e temporal das componentes de campo.

A Seção 4.1 apresenta os resultados obtidos para o guia *slab*, a Seção 4.2 mostra os resultados obtidos para o acoplador direcional e a Seção 4.3 apresenta os resultados obtidos para uma estrutura proposta.

### 4.1 O GUIA *SLAB*

Nesta seção é realizada a análise do guia *slab* simétrico, comparando-se os resultados obtidos com a solução exata. Com base nos estudos desenvolvidos nos Capítulos 2 e 3, deduz-se inicialmente a formulação do problema, para em seguida, apresentar-se os resultados obtidos a partir da aplicação da mesma.

### 4.1.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja um meio linear, sem perdas, cujos parâmetros constitutivos  $\varepsilon$  e  $\mu$  são independentes do tempo. A propagação de uma onda *TE* bidimensional, de acordo com a Seção 2.2.2, envolve a solução das seguintes equações de Maxwell:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (4.3)$$

Para resolver-se o conjunto de equações acima através do método FDTD, deve-se realizar a sua discretização espacial e temporal. Utilizando-se a metodologia desenvolvida na Seção 3.2, as equações de diferenças finitas para (4.1)-(4.3), são dadas por:

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, k + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu(i, k + \frac{1}{2}) \cdot \Delta z} \cdot [E_y^n(i, k + 1) - E_y^n(i, k)] \quad (4.4)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k) = H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\mu(i + \frac{1}{2}, k) \cdot \Delta x} \cdot [E_y^n(i + 1, k) - E_y^n(i, k)] \quad (4.5)$$

$$E_y^{n+1}(i, k) = E_y^n(i, k) + \frac{\Delta t}{\varepsilon(i, k)} \cdot \left[ \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, k - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \right] \quad (4.6)$$

### 4.1.2 APLICAÇÃO DO MÉTODO FDTD

O guia *slab* modelado é mostrado na Figura 4.1, sendo o mesmo proposto por Chaudhuri[1], possuindo os seguintes parâmetros:  $2h = 0,6 \mu m$ ,  $n_0 = 1$  e  $n_1 = 1,5$ . No instante  $t=0$ , o modo fundamental *TE*<sub>0</sub> em  $\lambda = 1 \mu m$  é lançado no plano de incidência, situado

em  $k = k_{inc} = 40$ , operando em regime CW (*continuous wave*) com variação senoidal no tempo.

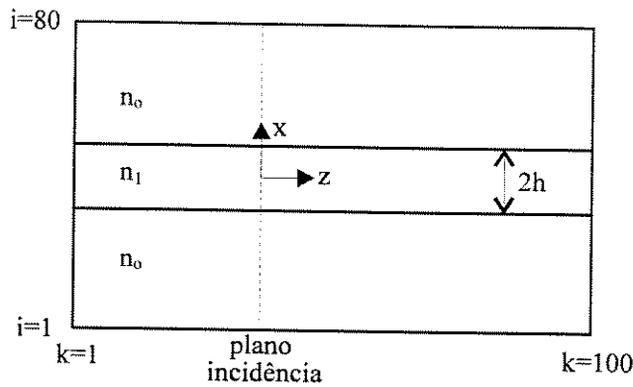


Figura 4.1 - Guia *slab* modelado em duas dimensões

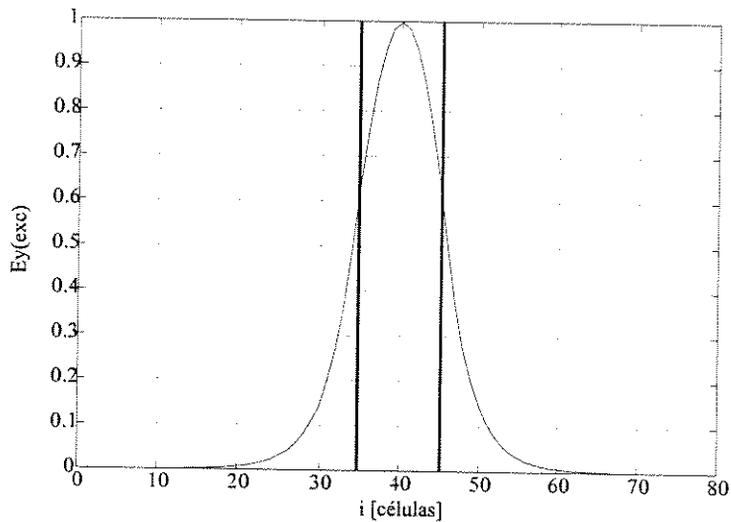


Figura 4.2 - Distribuição espacial do campo no plano de incidência

Será utilizada a exata distribuição espacial de campo na excitação do método, conforme mostrado na Figura 4.2, onde as duas barras verticais delimitam a região central do guia. Para isso, torna-se necessário resolver a equação (2.45) para obter-se o parâmetro  $k_x$  do modo fundamental ( $TE_0$ ), e, a partir deste, a constante de propagação modal  $\beta$  (equação (2.43)) e o parâmetro  $\alpha_x$  (equação (2.42)). De posse destes valores, a distribuição espacial do campo de excitação no guia *slab* é obtida através da equação (2.36).

A região computacional deste exemplo possui  $80 \times 100$  células, sendo  $1 \leq i \leq 80$  e  $1 \leq k \leq 100$ , onde a condição de contorno absorvente de segunda ordem de Mur foi aplicada.

Para boa precisão do algoritmo, evitando-se que a dispersão numérica do método influencie nos resultados, a discretização espacial é feita tomando-se  $\Delta = \Delta_x = \Delta_z = \lambda/20$  (Seção 3.4). De modo a garantir-se a estabilidade do método, utilizou-se  $c \cdot \Delta_t / \Delta = 0,5$ .

Aplicando-se as equações (4.4)-(4.6) sucessivas vezes, é simulada a propagação da onda através do guia *slab*. A Figura 4.3 mostra a variação temporal do campo  $E_y$  ao longo do eixo  $z$  ( $i = 40$ ) para os passos de tempo  $n = 40, 120$  e  $200$ , estando este resultado em concordância com aquele apresentado em [1] e [2].

A resposta da estrutura à excitação é caracterizada pelo transiente existente nas formas de onda em  $n = 40, 120$ . A onda existente em  $k < 40$  é a onda parasita que se propaga na direção  $-z$ , atenuada pelo esquema de excitação utilizado (Seção 3.6.3). A Figura 4.4 mostra a distribuição espacial do campo em toda a região discretizada para  $n = 200$ .

Pode-se mostrar a distribuição de potência no guia para determinado instante de tempo. Para isto, basta calcular o vetor de Poynting no instante de tempo desejado, dado por:

$$S(r, t) = E(r, t) \times H^*(r, t) \quad (4.7)$$

A Figura 4.5 ilustra a distribuição de potência no guia *slab* para  $n = 200$  intervalos de tempo, onde é abrangido aproximadamente um comprimento de onda ao longo do eixo  $z$ . Os vetores indicam a direção instantânea do fluxo de potência em cada ponto da malha. Observa-se que a energia está confinada pelo guia.

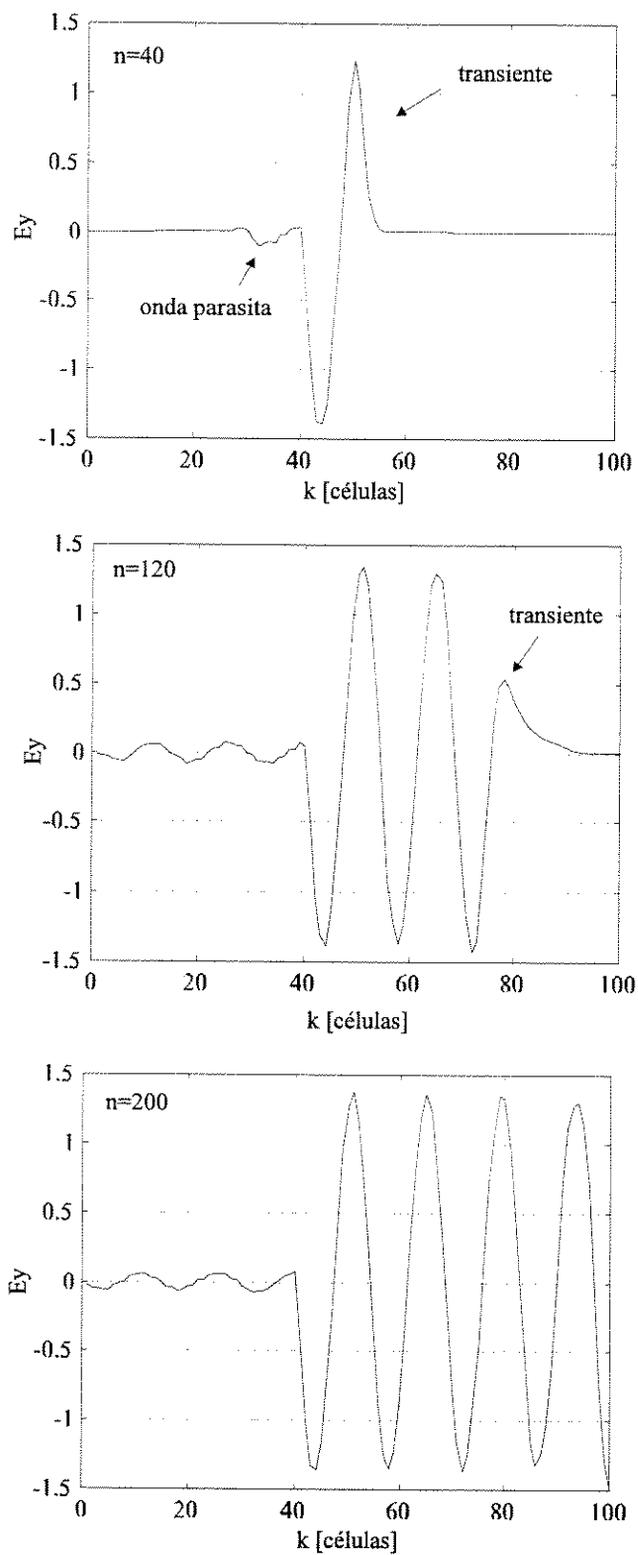


Figura 4.3 - Variação temporal do campo  $E_y$  ao longo do eixo  $z$  ( $i=40$ ), para 40, 120 e 200 passos de tempo

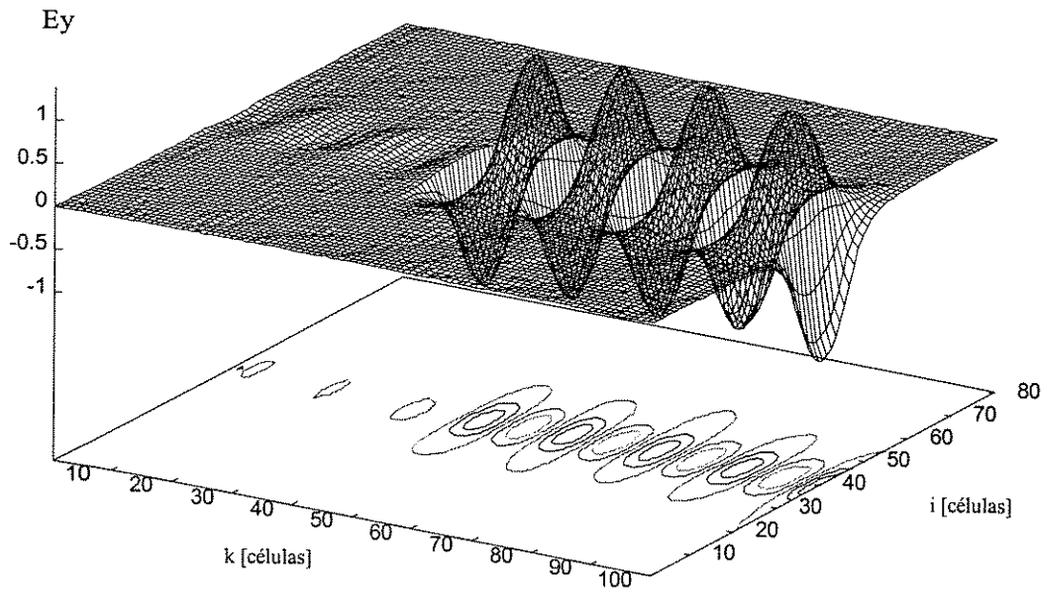


Figura 4.4 - Distribuição espacial do campo  $E$ , para  $n = 200$  passos de tempo

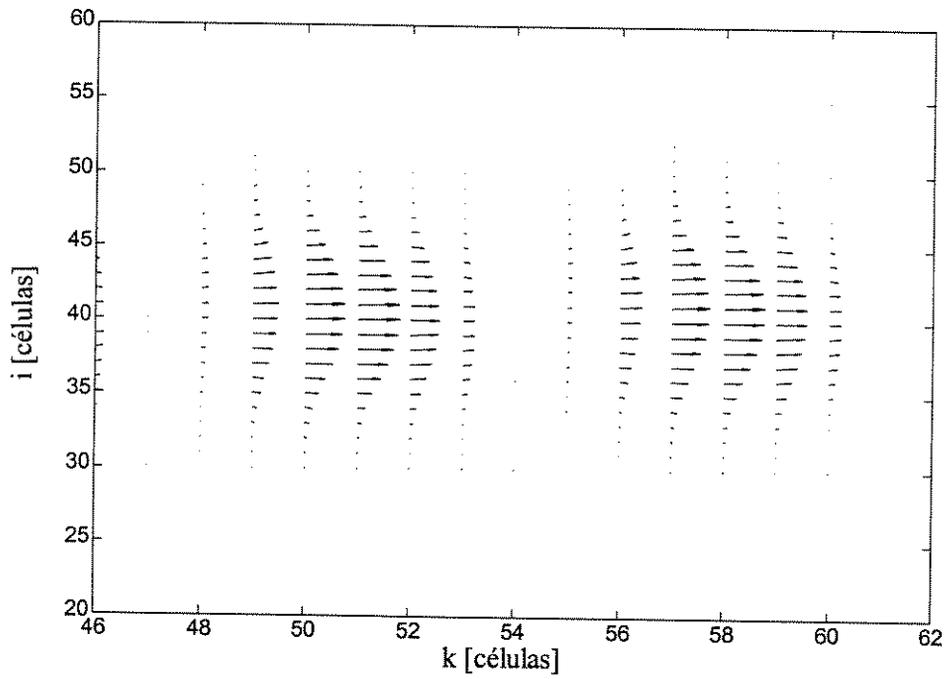


Figura 4.5 - Distribuição de potência para  $n = 200$  passos de tempo

Examina-se, a seguir, o comportamento modal do guia *slab* nos limites de baixa e alta frequência. As simulações foram realizadas mantendo-se o comprimento de onda de operação, índice de refração do substrato e altura do guia iguais aos da simulação anterior. Varia-se, apenas, o valor do índice de refração da região central (núcleo) do guia, alterando-se desta forma, o grau de confinamento da onda nesta região. A Tabela 4.1 apresenta os parâmetros utilizados nas simulações e o valor da relação  $k_x \cdot h$ .

$n_1$	$k_x$	$\alpha_x$ [Np/m]	$\beta$ [rad/m]	$k_x \cdot h$
1,05	$1,742846 \cdot 10^6$	$1,004502 \cdot 10^6$	$6,362974 \cdot 10^6$	0,5228
1,10	$2,248637 \cdot 10^6$	$1,798358 \cdot 10^6$	$6,535481 \cdot 10^6$	0,6746
1,30	$3,108960 \cdot 10^6$	$4,192191 \cdot 10^6$	$7,553336 \cdot 10^6$	0,9327
1,50	$3,498353 \cdot 10^6$	$6,091760 \cdot 10^6$	$8,751454 \cdot 10^6$	1,0495
1,70	$3,742352 \cdot 10^6$	$7,785178 \cdot 10^6$	$1,000437 \cdot 10^7$	1,1227

Tabela 4.1 - Relação  $k_x \cdot h$  em função do índice de refração do guia

A Figura 4.6 apresenta, comparativamente, os resultados obtidos através das simulações FDTD realizadas (linhas tracejadas) e os resultados teóricos previstos (linhas contínuas) na Seção 2.2.3. Quanto menor o valor da relação  $k_x \cdot h$ , menor será o confinamento da onda na região central do guia, estando esta situada entre  $-1 \leq x/h \leq +1$ .

Observa-se que, para os dois primeiros casos ( $n_1 = 1,05$  e  $n_1 = 1,10$ ), o resultado obtido através do método FDTD apresenta uma pequena diferença em relação ao resultado teórico. Isto se deve ao fato do perfil transversal do campo estar se alongando até as condições de contorno aplicadas nos planos  $i = 1$  e  $i = 80$  e por estas não serem eficientes na absorção de ondas incidentes em ângulos acima de  $30^\circ$ , conforme análise realizada na Seção A.2 do Anexo A. Para os demais casos, os resultados obtidos apresentam boa concordância.

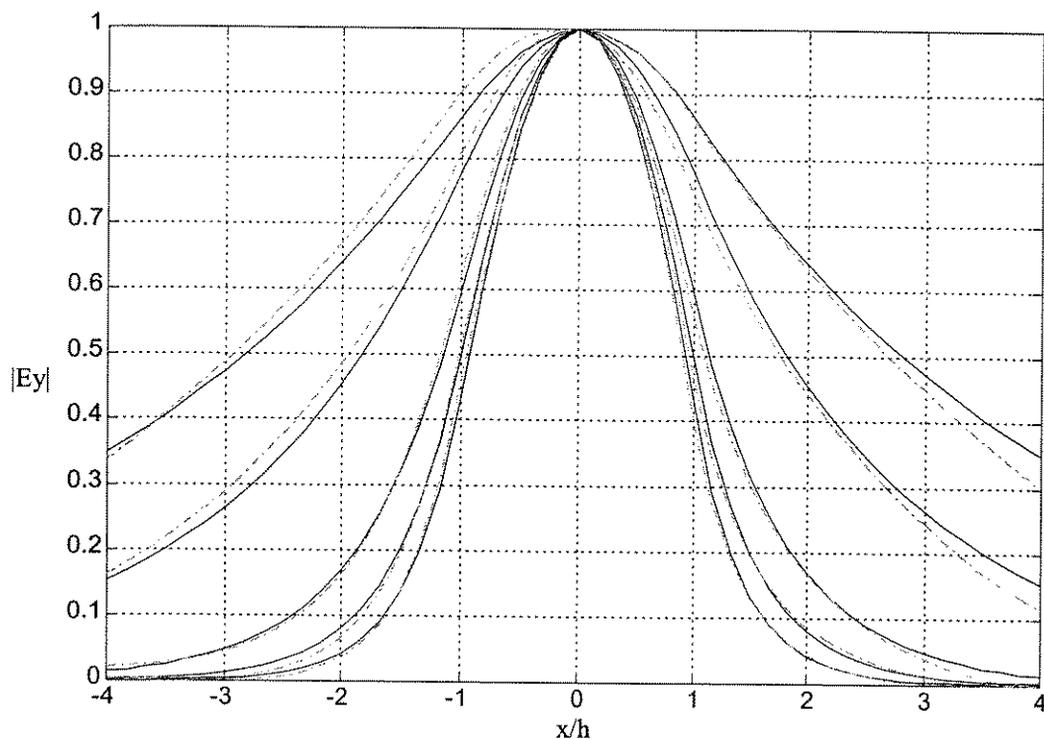


Figura 4.6 - Perfil do modo dominante  $TE_0$  para vários valores da relação  $k_x h$ . Linhas contínuas para resultado teórico e linhas tracejadas para resultado obtido através da simulação FDTD

## 4.2 O ACOPLADOR DIRECIONAL

Investiga-se, nesta seção, a precisão do método FDTD no modelamento do acoplador direcional, através da comparação dos resultados obtidos com a solução exata prevista por Marcuse[3]. A formulação utilizada na simulação desta estrutura é a mesma apresentada na Seção 4.1.1.

### 4.2.1 APLICAÇÃO DO MÉTODO FDTD

A solução exata do acoplador direcional é calculada de acordo com o exposto na Seção 2.3.1. Seja o acoplador representado na Figura 4.7, possuindo os seguintes parâmetros:  $n_1 = n_3 = n_5 = 1$ ,  $n_2 = n_4 = 1,5$ ,  $d_2 = d_4 = 0,25 \mu m$ . Para uma distância de separação entre os guias de, por exemplo,  $2S_3 = 0,30 \mu m$ , calcula-se o valor das constantes de propagação

$\beta_1$  e  $\beta_2$  através de (2.66). A Figura 4.8 apresenta o gráfico da solução numérica de (2.66).

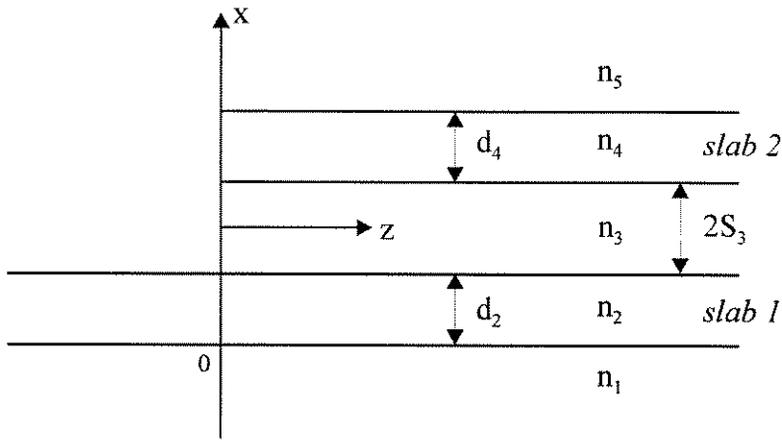


Figura 4.7 - Acoplador direcional modelado através do método FDTD

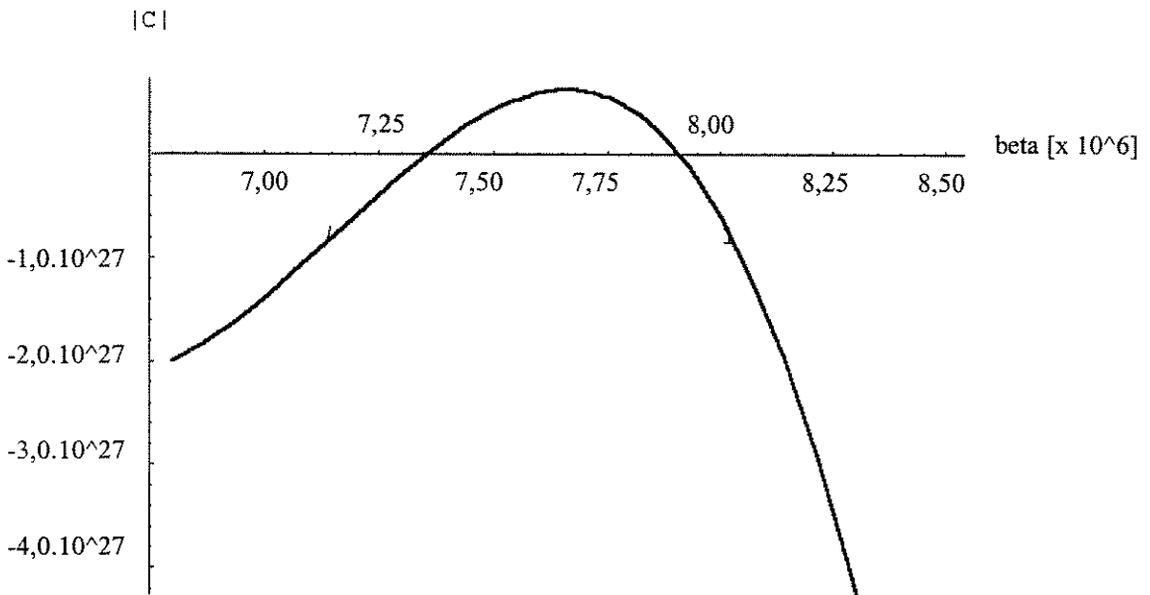


Figura 4.8 - Obtenção de  $\beta_1$  e  $\beta_2$  através de solução numérica

Os coeficientes  $A_j, j = 1,2,3 \dots 8$ , são obtidos a partir das equações (2.57)-(2.64). A componente  $E_y$  dos dois modos  $TE$  do acoplador direcional é mostrada na Figura 4.9, onde a

linha contínua representa a solução simétrica ( $\beta_2$ ) e a linha pontilhada representa a solução antissimétrica ( $\beta_1$ ).

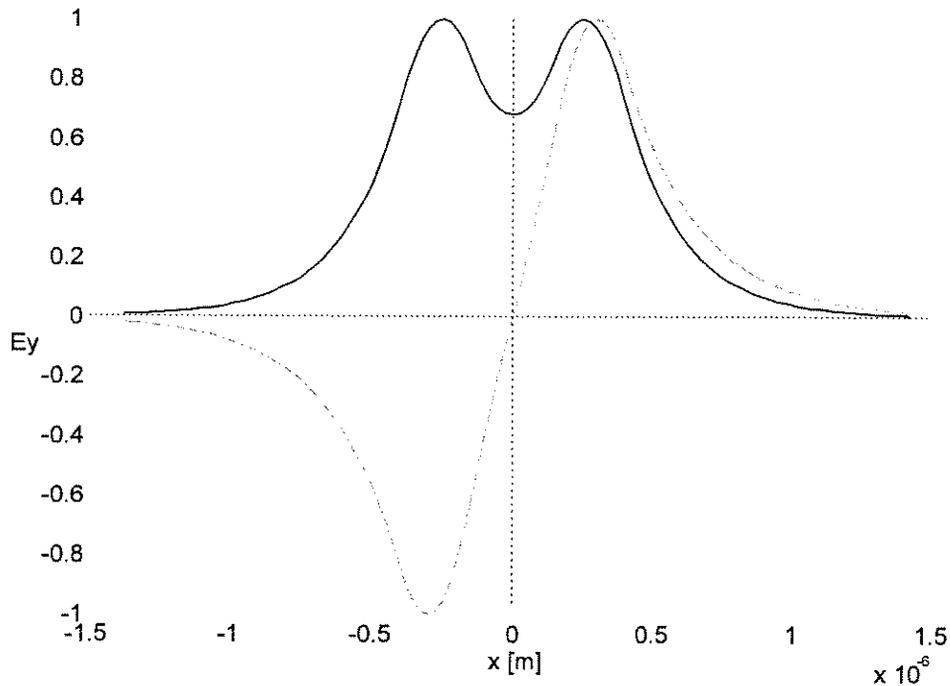


Figura 4.9 - Solução exata dos modos  $TE$  simétricos e assimétricos do acoplador direcional com  $n_1 = n_3 = n_5 = 1$ ,  $n_2 = n_4 = 1,5$ ,  $d_2 = d_4 = 0,25 \mu m$ ,  $2S_3 = 0,30 \mu m$  e  $\lambda = 1,0 \mu m$

Nesta simulação, o modo fundamental  $TE_0$ , operando em  $\lambda = 1 \mu m$ , é lançado no *slab* 1 em  $z < 0$  (Figura 4.7), e a distribuição do campo elétrico nos dois *slabs* em  $z > 0$  é comparada com a solução exata. Como informado por Marcuse [3], a superposição das duas soluções modais não é suficiente para representar o exato campo de excitação utilizado para iluminar apenas um dos *slabs*. Neste caso, a excitação do *slab* 1 irá lançar energia no *slab* 2 em  $z = 0$ , diferindo da condição inicial da solução. De forma a casar os resultados obtidos através do método FDTD com a solução exata, Chaudhuri [4] pôs uma capa metálica no final do *slab* 2 em  $z = 0$ . Isto assegura que as condições iniciais da simulação FDTD sejam as mesmas da solução exata. Caso esta capa não seja utilizada, a magnitude da componente  $E_y$  não será zero no centro do *slab* após o comprimento de acoplamento  $L$ , mas terá valor igual

ao do campo lançado no *slab* 2 em  $z = 0$ .

Visando boa precisão do algoritmo, a discretização espacial é feita tomando-se  $\Delta = \Delta_x = \Delta_z = \lambda/40$ . De modo a garantir-se a estabilidade do método, utilizou-se  $c \cdot \Delta_t / \Delta = 0,5$ . A propagação da onda simulada é feita através da aplicação sucessiva das equações (4.4)-(4.6).

A Tabela 4.2 apresenta uma comparação entre os valores do comprimento de acoplamento  $L$ , obtidos através do método FDTD e da solução exata, para vários valores de separação entre os guias.

$2S_3 [\mu m]$	$\beta_1 [\text{rad/m}]$	$\beta_2 [\text{rad/m}]$	$L_{\text{exato}} [\mu m]$	$L_{\text{FDTD}} [\mu m]$
0,10	$6,7933 \cdot 10^6$	$8,2281 \cdot 10^6$	2,1895	2,18
0,15	$6,9824 \cdot 10^6$	$8,1183 \cdot 10^6$	2,7657	2,77
0,20	$7,1378 \cdot 10^6$	$8,0332 \cdot 10^6$	3,5086	3,68
0,25	$7,2606 \cdot 10^6$	$7,9662 \cdot 10^6$	4,4526	4,50
0,30	$7,3559 \cdot 10^6$	$7,9128 \cdot 10^6$	5,6420	5,75
0,35	$7,4294 \cdot 10^6$	$7,8698 \cdot 10^6$	7,1333	7,25
0,40	$7,4860 \cdot 10^6$	$7,8352 \cdot 10^6$	8,9975	9,05

Tabela 4.2 - Comparação entre os valores exatos e simulados de  $L$  para vários valores de  $2S_3$

A determinação do comprimento de acoplamento é feita a partir da distribuição da magnitude do campo  $E_y$  ao longo do centro do *slab*. A magnitude do campo  $E_y$  ao longo do centro do *slab* 1 (linha contínua) e do *slab* 2 (linha tracejada) é mostrada nas Figuras 4.10 ( $2S_3 = 0,30 \mu m$ ), 4.11 ( $2S_3 = 0,35 \mu m$ ) e 4.12 ( $2S_3 = 0,40 \mu m$ ). Pode-se observar, nestas figuras, o local exato da troca de energia entre os *slabs*. Estes resultados estão em concordância com aqueles apresentados na Tabela 4.2.

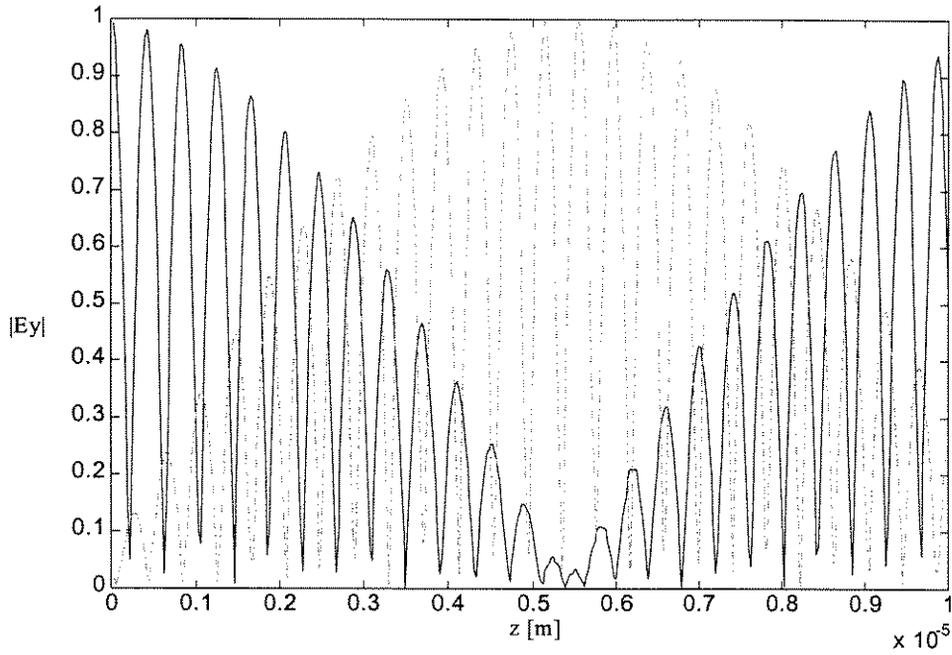


Figura 4.10 - Magnitude de  $E_y$  ao longo do *slab* 1 (linha contínua) e *slab* 2 (linha pontilhada) para  $2S_3 = 0,30 \mu m$

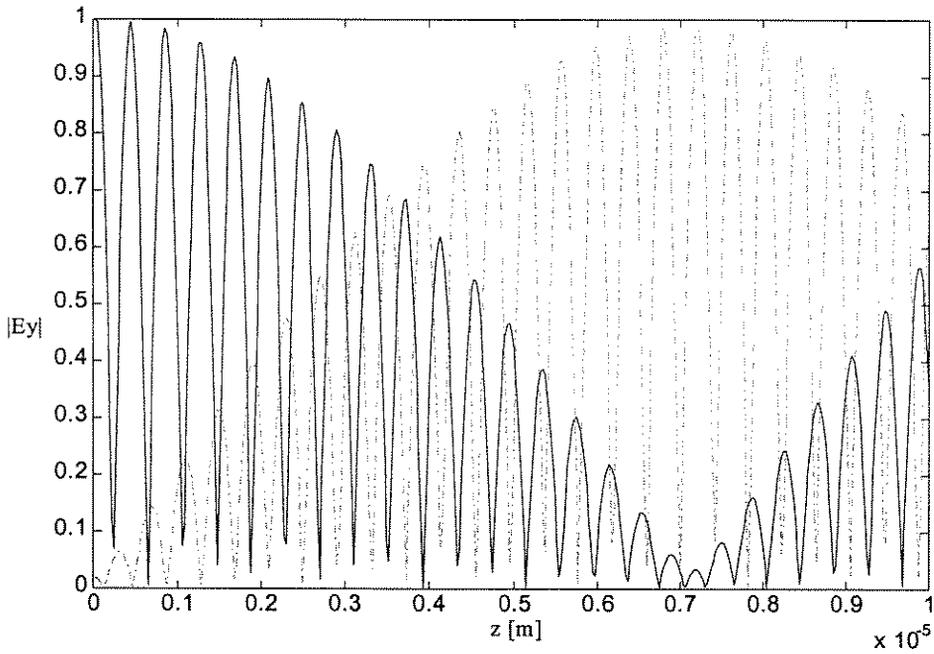


Figura 4.11 - Magnitude de  $E_y$  ao longo do *slab* 1 (linha contínua) e *slab* 2 (linha pontilhada) para  $2S_3 = 0,35 \mu m$

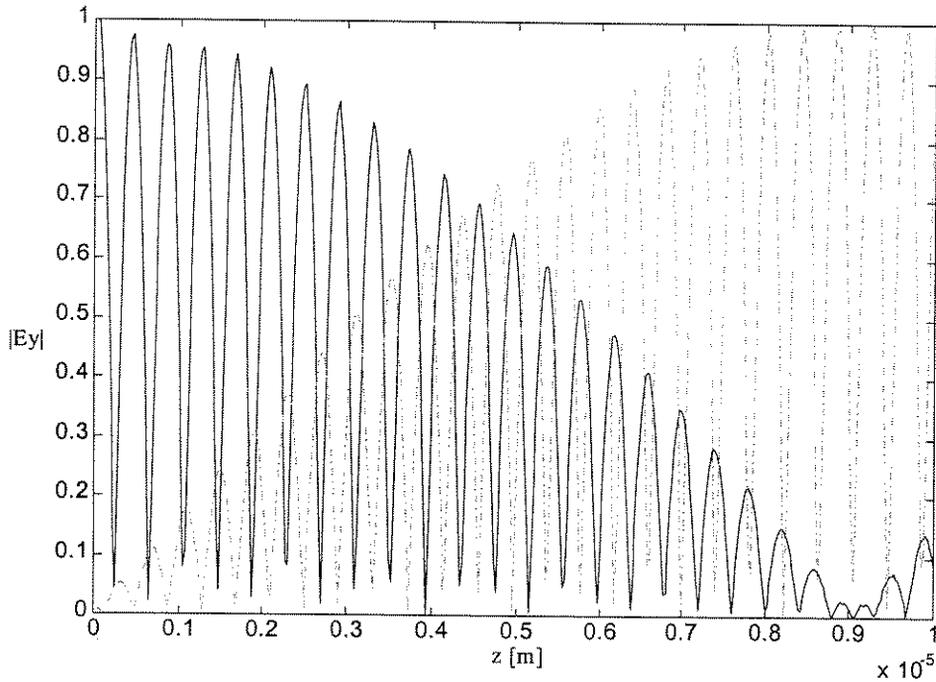


Figura 4.12 - Magnitude de  $E_y$  ao longo do slab 1 (linha contínua) e slab 2 (linha pontilhada) para  $2S_3 = 0,40 \mu m$

A distribuição de  $E_y$  ao longo da seção transversal dos guias *slabs*, após o comprimento de acoplamento, é mostrada na Figura 4.13, para um afastamento entre os guias de  $2S_3 = 0,30 \mu m$ , em comparação com a solução exata. Observa-se que os resultados são semelhantes, diferenciando próximo das fronteiras, devido às condições de contorno aplicadas pelo método FDTD.

A Figura 4.14 apresenta a distribuição espacial de campo para um acoplador direcional com afastamento entre guias de  $0,30 \mu m$ . A distância envolvida, ao longo do eixo  $z$ , é de aproximadamente  $2L$ . Observa-se, claramente, a troca de energia entre os dois guias à medida que a onda se propaga.

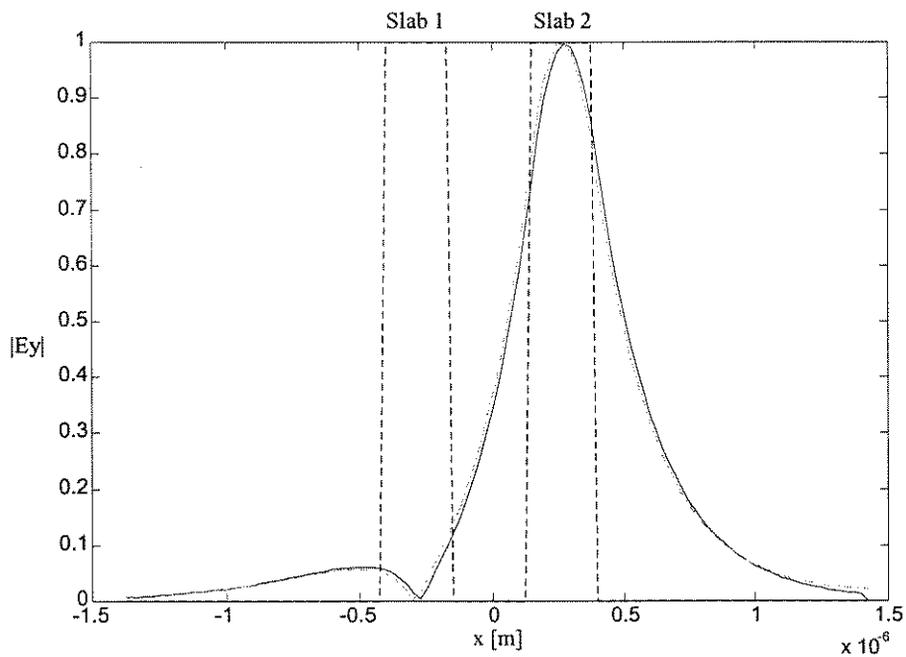


Figura 4.13 - Comparação entre a distribuição transversal de  $E_y$  exata (linha contínua) e simulada (linha tracejada), após o comprimento de acoplamento

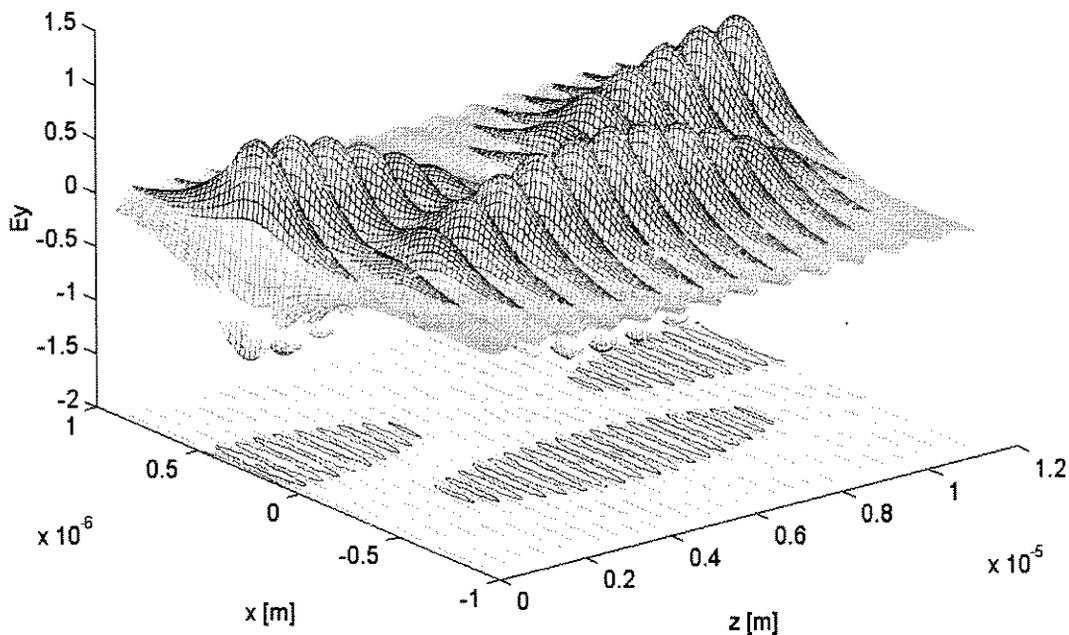


Figura 4.14 - Distribuição espacial do campo elétrico para um acoplador direcional com  $2S_3 = 0,30 \mu m$

### 4.3 ESTRUTURA PROPOSTA

Após a validação do método FDTD, realizada nas Seções 4.1 e 4.2 através da boa concordância entre os resultados teóricos previstos e os resultados obtidos nas simulações, ele será aplicado na análise de uma estrutura dielétrica proposta, apresentada na Figura 4.15.

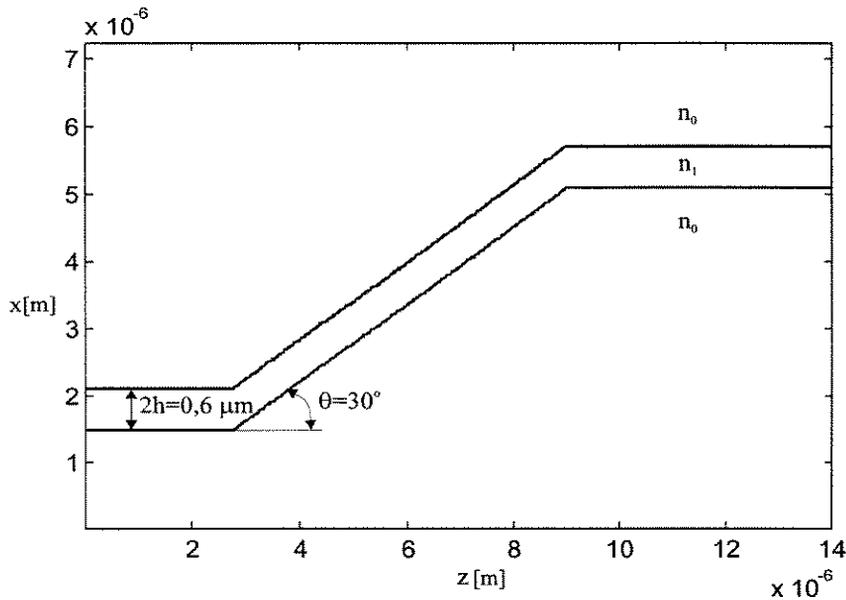


Figura 4.15 - Esquemático da estrutura proposta

As características de propagação foram analisadas para duas situações: uma com índice de refração do guia  $n_1 = 1,5$  e, a outra, com índice de refração do guia  $n_1 = 1,7$ . Os demais parâmetros da estrutura são:  $n_0 = 1$  e  $2h = 0,6\mu m$ .

No instante  $t = 0$ , o modo fundamental  $TE_0$  operando em  $\lambda = 1\mu m$  é lançado no plano de incidência, operando em regime CW com variação senoidal no tempo. A discretização espacial é feita tomando-se  $\Delta = \Delta_x = \Delta_z = \lambda / 40$ . Visando garantir-se a estabilidade do método, utilizou-se  $C = 0,5$ .

A Figura 4.16 apresenta os resultados obtidos para o caso  $n_1 = 1,5$  (em 800, 1400 e 2000 passos de tempo) e a Figura 4.17 para o caso  $n_1 = 1,7$  (em 800, 1400 e 2000 passos de tempo).

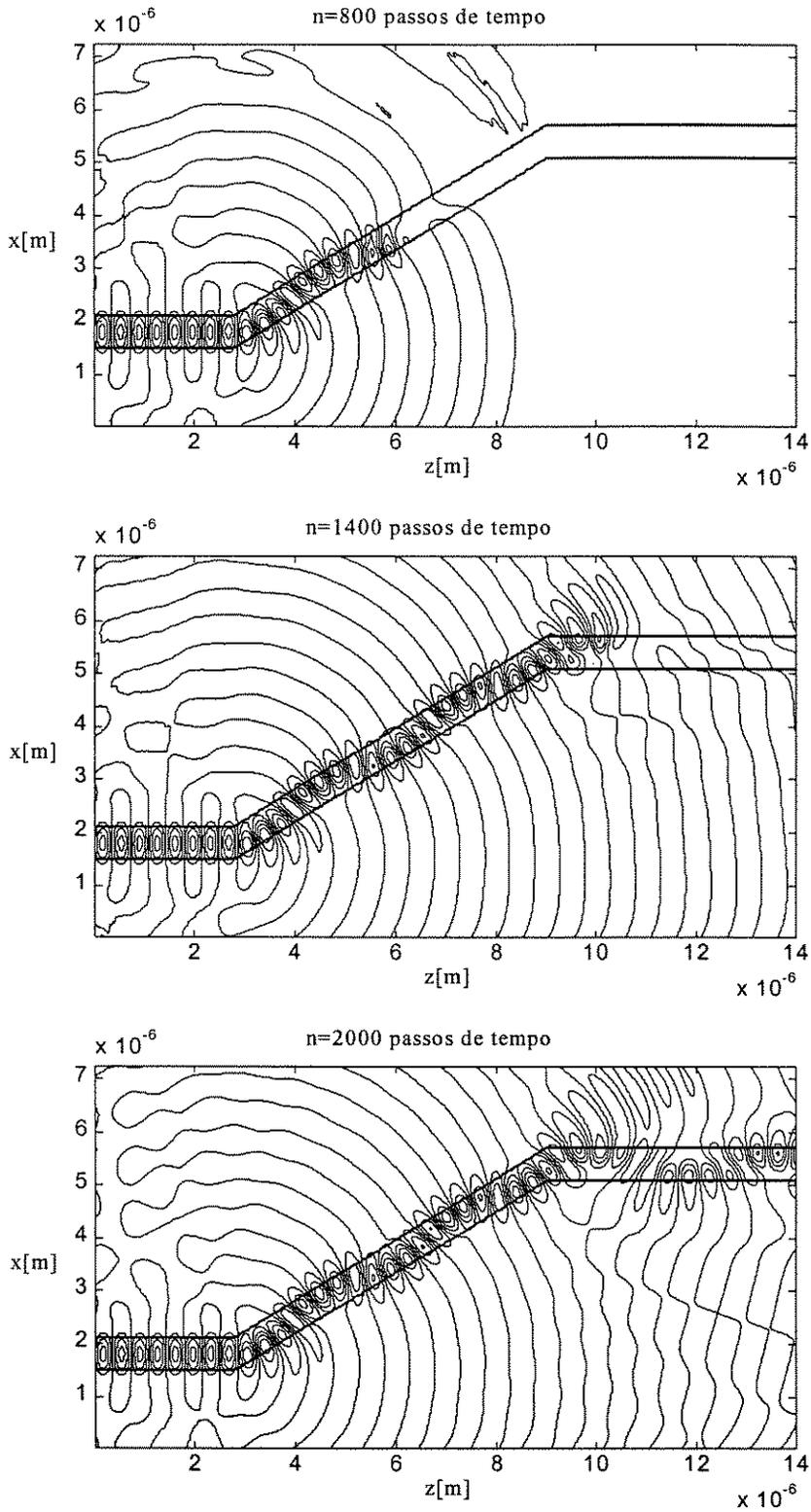


Figura 4.16 - Distribuição do campo  $E_y$  para a estrutura proposta, possuindo  $n_1 = 1,5$

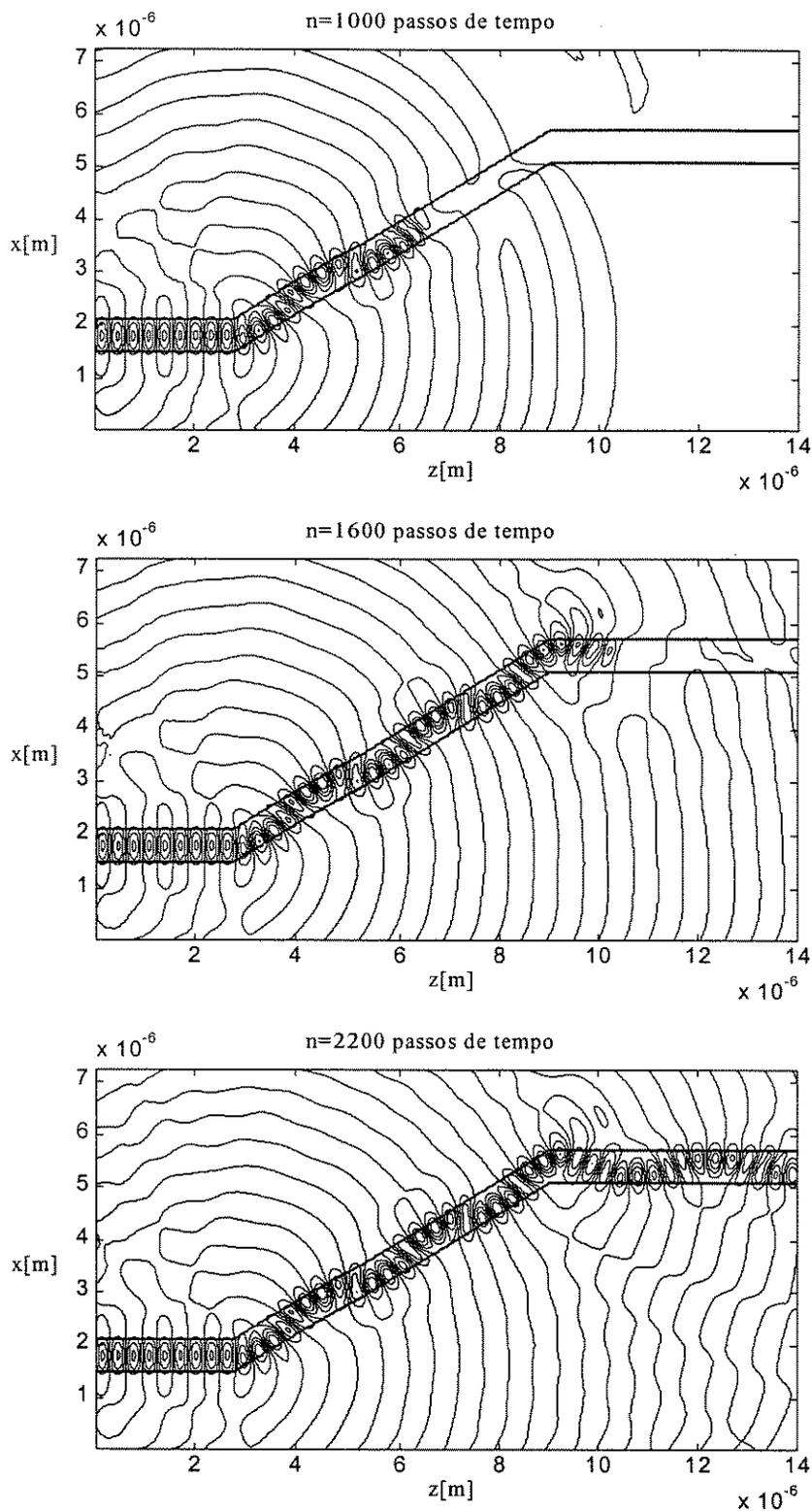


Figura 4.17 - Distribuição do campo  $E$ , para a estrutura proposta, possuindo  $n_1 = 1,7$

A diferença de 200 passos de tempo entre as figuras apresentadas na parte superior, central e inferior das Figuras 4.16 e 4.17, deve-se à diferença da velocidade de propagação da onda nas duas estruturas analisadas. Esta diferença (200 passos de tempo) foi considerada com o intuito de se comparar os resultados obtidos em três situações distintas: propagação da onda até a região central da estrutura, propagação da onda até a segunda curvatura da estrutura e propagação da onda por toda a estrutura.

Das Figuras 4.16 e 4.17, observa-se que a estrutura proposta realiza o guiamento da onda, apesar de possuir duas “curvaturas” com inclinação de  $30^\circ$ . No entanto, o guiamento é mais eficiente para o caso em que  $n_1 = 1,7$ , uma vez que nesta condição o campo  $E_y$  está mais concentrado no núcleo do guia (vide Figura 4.6). Devido a isto, comparando-se as Figuras 4.16 e 4.17, observa-se que na segunda curvatura uma maior parcela da onda é perdida para o caso em que  $n_1 = 1,5$  (Figura 4.16).

#### 4.4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S.T.Chu, W.P.Huang, S.K.Chaudhuri, *Simulation and Analysis of Waveguide Based Optical Integrated Circuits*, Computer Physics Communications, 68, pp 451-484, 1991.
- [2] F.P.Venturini, L.S.Mendes, *Modelamento do Guia Slab Através do Método FDTD*, TELEMO'96 - Anais, pp 859-864, 1996.
- [3] D.Marcuse, *Directional Couplers Made of Nonidentical Asymmetric Slabs. Part I: Synchronous Couplers*, JLT, vol 15, nº 1, pp 113-118, 1987.
- [4] S.T.Chu, S.K.Chaudhuri, *A Finite-Difference Time-Domain Method for the Design and Analysis of Guided-Wave Optical Structures*, JLT, vol 7, nº 12, pp 2033-2038, 1989.

# CAPÍTULO V

## 5. CONCLUSÕES

Neste trabalho estudou-se a propagação bidimensional de ondas eletromagnéticas em guias de onda dielétricos através do método das diferenças finitas no domínio do tempo. A partir da discretização das equações rotacionais de Maxwell, deduziu-se as equações de diferenças finitas utilizadas na simulação da onda desejada.

A técnica FDTD mostrou-se eficaz na análise das estruturas propostas, através da boa concordância entre os resultados obtidos com o método e aqueles previstos teoricamente. Para o guia *slab*, apresentou-se curvas da variação temporal (direção axial) e espacial (direção transversal) do campo, verificando-se, ainda, o comportamento do mesmo nos limites de alta e baixa frequência. Para o acoplador direcional, analisou-se a influência da variação da distância de separação entre os guias no comprimento de acoplamento  $L$ , mostrando-se que a troca de energia total entre os dois guias é possível.

O uso das condições de contorno absorventes revelou-se essencial nas simulações realizadas, truncando a região discretizada. Utilizou-se a condição absorvente de Mur de segunda ordem devido à facilidade de implementação, ao baixo esforço computacional e ao bom desempenho na absorção de ondas incidentes em ângulos inferiores a  $30^\circ$ , conforme verificado no Apêndice. Condições de contorno mais eficientes do que esta poderiam ter sido implementadas, sem contudo apresentar as vantagens relativas à facilidade de implementação e ao esforço computacional. Nos casos analisados, a condição de Mur foi suficiente para a boa concordância dos resultados obtidos.

Devido à sua simplicidade conceitual, este método também pode ser utilizado como ferramenta didática no estudo do eletromagnetismo e óptica.

Como proposta para trabalhos futuros, pretende-se estender esta formulação para a análise de estruturas mais complexas, tais como acopladores ópticos e junções, e estruturas compostas por materiais dispersivos e não lineares, podendo-se analisar a propagação de ondas solitônicas.

# APÊNDICE A

## A. DEDUÇÃO E ANÁLISE DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO ABSORVENTE

Como visto no Capítulo 3, é necessária a utilização de uma condição de contorno adequada para truncar o domínio computacional, simulando efetivamente a extensão deste ao infinito.

Existem basicamente duas maneiras de se obter tal condição de contorno [1]: aproximação por aniquilamento de modo e equação de onda unidirecional. Será realizada, a seguir, a análise somente desta última, por ser a mais utilizada.

### A.1. EQUAÇÃO DE ONDA UNIDIRECIONAL

Uma equação diferencial parcial que permite a propagação de ondas somente em certas direções é chamada de equação de onda unidirecional. A Figura A.1 mostra o domínio cartesiano, bidimensional e finito no qual a equação de onda será simulada.

Um método numérico, que simule a propagação de ondas em todas as direções, é aplicado no interior de  $\Omega$ . Na fronteira  $\delta\Omega$ , somente propagação de ondas para fora do domínio  $\Omega$  é permitida.

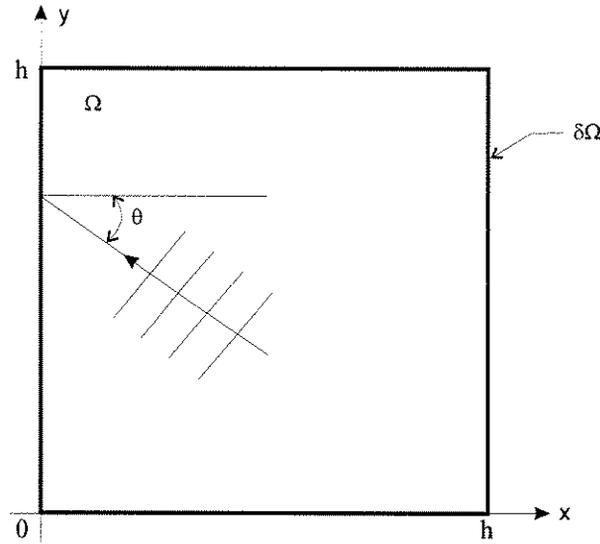


Figura A.1 - Domínio computacional cartesiano

### A.1.1. DEDUÇÃO ATRAVÉS DO FATORAMENTO DA EQUAÇÃO DE ONDA UNIDIRECIONAL

A obtenção da fronteira  $\delta\Omega$ , cujo objetivo é absorver ondas planas numéricas incidentes sobre a mesma e que se propagam para fora do domínio  $\Omega$ , pode ser realizada em termos do fatoramento de operadores. Seja a equação de onda bidimensional em coordenadas cartesianas:

$$c^2(U_{xx} + U_{yy}) - U_{tt} = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde  $U = U(x, y, t)$ ,  $c$  é a velocidade da luz e os subscritos  $x, y$ , e  $t$  indicam derivadas com relação à  $x, y$ , e  $t$ , respectivamente.

O operador diferencial é definido como sendo

$$L \equiv D_x^2 + D_y^2 - \frac{D_t^2}{c^2} \quad (\text{A.2})$$

onde é usada a notação

$$D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad D_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (\text{A.3})$$

A equação de onda pode, então, ser compactamente escrita como:

$$LU = 0 \quad (\text{A.4})$$

O operador  $L$  pode ser fatorado da seguinte forma

$$LU = L^+ L^- U = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde  $L^+$  e  $L^-$  são definidos como

$$L^+ \equiv D_x + \frac{D_t}{c} \cdot \sqrt{1 - S^2} \quad (\text{A.6})$$

$$L^- \equiv D_x - \frac{D_t}{c} \cdot \sqrt{1 - S^2} \quad (\text{A.7})$$

com 
$$S = c \cdot \frac{D_y}{D_t} \quad (\text{A.8})$$

Em [2] é provado que numa fronteira  $x = 0$ , a aplicação do operador  $L^-$  na função de onda  $U$ , irá absorver com exatidão uma onda plana incidente em qualquer ângulo que se propaga na direção  $-x$ .

Então,

$$L^- U = 0 \quad (\text{A.9})$$

aplicado em  $x = 0$ , funciona como uma condição de contorno absorvente analítica exata. Da mesma forma, a aplicação do operador  $L^+$  desempenhará a mesma função para ondas que se propagam na direção  $+x$  e incidam na fronteira em  $x = h$ , na Figura A.1.

A presença do radical em (A.6) e (A.7) não permite a implementação numérica direta da equação (A.9) como uma condição de contorno absorvente[2].

Aproximações do radical na equação (A.6) produzem condições de contorno absorventes que podem ser numericamente implementadas. No entanto, a implementação de tais condições de contorno absorventes não será exata, e uma parcela da onda incidente na fronteira será refletida para dentro do domínio, passando a se propagar neste.

### Condição Absorvente de Primeira Ordem

A condição de contorno absorvente de primeira ordem, derivada em [3], utiliza uma aproximação em série de Taylor com um termo para o radical das equações (A.6) e (A.7). Assim:

$$\sqrt{1-S^2} \approx 1 + O(S^2) \quad (\text{A.10})$$

Isto leva à seguinte condição de contorno analítica, que pode ser numericamente implementada na fronteira  $x = 0$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \right) U_{x=0} = 0 \quad (\text{A.11})$$

Para aplicação desta condição de contorno absorvente, deve-se, antes, discretizá-la. Será utilizada a notação  $D_+$ ,  $D_-$  e  $D_o = \frac{1}{2} \cdot (D_+ + D_-)$  para denotar os operadores diferença avançada, recuada e centrada, respectivamente. Assim, a forma discretizada da equação (A.11) é dada por:

$$D_+^x (U_{0,j}^n + U_{0,j}^{n+1}) - c^{-1} D_+^t (U_{0,j}^n + U_{1,j}^n) = 0 \quad (\text{A.12})$$

onde  $U_{i,j}^n = U(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ . Após o desenvolvimento de (A.12) e troca do escalar  $U$  pela componente de campo  $Ez$ , obtém-se, finalmente, a equação usada na fronteira  $x = 0$ .

$$Ez^{n+1}(0, j) = Ez^n(1, j) + \frac{c \cdot \Delta t - \Delta x}{c \cdot \Delta t + \Delta x} \cdot [Ez^{n+1}(1, j) - Ez^n(0, j)] \quad (\text{A.13})$$

Pode-se obter facilmente, a partir de (A.13), expressões semelhantes para os outros planos de truncamento.

### Condição Absorvente de Segunda Ordem

Para a condição de contorno absorvente de segunda ordem, usa-se uma aproximação em série de Taylor com dois termos. Assim

$$\sqrt{1-S^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot S^2 + O(S^2) \quad (\text{A.14})$$

e, com isso, obtemos a forma analítica da condição de contorno, dada por:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x t} - c^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U|_{x=0} = 0 \quad (\text{A.15})$$

cuja discretização é

$$D_+^x D_0^t U_{0,j}^n - \frac{1}{2c} \cdot D_+^t D_-^t (U_{0,j}^n + U_{1,j}^n) + \frac{c}{4} \cdot D_+^y D_+^y (U_{0,j}^n + U_{1,j}^n) = 0 \quad (\text{A.16})$$

que, após desenvolvida, resulta finalmente em

$$\begin{aligned} E z^{n+1}(0,j) = & -E z^{n-1}(1,j) + \frac{C-1}{C+1} \cdot [E z^{n+1}(1,j) + E z^{n-1}(0,j)] + \frac{2}{C+1} \cdot [E z^n(1,j) + \\ & E z^n(0,j)] + \frac{C^2}{2(C+1)} \cdot [E z^n(0,j+1) - 2 \cdot E z^n(0,j) + E z^n(0,j-1) + \\ & E z^n(1,j+1) - 2 \cdot E z^n(1,j) + E z^n(1,j-1)] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde  $C = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta}$  é o número de Courant e  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ . Assim, como no caso anterior, a partir de (A.17) derivam-se as expressões com aproximação de segunda ordem para as demais fronteiras.

## A.2. ANÁLISE DO COEFICIENTE DE REFLEXÃO

As condições de contorno absorventes derivadas anteriormente, são aproximações para as equações pseudodiferenciais analíticas, e portanto, uma pequena parcela da onda será refletida quando a mesma atingir a fronteira.

Uma onda espalhada por um objeto qualquer, pode ser considerada como sendo uma superposição de ondas planas, que incidem na fronteira com uma certa faixa de valores de ângulo de incidência. Para uma onda plana incidindo na fronteira em  $x = 0$ , na Figura A.1, a parcela refletida dependerá do ângulo de incidência  $\theta$ . Pode-se, então, verificar o desempenho de uma dada condição de contorno absorvente, derivando-se, a partir desta, um coeficiente de reflexão  $R$ , que quantifica a parcela de reflexão não física que uma onda plana produz em função de  $\theta$ , quando esta incide na fronteira.

Considere então uma onda plana propagando-se para fora do domínio  $\Omega$ . A onda tem a seguinte forma :

$$U_{inc} = e^{j(kx + kt - kx \cos \theta - k y \sin \theta)} \quad (\text{A.18})$$

Sabendo da existência de uma onda refletida, o campo total na fronteira em  $x = 0$ , será dado por:

$$U_t \Big|_{x=0} = e^{j(kx + kt - kx \cos \theta - k y \sin \theta)} + R e^{j(kt - kx \cos \theta - k y \sin \theta)} \quad (\text{A.19})$$

O coeficiente de reflexão  $R$  pode ser obtido para uma condição de contorno absorvente qualquer, através da substituição da equação (A.19) na forma analítica pela forma aproximada da mesma. Então, para uma condição de contorno de segunda ordem, levando-se (A.19) em (A.15), e resolvendo-se para  $R$ , obtém-se

$$R = \frac{\cos \theta - 1 + 0,5 \cdot \sin^2 \theta}{\cos \theta + 1 - 0,5 \cdot \sin^2 \theta} \quad (\text{A.20})$$

A Figura A.2 mostra o comportamento do coeficiente de reflexão em função

do ângulo de incidência na faixa  $[0 : \pi / 2]$ . Verifica-se que a eficiência é maior para ângulos próximos de  $\theta = 0$ . Na faixa de  $0^\circ < \theta < 30^\circ$  o valor de  $R$  é inferior a 1%, e, para ângulos próximos de  $90^\circ$ ,  $R$  tende a 1.

Otimizações podem ser feitas no projeto das condições de contorno absorventes [1], de modo a alterar-se as características da curva do coeficiente de reflexão, fazendo, por exemplo, com que o valor de  $R$  fique abaixo de 1% para valores de  $\theta$  abaixo de  $60^\circ$ .

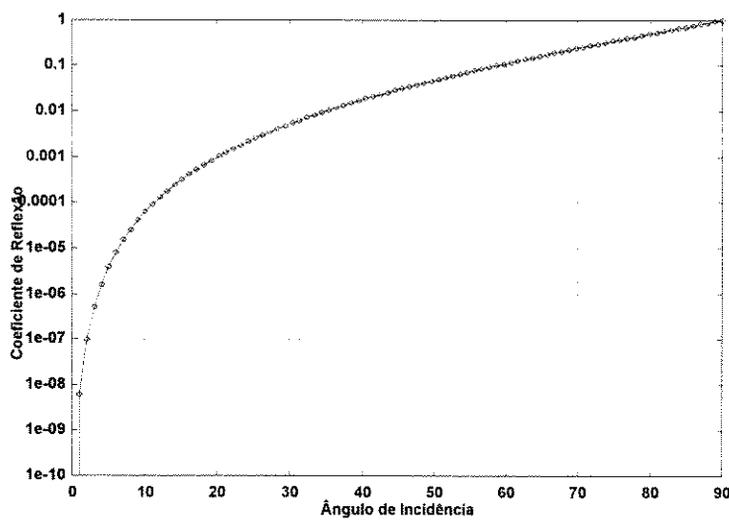


Figura A. 2 - Coeficiente de reflexão em função do ângulo de incidência para condição de contorno absorvente de segunda ordem

### A.3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Foram realizados nesta seção, experimentos numéricos que quantificam a porção de reflexão não-física produzida por uma condição de contorno absorvente, quando um pulso incide na mesma.

Na Figura A.3, tem-se a representação de dois domínios computacionais,  $\Omega_B$  ( $400\Delta \times 400\Delta$ ) e  $\Omega_T$  ( $100\Delta \times 50\Delta$ ), onde o algoritmo FDTD bidimensional é computado simultaneamente para uma onda TM. Nas fronteiras do domínio  $\Omega_T$  aplicou-se a condição de contorno absorvente de segunda ordem, dada pela equação (A.15).

Cada ponto do domínio  $\Omega_T$  possui um ponto correspondente no domínio maior  $\Omega_B$ . Uma fonte pontual está situada no centro de ambos os domínios, na posição  $(50,25)$ . Esta fonte produz ondas cilíndricas que são espacialmente coincidentes em ambos os domínios até o instante em que a onda incide na fronteira de  $\Omega_T$ . Qualquer reflexão ocorrida nas fronteiras de  $\Omega_T$ , faz com que a solução obtida para os pontos pertencentes a este domínio, difira daquela obtida para os pontos correspondentes em  $\Omega_B$ . A solução obtida para  $\Omega_B$  é a solução desejada, ou seja, a que realmente modela a propagação no espaço livre, uma vez que o algoritmo é executado para um determinado número de passos de tempo insuficiente para que o pulso alcance as fronteiras de  $\Omega_B$ . Para o domínio  $\Omega_B$  apresentado, obtém-se uma solução isenta de erros devido as fronteiras para até 500 passos de tempo.

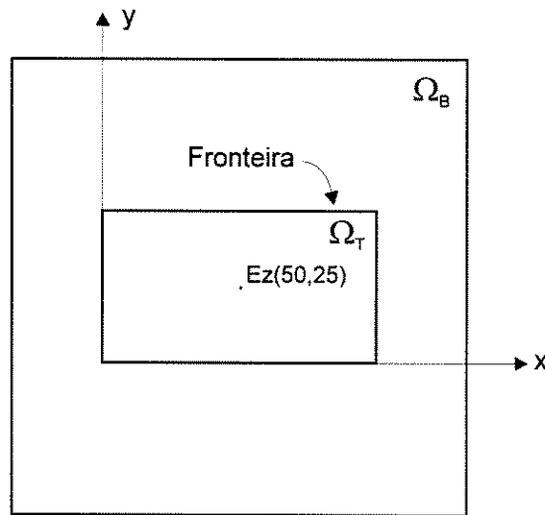


Figura A.3 - Domínio computacional

Calculando-se a diferença entre as soluções dos dois domínios, obtém-se uma medida da reflexão causada pelas fronteiras de  $\Omega_T$ . Em cada passo de tempo, a diferença é definida como sendo:

$$D(i, j) = Ez^T(i, j) - Ez^B(i, j) \quad (\text{A.21})$$

para todo ponto  $(i, j)$  de  $\Omega_T$ , onde  $Ez^T$  é a solução em  $\Omega_T$ , e  $Ez^B$  é a solução nos mesmos pontos em  $\Omega_B$ .  $D(i, j)$  é definido como sendo o erro local, sendo função tanto da posição quanto do tempo.

Define-se o erro global refletido dentro de  $\Omega_T$  como:

$$E = \sum_i \sum_j D^2(i, j) \tag{A.22}$$

sendo esta função apenas do instante de tempo de análise.

O pulso de excitação é o mesmo usado em [4], sendo definido como

$$E_z(50, 25) = \begin{cases} \alpha \cdot (10 \cos \omega_1 \xi + 6 \cos \omega_2 \xi - \cos \omega_3 \xi), & \xi \leq \tau \\ 0, & \xi > \tau \end{cases} \tag{A.23}$$

$$\alpha = \frac{1}{320}; \quad \omega_m = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{\tau}, \quad m = 1, 2, 3.$$

$$\xi = n \cdot \Delta t; \quad \Delta t = 2,5 \cdot 10^{-11} \quad e \quad \tau = 10^{-9}$$

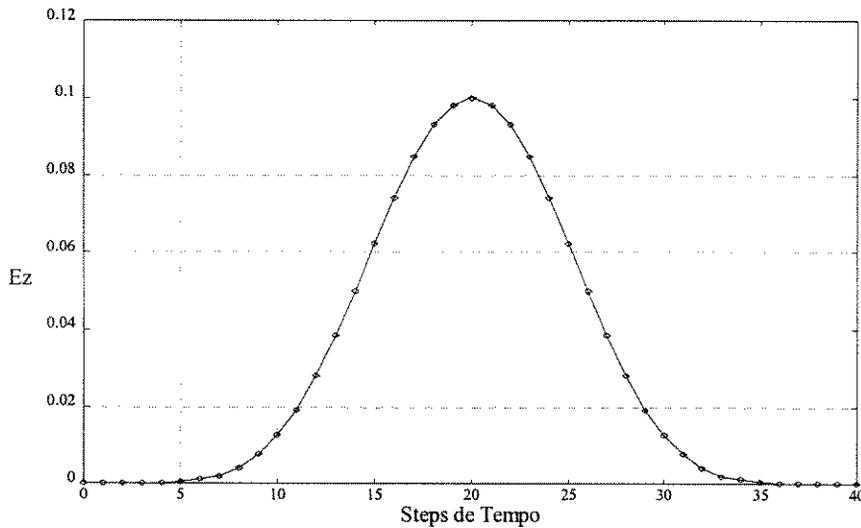


Figura A. 4 - Perfil temporal do pulso de excitação

O número de Courant utilizado é  $C = 0,5$  e  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ . O perfil no tempo deste pulso, é mostrado na Figura A.4. Observar que o mesmo possui uma transição extremamente suave para zero. A Figura A.5, mostra curvas de contorno representando a solução obtida em  $\Omega_T$  e  $\Omega_B$  para 40, 70, 100 e 130 passos de tempo. Pode-se observar visivelmente a diferença entre as duas soluções no passo de

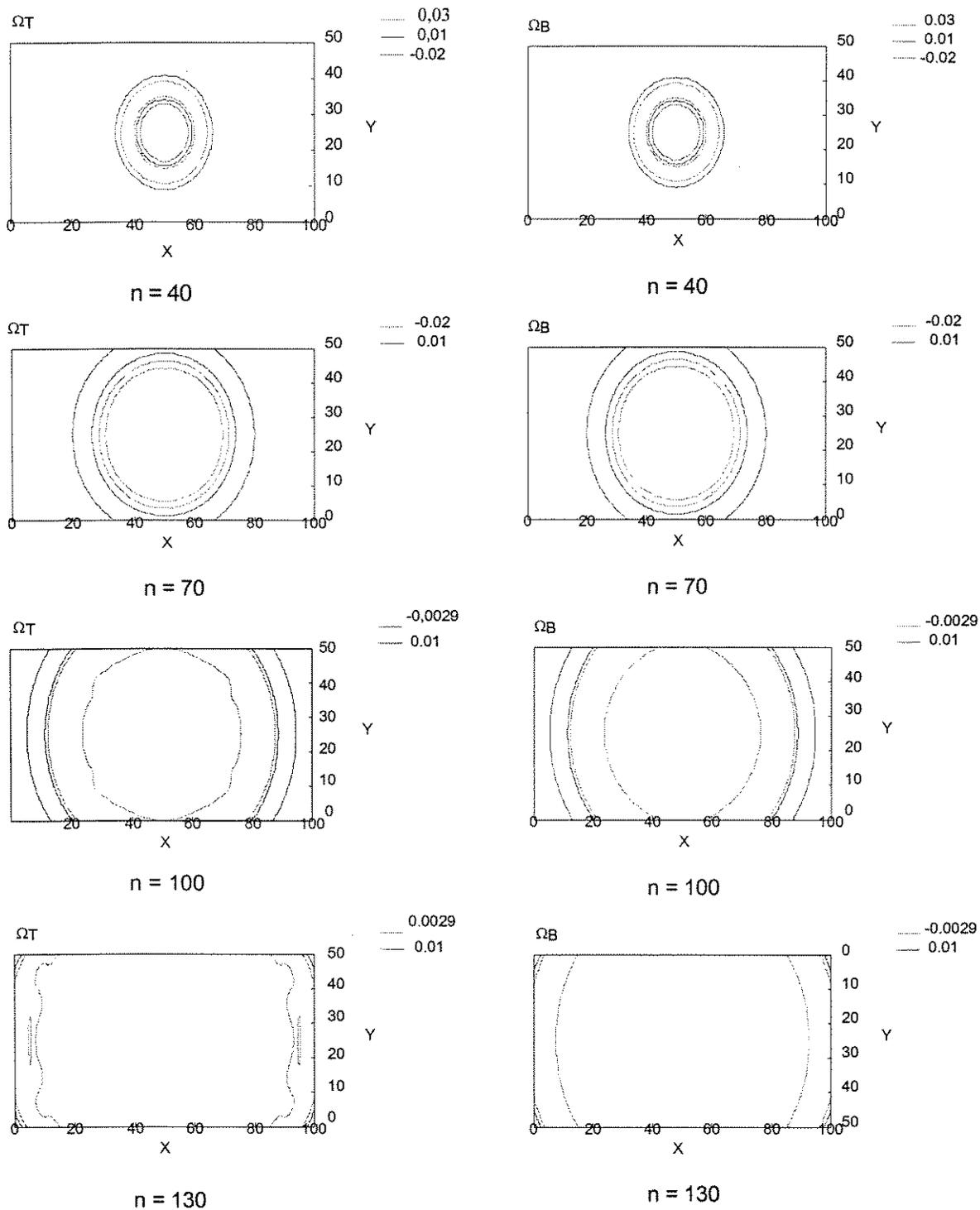


Figura A.5 - Configuração do campo elétrico para vários passos de tempo

tempo 100, devido ao erro introduzido pela condição de contorno absorvente. Para o número de Courant usado, o pulso leva 50 passos de tempo para atingir a fronteira em  $y = 0$ . Com 70 passos de tempo, o pico do pulso passa pela fronteira em  $y = 0$ . Para análise do erro local, escolheu-se observar a reflexão na primeira linha acima da fronteira em  $y = 0$  (ao longo de  $y = \Delta y$ ) para 100 passos de tempo. Isto permite com que o “*bulk*” do pulso passe pela fronteira, produzindo o máximo de reflexão observável. O erro global (devido a todos os pontos  $(i, j)$  dentro de  $\Omega_T$ ) é observado a partir do passo de tempo 50 até o 500. Leva cerca de 130 passos de tempo para o pico do pulso alcançar as quinas de  $\Omega_T$ .

As Figuras A.6 e A.7 mostram o erro local e global, respectivamente. O resultado apresentado na Figura A.6 está normalizado com relação ao valor máximo do pulso ao longo da fronteira  $j = 1$ , no passo de tempo 70.

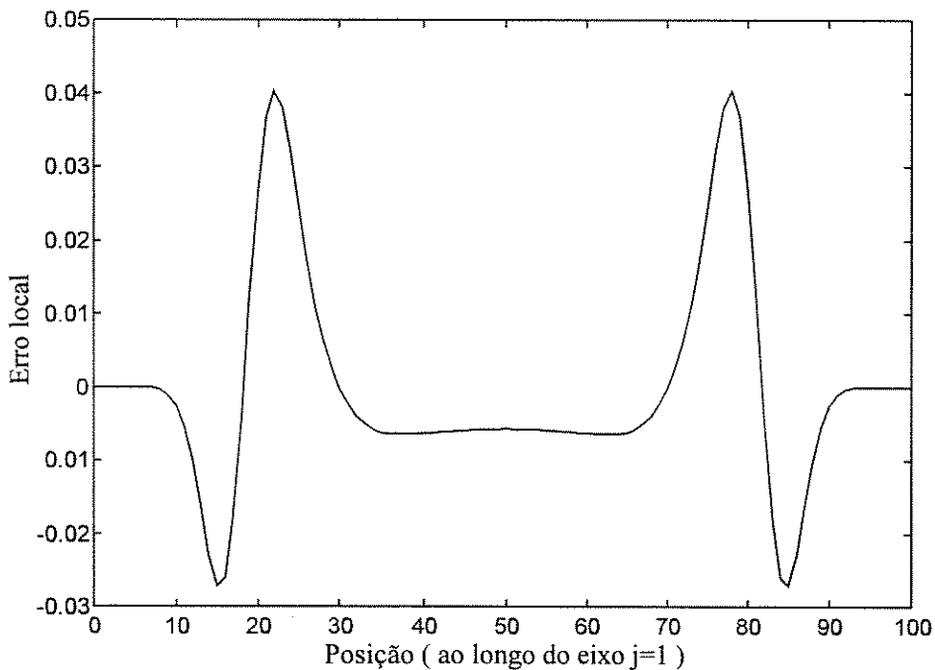


Figura A.6 - Erro local normalizado para 100 passos de tempo

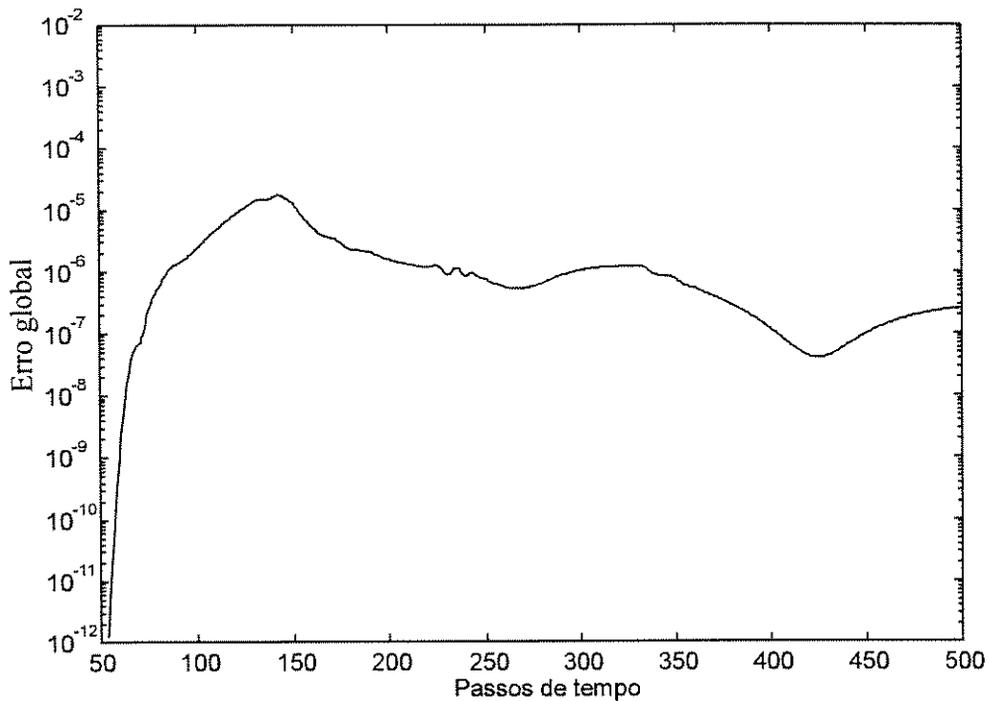


Figura A.7 - Erro global

#### A.4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] T.G.Moore, J.G.Blaschak, A.Taflove, G.A.Kriegsmann, *Theory and application of radiation boundary operators*, IEEE Trans. On Antennas and Propagation, vol.36, nº 12, pp 1797-1812, 1988.
- [2] B.Enquist and A.Majda, *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comput., vol 31, pp 629-651, 1977.
- [3] G.Mur, *Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations*, IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, nº 4, pp 377-382, 1981.
- [4] P.A.Tirkas, C.A.Balanis and R.A.Renault, *Higher order absorbing boundary conditions for the finite-difference time-domain method*, IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol.40, nº 10, pp 1215-1222, 1992.