

# FEEC

Faculdade de Engenharia  
Elétrica e de Computação

Departamento de Microondas  
e Óptica

## Modelamento de Amplificadores Ópticos Dopados com Érbio Usando Elementos Finitos

Andrés Pablo López Barbero

Orientador:

Hugo Enrique Hernández-Figueroa (FEEC)

Tese de Doutorado

Composição da Banca Examinadora:

Dr. Hugo E. Hernández-Figueroa/FEEC/Unicamp  
Orientador e Presidente

UNICAMP

Dr. Rui Fragassi Souza/FEEC/Unicamp

BIBLIOTECA CENTRAL

Dr. Hugo Luiz Fragnito/IFWG/Unicamp

SEÇÃO CIRCULANTE

Dra. Maria Thereza Miranda Rocco Giraldo/IME/RJ

Dr. Jean Pierre von der Weid/PUC/CETUC/RJ

Campinas, Fevereiro de 2000

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por <u>Andrés Pablo López Barbero</u>	
<u>Barbero</u>	aprovada pela Comissão
Julgada em <u>18 / 2 / 2000</u>	
	Orientador

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

425810098

UNIDADE	30
N.º CHAMADA:	F/Unicamp
	L881m
V.	Ex.
TOMBO BC/	42269
PROC.	16-278100
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PRECº	R\$ 11,00
DATA	22/09/00
N.º CPD	

CM-00144249-B

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L881m López-Barbero, Andrés Pablo  
Modelamento de amplificadores ópticos dopados com Érbio usando elementos finitos / Andrés Pablo López-Barbero. --Campinas, SP: [s.n.], 2000.

Orientador: Hugo Enrique Hernández-Figueroa  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Amplificadores ópticos. 2. Fibras óticas. 3. Comunicações óticas. 4. Método dos elementos finitos.  
I. Hernández-Figueroa, Hugo Enrique. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

# Resumo

Apresentam-se modelos numéricos para amplificadores ópticos dopados com érbio pelo método dos Elementos Finitos. Propomos modelar simultaneamente tanto a parte real (relacionada com o comportamento não linear) como a imaginária (relacionada com o ganho do dispositivo) do material dopado através do cálculo da susceptibilidade complexa. Devido à consideração dos vários sub-níveis presentes no meio dopado (Stark Splitting) e dos efeitos de conversão ascendente, o modelo permite a análise de dispositivos num espectro bastante largo (1.4-1.6 $\mu$ m) e para altas concentrações de érbio. O uso de duas plataformas numéricas diferentes (Análise Modal e BPM-Beam Propagation Method) permite a análise de várias configurações de dispositivos, inclusive com seção transversal variante na direção de propagação. Os resultados obtidos foram comparados com modelos numéricos presentes na literatura e com resultados experimentais.

# Abstract

Several models based on the Finite Elements Method, for Erbium-Doped optical amplifiers, are presented. The models deal simultaneously with the real part (related to the non-linear behavior) and the imaginary part (related to the gain) of the doped material through the proper and direct calculation of the complex susceptibility. Due to the consideration of the several sub-levels present in the doped host medium (Stark Splitting) and the up-conversion effect, the models permit to analyze a wide spectrum ranging from 1.4  $\mu$ m to 1.6  $\mu$ m and also high erbium concentrations. The use of two different numerical platforms (Modal Analysis and BPM-Beam Propagation Method) permits the analysis of a wide variety of device configurations, including those whose transverse section varies along the propagation direction. The obtained results are compared with numerical models published in the literature, as well as, with experimental results.

Este trabalho foi financiado em parte  
pelo Programa de Institucional de Capacitação Docente e Técnica – PICDT/CAPES  
e  
PRONEX

### **Agradecimentos**

Agradeço com sinceridade a um grupo grande de pessoas que participaram e deram-me grande estímulo para concluir este trabalho.

- Aos amigos do Grupo de Comunicações Ópticas/IFGW/Unicamp Hugo Fragnito, Walter, José, Andrés e Martin, que possibilitaram o desenvolvimento experimental deste trabalho;
- Aos amigos Cláudio Mazzali e Pedro Torres pela estimulante confiança e valioso apoio no início deste trabalho;
- Aos colegas do Grupo de Eletromagnetismo Computacional/FEEC/Unicamp Vitaly, Cosme, Marcelo, Antonio, Helder e Emir pelas incansáveis horas de auxílio que me prestaram durante todo este trabalho;
- Ao Professor, Orientador e amigo Hugo Hernández pelos conhecimentos cedidos, pela paciência e pela sinceridade, sempre presentes em nosso convívio profissional e pessoal.
- Ao Professor Erasmo Recami pela confiança depositada em minha pessoa durante a realização de vários trabalhos em conjunto;
- Ao amigo Hypólito pelas sinceras e oportunas palavras de confiança que sempre nortearam minha vida acadêmica.

Especial agradecimento dedico a todos os professores do Departamento de Telecomunicações da Universidade Federal Fluminense pelo esforço que fizeram para dar-me esta preciosa oportunidade.

A meus pais e irmãos Alfredo, Angela, Adriana, Maria José e Alfredo pelo imensurável apoio dado nos momentos mais difíceis de minha vida...

...e à Valéria, cujo amor impulsiona minha vida...

... meu Muito Obrigado.

*para Valéria*

# Sumário

<b>Capítulo 1 – Introdução: Histórico e Motivação .....</b>	<b>1</b>
1.1 – Modelos de amplificadores ópticos: panorama atual.....	2
1.2 – Sinopse desta Dissertação .....	7
Referências do Capítulo 1 .....	8
<b>Capítulo 2 – Teoria Básica dos Meios Ativos.....</b>	<b>11</b>
2.1 - Atenuação e Amplificação de Ondas Eletromagnéticas em Meios Ativos.....	12
2.2 - Propagação de ondas planas em meios ativos.....	19
2.3 - Susceptibilidade complexa de um meio ativo.....	24
2.4 - Susceptibilidade complexa de um meio dopado com érbio...	34
2.5 - Processos de Conversão Ascendente.....	44
2.5.1 – Absorção seqüencial de dois Fótons(ESA).....	44
2.5.2 – Conversão Ascendente Cooperativa.....	46
2.5.3 - Conversão Ascendente por relaxação cruzada .....	49
2.6 – Resumo .....	52
Referências do Capítulo 2 .....	54
<b>Capítulo 3 – Modelo Espacial.....</b>	<b>57</b>
3.1 - Implementação do Modelo.....	58
3.1.1 – Equações de Propagação .....	58
3.1.2 – Equações de Taxa.....	60
3.1.3 – Operação Multimodo.....	64
3.1.4 – Rotina Numérica .....	65
3.2 – Resultados.....	68
3.2.1 – Guias de Ondas dopados com érbio .....	68
3.2.2 – Fibras Ópticas dopadas com érbio .....	74
3.2.2.1 – Fibra: Photonetics EDOS-230 .....	75
3.2.2.2 – Fibra: Lucent .....	83

3.2.2.3 – Fibras de Telureto dopadas com érbio .....	89
<b>3.3 – Resumo .....</b>	<b>93</b>
<b>Referências do Capítulo 3 .....</b>	<b>94</b>
<b>Capítulo 4 – Modelo Modal .....</b>	<b>97</b>
<b>4.1 – Implantação do Modelo .....</b>	<b>98</b>
4.1.1 – Plataforma numérica .....	98
4.1.2 - Susceptibilidade Complexa .....	101
4.1.3 – Equações de taxa .....	102
4.1.4 – Operação Multimodo .....	104
4.1.5 – Fluxograma .....	105
<b>4.2 – Resultados .....</b>	<b>107</b>
4.2.1 – Ganho .....	107
4.2.1.1 – Guias de Ondas dopados com érbio .....	107
4.2.1.2 – Fibras Ópticas dopadas com érbio .....	112
4.2.2 – Limite de Validade do Modelo Modal .....	115
4.2.3 – Não Linearidades do meio dopado com érbio .....	117
4.2.3.1 – Não linearidade induzida pela intensidade do Bombeio(PINL)	118
4.2.3.2 – Influência da dopagem na não linearidade do meio .....	121
4.2.3.3 – Não linearidade induzida pela intensidade do Sinal(SINL)	123
<b>4.3 – Resumo .....</b>	<b>129</b>
<b>Referências do Capítulo 4 .....</b>	<b>130</b>
<b>Capítulo 5 – Modelo z-variante BPM .....</b>	<b>135</b>
<b>5.1 – Implementação do Modelo .....</b>	<b>136</b>
5.1.1 – Plataforma Numérica BPM .....	137
5.1.2 – Modelamento do Material: Susceptibilidade Complexa .....	141
5.1.3 – Rotina Numérica .....	144
<b>5.2 – Resultados .....</b>	<b>148</b>
5.2.1 – Guia de ondas ativo .....	150
5.2.2 – Acoplador dopado usando onda evanescente .....	155
5.2.3 – Acoplador seguido de curva .....	159
5.2.4 – Acoplador tipo Y .....	162
<b>5.3 – Resumo .....</b>	<b>165</b>
<b>Referências do Capítulo 5 .....</b>	<b>166</b>

<b>Capítulo 6 – Conclusões e Sugestões .....</b>	<b>171</b>
<b>6.1 – As contribuições desta tese.....</b>	<b>171</b>
<b>6.2 – A continuação deste trabalho.....</b>	<b>173</b>
<b>6.3 – As publicações geradas.....</b>	<b>173</b>
<b>Apêndice A – Formulações.....</b>	<b>177</b>
<b>A.1 – Formulações para Análise Modal.....</b>	<b>177</b>
<b>A.1.1 – Formulação em coordenadas retangulares.....</b>	<b>179</b>
<b>A.1.1.1 – Formulação 2D.....</b>	<b>179</b>
<b>A.1.1.2 – Formulação 1D.....</b>	<b>193</b>
<b>A.1.1.3 – Formulação 1D em coordenadas circulares.....</b>	<b>194</b>
<b>A.2 – Formulação para o Método da Propagação do Feixe.....</b>	<b>197</b>
<b>A.2.1 – Formulação 2D.....</b>	<b>198</b>
<b>A.2.2 – Formulação 1D.....</b>	<b>203</b>
<b>Referências do Apêndice A.....</b>	<b>206</b>

# Lista de Figuras

Número da Figura	Descrição da Figura	Página
1.1	Diagrama mostrando os principais modelos presentes na literatura. O Modelo Espacial, z-variante BPM e Modelo Modal incluídos neste diagrama são apresentados e discutidos nos Capítulos 3, 4 e 5 desta dissertação, respectivamente. As letras indicam as referências nas quais estes modelos aparecem: a.[9], b.[4], c.[7], d.[7, 16, 17 e 18], e.[7,14 e 15], f.[21 e 22], g.[20], h.[19], i.[23], j.[24], k.[10,11,12 e 13],l.[8].	3
2.1	Os círculos abertos e cheios representam o estado energético inicial e final do átomo.(a) Absorção estimulada. (b) Emissão espontânea. (c) Emissão estimulada.	13
2.2	Radiação externa de intensidade $I_v$ propagando-se por um meio ativo de comprimento $\Delta z$ .	16
2.3	Sistema de 2 níveis atravessado por duas ondas eletromagnéticas externas de intensidades $I_s$ e $I_p$ estimulando taxas de transferência de energia R e W entre os níveis 1 e 2.	18
2.4	Efeito <i>Stark</i> que quebra a degenerescência dos estados quânticos principais (1 e 2) gerando os sub-níveis $i=1 \rightarrow g_1$ e $k=1 \rightarrow g_2$ .	35
2.5	Diagrama de níveis de energia de um meio dopado com érbio.	36
2.6	Sistema de 5 níveis considerado bombeado em 980 nm. O nível 5 $^4F_{7/2}$ não é considerado uma vez que a transição $^4F_{7/2} \rightarrow ^4I_{9/2}$ é muito rápida.	43
2.7	Processo de conversão ascendente por absorção de dois fótons sequencialmente. As populações dos níveis 2' e 3' decaem rapidamente para os níveis 2 e 3. As setas de $2' \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 3'$ indicam transições não radiativas, ao passo que a seta cheia pode indicar uma transição radiativa ou não radiativa.	45
2.8	Diagrama de níveis de energia do érbio dopado em vidro mostrando os picos de transições das seções de choque da ESA.	46
2.9	Esquemático para entender o processo de transferência de energia por conversão ascendente cooperativa. Os íons são chamados de "D" e "A", doadores e aceitadores de energia, respectivamente.	47
2.10	Esquema para entender o processo de conversão ascendente por relaxação cruzada. "D" e "A" indicam os íons doadores e aceitadores, respectivamente, e as setas sólidas indicam as transições radiativas. Três processos competitivos envolvendo o nível 3 são ilustrados. Um processo envolve a transferência de energia entre o nível 3 do íon D e o nível 1 do íon A, resultando em dois íons ocupando o nível 2. Os outros 2 processos envolvem decaimento radiativo do nível 3 para o nível 1 ou do nível 3 para o 2. O decaimento radiativo de $2 \rightarrow 1$ e o espontâneo de $3 \rightarrow 2$ com taxa $1/\tau_3$ também é mostrado.	49

3.1	Sistema em que são considerados 4 níveis de energia em razão da dopagem com érbio e bombeio no comprimento de 980 nm. $R_{13}$ e $W_{12}$ e $W_{21}$ são as taxas estimuladas, $A_{43}$ e $A_{32}$ são as taxas não radiativas entre os níveis 4→3 e 3→2, respectivamente, $A_{21}$ é a taxa de fluorescência e $C_{up}$ , $C_3$ e $C_{14}$ são os coeficientes de conversão ascendente e de relaxação cruzada. ....	61
3.2	Sistema em que são considerados 4 níveis de energia em razão da dopagem com érbio e bombeio no comprimento de onda de 1480 nm. $R_{13}$ e $R_{31}$ e $W_{12}$ e $W_{21}$ são as taxas estimuladas na frequência do bombeio(R) e sinal(W), $A_{43}$ e $A_{32}$ são as taxas não radiativas entre os níveis 4→3 e 3→2, respectivamente, $A_{21}$ é a taxa de fluorescência e $C_{up}$ e $C_{14}$ são os coeficientes de conversão ascendente e de relaxação cruzada. $R_{24}^{ESA}$ é a taxa de ESA do nível 2 para o nível 4. ....	62
3.3	Representação gráfica do procedimento iterativo para a solução do sistema de equações integro-diferenciais acopladas e não lineares. ....	66
3.4	Fluxograma que representa o procedimento iterativo usado para a solução do conjunto de equações de propagação integro-diferenciais não lineares. ....	67
3.5	Guias de ondas usados nas simulações feitos em substratos de $SiO_2$ . Os guias possuem índice de refração $n_1=1.6$ , $n_2=1.51$ e $n_3=1.0$ . (a) Guia canal de dimensões $12 \times 1 \mu m^2$ com índices de refração $n_1$ dentro do núcleo, $n_2$ para $y > 0$ , e $n_3$ para $y < 0$ . (b) Guia canal $1 \times 1 \mu m^2$ com índices de refração $n_1$ dentro do núcleo e $n_2$ na casca. A dopagem de érbio é considerada $N_{Er}=1 \times 10^{+26}$ íons/ $m^3$ uniformemente distribuída no núcleo. ....	69
3.6	Ganho em função da potência de bombeio calculado pelo Modelo Espacial para o dispositivo amplificador da Figura 3.4a quando o feixe gaussiano é polarizado segundo o eixo de simetria “x” (TE), “y” (TM) e a $45^\circ$ do eixo “x” (Excitação mista TE e TM). As frações de potência de excitação são mostradas na Tabela 3.2. ....	71
3.7	Ganho em função da potência de bombeio para o guia canal da Figura 3.5b com comprimento $L_w$ , desconsiderando os efeitos de conversão ascendente, e para potência do sinal de entrada de $1 \mu W$ . ....	72
3.8	Densidade espectral de ASE+ na saída dos amplificadores da Figura 3.5a e Figura 3.5b, comprimento de 3cm, bombeado em 980nm com 40mW, desconsiderando os efeitos de conversão ascendente. ....	72
3.9	Distribuições de potências ao longo do amplificador da Figura 3.5b com 30cm de comprimento, com coeficientes de conversão ascendente $C_{up}=5.0 \times 10^{-23} m^3/s$ , $C_3=5.0 \times 10^{-23} m^3/s$ e $C_{14}=3.5 \times 10^{-23} m^3/s$ e concentração de érbio de $N_{Er}=3 \times 10^{+26}$ íons/ $m^3$ . ....	73
3.10	Propagação do espectro da ASE+ para o amplificador da Figura 3.5b com 30cm de comprimento, com coeficientes de conversão ascendente $C_{up}=5.0 \times 10^{-23} m^3/s$ , $C_3=5.0 \times 10^{-23} m^3/s$ e $C_{14}=3.5 \times 10^{-23} m^3/s$ e concentração de érbio de $N_{Er}=3 \times 10^{+26}$ íons/ $m^3$ . ....	73
3.11	Distribuições de potências ao longo do amplificador da Figura 3.5b com 30cm de comprimento, com coeficientes de conversão ascendente $C_{up}=C_3=C_{14}=0.0$ e concentração de érbio de $N_{Er}=3 \times 10^{+26}$ íons/ $m^3$ . ....	74
3.12	Seções de choque de absorção (a) e emissão (e) da fibra EDOS-230 fabricada pela Photonetics. A confiabilidade destas curvas está limitada ao intervalo denominado de “Limite experimental”, que é o intervalo espectral das medidas de ganho das	

quais foram extraídas as curvas das seções de choque. Fora deste intervalo as curvas seguem o comportamento espectral típico. ....	76
3.13 Espectro de ganho do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 com potência de bombeio de 19.8mW e potência de sinal de 0.6 $\mu$ W, e comparado com a simulação feita usando o Modelo Espacial. ....	77
3.14 Espectro de ganho do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 quando a potência de bombeio é 0.0mW e potência de sinal de 0.6 $\mu$ W, e comparado com a simulação obtida usando o Modelo Espacial. ....	77
3.15 Comportamento espectral do ganho para potências de sinal de entrada de 3.2 $\mu$ W (-25dBm), 22.4 $\mu$ W (-16.5dBm) e 141 $\mu$ W (-8.5dBm) em um EDFA feito com a EDF da Photonetics EDOS-230 de 17m com bombeio co-propagante em 980nm e potência $P_p=26.9$ mW (14.3dBm), e comparado com medidas experimentais. ....	78
3.16 Distribuição das potências do sinal, ASE $\pm$ e bombeio co-propagante ao longo de um EDFA feito de 70m de EDF da Photonetics EDOS-230. ....	79
3.17 Distribuição das potências do sinal, ASE $\pm$ e bombeio co- e contra-propagante ao longo de um EDFA feito de 70m de EDF da Photonetics EDOS-230. ....	80
3.18 Propagação espectral da ASE+ no EDFA feito de 70m de EDF da Photonetics EDOS-230 e bombeada com 50mW de bombeio co-propagante em 980nm. ....	81
3.19 Distribuição das potências do sinal e ASE $\pm$ ao longo de um EDFA feito de 30m de EDF da Photonetics EDOS-230, sem bombeio e com potência de sinal de entrada de 5mW. ....	81
3.20 Distribuição axial da inversão da população $N_1$ e $N_2$ ao longo do comprimento do EDFA de 30m, com potência de sinal de entrada de 5mW e sem bombeio. ....	82
3.21 Espectro da Figura de Ruído na saída de um EDFA feito com 17m de fibra da Photonetics EDOS-230, potência de sinal de entrada de 3.2 $\mu$ W e potência de bombeio de 26.9mW, para bombeio co- e contra-propagante em 980nm e 1480nm. ....	83
3.22 Forma das linhas de absorção e fluorescência normalizadas obtidas experimentalmente por meio do método <i>cutback</i> e medida da ASE+. ....	85
3.23 Simulação do comportamento espectral da absorção no EDFA feita com a fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 5 metros de comprimento. O pico de absorção, em 1528nm, indica uma atenuação de 14.6dB/m, que concorda com os dados experimentais. A potência do sinal de entrada é de 1 $\mu$ W. ....	86
3.24 Simulação do comportamento espectral do ganho para o EDFA feito com a fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 5 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co- e contra-propagante, com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de 1 $\mu$ W. ....	87
3.25 Figura de Ruído para o EDFA feito com fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 5 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co-propagante e contra-propagante, com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de 1 $\mu$ W. ....	87
3.26 Simulação do comportamento espectral do ganho para o EDFA feito com a fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 15 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co- e contra-propagante com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de 1 $\mu$ W. ....	88

3.27	Figura de Ruído para o EDFA feito com fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 15 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co- e contra-propagante com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de 1μW. ....	88
3.28	Forma das linhas de absorção e fluorescência típicas do telureto dopado com Érbio. ....	92
3.29	Comportamento espectral do ganho em um EDFA feito com fibra de telureto, com 50cm de comprimento, bidirecionalmente bombeada com 100mW em 1480nm. Potência do sinal de entrada é 1μW. ....	93
4.1	Rotina executada pelo Modelo Modal para o modelamento dos dispositivos ativos. ....	106
4.2	Ganho em função da potência de bombeio, calculado pelo Modelo Modal e comparado com o Modelo Espacial para o guia canal da Figura 3.5a, quando o feixe gaussiano é polarizado segundo o eixo “x” (TE), “y” (TM) e a 45 <sup>o</sup> do eixo “x” (Excitação mista TE e TM). As frações de potência de excitação são mostradas na Tabela 3.1. ....	109
4.3	Intensidade de potência do sinal normalizada $\psi_s$ , na entrada do guia da Figura 3.5a para excitação puramente TE, na qual a intensidade total é a combinação linear dos modos TE <sub>11</sub> e TE <sub>31</sub> , com a frações de potência dadas pela Tabela 3.1. ....	110
4.4	Comparação do ganho em função da potência do sinal de entrada para o dispositivo feito com base no guia da Figura 3.5a, bombeado com 100mW em 980nm, nas situações em que $C_{up}=C_3=C_{14}=0$ e $C_{up}\neq C_3\neq C_{14}\neq 0$ , calculado pelo Modelo Modal. ....	110
4.5	Ganho em função da potência de bombeio calculado pelo Modelo Modal e comparado com o Modelo Espacial para o dispositivo da Figura 3.5b com comprimento $L_w$ , desconsiderando os efeitos de conversão ascendente, e para potência do sinal de entrada de 1μW. ....	111
4.6	Comportamento espectral do ganho para o dispositivo amplificador feito com base no guia canal da Figura 3.5b, com. $L_w=3\text{cm}$ , $P_s(0)=1\mu\text{W}$ , $P_p(0)=30\text{mW}$ e para a excitação puramente TE. A concentração de érbio é de $N_{Er}=1\times 10^{26}$ íons/m <sup>3</sup> , uniformemente distribuída no núcleo, e o bombeio é feito no comprimento de onda de 980nm. ....	112
4.7	Ganho espectral do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 com potência de bombeio de 19.8mW e potência do sinal de entrada de 0.6μW. ....	114
4.8	Espectro de absorção do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 quando a potência de bombeio é 0.0mW e potência do sinal de entrada de 0.6μW. ....	114
4.9	Ganho em função da concentração de érbio para o dispositivo feito com base no guia de ondas da Figura 3.5b, com $L_w=8\text{cm}$ , quando os efeitos de conversão ascendente são levados em conta e desconsiderados. As potências do sinal e bombeio são de $P_s=1\mu\text{W @ } 1531\text{nm}$ e $P_p=100\text{mW @ } 980\text{nm}$ , respectivamente. ....	115
4.10	Densidades das populações (%) ao longo do dispositivo feito com base no guia de ondas da Figura 3.5b, com $L_w=8\text{cm}$ , quando os efeitos de conversão ascendente são levados em conta, e para as concentrações de érbio de $2.0\times 10^{26}$ íons/m <sup>3</sup> e $4.0\times 10^{26}$ íons/m <sup>3</sup> . A potência do sinal e bombeio são de $P_s=1\mu\text{W @ } 1531\text{nm}$ e $P_p=100\text{mW @ } 980\text{nm}$ , respectivamente. ....	117

4.11	Variação do índice de refração na região central do dispositivo da Figura 3.5b quando a potência de bombeio é fixada em 10mW e 0.0mW, e para potência do sinal de entrada $P_s(0)=1\mu\text{W}$ . .....	119
4.12	Dispersão ressonante para o material na região central do dispositivo da Figura 3.5b quando a potência de bombeio é fixada em 10mW e 0.0mW, e para potência do sinal de entrada $P_s(0)=1\mu\text{W}$ . .....	119
4.13	Variação do índice de refração efetivo em uma fibra óptica com raio do núcleo de 1.45 $\mu\text{m}$ , com comprimento de 209cm, e concentração de érbio de $2.6 \times 10^{24}$ ions/m <sup>3</sup> ( $\approx 250$ ppm), para diferentes potências de bombeio. A potência do sinal de entrada é de 0.8 $\mu\text{W}$ .(a)Resultado experimental, presente em [10].(b)Simulação feita usando o Modelo Modal. ....	120
4.14	Variação do índice de refração na região central de uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de 2 $\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, potência de bombeio de $P_p=50\text{mW}$ @ 980nm, potência de sinal de entrada de $P_s=1\mu\text{W}$ e para diferentes concentrações de érbio. Para a concentração de $N_{Er}=1 \times 10^{+26}$ ions/m <sup>3</sup> , calculou-se a variação do índice de refração para a potência de bombeio de 500mW. ....	122
4.15	Variação do índice de refração na região central da fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de 2 $\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, em função da intensidade do sinal para $1\text{nW} < P_s < 0.1\text{mW}$ ( $6.2 \times 10^1 \text{W/m}^2 < I_s < 6.2 \times 10^6 \text{W/m}^2$ ), $P_p=0.0\text{mW}$ e $\lambda_s=1550\text{nm}$ . ....	126
4.16	Variação do índice de refração na região central da fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de 2 $\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, em função da intensidade do bombeio para $0.0\text{mW} < P_p < 500\text{mW}$ ( $0.0\text{W/m}^2 < I_p < 61.6 \times 10^9 \text{W/m}^2$ ), $P_s=0.1\text{mW}$ ( $6.2 \times 10^6 \text{W/m}^2$ ) e $\lambda_s=1550\text{nm}$ . ....	128
4.17	Variação espectral do índice de refração na região central da fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de 2 $\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para potência de bombeio de 0.0, 10, 50, e 500mW @ 980nm, e potência de sinal de 1 $\mu\text{W}$ , concentração de érbio de $N_0=1 \times 10^{+26}$ ions/m <sup>3</sup> , na qual pode-se obter, qualitativamente, o valor do coeficiente $n_1$ das expansões (4.17) e (4.19). ....	128
5.1	Dispositivo óptico planar dopado com érbio com concentração de érbio $N_{Er}(x,z)$ , no qual propagam-se as ondas eletromagnéticas do sinal e do bombeio com polarização TE ( $\phi_{s/p}=E^{s/p}_x$ ) ou TM( $\phi_{s/p}=H^{s/p}_x$ ), .....	137
5.2	Rotina numérica do Modelo z-variante BPM, no estágio atual de desenvolvimento, na qual só um sinal de entrada e bombeio co-propagante são considerados. ....	145
5.3	Rotina numérica do Modelo z-variante BPM no qual são considerados a ASE+ e vários sinais e bombeios de entrada e em diferentes frequências. Perceber que esta rotina refere-se somente à propagação na direção $z=0 \rightarrow L_w$ . ....	147
5.4	Distribuições das potências do sinal e bombeio ao longo do dispositivo amplificador e comparadas com os resultados obtidos através do Modelo Espacial. ....	151
5.5	Variação do índice efetivo do sinal e do bombeio ao longo do dispositivo amplificador, baseado no guia de ondas mostrado Figura 3.5b. ....	152
5.6	Variação do índice de refração dentro do dispositivo amplificador, baseado no guia de ondas mostrado na Figura 3.5b. ....	153

5.7	Índice de refração efetivo para o sinal e para os comprimentos de ondas de 1530.5, 1531 e 1531.5nm ao longo do dispositivo amplificador. ....	154
5.8	Dispersão total ao longo do dispositivo amplificador. ....	155
5.9	Acoplador dopado com érbio com propriedade de chaveamento óptico: (a) dispositivo real, e (b) sua representação planar. ....	156
5.10	Propagação do campo elétrico do feixe de sinal com potência de $1\mu\text{W}$ e comprimento de onda de 1537nm no acoplador passivo (sem dopagem) mostrado na Figura 5.9, caracterizado por um comprimento de acoplamento de $L_c=1.98\text{cm}$ . ....	157
5.11	Propagação do campo elétrico do feixe de sinal com potência de $1\mu\text{W}$ e comprimento de onda de 1537nm no acoplador ativo (com dopagem) mostrado na Figura 5.9, na ausência de bombeio ( $P_p=0.0\text{mW}$ ), caracterizado por um comprimento de acoplamento de $L_c=1.86\text{cm}$ . ....	158
5.12	Propagação do campo elétrico do feixe de sinal com potência de $1\mu\text{W}$ e comprimento de onda de 1537nm no acoplador ativo (com dopagem) mostrado na Figura 5.9, sendo bombeado em 980nm com $P_p=500\text{mW}$ , caracterizado por um comprimento de acoplamento de $L_c=2.12\text{cm}$ . ....	158
5.13	Pico do campo elétrico do sinal das Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 na posição central do canal dopado, na qual vê-se a alteração no comprimento de acoplamento $L_c$ em função da potência do bombeio. ....	159
5.14	Representação planar de um acoplador óptico integrado dopado com érbio seguido de curva. ....	159
5.15	Propagação do campo elétrico do feixe do sinal (a) e do bombeio (b) excitados no Canal 1 da estrutura passiva (sem dopagem) da Figura 5.14 com potências de entrada de $1\mu\text{W}$ e $500\text{mW}$ para o sinal e bombeio, respectivamente. Em (a) é mostrando acoplamento de 3dB's para o comprimento de onda do sinal (1537nm) entre os canais, e em (b) é mostrado que o acoplamento entre os canais, no comprimento de onda do bombeio é desprezível. ....	160
5.16	Propagação do campo elétrico do feixe do sinal, com potência de entrada de $1\mu\text{W}$ e comprimento de onda de 1537nm excitado no canal 1 do dispositivo da Figura 5.14, e com potência de bombeio $P_p=0.0\text{mW}$ . ....	161
5.17	Propagação do campo elétrico do feixe do sinal, com potência de entrada de $1\mu\text{W}$ e comprimento de onda de 1537nm, bombeado em 980nm com potência de bombeio $P_p=95\text{mW}$ , excitados (sinal e bombeio) no canal 1 do dispositivo da Figura 5.14. ....	161
5.18	Propagação do campo elétrico do feixe do sinal, com potência de entrada de $1\mu\text{W}$ e comprimento de onda de 1537nm, bombeado em 980nm com potência de bombeio $P_p=500\text{mW}$ , excitados (sinal e bombeio) no canal 1 do dispositivo da Figura 5.14. ....	162
5.19	Dispositivo ativo feito de duas junções-Y, formando um interferômetro de Mach-Zehnder. Toda a estrutura é dopada. ....	163
5.20	Propagação do campo elétrico do feixe do bombeio com potência de entrada de $500\text{mW}$ e comprimento de onda de 980nm, ao longo do dispositivo da Figura 5.19. ....	163
5.21	Propagação do campo elétrico do feixe do sinal com potência de entrada de $1\mu\text{W}$ e comprimento de onda de 1537nm, ao longo do dispositivo da Figura 5.19. ....	164
5.22	Pico do campo elétrico do sinal ao longo do dispositivo da Figura 5.19. ....	164
A.1	Guia dielétrico generalizado. ....	179

A.2	Transformação de coordenadas aplicada aos elementos. ....	189
A.3	Domínio $\Omega$ discretizado em 4 elementos triangulares com nós globais de 1 a 5. ....	191
A.4	Guia dielétrico circular formado de barras coaxiais com raio interno “a” e externo “L”. ....	195
A.5	Funções de base para a discretização do domínio unidimensional.....	196

# Lista de Tabelas

Número da Tabela	Descrição da Tabela	Página
3.1	Frações de potência de excitação para o dispositivo da Figura 3.5a. ....	70
3.2	Parâmetros usados para escrever as seções de choque para os dispositivos da Figura 3.5....	70
4.1	Parâmetros usados para determinar as seções de choque para a EDF da Photonetics EDOS-230.....	113
4.2	Coefficientes não lineares da expansão dada pela equação (4.17), para uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para diferentes comprimentos de onda de sinal e para diferentes potências de bombeio. O fator de validade $FV \ll 1$ indica que a condição de regime não saturado está sendo preservada . ....	125
4.3	Coefficientes não lineares da expansão, dada pela equação (4.17), para uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para diferentes comprimentos de onda de sinal e para potência de bombeio $P_p=0.0\text{mW}$ . A concentração de érbio é de $N_0=1 \times 10^{+26}$ íons/ $\text{m}^3$ . ....	126
4.4	Coefficientes não lineares da expansão dada pela equação (4.19), para uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para diferentes comprimentos de onda de sinal e para potência de bombeio $P_s=0.1\text{mW}$ . A concentração de érbio é de $N_0=1 \times 10^{+26}$ íons/ $\text{m}^3$ . ....	127
5.1	Índices de refração usados para a representação planar do guia da Figura 3.5-b, nos comprimentos de onda do sinal e bombeio, através do método do índice de refração efetivo. ....	151
5.2	Índices de refração usados para a representação planar do acoplador da Figura 5.9-a, nos comprimentos de onda do sinal e do bombeio, através do Método do Índice Efetivo. ....	156
A.1	Mapeamento dos nós globais para a montagem das matrizes do problema de autovalores e autovetores final. ....	192

# Capítulo 1

## Introdução: Histórico e Motivação

O desenvolvimento dos amplificadores ópticos dopados com érbio, EDFA (*Erbium-Doped Fiber Amplifiers*) foi sem dúvida a contribuição tecnológica que deu maior impulso para o estabelecimento das comunicações ópticas na janela de 1.55  $\mu\text{m}$ . Os trabalhos pioneiros no desenvolvimento de dispositivos dopados com terras raras ocorreram a cerca de 4 décadas atrás[1],[2]. Contudo, a demonstração dos primeiros EDFA's com ganho satisfatório[3],[4], e o uso destes em sistemas de transmissão[5],[6], ocorreram a pouco mais de 10 anos. Devemos ressaltar que os EDFA's são um caso raro na história tecnológica, uma vez que desde sua demonstração em laboratório até sua comercialização passaram-se pouco mais de 3 anos, o que constitui um recorde. A partir destes trabalhos houve, em todo o mundo, um intenso trabalho de pesquisa para o desenvolvimento de dispositivos comerciais que fossem operacionalmente viáveis em sistemas de comunicação. Neste

processo, não somente o avanço tecnológico e as facilidades experimentais foram importantes, mas também o desenvolvimento de modelos suficientemente precisos para estes EDFA's.

Estes modelos foram, e continuam sendo, importantes para predizer o comportamento destes dispositivos e suas diferentes configurações. Além disto, estes modelos podem auxiliar no processo de entendimento das propriedades e características dos amplificadores ópticos, uma vez que estes servem de campo de teste para novas ideias de configurações de amplificadores. Esta característica e potencialidade dos modelos de EDFA's motivou este trabalho que tem por objetivo modelar de forma rigorosa tais dispositivos, usando como plataforma numérica a técnica dos elementos finitos.

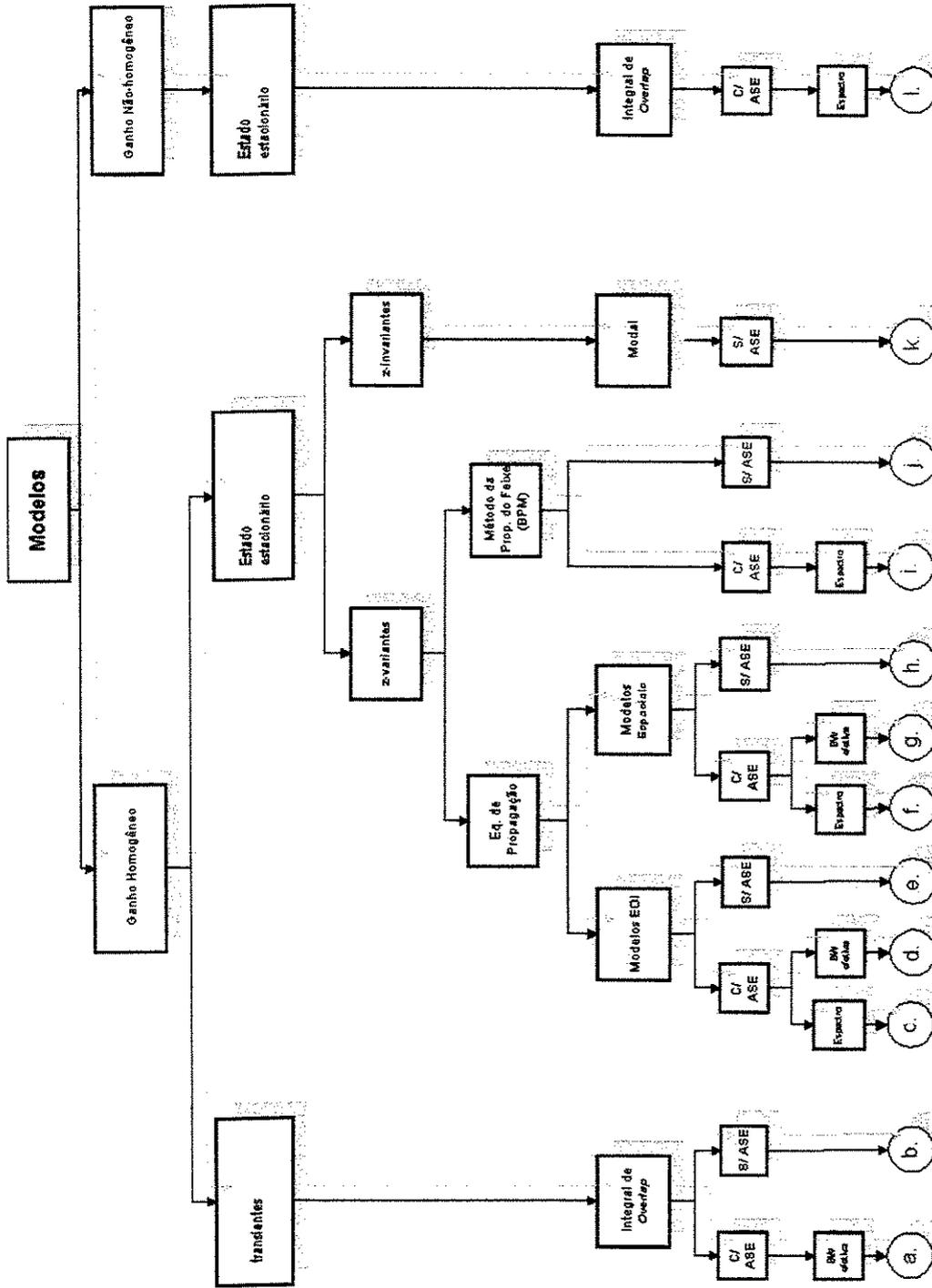
O objetivo deste Capítulo é mostrar ao leitor um panorama atual dos modelos de amplificadores ópticos existentes na literatura e apresentar sucintamente o conteúdo deste trabalho.

## 1.1 Modelos de amplificadores ópticos: panorama atual

No diagrama da Figura 1.1, baseado no trabalho de C.R. Giles *et al.*[7], são mostrados os principais modelos presentes na literatura. Segundo esta classificação, os modelos dividem-se em dois grande grupos que correspondem àqueles que consideram o ganho com alargamento homogêneo e àqueles com alargamento de ganho não-homogêneo.

Neste último grupo, a literatura atual apresenta trabalhos nos quais só o estado temporal estacionário é considerado e, ainda, que usa integrais efetivas de superposição para representar a correlação entre a distribuição do campo do bombeio e da distribuição do dopante (érbio). Um bom exemplo deste modelo é apresentado no trabalho de E. Desurvire *et al.*[8] e representado no diagrama com a letra "1".

Os modelos que consideram o ganho com alargamento homogêneo têm sido apresentados em dois grupo. Um leva em conta o regime de estado estacionário temporal ( $\partial/\partial t = 0$ ), e o outro



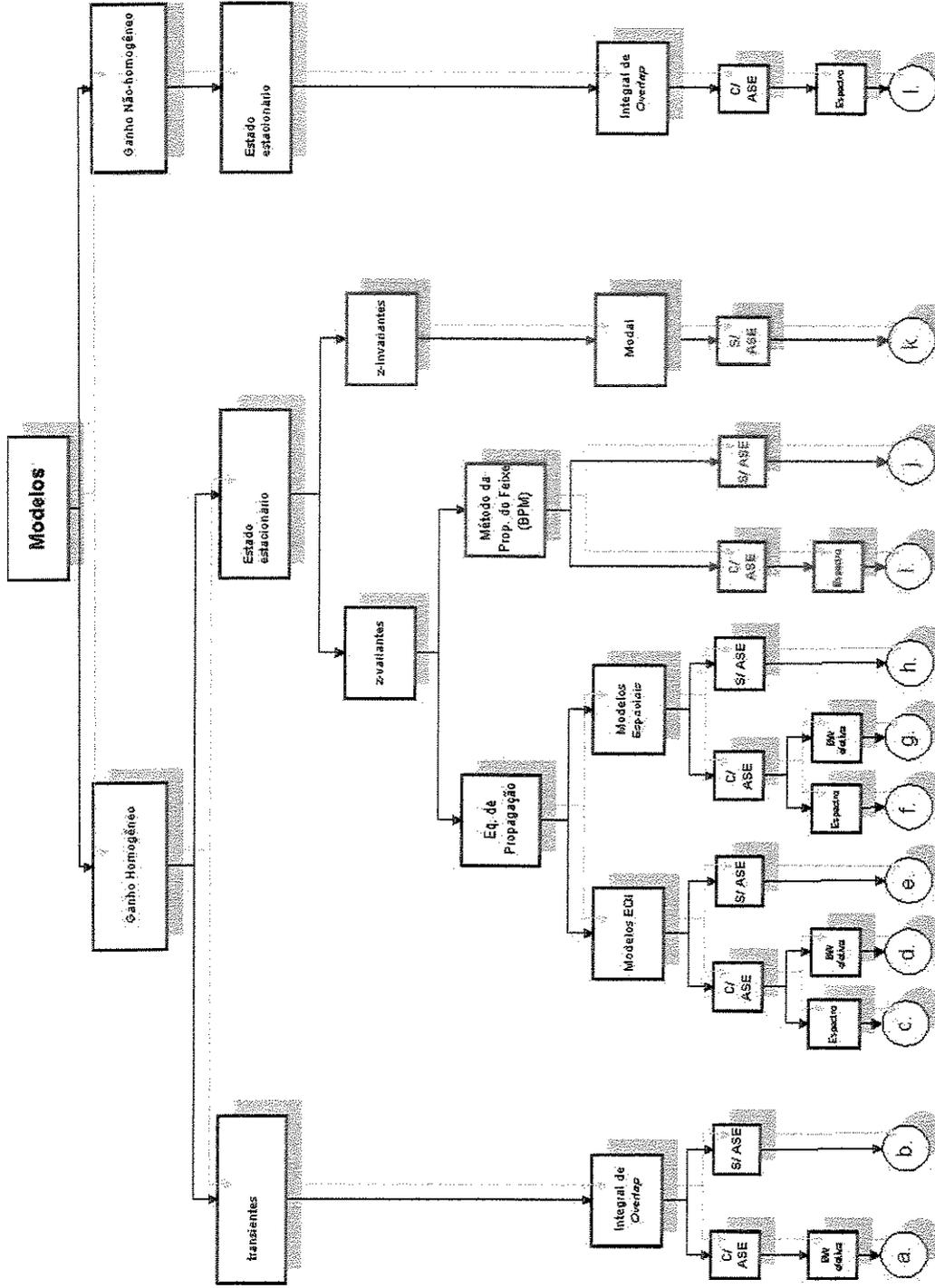
**Figura 1.1** - Diagrama mostrando os principais modelos presentes na literatura. O Modelo Espacial, Modelo Modal e z-variante BPM, incluídos neste diagrama, são apresentados e discutidos nos capítulos 3, 4 e 5 desta dissertação, respectivamente. As letras indicam as referências nas quais estes modelos aparecem: a.[9], b.[4], c.[7], d.[7, 16, 17 e 18], e.[7,14 e 15], f.[21 e 22], g.[20], h.[19], i.[23], j.[24], k.[10,11,12 e 13],l.[8].

considera o comportamento dos transientes (comportamento dinâmico) do dispositivo ( $\partial/\partial t \neq 0$ ). Neste último só aparecem trabalhos nos quais são usadas integrais efetivas de superposição e ainda a ASE (*Amplified Spontaneous Emission*) é tratada usando a largura de banda equivalente. Este é o caso do trabalho de R. Olshansky[9] e representado no diagrama pela letra “a”. Ainda neste grupo, e quando o ruído ASE não é considerado, podemos destacar o trabalho de E. Desurvire *et al.*[4], representado no diagrama pela letra “b”.

O grupo de modelos que consideram o alargamento homogêneo do ganho e ainda o estado estacionário temporal eram classificados, segundo C.R. Giles *et al.*[7], nos modelos EOI (*Effective Overlap Integrals*) e nos Espaciais. Neste trabalho estamos propondo a alteração desta classificação em que este grupo é dividido em modelos z-variantes e modelos z-invariantes. Na aproximação feita para os modelos z-variantes supõem-se que as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  (dos níveis estável ( ${}^4I_{15/2}$ ) e meta-estável ( ${}^4I_{13/2}$ ) do sistema energético existente em razão da presença dos íons de érbio no dispositivo) são variantes na direção de propagação ( $\partial\bar{N}_{1/2}/\partial z \neq 0$ ), e que estes modelos caracterizam-se pela necessidade de propagar os campos eletromagnéticos para encontrar a distribuição destas populações. Por outro lado, na aproximação feita para os modelos do grupo z-invariantes é considerado que as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  são invariantes na direção de propagação ( $\partial\bar{N}_{1/2}/\partial z = 0$ ), e que, portanto, não requerem a propagação eletromagnética.

No modelo z-invariante, apresentado neste trabalho, estamos usando uma plataforma numérica de análise modal. Assim, nesta dissertação, resolvemos chamar este modelo de Modelo Modal. O trabalho de P. Torres *et al.*[10] é um precursor deste modelo, porém com diversas limitações que são discutidas no Capítulo 4. Este Modelo Modal é apresentado na literatura, em recentes trabalhos[11,12,13], simulando dispositivos amplificadores curtos dopados com érbio feitos de guias de ondas integrados e fibras ópticas, sendo representado no diagrama pela letra “k”.

Os modelos do grupo z-variantes ainda dividem-se pela maneira que a propagação é feita. Quando considera-se que a distribuição transversal de campo e a geometria do dispositivo não se alteram na direção de propagação, a solução das equações de propagação para a simulação da



**Figura 1.1** - Diagrama mostrando os principais modelos presentes na literatura. O Modelo Espacial, Modelo Modal e z-variante BPM, incluídos neste diagrama, são apresentados e discutidos nos capítulos 3, 4 e 5 desta dissertação, respectivamente. As letras indicam as referências nas quais estes modelos aparecem: a.[19], b.[4], c.[7], d.[7, 16, 17 e 18], e.[7, 14 e 15], f.[21 e 22], g.[20], h.[19], i.[23], j.[24], k.[10,11,12 e 13],l.[8].

considera o comportamento dos transientes (comportamento dinâmico) do dispositivo ( $\partial/\partial t \neq 0$ ). Neste último só aparecem trabalhos nos quais são usadas integrais efetivas de superposição e ainda a ASE (*Amplified Spontaneous Emission*) é tratada usando a largura de banda equivalente. Este é o caso do trabalho de R. Olshansky[9] e representado no diagrama pela letra “a”. Ainda neste grupo, e quando o ruído ASE não é considerado, podemos destacar o trabalho de E. Desurvire *et al.*[4], representado no diagrama pela letra “b”.

O grupo de modelos que consideram o alargamento homogêneo do ganho e ainda o estado estacionário temporal eram classificados, segundo C.R. Giles *et al.*[7], nos modelos EOI (*Effective Overlap Integrals*) e nos Espaciais. Neste trabalho estamos propondo a alteração desta classificação em que este grupo é dividido em modelos z-variantes e modelos z-invariantes. Na aproximação feita para os modelos z-variantes supõem-se que as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  (dos níveis estável ( $^4I_{15/2}$ ) e meta-estável ( $^4I_{13/2}$ ) do sistema energético existente em razão da presença dos íons de érbio no dispositivo) são variantes na direção de propagação ( $\partial\bar{N}_{1/2}/\partial z \neq 0$ ), e que estes modelos caracterizam-se pela necessidade de propagar os campos eletromagnéticos para encontrar a distribuição destas populações. Por outro lado, na aproximação feita para os modelos do grupo z-invariantes é considerado que as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  são invariantes na direção de propagação ( $\partial\bar{N}_{1/2}/\partial z = 0$ ), e que, portanto, não requerem a propagação eletromagnética.

No modelo z-invariante, apresentado neste trabalho, estamos usando uma plataforma numérica de análise modal. Assim, nesta dissertação, resolvemos chamar este modelo de Modelo Modal. O trabalho de P. Torres *et al.*[10] é um precursor deste modelo, porém com diversas limitações que são discutidas no Capítulo 4. Este Modelo Modal é apresentado na literatura, em recentes trabalhos[11,12,13], simulando dispositivos amplificadores curtos dopados com érbio feitos de guias de ondas integrados e fibras ópticas, sendo representado no diagrama pela letra “k”.

Os modelos do grupo z-variantes ainda dividem-se pela maneira que a propagação é feita. Quando considera-se que a distribuição transversal de campo e a geometria do dispositivo não se alteram na direção de propagação, a solução das equações de propagação para a simulação da

propagação dos campos é uma ótima alternativa, haja visto o pouco esforço computacional requerido. Nesta classificação encontram-se os Modelos EOI e os Modelos Espaciais, que podem ser vistos no diagrama da Figura 1.1. Porém, quando a geometria e/ou a distribuição transversal de campo alteram-se na direção de propagação pode-se usar o Método de Propagação do Feixe(*BPM-Beam Propagation Method*)

O Modelo EOI simula a propagação dos campos eletromagnéticos por meio da solução das equações de propagação e ainda usando a integral efetiva de superposição para expressar os diferentes parâmetros dos dispositivos amplificadores. Este modelo tem sido usado e apresentado na literatura usando aproximações em que ASE é levada em conta ou é desconsiderada. Como exemplos do Modelo EOI que desconsidera a ASE tem-se os trabalhos de C.R. Giles *et al.*[7] e F.F. Rühl[14,15], sendo representado no diagrama pela letra “e”. Os Modelos EOI que consideram a ASE são mostrados na literatura com duas aproximações diferentes: os que representam a ASE com a largura de banda equivalente e os que discretizam o espectro desta em pequenos intervalos e tratam de forma independente cada um destes. A aproximação usando a largura de banda equivalente, é representada no diagrama pela letra “d”, apresenta boa aproximação para dispositivos menores ou iguais ao comprimento ótimo do dispositivo já que nestas condições a forma espectral da ASE segue aproximadamente aquela da curva da seção de choque de emissão. Como exemplo de trabalhos que usam a largura de banda equivalente para representar o ruído ASE tem-se os trabalhos de C.A.Caballero-Petersen[16] e M.J. Pontes[17] e C.R. Giles *et al.*[18]. O Modelo EOI com a ASE sendo representada por meio da discretização do espectro é mostrado no trabalho de C.R. Giles *et al.*[7], sendo representado no diagrama pela letra “c”.

O Modelo Espacial usa diretamente a solução dos campos eletromagnéticos envolvidos (sinal e bombeio) e a distribuição transversal de érbio para resolver as equações de propagação. Desta forma a distribuição transversal da densidade das populações, dos níveis energéticos considerados em razão da presença dos íons de érbio, pode ser calculada permitindo o cômputo dos parâmetros característicos dos dispositivos dopados com érbio com aproximação melhor que daquela permitida pelo Modelo EOI. Este modelo também é encontrado na literatura com a ASE sendo levada em conta ou desconsiderada. Como exemplo do Modelo Espacial no qual a ASE é desconsiderada temos o trabalho de Th. Pfeiffer *et al.*[19], e representado no diagrama pela letra “h”. O Modelo

Espacial que leva em conta o ruído ASE também tem sido implementado usando a largura de banda equivalente e a discretização do espectro. O trabalho de A. Bjarklev *et al.*[20] representa um exemplo do Modelo Espacial com a aproximação usando a largura de banda equivalente para representar o ruído ASE (representado pela letra “g” do diagrama). O Modelo Espacial que usa a discretização do espectro para representar os efeitos da ASE tem sido seguidamente citado em virtude de ser o modelo mais rigoroso existente na literatura para modelar dispositivos dopados com terras raras. Como exemplos de trabalhos que descrevem tal aproximação para o Modelo Espacial temos aqueles publicados por B. Pedersen *et al.*[21] e F. Di Pasquale *et al.*[22], e representados no diagrama pela letra “f”.

Finalmente temos o Modelo z-variante BPM, que aparece no diagrama da Figura 1.1. Este Modelo z-variante BPM é assim chamado em razão do uso da plataforma numérica do Método da Propagação do Feixe (BPM) para a simulação da propagação na condição em que as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  são variantes na direção de propagação. Assim como os modelos anteriormente citados, este pode ser implementado levando em conta ou desconsiderando os efeitos da ASE. O trabalho de A. Cucinotta *et al.*[23] é um exemplo rudimentar deste modelo uma vez que não modela de forma realística as não-linearidades induzidas e usa um esquema misto no qual o Modelo Espacial de Di Pasquale *et al.*[22] é usado para o cálculo da ASE. Além disso, uma vez que no trabalho de A. Cucinotta o feixe do bombeio não é propagado, não é possível a análise de dispositivos com geometria e dopagem variante na direção de propagação. O Modelo z-variante BPM que não considera a ASE é mostrado no Capítulo 5 desta dissertação sendo representado pela letra “j” no diagrama. O trabalho apresentado por F. Di Pasquale e H.E. Hernández-Figueroa[24] é um precursor desta aproximação em que tanto o feixe do sinal como o do bombeio são propagados. Contudo, neste último trabalho, os efeitos não-lineares induzidos pelos campos do sinal e bombeio não são considerados de forma realística.

## 1.2 Sinopse desta Dissertação

Esta dissertação objetiva descrever e apresentar os resultados e contribuições usando o Modelo Modal e o Modelo z-variante BPM. Torna-se necessário apresentar diversos conceitos e equações que caracterizam os meios ativos dopados com íons de érbio, e que são apresentados no Capítulo 2. Os resultados usando o Modelo Modal e o Modelo z-variante BPM são freqüentemente comparados com resultados experimentais e numéricos. As comparações com resultados numéricos são feitas usando o Modelo Espacial, com a ASE representada usando a discretização do espectro, sendo este mostrado no Capítulo 3. Os Capítulos 4 e 5 mostram o Modelo Modal e o Modelo z-variante BPM, respectivamente. E, finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e as sugestões de continuação deste trabalho.

# Referências do Capítulo 1

---

- [1]C.J. Koester e E. Snitzer, “Amplification in a fiber laser”, *Appl. Optics*, Vol.3, pp.1182, (1964).
- [2]J. Stone e C.A. Burrus, “Neodymium doped silica lasers in end-pumped fiber geometry”, *Appl. Phys. Letters*, Vol.23, pp.388, (1973).
- [3]R.J. Mears, L. Reekie, I.M. Jauncey e D.N. Payne, “Low noise erbium-doped fiber amplifier operating at 1.54 $\mu$ m”, *Electron. Letters*, Vol.23, pp.1026, (1987).
- [4]E. Desurvire, J.R. Simpson e P.C. Becker, “High-gain erbium-doped traveling-wave fiber amplifier”, *Opt. Letters*, Vol.12, pp.888-890, (1987) .
- [5]C.R. Giles, E. Desurvire, J.R. Talman, J.R. Simpson e P.C. Becker, “2-Gbits/s signal and amplification at  $\lambda=1.53\mu$ m in an erbium-doped single-mode fiber amplifier”, *Journ. of Lightwave Technol.*, Vol.7, No.1, pp.651-656, (1989).
- [6]K. Hagimoto et al., “A 212 Km non-repeated transmission experiment at 1.8Gb/s using LD pumped Er<sup>3+</sup>-doped fiber amplifiers in an IM/direct-detection repeater system”, *OFC'89*, Paper PD15, (1989).
- [7]C.R. Giles e E. Desurvire, “Modeling Erbium-Doped Fiber Amplifiers”, *Journal of Lightwave Technology*, Vol.9, No. 2, pp.271-283, (1991).
- [8]E. Desurvire, J.W. Sulhoff, J.L. Zyskind e J.R. Simpson, “Spectral Dependence of Gain Saturation and Effect of Inhomogeneous Broadening in Erbium-Doped Aluminosilicate Fiber Amplifiers”, *Anais da Conferência Tech. Dig. of Optical Amplifiers and Their Applications OAA '90*, Monterey, 6-8 agosto, post deadline paper PD9, (1990).
- [9]R. Olshansky, “Noise Figure for Erbium-Doped Optical Fiber Amplifiers”, *IEE Electronics Letters*, Vol.,24, No.22, pp.1363-1365, (1988).
- [10]P. Torres e A.M. Guzmán, “Complex Finite-Element Method Applied to the Analysis of Optical Waveguide Amplifiers”, *IEEE J. Lightwave Tech.*, Vol.15, No.3, pp.546-550, (1997).

- 
- [11]A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, “Efficient Stationary Model for Erbium-Doped Optical Amplifiers: Numerical and Experimental Comparisons”, *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol.23, No.5, pp.261-263, 5 dezembro, (1999).
- [12]A.P. López-Barbero, H.E. Hernández-Figueroa e P. Torres, “Numerical Modeling of Multimode Doped Optical Waveguides”, A ser publicado em *Advances in Engineering Software*, (2000).
- [13]A.P. López-Barbero, H.E. Hernández-Figueroa, A.A. Rieznik e H.L. Fragnito, “Stationary Method for Erbium-Doped Optical Amplifiers Modeling” Artigo submetido em *IEEE Journal of Lightwave Technology*, outubro, (1999).
- [14]F.F. Rühl, “Accurate Analytical Formulas for Gain-Optimized EDFAs”, *IEE Electronics Letters*, Vol.28, No.3, pp.312-313, (1992).
- [15]\_\_\_\_\_. “Calculation of Optimum Fiber Lengths for EDFAs at Arbitrary Pump Wavelengths”, *IEE Electronics Letters*, Vol.27, No.16, pp.1443-1445, (1991).
- [16]C.A. Caballero-Petersen, “Subsistemas Ópticos para Comunicações Solitônicas”, *Tese de Doutorado*, FEEC/DMO/Unicamp, junho, (1996).
- [17]M.J. Pontes, “Análise da Operação Saturada de Amplificadores de Potência a Fibra Dopada com Érbio”, *Tese de Doutorado*, FEEC/DMO/Unicamp, julho, (1996).
- [18]C.R. Giles e E. Desurvire, “Propagation of Signal and Noise in Concatenated Erbium-Doped Fiber Optical Amplifiers”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol.9, No. 2, pp.147-154, (1991).
- [19]Th. Pfeiffer e H. Bülow, “Analytical Gain Equation for Erbium-Doped Fiber Amplifiers Including Mode Field Profiles and Dopant Distributions”, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.4, No.5, pp.449-451, (1992).
- [20]A. Bjarklev, S.L. Hansen e J.H. Povlsen, “Large Signal Modelling of an Erbium Doped Fiber Amplifier”, *Anais da Conferência da Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers Conference, OE/Fibers’89*, part: Fiber Laser Sources and Amplifiers, Boston, 6-8 setembro, SPIE, Vol.1171, pp.118-129, (1989).
- [21]B. Pedersen, A. Bjarklev, J.H. Povlsen, K. Dybdal e C.C. Larsen, “The Design of Erbium-Doped Fiber Amplifiers”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol.9, No.9, pp.1105-1112, (1991).

- 
- [22]F. Di Pasquale e M. Zoboli, "Analysis of Erbium-Doped Waveguide Amplifiers by a Full-Vectorial Finite-Element Method", *IEEE Journ. of Lighthwave Tech*, Vol.11, pp.1565-1574, (1993).
- [23]A. Cucinotta, S. Selleri, L. Vicentti e M. Zoboli, "Active nonlinear integrated optical devices: a numerical analysis", *Optical and Quantum Electronics*, Vol.31, pp.1073-1084, (1999).
- [24]F. Di Pasquale e H.E. Hernández-Figueroa, "Pump controlled all-optical switching by using high-concentration  $\text{Er}^{3+}$  doped nonlinear waveguide", *Electronics Letters*, Vol.30, No.3, pp.232-233, February, (1994).

## Capítulo 2

# Teoria Básica dos Meios Ativos

Nos Capítulos 3, 4 e 5 veremos diversos modelos numéricos de amplificadores ópticos dopados com érbio . Para compreender profundamente estes modelos, torna-se necessário conhecer os mecanismos pelos quais as ondas eletromagnéticas (radiações) interagem com os meios materiais usados na construção dos dispositivos. Como resultado dessa interação estas ondas eletromagnéticas tem sua amplitude e velocidade de fase alteradas. Os meios que apresentam estas características são conhecidos como meios ativos. A “atividade” dos meios que nos referimos neste Capítulo diz respeito à consideração de transições atômicas dentro do espectro onde o meio é modelado.

O texto apresentado neste Capítulo não tem o objetivo de explorar exhaustivamente os assuntos aqui abordados, e não fazem parte da contribuição deste trabalho. O objetivo fundamental do texto deste Capítulo é fornecer aos leitores subsídios necessários para entender os modelamentos

numéricos. Portanto, o leitor pode recorrer à literatura referenciada para aprofundar-se nos tópicos abordados.

A Seção 2.1 apresenta os mecanismos de absorção e emissão de radiação dos meios ativos. Estes mecanismos de absorção e emissão de radiação representam uma atenuação ou amplificação na intensidade óptica de uma onda eletromagnética propagando-se neste meio, e o efeito de amplificação ou atenuação é modelado por meio de um coeficiente. A alteração deste coeficiente por meio de bombeio é também discutida, e é mostrado, na Seção 2.2, que este coeficiente está relacionado com a parte imaginária da constante de propagação da onda eletromagnética. Por sua vez a constante de propagação complexa é obtida por meio do uso da susceptibilidade complexa efetiva, que passamos a chamar simplesmente de *susceptibilidade complexa*. Esta é calculada por meio de uma análise perturbacional semiclássica, em que os átomos (ou íons) serão tratados segundo a teoria da mecânica quântica e os campos eletromagnéticos de maneira clássica. Isto é feito na Seção 2.3 considerando só dois níveis de energia. Aproveitaremos este meio simples para apresentar todo o formalismo pertinente ao cálculo da susceptibilidade. Este formalismo é o mesmo quando se consideram mais níveis de energia. A Seção 2.4 apresenta o modelamento da susceptibilidade complexa para um meio dopado com íons de érbio. Neste caso, por causa do efeito de *Stark Split*, ocorre o alargamento (*splitting*) dos níveis principais de energia (*mainfolds*). Assim, sempre que possível, nos referimos ao formalismo adotado na Seção 2.3. Por fim, é visto na Seção 2.5 uma série de efeitos de conversão ascendente (*upconversion*) que alteram as concentrações das populações excitadas nos diferentes níveis de energia permitidos dentro do meio ativo.

## 2.1 Atenuação e Amplificação de Ondas Eletromagnéticas em Meios Ativos

Os mecanismos de absorção e emissão de energia pelos átomos<sup>1</sup> são bem conhecidos e publicados vastamente na literatura de ensino de mecânica quântica[1,2,3]. Estes mecanismos envolvem fótons e fônons.

---

<sup>1</sup> Aqui estamos dizendo que o átomo ganhou ou perdeu energia. Mais precisamente, são os elétrons (das últimas camadas) que ganham ou perdem energia quando trocam de órbita.

Basicamente, os átomos podem ganhar ou perder energia por três processos: por liberação de fônons (perda); por troca de energia com outros átomos excitados; e por liberação ou absorção de um fóton. Quando o átomo perde energia por liberação de um fônon essa energia é transferida para o meio no qual ele se encontra na forma de energia mecânica. Este mecanismo de transferência/perda de energia não será aqui discutido, uma vez que interessam-nos somente os mecanismos nos quais haja envolvimento de fótons. Os processos de troca de energia entre átomos excitados (*upconversion processes*) são extremamente importantes no modelamento de amplificadores ópticos dopados com íons de terras raras, e estes processos são relacionados com altas concentrações de dopantes, em razão da aproximação entre os íons excitados[4]. Pela sua importância, estes processos<sup>2</sup> serão discutidos em separado na Seção 2.5. Vamo-nos concentrar nos mecanismos que envolvem a absorção e emissão de energia por meio de fótons.

Um átomo pode perder ou ganhar energia por emissão espontânea ou por emissão/absorção estimulada. A Figura 2.1 ilustra tais processos.

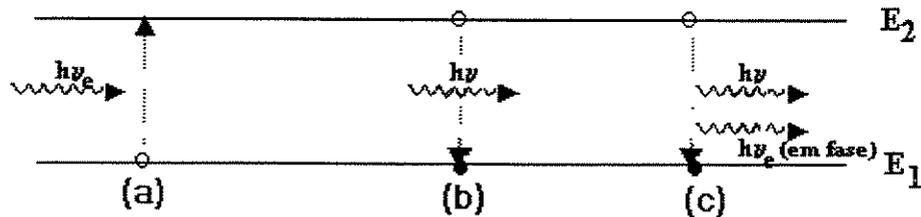


Figura 2.1 – Os círculos abertos e cheios representam o estado energético inicial e final do átomo.(a) Absorção estimulada. (b) Emissão espontânea. (c) Emissão estimulada.

Na Figura 2.1 tem-se um sistema considerando somente 2 estados energéticos, com energias  $E_1$  e  $E_2$  [Joules].

A particularidade existente no processo de emissão espontânea é que esta ocorre sem a existência de uma radiação externa. A presença de tais transições foi primeiramente deduzida por

<sup>2</sup> O processo de conversão ascendente conhecido como *Sequential two-photon absorption upconversion* lida com a absorção de fótons por átomos. Porém, pela particularidade e importância deste processo em amplificadores com altas concentrações de érbio, será estudado separadamente na Seção 2.5.

Einstein[5]. O processo de emissão espontânea, Figura 2.1(b), provoca a emissão de um fóton de energia  $h\nu=E_2-E_1$  ( $E_2>E_1$ ) e a redução da concentração de átomos  $N_2$  [átomos/m<sup>3</sup>] no estado energético 2, que passam para o estado energético 1. Aqui,  $h$  é a constante de Planck ( $6.626 \times 10^{-34}$  J.s), e  $\nu$  é a frequência [Hz] do fóton emitido. A variação da concentração de átomos<sup>3</sup> por unidade de tempo no estado energético 2 pode ser equacionada como

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2A = -N_2 \frac{1}{\tau_{\text{spont}}}, \quad (2.1)$$

na qual  $A$  é chamado de “coeficiente  $A$  de Einstein”, e  $\tau_{\text{spont}}$  [s] é o tempo de vida correspondente à transição de  $2 \rightarrow 1$ . O inverso do tempo de vida é chamado de taxa de emissão espontânea [1/s]. Em um sistema de só 2 níveis, como apresentado na Figura 2.1, pode-se equacionar a variação da população por unidade de tempo no estado energético 1 por meio da equação

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1A = N_1 \frac{1}{\tau_{\text{spont}}}, \quad (2.2)$$

na qual considerou-se que não houve variação da quantidade total de átomos no sistema. Assim

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{dN_2}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

O sistema formado pelas equações (2.1) e (2.2) é conhecido como *equações de taxa* do sistema ativo considerado. A complexidade deste sistema aumenta quanto maior for o número de níveis e processos de absorção e emissão considerados.

---

<sup>3</sup> É comum usar o termo “população” ao referir-se à concentração ou ao número de átomos por unidade de volume em um determinado estado energético.

Os processos (a) e (c), mostrados na Figura 2.1, são a absorção e emissão estimuladas, e a particularidade destes é que a transição de um estado energético para outro ocorre por causa da presença de um fóton externo com energia<sup>4</sup>  $h\nu_e$ , em que  $\nu_e$  é a frequência da radiação externa. Esse fóton externo pode colidir com um átomo do nível 1. Neste processo de colisão, parte da energia  $h\nu_e$  deste fóton externo é passada para o átomo, elevando sua energia para o nível 2. Este processo, ilustrado na Figura 2.1(a) é a absorção estimulada. Por outro lado, este fóton externo pode induzir a emissão de um outro fóton, fazendo com que um íon excitado no nível de energia 2 perca parte de sua energia, decaindo para o nível de energia 1. Este processo está ilustrado na Figura 2.1(c) e é chamado de emissão estimulada. Neste processo, o fóton emitido possui um alto grau de coerência[6]. A taxa estimulada de transições  $W$  entre os estados energéticos 1 e 2 é dada por[3]

$$W(\nu) = \frac{\lambda^3 g(\nu)}{8\pi h c_0 n^2 \tau_{\text{spont}}} I_\nu \quad (2.4)$$

na qual  $\lambda$  [m] é o comprimento de onda da radiação do fóton externo de frequência  $\nu=c_0/\lambda$ ,  $n$  é o índice de refração do meio,  $c_0$  [ $3 \times 10^8$  m/s] é a velocidade da luz no vácuo,  $I_\nu$  [ $W/m^2$ ] é a intensidade da radiação externa e  $g(\nu)$  [s] ( $g(\nu) > 0 \forall \nu$ ) é a função de forma da linha da transição atômica considerada. Na Figura 2.1(c) está representado apenas um dos fótons externos, com o objetivo de ilustrar o processo de transição estimulada. A intensidade  $I_\nu$ , da radiação externa, é o fluxo de fótons por unidade de área. Podemos, então, equacionar o que ocorre quando a radiação externa de intensidade  $I_\nu$  atravessa um meio com concentração atômica  $N_1$  e  $N_2$  nos estados de energia 1 e 2, respectivamente. A quantidade de transições de  $2 \rightarrow 1$  e de  $1 \rightarrow 2$  por unidade de volume e por unidade de tempo é

$$\begin{cases} N_{2 \rightarrow 1} = N_2 W(\nu) \\ N_{1 \rightarrow 2} = N_1 W(\nu) \end{cases} \quad (2.5)$$

---

<sup>4</sup> O princípio da incerteza garante que um fóton de energia  $h\nu_e < h\nu$  pode induzir a transição de um átomo do nível  $1 \rightarrow 2$ . Essa incerteza é representada pela largura de linha  $g(\nu)$ .

Vamos considerar que  $N_1 > N_2$ , e que, portanto, há um excesso de transições de  $1 \rightarrow 2$  sobre as transições de  $2 \rightarrow 1$ . Este excesso é  $(N_1 - N_2) \times W(\nu)$ . Como exposto anteriormente, cada transição de  $1 \rightarrow 2$  implica na perda de um fóton da radiação externa (absorção). Logo, o total de potência perdida pela radiação externa, por unidade de volume, será

$$\frac{P}{\Delta v} = (N_1 - N_2)W(\nu)h\nu \quad (2.6)$$

na qual  $\Delta v$  é a unidade de volume  $[m^3]$ . Consideremos a radiação externa na forma de onda plana com intensidade  $I_\nu$ , atravessando um meio ativo de comprimento  $\Delta z$  [m], seção reta  $S$   $[m^2]$  e volume  $\Delta v = S\Delta z$ , conforme a Figura 2.2. De acordo com a equação (2.6), este meio absorve uma potência  $P$ . Em outras palavras, a variação da potência da radiação externa, ao atravessar o meio de comprimento  $\Delta z$ , pode ser escrita como

$$\frac{dP}{dz} \approx \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} = - \frac{(N_1 - N_2)W(\nu_p)h\nu_p \Delta v}{\Delta z} \quad (2.7)$$

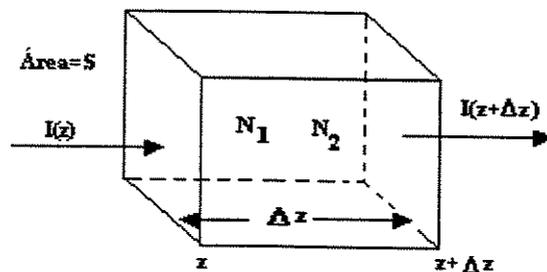


Figura 2.2 – Radiação externa de intensidade  $I_\nu$  propagando-se por um meio ativo de comprimento  $\Delta z$ .

Dividindo a equação (2.7) pela área da seção reta  $S$  do meio considerado, tem-se

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -(N_1 - N_2)W(\nu)h\nu. \quad (2.8)$$

Usando a equação (2.4) na equação (2.8) tem-se

$$\frac{dI_\nu}{dz} = -(N_1 - N_2) \frac{\lambda_p^3 g(\nu)}{8\pi h c_0 n^2 \tau_{spont}} I_\nu h\nu \quad (2.9)$$

Então, de acordo com a equação (2.9), pode-se dizer que a intensidade da radiação distribui-se exponencialmente dentro do meio ativo,

$$I_\nu(z) = I_\nu(0) \text{Exp}(-\gamma z) \quad (2.10)$$

na qual  $\gamma$  é o coeficiente de ganho de potência dado por

$$\gamma = \gamma(\nu) = (N_1 - N_2) \frac{\lambda_p^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \tau_{spont}} \quad (2.11)$$

Usando a equação (2.11) podemos definir a seção eficaz da transição, também conhecida como *seção de choque*, tal que

$$\sigma(\nu) = \frac{\lambda^2 g(\nu)}{8\pi n^2 \tau_{spont}}. \quad (2.12)$$

Usando a equação (2.12) pode-se rescrever a equação (2.11) como

$$\gamma(\nu) = (N_1 - N_2) \sigma(\nu). \quad (2.13)$$

A relação de Boltzmann,  $N_1 = N_2 \text{Exp}((E_2 - E_1)/k_B T)$ , em que  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta, indica que no equilíbrio térmico,  $N_1 > N_2$ . Logo, por meio da equação (2.13), tem-se que  $\gamma$  é maior que zero o que indica que a intensidade da radiação externa será atenuada ao passar pelo meio ativo considerado. Em casos de meios lasers ou amplificadores, existem meios de “bombear” átomos do estado energético 1 para o estado 2 forçando a que  $N_2 > N_1$ . Nesta situação,

diz-se que houve “inversão de população”. Novamente, por meio da equação (2.13) vê-se que na condição de população invertida  $\gamma$  é menor que zero e o meio apresenta ganho (amplificação) para a radiação externa que o atravessa. Este é o princípio básico de operação dos amplificadores ópticos e lasers.

Para entender o mecanismo de bombeio de um meio ativo, vamos considerar um sistema de 2 níveis como o apresentado na Figura 2.3.

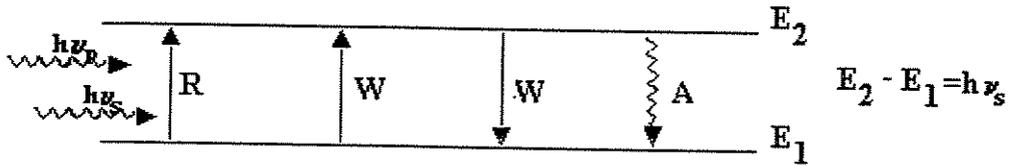


Figura 2.3 – Sistema de 2 níveis atravessado por duas ondas eletromagnéticas externas de intensidades  $I_s$  e  $I_p$  estimulando taxas de transferência de energia  $R$  e  $W$  entre os níveis 1 e 2.

Este sistema é atravessado por duas radiações externas com frequências  $\nu_s$  e  $\nu_p$ , com intensidades  $I_s$  e  $I_p$ , tal que  $\nu_p > \nu_s$ . As radiações nas frequências  $\nu_p$  e  $\nu_s$  serão denominadas de bombeio (*pump*) e sinal, respectivamente. Além das taxas de absorção/emissão estimulada  $W$  na frequência do sinal e emissão espontânea  $A$ , mostradas na Figura (2.3), tem-se, ainda, a taxa de absorção estimulada  $R$  na frequência do bombeio. Usando as equações (2.4) e (2.12) podemos escrever as taxas  $W$  e  $R$  como

$$\begin{cases} W(\nu_s) = \frac{\sigma(\nu_s)}{h\nu_s} I_s \\ R(\nu_p) = \frac{\sigma(\nu_p)}{h\nu_p} I_p \end{cases} \quad (2.14)$$

As taxas presentes nas equações (2.14) permitem-nos escrever as equações de taxa para o sistema da Figura 2.3 como

$$\begin{cases} \frac{d\bar{N}_1}{dt} = -\bar{N}_1 R + \bar{N}_2 W - \bar{N}_1 W + \bar{N}_2 A \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} = +\bar{N}_1 R - \bar{N}_2 W + \bar{N}_1 W - \bar{N}_2 A \end{cases} \quad (2.15)$$

nas quais  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  são as densidades volumétricas normalizadas de átomos nos níveis 1 e 2, respectivamente, de tal forma que

$$\bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 1 \quad . \quad (2.16)$$

Impondo a condição de estado estacionário  $\left(\frac{d}{dt}\right) = 0$  nas equações (2.15), e ainda usando a condição de conservação dada pela equação (2.16), pode-se calcular as densidades  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$ , obtendo

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = \frac{W + A}{R + 2W + A} \\ \bar{N}_2 = \frac{R + W}{R + 2W + A} \end{cases} \quad (2.17)$$

Analisando o conjunto de equações (2.17) vê-se que, na ausência de bombeio ( $I_p=0 \rightarrow R=0$ ),  $\bar{N}_1 > \bar{N}_2$ . Nesta situação, conforme apontado pela equação (2.13), o meio ativo absorve a intensidade  $I_s$  do sinal. Quando o bombeio é ativado ( $I_p \neq 0 \rightarrow R \neq 0$ ), e ainda fazendo  $R \gg W$ , vê-se que  $\bar{N}_2 \cong 1$  e  $\bar{N}_1 \cong 0$ . Esta condição caracteriza um estado de população invertida, e nesta situação, conforme a equação (2.13), o meio ativo amplifica a intensidade  $I_s$  do sinal.

## 2.2 Propagação de ondas planas em meios ativos

Na Seção 2.1 mostramos que uma onda eletromagnética (radiação) pode ser atenuada ou amplificada quando propaga-se por um meio ativo. Esta atenuação ou amplificação pode ser

equacionada por meio do cálculo da constante de propagação complexa da onda eletromagnética que se propaga neste meio. Surge, então, a motivação para equacionarmos a permissividade elétrica complexa do meio ativo.

A propagação de ondas eletromagnéticas é governada por leis físicas que podem ser matematicamente descritas pelas equações de Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

nas quais o vetor de densidade de fluxo elétrico  $\mathbf{D}$  [C/m<sup>2</sup>] e o vetor intensidade de campo elétrico  $\mathbf{E}$  [V/m] relacionam-se entre si por meio da relação constitutiva

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.19)$$

na qual  $\mathbf{P}$  é o vetor polarização elétrica [C.m/m<sup>3</sup>]<sup>5</sup>,  $\varepsilon$  é a permissividade elétrica do meio ativo e  $\varepsilon_0$  ( $8.8542 \times 10^{-12}$  F/m) é a permissividade elétrica do vácuo. Consideremos que a onda eletromagnética associada ao campo elétrico  $\mathbf{E}$  propaga-se num meio ativo. Vamos considerar só dois níveis de energia  $E_1$  e  $E_2$  deste meio (entre vários que este meio eventualmente possua), de forma que a diferença de energia entre estes dois níveis seja tal que a frequência de ressonância da transição seja dada por

$$\omega_0 = 2\pi \left( \frac{E_2 - E_1}{h} \right) \quad (2.20)$$

---

<sup>5</sup> A dimensão do vetor polarização elétrica é momento de dipolo por unidade de volume. Então, preferimos deixar explicitada a relação m/m<sup>3</sup>.

Por simplicidade, daremos um tratamento escalar a esta análise. Assim, o vetor intensidade de campo elétrico, no domínio do tempo, passa a ser representado por

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t) = \text{Re}\{E_0 e^{j\omega t}\} \quad (2.21)$$

na qual  $j = \sqrt{-1}$ , e  $\omega$  pertence ao intervalo  $\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega$  ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ), de tal forma que fique caracterizado que a frequência  $\omega$  está próxima da frequência de ressonância  $\omega_0$  da transição. O vetor polarização elétrica pode ser então escrito como

$$P(t) = N \langle \hat{\mu}(t) \rangle = N \mu \cos(\omega t - \phi) = \text{Re}\{P_0 e^{j\omega t}\} \quad (2.22)$$

na qual  $\langle \hat{\mu}(t) \rangle$  é o valor médio do momento de dipolo elétrico [C.m],  $N$  é o número total de átomos ( $N = N_1 + N_2$ ) por unidade de volume (densidade volumétrica de átomos), e  $\phi$  a fase entre o campo elétrico e o vetor polarização. A amplitude  $P_0$ , na equação (2.22), pode ser escrita como

$$P_0 = \epsilon_0 \chi_a E_0, \quad (2.23)$$

em que  $\chi_a$  é a susceptibilidade elétrica complexa por causa da transição atômica. Comparando as equações (2.23) e (2.22) tem-se que  $\phi = \arg\{\chi_a\}$ , uma vez que na equação (2.23)  $\chi_a$  é o único termo complexo. Substituindo a equação (2.23) na equação (2.22) temos

$$P(t) = \text{Re}\{\epsilon_0 \chi_a E_0 e^{j\omega t}\}. \quad (2.24)$$

Pode-se representar a susceptibilidade elétrica como

$$\chi_a = \chi'_a - j\chi''_a, \quad (2.25)$$

com  $\chi'_a$  e  $\chi''_a$  reais.

Podemos escrever a permissividade elétrica  $\varepsilon$  do meio em função da susceptibilidade complexa  $\chi_a$ . Assim, usando a equação (2.19) teremos

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0 + P_0 = \varepsilon_0 (1 + \chi) E_0 = \varepsilon_0 (1 + \chi_a + \chi_b) E_0 = \varepsilon E_0, \quad (2.26)$$

na qual  $\chi_b$  é a susceptibilidade residual de fundo, em razão de todas as outras transições que eventualmente o meio ativo possua. Estas transições estão afastadas suficientemente da transição centrada em  $\omega_0$  tal que possamos garantir que  $\chi_b(\omega) \approx \chi_b$  dentro do intervalo  $\omega_0 - \Delta\omega < \omega < \omega_0 + \Delta\omega$ . Logo, da equação (2.26), tem-se

$$\varepsilon = \varepsilon_b \left( 1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_b} \chi_a \right) \quad (2.27)$$

em que  $\varepsilon_b = \varepsilon_0 (1 + \chi_b)$  é a permissividade de fundo, de tal forma que o índice de refração do meio ativo, afastado da transição centrada em  $\omega_0$ , seja  $n = \sqrt{\varepsilon_b / \varepsilon_0}$ .

Podemos escrever a equação do campo elétrico associado à onda eletromagnética que se propaga no meio ativo introduzindo a dependência espacial na equação (2.21). Assim,

$$E(t) = \text{Re} \left\{ E_0 e^{j\omega t} e^{-jk'z} \right\} = E_0 \cos(\omega t - k'z), \quad (2.28)$$

em que  $k'$  é a constante de propagação complexa da onda eletromagnética

$$k' = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \quad (2.29)$$

Usando a equação (2.27) na equação (2.29) tem-se que

$$k' = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu \epsilon_b \left( 1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon_b} \chi_a(\omega) \right)} \cong \omega \sqrt{\mu \epsilon_b} \left( 1 + \frac{\epsilon_0}{2\epsilon_b} \chi_a(\omega) \right), \quad (2.30)$$

em que foi usado<sup>6</sup> que  $|\chi_a(\omega)| \ll 1$ . Definindo  $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_b}$ , que é a constante de propagação da onda eletromagnética na frequência  $\omega$ , longe da frequência de ressonância  $\omega_0$ , e ainda usando a equação (2.25) obtemos

$$k' = k \left( 1 + \frac{\chi'_a(\omega)}{2n^2} \right) - j \frac{\chi''_a(\omega)}{2n^2}. \quad (2.31)$$

O efeito da polarização atômica, que é proporcional à susceptibilidade  $\chi_a$ , é melhor compreendido substituindo a equação (2.31) na equação (2.28)

$$E(z, t) = E_0 \text{Exp} \left( -k_0 \frac{\chi''_a(\omega)}{2n} z \right) \cos \left( \omega t - k_0 z \left( n + \frac{\chi'_a(\omega)}{2n} \right) \right) \quad (2.32)$$

na qual  $k_0 = \sqrt{\mu \epsilon_0}$  é a constante de propagação da onda eletromagnética no vácuo. Da equação (2.32) percebe-se que a intensidade do campo elétrico será exponencialmente alterada. Assim, o coeficiente de ganho  $\gamma$  pode ser escrito como

$$\gamma = \gamma(\omega) = k_0 \frac{\chi''_a(\omega)}{n}. \quad (2.33)$$

Podemos comparar a equação (2.33) com as equações (2.11) ou (2.13) e obter

$$k_0 \frac{\chi''_a(\nu)}{n} = (N_1 - N_2) \frac{\lambda^2 g(\nu)}{8\pi n^2 t_{\text{spont}}} \quad (2.34)$$

---

<sup>6</sup> A dependência de  $\chi_a$  em  $\omega$  foi aqui introduzida sem nenhuma justificativa. Esta dependência será rigorosamente justificada na Seção 2.3 por meio de um formalismo usando matriz densidade.

A expressão (2.34), mostra que o sinal da parte imaginária da susceptibilidade elétrica pode ser alterado por meio do processo de bombeamento, citado na Seção 2.1.

Da equação (2.31) tem-se que a variação do índice de refração  $\delta n$ , nas proximidades da ressonância atômica na frequência  $\omega_0$ , é dada por

$$\delta n(\lambda) = \frac{\chi'_a(\lambda)}{2n}. \quad (2.35)$$

que permite-nos calcular a *dispersão ressonante*[7]  $D_R$  como

$$D_R(\lambda) = -\frac{\lambda}{2nc_0} \left( \frac{\partial^2 \chi'_a(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right), \quad (2.36)$$

na qual  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} \cong 0$  para comprimentos de onda próximos a  $\frac{2\pi c_0}{\omega_0}$ . Esta dependência pode ser introduzida na equação (2.36) usando modelos presentes na literatura[8]. Os efeitos da dispersão ressonante são significantes quando a largura dos pulsos propagando-se no meio ativo são da ordem de  $10^{-15}$ s [9].

## 2.3 Susceptibilidade complexa de um meio ativo

Nesta Seção vamos equacionar a susceptibilidade complexa  $\chi_a$  considerando só uma transição no meio ativo. Este equacionamento se dará por meio do formalismo da matriz densidade. Com os resultados deste formalismo, poderemos equacionar a função de forma da linha atômica  $g(\nu)$ , e que nos permitirá escrever, de forma mais completa, o coeficiente de ganho  $\gamma$  e a seção de choque  $\sigma(\nu)$ .

Além disso, as conseqüências da saturação do meio, em razão da presença de uma radiação externa, serão apresentadas. Finalmente, as relações de Kramers-Kronig, que estabelecem uma relação entre a parte real e imaginária da susceptibilidade complexa  $\chi_a$ , serão mostradas.

Inicialmente, vamos equacionar a relação existente entre a susceptibilidade elétrica  $\chi_a$  e o momento de dipolo de um meio ativo que possui uma transição atômica<sup>7</sup> com níveis de energia  $E_1$  e  $E_2$ . Vamos considerar a existência de uma radiação eletromagnética externa  $E(t)$ , de frequência próxima à frequência de ressonância  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ , e  $\hbar = h/2\pi$ . A consideração desta radiação externa será útil para equacionarmos a saturação da transição. Usando as equações (2.22), (2.24) e (2.25) temos

$$\begin{aligned} N\langle\hat{\mu}(t)\rangle &= \text{Re}\left\{\epsilon_0(\chi'_a - j\chi''_a)E_0 e^{j\omega t}\right\} \\ N\langle\hat{\mu}(t)\rangle &= \epsilon_0\chi'_a E_0 \cos(\omega t) + \epsilon_0\chi''_a E_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

nas quais  $\langle\hat{\mu}(t)\rangle$  é o valor médio do momento de dipolo da transição. Resta-nos resolver  $\langle\hat{\mu}(t)\rangle$  e usar(2.37) para encontrar a susceptibilidade  $\chi_a$ .

O valor médio do momento de dipolo  $\langle\hat{\mu}(t)\rangle$  pode ser calculado como

$$\langle\hat{\mu}(t)\rangle = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{\mu}) = \sum_n (\hat{\rho}\hat{\mu})_{nn} \quad (2.38)$$

em que  $\hat{\rho}$  e  $\hat{\mu}$  são as representações matriciais das densidade e momento de dipolo elétrico da transição, tal que

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

<sup>7</sup> Perceber que este formalismo resultará no cálculo da susceptibilidade devido somente à transição em questão.

<sup>8</sup> O operador "tr(\*)", usado em (2.38), é a abreviatura de *trace*.

Os termos  $\rho_{nn}$  representam a probabilidade de encontrar o meio ativo no estado de energia  $E_n$ . Assim, a quantidade  $N_n = N\rho_{nn}$ <sup>9</sup> representa a população no estado energético  $E_n$ . Os elementos matriciais de  $\hat{\mu}$  possuem as seguintes propriedades[1],

$$\begin{cases} \mu_{11} = \mu_{22} = 0 \\ \mu_{12} = \mu_{21} = \mu \end{cases} \quad (2.40)$$

Usando a equação (2.40) na equação (2.39) e substituindo na equação (2.38) tem-se

$$\langle \hat{\mu}(t) \rangle = \text{tr}(\hat{\rho}\hat{\mu}) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \right\} = \mu(\rho_{12} + \rho_{21}) \quad (2.41)$$

Os elementos  $\rho_{12}$  e  $\rho_{21}$ , presentes na equação (2.41), possuem propriedades hermiteanas ( $\rho_{12} = \rho_{21}^*$ ), e são calculados resolvendo a equação do movimento de Heisenberg[2] para a matriz densidade  $\hat{\rho}$

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = -\frac{j}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}]_{ij} + \text{termos de relaxação}, \quad (2.42)$$

em que  $\hat{\mathcal{H}}$  é o operador hamiltoniano<sup>10</sup>. Em razão da consideração da radiação externa, aqui representado pelo campo elétrico associado a esta radiação, o operador hamiltoniano pode ser separado em duas partes. Uma parte é o operador hamiltoniano do sistema não perturbado,  $\hat{\mathcal{H}}_0$ , e a outra parte,  $\hat{\mathcal{H}}'$ , devido à perturbação causada pela radiação externa. Assim, o hamiltoniano total do sistema pode ser escrito como

---

<sup>9</sup> Perceber que  $\rho_{nn} = \bar{N}_n$ , como foi usado na Seção 2.1.

<sup>10</sup> O operador hamiltoniano é o operador, que quando aplicado ao autovetor do sistema, resulta na equação de Schrödinger.

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}', \quad (2.43)$$

na qual

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{\mathcal{H}}'(t) = -\hat{\mu} E(t) \quad (2.44)$$

Substituindo a equação (2.43) na equação (2.42) tem-se

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = -\frac{j}{\hbar} [(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}'), \hat{\rho}]_{ij} + \text{termos de relaxação}. \quad (2.45)$$

Aplicando a propriedade  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ , temos que, usando a equação (2.45)

$$\frac{d\rho_{ij}}{dt} = -\frac{j}{\hbar} [(\hat{\mathcal{H}}_0), \hat{\rho}]_{ij} - \frac{j}{\hbar} [(\hat{\mathcal{H}}'), \hat{\rho}]_{ij} + \text{termos de relaxação} \quad (2.45)$$

Usando a equação (2.44) na equação (2.45) e desenvolvendo para  $\rho_{21}$ ,  $\rho_{11}$  e  $\rho_{22}$ , tem-se o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} (E_2 - E_1) \rho_{21} + \frac{j\mu E(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) + \text{relax.} \\ \frac{\partial (\rho_{11} - \rho_{22})}{\partial t} = +\frac{2j\mu E(t)}{\hbar} (\rho_{21} - \rho_{21}^*) + \text{relax.} \end{cases}, \quad (2.46)$$

na qual, por conveniência, juntamos as duas equações para  $\rho_{11}$  e  $\rho_{22}$ . Nas equações (2.46) os termos “relax.” são os termos de relaxação, responsáveis pelo valor de equilíbrio das densidades  $\rho_{21}$  e  $\rho_{11}$  e  $\rho_{22}$  quando a radiação externa é subitamente retirada. Consideraremos que os valores de equilíbrio para as densidades  $\rho_{11}$  e  $\rho_{22}$  são  $\rho_{11}^0$  e  $\rho_{22}^0$ , respectivamente. Este equilíbrio pode ser aquele alcançado termicamente (equacionado por meio da relação de Boltzmann) ou por um bombeamento

externo, como apontado pela equação (2.17). A densidade  $\rho_{21}$  tende, rapidamente, a zero. Matematicamente, a densidade de probabilidade  $\rho_{21}$  é definida como<sup>11</sup>

$$\rho_{nm} = \langle \Psi_n(t) \Psi_m^*(t) \rangle \quad (2.47)$$

na qual  $\Psi(t)$  é um autovetor do sistema. Em um sistema de dois níveis, como o que estamos tratando, temos  $\{n,m=1,2\}$ . Em razão da ortogonalidade da expansão modal de  $\Psi(t)$ , vê-se que, para  $n \neq m$ ,  $\rho_{nm} = 0$ . Quando  $E(t)$  está presente, existe uma correlação de fases que garante a média, definida pela equação (2.47), não nula. Assim, usando a equação (2.46) e os termos de relaxação discutidos, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} (E_2 - E_1) \rho_{21} + \frac{j\mu E(t)}{\hbar} (\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\rho_{21}}{T_2} \\ \frac{\partial (\rho_{11} - \rho_{22})}{\partial t} = +\frac{2j\mu E(t)}{\hbar} (\rho_{21} - \rho_{21}^*) - \frac{(\rho_{11} - \rho_{22}) - (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{\tau} \end{array} \right. \quad (2.48)$$

nas quais considerou-se que as densidades  $\rho_{11}$  e  $\rho_{22}$  relaxam<sup>12</sup> com taxa temporal constante  $1/\tau$ , e  $\rho_{21}$  relaxa com constante temporal  $1/T_2$ . Uma vez que estamos considerando a radiação externa na forma

$$E(t) = \frac{E_0}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad (2.49)$$

é conveniente escrever a densidade de probabilidade  $\rho_{21}$  em função de um termo lento e outro rápido, tal que

<sup>11</sup> No caso "puro",  $\rho_{nm} = |\Psi_n\rangle \langle \Psi_m|$ .

<sup>12</sup> A constante de relaxação  $\tau$  é a taxa de emissão espontânea vista na Seção 2.1. Será visto que a constante de relaxação,  $T_2$ , está relacionada com a largura da linha atômica considerada.

$$\rho_{21}(t) = \tilde{\rho}_{21}(t)e^{-j\omega t}. \quad (2.50)$$

Substituindo as equações (2.50) e (2.49) na equação (2.48), e dividindo por  $\text{Exp}(-j\omega t)$ , tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}_{21}}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar}(\omega_0 - \omega)\sigma_{21} + \frac{j\mu E_0}{2\hbar}(e^{2j\omega t} + 1)\Delta\rho - \frac{\tilde{\rho}_{21}}{T_2} \\ \frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = +\frac{2j\mu E_0}{2\hbar}(\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{21}^*e^{2j\omega t} + \tilde{\rho}_{21}e^{-2j\omega t} - \tilde{\rho}_{21}^*) - \frac{\Delta\rho - (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{\tau} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

nas quais  $\Delta\rho = \rho_{11} - \rho_{22}$ . Os termos em  $\text{Exp}(2j\omega t)$  podem ser desprezados, já que são termos de alta frequência comparados com  $\omega$  e não afetam a média de  $\tilde{\rho}_{21}(t)$  no intervalo  $2\pi/\omega$ . Assim sendo, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\rho}_{21}}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar}(\omega_0 - \omega)\sigma_{21} + \frac{j\mu E_0}{2\hbar}\Delta\rho - \frac{\tilde{\rho}_{21}}{T_2} \\ \frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = +\frac{2j\mu E_0}{2\hbar}(\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{21}^*) - \frac{\Delta\rho - (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{\tau} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Impondo a condição de estado estacionário,  $\partial/\partial t = 0$ , na equação (2.52), tem-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{j}{\hbar}(\omega_0 - \omega)\tilde{\rho}_{21} + \frac{j\mu E_0}{2\hbar}\Delta\rho - \frac{\tilde{\rho}_{21}}{T_2} = 0 \end{array} \right. \quad (2.53 - a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +\frac{2j\mu E_0}{2\hbar}(\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{21}^*) - \frac{\Delta\rho}{\tau} = \frac{-(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{\tau} \end{array} \right. \quad (2.53 - b)$$

Usando a equação (2.50) na equação (2.41) o valor médio do momento de dipolo é

$$\langle \hat{\mu}(t) \rangle = \mu (\text{Re}\{\tilde{\rho}_{21}\} \cos(\omega t) + \text{Im}\{\tilde{\rho}_{21}\} \text{sen}(\omega t)) \quad (2.54)$$

A parte real  $\text{Re}\{\tilde{\rho}_{21}\}$  e imaginária  $\text{Im}\{\tilde{\rho}_{21}\}$  de  $\tilde{\rho}_{21}$  pode ser calculada a partir do sistema de equações (2.53). Somando e subtraindo a equação (2.53a) com seu complexo conjugado, podemos obter duas equações em função de  $\tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{21}^*$  e  $\tilde{\rho}_{21} + \tilde{\rho}_{21}^*$ . Assim, fazendo

$$\begin{cases} A = \tilde{\rho}_{21} - \tilde{\rho}_{21}^* = 2j \text{Im}\{\tilde{\rho}_{21}\} \\ B = \tilde{\rho}_{21} + \tilde{\rho}_{21}^* = 2 \text{Re}\{\tilde{\rho}_{21}\} \\ C = \Delta\rho \end{cases},$$

tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & -j(\omega_0 - \omega) & \frac{j\mu E_0}{\hbar} \\ -j(\omega_0 - \omega) & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ \frac{j\mu E_0}{\hbar} & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)}{\tau} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

que tem, como solução,

$$\begin{cases} \text{Re}\{\tilde{\rho}_{21}\} = \frac{\Omega(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)(\omega_0 - \omega)T_2^2}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 \tau T_2} \\ \text{Im}\{\tilde{\rho}_{21}\} = \frac{\Omega(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)T_2}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 \tau T_2} \\ \Delta\rho = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \frac{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 T_2^2 + 4\Omega^2 \tau T_2} \end{cases}, \quad \text{em que } \Omega = \frac{E_0 \mu}{2\hbar} \quad (2.56)$$

é a frequência de Rabi. Comparando a equação (2.37) com a equação (2.54) e substituindo o resultado na equação (2.56), tem-se que

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi'_a = \frac{\mu^2 (N_1^0 - N_2^0) \Gamma_2}{\hbar \epsilon_0} \left( \frac{(\omega_0 - \omega) \Gamma_2}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \Gamma_2^2 + 4\Omega^2 \tau \Gamma_2} \right) \\ \chi''_a = \frac{\mu^2 (N_1^0 - N_2^0) \Gamma_2}{\hbar \epsilon_0} \left( \frac{1}{1 + (\omega_0 - \omega)^2 \Gamma_2^2 + 4\Omega^2 \tau \Gamma_2} \right) \end{array} \right. \quad (2.57 - a)$$

$$(2.57 - b)$$

nas quais fizemos  $(N_1^0 - N_2^0) = N(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0)$ . Vê-se que a susceptibilidade complexa é proporcional a  $(1 + (\omega_0 - \omega)^2 \Gamma_2^2)^{-1}$ , que é uma função lorentziana. A largura de linha de meia altura (*FWHM-Full Width at Half Maximum*) é  $\Delta\omega = 2/\Gamma_2$ . Fazendo  $4\Omega^2 \tau \Gamma_2 \ll 1$  na equação (2.57b) e substituindo na equação (2.33), tem-se que o coeficiente de ganho pode ser reescrito como

$$\gamma = \frac{k_0}{n} \frac{2\mu^2 (N_1^0 - N_2^0)}{\hbar \epsilon_0 \Delta\omega} \left( \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega} \right)^2} \right). \quad (2.58)$$

Porém, o momento de dipolo  $\mu$  pode ser substituído por[1]

$$\mu^2 = \frac{\epsilon \hbar c_0^3 \pi}{n^3 \omega^3 \tau},$$

que, substituído na equação (2.58), obtém-se

$$\gamma = \frac{\lambda^2}{2\pi n^2 \tau \Delta\omega} (N_1^0 - N_2^0) \left( \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega} \right)^2} \right). \quad (2.59)$$

Comparando a equação (2.59) com as equações (2.12) e (2.13), podemos obter

$$\sigma(\omega) = \frac{\lambda^2}{2\pi n^2 \tau \Delta\omega} \left( \frac{1}{1 + 4 \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega} \right)^2} \right), \quad (2.60)$$

que é a seção de choque da transição atômica centrada em  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ . Perceber que, para obter este resultado, foi considerado  $4\Omega^2 \tau T_2 \ll 1$ . Isto porque a seção de choque é uma característica do meio, e deve independe da radiação externa  $E(t)$ .

Outro resultado importante presente nas equações (2.56c) e (2.57), é que tanto  $\chi'_a$  e  $\chi''_a$  como a diferença de população  $\Delta N$ , tal que  $\Delta N = N\Delta\rho$ , decrescem com o aumento da intensidade da radiação externa. Este fenômeno é conhecido como *saturação* e torna-se significativo quando

$$\left( 1 + \frac{4(\omega_0 - \omega)^2}{\Delta\omega^2} \right) < \left( \frac{2\tau \mu^2 E_0^2}{\Delta\omega \hbar^2} \right).$$

A saturação tem consequência direta sobre o ganho do meio, já que  $\chi''_a$  sofre alteração. Além disso, provoca no meio um comportamento não linear uma vez que, como apontado pela equação (2.35), a variação do índice de refração  $\delta n$  do meio passa a ser função da intensidade da radiação. A saturação pode provocar importantes alterações na dispersão ressonante  $D_R$ , dada pela equação (2.36). Outra consequência importante da saturação é o alargamento da linha atômica. Na saturação, a largura da linha atômica passa de  $\Delta\nu$  para  $\Delta\nu_{\text{sat}}$ , que é equacionada como

$$\Delta v_{\text{sat}} = \Delta v \sqrt{1 + \frac{\mu^2 E_0^2 \tau}{\pi \Delta v \hbar^2}} \quad (2.61)$$

Para finalizar os objetivos desta Seção, vamos descrever as relações de Kramers-Kronig (KKR)[1,4,10,11]. De acordo com a teoria de variáveis complexas, a parte real e imaginária de uma função complexa, que não possui pólos no plano superior ou inferior, relacionam-se entre si por meio da transformada de Hilbert. Aplicando esta transformada à susceptibilidade complexa, dada pela equação (2.25), temos

$$\begin{cases} \chi'_a(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''_a(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \\ \chi''_a(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'_a(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \end{cases}, \quad (2.62)$$

nas quais P.V. é o valor principal de Cauchy da integral. O conjunto de integrais, dadas pelas equações (2.62), é conhecido como relações de Kramers-Kronig. Para verificar se a susceptibilidade complexa  $\chi_a$  satisfaz as KKR, vamos usar a equação (2.57) e verificar se  $\chi_a$  é analítica no plano inferior de  $\omega$ . Assim,

$$\begin{aligned} \chi_a &= \chi'_a - j\chi''_a = \\ &= -\frac{\mu^2 (N_1^0 - N_2^0)}{\hbar \varepsilon_0} \left( \frac{\omega - \left[ \omega_0 - j \frac{\Delta\omega}{2} \right]}{\left\{ \omega - \left[ \omega_0 - j \frac{\Delta\omega}{2} \sqrt{1+s^2} \right] \right\} \left\{ \omega - \left[ \omega_0 + j \frac{\Delta\omega}{2} \sqrt{1+s^2} \right] \right\}} \right), \quad (2.63) \end{aligned}$$

na qual  $s^2 = \frac{2\tau \mu^2 E_0^2}{\Delta\omega \hbar^2}$ . Na ausência de radiação externa ( $E(t)=0$ )  $\chi_a$  possui um único polo em

$\omega = \omega_0 + j \frac{\Delta\omega}{2}$ . Neste caso as relações de Kramers-Kronig se aplicam. Quando a radiação externa

está presente ( $E(t) \neq 0$ ),  $\chi_a$  possui dois pólos em  $\omega = \omega_0 \pm j \frac{\Delta\omega}{2} \sqrt{1+s^2}$ . Neste caso, as relações de Kramers-Kronig não se aplicam.

## 2.4 Susceptibilidade complexa de um meio dopado com érbio

Na Seção 2.3 foi usado o formalismo da matriz densidade para obter a susceptibilidade de um meio ativo considerando somente uma transição, ou seja, com dois níveis de energia bem definidos. Entre as várias conclusões obtidas com este formalismo destacam-se: a forma da linha da transição; a operação em regime de saturação; o comportamento não linear do meio; e a condição de validade das relações de Kramers-Kronig. No entanto, quando passamos a analisar um meio ativo específico, diversas particularidades podem ocorrer.

Vários estados quânticos de um átomo podem corresponder a um mesmo nível de energia. Estes estados quânticos com mesmo nível energético são conhecidos como degenerados. No caso específico de érbio, como dopante de um meio vítreo ou cristalino, os níveis energéticos principais sofrem um alargamento. Este alargamento é provocado pela presença do campo externo originado do meio que o circunda. A presença do campo externo, por causa do meio circundante, quebra a degenerescência dos estados quânticos principais, gerando uma certa quantidade de sub-níveis. Este efeito é conhecido como efeito *Stark*[12]. A Figura 2.4 ilustra o efeito Stark. Quando  $E_h=0$  (campo interno devido à estrutura vítrea ou cristalina do hospedeiro) os vários estados quânticos do átomo podem possuir mesmos níveis de energia 1 ou 2, da Figura 2.4, como consequência da degenerescência destes estados. Quando  $E_h \neq 0$ , ocorre a quebra desta degenerescência gerando  $g_1$  e  $g_2$  sub-níveis energéticos para cada nível principal 1 ou 2, respectivamente. Está claro que a susceptibilidade do meio ativo da Figura 2.4 deve levar em conta todas as transições entre os diversos sub-níveis.

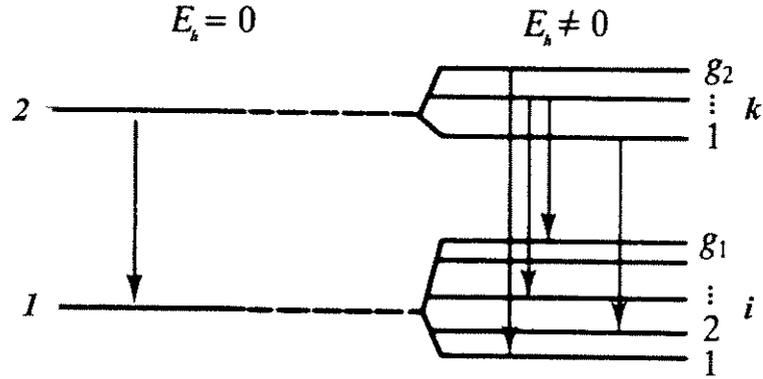


Figura 2.4 – Efeito *Stark* que quebra a degenerescência dos estados quânticos principais (1 e 2), gerando os sub-níveis  $i=1 \rightarrow g_1$  e  $k=1 \rightarrow g_2$ .

A Figura 2.5 mostra os diversos sub-níveis existentes em um meio dopado com érbio (consequência da quebra da degenerescência causada pelo efeito *Stark*) e que será usada como apoio para desenvolver o cálculo da susceptibilidade complexa. São considerados 3 níveis de energia e bombeamento em 980nm, que energiza os átomos do nível  $^4I_{15/2}$  para o nível  $^4I_{11/2}$ . Os níveis principais 1, 2 e 3 sofrem degenerescências tais que formam-se os sub-níveis  $1 \rightarrow g_1$ ,  $1 \rightarrow g_2$  e  $1 \rightarrow g_3$ , respectivamente. O formalismo adotado, neste caso, é o mesmo apresentado na Seção 2.3 para o cálculo da susceptibilidade para um meio que possui só uma transição. As quantidades  $\bar{\rho}_{11}$  e  $\bar{\rho}_{22}$  e  $\bar{\rho}_{33}$ , da Figura 2.5, representam as probabilidades de encontrar um átomo nos níveis de energia principal 1, 2 ou 3, respectivamente. Estas relacionam-se com as probabilidades  $\rho_{ii}$ ,  $\rho_{kk}$  e  $\rho_{ll}$ , de encontrar um átomo no sub-nível de energia  $i$ ,  $k$  ou  $l$ , por intermédio de

$$\rho_{ii} = p_{1i} \bar{\rho}_{11}; \quad \rho_{kk} = p_{2k} \bar{\rho}_{22}; \quad \rho_{ll} = p_{3l} \bar{\rho}_{33} \quad , \quad (2.64)$$

com  $i=1, g_1$ ,  $k=1, g_2$  e  $l=1, g_3$ . Os pesos  $p_{1i}$ ,  $p_{2k}$  e  $p_{3l}$  são as distribuições de Boltzmann para o nível principal  $n=1, 2, 3$ .

$$p_{nm} = \frac{\exp[-(E_m - E_1)/k_B T]}{\sum_{p=1}^{g_n} \exp[-(E_p - E_1)/k_B T]}, \quad (2.65)$$

na qual  $E_i$  é a energia do  $i$ -ésimo sub-nível do nível principal “ $n$ ”.

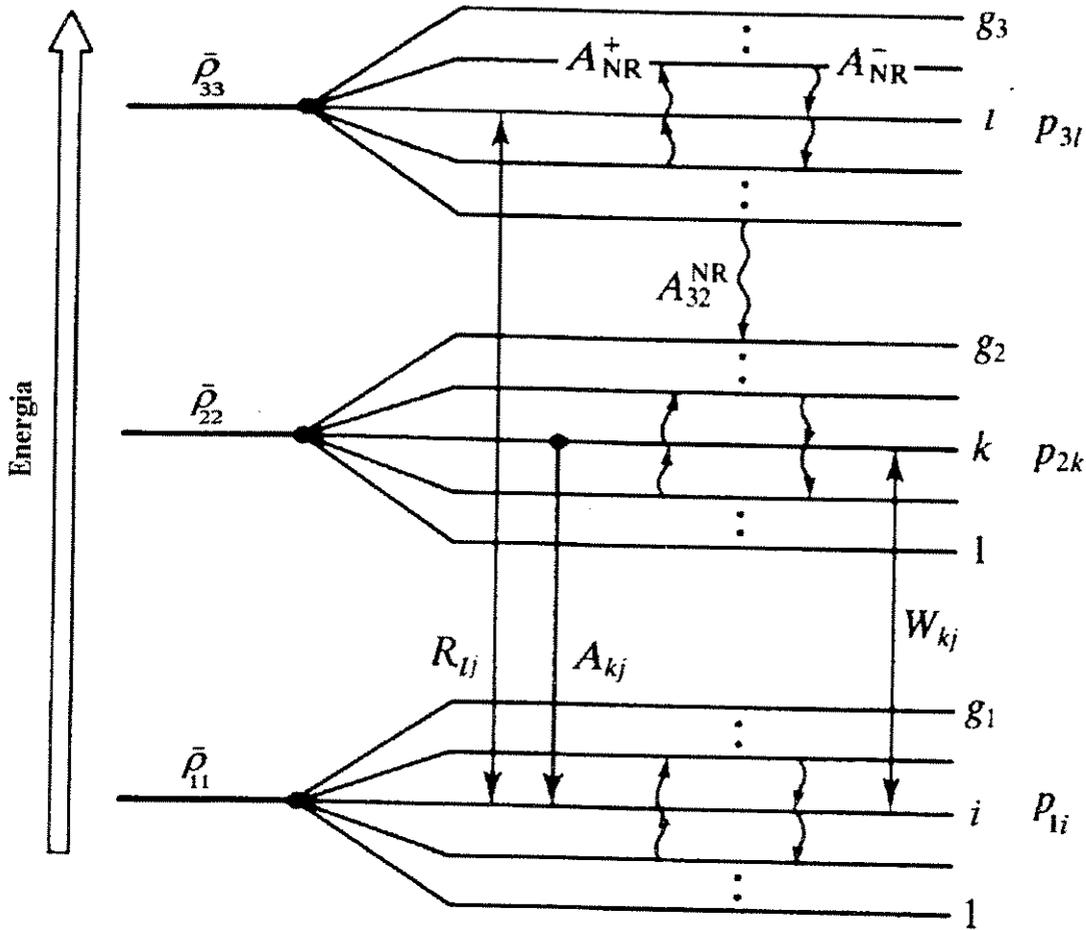


Figura 2.5 – Diagrama de níveis de energia de um meio dopado com érbio .

Todas as transições energéticas dentro de um nível principal são consideradas não radiativas. Essa consideração é matematicamente expressa anulando os termos da matriz do momento de dipolo elétrico  $\hat{\mu}$  referentes às transições dentro de um mesmo nível principal. Uma descrição detalhada encontra-se no Apêndice F de [4], e aqui passaremos a usar os principais resultados lá desenvolvidos.

Então, a susceptibilidade complexa em um meio dopado com érbio será[4]

$$\chi_{Er}(\omega) = \chi'_{Er}(\omega) - j\chi''_{Er}(\omega) = \sum_{i=1}^{g1} \sum_{k=1}^{g2} \chi_{ik}(\omega) \quad (2.66)$$

na qual  $\chi_{ki}$  é a susceptibilidade devido à transição entre os sub-níveis “k” e “i” dos níveis principais 2 e 1, tal que

$$\chi_{ik}(\omega) = -nc_0 N_{Er} \frac{\sigma_{ki}(\omega)}{\omega_{ki}} \left( 2 \frac{(\omega_{ki} - \omega)}{\Delta\omega_{ki}} - j \right) \times \frac{\mathcal{R}_{13} \tau p_{2k} - p_{1i} + \frac{I_s}{h\nu} [p_{2k} \sigma_a(\omega_s) - p_{1i} \sigma_e(\omega_s)] \tau}{1 + \mathcal{R}_{13} \tau + \frac{I_s}{h\nu} [\sigma_a(\omega_s) + \sigma_e(\omega_s)] \tau} \quad (2.67)$$

Perceber que, até aqui, sempre lidamos com ondas planas, e que, portanto, o índice de refração efetivo, definido como  $n_{eff} = k/k_0$ , é sempre igual ao índice de refração do meio, uma vez que  $k = k_0$  para as ondas planas. No caso de ondas confinadas, devemos sempre usar  $n_{eff}$  ao invés de  $n$ , uma vez que o confinamento altera a impedância da onda propagante. Na equação (2.67) foi usado  $\mathcal{R}_{31} = 0$  porque sabe-se que o decaimento do nível 3 para o nível 1 é essencialmente não radiativo e, conseqüentemente,  $\sigma_e(\omega_p) = 0$ . Aqui  $\omega_p = 2\pi\nu_p$  é a frequência angular do bombeio.  $N_{Er}$  é a concentração de íons de érbio [ $m^{-3}$ ]. Os parâmetros  $\sigma_{ki}$ ,  $\omega_{ki}$  e  $\Delta\omega_{ki}$  são a seção de choque, a frequência central e a largura da linha devido à transição entre os sub-níveis “k” e “i” dos níveis principais 2 e 1, respectivamente.  $I_s$  é a intensidade do sinal externo de frequência  $\omega_s$ . As seções de choque  $\sigma_a(\omega)$  e  $\sigma_e(\omega)$  são definidas como

$$\begin{cases} \sigma_a(\omega) = h\nu \sum_{i=1}^{g1} \sum_{k=1}^{g2} \left( \frac{\sigma_{ki}(\omega)}{h\nu_{ki}} p_{1i} \right) \\ \sigma_e(\omega) = h\nu \sum_{i=1}^{g1} \sum_{k=1}^{g2} \left( \frac{\sigma_{ki}(\omega)}{h\nu_{ki}} p_{2k} \right) \end{cases} \quad (2.68)$$

nas quais  $\bar{\nu}$  é a frequência média do nível principal 2.  $\mathcal{R}_{13}$  é a taxa total de bombeio entre os níveis principais 1 e 3, e é dada por

$$\mathcal{R}_{13} = \frac{I_p}{h\nu_p} h\nu \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{\ell=1}^{g_3} \left( \frac{\sigma_{\ell i}(\omega_p)}{h\nu_{\ell i}} p_{\ell i} \right) = \frac{I_p \sigma_a(\omega_p)}{h\nu_p} \quad (2.69)$$

O termo proporcional a  $(\omega_{ki} - \omega)/\Delta\omega_{ki}$ , na equação (2.67), mostra que a parte real da susceptibilidade pode ser corretamente equacionada desde que se tenha conhecimento de todas as linhas atômicas dos íons de érbio. No entanto, os resultados numéricos que são apresentados no Capítulo 4, para as não-linearidades induzidas pelo campo do sinal e/ou do bombeio, mostram que isto não é necessário para operação abaixo da saturação. No regime não-saturado, a parte real da susceptibilidade pode ser equacionada usando a parte imaginária e as KKR, dadas pelas equações (2.62), vistas na Seção 2.3. Usando a equação (2.67) na equação (2.66), tem-se que a parte imaginária da susceptibilidade complexa  $\chi_{Er}$  é escrita como

$$\chi_{Er}''(\omega) = -\frac{nc_0 N_{Er}}{2\pi\nu_s} \frac{\frac{I_p}{h\nu_p} \sigma_a(\omega_p) \sigma_e(\omega) \tau - \sigma_a(\omega) + \frac{I_s}{h\nu_s} [\sigma_e(\omega) \sigma_a(\omega_s) - \sigma_a(\omega) \sigma_e(\omega_s)] \tau}{1 + \frac{I_p}{h\nu_p} \sigma_a(\omega_p) \sigma_e(\omega) \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} [\sigma_a(\omega_s) + \sigma_e(\omega_s)] \tau}, \quad (2.70)$$

na qual usou-se<sup>13</sup>  $\bar{\nu} \cong \nu_s$ . Perceba que o termo proporcional a  $I_s$ , no numerador da equação (2.70), anula-se quando  $\omega = \omega_s$ , mas é finito quando  $\omega \neq \omega_s$ . Neste último caso, o efeito da saturação é parcialmente compensado pelo efeito da equalização das populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  entre os níveis principais 1 e 2, respectivamente. Estas populações são obtidas<sup>14</sup> com base no formalismo da matriz densidade, sendo

<sup>13</sup> Esta aproximação foi usada por E. Desurvire em [4].

<sup>14</sup> Na prática as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  são obtidas com base na solução das equações de taxa no estado estacionário.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_1 = N_{Er} \bar{\rho}_{11} = N_{Er} \frac{1 + \frac{I_s}{h\nu_s} \sigma_e(\omega_s) \tau}{1 + \frac{I_p}{h\nu_p} \sigma_a(\omega_p) \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} [\sigma_a(\omega_s) + \sigma_e(\omega_s)] \tau} \\ \bar{N}_2 = N_{Er} \bar{\rho}_{22} = N_{Er} \frac{\frac{I_p}{h\nu_p} \sigma_a(\omega_p) \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} \sigma_e(\omega_s) \tau}{1 + \frac{I_p}{h\nu_p} \sigma_a(\omega_p) \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} [\sigma_a(\omega_s) + \sigma_e(\omega_s)] \tau} \end{array} \right. \quad (2.71)$$

Substituindo a equação (2.71) na equação (2.70) tem-se

$$\chi_{Er}^n(\omega) = -\frac{nc_0}{\omega} [\sigma_e(\omega) \bar{N}_2 - \sigma_a(\omega) \bar{N}_1] \quad (2.72)$$

As seções de choque  $\sigma_a(\omega)$  e  $\sigma_e(\omega)$ , específicas para um determinado meio podem ser obtidas experimentalmente[13] tomando-se por base medidas de absorção e emissão espontânea. Alternativamente, para fins de simulação, as seções de choque típicas podem ser obtidas na literatura[14]. Podemos escrever  $\sigma_a(\omega)$  e  $\sigma_e(\omega)$  como um somatório de  $n_a/n_e$  lorentzianas<sup>15</sup>  $\mathcal{L}$ , centradas em  $\omega_a/\omega_e$ , de largura espectral  $\Delta\omega_a/\Delta\omega_e$ , e amplitude  $a_a/a_e$ , tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_a(\omega) = \sigma_a^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{n_a} a_{a,i} \mathcal{L}_{a,i} = \sigma_a^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{n_a} a_{a,i} \left( 1 + 4 \left( \frac{\omega_{a,i} - \omega}{\Delta\omega_{a,i}} \right)^2 \right)^{-1} \\ \sigma_e(\omega) = \sigma_e^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{n_e} a_{e,i} \mathcal{L}_{e,i} = \sigma_e^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{n_e} a_{e,i} \left( 1 + 4 \left( \frac{\omega_{e,i} - \omega}{\Delta\omega_{e,i}} \right)^2 \right)^{-1} \end{array} \right. \quad (2.73)$$

---

<sup>15</sup> Na Seção 2.3, equação (2.60) temos que as linhas atômicas são lorentzianas.

nas quais  $\sigma_a^{\text{peak}}$  e  $\sigma_e^{\text{peak}}$  são os valores de pico de  $\sigma_a(\omega)$  e  $\sigma_e(\omega)$ , respectivamente. Substituindo as equações (2.73) na equação (2.72), usando as KKR dadas pelas equações (2.62) e levando em conta que

$$-\frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 2 \frac{\omega - \omega_i}{\Delta\omega_i}$$

tem-se que as partes real e imaginária da susceptibilidade são dadas por

$$\begin{cases} \chi'_{\text{Er}}(\omega) = \frac{nc_0}{\omega} \left[ \bar{N}_2 \sigma_e^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{ne} 2a_{e,i} \mathcal{L}_{e,i}(\omega) \frac{(\omega - \omega_{e,i})}{\Delta\omega_{e,i}} - \bar{N}_1 \sigma_a^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{na} 2a_{a,i} \mathcal{L}_{a,i}(\omega) \frac{(\omega - \omega_{a,i})}{\Delta\omega_{a,i}} \right] \\ \chi''_{\text{Er}}(\omega) = -\frac{nc_0}{\omega} \left[ \bar{N}_2 \sigma_e^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{ne} a_{e,i} \mathcal{L}_{e,i}(\omega) - \bar{N}_1 \sigma_a^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{na} a_{a,i} \mathcal{L}_{a,i}(\omega) \right] \end{cases} \quad (2.74)$$

Na saturação a largura da linha atômica passa a ser

$$\Delta\omega_{a,i/e,i}^{\text{sat}} = \Delta\omega_{a,i/e,i} \sqrt{1 + \left( \frac{I_s \tau}{h\nu_s (1 + \mathcal{R}_{13} \tau)} \sigma_{a/e}^{\text{peak}} a_{a,i/e,i} \right)} \quad (2.75)$$

Como vimos,  $\chi''_{\text{Er}}$  é válida tanto para o regime saturado como não saturado. Já  $\chi'_{\text{Er}}$  na equação (2.74), por ter sido equacionado baseado em  $\chi''_{\text{Er}}$  e usando as KKR, é, rigorosamente falando, válido somente para o regime não saturado, que, da equação (2.75), a condição de regime não saturado resulta em

$$1 \gg \frac{I_s \tau}{h\nu_s (1 + \mathcal{R}_{13} \tau)} \sigma_{a/e}^{\text{peak}} a_{a/e,i} \quad (2.76)$$

Porém, deve-se considerar que a não linearidade está na dependência de  $N_1$  e  $N_2$  com a intensidade e não nas funções que multiplicam  $N_1$  e  $N_2$  na equação (2.72). Nestes termos, a validade de  $\chi'_{Er}$  em função de  $I_s$  pode ser maior daquele apontado pela equação (2.76), ficando a verificação deste limite a cargo de comparações experimentais ou com modelos que considerem a saturação de forma explícita. Neste trabalho, trabalharemos com intensidade de sinal de tal forma a respeitar a expressão (2.76).

As quantidades de lorentzianas  $n_a/n_e$  usadas nas equações (2.73) e (2.74) não são, necessariamente, o número de linhas entre os níveis principais 1 e 2. De acordo com a mecânica quântica, e confirmado por medidas espectroscópicas presentes na literatura [15,16,17], as degenerescências dos níveis principais  $^4I_{15/2}$  e  $^4I_{13/2}$  do érbio são  $g_1=8$  e  $g_2=7$ , respectivamente. Sendo assim, a superposição de  $8 \times 7 = 56$  lorentzianas seriam necessárias para melhor descrever todo o espectro de interesse do meio dopado com érbio. Dentro do limite de validade da equação (2.74), basta somente  $n_a/n_e$  de tal forma que possa representar-se bem as seções de choque de absorção e emissão, respectivamente, e que na prática são necessárias 6 a 12 lorentzianas. Todos os resultados apresentados neste trabalho, em que a susceptibilidade complexa é considerada, são baseados na equação (2.74) e estão dentro do limite de validade já discutido. Usando os dados espectroscópicos presentes em [15,16,17], pode-se implementar o modelo apresentado em [4], equação (1.187), ou o modelo apresentado em [18]. Um modelo mais aperfeiçoado deve incluir ainda o efeito de alargamento não-homogêneo [19]. Este tipo de alargamento é consequência das variações existentes na estrutura do material e que alteram as frequências centrais das transições individuais. Fica claro que o aprimoramento dos resultados presentes neste trabalho depende de um modelo de susceptibilidade que leve em conta o regime saturado para a parte real e efeitos de alargamento não-homogêneo. Por simplicidade, estes últimos não serão considerados neste trabalho.

No início desta Seção foi feita a consideração de um sistema de três níveis, uma vez que o bombeio foi considerado em 980nm, em que os íons do nível energético principal  $^4I_{15/2}$  tem sua energia elevada para o  $^4I_{11/2}$ . Quando o bombeio é feito no comprimento de onda de 1480nm, os íons do nível principal  $^4I_{15/2}$  são energizados para o  $^4I_{13/2}$ . Neste caso, a seção de choque  $\sigma_e(\omega_p) \neq 0$  e,

conseqüentemente,  $\mathcal{R}_{31} \neq 0$ . A consideração deste termo nada altera o resultado apontado pela equação (2.74), porém permitem-nos rescrever as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$ , na equação (2.71), como

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_1 = N_{Er} \bar{\rho}_{11} = N_{Er} \frac{1 + \frac{I_p}{h\nu_p} \sigma_e(\omega_p) \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} \sigma_e(\omega_s) \tau}{1 + \frac{I_p}{h\nu_p} [\sigma_a(\omega_p) + \sigma_e(\omega_p)] \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} [\sigma_a(\omega_s) + \sigma_e(\omega_s)] \tau} \\ \bar{N}_2 = N_{Er} \bar{\rho}_{22} = N_{Er} \frac{\frac{I_p}{h\nu_p} \sigma_a(\omega_p) \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} \sigma_e(\omega_s) \tau}{1 + \frac{I_p}{h\nu_p} [\sigma_a(\omega_p) + \sigma_e(\omega_p)] \tau + \frac{I_s}{h\nu_s} [\sigma_a(\omega_s) + \sigma_e(\omega_s)] \tau} \end{array} \right. \quad (2.77)$$

Podemos perceber, da equação (2.74), que  $\chi_{Er}$  fica totalmente calculada conhecendo as seções de choque  $\sigma_a(\omega)$  e  $\sigma_e(\omega)$ , e as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$ . Vimos que, alterando o comprimento de onda do bombeio, estas populações são escritas de forma diferente. Se os processos de conversão ascendente são considerados, outros níveis energéticos devem ser usados. Assim, novas equações para as populações  $\bar{N}_i$  e  $\bar{N}_2$  são geradas, o que torna este procedimento bastante tedioso. Em geral, algum destes processos de conversão ascendente envolvem termos cruzados entre as probabilidades dos níveis energéticos considerados, como, por exemplo,  $\bar{\rho}_{11} \bar{\rho}_{44}$ . A inclusão destes termos torna o conjunto de equações formado pela expressão (2.45) como não-linear, necessitando de solução numérica. Assim, é conveniente encontrar as soluções das populações  $\bar{N}_i$  ("i" é o número de níveis considerados) por meio de um sistema de equações de taxa, já definido na Seção 2.1.

Consideremos um sistema de 5 níveis bombeado em 980nm, conforme a Figura 2.6.

As transições energéticas do nível  $^4F_{7/2}$  para o nível  $^4I_{9/2}$  são muito rápidas, razão pela qual pode-se considerar o nível 5 despovoado e, portanto, desconsiderado nesta análise. As equações de taxa para este sistema podem ser escritas como [23,20]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{N}_1}{\partial t} &= -W_{12} \bar{N}_1 - R \bar{N}_1 + A_{21} \bar{N}_2 + W_{21} \bar{N}_2 \\
&\quad + C_{up} \bar{N}_2^2 - C_{14} \bar{N}_1 \bar{N}_4 + C_3 \bar{N}_3^2 \\
\frac{\partial \bar{N}_2}{\partial t} &= W_{12} \bar{N}_1 - A_{21} \bar{N}_2 - W_{21} \bar{N}_2 + A_{32} \bar{N}_3 \\
&\quad - 2C_{up} \bar{N}_2^2 + 2C_{14} \bar{N}_1 \bar{N}_4 \\
\frac{\partial \bar{N}_3}{\partial t} &= R \bar{N}_1 - A_{32} \bar{N}_3 + A_{43} \bar{N}_4 - 2C_3 \bar{N}_3^2 \\
\frac{\partial \bar{N}_4}{\partial t} &= C_{up} \bar{N}_2^2 - C_{14} \bar{N}_1 \bar{N}_4 - A_{43} \bar{N}_4 + C_3 \bar{N}_3^2
\end{aligned} \tag{2.78}$$

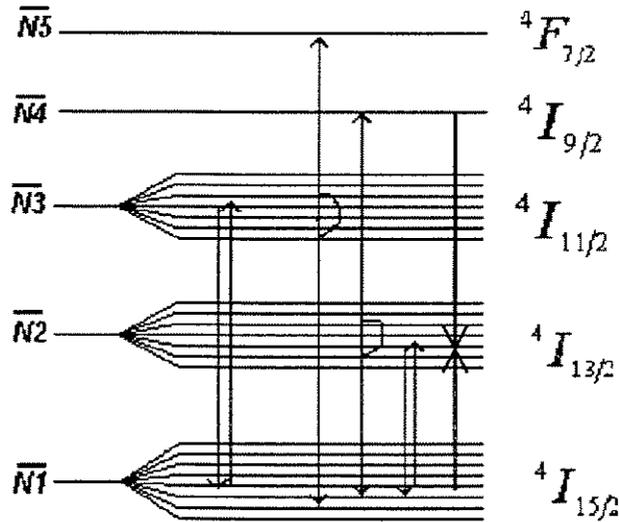


Figura 2.6 – Sistema de 5 níveis considerado bombeado em 980 nm. O nível  $5 \ ^4F_{7/2}$  não é considerado uma vez que a transição  $4 \ ^4F_{7/2} \rightarrow 4 \ ^4I_{9/2}$  é muito rápida.

em que  $A_{43}$  e  $A_{32}$  são as taxas não radiativas do nível  $4 \rightarrow 3$  e  $3 \rightarrow 2$ , respectivamente.  $A_{21}$  é a taxa de fluorescência (decaimento espontâneo) de  $2 \rightarrow 1$ .  $W_{ik}$  são as taxas estimuladas de transição entre os níveis  $i \rightarrow k$ .  $R$  é a taxa de bombeio do nível  $1 \rightarrow 3$ .  $C_{up}$  e  $C_3$  são os coeficientes de conversão ascendente (*upconversion*) dos nível 2 e 3, respectivamente, e  $C_{14}$  é o coeficiente de relaxação cruzada entre os níveis 1 e 4. Impondo o regime estacionário na equação (2.78), tem-se um sistema

de 4 equações e 4 incógnitas que só pode ser solucionado numericamente, em virtude dos termos cruzados em  $\bar{N}_1 \bar{N}_4$ .

## 2.5 Processos de Conversão Ascendente

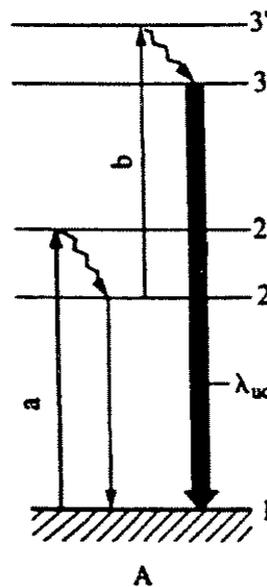
Todos os processos de conversão ascendente são caracterizados pela absorção de fótons e a subsequente transferência desta energia. Em geral, podem-se identificar três processos principais: absorção seqüencial de dois fótons (*ESA-Excited State Absorption*); conversão ascendente cooperativa; e a conversão ascendente por relaxação cruzada. A descrição dos processos de conversão ascendente será aqui apresentada de forma qualitativa. Para obter informações profundas a respeito deste tópico, o leitor pode recorrer às Seções 4.7 e 4.8 do livro de Desurvire[4], ou ainda aos artigos de Auzel[21], Wright[22] e Landsberg[23].

### 2.5.1 Absorção seqüencial de dois Fótons (ESA)

A absorção seqüencial de dois fótons, também conhecido como ESA (*Excited State Absorption*), é o processo de conversão ascendente mais intuitivo. Consideremos um sistema de três níveis da Figura 2.7. O nível energético 3 é alcançado por um íon pela absorção seqüencial de dois fótons. O primeiro fóton é absorvido por um íon do nível 1 que eleva sua energia para o nível 2', e que relaxa para um nível intermediário 2 (tempo de vida mais longo que em 2'), emitindo um fônon. Um outro fóton, de mesma energia que o primeiro, eleva a energia deste íon para o nível 3' que relaxa não radiativamente para o nível 3. Do nível 3, o íon pode perder energia emitindo um fóton ou um fônon, caindo novamente para o nível 1. Percebe-se que o efeito de ESA é fundamentalmente dependente do comprimento de onda. Em razão disto, pode-se tratar a absorção, por causa da ESA, usando uma seção de choque  $\sigma_{ESA}(\omega)$ .

Em SiO<sub>2</sub> dopado com érbio, a ESA apresenta picos em comprimentos de onda bem definidos, correspondendo à diferença de energia entre os níveis de energia principais. A Figura 2.8, extraída das referências [4] e [24], mostra os comprimentos de onda de pico nos quais o processo de ESA ocorre.

Na frequência do bombeio próximo de 980nm, um íon do nível <sup>4</sup>I<sub>15/2</sub> absorve um fóton elevando sua energia para o nível <sup>4</sup>I<sub>11/2</sub>. Um outro fóton é absorvido por este íon, já energizado, e eleva sua energia para o nível <sup>4</sup>F<sub>7/2</sub>.



**Figura 2.7** – Processo de conversão ascendente por absorção de dois fótons sequencialmente. As populações dos níveis 2' e 3' decaem rapidamente para os níveis 2 e 3. As setas de 2'→2 e 3→3' indicam transições não radiativas, ao passo que a seta cheia pode indicar uma transição radiativa ou não radiativa.

Contudo, como consequência da alta taxa de transição não radiativa entre os níveis <sup>4</sup>I<sub>11/2</sub>→<sup>4</sup>I<sub>13/2</sub>, o efeito da ESA do nível <sup>4</sup>I<sub>11/2</sub> em 980nm é desprezível e pode ocorrer somente com altos níveis de potência. Ainda, a altos níveis de potência de bombeio o efeito de ESA pode causar absorção não linear do bombeio, que eventualmente limitará a eficiência de conversão de potência do amplificador[4]. O efeito da ESA, quando o bombeio é em 1480nm, é similar para o sinal de ≈ 1500nm, e se originam na transição de ESA mostrada na Figura 2.8, com pico em 1680nm. A evidência experimental deste efeito foi feita medindo a luminescência em 980nm de uma fibra dopada com érbio e bombeada em 1480nm[25]. Esta luminescência, em 980nm, corresponde à

transição radiativa entre os níveis  ${}^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{15/2}$ , que ocorre após relaxação do nível  ${}^4I_{9/2}$ . No trabalho de P. Blixt *et al.* [25] foi medida a seção de choque da ESA na região de  $\lambda \approx 1480\text{nm} - 1530\text{nm}$ , e foi obtido o valor de  $\sigma_{\text{ESA}} \approx 0.5 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ , o que corresponde a, aproximadamente, 10% do valor de pico da seção de choque de absorção de  ${}^4I_{15/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ . Estes resultados mostram que um modelamento preciso de dispositivos bombeados em 1480nm deve incluir os efeitos de ESA. Similar ao caso do bombeio em 980nm, os efeitos da ESA, quando bombeado com 1480nm a altas potências, causam absorção não linear do bombeio, comprometendo a eficiência de conversão de potência.

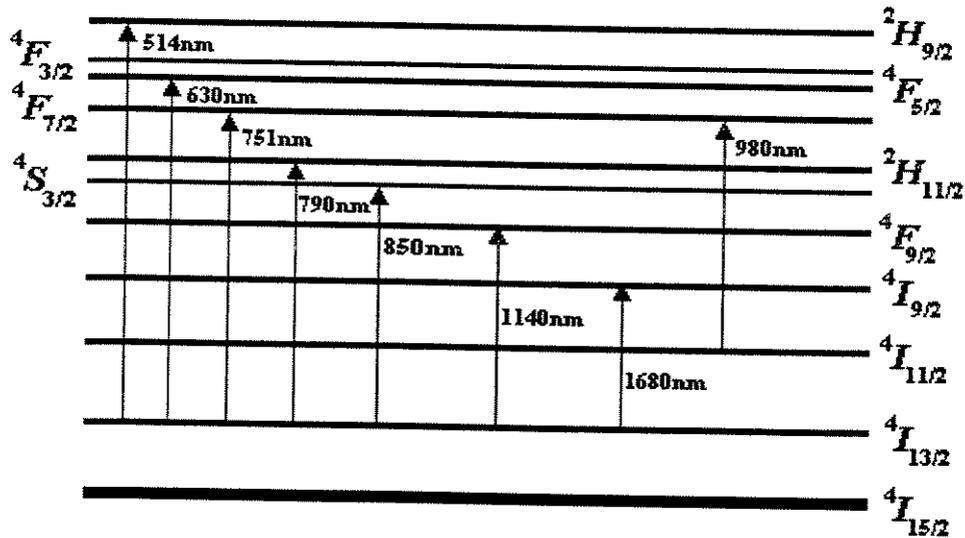


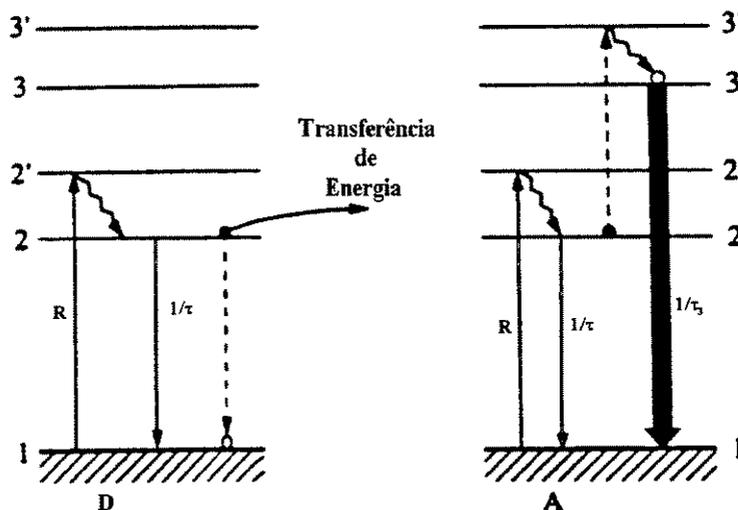
Figura 2.8 – Diagrama de níveis de energia do érbio dopado em vidro mostrando os picos de transições das seções de choque da ESA.

Por fim, resta evidenciar o fato que o processo de ESA existe até mesmo para um íon isolado, já que o processo ocorre em razão da interação entre íons energizados e fótons, e que estes últimos se propagam dentro do meio.

## 2.5.2 Conversão Ascendente Cooperativa

A presença de um nível energético intermediário, importante para o processo de ESA (absorção seqüencial de dois fótons), também é importante para o processo de transferência de energia por conversão ascendente cooperativa, ou simplesmente conversão ascendente cooperativa. Como consequência, muitos íons participam do processo ESA e, também, da conversão ascendente

cooperativa. Em alguns íons, o processo de conversão ascendente cooperativa é substancialmente mais eficiente que o processo de ESA. A Figura 2.9 ilustra o processo.



**Figura 2.9** – Esquemático para entender o processo de transferência de energia por conversão ascendente cooperativa. Os íons são chamados de “D” e “A”, doadores e aceitadores de energia, respectivamente.

Aqui são considerados só 3 níveis de uma sistema. Como fizemos anteriormente, estamos incluindo também os níveis 2' e 3' para representar melhor a estrutura energética dos sistemas em que o érbio está presente. O processo é iniciado com dois íons energizados no nível 2. Estes dois íons podem estar neste nível pelos mais diversos processos. Para podermos prosseguir, imaginemos que por um processo de bombeio, os dois íons foram energizados para o nível 2' e que, por relaxação alcançaram o nível meta-estável 2. Estes íons podem perder suas energias espontaneamente e decair para o nível 1 liberando 2 fótons, ou podem ser removidos deste nível por conversão ascendente cooperativa, neste caso sem liberação de energia. Neste último caso, o íon doador (D) transfere sua energia para o íon aceitador (A). Este processo de transferência de energia de (D)→(A) está indicado na Figura 2.9. As setas tracejadas indicam que os íons doadores e aceitadores tiveram seus estados energéticos alterados. No caso do íon aceitador, o estado energético após a transferência cooperativa é o 3', que após rápida relaxação cai no estado 3. Deste estado o íon pode novamente relaxar para os níveis inferiores por meio de processos radiativos ou não radiativos. Não é comum que a diferença de energia de 2→1 seja exatamente a mesma que de 2→3'. Na maioria dos casos o excesso ou a falta de energia neste processo de transferência é compensado pela rede do material

hospedeiro. Ao contrário do processo ESA, este processo depende da proximidade entre os íons. As taxas de transferência de energia entre íons depende da interações entre dipolos. Esta dependência é proporcional a  $r^{-6}$ , em que  $r$  é a distância entre os íons. A cinética do processo de conversão ascendente cooperativo pode ser representado pelas equações de taxa do sistema. Assim,

$$\begin{cases} \frac{d\bar{N}_1}{dt} = -R\bar{N}_1 + \frac{\bar{N}_2}{\tau} + C_{up}\bar{N}_2^2 + \frac{\bar{N}_3}{\tau_3} \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} = R\bar{N}_1 - \frac{\bar{N}_2}{\tau} - 2C_{up}\bar{N}_2^2 \\ \frac{d\bar{N}_3}{dt} = C_{up}\bar{N}_2^2 - \frac{\bar{N}_3}{\tau_3} \end{cases} \quad (2.79)$$

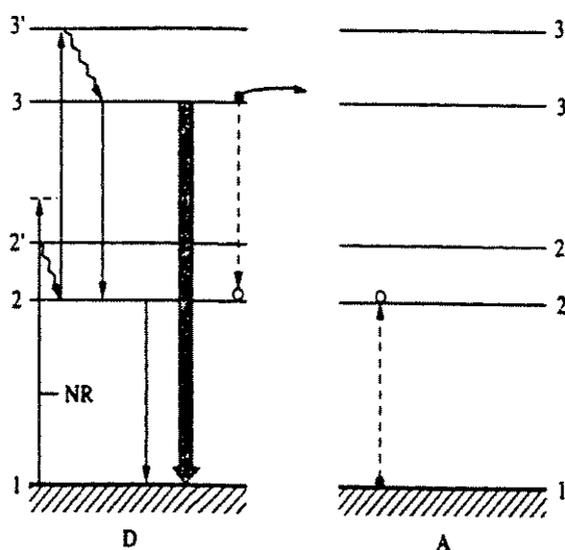
nas quais  $C_{up}$  é o coeficiente de conversão ascendente cooperativo e  $\bar{N}_i$  são as populações dos níveis  $i=1,2$  e  $3$ .

Como pode ser notado das equações de taxa (2.79), o efeito de transferência de energia cooperativa (CET – *Cooperative Energy Transfer*) diminui a população do nível meta-estável 2 e, conseqüentemente, compete com o processo de amplificação, diminuindo a diferença populacional  $\Delta N = \bar{N}_2 - \bar{N}_1$ . Em razão da dependência do CET com a concentração, não é possível compensar diretamente a redução do comprimento do dispositivo com o aumento de concentração. Por exemplo, um dispositivo de 1 metro com determinada concentração não comporta-se da mesma forma que um dispositivo de 1 cm com concentração 100 vezes maior que o primeiro.

O CET pode ocorrer do nível  ${}^4I_{13/2}$  ou do nível  ${}^4I_{11/2}$ . Quando o CET ocorre do nível  ${}^4I_{13/2}$ , os íons deste nível são transferidos para o nível  ${}^4I_{9/2}$ , e deste decaem não radiativamente para os níveis inferiores. Quando o CET ocorre do nível  ${}^4I_{11/2}$ , os íons deste nível são transferidos para o nível  ${}^4F_{7/2}$ , e, deste, decaem não radiativamente para os níveis inferiores. O efeito de CET do nível  ${}^4I_{11/2}$  é bastante minimizado por causa da alta taxa de decaimento não radiativo entre os níveis  ${}^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$  e, ainda, pelo fato de que o comprimento elétrico entre dois íons,  $r/\lambda$ , é maior para dipolos que oscilam em 980nm, do que para os que oscilam em torno de 1530nm.

### 2.5.3 Conversão Ascendente por relaxação cruzada.

O efeito de conversão ascendente por relaxação cruzada é um processo não radiativo e que é conhecido na literatura por diversos nomes entre eles: conversão ascendente por foto-avalanche; *ion pair relaxation*, transferência de energia por relaxação cruzada; *quenching*; e *self-quenching*. Assim como no CET, o processo de conversão ascendente por relaxação cruzada é dependente da concentração de érbio. A Figura 2.10 ilustra o processo.



**Figura 2.10** – Esquema para entender o processo de conversão ascendente por relaxação cruzada. “D” e “A” indicam os íons doadores e aceitadores, respectivamente, e as setas sólidas indicam as transições radiativas. Três processos competitivos envolvendo o nível 3 são ilustrados. Um processo envolve a transferência de energia entre o nível 3 do íon D e o nível 1 do íon A, resultando em dois íons ocupando o nível 2. Os outros 2 processos envolvem decaimento radiativo do nível 3 para o nível 1 ou do nível 3 para o 2. O decaimento radiativo de 2→1 e o espontâneo de 3→2 com taxa  $1/\tau_3$  também são mostrados.

Vamos assumir que o íon doador “D” esteja no nível meta-estável 2 e o íon aceitador “A” no nível fundamental 1. Uma radiação óptica ressonante com a transição 2→3’ é ativada e esta eleva a energia do íon D para o nível 3’, que, após rápida relaxação, passa a ocupar o nível energético 3. Nos processos discutidos anteriormente, ESA e CET, este íon ocupando agora o nível 3 ou relaxava não radiativamente para os estados energéticos inferiores, ou decaía radiativamente emitindo um fóton. Esta transição, em geral, produz luz visível ( $\approx 670\text{nm}$  em meios dopados com érbio) e constitui um dos passos no processo de avalanche. Contudo, um mecanismo de decaimento

alternativo envolve a transferência de parte da energia do íon doador do nível 3 para um íon vizinho no nível fundamental 1. O principal requerimento é que a diferença energética entre os níveis 3→2 e 2→1 seja aproximadamente a mesma. Como resultado tem-se que no final do processo os dois íons encontram-se no nível meta-estável, chegando a este por meio de transições não-radiativas.

O mecanismo fundamental do processo de avalanche é que um íon inicialmente no nível meta-estável (íon D) produza dois íons neste nível como resultado da absorção de um fóton e a subsequente transferência de energia. Sob apropriadas circunstâncias, estes dois fótons podem produzir 4, 8, ... e assim por diante, resultando em um processo de avalanche de íons ocupando o nível meta-estável. Este processo de avalanche requer um mínimo de potência que é a potência de limiar do processo. A existência deste limiar de potência é uma particularidade deste processo e representa uma forma útil de verificar, experimentalmente, a presença ou não do referido processo.

O processo de avalanche descrito acima assume a existência de uma fração da população total no nível meta-estável. Essa fração de população pode ser ativada por bombeio, por exemplo. Abaixo da potência de limiar, um processo de conversão ascendente resultante de ESA seguido de transferência de energia por relaxação cruzada ocorre. Acima do limiar, a transferência de energia por relaxação cruzada acelera-se e passa a dominar o bombeamento do nível meta-estável.

O processo ilustrado na Figura 2.10 pode ser representado por meio das equações de taxa abaixo

$$\frac{d\bar{N}_3}{dt} = W_{23}\bar{N}_2 - \frac{\bar{N}_3}{\tau_3} - C_{13}\bar{N}_1\bar{N}_3 \quad (2.80a)$$

$$\frac{d\bar{N}_2}{dt} = W_{12}\bar{N}_1 - W_{21}\bar{N}_2 - W_{23}\bar{N}_2 + 2C_{13}\bar{N}_1\bar{N}_3 + W_{32}\bar{N}_3 \quad (2.80b)$$

$$\frac{d\bar{N}_1}{dt} = W_{31}\bar{N}_3 + W_{21}\bar{N}_2 - W_{12}\bar{N}_1 - C_{13}\bar{N}_1\bar{N}_3 \quad (2.80c)$$

nas quais  $C_{13}$  é o coeficiente de relaxação cruzada entre os níveis 1 e 3,  $W_{ij}$  são as taxas estimuladas entre os níveis  $i \leftrightarrow j$ , e  $1/\tau_3$  é a taxa de decaimento espontâneo do nível 3 para o 2. As populações são normalizadas para que  $\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{N}_3 = 1$ . Logo,  $W_{31} + W_{32} = 1/\tau_3 = W_3$ . Resolvendo as equações de taxa acima no regime estacionário e chamando de “x” a fração da população do nível 3 que decai para o nível 1 e de “1-x” a fração da população do nível 3 que decai para o nível 2, tem-se que a potência de limiar para ativar o processo de avalanche, relacionada com a taxa de limiar  $W_{23}^{th}$  é tal que

$$W_{23}^{th} = \frac{W_{21}(C_{13} + W_3)}{C_{13} - xW_3}.$$

Vê-se, da equação (2.80a), que o único mecanismo de bombeamento de íons para o nível superior é a taxa  $W_{23}$ . A existência de íons excitados no nível 3 é fundamental para que ocorra o processo de avalanche. Se  $W_{23} \ll W_{23}^{th}$ , então uma pequena população no nível 3 é esperada e o processo de avalanche, embora exista, é bastante pequeno. Assim, a intensidade de luz que se espera observar é proporcional à população bombeada para o nível 3. Nesta situação, o processo de ESA é predominante. Em fibras dopadas com érbio e bombeadas em 1480nm, ocorre ESA do nível  $^4I_{13/2}$  para o nível  $^4I_{9/2}$ , e que relaxa rapidamente para o nível  $^4I_{11/2}$ . Deste nível, parte da energia é emitida na forma de fótons de comprimento de onda de 980nm. A intensidade medida em 980nm varia com o quadrado da potência do bombeio (coeficiente linear 2 em um gráfico  $\log(P_{980}) \times \log(P_{1480})$ ). Resultados experimentais podem ser vistos no trabalho de Blixt *et al.*[25]. Quando  $W_{23}$  excede o limiar  $W_{23}^{th}$ , a dinâmica populacional do nível 2 passa a ser dominada pela relaxação cruzada entre íons do nível 3 e do nível fundamental, e a intensidade de luz que se espera observar por emissão de fótons da população que relaxa do nível 3 para o nível 1 aumenta de algumas ordens de magnitude.

Pode-se ter uma boa idéia do valor de  $W_{23}^{th}$  através dos resultados publicados no trabalho de Blixt *et al.*[25], no qual foi observado que a potência emitida em 980nm permanecia com variação quadrática para uma potência de bombeio em 1480nm de até 4mW. O autor citou o fato de que, acima deste limiar, a intensidade medida em 980nm possuía variação maior do que quadrática

(coeficiente linear maior que 2 em um gráfico  $\log(P_{980}) \times \log(P_{1480})$ ). Em amplificadores ópticos dopados com érbio e bombeados em 1480nm fica claro que o efeito de relaxação cruzada deve ser levado em conta. Mesmo quando bombeado em 980nm, a intensidade de ASE (*Amplified Spontaneous Emission*), que é um sinal de banda larga ( $\approx 1400\text{nm}$  a  $1700\text{nm}$ ) pode vir a provocar efeito de avalanche, quando a integração da densidade de potência na região de  $\approx 1480\text{nm}$  for da ordem de 4mW.

## 2.6 Resumo

Neste Capítulo foram apresentados diversos conceitos pertinentes à teoria de meios ativos, em que considerou-se a “atividade” do meio como consequência da presença de transições atômicas dentro do espectro de interesse.

Na Seção 2.1 foram apresentados de forma sucinta e simples, os processos de absorção e amplificação da radiação (ondas eletromagnéticas) em um meio ativo.

Na Seção 2.2 foi equacionada a permissividade elétrica usando a equação (2.27) de um meio ativo, e que permitiu-nos calcular a constante de propagação mostrada pela equação (2.31). Por meio da constante de propagação verificamos que a intensidade da onda eletromagnética será alterada ao passar pelo meio ativo e que o coeficiente de ganho  $\gamma$ , mostrado na equação (2.33), depende do sinal da parte imaginária da susceptibilidade complexa  $\chi_a''(\omega)$ . O sinal de  $\chi_a''(\omega)$  pode ser alterado usando um processo de bombeio, como indicado pela equação (2.34). Demonstrou-se que a onda eletromagnética está sujeita a variações de fase ao longo da propagação, em razão da variação do índice de refração  $\delta n$  do meio, uma vez que  $\delta n$  depende da parte real da susceptibilidade complexa  $\chi_a'(\omega)$ . O modelamento da parte real da susceptibilidade complexa é importante para a caracterização do comportamento não linear do meio ativo e para o cálculo da dispersão ressonante. Assim conclui-se que o meio ativo fica bem caracterizado por meio da susceptibilidade complexa  $\chi_a$ .

Na Seção 2.3 foi equacionada a susceptibilidade complexa  $\chi_a$ , considerando só uma transição em um meio ativo, usando o formalismo da matriz densidade. Com os resultados obtidos deste formalismo obtivemos a função de forma da linha da transição atômica  $g(\nu)$ , e que nos permitiu escrever, de forma mais completa, o coeficiente de ganho  $\gamma$  e a seção de choque  $\sigma(\nu)$ . As conseqüências da saturação do meio, em virtude da presença de uma radiação externa, foram apresentadas. Foi mostrado que num meio saturado, a população diferencial  $\Delta N=(N_1-N_2)$  decresce, e, conseqüentemente, a susceptibilidade complexa  $\chi_a$ . Logo, a saturação do meio tem conseqüência direta sobre o coeficiente de ganho do meio. Além disso, a radiação externa provoca, no meio, um comportamento não linear já que, como apontado na equação (2.35), a variação do índice de refração  $\delta n$  do meio passa a ser função da intensidade da radiação. Outra conseqüência mostrada do efeito da saturação é o alargamento da linha atômica. Finalmente, as relações de Kramers-Kronig, que estabelecem uma relação entre a parte real e imaginária da susceptibilidade complexa  $\chi_a$  foram apresentadas e mostrou-se que estas são válidas na ausência de radiação externa ( $E(t)=0$ ).

Na Seção 2.4 equacionou-se a susceptibilidade complexa para um meio dopado com érbio. Vimos que, em razão do efeito de Stark Split, os níveis quânticos sofrem quebra de degenerescência provocando o alargamento dos níveis principais. Este alargamento, que tem como conseqüência o surgimento de diversos sub-níveis, deve ser levado em conta para o cálculo da susceptibilidade. O modelamento aqui apresentado é válido tanto para o regime saturado como não saturado para a parte imaginária da susceptibilidade. Em razão do uso das relações de Kramer-Kronig (KKR) para o cálculo da parte real de  $\chi_{Er}$ , esta tem sua validade para o regime não saturado. A mudança do comprimento de onda de bombeio não altera a equação da susceptibilidade, porém sugere que as populações dos níveis considerados passem a ser calculadas por um sistema de equações de taxa. Quando altas taxas de concentração de érbio são usadas, os efeitos de conversão ascendente passam a ser não desprezíveis e devem ser incluídos nas equações de taxa.

Finalmente, na Seção 2.5 foram vistos e discutidos diversos processos de conversão ascendente que participam no processo de amplificação da radiação óptica em meios dopados com érbio.

## Referências do Capítulo 2

---

- [1] A. Yariv, "An Introduction to Theory and Applications of Quantum Mechanics", *John Wiley & Sons, Inc*, New York, (1982).
- [2] A. Yariv, "Quantum Electronics", *John Wiley & Sons, Inc*, New York, (1988).
- [3] A. Yariv, "Optical Electronics", *Saunders College Publishing*, (1991).
- [4] E. Desurvire, "Erbium-Doped Fiber Amplifiers: Principles e Applications", *John Wiley & Sons, Inc*, New York, (1994).
- [5] A. Einstein, "Die Quantentheorie der Strahlung", *Phys. Letters*, Vol.18, pp.121, (1917).
- [6] J.W. Goodman, "Statistical Optics", *John Wiley & Sons, Inc*, (1985).
- [7] F. Matera, M. Romagnoli, M. Settembre, e M. Tamburrini, "Evaluation of chromatic dispersion in erbium-doped fibre amplifiers", *Electron. Lett.*, Vol.27, No.20, pp.1867, (1991).
- [8] I.H. Malitson, "Inter-specimen comparison of the refractive index of fused silica", *Journal of Optical Soc. of America*, Vol.55, pp.1205-1209, (1965).
- [9] R.A. Betts, T. Tjugiart, Y.L Xue, e P.L. Chu, "Nonlinear refractive index in erbium-doped optical fiber: theory and experiment", *IEEE Journ. Quantum Electronics*, Vol.27, No.4, pp.908-913,(1991).
- [10] R.L. Kronig, *Journal of Optical Soc. of America.*, Vol.12, pp.547, (1926).
- [11] H.A. Kramers, *Atti.Congr.Intern.Fis*, Vol.2, pp.545, (1927).
- [12] K. Patek, "Glass Lasers", *CRC Press, Butterworth*, London, (1970).
- [13] G.N. Van den Hoven, J.A. van der Elsken, A. Polman, C. van Dam, K.W.M. van Uffelen e M.K. Smit, "Absorption and emission cross section of  $\text{Er}^{+3}$  in  $\text{Al}_2\text{O}_3$  waveguides", *Applied Optics*, Vol.36, No.15, pp.3338-3341, (1997).
- [14] C. R. Giles e E. Desurvire, "Modeling Erbium-Doped Fibre Amplifiers", *Journal of Lightwave Tech.*, Vol.9, No.2, pp.271-283, (1991).

- 
- [15]C. Huang, L. McCaughan e D.M. Gill. "Evaluation of Absorption and Emission Cross Sections of Er-doped LiNbO<sub>3</sub> for Applications to Integrated Optics Amplifiers", *Journ. of Lightwave Technology*, Vol.2, pp.803-809, (1994).
- [16]E. Desurvire e J.R. Simpson, "Evaluation of <sup>4</sup>I<sub>15/2</sub> and <sup>4</sup>I<sub>13/2</sub> Stark level energies in erbium-doped alumiosilicate fibers", *Opt. Lett.*, Vol.15, pp.547-548, (1990).
- [17]S.A. Payne, L.L. Chase, L.K. Smith, W.L. Kway, e W.F. Krupke, "Infrared cross-section measurements for crystals doped with Er<sup>3+</sup>, Tm<sup>3+</sup> and Ho<sup>3+</sup>", *IEEE Journ of Quantum Electronics*, Vol.28, pp.2619-2630, (1992).
- [18]K.E. Alameh, A. Minasian e Y. Zhao, "A Numerical Model for the Complex Susceptibility of Saturated Erbium-Doped Amplifiers", *IEEE Journ. of Quantum Electronics*, Vol.33, No.5, pp.855-860, (1997).
- [19]E. Desurvire, "Study of the Complex Atomic Susceptibility of Erbium-Doped Fiber Amplifiers", *Journal of Lightwave Technology*, Vol.8, No.10, pp.1517-1527, (1990).
- [20]M. Federighi, I.Massarek e P.F.Twoga, "Optical Amplification in Thin Film waveguide with High Er Concentration", *IEEE Photon. Technol. Lett.* pp.227-229, fevereiro, (1993).
- [21]F.E. Auzel, "Materials and Devices Using Double-Pumped Phosphors with Energy-Transfer", *Proc. IEEE*, Vol.61, No.6, pp.758-786, (1973).
- [22]J.C. Wright, In *Radiationless Processes*, pp.239-295, F.K.Fong(ed.), Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [23]R. Scheps, "Upconversion laser processes", *Progress in Quantum Electronics*, Vol.20, No.4, pp.271-358, (1996).
- [24]W.J. Miniscalco, "Optical and Electronic Properties of Rare Earth ions in glasses", em *Rare Earth Doped Fiber Lasers and Amplifiers*, editado por M.J.F. Digonnet, Marcel Dekker, New York, (1993).
- [25]P. Blixt, J. Nilsson, T. Carlnäs e B. Jaskorzynska, "Concentration-Dependent Upconversion in Er<sup>3+</sup>-Doped Fiber Amplifiers: Experiments and Modeling", *IEEE Trans. Phot. Tech. Lett.*, Vol.3, No.11, pp.996-998, (1991).

## Capítulo 3

# Modelo Espacial

Neste Capítulo apresentaremos o Modelo Espacial de Amplificadores Ópticos, usando a técnica dos elementos finitos, e que segue o trabalho de Di Pasquale[1,2]. Embora estes trabalhos tenham sido referenciados por diversas vezes na literatura, ainda não haviam sido implementados fora do grupo de origem, haja vista a complexidade de sua implementação. O Modelo Espacial apresentado na literatura está montado sobre uma plataforma vetorial usando a técnica dos elementos finitos. Nós implementamos o Modelo Espacial [2] também usando a técnica dos elementos finitos, porém sobre uma plataforma escalar em coordenadas retangulares e cilíndricas. A razão disto é que precisamos de um modelo numérico rigoroso e robusto para comparar os resultados obtidos com os Modelos Modal e z-variante BPM que são apresentados nos Capítulo 4 e Capítulo 5, respectivamente. A implementação do Modelo Espacial sobre uma plataforma vetorial é

bastante direta tomando-se por base o modelo escalar, uma vez que o grupo onde este trabalho foi desenvolvido tem domínio sobre as formulações vetoriais[3].

De forma geral os modelos espaciais usam técnicas numéricas e apresentam-se mais realísticos que os modelos analíticos, já que usam diretamente os campos eletromagnéticos calculados do guia de ondas e a distribuição de érbio para o cálculo dos coeficientes de ganho. Além disso, os modelos numéricos permitem a inclusão da ASE. Nos modelos analíticos é comum usar o fator de *overlap*  $\Gamma$  para expressar essa superposição. No entanto, os modelos espaciais apresentam, como limitação, a consideração de que o dispositivo amplificador tem sua geometria invariante na direção de propagação “z”. Em outras palavras, considera-se que a distribuição espacial dos campos eletromagnéticos envolvidos não é alterada durante a propagação o que permite só a análise de dispositivos feitos com base em guias retos e não acoplados. Quando a geometria é variante na direção de propagação “z” e/ou o acoplamento entre guias é considerado, como no caso de acopladores ópticos, deve-se usar uma plataforma numérica que simule a propagação do feixe óptico, como o BPM (*Beam Propagation Method*). O modelo que usa a plataforma numérica BPM será apresentado no Capítulo 5.

## 3.1 Implementação do Modelo

O Modelo Espacial baseia-se na solução das equações de propagação, usando diretamente as soluções dos campos eletromagnéticos envolvidos e a distribuição de érbio.

### 3.1.1 Equações de Propagação

As equações de propagação[4,5] descrevem a evolução da potência dos campos eletromagnéticos envolvidos no amplificador óptico e são escritas como:

$$\frac{dP_{p\pm}(z)}{dz} = \mp\gamma_p(z)P_{p\pm}(z) \quad (3.1)$$

$$\frac{dP_s^i(z, \nu_s^i)}{dz} = [\gamma_{21}(z, \nu_s^i) - \gamma_{12}(z, \nu_s^i)] P_s^i(z, \nu_s^i), \quad i=1, N \quad (3.2)$$

$$\frac{dP_{ASE\pm}^j(z, \nu_j)}{dz} = \pm [\gamma_{21}(z, \nu_j) - \gamma_{12}(z, \nu_j)] P_{ASE\pm}^j(z, \nu_j) + \pm m h \nu_j \Delta \nu_j \gamma_{21}(z, \nu_j) \quad j=1, M \quad (3.3)$$

que formam um sistema de  $2M+N+2$  equações acopladas, e que devem ser resolvidas com as condições de contorno

$$P_{p+}(0) = P_{p0}, \quad P_{p-}(L) = P_{pL} \quad (3.4)$$

$$P_s^i(0, \nu_s^i) = P_{s0}(\nu_s^i) \quad (i=1, N) \quad (3.5)$$

$$P_{ASE+}(0, \nu_j) = P_{ASE-}(L, \nu_j) = 0 \quad (j=1, M) \quad (3.6)$$

nas quais  $L$  é o comprimento do dispositivo amplificador, e  $P_s^i$  e  $P_{p\pm}$ , e  $P_{ASE\pm}^j$  são as distribuições longitudinais (na direção de propagação) das potências do sinal, do bombeio e da  $ASE\pm$  (*Amplified Spontaneous Emission*) (co-(+) e contra-propagante(-)), respectivamente, que serão chamadas simplesmente de “distribuições de potência”. O índice “ $i$ ” em  $P_s^i$  refere-se ao  $i$ -ésimo sinal, centrado na frequência  $\nu_s^i$ , de um total de  $N$  que podem propagar-se simultaneamente dentro do amplificador, como em sistemas WDM. O espectro da  $ASE\pm$  é discretizado em  $M$  intervalos com largura espectral  $\Delta \nu_j$ , centrados nas frequências  $\nu_j$ , de tal forma que, na equação (3.3),  $P_{ASE\pm}^j$  refira-se ao  $j$ -ésimo componente espectral da  $ASE\pm$ . Ainda na equação (3.3), tem-se que  $m$  é o número total de modos presentes no guia de ondas e  $h$  é a constante de Planck. Nas equações (3.1)-(3.3) os *coeficiente de ganho*  $\gamma_p$ ,  $\gamma_{12}$  e  $\gamma_{21}$  são dados por

$$\gamma_p(z) = \iint_A \Psi_p(x, y) \left[ \sigma_{a13} \bar{N}_1(x, y, z) - \sigma_{e31} \bar{N}_3(x, y, z) - \sigma_{ep21} \bar{N}_2(x, y, z) \right] dx dy \quad (3.7)$$

$$\gamma_{12}(z, \nu_i) = \iint_A \Psi_s(x, y) \sigma_{a12} \bar{N}_1(x, y, z) dx dy \quad (3.8)$$

$$\gamma_{21}(z, \nu_i) = \iint_A \Psi_s(x, y) \sigma_{e21} \bar{N}_2(x, y, z) dx dy \quad (3.9)$$

nas quais  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  são as populações dos níveis principais estável, meta-estável e do nível de bombeio, respectivamente. Tem-se ainda que  $\sigma_{a13}$ ,  $\sigma_{e31}$ ,  $\sigma_{a12}$  e  $\sigma_{e21}$  são as seções de choque de absorção(a) e emissão(e) nas frequências do sinal(12 e 21) e bombeio (13 e 31). Quando o amplificador é bombeado em 980nm, o nível 3 corresponde ao nível principal  $^4I_{11/2}$  do *Stark Split*. Porém, como será melhor discutido na Seção 3.1.2, quando o amplificador é bombeado no comprimento de onda de 1480nm, o nível de bombeio confunde-se com o principal  $^4I_{13/2}$ . Assim,  $\sigma_{ep21}=0$  ou  $\sigma_{ep21}=\sigma_{e31}$  quando o amplificador é bombeado em 980nm ou 1480nm, respectivamente. Nas equações (3.7)-(3.9),  $\Psi_s(x,y)$  e  $\Psi_p(x,y)$  são as densidades de potência normalizadas (definida no Apêndice A- (A.5)), obtidas da análise modal do guia com o qual o dispositivo é construído, de tal forma que as intensidades de potência do sinal, do bombeio e da ASE $\pm$  possam ser escritas como

$$I_s(x, y, z) = \Psi_s(x, y)P_s(z) \quad (3.10)$$

$$I_p(x, y, z) = \Psi_p(x, y)P_p(z) \quad (3.11)$$

$$I^j_{ASE\pm}(x, y, z) = \Psi_s(x, y)P^j_{ASE\pm}(z), \quad (3.12)$$

nas quais devemos perceber que usou-se a mesma densidade de potência normalizada para a ASE e para o sinal, uma vez que a diferença entre os comprimentos de onda centrais dos M intervalos usados para discretizar a ASE e o do sinal é relativamente pequeno e pode considerar-se  $\Psi^j_{ASE} \approx \Psi^i_s$ . Como medida desta consideração temos, para uma fibra óptica típica, que a correlação entre a distribuição de campo do modo fundamental em 1530nm e 1650nm é maior que 95%.

### 3.1.2 Equações de taxa

As populações  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  nas equações (3.7)-(3.9) são soluções das equações de taxa para os sistemas energéticos das Figuras 3.1 ou 3.2, quando considera-se o bombeio em 980nm ou 1480nm, respectivamente.

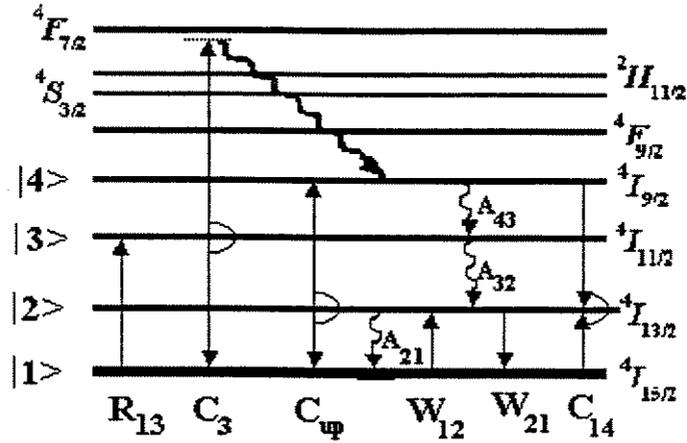
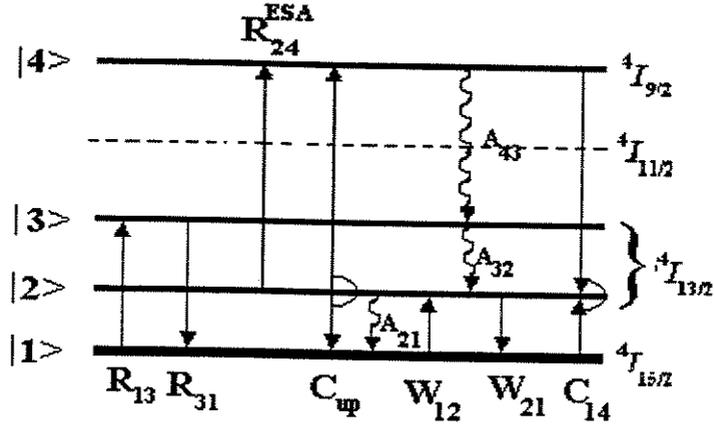


Figura 3.1 – Sistema em que são considerados 4 níveis de energia em razão da dopagem com érbio e bombeio no comprimento de 980 nm.  $R_{13}$  e  $W_{12}$  e  $W_{21}$  são as taxas estimuladas,  $A_{43}$  e  $A_{32}$  são as taxas não radiativas entre os níveis 4→3 e 3→2, respectivamente,  $A_{21}$  é a taxa de fluorescência e  $C_{up}$ ,  $C_3$  e  $C_{14}$  são os coeficientes de conversão ascendente e de relaxação cruzada.

Na Figura 3.1 consideram-se os níveis de energia  ${}^4I_{15/2}$ ,  ${}^4I_{13/2}$ ,  ${}^4I_{11/2}$ ,  ${}^4I_{9/2}$  de um meio dopado com érbio, bombeado em 980nm, cujas populações são  $\bar{N}_i$  ( $i = 1,4$ ) respectivamente. Temos que  $R_{13}$  é a taxa de bombeio e  $W_{12}$  e  $W_{21}$  são as taxas estimuladas de absorção e emissão na frequência do sinal. As taxas não radiativas entre os níveis 4→3 e 3→2 são representadas por  $A_{43}$  e  $A_{32}$ , e  $A_{21}$  é a taxa de fluorescência.  $C_{up}$  e  $C_3$  são os coeficientes de conversão ascendente cooperativa dos níveis 2 e 3, e  $C_{14}$  é o coeficiente de relaxação cruzada entre os níveis 4 e 1. É considerado que a conversão ascendente cooperativa que ocorre do nível 3 não atinge o nível  ${}^4F_{7/2}$  e relaxa muito rapidamente para o nível 4 ( ${}^4I_{9/2}$ ). O sistema de equações de taxa para o sistema da Figura 3.1 é dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial t} &= -W_{12} \bar{N}_1 - R_{13} \bar{N}_1 + A_{21} \bar{N}_2 + W_{21} \bar{N} \\
 &\quad + C_{up} \bar{N}_2^2 - C_{14} \bar{N}_1 \bar{N}_4 + C_3 \bar{N}_3^2 \\
 \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial t} &= W_{12} \bar{N}_1 - A_{21} \bar{N}_2 - W_{21} \bar{N}_2 + A_{32} \bar{N}_3 \\
 &\quad - 2C_{up} \bar{N}_2^2 + 2C_{14} \bar{N}_1 \bar{N}_4 \\
 \frac{\partial \bar{N}_3}{\partial t} &= R_{13} \bar{N}_1 - A_{32} \bar{N}_3 + A_{43} \bar{N}_4 - 2C_3 \bar{N}_3^2 \\
 \frac{\partial \bar{N}_4}{\partial t} &= C_{up} \bar{N}_2^2 - C_{14} \bar{N}_1 \bar{N}_4 - A_{43} \bar{N}_4 + C_3 \bar{N}_3^2
 \end{aligned} \tag{3.13}$$



**Figura 3.2** – Sistema em que são considerados 4 níveis de energia em razão da dopagem com érbio e bombeio no comprimento de onda de 1480 nm.  $R_{13}$  e  $R_{31}$  e  $W_{12}$  e  $W_{21}$  são as taxas estimuladas na frequência do bombeio(R) e sinal(W),  $A_{43}$  e  $A_{32}$  são as taxas não radiativas entre os níveis 4→3 e 3→2, respectivamente,  $A_{21}$  é a taxa de fluorescência e  $C_{up}$  e  $C_{14}$  são os coeficientes de conversão ascendente e de relaxação cruzada.  $R_{24}^{ESA}$  é a taxa de ESA do nível 2 para o nível 4.

A Figura 3.2 apresenta o sistema de níveis energéticos a ser considerado quando o bombeamento é no comprimento de onda de 1480nm, assim como a numeração dos níveis. Neste caso o nível de energia do bombeio pertence ao nível principal 2 ( ${}^4I_{13/2}$ ). Porém, haja visto as transições não radiativas dentro do nível  ${}^4I_{13/2}$ , chamaremos o nível de bombeio de “nível 3”, que não deve ser confundido com o nível  ${}^4I_{11/2}$ , quando o sistema é bombeado em 980nm. Além disso, como apontado na Sub-Seção 2.5.1, os efeitos da ESA não podem ser desprezados quando o bombeio é no comprimento de onda de 1480nm, uma vez que a seção de choque da ESA é, aproximadamente, 10% do valor de pico da seção de choque de absorção. A taxa não radiativa  $A_{43}$  engloba as taxas não radiativas dentre os níveis  ${}^4I_{9/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$  e  ${}^4I_{11/2} \rightarrow {}^4I_{13/2}$ , de tal forma que possamos desconsiderar o nível  ${}^4I_{11/2}$ . Neste caso, o sistema de equações de taxa passa a ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial t} &= -W_{12}N_1 - R_{13}N_1 + R_{31}N_3 + A_{21}N_2 + W_{21}N_2 + C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 \\
 \frac{\partial N_2}{\partial t} &= W_{12}N_1 - A_{21}N_2 - W_{21}N_2 + A_{32}N_3 - 2C_{up}N_2^2 + 2C_{14}N_1N_4 - R_{24}^{ESA}N_2 \\
 \frac{\partial N_3}{\partial t} &= R_{13}N_1 - R_{31}N_3 - A_{32}N_3 + A_{43}N_4 \\
 \frac{\partial N_4}{\partial t} &= C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 - A_{43}N_4 + R_{24}^{ESA}N_2
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

nas quais  $R_{13}$ ,  $R_{31}$ ,  $W_{12}$  e  $W_{21}$  são as taxas estimuladas na frequência do bombeio(R) e sinal(W),  $A_{43}$  e  $A_{32}$  são as taxas não radiativas entre os níveis 4→3 e 3→2, respectivamente,  $A_{21}$  é a taxa de fluorescência e  $C_{up}$ , e  $C_{14}$  são os coeficientes de conversão ascendente e de relaxação cruzada.  $R_{24}^{ESA}$  é a taxa de ESA do nível 2 para o nível 4.

No estado estacionário, as soluções das equações de taxa (3.13) e (3.14) são encontradas anulando o lado esquerdo destas equações e aplicando a lei de conservação  $N_T(x,y,z,\omega) = \bar{N}_1(x,y,z,\omega) + \bar{N}_2(x,y,z,\omega) + \bar{N}_3(x,y,z,\omega) + \bar{N}_4(x,y,z,\omega)$ , na qual  $N_T$  é o número total de íons de érbio. Os sistemas de equações (3.13) e (3.14) são não-lineares em razão da presença dos termos cruzados  $\bar{N}_1 \bar{N}_4$ , e devem ser resolvidos numericamente. As taxas estimuladas  $W_{ij}$  e  $R_{ij}$  são escritas como

$$\begin{aligned}
 W_{12}(x, y, z, \nu_s) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{a12}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, z, \nu_s^i) + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{a12}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, z, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, z, \nu^j)) \\
 W_{21}(x, y, z, \nu_s, \nu_p) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{e21}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, z, \nu_s^i) + \frac{\sigma_{ep21}(\nu_p)}{h\nu_p} (I_p^+(x, y, z, \nu_p) + I_p^-(x, y, z, \nu_p)) + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{e21}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, z, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, z, \nu^j)) \\
 R_{13}(x, y, z, \nu_p) &= \frac{\sigma_{a13}(\nu_p)}{h\nu_p} (I_{p+}(x, y, z, \nu_p) + I_{p-}(x, y, z, \nu_p)) \tag{3.15} \\
 R_{31}(x, y, z, \nu_p) &= \frac{\sigma_{e31}(\nu_p)}{h\nu_p} (I_{p+}(x, y, z, \nu_p) + I_{p-}(x, y, z, \nu_p)) \\
 R_{24}^{ESA}(x, y, z, \nu_s, \nu_p) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{a24}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, z, \nu_s^i) + \frac{\sigma_{a24}^p(\nu_p)}{h\nu_p} (I_p^+(x, y, z, \nu_p) + I_p^-(x, y, z, \nu_p)) + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{a24}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, z, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, z, \nu^j))
 \end{aligned}$$

nas quais  $R_{24}^{ESA} = \sigma_{ep21} = 0$  quando o comprimento de onda do bombeio  $\lambda_p$  é 980nm, e  $\sigma_{ep21} = \sigma_{e31}$  quando  $\lambda_p = 1480\text{nm}$ . Nas equações (3.15) supõem-se a propagação de N sinais, com frequências  $\nu^i$  e intensidades  $I_s^i$ , e nas quais  $I_{p\pm}$  e  $I_{ASE\pm}$  são a intensidade do bombeio e da ASE (*Amplified Spontaneous Emission*) co(+) e contra-propagante(-), respectivamente. O uso dos coeficientes de conversão ascendente nas equações (3.13) e (3.14) permite o modelamento adequado de dispositivos dopados com altas concentrações de érbio. Em geral, para concentrações da ordem de 100ppm ( $\approx 10^{24}$  íons/m<sup>3</sup>) estes efeitos não são importantes. Porém as aplicações atuais de dispositivos amplificadores ópticos demandam concentrações maiores que 1000ppm, e, portanto, tais efeitos não podem ser desprezados.

As seções de choque presentes nas equações (3.15) não necessariamente devem ser expressas em função de um somatório de lorentzianas, como mostrado por meio da equação (2.73). Para o modelamento da susceptibilidade complexa, apresentado no Capítulo 2, essa representação torna-se obrigatória, uma vez que, para escrever a parte real desta, precisamos conhecer a posição das linhas do *Stark Split* e suas respectivas larguras espectrais.

### 3.1.3 Operação Multimodo

Um dispositivo amplificador pode apresentar mais de um modo na frequência do bombeio ou na do sinal. Isto pode ocorrer em dispositivos amplificadores integrados nos quais a descontinuidade entre o índice de refração do núcleo e da casca é elevada propositalmente para provocar um maior confinamento do campo do bombeio e assim obter ganho elevado[6].

Suponhamos que o dispositivo seja excitado externamente por um feixe com distribuição de campo gaussiana  $\Phi(x,y,\omega)$ , com diferentes larguras na frequência do bombeio e do sinal. Esta suposição é sustentada experimentalmente quando um dispositivo de óptica integrada é excitado por um feixe que está sendo acoplado através de um conjunto de lentes. Consideremos que nas frequências  $\omega_s$  e  $\omega_p$  do sinal e bombeio, respectivamente,  $N_s$  e  $N_p$  modos com distribuições de campo

$\phi^i(x,y,\omega_{s/p})$  possam propagar-se. Então o feixe de entrada pode ser escrito através de uma expansão modal dos modos presentes no guia, ou seja

$$\Phi(x, y, \omega_{s/p})_{\text{gauss}} = \sum_{i=1}^{N_q} c_i \phi(x, y, \omega_{s/p})_i \quad (3.16)$$

na qual  $N_q$  pode assumir  $N_s$  e  $N_p$  e  $c_i$  representa o coeficiente de acoplamento entre o campo do feixe gaussiano de entrada e o campo do correspondente  $i$ -ésimo modo. Então, a fração da potência total alocada em cada modo da expansão para o bombeio e para o sinal será

$$\eta_{pi} = \frac{c_{pi} c_{pi}^*}{\sum_{j=1}^{N_p} c_{pj} c_{pj}^*} \quad \eta_{si} = \frac{c_{si} c_{si}^*}{\sum_{j=1}^{N_s} c_{sj} c_{sj}^*} \quad (3.17)$$

Desta forma, para guias multimodos, a densidade de potência normalizada para o sinal e bombeio pode ser calculada como

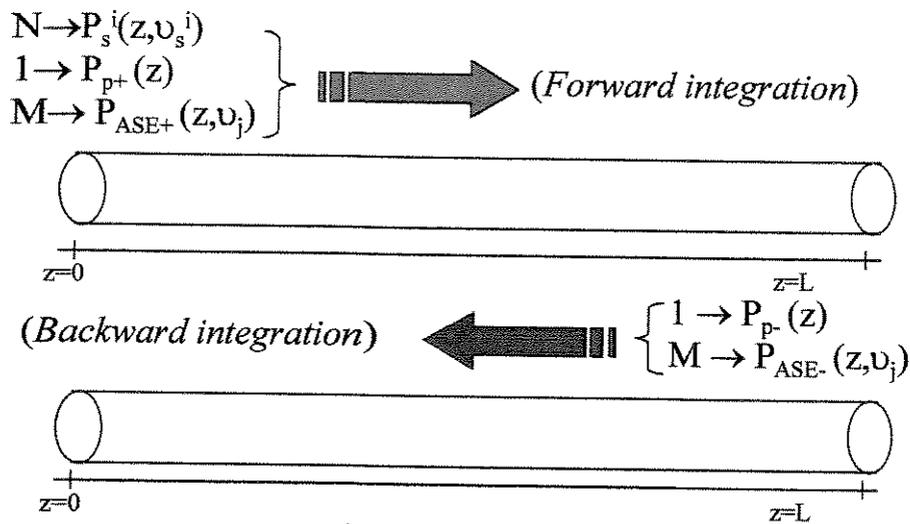
$$\Psi_{s/p} = \sum_{i=1}^{N_q} \eta_{si/pi} \Psi_{s/p}^i \quad (3.18)$$

na qual  $\Psi_{s/p}^i(x,y)$  e  $\Psi_p^i(x,y)$  são as densidades de potência normalizadas (definida no Apêndice A-(A.5)) na frequência do sinal e bombeio, respectivamente.

### 3.1.4 Rotina Numérica

O sistema de  $2M+N+2$  equações acopladas integro-diferenciais e não lineares, formado pelas equações (3.1)-(3.3), juntamente com as condições de contorno dadas pelas equações (3.4)-(3.6), é resolvido numericamente usando um procedimento iterativo juntamente com o algoritmo de Runge-Kutta, em que os sinais co-propagantes são integrados na direção  $z=0 \rightarrow L$ , e os contra-propagantes são integrados na direção  $z=L \rightarrow 0$ . Esse processo é repetido iterativamente até que as distribuições de potência de todos os sinais envolvidos converjam ao longo de todo o dispositivo.

Este processo iterativo pode ser representado graficamente como apresentado na Figura 3.3. Como usual na literatura que trata deste Modelo Espacial, usamos o termo *Forward integration* para expressar a integração na direção  $z=0 \rightarrow L$ , e o termo *Backward integration* para expressar a integração na direção  $z=L \rightarrow 0$ . Alternativamente, o procedimento iterativo pode ser representado pelo fluxograma da Figura 3.4. Inicialmente, e usando um procedimento de análise modal com descrito no Apêndice A, as densidades de potência normalizadas  $\Psi_s$  e  $\Psi_p$  são calculadas.



**Figura 3.3** – Representação gráfica do procedimento iterativo para a solução do sistema de equações integro-diferenciais acopladas e não lineares.

Para  $z=0$ , usando as condições de contorno dadas pelas equações (3.4)-(3.6) e ainda usando as equações (3.10)-(3.12), pode-se calcular as taxas induzidas (3.15). Estas, por sua vez, são usadas para calcular as populações  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  por meio da solução do sistema de equações de taxa (3.13) ou (3.14), conforme o comprimento de onda do bombeio for 980nm ou 1480nm, respectivamente. Estas populações são usadas para calcular os coeficientes de ganho por meio das equações (3.7)-(3.9). Perceber que as taxas dependem das coordenadas transversais do amplificador, e que, portanto, as populações  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  devem ser calculadas dentro de cada elemento finito da discretização feita. Os coeficientes de ganho são usados diretamente nas equações de propagação (3.1)-(3.3) que são integradas por meio do algoritmo de Runge-Kutta. As equações de distribuição de potência das  $M$  componentes espectrais da ASE+, dos  $N$  sinais e do bombeio co-propagante são

integradas na direção  $z=0 \rightarrow \Delta z$ , ignorando as  $M$  equações referentes às componentes espectrais da ASE- e do bombeio contra-propagante. Desta forma, obtém-se valores aproximados para as distribuições de potência  $P_s^i$ ,  $P_{p+}$  e  $P_{ASE+}$  em  $z=\Delta z$ . Perceber que, na primeira integração *forward*, são desprezadas as distribuições de potência  $P_{p-}$  e  $P_{ASE-}$ , que *a priori* são desconhecidas. Este procedimento é repetido até  $z=L$ .

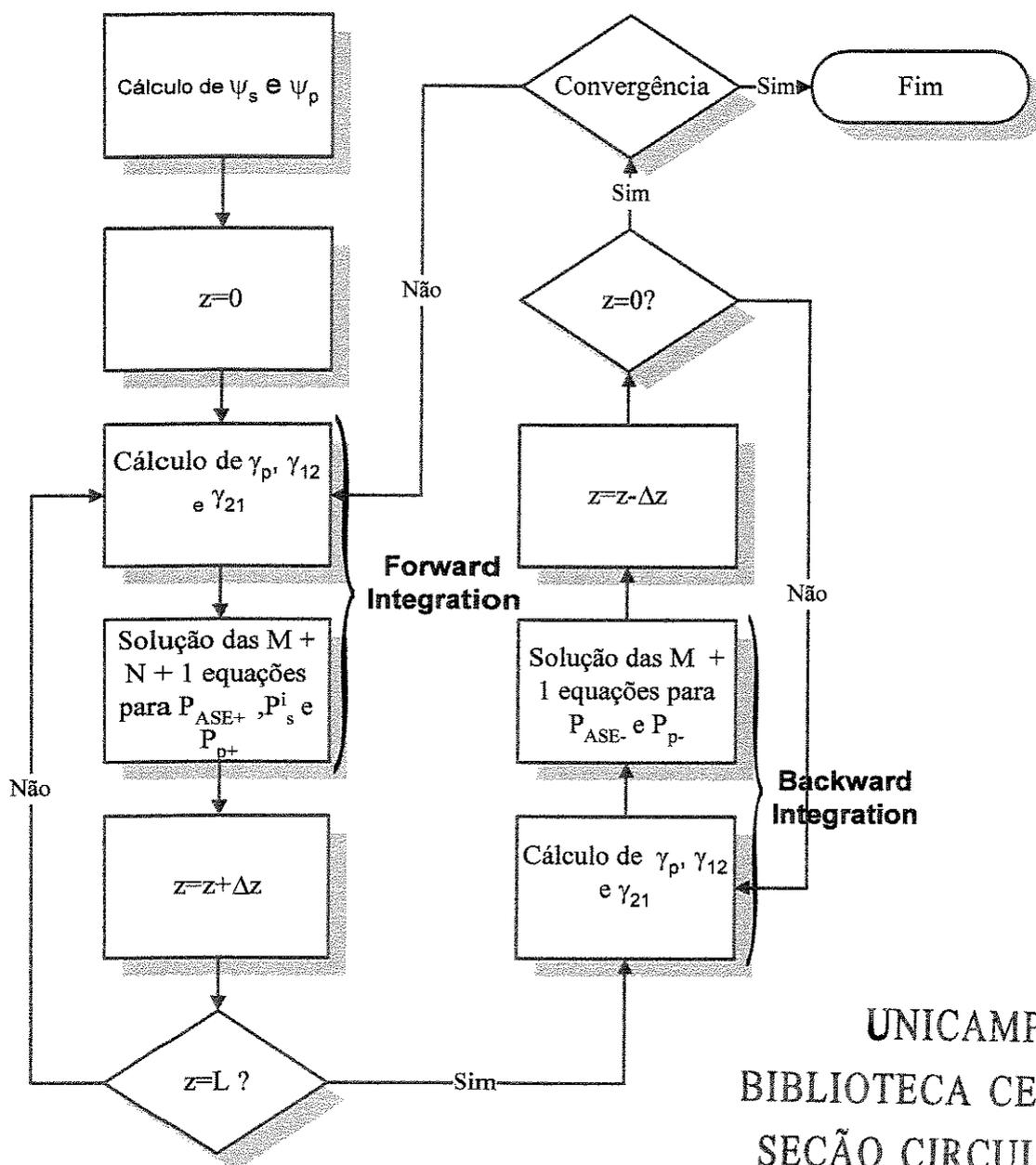


Figura 3.4 – Fluxograma que representa o procedimento iterativo usado para a solução do conjunto de equações de propagação integro-diferenciais não lineares.

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

Um procedimento semelhante é feito para a integração *backward* de  $z=L$  até  $z=0$ , para o cálculo das  $M$  equações referentes às componentes espectrais da ASE- e do bombeio contra-propagante ( $P_p$ - e  $P_{ASE-}$ ). Porém, nesta integração são usadas as distribuições de potência  $P_s^i$ ,  $P_{p+}$  e  $P_{ASE+}$  calculadas na integração *forward* anterior, para o cálculo das taxas estimuladas (3.15). Este procedimento iterativo, integração *forward* seguido de integração *backward* é repetido até que a convergência é obtida. Considera-se obtida a convergência quando as distribuições para  $P_s^i$ ,  $P_{p\pm}$  e  $P_{ASE\pm}$  de duas iterações consecutivas apresentam-se semelhantes dentro de um erro pré estabelecido.

## 3.2 Resultados

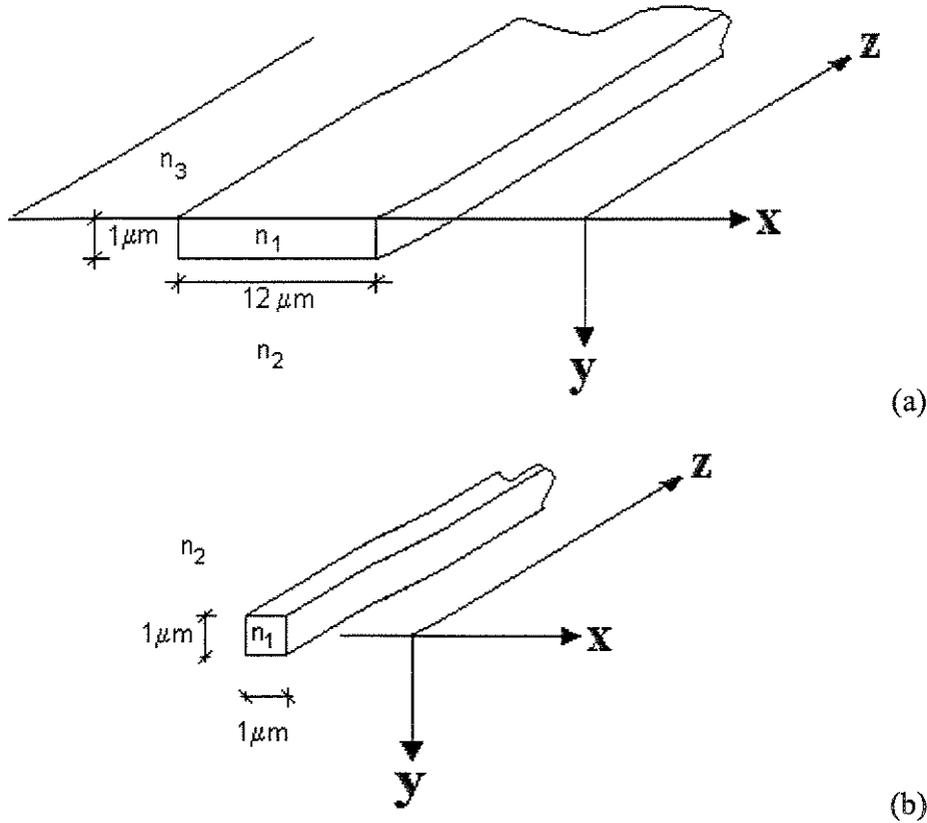
### 3.2.1 Guias de Ondas dopados com érbio

A distribuição transversal dos campos eletromagnéticos é obtida por análise modal e usando uma formulação 2D, como mostrada no Apêndice A. No entanto, pode-se usar uma formulação 1D e aplicar o Método do Índice Efetivo[7].

A Figura 3.5 mostra dois guias tipo canal, usados para simular dispositivos amplificadores dopados com érbio.

O domínio computacional destes guias é uma janela retangular de  $30 \times 30 \mu\text{m}^2$  discretizada em 2774 elementos com 1423 nós e 1636 elementos com 843 nós para os guias da Figura 3.5a e 3.5b, respectivamente, usando funções de base lineares. Consideram-se os guias feitos em substratos de  $\text{SiO}_2$ , de tal forma que possamos usar as curvas de seção de choque típicas para fibras ópticas dopadas com érbio. A concentração de érbio é de  $N_{\text{Er}}=1 \times 10^{+26}$  íons/ $\text{m}^3$ , uniformemente distribuída no núcleo. Vamos, inicialmente, considerar o guia de ondas canal da Figura 3.5a, com comprimento  $L_w=3\text{cm}$ . Os resultados serão comparados com aqueles apresentados por Di Pasquale [1]. Este guia apresenta 3 modos TE's e 3 modos TM's na região de comprimentos de onda de 1500nm.

Consideremos, também, que um feixe gaussiano de largura espacial de  $2\mu\text{m}$  e comprimento de onda  $1531\text{nm}$  esteja sendo usado para excitar os modos dentro dos guias.



**Figura 3.5** – Guias de ondas usados nas simulações feitas em substratos de  $\text{SiO}_2$ . Os guias possuem índice de refração  $n_1=1.6$ ,  $n_2=1.51$  e  $n_3=1.0$ . (a) Guia canal de dimensões  $12 \times 1\mu\text{m}^2$  com índices de refração  $n_1$  dentro do núcleo,  $n_2$  para  $y > 0$ , e  $n_3$  para  $y < 0$ . (b) Guia canal  $1 \times 1\mu\text{m}^2$  com índices de refração  $n_1$  dentro do núcleo e  $n_2$  na casca. A dopagem de érbio é considerada  $N_{\text{Er}}=1 \times 10^{26}$  íons/ $\text{m}^3$  uniformemente distribuída no núcleo.

Quando o campo elétrico do feixe gaussiano é alinhado com o eixo horizontal “x” da estrutura, a excitação é considerada puramente TE, e quando alinhado ao eixo vertical “y”, temos excitação puramente TM. Qualquer outra polarização de entrada excitará uma combinação linear de modos TE e TM. As frações de potência  $\eta_s$  e  $\eta_p$  calculadas pelas equações (3.17) para os casos em que a excitação do sinal de entrada é puramente TE ou puramente TM ou para o caso em que a polarização do feixe gaussiano é alinhada a  $45^\circ$  do eixo horizontal estão na Tabela 3.1. A excitação do bombeio será feita por um feixe gaussiano, de largura espacial de  $2\mu\text{m}$  e comprimento de onda  $980\text{nm}$ , com alinhamento da polarização do campo elétrico a  $45^\circ$  do eixo horizontal. Embora o guia da Figura 3.5a possua mais de 6 modos em  $980\text{nm}$ , somente serão considerados os 6 primeiros (3 TE’s e 3

TM's). Em razão da natureza par da excitação gaussiana os modos com simetria ímpar TE<sub>21</sub> e TM<sub>21</sub> são excitados com frações de potências irrelevantes para nossa análise. Uma vez que o comprimento de onda do bombeio é de 980nm, considera-se o sistema energético da Figura 3.1, com as equações de taxa (3.13) e as taxas estimuladas dadas pelas equações (3.15).

Modos Excitados	$\eta_s$ para $E_x^s \neq 0$ e	$\eta_s$ para $E_x^s = 0$ e	$\eta_s$ para $E_x^s \neq 0$ e	$\eta_p$ para $E_x^p \neq 0$ e
	$E_y^s = 0$	$E_y^s \neq 0$	$E_y^s \neq 0$	$E_y^p \neq 0$
TE <sub>11</sub>	0.7706	$\approx 0$	0.3853	0.3639
TE <sub>21</sub>	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$
TE <sub>31</sub>	0.2294	$\approx 0$	0.1147	0.1436
TM <sub>11</sub>	$\approx 0$	0.7690	0.3845	0.3446
TM <sub>21</sub>	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$	$\approx 0$
TM <sub>31</sub>	$\approx 0$	0.2310	0.1155	0.1479

**Tabela 3.1** – Frações de potência de excitação para o dispositivo da Figura 3.5a.

As seções de choque são escritas usando a equação (2.73), com  $n_a=7$  e  $n_e=8$  e com os parâmetros apresentados na Tabela 3.2, juntamente com relações

$$\omega_i^{a/e} = \frac{2\pi c_0}{\lambda_i^{a/e}} \quad e \quad \Delta\omega_i^{a/e} = \frac{2\pi\Delta\lambda_i^{a/e}}{(\lambda_i^{a/e})^2}. \quad (3.19)$$

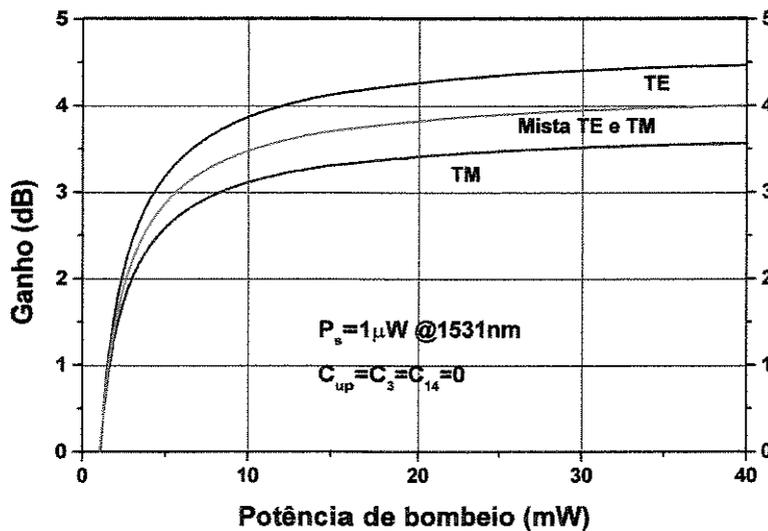
Absorção			Emissão		
$\lambda_i^a$ (nm)	$\Delta\lambda_i^a$ (nm)	$a_i^a$	$\lambda_i^e$ (nm)	$\Delta\lambda_i^e$ (nm)	$a_i^e$
1479	36.0	0.22	1471	42.5	0.02
1497	36.5	0.25	1499	36.3	0.16
1515	35.5	0.22	1520	19.8	0.23
1531	18.0	0.72	1529	11.7	0.59
1544	16.0	0.17	1544	30.7	0.37
1555	18.5	0.21	1559	26.7	0.32
1567	18.0	0.04	1579	22.1	0.04
-	-	-	1598	41.6	0.08

**Tabela 3.2** – Parâmetros usados para escrever as seções de choque para os dispositivos da Figura 3.5.

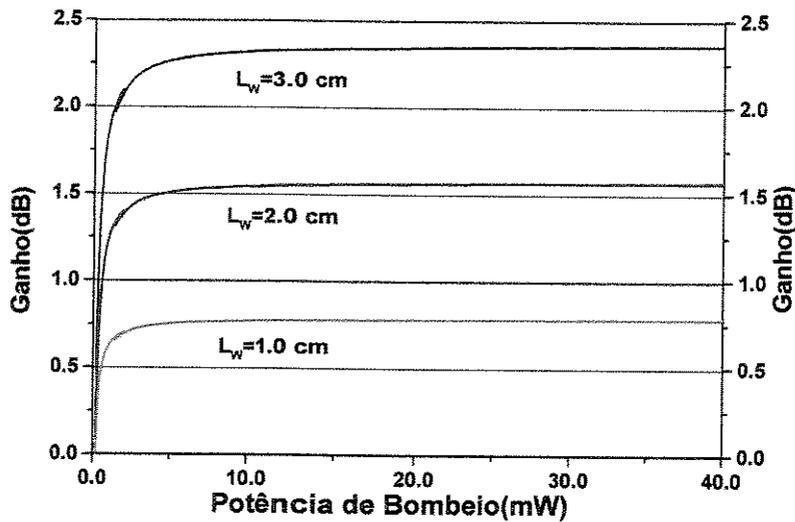
e, ainda, usando  $\sigma_a^{\text{peak}} = \sigma_e^{\text{peak}} = 5.42 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ . A seção de choque de absorção e emissão, na frequência do bombeio, são, respectivamente,  $\sigma_{a13}(980\text{nm}) = 2.59 \times 10^{-25} \text{ m}^2$  e  $\sigma_{e31}(980\text{nm}) = 0.0 \text{ m}^2$ .

Consideremos, inicialmente, o caso em que  $C_{\text{up}} = C_3 = C_{14} = 0$ , conforme feito em [1]. Consideremos somente bombeio co-propagante. A Figura 3.6 mostra as curvas de ganho em função da potência de bombeio para o dispositivo da Figura 3.5a, bombeado em 980nm com polarização do campo elétrico a  $45^\circ$  do eixo horizontal, e para as 3 polarizações detalhadas na Tabela 3.1, e com potência de sinal de  $1 \mu\text{W}$ . O fato deste dispositivo apresentar 6 modos na frequência do sinal tem um grande impacto na intensidade da ASE, como pode perceber-se por meio da equação (3.3) e que, neste caso,  $m=6$ .

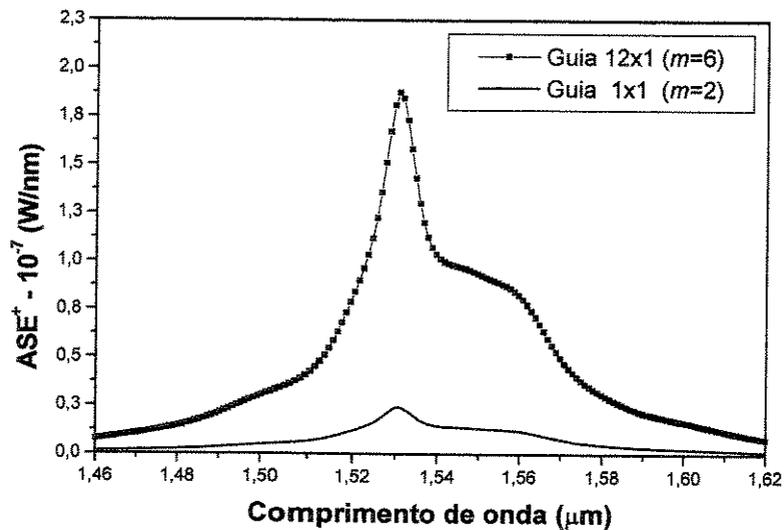
Para o guia canal da Figura 3.5b, e para as mesmas considerações feitas para a Figura 3.6 ( $C_{\text{up}} = C_3 = C_{14} = 0$ , concentração de érbio  $N_{\text{Er}} = 1 \times 10^{+26}$  íons/ $\text{m}^3$  uniformemente distribuída no núcleo, bombeamento em 980nm e potência do sinal de entrada de  $1 \mu\text{W}$ ), pode-se calcular o ganho em função da potência de bombeio para diferentes comprimentos do guia. O resultado da simulação é mostrado na Figura 3.7. Uma vez que este guia possui um modo TE e outro TM, tem-se que  $m=2$  na equação (3.3). O resultado comparativo entre o ruído ASE na saída do amplificador (ASE-), feito com base no guia da Figura 3.5a e da Figura 3.5b com  $L_w = 3\text{cm}$ , pode ser visto na Figura 3.8.



**Figura 3.6** – Ganho em função da potência de bombeio calculado pelo Modelo Espacial para o dispositivo amplificador da Figura 3.4a quando o feixe gaussiano é polarizado segundo o eixo de simetria “x” (TE), “y” (TM) e a  $45^\circ$  do eixo “x” (Excitação mista TE e TM). As frações de potência de excitação são mostradas na Tabela 3.2.



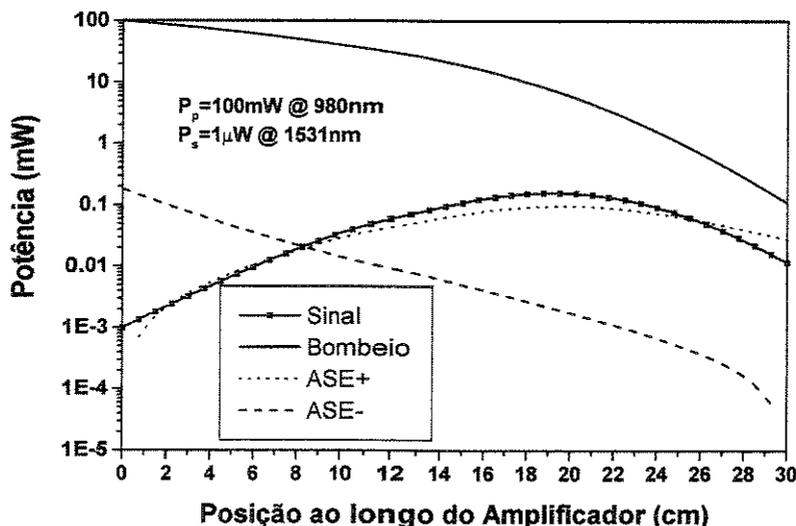
**Figura 3.7** - Ganho em função da potência de bombeio para o guia canal da Figura 3.5b com comprimento  $L_w$ , desconsiderando os efeitos de conversão ascendente, e para potência do sinal de entrada de  $1\mu W$ .



**Figura 3.8** – Densidade espectral de ASE+ na saída dos amplificadores da Figura 3.5a e Figura 3.5b, comprimento de 3cm, bombeado em 980nm com 40mW, desconsiderando os efeitos de conversão ascendente.

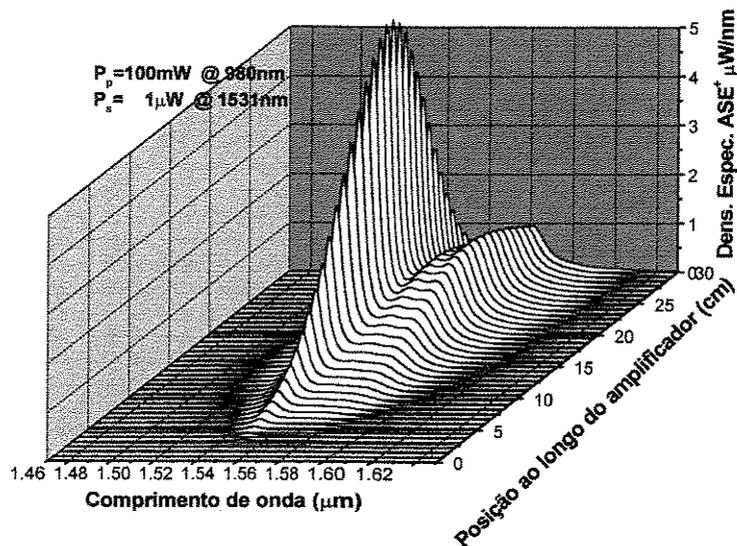
Consideremos, ainda, o amplificador da Figura 3.5b, porém com 30cm de comprimento,  $C_{up}=5.0 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s e  $C_3=5.0 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s para o coeficiente de conversão ascendente cooperativa e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s para o coeficiente de relaxação cruzada, também usada em [2]. A concentração de érbio usada é de  $N_{Er}=3 \times 10^{+26}$  íons/m<sup>3</sup> uniformemente distribuída no núcleo. O dispositivo é bombeado com potência de  $P_p=100$ mW, no comprimento de onda de 980nm. O comprimento de onda e a potência de entrada do sinal são de 1531nm e  $P_s=1\mu W$ , respectivamente. As distribuições

de potência  $P_s$ ,  $P_p$  e  $P_{ASE\pm}$  são mostradas na Figura 3.9 na qual pode obter-se o comprimento ótimo do amplificador, que é definido como o comprimento que maximiza o ganho.



**Figura 3.9** - Distribuições de potências ao longo do amplificador da Figura 3.5b com 30cm de comprimento, com coeficientes de conversão ascendente  $C_{up}=5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $C_3=5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  e concentração de érbio de  $N_{Er}=3 \times 10^{+26} \text{ íons}/\text{m}^3$ .

O comprimento ótimo do amplificador nestas condições é de aproximadamente 19cm, com ganho máximo de 22dB. A evolução da ASE+, ao longo deste amplificador de 30cm é mostrada na Figura 3.10.



**Figura 3.10** - Propagação do espectro da ASE+ para o amplificador da Figura 3.5b com 30cm de comprimento, com coeficientes de conversão ascendente  $C_{up}=5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $C_3=5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  e concentração de érbio de  $N_{Er}=3 \times 10^{+26} \text{ íons}/\text{m}^3$ .

Perceber a deformação do espectro da ASE na região de 1600nm. Esta característica dos amplificadores longos é usada para a construção de amplificadores na Banda-L<sup>1</sup>.

Quando os efeitos de conversão ascendente não são considerados ocorrem resultados bastante divergentes, o que mostra a necessidade da inclusão destes efeitos para obter resultados realísticos. A Figura 3.11 mostra o resultado da simulação desconsiderando os efeitos de conversão ascendente.

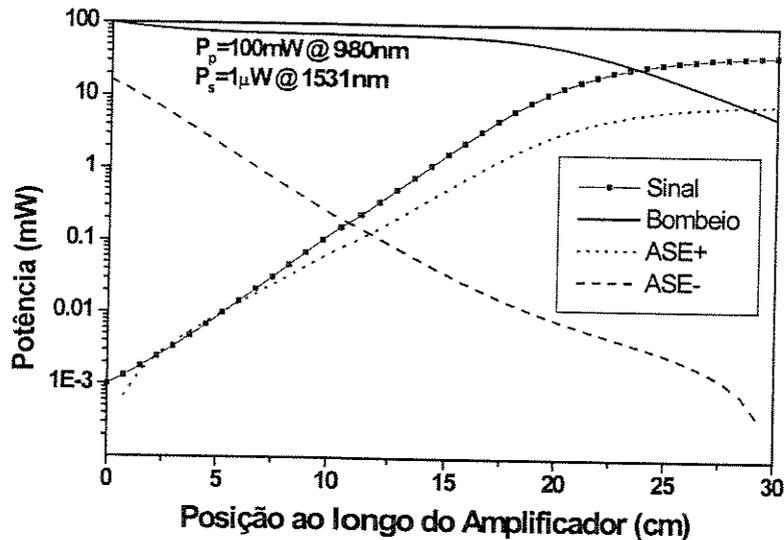


Figura 3.11 - Distribuições de potências ao longo do amplificador da Figura 3.5b com 30cm de comprimento, com coeficientes de conversão ascendente  $C_{up}=C_3=C_{14}=0.0$  e concentração de érbio de  $N_{Er}=3 \times 10^{+26}$  íons/m<sup>3</sup>.

Neste caso, o comprimento ótimo é pouco maior que 30cm, com ganho máximo de 46dB. As diferenças observadas nas Figuras 3.9 e 3.11 para o ganho máximo e o comprimento ótimo indicam a importância de serem considerados os efeitos de conversão ascendente.

### 3.2.2 Fibras Ópticas dopadas com érbio

Os resultados a serem mostrados nesta Seção usam uma formulação 1D em coordenadas cilíndricas, mostrada no Apêndice A. Então, toda a dependência transversal em coordenadas

<sup>1</sup> AFDE's de Banda-L (L de *Long wavelength*), são assim chamados por operarem em comprimentos de ondas longos.

retangulares, das equações anteriores, deve ser reescrita como função do raio da fibra (dependência radial).

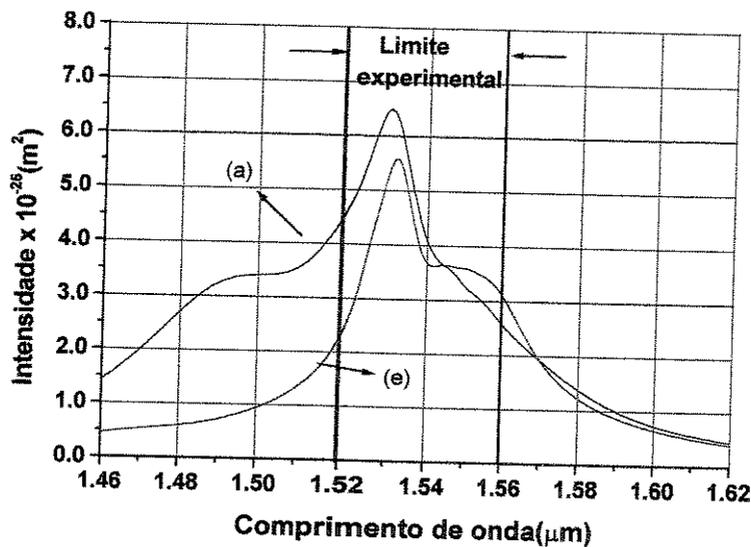
### 3.2.2.1 Fibra: Photonetics EDOS-230

Foi montado um arranjo experimental convencional (um sinal de entrada e somente bombeio co-propagante) para medir as características de ganho de um amplificador óptico a fibra dopada com érbio (EDFA- *Erbium-Doped Fiber Amplifier*) com bombeio co-propagante. Foi escolhido um trecho de fibra dopada com érbio (EDF: *Erbium-Doped Fiber*) fabricada pela Photonetics, usando o processo MCVD, modelo EDOS-230 com comprimento de 3.08m e diâmetro do núcleo de 2.2 $\mu$ m[8]. A concentração de dopantes é de 400 ppm, 150000 ppm e 60000 ppm para o érbio, germânio e alumínio, respectivamente. Os coeficientes de absorção fornecidos pelo fabricante, e verificados experimentalmente, são 3.2 dB/m para 980 nm, e 3.4 dB/m em 1532 nm. O diâmetro da área dopada da EDF fornecida pelo fabricante corresponde ao diâmetro do núcleo da fibra, ou seja 2.2 $\mu$ m. A diferença entre o índice de refração do núcleo e da casca é de  $30 \times 10^{-3}$ . As perdas de fundo (*Background losses*) foram fornecidas pelo fabricante e são <10 dB/km. O comprimento de onda do bombeio é de 980nm. Para a distribuição de érbio dentro do núcleo foi considerada uma função de distribuição dependente da distância radial dada por[15]

$$N_{Er}(r) = N_0 \left( 1 - (r/r_{Er})^\alpha \right) \quad (3.20)$$

que é conhecida como *distribuição tipo  $\alpha$* , também adotada nas simulações feitas por Caballero-Petersen[9] e Pontes[10]. Na equação (3.20)  $N_0=4.14 \times 10^{+24}$  íons/m<sup>3</sup> (400ppm) é o pico da concentração de érbio (centro da fibra),  $2r_{Er}$  é o diâmetro da região dopada com érbio. Foi considerado um valor típico  $\alpha=3$ , e ainda usamos os valores  $C_{up}=C_3=5.0 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s para os coeficientes de conversão ascendente cooperativa, e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s para o coeficiente de relaxação cruzada, como usado em [2]. Foi considerado que o perfil de índice de refração é do tipo degrau[11], com valores de 1.4697 e 1.4390 para o núcleo e a casca, respectivamente. As seções de choque  $\sigma_{a12}$  e  $\sigma_{e21}$  foram extraídas de medidas de ganho feitas entre os comprimentos de onda de 1520 nm e 1560 nm, e são apresentadas na Figura 3.12. Nesta Figura são mostradas duas retas

paralelas verticais coincidentes com os comprimentos de onda de 1520 nm e 1560 nm. Chamamos este intervalo de “limite experimental”, uma vez que este coincide com o espectro de ganho medido, usado para extrair as seções de choque. Fora deste intervalo, usou-se um comportamento espectral típico destas curvas. Vale a pena perceber que a determinação precisa das curvas das seções de choque é imprescindível para um modelamento confiável dos amplificadores ópticos em todo o espectro. Existem vários métodos convencionais de determinação destes parâmetros na literatura. Uma boa parte destes métodos estão relatados na referência[12], ou em artigos recentes [13], nos quais o leitor interessado pode vir a aprofundar-se no tópico.

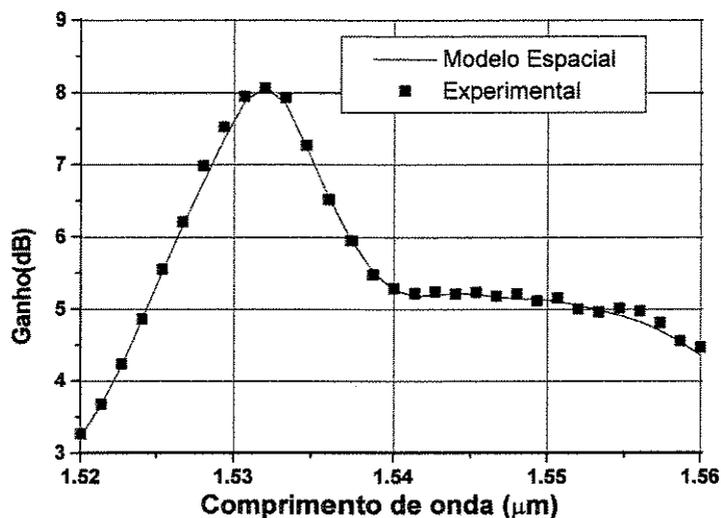


**Figura 3.12** – Seções de choque de absorção (a) e emissão (e) da fibra EDOS-230 fabricada pela Photonetics. A confiabilidade destas curvas está limitada ao intervalo denominado de “Limite experimental”, que é o intervalo espectral das medidas de ganho das quais foram extraídas as curvas das seções de choque. Fora deste intervalo as curvas seguem o comportamento espectral típico.

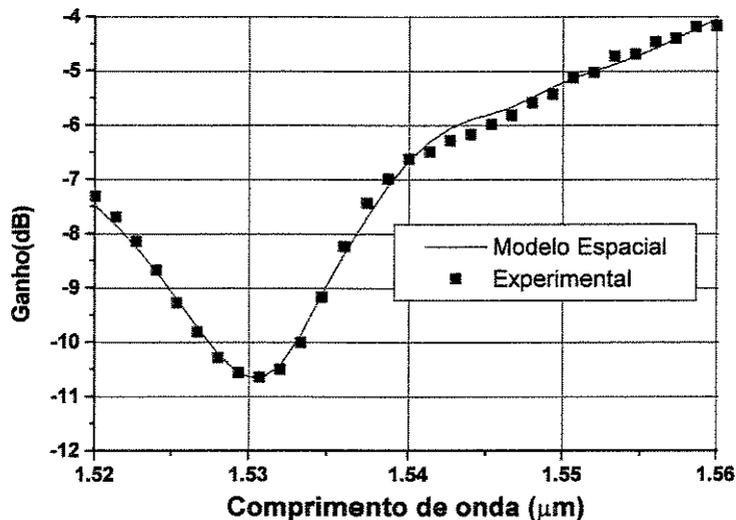
Os valores das seções de choque de absorção e emissão na frequência do bombeio são, respectivamente,  $\sigma_{a13}(980\text{nm})=1.75 \times 10^{-25}\text{m}^2$  e  $\sigma_{e31}(980\text{nm})=0.0\text{m}^2$ . Este valor de  $\sigma_{e31}$  foi escolhido porque é o típico para meios dopados com érbio. O valor da seção de choque  $\sigma_{a13}$  foi ajustado com base no dado de absorção fornecido pelo fabricante e verificado experimentalmente. Os valores de pico para a curva de absorção e emissão são  $\sigma_a^{\text{peak}}=6.5 \times 10^{-25}\text{m}^2$  e  $\sigma_e^{\text{peak}}=5.6 \times 10^{-25}\text{m}^2$ , respectivamente. As medidas experimentais, feitas para extrair as seções de choque, são mostradas na Figura 3.13 e na Figura 3.14, e mostram os espectros de ganho do EDFA usado no experimento para comprimento de onda entre 1520 nm e 1560 nm, para uma potência fixa de sinal de entrada na

fibra  $P_s(z=0)=0.6\mu\text{W}$ , e para potência de bombeio de  $P_p(z=0)=19.8\text{mW}$  e  $P_p(z=0)=0.0\text{mW}$ , respectivamente. Nestas Figuras também são mostradas as curvas obtidas por meio da simulação usando este Modelo Espacial.

Foi simulado o comportamento espectral do ganho para diferentes valores da potência do sinal de entrada em um EDFA feito com a EDF da Photonetics EDOS-230, de 17m, e usando as seções de choque da Figura 3.12 com bombeio co-propagante em 980nm e potência  $P_p=26.9\text{mW}$  (14.3dBm). Os resultados destas simulações foram comparados com medidas experimentais[14].

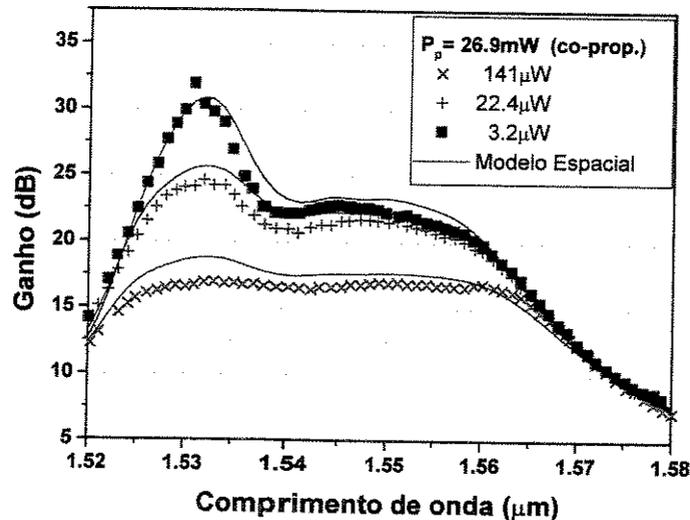


**Figura 3.13** – Espectro de ganho do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 com potência de bombeio de 19.8mW e potência de sinal de 0.6 $\mu\text{W}$ , e comparado com a simulação feita usando o Modelo Espacial.



**Figura 3.14** - Espectro de absorção do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 quando a potência de bombeio é 0.0mW e potência de sinal de 0.6 $\mu\text{W}$ , e comparado com a simulação obtida usando o Modelo Espacial.

A Figura 3.15 mostra o resultado desta simulação. Considerou-se o valor de 0.01dB/m como perda de fundo (10dB/km). Nas medidas foram usadas as potências do sinal de entrada de 3.2 $\mu$ W (-25dBm), 22.4 $\mu$ W (-16.5dBm) e 141 $\mu$ W (-8.5dBm). Observando a Figura 3.15, verifica-se boa concordância qualitativa e quantitativa em todo o espectro medido/simulado. As diferenças observadas podem ser causadas pelas seções de choque usadas, já que estas foram extraídas de dados experimentais usando uma fibra curta. Nesta condição o ganho é medido com pouca precisão como consequência da baixa amplitude dos sinais na saída. Assim, podem ocorrer pequenas diferenças entre a forma das curvas obtidas por meio das medidas de ganho e as curvas próprias do dispositivo. Outra observação importante é que a diferença entre o ganho medido e simulado para o comprimento de onda do sinal, em 1532nm, aumenta com a potência do sinal. Isto pode indicar a necessidade de incluir-se o efeito de alargamento não homogêneo no modelo.

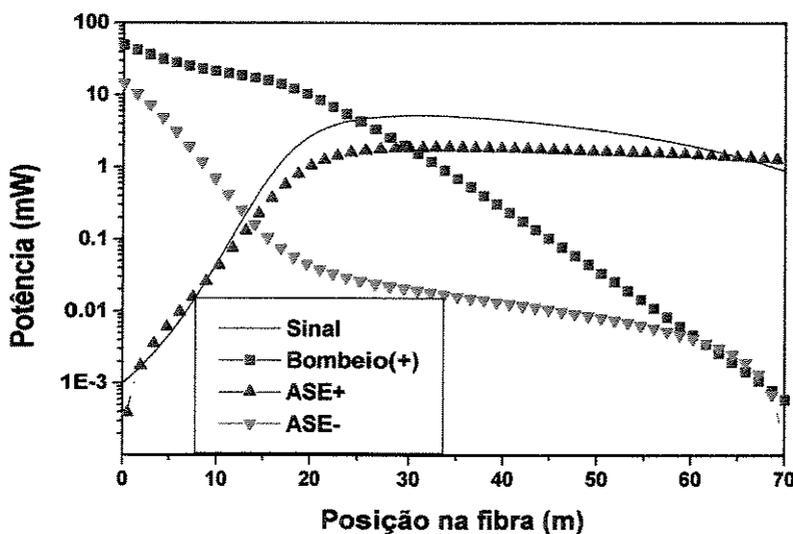


**Figura 3.15** – Comportamento espectral do ganho para potências de sinal de entrada de 3.2 $\mu$ W (-25dBm), 22.4 $\mu$ W (-16.5dBm) e 141 $\mu$ W (-8.5dBm) em um EDFA feito com a EDF da Photonetics EDOS-230 de 17m com bombeio co-propagante em 980nm e potência  $P_p=26.9\text{mW}$  (14.3dBm), e comparado com medidas experimentais.

As configurações com bombeio contra-propagante são necessárias para obter altos ganhos, possibilitando inversão de população ao longo de trechos maiores do amplificador óptico. Simulou-se um amplificador óptico, feito com a EDF da Photonetics EDOS-230, com 70m de comprimento. Foi usado um sinal de comprimento de onda de 1532nm e 1 $\mu$ W de potência de entrada, e foi

investigado o comportamento deste amplificador usando dois esquemas de bombeio: somente co-propagante e co- e contra-propagante simultaneamente. A Figura 3.16 mostra a distribuição axial das potências do sinal, ASE± e bombeio co-propagante com potência de entrada de 50mW. A Figura 3.16 pode ser comparada com a Figura 3.17 que mostra a distribuição axial das potências do sinal, ASE± e bombeio co- e contra-propagante com potência de entrada de 50mW cada. As potências da ASE± foram obtidas por integração da densidade espectral de potência  $P_{ASE\pm}$ , obtidas da integração da equação (3.3), em todo o espectro. Uma vez que o espectro da ASE foi discretizado em M intervalos de frequência  $\Delta\nu_j$ , a potência total da ASE pode ser calculada como

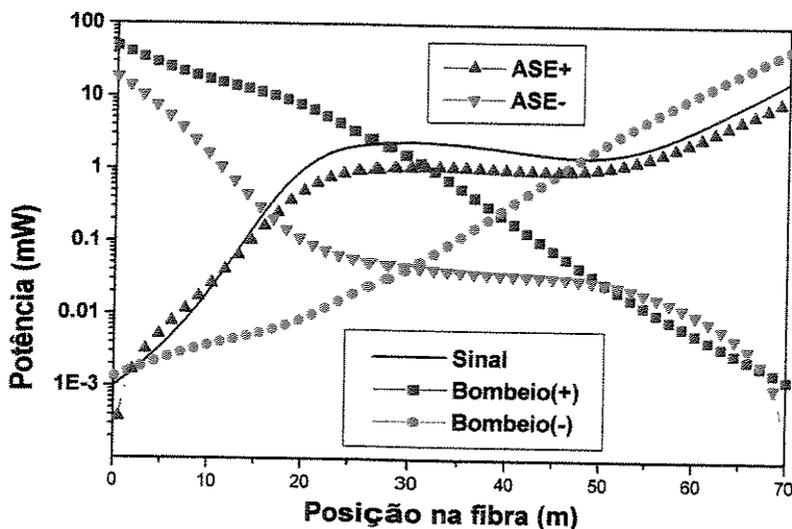
$$P_{ASE\pm}^T = \sum_{j=1}^M P_{ASE\pm}^j \Delta\nu_j \quad (3.21)$$



**Figura 3.16** – Distribuição das potências do sinal, ASE± e bombeio co-propagante ao longo de um EDFA feito de 70m de EDF da Photonetics EDOS-230.

Notar que a configuração de duplo bombeio apresenta um ganho superior à configuração de bombeio co-propagante. Naturalmente que uma melhor escolha das potências de bombeio e comprimento das EDF eleva o ganho do amplificador. A simulação teve o objetivo de evidenciar as vantagens do duplo bombeio e mostrar as potencialidades do código numérico. No trecho compreendido entre a posição de 30m a 60m na Figura 3.16 e no trecho compreendido entre a

posição de 30m a 50m na Figura 3.17 observa-se que a potência do sinal permanece aproximadamente estável.



**Figura 3.17** – Distribuição das potências do sinal, ASE± e bombeio co- e contra-propagante ao longo de um EDFA feito de 70m de EDF da Photonetics EDOS-230.

Uma vez que a potência do bombeio nestes trechos é muito baixa para inverter a população e manter o coeficiente de ganho aproximadamente estável, surgem duas hipóteses para explicar o que está ocorrendo. A primeira hipótese é que a inversão de população está sendo feita pela ASE+, já que esta possui a maior potência dentro dos trechos considerados. A Figura 3.18 mostra a propagação do espectro da ASE+ ao longo da fibra bombeada com bombeio co-propagante.

Observa-se, na Figura 3.18, que no trecho entre as posições de 30m e 70m a densidade espectral da ASE+ cresce na região do espectro de 1555nm. Porém, observando as seções de choque usadas, vemos que a emissão é maior que a absorção nesta região do espectro. Este fato descarta a possibilidade de que a ASE esteja sendo absorvida e usada para bombear o amplificador neste trecho da fibra. A segunda hipótese é que a inversão de população está sendo feita pelo próprio sinal. Das Figuras 3.16 e 3.17 observa-se que a potência do sinal é da ordem de 5mW nos trechos de fibra citados. Então, vamos simular a propagação de um sinal de 5mW de potência, com comprimento de onda 1532nm, num trecho de 30m sem bombeio. Esta simulação representa, aproximadamente, a intensidade dos sinais envolvidos no experimento em questão dentro dos trechos de fibra citados. O resultado da simulação é mostrado na Figura 3.19.

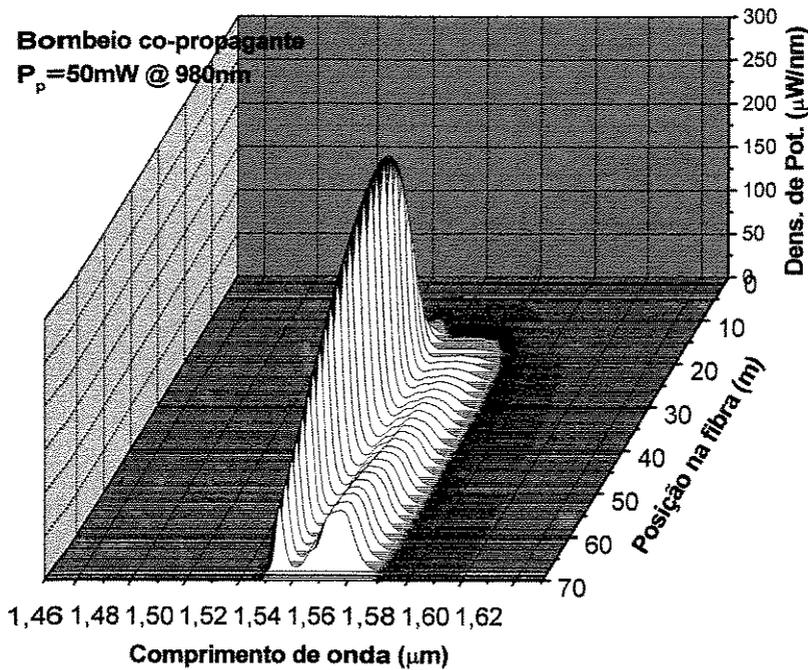


Figura 3.18 - Propagação espectral da ASE+ no EDFA feito de 70m de EDF da Photonetics EDOS-230 e bombeada com 50mW de bombeio co-propagante em 980nm.

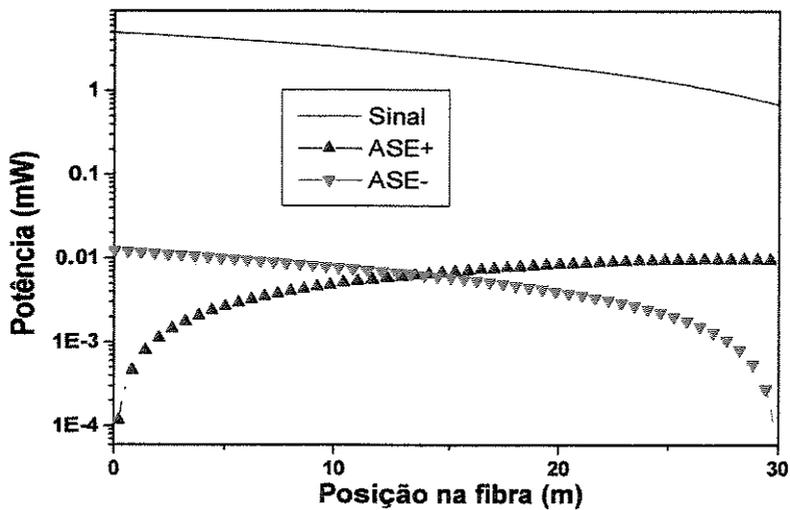
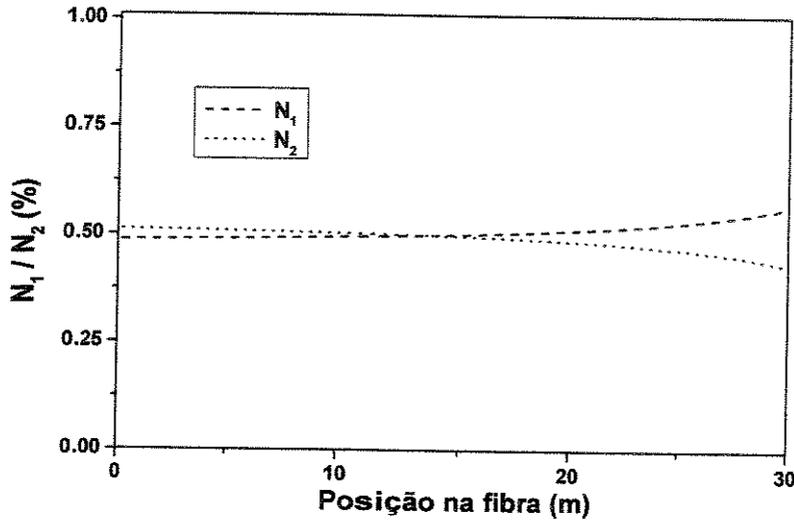


Figura 3.19 - Distribuição das potências do sinal e ASE± ao longo de um EDFA feito de 30m de EDF da Photonetics EDOS-230, sem bombeio e com potência de sinal de entrada de 5mW.

Perceber que a inclinação da curva de evolução da potência do sinal na Figura 3.19 é próxima daquela mostrada na Figura 3.16 no trecho de fibra citado anteriormente. Vamos analisar a inversão da população ao longo do comprimento e no centro da fibra deste EDFA de 30m, com potência de

sinal de entrada de 5mW e sem bombeio. A Figura 3.20 mostra as populações relativas  $N_1$  e  $N_2$  no centro da EDF calculadas como

$$N_1(z) = \frac{\bar{N}_1(r, z)}{N_{Er}(r, z)} \Big|_{r=0} \quad \text{e} \quad N_2(z) = \frac{\bar{N}_2(r, z)}{N_{Er}(r, z)} \Big|_{r=0} \quad (3.22)$$



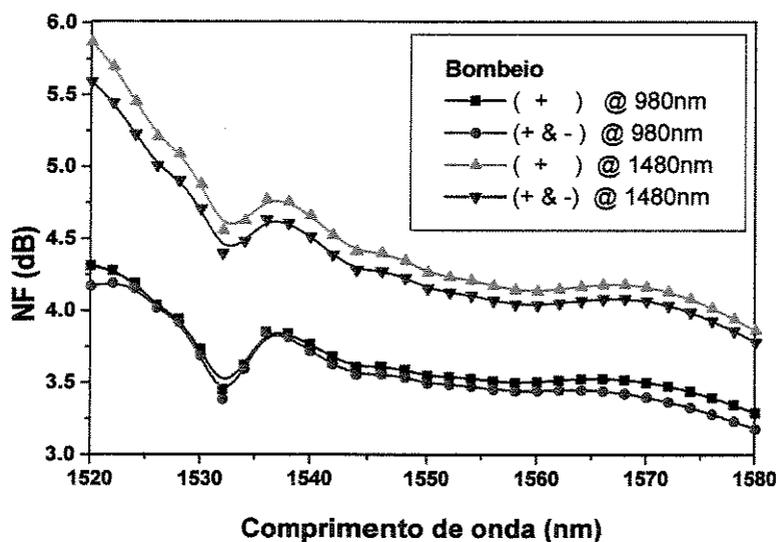
**Figura 3.20** – Distribuição axial da inversão da população  $N_1$  e  $N_2$  ao longo do comprimento do EDFA de 30m, com potência de sinal de entrada de 5mW e sem bombeio.

Como pode ser visto na Figura 3.20, o sinal com potência de 5mW foi suficiente para equalizar as populações ao longo da fibra, ou seja  $N_1 \cong N_2 \cong 0.5$ . Uma vez que  $\sigma_{a12} \cong \sigma_{e21}$  para o comprimento de onda do sinal de 1532nm, tem-se que os coeficientes de ganho  $\gamma_{12}$  e  $\gamma_{21}$ , dados pelas equações (3.8) e (3.9), são aproximadamente iguais, resultando em uma condição de “transparência” para um sinal de potência elevada.

Uma informação importante que pode ser obtida com este Modelo Espacial é a *Figura de Ruído* NF. Este parâmetro, que é a razão entre a relação sinal/ruído na entrada e na saída do dispositivo amplificador -  $NF = SNR_{in} / SNR_{out}$  -, pode ser equacionado em função da densidade espectral de ruído ASE+ [15]  $P_{ASE+}$ , em que

$$NF(\nu_s) = \frac{1}{G(\nu_s)} \left( \frac{P_{ASE+}(\nu_s)}{h\nu_s} + 1 \right) \quad (3.23)$$

e  $G(\nu_s)$  e  $P_{ASE+}(\nu_s)$  são o ganho do dispositivo e a densidade espectral de potência da ASE+ na frequência  $\nu_s$ , respectivamente. Como vimos, tanto o espectro de ganho como o de ASE+ são profundamente afetados pela potência e pelo comprimento de onda do sinal. Portanto, para um cálculo rigoroso, deve-se levar em conta a equação (3.23) para obter-se a Figura de Ruído no amplificador de forma realística. Vamos usar um sinal com potência de  $3.2\mu\text{W}$ . A potência de bombeio será fixada em  $26.9\text{mW}$  e usaremos quatro esquemas de bombeio diferentes: co- e contra-propagante em  $980\text{nm}$ , e co- e contra-propagante em  $1480\text{nm}$ . Notar que quando o EDFA é bidirecionalmente bombeado, a potência total de bombeio é dobrada. O comprimento do EDFA será de  $17\text{m}$ . Usando a equação (3.23) obtém-se o espectro de Figura de Ruído, na saída do EDFA, que é mostrado na Figura 3.21.



**Figura 3.21** – Espectro da Figura de Ruído na saída de um EDFA feito com  $17\text{m}$  de fibra da Photonetics EDOS-230, potência de sinal de entrada de  $3.2\mu\text{W}$  e potência de bombeio de  $26.9\text{mW}$ , para bombeio co- e contra-propagante em  $980\text{nm}$  e  $1480\text{nm}$ .

### 3.2.2.2 Fibra: Lucent

Na Seção anterior apresentamos diversos resultados para a fibra dopada com érbio da Photonetics EDOS-230. Estes resultados são baseados nas seções de choque mostradas na Figura 3.12, que foram extraídas de medidas de ganho. Para isso foi usado um trecho de EDF curto ( $3.08\text{m}$ )

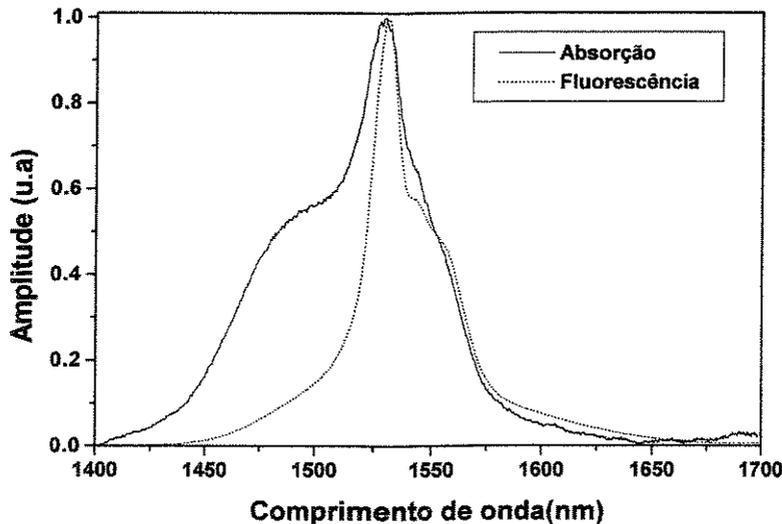
e foi medido o ganho para um sinal de potência constante de  $0.6\mu\text{W}$ . A medida de ganho feita na presença do bombeio, feita com potência tal que garanta a inversão total da população ao longo de toda a fibra, permite-nos ajustar a curva da seção de choque de emissão. De outra forma, a medida de ganho(absorção) feita na ausência do bombeio, permite-nos ajustar a seção de choque de absorção. Nestas medidas, a potência do sinal de entrada deve ser baixa o suficiente para não afetar sensivelmente a inversão de população. Este fato, aliado ainda à necessidade de usar um trecho de fibra curto, tem, como resultado, sinais de saída e ganho relativamente baixos e que não permitem que essas medidas sejam feitas dentro de um espectro bastante largo. Disto resultou o limite experimental apontado na Figura 3.12. Como apontado anteriormente, a determinação precisa das curvas das seções de choque é imprescindível para um modelamento confiável dos amplificadores ópticos em todo o espectro.

Foram feitas medidas espectrais[16] de absorção e fluorescência para a determinação precisa das curvas de seção de choque, usando uma fibra óptica dopada com érbio fabricada pela Lucent. O pico de absorção para esta fibra é de  $14.7\text{dB/m}$  @  $1529\text{nm}$ . A atenuação de fundo, medida em  $1200\text{nm}$  usando reflectometria no domínio do tempo, é menor que  $15\text{dB/km}$ . O comprimento de onda de corte e a abertura numérica(teórica) desta fibra são de  $955\text{nm}$  e  $0.25$ , respectivamente. Usando o valor da abertura numérica, e considerando o índice de refração do núcleo  $1.4697$ , obtém-se o valor de  $1.4483$  para o índice de refração da casca, e, ainda, usando a condição de corte do modo  $\text{LP}_{11}$  para o comprimento de onda de corte de  $955\text{nm}$ , obtém-se o raio do núcleo da fibra que é de  $1.46\mu\text{m}$ . As medidas de absorção foram feitas pelo método *Cutback*, em que a fibra é sucessivamente cortada para que a atenuação seja precisamente determinada. As medidas de emissão (fluorescência) foram feitas medindo a ASE co-propagante com um trecho de  $51\text{cm}$  de fibra e com bombeio de, aproximadamente,  $50\text{mW}$ . Foi usado o valor de  $\tau_{21}=9.5\text{ms}$  para o tempo de decaimento espontâneo(tempo de fluorescência), típico para fibras com altas concentrações de érbio. A Figura 3.22 mostra a forma das linhas de absorção  $I_a(\lambda)$  e fluorescência  $I_{\text{ASE}^+}(\lambda)$  medidas e normalizadas. Para obter as curvas de seção de choque de absorção  $\sigma_a(\lambda)$  e emissão  $\sigma_e(\lambda)$  podemos usar as equações[15]

$$\sigma_e(\nu) = \frac{\bar{\lambda}^2}{\tau_{21} 8\pi n_{\text{eff}}^2} \cdot \frac{I_{\text{ASE}^+}(\nu)}{\int_{-\infty}^{\infty} I_{\text{ASE}^+}(\nu) d\nu} \quad (3.24)$$

$$\sigma_a(\nu) = \frac{\bar{\lambda}^2}{\tau_{21} 8\pi n_{\text{eff}}^2} \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{I_a(\nu)}{\int_{-\infty}^{\infty} I_a(\nu) d\nu}, \quad (3.25)$$

derivadas das relações de Fuchtbauer-Ladenburg[17], nas quais  $n_{\text{eff}}$  é o índice de refração efetivo da onda eletromagnética propagando-se na fibra não dopada,  $\bar{\lambda}$  é o comprimento de onda médio do espectro de absorção ou emissão e  $g_i$  é a degenerescência do nível “i” causada pelo efeito *Stark Splitting*, com  $g_1=8$  e  $g_2=7$  para o caso do érbio. Calculando as equações (3.24) e (3.25), usando<sup>2</sup>  $n_{\text{eff}}=1.4593$  e  $\bar{\lambda}=1531\text{nm}$ , tem-se que o valor de pico da seção de choque de emissão e absorção é  $\sigma_e^{\text{peak}}=8.5 \times 10^{-25} \text{m}^2$  e  $\sigma_a^{\text{peak}}=4.34 \times 10^{-25} \text{m}^2$ , respectivamente.

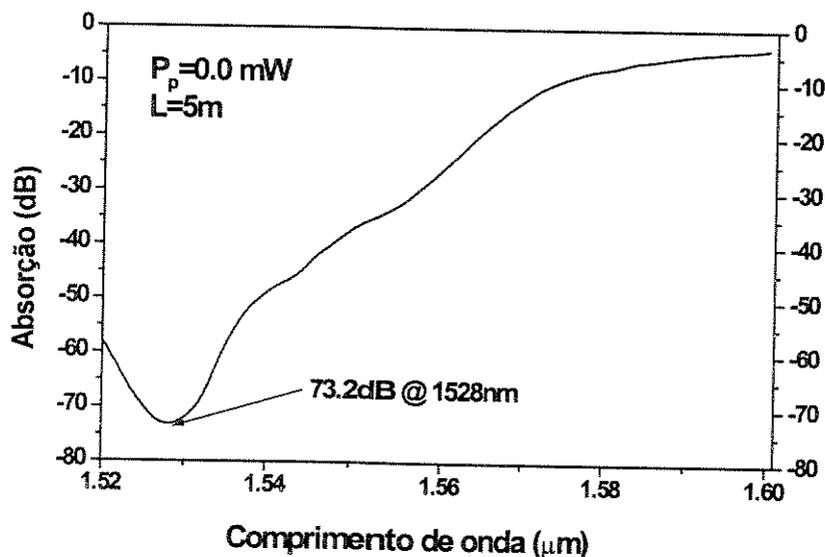


**Figura 3.22** - Forma das linhas de absorção e fluorescência normalizadas obtidas experimentalmente por meio do método *cutback* e medida da ASE+.

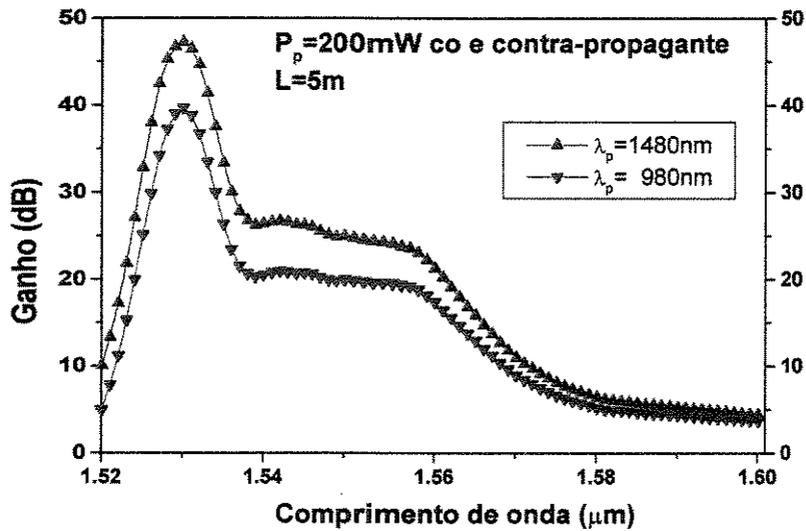
<sup>2</sup> Valor obtido para um sinal de comprimento de onda  $\lambda_s=1531\text{nm}$  na fibra usada

O valor da seção de choque de absorção no comprimento de onda de 980nm é assumida  $1.75 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ . Porém um valor mais apropriado pode ser obtido tomando-se por base a medida da absorção na frequência do bombeio. Usando o valor da absorção de 14.7dB/m @1529nm e o valor típico de 130ppm para cada 1dB/m de absorção[18], tem-se que a fibra possui 1911ppm de concentração de érbio, que corresponde a, aproximadamente,  $N_0 = 2.0 \times 10^{25} \text{ íons/m}^3$ . Foi considerado  $\alpha = 3.6$  para a distribuição radial de érbio, dada pela equação (3.20). Ainda usamos os valores  $C_{up} = C_3 = 9.7 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$  para os coeficientes de conversão ascendente cooperativa, e  $C_{14} = 3.5 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  para o coeficiente de relaxação cruzada. Estes valores foram obtidos assumindo que  $\sqrt{C_{up}}$  varia linearmente com a concentração[19,20,21], e possuem a mesma ordem de grandeza de valores obtidos experimentalmente[22].

Foi simulado o comportamento espectral da fibra fabricada pela Lucent, com 5m de comprimento. As Figuras 3.23 e 3.24 mostram, respectivamente, os espectros de absorção (sem bombeio) e de ganho. Para a Figura 3.24 foi considerado bombeamento simultâneo bidirecional (co-propagante e contra-propagante) de 200mW cada, levando em conta os bombeios nos comprimentos de onda de 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada foi mantida constante em  $1 \mu\text{W}$ . Na Figura 3.23 o pico de absorção de 73.2dB foi medido em 1528nm, o que corresponde a 14.6dB/m, que confere com os dados experimentais.

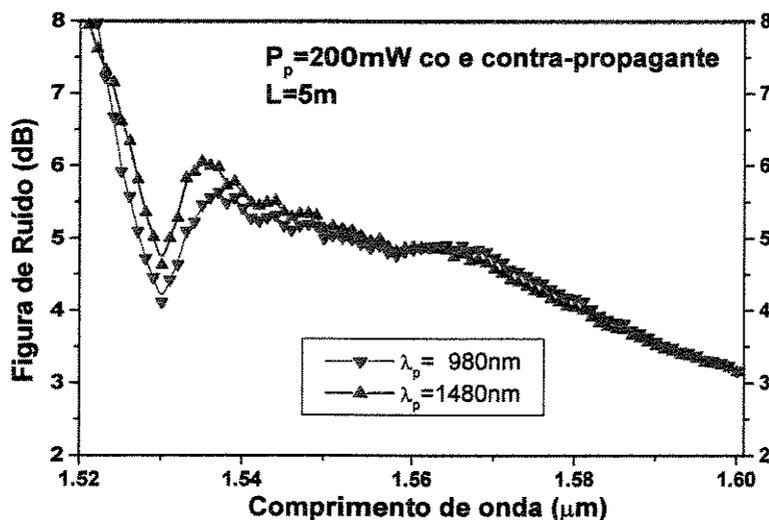


**Figura 3.23** – Simulação do comportamento espectral da absorção no EDFA feita com a fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 5 metros de comprimento. O pico de absorção, em 1528nm, indica uma atenuação de 14.6dB/m, que concorda com os dados experimentais. A potência do sinal de entrada é de  $1 \mu\text{W}$ .



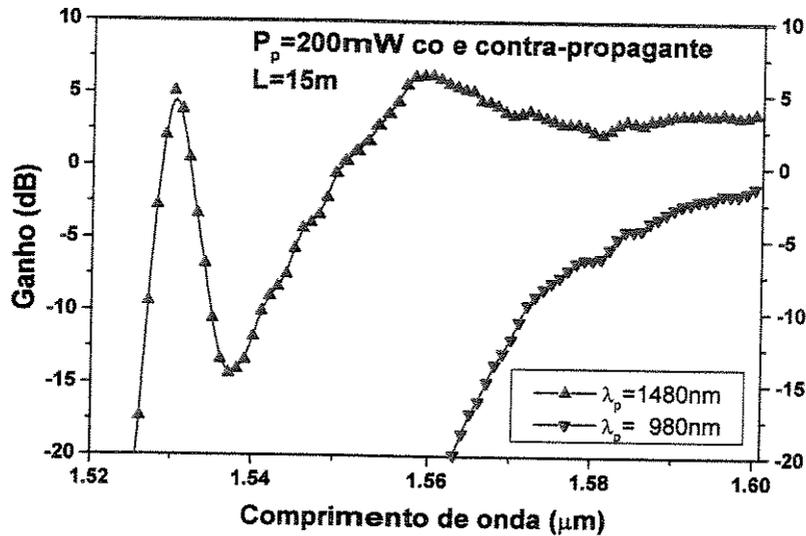
**Figura 3.24** - Simulação do comportamento espectral do ganho para o EDFA feito com a fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 5 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co- e contra-propagante, com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de  $1\mu\text{W}$ .

Para o EDFA em questão e nas condições da Figura 3.24 foi calculada a Figura de Ruído, que é mostrada na Figura 3.25. Perceber que a Figura de Ruído tende ao valor teórico de 3dB para comprimentos de ondas na região de  $1.6\mu\text{m}$ , que é a Banda-L de comunicações ópticas. Este comportamento da Figura de Ruído é detalhadamente discutido de forma analítica em [15].

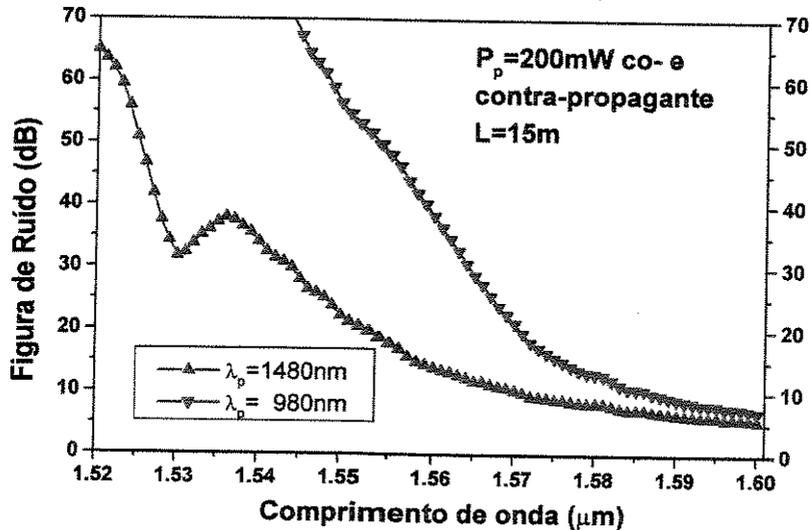


**Figura 3.25** – Figura de Ruído para o EDFA feito com fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 5 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co-propagante e contra-propagante, com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de  $1\mu\text{W}$ .

Investigamos, também, o espectro de ganho para um EDFA feito com a fibra fabricada pela Lucent, com 15 metros de comprimento. A Figura 3.26 mostra o espectro de ganho para este EDFA, bombeado simultaneamente com bombeio co- e contra-propagante de 200mW.



**Figura 3.26** - Simulação do comportamento espectral do ganho para o EDFA feito com a fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 15 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co- e contra-propagante com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de  $1\mu\text{W}$ .



**Figura 3.27** – Figura de Ruído para o EDFA feito com fibra dopada com érbio fabricada pela Lucent, com 15 metros de comprimento, usando simultaneamente bombeio co- e contra-propagante com 200mW cada, e para 980nm e 1480nm. A potência do sinal de entrada é de  $1\mu\text{W}$ .

Mantivemos as mesmas potências para o sinal e bombeio usada para o EDFA de 5m para possibilitar comparações com variações de somente um dos parâmetros do amplificador. Na Figura 3.26, perceber a total deformação do espectro de ganho convencional (como aquele mostrado na

Figura 3.24), deixando clara a amplificação na região do comprimento de onda de  $1.6\mu\text{m}$ , que corresponde à Banda-L. A Figura de Ruído para este EDFA, feito de 15 m de fibra fabricada pela Lucent, é mostrada na Figura 3.27. Novamente, observa-se que o valor da Figura de Ruído tende ao valor teórico de 3dB. Na Figura 3.27, e para o comprimento de onda de  $1.6\mu\text{m}$ , o valor é de aproximadamente 7dB para o bombeio em 980nm e 1480nm. Este valor (relativamente alto) pode ser otimizado para próximo dos 3dB's, maximizando o ganho por meio da otimização da configuração do amplificador. A Figura 3.27 apresenta no mínimo dois fatores curiosos. O primeiro destes fatores é o valor altíssimo da figura de ruído, e o segundo é a inversão das curvas, pois, tipicamente, o figura de ruído quando bombeado em 1480nm é maior que quando bombeado em 980nm. A razão disto é que foi usado um valor típico para o valor da seção de choque de absorção em 980nm. Além disso, usando as equações (3.24) e (3.25) obtivemos curvas de seções de choque de absorção e emissão com valores de pico bastante atípicos, correspondendo um ao dobro do outro. Devido a este último fato, o ganho do dispositivo, quando bombeado em 1480nm, foi maior que quando bombeado em 980nm. Portanto, tendo em vista a equação (3.23), a figura de ruído resultou maior quando o dispositivo foi bombeado em 980nm do que quando bombeado em 1480nm. Os resultados mostrados nesta Sub-Seção foram propositadamente mostrados para evidenciar o fato de que a seção de choque de emissão é melhor estimada através das curvas de medida de ganho, como mostradas na Seção 3.2.2.1.

### 3.2.2.3 Fibras de Telureto dopadas com érbio

A capacidade de transmissão nos sistemas WDM<sup>3</sup> é proporcional à largura do espectro de ganho dos EDFA's usados. No entanto, dois efeitos interrelacionados limitam a capacidade destes sistemas.

O primeiro é a dispersão, que limita a taxa de cada canal e que pode ser contornado utilizando fibras com baixa dispersão ou utilizando técnicas de compensação de dispersão [23]. O segundo é a

---

<sup>3</sup> O termo WDM é utilizado também para sistemas operando com dois lasers, um na janela de  $1.5\mu\text{m}$  e outro na janela de  $1.3\mu\text{m}$ . Quando se deseja especificar o tipo de sistema com vários lasers em uma mesma janela se utiliza o termo WDM "denso" ou DWDM (*Dense WDM*). Aqui referimo-nos aos sistemas DWDM.

não linearidade óptica da fibra que passa a ser considerada já que, para alcançar longas distâncias, é necessário utilizar alta potência em cada canal WDM ( $> 1$  mW). O principal efeito não linear nestes sistemas é a mistura de quatro ondas (*Four Wave Mixing*, FWM) [23]. Por este efeito, três canais em frequências  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  são misturados pelo índice de refração não linear da fibra gerando-se ondas nas frequências  $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$  que roubam energia dos canais incidentes e interferem com os canais WDM, resultando em diafonia. A eficiência de FWM depende da dispersão e é máxima no caso de dispersão nula. Assim, os sistemas WDM de alta capacidade são projetados para operar com fibras com dispersão baixa, mas não nula, de modo a reduzir o efeito de FWM mas mantendo a dispersão dentro de limites toleráveis [23]. Em alguns países (Japão, Itália, México e Brasil) há milhares de quilômetros de fibra de dispersão deslocada (*Dispersion Shifted Fiber*, DSF) já instaladas. Estes são enlaces de longa distância projetados há alguns anos, quando ainda não se dispunha de sistemas WDM comerciais. A atualização para sistemas WDM neste tipo de fibra é viável mas não trivial. O problema da fibra DSF é que o zero de dispersão ( $\lambda_0$ ) ocorre em torno de 1550 nm, bem no centro do espectro de ganho do EDFA convencional. Com isto, se dificulta a estratégia para contornar os efeitos do FWM.

Uma solução que vem sendo pesquisada recentemente é operar o sistema na região de comprimento de onda ligeiramente deslocada (i.e. em torno de 1580 nm) do zero de dispersão da DSF ( $\lambda_0 \cong 1550$  nm)<sup>4</sup>. Estes sistemas requerem EDFA's especiais, nos quais o espectro de ganho é deslocado para poder amplificar sinais de comprimentos de onda maiores (região de 1.6 $\mu$ m), fugindo assim da região de forte FWM. Estes amplificadores são chamados de "EDFA Banda-L" (L de "*Long wavelength*") [24]. A pesquisa deste tipo de amplificadores e seu uso em sistemas WDM é muito relevante para o Brasil, já que temos dezenas de milhares de quilômetros de fibra DSF já instaladas.

Nos últimos 4 anos várias configurações de EDFA's, e usando diferentes materiais hospedeiros, tem sido usadas para produzir EDFA's que operem na Banda -L[25]. Os EDFA's

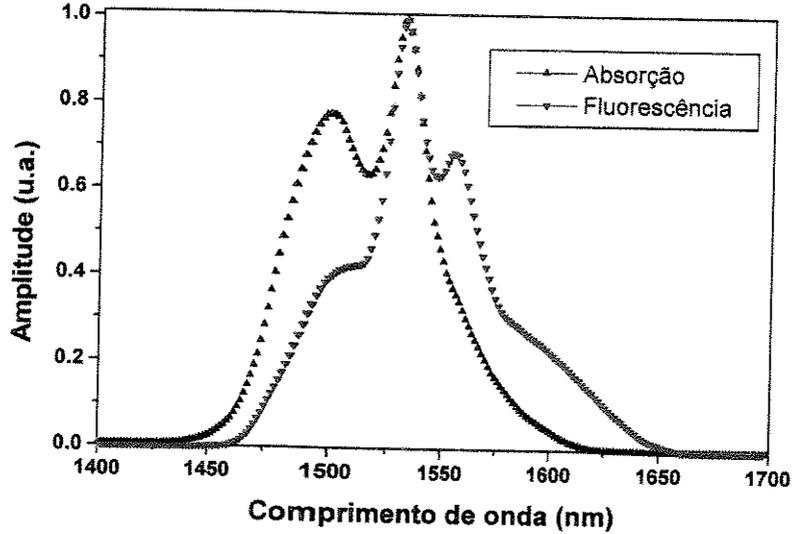
---

<sup>4</sup>. O ganho do AFDE típico é maior na região de 1530 nm, mas nesta região o espectro de ganho não é plano. Em sistemas WDM é importante que o espectro de ganho seja o mais plano possível, aliviando assim o problema de equalizar as potências dos diferentes canais. Por esta razão, os sistemas WDM operam ou na região de 1550 nm ("Banda-C") ou 1580 nm ("Banda-L"), na qual o ganho é mais plano.

feitos com fibras usando, como hospedeiro, a sílica ou fluoretos podem operar na região de 1.6µm para fibras com comprimentos de aproximadamente 200m ou 40m, respectivamente[26]. Outra opção de hospedeiro, que vem sendo intensivamente pesquisado, é o óxido de telureto[27]. Neste novo hospedeiro as dopagens típicas são da ordem de 4000ppm[28], permitindo alto ganho em trechos de fibras relativamente curtos (0.5~2.5m) quando comparados com outros hospedeiros. Outra vantagem deste hospedeiro é que as seções de choque de absorção e emissão são espectralmente largas quando comparadas às das fibras de sílica ou fluoretos dopadas com érbio.

Simulamos os resultados mostrados no trabalho de Y. Ohishi[28], em que uma fibra óptica de telureto, com dopagem de érbio de 4000ppm ( $8 \times 10^{25}$  íons/m<sup>3</sup>) foi usada para construir um EDFA. O raio do núcleo da fibra é de 1.5µm e a diferença relativa entre o índice de refração da casca e do núcleo é de 1.5%. Nós assumimos o valor típico de 2.083 para o índice de refração do núcleo [27]. Foi considerado um perfil de índice de refração tipo degrau com valor de 2.05176 para o índice de refração da casca. As perdas de fundo (*background losses*), para este hospedeiro, são de 1dB/m. Assumimos um perfil de dopagem tipo alfa, com  $\alpha=3$  e raio da região dopada  $r_E=1.5\mu\text{m}$ . Usamos  $C_{up}=5.0 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s para os valores dos coeficientes de conversão ascendente cooperativa e de relaxação cruzada, respectivamente, como usados em [2]. No entanto, o valor destes coeficientes, assim como sua dependência em função do comprimento de onda[29], deve ainda ser investigado, uma vez que ainda não há dados disponíveis na literatura. O tempo de fluorescência entre os níveis  $^4I_{13/2} \rightarrow ^4I_{15/2}$  é  $1/A_{21}=3.8\text{ms}$ , e as taxas não radiativas são assumidas com valores típicos de  $A_{32}=A_{43}=10^9\text{s}^{-1}$ . Na falta de dados de intensidade de fluorescência  $I_{ASE+}$  e absorção  $I_a$  específicos para a fibra simulada, usamos curvas típicas de telureto dopado com érbio[27]. Estas curvas normalizadas são mostradas na Figura 3.28. Usando as equações (3.24) e (3.25) obtém-se  $\sigma_e^{\text{peak}}=7.8 \times 10^{-25}\text{m}^2$  e  $\sigma_a^{\text{peak}}=6.4 \times 10^{-25}\text{m}^2$  para os valores de pico das seções de choque de absorção e emissão, respectivamente. O comprimento de onda médio  $\bar{\lambda}$  pode assumir  $\bar{\lambda}_a$  e  $\bar{\lambda}_e$  e foi calculado como

$$\bar{\lambda}_{a/e} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_0}{v} I_{a/ASE+}(v) dv}{\int_{-\infty}^{\infty} I_{a/ASE+}(v) dv} \quad (3.26)$$



**Figura 3.28** – Forma das linhas de absorção e fluorescência típicas do telureto dopado com érbio.

e obteve-se os valores de  $\bar{\lambda}_a = 1519\text{nm}$  e  $\bar{\lambda}_e = 1545\text{nm}$  para os comprimentos de onda médios dos espectros de absorções e fluorescência, respectivamente. Ainda usou-se  $n_{\text{eff}}=2.0664$  calculado em  $\lambda_s=1532\text{nm}$ , e considerado constante em todo o espectro. Consideramos ainda  $\sigma_{a24} = 0.5 \times 10^{-25} \text{ m}^2$  para o valor da seção de choque da ESA, constante em todo o espectro de interesse. O EDFA foi simultaneamente bombeado em 1480nm com bombeio co e contra-propagante de 100mW. A potência do sinal de entrada é de 1 $\mu$ W. Na Figura 3.29 pode-se perceber uma boa concordância qualitativa e quantitativa entre os espectros de ganho medidos e simulados. As diferenças principais entre as curvas experimental e obtida na simulação devem-se, principalmente, ao fato de termos usado curvas típicas para as formas das linhas de absorção e emissão.

As simulações em meios altamente dopados, como o apresentado nesta Seção, somente podem ser feitas usando um código numérico que leve em conta de forma rigorosa as distribuições do campo eletromagnético e de érbio na seção reta da fibra dopada. Além disso o código deve incluir os efeitos de conversão ascendentes, em razão das altas concentrações de érbio usadas. A simulação de EDFA's usando fibras de telureto dopadas com érbio foram pela primeira vez apresentadas na literatura nos trabalhos [30] e [31], e que portanto fazem parte das contribuições desta tese.

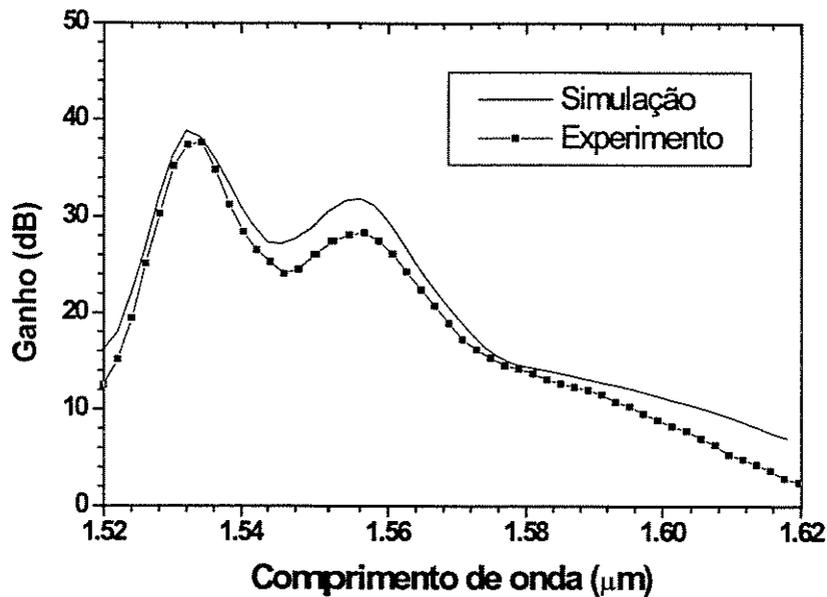


Figura 3.29 – Comportamento espectral do ganho em um EDFA feito com fibra de telureto, com 50cm de comprimento, bidirecionalmente bombeada com 100mW em 1480nm. Potência do sinal de entrada é 1μW.

### 3.3 Resumo

Neste Capítulo apresentamos o Modelo Espacial, que resolve as equações de propagação dentro de um meio dopado com érbio para diversos sinais e bombeios propagando-se simultaneamente, e em que o espectro da ASE é discretizado e usado para resolver as equações de taxa e de propagação. Apresentamos a forma como o modelo foi implementado, discutindo os diferentes sistemas energéticos e de equações de taxas que devem ser considerados para cada comprimento de onda de bombeio (980nm e ~1480nm). Foram apresentados diversos resultados numéricos, para guias de ondas e fibras dopadas com érbio, e estes foram comparados com resultados experimentais e numéricos presentes na literatura. O Modelo também foi usado com sucesso para simular, pela primeira vez, EDFA's feitos de fibras ópticas de telureto dopadas com érbio.

## Referências do Capítulo 3

---

- [1] F. Di Pasquale e M. Zoboli, "Analysis of Erbium-Doped Waveguide Amplifiers by a Full-Vectorial Finite-Element Method", *IEEE Journ. of Lighthwave Tech*, Vol.11, pp.1565-1574, (1993).
- [2] F. Di Pasquale, M. Zoboli, M. Federighi e I. Massarek, "Finite-Element Modeling of Silica Waveguide Amplifiers with High Erbium Concentration", *IEEE Journ. Quantum Electronics*, Vol.30, pp.1277-1282, (1994).
- [3] H.E. Hernández-Figueroa, F.A. Fernández, e J.B. Davies, "A Vectorial Finite Element Formulation for Analyzing 2D Leaky Waveguides", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.31, pp.1710-1713, (1995).
- [4] E. Desurvire e J.R. Simpson, "Amplification of Spontaneous Emission in Erbium-Doped Single-Mode Fibers", *Journal of Lightwave Technology*, Vol.7, No.5, pp.835-845, maio, (1989).
- [5] C.R. Giles e E. Desurvire, "Modeling Erbium-Doped Fibre Amplifiers", *Journal. of Lightwave Tech.*, Vol.9, No.2, pp.271-283, fevereiro, (1991).
- [6] S. Honkanen, S.I. Najafi e W.J. Wang, "Composite Rare-Earth Doped Glass Waveguides", *IEEE Electronics Letters*, Vol.28, No.8, pp.746-747, abril, (1992).
- [7] D.L. Lee, "Electromagnetic Principles of Integrated Optics", *John Wiley & Sons*, Ney York, (1986).
- [8] A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Modelo Simples de Faixa Larga para Análise de Amplificadores a Fibra Dopados com érbio usando o Método de Elementos Finitos/Runge-Kutta", *Anais do XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Vila Velha, pp.147-151, outubro, (1999).
- [9] C.A. Caballero-Petersen, "Subsistemas Ópticos para Comunicações Solitônicas", *Tese de Doutorado*, FEEC/DMO/Unicamp, junho, (1996).
- [10] M.J. Pontes, "Análise da Operação Saturada de Amplificadores de Potência a Fibra Dopada com érbio", *Tese de Doutorado*, FEEC/DMO/Unicamp, julho, (1996).
- [11] G. Kaiser, "Optical Fiber Communications", *McGraw-Hill*, Auckland, (1983).

- 
- [12]E. Desurvire, “Erbium-Doped Fiber Amplifiers: Principles and Applications”, *John Wiley & Sons, Inc*, New York, (1994).
- [13]G.N. Van den Hoven, J.A. van der Elsken, A. Polman, C. van Dam, K.W.M. van Uffelen e M.K. Smit, “Absorption and emission cross section of  $\text{Er}^{+3}$  in  $\text{Al}_2\text{O}_3$  waveguides”, *Applied Optics*, Vol.36, No.15, pp.3338-3341, (1997).
- [14]Dados experimentais gentilmente cedidos pelo pesquisador Walter.A.Arellano-Espinoza, integrante da equipe do Prof. Dr. Hugo Luiz Fragnito/IFWG/Unicamp, novembro, (1999)
- [15]A. Bjarklev, “Optical Fiber Amplifiers: Design and System Applications”, *Artech House*, Boston, (1993)
- [16]Dados experimentais gentilmente cedidos pelo Dr. Martin O. Berendt, integrante da equipe do Prof. Dr. Hugo Luiz Fragnito/IFWG/Unicamp, novembro, (1999)
- [17]J.N Sandoe, P.H Sarkies, e S. Parke, “Variation of  $\text{Er}^{+3}$  Cross Section for Stimulated Emission With Glass Composition”, *Journal of Physics D*, Vol.5, pp.1788-1799, (1972).
- [18]Valor típico fornecido pela Photonetics para a fibra EDOS-230, e usado aqui para a fibra fabricada pela Lucent.
- [19]S. Georgescu, V. Lupei e A. Lupei, “Concentration Effects on the Up-Conversion from the  $^4\text{I}_{13/2}$  level of  $\text{Er}^{3+}$  in YAG”, *Optics Communications*, Vol.81, No.3,4, pp.186-192, (1991).
- [20]P. Blixt, J. Nilsson, T. Carläs e B.Jaskorzynska, “Amplification reduction in fiber amplifiers due to up-conversion at  $\text{Er}^{3+}$ -concentrations below 1000ppm”, em *Tech. Dig. Opt. Amplifiers Appl.* (OSA, Washington, DC), Vol.13, pp.52-55, (1991).
- [21]C.Y. Chen, R.R. Petrin, D.C. Yeh e W.A. Sibley, “Concentration-dependance energy-transfer in  $\text{Er}^{3+}$  and  $\text{Tm}^{3+}$ -doped heavy-metal fluoride glass”, *Opt. Lett*, Vol.14, No.9, pp.432-434, maio, (1989).
- [22]P. Blixt, J. Nilsson, T. Carläs e B. Jaskorzynska, “Concentration-Dependent Upconversion in  $\text{Er}^{3+}$ -Doped Fiber Amplifiers: Experiments and Modeling”, *IEEE Transaction Photonics Letters*, Vol.3, No.11, pp.996-998, novembro, (1991).
- [23]G.P. Agrawal, “Fiber-Optic Communication Systems”, 2<sup>nd</sup> ed., *J. Wiley & Sons*, New York (1998).

- 
- [24]Y. Sun, J.W Sulhof, A.K. Srivastava, A Abramov, T.A Strasser, *et al.*, “A Gain-Flattened Ultra Band EDFA for High Capacity WDM Optical Communications Systems”, *Anais da 24<sup>th</sup> Communication Conference, (ECOC'98)*, Vol.1, (Telefónica de España, Madrid), pp.53-54, (1998).
- [25]Y. Ohishi, M. Yamada, T. Kanamori e S. Sudo, “Optical Fiber Amplifiers for WDM Transmission”, (Special Feature) *Optical Devices for WDM Networks*, Vol.10, No.1, pp.45-51, (1998).
- [26]H. Ono, M. Yamada, T. Kanamori, S. Sudo e Y. Ohishi, “1.58-  $\mu\text{m}$  Band gain-Flattened Erbium-Doped Fiber Amplifiers for WDM transmission Systems”, *Journal of Lightwave Technol.*, Vol.17, No.3, pp.490-496, (1999).
- [27]J.S. Wang, E.M. Vogel, E. Snitzer, “Tellurite glass: a new candidate for Fiber Devices”, *Optical Materials*, Vol.3, No.3, pp.187-203, agosto, (1994).
- [28]Y. Ohishi, A. Mori, M. Yamada, H. Ono, Y. Nishida e K. Oikawa, “Gain Characteristics of Tellurite-Based Erbium-Doped Fiber Amplifiers for 1.5  $\mu\text{m}$  Broadband amplification”, *Optics Letters*, Vol.23, No.4, pp.274-276, (1998).
- [29]G.N. van den Hoven, E. Snoeks e A. Polman, “Upconversion in Er-implanted  $\text{Al}_2\text{O}_3$  waveguides”, *Journal of Applied Physics*, Vol.79, No.3, pp.1258-1266, fevereiro, (1996).
- [30]A.P. López-Barbero, W.A. Arellano-Espinoza, H.L. Fragnito e H.E. Hernández-Figueroa, “Numerical Modeling of Tellurite-Based Optical Fiber Amplifiers”, nos *Anais da International Microwave and Optoelectronics Conference 1999 (IMOC 99)*, Rio de Janeiro, agosto, (1999).
- [31]A.P. López-Barbero, W.A. Arellano-Espinoza, H.L. Fragnito e H.E. Hernández-Figueroa, “Tellurite-Based Optical Fiber Amplifiers Analysis Using the Finite Element Method” a ser publicada na *Microwave and Optical Technology Letters*, 20 de abril, (2000).

# Capítulo 4

## Modelo Modal

Neste Capítulo apresentamos o Modelo Modal de Amplificadores ópticos dopados com érbio [1,2,3,4,5,6]. O nome foi dado devido à Análise Modal, usada como plataforma de cálculo.

O modelo usado é baseado na suposição de que o amplificador é *suficientemente curto* e, assim, podemos considerar que a intensidade dos campos eletromagnéticos, que propagam-se no dispositivo, evolui exponencialmente. Esta suposição é sustentada pela plataforma numérica de análise modal, na qual considera-se a constante de propagação  $\beta$  independente da variável na direção de propagação  $z$ . Destacamos a expressão anterior, *suficientemente curto*, uma vez que este é o limite de validade do modelo que é mostrado adiante. O termo *curto* não está ligado somente à idéia de comprimento, mas um compromisso entre diversos parâmetros do dispositivo.

O primeiro trabalho registrado na literatura em que o comportamento do dispositivo amplificador dopado com érbio é modelado através de uma análise modal é recente[7]. No entanto

este trabalho apresenta basicamente quatro limitações. A primeira limitação é a largura espectral do modelo que é baseado no cálculo da susceptibilidade complexa na qual só uma transição atômica é considerada. O trabalho citado usa o modelo da susceptibilidade apresentado na Seção 2.3, na qual a transição considerada está centrada em 1531nm e possui largura espectral menor que 20nm. Em razão disto, tanto a banda espectral de ganho como o modelamento do comportamento não linear do dispositivo ficam limitados. A segunda limitação está ligada à dificuldade de obtenção dos parâmetros de entrada que são: o momento de dipolo elétrico e a largura da linha da transição que está sendo considerada. A terceira limitação desse modelo é que os efeitos de altas concentrações de érbio não são considerados, e a quarta limitação do referido trabalho é que só permite a operação monomodo tanto para o sinal como para o bombeio. Além disso, o trabalho citado não fixa um limite de validade para o modelo, o que sem dúvida é uma quinta limitação e que será discutida e esclarecida neste Capítulo. O Modelo Modal que está apresentado neste Capítulo é um aperfeiçoamento do trabalho referido acima [7], uma vez que resolve as limitações citadas acima. Estes aperfeiçoamentos, e o estabelecimento do limite de validade do Modelo Modal, fazem parte do conjunto de contribuições desta tese.

Além disso, o uso deste Modelo Modal permitiu obter importantes conclusões a respeito das não-linearidades induzidas pelas intensidades do sinal e do bombeio. Será mostrado que a não linearidade induzida pela intensidade do sinal é de até três ordens de grandeza mais sensível à variação dessa intensidade do que aquelas induzidas pela intensidade do bombeio. A veracidade desta conclusão é sustentada por dados experimentais recentemente (1997) publicados na literatura, e que serão referenciadas oportunamente. Esta conclusão também faz parte das contribuições desta tese.

## **4.1 Implementação do Modelo**

### **4.1.1 Plataforma numérica**

Para o desenvolvimento do código numérico usamos a técnica dos elementos finitos em linguagem Fortran. Procuramos encontrar a solução aproximada da equação escalar de Helmholtz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial \phi_s}{\partial y} \right) + q k_{0s}^2 \phi_s = p \beta_s^2 \phi_s \quad (4.1)$$

em que  $\phi_s$  é o campo elétrico ou magnético do modo do sinal propagante, e que considera-se oscilando harmonicamente na frequência  $\omega_s$ . É oportuno frisar aqui que tratamos de *sinal* à radiação que atravessa o dispositivo amplificador e que deseja-se amplificar. Para os modos TE's a variável  $\phi_s$  é o campo elétrico  $E_x$  do sinal e os parâmetros  $p$  e  $q$  assumem os valores  $p=1$  e  $q=n^2(x,y)+\chi_{Er}(x,y,\omega_s)$ , em que  $n(x,y)$  é o índice de refração do material hospedeiro, e  $\chi_{Er}(x,y,\omega_s)$  é a susceptibilidade atômica complexa efetiva devido à presença dos íons de érbio. Consideramos o índice de refração  $n$  independente da frequência angular  $\omega$  na faixa de interesse. Porém, essa consideração pode ser levantada usando, por exemplo, a expressão de Sellmeier[8]. Rigorosamente, a susceptibilidade é dependente da variável na direção de propagação  $z$ , ou seja  $\chi_{Er} = \chi_{Er}(x,y,z,\omega_s)$ . Contudo, será visto que, dentro das condições de validade deste Modelo Modal,  $\chi_{Er}$  pode ser considerado constante ao longo do comprimento do dispositivo amplificador. Então, em razão do uso da plataforma numérica de análise modal, é assumido que a intensidade dos campos eletromagnéticos propaga-se com variação exponencial ao longo do dispositivo. Para os modos TM's a variável  $\phi_s$  é o campo magnético  $H_x$  do sinal, para o qual os parâmetros  $p$  e  $q$  assumem os valores  $p=1/\left[n^2(x,y)+\chi_{Er}(x,y)\right]$  e  $q=1$ ,  $k_{0s} = 2\pi/\lambda_s$  é a constante de propagação no vácuo,  $\beta_s$  é a constante de propagação complexa do modo guiado e  $\lambda_s$  é o comprimento de onda do sinal. O sub-índice "s" indica que o parâmetro refere-se ao sinal. A equação (4.1) é discretizada, particionando o domínio computacional bidimensional (2D) através de uma malha adaptativa de *nel* elementos finitos triangulares e *np* variáveis, seguindo o método de Galerkin para o cálculo das soluções dos campos. O índice de refração  $n(x,y)$  e a susceptibilidade complexa  $\chi_{Er}$  são considerados constantes dentro de cada elemento do domínio computacional. O procedimento acima nos leva a um problema generalizado de autovalores e autovetores,

$$[A_s]\{\phi_s\} = \beta_s^2 [B_s]\{\phi_s\} \quad (4.2)$$

em que a solução é o campo eletromagnético do sinal em cada vértice dos triângulos(elementos). Quando o domínio computacional é unidimensional (1D) ao longo do eixo coordenado  $x$ , por exemplo, impõem-se  $\frac{\partial}{\partial y} \rightarrow 0$  em (4.1) e a discretização é feita com elementos tipo linha. Esta consideração pode ser feita para guias planares. O procedimento detalhado da aplicação do método de Galerkin à equação de Helmholtz em 1D e 2D e o desenvolvimento da formulação para obtenção de sistema de equações matriciais de autovalores e autovetores (4.2) é discutido detalhadamente no Apêndice A. Aqui,  $[A_s]$  e  $[B_s]$  são matrizes esparsas de dimensões  $np \times np$  que representam a forma discretizada dos operadores do lado esquerdo e direito da equação (4.1), respectivamente. Nós resolvemos a equação (4.2) usando um algoritmo rápido e eficiente baseado no método *Sub Space Iteration*[9] aliado a pacotes que permitem explorar a esparsidade das matrizes e que desta forma nos permite encontrar, de maneira eficiente, a solução dos modos propagantes.

A parte imaginária de  $\beta_s$  fornece o ganho do dispositivo sob análise, dado por

$$G_{dB} = 20 \text{Log} \left( e^{\text{Im}(\beta_s)L_w} \right), \quad (4.3)$$

na qual  $G_{dB}$  é expresso em decibéis e  $L_w$  é o comprimento do guia. A equação (4.3) é válida para dispositivos monomodos. A extensão para o caso multimodo será feita a seguir. A parte real de  $\beta_s$  está relacionada com o comportamento não linear do dispositivo, que pode ser induzido pelo campo do bombeio[10] e/ou pelo do sinal[11]. O comportamento não-linear do material é um fator importante que tem sido recentemente explorado para o projeto de diversos dispositivos, tais como chaves ópticas[12], sensores[13] e para o processamento de sinais ópticos[14]. Este comportamento pode ser equacionado através da variação do índice de refração  $\delta n$ , que já foi apresentado na equação (2.35),

$$\delta n(x, y, \omega_s) \cong \text{Re} \left\{ \frac{\chi_{Er}(x, y, \omega_s)}{2n(x, y, \omega_s)} \right\} \quad (4.4)$$

ou através da variação da parte real da constante de propagação complexa

$$\Delta\beta_s = Re\{\beta_s^{on} - \beta_s^{off}\}. \quad (4.5)$$

Em geral, a equação (4.5) tem sido usada para representar as não linearidades induzidas pela intensidade do bombeio. Neste caso  $\beta_s^{on}$  e  $\beta_s^{off}$  são as constantes de propagação complexa do sinal na presença e ausência do bombeio, respectivamente.

### 4.1.2 Susceptibilidade Complexa

A equação (4.2) mostra que a susceptibilidade complexa deve ser calculada para obtenção da constante de propagação  $\beta_s$ . Supondo operação em regime não saturado, sustentado pela equação (2.76), temos, da Seção 2.4, que  $\chi_{Er}(x, y, \omega_s) = \chi'_{Er}(x, y, \omega_s) - j\chi''_{Er}(x, y, \omega_s)$ , na qual tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi'_{Er}(x, y, \omega_s) = \frac{n_{eff}^{0s} c_0}{\omega_s} \left[ \bar{N}_2(x, y, \omega_s) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} 2a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_s) \frac{(\omega_s - \omega_e^i)}{\Delta\omega_e^i} + \right. \\ \left. - \bar{N}_1(x, y, \omega_s) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} 2a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_s) \frac{(\omega_s - \omega_a^i)}{\Delta\omega_a^i} \right] \\ \chi''_{Er}(x, y, \omega_s) = -\frac{n_{eff}^{0s} c_0}{\omega_s} \left[ \bar{N}_2(x, y, \omega_s) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_s) + \right. \\ \left. - \bar{N}_1(x, y, \omega_s) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_s) \right] \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Aqui, os índices (a, na) e (e, ne) estão relacionados aos efeitos de absorção e emissão,  $\bar{N}_1 = \bar{N}_1(x, y, \omega_s)$  e  $\bar{N}_2 = \bar{N}_2(x, y, \omega_s)$  são as populações dos níveis estável ( ${}^4I_{15/2}$ ) e meta-estável ( ${}^4I_{13/2}$ ) do material dopado, respectivamente,  $c_0$  é a velocidade da luz no vácuo e  $n_{eff}^{0s} = Re\{\beta_s\}/k_{0s}$  é o

índice de refração efetivo do dispositivo não dopado na frequência angular do sinal  $\omega_s$ . A equação (4.6) foi escrita usando as funções  $\mathcal{L}_i^{a/e} = \left[ 1 + 4(\omega - \omega_i^{a/e})^2 / (\Delta\omega_i^{a/e})^2 \right]^{-1}$ , que representam lorentzianas centradas na frequência  $\omega_i^{a/e}$ , com largura de  $\Delta\omega_i^{a/e}$ , de tal forma que as seções de choque de absorção(a) e emissão(e) possam ser escritas como

$$\begin{aligned} \sigma_{a/e}(\omega) &= \sigma_{a/e}^{\text{peak}} \mathcal{L}(\omega) = \sigma_{a/e}^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{na/ne} a_i^{a/e} \mathcal{L}_i^{a/e} \\ &= \sigma_{a/e}^{\text{peak}} \sum_{i=1}^{na/ne} a_i^{a/e} \left[ 1 + 4(\omega - \omega_i^{a/e})^2 / (\Delta\omega_i^{a/e})^2 \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ou seja, um somatório de  $na/ne$  lorentzianas com peso  $a_i^{a/e}$ , e com valor de pico  $\sigma_{a/e}^{\text{peak}}$ , para as seções de choque de absorção e emissão, respectivamente. Vale a pena perceber que a equação (4.7) permite-nos a análise de problemas dentro de um espectro bastante largo, em razão do uso de múltiplas lorentzianas, e desta forma levanta-se a primeira limitação do modelo apresentado por P. Torres [7]. Além disso, como apontado inicialmente, a segunda das limitações desse trabalho é o uso de parâmetros difíceis de serem obtidos na literatura tais como o momento de dipolo elétrico das transições. Na equação (4.6) usamos diretamente as seções de choque que são obtidas da literatura[15] ou de medidas experimentais[16].

### 4.1.3 Equações de taxa

As equações (4.6) mostram que a susceptibilidade complexa efetiva  $\chi_{Er}$  fica totalmente determinada tomando-se como base o cálculo das populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$ . Estas populações são a solução dos sistemas de equações de taxa dados pelas equações (3.13) e (3.14), quando o bombeio é feito em 980nm e  $\approx 1480$ nm, respectivamente, e ainda considerando os sistemas energéticos mostrados nas Figuras 3.1 e 3.2 para os diferentes comprimentos de onda de bombeio.

Como feito anteriormente, a solução das equações de taxa no estado estacionário é encontrada anulando o lado esquerdo equações (3.13) ou (3.14) e aplicando a lei de conservação  $N_T(x,y,\omega_s) = \bar{N}_1(x,y,\omega_s) + \bar{N}_2(x,y,\omega_s) + \bar{N}_3(x,y,\omega_s) + \bar{N}_4(x,y,\omega_s)$ , em que  $N_T$  é o número total de íons de érbio. Perceber que  $N_T$  é tomada independente da variável longitudinal “z”, contrariamente do que foi considerado para o Modelo Espacial do Capítulo 3. Esta consideração é feita aqui devido à plataforma numérica de análise modal usada neste Modelo, e que considera constante a susceptibilidade complexa  $\chi_{Er}$  ao longo de todo o dispositivo. O sistema de equações (3.13) e (3.14) é não-linear devido à presença dos termos cruzados  $\bar{N}_1 \bar{N}_4$ , e as taxas estimuladas  $W_{ij}$  e  $R_{ij}$ , presentes nestas equações, são escritas aqui como

$$\begin{aligned}
 W_{12}(x, y, \nu_s) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{a12}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, \nu_s^i) \\
 W_{21}(x, y, \nu_s, \nu_p) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{e21}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, \nu_s^i) + \frac{\sigma_{ep21}(\nu_p)}{h\nu_p} I_p^+(x, y, \nu_p) \\
 R_{13}(x, y, \nu_p) &= \frac{\sigma_{a13}(\nu_p)}{h\nu_p} I_p^+(x, y, \nu_p) \\
 R_{31}(x, y, \nu_p) &= \frac{\sigma_{e31}(\nu_p)}{h\nu_p} I_p^+(x, y, \nu_p) \\
 R_{24}^{ESA}(x, y, \nu_s, \nu_p) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{a24}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, \nu_s^i) + \frac{\sigma_{a24}^p(\nu_p)}{h\nu_p} I_p^+(x, y, \nu_p)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

em que  $R_{24}^{ESA} = 0$  quando o bombeio opera no comprimento de onda de 980nm, e nas quais supõem-se a propagação de  $N$  sinais com frequências  $\nu^i$  com intensidades  $I_s^i$ , e  $I_p^+$  é a intensidade do bombeio co-propagante. A intensidade de potência normalizada  $\psi_{s/p}$  (definida no Apêndice A) é tal que a intensidade do sinal  $I_s$  e do bombeio  $I_p$ , para escrever as taxas estimuladas dadas pelas equações (4.8), possam ser escritas como

$$\begin{cases} I_s(x, y) = P_s(z=0)\Psi_s(x, y) \\ I_p^+(x, y) = P_{p^+}(z=0)\Psi_p(x, y) \end{cases} \quad (4.9)$$

nas quais  $P_s(z=0)$  e  $P_p(z=0)$  são as potências de entrada do sinal e do bombeio, respectivamente. Neste Modelo o bombeio contra-propagante não é incluído nas equações, já que devido à consideração de *guia curto* a potência do bombeio é aproximadamente constante ao longo do dispositivo, e a inclusão do bombeio contra-propagante tem o mesmo efeito que dobrar a potência do bombeio co-propagante. Os termos adicionais nas equações (4.8), que levam em conta os efeitos da emissão espontânea amplificada, *ASE-Amplified Spontaneous Emission*, podem ser adicionados às taxas estimuladas  $W_{ij}$  e  $R_{24}^{ESA}$ . Porém, para dispositivos curtos, a ASE não é relevante e pode ser desprezada.

O uso dos coeficientes de conversão ascendente nas equações (3.13) e (3.14) permite o modelamento adequado de dispositivos dopados com altas concentrações de érbio. Em geral, para concentrações da ordem de 100ppm ( $\approx 10^{24}$  íons/m<sup>3</sup>), estes efeitos não são importantes. Porém, as aplicações atuais demandam dispositivos amplificadores ópticos com concentrações maiores que 1000ppm nos quais tais efeitos não podem ser desprezados. O uso destes coeficientes nas equações de taxa permite a análise de dispositivos altamente dopados. Desta forma, levanta-se a terceira limitação do modelo apresentado por P.Torres *et al.*[7].

#### 4.1.4 Operação Multimodo

Em dispositivos amplificadores dopados com érbio procura-se aumentar o confinamento do campo do bombeio através do uso de uma descontinuidade elevada entre o índice de refração do núcleo e da casca e, assim, obter ganho elevado[17]. Nestas condições, o dispositivo amplificador pode apresentar mais de um modo na frequência do bombeio ou na do sinal. Isto também pode ocorrer em dispositivos amplificadores integrados nos quais as técnicas de inserção de dopantes para definir o núcleo definem um perfil de índice gradual.

Vamos supor que o dispositivo seja excitado externamente por feixes com distribuição de campo gaussiana  $\Phi(x,y,\omega_{s/p})$ , com diferentes larguras espaciais nas frequências do sinal  $\omega_s$  e do bombeio  $\omega_p$ , e que, nestas frequências, sejam excitados  $N_s$  e  $N_p$  modos com distribuições  $\phi^i(x,y,\omega_{s/p})$  para o  $i$ -ésimo modo do sinal(s) e bombeio(p). Então, os feixes de entrada podem ser escritos através da expansão modal dos modos presentes no guia, como definida pela equação (3.16). Desta forma o ganho total para dispositivos baseados em guias multimodos é aqui calculado como

$$G_{dB} = 20\text{Log} \sum_{i=1}^{N_s} \eta_{si} \left( e^{\text{Im}(\beta_s^i)L_W} \right) \quad (4.10)$$

na qual  $L_W$  é o comprimento do dispositivo,  $\beta_s^i$  é a constante de propagação complexa do  $i$ -ésimo modo da expansão modal apresentado pela equação (3.16) e  $\eta_{si}$  é a fração de potência do  $i$ -ésimo modo, definida pela equação (3.17), dos  $N_s$  modos presentes no dispositivo na frequência do sinal. Assim, levanta-se a quarta limitação do modelo apresentado por P.Torres *et al.*[7] que não considera em regime multimodo.

### 4.1.5 Fluxograma

Para a análise dos dispositivos ativos, o código numérico executa a rotina de cálculo mostrada pelo fluxograma da Figura 4.1. Inicialmente são lidos os dados da malha de discretização do domínio computacional do dispositivo, juntamente com os parâmetros da dopagem, e são aplicadas as condições de contorno do problema que, em geral, são condições de Dirichlet ou de Neumann[18]. A seguir calculam-se todos os modos na frequência do bombeio, solucionando a equação de Helmholtz na frequência de bombeio  $\omega_p$ . A potência para cada modo do bombeio é fixada, usando as frações de potência dadas pelas equações (3.17). Na sequência, e usando a equação (4.2), são calculados todos os modos na frequência do sinal  $\omega_s$ , e suas potências fixadas através das equações (3.17). No início do procedimento iterativo, considera-se a susceptibilidade

complexa  $\chi_{Er}(x,y,\omega_s)$  nula em todos os elementos do domínio computacional. Com os campos do bombeio e sinal calculados no baricentro de cada elemento, calculam-se as taxas estimuladas, dadas pelas equações (4.8), e resolvem-se as equações de taxas (3.13) ou (3.14), dependendo do comprimento de onda do bombeio usado, obtendo-se o valor de  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  dentro de cada elemento.

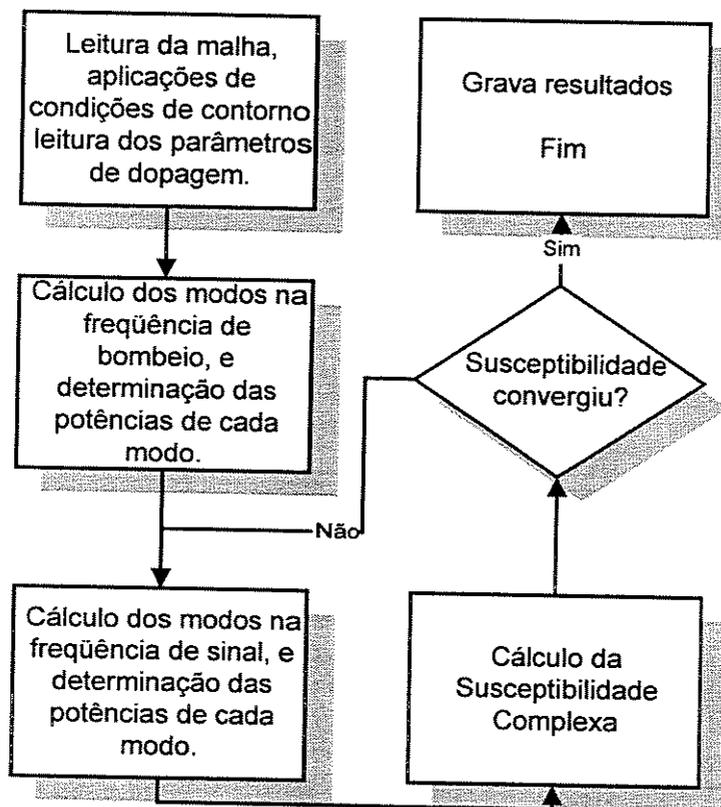


Figura 4.1 - Rotina executada pelo Modelo Modal para o modelamento dos dispositivos ativos.

Calcula-se, então, a susceptibilidade complexa, usando a equação (4.6), que, por sua vez, é usada na equação (4.2) para recalculer a distribuição de campo dos modos na frequência do sinal. Inicia-se, assim, o processo iterativo mostrado pelo fluxograma da Figura 4.1 que é repetido até que a convergência, dentro do erro requerido, seja alcançada. O parâmetro de convergência usado aqui é a susceptibilidade complexa e calcula-se o erro relativo  $\xi^n$  da  $n$ -ésima iteração usando a expressão

$$\xi^n = \frac{\left| \sum_{k=1}^{nel} (\chi_{Er}^n(k) - \chi_{Er}^{n-1}(k)) \right|}{\left| \sum_{k=1}^{nel} \chi_{Er}^n(k) \right|}. \quad (4.11)$$

em que  $\chi_{Er}^n(k)$  é a susceptibilidade complexa do elemento  $k$  calculada na  $n$ -ésima iteração. Em geral são necessárias não mais que 4 iterações para obter  $\xi < 10^{-14}$ .

## 4.2 Resultados

Vamos apresentar os resultados de algumas simulações com o objetivo de validar o modelamento apresentado na Seção 4.1. Alguns destes serão comparados qualitativa e quantitativamente com resultados já publicados na literatura recente. Outros são comparados com medidas experimentais feitas especialmente para este fim, e com o Modelo Espacial do Capítulo 3. Além disso, o limite de validade deste Modelo Modal será claramente estabelecido através da análise da distribuição das populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  ao longo do dispositivo, usando, para isso, o Modelo Espacial do Capítulo 3.

### 4.2.1 Ganho

As simulações de ganho que são apresentadas nesta Seção envolvem dispositivos feitos com base em guias de ondas e fibras ópticas.

#### 4.2.1.1 Guias de Ondas dopados com érbio

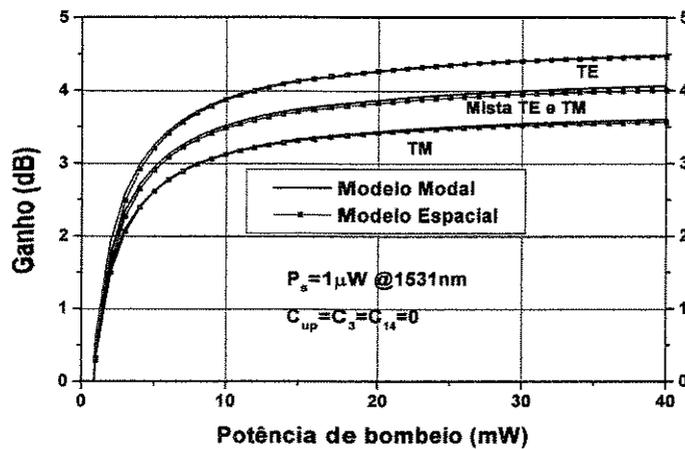
Os dispositivos ópticos integrados a serem simulados são apresentados na Figura 3.5 do Capítulo 3. O objetivo aqui é usar o Modelo Modal para reproduzir alguns dos resultados presentes no Capítulo 3 no qual foi usado o Modelo Espacial. A comparação entre os resultados obtidos pelos diferentes modelos servirá para validar o Modelo Modal deste Capítulo.

Consideremos, inicialmente, o dispositivo mostrado na Figura 3.5a com dopagem de érbio  $N_{Er}=1 \times 10^{26}$  íons/m<sup>3</sup> uniformemente distribuída no núcleo. As seções de choque usadas nesta simulação são rigorosamente as mesmas usadas na Seção 3.2.1. Vamos também considerar o

bombeio sendo feito no comprimento de onda de 980nm com polarização de 45° do eixo “x”. Simularemos o ganho do amplificador com comprimento  $L_w=3\text{cm}$  e com as três direções de polarização do sinal de entrada como fizemos na Seção 3.2.1, ou seja, polarização do sinal de entrada puramente TE, puramente TM e polarização mista TE e TM, obtida com base na consideração de que a polarização de entrada está a 45° dos eixos principais de simetria da estrutura (eixo “y”). Para os comprimentos de onda do sinal e bombeio de 1531nm e 980nm, respectivamente, usaremos as frações de potência mostradas na Tabela 3.1. O bombeio será tomado sempre como co-propagante pelo motivo apresentado na Seção 4.1.3.

Vamos considerar que  $C_{up}=C_3=C_{14}=0$ , conforme feito no trabalho de Di Pasquale *et al.*[19]. A Figura 4.2 mostra as curvas de ganho em função da potência de bombeio para o guia da Figura 3.5a, bombeado em 980nm com polarização do campo elétrico de 45° contados do eixo horizontal “x”, e para as 3 polarizações detalhadas na Tabela 3.1. Na Figura 4.2 aparecem as curvas de ganho calculadas pelos modelos Modal e Espacial (visto no Capítulo 3) com o objetivo de comparar os resultados apresentados pelos diferentes modelos. Da Figura 4.2 tem-se que o ganho, calculado pela equação (4.10) e obtido para a potência de bombeio de  $P_p(z=0)=40\text{mW}$ , para as excitações puramente TE e TM são 4.48 e 3.6dB, respectivamente, para a potência do sinal na entrada de  $P_s(z=0)=1\mu\text{W}$ . No trabalho anteriormente citado[19] obteve-se 4.55dB e 4.1dB de ganho para a mesma simulação. Devemos lembrar que estamos usando uma formulação de análise modal com aproximação escalar e que no trabalho citado[19] usou-se uma formulação vetorial. Para a descontinuidade do índice de refração entre o núcleo e a casca dos dispositivos da Figura 3.5, a formulação escalar apresenta uma aproximação relativamente pobre quando comparada com a obtida pela formulação vetorial. Esta diferença é ainda mais acentuada para os modos TM, nos quais na equação de Helmholtz tem-se a derivada de  $p=1/\epsilon$  em relação às coordenadas transversais. Como visto, para o caso TE a constante  $p$ , presente na equação (4.1), é feita  $p=1$  e a diferença entre a aproximação escalar e vetorial é devido somente às outras componentes de polarização que compõem o modo, não consideradas na aproximação escalar. Em geral estas outras componentes possuem amplitudes muito menores que a polarização segundo “x”. Em razão disto é que nossos resultados aproximam-se mais daqueles apresentados por Di Pasquale *et al.*[19] para as simulações com excitação TE que com aquelas usando excitação TM. Porém, os resultados mostrados na Figura

4.2 são obtidos usando plataformas numéricas escalares, tanto para o Modelo Espacial como para o Modelo Modal. Neste caso, para a potência de bombeio de 40mW, foram obtidos os ganhos de 4.46dB e 4.48dB para a polarização TE, usando os modelos Espacial e Modal, respectivamente. Para a polarização TM, e para a potência de bombeio de 40mW, obteve-se 3.57dB e 3.60dB para os modelos Espacial e Modal, respectivamente. Essas diferenças, menores que 0.03dB no exemplo apresentado, crescem para dispositivos mais longos, o que evidencia o fato de que deve-se estabelecer um limite de validade para o Modelo Modal.



**Figura 4.2** – Ganho em função da potência de bombeio, calculado pelo Modelo Modal e comparado com o Modelo Espacial para o guia canal da Figura 3.5a, quando o feixe gaussiano é polarizado segundo o eixo “x” (TE), “y” (TM) e a  $45^\circ$  do eixo “x” (Excitação mista TE e TM). As frações de potência de excitação são mostradas na Tabela 3.1.

É imprescindível perceber aqui que a variação do ganho em função da polarização, apontado pela Figura 4.2, é somente devido à variação da distribuição transversal de campo, que, no exemplo apresentado, indica maior confinamento da intensidade do modo dentro da região dopada[17,20] para a excitação puramente TE. Uma análise mais profunda deve levar em conta que os dipolos elétricos devido às transições atômicas estão aleatoriamente orientados e que, portanto, as seções de choque são dependentes da polarização[21], que é uma suposição sustentada por dados experimentais[22]. O estudo da variação do ganho com a polarização é um campo de pesquisa bastante vasto, dada sua importância para sistemas WDM [23].

A Figura 4.3 mostra a intensidade de potência do sinal normalizada  $\psi_s$ , na entrada do guia da Figura 3.5a, para excitação puramente TE, em que a intensidade total é a combinação linear dos modos  $TE_{11}$  e  $TE_{31}$ , com as frações de potência dadas pela Tabela 3.1.

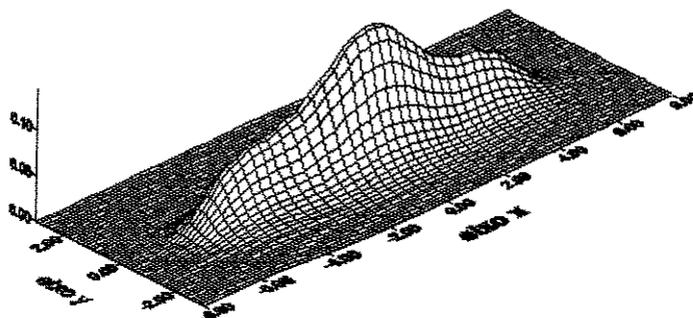


Figura 4.3 - Intensidade de potência do sinal normalizada  $\psi_s$ , na entrada do guia da Figura 3.5a para excitação puramente TE, na qual a intensidade total é a combinação linear dos modos  $TE_{11}$  e  $TE_{31}$ , com a frações de potência dadas pela Tabela 3.1.

É importante lembrar que o super-índice “i” de  $I_s^i$ , nas equações (4.8), refere-se ao i-ésimo sinal de frequência  $\nu_i$  propagando-se no guia. Caso o guia de ondas seja multimodo, cada um destes sinais deve ser representado através de uma expansão modal, dada pela equação (3.16).

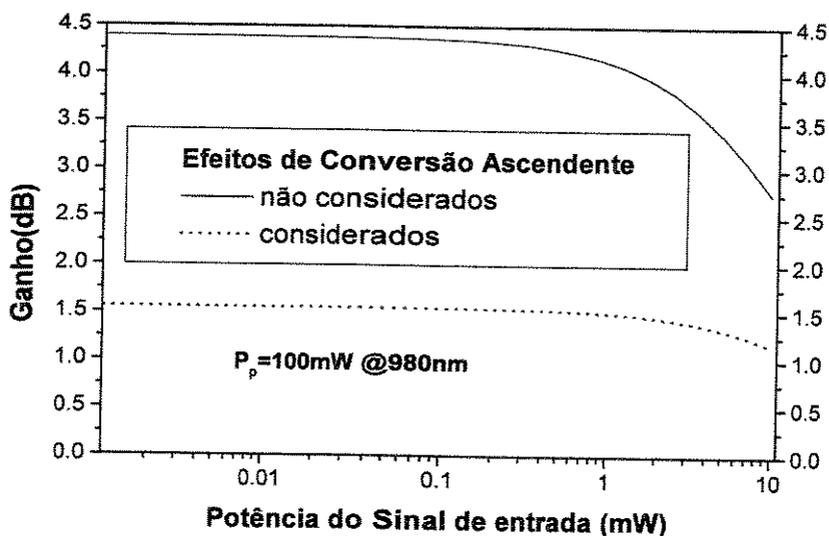


Figura 4.4 – Comparação do ganho em função da potência do sinal de entrada para o dispositivo feito com base no guia da Figura 3.5a, bombeado com 100mW em 980nm, nas situações em que  $C_{up}=C_3=C_{14}=0$  e  $C_{up}\neq C_3\neq C_{14}\neq 0$ , calculado pelo Modelo Modal.

arranjo experimental convencional para medir as características de ganho, com bombeio co-propagante, no qual foi usando um trecho da EDF fabricada pela Photonetics, modelo EDOS-230, com 3.08m de comprimento. As características geométricas e de dopagem desta fibra estão descritas na Seção 3.2.2.1. Para esta simulação também foi usada uma distribuição de érbio dentro do núcleo com perfil tipo  $\alpha$  dada pela equação (3.20), com  $\alpha=3$  e  $N_0=4.14 \times 10^{+24}$  íons/m<sup>3</sup>, que corresponde à concentração de 400ppm fornecida pelo fabricante. Foram também usados os mesmos valores anteriores para os coeficientes de conversão ascendente cooperativa  $C_{up}=C_3=5.0 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s, e para o coeficiente de relaxação cruzada  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s, como usado por Di Pasquale *et al.*[24].

Absorção			Emissão		
$\lambda_i^a$ (nm)	$\Delta\lambda_i^a$ (nm)	$a_i^a$	$\lambda_i^e$ (nm)	$\Delta\lambda_i^e$ (nm)	$a_i^e$
1492.21	59.96	0.4239	1465.7	48.35	0.0344
1527.81	29.99	0.4080	1532.1	12.06	0.6594
1531.10	13.13	0.3763	1550.4	89.44	0.1671
1546.38	9.024	0.0594	1525.9	10.52	0.1758
1553.94	17.65	0.0950	1514.2	50.62	0.0575
1563.99	49.16	0.1608	1549.6	12.28	0.0916
-	-	-	1544.0	10.34	0.1178
-	-	-	1557.3	24.52	0.3228

**Tabela 4.1** – Parâmetros usados para determinar as seções de choque para a EDF da Photonetics EDOS-230.

As seções de choque mostradas na Figura 3.12 foram definidas usando a equação (4.7) com  $n_a=6$  e  $n_e=8$  e usando os parâmetros apresentados na Tabela 4.1, com as relações entre  $\lambda_i^{a/e}$ ,  $\Delta\lambda_i^{a/e}$ ,  $\omega_i^{a/e}$  e  $\Delta\omega_i^{a/e}$  dadas pela equação (3.19). O valor das seções de choque de absorção e emissão na frequência do bombeio são, respectivamente,  $\sigma_{a13}(980\text{nm})=1.75 \times 10^{-25}$  m<sup>2</sup> e  $\sigma_{e31}(980\text{nm})=0.0\text{m}^2$ , como, também, usadas na Seção 3.2.2.1. Os parâmetros da Tabela 4.1 foram extraídos de medidas espectrais de ganho e absorção e que permitiram ajustar os valores de pico para as seções de choque, dada pela equação (4.7) tal que  $\sigma_a^{\text{peak}}=6.5 \times 10^{-25}$  m<sup>2</sup> e  $\sigma_e^{\text{peak}}=5.6 \times 10^{-25}$  m<sup>2</sup>. As medidas espectrais de ganho e absorção feitas, assim como os resultados das simulações usando os modelos Modal e o Espacial, são mostrados na Figura 4.7 e na Figura 4.8, respectivamente. Na medida de ganho, da Figura 4.7,

usaram-se as potências fixas de  $P_s(z=0)=0.6\mu\text{W}$  e  $P_p(z=0)=19.8\text{mW}$  para o sinal e bombeio, respectivamente, ao passo que a medida de absorção, da Figura 4.8, foi feita na ausência de bombeio.

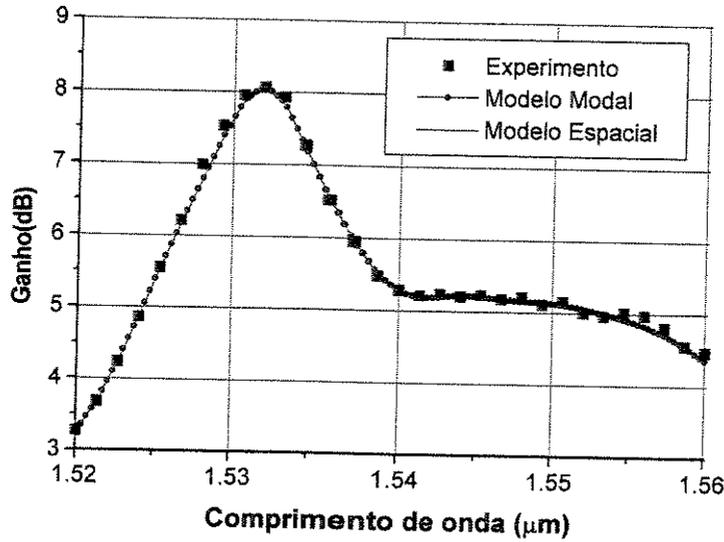


Figura 4.7 - Ganho espectral do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 com potência de bombeio de 19.8mW e potência do sinal de entrada de 0.6μW.

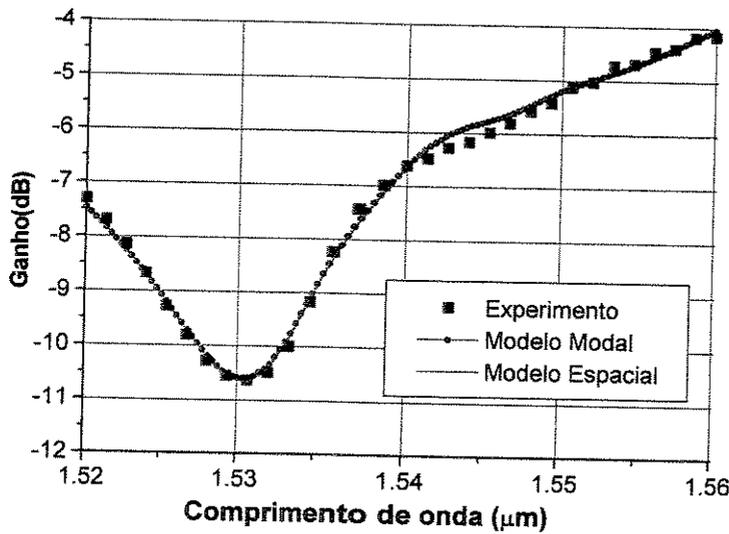


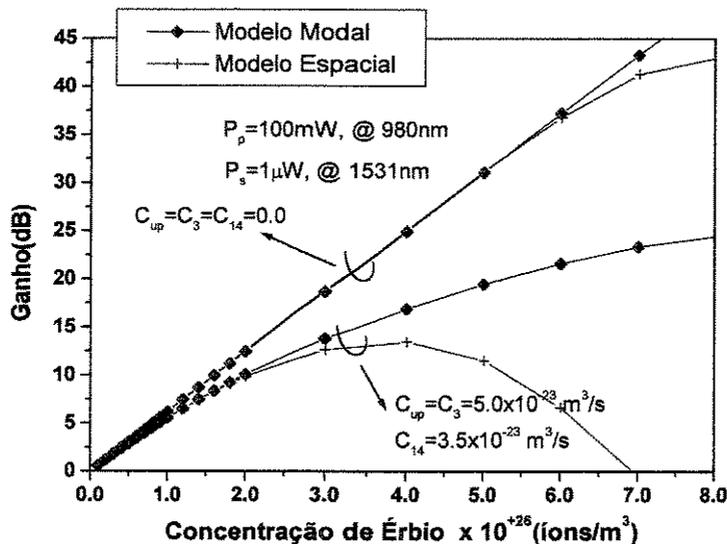
Figura 4.8 - Espectro de absorção do EDFA feito de 3.08m de fibra EDOS-230 quando a potência de bombeio é 0.0mW e potência do sinal de entrada de 0.6μW.

Pode observar-se, nas Figuras 4.7 e 4.8a, boa concordância entre as curvas de ganho e absorção calculadas usando os diferentes métodos. Todos os parâmetros envolvidos no problema

(geométricos e de dopagem) foram rigorosamente os mesmos usados nas simulações com os dois diferentes modelos. A maior diferença entre as curvas apresentadas é de 0.003dB para simulação de absorção na Figura 4.8.

## 4.2.2 Limite de Validade do Modelo Modal

Como vimos, existe a necessidade de estabelecer-se um limite de validade para o Modelo Modal. Na Seção 4.2.1.1 comentamos que, na Figura 4.2, a diferença entre as simulações feitas usando os modelos Modal e Espacial é de 0.03dB. Esta diferença cresce a medida que consideram-se dispositivos mais longos. No trabalho de P.Torres *et al.*[7] só foi apresentado o resultado comparativo entre o modelo numérico e os dados experimentais[25] com uma fibra de 2.2m de comprimento. Conforme P.Torres [26], as simulações de EDFA's usando fibras dopadas mais longas divergiram muito dos dados experimentais, e, portanto, não foram publicadas. Essa informação incentivou o estabelecimento de um limite de validade para o Modelo Modal.



**Figura 4.9** – Ganho em função da concentração de érbio para o dispositivo feito com base no guia de ondas da Figura 3.5b, com  $L_w=8\text{cm}$ , quando os efeitos de conversão ascendente são levados em conta e desconsiderados. As potências do sinal e bombeio são de  $P_s=1\mu\text{W}$  @ 1531nm e  $P_p=100\text{mW}$  @ 980nm, respectivamente.

Vamos considerar um dispositivo amplificador baseado no guia de ondas apresentado na Figura 3.5b, com  $L_w=8\text{cm}$  e potência de bombeio de  $P_p=100\text{mW}$  e no comprimento de onda de

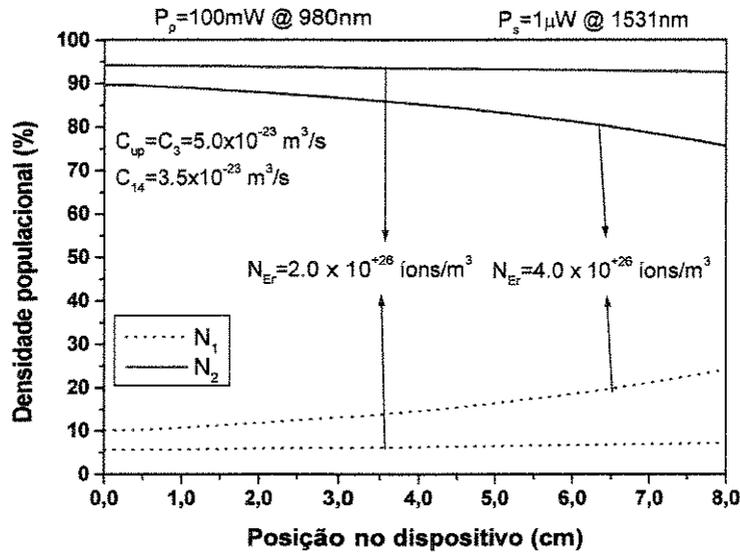
980nm, cujas seções de choque são aquelas apresentadas na Seção 3.2.1. Usando os modelos Modal e Espacial, vamos calcular o ganho deste dispositivo em função da concentração de érbio, para um sinal de entrada com potência de  $1\mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1531\text{nm}$ . Será considerado que as taxas de decaimento espontâneo e os coeficiente de conversão ascendente presentes nas equações de taxa (3.13) e (3.14) são independentes da concentração de érbio. A Figura 4.9 mostra o ganho deste dispositivo em função da concentração de érbio, nas condições em que os efeitos de conversão ascendentes são levados em conta ( $C_{up}=C_3=5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$ ) ou são desconsiderados ( $C_{up}=C_3=C_{14}=0.0 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Nota-se que os valores de ganho, calculados usando os dois modelos, concordam muito bem até a concentração de érbio próxima de  $6.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$  e  $2.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$ , dependendo se os efeitos de conversão ascendente são desconsiderados ou levados em conta, respectivamente. Conforme comentado na Seção 4.1.1, o Modelo Modal usa uma plataforma numérica de análise modal e esta requer que a susceptibilidade complexa  $\chi_{Er}$  seja constante ao longo de todo o dispositivo. Lembremos que, rigorosamente falando,  $\chi_{Er}=\chi_{Er}(x,y,z,\omega_s)$ , ou seja, a susceptibilidade complexa é função da variável na direção de propagação “z” e que, portanto, as populações  $\bar{N}_1=\bar{N}_1(x,y,z,\omega_s)$  e  $\bar{N}_2=\bar{N}_2(x,y,z,\omega_s)$  também são funções desta variável. Isto significa que para  $(\partial\chi_{Er}/\partial z) \approx 0$ , ou seja quando a susceptibilidade complexa é aproximadamente constante ao longo do dispositivo, basta que

$$\frac{\partial(\bar{N}_{1/2})}{\partial z} \approx 0. \quad (4.12)$$

A equação (4.12) representa o limite de validade do Modelo Modal. Usando o Modelo Espacial, foram calculadas, e mostradas na Figura 4.10, as densidades das populações  $N_1$  e  $N_2$ , na região central e ao longo do dispositivo que está-se considerando, levando em conta os efeitos de conversão ascendente e para as concentrações de érbio de  $2.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$  e  $4.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$ .

Nota-se, na Figura 4.10, que a condição de validade, apontado pela equação (4.12), é sustentada para a concentração de érbio de  $2.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$ , porém não para  $4.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$ . A principal causa da variação das populações ao longo do dispositivo para a concentração de  $4.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$  é a maior absorção do bombeio ao longo deste. Note, também na Figura 4.9, que as curvas de ganho para as concentrações de érbio menores ou iguais a  $2.0 \times 10^{26} \text{ íons}/\text{m}^3$  (para o caso em que os efeitos de

conversão ascendente são levados em conta) concordam muito bem nos dois modelos considerados, e que discordam para valores maiores que este.



**Figura 4.10** – Densidades das populações (%) ao longo do dispositivo feito com base no guia de ondas da Figura 3.5b, com  $L_w=8\text{cm}$ , quando os efeitos de conversão ascendente são levados em conta, e para as concentrações de érbio de  $2.0 \times 10^{26}$  íons/m<sup>3</sup> e  $4.0 \times 10^{26}$  íons/m<sup>3</sup>. A potência do sinal e bombeio são de  $P_s=1\mu\text{W @ } 1531\text{nm}$  e  $P_p=100\text{mW @ } 980\text{nm}$ , respectivamente.

Está claro, por este exemplo, que a idéia de “guia curto”, que é o limite de validade do Modelo Modal, não está ligada somente ao comprimento do dispositivo, mas a um compromisso entre a densidade de dopagem e o comprimento do guia e à intensidade dos campos envolvidos, uma vez que estes parâmetros afetam diretamente a distribuição das densidades das populações  $N_1$  e  $N_2$  ao longo do dispositivo. No exemplo da Figura 4.10, o dispositivo com concentração de  $2.0 \times 10^{26}$  íons/m<sup>3</sup> é tido como *curto*, porém com concentração de  $4.0 \times 10^{26}$  íons/m<sup>3</sup> não pode mais ser assim considerado.

### 4.2.3 Não linearidade do meio dopado com érbio

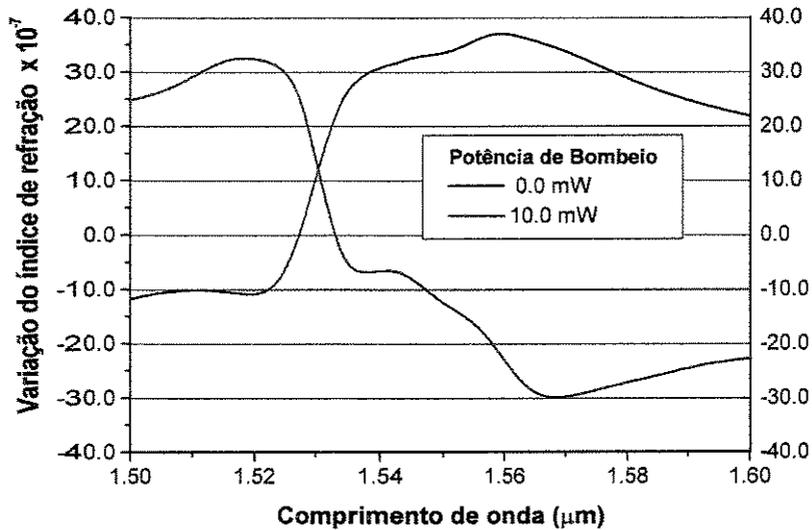
Apresentaremos nesta Seção o comportamento não linear dos dispositivos amplificadores dopados com Érbio. O termo “não linear” refere-se aqui ao comportamento do índice de refração

com a intensidade dos campos eletromagnéticos envolvidos: sinal e bombeio. No entanto, devemos notar que, nestes dispositivos dopados com terras raras, tanto o índice de refração como o ganho apresentam comportamento não linear. Isso porque, como ficou claro na Seção 2.2, tanto o comportamento do índice de refração como o do ganho estão relacionados com a susceptibilidade complexa e esta apresenta um comportamento dependente das intensidades do sinal e do bombeio.

Na literatura, encontram-se trabalhos nos quais têm sido exploradas tanto a não linearidade dos meios dopados com érbio induzida pela intensidade do bombeio, quanto a não linearidade induzida pela intensidade do sinal. O modelamento da não linearidade induzida devido à intensidade do bombeio (PINL - *Pump-induced nonlinearity*) pode ser feita com o presente modelo. Vários resultados interessantes podem ser obtidos com este modelamento. Porém a PINL é relativamente lenta uma vez que esta é governada diretamente pela taxa de decaimento espontâneo que, nos meios dopados com érbio, é de aproximadamente 10ms. Já a não linearidade induzida pela intensidade do sinal (SINL - *Signal-induced nonlinearity*) tem o atrativo de ser muito mais rápida que a PINL, uma vez que esta é governada pelos processos de emissão estimulada [11],[27], que são rápidos. Também será mostrado que a variação do índice de refração devida à potência do sinal é de até três ordens de grandeza mais sensível que a devida à potência do bombeio. Este resultado faz parte das contribuições desta tese.

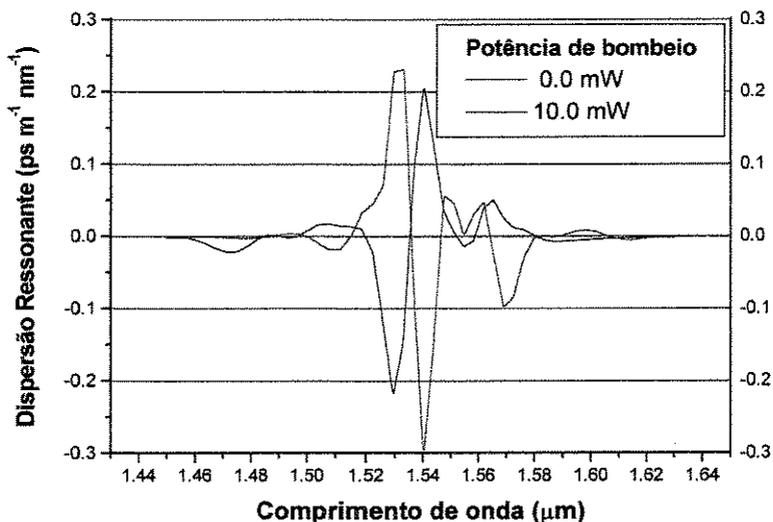
#### 4.2.3.1 Não linearidade induzida pela intensidade do Bombeio (PINL)

Consideremos o dispositivo feito com base no guia canal da Figura 3.5b, com concentração de érbio uniformemente distribuída dentro do núcleo com valor de  $N_{Er}=1 \times 10^{26}$  íons/m<sup>3</sup>, bombeado no comprimento de onda de 980nm e com potência do sinal de entrada  $P_s(0)=1 \mu W$ . Consideremos, também, os efeitos de conversão ascendente representado pelos coeficientes  $C_{up}=C_3=5.0 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23}$  m<sup>3</sup>/s. Desta forma pode-se calcular a variação do índice de refração no centro e na entrada ( $z=0$ ) deste dispositivo através da equação (4.4). Perceber que, na equação (4.4),  $\chi_{Er}$  depende das populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  e estas, por sua vez, dependem da potência do bombeio. A Figura 4.11 mostra a variação do índice de refração quando o bombeio é fixado com potências de 10.0mW e 0.0mW.



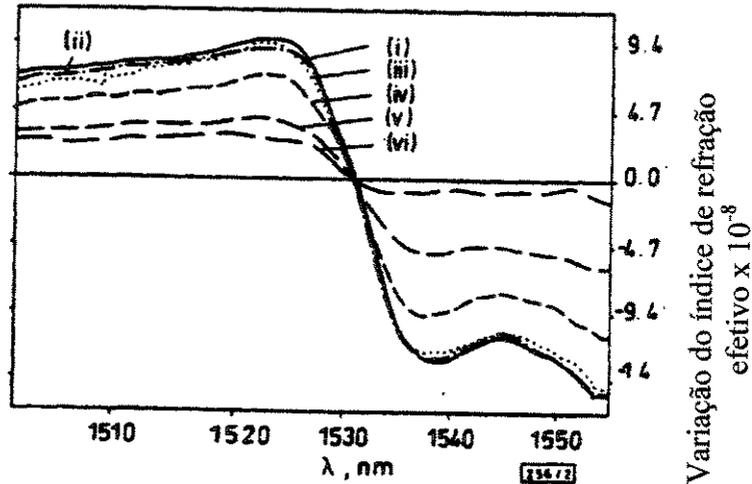
**Figura 4.11** – Variação do índice de refração na região central do dispositivo da Figura 3.5b quando a potência de bombeio é fixada em 10mW e 0.0mW, e para potência do sinal de entrada  $P_s(0)=1\mu\text{W}$ .

Este resultado pode ser qualitativamente comparado com o experimento apresentado por C.Thirstrup *et al.*[28], no qual a variação do índice de refração em uma fibra óptica dopada com érbio, bombeada em 980nm é apresentada. O pico da variação do índice de refração, medido no trabalho citado[28], é de  $1.5 \times 10^{-7}$ , ou seja, aproximadamente 20 vezes menor que o mostrado na Figura 4.11. Porém, em [28], usou-se uma EDF com concentração de  $0.7 \times 10^{+25}$  ions/m<sup>3</sup> e ainda uma potência de bombeio de 1mW. Estas diferenças introduzem um fator de aproximadamente 15 nos resultados.



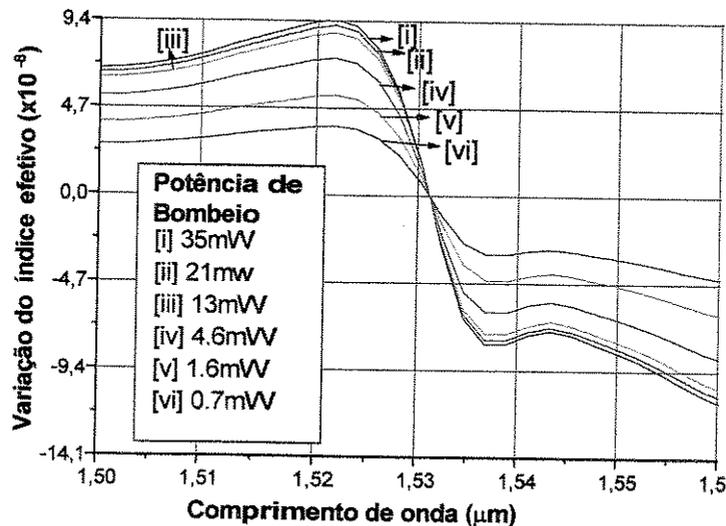
**Figura 4.12** – Dispersão ressonante para o material na região central do dispositivo da Figura 3.5b quando a potência de bombeio é fixada em 10mW e 0.0mW, e para potência do sinal de entrada  $P_s(0)=1\mu\text{W}$ .

A Figura 4.12 apresenta a dispersão ressonante para o material da região central do dispositivo da Figura 3.5b, em que usou-se o resultado da Figura 4.11 na equação (2.36). Como comentado no Capítulo 2, os efeitos da dispersão ressonante são significantes quando a largura dos pulsos propagando-se no meio atômico são da ordem de  $10^{-15}$ s[29].



Potência de bombeio: (i)35mW, (ii)21mW, (iii)13mW, (iv)4.6mW, (v)1.6mW, (vi)0.7mW.

(a)



(b)

**Figura 4.13** – Variação do índice de refração efetivo em uma fibra óptica com raio do núcleo de  $1.45\mu\text{m}$ , com comprimento de  $209\text{cm}$ , e concentração de érbio de  $2.6 \times 10^{24}$  ions/ $\text{m}^3$  ( $\approx 250\text{ppm}$ ), para diferentes potências de bombeio. A potência do sinal de entrada é de  $0.8\mu\text{W}$ .(a)Resultado experimental, presente em [10].(b)Simulação feita usando o Modelo Modal.

Outro resultado que valida o Modelo Modal que estamos apresentando, para o cálculo da PINL, é a simulação do trabalho apresentado em [10]. Neste trabalho foi usada uma fibra óptica com

raio do núcleo de  $1.45\mu\text{m}$ , com comprimento de  $209\text{cm}$  e concentração de érbio de  $2.6 \times 10^{24} \text{ ions/m}^3$  ( $\approx 250\text{ppm}$ ). A potência do sinal de entrada foi fixada em  $0.8\mu\text{W}$ . A variação do índice de refração efetivo, devido à potência do bombeio, foi medida através de um arranjo usando um interferômetro de Mach-Zehnder. Alternativamente, estas medidas podem ser feitas usando um reflectômetro[30], acoplado a um arranjo interferométrico capaz de medir o espectro por espectroscopia de Fourier[31]. Para a simulação, usaram-se as seções de choque para a fibra dopada EDOS-230 da Figura 3.12 e com os parâmetros da Tabela 4.1. Usou-se, ainda, o perfil de concentração de érbio tipo- $\alpha$  com  $\alpha=3$ , e  $N_0=2.6 \times 10^{24} \text{ ions/m}^3$ . A Figura 4.13a mostra o resultado experimental presente em [10], ao passo que a Figura 4.13b mostra a simulação feita. Como percebe-se, há uma boa concordância qualitativa, e quantitativa especialmente para as potências de bombeio mais elevadas. Isto deve-se ao fato de que a parte real do modelo da susceptibilidade da equação (4.6), é válida para o regime não saturado. Esta condição, sustentada pela equação (2.76) do Capítulo 2, mostra que a condição de regime não saturado pode ser obtida elevando-se a potência do bombeio.

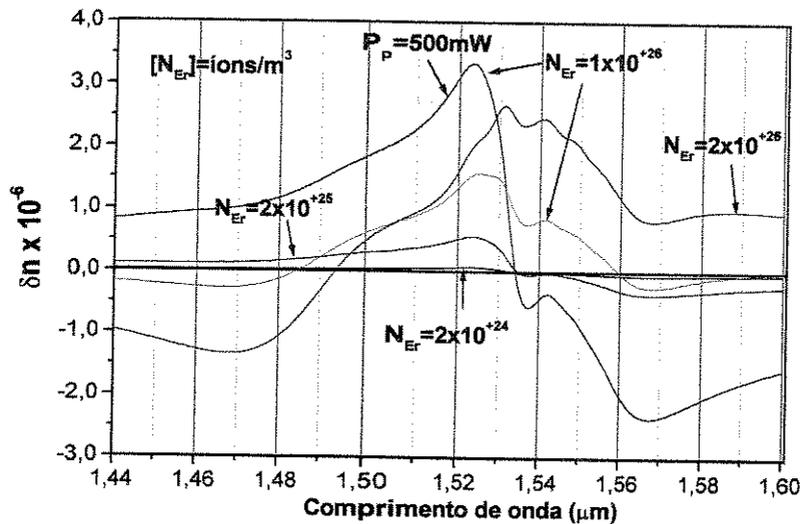
#### 4.2.3.2 Influência da dopagem na não linearidade do meio

Neste ponto, tornou-se evidente ao leitor que a variação do índice de refração do meio é uma função bem mais complexa daquela equacionada em (4.4), visto que é fortemente dependente (principalmente) de 5 parâmetros que alteram as populações dos níveis  $^4I_{15/2}$  e  $^4I_{13/2}$ , os quais são: a intensidade do sinal; a intensidade do bombeio; o comprimento de onda do sinal; o comprimento de onda do bombeio; e a concentração de dopagem. Pode-se então melhor representar essas dependências como

$$\delta n(I_s, I_p, \omega_s, \omega_p, N_{Er})_{(x,y)} \cong \text{Re} \left\{ \frac{\chi_{Er}(I_s, I_p, \omega_s, \omega_p, N_{Er})}{2n(I_s, I_p, \omega_s, \omega_p, N_{Er})} \right\}_{(x,y)} \quad (4.13)$$

na qual usamos o sub-índice  $(x,y)$  para deixar clara a dependência local do material com os parâmetros envolvidos. Ainda podemos levar em conta que o índice de refração do meio hospedeiro “n” depende dos parâmetros citados, devido às transições atômicas fora da região que estamos analisando, e que são as origens do efeito Kerr[32]. Então, é nossa intenção, nesta Seção, mostrar a

influência da concentração de érbio na variação  $\delta n$ , dada pela equação (4.13). Para nossa análise, vamos tomar um fibra óptica dopada com érbio com as características geométricas apresentadas em [33], na qual o raio do núcleo é de  $2\mu\text{m}$ , a abertura numérica 0.18, o índice de refração do núcleo (do material hospedeiro) 1.4684, o tempo de fluorescência 12ms e os coeficientes de conversão ascendente e de relaxação cruzada  $C_{up}=C_3=1\times 10^{-22}\text{m}^3/\text{s}$  e  $C_{14}=0.7\times 10^{-22}\text{m}^3/\text{s}$ . Consideraremos as seções de choque com os mesmos parâmetros da fibra EDOS-230, conforme a Tabela 4.1, porém com valores de pico para a curva de absorção e emissão de  $5.0\times 10^{-25}$  e  $6.0\times 10^{-25}\text{m}^2$ , respectivamente. O bombeio é fixado no comprimento de onda de 980nm e com potência de  $P_p(0)=50\text{mW}$ . A potência do sinal de entrada é fixada em  $P_s(0)=1\mu\text{W}$ . Vamos analisar a variação do índice de refração na região central do núcleo da fibra(eixo da fibra), e em  $z=0$ , para várias concentrações de érbio.



**Figura 4.14** – Variação do índice de refração na região central de uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de  $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, potência de bombeio de  $P_p=50\text{mW}$  @ 980nm, potência de sinal de entrada de  $P_s=1\mu\text{W}$  e para diferentes concentrações de érbio. Para a concentração de  $N_{Er}=1\times 10^{+26}\text{ions}/\text{m}^3$ , calculou-se a variação do índice de refração para a potência de bombeio de 500mW.

Lembremos que os parâmetros de conversão ascendente são dependentes da concentração[34]. Porém, consideraremos que esta dependência não afeta substancialmente os resultados apresentados nesta Seção. Calculou-se o espectro de  $\delta n$  para as concentrações de érbio de  $2\times 10^{+24}$ ,  $2\times 10^{+25}$ ,  $1\times 10^{+26}$  e  $2\times 10^{+26}$   $\text{ions}/\text{m}^3$ , que é mostrado na Figura 4.14. Para a fibra sob análise, a potência do sinal de  $1\mu\text{W}$  impõe uma intensidade de  $6.5\times 10^4 \pm 4.4\times 10^3 \text{W}/\text{m}^2$  na região central da fibra sob análise, para os comprimentos de onda do sinal dentro do espectro apresentado na Figura 4.14. A potência do bombeio de  $P_p(0)=50\text{mW}$  representa uma intensidade de  $6.2\times 10^9\text{W}/\text{m}^2$ . Como é

esperado, a variação  $\delta n$  é fortemente dependente da concentração de érbio e da potência de bombeio, uma vez que esta eleva as populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  da equação (4.6). No entanto, vale a pena notar que a variação  $\delta n$  não é diretamente proporcional a esses parâmetros (concentração e potência de bombeio). Na Figura 4.14 é mostrada a variação do índice de refração para a concentração de érbio de  $1 \times 10^{+26}$  íons/m<sup>3</sup>, porém, para a potência de bombeio de 500mW. Notar a inversão do sinal de  $\delta n$  na região do espectro próxima ao comprimento de onda de 1550nm. Esse dado melhor ilustra os resultados presentes na Tabela 4.2, mostrada adiante.

### 4.2.3.3 Não linearidade induzida pela intensidade do Sinal (SINL)

Nesta Seção, será explorada a SINL, respeitando o limite de validade do modelo da susceptibilidade que está sendo usado, que é o regime não saturado apontado pela equação (2.76). Aqui será usada a mesma EDF da Seção 4.2.3.2, com os mesmos coeficientes de conversão ascendente e relaxação cruzada, e concentração de érbio de  $N_0 = 1 \times 10^{+26}$  íons/m<sup>3</sup>.

Nos meios dopados com érbio, o índice de refração total  $n_t$ , em uma posição (x,y) qualquer, dentro do material dopado, pode ser escrito como

$$n_t = n_t(I_s, I_p, \omega_s, \omega_p, N_{Er}) = n + \delta n(I_s, I_p, \omega_s, \omega_p, N_{Er}) \quad (4.14)$$

na qual “n” é o índice de refração do material hospedeiro (considerado aqui independente de  $I_s, I_p, \omega_s, \omega_p$  e  $N_{Er}$ ) e  $\delta n$  é a variação do índice de refração, dada pela equação (4.13). É evidente que uma caracterização completa da variação  $\delta n$  exige traçar diversas curvas, em que alguns dos parâmetros acima são fixados e outros são deixados como variáveis. Vamos deter-nos na variação de  $\delta n$  como função da intensidade do sinal. Fixando os parâmetros  $I_p, \omega_s, \omega_p$  e  $N_{Er}$ , podemos equacionar a dependência do índice de refração em função da intensidade do sinal<sup>1</sup>, e, então, escrever (4.14) simplesmente como

---

<sup>1</sup> Semelhantemente, podemos fixar  $I_s, \omega_s, \omega_p$  e  $N_{Er}$  e equacionar a variação do índice de refração com respeito à intensidade de bombeio.

$$n_t = n_t(I_s) = n + \delta n(I_s). \quad (4.15)$$

Quando a não linearidade é do tipo Kerr (variação linear de  $n$  com  $I_s$ ), a variação  $\delta n$ , dada pela equação (4.15), é escrita como

$$\delta n(I_s) = n_2 I_s, \quad (4.16)$$

Quando a não linearidade é causada por outros efeitos, como no caso sob análise, ainda podemos usar a equação (4.15) mas com dependência de  $\delta n$  com  $I_s$  não necessariamente linear como apontada pela equação (4.16). Vamos escrever a variação  $\delta n$  através de uma expansão polinomial, como apresentado em[29], tal que

$$\delta n(I_s) = \sum_{i=0}^{i_{max}} n_{i+1} I_s^i, \quad (4.17)$$

na qual os coeficientes  $n_{i+1}$  são dados por

$$n_{i+1} = \left. \frac{\partial^i \delta n}{\partial I_s^i} \right|_{I_s \rightarrow 0}.$$

Notar que o coeficiente  $n_2$  na equação (4.17), é o coeficiente tipo Kerr da expansão. A Tabela 4.2 mostra os coeficientes da variação  $\delta n$ , dados pela equação (4.17), quando  $I_s \rightarrow 0$ . A variação  $\delta n$  foi analisada nos comprimentos de onda de  $\lambda_s = 1531.5$  e  $1550\text{nm}$ . Para o bombeio, foram usadas as potências de 10, 50 e  $500\text{mW}$  e comprimento de onda de  $\lambda_p = 980\text{nm}$ . A variação de potência de sinal imposta na simulação ( $1\text{nW} < P_s < 1.0\text{mW} \rightarrow 6.2 \times 10^1 \text{W/m}^2 < I_s < 6.2 \times 10^7 \text{W/m}^2$ ) é tal que a condição de

validade dada pela equação (2.76), para o modelo da susceptibilidade complexa, ainda seja válida. A equação (2.76) permite definir, aqui, o *fator de validade*  $FV$ , tal que

$$FV = \frac{I_s \tau}{h\nu_s (1 + \mathcal{R}_{13} \tau)} \sigma_{a/e}^{\text{peak}} a_{a/e}^i \quad (4.18)$$

cujos valores são mostrados na Tabela 4.2, para a máxima potência usada para o sinal de entrada na fibra ( $P_s=1\text{mW}$ ). Perceber, nos resultados apresentados na Tabela 4.2, que o valor dos coeficientes  $n_i$  aumentam para as potências de bombeio menores, sugerindo que o efeito não linear é mais forte quanto menor a potência do bombeio. Porém, a análise de  $\delta n$  para potências de bombeio  $< 10\text{mW}$  e para potência de sinal de  $1\text{mW}$  não é válida, uma vez que o fator de validade  $FV$  tende a valores próximos da unidade<sup>2</sup>. Para uma potência de bombeio  $P_p=0\text{mW}$  e de sinal de  $0.1\text{mW}$ , a intensidade de potência na região central da fibra que estamos analisando é de  $6.2 \times 10^6 \text{W/m}^2$ , e nesse caso  $FV < 0.25$ .

$\lambda_s[\text{nm}]$	$P_p[\text{mW}]$	$n_1$	$n_2[\text{m}^2\text{W}^{-1}]$	$n_3[\text{m}^4\text{W}^{-2}]$	$n_4[\text{m}^6\text{W}^{-3}]$	$FV$
1531.5	10	$1.33 \times 10^{-6}$	$1.73 \times 10^{-17}$	$-2.76 \times 10^{-26}$	$4.3 \times 10^{-35}$	$< 0.25$
	50	$1.35 \times 10^{-6}$	$-2.26 \times 10^{-18}$	$1.18 \times 10^{-27}$	$-5.64 \times 10^{-37}$	$< 0.06$
	500	$1.37 \times 10^{-6}$	$-3.71 \times 10^{-18}$	$4.19 \times 10^{-28}$	$-4.58 \times 10^{-38}$	$< 0.006$
1550	10	$1.50 \times 10^{-6}$	$-3.65 \times 10^{-16}$	$3.22 \times 10^{-25}$	$-2.91 \times 10^{-34}$	$< 0.25$
	50	$5.61 \times 10^{-7}$	$1.45 \times 10^{-16}$	$-4.30 \times 10^{-26}$	$1.13 \times 10^{-35}$	$< 0.06$
	500	$-8.62 \times 10^{-7}$	$1.32 \times 10^{-16}$	$-8.69 \times 10^{-27}$	$5.32 \times 10^{-37}$	$< 0.006$

**Tabela 4.2** – Coeficientes não lineares da expansão dada pela equação (4.17), para uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de  $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para diferentes comprimentos de onda de sinal e para diferentes potências de bombeio. O fator de validade  $FV \ll 1$  indica que a condição de regime não saturado está sendo preservada.

A Figura 4.15 mostra a variação do índice de refração  $\delta n$  na região central da fibra que estamos usando, para a potência do sinal variando entre  $1\text{nW} < P_s < 0.1\text{mW}$  ( $6.2 \times 10^1 \text{W/m}^2 < I_s < 6.2 \times 10^6 \text{W/m}^2$ ),

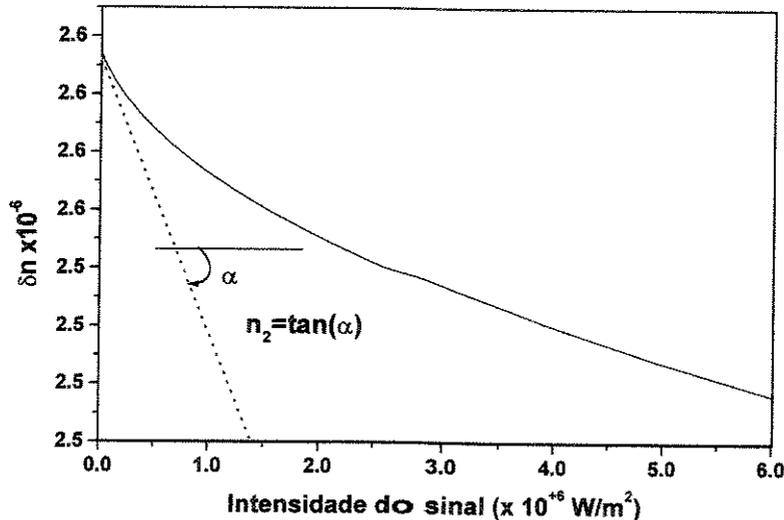
<sup>2</sup> O  $FV$  para potência de bombeio de  $0.0\text{mW}$  e potência de sinal de  $1\text{mW}$  é  $> 3$ , o que invalida o resultado apresentado pelo modelo que estamos usando para a susceptibilidade complexa.

$P_p=0.0\text{mW}$  e  $\lambda_s=1550\text{nm}$ . Os coeficientes não lineares da expansão, dada pela equação (4.17) para a potência de bombeio de  $0.0\text{mW}$  e de sinal de  $0.1\text{mW}$ , e com  $i_{\text{max}}=5$ , são mostrados na Tabela 4.3.

$\lambda_s[\text{nm}]$	$n_1$	$n_2[\text{m}^2\text{W}^{-1}]$	$n_3[\text{m}^4\text{W}^{-2}]$	$n_4[\text{m}^6\text{W}^{-3}]$	$n_5[\text{m}^8\text{W}^{-4}]$	$n_6[\text{m}^{10}\text{W}^{-5}]$
1531.5	$1.31 \times 10^{-6}$	$2.01 \times 10^{-15}$	$-1.13 \times 10^{-21}$	$3.88 \times 10^{-28}$	$-6.19 \times 10^{-35}$	$3.63 \times 10^{-42}$
1550	$2.61 \times 10^{-6}$	$-9.48 \times 10^{-14}$	$3.48 \times 10^{-20}$	$-1.17 \times 10^{-26}$	$1.89 \times 10^{-33}$	$-1.12 \times 10^{-40}$

**Tabela 4.3** – Coeficientes não lineares da expansão, dada pela equação (4.17), para uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de  $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para diferentes comprimentos de onda de sinal e para potência de bombeio  $P_p=0.0\text{mW}$ . A concentração de érbio é de  $N_0=1 \times 10^{+26}$  íons/ $\text{m}^3$ .

No início desta Seção afirmamos que a variação do índice de refração  $\delta n$ , devido à potência do sinal, é mais sensível que a variação  $\delta n$  devido à potência do bombeio. Esta conclusão pode ser tomada através da comparação entre os coeficientes  $n_2$  (do tipo Kerr) da expansão (4.17) (que são uma medida da sensibilidade de  $\delta n$  com a intensidade  $I_s$ ) com os outros, obtidos através de um procedimento semelhante para a variação  $\delta n$  em função da intensidade do bombeio.



**Figura 4.15** - Variação do índice de refração na região central da fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de  $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, em função da intensidade do sinal para  $1\text{nW} < P_s < 0.1\text{mW}$  ( $6.2 \times 10^1 \text{ W/m}^2 < I_s < 6.2 \times 10^6 \text{ W/m}^2$ ),  $P_p=0.0\text{mW}$  e  $\lambda_s=1550\text{nm}$ .

A expansão da variação  $\delta n$  apresentada na equação (4.17), é agora escrita em função da intensidade do bombeio, tal que

$$\delta n(I_p) = \sum_{i=0}^{i_{max}} n_{i+1} I_p^i \quad (4.19)$$

na qual os coeficientes  $n_{i+1}$  são dados por

$$n_{i+1} = \left. \frac{\partial^i \delta n}{\partial I_p^i} \right|_{I_p \rightarrow 0}, \quad (4.20)$$

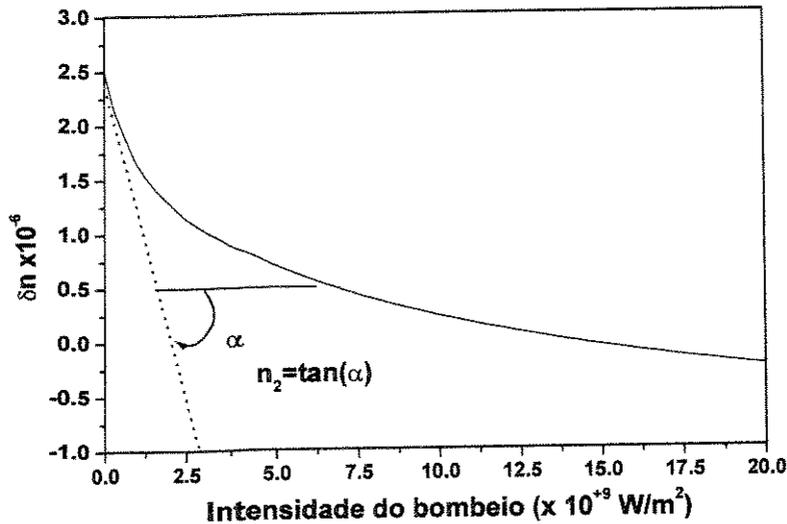
supondo-se fixos os comprimentos de onda do sinal e do bombeio, a potência do sinal e a concentração de érbio  $N_0$ .

Fixou-se a potência do sinal em 0.1mW e calculou-se a variação  $\delta n(I_p)$  para a potência do bombeio no intervalo  $0.0\text{mW} < P_p < 500\text{mW}$ , e para os comprimentos de onda do sinal de 1531.5nm e 1550nm. A concentração de érbio é de  $N_0 = 1 \times 10^{+26}$  íons/m<sup>3</sup>. O resultado da expansão, dada pela equação (4.19), com  $i_{max}=5$ , é mostrado na Tabela 4.4.

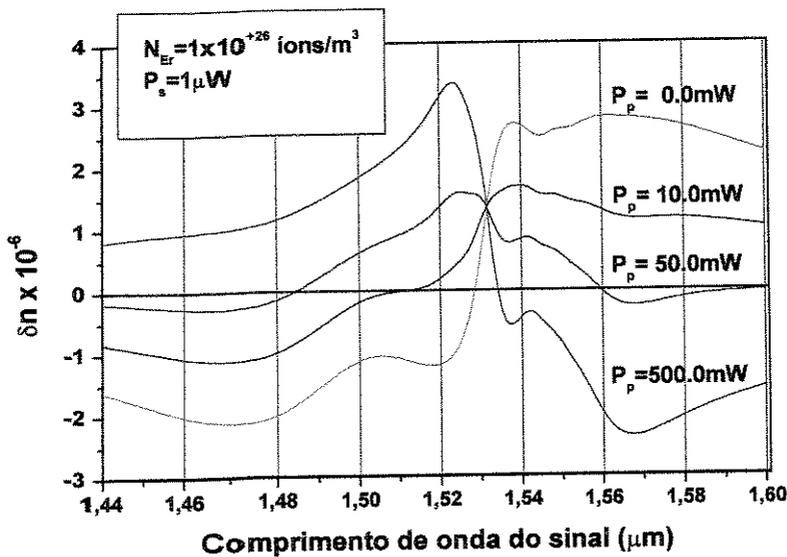
$\lambda_s$ [nm]	$n_1$	$n_2[\text{m}^2\text{W}^{-1}]$	$n_3[\text{m}^4\text{W}^{-2}]$	$n_4[\text{m}^6\text{W}^{-3}]$	$n_5[\text{m}^8\text{W}^{-4}]$	$n_6[\text{m}^{10}\text{W}^{-5}]$
1531.5	$1.32 \times 10^{-6}$	$6.62 \times 10^{-18}$	$-4.15 \times 10^{-28}$	$1.32 \times 10^{-38}$	$-1.97 \times 10^{-49}$	$1.12 \times 10^{-60}$
1550	$2.37 \times 10^{-6}$	$-1.171 \times 10^{-15}$	$1.00 \times 10^{-25}$	$-8.55 \times 10^{-36}$	$4.19 \times 10^{-46}$	$-1.21 \times 10^{-56}$

**Tabela 4.4** – Coeficientes não lineares da expansão dada pela equação (4.19), para uma fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de 2 $\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para diferentes comprimentos de onda de sinal e para potência de bombeio  $P_s=0.1\text{mW}$ . A concentração de érbio é de  $N_0=1 \times 10^{+26}$  íons/m<sup>3</sup>.

O fator de validade  $FV$  máximo é de 0.25, quando  $P_p=0.0\text{mW}$ , diminuindo rapidamente em função de  $P_p$ . A Figura 4.16 mostra a variação do índice de refração para a potência do bombeio variando entre  $0.0\text{mW} < P_p < 500\text{mW}$  ( $0.0\text{W/m}^2 < I_p < 61.6 \times 10^9 \text{W/m}^2$ ),  $P_s=0.1\text{mW}$  ( $6.2 \times 10^6 \text{W/m}^2$ ) e  $\lambda_s=1550\text{nm}$ . Pode-se observar que a amplitude dos coeficientes  $n_2$  da Tabela 4.3 são de até três ordens de grandeza maiores que os da Tabela 4.4, o que indica que a não linearidade dos meios dopados com érbio é mais sensível às variações da intensidade do sinal do que às de intensidade do bombeio. Como dissemos anteriormente, esta discussão e conclusão é outra contribuição desta tese.



**Figura 4.16** - Variação do índice de refração na região central da fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de  $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, em função da intensidade do bombeio para  $0.0\text{mW} < P_p < 500\text{mW}$  ( $0.0\text{W/m}^2 < I_p < 61.6 \times 10^9 \text{W/m}^2$ ),  $P_s = 0.1\text{mW}$  ( $6.2 \times 10^6 \text{W/m}^2$ ) e  $\lambda_s = 1550\text{nm}$ .



**Figura 4.17** - Variação espectral do índice de refração na região central da fibra óptica dopada com érbio com raio do núcleo de  $2\mu\text{m}$ , abertura numérica 0.18, para potência de bombeio de 0.0, 10, 50, e  $500\text{mW}$  @  $980\text{nm}$ , e potência de sinal de  $1\mu\text{W}$ , concentração de érbio de  $N_0 = 1 \times 10^{+26} \text{ ions/m}^3$ , na qual pode-se obter, qualitativamente, o valor do coeficiente  $n_1$  das expansões (4.17) e (4.19).

Pode-se ter uma idéia do valor do fator  $n_1$ , nas Tabelas 4.2, 4.3 e 4.4, em todo o espectro, através do resultado de simulação apresentado na Figura 4.17. Nesta Figura, a potência do sinal foi mantida constante em todo o espectro,  $P_s = 1\mu\text{W}$ , o que representa uma intensidade de  $6.5 \times 10^4 \pm 4.4 \times 10^3$

$W/m^2$  na região central da fibra sob análise, para os comprimentos de onda dentro do espectro apresentado. A concentração de érbio também foi mantida constante em  $N_0=1 \times 10^{26}$  íons/ $m^3$ , para permitir comparações com os resultados anteriormente apresentados. Nesta simulação, usaram-se as potências de bombeio de  $P_p(0)=0, 10, 50$  e  $500mW$ , que impõem uma intensidade de potência de  $0, 1.2 \times 10^9, 6.2 \times 10^9$  e  $6.2 \times 10^{10} W/m^2$  na região central da fibra sob análise.

## 4.3 Resumo

Neste Capítulo apresentamos o Modelo Modal. O modelo está montado sobre uma plataforma de análise modal e que resolve a equação de Helmholtz, levando em conta a susceptibilidade complexa devido à presença dos íons de érbio do material dopado.

Este modelo pode ser considerado uma extensão do trabalho de P.Torres *et al.*[7] previamente publicado, porém superando as cinco principais limitações apresentadas por aquele: estreita largura espectral; dificuldade de obtenção de parâmetros de entrada; não inclusão de efeitos de altas concentrações de érbio; operação em regime monomodo para o sinal e bombeio; e a não determinação de um limite de validade para o modelo. Todas as limitações citadas acima foram claramente discutidas e resolvidas aqui, e fazem parte das contribuições desta tese.

Além disso, obtivemos importantes conclusões com respeito às não linearidades induzidas pelas intensidades do sinal e do bombeio. Através da expansão polinomial da variação do índice de refração  $\delta n$  em função das intensidades do sinal e bombeio, dadas pelas equações (4.17) e (4.19), respectivamente, concluímos que as SINL são mais sensíveis à variação de intensidade do que as PINL. Esta conclusão também faz parte das contribuições desta tese. A veracidade destas conclusões é sustentada através da simulação e reprodução de resultados experimentais de medidas de não linearidades induzidas pela intensidade do campo do bombeio[10], presentes na Seção 4.2.3.1.

Embora tenhamos usado um modelo de susceptibilidade complexa cuja parte real é válida só para o regime não saturado, apresentamos nossos resultados e conclusões sempre dentro deste limite de validade, quantificado através do *fator de validade*  $FV$ , expresso por meio da equação (4.18).

## Referências do Capítulo 4

---

- [1] A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Efficient Stationary Model for Erbium-Doped Optical Amplifiers: Numerical and Experimental Comparisons", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol.23, No.5, pp.261-263, 5 de dezembro, (1999).
- [2] A.P. López-Barbero, H.E. Hernández-Figueroa, A.A. Rieznik e H.L. Fragnito, "Stationary Method for Erbium-Doped Optical Amplifiers Modeling" Submitted paper on *IEEE Journal of Lightwave Technology*, outubro, (1999).
- [3] A.P. López-Barbero, H.E. Hernández-Figueroa e P. Torres, "Numerical Modeling of Multimode Doped Optical Waveguides", A ser publicado na *Advances in Engineering Software*, (2000).
- [4] A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Modeling Erbium-Doped Optical Amplifiers by Finite Elements Modal Analysis", Anais da *International Microwave and Optoelectronics Conference 1999 (IMOC 99)*, Rio de Janeiro, agosto, (1999).
- [5] A.P. López-Barbero, P. Torres e H.E. Hernández-Figueroa, "Multimode Doped Optical Waveguides Modeling by Modal Analysis", Anais da Conferência *Electrosoft 99*, Seville, Spain, maio, (1999).
- [6] A.P. López-Barbero, H.E. Hernández-Figueroa e P. Torres, "Análise de Guias Ópticos Multimodos Dopados com Érbio usando Elementos Finitos", Anais do *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Vila Velha, pp.75-80, outubro, (1999).
- [7] P. Torres e A.M. Guzmán, "Complex Finite-Element Method Applied to the Analysis of Optical Waveguide Amplifiers", *IEEE J. Lightwave Tech.*, Vol.15, No.3, pp.546-550, (1997).
- [8] J.W. Fleming, "Material Dispersion in Lightguide Glasses", *IEE Electronics Letters*, Vol.14, No.11, pp.326-328, (1978).

- 
- [9]F.A. Fernández, J.B. Davies, S. Zhu e Y. Lu, “Sparse Matrix Eigenvalue Solver for Finite Element Solution of Dielectric Waveguides”, *Electron. Lett.*, Vol.27, pp. 1824-1826, setembro, (1991).
- [10]M. Janos e R.A Minasian, “Measurement of pump-induced refractive index change in erbium-doped optical fiber”, *Electronics Letters*, Vol.33, No.1, pp.78-80, janeiro, (1997).
- [11]M. Janos e S.C. Guy, “Signal-Induced Refractive Index Change in Erbium-Doped Fibre Amplifiers”, *IEEE J. Lightwave Tech.*, Vol.16, No.4, pp. 542-548, abril (1998).
- [12]F. Di Pasquale e H.E. Hernández-Figueroa, “Pump controlled all-optical switching by using high-concentration  $\text{Er}^{+3}$  doped nonlinear waveguides”, *Electron. Lett.*, Vol.30, No.3, pp. 232-233, (1994).
- [13]P.W. France, “Optical Fiber Lasers & Amplifiers”, Glasgow, Scotland: Blackie, pp.218, (1991).
- [14]B. Fisher, J.L. Zyskind, J.W. Sulhoff and D.J. Digiovanni, “Nonlinear four wave mixing in erbium-doped fiber amplifiers”, *Electron. Letters*, Vol.29, No.21, pp.1858-1859, (1994).
- [15]C.R. Giles e E. Desurvire, “Modeling Erbium-Doped Fibre Amplifiers”, *J. of Lightwave Tech.*, Vol.9, No.2, pp.271-283, fevereiro, (1991).
- [16]G.N. Van den Hoven, J.A. van der Elsken, A. Polman, C. van Dam, K.W.M. van Uffelen e M.K. Smit, “Absorption and emission cross section of  $\text{Er}^{+3}$  in  $\text{Al}_2\text{O}_3$  waveguides”, *Applied Optics*, Vol.36, No.15, pp.3338-3341, maio, (1997).
- [17]S. Honkanen, S.I. Najafi e W.J. Wang, “Composite Rare-Earth Doped Glass Waveguides”, *IEEE Electronics Letters*, Vol.28, No.8, pp.746-747, abril, (1992).
- [18]D.G. Dudley, “Mathematical Foundations For Electromagnetic Theory”, *IEEE Press Series*, Piscataway, NJ, (1994).
- [19]F. Di Pasquale e M. Zoboli, “Analysis of Erbium-Doped Waveguide Amplifiers by a Full-Vectorial Finite-Element Method”, *IEEE Journal of Lightwave Tech.*, Vol.11, No.10, pp.1565-1574, (1993).
- [20]T. Young, “Finite Element Modeling of a Polarization Independent Optical Amplifier”, *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol.10, No.5, pp.626-633, maio, (1992).

- 
- [21] P.F. Wysocki, "Computer Modeling of Polarization Hole Burning in EDFAs", *Anais da Optical Fiber Communication Conference*, Vol.4, OSA Technical Digest Series, paper FF6, Washington, (1994).
- [22] D.W. Hall e M.J. Weber, "Polarized fluorescence line narrowing measurement of Nd laser glasses: Evidence of stimulated emission cross section anisotropy", *Appl. Phys. Lett.*, Vol.42, No.2, pp.157-159, janeiro, (1983)
- [23] W.A. Arellano, M.O. Berendt, e H.L. Fragnito, "Polarization modulation study of gain anisotropy in Erbium Doped Fiber Amplifiers", Artigo submetido na *CLEO/2000*, The Moscone Convention Center, San Francisco, California, 7-12 de maio, (2000).
- [24] F. Di Pasquale, M. Zoboli, M. Federighi e I. Massarek, "Finite-Element Modeling of Silica Waveguide Amplifiers with High Erbium Concentration", *IEEE J. Quantum Electronics*, Vol.30, No.5, pp.1277-1282, maio, (1994).
- [25] P. Kilverli, COST217 group, "COST 217 Intercomparison of measurements on Er-doped fibers", *Anais do Tech. Digest. Symp. Optical Fiber Measurements*, G.W. Day and D.L. Franzen, Eds, NIST Special Publication, Vol.839, pp.183-186, (1992).
- [26] Informação pessoal.
- [27] K.E. Alameh, R.A. Minasian e Y. Zhao, "A Numerical Model for the Complex Susceptibility of Saturated Erbium-Doped Amplifiers", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol.33, No.5, pp.855-860, abril, (1997).
- [28] C. Thirstrup, Y. Shi, P. Baekkelund e B. Pálsdóttir, "Modulation of Absorption and Refractive Index in  $\text{Er}^{+3}$ -Doped Fibres", *Fibre and Integrated Optics*, Vol.15, pp.1-6, (1996).
- [29] R.A. Betts, T. Tjugiart, Y.L. Xue, e P.L. Chu, "Nonlinear refractive index in erbium-doped optical fiber: theory and experiment", *IEEE Journ. Quantum Electronics*, Vol.27, No.4, pp.908-913, (1991).
- [30] K. Takada, T. Kitagawa, K. Hattori, M. Yamada, M. Horiguchi, e R.K. Hickernell, "Direct dispersion measurement of highly doped optical amplifiers using a low coherence reflectometer coupled with dispersive Fourier spectroscopy", *Electron. Letters*, Vol.28, No.20, pp.1889-1891, setembro, (1992).
- [31] A.P.L. Barbero, "Sistema para Caracterização de Circuitos Ópticos a Fibras Altamente Birrefringentes", *Tese de Mestrado*, ITA, São José dos Campos, SP, (1995).

- 
- [32]G.P. Agrawal, “Nonlinear Fiber Optics”, *Academics Press*, San Diego, 2<sup>a</sup> Ed., (1995).
- [33]M. Montagna, S. Selleri e M. Zoboli, “Nonlinear Refractive index in Erbium-Doped Optical Amplifiers”, *Optical and Quantum Electronics*, Vol.27, pp.871-880, (1995).
- [34]P. Blixt, J. Nilsson, T. Carlans e B. Jaskorzynska, “Concentration-dependent upconversion in Er-doped fiber amplifiers: experiments and modeling”, *IEEE Photonics and Technology Letters*, Vol.3, No.11, pp.996-998, novembre, (1991).



## Capítulo 5

# Modelo z-variante BPM

Neste Capítulo apresentamos o Modelo z-variante BPM de Amplificadores ópticos dopados com érbio. Tanto o Modelo Modal do Capítulo 4 como o Modelo z-variante BPM deste Capítulo modelam o material dopado através do cálculo da susceptibilidade complexa. No entanto, estes Modelos usam plataformas numéricas diferentes em razão das diferentes considerações feitas. No Modelo Modal, implementado sobre uma plataforma numérica de análise modal, é feita a consideração de que tanto a constante de propagação  $\beta$  como a geometria transversal do dispositivo são invariantes ao longo da direção de propagação “z” ( $\partial/\partial z = 0$ ), condição esta sustentada pelo fato do dispositivo ser suficientemente curto. No Modelo z-variante BPM é considerado que tanto a constante de propagação  $\beta$  como a geometria transversal do dispositivo são variantes ao longo da direção de propagação “z”. Esta consideração é levada em conta de forma eficiente através do uso

da plataforma numérica do BPM (*Beam Propagation Method*)[1,2,3,4,5,6], que simula a propagação do feixe óptico.

## 5.1 Implementação do Modelo

Vimos nos capítulos anteriores que a presença simultânea do campo elétrico do sinal e do bombeio, em um meio dopado com íons de érbio, provoca uma perturbação na permissividade elétrica  $\epsilon$  do meio. Esta perturbação é a susceptibilidade complexa,  $\chi_{Er}$ , calculada e discutida no Capítulo 2 e usada no Modelo Modal do Capítulo 4. O modelo apresentado neste Capítulo também baseia-se no uso da susceptibilidade complexa porém sobre uma plataforma numérica BPM. Os resultados mostrados neste Capítulo são obtidos usando a formulação escalar 1D mostrada na Seção A.2 do Apêndice A. A formulação escalar 2D também foi implementada. Porém, haja visto o tempo necessário para a simulação de dispositivos 2D, de comprimentos da ordem de centímetros, optamos, neste primeiro estágio, desenvolver o Modelo na formulação 1D.

Os resultados obtidos com a formulação 1D não podem ser comparados quantitativamente com os obtidos com uma formulação 2D, uma vez que os campos envolvidos, que são extremamente importantes para o cálculo de diversos parâmetros de nossa análise, apresentam distribuições transversais diferentes usando estas formulações. No entanto, os resultados obtidos pela formulação 1D podem ser qualitativamente comparados com aqueles obtidos com uma formulação 2D, o que não invalida os resultados mostrados aqui.

Neste trabalho, consideraremos o material do hospedeiro isotrópico. Contudo, não podemos perder de vista o fato de que, em meios anisotrópicos, nos quais a permissividade do meio depende da polarização da onda eletromagnética, a susceptibilidade e as seções de choque são dependentes da polarização. Um bom exemplo da dependência das seções de choque com a polarização em meios anisotrópicos pode ser visto no trabalho de C. Huang *et al.* para o  $\text{LiNbO}_3$ [7]. O estudo da dependência das seções de choque com a polarização[8] é de grande importância para o aumento da

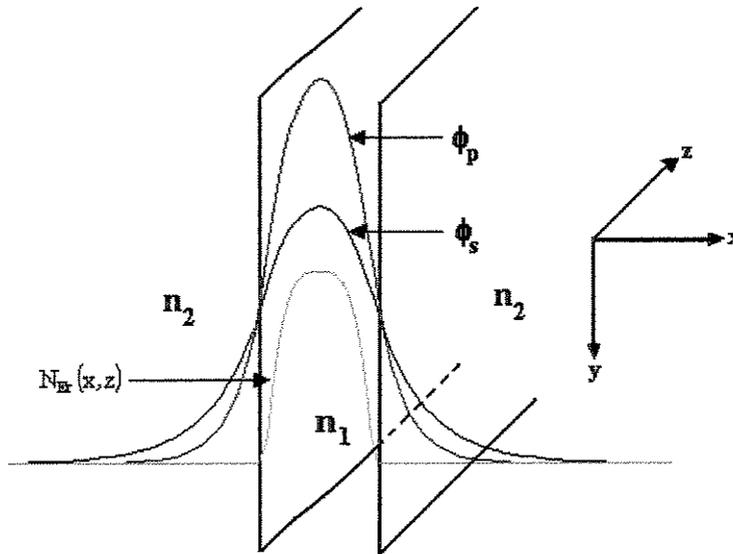
eficiência e confiabilidade dos sistemas WDM [9], que têm motivado esforços com a finalidade de entender tais efeitos[10].

### 5.1.1 Plataforma Numérica BPM

Este modelo resolve simultaneamente as equações de onda escalares<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{s} \frac{\partial \phi_s}{\partial x} \right) + s \frac{\partial}{\partial z} \left( p \frac{\partial \phi_s}{\partial z} \right) + k_{0s}^2 q s \phi_s = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{s} \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \right) + s \frac{\partial}{\partial z} \left( p \frac{\partial \phi_p}{\partial z} \right) + k_{0p}^2 q s \phi_p = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

para os campos  $\phi_s$  e  $\phi_p$  propagando-se no dispositivo óptico planar dopado com érbio, da Figura 5.1,



**Figura 5.1** – Dispositivo óptico planar dopado com érbio com concentração de érbio  $N_{Er}(x,z)$ , no qual propagam-se as ondas eletromagnéticas do sinal e do bombeio com polarização TE ( $\phi_{s/p}=E^{s/p}_x$ ) ou TM( $\phi_{s/p}=H^{s/p}_x$ ),

<sup>1</sup> A Seção A.2, do Apêndice A, mostra detalhadamente toda a formulação necessária para a implementação do Método de Propagação do Feixe (BPM) usado neste trabalho.

no qual  $\phi_{s/p}$  são os campos associados às ondas eletromagnéticas dos modos propagantes nas frequências do sinal(s) e bombeio(p), representados como

$$\begin{cases} \phi_s^x(x, z) = \phi_s(x, z)e^{-jn_{\text{ref}}^s k_{0s} z} \\ \phi_p^x(x, z) = \phi_p(x, z)e^{-jn_{\text{ref}}^p k_{0p} z} \end{cases} \quad (5.2)$$

nas quais  $j = \sqrt{-1}$ . Nas equações (5.1) e (5.2) os índices “s” e “p” denotam as quantidades nas frequências do sinal e bombeio, respectivamente, e também tem-se que  $k_{0s} = 2\pi/\lambda_s$  e  $k_{0p} = 2\pi/\lambda_p$  são as constantes de propagação no vácuo,  $n_{\text{ref}}^s$  e  $n_{\text{ref}}^p$  são os índices de refração de referência, cujos valores devem ser idealmente  $n_{\text{eff}}^s = \beta_s/k_{0s}$  e  $n_{\text{eff}}^p = \beta_p/k_{0p}$  que são os índices de refração efetivos. Ainda,  $\beta_{s/p}$  são as constantes de propagação das ondas eletromagnéticas dos modos propagantes.

Nas equações (5.1),  $s$  é o parâmetro relacionado com a absorção nas camadas de PML<sup>2</sup>. Para os modos TE's a variável  $\phi_{s/p}$  é o campo elétrico  $E_x^{s/p}$  e os parâmetros  $p$  e  $q$  assumem os valores  $p=1$  e  $q=n^2(x, y, z) + \chi_{\text{Er}}^{s/p}(x, y, z, \omega_{s/p})$ , em que  $n(x, y, z)$  é o índice de refração do material hospedeiro, e  $\chi_{\text{Er}}^{s/p}(x, y, z, \omega_{s/p})$  é a susceptibilidade atômica complexa efetiva em razão da presença dos íons de érbio na frequência do sinal(s) e bombeio(p). Perceber que neste modelo a susceptibilidade é calculada tanto na frequência do sinal quanto na do bombeio. Consideramos o índice de refração independente da frequência  $\omega$ . Porém, essa consideração pode ser levantada usando, por exemplo, a expressão de Sellmeier[11]. A equação (5.2) é usada na equação (5.1) e esta é discretizada, particionando o domínio computacional unidimensional (1D) por meio de uma malha adaptativa de  $nel$  elementos finitos de linha (usando funções de base lineares) e  $np$  variáveis,

---

<sup>2</sup> PML – *Perfectly Matched Layers* é um artifício numérico para evitar reflexões nos limites do domínio computacional.

seguinto o método de Galerkin para o cálculo das soluções dos campos, como detalhado no Apêndice A. A derivada primeira de  $\phi_{s/p}$  na direção de propagação é representada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \{\phi_{s/p}\}_k}{\partial z} = \frac{\{\phi_{s/p}\}_{k+1} - \{\phi_{s/p}\}_k}{\Delta z} \\ \text{e usando } \{\phi_{s/p}\}_k = \frac{\{\phi_{s/p}\}_{k+1} + \{\phi_{s/p}\}_k}{2} \end{array} \right. \quad (5.3)$$

em que  $\{\phi_{s/p}\}_k$  é um vetor de dimensão  $np$  que representa a distribuição transversal do campo elétrico ou magnético para o sinal(s) e bombeio(p) discretizado na  $k$ -ésima posição ao longo do comprimento do dispositivo, sendo  $\Delta z$  a distância entre duas posições consecutivas. Com este procedimento, descrito detalhadamente na Seção A.2 do Apêndice A, obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{A}_s]_k \{\phi_s\}_{k+1} = [\mathbf{B}_s]_k \{\phi_s\}_k \\ [\mathbf{A}_p]_k \{\phi_p\}_{k+1} = [\mathbf{B}_p]_k \{\phi_p\}_k \end{array} \right. , \quad (5.4)$$

nas quais

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{A}_s]_k = -2jk_{0s} n_{\text{ref}k}^s [\tilde{\mathbf{M}}_s]_k + \left( [\mathbf{K}_s]_k - k_{0s}^2 (n_{\text{ref}k}^s)^2 [\mathbf{M}_s]_k \right) \frac{\Delta z}{2} \\ [\mathbf{B}_s]_k = -2jk_{0s} n_{\text{ref}k}^s [\tilde{\mathbf{M}}_s]_k - \left( [\mathbf{K}_s]_k - k_{0s}^2 (n_{\text{ref}k}^s)^2 [\mathbf{M}_s]_k \right) \frac{\Delta z}{2} \end{array} \right. \quad (5.5 - a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{A}_p]_k = -2jk_{0p} n_{\text{ref}k}^p [\tilde{\mathbf{M}}_p]_k + \left( [\mathbf{K}_p]_k - k_{0p}^2 (n_{\text{ref}k}^p)^2 [\mathbf{M}_p]_k \right) \frac{\Delta z}{2} \\ [\mathbf{B}_p]_k = -2jk_{0p} n_{\text{ref}k}^p [\tilde{\mathbf{M}}_p]_k - \left( [\mathbf{K}_p]_k - k_{0p}^2 (n_{\text{ref}k}^p)^2 [\mathbf{M}_p]_k \right) \frac{\Delta z}{2} \end{array} \right. \quad (5.5 - b)$$

Nas equações (5.4) e (5.5) as matrizes  $[\mathbf{A}_{s/p}]_k$ ,  $[\mathbf{B}_{s/p}]_k$ ,  $[\mathbf{K}_{s/p}]_k$ ,  $[\mathbf{M}_{s/p}]_k$  e  $[\tilde{\mathbf{M}}_{s/p}]_k$  possuem dimensão  $np \times np$  e representam os operadores diferenciais discretizados das equações (5.1). A matriz

$$[\tilde{\mathbf{M}}_{s/p}]_k = [\mathbf{M}_{s/p}]_k + \left( \frac{[\mathbf{K}_{s/p}]_k - k_{0s/0p}^2 (n_{\text{ref}_k}^{s/p})^2 [\mathbf{M}_{s/p}]_k}{4k_{0s/0p}^2 (n_{\text{ref}_k}^{s/p})^2} \right) \quad (5.6)$$

é obtida com base na aproximação de Padé[12],[13] para o operador diferencial  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

Como vimos no Capítulo 4, por causa do comportamento não linear do material dopado com érbio, o índice de refração sofre uma variação  $\delta n$  que, conforme a equação (4.13), é dada por

$$\delta n(I_s, I_p, \omega_{s/p}, N_{\text{Er}})_{(x,y)} \cong \text{Re} \left\{ \frac{\chi_{\text{Er}}^{s/p}(I_s, I_p, \omega_{s/p}, N_{\text{Er}})}{2n(I_s, I_p, \omega_{s/p}, N_{\text{Er}})} \right\}_{(x,y)}, \quad (5.7)$$

na qual usamos o sub-índice (x,y) para deixar clara a dependência local do material com os parâmetros envolvidos. Esta mudança no índice de refração local provoca uma variação no índice de refração efetivo  $n_{\text{eff}}^{s/p}(z)$  ao longo do dispositivo e que deve, obrigatoriamente, ser recalculado[14],[15] em cada passo da propagação, através da expressão

$$\begin{cases} n_{\text{eff}}^s \cong n_{\text{ref}_k}^s = \sqrt{\text{Re} \left\{ \frac{\{\phi_s\}_k^{\text{T}*} [\mathbf{K}_s]_k \{\phi_s\}_k}{k_{0s}^2 [\mathbf{M}_s]_k \{\phi_s\}_k} \right\}} \\ n_{\text{eff}}^p \cong n_{\text{ref}_k}^p = \sqrt{\text{Re} \left\{ \frac{\{\phi_p\}_k^{\text{T}*} [\mathbf{K}_p]_k \{\phi_p\}_k}{k_{0p}^2 [\mathbf{M}_p]_k \{\phi_p\}_k} \right\}} \end{cases} \quad (5.8)$$

em que  $\{\phi_{s/p}\}_k^{\text{T}*}$  representa o vetor transposto e complexo conjugado de  $\{\phi_{s/p}\}_k$ .

## 5.1.2 Modelamento do Material: Susceptibilidade Complexa

Tendo em vista as expressões contidas na Seção 2.4, a susceptibilidade complexa para o sinal

$\chi_{Er}^s(x, y, z, \omega_s) = \chi_{Er}^s{}'(x, y, z, \omega_s) - j\chi_{Er}^s{}''(x, y, z, \omega_s)$  é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{Er}^s{}'(x, y, z, \omega_s) = \frac{n_{eff}^{0s}(z)c_0}{\omega_s} \left[ \bar{N}_2(x, y, z, \omega_s) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} 2a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_s) \frac{(\omega_s - \omega_e^i)}{\Delta\omega_e^i} + \right. \\ \left. - \bar{N}_1(x, y, z, \omega_s) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} 2a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_s) \frac{(\omega_s - \omega_a^i)}{\Delta\omega_a^i} \right] \\ \chi_{Er}^s{}''(x, y, z, \omega_s) = -\frac{n_{eff}^{0s}(z)c_0}{\omega_s} \left[ \bar{N}_2(x, y, z, \omega_s) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_s) + \right. \\ \left. - \bar{N}_1(x, y, z, \omega_s) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_s) \right] \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Na equação (5.9)  $n_{eff}^{0s}(z)$  é o índice de refração efetivo do sinal para o guia com o qual o dispositivo amplificador é feito, sem considerar a dopagem. Porém, haja visto que em geral  $\chi_{Er}^s{}'(x, y, z, \omega_s) \approx 10^6$  podemos usar  $n_{eff}^{0s}(z) \approx n_{refk}^s$  diretamente da equação (5.8). Devemos lembrar que a equação (5.9) leva em conta o efeito de alargamento homogêneo e que  $\chi_{Er}^s{}'(x, y, z, \omega_s)$  foi obtida através das relações de Kramers-Kronig mostradas nas equações (2.62) e sustentada pela equação (2.76), e que, portanto,  $\chi_{Er}^s{}'(x, y, z, \omega_s)$  é válida somente no regime não-saturado.

Para o bombeio  $\chi_{Er}^p(x, y, z, \omega_p) = \chi_{Er}^p{}'(x, y, z, \omega_p) - j\chi_{Er}^p{}''(x, y, z, \omega_p)$  é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{Er}^p{}' (x, y, z, \omega_p) = \frac{n_{eff}^{0p}(z)c_0}{\omega_p} \left[ -\bar{N}_1(x, y, z, \omega_p) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} 2a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_p) \frac{(\omega_p - \omega_a^i)}{\Delta\omega_a^i} + \right. \\ \left. + (\bar{N}_3(x, y, z, \omega_p) + \sigma_{ep21} \bar{N}_2(x, y, z, \omega_p)) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} 2a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_p) \frac{(\omega_p - \omega_e^i)}{\Delta\omega_e^i} + \right] \\ \chi_{Er}^p{}'' (x, y, z, \omega_p) = -\frac{n_{eff}^{0p}(z)c_0}{\omega_p} \left[ -\bar{N}_1(x, y, z, \omega_p) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_p) + \right. \\ \left. + (\bar{N}_3(x, y, z, \omega_p) + \sigma_{ep21} \bar{N}_2(x, y, z, \omega_p)) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_p) \right] \end{array} \right. \quad (5.10)$$

na qual  $\sigma_{ep21}=0$  ou  $\sigma_{ep21}=1$ , caso o comprimento de onda do bombeio seja 980nm ou  $\approx 1480$ nm, respectivamente, e também pode considerar-se  $n_{eff}^{0p}(z) \approx n_{refk}^p$ . Os parâmetros das equações (5.9) e (5.10) foram definidos nos capítulos anteriores.

É oportuno lembrar que  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  são as populações dos níveis principais estável, meta-estável e do bombeio. Quando o bombeamento é feito em 980nm,  $\bar{N}_3$  é a população do nível principal  ${}^4I_{11/2}$ . Porém quando o bombeamento é no comprimento de onda próximo de 1480nm, o “nível 3” pertence ao nível principal  ${}^4I_{13/2}$ . As populações  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  nas equações (5.9) e (5.10), são soluções das equações de taxa (3.13) ou (3.14) para os sistemas energéticos das Figuras 3.1 ou 3.2, quando considera-se o bombeio em 980nm ou  $\approx 1480$ nm, respectivamente. As taxas estimuladas, usadas na equações de taxa (3.13) ou (3.14), são dadas pelas equações (3.15) e reproduzidas aqui, por conveniência:

$$W_{12}(x, y, z, \nu_s) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{a12}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, z, \nu_s^i) + \\ + \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{a12}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, z, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, z, \nu^j))$$

## 5.1.2 Modelamento do Material: Susceptibilidade Complexa

Tendo em vista as expressões contidas na Seção 2.4, a susceptibilidade complexa para o sinal

$\chi_{Er}^s(x, y, z, \omega_s) = \chi_{Er}^{s'}(x, y, z, \omega_s) - j\chi_{Er}^{s''}(x, y, z, \omega_s)$  é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{Er}^{s'}(x, y, z, \omega_s) = \frac{n_{eff}^{0s}(z)c_0}{\omega_s} \left[ \bar{N}_2(x, y, z, \omega_s) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} 2a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_s) \frac{(\omega_s - \omega_e^i)}{\Delta\omega_e^i} + \right. \\ \left. - \bar{N}_1(x, y, z, \omega_s) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} 2a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_s) \frac{(\omega_s - \omega_a^i)}{\Delta\omega_a^i} \right] \\ \chi_{Er}^{s''}(x, y, z, \omega_s) = -\frac{n_{eff}^{0s}(z)c_0}{\omega_s} \left[ \bar{N}_2(x, y, z, \omega_s) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_s) + \right. \\ \left. - \bar{N}_1(x, y, z, \omega_s) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_s) \right] \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Na equação (5.9)  $n_{eff}^{0s}(z)$  é o índice de refração efetivo do sinal para o guia com o qual o dispositivo amplificador é feito, sem considerar a dopagem. Porém, haja visto que em geral  $\chi_{Er}^{s'}(x, y, z, \omega_s) \approx 10^6$  podemos usar  $n_{eff}^{0s}(z) \approx n_{refk}^s$  diretamente da equação (5.8). Devemos lembrar que a equação (5.9) leva em conta o efeito de alargamento homogêneo e que  $\chi_{Er}^{s'}(x, y, z, \omega_s)$  foi obtida através das relações de Kramers-Kronig mostradas nas equações (2.62) e sustentada pela equação (2.76), e que, portanto,  $\chi_{Er}^{s'}(x, y, z, \omega_s)$  é válida somente no regime não-saturado.

Para o bombeio  $\chi_{Er}^p(x, y, z, \omega_p) = \chi_{Er}^{p'}(x, y, z, \omega_p) - j\chi_{Er}^{p''}(x, y, z, \omega_p)$  é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{Er}^p{}' (x, y, z, \omega_p) = \frac{n_{eff}^{0p}(z)c_0}{\omega_p} \left[ -\bar{N}_1(x, y, z, \omega_p) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} 2a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_p) \frac{(\omega_p - \omega_a^i)}{\Delta\omega_a^i} + \right. \\ \left. + (\bar{N}_3(x, y, z, \omega_p) + \sigma_{ep21} \bar{N}_2(x, y, z, \omega_p)) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} 2a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_p) \frac{(\omega_p - \omega_e^i)}{\Delta\omega_e^i} + \right] \\ \chi_{Er}^p{}'' (x, y, z, \omega_p) = -\frac{n_{eff}^{0p}(z)c_0}{\omega_p} \left[ -\bar{N}_1(x, y, z, \omega_p) \sigma_a^{peak} \sum_{i=1}^{na} a_a^i \mathcal{L}_a^i(\omega_p) + \right. \\ \left. + (\bar{N}_3(x, y, z, \omega_p) + \sigma_{ep21} \bar{N}_2(x, y, z, \omega_p)) \sigma_e^{peak} \sum_{i=1}^{ne} a_e^i \mathcal{L}_e^i(\omega_p) \right] \end{array} \right. \quad (5.10)$$

na qual  $\sigma_{ep21}=0$  ou  $\sigma_{ep21}=1$ , caso o comprimento de onda do bombeio seja 980nm ou  $\approx 1480$ nm, respectivamente, e também pode considerar-se  $n_{eff}^{0p}(z) \approx n_{refk}^p$ . Os parâmetros das equações (5.9) e (5.10) foram definidos nos capítulos anteriores.

É oportuno lembrar que  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  são as populações dos níveis principais estável, meta-estável e do bombeio. Quando o bombeamento é feito em 980nm,  $\bar{N}_3$  é a população do nível principal  ${}^4I_{11/2}$ . Porém quando o bombeamento é no comprimento de onda próximo de 1480nm, o “nível 3” pertence ao nível principal  ${}^4I_{13/2}$ . As populações  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  nas equações (5.9) e (5.10), são soluções das equações de taxa (3.13) ou (3.14) para os sistemas energéticos das Figuras 3.1 ou 3.2, quando considera-se o bombeio em 980nm ou  $\approx 1480$ nm, respectivamente. As taxas estimuladas, usadas na equações de taxa (3.13) ou (3.14), são dadas pelas equações (3.15) e reproduzidas aqui, por conveniência:

$$W_{12}(x, y, z, \nu_s) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{a12}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, z, \nu_s^i) + \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{a12}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, z, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, z, \nu^j))$$

$$\begin{aligned}
W_{21}(x, y, z, \nu_s, \nu_p) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{e21}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, z, \nu_s^i) + \frac{\sigma_{ep21}(\nu_p)}{h\nu_p} (I_p^+(x, y, z, \nu_p) + I_p^-(x, y, z, \nu_p)) + \\
&+ \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{e21}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, z, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, z, \nu^j)) \\
R_{13}(x, y, z, \nu_p) &= \frac{\sigma_{a13}(\nu_p)}{h\nu_p} (I_{p+}(x, y, z, \nu_p) + I_{p-}(x, y, z, \nu_p)) \tag{5.11}
\end{aligned}$$

$$R_{31}(x, y, z, \nu_p) = \frac{\sigma_{e31}(\nu_p)}{h\nu_p} (I_{p+}(x, y, z, \nu_p) + I_{p-}(x, y, z, \nu_p))$$

$$\begin{aligned}
R_{24}^{ESA}(x, y, z, \nu_s, \nu_p) &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{a24}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, z, \nu_s^i) + \frac{\sigma_{a24}^p(\nu_p)}{h\nu_p} (I_p^+(x, y, z, \nu_p) + I_p^-(x, y, z, \nu_p)) + \\
&+ \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{a24}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, z, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, z, \nu^j))
\end{aligned}$$

em que  $R_{24}^{ESA}=0$  quando o bombeio é feito no comprimento de onda de 980nm, e com  $\sigma_{ep21}=0$  ou  $\sigma_{ep21}=\sigma_{e31}$  se o comprimento de onda do bombeio for 980nm ou  $\approx 1480$ nm, respectivamente. No atual estágio de desenvolvimento do Modelo z-variante BPM estamos considerando a propagação de só um sinal e só um bombeio co-propagante. Além disso, por simplicidade, não foram incorporados os efeitos da ASE. Desta forma, o Modelo z-variante BPM está atualmente implementado com  $N=1$ ,  $M=0$  e  $I_p^-(x, y, z, \nu_p)=0$  nas equações (5.11).

A inclusão de vários sinais é bastante trivial, bastando, para isso, montar as matrizes  $[\mathbf{A}_s]_k$  e  $[\mathbf{B}_s]_k$ , definidas pelas equações (5.5-a), para cada um dos sinais propagando-se no dispositivo, ou seja  $[\mathbf{A}_s]_k^i$  e  $[\mathbf{B}_s]_k^i$  com  $i=1, N$ . A ASE+ e ASE- pode ser incluída nas equações (5.11) por meio de um esquema misto, usando este Modelo e o Modelo Espacial do Capítulo 3, em que a evolução da ASE é obtida através da integração das equações de propagação, usando o algoritmo de Runge-Kutta. No entanto, a inclusão da ASE- e do bombeio contra-propagante  $I_p^-(x, y, z, \nu_p)$  implica em propagar interativamente os feixes nas direções  $z=0 \rightarrow L_w$  e  $z=L_w \rightarrow 0$  até que a convergência seja

obtida, como feito no Modelo Espacial do Capítulo 3. Do ponto de vista numérico é perfeitamente possível a inclusão de  $N$  sinais, da  $ASE_{\pm}$  e bombeio contra-propagante. Contudo isto não foi possível aqui em razão das limitações de processamento que temos hoje disponíveis. Na Seção 5.3.1 ficará claro que vários cálculos são independentes e podem ser paralelizados, o que, sem dúvida, poderá ser feito em futuros trabalhos.

### 5.1.3 Rotina Numérica

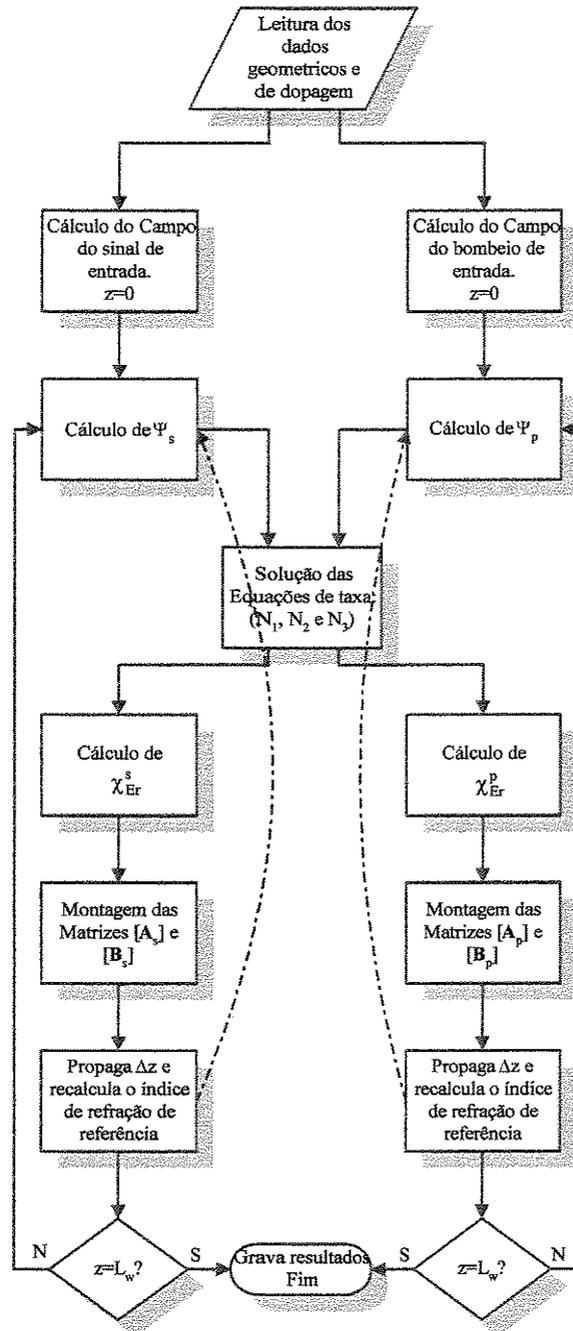
O procedimento (rotina) numérico necessário para resolver simultaneamente as equações (5.4) de propagação do feixe óptico do sinal e do bombeio co-propagante, em um dispositivo dopado com érbio, de comprimento  $L_w$ , é representado no fluxograma da Figura 5.2. Para manter a proximidade entre os códigos numéricos dos modelos que estamos implementando e possibilitar a troca de sub-rotinas entre eles, usamos, neste Modelo  $z$ -variante BPM, a mesma representação para a intensidade do campo do sinal e do bombeio que foi usada no Capítulo 3, ou seja

$$I_s(x, y, z) = \Psi_s(x, y, z)P_s(z) \quad (5.12)$$

$$I_{p\pm}(x, y, z) = \Psi_{p\pm}(x, y, z)P_{p\pm}(z) \quad (5.13)$$

nas quais  $\Psi_{s/p}$  são as densidades de potência normalizadas, definida pela equação (A.5) do Apêndice A, e nas quais incluímos a dependência de “ $z$ ” em  $\Psi_{s/p}$ , uma vez que, em razão das não linearidades induzidas pelos campos do sinal e do bombeio, a variação do índice de refração  $\delta n$ , dada pela equação (5.7), provoca uma alteração na distribuição transversal dos campos envolvidos, com importante consequência para o caso em que o dispositivo é construído baseado em guias acoplados. Notar na Figura 5.2, que após a leitura dos dados iniciais, referentes à geometria e à dopagem do dispositivo do problema, formam-se dois ramos: um para o sinal e outro para o bombeio. Estes ramos seguem, aproximadamente, o algoritmo de outros códigos numéricos que usam o método da propagação do feixe. Após os cálculos da distribuição transversal dos campos (do sinal e do bombeio) e das densidades normalizadas de potência  $\Psi_{s/p}$ , são resolvidas as equações de taxa (3.13)

ou (3.14) para obter as populações  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$ , usando, para isso, as taxas estimuladas mostradas nas equações (5.11).

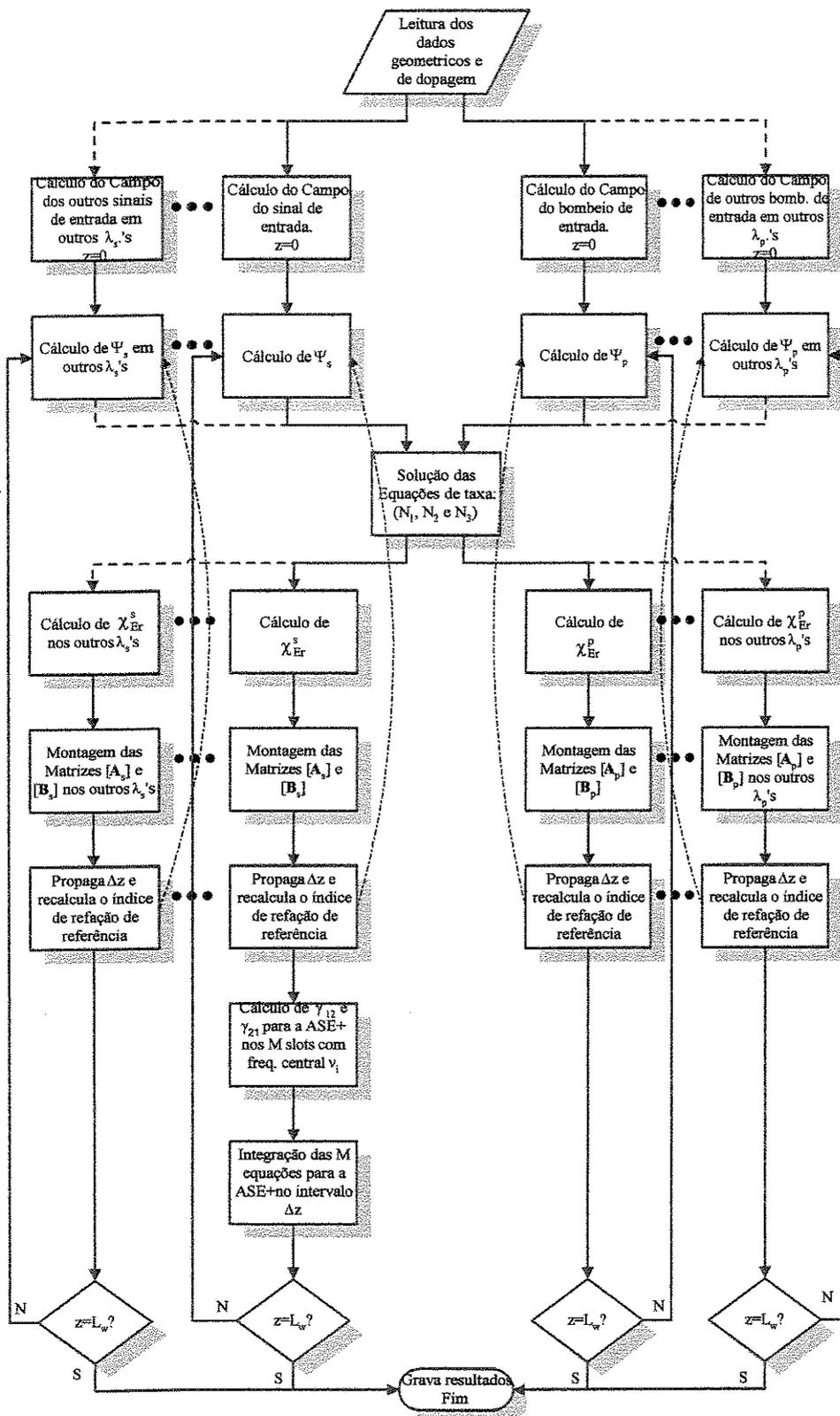


**Figura 5.2** – Rotina numérica do Modelo z-variante BPM, no estágio atual de desenvolvimento, na qual só um sinal de entrada e bombeio co-propagante são considerados.

Notar que o fato dos ramos de propagação do sinal e bombeio convergirem para o bloco onde as equações de taxas são resolvidas, indica o acoplamento existente entre os campos do sinal e do

bombeio. Este fato é claramente apontado pelas equações (5.11). Na seqüência, as populações  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$  e  $\bar{N}_3$  são usadas para o cálculo das susceptibilidades complexas  $\chi_{Er}^s(x, y, z, \omega_s)$  e  $\chi_{Er}^p(x, y, z, \omega_p)$ , dadas pelas equações (5.9) e (5.10). Estas somam-se à permissividade do material hospedeiro  $\varepsilon(x, y, z, \omega_{s/p}) = n^2(x, y, z) + \chi_{Er}^{s/p}(x, y, z, \omega_{s/p})$  para montar as matrizes  $[\mathbf{A}_{s/p}]$  e  $[\mathbf{B}_{s/p}]$ , dadas pelas equações (5.5-a) e (5.5-b), e que são usadas para propagar os feixes de uma distância  $\Delta z$ , usando as equações (5.4). Com os campos do sinal e do bombeio calculados nesta nova posição, recalculam-se as densidades de potência normalizadas  $\Psi_{s/p}$  e repete-se toda a rotina descrita acima propagando-se os feixes ópticos do sinal e do bombeio ao longo de todo o comprimento do dispositivo, até atingir a posição  $z=L_w$ . Alternativamente, pode-se usar um esquema iterativo usado por H. Yokota *et al.*[16] e T. Yasui *et al.*[17] para a simulação da propagação em meios não lineares. Este esquema é apontado na Figura 5.2 com setas tracejadas azuis, no qual as equações de taxa e a susceptibilidade são iterativamente calculadas usando a média dos campos do sinal e bombeio do k-ésimo e (k+1)-ésimo passos.

Como dissemos anteriormente, a inclusão da ASE- e de N sinais em frequências diferentes (como em sistemas WDM) e do bombeio contra-propagante (e ainda em comprimentos de onda diferentes) pode ser feita do ponto de vista numérico. O bombeamento simultâneo em comprimentos de onda diferentes, co-propagante em 980nm e contra-propagante em 1480nm, tem demonstrado ser eficiente para implementar EDFA's com baixa Figura de Ruído e alta eficiência de conversão da potência do bombeio em potência de sinal[18]. No entanto, a inclusão destes efeitos demanda um processamento que, neste momento, não temos disponível. Mesmo assim, tendo em vista a continuação deste trabalho, mostramos, na Figura 5.3, o fluxograma da rotina numérica capaz de simular a propagação dos feixes de N sinais em frequências diferentes, ASE+ e vários bombeios co-propagantes em frequências diferentes. Este fluxograma representa somente a propagação na direção  $z=0 \rightarrow L_w$ . A propagação dos feixes óptico envolvidos na direção  $z=L_w \rightarrow 0$  não é aqui mostrada por limitação do espaço da página, e que dobra o tamanho do fluxograma. O fluxograma da Figura 5.3 difere do apresentado na Figura 5.2 em só dois aspectos. O primeiro aspecto é a inclusão de vários ramos de propagação à esquerda, representando os N sinais em diferentes frequências, e outros ramos de propagação à direita, representando outros bombeios co-propagantes e em diferentes frequências.



**Figura 5.3** – Rotina numérica do Modelo z-variante BPM no qual são considerados a ASE+ e vários sinais e bombeios de entrada e em diferentes frequências. Perceber que esta rotina refere-se somente à propagação na direção  $z=0 \rightarrow L_w$ .

Novamente, deve-se notar o fato de que todos os ramos convergem para o bloco que representa a solução das equações de taxa e que indica o acoplamento entre todas as onda eletromagnéticas envolvidas. O segundo aspecto é o cálculo da ASE+ que pode ser feito seguindo o esquema utilizado para o Modelo Espacial no qual as M equações de propagação para a ASE+, dadas pela equação (3.3), são integradas no intervalo de comprimento  $\Delta z$  usando os coeficientes de ganho que, agora, são calculados como

$$\gamma_{12}(z, \nu_j) = \iint_A \Psi_s(x, y, z) \sigma_{a12}(\nu_j) \bar{N}_1(x, y, z) dx dy \quad (5.14)$$

$$\gamma_{21}(z, \nu_j) = \iint_A \Psi_s(x, y, z) \sigma_{e21}(\nu_j) \bar{N}_2(x, y, z) dx dy \quad (5.15)$$

nas quais consideramos que  $\Psi_{ASE+} \approx \Psi_s$  por causa da pequena diferença entre a distribuição transversal de potência entre os modos propagantes no dispositivo na região do comprimento de onda de  $\approx 1500\text{nm}$ . Lembremos que esta consideração também é feita no Modelo Espacial do Capítulo 3. Para o cálculo das taxas estimuladas, dadas pelas equações (5.11) e usadas para encontrar a solução das equações de taxa, usamos

$$I_{ASE+}^j(x, y, z) = \Psi_s(x, y, z) P_{ASE+}^j(z). \quad (5.16)$$

A rotina da Figura 5.3 é repetida para simular a propagação dos feixes ópticos dos N sinais juntamente com os vários bombeios co-propagantes em diferentes frequências e da ASE+ ao longo de todo o comprimento do dispositivo, atingindo a posição  $z=L_w$ . Seguindo o esquema iterativo do Modelo Espacial do Capítulo 3, os feixes ópticos referentes aos bombeios contra-propagantes em diferentes frequências e à ASE- podem ser, agora, propagados de  $z=L_w \rightarrow 0$  usando os resultados obtidos na propagação de  $z=0 \rightarrow L_w$  como condições de entrada para o cálculo da taxas estimuladas (5.11).

## 5.2 Resultados

Alguns trabalhos recentes mostram a análise de dispositivos ópticos dopados com érbio através do uso da plataforma BPM. Nos trabalhos apresentados por Di Pasquale e Hernández-

Figueroa[19],[20] a permissividade elétrica  $\epsilon_{s/p}(x,y,z)$  é modelada, aproximadamente, como foi feito para a parte imaginária da susceptibilidade complexa, dadas pelas equações (5.9) e (5.10). Porém a parte real da permissividade, relacionada com a não linearidade do meio dopado, foi modelada proporcional a

$$Re\{\epsilon\} = \epsilon_{lin} + \alpha |E_{s/p}|^2 \quad (5.17)$$

em que  $\alpha$  é o coeficiente Kerr e  $\epsilon_{lin}$  é a permissividade do meio não dopado. O valor do coeficiente  $\alpha$  usado nestes trabalhos é da ordem de  $10^{-13} \text{ m}^2/\text{W}$  a  $10^{-14} \text{ m}^2/\text{W}$ . A análise da não linearidade induzida pelos campos do sinal e do bombeio, feita na Seção 4.2.3, mostra que a equação (5.17) só é válida desde que seja incluído, em  $\epsilon_{lin}$ , o termo  $n_1$  das expansões dadas pelas equações (4.17) ou (4.19), e para potências de sinal ou bombeio relativamente baixas, de tal forma que possamos desprezar os termos de ordens superiores nas referidas expansões. Este cuidado não é tomado nos trabalhos citados [19],[20], e nem no trabalho recentemente apresentado por A. Cucinotta *et al.*[21]. Além disso, nestes três últimos trabalhos citados, é usada uma formulação com aproximação paraxial, sem PML's e sem índice de refração de referência adaptativo. Como vimos anteriormente, o índice de refração adaptativo é necessário para uma melhor aproximação para o cálculo da susceptibilidade do meio, e, conseqüentemente para o cálculo do ganho. Devemos destacar, ainda, que o trabalho apresentado por A. Cucinotta *et al.*[21] nada mais é que um BPM convencional, que simula a propagação só do feixe óptico do sinal, e que, paralelamente, é usado o Modelo Espacial de Di Pasquale *et al.*[22]. Em cada passo da propagação do feixe óptico, a distribuição de campo do sinal é passada para o Modelo Espacial para o cálculo das populações  $\bar{N}_1$  e  $\bar{N}_2$  e da distribuição espectral da ASE+.

Outro trabalho que deve dar-se destaque é aquele apresentado por F. Caccavale *et al.*[23]. Este trabalho usa a técnica das diferenças finitas, não considera a ASE e somente lida com os efeitos de ganho do dispositivo dopado, calculando os coeficientes de ganho como feito nos trabalhos [19] e [20]. Além disso, considerou-se só dois níveis energéticos no material ativo, e, portanto, os efeitos de conversão ascendentes não foram incluídos.

Da discussão acima, mostrando os trabalhos presentes na literatura que tratam da análise de dispositivos dopados com érbio, pode-se concluir que, até o presente momento, os comportamentos do ganho e das não linearidades nunca foram tratados simultaneamente e de forma realística. A análise simultânea destes dois efeitos é a maior contribuição do Modelo z-variante BPM, sendo outra das contribuições presentes nesta tese.

Passaremos a apresentar alguns resultados de análise de estruturas de óptica integrada obtidos através do Modelo z-variante BPM, cujo código numérico segue a rotina mostrada na Figura 5.2. Todos os resultados mostrados nesta Seção consideram os campos com polarização TE. Estas estruturas são partes componentes de dispositivos ópticos integrados, bem mais complexos, nas quais amplificação, filtragem e modulação podem coexistir na mesma pastilha.

### 5.2.1 – Guia de ondas ativo

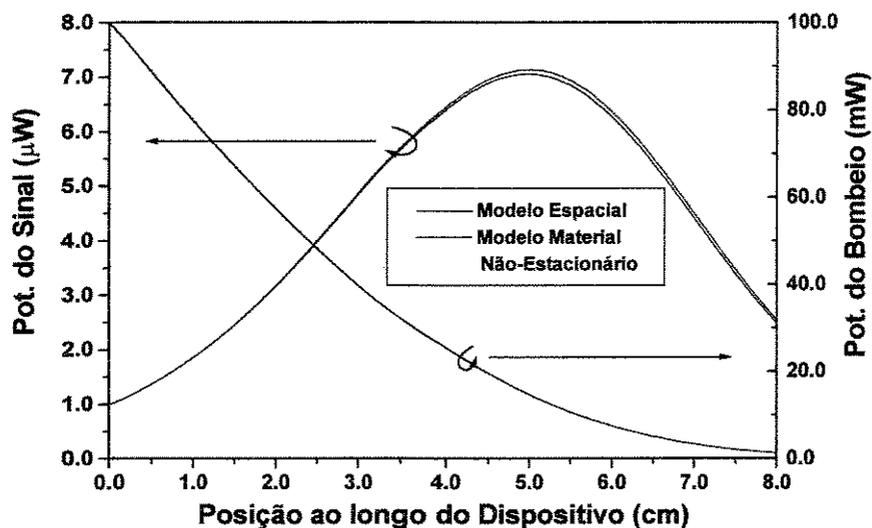
Vamos considerar um dispositivo amplificador feito com o guia de ondas mostrado na Figura 3.5b, de comprimento  $L_w=8.0\text{cm}$ , e com concentração de érbio  $N_{Er}=6.0 \times 10^{26} \text{ions/m}^3$  uniformemente distribuída no núcleo. Lembremos que este guia é monomodo para 980nm, e, conseqüentemente, para sinais de comprimento de onda  $\approx 1500\text{nm}$ . As seções de choque usadas são escritas conforme a equação (4.7), usando os parâmetros da Tabela 3.2, com  $\sigma_a^{\text{peak}} = \sigma_e^{\text{peak}} = 5.42 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ , e, ainda, usando as relações dadas pelas equações (3.19). O tempo de fluorescência é considerado 11ms, e a polarização do sinal e bombeio é suposta puramente TE, com o campo polarizado segundo o eixo coordenado “x” da Figura 3.5-b. Para esta simulação, usaram-se os valores  $C_{up}=5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  e  $C_3=5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  para o coeficiente de conversão ascendente cooperativa e  $C_{14}=3.5 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  para o coeficiente de relaxação cruzada, como usados no trabalho de Di Pasquale *et al.*[22].

Usando o Método do Índice Efetivo[24],[25] para representar o guia 2D na forma planar, como mostrado na Figura 5.1, o índice de refração do dispositivo nos comprimentos de onda do sinal (1531nm) e bombeio (980nm) é dado na Tabela 5.1.

	Sinal(1531nm)	Bombeio(980nm)
$n_1$	1.529689	1.563990
$n_2$	1.510000	1.510000

**Tabela 5.1** – Índices de refração usados para a representação planar do guia da Figura 3.5-b, nos comprimentos de onda do sinal e bombeio, através do método do índice de refração efetivo.

A Figura 5.4 mostra as distribuições das potências do sinal e bombeio ao longo do dispositivo amplificador e comparadas com os resultados obtidos através do Modelo Espacial implementado também na versão planar.



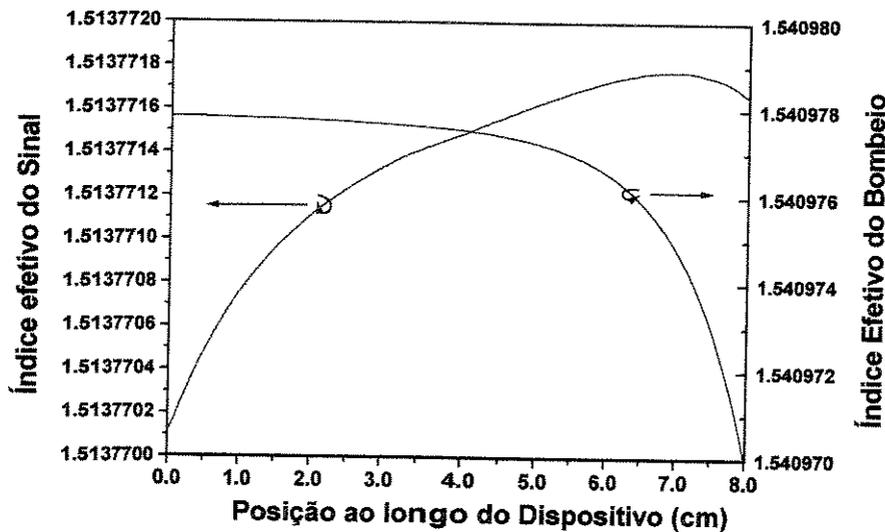
**Figura 5.4** - Distribuições das potências do sinal e bombeio ao longo do dispositivo amplificador e comparadas com os resultados obtidos através do Modelo Espacial.

Deve-se notar na Figura 5.4 que as curvas de distribuição de potência para o bombeio, calculadas pelo Modelo z-variante BPM e o Modelo Espacial concordam fielmente. A pequena diferença observada na Figura 5.4 entre os resultados obtidos usando os dois diferentes modelos, para a distribuição da potência do sinal, deve-se, sobretudo, a dois fatos:

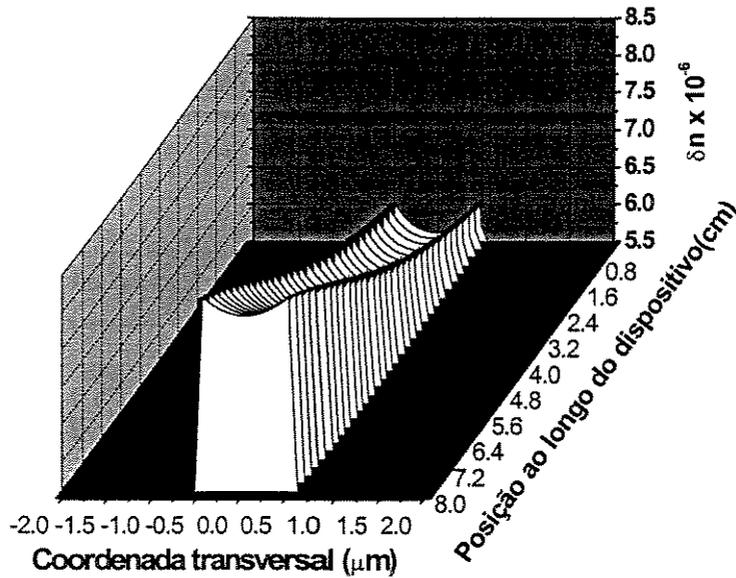
- a) no Modelo Espacial a ASE é considerada, ao passo que na versão atual do Modelo z-variante BPM, a ASE não é levada em conta;

- b) no Modelo z-variante BPM a distribuição transversal de campo é alterada em cada posição, em razão das não linearidades induzidas pelas intensidades do sinal e do bombeio, ao passo que o Modelo Espacial usa as mesmas distribuições transversais para os campos ao longo de todo o dispositivo.

Os índices de refração efetivos para os feixes ópticos do sinal  $n_{\text{eff}}^s = \beta_s/k_{0s}$  e do bombeio  $n_{\text{eff}}^p = \beta_p/k_{0p}$ , calculados pelas equações (5.8), são mostrados na Figura 5.5. No caso em estudo, em que a seção reta do dispositivo e a permissividade elétrica do material do hospedeiro são invariantes na direção de propagação, o único efeito responsável pela variação do índice de refração efetivo ao longo do dispositivo é a variação do índice de refração dado pela equação (5.7). A Figura 5.6 mostra a variação do índice de refração  $\delta n$ , dado pela equação (5.7), ao longo da direção de propagação do dispositivo amplificador que estamos considerando. O comportamento de  $\delta n$  em função da posição no dispositivo está de acordo com o que foi apresentado na Seção 4.2.3, uma vez que  $\delta n$  pode aumentar ou diminuir em função da intensidade dos campos do sinal e bombeio para diferentes comprimentos de onda.



**Figura 5.5** – Variação do índice efetivo do sinal e do bombeio ao longo do dispositivo amplificador, baseado no guia de ondas mostrado Figura 3.5b.



**Figura 5.6** – Variação do índice de refração dentro do dispositivo amplificador, baseado no guia de ondas mostrado na Figura 3.5b.

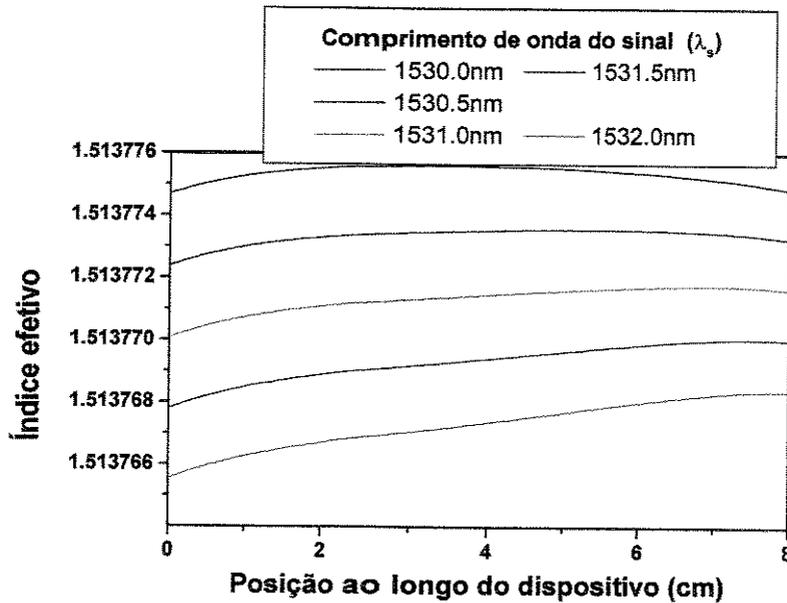
Pode-se calcular o alargamento total do pulso,  $\tau$ , para o sinal dentro do dispositivo, através da relação

$$\tau = \int_{z=0}^{L_w} D(\lambda_0, z) dz \quad (5.18)$$

em que  $D(\lambda_0, z) = D_{wg}(\lambda_0, z) + D_R(\lambda_0, z)$  é a dispersão total, que inclui a dispersão do guia de ondas  $D_{wg}$  e a dispersão ressonante  $D_R$ , tal que

$$D(\lambda_0, z) = - \frac{\lambda_0}{c_0} \frac{\partial^2 n_{\text{eff}}^s(\lambda, z)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (5.19)$$

Calculou-se o índice de refração efetivo ao longo do dispositivo que está-se considerando para os comprimentos de onda do sinal de 1530, 1530.5, 1531, 1531.5 e 1532nm, que são mostrados na Figura 5.7. Para todos os comprimentos de onda acima citados foi considerado o mesmo índice de refração do núcleo, dados pela Tabela 5.1.



**Figura 5.7** – Índice de refração efetivo para o sinal e para os comprimentos de ondas de 1530, 1530.5, 1531, 1531.5 e 1532nm ao longo do dispositivo amplificador.

A Figura 5.8 mostra a dispersão total ao longo do dispositivo para a qual usou-se a equação (5.19) e os resultados da Figura 5.7. A derivada segunda, na equação (5.19), foi aproximada usando

$$\left. \frac{\partial^2 n_{\text{eff}}^s(\lambda_0, z)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_0} \cong \frac{1}{12\Delta\lambda} \left\{ n_{\text{eff}}^s(\lambda_0 - 2\Delta\lambda, z) + 16n_{\text{eff}}^s(\lambda_0 - \Delta\lambda, z) - 30n_{\text{eff}}^s(\lambda_0, z) + 16n_{\text{eff}}^s(\lambda_0 + \Delta\lambda, z) - n_{\text{eff}}^s(\lambda_0 + 2\Delta\lambda, z) \right\} \quad (5.20)$$

em que  $\Delta\lambda=0.5\text{nm}$  e  $\lambda_0=1531\text{nm}$ . Usando a equação (5.18) e a dispersão total mostrada na Figura 5.8 tem-se que o alargamento total do pulso, por unidade de largura espectral do pulso, é de  $\tau=3.16\text{fs/nm}$ . Uma vez que<sup>3</sup> a dispersão  $D_{\text{wg}}$ , em 1531nm, é  $D_{\text{wg}} \cong -0.26 \text{ fs cm}^{-1} \text{ nm}^{-1}$ , pode-se dizer que o alargamento total  $\tau$  ocorre, em especial, em virtude da dispersão ressonante  $D_R$ . Este

<sup>3</sup> Resultado obtido após fazer uma análise modal do guia, não mostrada neste texto.

valor confirma o comentário feito na Seção 4.2.2, que a dispersão ressonante em guias dopados é significativa para sinais com largura de pulsos da ordem de  $10^{-15}$  s [26].

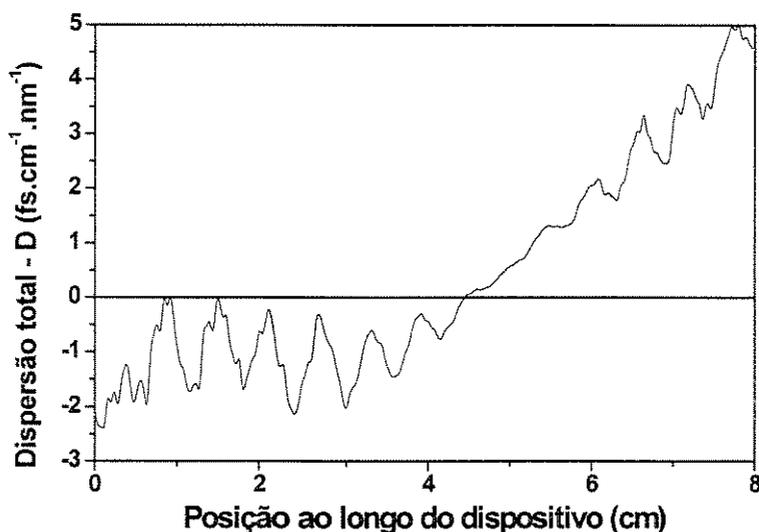


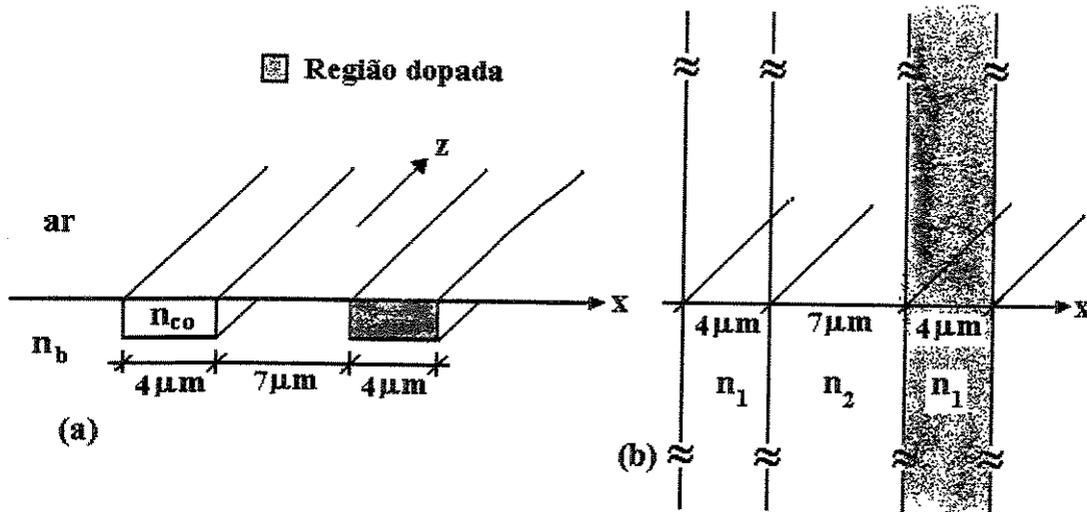
Figura 5.8 – Dispersão total ao longo do dispositivo amplificador.

## 5.2.2 – Acoplador dopado usando onda evanescente

As não linearidades induzidas pelo campo do sinal (*SINL*) e bombeio (*PINL*) têm sido usadas para construir [27,28,29,30] ou modelar[31,19,20,21] chaves ópticas, nas quais o chaveamento é provocado pela intensidade dos campos envolvidos. No entanto, os modelos até agora apresentados não consideram de forma realística as *PINL* e as *SINL*.

Nesta Seção mostraremos, de forma qualitativa, que um acoplador dopado com érbio pode ser usado para fazer chaveamento óptico, no qual o comprimento de acoplamento é alterado em função da potência de bombeio. A análise qualitativa a que referimo-nos deve-se ao fato de estarmos simulando dispositivos ópticos integrados por meio de uma representação planar usando o Método do Índice Efetivo.

A Figura 5.9 mostra um acoplador óptico integrado dopado com érbio que será simulando nesta Seção. A Figura 5.9(a) mostra o dispositivo real, ao passo que a Figura 5.9(b) mostra a representação planar deste, usando o Método do Índice Efetivo.



**Figura 5.9** – Acoplador dopado com érbio com propriedade de chaveamento óptico: (a) dispositivo real, e (b) sua representação planar.

Na Figura 5.9-a tem-se  $n_{co}=1.57$  e  $n_b=1.55$ . Aplicando-se o método do índice efetivo pode-se calcular, aproximadamente, o índice  $n_1$  para a representação planar da Figura 5.9-b no comprimento de onda do sinal (1537nm) e bombeio (980nm), conforme apresentado Tabela 5.2

	Sinal(1537nm)	Bombeio(980nm)
$n_1$	1.563755	1.564642
$n_2$	1.550000	1.550000

**Tabela 5.2** – Índices de refração usados para a representação planar do acoplador da Figura 5.9-a, nos comprimentos de onda do sinal e do bombeio, através do Método do Índice Efetivo.

A dopagem de érbio, mostrada na Figura 5.9, é considerada uniformemente distribuída dentro do canal direito e com concentração de  $N_{Er}=10^{+26}$  ions/m<sup>3</sup>. As seções de choque usadas são obtidas usando a equação (4.7) e os parâmetros da Tabela 3.2, com  $\sigma_a^{peak} = 5.0 \times 10^{-25}$  m<sup>2</sup> e

$\sigma_e^{\text{peak}} = 6.0 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ , e ainda usando as relações dadas pelas equações (3.19). O tempo de fluorescência é considerado 12ms e a polarização do sinal e bombeio é suposta puramente TE, com o campo polarizado segundo o eixo coordenado “x” da Figura 5.9. Para esta simulação usaram-se os valores  $C_{\text{up}}=C_3=1.0 \times 10^{-22} \text{ m}^3/\text{s}$  para os coeficientes de conversão ascendente cooperativa, e  $C_{14}=7.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{s}$  para o coeficiente de relaxação cruzada.

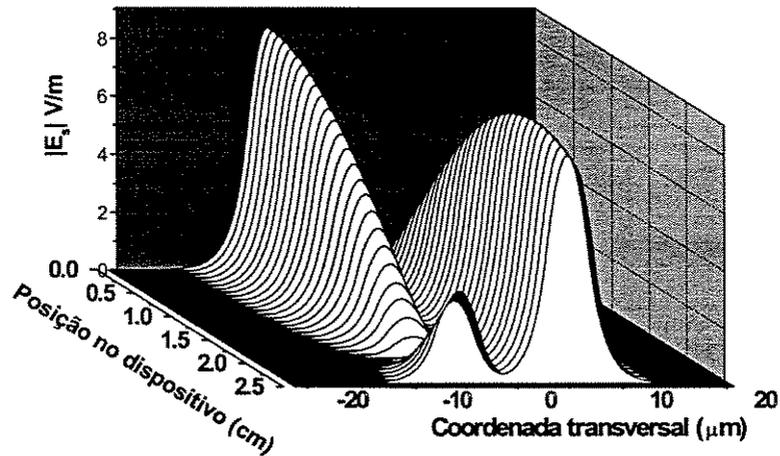


Figura 5.10 – Propagação do campo elétrico do feixe de sinal com potência de  $1 \mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1537 \text{ nm}$  no acoplador passivo (sem dopagem) mostrado na Figura 5.9, caracterizado por um comprimento de acoplamento de  $L_c=1.98 \text{ cm}$ .

O comprimento de acoplamento do acoplador passivo (sem dopagem) é  $L_c=1.98 \text{ cm}$ . A Figura 5.10 mostra a propagação do campo elétrico do feixe de sinal com potência de entrada de  $1.0 \mu\text{W}$ . Quando a dopagem da Figura 5.9 é considerada, o comprimento de acoplamento passa a ser função das não linearidades induzidas pelos campos do sinal e bombeio. As Figuras 5.11 e 5.12 mostram a evolução do campo elétrico do sinal quando a potência do bombeio é  $P_p=0.0 \text{ mW}$  e  $P_p=500.0 \text{ mW}$ , respectivamente. Destas Figuras obtém-se o comprimento de acoplamento  $L_c=1.86 \text{ cm}$  e  $L_c=2.12 \text{ cm}$  para  $P_p=0.0 \text{ mW}$  e  $P_p=500.0 \text{ mW}$ , respectivamente.

A Figura 5.13 mostra o pico do campo elétrico das Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 na posição central do canal dopado na qual pode-se ver claramente a alteração sofrida pelo comprimento de acoplamento  $L_c$  em função da potência do bombeio. Esta simulação indica, qualitativamente, a possibilidade de ser ativado o chaveamento óptico em dispositivos dopados com érbio. Pode-se notar, na Figura 5.13, que o acoplamento do dispositivo dopado não é total como o observado para o

guia passivo. A justificativa disto vem da teoria do modos acoplados[24], uma vez que as constantes de propagação dos canais esquerdo e direito da Figura 5.9 diferem entre si de um valor  $\Delta\beta = \beta_d(P_p) - \beta_0$ , em que  $\beta_d(P_p)$  é a constante de propagação do canal dopado e que é função da potência de bombeio, e  $\beta_0$  é a constante de propagação do canal passivo (não dopado).

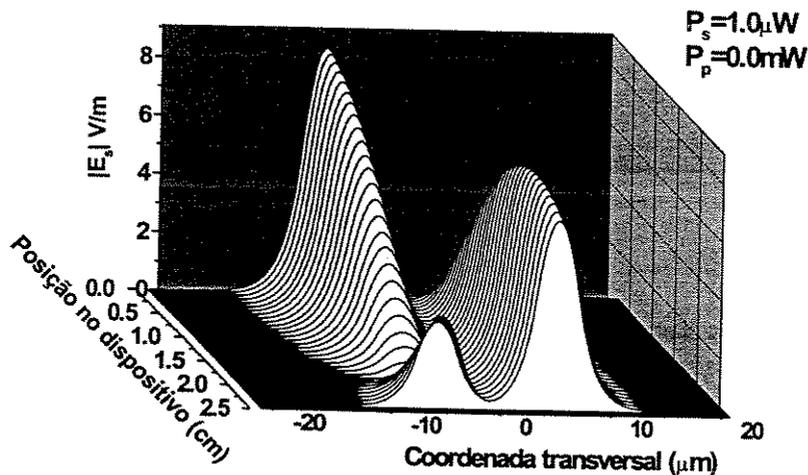


Figura 5.11 – Propagação do campo elétrico do feixe de sinal com potência de  $1\mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1537\text{nm}$  no acoplador ativo (com dopagem) mostrado na Figura 5.9, na ausência de bombeio ( $P_p=0.0\text{mW}$ ), caracterizado por um comprimento de acoplamento de  $L_c=1.86\text{cm}$ .

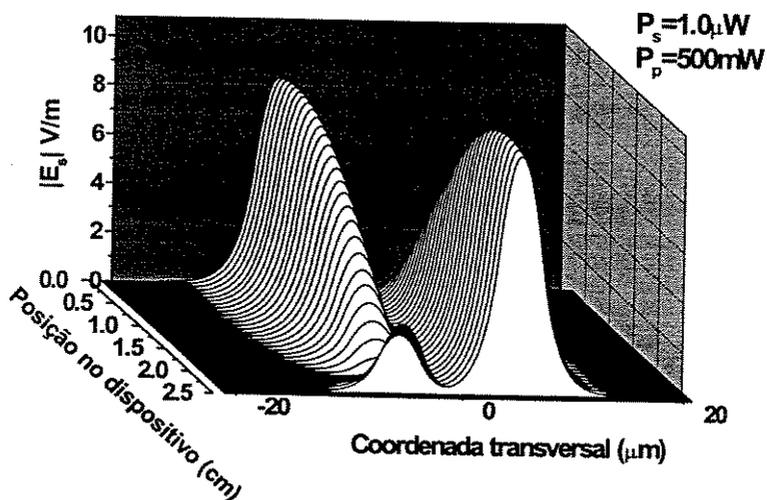


Figura 5.12 – Propagação do campo elétrico do feixe de sinal com potência de  $1\mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1537\text{nm}$  no acoplador ativo (com dopagem) mostrado na Figura 5.9, sendo bombeado em  $980\text{nm}$  com  $P_p=500\text{mW}$ , caracterizado por um comprimento de acoplamento de  $L_c=2.12\text{cm}$ .

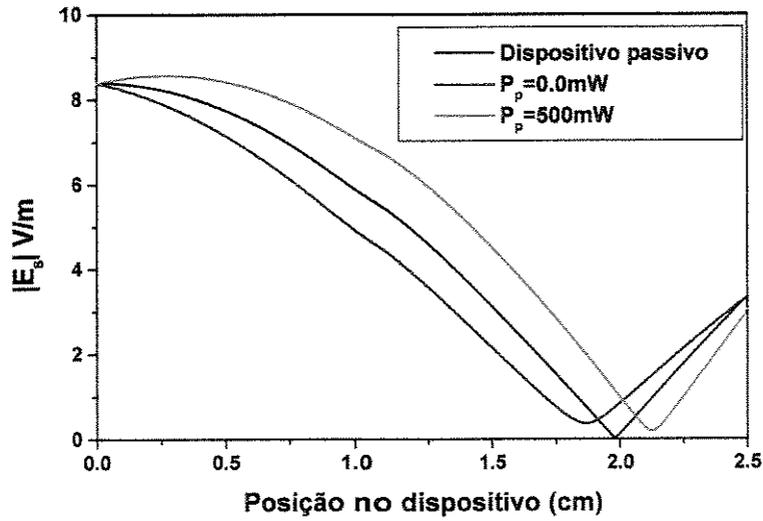


Figura 5.13 – Pico do campo elétrico do sinal das Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 na posição central do canal dopado, na qual vê-se a alteração no comprimento de acoplamento  $L_c$  em função da potência do bombeio.

### 5.2.3 – Acoplador seguido de curva

Em óptica integrada é comum a existência de uma certa quantidade de componentes integrados numa única pastilha. A interconexão destes componentes é feita por meio de trechos de guias curvos. Estes trechos podem ser, eventualmente, aproveitados para amplificar o campo propagante. Vamos considerar o acoplador da Figura 5.9 seguido de uma curva, conforme mostrado na Figura 5.14.

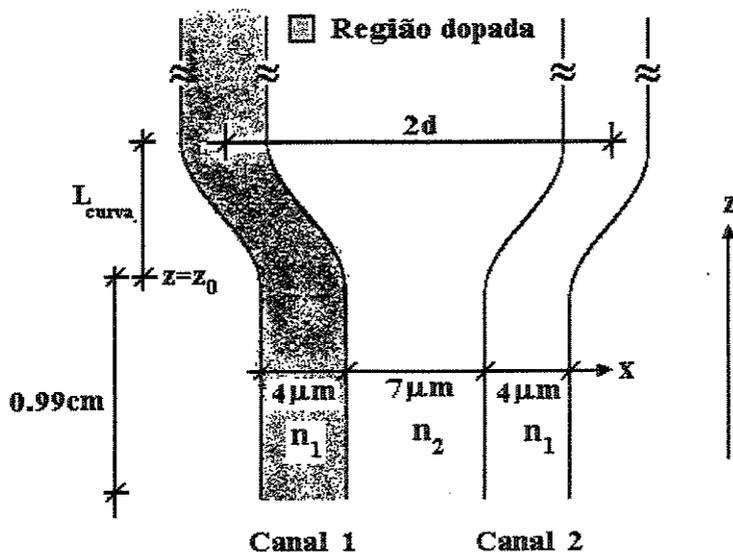


Figura 5.14 – Representação planar de um acoplador óptico integrado dopado com érbio seguido de curva.

A seção reta dos canais é mantida invariante na direção de propagação, porém o centro de cada canal  $x_c^{e/d}$  é deslocado da posição inicial  $x_0^{e/d}$  segundo a função freqüentemente usada na literatura [32]

$$x_c^{e/d} = x_0^{e/d} \mp d \cos\left(\frac{\pi(z_0 - z)}{L_{\text{curva}}}\right) \quad (5.21)$$

na qual os super-índices “e” e “d” referem-se aos canais esquerdo (e) e direito (d),  $z_0$  é a posição onde a curvatura inicia-se,  $2d$  é a separação final entre os centros dos canais na posição  $z=z_0+L_{\text{curva}}$ . Usou-se  $d=10\mu\text{m}$  e  $L_{\text{curva}}=2000\mu\text{m}$ . Os índices de refração considerados, nos comprimentos de onda de 1537nm e 980nm para o sinal e bombeio respectivamente, seguem aqueles mostrados na Tabela 5.2. O comprimento do acoplador é de 0.99cm permitindo um acoplamento de 3dB da potência de entrada quando a dopagem não é considerada. A Figura 5.15 mostra a evolução do campo elétrico do sinal -Figura 5.15(a)- e do bombeio -Figura 5.15(b)- excitados no Canal 1 da estrutura passiva (sem dopagem) da Figura 5.14 com potências de entrada de  $1\mu\text{W}$  e  $500\text{mW}$  para o sinal e bombeio, respectivamente. Na Figura 5.15(a) é mostrado o acoplamento de 3dB's para o comprimento de onda do sinal entre os canais, e, na Figura 5.15(b), é mostrado que o acoplamento entre os canais, no comprimento de onda do bombeio é desprezível.

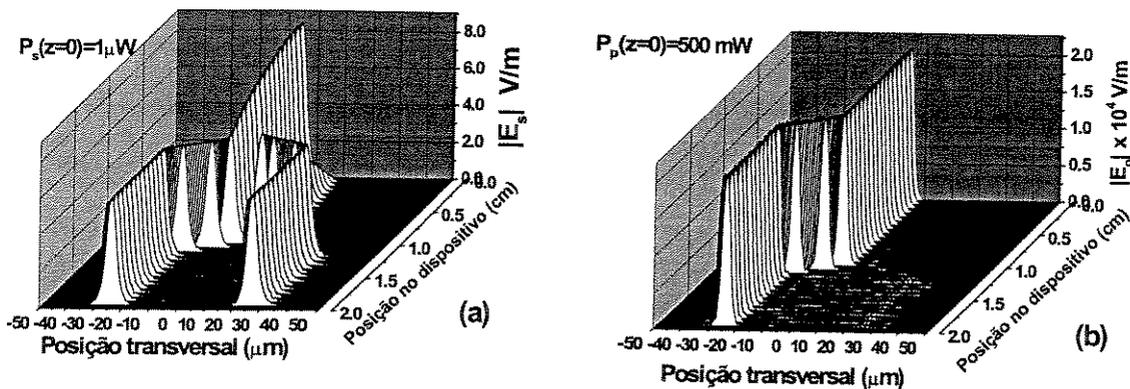


Figura 5.15 – Propagação do campo elétrico do feixe do sinal (a) e do bombeio (b) excitados no Canal 1 da estrutura passiva (sem dopagem) da Figura 5.14 com potências de entrada de  $1\mu\text{W}$  e  $500\text{mW}$  para o sinal e bombeio, respectivamente. Em (a) é mostrando acoplamento de 3dB's para o comprimento de onda do sinal (1537nm) entre os canais, e em (b) é mostrado que o acoplamento entre os canais, no comprimento de onda do bombeio é desprezível.

A concentração e distribuição de érbio aplicada ao Canal 1 é a mesma da apresentada para o acoplador a onda evanescente da Seção 5.2.2, assim como as seções de choque usadas. Quando esta concentração é considerada o comportamento do dispositivo passa a ser função das potências do sinal e bombeio. A evolução do campo elétrico do sinal, com potência de entrada de  $1\mu\text{W}$ , é mostrada nas Figuras 5.16, 5.17 e 5.18 para a potência do bombeio de  $0.0\text{mW}$ ,  $95\text{mW}$  e  $500\text{mW}$ . A potência de bombeio de  $95\text{mW}$  foi escolhida porque é a potência de limiar (ganho de  $0\text{dB}$ ) para um guia reto de  $2\text{cm}$  de comprimento, com dopagem e geometria transversal igual ao Canal 1 da Figura 5.14.

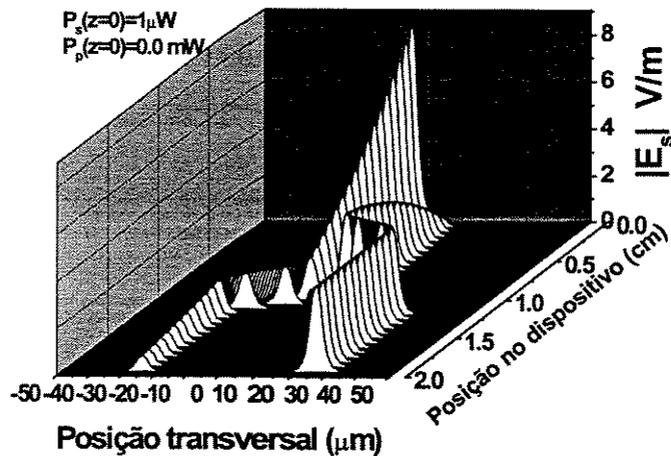


Figura 5.16 – Propagação do campo elétrico do feixe do sinal, com potência de entrada de  $1\mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1537\text{nm}$  excitado no canal 1 do dispositivo da Figura 5.14, e com potência de bombeio  $P_p=0.0\text{mW}$ .

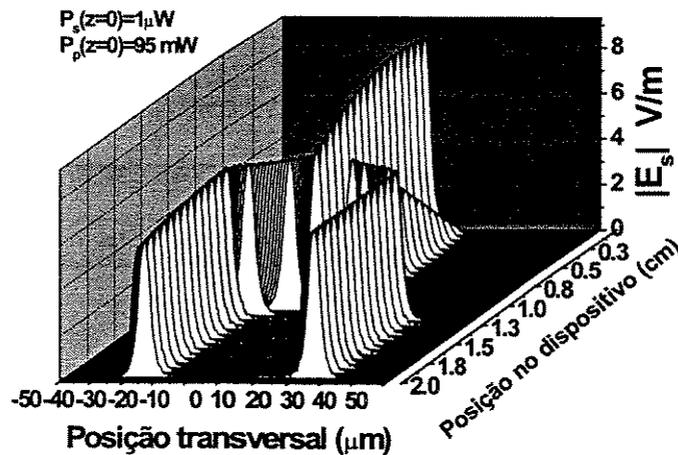


Figura 5.17 – Propagação do campo elétrico do feixe do sinal, com potência de entrada de  $1\mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1537\text{nm}$ , bombeado em  $980\text{nm}$  com potência de bombeio  $P_p=95\text{mW}$ , excitados (sinal e bombeio) no canal 1 do dispositivo da Figura 5.14.

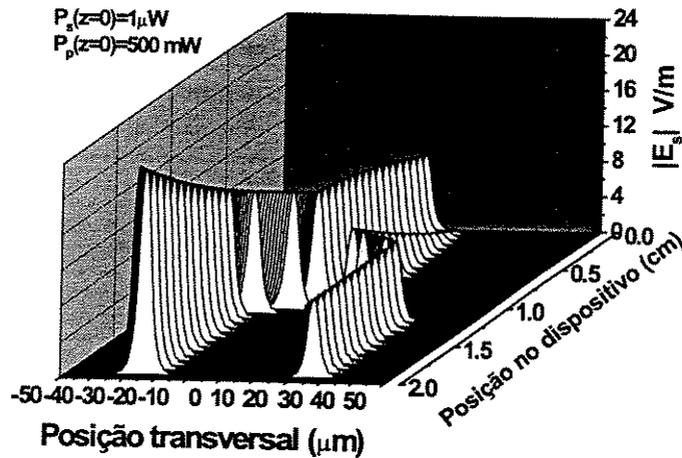


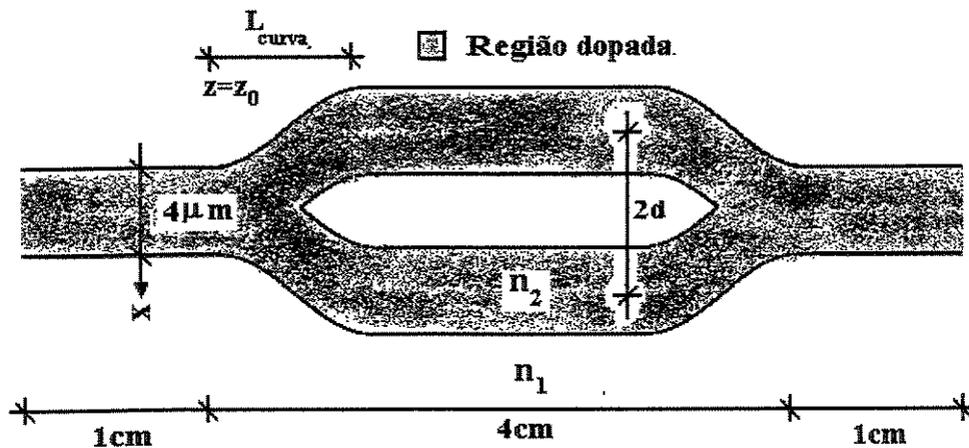
Figura 5.18 – Propagação do campo elétrico do feixe do sinal, com potência de entrada de  $1\mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1537\text{nm}$ , bombeado em  $980\text{nm}$  com potência de bombeio  $P_p=500\text{mW}$ , excitados (sinal e bombeio) no canal 1 do dispositivo da Figura 5.14.

## 5.2.4 – Acoplador tipo Y

Os exemplos das Seções anteriores caracterizam-se pelo fato de que o campo do bombeio não acopla-se ao segundo canal da estrutura. Foi assim com o acoplador da Seção 5.2.1 e com o acoplador seguido de curva da Seção 5.2.2. Estes exemplos também podem ser resolvidos usando o modelo apresentado por A. Cucinotta *et al.*[21], o qual evita situações em que o feixe óptico do bombeio precise ser propagado. Para isso usa exemplos em que o acoplamento do campo do bombeio entre os guias é desprezível. Nesta situação particular pode propagar-se só o feixe óptico do sinal e usar o Modelo Espacial para calcular o coeficiente de ganho.

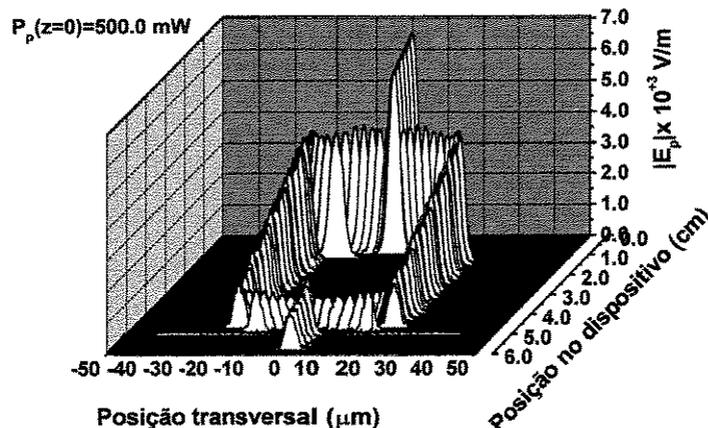
Em óptica integrada é comum o uso de junções-Y [33] para dividir os feixes ópticos e guiá-los para dois canais diferentes. É comum, por exemplo, a construção de distribuidores tipo estrela através do uso de várias junções-Y concatenadas, como apresentado na tese de Doutorado de H.S.Monteiro[34]. Usando duas junções-Y podem ser construídos interferômetros do tipo Mach-Zehnder e que são usados para os mais diversos fins, como, por exemplo, moduladores de fase [35] e sensores [36]. Nesta Seção apresentaremos a simulação de uma estrutura ativa formada de duas junções-Y formando um interferômetro de Mach-Zehnder, que é mostrada na Figura 5.19. O objetivo deste texto é mostrar o modelamento de estruturas ativas e com geometria variante na

direção de propagação. Portanto, não exploraremos as propriedades particulares de modulação que eventualmente tal dispositivo possa ter. Este estudo será objeto de um trabalho futuro.



**Figura 5.19** – Dispositivo ativo feito de duas junções-Y, formando um interferômetro de Mach-Zehnder. Toda a estrutura é dopada.

Os comprimentos de onda do sinal e do bombeio são 1537nm e 980nm, respectivamente. A concentração e distribuição de érbio, aplicada ao dispositivo da Figura 5.19 são as mesmas daquelas apresentadas para o acoplador a onda evanescente da Seção 5.2.2, assim como as seções de choque usadas. As curvas iniciam-se nas posição  $z=1.0\text{cm}$  e  $z=4.8\text{cm}$ , e os centros de cada braço do dispositivo seguem as posições transversais dadas pela equação (5.21), com  $d=10\mu\text{m}$  e  $L_{\text{curva}}=2000\mu\text{m}$ . Usaram-se as potências de entrada de  $P_s=1\mu\text{W}$  e  $P_p=500\text{mW}$  para o sinal e bombeio, respectivamente.



**Figura 5.20** – Propagação do campo elétrico do feixe do bombeio com potência de entrada de 500mW e comprimento de onda de 980nm, ao longo do dispositivo da Figura 5.19.

As Figuras 5.20 e 5.21 mostram a propagação do feixe do campo elétrico do bombeio e do sinal, respectivamente, ao longo do dispositivo da Figura 5.19. Na posição  $z=1.0\text{cm}$  a intensidade do campo do bombeio é dividida igualmente entre os dois braços do dispositivo, com forte consequência sobre a evolução do campo do sinal.

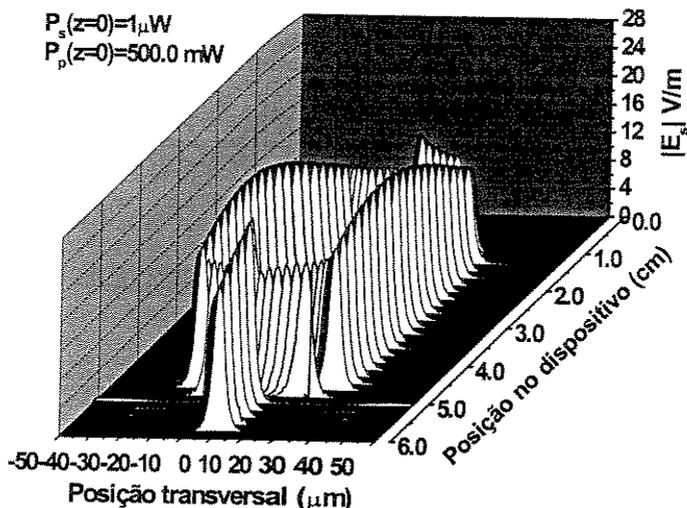


Figura 5.21 – Propagação do campo elétrico do feixe do sinal com potência de entrada de  $1\mu\text{W}$  e comprimento de onda de  $1537\text{nm}$ , ao longo do dispositivo da Figura 5.19.

A Figura 5.22 mostra o pico do campo elétrico do sinal ao longo do dispositivo, na qual a amplitude máxima dentro dos braços do dispositivo é alcançada na posição de aproximadamente  $3.5\text{cm}$ . Isto deve-se ao fato de que a potência do bombeio remanescente em cada braço, após a primeira junção-Y, não é suficiente para garantir ganho positivo ao longo do restante do dispositivo.

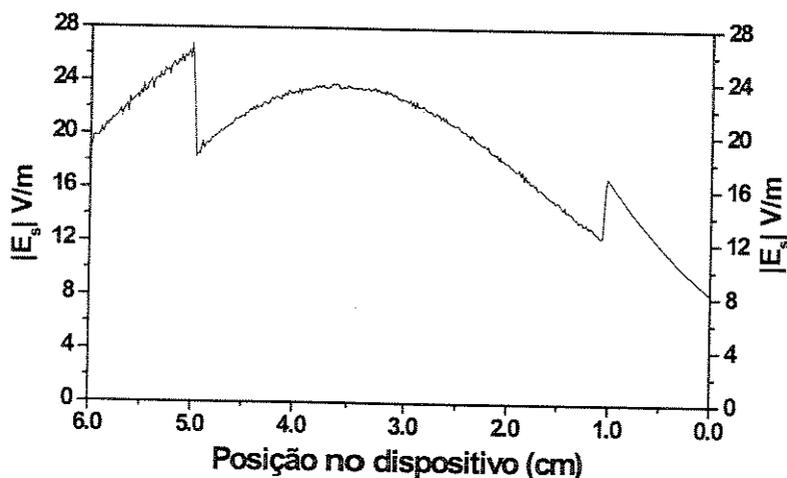


Figura 5.22 – Pico do campo elétrico do sinal ao longo do dispositivo da Figura 5.19

Para um amplificador retilíneo de 6cm de comprimento, com seção reta e distribuição de érbio idêntica à usada no dispositivo sob análise e bombeado com 500mW, o comprimento ótimo é de aproximadamente 6cm. Porém, se este amplificador for bombeado com 250mW, o comprimento ótimo é de 3cm.

Este exemplo mostra a potencialidade do Modelo z-variante BPM na análise de estruturas cuja geometria na direção de propagação seja variante, e que alterem tanto a distribuição transversal do campo elétrico do sinal quanto a do bombeio. Até o momento da escrita deste texto, nenhum resultado semelhante ao apresentado acima foi publicado.

## 5.3 Resumo

Neste Capítulo apresentamos o Modelo z-variante BPM, baseado no Método da Propagação do Feixe (BPM), no qual a susceptibilidade complexa e os feixes ópticos na frequência do sinal e bombeio são, simultaneamente, calculados e propagados. Isto possibilita a análise de uma grande variedade de dispositivos dopados, com seção reta e dopagem variando ao longo da direção de propagação. Alguns exemplos de estruturas dopadas foram apresentadas. Estas estruturas podem ser partes componentes de dispositivos integrados complexos nas quais amplificação, filtragem e modulação podem coexistir na mesma pastilha. Acreditamos que este Modelo abra uma nova perspectiva na análise de tais dispositivos.

## Referências do Capítulo 5

---

- [1]H.F. Pinheiro, A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, “Full Vectorial FE-BPM Approach for the Analysis of Anisotropic Medium with off-diagonal permittivity terms” a ser publicado em *Microwave and Optical Technology Letters*, (2000).
- [2]H.F. Pinheiro, A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, “Full Vectorial FE-BPM Approach for the Analysis of Optical Axis Misalignment Effects” *12th Annual Laser and Electro Optics Society Proceeding*, ThL0005, pp.758-759, San Francisco, California, novembro, (1999).
- [3]E. Montanari, S. Selleri, L. Vincetti e M. Zoboli, “Finite-Element Full-Vectorial Propagation Analysis for Three-Dimensional z-varying Optical Waveguides”, *IEEE/OSA J.Lighthwave Tech.*, Vol.16, No.4, pp.703-714, abril, (1998).
- [4]H.F. Pinheiro e H.E. Hernández-Figueroa, “Novel Finite-Element Formulation for Vectorial Propagation Analysis in Anisotropic Medium”, Anais (CD-ROM) do *1999 SBMO/IEEE, MTT-S, AP-S and LEOS International Microwave and Optoelectronics Conference, IMOC'99*, Rio de Janeiro, Brazil, 9-12 de agosto, pp.558-562, (1999).
- [5]H.F. Pinheiro e H.E. Hernández-Figueroa, “New finite-element vectorial formulation for beam propagation in anisotropic media” , Procceding of the *OSA/Integrated Photonics Research Topical Meeting (IPR'99)*, Santa Barbara, California, USA, pp.37-39, 19-21, julho, (1999).
- [6]H.F. Pinheiro e H.E. Hernández-Figueroa, “Novel finite-element formulation for vectorial beam propagation analysis in anisotropic medium”, a ser publicado em *IEEE Photonics Technol. Lett.*, (1999).
- [7]C. Huang e L. McCaughan, “980-nm-Pumped Er-Doped LiNbO<sub>3</sub> Waveguide Amplifiers: A Comparison with 1484-nm Pumping”, *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, Vol.2, No.2, pp.367-372, junho, (1996).
- [8]P.F. Wysocki, “Computer Modeling of Polarization Hole Burning in EDFAs”, in *Optical Fiber Communication Conference*, Vol.4, OSA Technical Digest Series, paper FF6, Washington, (1994).

- 
- [9]W.A. Arellano, M.O. Berendt, e H.L. Fragnito, "Polarization modulation study of gain anisotropy in Erbium Doped Fiber Amplifiers", artigo submetido em *CLEO/2000*, The Moscone Convention Center, San Francisco, California, 7-12 de maio, (2000).
- [10]D.W. Hall e M.J. Weber, "Polarized fluorescence line narrowing measurement of Nd laser glasses:Evidence of stimulated emission cross section anisotropia", *Appl. Phys. Lett.*, Vol.42, No.2, pp.157-159, janeiro, (1983)
- [11]J.W. Fleming, "Material Dispersion in Lightguide Glasses", *IEE Electronics Letters*, Vol.14, No.11, pp.326-328, (1978).
- [12]G.R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators", *Optics Letters*, Vol.17, No.20, pp.1426-1428, outubro, (1992).
- [13]W.P. Huang e C.L. Xu, "A Wide-Angle Vector Beam Propagation Method", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.14, No.10, pp.1118-1120, outubro, (1992).
- [14]F. Schimidt, "An adaptative approach to the numerical solution of Fresnel's wave equation", *Journal of Lightwave Technology*, Vol.11, pp.1425-1434, setembro, (1993).
- [15]M. Koshiha e Y. Tsuji, "A wide-angle finite-element beam propagation method", *IEEE Photon. Technol. Lett.*, Vol.8, pp.1208-1210, setembro, (1996).
- [16]H.Yokota, M. Hira, e S. Kurazono, "Iterative Finite Difference Beam Propagation Method Analysis of Nonlinear Optical Waveguide Excitation Problem", *Electronics and Communications in Japan*, Part 2, Vol.78, No.1, pp.73-80, (1995).
- [17]T. Yasui, M. Koshiha, e Y. Tsuji, "A Wide-Angle Finite Element Beam Propagation Method with Perfectly Matched Layers for Nonlinear Optical Waveguides", a ser publicado em *Journal of Lightwave Technology*, (2000).
- [18]B. Mikkelsen, C.G. Joergensen, J.A. van den Berk, C.F. Petersen, C.C. Larsen, T. Durhuus, e K.E. Stubkjaer, "High Receiver Sensitivity at 2.5Gb/s Obtained With a Highly Efficient Low Noise Diode Pumped Erbium Doped Fiber Amplifier", *Anais da Conferência Techn. Dig. of Optical Amplifiers and Their Applications OAA'91*, Snowmass, CO, paper FA4-1, pp.192-195, 24-26 julho, (1991).
- [19]F. Di Pasquale e H.E. Hernández-Figueroa, "Pump controlled all-optical switching by using high-concentration  $\text{Er}^{3+}$  doped nonlinear waveguide", *Electronics Letters*, Vol.30, No.3, pp.232-233, fevereiro, (1994).

- 
- [20]F. Di Pasquale e H.E. Hernández-Figueroa, "Improved All-Optical Switching in a Three-Slab Nonlinear Directional Coupler with Gain", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol.30, No.5, pp.1254-1258, maio, (1994).
- [21]A. Cucinotta, S. Selleri, L. Vicenti e M. Zoboli, "Active nonlinear integrated optical devices: a numerical analysis", *Optical and Quantum Electronics*, Vol.31, pp.1073-1084, (1999).
- [22]F. Di Pasquale e M. Zoboli, "Finite-Element Modeling of Silica Waveguide Amplifiers with High Erbium Concentration", *IEEE Journ. Quantum Electronics*, Vol.30, pp.1277-1282, (1994).
- [23]F. Caccavale, F. Segatto e I. Mansour, "A Numerical Study of Erbium Doped Active LiNbO<sub>3</sub> Waveguides by the Beam Propagation Method", *IEEE Journal of Lightwave Technology*, Vol.15, No.12, pp.2294-2300, dezembro, (1997).
- [24]D.L. Lee, "Electromagnetic Principles of Integrated Optics", *John Wiley & Sons*, New York, (1986).
- [25]A.R. Sapienza e M.P. da Silva, "Analysis of Dielectric Optical Waveguides Based on the Effective Index Method", Anais (CD-ROM) do *International Conference on Engineering and Computer Education, ICECE'99*, Rio de Janeiro, Brazil, 9-12 de agosto, pp.469-474, (1999).
- [26]M. Romagnoli, F.S. Locati, F. Matera, M. Settembre, M. Tamburrini e S. Wabnitz, "Role of pump-induced dispersion on femtosecond soliton amplification in erbium-doped fibers", *Optics Letters*, Vol.17, No.13, pp.923, (1992); erratum, *Optics Letters*, Vol.17, No.23, pp.1721, (1992).
- [27]R.A. Betts, T. Tjugiart, Y.L Xue, e P.L. Chu, "Nonlinear refractive index in erbium-doped optical fiber: theory and experiment", *IEEE Journ. Quantum Electronics*, Vol.27, No.4, pp.908-913,(1991).
- [28]R.W. Sadowski, M.J.F. Digonnet, R.H. Pantel e H.J. Shaw, "Resonantly-enhanced nonlinear switching in rare earth doped fibers", in *Proc. SPIE*, Boston, MA, setembro, (1992).
- [29]P.L. Chu e B. Wu, "Optical switching in twin-core erbium-doped fibers", *Optics Letters*, Vol.17, pp.235-257, (1992).
- [30]Y.L. Xue, P.L. Chu e W. Zhang, "Resonance-enhanced refractive index and its dynamics in rare-earth-doped fibers", *Journ. of Optical Soc. of Am. B*, Vol.10, pp.1840-1847, (1993).
- [31]R.H. Pantell e M.J.F. Digonnet, "A model of nonlinear all-optical switching in doped fibers", *Journal of Lightwave Techn.*, Vol.12, pp.149-156, (1994).

- 
- [32]Y. Tsuji, M. Koshiha e T. Shiraishi, “Finite Element Beam Propagation Method for Tree-Dimensional Optical Waveguide Structures”, *Journal of Lightwave Technology*, Vol.15, No.9, pp.1728-1734, setembro, (1997).
- [33]R.R.A. Syms e J.R. Cozens, “Optical Guided Waves and Devices”, Berkshire, *McGraw-Hill*, (1992).
- [34]Horicléa S. Monteiro, “Dispositivos Ópticos com Tecnologia Planar e com Fibra Óptica”, Tese de Doutorado, Unicamp, julho, (1997).
- [35]A. Yariv e P. Yeh. “Optical Waves in Crystals”, *John Willey & Sons*, (1984).
- [36]D. Jiménez, E. Bartolome, M. Moreno, J. Muñoz, C. Domínguez, “An integrated silicon ARROW Mach-Zehnder interferometer for sensing applications”, *Optics Communications* , Vol.132, No.5-6, pp.437-441, dezembro, (1996).

# Capítulo 6

## Conclusões e Sugestões

### 6.1 As contribuições desta tese

Este trabalho iniciou-se com o objetivo de implementar e aperfeiçoar o modelamento numérico apresentado por P. Torres e A.M. Guzmán<sup>1</sup>, e que resultou no Modelo Modal apresentado no Capítulo 4. No entanto, a necessidade de comparar os resultados deste Modelo com outros modelos numéricos incentivou-nos a implementar o Modelo Espacial, presente no Capítulo 3. A implementação destes dois modelos com formulações 1D e 2D, em coordenadas cartesianas, e 1D, em coordenadas cilíndricas, foi consequência da comparação feita com vários resultados numéricos e experimentais presentes na literatura. O domínio destes dois modelos possibilitou algumas contribuições que frisaremos mais adiante. Além disso, o limite de validade do Modelo Modal

---

<sup>1</sup> Ver, por exemplo, a referência [7] do Capítulo 4.

exigiu-nos apresentar um modelo que possuísse as vantagens do uso da susceptibilidade complexa, porém sem a restrição da análise de dispositivos curtos. Assim surgiu o Modelo z-variante BPM do Capítulo 5. Então, as contribuições desta tese são encontradas nos capítulos 3, 4 e 5.

Como dissemos anteriormente, o Modelo Espacial do Capítulo 3 foi implementado para possibilitar a comparação com os resultados obtidos com os modelos dos capítulos seguintes. No entanto, no decorrer deste trabalho foram simulados, pela primeira vez na literatura, EDFA's baseados em fibras de telureto. Tais simulações indicaram a potencialidade do Modelo Espacial no auxílio a projetos de amplificadores ópticos que operem na Banda-L.

No Capítulo 4 foram removidas as cinco principais limitações presentes no modelamento de P. Torres: a largura espectral de operação; o uso de parâmetros de entrada difíceis de serem obtidos na literatura; a não inclusão dos efeitos de altas concentrações de Érbio; operação só em regime monomodo, tanto para o sinal quanto para o bombeio; e a falta do estabelecimento do limite de validade para o modelamento. A remoção destas limitações são consideradas como contribuições desta tese. Ainda, por meio da análise das não linearidades induzidas pela intensidade do sinal (SINL) e pela intensidade do bombeio (PINL), concluiu-se que as SINL's são mais sensíveis que as PINL's às variações de intensidade, por um fator de até  $10^3$ . Nesta análise foi respeitado o limite de validade da parte real do modelo da susceptibilidade complexa usada, por meio do uso do *Fator de Validade FV*, definido no Capítulo 4. Esta conclusão, obtida por meio da análise acima citada, não se encontra na literatura e, portanto, faz parte das contribuições deste trabalho.

No Capítulo 5 vimos o Modelo z-variante BPM que é baseado na propagação simultânea dos feixes ópticos do sinal e do bombeio por meio do Método da Propagação do Feixe (BPM), e fazendo uso da susceptibilidade complexa calculada nos comprimentos de onda do sinal e bombeio. Este modelamento permite a análise de dispositivos dopados com Érbio, cujas geometrias e parâmetros de dopagem sejam variantes na direção de propagação. Com base em uma rápida revisão bibliográfica foi mostrado que os trabalhos até então presentes na literatura nunca trataram o comportamento do ganho e das não linearidades de forma realística e simultânea. A análise simultânea destes dois efeitos é a maior contribuição do Modelo z-variante BPM, sendo outra das contribuições presentes nesta tese.

## 6.2 A continuação deste trabalho

Deve estar claro para o leitor que vários pontos deste trabalho devem ser aperfeiçoados. Em primeiro lugar, deve-se investir no modelo da susceptibilidade complexa apontado pelas equações (2.66) e (2.67), que opera tanto no regime não-saturado como saturado. Este modelo de susceptibilidade permitirá estender a análise das não linearidades, feita no Capítulo 4, para situação nas quais a intensidade do sinal seja da ordem de 1mW. Este modelo permitirá desenvolver os modelos no domínio do tempo e obter resultados confiáveis para a análise do comportamento dinâmico de EDFA's.

A atualização obtida no modelo da susceptibilidade complexa pode ser transferida para o Modelo z-variante BPM do Capítulo 5, possibilitando também estender as análises lá feitas. Para este modelo pode-se, sem grande custo computacional, incluir os efeitos da ASE+. Contudo, para N sinais de diferentes frequências e ASE e bombeio contra-propagantes, necessitaremos de uma capacidade de processamento maior que a disponível durante a execução do presente trabalho.

Por fim, todos os modelos aqui tratados podem ser implementados com formulações vetoriais, estendendo a capacidade de análise para situações nas quais as formulações escalares apresentam aproximações bastante pobres.

## 6.3 As publicações geradas

Durante este trabalho tivemos a oportunidade de apresentar e discutir nosso trabalho nos seguintes fóruns nacionais e internacionais, assim como em revistas especializadas e indexadas.

## Internacionais:

- A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Efficient Stationary Model for Erbium-Doped Optical Amplifiers: Numerical and Experimental Comparisons", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol.23, no.5, pp.261-263, 5 dezembro, (1999).
- A.P. López-Barbero, H.E. Hernández-Figueroa e P. Torres, "Numerical Modeling of Multimode Doped Optical Waveguides", aceito para publicação em *Advances in Engineering Software*, (2000).
- A.P. López-Barbero, W.A. Arellano-Espinoza, H.L. Fragnito e H.E. Hernández-Figueroa, "Tellurite-Based Optical Fiber Amplifiers Analysis Using the Finite Element Method", aceito para publicação em *Microwave and Optical Technology Letters*, 20 abril, (2000).
- H.F. Pinheiro, A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Full Vectorial FE-BPM Approach for the Analysis of Anisotropic Medium with off-diagonal permittivity terms" aceito para publicação em *Microwave and Optical Technology Letters*, (2000).
- A.P. López-Barbero, W.A. Arellano-Espinoza, H.L. Fragnito e H.E. Hernández-Figueroa", Numerical Modeling of Tellurite-Based Optical Fiber Amplifiers", Anais da *International Microwave and Optoelectronics Conference 1999 (IMOC 99)*, Rio de Janeiro, agosto, (1999).
- A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Modeling Erbium-Doped Optical Amplifiers by Finite Elements Modal Analysis", Anais da *International Microwave and Optoelectronics Conference 1999 (IMOC 99)*, Rio de Janeiro, agosto, (1999).
- A.M. Frasson, A.P. López-Barbero, H.F. Pinheiro e H.E. Hernández-Figueroa, "Analysis of Magneto-optic Rib Waveguide Using the Full Vectorial Finite Element Method", Anais da *International Microwave and Optoelectronics Conference 1999 (IMOC 99)*, Rio de Janeiro, agosto, (1999).

A.P. López-Barbero, P. Torres e H.E. Hernández-Figueroa, "Multimode Doped Optical Waveguides Modeling by Modal Analysis", Anais da Conferência *Electrosoft 99*, Seville, Spain, maio, (1999).

H.F. Pinheiro, A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Full Vectorial FE-BPM Approach for the Analysis of Optical Axis Misalignment Effects", Anais da Conferência *12<sup>th</sup> Annual Laser and Electro Optics Society*, ThL0005, pp.758-759, San Francisco, California, novembro, (1999).

A.P.López-Barbero, H. E. Hernández-Figueroa, A.A. Rieznik e H.L.Fraguito, "Stationary Method for Erbium-Doped Optical Amplifiers Modeling", artigo submetido ao *IEEE Journal of Lightwave Technology*, October, (1999).

#### **Nacionais:**

A.P. López-Barbero, H.E. Hernández-Figueroa e P. Torres, "Análise de Guias Ópticos Multimodos Dopados com Érbio usando Elementos Finitos", Anais do *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Vila Velha, pp.75-80, outubro, (1999).

A.P. López-Barbero e H.E. Hernández-Figueroa, "Modelo Simples de Faixa Larga para Análise de Amplificadores a Fibra Dopados com Érbio usando o Método de Elementos Finitos/Runge-Kutta", Anais do *XVII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações*, Vila Velha, pp.147-151, outubro, (1999).

Além destas, e como resultado do estudo da propagação superluminal de ondas eletromagnéticas, fizemos as seguintes publicações:

A.P.L. Barbero, H.E. Hernández-Figueroa., e E. Recami: "Propagation speed of evanescent modes", Artigo aceito na revista *Physical Review E*, (2000).

E. Recami, A.P. L.Barbero e H.E. Hernández-Figueroa.: "Superluminal Microwave propagation and Special Relativity", *Arkiv für Physik*, Vol.7, pp.764-773, junho, (1998).

E. Recami, H.E. Hernández-Figueroa, L.C. Kretly, A.P.L. Barbero, P. Ammiraju e W.A.Rodrigues Jr.: "Hadronic mass spectra in a unified approach to strong and gravitational interactions", *Commun. Theor. Phys.*, No. 5 ,pp. 125-144, (1997).

A.P.L. Barbero, H.E. Hernández Figueroa., L.C. Kretly e E. Recami: "Elementary particles as microuniverses", Artigo convidado no *International Symposium on Mathem. Phys. in Memory of S.Chandrasekar*, NPL, Calcutta, dezembro, (1997).

# Apêndice A

## Formulações

### A.1 Formulação para Análise Modal

Quando uma equação diferencial do tipo

$$\mathcal{L}\phi = f \tag{A.1}$$

precisa ser resolvida, em geral tem-se duas alternativas de soluções: analítica e numérica. Em (A.1)  $\mathcal{L}$  é um operador diferencial,  $f$  é uma função de excitação e  $\phi$  é uma função que deseja-se calcular.

Quando o problema permite, a solução analítica leva a soluções fechadas<sup>1</sup> e exatas. Em geral conseguem-se soluções fechadas para problemas com geometrias simples, e pequenas alterações desta geometria forçam-nos a procurar soluções aproximadas.

Por outro lado, as soluções numéricas sempre levam-nos a soluções aproximadas. Porém para problemas complexos a alternativa analítica força-nos também a usar aproximações. Logo, haja visto o poder computacional das máquinas disponíveis neste final de milênio, as soluções numéricas são as melhores alternativas para a solução dos mais complexos problemas em todas as áreas do conhecimento humano.

Existem dois métodos para a solução numérica de (A.1): métodos variacionais e métodos residuais. Nos métodos variacionais há a necessidade da definição de um funcional[1], e que em geral a definição deste é complicada especialmente quando os operadores não são auto-adjuntos. Já os métodos residuais procuram minimizar o resíduo “r” de (A.1) definido por

$$r = \mathcal{L}\bar{\phi} - f, \quad (\text{A.2})$$

na qual  $\bar{\phi}$  é uma aproximação da solução exata  $\phi$ , definida dentro de um domínio  $\Omega$ . A minimização do resíduo “r” pode ser feita por vários métodos, entre eles o Método de Galerkin[2]. Assim força-se a seguinte situação: encontrar um  $\phi \in \mathcal{V}$  tal que para todo  $w \in \mathcal{V}$ ,

$$R = \int_{\Omega} wrd\Omega = 0. \quad (\text{A.3})$$

Aqui,  $\mathcal{V}$  representa um espaço vetorial adequado ou admissível,  $w$  é uma função de peso com as mesmas condições de contorno de  $\phi$ , e  $R$  é o chamado resíduo integral de  $\phi$ . Discretizamos (A.3) via o método dos elementos finitos[2]. Outro método numérico bastante utilizado na literatura é o das

---

<sup>1</sup> Chamamos de fechadas aquelas soluções que são apresentadas como uma fórmula nas quais os parâmetros envolvidos aparecem explicitados.

Diferenças Finitas[3], o qual discretiza diretamente os operadores diferenciais de (A.1). Os dois métodos vem apresentado na literatura excelentes resultados. A qualidade destes resultados não somente depende dos esquemas numéricos como, também, da habilidade do usuário. Não julgaremos aqui os méritos deste métodos. O uso dos elementos finitos neste trabalho é um suporte numérico para implementar os modelos apresentados neste trabalho, e foi escolhido haja vista a vasta experiência no uso desta técnica por parte do grupo ao qual estamos integrados. Passaremos a apresentar as formulações que permitem uma análise modal de guias de onda ópticos, usando o método dos elementos finitos com o Método de Galerkin.

## A.1.1 – Formulação em coordenadas retangulares

### A.1.1.1 – Formulação 2D

A Figura A.1 mostra um guia dielétrico generalizado.

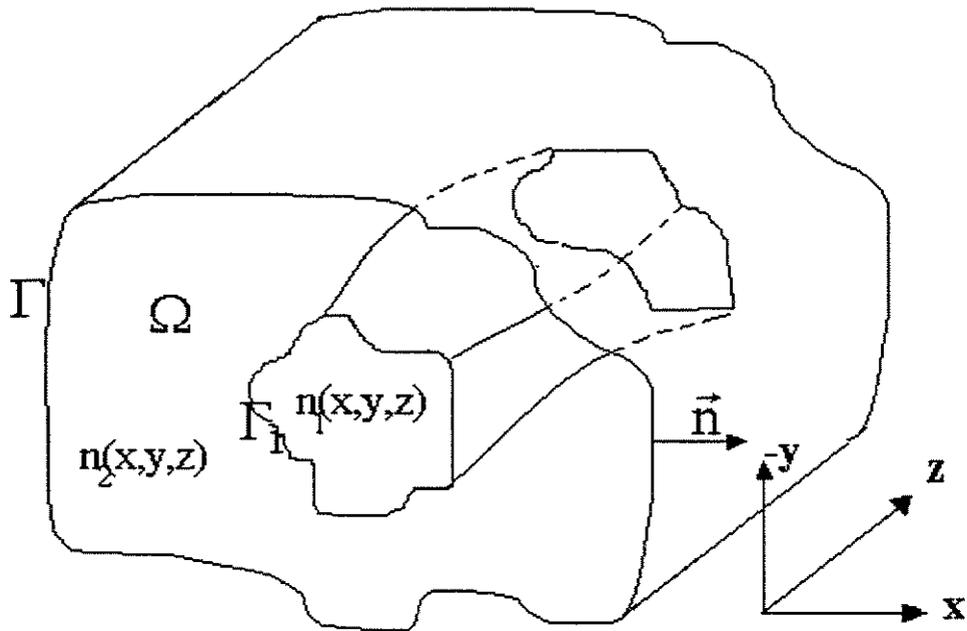


Figura A.1 – Guia dielétrico generalizado.

A seção reta do guia está limitada pelo domínio  $\Omega$  com contorno  $\Gamma$ . A normal ao contorno da seção reta, apontando para fora do domínio, é  $\vec{n}$ . O contorno  $\Gamma_1$  define uma descontinuidade no material que compõe o guia. A parte do guia interno a  $\Gamma_1$  chamaremos de núcleo, e externa, limitada por  $\Gamma$ , chamaremos de casca. O núcleo e a casca são feitos de materiais que possuem índice de refração  $n_1(x,y,z)$  e  $n_2(x,y,z)$ . O guias está alinhado com o eixo coordenado  $z$  e o contorno  $\Gamma$  é considerado ser invariante em  $z$ . Se  $\Gamma_1$  e  $n_1(x,y,z)$  e  $n_2(x,y,z)$  não variam em  $z$ , pode-se dizer que o guia é invariante em  $z$ .

Quando o guia é invariante em  $z$  e deseja-se conhecer o comportamento dos campos eletromagnéticos  $\vec{\phi}$  dentro deste guia, pode-se resolver as equações de Maxwell considerando a dependência em  $z$  como  $e^{-j\beta k_0 z}$ , e, então, escrevendo

$$\vec{\phi}(\mathbf{x}, y, z) = \vec{\phi}(\mathbf{x}, y) e^{-j\beta k_0 z} \quad (\text{A.4})$$

em que  $\beta$  é a constante de propagação da onda eletromagnética dentro do guia dielétrico,  $k_0 = 2\pi/\lambda$  é a constante de propagação da onda eletromagnética de comprimento de onda  $\lambda$ . Este tipo de aproximação, em que a envoltória  $\vec{\phi}(\mathbf{x}, y)$  não varia em  $z$  é conhecido como *análise modal*. Com esta consideração supõem-se que as distribuições espaciais normalizadas  $\Psi$  das intensidades dos campos eletromagnéticos não se alteram ao longo da propagação, ou seja  $\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$ . Logo  $\Psi$  do  $n$ -ésimo modo de propagação do guia é definido como

$$\Psi_n(\mathbf{x}, y) = \frac{I_n(\mathbf{x}, y, z)}{P_n(z)} \quad (\text{A.5})$$

na qual  $P_n$  é a potência do  $n$ -ésimo modo (fluxo do vetor de Poynting na seção reta  $\Omega$ ) e  $I_n$  é a distribuição espacial da intensidade de potência deste modo, em que, por definição de (A.5), tem-se

$$\int_{\Omega} \Psi_n(x, y) d\Omega = 1 \quad \forall z \quad (\text{A.6})$$

Equacionaremos o problema da análise modal em um guia de contornos genéricos, partindo das equações de Maxwell,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad (\text{a}) \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E} \quad (\text{b}) \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (\text{c}) \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{d}) \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

nas quais foi considerada a dependência temporal dos campos como  $e^{j\omega t}$ , e a não existência de cargas livres, devido à natureza dielétrica do meio que compõe o domínio. Em (A.7)  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\epsilon$  são os vetores de intensidade de campo elétrico [V/m], intensidade de campo magnético [A/m], densidade de fluxo elétrico [C/m<sup>2</sup>] e o tensor permissividade elétrica [F/m], definido como

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon_0 (\epsilon_t + \epsilon_z) \\ \epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

sendo  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo ( $8.8542 \times 10^{-12}$  F/m). Usando-se (A.4) e aplicando  $\vec{\nabla} \times$  nas equações (A.7a) e (A.7b), tem-se

$$\vec{\nabla}_t \times (\mathbf{p}_{zz} \vec{\nabla}_t \times \vec{\phi}_t) - j\beta k_0 \hat{z} \times (\mathbf{p}_t \vec{\nabla}_t \times \phi_z) - \beta^2 k_0^2 \hat{z} \times (\mathbf{p}_t \hat{z} \times \vec{\phi}_t) - q_t k_0^2 \vec{\phi}_t = 0 \quad (\text{A.9})$$

O operador diferencial Nabla  $\vec{\nabla}$  foi escrito como

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad \text{onde} \quad \vec{\nabla}_t = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} \text{ e}$$

$\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são os vetores unitários nas direções coordenadas. Ainda tem-se que

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_t + \vec{\phi}_z \quad \text{onde} \quad \vec{\phi}_t = \phi_x \hat{x} + \phi_y \hat{y} \text{ e } \vec{\phi}_z = \phi_z \hat{z}.$$

Se, em (A.9),  $\vec{\phi} = \mathbf{E}$ , então  $p = \frac{1}{\epsilon} = p_t + p_z$  e  $p_t = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} \\ p_{yx} & p_{yy} \end{bmatrix}$  e  $q=1$ . Caso em (A.9)  $\vec{\phi} = \mathbf{H}$ , então  $p=1$  e  $q=\epsilon$ .

Se a condição de divergência nula de  $\mathbf{H}$  (A.7d) é incluída em (A.9) para  $\mathbf{H}$ , obtém-se uma expressão vetorial com as duas componentes transversais explícitas (componente axial implícita) e livre de modos espúrios[4]. Porém, nossa intenção é reduzir o problema, procurando as soluções em que somente uma polarização necessite ser calculada. Vamos considerar os casos em que possamos admitir soluções TE ou TM. Para admitir este tipo de solução devemos considerar a situação de guiamento fraco, ou seja, a descontinuidade do índice de refração no contorno  $\Gamma_1$  deve ser tal que  $(n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$ . Nestas condições a componente axial  $\phi_z \approx 0$  e (A.9) torna-se

$$\vec{\nabla}_t \times (p_{zz} \vec{\nabla}_t \times \vec{\phi}_t) - \beta^2 k_0^2 \hat{z} \times (p_t \hat{z} \times \vec{\phi}_t) - q_t k_0^2 \vec{\phi}_t = 0. \quad (\text{A.10})$$

A equação (A.10) é tida na literatura como semi-vetorial já que, embora admita aproximação quase TE e TM, incorpora o efeito de acoplamento entre as componentes vetoriais transversais.

Vamos aplicar o Método de Galerkin em (A.10), obtendo

$$\iint_{\Omega} [\vec{\nabla}_t \times (p_{zz} \vec{\nabla}_t \times \vec{\phi}_t)] \cdot \vec{w}_t ds - \iint_{\Omega} [\beta^2 k_0^2 \hat{z} \times (p_t \hat{z} \times \vec{\phi}_t)] \cdot \vec{w}_t ds - \iint_{\Omega} q_t k_0^2 \vec{\phi}_t \cdot \vec{w}_t ds = 0. \quad (\text{A.11})$$

Ao primeiro termo de (A.11) chamaremos de  $I_1$  em que

$$I_1 = \iint_{\Omega} [\bar{\nabla}_t \times (\mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t)] \cdot \bar{\mathbf{w}}_t ds = \iint_{\Omega} [\bar{\nabla}_t \times \bar{\mathbf{F}}_t] \cdot \bar{\mathbf{w}}_t ds, \quad (\text{A.12})$$

na qual  $\bar{\mathbf{F}}_t = \mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t$ . Usando a 1ª identidade Green

$$\iint_{\Omega} (\bar{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot (\bar{\nabla} \times \mathbf{B}) ds - \iint_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \mathbf{B} ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \times (\bar{\nabla} \times \mathbf{B}) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma.$$

e chamando  $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{w}}_t$  e  $\bar{\mathbf{F}}_t = \bar{\nabla} \times \mathbf{B}$  tem-se que  $I_1$  pode ser rescrita como

$$I_1 = \iint_{\Omega} (\bar{\nabla}_t \times \bar{\mathbf{w}}_t) \cdot (\mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t) ds - \oint_{\Gamma} (\bar{\mathbf{w}}_t \times \mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t) \cdot \bar{\mathbf{n}} d\Gamma,$$

e, ainda, usando a identidade vetorial  $(\bar{\mathbf{b}} \times \bar{\mathbf{c}}) \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}} \cdot (\bar{\mathbf{c}} \times \bar{\mathbf{a}})$ , com  $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{n}}$ ,  $\bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{w}}_t$  e  $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t$ , tem-se que

$$I_1 = \iint_{\Omega} (\mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t) \cdot (\bar{\nabla}_t \times \bar{\mathbf{w}}_t) ds + \oint_{\Gamma} (\mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t) \cdot (\bar{\mathbf{w}}_t \times \bar{\mathbf{n}}) d\Gamma = 0 \quad (\text{A.13})$$

A integral de linha em (A.13) deve ser analisada cuidadosamente nas 3 situações possíveis. A função vetorial de teste  $\bar{\mathbf{w}}_t$  possui as mesmas condições de contorno e a mesma polarização que os campos incógnitos  $\bar{\phi}_t$ .

Situação 1: o contorno  $\Gamma$  é sobre um condutor elétrico perfeito (PEC – perfect electric conductor).

Duas hipóteses devem ser admitidas para  $\bar{\phi}_t$ .

- a)  $\bar{\phi}_t = \mathbf{H}_t$ : Neste caso o rotacional transversal aplicado ao campo magnético transversal é proporcional ao campo elétrico axial, ou seja,  $\bar{\nabla}_t \times \mathbf{H}_t \propto \mathbf{E}_z$ , que se anula sobre as paredes elétricas.

- b)  $\vec{\phi}_t = \mathbf{E}_t$ : Neste caso, a componente tangencial de  $\vec{w}_t$  se anula, permanecendo somente a componente normal. Esta, por sua vez, quando multiplicada vetorialmente por  $\vec{n}$  se anula, anulando também a integral de linha.

Situação 2: o contorno  $\Gamma$  é sobre um condutor magnético perfeito (PMC – perfect magnetic conductor). Novamente, duas hipóteses devem ser admitidas para  $\vec{\phi}_t$ .

- a)  $\vec{\phi}_t = \mathbf{H}_t$ : Neste caso o rotacional transversal aplicado ao campo elétrico transversal é proporcional ao campo magnético axial, ou seja  $\vec{\nabla}_t \times \mathbf{E}_t \propto \mathbf{H}_z$ , que se anula sobre as paredes magnéticas.
- b)  $\vec{\phi}_t = \mathbf{E}_t$ : Pelo mesmo argumento usando na situação 1.b temos somente a componente normal de  $\vec{w}_t$  não nula. Porém esta quando multiplicada vetorialmente por  $\vec{n}$  se anula, anulando também a integral de linha.

Situação 3: o contorno  $\Gamma$  é sobre as laterais dos elementos internos ao domínio. Quando a integral de linha é feita sobre as laterais dos elementos internos à casca ou ao núcleo, e este elemento está cercado de elementos de mesmo material, então as contribuições se cancelam, uma vez que a integral de linha sobre uma das laterais do elemento será feita em sentido contrário quando fizermos a integral no elemento vizinho. Porém, quando um dos lados do elemento é coincidente com a interface casca-núcleo, deve-se tomar todo o cuidado para saber se estas integrais se anulam. No caso em questão temos que, usando (A.7), o termo  $\vec{\nabla}_t \times \vec{\phi}_t$  é

$$p_{zz} \vec{\nabla}_t \times \vec{\phi}_t = j\omega \vec{\phi}_z$$

na qual  $\vec{\phi}_z = E_z \hat{z}$  ou  $\vec{\phi}_z = H_z \hat{z}$ , caso  $\vec{\phi}_t = \mathbf{H}$  ou  $\vec{\phi}_t = \mathbf{E}$ , respectivamente. Em ambos os casos  $\vec{\phi}_z$  será contínuo através da interface e, conseqüentemente, a soma das contribuições nas laterais dos elementos que são interfaces entre meios distintos se anula, uma vez que as integrais de linha são feitas em sentidos contrários em cada elemento.

Conclui-se que a integral de linha em (A.13) sempre anula-se nas situações 1, 2 e 3 expostas acima e que  $I_1$  pode ser reescrita como

$$I_1 = \iint_{\Omega} (\mathbf{p}_{zz} \bar{\nabla}_t \times \bar{\phi}_t) \cdot (\bar{\nabla}_t \times \bar{w}_t) ds = 0 \quad (\text{A.14})$$

Voltando a (A.11), temos que o segundo termo, que chamaremos de  $I_2$ , será

$$I_2 = \iint_{\Omega} [\beta^2 k_0^2 \hat{z} \times (\mathbf{p}_t \hat{z} \times \bar{\phi}_t)] \cdot \bar{w}_t ds \quad (\text{A.15})$$

e que, fazendo  $\bar{\mathbf{F}}_t = \mathbf{p}_t \hat{z} \times \bar{\phi}_t$  e usando  $\bar{w}_t = \hat{z} \times \bar{\mathbf{F}}_t = -(\bar{\mathbf{F}}_t) \cdot (\hat{z} \times \bar{w}_t)$ , tem-se de (A.15)

$$I_2 = \beta^2 k_0^2 \iint_{\Omega} (\mathbf{p}_t \hat{z} \times \bar{\phi}_t) \cdot (\hat{z} \times \bar{w}_t) ds \quad (\text{A.16})$$

E, finalmente, o terceiro termo de (A.11) iremos chamar de  $I_3$ , sendo

$$I_3 = k_0^2 \iint_{\Omega} \mathbf{q}_t \bar{\phi}_t \cdot \bar{w}_t ds \quad (\text{A.17})$$

A equação (A.11) pode ser escrita como

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0,$$

em que  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são dadas por (A.14), (A.16) e (A.17), respectivamente, e formam uma formulação semi-vetorial, pronta para ser discretizada pelo método dos elementos finitos. Porém, podemos admitir que os eixos principais do material coincidem com os eixos coordenados do problema, ou seja, que o tensor permissividade elétrica não possui termos fora da diagonal principal ( $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = 0$ ).

Uma vez que nestas condições as componentes transversais não se acoplam[5], podemos admitir, em (A.14), (A.16) e (A.17), somente uma polarização transversal para  $\vec{\phi}_t$ . Admitiremos, então,  $\vec{\phi}_t = \phi \hat{x}$  e, desta forma, a equação  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$  passa a ter natureza escalar. A equação (A.9), com a natureza escalar considerada acima, denomina-se de *equação escalar de Helmholtz*. Na condição escalar,  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$  pode ser reescrita como

$$- \iint_{\Omega} p \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy - \iint_{\Omega} p \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy - \beta^2 k_0^2 \iint_{\Omega} p \phi w dx dy + k_0^2 \iint_{\Omega} q \phi w dx dy = 0 \quad (\text{A.18})$$

na qual usamos  $\vec{\phi}_t = \phi \hat{x}$ ,  $\vec{w}_t = w \hat{x}$  e  $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p$  e  $q_{xx} = q_{yy} = q$  em (A.14), (A.16) e (A.17).

Em (A.18) vamos admitir que o domínio  $\Omega$ , no qual o campo  $\phi = \phi(x, y)$  está definido, possa ser *discretizado* em um conjunto de *nel* elementos triangulares, de tal forma que

$$\Omega = \sum_{e=1}^{nel} \Omega_e$$

na qual  $\Omega_e$  é o domínio de e-ésimo elemento. Vamos escrever o campo  $\phi$  e a função peso  $w$  (definidas somente dentro de  $\Omega_e$ ) como um somatório de funções  $\Psi^e$  definidas somente dentro de cada elemento. As funções  $\Psi^e$  são chamadas de *funções de forma* ou *funções de base* da discretização. Assim

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi(\Omega) = \sum_{e=1}^{nel} \sum_{i=1}^{ie} \alpha_i^e \Psi_i^e(\Omega_e) \\ w = w(\Omega_e) = \sum_{j=1}^{ie} \Psi_j^e(\Omega_e) \end{array} \right. , \quad (\text{A.19})$$

na qual  $\alpha_i^e$  é um peso atribuído ao  $i$ -ésimo nó do elemento “e”. ie pode assumir o valor 3 ou 6 dependendo se as funções de base são lineares ou quadráticas. Substituindo (A.19) em (A.18), tem-se

$$\sum_{e=1}^{nel} \left( [A^e] \{ \alpha^e \} \right) = \beta^2 \sum_{e=1}^{nel} \left( [B^e] \{ \alpha^e \} \right), \quad (A.20)$$

na qual  $[A^e]$  e  $[B^e]$  são matrizes de dimensões  $ie \times ie$  dadas por

$$[A^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ -p_e \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} dx dy - p_e \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} dx dy + k_0^2 q_e \iint_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy \right] \quad (A.21-a)$$

$$[B^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ k_0^2 p_e \iint_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy \right], \quad (A.21-b)$$

$\{ \alpha^e \}$  é um vetor de dimensão  $ie \times 1$ , e  $p_e$  e  $q_e$  são os valores de  $p$  e  $q$  dentro do elemento. Perceber que o super-índice “e”, em (A.20), é um ponteiro que aponta para o elemento, ao passo que os sub-índices “i” e “j”, em (A.21), apontam para os nós locais. Logo, o problema de autovalores e autovetores apresentado pela equação matricial (A.20) possui uma esparsidade<sup>2</sup> que depende da numeração dos nós globais. Essa esparsidade e a forma final da equação matricial (A.20) será mostrada mais adiante, por meio de um exemplo simples.

Vamos voltar nossas atenções para um elemento qualquer. De (A.20), podemos escrever a equação matricial para um elemento qualquer como

$$[A^e] \{ \alpha^e \} = \beta^2 [B^e] \{ \alpha^e \} \quad (A.22)$$

---

<sup>2</sup> O padrão de esparsidade de uma matriz é a forma com que os elementos nulos e não nulos estão distribuídos.

Para resolver o sistema matricial (A.22) tem-se a necessidade de resolver as integrais em (A.21). Já que estamos tratando de um elemento qualquer dentro do domínio  $\Omega$ , é útil criar um novo sistema de coordenadas de tal forma que as integrais em todos os elementos possam ser resolvidas de forma simples. Vamos restringir-nos ao caso em que as funções de base são lineares<sup>3</sup>, ou seja  $ie=3$ . Suponhamos um elemento qualquer com coordenadas globais (coordenadas pertencentes ao domínio  $\Omega$ )  $P_1=(x_1,y_1)$ ,  $P_2=(x_2,y_2)$  e  $P_3=(x_3,y_3)$ , conforme a Figura A.2, e que por meio de uma transformação de coordenadas possamos escrever um elemento no sistema  $(\xi,\eta)$  para o  $(x,y)$ . Esta transformação é

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\Psi}_i \\ y = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{\Psi}_i \end{array} \right. \text{ em que } \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Psi}_1 = 1 - \xi - \eta \\ \hat{\Psi}_2 = \xi \\ \hat{\Psi}_3 = \eta \end{array} \right. \quad (\text{A.23})$$

A transformação (A.23) permite-nos escrever

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

na qual  $[\mathbf{J}]$  é o Jacobiano da transformação.

---

<sup>3</sup> [3] apresenta o caso quadrático, assim como para outros formatos de elementos, não somente o triangular.

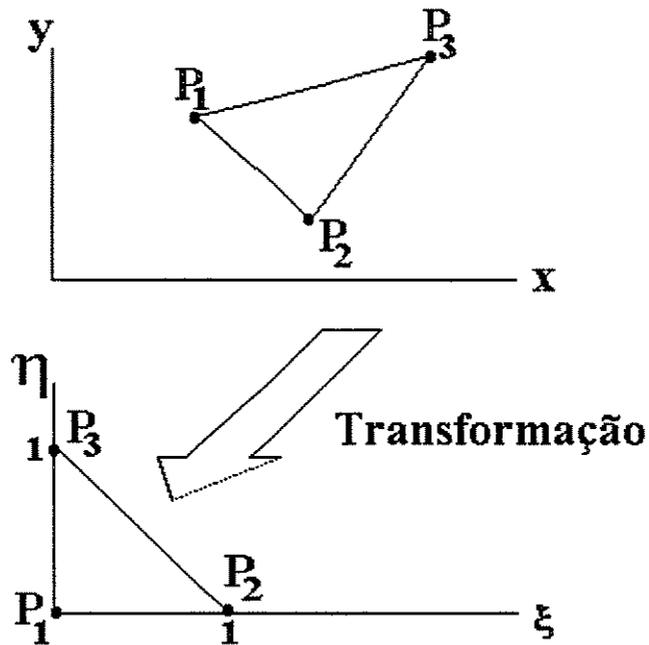


Figura A.2 – Transformação de coordenadas aplicada aos elementos.

Usando (A.24) em (A.23) tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= -x_1 + x_2 & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= -y_1 + y_2 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= -x_1 + x_3 & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= -y_1 + y_3 \end{aligned}$$

que, substituído em (A.24), permite-nos escrever

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad [\mathbf{J}]^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} (-y_1 + y_3) & -(-y_1 + y_2) \\ -(-x_1 + x_3) & (-x_1 + x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

e  $|\mathbf{J}| = 2 \cdot \text{Área do elemento}$ . A equação (A.25) permite-nos escrever as derivadas em (A.21) como

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_{i/j}^e}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left\{ (-y_1 + y_3) \frac{\partial \hat{\Psi}_{i/j}}{\partial \xi} - (-y_1 + y_2) \frac{\partial \hat{\Psi}_{i/j}}{\partial \eta} \right\} \\ \frac{\partial \Psi_{i/j}^e}{\partial y} = -\frac{1}{|\mathbf{J}|} \left\{ (-x_1 + x_3) \frac{\partial \hat{\Psi}_{i/j}}{\partial \xi} - (-x_1 + x_2) \frac{\partial \hat{\Psi}_{i/j}}{\partial \eta} \right\} \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

Em (A.21), podemos representar

$$[\mathbf{S}_1^e] = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} dx dy, \quad [\mathbf{S}_2^e] = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} dx dy \quad \text{e} \quad [\mathbf{S}_3^e] = \iint_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy \quad (\text{A.27})$$

que substituindo (A.26), tem-se

$$[\mathbf{S}_1^e] = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left\{ (-y_1 + y_3)^2 [\mathbf{s}_1] - (-y_1 + y_3)(-y_1 + y_2) ([\mathbf{s}_3] + [\mathbf{s}_3^T]) \right\} \quad (\text{A.28-a})$$

$$[\mathbf{S}_2^e] = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \left\{ (-x_1 + x_3)^2 [\mathbf{s}_1] - (-x_1 + x_3)(-x_1 + x_2) ([\mathbf{s}_3] + [\mathbf{s}_3^T]) + (-x_1 + x_2)^2 [\mathbf{s}_2] \right\} \quad (\text{A.28-b})$$

$$[\mathbf{S}_3^e] = |\mathbf{J}| [\mathbf{s}_4] \quad (\text{A.28-c})$$

nas quais

$$[\mathbf{s}_1] = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial \xi} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29-a})$$

$$[\mathbf{s}_2] = \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial \eta} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29-b})$$

$$[s_3] = \iint_{\hat{\Omega}_e} \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial \xi} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29-c})$$

$$[s_3^T] = \iint_{\hat{\Omega}_e} \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial \eta} d\xi d\eta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29-d})$$

$$[s_4] = \iint_{\hat{\Omega}_e} \hat{\Psi}_i \hat{\Psi}_j d\xi d\eta = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29-e})$$

Usando as equações (A.29), (A.28) e (A.27) em (A.21), permite-nos escrever o sistema matricial (A.22) de forma clara e completa. Porém, lembremos que o sistema (A.22) diz respeito a um elemento qualquer, e que o objetivo final é montar o sistema matricial global dado por (A.20). Resta-nos, portanto, mostrar como montar este sistema. Para tanto, consideremos o domínio  $\Omega$  da Figura A.3, discretizado em 4 elementos triangulares, com 5 nós, ou seja  $nel=4$  e  $np=5$  (quantidade de nós necessários para discretizar o domínio).

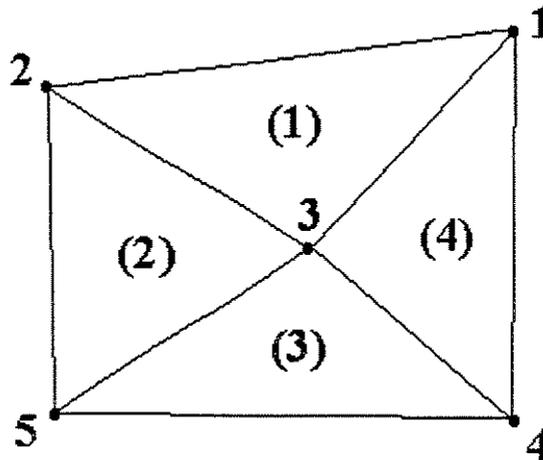


Figura A.3 – Domínio  $\Omega$  discretizado em 4 elementos triangulares com nós globais de 1 a 5.

Deve-se, inicialmente, mapear a numeração global dos nós. Assim tem-se a Tabela A.1 abaixo

Elemento(e)	Numeração Global dos Nós		
(1)	1	2	3
(2)	2	5	3
(3)	5	4	3
(4)	4	1	3
Numeração local(i/j)	1	2	3

Tabela A.1 – Mapeamento dos nós globais para a montagem das matrizes do problema de autovalores e autovetores final.

Escrevendo (A.22) em forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} A_{11}^e & A_{12}^e & A_{13}^e \\ A_{21}^e & A_{22}^e & A_{23}^e \\ A_{31}^e & A_{32}^e & A_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \\ \alpha_3^e \end{Bmatrix} = \beta^2 \begin{bmatrix} B_{11}^e & B_{12}^e & B_{13}^e \\ B_{21}^e & B_{22}^e & B_{23}^e \\ B_{31}^e & B_{32}^e & B_{33}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \\ \alpha_3^e \end{Bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Quando o somatório em “e”, em (A.20), for feito, as contribuições de todos os elementos serão consideradas, sendo a posição da contribuição de cada elemento na matriz global dada pela Tabela A.1. Assim, o sistema matricial global fica escrito como

$$[\mathbf{A}]\{\phi\} = \beta^2 [\mathbf{B}]\{\phi\} \quad (\text{A.31})$$

na qual

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11}^1 + A_{22}^4 & A_{12}^1 & A_{13}^1 + A_{23}^4 & A_{12}^4 & 0 \\ A_{12}^1 & A_{22}^1 + A_{11}^2 & A_{23}^1 + A_{13}^2 & 0 & A_{12}^2 \\ A_{13}^1 + A_{23}^4 & A_{23}^1 + A_{13}^2 & A_{33}^1 + A_{33}^2 + A_{33}^3 + A_{33}^4 & A_{23}^3 + A_{13}^4 & A_{23}^2 + A_{13}^3 \\ A_{12}^4 & 0 & A_{23}^3 + A_{13}^4 & A_{22}^3 + A_{11}^4 & A_{12}^3 \\ 0 & A_{12}^2 & A_{23}^2 + A_{13}^3 & A_{12}^3 & A_{22}^2 + A_{11}^3 \end{bmatrix}$$

e  $[\mathbf{B}]$  tem a mesma esparsidade e a composição de cada elemento da matriz é a mesma que de  $[\mathbf{A}]$ , ou seja,  $[\mathbf{B}]_{33} = \mathbf{B}_{33}^1 + \mathbf{B}_{33}^2 + \mathbf{B}_{33}^3 + \mathbf{B}_{33}^4$ . Perceber que a ordem das matrizes globais  $[\mathbf{A}]$  e  $[\mathbf{B}]$  é  $np \times np$ , em que  $np=5$  para este exemplo. Os vetores  $\{\alpha^e\}$  de (A.22) somam-se entre si de tal forma a representar a distribuição do campo  $\phi$  em todo o domínio. Montando as matrizes  $[\mathbf{A}]$  e  $[\mathbf{B}]$  forma-se um problema de autovalores e autovetores que, solucionado, permite obter diretamente os modos da estrutura ( $np$  autovetores de (A.31)<sup>4</sup>) e suas correspondentes constantes de propagação  $\beta$  ( $np$  autovalores de (A.31)).

### A.1.1.2 – Formulação 1D para coordenadas retangulares

Em muitas situações é útil tratar os guias de onda por meio de uma aproximação planar. Este é o caso do método do índice efetivo[6]. Esta aproximação considera o guia infinito em uma das direções transversais, por exemplo, na direção do eixo coordenado  $y$ . Neste caso, todas as derivadas naquela direção são anuladas. Usando o mesmo formalismo e condições adotados na Seção A.1.1 e impondo  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$  em (A.18), tem-se

$$-\int_{\Omega} p \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \beta^2 k_0^2 \int_{\Omega} p \phi w dx + k_0^2 \int_{\Omega} q \phi w dx = 0 \quad (\text{A.32})$$

na qual temos, agora, que  $\Omega$  é o domínio unidimensional do problema. Um formalismo semelhante ao adotado na Seção A.1.1, leva-nos a equacionar o sistema matricial para um elemento qualquer (A.22) como

---

<sup>4</sup> Somente algumas das  $np$  soluções obtidas são modos propagantes na estrutura

$$\begin{cases} [A^e] = l_e [f_0] q k_0^2 - \frac{p}{l_e} [f_1] \\ [B^e] = l_e [f_0] p k_0^2 \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

nas quais  $l_e$  é o comprimento do elemento linear e  $[f_0]$  e  $[f_1]$  são as matrizes elementares

$$[f_0] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad [f_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste caso de discretização em uma dimensão, a numeração dos nós é seqüencial ao longo do eixo transversal que define o domínio. Essa forma de numeração gera matrizes com esparsidade muito especial. No caso de usarmos elementos lineares, como fizemos nesta Seção, são geradas matrizes tridiagonais, ou seja, matrizes que possuem somente a diagonal principal e as diagonais superior e inferior não nulas. Se elementos quadráticos forem usados, as matrizes  $[A^e]$  e  $[B^e]$  seriam pentadiagonais[2,3].

### A.1.1.3 – Formulação 1D para coordenadas circulares

As Equações de Maxwell (A.7) podem ser escritas em um sistema de coordenadas circulares por meio da aplicação do operador Nabla em coordenadas circulares. Ainda, dando tratamento escalar a estas equações podemos obter a equação escalar de Helmholtz para o campo elétrico transversal para os modos linearmente polarizados  $LP_{0n}$ <sup>5</sup>

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E}{\partial r} \right) + k_0^2 n^2(r) E = 0 \quad (\text{A.34})$$

---

<sup>5</sup> Os modos  $LP_{0n}$  são aqueles que apresentam simetria com a coordenada angular  $\phi$ .

em que  $n(r)$  é o índice de refração do meio em função da coordenada radial  $r$ , medida partindo-se do centro do sistema circular, sendo  $r$  definido entre  $0 \rightarrow L$ . O núcleo da fibra está em  $r=a$ , conforme a Figura A.4.

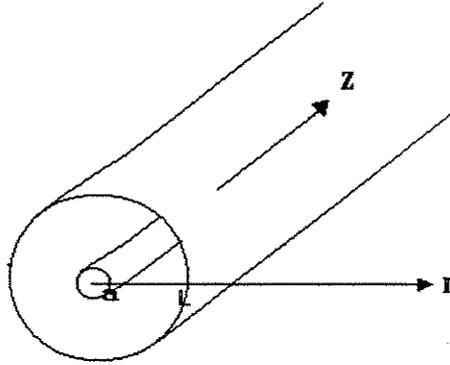


Figura A.4 – Guia dielétrico circular formado de barras coaxiais com raio interno “a” e externo “L”.

O campo elétrico  $E$  é função da coordenada radial  $r$  e da axial  $z$ , e é escrito como

$$E(r, z) = \phi(r)e^{-j\beta k_0 z} \quad (A.35)$$

que aplicado em (A.34) resulta em

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + k_0^2 (n^2(r) - \beta^2) \phi = 0 \quad (A.36)$$

Aplicando o método de Galerkin em (A.36), tem-se

$$\int_{r=0}^L \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} w r dr + \int_{r=0}^L \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} w r dr + \int_{r=0}^L k_0^2 (n^2(r) - \beta^2) \phi w r dr = 0 \quad (A.37)$$

na qual vemos, no primeiro termo, a necessidade de abaixar a ordem do operador diferencial. Integrando por partes o primeiro termo, tem-se

$$\int_{r=0}^L \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} w r dr = - \int_{r=0}^L \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} r dr - \int_{r=0}^L \frac{\partial \phi}{\partial r} w dr + \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} w r \right|_{r=0}^L. \quad (\text{A.38})$$

Para  $L \gg a$  podemos dizer que a intensidade de campo é suficientemente pequena, comparada com a intensidade em  $r=0$ , e que, portanto, pode ser desprezada. Em  $r=a$ , o termo  $\frac{\partial \phi}{\partial r}$  é proporcional ao campo axial, que é contínuo na interface. Então, a soma das contribuições dos termos, em  $r=a$ , se anulam.

Fazendo a discretização do domínio  $\Omega$  ( $0 \leq r \leq L$ ) em  $ne$  elementos de linha, de comprimento  $\Omega_e$  usando  $np$  nós, seguindo (A.19), teremos um sistema matricial de equações como em (A.20), em que

$$[A^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ - \int_{\Omega_e} \frac{d\Psi_i^e}{dr} \frac{d\Psi_j^e}{dr} r dr + k_0^2 n^2(r) \int_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e r dr \right] \quad (\text{A.39-a})$$

$$[B^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ k_0^2 \int_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e r dr \right] \quad (\text{A.39-b})$$

As funções de base  $\psi_{ij}$  em (A.39) são consideradas lineares e são mostradas na Figura A.5 para um elemento qualquer dentro do domínio, limitado pelas coordenadas radiais  $r_1$  e  $r_2$ ,

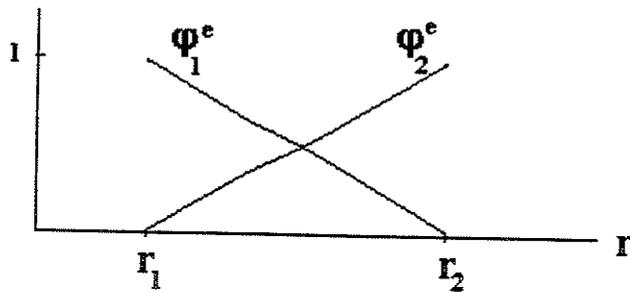


Figura A.5 – Funções de base para a discretização do domínio unidimensional.

sendo

$$\Psi_1^e(r) = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1} \quad \text{e} \quad \Psi_2^e(r) = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}. \quad (\text{A.40})$$

Usando (A.40) em (A.39), tem-se

$$[\mathbf{f}_0] = \int_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e r dr = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} (r_1 + r_2)(3r_1 + r_2) & (r_1 + r_2)(r_1 + r_2) \\ (r_1 + r_2)(r_1 + r_2) & (r_1 + r_2)(r_1 + 3r_2) \end{bmatrix} \quad (\text{A.41-b})$$

$$[\mathbf{f}_1] = \int_{\Omega_e} \frac{d\Psi_i^e}{dr} \frac{d\Psi_j^e}{dr} r dr = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} + \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \right) & - \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \right) \\ - \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \right) & + \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.41-b})$$

Então, substituindo (A.41) em (A.39) e este usado em (A.20) forma-se um sistema matricial de equações que resolvido resulta em  $np$  modos  $LP_{0n}$  e  $np$  constantes de propagação  $\beta$  da estrutura<sup>6</sup>.

## A.2 Formulação para o Método da Propagação do Feixe

Vamos apresentar, aqui, a formulação que foi usada nesta tese para o Método da Propagação do Feixe, mais conhecido na literatura como BPM (*Beam Propagation Method*). É usada a técnica dos elementos finitos e o Método de Galerkin.

---

<sup>6</sup> Somente algumas das  $np$  soluções obtidas são modos propagantes na estrutura

## A.2.1 – Formulação 2D

Quando aplica-se o BPM, considera-se que os campos eletromagnéticos ( $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$ ) que propagam-se dentro do guia óptico possam ser representados como

$$\vec{\phi}(x, y, z) = \left[ \vec{\phi}_t(x, y, z) + \vec{\phi}_z(x, y, z) \right] e^{-jn_{\text{ref}}k_0z} \quad (\text{A.42})$$

na qual  $n_{\text{ref}}$  é o índice de refração de referência, cujo valor deve ser idealmente o valor de  $n_{\text{eff}} = \beta/k_0$  que é o índice de refração efetivo, sendo  $\beta$  a constante de propagação da onda eletromagnética dentro do guia dielétrico e  $k_0 = 2\pi/\lambda$  é a constante de propagação da onda eletromagnética de comprimento de onda  $\lambda$ . Supõem-se, aqui, que a envoltória  $\vec{\phi}_t = \phi_x \hat{x} + \phi_y \hat{y}$  e  $\vec{\phi}_z = \phi_z \hat{z}$  varia em função de  $z$  (direção de propagação), ao contrário do que é considerado para a análise modal (A.4).

Aplicando  $\vec{\nabla} \times$  nas equações (A.7a) e (A.7b), supondo que o meio é diagonalmente isotrópico, e, ainda, considerando a aproximação escalar, ou seja,  $\phi_z \approx 0$  e  $\phi_t = \phi_x = \phi$ , tem-se a equação de onda

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( p \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + k_0^2 q \phi = 0 \quad (\text{A.43})$$

na qual, para o caso TE, tem-se que  $\phi = E_x$  e  $p=1$  e  $q=n^2$ , em que  $n$  é o índice de refração do meio, e, para o caso TM, tem-se que  $\phi = H_x$  e  $p=1/n^2$  e  $q=1$ . Usando (A.42) em (A.43) e usando a aproximação escalar, tem-se

$$p \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2jk_0 n_{\text{ref}} p \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + (k_0^2 q - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 p) \phi = 0 \quad (\text{A.44})$$

na qual, por simplicidade, considerou-se que o índice de refração é constante na direção de propagação, ou seja  $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$ .

Aplicando o Método de Galerkin em (A.44), tem-se

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} p \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} w d\Omega - 2jk_0 n_{\text{ref}} p \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial z} w d\Omega - \iint_{\Omega} p \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega + \\ & - \iint_{\Omega} p \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega + (k_0^2 q - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 p) \iint_{\Omega} \phi w d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

na qual  $w$  é a função de peso, definida na Seção A.1, e  $\Omega$  é o domínio computacional. Discretizando  $\Omega$  em  $nel$  elementos triangulares

$$\Omega = \sum_{e=1}^{nel} \Omega_e$$

em que  $\Omega_e$  é o domínio do  $e$ -ésimo elemento. Novamente, vamos escrever o campo  $\phi$  e a função peso  $w$  (definidas somente dentro de  $\Omega_e$ ) como um somatório das funções de base  $\Psi$ . Assim

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi(\Omega, z) = \sum_{e=1}^{nel} \sum_{i=1}^{ie} \alpha_i^e(z) \Psi_i^e(\Omega_e) \\ w = w(\Omega_e) = \sum_{j=1}^{ie} \Psi_j^e(\Omega_e) \end{array} \right. , \quad (\text{A.46})$$

em que  $\alpha_i^e(z)$  é um peso atribuído ao  $i$ -ésimo nó do elemento “ $e$ ”, na posição  $z$  do guia. pode assumir o valor 3 ou 6 dependendo se as funções de base são lineares ou quadráticas. Substituindo (A.46) em (A.45), tem-se

$$\sum_{e=1}^{nel} \left\{ [A^e] \frac{\partial^2 \{\alpha^e(z)\}}{\partial z^2} - 2jk_0 n_{\text{ref}} [A^e] \frac{\partial \{\alpha^e(z)\}}{\partial z} + ([B^e] - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 [A^e]) \{\alpha^e(z)\} \right\} = 0 \quad (\text{A.47})$$

na qual  $[A^e]$  e  $[B^e]$  são matrizes de dimensões  $ie \times ie$ , dadas por

$$[A^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ p_e \iint_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy \right] \quad (\text{A.48-a})$$

$$[B^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ -p_e \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} dx dy - p_e \iint_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial y} dx dy + \right. \\ \left. + k_0^2 q_e \iint_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx dy \right] \quad (\text{A.48-b})$$

e  $\{\alpha^e\}$  um vetor de dimensão  $ie \times 1$ . Quando o somatório é efetuado sobre todas as matrizes  $[A^e]$  e  $[B^e]$ , formam-se as matrizes  $[M]$  e  $[K]$  com dimensão  $np \times np$  ( $np$  é o número/quantidade de nós necessários para definir os  $nel$  elementos de discretização do domínio) tal que

$$[M] = \sum_{e=1}^{nel} [A^e] \quad \text{e} \quad [K] = \sum_{e=1}^{nel} [B^e], \quad (\text{A.49})$$

Ao mesmo tempo que o somatório  $\{e=1 \rightarrow nel\}$  definem as matrizes  $[M]$  e  $[K]$ , os vetores  $\{\alpha^e(z)\}$  de (A.47) somam-se entre si de tal forma a representar a distribuição do campo  $\phi$  em todo o domínio. Assim, (A.47) pode ser representada de forma compacta como

$$[M] \frac{\partial^2 \{\phi(z)\}}{\partial z^2} - 2jk_0 n_{ref} [M] \frac{\partial \{\phi(z)\}}{\partial z} + ([K] - k_0^2 n_{ref}^2 [M]) \{\phi(z)\} = 0 \quad (\text{A.50})$$

Os dois primeiros termos de (A.50) podem ser escritos como

$$[M] \frac{\partial^2 \{\phi(z)\}}{\partial z^2} - 2jk_0 n_{ref} [M] \frac{\partial \{\phi(z)\}}{\partial z} = -2jk_0 n_{ref} [M] \frac{\partial \{\phi(z)\}}{\partial z} \left( 1 - \frac{1}{2jk_0 n_{ref}} \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (\text{A.51})$$

Usando a relação de recorrência de Padé[7,8] para o operador de derivada primeira no segundo membro de (A.51) como

$$\frac{\partial}{\partial z} \cong \frac{1}{2jk_0 n_{\text{ref}}} [\mathbf{M}]^{-1} \left( [\mathbf{K}] - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 [\mathbf{M}] \right),$$

podemos reescrever (A.50) da forma

$$-2jk_0 n_{\text{ref}} \left[ [\mathbf{M}] + \left( \frac{[\mathbf{K}] - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 [\mathbf{M}]}{4k_0^2 n_{\text{ref}}^2} \right) \right] \frac{\partial \{\phi(z)\}}{\partial z} + ([\mathbf{K}] - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 [\mathbf{M}]) \{\phi(z)\},$$

e que pode, ainda, ser reescrita como

$$-2jk_0 n_{\text{ref}} [\tilde{\mathbf{M}}] \frac{\partial \{\phi(z)\}}{\partial z} + ([\mathbf{K}] - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 [\mathbf{M}]) \{\phi(z)\}, \quad (\text{A.52})$$

e  $[\tilde{\mathbf{M}}] = [\mathbf{M}] + \left( \frac{[\mathbf{K}] - k_0^2 n_{\text{ref}}^2 [\mathbf{M}]}{4k_0^2 n_{\text{ref}}^2} \right)$ . A equação (A.52) representa a evolução (na direção de propagação) da envoltória dos campos eletromagnéticos. Vários algoritmos de integração podem ser aplicados em (A.52) tais como Euler, Runge-Kutta, Preditor-Corretor e Crank-Nicholson. Por ser, em geral, estável e acurado, usaremos este último fazendo

$$\frac{\partial \{\phi\}_i}{\partial z} = \frac{\{\phi\}_{i+1} - \{\phi\}_i}{\Delta z} \quad \text{e} \quad \{\phi\}_i = \frac{\{\phi\}_{i+1} + \{\phi\}_i}{2}$$

e substituindo em (A.52), obtém-se

$$[\mathbf{A}]_i \{\phi\}_{i+1} = [\mathbf{B}]_i \{\phi\}_i, \quad (\text{A.53})$$

na qual

$$[\mathbf{A}]_i = -2jk_0 n_{\text{ref}i} [\tilde{\mathbf{M}}]_i + \left( [\mathbf{K}]_i - k_0^2 n_{\text{ref}i}^2 [\mathbf{M}]_i \right) \frac{\Delta z}{2} \quad (\text{A.54 - a})$$

$$[\mathbf{B}]_i = -2jk_0 n_{\text{ref}i} [\tilde{\mathbf{M}}]_i - \left( [\mathbf{K}]_i - k_0^2 n_{\text{ref}i}^2 [\mathbf{M}]_i \right) \frac{\Delta z}{2} \quad (\text{A.54 - b})$$

nas quais  $\Delta z$  é o tamanho do passo de propagação/integração e os subscritos “i” e “i+1” representam as quantidades (vetores e matrizes) relacionadas com o i-ésimo e (i+1)-ésimo passo de propagação. Por fim, notemos que, para calcular o perfil/envoltória do campo eletromagnético a uma distância  $\Delta z$  da posição “i”, basta calcularmos as matrizes (A.54)  $[\mathbf{A}]_i$  e  $[\mathbf{B}]_i$ , que são matrizes de dimensão  $np \times np$ . Estas, por sua vez dependem das matrizes (A.48)  $[\mathbf{A}^e]$  e  $[\mathbf{B}^e]$  de dimensões  $ie \times ie$ . Em geral,  $ie=3$  ou  $6$ , dependendo das funções de base  $\Psi^e$  serem lineares ou quadráticas, respectivamente. Por meio do procedimento de transformação de coordenadas feito na Seção A.1, podemos escrever  $[\mathbf{A}^e]$  e  $[\mathbf{B}^e]$  como

$$[\mathbf{A}^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} p_e [\mathbf{S}_3^e] \quad (\text{A.55-a})$$

$$[\mathbf{B}^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ -p_e [\mathbf{S}_1^e] - p_e [\mathbf{S}_2^e] + k_0^2 q_e [\mathbf{S}_3^e] \right] \quad (\text{A.55-b})$$

nas quais as matrizes  $ie \times ie$   $[\mathbf{S}_i^e]$  são dadas em (A.28), sendo escritas em função das matrizes elementares (A.29) e que finalmente determinam completamente o sistema matricial (A.53).

Notemos o sub-índice “i” de  $n_{\text{ref}}$ , em (A.54). Como dissemos acima,  $n_{\text{ref}}$  deve ser, idealmente, o valor do índice efetivo da onda eletromagnética. Em alguns casos<sup>7</sup>, torna-se necessário o cálculo do índice de refração efetivo a cada passo, para aumentar a precisão numérica dos cálculos envolvidos. A técnica que recalcula o índice de refração efetivo a cada passo é conhecida na

---

<sup>7</sup> Verificar que a susceptibilidade complexa depende do índice de refração efetivo.

literatura como técnica do índice de refração adaptativo. Usando (A.50), e desprezando as derivadas na direção de propagação (como fazemos para a análise modal), tem-se que

$$k_0^2 n_{\text{ref}i}^2 [\mathbf{M}]_i \{\phi\}_i = [\mathbf{K}]_i \{\phi\}_i$$

Multiplicando ambos os membros por  $\{\phi\}_i^{\text{T}*}$  (transposto e complexo conjugado de  $\{\phi\}_i$ ) e isolando  $n_{\text{ref}i}$ , tem-se

$$n_{\text{ref}i}^2 = \text{Re} \left\{ \frac{\{\phi\}_i^{\text{T}*} [\mathbf{K}]_i \{\phi\}_i}{k_0^2 [\mathbf{M}]_i \{\phi\}_i} \right\} \quad (\text{A.56})$$

## A.2.2 – Formulação 1D

A formulação 1D é facilmente obtida por meio da redução da formulação 2D, fazendo uma das derivadas transversais nulas. Neste caso, considera-se que os campos eletromagnéticos ( $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$ ) que propagam-se dentro do guia óptico possam ser representados como

$$\vec{\phi}(\mathbf{x}, z) = [\vec{\phi}_x(x, z) + \vec{\phi}_z(x, z)] e^{-j n_{\text{ref}} k_0 z} \quad (\text{A.57})$$

em que os parâmetros  $n_{\text{ref}}$  e  $k_0$ , assim como a envoltória de (A.57), já foram definidos na Seção anterior. Aqui, estamos considerando as derivadas na direção do eixo coordenado “x” nulas (guia infinito na direção “x”), porém a formulação nada altera-se trocando “x” por “y”. A equação de onda, também para o caso escalar, torna-se[9]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{s} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + s \frac{\partial}{\partial z} \left( p \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + k_0^2 q s \phi = 0 \quad (\text{A.58})$$

na qual o parâmetro “s” está relacionado com uma camada absorvente instalada nos limites do domínio computacional que tem como objetivo evitar reflexões. Estas camadas são conhecidas na literatura como PML’s (Perfectly Matched Layer)[10]. Tomando-se, por base, a equação (A.58), todo o procedimento formal de aplicação do método de Galerkin e discretização do domínio computacional segue da mesma forma que no caso 2D, obtendo-se a equação (A.52), com  $[K]$  e  $[M]$  dadas por (A.49) e  $[A^e]$  e  $[B^e]$  dados por

$$[A^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ p_e s \int_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx \right] \quad (A.59-a)$$

$$[B^e] = \sum_{i=1}^{ie} \sum_{j=1}^{ie} \left[ -\frac{p_e}{s} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \Psi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^e}{\partial x} dx + k_0^2 q_e s \int_{\Omega_e} \Psi_i^e \Psi_j^e dx \right] \quad (A.59-b)$$

com  $ie=2$  ou  $3$ , conforme as funções de base  $\Psi^e$  forem lineares ou quadráticas, respectivamente. Por meio do procedimento de transformação de coordenadas feito na Seção A.1, podemos escrever  $[A^e]$  e  $[B^e]$  como

$$[A^e] = l_e p_e s [f_0] \quad (A.60-a)$$

$$[B^e] = -\frac{p_e}{s l_e} [f_1] + k_0^2 q_e s l_e [f_0] \quad (A.60-b)$$

nas quais  $l_e$  é o comprimento do elemento linear e  $[f_0]$  e  $[f_1]$  são as matrizes elementares

$$[f_0] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad [f_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se assumir um perfil tipo alfa para a condutividade elétrica e magnética dentro das camadas de PML<sup>8</sup>. O parâmetro “s”, a cada passo de propagação é determinado pela expressão

---

<sup>8</sup> As camadas PML absorvem os campos incidentes. A origem dessa absorção é a perda devido à condutividade do meio.

$$s_i = 1 - j \frac{(\alpha + 1)\lambda}{4\pi d n_i(x_0)} \left( \frac{x - x_0}{d} \right)^\alpha \ln \left( \frac{1}{R} \right) \quad (\text{A.60})$$

na qual  $\lambda$ ,  $d$ ,  $x_0$  e  $R$  são o comprimento de onda no espaço livre, a espessura da camada de PML, a posição da interface da camada PML e o coeficiente de reflexão teórico[11],[12], respectivamente.

---

## Referências do Apêndice A

- [1] S.G. Mikhlin, "Variational Methods in Mathematical Physics", Macmillan, New York, (1964).
- [2] J. Jin, "Finite Element Method in Electromagnetics", *John Wiley & Sons*, New York, (1993).
- [3] M. Koshiba, "Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method", *KTK Scientific Publishers*, (1992).
- [4] H.E. Hernández-Figueroa, F.A. Fernández, Y. Lu e J.B. Davies, "Vectorial Finite Element Modelling of 2D Leaky Waveguides", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.31, No.3, (1995)
- [5] A. Yariv e P. Yeh, "Optical Waves in Crystals", *John Wiley & Sons*, New York, (1984).
- [6] D. L. Lee, "Electromagnetic Principles of Integrated Optics", *John Wiley & Sons*, New York, (1986).
- [7] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using Padé approximant operators", *Optics Letters*, Vol.17, No.20, pp.1426-1428, outubro, (1992).
- [8] W.P. Huang e C.L. Xu, "A Wide-Angle Vector Beam Propagation Method", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.14, No.10, pp.1118-1120, outubro, (1992).
- [9] Ü. Pekel e R. Mittra. "An application of the perfectly matched layer (PML) concept to the finite element method frequency domain analysis of scattering problem", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.8, pp.649-651, maio, (1996).
- [10] M. Koshiba, Y. Tsuji e M. Hikari, "Finite Element Beam Propagation Method with Perfectly Matched Layer Boundary Conditions", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.35, No.3, pp.1482-1485, maio, (1999).
- [11] J.P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves", *Journ. Comput. Phys.* Vol.114, pp.185-200, outubro, (1994).
- [12] Ü. Pekel e R. Mittra. "An approach of the perfectly matched layer (PML) concept to the finite element method frequency domain analysis of scattering problem", *IEEE Microwave Guided Wave Letters*, Vol.5, pp.258-260, agosto, (1995).