

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Heber Rocha Moreira

REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA ROBUSTA A PARTIR DE CONTROLADORES DEPENDENTES  
DE PARÂMETROS PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO



Campinas  
2009

Heber Rocha Moreira

REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA ROBUSTA A PARTIR DE CONTROLADORES DEPENDENTES  
DE PARÂMETROS PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.  
Área de concentração: Automação.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres  
Co-orientador: Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira



Campinas  
2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

M813r            Moreira, Heber Rocha  
                    Realimentação de saída robusta a partir de  
                    controladores dependentes de parâmetros para sistemas  
                    lineares incertos discretos no tempo / Heber Rocha  
                    Moreira. --Campinas, SP: [s.n.], 2009.

                    Orientadores: Pedro Luis Dias Peres, Ricardo  
                    Coração de Leão Fontoura de Oliveira.

                    Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
                    Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
                    Computação.

                    1. Teoria do controle. 2. Lyapunov, Funções de. 3.  
                    Sistemas lineares invariantes no tempo. 4. Programação  
                    (Matemática). 5. Estabilidade. I. Peres, Pedro Luis  
                    Dias. II. Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura  
                    de. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade  
                    de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: Robust output feedback starting from parameter-dependent  
                    controllers for discrete-time uncertain linear systems

Palavras-chave em Inglês: Control theory, Lyapunov functions, Time-invariant linear  
                    systems, Programming (Mathematics), Stability

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Humberto Xavier de Araújo, Juan Francisco Camino dos Santos

Data da defesa: 28/08/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

Heber Rocha Moreira

Engenheiro Eletricista – PUC-MG

REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA ROBUSTA A PARTIR DE CONTROLADORES DEPENDENTES  
DE PARÂMETROS PARA SISTEMAS LINEARES INCERTOS DISCRETOS NO TEMPO

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de concentração: Automação. Aprovada pela banca examinadora no dia 28 de Agosto de 2009.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres  
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Humberto Xavier de Araújo  
DEE/UFBA

Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos  
FEM/UNICAMP

Campinas  
2009

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidato:** Heber Rocha Moreira

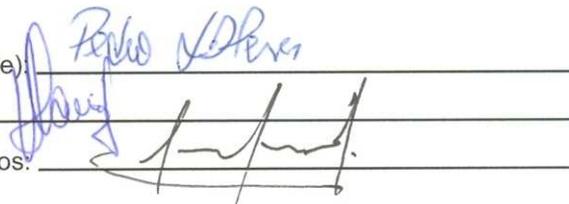
**Data da Defesa:** 28 de agosto de 2009

**Título da Tese:** "Realimentação de Saída Robusta a Partir de Controladores Dependentes de Parâmetros para Sistemas Lineares Incertos Discretos no Tempo"

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres (Presidente)

Prof. Dr. Humberto Xavier de Araújo:

Prof. Dr. Juan Francisco Camino dos Santos:



The image shows three horizontal lines representing the signature area for the jury members. The first line is signed by Pedro Luís Dias Peres in blue ink. The second line is signed by Humberto Xavier de Araújo in black ink. The third line is signed by Juan Francisco Camino dos Santos in black ink.

DEDICO ESTE TRABALHO COM GRANDE AMOR  
AOS MEUS PAIS, AGEU MOREIRA FILHO E LÚCIA  
BATISTA ROCHA MOREIRA.

# Agradecimentos

Agradeço,

com profundo reconhecimento ao meu orientador e co-orientador, Profs. Drs. Pedro Luis Dias Peres e Ricardo C. L. F. Oliveira, pela oportunidade, pela sublime orientação e compreensão.

aos amigos do Departamento de Telemática, por toda ajuda oferecida, pela troca de informações e experiências.

a todo o pessoal do “Loste” pela rara demonstração de amizade e solidariedade.

à minha família por me encorajar e me apoiar em todos os momentos.

ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

“A gravidade explica os movimentos dos planetas, mas não pode explicar quem colocou os planetas em movimento. Deus governa todas as coisas e sabe tudo que é ou que pode ser feito.”

(Isaac Newton)

# Resumo

Esta dissertação trata de um dos mais importantes problemas em aberto na teoria de controle, o projeto de controladores por realimentação estática de saída. A principal contribuição é propor um método para computar controladores robustos estáticos por realimentação de saída para sistemas lineares incertos discretos no tempo, usando um controlador por realimentação de estados como parâmetro de entrada do método. Além disso, os resultados são estendidos para tratar do projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  robusto por realimentação de saída. As condições de síntese são formuladas em termos de um procedimento convexo de otimização, baseado em um conjunto finito de desigualdades matriciais lineares. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência dos métodos propostos quando comparados com outros métodos existentes na literatura.

Palavras-chave: Sistemas lineares incertos; sistemas discretos do tempo; realimentação de estados; realimentação de saída; norma  $\mathcal{H}_2$ ; funções de Lyapunov dependentes de parâmetros; LMIs.

# Abstract

This thesis deals with one of the most important open problems in control theory, the design of static output feedback controllers. The main contribution is to propose a method to compute robust static output feedback controllers for uncertain linear discrete-time systems, using a state feedback controller as an input parameter for the method. Additionally, the results are extended to cope with  $\mathcal{H}_2$  static output feedback control design. The synthesis conditions are formulated in terms of a convex optimization procedure, based on a finite set of linear matrix inequalities. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed approach compared to other methods available in the literature.

Key-words: Uncertain linear systems; discrete-time systems; state feedback; static output feedback;  $\mathcal{H}_2$  norm; parameter-dependent Lyapunov functions; LMIs.

# Sumário

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Lista de Figuras</b>   | <b>xii</b>  |
| <b>Lista de Tabelas</b>   | <b>xiii</b> |
| <b>Lista de Acrônimos e Notação</b>   | <b>xiv</b>  |
| <b>Introdução</b>   | <b>1</b>    |
| <b>1 Conceitos Preliminares e Definições</b>                                    | <b>4</b>    |
| 1.1 Descrição Matemática do Sistema . . . . .                                   | 4           |
| 1.2 Estabilidade . . . . .  | 5           |
| 1.3 Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .   | 7           |
| <b>2 Estabilização Robusta por Realimentação de Saída</b>                       | <b>10</b>   |
| 2.1 Preliminares . . . . .  | 10          |
| 2.2 Resultados . . . . .  | 11          |
| 2.3 Experimentos Numéricos . . . . .  | 15          |
| 2.4 Conclusão . . . . .   | 21          |
| <b>3 Controle <math>\mathcal{H}_2</math> Robusto por Realimentação de Saída</b> | <b>23</b>   |
| 3.1 Preliminares . . . . .  | 23          |
| 3.2 Resultados . . . . .  | 24          |
| 3.3 Experimentos Numéricos . . . . .  | 32          |
| 3.4 Conclusão . . . . .   | 37          |
| <b>4 Conclusões e Perspectivas</b>  | <b>39</b>   |
| <b>Bibliografia</b>   | <b>41</b>   |

# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.1 | Representação gráfica de um politopo com seis vértices. . . . .   | 8  |
| 2.1 | Autovalores para o sistema em malha fechada do Exemplo I com ganho $Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ e matrizes $Z_i$ e $G_i$ , $i = 1, 2$ dadas em (2.11). . . . .   | 16 |
| 2.2 | Autovalores para o sistema em malha fechada do Exemplo I com ganho $K$ dado em (2.12). . . . .  | 17 |
| 2.3 | Autovalores para o sistema em malha fechada do Exemplo II com o ganho $K$ dado em (2.13). . . . .   | 18 |
| 3.1 | Autovalores da matriz dinâmica do sistema em malha fechada do Exemplo I.  | 33 |
| 3.2 | Sistema massa-mola. . . . .   | 36 |
| 3.3 | Custo garantido $\mathcal{H}_2$ obtido pelo Teorema 3.3 usando controladores de realimentação de estados obtidos por meio do Teorema 3.1(a) e por meio do Teorema 3.2 (b), com limites fixos para a norma $\mathcal{H}_2$ dados pelo intervalo $\mu \in [0.47 \ 2.0]$ . . . . . | 36 |
| 3.4 | Trajetórias dos estados para o sistema original a tempo contínuo investigado no Exemplo III, usando-se o ganho dado em (3.45). . . . .  | 38 |

# Lista de Tabelas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Comparação entre os métodos de [MBB04], [DY07] e as condições do Teorema 2.2 no Exemplo III. T2.2* denota que o Teorema 2.2 foi usado com um controlador robusto como parâmetro de entrada. . . . .                | 19 |
| 2.2 | Avaliações positivas e tempo computacional (em segundos) apresentados pelos métodos [DY07], [MBB04] e Teorema 2.2 (T2.2) na análise estatística do Exemplo IV para sistemas com dimensões dadas em (2.14). . . . . | 22 |
| 3.1 | Comparação entre os métodos para projeto de realimentação de saída do Exemplo II. . . . .  | 34 |
| 3.2 | Comparação de resultados do Exemplo III. . . . .   | 37 |

# Lista de Acrônimos e Notação

|                |  |
|----------------|--|
| LMI            | Linear Matrix Inequality (desigualdade matricial linear)                         |
| SISO           | Single-Input Single-Output (uma entrada uma saída)                               |
| $\star$        | indica bloco simétrico nas LMIs  |
| $L > 0$        | indica que a matriz $L$ é simétrica definida positiva                            |
| $L \geq 0$     | indica que a matriz $L$ é simétrica semi-definida positiva                       |
| $A$            | notação para matrizes (letras maiúsculas do alfabeto latino)                     |
| $A'$           | ( $'$ ), pós-posto a um vetor ou a uma matriz, indica a operação de transposição |
| $\text{Tr}(A)$ | notação para representar o traço da matriz $A$                                   |
| $\mathbf{I}$   | matriz identidade de dimensão apropriada   |
| $\mathbf{0}$   | matriz de zeros de dimensão apropriada   |
| $\mathbb{R}$   | conjunto dos números reais   |
| $N$            | especialmente utilizada para denotar o número de vértices de um politopo         |
| $\Lambda_N$    | simplex unitário de $N$ variáveis  |
| $\alpha$       | especialmente utilizada para representar as incertezas de um sistema             |

# Introdução

O problema de realimentação estática de saída é uma das questões mais importantes na teoria de controle [Ber92, SADG97], e tem atraído a atenção de muitos pesquisadores nas últimas décadas. Tal interesse justifica-se pelo fato de que em inúmeras aplicações o vetor de estados não está, por razões técnicas ou econômicas, completamente acessível. Como exemplos, mencionam-se a impossibilidade de instalação ou de construção de alguns sensores, o custo dos sensores e dos sistemas de comunicação entre os sensores e o controlador. Esses fatores motivam o desenvolvimento de estratégias baseadas na realimentação de saída, que requer apenas a leitura das variáveis de saída da planta em tempo real. Outra razão importante deve-se ao fato de que o projeto de controladores dinâmicos pode ser formulado como um problema de realimentação estática de saída, envolvendo apenas a planta aumentada do sistema, enfatizando ainda mais a importância do controlador por realimentação estática de saída.

Apesar de essa estratégia de controle ser simples do ponto de vista de implementação prática, a sua solução numérica é difícil em função da sua natureza não-convexa [BT00]. De fato, o problema de realimentação estática de saída pertence à classe dos problemas NP-difíceis (em inglês, *nondeterministic polynomial-time hard* — NP-hard), o que significa que o tempo computacional empregado para resolver esse tipo de problema cresce exponencialmente em função do tamanho da entrada de dados.

Vários métodos têm sido propostos na literatura nas últimas décadas para resolver o problema. Para um apanhado geral das abordagens existentes, recomenda-se o *survey* [SADG97]. Entre as diversas técnicas existentes, podem ser citados trabalhos baseados no posicionamento da autoestrutura [Kim75, KL82, Mag87, FM87, SL93, Wan96] ou em propriedades do sistema em malha aberta [YBL74, HB90, GPZ01].

Há também diversos métodos baseados em buscas diretas no espaço dos parâmetros do ganho, usando heurísticas, procedimentos de otimização ou algoritmos evolutivos. Vale notar que a abordagem de busca aleatória para resolver problemas complexos de otimização não é nova, tendo sido usada em sistemas de controle por [Mat65]. Entre outros, podem ser

citados os trabalhos [Gol89, KB01, PdA04, SC05, BOL06, Tos06, GPCI07, DZ08, CC09] que tratam o problema de realimentação de saída em vários contextos.

A abordagem mais utilizada, no entanto, é baseada na construção de uma função de Lyapunov, cuja existência fornece o ganho de realimentação de saída [ABJ75, GPS96, EOA97, CLS98, GdS98, CT99, PA01]. Em geral, esses métodos são extensões das estratégias de controle por realimentação de estados, para os quais existem parametrizações convexas do controlador [BPG89]. Essas parametrizações são obtidas por meio de algumas mudanças de variáveis, que não são mais possíveis no caso de realimentação de saída ou geram condições apenas suficientes. Outras abordagens não seguem essa linha de mudança de variáveis ou não são baseadas em funções de Lyapunov, como por exemplo [dCS00], na qual a inversa da matriz de Lyapunov é tratada por um algoritmo iterativo e o ganho de saída aparece isolado nas condições. Também menciona-se a abordagem de [HL06], na qual o problema de realimentação de saída é escrito em termos da positividade de um polinômio cujas variáveis são as entradas da matriz do controlador.

No caso de sistemas lineares com parâmetros incertos a situação é ainda mais complicada. Por exemplo, o simples fato de usar-se a mesma função de Lyapunov para garantir a estabilidade de todo o domínio incerto é uma fonte de conservadorismo [CT99, PA01]. Essa abordagem, conhecida como estabilidade quadrática, foi largamente utilizada para análise de estabilidade robusta, desempenho e para síntese de controladores e filtros [BPG89, GZL90, PGB93, PTP97, GdO01, dOGB00]. Apesar de fornecer condições apenas suficientes, a estabilidade quadrática permite tratar de forma convexa, com desigualdades matriciais lineares (em inglês, *linear matrix inequalities* — LMIs) [BEFB94], diversos problemas relevantes em controle de sistemas dinâmicos. Algumas extensões foram produzidas para tratar a realimentação de saída robusta [GA94, IS94, GPS96, GdS98]. Dentre os trabalhos que usam funções de Lyapunov dependentes de parâmetros para obter controladores estáticos de saída e reduzir o conservadorismo da estabilidade quadrática, destacam-se [APS03], [Sha03], [MBB04] e [DY07], sendo que [APS03], [MBB04] e [DY07] não possuem a limitação de serem aplicáveis somente a sistemas com a matriz de saída precisamente conhecida.

A principal característica comum aos métodos baseados na teoria de Lyapunov é a formulação do problema em termos de procedimentos de otimização baseados em LMIs. Apesar dos métodos serem apenas suficientes e, na maioria das vezes, baseados em procedimentos iterativos sem convergência garantida, o principal apelo é que a cada estágio (ou iteração) um conjunto finito de LMIs é resolvido. A solução de problemas de otimização envolvendo LMIs pode ser obtida usando-se interfaces de programação simples (LMI Control Toolbox [GNLC95], YALMIP [Löf04]) e resolvedores de convergência global disponíveis comercialmente ou livremente pela Internet (SeDuMi [Stu99], SDPT3 [TTT99]).

Essa maneira fácil e consistente de resolver LMIs foi e continua sendo a principal motivação de novas propostas de soluções do problema de realimentação estática de saída usando LMIs, como o método proposto nesta dissertação.

Este trabalho investiga o problema de realimentação estática robusta de saída para sistemas lineares incertos discretos no tempo, usando estratégia similar à adotada em [PA01], [APS03] (para sistemas contínuos) e [MBB04] (para sistemas discretos no tempo). As matrizes do sistema são consideradas incertas e pertencentes a um politopo. O método consiste em, primeiramente, projetar um controlador por realimentação de estados que, a seguir, é usado como parâmetro de entrada para a síntese do controlador de saída. A principal novidade da abordagem proposta é a possibilidade de projetar ganhos robustos de saída a partir de ganhos de realimentação de estados dependentes de parâmetros. Em outras palavras, a mesma função de Lyapunov provê simultaneamente um ganho de estado dependente de parâmetros e um ganho de saída constante. A vantagem imediata em relação a, por exemplo [MBB04], que também foi desenvolvido para sistemas incertos discretos, é que não é necessário que o sistema seja estabilizável por um controlador de estado robusto. Os resultados obtidos neste trabalho são também estendidos para tratar do projeto de controladores  $\mathcal{H}_2$  robustos por realimentação de saída. Todas as condições propostas são dadas na forma de LMIs.

## Apresentação da dissertação

Esta dissertação foi estruturada em cinco capítulos descritos a seguir:

- **Capítulo 1:** No capítulo é feita uma revisão dos principais conceitos relativos à estabilidade e cômputo da norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas lineares incertos discretos no tempo na forma politópica. Também é apresentada a descrição matemática dos sistemas analisados.
- **Capítulo 2:** O objetivo do capítulo é apresentar condições LMIs para tratar o problema do projeto de controladores estabilizantes por realimentação de saída robusta.
- **Capítulo 3:** No capítulo são apresentadas condições para tratar o projeto de controladores por realimentação de saída com índice de desempenho dado pela norma  $\mathcal{H}_2$ .
- **Capítulo 4:** Apresenta as conclusões finais e algumas perspectivas para trabalhos futuros.

# Conceitos Preliminares e Definições

Este capítulo é dedicado à apresentação de definições e conceitos essenciais relativos à estabilidade de sistemas lineares politópicos a tempo discreto e ao índice de desempenho dado pela norma  $\mathcal{H}_2$ . O objetivo é introduzir os fundamentos teóricos e as técnicas básicas, no contexto das desigualdades matriciais lineares, a serem utilizadas nos capítulos subsequentes. Todos os resultados podem ser encontrados na literatura indicada ao longo do texto.

## 1.1 Descrição Matemática do Sistema

Considere o sistema linear a tempo discreto, incerto e invariante no tempo, descrito pelas equações de estado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B_1(\alpha)w(k) + B_2(\alpha)u(k), \\ z(k) &= C_1(\alpha)x(k) + D_2(\alpha)u(k), \\ y(k) &= C_2(\alpha)x(k), \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  o vetor de distúrbios,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle,  $z(k) \in \mathbb{R}^p$  a saída controlada e  $y(k) \in \mathbb{R}^q$  a saída medida. As matrizes do sistema  $(A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_2)(\alpha)$  não são precisamente conhecidas mas pertencem a um domínio politópico  $\mathcal{D}$  dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{(A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_2)(\alpha) : \\ &(A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_2)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_2)_i, \alpha \in \Lambda_N\}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

com o vetor de parâmetros incertos  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  pertencendo ao simplex unitário

$$\Lambda_N = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \delta_i = 1, \delta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \tag{1.3}$$

As matrizes  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $B_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_{1i} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $C_{2i} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  e  $D_{2i} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , também conhecidas como os vértices do sistema, são dadas *a priori*. Esse modelo de incerteza é amplamente difundido na literatura, sendo conhecido como modelo *politópico* [BEFB94].

Para o sistema em malha aberta ( $u(t) = 0$ ), a função de transferência da entrada  $w$  para a saída  $z$ , para  $\alpha$  fixo, é dada por

$$H_{wz}(\xi, \alpha) = C_1(\alpha)(\xi\mathbf{I} - A(\alpha))^{-1}B_1(\alpha). \quad (1.4)$$

Sendo  $\xi$  o operador de deslocamento (avanço).

Quando o problema em estudo apenas considerar a síntese de controladores estabilizantes para o sistema, isto é, síntese sem nenhum critério de desempenho, utiliza-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B(\alpha)u(k), \\ y(k) &= C(\alpha)x(k), \end{aligned} \quad (1.5)$$

com as matrizes do sistema  $(A, B, C)(\alpha)$  pertencentes ao domínio politópico  $\mathcal{S}$  dado por

$$\mathcal{S} = \left\{ (A, B, C)(\alpha) : (A, B, C)(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i, B_i, C_i), \alpha \in \Lambda_N \right\}. \quad (1.6)$$

## 1.2 Estabilidade

Esta seção apresenta o critério de Lyapunov para o estudo de estabilidade de sistemas dinâmicos no caso discreto. Originalmente, Lyapunov estudou o comportamento assintótico do estado de um sistema mecânico, dinâmico e autônomo, em torno de um ponto de equilíbrio [Kha96]. Em outras palavras, foram analisados os fenômenos de contração e expansão do movimento em sistemas dinâmicos, caracterizando a estabilidade do ponto de equilíbrio desses sistemas. Atualmente, é possível encontrar aplicações da teoria de Lyapunov em diversos campos da engenharia com diferentes interpretações físicas.

Considere o sistema linear discreto autônomo representado por

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k), \quad x(0) = x_0; \quad A(\alpha) \in \mathcal{A} \quad (1.7)$$

com

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha \in \Lambda_N \right\}. \quad (1.8)$$

Antes de apresentar a teoria de Lyapunov, faz-se necessário definir os conceitos de ponto de equilíbrio e estabilidade assintótica.

**Definição 1.1** (*Ponto de Equilíbrio na Origem*) O vetor de estado  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio do sistema, se  $x(k) = 0$  para algum  $k = k_0$  implicar em  $x(k) = 0$  para todo  $k \geq k_0$ .

**Definição 1.2** (*Estabilidade Assintótica da Origem*) O ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema (1.7) é (globalmente) assintoticamente estável se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0, \quad \forall x(0) = x_0 \quad (1.9)$$

Uma condição necessária e suficiente para que o sistema (1.7) seja assintoticamente estável é que a matriz  $A(\alpha)$  seja Schur, isto é, que todos os autovalores da matriz  $A(\alpha)$  possuam módulo menor do que um,

$$\max_i |\lambda_i(A(\alpha))| < 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall A(\alpha) \in \mathcal{A}. \quad (1.10)$$

A teoria de Lyapunov propõe avaliar a estabilidade de sistemas por meio de funções, conhecidas como funções de Lyapunov. Essas funções podem ser interpretadas como a energia total do sistema, o que permite uma escolha particular para cada caso. Pode-se associar essas funções à energia necessária para o deslocamento entre pontos do espaço de estados. Portanto, a instabilidade pode ser vista como a exigência de energia infinita para realizar tais movimentos [Vid93].

**Definição 1.3** (*Funções de Lyapunov*) Uma função  $v(x)$  é chamada de função de Lyapunov na vizinhança do ponto de equilíbrio em  $x = 0$  se:

- $v(0) = 0$  e  $v(x) > 0$  para  $x \neq 0$ ;
- $v(x)$  é contínua em relação a todas as componentes de  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- $v(x)$  é ilimitada para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  ilimitado.

Se  $v(x)$  for monotonicamente decrescente para todas as soluções do sistema (1.7), então o sistema é globalmente assintoticamente estável. O teorema a seguir apresenta o critério de Lyapunov para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos a tempo discreto.

**Teorema 1.1** Se existir uma função de Lyapunov  $v(x(k)) > 0$  tal que

$$\Delta v = v(x(k+1)) - v(x(k)) < 0, \quad \forall x \neq 0$$

então, o sistema (1.7) é assintoticamente estável.

É importante ressaltar que o Teorema 1.1 apresenta uma condição suficiente de estabilidade para sistemas não lineares em geral, pois se não existir uma função que satisfaça a Definição 1.3, nada pode ser afirmado sobre a estabilidade do sistema.

Uma candidata à função de Lyapunov amplamente difundida na literatura é a função quadrática. Essa possui um papel decisivo no estudo de sistemas lineares, pois permite determinar um teste de estabilidade necessário e suficiente no caso invariante no tempo.

Seja a forma quadrática

$$v(x, \alpha) = x'P(\alpha)x,$$

com  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Tomando-se a restrição dinâmica (1.7) e usando-se o Teorema 1.1 tem-se

$$\begin{aligned} \Delta v &= x(k+1)'P(\alpha)x(k+1) - x(k)'P(\alpha)x(k) \\ &= x(k)'A(\alpha)'P(\alpha)x(k)A(\alpha)x(k) - x(k)'P(\alpha)x(k) \\ &= x(k)'(A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha))x(k) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Assim, a estabilidade assintótica de (1.7) pode ser verificada pelo seguinte lema.

**Lema 1.1** *O sistema (1.7) é Schur assintoticamente estável se e somente se existir uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha) = P(\alpha)' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que*

$$P(\alpha) > \mathbf{0}, \quad A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \Lambda_N. \quad (1.12)$$

As desigualdades matriciais apresentadas no Lema 1.1 devem ser verificadas por uma matriz de Lyapunov em todos os pontos do domínio  $\Lambda_N$ , isto é, a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros  $P(\alpha)$  deve ser tal que para qualquer matriz genérica dentro do domínio, gerada a partir de uma combinação convexa dos vértices do politopo, as desigualdades sejam válidas. Por exemplo, considere o politopo de matrizes com seis vértices ilustrado na Figura 1.1, as desigualdades precisam ser verificadas nos infinitos pontos do domínio politópico  $\mathcal{A}$ .

### 1.3 Norma $\mathcal{H}_2$

A norma  $\mathcal{H}_2$  é um dos critérios mais usados na análise de desempenho de sistemas dinâmicos. Para um sistema SISO, a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser interpretada como a energia da resposta ao impulso da planta  $H_{wz}$ . Nesta seção, o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  é apresentado por meio de gramianos e, no contexto de programação convexa, por meio de LMIs.

A norma  $\mathcal{H}_2$  (para um  $\alpha$  fixo) da função de transferência  $H_{wz}$  dada em (1.4) é definida como

$$\|H_{wz}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}(H_{wz}(e^{j\omega})^* H_{wz}(e^{j\omega})) d\omega, \quad (1.13)$$

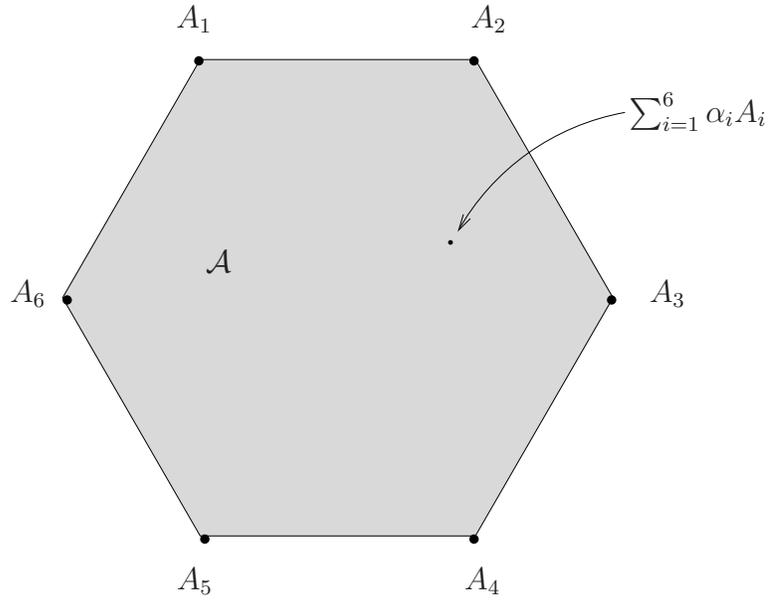


Figura 1.1: Representação gráfica de um politopo com seis vértices.

para sistemas a tempo discreto [Fra87, DGKF89, BB91].

Outra forma de calcular a norma  $\mathcal{H}_2$  é por meio dos gramianos de controlabilidade e observabilidade. Assumindo que a matriz  $A(\alpha)$  seja estável  $\forall \alpha \in \Lambda_N$ , para um  $\alpha$  fixo, tem-se

$$\|H_{wz}\|_2^2 = \text{Tr}(C_1(\alpha)L_c(\alpha)C_1(\alpha)'), \quad (1.14)$$

$$= \text{Tr}(B_1(\alpha)'L_o(\alpha)B_1(\alpha)), \quad (1.15)$$

em que  $L_c(\alpha)$  e  $L_o(\alpha)$  são os gramianos de controlabilidade e observabilidade, respectivamente, que podem ser obtidos das soluções das seguintes equações

$$A(\alpha)L_c(\alpha)A(\alpha)' - L_c(\alpha) + B_1(\alpha)B_1(\alpha)' = \mathbf{0}, \quad (1.16)$$

$$A(\alpha)'L_o(\alpha)A(\alpha) - L_o(\alpha) + C_1(\alpha)'C_1(\alpha) = \mathbf{0}. \quad (1.17)$$

Finalmente, será apresentado o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  por meio de um problema de otimização, no contexto das LMIs, para o caso de sistemas lineares incertos. O objetivo é determinar um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$ , para qualquer  $\alpha \in \Lambda_N$ , isto é, um custo garantido  $\mu$  tal que

$$\|H_{wz}\|_2 \leq \mu, \quad \forall (A, B_1, C_1)(\alpha) \in \mathcal{D}. \quad (1.18)$$

O custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_2$  é dado por

$$\mu^* = \min \mu, \quad (1.19)$$

tal que (1.18) seja verificada.

O lema a seguir enuncia o problema de otimização para determinar o custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_2$  para sistemas lineares incertos dado por (1.1).

**Lema 1.2** *Seja a matriz  $A(\alpha)$  Schur estável. A desigualdade  $\|H_{wy}\|_2^2 < \mu^2$  é assegurada para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , se e somente se, existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P(\alpha)$  e  $W(\alpha)$  tais que*

$$\text{Tr}(W(\alpha)) < \mu^2, \quad (1.20a)$$

$$B_1(\alpha)'P(\alpha)B_1(\alpha) - W(\alpha) < \mathbf{0}, \quad (1.20b)$$

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) + C_1(\alpha)'C_1(\alpha) < \mathbf{0}, \quad (1.20c)$$

sejam verificadas. Ou, equivalentemente, por dualidade

$$\text{Tr}(W(\alpha)) < \mu^2, \quad (1.21a)$$

$$C_1(\alpha)P(\alpha)C_1(\alpha)' - W(\alpha) < \mathbf{0}, \quad (1.21b)$$

$$A(\alpha)P(\alpha)A(\alpha)' - P(\alpha) + B_1(\alpha)B_1(\alpha)' < \mathbf{0}, \quad (1.21c)$$

sejam verificadas.

O Lema 1.2 apresenta duas formas equivalentes de calcular a norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas lineares discretos estáveis, usando-se problemas de otimização baseados em LMIs dependentes de parâmetros. É importante ressaltar que essa equivalência é válida somente se todas as desigualdades puderem ser resolvidas de forma exata, sem conservadorismo.

Os resultados do Capítulo 3 usam as condições do Lema 1.2 para derivar condições de projeto de controladores fixando uma estrutura particular, em termos do parâmetro  $\alpha$ , para as matrizes  $P(\alpha)$  e  $W(\alpha)$ . Como consequência, as desigualdades do Lema 1.2 são testadas com um certo grau de conservadorismo, podendo o conjunto de desigualdades originado a partir de (1.20) fornecer resultados melhores que o conjunto obtido de (1.21) e vice-versa.

# Estabilização Robusta por Realimentação de Saída

A proposta deste capítulo é fornecer uma caracterização convexa baseada em LMIs, referente ao projeto de controladores estabilizantes por realimentação de saída robusta para sistemas lineares politópicos a tempo discreto. Nesta abordagem, propõe-se uma estratégia baseada em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros para computar controladores robustos estáticos por realimentação de saída usando um controlador por realimentação de estados como parâmetro de entrada no cômputo do controlador de saída. A principal novidade é a possibilidade de encontrar controladores de saída robustos a partir de controladores de estados dependentes de parâmetros.

## 2.1 Preliminares

As condições de realimentação de estados e de saída são obtidas a partir da seguinte estrutura particular para a matriz de Lyapunov

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \quad \alpha \in \Lambda_N. \quad (2.1)$$

Essa estrutura permite que as LMIs dependentes de parâmetros obtidas com essa escolha particular sejam solucionadas por meio de um número finito de LMIs, parametrizadas somente em termos dos vértices dos politopos. Apesar das condições propostas serem apenas suficientes, os resultados são menos conservadores do que os obtidos com a estabilidade quadrática [GdOH98, RP01, dOOL<sup>+</sup>02].

O problema a ser investigado é o projeto de um ganho estático  $K$  associado à lei de controle por realimentação de saída  $u(k) = Ky(k)$  tal que o sistema em malha fechada

$$A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)KC(\alpha)$$

seja robustamente estável para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . A estratégia usada é similar à utilizada em [PA01], [APS03] (que trataram o caso contínuo no tempo) e [MBB04], e consiste em primeiramente projetar o ganho de realimentação de estados, que é usado como parâmetro de entrada na condição que sintetiza o ganho de realimentação de saída. A diferença da abordagem desenvolvida neste trabalho é que o ganho de realimentação de estados pode ser dependente de parâmetros, permitindo que se encontrem soluções para o problema de realimentação de saída quando a abordagem apresentada em [MBB04] falha. Note-se que o método de [MBB04] só pode ser aplicado se existir um controlador de estado robusto.

## 2.2 Resultados

Como ponto de partida é fornecida uma condição de síntese de realimentação de estados que provê um ganho dependente de parâmetros.

**Teorema 2.1** *Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i G_i + B_i Z_i \\ \star & G_i + G_i' - P_i \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$\begin{bmatrix} P_i + P_j & A_i G_j + A_j G_i + B_i Z_j + B_j Z_i \\ \star & G_i + G_j + G_i' + G_j' - P_i - P_j \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \\ i = 1, \dots, N-1, \quad j = i+1, \dots, N, \quad (2.3)$$

então o sistema (1.5) é estabilizável pela lei de controle dependente de parâmetros

$$u = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x,$$

com

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i, \quad G(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i G_i, \quad \alpha \in \Lambda_N.$$

**Prova:** A prova usa a mesma estratégia de [RP02] para tratar produtos duplos de matrizes dependentes de parâmetros. Note que (2.2) implica  $G_i + G_i' > P_i'$  e, portanto,  $G(\alpha)$  é invertível. Multiplique-se (2.2) por  $\alpha_i^2$  e some para  $i = 1, \dots, N$ . Multiplique-se (2.3) por  $\alpha_i \alpha_j$  e some para  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $j = i+1, \dots, N$ . Somando-se os resultados, obtém-se

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A_{cl}(\alpha)G(\alpha) \\ \star & G(\alpha) + G(\alpha)' - P(\alpha) \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

com  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ . Multiplique-se (2.4) à esquerda por  $[\mathbf{I} \ -A_{cl}(\alpha)']$  e à direita pelo respectivo transposto, para obter

$$A_{cl}(\alpha)P(\alpha)A_{cl}(\alpha)' - P(\alpha) < \mathbf{0},$$

o que prova a estabilidade robusta do sistema em malha fechada com o ganho estático de realimentação de estados dependente de parâmetros  $Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$  por meio da função de Lyapunov dependente de parâmetros  $v(x) = x'P(\alpha)x$ , com  $P(\alpha)$  dada em (2.1). ■

Note que o ganho sintetizado não é uma função polinomial de  $\alpha$  mas sim uma função racional. Caso deseje-se um ganho robusto (independente de parâmetros), a seguinte condição pode ser utilizada.

**Corolário 2.1** *Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que as LMIs dadas em (2.2) sejam verificadas com  $G_i = G$ ,  $Z_i = Z$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então o sistema (1.5) é estabilizável pela lei de controle robusta  $u = ZG^{-1}x$ .*

**Prova:** Similar à prova do Teorema 2.1. ■

A condição do Corolário 2.1 foi originalmente publicada em [dOBG99] e será usada na seção de experimentos numéricos, para fins comparativos. O próximo teorema apresenta uma condição de síntese para o ganho estático de saída usando as matrizes do ganho de realimentação de estados  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , como parâmetros de entrada.

**Teorema 2.2** *Sejam  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , matrizes (constantes) soluções do Teorema 2.1. Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e matrizes  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times p}$  tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\begin{bmatrix} G'_i P_i G_i & G'_i A'_i F_i + Z'_i B'_i F_i & -G'_i C'_i L' + Z'_i R' \\ \star & F_i + F'_i - P_i & F'_i B_i \\ \star & \star & R + R' \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

$$\begin{bmatrix} G'_i P_i G_j & G'_i A'_i F_j + G'_j A'_i F_i + G'_i A'_j F_i \\ +G'_j P_i G_i + G'_i P_j G_i & +Z'_i B'_i F_j + Z'_j B'_i F_i + Z'_i B'_j F_i \\ \star & 2F_i + F_j + 2F'_i \\ \star & +F'_j - 2P_i - P_j \\ \star & \star \\ -(G'_i C'_i + G'_i C'_j + G'_j C'_i)L' + (2Z'_i + Z'_j)R' \\ F'_i B_i + F'_i B_j + F'_j B_i \\ 3R + 3R' \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j \neq i, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \star & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \star & \star & 6R + 6R' \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N-2, \\ j = i+1, \dots, N-1, \\ k = j+1, \dots, N, \end{array} \quad (2.7)$$

com

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= G'_j P_i G_k + G'_k P_i G_j + G'_i P_j G_k + G'_k P_j G_i + G'_i P_k G_j \\ &\quad + G'_j P_k G_i, \\ \Theta_{12} &= G'_j A'_i F_k + G'_k A'_i F_j + G'_i A'_j F_k + G'_k A'_j F_i + G'_i A'_k F_j \\ &\quad + G'_j A'_k F_i + Z'_j B'_i F_k + Z'_k B'_i F_j + Z'_i B'_j F_k \\ &\quad + Z'_k B'_j F_i + Z'_i B'_k F_j + Z'_j B'_k F_i, \\ \Theta_{13} &= -(G'_i C'_j + G'_j C'_i + G'_i C'_k + G'_k C'_i + G'_j C'_k + G'_k C'_j) L' \\ &\quad + 2(Z_i + Z_j + Z_k)' R', \\ \Theta_{22} &= 2(F_i + F'_i + F_j + F'_j + F_k + F'_k - P_i - P_j - P_k), \\ \Theta_{23} &= F'_i B_j + F'_j B_i + F'_i B_k + F'_k B_i + F'_j B_k + F'_k B_j, \end{aligned}$$

então o sistema (1.5) é estabilizável pela lei de controle robusta por realimentação estática de saída  $u = R^{-1}Ly$ .

**Prova:** Usando-se a técnica de [RP01] para tratar produtos de três matrizes dependentes de parâmetros, multiplique-se (2.5) por  $\alpha_i^3$  e some para  $i = 1, \dots, N$ . Multiplique-se (2.6) por  $\alpha_i^2 \alpha_j$  e some para  $i = 1, \dots, N$ ,  $j \neq i$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Multiplique-se (2.7) por  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$  e some para  $i = 1, \dots, N-2$ ,  $j = i+1, \dots, N-1$ ,  $k = j+1, \dots, N$ . Somando-se os resultados obtém-se

$$\begin{bmatrix} G(\alpha)'P(\alpha)G(\alpha) & G(\alpha)'A(\alpha)'F(\alpha) + Z(\alpha)'B(\alpha)'F(\alpha) & -G(\alpha)'C(\alpha)'L' + Z(\alpha)'R' \\ \star & F(\alpha) + F(\alpha)' - P(\alpha) & F(\alpha)'B(\alpha) \\ \star & \star & R + R' \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Multiplique-se (2.8) à direita por  $R_1(\alpha)$  e à esquerda por  $R_1(\alpha)'$ , com

$$R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} G(\alpha)^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

para obter

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'F(\alpha) + G(\alpha)^{-1'}Z(\alpha)'B(\alpha)'F(\alpha) & -C(\alpha)'L' + G(\alpha)^{-1'}Z(\alpha)'R' \\ \star & F(\alpha) + F(\alpha)' - P(\alpha) & F(\alpha)'B(\alpha) \\ \star & \star & R + R' \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

Multiplicando-se (2.9) à esquerda por  $R_2(\alpha)$  e à direita por  $R_2(\alpha)'$ , com

$$R_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & S(\alpha)' \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

e  $S(\alpha) = ((R^{-1}L)C(\alpha) - Z(\alpha)G(\alpha)^{-1})$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A_{cl}(\alpha)'F(\alpha) \\ \star & F(\alpha) + F(\alpha)' - P(\alpha) \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

com

$$\begin{aligned} A_{cl}(\alpha) &= A(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)G(\alpha)^{-1} + B(\alpha)((R^{-1}L)C(\alpha) - Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}), \\ &= A(\alpha) + B(\alpha)(R^{-1}L)C(\alpha). \end{aligned}$$

Multiplicando-se (2.10) à esquerda por  $[\mathbf{I} \quad -A_{cl}(\alpha)']$  e à direita pelo respectivo transposto, obtém-se

$$A_{cl}(\alpha)'P(\alpha)A_{cl}(\alpha) - P(\alpha) < \mathbf{0},$$

o que prova a estabilidade robusta do sistema em malha fechada com o ganho estático de realimentação de saída  $R^{-1}L$  por meio da função de Lyapunov dependente de parâmetros  $v(x) = x'P(\alpha)x$ , com  $P(\alpha)$  dada em (2.1). ■

A principal característica das condições do Teorema 2.2 é que a função de Lyapunov calculada deve ser capaz de garantir a estabilidade robusta do sistema em malha fechada tanto para o ganho de estados quanto para o ganho de saída. Para observar esse fato basta impor  $S(\alpha) = \mathbf{0}$  na matriz de transformação  $R_2(\alpha)$ , obtendo-se a mesma equação dada em (2.10) mas com a matriz dinâmica de malha fechada dada por  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ .

As condições do Teorema 2.2 podem ser adaptadas para fornecer um ganho robusto de realimentação de estados, como descrito no próximo corolário.

**Corolário 2.2** *Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , matrizes  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e matrizes  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que as LMIs (2.5), (2.6) e (2.7) sejam verificadas com  $C_i = \mathbf{I}_n$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então o sistema é estabilizável pela lei de controle robusta por realimentação estática de estados  $u = R^{-1}Lx$ .*

**Prova:** Similar à prova do Teorema 2.2. ■

No caso de realimentação robusta de estados, as condições do Corolário 2.2, partindo da solução dada pelo Teorema 2.1, podem ser uma alternativa quando as condições em [dOBG99] não encontram solução. A justificativa para esse fato é que as condições suficientes do Corolário 2.2, que procuram por uma função de Lyapunov capaz de certificar a estabilidade robusta do sistema em malha fechada para dois tipos de ganhos (dependente

de parâmetros e robusto), podem ser menos conservadoras que as condições suficientes de [dOBG99], que procuram somente pelo robusto. O mesmo se aplica ao caso de realimentação de saída.

Finalmente, nota-se que o ganho de realimentação de estados gerado pelo Teorema 2.1 foi calculado sem nenhum critério de desempenho, como por exemplo as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , alocação de pólos etc. Avaliar quais desses critérios (ou outros) podem fornecer os melhores resultados em termos de obterem-se mais soluções factíveis no Teorema 2.2 fica como perspectiva para futuras investigações.

## 2.3 Experimentos Numéricos

Todos os experimentos foram feitos usando o SeDuMi [Stu99] e o YALMIP [Löf04] com o Matlab versão 7.0.1 em um computador Athlon 64 X2 6000+ (3.0 GHz), 2GB RAM (800 MHz) com Linux Ubuntu. A complexidade numérica associada aos exemplos é dada em termos do número  $V$  de variáveis escalares, o número  $L$  de linhas de LMIs, e o tempo computacional (em segundos).

### Exemplo I

Seja o sistema linear incerto discreto no tempo descrito por

$$x(k+1) = A(\alpha)x(k) + Bu(k),$$

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 \\ -0.3 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.6 \\ 0.7 & -0.3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1.3 \\ -2.6 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, não é possível calcular um ganho robusto de realimentação de estados diretamente pela condição do Corolário 2.1. Entretanto, as condições do Teorema 2.1 encontram um ganho por realimentação de estados dependente de parâmetros  $K(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$  que estabiliza o sistema ( $V = 18$ ,  $L = 12$ , Tempo = 0.02 s). As matrizes que compõem o ganho são

$$\begin{aligned} \left[ Z_1 \parallel Z_2 \right] &= \left[ -0.2095 \quad 0.0351 \parallel 0.2084 \quad -0.1308 \right], \\ \left[ G_1 \parallel G_2 \right] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 0.7682 & 0.0969 & 0.7412 & -0.0133 \\ 0.2307 & 0.7852 & 0.1035 & 0.7054 \end{array} \right], \end{aligned} \tag{2.11}$$

e os autovalores (calculados por uma grade fina no espaço de parâmetros) do sistema em malha fechada, ou seja, de  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + BZ(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ , são mostrados na Figura 2.1.

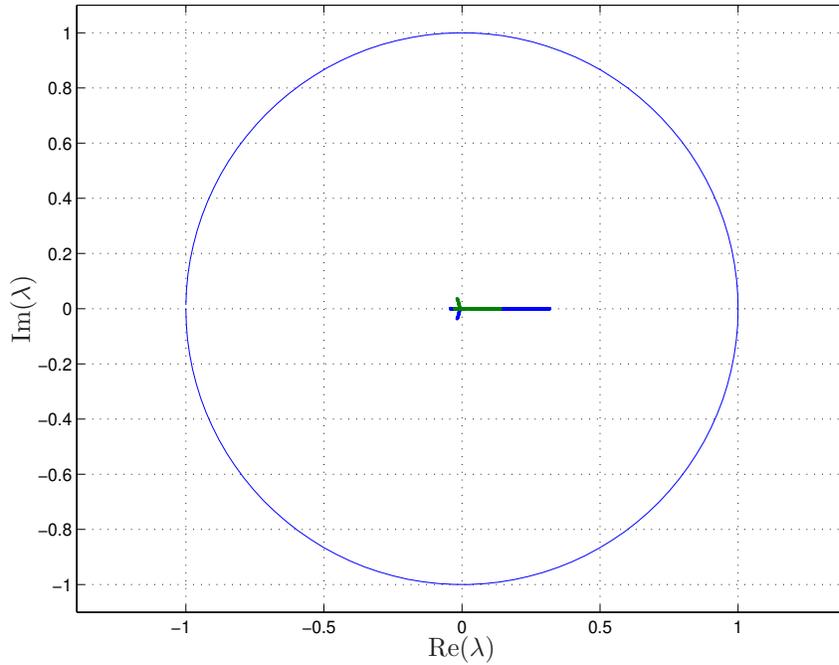


Figura 2.1: Autovalores para o sistema em malha fechada do Exemplo I com ganho  $Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$  e matrizes  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, 2$  dadas em (2.11).

As matrizes dadas em (2.11) foram usadas como entrada para a condição do Corolário 2.2, na qual foi possível calcular um ganho robusto de realimentação de estados para o sistema ( $V = 17$ ,  $L = 20$ , Tempo=0.03 s) dado por

$$K = [-0.1141 \quad -0.2371]. \quad (2.12)$$

A Figura 2.2 mostra os autovalores do sistema em malha fechada, ou seja,  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + BK$ .

O maior autovalor em módulo calculado para o sistema em malha fechada é  $|\lambda_{max}| = 0.9738$ , demonstrando que o controlador robusto por realimentação estática de estados  $K$ , dado em (2.12), de fato estabiliza o sistema. Para fins ilustrativos, a matriz de Lyapunov obtida é dada por

$$P(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0.0507 & -0.0361 \\ -0.0361 & 0.1477 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0.3027 & 0.1086 \\ 0.1086 & 0.1883 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \Lambda_N.$$

## Exemplo II

Considere o sistema incerto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\alpha)x(k) + B(\alpha)u(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned}$$

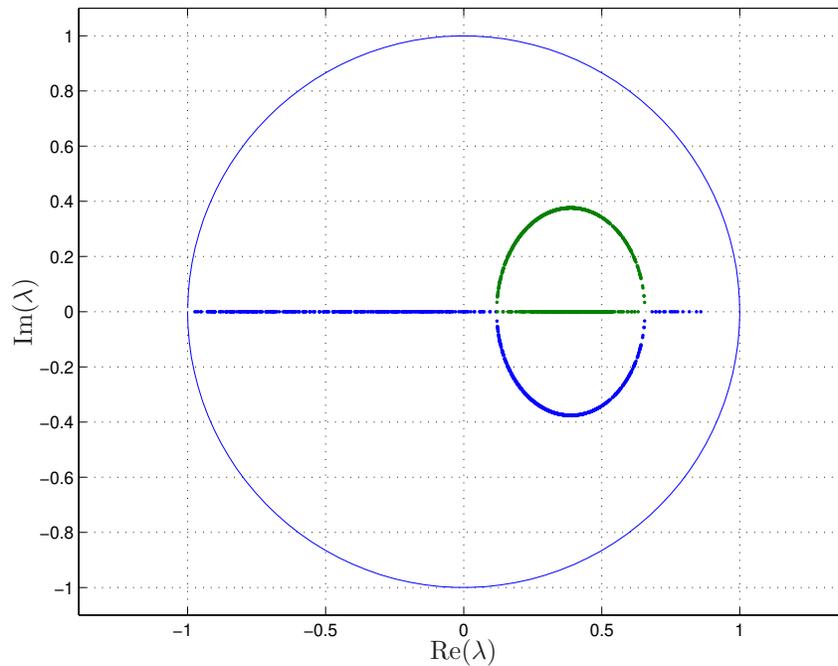


Figura 2.2: Autovalores para o sistema em malha fechada do Exemplo I com ganho  $K$  dado em (2.12).

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & -1.1 \\ -0.6 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -1.6 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1.7 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix}'.$$

O objetivo é controlar esse sistema por meio de um ganho estático robusto de saída. Assim como no Exemplo I, a condição do Corolário 2.1 não é capaz de projetar um controlador de estado robusto para o sistema. Conseqüentemente, o método de [MBB04] não pode ser aplicado para encontrar um controlador de saída robusto. As condições LMIs de [DY07], que não precisam de um controlador de estado como parâmetro de entrada, também não fornecem solução para o problema. Entretanto, esse sistema admite um ganho de estado dependente de parâmetros obtido pelas condições do Teorema 2.1 ( $V = 18$ ,  $L = 12$ , Tempo=0.03 s). Usando esse ganho dependente de parâmetros como entrada, foi possível encontrar um ganho de saída robusto com as condições do Teorema 2.2 ( $V = 16$ ,  $L = 20$ , Tempo=0.04 s) dado por

$$K = [0.8396]. \quad (2.13)$$

Os autovalores para o sistema em malha fechada são apresentados na Figura 2.3. O

maior autovalor em módulo calculado para o sistema em malha fechada é  $|\lambda_{max}| = 0.9008$ , demonstrando que o ganho de saída robusto de fato estabiliza o sistema.

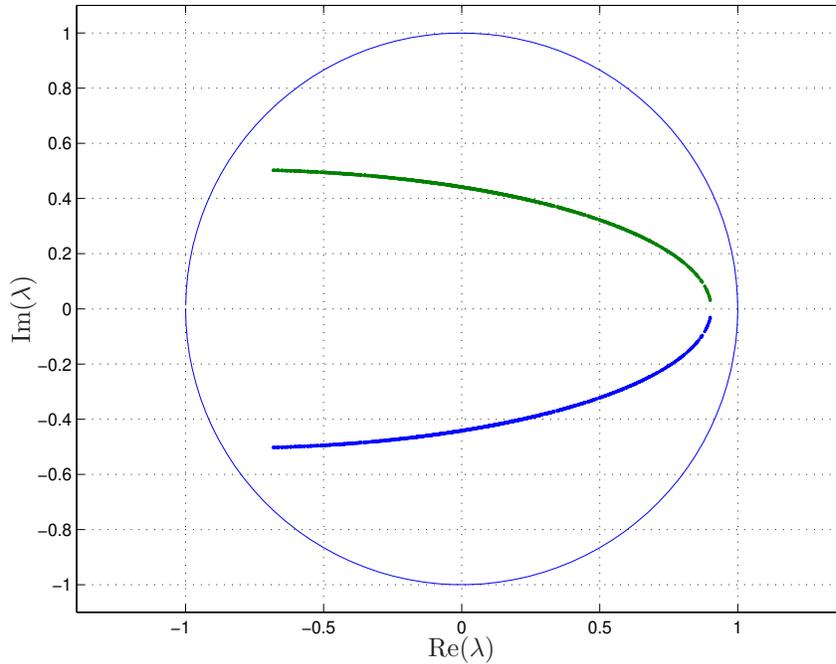


Figura 2.3: Autovalores para o sistema em malha fechada do Exemplo II com o ganho  $K$  dado em (2.13).

Usando o mesmo ganho dependente de parâmetros obtido pelo Teorema 2.1, também foi possível obter um ganho de robusto de realimentação de estados dado por

$$K_e = [-0.4861 \quad 0.5460].$$

Com esse ganho de realimentação de estados robusto, foi possível usar o método de [MBB04], que também forneceu um ganho de realimentação de saída dado por  $K = 0.8514$ . Isso mostra que o método proposto também pode ser usado para fornecer uma inicialização para o método de [MBB04] quando as condições de [dOBG99] não encontram um ganho de estado robusto.

### Exemplo III

Neste exemplo, a abordagem proposta é comparada com os métodos de [MBB04] e [DY07], que são as abordagens mais recentes na literatura capazes de tratar a matriz de saída incerta. Para essa comparação será usado um sistema incerto na forma (1.5) com dimensões maiores, isto é,  $n = 3$ ,  $N = 4$ ,  $m = 2$ ,  $p = 2$ . As matrizes do sistema são dadas

por

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0.3 \begin{bmatrix} 1 + \gamma & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 - \gamma \\ -1 & 1 + \gamma & 1 \end{bmatrix}, \\
A_2 &= 0.3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}', \\
A_3 &= 0.3 \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}', \\
A_4 &= 0.3 \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C_4 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}', \\
C_1 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}', \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, 4,
\end{aligned}$$

sendo  $\gamma \in \mathbb{R}$  um escalar não-negativo.

Deseja-se determinar o maior valor possível para o parâmetro  $\gamma$  tal que o sistema seja estabilizável por um ganho robusto estático de saída. Usando as condições do Corolário 2.1 (ou seja, [dOBG99, Teorema 3]) é possível encontrar um controlador de estado robusto, viabilizando o uso das condições de [MBB04] nas comparações. As condições propostas no Teorema 2.2 (T2.2) são usadas tanto com um controlador robusto de estados (denotadas por T2.2\*) projetado pelo Corolário 2.1 quanto com um controlador dependente de parâmetros projetado com o Teorema 2.1. Para usar as condições do Teorema 2.2, usando um controlador robusto como entrada, foram adotadas  $G_i = G$ ,  $Z_i = Z$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , com  $Z$  e  $G$  projetadas pelo Corolário 2.1. As condições de [DY07], que não precisam de controladores de estado como parâmetro de entrada, também são usadas nas comparações. A Tabela 2.1 apresenta os resultados obtidos e as complexidades computacionais associadas.

Tabela 2.1: Comparação entre os métodos de [MBB04], [DY07] e as condições do Teorema 2.2 no Exemplo III. T2.2\* denota que o Teorema 2.2 foi usado com um controlador robusto como parâmetro de entrada.

| Método  | $\gamma$ | V  | L   | Tempo (s) |
|---------|----------|----|-----|-----------|
| [DY07]  | –        | 43 | 144 | 0.06      |
| [MBB04] | 0.0857   | 65 | 44  | 0.11      |
| T2.2*   | 0.2304   | 68 | 160 | 0.11      |
| T2.2    | 0.3104   | 68 | 160 | 0.19      |

Como pode ser observado, as condições do Teorema 2.2 conseguiram estabilizar o sistema para os maiores valores de  $\gamma$ . As condições de [DY07] não encontraram uma solução para esse exemplo. Note também que as condições do Teorema 2.2 forneceram um resultado melhor que [MBB04] mesmo usando um controlador de estado robusto como parâmetro de entrada.

## Exemplo IV

O objetivo deste exemplo é avaliar o nível de conservadorismo da abordagem proposta ao compará-la com os métodos [MBB04, DY07] por meio de uma análise estatística para o problema de estabilização robusta por realimentação de saída. A comparação é similar à apresentada em [MBB04], no qual sistemas lineares incertos de diferentes dimensões são considerados.

A base de dados com 100 polítopos estabilizáveis<sup>1</sup> (por realimentação estática de saída)  $(A(\alpha), B_2(\alpha), C_2(\alpha))$  foi gerada para as dimensões

$$n = \{3, 6\}, \quad m = \{1, 2, 3\}, \quad p = \{1, 2, 3\}, \quad N = \{3, 4\}. \quad (2.14)$$

Similarmente à estratégia adotada em [MBB04], os vértices dos sistemas foram gerados aleatoriamente tais que  $A_i$  seja instável e exista um ganho  $K$  com  $A_i - B_{2i}KC_{2i}$  estável,  $i = 1, \dots, N$ . Os métodos foram aplicados e o número de avaliações positivas e o tempo computacional foram armazenados. Os detalhes de como os métodos foram aplicados são resumidos a seguir:

- Abordagem proposta: Primeiramente, o Teorema 2.1 foi aplicado. Então, os ganhos obtidos foram usados como condição de entrada para o Teorema 2.2. O tempo computacional é o tempo total para resolver as LMIs nos dois estágios;
- [MBB04]: Inicialmente, um controlador robusto estabilizante de estados foi obtido usando-se o Corolário 2.1, ou seja, [dOBG99, Teorema 3]. Em seguida, esse ganho estabilizante foi usado como condição inicial para [MBB04, Teorema 4.1]. O tempo computacional considerado é o tempo total gasto para resolver as LMIs em ambos os estágios;
- [DY07]: A transformação de similaridade requerida pelo [DY07, Teorema 1] foi obtida seguindo a sugestão dada em [DY07, Equação (4)], isto é,

$$T_i = [C'_{2i}(C_{2i}C'_{2i})^{-1} \quad C^\perp_{2i}].$$

---

<sup>1</sup>Disponível para download em [www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/robust.htm](http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/robust.htm).

Os resultados são mostrados na Tabela 2.2. O tempo é o total gasto para testar os 100 politopos de cada caso. A abordagem de [DY07] mostrou-se a mais conservadora e a mais custosa do ponto de vista computacional. Com o aumento das dimensões dos sistemas, a abordagem proposta encontrou aproximadamente o dobro de soluções factíveis quando comparada com o método de [MBB04]. Com respeito ao esforço computacional, a abordagem proposta é sempre mais custosa do que a de [MBB04]. Finalmente, é importante notar que as abordagens de [MBB04] e a proposta nesta dissertação são independentes, ou seja, uma pode apresentar solução factível quando a outra falha e vice-versa. Por exemplo, para  $n = m = N = 3$  e  $p = 2$  foram encontradas mais soluções com o método de [MBB04].

## 2.4 Conclusão

Uma nova estratégia para projetar controladores estáticos robustos por realimentação de saída foi proposta neste capítulo. O método consiste em primeiramente calcular um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros por um conjunto de LMIs. O ganho dependente de parâmetros é depois usado como entrada para encontrar um ganho robusto de realimentação de saída por meio de outra condição na forma de LMIs. Exemplos numéricos mostram que a abordagem proposta pode fornecer soluções quando outros métodos da literatura falham. Uma análise estatística também indica que, em geral, o método proposto é menos conservador que outros métodos.

Tabela 2.2: Avaliações positivas e tempo computacional (em segundos) apresentados pelos métodos [DY07], [MBB04] e Teorema 2.2 (T2.2) na análise estatística do Exemplo IV para sistemas com dimensões dadas em (2.14).

| $n$ | $m$ | $p$ | $N = 3$ |       |         |       |      |       | $N = 4$ |        |         |       |      |       |
|-----|-----|-----|---------|-------|---------|-------|------|-------|---------|--------|---------|-------|------|-------|
|     |     |     | [DY07]  | Tempo | [MBB04] | Tempo | T2.2 | Tempo | [DY07]  | Tempo  | [MBB04] | Tempo | T2.2 | Tempo |
| 3   | 1   | 1   | 4       | 12.4  | 75      | 5.3   | 92   | 7.4   | 0       | 35.0   | 69      | 5.7   | 96   | 10.3  |
|     |     | 2   | 0       | 10.9  | 61      | 5.0   | 90   | 7.5   | 0       | 31.3   | 58      | 5.3   | 92   | 10.6  |
|     |     | 3   | 0       | 10.7  | 64      | 4.9   | 89   | 7.4   | 0       | 28.3   | 53      | 4.9   | 92   | 10.4  |
|     | 2   | 1   | 4       | 12.0  | 62      | 6.6   | 77   | 8.4   | 0       | 35.3   | 56      | 6.6   | 74   | 12.4  |
|     |     | 2   | 0       | 10.8  | 52      | 6.3   | 67   | 8.4   | 0       | 30.7   | 47      | 5.7   | 75   | 12.3  |
|     |     | 3   | 0       | 11.0  | 52      | 5.8   | 74   | 8.4   | 0       | 29.0   | 36      | 5.3   | 64   | 12.6  |
|     | 3   | 1   | 2       | 12.3  | 48      | 7.1   | 44   | 9.4   | 1       | 35.5   | 51      | 7.9   | 53   | 14.8  |
|     |     | 2   | 0       | 11.1  | 43      | 7.0   | 54   | 9.4   | 0       | 30.4   | 39      | 7.1   | 52   | 14.7  |
|     |     | 3   | 0       | 10.7  | 36      | 6.7   | 49   | 9.5   | 0       | 27.3   | 26      | 6.2   | 39   | 14.4  |
| 6   | 1   | 1   | 1       | 275.4 | 62      | 11.2  | 90   | 24.8  | 0       | 1587.0 | 53      | 12.8  | 87   | 49.7  |
|     |     | 2   | 0       | 246.6 | 49      | 10.3  | 79   | 25.4  | 0       | 1353.8 | 36      | 10.3  | 79   | 50.9  |
|     |     | 3   | 0       | 234.4 | 44      | 9.4   | 76   | 25.0  | 0       | 1231.9 | 37      | 10.0  | 76   | 47.8  |
|     | 2   | 1   | 2       | 279.1 | 47      | 13.4  | 67   | 29.3  | 0       | 1575.9 | 34      | 14.2  | 62   | 60.6  |
|     |     | 2   | 0       | 251.1 | 30      | 12.2  | 59   | 29.0  | 0       | 1349.9 | 26      | 11.6  | 49   | 57.4  |
|     |     | 3   | 0       | 238.8 | 11      | 9.0   | 46   | 30.2  | 0       | 1225.7 | 6       | 8.1   | 33   | 51.3  |
|     | 3   | 1   | 1       | 277.8 | 22      | 17.7  | 47   | 33.3  | 0       | 1570.6 | 24      | 19.1  | 52   | 69.4  |
|     |     | 2   | 0       | 254.0 | 15      | 13.9  | 39   | 33.7  | 0       | 1351.4 | 10      | 11.0  | 25   | 63.0  |
|     |     | 3   | 0       | 235.5 | 10      | 10.7  | 31   | 32.4  | 0       | 1213.3 | 4       | 7.2   | 9    | 46.6  |

# Controle $\mathcal{H}_2$ Robusto por Realimentação de Saída

A estabilidade de um sistema dinâmico é algo imprescindível dentro dos projetos de engenharia. No entanto, a solução desse problema por meio do projeto de um controlador apenas estabilizante pode não ser suficiente por não apresentar a possibilidade de otimizar algum critério de desempenho desejado. A exigência de um funcionamento adequado, que implique em um menor gasto de energia, é uma constante nos sistemas reais. Consequentemente, tão importante quanto a garantia de estabilidade é a garantia de melhor desempenho. Neste capítulo, utiliza-se como critério de desempenho a norma  $\mathcal{H}_2$ , que tem sido investigada a fundo por pesquisadores de todo o mundo nos últimos anos.

O objetivo deste capítulo é apresentar condições estendidas dos resultados apresentados no Capítulo 2 para tratar o projeto de controladores  $\mathcal{H}_2$  robustos por realimentação de saída para sistemas lineares incertos a tempo discreto. Novamente é apresentado um procedimento para ser realizado em dois estágios. O primeiro estágio consiste em determinar um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros. Em seguida, os ganhos obtidos são utilizados como parâmetros de entrada para o segundo estágio, que, por sua vez, permite projetar um controlador robusto por realimentação de saída com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$ . As condições são baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e, diferentemente da maioria dos métodos presentes na literatura, podem ser aplicadas a sistemas com a matriz de saída incerta.

## 3.1 Preliminares

Considere o sistema linear incerto a tempo discreto dado por (1.1). O problema a ser investigado é o projeto de um ganho estático  $K$  associado à lei de controle por realimentação de saída  $u(k) = Ky(k)$  tal que o sistema em malha fechada seja robustamente estável

para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ , com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$ . Empregando-se a função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros, dada em (2.1), condições LMIs suficientes para o projeto de controladores de estado e saída são apresentadas.

## 3.2 Resultados

Primeiramente, é apresentada uma condição LMI que provê um ganho dependente de parâmetro por realimentação de estados com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$ .

**Teorema 3.1** *Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , matrizes  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\text{Tr}(W_i) < \mu^2, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_{1i}G_i + D_{2i}Z_i \\ \star & G_i + G'_i - P_i \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

$$\begin{bmatrix} W_i + W_j & C_{1i}G_j + C_{1j}G_i + D_{2i}Z_j + D_{2j}Z_i \\ \star & G_i + G_j + G'_i + G'_j - (P_i + P_j) \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \\ i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N, \quad (3.3)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & A_iG_i + B_{2i}Z_i & B_{1i} \\ \star & G_i + G'_i - P_i & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} P_i + P_j & A_iG_j + A_jG_i + B_{2i}Z_j + B_{2j}Z_i & B_{1i} + B_{1j} \\ \star & G_i + G_j + G'_i + G'_j - (P_i + P_j) & \mathbf{0} \\ \star & \star & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \\ i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N, \quad (3.5)$$

então, a lei de controle por realimentação de estados dependente de parâmetros dada por  $u = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x$ , com

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i, \quad G(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i G_i, \quad \alpha \in \Lambda_N, \quad (3.6)$$

estabiliza o sistema (1.1) com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\mu$ .

**Prova:** Usando-se a técnica de [dOOL<sup>+</sup>04] que trata os produtos de matrizes dependentes de parâmetros no contexto de normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , multiplique-se (3.1) por  $\alpha_i$ , (3.2) e (3.4) por  $\alpha_i^2$  e some para  $i = 1, \dots, N$ . Multiplique-se (3.3) e (3.5) por  $\alpha_i \alpha_j$ , e some para  $i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N$ . Somando-se os resultados têm-se, com

$$W(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i W_i, \quad \alpha \in \Lambda_N,$$

$$\text{Tr}(W(\alpha)) < \mu^2, \quad (3.7)$$

$$\begin{bmatrix} W(\alpha) & C_{cl}(\alpha)G(\alpha) \\ \star & G(\alpha) + G(\alpha)' - P(\alpha) \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A_{cl}(\alpha)G(\alpha) & B_1(\alpha) \\ \star & G(\alpha) + G(\alpha)' - P(\alpha) & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

com  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B_2(\alpha)Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$  e  $C_{cl}(\alpha) = C_1(\alpha) + D_2(\alpha)Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ . Multiplique-se (3.8) à esquerda por  $[\mathbf{I} \quad -C_{cl}(\alpha)]$  e à direita pelo respectivo transposto, para obter

$$C_{cl}(\alpha)P(\alpha)C_{cl}(\alpha)' - W(\alpha) < \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

Agora, aplique-se o complemento de Schur em (3.9) para obter

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - B_1(\alpha)B_1(\alpha)' & A_{cl}(\alpha)G(\alpha) \\ \star & G(\alpha) + G(\alpha)' - P(\alpha) \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Multiplique-se (3.11) à esquerda por  $[\mathbf{I} \quad -A_{cl}(\alpha)]$  e à direita pelo respectivo transposto para obter

$$A_{cl}(\alpha)P(\alpha)A_{cl}(\alpha)' - P(\alpha) + B_1(\alpha)B_1(\alpha)' < \mathbf{0}. \quad (3.12)$$

As desigualdades (3.7), (3.10) e (3.12) garantem (1.21) e, conseqüentemente, a lei de controle dependente de parâmetros dada por  $u = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x$  estabiliza o sistema (1.1) com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$ , dado por  $\mu$  para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . ■

O valor ótimo de  $\mu$  tal que as condições do Teorema 3.1 são verificadas, pode ser obtido por meio do seguinte problema convexo de otimização

$$\begin{aligned} \mu^\star &= \min \mu \\ \text{s.a } &(3.1)-(3.5). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Note que  $\mu^\star$  em (3.13) é um sub-ótimo com respeito ao ótimo global do Lema 1.2 devido à estrutura particular imposta a  $P(\alpha)$  e  $W(\alpha)$ , e ao teste de positividade de polinômios suficiente que foi proposto, isto é, impor que todos os coeficientes do polinômio devam ser positivos. Como é discutido em [dOOL<sup>+</sup>04], as relaxações do Teorema 3.1 têm-se mostrado eficientes e têm um aumento polinomial da complexidade com respeito às dimensões do sistema. Observe também que o ganho  $Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$  (isto é, as matrizes  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) foi obtido usando-se uma parametrização convexa de realimentação de estados para (1.21).

O próximo teorema apresenta uma maneira diferente para se obter um ganho de realimentação de estados com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  usando a matriz de Lyapunov afim nos

parâmetros dada em (2.1). Neste caso, uma parametrização convexa de realimentação de estados baseada em (1.20) foi utilizada.

**Teorema 3.2** *Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , matrizes  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\text{Tr}(W_i) < \mu^2, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} -W_i & \star \\ B_{1i} & -P_i \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} P_i - G_i - G_i' & \star & \star \\ A_i G_i + B_{2i} Z_i & -P_i & \star \\ C_{1i} G_i + D_{2i} Z_i & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} P_i + P_j - G_i - G_j - G_i' - G_j' & \star & \star \\ A_i G_j + A_j G_i + B_{2i} Z_j + B_{2j} Z_i & -P_i - P_j & \star \\ C_{1i} G_j + C_{1j} G_i + D_{2i} Z_j + D_{2j} Z_i & \mathbf{0} & -2\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

$$i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N,$$

então, a lei de controle por realimentação de estados dependente de parâmetros dada por  $u = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x$ , com  $Z(\alpha)$  e  $G(\alpha)$  dadas em (3.6), estabiliza o sistema (1.1) com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\mu$ .

**Prova:** Usando a técnica de [dOOL<sup>+</sup>04] que trata os produtos de matrizes dependentes de parâmetros, multiplique-se (3.14) e (3.15) por  $\alpha_i$ , (3.16) por  $\alpha_i^2$  e some para  $i = 1, \dots, N$ . Multiplique-se (3.17) por  $\alpha_i \alpha_j$ , e some para  $i = 1, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N$ . Somando-se os resultados, têm-se

$$\text{Tr}(W(\alpha)) < \mu^2, \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} -W(\alpha) & \star \\ B_1(\alpha) & -P(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) - G(\alpha) - G(\alpha)' & \star & \star \\ A_{cl}(\alpha)G(\alpha) & -P(\alpha) & \star \\ C_{cl}(\alpha)G(\alpha) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Aplicando-se o complemento de Schur em (3.19), obtém-se

$$B_1(\alpha)'P(\alpha)^{-1}B_1(\alpha) - W(\alpha) < \mathbf{0}. \quad (3.21)$$

Fazendo

$$Q(\alpha) = P(\alpha)^{-1}, \quad (3.22)$$

tem-se

$$B_1(\alpha)'Q(\alpha)B_1(\alpha) - W(\alpha) < \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Uma vez que (3.19) garante que  $P(\alpha)$  é definida positiva, tem-se

$$-G(\alpha)'P(\alpha)^{-1}G(\alpha) < P(\alpha) - G(\alpha) - G(\alpha)' < 0. \quad (3.24)$$

Substituindo-se (3.24) em (3.20), tem-se

$$\begin{bmatrix} -G(\alpha)'P(\alpha)^{-1}G(\alpha) & \star & \star \\ A_{cl}(\alpha)G(\alpha) & -P(\alpha) & \star \\ C_{cl}(\alpha)G(\alpha) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.25)$$

Multiplica-se (3.25) à direita por

$$\begin{bmatrix} G(\alpha)^{-1}P(\alpha) & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

e à esquerda pelo respectivo transposto, para obter

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & \star & \star \\ A_{cl}(\alpha)P(\alpha) & -P(\alpha) & \star \\ C_{cl}(\alpha)P(\alpha) & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

Aplica-se o complemento de Schur em (3.27) para obter

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) + P(\alpha)C_{cl}(\alpha)'C_{cl}(\alpha)P(\alpha) & \star \\ A_{cl}(\alpha)P(\alpha) & -P(\alpha) \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Multiplica-se (3.28) à esquerda e à direita por

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)^{-1} & \star \\ \mathbf{0} & P(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

para obter

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha)^{-1} + C_{cl}(\alpha)'C_{cl}(\alpha) & \star \\ P(\alpha)^{-1}A_{cl}(\alpha) & -P(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

Aplicando-se o complemento de Schur em (3.28) e considerando-se a mudança de variáveis (3.22), tem-se

$$A_{cl}(\alpha)'Q(\alpha)A_{cl}(\alpha) - Q(\alpha) + C_{cl}(\alpha)'C_{cl}(\alpha) < \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

As desigualdades (3.18), (3.23) e (3.31) garantem (1.20) e, conseqüentemente, a lei de controle dependente de parâmetros dada por  $u = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}x$  estabiliza o sistema (1.1) com o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\mu$ , para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ . ■

Os seguintes corolários podem ser utilizados para se obter um ganho robusto (independente de parâmetros). As provas são similares à prova do Teorema 3.1 e são, portanto, omitidas.

**Corolário 3.1** *Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que as LMIs (3.1), (3.2) e (3.4) sejam verificadas com  $G_i = G$ ,  $Z_i = Z$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então, o sistema (1.1) é estabilizável pela lei de controle robusta  $u = ZG^{-1}x$  com desempenho  $\mathcal{H}_2$  garantido dado por  $\mu$ .*

**Corolário 3.2** *Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $i = 1, \dots, N$  e matrizes  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tais que as LMIs (3.14), (3.15) e (3.16) sejam verificadas com  $G_i = G$ ,  $Z_i = Z$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então, o sistema (1.1) é estabilizável pela lei de controle robusta  $u = ZG^{-1}x$  com desempenho  $\mathcal{H}_2$  garantido dado por  $\mu$ .*

A condição do Corolário 3.1 foi originalmente publicada em [dOGB02, Teorema 9], e será usada na seção de experimentos numéricos para fins comparativos. Na sequência são apresentadas condições LMIs para o projeto de realimentação estática de saída usando-se as matrizes  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , provenientes da realimentação de estados, como ponto de partida.

**Teorema 3.3** *Sejam as matrizes  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , soluções do Teorema 3.1 ou do Teorema 3.2. Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , matrizes  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e matrizes  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times q}$  tais que as seguintes LMIs sejam verificadas*

$$\text{Tr}(W_i) < \mu^2, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.32)$$

$$B'_{1i}P_iB_{1i} - W_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.33)$$

$$B'_{1i}P_jB_{1i} + B'_{1i}P_iB_{1j} + B'_{1j}P_iB_{1i} - 2W_i - W_j < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j \neq i, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.34)$$

$$B'_{1i}P_jB_{1\ell} + B'_{1\ell}P_jB_{1i} + B'_{1j}P_iB_{1\ell} + B'_{1\ell}P_iB_{1j} + B'_{1i}P_\ell B_{1j} + B'_{1j}P_\ell B_{1i} - 2(W_i + W_j + W_\ell) < \mathbf{0}, \\ i = 1, \dots, N - 2, \quad j = i + 1, \dots, N - 1, \quad \ell = j + 1, \dots, N, \quad (3.35)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc} -G'_iP_iG_i & G'_iA'_iF_i + Z'_iB'_{2i}F_i & G'_iC'_{1i}H_i + Z'_iD'_{2i}H_i & G'_iC'_{2i}L' - Z'_iR' \\ \star & P_i - F_i - F'_i & \mathbf{0} & F'_iB_{2i} \\ \star & \star & \mathbf{I} - H_i - H'_i & H'_iD_{2i} \\ \star & \star & \star & -R - R' \end{array} \right] < \mathbf{0}, \\ i = 1, \dots, N, \quad (3.36)$$

$$\left[ \begin{array}{cc}
-G'_i P_i G_j & G'_i A'_i F_j + G'_j A'_i F_i + G'_i A'_j F_i \\
-G'_j P_i G_i - G'_i P_j G_i & +Z'_i B'_i F_j + Z'_j B'_i F_i + Z'_i B'_j F_i \\
& 2P_i + P_j - 2F_i - F_j \\
* & -2F'_i - F'_j \\
* & * \\
* & * \\
G'_i C'_{1i} H_j + G'_j C'_{1i} H_i & (G'_i C'_{2i} + G'_i C'_{2j} \\
+G'_i C'_{1j} H_i + Z'_i D'_{2i} H_j & +G'_j C'_{2i}) L' \\
+Z'_j D'_{2i} H_i + Z'_i D'_{2j} H_i & -(2Z'_i + Z'_j) R' \\
\mathbf{0} & F'_i B_i + F'_i B_j + F'_j B_i \\
3\mathbf{I} - 2H_i - H_j - 2H'_i - H'_j & H'_i D_{2i} + H'_i D_{2j} \\
& +H'_j D_{2i} \\
& -3R - 3R'
\end{array} \right] < \mathbf{0},$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j \neq i, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.37)$$

$$\left[ \begin{array}{cccc}
\Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & \Theta_{14} \\
* & \Theta_{22} & \mathbf{0} & \Theta_{24} \\
* & * & \Theta_{33} & \Theta_{34} \\
* & * & * & -6R - 6R'
\end{array} \right] < \mathbf{0}, \quad \begin{array}{l}
i = 1, \dots, N-2, \\
j = i+1, \dots, N-1, \\
\ell = j+1, \dots, N,
\end{array} \quad (3.38)$$

com

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= -(G'_j P_i G_\ell + G'_\ell P_i G_j + G'_i P_j G_\ell + G'_\ell P_j G_i + G'_i P_\ell G_j + G'_j P_\ell G_i), \\
\Theta_{12} &= G'_j A'_i F_\ell + G'_\ell A'_i F_j + G'_i A'_j F_\ell + G'_\ell A'_j F_i + G'_i A'_\ell F_j + G'_j A'_\ell F_i + Z'_j B'_{2i} F_\ell + Z'_\ell B'_{2i} F_j \\
&\quad + Z'_i B'_{2j} F_\ell + Z'_\ell B'_{2j} F_i + Z'_i B'_{2\ell} F_j + Z'_j B'_{2\ell} F_i, \\
\Theta_{13} &= G'_j C'_{1i} H_\ell + G'_\ell C'_{1i} H_j + G'_i C'_{1j} H_\ell + G'_\ell C'_{1j} H_i + G'_i C'_{1\ell} H_j + G'_j C'_{1\ell} H_i + Z'_j D'_{2i} H_\ell \\
&\quad + Z'_\ell D'_{2i} H_j + Z'_i D'_{2j} H_\ell + Z'_\ell D'_{2j} H_i + Z'_i D'_{2\ell} H_j + Z'_j D'_{2\ell} H_i, \\
\Theta_{14} &= (G'_i C'_{2j} + G'_j C'_{2i} + G'_i C'_{2\ell} + G'_\ell C'_{2i} + G'_j C'_{2\ell} + G'_\ell C'_{2j}) L' - 2(Z'_i + Z'_j + Z'_\ell) R', \\
\Theta_{22} &= 2(P_i + P_j + P_\ell - F_i - F'_i - F_j - F'_j - F_\ell - F'_\ell), \\
\Theta_{24} &= F'_i B_{2j} + F'_j B_{2i} + F'_i B_{2\ell} + F'_\ell B_{2i} + F'_j B_{2\ell} + F'_\ell B_{2j}, \\
\Theta_{33} &= 6\mathbf{I} - 2(H_i + H_j + H_\ell + H'_i + H'_j + H'_\ell), \\
\Theta_{34} &= H'_i D_{2j} + H'_j D_{2i} + H'_i D_{2\ell} + H'_\ell D_{2i} + H'_j D_{2\ell} + H'_\ell D_{2j},
\end{aligned}$$

então o sistema (1.1) é robustamente estabilizável pela lei de controle por realimentação estática de saída  $u = Ky$ , com  $K = R^{-1}L$  e um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\mu$ .

**Prova:** Usando-se a técnica de [dOOL<sup>+</sup>04] que trata o produto triplo de matrizes dependentes de parâmetros, multiplique-se (3.32) por  $\alpha_i$ , (3.33) e (3.36) por  $\alpha_i^3$  e some para

$i = 1, \dots, N$ . Multiplique-se (3.34) e (3.37) por  $\alpha_i^2 \alpha_j$  e some para  $i = 1, \dots, N$ ,  $j \neq i$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Multiplique-se (3.35) e (3.38) por  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k$  e some para  $i = 1, \dots, N - 2$ ,  $j = i + 1, \dots, N - 1$ ,  $k = j + 1, \dots, N$ . Somando-se os resultados têm-se

$$\text{Tr}(W(\alpha)) < \mu^2, \quad (3.39)$$

$$B_1(\alpha)'P(\alpha)B_1(\alpha) - W(\alpha) < \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

$$\left[ \begin{array}{cc} -G(\alpha)'P(\alpha)G(\alpha) & G(\alpha)'A(\alpha)'F(\alpha) + Z(\alpha)'B_2(\alpha)'F(\alpha) \\ \star & P(\alpha) - F(\alpha) - F(\alpha)' \\ \star & \star \\ \star & \star \\ G(\alpha)'C_1(\alpha)'H(\alpha) + Z(\alpha)'D_2(\alpha)'H(\alpha) & G(\alpha)'C_2(\alpha)'L' - Z(\alpha)'R' \\ \mathbf{0} & F(\alpha)'B_2(\alpha) \\ \mathbf{I} - H(\alpha) - H(\alpha)' & H(\alpha)'D_2(\alpha) \\ \star & -R - R' \end{array} \right] < \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Multiplica-se (2.9) à direita por  $R_1(\alpha)$  e à esquerda por  $R_1(\alpha)'$ , com

$$R_1(\alpha) = \begin{bmatrix} G(\alpha)^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

para obter

$$\left[ \begin{array}{cc} -P(\alpha) & A(\alpha)'F(\alpha) + G(\alpha)^{-1'}Z(\alpha)'B_2(\alpha)'F(\alpha) \\ \star & P(\alpha) - F(\alpha) - F(\alpha)' \\ \star & \star \\ \star & \star \\ C_1(\alpha)'H(\alpha) + G(\alpha)^{-1'}Z(\alpha)'D_2(\alpha)'H(\alpha) & C_2(\alpha)'L' \\ -G(\alpha)^{-1'}Z(\alpha)'R' & \\ \mathbf{0} & F(\alpha)'B_2(\alpha) \\ \mathbf{I} - H(\alpha) - H(\alpha)' & H(\alpha)'D_2(\alpha) \\ \star & -R - R' \end{array} \right] < \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Multiplica-se (3.42) à esquerda por  $R_2(\alpha)$  e à direita por  $R_2(\alpha)'$ , com

$$R_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S(\alpha)' \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

e  $S(\alpha) = R^{-1}LC(\alpha) - Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$ , para obter

$$\left[ \begin{array}{ccc} -P(\alpha) & A_d(\alpha)'F(\alpha) & C_d(\alpha)'H(\alpha) \\ \star & P(\alpha) - F(\alpha) - F(\alpha)' & \mathbf{0} \\ \star & \star & \mathbf{I} - H(\alpha) - H(\alpha)' \end{array} \right] < \mathbf{0}, \quad (3.43)$$

com

$$A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B_2(\alpha)R^{-1}LC_2(\alpha), \quad C_{cl}(\alpha) = C_1(\alpha) + D_2(\alpha)R^{-1}LC_2(\alpha).$$

Multiplica-se (3.43) à esquerda por  $[\mathbf{I} \quad A_{cl}(\alpha)' \quad C_{cl}(\alpha)']$  e à direita pelo respectivo transposto, para obter

$$A_{cl}(\alpha)'(\alpha)P(\alpha)A_{cl}(\alpha) - P(\alpha) + C_{cl}(\alpha)'C_{cl}(\alpha) < \mathbf{0}, \quad (3.44)$$

a qual, junto com (3.39) e (3.40), garante que (1.20) é assegurada para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  e, conseqüentemente, o sistema (1.1) é robustamente estabilizável pelo ganho de realimentação de saída  $R^{-1}L$  com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\mu$ . ■

A novidade do Teorema 3.3 é a possibilidade de encontrar um ganho robusto por realimentação de saída a partir de um ganho de realimentação de estados *dependente de parâmetros*. Uma solução factível produz o ganho robusto desejado e uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, que garante simultaneamente a estabilidade do sistema em malha fechada com um ganho dependente de parâmetros de realimentação de estados e com o ganho robusto da realimentação estática de saída. A habilidade de buscar tal função de Lyapunov é explorada pela primeira vez nesta dissertação. Note que os métodos similares apresentados em [PA01, APS03, MBB04] requerem um ganho *robusto* de realimentação de estados como ponto de partida.

Um imediato subproduto do Teorema 3.3 é também a possibilidade de projetar um ganho robusto por realimentação de estados, como apresentado no próximo corolário.

**Corolário 3.3** *Sejam as matrizes  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , soluções do Teorema 3.1 ou do Teorema 3.2. Se existirem matrizes simétricas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $W_i \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , matrizes  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $H_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e matrizes  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que as LMIs (3.32)–(3.38) sejam verificadas com  $C_{2i} = I_n$ ,  $i = 1, \dots, N$ , então o sistema (1.1) é robustamente estabilizável pelo ganho de realimentação de estados dado por  $K = R^{-1}L$  com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  dado por  $\mu$ .*

**Prova:** Segue os mesmos passos da prova do Teorema 3.3. ■

Se o objetivo for determinar um ganho robusto por realimentação de estados, as condições do Corolário 3.3 podem ser usadas como uma alternativa quando as condições de [dOGB02] falham. A justificativa para este fato é que ambas abordagens são apenas suficientes, apresentando diferentes níveis de conservadorismo. A característica particular do método proposto é que se uma solução factível não for encontrada na segunda fase, o método pode ser executado novamente usando-se escolhas diferentes para o ganho de realimentação de estado dependente de parâmetros que estabiliza o sistema. Note que o

Teorema 3.1 e o Corolário 3.3 somente requerem que as matrizes  $Z_i$  e  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  estejam associadas a um ganho *estabilizante* dependente de parâmetros de realimentação de estados e não necessariamente com o critério  $\mathcal{H}_2$  estabelecido. Outros requisitos de desempenho associados ao controlador de estados como a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , alocação de pólos, positividade real etc., podem ser utilizadas para gerar os ganhos, mas nada pode ser dito *a priori* em relação à escolha que produzirá o melhor desempenho ao utilizarem-se as condições do Teorema 3.3 ou do Corolário 3.3, no segundo estágio. Por exemplo, pode-se usar as condições do Teorema 2.1 que considera apenas o problema de estabilização.

### 3.3 Experimentos Numéricos

Todos os experimentos foram feitos usando o SeDuMi [Stu99] e o YALMIP [Löf04] com o Matlab versão 7.0.1 em um computador Athlon 64 X2 6000+ (3.0 GHz), 2GB RAM (800 MHz) com Linux Ubuntu. A complexidade numérica associada aos exemplos é dada em termos do número  $V$  de variáveis escalares, o número  $L$  de linhas de LMIs, e o tempo computacional (em segundos).

#### Exemplo I

Considere o sistema (1.1) com  $n = 2$ ,  $N = 2$  e as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.7 \\ 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0.9 & 0.6 \\ -0.7 & -1.3 \end{bmatrix}, & B_{11} &= B_{12} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \\ B_{21} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.1 \end{bmatrix}, & B_{22} &= \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}, & C_{11} &= C_{12} = [1.3 \ 0], \\ C_{21} &= C_{22} = [1 \ 0], & D_{21} &= 0.8, & D_{22} &= -0.9. \end{aligned}$$

O objetivo é projetar um ganho robusto estabilizante por realimentação de estados. Usando as condições do Corolário 3.1 (o mesmo de [dOGB02, Teorema 9]) não foi possível encontrar uma solução factível. Entretanto, usando as condições do Teorema 3.1 é possível calcular um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros  $K(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$  que estabiliza o sistema ( $\mu = 2.6594$ ,  $V = 21$ ,  $L = 26$ , Tempo=0.06 s). As matrizes que compõem o ganho são

$$\begin{aligned} \left[ Z_1 \parallel Z_2 \right] &= \left[ -0.9948 \quad -1.4455 \parallel -0.3619 \quad 1.8595 \right], \\ \left[ G_1 \parallel G_2 \right] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2.8616 & -0.9005 & 3.0302 & -1.7254 \\ 0.1574 & 4.6547 & -1.7254 & 3.0528 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Usando-se estas matrizes como parâmetros de entrada para as condições do Corolário 3.3, pode-se determinar um ganho robusto de realimentação de estados para este sistema ( $\mu =$

3.7117,  $V = 20$ ,  $L = 28$ , Tempo=0.09 s) dado por

$$K = [-0.4387 \quad 0.2801].$$

A Figura 3.1 mostra os autovalores para o sistema em malha fechada  $A_{cl}(\alpha) = A(\alpha) + B_2(\alpha)K$ . Estes foram computados por meio de uma malha fina no espaço de parâmetros.

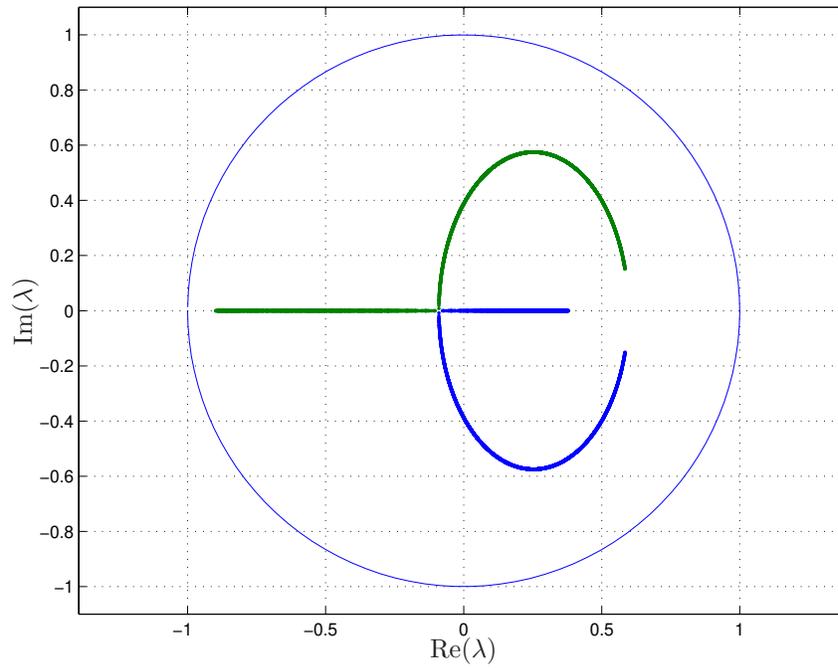


Figura 3.1: Autovalores da matriz dinâmica do sistema em malha fechada do Exemplo I.

O máximo autovalor em módulo é dado por  $|\lambda_{max}| = 0.8984$ , o qual prova que o ganho robusto de realimentação de estados obtido estabiliza o sistema. Este exemplo mostra que existem casos em que as condições LMIs de [dOGB02] podem falhar e a abordagem proposta é uma alternativa para projetar controladores de realimentação de estados robustos.

## Exemplo II

Para este exemplo, considere o sistema (1.1) com  $n = 3$ ,  $N = 2$  e as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & -0.4 \\ 0.4 & -0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.2 & -0.9 \\ -0.1 & -0.7 & 1.1 \\ 1.2 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_{1i} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.9 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad B_{2i} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ -1.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad C_{1i} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -1.0 \\ 0.1 \end{bmatrix}', \quad i = 1, 2,$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}', \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}', \quad D_{2i} = -1.3.$$

O objetivo é controlar o sistema por meio de um ganho robusto de realimentação de saída. Como a matriz de saída  $C_2(\alpha)$  é afetada por incertezas, o método proposto em [dOGB02, Seção 4.2] não pode ser aplicado. Além disso, as condições dos Corolários 3.1 e 3.2 não conseguem encontrar um controlador robusto por realimentação de estados. Como consequência imediata, o método de [MBB04], que necessita inicialmente de um ganho robusto de realimentação de estados, não pode ser aplicado. Por outro lado, o Teorema 3.1 e o Teorema 3.2 provêm ganhos de realimentação de estados dependente de parâmetros, tornando possível o uso do Teorema 3.3. Para fins de comparação, as condições LMIs de [DY07, Teorema 4] também foram implementadas. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 3.1, juntamente com a complexidade numérica associada a cada método.

Tabela 3.1: Comparação entre os métodos para projeto de realimentação de saída do Exemplo II.

| Método      | $\mu$  | $K$     | V   | L  | Tempo (s) |
|-------------|--------|---------|-----|----|-----------|
| [DY07, T4]  | 3.0702 | -1.1348 | 141 | 64 | 0.27      |
| Teorema 3.1 | 1.4548 | –       | 39  | 35 | 0.19      |
| Teorema 3.3 | 1.5713 | -1.0231 | 35  | 36 | 0.11      |
| Teorema 3.2 | 1.4675 | –       | 39  | 31 | 0.13      |
| Teorema 3.3 | 1.5729 | -1.0226 | 35  | 36 | 0.09      |

Como pode ser visto, as condições do Teorema 3.3 estabilizaram o sistema com um ganho robusto de realimentação de saída  $K = -1.0231$ , utilizando como parâmetro de entrada o ganho de realimentação de estados obtido por meio do Teorema 3.1. Do mesmo modo, utilizando-se o ganho de realimentação de estados obtido por meio do Teorema 3.2, as condições do Teorema 3.3 estabilizaram o sistema com um ganho robusto de realimentação de saída  $K = -1.0226$ . Além disso, o Teorema 3.3 apresentou custos garantidos

$\mathcal{H}_2$  menos conservadores do que [DY07], em ambos os casos. O tempo de resolução total do método proposto considera o tempo computacional dos dois estágios e, usando o Teorema 3.2 no primeiro estágio, a abordagem proposta demandou um tempo computacional menor do que [DY07]. Como nesse exemplo o ganho de realimentação de saída  $K$  é um escalar, é possível calcular o ganho ótimo (dentro de uma certa precisão) por meio de uma grade fina no espaço de  $K$ . Considerando quatro casas decimais, o ganho ótimo de realimentação de saída é  $K = -0.9570$ , com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  ótimo dado por  $\mu^* = 1.5425$ . Para tentar obter o resultado ótimo com as condições propostas, a condição do Teorema 3.2 usada no primeiro estágio foi testada novamente para valores de  $\mu$  acima do indicado na Tabela 3.1. Para  $\mu = 1.706$ , o segundo estágio forneceu o mesmo  $K$  ótimo.

### Exemplo III

Uma aplicação com apelo prático é investigada neste exemplo. O sistema representa uma planta mecânica (também utilizada em [Iwa96]) com duas massas-molas, cuja representação gráfica é mostrada na Figura 3.2. A função de transferência considerada é da força de entrada  $d$  aplicada à massa  $m_1$ , para o sinal de desempenho  $e = x_2$  (posição da massa  $m_2$ ). A seguinte equação a diferenças foi obtida usando-se aproximações de primeira ordem de Euler para a derivada e um tempo de amostragem de 0.1 s,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad [A \mid B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 \\ \frac{-0.1(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{0.1k_2}{m_1} & 1 - \frac{0.1c_0}{m_1} & 0 & \frac{0.1}{m_1} \\ \frac{0.1k_2}{m_2} & \frac{-0.1k_2}{m_2} & 0 & 1 - \frac{0.1c_0}{m_2} & 0 \end{array} \right].$$

As massas e a rigidez da segunda mola são assumidas constantes  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k_2 = 0.5$ . As forças de atrito  $f_1$  e  $f_2$  estão associadas ao coeficiente de atrito viscoso  $c_0$ . A rigidez da primeira mola e o coeficiente de atrito viscoso possuem incertezas e pertencem ao intervalo

$$1 \leq k_1 \leq 4, \quad 1 \leq c_0 \leq 4.$$

Ao avaliar a matriz dinâmica do sistema nos valores extremos dos intervalos dos parâmetros incertos, obtém-se um politopo de  $N = 4$  vértices. As outras matrizes do sistema são dadas por

$$C_{1i} = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad B_{1i} = [0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0]', \quad C_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{2i} = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

O terceiro e o quarto estados, que são as velocidades das massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, são os únicos disponíveis para realimentação e o objetivo é calcular um ganho de

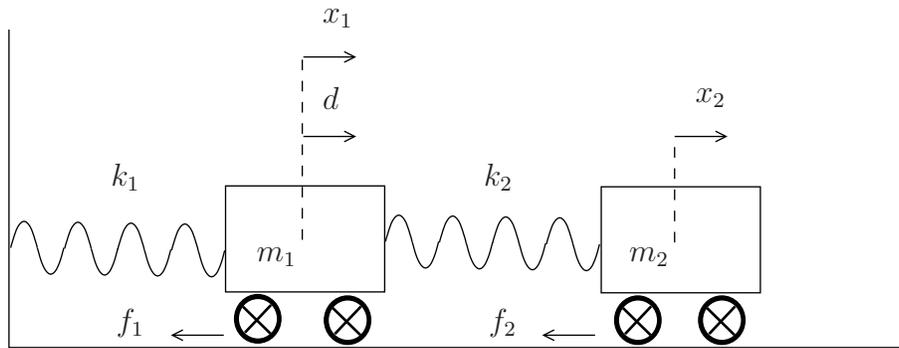


Figura 3.2: Sistema massa-mola.

realimentação estática de saída que minimiza a norma  $\mathcal{H}_2$  para o sistema em malha fechada. Como a matriz de saída  $C_2(\alpha)$  não é afetada por incertezas, o método de [dOGB02, Teorema 9] pode ser adaptado para lidar com o projeto de realimentação de saída, e será usado nas comparações numéricas. Com respeito às condições propostas, as condições do Teorema 3.3 são testadas usando as relaxações do Teorema 3.1 e do Teorema 3.2 no primeiro estágio, com limitantes fixos para a norma  $\mathcal{H}_2$  no intervalo  $\mu \in [0.47 \ 2]$ . Os resultados são apresentados na Figura 3.3.

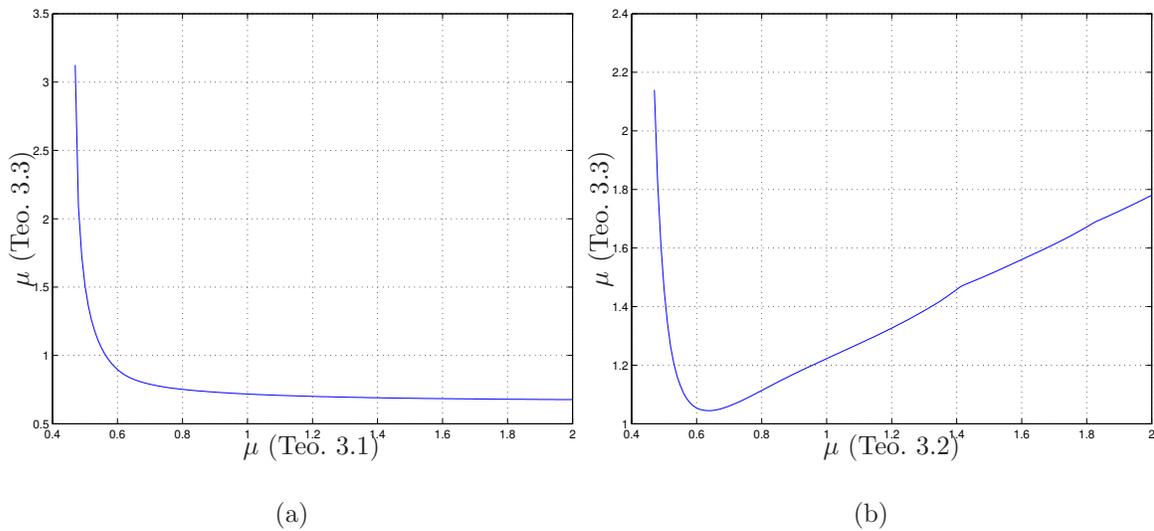


Figura 3.3: Custo garantido  $\mathcal{H}_2$  obtido pelo Teorema 3.3 usando controladores de realimentação de estados obtidos por meio do Teorema 3.1(a) e por meio do Teorema 3.2 (b), com limites fixos para a norma  $\mathcal{H}_2$  dados pelo intervalo  $\mu \in [0.47 \ 2.0]$ .

A Figura 3.3 (a) mostra que quanto maior é o valor de  $\mu$  usado no Teorema 3.1, menor é o valor de  $\mu$  (menos conservador) obtido pelo Teorema 3.3. Por outro lado, a Figura 3.3

(b) mostra que, para um determinado valor de  $\mu$ , no caso  $\mu = 0.63$ , usado no Teorema 3.2, obtém-se um valor de  $\mu$  menos conservador no Teorema 3.3, que é  $\mu = 1.045$ .

Para fins de comparação da complexidade numérica, os resultados obtidos pelo [DY07, Teorema 4], [dOGB02, Teorema 9] e Teorema 3.3 usando três controladores de realimentação de estados distintos (para  $\mu = 0.47$  e  $\mu = 2.00$  usando o Teorema 3.1 e para  $\mu = 0.63$  usando o Teorema 3.2) são mostrados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Comparação de resultados do Exemplo III.

| Método       | $\mu$ | $V$ | $L$ | Tempo (s) |
|--------------|-------|-----|-----|-----------|
| [DY07, T4]   | –     | 803 | 268 | 6.59      |
| [dOGB02, T9] | –     | 59  | 60  | 0.12      |
| Teorema 3.1  | 0.47  | 124 | 144 | 0.09      |
| Teorema 3.3  | 3.12  | 112 | 220 | 0.57      |
| Teorema 3.1  | 2.00  | 124 | 144 | 0.11      |
| Teorema 3.3  | 0.67  | 112 | 220 | 0.34      |
| Teorema 3.2  | 0.63  | 124 | 114 | 0.13      |
| Teorema 3.3  | 1.04  | 112 | 220 | 0.58      |

Como pode ser visto, os métodos disponíveis na literatura não são capazes de fornecer um controlador que estabiliza o sistema. Por outro lado, a abordagem proposta estabiliza o sistema e apresenta flexibilidade na procura do custo garantido  $\mathcal{H}_2$  menos conservador. Para ilustração, o ganho de realimentação de saída obtido pelo Teorema 3.3 que produz um limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_2$  igual a  $\mu = 0.6770$ , a partir do ganho de realimentação de estados obtido por meio do Teorema 3.1, é dado por

$$K = [-18.5369 \quad 5.3400]. \quad (3.45)$$

Finalmente, o sistema original a tempo contínuo foi simulado, usando-se o ganho (3.45),  $c_0 = 4$ ,  $k_1 = 1$  e condições iniciais  $x(0) = [2 \quad -2 \quad 1 \quad -1]'$ . A simulação foi feita usando a rotina *ode45* do Matlab e a estratégia usada para a entrada de controle  $u(t)$  do sistema foi calcular o valor do produto  $Ky(t)$  e fixá-lo durante o intervalo de tempo  $t \in [t, t+T_s)$ , sendo  $T_s$  o tempo de amostragem. Os resultados são mostrados na Figura 3.4. As trajetórias dos estados convergindo para zero também ilustram que a discretização de Euler (com tempo de amostragem  $T_s = 0.1$  s) utilizada neste exemplo foi eficaz.

## 3.4 Conclusão

Uma nova estratégia para projetar controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  por realimentação estática de saída para sistemas lineares a tempo discreto com parâmetros invariantes no tempo

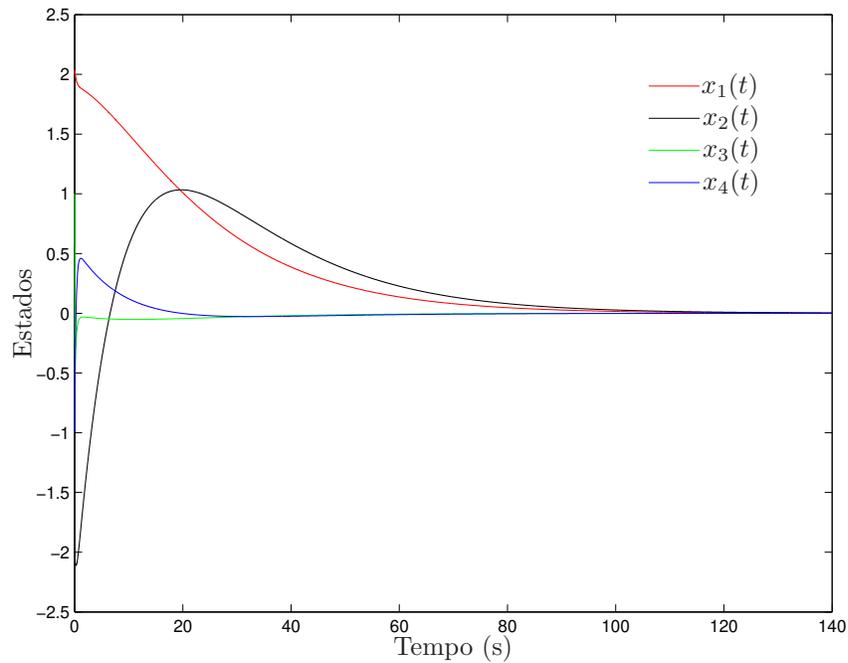


Figura 3.4: Trajetórias dos estados para o sistema original a tempo contínuo investigado no Exemplo III, usando-se o ganho dado em (3.45).

foi apresentada. A novidade encontra-se no fato de que, primeiramente, um controlador de realimentação de estados dependente de parâmetros é projetado e, então, o ganho obtido é usado como um parâmetro de entrada para o projeto de realimentação robusta de saída. Exemplos numéricos, incluindo um sistema físico, mostram diferentes situações nas quais a abordagem proposta supera os outros métodos disponíveis na literatura.

## Conclusões e Perspectivas

Este trabalho abordou o problema de projeto de controladores por realimentação estática de saída para sistemas lineares incertos a tempo discreto com parâmetros invariantes no tempo pertencentes a um politopo. O método é baseado na existência de uma função de Lyapunov com dependência afim nos parâmetros, que é mais geral do que a função de Lyapunov quadrática. Os testes são formulados em termos de um procedimento convexo de otimização baseado em um conjunto finito de desigualdades matriciais lineares, parametrizadas somente em termos dos vértices do politopo.

O método proposto é realizado em dois estágios. Primeiramente, calcula-se um controlador por realimentação de estados dependente de parâmetros. Em seguida, os ganhos obtidos são utilizados como parâmetros de entrada para o segundo estágio, que, por sua vez, projeta um controlador robusto por realimentação de saída. Vale ressaltar que, diferentemente da maioria dos métodos presentes na literatura, o método proposto pode ser aplicado a sistemas com a matriz de saída incerta.

Uma extensão para o caso de projeto de controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de saída também é apresentada. A mesma estratégia de projeto realizada em dois estágios é utilizada, porém com uma flexibilidade adicional no primeiro estágio. Caso o segundo estágio falhe, o primeiro estágio pode ser repetido novamente com um custo garantido  $\mathcal{H}_2$  arbitrado diferente, gerando novos ganhos estabilizantes para o controlador por realimentação de estados que, provavelmente, geram um resultado diferente no segundo estágio.

Exemplos numéricos mostraram que a estratégia proposta permite a obtenção de ganhos de realimentação de saída com custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  associados menos conservadores. Também foram apresentados casos em que a abordagem proposta encontra um ganho estabilizante enquanto outros métodos da literatura falham. A estratégia proposta também pode ser usada para calcular ganhos robustos de realimentação de estados quando os métodos disponíveis na literatura não conseguem fornecer solução. Em relação à eficiência computacional, pode-se dizer que a abordagem proposta apresenta um bom compromisso

entre o esforço computacional e precisão, como demonstrado por uma análise estatística para sistemas de diversas dimensões.

## Perspectivas

Alguns trabalhos em perspectiva, relacionados ao problema de realimentação de saída são:

- Obter condições para tratar o problema de realimentação estática de saída com outros critérios de desempenho, como a norma  $\mathcal{H}_\infty$ ;
- Utilizar condições com matrizes extras obtidas pelo lema de Finsler;
- Utilizar funções de Lyapunov polinomiais;
- Considerar parâmetros variantes no tempo e controladores do tipo *gain-scheduled*, ou seja, dependentes de parâmetros;
- Tratar sistemas lineares incertos a tempo contínuo;
- Empregar técnicas de algoritmos evolutivos para tratar o problema.

## Artigos publicados e aceitos

- H. R. Moreira, R. C. L. F. Oliveira e P. L. D. Peres. Realimentação de saída robusta a partir de controladores dependentes de parâmetros para sistemas lineares incertos discretos no tempo. Anais do *IX Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Brasília, Distrito Federal, Brasil, Setembro 2009.
- H. R. Moreira, R. C. L. F. Oliveira e P. L. D. Peres. Robust  $\mathcal{H}_2$  static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems. *Optimal Control Application and Methods*. No prelo.

# Bibliografia

- [ABJ75] B. D. O. Anderson, N. K. Bose, and E. I. Jury. Output feedback stabilization and related problems – solution via decision methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(1):53–66, February 1975.
- [APS03] D. Arzelier, D. Peaucelle, and S. Salhi. Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems: improving the guaranteed performance bound. In *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND 2003)*, Milan, Italy, June 2003.
- [BB91] S. P. Boyd and C. H. Barratt. *Linear Control Design: Limits of Performance*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [Ber92] D. S. Bernstein. Some open problems in matrix theory arising in linear systems and control. *Linear Algebra and Its Applications*, 162-164:409–432, 1992.
- [BOL06] Y. Bavafa-Toosi, H. Ohmori, and B. Labibi. A generic approach to the design of decentralized linear output-feedback controllers. *Systems & Control Letters*, 55(4):282–292, April 2006.
- [BPG89] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):65–72, July 1989.
- [BT00] V. D. Blondel and J. N. Tsitsiklis. A survey of computational complexity results in systems and control. *Automatica*, 36(9):1249–1274, September 2000.
- [CC09] H.-Y. Chung and S.-C. Chan. GA-based  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  static output feedback design with average performance concept and techniques of family of polynomials. *Expert Systems with Applications*, 36(3):5859–5865, April 2009.
- [CLS98] Y.-Y. Cao, J. Lam, and Y.-X. Sun. Static output feedback stabilization: An ILMI approach. *Automatica*, 34(12):1641–1645, December 1998.

- [CT99] C. A. R. Crusius and A. Trofino. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1053–1057, May 1999.
- [dCS00] M. C. de Oliveira, J. F. Camino, and R. E. Skelton. A convexifying algorithm for the design of structured linear controllers. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2781–2786, Sydney, Australia, December 2000.
- [DGKF89] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. Francis. State space solutions to the standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847, August 1989.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [dOGB00] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Design of dynamic output feedback decentralized controllers via a separation procedure. *International Journal of Control*, 73(5):371–381, March 2000.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679, June 2002.
- [dOOL<sup>+</sup>02] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 644–649, Las Vegas, NV, USA, December 2002.
- [dOOL<sup>+</sup>04] P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres.  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions. *International Journal of Systems Science*, 35(5):305–315, April 2004.
- [DY07] J. Dong and G.-H. Yang. Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(10):1930–1936, October 2007.
- [DZ08] H. Du and N. Zhang. Designing  $H_\infty/GH_2$  static-output feedback controller for vehicle suspensions using linear matrix inequalities and genetic algorithms. *Vehicle System Dynamics*, 46(5):385–412, May 2008.
- [EOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Aitrami. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, August 1997.

- [FM87] L. R. Fletcher and J. F. Magni. Exact pole assignment by output feedback — part 1. *International Journal of Control*, 45(6):1995–2007, June 1987.
- [Fra87] B. A. Francis. *A Course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory*, volume 88 of *Lectures Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4(4):412–448, July-August 1994.
- [GdO01] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  robust filtering for convex bounded uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(1):100–107, January 2001.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.
- [GdS98] J. C. Geromel, C. C. de Souza, and R. E. Skelton. Static output feedback controllers: stability and convexity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1):120–125, January 1998.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovskii, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.
- [Gol89] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 1989.
- [GPS96] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):997–1003, July 1996.
- [GPZ01] G. Garcia, B. Pradin, and F. Zeng. Stabilization of discrete time linear systems by static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12):1954–1958, December 2001.
- [GZL90] K. Gu, M. A. Zohdy, and N. K. Loh. Necessary and sufficient conditions of quadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5):601–604, May 1990.
- [GPCI07] F. G. Guimarães, R. M. Palhares, F. Campelo, and H. Igarashi. Design of mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control systems using algorithms inspired by the immune system. *Information Sciences*, 177(20):4368–4386, October 2007.
- [HB90] P. Hagander and B. Bernhardsson. On the notion of strong stabilizability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(8):927–929, August 1990.
- [HL06] D. Henrion and J. B. Lasserre. Convergent relaxations of polynomial matrix inequalities and static output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(2):192–202, February 2006.

- [IS94] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general  $\mathcal{H}_\infty$  control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317, August 1994.
- [Iwa96] T. Iwasaki. Robust performance analysis for systems with structured uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:85–99, March 1996.
- [KB01] A. Khaki-Sedigh and Y. Bavafa-Toosi. Design of static linear multivariable output feedback controllers using random optimization techniques. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 10(3-4):185–195, August 2001.
- [Kha96] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [Kim75] H. Kimura. Pole assignment by gain output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(4):509–516, August 1975.
- [KL82] P. T. Kabamba and R. W. Longman. Exact pole assignment using direct or dynamic output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(6):1244–1246, December 1982.
- [Löf04] J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pages 284–289, Taipei, Taiwan, September 2004. <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [Mag87] J. F. Magni. Exact pole assignment by output feedback — part 3. *International Journal of Control*, 45(6):2021–2033, June 1987.
- [Mat65] J. Matyas. Random optimization. *Automation and Remote Control*, 26(2):246–253, 1965.
- [MBB04] D. Mehdi, E. K. Boukas, and O. Bachelier. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(1):1–13, March 2004.
- [PA01] D. Peaucelle and D. Arzelier. An efficient numerical solution for  $\mathcal{H}_2$  static output feedback synthesis. In *Proceedings of the 2001 European Control Conference*, Porto, Portugal, September 2001.
- [PdA04] G. J. Pereira and H. X. de Araújo. Robust output feedback controller design via genetic algorithms and LMIs: The mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  problem. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, pages 3309–3314, Boston, MA, USA, June 2004.
- [PGB93] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains. *Automatica*, 29(2):491–493, March 1993.

- [PTP97] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres.  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{H}_2$  guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, February 1997.
- [RP01] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.
- [RP02] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.
- [SADG97] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback – A survey. *Automatica*, 33(2):125–137, February 1997.
- [SC05] C.-C. Sun and H.-Y. Chung.  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  robust static output feedback control design via mixed genetic algorithm and linear matrix inequalities. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control — Transactions of ASME*, 127:715–722, December 2005.
- [Sha03] U. Shaked. An LPD approach to robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  static output-feedback design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(5):866–872, May 2003.
- [SL93] V. L. Syrmos and F. L. Lewis. Output feedback eigenstructure assignment using two Sylvester equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(3):495–499, March 1993.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999. <http://sedumi.mcmaster.ca/>.
- [Tos06] R. Toscano. A simple method to find a robust output feedback controller by random search approach. *ISA Transactions*, 45(1):35–44, January 2006.
- [TTT99] K. C. Toh, M. J. Todd, and R. Tutuncu. SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite programming, Version 1.3. *Optimization Methods and Software*, 11(1–4):545–581, 1999.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [Wan96] X. A. Wang. Grassmannian, central projection and output feedback pole assignment of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(6):786–794, June 1996.
- [YBL74] D. C. Youla, J. J. Bongiorno Jr., and C. N. Lu. Single-loop feedback-stabilization of linear multivariable dynamical plants. *Automatica*, 10(2):159–173, March 1974.