

Unversidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departmento de Telemática

Programação Multi-objetivo Fuzzy

por

Ricardo Coêlho Silva

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de **Doutor em Engenharia Elétrica** na área de **Automação**.

Orientador: Akebo Yamakami

Co-Orientador: José Luis Verdegay Galdeano

Campinas-SP, 18 de setembro de 2009

Unversidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática

Programação Multi-objetivo Fuzzy

por

Ricardo Coêlho Silva

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de **Doutor em Engenharia Elétrica** na área de **Automação**.

Orientador: Akebo Yamakami

Co-Orientador: José Luis Verdegay Galdeano

Campinas-SP, 18 de setembro de 2009

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação/Tese defendida por Ricardo Coêlho Silva e aprovada através da comissão julgada em 18/09/2009


Orientador

Unversidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Telemática

Tese de Doutorado

Programação Multi-objetivo Fuzzy

por

Ricardo Coêlho Silva

Banca Examinadora:

Akebo Yamakami - FEEC/UNICAMP(Presidente)
Fábio Hernandes - DECOMP/UNICENTRO
Luiza A. P. Cantão - DEA/UNESP
Fernando Gomide - FEEC/UNICAMP
Paulo Valente - FEEC/UNICAMP

Campinas-SP, 18 de setembro de 2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Si38p Silva, Ricardo Coêlho
Programação multi-objetivo fuzzy / Ricardo Coêlho Silva. –
Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientador: Akebo Yamakami, José Luis Verdegay Galdeano
Dissertação (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

1. Conjuntos difusos. 2. Programação (Matemática). 3.
Programação multiobjetiva. 4. Otimização Matemática.
Computação evolutiva. I. Yamakami, Akebo. II. José Luis
Verdegay Galdeano. III. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título

Título em Inglês: Fuzzy multiobjective programming

Palavras-chave em Inglês: Fuzzy set, Mathematical programming, Multiobjective
programming, Mathematical optimization, Evolutionary
computation

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Fabio Hernandez, Luiza Amália Pinto Cantão, Fernando
Antonio Campos Gomide, Paulo Augusto Valente Ferreira.

Data da defesa: 18/09/2009

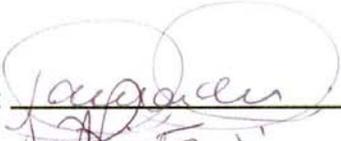
Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

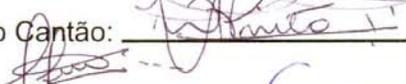
COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Ricardo Coêlho Silva

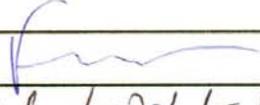
Data da Defesa: 18 de setembro de 2009

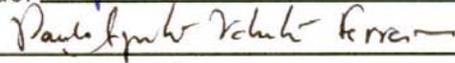
Título da Tese: "Programação Multi-Objetivo Fuzzy"

Prof. Dr. Akebo Yamakami (Presidente):  _____

Profa. Dra. Luiza Amália Pinto Cantão:  _____

Prof. Dr. Fábio Hernandes:  _____

Prof. Dr. Fernando Antônio Campos Gomide:  _____

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira:  _____

*Para meus pais Antonio Augusto da Silva e Regina Maria Coêlho Silva, e para
minha irmã Daisy Coêlho Silva.*

Todos nós temos problemas, porém o
que nos diferencia dos demais mortais é como
iremos solucioná-los.

Anônimo

Resumo

O objetivo deste trabalho é buscar, estudar e estabelecer as condições de otimalidade para resolver problemas de programação multi-objetivo irrestritos e restritos em um ambiente impreciso. Essas imprecisões estão presentes nos problemas da vida real e existem muitas formas de tratá-las, mas nesse trabalho será usado a teoria de conjuntos nebulosos. Utilizando como base a otimização nebulosa, foram desenvolvidas duas abordagens para resolver problemas multi-objetivo nebulosos. A primeira abordagem transforma um problema nebuloso em um problema clássico paramétrico com um número maior de funções objetivo, a qual é chamada de paramétrica. A segunda abordagem, chamada de possibilística, usa a teoria de possibilidade como um índice de comparação entre números nebulosos com a finalidade de garantir condições de otimalidade em um ambiente nebuloso. Alguns exemplos numéricos são resolvidos usando um algoritmo genético chamado NSGA-II elitista, com algumas modificações para a comparação de números nebulosos, e depois feita uma análise dos resultados encontrados por ambos os enfoques.

Palavras-chave: Conjuntos difusos, Programação matemática, Programação multiobjetiva, Otimização Matemática, Computação evolutiva.

Abstract

The main goal of this work is to search, study and present the optimality conditions to solve the unconstrained and constrained multiobjective programming problems in imprecise environment. These imprecisions can be found in the real-world optimization problems and there are utmost ways for dealing with them, but in this work will be used the theory of fuzzy sets. Using as a basis the fuzzy optimization, two approaches were developed to solve fuzzy multiobjective problems. The first approach transforms a fuzzy problem into a parametric classic multiobjective programming problem with many more objective functions, which is called parametric approach. The second one, called possibilistic, uses the possibility theory as a comparison index between two fuzzy numbers in order to ensure optimality conditions in a fuzzy environment. Some numerical examples are solved by using a genetic algorithm called elitist NSGA-II with some modifications to compare fuzzy numbers, and then the results obtained with both approaches are analysed.

Keywords: Fuzzy set, Mathematical programming, Multiobjective programming, Mathematical optimization, Evolutionary computation

Agradecimentos

À minha família, meus pais (Antonio e Regina) e minha irmã (Daisy), que me permitiram descobrir o valor da vida e, mesmo com meu ponto-de-vista de vida conflitante aos deles, compreenderam os esforços feitos para atingir os meus objetivos.

Ao meu orientador, prof. Akebo pela oportunidade dada e creditado sua confiança em meu potencial para concluir este trabalho. Ao meu co-orientador prof. Verdegay, ou melhor Curro entre os amigos, que me deu um voto de confiança para a realização de um estágio fora do Brasil e me mostrou um outro ponto de vista de ser um profissional competente. Também agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação.

Aos meus parentes, por me apoiarem e me ensinarem, mesmo cada um com sua maneira diferente de ver a vida, a buscar os meus desejos e vencer os desafios. Em especial ao meu avô, João Coelho (*in memorian*), que prometi batalhar na busca dos meus sonhos e não desistir em alcançá-los independente das dificuldades encontradas.

A todos os meus amigos que conquistei até este momento, os quais me proporcionam momentos importantes na minha vida e um excelente ambiente de trabalho, Fábio, Chicão e Bruno por estarem presentes nos momentos importantes nesta etapa de minha vida; Gelinho (*in memorian*), pois mostrou a todos que o jeito brincalhão não prejudica a vida profissional, pelo contrário, deixa o ambiente de trabalho, ou estudo, muito mais descontraído e produtivo.

Finalmente, à CAPES pelo apoio financeiro fornecido durante esta etapa de estudo e à realização deste trabalho, juntamente com o apoio financeiro para realizar um estágio no exterior que contribuiu bastante para o meu crescimento profissional (processo # 1457-07-1). Também agradeço aos projetos TIC-02970-JA e TIN2008-06872-C04-04 que me deram apoio financeiro na realização de visita técnica ao meu co-orientador na Espanha, que foi preponderante para a conclusão desse projeto de doutorado.

Conteúdo

Resumo	ix
Abstract	xi
Agradecimentos	xiii
Conteúdo	xv
Lista de Figuras	xviii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	4
1.2 Objetivo	4
1.3 Organização	5
2 Revisão bibliográfica	7
2.1 Introdução	7
2.2 Abordagens desenvolvidas para resolver problemas multi-objetivo em ambiente difuso	8
2.2.1 Função de pertinência das funções objetivo	8
2.2.2 Coeficientes nebulosos nas funções objetivo	13
2.2.3 Coeficientes nebulosos nas funções objetivo e restrições	13
2.3 Resumo desse capítulo	15
3 Programação multi-objetivo nebulosa irrestrita	17
3.1 Introdução	17
3.2 Abordagem paramétrica	19
3.2.1 Enfoque paramétrico para resolver problemas irrestritos	19
3.2.2 Formulação da idéia paramétrica	21
3.3 Abordagem possibilística	23
3.3.1 Conceitos básicos	23

3.3.2	Caracterização das soluções eficientes nebulosas	26
4	Programação multi-objetivo nebulosa restrita	33
4.1	Introdução	33
4.2	Abordagem paramétrica	35
4.2.1	Enfoque paramétrico para resolver problemas restritos	35
4.2.2	Formulação da idéia paramétrica	37
4.3	Abordagem possibilística	40
4.3.1	Condições de KKT para solução eficiente nebulosa	40
4.3.2	Combinação das abordagens paramétrica e possibilística	46
5	Resultados computacionais	49
5.1	Introdução	49
5.2	Programação multi-objetivo nebulosa irrestrita	50
5.3	Programação multi-objetivo nebulosa restrita	57
5.3.1	Parâmetros nebulosos somente nas funções objetivo	57
5.3.2	Parâmetros nebulosos nas funções objetivo e nas restrições	60
6	Considerações finais	65
6.1	Conclusões	65
6.2	Trabalhos futuros	67
A	Sistemas nebulosos	69
A.1	Conjuntos nebulosos	69
A.2	Números nebulosos	72
A.3	Funções nebulosas	73
A.4	Convexidade nebulosa	73
A.4.1	Conjuntos nebulosos convexos	73
A.4.2	Funções nebulosas convexas	74
B	Otimização multi-objetivo	75
B.1	Conceitos básicos	76
B.2	Métodos para resolver de problemas otimização multi-objetivo	77
B.2.1	Métodos à Priori	77
B.2.2	Métodos à Posteriori	78
B.2.3	Métodos iterativos	78
C	Otimização nebulosa	81
C.1	Otimização com restrições nebulosas	81
C.2	Otimização com objetivo e restrições nebulosas	82
C.3	Otimização com custos nebulosos na função objetivo	82
C.4	Otimização com coeficientes nebulosos nas restrições	83
C.5	Otimização multi-objetivo com restrições nebulosas	83

C.6	Otimização multi-objetivo com coeficientes nebulosos	84
D	Algoritmo genético NSGA	87
D.1	NSGA - Nondominated Sorting Genetic Algorithm	88
D.2	NSGA-II	90
	Bibliografia	93
	Índice	99

Lista de Figuras

1.1	Estrutura da informação: exemplos de informação baseada em medida e baseada em percepção.	2
1.2	Estrutura dos elementos da computação flexível.	3
3.1	Funções objetivo	28
3.2	Fronteira Pareto-ótima	28
3.3	Funções objetivo	31
3.4	Fronteira Pareto-ótima	32
4.1	Funções objetivo	42
4.2	Fronteira Pareto-ótima	43
4.3	Funções objetivo	45
4.4	Fronteira Pareto-ótima	46
5.1	Problema irrestrito.	51
5.2	Problema irrestrito.	52
5.3	Problema irrestrito.	53
5.4	Problema irrestrito.	54
5.5	Problema irrestrito.	55
5.6	Problema irrestrito.	56
5.7	Problema restrito.	58
5.8	Problema restrito.	59
5.9	Problema restrito.	60
5.10	Problema restrito.	61
5.11	Problema restrito.	63
5.12	Problema restrito.	64
A.1	Função triangular: Parâmetros (a, m, b) , com $a \leq m \leq b$	70
A.2	Função trapezoidal: Parâmetros (a, m, n, b) , com $a \leq m, n \leq b$ e $m \leq n$	70

A.3	Função gaussiana: Parâmetros (m, σ) , com $\sigma > 0$, sendo m o centro e σ a variância da gaussiana.	70
A.4	Representação do conjunto α -corte no intervalo $[a_\alpha, b_\alpha]$	72
B.1	Conjunto Pareto-ótimo	77
D.1	Número de publicações nos últimos anos	88

Capítulo 1

Introdução

No decorrer de nossa vida, adquirimos experiências e conhecimentos que podem ser úteis na tomada de decisões a cada dia, de acordo com os conceitos que nos foram transmitidos. Esse procedimento é tão comum e ao mesmo tempo tão importante que norteia muitos pesquisadores na tentativa de entendê-lo. Esses pesquisadores imaginam que esse entendimento pode ser convertido em um conjunto de regras formuladas de maneira matemática e, portanto, observar se um computador pode também tomar decisões conflitantes e de difícil solução em questão de pouco tempo. O mundo está cheio de problemas a serem resolvidos, mas muitas vezes os dados imprecisos que estão presentes neles os tornam intratáveis. Cada ser humano tem uma maneira particular de tratar as imprecisões do dia a dia. Do ponto de vista social, isso é bastante normal e é esperado que todos aprendam e adquiram uma certa experiência para estudar, trabalhar entre outras coisas. Entretanto, do ponto de vista acadêmico é bastante difícil encontrar uma similaridade, por mais pequena que seja, no intuito de codificar computacionalmente uma tomada de decisão de uma maneira mais geral possível e que esse código aprenda com o tempo gerando assim uma experiência. Muito já foi discutido sobre esse assunto, ao ponto de fazerem parte do conjunto de tópicos que pertencem ao mundo da ficção científica, do uso de robôs que façam os serviços mais pesados e domésticos, dos equipamentos que funcionam com o nosso pensamento entre muitas outras que facilitariam a nossa vida.

O primeiro passo na tentativa de entender esse tipo de problema foi discutido há mais de cinquenta anos quando foi criada a linha de pesquisa chamada Inteligência Artificial (IA). O próprio nome tenta vender a idéia de que a inteligência pode ser simulada de forma computacional e ela ganhou um grande sucesso quando Garry Kasparov, um grande mestre de xadrez, perdeu o confronto para o computador *DEEP BLUE*. Contudo, algumas sub-áreas de IA não obtiveram um

avanço esperado diante de um progresso, que foi pequeno e difícil de se realizar. Esses problemas ocorreram porque a complexidade de seu tratamento é muito elevada e porque os seres humanos têm uma capacidade de formar uma ampla variedade de tarefas físicas e mentais sem qualquer medida e nenhuma computação. Observando por esse ponto de vista, ainda não somos capazes de construir máquinas que tenham um nível de processamento inimaginável ou simplesmente construir programas que sejam capazes de realizar uma sinopse de um livro.

Procurando compreender o fraco desenvolvimento de algumas áreas da IA, alguns pesquisadores começaram a discutir os motivos, e atribuem esse desenvolvimento lento ao fato de que alguns objetos são tratados com valores rígidos, enquanto que eles surgem de percepções que são diferentes dependendo do ponto de vista que é analisado, como descrito na Figura 1.1. Em [80] é possível identificar alguns problemas na definição de IA original. Ele também aponta uma nova direção em IA que podemos discutir.

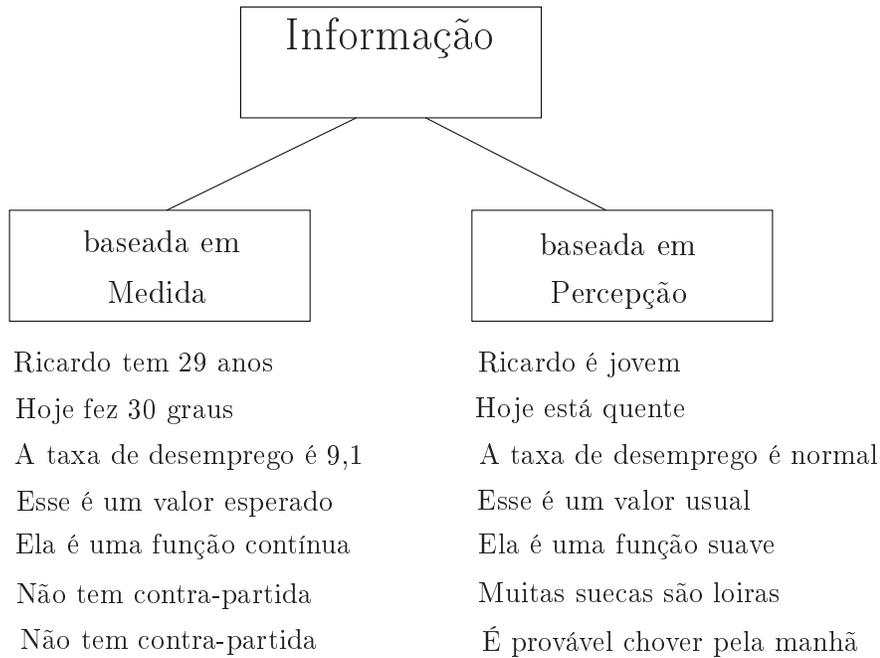


Figura 1.1: Estrutura da informação: exemplos de informação baseada em medida e baseada em percepção.

Em paralelo com as pesquisas realizadas em IA, foram desenvolvidas muitas outras áreas no intuito de interpretar as percepções que são descritas na Figura 1.1. Assim, na década de 90 foi criada uma coleção de metodologias que podem ser mescladas de distintas maneiras, mas de alguma forma cooperam entre si na obtenção de uma solução satisfatória. Esse grupo heterogêneo de metodologias foi primeiramente definido em [78, 79] e foi chamado de Computação Flexível. Trata-se de uma coleção de metodologias que ajudam a explorar a tolerância por

imprecisões e incertezas para lograr tratabilidade, robustez e baixo custo de solução. Suas principais componentes são a lógica nebulosa, raciocínio probabilístico, neurocomputação e metaheurísticas. A computação flexível está sendo usada em uma gama vasta de aplicações e a cada dia tem aumentado a sua importância. O principal modelo de regra que a computação flexível usa é o pensamento humano. A Figura 1.2 descreve os elementos que fazem parte da computação flexível e como ela é organizada.

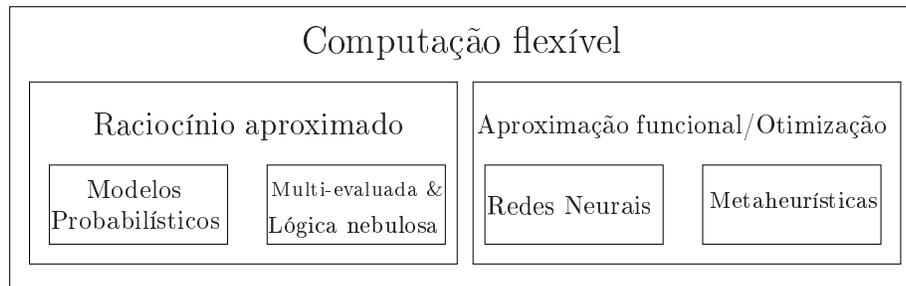


Figura 1.2: Estrutura dos elementos da computação flexível.

Outra maneira de definir a computação flexível é considerá-la como um contraponto ao que poderíamos denominar Computação Rígida que está diretamente conectada ao conceito de IA porque necessita de formulações matematicamente claras e precisas.

Um dos principais componentes da computação flexível é a lógica nebulosa que é responsável pela interpretação das informações do mundo real, que são caracterizadas por percepções. Contudo, existe uma semântica que requer um esclarecimento quando discutimos lógica nebulosa porque esse termo é usado em dois sentidos diferentes. Em um sentido mais reduzido, lógica nebulosa é um sistema lógico que ajuda na formalização do raciocínio aproximado e nesse sentido ela está enraizada na lógica multi-avaliada, mas com algumas poucas diferenças do sistema lógico multi-avaliada tradicional. Em um sentido mais amplo, lógica nebulosa é quase sinônimo de teoria de conjuntos nebulosos. A teoria de conjuntos nebulosos é basicamente a teoria de classes com limites incertos. Um ponto que devemos salientar está no fato de que qualquer teoria clássica pode ser estendida a um caso nebuloso. Hoje, a tendência é usar o termo **lógica nebulosa** em seu sentido mais amplo. Em parte isso reflete o fato de que teoria de conjuntos nebulosos parece menos suave que lógica nebulosa. As técnicas de lógica nebulosa têm sido utilizadas em diferentes campos de conhecimento e em diversas aplicações: aproximação de funções, previsão de séries temporais, filtragem de sinais, identificação e controle de processos, Pesquisa Operacional, dentre outros. Um número significativo de implementações práticas vem consolidando os sistemas nebulosos não só em instalações industriais, como em muitos produtos manufaturados.

O surgimento da Pesquisa Operacional (PO) forneceu uma base quantitativa

e racional para as decisões tomadas. A PO é um ramo da ciência que tem por finalidade desenvolver técnicas para otimizar o desempenho de sistemas. Suas aplicações encontram-se nas áreas industriais, de negócios, militares, governamentais, entre outras. O estudo da PO pode ser dividido em algumas sub-áreas, sendo a Programação Matemática (PM) uma delas. Ela tem como meta solucionar problemas que envolvem minimização (ou maximização) de uma ou várias funções objetivo, nos quais podem ser do tipo irrestrito ou restrito. Um problema de programação matemática com vários objetivos pertence a um conjunto que é resolvido por otimização multi-objetivo e esses objetivos são muitas vezes conflitantes e frequentes na vida real. Ao contrário de um problema mono-objetivo, os problemas multi-objetivos não possuem uma solução ótima única. Uma solução adequada deve obter um desempenho adequado para todos os objetivos. Em geral, os métodos designados para esses problemas são bastante específicos, de forma que as estruturas desses algoritmos dificilmente podem ser generalizadas para resolver outros problemas.

1.1 Motivação

Uma das características mais significativas dos seres humanos é a tomada de decisão para qualquer tipo de problema no dia a dia. Esses problemas são, na sua maioria, multidimensionais e com múltiplos objetivos, que são frequentemente conflitantes e não-mensuráveis entre si.

O uso de métodos de otimização para ajudar na tomada de decisão é bastante interessante, pois a otimização é uma área de pesquisa que usa procedimentos que encontram e comparam soluções factíveis até não outra solução que seja melhor que as já encontradas. Os modelos de otimização usam frequentemente programação matemática clássica, que tenta simular um modelo exato dos problemas de otimização de interesse.

Além disso, os dados que obtemos de alguns problemas práticos são valores aproximados, vagos ou imprecisos. Existem diferentes maneiras de tratar esses dados, mas eles são tratados pela teoria de conjunto nebulosos nesse trabalho. A teoria de números nebulosos mostrou um grande potencial na modelagem de sistemas que são não-lineares, complexos, mal-definidos e não-conhecidos.

Outro ponto importante está em que tipo de comparação entre números nebulosos será usado, pois existem vários índices de comparação para diferentes critérios e não é fácil escolher um índice que atenda a todas as suas metas.

1.2 Objetivo

O objetivo principal desse trabalho é desenvolver abordagens que resolvam problemas de programação multi-objetivo irrestritos e restritos em ambiente com dados

imprecisos, no qual essa imprecisão caracteriza as percepções do ser humano. Na tentativa de tornar essas percepções em dados computáveis, elas são formuladas matematicamente usando teoria de conjuntos nebulosos.

Nesse caminho, foram desenvolvidas duas abordagens que resolvem problemas multi-objetivo nebulosos usando duas maneiras de comparar números nebulosos. A primeira transforma o problema nebuloso em um problema clássico paramétrico e depois usa-se os critérios clássicos de Pareto-otimalidade para obter o conjunto de soluções eficientes satisfatórias que compõe a solução nebulosa. A segunda abordagem usa a teoria de possibilidade como um índice de comparação para definir um conjunto nebulosamente ordenado para obter o conjunto de soluções eficientes nebulosas.

Um objetivo auxiliar está em informar durante o texto que não é uma meta a competição entre as duas abordagens para se definir qual seja a melhor, pois a intenção está em fornecer ao decisor duas ferramentas que o ajude a selecionar a solução eficiente que melhor se adapte ao seu problema.

1.3 Organização

A tese está estruturada em seis capítulos e quatro apêndices, sendo que esses dez itens estão organizados da seguinte maneira:

- No Capítulo 1 é descrita uma discussão geral sobre o assunto dessa tese juntamente com a motivação que norteou o autor a traçar os objetivos a serem alcançados. Nesse capítulo também está discriminado como ela está organizada.
- No Capítulo 2 é mostrada uma revisão bibliográfica de alguns trabalhos que já foram publicados na área de otimização multi-objetivo em ambiente nebuloso. Esses trabalhos estão divididos por tipo de incerteza e os tipos que estão descritos neste capítulo tratam as incertezas na meta a ser otimizada, nos custos das funções objetivo e nos coeficientes das funções de restrição.
- No Capítulo 3 são introduzidas duas abordagens para resolver problemas de programação multi-objetivo nebulosos irrestritos. A primeira parametriza os números nebulosos que representam as incertezas transformando o problema multi-objetivo nebuloso em um problema clássico paramétrico com mais funções objetivos que o problema original e esses novos objetivos buscam encontrar um nível de satisfação ótimo. A segunda abordagem usa a teoria de possibilidade para definir um índice de comparação entre números nebulosos e, portanto, construir um conjunto nebuloso ordenado de acordo com o nível de satisfação escolhido pelo decisor juntamente com a extensão de definições e teorias que garantam condições necessárias para obter um conjunto de soluções eficientes.

- No Capítulo 4 são apresentadas as extensões das abordagens desenvolvidas no Capítulo 3 para resolver problemas de programação multi-objetivo nebuloso restrito, ou seja, agora existem funções que delimitam o espaço das variáveis de decisão. Essas funções de restrição podem ou não ter dados imprecisos, que também é exposto neste capítulo.
- No Capítulo 5 são apresentados os problemas usados para validar as abordagens desenvolvidas neste trabalho, junto com os resultados computacionais dos mesmos e alguns comentários sobre os resultados obtidos.
- Finalmente, algumas considerações finais sobre todo o trabalho desenvolvido e validado são apresentados no Capítulo 6 juntamente com perspectivas para trabalhos futuros.

Na tentativa de facilitar a compreensão de alguns pontos que possam pertencer a sua área do conhecimento, são descritos quatro apêndices com conceitos básicos de sistemas nebulosos, otimização multi-objetivo, otimização nebulosa e do algoritmo genético NSGA-II, que é usado nas simulações das abordagens propostas. Cada um desses apêndices está descrita da seguinte maneira:

- No Apêndice A é apresentado como um número nebuloso é definido e quais suas propriedades básicas. Diante dessa definição, podemos mostrar como representar um número nebuloso e como operar esses números e/ou conjuntos nebulosos. Outro ponto importante é definir uma função nebulosa que pode estar descrita sobre um conjunto nebuloso convexo, que é um critério muito importante no contexto de otimização.
- No Apêndice B descreve os conceitos clássicos de Pareto-otimalidade no intuito de obter um conjunto de soluções eficientes para problemas de programação multi-objetivo. São apresentados também alguns métodos de otimização para resolver problemas multi-objetivo clássicos e as três maneiras de classificá-los.
- No Apêndice C é feita uma revisão bibliográfica sobre os métodos e abordagens que já foram publicados sobre otimização nebulosa. Os dados imprecisos podem aparecer em diferentes pontos da formulação matemática dos problemas de programação e para cada tipo existem diferentes maneiras de solucioná-los.
- No Apêndice D apresenta um resumo sobre os algoritmos genéticos NSGA (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm*) e NSGA-II. Nesse resumo estão descritas as principais ideias usadas para a criação desse algoritmo com os seus pontos fortes e fracos. Outros algoritmos evolutivos concorrentes do NSGA são citados.

Capítulo 2

Revisão bibliográfica

2.1 Introdução

Existem vários conceitos hoje para a palavra **conhecimento** e ela é definida como sendo aquilo que se conhece de algo ou alguém. Assim, o conhecimento é uma ferramenta indispensável quando queremos escolher uma área de trabalho porque ele nos permitirá desenvolver um trabalho satisfatório. Esse conhecimento vai sendo agregado com a coleta de dados e informações sobre o assunto a ser pesquisado.

O assunto escolhido para essa tese foi o de programação matemática multi-objetivo em um ambiente nebuloso, onde as imprecisões podem estar presentes nas funções objetivo e/ou nas funções que geram o conjunto restrição. Em específico, nesse trabalho os dados imprecisos estão presentes nos custos das funções objetivo e/ou na relação de ordem e nos coeficientes das funções de restrição.

Os métodos de otimização usam frequentemente programação matemática clássica, que tenta desenvolver um modelo exato para o problema que estamos interessados em otimizar. Alguns destes métodos podem ser encontrados em [6, 13, 31, 32, 48]. Contudo, a modelagem desses problemas podem conter ambiguidades em seus dados, o que frequentemente ocorre em problemas do mundo real. Em recentes anos, a teoria de números nebulosos [76] mostrou grande potencial para lidar com sistemas que são não-lineares, complexos, mal-definidos e não bem entendidos. Ela encontrou numerosas aplicações devido à sua fácil implementação, flexibilidade e tolerância natural aos dados imprecisos. Essas qualidades podem ser úteis para representar comportamentos de complexidade arbitrária porque a teoria de números nebulosos está baseada em termos de linguagem natural. Em [81] é discutido o uso de teoria de conjuntos nebulosos que é uma teoria precisa de argumentos imprecisos e aproximados. Algumas aplicações

podem ser encontradas em [23, 40, 85], e estão inseridas nos campos de reconhecimento de padrões, análise de dados, controle, economia, pesquisa operacional, entre outros.

As representações e manipulações aritméticas das quantidades numéricas incertas podem ser feitas usando a teoria de números nebulosos. Entretanto, a comparação entre dois ou mais números, intervalos e conjuntos nebulosos não é fácil. Existem na literatura vários enfoques que foram desenvolvidos para conseguir compará-los (veja alguns exemplos em [10, 23, 39, 40, 54]), sendo que cada um é baseado em um ponto de vista diferente ou leva em consideração possíveis necessidades específicas do problema a ser resolvido. Diante desta variedade de opções, os autores aqui destacam a teoria de possibilidade, que é análoga à teoria de probabilidade e foi proposta por Zadeh [77] para agregar o conceito de uma distribuição de possibilidade à teoria de conjuntos nebulosos. Alguns índices de comparação para ordenar números e intervalos nebulosos empregam a teoria de possibilidade e eles foram propostos em [25]. Um outro ponto de vista é descrito em alguns trabalhos que transformam um problema de programação nebuloso em um ou vários problemas clássicos e, nesse momento, pode-se usar métodos clássicos para encontrar a melhor solução ou um conjunto ótimo de soluções. Um exemplo desse procedimento é descrito em [36], que transforma um problema de otimização nebulosa com um único objetivo em um problema multi-objetivo clássico e o número de funções objetivo é definido pela quantidade de coeficientes imprecisos presentes no problema nebuloso original.

2.2 Abordagens desenvolvidas para resolver problemas multi-objetivo em ambiente difuso

Várias noções de Pareto-otimalidade nebulosa foram descritas baseadas em diferentes métodos de comparação entre números com certa imprecisão. Estes métodos são de grande importância, pois são usados para ordenar as soluções candidatas e obter o conjunto de soluções não-dominadas. As definições de Pareto para problemas nebulosos podem ser divididas de três maneiras: (i) o uso de funções de pertinência para descrever as incertezas inseridas nas funções objetivo; (ii) coeficientes nebulosos como parâmetros somente nas funções objetivo; (iii) coeficientes nebulosos como parâmetros nas funções objetivo e no conjunto de restrições.

2.2.1 Função de pertinência das funções objetivo

O trabalho pioneiro em usar funções de pertinência para representar as funções objetivos e funções de restrição foi desenvolvido por Bellmann e Zadeh [8] e foi usado como referência para muitos outros trabalhos. Contudo, outros pesquisa-

dores descrevem maneiras diferentes de usar as funções de pertinência para obter um conjunto de soluções eficientes do problema multi-objetivo a ser otimizado, como descrito no decorrer dessa sub-seção.

Enfoque de Bellmann a Zadeh

Em [8], encontramos o primeiro desenvolvimento na direção de resolver problemas de programação multi-objetivo com dados imprecisos. O objetivo principal está em representar as incertezas por números nebulosos usando funções de pertinência para permitir um certo tipo de flexibilização dos dados imprecisos, tanto quando o objetivo é incerto como também quando a formação do conjunto de restrição é nebulosa. Em um segundo momento é realizado uma agregação de todas essas funções de pertinência no intuito de encontrar um valor que melhor satisfaça todas as funções de pertinência ao mesmo tempo, que é chamado de nível de satisfação. Alguns trabalhos adotam essa abordagem para resolver problemas de programação multi-objetivo linear, dentre os quais se destacam [74, 83, 84].

Esse nível de satisfação pode ser dado por uma escolha ou por um conjunto de escolhas realizadas pelo decisor. É possível destacar que essa decisão pode ser definida por um conjunto nebuloso de alternativas, resultantes da intersecção dos objetivo e restrições. Dessa maneira, esse conceito é definido da seguinte forma:

Definição 2.1. *Assuma que são dados um objetivo nebuloso G e uma restrição nebulosa C , que estão em um espaço de alternativas X . Então, G e C são combinados para formar a decisão D , a qual é um conjunto nebuloso resultante da intersecção de G e C , isto é,*

$$D = G \cap C.$$

Pode ser observado que nesse caso foram considerados para um único objetivo e uma única restrição nebulosa, mas essa definição pode ser generalizada para múltiplos objetivos e restrições. Assim, se existem m objetivos G_1, \dots, G_m e p restrições C_1, \dots, C_p sobre um espaço de alternativas X , então a decisão resultante é a intersecção dos objetivos e restrições nebulosos que foram dados, isto é,

$$D = G_1 \cap \dots \cap G_m \cap C_1 \cap \dots \cap C_p.$$

Note que na equação acima os objetivos e restrições nebulosos são inseridos da mesma maneira, de uma forma mais genérica, como foi descrito na Definição 2.1 na obtenção da decisão nebulosa. Essa é a ideia básica, que indentifica uma regra para tratar os objetivos e as restrições na obtenção de um processo de decisão em um ambiente nebuloso.

Enfoque de Farina e Amato

Em [26] e [27], uma sequência de definições de otimalidade é proposta, que pode ser dividida em quatro partes. Essa sequência começa com a definição de Pareto-

otimalidade clássica e depois eles apresentam três definições envolvendo conjunto de números nebulosos. Cada uma delas é uma extensão da definição clássica. Usando exemplos, os autores mostram que a definição de Pareto-otimalidade pode ser insatisfatória devido essencialmente a três razões:

1. Número de valores objetivos melhorados e iguais não é levado em conta;
2. Magnitudes das melhoras não são levadas em conta;
3. Nenhuma preferência entre os objetivos é considerada.

A sequência segue com uma definição de k -otimalidade, que introduz três funções para cada par $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \Omega$. A primeira função, n_b , determina o número de funções objetivo para as quais \mathbf{v}_1 domina \mathbf{v}_2 ; a segunda, n_e , retorna o número de funções objetivo para as quais as duas soluções candidatas são equivalentes; a última função, n_w , é o contador de funções objetivo para as quais \mathbf{v}_1 é dominado por \mathbf{v}_2 . Seja M o número de funções objetivo. Para $k \in [0, 1]$, pode-se definir o conceito de $(1 - k)$ -dominância e k -otimalidade como segue

Definição 2.2 ((1-k)-dominância). \mathbf{v}_1 é dito ser $(1 - k)$ -dominado por \mathbf{v}_2 se

$$\begin{cases} n_e < M \\ n_b \geq \frac{M - n_e}{k + 1} \end{cases} \quad (2.1)$$

Definição 2.3 (k -otimalidade). \mathbf{v}^* é k -ótimo se não existe nenhum $v \in \Omega$ tal que \mathbf{v} k -domina \mathbf{v}^* .

O terceiro elemento na sequência é a definição de k -otimalidade nebulosa, que é uma definição estendida da k -otimalidade com as três funções n_b , n_e e n_w substituídas por funções de pertinência n_b^F , n_e^F , n_w^F . Os conceitos de $(1 - k_F)$ -dominância e (k_F) -otimalidade também são extensões e são redefinições dos conceitos anteriores. Essa sequência termina com uma definição de otimalidade nebulosa mais geral. Uma definição nebulosa da relação de dominância muda ela mesma as funções n_b^F , n_e^F , n_w^F . Essa definição é dada abaixo.

Definição 2.4 (Dominância nebulosa). Seja $\mu_D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ uma função de pertinência definida como segue.

$$\mu_D(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \triangleq f_{\mu_D}(n_b^F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), n_e^F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), n_w^F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) \quad (2.2)$$

onde f_{μ_D} pode ser uma função de pertinência ou um sistema nebuloso.

Definição 2.5 (Otimalidade nebulosa). Uma função de pertinência μ_O representa a relação da otimalidade nebulosa se \mathbf{v}^* pertence ao conjunto definido pelo corte k_F em μ_O para qualquer $k_F \in [0, 1]$ e somente se não existe nenhum $\mathbf{v} \in \Omega$ tal que

$$\mu_D(\mathbf{v}, \mathbf{v}^*) > k_F \quad (2.3)$$

Enfoque de Köppen e Nickolay

Uma abordagem baseada na inserção de imprecisão, o que chamaremos de “fuzzificação” da relação de dominância de Pareto é proposta em [41] e [42]. Essa nova abordagem determina valores que ajudam na ordenação de um conjunto de vetores usando graus de imprecisão de dominância, o que resulta na definição abaixo:

Definição 2.6. *É dito que o vetor \vec{a} domina o vetor \vec{b} com grau μ_a de acordo com a divisão*

$$\mu_a(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\prod_i \min(a_i, b_i)}{\prod_i a_i} \quad (2.4)$$

e que o vetor \vec{a} é dominado pelo vetor \vec{b} com o grau μ_p de acordo com a divisão

$$\mu_p(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\prod_i \min(a_i, b_i)}{\prod_i b_i} \quad (2.5)$$

Observe que as definições não são simétricas, porque elas diferem no denominador. Esses graus de dominância são usados para ordenar um determinado conjunto de vetores de dimensão M , que representam o espaço das funções objetivo. O valor desses vetores pode ser o valor de adaptação de um problema de otimização multi-objetivo. Os M elementos são ordenados em uma ordem crescente dos valores calculados pela definição acima pela seguinte equação:

$$r_M(\vec{a}) = \max_{\vec{b} \in M \setminus \{\vec{a}\}} \mu_p(\vec{a}, \vec{b}) \quad (2.6)$$

Note que essa definição está relacionada com um conjunto. Um valor de ordenação do vetor \vec{a} de dimensão M pode somente ser designado com referência aos M dados contidos em \vec{a} .

Enfoque de Sakawa usando função de pertinência

Outro enfoque bastante conhecido para tratar modelos de otimização imprecisos está descrito em [56], e assume meta nebulosa para cada função objetivo de um problema de programação multi-objetivo, as quais são descritas pelo decisor. Assim, é possível deixar mais flexível os requisitos rígidos dos problemas de programação multi-objetivo para a minimização das m funções objetivo diante de um conjunto de restrições. Logo, o problema multi-objetivo flexibilizado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{\min} \quad & f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{x} \in \Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, p\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo que o símbolo $\widetilde{\min}$ denota uma versão relaxada da função min tradicional e essa relaxação é a responsável em interpretar uma relação que não é bem conhecida, isto é, as k funções objetivo devem ser minimizadas tanto quanto possível, dentro do espaço factível.

Essas imprecisões podem ser descritas por conjuntos nebulosos e quantificados por funções de pertinência, $\mu_i(f_i(\mathbf{x}))$, $i = 1, \dots, m$, para todas as funções objetivo. Em geral nos problemas de minimização, a meta nebulosa pode ser descrita como “substancialmente menor que ou igual a algum valor p_i ”, onde d_i é a violação máxima permitida, ou seja, é o menor valor que a função de pertinência pode assumir e o seu nível de satisfação é zero. Essas funções de pertinência são funções monotonicamente decrescentes e podem ser formuladas da seguinte maneira:

$$\mu_i(f_i(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & f_i(\mathbf{x}) \leq f_i \\ p_i(\mathbf{x}) & f_i < f_i(\mathbf{x}) \leq f_i + d_i \\ 0 & f_i(\mathbf{x}) > f_i + d_i \end{cases} \quad (2.8)$$

onde f_i representa o i -ésimo valor da função objetivo, tal que o grau da função de pertinência $\mu_i(f_i(\mathbf{x}))$ seja igual a 1, enquanto $f_i + d_i$ assume valor igual a 0 nessa função de pertinência. Os demais graus dessa função de pertinência, que está dentro de intervalo $[0, 1]$, são expressos pela função monotonicamente crescente $d_i(\mathbf{x})$, para cada $i = 1, \dots, m$.

Diante desse contexto, a definição básica de uma solução não-dominada pode ser modificada para que atenda a condição mais flexível da função min. Logo, a definição modificada, que é chamada solução ótima M-Pareto, de uma solução não-dominada pode ser descrita como segue:

Definição 2.7. $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é dito ser uma solução ótima M-Pareto para um problema de programação multi-objetivo com meta nebulosa se, e somente se, não existe um outro $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $\mu_i(f_i(\mathbf{x}^*)) \geq \mu_i(f_i(\mathbf{x}))$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $\mu_j(f_j(\mathbf{x})) \neq \mu_j(f_j(\mathbf{x}^*))$ para ao menos um j .

Assumindo que estamos tratando problemas não-lineares, a definição acima é somente válida para problemas que podemos garantir uma solução global para cada função objetivo. Entretanto, muitos problemas reais não permitem isso e necessitamos garantir uma solução local. Assim, uma solução ótima M-Pareto local pode ser definida como:

Definição 2.8. $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é dito ser uma solução ótima M-Pareto local para um problema de programação multi-objetivo com meta nebulosa se, e somente se, dado um número real $\delta > 0$ não existe um outro $\mathbf{x} \in \Omega \cap \mathcal{N}(\mathbf{x}^*, \delta)$ tal que $\mu_i(f_i(\mathbf{x}^*)) \geq \mu_i(f_i(\mathbf{x}))$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $\mu_j(f_j(\mathbf{x})) \neq \mu_j(f_j(\mathbf{x}^*))$ para ao menos um j , sendo que $\mathcal{N}(\mathbf{x}^*, \delta)$ representa uma vizinhança de tamanho δ do ponto \mathbf{x}^* .

Infelizmente, muitas vezes as soluções ótimas M-Pareto (locais) consistem de um número elevado de pontos e, portanto, o tomador de decisão deve selecionar uma solução final (local) que pertence ao conjunto ótimo M-Pareto (local) como uma solução satisfatória.

2.2.2 Coeficientes nebulosos nas funções objetivo

Nesta sub-seção o foco está em abordagens que tratam de parâmetros imprecisos, que é o mesmo que nebulosos nesse trabalho, somente nas funções objetivo, mas foi encontrado somente um trabalho com essa característica e o mesmo está descrito abaixo.

Enfoque de Hussein e Maaty

O artigo [34] usa uma função de distribuição de possibilidade para derivar uma relação de ordem entre números imprecisos. Esse trabalho introduz o conceito de solução eficiente α -nebuloso, em que a solução eficiente ordinária é estendida baseada no α -corte de números nebulosos (O Apêndice A oferece mais explicação sobre α -corte). Uma condição necessária e suficiente para definir uma solução candidata é estabelecida. Ele usa a seguinte definição:

Definição 2.9. $x^* \in X$ é dito ser uma solução eficiente α -nebulosa para o problema de programação multi-objetivo não-linear se não existe nenhum outro $x \in \Omega$ tal que

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{a}}\{a \in \mathbb{R}^{\sum_{j=1}^n p_j} \mid f_j(x, a_j) \leq f_j(x^*, a_j)\} = \\ = \sup_{(a_1, \dots, a_n) \in A} \min\{\mu_{\tilde{a}_{11}}(a_{11}), \dots, \mu_{\tilde{a}_{1p_1}}(a_{1p_1}), \\ \dots, \mu_{\tilde{a}_{n1}}(a_{n1}), \dots, \mu_{\tilde{a}_{np_1}}(a_{np_1})\} \geq \alpha \end{aligned}$$

sendo que $\alpha \in [0, 1]$ e

$$\begin{aligned} A = \{a \in \mathbb{R}^{\sum_{j=1}^n p_j} \mid f_1(x, a_1) \leq f_1(x^*, a_1), \dots, \\ f_{j-1}(x, a_{j-1}) \leq f_{j-1}(x^*, a_{j-1}), \\ f_j(x, a_j) < f_j(x^*, a_j), \\ f_{j+1}(x, a_{j+1}) \leq f_{j+1}(x^*, a_{j+1}), \\ \dots, f_n(x, a_n) \leq f_n(x^*, a_n)\}. \end{aligned}$$

Diante da finalidade de caracterizar a solução eficiente α -nebulosa para o problema de programação multi-objetivo não-linear, é possível considerá-lo como um problema multi-objetivo paramétrico. Logo, pode-se analisar as mudanças globais somente nas restrições e nas funções objetivo.

2.2.3 Coeficientes nebulosos nas funções objetivo e restrições

Os enfoques descritos nesta sub-seção tratam de parâmetros incertos nas funções objetivo e no conjunto de restrições. Esses métodos são mais abrangentes que os anteriormente expostos. Isso ocorre porque se não houver incerteza no conjunto de restrições, os mesmos ainda podem ser aplicados.

Enfoque de Sakawa

Um dos primeiros trabalhos sobre Pareto-otimalidade nebulosa, que está descrito em [56], usa conjuntos α -corte para resolver problemas de programação multi-objetivo com parâmetros imprecisos. Esses conjuntos são definidos como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x, a) \triangleq (f_1(x, a_1), f_2(x, a_2), \dots, f_k(x, a_k)) \\ \text{s. a} \quad & x \in X(b) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x, b_i) \leq 0, j = 1, \dots, m\} \\ & (a, b) \in (A, B)_\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo que $A \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^k)$ e $B \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^j)$ representam, respectivamente, um vetor de parâmetros nebulosos, os quais são encontrados nas funções objetivo e no conjunto de restrições. Esses coeficientes são representados por $(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^j$, que pode ser arbitrariamente definido por qualquer valor pertencente a $(A, B)_\alpha$. Esse subconjunto nebuloso é criado por todos os vetores, cujos graus de cada função de pertinência excedem o nível α . O conceito de α -Pareto-otimalidade global e/ou local é introduzida abaixo.

Definição 2.10 (Solução ótima de α -Pareto (local)). $x^* \in X(b)$ é dito ser uma solução α -Pareto-ótimo (local) para o α -problema de programação multi-objetivo não-linear se e somente se não existe nenhum outro $x \in X(b)(\cap \mathcal{N}(x^*, r))$ e $(a, b) \in (A, B)_\alpha(\cap \mathcal{N}(a^*, b^*, r'))$ tal que $f_i(x, a_i) \leq f_i(x^*, a_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, k$, sendo que pelo menos uma dessas i desigualdades seja estrita, onde os valores correspondentes dos parâmetros a^* e b^* são chamados parâmetros ótimos para um certo nível α (e $\mathcal{N}(x^*, r) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x^*\| < r\}$ denota a r vizinhança de x^*).

As soluções α -Pareto-ótimas podem ser obtidas através de uma aplicação direta dos métodos usuais para resolver problemas com um único objetivo. Contudo, esse conjunto de soluções geralmente compreende um número infinito de pontos e a decisão deve selecionar uma única solução global e/ou local baseada em critérios subjetivos.

Enfoque de Ammar

Em [2] é mostrada as soluções eficientes dos problemas de programação multi-objetivo quadrática nebulosa. Alguns teoremas são usados para encontrar uma solução ótima da programação multi-objetivo quadrática escalar relativa a coeficientes nebulosos usando vetor de decisão como variáveis nebulosas. Considere o seguinte problema de programação multi-objetivo quadrática aleatória nebulosa:

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{X} \in \tilde{M}} \quad & \tilde{f}^r(\tilde{X}) = \tilde{X}^T \tilde{D}^r \tilde{X}, \quad r = 1, 2, \dots, k \\ \text{sujeito a:} \quad & \tilde{M} = \left\{ \tilde{X} \in \mathbb{R}^n | \tilde{A} \tilde{X} \lesssim \tilde{B}, \tilde{X} \gtrsim 0 \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

sendo que $\tilde{D}^r = (\tilde{d}_{ii}^r)_{n \times n}$, $r = 1, 2, \dots, k$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ji})_{m \times n}$, $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m)^T$, $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, $\tilde{d}_{ii}^r, \tilde{a}_{ji}, \tilde{b}_j \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$. \tilde{X} não é um vetor aleatório nebuloso e $\tilde{X} \gtrsim 0$

significa $(x_i)_\alpha \geq 0$ para qualquer $i = 1, \dots, n$. As relações \lesssim e \gtrsim denotam as inequações nebulosas.

Então, a técnica desenvolvida para resolver o Problema 2.10 o divide em vários modelos para cada um dos diferentes níveis de α . É claro que para qualquer valor de $\alpha \in [0, 1]$, os modelos são problemas de programação quadrática com números aleatórios. Os autores mostram que as condições de Karush-Kuhn-Tucker para o caso quadrático o reduzem a um problema linear complementar. Pode ser provado que se eles têm soluções factíveis, então existem soluções ótimas aleatórias, e valores ótimos são variáveis aleatórias em (Ω, A) .

Enfoque de Kuwano

O trabalho realizado por [43] usou uma função de distribuição de probabilidade para derivar uma relação de ordem entre números nebulosos. É usado nesse artigo o grau de possibilidade para transformar funções objetivo do problema original em restrições do novo problema, sendo que esses dois problemas são equivalentes. O objetivo do novo problema de otimização multi-objetivo é maximizar o grau de possibilidade das novas restrições ou minimizar o conjunto de nível de aspiração de cada uma das funções objetivo do problema original, que são fornecidos pelo decisor. É interessante ressaltar que esse trabalho emprega as definições clássicas de Pareto-otimalidade, pois as novas funções objetivo são funções que pertencem ao conjunto de números reais e a função de distribuição de possibilidade é somente usada na formulação de um problema de otimização multi-objetivo nebuloso.

2.3 Resumo desse capítulo

Tentamos nesse capítulo fazer uma revisão bibliográfica sobre algumas abordagens já publicadas que resolvem problemas de programação multi-objetivo. Muitos trabalhos descrevem enfoques específicos para resolver problemas multi-objetivos lineares, mas nesse trabalho estamos focando em abordagens mais gerais, isto é, que sirvam tanto para resolver problemas multi-objetivos lineares como não-lineares.

Os enfoques apresentados nesse capítulo apresentam vantagens e desvantagens, mas a principal desvantagem está em encontrar diferentes soluções eficientes nebulosas que obtêm imagens semelhantes o que aumenta ainda mais o conjunto eficiente e dificulta a escolha do decisor. Diante desse ponto de vista, no próximo capítulo são apresentados dois enfoques que apresentam essas vantagens sanando essa principal desvantagem.

Capítulo 3

Programação multi-objetivo nebulosa irrestrita

3.1 Introdução

Como é bem conhecido, Programação Matemática (PM) representa uma área de pesquisa que visa encontrar soluções eficientes para problemas da vida real. Esses problemas são formulados matematicamente de maneira clara e precisa. Eles necessitam ter a(s) função(ões) objetivo(s) a ser(em) otimizada(s), e eles podem ser do tipo irrestrito ou restrito. PM tem várias classes de problemas que podem ser encontrados em teoria de jogos, alocação de facilidades, problemas de logística, designação de tarefas, problemas de economia em geral, controle, processamento de sinais, entre outros. Várias aplicações e métodos podem ser encontrados em [7, 30, 33, 63, 75].

Os problemas de PM tratados neste trabalho têm duas ou mais funções objetivo, que são chamadas de problemas de programação multi-objetivo. Assim, primeiramente será mostrada a formulação matemática de um problema de programação multi-objetivo irrestrito :

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo que $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, ($m \geq 2$) é um vetor de objetivos.

Diante da dificuldade em obter uma solução ótima única, o conceito de uma solução ótima de Pareto foi introduzida em [52] e [53]. Alguns métodos específicos para resolver problemas de programação multi-objetivo são propostos em [13]. A grande maioria destes métodos são descritos por modelos de otimização que usam frequentemente PM clássica, a qual tenta desenvolver um modelo exato para resolver os problemas de otimização em geral.

No caso do Problema (3.1) ter todas as suas funções objetivo com característica linear, o problema a ser otimizado é chamado de problema de programação multi-objetivo linear. Caso contrário, ele é chamado de problema de programação multi-objetivo não-linear. Entretanto, existem outras formas de identificarmos ou separarmos os problemas de otimização, como por exemplo os de Programação Convexa (PC), que é um conjunto de problemas de programação matemática que engloba todos os problemas lineares e alguns casos particulares de não-lineares.

Por um lado, muitos problemas do mundo real não podem ser adequadamente representados de maneira linear devido à natureza das funções que são não-lineares. Por outro lado, os problemas de PM necessitam ser formulados de forma clara e precisa, mas na grande maioria dos casos seus dados são incertos, imprecisos ou mal-definidos. Existem algumas maneiras de conseguir descrever matematicamente essas incertezas, como programação estocástica, lógica nebulosa, caos ou até mesmo com uma aproximação numéricas destes dados imprecisos.

A lógica nebulosa e a teoria dos conjuntos nebulosos foram desenvolvidas por L. A. Zadeh[76], na tentativa de refletir matematicamente a imprecisão do mundo real. Hoje em dia, a lógica nebulosa, ou melhor, *Soft Computing* (SC) é empregada com grande sucesso na concepção, construção, formulação e utilização de uma ampla gama de produtos e sistemas em que o funcionamento é diretamente baseado na forma de raciocínio do ser humano. Um problema de programação multi-objetivo nebuloso irrestrito pode ser formulado como

$$\begin{aligned} \widetilde{\min} \quad & F(\tilde{\mathbf{c}}; \tilde{\mathbf{x}}) \\ \text{s.a} \quad & \tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{\Omega} \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo que $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ($m \geq 2$) um vetor de objetivos, $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{m \times p})$ representa os parâmetros nebulosos nas funções objetivo e $\widetilde{\Omega} = \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de solução factíveis. $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ define o conjunto de números nebulosos, $\mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ define o conjunto de vetores n -dimensionais com parâmetros nebulosos e $\mathbb{F}(\mathbb{R}^{m \times p})$ define o conjunto de matrizes $(m \times n)$ -dimensionais com parâmetros nebulosos. Dentre os parâmetros incertos que foram descritos no Problema (3.2), podemos observar que as imprecisões podem estar presentes em vários pontos do problema.

Existem casos de problemas do mundo real em que os seus parâmetros são raramente conhecidos com exatidão e necessitam ser estimados. Assim, a aplicação de métodos que consigam descrever matematicamente essas imprecisões é necessária, como descrito em [3, 44, 50, 73].

Esse capítulo mostra o uso de duas abordagens diferentes para obter um conjunto de soluções satisfatórias para os problemas de programação multi-objetivo irrestritos com parâmetros incertos nas funções objetivo. Esses enfoques foram baseados nos trabalhos [4, 65, 66, 68, 70], que foram publicados pelo autor dessa tese. A primeira abordagem está inserida no contexto de programação flexível, que é apresentada na seção 3.2. Esse tipo de programação descreve um enfoque paramétrico que é construído pela transformação de um problema de programa-

ção multi-objetivo nebuloso em um problema multi-objetivo clássico paramétrico e, portanto, é possível encontrar um conjunto de soluções eficientes levando em consideração o nível de satisfação definido pelo decisor. Posteriormente, uma abordagem no contexto de programação possibilística é descrita na Seção 3.3, e uma nova forma para encontrar a região ótima de Pareto dentro do contexto de uma visão nebulosa é introduzida. O conjunto nebulosamente ordenado é definido para usar uma função de distribuição de possibilidade como uma medida de comparação e o conjunto Pareto-ótimo nebuloso segue dessa definição.

Neste trabalho, a maneira de tratar os dados imprecisos presentes nos problemas de otimização irrestritos da vida real que foi escolhida é a teoria de números nebulosos. Desta forma, neste capítulo todos os dados imprecisos descritos no Problema (3.2), que são os parâmetros ou custos das funções objetivos, são tratados usando essa teoria de números nebulosos.

3.2 Abordagem paramétrica

Dentre as várias abordagens encontradas para transformar um problema de programação matemática nebuloso em um problema de programação matemática clássico, pode-se destacar a paramétrica. Ela transforma o problema nebuloso em vários problemas clássicos com a inserção de um parâmetro que representa o nível de satisfação, o qual pertence ao intervalo $[0,1]$. Outro enfoque a ser considerado é definir esse novo parâmetro como uma variável de decisão do problema e tentar otimizá-la e encontrar o nível de satisfação ótima.

A abordagem paramétrica está dividida em duas etapas. Primeiramente, é exposta a idéia básica do uso dos parâmetros que ajudam a transformar o problema nebuloso em um problema clássico. Depois de descrita essa idéia paramétrica, são apresentadas duas formulações matemáticas que transformam um problema de programação nebuloso irrestrito em um problema clássico paramétrico irrestrito.

3.2.1 Enfoque paramétrico para resolver problemas irrestritos

As incertezas presentes nos custos das funções objetivo de problemas de programação multi-objetivo nebulosos são representadas por custos nebulosos. Esses custos tentam expressar as incertezas permitindo algumas violações, o que não são permitidas no caso clássico. Esses parâmetros nebulosos podem ser definidos pelo decisor. Assim, um problema de programação multi-objetivo irrestrito com parâmetros nebulosos nas funções objetivo pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{\min} \quad & F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.3}$$

sendo que $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ($m \geq 2$) é um vetor de objetivos, $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{n \times m})$ representa um vetor de parâmetros nebulosos.

Um conjunto de funções de pertinência define o grau de pertinência (satisfação) de uma solução $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Essas funções de pertinência podem ser formulados como segue:

$$\mu_i : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1], \quad i \in I$$

tal que μ é uma função de pertinência e I é o conjunto que contém todos os parâmetros imprecisos.

Assim, o problema multi-objetivo nebulosos irrestrito pode ser definido de uma forma compacta:

$$\widetilde{\min} \{F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Na literatura existem várias maneiras de representar o número nebuloso por um número clássico usando algumas técnicas como os índices de Yager, como descrito em [9], o valor central entre outros, as quais são chamadas de “defuzzificação”.

Neste trabalho, o número nebuloso é transformado em um intervalo que é definido pelos limitantes inferior e superior do número nebuloso por um determinado nível de α -corte.

Assim, a forma compacta pode ser re-escrita como:

$$\widetilde{\min} \{F([\mathbf{c}^L, \mathbf{c}^U]_\alpha; \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Logo, a solução nebulosa para o problema original nebuloso é um conjunto de soluções ótimas para cada $\alpha \in (0, 1]$. Esse conjunto de soluções pode ser definido da seguinte maneira

$$S(\alpha) = \min \{F(\mathbf{c}_\alpha; \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

sendo que $c_\alpha \in [c^L, c^U]_\alpha$ é um valor real obtido por uma combinação linear pelos limitantes do intervalo formado pelo nível de α -corte $\alpha \in (0, 1]$.

A solução para o problema anterior pode ser encontrado, α -corte por α -corte, resolvendo o problema de programação multi-objetivo paramétrico auxiliar irrestrito.

Portanto, o problema de programação multi-objetivo nebuloso irrestrito foi parametrizado no final da primeira fase. Na segunda fase o problema paramétrico é resolvido para cada um dos diferentes valores de α usando técnicas de programação multi-objetivo convencional. Logo, a solução ótima obtida para cada α do problema paramétrico satisfaz as condições de otimalidade suficientes de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para o caso multi-objetivo e esse ponto obtido é descrito como uma solução eficiente do problema nebuloso original.

Os resultados obtidos para cada valor de α geram um conjunto de soluções $S(\alpha)$ e, portanto, de acordo com o Teorema da Representação para números nebulosos, pode ser definido como

$$\tilde{S} = \bigcup_{\alpha} (1 - \alpha)S(\alpha),$$

onde pode ser usado para integrar todas essas α -soluções específicas. Assim, é mostrado que as soluções, em linhas gerais, são obtidas pelo modelo paramétrico, que determina uma solução nebulosa \tilde{S} , válida para o problema de programação multi-objetivo nebuloso irrestrito.

3.2.2 Formulação da idéia paramétrica

Um enfoque multi-objetivo que resolve um problema de programação linear nebuloso com incerteza nos custos da função objetivo é apresentado em [20, 21]. Esse enfoque pode ser estendido para resolver problemas de programação não-linear com um ou vários objetivos, como mostrado neste trabalho. Em [36] é desenvolvida uma outra abordagem multi-objetivo que resolve problemas de programação não-linear com um único objetivo com incertezas nos custos da função objetivo e no conjunto de restrições, mas ela também pode ser estendida para resolver problemas multi-objetivo nebuloso irrestritos.

Neste trabalho, problemas de programação multi-objetivo irrestrito com parâmetros imprecisos são considerados, sendo que componentes imprecisos serão definidos como números nebulosos. Esse conjunto de problemas pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & [f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}), f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}), \dots, f_m(\tilde{\mathbf{c}}_m; \mathbf{x})] \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde \mathbf{x} é um vetor de n números reais, $\tilde{\mathbf{c}}_i$ é um vetor de números nebulosos com p_i componentes, $i = \{1, 2, \dots, m\}$. Os números nebulosos são caracterizados pelas funções de pertinência que são definidas pelo decisor. As funções de pertinência podem ser definidas como

$$\mu_j : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad j \in \mathbb{J} = \{1, 2, \dots, m\}$$

Em particular, essas funções de pertinência serão descritas da forma:

$$\mu_j(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } c_j^U < y \text{ or } y < c_j^L \\ L_j(y) & \text{if } c_j^L \leq y \leq c_j^1 \\ R_j(y) & \text{if } c_j^2 \leq y \leq c_j^U \end{cases} \quad j \in \mathbb{J} \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{L}(\cdot)$ e $\mathbf{R}(\cdot)$ são assumidas como funções contínuas estritamente crescente e decrescente, respectivamente, $L_j(c_j^1) = R_j(c_j^2) = 1$, $j \in \mathbb{J}$.

Abordagem multi-objetivo por permutação de custos

O problema considerado em Verdegay[20], apresenta funções de pertinência trapezoidais para descrever os valores nebulosos. Neste trabalho, vamos considerar como definido em (3.5).

Considerando o $(1 - \alpha)$ -corte de todos os custos, para $\alpha \in [0, 1]$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu_j(x) \geq 1 - \alpha \Leftrightarrow L_j^{-1}(1 - \alpha) \leq x \leq R_j^{-1}(1 - \alpha), \quad j \in \mathbb{J}$$

Assim, de acordo com as transformações paramétricas mostradas acima, uma solução nebulosa para (3.3) pode ser obtida de uma solução paramétrica de um problema de programação multi-objetivo paramétrico equivalente que pode ser visto como:

$$\begin{aligned} \min \quad & [f_1(\mathbf{c}_1^1; \mathbf{x}), f_1(\mathbf{c}_1^2; \mathbf{x}), \dots, f_1(\mathbf{c}_1^{2^{p_1}}; \mathbf{x}), \dots, f_2(\mathbf{c}_2^1; \mathbf{x}), f_2(\mathbf{c}_2^2; \mathbf{x}), \dots, \\ & f_2(\mathbf{c}_2^{2^{p_2}}; \mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{c}_m^1; \mathbf{x}), f_m(\mathbf{c}_m^2; \mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{c}_m^{2^{p_m}}; \mathbf{x})] \quad (3.6) \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{c}^k \in \mathbb{E}(1 - \alpha), \quad \alpha \in [0, 1], \quad k = 1, 2, \dots, 2^{p_j}, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{E}(1 - \alpha)$, para cada $\alpha \in [0, 1]$, é o conjunto de vetores em \mathbb{R}^{p_j} , tal que p_j informa o número de número nebulosos que representam os custos incertos em cada função objetivo, para $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Cada um de seus componentes está no limitante inferior, $L_j^{-1}(1 - \alpha)$, ou no limitante superior, $R_j^{-1}(1 - \alpha)$, do respectivo $(1 - \alpha)$ -corte, isto é, $\forall k = 1, 2, \dots, 2^{p_j}$,

$$\mathbf{c}^k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_m^k) \in \mathbb{E}(1 - \alpha) \Leftrightarrow c_j^k = L_j^{-1}(1 - \alpha) \text{ ou } R_j^{-1}(1 - \alpha), \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Observe que encontrando uma solução paramétrica para (3.6), pode-se obter uma solução nebulosa para (3.4). Esse enfoque foi desenvolvido para o caso linear com um único objetivo e aqui é estendido para o caso com vários objetivos. A obtenção dessa solução pode ser encontrada usando qualquer abordagem de otimização para resolver problemas de programação multi-objetivo clássico.

Abordagem multi-objetivo por combinação de custos

As incertezas podem estar presentes de diferentes formas em problema de programação matemática. Um caso particular está apresentado no Problema (3.3). É mostrado nesta seção um enfoque paramétrico para resolver problemas de programação multi-objetivo nebulosos com custos imprecisos.

Uma abordagem multi-objetivo é desenvolvida em [36] para resolver problemas de programação não-linear com somente um objetivo, custos imprecisos na função objetivo e incerteza na relação de ordem nas restrições. Neste trabalho é mostrado o uso desta abordagem somente com custos nebulosos descrito no Problema (3.3). A solução nebulosa é obtida pela transformação de um problema de programação não-linear nebuloso em um problema não-linear multi-objetivo paramétrico no qual os parâmetros $\alpha, \beta_i \in [0, 1]$ são tratados como novas variáveis de decisão. Junto com a variável de decisão α , são também consideradas $m \times p$ novas variáveis de decisão β_{ij} , $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$, para transformar os intervalos $I_{ij}(\alpha) =$

$[h_{ij}^{-1}(1-\alpha), g_{ij}^{-1}(1-\alpha)]$ em funções da forma $c_{ij}(\alpha, \beta_{ij}) = h_{ij}^{-1}(1-\alpha) + \beta_{ij}(g_{ij}^{-1}(1-\alpha) - h_{ij}^{-1}(1-\alpha))$.

Consequentemente, obtemos o problema de minimizar $F(\mathbf{x}, \alpha, \beta_{11}, \dots, \beta_{mp})$ e maximizar e minimizar $\alpha, \beta_{ij}, i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$, simultaneamente. Portanto, o problema multi-objetivo que foi definido em (3.4) pode ser reformulado como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & [f_1(\mathbf{c}_1(\alpha, \beta_1); \mathbf{x}), f_2(\mathbf{c}_2(\alpha, \beta_2); \mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{c}_m(\alpha, \beta_m); \mathbf{x}), \alpha, 1 - \alpha, \\ & \beta_{11}, 1 - \beta_{11}, \dots, \beta_{1p}, 1 - \beta_{1p}, \dots, \beta_{m1}, 1 - \beta_{m1}, \dots, \beta_{mp}, 1 - \beta_{mp}] \\ \text{s.a} \quad & \mathbf{x} \in \Omega, \quad \alpha, \beta_{ij} \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (3.7)$$

sendo que o conjunto de soluções ótimas para o problema multi-objetivo é composto das soluções com os valores máximos para um grupo de funções $F(\mathbf{x}, \alpha, \beta_{11}, \dots, \beta_{mp})$ para cada valor dos parâmetros $\alpha, \beta_{ij}, i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$.

3.3 Abordagem possibilística

A teoria de possibilidade, a qual é análoga à teoria de probabilidade, foi proposta por L. A. Zadeh [77] para agregar o conceito de uma distribuição de possibilidade para a teoria dos conjuntos nebulosos. Um dos conceitos é o uso nos índices de comparação para a ordenação de números nebulosos. O emprego da teoria de possibilidade no intuito de criar um critério de comparação para ordenar números ou intervalos nebulosos foi proposta em [25] e originou-se do fato que muito das informações tem uma natureza possibilística, na qual a decisão humana depende de algo que não é exata. A representação e manipulação aritmética das quantidades numéricas incertas podem ser definidas pela média dos conjuntos nebulosos. Infelizmente, a comparação entre dois ou mais números, intervalos e/ou conjuntos nebulosos não é trivial. Diante desse impasse, várias abordagens para compará-los (veja mais exemplos em foram desenvolvidas [23, 39, 40, 54]), cada uma baseada em diferentes pontos de vista.

3.3.1 Conceitos básicos

Segundo as regras, para ordenar números nebulosos é preciso optar por uma medida de comparação e, portanto, a medida de possibilidade pode ser usada.

Definição 3.1 (Medida de possibilidade). *Seja A um sub-conjunto de U e seja \prod_X uma distribuição de possibilidade associada a uma variável X que toma valores em U . A medida de possibilidade, $\pi(A)$, de A é definida por:*

$$Poss\{X \text{ é } A\} \triangleq \pi(A) \triangleq \sup_{u \in U} \min(\mu_A(u), \pi_X(u)) \quad (3.8)$$

sendo que μ_A é uma função de pertinência de A e π_X é a função de distribuição de possibilidade de X . Ele pode ser interpretado como a possibilidade de que o valor X pertença ao conjunto A , o qual pode ser definido para ser numericamente igual à função de pertinência de X .

Então, é possível definir a maneira de comparar dois números nebulosos e esse índice pode ser formulado como segue:

$$Poss\{\tilde{a}_1 R^f \tilde{a}_2\} = \sup_{u,v \in U; uRv} \min(\mu_{\tilde{a}_1}(u), \mu_{\tilde{a}_2}(v)) \quad (3.9)$$

A definição anterior permite definir um conjunto nebulosamente ordenado $\mathbb{F}(\mathbb{R})$ que é uma extensão do conjunto classicamente ordenado, isto é, conjunto ordenado de números reais. Um conjunto é dito ser *completamente ordenado* se ele satisfaz as seguintes condições:

Definição 3.2 (Conjunto nebulosamente ordenado). *Um sub-conjunto nebuloso $A \subset \mathbb{F}(\mathbb{R})$ é nebulosamente ordenado com respeito à medida de possibilidade se cada elemento em A satisfaz as seguintes propriedades básicas:*

1. $Poss[\tilde{\mathbf{a}}_1 \leq^f \tilde{\mathbf{a}}_1] = 1$;
2. $Poss[\tilde{\mathbf{a}}_1 \leq^f \tilde{\mathbf{a}}_2] \geq \alpha_1$ e $Poss[\tilde{\mathbf{a}}_2 \leq^f \tilde{\mathbf{a}}_3] \geq \alpha_2$
 $\Rightarrow Poss[\tilde{\mathbf{a}}_1 \leq^f \tilde{\mathbf{a}}_3] \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$;
3. $Poss[\tilde{\mathbf{a}}_1 \leq^f \tilde{\mathbf{a}}_2] \geq \alpha_1$ e $Poss[\tilde{\mathbf{a}}_2 \leq^f \tilde{\mathbf{a}}_1] \geq \alpha_2$
 $\Rightarrow Poss[\tilde{\mathbf{a}}_1 =^f \tilde{\mathbf{a}}_2] \geq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$;

$\forall \tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3 \in A$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$.

De acordo com as expressões acima, um sub-conjunto nebuloso $A \subset \mathbb{F}(\mathbb{R})$ é completamente ordenado. Contudo, um sub-conjunto $\mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ é somente parcialmente ordenado. Logo, o conceito de solução ótima para os problemas com um único objetivo não se adapta na formulação dos problemas com vários objetivos, exceto na condição que o problema admita a chamada *solução ideal*, isto é, uma única solução que otimize simultaneamente todas as funções objetivo, como definido abaixo:

Definição 3.3 (Solução ideal). *A solução ideal $\tilde{\mathbf{y}}$ do problema multi-objetivo é definido como*

$$\tilde{\mathbf{y}}_i =^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^i), \quad i = 1, \dots, m$$

sendo que $\mathbf{x}^i = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x})$.

Uma solução ideal é admitida por um problema multi-objetivo quando o conjunto de argumentos $\{\mathbf{x}^i, i = 1, \dots, m\}$, possui um único elemento. Entretanto, um sistema multi-objetivo é mais frequentemente empregado em problemas com

objetivos conflitantes, quando é difícil admitir tal solução. Como a existência de uma solução ideal é muito rara, ela não será considerada na presente análise.

Conceitualmente, uma solução eficiente, de acordo com [13, 28, 29], é uma solução que não é dominada por qualquer outra solução factível. Assim, o conceito de dominância de um problema multi-objetivo nebuloso deveria refletir as preferências do decisor. Nesse trabalho, um novo conceito de dominância nebulosa é proposto, o qual pode ser ajustado pelo nível de satisfação que melhor descreve as preferências do decisor. Isso torna essa nova proposta mais flexível e aplicável para uma grande gama de problemas reais. Para qualquer ponto $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, vamos considerar os seguintes sub-conjuntos:

$$\Omega_{<}(\mathbf{x}^0; \alpha) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : Poss[F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \leq^f F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}^0)] \geq \alpha \text{ e} \\ Poss[F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) =^f F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}^0)] < 1\}$$

$$\Omega_{\geq}(\mathbf{x}^0; \alpha) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : Poss[F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \geq^f F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}^0)] \geq \alpha\}$$

$$\Omega_{\sim}(\mathbf{x}^0; \alpha) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \max\{Poss[F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \leq^f F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}^0)], \\ Poss[F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \geq^f F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}^0)]\} \leq \alpha\}$$

O sub-conjunto $\Omega_{<}(\mathbf{x}^0; \alpha)$ é composto dos pontos em \mathbb{R}^n que dominam \mathbf{x}^0 , enquanto $\Omega_{\geq}(\mathbf{x}^0; \alpha)$ engloba os pontos em \mathbb{R}^n que são dominados por \mathbf{x}^0 . O conjunto dos pontos que não dominam e não são dominados por \mathbf{x}^0 é denominado $\Omega_{\sim}(\mathbf{x}^0; \alpha)$. O parâmetro α é um vetor e cada termo deste vetor pertence ao intervalo $[0, 1]$, isto é, $\alpha_i \in [0, 1]$ para qualquer $i = 1, 2, \dots, m$. Estes conjuntos são definidos e eles podem denotar o conjunto de soluções Pareto-ótimas nebulosas

Definição 3.4 (Solução Pareto-ótima nebulosa). $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é dito ser uma solução Pareto-ótima nebulosa se não existe um outro ponto $x \in \Omega$ tal que $Poss[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i, \forall i$ e $Poss[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$ para ao menos um j , sendo que $\alpha_i \in [0, 1], \forall i$.

Diante da dificuldade de encontrar uma solução eficiente nebulosa global num grande grupo de problemas, é frequentemente aceitável usar uma solução eficiente nebulosa local. Uma solução eficiente nebulosa local para o problema proposto é definida abaixo:

Definição 3.5 (Solução Pareto-ótima local nebulosa). $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é dita ser uma solução Pareto-ótima local nebulosa se existe um número real $\delta \geq 0$ tal que não exista nenhum outro $x \in \Omega \cap \mathcal{N}(x^*, \delta)$ tal que $Poss[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i, \forall i$ e $Poss[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$ em ao menos um j , sendo que $\alpha_i \in [0, 1], \forall i$.

Note que a definição acima implica que uma solução candidata para o problema nebuloso proposto é (localmente) não-dominada ou eficiente, se não é possível achar (em uma certa vizinhança) uma outra solução que simultaneamente melhora todas as funções objetivo.

3.3.2 Caracterização das soluções eficientes nebulosas

A caracterização das soluções eficientes, $efi(\Omega)$, por meio de problemas escalares bem definidos é um enfoque recorrente em problemas multi-objetivo nebulosos. O seguinte teorema estabelece as condições necessárias de uma soluções eficientes para problemas escalares.

Teorema 3.1. $\mathbf{x}^* \in efi(\Omega)$ se, e somente se, \mathbf{x}^* resolve os m problemas escalares

$$\begin{aligned} P_k : \quad & \min_{\mathbf{x} \in \Omega} f_k(\tilde{\mathbf{c}}_k; \mathbf{x}) \\ \text{s. a} \quad & f_l(\tilde{\mathbf{c}}_l; \mathbf{x}) \leq^f f_l(\tilde{\mathbf{c}}_l; \mathbf{x}^*), \\ & l = 1, 2, \dots, m, \quad \forall l \neq k. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\mathbf{x}^* \in efi(\Omega)$, então não existe um outro $x \in \Omega$ tal que $Poss[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, e $Poss[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$, para algum j . Nesse caso \mathbf{x}^* resolve (3.10) para todo k .

(\Leftarrow) Suponha que \mathbf{x}^* resolve (3.10), mas $\mathbf{x}^* \notin efi(\Omega)$, então existe um outro $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $Poss[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i$, $\forall i$, e para algum j , $Poss[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}) \leq^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$. Portanto, \mathbf{x}^* não resolve o Problema (3.10). Essa contradição conclui essa prova. \square

A unicidade de uma solução para qualquer P_k , $k = 1, 2, \dots, m$, é caracterizado pelo resultado abaixo:

Teorema 3.2. Se $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é a solução única para (3.10) para qualquer k , então $\mathbf{x}^* \in efi(\Omega)$.

Demonstração. Assuma que $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é a solução única para (3.10), mas não é eficiente. Logo, existe ao menos um $\mathbf{x} \in \Omega$ tal que $Poss[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i$, $\forall i$, e $Poss[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$, para algum j . Assim, \mathbf{x}^* não é a solução única de (3.10). A contradição implica que $\mathbf{x}^* \in efi(\Omega)$. \square

O desenvolvimento das condições analíticas de soluções eficientes, baseadas na caracterização de soluções não-dominadas para os problemas P_k , $k = 1, 2, \dots, m$, é uma importante ferramenta na análise teórica. Contudo, tal análise produz somente m soluções não-dominadas, uma para cada problema escalar e é portanto, não adequado para gerar o conjunto completo Pareto-ótimo. Para gerar todo o conjunto eficiente, o teorema abaixo pode ser utilizado no lugar do Teorema 3.2.

Teorema 3.3. Se $\mathbf{x}^* \in efi(\Omega)$, então existe algum inteiro $k \in \mathcal{I} := \{1, \dots, m\}$ e escalares ϵ_j , $j = 1, \dots, m$ ($j \neq k$) tal que \mathbf{x}^* resolve:

$$\begin{aligned} P_k(\epsilon) : \quad & \min f_k(\tilde{\mathbf{c}}_k; \mathbf{x}) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in \Omega_k(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.11)$$

sendo que ϵ é definido como:

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_m) : \Omega_k(\epsilon) \neq \emptyset \\ \Omega_k(\epsilon) &:= \{\mathbf{x} \in \Omega : f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}) \leq^f \epsilon_j, \forall j \neq k\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$ não resolve o Problema (3.11) para algum $k \in \mathcal{I}$ e números reais ϵ_j , $j \in \mathcal{I}$ e $j \neq k$. Então, para qualquer valor fixo de k e $\text{Poss}[\epsilon_j =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] = 1$, $\forall j \in \mathcal{I}/\{k\}$, existe algum $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ tal que $\text{Poss}[f_k(\tilde{\mathbf{c}}_k; \mathbf{x}^0) =^f f_k(\tilde{\mathbf{c}}_k; \mathbf{x}^*)] < 1$ e $\text{Poss}[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^0) \leq^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_j$, $\forall j \neq k$. Assim, $\mathbf{x}^* \notin \text{efi}(\Omega)$; e essa contradição implica que \mathbf{x}^* resolve o Problema (3.11). \square

Para ilustrar o uso de $P_k(\epsilon)$, o seguinte problema de otimização multi-objetivo abaixo é considerado como exemplo:

Exemplo 3.1.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = (x + \tilde{c}_1)^2 \\ \min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = (x - \tilde{c}_2)^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

sendo que $\tilde{\mathbf{c}}_1 = (0, 0, 2)_{LR}$ e $\tilde{\mathbf{c}}_2 = (2, 1, 1)_{LR}$.

Tomando f_1 como o objetivo principal, é obtido

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) \leq^f \epsilon_2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

As figuras 3.1 e 3.2 apresentam a solução e a fronteira nebulosa, respectivamente:

Na Figura 3.1, o gráfico para $\min f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = (x + \tilde{c}_1)^2$ representa os valores inferior e modal que coincidem em parte. Isso acontece porque seus valores são iguais nesse exemplo.

O Problema (3.13) é substituído pela formulação lagrangiana abaixo

$$\text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \lambda) = f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) + \lambda(f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) - \epsilon_2) \quad (3.14)$$

Aplicando as condições de otimalidade para problemas de programação restritos descritos em [11], é obtido

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \lambda) &= 2(x + \tilde{c}_1) + 2\lambda(x - \tilde{c}_2) \cong 0 \\ x + \tilde{c}_1 + \lambda(x - \tilde{c}_2) &\cong 0 \quad (I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \lambda) &= (x - \tilde{c}_2)^2 - \epsilon_2 \cong 0 \\ x^2 - 2x\tilde{c}_2 + \tilde{c}_2^2 - \epsilon_2 &\cong 0 \\ x &\cong \frac{2\tilde{c}_2 \pm \sqrt{(2\tilde{c}_2)^2 - 4(\tilde{c}_2^2 - \epsilon_2)}}{2} \\ x &\cong \frac{2\tilde{c}_2 \pm \sqrt{4\epsilon_2 + 4(\tilde{c}_2^2 - \tilde{c}_2^2)}}{2} \\ x &\cong \tilde{c}_2 \pm \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} \end{aligned}$$

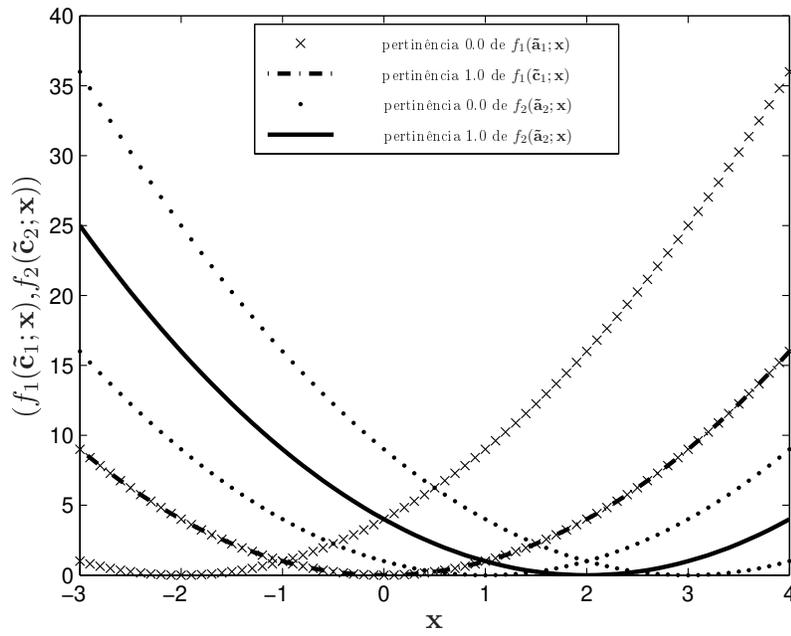


Figura 3.1: Funções objetivo

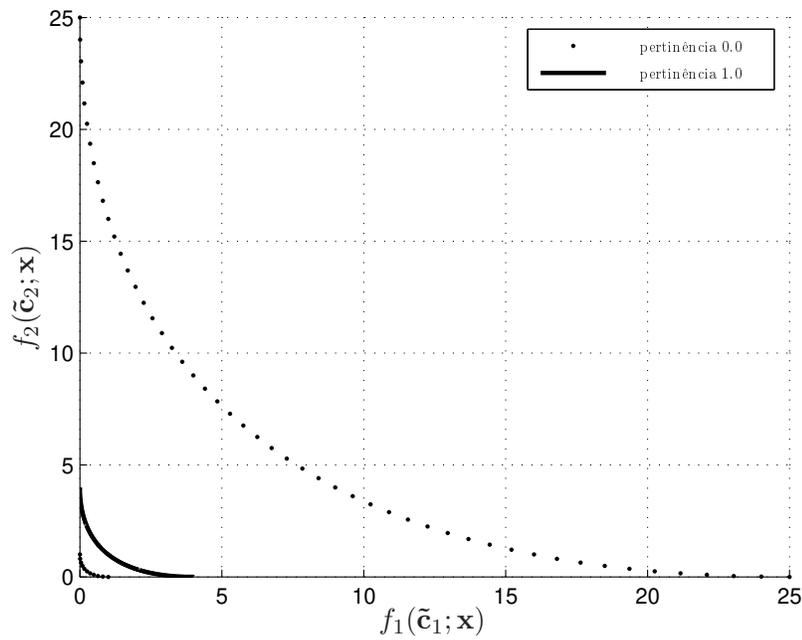


Figura 3.2: Fronteira Pareto-ótima

Substituindo $x = \tilde{c}_2 + \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}}$ em (I), é obtido

$$\begin{aligned} \tilde{c}_2 + \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} + \tilde{c}_1 + \lambda(\tilde{c}_2 + \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} - \tilde{c}_2) &\cong 0 \\ (2, 1, 1)_{LR} + \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} + (0, 0, 2)_{LR} + \lambda((2, 1, 1)_{LR} + \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} - (2, 1, 1)_{LR}) &\cong 0 \\ \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} + (2, 1, 3)_{LR} + \lambda(\sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} + (0, 2, 2)_{LR}) &\cong 0 \\ (1 + \lambda)\sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}} + (2, 1, 3)_{LR} + \lambda(0, 2, 2)_{LR} &\cong 0 \end{aligned} \quad (II)$$

Como $\epsilon_2 > 0$, então a equação nebulosa (II) implica $\lambda < 0$. Analogamente, pode ser visto que $x \cong 2 - \sqrt{\epsilon_2}$ satisfaz a condição de primeira ordem. Pela condição de segunda ordem:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \lambda) = [2] + \lambda [2] = [2 + 2\lambda] \geq^f 0.$$

Assim, segue pelas manipulações algébricas que $x \cong \tilde{c}_2 - \sqrt{\epsilon_2 + \tilde{0}}$ ($0 < \epsilon_2 \leq 4$) é a solução ótima nebulosa para o Problema (3.13). Portanto, é também uma solução eficiente nebulosa para o Problema (3.12), para todo valor possível de ϵ_2 . \square

A hipótese de convexidade determina que a vizinhança de cada uma das soluções locais envolve toda a região factível.

Teorema 3.4. *Sejam $f_i : \Omega \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{F}(\mathcal{Y})$, $i = 1, \dots, m$ funções nebulosas convexas, como descrito no Apêndice A, sobre um subconjunto convexo Ω de um espaço linear \mathcal{X} . Então, todas as soluções localmente eficientes são soluções globalmente eficientes de problemas nebulosos.*

Demonstração. Seja $\mathbf{x}^* \in \Omega$ uma solução localmente eficiente. Pela definição de subconjunto convexo, pode ser obtido $\lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x} \in \Omega$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega - \mathcal{N}(\mathbf{x}^*, \epsilon)$, com $\epsilon > 0$ e $\lambda \in [0, 1]$. Suponha $\lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x} \in \Omega \cap \mathcal{N}(\mathbf{x}^*, \epsilon)$, então pela definição de solução nebulosa Pareto-ótima, é obtido $\text{Poss}[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x})] \geq \alpha_i^1$, $i = 1, 2, \dots, m$, e $\text{Poss}[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x})] < 1$ para ao menos um j , sendo que $\alpha_i^1 \in (0, 1]$, $\forall i$. Pela definição de função nebulosa convexa, é obtida $f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}) \leq^f \lambda f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) + (1 - \lambda)f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x})$, $\forall i$, que pode ser re-escrito usando a Teoria de Possibilidade da seguinte maneira $\text{Poss}[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \lambda \mathbf{x}^* + (1 - \lambda)\mathbf{x}) \leq \lambda f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) + (1 - \lambda)f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x})] \geq \alpha_i^2$, sendo que $\alpha_i^2 \in (0, 1]$, $\forall i$. Assim, usando a definição de subconjunto nebulosamente ordenado, é obtido $\text{Poss}[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) \leq^f \lambda f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) + (1 - \lambda)f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x})] \geq \min\{\alpha_i^1, \alpha_i^2\} \Rightarrow \text{Poss}[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x})] \geq \min\{\alpha_i^1, \alpha_i^2\}$, $\forall i$. Selecionando uma determinada função objetivo $k \in \mathcal{I}$ e $k \neq i$, pelo Teorema 3.5, pode ser garantido que $\text{Poss}[f_k(\tilde{\mathbf{c}}_k; \mathbf{x}^*) =^f f_k(\tilde{\mathbf{c}}_k; \mathbf{x})] < 1$ para ao menos um k . \square

Logo, é possível gerar o conjunto eficiente completo variando ϵ . Todavia, essa variação deveria ser cuidadosamente recomendada para que nenhuma solução do problema escalar gere o conjunto eficiente completo. Condições suficientes para a eficiência de uma decisão factível são apresentadas no teorema abaixo.

Teorema 3.5. *Dado $\epsilon \in \mathcal{E}_k$, uma solução \mathbf{x}^* de (3.11) é eficiente se*

(i) \mathbf{x}^* é solução única de (3.11) para qualquer k , ou

(ii) \mathbf{x}^* resolve (3.11) para todo $k \in \mathcal{I}$.

Demonstração. (i) Seja $\mathbf{x}^* \in \Omega$ a solução única de (3.11) para qualquer $k \in \mathcal{I}$, então \mathbf{x}^* é também uma solução única do Problema (3.10). Logo, pelo Teorema 3.2, $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$.

(ii) Assuma que $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$, mas ele não resolve (3.11) para todo $k \in \mathcal{I}$. Então, existe ao menos um $j \in \mathcal{I}/\{k\}$ tal que para qualquer $\mathbf{x}^0 \in \Omega$, ele considera que $\text{Poss}[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^0) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$ e $\text{Poss}[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^0) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i, \forall i \in \mathcal{I}$. Portanto, $\mathbf{x}^* \notin \text{efi}(\Omega)$, uma contradição que conclui a demonstração. \square

Empregando uma análise similar para o teorema apresentado acima, uma relação é estabelecida entre soluções não-dominadas de um problema multi-objetivo nebuloso e soluções para o problema ponderado. Uma caracterização alternativa baseada na combinação linear dos objetivos pode ser expressa como:

Teorema 3.6. *Seja $\mathbf{x}^* \in \Omega$ que resolve o problema*

$$P_w : \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \langle \mathbf{w}, F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \rangle = \sum_{i=1}^m \omega_i f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}) \quad (3.15)$$

para algum $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ e $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$. Então $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$ se

(i) \mathbf{x}^* é a solução única de (3.15), ou

(ii) $\omega_i > 0, i = 1, \dots, m$.

Demonstração. (i) Se $\mathbf{x}^* \in \Omega$ é uma solução única para (3.15), então $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ e por definição, $\text{Poss} \left[\sum_{i=1}^m \omega_i (f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) \leq f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x})) < 0 \right] \geq \min_i \{\alpha_i\}$ é obtido. Suponha que $\mathbf{x}^* \notin \text{efi}(\Omega)$, isto é, existe ao menos um $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ tal que $\text{Poss}[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^0) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$ e $\text{Poss}[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^0) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$, para algum j . Isso contradiz a hipótese de unicidade, porque $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$.

(ii) Suponha que $\mathbf{x}^* \notin \text{efi}(\Omega)$, mas \mathbf{x}^* é a solução de (3.15). Então existe um $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ tal que $\text{Poss}[f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^0) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*)] \geq \alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$ e $\text{Poss}[f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^0) =^f f_j(\tilde{\mathbf{c}}_j; \mathbf{x}^*)] < 1$, para qualquer j . Assim,

$$\text{Poss} \left[\sum_{i=1}^m \omega_i \left(f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) \leq^f f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^0) \right) > 0 \right] \geq \min_i \{\alpha_i\}, \forall i.$$

Uma contradição e, portanto, $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$. \square

Para ilustrar o uso de P_w , o seguinte problema multi-objetivo é considerado como exemplo:

Exemplo 3.2.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = x - \tilde{c}_1 \\ \min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = (x - \tilde{c}_{21})^2 + \tilde{c}_{22} \end{aligned} \quad (3.16)$$

com $\tilde{\mathbf{c}}_1 = (1, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{\mathbf{c}}_{21} = (3, 2, 2)_{LR}$ e $\tilde{\mathbf{c}}_{22} = (1, 1, 2)_{LR}$.

As figuras 3.3 e 3.4 apresentam as soluções e fronteira nebulosa.

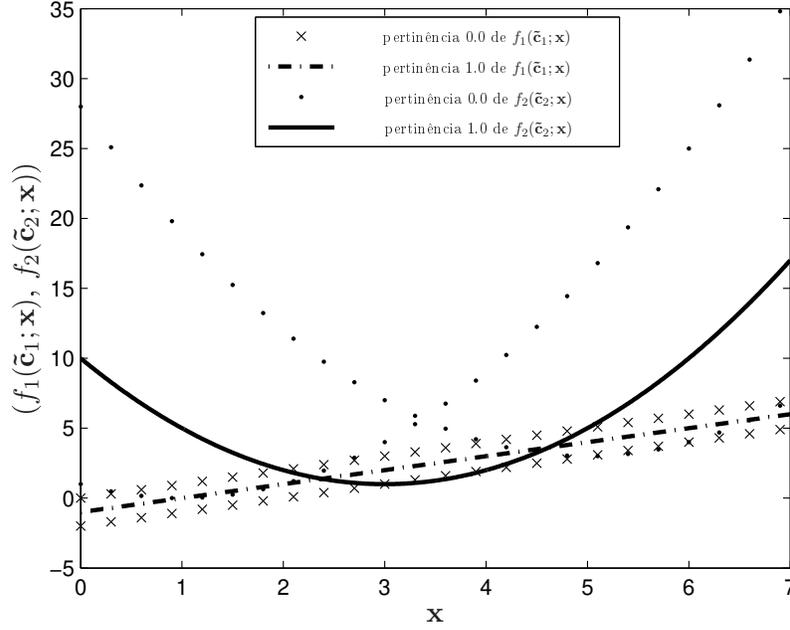


Figura 3.3: Funções objetivo

Transformando (3.16) em um problema ponderado, obtém-se

$$\min \quad f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) = w f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) + (1 - w) f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) \quad (3.17)$$

com $w \in [0, 1]$.

Aplicando as condições de otimalidade para (3.17), temos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) &= w + 2(1 - w)(x - \tilde{c}_{21}) \cong 0 \\ w + (2 - 2w)(x - \tilde{c}_{21}) &\cong 0 \\ w + 2x - 2\tilde{c}_{21} - 2wx + 2w\tilde{c}_{21} &\cong 0 \\ 2x(1 - w) - 2\tilde{c}_{21}(1 - w) + w &\cong 0 \\ x &\cong \frac{2\tilde{c}_{21}(1 - w) - w}{2(1 - w)} \end{aligned}$$

Então, $x \cong \frac{(6, 4, 4)_{LR} - w(7, 4, 4)_{LR}}{2(1 - w)}$, com $w \in [0, 1]$, satisfaz a primeira condição de ordem. Pela segunda condição de ordem, segue que

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 f(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) = 2(1 - w) \geq 0.$$

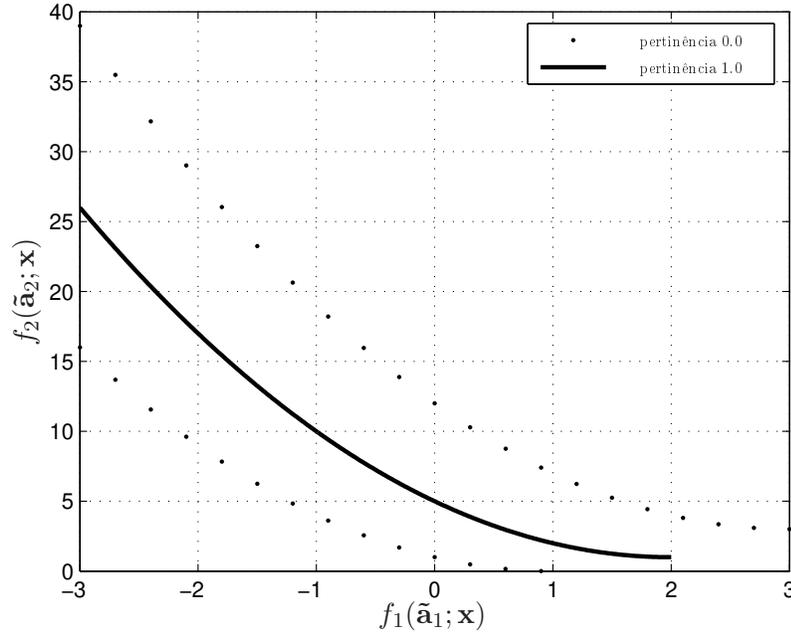


Figura 3.4: Fronteira Pareto-ótima

Assim, é concluído pelas manipulações algébricas que x é a solução ótima nebulosa para o Problema (3.17), onde $x \cong \frac{(6, 4, 4)_{LR} - w(7, 4, 4)_{LR}}{2(1 - w)}$. Portanto, ele é também uma solução eficiente nebulosa para o Problema (3.16), para cada valor de w .

□

Nesse capítulo descrevemos duas abordagens: uma paramétrica e outra possibilística, para resolver problemas de programação multi-objetivo irrestrito com custos nebulosos nas funções objetivo. No próximo capítulo estenderemos essas duas abordagens para resolver problemas multi-objetivo restrito sem e com parâmetros nebulosos no conjunto de restrições.

Capítulo 4

Programação multi-objetivo nebulosa restrita

4.1 Introdução

Nesse capítulo são apresentadas algumas abordagens propostas para resolver problemas de programação multi-objetivo restritos em um ambiente nebuloso. Os parâmetros nebulosos podem estar presentes nas funções objetivo, como foi apresentado no capítulo anterior, como também nos coeficientes, variáveis e/ou relação de ordem no conjunto de restrições. Um problema de programação multi-objetivo nebuloso restrito pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \widetilde{\min} \quad & F(\tilde{\mathbf{c}}; \tilde{\mathbf{x}}) \\ \text{s.a} \quad & G(\tilde{\mathbf{a}}; \tilde{\mathbf{x}}) \leq^f \tilde{\mathbf{b}} \\ & \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega} \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ ($m \geq 2$) é um vetor de objetivos como definido no capítulo anterior, $G = (g_1, \dots, g_l)$ é um vetor de funções que restringem a região factível e \leq^f representa uma relação de ordem nebulosa que compara números nebulosos. $\tilde{\mathbf{c}}_i \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{p_i})$ (para $i = 1, \dots, m$) representa a quantidade de custos nebulosos em cada função objetivo i , $\tilde{\mathbf{a}}_j \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^{o_j})$ (para $j = 1, \dots, l$) representa a quantidade de coeficientes nebulosos em cada função de restrição j , e $\tilde{\mathbf{b}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^l)$ representam os parâmetros nebulosos do termo independente, enquanto $\tilde{\mathbf{x}}$ representa as variáveis de decisão nebulosas, sendo $\tilde{\Omega} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de soluções factíveis nebulosas. Neste trabalho, toda imprecisão é representada por funções de pertinência definidas pelo decisor. Todavia, este trabalho não focaliza no tratamento de variáveis de decisão imprecisas e, portanto, somente os custos das funções objetivo, os coeficientes e/ou relação de ordem do conjunto de restrições são discutidos aqui.

A incerteza pode estar presente em diferentes pontos no conjunto de restrições ou simplesmente não existir imprecisões. Assim, é possível dividir em duas abordagens principais. A primeira abordagem é um conjunto de restrições sem imprecisão, isto é, as restrições são clássicas e usam os critérios tradicionais para garantir a exequibilidade das soluções. No momento que surgem as imprecisões, essas podem ser de dois tipos. O primeiro é definido quando a incerteza está presente na relação de ordem do conjunto de restrições e o segundo quando os coeficientes de um dos lados da relação de ordem ou de ambos os lados são incertos. Neste trabalho são tratados coeficientes imprecisos em ambos os lados da relação de ordem.

Em [8] é definida a **decisão nebulosa** como a intersecção das várias metas, e é formalizada como segue:

Definição 4.1. *Assuma que as funções de pertinências que descrevem o objetivo nebuloso μ_G e a restrição nebulosa μ_C são dados em um espaço de alternativas X . Então, μ_G e μ_C são combinados para formar a **decisão nebulosa**, μ_D , que é um conjunto nebuloso resultante da intersecção de μ_G e μ_C :*

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \mu_D(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x} \in X} [\mu_G(\mathbf{x}) \wedge \mu_C(\mathbf{x})]$$

que é basicamente uma escolha ou um conjunto de escolhas de objetivos e restrições das alternativas viáveis no conjunto nebuloso X .

Note que na Definição 4.1 os objetivos e as restrições nebulosas são inseridos na expressão que define uma outra função de pertinência, que denominamos por μ_D . Assim, é possível encontrar uma decisão máxima para um problema extremo por uma função escalar, como descrito em [50]. Seja $\phi[0, 1] \rightarrow [0, 1]$, onde $\phi(\alpha) = \sup_{\mathbf{x} \in X(\alpha)} \mu_G(\mathbf{x})$, com $X(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mu_X(\mathbf{x}) \geq \alpha\}$. Se ϕ é contínuo em $[0, 1]$ então tem um **ponto fixo** $\bar{\alpha}$ e, portanto,

$$\sup_{\mathbf{x} \in X} \mu_D(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{x} \in X(\bar{\alpha})} \mu_G(\mathbf{x}) = \bar{\alpha}.$$

A partir do que foi exposto acima, a investigação sobre programação multi-objetivo nebulosa restrita pode ser dividida como segue: Seção 4.2 apresenta um enfoque paramétrico que é construído pela transformação de um problema de programação multi-objetivo nebuloso em dois problemas de programação multi-objetivo clássicos paramétricos e, portanto, é possível encontrar um conjunto de soluções eficientes levando em consideração o nível de satisfação definido pelo decisor. Seção 4.3 introduz uma nova abordagem para encontrar a região Pareto-ótima nebulosa. Também é apresentado o emprego das soluções eficientes definidas no capítulo anterior através de problemas escalares. O conjunto nebulosamente ordenado é definido utilizando uma função de distribuição de possibilidade como uma medida de comparação. O conjunto Pareto ótimo nebuloso também é definido,

assim como as condições de otimalidade de KKT para soluções não-dominadas nebulosas são estabelecidas. Os enfoques mostrados nesse capítulo são baseados nos trabalhos [18, 17, 64, 66, 67, 68, 70]

4.2 Abordagem paramétrica

Vários enfoques podem ser encontrados na literatura para transformar um problema de programação matemática nebuloso em um problema de programação matemática clássico, como descrito no capítulo anterior, e um deles é a abordagem paramétrica. Na visão paramétrica tenta-se encontrar um conjunto de soluções ótimas que são dependentes do valor escolhido no intervalo parametrizado entre 0 e 1. O conjunto dessas soluções satisfaz o problema nebuloso original e pode definir a solução ótima desse problema. Outro enfoque a ser considerado é definir um ou mais parâmetros em variáveis de decisão do problema e tentar otimizá-los e encontrar o nível de satisfação ótima.

A abordagem paramétrica está dividida novamente em dois pontos chaves. Primeiramente, é estendida a idéia básica do capítulo anterior para o caso restrito no uso dos parâmetros que ajudam a transformar o problema nebuloso em um problema clássico. Depois de descrita essa idéia paramétrica, são apresentadas algumas formulações matemáticas de um problema de programação nebuloso transformados em um problema clássico paramétrico.

4.2.1 Enfoque paramétrico para resolver problemas restritos

Em complementação ao que foi apresentado no capítulo anterior, a idéia paramétrica que é descrita neste capítulo tem por finalidade acrescentar o tratamento de restrições incluídas em um ambiente incerto. Assim, acrescentando um conjunto de restrições ao Problema (3.3) temos:

$$\begin{aligned} \widetilde{\min} \quad & F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \\ \text{s.a} \quad & G(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \lesssim \tilde{\mathbf{b}} \\ & \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_l)$.

É claro que cada função de pertinência ajuda a encontrar um grau de satisfação para as incertezas das funções objetivo e das restrições e elas podem ser formuladas como:

$$\mu_i : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1], \quad i \in I$$

sendo μ uma função de pertinência e I o conjunto que contem todos os parâmetros nebulosos.

Com o objetivo de resolver o Problema (4.2) em duas etapas, primeiro é necessário definir um $j \in I$ para cada restrição nebulosa da seguinte maneira:

$$X_j = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid g_j(\tilde{\mathbf{a}}_j; \mathbf{x}) \leq^f \tilde{b}_j, \quad j = 1, 2, \dots, l \right\}.$$

Nesse capítulo, os coeficientes das funções objetivo e das funções do conjunto de restrições não são conhecidas com exatidão. Essa incerteza não é de caráter probabilístico e ela pode ser modelada por números nebulosos.

Na sequência deste trabalho a definição de Dubois e Prade[23] é considerada e os números nebulosos são representados pelo tipo LR, como descrito no Apêndice A. O conjunto de números nebulosos LR é definido por $\mathbb{F}(\mathbb{R})$. No Apêndice A tem um pequeno resumo sobre como representar um número nebuloso LR e as operações básicas.

Existem várias formas de representar o número nebuloso por um número real usando os índices de Yager, o valor central, entre outros. No entretanto, neste trabalho, é usado uma combinação linear entre os limitantes do intervalo formado pelo nível de corte aplicado ao número nebuloso. Assim, aplicando um nível de α -corte ao conjunto X_j , que representa cada restrição nebulosa, obtemos:

$$X_j(\beta) = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid g_j((\mathbf{a}_j)_\beta; \mathbf{x}) \leq^f (b_j)_\beta \right\} \quad (4.3)$$

onde $(a_j)_\beta \in [(a_j)^L, (a_j)^U]_\beta$ e $(b_j)_\beta \in [(b_j)^L, (b_j)^U]_\beta$ representam uma combinação linear entre os limitantes de cada um dos intervalos construídos pelo corte β .

Considerando agora a relação nebulosa do conjunto de restrições, então o decisor especifica a violação máxima permitida $\tilde{\mathbf{d}}$, que é um número nebuloso. Logo, o conjunto X_j descrito em 4.3, pode ser re-escrito da seguinte maneira:

$$X_j(\beta, \gamma) = \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid g_j((\mathbf{a}_j)_\beta; \mathbf{x}) \leq (b_j)_\beta + (d_j)_\beta(1 - \gamma) \}$$

onde $(d_j)_\beta \in [(d_j)^L, (d_j)^U]$ e γ é o parâmetro que representa o nível de satisfação pela violação da região de factibilidade.

Se $\mathbf{X} = \bigcap_{j \in I} X_j$, então o Problema (4.2) pode ser descrito na forma compacta como:

$$\min \{ F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{X} \}$$

Logo, a solução nebulosa para o problema original nebuloso é um conjunto de soluções ótimas para cada $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1]$. Esse conjunto de soluções pode ser definido da seguinte maneira:

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = \min \{ F(\mathbf{c}_\alpha; \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X(\beta, \gamma) \}$$

sendo que $\mathbf{c}_\alpha \in [\mathbf{c}^L, \mathbf{c}^U]_\alpha$ é um valor real obtido por uma combinação linear dos limitantes do intervalo formado pelo nível de α -corte para $\alpha \in (0, 1]$.

Portanto, o problema de programação multi-objetivo nebulosos restrito foi parametrizado no fim da primeira fase. Na segunda fase o problema paramétrico é resolvido para cada um dos diferentes valores α, β, γ usando técnicas de programação multi-objetivo convencional.

Os resultados obtidos para cada valor de α, β, γ geram um conjunto de soluções $S(\alpha, \beta, \gamma)$ e, portanto, o Teorema da Representação pode ser usado para

considerar todos essas (α, β, γ) -soluções específicas. Assim, é demonstrado que as soluções em linhas gerais para o modelo paramétrico é uma solução válida para o problema de programação multi-objetivo nebuloso restrito.

4.2.2 Formulação da idéia paramétrica

As incertezas podem estar inseridas em diferentes pontos na formulação de um problema de programação matemática, tal como é apresentado no Problema (4.1). Nessa seção são descritas diferentes abordagens para resolver problemas de programação multi-objetivos restritos com dados imprecisos nos custos das funções objetivo e/ou constantes e nas relações de ordem do conjunto de restrições.

Alguns modelos que tratam diferentes características de incertezas no conjunto de restrições de problemas de programação multi-objetivo são apresentados usando a idéia paramétrica descrita anteriormente. Esses modelos são extensões do método que foi desenvolvido para resolver problemas de programação quadrático com somente um objetivo a ser otimizado, descrito em [69]. Nesse trabalho, problemas de programação multi-objetivo restrito com custo e/ou relação de ordem e/ou constantes no conjunto de restrições imprecisos são considerados, sendo que essas componentes imprecisas serão definidos como números nebulosos. Esse conjunto de problemas pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & [f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}), f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}), \dots, f_m(\tilde{\mathbf{c}}_m; \mathbf{x})] \\ \text{s.a} \quad & g_j(\tilde{\mathbf{a}}_j; \mathbf{x}) \lesssim \tilde{b}_j \\ & \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde \mathbf{x} é um vetor de n números reais, $\tilde{\mathbf{c}}_i$ é um vetor de números nebulosos com p_i componentes, $i = \{1, 2, \dots, m\}$, $\tilde{\mathbf{a}}_j$ é um vetor de números nebulosos com o_j componentes, $j = \{1, 2, \dots, r\}$ e $\tilde{\mathbf{b}}$ é um vetor de números nebulosos com r componentes. Os números nebulosos são caracterizados pelas funções de pertinência que são definidas pelo decisor. As funções de pertinência podem ser definidas como

$$\mu_{\tilde{c}_{ir}}, \mu_{\tilde{a}_{js}}, \mu_{\tilde{b}_j} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

onde $i = \{1, 2, \dots, m\}$, $j = \{1, 2, \dots, l\}$, $r = \{p_1, \dots, p_m\}$ e $s = \{o_1, \dots, o_l\}$

Em particular essas funções de pertinência são descritas da forma

$$\mu_{\tilde{c}_{ir}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } c_{ir}^U \leq y \text{ ou } y \leq c_{ir}^L \\ L_{ir}(y) & \text{if } c_{ir}^L \leq y \leq c_{ir}^1 \\ R_{ir}(y) & \text{if } c_{ir}^2 \leq y \leq c_{ir}^U \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\mu_{\tilde{a}_{js}}(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } a_{js}^U \leq y \text{ ou } y \leq a_{js}^L \\ L_{js}(y) & \text{if } a_{js}^L \leq y \leq a_{js}^1 \\ R_{js}(y) & \text{if } a_{js}^2 \leq y \leq a_{js}^U \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\mu_{\tilde{b}_j}(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } b_j^U \leq y \text{ ou } y \leq b_j^L \\ L_j(y) & \text{if } b_j^L \leq y \leq b_j^1 \\ R_j(y) & \text{if } b_j^2 \leq y \leq b_j^U \end{cases} \quad (4.7)$$

tal que $\mathbf{L}(\cdot)$ e $\mathbf{R}(\cdot)$ são assumidas como funções contínuas estritamente crescente e decrescente, respectivamente.

Métodos para resolver problemas multi-objetivos com relação de ordem nebulosa no conjunto de restrições

É possível estender o método paramétrico descrito em [69], que foi desenvolvido para solucionar problema de otimização com um único objetivo, para problemas multi-objetivo com relação de ordem incerta no conjunto de restrições. Esse método pode ser formulado como um problema multi-objetivo paramétrico, sendo que o parâmetro γ é tratado como uma nova variável de decisão.

Consequentemente, minimizando $F(\tilde{\mathbf{c}}; \mathbf{x})$ e γ simultaneamente, o problema de programação multi-objetivo é descrita como segue:

$$\begin{aligned} \min \quad & [f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}), f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}), \dots, f_m(\tilde{\mathbf{c}}_m; \mathbf{x}), \gamma] \\ \text{s.a} \quad & g_j(\mathbf{a}_j; \mathbf{x}) \leq b_j + d_j(1 - \gamma) \\ & \mathbf{x} \in \Omega, \gamma \in (0, 1], \quad j = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde são consideradas $n + 1$ variáveis de decisão e \mathbf{d} é um vetor de dimensão m , sendo que cada componente desse vetor representa a tolerância máxima permitida pelo especialista para cada restrição do problema. Essa tolerância é responsável pelo tamanho da relaxação que será permitida em cada restrição j , que deixa o conjunto de restrições mais flexível. Entretanto, a relação entre a relaxação e nível de satisfação é inversamente proporcional, isto é, quanto maior a relaxação necessária para resolver o problema menor será o nível de satisfação, e vice-versa.

O Problema (4.8) pode ser transformado em um problema irrestrito usando algum enfoque de penalidade ou barreira e, portanto, ele pode ser resolvido usando qualquer uma das técnicas descritas no capítulo anterior que resolvem problemas de programação multi-objetivo irrestrito com custos imprecisos nas funções objetivo. Caso os custos não sejam imprecisos, o Problema (4.8) pode ser resolvido por qualquer técnica de otimização multi-objetivo.

Entretanto, os dados incertos podem estar presentes nas constantes das funções de restrição como também no termo independente das mesmas. Quando um dos casos ou ambos ocorrem, a relação de ordem clássica não pode ser usada porque estaremos comparando um número clássico com um nebuloso ou comparando dois números nebulosos. Assim, uma das formas de caracterizarmos essa nova relação de ordem é como descrito acima, onde o decisor define um valor de tolerância máxima para cada função de restrição, o qual pode ser também um número nebuloso.

Na tentativa de explicar gradativamente como a imprecisão nas constantes das funções de restrição e/ou em termos independentes podem ser tratados, dividimos a abordagem em dois passos. No primeiro, as incertezas estão presentes somente no conjunto de restrições de um problema de programação multi-objetivo, enquanto no segundo adicionamos dados imprecisos nos custos da função objetivo.

Métodos para resolver problemas multi-objetivos com coeficientes nebulosos no conjunto de restrições

Usando a abordagem multi-objetivo descrita anteriormente, um enfoque para resolver um problema multi-objetivo com constantes nebulosas e a relação de ordem incerta no conjunto de restrições pode ser dado através da formulação de um problema multi-objetivo paramétrico, sendo que os parâmetros $\gamma, \beta_{jl} \in [0, 1]$, $j = 1, \dots, l, s = o_1 + 2, \dots, o_l + 2$ são tratados como novas variáveis de decisão. Cada termo em s é composto do termo o_j , $j = 1, \dots, l$, representa o número de números nebulosos na j -ésima restrição, do termo independente e da tolerância máxima permitida dessa j -ésima restrição. Por esse motivo, cada termo de s é acrescido do termo o_j mais duas unidades.

Conseqüentemente, minimizando $F(\mathbf{x})$ e γ , e maximizando e minimizando β_{js} , simultaneamente, o problema de programação multi-objetivo é descrito como segue:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}), \gamma, 1 - \beta_{1,1}, \beta_{1,1}, \dots, 1 - \beta_{1,o_1+2}, \\
 & \beta_{1,o_1+2}, \dots, 1 - \beta_{r,1}, \beta_{r,1}, \dots, 1 - \beta_{r,o_r+2}, \beta_{r,o_r+2}] \\
 \text{s.a} \quad & g_j((\mathbf{a}_j^L)_\alpha + \beta_j((\mathbf{a}_j^U)_\alpha - (\mathbf{a}_j^U)_\alpha); \mathbf{x}) \leq (b_j^L)_\alpha + \beta_{j,o_j+1}((b_j^U)_\alpha - \\
 & -(b_j^L)_\alpha) + (d_j^L)_\alpha + \beta_{j,o_j+1}((d_j^U)_\alpha - (d_j^L)_\alpha)(1 - \gamma) \\
 & \mathbf{x} \in \Omega, \gamma, \beta_{js} \in (0, 1], \quad j = 1, \dots, l, \quad s = o_1 + 2, \dots, o_l + 2
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

onde as novas variáveis de decisão γ e β_{js} , são consideradas para transformar os intervalos $I_{ij}(\alpha) = [L_{ij}^{-1}(1 - \alpha), R_{ij}^{-1}(1 - \alpha)]$ em funções da forma $z_{ij}(\alpha, \beta_{js}) = L_{jl}^{-1}(1 - \alpha) + \beta_{js} [R_{js}^{-1}(1 - \alpha) - L_{js}^{-1}(1 - \alpha)]$, sendo que α é um valor no intervalo $[0, 1]$, mas ele pode ser definido como uma variável de decisão.

Métodos para resolver problemas multi-objetivos nebulosos

De acordo com os métodos apresentados nesta seção, o Problema (4.4) pode ser resolvido usando as três abordagens. Portanto, o modelo paramétrico para resolver

problemas de programação multi-objetivo nebuloso é formulado como segue:

$$\begin{aligned}
\min \quad & [f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}), f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}), \dots, f_m(\tilde{\mathbf{c}}_m; \mathbf{x}), \gamma, 1 - \beta_{1,1}, \beta_{1,1}, \dots, \\
& 1 - \beta_{1,o_1+2}, \beta_{1,o_1+2}, \dots, 1 - \beta_{r,1}, \beta_{r,1}, \dots, 1 - \beta_{r,o_r+2}, \beta_{r,o_r+2}] \\
\text{s.a} \quad & g_j((\mathbf{a}_j^L)_\alpha + \beta_j((\mathbf{a}_j^U)_\alpha - (\mathbf{a}_j^U)_\alpha); \mathbf{x}) \leq (b_j^L)_\alpha + \beta_{j,o_j+1}((b_j^U)_\alpha - \\
& -(b_j^L)_\alpha) + (d_j^L)_\alpha + \beta_{j,o_j+1}((d_j^U)_\alpha - (d_j^L)_\alpha)(1 - \gamma) \\
& \mathbf{x} \in \Omega, \gamma, \beta_{j_s} \in (0, 1], \quad j = 1, \dots, l, \quad s = o_1 + 2, \dots, o_l + 2
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde as novas variáveis de decisão γ e β_{j_s} , são consideradas para transformar os intervalos $I_{ij}(\alpha) = [L_{ij}^{-1}(1 - \alpha), R_{ij}^{-1}(1 - \alpha)]$ em funções da forma $z_{ij}(\alpha, \beta_{jl}) = L_{j_s}^{-1}(1 - \alpha) + \beta_{j_s} [R_{j_s}^{-1}(1 - \alpha) - L_{j_s}^{-1}(1 - \alpha)]$, sendo que α é um valor no intervalo $[0, 1]$, mas que também pode ser definido como uma variável de decisão.

4.3 Abordagem possibilística

Como descrito no capítulo anterior, a teoria de possibilidade é uma ferramenta muito interessante para efetuar a comparação entre números nebulosos. A representação matemática da possibilidade de um número nebuloso é definida pela função de distribuição de possibilidade, que pode ser caracterizada pela função de pertinência que descreve o quão impreciso um valor pode ser. O procedimento demonstrado no capítulo anterior sobre a abordagem possibilística como método para solucionar problemas de programação multi-objetivo irrestritos com custos nebulosos nas funções objetivo, pode ser estendido para problemas restritos. Nesse caso, as funções que geram o conjunto de restrições podem apresentar valores imprecisos ou não e, portanto, esses dois casos são analisados separadamente no decorrer desta seção. Primeiramente, será apresentado o caso em que as funções que formam o conjunto de restrições tem seus dados descritos de maneira clara e precisa. Depois será descrito o método usado para solucionar problemas de programação multi-objetivo com incertezas nos custos das funções objetivo e nos coeficientes das funções que geram conjunto de restrições, usando uma mescla da abordagem paramétrica e possibilística.

4.3.1 Condições de KKT para solução eficiente nebulosa

Considere o Problema (4.2) com os custos das funções objetivo sendo vetores nebulosos e os coeficientes das funções de restrição sendo números clássicos e suponha que as funções objetivo são diferenciáveis. Nesse caso, as condições de otimalidade podem ser garantidas para um conjunto eficiente para qualquer $\mathbf{x} \in \Omega$. A ausência de uma condição suficiente para a eficiência é uma grande diferença entre as condições de otimalidade para problemas com um único objetivo e múltiplos objetivos.

Definição 4.2. Um ponto factível $\mathbf{x}^* \in \Omega$ do Problema (4.2) satisfaz as condições necessárias de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para um conjunto eficiente nebuloso se

- (i) f_i , g_j e h_l são diferenciáveis para todos $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$ e $l = 1, \dots, q$, e $\Omega \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \text{ e } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \neq \emptyset$;
- (ii) existem múltiplos vetores $\nu \in \mathbb{R}^q$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$, com $\lambda^* \geq 0$ e $\omega^* \in \mathbb{R}^m$, com $\omega^* > 0$ tal que

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad \lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (j = 1, \dots, p);$$

$$\sum_{i=1}^m \omega_i^* \nabla f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{l=1}^r \nu_l^* \nabla h_l(\mathbf{x}^*) \cong 0$$

As condições de KKT para um conjunto eficiente nos problemas de otimização multi-objetivo nebulosos são condições necessárias. Isso tornará claro nos seguintes teoremas:

Teorema 4.1. Assuma que f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, g_j , $j = 1, \dots, p$ e h_l , $l = 1, \dots, r$ são diferenciáveis e seja \mathbf{x}^* um ponto regular de $P_k(\epsilon^*)$, (definido no capítulo 3), para ao menos um k . Então, $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$ implica que \mathbf{x}^* satisfaz as condições de KKT para um conjunto eficiente.

Demonstração. Seja $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$. Pelo Teorema 3.3, \mathbf{x}^* resolve (3.11), para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Pela hipótese, existe ao menos um k tal que \mathbf{x}^* é um ponto regular de $P_k(\epsilon^*)$. Logo, pela definição, pode ser obtido:

$$f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) - \epsilon_i^* \lesssim 0, \quad \omega_i^* (f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) - \epsilon_i^*) \cong 0 \quad (\forall i \neq k);$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad \lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (j = 1, \dots, p);$$

$$\nabla f_k(\tilde{\mathbf{c}}_k; \mathbf{x}^*) + \sum_{i \neq k} \frac{\omega_i^*}{\omega_k^*} \nabla f_i(\tilde{\mathbf{c}}_i; \mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j^*}{\omega_k^*} \nabla g_j(\mathbf{x}^*) + \sum_{l=1}^r \frac{\nu_l^*}{\omega_k^*} \nabla h_l(\mathbf{x}^*) \cong 0$$

Portanto, \mathbf{x}^* satisfaz as condições de KKT para um conjunto eficiente. \square

Para ilustrar o uso desse teorema de diferenciabilidade, o seguinte problema de otimização multi-objetivo é considerado como exemplo.

Exemplo 4.1.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{11}x_1^2 + \tilde{c}_{12}x_2^2 \\
 \min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = \tilde{c}_2x_1x_2 \\
 \text{s.a} \quad & h_1(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 1 = 0 \\
 & g_1(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0 \\
 & g_2(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

sendo que $\tilde{a}_{11} = (1, 1, 2)_{LR}$, $\tilde{a}_{12} = (1, 1, 2)_{LR}$ e $\tilde{a}_2 = (1, 1, 1)_{LR}$.

As figuras 4.1 e 4.2 apresentam as soluções e a fronteira nebulosa.

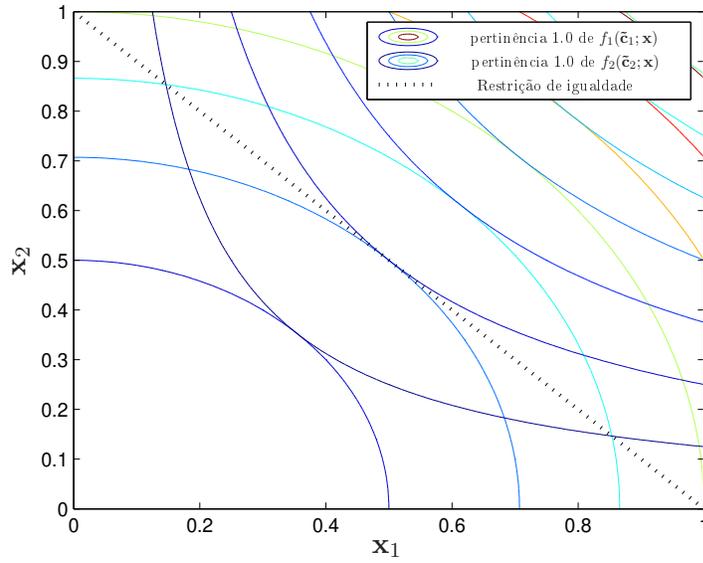


Figura 4.1: Funções objetivo

Transformando (4.11) em uma formulação Lagrangeana, é possível obter

$$\text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega, \lambda) = f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) + \omega(f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) - \epsilon_2) + \lambda h_1(\mathbf{x}) \tag{4.12}$$

sendo que $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aplicando as condições de otimalidade para os problemas de programação restritos descritos em [11]:

$$\nabla_{x_1} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega, \lambda) = 2\tilde{c}_{11}x_1 + \omega\tilde{c}_2x_2 + \lambda \cong 0 \tag{I}$$

$$\nabla_{x_2} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega, \lambda) = 2\tilde{c}_{12}x_2 + \omega\tilde{c}_2x_1 + \lambda \cong 0 \tag{II}$$

$$\nabla_{\omega} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega, \lambda) = \tilde{c}_2x_1x_2 - \epsilon_2 \cong 0 \tag{III}$$

$$\nabla_{\lambda} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega, \lambda) = x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1 \tag{IV}$$

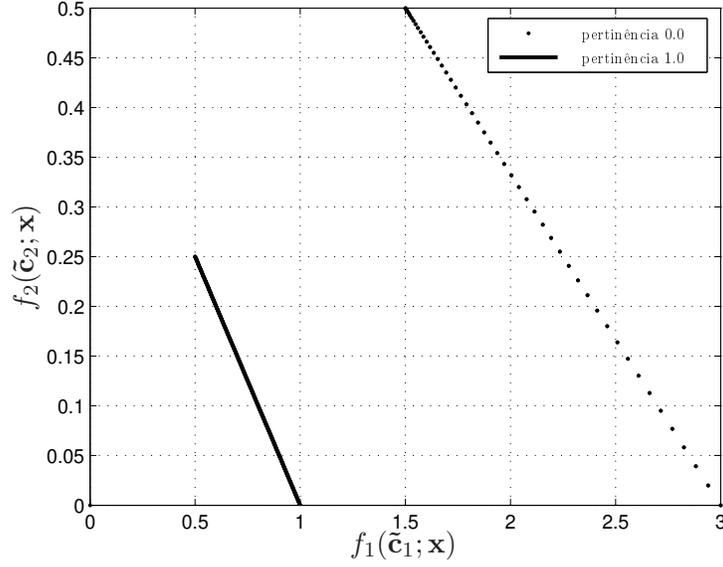


Figura 4.2: Fronteira Pareto-ótima

Substituindo a Equação (IV) em (III), os valores $x_1 \cong \frac{\tilde{a}_2 \mp \sqrt{\tilde{c}_2^2 - 4\tilde{c}_2\epsilon_2}}{2\tilde{c}_2}$ e $x_2 \cong \frac{\tilde{c}_2 \pm \sqrt{\tilde{c}_2^2 - 4\tilde{c}_2\epsilon_2}}{2\tilde{c}_2}$, podem ser obtidos com $0 \leq \epsilon_2 \leq \frac{1}{4}$, como soluções candidatas para otimizar o Problema (4.12).

Agora, substituindo ambos os valores encontrados no sistema gerado por (I) e (II), é possível obter

$$w \cong \frac{\tilde{c}_{12} \left(\tilde{c}_2 \pm \sqrt{\tilde{c}_2^2 - 4\tilde{c}_2\epsilon_2} \right) - \tilde{c}_{11} \left(\tilde{c}_2 \mp \sqrt{\tilde{c}_2^2 - 4\tilde{c}_2\epsilon_2} \right)}{\tilde{c}_2 \left(\pm \sqrt{\tilde{c}_2^2 - 4\tilde{c}_2\epsilon_2} \right)} \geq 0$$

Assim, as soluções candidatas são soluções ótimas nebulosas do Problema (4.12), com $0 \leq \epsilon_2 \leq \frac{1}{4}$. Portanto, elas podem ser soluções eficientes nebulosas do Problema (4.11). \square

Teorema 4.2. Assuma que f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, g_j , $j = 1, \dots, p$ e h_l , $l = 1, \dots, r$ são diferenciáveis e que a suposição de convexidade é mantida para todos os f_i , $i = 1, 2, \dots, m$, sendo estritamente convexas. Então $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$ se \mathbf{x}^* satisfaz as condições de KKT para eficiência nebulosa.

Demonstração. Por hipótese, nós podemos escolher uma função objetivo $k \in \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $\omega_k > 0$, e então, \mathbf{x}^* satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker para $P_k(\epsilon^*)$. Além do mais, as funções objetivo f_i , $\forall i \in \mathcal{I}$ são estritamente

convexas, como também é a função objetivo selecionada f_k . Portanto, pela suposição de convexidade, \mathbf{x}^* é a única solução global de $P_k(\epsilon^*)$ e, pelo Teorema 3.5, $\mathbf{x}^* \in \text{efi}(\Omega)$. \square

Para ilustrar o uso desse teorema de convexidade, o seguinte problema de otimização multi-objetivo é considerado como exemplo.

Exemplo 4.2.

$$\begin{aligned}
\min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{c}_1)^2 + (x_2 - \tilde{c}_2)^2 \\
\min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = x_1 + x_2 \\
\min \quad & f_3(\tilde{\mathbf{c}}_3; \mathbf{x}) = x_1 + \tilde{c}_3 x_2 \\
\text{s. a} \quad & g_1(\mathbf{x}) = -x_1 \leq 0 \\
& g_2(\mathbf{x}) = -x_2 \leq 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

sendo que $\tilde{\mathbf{c}}_1 = (3, 1, 1)_{LR}$ and $\tilde{\mathbf{c}}_2 = \tilde{\mathbf{c}}_3 = (2, 1, 1)_{LR}$.

Transformando (4.13) na formulação Lagrangeana, é possível obter

$$\text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3; \mathbf{x}, \omega) = f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) + \omega_2(f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) - \epsilon_2) + \omega_3(f_3(\tilde{\mathbf{c}}_3; \mathbf{x}) - \epsilon_3) \tag{4.14}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}_+$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aplicando as condições de otimalidade para problemas de programação restrita descritas em [12].

$$\begin{aligned}
\nabla_{x_1} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3; \mathbf{x}, \omega) &= 2(x_1 - \tilde{c}_1) + \omega_2 + \omega_3 \cong 0 & (I) \\
\nabla_{x_2} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3; \mathbf{x}, \omega) &= 2(x_2 - \tilde{c}_2) + \omega_2 + \omega_3 \tilde{c}_3 \cong 0 & (II) \\
\nabla_{\omega_2} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3; \mathbf{x}, \omega) &= x_1 + x_2 - \epsilon_2 \cong 0 & (III) \\
\nabla_{\omega_3} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2, \tilde{\mathbf{c}}_3; \mathbf{x}, \omega) &= x_1 + \tilde{c}_3 x_2 - \epsilon_3 \cong 0 & (IV)
\end{aligned}$$

Manipulando as Equações (IV) em (III) do sistema acima, são obtidos $x_1 \cong \frac{\tilde{c}_3 \epsilon_2 - \epsilon_3}{\tilde{c}_3 - 1}$ e $x_2 \cong \frac{\epsilon_3 - \epsilon_2}{\tilde{c}_3 - 1}$. Substituindo os valores encontrados em (I) e (II), temos

$$\begin{aligned}
\omega_2 &= \frac{(-2\tilde{c}_3 - 2 + \tilde{c}_1)\epsilon_2 + 6\epsilon_3 + 2\tilde{c}_1\tilde{c}_3(\tilde{c}_3 - 1) - 2\tilde{c}_2(\tilde{c}_3 - 1)}{(\tilde{c}_3 - 1)} \\
&\quad e \\
\omega_3 &= \frac{(2\tilde{c}_3 + 2)\epsilon_2 - 4\epsilon_3 - 2\tilde{c}_1(\tilde{c}_3 - 1) + 2\tilde{c}_2(\tilde{c}_3 - 1)}{(\tilde{c}_3 - 1)}.
\end{aligned}$$

No caso particular, nós selecionamos $\omega_2 = 0$ e $\omega_3 = 0$, então são obtidos os valores determinados por “ ϵ_2 está em torno de 5” e “ ϵ_3 está em torno 7”.

Assim, nós concluímos que \mathbf{x} é a solução ótima nebulosa do Problema (4.14) pelas manipulações algébricas e, portanto, é também uma solução eficiente nebulosa do Problema (4.13). \square

As definições descritas nesse trabalho resolvem um problema multi-objetivo com custos nebulosos nas funções objetivo. A revisão bibliográfica descrita no Capítulo 2 mostra somente um trabalho com essa definição. Os demais usam coeficientes nebulosos ou relações imprecisas no conjunto de restrições. O exemplo abaixo é usado para efetuar uma análise dos resultados:

Exemplo 4.3.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - \tilde{c}_1)^2 \\
 \min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{c}_2)^2 + x_2^2 \\
 \text{s. a} \quad & g_1(\mathbf{x}) = x_1 \geq 0 \\
 & g_2(\mathbf{x}) = x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

sendo que $\tilde{\mathbf{a}}_1 = (2, 4, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{\mathbf{a}}_2 = (1, 3, 1, 1)_{LR}$.

As figuras a seguir apresentam as soluções e a fronteira nebulosa.

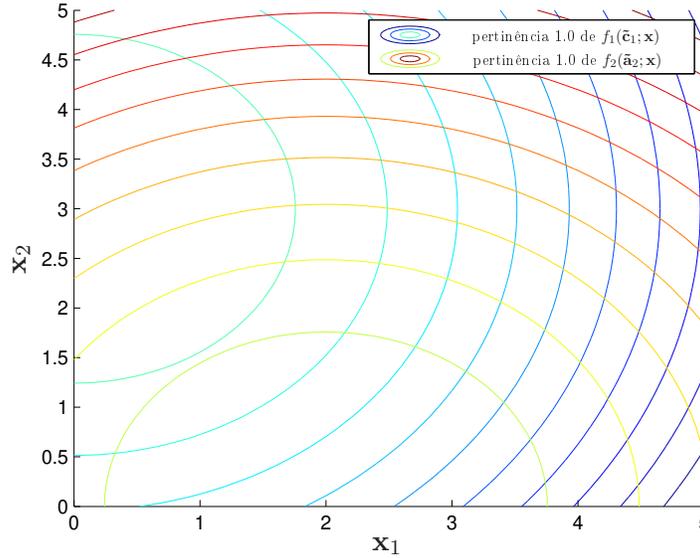


Figura 4.3: Funções objetivo

Transformando (4.15) em uma formulação Lagrangiana, obtemos

$$\text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega) = f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) + \omega(f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) - \epsilon_2) \tag{4.16}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}_+$.

Aplicando as condições de otimalidade para problemas de programação restritos descritos em [11]:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{x_1} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2; \mathbf{x}, \omega) &= 2x_1 + 2\omega(x_1 - \tilde{c}_1) \cong 0 & (I) \\
 \nabla_{x_2} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega) &= 2(x_2 - \tilde{c}_2) + 2\omega x_2 \cong 0 & (II) \\
 \nabla_{\omega} \text{lag}(\tilde{\mathbf{c}}_1, \tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}, \omega) &= (x_1 - \tilde{c}_1)^2 + x_2^2 - \epsilon_2 \cong 0 & (III)
 \end{aligned}$$

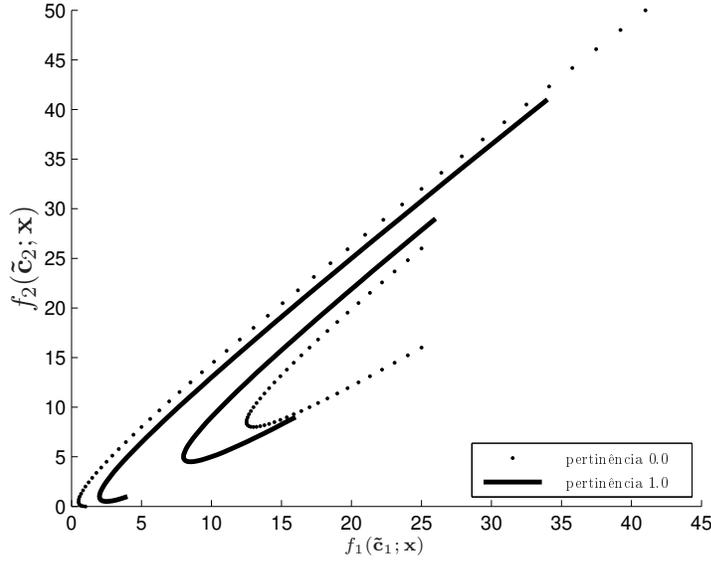


Figura 4.4: Fronteira Pareto-ótima

Resolvendo (I) e (II), os valores $x_1 \cong \frac{\tilde{c}_1}{1+\omega}$ e $x_2 \cong \frac{\omega\tilde{c}_2}{1+\omega}$ são obtidos. Substituindo esses valores em (III), $\epsilon_2 \cong \frac{\tilde{c}_1^2 + \omega\tilde{c}_2^2}{1+\omega}$ é obtido, como soluções candidatas para otimizar o Problema (4.16).

Usando ambos os valores encontrados no sistema gerado por (I) ou (II), $w \geq 0$ é obtido. Assim, as soluções candidatas são soluções ótimas nebulosas do Problema (4.16). Portanto, elas podem ser soluções eficientes nebulosas do Problema (4.15). \square

A solução ótima obtida usando esse exemplo é $\mathbf{x}^* = 0$ com $\alpha = 0$ e pode ser visto em [34]. Esse ponto pertence ao conjunto de soluções Pareto ótimas do Problema (4.15), que é construído para cada valor α no intervalo $[0, 1]$. A abordagem apresentada aqui obtida por esse ponto ótimo com $\omega = 0$, $a_1 = 0$ e qualquer $a_2 \in [0, 4]$ e, usando as definições descritas nesse trabalho, outros pontos ótimos podem ser encontrados com a Teoria de Possibilidade com $\alpha = 0$. Portanto, nossa nova abordagem é mais geral e fornece mais opções para o decisor.

4.3.2 Combinação das abordagens paramétrica e possibilística

A abordagem paramétrica transforma um problema de programação multi-objetivo em um ambiente incerto (nos quais as incertezas são representadas por lógica nebulosa) em um problema de programação multi-objetivo clássico paramétrico, onde esses parâmetros representam o nível de satisfação que é escolhido pelo decisor. Depois de realizada essa transformação o novo problema pode ser resolvido

por várias metodologias desenvolvidas para obter a solução ótima ou um conjunto de soluções ótimas que satisfaçam as condições necessárias de otimalidade.

A abordagem possibilística não realiza esta transformação, mas para obter uma solução satisfatória para o problema multi-objetivo nebuloso é necessário, primeiramente, escolher um dos índices de comparação de números nebulosos que define uma relação de ordem entre os elementos de um conjunto nebuloso. Depois de escolhido esse índice, é possível estender as condições necessárias de otimalidade para conjuntos clássicos e obter uma solução satisfatória ou um conjunto de soluções satisfatórias do problema a ser otimizado.

Portanto, a combinação das duas abordagens descritas neste capítulo é definida nos seguintes critérios: (i) Os coeficientes nebulosos das funções que geram o conjunto de restrições é parametrizado como descrito no Problema (4.9) e as novas variáveis de decisão são também inseridas nas novas funções objetivo; (ii) A relação de ordem que é usada para comparar as funções objetivo originais é a descrita na abordagem possibilística e, portanto, usa os critérios necessários de otimalidade descritos na seção anterior para obter um conjunto de soluções eficientes nebulosas.

Nesse capítulo descrevemos duas abordagens, paramétrica e possibilística, para resolver problemas multi-objetivo restrito sem e com parâmetros nebulosos no conjunto de restrições. No próximo capítulo são apresentados os resultados computacionais referentes à teoria proposta nas abordagens descritas neste capítulo e no anterior. Esse resultados são obtidos usando um algoritmo evolutivo chamado NSGA-II que soluciona problemas de programação multi-objetivo. Um resumo sobre o funcionamento desse algoritmo evolutivo está descrito no Apêndice D, porém em [19] tem uma explicação mais ampla.

Capítulo 5

Resultados computacionais

5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados alguns problemas utilizados para validar as propostas apresentadas nos Capítulos 3 e 4. Os problemas foram divididos em três categorias, as quais representam as diferentes abordagens desenvolvidas neste trabalho. A primeira abordagem envolve problemas que foram discutidos no Capítulo 3, em que as incertezas encontram-se nos parâmetros das funções objetivo e os problemas são restritos somente pelos valores máximos e mínimos das variáveis de decisão, enquanto as outras duas categorias envolvem os problemas mostrados no Capítulo 4, em que as incertezas estão inseridas nos parâmetros das funções objetivo e também podem ser encontradas nos coeficientes das funções que geram o conjunto de soluções factíveis.

Cada seção deste capítulo mostra a formulação dos problemas a serem resolvidos pelas abordagens propostas e os resultados computacionais, junto com uma breve análise. Os problemas usados para avaliar a teoria dos Capítulos 3 e 4 são formulações hipotéticas, porém suficientes para validar o estudo realizado. A análise dos resultados confronta a solução encontrada por cada uma das novas abordagens que foram desenvolvidas neste trabalho.

Os algoritmos que descrevem as abordagens foram implementadas utilizando o programa Matlab[®] 7.6. Um algoritmo genético multi-objetivo baseado no NSGA-II com elitismo foi implementado de duas maneiras. A primeira é idêntica ao que já foi publicado[19], enquanto que a segunda foi alterada o critério de comparação, no qual foi usado um índice baseado na teoria de possibilidade para comparar dois números nebulosos. A máquina usada para simular todos os problemas de otimização multi-objetivo em ambiente nebuloso, foi um Pentium Centrino Core 2 Duo, 2.26GHz cada processador, com 4GB de memória RAM, usando o sistema

operacional Ubuntu 8.10.

5.2 Programação multi-objetivo nebulosa irrestrita

São apresentados seis problemas para exemplificar como as nossas abordagens encontram a fronteira de Pareto, que é o mapeamento do conjunto eficiente no espaço das funções. Eles são baseados em alguns problemas clássicos irrestritos descritos em [19], e com duas funções objetivo. As incertezas foram inseridas pelos autores e a configuração de cada número nebuloso foi definida de acordo com cada caso.

O primeiro problema de programação multi-objetivo nebuloso irrestrito baseia-se em um problema clássico muito conhecido e estudado, chamado de problema de Schaffer[61]. O problema nebuloso adaptado é formulado da seguinte maneira:

$$\text{SCH1} : \begin{cases} \min & f_1(\tilde{c}_1; \mathbf{x}) = (x - \tilde{c}_1)^2 \\ \min & f_2(\tilde{c}_2; \mathbf{x}) = (x - \tilde{c}_2)^2 \\ & -A < x < A \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $\tilde{c}_1 = (0, 0, 2)_{LR}$, $\tilde{c}_2 = (2, 1, 1)_{LR}$ e A pode ser modificado pelo decisor (neste trabalho foi escolhido igual a 5). O número está representado na forma $(\text{mod}, \delta_L, \delta_R)_{LR}$, onde “mod” é o valor central (caso ele tenha altura igual a 1, esse valor “mod” representa o valor modal), δ_L representa o espalhamento a esquerda a partir do valor modal e δ_R representa o espalhamento a direita a partir do valor modal. Mais detalhes são apresentados no Apêndice A.

A Figura 5.1 mostra os conjuntos de soluções eficientes encontradas para cada abordagem. As estrelas representam a fronteira de Pareto que foi mapeada pelas soluções eficientes da abordagem paramétrica, enquanto os retângulos representam os valores nebulosos da fronteira de Pareto formados pelas soluções eficientes da abordagem possibilística. Esses retângulos são formados pela relação entre duas imagens nebulosas obtidas pelas duas funções objetivo com custos nebulosos quando aplicadas à mesma solução eficiente. A base dessa relação tem pertinência igual ao nível de satisfação determinado pelo decisor e o centro tem pertinência igual a 1. O conjunto de soluções eficientes do problema clássico de Schaffer, isto é, todos os parâmetros são conhecidos e precisos, está representado pelos losangos.

Nesse problema, assim como nos demais mostrados neste capítulo, o nível de satisfação escolhido pelo decisor foi igual a 0,8. Os retângulos são formados pelos pontos que pertencem ao suporte do número nebuloso com pertinência igual ou superior a 0,8. Podemos perceber pelo gráfico que as estrelas convergem para o nível de satisfação escolhido pelo decisor.

É possível observar que os conjuntos de soluções eficientes obtidos pelas abordagens paramétrica e possibilística encontram pontos que dominam o conjunto

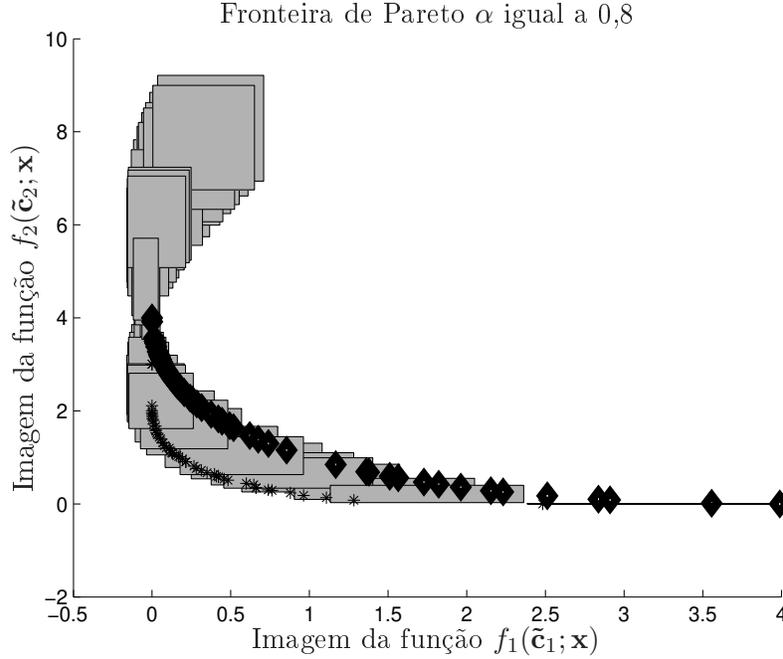


Figura 5.1: Problema irrestrito.

de soluções eficientes para o problema clássico, mas com nível de satisfação menor que 1. Entretanto, é importante comentar que a teoria das duas abordagens nebulosas consegue obter soluções eficientes nebulosas satisfatórias, quando comparadas com a resposta clássica. Além disso, observa-se também que a fronteira de Pareto formada pelos números nebulosos encontrados usando a abordagem possibilística engloba a fronteira formada pelos pontos encontrados pela abordagem paramétrica.

O próximo problema tem variáveis de decisão bi-dimensionais o que aumenta um pouco mais a complexidade do problema. Contudo, o problema ainda continua sendo convexo e, portanto, pode-se encontrar todas as soluções eficientes para um número infinito de elementos na população do NSGA-II. Esse segundo problema pode ser formulado como

$$\begin{cases} \min & f_1(\tilde{c}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{11}x_1^2 + \tilde{c}_{12}x_2^2 \\ \min & f_2(\tilde{c}_2; \mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{c}_{21})^2 + \tilde{c}_{22}x_2^2 \\ & -50 < x_1, x_2 < 50 \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{22} = (1, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{c}_{21} = (2, 1, 1)_{LR}$.

Na Figura 5.2, o enfoque possibilístico não consegue construir a fronteira de Pareto mais compacta, pois necessitaria de mais elementos na população e de um maior número de gerações. Todos os problemas aqui apresentados foram

simulados com 50 elementos na população no decorrer de 50 gerações, tanto no enfoque possibilístico quanto no enfoque paramétrico. Novamente, as estrelas que representam as soluções do enfoque paramétrico convergem para um dos limitantes da faixa formada pelas soluções da abordagem possibilística. Nesse caso, existem algumas soluções paramétricas que não pertencem à faixa de Pareto formada pelas condições nebulosas usando a teoria de possibilidade, mas ambos os conjuntos conseguem encontrar soluções satisfatórias quando comparadas às soluções eficientes do problema clássico.

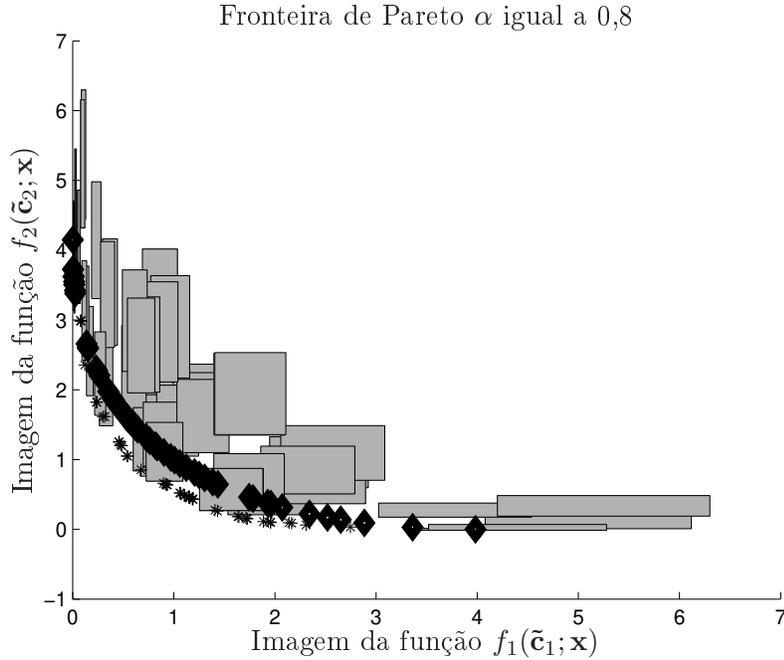


Figura 5.2: Problema irrestrito.

A seguir é considerado um problema de programação multi-objetivo nebuloso irrestrito com dois objetivos a serem minimizados sobre um espaço de decisão bi-dimensional:

$$\begin{cases} \min & f_1(\tilde{c}_1; \mathbf{x}) = 1.1 - \tilde{c}_1 x_1 \\ \min & f_2(\tilde{c}_2; \mathbf{x}) = 60 - \frac{\tilde{c}_2 + x_3}{x_1} \\ & 0.1 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 5 \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = (1, 1, 1)_{LR}$. Todos os problemas descritos neste trabalho foram resolvidos com os parâmetros de reprodução e o índice de probabilidade de reprodução fixados em 0,8 e 40, respectivamente, que são parâmetros indispensáveis para o algoritmo NSGA-II.

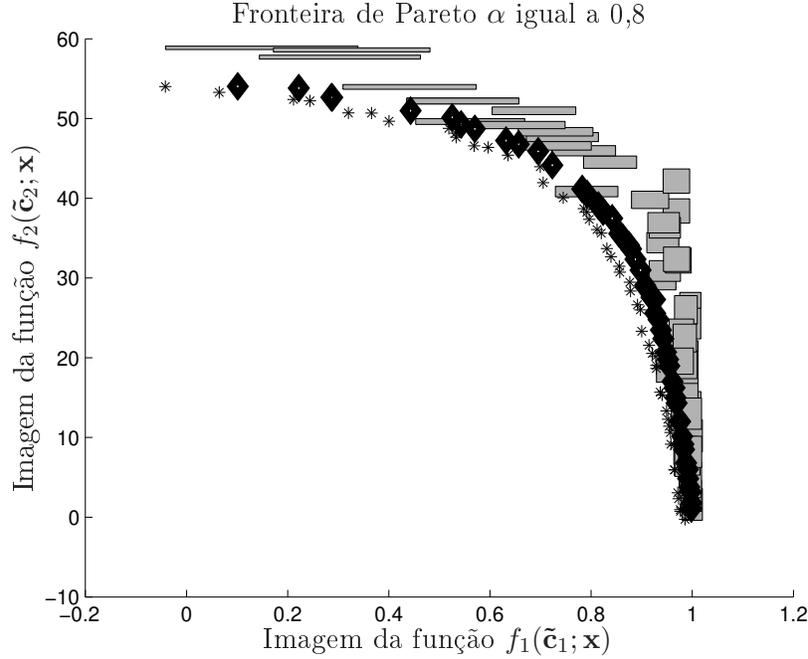


Figura 5.3: Problema irrestrito.

Na Figura 5.3, pode-se observar que o enfoque paramétrico consegue obter um conjunto melhor de soluções eficientes, pois geram uma fronteira de Pareto com valores menores que a fronteira gerada pelo enfoque possibilístico e pelo caso clássico. A faixa de Pareto gerada pelo enfoque possibilístico nos fornece uma quantidade maior de soluções com níveis de satisfação maior ou igual a 0.8, enquanto que o enfoque paramétrico fornece a melhor solução encontrada depois de 50 iterações permitindo esse nível de satisfação. Nesse caso, o conjunto de soluções do problema clássico obteve algumas soluções melhor que o enfoque possibilístico e podemos concluir que isso ocorreu pelo fato do problema ser não convexo.

O próximo problema, conhecido na literatura como de Kursawe, é um problema multi-objetivo não-linear e não convexo com dois objetivos. O problema multi-objetivo nebuloso irrestrito que foi adaptado do problema de Kursawe é formulado como

$$\begin{cases} \min & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = \sum_{i=2}^2 \left[\tilde{c}_1 \exp \left(-0.2 \sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2} \right) \right] \\ \min & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \left[|x_i|^{0.8} + \tilde{c}_2 \sin(x_i^3) \right] \\ & -5 < x_i < 5, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (5.4)$$

onde $\tilde{\mathbf{c}}_1 = (-10, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{\mathbf{c}}_2 = (5, 1, 1,)_{LR}$. O resultado do problema clássico de Kursawe é um conjunto de soluções eficientes não-convexo e descontínuo (três

parte descontínuas). Essa descontinuidade está presente também no caso do problema nebuloso. Esse resultado é um exemplo de que um problema não-convexo clássico pode tornar-se em um problema convexo no caso nebuloso. Quanto mais incertezas são inseridas no problema original o problema transformado aproxima-se mais perto da convexidade.

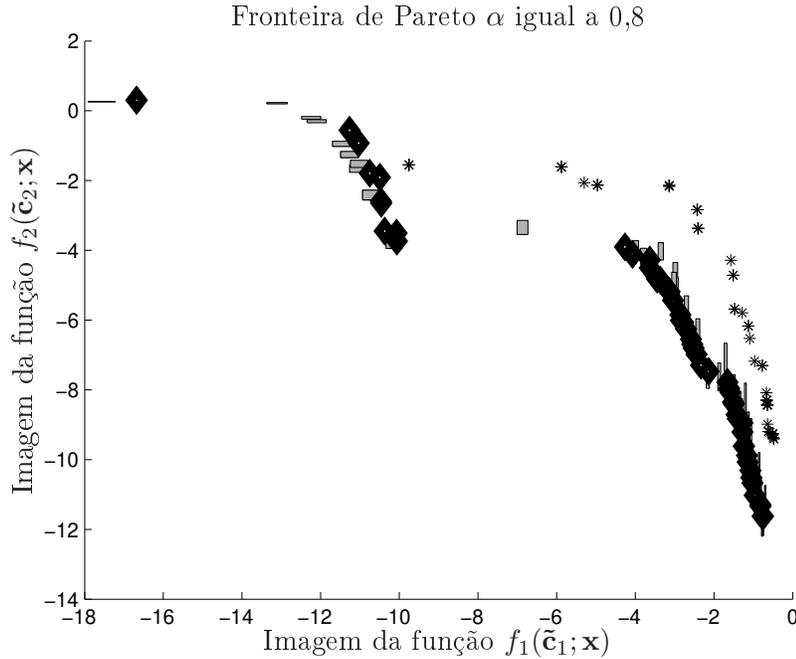


Figura 5.4: Problema irrestrito.

Na Figura 5.4, o enfoque paramétrico novamente encontra soluções mais eficientes que o enfoque possibilístico e o caso clássico. Na comparação entre os dois enfoques desenvolvidos nesse trabalho, a distância entre a fronteira e faixa de Pareto do enfoque paramétrico e do enfoque possibilístico, respectivamente, é maior. Quando comparamos o enfoque possibilístico com o caso clássico, observamos que existe uma igualdade. Contudo, no caso em que usa-se a possibilidade como índice de comparação, os seus elementos da faixa de Pareto são mais dispersos, formando um espaço maior de soluções, por motivo novamente da não convexidade desse problema.

O quinto problema multi-objetivo nebuloso irrestrito com duas funções objetivo é descrito abaixo.

$$\begin{cases} \min & f_1(\tilde{c}_1; \mathbf{x}) = x_1^2 + \tilde{c}_1 \\ \min & f_2(\tilde{c}_2; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{21} + x_2^2 - x_1 - \tilde{c}_{22} \sin(b\pi x_1) \\ & 0 < x_1 < 1, \quad -2 < x_2 < 2 \end{cases} \quad (5.5)$$

onde $\tilde{c}_1 = (0, 0, 1)_{LR}$, $\tilde{c}_{21} = (1, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{c}_{22} = (0.2, 0.2, 0.2)$ são os parâmetros nebulosos, e b é um número clássico qualquer que será igual a 1 nessa simulação. Esse problema tem dois parâmetros que podem ser variados pelo decisor que são \tilde{c}_{22} e b . Esses parâmetros controlam a convexidade do espaço de busca.

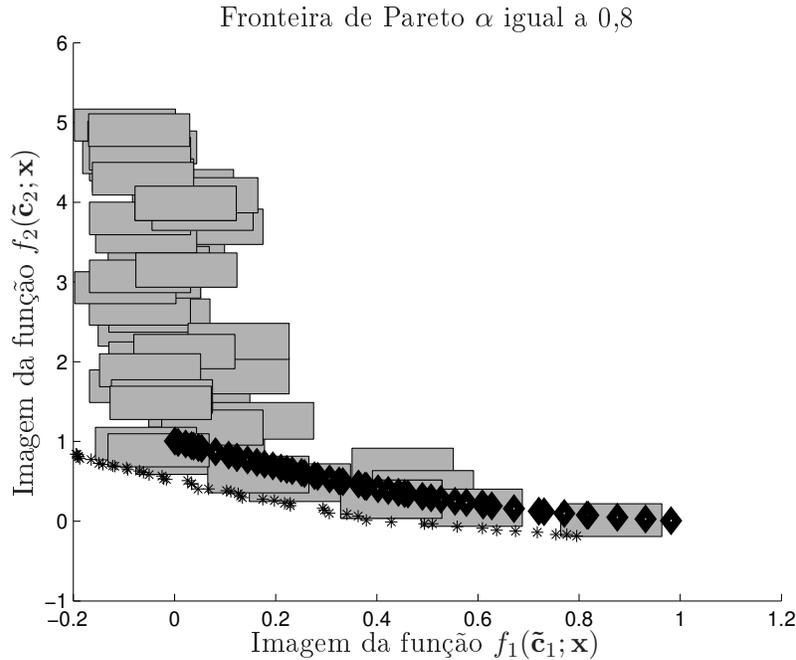


Figura 5.5: Problema irrestrito.

Neste exemplo, o conjunto de soluções eficientes do problema clássico, representado pelos losangos, volta a estar inserido na faixa de Pareto formada pelo mapeamento das soluções eficientes obtidas pela abordagem possibilística. Além disso, a faixa de Pareto do enfoque possibilístico contém alguns elementos da fronteira de Pareto formada pelo mapeamento das soluções eficientes do enfoque paramétrico, como visto na Figura 5.5. Entretanto, a resposta paramétrica ainda continua sendo uma possível solução limite para a resposta possibilística, pois todos os retângulos alcançam no máximo a fronteira formada pelas estrelas e algumas dessas estrelas pertencem ao interior de alguns retângulos.

O ponto dos objetivos *versus* o nicho do espaço de decisão é importante no contexto de obter diversidade entre soluções eficientes. É claro que quando o nicho do espaço dos objetivos é formado, a diversidade nos valores das funções objetivo são esperados, considerando que quando o nicho do espaço de parâmetros é formado, a diversidade nos valores das variáveis de decisão é esperado. É ilustrado a seguir um problema que foi convertido de um problema multi-objetivo

clássico em um problema nebuloso.

$$\begin{cases} \min & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_1 - \exp(-4x_1) \sin^4(5\pi x_1) \\ \min & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = (\tilde{c}_{21} + \tilde{c}_{22}x_2^2) \left[1 - \left(\frac{f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x})}{\tilde{c}_{21} + \tilde{c}_{22}x_2^2} \right)^4 \right] \\ & 0 < x_1 < 1, \quad -1 < x_2 < 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

onde $\tilde{\mathbf{c}}_1 = \tilde{c}_{21} = (1, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{\mathbf{c}}_{22} = (9, 1, 1)_{LR}$. O procedimento adotado em todas as simulações foi uma taxa de mutação que se modifica de acordo com a dimensão das variáveis de decisão. A taxa de mutação é um parâmetro do algoritmo genético, que pode ser definido pelo decisor ou pode ser adaptativo. Entretanto, nesse trabalho essa taxa foi definida pelo decisor, que é dividida pela dimensão das variáveis de decisão, isto é, se a dimensão é dois, a taxa de mutação foi dividida pela metade.

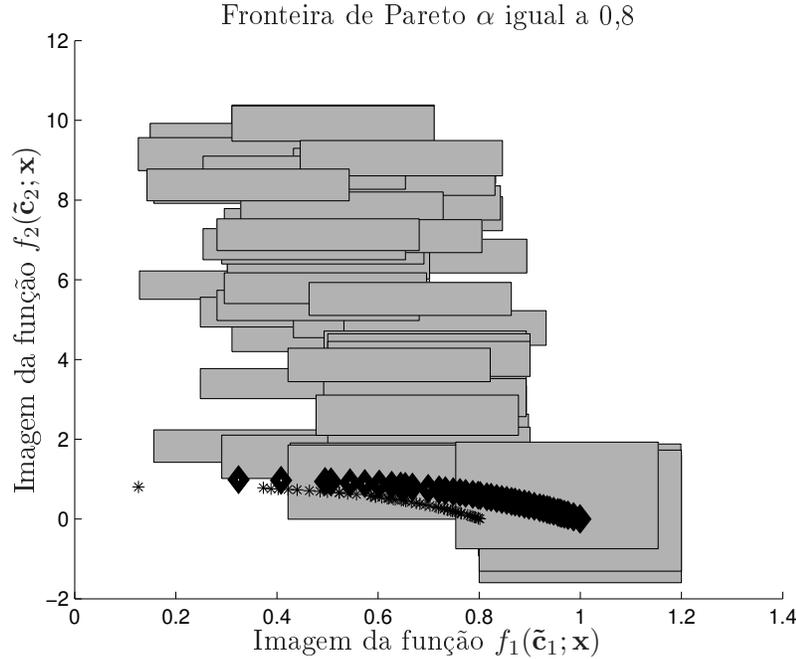


Figura 5.6: Problema irrestrito.

Levando em consideração os resultados apresentados anteriormente, a Figura 5.6 mostra uma solução particular porque praticamente todos os elementos da fronteira de Pareto encontrados para o problema clássico e os obtidos pelo enfoque paramétrico pertencem à faixa de Pareto encontrada pela abordagem possibilística e esse exemplo mostra que a solução paramétrica nem sempre é uma solução limite da solução possibilística.

5.3 Programação multi-objetivo nebulosa restrita

São apresentados seis problemas para exemplificar como as nossas abordagens encontram a fronteira de Pareto. Esses problemas são divididos em dois grupos, sendo que o primeiro é composto por problemas teóricos que pertencem a área de programação multi-objetivo nebulosa restrita com parâmetros imprecisos somente nos custos das funções objetivo, enquanto o segundo grupo são dois problemas teóricos com parâmetros imprecisos nos custos das funções objetivo e nos coeficientes das funções de restrições. Eles não têm critérios muito complexos para encontrar um conjunto eficiente, mas são suficientes para validar os dois enfoques que foram descritas nos capítulos anteriores. Os problemas são baseados em alguns problemas clássicos restritos, descritos em [19], e com duas funções objetivo porque a intenção é mostrar as soluções encontradas por ambas abordagens. Entretanto, as incertezas foram inseridas pelos autores, onde a configuração de cada número nebuloso foi definida de acordo com cada caso.

5.3.1 Parâmetros nebulosos somente nas funções objetivo

Nessa sub-seção inserimos algumas funções que restringem o espaço de busca das variáveis de decisão. Essa diminuição pode tornar a busca por uma solução factível e satisfatória mais difícil. Aqui serão apresentados três problemas que verificam e validam os enfoques desenvolvidos neste trabalho.

O primeiro problema de otimização com dois objetivos com custos nebulosos nas funções objetivo é uma adaptação do problema multi-objetivo descrito em [13]:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{11} + (x_1 - \tilde{c}_{12})^2 + (x_2 - \tilde{c}_{13})^2 \\
 \min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{21}x_1 - (x_2 - \tilde{c}_{22})^2 \\
 \text{s.a} \quad & g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \leq 225 \\
 & g_2(\mathbf{x}) = x_1 - 3x_2 + 10 \leq 0 \\
 & -20 < x_1, x_2 < 20
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

onde $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{12} = (2, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{22} = (1, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{c}_{21} = (9, 1, 1)_{LR}$. Em relação aos parâmetros de simulação destes problemas, como por exemplo tamanho da população, número de gerações e outras mais, foram adotadas iguais aos expostos na seção anterior.

Pode-se observar na Figura 5.7 que os três conjuntos de soluções eficientes estão distribuídas de forma parecida e até mesmo a diversidade das soluções está bem clara. Além disso, o conjunto de soluções eficientes do problema clássico está praticamente sobreposto ao conjunto eficiente obtido pelo enfoque paramétrico. Podemos concluir que os valores clássicos e com nível de satisfação igual a 0,8 tem uma diferença muito pequena e, portanto, fornecem soluções equivalentes. Uma resposta a isso seria aumentar o espalhamento dos números nebulosos, pois

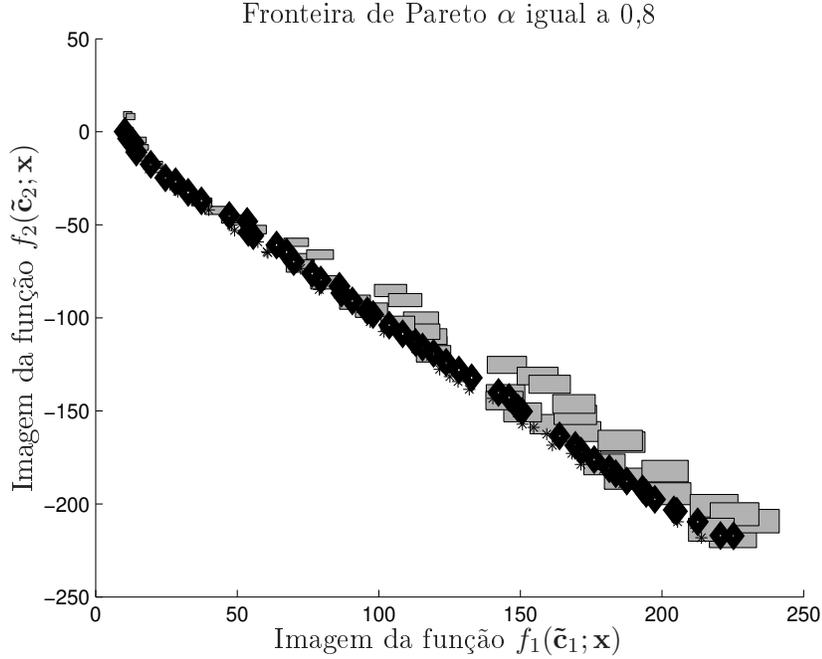


Figura 5.7: Problema restrito.

esse fato não ocorre nos exemplos anteriores. Entretanto, as diferenças entre as soluções eficientes encontradas nas duas abordagens desenvolvidas neste trabalho são visíveis. Outro ponto interessante ocorre quando as soluções nebulosas têm um nível de imprecisão menor, isto é, o tamanho do retângulo é menor e as duas abordagens obtêm soluções muito similares.

O segundo problema de otimização com dois objetivos com custos nebulosos nas funções objetivo é uma adaptação do problema multi-objetivo descrito em [72]:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_1(\tilde{c}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{11}x_1^2 + \tilde{c}_{12}x_2^2 \\
 \min \quad & f_2(\tilde{c}_2; \mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{c}_{21})^2 + (x_2 - \tilde{c}_{22})^2 \\
 \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 5)^2 + x_2^2 \leq 25 \\
 & g_2(\mathbf{x}) = (x_1 - 8)^2 + (x_2 + 3)^2 \geq 7.7 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 3
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{12} = (4, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{c}_{21} = \tilde{c}_{22} = (5, 1, 1)_{LR}$.

Na Figura 5.8, pode-se notar que as soluções eficientes paramétricas geram uma fronteira de Pareto que é um dos limitantes da faixa de Pareto formada pelas soluções eficientes possibilísticas, enquanto as soluções eficientes do caso clássico, representadas pelos losangos, pertencem praticamente à faixa de Pareto. Um ponto interessante está no fato de que quatro elementos da faixa de Pareto

estão um pouco distante do conjunto em geral, porém não estão muito isolados porque quatro elementos da fronteira de Pareto do caso clássico e dois elementos da fronteira de Pareto do enfoque paramétrico também estão presentes neste pequeno conjunto e pertencem as soluções eficientes possibilísticas. Contudo, esses dois pontos do enfoque paramétrico são dominados por algumas soluções eficientes do caso clássico. O mesmo não podemos dizer de soluções do enfoque possibilístico porque ele tenta formar uma faixa de Pareto com espalhamentos à esquerda e à direita, tendo como base os valores com pertinência 1.

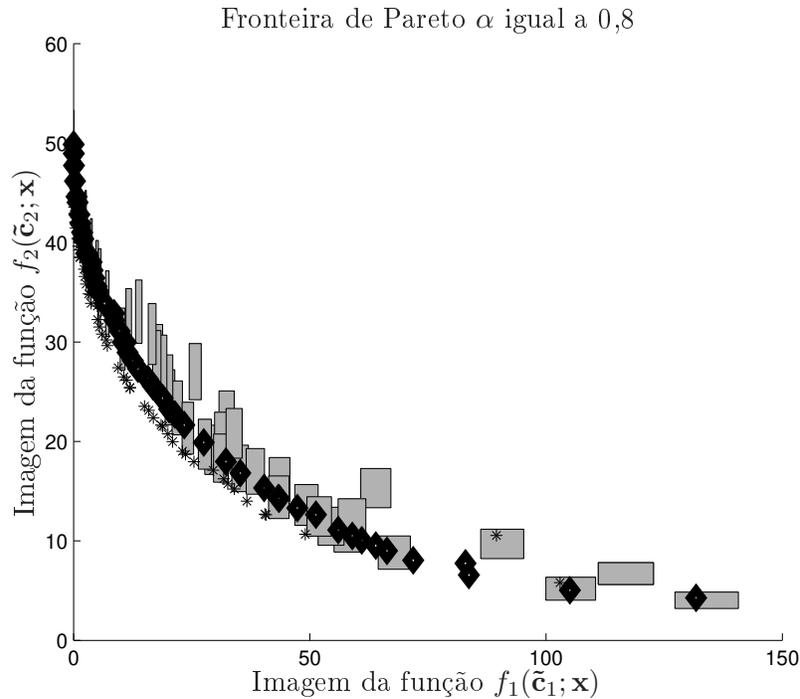


Figura 5.8: Problema restrito.

Em [19], é construído um problema multi-objetivo com duas variáveis de decisões bi-dimensionais e duas funções objetivo. A versão nebulosa desse problema é:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_1(\tilde{c}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_1 x_1 \\
 \min \quad & f_2(\tilde{c}_2; \mathbf{x}) = \frac{\tilde{c}_2 + x_1}{x_2} \\
 \text{s.a.} \quad & g_1(\mathbf{x}) = x_2 + 9x_1 \geq 6 \\
 & g_2(\mathbf{x}) = -x_2 + 9x_1 \geq 1 \\
 & 0.1 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 5
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = (1, 1, 1)_{LR}$.

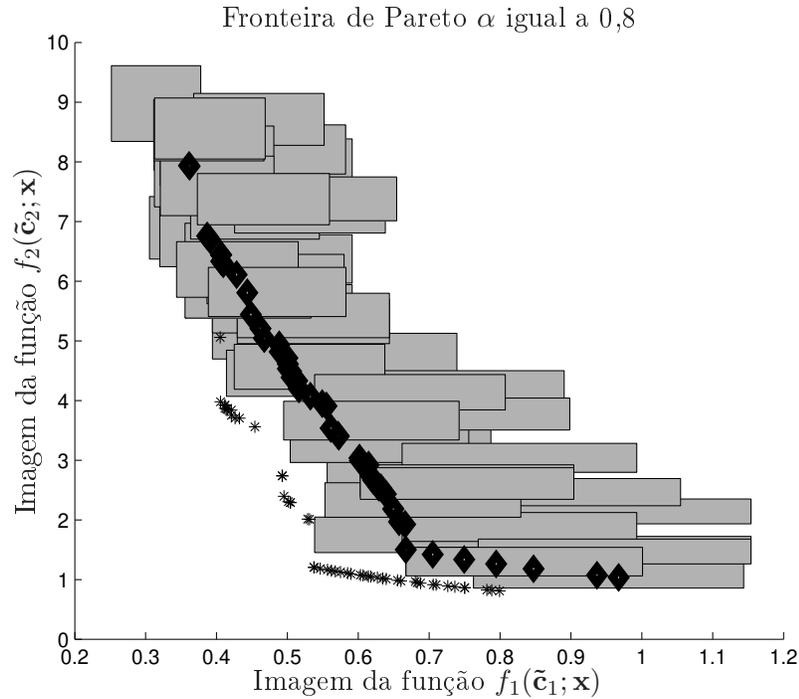


Figura 5.9: Problema restrito.

A fronteira de Pareto formada pelas soluções eficientes do enfoque paramétrico mostrada na Figura 5.9, obteve soluções melhores, porém observa-se que essa fronteira é descontínua e ao mesmo tempo não tem uma boa diversidade. Por outro lado, a faixa de Pareto formada pelas soluções eficientes do enfoque possibilístico obteve um conjunto de retângulos bem distribuídos gerando uma boa diversidade de possíveis soluções. Outro aspecto a notar é que os pontos possíveis aparentam formar uma estrutura contínua e todo o conjunto de soluções eficientes para o problema clássico estão inseridas na faixa de Pareto desse enfoque possibilístico.

5.3.2 Parâmetros nebulosos nas funções objetivo e nas restrições

Nessa sub-seção inserimos algumas funções com incertezas no conjunto de restrições que delimitam o espaço de busca das variáveis de decisão. Essa delimitação pode tornar a busca por uma solução factível e satisfatória mais difícil. Aqui serão apresentados três problemas que verificam e validam os enfoques desenvolvidos neste trabalho.

O primeiro problema de otimização com dois objetivos com custos nebulosos nas funções objetivo é uma adaptação do problema multi-objetivo descrito em

[13]:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{11} + (x_1 - \tilde{c}_{12})^2 + (x_2 - \tilde{c}_{13})^2 \\
\min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{21}x_1 - (x_2 - \tilde{c}_{22})^2 \\
\text{s.a} \quad & g_1(\tilde{\mathbf{a}}_1; \mathbf{x}) = \tilde{a}_{11}x_1^2 + \tilde{a}_{21}x_2^2 \leq^f \tilde{b}_1 \\
& g_2(\tilde{\mathbf{a}}_2; \mathbf{x}) = \tilde{a}_{21}x_1 - \tilde{a}_{22}x_2 \leq^f \tilde{b}_2 \\
& -20 \leq x_1, \leq x_2 \leq 20
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{12} = (2, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{c}_{13} = \tilde{c}_{22} = (1, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{c}_{21} = (9, 1, 1)_{LR}$ são os parâmetros incertos das funções objetivo. Os parâmetros incertos que estão presentes no conjunto de restrições são $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{21} = (1, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{a}_{22} = (3, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{b}_1 = (225, 25, 25)_{LR}$ e $\tilde{b}_2 = (9, 1, 1)_{LR}$. Os valores de violação máxima permitida para cada restrição são $\tilde{d}_1 = (25, 5, 5)_{LR}$ e $\tilde{d}_2 = (1, 0.1, 0.1)_{LR}$. Em relação aos parâmetros de simulação destes problemas, como por exemplo tamanho da população, número de gerações e outras mais, foram adotadas iguais aos expostos na seção anterior.

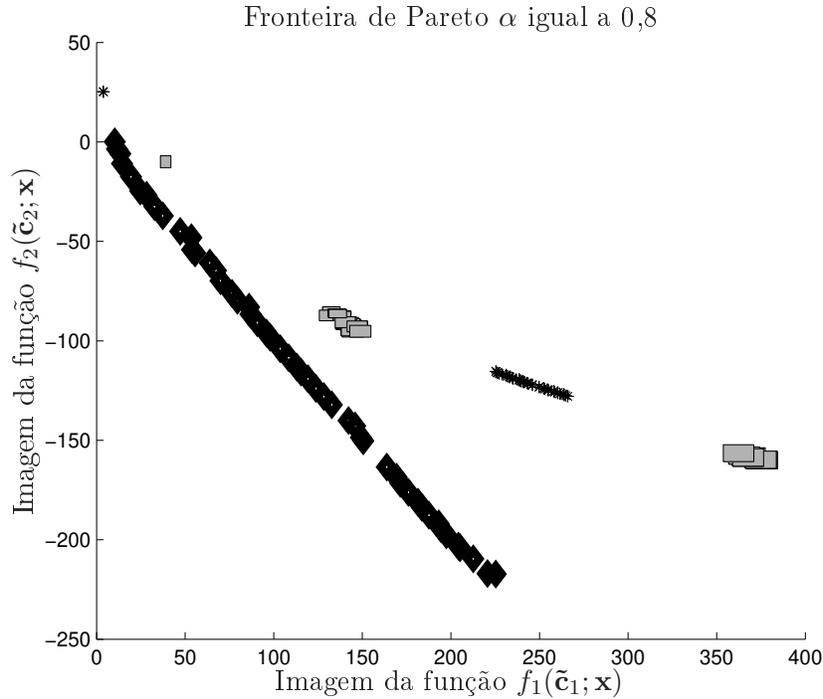


Figura 5.10: Problema restrito.

Esse é o primeiro exemplo que nenhum dos enfoques desenvolvidos nesse trabalho conseguem obter soluções eficientes melhores que as do problema clássico. Podemos enumerar dois motivos para explicar o ocorrido: 1) aumento na dificuldade do problema, pois o conjunto de restrições permite muita flexibilidade e

um maior espaço de busca de soluções eficientes factíveis; 2) o fato de usar um algoritmo evolutivo, o qual não garante obter o conjunto eficiente ótimo, pode ter contribuído para esta solução. Uma alternativa está em aumentar o tamanho da população e o número de gerações.

Por outro lado, pode-se observar na Figura 5.10 que os dois conjuntos de soluções eficientes dos enfoques paramétricos e possibilístico estão distribuídas de forma separada e até mesmo a diversidade das soluções não está bem clara. Pode-se observar que existem dois grupos de soluções eficientes fornecidos pelo enfoque paramétrico e três grupos de soluções eficientes fornecidos pelo enfoque possibilístico. Isso mostra a diferença entre as soluções eficientes encontradas nas duas abordagens desenvolvidas neste trabalho. Entretanto, observando a geometria de todos os grupos de soluções eficientes, elas continuam formando uma fronteira sem que nenhuma solução seja melhor em ambas as funções objetivo.

O segundo problema de otimização com dois objetivos com custos nebulosos nas funções objetivo é uma adaptação do problema multi-objetivo descrito em [72]:

$$\begin{aligned}
\min \quad & f_1(\tilde{\mathbf{c}}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_{11}x_1^2 + \tilde{c}_{12}x_2^2 \\
\min \quad & f_2(\tilde{\mathbf{c}}_2; \mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{c}_{21})^2 + (x_2 - \tilde{c}_{22})^2 \\
\text{s.a} \quad & g_1(\tilde{\mathbf{a}}_1; \mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{a}_{11})^2 + \tilde{a}_{12}x_2^2 \leq^f \tilde{b}_1 \\
& g_2(\tilde{\mathbf{a}}_2; \mathbf{x}) = (x_1 - \tilde{a}_{21})^2 + (x_2 + \tilde{a}_{22})^2 \geq^f \tilde{b}_2 \\
& 0 \leq x_1 \leq 5, \quad 0 \leq x_2 \leq 3
\end{aligned} \tag{5.11}$$

onde $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{12} = (4, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{c}_{21} = \tilde{c}_{22} = (5, 1, 1)_{LR}$ são os parâmetros incertos nas funções objetivo. Os parâmetros incertos que estão presentes no conjunto de restrições são $\tilde{a}_{11} = (5, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{a}_{12} = (1, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{a}_{21} = (8, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{a}_{22} = (3, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{b}_1 = (25, 5, 5)_{LR}$ e $\tilde{b}_2 = (7.7, 2.7, 2.3)_{LR}$. Os valores de violação máxima permitida para cada restrição são $\tilde{d}_1 = (2.5, 0.5, 0.5)_{LR}$ e $\tilde{d}_2 = (0.77, 0.27, 0.23)_{LR}$.

Na Figura 5.11, pode-se notar que as soluções eficientes obtidas pelas abordagens paramétrica e possibilística geram dois grupos de soluções eficientes que formam parte da fronteira de Pareto clássica, que é representada pelo conjunto de soluções eficientes do problema clássico. Um ponto interessante está no fato de que as duas abordagens encontraram as soluções nos extremos dessa fronteira. O grupo das soluções eficientes no caso possibilístico está dividido em dois subgrupos de fácil identificação. As soluções no caso paramétrico também são divididas em dois subgrupos, mas a separação não é tão clara.

Em [19], é construído um problema multi-objetivo com duas variáveis de decisões bi-dimensionais e duas funções objetivo. A versão nebulosa desse problema

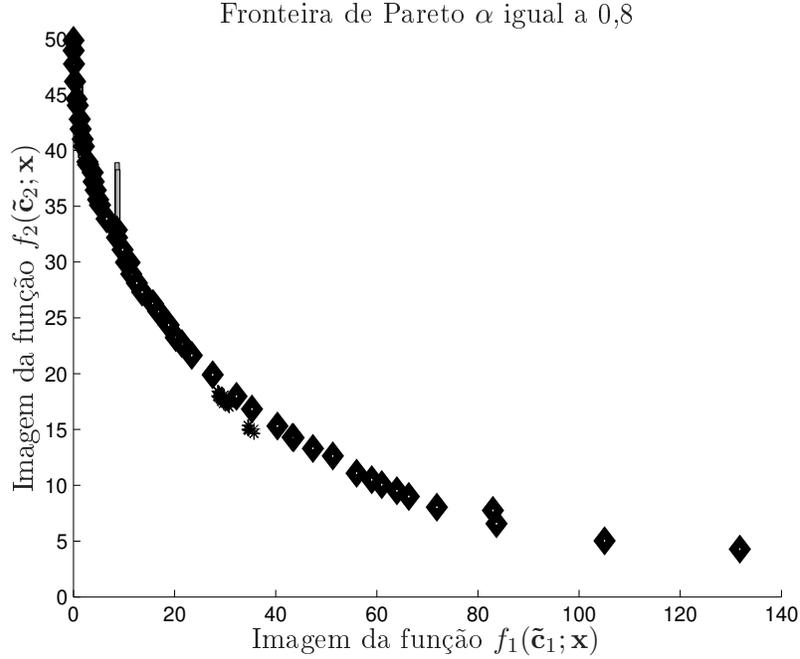


Figura 5.11: Problema restrito.

é:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_1(\tilde{c}_1; \mathbf{x}) = \tilde{c}_1 x_1 \\
 \min \quad & f_2(\tilde{c}_2; \mathbf{x}) = \frac{\tilde{c}_2 + x_1}{x_2} \\
 \text{s.a} \quad & g_1(\tilde{\mathbf{a}}_1; \mathbf{x}) = x_2 + \tilde{a}_1 x_1 \geq^f \tilde{b}_1 \\
 & g_2(\tilde{\mathbf{a}}_2; \mathbf{x}) = -x_2 - \tilde{a}_2 x_1 \geq^f \tilde{b}_2 \\
 & 0.1 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 5
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde $\tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\mathbf{a}}_2 = (1, 1, 1)_{LR}$ são os parâmetros incertos das funções objetivo.

Os parâmetros incertos no conjunto de restrições são $\tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\mathbf{a}}_2 = (9, 1, 1)_{LR}$, $\tilde{\mathbf{b}}_1 = (6, 1, 1)_{LR}$ e $\tilde{\mathbf{b}}_2 = (1, 1, 1)_{LR}$. Os valores da violação máxima permitida para cada restrição são $\tilde{\mathbf{d}}_1 = (0.9, 0.1, 0.1)_{LR}$ e $\tilde{\mathbf{d}}_2 = (0.1, 0.1, 0.1)_{LR}$.

A fronteira de Pareto formada pelas soluções eficientes do enfoque paramétrico mostrada na Figura 5.12, obteve soluções melhores, porém é fácil observar que essa fronteira é bastante descontínua. Entretanto, esse fato não ocorre na fronteira de Pareto formada pelas soluções eficientes do problema clássico, que tem uma boa diversidade de soluções. Por outro lado, essa mesma fronteira está praticamente dentro da faixa de Pareto formada pelas soluções eficientes do enfoque possibilístico. Essa faixa de Pareto obteve um conjunto de retângulos bem distribuídos, que é formada pelas soluções eficientes do enfoque possibilístico e gerou uma boa diversidade de possíveis soluções.

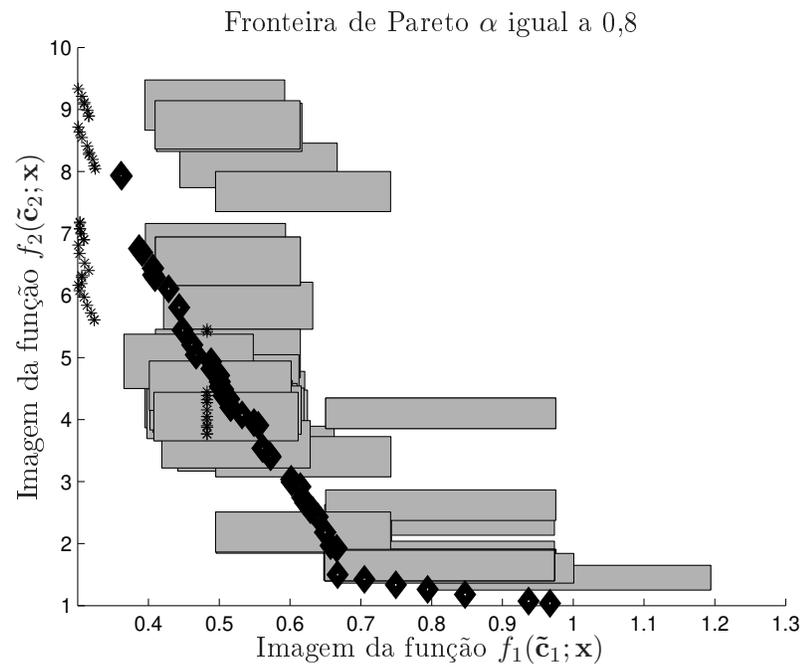


Figura 5.12: Problema restrito.

Capítulo 6

Considerações finais

6.1 Conclusões

Problemas de programação multi-objetivo são muito importantes tanto do ponto de vista teórico como prático. Entretanto, os problemas de programação matemática que encontramos no mundo real não podem, muitas vezes, ser formalizados de maneira clara e precisa porque os dados são ambíguos, vagos e imprecisos. Como elemento deste conjunto, os problemas de programação multi-objetivo também apresentam esses tipos de incertezas. Essa ambiguidade é natural e está presente em situações da vida real que requerem soluções precisas. Existem algumas técnicas para representar esses dados imprecisos, como por exemplo processos estocásticos, caos, aproximação a valores conhecidos, lógica nebulosa, etc. Essa última foi a escolhida para ser usada neste trabalho por se adaptar bem aos problemas de programação multi-objetivo nebulosos.

O uso de algumas técnicas que transformam números nebulosos em clássicos para resolver os problemas de programação matemática é muito comum. Na literatura existem várias dessas técnicas e algumas delas foram mostradas no Capítulo 2. Embora essa transformação seja bastante útil, existe a perda de parte da informação de dados nebulosos a cada vez que é transformado em número clássico. Os dados nebulosos podem estar presentes em várias partes do problema de otimização multi-objetivo, tais como: custos das funções objetivo, coeficientes das funções de restrição e relações de ordem que geram o conjunto factível, e até mesmo nas variáveis. Não nos aprofundamos em enfoques de otimização multi-objetivo que tratam as variáveis de decisão como valores nebulosos. As abordagens de Pareto otimalidade que foram apresentadas no Capítulo 2 usam diferentes técnicas de transformação de números nebulosos em clássico em alguns passos de suas definições. Alguns exemplos práticos são descritos para validar a

teoria desenvolvida e os resultados obtidos ajudam aos autores seguirem a linha de pesquisa, no intuito de tentar solucionar os problemas do mundo real. Com essa visão, tais resultados podem ser gerados por Sistemas de Suporte de Decisão (SSD) envolvendo problemas de programação multi-objetivo nebulosos.

No levantamento bibliográfico realizado, constatou-se a necessidade de desenvolver alguns métodos que procurassem generalizar os já existentes. A comparação dos métodos é algo que deve ser levado em consideração porque os dados nebulosos podem ser tratados de formas diferentes. Inserido nesse contexto, esse trabalho teve como objetivo descrever condições necessárias e suficientes para garantir a obtenção de um conjunto de soluções ótimas que é chamado de soluções eficientes, não-dominadas ou de Pareto. O trabalho foi dividido em duas abordagens, uma chamada paramétrica que trata os números nebulosos usando intervalos discretizados, e outra possibilística que compara os números nebulosos usando a teoria de possibilidade.

A abordagem paramétrica é uma extensão de métodos paramétricos desenvolvidos para solucionar problemas de programação linear. Ela foi criada para tratar a incerteza que está presente na relação de ordem do conjunto de restrições e transforma o problema de otimização nebuloso original em um problema de otimização multi-objetivo clássico. Essa idéia pode ser empregada também para discretizar os coeficientes nebulosos que estão nas funções que geram o conjunto factível. Por fim, essa abordagem também pode englobar os custos nebulosos presentes na(s) função(ões) objetivo. No Capítulo 3 são descritas duas metodologias para parametrizar um problema de programação multi-objetivo nebuloso irrestrito e transformá-lo em um problema de programação multi-objetivo clássico irrestrito. Se por um lado, isso aumenta a complexidade na obtenção de uma solução para problema transformado, por outro lado, encontra um conjunto de soluções satisfatórias para cada discretização dos números nebulosos e aplicando o Teorema da Representação podemos gerar uma solução nebulosa do problema original. Essas metodologias podem também ser estendidas para solucionar problemas de programação multi-objetivo nebuloso restrito, descrito no Capítulo 4. Essa extensão é, a princípio, intuitiva porque aplicamos nos coeficientes nebulosos das funções de restrição o mesmo procedimento de discretização realizado nos custos nebulosos das funções objetivo, e novamente o problema clássico resultante tem mais funções objetivo do que o problema original.

A abordagem possibilística é um enfoque novo para determinar condições necessárias e suficientes para garantir uma otimalidade de Pareto satisfatória, que é fornecida ao decisor. Essa abordagem usa a teoria de possibilidade como um critério de comparação entre dois números nebulosos e a partir disto é definido um conjunto nebulosamente ordenado que engloba todos os números nebulosos que podem ser ordenados segundo um determinado nível de satisfação que pode ser escolhido pelo decisor. Essa definição abre o precedente para separarmos um con-

junto nebulosamente ordenado em elementos que são dominados, que dominam e que não podemos determinar. Assim, podemos estender a definição de solução eficiente de problemas de programação multi-objetivo clássicos para obter as soluções eficientes nebulosas mediante o nível de satisfação escolhido pelo decisor. Juntamente com essa definição estendida foi estabelecido um conjunto de definições e teoremas que garantem as condições necessárias e suficientes para encontrar uma solução ótima nebulosa para um problema de programação multi-objetivo nebuloso irrestrito. Essas condições de otimalidade estão descritas no Capítulo 3 e também são usados alguns exemplos numéricos para mostrar como encontrar a solução ótima nebulosa. No Capítulo 4 a abordagem possibilística é ampliada para atender o caso de problemas de programação multi-objetivo nebulosos restritos, sendo que os dados podem ser claros e precisos como também podem ser ambíguos. Esses dados ambíguos costumam estar presentes nos coeficientes das funções de restrição e na relação de ordem que geram o conjunto factível do problema a ser otimizado. Nesse último caso é definida uma combinação das duas abordagens paramétrica e possibilística. Nesse trabalho, o conceito de conjuntos nebulosos convexos e funções nebulosas convexas foram usados para garantir a otimalidade global de Pareto para problemas de programação multi-objetivo nebuloso convexo.

O conjunto de problemas testes mostraram a eficiência dos enfoques desenvolvidos neste trabalho. Os parâmetros incertos podem estar presentes nas funções objetivo, na meta a ser otimizada, na relação de ordem e/ou nas funções que determinam o conjunto factível das variáveis de decisão. Em cada problema foi realizada uma análise de comparação entre as duas abordagens e foi mostrado onde uma ou outra obtiveram soluções mais satisfatórias. Finalmente, apresentamos duas abordagens que podem ser usadas para resolver problemas de programação multi-objetivo em ambiente nebuloso.

6.2 Trabalhos futuros

Em relação aos trabalhos futuros, os autores pretendem explorar o lado das aplicações que esse trabalho abre, isto é, investigar o quanto a programação multi-objetivo nebulosa pode ajudar a resolver problemas de programação multi-objetivo convencionais fornecendo soluções nebulosas, ou melhor, soluções satisfatórias, que podem ser usadas pelo decisor. Outro ponto importante é encontrar uma solução aproximada para esse último tipo de problema.

Apesar de todo o conhecimento que foi tratado e desenvolvido neste trabalho sobre problemas de programação multi-objetivo nebulosos, ainda faltam alguns pontos a serem estudados com mais detalhes. Entre estes está em descobrir a relação que existe entre as abordagens desenvolvidas nesse trabalho e também dessas abordagens com as já publicadas na literatura. Outro estudo é sobre o

tratamento de problemas matemáticos, com imprecisões nas variáveis de decisão do problema de otimização e, portanto, obter uma possível decisão mais próxima da realidade.

Uma vez desenvolvida esta linha de pesquisa da expansão dos problemas de programação multi-objetivo com parâmetros nebulosos, como também problemas de otimização em geral, podemos explorar a dualidade dos mesmos. Outro ponto está em propor novos modelos matemáticos que consigam encontrar as soluções satisfatórias ou propor modificações em modelos já existentes.

Um outro ponto onde a programação matemática nebulosa pode auxiliar na resolução de problemas clássicos não-convexos está na possibilidade de se trabalhar com a casca convexa da região factível, obtida pela relaxação das restrições.

Apêndice A

Sistemas nebulosos

O conceito de conjunto nebuloso (*fuzzy set*) foi introduzido por Zadeh[76] e desde então, os sistemas baseados em conjuntos nebulosos, ou sistemas nebulosos, vêm avançado tanto do ponto de vista teórico, quanto do prático. As técnicas de teorias de conjuntos e sistemas nebulosos têm sido utilizadas em diferentes campos de conhecimento e em diversas aplicações: aproximação de funções, previsão de séries temporais, filtragem de sinais, identificação e controle de processos, etc. Um número significativo de implementações práticas vem consolidando os sistemas nebulosos não só em instalações industriais, mas também em muitos produtos manufaturados [54].

A lógica nebulosa (*fuzzy*) é a lógica que suporta os modos de raciocínio que são aproximados ao invés de exatos. Modelagem e controle *fuzzy* de sistemas são técnicas para o tratamento de informações qualitativas de uma forma rigorosa. Derivada do conceito de conjuntos *fuzzy*, a lógica *fuzzy* constitui a base para o desenvolvimento de métodos e algoritmos de modelagem e controle de processos, permitindo a redução da complexidade de projeto e implementação, tornando-se a solução para problemas de controle até então intratáveis por técnicas clássicas.

A.1 Conjuntos nebulosos

A noção de conjunto ocorre frequentemente quando se tenta organizar, resumir e generalizar a respeito de objetos. Na teoria de conjuntos clássicos apenas dois valores são permitidos, pois um elemento ou pertence ou não pertence ao conjunto. Na teoria de conjuntos nebulosos a transição de pertencer a não pertencer é gradual. O conjunto nebuloso pode ser definido como uma coleção de objetos com valores de pertinência variando entre 0 (exclusão completa) e 1 (pertinência completa). Os conjuntos nebulosos representam uma generalização dos conjuntos

clássicos.

Tipos de funções de pertinência

A teoria dos conjuntos nebulosos baseia-se no conceito de pertinência. Um conjunto nebuloso é definido pela função de pertinência $\mu_A(x)$ que estabelece para cada x um grau de pertinência ao conjunto A , com $\mu_A(x) \in [0, 1]$. O formato das funções de pertinência nebulosas é restrito a uma certa classe de funções, representadas por certos parâmetros específicos. Os formatos mais comuns das funções de pertinência na literatura são:

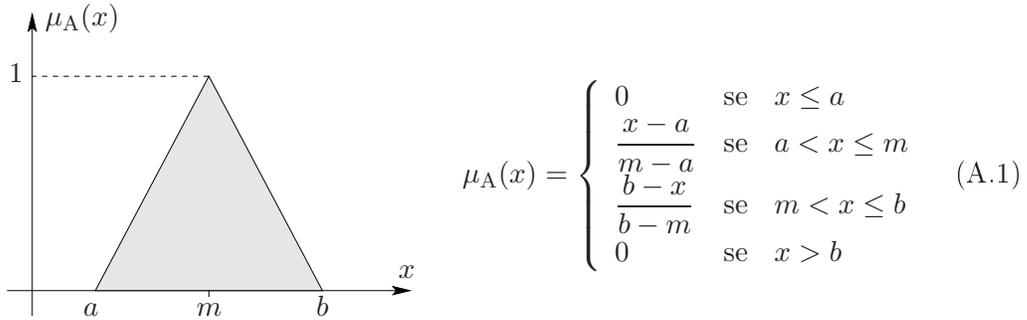


Figura A.1: **Função triangular:** Parâmetros (a, m, b) , com $a \leq m \leq b$.

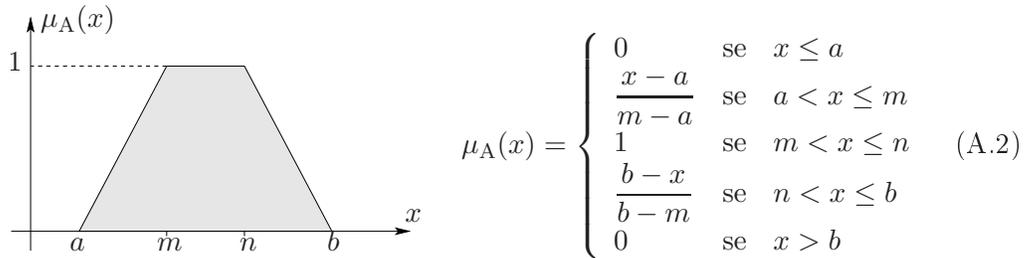


Figura A.2: **Função trapezoidal:** Parâmetros (a, m, n, b) , com $a \leq m, n \leq b$ e $m \leq n$.

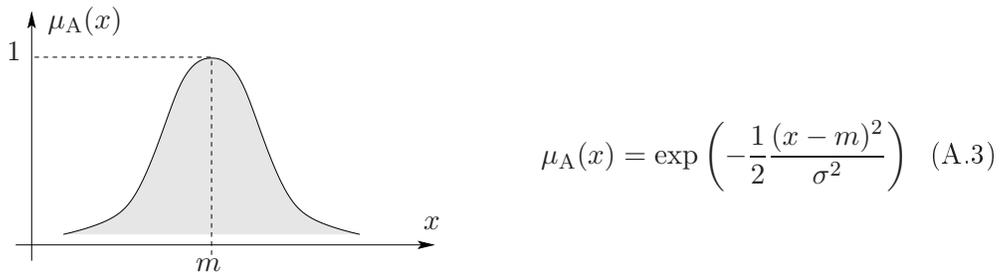


Figura A.3: **Função gaussiana:** Parâmetros (m, σ) , com $\sigma > 0$, sendo m o centro e σ a variância da gaussiana.

Existem muitas outras funções de pertinência, entretanto, geralmente a escolha de funções triangulares e trapezoidais é mais comum por causa da idéia de se definirem região modal por um ponto ou um intervalo contínuo, e funções lineares que caracterizem os espalhamentos.

Definições de conjuntos nebulosos

A função de pertinência especificada pelos parâmetros que definem o seu formato, é geralmente utilizada para representar um conjunto nebuloso, entretanto existem outros parâmetros que podem ser utilizados para caracterizar os conjuntos nebulosos como:

- **Suporte**(S_A): Conjunto dos elementos do universo, onde o grau de pertinência é maior que zero.

$$S_A = \{x | \mu_A(x) > 0\} \quad (\text{A.4})$$

- **Núcleo (core)** (N_A): Conjunto dos elementos do universo, onde o grau de pertinência é igual a 1.

$$N_A = \{x | \mu_A(x) = 1\} \quad (\text{A.5})$$

- **Altura**(H_A): Valor máximo da função de pertinência.

$$H_A = \sup_x \{\mu_A(x)\} \quad (\text{A.6})$$

- **Cardinalidade**: Cardinalidade da função de pertinência.

$$Card_A = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \quad (\text{A.7})$$

- **Conjunto normal**: Um conjunto nebuloso é conhecido como normal se a altura (H_A) tem valor igual a 1. Caso o conjunto nebuloso não seja normal ($H_A < 1$), ele é conhecido como sub-normal, e o seu núcleo é um conjunto vazio.

- **Subconjunto nebuloso**: Se $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x$ podemos dizer que $A \subseteq B$, e portanto, que A é um subconjunto nebuloso de B .

- **α -Corte**: Conjunto dos elementos do universo, onde o grau de pertinência é maior ou igual a α .

$$C_{\alpha A} = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (\text{A.8})$$

Uma possível representação do número nebuloso usando a definição de α -corte descrita acima é feita da seguinte maneira:

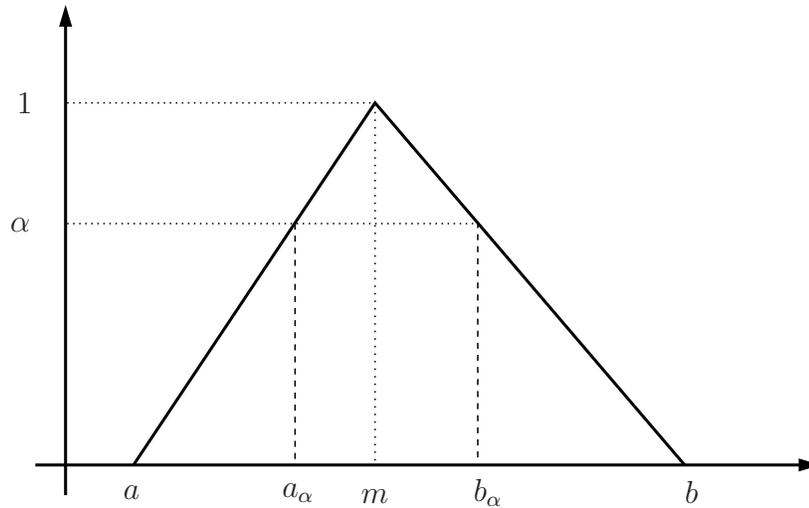


Figura A.4: Representação do conjunto α -corte no intervalo $[a_\alpha, b_\alpha]$.

Operações com conjuntos nebulosos

Nos conjuntos nebulosos podem ser aplicadas várias operações. Dentre as mais comuns temos:

- Concentração: Esta operação diminui os valores da função de pertinência;
- Dilatação: Esta operação aumenta os valores da função de pertinência;
- Normalização: Esta operação converte um conjunto nebuloso subnormal em um normal;
- Múltiplos argumentos: Estas operações envolvem a combinação, agregação e comparação de dois ou mais conjuntos nebulosos. As operações de união, interseção e complemento para os conjuntos nebulosos a partir da função de pertinência são baseados na teoria de conjuntos clássicos:

- **União**: $\mu_{(A \cup B)}(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$
- **Interseção**: $\mu_{(A \cap B)}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
- **Complemento**: $\mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$

A.2 Números nebulosos

Um número nebuloso \tilde{a} é uma quantidade com valor impreciso, sendo utilizado na representação de expressões na forma “quase 50”, “próximo de 2”, etc. Usualmente, um número nebuloso \tilde{a} é representado por duas notações. A primeira

notação é do tipo $\tilde{a} = [\underline{a}, a_0, \bar{a}]$, sendo a_0 o valor modal, \underline{a} e \bar{a} os limitantes inferior e superior do espalhamento, respectivamente. A segunda notação é do tipo $\tilde{a} = (a, \alpha, \beta)_{LR}$, sendo a o valor modal, α e β os espalhamentos a esquerda e a direita, respectivamente. Associa-se a cada número nebuloso uma função $\mu_A(x)$ que indica o grau de pertinência dos valores x contidos em um domínio X .

A.3 Funções nebulosas

Os conceitos relacionados a funções nebulosas podem ser resumidamente descritos em três tipos de enfoques:

1. Funções não-*fuzzy* com argumentos *fuzzy*;
2. Funções com parâmetros *fuzzy* e variáveis não-*fuzzy*;
3. Funções com definições *fuzzy*.

A.4 Convexidade nebulosa

O conceito de convexidade é importante para estudos quantitativos e qualitativos em pesquisa operacional e ajuda na obtenção de soluções ótimas. Isso foi considerado por muitos pesquisadores também em otimização nebulosa. A convexidade de conjuntos nebulosos foi introduzido por muitos autores como Zadeh[76], Lowen [47], Liu [46].

A.4.1 Conjuntos nebulosos convexos

Ao longo deste apêndice, I será definido como um intervalo unitário $[0, 1]$ e E o espaço Euclidiano de dimensão \mathbb{R}^n . Um mapeamento μ de E para I será chamado um conjunto nebuloso em E , denotado usualmente por uma letra grega minúscula. No resto dessa sub-seção, nós mostraremos alguns resultados já conhecidos.

Definição A.1. *Um sub-conjunto nebuloso $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ é um conjunto nebuloso convexo se, e somente se, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $a \in [0, 1]$*

$$\mu(ax + (1 - a)y) \geq \min(\mu(x), \mu(y)).$$

Note que essa definição não implica que μ deve ser uma função convexa sobre o espaço das variáveis x . Uma propriedade básica de conjuntos nebulosos convexos é que se μ_A e μ_B são conjuntos nebulosos convexos, assim é sua interseção. Então, ela permite definir a casca convexa de um conjunto nebuloso.

Definição A.2. *Se μ é um conjunto nebuloso, então definimos sua casca convexa como o conjunto nebuloso*

$$\begin{aligned} \text{conv}\mu &= \inf\{\nu \geq \mu, \nu \text{ convexo}\} \\ &= \text{menor conjunto nebuloso convexo que contém } \mu. \end{aligned}$$

Um tipo particular de conjunto nebuloso convexo é um cone convexo. Em analogia com isso, nós podemos definir um cone nebuloso convexo da seguinte maneira

Definição A.3. *Um conjunto convexo μ é um cone nebuloso convexo se, e somente se, ele é convexo e $\forall x \in \mathbb{R}^n$ e $a > 0$, $\mu(ax) \geq \mu(x)$.*

A.4.2 Funções nebulosas convexas

Nessa seção, nós definimos como função nebulosa aquelas que tem parâmetros incertos caracterizados como números nebulosos. Algumas caracterizações podem ser encontradas em [24] e [39], e nós definiremos nesse trabalho a função nebulosa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \Omega &\rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \end{aligned}$$

sendo que $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

De acordo com os conceitos de conjuntos nebulosos convexas que foi mostrado na sub-seção anterior, nós apresentamos a definição de funções nebulosas convexas.

Definição A.4 (Função nebulosa convexa). *Uma função nebulosa $f : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \Omega \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$ sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto convexo não-vazio, é uma função convexa se, e somente se, para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in [0, 1]$*

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq^f \lambda f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2).$$

A definição sobre funções nebulosas convexas anteriormente é facilmente estendida para funções nebulosas côncavas. Outras definições sobre funções nebulosas são apresentados abaixo:

Definição A.5 (Função nebulosa quase-convexa). *Uma função nebulosa $f : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \Omega \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto convexo não-vazio, é uma função nebulosa quasi-convexa se, e somente se, para todo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in [0, 1]$*

$$f(\tilde{\mathbf{a}}; \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq^f \max \{ f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1), f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_2) \}. \quad (\text{A.9})$$

Definição A.6 (Função nebulosa pseudo-convexa). *Uma função nebulosa $f : \mathbb{F}(\mathbb{R}^m) \times \Omega \rightarrow \mathbb{F}(\mathbb{R})$, sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto convexo não-vazio, é uma função nebulosa pseudo-convexa se, e somente se, para todo $\mathbf{x}_1 \in \Omega$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbb{F}(\mathbb{R}^m)$ e $\lambda \in [0, 1]$ $\nabla f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \geq^f \tilde{0}$ para cada $\mathbf{x}_2 \in \Omega$, implica que $f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}) \geq^f f(\tilde{\mathbf{a}}; \mathbf{x}_1)$.*

Sendo que a derivada de funções nebulosas está descrita em [1, 11, 37, 38]

Apêndice B

Otimização multi-objetivo

Escolher o objetivo para ser otimizado é um passo crítico no processo de modelagem de um problema do mundo real e a solução ótima a ser obtida depende totalmente dessa escolha. Na grande maioria dos problemas do mundo real, vários objetivos podem ser definidos e muitas vezes eles são conflitantes e/ou não-mensuráveis. No intuito de solucionar esse tipo de problema é que surgiu a otimização multi-objetivo, que é um ramo da área de otimização matemática. A otimização multi-objetivo foi desenvolvida para resolver problemas de programação matemática com várias funções objetivo. Devido a esse ponto de conflito, o conceito clássico de otimalidade não pode ser aplicado, pois agora será encontrado um conjunto de soluções ótimas que otimizam esse tipo de problema.

Os trabalhos clássicos de Vilfredo Pareto, vide [52, 53], introduziu o conceito de Pareto-otimalidade e iniciou o campo de otimização multi-objetivo. Depois desses trabalhos, a solução de um Problema de Otimização Multi-objetivo (POM) é caracterizada por um conjunto de pontos chamados não-dominados ou eficientes. Atualmente, o enfoque multi-objetivo encontra aplicações em qualquer área em que o processo de tomada de decisão esteja centrado em problemas de otimização.

Métodos específicos para resolver problemas de programação multi-objetivo foram propostos em [13, 28]. Esses métodos são classificados de acordo com o instante que o decisor aplica os seus critérios. Três métodos são propostos: (i) Métodos a-Priori, onde o decisor atribui esses critérios antes de realizar a execução de qualquer método; (ii) Métodos a-Posteriori, onde o decisor permite que os métodos encontrem um conjunto de soluções eficientes para depois ele escolher uma solução diante desses critérios; e (iii) Métodos iterativos, onde esses critérios são aplicados no decorrer da execução dos mesmos com a tentativa de guiar a uma solução eficiente.

B.1 Conceitos básicos

Alguns conceitos envolvidos em otimização são importantes de serem apresentados.

- **Problema geral multi-objetivo**

O problema de otimização multi-objetivo foi definido por [51] como sendo o problema que visa encontrar:

um vetor de variáveis de decisão que satisfaz as restrições e otimiza uma função vetor cujos elementos representam as funções objetivo. Estas funções formam uma descrição matemática dos critérios de performance que normalmente são conflitantes entre eles. O termo otimizar significa encontrar uma solução tal que forneça os valores de todas as funções objetivo aceitáveis pelo designer.

Formalmente podemos dizer que um problema multi-objetivo minimiza $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$ sujeito a m restrições de desigualdade $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$ e p restrições de igualdade $h_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, \dots, p$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Uma solução do problema multi-objetivo minimiza as componentes do vetor $(\mathbf{x} = x_1, \dots, x_n)$ de algum universo Ω .

- **Dominância de Pareto**

O espaço de busca Ω é parcialmente ordenado no sentido de que duas soluções arbitrárias são relacionadas de duas possíveis maneiras: ou uma domina a outra ou nenhuma delas domina. Este conceito pode ser formalizado da seguinte forma. Sejam \mathbf{a} e $\mathbf{b} \in \Omega$, dizemos que \mathbf{a} *domina* \mathbf{b} se e somente se:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, f_i(\mathbf{a}) \geq f_i(\mathbf{b}) \quad \text{e} \quad \exists j \in \{1, 2, \dots, k\}, f_j(\mathbf{a}) > f_j(\mathbf{b}). \quad (\text{B.1})$$

Em outras palavras, “ \mathbf{a} não é pior que \mathbf{b} em nenhum dos objetivos e é melhor em pelo menos um”. Normalmente existem um conjunto de soluções Pareto-ótimas conhecidas como soluções não-dominadas. A figura B.1 representa o conjunto dessas soluções.

- **Fronteira de Pareto**

No sentido de Pareto está no limite da região de design ou no local dos pontos tangentes às funções objetivo. A região dos pontos definido por esse limite é conhecida como fronteira de Pareto, ou seja, os valores de $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ cujo \mathbf{x} está no conjunto Pareto-ótimo formam a fronteira de Pareto.

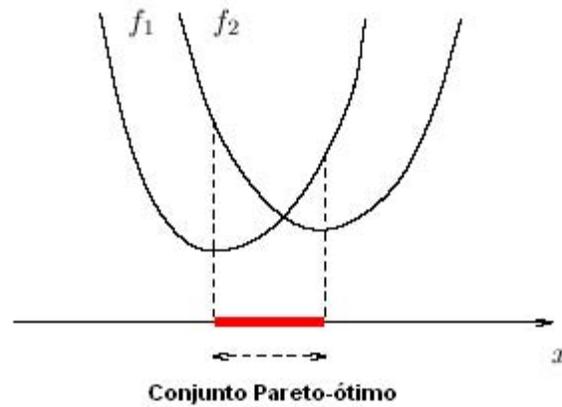


Figura B.1: Conjunto Pareto-ótimo

B.2 Métodos para resolver de problemas otimização multi-objetivo

Os métodos para resolução de POMs podem ser classificados de acordo com o momento em que o decisor aplica seus critérios.

B.2.1 Métodos à Priori

O decisor define preferências antes da solução do POM. Desta forma, o problema multi-objetivo original é transformado em problemas mais simples que podem ser resolvidos através de métodos conhecidos.

- **Métodos lexicográficos:** o decisor deve listar os objetivos em ordem decrescente de importância. A primeira função da lista é maximizada no espaço de busca e este resultado é considerado como uma restrição na maximização da segunda função; e assim por diante. Generalizando temos:

$$\text{Maximizar } f_{ij}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.2})$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega_j \quad (\text{B.3})$$

onde $\Omega_j = \{x : x \in \Omega_{j-1}, x = \arg \max(f_{ij-1})\}$. $\{ij\} = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, para $i = 1, 2, \dots, k$, é o conjunto dos objetivos i segundo a ordem de importância j . Este método é inapropriado quando existe um grande número de objetivos, até porque o decisor deve ter informações sobre as funções antes da resolução do problema.

- **Métodos baseados em limitantes:** o decisor deve selecionar um objetivo de preferência e indicar limitantes para os demais objetivos. Formalmente

temos:

$$\text{Maximizar } f_j(\mathbf{x}), \text{ com } l_i \leq f_i(\mathbf{x}) \leq L_i \quad (\text{B.4})$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega \text{ com } i = 1, 2, \dots, k \quad i \neq j \quad (\text{B.5})$$

B.2.2 Métodos à Posteriori

Nos métodos à posteriori buscamos gerar o conjunto solução para depois escolher uma solução de compromisso. Em outras palavras, o método fornece como resultado um conjunto de soluções. Depois, o decisor escolhe a solução que lhe convem.

- **Métodos das ponderações:** obtem uma solução Pareto-ótima resolvendo um problema formulado a partir da soma ponderada de todas as funções objetivo do POM original. O problema ponderado pode ser generalizado da seguinte maneira:

$$\text{Maximizar } \sum w_i \cdot f_i(\mathbf{x}) \quad (\text{B.6})$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{B.7})$$

com $\sum w_i = 1$, $w_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Os pesos w_i representam a relativa importância de cada função objetivo no problema.

- **Método das ϵ -restrições:** é baseado na maximização de uma função objetivo (a mais importante) e transformando as outras funções objetivo em restrições de desigualdade. O problema ϵ -restrito pode ser descrito como:

$$\text{Maximizar } f_j(\mathbf{x}) \text{ com } f_i(\mathbf{x}) \leq \epsilon_i \quad (\text{B.8})$$

$$\text{sujeito a: } \mathbf{x} \in \Omega \text{ para } i = 1, 2, \dots, k \quad i \neq j \quad (\text{B.9})$$

- **Método simplex multi-objetivo:** este método é restrito para problemas lineares na forma:

$$\text{Maximizar } C\mathbf{x} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{sujeito a: } A\mathbf{x} \leq b \quad x \geq 0 \quad (\text{B.11})$$

com $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

B.2.3 Métodos iterativos

Nos métodos iterativos, informações sobre preferências são passadas para o decisor durante a resolução do POM.

- **STEM - STEP Method:** procedimento iterativo direcionado à resolução de POM lineares:

$$\text{Maximizar} \quad [C_1\mathbf{x}, C_2\mathbf{x}, \dots, C_k\mathbf{x}] \quad (\text{B.12})$$

$$\text{sujeito a:} \quad A\mathbf{x} \leq b \quad x \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

com $C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, k$. O decisor deve classificar cada solução encontrada com satisfatória ou insatisfatória quando comparadas com uma solução utópica.

- **Método de Geoffrion, Dyer e Feinberg:** baseia-se no algoritmo de Frank-Wolfe e é destinado para POM na forma:

$$\text{Maximizar} \quad U[f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})] \quad (\text{B.14})$$

$$\text{sujeito a:} \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (\text{B.15})$$

onde U é uma função côncava crescente que reflete as preferências gerais de um decisor em relação aos k objetivos. Como U não é totalmente conhecida algumas informações devem ser fornecidas pelo decisor durante o processo.

Atualmente, existem cerca de 30 técnicas de programação para resolução de POM. Entretanto, estas técnicas tendem a gerar somente um elemento do Conjunto Pareto-ótimo a cada rodada. Além disso, elas são sensíveis ao formato da Fronteira de Pareto.

Apêndice C

Otimização nebulosa

De maneira geral, a otimização nebulosa pode ser entendida como uma extensão do problema clássico de otimização:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{C.1}$$

com a propriedade de melhor caracterizar os processos reais, dado que os métodos dessa classe incorporam as quantidades imprecisas envolvidas no problema a ser modelado e resolvido.

Diversos enfoques são conhecidos e estudados na literatura, de acordo com o ponto em que se encontram as imprecisões: restrições nebulosas, funções nebulosas, coeficientes nebulosos nos objetivos e restrições, etc. Neste trabalho, o enfoque maior é dado à otimização com coeficientes nebulosos na função objetivo.

C.1 Otimização com restrições nebulosas

O problema geral de otimização com restrições nebulosas pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \geq^f b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{C.2}$$

modificando o conceito usual de factibilidade e a forma de entender cada restrição. Em um problema nebuloso como (C.2), as restrições são resultado da modelagem de expressões como “ b_i essencialmente menor ou igual a $g_i(x)$ ”, “desejável que $g_i(x)$ seja maior ou igual a b_i ”, etc; de forma a permitir uma violação d_i , $i = 1, \dots, m$ em cada restrição, acarretando a existência de pontos com diferentes níveis de

factibilidade, calculados a partir de funções de pertinência do tipo:

$$\mu_{g_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } g_i(x) \geq b_i \\ \frac{g_i(x) - b_i + d_i}{d_i} & \text{se } b_i - d_i \leq g_i(x) < b_i \\ 0 & \text{se } g_i(x) < b_i - d_i \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Em [82] é apresentado um procedimento para a resolução de (C.2) baseado no *Princípio de Decisão Fuzzy* [8].

C.2 Otimização com objetivo e restrições nebulosas

Trata-se de uma generalização do problema (C.2) na forma:

$$\begin{aligned} & \widetilde{\min} \quad f(x) \\ & \text{s.a} \quad g_i(x) \geq^f b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

no qual pode-se novamente utilizar a técnica descrita em [82], entretanto, transformando a função objetivo de (C.4) em mais um restrição nebulosa:

$$f(x) \leq^f b_0 \quad (\text{C.5})$$

Assim como no caso das restrições, define-se uma função de pertinência para valorar o nível de satisfação do objetivo em relação à aspiração estabelecida:

$$\mu_{f_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \leq b_0 \\ \frac{d_0 - f(x) + b_0}{d_0} & \text{se } b_0 < f(x) \leq b_0 + d_0 \\ 0 & \text{se } f(x) > b_0 + d_0 \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

em que $d_0 > 0$ representa um desvio permitido no nível de aspiração.

C.3 Otimização com custos nebulosos na função objetivo

Diferente dos dois casos anteriores, considera-se aqui um problema com restrições não-*fuzzy* e função objetivo linear com coeficientes nebulosos, o que pode representar problemas reais de decisão baseados em custos imprecisos: compras, localização, etc. A formulação matemática geral para esse tipo de problema é descrita abaixo:

$$\begin{aligned} & \widetilde{\min} \quad f(\tilde{c}; x) \\ & \text{s.a} \quad g_i(x) \geq^f b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Admite-se que os coeficientes $\tilde{c}_j = (c_j, \underline{c}_j, \bar{c}_j)_{LR}$, $j = 1, \dots, n$, sejam números nebulosos com função de pertinência:

$$\mu_{\tilde{c}_j(\theta_j)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{c}_j \leq \theta_j \text{ ou } \theta_j \leq \underline{c}_j \\ L_{c_j(\theta_j)} & \text{se } \underline{c}_j \leq \theta_j \leq c_j \\ R_{c_j(\theta_j)} & \text{se } c_j \leq \theta_j \leq \bar{c}_j \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

L_{c_j} e R_{c_j} são funções contínuas não-decrescente e não-crescente, respectivamente; tais que $L_{c_j}(c_j) = R_{c_j}(c_j) = 1$.

C.4 Otimização com coeficientes nebulosos nas restrições

No problema considerado aqui, a função objetivo é clássica e as restrições são lineares com valores imprecisos para os componentes da matriz de restrições e do vetor independente, modelados com números nebulosos. A formulação matemática segue abaixo:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g_i(\tilde{a}_i; x_j) \leq \tilde{b}_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

de forma que ao contrário do problema (C.2), em (C.9) não é permitido qualquer violação no atendimento das restrições.

Apesar dos resultados anteriores terem sido mostrados de uma maneira geral, os métodos são mais eficientes em problemas nebulosos lineares, visto que a maioria baseia-se na redução a problemas clássicos e é possível que para determinados problemas não-lineares não se conheçam algoritmos exatos para sua resolução. O mesmo acontece para problemas com restrições de integralidade das variáveis, dado que depois da redução a problemas não-nebulosos, o tempo computacional de resolução por métodos exatos. Em problemas com grande número de variáveis, pode tornar inviável a aplicação das técnicas descritas. Outras técnicas de resolução de problemas de otimização nebulosa podem ser encontradas em [22, 35, 71].

C.5 Otimização multi-objetivo com restrições nebulosas

O problema geral de otimização multi-objetivo com restrições nebulosas e intervalos nebulosos de definição de variáveis pode ser denotado matematicamente na forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)), \quad k \geq 2 \\ \text{s.a} \quad & g_i(x) \geq^f b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & l_{x_j} \leq x_j \leq u_{x_j}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

sendo $f_l(x)$ com $l = 1, \dots, k$ e $g_i(x)$ com $i = 1, \dots, m$ funções lineares ou não-lineares e x_j com $j = 1, \dots, n$, variáveis reais ou inteiras.

A introdução de restrições dessa natureza causa duas grandes mudanças no tipo de resultado esperado para o problema:

(1) *Conceito de factibilidade*: com a incorporação das imprecisões nas restrições, o conceito de solução factível torna-se nebulosa, já que as restrições admitem uma violação em seu entendimento. Como consequência, os métodos de resolução devem considerar soluções com níveis intermediários de factibilidade, graduados por funções de pertinência.

(2) *Conjunto Pareto fuzzy*: No problema multi-objetivo clássico, a solução é formada por um conjunto de pontos de equilíbrio, factíveis e não-dominados de acordo com a definição abaixo:

Definição C.1. *Uma solução $x^* \in X$ é dita ser eficiente ou Pareto-ótima se não é dominada por nenhuma outra solução factível, ou seja*:*

$$\nexists x \in X \text{ tal que } F(x) \leq F(x^*) \text{ e } F(x) \neq F(x^*) \quad (\text{C.11})$$

Como em problemas de otimização nebulosa são tratadas soluções com diferentes níveis de factibilidade, é comum a ocorrência de situações como: a solução x_1 domina x_2 mas é menos factível; o ponto x_1 não é dominado por nenhuma outra solução mas tem baixa factibilidade; o ponto x_2 é dominado apenas por soluções com menores níveis de factibilidade, etc. Assim, para esse tipo de problema, a solução é formada por um conjunto de pontos de equilíbrio com diferentes níveis de pertinência, calculados através de uma combinação dos níveis de factibilidade e não-dominância, configurando o que neste trabalho denomina-se conjunto *Pareto-Fuzzy*.

C.6 Otimização multi-objetivo com coeficientes nebulosos

A formulação matemática geral para o problema de otimização multi-objetivo com coeficientes nebulosos nas restrições e funções objetivo, é dada por:

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\tilde{c}; x) = (f_1(\tilde{c}_1; x), f_2(\tilde{c}_2; x), \dots, f_k(\tilde{c}_k; x)), \quad k \geq 2 \\ \text{s.a} \quad & X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\tilde{a}_i; x) \geq \tilde{b}_i, \quad l_j \leq x_j \leq u_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

sendo $f_l(\tilde{c}_l; x)$ com $l = 1, \dots, k$ e $g_i(\tilde{a}_i; x)$ com $i = 1, \dots, m$, as funções lineares ou não-lineares e x_j com $j = 1, \dots, n$ variáveis reais ou inteiras. Considera-se que $f_l(\tilde{c}_l; x)$ e $g_i(\tilde{a}_i; x)$ são funções com parâmetros nebulosos e variáveis não-nebulosas.

*Considerando um problema de minimização. Condições para maximização são análogas

O modelo (C.12) busca representar problemas multi-objetivo com coeficientes imprecisos. A consequência imediata da admissão de funções objetivo nebulosas é a mudança dos conceitos relacionados à avaliação e escolha das soluções. Os valores dos objetivos passam a ser imprecisos, caracterizados por números nebulosos, de forma que a relação de *Pareto* dominância, base para a identificação das soluções *eficientes*, deve ser utilizada de acordo com os procedimentos de comparação entre números dessa natureza:

$$x^* \in \text{Pareto}_f(X) \Leftrightarrow \nexists x \in X \text{ tal que } F(\tilde{c}; x) \leq_f F(\tilde{c}; x^*) \text{ e } F(\tilde{c}; x) \neq_f F(\tilde{c}; x^*) \quad (\text{C.13})$$

sendo os símbolos \leq_f e \neq_f as relações de ordem entre dois números nebulosos.

É importante analisar as diferenças entre restrição nebulosa e restrição com coeficientes nebulosos. A primeira modela situações em que são permitidas violações em seu atendimento, definindo diferentes níveis de factibilidade. No segundo caso, dois enfoques podem ser adotados: (i) associação do espalhamento dos coeficientes nebulosos como desvio na restrição, o que dependendo da técnica utilizada, é bastante semelhante a uma restrição nebulosa; (ii) a restrição é tratada como uma comparação entre dois números nebulosos ($g_i(\tilde{a}_i; x)$ e \tilde{b}_i , $i = 1, \dots, m$) e deve ser atendida totalmente.

Problemas de otimização multi-objetivo com coeficientes nebulosos, são amplamente estudados na literatura. Em geral, os métodos designados para esses problemas são bastantes específicos, de forma que as estruturas desses algoritmos dificilmente podem ser generalizadas para outros problemas. Outra característica comum a esses métodos é a resolução baseada em escalarizações e reduções a problemas clássicos.

Em [56], são apresentadas algumas definições para obter soluções eficientes em problemas de otimização multi-objetivo com incertezas nas diferentes formas. As três principais definições descritas por [56] estão a seguir:

Definição C.2 (solução M-pareto-ótima (local)). $\mathbf{x}^* \in X$ é dito ser uma solução M-pareto-ótima (local) para o PNLMO generalizado se, e somente se, não existe outro $\mathbf{x} \in X \cap N(\mathbf{x}^*, \delta)$ tal que $\mu_i(f_i(x)) \geq \mu_i(f_i(\mathbf{x}^*))$ para todo i e $\mu_i(f_j(x)) \neq \mu_i(f_j(\mathbf{x}^*))$ para ao menos um j , sendo que $N(\mathbf{x}^*, \delta)$ denota a δ vizinhança de \mathbf{x}^* .

Definição C.3 (solução α -pareto-ótima (local)). $\mathbf{x}^* \in X(\mathbf{b})$ é dito ser uma solução α -pareto-ótima (local) para o α -PNLMO se, e somente se, não existe outro $\mathbf{x} \in X(\mathbf{b}) \cap N(\mathbf{x}^*, \delta)$ e $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})_\alpha \cap N(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \delta)$ tal que $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i) \leq f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}_i^*)$, $i = 1, \dots, k$, com uma inequação estrita para ao menos um i , sendo que os valores correspondentes dos parâmetros \mathbf{a}^* e \mathbf{b}^* são chamados parâmetros α -cortes ótimos (locais).

Definição C.4 (solução M- α -pareto-ótima (local)). $\mathbf{x}^* \in X(\mathbf{b})$ é dito ser uma solução α -pareto-ótima (local) para o α -PNLMO generalizado se, e somente se,

não existe um outro $\mathbf{x} \in X(\mathbf{b}) \cap N(\mathbf{x}^*, \delta) \cap N(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \delta)$ e $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})_\alpha \cap N(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \delta)$ tal que $\mu_i(f_i(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)) \geq \mu_i(f_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}_i^*))$, para todo i e $\mu_j(f_j(\mathbf{x}, \mathbf{a}_j)) \neq \mu_j(f_j(\mathbf{x}^*, \mathbf{a}_j^*))$ para ao menos um j , sendo que os valores correspondentes dos parâmetros \mathbf{a}^* e \mathbf{b}^* são chamados parâmetros α -cortes ótimos (locais).

Em [58] é apresentado um algoritmo genético para um problema de *Job Shop* multi-objetivo, com tempo de processamento e data de entrega imprecisos. As soluções são representadas por matrizes tarefas *versus* máquinas dos tempos nebulosos de finalização e dos operadores genéticos mantêm a diversidade da população através da geração de indivíduos com baixa similaridade.

Em [45] é apresentado um algoritmo genético para o problema multi-objetivo de distribuição dos produtos com veículos heterogêneos e custos de transporte nebuloso. No algoritmo, as soluções são representadas por matrizes tridimensionais e as comparações entre os objetivos nebulosos, base dos processos de avaliação e seleção das soluções, são realizadas com a aplicação de funções de *índices*. Como o modelo apresenta um número elevado de restrições de igualdade, a população é inicializada e evoluída utilizando procedimentos de factibilização.

Em [60], problemas multi-objetivo não-convexos com coeficientes nebulosos nos objetivos e restrições são resolvidos através de um algoritmo genético baseado no conceito de soluções α -**Pareto-ótimas**: conjunto de pontos não-dominados para um α -corte dos coeficientes nebulosos. O algoritmo faz uso de uma população de referência (constituída por soluções totalmente factíveis) e uma população convencional (com atendimento parcial do conjunto de restrições). A primeira solução de referência é gerada com a resolução de um problema de minimização dos desvios das restrições. Ao longo das gerações, novas soluções factíveis são geradas através do Método de *bisseção*, aplicado na direção formada por uma solução de referência e um indivíduo da população convencional. Este último procedimento é executado após a aplicação dos operadores genéticos.

Em [59] e [57] são apresentados algoritmos genéticos para problemas multi-objetivo com diferentes níveis de prioridades entre os objetivos. Os problemas são resolvidos de forma interativa, permitindo ao decisor informar os níveis de satisfação dos objetivos prioritários durante a execução do algoritmo.

Apêndice D

Algoritmo genético NSGA

Dentre as várias áreas emergentes nas quais os algoritmos evolutivos (AEs) [5] se tornaram bastante populares, a otimização multiobjetivo teve um dos maiores crescimentos nos últimos anos [15]. Um problema de otimização multiobjetivo difere de um problema de otimização com objetivo único por possuir vários objetivos, muitas vezes conflitantes, que necessitam ser otimizados. Ao contrário de um problema mono-objetivo, os problemas multiobjetivos não possuem uma solução ótima única. Uma solução adequada deve obter uma performance adequada para todos os objetivos [49].

O potencial dos algoritmos evolutivos para resolver problemas de otimização multiobjetivos foi sugerido nos anos 60 por [55]. Porém a primeira implementação de um algoritmo evolutivo multiobjetivo só foi produzido no meio dos anos 80 [61], [62]. A partir daí, uma quantidade considerável de pesquisas vêm sendo feitas na área. A crescente importância desse campo é refletida pelo aumento significativo dos artigos técnicos em conferências internacionais. Podemos observar pela Figura D.1 como o número de artigos vem crescendo nos últimos anos.

A maior motivação para usar algoritmos evolutivos (principalmente os algoritmos genéticos) para resolver problemas de otimização multiobjetivos é devido ao fato dos AEs lidarem simultaneamente com um conjunto de possíveis soluções (população) que nos permite encontrar vários membros do conjunto Pareto-ótimo em apenas uma execução do algoritmo ao invés de ter que realizar uma série de execuções separadas, como no caso das técnicas de programação matemática tradicionais [49]. Além disso, os AEs são menos susceptíveis à forma ou continuidade da fronteira de Pareto, já que esses são problemas conhecidos para as técnicas de programação matemática [14, 16, 19, 86].

O NSGA (*Nondominated Sorting Genetic Algorithm*, seção D.1), foi proposto por Srinivas & Deb em 1994, descrito com mais detalhes em [19]. Baseado em

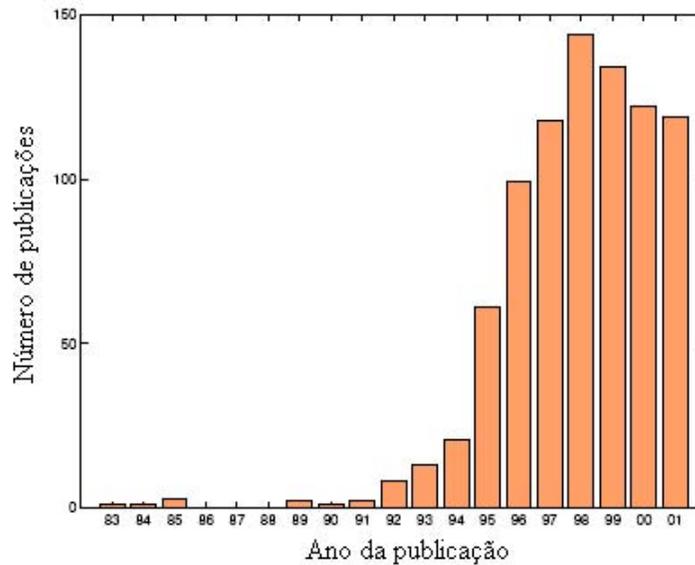


Figura D.1: Número de publicações nos últimos anos

fronteiras de classificação dos indivíduos; aos indivíduos não dominados são atribuídos valores de *dummy fitness*, e eles são removidos da população; o processo se repete até toda a população estar classificada. Utiliza sharing. O NSGA 2, de Deb *et. al.*, que também está descrito em [19], é computacionalmente mais eficiente do que o NSGA, além de utilizar elitismo e comparação por crowding.

D.1 NSGA - Nondominated Sorting Genetic Algorithm

O NSGA é um Algoritmo Evolutivo de Otimização Multi-objetivo(AEOM) que usa os conceitos de Goldberg. Para introduzir este algoritmo, os autores primeiro apresentam algumas definições básicas para encontrar o conjunto Pareto-ótimo. Depois, três métodos clássicos são descritos:

- Método da ponderação dos objetivos, o qual um vetor de pesos controla a solução ótima obtida;
- Método da distância das funções, o qual defini-se um valor fixo para cada função objetivo obtendo uma solução ótima diferente para cada conjunto de valores fixos;
- Formulação *min-max*, a qual tenta minimizar o máximo desvio relativo de cada função objetivo.

Alguns pontos fracos destes métodos clássicos, como espaço descontínuo ou ruidoso das variáveis, sem contar o conhecimento prévio do decisor diante dos problemas a serem otimizados.

Além do algoritmo NSGA, os autores revisaram outros três AEOMs. Porém, somente um destes três algoritmos foi escolhido para comparar os resultados com o NSGA. O algoritmo escolhido foi o VEGA, o qual foi modificado do programa GENESIS para criar uma repetição em torno do procedimento de seleção tradicional no momento que o método de seleção é repetido para cada objetivo individual para executar uma porção de ferramentas, porém existe ao menos um ponto fraco nesse algoritmo. O ponto fraco descrito aqui está em convergir prematuramente para uma região promissora do espaço de busca. Contudo, o autor do VEGA tentou minimizar a convergência prematura desenvolvendo duas heurísticas, porém sem muito sucesso.

O NSGA diferencia dos algoritmos genéticos padrões somente pela forma de operador de seleção, pois os operadores de recombinação e mutação são os usuais. O processo de seleção determina indivíduos não-dominados presentes na população, os quais são primeiro identificados da população corrente. Esses indivíduos definem o primeiro conjunto não-dominado na população e designa um maior valor de adaptação enganosa (*dummy fitness*), que permite o mesmo potencial reprodutivo para todos os indivíduos não-dominados. Esses indivíduos classificados são compartilhados com seus valores de fitness enganoso para manter a diversidade na população.

O método de compartilhamento é realizado para formar o operador de seleção usando valor de fitness degradado, que determina os indivíduos do segundo conjunto de não-dominância depois do compartilhamento. Esse processo segue até a população de entrada ser classificada em vários conjuntos.

A população é recombinada de acordo com o fitness enganoso, porém os indivíduos do primeiro conjunto tem maior probabilidade que o resto da população. Esse procedimento resulta numa convergência rápida da população para uma região não-dominada e a ajuda do compartilhamento para distribuí-la sobre essa região.

Outro aspecto do NSGA é que este pode ser usado para problemas com qualquer número de objetivos e problemas tanto de maximização quanto de minimização podem também ser manipulados por esse método. O compartilhamento em cada conjunto é realizada para calcular um valor entre os indivíduos no mesmo conjunto, que vai ser definido pelo raio de compartilhamento que representa a distância máxima permitida entre quaisquer dois indivíduos pertencentes ao mesmo tempo.

Os outros dois algoritmos evolutivos multiobjetivos, que usam a idéia de ordenação de não-dominância, são:

1. MOGA (Algoritmo Genético de Otimização Multiobjetivo), que designa o

posto dos indivíduos não-dominados por números e usa o métodos de formação do nicho para distribuir a população sobre a região Pareto-ótima;

2. NPGA, que usa torneio de Pareto dominância e um conjunto de comparação compreendido de um número específico de indivíduos, o qual determina o tamanho do conjunto Pareto-ótimo.

Os algoritmos VEGA e NSGA são comparados neste trabalho com três problemas testes e usado uma métrica de performance, a qual usa a medida de distribuição da forma de desvio chi-quadrado-possível.

D.2 NSGA-II

O NSGA-II é a nova versão do AEOM NSGA (seção D.1). Este novo AEOM tenta superar as seguintes críticas do NSGA:

- Alta complexidade computacional na ordenação dos conjuntos não-dominados, porque necessitava de um esforço da ordem de $O(MN^3)$ (sendo M o número de funções objetivos e N o tamanho da população);
- Ausência de elitismo, pois o elitismo pode acelerar a performance do algoritmo genético significativamente;
- Necessidade de especificar o parâmetro σ_{share} de compartilhamento, o qual pode variar de acordo com o problema a ser otimizado.

Outro enfoque do NSGA-II está no estudo de problemas de otimização multiobjetivos restritos sugerindo uma estratégia de manipulação simples das restrições, pois é muito importante do ponto de vista para resolver problemas práticos. A comparação de cada uma das soluções da população requer $O(MN)$ e quando esse processo é continuado para encontrar todos os membros do primeiro nível de não-dominância tem complexidade de $O(MN^2)$. Logo, o pior caso ocorre quando se tem N conjunto e existe somente uma solução em cada conjunto, que requer um total de $O(MN^3)$ cálculos. A solução está em:

1. Inserir um contador de dominação, n_p , que representa o número de soluções que dominam a solução p ;
2. Calcular S_p , um conjunto de soluções que a solução p domina.

Essas mudanças requerem $O(MN^2)$ cálculos. Os autores informam a complexidade de outros dois algoritmos evolutivos multiobjetivos, SPEA e PAES, os quais ambos podem ser implementados com uma complexidade da ordem de $O(MN^2)$.

A preservação da densidade no NSGA original estava ligada ao uso da abordagem da função de compartilhamento, porém existem duas dificuldades nessa

abordagem que são: a escolha adequada do valor do parâmetro de compartilhamento e a complexidade total dessas abordagens é da ordem de $O(N^2)$. No NSGA-II, substituiu-se a abordagem da função de compartilhamento por uma abordagem da comparação por compressão que elimina as dificuldades acima, pois não requer nenhum parâmetro definido pelo usuário para manter a diversidade entre os membros da população e melhora a complexidade computacional. Os autores apresentam pseudo-códigos das melhorias, descritas acima, no decorrer do artigo, junto com alguns comentários importantes.

Alguns problemas testes da literatura foram escolhidos para conferir a eficiência do NSGA-II, o qual é comparados com o PAES e SPEA na obtenção do conjunto Pareto-ótimo. São usadas algumas medidas de performance que medem a convergência das soluções Pareto-ótimas e a medida do espalhamento alcançado entre as soluções obtidas. A abordagem de penalização por parametrização na manipulação das restrições em problemas de otimização mono-objetivo pode ser adaptado para ser usado pelo NSGA-II para solucionar problemas de otimização multiobjetivo com restrição. Os autores concluem que o NSGA-II consegue convergir melhor para o conjunto de não-dominância obtido e mantém um melhor espalhamento das soluções comparado com os outros dois algoritmos evolutivos multiobjetivos, PAES e SPEA.

Bibliografia

- [1] F. M. ALI. A differential equation approach to fuzzy non-linear programming problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 93:57–61, 1998. [cited at p. 74]
- [2] E. E. AMMAR. On solutions of fuzzy random multiobjective quadratic programming with application in portfolio problem. *Information Sciences*, 178:468–484, 2008. [cited at p. 14]
- [3] S. APPADOO, S. BHATT, and C. BECTOR. Application of possibility theory to investment decision. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 7:35–57, 2008. [cited at p. 18]
- [4] H. M. AYRES, L. M. QUEIROZ, L. C. B. SANTOS, and R. C. SILVA. Algoritmo evolutivo para problemas de otimização multiobjetivo com incertezas. In *XX-XIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Fortaleza, CE, Setembro 2007. [cited at p. 18]
- [5] T. BÄCK. *Evolutionary algorithms in theory and practise*. Oxford University Press, New York, 1996. [cited at p. 87]
- [6] M. S. BAZARAA, H. D. SHERALI, and C. M. SHETTY. *Nonlinear programming - theory and algorithms*. Jonh Wiley & Sons, New York, USA, second edition, 1993. [cited at p. 7]
- [7] E. BEALE. On quadratic programming. *Naval Research Logistics Quarterly*, 6:227–244, 1959. [cited at p. 17]
- [8] R. E. BELLMAN and L. A. ZADEH. Decision-marking in a fuzzy environment. *Management Science*, 17(4):B141–B164, 1970. [cited at p. 8, 9, 34, 82]
- [9] G. BORTOLAN and R. DEGANI. A review of some methods for ranking fuzzy subsets. *Fuzzy Sets and Systems*, 15:1–19, 1985. [cited at p. 20]
- [10] L. CAMPOS and J. L. VERDEGAY. Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 32:1–11, 1989. [cited at p. 8]
- [11] L. A. P. CANTÃO. *Programação não-Linear com parâmetros fuzzy*. PhD thesis, FEEC - UNICAMP, Campinas, March 2003. (in portuguese). [cited at p. 27, 42, 45, 74]

- [12] L. A. P. CANTÃO and A. YAMAKAMI. Nonlinear programming with fuzzy parameters: Theory and applications. In *International Conference on Computational Intelligence for Modelling, Control and Automation*, pages 657–668, Vienna, Austria, 2003. CIMCA 2003. [cited at p. 44]
- [13] V. CHANKONG and Y. Y. HAIMEES. *Multiobjective decision making: Theory and Methodology*, volume 8 of *North Hollando series in system science and engineering*. North Holland, New York, USA, 1983. [cited at p. 7, 17, 25, 57, 61, 75]
- [14] C. A. C. COELLO. A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques. *Knowledge and Information Systems. An International Journal*, 1(3):269–308, August 1999. [cited at p. 87]
- [15] C. A. C. COELLO and A. H. AGUIRRE. Design of combinational logic circuits through an evolutionary multiobjective optimization approach. *Artificial Intelligence for Engineering, Design, Analysis and Manufacture*, 16(1):39–53, January 2002. [cited at p. 87]
- [16] C. A. C. COELLO, D. A. VAN VELDHUIZEN, and G. B. LAMONT. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Kluwer Academic Publishers, New York, May 2002. ISBN 0-3064-6762-3. [cited at p. 87]
- [17] C. CRUZ, R. C. SILVA, J. L. VERDEGAY, and A. YAMAKAMI. A survey of fuzzy quadratic programming. *Recent Patents on Computer Science*, 1:182–193, 2008. [cited at p. 35]
- [18] C. CRUZ, R. C. SILVA, J. L. VERDEGAY, and A. YAMAKAMI. A parametric approach to solve quadratic programming problems with fuzzy environment in the set of constraints. In *IFSA/EUSFLAT 2009*, Lisbon, Portugal, July 2009. [cited at p. 35]
- [19] K. DEB. *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. John Wiley & Sons, LTD, Chichester, UK, 2001. [cited at p. 47, 49, 50, 57, 59, 62, 87, 88]
- [20] M. DELGADO, J. L. VERDEGAY, and M. VILA. Imprecise costs in mathematical programming problems. *Control and Cybernetics*, 16(2):113–121, 1987. [cited at p. 21]
- [21] M. DELGADO, J. L. VERDEGAY, and M. VILA. Relating different approaches to solve linear programming problems with imprecise costs. *Fuzzy Sets and systems*, 37:33–42, 1990. [cited at p. 21]
- [22] M. DELGADO, J. L. VERDEGAY, and M. A. VILA. A general model for fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 29:21–29, 1989. [cited at p. 83]
- [23] D. DUBOIS and H. PRADE. *Fuzzy sets and systems: Theory and Application*. Academic Press, San Diego, USA, 1980. [cited at p. 8, 23, 36]
- [24] D. DUBOIS and H. PRADE. Towards fuzzy differential calculus parte 1: Integration of fuzzy mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, 8:1–17, 1982. [cited at p. 74]
- [25] D. DUBOIS and H. PRADE. Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory. *Information Sciences*, 30(3):183–224, 1983. [cited at p. 8, 23]

- [26] M. FARINA and P. AMATO. Fuzzy optimality and evolutionary multiobjective optimization. In *Second International Conference Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 58–72, Faro, Portugal, 2003. [cited at p. 9]
- [27] M. FARINA and P. AMATO. A fuzzy definition of "optimality" for many-criteria optimization problems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans*, 34(3):315–326, 2004. [cited at p. 9]
- [28] P. A. V. FERREIRA. Otimização multiobjetivo: Teoria e aplicações. Livre docência, Universidade Estadual de Campinas, Abril 1999. [cited at p. 25, 75]
- [29] P. A. V. FERREIRA. Programação multiobjetivo, 2003. URL at <http://www.dt.fee.unicamp.br/~valente/ia527.html>. [cited at p. 25]
- [30] C. A. FLOUDAS, P. M. PARDALOS, C. ADJIMAN, W. R. ESPOSITO, Z. H. GÜMÜS, S. T. HARDING, J. L. KLEPEIS, C. A. MEYER, and C. A. SCHWEIGER. *Handbook of test problems in local and global optimization*, volume 33 of *Nonconvex Optimization and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. [cited at p. 17]
- [31] M. C. GOLDBARG and H. P. L. LUNA. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos*. Campus, Rio de Janeiro, BR, 2000. [cited at p. 7]
- [32] D. M. HIMMELBLAU. *Applied nonlinear programming*. McGraw-Hill Book Company, Reading, MA, USA, 1972. [cited at p. 7]
- [33] W. HOCK and K. SCHITTKOWSKI. *Test examples for nonlinear programming*, volume 187 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, 1981. [cited at p. 17]
- [34] M. L. HUSSEIN and M. ABDEL AATY MAATY. The stability notions for fuzzy nonlinear programming problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 85:319–323, 1997. [cited at p. 13, 46]
- [35] M. INUIGUCHI, H. ICHIHASHI, and H. TANAKA. Fuzzy programming: A survey of recent developments, in: Slowinski and teghem eds., stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty. *Kluwer Academic Boston*, pages 45–68, Dordrecht 1990. [cited at p. 83]
- [36] F. JIMÉNEZ, J. CADENAS, G. SÁNCHEZ, A. GÓMEZ-SKARMETA, and J. L. VERDEGAY. Multi-objective evolutionary computation and fuzzy optimization. *International Journal of Approximate Reasoning*, 43(1):59–75, 2006. [cited at p. 8, 21, 22]
- [37] O. KALEVA. Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24:301–317, 1987. [cited at p. 74]
- [38] O. KALEVA. The calculus of fuzzy valued functions. *Applied Mathematical Letters*, 3(2):55–59, 1990. [cited at p. 74]
- [39] A. KAUFMANN and M. M. GUPTA. *Introduction to fuzzy arithmetic: theory and applications*. Van Nostrand Reinhold, New York, USA, 1984. [cited at p. 8, 23, 74]

- [40] G. J. KLIR and B. YUAN. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1995. [cited at p. 8, 23]
- [41] M. KÖPPEN, K. FRANKE, and B. NICKOLAY. Fuzzy-pareto-dominance driven multiobjective genetic algorithm. In *10th IFSA World Congress*, pages 450–453, Istanbul, Turkey, 2003. [cited at p. 11]
- [42] M. KÖPPEN, R. V. GARCIA, and B. NICKOLAY. Fuzzy-pareto-dominance and its application in evolutionary multi-objective optimization. In *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Third International Conference*, pages 399–412, Guanajuato, Mexico, 2005. [cited at p. 11]
- [43] H. KUWANO. Inverse problems in fuzzy multiobjective linear programming. In *Second International Conference on Knowledge-Based Intelligent Electronic Systems*, pages 559–563, Adelaide, Australia, 2000. [cited at p. 15]
- [44] Y. J. LAI and C. L. HWANG. *Fuzzy mathematical programming: methods and applications*, volume 394 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer, Berlin, 1992. [cited at p. 18]
- [45] Yinzhen Li, Kenichi Ida, and Mitsuo Gen. Improved genetic algorithm for solving multiobjective solid transportation problem with fuzzy numbers. *Computers in Industrial Engineering*, 33(3-4):589–592, 1997. [cited at p. 86]
- [46] Y.-M. LIU. Some properties of convex fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, 111:119–129, 1985. [cited at p. 73]
- [47] R. LOWER. Convex fuzzy sets. *Fuzzy sets and systems*, 3:291–310, 1980. [cited at p. 73]
- [48] D. G. LUENBERGER. *Linear and nonlinear programming*. Addison-Wesley, Massachusetts, USA, second edition, 1989. [cited at p. 7]
- [49] K. M. MIETTINEN. *Nonlinear multiobjective optimization*. Kluwer Academic Publishers, Boton, Massachusetts, 1999. [cited at p. 87]
- [50] C. V. NEGOITA and D. A. RALESCU. *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. Birkhauser Verlag, Stuttgart, 1975. [cited at p. 18, 34]
- [51] A. OSYCZKA. Multicriteria optimization for engineering desing. In *J. S. Gero Ed. Design Optimization*, pages 193–227. Academic Press, 1985. [cited at p. 76]
- [52] V. PARETO. *Cours d'economique politique*, volume I. Macmillan, Paris, FR, 1897. [cited at p. 17, 75]
- [53] V. PARETO. *Le cours d'economique politique*, volume II. Macmillan, London, UK, 1897. [cited at p. 17, 75]
- [54] W. PEDRYCZ and F. GOMIDE. *An introduction of fuzzy sets: analisys and design*. MIT press, Cambridge, MA, 1998. [cited at p. 8, 23, 69]
- [55] R. S. ROSENBERG. *Simulation of genetic populations with biochemical properties*. PhD thesis, University of Michigan, Ann Harbor, Michigan, 1967. [cited at p. 87]

- [56] M. SAKAWA. *Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization*. Plenum Press, New York, USA, 1993. [cited at p. 11, 14, 85]
- [57] M. SAKAWA. *Genetic algorithms and fuzzy multiobjective optimization*. Klumer Academic Publishers, London, UK, 2002. [cited at p. 86]
- [58] M. SAKAWA and R. KUBOTA. Fuzzy programming for multiobjective job shop scheduling with fuzzy processing time and fuzzy due date through genetic algorithms. *European Journal of Operational Research*, 120(2):393–407, 2000. [cited at p. 86]
- [59] M. SAKAWA and I. NISHIZAKI. Interactive fuzzy programming for two-level non-convex programming problems with fuzzy parameters through genetic algorithms. *Fuzzy Set and Systems*, 127:185–197, 2002. [cited at p. 86]
- [60] M. SAKAWA and K. YAUCHI. Interactive decision making for multiobjective non-convex programming problems with fuzzy numbers through coevolutionary genetic algorithms. *Fuzzy Set and Systems*, 114:151–165, 2000. [cited at p. 86]
- [61] J. D. SCHAFFER. *Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms*. PhD thesis, Vanderbilt University, 1984. [cited at p. 50, 87]
- [62] J. D. SCHAFFER and J. J. GREFENSTETTE. Multiobjective learning via genetic algorithms. In *Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-85)*, pages 593–595, Los Angeles, California, 1985. AAAI. [cited at p. 87]
- [63] K. SCHITTKOWSKI. *More test examples for nonlinear programming codes*. Springer-Verlag, 1987. [cited at p. 17]
- [64] R. C. SILVA. O uso de abordagens paramétrica e possibilística em programação multi-objetivo com incertezas. In *XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto Seguro, BA, Setembro 2009. [cited at p. 35]
- [65] R. C. SILVA and T. A. ALMEIDA. Programação multi-objetivo irrestrita com incertezas. In *XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto Seguro, BA, Setembro 2009. [cited at p. 18]
- [66] R. C. SILVA, L. A. P. CANTÃO, and A. YAMAKAMI. The use of possibility theory in the definition of fuzzy Pareto-optimality. *Fuzzy Optimization and Decision Making*. Artigo em fase de submissão. [cited at p. 18, 35]
- [67] R. C. SILVA, C. CRUZ, J. L. VERDEGAY, and A. YAMAKAMI. *Fuzzy optimization: Recent developments and applications*, chapter A survey of fuzzy convex programming models. Springer-Verlag, 2009. [cited at p. 35]
- [68] R. C. SILVA, C. CRUZ, and A. YAMAKAMI. A parametric method to solve quadratic programming problems with fuzzy costs. In *IFSA/EUSFLAT 2009*, Lisbon, Portugal, July 2009. [cited at p. 18, 35]
- [69] R. C. SILVA, J. L. VERDEGAY, and A. YAMAKAMI. Two-phase method to solve fuzzy quadratic programming problems. In *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, London, UK, July 2007. [cited at p. 37, 38]

- [70] R. C. SILVA and A. YAMAKAMI. Definition of fuzzy pareto-optimality by using possibility theory. In *IFSA/EUSFLAT 2009*, Lisbon, Portugal, July 2009. [cited at p. 18, 35]
- [71] H. TANAKA, T. OKUDA, and K. ASAI. On fuzzy-mathematical programming. *Journal of Cybernetics*, 1(4):37, 46 1974. [cited at p. 83]
- [72] M. TANAKA. Ga-based decision support system for multi-criteria optimization. In *International Conference on system, Man and Cybernetics*, volume 2, pages 1556–1561, 1995. [cited at p. 58, 62]
- [73] S. WANG and S. ZHU. On fuzzy portfolio selection problems. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1:361–377, 2002. [cited at p. 18]
- [74] B. WERNERS. Iterative multiple objective programming subject to flexible constraints. *European Journal of Operational Research*, 31:342–349, 1987. [cited at p. 9]
- [75] P. WOLFE. The simplex method for quadratic programming. *Econometrica*, 27:382–398, 1959. [cited at p. 17]
- [76] L. A. ZADEH. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965. [cited at p. 7, 18, 69, 73]
- [77] L. A. ZADEH. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1):3–28, 1978. [cited at p. 8, 23]
- [78] L. A. ZADEH. Fuzzy logic, neural networks, and soft computing. *Communication of the ACM*, 37(3):77–84, 1994. [cited at p. 2]
- [79] L. A. ZADEH. Soft computing and fuzzy logic. *IEEE Software*, pages 48–55, 1994. [cited at p. 2]
- [80] L. A. ZADEH. A new direction in ai: Toward a computational theory of perceptions. *AI Magazine*, 22(1):73–84, 2001. [cited at p. 2]
- [81] L. A. ZADEH. Is there a need for fuzzy logic? *Information Sciences*, 178:2751–2779, 2008. [cited at p. 7]
- [82] H. J. ZIMMERMANN. Description and optimization of fuzzy systems. *International Journal of General Systems*, 2:209–215, 1976. [cited at p. 82]
- [83] H. J. ZIMMERMANN. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:45–55, 1978. [cited at p. 9]
- [84] H. J. ZIMMERMANN. Fuzzy mathematical programming. *Computer & Operation Research*, 10(4):291–298, 1983. [cited at p. 9]
- [85] H.-J. ZIMMERMANN. *Fuzzy set theory and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, USA, third edition, 1996. [cited at p. 8]
- [86] E. ZITZLER, M. LAUMANN, and S. BLEULER. A tutorial on evolutionary multiobjective optimization. In Xavier Gandibleux, Marc Sevaux, Kenneth Sörensen, and Vincent T’kindt, editors, *Metaheuristics for Multiobjective Optimisation*, pages 3–37, Berlin, 2004. Springer. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems Vol. 535. [cited at p. 87]

Índice

- α -corte de
 - Números
 - Nebulosos, 13
- Índices de
 - Comparação, 23, 47
 - Yager, 20
- Combinação
 - Linear, 36
- Computação
 - Flexível, 2
 - Rígida, 3
- Conceito de
 - $(1 - k)$ -dominância, 10
 - Dominância, 25
- Condições de
 - Otimalidade de
 - KKT, 35
- Conhecimento, 7
- Conjunto
 - Eficiente
 - Nebuloso, 41
 - Nebulosamente
 - Ordenado, 19, 24
 - Pareto-ótimo
 - Nebuloso, 19, 34
- Conjunto de
 - Soluções
 - Factíveis, 49
- conjunto de
 - soluções
 - eficientes, 9
- Custos
 - Nebulosos, 22
- Decisão
 - Nebulosa, 9, 34
- Definição de
 - k -otimalidade, 10
 - Nebulosa, 10
 - Pareto-otimalidade, 10
- Distribuição de
 - Possibilidade, 23
- Dominância
 - Nebulosa, 10, 25
- Fronteira de
 - Pareto, 51, 62
- Função de
 - Distribuição de
 - Possibilidade, 34
- Funções
 - Nebulosas
 - Convexas, 29
- Funções de
 - Pertinência, 8, 20, 21
- Graus de
 - imprecisão de
 - Dominância, 11
- Inteligência
 - Artificial, 1
- Lógica
 - Nebulosa, 3, 18
- maximização, 4
- Medida de
 - Possibilidade, 23
- Meta
 - Nebulosa, 11
- Metaheurística, 3
- minimização, 4
- Número de

- Gerações, 57
- Nível de
 - Satisfação, 9, 25, 46
 - Ótima, 35
- Neurocomputação, 3
- Otimalidade
 - Nebulosa, 10
- Otimização
 - Multi-objetivo, 4
 - Nebulosa, 8
- Pareto-otimalidade
 - Nebulosa, 8
 - nebulosa, 14
- Pesquisa
 - Operacional, 3
- Ponto
 - Factível, 41
 - Fixo, 34
 - Regular, 41
- Problema
 - Multi-objetivo
 - flexibilizado, 11
- Problema de
 - Programação
 - Multi-objetivo, 17
- Problemas de
 - Otimização
 - Irrestrito, 19
- Programação
 - Convexa, 18
 - Estocástica, 18
 - Flexível, 18
 - Matemática, 4, 17
 - Multi-objetivo, 7
 - Multi-Objetivo
 - Irrestrito, 17
 - Possibilística, 19
- Raciocínio
 - Probabilístico, 3
- Região
 - Factível, 33
 - Pareto-ótima
 - Nebulosa, 34
- Relação
 - Nebulosa, 36
- Relação de
 - Ordem, 47
 - Nebulosa, 33
- Sistemas
 - de Suporte
 - de Decisão, 66
- Soft
 - Computing, 18
- Solução
 - Ótima
 - M-Pareto, 12
 - Ótima de
 - α -Pareto, 14
 - Pareto, 17
 - Eficiente
 - α -nebuloso, 13
 - Nebulosa, 32, 44
 - Ordinária, 13
 - Factível, 25
 - Global, 12
 - Ideal, 24
 - Local, 12
 - Não-dominada, 12
 - Nebulosa, 20, 22, 36
 - Paramétrica, 22
- Soluções
 - Eficientes, 17
 - Nebulosas, 47
 - Não-dominadas, 8
 - Nebulosas, 35
- Tamanho da
 - População, 57
- Teorema da
 - Representação, 20, 36
- Teoria de
 - conjuntos
 - nebulosos, 3
 - Possibilidade, 5, 23, 46
- Teoria dos
 - Conjuntos
 - Nebulosos, 18
- Tomada de
 - Decisão, 1
- Variáveis de
 - Decisão, 22, 47
 - Nebulosas, 33
- Violação
 - Máxima
 - Permitida, 62