

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS- UNICAMP
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

IMPLEMENTAÇÃO DE CÓDIGOS DE BLOCO PARA CORREÇÃO DE ERROS EM SISTEMAS RÁDIO DIGITAL 64 QAM

HELOÍSA PEIXOTO DE BARROS PIMENTEL

Orientador: Prof. Dr. WALTER DA CUNHA BORELLI

Este exemplar corresponde à redação final da tese
defendida por Helena Peixoto de Barros
Pimentel e aprovada pela Comissão
Julgadora em 28/10/1992
Orientador W. Borelli

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
Elétrica, da Universidade Estadual de
Campinas- UNICAMP, como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título
de Mestre em Ciências.

OUTUBRO 1992

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

Para meus pais, Augusto e Célia

Para José Luiz

AGRADECIMENTO

A realização deste documento só foi possível com a formação teórica proporcionada na UNICAMP e a colaboração de toda a equipe de trabalho do CPqD TELEBRAS, que foi essencial no estudo, simulação, especificação, projeto, implementação e teste dos componentes da placa RPE (Redutor de Propagação de Erros) do Rádio Digital 64 QAM e do Circuito Integrado TB-34, que realizam as funções descritas nesta Tese de Mestrado como exemplo implementado.

Este trabalho é resultado, portanto, do empenho de toda uma equipe, cujos elementos participaram em maior ou menor número de etapas. Foi um trabalho longo e dedicado de várias pessoas do CPqD TELEBRÁS, a quem sou muito grata. Todas as contribuições foram muito valiosas.

É importante lembrar também da colaboração de vários colegas que embora não estivessem diretamente responsáveis pelo projeto auxiliaram enormemente tirando dúvidas, analisando e dando sugestões para a versão final, garantindo a infraestrutura de trabalho, ou mesmo através de simples mas imprescindível incentivo.

INDICE

	Tópico	Página no
1	INTRODUÇÃO	1
2	SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL	3
2.1	Sistema Rádio	3
2.1.1	Microondas em Visibilidade	3
2.1.1.1	Canal de Rádio Frequência	4
2.1.1.2	Configuração do Sistema Rádio	4
2.1.2	Evolução do Sistema Rádio	6
2.1.2.1	Razões da Digitalização	6
2.1.2.2	Transição do Rádio Analógico Para o Digital	7
2.1.3	Transmissão Digital	8
2.1.3.1	Tipos de Modulação Digital	8
2.1.3.2	BPSK ou PSK	10
2.1.3.3	QPSK	10
2.1.3.4	Modulação mQAM	10
2.2	Rádio Digital 64 QAM	11
2.2.1	Conversão Digital/Analógica	11
2.2.1.1	Conversão A/D e D/A : Mapeamento Utilizado	12
2.2.1.2	Energia Média Normalizada dos Sinais da Constelação 64 QAM	13
2.2.2	Processo Analítico	13
2.2.2.1	Transmissão de Sinal 64 QAM	13
2.2.2.2	Recepção de Sinal 64 QAM	14
2.2.3	Relações de Probabilidade de Erro para Análise de Desempenho	15
2.2.3.1	Probabilidade de Erro de Bit de Um Sistema Rádio Digital 64 QAM	15
2.2.3.2	Relação entre E_b/N_0 e C/N	16
2.2.3.3	Modelo de Canal	17
2.2.3.4	Métrica de Mapeamento	17
2.2.4	Determinação da Métrica de Mapeamento- Exemplo de Cálculo	19

Tópico	Página no
2.2.5 O Problema das Ambiguidades de Fase	21
2.2.5.1 Eliminação das Ambiguidades de Fase	22
2.2.5.2 Escolha do Mapeamento Adequado	24
2.3 Evolução dos Sistemas Rádio Digital	25
2.3.1 Características de Sistema Multinível	25
2.3.1.1 Desvanecimento	26
2.3.1.2 Limitações do Equipamento	26
2.3.1.3 Desempenho dos Sistemas	27
2.3.2 Problemas e Soluções para Sistemas Multinível	27
2.3.2.1 Amplificadores de Potência Adequados	27
2.3.2.2 Contraindicadas Para Distorção Não Linear e Desvanecimento Seletivo	28
2.3.2.3 Diversidade de Frequência Com Chaveamento Sem Perda de Bits	29
2.3.2.4 Reuso de Frequências	29
2.3.2.5 Eliminação da Taxa de Erro Residual	29
2.4 O Sistema de Codificação	30
2.4.1 Codificação para Correção de Erros	30
2.4.2 Determinação de Requisitos do Sistema	31
2.4.3 Condições de Contorno	31
2.4.4 Desempenho Esperado Para o Código Corretor de Erros	33
2.4.5 Sistemas de Codificação Corretora de Erros Disponíveis no Mercado	34
2.5 Conclusão	35
3 CÓDIGOS DE BLOCO PARA CORREÇÃO DE ERROS EM SISTEMAS RADIO	36
3.1 Introdução	36
3.2 Códigos de Bloco: Definições	37
3.2.1 Introdução	37
3.2.2 Matriz Geradora e Matriz de Paridade	38
3.2.3 Tabela de Síndromes	38
3.3 Códigos Binários	39
3.3.1 Código de Hamming Cíclico	39
3.3.2 Condição Para Utilização do Código	40

Tópico	Página no
3.3.3 Escolha de Parâmetros	40
3.3.3.1 Comprimento da Palavra Código	40
3.3.3.2 Polinómio Gerador	41
3.3.4 Matriz Verificação de Paridade	41
3.3.5 Tabela de Síndromes	42
3.4 Códigos de Nakamura (Não Binários)	42
3.4.1 Distância de Lee e Peso de Lee	43
3.4.2 Características do Código	43
3.4.3 Condição Para Transparência à Ambiguidade de Fase	44
3.4.4 Formação do Código de Nakamura	44
3.4.4.1 Propriedades de Polinómios Sobre Z_{2^m}	44
3.4.4.2 Exemplo	47
3.4.4.3 Generalização da Montagem da Matriz de Paridade	48
3.5 Códigos de Nakamura Utilizados	49
3.5.1 Código Quaternário CQ1 (120,116)	50
3.5.2 Código Quaternário CQ2 (124,119)	51
3.5.3 Código Quaternário CQ3 (120,112)	52
3.5.4 Código Octal CO1 (84,81)	53
3.5.5 Código Octal CO2 (84,81)	54
3.6 Determinação da Matriz H e Tabela de Síndromes	54
3.7 Codificadores e Decodificadores dos Códigos de Nakamura	55
3.7.1 Codificadores	55
3.7.2 Decodificadores	55
3.8 Conclusão	56
4 CODIFICAÇÃO DE CANAL PARA SISTEMA RÁDIO DIGITAL 64 QAM	57
4.1 Influência do Mapeamento na Probabilidade de Erro de Bit	57
4.1.1 Mapeamentos sem Transparência à Ambiguidade de fase	57
4.1.1.1 MCDA: Mapeamento para Conversão Análogo-Digital	58
4.1.1.2 MGRAY: Mapeamento de Gray	61
4.1.2 Mapeamento a Ser Adotado: Requisitos e Escolha	62

	Tópico	Página no
4.2	Projeto de Sistemas de Codificação Binários	63
4.2.1	Parâmetros do Sistema Binário	64
4.2.2	Mapeamentos, Métrica e Codificação Diferencial	64
4.2.2.1	MB1: Mapeamento Binário I	64
4.2.2.2	MB2: Mapeamento Binário II	66
4.2.3	Probabilidade de Erro de Bit de Sistema Binário Não Codificado	68
4.2.3.1	Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MB1	68
4.2.3.2	Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MB2	70
4.2.4	Sistema Binário Codificado- (255,247)	70
4.2.4.1	Código (255,247) em Sistema Sem Codificação Diferencial	71
4.2.4.2	Sistema SB1: Código CB (255,247) e Mapeamento MB1	72
4.2.4.3	Sistema SB2: Código CB (255,247) e Mapeamento MB2	72
4.2.5	Processamento de Informação Num Sistema com Código Binário	72
4.2.5.1	Tráfego da Informação em Condições Ideais	73
4.2.5.2	Tráfego da Informação em Meio Sujeito a Ruído	73
4.2.5.3	Sequência de Operações do Processamento de Uma Palavra	74
4.2.5.4	Dados de entrada para o Processamento	75
4.2.6	Exemplo de sequência de Operações para Processamento	75
4.2.6.1	Processamento de Uma Palavra Num Sistema com Código Binário	75
4.2.6.1	Transmissão	75
4.2.6.1	Recepção Sem Rotação de Fase	76
4.2.6.1	Recepção Com Rotação de Fase	77
4.3	Sistemas de Codificação Quaternários	79
4.3.1	Parâmetros do Código	79
4.3.2	Necessidade de Transcodificação	79
4.3.3	Mapeamentos, Métrica e Codificação Diferencial	79
4.3.3.1	MQ1: Mapeamento Quaternário I	80
4.3.3.2	MQ2: Mapeamento Quaternário II	85
4.3.3.3	MQ3: Mapeamento Quaternário III	87
4.3.1.4	MQ4: Mapeamento Quaternário IV	89
4.3.3.5	MQ5: Mapeamento Quaternário V	91

Tópico	Página no
4.3.4 Probabilidade de Erro de Bit de Sistema Quaternário Não Codificado	93
4.3.4.1 Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ1	93
4.3.4.2 Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ2	94
4.3.4.3 Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ3	94
4.3.4.4 Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ4	95
4.3.4.5 Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ5	95
4.3.5 Sistema Quaternário Codificado: Correção de Erros Simples	96
4.3.5.1 Sistema SQ1: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ1	97
4.3.5.2 Sistema SQ2: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ2	99
4.3.5.3 Sistema SQ3: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ3	100
4.3.5.4 Sistema SQ4: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ4	100
4.3.5.5 Sistema SQ5: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ5	101
4.3.5.6 Sistema SQ6: Código CQ2 (124,119) e Mapeamento MQ4	102
4.3.6 Sistema Quaternário Codificado: Correção de Erros Duplos	102
4.3.6.1 Sistema SQ7: Código CQ3 (120,112) e Mapeamento MQ3	103
4.3.6.2 Sistema SQ8: Código CQ3 (120,112) e Mapeamento MQ4	104
4.3.6.3 Sistema SQ9: Código CQ3 (120,112) e Mapeamento MQ5	105
4.4 Sistemas de Codificação Octais	105
4.4.1 Parâmetros do Código	106
4.4.2 Necessidade de Transcodificação	106
4.4.3 Mapeamentos, Métrica e Codificação Diferencial	106
4.4.3.1 MO1: Mapeamento Octal I	107
4.4.3.2 MO2: Mapeamento Octal II	111
4.4.4 Probabilidade de Erro de Bit de Sistema Octal Não Codificado	114
4.4.4.1 Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MO1	114
4.4.4.2 Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MO2	116
4.4.5 Sistema Octal Codificado: Correção de Erros Simples	117
4.4.5.1 Sistema SO1: Código CO1 (84,81) e Mapeamento MO1	118
4.4.5.2 Sistema SO2: Código CO2 (84,81) e Mapeamento MO1	119
4.4.5.3 Sistema SO3: Código CO2 (84,81) e Mapeamento MO2	120

Tópico	Página no	
4.5	Sistemas de Codificação Quaternários Mistos	121
4.5.1	Sistema de Codificação Não Homogêneo	122
4.5.2	Decisão Condicionada do Terceiro Dígito	122
4.5.3	Exemplo de Sistema Misto	123
4.5.3.1	Cálculo de Δh	123
4.5.3.2	Cálculo de Taxa de Erro de Bit de Sistema Misto	123
4.5.4	Melhoria Proporcionada Pelo Sistema Misto	125
4.6	Conclusão	126
5	SIMULAÇÕES E RESULTADOS	127
5.1	Introdução	127
5.2	Rotina de Simulação	127
5.2.1	Sequência de Operações	128
5.2.2	Particularidades de Cada Sistema	129
5.2.3	Simulações Computacionais e Resultados Esperados	130
5.3	Sistema Binário	130
5.3.1	Mesmo Código, Diferentes Mapeamentos	130
5.3.1.1	Desempenho de Sistema Sem Codificação	131
5.3.1.2	Desempenho de Sistema Com Codificação de Canal e Sem Decodificação Diferencial	132
5.3.1.3	Desempenho de Sistema Após a Decodificação Diferencial	132
5.3.2	Análise de Resultados: Sistema Binário	133
5.4	Sistema Quaternário Homogêneo	134
5.4.1	Correção de Erros Simples: Mesmo Código, Diferentes Mapeamentos	134
5.4.1.1	Desempenho de Sistema Sem Codificação	135
5.4.1.2	Desempenho de Sistema Com Codificação de Canal e Decodificação Diferencial	135
5.4.2	Correção de Erros Duplos: Mesmo código, Diferentes Mapeamentos	136
5.4.3	Sistemas Quaternários Homogêneos: Mesmo Mapeamento, Diferentes Códigos	138
5.4.4	Análise de Resultados: Sistema Quaternário	139
5.5	Sistema Octal	141
5.5.1	Sistema Octal: Mesmo Mapeamento, Diferentes Códigos	142
5.5.2	Sistema Octal: Mesmo Código, Diferentes Mapeamentos	143
5.5.2.1	Sistema Octal Sem Codificação de Canal, Com Codificação Diferencial	143
5.5.2.2	Sistema Octal Com Codificação de Canal e Codificação Diferencial	143

Tópico	Página no	
5.5.3	Análise de Resultados: Sistema Octal	144
5.6	Sistemas Quaternários Mistos	145
5.6.1	Melhoria Proporcionada pela Decisão Condicionada de Terceiro Dígito	145
5.6.2	Análise de Resultados: Sistemas Mistos	146
5.7	Comparação Geral	147
5.8	Compromisso Para Uma Implementação Física	149
5.8.1	Alternativas Para a Implementação	150
5.8.1.1	Sistema Binário: Código de Hamming Cíclico	150
5.8.1.2	Sistema Não Binário: Códigos de Nakamura	151
5.8.2	Implicações da Escolha	151
5.8.3	Alternativas de Implementação Com Códigos de Nakamura	153
5.9	Sistema 64 QAM de Codificação de Canal Implementado	154
5.9.1	Programas que Viabilizaram este Estudo	154
5.9.2	Projeto	155
5.9.3	Medidas de Laboratório	155
5.9.4	Comparação Com Sistemas Existentes	156
5.10	Conclusão	157
6	CONCLUSÃO	158
6.1	Contribuições	158
6.2	Resultados Obtidos	159
6.3	Continuação do Trabalho	160
	BIBLIOGRAFIA	161

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi motivado a partir da necessidade de implementar um código corretor de erros no rádio digital 64 QAM (Equipamento STD-140) desenvolvido no CPqD TELEBRAS.

Os sistemas digitais com maior número de níveis de modulação tornam-se muito sensíveis a distorções e não linearidades do próprio equipamento. Várias contramedidas têm sido estudadas e implementadas, reduzindo, de forma efetiva, tais efeitos.

No entanto, para modulações a partir de 64 QAM mesmo tais aprimoramentos não eliminam a saturação da curva de desempenho que se apresenta em altas relações sinal/ruído: apesar de se transmitir o sinal com maior potência, não há redução expressiva da proporção de bits errados na recepção: é o que se chama taxa de erro residual.

Para evitar este inconveniente e dar maior flexibilidade ao projeto do equipamento como um todo, foi desenvolvida a unidade RPE- Redutor de Propagação de Erros, que inclui as funções de codificação e decodificação corretora de erros, codificação e decodificação diferencial, mapeamento de transmissão e recepção, conversão de taxa para inserção e retirada de dígitos de paridade, sincronismo do código corretor de erros e estimativa de taxa de erro.

O trabalho aqui apresentado documenta o estudo realizado para escolha do esquema de codificação adotado: quais as soluções possíveis, quais os mapeamentos e códigos mais indicados, como se calcula a taxa de erro do sistema com e sem codificação de canal. O programa de simulação desenvolvido para avaliar o desempenho destes sistemas possibilita a comparação entre as possibilidades encontradas, sem necessidade de implementação.

No Capítulo 2 é feita uma apresentação do problema, com o histórico do desenvolvimento de sistemas multiníveis e as principais definições necessárias para compreensão do objetivo a ser atingido. São estabelecidos os requisitos do sistema de codificação a ser implementado. As soluções disponíveis no mercado são apresentadas, juntamente com os motivos do CPqD TELEBRAS ter optado por desenvolver uma solução própria.

No Capítulo 3 são apresentados alguns códigos que são adequados para sistema transparente à ambiguidade de fase e que têm baixa redundância. São propostos códigos binários,

quaternários e octais, juntamente com os parâmetros necessários para implementação.

O Capítulo 4 apresenta os mapeamentos possíveis, e como se pode antecipar a eficácia de cada um deles. São propostos mapeamentos binários, quaternários e octais, para utilização juntamente com os códigos respectivos. É feito o cálculo do desempenho esperado para cada sistema descrito, com e sem codificação.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos na simulação dos sistemas apresentados. A influência do mapeamento na taxa de erro obtida é observada, são confirmadas condições antecipadas para o mapeamento adequado para cada código, e é verificado que o sistema de proteção contra erros é realmente eficaz para eliminação de taxa de erro mesmo acima do limiar residual. Por fim, é apresentado o desempenho obtido no laboratório, pelo sistema implementado.

O Capítulo 6 traz as conclusões finais, mostrando as contribuições deste trabalho, as propostas de continuação do mesmo e citando os tópicos que não puderam ser documentados para não torná-lo por demais extenso.

As simulações de desempenho foram realizadas em PASCAL, no computador VAX da DIGITAL, e os gráficos em linguagem REGIS do mesmo equipamento. O projeto do código corretor de erros foi feito com P-CAD (Personal Computer Aided Design, para captura de esquemáticos), convertido para Netlist e simulado em HILO (GENRAD) no VAX (DIGITAL). Após a validação lógica, o circuito de transmissão foi implementado com chips discretos CMOS, as conversões de taxa com FIFOs e o circuito de recepção em circuito integrado dedicado, que recebeu a denominação técnica de TB-34.

O TB-34, após ter a simulação lógica validada, foi fabricado pela A.M.I., (American Microsystems, INC.) em tecnologia Gate Array 1.25 μm , sendo um circuito de 6200 gates equivalentes (25.000 transístores).

Capítulo 2

SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL

Neste capítulo é apresentado o sistema rádio e sua evolução como sistema digital multinível. A seguir são apresentadas técnicas de transmissão digital modulada em vários níveis, ressaltando-se as vantagens, e apresentando as contramedidas para superar as desvantagens. Finalmente, o sistema de codificação corretora de erros é apresentado como meio para eliminar a taxa de erro residual.

2.1 Sistema Rádio

O rádio digital é a evolução do sistema analógico de microondas em visibilidade. Trata-se de sistema de transmissão a longa distância, envolvendo em geral grande número de repetidoras, pois o sinal de uma antena deve ser captado por outra que deve ser sempre visível a partir da primeira (daí o termo visibilidade). O sistema rádio é usualmente utilizado para comunicação entre cidades.

2.1.1 Microondas em Visibilidade

A figura 2.1 mostra o enlace rádio entre a estação terrena de Morungaba para telecomunicações Via Satélite (EMBRATEL) e a Central Telefônica situada na Rua dos Ingleses (São Paulo), com as repetidoras de Beira Alta (Serra das Cabras), Japi (Jundiaí) e Tucuruvi (São Paulo).

O sistema rádio tradicional (analógico) recebe a banda básica do multiplex, contendo vários canais de voz, telegrafia, telex, dados, etc., ou a banda básica de televisão, através de cabos coaxiais [Silva]. Na estação rádio, esta banda básica é modulada em alta frequência e o sinal resultante é irradiado na direção da antena de recepção. Normalmente há estações repetidoras do sinal entre a estação transmissora e receptora. Isto é necessário para que haja visada direta entre as antenas (já que usualmente é grande a distância entre elas) e também para

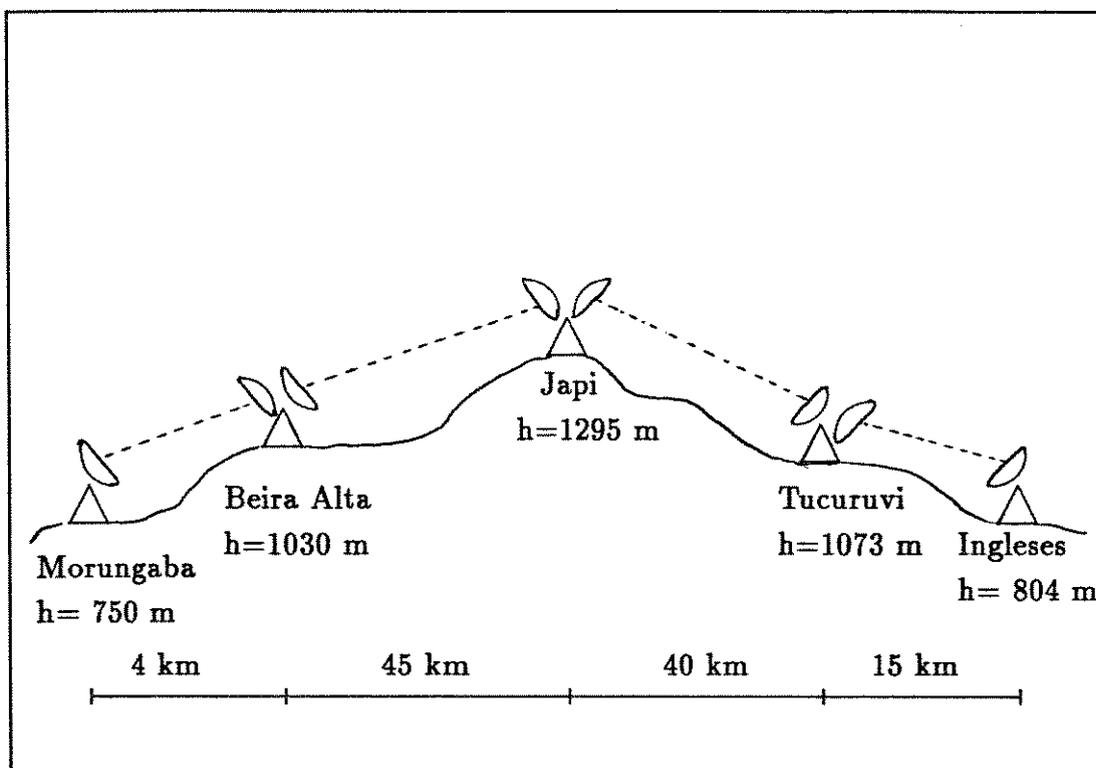


Figura 2.1: Sistema Rádio Com Estações Repetidoras

que o sinal possa ser amplificado de tempos em tempos. Daí o nome de estação regeneradora. A distância média entre as estações repetidoras é de 50 quilômetros (desde que o relevo do trecho onde é feito o enlace permita visada direta entre as antenas).

Canal de Rádio Frequência

O sistema de transmissão é bidirecional, e toda estação rádio é simultaneamente transmissora e receptora, embora alguns serviços, como televisão, não sejam transmitidos e recebidos ao mesmo tempo. Como a antena é a mesma, os canais de transmissão e recepção têm frequências de portadora diferentes. Na prática, denomina-se canal de Rádio Frequência o conjunto de canais envolvido para transmissão nos dois sentidos. Um canal de RF pode trafegar vários canais de voz (em sistemas analógicos, até 2700) ou um canal de TV.

As frequências utilizadas para os sistemas de microondas em visibilidade estão compreendidas entre as faixas de UHF e EHF, existindo aplicações operando em até 23 GHz em alguns enlaces especiais. A figura 2.2 mostra o arranjo de radiofrequências para sistemas rádio operando na faixa de 4 GHz para uso em conexões internacionais.

Configuração do Sistema Rádio

O sistema rádio é constituído de:

1. Antena- elemento irradiador básico, ligado ao sistema alimentador (guia de onda) e um refletor.

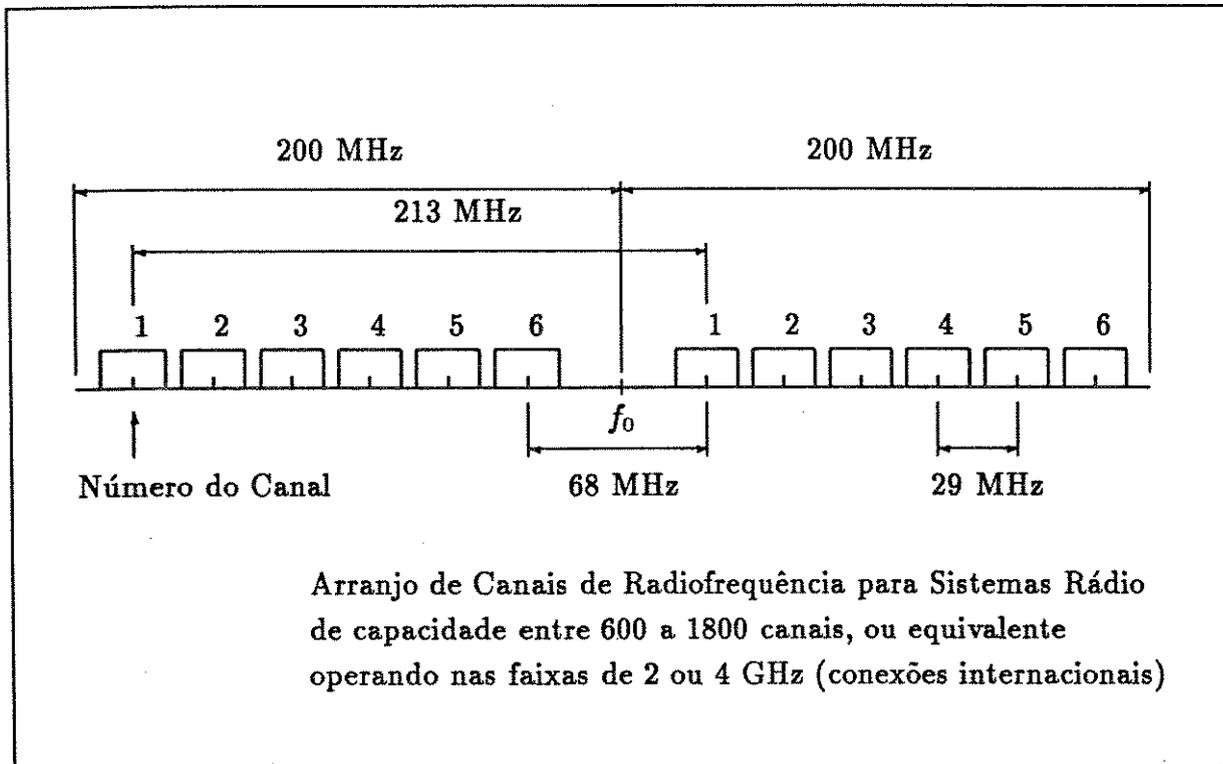


Figura 2.2: Canalização de 2 ou 4 GHz para Tráfego de Rádio [CCIR-IX]

2. Guia de Onda: dispositivo de transporte de sinais rádio entre o equipamento transmissor e a antena ou entre esta e o equipamento receptor. Trata-se de um condutor envolvendo um dielétrico, e sua seção transversal é normalmente circular, elíptica ou retangular.
3. Transmissão:
 - (a) Modulador- O sinal de banda básica modula uma portadora de frequência intermediária gerando o sinal de FI.
 - (b) Equipamento Transmissor: faz a conversão do sinal de FI para RF e amplifica o sinal resultante no amplificador de potência, enviando-o a seguir através do guia de onda até a antena para transmissão.
4. Recepção:
 - (a) Equipamento Receptor- recebe o sinal RF da antena, faz a filtragem de canal, conversão para FI, filtragem e amplificação de FI. O sinal segue para o demodulador.
 - (b) Demodulador- recupera o sinal original em banda básica.
5. Circuitos de Banda Básica (Transmissão e Recepção)- fazem a interface entre os equipamentos rádio e multiplex

A figura 2.3 mostra exemplos de sistemas rádio, onde se observa os blocos de banda básica, modulador e transmissor (transmissão) e receptor (LNA- Amplificador de Baixo Ruído), de-

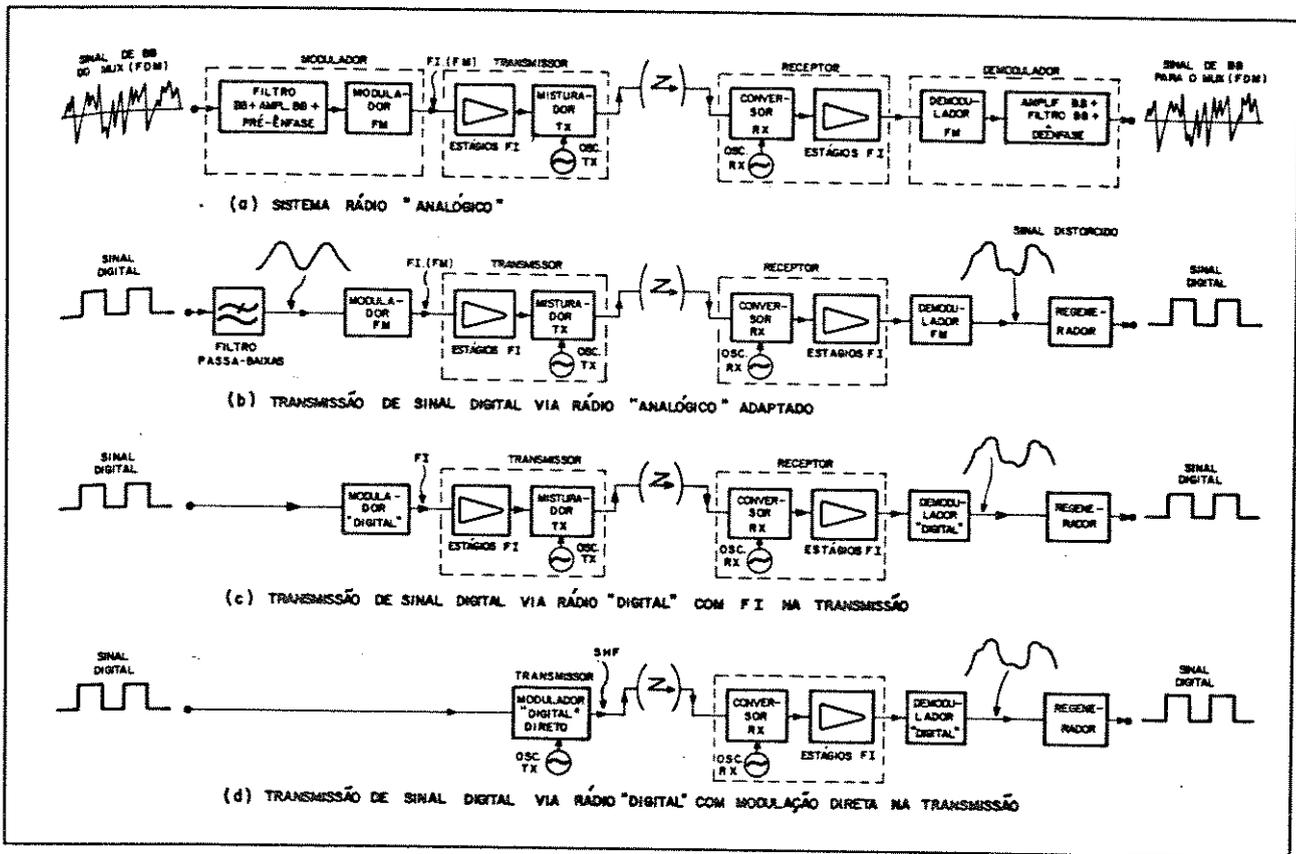


Figura 2.3: Sistema Rádio Analógico e Sistema Rádio Digital [Silva]

modulador e banda básica (recepção).

2.1.2 Evolução do Sistema Rádio

O rápido crescimento em facilidades digitais fez com que fosse necessário o desenvolvimento de sistemas de transmissão digital em microondas. Isto garantiria mais robustez ao sistema, ou seja, maior tolerância quanto a interferências em relação ao sistema convencional FDM-FM. Além disso, continua sendo um sistema viável, pois apresenta menor custo de instalação que os sistemas ópticos e tem menor retardo de transmissão que os sistemas satélite [Taylor].

Razões da Digitalização

O interesse de planejadores de rede, usuários e fabricantes por transmissão digital foi causado por diversos fatores, tais como: [Feher 1]

- Crescente necessidade de transmitir e receber informação em forma digital
- Vantagens econômicas de equipamento digital para terminais de telefonia
- Melhoria e constância da qualidade de transmissão oferecida pelos sistemas digitais, particularmente em presença de interferência: [Hartmann 1]

1. Dados digitais podem ser reconstituídos em cada estação repetidora, o que não ocorre nos sistemas analógicos, onde o ruído que atinge o sinal não pode ser retirado. Como resultado, no sistema digital as características de ruído são virtualmente independentes do seu comprimento.
 2. Sistemas digitais são muito mais tolerantes à interferência que sistemas analógicos, sendo afetados pela interferência somente quando esta for suficientemente alta para causar erros no processo de decisão um/zero.
 3. Como consequência, seu desempenho é virtualmente constante e praticamente livre de erros na maior parte do intervalo dinâmico do receptor de rádio, sendo degradado somente quando o ruído térmico ou interferência é suficientemente alto para causar erros de bit (limiar de taxa de erro de bit). A partir deste limiar, há uma degradação abrupta no desempenho. No sistema analógico convencional, a interferência é crescente em todo o intervalo dinâmico.
- Crescente utilização de comutação digital para formar redes digitais integradas: Os sistemas digitais proporcionam comunicação segura e interface direta para os sistemas de comutação digital [Hartmann 1]
 - Tendência de novos desenvolvimentos tecnológicos para possibilitar, no futuro, as vantagens econômicas de sinais representados em forma digital para transmissão e recepção: A comunicação segura é facilmente obtida com o uso de embaralhadores, em parte ou em todo o enlace. O grau de sofisticação está limitado somente pela complexidade do algoritmo de codificação e decodificação. Mesmo em sistemas onde a segurança não é um requisito, utiliza-se técnica de embaralhamento para tornar os dados aleatórios para o sistema [Hartmann 1].

Transição do Rádio Analógico Para o Digital

De fato, as vantagens do rádio digital quando comparado com o FDM-FM convencional existem em várias classes, custo e desempenho do sistema [Hartmann 1]. Mas no projeto deste equipamento deve-se dar especial atenção à utilização eficiente do espectro de frequências, compatibilidade com os sistemas analógicos já existentes na rede (quanto a parâmetros como capacidade de transmissão, alocação de frequências, espaçamento entre repetidores, facilidades da estação repetidora, etc.) [Horikawa 2], a sensibilidade para ruídos e interferências, a simplicidade de projeto prático de equipamento e sua economia como um todo [Feher 1]. Em resumo: era necessário garantir confiabilidade, bom desempenho, uso eficiente do espectro em relação às técnicas analógicas [Hartmann 1] [Taylor] e possibilidade de coexistência com os sistemas analógicos da rede [Okura] sem causar degradação de desempenho [Taylor].

A teoria de comunicação digital tornou-se, portanto, o corpo de conhecimentos e técnicas de como tratar a questão de compromisso entre os seguintes itens: [Berlekamp 2] [Viterbi]

- Minimizar o número de bits que devem ser transmitidos através do canal de comunicação de maneira a proporcionar o envio de uma mensagem impressa, de áudio, ou de imagem

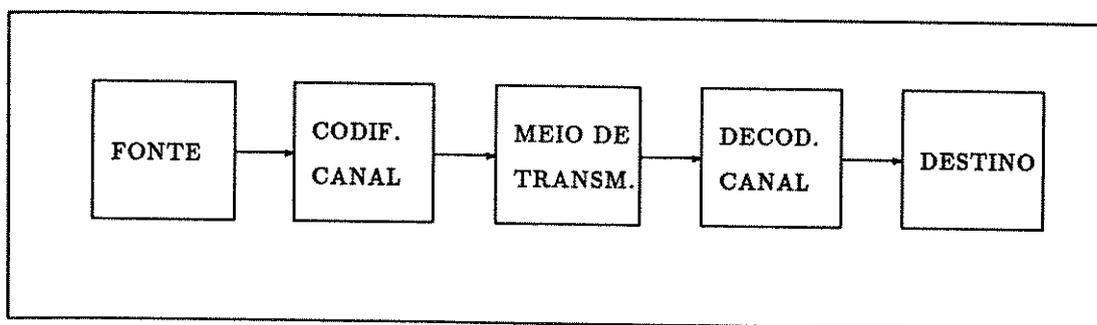


Figura 2.4: Diagrama em Blocos de Um Sistema de Transmissão Digital

obedecendo a um requisito de fidelidade (codificação de fonte). Maximizar, portanto, a faixa de transmissão.

- Garantir que os bits transmitidos através do canal sejam recebidos corretamente apesar dos efeitos de interferência de vários tipos e origens (codificação de canal): Minimizar a probabilidade de erro.
- Minimizar a potência necessária para transmissão
- Minimizar a complexidade do equipamento, e portanto seu custo

Ainda neste capítulo será mostrado porque o uso de código corretor de erros é uma maneira bastante eficaz de melhorar o desempenho de um sistema digital, introduzindo pequena alteração de hardware.

2.1.3 Transmissão Digital

Pode-se representar a informação transmitida de um sistema digital através de um canal de comunicação como uma sequência de dígitos binários, correspondentes às mensagens emitidas pela fonte (Figura 2.4). Os dígitos binários são convertidos em formas de onda que sejam compatíveis com o meio de transmissão. A modulação digital inclui o mapeamento de sequências digitais em um conjunto de formas de onda. Se o mapeador utilizar $M = 2^p$ formas de onda e mapear p dígitos por vez em M formas de onda trata-se de modulação ou sinalização multinível [Berlekamp 2].

Tipos de Modulação Digital

Há vários esquemas de modulação digital que podem ser utilizados para transmissão via rádio:

1. ASK (Amplitude Shift Keying), que pode ser considerado sinal AM (Amplitude Modulada) com índice de modulação de 100%
2. FSK (Frequency Shift Keying), onde são enviadas duas frequências, uma representando a marca e a outra o espaço do sinal *NRZ*: pode-se considerar o sistema FSK como a soma de dois ASK complementares, cada um chaveado numa frequência. Menos sujeito a interferências e ruídos que o ASK.

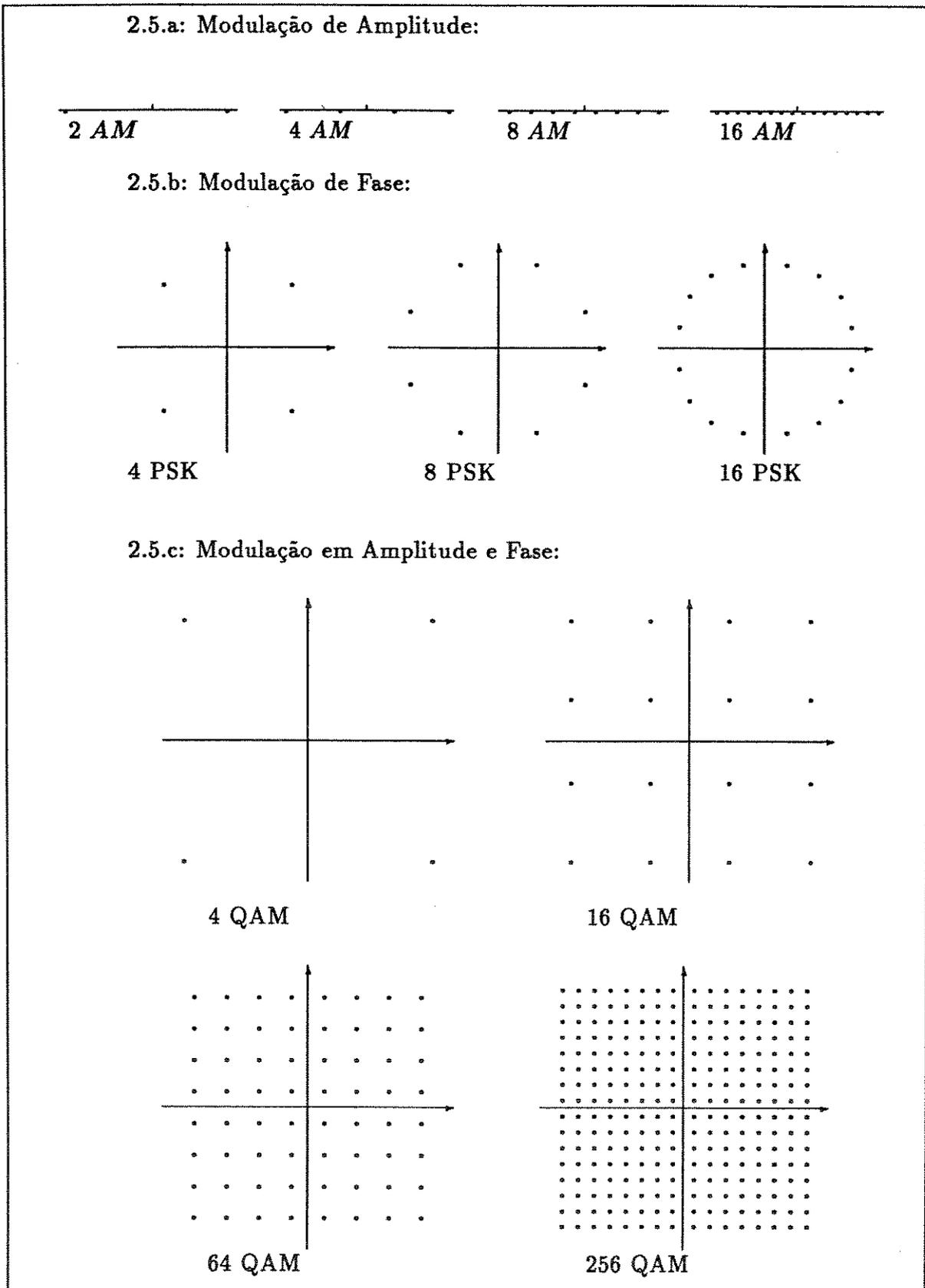


Figura 2.5: Tipos de Modulação

3. M PSK (Phase Shift Keying):

Sinais de mesma amplitude, de fase variável, para representar os símbolos de informação

4. M QAM (Quadrature Amplitude Modulation):

Estes sistemas utilizam chaveamento de fases e amplitudes e atualmente são os mais adotados na transmissão de sinais digitais. A figura 2.5 mostra alguns exemplos das constelações possíveis de serem utilizadas.

BPSK ou PSK

Supondo-se ser a banda básica um sinal NRZ com estado $+V$ e $-V$, a modulação BPSK transmite uma frequência portadora com duas fases possíveis: zero (marca: $+V$) e 180 graus (espaço: $-V$). Ocupa a mesma faixa de transmissão que o ASK (no mínimo igual à taxa de símbolos), e uma faixa menor que o FSK [Féris].

QPSK

No sistema QPSK as sequências codificadas diferencialmente irão modular os sinais modulados em fase e quadratura: Este sistema chaveia 4 fases na portadora transmitida: 45, 135, -135, -45 graus. Associa-se, a cada uma destas fases transmitidas, um par de bits (respectivamente, 00, 01, 11, 10). Esta sequência digital de entrada passa por um distribuidor de bits. Esse dispositivo faz com que os bits que entram sejam distribuídos alternadamente, produzindo duas sequências distintas cujo intervalo entre bits é $2T$, onde T é o intervalo entre bits da sequência original. O atraso da segunda sequência de um valor T fará com que haja transmissão simultânea de bits das duas sequências SI e SQ , que irão modular a mesma portadora, com fase zero e fase de 90 graus, respectivamente. Como resultado serão obtidos os sinais BPSK-I, que produz a portadora com fases chaveadas zero e 180 graus e o BPSK-Q, que o faz com fases chaveadas 90 e -90 graus. A soma das duas componentes fornece o sinal QPSK, cuja fase de portadora é uma composição vetorial dos sinais de entrada [Féris]:

Bit I	Fase do BPSK-I	Bit Q	Fase do BPSK-Q	Composição	Fase Resultante	Informação
0	0 graus	0	90 graus	$\angle 45$	45 graus	00
1	180 graus	0	90 graus	$\angle 135$	135 graus	01
1	180 graus	1	-90 graus	$\angle 225$	-135 graus	11
0	0 graus	1	-90 graus	$\angle 315$	-45 graus	10

Tabela 2.1: Composição Vetorial de Sinais QPSK

Modulação M QAM

Na modulação do tipo M QAM, M é dado por 2^p , e p é par. Na prática, têm sido implantados sistemas onde $p = 2, 4, 6$ e 8 , resultando em sistemas 4 QAM, 16 QAM, 64 QAM e 256 QAM. O sistema 4 QAM é chamado simplesmente QAM, e mais conhecida por QPSK.

Normalmente são necessários artifícios para se recuperar a frequência portadora sem ambiguidade de fase, pois embora seja possível o reconhecimento, no demodulador, do padrão de

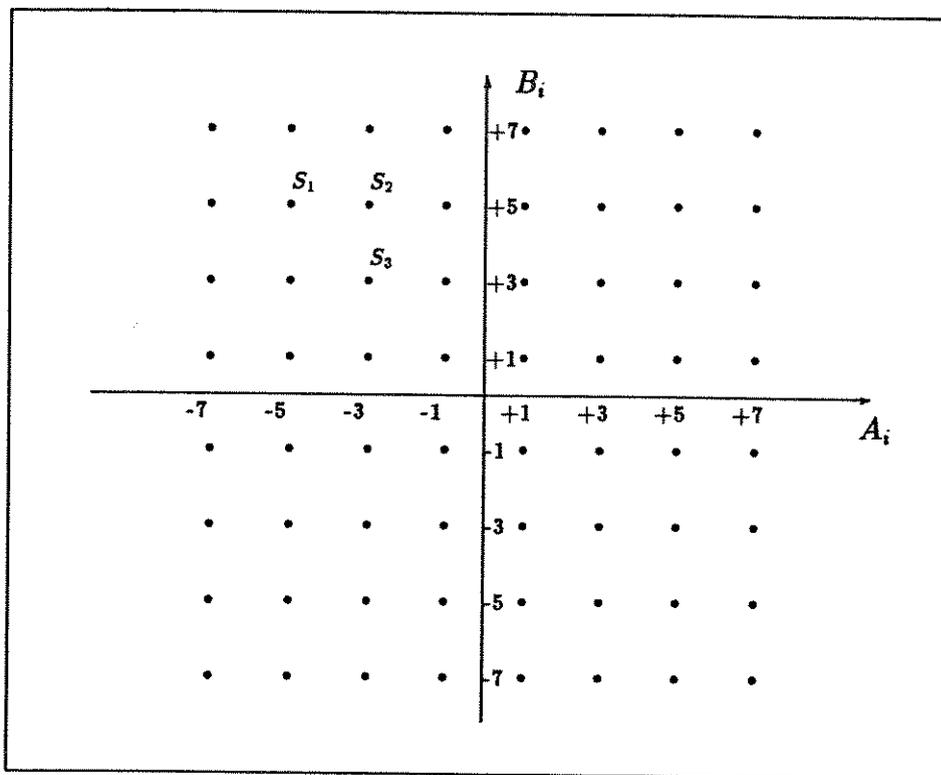


Figura 2.6: Distância entre Pontos da Constelação Genérica 64 QAM

pontos do sinal, não há possibilidade de distinguir entre as várias orientações de fase simétricas do conjunto de sinais M PSK ou M QAM. Esta ambiguidade pode ser resolvida com a codificação diferencial, que utiliza implementação simples e sem nenhuma inserção de informação redundante [Féris] [Horikawa 2].

2.2 Rádio Digital 64 QAM

O sistema M QAM produz $M = 2^p$ estados do sinal. Cada estado é relacionado com p bits. Neste trabalho será denominado símbolo a sequência dos p bits do sinal M QAM, e dígito cada um dos p componentes do símbolo. A transmissão de cada estado do sinal corresponde a uma transmissão de p bits (ou dígitos) simultâneos de informação digital. Para que se possa transmitir esta informação é necessário convertê-la para forma analógica:

2.2.1 Conversão Digital/Analógica

É representada por D/A , (realizada na transmissão) e sua etapa inversa, A/D (recepção). Para formar a constelação 64 QAM são necessários $\sqrt{64} = 8$ níveis de modulação em cada seção (figura 2.6). A figura 2.7 mostra a transformação digital/analógica realizada por um conversor de 8 níveis [Taub]. Três entradas digitais fornecem, paralelamente, a sequência 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Como estes valores representam -7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7, a saída analógica é uma rampa que se inicia no nível mínimo e vai até o nível máximo.

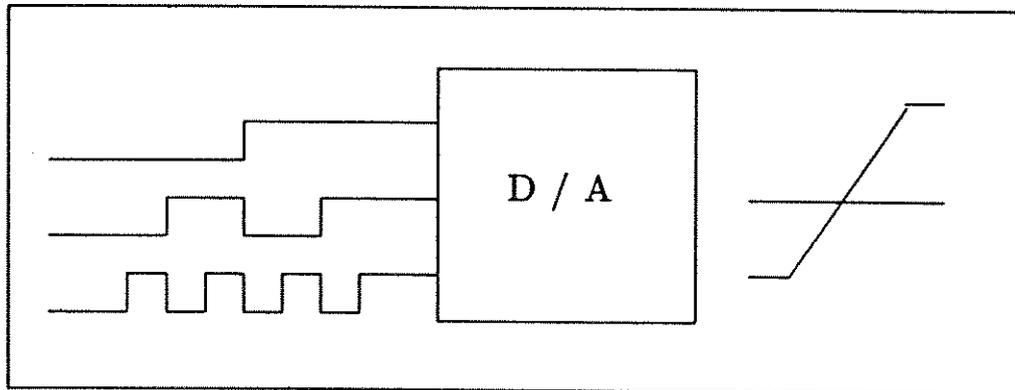


Figura 2.7: Conversor Digital Analógico de 8 níveis

000111	001111	010111	011111	\bar{Q}	100111	101111	110111	111111	
000110	001110	010110	011110		100110	101110	110110	111110	
000101	001101	010101	011101		100101	101101	110101	111101	
000100	001100	010100	011100		100100	101100	110100	111100	\bar{I}
000011	001011	010011	011011		100011	101011	110011	111011	
000010	001010	010010	011010		100010	101010	110010	111010	
000001	001001	010001	011001		100001	101001	110001	111001	
000000	001000	010000	011000		100000	101000	110000	111000	

Figura 2.8: MCDA: Mapeamento Binário da Constelação na Entrada do Conversor D/A

Conversão A/D e D/A: Mapeamento Utilizado

O arranjo de dígitos que relaciona a posição de um sinal na constelação e sua posição na mesma é chamado mapeamento. A figura 2.8 mostra o Mapeamento Binário para Conversão Digital/Analógica (MBCDA) de cada ponto da constelação na entrada do conversor digital/analógico (transmissão), ou saída do conversor analógico/digital (recepção). Tal mapeamento possibilita a conversão digital/analógica esquematizada na Figura 2.7. Por exemplo, se o sinal S_1 (figura 2.6) for transmitido, seu valor binário 001110 será convertido em sinal analógico (Figura 2.8), modulado e enviado pelo meio de transmissão para o receptor. O ruído do meio pode causar desvio na posição deste sinal, que pode ser recebido na posição de um dos seus Vizinhos Mais Próximos (010110, 001101, 000110 ou 001111) ou Vizinhos Próximos (010101, 000101, 000111 ou 010111) [França 2]. Nota-se que, neste mapeamento, o fato de um sinal ser mais próximo não significa, necessariamente que o número de erros de bits do sinal recebido será menor (neste exemplo, há casos de dois bits errados tanto para Vizinhos Próximos

como para Vizinhos Mais Próximos).

Energia Média Normalizada dos Sinais da Constelação 64 QAM

Considerando-se a constelação 64 QAM da Figura 2.6 pode-se calcular a energia média normalizada por sinal transmitido:

$$E = \frac{1}{64} \sum_{i=0}^{63} (A_i^2 + B_i^2) = 4 \times (1^2 + 1^2) + 8 \times (3^2 + 1^2) + 4 \times (3^2 + 3^2) + \dots = \frac{2668}{64} = 42$$

Como cada símbolo tem seis bits, a energia média normalizada por bit transmitido é

$$E_T = \frac{E}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

2.2.2 Processo Analítico

Após a conversão em forma analógica, é feita a composição do sinal por dois sinais modulados em amplitude, cada um com $\sqrt{2^p}$ níveis, como representado na figura 2.6. O sinal modulado pode ser expresso como [Dupuis]

$$U(t) = V \sum_k a_k X(t - kT) \cos w_0 t - b_k X(t - kT) \sin w_0 t \quad (2.1)$$

onde w_0 está relacionado com a frequência da portadora f_0 pela expressão $w_0 = \frac{1}{2\pi f_0}$, V é um fator escalar e $X(t)$ é a função pulso:

$$X(t) = 1 \text{ se } t \in [0, T], X(t) = 0, \text{ se } t \notin [0, T] \quad (2.2)$$

Neste trabalho deseja-se evidenciar o uso de codificação corretora de erros em sistemas rádio digital 64 QAM. Portanto, assume-se que a_k e b_k são duas variáveis aleatórias independentes que podem assumir oito valores possíveis $(-7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7)$ com a mesma probabilidade. Além disso, assume-se que a_k e a_1 , b_k e b_1 são independentes, para $\forall k \neq 1$. Cada valor de (a_k, b_k) está associado a um sinal da constelação que corresponde à sequência de seis bits a ser transmitida. Através dos esquemas de codificador e decodificador observa-se que a recuperação de portadora resulta em quatro ambiguidades de fase, independentemente do valor de M . Métodos como a codificação diferencial, como será visto mais adiante, eliminam essas ambiguidades de fase [Féris].

Transmissão de Sinal 64 QAM

A figura 2.9-a mostra o esquema de um modulador M QAM. As entradas I e Q , sequências de valores digitais, que no conversor D/A [Taub] assumem a forma analógica $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Nos filtros passa baixas estes sinais se tornam feixes de pulsos $\sum a_n g(t - nT)$ e $\sum b_n g(t - nT)$, onde $g(t - nT)$ é a resposta impulsiva do filtro [Noguchi 2]. O oscilador local produz uma portadora senoidal $\cos w_0 t$, onde w_0 é proporcional à frequência de FI ($w_0 = 2\pi f_0$) e a aplica aos dois

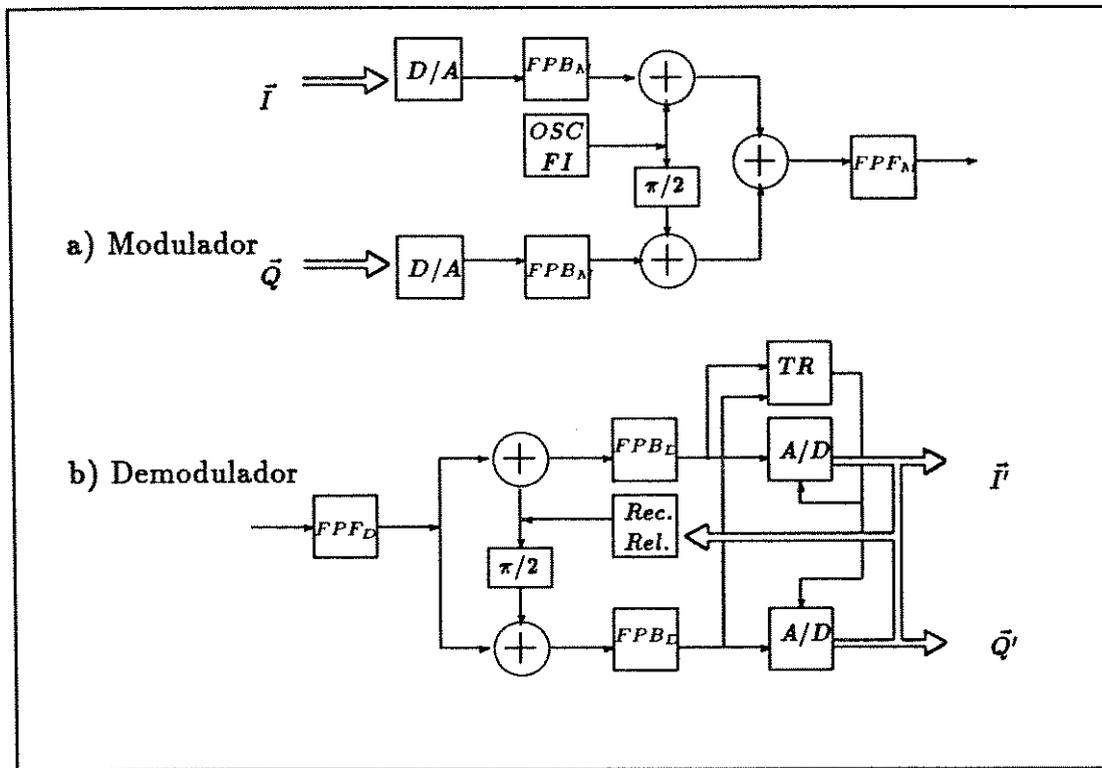


Figura 2.9: Esquemas de Modulador e Demodulador M QAM

moduladores. Um dos moduladores está em fase com a saída do oscilador local, e o outro está defasado de 90 graus (fase de quadratura). Na saída do modulador os dois sinais são somados e têm-se o sinal de FI:

$$S(t) = [\sum_n a_n h(t - nT)] \cos \omega_0 t - [\sum_n b_n h(t - nT)] \sin \omega_0 t \quad (2.3)$$

onde $h(t)$ é o pulso produzido pela filtragem combinada de FPB e FPF. Este sinal modulado deve ser transladado para outra frequência (de FI a RF) e a seguir enviado ao Amplificador de potência e para a antena de transmissão.

A taxa de bits a ser transmitida, num sistema M QAM é de

$$R_b = \frac{1}{T} \log_2 M \text{ bits/s}, \quad (2.4)$$

onde M é o número que indica qual a constelação utilizada e T é o período reservado para cada bit (inverso da frequência utilizada).

Recepção de Sinal 64 QAM

Na figura 2.9-b vê-se o esquema de recepção M QAM. O sinal analógico com frequência de portadora ω_0 é filtrado em FPF e aplicado a dois misturadores balanceados, que também têm

como entrada uma portadora local ($\cos(w_0t)$ e $-\text{sen}(w_0t)$). Como cada misturador recebe como entrada sinais idênticos, comporta-se como demodulador coerente. Os sinais de saída dos misturadores passam pelo FPB_D e são convertidas em feixes digitais no A/D , produzindo \hat{I} e \hat{Q} .

2.2.3 Relações de Probabilidade de Erro para Análise de Desempenho

A seguir são definidos parâmetros que viabilizem a comparação quantitativa do desempenho quanto à taxa de erro de bit de qualquer mapeamento. A partir desta análise será possível determinar o desempenho dos sistemas propostos no Capítulo 4, independentemente dos resultados de simulação que serão apresentados no Capítulo 5.

O Desempenho quanto a erro de um sistema QAM é dado pela equação de probabilidade de erro de sinal (qualquer um dos bits de um símbolo) de um sistema multinível, que é dada por [Proakis]

$$P_s = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \times \text{Erfc} \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2 \times (M - 1)} \times p \times \gamma_b \right)} \right), \quad (2.5)$$

onde M é definido como na equação 2.4, p é o número de bits de cada símbolo da constelação e γ_b a relação Sinal/Ruído por bit de informação transmitido (nesta expressão em valor absoluto: $10^{(dB)/10}$). Entende-se erro de sinal como a ocorrência da recepção de um ponto S_i da constelação fora da posição originalmente transmitida. Como exemplo, considerar a Figura 2.6: se o ponto S_1 transmitido for recebido em qualquer outra posição que não $(-5, +5)$, houve erro de sinal.

Neste trabalho γ_b é um valor normalizado, e pode ser escrito como

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0}, \quad (2.6)$$

onde E_b = Energia Média de um bit de informação transmitido e N_0 = Densidade Espectral de Potência de Ruído (potência média de ruído na largura de faixa de 1 Hz) [Feher 2]. O uso da relação sinal/ruído dada por E_b/N_0 permite a comparação entre o sistema teórico de largura de faixa mínima e os sistemas práticos com maior largura de faixa (superior à faixa bilateral de Nyquist).

Probabilidade de Erro de Bit de Um Sistema Rádio Digital 64 QAM

No caso de sistema 64 QAM, $M = 64$ e $p = 6$. Além disso, se a constelação adotada utilizar o código de Gray (MGRAY, figura 2.10), fazendo com que a distância entre símbolos adjacentes seja apenas de um bit, um desvio de sinal para Vizinho Mais Próximo causará apenas um erro entre os 6 bits do símbolo. Portanto, supondo-se relação sinal/ruído suficientemente alta para que os desvios de sinal ocorram somente para Vizinhos Mais Próximos, pode-se considerar que a taxa de erro de bit será seis vezes menor que a taxa de erro de símbolo. Substituindo os valores em 2.5, têm-se:

000100	001100	011100	010100	\vec{Q}	110100	111100	101100	100111	
000101	001101	011101	010101		110101	111101	101101	100110	
000111	001111	011111	010111		110111	111111	101111	100101	
000110	001110	011110	010110		110110	111110	101110	100110	\vec{I}
000010	001010	011010	010010		110010	111010	101010	100011	
000011	001011	011011	010011		110011	111011	101011	100010	
000001	001001	011001	010001		110001	111001	101001	100001	
000000	001000	011000	010000		110000	111000	101000	100000	

Figura 2.10: MGRAY: Mapeamento Binário Utilizando Código de Gray

$$P_{bit} = \frac{P_s}{6} = \frac{7}{24} \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (2.7)$$

que é a probabilidade de erro de bit do sistema 64 QAM, ou a taxa de erro mínima que pode ser obtida para o mesmo, supondo-se potência de transmissão normalizada $\frac{E_b}{N_0}$. A tabela a seguir mostra alguns valores de taxa de erro de bit (TEB) calculados para $\frac{E_b}{N_0}$ entre 13 e 21 dB:

E_b/N_0	TEB
13	5.0×10^{-3}
14	2.2×10^{-3}
15	7.6×10^{-4}
16	1.3×10^{-4}
17	4.4×10^{-5}
18	6.4×10^{-6}
19	5.5×10^{-7}
20	2.6×10^{-8}
21	5.8×10^{-10}

Tabela 2.2: TEB Para MGRAY

Relação entre E_b/N_0 e C/N

Os instrumentos de Laboratório medem C (Potência Média da Portadora) e N (Potência Média de Ruído). No entanto, tais medidas não têm significado a menos que se especifique a largura de faixa de ruído do receptor. Para que se possa comparar o desempenho teórico do modem com o desempenho prático, bem como o desempenho prático de modems fornecidos por diversos fabricantes, concluiu-se que o uso de E_b/N_0 conduz a medidas de sistema mais exatas [Feher 3]. Desta forma, neste trabalho será utilizada apenas a relação Sinal/Ruído expressa como E_b/N_0 .

$$E_b = C \times T_b = C \times \frac{1}{f_b} \quad (2.8)$$

$$N_0 = \frac{N}{B_w} \quad (2.9)$$

Portanto

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{C \times T_b}{N/B_w} = \frac{C/f_b}{N/B_w} = \frac{C \times B_w}{N \times f_b} = \frac{C}{N} \times \frac{B_w}{f_b} \quad (2.10)$$

No caso de Sistema 64 QAM tem-se

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{C}{N} \times \frac{1}{6} \longrightarrow \log_{10} \frac{C}{N} = \log_{10} \frac{E_b}{N_0} + \log_{10} 6 \simeq \log_{10} \frac{E_b}{N_0} + 7.8 \quad (2.11)$$

Modelo de Canal

Será feita análise do desempenho do sistema Rádio Digital 64 QAM em um canal sujeito a ruído do tipo AWGN, (Branco, Aditivo e Gaussiano). Este ruído tem média zero e variância σ^2 dada por [CPqD 2]

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2}, \quad (2.12)$$

onde N_0 é a densidade unilateral de potência de ruído. As curvas de probabilidade de erro serão traçadas em função da relação Sinal/Ruído γ_b por bit de informação transmitido:

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} = \frac{7}{R \times N_0} = \frac{7}{2 \times R \times \sigma^2} \quad (2.13)$$

Onde R é a taxa de codificação (número de dígitos de informação dividido pelo número total de dígitos de uma palavra). Portanto, a variância do ruído gaussiano é dada por

$$\sigma^2 = \frac{3,5}{R \times \gamma_b} \quad (2.14)$$

Métrica de Mapeamento

Para tornar possível a análise quantitativa de diferentes mapeamentos que podem ser utilizados em sistema de Modulação Digital 64 QAM é introduzido o conceito de métrica de mapeamento [SBT] [DSP], que está relacionada com a taxa de erro introduzida quando um sinal é recebido fora de sua posição original por efeito do ruído.

Supor o ponto S_1 (genérico) na Figura 2.6, da constelação 64 QAM. O ponto S_2 está localizado na menor distância possível de S_1 , e portanto é denominado Vizinho Mais Próximo

(distância=2). S_3 está localizado a uma distância=2.8, e é chamado Vizinho Próximo. Cada um dos pontos da constelação representa um símbolo de 6 bits, que num sistema 2^m ário corresponde a $J = \frac{6}{m}$ feixes de dígitos 2^m ários. Como a distância entre dois Vizinhos Mais Próximos é de 2, a distância de um ponto até o limiar de decisão é de 1. Dado que foi transmitido o sinal correspondente ao ponto S_1 tem-se as seguintes probabilidades [França 1] [CPqD 2]:

- $P_{S_1} \triangleq$ Probabilidade de decidir no receptor por S_1
 $P_{S_2} \triangleq$ Probabilidade de decidir no receptor por S_2
 $P_{S_3} \triangleq$ Probabilidade de decidir no receptor por S_3
 $P_{S_4} \triangleq$ Probabilidade de decidir no receptor por pontos não Vizinhos

A probabilidade de se decidir por um símbolo da posição S_1 dado que se transmitiu S_1 é dada pela Área sob a Curva Gaussiana da Probabilidade Normalizada do Ponto recebido estar situado dentro do limiar de decisão, em cada um dos eixos \vec{I} e \vec{Q} [CPqD 2]:

$$P_{S_1} = \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2 \times \pi} \sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \right)^2 = \left(1 - 2 \times Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right)^2 \quad (2.15)$$

que é a probabilidade de decisão, no receptor, pelo mesmo sinal transmitido (situado na distância compreendida entre 0 e +1 do ponto original).

Um ponto recebido na posição do Vizinho Mais Próximo terá uma das coordenadas \vec{I} ou \vec{Q} correta, e a outra errada. A probabilidade de se receber S_2 dado que se transmitiu S_1 é [CPqD 2]:

$$P_{S_2} = \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \right) \left(\int_{+1}^{+3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \right) = \left(1 - 2Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) \right) \left(Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3}{\sigma}\right) \right) \quad (2.16)$$

o que significa que uma das coordenadas está correta, e a outra está situada numa distância entre +1 e +3 do ponto original.

O mesmo pode ser feito para P_{S_3} e P_{S_4} [CPqD 2], considerando-se a posição recebida situada a uma distância superior a +3 do ponto original (+3 a ∞):

$$P_{S_3} = \left(\int_{+1}^{+3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \right) \left(\int_{+1}^{+3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \right) = \left(Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3}{\sigma}\right) \right)^2 \quad (2.17)$$

$$P_{S_4} = \left(\int_{+3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \right) \left(\int_{+3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \right) = \left(Q\left(\frac{3}{\sigma}\right) \right)^2 \quad (2.18)$$

$$\text{onde } Q(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \quad (2.19)$$

Devido às características da Função $Q(X)$ são válidas as seguintes aproximações na faixa de relação sinal/ruído de interesse neste estudo ($E_b/N_0 > 14$ dB):

- Probabilidade de decidir, no receptor, por um sinal Vizinho Mais Próximo do sinal transmitido:

$$P_{S2} \simeq (1 - 2 \times Q(\frac{1}{\sigma}))Q(\frac{1}{\sigma}) \quad (2.20)$$

- Probabilidade de decidir, no receptor, por um sinal Vizinho Próximo do sinal transmitido:

$$P_{S3} \simeq (Q(\frac{1}{\sigma}))^2 \quad (2.21)$$

- A decisão por um sinal não vizinho no receptor é muito menos provável que as demais possibilidades: enquanto que P_{S3} é da ordem de grandeza do quadrado de $Q(\frac{1}{\sigma})$, P_{S4} tem valor próximo ao quadrado de $Q(\frac{3}{\sigma})$. O menor valor de E_b/N_0 de interesse neste estudo é de 14 dB, para o qual a relação entre P_{S3} e P_{S4} é da ordem de 10^{12} . Valores maiores de relação sinal/ruído causaram diferenças ainda maiores entre as ordens de grandeza. Pode-se assumir, portanto, que

$$P_{S4} \simeq 0 \quad (2.22)$$

Para taxa de codificação $R = 1$, σ é definido por

$$\sigma^2 \triangleq \frac{3.5}{\gamma_b} \quad (2.23)$$

2.2.4 Determinação da Métrica de Mapeamento- Exemplo de Cálculo

Para implementar um sistema (binário, por exemplo), pode-se escolher entre alguns mapeamentos possíveis. O desempenho de cada um deles será função de suas características de distância entre símbolos e combinação entre seus diversos dígitos [CPqD 2] [França 1].

No cálculo de taxa de erro de bit da seção 2.2.3 o mapeamento utilizado previa que de um símbolo a seu Vizinho Mais Próximo, em qualquer direção, a distância é de um bit. Ver, na Figura 2.10, um exemplo de mapeamento que apresenta a menor probabilidade possível de erro de bit devido a erro de símbolo para um sistema 64 QAM:

- A probabilidade de erro de bit de qualquer um dos 36 pontos internos da constelação (que tem quatro Vizinhos Mais Próximos e cada um destes tem um bit de valor diferente do correspondente neste símbolo), de coordenadas I entre -5 e $+5$ e coordenadas Q entre -5 e $+5$ é de $1/6$, pois a distância entre qualquer um desses símbolos e qualquer um de seus quatro Vizinhos Mais Próximos é de 1 bit

$$4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \quad (2.24)$$

- A probabilidade de erro de bit de qualquer um dos quatro símbolos situados nas extremidades da constelação (que tem dois Vizinhos Mais Próximos cuja sequência de bits difere da deste símbolo por 1 bit), de coordenadas $(-7, +7)$, $(+7, +7)$, $(-7, -7)$ ou $(+7, -7)$ é dada por

$$2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \quad (2.25)$$

- A probabilidade de erro de bit de qualquer um dos vinte e quatro símbolos restantes (com três Vizinhos Mais Próximos com diferença de 1 bit) é dada por:

$$3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} \quad (2.26)$$

Calculando-se a média de probabilidade de desvio de símbolo na constelação com as equações 2.24, 2.25 e 2.26, têm-se, para a constelação com mapeamento MGRAY:

$$36 \times \frac{1}{6} + 24 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{6} = 0.14583 \quad (2.27)$$

Este mapeamento não é o mesmo utilizado para conversão Digital/Analógica da figura 2.8. Este último, embora adequado para a conversão a ser realizada, apresenta o inconveniente de ter maior probabilidade de erro de bit em caso de desvio de sinal devido a ruído. Para que se possa fazer a conversão digital/analógica e também utilizar um mapeamento que possibilite um aumento menos acentuado da taxa de erro em caso de ruído, deve-se fazer uma "Conversão de Gray" do mapeamento entre estas duas funções: para isto basta um circuito combinacional, que converta cada símbolo de uma constelação (neste caso, de 6 bits) no símbolo correspondente da segunda constelação (outros 6 bits). A esta conversão dá-se o nome de Mapeamento.

Pelo procedimento descrito a seguir é possível medir quantitativamente a melhoria obtida pelo uso do mapeamento de Gray da Figura 2.10 em relação ao da Figura 2.8 quanto à probabilidade de erro de bit devido a erro de sinal:

Para cada um dos seis bits do símbolo existem quatro possibilidades de desvio de sinal para Vizinho Mais Próximo, que podem causar mudança de dígito ou não. O número de eventos na tabela abaixo indica quantos desvios entre os $4 \times 64 = 256$ possíveis causam alteração do dígito considerado:

Característica		MGRAY- Figura 2.10		MCDA- Figura 2.8	
Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem	No de Eventos	Porcentagem
1	1	16	0.0625	16	0.0625
2	1	32	0.1250	48	0.1875
3	1	64	0.2500	112	0.4375
4	1	16	0.0625	16	0.0625
5	1	32	0.1250	48	0.1875
6	1	64	0.2500	112	0.4375
Média	1	-	$P = 0.14583$	-	$P = 0.229267$

Tabela 2.3: Comparação Entre Mapemantos MGRAY e MCDA

Na média, o valor para MGRAY é 0.14583, enquanto que para MCDA obtêm-se 0.229267, indicando que a probabilidade média de alteração de dígito (neste caso binário, dígito=bit) em caso de desvio de sinal na constelação por efeito de ruído seria aumentada de 1.57 vezes se não fosse utilizado o mapeamento MGRAY para determinação do símbolo correspondente ao sinal detectado.

Este procedimento pode ser generalizado para medir a eficiência de qualquer outro mapeamento proposto, incluindo para casos de mapeamentos não binários, como será visto no Capítulo 4.

2.2.5 O Problema das Ambiguidades de Fase

Sistemas modulados em amplitude e fase devem ter mapeamentos simétricos para permitir transmissão com potência menor ou, em outras palavras, diminuir a probabilidade de erro [Weber]. Além disso, é necessário resolver o problema das ambiguidades de fase. As rotações de fase possíveis são de 90, 180 e 270 graus, de acordo com a tabela abaixo, onde se supõe sinal transmitido de coordenadas (A_i, B_i) :

Rotação do Sinal	Sinal Recebido
0 graus	$+A_i, +B_i$
90 graus	$-A_i, +B_i$
180 graus	$-A_i, -B_i$
270 graus	$+A_i, -B_i$

Tabela 2.4: Ambiguidades de Fase

Esta ambiguidade de fase pode ser resolvida de três maneiras: [Weber]

1. Transmitir um sinal de referência junto com o sinal modulado- esta técnica foi utilizada em vários sistemas [Daido] [Fukuda 1] [Takeda] [Yamashita], mas exige envio de informação adicional (piloto de portadora).
2. Inserir, periodicamente, um sinal de aquisição ou uma sequência de sincronização no feixe de informação- cada vez que fosse detetada taxa de erros superior a certo limiar durante um tempo pré estabelecido, o sistema teria que sofrer rotação forçada de 90 graus, até não haver mais esta condição.

3. Uso de Codificação Diferencial: Esta terceira técnica tem a vantagem de, não exigindo aumento de taxa ou diminuição na velocidade de transmissão, poder transmitir a fase de referência e os dados, desde que estes últimos sejam codificados e decodificados diferencialmente da forma apropriada. Como o aumento de taxa de erro causado por este procedimento é desprezível- a Taxa de Erro de Bit (TEB) decresce logaritmicamente com o aumento da potência em decibéis- este será o método utilizado neste trabalho.

A demodulação coerente supõe que o receptor tem referência completa da portadora. Mas na prática não há conhecimento da fase inicial. Produz-se assim um erro composto de duas partes: ruído e ambiguidade de fase. O ruído é um processo randômico $\varphi_e(t)$ e a ambiguidade de fase um erro constante φ_a . [Benedetto]

O processo de obtenção da portadora introduz como ambiguidade de fase um múltiplo inteiro de $\pi/2$. Apesar desta ambiguidade de fase φ_a é possível transmitir informação pelo PSK se for feita uma codificação de diferenças de fase entre sinais sucessivos. O sinal resultante PSK é chamado codificado diferencialmente.

Supor φ_a a fase absoluta do sinal transmitido no k ésimo intervalo e $\hat{\varphi}_k = \varphi_k + \varphi_a$ a fase demodulada coerente no mesmo intervalo com ausência de ruído. O conjunto de valores de fase é usado, mais uma vez, para transmitir os sinais fonte, mas agora estes sinais estão associados a diferenças de fase em dois intervalos adjacentes, não mais com as fases absolutas. O receptor recebe esta decisão ao final do k ésimo intervalo de sinalização, com base na diferença de fase $\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}_{k-1} = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. Portanto a ambiguidade de fase pode ser removida.

Para implementar este esquema de transmissão o modulador processa primeiramente os símbolos binários digitais para obter a codificação diferencial e depois transmite as fases absolutas. Em outras palavras, a codificação diferencial é implementada a nível digital. Notar que são necessários $(k + 1)$ fases absolutas para transmitir k símbolos. A redundância de um símbolo é necessária para remover a ambiguidade de φ_a . [Benedetto]

Eliminação das Ambiguidades de Fase

A partir da variação dos símbolos nos quatro quadrantes, é determinado o algoritmo necessário para eliminar ambiguidades de fase. Os processos descritos aqui serão utilizados nos sistemas propostos no Capítulo 4. Para verificar a possibilidade de se codificar diferencialmente um mapeamento é necessário garantir que a rotação de fase em qualquer símbolo da constelação seja equivalente a uma transformação linear deste símbolo [Joindot] [Weber]. As rotações de 90 graus, por exemplo, são obtidas aplicando-se a mesma função linear para cada símbolo, e o resultado deverá ser o símbolo correspondente àquela posição no quadrante situado a 90 graus do primeiro.

Para estabelecer o processo de codificação e decodificação diferencial deve-se construir um circuito que transmita cada bit a ser codificado diferencialmente como função do seu estado atual e do seu estado anterior. Na recepção é possível recuperar o símbolo transmitido desde que se considere o bit recebido como função do bit de entrada atual e o bit de entrada anterior.

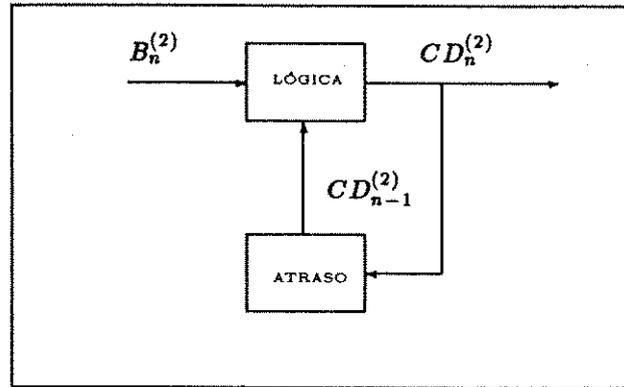


Figura 2.11: Codificador Diferencial Binário para Transmissão BPSK [Benedetto]

Supor que, no mapeamento proposto, cada sinal da constelação corresponda a um a sequência de bits, e que, para cada deslocamento de 90 graus:

1. Há variação de um bit, nesta sequência: 0, 1, 0, 1:

Na Figura 2.11, realizam-se as operações: [Benedetto]

- Codificação diferencial

$$CD_n = \overline{(CD_{n-1} \oplus B_n)} \quad (2.28)$$

onde $CD_n^{(2)}$ é o valor do bit codificado diferencialmente, CD_{n-1} o valor do bit anterior codificado diferencialmente e B_n o bit de entrada.

- Decodificação diferencial:

$$DC_n = (\overline{R_n} \oplus R_{n-1}) \quad (2.29)$$

onde DC_n é o valor do bit decodificado diferencialmente, R_n é o seu valor na entrada do decodificador diferencial e R_{n-1} o valor anterior de R_n .

2. Há variação de dois bits, nesta sequência: 00, 01, 11, 10:

- Codificação Diferencial:

Na figura 2.12, sejam $B_n^{(1)}$ e $B_n^{(2)}$ o primeiro e segundo bits a serem codificados diferencialmente, e $CD_{n-1}^{(1)}$ e $CD_{n-1}^{(2)}$ os valores da codificação diferencial obtidos anteriormente para o par de bits $B_{n-1}^{(1)}$ e $B_{n-1}^{(2)}$ que precedeu $B_n^{(1)}$ e $B_n^{(2)}$. O resultado da codificação diferencial de $B_n^{(1)}$ e $B_n^{(2)}$ é dado por: [Benedetto]

$$CD_n^{(1)} = \overline{(B_n^{(1)} \oplus B_n^{(2)})} (B_n^{(1)} \oplus CD_{n-1}^{(1)}) + (B_n^{(1)} \oplus B_n^{(2)}) (B_n^{(2)} \oplus CD_{n-1}^{(2)}) \quad (2.30)$$

$$CD_n^{(2)} = \overline{(B_n^{(1)} \oplus B_n^{(2)})} (B_n^{(2)} \oplus CD_{n-1}^{(2)}) + (B_n^{(1)} \oplus B_n^{(2)}) (B_n^{(1)} \oplus CD_{n-1}^{(1)}) \quad (2.31)$$

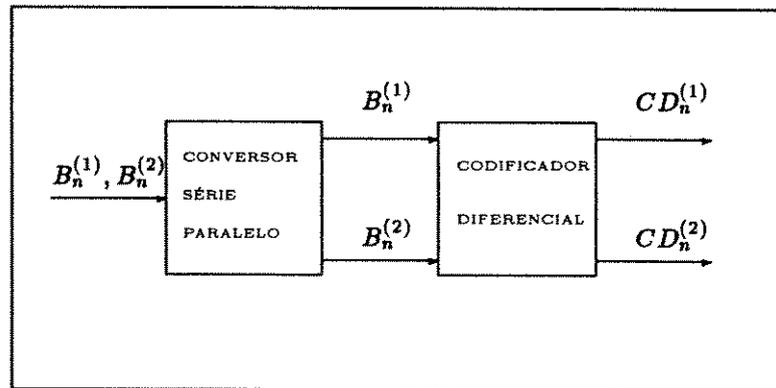


Figura 2.12: Codificador Diferencial de Transmissão QPSK [Benedetto]

- Decodificação Diferencial

Da mesma forma, sejam $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ o primeiro e segundo bits a serem decodificados diferencialmente, e $R_{n-1}^{(1)}$ e $R_{n-1}^{(2)}$ os valores recebidos anteriormente. O resultado da codificação diferencial de $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ é dado por: [Benedetto]

$$DC_n^{(1)} = \overline{(R_n^{(1)} \oplus R_n^{(2)})} (R_n^{(1)} \oplus R_{n-1}^{(1)}) + (R_n^{(1)} \oplus R_n^{(2)}) (R_n^{(2)} \oplus R_{n-1}^{(2)}) \quad (2.32)$$

$$DC_n^{(2)} = \overline{(R_n^{(1)} \oplus R_n^{(2)})} (R_n^{(2)} \oplus R_{n-1}^{(2)}) + (R_n^{(1)} \oplus R_n^{(2)}) (R_n^{(1)} \oplus R_{n-1}^{(1)}) \quad (2.33)$$

Escolha do Mapeamento Adequado

O Mapeamento MBCDA (figura 2.8), embora adequado para conversão Digital/analógica, guarda distâncias entre dígitos de símbolos Vizinhos Mais Próximos bem maiores que o ideal. Se os sinais mapeados fossem detectados e depois convertidos pelo mapeamento de Gray (figura 2.10), a taxa de erro seria melhorada (Capítulo 4). Mas em nenhum dos casos seria possível a transparência à ambiguidade de fase.

O mapeamento MB2, mostrado nas figuras 2.13 e 4.2, possibilita um sistema transparente à ambiguidade de fase e mantém a distância entre dígitos de sinais Vizinhos Mais Próximos bem inferior à apresentada por MCDA. Além disso, em MB2 existe o maior número de bits possíveis independentes da ambiguidade de fase (quatro bits se repetem nas mesmas posições de cada quadrante) e, conseqüentemente, não são submetidos à codificação diferencial. Desta forma, apenas dois dos 6 bits vão provocar aumento de taxa de erro em consequência desta operação. A codificação diferencial destes dois primeiros bits é feita como descrito na seção 2.2.5.

Como ilustração do mecanismo da codificação diferencial, considerar um sistema codificado com o mapeamento da Figura 2.13, onde se transmitiu a seguinte sequência binária: 011110, 011111, 100000, 100001. Sabendo-se que o símbolo transmitido anteriormente foi 011101, as posições $B_{n-1}^{(1)}$ e $B_{n-1}^{(2)}$ contêm os valores 0 e 1, respectivamente.

Estes símbolos binários, codificados diferencialmente como já descrito, resultam na seguinte sequência: 101110, 001111, 100000, 110001. A seguir, estes símbolos são mapeados na constela-

001100	001110	000110	000100	\bar{Q}	101000	101001	101101	101100	
001101	001111	000111	000101		101010	101011	101111	101110	
001001	001011	000011	000001		100010	100011	100111	100110	
001000	001010	000010	000000		100000	100001	100101	100100	\bar{I}
010100	010101	010001	010000		110000	110010	111010	111000	
010110	010111	010011	010010		110001	110011	111011	111001	
011110	011111	011011	011010		110101	110111	111111	111101	
011100	011101	011001	011000		110100	110110	111110	111100	

Figura 2.13: Mapeamento Binário Transparente à Ambiguidade de Fase (MB2)

ção e transmitidos. Suas posições na constelação são as seguintes, nesta ordem: (+7, +5), (-5, +5), (+1, +1), (+1, -3).

Caso a fase de referência no receptor seja a mesma do transmissor, as posições de símbolo recuperadas serão exatamente as mesmas, e na decodificação diferencial será obtida a mesma sequência (aqui não se considera o primeiro símbolo recebido, pois não foi suposta condição de se conhecer os valores das memórias $BR_{n-1}^{(1)}$ e $BR_{n-1}^{(2)}$). Caso haja rotação de fase, as posições identificadas na constelação serão outras, e a sequência de símbolos será diferente até que seja feita a decodificação diferencial: A informação original será recuperada, desprezando-se o primeiro símbolo recebido:

Fase	Posição	Símbolo Recebido	Decodificação Diferencial
90°	..., (-5, -5), (-1, +1), (+3, +1)	..., 011111, 000000, 100001	..., 011111, 100000, 100001
180°	..., (+5, -5), (-1, -1), (-1, +3)	..., 111111, 010000, 000001	..., 011111, 100000, 100001
270°	..., (+5, +5), (+1, -1), (-3, -1)	..., 101111, 110000, 010001	..., 011111, 100000, 100001

2.3 Evolução dos Sistemas Rádio Digital

Na busca de maior eficiência de espectro (que significa transmitir maior quantidade de informação por faixa, foram sendo criados os sistemas 4 PSK, 8 PSK e os QAM, cada vez com maior número de níveis (16, 64, 256 QAM) [Noguchi 1] e [Noguchi 2]. Modulações multinível como 16 ou 64 QAM possibilitam aumento de duas ou três vezes do aproveitamento do espectro em relação ao QPSK convencional [Féris], sendo uma opção economicamente atrativa para a rápida expansão das redes digitais [Yamashita].

2.3.1 Características de Sistema Multinível

Um sistema rádio digital, na prática, sofre influências de origens diversas que se tornam geradoras de erros no sistema. Tais causas podem ser de origem externa ao equipamento rádio e outras devido a imperfeições no próprio equipamento [Compston].

Desvanecimento

Na maior parte do tempo, um canal de microondas em radiovisibilidade trafega num meio de transmissão não dispersivo e altamente confiável para transmissão de alta velocidade. No entanto, sendo um meio físico natural, existem condições de propagação anômalas durante certa fração do tempo, o que pode causar severa degradação no desempenho. Tais condições se manifestam por efeitos denominados desvanecimento de multipercurso (um dos efeitos da propagação sobre o sinal de rádio recebido). O desvanecimento quase sempre consiste da combinação de componentes planos e sujeitos a frequência [Compston] [Taylor]:

1. Plano (atenuação típica que ocorre durante fortes tempestades, em particular nas altas frequências de microondas). Os componentes planos são funções do tempo, e independem da atenuação do canal para a frequência, e, portanto, do sinal. Esta atenuação pode ser compreendida como uma média do ganho de potência do meio, para uma faixa larga de frequências. É chamada depressão média e é usualmente compensada em um intervalo amplo pelo AGC (Automatic Gain Control) do receptor. Quanto melhor for o projeto e alinhamento do rádio, maior será a margem de desvanecimento (limite máximo de atenuação do sinal recebido em relação ao seu nível nominal, para uma determinada taxa de erro de bits).
2. O desvanecimento dependente da frequência ocorre quando a antena recebe o sinal direto e refletido ou refratado, que causa diferentes respostas de potência segundo a frequência do sinal em questão. O desvanecimento de multipercurso é originado pelo fato de que o sinal se propaga através de vários caminhos, cada um com comprimento elétrico diferente. No receptor, estas diferenças vão causar interferências no sinal resultante (que pode ser construtiva ou destrutiva), o que resulta nos efeitos dependentes da frequência já descritos (desvanecimento seletivo).

Limitações do Equipamento

Imperfeições do Equipamento rádio, geralmente associadas a seus blocos, também podem ser causa de degradação de desempenho [Compston] [Tan]:

1. Interferência de canal adjacente
2. Ocupação do espectro de frequências e limitação de largura de faixa
3. Desalinhamento das características de transmissão (retardo de grupo, resposta de amplitude, perda de retorno), acusando interferência inter-simbólica.
4. Não linearidade do amplificador de potência.
5. Ruído de fase da portadora recuperada, do relógio e dos osciladores.
6. Ruído térmico
7. Desalinhamento no modulador e demodulador

Todos estes fatores causam a redução da margem de tolerância do rádio frente a desvanecimento e interferências, que se traduz no que é denominado, na prática, redução do diagrama de olho. Ao contrário dos problemas de propagação, os mecanismos ora descritos causam a degradação do sistema a longo prazo e são responsáveis pela taxa de erro residual do rádio, que se verifica mesmo sob condições de alta relação sinal/ruído [Compston].

Desempenho dos Sistemas

Pode-se quantificar todas estas degradações em termos da perda da margem de implementação, com respeito à relação sinal/ruído, resultante da redução na abertura do diagrama de olho, o que faz com que a característica de taxa de erro de bit (TEB) versus a relação sinal/ruído se desvie da curva teórica.

Segundo recomendações do CCIR [CCIR-V], um tronco de 2500 km deve ter uma taxa de erro residual de 5×10^{-9} . Isto irá requerer (em caso de vários rádios colocados em cascata) que cada trecho tenha especificações entre 10^{-10} e 10^{-11} [Taylor].

2.3.2 Problemas e Soluções para Sistemas Multinível

Os efeitos indesejáveis que resultam dos sistemas de modulação com maior número de níveis são suscetibilidade às imperfeições do equipamento (distorção não linear ou linear e erros de sincronização) e do canal (anormalidades de propagação como desvanecimento de multipercurso). À medida em que ocorria a evolução dos sistemas, foi necessário atingir os seguintes objetivos para obter eficiência espectral e bom desempenho quanto à taxa de erro (TEB):

1. Amplificador de potência com alta eficiência e boa linearidade, para limitar a distorção não linear;
2. Adoção de contramedidas poderosas para desvanecimento de multipercurso, para reduzir a suscetibilidade à distorção da resposta em frequência devido às imperfeições do circuito e do desvanecimento
3. Obter modem multinível de alto desempenho e operação estável, especialmente no circuito recuperador de portadora (complexidade de hardware)

As tecnologias utilizadas para resolver estes problemas são: [Noguchi 1]

Amplificadores de Potência Adequados

Desenvolvimento de amplificadores de potência que apresentem boa linearidade, (pois do contrário haveria espalhamento do espectro devido a problemas de intermodulação) e que minimizem a interferência em canais adjacentes. Isto foi conseguido com transmissores a GaAs FET [Yoshida 1] [Yoshida 2] [Okura]. Pode-se utilizar também um circuito pré-distorcedor, que reduz produtos de intermodulação.

É importante o compromisso entre o back-off (valor, em dB, da diferença entre o nível de potência de saída do transmissor no ponto de 1 dB de compressão e o nível de potência no ponto

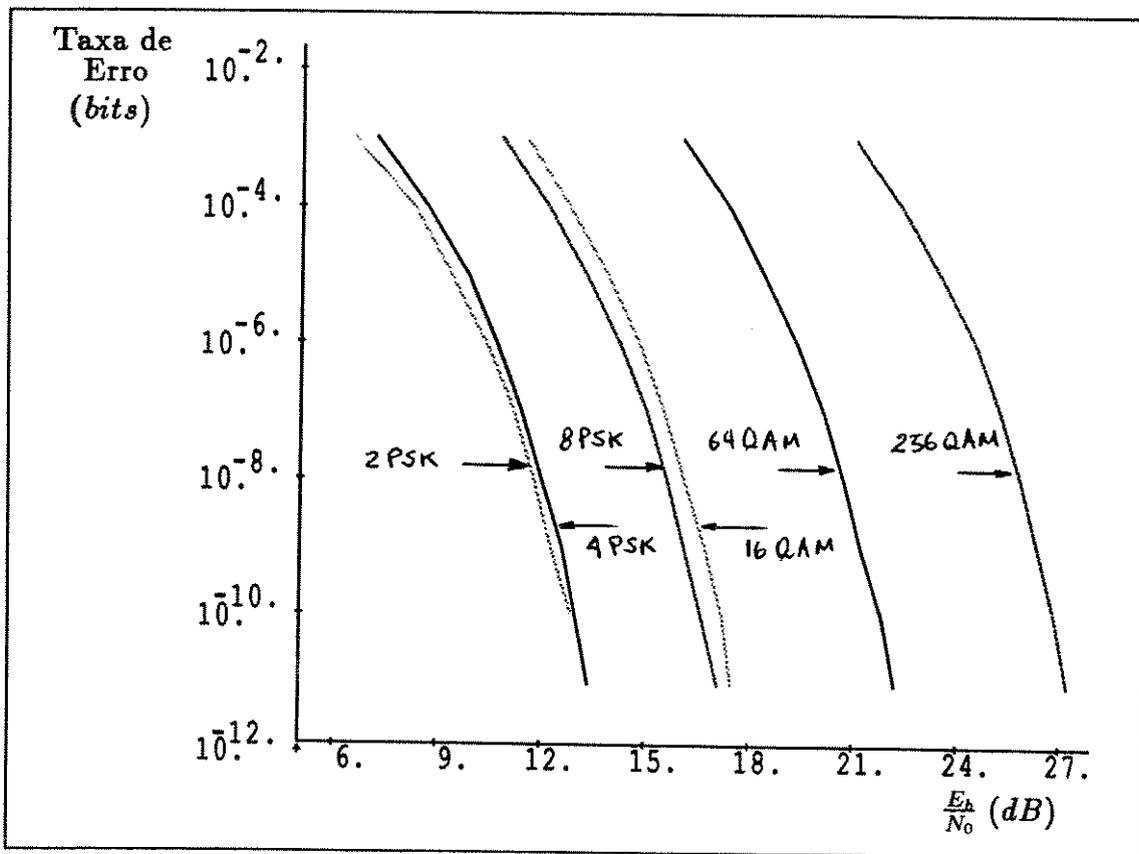


Figura 2.14: Comparação entre sistemas com modulação em vários níveis

efetivo de operação) [NEC] [Dupuis] [Prática] e o desempenho TEB, para obter ganho ótimo para o sistema [Yoshida 2] (Ponto de 1 dB de compressão é onde a diferença entre a potência média de saída e a potência teórica supondo operação linear é de 1 dB, em um amplificador de potência [Prática]).

A redução da interferência em canais adjacentes também pode ser conseguida com um dispositivo de controle de nível de transmissão, que reduz a potência de saída fora de condições de desvanecimento [Dupuis] [Noguchi 1] ou com uso de filtro de onda acústica de superfície (SAW), com aumento de proteção do canal adjacente de mesma polarização [Okura]. Tais filtros formatam o espectro de FI minimizam custo, produção e ajuste necessários, e facilitam o reuso de frequências.

Contramedidas Para Distorção Não Linear e Desvanecimento Seletivo

O sistema multinível exige maior relação sinal/ruído que um sistema mais simples, para obter a mesma taxa de erro (Figura 2.14)[Yoshida 2], sendo mais sensíveis à distorção não linear e interferência inter-simbólica residual. Dentre as fontes de degradação, podem ser citados: sistema modulador-demodulador, interferência inter-simbólica residual e interferências de amplitude devido a distorção de amplitude e retardo, codificação diferencial [Horikawa 1], interferência co-canal por outros sistemas e interferência de polarização cruzada [Taylor]. São

utilizadas, basicamente, duas técnicas:

1. Uso de equalizadores transversais

Durante os últimos anos, uma das maiores conquistas do projeto de rádio digital foi o desenvolvimento de técnicas de equalização transversal e adaptativa sofisticadas cujo uso combinado é bastante eficaz no combate dos maus efeitos do desvanecimento de multipercurso [Bates 1] [Bellini] [Biglieri] [Hartmann 1] [Hartmann 2] [Murase] [Noguchi 1] [Okura] [Noguchi 2] [Saito 1] [Saito 2] [Takeda] [Takenaka] [Taylor] [Yamamoto] [Yamashita] [Yoshida 2].

2. Diversidade de espaço:

O mesmo sinal é recebido por duas antenas. Os dois sinais resultantes (que sofreram diferentes atrasos) têm suas componentes combinadas de forma que as interferências sejam somadas negativamente. Esta técnica, quando utilizada juntamente com a equalizadores adaptativos transversais, é uma ferramenta poderosa para combater desvanecimento de multipercurso e distorções [Giuffrida] [Komaki] [Murase] [Noguchi 1] [Okura] [Saito 1] [Takenaka]

Diversidade de Frequência Com Chaveamento Sem Perda de Bits

Este procedimento [Bates 3] [Hartmann 1] [Noguchi 1]- permite uso de canal adicional para comutação em caso de comunicação prejudicada na frequência de operação utilizada.

Reuso de Frequências

Esta técnica permite que se possa duplicar a eficiência de utilização do espectro, pois cada canal de RF pode transmitir dois sinais com polarizações distintas) [Okura] [Taylor].

Eliminação da Taxa de Erro Residual

Esta característica é obtida quando se tem abertura de olho adequada [Bates 1] [Noguchi 2]. No entanto, mesmo com as técnicas já enumeradas, em sistemas com maior número de níveis não se conseguia desempenho satisfatório:

1. À medida em que aumentava o número de níveis de transmissão, os sistemas de modulação tornavam-se mais sensíveis exigindo contramedidas ainda mais eficientes.
2. Com o aumento de níveis de modulação, mesmo fontes de interferência antes desprezíveis tiveram que ser consideradas: enlaces de descida de satélite em faixas compartilhadas, ecos de guias de onda, etc. Além disso a discriminação de polarização cruzada da antena deve ser muito eficiente de forma a controlar a interferência de canal adjacente e permitir a operação eficaz de sistemas a duas polarizações [Taylor].
3. Foram realizados testes de campo de sistemas 16 QAM em condições de pior caso (rota oceânica, de muita reflexão) e foi observado que ainda que se utilizassem técnicas contra

desvanecimento de multipercurso (diversidade de espaço equalizadores transversais) foi observada séria degradação devido a desvanecimento. Apesar das contramedidas utilizadas combaterem, efetivamente este efeito, concluiu-se que o sistema 16 QAM a 200 MBPS está no limite das possibilidades [Murase]: dependendo da frequência de operação, tornava-se difícil que o sistema obedecesse as condições de ruído residuais recomendadas pelo CCIR [CCIR-V]

4. Várias pesquisas puderam resolver o problema de distorsão de forma de onda induzida pelo multipercurso, mas ainda são insuficientes contra ruído térmico e várias interferências. O aumento da margem de ruído é importante para a construção de enlaces de rádio altamente confiáveis [Saito 2]

Para solucionar este problema, foram utilizados códigos corretores de erro, onde a redundância introduzida no transmissor permite reduzir a taxa de erro no receptor. No entanto, devido a limitações da largura de faixa, sistemas rádio digital de alta capacidade podem utilizar apenas pequena redundância para correção de erros (tipicamente 5% [Bates 2]). Isto limita a melhora que pode ser obtida no desempenho possível em altas taxas de erro (10^{-3}) mas permite grande ganho de codificação para taxas de erro residuais, eliminando-as completamente. [Bates 1] [Bates 3] [Bellini] [Noguchi 1] [Takeda] [Yamashita]. Concluiu-se, ainda, que no projeto de sistemas 64 QAM ou com maior número de níveis tal procedimento é obrigatório [Ito] [Noguchi 2] [Okura].

Portanto, atualmente os sistemas rádio digitais podem proporcionar maior confiabilidade através de equalização sofisticada, estratégias de diversidade, modulações mais robustas e utilização de técnicas de FEC. Esta última técnica permite, inclusive, que o hardware do sistema rádio possa ser simplificado [Noguchi 2]. À medida em que implementações VLSI de decodificadores para correção de erros se tornam disponíveis nas taxas de sinalização necessárias, o uso de FEC nos sistemas deve aumentar. A confiabilidade do equipamento também aumentou devido à utilização crescente de circuitos integrados monolíticos para microondas VLSI e outras técnicas de microondas, como ressoadores dielétricos e amplificadores a estado sólido [Taylor].

2.4 O Sistema de Codificação

Nesta seção é descrito como o código corretor de erros pode ser utilizado em sistemas de transmissão digital (codificação de canal). As condições de contorno para escolha do sistema vão determinar as outras características, tais como taxa de codificação, codificação diferencial e configuração do sistema.

2.4.1 Codificação para Correção de Erros

Em sistemas clássicos, as funções de modulação e codificação para correção de erros são funções distintas e separadas. Moduladores e demoduladores convertem canais com forma de onda

analógica em um canal discreto enquanto que codificadores e decodificadores corrigem erros que ocorrem nesse canal discreto.

Em sistemas convencionais de modulação multinível (amplitude e/ou fase), em cada intervalo de modulação, o modulador mapeia p símbolos binários (bits) em um dos $M = 2^p$ símbolos possíveis de terem sido transmitidos, e o demodulador recupera os p bits escolhendo o símbolo mais próximo do sinal recebido na constelação adotada.

2.4.2 Determinação de Requisitos do Sistema

Como definido anteriormente, a codificação diferencial é necessária na implementação deste sistema. Portanto, o mapeamento de constelação que será utilizado deve ser transparente à ambiguidade de fase, para que não importando a fase de referência adotada, após a decodificação diferencial a informação obtida seja correta. No Capítulo 4 são apresentados vários mapeamentos que atendem esta condição, com o cálculo do desempenho esperado de cada um como função de sua métrica.

Sistemas com modulação em amplitude e fase, que utilizem codificação diferencial (DPSK) são bastante utilizados para comunicação digital via satélite, comunicação de dados em sistemas de canais telefônicos, rádio digital, etc. [Nakamura]. Existem, nestes sistemas, duas possibilidades de configuração:

1. A correção de erros é feita após a decodificação diferencial. Neste caso o sistema requer um código com alta capacidade de correção (alta redundância e baixa eficiência de taxa K/N), uma vez que deverão ser corrigidos erros duplicados pela decodificação diferencial. Porém o código não necessita ser transparente à ambiguidade de fase, uma vez que a correção só será executada quando estiver decidida a fase do sinal (Figura 2.15-a).
2. A correção é feita antes da decodificação diferencial, o que permite o uso de um código com maior eficiência de taxa (os erros não são duplicados, o código pode ter menor redundância, figura 2.15-b). Porém o código utilizado deve ser transparente à ambiguidade de fase: a correção deve permitir a recuperação correta do sinal mesmo que a palavra ainda seja submetida à decodificação diferencial. A transparência à ambiguidade de fase deve ser possível para 90, 180 e 270 graus, ou seja, deve possibilitar decodificação correta ainda que a referência inicial do transmissor e receptor seja em quadrantes distintos da constelação. Do contrário seria necessária a utilização de uma das técnicas mencionadas anteriormente. (ítems 1 ou 2). As ambiguidades de fase são eliminadas posteriormente no decodificador diferencial.

2.4.3 Condições de Contorno

Este estudo teve como objetivo definir um sistema de proteção contra erros de canal de equipamento Rádio Digital 64 QAM. Para tais sistemas, a expansão de faixa permitida é pequena (máxima de 4%, devido à limitações espectrais), o que condiciona a utilização de codificação

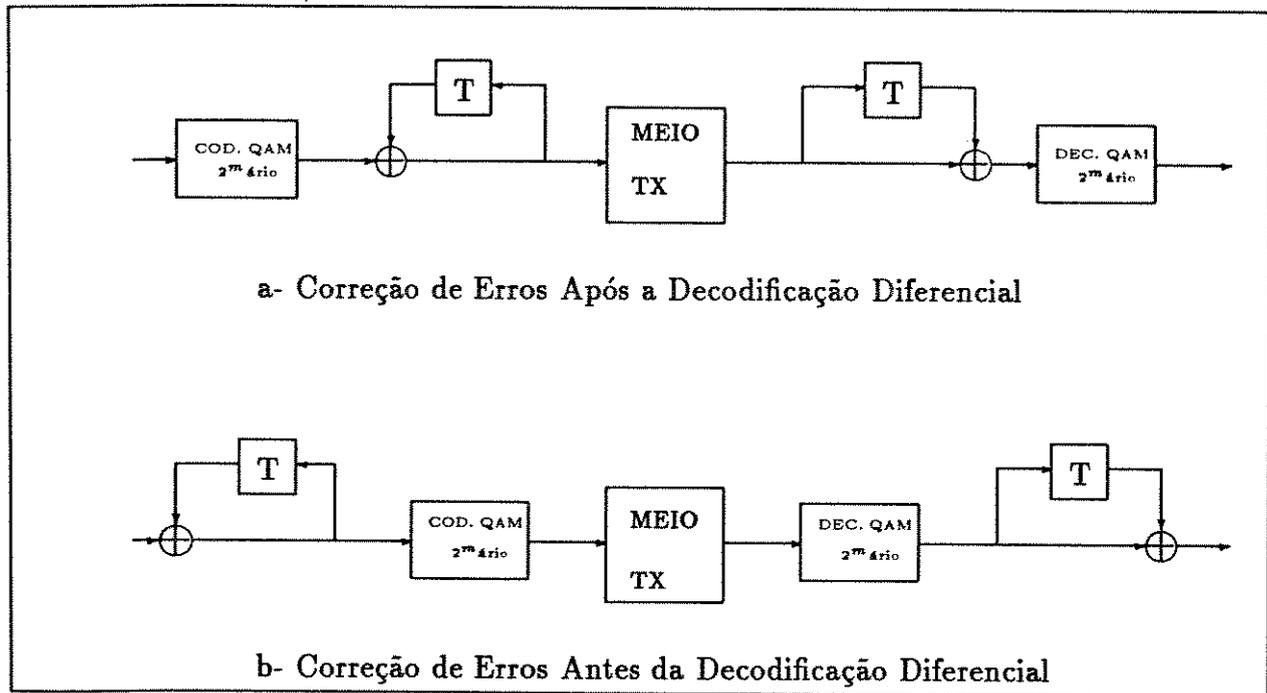


Figura 2.15: Configurações Possíveis de Um Sistema de Codificação

diferencial antes da codificação de canal. Devido a isto, o código utilizado deverá apresentar transparência à ambiguidade de fase de 90, 180 ou 270 graus [CPqD 2] [França 1].

O sistema de codificação considerado, que utiliza a constelação 64 QAM, é descrito em diagrama blocos apresentado na Figura 2.16. A entrada da unidade codificadora consiste de um feixe binário $\{a_n\}$ à taxa de $R \text{ bits/s}$ [DSP] [SBT].

Seja J o número de pares codificador diferencial-codificador de canal, de modo que o par i recebe na entrada T_i dígitos 2^m ários $\{b_n^{(i)}\}$ por segundo e gera na saída N dígitos 2^m ários de informação para cada K_i dígitos de entrada (N é o comprimento da palavra codificada e K_i é o número de dígitos de informação na mesma). Considerando que o intervalo de sinalização na saída de cada codificador de canal é constante e definindo a taxa de saída do sistema como R_s dígitos $(2^m)^J$ ários por segundo, a taxa de dígitos 2^m ários $\{c_n^i\}$ na saída do codificador i é

$$\frac{T_i \times N}{K_i} = R_s, \forall i \in [1..J]. \quad (2.34)$$

Onde $J = 6/m$ é o número de pares codificador diferencial-codificador de canal do sistema, observando-se que por se tratar de constelação de 64 sinais, cada um destes deve estar associado a uma 6 – *upla* binária (ou dígito $(2^m)^J$ ário). Por outro lado,

$$R = \sum_{i=1}^J T_i \times m = \frac{R_s \times m}{N} \sum_{i=1}^J K_i \quad (2.35)$$

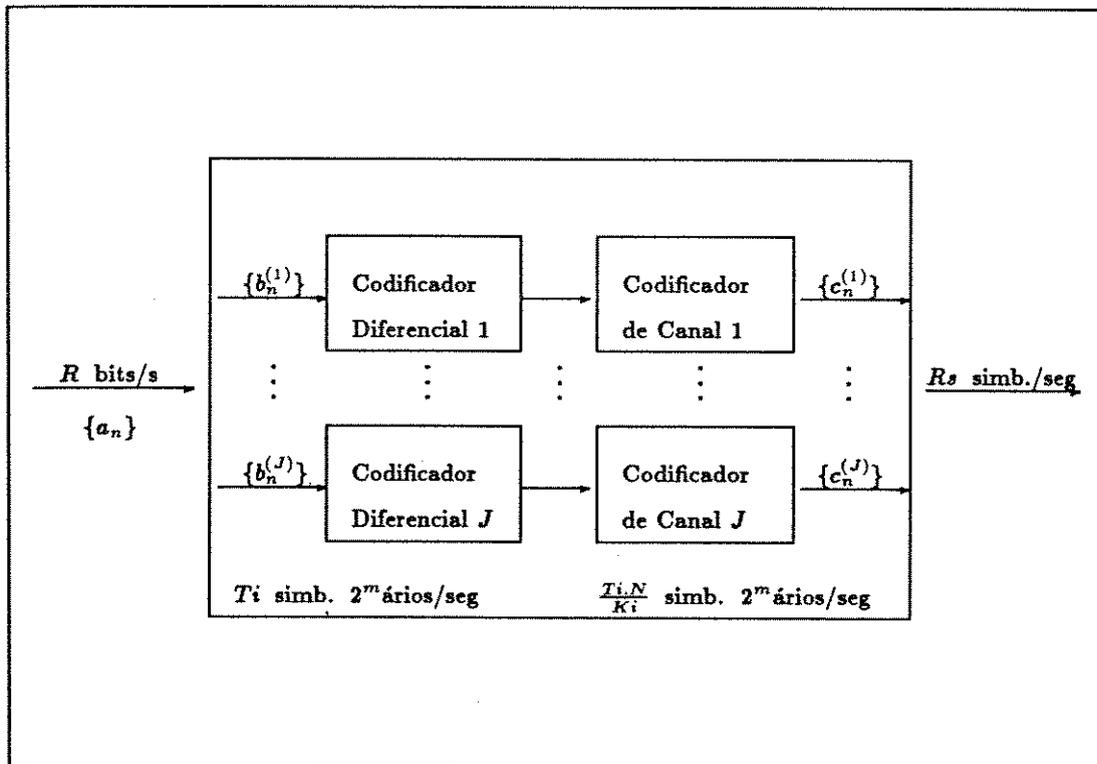


Figura 2.16: Sistema de Codificação com J Feixes de Dígitos 2^m -ários- Transmissão

E a expansão de faixa em relação ao sistema 64 QAM não codificado é

$$\frac{R_s}{R/6} = \frac{6 \times N}{m \times \sum_{i=1}^J K_i} = \frac{N}{1/J \sum_{i=1}^J K_i} \quad (2.36)$$

No receptor, a entrada é a sequência de conjunto de símbolos $\{c_n^1, c_n^2, \dots, c_n^J\}$, decididos abruptamente a partir dos sinais recebidos (que sofreram portanto interferência de ruído aqui modelado como gaussiano, aditivo e branco), e sujeitos à rotação de fase de ± 90 ou 180 graus. Feita a decodificação, são corrigidos erros limitados a um dígito por palavra (no caso binário, um bit). São retirados os dígitos de paridade de cada uma das J palavras que, transmitidas em paralelo, constituem a informação. Em cada uma delas é feita ainda a decodificação diferencial, eliminando-se assim as ambiguidades de fase.

2.4.4 Desempenho Esperado Para o Código Corretor de Erros

Vários centros de desenvolvimento têm pesquisado e implementado sistemas rádio digital com codificação de canal. Para códigos de baixa redundância e mesma eficiência de taxa, os resultados esperados são equivalentes:

1. Geralmente, em sistemas multinível, a probabilidade de erros de símbolo entre símbolos adjacentes é muito superior à existente entre símbolos distantes. Portanto, é razoável que

se escolha um Código Corretor de Erros (FEC) que corrija, principalmente, erros devido a desvios de símbolos para Vizinhos Mais Próximos. Os códigos de K. Nakamura permitem correção proporcional ao valor quadrático da taxa de erro sem o código [Y. Nakamura].

2. Com o uso de FEC a taxa de erro medida no sistema fica aproximadamente igual à curva do sistema ideal (que utiliza mapeamento MGRAY) sem FEC, havendo apenas uma pequena diferença devido à não linearidade do amplificador de potência [Fukuda 1].
3. Desempenho do FEC: apesar da correção de erros causada por ruído gaussiano ou distorção não linear ser compatível com os valores esperados, o FEC não é eficaz contra erros devidos a não linearidades. É bem provável que a distorção não linear cause mais de um erro no bloco de codificação [Fukuda 1]
4. O FEC é utilizado para permitir transmissão praticamente sem erro em condições normais de propagação, não servindo para corrigir erros em condições anômalas de propagação. Uma de suas vantagens é permitir a redução da potência de transmissão. Isto reduz a interferência para outros sistemas operando em canais adjacentes.

2.4.5 Sistemas de Codificação Corretora de Erros Disponíveis no Mercado

Na especificação do Rádio Digital 64 QAM teria sido mais simples a utilização de um sistema de codificação corretora que estivesse disponível comercialmente. O sistema a ser utilizado deveria utilizar, no máximo 4% de faixa para redundância, e ter capacidade de transmissão de 140 Mbit/s, ou 24,07 Mbit/s em cada um dos 6 feixes do sistema. No entanto, os sistemas de que se poderia dispor em 1987 eram os seguintes:

1. QUALCOMM Q1650:
Codificador de VITERBI: Embora sua capacidade de transmissão alcance 25 Mbit/s, tem a inconveniência de ter a máxima eficiência de Taxa de 87.5 %, contra a mínima exigida de 96%
2. Stanford Telecom (STEL-2012):
Codificador de VITERBI: Eficiência de Taxa Máxima: 87.5%, Máxima capacidade de transmissão de 20 Mbit/s, ambas insuficientes.
3. STM JA-VIT-15M (Satellite Technology Management):
Codificador de VITERBI: Embora de alta velocidade, alcançando até 24 Mbit/s, sua Eficiência de Taxa é de apenas 50%.
4. TEXAS INSTRUMENTS: (TIM99630 e TIM 99631):
Código de Bloco, eficiência de taxa 72.7% (insuficiente)
5. NEC- Codificador de Viterbi, portanto, com baixa eficiência de taxa.

A solução, portanto, foi implementar um sistema próprio para obtenção da eficiência desejada. Para especificar o sistema foram analisadas soluções encontradas por projetistas de várias origens:

1. A solução adotada mais comumente é o uso de codificação diferencial para recuperação de portadora [Bolla] [Noguchi 2] e uso de código para correção de erros simples, com expansão de taxa limitada a, no máximo, 5% [Bates 2], e com a taxa de erro após a decodificação aproximadamente proporcional ao quadrado da taxa de erro de recepção.
2. GTE TELECOMUNICAZIONI SpA: 64 QAM: Código de Reed Solomon definido em GF(64), (64,62)- versão expandida [Bellini]
3. NEC 64 QAM: Nakamura (84,81) [Noguchi 1]
4. NEC 256 QAM, Código (72,70) [Yoshida 2].
5. TELETTRA: 64 QAM, Código BCH (511, 484) [Bolla]
6. FUJITSU: 256 QAM, Código BCH (255, 247) [Takeda]
7. O FEC pode proporcionar saídas de alarme para o circuito de comutação [Bolla] [CPqD 2]

2.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentado o sistema rádio digital 64 QAM e o problema a ser resolvido: implementar um circuito corretor de erros para eliminar taxa de erro residual característica de um sistema com vários níveis de modulação. Foram apresentadas as condições de contorno: expansão de faixa máxima de 4%, transparência à ambiguidade de fase do código e do mapeamento a ser adotado, e uso de codificação diferencial adequada a este mapeamento. No próximo capítulo serão apresentados códigos que satisfazem estas condições.

Capítulo 3

CÓDIGOS DE BLOCO PARA CORREÇÃO DE ERROS EM SISTEMAS RADIO

Neste Capítulo são apresentados códigos corretores de erro transparentes à ambiguidade de fase e que têm alta eficiência de taxa (baixa redundância), para utilização em sistemas rádio digital. Estes códigos irão integrar os esquemas de codificação mostrados no Capítulo 4 cuja simulação será realizada no Capítulo 5.

3.1 Introdução

A importância do Controle de Erros em Transmissão de dados tem crescido constantemente, e graças a isso essa área tem merecido cada vez mais estudos e aprimoramentos. De fato, qualquer sistema que processa dados em quantidade e apresenta alta taxa de erros não corrigidos ou não detectados terá seu desempenho degradado e vai necessitar constantemente da intervenção humana durante sua operação.

A Teoria da Codificação teve origem com o trabalho de Shannon em 1948, quando se afirmou que um canal estacionário poderia se tornar suficientemente confiável caso uma fração do mesmo fosse utilizado para redundância e que se essa fração fixa não fosse utilizada, não seria possível um desempenho confiável desse sistema [Berlekamp 2]. No início a codificação corretora de erros era vista apenas como de interesse teórico, principalmente porque a distribuição de ruído num canal raramente é conhecida ou é difícil de ser definida. A comparação de desempenho entre um sistema que utilizava codificação corretora e sujeito a ruído interferente conhecido e o efeito do mesmo ruído num sistema não codificado deixou clara a melhoria que poderia ser alcançada. Passou-se então a pesquisar outros tipos de códigos e comparar seus desempenhos.

No sistema rádio multinível a codificação corretora passou a ser obrigatória, pelas razões

apresentadas no Capítulo 2. Neste trabalho foram utilizados códigos de bloco lineares, onde se aplicam as teorias matemáticas como Teoria de Matrizes ou de Campos de Galois.

O processo de codificação é feito segmentando-se uma mensagem em blocos de K dígitos e acrescentando, a cada bloco, $(N - K)$ dígitos redundantes, que são determinados a partir dos K dígitos da mensagem e destinados à detecção e correção de erros que possam ocorrer na transmissão.

Existem várias publicações que apresentam detalhes da Teoria de Codificação [Peterson], [Shu-Lin], [Lin-Costello], [Clark], [Rocha], [Berlekamp 1]. Neste trabalho será apresentado apenas um resumo dos itens mais importantes para compreensão do sistema de codificação adotado.

3.2 Códigos de Bloco: Definições

Pode-se caracterizar um código de bloco como aquele em que a redundância de dígitos verifica a ocorrência de erros apenas naquele bloco em particular [Rocha]. O código será linear na base q se os dígitos redundantes forem calculados por meio de somadores Módulo q , e os dígitos codificados são elementos de um campo finito com q elementos $\in [0, \dots, q]$, representados por $Gf(q)$.

3.2.1 Introdução

O código (N, K) aqui considerado é um conjunto C de q^K ênuplas q -árias denominadas palavras código que formam um subespaço do espaço vetorial de todas as q^N ênuplas. As palavras código podem ser representadas, portanto, como vetores de N componentes $\in [0, \dots, q]$.

Um código é considerado linear se constituir um subespaço, e se qualquer palavra código puder ser representada como uma combinação linear dos vetores constituintes da base do mesmo subespaço (estes vetores devem ser linearmente independentes [Rocha]). O subconjunto V de vetores é considerado um subespaço de um espaço vetorial se satisfizer os seguintes axiomas (com solução em V): [Peterson]:

1. A adição de quaisquer dois vetores do subespaço V é uma operação comutativa.
2. Para qualquer vetor $\vec{v} \in V$ e qualquer elemento de campo c (escalar), existe um vetor $c\vec{v} \in V$.
3. Lei distributiva:
 - Se \vec{u} e $\vec{v} \in V$ e c é um escalar, então $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
 - Se $\vec{v} \in V$ e se c e d são escalares, então $(c + d)\vec{v} = c\vec{v} + d\vec{v}$
4. Lei Associativa: Se \vec{v} é um vetor e c e d são escalares, então $(cd)\vec{v} = c(d\vec{v})$, e $1 \times \vec{v} = \vec{v}$.

Os vetores da base podem ser escritos como linhas da Matriz Geradora do Código G , que terá K linhas e N colunas:

$$G = \left(I_K \ P \right), \quad (3.1)$$

Onde I_K é a matriz identidade de K linhas e K colunas e P uma matriz de K linhas e $N - K$ colunas que define a formação da redundância do código. Uma sequência de informação de K dígitos define um bloco, que é representado por um vetor $\vec{v}_i = v_0, v_1, \dots, v_K$ onde cada v_i é um dos dígitos de informação. Este bloco é codificado através da multiplicação deste vetor de K dígitos \vec{v}_i pela Matriz Geradora G :

$$\vec{v}_{1c} = \vec{v}_i \times G \quad (3.2)$$

O resultado da operação, \vec{v}_{1c} , é a palavra codificada com os dígitos de paridade. Seus K primeiros elementos correspondem exatamente à sequência de informação. Os demais $N - K$ elementos são dígitos de paridade.

3.2.2 Matriz Geradora e Matriz de Paridade

Dada a matriz geradora, é possível formar a Matriz de Verificação de Paridade H . Referenciada neste trabalho simplesmente Matriz de Paridade, H terá $N - K$ linhas e N colunas. O espaço vetorial das linhas de G é ortogonal a H , isto é, se \vec{v} é um vetor no espaço das linhas de G , então

$$\vec{v} \times H^T = 0 \quad (3.3)$$

A equação 3.3, que fornece como resultado um vetor de $N - K$ componentes é utilizada, na recepção, para verificar se a palavra recebida pertence ao código (C), uma vez que podem ocorrer erros no canal. Se o vetor correspondente à palavra código recebida \vec{v}_i , não pertencer ao espaço vetorial C , a equação 3.3 fornecerá resultado diferente do vetor nulo. H pode também ser representada como

$$H = \left(-P^T \ I_{N-K} \right) \quad (3.4)$$

Onde I_{N-K} é a matriz identidade de $N - K$ linhas e $N - K$ colunas, e P^T a transposta da matriz P da equação 3.1. Sendo linearmente independentes, as linhas de H geram um código linear $(N, N - K)$ denominado dual do código (N, K) gerado por G .

3.2.3 Tabela de Síndromes

Se ocorrer erro durante a transmissão, o vetor \vec{v}_{1c} atingirá o destino com alguma alteração. Como os sistemas aqui propostos são destinados à eliminação de taxa de erro residual (definida no Capítulo 2), o mais provável é que apenas uma posição do vetor tenha sido alterada. Na recepção,

$$\vec{v}_{1r} \times H^T = \vec{s} \neq 0 \quad (3.5)$$

\vec{s} é um vetor não nulo de $N - K$ componentes, chamado síndrome, que indica que a palavra recebida \vec{v}_{1r} não corresponde a uma palavra do espaço das linhas de G . \vec{v}_{1r} também pode ser expressa como

$$\vec{v}_{1r} = \vec{v}_{1c} + \vec{e} \quad (3.6)$$

onde \vec{e} é uma ênupla que representa a configuração de erros. Na Teoria de Codificação demonstra-se que o erro em determinada posição gera a mesma síndrome da palavra recebida, qualquer que tenha sido a palavra de origem. Isto permite que se associe a cada síndrome não nula uma configuração de erros corrigível. A decodificação corretora será feita da seguinte forma [Rocha]:

1. Calcular a síndrome da ênupla recebida.
2. Por busca sistemática achar a configuração dos erros corrigível associada a esta síndrome (Posição de erro e magnitude da correção).
3. Subtrair a configuração de erros, encontrada no passo anterior, da ênupla recebida a fim de corrigí-la

Os dados que permitem executar esta sequência de decodificação irão formar as Tabelas de Síndromes, utilizadas nos programas de desempenho de esquemas de codificação do Capítulo 5.

3.3 Códigos Binários

Os códigos de Hamming estão incluídos entre os códigos BCH [Shu-Lin], e corrigem um erro por palavra. Seu comprimento é de $N = 2^{N-K} - 1$, o que garante disponibilidade de redundância para verificar a ocorrência de erro numa palavra, pois existem síndromes não nulas em número suficiente para cada posição da mesma: como se trata de código binário, soma-se 1 na posição indicada para realizar a correção do erro [Peterson].

Pelo fato dos Códigos Cíclicos apresentarem uma estrutura matemática que permite uma grande simplificação na implementação de codificadores e decodificadores, será utilizado um código de Hamming cíclico.

3.3.1 Código de Hamming Cíclico

Um código é cíclico quando uma permutação cíclica, aplicada a qualquer uma de suas palavras, fornece como resultado outra palavra código. Portanto, se $\vec{v}_a = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ é palavra código, então $\vec{v}_b = (v_{n-i}, v_{n-i+1}, \dots, v_0, v_1, \dots, v_{n-i-1})$ também o será. A ênupla que representa estas palavras código pode ser representada por um polinômio, cujo grau é no máximo $n - 1$:

$$v(X) = v_0 + v_1X + v_2X^2 + \dots + v_{n-1}X^{n-1} \quad (3.7)$$

Utilizando-se as propriedades dos campos finitos, é possível provar que todas as palavras de um código cíclico (N, K) são múltiplas de um polinômio $g(X)$, de grau $(N - K)$, bem definido, e reciprocamente que todo polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$, que é divisível por $g(X)$, é uma palavra código. O polinômio $g(X)$ é chamado polinômio gerador e é um fator de $x^N - 1$ [Rocha].

3.3.2 Condição Para Utilização do Código

Para que seja possível utilizar códigos de Hamming Cíclicos no sistema rádio digital definido no Capítulo 2 é necessário que:

- Sejam lineares: vetores do tipo $\{a, a, a, \dots, a\}$ onde a pertence a $[0, 1]$ sejam palavras do código.
- Sejam transparentes à ambiguidade de fase, o que vai ser possível desde que o mapeamento de símbolos na constelação seja tal que se $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ é uma palavra do código transmitida, qualquer rotação de fase de 90, 180 ou 270 graus produza vetores da forma

$$\{e_1 + e_2a_0, e_1 + e_2a_1, \dots, e_1 + e_2a_{n-1}\} \text{ onde } e_1 \text{ e } e_2 \in [0, 1] \quad (3.8)$$

Os códigos de Hamming Cíclicos atendem as condições exigidas para utilização nos esquemas propostos neste trabalho.

3.3.3 Escolha de Parâmetros

Será necessário determinar os parâmetros do código, tais como comprimento da palavra código (quanto mais curta, maior simplicidade do sistema) e seu polinômio gerador.

Como se deseja código com reduzida expansão de faixa deve-se buscar um sistema que permita correção de um erro simples (ou a palavra teria que ter comprimento muito grande). Supor, ainda, que o sistema a ser implementado seja homogêneo, onde o mesmo código é utilizado em cada um dos 6 feixes de dígitos binários da palavra.

Comprimento da Palavra Código

Para determinar o comprimento da palavra, deve-se consultar a tabela a seguir, que apresenta a taxa de códigos de Hamming Cíclicos de vários comprimentos, para correção de um erro simples:

Dígitos de Paridade $N - K$	Comprimento N	Acréscimo de Faixa K/N
2	3	0.667
3	7	0.429
4	15	0.267
5	31	0.161
6	63	0.095
7	127	0.055
8	255	0.031
9	511	0.018

Tabela 3.1: Exemplos de Códigos de Hamming Cíclicos

Para obter uma taxa de codificação inferior a 4%, deve-se utilizar código de comprimento 255 dígitos, dos quais 8 de redundância:

$$\text{Taxa do Código} = \frac{K_i}{N_i} = \frac{255-8}{255} = 0.96863 \rightarrow 1 - \text{Taxa} < 4\%.$$

Portanto $K = 247$.

Polinômio Gerador

Consultando a tabela de polinômios geradores de códigos de Hamming Cíclicos [Peterson], pode-se definir um código de Hamming Cíclico Binário (referenciado neste trabalho como CB), cujo polinômio gerador é:

$$g(X) = X^8 + X^6 + X^5 + X^3 + 1 \quad (3.9)$$

Este polinômio, primitivo de raízes linearmente independentes e raízes recíprocas linearmente dependentes, gera um código (255, 247). Qualquer outro polinômio utilizado entre estes irredutíveis vai gerar código de mesmo comprimento e mesma taxa.

3.3.4 Matriz Verificação de Paridade

Como mostra a equação 3.1, a Matriz Geradora do Código G , de dimensão 255×247 é dada por

$$G = (I_{247} P), \quad (3.10)$$

onde I_{247} é a matriz identidade, de dimensões 247×247 , e P a matriz de dimensões $247 \times (255 - 247)$. A multiplicação de uma palavra vetor de 247 dígitos binários por P fornece os 8 dígitos de paridade a serem acrescentados para formar a palavra codificada de 255 dígitos. De 3.4 têm-se que

$$H = (-P^T \times I_{(255-247)}) = (-P^T \times I_8) \quad (3.11)$$

O espaço vetorial das palavras do código cíclico (255,247) cujo polinômio gerador é definido pela equação 3.9 pode ser descrito pela matriz [Peterson]:

$$G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Fazendo-se as operações necessárias para obter apenas linhas linearmente independentes, obtêm-se G , e a partir desta, H (equações 3.10 e 3.11. A matriz H vai permitir a construção da Tabela de Síndromes.

3.3.5 Tabela de Síndromes

Como comentado na seção 3.2.3, a palavra toda nula com um erro no u -ésimo dígito resulta numa síndrome idêntica à obtida com um erro de u -ésimo dígito em qualquer outra palavra (código binário). Calculando-se a síndrome obtida para erro em cada uma das N posições possíveis, com a equação 3.5, pode-se montar a Tabela de Síndromes:

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	...	250	251	252	253	254	255
Magnitude	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1
Síndrome	6	12	23	45	89	178	100	200	...	5	9	17	33	65	129

Tabela 3.2: Síndromes do Código CB (255, 247)

Esta tabela foi construída supondo-se recebida a palavra toda nula com erro em uma posição ($\vec{v} = 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$), e verificando-se a síndrome obtida para cada uma das 255 possibilidades. O resultado, um vetor de comprimento 8, vai corresponder a um arranjo binário. A conversão deste valor para decimal vai fornecer, na linha 3 da tabela, a síndrome resultante em caso de erro de magnitude indicada na segunda linha (1, no caso binário) na posição indicada na primeira linha.

3.4 Códigos de Nakamura (Não Binários)

Esses códigos [Nakamura] são definidos sobre Z_{2^m} , o anel de inteiros módulo 2^m , m inteiro. São códigos de bloco lineares e baseados na métrica de Lee, transparentes à ambiguidade de fase, e

se forem utilizados juntamente com um mapeamento que apresente a mesma característica (ver Capítulo 4), o sistema obtido será adequado para resolver o problema proposto, pois atenderá os requisitos de linearidade e transparência à ambiguidade de fase.

Neste trabalho, serão utilizados códigos para correção de erros em uma posição ou em quase todas as combinações de erros em duas posições (mais de 90% das possibilidades de ocorrência de dois erros podem ser corrigidas) [Nakamura].

3.4.1 Distância de Lee e Peso de Lee

A distância de Lee [Peterson] de duas n -uplas é definida como o peso da diferença entre elas. O peso de Lee de uma n -upla $(a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$ escolhida do conjunto $(0, 1, \dots, q)$, onde q é um inteiro positivo arbitrário, é definida como

$$W_{Lee} = \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|, \text{ onde } |a_i| = \begin{cases} a_i, & 0 \leq a_i \leq \frac{q}{2} \\ q - a_i, & \frac{q}{2} < a_i \leq q - 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

Supor duas palavras código sobre Z_{2^m} , $\vec{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_N]$ e $\vec{Y}' = [Y'_1, Y'_2, \dots, Y'_N]$. A distância de Lee d_{Lee} entre Y e Y' é dada por

$$d_{Lee} = \sum_{i=1}^N a_i, \quad (3.15)$$

onde $a_i = (Y'_i - Y_i) \pmod{2^m}$ e $-2^{m-1} < a_i \leq 2^{m-1}$, sendo $i = 1, 2, \dots, N$.

Desta forma, erro simples é erro de magnitude 1, em uma posição. Neste trabalho será chamado erro duplo o evento da ocorrência de dois erros numa palavra recebida. Em sistemas binários, só existem erros de distância 1, que equivalem a erros de magnitude 1. No entanto, em códigos octais erros desta magnitude podem significar erros de distância 1 ou 7, e em códigos quaternários, distância 1 ou 3.

3.4.2 Características do Código

Estes códigos podem ser projetados para correção de todos os erros simples (SLEC- Single Lee Error Correcting), quase todos os erros duplos (Quasi-Double Lee Error Correcting Codes- QDLEC- ou todos os erros duplos- DLEC). O método de derivação destes códigos tem alguma analogia com os códigos BCH, sendo, portanto, facilmente implementáveis. Além disso, os códigos de Nakamura permitem diversos comprimentos de palavras e taxas de codificação. Na referência indicada [Nakamura] alguns exemplos estão tabelados para uso prático, e foram utilizados neste trabalho.

3.4.3 Condição Para Transparência à Ambiguidade de Fase

Como se trata de sistema linear, uma palavra de informação $\vec{y} = [y, y, \dots, y]$ onde $y \in Z_{2^m}$ corresponderá a uma palavra código $\vec{y} = [y, y, \dots, y]$ onde $y \in Z_{2^m}$ se e somente se uma palavra de informação $(1, 1, \dots, 1)$ corresponder a uma palavra válida do código $(1, 1, \dots, 1)$. Esta é a condição para que a um código corretor de erros sobre Z_{2^m} seja transparente à ambiguidade de fase (Lema 1, [Nakamura]).

O mapeamento na constelação escolhido deve ser tal que se vetores do tipo $\{a, a, a, \dots, a\}$, onde a pertence a Z_{2^m} são palavras desses códigos e $\{a_0, a_1, \dots, a_N\}$ é uma palavra do código transmitida, qualquer rotação de fase de ± 90 ou 180 graus produzam vetores da forma

$$\{e_1 + e_2 a_0, e_1 + e_2 a_1, \dots, e_1 + e_2 a_{n-1}\} \text{ onde } e_1 \text{ e } e_2 \in Z_{2^m} \quad (3.16)$$

3.4.4 Formação do Código de Nakamura

A seguir, serão apresentados lemas e definições sobre os quais se baseiam os códigos de Nakamura, e, posteriormente, um exemplo de determinação de um código, com respectiva Matriz de Paridade.

Propriedades de Polinômios Sobre Z_{2^m}

Algumas definições são necessárias para compreensão do exemplo apresentado [Nakamura]:

1. Seja $h(X)$ um polinômio sobre Z_{2^m} com todos os coeficientes divisíveis por 2^j e pelo menos um coeficiente não divisível por 2^{j+1} , onde $0 \leq j \leq m-1$. O polinômio $h(X)$ é chamado polinômio de nível j sobre Z_{2^m} . Por conveniência zero é chamado polinômio de grau m sobre Z_{2^m} . Todos os polinômios sobre Z_8 de grau menor que 2 são mostrados na figura 3.1, de acordo com o nível dos mesmos (O nível está relacionado com o período do coset, ou o número de polinômios a ele pertencentes).
2. Seja $g(X)$ um polinômio sobre Z_{2^m} de grau k e irredutível sobre Z_2 . Então, define-se o 2^j ário período $N(j)$ de $g(X)$ como o menor número positivo que satisfaz a equação

$$2^{m-j} X^{N(j)} = 2^{m-j} \pmod{g(X)} \quad (3.17)$$

Em particular, o 2^m ário período de $g(X)$ é chamado período de $g(X)$, e geralmente o período binário $N(1)$ é igual a $(2^k - 1)$ ou um divisor deste [Berlekamp 1]. A figura 3.1 mostra que o 2^j ário período $N(j)$ de $X^2 - X - 1$ sobre Z_8 é dado por $N(0) = 1$, $N(1) = 3$, $N(2) = 6$ e $N(3) = 12$.

3. Polinômio máximo sobre Z_{2^m} é definido como aquele cujo período é $N(m) = 2^{m-1} N(1)$. Esta definição é baseada no fato do período $N(m)$ ser dado, geralmente, pela equação (Lema 2, [Nakamura]):

H_u^j	H_1^0	H_2^0	H_3^0	H_4^0	H_1^1	H_2^1	H_1^2	H_1^3
Pol Ger.	1	1+ 4X	7	7+ 4X	2	6	4	0
i X^{i-1}	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	-
1 1	1	1+ 4X	7	7+ 4X	2	6	4	0
2 X	X	4+ 5X	7X	4+ 3X	2X	6X	4X	Nível 3 Λ_3
3 X^2	1+ 1X	5+ 1X	7+ 7X	3+ 7X	2+ 2X	6+ 6X	4+ 4X	
4 X^3	1+ 2X	1+ 6X	7+ 6X	7+ 2X	2+ 4X	6+ 4X	Nível 2 (Λ_2)	
5 X^4	2+ 3X	6+ 7X	6+ 5X	2+ 1X	4+ 6X	4+ 2X		
6 X^5	3+ 5X	7+ 5X	5+ 3X	1+ 3X	6+ 2X	2+ 6X	Nível 1 (Λ_1)	
7 X^6	5	5+ 4X	3	3+ 4X				
8 X^7	5X	4+ 1X	3X	4+ 7X				
9 X^8	5+ 5X	1+ 5X	3+ 3X	7+ 3X				
10 X^9	5+ 2X	5+ 6X	3+ 6X	3+ 2X				
11 X^{10}	2+ 7X	6+ 3X	6+ 1X	2+ 5X				
12 X^{11}	7+ 1X	3+ 1X	1+ 7X	5+ 7X	Nível 0 (Λ_0)			

Figura 3.1: Classificação de todos os polinômios sobre Z_8 de grau menor ou igual a 2

$$N(1) \leq N(m) \leq 2^{m-1} \times N(1) \tag{3.18}$$

Polinômios máximos de qualquer grau são facilmente encontrados sobre o anel de inteiros módulo Z_{2^m} , tais como $X^2 - X - 1$, $X^3 - X - 1, \dots, X^5 - X^2 - 1$, etc.

Seja $g(X)$ o polinômio máximo sobre Z_{2^m} de grau k e sejam Λ_j o conjunto de polinômios do nível j sobre Z_{2^m} de grau menor que k ($m, k > 2$). Verifica-se que

1. Lema 3:

$$N(j) = 2^{j-1} N(1), \quad (1 \leq j \leq m) \tag{3.19}$$

2. Lema 4:

(a) O conjunto Λ_0 constitui um grupo multiplicativo com operação aritmética definida módulo $g(X)$ sobre Z_{2^m} .

(b) O conjunto Λ_0 pode ser classificado em $w(0)$ cosets do subgrupo $H_0 = \{1, X, X^2, \dots, X^{N(m)-1} \text{ (Modulo } g(X))\}$, onde $w(0) = 2^{(m-1)(k-1)} \times \frac{(2^k-1)}{N(1)}$. Cada coset H_u^0 é definido como

$$H_u^0 = \{L_u^0(X) \times X^{i-1} \text{ (Modulo } g(X))\}_{i=1}^{N(m)} \tag{3.20}$$

onde $L_u^0(X)$ ($1 \leq u \leq w(0)$) é um polinômio líder de coset (LC). Ver a figura 3.1, onde cada coluna representa um coset, onde L_u^0 é o primeiro elemento.

(c) Os polinômios líderes de coset (LCs) L_u^0 podem ser escolhidos de forma que

$$L_u^0 = -L_{\{u+\frac{w(0)}{2}\}}(X) \text{ sobre } Z_{2^m}, \text{ onde } u = 1, 2, \dots, \frac{w(0)}{2} \text{ e } m \geq 3 \quad (3.21)$$

No exemplo da figura 3.1,

$$\begin{aligned} w(0) &= 4 \\ L_1^0 &= 1 = -7 = -L_3^0 \quad (\text{Módulo } 8) \\ L_2^0 &= 1 + 4X = -(7 + 4X) = -L_4^0(X) \end{aligned}$$

A relação entre L_1^0 e L_3^0 ou entre L_2^0 e L_4^0 caracteriza estes cosets como duais.

(d) Um conjunto $\{2^j L_u^0(X)\}_{u=1}^{w(0)}$ contém $w(j)$ diferentes polinômios sobre Z_{2^m} , onde $w(j)$ é dado por

$$w(j) = 2^{(m-j-1)(k-1)} \frac{(2^k - 1)}{N(1)} \quad (3.22)$$

Seja o conjunto $\{L_u^j(X)\}_{u=1}^{w(j)}$ constituído de diferentes polinômios onde seja válida a relação

$$L_u^j = -L_{u+\frac{w(j)}{2}}(X) \text{ sobre } Z_{2^m}, \text{ onde } u = 1, 2, \dots, \frac{w(j)}{2}, m - j \geq 2 \text{ e } m \geq 3. \quad (3.23)$$

O conjunto Λ_j pode ser classificado em $w(j)$ cosets, e cada um destes H_u^j é dado por

$$H_u^j = \{L_u^j(X) X^{i-1} \text{ (Modulo } g(X))\}_{i=1}^{N(m-j)} \quad (3.24)$$

Na figura 3.1, $w(1) = 2$, $w(2) = 1$, $L_1^1(X) = 2 = -6 = -L_2^1(X)$ (cosets duais), $L_1^2 = 4$ e $L_1^3 = 0$ (Modulo 8).

(e) Seja $m = 2$. Para um polinômio máximo $g(X)$ sobre Z_4 , os itens c) e d) do Lema 4 são verificados se $X^{N(1)} \neq -1$ (Modulo $g(X)$).

3. Lema 5:

Seja $h_1(X)$ e $h_2(X)$ polinômios pertencentes aos cosets $H_{u_1}^{j_1}$ e $H_{u_2}^{j_2}$ respectivamente, onde $0 \leq j_1, j_2 \leq m - 2$ e $1 \leq u_1, u_2 \leq \frac{w(j)}{2}$ e os polinômios LCs (líderes de coset) $L_u^{(j)}$ escolhidos de forma a satisfazer as equações 3.21 e 3.23. Então,

$$h_1(X) \neq + h_2(X) \text{ (Modulo } Z_{2^m}) \quad (3.25)$$

4. Lema 6:

A soma de todos os polinômios em um coset é igual a zero sobre Z_{2^m}

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 2 \\ 2 & 7 \\ 7 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ & X & = X \\ 1+ & X & = X^2 \\ 1+ & 2X & = X^3 \\ 2+ & 3X & = X^4 \\ 3+ & 5X & = X^5 \\ 5 & & = X^6 \\ & 5X & = X^7 \\ 5+ & 5X & = X^8 \\ 5+ & 2X & = X^9 \\ 2+ & 7X & = X^{10} \\ 7+ & X & = X^{11} \\ \hline 2 & = & 2 \\ & 2X & = 2X \\ 2+ & 2X & = 2X^2 \\ 2+ & 4X & = 2X^3 \\ 4+ & 6X & = 2X^4 \\ 6+ & 2X & = 2X^5 \end{array}$$

Figura 3.2: Matriz de verificação de Paridade do Código octal (18,16)

Exemplo

É mostrado a seguir um exemplo de código de Nakamura (18,16), com palavra de comprimento 18 dígitos, onde 16 são informação e 2 são paridade, definidos sobre Z_8 ($m = 3$). Este código é transparente à ambiguidade de fase e corrige de erros simples de magnitude 1. Sua caracterização é feita pela determinação da matriz de paridade, como definida na equação 3.4. A figura 3.2 mostra a matriz H .

A palavra $C = c_{1.1}^0, c_{1.2}^0, \dots, c_{1.12}^0, c_{1.1}^1, c_{1.2}^1, \dots, c_{1.6}^1$ é definida como palavra do código (18,16) se, e somente se

$$C \times H = 0 \text{ (Modulo 8)} \tag{3.26}$$

Neste caso, $c_{1.1}^0$ e $c_{1.2}^0$ são dígitos de paridade e os demais são dígitos de informação. Observando-se a figura 3.2, vê-se que cada linha pode ser representada por um polinômio resíduo módulo $X^2 - X - 1$ sobre Z_8 , isto é, a j -ésima linha de H corresponde ao resto da divisão de $J(X)$ por $X^2 - X - 1$ sobre Z_8 :

$$\begin{aligned} J(X) &= X^{j-1}, \quad (1 \leq j \leq 12) \\ &= 2^{j-13} \quad (13 \leq j \leq 18) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Observar que a matriz de paridade do código (18,16) contém os cosets H_1^0 e H_1^1 , e que a equação 3.4 também pode ser verificada se o polinômio $C(X)$ (correspondente à palavra código)

for divisível por $X^2 - X - 1$ (polinômio gerador), sobre Z_8 . $C(X)$ também pode ser escrita como

$$C(X) = \sum_{j=0}^1 \sum_{u=1}^{s(j)} \sum_{i=1}^{N(j)} C_{ui}^j L_u^j(X) X^{i-1}, \quad (3.28)$$

onde j representa o nível (relacionado com o período do coset, $s(j)$ indica o número de polinômios líderes de coset do nível j utilizados, u é o número do coset, $N(j)$ é o número de polinômios do período do coset de nível j , C_{ui}^j é a posição, na palavra código, de dígito em questão e L_u^j é cada um dos polinômios LC s utilizados na formação do código. No exemplo apresentado nesta seção, $s(0) = 1$, $s(1) = 1$, $N(0) = 12$, $N(1) = 6$, $L_1^0 = 1$ e $L_1^1 = 2$.

Generalização da Montagem da Matriz de Paridade

É possível construir um código cuja Matriz H utiliza uma justaposição dos coeficientes dos polinômios dos cosets H_1^0 , H_2^0 , H_1^1 e H_2^1 , da figura 3.1, que fornece a classificação dos polinômios sobre Z_8 de grau menor ou igual a dois. Os LC s $L_1(X) = 1$, $L_2(X) = 1 + 4X$, $L_3(X) = 2$ e $L_4 = 4$ podem ser utilizados, simultaneamente ou não, para formação de códigos de diversos comprimentos (neste exemplo, palavras de 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30 e 33 dígitos) fazendo-se combinação entre os cosets possíveis (observar que não é possível utilizar, simultaneamente, H_1^0 e H_3^0 , H_2^0 e H_4^0 , H_1^1 e H_2^1 , que são duais entre si, ou seja: a soma de seus LC s é igual a zero). O grau do polinômio gerador vai definir o número de dígitos de paridade.

No caso geral, têm-se que o polinômio que representa uma palavra codificada, como na equação 3.7 apresenta a forma

$$v(\vec{X}) = \sum_{i=0}^{K-1} v_{1c} X^{i+N-K} - b(X), \quad (3.29)$$

onde v_{1c} é um dos $N - K$ dígitos 2^m ários de informação e

$$b(X) = b_{N-K} X^{N-K} + \dots + b_1 X + b_0 \quad (3.30)$$

é o resto da divisão da palavra código pelo polinômio gerador irredutível sobre Z_{2^m}

$$g(X) = X^c + a_1 X^{c-1} + \dots + a_{c-1} \quad (3.31)$$

Embora não sendo cíclicos, estes códigos têm sua matriz de verificação de paridade montada pela união de matrizes de verificação associadas a "sub-códigos" cíclicos:

$$H = \begin{pmatrix} H_a \\ H_b \\ \dots \\ H_n \\ \dots \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Onde H_a, H_b, \dots, H_n são matrizes de verificação de paridade dos sub-códigos C_a, C_b, \dots, C_z . Cada um destes é formado na álgebra de inteiros módulo Z_{2^m} , m fixo, todos tendo o mesmo polinômio gerador de código, porém diferentes LC s. No exemplo apresentado, havia dois sub-códigos, e H_a era formado através do $LC = 1$ e H_b através do $LC = 2$.

O código de Nakamura é formado a partir da montagem da tabela da figura 3.1, que apresenta todos os polinômios de grau menor que N (N é o grau do polinômio gerador) em sub-grupos de cosets (colunas) onde cada polinômio apareça uma única vez. Estabelecida a classificação de polinômios sobre Z_{2^m} , de grau menor ou igual ao do polinômio gerador, todas as colunas que não forem duais podem ser agrupadas para formação de um código de Nakamura. Neste trabalho, a maioria dos códigos utilizados foram fornecidos na referência [Nakamura].

3.5 Códigos de Nakamura Utilizados

Os códigos de Nakamura foram escolhidos por serem lineares, transparentes à ambiguidade de fase e por permitirem implementação com expansão de faixa reduzida. Nesta seção os códigos de Nakamura que serão utilizados são descritos em termos de taxa de codificação, polinômio gerador, polinômios líderes de coset (LC), matriz de paridade e tabela de síndromes. São utilizados códigos quaternários (definidos sobre o anel de inteiros módulo Z_4) e octais (anel de inteiros módulo Z_8). As matrizes H e tabelas de síndromes aqui abreviadas podem ser obtidas a partir da definição de m (Z_{2^m}), do polinômio gerador e dos polinômios LC s. O programa TSKi.PAS gerou as matrizes de paridade e tabelas de síndromes utilizados pelos códigos apresentados neste trabalho.

Da mesma forma que no caso do código binário, existe um compromisso entre a capacidade corretora do código e o seu comprimento. Por isto, como se deseja reduzida expansão de faixa no sistema, deve-se buscar um código de Nakamura que permita correção de um erro simples e apresente alta eficiência de taxa.

Nakamura demonstrou a viabilidade de diversos códigos lineares e que apresentam transparência à ambiguidade de fase. Dentre eles, foram estudados dois códigos quaternários que causam expansão de faixa de até 5% e que têm capacidade de correção de um erro simples (CQ1 e CQ2); um código quaternário com expansão de faixa de 6.67%, com capacidade para corrigir todos os erros simples e 94% dos duplos (CQ3); e um octal com 3.6% de incremento de faixa, podendo corrigir os erros de magnitude 1 (CO1). Neste estudo determinou-se um segundo código octal de mesma faixa (CO2) e com maior capacidade de correção (todos os erros ímpares). A seguir, são apresentados estes códigos. Lembrar que a expansão de faixa (Ef) é o complemento da taxa de codificação ($Tc = 1 - Ef$).

3.5.1 Código Quaternário CQ1 (120,116)

Código de Lee Corretor de Erros Simples (em uma posição), de magnitude 1

1. Taxa de Codificação = $116/120 = 0.967$.
2. Polinômio Gerador: $X^4 - X - 1$ ou $X^4 + 3X + 3$
3. Polinômios LC s: Monta-se uma tabela como a apresentada na figura 3.1, onde os polinômios LC s são os seguintes:

$$\begin{aligned} L_1(X) &= 1 \\ L_2(X) &= 1 + 2X \\ L_3(X) &= 1 + 2X^2 \\ L_4(X) &= 1 + 2X + 2X^2 \end{aligned}$$

4. Matriz H :

Com a determinação do coset correspondente a cada LC , é determinada a matriz de paridade com a justaposição de H_a , H_b , H_c e H_d , determinadas pelos LS s (analogamente ao realizado para formação da matriz de paridade da figura 3.2). A palavra código é obtida através da equação 3.2, e a Matriz de Paridade é dada por 3.4. A multiplicação de uma palavra vetor de 116 dígitos binários por H fornece os $N - K = 4$ dígitos de paridade a serem acrescentados para formar a palavra codificada de 120 dígitos. A Matriz H^T é dada por

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

5. Tabela de Síndromes:

A partir da Matriz H é possível prever todos os erros simples de distância de valor absoluto=1 (em sistemas quaternários, +1 e -1, ou 1 e 3) que podem ocorrer numa palavra transmitida: Deve-se então calcular a síndrome pela equação 3.5, para erros de magnitude 1 (1 e 3) de cada uma das 120 posições da palavra. O valor obtido será o mesmo que para qualquer outra palavra do código recebida com erro simples na posição correspondente: está determinada a Tabela de Síndromes:

Posição	1	1	2	2	3	...	118	118	119	119	120	120
Magnitude	-1	+1	-1	+1	-1	...	-1	+1	-1	+1	-1	+1
Síndrome	98	228	70	208	214	...	5	13	17	49	65	193

Tabela 3.3: Síndromes do Código CQ1 (120, 116)

Por exemplo, supor que foi recebida uma palavra que forneceu como síndrome a sequência de dígitos 1,0,1,2 (álgebra módulo 4). A conversão para valor decimal fornece 70. Na tabela de síndromes, o valor 70 corresponde a um erro de magnitude 1 na segunda posição

(ver tabela). Fazendo-se a soma de 1 com o dígito da segunda posição da palavra recebida, é recuperado o valor originalmente transmitido.

3.5.2 Código Quaternário CQ2 (124,119)

Para Correção de erros simples de Lee, de magnitude 1, em uma posição.

1. Taxa de Codificação = $119/124 = 0.9597$
2. Polinômio Gerador: $X^5 - X^2 - 1$ ou $X^5 + 3X + 3$
3. Polinômios LCs :

Como o polinômio gerador tem grau 5, seria necessário utilizar polinômios irredutíveis de graus 0 a 4, para montar a tabela como na figura 3.1. Como os polinômios líderes de coset são apenas 2, pode-se calcular apenas os cosets:

$$\begin{aligned} L_1(X) &= 1 \\ L_2(X) &= 1 + 2X \end{aligned}$$

4. Matriz H :

Da mesma forma que para CQ1, a palavra código é obtida através da equação 3.2, e a Matriz de Paridade dada por 3.32. A multiplicação de uma palavra vetor de 119 dígitos binários por H fornece os $N - K = 5$ dígitos de paridade a serem acrescentados para formar a palavra codificada de 120 dígitos. A Matriz H^T é dada por

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

5. Tabela de Síndromes:

A partir da Matriz H é possível prever todos os erros simples de distância de valor absoluto=1 (em sistemas quaternários, +1 e -1, ou 1 e 3) que podem ocorrer numa palavra transmitida: Deve-se então calcular a síndrome pela equação 3.5, para erros de magnitude 1 (1 e 3) de cada uma das 120 posições da palavra. O valor obtido será o mesmo que para qualquer outra palavra do código recebida com erro simples na posição correspondente: está determinada a Tabela de Síndromes:

Posição	1	+1	2	2	3	...	122	122	123	123	124	124
Magnitude	-1	+1	-1	+1	-1	...	-1	+1	-1	+1	-1	+1
Síndrome	706	580	903	399	604	...	17	49	65	193	257	769

Tabela 3.4: Síndromes do Código CQ2 (124, 119)

3.5.3 Código Quaternário CQ3 (120,112)

Corrigem todos os erros simples e quase todos (94%) os erros em mais de uma posição (magnitude 1). Embora a taxa de codificação seja inferior à permitida (expansão de faixa de 0.93), pode-se utilizar este código em um dos dígitos de um símbolo, codificando os demais de forma diferente (sistema de codificação heterogêneo ou misto, que será visto em detalhe no Capítulo 4).

1. Taxa de Codificação = $112/120 = 0.9333$

2. Polinômio Gerador: $g(X) = X^8 + X^7 + 3X^6 + 2X^5 + X^4 + 2X^2 + 2X + 1$

3. Polinômios LCs :

Da mesma forma que realizado para $CQ1$ e $CQ2$, determinam-se os cosets a partir dos LCs :

$$\begin{array}{l} L_1(X) = 1 \\ L_2(X) = 3 + 2X + 2X^2 + 2X^3 + 2X^5 + 2X^7 \\ L_3(X) = 3 + 2X + 2X^3 + 2X^4 + 2X^6 \\ L_4(X) = 1 + 2X + 2X^4 + 2X^5 + 2X^6 + 2X^7 \end{array}$$

4. Matriz H :

A palavra código é obtida através da equação 3.2, e a Matriz de Paridade é dada por 3.32. A multiplicação de uma palavra vetor de 112 dígitos binários por H fornece os $N - K = 8$ dígitos de paridade a serem acrescentados para formar a palavra codificada de 120 dígitos. A Matriz H^T é dada por

$$H^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

5. Tabela de Síndromes:

A partir da Matriz H é possível prever todos os erros simples de distância de valor absoluto=1 (em sistemas quaternários, +1 e -1, ou 1 e 3) que podem ocorrer em uma posição ou em 94% das combinações de duas posições de uma palavra transmitida: Deve-se então calcular a síndrome pela equação 3.5, para erros de magnitude 1 (1 e 3) de cada uma das 120 posições da palavra. O valor obtido será o mesmo que para qualquer outra palavra do código recebida com erro simples na posição correspondente. Em caso de repetição do padrão de síndrome (erros em duas posições) será considerado o padrão correto aquele que corrigir os dígitos que são enviados antes, de forma a privilegiar correção de dígitos de dados em detrimento de dígitos de redundância. Têm-se, então a Tabela de Síndromes:

Posições	1	...	120	1 e 2	1 e 2	...	39 e 96	39 e 97	39 e 97	...	119 e 120	119 e 120
Mag.1	-1	...	+1	-1	+1	...	-1	-1	+1	...	+1	-1
Mag.2	0	...	0	-1	-1	...	+1	-1	-1	...	+1	+1
Síindr.	33080	...	49153	34794	34244	...	53491	49252	49260	...	61441	53249

Tabela 3.5: Síndromes do Código CQ3 (120, 112)

Esta tabela, cuja versão completa tem mais de 27.000 padrões de erro, também foi gerada por uma das versões do programa TSKi.PAS. A utilização desta tabela é análoga às já apresentadas, embora na maioria das vezes sejam corrigidos dois erros. Por exemplo, a síndrome 53491 corresponde a erros nas posições 39 e 96. Para corrigí-los, subtrai-se 1 na primeira (39) e soma-se 1 na segunda (96).

3.5.4 Código Octal CO1 (84,81)

Correção de Erros Simples de Magnitude 1, apresentado por Nakamura

1. Taxa de Codificação: $= 81/84 = 0.964$
2. Polinômio Gerador: $X^3 - X - 1$ ou $X^3 + 7X + 7$
3. Polinômios LCs :

Outra tabela é montada para este código. A partir dos LCs são determinados os cosets:

$$\begin{aligned} L_1(X) &= 1 \\ L_2(X) &= 1 + 2X \\ L_3(X) &= 3 \end{aligned}$$

4. Matriz H :

Substituindo os valores nas equações 3.2 e 3.32, onde $N = 84$ e $K = 81$, determinam-se as matrizes G e H . Os polinômios LCs determinam H^T :

$$H^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 0 & 5 & 6 & 2 & 3 & 3 & 7 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 5 & 6 & 2 & 3 & 3 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 5 & 6 & 2 & 3 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

5. Tabela de Síndromes:

Da mesma forma que no caso de códigos quaternários, determinam-se as síndromes possíveis para este código:

Posição	1	1	2	2	3	...	82	82	83	83	84	84
Magnitude	-1	+1	-1	+1	-1	...	-1	+1	-1	+1	-1	+1
Síndrome	324	198	222	364	44	...	2	8	9	57	65	449

Tabela 3.6: Síndromes do Código CO1 (84, 81)

3.5.5 Código Octal CO2 (84,81)

Se, em CO1, fossem utilizados somente LCs linearmente independentes, seria possível a correção dos erros triplos (e quintuplos). O código proposto utiliza este artifício, corrigindo assim todos os erros ímpares em uma posição (magnitudes 1 e 3). Este código não foi apresentado por Nakamura, mas pesquisado no trabalho realizado no CPqD TELEBRAS.

1. Taxa de Codificação: $= 81/84 = 0.9643$
2. Polinômio Gerador: $X^3 - X - 1$ ou $X^3 + 7X + 7$
3. Polinômios LCs:

A mesma tabela que foi utilizada para determinar CO1 fornece os cosets que permitem determinar CO2. Substitui-se o $LC = 3$ por $LC = 1 + 3X$:

$$\begin{aligned} L_1(X) &= 1 \\ L_2(X) &= 1 + 2X \\ L_3(X) &= 1 + 3X \end{aligned}$$

4. Matriz H:

$$H^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 7 & 4 & 3 & 4 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 7 & 4 & 3 & 4 & 0 & 3 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

5. Tabela de Síndromes:

Contém o dobro de padrões de correção:

Posição	1	1	2	...	83	84	84	1	1	2	...	83	84	84
Magnitude	-1	+1	-1	...	+1	-1	+1	-3	+3	-3	...	+3	-3	+3
Síndrome	130	392	395	...	57	65	449	388	134	159	...	41	193	321

Tabela 3.7: Síndromes do Código CO2 (84, 81)

3.6 Determinação da Matriz H e Tabela de Síndromes

Para realizar a simulação de desempenho destes códigos foram desenvolvidos algoritmos para montar a matriz de verificação de paridade e uma tabela de síndromes para cada um deles. Tanto a matriz como a tabela são montadas com o programa TSKi.PAS, onde se deve fornecer como entrada:

1. Os valores de m (anel de inteiros módulo Z_{2^m}) e o comprimento da palavra código.
2. Arquivo de dados contendo os coeficientes do polinômio gerador, o número de polinômios líderes de coset (e respectivos coeficientes).

Deve-se tomar códigos cuja matriz de verificação de paridade seja formada por matrizes de sub-códigos cíclicos completos. Por exemplo, se o código (84,81) for substituído por outro de taxa $\frac{81-b}{84-b}$, com a supressão das b últimas posições, haverá maior dificuldade na implementação do decodificador: o coset incompleto perderia sua característica cíclica.

O programa TSKi.PAS faz a multiplicação do polinômio LC por X , e toma o resultado módulo $g(X)$, na álgebra Z_{2^m} . O resultado é multiplicado novamente por X , até que seja obtido o LC original. Repetindo-se este procedimento para todos os LC s, determinam-se os polinômios dos cosets cujos coeficientes justapostos formarão a matriz de paridade.

Após determinação da matriz de paridade, é feita a Tabela de síndromes tomando-se a palavra toda nula com uma posição errada (em cada um dos valores corrigíveis pelo código), determinando-se a síndrome correspondente a erro desta magnitude naquela posição [Peterson].

3.7 Codificadores e Decodificadores dos Códigos de Nakamura

A implementação de códigos cíclicos binários tem sido extensivamente documentada na literatura disponível. Quanto aos códigos de Nakamura, como são semelhantes aos BCH e são pseudo-cíclicos, podem também ser facilmente implementados.

3.7.1 Codificadores

Os codificadores (N, K) de Nakamura são constituídos, basicamente, de registros de deslocamento com realimentação. Seja $\vec{v} = (v_0, v_1, \dots, v_{N-K-1})$, onde $v_{ic} \in [0, 1, \dots, 2^m - 1]$, o vetor de informação a ser codificado, associado ao polinômio $v(X) = v_0 + v_1 \times X + \dots + v_{N-K-1} \times X^{N-K-1}$.

Multiplica-se o vetor palavra de entrada pelo polinômio gerador do código (de grau $N-K$). Observar que são utilizados LC s diferentes do polinômio X^0 (Códigos de Hamming Cíclicos), é necessário que seja feita a pré-multiplicação da palavra de entrada pelos coeficientes diferentes de 1 (X^0) dos LC s antes da multiplicação pelo polinômio gerador. Por exemplo, no caso do código octal CO2, onde há três polinômios LC s: $LC_1 = 1$, $LC_2 = 1 + 2X$ e $LC_3 = 1 + 3X$ é utilizado o multiplicador por α da figura 3.3, para fazer com que os componentes do vetor de entrada \vec{v}_1 sejam multiplicados, sucessivamente, por $1 + 0X$ (primeiros 28 dígitos), $1 + 2X$ (dígitos 29 a 56) e $1 + 3X$ (dígitos 57 a 81). O polinômio gerador é $X^3 - X - 1$.

A diferença entre este codificador e o utilizado nos códigos BCH é a presença do pré-multiplicador por $a + bX$. Como neste exemplo o termo em X^0 dos LC s é sempre 1, o multiplicador por α é introduzido como mostrado na figura 3.3. Todas as operações realizadas, incluindo as multiplicações por α , são realizadas Módulo $Z_{2^m} = q$. Neste exemplo, $m = 3$ e $q = 8$, e o par $\alpha_1^{(1)}, \alpha_0^{(1)}$ deve poder indicar multiplicações por 1 ($LC = 1 + 0X$), 2 ($LC = 1 + 2X$) e 3 ($LC = 1 + 3X$). Isto é feito, respectivamente, com $\alpha_1^{(1)}, \alpha_0^{(1)} = 00, 01$ e 11.

3.7.2 Decodificadores

Semelhantemente aos códigos BCH, a decodificação dos códigos de Nakamura pode ser implementada com facilidade. Após divisão do vetor palavra recebido pelo polinômio gerador, a

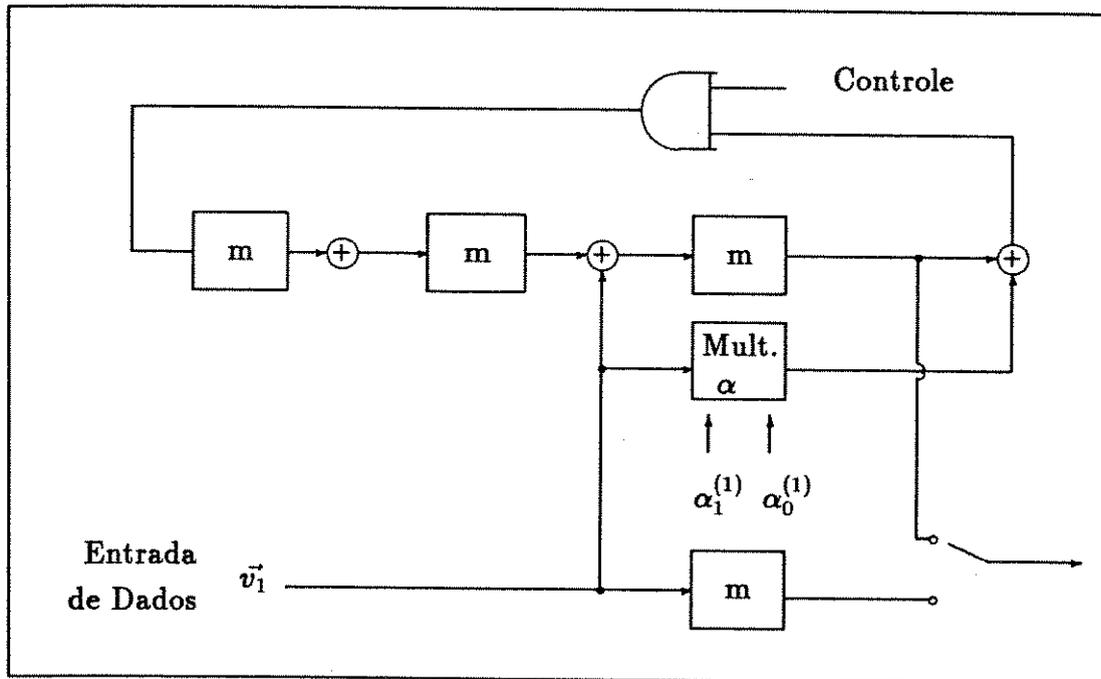


Figura 3.3: Codificador de Nakamura

síndrome obtida fornecerá o padrão de correção. O método pode ser por leitura de uma PROM ou decodificação recursiva, mas de qualquer maneira será necessário ter a palavra armazenada para correção da posição onde houve erro. A implementação de decodificadores de códigos de bloco [Clark] tem mostrado que são necessários registradores em número pelo menos igual a duas vezes a palavra processada, o que sugere que os códigos octais, por serem mais curtos, permitam projeto com menor número de portas (em qualquer caso) e de implementação mais simples (mesmo se for possível a confecção de circuito integrado dedicado). A comparação do desempenho de todos os códigos, cujo cálculo analítico é apresentado no Capítulo 4 e a simulação no Capítulo 5, vão fornecer mais dados para decidir pelo melhor procedimento de projeto.

3.8 Conclusão

Neste Capítulo foram apresentados alguns códigos possíveis para implementação no sistema rádio digital 64 QAM: códigos de Hamming Cíclicos (binários) e Códigos de Nakamura (quaternários e octais). Todos apresentam transparência à ambiguidade de fase e boa eficiência de taxa. Embora os códigos mais curtos apresentem implementações mais simples, é necessário comparar o desempenho esperado para cada um deles antes de que seja tomada a decisão sobre qual deve ser utilizado em um sistema implementado. Isto será feito nos capítulos seguintes.

Capítulo 4

CODIFICAÇÃO DE CANAL PARA SISTEMA RÁDIO DIGITAL 64 QAM

Neste capítulo são apresentadas alternativas sistêmicas de implementação de codificação de canal: é evidenciada a influência do mapeamento sobre o desempenho a ser obtido no sistema realizado, a partir de cálculos de probabilidade. São dados exemplos de sistemas binários, octais e quaternários- este último podendo ser implementado com códigos homogêneos (o mesmo código para todos os feixes de dígitos) ou mistos (com diferentes códigos nos diversos feixes).

4.1 Influência do Mapeamento na Probabilidade de Erro de Bit

Como visto no Capítulo 2, a métrica de mapeamento indica a probabilidade que um erro de sinal resulte em erro de dígito. Portanto, quanto menor a métrica, melhor será o desempenho de seu mapeamento em sistema sem codificação corretora de erros.

4.1.1 Mapeamentos sem Transparência à Ambiguidade de Fase

Se os quadrantes da constelação apresentarem simetria, (o que é adequado), o cálculo de métricas pode ser feito em apenas um dos quadrantes, pois será o mesmo para os demais. Isto se verifica nos exemplos apresentados neste trabalho.

Será convencionado que a posição da constelação indicada por um par de coordenadas é o sinal; símbolo é o conjunto de dígitos que ocupam aquela posição no mapeamento da constelação, que no sistema 64 QAM é composta de 6 bits; dígito é cada elemento que compõe o símbolo: em sistemas binários, um dígito corresponde a 1 bit, e em sistemas 2^m ários, o dígito é formado por m bits.

O cálculo de métricas dos mapeamentos MGRAY e MCDA (apresentados no Capítulo 2), é realizado a seguir, e indica que MGRAY possibilita a implementação de um sistema onde a probabilidade de erro de bit, dado que houve erro de sinal, é menos provável que a de outros mapeamentos que possam ser utilizados:

MCDA: Mapeamento para Conversão Analógico-Digital

Quando se calcula a distância entre símbolos da constelação e seus Vizinhos Mais Próximos e Vizinhos Próximos nota-se que existe uma simetria entre os quadrantes da constelação no mapeamento para conversão digital analógica. Por exemplo, supor o segundo quadrante:

000111	001111	010111	011111	100111
000110	001110	010110	011110	100110
000101	001101	010101	011101	100101
000100	001100	010100	011100	100100
000011	001011	010011	011011	100011

Como neste mapeamento não se supõe codificação e decodificação diferencial pode-se calcular a probabilidade de erro de bit na recepção em caso do desvio o sinal para um Vizinho Mais Próximo N_a e para um Vizinho Próximo N_b pela média da soma das probabilidades de erro em cada um dos dígitos separadamente. Por exemplo, supor o símbolo do segundo quadrante dado pelas coordenadas $(-5, +5) = 001110$. Caso este símbolo seja desviado devido a ruído no meio de transmissão, e seja recebido na posição de um Vizinho Mais Próximo, isto pode ocorrer em quatro possibilidades:

- $(-5, +7) = 001111$
- $(-5, +3) = 001101$
- $(-7, +5) = 000110$
- $(-3, +5) = 010110$

Se o ruído tiver magnitude maior e o desvio for para um Vizinho Próximo, há a possibilidade de receber outros quatro sinais:

- $(-7, +7) = 000111$
- $(-7, +3) = 000101$
- $(-3, +7) = 010111$
- $(-3, +3) = 010101$

Como a probabilidade de um símbolo ser desviado para seu Vizinho Mais Próximo é P_{S2} , para seu Vizinho Próximo é P_{S3} e não ser desviado é P_{S1} , pode-se calcular, para este sinal $(-5, +5)$, que a probabilidade de que seu primeiro dígito binário 0 seja recebido corretamente é dada por

$$Pc1_{MCDA} = P_0 = P_{S1} + 4 P_{S2} + 4 P_{S3} \quad (4.1)$$

Pois todos os símbolos de constelação, Vizinhos Próximos ou Mais Próximos tem o primeiro bit=0. Portanto a probabilidade de erro no primeiro bit do primeiro dígito é zero $Pe1_{MCDA} = 0$.

Para o segundo dígito 0 tem-se a probabilidade de erro de bit:

$$Pe2_{MCDA} = P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.2)$$

E a probabilidade de ser recebido corretamente:

$$Pc2_{MCDA} = P_{S1} + 3 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.3)$$

Igualmente, para o terceiro bit 1:

$$Pe3_{MCDA} = 2 P_{S2} + 4 P_{S3} \quad (4.4)$$

$$Pc3_{MCDA} = P_{S1} + 2 P_{S2} \quad (4.5)$$

Este procedimento é repetido para todos os dígitos (ou bits) de todos os sinais do segundo quadrante (os demais, sendo simétricos, apresentarão o mesmo resultado). A seguir é mostrado o cálculo realizado para o primeiro dígito, no segundo quadrante:

Tipo de Sinal	$Pc1_{MCDA}$	$Pe1_{MCDA}$
(-7, +7)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
(-7, +5)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
(-7, +3)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
(-7, +1)	$P_{S0} + 3P_{S1} + 2P_{S2}$	$P_{S2} + 2P_{S3}$
(-5, +7)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.00
(-5, +5)	$P_{S1} + 4P_{S2} + 4P_{S3}$	0.00
...

Calculando-se para cada um dos dígitos a média de todos os símbolos, têm-se

1. Primeiro Dígito:

$$Pc1_{MCDA} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \quad (4.6)$$

$$Pe1_{MCDA} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.7)$$

2. Segundo Dígito:

$$Pc2_{MCDA} = P_{S1} + 3.25 P_{S2} + 2.5 P_{S3} \quad (4.8)$$

$$Pe2_{MCDA} = 0.75 P_{S2} + 1.5 P_{S3} \quad (4.9)$$

3. Terceiro Dígito:

$$Pc3_{MCDA} = P_{S1} + 2.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.10)$$

$$Pe3_{MCDA} = 1.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \quad (4.11)$$

4. Quarto Dígito:

$$Pc4_{MCDA} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \quad (4.12)$$

$$Pe4_{MCDA} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.13)$$

5. Quinto Dígito:

$$Pc5_{MCDA} = P_{S1} + 3.25 P_{S2} + 2.5 P_{S3} \quad (4.14)$$

$$Pe5_{MCDA} = 0.75 P_{S2} + 1.5 P_{S3} \quad (4.15)$$

6. Sexto Dígito:

$$Pc6_{MCDA} = P_{S1} + 2.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.16)$$

$$Pe6_{MCDA} = 1.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \quad (4.17)$$

Em geral, para qualquer mapeamento MAP de um sistema 2^mário de $J = 6/m$ feixes, pode-se calcular a média de dígitos corretos ou errados sem se considerar codificação de canal ou codificação diferencial. Têm-se:

$$Pc_{MAP} = \frac{1}{J} \sum_{h=1}^J Pch_{MAP} \quad (4.18)$$

$$Pe_{MAP} = \frac{1}{J} \sum_{h=1}^J Peh_{MAP} \quad (4.19)$$

Para o mapeamento MCDA:

$$Pc_{MCDA} \simeq P_{S1} + 3.083 P_{S2} + 2.167 P_{S3} \quad (4.20)$$

$$Pe_{MCDA} \simeq 0.9167 P_{S2} + 2.167 P_{S3}, \quad (4.21)$$

MGRAY: Mapeamento de Gray

Da mesma forma que realizado para MCDA, têm-se, para MGRAY, as seguintes probabilidades de erro por dígito:

1. Primeiro Dígito:

$$Pc1_{MGRAY} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \quad (4.22)$$

$$Pe1_{MGRAY} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.23)$$

2. Segundo Dígito:

$$Pc2_{MGRAY} = P_{S1} + 3.5 P_{S2} + 3.0 P_{S3} \quad (4.24)$$

$$Pe2_{MGRAY} = 0.5 P_{S2} + 1.0 P_{S3} \quad (4.25)$$

3. Terceiro Dígito:

$$Pc3_{MGRAY} = P_{S1} + 3.0 P_{S2} + 2.0 P_{S3} \quad (4.26)$$

$$Pe3_{MGRAY} = 1.0 P_{S2} + 2.0 P_{S3} \quad (4.27)$$

4. Quarto Dígito:

$$Pc4_{MGRAY} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \quad (4.28)$$

$$Pe4_{MGRAY} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.29)$$

5. Quinto Dígito:

$$Pc5_{MGRAY} = P_{S1} + 3.5 P_{S2} + 3.0 P_{S3} \quad (4.30)$$

$$Pe5_{MGRAY} = 0.5 P_{S2} + 1.0 P_{S3} \quad (4.31)$$

6. Sexto Dígito:

$$Pc6_{MGRAY} = P_{S1} + 3.0 P_{S2} + 2.0 P_{S3} \quad (4.32)$$

$$Pe6_{MGRAY} = 1.0 P_{S2} + 2.0 P_{S3} \quad (4.33)$$

Portanto, têm-se, para o mapeamento MGRAY:

$$Pc_{MGRAY} \simeq P_{S1} + 3.417 P_{S2} + 2.83 P_{S3} \quad (4.34)$$

$$Pe_{MGRAY} \simeq 0.583 P_{S2} + 1.167 P_{S3}, \quad (4.35)$$

001000	001011	000111	000100	\bar{Q}	101100	101101	101001	101000	
001001	001010	000110	000101		101111	101110	101010	101011	
001101	001110	000010	000001		100011	100010	100110	100111	
001100	001111	000011	000000		100000	100001	100101	100100	\bar{I}
010100	010101	010001	010000		110000	110011	111111	111100	
010111	010110	010010	010011		110001	110010	111110	111101	
011011	011010	011110	011111		110101	110110	111010	111001	
011000	011001	011101	011100		110100	110111	111011	111000	

Figura 4.1: MB1: Mapeamento Binário I

4.1.2 Mapeamento a Ser Adotado: Requisitos e Escolha

O mapeamento de símbolos na constelação deve atender, além das condições já apresentadas no Capítulo 2- que garantem transparência à ambiguidade de fase pelo decodificador de canal) os seguintes requisitos [CPqD 2] [DSP] [SBT]:

- Os sinais Vizinhos Mais Próximos devem guardar entre si distância dentro da capacidade corretora do código (o conjunto de sinais equidistantes e mais próximos do sinal considerado).
- Através da codificação diferencial deve permitir recuperar perfeitamente a informação transmitida.

A condição de transparência à ambiguidade de fase não é atendida pelos mapeamentos MGRAY (Figura 2.9) e MCDA (Figura 2.8). Para que um mapeamento permita esta possibilidade, deve ter distribuição dos símbolos de forma que seja possível definir uma equação que descreva a transformação de cada dígito de todos os símbolos quando sofrem rotação de 90 graus neste mapeamento. Tal condição causará, fatalmente, um aumento da métrica do mapeamento em relação ao valor observado para MGRAY, pois é desejável que a máxima semelhança de símbolos ocorra entre os de coordenadas correspondentes, em cada quadrante, como por exemplo $(-7,-7), (-7,+7), (+7,-7)$ e $(+7,+7)$, e não necessariamente entre símbolos Vizinhos Mais Próximos.

As Figuras 4.1 e 4.2 mostram dois mapeamentos transparentes à ambiguidade de fase que podem ser utilizados no sistema proposto neste trabalho, denominados MB1 e MB2. Para cada bit das constelações MB1 e MB2 foi feito o cálculo da média da probabilidade de cada bit de cada símbolo ter valor diferente do seus Vizinhos Mais Próximos [França 2]. Símbolos nas extremidades da constelação são considerados Vizinhos Mais Próximos de si mesmos nestas extremidades, e, portanto, cada símbolo, sem exceção, tem quatro Vizinhos Mais Próximos. Valores de M_i para estes Mapeamentos:

001100	001110	000110	000100	\vec{Q}	101000	101001	101101	101100	
001101	001111	000111	000101		101010	101011	101111	101110	
001001	001011	000011	000001		100010	100011	100111	100110	
001000	001010	000010	000000		100000	100001	100101	100100	\vec{I}
010100	010101	010001	010000		110000	110010	111010	111000	
010110	010111	010011	010010		110001	110011	111011	111001	
011110	011111	011011	011010		110101	110111	111111	111101	
011100	011101	011001	011000		110100	110110	111110	111100	

Figura 4.2: Mapeamento Binário Transparente à Ambiguidade de Fase (MB2)

Característica		MB1- Figura 4.1		MB2- Figura 4.2	
Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem	No de Eventos	Porcentagem
1	1	16	$M_1 = 0.0625$	16	$M_1 = 0.0625$
2	1	16	$M_2 = 0.0625$	16	$M_2 = 0.0625$
3	1	48	$M_3 = 0.1875$	48	$M_3 = 0.1875$
4	1	64	$M_4 = 0.2500$	48	$M_4 = 0.1875$
5	1	80	$M_5 = 0.3125$	80	$M_5 = 0.3125$
6	1	128	$M_6 = 0.5000$	80	$M_6 = 0.3125$
Média	1	-	$P = 0.2292$	-	$P = 0.1875$

Tabela 4.1: Comparação Entre Mapeamentos MB1 e MB2

A probabilidade de desvio do sinal na constelação é função apenas da relação sinal ruído, dada pela equação 2.5. A probabilidade do desvio de sinal causar erro de dígito é dada pela Métrica de Mapeamento M_i . A comparação dos valores obtidos para MB1 e MB2 sugere o mapeamento da Figura 4.2 como mais interessante, pois oferece menor probabilidade média de alteração de dígito de símbolo em caso de desvio do sinal na constelação.

A condição, de dígitos de símbolos Vizinhos Mais Próximos terem entre si distância dentro da capacidade corretora do código, é atendida, pois códigos binários corrigem erros de magnitude 1.

O sistema de codificação diferencial apresentado no Capítulo 2 para sistemas binários permite a recuperação da informação transmitida no caso de utilização de qualquer um dos dois mapeamentos MB1 ou MB2.

4.2 Projeto de Sistemas de Codificação Binários

Nesta seção é descrito um exemplo de sistema de codificação de canal utilizando código binário. Este é o sistema mais simples e mais difundido até o presente. É utilizado um código corretor de erros de baixa redundância e o mapeamento proposto é transparente à ambiguidade de fase, utilizando, portanto, codificação diferencial. A generalização deste sistema permite projetar

códigos 2^mários.

4.2.1 Parâmetros do Sistema Binário

Um sistema 64 QAM tem 6 bits por posição na constelação o que, no caso de códigos binários, $m = 1$ e $J = 6/1 = 6$ dígitos (= bits). Neste caso, os seis feixes binários são codificados independentemente utilizando-se códigos de comprimento N dígitos, dos quais K são de informação e $N - K$ de paridade.

O cômputo das probabilidades M_i (Métrica de Mapeamento) permite prever o desempenho dos diferentes mapeamentos: quanto menor \overline{M}_i , melhor o desempenho do código. Como exemplo, pode-se prever que um sistema que utilize o mapeamento MB2 terá um desempenho superior a um que utilize MB1.

A caracterização do código, com a determinação do polinômio gerador torna possível determinar, estatisticamente, o seu desempenho. A seguir são apresentados três mapeamentos binários, com respectivas métricas, codificações diferenciais e cálculos de probabilidade de erro de bit.

4.2.2 Mapeamentos, Métrica e Codificação Diferencial

A seguir, são apresentados mapeamentos que podem ser utilizados nos sistemas propostos neste trabalho. Todos apresentam, portanto, transparência à Ambiguidade de Fase. A disposição dos símbolos no mesmo vai determinar uma métrica. Além disso, cada mapeamento requer uma codificação diferencial própria:

MB1: Mapeamento Binário I

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.1

2. Métricas:

- Por Dígito ou Bit:

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	1	16	0.0625
2	1	16	0.6250
3	1	48	0.1875
4	1	64	0.2500
5	1	80	0.3125
6	1	128	0.5000

Tabela 4.2: Métricas Por Dígito (MB1)

- Média: 0.229167

3. Eliminação das Ambiguidades de Fase:

Os bits três a seis deste mapeamento se repetem em todos os quadrantes quando é feita rotação de fase de 90 graus, para qualquer símbolo deste mapeamento. Tais bits são, portanto, transparentes à ambiguidade de fase. O primeiro e segundo bits, no entanto,

podem ter seu valor alterado em caso de rotação e portanto necessitam ser codificados diferencialmente para eliminação de ambiguidades na recepção.

- A rotação de 90 graus do sinal fornece a sequência $B_n^{(1)}, B_n^{(2)} = 00, 01, 11, 10$ em valores binários
 - A codificação diferencial é dada pelas equações 2.30 e 2.31, para o primeiro e segundo bits do dígito, respectivamente.
 - Decodificação diferencial: ver equações 2.32 para o primeiro bit do dígito e 2.33 para o segundo.

4. Probabilidade de Erro de Bit

A constelação do mapeamento MB1 apresenta simetria entre seus quadrantes, que pode ser constatada quando se calcula a métrica de todos os 64 símbolos. Portanto, pode-se calcular a probabilidade média de erro de dígito pelo segundo quadrante, por exemplo:

001000	001011	000111	000100	101100
001001	001010	000110	000101	101111
001101	001110	000010	000001	100011
001100	001111	000011	000000	100000
010100	010101	010001	010000	110000

Como realizado para o mapeamento MGRAY e MCDA, calcula-se a probabilidade de um sinal ser recebido corretamente ou com erro dado que pode ou não ser desviado para a posição de um Vizinho (ou seja, pode ser recebido na sua posição original, na de um Vizinho Próximo ou Vizinho Mais Próximo). Para o primeiro dígito, têm-se:

Tipo de Sinal	$Pc1_{MB1}$	$Pe1_{MB1}$
$(-7, +7)$	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
$(-7, +5)$	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
$(-7, +3)$	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
$(-7, +1)$	$P_{S0} + 3P_{S1} + 2P_{S2}$	$P_{S2} + 2P_{S3}$
$(-5, +7)$	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.00
$(-5, +5)$	$P_{S1} + 4P_{S2} + 4P_{S3}$	0.00
...

Para calcular a probabilidade de erro de bit sem levar em conta a codificação diferencial, é feito o cálculo de Pc e Pe para cada um dos dígitos, fazendo-se a média de todos os símbolos. Desta forma, obtêm-se:

(a) Primeiro Dígito:

$$Pc1_{MB1} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \tag{4.36}$$

$$Pe1_{MB1} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \tag{4.37}$$

(b) Segundo Dígito:

$$Pc2_{MB1} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \quad (4.38)$$

$$Pe2_{MB1} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.39)$$

(c) Terceiro Dígito:

$$Pc3_{MB1} = P_{S1} + 3.25 P_{S2} + 2.625 P_{S3} \quad (4.40)$$

$$Pe3_{MB1} = 0.75 P_{S2} + 1.375 P_{S3} \quad (4.41)$$

(d) Quarto Dígito:

$$Pc4_{MB1} = P_{S1} + 3 P_{S2} + 2.5 P_{S3} \quad (4.42)$$

$$Pe4_{MB1} = P_{S2} + 1.5 P_{S3} \quad (4.43)$$

(e) Quinto Dígito:

$$Pc5_{MB1} = P_{S1} + 2.75 P_{S2} + 1.75 P_{S3} \quad (4.44)$$

$$Pe5_{MB1} = 1.25 P_{S2} + 2.25 P_{S3} \quad (4.45)$$

(f) Sexto Dígito:

$$Pc6_{MB1} = P_{S1} + 2 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.46)$$

$$Pe6_{MB1} = 2 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.47)$$

Utilizando as equações 4.19 e 4.18 pode-se calcular os valores médios de probabilidade de erro ou acerto de dígito de um sistema de mapeamento MB1, não sujeito à codificação de canal ou diferencial.

MB2: Mapeamento Binário II

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.2 [Elias]

2. Métricas:

- Por Dígito ou Bit:

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	1	16	0.0625
2	1	16	0.0625
3	1	48	0.1875
4	1	48	0.1875
5	1	80	0.3125
6	1	80	0.3125

Tabela 4.3: Métricas Por Dígito (MB2)

- Média: 0.1875

3. Eliminação das Ambiguidades de Fase:

A comparação entre MB1 e MB2 mostra que o primeiro e segundo bits são idênticos para ambos os mapeamentos. A codificação e decodificação diferencial de ambos é a mesma.

4. Probabilidade de Erro de Bit

Devido à sua simetria, a constelação, pode ser analisada a partir de um único quadrante e dos tipos de sinais que a formam. Como exemplo, observar o segundo quadrante:

001100	001110	000110	000100	101000
001101	001111	000111	000101	101010
001001	001011	000011	000001	100010
001000	001010	000010	000000	100000
010100	010101	010001	010000	110000

Como feito para MB1, são feitos cálculos de probabilidade de erro de bit, separadamente, de dígitos sujeitos à codificação diferencial ou não. Para o primeiro bit do segundo quadrante (como nos outros três mapeamentos, simétrico aos demais quadrantes), são obtidos os seguintes resultados:

Tipo de Sinal	$P_{c1_{MB2}}$	$P_{e1_{MB2}}$
(-7, +7)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
(-7, +5)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
(-7, +3)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.0
(-7, +1)	$P_{S0} + 3P_{S1} + 2P_{S2}$	$P_{S2} + 2P_{S3}$
(-5, +7)	$P_{S0} + 4P_{S1} + 4P_{S2}$	0.00
(-5, +5)	$P_{S1} + 4P_{S2} + 4P_{S3}$	0.00
...

Fazendo o mesmo cálculo realizado para os outros três mapeamentos binários, tem-se:

(a) Primeiro Dígito:

$$P_{c1_{MB2}} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \tag{4.48}$$

$$P_{e1_{MB2}} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \tag{4.49}$$

(b) Segundo Dígito:

$$P_{c2_{MB2}} = P_{S1} + 3.75 P_{S2} + 3.5 P_{S3} \tag{4.50}$$

$$P_{e2_{MB2}} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \tag{4.51}$$

(c) Terceiro Dígito:

$$P_{c3_{MB2}} = P_{S1} + 3.25 P_{S2} + 2.625 P_{S3} \tag{4.52}$$

$$P_{e3_{MB2}} = 0.75 P_{S2} + 1.375 P_{S3} \tag{4.53}$$

(d) Quarto Dígito:

$$Pc4_{MB2} = P_{S1} + 3.25 P_{S2} + 2.625 P_{S3} \quad (4.54)$$

$$Pe4_{MB2} = 0.75 P_{S2} + 1.375 P_{S3} \quad (4.55)$$

(e) Quinto Dígito:

$$Pc5_{MB2} = P_{S1} + 2.75 P_{S2} + 1.75 P_{S3} \quad (4.56)$$

$$Pe5_{MB2} = 1.25 P_{S2} + 2.25 P_{S3} \quad (4.57)$$

(f) Sexto Dígito:

$$Pc6_{MB2} = P_{S1} + 2.75 P_{S2} + 1.75 P_{S3} \quad (4.58)$$

$$Pe6_{MB2} = 1.25 P_{S2} + 2.25 P_{S3} \quad (4.59)$$

Da mesma forma que realizado para MCDA e MB1 pode-se calcular as taxas de erro ou acerto de bit do sistema (suposto sem codificação de canal e sem codificação diferencial) através das equações 4.18 e 4.19.

4.2.3 Probabilidade de Erro de Bit de Sistema Binário Não Codificado

O cálculo desta probabilidade pode ser feito a partir da métrica do mapeamento utilizado e do cálculo do aumento da taxa de erro proporcionada pela decodificação diferencial, como se segue:

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MB1

Como foi visto anteriormente, o mapeamento MB1 apresenta métrica de valor 0.229267, e sua codificação diferencial é feita somente nos dois primeiros dígitos (ou bits). No caso de haver um desvio de sinal devido a ruído, haverá erro em pelo menos uma das posições de bit 3, 4, 5 ou 6. Mas a partir do sinal seguinte, não havendo outro desvio, tais bits estarão corretos.

Porém, caso ocorra erro no primeiro ou segundo bits (o desvio ocasionar mudança de quadrante), a decodificação diferencial fará com que esse erro atinja também o sinal seguinte, cuja fase é calculada a partir da fase do sinal anterior (onde houve erro). Qualquer erro no primeiro ou segundo bits será, portanto, duplicado, e a taxa de erro de bit de um sistema binário que codifique diferencialmente os dois primeiros bits para determinação de quadrante deve refletir o fato de 32 entre os 256 desvios de sinal possíveis desta constelação causarem mudança de quadrante. Além disso, pelo mapeamento proposto, a mudança de quadrante ocasiona, por si, erro de 1 bit. A decodificação diferencial de um sinal que devido a erro foi recebido em outro quadrante pode causar um dos seguintes efeitos no primeiro e segundo bits do símbolo (ver equações 2.32 e 2.33):

Bits Transmitidos	Bits Recebidos	Erros RX	Erros Após Dec. Dif.
00	01 ou 10	1	2
01	11 ou 00	1	2
11	10 ou 01	1	2
10	00 ou 11	1	2

Tabela 4.4: Aumento de Erros de Bit devido à Decodificação Diferencial (MB1 sem FEC)

O efeito será o incremento de 2 erros (além do já computado) dependendo do primeiro e segundo bits recebidos no símbolo anterior. Observar, ainda que se houver erro nos dois bits (de 00 para 11, por exemplo) também haverá duplicação do número de bits errados. Portanto, em cada uma das 32 das 256 possibilidades de desvio de sinal para seu Vizinho Mais Próximo onde haja erro de primeiro ou segundo bits, esse erro será duplicado após a decodificação diferencial:

$$Incr_{dd} = 1 + \frac{2}{6} \times \frac{32 \times 2}{256} \simeq 1.083 \quad (4.60)$$

Este resultado é válido para todos os mapeamentos que têm esta mesma codificação diferencial. Porém, para outros mapeamentos, pode-se utilizar o caso geral:

$$Incr_{dd} = 1 + \frac{1}{J} \times \frac{\sum_{i=1}^{bdd} nde^{(bdd)} \times nbe^{(bdd)}}{256} \quad (4.61)$$

Onde bdd é o número de bits que sofrem decodificação diferencial, nde é o número de desvios que causam erro de dígito e nbe é o número total de bits errados devido à esta operação.

Se for utilizado o mapeamento MB1, este aumento de taxa ainda vai causar um aumento de taxa de erro proporcional ao quociente entre as métricas de MB1 e de MGRAY:

$$M_{eq} = \frac{M_{MAPi}}{M_{MGRAY}} = \frac{0.2292}{0.14583} \simeq 1.57 \quad (4.62)$$

na Probabilidade de Erro de Bit dada pela equação 2.7, além do valor calculado para o aumento de taxa de erro causado por codificação diferencial para este mapeamento, dado pela equação 4.60:

$$TEB_{MB1} = 1.083 \times \frac{0.2292}{0.14583} P_{bit} \simeq 1.70 P_{bit} \simeq 0.50 \times Erfc \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.63)$$

A utilização do Mapeamento MB1, embora permita transparência à ambiguidade de fase, traz um aumento na taxa de erro de 70% em relação ao valor calculado para mapeamento com código de Gray sem esta característica.

Este resultado permite generalizar este cálculo para outros sistemas: A taxa de erro de bit de um sistema de mapeamento MAP, com incremento do número de erros devido à codificação diferencial dado por $Incr_{dd}$ (equação 4.61 e cuja métrica é M_{eq} vezes maior que a métrica do mapeamento ideal MGRAY) é dada por

$$TEB_{MAP} = Incr_{dd} \times M_{eq} \times P_{bit} \quad (4.64)$$

Para sistemas não binários, M_{eq} é métrica equivalente, calculada a partir das métricas por magnitude. Isto será revisto com mais detalhe na próxima seção.

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MB2

Analogamente, calcula-se para MB2 a taxa de erro de bit do sistema sem codificação de canal, com codificação diferencial (a mesma de MB1):

$$TEB_{MB2} = 1.083 \times \frac{0.1875}{0.14583} P_{bit} \simeq 1.37 P_{bit} \simeq 0.41 \times Erfc \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.65)$$

O mapeamento MB2 permite transparência à ambiguidade de fase e resulta num aumento na taxa de erro de 34%, sendo, portanto, mais eficiente que MB1. O desempenho do sistema está diretamente relacionado com a métrica calculada para seu mapeamento.

4.2.4 Sistema Binário Codificado- CB (255,247)

Supor um sistema binário codificado com código de Hamming cíclico definido no Capítulo 3. Para calcular a probabilidade de erro de bit deste sistema, supor que se a capacidade do código for ultrapassada (que para o código CB (255,247) definido no Capítulo 3 significa apresentar mais de um erro em qualquer h dos 6 feixes de dígitos binários), será introduzido um erro de bit no feixe (ou feixes) onde ocorrer este evento. Este erro é resultado da correção do decodificador, programado para identificar e corrigir apenas um erro de feixe por palavra.

Seja Δh_{MAP} o número esperado de bits errados dividido pelo número esperado de dígitos errados, na posição correspondente ao h ésimo feixe de um sistema binário de mapeamento MAP . Como cada dígito corresponde a um bit (sistema binário), têm-se:

$$\Delta h_{MAP} = \frac{P_e h_{MAP}}{P_e h_{MAP}} = 1 \quad (4.66)$$

Ocorrerá erro após a decodificação de canal se houver mais de um erro em qualquer um dos 6 feixes da palavra recebida:

- Pode-se calcular a probabilidade de haver $[2, \dots, i]$ erros em cada um dos h feixes do sistema. Se houver i posições com erro, $(n - i)$ posições estarão corretas (n é o comprimento da palavra). A probabilidade de erro ou acerto de dígito já foi calculada anteriormente.
- A multiplicação do número de dígitos errados (i) pela probabilidade de haver i erros no feixe fornecerá a probabilidade de erro de dígito. No caso binário, como um dígito tem um bit, a probabilidade de erro de dígito é a probabilidade de erro de bit. No sistema 2^m ário, no entanto, calcula-se Δ (média de bits errados por dígito errado).

- Cada vez que a palavra apresentar síndrome não nula, haverá correção de erros. Se tiver havido mais de um erro, ultrapassando portanto a capacidade corretora do código, será feita "correção" da posição correspondente à síndrome encontrada (correção indevida), aumentando ainda mais o número de erros de um fator mf , que no caso binário também é 1.
- Conclui-se, portanto, que verificada a condição de mais de um erro numa palavra, a taxa de erro de bit será aumentada de $(\Delta h_{MAP} \times i) + 1$. Esta situação pode acontecer para cada uma das combinações de n dígitos i a i da palavra. Portanto, têm-se:

$$Peh_{MAP} = \frac{1}{n \log_2 m} \left(\sum_{i=2}^n (\Delta h_{MAP} i + mf) \binom{n}{i} Pch_{MAP}^{n-i} (1 - Pch_{MAP})^i \right) \quad (4.67)$$

Como

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} Pch_{MAP}^{n-i} (1 - Pch_{MAP})^i = 1 \quad e \quad (4.68)$$

$$\sum_{i=0}^n (i \binom{n}{i}) Pch_{MAP}^{n-i} (1 - Pch_{MAP})^i = n(1 - Pch_{MAP}), \quad (4.69)$$

a equação 4.67 pode ser escrita como

$$\frac{1}{n \log_2 m} (\Delta h \times n(1 - Pch_{MAP})(1 - Pch_{MAP}^{(n-1)}) + mf(1 - Pch_{MAP}^n - n \times Pch_{MAP}^{(n-1)})) \quad (4.70)$$

Para o caso binário $\log_2 m = \log_2 2 = 1$, $mf = 1$ e $\Delta h = 1$. Portanto

$$\begin{aligned} Peh_{MAP} &= \frac{1}{n} (1 - Pch_{MAP}^n) + (1 - Pch_{MAP})(1 - 2 Pch_{MAP}^{(n-1)}) = \\ &= \frac{1}{255} (1 - Pch_{MAP}^{255}) + (1 - Pch_{MAP})(1 - 2 Pch_{MAP}^{254}) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Código CB (255,247) em Sistema Sem Codificação Diferencial

A equação 4.71 fornece a probabilidade de taxa de erro para cada um dos h feixes de um sistema de codificação binário. Para efeito de comparação, são calculadas as taxas de erro de bit de dois sistemas que não permitem codificação diferencial, SCDA e SGRAY, utilizando, respectivamente, os mapeamentos MCDA e MGRAY:

$$P_{eSCDA} = \frac{1}{6} \left(\sum_{h=1}^6 \left(\frac{1}{255} (1 - Pch_{MCDA}^{255}) + (1 - Pch_{MCDA})(1 - 2 Pch_{MCDA}^{254}) \right) \right) \quad (4.72)$$

$$P_{eSGRAY} = \frac{1}{6} \left(\sum_{h=1}^6 \left(\frac{1}{255} (1 - Pch_{MGRAY}^{255}) + (1 - Pch_{MGRAY})(1 - 2 Pch_{MGRAY}^{254}) \right) \right) \quad (4.73)$$

A seguir, são calculadas as probabilidades de erro de bit dos sistemas binários, denotados por S_i . Todos utilizam o mesmo Código de Hamming Cíclico CB (255,247):

Sistema SB1: Código CB (255,247) e Mapeamento MB1

Se não fosse levada em conta a codificação diferencial, seria obtida para o sistema SB1 a seguinte taxa de erro (Equação 4.71):

$$P_{e_{dSB1}} = \frac{1}{6} \left(\sum_{h=1}^6 \left(\frac{1}{255} (1 - Pch_{MB1}^{255}) + (1 - Pch_{MB1}) (1 - 2 Pch_{MB1}^{254}) \right) \right) \quad (4.74)$$

como este sistema apresenta codificação diferencial nos dois primeiros feixes, o aumento da taxa de erro é o mesmo verificado para o sistema sem codificação de canal:

$$P_{e_{SB1}} = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{h=1}^2 \frac{1}{255} \left((1 - Pch_{MB1}^{255}) + (1 - Pch_{MB1}) (1 - 2 Pch_{MB1}^{254}) \right) + \sum_{h=3}^6 \left(\frac{1}{255} (1 - Pch_{MB1}^{255}) + (1 - Pch_{MB1}) (1 - 2 Pch_{MB1}^{254}) \right) \right) \quad (4.75)$$

Sistema SB2: Código CB (255,247) e Mapeamento MB2

Analogamente ao calculado para SB1, no sistema SB2 é esperada a seguinte taxa de erro sem codificação diferencial:

$$P_{e_{dSB2}} = \frac{1}{6} \left(\sum_{h=1}^6 \left(\frac{1}{255} (1 - Pch_{MB2}^{255}) + (1 - Pch_{MB2}) (1 - 2 Pch_{MB2}^{254}) \right) \right) \quad (4.76)$$

Com a codificação diferencial nos dois primeiros feixes, têm-se:

$$P_{e_{SB2}} = \frac{1}{6} \left(2 \sum_{h=1}^2 \left(\frac{1}{255} \left((1 - Pch_{MB2}^{255}) + (1 - Pch_{MB2}) (1 - 2 Pch_{MB2}^{254}) \right) \right) + \sum_{h=3}^6 \left(\frac{1}{255} \left((1 - Pch_{MB2}^{255}) + (1 - Pch_{MB2}) (1 - 2 Pch_{MB2}^{254}) \right) \right) \right) \quad (4.77)$$

4.2.5 Processamento de Informação Num Sistema com Código Binário

A seguir é descrito um procedimento para simular o desempenho de um sistema binário que utiliza código CB (255,247) e mapeamento MB2. Este procedimento será generalizado para outros sistemas:

Tráfego da Informação em Condições Ideais

Para simular o tráfego desta informação em um meio que não apresenta ruído (excelentes condições de transmissão). A informação transmitida sofre as seguintes operações:

1. Transmissão:

- (a) Codificação Diferencial
- (b) Codificação de Canal: Multiplicação de cada Vetor Palavra binário pelo Polinômio Gerador do Código
- (c) Mapeamento para Conversão Digital analógica
- (d) Transmissão do Sinal analógico

2. Recepção:

- (a) Recepção do Sinal analógico
- (b) Mapeamento do Sinal em Símbolos da Constelação
- (c) Decodificação Corretora de Erros. Cada um dos vetores palavra binários é multiplicado pela matriz verificação de paridade. Caso o resultado não seja nulo, proceder à correção como determinado pela Tabela 3.2.
- (d) Decodificação Diferencial, com eliminação das ambiguidades de fase.

Tráfego da Informação em Meio Sujeito a Ruído

Para simular o efeito do ruído no canal, é necessário incluir mais algumas operações neste algoritmo:

1. Deve-se associar a cada símbolo de seis bits um sinal na constelação 64 QAM. Este sinal, como se sabe, é analógico, e sua posição deve ser determinada pelas coordenadas (\vec{I}, \vec{Q}) .
2. Nesta simulação a magnitude do ruído deverá ser uma das variáveis de entrada, de maneira que o programa possa simular o desempenho do sistema para uma gama de valores de Relação Sinal/Ruído. Nesta simulação será suposto ruído de distribuição gaussiana, com expressão dada no Capítulo 2.

O efeito do ruído no sinal será de deslocar o ponto da constelação no sentido horizontal e vertical. Eventualmente, a posição do ponto poderá extrapolar os limites do sinal original, causando erro. Notar que se este deslocamento for para um dos Vizinhos mais próximos (horizontais ou verticais) do ponto original a capacidade do código permitirá a correção deste símbolo, fazendo a correção de seus dígitos (ou bits), individualmente, desde que não ocorra mais nenhum erro nesta mesma palavra, no mesmo feixe binário em questão.

3. Neste exemplo tem-se um sistema transparente à ambiguidade de fase. Para que se possa simular esta propriedade, deve-se incluir no algoritmo uma variável de entrada, que defina a fase inicial da recepção. Evidentemente, o cálculo de taxa de erro deve tender para o mesmo limite, qualquer que seja a fase inicial, para um grande número de amostras.

4. Para garantir que os dados utilizados não sejam um caso particular neste sistema é conveniente fazer geração de dados de simulação de forma aleatória. Utilizou-se também distribuição gaussiana para gerar estes dados.
5. Para comparação de desempenho é necessário fazer o cômputo de erros a cada fase da decodificação. O cálculo de taxa de erro final pode ser feito não importando a fase de referência do receptor, mas para cálculo da taxa de erro sem codificação e taxa de erro antes do decodificador diferencial é preciso supor fase de referência do receptor igual à do transmissor.

Sequência de Operações do Processamento de Uma Palavra

A partir do exposto acima, conclui-se que o algoritmo do programa de simulação deve conter os seguintes procedimentos, nesta ordem:

1. Geração de palavras de comprimento $N = 247$, de seis bits por posição, de forma aleatória, simulando entrada de dados já separados em blocos.
2. Codificação Diferencial destes dígitos binários.
3. Codificação Corretora de Erros: Multiplicação de cada Vetor Palavra binário pelo Polinômio Gerador do Código
4. Mapeamento para Conversão Digital analógica
5. Transformação do Símbolo de Seis Bits em Sinal analógico
6. A posição do sinal analógico é somada a um vetor de direção e magnitude aleatórios (distribuição gaussiana, em função da relação Sinal/ Ruído de Entrada), simulando ruído AWGN e fornecendo um novo sinal para ser entregue ao receptor.
7. Transformação do Sinal analógico em Símbolo de Seis Bits
8. Mapeamento do Sinal em Símbolos da Constelação
9. Caso a fase de referência seja zero pode-se calcular a taxa de erro de bit sem codificação.
10. Decodificação Corretora de Erros. Cada um dos vetores palavra binários é multiplicado pela matriz verificação de paridade. Caso o resultado não seja nulo, proceder à correção como descrito na Tabela de Síndromes.
11. Caso a fase de referência seja zero pode-se calcular a taxa de erro de bit após a decodificação, sem o acréscimo de erros que vai ocorrer na decodificação diferencial.
12. Decodificação Diferencial.
13. Qualquer que tenha sido a fase de referência, pode-se calcular a taxa de erro de bit total do sistema. Embora o primeiro símbolo recebido possa apresentar até dois erros de bit caso a referência inicial não seja a mesma, esta diferença vai se tornar desprezível para o cálculo de taxa de erro de um grande número de palavras.

Dados de entrada para o Processamento

Para viabilizar a simulação deve-se fornecer:

1. Matriz Geradora ou de Verificação de Paridade
2. Tabela de Síndromes
3. Mapeamento Utilizado
4. Relação Sinal/Ruído
5. Fase Inicial
6. Número de Iterações desejadas
7. Quantas palavras calcular em cada iteração

4.2.6 Exemplo de sequência de Operações para Processamento

Para ilustrar o funcionamento do sistema é descrita a sequência de operações de transformação da informação quando trafega no mesmo. Para facilitar a compreensão a palavra a ser codificada é suposta formada somente de zeros, exceto uma posição em cada um dos seis feixes: a sétima do primeiro, a sexta do segundo, a quinta do terceiro, a quarta do quarto, a terceira do quinto e a segunda posição do sexto feixe:

Processamento de Uma Palavra Num Sistema com Código Binário

Para ilustrar o procedimento de simulação, considerar o processamento de uma palavra de 247 símbolos binários em seis feixes para ser transmitida num canal codificado com sistema binário, homogêneo, de mapeamento na constelação MB2, utilizando decodificação diferencial após decodificação de canal com o código cíclico CB1 (Figura 2.17, onde $J = 6$).

Transmissão

1. Supor a seguinte palavra binária de 247 símbolos de 6 bits:

$$\vec{v} = 000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 100000, 000000, \dots, 000000$$

2. Fazendo-se o processamento de Codificação Diferencial, dos dois primeiros bits como descrito na Seção 4.2.2, e supondo que o conteúdo inicial das memórias $B_{n-1}^{(1)}$ e $B_{n-1}^{(2)}$ é zero, obtêm-se o vetor de 247 símbolos de 6 bits:

$$\vec{v} = 000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 000000, 000000, \dots, 000000$$

Notar que o sexto símbolo de 6 bits, originalmente 100000 foi alterado para 000000 em consequência da codificação diferencial, como determina a equação 2.30.

3. Codifica-se então o vetor, multiplicando-o pela matriz Geradora definida pela equação 3.12. Obtêm-se então o vetor de 255 símbolos de 6 bits:

$$\begin{aligned} \vec{v} = & 000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 000000, 000000, \dots \\ & \dots, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, \dots \\ & \dots, 000000, 010001, 000011, 000110, 001101, 011010, 010100, 001000, 010000 \end{aligned}$$

4. Estes símbolos são mapeados para transmissão, e após a conversão digital/analógica, têm-se a sequência de 255 sinais da constelação correspondentes:

$$\begin{aligned} Pos_c = & (-1, +1), (-1, +3), (-3, +1), (-1, +7), (-7, +1), (-1, -1), (-1, +1), (-1, +1), \dots \\ & \dots, (-1, +1), (-1, +1), (-1, +1), (-1, +1), (-1, +1), \dots \\ & \dots, (-1, +1), (-3, -1), (-3, +3), (-3, +7), (-7, +5), (-1, -5), (-7, -1), (-7, +1), (-1, -1) \end{aligned}$$

Se não houver ruído no sistema, esta mesma sequência de posições deve ser recebida para conversão em dígitos binários e decodificação. Notar que os símbolos representados por reticências são repetições do sinal $(-1, +1)$, a partir do sétimo símbolo.

Recepção Sem Rotação de Fase

1. O meio de transmissão está sujeito a ruído, e a sequência de sinais tem uma de suas posições alterada. Na recepção, supondo fase relativa zero graus, identifica-se a seguinte sequência de 255 sinais:

$$\begin{aligned} Pos_c = & (-1, +1), (-1, +3), (-3, +1), (-1, +7), (-7, +1), (-1, -1), (-1, +1), (-1, +1), \dots \\ & \dots, (-1, +1), (-1, +1), (-1, +\mathbf{3}), (-1, +1), (-1, +1), \dots \\ & \dots, (-1, +1), (-3, -1), (-3, +3), (-3, +7), (-7, +5), (-1, -5), (-7, -1), (-7, +1), (-1, -1) \end{aligned}$$

2. Houve erro no 62º sinal transmitido, originalmente $(-1, +1)$, e recebido como $(-1, +3)$. Este erro (aqui evidenciado com notação em negrito) só poderá ser identificado e corrigido no decodificador de canal. Se houvesse mais de um erro nesta palavra, a correção não seria possível. A conversão de sinais em símbolos fornece a seguinte sequência de 255 símbolos de 6 bits:

$$\begin{aligned} \vec{v} = & 000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 000000, 000000, \dots \\ & \dots, 000000, 000000, 00000\mathbf{1}, 000000, 000000, \dots \\ & \dots, 000000, 010001, 000011, 000110, 001101, 011010, 010100, 001000, 010000 \end{aligned}$$

O erro do 62º sinal converteu-se em erro de símbolo. Na verdade, apenas o sexto bit foi afetado (portanto a correção vai se dar no sexto dos seis decodificadores, somente: 000001 deve ser corrigido para 000000).

3. Com a correção, pode-se ver (porque a fase de referência é zero), que é recuperada integralmente a informação que se tinha no item 3: vetor de 255 posições de 6 bits:

$$\begin{aligned} \vec{v} = & 000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 000000, 000000, \dots \\ & \dots, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, \dots \\ & \dots, 000000, 010001, 000011, 000110, 001101, 011010, 010100, 001000, 010000 \end{aligned}$$

O erro do sexto feixe foi eliminado, pois ocorreu apenas um erro neste feixe, em toda a palavra de 255 bits.

4. Na decodificação diferencial, supondo-se que os valores das memórias $CD_{n-1}^{(+1)}$ e $CD_{n-1}^{(2)}$ eram zero, recupera-se a sequência original de 247 símbolos de 6 bits:

$$\vec{v} = 000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 100000, 000000, \dots, 000000$$

Cabe observar aqui que as suposições de memórias do codificador e decodificador diferencial iguais a zero não particularizam o exemplo porque supõe-se que esta foi uma das palavras transmitidas entre várias outras. Não tendo sido a primeira, as memórias do codificador e decodificador diferencial já estavam corrigidas. O mesmo exemplo, feito com outros valores iniciais para estas memórias, forneceria o mesmo resultado, inclusive com a correção do bit errado (limitado a um erro por feixe).

Recepção Com Rotação de Fase

Se a fase de referência do receptor fosse diferente de zero graus, seriam recebidos sinais defasados dos transmitidos em 90, 180 ou 270 graus: A seguir, é mostrado o procedimento que deve ser seguido nestes casos:

1. Sinais recebidos:

• 90 graus:

$$\begin{aligned} Pos_c = & (-1, -1), (-3, -1), (-1, -3), (-7, -1), (-1, -7), (+1, -1), (-1, -1), \\ & (-1, -1), \dots, (-1, -1), (-1, -1), (-1, +1), (-1, -1), (-1, -1), \dots \\ & \dots, (-1, +1), (-3, -1), (-3, +3), (-3, +7), (-7, +5), (-1, -5), (-7, -1), (-7, +1), (-1, -1) \end{aligned}$$

• 180 Graus:

$$\begin{aligned} Pos_c = & (+1, -1), (+1, -3), (+3, -1), (+1, -7), (+7, -1), (+1, +1), (+1, -1), (+1, -1), \dots \\ & \dots, (+1, -1), (+1, -1), (+1, +1), (+1, -1), (+1, -1), \dots \\ & \dots, (+1, -1), (+3, +1), (+3, -3), (+3, -7), (+7, -5), (+1, +5), (+7, +1), (+7, -1), (+1, +1) \end{aligned}$$

• 270 Graus:

$$\begin{aligned} Pos_c = & (+1, +1), (+3, +1), (+1, +3), (+7, +1), (+1, +7), (-1, +1), (+1, +1), (+1, +1), \dots \\ & \dots, (+1, +1), (+1, +1), (+1, +3), (+1, +1), (+1, +1), \dots \\ & \dots, (+1, +1), (-1, +3), (+3, +3), (+7, +3), (+5, +7), (-5, +1), (-1, -7), (+1, +7), (-1, +1) \end{aligned}$$

Observar que o ruído do canal deslocou o sinal da constelação original de uma posição, para o Vizinho Mais Próximo situado acima do ponto inicial. Isto se repete para o ponto correspondente, qualquer que seja a fase de referência na recepção.

2. Conversão de sinais em símbolos:

- 90 graus:

$$\vec{v} = 010000, 010001, 010010, 010100, 011000, 110000, 010000, 010000, \dots$$

$$\dots, 010000, 010000, 000000, 010000, 010000, \dots$$

$$\dots, 010000, 110001, 010011, 010110, 011101, 111010, 110100, 011000, 110000$$

- 180 Graus:

$$\vec{v} = 110000, 110001, 110010, 110100, 111000, 100000, 110000, 110000, \dots$$

$$\dots, 110000, 110000, 100000, 110000, 110000, \dots$$

$$\dots, 110000, 100001, 110011, 110110, 111101, 101010, 100100, 111000, 100000$$

- 270 Graus

$$\vec{v} = 100000, 100001, 100010, 100100, 101000, 000000, 100000, 100000, \dots$$

$$\dots, 100000, 100000, 100010, 100000, 100000, \dots$$

$$\dots, 100000, 000001, 100011, 100110, 101101, 001010, 000100, 101000, 000000$$

3. Dígitos (e Símbolos) Corrigidos:

- 90 graus:

$$\vec{v} = 010000, 010001, 010010, 010100, 011000, 110000, 010000, 010000, \dots$$

$$\dots, 010000, 010000, 010000, 010000, 010000, \dots$$

$$\dots, 010000, 110001, 010011, 010110, 011101, 111010, 110100, 011000, 110000$$

- 180 Graus:

$$\vec{v} = 110000, 110001, 110010, 110100, 111000, 100000, 110000, 110000, \dots$$

$$\dots, 110000, 110000, 110000, 110000, 110000, \dots$$

$$\dots, 110000, 100001, 110011, 110110, 111101, 101010, 100100, 111000, 100000$$

- 270 Graus:

$$\vec{v} = 100000, 100001, 100010, 100100, 101000, 000000, 100000, 100000, \dots$$

$$\dots, 100000, 100000, 100000, 100000, 100000, \dots$$

$$\dots, 100000, 000001, 100011, 100110, 101101, 001010, 000100, 101000, 000000$$

4. Após decodificação diferencial recupera-se a informação transmitida, qualquer que seja a fase de referência: 90, 180 ou 270 graus:

$$\vec{v} = 000000, 000001, 000010, 000100, 001000, 010000, 100000, 000000, \dots, 000000$$

Observar que qualquer que tenha sido a fase tomada como referência na recepção, a sequência de sinais da constelação é a mesma da sequência de fase zero acrescida da rotação de fase observada: 90, 180 ou 270 graus.

4.3 Sistemas de Codificação Quaternários

A seguir é feita a descrição de um sistema quaternário, utilizando-se de generalização do sistema binário.

É necessária uma transcodificação dos símbolos quaternários para melhorar o desempenho do sistema, fazendo com que símbolos Vizinhos Mais Próximos tenham entre si a menor distância (número de bits) possível. Esta operação tem, nestes sistemas, efeito semelhante à adaptação do mapeamento binário para configuração próxima ao código de Gray, como por exemplo, o que é observado no mapeamento MB2.

4.3.1 Parâmetros do Código

Os seis bits de cada posição do símbolo na constelação 64 QAM são alocados, num sistema homogêneo, em $J = 3$ dígitos quaternários, pois $m = 2$. Os três feixes quaternários assim formados são codificados independentemente utilizando-se códigos de comprimento N dígitos, dos quais K são de informação e $N - K$ de paridade.

4.3.2 Necessidade de Transcodificação

No caso de códigos não binários é necessário fazer uma transformação da representação binária dos dígitos, de forma a ter uma sequência de dígitos binários em código de Gray e para que a codificação corretora possa ser efetuada. No caso de sistemas quaternários são feitas as seguintes atribuições [CPqD 2]:

Dígito Quaternário	Representação Binária
0	00
1	01
2	11
3	10

Tabela 4.5: Transcodificação Em Sistemas Quaternários

4.3.3 Mapeamentos, Métrica e Codificação Diferencial

Da mesma forma que feito para sistemas binários, são propostos diferentes mapeamentos possíveis de serem implementados. Para cada um são apresentadas métricas e codificação diferencial associadas:

030	033	013	010	\bar{Q}	320	321	331	330	
031	032	012	011		323	322	332	333	
021	022	002	001		303	302	312	313	
020	023	003	000		300	301	311	310	\bar{I}
110	111	101	100		200	203	223	220	
113	112	102	103		201	202	222	221	
133	132	122	123		211	212	232	231	
130	131	121	120		210	213	233	230	

Figura 4.3: Mapeamento Quaternário I: MQ1

MQ1: Mapeamento Quaternário I

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.3

2. Métricas:

- Métricas Por Dígitos:

Dígito	No de Eventos	Porcentagem
1	32	0.1250
2	80	0.3125
3	144	.05625

Tabela 4.6: Métricas Por Dígitos (MQ1)

- Média de Métricas Por Dígitos: 0.3333

A métrica não especifica a distância de Lee média encontrada entre dígitos de Vizinhos Mais Próximos, mas somente a proporção de dígitos que diferem dos seus correspondentes nos símbolos Vizinhos Mais Próximos (distância de Lee diferente de zero).

- Métricas Por Distância de Lee:

Para que se possa saber qual a distância de Lee média de determinado dígito em relação a seus Vizinhos Mais Próximos, é calculada a Métrica por distância de Lee:

Dígito	Distância de Lee	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	16	0.06250
	2	0	0.00000
	3	16	0.06250
2o	1	24	0.09375
	2	32	0.12500
	3	24	0.09375
3o	1	40	0.25000
	2	64	0.06250
	3	40	0.25000

Tabela 4.7: Métricas Por Distância de Lee(MQ1)

Distâncias de Lee de 1 ou 3 em sistemas quaternários equivalem a erros de magnitude 1: (valores de $\frac{1}{2}$). Em sistemas não binários o cálculo de métricas por magnitude é utilizado para verificar a capacidade do código utilizado em corrigir todos os desvios de sinal para Vizinhos Mais Próximos. Obtêm-se, assim, a tabela de métricas por magnitude somando-se as porcentagens de desvios que causam erros de dígitos de distâncias 1 e 3 (magnitude 1) ou distância 2 (magnitude 2):

- Métricas Por Magnitude:

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	32	0.1250
	2	0	0.0000
2o	1	48	0.1875
	2	32	0.1250
3o	1	80	0.5000
	2	64	0.0625

Tabela 4.8: Métricas Por Magnitude (MQ1)

- Média de Métricas Por Magnitude:

Para cálculo de probabilidade de erro de sistemas que utilizem este mapeamento é conveniente que se utilize valores médios de métrica por magnitude em cada um dos dígitos do símbolo: Calcula-se a média das probabilidades de distância de Lee que causam erro de mesma magnitude:

Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	160	0.270833
2	96	0.062500

Tabela 4.9: Média de Métricas Por Magnitude (MQ1)

Como pode ser observado, o primeiro dígito difere, nos diversos sinais, de valores de magnitude 1 ou 3 de seus vizinhos mais próximos. Isto não ocorre com o segundo e terceiro dígitos, que apresentam também diferenças de magnitude de valor dois. Para que este mapeamento possa ser eficiente é necessário que o código corretor de erros utilizado corrija erros de magnitude 1, 2 ou 3.

3. Parâmetros de Rotação de Fase:

(a) Primeiro Dígito:

- A rotação de 90 graus no sentido horário altera o dígito X para Y , segundo a expressão $Y = 3 + 1 \times X$:

X (000)		Y (090)		Y (180)		Y (270)	
Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.
0	00	3	10	2	11	1	01
1	01	0	00	3	10	2	11
2	11	1	01	0	00	3	10
3	10	2	11	1	01	0	00

- **Eliminação de Ambiguidades de Fase:**

- Primeiro Dígito:** Observar que feita a transcodificação para obter sequência de símbolos binários em código de Gray, o primeiro dígito do mapeamento MQ1 tem a mesma combinação de bits dos dois primeiros dígitos do mapeamento MB1. Portanto a codificação diferencial deve ser feita, bit a bit, como em MQ1 (somente primeiro dígito quaternário, ou os dois primeiros bits), como descrito pelas equações 2.30 e 2.31. A decodificação diferencial é dada pelas equações 2.32 e 2.33.

- Segundo e Terceiro dígitos**

O primeiro dígito quaternário determina o quadrante em que está situado o sinal recebido e necessitam, portanto, de codificação diferencial. Os demais símbolos recebem valores de forma a ser tornarem independentes da ambiguidade de fase (rotações de 90 graus não alteram seus valores), e portanto não necessitam codificação diferencial.

4. Probabilidade de Erro de Bit:

Como nos exemplos binários, o mapeamento quaternário apresenta quadrantes simétricos e os cálculos de taxa de erro podem ser feitos para um deles e generalizado para os outros. No sistema quaternário, no entanto, ocorrerão dois tipos de erros: de magnitude 1 ou 2. Por exemplo, supor, no MQ1, o símbolo de três dígitos quaternários 002, de coordenadas $(-3, +3)$:

030	033	013	010	320
031	032	012	011	323
021	022	002	001	303
020	023	003	000	300
110	111	101	100	303

Caso este símbolo seja desviado devido a ruído no meio de transmissão, e seja recebido na posição de um vizinho mais próximo, quatro sinais podem ser recebidos:

- $(-5, +3) = 022$
- $(-3, +5) = 012$
- $(-1, +3) = 001$
- $(-3, +1) = 003$

Se o desvio for para um vizinho próximo, há a possibilidade de receber outros quatro sinais:

- $(-5, +5) = 032$
- $(-1, +5) = 011$
- $(-1, +1) = 000$
- $(-5, +1) = 023$

Como a probabilidade de um símbolo ser desviado para seu vizinho mais próximo é P_{S2} , para seu vizinho próximo é P_{S3} e não ser desviado é P_{S1} , pode-se calcular, para este sinal $(-3, +3)$, que a probabilidade de que seu primeiro dígito quaternário 0 seja recebido corretamente é dada por

$$Pc1_{MQ1} = P_0 = P_{S1} + 4 P_{S2} + 4 P_{S3} \quad (4.78)$$

Pois todos os símbolos de constelação, vizinhos próximos ou mais próximos tem o primeiro dígito quaternário igual a zero. Portanto a probabilidade de erro no primeiro dígito quaternário é zero.

Para o segundo dígito têm-se a probabilidade de ser recebido corretamente:

$$Pc2_{MQ1} = P_{S1} + 2 P_{S2} + P_{S3} \quad (4.79)$$

Quanto à probabilidade de erro, existem duas possibilidades: como se trata de Mapeamento Quaternário, os erros de dígito podem ser de magnitude 1 ou 2. Para o segundo dígito 0 tem-se

- Probabilidade de erro de magnitude 1:

$$Pe2_{MQ1=1} = P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.80)$$

- Probabilidade de erro de magnitude 2:

$$Pe2_{MQ1=2} = P_{S2} + P_{S3} \quad (4.81)$$

Igualmente, para o terceiro dígito 3:

- Probabilidade de Ser Recebido Corretamente:

$$Pc3_{MQ1} = P_{S1} + 2 P_{S2} + P_{S3} \quad (4.82)$$

- Probabilidade de erro de magnitude 1:

$$Pe_{3MQ1=1} = 2 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.83)$$

- Probabilidade de erro de magnitude 2:

$$Pe_{3MQ1=2} = P_{S3} \quad (4.84)$$

A seguir é mostrado o mesmo procedimento de cálculo de erro de magnitude zero (Pc_{3MQ1}), um ($Pe_{3MQ1=1}$) ou dois ($Pe_{3MQ1=2}$) para o terceiro dígito de alguns dos símbolos do segundo quadrante:

Tipo de Sinal	Pc_{3MQ1}	$Pe_{3MQ1=1}$	$Pe_{3MQ1=2}$
(-7, +7)	$P_{S1} + 2P_{S2} + P_{S3}$	$2P_{S2} + 2P_{S3}$	P_{S3}
(-7, +5)	$P_{S1} + 2P_{S2} + P_{S3}$	$2P_{S2} + 2P_{S3}$	P_{S3}
(-7, +3)	$P_{S1} + 2P_{S2} + P_{S3}$	$2P_{S2} + 2P_{S3}$	P_{S3}
...
(-3, +1)	$P_{S1} + P_{S2}$	$2P_{S2} + 2P_{S3}$	$P_{S2} + 2P_{S3}$
...

Repetindo o procedimento para cada um dos dígitos de cada símbolo obtêm-se:

(a) Primeiro Dígito:

$$Pc_{1MQ1} = P_{S1} + 3.5 P_{S2} + 3.625 P_{S3} \quad (4.85)$$

$$Pe_{1MQ1=1} = 0.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.86)$$

$$Pe_{1MQ1=2} = 0.0625 P_{S3} \quad (4.87)$$

(b) Segundo Dígito:

$$Pc_{2MQ1} = P_{S1} + 2.75 P_{S2} + 1.8125 P_{S3} \quad (4.88)$$

$$Pe_{2MQ1=1} = 0.75 P_{S2} + 1.4375 P_{S3} \quad (4.89)$$

$$Pe_{2MQ1=2} = 0.5 P_{S2} + 0.75 P_{S3} \quad (4.90)$$

(c) Terceiro Dígito:

$$Pc_{3MQ1} = P_{S1} + 1.75 P_{S2} + 0.75 P_{S3} \quad (4.91)$$

$$Pe_{3MQ1=1} = 2 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.92)$$

$$Pe_{3MQ1=2} = 0.25 P_{S2} + 1.25 P_{S3} \quad (4.93)$$

				\bar{Q}					
000	001	010	011	100	101	110	111		
003	002	013	012	103	102	113	112		
030	031	020	021	130	131	120	121		
033	032	023	022	133	132	123	122	\bar{I}	
300	301	310	311	200	201	210	211		
303	302	313	312	203	202	213	212		
330	331	320	321	230	231	220	221		
333	332	323	322	233	232	223	222		

Figura 4.4: Mapeamento Quaternário II: MQ2

As equações 4.18 e 4.19 fornecem as taxas de acerto e erro de dígito do mapeamento MQ1:

$$P_{cdMQ1} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 P_{chMQ1} \tag{4.94}$$

$$P_{edMQ1} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 P_{ehSQ1} \tag{4.95}$$

MQ2: Mapeamento Quaternário II

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.4 [França 1]

2. Métricas:

- Métricas Por Dígito:

Dígito	No de Eventos	Porcentagem
1	32	0.125
2	96	0.375
3	224	0.875

Tabela 4.10: Métricas Por Dígito (MQ2)

- Média de Métricas Por Dígito: 0.45833

- Métricas Por Magnitude:

Calculado através de procedimento análogo ao realizado para MQ1:

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	32	0.125
	2	0	0.000
2o	1	96	0.375
	2	0	0.000
3o	1	224	0.875
	2	0	0.000

Tabela 4.11: Métricas Por Magnitude (MQ2)

• Média de Métricas Por Magnitude:

Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	352	0.45833
2	0	0.00000

Tabela 4.12: Média de Métricas Por Dígito (MQ2)

Um sistema que utilize mapeamento MQ2 pode corrigir apenas erros ímpares, pois não há casos de distância de magnitude 2 entre os dígitos correspondentes de símbolos mais próximos. Ainda que este mapeamento apresente média de métrica superior aos outros, seu desempenho será mais razoável, pois não necessitando corrigir erros de Lee de magnitude dois, o incremento de faixa necessário para sua implementação é inferior ao de MQ1.

3. Parâmetros de Rotação de Fase:

(a) Primeiro Dígito:

- A rotação de 90 graus no sentido horário altera o dígito X para Y , segundo a expressão $Y = 1 + 1 \times X$:

X (000)		Y (090)		Y (180)		Y (270)	
Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.
0	00	1	01	2	11	3	10
1	01	2	11	3	10	2	11
2	11	3	10	0	00	1	01
3	10	0	00	1	01	0	00

- Eliminação de Ambiguidades de Fase:

Apenas um dos bits do dígito varia em caso de rotação de fase, e rotações sucessivas fornecem a sequência 0, 1, 0, 1, Como visto no Capítulo 2, a codificação diferencial é feita (somente neste segundo bit) como descrito pelas equações 2.28 e 2.29:

- Codificação diferencial

$$CD_n^{(2)} = \overline{CD_{n-1}^{(2)} \oplus B_n^{(2)}} \quad (4.96)$$

onde $CD_n^{(2)}$ é o valor do segundo (2) bit do dígito em questão codificado diferencialmente, $CD_{n-1}^{(2)}$ é o seu valor anterior, $B_n^{(2)}$ é o valor do bit correspondente de entrada.

- Decodificação diferencial:

$$DC_n^{(2)} = \overline{R_n^{(2)} \oplus R_{n-1}^{(2)}} \quad (4.97)$$

onde $DC_n^{(2)}$ é o valor do segundo bit do dígito, decodificado diferencialmente, $R_n^{(2)}$ é o valor recebido e $R_{n-1}^{(2)}$ o valor recebido anteriormente.

(b) Segundo e Terceiro dígitos

Procede-se da mesma forma que o primeiro dígito, pois as rotações de fase têm nestes o mesmo efeito.

4. Probabilidade de Erro de Bit:

Para cada um dos dígitos de cada símbolo têm-se:

(a) Primeiro Dígito:

$$Pc1_{MQ2} = P_{S1} + 3.5 P_{S2} + 3.0625 P_{S3} \quad (4.98)$$

$$Pe1_{MQ2=1} = 0.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.99)$$

$$Pe1_{MQ2=2} = 0.0625 P_{S3} \quad (4.100)$$

(b) Segundo Dígito:

$$Pc2_{MQ2} = P_{S1} + 2.5 P_{S2} + 1.5625 P_{S3} \quad (4.101)$$

$$Pe2_{MQ2=1} = 1.5 P_{S2} + 1.875 P_{S3} \quad (4.102)$$

$$Pe2_{MQ2=2} = 0.5625 P_{S3} \quad (4.103)$$

(c) Terceiro Dígito:

$$Pc3_{MQ2} = P_{S1} + 0.5 P_{S2} + 0.0625 P_{S3} \quad (4.104)$$

$$Pe3_{MQ2=1} = 3.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.105)$$

$$Pe3_{MQ2=2} = 3.0625 P_{S3} \quad (4.106)$$

Substituindo-se MQ1 por MQ2 nas equações 4.94 e 4.95 obtêm-se as probabilidades de acerto e de erro dos dígitos de MQ1, sem codificação de canal ou diferencial.

MQ3: Mapeamento Quaternário III

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.5 [SBT] [DSP]

2. Métricas:

• Métricas Por Dígito:

Dígito	No de Eventos	Porcentagem
1	224	0.875
2	96	0.375
3	32	0.125

Tabela 4.13: Métricas Por Dígito (MQ3)

• Média de Métricas Por Dígito: 0.45833

				\bar{Q}				
000	100	010	110	001	101	011	111	
300	200	310	210	301	201	311	211	
030	130	020	120	031	131	021	121	
330	230	320	220	331	231	321	221	\bar{I}
003	103	013	113	002	102	012	112	
303	203	313	213	302	202	312	212	
033	133	023	123	032	132	022	122	
333	233	323	223	332	232	322	222	

Figura 4.5: Mapeamento Quaternário III: MQ3

- Métricas Por Magnitude:

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	224	0.875
	2	0	0.000
2o	1	96	0.375
	2	0	0.000
3o	1	32	0.125
	2	0	0.000

Tabela 4.14: Métricas Por Magnitude (MQ3)

- Média de Métricas Por Magnitude:

Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	352	0.45833
2	0	0.00000

Tabela 4.15: Média de Métricas Por Magnitude (MQ3)

Este mapeamento é feito pela inversão das posições dos dígitos de MQ2. Sua métrica é a mesma de MQ2, e a diferença é apenas a proteção maior do terceiro dígito (enquanto que para MQ2 era do primeiro). Para o mesmo código, as simulações devem fornecer resultados equivalentes para MQ2 e MQ3.

3. Parâmetros de Rotação de Fase:

Como este mapeamento é o mesmo que MQ2, invertido, e MQ2 tem a mesma transformação de símbolos nas rotações de fase (primeiro, segundo, terceiro), a codificação e decodificação diferencial é a mesma para os três símbolos, e as mesmas operações são válidas para MQ3.

4. Probabilidade de Erro de Bit (por dígito):

(a) Primeiro Dígito:

$$Pe1_{MQ3} = P_{S1} + 0.5 P_{S2} + 0.0625 P_{S3} \quad (4.107)$$

$$Pe1_{MQ3=1} = 3.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.108)$$

000	100	110	010	\vec{Q}	121	221	211	111	
300	200	210	310		021	321	311	011	
330	230	220	320		031	331	301	001	
030	130	120	020		131	231	201	101	\vec{I}
103	203	233	133		022	122	132	032	
003	303	333	033		322	222	232	332	
013	313	323	023		312	212	202	302	
113	213	223	123		012	112	102	002	

Figura 4.6: Mapeamento Quaternário IV: MQ4

$$Pe1_{MQ3=2} = 3.0625 P_{S3} \tag{4.109}$$

(b) Segundo Dígito:

$$Pc2_{MQ3} = P_{S1} + 2.5 P_{S2} + 1.5625 P_{S3} \tag{4.110}$$

$$Pe2_{MQ3=1} = 1.5 P_{S2} + 1.875 P_{S3} \tag{4.111}$$

$$Pe2_{MQ3=2} = 0.5625 P_{S3} \tag{4.112}$$

(c) Terceiro Dígito:

$$Pc3_{MQ3} = P_{S1} + 3.5 P_{S2} + 3.0625 P_{S3} \tag{4.113}$$

$$Pe3_{MQ3=1} = 0.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \tag{4.114}$$

$$Pe3_{MQ3=2} = 0.0625 P_{S3} \tag{4.115}$$

Substituindo-se MQ1 por MQ3 nas equações 4.94 e 4.95 obtêm-se as probabilidades de acerto e de erro dos dígitos de MQ3, sem codificação de canal ou diferencial.

MQ4: Mapeamento Quaternário IV

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.6 [CPqD 2]

2. Métricas:

• Métricas Por Dígito:

Dígito	No de Eventos	Porcentagem
1	160	0.625
2	96	0.375
3	32	0.125

Tabela 4.16: Métricas Por Dígito (MQ4)

• Média de Métricas Por Dígito: 0.375

- Métricas Por Magnitude:

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	160	0.625
	2	0	0.000
2o	1	96	0.375
	2	0	0.000
3o	1	32	0.125
	2	0	0.000

Tabela 4.17: Métricas Por Magnitude (MQ4)

- Média de Métricas Por Magnitude:

Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	288	0.375
2	0	0.000

Tabela 4.18: Média de Métricas Por Magnitude (MQ4)

Com MQ4 obtêm-se uma melhoria com relação aos mapeamentos quaternários já propostos até o momento: As distâncias entre símbolos e seus vizinhos continuam restritas à magnitudes 1 e 3 (ímpares), e houve uma diminuição da métrica em relação a MQ2 ou MQ3. O desempenho do sistema que utiliza este código deverá ser, portanto, superior aos outros.

3. Parâmetros de Rotação de Fase:

- Primeiro Dígito: A rotação de 90 graus no sentido horário altera o dígito X para Y , segundo a expressão $Y = 1 + 3 \times X$:

X (000)		Y (090)		Y (180)		Y (270)	
Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.
0	00	1	01	0	00	1	01
1	01	0	00	1	01	0	00
2	11	3	10	2	11	3	10
3	10	2	11	3	10	2	11

- Segundo dígito: Como o primeiro dígito de MQ4.
- Terceiro dígito: como o primeiro dígito do mapeamento MQ1.

4. Eliminação de Ambiguidades de Fase:

- Primeiro dígito: na tabela de rotações de fase, observa-se que apenas o segundo bit do dígito é alterado, a cada rotação de fase de 90 graus, na seguinte sequência: 0, 1, 0, 1. Sua codificação diferencial é dada pela equação 4.96 e a decodificação diferencial por 4.97
- Segundo Dígito: Proceda-se da mesma forma que o primeiro dígito, pois as rotações de fase têm nestes o mesmo efeito.

- Terceiro Dígito: Como o primeiro dígito de MQ1.

5. Probabilidade de Erro de Bit:

Cálculo de Probabilidades por Dígito:

(a) Primeiro Dígito:

$$Pc1_{MQ4} = P_{S1} + 1.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.116)$$

$$Pe1_{MQ4=1} = 2.5 P_{S2} + 1.875 P_{S3} \quad (4.117)$$

$$Pe1_{MQ4=2} = 1.25 P_{S3} \quad (4.118)$$

(b) Segundo Dígito:

$$Pc2_{MQ4} = P_{S1} + 2.5 P_{S2} + 1.75 P_{S3} \quad (4.119)$$

$$Pe2_{MQ4=1} = 1.5 P_{S2} + 1.875 P_{S3} \quad (4.120)$$

$$Pe2_{MQ4=2} = 0.375 P_{S3} \quad (4.121)$$

(c) Terceiro Dígito:

$$Pc3_{MQ4} = P_{S1} + 3.5 P_{S2} + 3.0625 P_{S3} \quad (4.122)$$

$$Pe3_{MQ4=1} = 0.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.123)$$

$$Pe3_{MQ4=2} = 0.0625 P_{S3} \quad (4.124)$$

Substituindo-se MQ1 por MQ4 nas equações 4.94 e 4.95 obtêm-se as probabilidades de acerto e de erro dos dígitos de MQ4, sem codificação de canal ou diferencial.

MQ5: Mapeamento Quaternário V

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.7 [CPqD 2] [SBT] [DSP]

2. Métricas:

- Métricas Por Dígito:

Dígito	No de Eventos	Porcentagem
1	160	0.625
2	96	0.375
3	32	0.125

Tabela 4.19: Métricas Por Dígito (MQ5)

- Média de Métricas Por Dígito: 0.375
- Métricas Por Magnitude:

000	100	110	010	\vec{Q}	101	001	011	111	
300	200	210	310		201	301	311	211	
330	230	220	320		231	331	321	221	
030	130	120	020		131	031	021	121	\vec{I}
303	203	213	313		202	302	312	212	
003	103	113	013		102	002	012	112	
033	133	123	023		132	032	022	122	
333	233	223	323		232	332	322	222	

Figura 4.7: Mapeamento Quaternário V: MQ5

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	160	0.625
	2	0	0.000
2o	1	96	0.375
	2	0	0.000
3o	1	32	0.125
	2	0	0.000

Tabela 4.20: Métricas Por Magnitude (MQ5)

- Média de Métricas Por Magnitude:

Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	288	0.375
2	0	0.000

Tabela 4.21: Média de Métricas Por Magnitude (MQ5)

Outro Mapeamento equivalente a MQ4, embora com outra codificação diferencial.

3. Parâmetros de Rotação de Fase:

Primeiro, segundo e terceiro dígitos têm os mesmos efeitos de rotação de fase do primeiro dígito de MQ1. Portanto, a codificação e decodificação diferencial é a mesma do primeiro dígito daquele mapeamento.

4. Probabilidade de Erro de Bit:

Cálculo de Probabilidades:

(a) Primeiro Dígito:

$$P_{e1MQ5} = P_{S1} + 1.5 P_{S2} + 0.5625 P_{S3} \tag{4.125}$$

$$P_{e1MQ5=1} = 2.5 P_{S2} + 1.875 P_{S3} \tag{4.126}$$

$$P_{e1MQ5=2} = 1.5625 P_{S3} \tag{4.127}$$

(b) Segundo Dígito:

$$P_{c2MQ5} = P_{S1} + 2.5 P_{S2} + 1.5625 P_{S3} \quad (4.128)$$

$$P_{e2MQ5=1} = 1.5 P_{S2} + 1.875 P_{S3} \quad (4.129)$$

$$P_{e2MQ5=2} = 0.5625 P_{S3} \quad (4.130)$$

(c) Terceiro Dígito:

$$P_{c3MQ5} = P_{S1} + 3.5 P_{S2} + 3.0625 P_{S3} \quad (4.131)$$

$$P_{e3MQ5=1} = 0.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.132)$$

$$P_{e3MQ5=2} = 0.0625 P_{S3} \quad (4.133)$$

Substituindo-se MQ1 por MQ5 nas equações 4.94 e 4.95 obtêm-se as probabilidades de acerto e de erro dos dígitos de MQ5, sem codificação de canal ou diferencial.

4.3.4 Probabilidade de Erro de Bit de Sistema Quaternário Não Codificado

Como no caso de sistema binário, pode-se calcular esta probabilidade a partir da métrica do mapeamento utilizado e do cálculo do aumento da taxa de erro proporcionada pela decodificação diferencial. No entanto, é preciso levar em consideração que nos sistemas quaternários, um dígito errado não resulta sempre em apenas um erro de bit. De fato, erros de magnitude dois vão causar dois erros de bit adicionais. Para corrigir o cálculo utiliza-se o conceito de Métrica Equivalente de Mapeamento: é o valor de métrica que causaria o mesmo efeito na taxa de erro de um sistema binário.

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ1

Como foi visto anteriormente, o mapeamento MQ1 apresenta métrica de valor 0.333. No entanto, como este mapeamento apresenta Símbolos Vizinhos Mais Próximos com distância=2, para que se possa calcular a métrica equivalente (M_{eqMQ1}) de um sistema que utilize este mapeamento é necessário considerar a média de métricas do mesmo, dado pela Tabela 4.9. Isto porque o acréscimo de bits errados por dígito errado será função da proporção de Vizinhanças onde ocorre distância de Lee=2 (onde desvios de sinal vão ocasionar erros de 2 bits) ou distância de Lee=1 (erro de 1 bit):

Dígito Transmitido	Valor Binário	Dígito Recebido		Número de Bits Errados
			Valor Binário	
0	00	1 ou 3	01 ou 10	1
0	00	2	11	2
1	01	2 ou 0	11 ou 00	1
1	01	3	10	2
2	11	3 ou 1	10 ou 01	1
2	11	0	00	2
3	10	0 ou 2	00 ou 11	1
3	10	1	01	2

Tabela 4.22: Número de Bits Errados Por Dígito Errado- Sistema Quaternário

Os valores mostrados nesta tabela permitem calcular a Métrica equivalente do mapeamento MQ1:

$$M_{eqMQ1} = \frac{0.270833 + 2 \times 0.0625}{2(bits)} \simeq 0.198 \quad (4.134)$$

Substituindo o valor obtido na equação 4.64, e levando-se em conta o aumento do número de erros devido à codificação diferencial, obtêm-se a taxa de erro de bit do sistema SQ1, sem codificação de canal:

$$TEB_{MQ1} = 1.083 \frac{0.198}{0.14583} P_{bit} \simeq 1.47 \times P_{bit} \simeq 0.43 \times Erfc \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.135)$$

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ2

Este mapeamento não apresenta distância=2 entre dígitos de Vizinhos Mais Próximos. Portanto, o cálculo de taxa de erro de bit sem codificação diferencial pode ser realizado apenas com a métrica média obtida para este mapeamento, a exemplo dos casos já expostos. Como o sistema quaternário tem dois bits por dígito, a métrica equivalente vale $0.45833/2 = 0.2292$.

A codificação diferencial, no entanto, é diferente da utilizada nos sistemas apresentados até agora. Cada um dos três dígitos é codificado diferencialmente, como o primeiro dígito de MQ1. Fazendo-se adaptação na equação 4.61, têm-se:

$$Incr_{dd} = 1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{32 \times 2 + 96 \times 2 + 224 \times 2}{256} \right) = 1.917 \quad (4.136)$$

Portanto, o aumento de taxa de erro é dado por:

$$TEB_{MQ2} = 1.917 \times \frac{0.2292}{0.14583} P_{bit} \simeq 3.0 P_{bit} \simeq 0.88 \times Erfc \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.137)$$

Um sistema sem codificação de canal que utilize este mapeamento terá desempenho bastante degradado em relação aos obtidos anteriormente. No entanto, como as distâncias entre dígitos de Vizinhos Mais Próximos são de 1, utilizando-se um código corretor de erros simples pode-se melhorar consideravelmente este sistema. Isto será mostrado na próxima seção.

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ3

Este mapeamento é o mesmo que MQ2 com a inversão de dígitos. Como a codificação diferencial é a mesma, e também a métrica média, o desempenho deste sistema será o mesmo obtido para MQ2

$$TEB_{MQ3} = 1.917 \times \frac{0.2292}{0.14583} P_{bit} \simeq 3.0 P_{bit} \simeq 0.88 \times \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.138)$$

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ4

Como MQ2 ou MQ3, este mapeamento também não apresenta distância=2 entre dígitos de Vizinhos Mais Próximos. Desta forma o cálculo de taxa de erro de bit pode ser realizado apenas com a métrica equivalente obtida para este mapeamento dividida por 2, o número de bits do dígito quaternário: $0.375/2 = 0.1875$.

A codificação diferencial também é distinta das já apresentadas, como definido anteriormente. Observando-se esta operação, nota-se que varia o incremento de bits errados por dígito errado se se considera o primeiro dígito ou o segundo e o terceiro. Para o terceiro dígito, o incremento é o mesmo do primeiro dígito de SQ1. Quanto ao primeiro e segundo dígitos, há variação segundo a tabela abaixo:

Magnitude do Erro	Bits Errados Antes	Bits Errados Depois
+ 1	1	1 ou 2
2	2	3

Tabela 4.23: Aumento de Erros de Bit Devido à Decodificação Diferencial (MQ1 sem FEC)

Como este mapeamento não tem Vizinhos Mais Próximos com distância=2, conclui-se que um erro de bit causa 1.5 erros de bit após a decodificação diferencial. Verificando-se as possibilidades de desvio e substituindo-se os valores da equação 4.61, têm-se

$$Incr_{dd} = 1 + \frac{1}{3} \times \frac{160 \times 1.5 + 96 \times 1.5 + 32 \times 2}{256} = 1.583 \quad (4.139)$$

Como resultado, a taxa de erro de bit obtida para este sistema, incluindo codificação diferencial e sem codificação de canal será:

$$TEB_{MQ4} = 1.583 \times \frac{0.1875}{0.14583} P_{bit} = 2.0 P_{bit} = 0.59 \times \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.140)$$

Este sistema apresenta resultado melhor que o anterior, embora inferior ao dos sistemas binários.

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MQ5

O sistema que utilizar este mapeamento também terá seu desempenho calculado pelo valor da métrica dividido por dois, a métrica equivalente. Isto porque, também neste caso, não há Vizinhos Mais Próximos cujos dígitos guardem entre si distância diferente de 1 (Métrica=0.375). A codificação diferencial é a mesma utilizada em MQ2 ou MQ3, causando, pois, multiplicação do número de bits errados antes da mesma por 1.917. A taxa de erro de bit resultante será, portanto:

$$TEB_{MQ5} = 1.917 \times \frac{0.1875}{0.14583} P_{bit} = 2.46 P_{bit} = 0.72 \times \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.141)$$

4.3.5 Sistema Quaternário Codificado: Correção de Erros Simples

Para calcular a probabilidade de erro de bit de um sistema com codificação de canal quaternário é necessário supor, como para os códigos binários, que se a capacidade do código for ultrapassada (que para os códigos aqui considerados significa apresentar mais de um erro em qualquer h dos 3 feixes de dígitos quaternários), será introduzido um erro de dígito no feixe (ou feixes) onde ocorrer este evento. Este erro é resultado da correção do decodificador, programado para identificar e corrigir apenas um erro de feixe por palavra. No entanto, em se tratando de código quaternário, é possível que o erro de sinal gere um símbolo que tenha algum dígito com distância de Lee de dois, portanto também fora da capacidade de correção do código.

Cada dígito corresponde a dois bits, e devido à transcodificação para código de Gray, uma distância de Lee de 1 ou 3 vai implicar em diferença de um bit. Já a distância de Lee de 2 vai significar erro de dois bits:

Dígito	Repr. Bin.	Erro=1	Dist	Erro=3	Dist	Erro=2	Dist
0	00	01	1	11	1	11	2
1	01	11	1	10	1	10	2
2	11	10	1	00	1	00	2
3	10	00	1	01	1	01	2
Média	-	-	1	-	1	-	2

Tabela 4.24: Número de Bits Errados Por Distância de Lee- Sistema Quaternário

Seja Δh_{MQ} o número esperado de bits errados ($P_{e_b}MQ$) dividido pelo número esperado de dígitos errados ($P_{e_h}SQ=1 + P_{e_h}SQ=2$), na posição correspondente ao h -ésimo feixe de um sistema SQ quaternário de mapeamento MQ e codificação de canal com código (n, k) :

$$\Delta h_{MQ} = \frac{P_{e_b}MQ}{P_{e_h}SQ} = \frac{P_{e_h}SQ=1 + 2 P_{e_h}SQ=2}{P_{e_h}SQ=1 + P_{e_h}SQ=2} \quad (4.142)$$

No sistema quaternário para correção de erros simples duas situações vão ocasionar erro de dígito h em um feixe após a decodificação de canal:

1. Mais de um erro em qualquer um dos 3 feixes de uma palavra:
Neste caso vale a equação 4.70 definida para o caso de sistemas binários, para cada h dos $J = 3$ feixes. Também no caso quaternário de correção de erros simples, um padrão corrigido de forma errada terá acréscimo de $mf = 1$ bit.
2. Um erro de magnitude 2 em qualquer dígito deste feixe h (Erro simples, magnitude 2):
Este erro, que já tem magnitude 2, causa dois erros de bit (mi , como demonstrado na tabela

acima). Sua correção indevida vai causar um terceiro erro de bit (mf). A probabilidade de ocorrência deste evento será, portanto, multiplicada por $mi + mf = 3$ para cálculo da probabilidade de erro de bit:

$$Peh_{SQ} = (mi + mf) \binom{n}{1} Pch_{MQ}^{n-1} Peh_{MQ=2} \quad (4.143)$$

Portanto a probabilidade de erro de bit nos dígitos do hésimo feixe (Peh_{dSQ}) sem considerar decodificação diferencial será a soma destas probabilidades:(equações 4.70 e 4.143):

$$Peh_{SQ} = \frac{1}{n \log_2 m} ((mi + mf) \binom{n}{1} Pch_{MQ}^{n-1} Peh_{MQ=2} + \sum_{i=2}^n (\Delta h_{MQ} i + mf) \binom{n}{i} Pch_{MQ}^{n-i} (1 - Pch_{MQ})^i) \quad (4.144)$$

Substituindo os termos como feito para sistemas binários (4.68 e 4.69), têm-se:

$$Peh_{SQ} = \frac{1}{n \log_2 m} (n(mi + mf) Pch_{MQ}^{(n-1)} Peh_{MQ=2} + \Delta h \times n(1 - Pch_{MQ})(1 - Pch_{MQ}^{(n-1)}) + mf(1 - Pch_{MQ}^n - n \times Pch_{MQ}^{(n-1)})) \quad (4.145)$$

Para o caso quaternário para correção de erros simples, $mf = 1$ (pois uma correção indevida será feita supondo erro de magnitude 1), $mi = 2$ (pois os erros simples de magnitude 1 podem ser de distância de Lee=1 ou 3) e $\log_2 m = \log_2 4 = 2$. Substituindo os valores, têm-se, para o feixe h :

$$Peh_{SQ} = \frac{1}{2 \times n} (n(2 + 1) Pch_{MQ}^{(n-1)} Peh_{MQ=2} + \Delta h \times n(1 - Pch_{MQ})(1 - Pch_{MQ}^{(n-1)}) + 1 - Pch_{MQ}^n - n \times Pch_{MQ}^{(n-1)}) \quad (4.146)$$

que é a probabilidade de erro de bit num sistema de palavras código de comprimento n dígitos quaternários para correção de erros simples, por feixe h .

Sistema SQ1: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ1

Valores de Δh obtidos:

$$\Delta 1_{SQ1} = \frac{Pe1_{MQ1=1} + 2 Pe1_{MQ1=2}}{Pe1_{MQ1=1} + Pe1_{MQ1=2}} = \frac{0.5 P_{S2} + P_{S3}}{0.5 P_{S2} + 0.9375 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.147)$$

$$\Delta 2_{SQ1} = \frac{Pe2_{MQ1=1} + 2 Pe2_{MQ1=2}}{Pe2_{MQ1=1} + Pe2_{MQ1=2}} = \frac{1.75 P_{S2} + 2.9375 P_{S3}}{1.25 P_{S2} + 2.1875 P_{S3}} \simeq 1.4 \quad (4.148)$$

$$\Delta 3_{SQ1} = \frac{Pe_{3MQ1=1} + 2 Pe_{3MQ1=2}}{Pe_{3MQ1=1} + Pe_{3MQ1=2}} = \frac{2.5 P_{S2} + 4.5 P_{S3}}{2.25 P_{S2} + 3.25 P_{S3}} \simeq 1.1 \quad (4.149)$$

Como o comprimento das palavras código deste sistema é $n = 120$, calcula-se a taxa de erro de bit do sistema sem codificação diferencial substituindo-se os valores da equação 4.146:

$$Pe_{1SQ1} = \frac{1}{240} (360 Pc_{1MQ1}^{119} Pe_{1MQ1=2} + \Delta 1 \times 120 (1 - Pc_{1MQ1}) (1 - Pc_{1MQ1}^{119}) + 1 - Pc_{1MQ1}^{120} - 120 Pc_{1MQ1}^{119}) \quad (4.150)$$

$$Pe_{2SQ1} = \frac{1}{240} (360 Pc_{2MQ1}^{119} Pe_{2MQ1=2} + \Delta 2 \times 120 (1 - Pc_{2MQ1}) (1 - Pc_{2MQ1}^{119}) + 1 - Pc_{2MQ1}^{120} - 120 Pc_{2MQ1}^{119}) \quad (4.151)$$

$$Pe_{3SQ1} = \frac{1}{240} (360 Pc_{3MQ1}^{119} Pe_{3MQ1=2} + \Delta 3 \times 120 (1 - Pc_{3MQ1}) (1 - Pc_{3MQ1}^{119}) + 1 - Pc_{3MQ1}^{120} - 120 Pc_{3MQ1}^{119}) \quad (4.152)$$

A taxa de erro de bit será a média das taxas de erro de cada dígito. Se não for feita codificação diferencial, têm-se:

$$Pe_{dSQ1} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hdSQ1} \quad (4.153)$$

Levando-se em conta a codificação diferencial, observa-se que para o primeiro dígito, o incremento de erros de bit após a mesma é o mesmo obtido em sistema sem codificação de canal: cada bit errado é duplicado. O segundo e terceiro dígitos, não sendo codificados diferencialmente, apresentam a mesma taxa de erro de bit após esta operação. Têm-se, então, a taxa de erro do sistema:

$$Pe_{SQ1} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hdSQ1} = \frac{1}{3} (2 Pe_{1MQ1} + Pe_{2MQ1} + Pe_{3MQ1}) \quad (4.154)$$

Substituindo as expressões, têm-se:

$$\begin{aligned} Pe_{SQ1} = & \frac{1}{3} \left(\frac{2}{240} 360 Pc_{1MQ1}^{119} Pe_{1MQ1=2} + 120 (1 - Pc_{1MQ1}) (1 - Pc_{1MQ1}^{119}) + 1 - Pc_{1MQ1}^{120} \right. \\ & \left. - 120 Pc_{1MQ1}^{119} \right) + \frac{1}{240} (360 Pc_{2MQ1}^{119} Pe_{2MQ1=2} + 168 (1 - Pc_{2MQ1}) (1 - Pc_{2MQ1}^{119}) \\ & + 1 - Pc_{2MQ1}^{120} - 120 Pc_{2MQ1}^{119}) + \frac{1}{240} (360 Pc_{3MQ1}^{119} Pe_{3MQ1=2} \\ & + 132 (1 - Pc_{3MQ1}) (1 - Pc_{3MQ1}^{119}) + 1 - Pc_{3MQ1}^{120} - 120 Pc_{3MQ1}^{119}) \end{aligned} \quad (4.155)$$

Sistema SQ2: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ2

Valores de Δh obtidos:

$$\Delta 1_{SQ2} = \frac{Pe1_{MQ2=1} + 2 Pe1_{MQ2=2}}{Pe1_{MQ2=1} + Pe1_{MQ2=2}} = \frac{0.5 P_{S2} + P_{S3}}{0.5 P_{S2} + 0.9375 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.156)$$

$$\Delta 2_{SQ2} = \frac{Pe2_{MQ2=1} + 2 Pe2_{MQ2=2}}{Pe2_{MQ2=1} + Pe2_{MQ2=2}} = \frac{1.5 P_{S2} + 3 P_{S3}}{1.5 P_{S2} + 2.44 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.157)$$

$$\Delta 3_{SQ2} = \frac{Pe3_{MQ2=1} + 2 Pe3_{MQ2=2}}{Pe3_{MQ2=1} + Pe3_{MQ2=2}} = \frac{3.5 P_{S2} + 7 P_{S3}}{3.5 P_{S2} + 3.9 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.158)$$

Substituindo-se os valores em 4.146, calcula-se a taxa de erro do sistema, por feixe, sem considerar codificação diferencial:

$$Pe1_{SQ2} = \frac{1}{240} (360 Pc1_{MQ2}^{119} Pe1_{MQ2=2} + 120 (1 - Pc1_{MQ2}) (1 - Pc1_{MQ2}^{119}) + 1 - Pc1_{MQ2}^{120} - 120 Pc1_{MQ2}^{119}) \quad (4.159)$$

$$Pe2_{SQ2} = \frac{1}{240} (360 Pc2_{MQ2}^{119} Pe2_{MQ2=2} + 120 (1 - Pc2_{MQ2}) (1 - Pc2_{MQ2}^{119}) + 1 - Pc2_{MQ2}^{120} - 120 Pc2_{MQ2}^{119}) \quad (4.160)$$

$$Pe3_{SQ2} = \frac{1}{240} (360 Pc3_{MQ2}^{119} Pe3_{MQ2=2} + 120 (1 - Pc3_{MQ2}) (1 - Pc3_{MQ2}^{119}) + 1 - Pc3_{MQ2}^{120} - 120 Pc3_{MQ2}^{119}) \quad (4.161)$$

A taxa de erro de bit será a média das taxas de erro de cada dígito. Se não for feita codificação diferencial, têm-se:

$$Pe_{dSQ2} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hSQ2} \quad (4.162)$$

Como visto na seção anterior, em sistemas que utilizam este mapeamento, um erro de bit vai resultar em dois erros de bit após a decodificação diferencial na saída do sistema, em qualquer um dos feixes. Portanto:

Primeiro Dígito:

$$Pe_{dSQ2} = 2 Pe_{SQ2} \quad (4.163)$$

Segundo Dígito:

$$Pe_{dSQ2} = 2 Pe_{SQ2} \quad (4.164)$$

Terceiro Dígito:

$$Pe_{dSQ2} = 2 Pe_{SQ2} \quad (4.165)$$

Têm-se, então, a taxa de erro do sistema:

$$Pe_{SQ2} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hdSQ2} = \frac{2 Pe1_{SQ2} + 2 Pe2_{SQ2} + 2 Pe3_{SQ2}}{3} \quad (4.166)$$

Sistema SQ3: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ3

Este mapeamento é análogo ao MQ2, com a inversão de dígitos. Portanto,

$$\Delta 1_{SQ3} \simeq 1.0 \quad (4.167)$$

$$\Delta 2_{SQ3} \simeq 1.0 \quad (4.168)$$

$$\Delta 3_{SQ3} \simeq 1.0 \quad (4.169)$$

A taxa de erro por feixe também repete os resultados obtidos para MQ2, com os dígitos invertidos, sem codificação diferencial:

$$Pe1_{SQ3} = \frac{1}{240} (360 Pc1_{MQ3}^{119} Pe1_{MQ3=2} + 120(1 - Pc1_{MQ3})(1 - Pc1_{MQ3}^{119}) + 1 - Pc1_{MQ3}^{120} - 120 Pc1_{MQ3}^{119}) \quad (4.170)$$

$$Pe2_{SQ3} = \frac{1}{240} (360 Pc2_{MQ3}^{119} Pe2_{MQ3=2} + 120(1 - Pc2_{MQ3})(1 - Pc2_{MQ3}^{119}) + 1 - Pc2_{MQ3}^{120} - 120 Pc2_{MQ3}^{119}) \quad (4.171)$$

$$Pe3_{SQ3} = \frac{1}{240} (360 Pc3_{MQ3}^{119} Pe3_{MQ3=2} + 120(1 - Pc3_{MQ3})(1 - Pc3_{MQ3}^{119}) + 1 - Pc3_{MQ3}^{120} - 120 Pc3_{MQ3}^{119}) \quad (4.172)$$

Ou com codificação diferencial:

$$Pe_{SQ2} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hdSQ2} = \frac{2 Pe1_{SQ2} + 2 Pe2_{SQ2} + 2 Pe3_{SQ2}}{3} \quad (4.173)$$

Sistema SQ4: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ4

Valores de Δh obtidos:

$$\Delta 1_{SQ} = \frac{Pe1_{MQ=1} + 2 Pe1_{MQ=2}}{Pe1_{MQ=1} + Pe1_{MQ=2}} = \frac{2.5 P_{S2} + 4.375 P_{S3}}{2.5 P_{S2} + 3.125 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.174)$$

$$\Delta 2_{SQ} = \frac{Pe2_{MQ=1} + 2 Pe2_{MQ=2}}{Pe2_{MQ=1} + Pe2_{MQ=2}} = \frac{1.5 P_{S2} + 2.625 P_{S3}}{1.5 P_{S2} + 2.25 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.175)$$

$$\Delta 3_{SQ} = \frac{Pe3_{MQ=1} + 2 Pe3_{MQ=2}}{Pe3_{MQ=1} + Pe3_{MQ=2}} = \frac{0.5 P_{S2} + P_{S3}}{0.5 P_{S2} + 0.9375 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.176)$$

Cálculo da taxa de erro do sistema, por feixe, sem considerar codificação diferencial (equação 4.146):

$$Pe1_{SQ4} = \frac{1}{240} (360 Pc1_{MQ4}^{119} Pe1_{MQ4=2} + 120(1 - Pc1_{MQ4})(1 - Pc1_{MQ4}^{119}) + 1 - Pc1_{MQ4}^{120} - 120 Pc1_{MQ4}^{119}) \quad (4.177)$$

$$Pe2_{SQ4} = \frac{1}{240} (360 Pc2_{MQ4}^{119} Pe2_{MQ4=2} + 120(1 - Pc2_{MQ4})(1 - Pc2_{MQ4}^{119}) + 1 - Pc2_{MQ4}^{120} - 120 Pc2_{MQ4}^{119}) \quad (4.178)$$

$$Pe3_{SQ4} = \frac{1}{240} (360 Pc3_{MQ4}^{119} Pe3_{MQ4=2} + 120(1 - Pc3_{MQ4})(1 - Pc3_{MQ4}^{119}) + 1 - Pc3_{MQ4}^{120} - 120 Pc3_{MQ4}^{119}) \quad (4.179)$$

A taxa de erro de bit será a média das taxas de erro de cada dígito. Neste sistema a codificação diferencial do terceiro dígito é a mesma da realizada no primeiro dígito de MQ1. Quanto ao segundo e terceiro dígitos, o aumento do número de bits errados após esta operação é, em média, 1.5, como demonstrado no sistema sem codificação. Portanto, a taxa de erro final será:

$$Pe_{SQ4} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Peh_{dSQ1} = \frac{1.5 Pe1_{SQ4} + 1.5 Pe2_{SQ4} + 2 Pe3_{SQ4}}{3} \quad (4.180)$$

Sistema SQ5: Código CQ1 (120,116) e Mapeamento MQ5

Valores de Δh obtidos:

$$\Delta 1_{SQ5} = \frac{Pe1_{MQ5=1} + 2 Pe1_{MQ5=2}}{Pe1_{MQ5=1} + Pe1_{MQ5=2}} = \frac{2.5 P_{S2} + 5 P_{S3}}{2.5 P_{S2} + 3.4375 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.181)$$

$$\Delta 2_{SQ5} = \frac{Pe2_{MQ5=1} + 2 Pe2_{MQ5=2}}{Pe2_{MQ5=1} + Pe2_{MQ5=2}} = \frac{1.5 P_{S2} + 3 P_{S3}}{1.5 P_{S2} + 3.4375 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.182)$$

$$\Delta 3_{SQ5} = \frac{Pe3_{MQ5=1} + 2 Pe3_{MQ5=2}}{Pe3_{MQ5=1} + Pe3_{MQ5=2}} = \frac{0.5 P_{S2} + P_{S3}}{0.5 P_{S2} + 0.9375 P_{S3}} \simeq 1.0 \quad (4.183)$$

Cálculo da taxa de erro do sistema, por feixe, sem codificação diferencial (equação 4.146):

$$Pe1_{SQ5} = \frac{1}{240} (360 Pc1_{MQ5}^{119} Pe1_{MQ5=2} + 120(1 - Pc1_{MQ5})(1 - Pc1_{MQ5}^{119}) + 1 - Pc1_{MQ5}^{120} - 120 Pc1_{MQ5}^{119}) \quad (4.184)$$

$$Pe2_{SQ5} = \frac{1}{240} (360 Pc2_{MQ5}^{119} Pe2_{MQ5=2} + 120(1 - Pc2_{MQ5})(1 - Pc2_{MQ5}^{119}) + 1 - Pc2_{MQ5}^{120} - 120 Pc2_{MQ5}^{119}) \quad (4.185)$$

$$Pe3_{SQ5} = \frac{1}{240} (360 Pc3_{MQ5}^{119} Pe3_{MQ5=2} + 120(1 - Pc3_{MQ5})(1 - Pc3_{MQ5}^{119}) + 1 - Pc3_{MQ5}^{120} - 120 Pc3_{MQ5}^{119}) \quad (4.186)$$

O aumento de taxa de erro devido à codificação diferencial para cada dígito deste sistema é o mesmo verificado para o primeiro dígito de MQ1:

$$Peh_{dSQ5} = 2 Peh_{SQ5}, \quad h = 1, 2, 3. \quad (4.187)$$

Portanto, a probabilidade de erro de bit do sistema será

$$Pe_{SQ5} = \frac{2}{3} \sum_{h=1}^3 Peh_{dSQ5} = \frac{2 (Pe1_{MQ5} + Pe2_{MQ5} + Pe3_{MQ5})}{3} \quad (4.188)$$

Sistema SQ6: Código CQ2 (124,119) e Mapeamento MQ4

Valores de Δh obtidos: os mesmos de SQ4, pois ambos os sistemas utilizam o mesmo mapeamento MQ4:

$$\Delta 1_{SQ6} \simeq 1.0 \quad (4.189)$$

$$\Delta 2_{SQ6} \simeq 1.0 \quad (4.190)$$

$$\Delta 3_{SQ6} \simeq 1.0 \quad (4.191)$$

Cálculo da taxa de erro do sistema, por feixe, sem considerar codificação diferencial (equação 4.146):

$$Pe1_{SQ6} = \frac{1}{248} (372 Pc1_{MQ4}^{123} Pe1_{MQ4=2} + 124(1 - Pc1_{MQ4})(1 - Pc1_{MQ4}^{123}) + 1 - Pc1_{MQ4}^{124} - 124 Pc1_{MQ4}^{123}) \quad (4.192)$$

$$Pe2_{SQ6} = \frac{1}{248} (372 Pc2_{MQ4}^{123} Pe2_{MQ4=2} + 124(1 - Pc2_{MQ4})(1 - Pc2_{MQ4}^{123}) + 1 - Pc2_{MQ4}^{124} - 124 Pc2_{MQ4}^{123}) \quad (4.193)$$

$$Pe3_{SQ6} = \frac{1}{248} (372 Pc3_{MQ4}^{123} Pe3_{MQ4=2} + 124(1 - Pc3_{MQ4})(1 - Pc3_{MQ4}^{123}) + 1 - Pc3_{MQ4}^{124} - 124 Pc3_{MQ4}^{123}) \quad (4.194)$$

A taxa de erro de bit será a média das taxas de erro de cada dígito. E, para este sistema SQ6, em que a codificação diferencial é a mesma utilizada em SQ4, têm-se:

$$Pe_{SQ6} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hdSQ6} = \frac{1.5 Pe1_{SQ6} + 1.5 Pe2_{SQ6} + 2 Pe3_{SQ6}}{3} \quad (4.195)$$

4.3.6 Sistema Quaternário Codificado: Correção de Erros Duplos

Em sistemas que permitem correção de erros duplos o cálculo dos valores de Δh é o mesmo dos sistemas de correção de erros simples desde que o mapeamento utilizado seja o mesmo.

No caso de correção de erros duplos, restarão erros de dígitos após a decodificação de canal se

1. Ocorrerem erros em três ou mais posições:

Como descrito na equação 4.70. A correção indevida vai causar acréscimo de $mf = 2$ bits errados aos já existentes.

2. Houver qualquer erro de magnitude 2:

Como descrito na equação 4.143, onde substituindo os valores, obtêm-se:

$$Pe_{h1MQ} = (2 + 2) \binom{n}{1} Pch_{MQ}^{n-1} Pe_{hMQ=2} \quad (4.196)$$

No entanto, existe também a possibilidade de se ter dois erros de magnitude 2. Neste caso, $mi = 4$, $mf = 2$ e a equação 4.143 se torna:

$$Peh_{2MQ} = (4 + 2) \binom{n}{2} Pch_{MQ}^{n-2} Peh_{MQ=2}^2 \quad (4.197)$$

A probabilidade de erro de bit em cada um dos dígitos deste sistema será, portanto, a soma de Peh_{1MQ} e Peh_{2MQ} :

$$Peh_{SQ} = \frac{1}{n \times \log_2 m} \left(4 \binom{n}{1} Pch_{MQ}^{(n-1)} Peh_{MQ=2} + 6 \times \binom{n}{2} Pch_{MQ}^{(n-2)} Peh_{MQ=2}^2 + \sum_{i=3}^n (\Delta h_{MQ} i + 2) \binom{n}{i} Pcl_{MQ}^{n-i} (1 - Pch_{MQ})^i \right) \quad (4.198)$$

Desenvolvendo a expressão, têm-se:

$$Peh_{SQ} = \frac{1}{n \times \log_2 m} \left(4 \times n Pch_{MQ}^{(n-1)} Peh_{MQ=2} + 3 \times n \times (n-1) Pch_{MQ}^{(n-2)} \times Peh_{MQ=2}^2 + 2 - 2 Pch_{MQ} - n \times \log_2 m Pch_{MQ}^{(n-1)} (1 - Pch_{MQ}) - 3 \times (n-1) Pch_{MQ}^{(n-2)} (1 - Pch_{MQ})^2 + n(1 - Pch_{MQ}) - n Pch_{MQ}^{(n-1)} (1 - Pch_{MQ}) - 3 \times (n-1) Pch_{MQ}^{(n-2)} (1 - Pch_{MQ})^2 \right) \quad (4.199)$$

Sistema SQ7: Código CQ3 (120,112) e Mapeamento MQ3

Valores de Δh obtidos: os mesmos de MQ3:

$$\Delta 1_{SQ7} \simeq 1.0 \quad (4.200)$$

$$\Delta 2_{SQ7} \simeq 1.0 \quad (4.201)$$

$$\Delta 3_{SQ7} \simeq 1.0 \quad (4.202)$$

Da equação 4.199 têm-se, para um sistema com codificação para correção de erros duplos, de palavras de comprimento $n = 120$:

$$Pel_{SQ7} = \frac{1}{240} \left(480 Pcl_{MQ3}^{119} Pel_{MQ3=2} + 42840 Pcl_{MQ3}^{118} Pel_{MQ3=2}^2 + 2 - 2 Pcl_{MQ3} - 240 Pcl_{MQ3}^{119} (1 - Pcl_{MQ3}) - 14280 Pcl_{MQ3}^{118} (1 - Pcl_{MQ3})^2 + 120(1 - Pcl_{MQ3}) - 120 Pcl_{MQ3}^{119} (1 - Pcl_{MQ3}) - 14280 Pcl_{MQ3}^{118} (1 - Pcl_{MQ3})^2 \right) \quad (4.203)$$

$$\begin{aligned}
Pe_{2SQ7} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{MQ3}^{119} Pe_{2MQ3=2} + 42840 Pc_{MQ3}^{118} Pe_{2MQ3=2}^2 + 2 - 2 Pc_{2MQ3} \\
& - 240 Pc_{MQ3}^{119} (1 - Pc_{2MQ3}) - 14280 Pc_{MQ3}^{118} (1 - Pc_{2MQ3})^2 + 120(1 - Pc_{2MQ3}) \\
& - 120 Pc_{MQ3}^{119} (1 - Pc_{2MQ3}) - 14280 Pc_{MQ3}^{118} (1 - Pc_{2MQ3})^2) \quad (4.204)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Pe_{3SQ7} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{MQ3}^{119} Pe_{3MQ3=2} + 42840 Pc_{MQ3}^{118} Pe_{3MQ3=2}^2 + 2 - 2 Pc_{3MQ3} \\
& - 240 Pc_{MQ3}^{119} (1 - Pc_{3MQ3}) - 14280 Pc_{MQ3}^{118} (1 - Pc_{3MQ3})^2 + 120(1 - Pc_{3MQ3}) \\
& - 120 Pc_{MQ3}^{119} (1 - Pc_{3MQ3}) - 14280 Pc_{MQ3}^{118} (1 - Pc_{3MQ3})^2) \quad (4.205)
\end{aligned}$$

E a taxa de erro após a decodificação diferencial vai ser:

$$Pe_{SQ7} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hSQ7} = \frac{1.5 Pe_{1SQ7} + 1.5 Pe_{2SQ7} + 2 Pe_{3SQ7}}{3} \quad (4.206)$$

Sistema SQ8: Código CQ3 (120,112) e Mapeamento MQ4

Valores de Δh obtidos: os mesmos de MQ4:

$$\Delta_{1SQ8} \simeq 1.0 \quad (4.207)$$

$$\Delta_{2SQ8} \simeq 1.0 \quad (4.208)$$

$$\Delta_{3SQ8} \simeq 1.0 \quad (4.209)$$

Da equação 4.199 têm-se, para um sistema com codificação para correção de erros duplos, de palavras de comprimento $n = 120$:

$$\begin{aligned}
Pe_{1SQ8} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{MQ4}^{119} Pe_{1MQ4=2} + 42840 Pc_{MQ4}^{118} Pe_{1MQ4=2}^2 + 2 - 2 Pc_{1MQ4} \\
& - 240 Pc_{MQ4}^{119} (1 - Pch_{MQ4}) - 14280 Pch_{MQ4}^{118} (1 - Pch_{MQ4})^2 + 120(1 - Pch_{MQ4}) \\
& - 120 Pch_{MQ4}^{119} (1 - Pch_{MQ4}) - 14280 Pch_{MQ4}^{118} (1 - Pch_{MQ4})^2) \quad (4.210)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Pe_{2SQ8} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{MQ4}^{119} Pe_{2MQ4=2} + 42840 Pc_{MQ4}^{118} Pe_{2MQ4=2}^2 + 2 - 2 Pc_{2MQ4} \\
& - 240 Pc_{MQ4}^{119} (1 - Pc_{2MQ4}) - 14280 Pc_{MQ4}^{118} (1 - Pc_{2MQ4})^2 + 120(1 - Pc_{2MQ4}) \\
& - 120 Pc_{MQ4}^{119} (1 - Pc_{2MQ4}) - 14280 Pc_{MQ4}^{118} (1 - Pc_{2MQ4})^2) \quad (4.211)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Pe_{3SQ8} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{MQ4}^{119} Pe_{3MQ4=2} + 42840 Pc_{MQ4}^{118} Pe_{3MQ4=2}^2 + 2 - 2 Pc_{3MQ4} \\
& - 240 Pc_{MQ4}^{119} (1 - Pc_{3MQ4}) - 14280 Pc_{MQ4}^{118} (1 - Pc_{3MQ4})^2 + 120(1 - Pc_{3MQ4}) \\
& - 120 Pc_{MQ4}^{119} (1 - Pc_{3MQ4}) - 14280 Pc_{MQ4}^{118} (1 - Pc_{3MQ4})^2) \quad (4.212)
\end{aligned}$$

E a taxa de erro após a decodificação diferencial vai ser:

$$Pe_{SQ8} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{h_{dSQ8}} = \frac{1.5 Pe_{1SQ8} + 1.5 Pe_{2SQ8} + 2 Pe_{3SQ8}}{3} \quad (4.213)$$

Sistema SQ9: Código CQ3 (120,112) e Mapeamento MQ5

Valores de Δh obtidos: os mesmos de MQ5:

$$\Delta_{1SQ9} \simeq 1.0 \quad (4.214)$$

$$\Delta_{2SQ9} \simeq 1.0 \quad (4.215)$$

$$\Delta_{3SQ9} \simeq 1.0 \quad (4.216)$$

Da equação 4.199 têm-se, para um sistema com codificação para correção de erros duplos, de palavras de comprimento $n = 120$:

$$\begin{aligned} Pe_{1SQ9} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{1MQ5}^{119} Pe_{1MQ5=2} + 42840 Pc_{1MQ5}^{118} Pe_{1MQ5=2}^2 + 2 - 2 Pc_{1MQ5} \\ & - 240 Pc_{1MQ5}^{119} (1 - Pch_{MQ5}) - 14280 Pch_{MQ5}^{118} (1 - Pch_{MQ5})^2 + 120(1 - Pch_{MQ5}) \\ & - 120 Pch_{MQ5}^{119} (1 - Pch_{MQ5}) - 14280 Pch_{MQ5}^{118} (1 - Pch_{MQ5})^2) \end{aligned} \quad (4.217)$$

$$\begin{aligned} Pe_{2SQ9} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{2MQ5}^{119} Pe_{2MQ5=2} + 42840 Pc_{2MQ5}^{118} Pe_{2MQ5=2}^2 + 2 - 2 Pc_{2MQ5} \\ & - 240 Pc_{2MQ5}^{119} (1 - Pc_{2MQ5}) - 14280 Pc_{2MQ5}^{118} (1 - Pc_{2MQ5})^2 + 120(1 - Pc_{2MQ5}) \\ & - 120 Pc_{2MQ5}^{119} (1 - Pc_{2MQ5}) - 14280 Pc_{2MQ5}^{118} (1 - Pc_{2MQ5})^2) \end{aligned} \quad (4.218)$$

$$\begin{aligned} Pe_{3SQ9} = & \frac{1}{240} (480 Pc_{3MQ5}^{119} Pe_{3MQ5=2} + 42840 Pc_{3MQ5}^{118} Pe_{3MQ5=2}^2 + 2 - 2 Pc_{3MQ5} \\ & - 240 Pc_{3MQ5}^{119} (1 - Pc_{3MQ5}) - 14280 Pc_{3MQ5}^{118} (1 - Pc_{3MQ5})^2 + 120(1 - Pc_{3MQ5}) \\ & - 120 Pc_{3MQ5}^{119} (1 - Pc_{3MQ5}) - 14280 Pc_{3MQ5}^{118} (1 - Pc_{3MQ5})^2) \end{aligned} \quad (4.219)$$

Taxa de erro após a decodificação diferencial:

$$Pe_{SQ9} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{h_{SQ9=2}} \times \frac{2 Pe_{1SQ9} + 2 Pe_{2SQ9} + 2 Pe_{3SQ9}}{3} \quad (4.220)$$

4.4 Sistemas de Codificação Octais

Da mesma forma que realizado para sistemas binários e quaternários, é feita uma generalização para uma eventual implementação de sistemas octais. Observar que também neste caso se faz necessária transcodificação de símbolos, e que esta operação apresenta procedimento distinto para primeiro e segundo dígito octal.

4.4.1 Parâmetros do Código

Em caso de se utilizar códigos de dígitos octais, os seis bits de cada posição do símbolo na constelação 64 QAM são alocados, num sistema homogêneo, em $J = 2$ dígitos octais, pois $m = 3$. Os dois feixes octais assim formados são codificados independentemente utilizando-se códigos de comprimento N dígitos, dos quais K são de informação e $N - K$ de paridade.

4.4.2 Necessidade de Transcodificação

Como no caso de sistemas quaternários, para sistemas octais também é necessário fazer uma transformação da representação binária dos dígitos octais de forma a ter uma sequência de símbolos binários em código de Gray e para que a codificação corretora possa ser efetuada. Além disso, é necessário lembrar que no caso do primeiro dígito octal deve haver (nos dois primeiros bits) indicação de quadrante. Uma configuração que atenda estes requisitos é a seguinte:

1. Primeiro Dígito:

Dígito Octal	Representação Binária
0	000
1	001
2	011
3	010
4	100
5	101
6	111
7	110

Tabela 4.25: Transcodificação do 1º Dígito: Sistema Octal

2. Segundo Dígito:

Dígito Octal	Representação Binária
0	000
1	001
2	011
3	010
4	110
5	111
6	101
7	100

Tabela 4.26: Transcodificação do 2º Dígito: Sistema Octal

4.4.3 Mapeamentos, Métrica e Codificação Diferencial

São apresentados dois mapeamentos possíveis com respectivas métricas e codificação diferencial associadas:

MO1: Mapeamento Octal I

1. Mapeamento da Constelação: Ver 4.8 [Noguchi 2]

2. Métricas:

- Métricas Por Dígitos:

Da mesma forma que realizado para mapeamentos binários, calcula-se para cada um dos dois dígitos dos símbolos do mapeamento octal:

Dígito	No de Eventos	Porcentagem
1	64	0.2500
2	208	0.8125

Tabela 4.27: Métricas Por Dígitos (MO1)

- Média de Métricas Por Dígitos: 0.53125

- Métricas por Distância de Lee:

De forma análoga ao que é feito no caso de mapeamentos quaternários, os erros de dígito em mapeamentos octais podem ter mais de um valor (no caso 7): o mapeamento MO1 apresenta as seguintes métricas por distância de Lee:

Dígito	Distância de Lee	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	16	0.06250
	2	8	0.03125
	3	8	0.03125
	4	0	0.00000
	5	8	0.03125
	6	8	0.03125
	7	16	0.06250
2o	1	56	0.21875
	2	8	0.03125
	3	40	0.15625
	4	0	0.00000
	5	40	0.15625
	6	8	0.03125
	7	56	0.21875

Tabela 4.28: Métricas Por Distância de Lee (MO1)

- Métricas Por Magnitude:

Analogamente ao que ocorre no caso quaternário, em sistemas octais erros de dígito de distância de Lee de 1 ou 7 significam erros de magnitude 1. Distâncias de Lee de 2 ou 6 causam erros de magnitude 2 e distâncias de Lee de 3 ou cinco equivalem a erros de magnitude 3. Nos mapeamentos aqui propostos não existem casos de símbolos Vizinhos Mais Próximos cujos dígitos apresentem distância de Lee (ou erro de magnitude) de 4. Portanto:

				\bar{Q}				
20	23	34	37	07	06	01	00	
21	22	35	36	04	05	02	03	
26	25	32	31	13	12	15	14	
27	24	33	30	10	11	16	17	\bar{I}
57	56	51	50	70	73	64	67	
54	55	52	53	71	72	65	66	
43	42	45	44	76	75	62	61	
40	41	46	47	77	74	63	60	

Figura 4.8: Mapeamento Octal I: MO1

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	32	0.1250
	2	16	0.0625
	3	16	0.0625
	4	0	0.0000
2o	1	112	0.4375
	2	16	0.0625
	3	80	0.3125
	4	0	0.0000

Tabela 4.29: Métricas Por Magnitude (MO1)

- Média de Métricas Por Magnitude:

Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	72	0.28125
2	16	0.06250
3	48	0.18750
4	0	0.00000

Tabela 4.30: Media de Métricas Por Magnitude (MO1)

Cada dígito difere de seus Vizinhos Mais Próximos de valores de magnitudes 1, 3, 5, 7 (principalmente) e nos símbolos próximos aos eixos, de magnitudes 2 e 6. Pela distribuição de valores da tabela acima pode-se observar que um código para correção de erros de magnitude 1 corrigirá 56,25% dos erros para vizinhos mais próximos deste mapeamento, enquanto que um código que corrija erros de magnitude 1 e 3 o fará para 93,75% e a correção de todos os erros para vizinhos mais próximos somente será possível com um código que corrija erros de magnitudes 1, 2, 3, 5, 6 e 7.

3. Parâmetros de Rotação de Fase e Eliminação de Ambiguidades:

Como no caso dos mapeamentos binários e de MQ1, MO1 também só apresenta o primeiro e segundo bits de cada símbolo sujeito à ambiguidade de fase. Portanto, os bits de 3 a 6 não são codificados diferencialmente, e o primeiro e segundo são codificados como em MQ1.

4. Probabilidade de Erro de Bit:

Como nos exemplos binários e quaternários, o mapeamento octal apresenta quadrantes simétricos e os cálculos de taxa de erro podem ser feitos para um deles e generalizado para os outros. No sistema quaternário, no entanto, existirão quatro tipos de erros: de magnitude 1, 2, 3 ou 4. Por exemplo, supor, no MO1, o símbolo de dois dígitos quaternários 35, de coordenadas $(-3, +5)$:

20	23	34	37	07
21	22	35	36	04
26	25	32	31	13
27	24	33	30	10
57	56	51	50	70

Caso este símbolo seja desviado devido a ruído no meio de transmissão, e seja recebido na posição de um Vizinho Mais Próximo, quatro sinais podem ser recebidos:

- $(-5, +5) = 22$
- $(-3, +3) = 32$
- $(-1, +5) = 36$
- $(-3, +7) = 34$

Se o desvio for para um Vizinho Próximo, há a possibilidade de receber outros quatro sinais:

- $(-5, +7) = 23$
- $(-5, +3) = 25$
- $(-1, +3) = 31$
- $(-1, +7) = 37$

Como a probabilidade de um símbolo ser desviado para seu Vizinho Mais Próximo é P_{S2} , para seu Vizinho Próximo é P_{S3} e não ser desviado é P_{S1} , pode-se calcular, para este sinal $(-3, +5)$, que a probabilidade de que seu primeiro dígito octal 3 seja recebido corretamente é dada por

$$P_{cl_{MO1}} = P_{S1} + 3 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.221)$$

A probabilidade de que seja recebido com erro é dada por:

$$Pe1_{MO1} = P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.222)$$

Para o segundo dígito 5 tem-se a probabilidade de que seja recebido corretamente:

$$Pc2_{MO1} = P_{S1} + P_{S3} \quad (4.223)$$

E a probabilidade de ser recebido com erro:

$$Pc2_{MO1} = 4 P_{S2} + 3 P_{S3} \quad (4.224)$$

Com o mesmo procedimento para todos os dígitos de todos os símbolos do segundo quadrante, calcula-se, para o segundo dígito:

Tipo de Sinal	P_{cMO1}	$Pe2_{MO1=1}$	$Pe2_{MO1=2}$	$Pe2_{MO1=3}$	$Pe2_{MO1=4}$
$(-7, +7)$	$P_{S1} + 2P_{S2} + P_{S3}$	$P_{S2} + P_{S3}$	P_{S3}	$P_{S2} + P_{S3}$	0.0
$(-7, +5)$	$P_{S1} + P_{S2}$	$2P_{S2} + P_{S3}$	$2P_{S3}$	$P_{S2} + P_{S3}$	0.0
...

Repetindo o procedimento para cada um dos dígitos de cada símbolo obtêm-se:

(a) Primeiro Dígito:

$$Pc1_{MO1} = P_{S1} + 3 P_{S2} + 2.125 P_{S3} \quad (4.225)$$

$$Pe1_{MO1=1} = 0.5 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.226)$$

$$Pe1_{MO1=2} = 0.25 P_{S2} + 0.4375 P_{S3} \quad (4.227)$$

$$Pe1_{MO1=3} = 0.25 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.228)$$

$$Pe1_{MO1=4} = 0.0625 P_{S3} \quad (4.229)$$

(b) Segundo Dígito:

$$Pc2_{MO1} = P_{S1} + 0.75 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.230)$$

$$Pe2_{MO1=1} = 1.75 P_{S2} + 0.625 P_{S3} \quad (4.231)$$

$$Pe2_{MO1=2} = 0.25 P_{S2} + 1.5 P_{S3} \quad (4.232)$$

$$Pe2_{MO1=3} = 1.25 P_{S2} + 0.875 P_{S3} \quad (4.233)$$

$$Pe2_{MO1=4} = 0.5 P_{S3} \quad (4.234)$$

20	21	31	30	\bar{Q}	67	64	14	17	
23	22	32	33		66	65	15	16	
13	12	02	03		36	35	45	46	
10	11	01	00		37	34	44	47	\bar{I}
07	04	74	77		40	41	51	50	
06	05	75	76		43	42	52	53	
56	55	25	26		73	72	62	63	
57	54	24	27		70	71	61	60	

Figura 4.9: Mapeamento Octal II: MO2

MO2: Mapeamento Octal II

1. Mapeamento da Constelação: Ver Figura 4.9 [CPqD 2]

2. Métricas:

- Métricas Por Dígitos:

Dígito	No de Eventos	Porcentagem
1	96	0.375
2	160	0.625

Tabela 4.31: Métricas Por Dígitos (MO2)

- Média de Métricas Por Dígitos: 0.5

- Métricas Por Magnitude:

Da mesma forma que feito para MO1,

Dígito	Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1o	1	48	0.1865
	2	0	0.0000
	3	48	0.1865
	4	0	0.0000
2o	1	112	0.4375
	2	0	0.0000
	3	48	0.1865
	4	0	0.0000

Tabela 4.32: Métricas Por Magnitude (MO2)

- Média de Métricas Por Magnitude:

Magnitude	No de Eventos	Porcentagem
1	160	0.3120
2	0	0.0000
3	96	0.1865
4	0	0.0000

Tabela 4.33: Média de Métricas Por Magnitude (MO2)

Este mapeamento tem a característica de ter como Vizinhos Mais Próximos apenas símbolos cujos dígitos guardem distâncias ímpares entre si (1, 3, 5 ou 7). Um código para correção de erros ímpares poderá corrigir, portanto, todos os erros de símbolos para seus Vizinhos Mais Próximos.

3. Parâmetros de Rotação de Fase:

- Primeiro Dígito: A rotação de 90 graus no sentido horário altera o dígito X para Y , segundo a expressão $Y = 3 + 3 \times X$:

X (000)		Y (090)		Y (180)		Y (270)	
Octal	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.
0	000	3	010	4	100	7	110
1	001	6	111	5	101	2	011
2	011	1	001	6	111	5	101
3	010	4	100	7	110	0	000
4	100	7	110	0	000	3	010
5	101	2	011	1	001	6	111
6	111	5	101	2	011	1	001
7	110	0	000	3	010	4	100

- Segundo dígito: A rotação de 90 graus no sentido horário altera o dígito X para Y , segundo a expressão $Y = 7 - X$:

X (000)		Y (090)		Y (180)		Y (270)	
Octal	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.	Quat.	Bin.
0	000	7	100	0	000	7	100
1	001	6	101	1	001	6	101
2	011	5	111	2	011	5	111
3	010	4	110	3	010	4	110
4	110	3	010	4	110	3	010
5	111	2	011	5	111	2	011
6	101	1	001	6	101	1	001
7	100	0	000	7	100	0	000

4. Eliminação de Ambiguidades de Fase:

- Primeiro dígito: na tabela de rotações de fase, observa-se que os bits do dígito são alterados, a cada rotação de fase de 90 graus, em uma das duas seqüências:

(a) 000, 010, 100, 110,

(b) 001, 111, 101, 011

A determinação da seqüência correta depende do terceiro bit B_{3t} (embora este não sofra alteração). O segundo bit B_{2t} varia, a cada rotação de fase de 90 graus, na seqüência: 0, 1, 0, 1, sendo codificado diferencialmente como mostrado na equação 4.96 e decodificado como em 4.97. A codificação diferencial do primeiro bit B_{1t} , que resultará no bit B_{1r} , vai depender da seqüência a ser seguida e das variações anteriores

deste bit (informações contidas nos registradores P_t e I_t), devendo ser feita da seguinte forma [CPqD 2]:

- (a) Se a soma módulo 2 do segundo e terceiro bits, obtidos após a codificação diferencial do símbolo em questão for zero:

$$B_{1r} = B_{1t} \oplus P_t \quad (4.235)$$

$$P_t = B_{1r} \quad (4.236)$$

Ou seja, B_{1r} é obtido pela soma módulo 2 de B_{1t} e o valor armazenado de P_t , e este último tem seu valor atualizado para o valor obtido para B_{1r} .

- (b) Se a soma módulo 2 for 1:

$$B_{1r} = B_{1t} \oplus I_t \quad (4.237)$$

$$I_t = B_{1r} \quad (4.238)$$

Analogamente, neste caso B_{1r} é obtido pela soma módulo 2 de B_{1t} e o valor armazenado de I_t , e este último tem seu valor atualizado para o valor obtido para B_{1r} .

A decodificação diferencial do primeiro bit, que fornecerá o valor do bit recebido B'_{1t} , também vai depender do dígito ser par ou ímpar, e dos valores armazenados nos registradores de recepção P_r e I_r :

- (a) Se a soma módulo 2 do segundo e terceiro bits, antes da decodificação diferencial for zero:

$$B'_{1t} = B_{1r} \oplus P_r \quad (4.239)$$

$$P_r = B_{1r} \quad (4.240)$$

Ou seja, B'_{1t} é obtido pela soma módulo 2 de B_{1r} e o valor armazenado de P_r , e este último tem seu valor atualizado para o valor obtido para o valor recebido B_{1r} .

- (b) Se a soma módulo 2 for 1:

$$B'_{1t} = B_{1r} \oplus I_r \quad (4.241)$$

$$I_r = B_{1r} \quad (4.242)$$

- Segundo Dígito: Apenas o primeiro bit deste dígito varia com a rotação de fase, na sequência: 0,1,0,1, devendo ser codificado diferencialmente como descrito pelas equações 4.96 e 4.97.

5. Probabilidade de Erro de Bit:

É feito cálculo análogo ao realizado para MO1:

(a) Primeiro Dígito:

$$Pc1_{MO2} = P_{S1} + 2.5 P_{S2} + 1.625 P_{S3} \quad (4.243)$$

$$Pe1_{MO2=1} = P_{S2} + 1.3125 P_{S3} \quad (4.244)$$

$$Pe1_{MO2=2} = 0.4375 P_{S3} \quad (4.245)$$

$$Pe1_{MO2=3} = 0.5 P_{S2} + 0.5625 P_{S3} \quad (4.246)$$

$$Pe1_{MO2=4} = 0.0625 P_{S3} \quad (4.247)$$

(b) Segundo Dígito:

$$Pc2_{MO2} = P_{S1} + 1.5 P_{S2} + 0.625 P_{S3} \quad (4.248)$$

$$Pe2_{MO2=1} = 1.75 P_{S2} + 1.375 P_{S3} \quad (4.249)$$

$$Pe2_{MO2=2} = 1.25 P_{S3} \quad (4.250)$$

$$Pe2_{MO2=3} = 0.75 P_{S2} + 0.5 P_{S3} \quad (4.251)$$

$$Pe2_{MO2=4} = 0.25 P_{S3} \quad (4.252)$$

4.4.4 Probabilidade de Erro de Bit de Sistema Octal Não Codificado

Como para os outros sistemas 2^m ários, calcula-se também a taxa de erro de bit a partir da métrica do mapeamento utilizado e do aumento da taxa de erro de bit devido à codificação diferencial. No entanto, como verificado no sistema quaternário MQ1, em mapeamentos octais as distâncias entre dígitos de Símbolos Vizinhos Mais Próximos não estão restritas a 1, e isto deve ser levado em consideração, pois um erro de dígito vai ocasionar, na maioria das vezes, mais que um erro de bit após a decodificação diferencial. Aqui também utiliza-se o cálculo da Métrica Equivalente do Mapeamento *Meq*.

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MO1

Como foi visto anteriormente, o mapeamento MO1 apresenta métrica de valor 0.53125. No entanto, como este mapeamento apresenta Símbolos Vizinhos Mais Próximos com distâncias de Lee de 1, 2 e 3, é necessário considerar a média de métricas por magnitude deste mapeamento (Tabela 4.30) e calcular a métrica equivalente (Meq_{MO1}). A proporção de vizinhanças de cada magnitude possível (neste caso 1, 2 ou 3) vai influenciar diretamente o acréscimo de erros de bit. Cada dígito corresponde a três bits, e a transcodificação, sendo diferente para o primeiro e segundo dígitos, vai causar erro de 1 ou 2 bits para o primeiro, ou 1 bit para o segundo, em caso de erro de magnitude 1.

- A tabela a seguir mostra as distâncias de Lee e o número de bits que diferem entre a posição recebida com erro e a posição original, para o primeiro dígito:

Dígito	Repr. Bin.	Erro=1	Erro=7	Erro=3	Erro=5	Erro=2	Erro=6	Erro=4
0	000	1	2	1	2	2	2	1
1	001	1	1	2	2	2	1	1
2	011	1	1	2	2	3	1	1
3	010	2	1	2	1	3	1	1
4	100	1	2	1	2	2	2	1
5	101	1	1	2	2	2	1	1
6	111	1	1	2	2	3	1	1
7	110	2	1	2	1	3	1	1
Média	<i>dl</i>	1.25	1.25	1.75	1.75	2.5	1.25	1

Tabela 4.34: Erros de Bit Por Distância de Lee (MO1, 1o Dígito)

- Segundo Dígito:

Dígito	Repr. Bin.	Erro=1	Erro=7	Erro=3	Erro=5	Erro=2	Erro=6	Erro=4
0	000	1	1	1	3	2	1	2
1	001	1	1	3	1	2	1	2
2	011	1	1	1	3	2	1	2
3	010	1	1	3	1	2	1	2
4	110	1	1	1	3	2	1	2
5	111	1	1	3	1	2	1	2
6	101	1	1	1	3	2	1	2
7	100	1	1	3	1	2	1	2
Média	<i>dl</i>	1	1	2	2	2	1	2

Tabela 4.35: Erros de Bit Por Distância de Lee (MO1, 2o Dígito)

As informações das tabelas de número de bits errados por dígito errado permitem concluir que, na média, erros de magnitude 1 causam um aumento do número de bits errados em

$$Err_1 = \frac{1.25 + 1.25 + 1.00 + 1.00}{4} = 1.125 \quad (4.253)$$

Igualmente, erros de magnitude 2 e 3 causam, respectivamente aumento de número de bits errados de 1.875 e 1.6875. Portanto, têm-se que, na média, a seguinte Métrica Equivalente:

$$M_{eq} = \frac{1.125 \times 0.28125 + 1.875 \times 0.0625 + 1.6875 \times 0.1875}{3} = 0.25 \quad (4.254)$$

Além disso, a codificação diferencial vai ocasionar acréscimo na taxa de erro de bit de 6.25%, como no caso de sistemas binários, pois é a mesma operação realizada para os mesmos. A taxa de erro de bit do sistema sem codificação de canal, que utilize o mapeamento MO1 e codificação diferencial é dada por:

$$TEB_{MO1} = 1.083 \frac{0.25}{0.14583} P_{bit} \simeq 1.86 P_{bit} \simeq 0.54 \times \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.255)$$

Taxa de Erro de Bit (TEB) com Mapeamento MO2

Como no caso anterior, considera-se a Métrica Equivalente para este mapeamento. O incremento de bits errados por dígito errado é o mesmo de MO1, e a Média de Métricas Por Magnitude é dada pela tabela 4.33, onde se observa que não há casos de distâncias pares entre dígitos de Símbolos Vizinhos Mais Próximos. Têm-se, portanto, a seguinte Métrica Equivalente:

$$Meq_{MO2} = \frac{0.312 \times 1.125 + 0.1865 \times 1.6875}{3} = 0.2219 \quad (4.256)$$

A codificação diferencial vai causar, no segundo dígito, um aumento de 1 bit (pois o primeiro bit é codificado diferencialmente). Quanto ao primeiro dígito, haverá acréscimo de três bits errados (devido à codificação diferencial do primeiro bit, ao registrador PAR e ao registrador ímpar, denotados por I e P na descrição do mapeamento MO2).

Para cálculo da taxa de erro de bit após a decodificação diferencial, deve-se levar em conta que na constelação existem as seguintes possibilidades de erro devido a desvio:

1. Primeiro Dígito:

- 1o e 2o bits corretos, 3o errado: 48 em 256, causando erro final de 2 bits
- 1o e 3o bits corretos, 2o errado: 48 em 256, causando erro de 2.5 bits no final
- 1o e 2o bits errados, 3o correto: 16 em 256, causando erro de 4 bits no final
- 1o e 3o bits errados, 2o correto: 16 em 256, causando erro de 3.5 bits no final.

2. Segundo Dígito: Erro no 1o bit: causa dois erros de bit. Isto ocorre em 32 das 256 possibilidades de desvio. Erro nos demais bits não causa nenhum erro adicional.

Portanto, a codificação diferencial causará aumento da taxa de erro de bit de:

$$Incr_{dd} = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{48 \times 2 + 48 \times 2.5 + 16 \times 4 + 16 \times 3.5 + 32 \times 2}{256} = 1.78125 \quad (4.257)$$

Estes valores obtidos permitem calcular a taxa de erro do sistema:

$$TEB_{MO2} = 1.78125 \times \frac{0.2219}{0.14583} P_{bit} \simeq 2.7 P_{bit} \simeq 0.79 \times \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (4.258)$$

4.4.5 Sistema Octal Codificado: Correção de Erros Simples

Para calcular a probabilidade de erro de bit de um sistema com codificação de canal octal é necessário supor, como para os códigos binários ou quaternários, que se a capacidade do código for ultrapassada (que para os códigos aqui considerados significa apresentar mais de um erro em qualquer h dos 2 feixes de dígitos octais), será introduzido um erro de dígito no feixe (ou feixes) onde ocorrer este evento. Este erro é resultado da correção do decodificador, programado para identificar e corrigir apenas um erro de feixe por palavra (que pode ter diferentes magnitudes: apenas 1, 1 e 2, 1 e 3, etc.). No entanto, em se tratando de código octal, é possível que o erro de sinal gere um símbolo que tenha algum dígito com distância de Lee de magnitude que não possa ser corrigida.

Na subseção anterior foi apresentada a tabela da média de número de bits errados por dígito errado para um sistema octal SO , de mapeamento MO .

Seja Δh_{MO} o número esperado de bits errados ($Pe_b MO$) dividido pelo número esperado de dígitos errados ($Pe h_{MO=1} + Pe h_{MO=2}$, de magnitude 1 e magnitude 2), na posição correspondente ao h ésimo feixe de um sistema SO octal de mapeamento MO e codificação de canal com código (n, k) e seja dl_i o valor médio de bits errados para a distância de Lee correspondente:

$$\Delta h_{MO} = \frac{Pe h_{bMO}}{Pe h_{MO}} = \frac{(dl_1 + dl_7)Pe h_{MO=1} + (dl_3 + dl_5)Pe h_{MO=3} + (dl_2 + dl_6)Pe h_{MO=2} + dl_4 Pe h_{MO=4}}{Pe h_{MO=1} + Pe h_{MO=2} + Pe h_{MO=3} + Pe h_{MO=4}} \quad (4.259)$$

No sistema octal para correção de erros simples duas situações vão ocasionar erro de dígito h em um feixe após a decodificação de canal:

1. Mais de um dígito errado (qualquer magnitude) no feixe (Erro Duplo):

Analogamente ao calculado para os códigos binários: cada erro causa Δ erros de bit por posição onde ocorre. Este evento causa uma correção indevida de um número de bits mf que será função do número médio de bits alterados na correção deste dígito $\Delta \times i + mf$, (equação 4.143).

2. Um erro de magnitude não corrigível em qualquer dígito deste feixe (Erro simples, magnitude mg):

Este erro que já causa erro de bits devido à distância de Lee do dígito original (dl), vai acrescentar mf novos erros de bit pela correção indevida (equação 4.143).

Portanto a probabilidade de erro de bit nos dígitos do h ésimo feixe ($Pe h_{dSO}$) será a soma destas probabilidades:

$$Pe h_{dSO} = \frac{1}{n \log_2 m} ((mi + mf) \binom{n}{1} Pch_{MO}^{n-1} Pe h_{MO=2} + \sum_{i=2}^n (\Delta h_{MO} i + mf) \binom{n}{i} Pch_{MO}^{n-i} (1 - Pch_{MO})^i) \quad (4.260)$$

Para o caso octal $\log_2 m = \log_2 8 = 3$. Com substituição de expressões indicadas em 4.68 e 4.69 e lembrando que no pior caso, haverá erro de $mi = 2.5$ bits no caso do primeiro dígito (magnitude 2) ou $mi = 2$, no caso do segundo dígito (magnitudes 3, 4, 5 ou 6), obtêm-se a equação 4.261, taxa de erro de bit do sistema, por feixe, sem considerar codificação diferencial:

$$Peh_{SO} = \frac{1}{3 \times n} (n(mi + mf)Pch_{MO}^{(n-1)}Peh_{MO=2} + \Delta h \times n(1 - Pch_{MO})(1 - Pch_{MO}^{(n-1)}) + mf(1 - Pch_{MO}^n - n \times Pch_{MO}^{(n-1)})) \quad (4.261)$$

Onde $mi = 2.5$ para $h = 1$ e $mi = 2$ para $h = 2$, de um sistema de palavras código de comprimento n dígitos octais para correção de erros simples, por feixe h .

Sistema SO1: Código CO1 (84,81) e Mapeamento MO1

Como o código CO1 utilizado permite a correção de todos os erros simples de magnitude 1 ($mag = 1$ e $mag = 7$) e de $\frac{1}{3}$ dos erros de magnitude 2 ($mag = 2$ e $mag = 6$), têm-se que a correção vai introduzir, em média, mf novos erros de bit:

1. Primeiro Dígito:

$$mf = \frac{dl_1 + dl_7 + dl_2 + dl_6}{4} = \frac{1.25 \times 3 + 2.5}{4} = 1.5625 \quad (4.262)$$

2. Segundo Dígito:

$$mf = \frac{dl_1 + dl_7 + dl_2 + dl_6}{4} = \frac{1 \times 3 + 2}{4} = 1.25 \quad (4.263)$$

Valores de Δ obtidos:

$$\Delta_{1SO1} = \frac{1.25 Pe_{1MO=1} + 1.75 Pe_{1MO=3} + 1.875 Pe_{1MO=2} + Pe_{1MO=4}}{Pe_{1MO=1} + Pe_{1MO=2} + Pe_{1MO=3} + Pe_{1MO=4}} \approx \frac{1.53 P_{S2} + 2.85 P_{S3}}{P_{S2} + 1.88 P_{S3}} \approx 1.53 \quad (4.264)$$

$$\Delta_{2SO1} = \frac{Pe_{2MO=1} + 2 Pe_{2MO=3} + 1.5 Pe_{2MO=2} + 2 Pe_{2MO=4}}{Pe_{2MO=1} + Pe_{2MO=2} + Pe_{2MO=3} + Pe_{2MO=4}} = \frac{4.625 P_{S2} + 5.625 P_{S3}}{3.25 P_{S2} + 3.5 P_{S3}} \approx 1.423 \quad (4.265)$$

Da equação 4.261 conclui-se que a taxa de erro esperada para este sistema, por feixe, sem considerar codificação diferencial é:

$$Pe_{1SO1} = \frac{1}{252} (341.25 Pc_{1MO1}^{83} Pe_{1MO=2} + 128.52(1 - Pc_{1MO1})(1 - Pc_{1MO1}^{83}) + 1.5625(1 - Pc_{1MO1}^{84} - 84 \times Pc_{1MO1}^{83})) \quad (4.266)$$

$$Pe_{2SO1} = \frac{1}{252} (273 Pc_{2MO1}^{83} Pe_{2MO=2} + 119.532(1 - Pc_{2MO1})(1 - Pc_{2MO1}^{83}) + 1.25(1 - Pc_{2MO1}^{84} - 84 \times Pc_{2MO1}^{83})) \quad (4.267)$$

A taxa de erro de bit será a média das taxas de erro de cada dígito. Se não for feita codificação diferencial, têm-se:

$$Pe_{SO1} = \frac{1}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hSO1} \quad (4.268)$$

Levando-se em conta a codificação diferencial, observa-se que para o primeiro dígito, o incremento de erros de bit devido a esta operação, na recepção, está relacionado com o número de bits errados após a decodificação de canal pela seguinte tabela:

Magnitude do Erro	Bits Errados Antes	Bits Errados Depois
+1	1.25	2.5
+2	1.875	3.75
+3	1.75	3.5
4	1	2

Tabela 4.36: Bits Errados Após a Decodificação Diferencial (MO1 com FEC)

O segundo dígito, que não é submetido à codificação diferencial, não apresenta incremento no número de bits errados após esta operação. Portanto:

$$Pe_{1dSO1} = 2 Pe_{1SO1} \quad (4.269)$$

$$Pe_{2dSO1} = Pe_{2SO1} \quad (4.270)$$

E a taxa de erro de bit do sistema SO1 é:

$$Pe_{SO1} = \frac{Pe_{1dSO1} + Pe_{2dSO2}}{2} = \frac{2 Pe_{1SO1} + Pe_{2SO1}}{2} \quad (4.271)$$

Sistema SO2: Código CO2 (84,81) e Mapeamento MO1

O código CO2 utilizado realiza a correção de todos os erros simples de magnitudes 1 ($mag = 1$ e $mag = 7$) e 3 ($mag = 3$ e $mag = 5$), têm-se que a correção vai introduzir, em média, mf novos erros de bit:

1. Primeiro Dígito:

$$mf = \frac{dl_1 + dl_7 + dl_3 + dl_5}{4} = \frac{1.25 \times 2 + 1.75 \times 2}{4} = 1.5 \quad (4.272)$$

2. Segundo Dígito:

$$mf = \frac{dl_1 + dl_7 + dl_3 + dl_5}{4} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 2}{4} = 1.5 \quad (4.273)$$

Valores de Δ obtidos: os mesmos de SO1:

$$\Delta 1_{SO1} \simeq 1.53 \quad (4.274)$$

$$\Delta 2_{SO1} \simeq 1.423 \quad (4.275)$$

Da equação 4.261 conclui-se que a taxa de erro esperada para este sistema, por feixe, sem considerar codificação diferencial é:

$$Pe1_{SO2} = \frac{1}{252} (336 Pc1_{MO1}^{83} Pe1_{MO1=2} + 128.52(1 - Pc1_{MO1})(1 - Pc1_{MO1}^{83}) + 1.5(1 - Pc1_{MO1}^{84} - 84 \times Pc1_{MO1}^{83})) \quad (4.276)$$

$$Pe2_{SO2} = \frac{1}{252} (294 Pc2_{MO1}^{83} Pe2_{MO1=2} + 119.532(1 - Pc2_{MO1})(1 - Pc2_{MO1}^{83}) + 1.5(1 - Pc2_{MO1}^{84} - 84 \times Pc2_{MO1}^{83})) \quad (4.277)$$

A taxa de erro de bit será a média das taxas de erro de cada dígito. Como a codificação diferencial é feita como em MO1, têm-se, após esta operação, a seguinte taxa de erro de bit do sistema SO2:

$$Pe_{SO2} = \frac{Pe1_{dSO2} + Pe2_{dSO2}}{2} = \frac{2 Pe1_{SO2} + Pe2_{SO2}}{2} \quad (4.278)$$

Código (84,81) com Mapeamento MO2 (Magnitudes 1 e 3)- SO3

Da mesma forma como MO2, este sistema prevê a correção de todos os erros simples de magnitudes 1 e 3. Portanto:

1. Primeiro Dígito: $mf = 1.5$

2. Segundo Dígito: $mf = 1.5$

Valores de Δ obtidos:

$$\Delta 1_{SO2} = \frac{1.25 Pe1_{MO=1} + 1.75 Pe1_{MO=3} + 2.5 (Pe1_{MO=2} + Pe1_{MO=4})}{Pe1_{MO=1} + Pe1_{MO=2} + Pe1_{MO=3} + Pe1_{MO=4}} \simeq \frac{2.12 P_{S2} + 3.72 P_{S3}}{1.5 P_{S2} + 2.3125 P_{S3}} \simeq 1.42 \quad (4.279)$$

$$\Delta 2_{SO2} = \frac{Pe2_{MO=1} + 2 Pe2_{MO=3} + 2 (Pe2_{MO=2} + Pe2_{MO=4})}{Pe2_{MO=1} + Pe2_{MO=2} + Pe2_{MO=3} + Pe2_{MO=4}} = \frac{3.25 P_{S2} + 5.373 P_{S3}}{2.5 P_{S2} + 3.3375 P_{S3}} \simeq 1.3 \quad (4.280)$$

Da equação 4.261 conclui-se que a taxa de erro esperada para este sistema, por feixe, sem considerar codificação diferencial é:

$$Pe1_{SO3} = \frac{1}{252} (336 Pc1_{MO2}^{83} Pe1_{MO2=2} + 119.28(1 - Pc1_{MO2})(1 - Pc1_{MO2}^{83}) + 1.5(1 - Pc1_{MO2}^{84} - 84 \times Pc1_{MO2}^{83})) \quad (4.281)$$

$$Pe2_{SO3} = \frac{1}{252} (294 Pc2_{MO2}^{83} Pe2_{MO2=2} + 109.2(1 - Pc2_{MO2})(1 - Pc2_{MO2}^{83}) + 1.5(1 - Pc2_{MO2}^{84} - 84 \times Pc2_{MO2}^{83})) \quad (4.282)$$

A taxa de erro de bit será a média das taxas de erro de cada dígito. Sem a codificação diferencial, a taxa de erro será dada pela média entre os dois dígitos. Caso contrário, observa-se que após esta operação a probabilidade de erro de bit do primeiro dígito pode ser aproximada por

Magnitude do Erro	Bits Errados Antes	Bits Errados Depois
+ 1	1	2.125
+ 3	1	1.625
+ 2	1	1.58
+ 4	1	2

Tabela 4.37: Bits Errados Após a Decodificação Diferencial (MO2 com FEC, 1o Díg.)

E a do segundo dígito:

Magnitude do Erro	Bits Errados Antes	Bits Errados Depois
+ 1	1	1.25
+ 3	1	1.42
+ 2	1	1.25
+ 4	1	1.5

Tabela 4.38: Bits Errados Após a Decodificação Diferencial (MO2 com FEC, 2o Díg.)

Condições Para Erros após a Decodificação Corretora: (ambos os dígitos)

- Ocorrência de um erro de magnitude 2, 4 ou 6
- Ocorrência de dois ou mais erros

Neste cálculo supõe-se que os erros de magnitude ímpar alteram as sequências de pares e ímpares utilizadas na codificação diferencial. Como os erros de magnitude ímpar são mais prováveis,

$$Pe1_{dMO2} \simeq 1.875 Pe1_{MO2} \quad (4.283)$$

Igualmente para o segundo símbolo, os erros de magnitude ímpar são mais prováveis, e

$$Pe2_{dMO2} \simeq 1.333 Pe2_{MO2} \quad (4.284)$$

E a taxa de erro de bit do sistema SO2 é:

$$Pe_{SO2} = \frac{Pe1_{dSO2} + Pe2_{dSO2}}{2} = \frac{1.875 Pe1_{SO2} + 1.33 Pe2_{SO2}}{2} \quad (4.285)$$

4.5 Sistemas de Codificação Quaternários Mistos

Não é necessário que se utilize o mesmo código em todos os J feixes 2^m ários do sistema. Neste trabalho denomina-se sistema Misto ou Não Homogêneo aquele que utiliza códigos distintos nos diversos feixes. Nesta seção é demonstrado que um sistema misto pode ter desempenho melhor que o sistema de mesmo mapeamento homogêneo, ainda que a taxa de codificação seja a mesma.

4.5.1 Sistema de Codificação Não Homogêneo

O cômputo das probabilidades (Métricas M_i) permite estabelecer um procedimento para o projeto de códigos de canal para o sistema considerado: dar mais proteção aos dígitos com maiores métricas. Como exemplo, considerar um sistema quaternário no qual os três feixes são codificados independentemente utilizando-se códigos de comprimento $N = 120$ dígitos.

Como exemplo de código misto, considerar um sistema que utilize o mapeamento MQ5, e codifique o primeiro feixe (de maior métrica) com um código de maior redundância CQ3 (120,112) e que corrige, portanto, todos os erros simples e 94% dos erros duplos. O segundo dígito, por apresentar métrica inferior ao primeiro, é codificado com código para correção de erros simples CQ1 (120,116). O terceiro dígito, que apresenta a menor métrica, não é codificado, mas é possível corrigí-lo a partir da correção dos dois primeiros dígitos. Este sistema terá a seguinte taxa de codificação:

$$\frac{K_i}{N_i} = \frac{1}{3} \left(\frac{112}{120} + \frac{116}{120} + \frac{120}{120} \right) = 0.967 \quad (4.286)$$

Portanto, a mesma taxa de codificação dos sistemas homogêneos de código CQ1 (120,116).

O primeiro dígito tem maior probabilidade de erro em caso de desvio. Neste mapeamento MQ5, esta probabilidade (ou Métrica) é de 87.5%, enquanto que para o segundo e terceiro dígitos é, respectivamente, 37.5% e 12.5%. Será utilizado um código de maior redundância, portanto, para o primeiro dígito: CQ3 (120,112). O segundo dígito será codificado com código CQ1 (120,116) e o terceiro não será codificado.

Apesar disso, será possível sua correção, pois o erro de terceiro dígito ocorre somente quando o sinal muda de quadrante devido a ruído (pois o terceiro dígito se repete em todos os símbolos do mesmo quadrante). Quando isto acontece, haverá erro também no primeiro e segundo dígitos (desvio para Vizinho Mais Próximo). Se for verificado, na recepção, que o primeiro e segundo dígitos sofreram correção, deverá ser executada a decodificação condicionada do terceiro dígito [DSP] [SBT]:

4.5.2 Decisão Condicionada do Terceiro Dígito

Esta operação consiste em escolher o terceiro dígito do sinal mais próximo do iésimo sinal recebido com o primeiro e segundo dígitos correspondentes aos obtidos após as decodificações dos códigos CQ3 (120,112) e CQ1 (120,116).

O mapeamento MQ5 mostra que o 3º dígito é constante em cada quadrante, o que significa que, em geral, um desvio de posição não causa erro neste dígito. Caso o erro desloque o ponto para o quadrante vizinho, para distância=1 haverá erro também no 1º e 2º dígitos. Como estes são codificados, podem ser corrigidos. Se isto ocorrer, considera-se a possibilidade de ter havido desvio de quadrante.

Isso pode ser compreendido mais facilmente com um exemplo: supor que foi recebido o símbolo 030. Após as decodificações do 1º e 2º dígitos como 3 e 0, deseja-se decidir se o 3º dígito é 0, 1, 2 ou 3:

Observando-se a Figura 4.10, decide-se por 0 se o sinal recebido pertencer à região II, por 1 se pertencer à região I e assim por diante. Esta escolha é justificada pelo fato de ser mais provável que um sinal sofra um desvio devido a ruído que o coloque numa posição próxima à originalmente transmitida: uma vez que o ponto recebido (030) pertence à região III, conclui-se que o terceiro dígito também sofreu erro e que seu valor correto é 3. O valor do símbolo quaternário decodificado é portanto 303.

<i>II</i>		<i>I</i>	\vec{Q}		
.
300	.	.	.	301	.
.
030	\vec{I}
303	.	.	.	302	.
.
.
<i>III</i>		<i>IV</i>		.	.

Figura 4.10: Decodificação Condicionada do Terceiro Dígito

Observar que este procedimento pode inclusive corrigir erros para símbolos que não sejam Vizinhos Mais Próximos, desde que tenha havido somente um erro de segundo dígito e não mais que dois erros de primeiro dígito da palavra em questão. Neste caso, se o segundo dígito recebido e o segundo dígito decodificado da *i*ésima posição são iguais, o terceiro dígito é mantido. Portanto, a única alteração possível deste dígito vai ocorrer na posição corrigida (se houver) da decodificação feita por CQ1 (120,116).

4.5.3 Exemplo de Sistema Misto

O mapeamento MQ5 permite implementação com sistema de codificação misto. A taxa de codificação, a transcodificação, os cálculos de métrica, os parâmetros de rotação de fase e a codificação diferencial são os mesmos do sistema de codificação homogêneo correspondente (SQ5). Portanto:

Cálculo de Δh

Obtêm-se os seguintes valores:

$$\Delta 1_{SQM} \simeq 1.0 \tag{4.287}$$

$$\Delta 2_{SQM} \simeq 1.0 \tag{4.288}$$

$$\Delta 3_{SQM} \simeq 1.0 \tag{4.289}$$

Cálculo de Taxa de Erro de Bit de Sistema Misto

A taxa de erro de bit do primeiro dígito- codificada com CQ3 (120,112) é a mesma obtida para o primeiro dígito de SQ9:

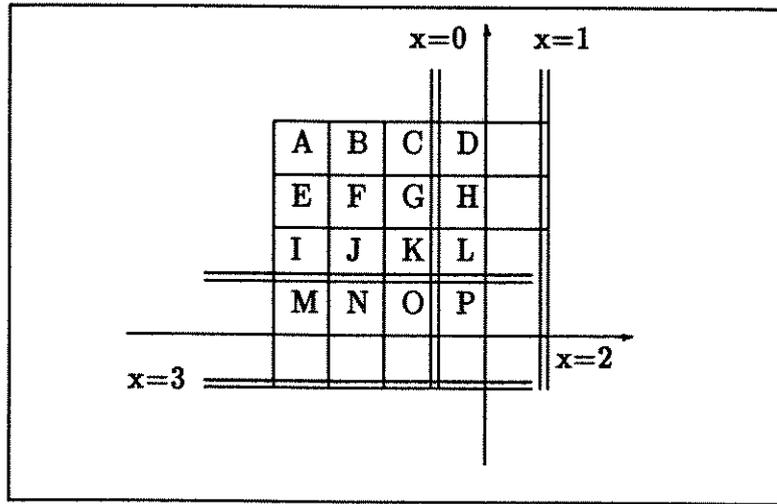


Figura 4.11: Quadrante Genérico em Mapeamento para Sistema Misto

$$\begin{aligned}
 Pe1_{MQM} = & \frac{1}{240} (480 Pcl_{MQ}^{119} Pe1_{MQM=2} + 42840 Pcl_{MQ}^{118} Pe1_{MQM=2}^2 + 2 - 2 Pcl_{MQ}) \\
 & - 240 Pcl_{MQ}^{119} (1 - Pch_{SQM}) - 14280 Pch_{SQM}^{118} (1 - Pch_{SQM})^2 + 120(1 - Pch_{SQM}) \\
 & - 120 Pch_{SQM}^{119} (1 - Pch_{SQM}) - 14280 Pch_{SQM}^{118} (1 - Pch_{SQM})^2 \quad (4.290)
 \end{aligned}$$

A do segundo dígito é a mesma obtida para o segundo dígito de MQ5:

$$\begin{aligned}
 Pe2_{dsQM} = & \frac{1}{240} (360 \times Pch_{MQM}^{119} Pe2_{MQM=2} + 120(1 - Pch_{MQM})(1 - 2 Pch_{MQM}^{119}) \\
 & + 1 - Pch_{MQM}) \quad (4.291)
 \end{aligned}$$

Quanto ao terceiro dígito, lembrando que a simetria do mapeamento permite a análise a partir de um só quadrante, considerar duas possibilidades:

1. Acerto na Decodificação do Segundo Dígito:

Baseando-se nas suposições feitas anteriormente e observando o mapeamento do terceiro dígito, conclui-se que a decisão é realizada corretamente.

2. Erro na Decodificação do Segundo Dígito:

A Figura 4.11 mostra o mapeamento de um sistema misto, no segundo quadrante. Cada uma das letras A, B, \dots, P significa uma posição do quadrante, sendo $A = (-7, +7)$, $B = (-5, +7)$ e assim por diante. Devido à simetria do mapeamento, os cálculos de probabilidade de erro feitos para este quadrante serão os mesmos obtidos para os outros. As posições limitadas por $x = 0$ e $x = 1$ ($A, B, C, E, F, G, I, J, K$) são aquelas que mesmo em caso de desvio para Vizinho Mais próximo não causarão mudança de quadrante, como acontece com as demais posições.

Supondo que os erros na decodificação do segundo dígito são de magnitude ± 1 e sendo $Pe(v/x) \triangleq$ a probabilidade de decisão errônea quando o dígito v é transmitido e o segundo dígito é decodificado como x , têm-se:

- Para os símbolos cujo segundo dígito é zero:

$$\begin{aligned} Pe(A/1) &= Pe(A/3) = Pe(B/1) = Pe(B/3) = Pe(E/1) = \\ &= Pe(E/3) = Pe(F/1) = Pe(F/3) = 0 \end{aligned} \quad (4.292)$$

- Para os símbolos cujo segundo dígito é um:

$$Pe(C/0) = Pe(G/0) = P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.293)$$

$$Pe(C/2) = Pe(G/2) = Pe(D/2) = Pe(H/2) = 0 \quad (4.294)$$

$$Pe(D/0) = Pe(H/0) = P_{S1} + 3 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.295)$$

- Para os símbolos cujo segundo dígito é dois:

$$Pe(K/1) = Pe(K/3) = Pe(L/1) = Pe(O/3) = P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.296)$$

$$Pe(L/3) = Pe(O/1) = Pe(P/1) = Pe(P/3) = P_{S1} + 3 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.297)$$

- Para os símbolos cujo segundo dígito é três:

$$Pe(I/0) = Pe(J/0) = P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.298)$$

$$Pe(M/0) = Pe(N/) = P_{S1} + 3 P_{S2} + 2 P_{S3} \quad (4.299)$$

$$Pe(I/2) = Pe(J/2) = Pe(M/2) = Pe(N/2) = 0 \quad (4.300)$$

Estes valores fornecem a média:

$$Q \triangleq E[P(v/x)] = \frac{8x(P_{S2} + 2P_{S3}) + 8x(P_{S1} + 3P_{S2} + 2P_{S3})}{32} = \frac{P_{S1} + 4P_{S2} + 4P_{S3}}{4} = \frac{1}{4} \quad (4.301)$$

Na equação 4.291 foi definida a probabilidade de erro na decodificação do segundo dígito. Considerando um bit errado nas decisões errôneas, têm-se

$$Pe_{3MQM} = \frac{Q \times Pe_{2MQM}}{2} = \frac{Pe_{2MQM}}{8} \quad (4.302)$$

O número de dígitos de dados e de paridade varia para cada um dos feixes, e portanto:

$$Pe_{SQM} = \frac{\frac{112}{120}Pe_{1MQM} + \frac{116}{120}Pe_{2MQM} + \frac{1}{4}Pe_{2MQM}}{3} \quad (4.303)$$

A decodificação diferencial duplica os erros restantes após a decodificação de canal. Desta forma,

$$Pe_{SQM} = \frac{2}{3} \sum_{h=1}^3 Pe_{hSQM} \quad (4.304)$$

4.5.4 Melhoria Proporcionada Pelo Sistema Misto

Observar que para um mesmo mapeamento o sistema misto é mais eficaz que o simples por proteger melhor, com a codificação, dígitos mais sujeitos a erro no mapeamento, como foi demonstrado com os cálculos de métrica. Para sistemas com os mesmos códigos, o mapeamento que apresentar métricas menores deverá proporcionar melhor desempenho para o sistema [DSP] [SBT].

4.6 Conclusão

Neste capítulo foram mostrados vários mapeamentos possíveis para sistemas 64 QAM que possibilitam transparência à ambiguidade de fase de 90, 180 e 270 graus. Foi definida a Métrica de Mapeamento, que estabelece o grau de proteção dos dígitos transmitidos e que define a eficácia do mapeamento. Utilizando-se os códigos apresentados no capítulo três são determinados sistemas completos de codificadores de canal (binários, quaternários ou octais), supondo-se decodificação diferencial após a decodificação do código. As condições apresentadas até aqui permitem prever o desempenho destes sistemas: se as taxas de codificação utilizadas forem as mesmas, terá melhor desempenho o sistema onde o dígito mais sujeito a erro, no mapeamento, for mais protegido pela codificação de canal. No próximo Capítulo são apresentados os resultados de simulação destes sistemas e seus desempenhos em termos de probabilidade de erro versus relação sinal/ruído.

Capítulo 5

SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste capítulo é descrito o algoritmo de simulação de desempenho dos sistemas apresentados no Capítulo 4. A partir dos resultados destas simulações pode-se comparar o desempenho dos mesmos. Características de desempenho e facilidade de implementação vão determinar a escolha do sistema mais adequado ao problema proposto.

5.1 Introdução

No Capítulo 4 foram apresentados mapeamentos binários, quaternários e octais, com respectivas métricas e codificação diferencial associadas. Foram propostos, ainda, diferentes sistemas de Codificação de Canal que utilizam um dos mapeamentos e um dos códigos corretores de erro apresentados no Capítulo 3. Além disso, foi feito um cálculo estimativo da taxa de erro de bit de tais sistemas, utilizando ou não código corretor de erros. Neste Capítulo é apresentado um algoritmo de simulação de desempenho dos mesmos sistemas, baseado no Processamento de Uma Palavra Binária, descrito na Seção 4.3. A simulação para um número suficiente de palavras deve permitir calcular a Taxa de Erro de Bit também por simulação computacional.

5.2 Rotina de Simulação

Na Seção 4.3.4 do Capítulo 4 foi descrito o processamento de informação num sistema binário, ou seja: as transformações da sequência de bits gerados para transmissão no meio físico desde a entrada no sistema de codificação até a saída do decodificador, passando pelos blocos funcionais dos mesmos e simulando a transmissão em meio físico sujeito a ruído entre eles. Na seção 4.3.5 do mesmo Capítulo 4 é demonstrada a sequência de operações por que passa uma palavra (exemplo) por todo o sistema. Nesta seção este procedimento é generalizado para sistemas 2^m ários. O objetivo é descrever o programa de simulação utilizado para avaliação quantitativa do desempenho dos sistemas de codificação de canal analisados neste trabalho.

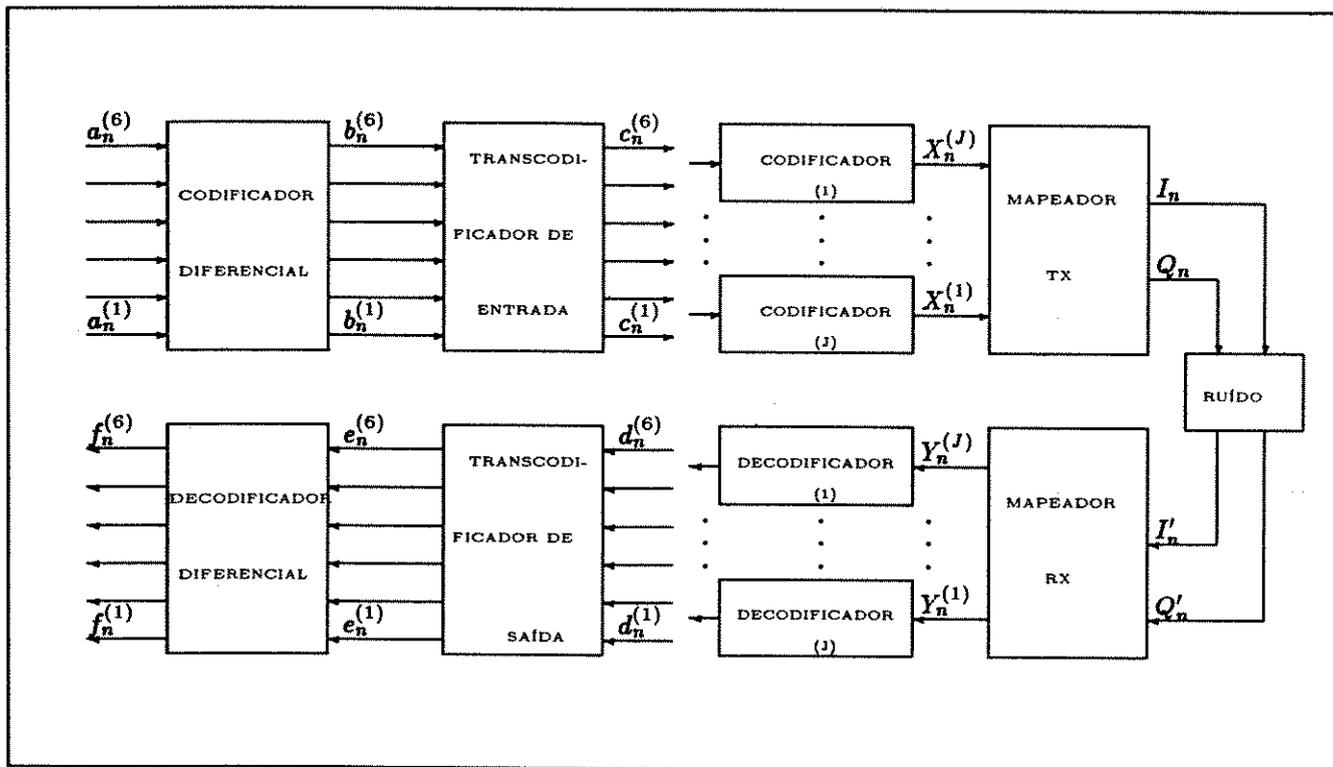


Figura 5.1: Diagrama de Blocos de Um Sistema de Codificação 2^m -ário

5.2.1 Sequência de Operações

A Figura 5.1 mostra o diagrama de blocos do sistema transparente à ambiguidade de fase a ser implementado. Como se trata de sistema de transmissão modulado com 64 QAM existem seis feixes binários $a_n^{(1)}$ a $a_n^{(6)}$, de entrada, chegando à taxa de R símbolos (de 6 bits ou J dígitos 2^m -ários cada um) por segundo. Tais dígitos são formados por $6/J$ bits gerados aleatoriamente. Embora seja possível fazer a simulação do sistema com álgebra 2^m -ária na implementação serão utilizados 6 fios para representar feixes binários, não importando se o código adotado for quaternário ou octal.

Optou-se por fazer primeiramente a codificação diferencial, e depois a codificação de erros (para possibilitar a utilização de um código de redundância menor, embora seja obrigatória a transparência à ambiguidade de fase). Portanto, o primeiro bloco de entrada é o codificador diferencial (no transmissor) e o último do receptor o decodificador diferencial.

Os seis feixes $a_n^{(1)}$ a $a_n^{(6)}$ são processados pelo codificador diferencial dando origem aos 6 feixes $b_n^{(1)}$ a $b_n^{(6)}$ binários que após a transcodificação de entrada, vão fornecer os feixes $c_n^{(1)}$ a $c_n^{(6)}$, que agrupados m a m resultam nas entradas dos $J = 6/m$ codificadores para correção de erros onde 2^m é a base do sistema: $C_n^{(1)}$ a $C_n^{(J)}$. (Cada m feixes binários formam um feixe $C_n^{(i)}$ 2^m -ário). Até este momento não houve alteração da taxa de transmissão R .

Cada um dos J codificadores recebe $6/J$ feixes binários (como feixes 2^m -ários) e fornecem, na saída, dígitos 2^m -ários do alfabeto utilizado ($X_n^{(1)}$ a $X_n^{(J)}$), à taxa de R/Rc símbolos por segundo, onde $Rc = K/N$ é a taxa de codificação adotada, N é o comprimento da palavra

código e K o número de dígitos de informação da mesma. Notar a necessidade de que o codificador tenha também a função de realizar aumento de frequência para inserção dos dígitos de paridade.

Os símbolos $X_n^{(1)}$ a $X_n^{(J)}$ produzem, através de mapeamento na constelação 64 QAM, as coordenadas I_n e Q_n do sinal transmitido. (O sinal é mapeado para permitir transparência à ambiguidade de fase).

No receptor o sinal que pode ter sido alterado pelo ruído (aqui modelado como gaussiano, aditivo e branco: AWGN) com coordenadas I'_n e Q'_n com decisão abrupta e sujeitas à rotação de ± 90 ou 180° sofre operação inversa do mapeamento de transmissão para produzir os dígitos $Y_n^{(1)}$ a $Y_n^{(J)}$. Dos J decodificadores para correção de erros obtém-se os 6 feixes estimados $d_n^{(1)}$ a $d_n^{(6)}$, e são retirados os símbolos de paridade, e a taxa de de processamento volta a ser R símbolos por segundo. A passagem pelo transcodificador de saída vai fornecer os feixes $e_n^{(1)}$ a $e_n^{(6)}$, que, após a decodificação diferencial vai resultar nos feixes binários $f_n^{(1)}$ a $f_n^{(6)}$, saídas do sistema, à taxa de R símbolos por segundo.

O mapeamento de símbolos deve ser realizado de forma a possibilitar a transparência à ambiguidade de fase. Isto é possível para todos os mapeamentos propostos no Capítulo 4, onde foram descritas igualmente as codificações diferenciais que viabilizam esta característica.

O ruído AWGN suposto presente no meio de transmissão tem média zero e variância dependente do valor da Relação Sinal/Ruído (E_b/N_0) de entrada. Para obter um resultado próximo ao que seria obtido no sistema implementado, as palavras utilizadas nas simulações foram geradas aleatoriamente, e o número de palavras para a simulação de cada relação Sinal/Ruído foi suficientemente grande para permitir pequenas diferenças de taxa de erro de bit para um número de palavras simuladas em dada ordem de grandeza.

5.2.2 Particularidades de Cada Sistema

Os Sistemas Binários são os mais simples em termos de número de blocos de funções, porém exigem palavras mais longas (255 bits) para que se possa obter a taxa de codificação desejada com código de Hamming. Não necessitam transcodificação, e a codificação diferencial é feita apenas nos dois primeiros dígitos, como descrito no Capítulo 4.

Os sistemas quaternários, que utilizam código de Nakamura, permitem palavras mais curtas. Neste trabalho são estudados sistemas de palavras de comprimento 120 e 124. A transcodificação (a mesma para todos os sistemas quaternários) e a codificação diferencial (específica para cada mapeamento) são descritas no Capítulo 4.

Da mesma forma que os sistemas quaternários, os sistemas octais necessitam de transcodificação (comum a todos) e codificação diferencial (específica de cada mapeamento), ambas descritas no Capítulo 4. As palavras código podem ser ainda mais curtas (comprimento=84), e podem ser corrigidos erros de diferentes magnitudes.

5.2.3 Simulações Computacionais e Resultados Esperados

Utilizando o procedimento descrito na seção 5.2, subseção 1, foram feitas simulações computacionais dos sistemas estudados neste trabalho. Na simulação do sistema completo (incluindo codificação de canal e codificação diferencial) supõe-se configuração com modem back-to-back. Para análises parciais, em casos binários são mostrados também taxas erro de sistemas sem codificação de canal, porém com codificação diferencial (para todos os sistemas propostos), e taxas de erro de sistemas não sujeitos à codificação diferencial (portanto sem rotação de fase), o caso de mapeamento de Gray ideal e Mapeamento para Conversão digital analógica.

O desempenho do sistema codificado passa a ser satisfatório a partir de Relação Sinal/Ruído de $E_b/N_0 = 14$ dB. Abaixo deste valor, o código vai introduzir mais erros do que corrige (Limiar de Atuação do código).

As taxas de erro obtidas nas simulações geraram curvas que são superpostas em gráficos no decorrer do capítulo. Observar que os pontos da curva são os valores obtidos na simulação e que, embora para valores mais baixos de E_b/N_0 produzam uma curva suave, era necessário aumentar exponencialmente o número de iterações necessárias para valores maiores da relação Sinal/Ruído. Esta condição tornou praticamente impossível a obtenção de curva suave para valores maiores que 17.5 dB.

5.3 Sistema Binário

Com o uso do procedimento descrito na seção 5.2, foi feito um programa de simulação para avaliar o desempenho dos sistemas propostos no Capítulo 4, homogêneos e codificados com o Código de Hamming Cíclico CB (255,247) em cada um de seus 6 feixes binários:

1. Sistemas Padrão, sem Codificação Diferencial:

Para efeito de comparação, foram simulados os dois sistemas já mencionados no Capítulo 4:

- SCDA: Utiliza mapeamento para conversão digital/analógica. Métrica= 0.2292
- SGRAY: Utiliza mapeamento Gray sem transparência à ambiguidade de fase
Métrica=0.14583

2. Sistemas Viáveis para Implementação neste trabalho:

- SB1: Utiliza mapeamento MB1, de métrica=0.2292
- SB2: Utiliza mapeamento MB2, de métrica=0.1875

5.3.1 Mesmo Código, Diferentes Mapeamentos

Os sistemas SCDA e SGRAY não são adequados para implementação por não serem transparentes à ambiguidade de fase. Foram incluídos aqui para permitir comparação com os sistemas viáveis quanto ao desempenho: uso de código de Gray no mapeamento (melhoria) e necessidade

de transparência à ambiguidade de fase (piora). Assim, serão supostos sistemas não sujeitos à rotação de fase. Portanto as simulações não incluem codificação e decodificação diferencial.

Os sistemas binários não necessitam de transcodificação de entrada ou saída, blocos que estarão igualmente excluídos nestas simulações, para todos os sistemas. A codificação diferencial aplicável a SB1 e SB2, bem como os mapeamentos dos quatro sistemas estão descritos no Capítulo 4.

As tabelas mostradas nesta seção mostram alguns dos valores obtidos na simulação de desempenho de cada um dos sistemas binários, para relações Sinal/Ruído de $E_b/N_0 = 14$ a 18 dB, suas métricas \bar{M}_x médias, do sistema codificado e sem codificação, e também após a decodificação diferencial, para os mapeamentos MB1 e MB2.

Desempenho de Sistema Sem Codificação

A tabela a seguir mostra a taxa de erro de bit dos sistemas binários propostos (sem codificação de canal e sem codificação diferencial), para as relações Sinal/Ruído E_b/N_0 de 14 a 18 dB:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB	Métrica	δ
<i>SGRAY_{sc}</i>	2.4×10^{-3}	8.8×10^{-4}	2.5×10^{-4}	5.3×10^{-5}	7.4×10^{-6}	0.14583	1.00
SCDA	3.9×10^{-3}	1.4×10^{-3}	4.0×10^{-4}	8.3×10^{-5}	1.1×10^{-5}	0.2292	1.57
SB1	3.8×10^{-3}	1.4×10^{-3}	4.0×10^{-4}	8.3×10^{-5}	1.2×10^{-5}	0.2292	1.57
SB2	3.1×10^{-3}	1.1×10^{-3}	3.3×10^{-4}	6.9×10^{-5}	9.7×10^{-6}	0.1875	1.29

Tabela 5.1: Desempenho de Sistemas Binários Sem FEC e Sem Codificação Diferencial

Como ficou demonstrado no cálculo de probabilidade de erro de bit da seção 4.2, a média da probabilidade de um sinal sofrer alteração, quando se desloca para um sinal mais próximo devido a ruído, vai alterar diretamente a taxa de erro de bit obtida pelo sistema. Devido a isto, é muito próximo o resultado obtido para SB1 e SCDA, que têm métricas iguais. Quanto a SB2, por ter métrica de valor 22.24% menor, terá uma taxa de erro menor na mesma proporção. Mas qualquer que seja o sistema, se sua métrica for superior à mínima possível (de MGRAY) sua taxa de erro também o será na mesma proporção. Na tabela de resultados de desempenho o valor δ , dado por

$$\delta = \frac{P_{sSi}}{P_{sSGRAY}} \quad (5.1)$$

onde:

- P_{sSi} = Taxa de erro de bit sem codificação, sistema Si (SCDA, SB1 ou SB2)
- P_{sSGRAY} = Taxa de erro de bit sem codificação do sistema SGRAY, ou seja, a menor taxa de erro possível de ser obtida num sistema 64 QAM, como mostrado no Capítulo 4.

confirma a proporcionalidade da métrica de dois mapeamentos e as taxas de erro de bit obtidas em dois sistemas que os utilizem. De fato, fazendo-se interpolação linear verifica-se que a média das relações entre taxas de erro de bit de determinado sistema e o sistema SGRAY multiplicado pela métrica deste último (MGRAY) fornece a métrica do primeiro mapeamento.

O desempenho do sistema sem codificação vai depender, portanto, somente do Mapeamento utilizado, pois a probabilidade de haver erro de cada dígito está diretamente relacionada com a proporção de diferença entre os dígitos de determinado símbolo e os de seus Vizinhos Mais Próximos (ou Próximos). Portanto, terá desempenho melhor o sistema que apresentar menor valor médio de Métrica de Mapeamento.

Desempenho de Sistema Com Codificação de Canal e Sem Decodificação Diferencial

São os seguintes os valores de taxa de erro de bit obtidos na saída de cada um dos sistemas binários após a decodificação, sem que fosse realizada a decodificação diferencial:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB	Métrica	δ^2
$SGRAY_{sc}$	2.4×10^{-3}	8.8×10^{-4}	2.5×10^{-4}	5.3×10^{-5}	7.4×10^{-6}	0.14583	1.00
SCDA	3.8×10^{-3}	7.9×10^{-4}	7.8×10^{-5}	3.5×10^{-6}	9.7×10^{-8}	0.2292	2.47
$SGRAY_{cc}$	1.8×10^{-3}	3.1×10^{-4}	2.9×10^{-5}	1.3×10^{-6}	3.2×10^{-8}	0.14583	1.00
SB1	3.7×10^{-3}	7.9×10^{-4}	7.4×10^{-5}	3.7×10^{-6}	8.6×10^{-8}	0.2292	2.47
SB2	2.7×10^{-3}	5.4×10^{-4}	4.8×10^{-5}	2.3×10^{-6}	---	0.1875	1.65

Tabela 5.2: Desempenho de Sistemas Binários Com FEC, Sem Codificação Diferencial

Os valores indicados com --- significam que para o número de amostras simulado, não foi identificado nenhum erro. De fato, medidas de taxa de erro de simulação em geral são possíveis até 10^{-6} somente: valores de taxa de erro de bit de valor inferior podem fornecer pontos "fora da curva", ainda que sejam obtidos após simulação com grande número de amostras. As notações $SGRAY_{sc}$ e $SGRAY_{cc}$ referem-se, respectivamente, ao sistema que utiliza mapeamento em código de Gray com e sem codificação de canal.

A interpolação linear entre os valores obtidos antes e após a decodificação de canal mostra que existe uma proporcionalidade entre o valor quadrático (aproximado) do primeiro e o segundo (valor linear). Isto se verifica para todos os sistemas. É igualmente observado que qualquer sistema não codificado apresenta uma taxa de erro proporcional à fornecida pelo sistema ideal $SGRAY_{sc}$, confirmando os cálculos do Capítulo 4.

Observar que uma vez que todos os sistemas utilizam o mesmo código corretor de erros CB (255,247) em cada um de seus 6 feixes, o único fator que diferencia o desempenho de cada sistema continua sendo o mapeamento da constelação adotado. Portanto, dentre os sistemas binários possíveis de serem implementados neste trabalho, SB2 tem desempenho superior a SB1.

Desempenho de Sistema Após a Decodificação Diferencial

Supondo-se que o sistema seja transparente à ambiguidade de fase mas não utilize codificação de canal, pode-se calcular a taxa de erro do sistema sem codificação corretora, porém com codificação diferencial, como visto no Capítulo 4. O resultado aqui obtido mostra o desempenho de um sistema possível de ser implementado, sem codificação de canal (pois é permitida a transparência à ambiguidade de fase):

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB	δ_d
SGRAY(Comparação)	2.4×10^{-3}	8.8×10^{-4}	2.5×10^{-4}	5.3×10^{-4}	7.4×10^{-6}	1.00
SB1	4.2×10^{-3}	1.5×10^{-3}	4.3×10^{-4}	8.8×10^{-5}	1.3×10^{-5}	1.67
SB2	3.5×10^{-3}	1.3×10^{-3}	3.7×10^{-4}	7.2×10^{-5}	1.1×10^{-5}	1.34

Tabela 5.3: Desempenho de Sistemas Binários Sem FEC, Com Codificação Diferencial

δ_d indica o aumento da taxa de erro de bit em relação ao sistema ideal SGRAY, causado por:

- Métrica do Mapeamento superior ao valor ideal de MGRAY=0.14583.
- Aumento da taxa de erro de bit devido à decodificação diferencial

Utilizando-se codificação de canal e codificação diferencial, obtêm-se os seguintes valores de taxa de erro de bit nos sistemas SB1 e SB2:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB	δ_d
SB1	3.9×10^{-3}	8.2×10^{-4}	7.6×10^{-5}	3.7×10^{-6}	8.6×10^{-8}	1.67
SB2	2.9×10^{-3}	5.6×10^{-4}	5.0×10^{-5}	2.4×10^{-6}	--	1.34

Tabela 5.4: Sistemas Binários Com FEC e Codificação Diferencial

A codificação e decodificação diferencial de SB1 e SB2 é a mesma. Devido a isto, o fator que diferencia os dois sistemas após a decodificação diferencial continua sendo somente o mapeamento da constelação. Se for comparada a taxa de erro antes e após a decodificação diferencial verifica-se que esta operação introduz um erro de 8.3%, como calculado no Capítulo 4.

5.3.2 Análise de Resultados: Sistema Binário

Aqui também é possível calcular a melhoria introduzida pelo código corretor de erros. Interpolando-se os valores de desempenho dos sistemas com codificação de canal e codificação diferencial e somente com codificação diferencial, conclui-se que existe uma proporcionalidade entre a potência da taxa de erro de saída e a potência de entrada. Os valores seguintes foram obtidos por interpolação linear dos valores obtidos na simulação.

$$BER_{cMB1} \simeq 133 \times BER_{sMB1}^{1.87} \simeq 362 \times SGRAY_{sc}^{1.87} \quad (5.2)$$

$$BER_{cMB2} \simeq 100 \times BER_{sMB2}^{1.83} \simeq 239 \times SGRAY_{sc}^{1.83} \quad (5.3)$$

onde BER_{cMBi} é a taxa de erro obtida para o sistema com codificação diferencial e codificação de canal, BER_{sMBi} é a taxa de erro de bit do sistema com codificação diferencial e sem codificação de canal e $SGRAY_{sc}$ é o sistema com código de Gray, sem codificação de canal ou diferencial, e não transparente à ambiguidade de fase.

O resultado desta simulação está mostrado no gráfico da Figura 5.2, que mostra os desempenhos do sistema ideal $SGRAY_{sc}$ e os sistemas SB1 e SB2, incluindo neste caso todas as operações do sistema binário: codificação de canal, codificação diferencial e mapeamento. É mostrada também a curva de taxa de erro do sistema SB2 não codificado (o melhor desempenho

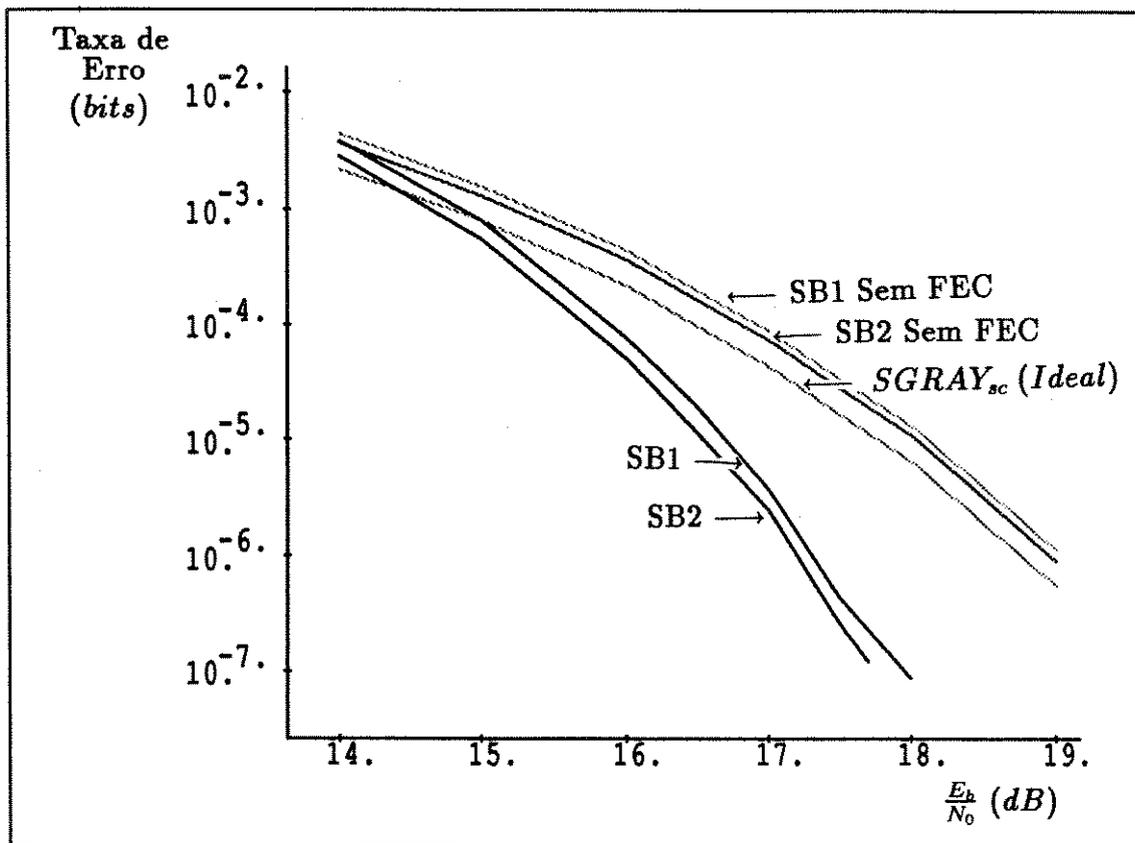


Figura 5.2: Comparação de Desempenho entre Sistemas Binários

entre os mapeamentos binários com transparência à ambiguidade de fase). Notar que o sistema SB1 codificado alcança resultado superior a SGRAY não codificado, o que sugere que mesmo um sistema com bom mapeamento (no caso, o sistema ideal) ainda terá desempenho inferior a outro de mapeamento de maior métrica que utilize codificação de canal.

5.4 Sistema Quaternário Homogêneo

O Capítulo 4 descreve nove sistemas homogêneos de codificação de canal utilizando-se códigos de dígitos quaternários, sendo que seis são para correção de erros simples (SQ1, SQ2, SQ3, SQ4, SQ5, SQ6) e os restantes para correção de erros duplos (SQ7, SQ8, SQ9).

5.4.1 Correção de Erros Simples: Mesmo Código, Diferentes Mapeamentos

Utilizando o programa da seção 5.2, foi feita a simulação de desempenho de seis sistemas:

1. Mapeamento MQ1, Código CQ1 (120,116)- Sistema SQ1
2. Mapeamento MQ2, Código CQ1 (120,116)- Sistema SQ2
3. Mapeamento MQ3, Código CQ1 (120,116)- Sistema SQ3

4. Mapeamento MQ4, Código CQ1 (120,116)- Sistema SQ4
5. Mapeamento MQ5, Código CQ1 (120,116)- Sistema SQ5
6. Mapeamento MQ4, Código CQ2 (124,119)- Sistema SQ6

A simulação de sistemas quaternários inclui todos os blocos da Figura 5.1. Os procedimentos de Codificação Diferencial, Transcodificação e Mapeamento de cada um dos sistemas foram descritos no Capítulo 4, e a Codificação de Canal (códigos CQ1 ou CQ2) no Capítulo 3.

As tabelas desta seção mostram o desempenho do sistema SQ_i para relações Sinal/Ruído de $E_b/N_0 = 14$ a 18 dB, suas métricas equivalentes Meq , utilizando codificação diferencial e

- Sem codificação de canal: BER_{sSQ_i}
- Com codificação de canal: BER_{cSQ_i}

Desempenho de Sistema Sem Codificação

Os sistemas quaternários aqui analisados apresentam taxas de erro de bit mostradas na tabela a seguir, com codificação diferencial e sem codificação de canal, para relação Sinal/Ruído entre 14 e 18 dB. Lembrar que como há utilização do mesmo mapeamento em vários sistemas, e a taxa de erro de bit do sistema sem codificação de canal é o mesmo para sistemas que utilizem o mesmo mapeamento, referencia-se o sistema pelo mapeamento utilizado:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB	Meq	δ_d
$SGRAY_{sc}$	2.4×10^{-3}	8.8×10^{-4}	2.5×10^{-4}	5.3×10^{-5}	7.4×10^{-6}	0.14583	1.0
MQ1	3.9×10^{-3}	1.4×10^{-3}	4.2×10^{-4}	8.8×10^{-5}	1.2×10^{-5}	0.198	1.5
MQ2	5.6×10^{-3}	2.8×10^{-3}	8.0×10^{-4}	0.0×10^{-4}	0.0×10^{-5}	0.2292	3.0
MQ3	5.6×10^{-3}	2.8×10^{-3}	8.0×10^{-4}	0.0×10^{-4}	0.0×10^{-5}	0.2292	3.0
MQ4	4.8×10^{-3}	1.8×10^{-3}	5.1×10^{-4}	1.1×10^{-4}	1.4×10^{-5}	0.375	2.0
MQ5	6.1×10^{-3}	2.2×10^{-3}	6.6×10^{-4}	1.4×10^{-4}	1.9×10^{-5}	0.375	2.5

Tabela 5.5: Sistemas Quaternários Sem FEC, Com Codificação Diferencial I

Meq é a métrica equivalente do mapeamento, definida no Capítulo 4, e δ_d é o incremento da taxa de erro de bit devido ao fato da métrica do mapeamento ser superior à ideal (0.14583) e à duplicação de erros devido à decodificação diferencial.

Observar os dois fatores que causam aumento nas taxas de erro de bit sem codificação de canal: a Métrica de Mapeamento (em sistemas 2^m ários, para mesmo m , é indiferente utilizar este parâmetro ou a Métrica Equivalente) e o número de bits de cada símbolo que deve ser submetido à codificação diferencial. A influência de tais fatores no desempenho é linear.

Desempenho de Sistema Com Codificação de Canal e Decodificação Diferencial

Quando se verifica o desempenho com correção de erros há um novo fator que influencia o desempenho em relação aos sistemas binários. Sistemas codificados quaternários estão sujeitos a erros de magnitude 1 ou 2, ou seja, distâncias de Lee de $^+1$ ou $^-2$. O código utilizado nestes exemplos corrige apenas erros de magnitude 1 ou 3. Portanto, todo desvio de sinal que causar

erro de Lee de distância 2 (como ocorre no mapeamento MQ1) não poderá ser corrigido. Como consequência, este mapeamento, que apresenta métrica menor, vai ter o pior desempenho em termos de taxa de erro de bit. Além disso, o fato da codificação diferencial ser distinta para os diversos mapeamentos tem como consequência a diferença de número de dígitos codificados diferencialmente em cada um deles. Se o dígito a ser decodificado diferencialmente estiver errado este erro será duplicado. Quanto mais dígitos forem codificados diferencialmente, mais este mapeamento estará sujeito a este acréscimo de erros. No entanto, a relação entre erros antes e depois da codificação diferencial é constante, o que torna este efeito desprezível para altos valores de relação sinal/ruído. A tabela a seguir mostra alguns valores de taxa de erro de bit obtidos para os sistemas SQ1 a SQ5 completos (com codificação de canal e diferencial):

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB
SQ1	3.2×10^{-3}	6.8×10^{-4}	1.0×10^{-4}	1.6×10^{-5}	1.8×10^{-6}
SQ2	6.9×10^{-3}	1.4×10^{-3}	1.5×10^{-4}	1.0×10^{-5}	2.4×10^{-7}
SQ3	6.9×10^{-3}	1.4×10^{-3}	1.5×10^{-4}	1.0×10^{-5}	2.4×10^{-7}
SQ4	3.9×10^{-3}	6.8×10^{-4}	6.7×10^{-5}	3.3×10^{-6}	1.4×10^{-7}
SQ5	5.0×10^{-3}	9.0×10^{-4}	9.1×10^{-5}	5.5×10^{-6}	1.7×10^{-7}

Tabela 5.6: Sistemas Quaternários Completos (120,116)

Observar que para valores de E_b/N_0 próximos a 14 dB o desempenho do sistema SQ1 chega a ser ligeiramente superior aos demais (3.2×10^{-3}), porque apresenta menor métrica de mapeamento e apenas um de seus dígitos é codificado diferencialmente. No entanto, a partir de cerca de 16 dB, a situação é invertida: como erros de magnitude 2 não podem ser corrigidos e continuam presentes nas palavras recebidas com ruído (símbolos Vizinhos Mais Próximos) a curva de relação sinal ruído após a decodificação do código será proporcional à curva antes da decodificação, e o fator de proporcionalidade está diretamente relacionado à proporção de dígitos que guardam distância de Lee=2 de seus Vizinhos Mais Próximos. Estes valores de métricas por magnitude foram calculados no Capítulo 4. A Figura 5.3 mostra a taxa de erro de bit dos sistemas SQ1 a SQ4, comparadas com a obtida de um sistema sem codificação.

Observar que os fatores que determinam o melhor ou pior desempenho do sistema sem codificação também influenciam o sistema que corrige erros: neste último caso a influência é aproximadamente quadrática, como verificado para os sistemas binários.

5.4.2 Correção de Erros Duplos: Mesmo código, Diferentes Mapeamentos

Os sistemas quaternários para correção de erros duplos aqui apresentados (SQ7, SQ8, SQ9) utilizam os mapeamentos MQ3, MQ4 e MQ5, respectivamente- que definem os sistemas SQ3, SQ4 e SQ5. A taxa de erro de bit sem considerar codificação de canal é a mesma para SQ3 e SQ7, SQ4 e SQ8 ou SQ5 e SQ9. No entanto, a utilização do código CQ3 (120,112), corretor de todos os erros simples e quase todos os erros duplos (erros simples em duas posições diferentes da mesma palavra) faz com que tais sistemas apresentem melhoria de desempenho bastante significativa em relação aos sistemas que utilizam código CQ1 (120,116) que corrige apenas um erro simples por palavra.

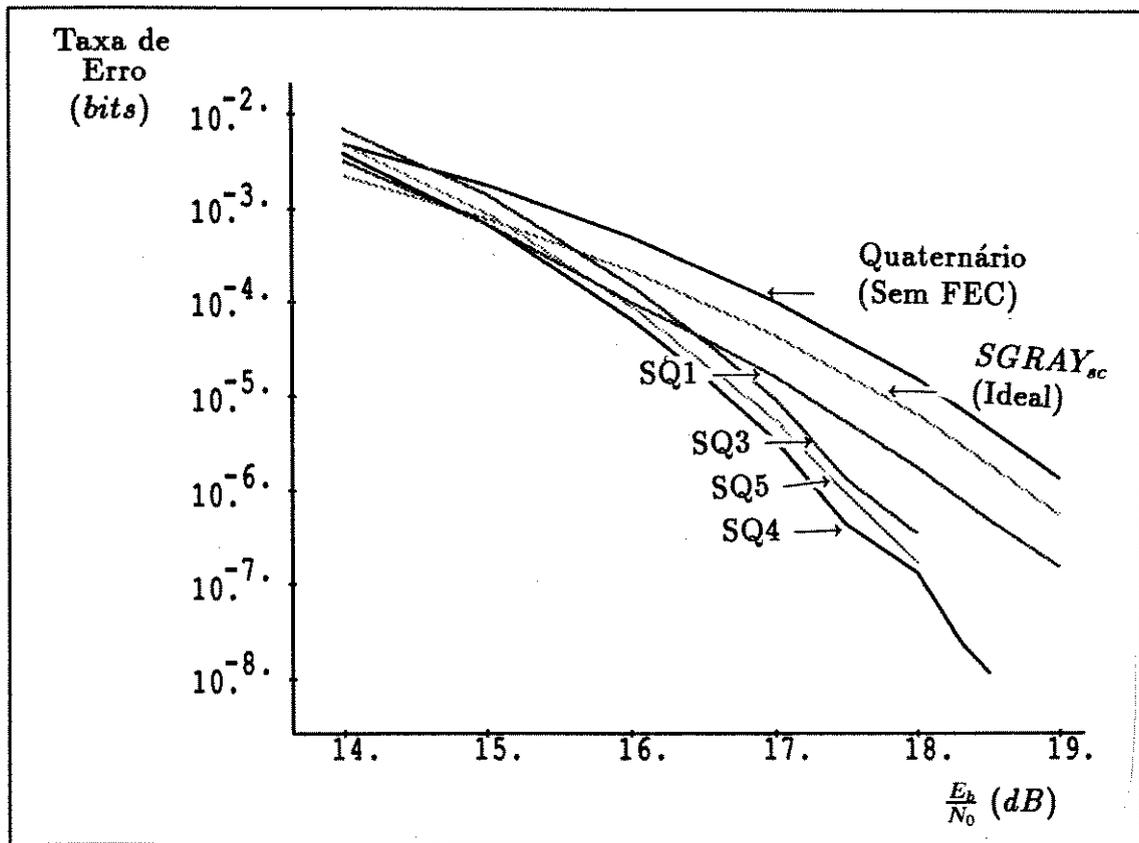


Figura 5.3: Sistemas Quaternários de Mesmo Código Para Correção de Erros Simples

A comparação entre sistemas que utilizam o mesmo código mostra a melhoria que pode ser obtida pela escolha do mapeamento mais adequado, que é o que apresenta métrica equivalente menor (símbolo não corrigido causa menor erro em número de bits) e menor número possível de bits sujeitos à codificação diferencial (que duplica os erros não corrigidos). O mapeamento menos adequado é, portanto, MQ3. Quanto a MQ5, embora tenha mesma métrica equivalente de MQ4, exige codificação diferencial de todos os bits de seus símbolos, enquanto que MQ4 o faz somente para 4 bits, fornecendo o esquema mais adequado para codificação de sistemas homogêneos. Como já visto no Capítulo 4, MQ5 é utilizado com bastante eficácia em sistemas mistos, devido ao seu arranjo de dígitos. Em sistemas homogêneos é menos indicado que MQ4.

A tabela a seguir mostra taxas de erro de bit de sistemas de correção de erros duplos do sistema completo, após a decodificação diferencial:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB
SQ7	4.8×10^{-3}	5.9×10^{-4}	3.3×10^{-5}	1.5×10^{-6}	---
SQ8	2.1×10^{-3}	2.4×10^{-4}	1.2×10^{-5}	5.8×10^{-7}	---
SQ9	2.9×10^{-3}	3.0×10^{-4}	2.1×10^{-5}	4.8×10^{-7}	---

Tabela 5.7: Sistemas Quaternários Completos (120,112)

A Figura 5.4 mostra a comparação de desempenho de sistemas quaternários homogêneos para correção de erros duplos- Código CQ3 (120,112) de Nakamura, após a decodificação dife-

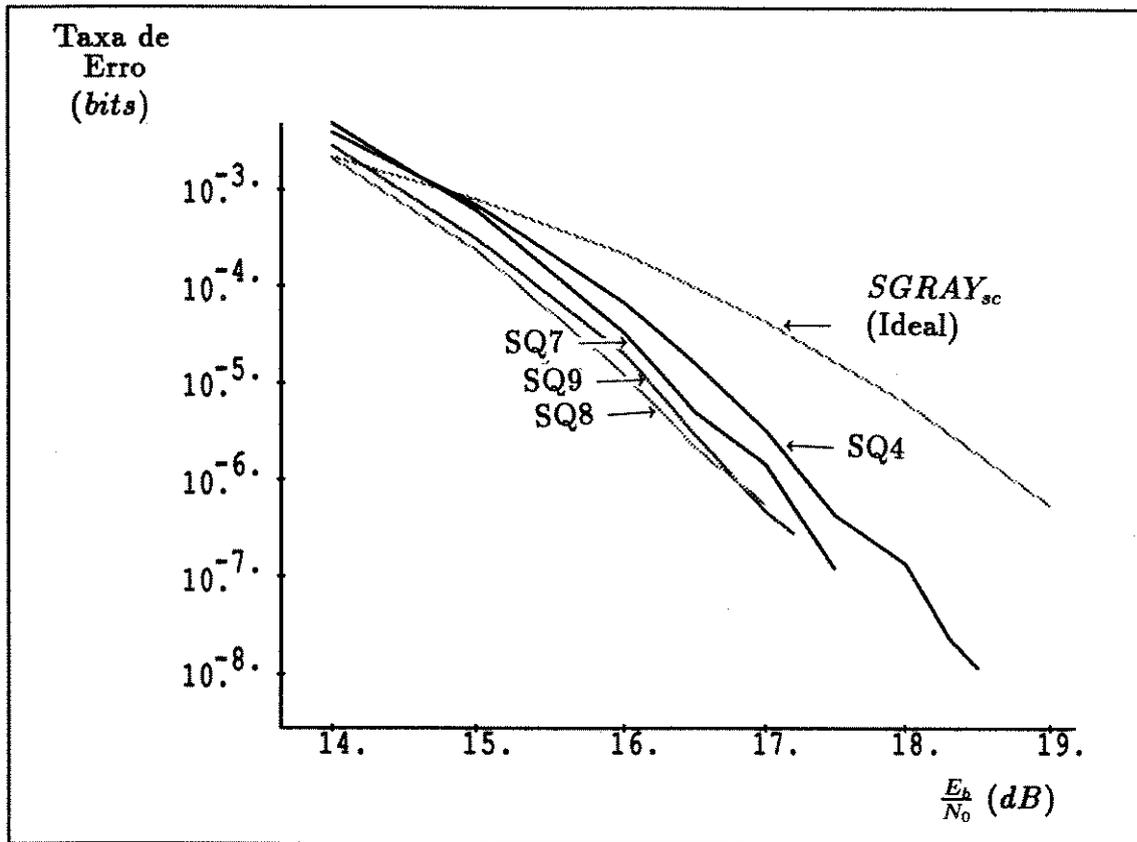


Figura 5.4: Sistemas Quaternários de Mesmo Código Para Correção de Erros Duplos

rencial, de três mapeamentos diferentes.

5.4.3 Sistemas Quaternários Homogêneos: Mesmo Mapeamento, Diferentes Códigos

Para sistemas que utilizem o mesmo mapeamento, e portanto apresentem mesmas métricas e codificação diferencial, a diferença de desempenho será devida à taxa de codificação utilizada. Evidentemente, um código de menor eficiência (taxa menor) terá mais dígitos de paridade e portanto terá maior capacidade de correção. Para ilustrar este fato, observar a comparação de desempenho de três sistemas que utilizam o Mapeamento MQ4: SQ4, de Código CQ1 (120,116) e SQ6, de Código CQ2 (124,119), de correção de erros simples, e SQ8, de Código CQ3 (120,112), de correção de erros duplos:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB
SQ4	3.9×10^{-3}	6.8×10^{-4}	6.7×10^{-5}	3.3×10^{-6}	1.4×10^{-7}
SQ6	3.2×10^{-3}	5.8×10^{-4}	5.8×10^{-5}	3.0×10^{-6}	7.8×10^{-8}
SQ8	2.1×10^{-3}	2.4×10^{-4}	1.2×10^{-5}	5.8×10^{-7}	— — —

Tabela 5.8: Sistemas de Mapeamento MQ4 e Diferentes Códigos

Ver, na Figura 5.5, o gráfico comparativo do desempenho destes três sistemas.

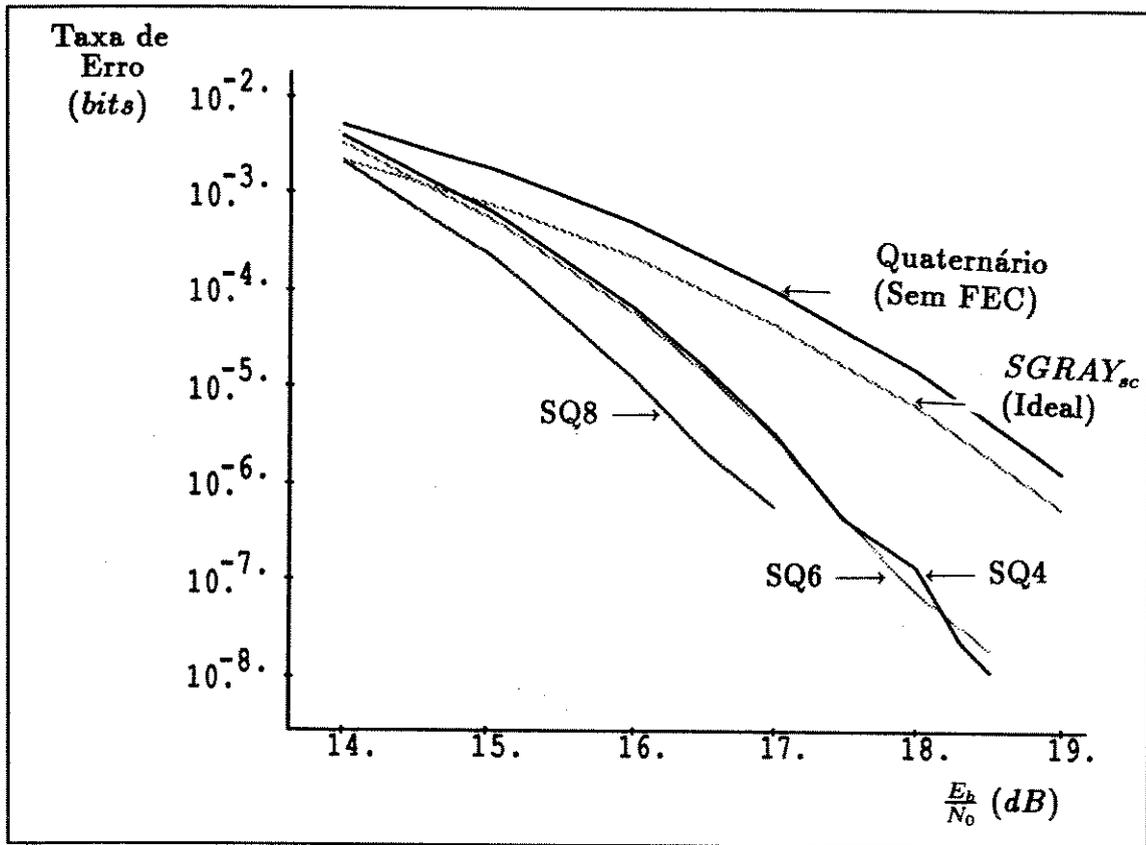


Figura 5.5: Sistemas Quaternários de Mesmo Mapeamentos e Diferentes Códigos

5.4.4 Análise de Resultados: Sistema Quaternário

A partir dos resultados obtidos na simulação é possível calcular a melhoria introduzida pelo código corretor de erros, como realizado para o caso de sistemas binários. Nas equações a seguir, BER_{cSQi} é a taxa de erro obtida para o sistema com codificação diferencial e codificação de canal, BER_{sSQi} é a taxa de erro de bit do sistema com codificação diferencial e sem codificação de canal. $SGRAY_{sc}$ é a taxa de erro mínima, obtida em sistema ideal não transparente à ambiguidade de fase (teórico):

1. Sistema SQ1:

$$BER_{cSQ1} \simeq 2.10 \times BER_{sSQ1}^{1.23} \simeq 3.55 \times SGRAY_{sc}^{1.23} \quad (5.4)$$

Este sistema não permite correção de alguns desvios para sinais Vizinhos Mais Próximos. Esta deficiência pode ser medida através da equação 5.4, que fornece uma expressão aproximadamente linear (taxa de erro de saída proporcional à de entrada elevada a um expoente próximo de 1). Quando isto ocorre, a taxa de erro residual será reduzida, porém não eliminada.

2. Sistema SQ2:

$$BER_{cSQ2} \simeq 33 \times BER_{sSQ2}^{1.72} \simeq 241 \times SGRAY_{sc}^{1.73} \quad (5.5)$$

A partir de SQ2, os sistemas quaternários apresentados são todos eficientes na eliminação de taxa de erro residual: a taxa de erro de saída é proporcional à taxa de entrada elevada a um número próximo de 2 (entre 1.7 e 2.3):

3. Sistema SQ3:

$$BER_{cSQ3} \simeq 33 \times BER_{sSQ3}^{1.72} \simeq 241 \times SGRAY_{sc}^{1.73} \quad (5.6)$$

4. Sistema SQ4:

$$BER_{cSQ4} \simeq 54.1 \times BER_{sSQ4}^{1.79} \simeq 188 \times SGRAY_{sc}^{1.79} \quad (5.7)$$

5. Sistema SQ5:

$$BER_{cSQ5} \simeq 44.2 \times BER_{sSQ5}^{1.78} \simeq 236 \times SGRAY_{sc}^{1.78} \quad (5.8)$$

6. Sistema SQ6:

$$BER_{cSQ6} \simeq 65.5 \times BER_{sSQ6}^{1.84} \quad (5.9)$$

7. Sistema SQ7:

$$BER_{cSQ7} \simeq 170 \times BER_{sSQ7}^{2.14} \quad (5.10)$$

8. Sistema SQ8:

$$BER_{cSQ8} \simeq 233 \times BER_{sSQ8}^{2.18} \quad (5.11)$$

9. Sistema SQ9:

$$BER_{cSQ9} \simeq 365 \times BER_{sSQ9}^{2.30} \quad (5.12)$$

Como pode ser observado através dos exemplos de resultados de simulação obtidos, conclui-se que, em se tratando de sistemas quaternários homogêneos:

1. Se o código utilizado é o mesmo, a taxa de erro de bit sem codificação diferencial é função apenas da métrica média do mapeamento utilizado
2. No caso do item 1, após a decodificação diferencial haverá pequenas variações do resultado obtido apenas com a decodificação de canal devido à duplicação de erros que ocorre nesse processo. Este efeito será tanto menos relevante quanto maior for a relação Sinal/Ruído.
3. Se o mapeamento utilizado é o mesmo, a taxa de erro de bit após a decodificação de canal é função da taxa do código: quanto maior a proporção de dígitos de redundância (e portanto ocupação de faixa), melhor será o desempenho do sistema.
4. Para que o código utilizado possa corrigir todos desvios de sinal para Vizinhos Mais Próximos é necessário que os símbolos do mapeamento do sistema tenham distâncias entre os dígitos deste símbolos e os respectivos dígitos de seus Vizinhos Mais Próximos dentro da capacidade corretora do código. Se isto não ocorrer, quanto maior for a métrica por magnitude da distância que não pode ser corrigida, tanto pior o desempenho do sistema.
5. A comparação entre a taxa de erro do sistema com codificação de canal e sem esta característica fornece uma curva exponencial, onde o valor da taxa de erro na saída do sistema é proporcional ao quadrado da taxa de erro de um sistema sem codificação de canal. Isto se verifica especialmente para valores altos de relação Sinal/Ruído, obtidos por cálculo ou medidas de laboratório.

5.5 Sistema Octal

As conclusões obtidas quando do estudo de sistemas binários e quaternários são aplicáveis também a sistemas octais. No entanto, é necessário observar que as distâncias entre dígitos podem variar se o dígito em questão for o primeiro ou o segundo do símbolo, devido à transcodificação. Além disso, o número de bits errados por dígito errado não é tão facilmente caracterizável como ocorre com mapeamentos quaternários. No Capítulo 4 estão definidos o número de bits errados por distância entre dígitos, e as métricas de cada um dos mapeamentos octais.

O Capítulo 4 descreve três sistemas homogêneos de codificação de canal utilizando-se códigos de dígitos octais. São utilizados dois mapeamentos e dois códigos (84,81) distintos (CO1 e CO2), na seguinte combinação:

- SO1: Mapeamento MO1, Código CO1 (84,81) de correção de erros simples de magnitude 1 (100%) e magnitude 2 (33%)

- SO2: Mapeamento MO1, Código CO2 (84,81) de correção de erros simples de magnitudes 1 e 3 (100% em ambos)
- SO3: Mapeamento MO2, Código CO2 (84,81) de correção de erros simples de magnitudes 1 e 3 (100% em ambos)

5.5.1 Sistema Octal: Mesmo Mapeamento, Diferentes Códigos

Os sistemas SO1 e SO2 utilizam o mesmo mapeamento (MO1), que, como mostrado no Capítulo 4, apresenta diferenças de magnitude entre dígitos de símbolos Vizinhos Mais Próximos nas seguintes proporções:

Magnitude	Distância de Lee	Porcentagem
0	Mesmo Dígito	46.875%
1	1 ou 7	28.125%
2	2 ou 6	6.205%
3	3 ou 5	18.750%
4	4	0.000%

Tabela 5.9: Vizinhanças Mais Próximas (MO1)

A tabela a seguir mostra a taxa de erro de bit dos sistemas SO1 e SO2, após a decodificação diferencial:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB
SO1	5.2×10^{-3}	1.8×10^{-3}	4.8×10^{-4}	9.5×10^{-5}	1.4×10^{-5}
SO2	4.1×10^{-3}	8.6×10^{-4}	1.3×10^{-4}	1.8×10^{-5}	2.3×10^{-6}

Tabela 5.10: SO1 e SO2 (Com FEC e Codificação Diferencial)

Ambos os códigos corrigem todos os erros de magnitude 1 (distâncias de Lee de 1 ou 7) e portanto pelo menos 12.5% dos erros do primeiro dígito e 43.75% dos erros do segundo dígito podem ser corrigidos nos dois sistemas, fornecendo um valor médio de 28.125% dos erros decorrentes de desvio de sinal. Como 46.875% dos desvios não causam erro de dígito, se numa palavra deste código houver apenas um erro em determinado feixe, há pelo menos 75% de chance que o erro seja eliminado no decodificador do código corretor de erros. Além disso,

- Em SO1 podem ser corrigidos 33% dos erros de magnitude 2 (distâncias de Lee de 2 ou 6). Erros desta magnitude ocorrem, em 6.25% dos casos de desvios para símbolos Vizinhos Mais Próximos em sistemas que utilizam este mapeamento. Erros de magnitude 3 (distâncias de Lee de 3 ou 5, 18.75% dos casos) não são corrigidos e erros de magnitude 4 não ocorrem. Portanto, mais 2.083% dos erros serão eliminados, fornecendo, para SO1, 77.083% de probabilidade de ter, na saída, uma palavra correta (supondo que a palavra tivesse, na entrada, um erro de dígito por feixe).
- Em SO2 podem ser corrigidos todos os erros de magnitude 3 (distâncias de Lee de 3 ou 5) que ocorrem em 18.75% dos casos. Erros de magnitude 2 (6.25%) não podem ser corrigidos e erros de magnitude 4 não ocorrem. Portanto, no caso de sistema SO2, a probabilidade de se ter palavra correta na saída, dado que a palavra de entrada continha apenas um erro de dígito é de 93.75%.

O fato do código adotado em SO2 corrigir quase todos os desvios de símbolo que ocorrem no mapeamento (exceto em algumas mudanças de quadrante) se reflete no desempenho do sistema, pois SO2, mesmo não corrigindo 100% dos erros, apresenta desempenho bem superior ao observado para SO1. No entanto, se fosse possível obter um mapeamento onde os símbolos guardassem distâncias entre dígitos Vizinhos Mais Próximos restritos a magnitudes corrigíveis pelo código utilizado, o desempenho seria ainda melhor. Este é o caso de SO3.

5.5.2 Sistema Octal: Mesmo Código, Diferentes Mapeamentos

O sistema SO2 utiliza mapeamento MO1 e código corretor de erros ímpares. MO2 é um mapeamento onde os Vizinhos Mais Próximos guardam distância de dígitos de valores ímpares somente. Portanto, podem ser corrigidos todos os erros de desvio de sinal para Vizinhos Mais Próximos, desde que haja apenas um erro de dígito por palavra no feixe em questão.

Sistema Octal Sem Codificação de Canal, Com Codificação Diferencial

A tabela a seguir apresenta o desempenho dos sistemas supondo-se sistema sem codificação corretora de erros:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB	δ_d
SO2	4.3×10^{-3}	1.6×10^{-3}	4.6×10^{-4}	9.5×10^{-5}	1.3×10^{-5}	1.9
SO3	5.7×10^{-3}	2.0×10^{-3}	6.0×10^{-4}	1.2×10^{-4}	1.6×10^{-5}	2.7

Tabela 5.11: SO2 e SO3 (Sem FEC, Com Codificação Diferencial)

Devido ao fato do mapeamento MO1 exigir codificação diferencial de apenas dois bits contra três de MO2, aliado ao fato da métrica equivalente do primeiro ser inferior a do segundo, têm-se como resultado o melhor desempenho de sistema sem codificação de canal que utilize MO1 em relação ao que utilize MO2.

Sistema Octal Com Codificação de Canal e Codificação Diferencial

O mapeamento MO2 exige codificação diferencial de maior número de bits que formam os dígitos que MO1. Devido a isto o aumento de taxa de erro devido a esta operação é mais pronunciado em SO3 que em SO2, principalmente para valores de Relação Sinal Ruído próximas ao Limiar de Atuação do código. Isto porque nesta faixa de E_b/N_0 há maior probabilidade de ocorrência de erros não corrigíveis pelo código (mais de um erro por palavra no feixe ou desvios para sinais não Vizinhos Mais Próximos na Constelação). A tabela a seguir mostra o desempenho de SO2 e SO3 após a decodificação diferencial:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB
SO2	4.1×10^{-3}	8.6×10^{-4}	1.3×10^{-4}	1.8×10^{-5}	2.3×10^{-6}
SO3	3.7×10^{-3}	6.2×10^{-4}	5.7×10^{-5}	2.7×10^{-6}	— — —

Tabela 5.12: SO2 e SO3 (Com FEC e Codificação Diferencial)

Apesar do sistema sem codificação que utilize MO1 apresentar desempenho melhor que o que utilize MO2 nas mesmas condições, a situação vai ser invertida para sistemas com codificação

de canal: como o código utilizado em SO3 pode corrigir todos os erros devido a desvio de sinal para Vizinho Mais Próximo, seu desempenho final será superior. Em outras palavras, este sistema oferece melhor combinação mapeamento-código corretor de erros.

5.5.3 Análise de Resultados: Sistema Octal

Pelos resultados obtidos pela simulação de desempenho dos sistemas, conclui-se que, analogamente ao que ocorre em sistemas quaternários:

1. Se o código utilizado é o mesmo, a taxa de erro de bit do sistema após a decodificação de canal será função da capacidade corretora do código e da proporção de magnitudes dentro da capacidade corretora, para símbolos Vizinhos Mais Próximos no Mapeamento da Constelação adotado.
2. Após a decodificação diferencial haverá ligeiro acréscimo na taxa de erro de bit devido à duplicação de erros, por esta operação, de erros de dígito não corrigidos pela decodificação de canal. Este acréscimo será tanto maior quanto maior for o número de bits que podem ser alterados na decodificação diferencial. Este efeito será tanto menos relevante quanto maior for a relação Sinal/Ruído.
3. Se o mapeamento utilizado é o mesmo, a taxa de erro de bit após a decodificação de canal é função da capacidade corretora do código: o que possibilitar correção da maior parte de erro de dígito devido a desvio de sinais para Vizinhos Mais Próximos apresentará melhor desempenho.
4. É possível obter curvas de interpolação para as relações entre as taxas de erro de sistema sem codificação de canal e com esta operação, sendo ambas com codificação diferencial:

(a) Sistema SO1

$$BER_{cSO2} \simeq 1.60 \times BER_{sSO2}^{1.05} \simeq 2.14 \times SGRAY_{sc}^{1.01} \quad (5.13)$$

(b) Sistema SO2:

$$BER_{cSO2} \simeq 1.02 \times BER_{sSO2}^{1.12} \simeq 1.34 \times SGRAY_{sc}^{1.08} \quad (5.14)$$

(c) Sistema SO3:

$$BER_{cSO3} \simeq 128 \times BER_{sSO3}^{1.90} \simeq 359 \times SGRAY_{sc}^{1.9} \quad (5.15)$$

SO1 e SO2 utilizam mapeamento onde símbolos Vizinhos Mais Próximos têm dígitos com distância de Lee que não pode ser corrigida pelo código utilizado. Como ocorre com MQ1, a relação entre taxas de erro de entrada e saída é aproximadamente linear, resultando na não eliminação da taxa de erro residual.

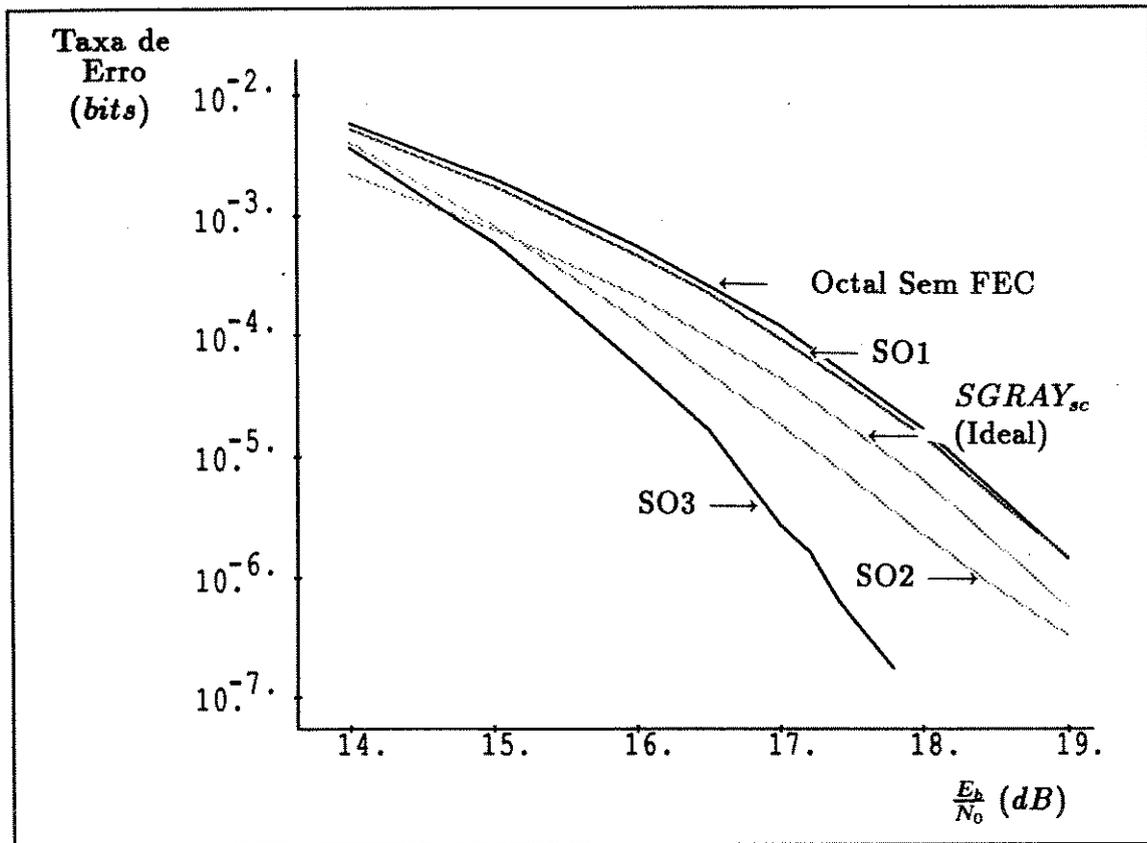


Figura 5.6: Desempenho Comparativo de Sistemas Octais

A figura 5.6 mostra as curvas de desempenho dos sistemas octais com codificação de canal aqui apresentados, bem como um sistema octal sem codificação.

5.6 Sistemas Quaternários Mistos

O sistema misto, como definido no capítulo 4, procura dar mais proteção, com o código mais poderoso, aos dígitos mais susceptíveis de erro no mapeamento. Nesta seção será feita a comparação do sistema misto com um sistema homogêneo de mesmo mapeamento [DSP] [SBT].

5.6.1 Melhoria Proporcionada pela Decisão Condicionada de Terceiro Dígito

Deseja-se obter um sistema com palavras código de comprimento idêntico ao do sistema simples. Utilizou-se, portanto, o sistema de codificação misto que codifica o primeiro dígito quaternário com código CQ3 (120,112), o segundo dígito com o código CQ1 (120,116) e o terceiro sem codificação. A taxa de codificação deste sistema será, portanto:

$$R = \frac{1}{3} \times \left(\frac{112}{120} + \frac{116}{120} + \frac{120}{120} \right) = \frac{116}{120} , \quad (5.16)$$

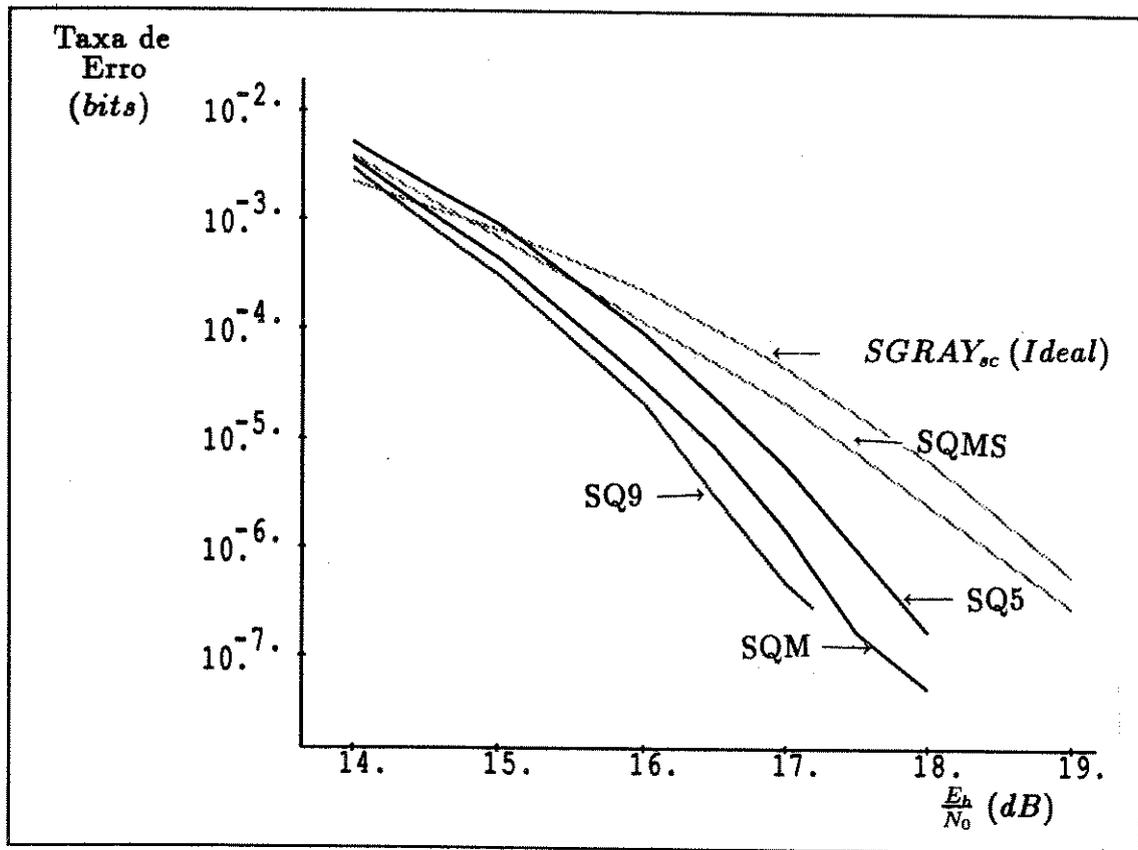


Figura 5.7: Desempenho de Sistemas Quaternários Homogêneos e Mistos

que é a mesma taxa do sistema homogêneo.

Este sistema, que não efetua nenhuma codificação no terceiro dígito, embora apresente uma melhoria em relação ao sistema não codificado, terá desempenho bem inferior ao do sistema homogêneo principalmente para alta Relação Sinal/ Ruído. Isto porque se não for possível a correção do terceiro dígito em nenhuma hipótese, desvios de sinal que causem mudanças de quadrante (ver mapeamento MQ5) resultarão, obrigatoriamente, em erros de dígito.

No entanto, se for feita uma decisão condicionada do terceiro dígito, como descrita no Capítulo 4, a correção será possível ainda que não seja feito nenhum acréscimo de faixa para isto. A tabela a seguir mostra o desempenho de dois sistemas mistos, um sem decisão condicionada de terceiro dígito (SQM) e outro com esta operação (SQMS), para demonstrar a melhoria no desempenho proporcionada:

Sistema	14 dB	15 dB	16 dB	17 dB	18 dB
SQMS	3.9×10^{-3}	6.7×10^{-4}	1.2×10^{-4}	2.1×10^{-5}	2.5×10^{-6}
SQM	3.5×10^{-3}	4.4×10^{-4}	3.4×10^{-5}	1.4×10^{-6}	5.3×10^{-8}

Tabela 5.13: Desempenho de Sistemas Quaternários Mistos Completos

5.6.2 Análise de Resultados: Sistemas Mistos

A figura 5.7 mostra a comparação de desempenho de quatro sistemas que utilizam ma-

peamento MQ5: SQ5 (homogêneo com código CQ1 para correção de erros simples), SQ9 (homogêneo com código CQ3 (120,112) e dois sistemas mistos utilizando os códigos CQ3 (primeiro dígito) e CQ1 (segundo): SQM (com decisão condicionada de terceiro dígito) e SQMS, sem esta característica. Neste gráfico também está incluída a curva ideal sem codificação de canal nem diferencial, $SGRAY_{sc}$

5.7 Comparação Geral

O Objetivo deste trabalho foi o de escolher um sistema de codificação para ser utilizado no Rádio Digital 64 QAM. A máxima expansão de faixa permitida é de 4%, e portanto somente os sistemas de correção de erros simples ou sistemas mistos são adequados. Os sistemas de correção de erros duplos foram incluídos para comparação, mostrando que o desempenho pode ser bastante melhorado para taxas de codificação menores. O sistema que apresenta melhor desempenho é o que combina mapeamento de menor métrica e proteção maior, com o código aos dígitos menos protegidos contra erros no mapeamento, ocasionados por desvios de sinal.

As comparações de desempenho devem ser feitas para valores de relação Sinal/Ruído a partir do Limiar de Atuação do Código (nome dado ao valor de E_b/N_0 a partir do qual o código começa, efetivamente, a corrigir erros e não aumentar os erros já existentes. Duas situações podem provocar este evento:

1. Pode haver mais de um erro de dígito por palavra (no caso de códigos simples) ou mais de dois erros (no caso de códigos para correção de erros duplos). Esta possibilidade, embora mais frequente em caso de baixa relação Sinal/Ruído, pode ocorrer em qualquer valor de E_b/N_0 . Nas simulações realizadas neste trabalho, este evento foi registrado até os seguintes valores:
 - Sistemas Binários: até 17.5 dB
 - Sistemas Quaternários: até 18.5 dB
 - Sistemas Octais: até 17.5 dB
2. Desvios de sinal para outros que não sejam Vizinhos Mais Próximos do sinal original. Nas simulações realizadas neste trabalho, isto se verificou para relações Sinal/Ruído mais baixas, sendo bastante frequente até 9 dB, com desvios para sinais não Vizinhos do ponto original ($d > 2.82$). No entanto, mesmo após o Limiar de Atuação do Código, ainda houve casos de deslocamento do sinal para Vizinhos Próximos. Mas a partir de $E_b/N_0 = 16.5 dB$ esta situação não se verificou em nenhum dos sistemas simulados. Para ilustrar este fato, ver a figura 5.8, que mostra a porcentagem de pontos desviados que se afastam além da distância $w = 2$ (Vizinho Mais Próximo), $w = 2.82$ (Vizinho Próximo) ou $w = 4.00$, 4.46, etc. (Não Vizinho) na constelação, de sua posição original (simulação do sistema quaternário SQ5 para correção de erros simples, utilizando mapeamento MQ5). Os demais sistemas apresentam curvas bastante semelhantes.

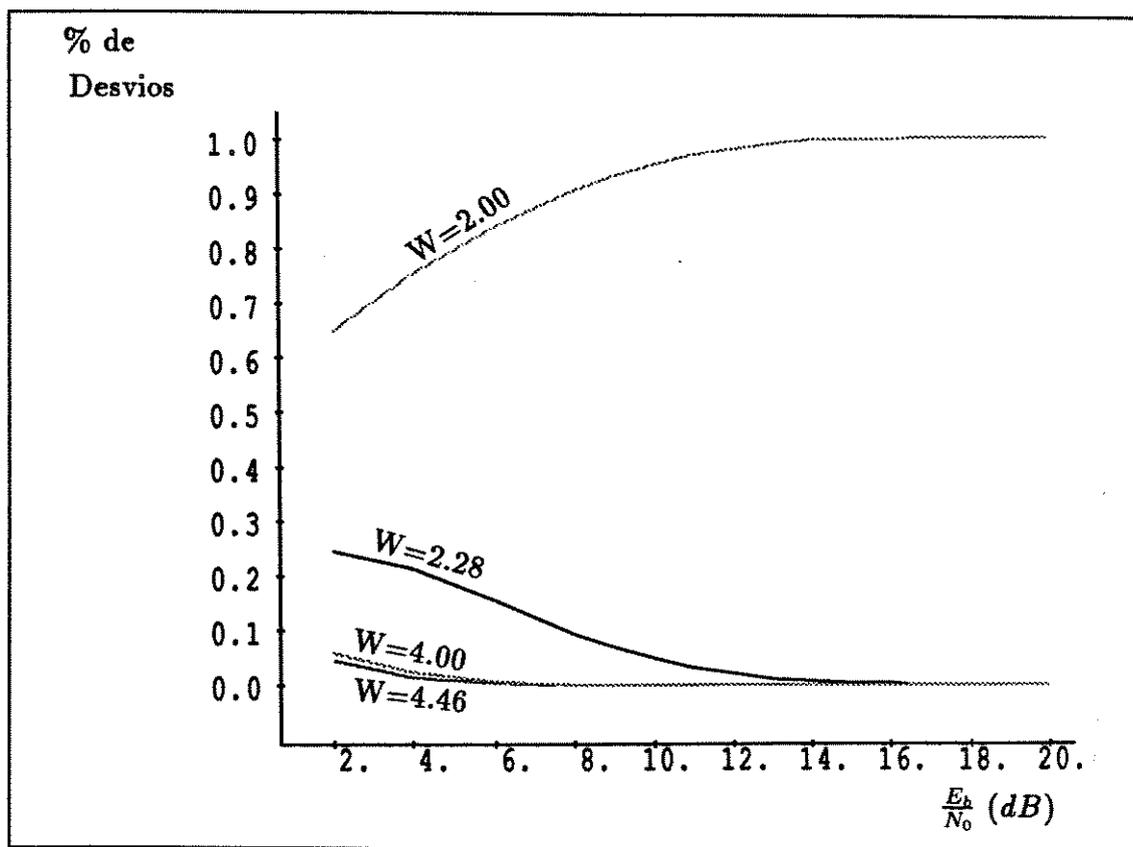


Figura 5.8: Proporção de Símbolos Errados

Em qualquer um dos casos dos itens 1 e 2, o código utilizado não pode corrigir o erro (ou erros), e, se a síndrome de qualquer uma das J palavras código for identificável como padrão de erro, haverá "correção" do "dígito errado", causando mais um erro (ou mesmo dois, no caso de códigos que corrijam erros duplos).

A partir dos resultados obtidos até aqui é possível concluir que:

1. O desempenho quanto à taxa de erro de sistemas de mesmo mapeamento é tanto melhor quanto menor for a sua taxa de codificação. De fato, códigos com maior redundância produzem sistemas mais imunes ao ruído.
2. Dentre sistemas que utilizem o mesmo código (ou códigos, em sistemas mistos), aquele que utilizar mapeamento de menor métrica apresentará melhor desempenho.
3. Sistemas que utilizem o mesmo código e que tenham métricas de mapeamento de mesmo valor poderão ter pequena diferença de desempenho devido à codificação diferencial: o mapeamento com menor número de bits sujeitos à esta operação terá menos erros não corrigidos duplicados na saída do sistema. Este efeito é mais facilmente perceptível para relações Sinal/Ruído próximas ao Limiar de Atuação do código.
4. A partir de $E_b/N_0 = 16.5 \text{ dB}$, os erros não corrigidos são causados por palavras que

apresentem mais de dois erros (1º dígito, sistema misto) ou mais de um erro (2º dígito, sistema misto ou qualquer um dos dígitos de um sistema simples).

5. Sistemas de Codificação Mistos apresentam desempenho superior a sistemas simples de mesmo mapeamento pois protegem com códigos corretores de maior redundância dígitos menos protegidos pelo mapeamento da constelação
6. Será considerado eficiente o sistema que eliminar a taxa de erro residual, desde que seja transparente à ambiguidade de fase e a expansão de taxa exigida seja inferior a 4%. Neste caso incluem-se todos os sistemas em que dígitos correspondentes de Vizinhos Mais Próximos do Mapeamento guardem entre si distâncias dentro da capacidade corretora do código adotado.

5.8 Compromissos Para Uma Implementação Física

Como a codificação diferencial é necessária, torna-se obrigatório que o mapeamento escolhido seja transparente à ambiguidade de fase, pois devido à pequena expansão de faixa permitida é necessário que a correção de erros seja feita antes da decodificação diferencial. (de outra forma, o código teria que ser capaz de corrigir erros duplos decorrentes desta operação). Havendo transparência à ambiguidade de fase, o sinal corrigido será convertido no sinal correto ainda que seja feita a decodificação diferencial depois disso. Poderão ser utilizados, portanto, todos os sistema exceto SGRAY e SCDA.

O código escolhido deve poder corrigir erros devido a desvios de qualquer sinal para seu Vizinho Mais Próximo. Desta forma, estão excluídos da escolha os sistemas SQ1, SO1 e SO2.

A expansão máxima de faixa permitida é de 4%. Desta forma, os sistemas que ocupam faixa maior que a permitida, como os que corrigem erros duplos nos três feixes (SQ7, SQ8 e SQ9) devem ser igualmente excluídos. O mesmo deve ser feito com o sistema que utiliza o código de Nakamura (124,119), de Taxa=95.97%, portanto inferior à mínima permitida (96%).

Dentre os sistemas possíveis e que utilizam o mesmo sistema de codificação, deve ser escolhido o que apresenta menor δ_d , ou seja, tem menor produto entre a Métrica Equivalente e o incremento de taxa de erro de bit devido à decodificação diferencial. Desta forma, deve-se escolher, entre os sistemas quaternários homogêneos que utilizam código (120,124) o SQ4 em detrimento de SQ2, SQ3 e SQ5, de δ_d maior. Entre os sistemas binários, SB2 apresenta desempenho superior a SB1 pelo mesmo motivo.

Portanto, a escolha final deverá ser feita entre os seguintes sistemas:

1. Binário: SB1, de Mapeamento MB2 e Código CB (255,247)
2. Quaternário Homogêneo: SQ4, de Mapeamento MQ4 e Código CQ1 (120,116)
3. Quaternário Misto: SQM, de Mapeamento MQ5 e Código ((120,112),(120,116),(120,120))
4. Octal: SO3, de Mapeamento MO2 e Código CO2 (84,81)

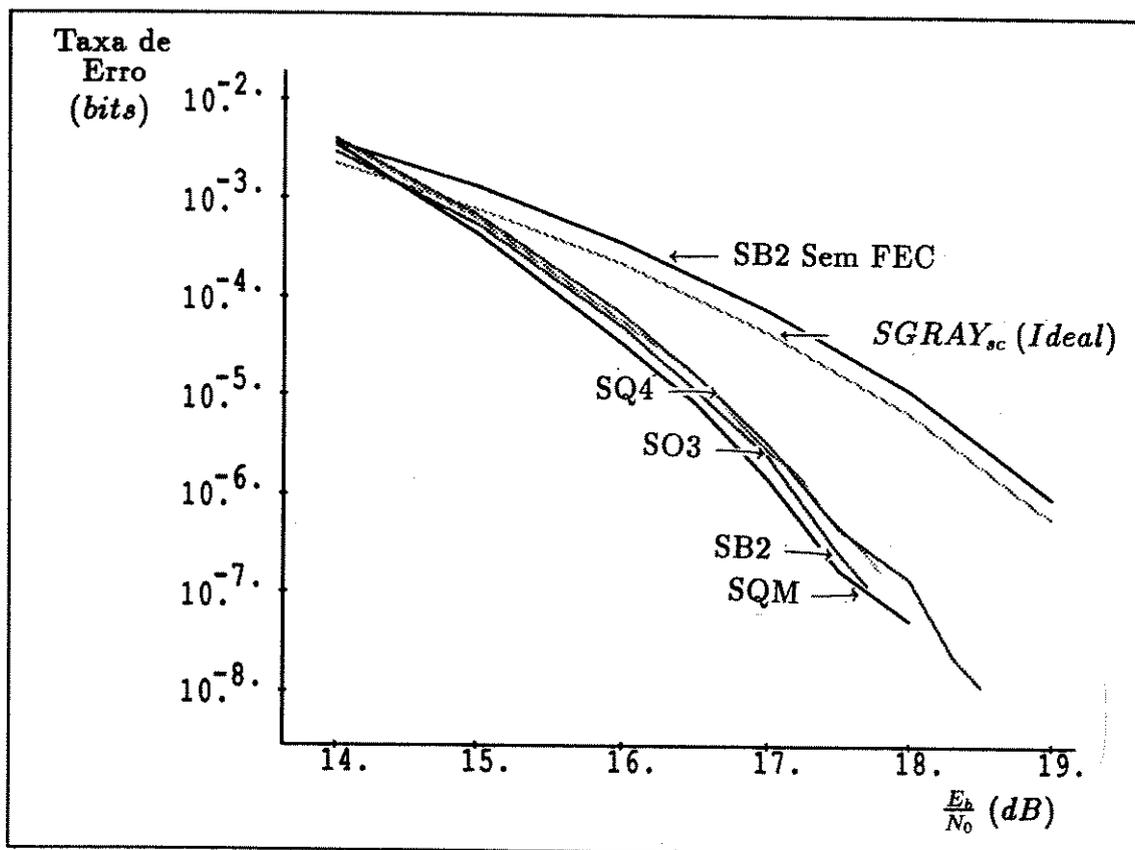


Figura 5.9: Gráfico Comparativo do Desempenho dos Melhores Sistemas Propostos

Todos estes sistemas podem ser implementados pois atendem a todas as condições exigidas. A escolha final dependerá da diferença entre seus desempenhos e da simplicidade de hardware para implementação.

Como visto no Capítulo 2, em sistemas de transmissão digital com maior número de níveis a codificação corretora de erros se torna obrigatória. A implementação pode ser realizada de diversas maneiras [Clark], [Peterson], etc). A figura 5.9 mostra o desempenho comparativo entre os melhores sistemas (binário, quaternário simples, octal e misto) que atendem as condições de contorno exigidas: SB2, SQ6, SO3 e SQM, respectivamente.

5.8.1 Alternativas Para a Implementação

Definindo-se se o sistema será binário, quaternário ou octal e escolhendo-se o mapeamento desejado (que obrigatoriamente apresentará transparência à ambiguidade de fase) estarão automaticamente definidas a codificação diferencial e a transcodificação que deverão ser adotadas. Para o codificador (e decodificador) existem duas possibilidades:

Sistema Binário: Código de Hamming Cíclico

Com o código cíclico binário (255,247) aplicado aos seis feixes de bits do sistema 64 QAM e utilizando-se o mapeamento MB2, pode-se implementar o sistema SB2. Embora cada feixe

seja codificado de forma independente pelo código corretor de erros, a codificação diferencial é feita entre os dois primeiros dígitos de forma integrada: a rotação de fase pode alterar um deles (seja o primeiro ou o segundo) ou ambos. Caso haja desvio de sinal que cause o deslocamento do símbolo para um quadrante vizinho, um dos dois dígitos será alterado (para a mesma referência de fase). Se a fase for diferente, os dois dígitos poderão ser alterados, e portanto, se ocorrer qualquer outro desvio de sinal para quadrante vizinho poderá haver mais de um erro no primeiro ou segundo dígitos, que, portanto, não serão mais corrigidos. A implementação de códigos de Hamming Cíclicos para correção de erros tem sido descrita com frequência na literatura [Peterson],[Clark]. De modo geral, observa-se que é necessário que se tenha memórias RAM disponíveis para armazenar uma palavra código completa (no caso, $255 \times 6 = 1530$ bits) e mais outra memória ROM para as síndromes possíveis, suas posições e valor de correção (255 síndromes, posição de 8 bits, num total de 2040 bits). Considerando-se que cada bit ocuparia um Flip-flop, seriam necessários 3570 Flip-flops, pelo menos, para implementação do decodificador de um código cíclico binário com eficiência de taxa de 96%.

Sistema Não Binário: Códigos de Nakamura

A utilização de códigos não binários não permite codificação diferencial tão simples como a dos códigos binários (somente primeiro e segundo dígitos). No entanto, tais códigos têm a vantagem de ter palavras mais curtas e ainda assim manter a mesma eficiência (taxa do código) de 4%. O método de derivação destes códigos tem alguma analogia com o dos códigos BCH, e portanto, podem ser facilmente implementados [Nakamura]

O processo de decodificação de uma palavra codificada com código BCH requer execução de três processos computacionais sucessivos, todos realizados sobre o campo $G_f(2^m)$: cálculo de síndromes, resolução da equação-chave e Busca de Chien (com cálculo de magnitude de erro, pois os códigos não são binários). A implementação do decodificador vai exigir memórias ROM suficientes para pelo menos duas palavras código [Clark] o que é uma razão bastante prática para que se utilize o código de menor comprimento possível: Memórias RAM suficientes para armazenar duas palavras código, o que condiciona, no caso de códigos quaternários homogêneos, a $6 \times 120 \times 2 = 1440$ bits, e no caso de códigos octais a $6 \times 84 \times 2 = 1008$ bits, respectivamente metade e um terço do número necessário para implementação de códigos binários.

5.8.2 Implicações da Escolha

O desempenho dos sistemas propostos pode ser comparado na Figura 5.9, e pelo estudo apresentado no Capítulo 2, qualquer um entre eles é eficaz para eliminar a taxa de erro residual. Seus desempenhos, apesar de pequenas diferenças, são equivalentes, proporcionalmente à taxa do código:

1. SB2, com código de Hamming Cíclico CB (255,247), Taxa: 96.86%
2. SQ4, com código de Nakamura CQ1 (120,116), Taxa: 96.67%
3. SO3, com código de Nakamura CO2 (84,81), Taxa: 96.43%

4. SQM, sistema misto: Códigos de Nakamura CQ1 e CQ3, Taxa: 96.67%

O melhor sistema é o misto, pois otimiza a codificação protegendo mais eficazmente os dígitos mais sujeitos a erros. Dentre os sistemas homogêneos, o binário SB2 tem δ_d menor e apresenta o melhor resultado.

No entanto, como visto no capítulo 3, a implementação do código corretor de erros vai exigir memórias para armazenar todas as síndromes possíveis e uma palavra completa, para que se possa fazer a soma do valor que vai corrigir um erro de dígito, em qualquer um dos feixes. Neste caso as necessidades de memória de cada um dos sistemas são as seguintes:

1. SB2: Código CB (255,247): 6 feixes binários, de comprimento 255, e 256 padrões de erro: Para cada erro, um valor de 1 bit e uma posição onde vai ocorrer a correção, de 8 bits. Se for feita correção pelo método recursivo, [Clark] serão necessárias pelo menos

$$6 (\text{feixes}) \times 255 \times 2(\text{indr.} + \text{corr.}) = 3060 \quad (5.17)$$

posições de memória. Utilizando-se leitura de memória para correção [Clark] haverá necessidade de

$$6 (\text{feixes}) \times 255 + 255 \times 8 (\text{pos.}) = 3570 \quad (5.18)$$

posições de armazenamento.

2. SQ4: Código CQ1 (120,116): 3 feixes quaternários, tendo cada um 2 bits por símbolo, e duas vezes 120=240 síndromes. Com decodificação recursiva, serão necessárias

$$3 (\text{feixes}) \times 2 (\text{bits}) \times 120 \times 2(\text{indr.} + \text{corr.}) = 1440 \quad (5.19)$$

posições de memória. Utilizando-se leitura de memória para correção serão necessárias

$$3 (\text{feixes}) \times 2 (\text{bits}) \times 120 + 120 \times 7 (\text{pos.}) = 1560 \quad (5.20)$$

posições de armazenamento.

3. SO3: Código CO2 (84,81):

$$2 (\text{feixes}) \times 3 (\text{bits}) \times 84 \times 2(\text{indr.} + \text{corr.}) = 1008 \quad (5.21)$$

posições de memória. Utilizando-se leitura de memória para correção serão necessárias

$$2 (\text{feixes}) \times 3 (\text{bits}) \times 84 + 84 \times 7 (\text{pos.}) = 1092 \quad (5.22)$$

posições de armazenamento.

4. Sistema Misto: SQM. Este sistema vai exigir decodificação de dois códigos distintos: CQ3 (120,112) e CQ1 (120,116). Supondo-se que a ordem de grandeza do número de memórias é constante, calcula-se apenas por registradores:

- CQ1 (120,116):

$$2 (\text{bits}) \times 120 + 120 \times 7 = 1080 \quad (5.23)$$

- CQ3 (120,112):

$$2 \times 120 \times 119 \times 0.94 + 120 \times 7 \simeq 27700 \quad (5.24)$$

Pelas características de memória necessária dos circuitos que implementam os sistemas propostos, e observando que as diferenças de desempenho são mínimas, optou-se por implementar o sistema SO3, que utiliza código octal CO2. Seu desempenho só é superado pelo do código quaternário misto. Uma vez que a melhoria não é tão significativa e além de exigir mais Flip-Flops, o circuito necessita blocos de funções adicionais para decisão condicionada do terceiro dígito, conclui-se que o sistema de codificação octal SO3, que utiliza mapeamento MO2 e código CO2 (octal de correção de erros simples de magnitude ímpar) é uma solução bastante razoável para o problema proposto.

Nele as palavras têm comprimento menor e é necessário menor número de decodificadores. Além disso, não há a possibilidade de que caso haja erro não corrigido em determinado dígito, este fato causar erro em outro dígito, como ocorre nos sistemas binários devido ao fato da codificação diferencial ser integrada entre primeiro e segundo dígitos.

Seu desempenho é superior ao do sistema quaternário homogêneo e quase o mesmo do sistema binário, que tem palavra código de comprimento três vezes maior.

5.8.3 Alternativas de Implementação com Códigos de Nakamura

Os blocos da Figura 5.1 podem ser assim implementados:

1. Mapeador de Transmissão e de Recepção:

Circuito Combinacional sem memória, com valores de entrada e de saída relacionados por função biunívoca. O Mapeador de transmissão executa função inversa à do Mapeamento de Recepção.

2. Transcodificador de Entrada e de Saída:

Circuito Combinacional sem memória, com valores de entrada e de saída relacionados por função biunívoca. O transcodificador de entrada executa função inversa à realizada pela função transcodificador de saída.

3. Codificador e Decodificador Diferencial:

Circuito Combinacional com memória, que armazena a fase relativa entre os sinais consecutivos. O esquema a ser utilizado para cada mapeamento foi descrito no Capítulo 4.

4. Codificador de Canal:

Shift-Register na configuração do Polinômio Gerador do Código, para multiplicação deste pela palavra de entrada. O resultado será a palavra codificada, de comprimento igual à soma do comprimento da palavra não codificada e do grau do polinômio gerador.

5. Decodificador: Duas implementações Possíveis:

- (a) A partir da síndrome encontrada pela divisão de polinômios, uma memória fornecerá a posição onde será feita a correção e o valor algébrico a ser adicionado na mesma para a decodificação de canal.
- (b) Decodificação Sequencial (recursiva)

5.9 Sistema 64 QAM Com Codificação de Canal Implementado

Para escolha do sistema que foi implementado pelo CPqD TELEBRÁS foi feita previamente uma comparação entre diversas possibilidades. Passou-se então ao projeto propriamente dito, e finalmente, à implementação:

5.9.1 Programas que Viabilizaram este Estudo

Tanto para os resultados teóricos quanto para a simulação foram necessários que se desenvolvessem programas de computador. Nos cálculos e simulações de desempenho foram utilizados programas em PASCAL, executados em equipamento VAX (DIGITAL).

1. Com a intenção de apresentar a metodologia de projeto em forma didática, foram definidos diversos mapeamentos para sistemas 64 QAM. Para viabilizar a comparação objetiva entre eles, antes da simulação, foram definidos métodos de cálculo de probabilidade de erro, realizados para cada um deles e tendo como variáveis métricas de mapeamento definidas por programas computacionais (DISKi.PAS).
2. A definição de cada código de bloco supõe uma Matriz de Paridade e Tabela de Síndromes, que foi feita pelo programa TSKi.PAS, desenvolvido em módulos, com possibilidade de variação de parâmetros.

3. Programa de Simulação dos Esquemas de Codificação: Também desenvolvido em módulos, com parâmetros variáveis segundo o sistema a ser simulado, utilizando os arquivos gerados da Matriz de Paridade e Tabela de Síndromes, possibilitou a comparação de desempenho de todos os sistemas aqui apresentados (MKi.PAS). Uma versão mais específica deste programa tem como saída um arquivo de dados processados, viabilizando vários exemplos mostrados no documento.

4. Programas Auxiliares: auxiliaram o estudo e documentação:

- Traçador de Gráficos de Resultados, utilizado sobretudo nas figuras do Capítulo 5.
- Interpolador de Curvas Com Saída Gráfica: tornou possível a comparação das curvas teóricas com as obtidas por simulação, bem como a medida em laboratório.
- Localizador de Raízes de $\text{Erfc}(X)$: auxiliou o estudo e o embasamento das conclusões apresentadas
- Processamento de Tabelas e Arquivos: diversas aplicações, tais como comparação entre Matrizes de Paridade e Tabela de Síndromes, etc.

5.9.2 Projeto

Após escolhido o sistema, o projeto exigiu novos programas para simulação lógica, tanto do codificador, de implementação mais simples (pode ser feito com circuitos comerciais: PALs para os circuitos combinacionais, FIFOs para aumento de frequência e inserção de dígitos de paridade) quanto do decodificador, que devido a seu tamanho, foi implementado com circuito integrado dedicado.

Para ambos (codificador e decodificador) foi realizada captura de esquemático em PCAD (Personal Computer Aided Design), de cada bloco. Após a conversão para netlist (lista de portas utilizadas) com NXHILO, foi feita a simulação lógica individual. Validados os blocos, passou-se à simulação lógica integrada. Foi utilizado o aplicativo HILO (GENRAD) de simulação lógica.

A partir desta etapa codificador e decodificador seguiram caminhos distintos: após o layout e a confecção da placa, foi montado o primeiro, enquanto que para o segundo, foi gerado o arquivo enviado à A.M.I. (American Microsystems INC.), que fez o layout e produziu o wafer de silício (tecnologia Gate Array $1.25\mu\text{m}$). O circuito integrado, denominado Redutor de Propagação de Erros, recebeu o número TB-34, por ser o trigésimo quarto a ser desenvolvido no CPqD TELEBRAS. A conversão de frequência (e retirada dos bits de paridade) é realizada externamente ao TB-34, com auxílio de FIFOs.

5.9.3 Medidas de Laboratório

O projeto realizado no CPqD TELEBRAS teve início em 1987, com simulações de desempenho para escolha do sistema. Concluiu-se que a implementação do decodificador deveria ser feita com circuito integrado, uma vez que não havia espaço físico suficiente para implementação de circuito discreto. O decodificador foi implementado, portanto, com tecnologia Gate Array

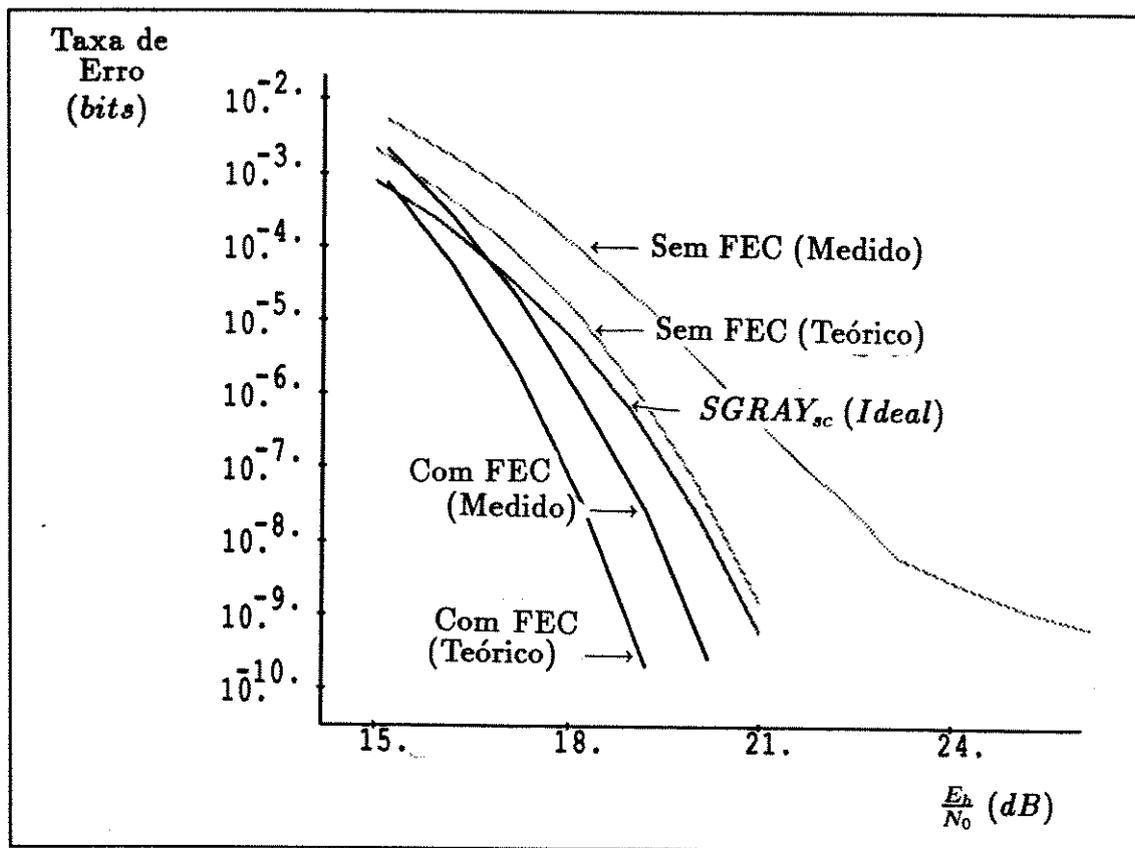


Figura 5.10: Taxa de Erro de Bit do Sistema Implementado (Medidas de Laboratório)

CMOS $1.25\mu\text{m}$, e fabricado pela A.M.I. (American Microsystems, INC.). O transmissor foi implementado com circuitos discretos CMOS.

Atualmente o Sistema de Codificação Corretora de Erros já se encontra integrado ao sistema (transmissão e recepção). O equipamento STD-140, Rádio Digital 64 QAM encontra-se em fase final de integração nos laboratórios do CPqD TELEBRAS e a figura 5.10 mostra seu desempenho com e sem a codificação corretora de erros, comparado com as curvas obtidas para o sistema teórico.

Observar que o sistema real tende à saturação para relações Sinal/Ruído elevadas. É este efeito (taxa de erro residual, causado por distorções e interferências intrínsecas do equipamento) que se deseja eliminar com uso de codificação corretora de erros. No sistema prático isto é alcançado, pois em medições de taxa de erro com tempo de duração até cerca de trinta horas só foi possível detectar erros não corrigidos com relação sinal/ruído de até 20 dB.

5.9.4 Comparação Com Sistemas Existentes

A figura 5.11 mostra a comparação de desempenho entre o circuito desenvolvido no CPqD TELEBRAS, e os fabricados pela TELETRA (Itália) [Bolla] e NEC (Japão) [Noguchi 1]. O código implementado pela NEC tem desempenho equivalente ao do STD-140, com a mesma eficiência de taxa. Já o sistema TELETRA apresenta um resultado ligeiramente superior (para

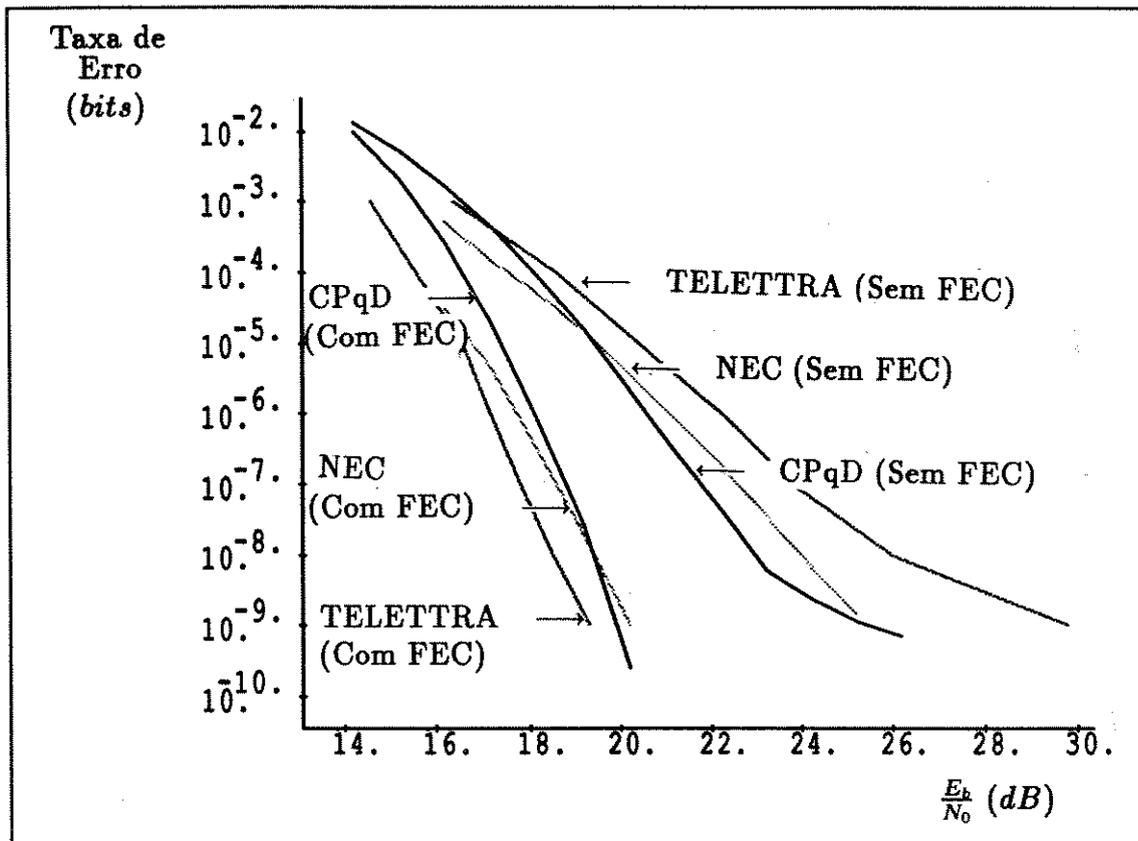


Figura 5.11: Comparação Com Sistemas Existentes

taxa de erro de 10^{-6} há um ganho de 3 dB, contra ganho de 1.5 dB para o código do CPqD TELEBRAS). Isto acontece porque nele é utilizado código que causa expansão de taxa de 5.7%.

Evidentemente, um código de maior redundância apresenta desempenho melhor. Mas como definido no Capítulo 2, o aumento de taxa devido à codificação vai causar maior aumento no espectro transmitido e dificultar a filtragem do sinal, o que se desejava evitar no sistema desenvolvido no CPqD TELEBRAS, desde que fosse eliminada a taxa de erro residual.

5.10 Conclusão

Neste Capítulo foram apresentados os resultados de simulação dos sistemas propostos no Capítulo 4. Dentre os exemplos apresentados, foram excluídos os que não satisfaziam as condições exigidas. O esquema escolhido foi o que conjugava desempenho satisfatório e maior simplicidade de implementação. Foi apresentada ainda a comparação do desempenho entre o sistema do CPqD TELEBRAS e de outros fabricantes disponíveis no mercado.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Com a finalidade de eliminar a taxa de erro residual presente em modulações multiníveis, foi necessário implementar um sistema de codificação corretora de erros para o rádio digital 64 QAM do CPqD TELEBRÁS. Devido às limitações de espectro, o sistema a ser escolhido deveria ter código de baixa redundância, apresentar transparência à ambiguidade de fase e ter a implementação mais simples entre os esquemas possíveis (Capítulo 2).

A seguir, foram apresentados códigos de bloco corretores de erros que poderiam ser utilizados (Capítulo 3), como os de Hamming cíclicos e os de Nakamura [Nakamura].

No Capítulo 4, foram mostrados diversos exemplos de mapeamentos de sinais na constelação, com probabilidades de erro de dígito devido a desvio de sinal em cada um deles, os procedimentos de codificação e decodificação diferencial associados a cada mapeamento e por fim foram definidos sistemas completos com mapeamento, codificação diferencial e codificação de canal combinados.

O Capítulo 5 apresentou as simulações e os resultados de desempenho dos sistemas completos definidos no Capítulo 4, que confirmaram os cálculos realizados no mesmo. As comparações são feitas entre sistemas binários, quaternários e octais individualmente e entre os de melhor desempenho. A seguir, foi feita a escolha do sistema a ser implementado, baseando-se na complexidade do circuito e desempenho mínimo desejado.

6.1 Contribuições

A equipe de trabalho do CPqD TELEBRÁS viabilizou a realização do projeto implementado, e também deu subsídios para apresentação deste documento, que resume e complementa o que foi executado.

Além do estudo dos sistemas de transmissão digital, sistemas rádio em particular e esquemas de codificação corretora de erros, foi necessário desenvolver neste trabalho vários programas de geração de dados e simulação de sistemas.

Tais programas possibilitaram os cálculos de probabilidade de erro de sistemas apresenta-

dos no Capítulo 4: é possível antecipar o desempenho do sistema completo [CPqD 2], bem como do sistema com codificação diferencial e sem codificação de canal, como função do mapeamento adotado.

O programa TSKi.PAS permitiu determinar a Matriz de Paridade e Tabela de Síndromes de todos os códigos aqui apresentados, bem como pesquisar códigos não encontrados nas referências disponíveis: por exemplo, o código CO2 (84,81), utilizado no sistema implementado, permite correção de todos os erros ímpares, diferentemente do CO1 (84,81) [Nakamura], que só corrigia os erros de magnitude 1.

6.2 Resultados Obtidos

Os métodos de cálculo de probabilidades apresentados no Capítulo 4 foram confirmados como corretos nas simulações do Capítulo 5, embora estas só possam ser confiáveis para resultados maiores que 10^{-6} . Como a aproximação de cálculo é razoável para taxas de erro entre 10^{-3} e 10^{-6} , pode-se assumir que os valores apresentados no Capítulo 4 podem ser confirmados num projeto implementado.

Isto foi verificado com a realização prática do sistema proposto, que já está em fase de integração final nos laboratórios do CPqD TELEBRAS e que apresenta resultado de desempenho compatível com o esperado. Além disso, revelou-se extremamente eficiente para eliminar a taxa de erro residual, que é expressa pela tendência à saturação da curva de taxa de erro de bit por relação sinal/ruído, causada pelas distorções e interferências intrínsecas do equipamento.

Embora outros sistemas aqui apresentados tivessem desempenho superior na simulação (SQM- quaternário misto) ou apresentassem codificação diferencial que causasse menor aumento de taxa de erro (binário SB2), a solução realizada (Sistema Octal Homogêneo SO3) é a que melhor atende os requisitos combinados de desempenho satisfatório e menor complexidade de implementação.

A comparação com outros sistemas semelhantes realizados até o momento mostrou que o sistema utilizado no CPqD TELEBRAS foi adequado e eficiente, dada a limitação de expansão de faixa requerida: 4%.

A realização completa do circuito exigiu outros desenvolvimentos que não puderam ser comentados neste trabalho para não torná-lo ainda mais extenso:

1. Os sistemas de conversão de taxa de para inserir e retirar a paridade.
2. O circuito de Sincronismo, que identifica o início de bloco de palavra código, que possibilita a identificação de palavra errada para cômputo de taxa de erro;
3. O circuito Estimador de Taxa de Erro, que identifica os limiares de operação e envia sinais para outras unidades do equipamento;

6.3 Continuação do Trabalho

Vários assuntos aqui apresentados mostraram-se interessantes para uma eventual continuação. Alguns exemplos:

1. Pesquisa de outros códigos de Nakamura
2. Uso de códigos convolucionais para o mesmo objetivo, e comparação com os sistemas que utilizam códigos de bloco deste trabalho.
3. Estudo teórico do número de palavras a serem simuladas como função da relação sinal ruído de entrada, para resultado variando em cerca de 10%. Foi observado empiricamente que o aumento logarítmico da relação sinal ruído exigia pelo menos um aumento logarítmico do número de palavras simuladas (E_b/N_0 superior a 16.5 dB).
4. Estudar a possibilidade de implementação de códigos hexadecimais, pois se o código binário exige uma palavra de comprimento $n = 255$, o quaternário de $n = 120$, o octal $n = 84$, talvez o hexadecimal viabilize um código ainda mais curto
5. Esquemas de Codificação para sistemas rádio digital 256 QAM

Atualmente está sendo feito no CPqD TELEBRAS um estudo de viabilidade de incluir os programas de simulação de códigos corretores de erro aqui apresentados como módulo de programas de simulação de desempenho de sistemas rádio mais abrangentes, como por exemplo o ASTRAL [Brandão].

BIBLIOGRAFIA

1. BATES 1
C. P. Bates and M. A. Skinner, "Impact of Technology on High-Capacity Digital Radio Systems", ICC 83, F 2.3.1 a 2.3.5, pp 1467-1471
2. BATES 2
C. P. Bates, P. L. Penney, K. L. Seastrand, "Digital Radio Technology in the AT&T Network", ICC 87, 19B5.1 a 19b5.1.7, pp 659-665
3. BATES 3
C. P. Bates, G. I. Frazer, G. D. Martin, W. C. Trested, "Effectiveness of Error Correction and Errorless Frequency Diversity Switching in a Multipath Environment", ICC 87, 23.4.1 a 23.4.5, pp 826-830
4. BELLINI
S. Bellini, G. Tartara, "Coding for Error Correction in High Capacity Digital Radio: An Application to 64 QAM Systems", 1st ECRR, European Conference on Radio-Relay Systems, November 1986, pp.166-172
5. BENEDETTO
Sergio Benedetto, Ezio Biglieri, Valentino Castellani, "Digital Transmission Theory", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
6. BERLEKAMP-1
E. R. Berlekamp, "Algebraic Coding Theory", Mc Grow Hill Book Company, New York, 1968, pp. 207-217
7. BERLEKAMP 2
E. Berlekamp, R. Peile, S. Pope, "The Application of Error Control to Communications", IEEE Communications Magazine, April 1987, Vol 25 no 4, pp 44-54
8. BIGLIERI
Ezio Biglieri e Giancarlo Prati, "Digital Communications", North Holland, 1985, pp. 25-31
9. BRANDÃO
João Célio Brandão, "ASTRAL: Um Programa para Análise e Simulação de Sistemas de Transmissão Digital", Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1987
10. BOLLA
M. Bolla, L. Rossi e G. Verbana, "Implementation of 64 QAM Modem for 140 Mbit/s Digital Radio", ICC 91, 5.1.1 a 5.1.6, pp 145, 150
11. CCIR-V
Recommendations and Reports of the C.C.I.R.: "Propagation In Non Ionized Media", Vol V, 1990
12. CCIR-IX
Recommendations and Reports of the C.C.I.R.: "Fixed Services Using Radio Relay Systems", Vol IX, Part I, 1990

13. CLARK
George C. Clark Jr. e J. Bibb Cain, "Error Correction Coding for Digital Communications", Plenum Press, 1981.
14. COMPSTON
Ian K. Compston, "Rádio Digital: Problemas Práticos e Soluções de Medidas", Hewlett Packard, 1990
15. CPqD 1
CPqD TELEBRAS, "Sistema de Transmissão Digital a 140 Mbit/s (STD-140M)- Especificação de Tecnologia de Sistema- Especificação de Objetivos e Requisitos de Referência: Rádio Digital 64 QAM X 34 Mbit/s (RADI-X/434/64A)", Relatório Interno, 1987
16. CPqD 2
A. C. França Pessoa, Heloísa P. B. Pimentel e Luiz Henrique N. Rodrigues, "Pré Relatório Técnico da Unidade Redutor de Propagação de Erros para o Rádio Digital 64 QAM", Relatório Interno, CPqD TELEBRAS, 1987.
17. DAIDO
Yoshimasa Daido, Yukio Takeda, Eisuke Fukuda, Sadao Takenaka, Hiroshi Nakamura, "256 QAM Modem for High Capacity Digital Radio Systems", GLOBECOM 84, 16.8.1-16.8.5, 1984
18. DSP
Antônio C. França Pessoa, Heloísa P. de Barros Pimentel e Walter C. Borelli, "Transparent To Phase Ambiguity Channel Coding Systems For 64 QAM Digital Radio", First International Symposium on Digital Signal Processing For Communication Systems, IEEE-Extended Synopses- University of Warwick, U.K., September 1992, pp 77-84.
19. DUPUIS
Philippe Dupuis, Michel Joindot, Alain Leclert, Dominique Soufflet, "16 QAM Modulation for High Capacity Digital Radio System", IEEE Transactions on Communications, Vol COM-27 no 12, December 1979, pp 1771-1782
20. ELIAS
José Roberto Elias, "Codificador Diferencial e Conversor de Níveis", Relatório Interno, CPqD TELEBRAS, 1987
21. FEHER 1
Kamilo Feher, Ronald P. Tetarenko, Paulo R. Hartmann, Vasant K. Prabhu, "Digital Communications By Radio" IEEE Transactions on Communications, Vol COM-27 no 12, December 1979, pp 1749-1751
22. FEHER 2
Kamilo Feher, "Digital Communications: Microwave Applications", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1981.
23. FEHER 3
Kamilo Feher and Engineers of Hewlett Packard, "Telecommunications Measurements, Analysis and Instrumentation", Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1987.
24. FÉRIS
Édson Benedito Ramos Féris, "Transmissão Digital", CPqD TELEBRAS, 1987- Apostila do Curso.

25. FORNEY
G. David Forney Jr., Robert G. Gallager, Gordon R. Lang, Fred M. Longstaff, Shahid U. Qureshi, "Efficient Modulation for Band-Limited Channels", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, VOL SAC-2 No 5, September 1984, pp 632-647
26. FRANÇA 1
A. C. França Pessoa, Notas Pessoais Sobre Esquemas de Codificação Transparente à Ambiguidade de Fase
27. FRANÇA 2
A. C. França Pessoa, "Codificação para Correção de Erros e Estratégia de Sincronismo de Bloco para o Sistema RADI 64 QAM", Relatório Interno, CPqD TELEBRAS, 1990
28. FUKUDA 1
Eisuke Fukuda, Yukio Takeda, Yoshimasa Daido, Susumu Sasaki, Hiroshi Nakamura, "Design of 64 QAM Modem for High Capacity Digital Radio Systems", GLOBECOM 83, 25.5.1-25.5.5, Fujitsu Laboratories Ltd
29. FUKUDA 2
Eisuke Fukuda, N. Iizuke., Yoshimasa Daido, Sadao Takenaka, Hiroshi Nakamura, "256 QAM Digital Radio System With a Roll-Off Factor of 20% For Attaining 6.75 Mbit/ Hz", ICC 87, pp 52.2.1 a 52.2.5
30. GIUFFRIDA
T. S. Giuffrida, W. W. Toy, "16 QAM and Adjacent Channel Interference", ICC 81, pp 13.1.1-13.1.4
31. HARTMANN 1
Paul R. Hartmann, Joseph A. Crosset, "A 90 MBS Digital Transmission System at 11 Ghz Using 8 PSK Modulation", ICC 76, pp 18.8 a 18.13
32. HARTMANN 2
Paul R. Hartmann and J. A. Crossett, "135 MBS- 6 Ghz Transmission System Using 64 QAM Modulation", ICC 83, F 2.6.1 a 2.6.7, pp 1484-1490
33. HORIKAWA 1
Izumi Horikawa, Yoshiharu Okamoto, Kozo Morita, "Characteristics of a High Capacity 16 QAM Digital Radio System on a Multipath Fading Channel", ICC 79, pp 48.4.1-48.4.6
34. HORIKAWA 2
Izumi Horikawa, Takehiro Murase, Yoishi Saito, "Design and Performances of a 200 Mbit/s 16 QAM Digital Radio System", IEEE Transactions on Communications, Vol COM-27 no 12, December 1979, pp 1953-1958
35. ITO
T. Ito, Toshihiko Ryu and Toshitate Noguchi, "Design and Performance of 6 Ghz 135 Mb/s Radio System with 64 QAM", ICC 84, pp 632-635
36. JOINDOT
Michel Joindot, "Cours de Transmission Numérique- Transmission en Bande de Base et Sur Fréquence Porteuse", Direction de L'Enseignement Supérieur Technique des Postes et Télécommunications- Institut National des Cadres Techniques, 1975, pp 53-76

37. KOMAKI 1
Shozo Komaki, Izumi Horikawa, Kozo Morita, Yoshiharu Okamoto, "Characteristics of a High Capacity 16 QAM Digital Radio System in Multipath Fading", IEEE Transactions on Communications, Vol COM-27 no 12, December 1979, pp 1854-1861
38. KOMAKI 2
Shozo Komaki, Yoshiharu Okamoto, Kojiro Tajima, "Performance of 16-QAM Digital Radio System Using New Space Diversity", ICC 80, pp 52.2.1-52.2.6
39. LIN-COSTELLO
Shu Lin e Daniel Costello Jr., "Error Control Coding", Prentice-Hall, Inc., 1983.
40. McNICOL
J. D. McNicol, S. G. Barber and F. Rivest, "Design And Application of The RD-4A 64 QAM Digital Radio Systems", ICC 84, pp 646-652, 1984
41. MARKMAN
Ivonete Markman, "Introdução à Correção Corretora de Erros", CPqD TELEBRAS, 1987- Apostila do Curso.
42. MURASE
Takehiro Murase, Kozo Morita, Shozo Komaki, "200 Mb/s 16 QAM Digital Radio System with New Countermeasure Techniques for Multipath Fading", ICC 81, pp 46.1.1-46.1.5
43. NAKAMURA
Katsuhiko Nakamura, "A Class of Error Correcting Codes for DPSK Channels", ICC 79, pp. 45.4.1-45.4.5
44. NEC
NEC, "Seminário Rádio Microondas Digital", Rio de Janeiro, Junho de 1987
45. NOGUCHI 1
Toshitake Noguchi, Toshihiko Ryu, Y. Koisumi, S. Mizoguchi, M. Yoshimoto, Katsuhiko Nakamura, "6 Ghz 135 Mbit/s Digital Radio System with 64 QAM Modulation", ICC 83, F 2.4.1 a 2.4.6, pp. 1472- 1477
46. NOGUCHI 2
Toshitake Noguchi, Yoshimasa Daido e Joseph A. Nossek, "Modulation Techniques for Microwave Digital Radio", IEEE Communications Magazine, October 1986, vol 24 no 10, pp 21-30
47. OHTSUKA
Hiroyuki Ohtsuka, Yoishi Saito e Shozo Komaki, "Super Multi-Carrier Trellis Coded 256 QAM Digital Microwave Radio", ICC 88, 8.2.1 a 8.2.6, pp 0244-0249
48. OKURA
Motokazu Okura, "Sistemas Rádio Digital- Evolução e Perspectivas Futuras na EMBRA-TEL", 5o SBT- Campinas, S.P., 1987, pp 72-79.
49. PETERSON
W. Peterson e E.J. Weldon, "Error Correcting Codes", The MIT Press, 1961.
50. PRÁTICA
Prática Telebras no 225-330-701, "Especificações Gerais do Equipamento Rádio Digital 140 Mbit/s-16 QAM- 5 GHz", Março de 1991

51. PROAKIS
John G. Proakis, "Digital Communications", Mc Grow Hill, 1983
52. ROCHA
Valdemar C. da Rocha Jr. e Reginaldo Palazzo Jr., "Códigos Corretores de Erros", ISICT-International Symposium on Information and Coding Theory, 1987- Apostila do Curso.
53. SAITO 1
Yoichi Saito, Kozo Morita, Heiichi Yamamoto, "5 L- D1 Digital Radio System", ICC 82, pp 2B.1.1-2B.1.7
54. SAITO 2
Yoshi Saito, Shozo Komaki and Masayoshi Murotani, "Feasibility Considerations Of High Level QAM Multi Carrier System", ICC 84, pp 665-671
55. SBT
Antônio C. França Pessoa, Heloísa P. de Barros Pimentel e Walter C. Borelli, "Esquema de Codificação Transparente à Ambiguidade de Fase para Sistemas Rádio Digital 64 QAM", X Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, Brasília, Julho de 1992, pp 85-91.
56. SHU LIN
Shu Lin, "An Introduction To Error Correcting Codes", Prentice-Hall, 1970.
57. SILVA
Gilberto Silva e O. Barradas, "Telecomunicações- Sistemas Radiovisibilidade", EMBRATEL-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1977.
58. TAKEDA
Yukio Takeda, Noboru Iizuka, Yoshimasa Daido, Sadao Takenaka, Hiroshi Nakamura, "Performance of 256 QAM Modem for Digital Radio System", ICC 85, 47.2.1 a 47.2.5, pp 1455-1459
59. TAKENAKA
Sadao Takenaka, Yukio Takeda, T. Sakane, Hiroshi Nakamura and N. Toyonaga, "A new 4 Ghz 90 MBPS Digital Radio System using 64 QAM Modulation", ICC 84, pp 642-645
60. TAN
Y. Tan, Toshihiko Ryu, H. Hashimoto, S. Shinmio, Seijito Yokoyama, "The 8 Level PSK Modem with Cosine Roll-Off Spectrum for Digital Microwave Communications", ICC 76, pp 29-13 a 29.18
61. TAUB
Herbert Taub e Donald Schilling, "Digital Integrated Electronics", Mc Grow-Hill International Book Company, 1983
62. TAYLOR
Desmond P. Taylor and Paul R. Hartmann, "Telecommunications By Microwave Digital Radio", IEEE Communications Magazine, Vol 24 No8, August 1986, pp 11-16
63. UNGERBOECK 1
Gottfried Ungerboeck, "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals", IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-28 No 1, January 1982, pp 55-67

64. UNGERBOECK 2
Gottfried Ungerboeck, "Trellis Coded Modulation with Redundant Signal Sets- Part I: Introduction" IEEE Communications Magazine, February 1987, vol 25 no 2, pp. 5-11
65. VITERBI
Andrew J. Viterbi e Jim K. Omura, "Principles of Digital Communication and Coding", Mc Grow-Hill 1979.
66. WEBER
William J. Weber, "Differential Encoding for Multiple Amplitude and Phase Shift Keying Systems", IEEE Transactions on Communications, Vol COM-26, No 3, March 1978, pp 385-391.
67. Y. NAKAMURA
Yasuhisa Nakamura, Yoshi Saito and Satoru Aikawa, "256 QAM Modem for Multicarrier 400 Mbit/s Digital Radio", IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol SAC-5 No3, pp 329-335, April 1987
68. YAMAMOTO
Heiichi Yamamoto, "Advanced 16 QAM Techniques for Digital Microwave Radio", IEEE Communications Magazine, Vol 19 No 3, May 1981, pp 36-45
69. YAMASHITA
T. Yamashita, Hiroshi Nakamura e Sadao Takenaka, "High Capacity Digital Microwave Radio System", Fujitsu Laboratories
70. YOSHIDA 1
Yasuharu Yoshida, Yuji Kitahara, Seijiro Yokoyama, "6 G- 90 Mbps Digital Radio System with 16 QAM Modulation", ICC 80, pp 52.4.1-52.4.5
71. YOSHIDA 2
Yasuharu Yoshida, Massao Tahara and Toshihiko Ryu, "6 Ghz 140 Mbit/s Digital Radio repeater with 256 QAM Modulation", ICC 86, pp 46.7.1 a 46.7.5