



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE
COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA
Laboratório de Análise Convexa



Otimização e controle de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos

Tese apresentada na Faculdade de Engenharia Elétrica da
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos
exigidos para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia Elétrica.

Daniela Pucci de Farias

Engenheira de Computação — FEEC/UNICAMP

em 21 de agosto de 1998 perante a banca examinadora

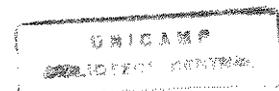
José Cláudio Geromel

Orientador

João Bosco Ribeiro do Val

Oswaldo Luiz do Valle Costa

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por *Daniela Pucci de Farias*
e aprovada pela Comissão
Julgada em 21 / 08 / 1998
Orientador



582277

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
	F2250
V. Ex.	
TOMASO BC/	35534
PROC.	395/98
C <input type="checkbox"/> D <input checked="" type="checkbox"/>	
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	23/10/98
N.º CPD	

CM-00117599-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA — BAE — UNICAMP

F2250 Farias, Daniela Pucci de
Otimização e controle de sistemas com parâmetros
sujeitos a saltos markovianos / Daniela Pucci de
Farias.— Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: José Cláudio Geromel.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Controle automático. 2. Sistemas estocásticos.
3. Markov, Processos de. 4. Programação convexa.
I. Geromel, José Cláudio II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. III. Título.



Universidade Estadual de Campinas

FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA

DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Laboratório de Análise Convexa



Tese : Otimização e controle de sistemas
com parâmetros sujeitos a saltos markovianos

Autora : Daniela Pucci de Farias

Orientador : Prof. Dr. José Cláudio Geromel

Aprovada em 21 de agosto de 1998 pela banca examinadora

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente)

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa

À minha querida filhinha Sissi
e ao Dudu, que a trouxe até mim.

Agradecimentos¹

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Dr. José Cláudio Geromel, pelos inúmeros ensinamentos, científicos ou não, pelo constante incentivo e pela fascinante e indescritivelmente divertida convivência.

Agradeço também ao professor João Bosco, pelas valiosas sugestões e discussões que muito contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho e ao colega Maurício Carvalho de Oliveira, que pacientemente respondeu a todas as questões que lhe fiz (e não foram poucas).

Meu muito obrigado a todos aqueles que me ensinaram alguma coisa, contribuindo portanto para que eu ampliasse meus conhecimentos, e aos colegas e amigos que me cercaram de afeto e apoio, pois sem essas componentes meu caminho teria sido muito mais árido, senão impossível.

Finalmente, um agradecimento especial aos meus pais, pela educação, pelo apoio, por tudo que sempre fizeram por mim, ao Dudu, que durante anos vem suportando todas as minhas esquisitices, e à pequena Sissi, pela doce e fiel companhia.

¹Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da Fapesp - Fundação de Amparo à Pesquisa.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal o estudo de problemas de controle H_2/H_∞ de sistemas lineares com parâmetros sujeito a saltos markovianos. São tratados tanto o problema de realimentação de estado quanto o de realimentação de saída, além da filtragem. Todos os controladores e filtros são expressos em termos de equações de Riccati e desigualdades matriciais lineares.

Abstract

The main aim of this thesis is to study jump linear continuous-time systems H_2/H_∞ control. Both state and output feedback problems are addressed, as well as filtering. All controllers are written as Riccati equations and linear matrix inequalities.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	iv
1 Introdução	1
2 Conceitos básicos	5
2.1 O modelo	5
2.2 Estabilidade	6
2.3 Norma H_2	10
2.4 Norma H_∞	14
2.5 Algumas considerações sobre o modelo	19
3 Realimentação de estado	21
3.1 Estabilidade Estocástica	21
3.2 Controle H_2	22
3.2.1 Controlador H_2 ótimo obtido via LMIs	23
3.2.2 Controlador H_2 ótimo obtido via equações de Riccati	24
3.3 Controle H_∞	25
3.3.1 Estabilidade estocástica na presença de incertezas	26
3.3.2 Um controlador factível	29
3.3.3 Controlador central H_∞	31
4 Realimentação de saída	35
4.1 Estabilidade estocástica	35
4.2 Controle H_2	38
4.2.1 Controlador H_2 ótimo obtido via LMIs	39
4.2.2 Controlador H_2 ótimo obtido via equações de Riccati	40
4.3 Controle H_∞	46
4.3.1 Controlador H_∞ subótimo obtido via LMIs	46

4.3.2	Controlador central H_∞	48
4.4	Filtragem	53
4.4.1	Filtragem H_2	53
4.4.2	Filtragem H_∞	55
5	O problema misto H_2/H_∞	59
5.1	Um método primal de solução	59
5.2	Realimentação de estado	62
5.3	Realimentação de saída	63
6	Conclusão e perspectivas	67
A	Processos Estocásticos	69
B	Desigualdades matriciais lineares	73
	Referências Bibliográficas	75

Capítulo 1

Introdução

Entre os vários objetivos da teoria de controle, de papel fundamental é certamente a busca de robustez. Quando são levados em consideração sistemas reais, limitações inerentes ao processo de medida tornam na maioria das vezes praticamente impossível determinar com certeza os parâmetros do sistema. Ainda que se obtenha precisão satisfatória nos processos de medida, outros problemas surgem à tona. Perturbações provenientes do meio em que o sistema se encontra podem afetar seu comportamento; para que possam ser tratados segundo os resultados da teoria linear de sistemas, aqueles originariamente não-lineares são representados por modelos lineares, portanto aproximados. Essas questões e muitas outras levam à necessidade de se estudar técnicas de projeto de controladores que garantam não somente um bom desempenho nas condições nominais de funcionamento, mas também estabilidade frente às eventuais incertezas sobre o sistema.

Diferentes abordagens vêm sendo estudadas tendo em vista a garantia da robustez. Principalmente para o caso de sistemas determinísticos, encontram-se na literatura muitos resultados, como a solução do problema de custo garantido, em que os parâmetros do sistema encontram-se dentro de um conjunto convexo poliedral, e o problema de controle H_∞ , que garante a estabilidade do sistema frente a classes de perturbações com normas limitadas (para ambos os problemas, veja [2]).

Enquanto para o caso determinístico muitos resultados já foram obtidos, na área de sistemas estocásticos permanecem os problemas em aberto mais abundantes que as soluções. Resultados de mais alta relevância e relativamente antigos para sistemas determinísticos são bastante recentes nesta área¹. Como exemplo, observa-se que talvez um dos primeiros artigos a estabelecer condições necessárias e suficientes para a estabilidade de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos data somente de 1990 [10]. Uma análise do estado da arte na teoria de controle desses sistemas comparado ao mesmo estado para sistemas determinísticos pode ser encontrada em

¹... que continua uma vasta e inóspita terra de ninguém, a ser explorada pelos mais destemidos cavaleiros e amazonas da santa cruzada do controle.

[4], revelando grande defasagem dos primeiros.

Não obstante as dificuldades, e talvez até mesmo por causa delas, esta é uma área com enorme apelo, com inúmeras aplicações². Os modelos com parâmetros sujeitos a saltos markovianos fornecem representações mais convenientes para sistemas que apresentem mudanças abruptas em seu comportamento, seja por força de perturbações externas, falhas de componentes, mudanças no ponto de operação, quando se trata de sistemas não-lineares, entre outros. Dada sua versatilidade, problemas das mais diversas áreas podem ser representados. Um exemplo é o modelo macroeconômico apresentado em [17].

Neste trabalho, tratam-se problemas de controle com realimentação de estado e realimentação de saída para sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Os problemas de realimentação de estado já foram resolvidos em outros trabalhos, no entanto é preciso notar que se adotava, basicamente, a técnica de programação dinâmica. Neste trabalho eles serão abordados a partir da análise convexa, baseada nas normas H_2 e H_∞ . Com o auxílio dessas normas, os problemas de controle serão convertidos para problemas de otimização sujeitos a LMIs³. O grande atrativo dessa técnica, como veremos a seguir, é trazer uniformidade para os problemas de realimentação de estado e realimentação de saída, que poderão ser tratados com as mesmas ferramentas, sem necessidade de considerações sobre filtragem, teorema da separação e outros, além de permitir a parametrização de diversos controladores ao mesmo tempo. O problema de filtragem também é resolvido pelas mesmas técnicas, tornando-se um problema convexo.

Os capítulos seguintes estão organizados como se segue:

- Capítulo 2 : Conceitos básicos. Neste capítulo é definido o tipo de sistema a ser tratado e são apresentados resultados já existentes relevantes para o estudo em questão, como as condições de estabilidade, as normas H_2 e H_∞ ;
- Capítulo 3 : Realimentação de estado. Os problemas de controle H_2 e H_∞ são tratados do ponto de vista convexo para o caso em que o estado do sistema é totalmente medido;
- Capítulo 4 : Realimentação de saída e filtragem. Novamente os problemas de controle H_2 e H_∞ são tratados, porém considera-se que o estado é apenas parcialmente medido. São projetados ainda filtros H_2 e H_∞ , que lançam nova luz sobre os resultados do Capítulo 4 e permitem sua melhor interpretação.
- Capítulo 5 : Problema misto H_2/H_∞ . Aplica-se o algoritmo proposto em [5] para encontrar uma solução ótima local para esse problema, no caso de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos.

²... que justificam o esforço daqueles para os quais o mero desafio não é razão suficiente.

³Desigualdades Matriciais Lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities*.

- Capítulo 6 : Conclusões e perspectivas do controle de sistema com parâmetros sujeitos a saltos markovianos.
- Apêndice A : Conceitos introdutórios de processos estocásticos.
- Apêndice B : Introdução a LMIs e resultados relevantes relacionados.

Capítulo 2

Conceitos básicos

Neste capítulo pretende-se apresentar o modelo a ser utilizado, definições e resultados relevantes relacionados ao mesmo. Embora sejam resultados conhecidos, já presentes na literatura, suas demonstrações são incluídas com o propósito de tornar o texto auto-contido, facilitando sua leitura. Os resultados de estabilidade podem ser encontrados em [9, 10]. A norma H_2 já foi discutida em [3], e [16] trata a norma H_∞ de sistemas com saltos markovianos.

2.1 O modelo

O modelo a ser utilizado possui a seguinte estrutura:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta_t)x + E(\theta_t)w; & x(0) = x_0, \theta_0 = \theta \\ z = C_1(\theta_t)x \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $x \in R^n$, $\theta_t \in \{1, 2, \dots, N\}$, $w \in R^r$ e $z \in R^p$ denotam respectivamente as variáveis de estado contínuas e discretas, de entrada e de saída, x_0 é o estado inicial da parte contínua do sistema, suposto conhecido, e θ é uma variável aleatória com probabilidade

$$\mathcal{P}(\theta = i) = \alpha_i$$

onde $\mathcal{P}(\cdot)$ denota a probabilidade de (\cdot) . Observe-se que o sistema contém uma parte contínua e uma discreta, motivo pelo qual ele é dito híbrido. Além disso, $\{\theta_t, t \in [0, +\infty)\}$ é um processo markoviano tal que

$$p_{ij}(\Delta) = \mathcal{P}(\theta_{t+\Delta} = j | \theta_t = i) = \begin{cases} \lambda_{ij}\Delta + \mathcal{O}(\Delta) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\Delta + \mathcal{O}(\Delta) & i = j \end{cases}$$

onde $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$, $\lambda_{ii} \leq 0$ e

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = 0$$

Pode ser caracterizada, portanto, a matriz de transição

$$\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$$

que contém as taxas de transição entre os estados da cadeia de Markov representada por θ_t .

Note-se que o fato de esse processo ser markoviano implica que a distribuição condicional de primeira ordem apresentada acima estabelece totalmente o comportamento da cadeia, não sendo necessário definir as distribuições de ordens superiores.

Neste ponto torna-se oportuna uma breve consideração sobre a riqueza proporcionada pelo modelo. Ele engloba não somente os possíveis valores que os parâmetros podem tomar mas também as probabilidades de transição entre cada conjunto dos mesmos. Como será visto a seguir, esse fato tem implicações importantes quando são consideradas questões como a estabilidade do sistema. Observe-se também que, dado que o objetivo principal do modelo é compreender possíveis variações dos parâmetros, poderia ser alegado que para tanto bastaria definir uma região convexa que englobasse todos os pontos de operação possíveis. No entanto, é necessário lembrar que, nesse caso, a robustez seria exigida para todos os pontos no interior do conjunto convexo, e não somente aqueles em que os parâmetros deveriam efetivamente estar, sem contar a desvantagem adicional de não se conhecer as probabilidades de transição entre os modos de funcionamento. Este aspecto será discutido com mais detalhes a seguir.

Para simplicidade de notação, escreveremos $A_i = A(\theta_t = i)$ e do mesmo modo para os demais parâmetros.

A seguir serão apresentados os conceitos de estabilidade e normas H_2/H_∞ , no contexto de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos.

2.2 Estabilidade

Em sistemas estocásticos encontramos diversos conceitos diferentes de estabilidade (veja [9]). Neste trabalho, será considerada a estabilidade estocástica, definida da seguinte maneira:

Definição 2.1 (Estabilidade estocástica) *O sistema (2.1) será dito estocasticamente estável quando existir $M = M' > 0$ ¹ tal que*

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\infty x(t)' x(t) dt | \theta_0 \right] \leq x_0' M x_0$$

onde $\mathbf{E}[\cdot]$ denota a esperança matemática de $[\cdot]$. □

¹ M' indica M transposta. $M > 0$ indica M simétrica e definida positiva.

A definição acima tem como implicação que, dado um estado inicial qualquer (x_0, θ_0) , $x(t)$ deve convergir na média quadrática assintoticamente para a origem. Neste caso, como pode ser visto em [9], existirão a e b positivos tais que

$$\mathbf{E} [\|x(t)\|^2] \leq b \|x(0)\|^2 e^{-at} \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

Como o sistema é linear considera-se, sem perda de generalidade, o ponto de equilíbrio $x = 0$. Além disso, no teorema a seguir consideraremos entrada de ruído nula.

Condições necessárias e suficientes para a estabilidade estocástica foram estabelecidas pela primeira vez em [10], cujo resultado principal é reproduzido a seguir.

Teorema 2.1 [10] *O sistema (2.1) com entrada de ruído w nula é estocasticamente estável se e somente se, para quaisquer $Q_i = Q_i' > 0$, $i = 1, \dots, N$, cada $P_i = P_i'$ satisfazendo as N equações de Lyapunov acopladas*

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j + Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

for definida positiva.

Prova :

- **Suficiência :**

Vamos tomar a função estocástica de Lyapunov $V(x(t), \theta_t) = x(t)' P(\theta_t) x(t)$. Portanto, sendo \mathcal{L} o operador do gerador infinitesimal (vide apêndice A):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, \theta_t = i) &= x'(A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j)x \\ &= -x' Q_i x \end{aligned}$$

Dividindo os dois lados da igualdade por $V(x, i)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}V(x, \theta_t = i)}{V(x, \theta_t = i)} &= -\frac{x' Q_i x}{x' P_i x} \\ &\leq -\min_{i \in [1, N]} \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \end{aligned}$$

onde $\lambda_{\min}(\cdot)$ e $\lambda_{\max}(\cdot)$ são os autovalores mínimo e máximo, respectivamente. Definindo

$$\alpha = \min_{i \in [1, N]} \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} > 0$$

observamos que

$$\mathcal{L}V(x(t), \theta_t) \leq -\alpha V(x(t), \theta_t)$$

o que implica

$$\mathbf{E}[V(x(t), \theta_t)] \leq e^{-\alpha t} V(x_0, \theta_0)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\int_0^T x(t)' P(\theta_t) x(t) dt | \theta_0 = i \right] &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\alpha t} dt x_0' P_i x_0 \\ &\leq \alpha^{-1} x_0' P_i x_0 \end{aligned}$$

Finalmente, chegamos ao resultado desejado

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\infty x(t)' x(t) dt | \theta_0 \right] \leq x_0' M x_0$$

escolhendo $M \geq \frac{P_i}{\alpha \lambda_{\min}(P_i)}$ para todo i .

- **Necessidade :**

Vamos considerar a função

$$x(t)' P(T - t, \theta_t) x(t) = \mathbf{E} \left[\int_t^T x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau | x(t), \theta_t \right]$$

Se $x(t) \neq 0$, dado que $Q(\theta_t) > 0$, ou $x(t)' P(T - t, \theta_t) x(t)$ aumenta monotonicamente com o aumento de T , ou ele aumenta monotonicamente até que $\mathbf{E}[x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau)] = 0$, para qualquer $\tau \geq t$. Como o sistema é estável, a segunda situação deve ocorrer quando T tende ao infinito e o limite abaixo existe:

$$x(t)' P_i x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\int_t^T x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau | x(t), \theta_t = i \right] \quad (2.3)$$

Como a igualdade (2.3) é válida para qualquer $x(t)$, temos

$$P_i = \lim_{T \rightarrow \infty} P(T - t, \theta_t = i) \quad (2.4)$$

Observe-se que $P_i > 0$. Vamos agora considerar a expressão

$$\begin{aligned} &x(t)' P(T - t, i) x(t) - \mathbf{E} [(x(t + \Delta)' P(T - t - \Delta, \theta_{t+\Delta}) x(t + \Delta) | x(t), \theta_t = i)] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_t^{t+\Delta} x(\tau)' Q(\theta_\tau) x(\tau) d\tau | x(t), \theta_t = i \right] \end{aligned}$$

Desprezando os termos em $\mathcal{O}(\Delta)$, dividindo ambos os lados por Δ e tomando o limite $\Delta \rightarrow 0^+$, teremos:

$$-x(t)'[A_i'P(T-t, \theta_t = i) + P(T-t, \theta_t = i)A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P(T-t, \theta_t = j) + \dot{P}(T-t, \theta_t = i)]x(t) = x(t)'Q_i x(t)$$

Lembrando que o limite (2.4) existe e uma vez que a expressão acima é válida para qualquer $x(t)$, então $P_i > 0, i = 1, \dots, N$ resolvem as equações de Lyapunov acopladas

$$A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j + Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

É importante notar que a igualdade acima vale devido à existência do limite (2.4), garantido pela estabilidade estocástica do sistema, pois nesse caso

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \dot{P}(T-t, \theta_t = i) = 0$$

o que prova o teorema proposto. \square

Observamos que, como $Q_i > 0$ são matrizes arbitrárias, podemos reescrever (2.2) como LMIs

$$A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j = -Q_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.5)$$

Alternativamente, podemos ainda definir $X_i = P_i^{-1} > 0$ e estabelecer a condição de estabilidade estocástica com LMIs em termos dessa nova variável. De fato, multiplicando (2.5) por X_i à esquerda e à direita, obtemos

$$A_iX_i + X_iA_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}X_iX_j^{-1}X_i < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Aplicando complemento de Schur nos termos não-lineares, obtemos

$$\begin{bmatrix} A_iX_i + X_iA_i' + \lambda_{ii}X_i & R_i(X) \\ R_i(X)' & S_i(X) \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

onde

$$R_i(X) = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_{1i}}X_i & \dots & \sqrt{\lambda_{(i-1)i}}X_i & \sqrt{\lambda_{(i+1)i}}X_i & \dots & \sqrt{\lambda_{Ni}}X_i \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

e

$$S_i(X) = -\text{diag}(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_N) \quad (2.7)$$

onde $\text{diag}(\cdot)$ é uma matriz bloco-diagonal com os blocos não-nulos dados por (\cdot) .

Observamos que a estabilidade de $A_i + \frac{1}{2}\lambda_{ii}I$ para todo i é condição necessária para a estabilidade estocástica do sistema. No entanto, é interessante notar que a condição de estabilidade estocástica não implica estabilidade de cada modo de operação do sistema, o que ressalta o ponto mencionado na seção anterior sobre a relevância de se englobar no modelo as probabilidades de transição entre os diversos modos de operação. De fato, recordando-se que alguns modos de operação podem ser transientes, não é realmente necessário exigir a estabilidade, uma vez que se espera que o sistema não permaneça em um desses modos em regime. Por isso, mesmo que eles sejam instáveis, o sistema deverá passar a outros estados após um intervalo finito de tempo, garantindo a estabilidade estocástica. Esse fato é ilustrado no seguinte exemplo:

Exemplo 2.1 *Vamos considerar um sistema escalar com dois modos de funcionamento, com*

$$A_1 = 0.95, \quad A_2 = -2.9, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, o primeiro modo de funcionamento do sistema não é estável. No entanto, aplicando o Teorema 1 com $Q_1 = Q_2 = 2$, obtemos $M_1 = 2$ e $M_2 = \frac{2.1}{6}$, o que demonstra que o sistema é estocasticamente estável, mesmo sendo os dois estados da cadeia de Markov recorrentes. \square

2.3 Norma H_2

O cálculo de normas H_2 está diretamente ligado ao problema linear quadrático. O objetivo principal é obter uma medida para o desempenho do sistema. Recordando que o ponto de equilíbrio do sistema é zero, a norma fornece uma medida de quão longe encontra-se o estado do sistema de seu ponto de funcionamento nominal, dado um estado inicial diferente de zero. A vantagem de utilizar a norma H_2 é a possibilidade de estabelecer problemas de controle de modo que possam ser resolvidos por algoritmos para o tratamento de LMIs.

Definição 2.2 (Norma H_2) *Seja o sistema (2.1). Então, se ele for estocasticamente estável, definimos sua norma H_2 como*

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \sum_{k=1}^r \mathbf{E} \left[\int_0^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \right]$$

onde $z^k(t)$ é a resposta do sistema à entrada $w(t) = e^k \delta(t)$, dado $x(0) = 0$, e^k é um vetor com todas as entradas nulas exceto a k -ésima, que vale 1, e $\delta(t)$ é a função de impulso unitário. \square

Deduziremos a seguir a norma H_2 de (2.1). Esse é um resultado já conhecido e pode ser encontrado em [3]. No entanto, apresentamos aqui uma prova diferente da contida nessa referência.

Teorema 2.2 *A norma H_2 do sistema (2.1) com condição inicial $x(0) = 0$ é dada por*

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' P_i E_i)$$

onde P_1, P_2, \dots, P_N são soluções definidas positivas das equações de Lyapunov acopladas

$$A_i' P_i + P_i A_i + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j = 0 \quad (2.8)$$

Prova : Como (2.1) deve ser estocasticamente estável, a existência de $P_i > 0^2$ satisfazendo (2.8) é garantida pelo Teorema 2.1. Logo

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}\|_2^2 &= \sum_{k=1}^r \mathbf{E} \left\{ \mathbf{E} \left[\int_0^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \mid \theta_0 = i \right] \right\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^r \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \left(\int_0^\Delta (e^{k'} E_i' e^{A_i' t} C_{1i}' C_{1i} e^{A_i t} E_i e^k dt \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^N \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} p_{ij}(\Delta) \mathbf{E} \left[\int_\Delta^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \mid x(\Delta) = e^{A_i \Delta} E_i e^k, \theta_\Delta = j \right] \right\} \right\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^r \mathbf{E} \left[\int_{0^+}^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \mid x(0^+) = E_i e^k, \theta_{0^+} = i \right] \right\} \end{aligned}$$

Recordando a igualdade (2.3) deduzida na seção anterior, sabemos que

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \left[\int_{0^+}^\infty z^k(t)' z^k(t) dt \mid x(0^+) = E_i e^k, \theta_{0^+} = i \right] \\ &= \mathbf{E} \left[\int_{0^+}^\infty x(t)' C_1(\theta_t)' C_1(\theta_t) x(t) dt \mid x(0^+) = E_i e^k, \theta_{0^+} = i \right] \\ &= e^{k'} E_i' P_i E_i e^k \end{aligned}$$

²Com hipóteses adicionais P_i pode ser considerada semidefinida positiva.

onde P_i é solução de (2.8). Portanto

$$\begin{aligned} \|S\|_2^2 &= \mathbf{E} \left\{ \sum_{k=1}^r (e^{k'} E_i' P_i E_i e^k) \right\} \\ &= \mathbf{E} \{ \text{Tr}(E_i' P_i E_i) \} \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' P_i E_i) \end{aligned} \quad (2.9)$$

completando a prova. \square

Por definição a norma H_2 deve ser maior ou igual a zero. Portanto, P_i deve ser maior ou igual a zero para todo i , pois se obtivermos pelo menos uma matriz P_i com pelo menos um autovalor negativo, poderíamos fixar as probabilidades α_i e os parâmetros E_i de modo que a soma (2.9) fosse negativa (fazendo, por exemplo, $\alpha_i = 0$ para todo i tal que $P_i > 0$). Isso poderia levar à interpretação errônea de que a norma poderia ser negativa; no entanto, devemos observar que nesse caso o sistema não é estável e a norma H_2 não está definida para esse caso.

Devemos observar que a existência de $P_i \geq 0$ satisfazendo (2.8) não garante a estabilidade estocástica de (2.1), já que temos $C_{1i}' C_{1i} \geq 0$. Se $C_{1i}' C_{1i} > 0$, então o sistema certamente será estável, mas no caso mais geral devemos ter a condição adicional de que os estados do sistema que não são observáveis a partir da saída z sejam estocasticamente estáveis.

É interessante notar que a norma H_2 de (2.1) pode ser escrita em termos de LMIs; mais precisamente, ela pode ser definida como

$$\|S\|_2^2 = \min_{P_i > 0} \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' P_i E_i) \quad (2.10)$$

$$\text{s.a. } A_i' P_i + P_i A_i + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \leq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.11)$$

De fato, a solução do problema de otimização(2.10) possui como solução ótima $P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*$ que devem satisfazer (2.8), como demonstra o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Sejam $P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*$ soluções ótimas de (2.10). Então elas devem satisfazer (2.8).*

Prova : Vamos efetuar a prova por contradição. Sejam $P_1^*, P_2^*, \dots, P_N^*$ correspondentes à solução ótima de (2.10). Então vamos supor que, pelo menos para um i ,

$$A_i' P_i^* + P_i^* A_i + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j^* < 0 \quad (2.12)$$

Mantendo P_j^* , $j \neq i$ fixas, podemos encontrar \tilde{P}_i tal que

$$A'_i \tilde{P}_i + \tilde{P}_i A_i + C'_{1i} C_{1i} + \lambda_{ii} \tilde{P}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} P_j^* = 0 \quad (2.13)$$

Subtraindo (2.13) de (2.12), obtemos

$$(A_i + \frac{1}{2} \lambda_{ii} I)' (P_i^* - \tilde{P}_i) + (P_i^* - \tilde{P}_i) (A_i + \frac{1}{2} \lambda_{ii} I) < 0$$

Como o sistema deve ser estocasticamente estável, sabemos que $A_i + \frac{1}{2} \lambda_{ii} I$ é estável, logo $P_i^* - \tilde{P}_i > 0$. Examinando as restrições em P_j , $j \neq i$, observamos que

$$\begin{aligned} & A'_j P_j^* + P_j^* A_j + C'_j C_j + \sum_{k=1, k \neq i}^N \lambda_{jk} P_j^* + \lambda_{ji} \tilde{P}_i \\ &= A'_j P_j^* + P_j^* A_j + C'_j C_j + \sum_{k=1}^N \lambda_{jk} P_j^* - \lambda_{ji} (P_i^* - \tilde{P}_i) \\ &< A'_j P_j^* + P_j^* A_j + C'_j C_j + \sum_{k=1}^N \lambda_{jk} P_j^* \\ &< 0 \end{aligned}$$

Portanto, $P_1^*, P_2^*, \dots, P_{i-1}^*, \tilde{P}_i, P_{i+1}^*, \dots, P_N^*$ é uma solução factível de (2.10). Além disso, como $\tilde{P}_i < P_i^*$, podemos escolher E_i tal que $\text{Tr}(E'_i \tilde{P}_i E_i) < \text{Tr}(E'_i P_i^* E_i)$, logo essa solução é melhor que a solução ótima, o que é uma contradição. \square

Podemos ainda reescrever o problema (2.10) em termos das variáveis $X_i = P_i^{-1} > 0$. Multiplicando (2.11) por X_i à esquerda e à direita, obtemos

$$A_i X_i + X_i A'_i + X_i C'_{1i} C_{1i} X_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_i X_j^{-1} X_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, N$$

que pode ser escrita como uma LMI se considerarmos desigualdade estrita, bastando aplicar complemento de Schur nos termos não-lineares. Nesse caso, calcularemos a norma H_2 por aproximação; de fato, utilizando métodos de pontos interiores podemos chegar tão perto da solução ótima quanto desejado. No entanto, observamos que a função objetivo

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E'_i X_i^{-1} E_i)$$

não é linear. Isso pode ser solucionado introduzindo-se variáveis Z_1, \dots, Z_N simétricas, tais que

$$Z_i > E'_i X_i^{-1} E_i \quad (2.14)$$

e redefinindo a função objetivo como

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i)$$

Evidentemente, na solução ótima devemos ter $Z_i \approx E_i' X_i^{-1} E_i$, portanto o problema não é alterado. Aplicando complemento de Schur na restrição (2.14), obtemos o problema equivalente

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A_i' + \lambda_{ii} X_i & R_i(X) & X_i C_{1i}' \\ & R_i'(X) & S_i(X) & 0 \\ & C_{1i} X_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} X_i & E_i \\ E_i' & Z_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

onde $R_i(X)$ e $S_i(X)$ são definidas em (2.6) e (2.7).

2.4 Norma H_∞

A presença de perturbações no sistema e incertezas nos parâmetros pode ser tratada, no caso determinístico, pela imposição de restrições às normas H_∞ das funções de transferência entre os ruídos e a saída do sistema. Vamos adotar a mesma estratégia para o caso de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Inicialmente, mostraremos um exemplo de como é possível reescrever um sistema com incertezas nos parâmetros como um equivalente, porém com ruídos. Estabeleceremos então condições para que o sistema seja estocasticamente estável e finalmente discutiremos o conceito de norma H_∞ , que está intrinsecamente ligado a essas questões.

Exemplo 2.2 *Seja o sistema :*

$$\dot{x} = (A(\theta_t) + E(\theta_t)\Delta(\theta_t)C_1(\theta_t))x$$

onde a única informação sobre as matrizes reais Δ_i é $\|\Delta_i\|^2 = \lambda_{\max}(\Delta_i \Delta_i') \leq \gamma_i^{-2}$. Então ele pode ser convertido para o sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_t)x + E(\theta_t)w \\ z &= C_1(\theta_t)x \\ w &= \Delta(\theta_t)z \end{aligned} \tag{2.15}$$

□

No caso determinístico, que é equivalente a θ_t possuir um único estado, há o resultado já conhecido do *Teorema do Pequeno Ganho*³ [2], que estabelece condições para que o sistema (2.15) seja estável. No seguinte lema, vamos estabelecer condições para o tratamento do caso estocástico, ou seja, em que θ_t pode assumir mais do que um valor.

Lema 2.1 *Seja o sistema (2.15). Então, se as equações de Riccati acopladas*

$$A'_i P_i + P_i A_i + \gamma_i^{-2} P_i E_i E'_i P_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j = 0 \quad (2.16)$$

possuem como solução P_1, P_2, \dots, P_N definidas positivas, tais que $A_i + \gamma_i^{-2} E_i E'_i P_i, i = 1, \dots, N$ sejam estocasticamente estáveis⁴, o sistema em malha fechada é estocasticamente estável.

Prova : Vamos tomar a função de Lyapunov

$$V(x(t), \theta_t) = x'(t) P(\theta_t) x(t)$$

Calculando seu gerador infinitesimal em um instante t tal que $\theta_t = i$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x(t), \theta_t = i) &= x'(t) \left(A'_i P_i + P_i A_i + \sum_{i=1}^N \lambda_{ij} P_j + P_i E_i \Delta_i C_{1i} + C'_{1i} \Delta'_i E'_i P_i \right) x(t) \\ &= x'(t) \left(-\gamma_i^{-2} P_i E_i E'_i P_i - C'_{1i} C_{1i} + P_i E_i \Delta_i C_{1i} + C'_{1i} \Delta'_i E'_i P_i \right) x(t) \end{aligned}$$

Como $\|\Delta_i\| < \gamma_i^{-1}$, sabemos que

$$C'_{1i} \Delta'_i \Delta_i C_{1i} \leq \gamma_i^{-2} C'_{1i} C_{1i}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x(t), \theta_t = i) &\leq x'(t) \left(-\gamma_i^{-2} P_i E_i E'_i P_i - \gamma_i^2 C'_{1i} \Delta'_i \Delta_i C_{1i} + P_i E_i \Delta_i C_{1i} + C'_{1i} \Delta'_i E'_i P_i \right) x(t) \\ &\leq -x'(t) \left(\gamma_i^{-1} P_i E_i - \gamma_i C'_{1i} \Delta'_i \right) \left(\gamma_i^{-1} P_i E_i - \gamma_i C'_{1i} \Delta'_i \right)' x(t) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

A estabilidade estocástica do sistema (2.15) está garantida a menos que, para todo t

$$\gamma^{-1}(\theta_t) E(\theta_t)' P(\theta_t) x(t) = \gamma(\theta_t) \Delta(\theta_t) C_1(\theta_t) x(t)$$

³Small Gain Theorem

⁴Dizemos que $A_i, i = 1, \dots, N$ são estocasticamente estáveis se o sistema $\dot{\psi} = A(\theta_t)\psi$ for estocasticamente estável.

Neste caso, porém, o sistema será

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A(\theta_t) + E(\theta_t)\Delta(\theta_t)C_1(\theta_t))x \\ &= (A(\theta_t) + \gamma^{-2}(\theta_t)E(\theta_t)E(\theta_t)'P(\theta_t))x\end{aligned}$$

sendo, por hipótese, estocasticamente estável⁵. \square

As soluções $P_i, i = 1, \dots, N$ tais que $A_i + \gamma_i^{-2}E_iE_i'P_i, i = 1, \dots, N$ são estocasticamente estáveis serão ditas estabilizantes.

Pela prova do Lema 2.1, sabemos que, se as desigualdades

$$A_i'P_i + P_iA_i + \gamma_i^{-2}P_iE_iE_i'P_i + C_{1i}'C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.17)$$

forem satisfeitas para $P_i > 0$, a estabilidade estocástica do sistema (2.15) estará garantida, sem a necessidade da hipótese adicional de estabilidade estocástica de $A_i + \gamma_i^{-2}E_iE_i'P_i$. Portanto, utilizar a desigualdade torna-se bastante conveniente, pois a hipótese adicional aumenta consideravelmente a complexidade de resolução das equações de Riccati (2.16), sendo normalmente testada apenas a posteriori.

Outro resultado sobre a estabilidade estocástica de (2.15) pode ser encontrado em [1]. Nesse artigo é tratado um caso equivalente a fazer $E_iE_i' = I$ e estabelece-se que (2.15) é estocasticamente estável se existirem $P_i > 0, i = 1, \dots, N$ definidas positivas tais que

$$A_i'P_i + P_iA_i + \gamma_i^{-2}P_i^2 + C_{1i}'C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.18)$$

o que equivale às condições (2.17) obtidas aqui. No entanto, devemos notar que tratamos um caso mais geral, pois não necessariamente precisamos ter $E_iE_i' = I$.

No caso de sistemas determinísticos, a condição (2.16) está relacionada a uma restrição sobre a norma H_∞ da função de transferência de w para z . Para sistemas com saltos markovianos, embora não seja utilizado o conceito de função de transferência, vamos definir a norma H_∞ de modo a relacioná-la com as mesmas condições (2.16). Basicamente, o que se pretende fazer é estabelecer um limite para a influência da perturbação w na saída z do sistema. Vamos considerar w uma perturbação pertencente a $L^2[0, \infty)$, ou seja,

$$\|w\|_2^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty w(t)'w(t)dt \right] < \infty$$

Definição 2.3 [Norma H_∞] *Seja o sistema (2.1). Então, se ele for estocasticamente estável, definimos sua norma H_∞ como sendo o menor valor de γ tal que*

$$\|z\|_2 < \gamma\|w\|_2$$

\square

⁵Este fato decorre do teorema de LaSalle (pág. 179, [18]).

O teorema a seguir, desenvolvido em [16], fornece condições suficientes para que a norma H_∞ de um sistema com parâmetros sujeitos a saltos markovianos seja menor que um valor pré-definido.

Teorema 2.4 *Seja o sistema (2.1), com condição inicial $x(0) = 0$. Então, se as desigualdades*

$$A'_i P_i + P_i A_i + \gamma^{-2} P_i E_i E'_i P_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.19)$$

tiverem como uma solução factível P_1, P_2, \dots, P_N definidas positivas, $\|\mathcal{S}\|_\infty < \gamma$.

Prova : Vamos considerar a quantidade

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\infty z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t) dt \right]. \quad (2.20)$$

Sabemos que, quando $w = 0$,

$$\mathbf{E} \left[\int_0^\infty \mathcal{L}(x(t)' P(\theta_t) x(t)) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} x(T)' P(\theta_T) x(T) = 0$$

pois o sistema (2.1) é estocasticamente estável. Portanto, somando essa quantidade a (2.20):

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty \left[x(t)' \left(C_1(\theta_t)' C_1(\theta_t) + A(\theta_t)' P(\theta_t) + P(\theta_t) A(\theta_t) + \sum_{j=1}^N \lambda_{\theta_t j} P_j \right) x(t) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + w(t)' E(\theta_t)' P(\theta_t) x(t) + x(t)' P(\theta_t) E(\theta_t) w(t) - \gamma^2 w(t)' w(t) \right] dt \right\} \\ &= \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty \left[x(t)' \left(C_1(\theta_t)' C_1(\theta_t) + A(\theta_t)' P(\theta_t) + P(\theta_t) A(\theta_t) + \sum_{j=1}^N \lambda_{\theta_t j} P_j + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \gamma^{-2} P(\theta_t) E(\theta_t) E(\theta_t)' P(\theta_t) \right) x(t) - \gamma^2 (w(t) - \gamma^{-2} x(t) E(\theta_t)' P(\theta_t))' \times \right. \\ & \quad \left. \left. \times (w(t) - \gamma^{-2} x(t) E(\theta_t)' P(\theta_t)) \right] dt \right\} \quad (2.21) \end{aligned}$$

Como por hipótese (2.19) é válida, existem $Q_1 > 0, Q_2 > 0, \dots, Q_N > 0$ tais que

$$A'_i P_i + P_i A_i + \gamma^{-2} P_i E_i E'_i P_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j = -Q_i, \quad i = 1, \dots, N$$

Portanto, substituindo esse resultado em (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left[\int_0^\infty z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t) dt \right] \\ &= \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty - \left[\gamma^2 (w(t) - \gamma^{-2} x(t) E(\theta_t)' P(\theta_t))' (w(t) - \gamma^{-2} x(t) E(\theta_t)' P(\theta_t)) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. x(t)' Q(\theta_t) x(t) \right] dt \right\} \\ &< 0 \end{aligned}$$

sendo o teorema provado pela Definição 2.3. \square

Observamos que substituindo (2.19) por (2.16) o teorema continua válido para $\|\mathcal{S}\|_\infty \leq \gamma$.

É possível reescrever (2.19) em termos de LMIs. Para isso, basta aplicar o complemento de Schur aos termos não-lineares, resultando em

$$\begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j & P_i E_i \\ E'_i P_i & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad P_i > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.22)$$

Podemos ainda escrever (2.19) em termos de $X_i = \gamma^2 P_i^{-1} > 0$. Para tanto, vamos multiplicar (2.19) por γ^{-2} e por X_i à esquerda e à direita, obtendo

$$A_i X_i + X_i A'_i + E_i E'_i + \gamma^{-2} X_i C'_{1i} C_{1i} X_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_i X_j^{-1} X_i < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Aplicamos novamente complemento de Schur nos termos não-lineares, gerando

$$\begin{bmatrix} A_i X_i + X_i A'_i + E_i E'_i + \lambda_{ii} X_i & R_i(X) & X_i C'_{1i} \\ R_i(X)' & S_i(X) & 0 \\ C_{1i} X_i & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.23)$$

para $R_i(X)$ e $S_i(X)$ definidas em (2.6) e (2.7).

Fazendo a mudança de variável $\mu = \gamma^2$, podemos calcular a norma H_∞ do sistema utilizando (2.22). Para tanto, basta resolver o problema

$$\begin{aligned} \min_{\mu > 0} \quad & \mu & (2.24) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} A'_i P_i + P_i A_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j & P_i E_i \\ E'_i P_i & -\mu I \end{bmatrix} < 0 \\ & P_i > 0 & i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

A norma H_∞ será dada por

$$\|\mathcal{S}\|_\infty = \sqrt{\mu_{\min}}$$

Evidentemente poderíamos utilizar no problema (2.24) as restrições (2.23) ao invés de (2.22), bastando fazer a mesma mudança de variável $\mu = \gamma^2$.

É importante notar que, fazendo $\gamma = \gamma(\theta_t)$, obteremos as desigualdades (2.17). Neste caso, não se caracteriza mais a norma H_∞ dada pela Definição 2.3, mas teremos

$$\|z\|_2 < \|\gamma w\|_2$$

Podemos notar que as restrições (2.17) são mais genéricas que as do Teorema 2.4 (2.19), reduzindo-se a elas se fizermos $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_N$. Utilizando (2.17), podemos ainda encontrar a norma H_∞ do sistema minimizando o máximo γ_i , como é demonstrado no seguinte teorema:

Teorema 2.5 *Seja o problema*

$$\begin{aligned} \min \max_i \quad & \gamma_i & (2.25) \\ \text{s.a} \quad & A'_i P_i + P_i A_i + \gamma_i^{-2} P_i E_i E_i' P_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0 \\ & P_i > 0, \gamma_i > 0 & i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Então na solução ótima, $\max \gamma_i = \gamma$, onde γ é a norma H_∞ do sistema, dada pelo problema (2.24).

Prova : A prova baseia-se no fato de que, se para um determinado valor de P_i e γ_i a restrição (2.17) é factível, então ela é factível para qualquer $\tilde{\gamma}_i > \gamma_i$. De fato,

$$\begin{aligned} & A'_i P_i + P_i A_i + \tilde{\gamma}_i^{-2} P_i E_i E_i' P_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \\ &= A'_i P_i + P_i A_i + \gamma_i^{-2} P_i E_i E_i' P_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j + (\tilde{\gamma}_i^{-2} - \gamma_i^{-2}) P_i E_i E_i' P_i \\ &< A'_i P_i + P_i A_i + \gamma_i^{-2} P_i E_i E_i' P_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \\ &< 0 \end{aligned}$$

Vamos supor, inicialmente, que existe pelo menos um valor de i tal que $\gamma < \gamma_i$ na solução ótima. No entanto, sabemos que $\gamma_i = \gamma$ também deve ser factível, logo na solução ótima devemos ter $\max \gamma_i \leq \gamma$. Do mesmo modo, vamos supor que $\max \gamma_i < \gamma$. Com a mesma argumentação, sabemos que $\gamma = \max \gamma_i$ também é factível para o problema (2.24). Portanto, $\max \gamma_i \geq \gamma$. Desse modo, concluímos que $\max \gamma_i = \gamma$. \square

2.5 Algumas considerações sobre o modelo

Como foi previamente comentado, os problemas que podem ser formulados com o modelo (2.1) também poderiam ser resolvidos utilizando a técnica de controle clássico de custo garantido, ou seja, seria definida uma região convexa que contivesse todos os modos de funcionamento, e os resultados de estabilidade e normas seriam garantidos para toda essa região [2]. Pretendemos mostrar, a partir da análise dos resultados obtidos nas seções anteriores, que esse procedimento tende a gerar resultados mais conservativos que aqueles obtidos com o modelo estocástico. Tomemos, por exemplo, a condição de estabilidade estocástica (2.2). Podemos facilmente perceber que adotar a restrição adicional $P_i = P$ para todo i levaria a uma condição muito mais forte. No

entanto, observando a propriedade de Λ que estabelece que a soma dos elementos de cada linha é nula, com essa restrição adicional obtemos

$$A_i'P + PA_i + Q_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.26)$$

com $P > 0$ e $Q_i > 0$, que é exatamente a condição de estabilidade que teríamos se utilizássemos o problema de custo garantido. Por não se levarem em conta as probabilidades de transição entre os estados, passa a ser exigida estabilidade para todos eles. Mais do que isso, também deverão ser estáveis quaisquer combinações convexas de A_i , pois, sendo por exemplo A_i e A_j atendendo (2.26), se $A_k = \beta_i A_i + \beta_j A_j$, com $\beta_i > 0$, $\beta_j > 0$, teremos

$$\begin{aligned} A_k'P + PA_k &= (\beta_i A_i + \beta_j A_j)'P + P(\beta_i A_i + \beta_j A_j) \\ &= \beta_i (A_i'P + PA_i) + \beta_j (A_j'P + PA_j) \\ &= -\beta_i Q_i - \beta_j Q_j \\ &< 0 \end{aligned}$$

Logo A_k também é estável. Podemos reproduzir a mesma análise para as normas H_2 e H_∞ , ficando claro que o modelo (2.1) de fato fornece uma representação mais detalhada, possibilitando maior precisão na representação de sistemas reais e, conseqüentemente, boas chances de obter resultados melhores.

Ao fixar $P_i = P$, teremos o seguinte problema, relativo ao cálculo da norma H_2 :

$$\begin{array}{ll} \min_{P>0} & \text{Tr}(E'PE) \\ \text{s.a} & A_i'P + PA_i + C_{1i}'C_{1i} < 0 \quad i = 1..N \end{array}$$

Esse problema encontra um limitante superior para a norma H_2 de um sistema cujos parâmetros estejam no poliedro definido pelos vértices (A_i, C_{1i}) , com

$$\begin{aligned} EE' &= \mathbf{E}[E(\theta_0)E(\theta_0)'] \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i E_i E_i' \end{aligned}$$

Deve ser observado que fixando a mesma matriz P para todos os modos de funcionamento, o número de variáveis presentes no problema acima é bastante reduzido. Entretanto, em relação aos resultados anteriores, podemos afirmar que somente um limitante superior da norma H_2 é minimizado.

Capítulo 3

Realimentação de estado

Os resultados obtidos neste capítulo já foram encontrados anteriormente. Em [13] são apresentadas equações de Riccati para o controlador H_2 , no entanto isso é feito dentro do contexto do problema linear quadrático e a demonstração é baseada em programação dinâmica, enquanto neste texto utiliza-se o conceito de norma e a formulação convexa do problema. Em [16] pode ser encontrado o controlador H_∞ , novamente em termos de equações de Riccati. É importante notar que nesse artigo não se encontra qualquer menção à norma H_2 , estando os autores interessados apenas na obtenção de um controlador que atenda à restrição sobre a norma H_∞ . A abordagem via LMIs também não estava incluída em tal artigo.

3.1 Estabilidade Estocástica

De modo geral, podemos dizer que o primeiro objetivo do controle é estabilizar o sistema. Esse é o problema a ser tratado nesta seção. Considerando o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta_t)x + E(\theta_t)w + B(\theta_t)u \\ z &= C_1(\theta_t)x + D_1(\theta_t)u\end{aligned}\tag{3.1}$$

com a lei de controle linear para cada modo de funcionamento

$$u = K(\theta_t)x\tag{3.2}$$

pretendemos parametrizar todos os controladores $K(\theta_t)$ que garantam a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada.

A condição de estabilidade estocástica de (3.1) é dada por

$$(A_i + B_i K_i)' P_i + P_i (A_i + B_i K_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N\tag{3.3}$$

Fazendo $Y_i = P_i^{-1}$ e $F_i = K_i Y_i$, podemos multiplicar (3.3) por Y_i à esquerda e à direita, obtendo

$$A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Finalmente, aplicando complemento de Schur nos termos não-lineares, obtemos a LMI

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i & R_i(Y) \\ R_i(Y)' & S_i(Y) \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N$$

com R_i e S_i definidas segundo (2.6) e (2.7), parametrizando, portanto, todos os controladores do tipo (3.2) que estabilizem o sistema em malha fechada.

3.2 Controle H_2

Embora o objetivo inicial do controle seja estabilizar um sistema, metas adicionais podem ser impostas, seja quanto à robustez, seja quanto à performance do mesmo. Nesta seção pretende-se estabelecer um controlador que, além de estabilizar o sistema em malha fechada, minimiza sua norma H_2 . Esse problema é equivalente ao problema linear quadrático.

O sistema a ser controlado pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_t)x + E(\theta_t)w + B(\theta_t)u \\ z &= C_1(\theta_t)x + D_1(\theta_t)u \\ u &= K(\theta_t)x \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde assumimos controle linear para cada modo de funcionamento do sistema, ou seja, o ganho K depende do tempo somente através de θ_t .

Portanto, o problema pode ser colocado como

$$\min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' P_i E_i) \quad (3.5)$$

$$\text{s.a. } \tilde{A}_i' P_i + P_i \tilde{A}_i + \tilde{C}_i' \tilde{C}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \leq 0 \quad (3.6)$$

$$P_i > 0 \quad i = 1, \dots, N$$

onde α_i é a probabilidade de $\theta_0 = i$, $\tilde{A}_i = A_i + B_i K_i$ e $\tilde{C}_i = C_{1i} + D_{1i} K_i$.

Recordando o significado da norma H_2 , observamos que o objetivo desse problema é encontrar um controlador de modo que as excursões de $x(t)$ e $u(t)$ sejam limitadas, mantendo portanto o estado perto do ponto de equilíbrio e ao mesmo tempo tentando

evitar um grande esforço do controle. Essas metas contraditórias têm sua importância relativa determinada pela relação entre $C_1(\theta_t)'C_1(\theta_t)$ e $D_1(\theta_t)'D_1(\theta_t)$. Como podemos ver, essa importância pode variar dependendo do modo em que o sistema se encontra, o que é bastante razoável. Por exemplo, poderíamos pensar no caso de um avião que, em situação normal, não deveria ter variações bruscas na direção, o que implicaria $D_1(\theta_t)'D_1(\theta_t)$ grande em relação a $C_1(\theta_t)'C_1(\theta_t)$. No entanto, supondo que em algum instante ele estivesse prestes a atingir um edifício, evidentemente deveriam ser permitidas maiores variações na direção, o que pode ser traduzido por uma diminuição em $D_1(\theta_t)'D_1(\theta_t)$.

Duas estratégias diferentes serão abordadas. Primeiramente, através de manipulações algébricas o problema será convertido em um problema de otimização com função objetivo linear e restrições do tipo LMI (Desigualdade Matricial Linear). Em seguida, ele será resolvido via equações de Riccati. Nos casos posteriores, de controle H_∞ e realimentação de saída, as mesmas abordagens serão utilizadas.

3.2.1 Controlador H_2 ótimo obtido via LMIs

Mediante a transformação de variáveis $Y_i = P_i^{-1}$, $F_i = K_i Y_i$ e multiplicando cada restrição (3.6) por Y_i à esquerda e à direita, obtemos

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' Y_i^{-1} E_i) & \quad (3.7) \\ \text{s.a } A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)'(C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i & \leq 0 \\ Y_i = Y_i' > 0 & \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Para chegar a restrições lineares e função objetivo linear, usamos complemento de Schur e introduzimos novas variáveis $Z_i = Z_i' > E_i' Y_i^{-1} E_i$ resultando no seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i) \\ \text{s.a } \begin{bmatrix} Z & E_i' \\ E_i & Y_i \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i & R_i(Y) & (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)' \\ & R_i(Y)' & S_i(Y) \\ & C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & 0 \end{bmatrix} < 0 \\ i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

onde $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ são definidas segundo (2.6) e (2.7). É necessário notar que esse problema equivale a (3.5) a menos da restrição (3.6), que foi considerada aqui uma

desigualdade estrita para que o complemento de Schur pudesse ser aplicado. Devemos notar ainda que, neste caso, a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada está garantida para todas os controladores factíveis, sem a necessidade de hipóteses adicionais de detectabilidade ou observabilidade, porém o resultado é ϵ -ótimo [2].

Observamos que cada restrição inicial teve suas dimensões bastante aumentadas, devido à necessidade de utilizar complemento de Schur nos termos da somatória $\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i$. Para evitar esse aumento, pode-se trabalhar com o problema dual :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \text{Tr}(\tilde{C}_i Y_i \tilde{C}_i') \\ \text{s.a} \quad & \tilde{A}_i Y_i + Y_i \tilde{A}_i' + \alpha_i E_i E_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji} Y_j < 0 \\ & Y_i > 0 \quad \quad \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Neste caso, mediante a transformação de variáveis $F_i = K_i Y_i$ e a introdução de novas variáveis $Z_i = Z_i' > \tilde{C}_i Y_i \tilde{C}_i'$ aplicando complemento de Schur apenas para linearizar a função objetivo, obtemos

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \text{Tr}(Z_i) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} Z_i & C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i \\ Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}' & Y_i \end{bmatrix} > 0 \\ & A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \alpha_i E_i E_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji} Y_j < 0 \\ & i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

que é um problema equivalente, porém de dimensões menores.

3.2.2 Controlador H_2 ótimo obtido via equações de Riccati

Para encontrar as equações de Riccati que descrevem o controlador H_2 , vamos tomar o lagrangeano associado ao problema (3.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{i=1}^N & \left[\text{Tr} \left(\Lambda_i (A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i \right) + \alpha_i \text{Tr}(E_i' Y_i^{-1} E_i) \right] \end{aligned}$$

Como o problema (3.7) é convexo, sabemos que as condições necessárias de otimalidade são também suficientes. Derivando \mathcal{L} em relação a Λ_i e F_i , encontramos duas condições necessárias de otimalidade do problema:

$$A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i = 0 \quad (3.8)$$

$$(B_i' + D_{1i}' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)) \Lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Um valor de F_i que satisfaz (3.9) é dado por

$$F_i = -(D_{1i}' D_{1i})^{-1} (B_i' + D_{1i}' C_{1i} Y_i)$$

o que implica

$$K_i = F_i Y_i^{-1} = -(D_{1i}' D_{1i})^{-1} (B_i' P_i + D_{1i}' C_{1i})$$

onde $P_i = Y_i^{-1}$. Substituindo-se esse resultado em (3.8) e multiplicando as equações resultantes por P_i à esquerda e à direita, chegamos às equações de Riccati acopladas

$$A_{qi}' P_i + P_i A_{qi} + C_{qi}' C_{qi} - P_i B_i (D_{1i}' D_{1i})^{-1} B_i' P_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{qi} &= A_i - B_i (D_{1i}' D_{1i})^{-1} D_{1i}' C_{1i} \\ C_{qi} &= (I - D_{1i} (D_{1i}' D_{1i})^{-1} D_{1i}') C_{1i} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Observamos que, como não estamos mais trabalhando com desigualdade estrita para as restrições (3.6), a estabilidade estocástica não está garantida. Para que o sistema em malha fechada seja estocasticamente estável, $P_i, i = 1, \dots, N$ deve ser solução estabilizante de (3.10), pois nesse caso

$$A_{qi} - B_i (D_{1i}' D_{1i})^{-1} B_i' P_i = (A_i + B_i K_i), \quad i = 1, \dots, N$$

serão estocasticamente estáveis.

É importante observar que os controladores obtidos via equações de Riccati e via LMIs devem coincidir, pois a dedução das equações de Riccati foi feita a partir das condições de otimalidade do problema expresso em LMIs. De fato, a diferença entre as estratégias reside no fato de que com as equações de Riccati apenas o controlador ótimo H_2 está representado, enquanto as LMIs parametrizam todos os controladores tais que o sistema em malha fechada tem norma H_2 limitada.

3.3 Controle H_∞

Ao contrário da seção anterior, em que o alvo principal do controlador era obter a melhor performance do ponto de vista da norma H_2 , estamos agora interessados em

encontrar um controlador que apresente robustez na presença de ruídos. Para tanto, vamos utilizar as condições (2.18). Evidentemente, quanto maiores forem $\gamma_i, i = 1..N$, mais fácil será atender às restrições e melhor poderá ser o desempenho do controlador obtido. No entanto é preciso lembrar que será menor a robustez do controlador. Revela-se aqui, portanto, a oposição entre as metas de desempenho e robustez. A escolha entre um e outro deverá ser feita, naturalmente, tendo em vista as exigências do projeto que se tem em mãos.

Utilizaremos novamente o modelo (3.4), que deverá ser estocasticamente estável para $\|\Delta_i\| < \gamma_i^{-1}$, sendo

$$w = \Delta_i z \quad (3.12)$$

Iniciaremos nossa discussão mostrando, com um exemplo, como é possível transformar um sistema com incertezas nos parâmetros em um outro com ruídos, no formato (3.4). O Exemplo 2.2 tratava do mesmo tipo de problema, no entanto estamos agora interessados em sistemas que possuam entrada de controle.

Exemplo 3.1 *Seja o sistema*

$$\dot{x} = (A(\theta_t) + E(\theta_t)\Delta_a(\theta_t)C_1(\theta_t))x + (B(\theta_t) + G(\theta_t)\Delta_b(\theta_t)D_1(\theta_t))u$$

Então ele pode ser convertido no sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_t)x + \begin{bmatrix} E(\theta_t) & G(\theta_t) \end{bmatrix} w + B(\theta_t)u \\ z &= \begin{bmatrix} C_1(\theta_t) \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ D_1(\theta_t) \end{bmatrix} u \\ w &= \begin{bmatrix} \Delta_a(\theta_t) & 0 \\ 0 & \Delta_b(\theta_t) \end{bmatrix} z \end{aligned} \quad (3.13)$$

□

3.3.1 Estabilidade estocástica na presença de incertezas

Vamos examinar as condições sobre as quais (3.4) é estocasticamente estável, para $w = \Delta(\theta_t)z$, $\|\Delta_i\| < \gamma_i^{-1}$. Como $u = K(\theta_t)x$, podemos escrever o sistema em malha fechada e utilizar o Lema 2.1, obtendo as seguintes restrições referentes à estabilidade estocástica de (3.4):

$$\tilde{A}_i' P_i + P_i \tilde{A}_i + \gamma_i^{-2} P_i E_i E_i' P_i + \tilde{C}_i' \tilde{C}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= A_i + B_i K_i \\ \tilde{C}_i &= C_{1i} + D_{1i} K_i \end{aligned}$$

Fazendo $Y_i = P_i^{-1}$ e $F_i = K_i Y_i$, podemos multiplicar (3.14) por Y_i à esquerda e à direita. Após aplicar complemento de Schur nos termos não-lineares, obtemos as LMIs

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \gamma_i^{-2} E_i E_i' & R_i(Y) & Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}' \\ R_i(Y)' & S_i(Y) & 0 \\ C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

onde $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ estão definidas em (2.6) e (2.7).

Para comparação com resultados já existentes na literatura, vamos agora considerar o modelo do Exemplo 3.1 (3.13). As matrizes desconhecidas $\Delta_i, i = 1, \dots, N$, são bloco diagonais, isto é,

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \Delta_{ai} & 0 \\ 0 & \Delta_{bi} \end{bmatrix}$$

Para aplicar o Lema 2.1, deveremos ter $\|\Delta_i\| \leq \gamma_i^{-1}$. Podemos facilmente demonstrar que, se $\|\Delta_{ai}\| \leq \gamma_{ai}^{-1}$ e $\|\Delta_{bi}\| \leq \gamma_{bi}^{-1}$, basta tomar $\gamma_i = \min(\gamma_{ai}, \gamma_{bi})$. No entanto, é importante notar que a restrição estrutural sobre Δ_i não pode ser incorporada, sendo o sistema estável para toda e qualquer perturbação que obedeça $\|\Delta_i\| \leq \gamma_i^{-1}$. Aplicando o Lema 2.1, o sistema (3.13) será estável para quaisquer $\Delta_i, i = 1, \dots, N$ tais que $\|\Delta_i\| \leq \gamma_i^{-1}$ se as desigualdades

$$\tilde{A}_i' P_i + P_i \tilde{A}_i + \gamma_i^{-2} P_i \tilde{E}_i \tilde{E}_i' P_i + \tilde{C}_i' \tilde{C}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= A_i + B_i K_i \\ \tilde{E}_i &= \begin{bmatrix} E_i & G_i \end{bmatrix} \\ \tilde{C}_i &= \begin{bmatrix} C_{1i} \\ D_{1i} K_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

possuírem como uma solução factível P_1, P_2, \dots, P_N definidas positivas. Podemos escrever essa condição na forma de LMIs fazendo simplesmente $Y_i = P_i^{-1}$, $F_i = K_i Y_i$ e multiplicando (3.16) por Y_i à esquerda e à direita, obtendo

$$\begin{aligned} &A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \gamma_i^{-2} (E_i E_i' + G_i G_i') + Y_i C_{1i}' C_{1i} Y_i + F_i D_{1i}' D_{1i} F_i + \\ &+ \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i < 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.17)$$

Uma proposta para o tratamento de um problema similar é apresentada em [1] é reproduzida a seguir.

Lema 3.1 [1] *Seja o sistema*

$$\dot{x} = (A(\theta_t) + \Delta_A(\theta_t))x + (B(\theta_t) + \Delta_B(\theta_t))u \quad (3.18)$$

onde as únicas informações sobre Δ_A e Δ_B são $\Delta'_A \Delta_A \leq \gamma_a^{-2}(\theta_t) \tilde{Q}(\theta_t)$ e $\Delta'_B \Delta_B \leq \gamma_b^{-2}(\theta_t) \tilde{R}(\theta_t)$. Então, para

$$\begin{aligned} u &= -F(\theta_t)P(\theta_t)x \\ &= -R^{-1}(\theta_t)B(\theta_t)P(\theta_t)x \end{aligned}$$

o sistema será estocasticamente estável se existirem $P_i, i = 1, \dots, N$ satisfazendo as restrições

$$A_i Y_i + B_i F_i + Y_i A'_i + F'_i B'_i + \bar{\gamma}_i^{-2} I + F'_i \tilde{R}'_i F_i + Y_i \tilde{Q}(\theta_t) Y_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i < 0 \quad (3.19)$$

$$A_i Y_i + Y_i A_i - B_i R_i^{-1} B'_i + Y_i \tilde{Q}(\theta_t) Y_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i < 0$$

$$R_i > \tilde{R}_i$$

$$P_i > 0$$

$$i = 1, \dots, N$$

onde $\bar{\gamma}_i^{-2} = \gamma_{ai}^{-2} + \gamma_{bi}^{-2}$.

Prova : Para a prova, veja [1]. □

Uma comparação entre as duas abordagens revela que, definindo

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i &= C'_{1i} C_{1i} \\ \tilde{R}_i &= D'_{1i} D_{1i} \end{aligned}$$

e impondo

$$\begin{aligned} E_i &= \gamma_{ai}^{-1} I \\ G_i &= \gamma_{bi}^{-1} I \end{aligned} \quad (3.20)$$

o sistema (3.18) pode ser tratado da maneira aqui proposta, fazendo-se $\gamma_i = 1, i = 1, \dots, N$. Neste caso, confrontando as restrições (3.17) e (3.19) podemos facilmente mostrar que elas são idênticas. No entanto, não fazemos qualquer hipótese sobre o controle e não precisamos impor (3.20) nem as restrições adicionais do Lema 3.1, tendo portanto um resultado mais geral.

3.3.2 Um controlador factível

Dado um conjunto de valores $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, N$, podemos verificar a existência de um controlador factível e encontrá-lo buscando uma solução factível para (3.15). Outro problema de interesse é encontrar um controlador que minimize uma certa combinação de $\gamma_i, i = 1, \dots, N$, escolhida de acordo com os interesses do projeto, com a restrição (3.15), como é feito no seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \beta_i \mu_i & (3.21) \\ \text{s.a} \quad & \left[\begin{array}{cccc} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' & R_i(Y) & Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}' & E_i \\ & R_i(Y) & S_i(Y) & 0 \\ & C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & 0 & -I \\ & E_i' & 0 & 0 \\ & & & -\mu_i I \end{array} \right] < 0 \\ & i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Dados $\beta_i, i = 1, \dots, N$, evidentemente podemos encontrar um problema equivalente tal que $\sum_{i=1}^N \bar{\beta}_i = 1$. Neste caso, sabemos que $\sum_{i=1}^N \bar{\beta}_i \mu_i \leq \max \mu_i = \max \gamma_i^2$, portanto estamos minimizando um limitante inferior para a norma H_∞ . Um caso interessante é aquele em que o processo θ_t possui uma distribuição estacionária, ou seja, se $\mathcal{P}(\theta_0 = i) = \bar{\alpha}_i, \mathcal{P}(\theta_t = i) = \bar{\alpha}_i$ para todo t . Neste caso, com θ_t e $w(t)$ independentes, temos

$$\begin{aligned} \|\gamma w\|_2^2 &= \mathbf{E} \left[\int_0^{+\infty} \gamma^2(\theta_t) w(t)' w(t) dt \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{E} \left[\gamma^2(\theta_t) | \mathcal{P}(\theta_0 = i) = \bar{\alpha}_i \right] \mathbf{E} [w(t)' w(t) | \mathcal{P}(\theta_0 = i) = \bar{\alpha}_i] dt \\ &= \sum_{i=1}^N (\bar{\alpha}_i \gamma_i^2) \|w\|_2^2 \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $\beta_i = \bar{\alpha}_i$, estamos resolvendo o problema de minimizar a razão entre $\|z\|_2^2$ e $\|w\|_2^2$ no caso específico em que a distribuição inicial é estacionária. Note-se que a única diferença entre essa razão e a norma H_∞ é que esta vale para qualquer distribuição inicial.

β_1	β_2	β_3	β_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	Norma H_∞
1	1	1	1	1.8893	0.8529	0.9070	1.0022	1.7117
2	1	1	1	1.8034	0.9486	0.9495	1.0974	1.6717
3	1	1	1	1.7618	1.0173	0.9872	1.1662	1.6548
0	0	1	1	3.6158	1.3539	0.8742	0.7668	3.1226
0	0	0	1	3.5359	1.3386	1.3850	0.7667	3.2194
0	0	1	0	2.0804	1.4122	0.8742	1.5212	1.6861

Tabela 3.1: Exemplo 3.2 - Resultados

Exemplo 3.2 Vamos considerar os parâmetros relativos ao sistema (3.4) com cadeia de Markov de quatro estados

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_3 = D_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

e a matriz de transição correspondente

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos na Tabela 3.1 os resultados da resolução do problema (3.21).

É importante notar que, de fato, a norma H_∞ foi calculada para qualquer condição inicial. De acordo com a discussão anterior, sabemos que, se a distribuição inicial for conhecida e igual a $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3, \alpha_4$, então essa é uma distribuição estacionária,

e levando em conta essa distribuição inicial, a norma do sistema será dada por $\alpha_3\gamma_3 + \alpha_4\gamma_4$, se $\beta_i = \alpha_i$. Portanto, para as distribuições iniciais $(0, 0, 0.5, 0.5)$, $(0, 0, 0, 1)$ e $(0, 0, 1, 0)$, a razão entre $\|z\|_2$ e $\|w\|_2$ será 0.8205, 0.7667 e 0.8742, respectivamente.

É interessante ainda observar na Tabela 3.1 que a norma H_∞ é sempre menor ou igual ao máximo γ_i . De fato, observamos que $\bar{\gamma}_i = \max \gamma_i$ atende à restrição (3.14), logo a norma deve realmente ser menor ou igual a esse valor. \square

3.3.3 Controlador central H_∞

Com o mesmo sistema (3.4), vamos novamente tratar o problema de obtenção de um controlador que garanta a estabilidade estocástica na presença do ruído (3.12). Considerando γ_i dados, utilizaremos o problema

$$\min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' P_i E_i) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a} \quad & \tilde{A}_i' P_i + P_i \tilde{A}_i + \tilde{C}_i' \tilde{C}_i + \gamma_i^{-2} P_i E_i E_i' P_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \leq 0 \\ & P_i > 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $\tilde{A}_i = A_i + B_i K_i$ e $\tilde{C}_i = C_{1i} + D_{1i} K_i$.

A solução desse problema fornece o que denominaremos *controlador central*. Ele possui ainda a característica de minimizar um limitante superior para a norma H_2 para o sistema. De fato, observando que a norma é dada por $\sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' \Lambda_i E_i)$, com $\Lambda_i > 0$ solução de

$$\tilde{A}_i' \Lambda_i + \Lambda_i \tilde{A}_i + \tilde{C}_i' \tilde{C}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \Lambda_j = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

podemos observar que $\Lambda_i \leq P_i$. Deve ser notado que o problema (3.22) é diferente do problema de minimização da norma H_2 exata. Como veremos no Capítulo 5, a norma H_2 é uma função não-convexa, logo o problema de minimização $\sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' \Lambda_i E_i)$ sujeito às condições (3.15) é não-convexo, não podendo ser colocado na forma de LMIs ou resolvido por equações de Riccati. Além disso, ele pode possuir mais do que um ótimo local.

Como no caso de controle H_2 , vamos resolver esse problema utilizando duas abordagens, primeiro via LMIs e posteriormente via equações de Riccati.

Controlador central obtido via LMIs

Para expressar o problema (3.22) em forma de LMIs, vamos considerar cada restrição (3.23) como sendo de desigualdade estrita. Portanto (3.23) é equivalente a (3.15), ou

seja

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i + \gamma_i^{-2} E_i E_i' & R_i(Y) & Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}' \\ & R_i(Y)' & S_i(Y) & 0 \\ & C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$i = 1, \dots, N$

onde $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ estão definidas em (2.6) e (2.7), $Y_i = P_i^{-1}$ e $F_i = K_i Y_i$. Chegamos finalmente a restrições do tipo LMI e função objetivo linear usando complemento de Schur e introduzindo novas variáveis $Z_i = Z_i' > E_i' Y_i^{-1} E_i$, resultando no seguinte problema:

$$\min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i) \quad (3.24)$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{bmatrix} Z_i & E_i' \\ E_i & Y_i \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i + \gamma_i^{-2} E_i E_i' & R_i(Y) & Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}' \\ & R_i(Y)' & S_i(Y) & 0 \\ & C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$i = 1, \dots, N$ (3.25)

Controlador central obtido via equações de Riccati

Vamos agora mostrar que o problema (3.24) é equivalente a resolver N equações de Riccati acopladas. Consideraremos as restrições (3.25) modificadas para desigualdade não estrita, ou seja, $<$ será substituído por \leq . Lembrando que esse é um problema convexo, as condições necessárias de otimalidade são também suficientes. Após eliminar as variáveis auxiliares $Z_i, i = 1, \dots, N$, vamos tomar o lagrangeano do problema

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left[\text{Tr} \left(\Lambda_i (A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + (Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}') (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_i^{-2} E_i E_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i \right) \right] + \alpha_i \text{Tr}(E_i' Y_i^{-1} E_i)$$

Derivando em relação a Λ_i e F_i , encontramos duas condições necessárias de otimalidade:

$$A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + (Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}') (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \gamma_i^{-2} E_i E_i' + \\ + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i = 0 \quad (3.26)$$

$$(B_i' + D_{1i}' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)) \Lambda_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (3.27)$$

Um possível valor de F_i satisfazendo (3.27) é

$$F_i = -(D'_{1i}D_{1i})^{-1}(B'_i + D'_{1i}C_{1i}Y_i)$$

e o valor ótimo de K_i será dado por

$$K_i = F_i Y_i^{-1} = -(D'_{1i}D_{1i})^{-1}(B'_i P_i + D'_{1i}C_{1i})$$

onde $P_i = Y_i^{-1}$. Substituindo esse resultado em (3.26) e multiplicando a expressão resultante por P_i à esquerda e à direita, chegamos às equações de Riccati acopladas

$$A'_{qi}P_i + P_i A_{qi} + C'_{qi}C_{qi} + P_i(\gamma_i^{-2}E_i E'_i - B_i(D'_{1i}D_{1i})^{-1}B'_i)P_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.28)$$

com A_{qi} e C_{qi} definidos segundo (3.11). Devemos lembrar que, como estamos não estamos trabalhando com a desigualdade estrita em (3.25), para que o sistema em malha fechada seja estocasticamente estável $P_i, i = 1, \dots, N$ deve ser uma solução estabilizante de (3.28).

Observamos que, para γ tendendo ao infinito, o problema de controle H_∞ recai no caso H_2 .

Em termos numéricos, a resolução do problema via equações de Riccati deverá ser mais eficiente, pois nesse caso é calculado diretamente o controlador ótimo de (3.22). Ao estabelecer o problema com LMIs, parametrizamos todos os controladores com norma H_2 limitada, ou seja, que estabilizam o sistema em malha fechada. Isso pode ser útil caso se deseje estabelecer apenas um controlador que estabilize o problema, sem preocupação com a otimalidade do mesmo, ou introduzir outras restrições na síntese do controle.

Capítulo 4

Realimentação de saída

Muitas vezes não é possível ou necessário medir o estado $x(t)$ completamente. Sabemos que um grande número de sensores acarreta maior custo e, além disso, pode ser suficiente para os objetivos do projeto medir apenas alguns dos estados ou combinações deles. Essa situação corresponde ao problema de realimentação de saída, que abordaremos neste capítulo. Neste caso, ao projetar o controlador não temos mais acesso ao vetor de estado $x(t)$, mas ao vetor de saída $y(t)$, como vemos no sistema abaixo :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta_t)x + E(\theta_t)w + B(\theta_t)u \\ z &= C_1(\theta_t)x + D_1(\theta_t)u \\ y &= C_2(\theta_t)x + D_2(\theta_t)w\end{aligned}\tag{4.1}$$

Enquanto o estado contínuo $x(t)$ passa a ser apenas parcialmente medido, vamos assumir que o estado da cadeia de Markov θ_t continua disponível. Utilizaremos sempre controladores dinâmicos da mesma dimensão do sistema dados por

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= A_c(\theta_t)x_c + B_c(\theta_t)y \\ u &= C_c(\theta_t)x_c\end{aligned}\tag{4.2}$$

O sistema em malha fechada será dado por

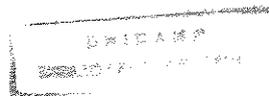
$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}(\theta_t)\tilde{x} + \tilde{E}(\theta_t)w \\ z &= \tilde{C}(\theta_t)\tilde{x}\end{aligned}$$

com os parâmetros

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C_{2i} & A_{ci} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i \\ B_{ci} D_{2i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_{1i} & D_{1i} C_{ci} \end{bmatrix}\tag{4.3}$$

4.1 Estabilidade estocástica

Nesta seção estamos interessados em encontrar controladores com a estrutura (4.2) tal que o sistema (4.1) seja estocasticamente estável em malha fechada. Essa restrição



é equivalente a

$$\tilde{A}'_i \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \tilde{P}_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.4)$$

onde $\tilde{P}_i > 0, i = 1, \dots, N$ e \tilde{A}_i é dada por (4.3).

Como veremos no teorema a seguir, esse problema pode ser resolvido por meio de LMIs.

Teorema 4.1 *Existem A_{ci}, B_{ci} e $C_{ci}, i = 1, \dots, N$ tais que (4.4) possui solução factível se e somente se as LMIs*

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A'_i + B_i F_i + F'_i B'_i + \lambda_{ii} Y_i & R_i(Y) \\ R'_i(Y) & S_i(Y) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.5)$$

$$A'_i X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C'_{2i} L'_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j < 0 \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

possuem uma solução factível $X_i = X'_i, Y_i = Y'_i, L_i$ e F_i .

Prova:

- **Necessidade :**

Vamos considerar a seguinte partição de \tilde{P}_i :

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P'_{2i} & P_{3i} \end{bmatrix}$$

Assumiremos, sem perda de generalidade, que P_{2i} é não-singular [15]. Definindo as matrizes

$$\mathcal{Y}_i = (P_{1i} - P_{2i} P_{3i}^{-1} P'_{2i})^{-1} > 0 \quad (4.8)$$

$$T_i = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_i & I \\ \mathcal{Y}_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -P_{3i}^{-1} P'_{2i} \end{bmatrix}$$

e multiplicando (4.4) por $T'_i J'_i$ e $J_i T_i$ à esquerda e à direita, respectivamente, obtemos

$$T'_i (J_i^{-1} \tilde{A}_i J_i)' (J'_i \tilde{P}_i J_i) T_i + T'_i (J'_i \tilde{P}_i J_i) (J_i^{-1} \tilde{A}_i J_i) T_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} T'_i J'_i \tilde{P}_j J_i T_i < 0$$

$i = 1, \dots, N$

que, após a realização das contas indicadas, resulta em

$$\left[\begin{array}{cc} A_i \mathcal{Y}_i + \mathcal{Y}_i A_i' + B_i \mathcal{F}_i + \mathcal{F}_i' B_i' & \mathcal{M}_i' \\ \mathcal{M}_i & A_i' P_{1i} + P_{1i} A_i + \mathcal{L}_i C_{2i} + C_{2i}' \mathcal{L}_i' \end{array} \right] + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \left[\begin{array}{cc} \mathcal{Y}_i \left[\mathcal{Y}_j^{-1} + (P_{2i} P_{3i}^{-1} P_{3j} - P_{2j}) P_{3j}^{-1} (P_{2i} P_{3i}^{-1} P_{3j} - P_{2j})' \right] \mathcal{Y}_i & 0 \\ 0 & P_{1j} \end{array} \right] < 0$$

(4.9)

$i = 1, \dots, N$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= -C_{ci} P_{3i}^{-1} P_{2i}' \mathcal{Y}_i \\ \mathcal{L}_i &= P_{2i} B_{ci} \\ \mathcal{M}_i &= A_i' + P_{1i} A_i \mathcal{Y}_i + P_{1i} B_i \mathcal{F}_i + \mathcal{L}_i C_{2i} \mathcal{Y}_i - P_{2i} A_{ci} P_{3i}^{-1} P_{2i}' \mathcal{Y}_i + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} (P_{1j} - P_{2j} P_{3i}^{-1} P_{2i}') \mathcal{Y}_i \end{aligned}$$

Além disso, as restrições $\tilde{P}_i > 0, i = 1, \dots, N$ são equivalentes a

$$T_i' J_i \tilde{P}_i J_i T_i = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_i & I \\ I & P_{1i} \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, N$$

Como

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \lambda_{ij} (P_{2i} P_{3i}^{-1} P_{3j} - P_{2j}) P_{3j}^{-1} (P_{2i} P_{3i}^{-1} P_{3j} - P_{2j})' \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} (P_{2i} P_{3i}^{-1} P_{3j} - P_{2j}) P_{3j}^{-1} (P_{2i} P_{3i}^{-1} P_{3j} - P_{2j})' \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

então (4.5), (4.6) e (4.7) são válidas para $Y_i = \mathcal{Y}_i, X_i = P_{1i}, F_i = \mathcal{F}_i$ e $L_i = \mathcal{L}_i, i = 1, \dots, N$.

• **Suficiência :**

Vamos supor que $X_i = X_i', Y_i = Y_i', F_i$ e $L_i, i = 1, \dots, N$ são soluções factíveis de (4.5), (4.6) e (4.7). Então se para cada i nós fizermos

$$A_{ci} = (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} M_i Y_i^{-1} \quad (4.10)$$

$$B_{ci} = (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} L_i \quad (4.11)$$

$$C_{ci} = F_i Y_i^{-1} \quad (4.12)$$

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & Y_i^{-1} - X_i \\ Y_i^{-1} - X_i & X_i - Y_i^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

$$T_i = \begin{bmatrix} Y_i & I \\ Y_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_i = -A_i' - X_i A_i Y_i - X_i B_i F_i - L_i C_{2i} Y_i - \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i$$

segue-se que

$$\begin{aligned} & T_i' (\tilde{A}_i' \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \tilde{P}_j) T_i' \\ &= \begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_i' X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}' L_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j \end{bmatrix} \\ &< 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Portanto (4.4) é factível e a prova está completa. \square

Um ponto importante diz respeito à parametrização de todos os controladores estabilizantes. Observe-se que o Teorema 4.1 seleciona uma parametrização em particular na prova da suficiência, mas ele também estabelece relações que são válidas para qualquer controlador na forma (4.2) que estabilizam estocasticamente o sistema em malha fechada. Uma possível estratégia para gerar todos os controladores factíveis é encontrar todos $X_i, Y_i, F_i, L_i, i = 1, \dots, N$, tais que (4.5), (4.6) e (4.7) são satisfeitas. Então precisamos encontrar P_{2i}, P_{3i} e $\mathcal{M}_i, i = 1, \dots, N$ que satisfazem (4.8) e (4.9). Esta pode não ser uma tarefa fácil, pois estamos tratando de restrições que não são LMIs. No entanto, sempre podemos selecionar a solução trivial $P_{2i} = -P_{3i} = Y_i^{-1} - X_i$ e $\mathcal{M}_i = 0$, resultando no controlador dado por (4.10), (4.11) e (4.12). Como veremos nas seções seguintes, os problemas de controle H_2 e H_∞ não são afetadas pelas escolhas dessas três variáveis e a solução trivial escolhida no Teorema 4.1 será sempre utilizada. Conseqüentemente, \tilde{P}_i terá a estrutura particular (4.13).

4.2 Controle H_2

A solução para o problema de controle H_2 com realimentação de saída foi encontrada em [13], no entanto argumentos diferentes foram utilizados. Lá era utilizado, de maneira ad-hoc, o Princípio da Separação e técnicas de filtragem, e algumas hipóteses adicionais quanto aos parâmetros eram assumidas. Além disso, era utilizado um argumento não exatamente verdadeiro a respeito da utilização de observações passadas na estimativa do estado atual. De fato, como veremos a seguir, o que em [13] era chamado

de filtro de Kalman só é realmente tal filtro quando a cadeia possui um único estado. O verdadeiro filtro de Kalman pode ser encontrado em [11] e depende diretamente do tempo, ao contrário daquele apresentado em [13]. Em [11] também é apresentado um controlador do tipo que buscamos aqui, no entanto veremos em exemplos que o controlador proposto nesse artigo não garante a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada.

Queremos encontrar um controlador com a estrutura (4.2) que minimize a norma H_2 do sistema em malha fechada. Tal problema pode ser escrito como

$$\min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(\tilde{E}_i' \tilde{P}_i \tilde{E}_i) \quad (4.14)$$

$$\text{s.a. } \tilde{A}_i' \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \tilde{C}_i' \tilde{C}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \tilde{P}_j \leq 0 \quad (4.15)$$

$$i = 1, \dots, N$$

onde \tilde{A}_i , \tilde{E}_i e \tilde{C}_i são os parâmetros do sistema em malha fechada, dados por (4.3).

Como no caso de realimentação de estado, vamos procurar estabelecer esse problema em termos de LMIs e equações de Riccati.

4.2.1 Controlador H_2 ótimo obtido via LMIs

Vamos transformar o problema (4.14) em LMIs. Utilizando o mesmo desenvolvimento do Teorema 4.1, podemos facilmente demonstrar que (4.15) com desigualdade estrita possui solução factível se e somente se existem X_i , Y_i , F_i e L_i satisfazendo

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i & R_i(Y) & Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}' \\ R_i'(Y) & S_i(Y) & 0 \\ C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$A_i' X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}' L_i' + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j < 0$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0 \quad i = 1, \dots, N$$

onde $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ são definidas segundo (2.6) e (2.7). Além disso, se existirem X_i , Y_i , F_i e L_i factíveis, então um possível controlador factível é dado por (4.10), (4.11) e (4.12), com

$$M_i = -A_i' - X_i A_i Y_i - X_i B_i F_i - L_i C_{2i} Y_i - C_{1i}' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) - \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i \quad (4.16)$$

para que $\mathcal{M}_i = 0$, já que ele passa a ser

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= A'_i + P_{1i}A_i\mathcal{Y}_i + P_{1i}B_i\mathcal{F}_i + \mathcal{L}_iC_{2i}\mathcal{Y}_i - P_{2i}A_{ci}P_{3i}^{-1}P'_{2i}\mathcal{Y}_i + C'_{1i}(C_{1i}\mathcal{Y}_i + D_{1i}\mathcal{F}_i) + \\ &+ \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}(P_{1j} - P_{2j}P_{3i}^{-1}P'_{2i})\mathcal{Y}_i \end{aligned}$$

devido ao termo $\tilde{C}'_i\tilde{C}_i$ presente em (4.15). Por outro lado, observamos que

$$\begin{aligned} \tilde{E}'_i\tilde{P}_i\tilde{E}_i &= \tilde{E}'_i(J_i^{-1})'(J'_i\tilde{P}_iJ_i)T_i(T'_iJ'_i\tilde{P}_iJ_iT_i)^{-1}T'_i(J'_i\tilde{P}_iJ_i)J_i^{-1}\tilde{E}_i \\ &= \begin{bmatrix} E_i \\ P_{1i}E_i + \mathcal{L}_iD_{2i} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_i & I \\ I & P_{1i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_i \\ P_{1i}E_i + \mathcal{L}_iD_{2i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, para $X_i = P_{1i}$, $Y_i = \mathcal{Y}_i$, $F_i = \mathcal{F}_i$ e $L_i = \mathcal{L}_i$ fixos, a função objetivo não depende mais de P_{2i} , P_{3i} ou \mathcal{M}_i . Portanto concluímos que o problema (4.14) pode ser escrito como

$$\min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i) \quad (4.17)$$

$$\text{s.a} \begin{bmatrix} Y_i & I & E_i \\ I & X_i & X_iE_i + L_iD_{2i} \\ E'_i & E'_iX_i + D'_{2i}L'_i & Z_i \end{bmatrix} > 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{bmatrix} A_iY_i + Y_iA'_i + B_iF_i + F'_iB'_i + \lambda_{ii}Y_i & Y_iC'_{1i} + F'_iD'_{1i} & R_i(Y) \\ C_{1i}Y_i + D_{1i}F_i & -I & 0 \\ R'_i(Y) & 0 & S_i(Y) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

$$A'_iX_i + X_iA_i + L_iC_{2i} + C'_{2i}L'_i + C'_{1i}C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}X_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.20)$$

e o controlador pode ser recuperado por (4.10)-(4.12) e (4.16).

É interessante observar que, enquanto a solução do problema escrito com LMIs corresponde ao controlador ótimo H_2 , o conjunto de restrições parametriza todos os controladores estritamente próprios de ordem igual à do sistema e todos os controladores próprios de ordem menor que a do sistema para os quais o sistema em malha fechada é estável. Portanto, se não estiverem sendo levadas em conta questões de otimalidade, basta encontrar um controlador que atenda às condições de factibilidade do problema.

4.2.2 Controlador H_2 ótimo obtido via equações de Riccati

A partir do problema escrito na forma de LMIs, vamos derivar equações de Riccati acopladas que também fornecem o controlador H_2 ótimo .

Multiplicando (4.18) à esquerda e à direita por uma matriz de permutação adequada, observamos que essa restrição é equivalente a

$$\begin{bmatrix} X_i & I & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ I & Y_i & E_i \\ E_i' X_i + D_{2i}' L_i' & E_i' & Z_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.21)$$

Podemos eliminar as variáveis auxiliares $Z_i, i = 1, \dots, N$ aplicando complemento de Schur a (4.21), resultando na função objetivo equivalente a (4.17):

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}((E_i' + D_{2i}' L_i' X_i^{-1}) X_i (E_i + X_i^{-1} L_i D_{2i}) + D_{2i}' L_i' X_i^{-1} (Y_i - X_i^{-1})^{-1} X_i^{-1} L_i D_{2i})$$

Além disso, nós sabemos pela estrutura do problema (4.17) que a solução ótima encontra-se na fronteira do conjunto de soluções factíveis. Portanto nós consideraremos aqui um conjunto fechado, composto pelos conjuntos abertos (4.18) e (4.19) e suas fronteiras, ou seja,

$$A_i Y_i + Y_i A_i' + F_i' B_i' + (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i \leq 0 \quad (4.22)$$

$$A_i' X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}' L_i' + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j \leq 0 \quad i = 1, \dots, N$$

No entanto, nós mantemos a desigualdade estrita

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Para encontrar os valores ótimos de Y_i e $F_i, i = 1, \dots, N$, vamos introduzir o lagrangeano associado ao problema de minimizar f sujeito a (4.22). Considerando valores fixos de X_i e L_i , o lagrangeano pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{i=1}^N \text{Tr} \left[\Lambda_i \left(A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i \right) \right] + f \end{aligned}$$

Observando que o problema em consideração é convexo, as condições necessárias de otimalidade são também suficientes. Para encontrar duas dessas condições, vamos tomar as derivadas parciais de \mathcal{L} em relação a F_i e Λ_i , resultando em

$$(B_i' + D_{1i}' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)) \Lambda_i = 0 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i)' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) + \\ + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.24)$$

Uma escolha de F_i que satisfaz (4.23) é

$$\bar{F}_i = -(D'_{1i}D_{1i})^{-1}(B'_i + D'_{1i}C_{1i}Y_i)$$

Vamos introduzir o valor ótimo \bar{F}_i em (4.24) e definir $P_i = Y_i^{-1}$. Multiplicando a equação resultante à esquerda e à direita por P_i , obtemos as equações de Riccati acopladas

$$A'_{qi}P_i + P_iA_{qi} - P_iB_i(D'_{1i}D_{1i})^{-1}B'_iP_i + C'_{qi}C_{qi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j = 0 \quad (4.25)$$

com A_{qi} e C_{qi} definidas em (3.11). A solução de (4.25) será denotada por \bar{P}_i . Obtemos ainda o ganho ótimo C_{ci}

$$\bar{C}_{ci} = F_i\bar{P}_i = -(D'_{1i}D_{1i})^{-1}(B'_i\bar{P}_i + D'_{1i}C_{1i})$$

Deve ser observado que as restrições $X_i > Y_i^{-1}$ não foram levadas em conta. No entanto, para que o desenvolvimento acima faça sentido, para o valor fixo de X_i deve existir algum Y_i factível. Vamos então supor que $Y_i^{-1} < \bar{P}_i$. Neste caso, $f(Y_i) < f(\bar{P}_i^{-1})$, o que é uma contradição, pois sabemos que \bar{P}_i é a solução ótima. Logo $\bar{P}_i < Y_i^{-1}$, o que implica $X_i > \bar{P}_i$.

Comparando esse resultado com o obtido no caso de realimentação de estado, observamos que \bar{C}_{ci} coincide com o ganho obtido naquele caso. Isso sugere a validade do Princípio da Separação, se considerarmos que a parte dinâmica do controlador

$$\dot{x}_c = A_{ci}x_c + B_{ci}y$$

corresponde à realização de uma filtragem. A verificação da validade será completada na seção de filtragem H_2 , em que veremos que de fato a parte dinâmica do controlador ótimo possui estrutura de observador de estado.

Precisamos encontrar, agora, as equações de Riccati que possibilitam calcular B_{ci} . Vamos realizar a transformação $W_i = X_i - \bar{P}_i$. Subtraindo (4.25) de (4.20), obtemos:

$$(A_i - B_{ci}C_{2i})'W_i + W_i(A_i - B_{ci}C_{2i}) + C'_{ci}D'_{1i}D_{1i}C_{ci} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}W_j \leq 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.26)$$

Fixando agora Y_i em seu valor ótimo $Y_i = \bar{P}_i^{-1}$, vamos encontrar os valores ótimos de X_i e L_i . Aplicando complemento de Schur em (4.18) para eliminar as variáveis auxiliares $Z_i, i = 1, \dots, N$ e eliminando o termo da função resultante que só depende de Y_i , a função objetivo pode ser reescrita como

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}((E'_i - D'_{2i}B'_{ci})W_i(E_i - B_{ci}D_{2i}))$$

Temos portanto o problema de minimizar \bar{f} sujeito a (4.26). Vamos escrever o problema dual

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \text{Tr}(D_{1i}C_{ci}Q_iC'_{ci}D'_{1i}) \\ \text{s.a.} \quad & Q_i(A_i - B_{ci}C_{2i})' + (A_i - B_{ci}C_{2i})Q_i + \alpha_i(E_i - B_{ci}D_{2i})(E_i - B_{ci}D_{2i})' + \\ & + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji}Q_j \leq 0 \\ & Q_i > 0 \qquad \qquad \qquad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Trata-se novamente de um problema convexo e as equações de Riccati que fornecem sua solução podem ser obtidas através das derivadas parciais do lagrangeano associado, de maneira idêntica à empregada para encontrar F_i e Y_i . Após realizar tal procedimento, obtemos

$$A_{pi}Q_i + Q_iA'_{pi} - \alpha_i^{-1}Q_iC'_{2i}(D_{2i}D'_{2i})^{-1}C_{2i}Q_i + \alpha_i B_{pi}B'_{pi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji}Q_j = 0 \quad (4.27)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{pi} &= A_i - E_i D'_{2i} (D_{2i} D'_{2i})^{-1} C_{2i} \\ B_{pi} &= E_i (I - D'_{2i} (D_{2i} D'_{2i})^{-1} D_{2i}) \end{aligned} \quad (4.28)$$

com o ganho correspondente

$$\bar{B}_{ci} = (\alpha_i^{-1} \bar{Q}_i C'_{2i} + E_i D'_{2i}) (D_{2i} D'_{2i})^{-1}$$

Finalmente, podemos calcular os ganhos A_{ci} :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ci} &= \bar{W}_i^{-1} \left[A'_i + (\bar{W}_i + \bar{P}_i) A_i \bar{Y}_i + (\bar{W}_i + \bar{P}_i) B_i \bar{F}_i - \bar{W}_i \bar{B}_{ci} C_{2i} \bar{Y}_i + C'_{1i} C_{1i} Y_i + \right. \\ & \quad \left. + C'_{1i} D_{1i} \bar{F}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \bar{P}_j \bar{Y}_i \right] \bar{P}_i \\ &= A_i - \bar{B}_{ci} C_{2i} + B_i \bar{C}_{ci} + \\ & \quad + \bar{W}_i^{-1} \left[A'_{qi} \bar{P}_i + \bar{P}_i A_{qi} - \bar{P}_i B_i (D'_{1i} D_{1i})^{-1} B'_i \bar{P}_i + C'_{qi} C_{qi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \bar{P}_j \right] \\ &= A_i - \bar{B}_{ci} C_{2i} + B_i \bar{C}_{ci} \end{aligned}$$

É importante observar que, como não estamos mais utilizando desigualdades estritas, o controlador resultante pode não estabilizar estocasticamente o sistema em malha fechada. No entanto, se \bar{P}_i e \bar{Q}_i forem soluções estabilizantes de (4.25) e (4.27), ou seja, se $A_i + B_i \bar{C}_{ci}$, $i = 1, \dots, N$ e $A_i - \bar{B}_{ci} C_{2i}$, $i = 1, \dots, N$ forem estocasticamente estáveis, então a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada está garantida.

De fato, nesse caso, quaisquer que sejam $Q_i > 0$, $\mathcal{R}_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, as equações de Lyapunov acopladas

$$(A_i + B_i \bar{C}_{ci})' P_i + P_i (A_i + B_i \bar{C}_{ci}) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j + Q_i = 0$$

$$(A_i - \bar{B}_{ci} C_{2i})' W_i + W_i (A_i - \bar{B}_{ci} C_{2i}) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} W_j + \mathcal{R}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

possuem solução definida positiva \hat{P}_i , \hat{W}_i . Em particular, isso é verdade para

$$\mathcal{R}_i = (Q_i + \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci})' Q_i^{-1} (Q_i + \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci}) - \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci} - \bar{C}'_{ci} B'_i \hat{P}_i + \alpha_i I \quad (4.29)$$

com $\alpha_i > 0$ escolhido de tal modo que $\mathcal{R}_i > 0$. Para essa escolha, se fizermos

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} \hat{W}_i + \hat{P}_i & -\hat{W}_i \\ -\hat{W}_i & \hat{W}_i \end{bmatrix}$$

então $\tilde{P}_i > 0$ e definindo

$$T_i = \begin{bmatrix} \hat{P}_i^{-1} & I \\ \hat{P}_i^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

sabemos que o sistema em malha fechada é estocasticamente estável se

$$T_i' (\tilde{A}'_i \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \sum_{j=1}^N \tilde{P}_j) T_i = \begin{bmatrix} -\hat{P}_i^{-1} Q_i \hat{P}_i^{-1} & -\hat{P}_i^{-1} (Q_i + \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci}) \\ (Q_i + \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci}) \hat{P}_i^{-1} & -\mathcal{R}_i - Q_i - \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci} - \bar{C}'_{ci} B'_i \hat{P}_i \end{bmatrix}$$

$$< 0 \quad i = 1, \dots, N$$

o que é equivalente a

$$\mathcal{R}_i + Q_i + \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci} + \bar{C}'_{ci} B'_i \hat{P}_i > (Q_i + \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci})' Q_i^{-1} (Q_i + \hat{P}_i B_i \bar{C}_{ci}), \quad i = 1, \dots, N$$

que são condições satisfeitas se escolhermos \mathcal{R}_i como em (4.29).

Em [11] é proposto um controlador similar, no entanto as equações usadas para determinar Q_i apresentam uma pequena diferença, pois é considerada a matriz de transição de um processo de Markov que caminha no sentido decrescente do tempo. Essa matriz é denominada Λ^p e é calculada segundo a regra $\lambda_{ij}^p = \lambda_{ji}$, para $i \neq j$ e $\sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^p = 0$. Além disso, naquele artigo, a distribuição inicial é considerada uniforme, o que pode ser obtido fazendo-se $\alpha_i = \frac{1}{N}$ ou simplesmente $\alpha_i = 1$ para todo i (neste caso, estamos apenas multiplicando a função objetivo por uma constante, o que não altera a solução do problema). A equação para o cálculo de Q_i fica portanto

$$A_{pi} Q_i + Q_i A'_{pi} - \alpha_i^{-1} Q_i C'_{2i} (D_{2i} D'_{2i})^{-1} C_{2i} Q_i + \alpha_i B_{pi} B'_{pi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}^p Q_j = 0$$

Com o exemplo a seguir, que é uma versão modificada do exemplo mostrado em [11], pretendemos mostrar que o controlador lá proposto não necessariamente garante a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada, ao contrário do obtido neste trabalho.

Exemplo 4.1 *Sejam os parâmetros relativos ao sistema (4.1) com quatro estados para a cadeia de Markov*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{14} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{23} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{24} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{13} = C_{14} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, C_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_{13} = D_{14} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = D_{22} = D_{23} = D_{24} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

e a matriz de transição correspondente

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considerando $\alpha_i = 0.25$ para todo i , o controlador ótimo H_2 fornece

$$A_{c1} = \begin{bmatrix} -0.9407 & -0.9407 \\ -3.9571 & -8.0545 \end{bmatrix}, A_{c2} = \begin{bmatrix} -9.7479 & -5.5930 \\ 0.7432 & 0.7432 \end{bmatrix}$$

$$A_{c3} = \begin{bmatrix} -1.0000 & -0.0716 \\ -1.7138 & -17.0037 \end{bmatrix}, A_{c4} = \begin{bmatrix} -16.6459 & -1.7138 \\ -1.2872 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$B_{c1} = \begin{bmatrix} 1.9407 \\ 0.6375 \end{bmatrix}, B_{c2} = \begin{bmatrix} 2.2953 \\ 0.2568 \end{bmatrix}, B_{c3} = \begin{bmatrix} 2.0716 \\ 10.3814 \end{bmatrix}, B_{c4} = \begin{bmatrix} 10.0235 \\ 3.2872 \end{bmatrix}$$

$$C_{c1} = \begin{bmatrix} -1.6598 & -4.7085 \end{bmatrix}, C_{c2} = \begin{bmatrix} -4.7263 & -1.6488 \end{bmatrix}$$

$$C_{c3} = \begin{bmatrix} -3.7138 & -11.6223 \end{bmatrix}, C_{c4} = \begin{bmatrix} -11.6223 & -3.7138 \end{bmatrix}$$

com a norma H_2 do sistema em malha fechada igual a 93.9496. Já ao tentarmos resolver as equações de Lyapunov acopladas para encontrar a norma H_2 do sistema em malha fechada com o controlador proposto em [11], obtemos solução que não é semidefinida positiva, o que indica que o sistema não é estocasticamente estável. \square

Mesmo nos casos em que o controlador proposto em [11] estabiliza o sistema, seu desempenho em termos de norma H_2 será pior do que o do controlador H_2 ótimo, que deve possuir o menor valor para esse índice. Esse fato será ilustrado no exemplo a seguir:

Exemplo 4.2 Considerando os mesmos parâmetros do Exemplo 4.1, seja agora a matriz de transição da cadeia de Markov igual a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -1.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, a norma H_2 fornecida pelo controlador H_2 ótimo é 110.6730, enquanto a fornecida pelo controlador de [11] vale 115.5890. \square

4.3 Controle H_∞

Nesta seção, queremos encontrar um controlador com a estrutura (4.2) tal que a norma H_∞ do sistema (4.1) em malha fechada seja menor que um certo γ dado, ou seja, precisamos encontrar A_{ci} , B_{ci} e C_{ci} tais que existem $\tilde{P}_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ satisfazendo

$$\tilde{A}_i' \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \tilde{C}_i' \tilde{C}_i + \gamma^{-2} \tilde{P}_i \tilde{E} \tilde{E}' \tilde{P}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \tilde{P}_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.30)$$

onde \tilde{A}_i , \tilde{E}_i e \tilde{C}_i , dados por (4.3), são os parâmetros do sistema em malha fechada.

4.3.1 Controlador H_∞ subótimo obtido via LMIs

A transformação do problema de controle H_∞ com realimentação de saída em LMIs é praticamente idêntica às dos problemas de estabilidade estocástica e controle H_2 .

De fato, pode-se reproduzir o procedimento do Teorema 4.1 para obter que (4.30) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i + \gamma^{-2} E_i E_i' & R_i(Y) & Y_i C_{1i}' + F_i' D_{12i}' \\ R_i'(Y) & S_i(Y) & 0 \\ C_{1i} Y_i + D_{12i} F_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} A_i' X_i + X_i A_i + L_i C_{2i}' + C_{2i}' L_i' + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j & X_i E_i + L_i D_{2i}' \\ E_i' X_i + D_{2i}' L_i' & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.32)$$

onde $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ estão definidas em (2.6) e (2.7). Neste caso, devemos apenas notar que \mathcal{M}_i passa a ser

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i = & A_i' + P_{1i} A_i \mathcal{Y}_i + P_{1i} B_i \mathcal{F}_i + \mathcal{L}_i C_{2i} \mathcal{Y}_i - P_{2i} A_{ci} P_{3i}^{-1} P_{2i}' \mathcal{Y}_i + C_{1i}' (C_{1i} \mathcal{Y}_i + D_{1i} \mathcal{F}_i) + \\ & + \gamma^{-2} (P_{1i} E_i + \mathcal{L}_i D_{2i}') E_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} (P_{1j} - P_{2j} P_{3i}^{-1} P_{2i}') \mathcal{Y}_i \end{aligned}$$

A introdução do termo $\gamma^{-2} (P_{1i} E_i + \mathcal{L}_i D_{2i}') E_i'$ deve-se ao termo adicional $\gamma^{-2} P_i \tilde{E}_i \tilde{E}_i' P_i$ presente em (4.30), que não existia em (4.15).

Podemos notar que, como a norma H_2 , a norma H_∞ também não é afetada pelos possíveis valores que P_{2i} , P_{3i} e \mathcal{M}_i possam tomar. De fato, o valor mínimo de γ tal que (4.30) possui solução factível é completamente determinado por (4.31)-(4.32), portanto diferentes escolhas para P_{2i} , P_{3i} e \mathcal{M}_i não afetam o grau de incerteza a que o sistema pode ser submetido. Desse modo, adotaremos a solução trivial para essas variáveis $P_{2i} = -P_{3i} = Y_i^{-1} - X_i$ e $\mathcal{M}_i = 0$, levando ao controlador descrito por (4.10), (4.11) e (4.12), com M_i dado por

$$\begin{aligned} M_i = & -A_i' - X_i A_i Y_i - X_i B_i F_i - L_i C_{2i} Y_i - C_{1i}' (C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i) - \sum_{i=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i - \\ & - \gamma^{-2} (X_i E_i + L_i D_{2i}') E_i' \end{aligned}$$

É importante ainda observar que a função objetivo

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(\tilde{E}_i' \tilde{P}_i \tilde{E}_i)$$

fornece um limitante superior para a norma H_2 do sistema em malha fechada. Podemos resolver o problema misto subótimo adotando essa função objetivo. Realizando as mesmas manipulações do caso de controle H_2 , chegamos facilmente ao problema

$$\min \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i) \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.a } & \begin{bmatrix} Y_i & I & E_i \\ I & X_i & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ E'_i & E'_i X_i + D'_{2i} L'_i & Z_i \end{bmatrix} > 0 \\
& \begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A'_i + B_i F_i + F'_i B'_i + \lambda_{ii} Y_i + \gamma^{-2} E_i E'_i & R_i(Y) & Y_i C'_{1i} + F'_i D'_{12i} \\ & R'_i(Y) & S_i(Y) \\ & C_{1i} Y_i + D_{12i} F_i & 0 \end{bmatrix} < 0 \\
& \begin{bmatrix} A'_i X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C'_{2i} L'_i + C'_{1i} C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ & E'_i X_i + D'_{2i} L'_i & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\
& i = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ estão definidas em (2.6) e (2.7).

É importante notar que, de fato, o controlador obtido é o ótimo do problema (4.33). O fato de ele ser chamado de subótimo está ligado ao fato de estarmos minimizando um limitante superior para a norma H_2 , o que o torna pior que o controlador misto proposto no Capítulo 5, em que será efetuada a minimização da norma H_2 de fato. Pode-se notar ainda que, para γ tendendo ao infinito, os problemas H_2 e H_∞ tornam-se o mesmo e o controlador subótimo H_∞ coincide com o controlador ótimo H_2 .

4.3.2 Controlador central H_∞

Nesta seção propomos um controlador obtido via equações de Riccati tal que a norma H_∞ do sistema em malha fechada permaneça menor ou igual a γ . No problema de realimentação de estado também foi obtido um controlador com essa propriedade a partir de equações de Riccati, que coincidia com o controlador H_∞ subótimo. No entanto, veremos a seguir que no controle H_∞ com realimentação de saída algumas condições adicionais são necessárias para que o controlador central coincida com o controlador H_∞ subótimo. No entanto, embora a solução ótima de (4.33) não seja de modo geral dada por equações de Riccati, podemos encontrar um controlador factível que seja determinado pelas mesmas. Tendo em mente que em (4.33) apenas um limitante superior para a norma H_2 é minimizado, abrir mão da otimalidade pode não acarretar tanta perda na performance real do controlador. Como foi demonstrado em [2], algumas vezes o controlador central pode até mesmo apresentar norma H_2 menor do que a obtida pelo controlador H_∞ subótimo.

Definição 4.1 (Controlador central) *Dado o sistema (4.1), denominamos controlador central aquele obtido pelas seguintes equações :*

$$\begin{aligned}
A'_{qi} P_i + P_i A_{qi} - P_i [B_i (D'_{1i} D_{1i})^{-1} B'_i - \gamma^{-2} E_i E'_i] P_i + C'_{qi} C_{qi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j &= 0 \tag{4.35} \\
A_{pi} Q_i + Q_i A'_{pi} - Q_i [C'_{2i} (D_{2i} D'_{2i})^{-1} C_{2i} - \gamma^{-2} C'_{1i} C_{1i}] Q_i + B_{pi} B'_{pi} + &
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Q_i Q_j^{-1} Q_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.36)$$

$$C_{ci} = -(D'_{1i} D_{1i})^{-1} (B'_i P_i + D'_{1i} C_{1i})$$

$$B_{ci} = (I - \gamma^{-2} Q_i P_i)^{-1} (Q_i C_{2i} + E_i D'_{2i}) (D_{2i} D'_{2i})^{-1}$$

$$A_{ci} = A_i + B_i C_{ci} + \gamma^{-2} E_i E'_i P_i - B_{ci} (C_{2i} + \gamma^{-2} D_{2i} E'_i P_i)$$

com A_{pi} , A_{qi} , B_{pi} e C_{qi} definidas em (3.11) e (4.28), desde que $P_i^{-1} > \gamma^{-2} Q_i > 0$, $i = 1, \dots, N$. \square

Teorema 4.2 *O controlador central garante que a norma do sistema em malha fechada será menor ou igual a γ .*

Prova : Definindo

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} \gamma^2 Q_i^{-1} & P_i - \gamma^2 Q_i^{-1} \\ P_i - \gamma^2 Q_i^{-1} & \gamma^2 Q_i^{-1} - P_i \end{bmatrix}, \quad T_i = \begin{bmatrix} P_i^{-1} & I \\ P_i^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

então $\tilde{P}_i > 0$ e T_i é não-singular para todo i . Além disso,

$$T'_i \left(\tilde{A}'_i \tilde{P}_i + \tilde{P}_i \tilde{A}_i + \gamma^{-2} \tilde{P}_i \tilde{E}_i \tilde{E}'_i \tilde{P}_i + \tilde{C}'_i \tilde{C}_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} \tilde{P}_j \right) T_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

e como T_i é inversível, a prova está completa. \square

Notamos que o controlador central não depende da distribuição de probabilidade inicial α_i . Além disso, para que a estabilidade estocástica do sistema em malha fechada com perturbações $w = \Delta z$ esteja garantida, com $\|\Delta\| < \gamma^{-1}$, $\tilde{A}_i + \gamma^{-2} \tilde{E}_i \tilde{E}'_i \tilde{P}_i$, $i = 1, \dots, N$ devem ser estocasticamente estáveis.

Vamos encontrar agora condições suficientes para que o controlador central coincida com o controlador obtido pelo problema (4.33). Já que o controlador central não leva em conta a distribuição de probabilidade de θ_0 , consideraremos distribuição uniforme, ou simplesmente $\alpha_i = 1$, $i = 1, \dots, N$. Como (4.33) é convexo, podemos derivar as condições necessárias e suficientes de otimalidade a partir do lagrangeano associado a ele. Considerando valores fixos de $P_i = Y_i^{-1}$ e F_i , vamos definir $W_i = X_i - P_i$. Subtraindo (4.35) de (4.34), o problema permanece inalterado e conseguimos uma nova restrição envolvendo W_i . Escrevendo as condições necessárias de otimalidade em termos dessa nova variável e da variável dual H_i^{-1} associada à nova restrição, obtemos

$$\begin{aligned} & (A_i - B_{ci} C_{2i} + \gamma^{-2} E_i E'_i P_i - \gamma^{-2} B_{ci} D_{2i} E'_i P_i)' W_i + \\ & + W_i (A_i - B_{ci} C_{2i} + \gamma^{-2} E_i E'_i P_i - \gamma^{-2} B_{ci} D_{2i} E'_i P_i) + \\ & + \gamma^{-2} W_i (E_i - B_{ci} D_{2i}) (E_i - B_{ci} D_{2i})' W_i + C'_{ci} D'_{1i} D_{1i} C_{ci} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} W_j = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned}
& (A_i - B_{ci}C_{2i} + \gamma^{-2}E_iE_i'P_i - \gamma^{-2}B_{ci}D_{2i}E_i'P_i)'H_i + \\
& + H_i(A_i - B_{ci}C_{2i} + \gamma^{-2}E_iE_i'P_i - \gamma^{-2}B_{ci}D_{2i}E_i'P_i) + \\
& + \gamma^{-2}W_i(E_i - B_{ci}D_{2i})(E_i - B_{ci}D_{2i})H_i + \\
& + \gamma^{-2}H_i(E_i - B_{ci}D_{2i})(E_i - B_{ci}D_{2i})'W_i + \\
& + H_i(E_i - B_{ci}D_{2i})(E_i - B_{ci}D_{2i})H_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji}H_iH_j^{-1}H_i = 0
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$B_{ci} = (\gamma^{-2}W_i + H_i)^{-1}(C_{2i}' + \gamma^{-2}P_iE_iD_{2i}')(D_{2i}D_{2i}')^{-1} + E_iD_{2i}'(D_{2i}D_{2i}')^{-1}, \quad i = 1, \dots, N$$

Com essas condições estamos prontos para o seguinte teorema:

Teorema 4.3 *Seja H_i dado pelas condições de otimalidade acima. Se*

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{ij}H_j = \sum_{j=1}^N \lambda_{ji}H_iH_j^{-1}H_i, \quad i = 1, \dots, N \tag{4.39}$$

então o controlador central coincide com a minimização do limitante superior da norma H_2 .

Prova : Podemos reescrever o problema (4.33) como

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[\text{Tr}(E_i'Y_i^{-1}E_i) + \text{Tr}((E_i - B_{ci}D_{2i})'(X_i - Y_i^{-1})(E_i - B_{ci}D_{2i})) \right] \\
\text{s.a} \quad & A_iY_i + Y_iA_i' + B_iF_i + F_i'B_i + \gamma^{-2}E_iE_i' + (C_{1i}Y_i + D_{1i}F_i)'(C_{1i}Y_i + D_{1i}F_i) + \\
& + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}Y_iY_j^{-1}Y_i \leq 0 \\
& A_i'X_i + X_iA_i + L_iC_{2i} + C_{2i}'L_i + C_{1i}'C_{1i} + \gamma^{-2}(X_iE_i + L_iD_{2i})(X_iE_i + L_iD_{2i})' + \\
& + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}X_j \leq 0 \\
& \begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} > 0, L_i = (Y_i^{-1} - X_i)B_{ci}, \quad i = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

Observamos que, como no caso H_2 , estamos considerando as restrições como conjuntos fechados, compostos do conjuntos factíveis originais mais suas fronteiras.

Vamos encontrar inicialmente os valores ótimos de Y_i e F_i . Observando que a função objetivo não depende de F_i , podemos determinar esse ganho como no problema H_2 a partir das condições necessárias de otimalidade, obtendo

$$F_i = -(D_{1i}'D_{1i})^{-1}(B_i' + D_{1i}'C_{1i}Y_i)$$

o que implica

$$C_{ci} = F_i P_i = -(D'_{1i} D_{1i})^{-1} (B'_i P_i + D'_{1i} C_{1i})$$

onde $P_i, i = 1, \dots, N$ são soluções das equações de Riccati acopladas (4.35).

Somando as equações (4.37) multiplicadas por γ^{-2} com (4.38), usando (4.39) e definindo uma nova variável $K_i = (\gamma^{-2} W_i + H_i)$, obtemos

$$\begin{aligned} & K_i (A_i - B_{ci} C_{2i} + \gamma^{-2} E_i E'_i P_i - \gamma^{-2} B_{ci} D_{2i} E'_i P_i) + \\ & + (A_i - B_{ci} C_{2i} + \gamma^{-2} E_i E'_i P_i - \gamma^{-2} B_{ci} D_{2i} E'_i P_i)' K_i + \\ & + \gamma^{-2} C'_{ci} D'_{1i} D_{1i} C_{ci} + K_i (E_i - B_{ci} D_{2i}) (E_i - B_{ci} D_{2i})' K_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} K_j = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Finalmente, podemos definir $Q_i = (K_i + \gamma^{-2} P_i)^{-1}$ e, após somar as restrições (4.40) e as restrições (4.35) multiplicadas por γ^{-2} e multiplicá-las em ambos os lados por Q_i , obtemos finalmente

$$A_{pi} Q_i + Q_i A'_{pi} - Q_i [C'_{2i} (D_{2i} D'_{2i})^{-1} C_{2i} - \gamma^{-2} C'_{1i} C'_{1i}] Q_i + B_{pi} B'_{pi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Q_i Q_j^{-1} Q_i = 0$$

Calculando o valor de B_{ci} obtemos

$$\begin{aligned} B_{ci} &= (K_i^{-1} C'_{2i} + (\gamma^{-2} K_i^{-1} P_i + I) E_i D'_{2i}) (D_{2i} D'_{2i})^{-1} \\ &= (Q_i^{-1} - \gamma^{-2} P_i)^{-1} C'_{2i} + ((Q_i^{-1} - \gamma^{-2} P_i)^{-1} \gamma^{-2} P_i + I) E_i D'_{2i}) (D_{2i} D'_{2i})^{-1} \\ &= (I - \gamma^{-2} Q_i P_i)^{-1} (Q_i C'_{2i} + E_i D'_{2i}) (D_{2i} D'_{2i})^{-1} \end{aligned}$$

Portanto os valores de B_{ci} coincidem. Calculando enfim A_{ci} , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ci} &= \bar{W}_i^{-1} [A'_i + (W_i + P_i) A_i Y_i + (W_i + P_i) B_i F_i + L_i C_{2i} Y_i + C'_{1i} C_{1i} Y_i + \\ & + C'_{1i} D_{1i} F_i + \gamma^{-2} (W_i + P_i) E_i E'_i + \gamma^{-2} L_i D_{2i} E'_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j Y_i] P_i \\ &= A_i + B_i C_{ci} + \gamma^{-2} E_i E'_i P_i - B_{ci} (C_{2i} + \gamma^{-2} D_{2i} E'_i P_i) + \\ & + W_i^{-1} \left[A'_{qi} P_i + P_i A_{qi} - P_i [B_i (D'_{1i} D_{1i})^{-1} B'_i - \gamma^{-2} E_i E'_i] P_i + C'_{qi} C_{qi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \right] \\ &= A_i + B_i C_{ci} + \gamma^{-2} E_i E'_i P_i - B_{ci} (C_{2i} + \gamma^{-2} D_{2i} E'_i P_i) \end{aligned}$$

e o controlador central é ótimo para o problema (4.33). \square

Uma análise dos resultados obtidos até aqui revela que, quando γ tende ao infinito, não necessariamente o controlador central corresponderá ao controlador ótimo H_2 , ao

	$\Lambda = \Lambda_1$		$\Lambda = \Lambda_2$	
	limitante	norma	limitante	norma
Riccati	2434.5462	157.6746	1653.2526	96.8285
LMI	111.2777	96.6966	108.7618	94.7018

Tabela 4.1: Controlador H_∞ subótimo e controlador central H_∞

contrário do controlador ótimo dado pelo problema (4.33). Tal fato somente ocorrerá se as condições de otimalidade estabelecidas pelo teorema acima forem satisfeitas. A vantagem do controlador central é a maior simplicidade de seu cálculo, pois ele é totalmente descrito por equações de Riccati. Pela demonstração do teorema, vemos que o ganho C_{ci} do controlador central é sempre ótimo para o problema (4.33), mas os outros ganhos necessitam da hipótese adicional (4.39) para serem ótimos. No exemplo a seguir vamos efetuar uma comparação entre os dois controladores, do ponto de vista do desempenho.

Exemplo 4.3 *Vamos tomar o mesmo sistema usado no Exemplo 4.1. Usaremos duas matrizes de transição diferentes:*

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} -10 & 7 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $\gamma = 10$, os resultados obtidos podem ser vistos na Tabela 4.1.

Podemos notar no caso $\Lambda = \Lambda_1$ que enquanto em termos de limitante o controlador central é cerca de 15 vezes pior que o obtido via LMIs, sua norma H_2 não chega a ser o dobro da conseguida pela minimização do limitante. No segundo caso, a diferença entre as normas reais é ainda menor, com o controlador central tendo norma H_2 cerca de 2.2 % maior que a obtida pelo outro método. Tais resultados demonstram claramente que abrir mão da otimalidade do limitante, ao adotar o controlador central, não implica necessariamente grande perda de performance. \square

Neste ponto, cabe uma observação interessante. Como já foi observado, a norma H_2 pode ser expressa em termos de A_c , B_c e C_c , de modo que, para um sistema fixo, ela é uma função do controlador. A intuição leva à suposição de que o mesmo ocorreria com o limitante. No entanto, como vimos anteriormente, ele é expresso em termos de X , Y e L . De fato, é observado na prática que para um mesmo controlador mais de um conjunto dessas variáveis é admissível, levando a diferentes valores para o limitante.

4.4 Filtragem

Nesta seção trataremos o problema de filtragem, ou seja, de recuperação do estado do sistema a partir de sua saída. Consideraremos tanto a filtragem H_2 , que minimiza a norma do erro do estado estimado em relação ao estado real, quanto a filtragem H_∞ , que garante que mesmo na presença de ruídos o filtro permanecerá estável, ou seja, o erro tenderá assintoticamente para zero.

À primeira vista, esta seção talvez devesse preceder o problema de realimentação de saída, uma vez que esse problema traz implícita a realização da filtragem. De fato, muitos autores adotam essa linha, estabelecendo primeiramente um filtro e depois lançando mão do Teorema da Separação para tratar o problema de realimentação de saída. No entanto, estamos aqui interessados na abordagem convexa, e para as técnicas que foram utilizadas, é irrelevante a existência de um Teorema da Separação e o conceito de filtro, totalmente dispensável. Porém, uma análise a posteriori dos controladores obtidos nas seções anteriores sugere fortemente a existência desse Teorema para o sistema aqui utilizado, e o tratamento do problema de filtragem passa a ser válido para fins de interpretação dos resultados obtidos.

Como veremos a seguir, a ordem utilizada aqui é bastante oportuna, pois o problema de filtragem, quando à luz da análise convexa, nada mais é do que um caso específico do problema de realimentação de saída.

4.4.1 Filtragem H_2

Nesta seção estamos interessados em encontrar um filtro de modo que a norma da diferença entre o estado estimado e o estado real seja a menor possível. Dado o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\theta_t)x + E(\theta_t)w \\ y &= C_2(\theta_t)x + D_2(\theta_t)w\end{aligned}$$

queremos encontrar o filtro

$$\dot{x}_f = A_c(\theta_t)x_f + B_c(\theta_t)y$$

tal que, considerando como saída o erro

$$e = C_1(\theta_t)x - C_c(\theta_t)x_f$$

a norma H_2 do sistema seja minimizada.

Calculando os parâmetros do sistema em malha fechada, obtemos

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{ci}C_{2i} & A_{ci} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i \\ B_{ci}D_{2i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_{1i} & -C_{ci} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Comparando esses parâmetros com aqueles do problema de realimentação de saída (4.3), podemos perceber que temos aqui um caso particular daquele problema, com

$B_i = 0$ e $D_{1i} = -I$. Portanto a obtenção do filtro expresso tanto em termos de LMIs como em termos de equações de Riccati é imediata.

Filtro H_2 ótimo obtido via LMIs

Tendo em mãos o resultado do problema de controle H_2 com realimentação de saída, obtemos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i) \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} Y_i & I & E_i \\ I & X_i & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ E_i' & E_i' X_i D_{2i}' L_i' & Z_i \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_i Y_i + Y_i A_i' + \lambda_{ii} Y_i & (C_{1i} Y_i - F_i)' & R_i(Y) \\ C_{1i} Y_i - F_i & -I & 0 \\ R_i'(Y) & 0 & S_i(Y) \end{bmatrix} < 0 \\ & A_i' X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}' L_i' + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

onde $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ estão definidas em (2.6) e (2.7).

Como esse é um problema convexo, novamente as condições necessárias de otimalidade são também suficientes. Observando essas condições, encontramos

$$\begin{aligned} F_i &= C_{1i} Y_i \\ A_i Y_i + Y_i A_i' + (C_{1i} Y_i - F_i)' (C_{1i} Y_i - F_i) + \sum_{i=1}^N \lambda_{ij} Y_i Y_j^{-1} Y_i &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

que é satisfeita para

$$C_{ci} = C_{1i}$$

Substituindo esse valor em (4.42) e multiplicando a expressão resultante por $P_i = Y_i^{-1}$ à esquerda e à direita, obtemos

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j = 0$$

Portanto $P_i \rightarrow 0^+$ é uma solução ótima e o problema pode ser reescrito simplesmente como

$$\min \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i)$$

$$\text{s.a. } \begin{bmatrix} X_i & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ E_i' X_i + D_{2i}' L_i' & Z_i \end{bmatrix} > 0$$

$$A_i' X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}' L_i' + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.43)$$

Podemos calcular A_{ci} e B_{ci} como se segue:

$$\begin{aligned} B_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} L_i \\ &= -X_i^{-1} L_i \\ A_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} M_i Y_i^{-1} \\ &= X_i^{-1} (A_i + X_i A_i Y_i + L_i C_{2i} Y_i + C_{1i}' (C_{1i} Y_i - F_i)) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i Y_i \\ &= A_i - B_{ci} C_{2i} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ressaltamos a semelhança entre este problema e o de controle H_2 com realimentação de estado. De fato, como já foi observado em [13], fazendo as transformações de variáveis $A_i = A_i'$, $C_{2i} = B_i'$, $L_i = F_i'$, $C_{1i} = E_i'$, $E_i = C_{1i}'$, $D_{2i} = D_{1i}'$, $\Lambda = \Lambda'$, o problema acima torna-se idêntico ao problema de controle.

Filtro H_2 ótimo obtido via equações de Riccati

Novamente vamos tomar o controlador H_2 ótimo com realimentação de saída, obtendo o filtro correspondente

$$\begin{aligned} A_{pi} Q_i + Q_i A_{pi}' - \alpha_i^{-1} Q_i C_{2i}' (D_{2i} D_{2i}')^{-1} C_{2i} Q_i + \alpha_i B_{pi} B_{pi}' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ji} Q_j &= 0 \\ A_{ci} &= A_i - B_{ci} C_{2i} \\ B_{ci} &= (\alpha_i^{-1} Q_i C_{2i}' + E_i D_{2i}') (D_{2i} D_{2i}')^{-1} \\ C_{ci} &= C_{1i} \end{aligned}$$

Podemos notar que o ganho B_{ci} coincide com aquele obtido no controlador H_2 com realimentação de saída. O ganho A_{ci} também é similar, a menos do termo $B_i C_{ci}$ encontrado naquele problema devido à existência de uma ação de controle. Desse modo, observa-se que de fato o controlador H_2 ótimo possui estrutura de observador de estado e o Princípio da Separação é válido para o sistema aqui tratado.

4.4.2 Filtragem H_∞

Considerando o mesmo sistema da seção anterior, vamos tratar o problema em que se deseja obter um filtro de modo que a norma H_∞ do sistema dado pelos parâmetros

(4.41) seja menor que γ . Como no caso H_2 , observa-se que este problema recai no problema de controle H_∞ com realimentação de saída. Portanto podemos derivar imediatamente o problema de otimização sujeita a LMIs e as equações de Riccati que fornecem filtros H_∞ .

Filtro H_∞ subótimo obtido via LMIs

Vamos tratar o problema de minimização de um limitante da norma H_2 enquanto a norma H_∞ do sistema com filtro permanece menor que γ . Utilizando os resultados da seção de controle H_∞ com realimentação de saída e os mesmos argumentos da filtragem H_2 sobre Y_i , obtemos

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(Z_i) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} X_i & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ E_i' X_i + D_{2i}' L_i' & Z_i \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_i' X_i + X_i A_i + L_i C_{2i} + C_{2i}' L_i' + C_{1i}' C_{1i} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_j & X_i E_i + L_i D_{2i} \\ E_i' X_i + D_{2i}' L_i' & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\ & i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Como no caso do filtro H_2 , devemos ter A_i tais que o sistema seja estocasticamente estável. Os ganhos A_c , B_c e C_c podem ser encontrados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} B_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} L_i \\ &= -X_i^{-1} L_i \\ C_{ci} &= F_i Y_i^{-1} \\ &= C_{1i} \\ A_{ci} &= (Y_i^{-1} - X_i)^{-1} M_i Y_i^{-1} \\ &= X_i^{-1} (A_i + X_i A_i Y_i + L_i C_{2i} Y_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} Y_j^{-1} Y_i + C_{1i}' (C_{1i} Y_i - F_i) + \\ &\quad + \gamma^{-2} (X_i E_i + L_i D_{2i}) E_i') Y_i^{-1} \\ &= A_i - B_{ci} C_{2i} \end{aligned}$$

Observamos que, enquanto as LMIs para o filtro e para o problema de controle H_∞ são as mesmas, o parâmetro A_{ci} passa a depender de γ somente através de B_{ci} , ao contrário do caso do sistema controlado. Além disso, quando γ tende ao infinito, este filtro recai no filtro H_2 ótimo.

Filtro central H_∞ obtido via equações de Riccati

A partir do controlador central H_∞ , obtemos o filtro correspondente:

$$A_{pi}Q_i + Q_iA'_{pi} - Q_i[C'_{2i}(D_{2i}D'_{2i})^{-1}C_{2i} - \gamma^{-2}C'_{1i}C_{1i}]Q_i + B_{pi}B'_{pi} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}Q_iQ_j^{-1}Q_i = 0$$

$$A_{ci} = A_i - B_{ci}D_{2i}$$

$$B_{ci} = (Q_iC_{2i} + E_iD'_{2i})(D_{2i}D'_{2i})^{-1}$$

$$C_{ci} = C_{1i}$$

Notamos que, quando γ tende ao infinito, como no caso de controle o filtro central não necessariamente se torna igual ao filtro H_2 . Para que tal fato seja verdadeiro, deveremos ter

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{ij}Q_iQ_j^{-1}Q_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ji}Q_j$$

e distribuição inicial uniforme.

Capítulo 5

O problema misto H_2/H_∞

Nos capítulos anteriores, tratamos o problema de controle H_∞ com minimização de um limitante para a norma H_2 . Como pudemos observar nas comparações entre o controlador central e o controlador subótimo H_∞ , minimizar o limitante nem sempre garante uma melhora de desempenho significativa. De fato, melhor seria trabalhar não com um limitante, mas com a própria norma H_2 . Este é o objetivo deste capítulo. Trataremos o chamado problema misto H_2/H_∞ , que pode ser definido como *minimizar a norma H_2 do sistema em malha fechada, mantendo sua norma H_∞ menor que γ* .

Embora trabalhar diretamente com a norma H_2 possibilite obter melhor performance, o problema torna-se consideravelmente mais complexo. Até o momento, não se conhece uma representação convexa para o mesmo, o que descarta a utilização pura e simples de LMIs com funções objetivo lineares ou equações de Riccati. No entanto, observamos que é possível converter o problema misto para um problema de otimização cujas restrições são ainda LMIs, porém com função objetivo não-convexa, embora diferenciável, ou seja,

$$\min \{g(x) : F(x) > 0\} \quad (5.1)$$

onde

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n F_i x_i$$

Um algoritmo para encontrar um ótimo local desse problema foi proposto em [5] e é reproduzido na seção a seguir.

5.1 Um método primal de solução

Precisamos assumir, a princípio, a existência de um ponto x_k factível para o problema (5.1), ou seja, tal que $F(x_k) > 0$. Se tal ponto não existir, não existirá um controlador

tal que a norma H_∞ do sistema em malha fechada seja menor que γ e o problema não tem solução. Se o ponto existir, vamos tomar o problema auxiliar

$$\min \{ \langle \nabla g(x_k), z \rangle : F(z) > 0 \} \quad (5.2)$$

Sendo z_k sua solução ótima e, levando em conta que por hipótese o ponto x_k é factível então

$$\langle \nabla g(x_k), z_k - x_k \rangle \leq 0$$

e assim, definindo $d_k := z_k - x_k$, duas situações podem ocorrer:

1. $\langle \nabla g(x_k), d_k \rangle < 0$. Neste caso, devido à convexidade do conjunto de restrições os pontos

$$x_{k+1} = x_k + \alpha d_k$$

sempre serão também factíveis para todo $0 \leq \alpha \leq 1$. Além disso, desenvolvendo $g(\cdot)$ em série de Taylor temos

$$g(x_{k+1}) = g(x_k) + \alpha \langle \nabla g(x_k), d_k \rangle + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

o que torna aparente que existe um valor de $\alpha > 0$ suficientemente pequeno tal que $g(x_{k+1}) < g(x_k)$. Ou seja, através de uma busca unidimensional na direção d_k podemos simultaneamente diminuir o valor da função objetivo e gerar um novo ponto que satisfaz as restrições do problema em consideração.

2. $\langle \nabla g(x_k), d_k \rangle = 0$. Neste caso, sem perda de generalidade, podemos considerar que $z_k = x_k$ e assim as condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema (5.2) podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \nabla g(x_k)_i - \text{Tr}[ZF_i] &= 0 \\ F(x_k) &> 0 \\ Z = Z' &\geq 0 \\ \text{Tr}[ZF(x_k)] &= 0 \end{aligned}$$

que são exatamente as condições necessárias de otimalidade para o problema original (5.1). Em outras palavras, a condição que define este caso só poderá ocorrer quando o ponto x_k for um ótimo local do problema que desejamos resolver.

Com base nos resultados anteriores, podemos estabelecer o seguinte algoritmo:

Algoritmo 5.1

1. *Inicialização* : determine x_0 tal que $F(x_0) > 0$. Se tal ponto não existir, o problema não possui solução factível. Faça o contador de iterações $k = 0$.

2. Resolva o problema de programação convexa

$$z_k := \operatorname{argmin}\{\langle \nabla g(x_k), z \rangle : F(z) > 0\}$$

Determine $d_k := z_k - x_k$ e $\theta_k := \langle \nabla g(x_k), d_k \rangle$.

3. Se $\theta_k \approx 0$, dentro de uma precisão previamente estabelecida, x_k é a solução ótima local procurada. **Fim.**

4. Resolva o problema de busca unidimensional

$$\alpha_k := \operatorname{argmin}\{g(x_k + \alpha d_k) : 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Determine $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$, faça $k \leftarrow k + 1$ e volte ao passo 2. \square

Como o algoritmo fornece uma seqüência decrescente de $g(x_k)$, ele deverá convergir para um ótimo local do problema (5.1) (veja [12]). Evidentemente, é necessário que exista pelo menos um ponto x_0 factível. Se ele não existir, o problema não possui nenhuma solução factível.

Analisando o passo 2 do algoritmo, podemos observar que é possível melhorar sua eficiência. Nesse passo temos um problema de otimização que pode ser resolvido por métodos de pontos interiores que, utilizando uma função de barreira $B(z)$, penalizam o conjunto de restrições. No nosso caso, essa função pode ser, por exemplo,

$$B(z) = -\log \det [F(z)]$$

Um método de pontos interiores pode minimizar a função

$$f(z) = \langle \nabla g(x_k), z \rangle + \beta B(z)$$

É fundamental perceber que o que deseja minimizar, de fato, é a função objetivo $\langle \nabla g(x_k), z \rangle$. Penalizar essa função significa, simplesmente, impedir que um ponto infactível seja a solução ótima do problema de minimização irrestrita de $f(z)$. Portanto, a influência da barreira sobre essa função deveria permanecer, idealmente, apenas sobre a fronteira das restrições. Isso equivale a fazer β tendendo a zero. Desse modo, se o método de pontos anteriores utilizar a direção de Newton, esta será

$$\begin{aligned} d_k &= -H^{-1}(z)(\nabla g(x_k) + \beta \nabla B(z)) \\ &= -H^{-1}(z)\nabla g(x_k) \end{aligned}$$

onde $H(z)$ é a Hessiana de $B(z)$. Como esta é uma função convexa, $H(z)$ é definida positiva.

Uma vez que em cada iteração do método de pontos interiores a função objetivo decresce, em apenas um passo conseguimos um novo ponto $z_k = x_k + \epsilon d_k$ com a

propriedade desejada $\langle \nabla g(x_k), z_k - x_k \rangle < 0$. Portanto o passo 2 pode ser reduzido a

$$d_k = -H^{-1}(x_k)\nabla g(x_k)$$

No entanto, precisamos notar que, enquanto anteriormente a busca era feita com $\alpha \in [0, 1]$, agora o maior valor de α para que $x_k + \alpha d_k$ esteja na fronteira das restrições (α_{max}) é dado pelo inverso do maior autovalor de

$$F^{-\frac{1}{2}}(x_k)(F(d_k) - F(0))F^{-\frac{1}{2}}(x_k)$$

(veja [14]). Portanto a busca unidimensional do passo 3 deverá ser feita para $\alpha \in [0, \alpha_{max}]$.

Finalmente podemos notar que, se fizermos $H(x_k) = I$, obtemos um método de gradiente, que não leva em conta as restrições ao escolher a direção, utilizando a mesma do caso em que o problema é irrestrito.

5.2 Realimentação de estado

Dado o sistema

$$S : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta_t)x + B_1(\theta_t)w + B_2(\theta_t)u \\ z = C_1(\theta_t)x + D_1(\theta_t)u \\ u = K(\theta_t)x \end{cases}$$

queremos resolver o problema

$$\min_K \{ \|S\|_2^2 : \|S\|_\infty < \gamma \} \quad (5.3)$$

Para utilizar o método proposto, devemos obter um problema equivalente na forma (5.1). Observando os resultados do capítulo 3, sabemos que a restrição $\|S\|_\infty < \gamma$ é equivalente a

$$\left[\begin{array}{ccc} A_i Y_i + Y_i A_i' + B_i F_i + F_i' B_i' + \lambda_{ii} Y_i + \gamma^{-2} E_i E_i' & R_i(Y) & Y_i C_{1i}' + F_i' D_{1i}' \\ & R_i'(Y) & 0 \\ & C_{1i} Y_i + D_{1i} F_i & 0 & -I \end{array} \right] < 0$$

$i = 1, \dots, N$

com $R_i(\cdot)$ e $S_i(\cdot)$ definidas em (2.6) e (2.7). Sabendo que $K_i = F_i Y_i^{-1}$, podemos escrever a função objetivo como

$$g(Y_1, \dots, Y_N, F_1, \dots, F_N) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \text{Tr}(E_i' P_i E_i)$$

com $P_i > 0, i = 1, \dots, N$ sendo soluções das equações de Lyapunov acopladas

$$(A_i + B_i F_i Y_i^{-1})' P_i + P_i (A_i + B_i F_i Y_i^{-1}) + (C_{1i} + D_{1i} F_i Y_i^{-1})' (C_{1i} + D_{1i} F_i Y_i^{-1}) + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

Portanto o problema (5.3) pode ser convertido para o problema (5.1).

Exemplo 5.1 *Seja o sistema do Exemplo 3.2. Aplicando o Algoritmo 5.1 para $\gamma_1 = 1.8, \gamma_2 = 0.8, \gamma_3 = 1, \gamma_4 = 1.5$ e*

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

encontramos, para o controlador central, $\|\mathcal{S}\|_2^2 = 17.0564$ e para o controlador misto, $\|\mathcal{S}\|_2^2 = 16.3342$. \square

5.3 Realimentação de saída

Com a parametrização de todos os controladores do tipo (4.2) que obedecem à restrição sobre a norma H_∞ apresentada no capítulo de realimentação de saída (4.33), basta observar que a norma H_2 pode ser escrita em função das variáveis da parametrização (Y_i, F_i, X_i, L_i) para verificar a possibilidade de aplicação do Algoritmo (5.1).

Outra possibilidade é, assumindo distribuição uniforme para θ_0 , adotar um controlador similar ao apresentado em [2], ou seja,

$$\begin{aligned} A_{ci} &= A_{\infty i} + B_{\infty i} C_{ci} - B_{ci} C_{2i} \\ B_{ci} &= (Q_i C'_{2i} + E_i D'_{2i}) (D_{2i} D'_{2i})^{-1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{\infty i} &= A_i + \gamma^{-2} Q_i C'_{1i} C_{1i} \\ B_{\infty i} &= B_i + \gamma^{-2} Q_i C'_{1i} D'_{1i} \end{aligned}$$

e $Q_i > 0, i = 1..N$ são soluções de (4.36). Portanto, os únicos parâmetros do controlador a serem determinados são $C_{ci}, i = 1..N$.

Teorema 5.1 *Sejam os controladores que atendem (5.4). Então, se as equações de Riccati acopladas*

$$\begin{aligned} (A_{\infty i} + B_{\infty i} C_{ci}) X_i + X_i (A_{\infty i} + B_{\infty i} C_{ci})' + \gamma^{-2} X_i (C_{1i} + D_{1i} C_{ci})' (C_{1i} + D_{1i} C_{ci}) X_i + \\ + B_{ci} D_{2i} D'_{2i} B'_{ci} + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} X_i X_j^{-1} X_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.5)$$

possuírem solução definida positiva e estabilizante, o sistema em malha fechada terá norma H_∞ menor que γ .

Prova : Escolhendo como variável de estado $\tilde{x} = [x \ x_c - x]$, sistema em malha fechada pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}(\theta_t)\tilde{x} + \tilde{E}(\theta_t)w \\ z &= \tilde{C}(\theta_t)\tilde{x}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i + B_i C_{ci} & B_i C_{ci} \\ \gamma^{-2} Q_i C'_{1i} (C_{1i} + D_{1i} C_{ci}) & A_i - B_{ci} C_{2i} + \gamma^{-2} Q_i C'_{1i} (C_{1i} + D_{1i} C_{ci}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{E}_i &= \begin{bmatrix} E_i \\ -E_i + B_{ci} D_{2i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_{1i} + D_{1i} C_{ci} & D_{1i} C_{ci} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e a restrição sobre a norma H_∞ torna-se

$$\tilde{A}_i P_i + P_i \tilde{A}_i' + \gamma^{-2} P_i \tilde{C}_i' \tilde{C}_i P_i + \tilde{E}_i \tilde{E}_i' + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_i P_j^{-1} P_i = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.6)$$

Fixando

$$P_i = \begin{bmatrix} Q_i + X_i & -Q_i \\ -Q_i & Q_i \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

basta substituir esse valor em (5.6) para completar a prova. \square

Com esse resultado, podemos escrever a norma H_2 do sistema em malha fechada como função das variáveis C_{ci} e utilizar novamente o Algoritmo 5.1 para resolver o problema misto H_2/H_∞ . No entanto, é preciso estar atento para o fato de que o Teorema 5.1 fornece apenas uma condição suficiente para a restrição sobre a norma H_∞ . Podemos verificar que ela é mais conservativa do que a restrição original verificando que impusemos uma estrutura às variáveis P_i (5.7).

Embora não seja realmente relevante para o problema misto, é interessante notar que, assumindo para o controlador a estrutura (5.4), o problema de minimização de um limitante da norma H_2 do sistema em malha fechada reduz-se ao caso de realimentação de estado. De fato, um limitante para a norma H_2 é dada por

$$\sum_{i=1}^N \text{Tr} (\tilde{C}_i P_i \tilde{C}_i') = \sum_{i=1}^N \text{Tr} (C_{1i} Q_i C'_{1i}) + \sum_{i=1}^N \text{Tr} ((C_{1i} + D_{1i} C_{ci}) X_i (C_{1i} + D_{1i} C_{ci})') \quad (5.8)$$

Observando que o primeiro termo é uma constante, é fácil verificar que o problema de minimização de (5.8) sujeito a (5.5) pode ser interpretado como minimização do

limitante da norma H_2 com a norma H_∞ menor que γ dado para o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_\infty(\theta_t)x - B_c(\theta_t)D_2(\theta_t)w + B_\infty(\theta_t)u \\ z &= C_1(\theta_t)x + D_1(\theta_t)u \\ u &= C_c(\theta_t)x\end{aligned}$$

ou seja, trata-se de um problema de realimentação de estado.

Capítulo 6

Conclusão e perspectivas

Em todo este trabalho, foi utilizada a estratégia de obter controladores baseados em equações de Riccati e LMIs. Esse era, de fato, nosso objetivo e acreditamos tê-lo alcançado.

O Capítulo 2 traz resultados já conhecidos de estabilidade e normas. Vale observar que, enquanto a norma H_∞ já havia sido introduzida em [16], a utilização de $\gamma_i, i = 1, \dots, N$ diferentes só foi apresentada em [1], com uma abordagem totalmente diferente da adotada aqui.

No Capítulo 3 temos novamente resultados constantes na literatura, com a diferença única de que procuramos utilizar sempre LMIs, ao contrário das referências, que de modo geral adotam argumentos de programação dinâmica.

Acreditamos que o Capítulo 4 é a grande contribuição desse trabalho. Se por um lado o problema de controle H_2 com realimentação de saída já havia sido tratado por outros autores, também é verdade que este texto trouxe uma interpretação mais correta do filtro que acaba por ser identificado no controlador, erroneamente classificado em [13] como um filtro de Kalman. Finalmente, temos nesse mesmo capítulo o problema de controle H_∞ com realimentação de saída, cuja solução é original. Além disso, trazemos também o problema de filtragem H_2 e H_∞ que, como pudemos observar, pode ser tratado como um caso específico de controle com realimentação de saída.

Por último temos o Capítulo 5, que traz também resultados ainda inéditos sobre o problema de controle misto H_2/H_∞ , aplicados a sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos.

Quanto às perspectivas no controle de sistemas com parâmetros sujeitos a saltos markovianos, acreditamos que um problema interessante ainda não resolvido é o de controle sem o conhecimento do estado da cadeia de Markov θ_t .

Para os próximos cavaleiros e Amazonas, os melhores votos de boa sorte.

Apêndice A

Processos Estocásticos

Pretendemos neste apêndice apresentar definições e resultados básicos da teoria de processos estocásticos. Inicialmente, introduziremos alguns conceitos de estatística para, posteriormente, apresentar resultados específicos de processos estocásticos e processos markovianos. Para um estudo mais aprofundado, vide [19].

Definição A.1 (Classe) *Dado um conjunto Ω , uma classe em Ω é um conjunto de conjuntos em Ω .* \square

Definição A.2 (σ -álgebra) *Dado um conjunto Ω , uma σ -álgebra em Ω é uma classe fechada sob toda e qualquer seqüência enumerável de operações de intersecção, união e complemento.* \square

Definição A.3 (Variável aleatória) *Dado um conjunto Ω , que denominaremos espaço de eventos, e uma σ -álgebra \mathcal{A} sobre o mesmo, definiremos a variável aleatória X como sendo uma função de Ω para \mathfrak{R} tal que*

$$\{w : X(w) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

\square

Definição A.4 (Espaço de probabilidade) *Dado um espaço de eventos Ω e uma σ -álgebra \mathcal{A} sobre o mesmo, podemos associar a eles uma medida de probabilidade \mathcal{P} , resultando em um espaço de probabilidade dado pela tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.* \square

A mesma medida de probabilidade pode ser associada a uma variável aleatória X sobre \mathcal{A} .

Definição A.5 (Processo estocástico) *Um processo estocástico é dado por um conjunto de variáveis aleatórias indexadas por um parâmetro t $\{X_t : t \in T\}$.* \square

Definição A.6 (Processo markoviano) *Sejam $t_1 < t_2 < \dots < t_N \in T$. Então um processo estocástico $\{X_t : t \in T\}$ será dito markoviano se*

$$\mathcal{P}(X_{t_N} | X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{N-1}}) = \mathcal{P}(X_{t_N} | X_{t_{N-1}})$$

□

A partir da definição acima, pode-se deduzir uma importante propriedade dos processos markovianos. De fato, observa-se que ele é totalmente definido a partir das distribuições de probabilidade de primeira ordem $\mathcal{P}(X_t)$ e $\mathcal{P}(X_t | X_s)$, $s < t$. Sendo $t_1 < t_2 < \dots < t_N \in T$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N}) &= \mathcal{P}(X_{t_N} | X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{N-1}}) \mathcal{P}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{N-1}}) \\ &= \mathcal{P}(X_{t_N} | X_{t_{N-1}}) \mathcal{P}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{N-1}}) \end{aligned}$$

Podemos desenvolver $\mathcal{P}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{N-1}})$ do mesmo modo e assim sucessivamente, obtendo

$$\mathcal{P}(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_N}) = \mathcal{P}(X_{t_N} | X_{t_{N-1}}) \mathcal{P}(X_{t_{N-1}} | X_{t_{N-2}}) \dots \mathcal{P}(X_{t_2} | X_{t_1}) \mathcal{P}(X_{t_1})$$

que é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov.

Vamos, finalmente, definir o gerador infinitesimal, que é o correspondente estocástico da derivada e foi amplamente utilizado neste texto.

Definição A.7 (Gerador infinitesimal) *Seja um processo estocástico definido por $\{X_t, t \in [0, +\infty)\}$. Seja ainda uma função $f(X_t)$ qualquer. Então o gerador infinitesimal de X_t aplicado a f será dado por*

$$\mathcal{L}f = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathbf{E} \left[\frac{f(X_{t+\Delta}) - f(X_t)}{\Delta} \right]$$

□

Exemplo A.1 *Seja uma cadeia de Markov $\theta_t \in 1, \dots, N$ com matriz de transição $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$. Então, tomando a função $P(\theta_t)$, vamos calcular o gerador infinitesimal aplicado a ela em um instante t tal que $\theta_t = i$.*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}P &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \mathbf{E} \left[\frac{P(\theta_{t+\Delta}) - P(\theta_t)}{\Delta} \middle| \theta_t = i \right] \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij} P_j \Delta + (1 + \lambda_{ii} \Delta) P_i - P_i}{\Delta} \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} P_j \end{aligned}$$

□

Exemplo A.2 *Vamos agora aplicar o gerador infinitesimal à função de Lyapunov $V(x, \theta_t) = x'P(\theta_t)x$, onde x é dado pelo sistema*

$$\dot{x} = A(\theta_t)x$$

Então, para um instante t tal que $\theta_t = i$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V &= \dot{x}'P(\theta_t)x + x'P(\theta_t)\dot{x} + x'\mathcal{L}P x \\ &= x'(A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}P_j)x\end{aligned}$$

□

Podemos observar que o gerador infinitesimal de uma função $f(X_t)$ pode ser interpretado também como a derivada no sentido tradicional de $\mathbf{E}[f(X_t)]$.

Apêndice B

Desigualdades matriciais lineares

Uma ferramenta bastante útil no tratamento convexo de problemas de controle são as desigualdades matriciais lineares, designadas neste texto LMIs¹. De fato, sua aplicação transcende a teoria de controle, sendo as LMIs utilizadas em uma série de outras áreas. Pretendemos neste apêndice definir LMIs de modo geral para depois situá-las dentro do contexto de controle, que nos interessa.

Definição B.1 (Desigualdade Matricial Linear (LMI)) *Uma desigualdade matricial linear é toda e qualquer condição que possa ser escrita como*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n F_i x_i > 0 \quad (\text{B.1})$$

onde F_0, \dots, F_n são matrizes reais simétricas e $x' = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$. □

Uma propriedade importante das LMIs é que o conjunto $\mathcal{X} = \{x : F(x) > 0\}$ é convexo. De fato, se x_r e x_s pertencem a \mathcal{X} , então para qualquer $\alpha_r > 0$, $\alpha_s > 0$:

$$\begin{aligned} F(\alpha_r x_r + \alpha_s x_s) &= F_0 + \sum_{i=1}^n F_i (\alpha_r x_{ri} + \alpha_s x_{si}) \\ &= \alpha_r F(x_r) + \alpha_s F(x_s) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Logo qualquer combinação convexa de x_r e x_s também pertence a \mathcal{X} .

Em problemas de controle, as variáveis utilizadas de modo geral não são vetores, mas matrizes. Por exemplo, temos a restrição

$$A'X + XA + Q < 0 \quad (\text{B.2})$$

¹do inglês *Linear Matrix Inequalities*

com $X > 0$, $X \in R^p$, bastante utilizada em problemas de estabilidade. Adotando uma base $B = (X_1, \dots, X_{\frac{p(p-1)}{2}})$, podemos reescrever a restrição (B.2) na forma (B.1), com x sendo a representação de X na base B .

Um resultado fundamental para o tratamento de problemas de controle é o chamado complemento de Schur, que permite a transformação de restrições com certos termos não-lineares em LMIs e é apresentado no seguinte lema, que foi retirado de [2].

Lema B.1 (Complemento de Schur) *Seja a matriz de blocos*

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2' & \Phi_3 \end{bmatrix}$$

onde Φ_1 e Φ_3 são matrizes simétricas. Então

- Se $\Phi_1 > 0$, $\Phi > 0 \iff \Phi_3 > \Phi_2' \Phi_1^{-1} \Phi_2$
- Se $\Phi_3 > 0$, $\Phi > 0 \iff \Phi_1 > \Phi_2 \Phi_3^{-1} \Phi_2'$

Prova :

A prova é imediata, bastando verificar que, se $\Phi_1 > 0$

$$\Phi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_2' \Phi_1^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_3 - \Phi_2' \Phi_1^{-1} \Phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Phi_2' \Phi_1^{-1} & I \end{bmatrix}'$$

e, se $\Phi_3 > 0$,

$$\Phi = \begin{bmatrix} I & \Phi_2 \Phi_3^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 - \Phi_2 \Phi_3^{-1} \Phi_2' & 0 \\ 0 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \Phi_2 \Phi_3^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}'$$

□

Essa propriedade pode ser utilizada, por exemplo, para transformar a desigualdade

$$A'X + XA + XBX + C < 0 \tag{B.3}$$

onde $B > 0$, que aparece frequentemente em problemas de controle, em LMI, bastando fazer $\Phi_1 = A'X + XA + C$, $\Phi_2 = X$ e $\Phi_3 = B$, obtendo-se

$$\begin{bmatrix} A'X + XA + C & X \\ X & -B^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

Se $B \geq 0$, podemos escrever $B = QQ'$, tendo portanto a relação

$$\begin{bmatrix} A'X + XA + C & XQ \\ Q'X & -I \end{bmatrix} < 0$$

que é novamente equivalente a (B.3). Finalmente, se B não for nem definida nem semidefinida positiva, (B.3) não é convexa e não pode ser expressa em termos de LMIs.

Referências Bibliográficas

- [1] F. Bernard, F. Dufour e P. Bertrand - "On the JLQ Problem with Uncertainty", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 6, Junho de 1997.
- [2] P. Colaneri, J.C. Geromel e A. Locatelli - "Control Theory and Design - An RH_2/RH_∞ viewpoint", Academic Press, 1997.
- [3] O.L.V. Costa, J.B.R. do Val e J.C. Geromel - "Continuous-Time State-Feedback H_2 -Control of Markovian Jump Linear Systems Via Convex Analysis", Automatica, aceito para publicação.
- [4] M.H.C. Everdij e H.A.P. Blom - "Embedding Adaptive JLQG into LQ Martingale Control with a Completely Observable Stochastic Control Matrix", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No. 3, Março de 1996.
- [5] D.P. de Farias, M.C. de Oliveira e J.C. Geromel - "Mixed RH_2/RH_∞ control of flexible structures", submetido para publicação.
- [6] D.P. de Farias e J.C. Geromel - "Um método numérico para a solução do problema misto RH_2/RH_∞ ", aceito para publicação nos anais do XII Congresso Brasileiro de Automática, 1998.
- [7] D.P. de Farias, J.C. Geromel e J.B.R. do Val - "A Note on the Robust Control of Markov Jump Linear Uncertain Systems", submetido a IEEE Transactions on Automatic Control.
- [8] D.P. de Farias, J.C. Geromel, J.B.R. do Val e O.L.V. Costa - "Output Feedback Control of Markov Jump Linear Systems", submetido a IEEE Transactions on Automatic Control.
- [9] X.Feng, K.A.Loparo, Y.Ji e H.J.Chizeck - "Stochastic Stability Properties of Jump Linear Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 1, Janeiro de 1992.
- [10] Y. Ji e H.J. Chizeck - "Controllability, Stabilizability and Continuous-Time Markovian Jump Linear Quadratic Control", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 7, Julho de 1990.

-
- [11] Y.Ji e H.J.Chizeck - "Jump Linear Quadratic Gaussian Control in Continuous Time", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 37, No. 12, Dezembro de 1992.
- [12] D.G. Luenberger - "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison Wesley, 1973.
- [13] M. Mariton - "Jump Linear Systems in Automatic Control", Marcel Dekker Inc., 1990.
- [14] M.C. Oliveira e J.C. Geromel - "Interior Point Methods and LMI Improvements and Benchmark", submetido para publicação.
- [15] C. Scherer - "Mixed H_2/H_∞ control for linear parametrically varying systems," Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, 1995.
- [16] C.E. de Souza e M.D. Fragoso - " H_∞ Control For Linear Systems With Markovian Jumping Parameters", Control-Theory and Advanced Technology, Vol.9, No.2, Junho de 1993.
- [17] J.B.R. do Val e T. Basar - "Receding Horizon Control of Jump Linear Systems and a Macroeconomic Policy Problem", Journal of Economic Dynamics and Control, submetido para publicação.
- [18] M. Vidyasagar, "Nonlinear Systems Analysis", Prentice Hall, 1993.
- [19] A.D. Wentzell - "A Course in the Theory of Stochastic Processes", McGraw-Hill, 1981.