

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE COMUNICAÇÕES

**Um Estudo sobre as Condições de Inversão Perfeita  
e de Equalização Não-Supervisionada de Canais  
SISO, SIMO e MIMO**

**Autor**

Michele Nazareth da Costa

**Orientador**

Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano

**Co-orientador**

Dr. Ricardo Suyama

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano (FEEC/UNICAMP)

Prof. Dr. Phillip Mark Seymour Burt (Escola Politécnica da USP)

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro Do Val (FEEC/UNICAMP)

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Campinas, 1 de julho de 2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C823e Costa, Michele Nazareth da  
Um estudo sobre as condições de inversão perfeita e de equalização não-supervisionada de canais SISO, SIMO e MIMO / Michele Nazareth da Costa. -- Campinas, SP: [s.n.], 2009.

Orientadores: João Marcos Travassos Romano, Ricardo Suyama.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Equalizadores (Eletronica). 2. Processamento de sinais. 3. Sistemas lineares. I. Romano, João Marcos Travassos. II. Suyama, Ricardo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título.

Título em Inglês: A study about the conditions for perfect inversion and non-supervised equalization of SISO, SIMO and MIMO channels

Palavras-chave em Inglês: Equalizers, Signal processing, Linear systems

Área de concentração: Telecomunicações e Telemática

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Phillip Mark Seymour Burt, João Bosco Ribeiro Do Val

Data da defesa: 01/07/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

**Candidata:** Michele Nazareth da Costa

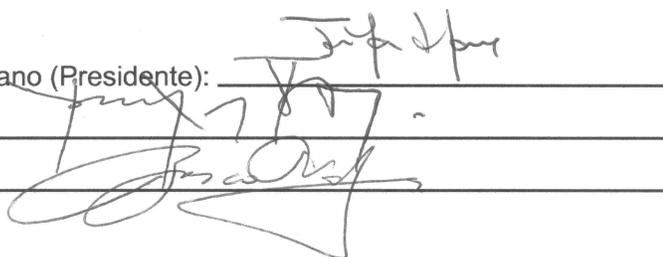
**Data da Defesa:** 1 de julho de 2009

**Título da Tese:** "Um Estudo sobre as Condições de Inversão Perfeita e de Equalização Não-Supervisionada de Canais SISO, SIMO e MIMO"

Prof. Dr. João Marcos Travassos Romano (Presidente):

Prof. Dr. Phillip Mark Seymour Burt:

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val:



The image shows three handwritten signatures in black ink, each written over a horizontal line. The signatures are: 1. João Marcos Travassos Romano (President), 2. Phillip Mark Seymour Burt, and 3. João Bosco Ribeiro do Val.

## Resumo

Esta dissertação teve como motivação inicial a busca de uma abordagem unificada para o problema de equalização não-supervisionada, a ser aplicada às configurações SISO, SIMO e MIMO. Tal abordagem se refere a dois aspectos fundamentais do problema: a estrutura do equalizador e a otimização de seus parâmetros. Desta forma, propomos uma mesma metodologia para estudar, nas três configurações citadas, o que denominamos de limitação estrutural e de limitação de critério. A primeira é caracterizada pela impossibilidade de inversão perfeita do canal fazendo uso de apenas filtros com resposta impulsiva finita (FIR); a segunda se refere às limitações quanto ao uso de estatísticas de ordem dois (EO2) para a obtenção do equalizador ótimo no caso não-supervisionado. Para tal análise, reunimos resultados um tanto dispersos na literatura para formalizar de maneira unificada e acessível os conceitos de sistema inversível e de sistema de fase mínima para as três configurações. Em seguida, empregamos o conceito de filtro de erro de predição linear para estudar o uso de EO2 em equalização, estendendo esse conceito também às três configurações.

# Abstract

This dissertation was motivated by the idea of developing a unified approach to the problem of unsupervised equalization, in the context of SISO, SIMO and MIMO channels. This approach is concerned with two fundamental aspects of the equalization problem: the structure of the equalizer and the optimization of its parameters. In this sense, we propose a same methodology to study, in the three aforementioned scenarios, two different limitations. The first one, which we denote *structural limitation*, is related to the impossibility of inverting any channel employing only finite impulse response (FIR) filters. The second one, which we call *criterion limitation*, refers to the limitation regarding the use of second order statistics (SOS) to obtain the equalizer in an unsupervised manner. In order to perform this analysis, we collected results that are rather scattered in the literature to formalize the concepts of invertible and minimum-phase systems in all three scenarios. Then, we use the concept of a prediction-error filter to study the limitation of SOS in the equalization problem.

"O valor das coisas não está no tempo em que elas duram,  
mas na intensidade com que acontecem.  
Por isso existem momentos inesquecíveis,  
coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis."

Autor desconhecido

*Aos meus pais,  
Loide e Miguel.*

# Agradecimentos

Agradeço

Primeiramente, a Deus, a quem tudo devo.

Aos meus queridos pais, Loide e Miguel, e meu irmão, André, por todo o amor e compreensão. Em especial a minha mãe, minha grande encorajadora de cada passo, pela confiança, estímulo, dedicação e preocupação.

Aos meus familiares, pelo carinho, incentivo e apoio. Em especial aos meus queridos avós, Raul e Wilma, pelo amor e pelos ótimos momentos juntos.

Ao meu orientador, Prof. João Marcos Travassos Romano, pela orientação, apoio, confiança e amizade. Agradeço também pela preocupação durante o desenvolvimento do trabalho que extrapolaram a relação aluno-professor, contribuindo para minha formação pessoal e profissional.

Ao meu co-orientador Ricardo Suyama, pela orientação, apoio, confiança, amizade e, principalmente, paciência. Agradeço também pelas discussões proveitosas, pelo rigor na definição de conceitos e notações que foram imprescindíveis não só para o desenvolvimento do trabalho como para meu amadurecimento técnico.

Aos professores Phillip Mark Seymour Burt e João Bosco Ribeiro Do Val, por terem participado da banca examinadora, por suas contribuições cuidadosas e enriquece-

doras.

Aos professores Aline de Oliveira Neves Panazio e Romis Ribeiro de Faissol Attux, pela amizade, apoio e pela pronta disponibilidade em servir como membros suplentes da banca examinadora desta dissertação.

Aos amigos do Laboratório de Processamento de Sinais para Comunicações - DSP-Com: Alan, André Kazuo, Cristina, Cynthia, Danilo, Diogo, Eduardo Rosa, Everton, Fabiano, Fábio, Filipe, Glauco, Murilo, Rafael Ferrari, Rafael Krummenauer, Renato Lopes, pela amizade, ajuda e discussões proveitosas.

Aos amigos Alexandre Anzai, Ariadne, Ednei, Esloany, Fábio Lumertz, Fernanda, Francisco Augusto, Grace, Jeferson, Jeremias, Leonardo, Maice, Miriam, Nathalie, Teresa, Vanessa, Veruska, pelo apoio, incentivo e amizade.

Aos companheiros de repúblicas, Arnaldo, André, Daniela, Glauco, Karina, Kátia, Lara, Leonardo, Raquel, Tatiana, Tiago Fernandes, Vanessa, pela boa convivência, compreensão, apoio e amizade.

À Celi, Cynthia, Edson, Jerusa, Mazé, Noemia, Washington e todos os funcionários da FEEC, cuja ajuda foi indispensável.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

# Sumário

<b>Resumo/ Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>Notação</b>	<b>xviii</b>
<b>Símbolos</b>	<b>xx</b>
<b>Abreviaturas</b>	<b>xxiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Organização da Dissertação . . . . .	3
1.2 Publicações . . . . .	4
<b>2 Equalização de Sistemas SISO</b>	<b>5</b>
2.1 Descrição do Problema . . . . .	5
2.2 Equalização x Inversão Perfeita . . . . .	7
2.3 Equalização Supervisionada . . . . .	10
2.4 Equalização Não-Supervisionada . . . . .	13
2.4.1 Insuficiência de EO2 para Identificação de Canais SISO . . . . .	13
2.4.2 Equalização baseada nos Teoremas BGR e SW . . . . .	15
2.5 Predição x Equalização não-supervisionada . . . . .	18
2.5.1 Predição Linear . . . . .	18

2.6	Conclusão . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Equalização de sistemas SIMO</b>	<b>25</b>
3.1	Descrição do Problema . . . . .	25
3.1.1	Formulação Matemática de Modelos SIMO . . . . .	27
3.2	Modelo SIMO e a abordagem de superamostragem . . . . .	29
3.2.1	Cicloestacionaridade de Segunda Ordem . . . . .	31
3.2.2	Equivalência entre equalizador fracionário e modelo de equalizador MISO . . . . .	34
3.3	Inversão perfeita de canais SIMO . . . . .	36
3.4	Equalização de canais SIMO . . . . .	39
3.5	Equalização baseada em Filtros de Erro de Predição . . . . .	44
3.5.1	Propriedade de Fase Mínima . . . . .	50
3.5.2	FEP como Filtro Branqueador . . . . .	52
3.6	Conclusão . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Equalização de sistemas MIMO</b>	<b>57</b>
4.1	Descrição do Problema . . . . .	57
4.2	Inversão perfeita de canais MIMO . . . . .	61
4.3	Condições de Equalização de canais MIMO . . . . .	67
4.4	Limitação do uso de EO2 . . . . .	70
4.4.1	Fatoração Para-unitária e Irreduzível . . . . .	70
4.5	Predição Linear e Equalização MIMO . . . . .	74
4.5.1	Propriedades do FEP Progressivo . . . . .	77
4.6	Conclusão . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Formas de Smith e Smith-McMillan</b>	<b>81</b>
	<b>Referências</b>	<b>87</b>
	Referências . . . . .	87

# Lista de Figuras

2.1	Representação de um sistema de transmissão discreto no tempo. . . . .	6
2.2	Modelo simplificado de um sistema de comunicações digitais. . . . .	7
2.3	Diagrama de equalização supervisionada. . . . .	11
2.4	Sistemas que possuem a mesma resposta de magnitude em frequência. . . . .	15
2.5	Filtro de Predição Linear Progressiva. . . . .	19
2.6	FEP Linear Progressiva, relação entre os filtros de predição e erro de predição. . . . .	20
3.1	Modelo SIMO com $P$ subcanais. . . . .	26
3.2	Modelo de arranjo de antenas. . . . .	27
3.3	Representação do modelo SIMO, com $P$ subcanais e seus respectivos subequalizadores na ausência de ruído. . . . .	29
3.4	Representação da obtenção da seqüência superamostrada. . . . .	31
3.5	Resposta de magnitude dos sistemas. . . . .	39
3.6	Modelo SIMO com fatoração do sistema. . . . .	43
3.7	Modelo de canal SIMO e modelo de equalizador MISO com fatoração do sistema. . . . .	44
3.8	Representação do modelo SIMO com $P$ subcanais e equalizador MIMO. . . . .	45
3.9	Caso canal SIMO fase mínima sem zeros em comum: Sinal na saída do equalizador ótimo. . . . .	54
3.10	Caso canal SIMO fase mínima com apenas um zero em comum: Sinal na saída do equalizador ótimo. . . . .	55

3.11	Caso canal SIMO fase máxima com apenas um zero em comum: Sinal na saída do equalizador ótimo. . . . .	56
4.1	Representação do modelo MIMO, com $l$ fontes e $m$ sensores. . . . .	58
4.2	Representação do modelo MIMO do canal e do equalizador na ausência de ruído. . . . .	60
4.3	Representação do modelo MIMO do canal na ausência de ruído. . . . .	69
4.4	Modelo MIMO do canal e do equalizador na ausência de ruído. . . . .	69
4.5	Modelo MIMO na ausência de ruído: Etapas de equalização. . . . .	75
4.6	Modelo MIMO: Etapa de pré-equalização. . . . .	75

# Notação

$a$	Escalar $a$
$\mathbf{a}$	Vetor $\mathbf{a}$
$\mathbf{A}$	Matriz $\mathbf{A}$
$E[\cdot]$	Operador Esperança Matemática
$\lceil \cdot \rceil$	Operador teto
$*$	Operador convolução
$(\cdot)^H$	Conjugado transposto de uma matriz (matriz Hermitiana)
$(\cdot)^T$	Transposto de uma matriz
$(\cdot)^*$	Complexo conjugado
$\det(\cdot)$	Determinante de uma matriz
$\delta[\cdot]$	Função <i>Delta de Kronecker</i> ou função <i>Impulso Unitária Discreta</i>



## Símbolos

$d$	Atraso inteiro arbitrário
$d[n]$	Sinal desejado
$v[n]$	Ruído aditivo do canal
$s[n]$	Amostra do sinal transmitido
$x[n]$	Amostra do sinal recebido
$y[n]$	Amostra do sinal na saída do equalizador
$e[n]$	Erro entre o sinal desejado e o sinal recebido
$e_f[n]$	Erro de predição progressiva
$\mathbf{v}[n]$	Vetor formado pelos ruídos aditivos correspondente a cada subcanal
$\mathbf{s}[n]$	Vetor formado pelos sinais transmitidos
$\mathbf{x}[n]$	Vetor formado pelos sinais recebidos
$\mathbf{y}[n]$	Vetor formado pelos sinais na saída do equalizador
$\mathbf{e}_f[n]$	Vetor formado pelos erros de predição progressiva
$J_{EQM}$	Erro quadrático médio entre o sinal desejado e o sinal recebido
$J_{Godard}$	Função custo do critério de Godard
$\mathbf{h}$	Vetor formado pelos $M + 1$ coeficientes do canal
$\mathbf{w}$	Vetor formado pelos $L + 1$ coeficientes do equalizador
$\mathbf{p}$	Vetor de correlação cruzada entre o sinal recebido $\mathbf{x}[n]$ e o sinal desejado $d[n]$
$\mathbf{R}$	Matriz de autocorrelação do sinal recebido $\mathbf{x}[n]$
$\mathbf{H}_i$	Matriz formada pelos coeficientes do canal
$\mathbf{w}_i$	Vetor formado pelos coeficientes do equalizador

**P** Matriz formada pelos coeficientes do filtro de erro de predição

# Abreviaturas

AR	Auto-Regressivo
BGR	Benveniste-Goursat-Ruget
CRU	Circunferência de Raio Unitário
EO2	Estatísticas de Ordem Dois
EOS	Estatísticas de Ordem Superior
EQM	Erro quadrático médio
FEP	Filtro de Erro de Predição
FEPP	Filtro de Erro de Predição Progressiva
FEPR	Filtro de Erro de Predição Retrógrada
FIR	Resposta ao Impulso Finita ( <i>Finite Impulse Response</i> )
LMS	<i>Least Mean Square</i>
i.i.d.	independente e identicamente distribuído
IIS	Interferência Intersimbólica
IIR	Resposta ao Impulso Infinita ( <i>Infinite Impulse Response</i> )
MIMO	Múltiplas entradas e múltiplas saídas ( <i>Multiple Input, Multiple Output</i> )
RLS	<i>Recursive Least Squares</i>
SIMO	Uma entrada e múltiplas saídas ( <i>Single Input, Multiple Output</i> )
SISO	Uma entrada e uma saída ( <i>Single Input, Single Output</i> )
SNR	Relação Sinal-Ruído ( <i>Signal-to-Noise Ratio</i> )
SW	Shalvi-Weinstein
ZF	<i>Zero-Forcing</i>



# 1

## Introdução

Um objetivo básico de qualquer sistema de comunicação é prover a troca de informação de maneira confiável. Em comunicações digitais, a interferência intersimbólica (IIS) e o ruído são as principais causas de degradação de sinal e um dispositivo usual de contramedida é o equalizador, nas suas diversas formas de implementação (Qureshi, 1985).

Os equalizadores podem ser classificados quanto ao modo de funcionamento como *adaptativos* ou *não-adaptativos*. Os equalizadores *não-adaptativos* são aqueles que efetuam compensações nas componentes dos sinais de forma preestabelecida: seus parâmetros e sua estrutura são fixos. Foram os primeiros a surgir em implementações de sistemas de comunicação, sendo adequados para canais que possuem características estacionárias ou ainda para aqueles cujas características de transmissão não sofram grandes desvios ou alterações com o passar do tempo.

Contudo, na grande maioria das aplicações, ou o canal não é conhecido ou varia com o tempo. Torna-se, desta forma, vantajoso que o equalizador seja ajustado ao longo do tempo por meio de um algoritmo adaptativo. Os equalizadores *adaptativos* são implementados usando algoritmos que têm condições de verificar periodicamente características do canal de transmissão e compensar ou equalizar, dentro de sua capacidade e de sua limitação física, variações produzidas por este sobre os símbolos emitidos pela fonte.

Uma prática muito difundida na realização de equalização adaptativa é utilizar

seqüências pré-definidas de treinamento conhecidas pelo receptor com o objetivo de adaptar convenientemente os coeficientes do equalizador. A esta abordagem dá-se o nome de *equalização supervisionada*. Embora eficiente, esta abordagem nem sempre é interessante ou mesmo viável.

Nesse sentido, surge uma outra abordagem onde não são empregadas seqüências de treinamento e, em contrapartida, a adaptação é realizada a partir do sinal recebido e de informações estatísticas do sinal transmitido. A esta abordagem dá-se o nome de *equalização não-supervisionada* ou *equalização cega*.

Um dos maiores problemas da técnica de equalização cega adaptativa é sua baixa velocidade de convergência e a existência de ótimos locais na função custo. Os métodos baseados em estatísticas de ordem dois (EO2) oferecem vantagens significativas frente aos baseados em estatísticas de ordem superior (EOS), tais como: maior velocidade de convergência, facilidade de implementação e baixa complexidade computacional (Causey, 1999).

Duas dificuldades inerentes ao problema de equalização cega serão abordadas neste trabalho. A primeira pode ser classificada de *estrutural*, e refere-se à impossibilidade de inversão perfeita quando tanto o canal quanto o equalizador são filtros com resposta ao impulso finita (FIR, *Finite Impulse Response*).

A segunda dificuldade pode ser classificada como de *critério* de otimização e está mais especificamente ligada às características do processamento não-supervisionado, cuja base teórica reside, sobretudo, nos teoremas de Benveniste-Goussat-Rouget (Benveniste, Goursat, & Ruget, 1980) e, posteriormente, de Shalvi-Weinstein (SW) (Shalvi & Weinstein, 1990).

A partir do início da década de 90, vários trabalhos propuseram-se a superar esses dois problemas pela introdução de métodos de equalização voltados para sistemas SIMO (*Single Input, Multiple Output*) e MIMO (*Multiple Input, Multiple Output*) (Tong, Xu, & Kailath, 1994), (Papadias, 1995), (Reddy, Papadias, & Paulraj, 1997).

A diversidade inerente a esses esquemas permite flexibilizar a limitação estrutural, obtendo-se, em alguns casos, equalização perfeita mesmo apenas com sistemas FIR. Permite-se ainda chegar a soluções ótimas fazendo uso somente de EO2 do sinal transmitido, superando assim a segunda limitação do processamento cego.

Convém observar que, além do aspecto teórico comentado acima, as estruturas

SIMO e MIMO apresentam um interesse prático crescente e possuem diversas vantagens sistêmicas. A diversidade pode ser introduzida tanto no domínio temporal, pelo processo de superamostragem, como espacial, por meio do uso de múltiplas antenas. Ambos os casos recaem em uma mesma modelagem matemática.

O principal objetivo deste trabalho é prover uma visão unificada das condições de equalização de canais SISO (*Single Input, Single Output*), SIMO e MIMO, em um contexto não-supervisionado, abordando as duas dificuldades mencionadas acima. Novos resultados foram obtidos no que diz respeito às relações entre equalização e predição, e às propriedades de filtros de erro de predição para sistemas SIMO.

## 1.1 Organização da Dissertação

Assim, dividimos a dissertação da seguinte forma:

- No capítulo 2 são discutidos os principais aspectos relacionados ao problema de equalização de sistemas de comunicação SISO. Provemos uma revisão da vasta literatura no assunto com ênfase nos já citados problemas de inversão perfeita de canais FIR e da limitação quanto ao uso de EO2 no caso não supervisionado. Para abordar esta limitação, resumimos algumas propriedades dos filtros de erro de predição linear e suas relações com o problema de equalização. Este tipo de abordagem, característica do presente trabalho, nos permitirá chegar a conclusões mais originais sobretudo nos capítulos seguintes.
- No capítulo 3 abordamos o problema de equalização de sistemas SIMO, para o qual conceitos importantes são introduzidos através de uma nova abordagem. Estudamos o caso particular dos modelos SIMO obtidos da superamostragem do sinal original. Investigamos a condição para equalização perfeita e quais os casos em que é possível satisfazer plenamente tal condição. Ao abordamos as condições em que sistemas SIMO podem ser equalizados mesmo na impossibilidade de inversão do canal, apresentamos os conceitos de fase mínima e de zeros e pólos de sistema SIMO. Por fim, discutimos o problema de predição linear e suas relações com o problema de equalização não-supervisionada no

caso SIMO. Neste contexto, demonstramos as propriedades de filtro branqueador e de fase mínima do FEP progressivo, este último sendo uma contribuição mais específica deste capítulo.

- No capítulo 4 voltamos a nossa atenção ao problema de equalização de sistemas de comunicação MIMO. Seguindo a mesma linha desenvolvida no capítulo 3, definimos os conceitos de fase mínima, zeros e pólos para o sistema MIMO, e verificamos as condições de inversão perfeita e de equalização. Como uma contribuição específica deste capítulo, provemos uma nova interpretação de equalização de sistemas MIMO de fase mínima com zeros. As limitações quanto ao uso de EO2 na equalização cega foram também analisadas. Finalmente, discutimos o problema de predição linear e suas relações com o problema de equalização não-supervisionada no caso MIMO.
- No capítulo 5 são apresentadas as conclusões gerais sobre o trabalho e algumas perspectivas de trabalhos futuros.

## 1.2 Publicações

A seguir, o trabalho publicado no decorrer do Mestrado:

- Costa, M. N. da, Suyama, R. e Romano, J. M. T. , "Uma abordagem unificada para as condições de equalização de canais SISO, SIMO e MIMO", XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBrT'08), Rio de Janeiro, Brasil, Setembro, 2008.

# 2

## Equalização de Sistemas SISO

Os sistemas de comunicação onde há apenas um transmissor e um receptor dão origem ao caso mais simples estudado na tese, os canais SISO. O estudo de equalização em sistemas SISO constitui o objetivo deste capítulo.

Na seção 2.1, fazemos uma breve descrição do problema de equalização de canais SISO. Estudamos, na seção 2.2, a condição para equalização perfeita e os casos em que é possível satisfazer plenamente tal condição, discutindo assim a diferença entre equalização e inversão perfeita para canais SISO. Na seção 2.3, apresentamos o conceito de equalização supervisionada. Abordaremos, neste contexto, um dos critérios mais clássicos da teoria de filtragem ótima, o *critério de Wiener*. Já na seção 2.4, introduzimos o problema da equalização não-supervisionada, destacando os principais resultados teóricos e seus dois teoremas fundamentais. Finalmente, discutimos, na seção 2.5, o problema de predição linear e suas relações com o problema de equalização não-supervisionada; tal discussão vem no sentido de por em evidência algumas limitações próprias de equalização SISO, abrindo perspectivas para o estudo de outras configurações, tratadas nos capítulos seguintes.

### 2.1 Descrição do Problema

Considere o caso mais simples que consiste em um canal com apenas uma entrada e uma saída, SISO, como ilustrado na figura 2.1. Assume-se que o canal pode ser

modelado como um sistema linear definido por sua resposta ao impulso  $h[n]$  e que o sinal transmitido  $s[n]$  é composto por amostras independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). O sinal resultante  $x[n]$  é somado ao ruído aditivo do canal  $v[n]$  que é modelado por um processo branco de média nula e distribuição gaussiana.

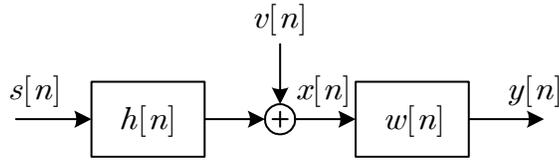


Figura 2.1: Representação de um sistema de transmissão discreto no tempo.

De acordo com a figura 2.1, o sinal recebido é dado por:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] s[n-i] + v[n] \\ &= h[n] * s[n] + v[n], \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $*$  indica o operador de convolução.

Observa-se que  $x[n]$  é formado por uma sobreposição de versões do sinal enviado  $s[n]$ , isto é,  $x[n]$  depende de símbolos transmitidos em outros instantes, ponderados por  $h[i]$  ( $i$ -ésimo coeficiente do canal). Isto significa que o sinal está sujeito à IIS, a qual é usualmente causada por canais limitados em largura de banda, multi-percurso ou canais com desvanecimento (Ding & Li, 2001).

Assim, é usual fazer uso de um filtro, denominado equalizador, cujo objetivo é contrabalancear os efeitos causados pelo meio de transmissão, seguido de um dispositivo decisor, ou de decisão, acoplado na saída do equalizador, para que se possa garantir a confiabilidade das informações a serem transmitidas através do canal. A figura 2.2 apresenta um esquema simplificado de um sistema de comunicações digitais.

Considerando que o equalizador também possui uma estrutura linear, descrita por sua resposta impulsiva  $w[n]$ , sua saída pode ser expressa por:

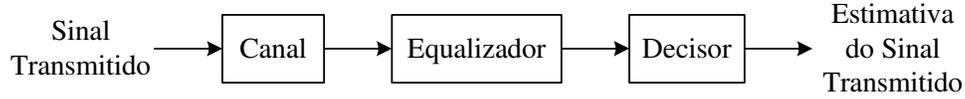


Figura 2.2: Modelo simplificado de um sistema de comunicações digitais.

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i] x[n-i] \\
 &= w[n] * x[n].
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Utilizando (2.1) e (2.2), podemos obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= w[n] * (h[n] * s[n] + v[n]) \\
 &= c[n] * s[n] + w[n] * v[n],
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

onde  $c[n] = w[n] * h[n]$  é a resposta impulsiva conjunta canal-equalizador.

## 2.2 Equalização x Inversão Perfeita

Idealmente, procura-se obter um equalizador que disponibilize em sua saída uma versão atrasada e, possivelmente, atenuada ou amplificada do sinal transmitido. Em outras palavras, espera-se que:

$$y[n] = k s[n - d]. \tag{2.4}$$

Entretanto, observando-se (2.3), nota-se que a saída do equalizador será composta por duas parcelas: uma relacionada ao sinal transmitido e outra ligada ao ruído no receptor. Desprezando a parcela relacionada ao ruído em (2.3), a condição ideal em (2.4) corresponde a obter uma resposta conjunta  $c[n]$ , tal que:

$$c[n] = k \delta[n - d], \tag{2.5}$$

onde  $\delta[n]$  é chamada de função *Delta de Kronecker* ou função *impulso unitária discreta*, definida por:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}
 \tag{2.6}$$

Quando um equalizador,  $w[n]$ , é capaz de produzir uma resposta conjunta canal-equalizador,  $c[n]$ , que pode ser expressa por (2.5), então é atingida a chamada condição *Zero-Forcing* (ZF) (Lucky, 1966), na qual este equalizador é aquele que inverte perfeitamente o canal. É importante reiterar que tal condição corresponde à recuperação da versão do sinal original com ganho  $k$  e atraso  $d$ .

O critério ZF se restringe então à mitigação da IIS, e, em seu bojo, não considera a existência do ruído aditivo. Desta forma, de acordo com (2.3), pode se observar que, para valores apropriados dos coeficientes da resposta impulsiva  $w[n]$ , é possível zerar as versões anteriores do sinal enviado que estão sobrepostas ao sinal atual transmitido  $s[n]$ .

Como decorrência do fato de não levar em conta o efeito do ruído, o critério ZF apresenta um desempenho pior quanto menor for a relação sinal-ruído (SNR, *Signal-to-Noise Ratio*). A partir de (2.5), isto pode ser observado através da função de transferência do equalizador ideal, que atende à condição ZF, dada por:

$$w(z) = \frac{k z^{-d}}{h(z)}, \quad (2.7)$$

onde  $h(z)$  é a função de transferência do equalizador. De acordo com esta expressão, a função de transferência do equalizador será a inversa da função de transferência do canal, isto é, os zeros do canal corresponderão aos pólos do equalizador. Desta forma, quando  $h(z)$  possuir zeros próximos à circunferência de raio unitário (CRU), o equalizador gerará uma forte amplificação do ruído na faixa de frequências correspondentes a estes zeros, o que levará à degradação do sinal recebido. A este fenômeno dá-se o nome de *noise enhancement* (Ding & Li, 2001), (Neves, 2001).

Por fim, um último aspecto que merece ser mencionado diz respeito às estruturas do canal e do equalizador ZF. Devido às características físicas do problema, o modelo linear discreto do canal de comunicação, tanto no caso com fio quanto no sem fio, consiste em geral de um filtro FIR (Jeruchim, Balaban, & Shanmugan, 2000). Um equalizador que satisfaça perfeitamente o critério ZF implica a existência de um filtro que inverta perfeitamente este canal. Contudo, há restrições práticas na estrutura deste filtro, tais como ser causal, estável, linear e ter número de coeficientes finito. Cabe então discuti-las com mais detalhes.

### Condições para equalização perfeita

Partindo da situação ideal em que desejamos satisfazer plenamente a condição ZF, usando um modelo de canal FIR, chegaremos a um equalizador com resposta impulsiva infinita (IIR, *Infinite Impulse Response*) com apenas pólos não nulos. Supondo que estejamos trabalhando apenas com sistemas causais e estáveis, imporemos pólos dentro da CRU, e, portanto, o canal necessariamente será de *fase mínima*, isto é, não terá zeros fora da CRU.

Todavia, é mais usual trabalhar com equalizadores FIR por sua simplicidade de implementação, e, desta forma, a alternativa neste caso seria emular os pólos do equalizador através de um número de zeros suficientemente grande. Porém, por estarmos trabalhando com uma aproximação da inversa da função de transferência do equalizador, a inversão perfeita do canal não será alcançada. Isto pode ser visualizado pelo simples exemplo abaixo:

Seja um canal  $h(z) = 1 - az^{-1}$ . O equalizador IIR que prove a inversão perfeita é  $w(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ . Esta função pode ser escrita como:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots \quad (2.8)$$

Considerando uma aproximação a  $N$  coeficientes, temos:

$$\frac{1}{1-az^{-1}} \cong 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots + a^{N-1}z^{-(N-1)} = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}, \quad (2.9)$$

ou seja, um filtro IIR com pólo em  $a$  fica aproximado por um filtro FIR com  $N$  zeros repartidos uniformemente na CRU, exceto o zero em  $a$ .

Uma outra solução é partir de modelo de canais IIR com zeros não nulos. Neste caso, é possível satisfazer plenamente (2.5) utilizando um filtro IIR apropriado. Como estamos considerando apenas filtros estáveis, todos os zeros e pólos tanto do canal quanto do equalizador estarão dentro da CRU, e, conseqüentemente, os filtros serão de fase mínima, visto que os pólos do canal serão iguais aos zeros do equalizador e vice-versa.

Desta forma, podemos dizer que é possível atingir a condição ZF nas seguintes situações:

- O canal é uma estrutura FIR de fase mínima (possui pólos apenas em zero e todos os zeros dentro ou sobre a CRU) e o equalizador é composto apenas por pólos;
- O canal e o equalizador possuem uma estrutura IIR e são sistemas de fase mínima (pólos e zeros dentro ou sobre a CRU).

Contudo, mesmo na impossibilidade de inversão perfeita do canal, ainda é possível recuperar a informação transmitida por meio de filtros com estrutura estável, que possuam pólos dentro da CRU, e com um número suficiente de zeros e pólos de modo a aproximar a condição ZF. Assim sendo, um equalizador não precisa, necessariamente, inverter o canal: basta que o sinal obtido na saída do decisor corresponda a uma estimativa correta do sinal transmitido. Neste caso, diz-se simplesmente que o canal foi *equalizado*. Por outro lado, quando o critério ZF é satisfeito, diz-se que o canal foi *perfeitamente equalizado* (ou invertido), o que corresponde, na ausência de ruído, à recuperação perfeita do sinal transmitido.

Uma vez definida a estrutura a ser utilizada no equalizador, resta obter os parâmetros que levem à equalização do canal. Isto corresponde, em linhas gerais, a um processo de otimização. Dependendo das informações disponíveis a respeito do sinal transmitido, os equalizadores podem ser implementados utilizando duas abordagens: a de equalização *supervisionada* ou a de equalização *não-supervisionada* (conhecida também por equalização *cega*).

## 2.3 Equalização Supervisionada

Na abordagem de equalização *supervisionada*, faz-se com que, periodicamente, ou quando identificada a necessidade, a fonte emita uma seqüência de símbolos que seja previamente conhecida pelo receptor. Esta seqüência é chamada de seqüência de treinamento e será utilizada como referência.

Um dos critérios mais clássicos da teoria de filtragem ótima (Haykin, 2002), o *critério de Wiener*, utiliza, necessariamente, um sinal de referência e, neste sentido, aplica-se ao problema de equalização supervisionada.

### Filtragem de Wiener

Na abordagem de *Wiener*, a estratégia é fazer uso das informações estatísticas contidas nos sinais recebido e transmitido para se alcançar um dispositivo eficiente que proporcione uma versão segura da mensagem transmitida.

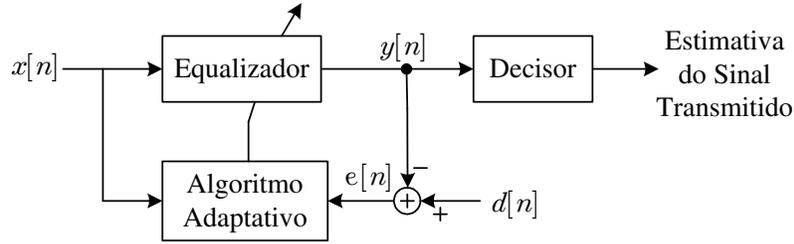


Figura 2.3: Diagrama de equalização supervisionada.

A figura 2.3 ilustra o esquema de equalização para o critério de Wiener. Este critério baseia-se na minimização da função custo dada pelo erro quadrático médio (EQM) entre o sinal desejado  $d[n]$ , alguma versão do sinal transmitido, e o sinal na saída do equalizador  $y[n]$ :

$$\begin{aligned} J_{EQM} &= E [ |e[n]|^2 ] \\ &= E [ |d[n] - y[n]|^2 ], \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $E[\cdot]$  é o operador esperança.

Fazendo uso de apenas filtros causais e de comprimento finito, as equações (2.1) e (2.2) podem ser expressas em notação matricial de acordo com:

$$x[n] = \mathbf{h}^H \mathbf{s}[n] + v[n] \quad (2.11)$$

e

$$y[n] = \mathbf{w}^H \mathbf{x}[n], \quad (2.12)$$

onde os vetores  $\mathbf{s}[n]$  e  $\mathbf{x}[n]$  são formados por uma seqüência de  $M + 1$  amostras do sinal transmitido e de  $L + 1$  amostras do sinal recebido, respectivamente, isto é,  $\mathbf{s}[n] = [s[n] \ s[n-1] \ \dots \ s[n-M]]^T$  e  $\mathbf{x}[n] = [x[n] \ x[n-1] \ \dots \ x[n-L]]^T$ ; os vetores  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{w}$  são formados pelos  $M + 1$  coeficientes do canal,  $h_i$ , e  $L + 1$  coeficientes do equalizador,  $w_i$ , respectivamente, isto é,  $\mathbf{h} = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_M]^T$  e

$\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_L]^T$ . O canal e o equalizador foram considerados, a princípio, modelados por um filtro invariante no tempo, com ordens  $M$  e  $L$ , respectivamente. O sobrescrito H denota o operador Hermitiano.

Reescrevendo (2.10) utilizando (2.12), tem-se:

$$\begin{aligned} J_{EQM} &= E \left[ |d[n] - \mathbf{w}^H \mathbf{x}[n]|^2 \right] \\ &= E \left[ |d[n]|^2 \right] - \left\{ \mathbf{w}^H E \left[ \mathbf{x}[n] d^*[n] \right] \right\}^* - \\ &\quad - \mathbf{w}^H E \left[ \mathbf{x}[n] d^*[n] \right] + \mathbf{w}^H E \left[ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^H[n] \right] \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Definindo a matriz de correlação do sinal recebido  $\mathbf{x}[n]$  como  $\mathbf{R} \triangleq E \left[ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^H[n] \right]$ , o vetor de correlação cruzada entre o sinal recebido  $\mathbf{x}[n]$  e o sinal desejado  $d[n]$  como  $\mathbf{p} \triangleq E \left[ \mathbf{x}[n] d^*[n] \right]$  e a variância do sinal desejado por  $\sigma_d^2 = E \left[ |d[n]|^2 \right]$ <sup>1</sup>, podemos reescrever (2.13) como:

$$J_{EQM} = \sigma_d^2 - \mathbf{w}^T \mathbf{p}^* - \mathbf{w}^H \mathbf{p} + \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}. \quad (2.14)$$

Observa-se que a função custo é quadrática e, portanto, existe somente um ponto de mínimo, logo, uma única solução para o vetor dos coeficientes do equalizador.

Derivando (2.14) com respeito ao vetor  $\mathbf{w}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla J_{EQM} &= \frac{\partial E \left[ |e(n)|^2 \right]}{\partial \mathbf{w}} \\ &= -2 \mathbf{p} + 2 \mathbf{R} \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Igualando (2.15) ao vetor nulo, tem-se:

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}. \quad (2.16)$$

A solução encontrada por (2.16) recebe o nome de *solução de Wiener-Hopf*. É importante notar que este critério de otimização é baseado exclusivamente em EO2 dos sinais recebido e transmitido.

A solução expressa em (2.16), apesar de exata, pode ser difícil de ser obtida em sistemas em tempo real, pois é necessário estimar  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{p}$ . O cálculo dos coeficientes

---

<sup>1</sup>A média do sinal transmitido é considerada nula, o que implica a média do sinal desejado ser nula também.

ótimos a partir de (2.16) requer o cálculo da inversa da matriz de autocorrelação  $\mathbf{R}$ , o que pode ser muito custoso computacionalmente, principalmente quando o equalizador possuir muitos coeficientes.

Além disso, em muitas aplicações, o canal varia com o tempo. Isto requer um equalizador que possa ser ajustado continuamente, o que pode ser implementado por meio de um filtro adaptativo. Procura-se então, um algoritmo que diminua iterativamente o valor da função custo  $J_{EQM}(\mathbf{w}[n])$ , entre os quais podem-se citar o algoritmo LMS (*Least Mean Square*) e o algoritmo RLS (*Recursive Least Squares*) (Haykin, 2002).

## 2.4 Equalização Não-Supervisionada

A exigência de se usar seqüências de treinamento nem sempre é conveniente. Primeiramente, porque perde-se tempo ao enviar uma seqüência de treinamento, uma vez que não há transmissão efetiva de informação. Outro aspecto relevante é que o envio periódico de seqüências de treinamento representa uma desvantagem para sistemas com restrição de espectro disponível. Ambos aspectos interferem na capacidade de transmissão efetiva do canal implicando um custo significativo e indesejável em muitas aplicações.

No sentido de aumentar a capacidade de transmissão ou mesmo viabilizar a equalização para casos em que não é possível fazer uso de seqüências de treinamento, surgiram diversas propostas de critérios *não-supervisionados* ou *cegos*. A base de todas essas propostas está na utilização somente dos sinais recebidos e de características estatísticas do sinal transmitido.

### 2.4.1 Insuficiência de EO2 para Identificação de Canais SISO

Há diversas formas de abordar o problema de equalização cega. Em geral, os métodos de equalização cega podem ser classificados quanto à abordagem direta ou indireta. A abordagem de equalização cega direta busca o filtro equalizador diretamente a partir de estatísticas do sinal de entrada e do sinal observado na saída de um canal desconhecido. Já a abordagem de equalização cega indireta consiste em

primeiro identificar a resposta impulsiva do canal, ou sua resposta em frequência, para depois projetar um equalizador apropriado.

Nesta abordagem indireta, vejamos o que é possível obter a partir das EO2 do sinal recebido. As densidades espectrais de potência do sinal transmitido  $S_s(e^{j\omega})$  e do sinal recebido  $S_x(e^{j\omega})$  estão relacionadas através da fórmula (Papoulis, 1991):

$$S_x(e^{j\omega}) = |h(e^{j\omega})|^2 S_s(e^{j\omega}) + S_v(e^{j\omega}), \quad (2.17)$$

onde  $h(e^{j\omega})$  é a resposta em frequência do canal e  $S_v(e^{j\omega})$  é a densidade espectral de potência do ruído aditivo do canal. É importante dizer que a densidade espectral de potência de um processo aleatório é a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação.

A partir de (2.17), fica claro que as EO2 do sinal recebido podem prover somente informação sobre a magnitude da resposta em frequência do canal  $|h(e^{j\omega})|$ . Portanto, a informação de resposta de fase de canais SISO não pode ser extraída a partir de apenas EO2. Em decorrência, EOS do sinal recebido devem ser empregadas para que se possa identificar a informação de fase do canal.

Cabe observar ainda que, se a magnitude da resposta em frequência e o número de pólos e zeros do canal são conhecidos, então há somente um número finito de escolhas associadas à fase. Podemos tomar como exemplo ilustrativo o caso dos quatros sistemas da figura 2.4, que possuem pólos apenas em zero e dois diferentes pares conjugados de zeros. De acordo com a figura 2.4, podemos observar que  $z_1$  e  $z_2$  são pares conjugados e seus recíprocos são, respectivamente,  $z_5$  e  $z_6$ , bem como  $z_3$  e  $z_4$  são também pares conjugados e seus recíprocos são, respectivamente,  $z_7$  e  $z_8$ . Desta forma, os quatros sistemas apresentam a mesma resposta de magnitude em frequência. Os sistemas (a) e (b) são, respectivamente, de fase mínima e de fase máxima e os sistemas (c) e (d) são de fase mista pois possuem tanto zeros dentro da CRU quanto zeros fora da CRU.

Como estruturas de *fase mínima* possuem uma relação de correspondência entre sua resposta de fase e de magnitude, ou seja, delimitando a localização dos pólos e zeros do canal dentro da CRU, e através do conhecimento de sua resposta em magnitude, pode-se, através de EO2 do sinal recebido, inferir informações de fase e, assim, equalizá-lo.

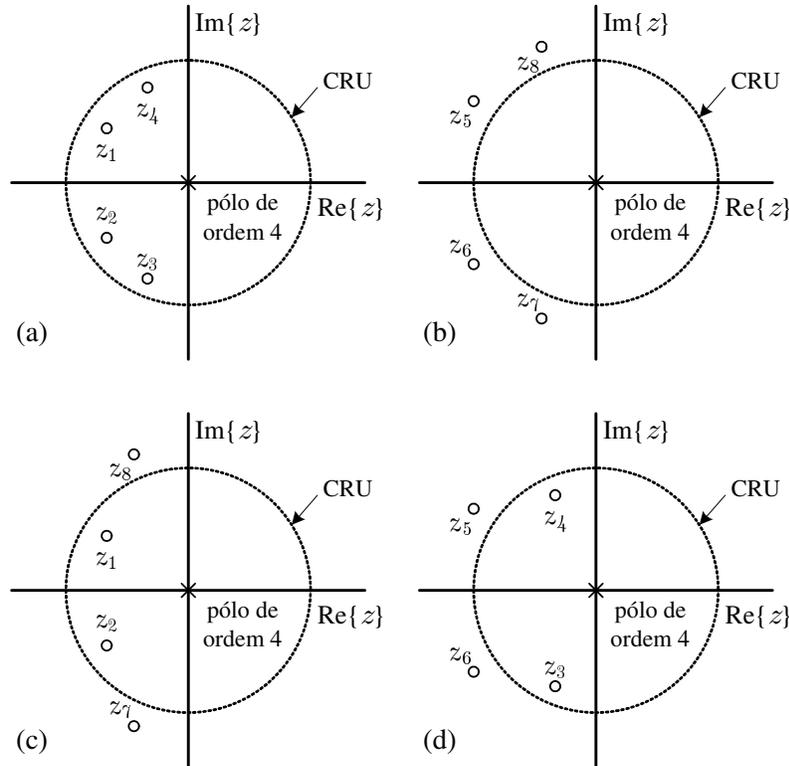


Figura 2.4: Sistemas que possuem a mesma resposta de magnitude em frequência.

### 2.4.2 Equalização baseada nos Teoremas BGR e SW

Dois resultados fundamentais são considerados a base da teoria de equalização não-supervisionada: o *Teorema de Benveniste-Goursat-Ruget* (Teorema BGR) (Benveniste et al., 1980) e, posteriormente, o *Teorema de Shalvi-Weinstein* (Teorema SW) (Shalvi & Weinstein, 1990). Ambos os teoremas tratam da condição ideal de equalização, que satisfaz a condição ZF, utilizando apenas o conhecimento de estatísticas do sinal transmitido, sem levar em conta amostras do sinal de referência.

A idéia básica do Teorema BGR é comparar as densidades de probabilidade do sinal transmitido com as do sinal na saída do equalizador sob a hipótese de que a distribuição do sinal transmitido não seja gaussiana, haja visto que o sinal na saída de um sistema linear com entrada gaussiana permanece gaussiano. Como todas as estatísticas de uma variável aleatória podem ser calculadas a partir de sua densidade,

implicitamente, faz-se uso de todas as estatísticas do sinal.

O Teorema SW aparece como uma condição de equalizabilidade menos restritiva em relação ao teorema BGR, pois exige apenas a equivalência entre os cumulantes de segunda e quarta ordem, o que implica a equivalência entre a variância e a curtose. Assim, os principais critérios de equalização cega envolvem, de maneira implícita ou explícita, os teoremas BGR e SW, e, desta forma, exigem o conhecimento de EOS.

Diferentes critérios de equalização não-supervisionada foram propostos, e estão explícita ou implicitamente relacionados a tais teoremas. Nesta seção, iremos nos focar em dois critérios fundamentais não-supervisionados que usam EOS: o *critério de Godard* e o *critério de Shalvi-Weinstein*.

### Critério de Godard

Dentre os critérios que fazem uso explícito de EOS do sinal recebido, ditos critérios de Bussgang, podemos destacar o critério de Godard (Haykin, 2002), (Ding & Li, 2001), (Johnson Jr. et al., 1998). O algoritmo de Godard baseia-se na minimização da seguinte função não-convexa:

$$J_{Godard} = E \left[ (|y[n]|^p - R_p)^2 \right], \quad (2.18)$$

onde

$$R_p = \frac{E [|s[n]|^{2p}]}{E [|s[n]|^p]} \quad (2.19)$$

é uma constante que contém toda informação necessária do sinal transmitido e  $p$  é um inteiro positivo.

O algoritmo de Godard busca penalizar as variações entre o sinal na saída do equalizador e o sinal transmitido em termos de seus módulos, visto que o módulo do sinal transmitido é suposto constante e conhecido. Desta forma, a constante  $R_p$  é escolhida de maneira que a função custo seja zero em caso de equalização perfeita.

Calculando o gradiente de (2.18), igualando-o a zero, e fazendo uma aproximação estocástica, ou seja, substituindo o operador esperança por uma estimativa instantânea, chega-se à expressão de adaptação dos coeficientes do filtro:

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu e^*[n]\mathbf{x}[n], \quad (2.20)$$

onde

$$e[n] = y[n] |y[n]|^{p-2} (R_p - |y[n]|^p) \quad (2.21)$$

e  $\mu$  é passo de adaptação do algoritmo.

É importante ressaltar que, embora o algoritmo seja capaz de equalizar o canal a menos da ambigüidade de fase, ele apresenta convergência bastante lenta quando comparado a algoritmos clássicos baseados em EO2, como o LMS. Porém, oferece a vantagem de desacoplar os problemas de IIS e de recuperação da fase da portadora (Haykin, 2002).

Um caso particular do algoritmo de Godard que merece destaque é quando fazemos  $p = 2$ , o que nos leva ao algoritmo do módulo constante (CMA, *Constant Modulus Algorithm*).

### Critério de Shalvi-Weinstein

O teorema SW deu origem a uma família de critérios muito importantes em equalização cega. Podemos destacar um dos critérios de Shalvi-Weinstein com restrição, denotado matematicamente por:

$$\max |k(y[n])| \text{ sujeito a } \sigma_y^2 = \sigma_s^2, \quad (2.22)$$

onde  $\sigma_y^2$  e  $\sigma_s^2$ , correspondem, respectivamente, às variâncias do sinal na saída do equalizador e do sinal transmitido;  $k(y[n])$  é chamado de *curtose*, e sua definição, baseada em momentos de sinais reais de média nula, é dada por:

$$\begin{aligned} k(y[n]) &= E [|y[n]|^4] - 3 \{E [|y[n]|^2]\}^2 \\ &= m_4 - 3 m_2^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Na equação (2.23), o primeiro termo corresponde ao momento de quarta ordem de  $y[n]$ ,  $m_4$ , e o segundo termo envolve o momento de segunda ordem de  $y[n]$ ,  $m_2$ . Ao considerar o sinal na saída do equalizador de média nula, a restrição deste critério implica os momentos de segunda ordem de ambos os sinais serem iguais às suas respectivas variâncias.

De acordo com (Shalvi & Weinstein, 1990), impondo algumas condições sobre a norma do vetor de coeficientes do filtro resultante canal-equalizador, obtém-se:

$|k(y[n])| \leq |k(s[n])|$ , e, desta forma, se o critério não satisfizer plenamente a condição ZF ele, ao menos, tenderá a uma solução próxima da solução ideal.

## 2.5 Predição x Equalização não-supervisionada

Como vimos na seção anterior, a equalização de canais desconhecidos de maneira não-supervisionada exige EOS. Por outro lado, é interessante discutirmos os limites do uso de apenas EO2 no contexto não-supervisionado, e, desta forma, analisarmos as conseqüentes restrições sobre o canal SISO. Com esta finalidade, introduziremos neste item o filtro de erro de predição (FEP).

Veremos que o FEP é capaz, em certos casos, de estimar o sinal transmitido através de uma seqüência de amostras recebidas, sem fazer uso de uma versão do sinal transmitido como referência, empregando apenas EO2 neste processo de estimação. Assim, o critério de erro de predição, por não envolver versões do sinal transmitido, está, de certa forma, inserido no contexto não-supervisionado.

### 2.5.1 Predição Linear

O problema de predição consiste na estimação de uma amostra de um sinal a partir de valores de amostras conhecidas deste mesmo sinal, sejam estas amostras passadas (Predição Progressiva ou *Forward Prediction*) ou futuras (Predição Retrógrada ou *Backward Prediction*). Iremos analisar a forma de predição na direção progressiva, na qual, através da série de amostras no tempo  $u[n-1], u[n-2], \dots, u[n-N]$ , estima-se a amostra  $u[n]$ .

A figura 2.5 apresenta uma estrutura linear de predição com  $N$  coeficientes. A saída do filtro,  $\hat{u}[n]$ , é resultado da combinação linear das amostras passadas do sinal,  $u[n-1], \dots, u[n-N]$ , ponderadas pelos seus respectivos coeficientes,  $w_{f,1}, \dots, w_{f,N}$ . Assim, o valor da predição será dado por:

$$\hat{u}[n] = \sum_{k=1}^N w_{f,k}^* u[n-k]. \quad (2.24)$$

Neste caso, o valor desejado na predição é a amostra atual do processo de entrada (na iteração  $n$ ),  $u[n]$  (predição a um passo). Todavia, pode-se desejar prever uma

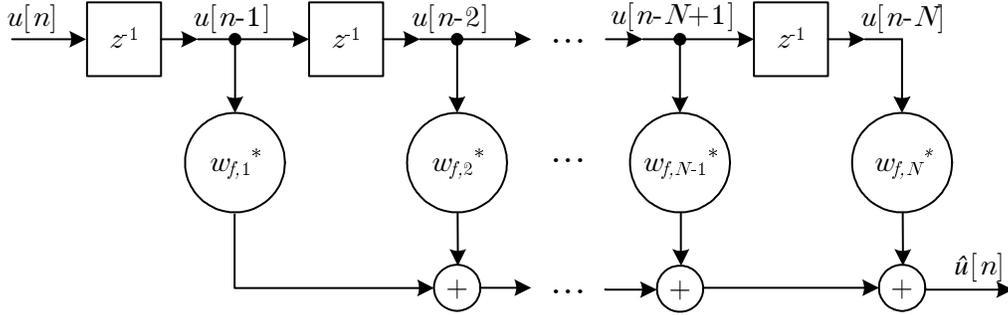


Figura 2.5: Filtro de Predição Linear Progressiva.

amostra futura deslocada por  $p$  amostras do bloco de amostras conhecidas; a este processo, dá-se o nome de predição a  $p + 1$  passos.

O erro de predição progressiva é dado pela diferença entre o sinal desejado, amostra do sinal de entrada atual,  $u[n]$ , e sua estimativa, fruto da predição,  $\hat{u}[n]$ . Assim,

$$\begin{aligned} e_f[n] &\triangleq u[n] - \hat{u}[n] \\ &= u[n] - \sum_{k=1}^N w_{f,k}^* u[n-k]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Combinando os dois termos do lado direito de (2.25) em um mesmo somatório, temos:

$$e_f[n] = \sum_{k=0}^N a_{N,k}^* u[n-k], \quad (2.26)$$

onde  $a_{N,k}$  são os novos coeficientes do filtro transversal e estão relacionados com os coeficientes do preditor progressivo de acordo com:

$$a_{N,k} = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ -w_{f,k}, & k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (2.27)$$

O FEP progressiva utiliza como entrada as amostras  $u[n], u[n-1], \dots, u[n-N]$  para produzir o erro de predição progressiva,  $e_f[n]$ . A partir da relação obtida em (2.27), na figura 2.6 apresentamos o FEP progressiva em termos do correspondente filtro de predição de ordem  $N$ .

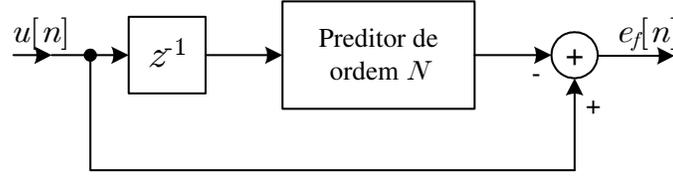


Figura 2.6: FEP Linear Progressiva, relação entre os filtros de predição e erro de predição.

O *critério de erro de predição* é dado pela minimização do EQM de predição da função custo denotada por:

$$J_f \triangleq E [|e_f[n]|^2]. \quad (2.28)$$

É interessante notar que a minimização do EQM não implica a minimização da variância do erro do preditor, dada por:

$$\sigma_f^2 \triangleq E [|e_f[n] - \mu_f|^2], \quad (2.29)$$

onde denotamos  $\mu_f$  como a média do erro de predição progressiva. No entanto, a suposição de que as entradas do FEP,  $u[n - i]$ , possuam média nula implica o erro de predição ter média nula e, assim, a minimização do EQM de predição leva à minimização da variância do erro de predição. No decorrer deste trabalho, não havendo uma ressalva explícita, consideraremos os sinais envolvidos de média nula.

Note que o problema de predição também pode ser encarado como um caso particular da filtragem de Wiener em que o sinal desejado  $d[n]$  corresponde ao sinal  $x[n]$ , o vetor de seqüência das entradas,  $\mathbf{x}[n] \triangleq [x[n] \ x[n-1] \ \dots \ x[n-L]]^T$ , corresponde ao vetor,  $\mathbf{u}[n-1] \triangleq [u[n-1] \ u[n-2] \ \dots \ u[n-N]]^T$ , e o  $i$ -ésimo coeficiente,  $w_i$ , corresponde ao  $i + 1$ -ésimo coeficiente,  $w_{f,i+1}$ , para todo  $i \in \{0, \dots, L\}$ , onde  $L = N - 1$ .

Dessa forma, utilizando o resultado dado por (2.16) juntamente com as correspondências descritas acima, pode se chegar aos coeficientes ótimos do preditor em questão, dado por:

$$\mathbf{w}_{f,o} = \mathbf{R}_f^{-1} \mathbf{p}_f, \quad (2.30)$$

onde  $\mathbf{w}_{f,o} \triangleq [w_{f,o,1} \ \dots \ w_{f,o,N}]^T$  é o vetor dos coeficientes ótimos do filtro de predição progressiva,  $\mathbf{R}_f \triangleq E [\mathbf{u}[n-1] \mathbf{u}^H[n-1]]$  é a matriz de correlação do sinal

recebido  $\mathbf{u}[n-1]$ , e  $\mathbf{p}_f \triangleq E[\mathbf{u}[n-1]u^*[n]]$  é o vetor de correlação cruzada entre o sinal recebido  $\mathbf{u}[n-1]$  e o sinal desejado  $u[n]$ .

O emprego de FEP na equalização de canais está diretamente associado a duas propriedades importantes que veremos a seguir.

### Propriedade de Fase Mínima

Seja a função de transferência de um FEP progressiva de ordem  $N$  no domínio da transformada  $Z$  dada por:

$$a_f(z) = \sum_{k=0}^N a_{N,k}^* z^{-k}, \quad (2.31)$$

onde  $z$  é uma variável complexa e  $a_{N,k}^*$  define sua resposta impulsiva.

Sejam  $z_i$ , onde  $i = 1, \dots, N$ , os zeros da função de transferência  $a_f(z)$ . Podemos repetir (2.31) da seguinte forma:

$$a_f(z) = b(z)(1 - z_b z^{-1}), \quad (2.32)$$

onde  $z_b$  é um zero de  $a_f(z)$  e seus zeros restantes estão contidos em  $b(z)$ , isto é,

$$b(z) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq b}}^N 1 - z_i z^{-1}. \quad (2.33)$$

O EQM pode ser calculado a partir da densidade espectral de energia da amostra  $u[n]$  (Bellanger, 2001), dada por:

$$\begin{aligned} E[|e_f[n]|^2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_f(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\omega}) |a_f(e^{j\omega})|^2 d\omega, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde  $S_f(e^{j\omega})$  e  $S_u(e^{j\omega})$  denotam as densidades espectrais de energia do erro de predição progressiva e do sinal de entrada  $u[n]$ , respectivamente, e  $a_f(e^{j\omega})$  representa a função de transferência em termos da frequência  $\omega$ .

Substituindo (2.32) em termos de frequência em (2.34) e escrevendo a variável complexa  $z_b$  em termos do seu módulo  $\rho_b$  e fase  $\omega_b$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|e_f[n]|^2] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\omega}) |b(e^{j\omega})|^2 |1 - z_b e^{-j\omega}|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\omega}) |b(e^{j\omega})|^2 [1 - 2\rho_b \cos(\omega - \omega_b) + \rho_b^2] d\omega. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Supondo que os parâmetros de  $b(z)$  já estejam otimizados de acordo com o critério de Wiener, o preditor ótimo deve apresentar gradiente do EQM nulo. Para tal deve ser otimizado em relação à variável em questão,  $z_b$ , ou, equivalentemente,  $\rho_b$  e  $\omega_b$ . Assim:

$$\frac{\partial \mathbb{E} [|e_f[n]|^2]}{\partial \rho_b} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_u(e^{j\omega}) |b(e^{j\omega})|^2 [-2 \cos(\omega - \omega_b) + 2\rho_b] d\omega = 0. \quad (2.36)$$

Como se sabe que a densidade espectral de energia do sinal de entrada,  $S_u(e^{j\omega})$ , é maior ou igual a zero e que  $|b(e^{j\omega})|^2$  é maior ou igual a zero também, então temos que  $\rho_b - \cos(\omega - \omega_b)$  deve assumir valores negativos e positivos para que o valor da integral, em (2.36), possa ser nulo, otimizando assim o preditor.

Dessa forma, visto que  $|\cos(\omega - \omega_b)|$  é sempre menor ou igual a 1 para qualquer argumento,  $\rho_b$  deve ser menor do que 1. Conclui-se assim que todos os zeros da função de transferência do filtro,  $z_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), devem estar dentro da CRU no plano complexo- $z$ , portanto, o FEP progressiva é de *fase mínima*.

A propriedade de *fase mínima* para o caso do FEP progressiva é análoga à propriedade de *fase máxima* para o caso do FEP retrógrada. Podemos chegar a esta propriedade da mesma forma como foi feito para o FEP progressiva.

### Filtro de Erro de Predição como Filtro Branqueador

Como vimos na seção 2.5.1, o sinal de erro de predição,  $e[n]$ , é obtido a partir de valores passados e atual do processo estacionário  $x[n]$ . Supondo, em princípio, o

conhecimento de infinitas amostras passadas, temos que:

$$e_f[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* x[n-k], \quad (2.37)$$

onde os coeficientes  $a_k$  são calculados através do critério de erro de predição, a partir da função custo dada em (2.28). Por simplicidade, restringir-nos-emos ao caso em que tanto estes coeficientes quanto os sinais assumem valores reais; desta forma, tais coeficientes que minimizam este critério são encontrados por meio de:

$$\frac{\partial E [e_f[n]^2]}{\partial a_k} = 0 \quad (2.38)$$

ou ainda

$$2 E \left[ e_f[n] \frac{\partial e_f[n]}{\partial a_k} \right] = 0. \quad (2.39)$$

Derivando (2.37) e aplicando em (2.39), tem-se:

$$E [e_f[n] x[n-k]] = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.40)$$

A expressão anterior nos diz que o FEP progressiva produz uma saída ortogonal a todas as amostras passadas do sinal  $x[n]$ .

Por outro lado, se consideramos o sinal de erro num instante passado,  $e_f[n-k]$ , observamos pela equação (2.37), que ele será uma combinação linear entre a amostra  $x[n-k]$  e todas as amostras anteriores. Segue assim que  $e_f[n-k]$  é, por sua vez, ortogonal a  $e_f[n]$ , ou seja:

$$E [e_f[n] e_f[n-k]] = 0, \quad k \geq 1. \quad (2.41)$$

De acordo com (2.41), o FEP progressiva produz saídas descorrelacionadas e, assim sendo, funciona como um *filtro branqueador* desde que dotado de um número suficiente de coeficientes (Romano, 1987), (Bellanger, 2001). Como o sinal transmitido é, por hipótese, composto por amostras i.i.d., é também descorrelacionado. Deste modo, o sinal a ser recuperado pelo equalizador também deverá obviamente apresentar esta mesma característica. Assim, o equalizador deve, em princípio, ser uma estrutura que produza uma saída descorrelacionada, o que ocorre para um FEP progressiva de comprimento adequado.

No entanto, recuperar um sinal descorrelacionado não implica a recuperação do sinal transmitido, ou seja, de um sinal cujas amostras são i.i.d.. Isto significa que o processo de branqueamento será capaz de reduzir ou ainda eliminar a distorção de amplitude introduzida, mas não a distorção da fase.

Contudo, o FEP tende a emular cada pólo com uma coroa de zeros de mesmo raio tal como explicado anteriormente (vide (2.9)). Assim, o FEP procura inverter a resposta em frequência do canal, no caso de canais de fase mínima e dependendo do número de coeficientes do filtro, o FEP irá equalizá-lo através de um número suficiente de zeros dentro da CRU.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo, estudamos o problema de equalização de canais SISO: verificamos que existe uma *limitação estrutural*, no sentido de que a condição de equalização perfeita não pode ser atingida para canal e equalizador FIR; e uma *limitação de critério*, no sentido de que não é possível realizar equalização não-supervisionada partindo apenas da minimização do EQM, o que implica a utilização de apenas EO2.

Estas limitações do modelo SISO nos dirigem ao estudo do modelo SIMO onde as restrições de equalizabilidade discutidas no presente capítulo podem ser flexibilizadas. Veremos que, em alguns casos, é possível a inversão do canal FIR por estruturas de mesma natureza e ainda que a possibilidade de equalização não-supervisionada através do uso de EO2 se estenda a uma classe mais ampla de canais.

# 3

## Equalização de sistemas SIMO

Os sistemas de comunicação onde há apenas um transmissor e múltiplos receptores dão origem aos canais SIMO. O estudo de equalização em sistemas SIMO constitui o objetivo deste capítulo. O nosso grande interesse nestes sistemas deve-se à flexibilização das condições de equalizabilidade, conforme comentado anteriormente. Neste contexto, o capítulo está organizado da seguinte maneira.

Na seção 3.1, fazemos uma breve descrição do problema de equalização de canais SIMO, apresentando o modelo matemático correspondente. Na seção 3.2, estudamos o caso particular dos modelos SIMO obtidos da superamostragem do sinal original. Investigamos, na seção 3.3, a condição para equalização perfeita e quais os casos em que é possível satisfazer plenamente tal condição. Abordamos, na seção 3.4, as condições em que sistemas SIMO podem ser equalizados mesmo na impossibilidade de inversão do canal, sendo necessário expor nesta seção os conceitos de fase mínima e de zeros e pólos de sistema SIMO. Finalmente, discutimos, na seção 3.5, o problema de predição linear e suas relações com o problema de equalização não-supervisionada no caso SIMO.

### 3.1 Descrição do Problema

Seja o modelo de transmissão de um sinal por múltiplos canais, SIMO, conforme ilustrado na figura 3.1. Assume-se que cada  $p$ -ésimo subcanal pode ser modelado

como um sistema linear definido por sua resposta ao impulso  $h_p[n]$  e o sinal transmitido,  $s[n]$ , é composto por amostras i.i.d.. Cada  $p$ -ésimo sinal recebido,  $x_p[n]$ , é somado ao ruído aditivo correspondente a cada subcanal,  $v_p[n]$ .

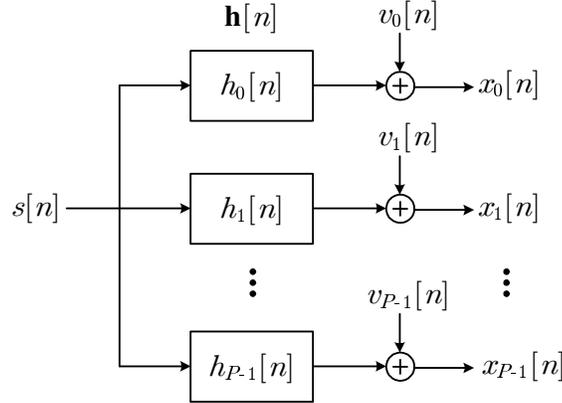


Figura 3.1: Modelo SIMO com  $P$  subcanais.

Assim, uma vez que dispomos de diferentes versões de um mesmo sinal na recepção, podemos encarar o modelo de canal SIMO como um mecanismo de geração de diversidade.

Há dois cenários práticos que recaem sobre este mesmo modelo multicanal da figura 3.1. O primeiro deles está relacionado aos sistemas com uma antena na transmissão e múltiplas antenas na recepção (Reddy et al., 1997), conforme ilustrado na figura 3.2. Neste caso, pode-se dizer que cada percurso entre a antena de transmissão e cada uma das antenas na recepção é tomado como um subcanal.

Outro cenário que remete ao mesmo modelo decorre da *abordagem de superamostragem* quando se considera que o sinal recebido,  $x(t)$ , é amostrado a uma taxa  $P$  vezes superior a taxa de símbolo (Papadias, 1995).

Por não ser tão evidente a relação entre o modelo multicanal e o modelo proveniente da *abordagem de superamostragem*, exporemos este caso em maior detalhe na seção 3.2. Porém, para tal, faz-se necessário antes representarmos o modelo de canais SIMO através de uma formulação matemática adequada e apresentarmos o modelo de múltiplos equalizadores correspondente.

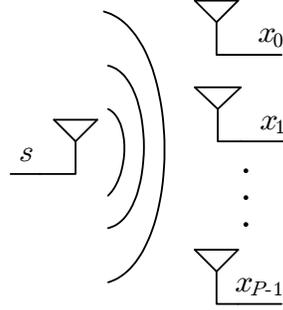


Figura 3.2: Modelo de arranjo de antenas.

### 3.1.1 Formulação Matemática de Modelos SIMO

Considere o sistema SIMO com  $P$  subcanais apresentado na figura 3.1, onde cada subcanal é modelado por um filtro causal FIR de  $N$  coeficientes. Podemos escrever o  $p$ -ésimo sinal recebido,  $x_p[n]$ , por:

$$x_p[n] = \sum_{i=0}^{N-1} h_p[i] s[n-i] + v_p[n], \quad (3.1)$$

para  $p = 0, \dots, P-1$ .

Agrupando os coeficientes dos  $P$  subcanais com o mesmo índice de atraso em um mesmo vetor, tem-se:

$$\mathbf{h}[n] = \begin{bmatrix} h_0[n] & h_1[n] & \cdots & h_{P-1}[n] \end{bmatrix}^T. \quad (3.2)$$

Desta mesma forma, podemos agrupar em um mesmo vetor os sinais recebidos dos subcanais e em outro vetor seus respectivos ruídos:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} x_0[n] & x_1[n] & \cdots & x_{P-1}[n] \end{bmatrix}^T \quad (3.3)$$

e

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} v_0[n] & v_1[n] & \cdots & v_{P-1}[n] \end{bmatrix}^T. \quad (3.4)$$

A partir de (3.1), é possível também agrupar todos os  $P$  sinais recebidos como:

$$\begin{bmatrix} x_0[n] \\ \vdots \\ x_{P-1}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0[0] & \cdots & h_0[N-1] \\ \vdots & & \vdots \\ h_{P-1}[0] & \cdots & h_{P-1}[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s[n] \\ \vdots \\ s[n-N+1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0[n] \\ \vdots \\ v_{P-1}[n] \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

e de forma compacta, (3.5) é expressa por:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{h}[0] & \cdots & \mathbf{h}[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{s}_N[n] + \mathbf{v}[n], \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{s}_N[n] = \begin{bmatrix} s[n] & \cdots & s[n-N+1] \end{bmatrix}^T$  corresponde ao vetor de amostras passadas e atual do sinal transmitido.

A equação (3.6) pode ainda ser escrita para  $M$  vetores de amostras recebidas em  $M$  instantes diferentes, resultando em:

$$\mathbf{x}_M[n] = \mathbf{H}_M \mathbf{s}_{M+N-1}[n] + \mathbf{v}_M[n], \quad (3.7)$$

tal que

$$\mathbf{x}_M[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n]^T & \cdots & \mathbf{x}[n-M+1]^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{v}_M[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{v}[n]^T & \cdots & \mathbf{v}[n-M+1]^T \end{bmatrix}^T, \quad (3.9)$$

e a matriz  $\mathbf{H}_M$  ( $MP \times M+N-1$ ) apresenta uma estrutura de Toeplitz em bloco e é definida por:

$$\mathbf{H}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{h}[0] & \mathbf{h}[1] & \cdots & \mathbf{h}[N-1] & \mathbf{0}_{P \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \mathbf{0}_{P \times 1} & \mathbf{h}[0] & \cdots & \mathbf{h}[N-2] & \mathbf{h}[N-1] & \ddots & \mathbf{0}_{P \times 1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{P \times 1} & \mathbf{0}_{P \times 1} & \cdots & \mathbf{h}[0] & \mathbf{h}[1] & \cdots & \mathbf{h}[N-1] \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

De maneira análoga ao desenvolvimento apresentado para o modelo do canal, apresentaremos agora o modelo de múltiplos equalizadores correspondente ao modelo multicanal descrito anteriormente. Neste modelo, cada sinal recebido  $x_p[n]$  associado a um subcanal é filtrado por um *subequalizador*, como ilustrado na figura 3.3. Assumimos que cada subequalizador é também modelado por um filtro causal FIR de  $L$  coeficientes e desconsideramos a existência de ruído aditivo por simplicidade.

Analogamente a (3.2), podemos agrupar os coeficientes dos  $P$  subequalizadores com o mesmo índice de atraso em um mesmo vetor, tendo assim:

$$\mathbf{w}[n] = \begin{bmatrix} w_0[n] & w_1[n] & \cdots & w_{P-1}[n] \end{bmatrix}^T. \quad (3.11)$$

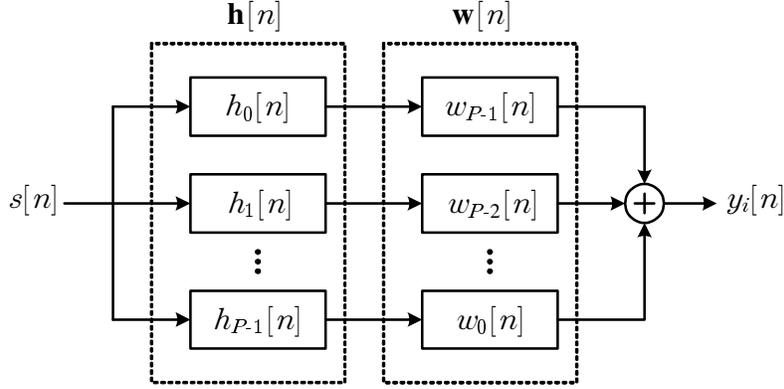


Figura 3.3: Representação do modelo SIMO, com  $P$  subcanais e seus respectivos subequalizadores na ausência de ruído.

Portanto, o sinal na saída do equalizador pode ser escrito como:

$$y_i[n] = \sum_{p=0}^{P-1} x_p[n] * w_{P-1-p}[n]. \quad (3.12)$$

## 3.2 Modelo SIMO e a abordagem de superamostragem

Conforme mencionado anteriormente, o modelo SIMO pode ser obtido por meio da *abordagem de superamostragem*.

A fim de compreender a relação entre o sinal superamostrado e o modelo multicanal, considere inicialmente o sinal recebido em tempo contínuo, em banda base, dado por:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] h(t - iT) + v(t), \quad (3.13)$$

onde  $h(t)$  refere-se à resposta impulsiva resultante dos efeitos do canal combinados aos dos filtros de transmissão e recepção,  $\{s_i\} \triangleq \{s[i]\}$  é a seqüência de símbolos transmitidos i.i.d.,  $1/T$  é a taxa de transmissão de símbolos, ou seja,  $T$  é o intervalo de símbolos, e  $v(t)$  refere-se ao ruído branco aditivo do canal. O ruído é considerado independente dos símbolos transmitidos.

Considere que o sinal recebido seja amostrado em uma taxa superior à taxa de símbolo, isto é,  $\frac{P}{T}$ , onde  $P$  é um número inteiro positivo. Assim, a seqüência de amostras recebida será dada por  $\{x(n\frac{P}{T})\}$ , e o sinal recebido superamostrado pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x\left(n\frac{T}{P}\right) &\triangleq x(t)|_{t=n\frac{T}{P}} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] h\left(n\frac{T}{P} - iT\right) + v\left(n\frac{T}{P}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Analisando a expressão anterior, desconsiderando o ruído para fins de demonstração, pode-se notar que, a partir da seqüência de amostras  $\{x(n\frac{T}{P})\}$ , é possível extrair  $P$  seqüências do sinal superamostrado, cada uma delas à taxa de símbolo. Por exemplo, fazendo  $n = n'P$  em (3.14), para  $n'$  assumindo valores inteiros, tem-se a seqüência  $\{x(n'T)\}$ , isto é,  $\{x(0), x(T), x(2T), \dots\}$ . Fazendo  $n = 1 + n'P$ , tem-se a seqüência  $\{x(\frac{T}{P} + n'T)\}$ , isto é,  $\{x(\frac{T}{P}), x(\frac{T}{P} + T), x(\frac{T}{P} + 2T), \dots\}$ . Fazendo  $n = 2 + n'P$ , tem-se a seqüência  $\{x(2\frac{T}{P} + n'T)\}$ , isto é,  $\{x(2\frac{T}{P}), x(2\frac{T}{P} + T), x(2\frac{T}{P} + 2T), \dots\}$ , assim sendo, é possível escrever tais seqüências da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_p(nT) &= x\left(nT + p\frac{T}{P}\right) \\ &= \sum_i s[i] h\left(nT - iT + p\frac{T}{P}\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $p = 0, \dots, P - 1$ .

Por meio da divisão do sinal superamostrado em  $P$  seqüências à taxa de símbolo  $1/T$ , é possível chegar ao modelo de multicanal apresentado anteriormente, onde cada uma dessas seqüências,  $\{x_p(nT)\}$ , pode ser associada à saída de cada  $p$ -ésimo subcanal. A figura 3.4 ilustra esta divisão. Desta forma, a amostragem do sinal recebido numa taxa maior do que  $1/T$ , desde que a largura do canal seja maior do que  $1/2T$ , pode gerar diversidade do canal.

Outro aspecto interessante vem do fato de que a superamostragem de um sinal *estacionário* leva à geração de seqüências *cicloestacionárias* (Papoulis, 1991). Este fato tem implicações no problema de identificação do canal a partir das EO2 e EOS, conforme discutido a seguir.

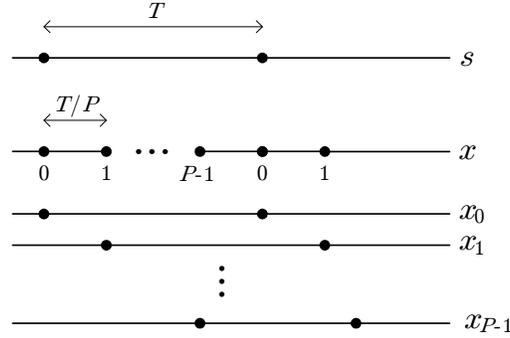


Figura 3.4: Representação da obtenção da seqüência superamostrada.

### 3.2.1 Cicloestacionaridade de Segunda Ordem

Consideremos o sinal recebido em tempo contínuo definido em (3.13). Sua função de autocorrelação é expressa por:

$$r_x(t, \tau) \triangleq E[x(t)x^*(t - \tau)]. \quad (3.16)$$

Supondo que as seqüências de símbolos transmitidos,  $\{s[i]\}$ , e do ruído aditivo,  $\{v(t)\}$ , sejam *estacionárias no sentido amplo*<sup>1</sup> e possuam média nula, teremos que a função de autocorrelação do sinal recebido será periódica no tempo com período  $T$  para qualquer valor de  $\tau$ , isto é,  $x(t)$  será dito *cicloestacionário no sentido amplo* (Ding & Li, 2001):

$$E[x(t)] = E[x(t + T)] \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned} r_x(t, \tau) &= r_x(t + T, \tau) \Rightarrow \\ E[x(t)x^*(t - \tau)] &= E[x(t + T)x^*(t - \tau + T)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

A função periódica  $r_x(t, \tau)$  pode ser expandida em série de *Fourier*:

$$r_x(t, \tau) = \sum_k c_x^{(k)}(\tau) e^{j2\pi \frac{k}{T}t}, \quad (3.19)$$

<sup>1</sup>Sinal estacionário no sentido amplo: as estatísticas de primeira e segunda ordem são invariantes no tempo.

onde o  $k$ -ésimo coeficiente da série é dado por:

$$c_x^{(k)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T r_x(t, \tau) e^{-j\frac{2\pi k}{T}t} dt, \quad (3.20)$$

para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Em (3.20),  $\alpha = k/T$  é definido como *freqüência cíclica*. A *função de autocorrelação cíclica* de  $x(t)$  associada à freqüência cíclica  $\alpha$  é definida como:

$$r_x^{(\alpha)}(\tau) \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T r_x(t, \tau) e^{-j2\pi\alpha t} dt. \quad (3.21)$$

Para sinais estacionários, a função de correlação cíclica é identicamente nula para qualquer valor de  $\alpha$  não-nulo. Por outro lado, para sinais cicloestacionários de segunda ordem, ou simplesmente cicloestacionários, a função de correlação cíclica pode assumir valores não-nulos para certos valores de  $\alpha$  não-nulos (Castro, 2002).

Todavia, apesar de o processo  $x(t)$  ser cicloestacionário no sentido amplo, a seqüência discreta  $\{x(nT_a)\}$ , obtida através da amostragem de  $x(t)$ , pode ou não ser cicloestacionária no sentido amplo dependendo da taxa de amostragem  $\frac{1}{T_a}$ . De fato, se o sinal recebido for amostrado a taxa de símbolo  $\frac{1}{T}$ , teremos:

$$x(nT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]h(nT - iT) + v(nT), \quad (3.22)$$

que é um processo estacionário no sentido amplo (Papadias, 1995).

Calculando a transformada de Fourier da função de autocorrelação de  $x(nT)$ , temos a função de densidade espectral de potência deste sinal descrita por:

$$S_x(e^{j\omega}) = \sigma_s^2 |h(e^{j\omega})|^2 + \sigma_v^2. \quad (3.23)$$

Por meio de (3.23), como discutimos na seção 2.4, verifica-se que não é possível recuperar a informação de fase do canal a partir de  $S_x(e^{j\omega})$ , a não ser que o canal seja de fase mínima. Em outras palavras, pode-se dizer que a informação de fase do canal é perdida nas EO2 do sinal recebido quando é amostrado à taxa de símbolo.

Contudo, se amostrarmos o sinal recebido  $x(t)$  numa taxa de amostragem  $P$  vezes maior do que a taxa de símbolo, este sinal superamostrado, dado em (3.14), será um processo cicloestacionário no sentido amplo (Ding & Li, 2001), (Papadias, 1995), (Tong et al., 1994).

Por simplicidade de notação, escreveremos o sinal superamostrado discreto no tempo como:  $x[n] \triangleq x(n\frac{T}{P})$ . Fazendo uso desta notação, definimos a função de autocorrelação para um processo discreto no tempo por:

$$r_x[n, m] \triangleq \text{E}[x[n]x^*[n - m]] \quad (3.24)$$

e serão satisfeitas as equações:

$$\text{E}[x[n]] = \text{E}[x[n + P]] \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} r_x[n, m] &= r_x[n + P, m] \Rightarrow \\ \text{E}[x[n]x^*[n - m]] &= \text{E}[x[n + P]x^*[n - m + P]], \end{aligned} \quad (3.26)$$

para todo  $m$  e  $n$  inteiro, analogamente a (3.17) e (3.18).

A *função de correlação cíclica do processo discreto*  $x[n]$  é definida como (Ding & Li, 2001)

$$r_x^{(l)}[m] \triangleq \sum_{n=0}^{P-1} r_x[n, m] e^{-j\frac{2\pi}{P}nl}, \quad (3.27)$$

para todo  $l$  inteiro. Podemos definir o *espectro cíclico* de  $x[n]$ :

$$S_x^{(l)}(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_x^{(l)}[m] e^{-jm\omega}. \quad (3.28)$$

Finalmente, de acordo com (Ding & Li, 2001), temos que:

$$S_x^{(l)}(e^{j\omega}) = \sigma_s^2 h\left(e^{j(\omega + \frac{2\pi}{P}l)}\right) h^*(e^{j\omega}) + P \sigma_v^2 \delta[l]. \quad (3.29)$$

O grande interesse em apresentar o conceito de cicloestacionariedade e como obter sinais desta natureza parte da possibilidade de se inferir algo a respeito da informação de fase do canal a partir de apenas EO2, como pode ser observado através de (3.29) (Tong et al., 1994), (Tong, Xu, Hassibi, & Kailath, 1995).

Note que, fazendo  $l = 0$  em (3.29), chega-se a (3.23), que corresponde à densidade espectral de potência do sinal  $x(t)$ , quando amostrado à taxa de símbolo. Dessa forma, os  $P$  sinais recebidos nos permitem ter acesso a uma quantidade de informação a respeito do sinal transmitido maior (ou, no pior caso, idêntica) à do caso

SISO. Seguindo nesta linha, quanto maior for o número de sinais recebidos, isto é, quanto maior for taxa de superamostragem, maior será a diversidade de informação disponível por meio do sinal original.

Nesse sentido, a característica de cicloestacionaridade beneficia a identificação cega do canal (Ding & Li, 2001) e, assim, permite-nos de alguma forma estender a limitação de critério existente em sistemas SISO estudada anteriormente, tal como apresentaremos nas próximas seções.

Contudo, será interessante antes demonstrarmos como obter o modelo de múltiplos equalizadores, ilustrado na figura 3.3, correspondente ao modelo multicanal proveniente da superamostragem e compará-lo ao modelo de equalizador MISO visto na seção 3.1. Este equalizador obtido a partir da superamostragem do sinal recebido é chamado de *equalizador fracionário*. Alguns trabalhos sobre estes equalizadores cegos utilizam estatísticas de cicloestacionariedade de segunda ordem para a identificação e equalização cega de canais como (Papadias & Slock, 1999), (Tugnait, 1999), (Tong et al., 1995) e (Tong et al., 1994).

### 3.2.2 Equivalência entre equalizador fracionário e modelo de equalizador MISO

Os coeficientes do  $p$ -ésimo subcanal e do  $p$ -ésimo subequalizador correspondem a amostras da resposta impulsiva do canal e do equalizador em tempo contínuo, assim como em (3.14):

$$h_p[n] \triangleq h_p(nT) = h(t) \Big|_{t=nT+p\frac{T}{P}} \quad (3.30)$$

e

$$w_p[n] \triangleq w_p(nT) = w(t) \Big|_{t=nT+p\frac{T}{P}}, \quad (3.31)$$

onde  $p = 0, \dots, P - 1$ .

Assumindo que cada subcanal e cada subequalizador correspondem a filtros FIR de  $N$  e  $L$  coeficientes, respectivamente, pode-se organizar as amostras nos vetores  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{w}$ , que podem ser escritos para o caso multicanal associado à superamostragem como:

$$\mathbf{h} = \left[ h(0) \quad h\left(\frac{T}{P}\right) \quad h\left(2\frac{T}{P}\right) \quad \dots \quad h(T) \quad \dots \quad h\left((NP-1)\frac{T}{P}\right) \right]^T \quad (3.32)$$

e

$$\mathbf{w} = \left[ w(0) \quad w\left(\frac{T}{P}\right) \quad w\left(2\frac{T}{P}\right) \quad \cdots \quad w(T) \quad \cdots \quad w\left((LP-1)\frac{T}{P}\right) \right]^T. \quad (3.33)$$

Note que, a cada dois elementos adjacentes de ambos os vetores, há um atraso relativo de uma fração do intervalo de símbolo  $\frac{T}{P}$ . Desta forma, diz-se que tanto o canal  $\mathbf{h}$  como o equalizador  $\mathbf{w}$  são *fracionários* e, assim, correspondem a filtros lineares FIR de  $NP$  e  $LP$  coeficientes (Castro, 2002), (Ding & Li, 2001).

A saída do equalizador fracionário é, portanto, dada por:

$$y\left(n\frac{T}{P}\right) = \sum_{i=0}^{LP-1} w\left(i\frac{T}{P}\right) x\left(n\frac{T}{P} - i\frac{T}{P}\right). \quad (3.34)$$

Cabe ressaltar que  $\{y(n\frac{T}{P})\}$  conterá mais de uma amostra por símbolo estimado, uma vez que estamos trabalhando com uma seqüência superamostrada. Dessa forma, é necessário aplicar um processo de decimação de maneira a obter uma estimativa da seqüência transmitida. Esta operação nada mais é do que selecionar uma seqüência de amostras que estejam espaçadas entre si em um intervalo de símbolo e descartar as  $P-1$  seqüências restantes.

Assim sendo, é possível escrever tais  $P$  seqüências da seguinte forma:

$$y_k[n] \triangleq y_k(nT) = y\left(nT + k\frac{T}{P}\right), \quad (3.35)$$

$k = 0, \dots, P-1$ . Substituindo (3.34) em (3.35), temos a  $k$ -ésima seqüência à taxa de símbolo:

$$y_k(nT) = \sum_{i=0}^{LP-1} w\left(i\frac{T}{P}\right) x\left(nT + k\frac{T}{P} - i\frac{T}{P}\right). \quad (3.36)$$

Agora iremos agrupar os coeficientes do equalizador em  $P$  seqüências espaçadas de um intervalo de símbolo,  $T$ , como, por exemplo,  $\{w(0), w(T), \dots, w((L-1)T)\}$ , de maneira a formarem um subequalizador. Cada uma das  $P$  seqüências tem comprimento  $L$  e é dada por:

$$w_p(nT) = w\left(nT + p\frac{T}{P}\right) = w\left((nP+p)\frac{T}{P}\right), \quad (3.37)$$

onde  $p = 0, \dots, P-1$  e  $n = 0, \dots, L-1$ . Aplicando (3.37) em (3.36), tem-se:

$$\begin{aligned} y_k(nT) &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{p=0}^{P-1} w_p(iT) x\left(nT + k\frac{T}{P} - \left(iT + p\frac{T}{P}\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{p=0}^{P-1} w_p(iT) x\left((n-i)T + (k-p)\frac{T}{P}\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dependendo da seqüência escolhida, isto é, do valor de  $k$  entre  $0, 1, \dots, P-1$ , cada  $p$ -ésimo subequalizador irá filtrar uma seqüência distinta  $\{x_m(nT)\}$ , onde  $m$  não será necessariamente igual a  $p$ . Assim, escolhendo convenientemente  $k = P-1$ , o subequalizador  $\mathbf{w}_0 = \left[ w(0) \quad w(T) \quad \dots \quad w((L-1)T) \right]^T$  irá filtrar a seqüência  $\{x_{P-1}(nT)\}$ , o subequalizador  $\mathbf{w}_1 = \left[ w\left(\frac{T}{P}\right) \quad w\left(\frac{T}{P} + T\right) \quad \dots \quad w\left(\frac{T}{P} + (L-1)T\right) \right]^T$  irá filtrar a seqüência  $\{x_{P-2}(nT)\}$  e assim por diante, como ilustrado na figura 3.3 para  $i = P-1$ . Fazendo  $k = P-1$  em (3.38), tem-se:

$$\begin{aligned} y_{P-1}[n] &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{p=0}^{P-1} w_p(iT) x\left((n-i+1)T - (p+1)\frac{T}{P}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{L-1} w_0(iT) x_{P-1}((n-i)T) + w_1(iT) x_{P-2}((n-i)T) + \dots + \\ &\quad + w_{P-1}(iT) x_0((n-i)T). \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.3 Inversão perfeita de canais SIMO

Como mencionado anteriormente, nosso interesse em utilizar modelos SIMO é pela possível flexibilização das condições de equalizabilidade em relação ao caso SISO. Vimos na seção 3.2 que o modelo multicanal permite obter informação sobre a fase do canal mesmo quando se envolve apenas EO2. Porém, resta ainda investigar o problema da limitação estrutural, isto é, avaliar sob quais condições é possível obter a solução ZF. Neste sentido, há um resultado fundamental a respeito da inversibilidade de sistemas SIMO-FIR, na ausência de ruído, conhecido como *identidade de Bézout* (Kailath, 1980), (Bai & Ding, 2000), (Papadias & Slock, 1999).

Antes de enunciarmos este teorema, vamos definir aqui os vetores polinomiais correspondentes às funções de transferência do canal e do equalizador, respectiva-

mente, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(z) &= \left[ \sum_{i=0}^{N-1} h_0[i] z^{-i} \quad \sum_{i=0}^{N-1} h_1[i] z^{-i} \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{N-1} h_{P-1}[i] z^{-i} \right]^T \\ &= \left[ h_0(z) \quad h_1(z) \quad \cdots \quad h_{P-1}(z) \right]^T \end{aligned} \quad (3.40)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(z) &= \left[ \sum_{i=0}^{L-1} w_{P-1}[i] z^{-i} \quad \sum_{i=0}^{L-1} w_{P-2}[i] z^{-i} \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{L-1} w_0[i] z^{-i} \right]^T \\ &= \left[ w_{P-1}(z) \quad w_{P-2}(z) \quad \cdots \quad w_0(z) \right]^T, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde  $h_p(z)$  e  $w_p(z)$ , para  $p = 0, \dots, P-1$ , são as funções de transferências do  $p$ -ésimo subcanal e do  $p$ -ésimo subequalizador, respectivamente.

**Teorema 3.3.1 (Identidade de Bézout)** <sup>2</sup> *Sejam  $h_p(z)$ ,  $p = 0, \dots, P-1$  polinômios que não possuam raízes em comum. Então, existem polinômios  $w_p(z)$  tais que*

$$\sum_{p=0}^{P-1} w_{P-1-p}(z) h_p(z) = z^{-d}. \quad (3.42)$$

*Esta condição é chamada de condição de equalização perfeita ou inversão perfeita, e o equalizador que a atende é chamado de solução ZF.*

Fazendo uso de (3.40) e de (3.41), pode-se reescrever (3.42) na forma vetorial por:

$$\mathbf{w}^T(z) \mathbf{h}(z) = z^{-d} \quad (3.43)$$

e, no domínio do tempo, esta equação torna-se:

$$\sum_{p=0}^{P-1} w_{P-1-p}[n] * h_p[n] = \delta[n-d]. \quad (3.44)$$

Podemos expressar esta convolução por um produto de vetor e matriz, resultando em:

$$\mathbf{w}_L^H \mathbf{H}_L = \left[ \mathbf{0}_{1 \times d} \quad 1 \quad \mathbf{0}_{1 \times (L+N-d-2)} \right], \quad (3.45)$$

<sup>2</sup>A íntegra da demonstração do teorema de Bézout pode ser encontrada em (Kailath, 1980).

onde definimos  $\mathbf{w}_L = \left[ \mathbf{w}^T[0] \quad \mathbf{w}^T[1] \quad \dots \quad \mathbf{w}^T[L-1] \right]^T$  e a matriz  $\mathbf{H}_L$  ( $LP \times L + N - 1$ ) definida em (3.10).

A expressão (3.45) corresponde a um sistema de  $L+N-1$  equações e  $LP$  incógnitas, que representam os coeficientes do equalizador. De acordo com (3.45), para o sistema apresentar pelo menos uma solução, a matriz  $\mathbf{H}_L$  precisa ter posto completo de colunas. Isto impõe:

$$LP \geq L + N - 1 \Rightarrow L \geq \left\lceil \frac{N - 1}{P - 1} \right\rceil = L_{\min}, \quad (3.46)$$

onde  $\lceil \cdot \rceil$  corresponde ao *operador teto*<sup>3</sup>: esta condição determina o número de coeficientes mínimo necessário dos subequalizadores (Papadias & Slock, 1999). Fazendo  $P \rightarrow 1$  em (3.46), tem-se que  $L \rightarrow \infty$ , ou seja, recaímos no caso SISO onde não se atinge a condição ZF somente com filtros FIR.

Podemos ilustrar o resultado de Bézout por meio de um simples exemplo. Sejam os subcanais de um sistema SIMO dados por  $h_0(z) = 1 + z^{-1}$  e  $h_1(z) = 1 - z^{-1}$ . Se tratarmos cada um dos subcanais como um canal isolado, é sabido que não poderão ser equalizados perfeitamente usando apenas filtros FIR. Contudo, ao tratá-los como subcanais de um único sistema isto se torna possível.

Fazendo uma simples análise no domínio do tempo, temos que os sinais recebidos a partir de cada subcanal são, respectivamente,  $x_0[n] = s[n] + s[n-1]$  e  $x_1[n] = s[n] - s[n-1]$ . Por meio de ambos os sinais é possível extrair uma versão do sinal transmitido,  $\alpha s[n-d]$ , por exemplo, através da soma dos sinais recebidos, resultando em um sinal proporcional a  $s[n]$ ,  $y[n] = 2s[n]$ .

Segundo o teorema da identidade de Bézout, aplicando ambas as funções de transferência dos subcanais  $h_0(z)$  e  $h_1(z)$  em (3.42), e considerando a recuperação do sinal atual ( $d = 0$ ) com uma amplificação  $\alpha$ , podemos reescrevê-la:

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^1 w_{1-p}(z) h_p(z) &= \alpha z^{-d} \\ &= w_0(z) + w_1(z) + z^{-1} (w_1(z) - w_0(z)) \end{aligned} \quad (3.47)$$

e, assim,  $w_0(z) = w_1(z) = \alpha/2$ .

---

<sup>3</sup>O operador teto é definido por  $\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x \}$ .

A fim de ilustrar a análise no domínio da frequência, plotamos a resposta de magnitude de ambos os subcanais versus a frequência angular em rad/s,  $|h_0(e^{j\omega})| \times \omega$  e  $|h_1(e^{j\omega})| \times \omega$ , conforme é apresentado na figura 3.5. O símbolo "." corresponde ao subcanal dado por  $h_0(z)$  e o símbolo "+" corresponde ao subcanal dado por  $h_1(z)$ .

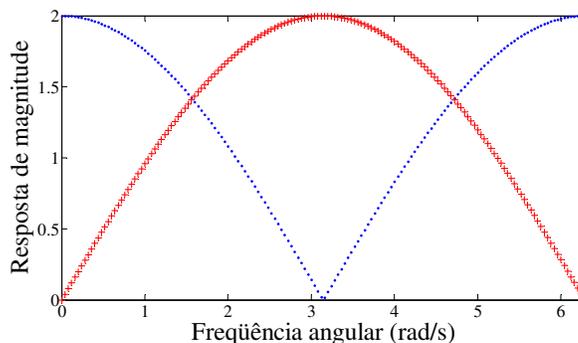


Figura 3.5: Resposta de magnitude dos sistemas.

De acordo com a figura 3.5, nas frequências 0 rad/s e  $2\pi$  rad/s, a resposta de magnitude do subcanal 1,  $|h_1(e^{j\omega})|$ , assume valor nulo. Porém, próximo destas frequências, a resposta de magnitude do subcanal 0,  $|h_0(e^{j\omega})|$ , assume valores não-nulos. Da mesma forma,  $|h_0(e^{j\omega})|$  assume valor nulo na frequência  $\pi$  rad/s, ao passo que  $|h_1(e^{j\omega})|$  assume valores não-nulos próximo desta frequência. Assim, temos que a resposta de magnitude de um dado subcanal tende a compensar a perda de informação do outro, uma vez que possuem nulos em frequências distintas.

Tanto a análise no tempo como na frequência nos indica que, ao trabalharmos com mais de um sinal recebido, modelo SIMO, estamos aumentando a diversidade de informação e proporcionando uma flexibilização estrutural do sistema.

### 3.4 Equalização de canais SIMO

É interessante notar que a condição de nenhum zero em comum se assemelha ao caso de canais SISO só de pólos no sentido de que em ambos os casos pode-se obter a inversão perfeita do canal (Bai & Ding, 2000). Também, de maneira análoga, é interessante investigar uma possível correspondência entre os modelos SISO e SIMO

no que se refere à propriedade de fase mínima, visto que é possível equalizar canais SISO de fase mínima por meio do uso de EO2. Para apresentarmos o conceito de fase mínima em sistemas SIMO, disporemos das decomposições de Smith e Smith-McMillan, descritas em detalhes no apêndice A (Kailath, 1980), (Vaidyanathan, 1993), (Gantmacher, 1977).

**Teorema 3.4.1 (Forma de Smith)** <sup>4</sup> *Seja  $\mathbf{h}(z)$  um vetor polinomial  $P \times 1$  onde cada elemento representa um polinômio em  $z$ . Então, existe um número finito de operações elementares sobre as linhas de  $\mathbf{h}(z)$  que o reduza a um vetor polinomial com apenas um elemento não-nulo, podendo ser escrito da seguinte forma:*

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{Q}(z) \begin{bmatrix} \gamma(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

onde  $\mathbf{Q}(z)$  é uma matriz polinomial unimodular<sup>5</sup>  $P \times P$  em  $z$  e  $\gamma(z)$  é um polinômio mônico, isto é, o termo de maior grau tem coeficiente unitário. Para um dado vetor  $\mathbf{h}(z)$ , o vetor  $[\gamma(z) \ 0 \ \dots \ 0]^T$  é único e é chamado de forma de Smith de  $\mathbf{h}(z)$ .

**Teorema 3.4.2 (Forma de Smith-McMillan)** <sup>6</sup> *Seja  $\mathbf{h}(z)$  um vetor  $P \times 1$  onde cada elemento é uma razão de polinômios em  $z$ . Então, podemos decompô-lo na forma*

$$\mathbf{h}(z) = \mathbf{Q}(z) \begin{bmatrix} \alpha(z)/\beta(z) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

---

<sup>4</sup>A íntegra da demonstração da forma de Smith pode ser encontrada em (Gantmacher, 1977).

<sup>5</sup>Matriz unimodular na variável  $z$  é uma matriz polinomial quadrada em  $z$  com determinante constante não nulo.

<sup>6</sup>A íntegra da demonstração da forma de Smith-McMillan pode ser encontrada em (Gantmacher, 1977).

onde  $\mathbf{Q}(z)$  é uma matriz polinomial unimodular  $P \times P$  em  $z$ , e  $\alpha(z)$  e  $\beta(z)$  não têm fator polinomial em  $z$  em comum, isto é, o máximo divisor comum entre eles é 1. Então, o vetor  $[\alpha(z)/\beta(z) \ 0 \ \dots \ 0]^T$  é chamado de forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{h}(z)$ .

Os teoremas 3.4.1 e 3.4.2 são casos particulares dos teoremas enunciados no apêndice A, para  $n = 1$ . Nosso interesse no estudo das decomposições de Smith e Smith-McMillan vem da possibilidade de identificação dos zeros e pólos do sistema a partir de uma série de manipulações sobre o vetor deste canal. A diferença entre as decomposições de Smith e de Smith-McMillan é que a decomposição de Smith-McMillan envolve elementos que podem ser escritos como uma razão de polinômios e a decomposição de Smith, apenas por polinômios. Assim, as formas de Smith e de Smith-McMillan são aplicadas, respectivamente, em sistemas onde os subcanais são filtros FIR e filtros IIR.

Portanto, utilizando as formas de Smith e de Smith-McMillan podemos dar uma definição unívoca de pólos e zeros no caso SIMO (Goodwin, Graebe, & Salgado, 2001), (Bai & Ding, 2000), enunciada a seguir.

**Definição 3.4.1 (Pólos e zeros)** *Considere o vetor  $P \times 1$   $\mathbf{h}(z)$ , onde cada elemento é uma razão de polinômios em  $z$  e a sua forma de Smith-McMillan correspondente. Os **zeros** e os **pólos** de  $\mathbf{h}(z)$  são definidos, respectivamente, como raízes de  $\alpha(z)$  e  $\beta(z)$ . Assim,  $\alpha(z)$  e  $\beta(z)$  são chamados, respectivamente, de **polinômio de zeros** e **polinômio de pólos** de  $\mathbf{h}(z)$ , também conhecidos por polinômios da forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{h}(z)$ .*

No caso em que os subcanais são apenas filtros FIR, a definição de zeros do sistema acima particulariza-se para as raízes de  $\gamma(z)$ , isto é, este sistema possui pólos apenas na origem. Assim, as raízes de  $\gamma(z)$  e de  $\alpha(z)$  correspondem igualmente aos zeros em comum dos subcanais do sistema  $\mathbf{h}(z)$  e, segundo (Bai & Ding, 2000), também correspondem aos zeros deste sistema.

Por conseguinte, um sistema SIMO definido pelo vetor de polinômios  $\mathbf{h}(z)$  é dito de *fase mínima* se não houver zeros nem pólos localizados fora da CRU. É importante

notar que um sistema SIMO de fase mínima pode, a princípio, apresentar subcanais com zeros fora da CRU, desde que os zeros em comum não estejam fora da CRU (Papadias & Slock, 1999).

É importante também frisar que todos os canais que satisfazem a condição de Bézout são também, por definição, de fase mínima, pois não possuem zeros em comum e, obviamente, nenhum zero em comum fora da CRU (Papadias & Slock, 1999).

Sendo assim podemos, finalmente, enunciar o teorema a seguir que formaliza as condições de equalização ZF de um canal SIMO-FIR (Bai & Ding, 2000).

**Teorema 3.4.3 (Equalizabilidade de sistemas SIMO)** <sup>7</sup> *Se um sistema SIMO-FIR tem  $P$  saídas com função de transferência polinomial  $\mathbf{h}(z)$  e pode ser escrito na forma de Smith dada por (3.48), então:*

- *A função de transferência  $\mathbf{h}(z)$  é perfeitamente equalizável por meio de estruturas FIR se e somente se  $\gamma(z) = z^{-d}$  para algum  $d \geq 0$ , i.e., as funções  $h_p(z)$  não possuem zeros finitos em comum (leva à identidade de Bézout dada em 3.3.1);*
- *Se o equalizador MISO possui pólos de sistema, a função de transferência  $\mathbf{h}(z)$  será perfeitamente equalizável se e somente se  $\mathbf{h}(z)$  for de fase mínima, i.e., as raízes de  $\gamma(z)$  não se encontram fora da CRU.*

Em resumo, se o canal possuir zeros em comum apenas será perfeitamente equalizável se estes zeros em comum não estiverem localizados fora da CRU.

Pode-se interpretar o teorema 3.4.3 de uma forma interessante (Papadias & Slock, 1999), (Johnson Jr. et al., 1998). Apresentamos a figura 3.6 a fim de ilustrar esta interpretação, onde  $h_c(z) = \prod_{i=1}^M 1 - z_i z^{-1}$  é o polinômio que envolve todos os  $M$  zeros em comum dos subcanais,  $z_i$ . Para  $p = 0, \dots, P - 1$ ,  $h'_p(z)$  é o polinômio que envolve os zeros restantes do  $p$ -ésimo subcanal, de forma que sua função de transferência pode ser escrita como  $h_p(z) = h_c(z)h'_p(z)$ .

<sup>7</sup>A íntegra da demonstração deste teorema pode ser encontrada em (Bai & Ding, 2000).

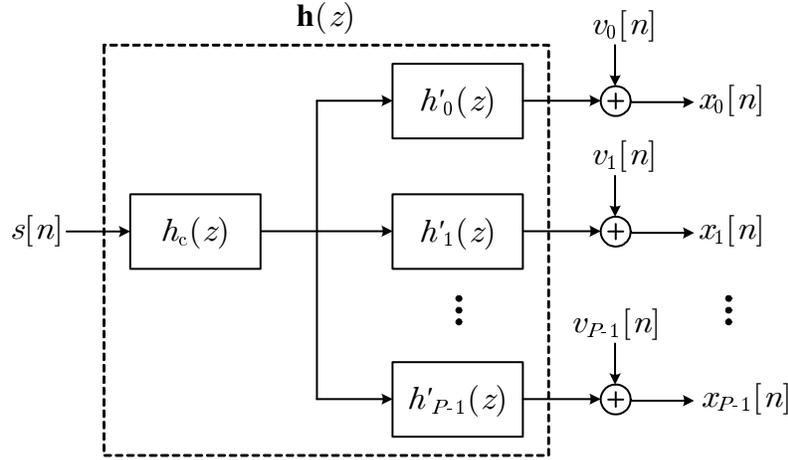


Figura 3.6: Modelo SIMO com fatoração do sistema.

Se os subcanais do sistema SIMO tiverem zeros em comum, então estes zeros poderão ser fatorados como mostra a figura 3.6. Logo, a equalização deste fator tornar-se-á um problema de equalização de sistemas SISO no qual não existe solução ZF-FIR. Contudo, a equalização do sistema restante da fatoração, de acordo com a identidade de Bézout (teorema 3.3.1), será factível por meio de filtros FIR.

Por conseguinte, para a equalização de canais de fase mínima com zeros em comum ser perfeita, o equalizador MISO correspondente deverá necessariamente apresentar pólos não-nulos em comum, de forma a cancelar os zeros em comum do canal SIMO. Para que isto ocorra, os subequalizadores deverão ser filtros IIR. A figura 3.7 ilustra esta análise, onde  $w_c(z) = \frac{1}{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}$  é uma razão de polinômios que envolve todos os  $M$  pólos em comum entre todos os subequalizadores,  $z_i$ . Para  $p = 0, \dots, P-1$ ,  $w'_p(z)$  é o polinômio restante do  $p$ -ésimo subequalizador, de forma que sua função de transferência pode ser escrita como  $w_p(z) = w_c(z)w'_p(z)$ .

Concluindo, de acordo com o teorema 3.4.3, podemos equalizar perfeitamente sistemas de fase mínima desde que não possuam zeros em comum entre todos os subcanais. No entanto, quando apresentam zeros em comum e se restringe o uso de apenas filtros FIR, permanece a limitação estrutural, similar ao problema de equalização de sistemas SISO.

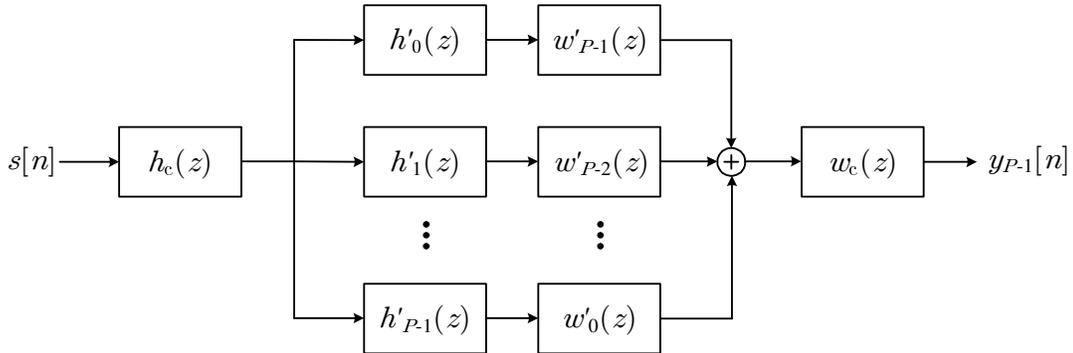


Figura 3.7: Modelo de canal SIMO e modelo de equalizador MISO com fatoração do sistema.

Em ambos os casos, deparamos-nos também com a limitação quanto ao uso de EO2. Como vimos na seção 3.2, o sinal recebido superamostrado, por apresentar a característica de cicloestacionariedade, indica que é possível obter mais informação sobre a fase do canal SIMO com apenas EO2. Resta, portanto, avaliar até que ponto a equalização baseada exclusivamente em EO2 é efetiva no caso SIMO. Neste sentido, a exemplo do que foi feito no capítulo anterior, utilizamos o filtro de erro de predição para estudarmos as restrições encontradas ao fazer uso de apenas EO2.

### 3.5 Equalização baseada em Filtros de Erro de Predição

Semelhantemente ao caso SISO, o FEP progressivo também é capaz de prover uma solução para o problema de equalização cega de canais SIMO de fase mínima. Em sistemas SISO, a equalização baseada em predição linear progressiva restringe-se a canais que não possuam zeros fora da CRU. Em contrapartida, a propriedade de fase mínima para sistemas SIMO é menos restritiva, pois permite que os subcanais sejam individualmente de fase não-mínima (Papadias & Slock, 1999). Para melhor investigar este aspecto, estudamos nesta seção filtros preditores para o caso SIMO.

A figura 3.8 ilustra o modelo multicanal com  $P$  subcanais e o equalizador correspondente MIMO  $\mathbf{W}[n]$ , com  $P$  entradas e  $P$  saídas, onde cada uma das saídas  $y_p[n]$

é uma estimativa do sinal transmitido  $s[n]$ .

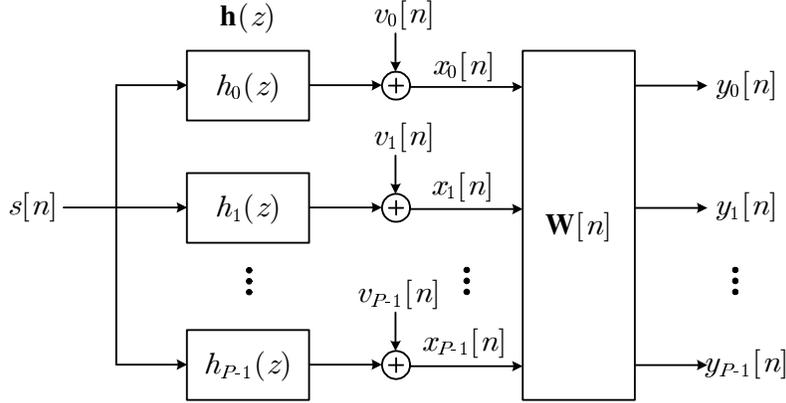


Figura 3.8: Representação do modelo SIMO com  $P$  subcanais e equalizador MIMO.

Sejam  $\mathbf{x}[n] = [x_0[n] \ \dots \ x_{P-1}[n]]^T$  e  $\hat{\mathbf{x}}[n] = [\hat{x}_0[n] \ \dots \ \hat{x}_{P-1}[n]]^T$ , respectivamente, os vetores de amostras dos sinais recebidos na saída de cada subcanal e suas estimativas. Consideraremos um filtro preditor de ordem  $L - 1$ . Desta forma, este preditor deve estimar  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  utilizando amostras passadas de  $\mathbf{x}[n]$ , isto é, o vetor  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  pode ser escrito como uma combinação das amostras passadas dos sinais recebidos  $\mathbf{x}[n - 1], \mathbf{x}[n - 2], \dots, \mathbf{x}[n - L + 1]$ :

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{P}_1^H \mathbf{x}[n - 1] + \dots + \mathbf{P}_{L-1}^H \mathbf{x}[n - L + 1], \quad (3.50)$$

onde  $\mathbf{P}_i = [\mathbf{p}_{i0} \ \dots \ \mathbf{p}_{iP-1}]$  são matrizes  $P \times P$  e cada  $p$ -ésima estimativa  $\hat{x}_p[n]$  envolve as amostras passadas de todas as saídas dos subcanais, ou seja:

$$\hat{x}_p[n] = \mathbf{p}_{1p}^H \mathbf{x}[n - 1] + \dots + \mathbf{p}_{L-1p}^H \mathbf{x}[n - L + 1]. \quad (3.51)$$

Definindo a matriz  $(L - 1)P \times P$  dos coeficientes do filtro de predição por  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}_1^T \ \dots \ \mathbf{P}_{L-1}^T]^T$  e o vetor  $(L - 1)P \times 1$  formado pelos  $L - 1$  vetores  $P \times 1$  de amostras passadas dos sinais recebidos por  $\mathbf{x}_{L-1}[n - 1] = [\mathbf{x}^T[n - 1] \ \dots \ \mathbf{x}^T[n - L + 1]]^T$ , podemos reescrever (3.50):

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{P}^H \mathbf{x}_{L-1}[n - 1]. \quad (3.52)$$

A partir de (3.52), podemos calcular o vetor de erro de predição por:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_f[n] &= \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]_{\mathbf{x}_{L-1}[n-1]} \\ &= \mathbf{x}[n] - \mathbf{P}^H \mathbf{x}_{L-1}[n-1] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & -\mathbf{P}^H \end{bmatrix} \mathbf{x}_L[n], \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde  $\mathbf{x}_L[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[n] & \cdots & \mathbf{x}^T[n-L+1] \end{bmatrix}^T$  corresponde ao vetor  $PL \times 1$  formado por amostras passadas e atual dos sinais recebidos, e  $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & -\mathbf{P}^T \end{bmatrix}^T$  corresponde à matriz  $PL \times P$  dos coeficientes do FEP progressivo. Podemos então definir a matriz  $P \times P$  de covariância do erro de predição como:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{e_f}^2 = E [\mathbf{e}_f[n] \mathbf{e}_f^H[n]]. \quad (3.54)$$

Como descrito em (Vaidyanathan, 2008) e (Papadias & Slock, 1999), os coeficientes do filtro preditor ótimo são obtidos através da minimização do EQM de todos os  $p$ -ésimos erros  $e_{f,p}[n] = x_p[n] - \hat{x}_p[n]$ , onde  $p = 0, \dots, P-1$ , o que equivale a minimizar o traço da matriz de covariância do erro de predição em relação aos coeficientes do filtro de predição:

$$\begin{aligned} \text{tr} [\boldsymbol{\Sigma}_{e_f}^2] &= E [|x_0[n] - \hat{x}_0[n]|^2 + \dots + |x_{P-1}[n] - \hat{x}_{P-1}[n]|^2] \\ &= E [\mathbf{e}_f^H[n] \mathbf{e}_f[n]]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

De acordo com (Vaidyanathan, 2008), o filtro de predição de  $\mathbf{x}[n]$  é dito ótimo se e somente se o erro de predição  $\mathbf{e}_f[n]$  em qualquer  $n$  é ortogonal a todas as observações passadas de  $\mathbf{x}[n]$ , isto é, no nosso caso,  $\mathbf{x}[n-1], \dots, \mathbf{x}[n-L+1]$ . Assim, esta condição de ortogonalidade pode ser escrita como:

$$E [\mathbf{x}[n-k] \mathbf{e}_f^H[n]] = \mathbf{0}, \quad 1 \leq k \leq L-1. \quad (3.56)$$

Podemos chegar a este resultado de forma simples. Sejam  $\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n]$  e  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  estimativas de  $\mathbf{x}[n]$ , sendo que  $\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n]$  representa a condição de ortogonalidade expressa em (3.56), e  $\mathbf{e}_{f,\perp}[n]$  e  $\mathbf{e}_f[n]$  os erros correspondentes a estas predições, respectivamente. Podemos escrever  $\mathbf{e}_f[n]$  em função de  $\mathbf{e}_{f,\perp}[n]$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_f[n] &= \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n] \\ &= \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n] + \hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n] \\ &= \mathbf{e}_{f,\perp}[n] + \hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Como  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n]$  são, por definição, combinações lineares das amostras passadas  $\mathbf{x}[n-k]$ ,  $1 \leq k \leq L-1$ , então  $\mathbf{e}_{f,\perp}[n]$  também será ortogonal a  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  e  $\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n]$ . Assim, podemos escrever a matriz de covariância de  $\mathbf{e}_f[n]$  por:

$$\mathbb{E} [\mathbf{e}_f[n] \mathbf{e}_f^H[n]] = \mathbb{E} [\mathbf{e}_{f,\perp}[n] \mathbf{e}_{f,\perp}^H[n]] + \mathbb{E} [(\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) (\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n])^H]. \quad (3.58)$$

Como o segundo termo do lado direito de (3.58) é também uma covariância, então é definida semipositiva, logo:

$$\mathbb{E} [\mathbf{e}_f[n] \mathbf{e}_f^H[n]] - \mathbb{E} [\mathbf{e}_{f,\perp}[n] \mathbf{e}_{f,\perp}^H[n]] \geq \mathbf{0}. \quad (3.59)$$

Quando uma matriz é definida semipositiva, todos seus autovalores são maiores ou iguais a zero. Portanto, como o traço de uma matriz é a soma de todos os seus autovalores, podemos reescrever (3.59) como:

$$\text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{e}_f[n] \mathbf{e}_f^H[n]]] \geq \text{tr} [\mathbb{E} [\mathbf{e}_{f,\perp}[n] \mathbf{e}_{f,\perp}^H[n]]]. \quad (3.60)$$

Assim, o mínimo valor para o traço da matriz de covariância de  $\mathbf{e}_f[n]$  é alcançado quando:

$$\mathbb{E} [(\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) (\hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n])^H] = \mathbf{0}, \quad (3.61)$$

ou seja, a igualdade ocorre apenas quando  $\hat{\mathbf{x}}[n] = \hat{\mathbf{x}}_{\perp}[n]$ .

Agora, precisamos analisar se o FEP progressivo ótimo é uma solução ZF, ou seja, inverte perfeitamente o canal. Para isto, reescreveremos (3.7) desconsiderando o ruído:

$$\mathbf{x}_L[n] = \mathbf{H}_L \mathbf{s}_{L+N-1}[n], \quad (3.62)$$

onde  $\mathbf{s}_{L+N-1}[n] = [s[n] \ \cdots \ s[n-L-N+2]]^T$ .

Quando a matriz  $\mathbf{H}_L$  tem posto completo de colunas, temos que o erro de predição estimado através de  $\mathbf{x}_{L-1}[n-1]$  pode ser reescrito em termos do vetor das amostras passadas do sinal transmitido  $\mathbf{s}_{L+N-2}[n-1]$ , assim:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_f[n] &= \mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}[i] s[n-i] - \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}[i] \hat{s}[n-i] |_{\mathbf{s}_{L+N-2}[n-1]} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}[i] s[n-i] - \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{h}[i] s[n-i] - \mathbf{h}[0] \hat{s}[n] |_{\mathbf{s}_{L+N-2}[n-1]} \\ &= \mathbf{h}[0] \tilde{s}[n] |_{\mathbf{s}_{L+N-2}[n-1]}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

onde  $\tilde{s}[n]$  é o erro de predição ao se estimar  $s[n]$  a partir das amostras do vetor  $\mathbf{s}_{L+N-2}[n-1]$ . Neste caso, ao estimar  $s[n]$ , consideramos conhecidas todas as amostras passadas deste sinal.

Como as amostras do sinal transmitido são, por definição, i.i.d. as amostras passadas não acrescentam informação alguma na estimação de  $s[n]$ , logo, o mínimo erro de predição é dado por:

$$\mathbf{e}_f[n] = \mathbf{h}[0] s[n]. \quad (3.64)$$

Aplicando (3.62) em (3.53) e igualando a (3.64), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & -\mathbf{P}_{\text{ot}}^H \end{bmatrix} \mathbf{H}_L \mathbf{s}_{L+N-1}[n] = \mathbf{h}[0] s[n]. \quad (3.65)$$

Multiplicando o vetor linha  $\mathbf{s}_{L+N-1}^H[n]$  em ambos os lados de (3.65), vem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & -\mathbf{P}_{\text{ot}}^H \end{bmatrix} \mathbf{H}_L \mathbf{s}_{L+N-1}[n] \mathbf{s}_{L+N-1}^H[n] &= \mathbf{h}[0] s[n] \mathbf{s}_{L+N-1}^H[n] \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & -\mathbf{P}_{\text{ot}}^H \end{bmatrix} \mathbf{H}_L &= \mathbf{h}[0] \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times L+N-2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}_{\text{ot}}^H \mathbf{H}_L &= \mathbf{h}[0] \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times L+N-2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Comparando (3.45) com (3.66), verificamos que o filtro preditor ótimo satisfaz a condição ZF para atraso de equalização  $d = 0$ , então o vetor dos sinais na saída do FEP ótimo é dado por:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{h}[0] s[n], \quad (3.67)$$

onde  $\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} y_0[n] & \cdots & y_{P-1}[n] \end{bmatrix}^T$ .

Como apresentado na figura 3.8, o FEP é um filtro MIMO, logo, obtemos em sua saída  $P$  estimativas do sinal transmitido equivalentes. Desta forma, para obtermos apenas uma destas soluções, basta utilizar um FEP MISO cujos os coeficientes são dados pelo vetor  $LP \times 1$   $\mathbf{w}_{p,\text{ot}}$ , correspondendo aos coeficientes de uma das colunas da matriz  $\mathbf{W}_{\text{ot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{0,\text{ot}} & \mathbf{w}_{1,\text{ot}} & \cdots & \mathbf{w}_{P-1,\text{ot}} \end{bmatrix}$ .

Resta agora obtermos os coeficientes ótimos do FEP. Considerando o filtro preditor ótimo, pode-se calcular a matriz de covariância do erro de predição através da condição de ortogonalidade. Desta forma temos:

$$\begin{aligned} \Sigma_{e_f,\text{ot}}^2 &= E [\mathbf{e}_f[n] \mathbf{e}_f^H[n]] \\ &= E [(\mathbf{x}[n] - \hat{\mathbf{x}}[n]) \mathbf{e}_f^H[n]] \\ &= E [\mathbf{x}[n] \mathbf{e}_f^H[n]]. \end{aligned} \quad (3.68)$$

### 3.5. EQUALIZAÇÃO BASEADA EM FILTROS DE ERRO DE PREDIÇÃO 49

Como os sinais recebidos são estacionários no sentido amplo, substituindo (3.50) e (3.53) em (3.68), temos:

$$\begin{aligned}\Sigma_{e_f, \text{ot}}^2 &= \text{E} \left[ \mathbf{x}[n] \left( \mathbf{x}[n] - \mathbf{P}_1^H \mathbf{x}[n-1] - \dots - \mathbf{P}_{L-1}^H \mathbf{x}[n-L+1] \right)^H \right] \\ &= \mathbf{R}[0] - \mathbf{R}[1] \mathbf{P}_1 - \dots - \mathbf{R}[L-1] \mathbf{P}_{L-1},\end{aligned}\quad (3.69)$$

onde  $\mathbf{R}[k] = \text{E} [\mathbf{x}[n] \mathbf{x}^H[n-k]]$ .

Agora, substituindo (3.50) e (3.53) em (3.56), e sabendo que  $\mathbf{R}[k] = \mathbf{R}^H[-k]$ , temos:

$$\begin{aligned}\text{E} \left[ \mathbf{x}[n-k] \left( \mathbf{x}[n] - \mathbf{P}_1^H \mathbf{x}[n-1] - \dots - \mathbf{P}_{L-1}^H \mathbf{x}[n-L+1] \right)^H \right] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R}[-k] - \mathbf{R}[-k+1] \mathbf{P}_1 - \dots - \mathbf{R}[-k+L-1] \mathbf{P}_{L-1} &= \mathbf{0},\end{aligned}\quad (3.70)$$

onde  $1 \leq k \leq L-1$ . Podemos escrever (3.70) na forma de matriz como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}[0] & \mathbf{R}[1] & \cdots & \mathbf{R}[L-2] \\ \mathbf{R}[-1] & \mathbf{R}[0] & \cdots & \mathbf{R}[L-3] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}[-L+2] & \mathbf{R}[-L+3] & \cdots & \mathbf{R}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}[-1] \\ \mathbf{R}[-2] \\ \vdots \\ \mathbf{R}[-L+1] \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Estas equações são conhecidas como *equações de Wiener-Hopf*. Através delas, é possível calcular os coeficientes ótimos do preditor desde que a primeira matriz do lado esquerdo seja não-singular, ou seja, inversível.

Englobando (3.69) em (3.71), temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}[0] & \mathbf{R}[1] & \cdots & \mathbf{R}[L-1] \\ \mathbf{R}[-1] & \mathbf{R}[0] & \cdots & \mathbf{R}[L-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}[-L+1] & \mathbf{R}[-L+2] & \cdots & \mathbf{R}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P \\ -\mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ -\mathbf{P}_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{e_f, \text{ot}}^2 \\ \mathbf{0}_P \\ \vdots \\ \mathbf{0}_P \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Podemos reparticionar a primeira matriz do lado esquerdo da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}[0] & \mathbf{R}^x \\ (\mathbf{R}^x)^H & \mathbf{R}_{L-1}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P \\ -\mathbf{P}_{\text{ot}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{e_f, \text{ot}}^2 \\ \mathbf{0}_{P(L-1) \times P} \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

onde  $\mathbf{R}^x = E[\mathbf{x}[n]\mathbf{x}_{L-1}^H[n-1]]$  e  $\mathbf{R}_{L-1}^x = E[\mathbf{x}_{L-1}[n]\mathbf{x}_{L-1}^H[n]]$ . Daí vem:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\text{ot}} &= (\mathbf{R}_{L-1}^x)^{-1} (\mathbf{R}^x)^H \\ \Sigma_{e_f, \text{ot}}^2 &= \mathbf{R}[0] - \mathbf{R}^x (\mathbf{R}_{L-1}^x)^{-1} (\mathbf{R}^x)^H\end{aligned}\quad (3.74)$$

Através da solução ótima acima, podemos calcular os coeficientes do FEP por:

$$\mathbf{W}_{\text{ot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & -\mathbf{R}^x (\mathbf{R}_{L-1}^x)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

utilizando apenas EO2 do sinal recebido.

No capítulo 2, vimos que o emprego do FEP na equalização de canais SISO está relacionado às suas propriedades de ser de fase mínima e de agir como filtro branqueador. Assim, de maneira similar, convém examinar este mesmo comportamento no contexto de canais SIMO.

De nosso conhecimento, as propriedades de fase mínima e de agir como filtro branqueador do FEP para canais SIMO não foram ainda provadas e, sendo assim, torna-se importante aqui mostrarmos ambas as propriedades em detalhes.

### 3.5.1 Propriedade de Fase Mínima

Podemos escrever o  $p$ -ésimo erro de predição,  $e_{f,p}[n]$ , em função dos coeficientes do FEP progressivo como:

$$\begin{aligned}e_{f,p}[n] &= x_p[n] - \hat{x}_p[n] \\ &= w_{p,0}[n] * x_0[n] + \dots + w_{p,P-1}[n] * x_{P-1}[n] \\ &= \sum_{i=0}^{P-1} w_{p,i}[n] * x_i[n],\end{aligned}\quad (3.76)$$

onde  $p = 0, \dots, P-1$ .

A função de autocorrelação do  $p$ -ésimo erro de predição, por definição, é:

$$r_{e_{f,p}}[m] = E[e_{f,p}[n] e_{f,p}^*[n-m]]. \quad (3.77)$$

Aplicando (3.76) em (3.77), tem-se:

$$\begin{aligned}
 r_{e_{f,p}}[m] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{P-1} w_{p,i}[n] * x_i[n] \sum_{j=0}^{P-1} w_{p,j}^*[n-m] * x_j^*[n-m] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \sum_i \sum_j \left( \sum_k w_{p,i}[k] x_i[n-k] \right) \left( \sum_l w_{p,j}^*[l] x_j^*[n-m-l] \right) \right] \quad (3.78) \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l w_{p,i}[k] w_{p,j}^*[l] \mathbb{E} [x_i[n-k] x_j^*[n-m-l]],
 \end{aligned}$$

onde  $r_{x_{ij}}[l+m-k] = \mathbb{E} [x_i[n-k] x_j^*[n-m-l]]$  é definido como a função de correlação cruzada dos sinais recebidos.

De maneira semelhante ao caso SISO, aplicando a transformada de Fourier na função de autocorrelação de  $e_{f,p}[n]$ , obtemos a função de densidade espectral de potência deste sinal descrita por:

$$\begin{aligned}
 S_{e_{f,p}}(e^{j\omega}) &\triangleq \mathfrak{S} \{r_{e_{f,p}}[m]\} \\
 &= \sum_m \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l w_{p,i}[k] w_{p,j}^*[l] r_{x_{ij}}[l+m-k] e^{-j\omega m}. \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

Após algumas manipulações em (3.79), obtém-se:

$$S_{e_{f,p}}(e^{j\omega}) = \sum_i \sum_j w_{p,i}(e^{j\omega}) w_{p,j}^*(e^{j\omega}) S_{x_{ij}}(e^{j\omega}), \quad (3.80)$$

onde definimos  $w_{p,i}(e^{j\omega}) \triangleq \mathfrak{S} \{w_{p,i}[m]\}$  e  $S_{x_{ij}}(e^{j\omega}) \triangleq \mathfrak{S} \{r_{x_{ij}}[m]\}$ . Note que  $S_{e_{f,p}}(e^{j\omega}) \geq 0$ , pois representa uma densidade espectral de potência.

Assim, utilizando (3.80), temos que o EQM referente ao  $p$ -ésimo erro de predição é dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [|e_{f,p}[n]|^2] &= r_{e_{f,p}}[0] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{e_{f,p}}(e^{j\omega}) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_i \sum_j w_{p,i}(e^{j\omega}) w_{p,j}^*(e^{j\omega}) S_{x_{ij}}(e^{j\omega}) d\omega. \quad (3.81)
 \end{aligned}$$

E, a partir de (3.81), podemos reescrever (3.55) como

$$\text{tr} [\Sigma_{e_f}^2] = r_{e_{f,0}}[0] + \dots + r_{e_{f,P-1}}[0]. \quad (3.82)$$

Desta forma, de acordo com o critério de erro de predição, a minimização do traço da matriz de covariância implica a minimização de cada elemento  $r_{e_f,p}[0]$  de (3.82), onde  $p = 0, \dots, P - 1$ .

Supondo que os polinômios  $w_{p,i}(z)$  apresentam ao menos um zero em comum, podemos reescrever (3.82) isolando os zeros em comum entre todos os polinômios  $w_{p,i}(z)$ , para  $i = 0, \dots, P - 1$ , analogamente ao que foi feito para o caso SISO, de forma a obtermos:

$$r_{e_f,p}[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |1 - z_0 e^{-j\omega}|^2 \left[ \sum_i \sum_j \bar{w}_{p,i}(e^{j\omega}) \bar{w}_{p,j}^*(e^{j\omega}) S_{x_{ij}}(e^{j\omega}) \right] d\omega, \quad (3.83)$$

onde, em termos da variável complexa  $z$ ,  $w_{p,i}(z) = (1 - z_0 z^{-1}) \bar{w}_{p,i}(z)$  e  $w_{p,j}^*(z) = (1 - z_0 z^{-1})^* \bar{w}_{p,j}^*(z)$ .

Note que o termo entre colchetes à direita em (3.83) representa uma densidade espectral de potência, e, portanto, também será maior ou igual a zero. Desta forma, pode-se mostrar, a exemplo do caso SISO, que os zeros em comum devem estar, necessariamente, dentro da CRU, e, conseqüentemente, o FEP progressivo MISO será de fase mínima.

### 3.5.2 FEP como Filtro Branqueador

Como vimos no começo desta seção, o vetor de erro de predição pode ser obtido a partir de valores anteriores e atual dos sinais recebidos. Supondo, em princípio, o conhecimento de infinitas amostras passadas, tem-se:

$$\mathbf{e}_f[n] = \mathbf{x}[n] - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_i^H \mathbf{x}[n - i], \quad (3.84)$$

onde os coeficientes do filtro de predição são agrupados na matriz  $\mathbf{P} = \left[ \mathbf{P}_1^T \quad \mathbf{P}_2^T \quad \dots \right]^T$  e calculados através da minimização do traço da matriz de covariância do erro de predição  $\Sigma_{e_f}^2$ .

Por simplicidade, iremos nos restringir ao caso em que tantos os coeficientes quanto os sinais assumem valores reais. Como sabemos que, para FEP ótimo, o erro de predição  $\mathbf{e}_f[n]$  para qualquer  $n$  é ortogonal a todas as observações passadas de

$\mathbf{x}[n]$ , podemos escrever:

$$E[\mathbf{x}[n-i] \mathbf{e}_f^T[n]] = \mathbf{0}, \quad i \geq 1, \quad (3.85)$$

ou ainda reescrevê-la da seguinte forma:

$$E[x_j[n-i] e_{f,p}[n]] = 0, \quad i \geq 1, \quad p, j = 0, \dots, P-1. \quad (3.86)$$

A expressão anterior nos diz que o FEP progressivo produz uma saída  $e_{f,p}[n]$  ortogonal a todas as amostras passadas dos sinais recebidos  $x_0[n], \dots, x_{P-1}[n]$ .

De outra forma, partindo de (3.51), podemos escrever o  $p$ -ésimo erro de predição por:

$$\begin{aligned} e_{f,p}[n] &= x_p[n] - \hat{x}_p[n] \\ &= x_p[n] - \mathbf{p}_{1p}^T \mathbf{x}[n-1] - \mathbf{p}_{2p}^T \mathbf{x}[n-2] - \dots \\ &= x_p[n] - \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{p}_{ip}^T \mathbf{x}[n-i] \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde  $\mathbf{P}_i = [\mathbf{p}_{i0} \ \dots \ \mathbf{p}_{iP-1}]$  e  $\mathbf{p}_{ij} = [p_{ij}^{(0)} \ \dots \ p_{ij}^{(P-1)}]^T$ , para  $i = 1, \dots, \infty$  e  $j = 0, \dots, P-1$ . Se considerarmos o  $p$ -ésimo sinal de erro num instante passado,  $e_{f,p}[n-k]$ , observamos por (3.87) que este será uma combinação linear entre a  $p$ -ésima amostra atual  $x_p[n]$  e todas as amostras passadas dos sinais recebidos. Sendo assim,  $e_{f,p}[n-k]$  é ortogonal a  $e_{f,p}[n]$ , isto é:

$$E[e_{f,p}[n] e_{f,p}[n-k]] = 0, \quad k \geq 1, \quad p = 0, \dots, P-1. \quad (3.88)$$

É possível verificar também que os erros de predição  $e_{f,p}[n]$  e  $e_{f,j}[n-k]$ , para  $p, j = 0, \dots, P-1$  e  $k \geq 1$ , são ortogonais. Segundo (3.88), o FEP progressivo produz saídas descorrelacionadas e, assim, funciona como um *filtro branqueador* desde que dotado de um número suficiente de coeficientes.

Da mesma forma como ocorre no caso SISO, o sinal transmitido é, por hipótese, i.i.d. e, conseqüentemente, descorrelacionado. Assim, o sinal a ser recuperado pelo equalizador também deverá, em princípio, apresentar esta mesma característica. Porém, como recuperar um sinal descorrelacionado não implica a recuperação do sinal transmitido, apenas canais SIMO de fase mínima serão equalizados através de FEP progressivo.

### Exemplo ilustrativo

Para ilustrar os resultados apresentados nesse capítulo, foram realizadas simulações com equalizadores baseados em FEP progressivo lineares com coeficientes ótimos obtidos através de (3.75). Foi considerada a seqüência de entrada do sistema com 300 símbolos i.i.d., assumindo valor  $+1$  ou  $-1$ . O ruído aditivo foi desconsiderado convenientemente. Aplicamos nas saídas do FEP um dispositivo decisor adequado.

Analizamos canais de fase mínima sem zeros em comum, de fase mínima e de fase máxima com apenas um zero em comum. Todos canais SIMO utilizados possuem três subcanais FIR com três coeficientes cada. As figuras 3.9, 3.10 e 3.11 mostram a seqüência obtida em uma das saídas do FEP progressivo,  $y_p[n]$ , escolhida aleatoriamente, para os canais de fase mínima com nenhum zero em comum, de fase mínima e fase máxima com apenas um zero em comum, respectivamente. Denotamos com "o" os símbolos na saída do equalizador.

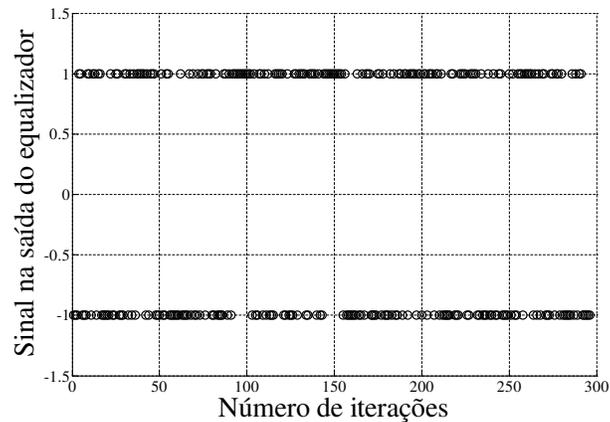


Figura 3.9: Caso canal SIMO fase mínima sem zeros em comum: Sinal na saída do equalizador ótimo.

O primeiro caso analisado foi o sistema de fase mínima sem zeros em comum entre todos os subcanais, os coeficientes dos subcanais são  $\mathbf{h}_1 = [1 \ -0,9 \ 0,2]^T$ , com zeros  $z_{11} = 0,5$  e  $z_{12} = 0,4$ ;  $\mathbf{h}_2 = [1 \ -3,5 \ 3,0]^T$ , com zeros  $z_{21} = 1,5$  e  $z_{22} = 2$ ; e  $\mathbf{h}_3 = [1 \ -1,7 \ 0,6]^T$ , com zeros  $z_{31} = 0,5$  e  $z_{32} = 1,2$ . Por não existir

zero em comum entre todos os subcanais, isto é, satisfazer perfeitamente o teorema de Bézout, podemos constatar, de acordo com a figura 3.9, que ocorre a inversão perfeita do canal e o sinal na saída do equalizador é idêntico ao da entrada.

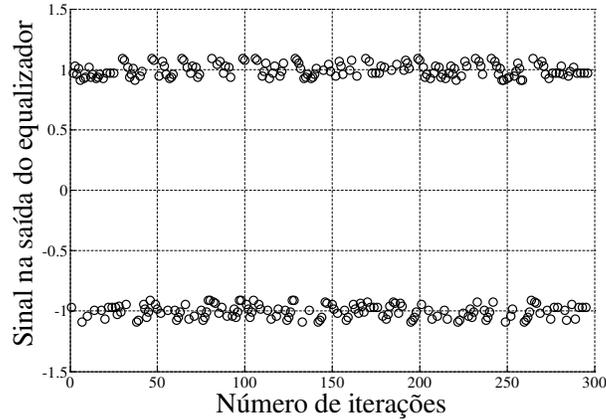


Figura 3.10: Caso canal SIMO fase mínima com apenas um zero em comum: Sinal na saída do equalizador ótimo.

O segundo caso, trata-se do sistema de fase mínima com apenas um zero em comum entre todos os subcanais, os coeficientes dos subcanais são  $\mathbf{h}_1 = [1 \ -0,9 \ 0,2]^T$ , com zeros  $z_{11} = 0,5$  e  $z_{12} = 0,4$ ;  $\mathbf{h}_2 = [1 \ -2,5 \ 1]^T$ , com zeros  $z_{21} = 0,5$  e  $z_{22} = 2$ ; e  $\mathbf{h}_3 = [1 \ -1,7 \ 0,6]^T$ , com zeros  $z_{31} = 0,5$  e  $z_{32} = 1,2$ . Através da figura 3.10, fazendo uso de um decisor adequado na saída do FEP progressivo, verificamos que ocorre a equalização do canal, porém não sua inversão. Este comportamento é análogo à equalização de canais de fase mínima SISO utilizando FEP progressivo. Neste caso também não ocorrem erros de bit.

Finalmente, analisamos o caso do sistema de fase máxima com apenas um zero em comum entre todos os subcanais, os coeficientes dos subcanais são  $\mathbf{h}_1 = [1 \ -2 \ 0,75]^T$ , com zeros  $z_{11} = 0,5$  e  $z_{12} = 1,5$ ;  $\mathbf{h}_2 = [1 \ -3,5 \ 3]^T$ , com zeros  $z_{21} = 1,5$  e  $z_{22} = 2$ ; e  $\mathbf{h}_3 = [1 \ -2,3 \ 1,2]^T$ , com zeros  $z_{31} = 0,8$  e  $z_{32} = 1,5$ . Quando o canal é fase máxima, de acordo com a figura 3.11, o FEP progressivo não é capaz de equalizar o canal.

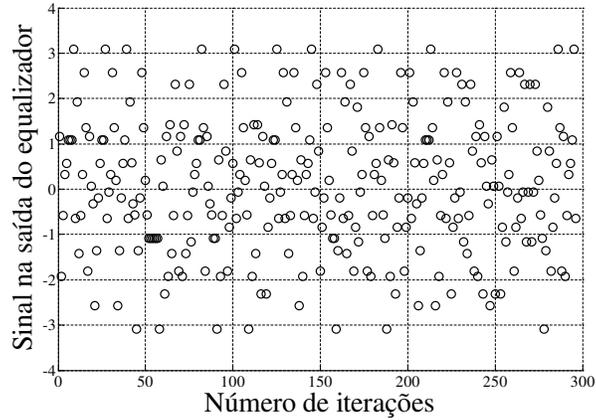


Figura 3.11: Caso canal SIMO fase máxima com apenas um zero em comum: Sinal na saída do equalizador ótimo.

### 3.6 Conclusão

Neste capítulo, estudamos o modelo SIMO a partir de dois cenários que recaem em uma mesma modelagem matemática: o sistema com múltiplas antenas na recepção e uma antena na transmissão, e o sistema proveniente da abordagem de superamostragem, o qual discutimos com mais detalhes.

Verificamos, primeiramente, que é possível equalização perfeita de canais SIMO-FIR utilizando apenas filtros equalizadores FIR, flexibilizando desta forma a limitação estrutural existente no caso SISO.

Também estudamos as condições sobre o uso de EO2 na equalização cega de canais SIMO. Constatamos que a restrição de canal de fase mínima permanece, sendo necessário redefinir esta propriedade no contexto SIMO.

Sendo assim, neste mesmo contexto, demonstramos a propriedade de fase mínima e de filtro branqueador do FEP progressivo e vimos que, para canais de fase mínima, este FEP funciona como equalizador. Esta demonstração surge como uma contribuição específica do presente capítulo, sendo interessante estendê-la ao caso MIMO.

# 4

## Equalização de sistemas MIMO

O objetivo do presente capítulo é o estudo de equalização de sistemas de comunicação onde há múltiplos transmissores e receptores, conhecidos como canais MIMO. Nosso interesse aqui é estender a análise das condições de equalizabilidade para sistemas MIMO. Neste contexto, o capítulo está organizado da seguinte forma:

Primeiramente, na seção 4.1, fazemos uma breve descrição do problema de equalização de canais MIMO, apresentando o modelo matemático correspondente. Na seção 4.2, estudamos a condição para equalização perfeita, apresentando em quais casos é possível satisfazer plenamente tal condição e, no sentido de melhor interpretar a condição ZF, estendemos os conceitos de fase mínima e, de zeros e pólos de sistema SIMO para sistema MIMO. Abordamos, na seção 4.3, as condições em que é possível equalizar sem necessariamente inverter o canal quando consideramos apenas estruturas FIR. As limitações quanto ao uso de EO2 na equalização cega são discutidas na seção 4.4. Finalmente, discutimos na seção 4.5 o problema de predição linear e suas relações com o problema de equalização não-supervisionada no caso MIMO.

### 4.1 Descrição do Problema

Consideremos agora o último caso a ser analisado, no qual o canal é modelado por um sistema MIMO. Este cenário é encontrado, por exemplo, em um sistema de

comunicação que emprega múltiplas antenas na transmissão e na recepção, conforme ilustrado na figura 4.1.

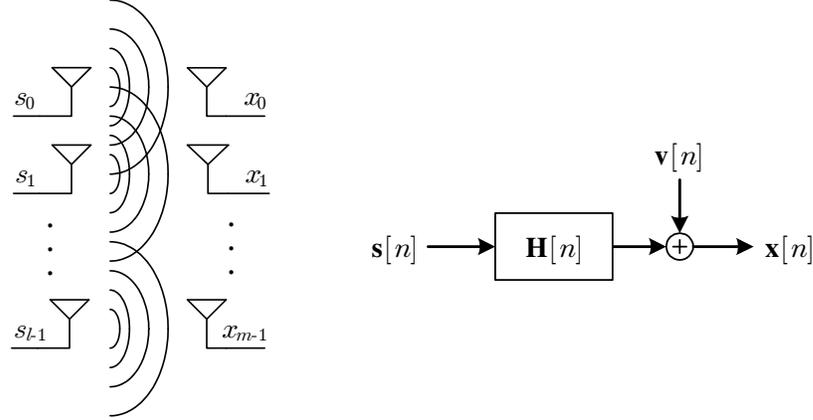


Figura 4.1: Representação do modelo MIMO, com  $l$  fontes e  $m$  sensores.

Consideramos o diagrama em blocos representado na figura 4.1, onde observa-se um sistema de comunicação de  $l$  sinais de entrada e  $m$  sinais de saída. Assume-se que este sistema pode ser modelado como um sistema linear definido pela matriz  $m \times l$  dos coeficientes de resposta ao impulso do canal  $\mathbf{H}[n]$ .

De acordo com a representação adotada, as  $l$  fontes emissoras são agrupadas no vetor  $\mathbf{s}[n] = [s_0[n] \ \cdots \ s_{l-1}[n]]^T$  e, da mesma forma, os sinais recebidos através dos  $m$  sensores são agrupados no vetor  $\mathbf{x}[n] = [x_0[n] \ \cdots \ x_{m-1}[n]]^T$ . Cada  $i$ -ésimo sinal transmitido,  $s_i[n]$ , é composto por amostras i.i.d.. O ruído aditivo do sistema é dado pelo vetor  $\mathbf{v}[n] = [v_0[n] \ \cdots \ v_{m-1}[n]]^T$  e cada  $i$ -ésimo sinal recebido,  $x_i[n]$ , é somado ao correspondente ruído,  $v_i[n]$ .

Assim, podemos escrever  $\mathbf{x}[n]$  como:

$$\mathbf{x}[n] = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{H}[i] \mathbf{s}[n-i] + \mathbf{v}[n], \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{H}[n] = [\mathbf{h}_0[n] \ \cdots \ \mathbf{h}_{l-1}[n]]^T$ ,  $N$  denota o comprimento de memória do canal e sua função de transferência é definida por:

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{H}[i] z^{-i}. \quad (4.2)$$

Dessa forma, cada sinal recebido pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} x_p[n] &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{h}_p^T[i] \mathbf{s}[n-i] + v_p[n] \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} h_{p0}[i] s_0[n-i] + \dots + h_{pl-1}[i] s_{l-1}[n-i] + v_p[n]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

De acordo com (4.3), observa-se que cada sinal recebido é uma combinação linear de todas as amostras passadas e atual dos sinais transmitidos. Contudo, quando analisamos o modelo SIMO, vimos que cada sinal recebido é uma combinação linear de todas as amostras passadas e atual de um único sinal. Assim, o fato de cada sinal recebido no caso MIMO envolver todas as fontes emissoras acarreta uma dificuldade adicional no problema de equalização pois, como há mais fontes envolvidas, teremos, conseqüentemente, mais informação a ser recuperada do que no caso SIMO.

Agrupando as  $N$  matrizes dos coeficientes do sistema com diferentes índices de atraso,  $\mathbf{H}[0], \dots, \mathbf{H}[N-1]$ , em uma única matriz  $m \times Nl$  e os  $N$  vetores dos sinais transmitidos com diferentes índices de atraso,  $\mathbf{s}[n], \dots, \mathbf{s}[n-N+1]$ , em um único vetor  $Nl \times 1$ , podemos ainda escrever (4.1) da seguinte forma:

$$\mathbf{x}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{H}[0] & \dots & \mathbf{H}[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{s}_N[n] + \mathbf{v}[n], \quad (4.4)$$

onde  $\mathbf{s}_N[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T[n] & \dots & \mathbf{s}^T[n-N+1] \end{bmatrix}^T$ .

A equação (4.4) pode ser agrupada para  $M$  vetores de amostras recebidas em  $M$  instantes diferentes, assim:

$$\mathbf{x}_M[n] = \mathbf{H}_M \mathbf{s}_{M+N-1}[n] + \mathbf{v}_M[n], \quad (4.5)$$

onde

$$\mathbf{x}_M[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[n] & \dots & \mathbf{x}^T[n-M+1] \end{bmatrix}^T, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{v}_M[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T[n] & \dots & \mathbf{v}^T[n-M+1] \end{bmatrix}^T, \quad (4.7)$$

e a matriz  $Mm \times l(M+N-1)$   $\mathbf{H}_M$  apresenta uma estrutura Toeplitz em bloco e pode

ser escrita como:

$$\mathbf{H}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{H}[0] & \mathbf{H}[1] & \cdots & \mathbf{H}[N-1] & \mathbf{0}_{m \times l} & \cdots & \mathbf{0}_{m \times l} \\ \mathbf{0}_{m \times l} & \mathbf{H}[0] & \cdots & \mathbf{H}[N-2] & \mathbf{H}[N-1] & \ddots & \mathbf{0}_{m \times l} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_{m \times l} & \mathbf{0}_{m \times l} & \cdots & \mathbf{H}[0] & \mathbf{H}[1] & \cdots & \mathbf{H}[N-1] \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

É interessante ressaltar que esta formulação matemática de modelos MIMO é análoga à formulação de modelos SIMO discutida na seção 3.1, porém trabalhamos aqui com matrizes de coeficientes ao invés de vetores de coeficientes.

De maneira análoga ao desenvolvimento apresentado para o modelo MIMO do canal, apresentaremos agora o correspondente modelo MIMO para o equalizador, conforme é ilustrado na figura 4.2.

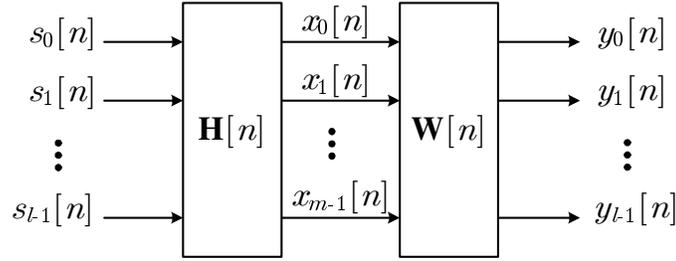


Figura 4.2: Representação do modelo MIMO do canal e do equalizador na ausência de ruído.

Analogamente a (4.1), podemos escrever os sinais na saída do equalizador da seguinte forma:

$$\mathbf{y}[n] = \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{W}[i] \mathbf{x}[n-i], \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{W}[n] = [\mathbf{w}_0[n] \cdots \mathbf{w}_{L-1}[n]]^T$ ,  $\mathbf{y}[n] = [y_0[n] \cdots y_{L-1}[n]]^T$ ,  $L$  denota o comprimento de memória do equalizador e sua função de transferência é definida por:

$$\mathbf{W}(z) = \sum_{i=0}^{L-1} \mathbf{W}[i] z^{-i}. \quad (4.10)$$

Reescrevendo (4.9) a partir do agrupamento das  $L$  matrizes dos coeficientes do equalizador com diferentes índices de atraso,  $\mathbf{W}[0], \dots, \mathbf{W}[L-1]$ , em uma única matriz  $l \times Lm$  e dos  $L$  vetores dos sinais recebidos com diferentes índices de atraso,  $\mathbf{x}[n], \dots, \mathbf{x}[n-L+1]$ , em um único vetor  $Lm \times 1$ , temos:

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{W}[0] & \cdots & \mathbf{W}[L-1] \end{bmatrix} \mathbf{x}_L[n], \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{x}_L[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[n] & \cdots & \mathbf{x}^T[n-L+1] \end{bmatrix}^T$ .

Aplicando (4.5) em (4.11), desconsiderando o ruído aditivo do sistema, chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[n] &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}[0] & \cdots & \mathbf{W}[L-1] \end{bmatrix} \mathbf{H}_L \mathbf{s}_{L+N-1}[n] \\ &= \mathbf{W}_L^H \mathbf{H}_L \mathbf{s}_{L+N-1}[n]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

## 4.2 Inversão perfeita de canais MIMO

Idealmente, procura-se obter um equalizador que disponibilize em sua saída uma versão atrasada e, possivelmente, atenuada ou amplificada do sinal transmitido.

Enquanto que nos casos SISO e SIMO procura-se recuperar um único sinal de interesse, no caso MIMO, o objetivo do equalizador cego é recuperar a informação proveniente de diferentes fontes somente por meio dos sinais recebidos e informação estatística das fontes. Dessa forma, haverá ambigüidades de fase, de amplitude e de permutação inerentes na solução deste problema (Inouye & Liu, 2002) e o próprio conceito de condição ZF sofrerá alterações.

Considerando as ambigüidades inerentes ao problema de equalização, pode-se dizer que um canal MIMO com função de transferência  $\mathbf{H}(z)$  é perfeitamente equalizável se existe  $\mathbf{W}(z)$  tal que (R. W. Liu, Inouye, & Luo, 2000), (Inouye & Liu, 2002):

$$\mathbf{W}^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{\Lambda}(z), \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{D}$  representam, respectivamente, uma matriz de permutação e uma matriz diagonal não-nula, e  $\mathbf{\Lambda}(z)$  denota uma matriz diagonal composta por monômios mônicos, isto é, possui elementos na forma  $z^{-l_i}$ ,  $l_i \geq 0$ .

Em outras palavras, na ausência de ruído, podemos observar que (4.13), que representa a condição ZF, é atingida se os sinais na saída do equalizador represen-

tarem uma versão dos sinais transmitidos, a menos de um possível atraso, um fator de escala e uma possível permutação na ordem na qual os sinais são recuperados, ou seja, as saídas do equalizador podem ser escritas como:  $x_i(t) = d_i s_j(t - l_i)$ , para  $i = 0, \dots, m-1$  e  $j = 0, \dots, l-1$ , onde consideramos  $m \geq l$ ,  $d_i$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal de  $\mathbf{D}$ ,  $l_i$  é o expoente do  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{\Lambda}(z)$  e os elementos não-nulos de  $\mathbf{P}$  são iguais a 1, de maneira a não alterarem a amplitude dos sinais transmitidos.

O equalizador  $\mathbf{W}(z)$  que atende (4.13) é chamado de solução ZF, enquanto que o canal é dito *inversível* e o sistema total,  $\mathbf{W}(z)\mathbf{H}(z)$ , é dito ser *transparente* (Inouye & Liu, 2002), (R. W. Liu et al., 2000), (Inouye & Liu, 2002).

Note ainda que a condição dada em (4.13) não garante a existência de tais equalizadores para qualquer canal e, a exemplo do que ocorre nos casos SISO e SIMO, depende de suas características. É interessante ressaltar que estamos interessados no uso de estruturas FIR para o canal  $\mathbf{H}(z)$  e o equalizador  $\mathbf{W}(z)$  pelas mesmas razões expostas no capítulo 2. Assim, quando nos referimos a sistemas MIMO-FIR, deve-se ter em mente que todos os  $ml$  subsistemas ou sistemas individuais do sistema  $\mathbf{H}(z)$  (e  $\mathbf{W}(z)$ ) são filtros FIR.

No caso de sistemas MIMO-FIR, uma condição que garante a existência da condição ZF é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 4.2.1 (Extensão da Identidade de Bézout)** <sup>1</sup> *Uma condição necessária e suficiente para que um sistema definido pela matriz polinomial  $m \times l$  em  $z$ ,  $\mathbf{H}(z)$ , onde  $m \geq l$ , seja perfeitamente equalizável por estruturas FIR é que o maior divisor comum de todos os menores de ordem  $l$  de  $\mathbf{H}(z)$  seja dado por um monômio não nulo, ou seja,  $\delta_l(z) = z^{-d}$ , para  $d \geq 0$ . Esta condição é equivalente à matriz  $\mathbf{H}(z)$  ter posto normal completo<sup>2</sup>, i.e., o posto normal de  $\mathbf{H}(z)$  ser igual a  $l$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  não nulo. No caso de  $m = l$ , a condição implica o determinante de  $\mathbf{H}(z)$  ser igual a  $z^{-d}$ .*

Portanto, se um sistema FIR  $\mathbf{H}(z)$  satisfaz a extensão da identidade de Bézout, isto é, se  $\mathbf{H}(z)$  tem posto normal completo para todo  $z \in \mathbb{C}$  não nulo, então dizemos

<sup>1</sup>A íntegra da demonstração deste teorema pode ser encontrada em (R. Liu & Inouye, 1999).

<sup>2</sup>Define-se posto normal como o maior valor de *rank* ( $\mathbf{H}(z)$ ) para algum  $z$ . Matrizes polinomiais  $m \times l$  cujo posto normal é o máximo possível [=min( $m, l$ )] são ditas terem posto normal completo.

que este canal é inversível e existe um filtro FIR  $\mathbf{W}(z)$  tal que (R. W. Liu et al., 2000):

$$\mathbf{W}^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{\Lambda}(z), \quad (4.14)$$

como consequência, é atingida a condição ZF dada por (4.13).

Note que a condição expressa no teorema 4.2.1 equivale à condição enunciada na identidade de Bézout (teorema 3.3.1) para o caso SIMO, onde  $l = 1$ , por isso o chamamos de extensão da identidade de Bézout. De acordo com a identidade de Bézout para sistemas SIMO, um canal é equalizável perfeitamente desde que seus subcanais não apresentem zeros em comum, isto é, que o sistema não possua zeros. Esta condição implica a matriz  $\mathbf{H}_L$  ter posto completo de colunas (Causey, 1999). Assim, ter posto completo de colunas tem uma interpretação simples para o caso SIMO, contudo, para o cenário de múltiplos usuários, caso MIMO, não há uma interpretação tão direta.

Nesse sentido, é interessante investigar se há uma relação entre os zeros do sistema MIMO  $\mathbf{H}(z)$  e o fato da matriz  $\mathbf{H}_L$  ter posto normal completo, analogamente ao que ocorre em sistemas SIMO. Portanto, torna-se imprescindível aqui definir os zeros deste sistema e, para isto, semelhante ao que foi feito no capítulo anterior, estenderemos as decomposições de Smith e Smith-McMillan para o caso MIMO (para maiores detalhes ver apêndice A).

**Teorema 4.2.2 (Forma de Smith)** <sup>3</sup> *Seja  $\mathbf{H}(z)$  uma matriz polinomial  $m \times l$  onde cada elemento representa um polinômio em  $z$ . Então, existe um número finito de operações elementares sobre as linhas e as colunas de  $\mathbf{H}(z)$  que a reduza a uma matriz polinomial diagonal, podendo ser escrita da seguinte forma:*

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{Q}(z) \mathbf{\Gamma}(z) \mathbf{P}(z), \quad (4.15)$$

onde  $\mathbf{Q}(z)$  e  $\mathbf{P}(z)$  são matrizes polinomiais unimodulares em  $z$ , respectivamente,  $m \times m$  e  $l \times l$ , e  $\mathbf{\Gamma}(z)$  é uma matriz diagonal  $m \times l$  definida como:

---

<sup>3</sup>A íntegra da demonstração da forma de Smith pode ser encontrada em (Gantmacher, 1977).

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} \gamma_0(z) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_1(z) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \gamma_{\rho-1}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

onde cada elemento é um polinômio mônico  $\gamma_i(z)$ , tal que,  $\gamma_{i+1}(z)$  é divisível por  $\gamma_i(z)$ ,  $0 \leq i \leq \rho - 2$ , sendo  $\rho$  o posto normal de  $\mathbf{H}(z)$ . Para uma dada matriz  $\mathbf{H}(z)$ , a matriz  $\mathbf{\Gamma}(z)$  é única e é chamada de forma de Smith de  $\mathbf{H}(z)$ .

**Teorema 4.2.3 (Forma de Smith-McMillan)** <sup>4</sup> Seja  $\mathbf{H}(z)$  uma matriz  $m \times l$  onde cada elemento é uma razão de polinômios em  $z$ . Então, podemos decompô-la na forma:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{Q}(z) \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{P}(z), \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{Q}(z)$  e  $\mathbf{P}(z)$  são matrizes polinomiais unimodulares em  $z$ , respectivamente,  $m \times m$  e  $l \times l$ , e  $\mathbf{\Lambda}(z)$  é uma matriz diagonal  $m \times l$  definida como:

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \lambda_0(z) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1(z) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{\rho-1}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

<sup>4</sup>A íntegra da demonstração da forma de Smith-McMillan pode ser encontrada em (Gantmacher, 1977).

onde  $\rho$  é o posto normal de colunas de  $\mathbf{H}(z)$ . Os seus elementos,  $\lambda_i(z)$ , podem ser expressos por:

$$\lambda_i(z) = \frac{\alpha_i(z)}{\beta_i(z)}, \quad 0 \leq i \leq \rho - 1, \quad (4.19)$$

onde  $\alpha_i(z)$  e  $\beta_i(z)$  não têm fator polinomial em  $z$  em comum, isto é, o máximo divisor comum entre eles é 1; ainda,  $\alpha_{i+1}(z)$  é divisível por  $\alpha_i(z)$  e  $\beta_i(z)$  é divisível por  $\beta_{i+1}(z)$ ,  $0 \leq i \leq \rho - 2$ . Então,  $\mathbf{\Lambda}(z)$  é chamada de forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{H}(z)$ .

Dessa forma, a partir dos teoremas 4.2.2 e 4.2.3, podemos enunciar agora a definição unívoca de pólos e zeros de sistema para o caso MIMO (Goodwin et al., 2001), (Bai & Ding, 2000).

**Definição 4.2.1 (Pólos e zeros)** *Considere a matriz  $m \times l$   $\mathbf{H}(z)$  onde cada elemento é uma razão de polinômios em  $z$ . Os **zeros** e os **pólos** de  $\mathbf{H}(z)$  são definidos, respectivamente, como raízes de  $\alpha_i(z)$  e  $\beta_i(z)$ , para  $i = 0, \dots, \rho - 1$ . Assim, os polinômios  $\alpha_0(z) \alpha_1(z) \dots \alpha_{\rho-1}(z)$  e  $\beta_0(z) \beta_1(z) \dots \beta_{\rho-1}(z)$  são chamados, respectivamente, de **polinômio de zeros** e **polinômio de pólos** de  $\mathbf{H}(z)$ , também conhecidos por polinômios da forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{H}(z)$ .*

No caso em que os subcanais de  $\mathbf{H}(z)$  são apenas filtros FIR, a definição de zeros do sistema acima particulariza-se para as raízes de  $\gamma_i(z)$ ,  $i = 0, \dots, \rho - 1$ , isto é, este sistema possui pólos apenas na origem. Para cada um dos casos acima, as raízes tanto de  $\gamma_0(z)$ ,  $\gamma_1(z)$ ,  $\dots$ ,  $\gamma_{\rho-1}(z)$  quanto de  $\alpha_0(z)$ ,  $\alpha_1(z)$ ,  $\dots$ ,  $\alpha_{\rho-1}(z)$  correspondem aos zeros deste sistema (Bai & Ding, 2000). Assim, um sistema MIMO definido pela matriz de polinômios  $\mathbf{H}(z)$  é dito de *fase mínima* se não houver zeros nem pólos localizados fora da CRU.

Os elementos  $\gamma_i(z)$  e  $\lambda_i(z)$ , para  $i = 0, \dots, \rho - 1$ , encontrados através dessas decomposições podem também ser obtidos de uma forma direta através do cálculo de todos os menores até ordem  $\rho$ . Conforme apresentado em detalhes no apêndice A, cada polinômio  $\gamma_i(z)$  pode ser escrito através do máximo divisor entre todos os menores de ordem  $i$ , dado por  $\delta_i(z)$ , e de ordem  $i + 1$ , dado por  $\delta_{i+1}(z)$  (sendo que,

por definição,  $\delta_0(z) \equiv 1$ ). Sendo assim, podemos reescrever o polinômio de zeros do sistema por:

$$\begin{aligned} \gamma_{\rho-1}(z) \gamma_{\rho-2}(z) \dots \gamma_0(z) &= \frac{\delta_\rho(z)}{\delta_{\rho-1}(z)} \frac{\delta_{\rho-1}(z)}{\delta_{\rho-2}(z)} \dots \frac{\delta_1(z)}{\delta_0(z)} \\ &= \frac{\delta_\rho(z)}{\delta_0(z)} = \delta_\rho(z), \end{aligned} \quad (4.20)$$

ou seja, os zeros do sistema MIMO-FIR correspondem exatamente aos zeros de  $\delta_\rho(z)$ . No caso de  $m = l$ , temos que os zeros do sistema são dados pelo determinante da matriz  $\mathbf{H}(z)$ .

Dessa forma, de acordo com o teorema 4.2.1, a condição para um sistema MIMO  $m \times l$ , onde  $m \geq l$ , ser perfeitamente equalizável é que o máximo divisor comum de todos os menores de ordem  $l$  de  $\mathbf{H}(z)$  seja igual a  $z^{-d}$ , onde  $\rho = l$ , o que exatamente equivale ao sistema possuir apenas zeros no infinito.

A partir da definição dos zeros de sistema MIMO, podemos também analisar a relação entre os zeros em comum entre todos os subcanais e os zeros do sistema, a fim de comparar a extensão da identidade de Bézout para sistemas MIMO com a identidade de Bézout para sistemas SIMO vista no capítulo anterior.

Os polinômios  $\gamma_0(z)$  e  $\lambda_0(z)$ , especificamente, são iguais a  $\delta_1(z)$ , ou seja, iguais ao máximo divisor comum entre todos os elementos da matriz  $\mathbf{H}(z)$ ; desta forma, as raízes de  $\gamma_0(z)$  e  $\alpha_0(z)$  correspondem aos zeros em comum entre todos os  $m$  subcanais. Assim, diferentemente de sistemas SIMO, os zeros de sistemas MIMO envolvem não apenas os zeros em comum entre todos os subcanais, através das raízes de  $\gamma_0(z)$  e  $\lambda_0(z)$ , mas também as raízes de  $\gamma_i(z)$  e de  $\lambda_i(z)$  para  $i = 1, \dots, l - 1$ , que estão relacionadas às raízes de  $\delta_i(z)$ .

Por conseguinte, baseando-se na decomposição de Smith e nas discussões acima, podemos dizer que a condição do teorema 4.2.1 é equivalente ao sistema não possuir zeros (há apenas pólos na origem) e, assim, os subcanais do sistema não possuem zeros em comum. Então, a partir da extensão da identidade de Bézout, concluímos que uma condição necessária, mas não suficiente, para a equalização perfeita utilizando estruturas FIR é quando os subcanais do sistema MIMO não possuem zeros em comum. Diferentemente, em sistemas SIMO temos que esta condição é necessária e suficiente.

Para ilustrar esta idéia, considere um canal com 3 entradas e 3 saídas cuja função

de transferência é dada por:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} 4 & -(z^{-1} + 2) & z^{-1} - 1 \\ 2(z^{-1} + 2) & -\frac{1}{2} & 2(z^{-1} + 3) \\ z^{-1} + 3 & z^{-1} - 4 & z^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

cujo o posto normal é 3.

De acordo com os passos descritos no apêndice A, calculam-se todos os seus menores:

$$\begin{aligned} \delta_0(z) &\equiv 1; & \delta_1(z) &= 1; & \delta_2(z) &= 1; \\ \delta_3(z) &= (z^{-1} - 12, 1066)(z^{-1} + 2, 5589)(z^{-1} - 1, 2024). \end{aligned} \quad (4.22)$$

e, através deles, os polinômios  $\gamma_i(z)$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0(z) &= \frac{\delta_1(z)}{\delta_0(z)} = 1; & \gamma_1(z) &= \frac{\delta_2(z)}{\delta_1(z)} = 1; \\ \gamma_2(z) &= \frac{\delta_3(z)}{\delta_2(z)} = (z^{-1} - 12, 1066)(z^{-1} + 2, 5589)(z^{-1} - 1, 2024). \end{aligned} \quad (4.23)$$

A partir daqui, podemos escrever a forma de Smith de  $\mathbf{H}(z)$ :

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (z^{-1} - 12, 1066)(z^{-1} + 2, 5589)(z^{-1} - 1, 2024) \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Portanto, podemos observar que para o exemplo acima não há zeros em comum entre todos os subcanais do sistema MIMO-FIR, mas há zeros de sistema. Desta forma, segundo a extensão da identidade de Bézout, este sistema não é perfeitamente equalizável por estruturas FIR apesar de não possuir zeros em comum.

### 4.3 Condições de Equalização de canais MIMO

De maneira similar ao caso SIMO, podemos investigar a equalização para os casos em que os canais de fase mínima possuem zeros. Neste caso, estruturas IIR podem ser consideradas no projeto do equalizador. Neste contexto, podemos enunciar o teorema que formaliza as condições de equalizabilidade de um canal MIMO-FIR (Bai & Ding, 2000):

**Teorema 4.3.1 (Equalizabilidade de sistemas MIMO)** <sup>5</sup> *Seja um sistema MIMO-FIR  $m \times l$  com  $m \geq l$  e função de transferência polinomial  $\mathbf{H}(z)$ . Considerando a forma de Smith associada a matriz  $\mathbf{H}(z)$  dada por (4.15), temos que:*

- *A função de transferência  $\mathbf{H}(z)$  é perfeitamente equalizável por meio de estruturas FIR se e somente se  $\gamma_i(z) = z^{-d_i}$  para algum  $d_i \geq 0$ , isto é, o sistema não possui zeros finitos (leva à extensão da identidade de Bézout dada em 4.2.1);*
- *Se o equalizador MIMO possui pólos de sistema, a função de transferência  $\mathbf{H}(z)$  é perfeitamente equalizável se e somente se  $\mathbf{H}(z)$  for de fase mínima, ou seja, todas raízes de  $\gamma_i(z)$  se encontram dentro da CRU.*

Se o canal não possuir zeros será equalizado perfeitamente, porém, no caso de possuir, ainda poderá ser equalizado desde que os zeros do sistema não estejam localizados fora da CRU. Neste último caso, em que o sistema de fase mínima possui zeros, de acordo com o teorema, necessitaremos de um equalizador MIMO que possua pólos de sistema para equalizar perfeitamente este canal. A seguir, analisaremos a existência desses pólos e proporemos uma interessante interpretação do teorema 4.3.1 de forma semelhante ao que fizemos no caso SIMO.

Considerando um sistema MIMO equalizável  $\mathbf{H}(z)$  tal que  $m \geq l$  e que a matriz polinomial  $m \times l$   $\mathbf{H}(z)$  possui posto normal completo, isto é,  $\rho = l$ , podemos reescrever a forma de Smith de  $\mathbf{H}(z)$  como:

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} \gamma_0(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_1(z) & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \gamma_{l-1}(z) \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Podemos utilizar a (4.25) para fazer uma interpretação similar ao caso SIMO. Como os zeros do canal MIMO não envolvem apenas os zeros em comum entre todos

<sup>5</sup>A íntegra da demonstração deste teorema pode ser encontrada em (Bai & Ding, 2000).

os subcanais, não conseguimos fatorar o sistema MIMO da mesma forma como o fizemos no caso SIMO. Porém, podemos ainda dividir o problema de equalização de canais de fase mínima com zeros, como mostra a figura 4.3.

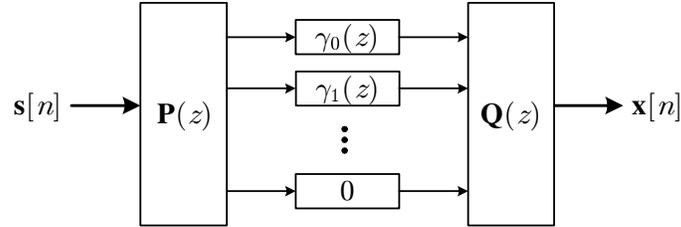


Figura 4.3: Representação do modelo MIMO do canal na ausência de ruído.

Como as matrizes  $\mathbf{Q}(z)$  e  $\mathbf{P}(z)$  são, por definição, unimodulares e, portanto, inversíveis, então existem  $\mathbf{Q}^{-1}(z)$  e  $\mathbf{P}^{-1}(z)$ , tal que  $\mathbf{Q}^{-1}(z)\mathbf{Q}(z) = \mathbf{I}$  e  $\mathbf{P}^{-1}(z)\mathbf{P}(z) = \mathbf{I}$ . Conforme apresentado na figura 4.4, resta agora o problema de equalização SISO dos  $l$  filtros com funções de transferência  $\gamma_0(z), \gamma_1(z), \dots, \gamma_{l-1}(z)$ , onde será necessário o uso de filtros IIR de forma a inverter cada uma das funções de transferência. Note na figura 4.4, que há  $m - l$  filtros com função de transferência nula devido à existência de  $m - l$  linhas nulas na matriz  $m \times l$   $\mathbf{\Gamma}(z)$ .

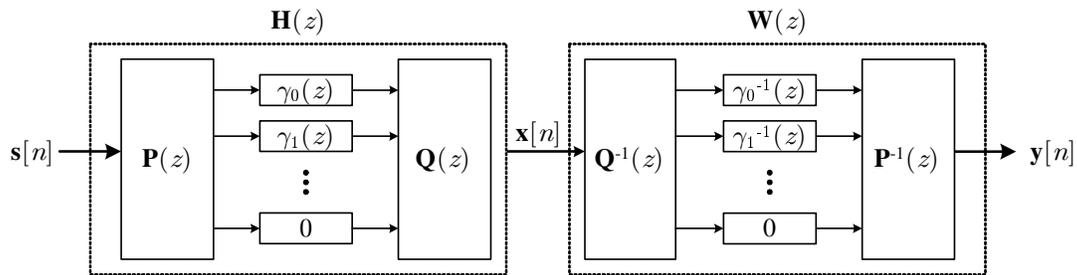


Figura 4.4: Modelo MIMO do canal e do equalizador na ausência de ruído.

Podemos então concluir que quando o canal apresentar zeros de sistema e nos restringirmos ao uso de apenas filtros FIR, permanecerá a limitação estrutural similar ao problema de equalização de sistemas SISO.

## 4.4 Limitação do uso de EO2

Analizamos até aqui o problema da limitação estrutural de sistemas MIMO. Resta, portanto, avaliar até que ponto a equalização baseada exclusivamente em EO2 é efetiva no caso MIMO. Em geral, a equalização cega é resolvida fazendo uso de EOS dos sinais recebidos. No entanto, como vimos no capítulo anterior, a equalização de sistemas SIMO a partir de apenas EO2 é possível.

Baseando-se nesta possibilidade, desperta-se interesse em resolver este problema para sistemas MIMO também com apenas EO2 ou ao menos explorá-las o máximo possível. Para isto, precisaremos apresentar algumas características de filtros perfeitamente equalizáveis.

### 4.4.1 Fatoração Para-unitária e Irredutível

O canal MIMO-FIR dito inversível, isto é, equalizável perfeitamente, possui uma característica interessante que será considerada no problema de equalização de sistemas MIMO. Porém, é necessário antes apresentarmos a definição de *sistemas irredutível* e *para-unitário* (Kailath, 1980), (Inouye & Liu, 2002), (R. W. Liu et al., 2000).

**Definição 4.4.1 (Sistema Irredutível)** *Seja a matriz  $m \times l$   $\mathbf{H}(z)$  com  $m \geq l$ . A função de transferência  $\mathbf{H}(z)$  é dita irredutível se o maior divisor comum de todos os menores de ordem  $l$  de  $\mathbf{H}(z)$  é dado por  $\delta_l(z) = 1$ . Em outras palavras, o posto normal de colunas de  $\mathbf{H}(z)$  é igual a  $l$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .*

Note que a condição de irredutibilidade de  $\mathbf{H}(z)$  implica também  $\mathbf{H}(0)$  ter posto completo. Esta condição é restritiva em algumas aplicações em comunicações móveis pois implica que todos os sinais transmitidos tenham o mesmo tempo de chegada na antena de recepção. Por exemplo, se um sinal chegasse atrasado em relação aos outros sinais transmitidos, então  $\mathbf{H}(0)$  teria uma coluna correspondente nula e, desta forma, o seu posto não seria mais completo.

De acordo com a definição de sistemas irredutíveis, um sistema irredutível  $\mathbf{H}(z)$  satisfaz a extensão da identidade de Bézout, pois  $\mathbf{H}(z)$  possui posto normal com-

pleto para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Sendo assim, existe um filtro  $\mathbf{W}(z)$  tal que  $\mathbf{W}^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{I}$  (R. W. Liu et al., 2000). Reçamos em (4.14) para  $d = 0$ . Desta forma, atinge-se conseqüentemente a condição ZF dada por (4.13) e, assim, podemos dizer também que o canal é inversível. É interessante frisar que a condição de irreduzibilidade é uma condição mais restritiva que a condição de inversibilidade.

**Definição 4.4.2 (Sistema Para-unitário)** *A matriz polinomial quadrada  $\mathbf{H}(z)$  é dita para-unitária se ela é unitária sobre a circunferência de raio unitário, isto é,*

$$\mathbf{H}_P(e^{j\omega}) \mathbf{H}_P^H(e^{j\omega}) = \mathbf{I}, \quad \text{para todo } \omega. \quad (4.26)$$

A partir das definições enunciadas acima, podemos formalizar uma característica peculiar aos canais perfeitamente equalizáveis que será utilizada mais adiante.

**Teorema 4.4.1 (Fatoração Para-unitária - Irreduzível)** <sup>6</sup> *Seja qualquer sistema MIMO-FIR  $m \times l$  perfeitamente equalizável  $\mathbf{H}(z)$  com  $m \geq l$ , onde a matriz  $\mathbf{H}(z)$  tenha posto completo para todo  $z \in \mathbb{C}$  não-nulo, isto é, este sistema seja inversível. Então,  $\mathbf{H}(z)$  pode ser fatorado da seguinte forma:*

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_I(z) \mathbf{H}_P(z), \quad (4.27)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}_I(z)$  e  $\mathbf{H}_P(z)$ , respectivamente,  $m \times l$  e  $l \times l$ , correspondem, respectivamente, a um fator irreduzível e a um fator para-unitário de  $\mathbf{H}(z)$ .

É pertinente frisar que esta fatoração é única exceto por uma matriz unitária  $l \times l$   $\mathbf{U}$ , tal que:

$$\mathbf{H}(z) = \tilde{\mathbf{H}}_I(z) \tilde{\mathbf{H}}_P(z), \quad (4.28)$$

onde  $\tilde{\mathbf{H}}_I(z) = \mathbf{H}_I(z) \mathbf{U}^H$  e  $\tilde{\mathbf{H}}_P(z) = \mathbf{U} \mathbf{H}_P(z)$  também correspondem, respectivamente, a um fator irreduzível e a um fator para-unitário de  $\mathbf{H}(z)$ , haja visto que uma matriz unitária  $\mathbf{U}$  satisfaz, por definição,  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

---

<sup>6</sup>A íntegra da demonstração da fatoração para-unitária - irreduzível pode ser encontrada em (Inouye & Liu, 2002).

Dessa forma, qualquer sistema FIR perfeitamente equalizável pode ser decomposto em um fator irredutível e outro para-unitário. Definiremos agora, em 4.4.3 e 4.4.4, duas classes de equalizadores MIMO que serão utilizadas, juntamente com os conceitos de sistemas irredutível e para-unitário, para apresentar, posteriormente, um resultado interessante sobre a limitação de critério para sistemas MIMO (R. W. Liu et al., 2000), (Inouye & Liu, 2002).

**Definição 4.4.3 (Filtro de Desconvolução)** *Um filtro  $m \times l$   $\mathbf{W}(z)$  é dito um filtro de desconvolução (ou filtro de desconvolução estrita) para um sistema  $\mathbf{H}(z)$  se satisfaz:*

$$\mathbf{W}^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}(z), \quad (\text{ou } \mathbf{W}^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{C}) \quad (4.29)$$

onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz  $l \times l$  constante não-nula e  $\mathbf{\Lambda}(z)$  é um matriz  $l \times l$  diagonal composta por monômios mônicos.

De acordo com a definição 4.4.3, se aplicarmos o filtro de desconvolução na saída do canal MIMO, teremos, na saída deste filtro, um vetor dado por:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{l-1} c_{1i+1} s_i[n - l_i] \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{l-1} c_{li+1} s_i[n - l_i] \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

onde  $c_{ij}$  é o elemento da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{C}$ , e  $l_i$  corresponde ao  $i$ -ésimo elemento de atraso da diagonal de  $\mathbf{\Lambda}(z)$ . Assim, cada uma das saídas do filtro é uma combinação linear de amostras passadas ou/e atuais dos sinais transmitidos, isto é, dizemos que os sinais foram *desconvoluidos*.

Já para o filtro de desconvolução estrita, não temos os elementos de atraso como em (4.30) e, sendo assim, cada uma das saídas deste filtro é uma combinação linear de amostras atuais dos sinais transmitidos, isto é, dizemos que os sinais foram *estritamente desconvoluidos*.

**Definição 4.4.4 (Filtro Branqueador)** *Um filtro  $m \times l$   $\mathbf{W}(z)$  é dito branqueador para um sistema  $\mathbf{H}(z)$  alimentado por uma seqüência branca se satisfaz:*

$$\mathbf{W}^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{H}}_P(z), \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{D}$  é uma matriz  $l \times l$  diagonal não-nula e  $\tilde{\mathbf{H}}_P(z)$  é um matriz  $l \times l$  para-unitária. Esta condição segue do fato de que tanto a entrada quanto a saída do sistema global, dado por  $\mathbf{W}^H(z) \mathbf{H}(z)$ , são brancas normalizadas, então este sistema será para-unitário.

Finalmente, utilizando as definições acima, podemos apresentar um teorema que aborda os limites do uso de EO2 na equalização cega de sistemas MIMO (R. W. Liu et al., 2000), (Inouye & Liu, 2002).

**Teorema 4.4.2** <sup>7</sup> *Seja um sistema MIMO-FIR  $m \times l$  perfeitamente equalizável  $\mathbf{H}(z)$  e com sinais de entrada  $\{s_i(t)\}$ ,  $i = 0, \dots, l-1$ , brancos e de média nula, e considere  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_I(z) \mathbf{H}_P(z)$  uma fatoração para-unitária - irredutível de  $\mathbf{H}(z)$ . Se a matriz  $m \times l$   $\mathbf{W}_I(z)$  é um filtro branqueador irredutível para  $\mathbf{H}(z)$ , então  $\mathbf{W}_I(z)$  é um filtro de desconvolução estrita para  $\mathbf{H}_I(z)$ .*

A partir do teorema 4.4.2 e da definição 4.4.3, se a matriz  $m \times l$   $\mathbf{W}_I(z)$  é um filtro branqueador irredutível para  $\mathbf{H}(z)$ , então  $\mathbf{W}_I(z)$  será um filtro de desconvolução estrita para  $\mathbf{H}_I(z)$ , ou seja:

$$\mathbf{W}_I^H(z) \mathbf{H}_I(z) = \mathbf{C}, \quad (4.32)$$

onde  $\mathbf{H}_I(z)$  é o fator irredutível de  $\mathbf{H}(z)$ .

Através da equação anterior, segue que se o canal  $\mathbf{H}(z)$  for irredutível, isto é,  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_I(z)$ , então os sinais serão estritamente desconvoluidos se aplicarmos na saída deste canal um filtro branqueador irredutível  $\mathbf{W}_I(z)$ .

Porém, se o sistema possuir um fator para-unitário  $\mathbf{H}_P(z)$ , ao aplicarmos na saída deste canal este filtro branqueador irredutível, usando a definição 4.4.4, teremos:

$$\mathbf{W}_I^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{H}}_P(z), \quad (4.33)$$

---

<sup>7</sup>A íntegra da demonstração deste teorema pode ser encontrada em (Inouye & Liu, 2002).

restando apenas um problema de equalização de um sistema para-unitário.

De acordo com o teorema 4.4.2, podemos observar também que se um canal perfeitamente equalizável  $\mathbf{H}(z)$  pode ser fatorado da seguinte forma:  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_I(z) \mathbf{\Lambda}(z)$ , podemos desconvolú-lo por meio de um filtro branqueador irredutível  $\mathbf{W}_I(z)$  a partir de apenas EO2 do sinal na saída deste canal. Assim, teremos:

$$\mathbf{W}_I^H(z) \mathbf{H}(z) = \mathbf{W}_I^H(z) \mathbf{H}_I(z) \mathbf{H}_P(z) = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda}(z). \quad (4.34)$$

Como  $\tilde{\mathbf{H}}_P(z) = \mathbf{U} \mathbf{H}_P(z)$  também é considerado um fator para-unitário de  $\mathbf{H}(z)$ , podemos generalizar para canais escritos na forma  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_I(z) \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}(z)$ .

Como estamos considerando sinais transmitidos independentes e com amostras i.i.d., o que implica os sinais serem descorrelacionados, isto é, brancos, então, de acordo com o teorema 4.4.2 e com as discussões feitas anteriormente, o máximo que podemos fazer através de EO2 é desconvoluir estritamente os sinais recebidos, que implica a obtenção de sinais resultantes da combinação linear de todos os sinais transmitidos no mesmo instante.

Em conseqüência, ao empregarmos um filtro branqueador irredutível na saída do canal, não conseguiremos obter na saída deste filtro uma versão dos sinais recebidos, isto é, satisfazer a condição ZF para sistemas MIMO. Desta forma, poderemos somente utilizar um filtro branqueador irredutível como uma etapa de pré-equalização.

É importante ressaltar que o teorema 4.4.2 assume que o canal é de fase mínima e não possui zeros finitos de sistema. Assim, nessas condições, ao se aplicar um filtro branqueador irredutível na saída deste canal, obteremos um sistema resultante para-unitário e, desta forma, precisaremos ainda considerar o problema de equalização deste sistema para-unitário, o que naturalmente exige EOS.

Porém, se este canal possuir um fator para-unitário dado por  $\mathbf{H}_P(z) = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}(z)$ , teremos em sua saída uma mistura instantânea dos sinais transmitidos e, neste caso, resta considerar o problema de separação das fontes, o que geralmente exige EOS.

## 4.5 Predição Linear e Equalização MIMO

No problema de equalização MIMO, como discutido na seção anterior, podemos considerar o uso de filtro branqueador irredutível como uma etapa de pré-

equalização. Desta forma, na figura 4.5, ilustramos as etapas de pré-equalização por meio do filtro  $\mathbf{W}_1[n]$  e de separação de fontes por meio do filtro  $\mathbf{W}_2[n]$ .

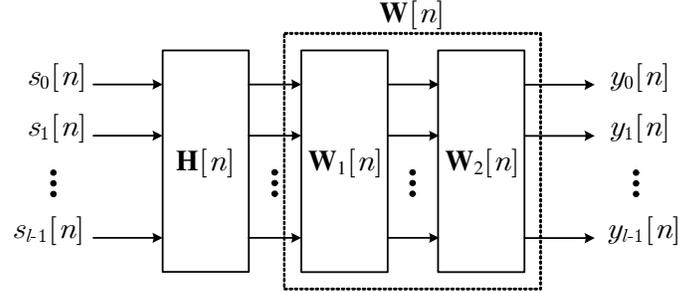


Figura 4.5: Modelo MIMO na ausência de ruído: Etapas de equalização.

Como nos casos SISO e SIMO, temos interesse no emprego de filtro preditor linear em função de suas propriedades. Neste sentido, iremos analisar se suas propriedades permanecem para o caso MIMO, ou seja, se trata-se de um filtro de fase mínima e também se age como filtro branqueador, e assim, se podemos utilizá-lo como etapa de pré-equalização.

Consideraremos a etapa de pré-equalização conforme ilustrada na figura 4.6, onde  $\mathbf{H}[n]$  representa o modelo de canal MIMO com  $l$  sinais de entrada e  $m$  sinais de saída, e  $\mathbf{W}_1[n]$  representa o pré-equalizador MIMO com  $m$  sinais de entrada e de saída.

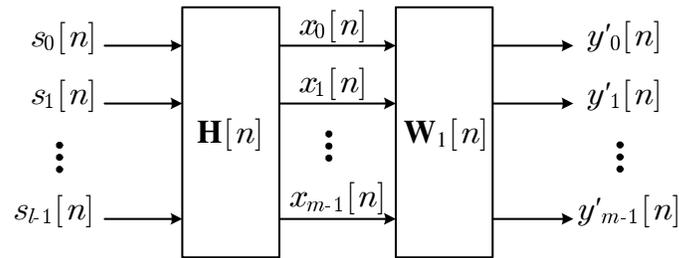


Figura 4.6: Modelo MIMO: Etapa de pré-equalização.

Sejam  $\mathbf{x}[n] = [x_0[n] \ \cdots \ x_{m-1}[n]]^T$  e  $\hat{\mathbf{x}}[n] = [\hat{x}_0[n] \ \cdots \ \hat{x}_{m-1}[n]]^T$ , respectivamente, os vetores de amostras dos sinais recebidos e suas estimativas. Como no caso SIMO, consideraremos um filtro preditor de ordem  $L - 1$  que deve estimar  $\hat{\mathbf{x}}[n]$

utilizando amostras passadas de  $\mathbf{x}[n]$ ,  $\mathbf{x}[n-1]$ ,  $\mathbf{x}[n-2]$ , ...,  $\mathbf{x}[n-L+1]$ , assim:

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{P}_1^H \mathbf{x}[n-1] + \dots + \mathbf{P}_{L-1}^H \mathbf{x}[n-L+1], \quad (4.35)$$

onde  $\mathbf{P}_i$ ,  $i = 1, \dots, L-1$ , são matrizes  $m \times m$  e o vetor das estimativas  $\hat{\mathbf{x}}[n]$  é escrito como:

$$\hat{\mathbf{x}}[n] = \mathbf{P}^H \mathbf{x}_{L-1}[n-1], \quad (4.36)$$

onde  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T & \dots & \mathbf{P}_{L-1}^T \end{bmatrix}^T$  corresponde à matriz  $m(L-1) \times m$  dos coeficientes do filtro de predição e  $\mathbf{x}_{L-1}[n-1] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[n-1] & \dots & \mathbf{x}^T[n-L+1] \end{bmatrix}^T$  corresponde ao vetor  $m(L-1) \times 1$  formado pelos  $L-1$  vetores  $m \times 1$  de amostras passadas dos sinais recebidos.

A partir de (4.36), podemos escrever o vetor de erro de predição por:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_f[n] &= \mathbf{x}[n] - \mathbf{P}^H \mathbf{x}_{L-1}[n-1] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}^H \end{bmatrix} \mathbf{x}_L[n], \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde  $\mathbf{x}_L[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[n] & \dots & \mathbf{x}^T[n-L+1] \end{bmatrix}^T$  corresponde ao vetor  $mL \times 1$  formado por amostras passadas e atual dos sinais recebidos, e  $\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & -\mathbf{P}^T \end{bmatrix}^T$  corresponde à matriz  $mL \times m$  dos coeficientes do FEP progressivo.

Comparando (4.35), (4.36) e (4.37) com (3.50), (3.52) e (3.53) respectivamente, podemos observar que o problema de predição MIMO é exatamente o mesmo que o analisado no capítulo 3, basta considerarmos aqui  $m = P$ .

Neste sentido, os coeficientes ótimos são obtidos da mesma forma, ou seja, pela minimização do traço da matriz de covariância do erro de predição em relação aos coeficientes do filtro de predição. Sendo assim, sabemos também que é válida a condição de ortogonalidade para o filtro de predição ótimo, que implica o erro de predição ser ortogonal a todas as amostras passadas de  $\mathbf{x}[n]$ .

De fato, o uso do FEP progressivo permite, na melhor das hipóteses, recuperar um vetor de sinais que será dado por:

$$\mathbf{y}'[n] = \mathbf{H}[0] \mathbf{s}[n], \quad (4.38)$$

onde  $\mathbf{y}'[n] = \begin{bmatrix} y'_0[n] & \dots & y'_{m-1}[n] \end{bmatrix}^T$ .

Isto indica que o vetor de sinais recuperado será, na melhor das hipóteses, uma mistura linear instantâneas das fontes, e, visto que as fontes são i.i.d., a separação completa dos sinais dependerá, necessariamente, do uso de EOS. Caso as fontes possuam espectros distintos, ou sejam processos não-estacionários, é possível derivar métodos de separação baseados exclusivamente em EO2 (Cichocki & Amari, 2002).

Nos capítulos 2 e 3, vimos que o emprego do FEP na equalização de canais SISO e SIMO está relacionado às suas propriedades de ser de fase mínima e de agir como filtro branqueador. Assim, de maneira similar, convém examinar este mesmo comportamento no contexto de canais MIMO.

### 4.5.1 Propriedades do FEP Progressivo

Há um resultado interessante a cerca da propriedade de fase mínima do FEP ótimo para sistemas MIMO em (Vaidyanathan, 2008). A propriedade de fase mínima é definida em termos dos zeros do determinante de  $\mathbf{W}_1(z)$  estarem dentro da CRU, onde  $\mathbf{W}_1(z)$  corresponde à matriz quadrada dos coeficientes do FEP ótimo.

De acordo com a decomposição de Smith, quando a matriz dos coeficientes do sistema  $\mathbf{W}_1(z)$  é quadrada, temos que os zeros do sistema são dados pelo determinante desta matriz. Assim, se todos zeros do determinante de  $\mathbf{W}_1(z)$  estiverem localizados dentro da CRU, então todos os zeros do sistema  $\mathbf{W}_1(z)$  necessariamente estarão contidos dentro da CRU e, assim, o FEP é dito de fase mínima.

Como mencionado no começo da seção 4.5, o problema de predição MIMO é exatamente o mesmo ao abordado no capítulo 3, de forma que a condição de ortogonalidade para o filtro de predição é mantida e o critério de otimização é o mesmo. Desta forma, o FEP age também como filtro branqueador e toda a discussão feita na subseção 3.5.2 é válida aqui.

## 4.6 Conclusão

Neste capítulo, estudamos o modelo MIMO e as condições em que é possível a equalização perfeita de canais MIMO-FIR, utilizando apenas estruturas FIR. Como no modelo MIMO temos mais de um sinal transmitido, teremos informações distin-

tas a serem recuperadas na saída do equalizador. Esta característica é refletida na definição da condição ZF, ou seja, em que condições o canal é perfeitamente equalizável. Nesse sentido, novos conceitos em relação aos casos SISO e SIMO foram inseridos neste capítulo, como *irredutibilidade* e *desconvolução estrita*.

Verificamos que permanece a limitação estrutural similar ao problema de equalização de sistemas SISO e SIMO quando os canais apresentam zeros de sistema e nos restringimos ao uso de apenas filtros FIR.

Também estudamos as condições sobre o uso de EO2 na equalização cega de canais MIMO. Constatamos que apenas EO2 não são suficientes para equalizar tais canais. Acoplando um filtro branqueador irredutível, como por exemplo o FEP progressivo, a um canal de fase mínima sem zeros de sistema, obteremos um sistema resultante para-unitário ou, no melhor dos casos, desconvoluiremos os sinais recebidos, isto é, obteremos uma mistura instantânea de todos os sinais transmitidos.

É interessante notar que, nos casos SISO e SIMO, o FEP progressivo equaliza, mesmo que não perfeitamente, o canal desde que este seja de fase mínima. Contudo, no caso MIMO, o FEP pode ser utilizado apenas como uma etapa de pré-equalização, restando, no melhor dos casos, um problema de separação de fontes.

Pode-se concluir então que para recuperar os sinais transmitidos de um canal MIMO se faz necessário o uso de EOS do sinal observado na saída do canal, diferentemente como nos casos SISO e SIMO, onde as EO2 proporcionam informação suficiente para se equalizar canais em algumas situações. O fato crucial que diferencia as abordagens é a existência de mais do que um sinal fonte a ser recuperado.

# 5

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho foram analisadas as condições necessárias e suficientes de equalização para sistemas SISO, SIMO e MIMO, bem como as limitações do uso de EO2 no problema. Para isto, fizemos um investigação criteriosa a respeito de canais e de filtros de predição SIMO e MIMO.

Um dos objetivos da dissertação, e que também consideramos uma contribuição original desse trabalho, consiste no tipo de abordagem empregada para analisar o problema de equalização cega utilizando apenas estruturas FIR e EO2 dos sinais transmitidos, a unificação das condições de equalização de canais SISO, SIMO e MIMO, bem como a prova da propriedade de fase mínima de filtros de erro de predição para o caso de sistemas SIMO.

De maneira geral, o sistema SISO somente será perfeitamente equalizável em duas situações: se o canal for composto apenas por pólos ou se for um sistema de fase mínima. Neste segundo caso o equalizador deverá, necessariamente, apresentar uma estrutura IIR. No entanto, vimos que mesmo na impossibilidade de equalização ZF, é possível recuperar a informação transmitida utilizando-se equalizadores que aproximam a solução ZF. Neste contexto, o filtro de erro de predição representa uma possível solução, desde que o canal seja de fase mínima.

No caso dos sistemas SIMO, o canal só será equalizável perfeitamente se a função de transferência do canal não possuir zeros ou apresentar zeros apenas dentro da CRU, ou seja, desde que o sistema seja de fase mínima. Se nos restringirmos a

equalizadores com estrutura FIR, somente canais que não possuem zeros de sistema serão perfeitamente equalizáveis. Porém, no caso SIMO, a exemplo do que ocorre em sistemas SISO, mesmo quando o sistema não for perfeitamente inversível, ainda é possível utilizar FEP para recuperar a informação transmitida, desde que o sistema seja de fase mínima.

Já no caso de sistemas MIMO, analogamente ao caso SIMO, o canal só será equalizável perfeitamente se a função de transferência do canal não possuir zeros ou apresentar zeros apenas dentro da CRU, ou seja, desde que o sistema seja de fase mínima. Contudo, a informação contida nas EO2 não será, em geral, suficiente para atingir a solução ZF. Somente para canais de fase mínima e que não possuam zeros de sistema o FEP pode servir apenas como uma etapa de pré-processamento dos dados, gerando um canal equivalente para-unitário. Após esta etapa, EOS serão necessárias para se atingir a solução final do problema.

Esta última observação nos leva a conceber, como uma proposta interessante e mais imediata de trabalho futuro, a extensão da idéia da cascata entre equalizadores cegos de amplitude e de fase aplicados ao caso SISO em (Rocha & Romano, 1995) ao caso MIMO. De fato, no caso MIMO trata-se de recuperar os sinais num contexto de mistura convolutiva, o que poderia ser obtido por uma associação entre a matriz FEP e uma matriz para-unitária. Há trabalhos sobre equalização cega baseada no emprego de matrizes para-unitárias que indicam ser uma interessante solução a ser associada ao FEP (Icart, Comon, & Rota, 2009). A busca de métodos de otimização dos parâmetros dessas matrizes, seja num contexto adaptativo ou por blocos de dados, abre interessantes perspectivas de investigação.

# A

## Formas de Smith e Smith-McMillan

Por meio de certas operações chamadas de operações elementares sobre matrizes podemos obter formas simples, tais como as formas triangular e diagonal. As formas de Smith e Smith-McMillan podem ser definidas para qualquer matriz não necessariamente quadrada e que possua elementos inteiros ou polinomiais (Barnett, 1971), (Vaidyanathan, 1993). A forma de Smith ou Smith-McMillan de uma dada matriz é uma matriz diagonal, e pode ser obtida a partir da multiplicação por matrizes quadradas e inversíveis à esquerda e à direita desta matriz original. De certa forma, ambas as decomposições para matrizes polinomiais são análogas à decomposição em valor singular (SVD, *Singular Value Decomposition*).

Neste trabalho estaremos interessados na decomposição de matrizes polinomiais. As formas de Smith e McMillan podem ser utilizadas para determinar pólos e zeros de uma matriz de transferência de um sistema com múltiplas entradas e/ou saídas. A matriz de transferência é uma matriz de funções de transferências entre várias entradas e saídas do sistema. É fundamental salientar que os pólos e zeros deste sistema não são os pólos e zeros dos elementos individuais da matriz. Antes de defini-los precisamos encontrar a forma de Smith ou Smith-McMillan de acordo com os teoremas a seguir.

**Teorema A.0.1 (Forma de Smith)** <sup>1</sup> *Seja  $\mathbf{H}(z)$  uma matriz polinomial  $m \times n$*

---

<sup>1</sup>A íntegra da demonstração da forma de Smith pode ser encontrada em (Gantmacher, 1977).

onde cada elemento da matriz representa um polinômio em  $z$ . Então, existe um número finito de operações elementares sobre as colunas e linhas de  $\mathbf{H}(z)$  que a reduza a uma matriz polinomial diagonal, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{Q}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{P}(z), \quad (\text{A.1})$$

onde  $\mathbf{Q}(z)$  e  $\mathbf{P}(z)$  são matrizes polinomiais unimodulares<sup>2</sup> em  $z$ , respectivamente,  $m \times m$  e  $n \times n$ .

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} \gamma_0(z) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_1(z) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \gamma_{\rho-1}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

é uma matriz diagonal  $m \times n$  composta por polinômios mônicos  $\gamma_i(z)$  (isto é, o termo de maior grau tem coeficiente unitário), tais que,  $\gamma_{i+1}(z)$  é divisível por  $\gamma_i(z)$ ,  $0 \leq i \leq \rho - 2$ , onde  $\rho$  é o posto normal de  $\mathbf{H}(z)$ <sup>3</sup>. Para uma dada matriz  $\mathbf{H}(z)$ , a matriz  $\mathbf{\Gamma}(z)$  é única e é chamada de forma de Smith de  $\mathbf{H}(z)$ .

Os elementos  $\gamma_i(z)$  encontrados através desta decomposição podem também ser obtidos de uma forma direta de acordo com os seguintes passos:

- i Calcular todos os menores de  $\mathbf{H}(z)$ <sup>4</sup>;
- ii Definir  $\delta_i(z)$ , para  $i > 0$ , como o maior divisor comum entre todos os menores de ordem  $i$  em  $\mathbf{H}(z)$ , isto é, entre todos os determinantes da submatriz  $i \times i$  obtida a partir de  $\mathbf{H}(z)$ . Fazer  $\delta_0(z) \equiv 1$ ;

<sup>2</sup>Matriz unimodular na variável  $z$  é uma matriz polinomial quadrada em  $z$  com determinante constante não nulo.

<sup>3</sup>Define-se posto normal como o maior valor de  $\text{rank}(\mathbf{H}(z))$  para algum  $z$ . Matrizes polinomiais ( $m \times n$ ) cujo posto normal é o máximo possível [=min( $m, n$ )] são ditas terem posto normal completo.

<sup>4</sup>Os menores de uma matriz  $\mathbf{A}$  são iguais aos determinantes de todas submatrizes quadradas obtidas removendo-se linhas e colunas inteiras desta matriz.

iii Calcular os polinômios  $\gamma_i(z)$  por meio de

$$\gamma_i(z) = \frac{\delta_{i+1}(z)}{\delta_i(z)}, \quad (\text{A.3})$$

para  $0 \leq i \leq \rho - 2$ .

Para ilustrar o teorema A.0.1, considere um canal com 2 entradas e 2 saídas (MIMO; *Multiple Input, Multiple Output*) cuja função de transferência é dada por:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} 4 & -(z^{-1} + 2) \\ 2(z^{-1} + 2) & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

cujos posto normal é 2.

De acordo com os passos descritos acima, calculam-se todos os seus menores:

$$\begin{aligned} \delta_0(z) &\equiv 1; \\ \delta_1(z) &= \text{mdc}\{4; -(z^{-1} - 2); 2(z^{-1} - 2); -\frac{1}{2}\} = 1; \\ \delta_2(z) &= \text{mdc}\{2z^{-2} + 8z^{-1} + 6\} = z^{-2} + 4z^{-1} + 3 = (z^{-1} + 1)(z^{-1} + 3) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e, através deles, os polinômios  $\gamma_i(z)$ :

$$\gamma_0(z) = \frac{\delta_1(z)}{\delta_0(z)} = 1; \quad \gamma_1(z) = \frac{\delta_2(z)}{\delta_1(z)} = (z^{-1} + 1)(z^{-1} + 3). \quad (\text{A.6})$$

A partir daqui, podemos escrever a forma de Smith de  $\mathbf{H}(z)$ :

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (z^{-1} + 1)(z^{-1} + 3) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

**Teorema A.0.2 (Forma de Smith-McMillan)** <sup>5</sup> *Seja  $\mathbf{H}(z)$  uma matriz  $m \times n$  onde cada elemento é uma razão de polinômios em  $z$ . Então, podemos decompô-la na forma:*

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{Q}(z) \mathbf{\Lambda}(z) \mathbf{P}(z), \quad (\text{A.8})$$

---

<sup>5</sup>A íntegra da demonstração da forma de Smith-McMillan pode ser encontrada em (Gantmacher, 1977).

onde  $\mathbf{Q}(z)$  e  $\mathbf{P}(z)$  são matrizes polinomiais unimodulares em  $z$ , respectivamente,  $m \times m$  e  $n \times n$ .

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \lambda_0(z) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1(z) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda_{\rho-1}(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

é uma matriz diagonal  $m \times n$ , onde  $\rho$  é o posto normal de colunas de  $\mathbf{H}(z)$ . Os seus elementos,  $\lambda_i(z)$ , podem ser expressos por:

$$\lambda_i(z) = \frac{\alpha_i(z)}{\beta_i(z)}, \quad 0 \leq i \leq \rho - 1, \quad (\text{A.10})$$

onde  $\alpha_i(z)$  e  $\beta_i(z)$  não têm fator polinomial em  $z$  em comum, isto é, o máximo divisor comum entre eles é 1; e, ainda,  $\alpha_{i+1}(z)$  é divisível por  $\alpha_i(z)$  e  $\beta_i(z)$  é divisível por  $\beta_{i+1}(z)$ ,  $0 \leq i \leq \rho - 2$ . Então,  $\mathbf{\Lambda}(z)$  é chamada de forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{H}(z)$ .

Os elementos  $\lambda_i(z)$  encontrados através desta decomposição podem também ser obtidos de uma forma direta de acordo com os seguintes passos:

i Expressar  $\mathbf{H}(z)$  na forma:

$$\mathbf{H}(z) = \frac{\mathbf{N}(z)}{d_H(z)}, \quad (\text{A.11})$$

onde  $d_H(z)$  é o menor múltiplo comum dos denominadores de todos os elementos da matriz  $\mathbf{H}(z)$ ;

ii Calcular todos os menores de  $\mathbf{N}(z)$ <sup>6</sup>;

iii Definir  $\delta_i(z)$ , para  $i > 0$ , como o maior divisor comum entre todos os menores de ordem  $i$  em  $\mathbf{N}(z)$ . Fazer  $\delta_0(z) \equiv 1$ ;

---

<sup>6</sup>A matriz polinomial  $\mathbf{N}(z)$  é reduzida na forma de Smith definida anteriormente.

iv Calcular os polinômios  $\bar{\alpha}_i(z)$  por meio de

$$\bar{\alpha}_i(z) = \frac{\delta_{i+1}(z)}{\delta_i(z)}, \quad (\text{A.12})$$

para  $0 \leq i \leq \rho - 2$ ;

v Calcular os polinômios  $\lambda_i(z)$  por meio de

$$\lambda_i(z) = \frac{\bar{\alpha}_{i+1}(z)}{d_H(z)}, \quad (\text{A.13})$$

para  $0 \leq i \leq \rho - 2$ ;

Para ilustrar o teorema A.0.2, considere um canal MIMO com 2 entradas e 2 saídas cuja função de transferência é dada por:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} \frac{4}{(z^{-1}+2)(z^{-1}+1)} & -\frac{1}{(z^{-1}+1)} \\ \frac{2}{(z^{-1}+1)} & -\frac{1}{2(z^{-1}+2)(z^{-1}+1)} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

cujos posto normal é 2.

De acordo com os passos descritos acima, podemos expressar  $\mathbf{H}(z)$  como:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} 4 & -(z^{-1}+2) \\ 2(z^{-1}+2) & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{(z^{-1}+1)(z^{-1}+2)}, \quad (\text{A.15})$$

onde  $d_H(z) = (z^{-1}+1)(z^{-1}+2)$ . A partir de (A.5) e (A.6), escrevem-se os polinômios  $\bar{\alpha}_i(z)$ :

$$\bar{\alpha}_0(z) = \frac{\delta_1(z)}{\delta_0(z)} = 1; \quad \bar{\alpha}_1(z) = \frac{\delta_2(z)}{\delta_1(z)} = (z^{-1}+1)(z^{-1}+3). \quad (\text{A.16})$$

A partir daqui, podemos escrever a forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{H}(z)$ :

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z^{-1}+2)(z^{-1}+1)} & 0 \\ 0 & \frac{z^{-1}+3}{z^{-1}+2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

A forma de Smith-McMillan pode ser utilizada para dar uma definição unívoca de pólos e zeros no caso de múltiplas entradas e saídas (MIMO).

**Definição A.0.1 (Pólos e zeros)** *Considere a matriz  $\mathbf{H}(z)$   $m \times n$  onde cada elemento é uma razão de polinômios em  $z$  (Goodwin et al., 2001), (Bai & Ding, 2000).*

*i*  $p_z(z)$  e  $p_p(z)$  são chamados de **polinomial de zeros** e **polinomial de pólos** de  $\mathbf{H}(z)$ , respectivamente, dados por:

$$p_z(z) \triangleq \alpha_0(z) \alpha_1(z) \dots \alpha_{\rho-1}(z); \quad p_p(z) \triangleq \beta_0(z) \beta_1(z) \dots \beta_{\rho-1}(z), \quad (\text{A.18})$$

onde  $\alpha_i(z)$  e  $\beta_i(z)$ , para  $0 \leq i \leq \rho - 2$ , são polinomiais da forma de Smith-McMillan de  $\mathbf{H}(z)$ ;

*ii* Os **zeros** e os **pólos** de  $\mathbf{H}(z)$  são definidos, respectivamente, como raízes de  $p_z(z)$  e  $p_p(z)$ .

## Referências

- Bai, E., & Ding, Z. (2000, janeiro). Zero-forcing equalizability of fir and iir multi-channel systems with and without perfect measurements. *IEEE Transactions on Communications*, 48(1), pp. 699-701.
- Barnett, S. (1971). *Matrices in control theory: with applications to linear programming*. Van Nostrand Reinhold Company.
- Bellanger, M. G. (2001). *Adaptive digital filters* (2<sup>a</sup> Revised and Expanded ed.). Marcel Dekker.
- Benveniste, A., Goursat, M., & Ruget, G. (1980, junho). Robust Identification of a Nonminimum Phase System: Blind Adjustment of a Linear Equalizer in Data Communications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3), pp. 385-399.
- Castro, M. S. (2002). *Soluções adaptativas para equalização autodidata multicanal*. Unpublished master's thesis, UNICAMP.
- Causey, R. T. (1999). *Blind Multiuser Detection Based On Second-Order Statistics*. Tese de Doutorado, School of Electrical and Computer Engineering Georgia Institute of Technology.
- Cichocki, A., & Amari, S.-I. (2002). *Adaptive Blind Signal and Image Processing: Learning Algorithms and Applications*. John Wiley & Sons.
- Ding, Z., & Li, Y. (2001). *Blind Equalization and Identification*. Marcel Dekker.
- Gantmacher, F. R. (1977). *The theory of matrices* (Vol. 1). Chelsea Publishing Company.
- Goodwin, G. C., Graebe, S. F., & Salgado, M. E. (2001). *Control systems design*. Prentice Hall.
- Haykin, S. (2002). *Adaptive filter theory* (4<sup>a</sup> ed.). Prentice-Hall.
- Icart, S., Comon, P., & Rota, L. (2009, março). Blind paraunitary equalization. In *Signal processing* (Vol. 89, p. pp. 283-290).
- Inouye, Y., & Liu, R.-W. (2002, abril). A System-Theoretic Foundation for Blind Equalization of an FIR MIMO Channel System. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 49(4), pp. 425-436.
- Jeruchim, M. C., Balaban, P., & Shanmugan, K. S. (2000). *Simulation of commu-*

- nication systems: Modeling, methodology, and techniques.* Kluwer Academic Publishers.
- Johnson Jr., C. R., Schniter, P., Endres, T. J., Behm, J. D., Brown, D. R., & Casas, R. A. (1998, outubro). Blind equalization using the constant modulus criterion: A review. In *Proceedings of the IEEE* (Vol. 86, p. pp. 1927-1950).
- Kailath, T. (1980). *Linear systems.* Prentice Hall.
- Liu, R., & Inouye, Y. (1999). Direct blind deconvolution of multiuser-multichannel systems. In *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems* (Vol. 5, p. pp. 49-52).
- Liu, R. W., Inouye, Y., & Luo, H. (2000). A system-theoretic foundation for blind signal separation of mimo-fir convolutive mixtures - a review. In *Proc. 2nd int. workshop on independent component analysis and signal separation, helsinki, finland* (p. pp. 205-210).
- Lucky, R. W. (1966, fevereiro). Techniques for adaptive equalization of digital communication. *Bell Systems Technical Journal*, 45, pp. 255-286.
- Neves, A. O. (2001). *Uma abordagem unificada para algoritmos de equalização autodidata.* Unpublished master's thesis, UNICAMP.
- Papadias, C. B. (1995). *Methods for blind equalization and identification of linear channels.* Unpublished doctoral dissertation, École Nationale Supérieure des Télécommunications (França).
- Papadias, C. B., & Slock, D. T. M. (1999, março). Fractionally spaced equalization of linear polyphase channels and related blind techniques based on multichannel linear prediction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(3), pp. 641-654.
- Papoulis, A. (1991). *Probability, random variables and stochastic processes* (3<sup>a</sup> ed.). McGraw-Hill.
- Qureshi, S. H. (1985, setembro). Adaptive equalization. *Proceedings of the IEEE*, 73(9), pp. 1349-1387.
- Reddy, V. U., Papadias, C. B., & Paulraj, A. J. (1997, maio). Blind identifiability of certain classes of multipath channels from second-order statistics using antenna arrays. *IEEE Signal Processing Letters*, 4(5), pp. 138-141.
- Rocha, C. A. F., & Romano, J. M. T. (1995, agosto). Self learning deconvolution using a cascade of magnitude and phase equalizer. In *Proceedings of the IEEE*

- midwest symposium on circuits and systems* (Vol. 1, p. pp. 255-258).
- Romano, J. M. T. (1987). *Localisation de Frequences Bruitees par Filtrage Adaptatif et Implantation d'Algorithmes des Moindres Carres Rapides*. Tese de Doutorado, Universite de Paris-Sud Centre D'Orsay.
- Shalvi, O., & Weinstein, E. (1990, março). New Criteria for Blind Deconvolution of Nonminimum Phase Systems (Channels). *IEEE Transactions on Information Theory*, *36*(2), pp. 312-321.
- Tong, L., Xu, G., Hassibi, B., & Kailath, T. (1995, janeiro). Blind channel identification based on second-order statistics: A time domain approach. *IEEE Transactions on Information Theory*, *41*(1), pp. 329-334.
- Tong, L., Xu, G., & Kailath, T. (1994, março). Blind identification and equalization based on second-order statistics: A time domain approach. *IEEE Transactions on Information Theory*, *40*(2), pp. 340-349.
- Tugnait, J. K. (1999). New Results on Second Order Statistics Based Blind Identification and Equalization of SIMO Channels. *Global Telecommunications Conference*, *4*, pp. 2147-2151.
- Vaidyanathan, P. P. (1993). *Multirate systems and filter banks*. Prentice-Hall.
- Vaidyanathan, P. P. (2008). *The theory of linear prediction*. Morgan & Clarypool.