

Estabilidade e controle com critério de custo médio a longo prazo em sistemas lineares estocásticos

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

por

Alessandro do Nascimento Vargas

Mestre em Engenharia Elétrica – FEEC/UNICAMP

Engenheiro de Computação – UFES

Junho de 2009.

Orientador: **Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val** FEEC/UNICAMP

Co-orientador: **Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa** ICMC/USP

Banca Examinadora

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val	FEEC/UNICAMP (presidente)
Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa	POLI/USP
Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso	LNCC/CNPq
Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. José Cláudio Geromel	FEEC/UNICAMP

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

V426e Vargas, Alessandro do Nascimento
 Estabilidade e controle com critério de custo médio a
 longo prazo em sistemas lineares estocásticos/
 Alessandro do Nascimento Vargas. --Campinas, SP:
 [s.n.], 2009.

 Orientadores: João Bosco Ribeiro do Val, Eduardo
 Fontoura Costa.

 Tese de Doutorado - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
 Computação.

 1. Teoria do controle. 2. Sistemas estocásticos. 3.
 Sistemas lineares. 4. Markov, Processos de. I. Val, João
 Bosco Ribeiro do. II. Costa, Eduardo Fontoura. III.
 Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
 Engenharia Elétrica e de Computação. IV. Título

Título em Inglês: Stability and control of linear stochastic systems with long-run
 average cost criterion

Palavras-chave em Inglês: Control theory, Stochastic systems, Linear systems, Markov
 processes

Área de concentração: Automação

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Oswaldo Luiz do Valle Costa, Marcelo Dutra Fragoso, Wagner
 Caradori do Amaral, José Claudio Geromel

Data da defesa: 30/06/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica e de Computação

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

Candidato: Alessandro do Nascimento Vargas

Data da Defesa: 30 de junho de 2009

Título da Tese: "Estabilidade e Controle com Critério de Custo Médio a Longo Prazo em Sistemas Lineares Estocásticos"

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente): _____

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa: _____

Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso: _____

Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral: _____

Prof. Dr. José Cláudio Geromel: _____

Resumo

Esta monografia apresenta resultados de estabilidade e controle de sistemas estocásticos representados por operadores lineares com respeito ao estado e não-lineares em relação ao controle, quando avaliados no critério de custo médio a longo prazo (CMLP). A estrutura de controle não depende da história do processo e pode ser usada, como caso particular, para representar diversos problemas de controle existentes na literatura. Em relação a estabilidade, mostra-se que o sistema estocástico é assintoticamente estável na média se o custo CMLP é finito e se as hipóteses de controlabilidade e observabilidade são válidas. Para garantir a estabilidade uniforme do segundo momento do sistema, algumas condições adicionais são verificadas. Em relação ao controle, apresentam-se condições que asseguram a existência de política ótima estacionária no problema CMLP para a classe de sistemas estudados. Uma aproximação é desenvolvida para se obter o mínimo CMLP, e esta aproximação é ilustrada numericamente no problema de regulação de sistemas lineares sujeitos a saltos markovianos, supondo que o controlador não possui acesso ao estado de Markov. Exemplos numéricos são empregados para ilustrar a teoria desenvolvida.

Abstract

This monograph presents results on stability and control of stochastic systems represented by linear operators with respect to the state which are non-linear with respect to the control. The control seeks to optimize a long run average cost (LRAC). The control structure does not depend on the past history of the process and it can be used, in particular, to represent a broad range of control problems that appears in the literature. Regarding the stability, it is shown that the stochastic system is asymptotically stable in the mean if the LRAC is finite and if controllability and observability assumptions are satisfied. To guarantee the uniform second moment stability, some additional conditions must be verified. With respect to the control, the main goal is to assure the existence of an optimal stationary policy for the LRAC problem within the class of systems considered, and some independent conditions are derived. An approximation for the minimum LRAC is obtained, and it is illustrated numerically for the regulator problem of Markov jump linear systems, under the assumption that the controller does not have access to the Markov state. Numerical examples illustrate the derived theory.

Agradecimentos

Aqui agradeço a todos os que me auxiliaram a desenvolver esta tese. De maneira especial, recebam os meus mais sinceros agradecimentos:

- Prof. João Bosco, que me ofereceu a oportunidade de desenvolver o doutorado sob sua supervisão. Declaro que é um amigo e que me apoiou em todos os momentos, desde quando ingressei no mestrado FEEC/UNICAMP até os dias atuais. Seu entusiasmo pela pesquisa é contagiante, e continuaremos seguindo o seu lema: *“E vamos que vamos!”*.
- Prof. Eduardo, pela amizade e apoio na forma de co-orientação desta pesquisa;
- Professores Marcelo, Oswaldo, Wagner, José Cláudio Geromel, antecipadamente pelo empenho dedicado à correção deste trabalho;
- Prof. Benjamin Bordin, do IMECC/UNICAMP. Através do seu curso de Análise, no Instituto de Matemática, apreendi conhecimentos sobre ferramentas matemáticas imprescindíveis ao desenvolvimento desta tese.

Estendo aqui os meus agradecimentos à família carnal, constituída nesta existência por Carla (esposa), Aline (filha), Odilson (pai), Creuza (mãe), Anderson e Andressa (irmãos), Cristina. Agradeço ainda aos demais familiares e amigos, José Ignácio, Tina, Marli, Mariane, Rafael, Romilda, Carlos, Maria da Penha, Daiana, Walter Furloni, Ricardo, Renato, Taís, Giuliano, Ricardo Ceará, Ana Flávia, Pedro Peres, Ivanil, Akebo, demais amigos do Laboratório de Telemática, Marcos Vallim, Jorge Martins, Sérgio Augusto, Robson Cesila, Jaqueson, André (in memorium), Arytuza Lorenzetti, Ângelo Lorenzetti (in memorium), Jorge Fernando, Edvaldo, Silvio Chibeni, Alexandre Caroli, Harlen, Gerusa, Leandro Loss, Marisa, Carlos, Ariel, Fernando, Lêda, Sara, Clotildes, Gracinda, Odilon, e todos os amigos e bons Espíritos que contribuíram no desenvolvimento desta tese.

Agradeço ainda a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pela bolsa de estudos; a FEEC/UNICAMP e seus funcionários pela convivência; a UTFPR pelo incentivo a docência e pesquisa.

Finalmente, agradeço sobremaneira a DEUS pela oportunidade bendita desta existência.

Sumário

Resumo / Abstract	i
Agradecimentos	v
1 Introdução	5
1.1 Motivação	5
1.1.1 Estabilidade sob custo médio a longo prazo	9
1.1.2 Controle sob custo médio a longo prazo	10
1.1.3 Aproximação do custo médio a longo prazo	12
1.1.4 Avaliação numérica	13
2 Estabilidade e custo médio a longo prazo	17
2.1 Introdução	17
2.2 Artigo: Average cost and stability of time-varying linear systems .	20
2.2.1 Introduction	20
2.2.2 Preliminaries	23
2.2.3 Stability Conditions	29
2.2.4 Concluding remarks	35
2.3 Artigo: Second moment stability of time-varying stochastic sys- tems with average cost	37
2.3.1 Introduction	37
2.3.2 Notation, concepts and main results	39
2.3.3 Concluding remarks	52
2.4 Comentários	53
3 Política estacionária e custo médio a longo prazo	55
3.1 Introdução	55

3.2	Definições, notação e resultados	59
3.2.1	O critério de custo descontado e resultados preliminares . .	61
3.2.2	Resultado principal	63
3.2.3	Prova do Teorema 3.1	65
3.2.4	Condições suficientes para Hipótese 3.1	72
3.2.5	Prova do Corolário 3.3	77
3.3	Artigo: Average optimal stationary policies: convexity and convergence conditions in linear stochastic control systems	80
3.3.1	Introduction	81
3.3.2	Preliminaries, notations, and main results	83
3.3.3	Proof of Theorem 3.1	88
3.3.4	Concluding remarks	96
3.4	Comparação entre as condições suficientes para existência de política ótima estacionária no problema de custo médio a longo prazo	96
3.4.1	Condições das Hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 - comparação e exemplos	97
3.4.2	Sobre a condição da Seção 3.3	98
3.5	Comentários	100
4	Aproximação do custo médio a longo prazo	101
4.1	Introdução	101
4.2	Aproximação de custo médio a longo prazo ótimo para uma classe de sistemas lineares estocásticos	102
4.2.1	Definições e notação	104
4.2.2	Aplicações	107
4.2.3	Prova do Teorema 4.1	111
4.2.4	Prova do Corolário 4.1	114
4.3	Artigo: Bounds for the Finite Horizon Cost of Markov Jump Linear Systems with Additive Noise and Convergence for the Average Cost	114
4.3.1	Introduction	114
4.3.2	Definitions and preliminary results	117
4.3.3	The Markov chain	118
4.3.4	The discrete-time Markov jump linear system	118
4.3.5	Second moment matrices and related results	119
4.3.6	Convergence results and auxiliary systems	120

4.3.7	Bounds for the finite horizon cost	123
4.3.8	The Long Run Average Cost	131
4.3.9	Conclusions	133
4.3.10	Appendix - Proof of Proposition 4.5	134
4.3.11	Appendix - Numerical Example	135
4.3.12	Comentários da seção	135
4.4	Comentários	135
5	Avaliação numérica	137
5.1	Introdução	137
5.2	Definições, conceitos básicos e formulação do problema	139
5.2.1	Dinâmica de segundo momento associada	140
5.2.2	Resultados para problema de horizonte finito	142
5.2.3	Algoritmo	143
5.2.4	Condições de aproximação	145
5.3	Aplicação numérica	148
5.3.1	Aplicação robótica	152
5.4	Avaliação da Hipótese 5.1	155
5.5	Método LMI sub-ótimo	157
6	Conclusões	159
6.1	Sumário dos resultados	159
6.2	Trabalhos futuros	160
6.3	Artigos	163
	Bibliografia	166

Capítulo 1

Introdução

Neste primeiro capítulo, descreveremos a motivação para estudo de sistemas lineares estocásticos sob custo médio a longo prazo.

1.1 Motivação

Sistemas lineares estocásticos formam uma classe de sistemas muito estudados na literatura, com maior desenvolvimento teórico a partir dos anos 1960. Desde então, problemas de controle que envolvem esta classe de sistemas têm alcançado certo grau de maturidade com respeito a avanços teórico e prático, com inúmeras aplicações nas mais diversas áreas da Engenharia, Física, Sistemas biológicos, econômicos, entre outros. Veja por exemplo, como uma pequena amostra de aplicações em sistemas lineares estocásticos, as monografias (Åström, 1970), (Kwakernaak e Sivan, 1972), (Davis e Vinter, 1985), (Whittle, 1982), (Stengel, 1986), (Anderson e Moore, 1990), (Kumar e Varaiya, 1986), (Bertsekas e Shreve, 1978), (Costa, Fragoso e Marques, 2005) e os artigos (Mohler e Kolodziej, 1980), (Athans et al., 1977), (Johnson et al., 1971), (do Val e Başar, 1999).

Apesar do certo grau de maturidade atingida pela teoria de sistemas lineares estocásticos, muita pesquisa adicional é necessária para assentar alguns dos problemas não resolvidos. Em particular, questões ligadas a estabilidade e controle em problemas de custo médio a longo prazo se encontram em aberto na literatura, e a principal contribuição deste trabalho é desenvolver uma nova abordagem para tratar estas questões.

Formalmente, estudaremos sistemas lineares estocásticos, definidos num espaço de probabilidade fixado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$, conforme a seguir.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x(k+1) = A_k x(k) + B_k w(k), \\ y(k) = C_k x(k) + D_k w(k), \quad k \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

no qual $\{A_k; k \geq 0\}$, $\{B_k; k \geq 0\}$, $\{C_k; k \geq 0\}$ e $\{D_k; k \geq 0\}$ denotam sequências de matrizes conhecidas de dimensões compatíveis. O processo estocástico $\{w(k); k \geq 0\}$ é i.i.d.[†] com média nula e matriz de covariância igual a matriz identidade para cada $k \geq 0$; $\{x(k); k \geq 0\}$ denota a sequência de estados em $\mathbb{R}^n$ geradas recursivamente em $\mathcal{S}$; e $\{y(k); k \geq 0\}$ denota a sequência de saída do sistema. $\{\mathcal{F}_k\}$ representa a filtração crescente gerada pela sequência de estado $\{x_k\}$ tal que $\mathcal{F}_k = \sigma\{x_n, 0 \leq n \leq k\}$ para todo $k \geq 0$.

Sistemas lineares variantes no tempo como em $\mathcal{S}$ são amplamente estudados devido à sua aplicação em diversas áreas do conhecimento, veja por exemplo as motivações em (Kailath, 1979; Halanay e Ionescu, 1994; Angelo, 1970). Uma motivação adicional para o estudo do sistema variante no tempo $\mathcal{S}$ é a sua propriedade de ser adaptável para tratar certas classes particulares, como por exemplo os sistemas híbridos chaveados, veja o *survey* em (Shorten et al., 2007). Em geral, um sistema linear chaveado é composto por uma família de subsistemas e uma regra que governa os chaveamentos. Tal sistema pode ser representado por

$$\mathcal{S}_c : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)} x(k) + B_{\theta(k)} w(k), \\ y(k) = C_{\theta(k)} x(k) + D_{\theta(k)} w(k), \quad k \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

no qual $\theta(k)$ toma seus valores num conjunto finito $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$. Cada componente individual $(A_1, B_1, C_1, D_1), \dots, (A_n, B_n, C_n, D_n)$ representa um *modo de operação* ou *subsistema* do sistema chaveado $\mathcal{S}_c$, e o modo de operação a cada instante k é governado por uma regra de chaveamento $\theta(k) \in \mathcal{N}$. Note que $\mathcal{S}_c$ é um caso particular de $\mathcal{S}$.

A Fig. 1.1 apresenta um diagrama ilustrativo para o modo de funcionamento de um sistema chaveado. Note que a dinâmica do estado $x(k)$ e da saída $y(k)$ dependem fundamentalmente do modo do subsistema $\theta(k) = i \in \mathcal{N}$ e do valor

[†]i.i.d. - independente e identicamente distribuído.

das matrizes (A_i, B_i, C_i, D_i) . Assume-se que, a cada instante de tempo k , existe um único subsistema ativo.

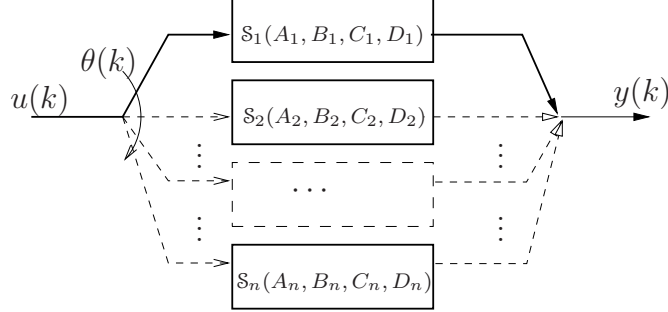


Figura 1.1: Esquemático de sistema chaveado, no qual $S_i(\cdot)$ representa o modo $\theta(k) = i \in \mathcal{N}$ em $\mathcal{S}_c$.

O modo pelo qual o chaveamento ocorre em $\mathcal{S}_c$ é de fundamental importância na análise do comportamento do sistema. Pode-se, por exemplo, estabilizar o sistema escolhendo-se uma estratégia de chaveamentos apropriada. Em certos casos, o chaveamento $\theta(k)$ pode obedecer a uma cadeia de Markov homogênea, portanto transformando $\mathcal{S}_c$ em um Sistema Linear com Saltos Markovianos (SLSM), veja a monografia (Costa, Fragoso e Marques, 2005) para mais detalhes sobre esta classe de sistemas.

De modo a analisar o comportamento do sistema $\mathcal{S}$ ao longo do tempo k , é comum associar $\mathcal{S}$ a índices de desempenho pré-estabelecidos. Por exemplo, se o objetivo é avaliar o sistema $\mathcal{S}$ para um horizonte de tempo finito, então pode-se adotar o custo quadrático de N estágios

$$J^N = \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[\|y(k)\|^2], \quad (1.1)$$

no qual $\mathbb{E}[\cdot] \equiv \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_0]$ denota a esperança matemática. Contudo, se é desejado analisar o comportamento de longo prazo de $\mathcal{S}$, então o custo em (1.1) torna-se inadequado por conta do argumento a seguir. Sob hipótese de observabilidade do par (A_k, C_k) , pode-se provar que existe k_0 tal que (veja Capítulo 2)

$$N \geq k_0 \Rightarrow \sum_{k=0}^N \mathbb{E}[\|y(k)\|^2] \geq \sum_{k=k_0}^N \|B_k\|^2,$$

e se, por exemplo, B_k é igual a matrix identidade então podemos concluir que J^N em (1.1) diverge para infinito quando N cresce indefinidamente. Portanto o índice de desempenho J^N , divergindo para infinito, torna-se inadequado para analisar o comportamento de longo-prazo do sistema $\mathcal{S}$.

Uma possível alternativa para contornar o comportamento divergente de J^N seria associar o sistema $\mathcal{S}$ ao *custo descontado*. No custo descontado, considera-se (1.1) com um fator de desconto $0 < \alpha < 1$ e toma-se o horizonte N infinito, ou seja,

$$V_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathbb{E}[\|y(k)\|^2]. \quad (1.2)$$

Note que o custo descontado tende a priorizar a influência do processo nos instantes de tempo iniciais em detrimento do comportamento de longo prazo. Portanto, o custo descontado pode não ser atrativo na análise de longo prazo do sistema $\mathcal{S}$, embora seu estudo seja muito útil em diversos outros contextos, veja (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996) e suas referências.

Estudos consolidados na literatura (Davis e Vinter, 1985), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996), (Arapostathis et al., 1993) indicam que o índice de desempenho mais adequado para mensurar o comportamento de longo prazo em $\mathcal{S}$ é o *custo médio a longo prazo*, que é definido por

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\|y_k\|^2]. \quad (1.3)$$

Sob certas hipóteses, pode-se provar que o custo médio a longo prazo (1.3) não depende da condição inicial x_0 , e portanto o valor J pode ser usado como uma medida única para avaliar o comportamento de longo prazo de $\mathcal{S}$.

Percebemos que existe uma lacuna na literatura de sistemas lineares estocásticos com respeito a análise do sistema $\mathcal{S}$ sujeito ao custo (1.3). De fato, conforme observado em (Li e Blankenship, 1985) e (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, p.76), a análise sob custo médio a longo prazo apresenta maior dificuldade de ordem técnica quando comparado ao custo descontado, e talvez este seja o motivo pelo qual observamos uma quantidade muito maior de trabalhos que desenvolvem o custo finito e/ou descontado em comparação com o custo médio a longo prazo.

O principal objetivo desta tese é cobrir uma parte desta lacuna, em particular no que se refere a estabilidade e controle, conforme detalhado a seguir.

1.1.1 Estabilidade sob custo médio a longo prazo

Considere a seguinte hipótese.

(H_1) *O custo médio a longo prazo J em (1.3) é finito.*

Algumas questões importantes surgem mediante (H_1).

- (a) O sistema $\mathcal{S}$ é estável em algum sentido?
- (b) Existe o valor limite para a multiplicação infinita de matrizes $A_N \cdots A_k$ à medida que $N \rightarrow \infty$ para qualquer numero natural k ?

As questões acima não são necessariamente equivalentes, mas estão intimamente relacionadas. Sabe-se que (b) implica em (a) quando $A_N \cdots A_k \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$), porém o converso nem sempre é válido. Especificamente, no que concerne à questão (b), a existência de limite do produto infinito de matrizes é tema investigado por muitos autores, que conduziram a resultados significativos (veja (Daubechies e Lagarias, 1992; Berger e Wang, 1992; Gurvits, 1995; Trench, 1999; Blondel e Tsitsiklis, 2000)).

O Capítulo 2 provê resposta afirmativa para os itens (a) e (b). Naquele capítulo analisamos o sistema $\mathcal{S}$ sujeito a (H_1) e encontramos resultados de estabilidade para o sistema autônomo

$$z_{k+1} = A_k z_k, \quad \forall k \geq 0. \quad (1.4)$$

Cabe ressaltar que, usando em $\mathcal{S}$ a hipótese de que $\{w_k\}$ é um processo i.i.d. com média nula e matriz de covariância igual a identidade, temos que

$$z_{k+1} = E[x_{k+1}] = E[A_k x_k + B_k w_k] = A_k E[x_k] = A_k z_k, \quad \forall k \geq 0, \quad (1.5)$$

com $z_0 = x_0$. Mostramos no Capítulo 2 que, sob hipóteses de controlabilidade do par (A_k, B_k) , observabilidade do par (A_k, C_k) , e sequência $\{A_k\}$ limitada, o sistema autônomo (1.4) é assintoticamente estável. Portanto, $z_k = E[x_k] \rightarrow 0$

quando $k \rightarrow \infty$ (estabilidade assintótica da média). Veremos a seguir que este conceito de estabilidade não garante a estabilidade uniforme do segundo momento.

Considere a matriz de covariância de x_k definida por

$$\text{cov}(x_k) = E[x_k x_k'] - E[x_k]E[x_k]', \quad \forall k \geq 0. \quad (1.6)$$

Embora $E[x_k]$ tenda a zero quando k cresce indefinidamente, a matriz de segundo momento de x_k , definida por

$$X_k = E[x_k x_k'], \quad \forall k \geq 0,$$

pode ter uma subsequência divergindo para infinito. Ou seja, mesmo que a hipótese (H_1) seja válida, pode existir uma subsequência $\{X_{k_n}\}$ de $\{X_k\}$ tal que $X_{k_n} \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, veja *Example 2.1*, p.32, no Capítulo 2. Logo pode ocorrer que

$$\text{cov}(x_{k_n}) \rightarrow \infty \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Portanto, apesar do valor esperado de x_k alcançar assintoticamente a origem, a sua covariância, que mede a dispersão estatística da variável aleatória x_k , pode divergir para infinito em alguma subsequência. O resultado obtido estende aqueles anteriormente conhecidos na literatura que, para garantir estabilidade, impõem limitante uniforme para a sequência de segundo momento $\{X_k\}$, vide por exemplo (Anderson e Moore, 1981), (Dragan e Morozan, 2006).

Para prevenir a ocorrência de (1.7), reforçamos as hipóteses para assegurar que a sequência de segundo momento $\{X_k\}$ é limitada. Para alcançar tal objetivo, empregaremos hipóteses sobre o custo quadrático ou sobre propriedades estruturais da sequência $\{A_k\}$; isto garantirá que o sistema (1.5) é uniformemente assintoticamente estável, isto é, que existe $\beta > 0$ e $0 < \xi < 1$ tal que

$$\|A_k \cdots A_i\| \leq \beta \xi^{k-i}, \quad \forall k \geq i,$$

e disto concluiremos que $\{X_k\}$ é limitada sempre que $\{B_k\}$ também for limitada.

1.1.2 Controle sob custo médio a longo prazo

Avanços importantes em problemas de controle sob custo médio a longo prazo foram realizados na teoria de Processos de Decisão Markovianos. A busca por

condições que assegurem a existência de política ótima estacionária em problemas de custo médio a longo prazo remontam os anos 1960, época em que foi desenvolvida a técnica chamada *vanishing discount approach*. A idéia principal da técnica é aproximar o custo médio a longo prazo por custos descontados, tomando o desconto tendendo a um, em conjunto com o teorema tauberiano (Arapostathis et al., 1993, Th.A3, p.337). Os primeiros resultados consideravam os Processos Markovianos com espaço de estados finito, sendo que a generalização para espaço de estados de Borel ocorreu somente nos anos 1990. As principais contribuições neste sentido são (Hernández-Lerma e Lasserre, 1990), (Hernandez-Lerma et al., 1991), (Schal, 1993), (Arapostathis et al., 1993) e (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996). Estes trabalhos, portanto, aprimoraram a técnica *vanishing discount approach*, porém a sua idéia original permaneceu inalterada.

Uma contribuição desta tese é a de aprofundar a investigação sobre a existência de política ótima estacionária para uma classe particular de Processos de Decisão Markovianos. Consideramos o sistema linear estocástico

$$x_{k+1} = A(g_k)x_k + Ew_k, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8)$$

O estado do sistema é representado por $\{x_k\}$ e hipóteses usuais são impostas sobre a entrada de ruído $\{w_k\}$; a matriz E é fixa e de dimensão compatível. A variável g_k , no k -ésimo estágio, representa a ação de controle e pertence a um conjunto prescrito $\mathcal{G}$. O operador A , possivelmente não-linear, realiza o mapeamento de $\mathcal{G}$ no espaço das matrizes reais de dimensão $n \times n$.

O custo médio a longo prazo associado a (1.8) é dado por

$$J = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E[x_k' Q(g_k) x_k], \quad (1.9)$$

no qual Q é um operador que mapeia $\mathcal{G}$ no espaço das matrizes semidefinidas positivas de dimensão $n \times n$.

Usualmente, uma política $\mathbf{f} = \{f_0, f_1, \dots, f_k, \dots\}$ contém um conjunto de funções de controle que realizam a ação de controle na forma $g_k = f_k(x_k)$ que será aplicada no k -ésimo estágio, (Bertsekas e Shreve, 1978), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996). Devido ao custo por estágio em (1.9) depender de maneira

quadrática da variável de estado x_k , será possível determinar funções f_k que dependem somente do segundo momento de x_k e que a política correspondente $\mathbf{f}^* = \{f_0, f_1, \dots, f_k, \dots\}$ realiza o mínimo em (1.9) na classe de controle escolhida. No Capítulo 3, detalhamos a estrutura de funções de controle e desenvolvemos condições que asseguram a existência de uma política estacionária na forma $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$, que minimiza o custo J em (1.9) e independe da condição inicial x_0 .

Condições distintas, tais como custo-limitado, controlabilidade para origem, convexidade, entre outras, são apresentadas no Capítulo 3. É interessante frisar que estas condições, apesar de serem suficientes para a existência de política $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$ que minimiza J em (1.9), não são diretamente comparáveis entre si, veja Seção 3.4. Técnicas distintas de demonstração, que levam em conta o “vanishing discount approach” e outras que tangenciam esta abordagem, serão introduzidas no Capítulo 3 para provar a existência da política $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$.

Uma motivação para estudar o sistema (1.8)-(1.9) é que ele pode ser usado para modelar o problema de controle conhecido como *simultaneous state-feedback*, veja (Cho e Lam, 2001), (Luke et al., 1997) e (Wu e Lee, 2005) para uma breve discussão sobre resultados recentes. De fato, seja g uma matriz de controle, e defina as matrizes bloco-diagonais $A(g)$ e $Q(g)$ conforme

$$A(g) = \text{diag}(A_1 + B_1g, \dots, A_N + B_Ng), \quad (1.10)$$

$$Q(g) = \text{diag}(Q_1 + g'R_1g, \dots, Q_N + g'R_Ng), \quad (1.11)$$

com $N \geq 1$ dado, no qual $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N, Q_1, \dots, Q_N, R_1, \dots, R_N$ são matrizes dadas de dimensões compatíveis. O problema de controle *simultaneous state-feedback* é o de encontrar, se existir, uma política $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_k, \dots\}$, que minimiza o custo médio a longo prazo (1.9) sujeito a (1.8), (1.10) e (1.11). Portanto, os resultados desenvolvidos nesta monografia podem ser aplicados no problema *simultaneous state-feedback*.

1.1.3 Aproximação do custo médio a longo prazo

O Capítulo 4 apresenta resultados de aproximação do custo médio a longo prazo em duas frentes de investigação, conforme a seguir.

Mínimo custo médio e estrutura de controle não-linear

Na primeira frente de investigação do Capítulo 4, considerando o sistema (1.8)-(1.9), apresentamos condições para que a aproximação a seguir seja válida:

$$J_N^*/N \rightarrow J^* \text{ quando } N \rightarrow \infty, \quad (1.12)$$

no qual J^* representa o mínimo custo médio a longo prazo em (1.9), e J_N^* representa o mínimo custo do problema de N estágios

$$J_N := \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[x'_k Q(g_k) x_k], \quad \forall N \geq 1.$$

Mostraremos que a aproximação em (1.12) será válida se existir uma política ótima estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$ que realiza J^* , por isto as condições introduzidas no Capítulo 3 para garantir a existência de tal política serão aplicadas no Capítulo 4.

Limitantes para o custo finito e convergência para o custo médio a longo prazo em sistemas com saltos markovianos

Na segunda frente de investigação do Capítulo 4, estudaremos os sistemas lineares com saltos markovianos (SLSM). Os SLSM formam uma classe de sistemas híbridos com diversas aplicações, cujo desenvolvimento teórico encontra-se relativamente consolidado, veja a monografia (Costa, Fragoso e Marques, 2005). Apresentaremos resultados que mostram a existência de limitantes inferior e superior para o custo de horizonte finito sob hipótese de estabilidade ou estabilizabilidade. Mostraremos também um resultado de convergência para o custo médio a longo prazo usando estes limitantes e a expressão do custo correspondente, que pode depender da estrutura cíclica da cadeia de Markov subjacente.

1.1.4 Avaliação numérica

O Capítulo 3 apresenta condições que garantem a existência de uma política ótima estacionária para o problema de custo médio a longo prazo, e tais condições são retomadas no Capítulo 4 para o desenvolvimento de um método de aproximação de solução deste problema. Estas condições, apropriadas para tratar o

problema de controle no contexto em (1.8)-(1.9), serão estendidas no Capítulo 5 para tratar o problema de regulação de SLSM, veja Seção 3.5 para uma discussão complementar.

Em relação a estrutura de controle em SLSM, pode-se observar que a grande maioria dos resultados na literatura assume que o controlador possui acesso completo ao estado de Markov, porém em certas aplicações a informação sobre o estado de Markov torna-se inacessível, veja por exemplo (do Val e Başar, 1999; Vargas, 2004; Oliveira et al., 2009). Para estas aplicações, o controlador deve ser projetado de modo a ser independente do estado de Markov e por isto aqueles resultados da literatura não se aplicam.

Assumindo que o controlador possui realimentação linear sem acesso ao estado de Markov, desejamos avaliar o comportamento de longo prazo do sistema SLSM através do cálculo do ganho (ou sequência de ganhos) que minimiza o custo médio a longo prazo correspondente. Sabe-se que este problema é de difícil solução porque pode-se formulá-lo de maneira equivalente a outros problemas de controle em aberto na literatura cujo grau de complexidade de solução é *NP-hard*, veja por exemplo (Blondel e Tsitsiklis, 1997; Blondel e Tsitsiklis, 2000). De modo a contornar a dificuldade apresentada para a obtenção da solução do problema, propomos no Capítulo 5 um método numérico de aproximação de solução que é válido sob existência de política ótima estacionária.

A estratégia de aproximação adotada no Capítulo 5 para tratar o problema de regulação de SLSM sob custo médio longo-prazo, impondo que o controlador não tem acesso ao estado de Markov, é a seguinte. Suponha que J_N^* , para cada $N \geq 1$, representa o mínimo custo do problema de regulação de N -estágios e que exista um método que realiza o seu cálculo. Se J^* representa o mínimo custo médio a longo prazo, então usando uma aproximação semelhante aquela em (1.12) é possível determinar J^* com precisão arbitrária e isto resolve o problema de controle. Concluimos assim que a maior dificuldade nesta estratégia é o cálculo de J_N^* , para cada $N \geq 1$.

Existe um método variacional na literatura que realiza o cálculo das ações de controle que realizam um **mínimo local** para J_N^* , entretanto não está claro se es-

tas ações também realizam o mínimo global (Vargas, 2004; do Val e Başar, 1999). Sob a conjectura de que as ações de controle obtidas no algoritmo variacional realizam o mínimo global, será possível calcular J_N^* para cada $N \geq 1$ e disto obtermos o mínimo custo médio a longo prazo J^* através da aproximação $J_N^*/N \rightarrow J^*$, tomando $N \rightarrow \infty$. As hipóteses necessárias para a aproximação, o método variacional e exemplos numéricos são apresentados no Capítulo 5.

Capítulo 2

Estabilidade e custo médio a longo prazo

Neste capítulo, apresentamos resultados de estabilidade em sistemas estocásticos variantes no tempo derivados da existência de custo médio a longo prazo.

2.1 Introdução

Considere um sistema linear estocástico variante no tempo, definido num espaço de probabilidade subjacente $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$, conforme a seguir.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ y_k = C_k x_k + D_k w_k, \quad k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

no qual x_k , w_k , e y_k , $k = 0, 1, \dots$ são processos tomando valores respectivamente em $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, e $\mathbb{R}^p$, que representam o estado do sistema, a entrada de ruído aditivo e a saída, nesta ordem. Assumimos que o ruído $\{w_k\}$ forma um processo iid com média nula e matriz de covariância igual a matriz identidade para cada $k \geq 0$. $\{\mathcal{F}_k\}$ representa a filtração crescente gerada pela sequência de estado $\{x_k\}$ tal que $\mathcal{F}_k = \sigma\{x_n, 0 \leq n \leq k\}$ para todo $k \geq 0$. As matrizes A_k , B_k , C_k e D_k são dadas e possuem dimensões compatíveis.

Desejamos associar ao sistema $\mathcal{S}$ o custo médio a longo prazo definido conforme a seguir.

$$J = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\|y_k\|^2], \quad (2.1)$$

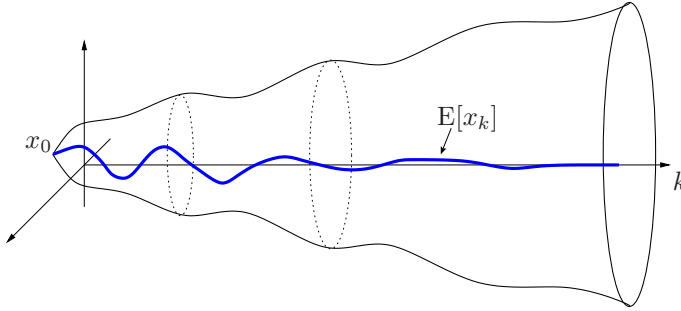


Figura 2.1: Representação de tubo que contém as trajetórias amostradas do estado x_k . Apesar do valor esperado de x_k alcançar assintoticamente a origem, as trajetórias amostradas podem possuir subsequências divergentes para infinito.

no qual $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana. A investigação deste capítulo é direcionada para responder a seguinte pergunta.

- *A existência de custo médio a longo prazo finito em (2.1) implica em alguma noção de estabilidade para o sistema estocástico $\mathcal{S}$?*

Mostraremos que, sob hipóteses de controlabilidade e observabilidade, o sistema $\mathcal{S}$ é

(S_1) *assintoticamente estável na média*, isto é, $E[x_k] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Assumindo $\{A_k\}$ limitada, provaremos que o sistema $z_{k+1} = A_k z_k$ é assintoticamente estável e a noção de estabilidade em (S_1) segue da identidade em (1.5). Ressaltamos que, em alguns casos, o sistema $\mathcal{S}$ é assintoticamente estável na média porém a sequência de segundo momento $\{E[\|x_k\|^2]\}$ não é limitada, veja *Example 2.1*, p.32. Neste exemplo a sequência $\{E[\|x_k\|^2]\}$ possui uma subsequência divergindo para infinito associada a um custo médio a longo prazo finito em (2.1). Uma possível interpretação gráfica deste fato está ilustrada na Fig. 2.1. Nota-se na figura que a sequência $\{E[x_k]\}$ converge para zero mas as trajetórias amostradas $\{x_k\}$ estão contidas num tubo cujo diâmetro pode crescer indefinidamente com o passar do tempo; podemos então concluir que, apesar de estável na média, algumas trajetórias amostradas podem ser ilimitadas e portanto instáveis.

Defina

$$X(k) = E[x_k x_k'], \quad Y(k) = E[y_k y_k'], \quad \forall k \geq 0.$$

Podemos afirmar que, se $\{X(k)\}$, $\{A_k\}$, and $\{B_k\}$ são limitados, e o par (A_k, B_k) é estabilizável, então o sistema autônomo $z_{k+1} = A_k z_k$ é uniformemente assintoticamente estável. Este resultado segue da combinação do resultado em (Anderson e Moore, 1981, Th 4.3) e o fato de que $\{X(k)\}$ satisfaz uma equação recorrente determinística; veja (2.4). Dragan e Morozan em (Dragan e Morozan, 2006) e Kubrusly em (Kubrusly, 1988), generalizam este resultado para o contexto de operadores positivos e de dimensão infinita, respectivamente, impondo em ambos os trabalhos $B_k = I$ para cada $k \geq 0$ ao invés de estabilizabilidade. Embora a estabilidade exponencial do sistema autônomo $z_{k+1} = A_k z_k$ seja satisfatoriamente assegurada nestes trabalhos, a limitação uniforme em $\{X(k)\}$ é uma hipótese decisiva em cada trabalho.

A primeira contribuição significativa deste capítulo é mostrar que a noção de estabilidade em (S_1) é obtida sem necessidade de impor um limitante uniforme para $\{X(k)\}$, portanto este resultado generaliza aqueles conhecidos na literatura. Mostramos que a existência de custo médio a longo prazo em (2.1) *não* implica que a sequência matricial $\{Y(k)\}$ é limitada. Na verdade, existem casos nos quais existe uma subsequência de $\{Y(k)\}$ que diverge para infinito apesar de (2.1) ser finito, veja *Example 2.1*, p.32. Apesar desta situação peculiar de divergência, a noção de estabilidade estocástica em (S_1) se mantém válida e esta investigação configura-se na primeira contribuição deste capítulo.

A segunda contribuição deste capítulo é apresentar condições que asseguram que o sistema estocástico $\mathcal{S}$ é

(S_2) *uniformemente estável no segundo momento, isto é, existe uma constante $c = c(x_0) > 0$ tal que $E[\|x_k\|^2] \leq c$ para cada $k \geq 0$, (Kozin, 1969, p.98).*

A noção de estabilidade em (S_2) , que é equivalente a sequência $\{X(k)\}$ ser limitada, é obtida se algumas hipóteses apropriadas são satisfeitas.

Nas próximas seções apresentamos os resultados que garantem (S_1) e (S_2) . Para este fim, adotamos o recurso de inserir cópias dos artigos de autoria do candidato e de seu orientador e co-orientador no texto da tese, em conformidade com o regulamento CCPG/01/2008 da Universidade Estadual de Campinas. Informações adicionais sobre os artigos encontram-se disponíveis no Capítulo 6.

2.2 Artigo: Average cost and stability of time-varying linear systems

Abstract

In this paper the stability for time-varying discrete-time stochastic linear systems, with possibly unbounded trajectories, is associated to the existence of the long-run average cost criteria. Under controllability and observability, the stochastic system is stable in the sense that its state tends asymptotically to the origin in the mean. Further conditions related to a lower bound on the long-run average cost, or with periodic time-varying systems allows us to conclude the uniform second moment stability.

2.2.1 Introduction

Consider a time-varying discrete-time stochastic linear system defined in a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_k, P)$ as follows.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ y_k = C_k x_k + D_k w_k, \quad k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where x_k , w_k , and y_k , $k = 0, 1, \dots$ are processes taking values respectively in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, and $\mathbb{R}^p$, which represent the system state, additive noisy input, and output, in this order. The noisy input $\{w_k\}$ forms an iid process with zero mean and covariance matrix equal to the identity for each $k \geq 0$. The matrices A_k , B_k , C_k and D_k are given, and they have dimensions $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ and $p \times m$, respectively.

Let us define the second moment matrices of the state and the output, respectively, as

$$X(k) = E[x_k x_k'], \quad \text{and} \quad Y(k) = E[y_k y_k'], \quad \forall k \geq 0, \quad (2.2)$$

where the operator $E[\cdot]$ denotes the mathematical expectation.

Many important properties of the system $\mathcal{S}$ can be inferred from the analysis of the behavior of the matrices $\{X(k)\}$ and $\{Y(k)\}$. In particular, we know

that if $\{X(k)\}$, $\{A_k\}$, and $\{B_k\}$ are bounded, and the pair (A_k, B_k) is stabilizable, then the autonomous system $z_{k+1} = A_k z_k$ is uniformly asymptotically stable. This result follows immediately by combining the Anderson and Moore's result (Anderson e Moore, 1981, Th 4.3) and the fact that $\{X(k)\}$ satisfies a deterministic matrix recurrence; see (2.4). Dragan and Morozan in (Dragan e Morozan, 2006) and Kubrusly in (Kubrusly, 1988) generalized this result to the context of positive operators and infinite-dimensional systems, respectively, requiring in both papers $B_k = I$ for all $k \geq 0$ instead of stabilizability. Although the uniform exponential stability of the system $z_{k+1} = A_k z_k$ is satisfactorily ensured in these works, the boundedness of $\{X(k)\}$ is a decisive assumption on all of them.

We wish to generalize the stability study in the following way. If $\{Y(k)\}$ is bounded, then it can be readily verified that there exists the long-run average cost

$$J = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\|y_k\|^2], \quad (2.3)$$

where $\|\cdot\|$ represents the Euclidean norm. Conversely, suppose that there exists the long-run average cost (2.3) and a challenging question to answer is whether the matrix sequence $\{Y(k)\}$ is bounded or not. As a rule of thumb the answer is “no” since it is possible to create a subsequence of $\{Y(k)\}$ that diverges to infinity whereas (2.3) still holds; see Example 2.1. As we will see, even in this abnormal case some weak notion of stability may subsist, and this investigation is the main aim of this paper.

We stress that in our approach the sequence $\{X(k)\}$ is not necessarily bounded, hence, it is detached from previous results in the literature. Moreover, it relies on the existence of the average cost (2.3), which is considerable weaker than the uniform boundedness of $\{X(k)\}$. In this connection, it becomes directly important for this class of control criteria.

The main contributions regard two notions of stability for the stochastic system $\mathcal{S}$, from the existence of the long run average cost in (2.3). We derive conditions to ensure that the system $\mathcal{S}$ is

(S_1) asymptotically stable in the mean, i.e., $E[x_k] \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$.

Under a finite long-run average cost, controllability, and observability conditions, a noteworthy conclusion drawn in this paper is that the autonomous system obtained from $\mathcal{S}$, $z_{k+1} = A_k z_k$, is asymptotically stable. Since $z_k = E[x_k]$, for each $k \geq 0$, we get asymptotic stability in the mean from that. However, this weak stochastic stability sense does not imply the uniform stability on any m -th moment, see (Kozin, 1969, p.98). As illustrated in Example 2.1 for $m = 2$, the second moment matrix sequence $\{X(k)\}$ may have a subsequence diverging to infinity even if $z_k = E[x_k] \rightarrow 0$. In this situation, there is a subsequence $\{k_n\}$ such that $X_{k_n} \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$, implying that the covariance of $\{x_k\}$ may diverge to infinity on some subsequence, whereas $\{x_k\}$ reaches the origin asymptotically in the mean.

To prevent this behaviour, we reinforce some conditions to assure the

(S_2) uniform second moment stability.

One of the conditions employed to show (S_2) relies on periodic systems, the other reinforces the upper-bound in (2.3) with lower bound of similar nature, see Assumption 2.2.

The next contents are organized as follows. In Section 2.2.2 some calculus involving the second moment matrices of the state and output, as in (2.2), is developed, based on a matrix difference equation that characterize the state second moment. Also, the notions of controllability and observability for linear time-varying systems are quoted, and with (2.3) rephrased as Assumption 2.1, they are brought together to obtain some evaluations necessary to the proof of Theorem 2.1. In Section 2.2.3, notions of stability for linear time-varying autonomous system are quoted and the main results on the asymptotic stability in the mean and uniform second moment stability are proven in separate sections. A constructive example (Example 2.1) is presented to illustrate Theorem 2.2 and corollary, and in Section 2.2.4 final remarks appear.

2.2.2 Preliminaries

We denote respectively the real and natural numbers by $\mathbb{R}$ and $\mathbb{N}$. The normed linear space of all $n \times m$ real matrices is denoted by $\mathbb{R}^{n,m}$. The superscript $'$ indicates the transpose of a matrix. Let $\mathbb{S}_+^n$ be the closed convex cone $\{U \in \mathbb{R}^{n,n} : U = U' \geq 0\}$; $U \geq V$ signifies that $U - V \in \mathbb{S}_+^n$. Let $\text{tr}\{\cdot\}$ be the trace operator. If U is a matrix in $\mathbb{R}^{m,n}$, we let $\|U\| := \text{tr}\{U'U\}^{\frac{1}{2}}$ be the Euclidean (Frobenius) norm for matrices. With this notation, $U \in \mathbb{S}_+^n$ if and only if $\|U^{\frac{1}{2}}y\|^2 \geq 0$ for all $y \in \mathbb{R}^n$ (where $U^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{S}_+^n$ is such that $U^{\frac{1}{2}}U^{\frac{1}{2}} = U$). Note that if $U \in \mathbb{R}^{n,m}$ and $V \in \mathbb{R}^{n,p}$ are such that $UU' \geq VV'$, then $\|U\|^2 \geq \|V\|^2$. We say that a matrix sequence $\{U_k; k \geq 0\}$ is bounded if $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U_k\| < \infty$.

According to (Davis e Vinter, 1985; Anderson e Moore, 1979), the second moment matrices of the state x_k and the output y_k , represented respectively by $X(k)$ and $Y(k)$ in (2.2), satisfy the difference equation

$$X(k+1) = A_k X(k) A_k' + B_k B_k', \quad (2.4)$$

$$Y(k) = C_k X(k) C_k' + D_k D_k', \quad k \geq 0, \quad X(0) = x_0 x_0'. \quad (2.5)$$

Moreover, there holds $E[\|y_k\|^2] = \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2$ for each $k \geq 0$. Thus

$$\sum_{k=0}^N E[\|y_k\|^2] = \sum_{k=0}^N \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2, \quad \forall N \geq 0,$$

and the stochastic average cost (2.3) can be calculated by using the deterministic recurrence (2.4) and (2.5).

In association with the matrix sequence $\{A_k; k \geq 0\}$ in $\mathcal{S}$, we can define a family of discrete evolution operators, namely,

$$\Phi(k, s) = A_{k-1} A_{k-2} \cdots A_s, \quad \text{for each } k > s \geq 0, \quad (2.6)$$

with $\Phi(s, s) = I$. From (2.4), one has

$$X(k) = \Phi(k, s) X(s) \Phi(k, s)' + \sum_{j=s}^{k-1} \Phi(k, j+1) B_j B_j' \Phi(k, j+1)', \quad (2.7)$$

for each $0 \leq s \leq k$, with $X(s) \in \mathbb{S}_+^n$. We represent $X(0) \in \mathbb{S}_+^n$ without loss by $X(0) = B_{-1} B_{-1}'$, with $B_{-1} = X(0)^{1/2} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Thus, (2.7) with $s = 0$ reads

simply as

$$X(k) = \sum_{j=0}^k \Phi(k, j) B_{j-1} B'_{j-1} \Phi(k, j)', \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

In the following sections, some structural properties of (2.4) and (2.5) will be developed.

Controllability, observability and some related results for state correlation evolution

The uniform observability and controllability concepts for discrete time-varying linear systems were defined by Kalman (Kalman, 1960). Since then, these concepts have proven useful with regards to stability and control, e.g. see (Silverman e Anderson, 1968; Anderson e Moore, 1969; Benzaid, 1999; Halanay e Ionescu, 1994; Van Willigenburg e De Koning, 2008).

Definition 2.1 *The pair (A_k, B_k) is uniformly controllable (or simply controllable) if there exists $T_c \geq 1$ and a real number $\sigma > 0$ such that, for each $k \geq T_c$,*

$$\sum_{i=0}^{T_c-1} \Phi(k, k-i) B_{k-i-1} B'_{k-i-1} \Phi(k, k-i)' \geq \sigma I.$$

Definition 2.2 *The pair (A_k, C_k) is uniformly observable (or simply observable) if there exists $T_o \geq 1$ and a real number $\beta > 0$ such that, for each $k \geq 0$,*

$$\sum_{i=0}^{T_o-1} \Phi(k+i, k)' C'_{k+i} C_{k+i} \Phi(k+i, k) \geq \beta I.$$

Controllability and observability concepts allow us to develop some useful bounds.

Lemma 2.1 *If the pair (A_k, C_k) is observable, then there exist $T \geq 1$ and $\delta = \delta(T) > 0$ such that, for each $n \geq T-1$,*

$$\sum_{i=0}^n \|C_{k+i} \Phi(k+i, k) y\|^2 \geq \sum_{i=0}^{n-T+1} \delta \|\Phi(k+i, k) y\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

The proof of Lemma 2.1 is available in the Appendix.

The next result is the dual of Lemma 2.1 and the proof is omitted. See (Anderson e Moore, 1981; Halanay e Ionescu, 1994; Moore e Anderson, 1980) for further details on duality for time-varying linear systems.

Lemma 2.2 *If the pair (A_k, B_k) is controllable, then there exist $T \geq 1$ and $\rho = \rho(T) > 0$ such that, for each $k \geq T - 1$,*

$$\sum_{j=0}^k \|B'_{j-1} \Phi(k, j)' y\|^2 \geq \sum_{j=T-1}^k \rho \|\Phi(k, j)' y\|^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

The next lemmas state some bounds in preparation to the main result of this section.

Lemma 2.3 *Let $\{X(k)\}$ in $\mathbb{S}_+^n$ and $\{Y(k)\}$ in $\mathbb{S}_+^p$ be the sequences that satisfy (2.4) and (2.5), respectively.*

(i) *If the pair (A_k, C_k) is observable, then there exist $T \in \mathbb{N}$ and $\delta > 0$ such that*

$$\sum_{i=k}^{n+T} \|Y(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \sum_{i=k}^n \delta \|X(i)^{\frac{1}{2}}\|^2, \quad \forall n \geq k \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

(ii) *If the pair (A_k, B_k) is controllable, then there exist $T \in \mathbb{N}$ and $\rho > 0$ such that*

$$\|X(k)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \sum_{j=T}^k \rho \|\Phi(k, j)\|^2, \quad \forall k \geq T. \quad (2.11)$$

Proof: Part(i): From Lemma 2.1, there exist $T \in \mathbb{N}$ and $\delta > 0$ such that

$$\sum_{i=0}^{h+T} \Phi(k+i, k)' C'_{k+i} C_{k+i} \Phi(k+i, k) \geq \sum_{i=0}^h \delta \Phi(k+i, k)' \Phi(k+i, k), \quad \forall h, k \in \mathbb{N}.$$

Left and right multiplying the above inequality respectively by $B'_{s-1} \phi(k, s)'$ and $\phi(k, s) B_{s-1}$ for $k \geq s$, and then applying the Euclidean norm to both sides of the resulting inequality, we obtain that

$$\sum_{i=0}^{h+T} \|C_{k+i} \Phi(k+i, s) B_{s-1}\|^2 \geq \sum_{i=0}^h \delta \|\Phi(k+i, s) B_{s-1}\|^2, \quad \forall h \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

holds for every $k \geq s$ and every $s \geq 0$.

On the other hand, it follows from (2.5) that, for each $i \in \mathbb{N}$, $Y(i) \geq C_i X(i) C_i''$, which together with (2.8) implies that

$$\|Y(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \|C_i X(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 = \sum_{j=0}^i \|C_i \Phi(i, j) B_{j-1}\|^2, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

To simplify the notation, let us denote $a_{i,j} = \|C_i \Phi(i, j) B_{j-1}\|^2$. It then follows from (2.13) that, for each $h \geq 0$ and all $k_0 \geq 0$,

$$\sum_{i=k_0}^{k_0+h+T} \|Y(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \sum_{i=k_0}^{k_0+h+T} \sum_{j=0}^i a_{i,j}. \quad (2.14)$$

Consider now the elements of the right-hand side of (2.14) arranged in rows and columns, as in the following array:

$$\begin{array}{cccccc} a_{k_0,0} & \cdots & a_{k_0,k_0} & & & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \\ a_{k_0+h,0} & \cdots & a_{k_0+h,k_0} & \cdots & a_{k_0+h,k_0+h} & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \\ a_{k_0+h+T,0} & \cdots & a_{k_0+h+T,k_0} & \cdots & a_{k_0+h+T,k_0+h} & \cdots a_{k_0+h+T,k_0+h+T} \end{array}$$

It follows easily that the sum of all the elements in this array is equal to

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+h+T} \sum_{i=0}^{k_0+h+T-s} a_{i+s,s} + \sum_{s=0}^{k_0-1} \sum_{i=0}^{h+T} a_{i+k_0,s},$$

which in turn, by (2.12), is greater or equal to

$$\sum_{s=k_0}^{k_0+h} \sum_{i=0}^{k_0+h-s} \delta \|\Phi(i+s, s) B_{s-1}\|^2 + \sum_{s=0}^{k_0-1} \sum_{i=0}^h \delta \|\Phi(i+s, s) B_{s-1}\|^2. \quad (2.15)$$

Hence, the left-hand side of (2.14) is bounded below by (2.15). However, (2.15) is identical to

$$\sum_{i=k_0}^{k_0+h} \sum_{j=0}^i \delta \|\Phi(i, j) B_{j-1}\|^2 = \sum_{i=k_0}^{k_0+h} \delta \|X(i)^{\frac{1}{2}}\|^2,$$

and as a result, the statement (i) is proven.

Part (ii): Lemma 2.2 states that there exist $T \in \mathbb{N}$ and $\rho > 0$ such that (2.9) is satisfied; together with (2.8) the result follows. $\square$

The last auxiliary result provides an important relation between the norms of $Y(\cdot)$ and the evolution operator $\Phi(\cdot)$.

Lemma 2.4 *Let $\{X(k)\}$ in $\mathbb{S}_+^r$ and $\{Y(k)\}$ in $\mathbb{S}_+^p$ be the sequences that satisfy (2.4) and (2.5), respectively. If the pair (A_k, B_k) is controllable and (A_k, C_k) is observable, then there exist $T \in \mathbb{N}$ and $\alpha = \alpha(T) > 0$ such that, for each $n \geq k$ and all $k \geq T$,*

$$\sum_{i=k}^{n+T} \|Y(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \sum_{i=k}^n \sum_{j=T}^i \alpha \|\Phi(i, j)\|^2. \quad (2.16)$$

Proof: It follows from Lemma 2.3 (i) that there exist $T_0 \in \mathbb{N}$ and $\delta > 0$ such that (2.10) holds. Similarly, it follows from Lemma 2.3 (ii) that there exist $T_1 \in \mathbb{N}$ and $\rho > 0$ such that (2.11) holds. Set $T = \max\{T_0, T_1\}$. We then get from (2.10) and (2.11) that

$$\sum_{i=k}^{n+T} \|Y(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \sum_{i=k}^n \delta \|X(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \sum_{i=k}^n \sum_{j=T}^i \delta \rho \|\Phi(i, j)\|^2, \quad \forall n \geq k \geq T,$$

showing the result. $\square$

The next assumption states the main assumption in this paper (2.3), with the elements in (2.4) and (2.5). Beyond representation, the assumption is equivalent to the existence of the long-run average cost (2.3), see, for instance, (Goldberg, 1964, Th. 2.9L, p.50).

Assumption 2.1 (MAIN ASSUMPTION) *There exists $J > 0$ such that, for each $N \geq 1$,*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2 \leq N J,$$

where the sequence $\{Y(k)\}$ in $\mathbb{S}_+^p$ satisfies (2.5).

Remark 2.1 *It is straightforward from Assumption 2.1 and the difference equations (2.4) and (2.5) that there exists $J > 0$ such that*

$$NJ \geq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^k \|C_k \Phi(k, j) B_{j-1}\|^2, \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Note that if each element in the sum in the right-hand side of (2.17) is greater than a constant, say $c > 0$, then one would have $NJ \geq cN(N+1)/2$ for each $N \in \mathbb{N}$, which is absurd. This indicates that some elements in the right-hand side of (2.17) should vanish. Indeed, we show that with the previous assumptions, this faint idea turns into palpable stability notions.

Now we are able to present the main result of this section.

Theorem 2.1 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. If Assumption 2.1 holds, then there exist a subsequence $\{n_i\}$ of $\mathbb{N}$ and a real number $L > 0$, such that*

$$\sum_{k=0}^N \|\Phi(k + n_i, n_i)\|^2 \leq L, \quad \forall N, i \in \mathbb{N}. \quad (2.18)$$

Proof: The proof follows by contradiction. The logical negation of the assertion in theorem is as follows. For each $L > 0$, there exist $N_0 \in \mathbb{N}$ and $i_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\sum_{k=0}^{N_0} \|\Phi(k + i, i)\|^2 > L. \quad (2.19)$$

for each $i \geq i_0$. After some algebraic manipulations in the inequality of Lemma 2.4, one can show that there exist $T \in \mathbb{N}$ and $\alpha > 0$ so that

$$\sum_{k=0}^{2(N+T)+m} \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \sum_{i=m}^{N+m} \sum_{n=0}^N \alpha \|\Phi(n + i + T, i + T)\|^2, \quad \forall N, m \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Let $J > 0$ be the number given by Assumption 2.1. Now choose $L > 5J/\alpha$. Equation (2.19) then yields

$$\sum_{k=0}^N \|\Phi(k + i, i)\|^2 > \frac{5J}{\alpha}, \quad \forall N \geq N_0, \quad \forall i \geq i_0. \quad (2.21)$$

Set $\tilde{N} = \max\{N_0, i_0, T\}$. We then get from Assumption 2.1, (2.20) and (2.21) that

$$\begin{aligned} (5\tilde{N} + 1)J &\geq (2(\tilde{N} + T) + i_0 + 1)J \geq \sum_{k=0}^{2(\tilde{N}+T)+i_0} \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2 \\ &\geq \sum_{i=i_0}^{\tilde{N}+i_0} \sum_{n=0}^{\tilde{N}} \alpha \|\Phi(n + i + T, i + T)\|^2 > \sum_{i=i_0}^{\tilde{N}+i_0} \alpha \frac{5J}{\alpha} = 5(\tilde{N} + 1)J, \end{aligned}$$

which is absurd. This argument completes the proof. $\square$

2.2.3 Stability Conditions

Let us consider the following concept of stochastic stability.

Definition 2.3 *The stochastic system $\mathcal{S}$ is called asymptotically stable in the mean if for any $k_0 \geq 0$, there exists a positive number $\delta(k_0)$ such that if $\|E[x_0]\| < \delta$, then for any $\epsilon > 0$, there exists a natural number $T(\epsilon, \delta, k_0)$ such that $\|E[x_k]\| < \epsilon$ for all $k > k_0 + T$.*

Definition 2.4 *(Kozin, 1969, p.97-98). The stochastic system $\mathcal{S}$ is called uniformly second moment stable if there exists a constant $c = c(x_0) > 0$ such that $E[\|x_k\|^2] \leq c$, for each $k \geq 0$.*

At this point, we also study the stability of the autonomous system

$$z_{k+1} = A_k z_k, \quad (2.22)$$

with initial condition $z_{k_0} = z_0 \in \mathbb{R}^n$. We recall some stability definitions (Willems, 1970).

Definition 2.5 *The null solution of the autonomous system (2.22) is called:*

- (i) *asymptotically stable, if for any $k_0 \geq 0$, there exists a positive number $\delta(k_0)$ such that if $\|z_0\| < \delta$, then for any $\epsilon > 0$, there exists a natural number $T(\epsilon, \delta, k_0)$ such that $\|z_k\| < \epsilon$ for all $k > k_0 + T$.*
- (ii) *uniformly asymptotically stable, if the numbers δ and T , introduced in (i) can be taken independently of k_0 .*

Remark 2.2 *Willems in (Willems, 1970, Ch.4) shows that the system (2.22) is asymptotically stable if $\|\Phi(k, k_0)\| \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Uniform asymptotic stability is equivalent to the existence of $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ satisfying $\|\Phi(k, k_0)\| \leq c_1 \exp[-c_2(k - k_0)]$ for all $k \geq k_0$ and all $k_0 \geq 0$. Also, uniform asymptotic stability is equivalent to the existence of a constant $c_0 > 0$ such that $\sum_{j=0}^k \|\Phi(k, j)\|^2 \leq c_0$, $\forall k \geq 0$, see (Kubrusly, 1988, Th.1), (Halanay e Ionescu, 1994, Th.5, p.32).*

Remark 2.3 *Definition 2.3 purposefully parallels the definition of asymptotic stability for the autonomous system. Note from the zero mean assumption on $\{w_k\}$ that*

$$z_{k+1} = E[x_{k+1}] = E[A_k x_k + B_k w_k] = A_k E[x_k] = A_k z_k, \quad \forall k \geq 0,$$

holds with $z_0 = x_0$. From Remark 2.2, we get that system $\mathcal{S}$ is asymptotically stable in the mean if and only if $E[x_k] \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ for any $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

The next theorem provides the basis to stability for the system $\mathcal{S}$.

Theorem 2.2 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. If Assumption 2.1 holds, and if the matrix sequence $\{A_k\}$ is bounded, then the following holds:*

- (i) *For each $k \geq 0$ and each $\ell \geq 0$, there exists $c > 0$ (which may depend on k) such that*

$$\|\Phi(k + \ell, k)\|^2 < c. \quad (2.23)$$

- (ii) *There exist a subsequence $\{n_i\}$ of $\mathbb{N}$ and a real number $L > 0$ (which does not depend on $\{n_i\}$) such that*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\Phi(k + n_i, \ell)\|^2 \leq L, \quad \forall \ell = 0, \dots, n_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.24)$$

Proof: The proof of (i) follows by contradiction. The logical negation of (i) is as follows:

$$(\forall c > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\exists \ell \in \mathbb{N})$$

$$\text{such that } \|A_{k_0+\ell-1} \cdots A_{k_0}\| > c.$$

Now, for $n > 1$ take $c = n$. Then there exist $k_0 \in \mathbb{N}$ and $\ell \in \mathbb{N}$ such that

$$\|A_{k_0+\ell-1} \cdots A_{k_0}\| > n. \quad (2.25)$$

The reason for setting $c = n$ is that this choice forces ℓ to go to infinity in case n goes to infinity. Now we prove this fact. Set $\kappa = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_k\|$, and define the number

$$a_n = \|A_{k_0+\ell-1} \cdots A_{k_0}\|^{\frac{1}{\ell}}. \quad (2.26)$$

It follows easily from (2.25) that $\kappa^\ell > a_n^\ell > n > 1$, which is equivalent to

$$\kappa > a_n > n^{\frac{1}{\ell}} > 1. \quad (2.27)$$

Note that a_n is well defined by (2.27). Now the choice $c = n$ will be helpful. If n becomes larger, then also ℓ is forced to be large in order to satisfy (2.27). It follows that $\ell \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ (otherwise, if $\ell \nrightarrow \infty$, then $n^{\frac{1}{\ell}} \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ but this contradicts (2.27)). Hence, for any sequence $\{\ell_n\}$ in $\mathbb{N}$ such that $\ell_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$ we have from (2.26) and (2.27) that

$$\|A_{k_0+\ell_n-1} \cdots A_{k_0}\|^{\frac{1}{\ell_n}} > n^{\frac{1}{\ell_n}} > 1,$$

and therefore

$$\|A_{k_0+\ell_n-1} \cdots A_{k_0}\| \nrightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

On the other hand, it follows from Theorem 2.1 that there exist a subsequence $\{n_i\}$ of $\mathbb{N}$ and a real number $L > 0$ such that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_{k+n_i} \cdots A_{n_i}\| \leq L, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.29)$$

In particular, there exists a sufficiently large $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ so that $k_0 < \tilde{n}$ and

$$L \geq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_{k+\tilde{n}} \cdots A_{\tilde{n}}\|.$$

Thus, multiplying the above inequality by $\kappa^{\tilde{n}-k_0}$ we have

$$\begin{aligned} \infty > L\kappa^{\tilde{n}-k_0} &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^{\tilde{n}-k_0} \|A_{k+\tilde{n}} \cdots A_{\tilde{n}}\| \\ &> \sum_{k=0}^{\infty} \|A_{k+\tilde{n}} \cdots A_{\tilde{n}}\| \|A_{\tilde{n}-1}\| \cdots \|A_{k_0}\| \geq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_{k+\tilde{n}} \cdots A_{k_0}\| \end{aligned}$$

which implies that

$$\|A_{k+\tilde{n}} \cdots A_{k_0}\| \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty,$$

but this contradicts (2.28), which is absurd. This argument proves (i).

For the proof of (ii), let $\{n_i\}$ be the subsequence of $\mathbb{N}$ that satisfies (2.29). By part (i),

$$\|A_{n_i-1} \cdots A_j\| < c, \quad \forall j = 0, \dots, n_i - 1, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.30)$$

Thus (2.29) and (2.30) yields

$$\begin{aligned} \infty > Lc &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_{k+n_i} \cdots A_{n_i}\| \|A_{n_i-1} \cdots A_j\| \geq \sum_{k=0}^{\infty} \|A_{k+n_i} \cdots A_j\|, \\ &\quad \forall j = 0, \dots, n_i - 1, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

which shows the statement (ii). $\square$

At this point the main stability result is presented. In view of Remark 2.2, the asymptotic stability of the autonomous system (2.22) follows from Theorem 2.2 (ii). Combining this and Remark 2.3 we obtain the following corollary.

Corollary 2.1 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. If Assumption 2.1 holds and the matrix sequence $\{A_k\}$ is bounded, then the stochastic system $\mathcal{S}$ is asymptotically stable in the mean.*

Next, we present an example for which a subsequence of $\{Y(k)\}$ diverges to infinity and the average cost associated to $\{Y(k)\}$ remains bounded, thus satisfying Assumption 2.1. From the above corollary and Remark 2.3, we get that the autonomous system (2.22) is asymptotically stable and so is, in the mean, the system $\mathcal{S}$.

Example 2.1 *Let us consider the following difference scalar equation,*

$$X(k+1) = a(k)X(k) + 1, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad X(0) = 1, \quad (2.31)$$

where $\{a(k)\}$ is a sequence of zeros and ones, based on the following rule. Set $k_0 = 0$, and for each $i = 1, 2, \dots$, define recursively the sequence $\{k_i\}$ as

$$k_i = \begin{cases} k_{i-1} + i(i+2)/8, & \text{if } i \text{ is even;} \\ k_{i-1} + (i+1)/2, & \text{if } i \text{ is odd.} \end{cases} \quad (2.32)$$

The sequence $\{a(k)\}$ is defined by

$$a(k) = \begin{cases} 0, & \text{for } k_i \leq k < k_{i+1} \text{ and } i \text{ is odd;} \\ 1, & \text{for } k_i \leq k < k_{i+1} \text{ and } i \text{ is even.} \end{cases} \quad (2.33)$$

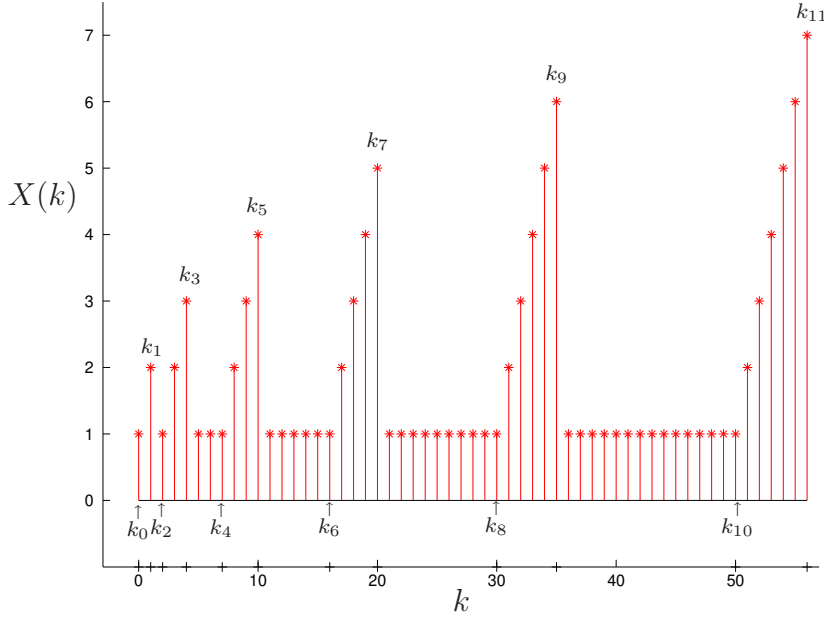


Figure 2.2: The trajectory of the system in Example 2.1.

The evolution $X(k)$ with $\{a(k)\}$ as above, is shown in Fig. 2.2. The sequence $\{k_i\}$ sets the time interval for which the system $X(k)$ is monotonically increasing or equal to one, namely,

$$X(k) = \begin{cases} 1, & \text{for } k_i < k \leq k_{i+1} \text{ and } i \text{ is odd;} \\ (k - k_i) + 1, & \text{for } k_i < k \leq k_{i+1} \text{ and } i \text{ is even.} \end{cases}$$

In particular, if i is odd then $X(k_i) = (i+3)/2$ and the corresponding subsequence $X(k_{i_\ell}) \rightarrow \infty$ as $\ell \rightarrow \infty$. Moreover, one can verify that

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N X(k) \leq 2, \quad \forall N \geq 0.$$

Hence, $\{X(k)\}$ has both a finite average cost and a subsequence diverging to infinity. If we set in (2.4)-(2.5), $A_k \equiv a(k)$, $B_k \equiv C_k \equiv 1$, $D_k \equiv 0$, and $X(0) = 1$, we show that the construction of the example applies.

Uniform second moment stability

As illustrated in Example 2.1, system $\mathcal{S}$ may present second moment matrix sequence $\{X(k)\}$ with a subsequence diverging to infinity, even if Assumption

2.1 remains valid. This behavior can be avoided when the autonomous system $z_{k+1} = A_k z_k$ is uniformly asymptotically stable.

Lemma 2.5 *If (2.22) is uniformly asymptotically stable and $\{B_k\}$ is bounded, then $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable. Conversely, if $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable and the pair (A_k, B_k) is controllable, then (2.22) is uniformly asymptotically stable.*

Proof: ($\Rightarrow$). From assumption, there exist $c_1, c_2 > 0$ such that (see Remark 2.2 and (2.8))

$$\|X(k)^{\frac{1}{2}}\|^2 \leq bc_1^2 \sum_{j=0}^k \exp[-2c_2(k-j)] \leq bc_1^2 / (1 - \exp[-2c_2]), \quad \forall k \geq 0,$$

with $b := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|B_k\|^2$. This and the identity $E[\|x_k\|^2] = \|X(k)^{1/2}\|^2$, $\forall k \geq 0$, assure the result.

($\Leftarrow$). It follows from assumption and Lemma 2.3 (ii) that there exists a constant $c_0 > 0$ such that $\sum_{j=0}^k \|\Phi(k, j)\|^2 \leq c_0$, $\forall k \geq 0$. This property is equivalent to the uniform asymptotic stability of (2.22), see Remark 2.2. $\square$

One advantage of the present approach is that it allows us to reinforce some conditions to assure uniform asymptotic stability of the system (2.22). The first condition requires the periodicity of $\{A_k\}$, and the second strengthens Assumption 2.1.

A matrix sequence $\{A_k\}$ is periodic if there is a number $p \in \mathbb{N}$ such that $A_{k+p} = A_k$ for each $k \in \mathbb{N}$ and $A_{k+\ell} \neq A_k$ for each $\ell < p$. In (Willems, 1970, Th.5.2, p.111) it is demonstrated that if $\{A_k\}$ is periodic and if (2.22) is asymptotically stable, then it is uniformly asymptotically stable. This result, Corollary 2.1, Remark 2.3 and Lemma 2.5 lead to the following conclusion.

Corollary 2.2 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. Suppose that Assumption 2.1 holds, that $\{A_k\}$ is periodic, and that $\{B_k\}$ is bounded. Then the system $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable.*

The following assumption reinforces Assumption 2.1, by combining the upper bound with a similar lower bound.

Assumption 2.2 *There exist $J > 0$ and $\alpha > 0$ such that*

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2 - NJ \right| \leq \alpha, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Theorem 2.3 *Let the pair (A_k, C_k) be observable and Assumption 2.2 holds. Then,*

(i) *the system $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable.*

(ii) *(2.22) is uniformly asymptotically stable, if, in addition, the pair (A_k, B_k) is controllable.*

Proof: Set $c(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2$ for each $N \in \mathbb{N}$. From Assumption 2.2, $c(N+1) \leq (N+1)J + \alpha$ and $c(N) \geq NJ - \alpha$ for each $N \geq 0$. Thus $\|Y(N)^{\frac{1}{2}}\|^2 = c(N+1) - c(N) \leq J + 2\alpha$ for each $N \in \mathbb{N}$, so that $\{\|Y(N)^{\frac{1}{2}}\|^2\}$ is bounded by $J + 2\alpha$. From Lemma 2.3 (i), there exist $T \in \mathbb{N}$ and $\delta = \delta(T) > 0$ such that $(T+1)(J+2\alpha) \geq \sum_{\ell=k}^{k+T} \|Y(\ell)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \delta \|X(k)^{\frac{1}{2}}\|^2$, $\forall k \geq 0$, which shows part (i) since $E[\|x_k\|^2] = \|X(k)^{\frac{1}{2}}\|^2$, $\forall k \geq 0$. Part (ii) follows from Lemma 2.5. $\square$

2.2.4 Concluding remarks

This paper shows that from the starting point of the existence of the long-run average cost (2.3) for the discrete-time, time-varying stochastic linear system $\mathcal{S}$, some stability notions can be obtained. For this end the null solution of the corresponding autonomous system is brought to bear, together with the notions of uniform controllability and observability.

In this setup, asymptotic stability in the mean for $\mathcal{S}$ is guaranteed, see Corollary 2.1. This comprises the situation in which the second moment sequence possesses a subsequence diverging to infinity, as illustrated by the Example 2.1. The results available in the literature assume a uniform bound for the second moment sequence, hence, they do not apply in those cases. Here, one relies on the weaker assumption of the existence of the long-run average cost criteria.

The uniform second moment stability for $\mathcal{S}$ is obtained with the reinforcement of the initial setup: when the sequence $\{A_k\}$ is periodic, or when the one-sided

bound in Assumption 2.1 is strengthened to the two-side bound of Assumption 2.2. For the auxiliary autonomous system, the first setup provides asymptotic stability and the second yields uniform asymptotic stability; see respectively, Remark 2.3 in combination with Corollary 2.1, and Lemma 2.5.

Appendix: Proof of Lemma 2.1

Proof:(Proof of Lemma 2.1). Notice that for $n = T - 1$, the result of the lemma holds straightforwardly from the observability definition, by setting $T = T_o$ and $\delta = \beta$. For $n > T - 1$, we develop a more elaborated argument to show the result.

First, from the observability definition, there exist $T = T_o \in \mathbb{N}$ and $\beta > 0$ such that

$$\sum_{\ell=rT+i}^{(r+1)T+i-1} \|C_{k+\ell}\Phi(k+\ell, k+rT+i)y\|^2 \geq \beta\|y\|^2, \quad \forall r, i, k \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.34)$$

The above inequality shall be of use in what follows.

Choose $N \in \mathbb{N}$. Two cases then arises.

Case 1. ($N \geq T - 1$) For each $i = 0, \dots, T - 1$, let us define

$$r^*(i) = \max\{r \in \mathbb{N} : i + rT \leq N\}. \quad (2.35)$$

From this definition, the following identity is obtained:

$$\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{r=0}^{r^*(i)} \|\Phi(k+rT+i, k)y\|^2 = \sum_{\ell=0}^N \|\Phi(k+\ell, k)y\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.36)$$

In addition, by (2.35), the following inequality is valid for all $k \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^n$, and for each $i = 0, \dots, T - 1$:

$$\sum_{\ell=0}^{N+T-1} \|C_{k+\ell}\Phi(k+\ell, k)y\|^2 \geq \sum_{r=0}^{r^*(i)} \sum_{\ell=rT+i}^{(r+1)T+i-1} \|C_{k+\ell}\Phi(k+\ell, k)y\|^2, \quad (2.37)$$

But $\|C_{k+\ell}\Phi(k+\ell, k)y\|^2 = \|C_{k+\ell}\Phi(k+\ell, k+rT+i)\Phi(k+rT+i, k)y\|^2$, hence from (2.34), the right-hand side of (2.37) is bounded below by

$$\sum_{r=0}^{r^*(i)} \beta \|\Phi(k+rT+i, k)y\|^2.$$

Now, summing up on $i = 0, 1, \dots, T - 1$, one then obtains

$$\begin{aligned} T \cdot \sum_{\ell=0}^{N+T-1} \|C_{k+\ell}\Phi(k+\ell, k)y\|^2 &\geq \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{r=0}^{r^*(i)} \beta \|\Phi(k+rT+i, k)y\|^2 \\ &= \sum_{\ell=0}^N \beta \|\Phi(k+\ell, k)y\|^2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

where the last identity follows from (2.36). Take $\delta = \beta/T$, and the result then follows from (2.38) for $N \geq T - 1$.

Case 2. ($0 \leq N < T - 1$) In this case, define $r^*(i) = 0$ for each $i = 0, \dots, N$, and the result can be easily shown by repeating the arguments used in *Case 1* for $i = 0, \dots, N$ only. $\square$

2.3 Artigo: Second moment stability of time-varying stochastic systems with average cost

Abstract

Conditions for uniform second moment stability of time-varying stochastic systems with output averaged in norm are given. Under the assumption of finiteness of the long-run average cost, the desired stochastic stability of the discrete-time linear system is obtained provided that additional conditions on the parameter matrix or on the quadratic cost are satisfied.

2.3.1 Introduction

Consider a time-varying discrete-time stochastic linear system defined in a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_k, P)$ as follows.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ y_k = C_k x_k + D_k w_k, \quad k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

where x_k , w_k , and y_k , $k = 0, 1, \dots$ are processes taking values respectively in $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, and $\mathbb{R}^p$, which represent the system state, additive noisy input, and output, in this order. The noisy input $\{w_k\}$ forms an iid process with zero mean and covariance matrix equal to the identity for each $k \geq 0$. The matrices A_k , B_k ,

C_k and D_k are given, and they have dimensions $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ and $p \times m$, respectively. Associated with the system $\mathcal{S}$, let us consider the long-run average cost

$$J = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\|y_k\|^2], \quad (2.39)$$

where $\mathbb{E}[\cdot]$ denotes the mathematical expectation operator and $\|\cdot\|$ represents the Euclidean norm.

Let us consider the following concept of stochastic stability for system $\mathcal{S}$.

Definition 2.6 (*Kozin, 1969, p.97-98*). *The stochastic system $\mathcal{S}$ is called uniformly second moment stable if there exists a constant $c = c(x_0) > 0$ such that $\mathbb{E}[\|x_k\|^2] \leq c$, for each $k \geq 0$.*

A challenging question formulated in (Vargas e do Val, n.d.a)[†] is whether the average cost J in (2.39) being finite implies that $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable. According to (Vargas e do Val, n.d.a), the answer is “no” because the sequence $\{\mathbb{E}[\|x_k\|^2]\}$ may have a subsequence that diverges to infinity even though the corresponding average cost in (2.39) is finite. Thus the uniform second moment stability, an important concept of stability for $\mathcal{S}$, is obtained only if additional conditions are satisfied.

The main contribution of this paper is to provide conditions to guarantee the uniform second moment stability of $\mathcal{S}$ whenever the average cost in (2.39) exists. This paper can be seen as a continuation and extension of the work initiated in (Vargas e do Val, n.d.a), in particular because we advance on understanding how the second moment stability arises within the setting of time-varying stochastic systems with output averaged in norm. Three different set of conditions are derived, namely, almost periodicity of $\{A_k\}$ (see Definition 2.10), convergence of $\{A_k\}$, and subsequences of the sum in (2.39) (see Assumption 2.3). These set of conditions are not comparable, although they lead to the same conclusion. As a matter of fact, we employ these conditions to show that the autonomous system $z_{k+1} = A_k z_k$ is uniformly asymptotically stable, and from this we get the uniform second moment stability of $\mathcal{S}$, see Proposition 2.1.

[†]Artigo da Seção 2.2.

The next contents are organized as follows. Notions of controllability, observability, and stability for linear time-varying systems are quoted in Section 2.3.2. This section also presents some auxiliary results. The main results on uniform second moment stability and constructive examples, which illustrate the importance of the derived conditions, are also in this section. In Section 2.3.3 final remarks appear.

2.3.2 Notation, concepts and main results

We denote respectively the real and natural numbers by $\mathbb{R}$ and $\mathbb{N}$. The normed linear space of all $n \times m$ real matrices is denoted by $\mathbb{R}^{n,m}$. The superscript $'$ indicates the transpose of a matrix. Let $\mathbb{S}_+^n$ be the closed convex cone $\{U \in \mathbb{R}^{n,n} : U = U' \geq 0\}$; $U \geq V$ signifies that $U - V \in \mathbb{S}_+^n$. Let $\text{tr}\{\cdot\}$ be the trace operator. If U is a matrix in $\mathbb{R}^{m,n}$, we let $\|U\| := \text{tr}\{U'U\}^{\frac{1}{2}}$ be the Euclidean (Frobenius) norm for matrices. We say that a matrix sequence $\{U_k; k \geq 0\}$ is bounded if $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U_k\| < \infty$.

In association with the matrix sequence $\{A_k; k \geq 0\}$ in $\mathcal{S}$, we can define a family of discrete evolution operators, namely,

$$\Phi(k, i) = A_{k-1}A_{k-2} \cdots A_i, \quad \text{for each } k > i \geq 0, \quad (2.40)$$

with $\Phi(k, k)$ being the identity matrix for each $k \geq 0$. We now recall the concepts of uniform controllability and observability, e.g., see (Moore e Anderson, 1980; Van Willigenburg e De Koning, 2008).

Definition 2.7 *The pair (A_k, B_k) is uniformly controllable (or simply controllable) if there exists $\tau_c \geq 1$ and a real number $\sigma_c > 0$ such that*

$$\sum_{i=0}^{\tau_c-1} \Phi(k, k-i)B_{k-i-1}B'_{k-i-1}\Phi(k, k-i)' \geq \sigma_c I, \quad \forall k \geq \tau_c.$$

Definition 2.8 *The pair (A_k, C_k) is uniformly observable (or simply observable) if there exists $\tau_o \geq 1$ and a real number $\sigma_o > 0$ such that*

$$\sum_{i=0}^{\tau_o-1} \Phi(k+i, k)'C'_{k+i}C_{k+i}\Phi(k+i, k) \geq \sigma_o I, \quad \forall k \geq 0.$$

Now, we introduce some useful stability concepts for the autonomous system

$$z_{k+1} = A_k z_k, \quad \forall k \geq k_0, \quad (2.41)$$

due to any initial state $z_{k_0} = z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2.9 *The null solution of the autonomous system (2.41) is called:*

- (i) *uniformly stable, if for any given $\epsilon > 0$, there exists $\delta(\epsilon)$ such that if $\|x_0\| < \delta$, then $\|x(k)\| < \epsilon$ holds for all $k \geq k_0$ and each $k_0 \geq 0$.*
- (ii) *asymptotically stable, if for any $k_0 \geq 0$, there exists a positive number $\delta(k_0)$ such that if $\|x_0\| < \delta$, then for any $\epsilon > 0$, there exists a natural number $T(\epsilon, \delta, k_0)$ such that $\|x(k)\| < \epsilon$ for all $k > k_0 + T$.*
- (iii) *uniformly asymptotically stable, if the numbers δ and T , introduced in the item (ii) can be taken independently of k_0 .*

Remark 2.4 *Willems in (Willems, 1970, Ch.4) shows that uniform stability of (2.41) is equivalent to the existence of a constant $c > 0$ such that $\|\Phi(k, i)\| \leq c$ for all $k \geq i$ and all $i \geq 0$. Asymptotic stability follows if $\|\Phi(k, k_0)\| \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. Uniform asymptotic stability is equivalent to the existence of $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ satisfying $\|\Phi(k, i)\| \leq c_1 \exp[-c_2(k - i)]$ for all $k \geq i$ and all $i \geq 0$.*

The following result connects the uniform asymptotic stability of (2.41) with the uniform second moment stability of $\mathcal{S}$.

Proposition 2.1 *(Vargas e do Val, n.d.a, Lem.3.2). If (2.41) is uniformly asymptotically stable and $\{B_k\}$ is bounded, then $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable. Conversely, if $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable and the pair (A_k, B_k) is controllable, then (2.41) is uniformly asymptotically stable.*

The next result states that, under controllability and observability conditions, the existence of an average cost assures asymptotic stability for (2.41).

Proposition 2.2 *(Vargas e do Val, n.d.a, Cor.3.1). Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. If the average cost in (2.39) exists and the matrix sequence $\{A_k\}$ is bounded, then the system (2.41) is asymptotically stable.*

The investigation in the remaining part of this paper will be concentrated on conditions to assure the uniform second moment stability for $\mathcal{S}$, the main concept of stochastic stability pursued in this paper.

Almost periodic conditions

The term *periodic* is used to denote the sequence $\{A_k\}$ if there is a number $p \in \mathbb{N}$ such that $A_{k+p} = A_k$ for all $k \in \mathbb{N}$ and $A_{k+\ell} \neq A_k$ for all $\ell < p$. It is known that if $\{A_k\}$ is periodic and (2.41) is asymptotically stable, then (2.41) is uniformly asymptotically stable, see (Willems, 1970, Th.5.2, p.111). This fact and Proposition 2.1 yield the conclusion that if the conditions of Proposition 2.2 hold and $\{B_k\}$ is bounded, then the system $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable provided that $\{A_k\}$ is periodic. We are now interested in knowing whether this result remains valid if we replace the “periodicity” by “almost periodicity”, a weaker condition to be defined below. We can anticipate that this question has a negative answer, see Remark 2.6 for a discussion. Thus, as we shall see in the sequel, the almost periodicity must be accompanied with additional assumptions to succeed in guaranteeing the uniform asymptotic stability of $z_{k+1} = A_k z_k$.

Almost periodic functions has been studied over decades, specially for its application in statistics and celestial mechanics, see (Corduneanu, 1961; Fink, 1972; Conley e Miller, 1965; Fink, 1974) and the references therein. See (Diagana et al., 2007) for a recent study of almost periodic systems with average cost applied for population models, and (Colonius e Wichtrey, 2009) for a theoretical investigation on controllability of nonlinear control systems.

Let us recall the Bohr’s definition of almost periodic sequences.

Definition 2.10 (*Corduneanu, 1961, p.45*), (*Halany e Ionescu, 1994, p.205*). *Let X be a Banach space. An X -valued sequence $\{f(k)\}$ is called almost periodic, if to any $\varepsilon > 0$ there corresponds a natural number $N = N(\varepsilon)$, such that among any N consecutive integers there exists a natural number p with the property*

$$\|f(k+p) - f(k)\| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.42)$$

The number p is called an ε -translation number of $f(k)$.

Remark 2.5 Let $\{A_k\}$ be an almost periodic matrix sequence and set $\varepsilon > 0$. By definition, there exists a natural number $N = N(\varepsilon)$, such that in each interval $(iN, \dots, (i+1)N]$ there occurs an ε -translation number p_i . Namely, there exists a subsequence $\{p_i\}$ from $\mathbb{N}$ such that

$$iN < p_i \leq (i+1)N \quad \text{and} \quad \|A_{k+p_i} - A_k\| < \varepsilon \quad \forall i, k \in \mathbb{N}.$$

It is well-known that each almost periodic sequence is a bounded one, c.f. (Halanay e Ionescu, 1994, Prop. 2, Appendix B). This implies that the number $\alpha = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_k\|$ is finite whenever $\{A_k\}$ is almost periodic, and this fact combined with Remark 2.5 will be useful to prove the next result.

Lemma 2.6 Suppose that the matrix sequence $\{A_k\}$ is almost periodic. Then, for each $\varepsilon > 0$, there exist $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ and a subsequence $\{p_i\}$ of $\mathbb{N}$ such that $iN_\varepsilon < p_i \leq (i+1)N_\varepsilon$ for each $i \geq 0$. Moreover,

$$\|\Phi(n + p_i, k + p_i) - \Phi(n, k)\| < (n - k)\alpha^{(n-k-1)}\varepsilon, \quad \forall n > k \geq 0.$$

with $\alpha := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_k\|$ being a finite number.

Proof: Take $\varepsilon > 0$ and $k \geq 0$ arbitrary. The proof follows by induction on n . For $n = k + 1$ the result follows immediately from Remark 2.5. Suppose now that the result holds for $n = m > k + 1$. Using the identity

$$\begin{aligned} & \Phi(m + 1 + p_i, k + p_i) - \Phi(m + 1, k) \\ &= (A_{m+p_i} - A_m)\Phi(m + p_i, k + p_i) + A_m(\Phi(m + p_i, k + p_i) - \Phi(m, k)), \end{aligned}$$

and noting from Remark 2.5 that $\|A_{m+p_i} - A_m\| < \varepsilon$, we can write

$$\begin{aligned} & \|\Phi(m + 1 + p_i, k + p_i) - \Phi(m + 1, k)\| \\ & \leq \|A_{m+p_i} - A_m\| \|\Phi(m + p_i, k + p_i)\| + \|A_m\| \|\Phi(m + p_i, k + p_i) - \Phi(m, k)\| \\ & \leq \varepsilon \cdot \alpha^{m-k} + \alpha \cdot (m - k)\alpha^{m-k-1}\varepsilon = (m + 1 - k)\alpha^{m-k}\varepsilon, \end{aligned}$$

which shows the result for $n = m + 1$. This argument completes the proof. $\square$

Remark 2.6 *One could expect that, under almost periodic coefficients, asymptotic stability would be sufficient to uniform asymptotic stability. However, there are linear equations with almost periodic coefficients for which the solution is asymptotically stable but not uniformly stable, see (Conley e Miller, 1965), (Fink, 1974, p.97) for a scalar counterexample. For this reason it is inevitable an uniform stability assumption in the next lemma and also in its subsequent theorem.*

Lemma 2.7 *If $\{A_k\}$ is almost periodic and the system (2.41) is both asymptotically stable and uniformly stable, then (2.41) is also uniformly asymptotically stable.*

Proof: It follows from the uniform stability assumption that there is a constant $c > 0$ such that (see Remark 2.4)

$$\|\Phi(i, j)\| \leq c, \quad \forall i \geq j \geq 0. \quad (2.43)$$

Choose any $\epsilon > 0$ and $\xi > 0$ to satisfy $\epsilon c^2 < \xi < 1$. The asymptotic stability assumption guarantees the existence of $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ such that

$$\|\Phi(n_\epsilon, 0)\| < \epsilon/2. \quad (2.44)$$

We now show that $\|\Phi(n_\epsilon + p, p)\| < \epsilon$ with p being an ϵ -translation number. Indeed, set $k = 0$ and $\epsilon_1 = \epsilon/2n_\epsilon\alpha^{n_\epsilon-1}$ in Lemma 2.6. Then there exist $N = N_{\epsilon_1}$ and a subsequence $\{p_i\}$ of $\mathbb{N}$ such that, for each $i \geq 0$,

$$iN < p_i \leq (i+1)N \quad \text{and} \quad \|\Phi(n_\epsilon + p_i, p_i) - \Phi(n_\epsilon, 0)\| < \epsilon/2. \quad (2.45)$$

We then have from (2.44) and (2.45) that

$$iN < p_i \leq (i+1)N \quad \text{and} \quad \|\Phi(n_\epsilon + p_i, p_i)\| < \epsilon, \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.46)$$

We now prove that $\Phi(\cdot)$ has a uniform exponential decay. Indeed, let us define the number $\delta = \min\{\delta \in \mathbb{N} : n_\epsilon \leq \delta N\}$. Note from (2.46) that

$$2\delta Ni < p_{2\delta i} < p_{2\delta i} + n_\epsilon \leq 2\delta N(i+1), \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (2.47)$$

For notational simplicity let us consider $T = 2\delta N$ and $\tilde{p}_i = p_{2i\delta}$ for each $i \in \mathbb{N}$. Now take an arbitrary $t_0 \geq T$ and note that we can write $t_0 = iT + \ell$ for some $i \geq 0$ and some $1 \leq \ell \leq T$. This and (2.47) allow us to write

$$\Phi(t_0 + T, t_0 - T) = \Phi((i+1)T + \ell, \tilde{p}_i + n_\epsilon) \Phi(\tilde{p}_i + n_\epsilon, \tilde{p}_i) \Phi(\tilde{p}_i, (i-1)T + \ell),$$

which combined with (2.43) and (2.46) yield $\|\Phi(t_0 + T, t_0 - T)\| \leq \epsilon c^2 < \xi < 1$. Thus, for every $t_0 \geq 0$, we have

$$\|\Phi(t_0 + 2kT, t_0)\| < \xi^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.48)$$

Now if $t_0 + 2kT \leq t < t_0 + 2(k+1)T$, then

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t+, t_0 + 2kT) \Phi(t_0 + 2kT, t_0),$$

and using (2.48) we get that $\|\Phi(t, t_0)\| \leq c\xi^k$. In view of this, and setting the constants $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ as $c_1 = c/\xi$ and $\exp(-2c_2T) = \xi$, one can conclude that

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq c_1 \exp(-2c_2T(k+1)) \leq c_1 \exp(-c_2(t - t_0)),$$

and the desired result follows from Remark 2.4. $\square$

The next main result follows from Lemma 2.7 and Propositions 2.1 and 2.2.

Theorem 2.4 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. Assume that the average cost (2.39) is finite, that $\{B_k\}$ is bounded, and that $\{A_k\}$ is almost periodic. Then the system $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable provided that (2.41) is uniformly stable.*

The next example illustrates the result in Theorem 2.4.

Example 2.2 *Let us define the sequence $\{a_k\}$ as follows.*

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_{2^n+k} = a_k - \frac{1}{2^n}, \quad k = 0, \dots, 2^n - 1, \quad \forall n \geq 1.$$

The sequence $\{a_k\}$ is almost periodic, c.f. (Vesely, 2008, Lem. 4.1). Consider in addition the almost periodic sequences $\{b_k\}$ and $\{c_k\}$ defined as

$$b_k = \frac{1 - \exp(-2 - \sin \sqrt{2}k)}{3 + \sin \sqrt{2}k} \quad \text{and} \quad c_k = \frac{\sin \sqrt{2}k}{1 + \ln(2 + \cos \sqrt{2}k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

The parameters of the system $\mathcal{S}$ are defined below:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ 0 & c_k - b_k \end{pmatrix}, \quad B_k = C_k = I, \quad \text{and} \quad D_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

where I denotes the identity matrix. The matrix sequence $\{A_k\}$ is almost periodic and one can verify from the definition that the pairs (A_k, B_k) and (A_k, C_k) are controllable and observable, respectively. Let $\|\cdot\|_c$ be the column-sum norm, i.e., if $U = [u_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,m}$ then $\|U\|_c = \max\{\sum_{i=1}^n |u_{ij}| : j = 1, \dots, m\}$. Since $|a_k| \leq 1$ and $|c_k| \leq 1$ for every $k \geq 0$, it follows that $\|A_k\|_c \leq 1$, $\forall k \geq 0$. Hence the system $z_{k+1} = A_k z_k$ is uniformly stable. With the aid of a numerical evaluation (see Remark 2.7), we get that the average cost (2.39) is equal to $J = 5.11$. For this case, Theorem 2.4 assures that $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable and as a byproduct, $z_{k+1} = A_k z_k$ is uniformly asymptotically stable due to Proposition 2.1.

Convergence condition

The next result assures the uniform second moment stability for $\mathcal{S}$ when the matrix sequence $\{A_k\}$ converges.

Theorem 2.5 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. If the average cost in (2.39) exists, $\{B_k\}$ is bounded, and $\{A_k\}$ converges to a matrix A , then all the eigenvalues of A lies inside the unit circle and the system $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable.*

Proof: Set $\rho = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ is eigenvalue of } A\}$. We now show that $\rho < 1$. Indeed, suppose the contrary, that is $\rho \geq 1$ and let $v \neq 0$ be a corresponding eigenvector, i.e., it satisfies $Av = \rho v$. It follows from Lemma 2.8 (see Appendix) that, for each subsequence $\{n_i\}$ from $\mathbb{N}$,

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|(\Phi(2n_i, n_i) - A^{n_i})v\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\Phi(2n_i, n_i)v - \rho^{n_i}v\|,$$

which implies that $\|\Phi(2n_i, n_i)v\| \rightarrow 0$ as $i \rightarrow \infty$. But this contradicts the result of Proposition 2.3(ii) (see Appendix), so that we have $\rho < 1$ and hence the first assertion in theorem is proved.

We now show the second assertion. Recall that, for each $\epsilon > 0$, there exists a corresponding matrix norm $\|\cdot\|_*$ such that $\|A\|_* \leq \rho + \epsilon$, c.f. (Horn e Johnson, 1990, Ch.5.6, p.297). Take in particular $\epsilon > 0$ sufficiently small so that $\rho + 2\epsilon < 1$. By hypothesis, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\|_* = 0$, and this implies that there exists $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ such that $\|A_k\|_* < \|A\|_* + \epsilon$ for every $k \geq k_\epsilon$. Hence

$$\begin{aligned} \|\Phi(k + \ell, k)\|_* &\leq \|A_{k+\ell-1}\|_* \cdots \|A_k\|_* \\ &< (\|A\|_* + \epsilon)^\ell \leq (\rho + 2\epsilon)^\ell, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_\epsilon. \end{aligned}$$

Let $\alpha = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_k\|_*$. Setting the positive constants c_1 and c_2 as

$$c_1 = (\alpha/(\rho + 2\epsilon))^{k_\epsilon} \quad \text{and} \quad \exp(-c_2) = (\rho + 2\epsilon),$$

we have

$$\|\Phi(k, n)\|_* \leq c_1 \exp(-c_2(k - n)), \quad \forall k \geq n \in \mathbb{N},$$

but since the norms $\|\cdot\|_*$ and $\|\cdot\|$ are equivalent the desired result follows from Remark 2.4 and Proposition 2.1. $\square$

Cost-based condition

Let us consider the following assumption.

Assumption 2.3 *There exists a constant $\delta > 0$ such that, for every subsequence $\{t_k\}$ from $\mathbb{N}$ with $t_{k+1} > t_k + k$, there holds*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \sum_{n=0}^k \mathbb{E}[\|y_{t_k+n}\|^2] \leq \delta.$$

The proof of the next main theorem is available in the sequel.

Theorem 2.6 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. Suppose that the average cost (2.39) is finite, that Assumption 2.3 holds, that $\{B_k\}$ is bounded, and that (2.41) is uniformly stable. Then $\mathcal{S}$ is uniformly second moment stable.*

Assumption 2.3 is fundamental for the validity of the result in Theorem 2.6, as the next example shows. Borrowed from (Vargas e do Val, n.d.a), the example illustrates a case in which the average cost (2.39) does exist, Assumption 2.3 *fails* to hold, and the autonomous system (2.41) is uniformly stable but *not* uniformly asymptotically stable. Hence, from Proposition 2.1, we get that $\mathcal{S}$ is *not* uniformly second moment stable.

Remark 2.7 *Let the second moment matrix of x_k and y_k be defined, respectively, as*

$$X(k) = \mathbb{E}[x_k x_k'], \quad \text{and} \quad Y(k) = \mathbb{E}[y_k y_k'], \quad \forall k \geq 0. \quad (2.49)$$

From the assumption we made on $\{w_k\}$, we have that $X(k)$ and $Y(k)$ satisfy the difference equations (Davis e Vinter, 1985; Anderson e Moore, 1979),

$$X(k+1) = A_k X(k) A_k' + B_k B_k', \quad (2.50)$$

$$Y(k) = C_k X(k) C_k' + D_k D_k', \quad \forall k \geq 0. \quad (2.51)$$

Thus, by virtue of the identity $\mathbb{E}[\|y_k\|^2] = \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2$ for each $k \geq 0$, we can immediately evaluate the quantity

$$\sum_{k=0}^N \mathbb{E}[\|y_k\|^2] = \sum_{k=0}^N \|Y(k)^{\frac{1}{2}}\|^2, \quad \forall N \geq 0. \quad (2.52)$$

Example 2.3 *Let us consider the following difference scalar equation,*

$$X(k+1) = a(k)X(k) + 1, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad X(0) = 1, \quad (2.53)$$

where $\{a(k)\}$ is a sequence of zeros and ones, based on the following rule. Set $k_0 = 0$, and for each $i = 1, 2, \dots$, define recursively the sequence $\{k_i\}$ as

$$k_i = \begin{cases} k_{i-1} + i(i+2)/8, & \text{if } i \text{ is even;} \\ k_{i-1} + (i+1)/2, & \text{if } i \text{ is odd.} \end{cases} \quad (2.54)$$

The sequence of coefficients $\{a(k)\}$ is defined by

$$a(k) = \begin{cases} 0, & \text{for } k_i \leq k < k_{i+1} \text{ and } i \text{ is odd;} \\ 1, & \text{for } k_i \leq k < k_{i+1} \text{ and } i \text{ is even.} \end{cases} \quad (2.55)$$

The values of $a(k)$ are shown in Fig. 2.3. From (2.54) and (2.55), we have

$$i \text{ is odd} \Rightarrow a(k) \cdots a(k_i) = 0, \text{ for all } k \geq k_i;$$

$$i \text{ is even} \Rightarrow a(k_{i+1} - 1) \cdots a(k_i) = 1 \text{ and } k_{i+1} - k_i = (i + 2)/2.$$

Hence the autonomous system $z_{k+1} = a(k)z_k$ is uniformly stable but it is not uniformly asymptotically stable. We note that the sequence $\{k_i\}$ sets the time interval for which the system $X(k)$ is monotonically increasing or equal to one, namely,

$$X(k) = \begin{cases} 1, & \text{for } k_i < k \leq k_{i+1} \text{ and } i \text{ is odd;} \\ (k - k_i) + 1, & \text{for } k_i < k \leq k_{i+1} \text{ and } i \text{ is even.} \end{cases}$$

In particular, if i is odd then $X(k_i) = (i+3)/2$ and the corresponding subsequence $X(k_{i_\ell}) \rightarrow \infty$ as $\ell \rightarrow \infty$. Straightforward algebraic manipulation results in

$$\frac{1}{k_{i+1} - k_i} \sum_{n=0}^{k_{i+1} - k_i} X(k_i + n) \rightarrow \infty \text{ (if } i \text{ is even and } i \rightarrow \infty),$$

$$\text{and } \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N X(k) \leq 2, \quad \forall N \geq 0.$$

Hence, if we let in (2.50)-(2.51), $A_k \equiv a(k)$, $B_k \equiv C_k \equiv 1$, $D_k \equiv 0$, and $X(0) = 1$, then the construction of the example applies.

Proof of Theorem 2.6

Proof: Let $\{h(k)\}$ be a sequence of nonnegative real numbers so as

$$h(k) = \sum_{j=0}^k \|\Phi(k, j)\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.56)$$

Let us consider the following claim.

CLAIM. The sequence $\{h(k)\}$ defined in (2.56) is bounded.

According to (Kubrusly, 1988, Th.1), (Willems, 1970, Th.1.5, p.101), the sequence $\{h(k)\}$ is bounded if and only if the system (2.41) is uniformly asymptotically stable. Thus, under this claim, the desired result then follows from Proposition 2.1. The remaining part of this proof is dedicated to prove the claim.

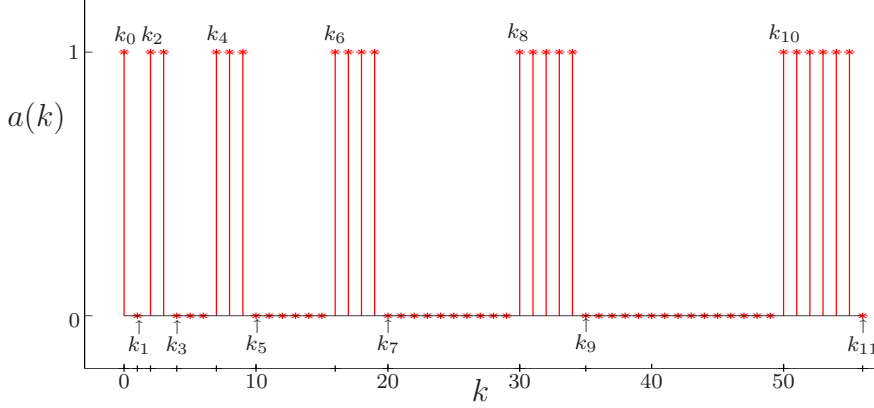


Figure 2.3: The coefficients of the system in Example 2.3.

From Proposition 2.3(i) (see Appendix) and the identity in (2.52), we have that there are constants $k_0, \tau_0 \in \mathbb{N}$ and $\rho_0 > 0$ satisfying

$$\sum_{i=k}^{n+\tau_0} \mathbb{E}[\|y_i\|^2] = \sum_{i=k}^{n+\tau_0} \|Y(i)^{\frac{1}{2}}\|^2 \geq \rho_0 \cdot \sum_{i=k}^n h(i), \quad \forall n \geq k \geq k_0. \quad (2.57)$$

We now prove that $\{h(k)\}$ has at least one bounded subsequence. Suppose the contrary, i.e., that $\{h(k)\}$ diverges to infinity. Then (see, e.g., (Knopp, 1956, Th.2.4.1, p.34))

$$\frac{h(k_0) + \dots + h(n)}{n - k_0 + 1} \rightarrow \infty \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

and from (2.57) we can see that the average cost in (2.39) is infinite. But this contradicts the assumption that (2.39) is finite, hence, $\{h(k)\}$ does not diverge to infinity, which implies that there is a subsequence $\{n_i\}$ from $\mathbb{N}$ such that the sequence $\{h(n_i)\}_{i=0}^{\infty}$ is bounded. This fact is the key one to be employed in the next argument. Before passing to it, we note from (2.56) that

$$\begin{aligned} h(k+n) &= \sum_{j=0}^k \|\Phi(k+n, k)\Phi(k, j)\|^2 + \sum_{j=1}^n \|\Phi(k+n, k+j)\|^2 \\ &\leq \|\Phi(k+n, k)\|^2 \cdot h(k) + \sum_{j=1}^n \|\Phi(k+n, k+j)\|^2 \end{aligned}$$

and, by virtue of the uniform stability assumption (i.e., there is a constant $c > 0$

such that $\|\Phi(k+n, k)\|^2 \leq c$, for all $k, n \geq 0$), we have

$$h(k+n) \leq c(h(k) + n), \quad \forall k, n \in \mathbb{N}. \quad (2.58)$$

Considering $\{n_i\}$ as the subsequence from $\mathbb{N}$ so that $\{h(n_i)\}_{i=0}^\infty$ is bounded, we now study the sequence of time intervals $\{n_{i+1} - n_i\}_{i=0}^\infty$ to prove the claim.

Case 1: ($\{n_{i+1} - n_i\}_{i=0}^\infty$ is bounded). In this case, set $\bar{n} = \max_{i \in \mathbb{N}} n_{i+1} - n_i$ and $\bar{z} = \sup_{i \in \mathbb{N}} h(n_i)$. It follows from (2.58) that the sequence $\{h(k)\}$ is bounded above by the constant $c(\bar{z} + \bar{n})$, which proves the claim.

Case 2: ($\{n_{i+1} - n_i\}_{i=0}^\infty$ is *not* bounded). By way of contradiction, let us assume that $\{h(k)\}$ is not bounded. In this case, we can then extract a sequence $\{n_{i_k}\}$ from $\{n_i\}$, and choose a suitable $s_k \in \mathbb{N}$ within the interval $n_{i_k} < s_k < n_{i_k+1}$, such that

$$h(s_k) \rightarrow \infty \text{ as } k \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

Note that $\{n_{i_k}\}$ should satisfy $n_{i_{k+1}} - n_{i_k} \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$ (otherwise the sequence $\{h(s_k)\}_{k=0}^\infty$ would be bounded according to *Case 1*). Set $\bar{z} = \sup_{i \in \mathbb{N}} h(n_i)$. Since $h(s_k)$ diverges to infinity, we can assume without any loss of generality that

$$h(s_k) > c(\bar{z} + k), \quad \text{for each } k \in \mathbb{N}. \quad (2.60)$$

We claim that if a sequence of natural numbers $\{t_k\}$ is chosen so that each t_k satisfies $s_k = t_k + k$, then $\{t_k\}$ is a well-defined subsequence of $\mathbb{N}$. In fact, it follows from (2.58) that

$$h(n_{i_k} + k) \leq c(h(n_{i_k}) + k) \leq c(\bar{z} + k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.61)$$

Then, in view of (2.60) and (2.61), we obtain that $s_k > n_{i_k} + k$, and setting $s_k = t_k + k$ we get $t_k > n_{i_k}$ for all $k \in \mathbb{N}$. Since, by definition, $n_{i_{k+1}} \leq n_{i_k+1}$ for each $k \in \mathbb{N}$, we have

$$n_{i_k} < t_k + k < n_{i_{k+1}} \leq n_{i_k+1} < t_{k+1}.$$

Hence $t_k + k < t_{k+1}$ for each $k \in \mathbb{N}$.

We have proved so far that there exists a sequence $\{t_k\}$ from $\mathbb{N}$ satisfying both $t_k + k < t_{k+1}$ and $h(t_k + k) > c(\bar{z} + k)$ for each $k \in \mathbb{N}$. In particular,

$$h(t_k + k) > ck, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.62)$$

On the other hand, it follows from (2.58) that

$$h(t_k + k) \leq ch(t_k + \ell) + c(k - \ell), \quad \ell = 0, \dots, k. \quad (2.63)$$

Combining (2.62) and (2.63) and writing it down for each $\ell = 0, \dots, k$, we have

$$\begin{aligned} ck < h(t_k + k) &\leq ch(t_k) + ck && \Rightarrow h(t_k) \geq 0; \\ ck < h(t_k + k) &\leq ch(t_k + 1) + c(k - 1) && \Rightarrow h(t_k + 1) \geq 1; \\ \vdots & && \vdots \\ ck < h(t_k + k) &\leq ch(t_k + k) + c \cdot 0 && \Rightarrow h(t_k + k) \geq k. \end{aligned}$$

Consequently,

$$\frac{h(t_k) + h(t_k + 1) + \dots + h(t_k + k)}{k + 1} \geq \frac{1}{k + 1} \cdot \left(\sum_{i=0}^k i \right) = \frac{k}{2} \rightarrow \infty \text{ as } k \rightarrow \infty. \quad (2.64)$$

Finally, it follows from (2.57) and (2.64) that

$$\frac{\mathbb{E}[\|y_{t_k}\|^2] + \dots + \mathbb{E}[\|y_{t_k+k}\|^2]}{k + 1} \rightarrow \infty \text{ as } k \rightarrow \infty, \quad (2.65)$$

which contradicts Assumption 2.3. Hence $\{h(k)\}$ is bounded, the claim holds true and this completes the proof of the theorem. $\square$

Remark 2.8 *The condition proposed in (Vargas e do Val, n.d.a, Th.3.2) is sufficient to Assumption 2.3. Indeed, the authors require therein the existence of two positive constants J and α such that*

$$\left| \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\|y_k\|^2] - NJ \right| \leq \alpha, \quad \forall N \geq 1.$$

Note that if we let $C(N) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[\|y_k\|^2]$, for each $N \geq 1$, we then get that $C(N + 1) \leq (N + 1)J + \alpha$ and $C(N) \geq NJ - \alpha$, so that

$$\mathbb{E}[\|y_N\|^2] = C(N + 1) - C(N) \leq J + 2\alpha, \quad \forall N \geq 1,$$

and this fact assures the validity of Assumption 2.3.

2.3.3 Concluding remarks

This paper presents an approach to assure uniform second moment stability for the system $\mathcal{S}$ from the existence of the long-run average cost (2.39). The main results, i.e., Theorems 2.4, 2.5, and 2.6, consider notions of almost periodicity, convergence, and cost-based conditions, in this order, and they extend the study initiated in (Vargas e do Val, n.d.a).

Appendix - auxiliary results

Lemma 2.8 *Suppose that the matrix sequence $\{A_k\}$ converges to a matrix A . Then*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi(k+n, k) - A^n\| = 0, \quad \forall n \geq 0.$$

Proof: The proof follows by induction on n . The result holds trivially for $n = 0$, and for $n = 1$ it follows immediately from the convergence assumption. Suppose now that the result holds for $n > 1$. We can write

$$\begin{aligned} & \|\Phi(k+n+1, k) - A^{n+1}\| \\ &= \|A_{k+n}(\Phi(k+n, k) - A^n) + (A_{k+n} - A)A^n\| \\ &\leq \|A_{k+n}\| \cdot \|\Phi(k+n, k) - A^n\| + \|(A_{k+n} - A)\| \cdot \|A^n\|, \end{aligned} \quad (2.66)$$

and the right-hand side of the inequality in (2.66) goes to zero as k goes to infinity. This shows the result for $n+1$ and the induction argument completes the proof. $\square$

Proposition 2.3 *Let the pairs (A_k, B_k) be controllable and (A_k, C_k) be observable. If the average cost in (2.39) exists, then:*

- (i) (Vargas e do Val, n.d.a, Lem.2.3). *There exist constants $k_0, \tau_0 \in \mathbb{N}$ and $\rho_0 > 0$ such that*

$$\sum_{i=k}^{n+\tau_0} \mathbb{E}[\|y_i\|^2] \geq \rho_0 \cdot \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^i \|\Phi(i, j)\|^2, \quad \forall n \geq k \geq k_0.$$

(ii) (Vargas e do Val, n.d.a, Th.2.1). There exist a constant $L > 0$ and a subsequence $\{n_i\}$ from $\mathbb{N}$ such that

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\Phi(k + n_i, n_i)\|^2 \leq L, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

2.4 Comentários

Mostramos neste capítulo que a existência de um custo médio a longo prazo finito, como em (2.1), implica que o sistema estocástico $\mathcal{S}$ é assintoticamente estável na média, i.e. $E[x_k] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, sempre que hipóteses usuais de controlabilidade e observabilidade são satisfeitas. Esta noção de estabilidade é fraca no sentido de que as trajetórias amostradas $\{x_k\}$ podem conter subsequências que divergem para infinito, veja Fig. 2.1. Isto se deve ao fato de que a sequência de segundo momento $\{X_k\}$ pode não ser limitada, veja Example 2.1.

Para fortalecer a noção de estabilidade para o sistema $\mathcal{S}$, consideramos a estabilidade uniforme do segundo momento, que equivale a existência de uma constante $c > 0$ tal que $E[\|x_k\|^2] \leq c$, para cada $k \geq 0$. Para obter esta noção, mostramos que pelo menos uma das quatro condições a seguir deve ocorrer: (i) a condição na Assumption 2.2 vale (Theorem 2.3, p.35); (ii) $\{A_k\}$ é quase-periódica e $z_{k+1} = A_k z_k$ é uniformemente estável (Theorem 2.4, p.44), ou $\{A_k\}$ é periódico (Corollary 2.2, p.34); (iii) a sequência $\{A_k\}$ converge (Theorem 2.5, p.45); (iv) a condição de subsequência na Assumption 2.3 vale e $z_{k+1} = A_k z_k$ é uniformemente estável (Theorem 2.6, p.46);

Em todos os resultados de estabilidade deste capítulo empregamos hipóteses de controlabilidade e observabilidade. É de interesse verificar se estas hipóteses podem ser enfraquecidas para estabilizabilidade e detectabilidade, respectivamente. Além disso, consideramos no desenvolvimento a sequência $\{A_k\}$ como sendo determinística e com dimensão finita. Talvez seja possível estender os resultados para contemplar o caso em que $\{A_k\}$ é uma sequência de matrizes aleatórias ou possui dimensão infinita.

Os resultados deste capítulo podem ser úteis para caracterizar a estabilidade

em problemas de controle com estrutura mais geral. De fato, seja A uma função qualquer que realiza um mapeamento do conjunto de ações de controle admissíveis $\mathcal{G}$ para o espaço das matrizes de dimensão $n \times n$. O sistema correspondente é definido por

$$x_{k+1} = A(g_k)x_k + w_k, \quad \forall g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k \geq 0. \quad (2.67)$$

Suponha que o sistema em (2.67) seja estabilizável, ou seja, que exista uma ação $g \in \mathcal{G}$ tal que os autovalores da matriz $A(g)$ estejam contidos num círculo de raio unitário. Pode-se então provar que existe $j^+ > 0$ tal que

$$J^* = \min_{\{g_0, g_1, \dots\}} \left[\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E[\|C(g_k)x_k + w_k\|^2] \right] < j^+, \quad (2.68)$$

no qual C é um mapeamento apropriado. Além disso, se existir uma sequência de ações $\{g_0^*, g_1^*, \dots\}$ que minimiza (2.68) então as condições apresentadas neste capítulo asseguram que $E[x_k^*] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, no qual x_k^* representa a trajetória ótima correspondente em (2.68). Sob condições adicionais pode-se garantir ainda que $\{E[\|x_k^*\|^2]\}$ é sequência limitada. Portanto, os resultados deste capítulo podem ser usados para caracterizar a estabilidade em sistemas com estrutura de controle como em (2.67)-(2.68). A investigação sobre a existência de política ótima estacionária para problemas de controle semelhantes a este será desenvolvida no Capítulo 3.

Capítulo 3

Política estacionária e custo médio a longo prazo

Neste capítulo, apresentamos resultados de existência de política ótima estacionária em problemas de custo médio a longo prazo.

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos o sistema dinâmico estocástico controlado, definido num espaço de probabilidade fixado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$, conforme a seguir.

$$x_{k+1} = A(g_k)x_k + Ew_k, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

no qual x_k e w_k , $k = 0, 1, \dots$ são processos tomando valores em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^q$, respectivamente. A entrada de ruído $\{w_k\}$ representa um processo i.i.d. com média nula e matriz de covariância igual a identidade para cada $k \geq 0$. Denominamos $\{x_k\}$ como sendo o estado do sistema e E representa uma matriz fixada de dimensão $n \times q$. Assumimos que existe um conjunto não-vazio $\mathcal{G}$ denominado *conjunto de controles admissíveis* e cada $g \in \mathcal{G}$ é denominado *ação de controle*.

Desejamos avaliar o comportamento de longo prazo do sistema (3.1), e para isto adotamos o custo médio a longo prazo definido por

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[x_k' Q(g_k) x_k], \quad (3.2)$$

no qual J pode depender da condição inicial x_0 e $E[\cdot] \equiv E[\cdot|\mathcal{F}_0]$ denota a esperança matemática condicionada a $\mathcal{F}_0$. O operador Q é dado e realiza um mapeamento de $\mathcal{G}$ no espaço de matrizes semidefinidas positivas de dimensão $n \times n$.

Assumimos que a sequência de ações de controle $\{g_k\}$ a ser aplicada em (3.1)–(3.2) é conhecida e mensurável em relação a $\mathcal{F}_0$, e o problema de controle associado é o de determinar uma sequência de ações de controle $\{g_k^*\}$, com $g_k^* \in \mathcal{G}$, $\forall k \geq 0$, tal que o custo médio a longo prazo correspondente em (3.2) seja minimizado. A motivação para considerarmos as ações de controle $\{g_k\}$ adaptadas a $\mathcal{F}_0$ é dada a seguir.

Uma razão para o estudo do sistema (3.1)–(3.2) é que este pode ser usado para modelar o problema de controle de realimentação simultânea (veja (Cho e Lam, 2001), (Luke et al., 1997), e (Wu e Lee, 2005) para uma breve discussão de resultados recentes). Para representar o problema usando o modelo em (3.1)–(3.2), seja g uma matriz de controle, e defina as matrizes bloco-diagonais $A(g)$ e $Q(g)$ conforme

$$\begin{aligned} A(g) &= \text{diag}(A_1 + B_1 g, \dots, A_N + B_N g), \\ Q(g) &= \text{diag}(Q_1 + g' R_1 g, \dots, Q_N + g' R_N g), \end{aligned}$$

com $N \geq 2$ dado, no qual $A_1, \dots, A_N$, $B_1, \dots, B_N$, $Q_1, \dots, Q_N$, $R_1, \dots, R_N$ são matrizes dadas de dimensões compatíveis. O problema de controle de realimentação simultânea é encontrar, se existir, uma **sequência de matrizes determinísticas** $g_0^*, g_1^*, \dots$ que minimiza o custo médio a longo prazo correspondente.

Outros problemas de controle igualmente relevantes que surgem como caso particular de (3.1)–(3.2) são conhecidos como problemas de controle *bilinear* e *sistemas chaveados*, veja as referências (Grüne, 1996), (Grüne e Wirth, 1999), (Mohler e Kolodziej, 1980) para mais detalhes sobre o primeiro e (Shorten et al., 2007), (Geromel e Colaneri, 2006) para o segundo. Para representar o sistema bilinear na forma em (3.1), seja $\mathcal{G} \equiv \mathbb{R}^N$ e tome $A(g) = A_0 + \sum_{i=1}^N g_i A_i$, no qual $g = [g_1, \dots, g_N] \in \mathcal{G}$ é um vetor de controle e $A_0, A_1, \dots, A_N$ são matrizes dadas. Para o sistema de controle chaveado, o “sinal de chaveamento” g_k pertence ao conjunto $\mathcal{G} = \{1, \dots, N\}$ a cada instante de tempo $k \geq 0$ e define $A(g_k) \in \{A_1, \dots, A_N\}$, no qual $A_1, \dots, A_N$ são matrizes dadas.

Outro importante problema de controle que pode ser escrito na forma (3.1)–(3.2) é o de realimentação linear de saída, que é descrito por

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ew_k, \quad y_k = Cx_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

no qual A, B, C, E são matrizes fixadas de dimensões apropriadas, $\{u_k\}$ representa a variável de controle e $\{y_k\}$ a saída. A variável de controle possui estrutura linear de realimentação de saída dada por

$$u_k = g_k y_k, \quad \text{com } g_k \in \mathbb{R}^{p,s}, \forall k \geq 0.$$

Uma sequência de matrizes $\{g_k\}$ deve ser projetada de forma a minimizar o custo médio a longo prazo em (3.2) tomando-se

$$A(g_k) := A + Bg_k C \quad \text{e} \quad Q(g_k) := Q + C' g_k' R g_k C,$$

no qual Q, R são matrizes simétricas semidefinidas positivas, e no caso em que $g_k = \bar{g}$, $\forall k \geq 0$, obtemos o problema clássico de realimentação estática de saída (Syrmos et al., 1997).

Seguindo estas motivações, introduzimos a seguir a abordagem precisa e os objetivos deste capítulo. Da hipótese do processo $\{w_k\}$, $k \geq 0$, é possível mostrar que o segundo momento do estado do sistema x_k em (3.1), definido por

$$X_k = E[x_k x_k'], \quad \forall k \geq 0, \tag{3.3}$$

satisfaz uma recorrência matricial determinística (veja (3.8)), e vale a identidade

$$E[x_k' Q(g_k) x_k] = \langle X_k, Q(g_k) \rangle, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k \geq 0,$$

no qual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de Frobenius. Portanto o custo médio a longo prazo em (3.2) é idêntico a

$$J = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle X_k, Q(g_k) \rangle. \tag{3.4}$$

O problema de controle pode então ser reformulado conforme a seguir. Seja $\mathcal{X}$ um subconjunto não-vazio do conjunto de todas as matrizes simétricas semidefinidas

positivas de dimensão $n \times n$. Cada ação de controle g_k é especificada pela *função de controle* $f_k : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ na forma $g_k = f_k(X_k)$, para cada $k \geq 0$, e a política $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_k, \dots\}$ é uma sequência de funções de controle correspondente (Bertsekas e Shreve, 1978), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996). Seja $\mathbf{F}$ o conjunto de todas as políticas factíveis $\mathbf{f}$, e seja $\mathbf{F}_s \subset \mathbf{F}$ o conjunto de todas as políticas estacionárias, de tal forma que se $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_s$ então $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$. Seja $J(\mathbf{f}, X)$ o custo J em (3.4) correspondente a uma dada política $\mathbf{f}$ quando $X_0 = X$. O problema de controle de custo médio a longo prazo é o de determinar uma política $\mathbf{f}^*$ tal que

$$J(\mathbf{f}^*, X) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} J(\mathbf{f}, X), \quad \text{para cada } X.$$

Claramente,

$$\inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} J(\mathbf{f}, X) \leq \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}_s} J(\mathbf{f}, X), \quad \text{para cada } X, \quad (3.5)$$

e a desigualdade acima motiva a questão a seguir.

(Q) *Sob quais condições a classe estacionária $\mathbf{F}_s$ contém a política ótima $\mathbf{f}^*$?*

No contexto de Processos de Decisão Markovianos, garantir a existência de política ótima estacionária têm despertado bastante interesse nas últimas décadas conforme atestado pela grande quantidade de artigos devotados ao tema, veja por exemplo as referências em (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996). A investigação evoluiu sempre focada na técnica conhecida como “vanishing discount approach”, primeiro com as condições de espaço de estado finito, depois com espaço de estado enumerável e por último com espaço de Borel, veja (Arapostathis et al., 1993) para uma revisão histórica. Embora os sistemas em (3.1) sujeitos a (3.2) sejam uma classe particular dos Processos de Decisão Markovianos, não há na literatura um estudo criterioso que garanta a existência de política ótima estacionária no caso específico em (3.1)-(3.2) e a principal contribuição deste capítulo é cobrir, ao menos parcialmente, esta lacuna.

Uma motivação adicional, além daquela teórica, em se garantir a existência de política ótima estacionária é que esta será útil na (i) aproximação de solução ótima do Capítulo 4 e (ii) no método numérico proposto no Capítulo 5.

As condições apresentadas neste capítulo podem ser classificadas como:

- *custo por estágio descontado limitado*, na Seção 3.2.
- *controlabilidade para origem*, na Seção 3.2.
- *convergência e custo convexo*, na Seção 3.3.

A abordagem da Seção 3.2 apresenta condições suficientes para a técnica de “vanishing discount approach”, porém as hipóteses de custo por estágio descontado limitado e controlabilidade para origem não são comparáveis entre si, conforme os argumentos de comparação desenvolvidos na Seção 3.4. A segunda abordagem na Seção 3.3, entretanto, assume hipóteses de convergência e custo convexo para garantir o resultado com desenvolvimento independente da técnica de “vanishing discount approach”.

As próximas seções são dedicadas às condições que garantem a existência de política ótima estacionária para o sistema (3.1) sujeito a (3.2).

3.2 Definições, notação e resultados

O conjunto dos reais e naturais são denotados por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$, respectivamente. O conjunto dos reais não-negativos é representado por $\mathbb{R}_+$, e usamos $\mathbb{R}^{n,m}$ para representar o espaço linear normado de todas as matrizes reais $n \times m$. Seja $\mathbb{S}^{n0}$ o cone convexo fechado $\{U \in \mathbb{R}^{n,n} : U = U' \geq 0\}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de Frobenius em $\mathbb{S}^{n0}$, e $\|\cdot\|$ denota ambos a norma euclideana em $\mathbb{R}^n$ ou a norma de Frobenius para matrizes.

As definições e convenções a seguir se aplicarão ao longo deste capítulo.

- (i) $\mathcal{X}$ e $\mathcal{G}$ são conjuntos dados, conhecidos como *espaço de estados* e *espaço de controle*, respectivamente. Em particular, assumimos que $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{S}^{n0}$ e $\mathcal{G}$ são espaços de Borel.
- (ii) Para cada $X \in \mathcal{X}$, existe um conjunto não-vazio mensurável $\mathcal{G}(X)$ subconjunto de $\mathcal{G}$. O conjunto $\mathcal{G}(X)$ representa o conjunto de todos os *controles admissíveis* ou *ações* quando o sistema está no estado $X \in \mathcal{X}$, e com propriedade que o grafo

$$\text{Gr} := \{(X, g) \in \mathcal{X} \times \mathcal{G} | g \in \mathcal{G}(X)\} \quad (3.6)$$

de estado-ações admissíveis é mensurável.

- (iii) (inf-compacto (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, p.28)). Seja $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{S}^{n_0}$ uma função semi-contínua inferior (*lower semi-continuous*). O funcional de custo por estágio $\mathcal{C} : \text{Gr} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é definido conforme abaixo:

$$\mathcal{C}(X, g) = \langle Q(g), X \rangle, \quad \forall (X, g) \in \text{Gr}. \quad (3.7)$$

Além disso, para cada $X \in \mathcal{X}$ e $r \in \mathbb{R}_+$, o conjunto $\{g \in \mathcal{G}(X) | \mathcal{C}(X, g) \leq r\}$ é compacto.

- (iv) A função mensurável $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ é denominada *lei de realimentação* sempre que $f(X) \in \mathcal{G}(X)$ para cada $X \in \mathcal{X}$. Uma *política* $\mathbf{f} = \{f_0, f_1, \dots\}$ é uma sequência de leis de realimentação f_k , $k \geq 0$, e o conjunto de todas as políticas possíveis é denotado por $\mathbf{F}$. Elementos de $\mathbf{F}$ na forma $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$ são denominados *política estacionária*.
- (v) (Estabilizabilidade). Seja $A : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ um operador conhecido. Assumimos que A é estabilizável, ou seja, existe uma ação de controle $g \in \mathcal{G}$ tal que os autovalores de $A(g)$ estão contidos num círculo de raio unitário.
- (vi) Para uma dada política $\mathbf{f} = \{f_k\} \in \mathbf{F}$, definimos a matriz de recorrência de segundo momento conforme segue:

$$X_{k+1} = A(g_k)X_k A(g_k)' + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, \quad X_0 = X \in \mathcal{X}, \quad (3.8)$$

no qual $\Sigma := EE' \in \mathbb{S}^{n_0}$ e o controle, aplicado no k -ésimo estágio, obedece a regra $g_k = f_k(X_k)$. De modo análogo, representamos o k -ésimo estágio de custo correspondente por

$$\mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}, X)} := \mathcal{C}(X_k, g_k) = \langle Q(g_k), X_k \rangle, \quad \forall k \geq 0.$$

O custo médio a longo prazo é então definido como segue:

$$J(\mathbf{f}, X) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}, X)}, \quad (3.9)$$

para cada política $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ e cada estado inicial $X_0 = X \in \mathcal{X}$. O problema de controle de custo médio a longo prazo é encontrar uma política $\mathbf{f}^*$ tal que

$$J(\mathbf{f}^*, X) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} J(\mathbf{f}, X) =: J^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.10)$$

A política $\mathbf{f}^*$ satisfazendo (3.10) é denominada *custo médio ótima*, e a principal contribuição deste capítulo é determinar condições que garantem a existência de uma política estacionária $\mathbf{f}^*$.

3.2.1 O critério de custo descontado e resultados preliminares

Para cada $\alpha \in (0, 1)$, o critério de custo descontado do qual lidaremos é definido por

$$V_\alpha(\mathbf{f}, X) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}, X)}, \quad (3.11)$$

para cada política $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ e cada estado inicial $X_0 = X \in \mathcal{X}$. O valor de α representa o *fator de desconto*, e o problema de controle associado é

$$V_\alpha^*(X) := \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} V_\alpha(\mathbf{f}, X), \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.12)$$

O resultado a seguir, baseado na técnica conhecida como *vanishing discount approach*, é o resultado-chave no desenvolvimento de condições que garantem a existência de política ótima estacionária no problema de custo médio a longo prazo.

Proposição 3.1 (*Arapostathis et al., 1993, Th. 6.6*), (*Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, Th. 5.4.3, p. 88*), (*Schal, 1993, Th. 3.8*). *Suponha que as duas hipóteses a seguir sejam satisfeitas.*

(H_1) *Existe um estado $X_0 \in \mathcal{X}$, uma sequência de descontos $\{\alpha_n\}$ com $\alpha_n \uparrow 1$ e uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$(1 - \alpha_n)V_{\alpha_n}^*(X_0) \leq c_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(H_2) Existe uma função mensurável $b : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e uma constante $c_2 \geq 0$ tal que

$$-c_2 \leq h_{\alpha_n}(X) \leq b(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.13)$$

no qual $h_\alpha(X) := V_\alpha^*(X) - V_\alpha^*(X_0)$, $\forall \alpha \in (0, 1)$.

Então existe uma política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ que é custo médio ótima e existe uma constante $\rho \geq 0$ que satisfaz

$$\rho = J^*(X) = J(\mathbf{f}^*, X), \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

A conclusão (iii) na Proposição 3.1 é de particular interesse ao objetivo deste capítulo, e adiante apresentamos condições suficientes para (H_1) e (H_2).

Definição 3.1 Dado $\alpha \in (0, 1)$ e $\epsilon \geq 0$, dizemos que a política $\mathbf{f}_{\alpha, \epsilon} \in \mathbf{F}$ é α -descontada ϵ -ótima se satisfaz

$$V_\alpha^*(X) \leq V_\alpha(\mathbf{f}_{\alpha, \epsilon}, X) \leq V_\alpha^*(X) + \epsilon, \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Proposição 3.2 (Bertsekas e Shreve, 1978, Prop.5.11, p.87), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, Th.4.2.3, p.46)) Para cada $\alpha \in (0, 1)$ e cada $\epsilon \geq 0$, existe uma política $\mathbf{f}_{\alpha, \epsilon} \in \mathbf{F}$ correspondente que é α -descontada ϵ -ótima.

Estamos agora interessados em avaliar o custo descontado para políticas α -descontada ϵ -ótimas com condição inicial fixada em $X_0 = \Sigma$. A próxima definição simplifica a notação necessária adiante.

Definição 3.2 Tome $X_0 = \Sigma$, e para cada $\mathbf{f} = \{f_k\} \in \mathbf{F}$ a sequência $\{X_k^{(\mathbf{f})}\}$ satisfaz (3.8). Definimos a matriz de transição desde Σ , $\Phi_\Sigma^{(\mathbf{f})} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n, n}$, conforme

$$\Phi_\Sigma^{(\mathbf{f})}(k) = A(f_{k-1}(X_{k-1}^{(\mathbf{f})})) \dots A(f_0(\Sigma)), \quad k \geq 1,$$

sendo $\Phi_\Sigma^{(\mathbf{f})}(0)$ a matriz identidade. De modo análogo, definimos

$$Q_k^{(\mathbf{f})} = Q(f_k(X_k^{(\mathbf{f})})), \quad k \geq 0.$$

3.2.2 Resultado principal

Vamos considerar a seguinte hipótese.

Hipótese 3.1 *Existe uma sequência de descontos $\alpha_n \uparrow 1$ e constante $\epsilon \geq 0$ tal que a política descontada correspondente $\mathbf{f}_{\alpha_n} = \mathbf{f}_{\alpha_n, \epsilon} \in \mathbf{F}$ satisfaz Proposição 3.2, p.62, e*

$$M := \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k \left\| \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k)' Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k) \right\| < \infty.$$

Vamos agora considerar hipótese alternativa a Hipótese 3.1.

Hipótese 3.2 *(Controlabilidade para a origem) Existe um número natural N e uma sequência finita de elementos de ações de controle $\{g_{c_0}, \dots, g_{c_N}\}$ tal que*

$$A(g_{c_N}) \dots A(g_{c_0}) = 0.$$

Vamos definir a matriz a seguir que será útil adiante.

$$S_c = \sum_{j=0}^{N-1} A(g_{c_{N-1}}) \dots A(g_{c_j}) \Sigma A(g_{c_j})' \dots A(g_{c_{N-1}})'. \quad (3.14)$$

Hipótese 3.3 *Seja S_c como em (3.14). Existe uma sequência de descontos $\alpha_n \uparrow 1$ e constante $\epsilon \geq 0$ tal que a política descontada correspondente $\mathbf{f}_{\alpha_n} = \mathbf{f}_{\alpha_n, \epsilon} \in \mathbf{F}$ satisfaz Proposição 3.2, p.62, e também*

$$M := \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k \left\langle \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k)' Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k), S_c \right\rangle < \infty.$$

Agora podemos apresentar o principal resultado desta seção.

Teorema 3.1 *Suponha que Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2 e 3.3 sejam válidas. Então as hipóteses (H_1) e (H_2) na Proposição 3.1 são válidas.*

A demonstração do Teorema 3.1 é apresentada na Seção 3.2.3. O corolário a seguir segue diretamente do Teorema 3.1 e Proposição 3.1.

Corolário 3.1 *Suponha que Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2 e 3.3 sejam válidas. Então existe uma política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ que é custo médio ótima, e existe uma constante $\rho^* \geq 0$ tal que*

$$J^*(X) = J(\mathbf{f}^*, X) = \rho^*, \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Comentário 3.1 Note que a principal diferença entre a Hipótese 3.1 e Hipótese 3.3 está no fato de que a última introduz a matriz S_c , que pode não ser única. No caso particular quando existe uma ação $g_c \in \mathcal{G}$ tal que $A(g_c) = 0$, então temos $S_c = 0$ e portanto a Hipótese 3.3 é satisfeita trivialmente.

Exemplo 3.1 Vamos considerar o sistema (3.1) com $\mathcal{G} := [-3, 3]$, e os operadores $A : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ e $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definidos, para cada $g \in \mathcal{G}$, conforme

$$\begin{aligned} A(g) &= (\log(1 + g^2) + 0.01g^2) \sin(\sqrt{2}g), \\ Q(g) &= 0.5 + (1 + g(\cos(0.5236g) + 0.05g))^2. \end{aligned}$$

Tome $E = \sqrt{0.1}$. Note que se tomamos $g_c = 0$ então $A(g_c) = 0$, portanto $S_c = 0$ e assim a Hipótese 3.3 é válida. Logo, segue do Corolário 3.1 que existe uma política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$ e uma constante $\rho^* \geq 0$ tal que, tomando $g_k^* = f^*(X_k^*)$ para cada $k \geq 0$, teremos

$$\rho^* = J^*(X_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle Q(g_k^*), X_k^* \rangle \leq J(\mathbf{f}, X_0), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad \forall X_0 = x_0^2 \in \mathbb{R}_+,$$

no qual $X_{k+1}^* = A(g_k^*)^2 X_k^* + 0.1$. Suponha agora que exista o limite $g^* = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k^*$. Neste caso, com a ajuda de uma avaliação numérica, obtemos que o ponto de mínimo é $(\rho^*, g^*) = (0.0613, -2.155)$, veja Fig. 3.1.

Comentário 3.2 Exemplo 3.1 ilustra um caso no qual Hipótese 3.3 é satisfeita com $M = 0$. Provemos na sequência dois casos nos quais tal hipótese é válida com $M > 0$. Considere $\|\cdot\|_s$ como sendo a norma espectral de matrizes e lembre que se $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ então $\|U\| \leq n\|U\|_s$.

(Caso 1) Se $a := \sup_{g \in \mathcal{G}} \|A(g)\|_s < 1$ e $q := \sup_{g \in \mathcal{G}} \|Q(g)\| < \infty$, então temos

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(k+1)' Q_{k+1}^{(\mathbf{f})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_\alpha)}(k+1), S_c \right\rangle &\leq \sup_{g \in \mathcal{G}} \left\langle A(g)^{k'} Q(g) A(g)^k, S_c \right\rangle, \\ &\quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

e disto é possível verificar que Hipótese 3.3 é satisfeita com $M = qn^2\|S_c\|/(1-a^2)$.

(Caso 2) Suponha que $A(\cdot)$, $Q(\cdot)$, e Σ pode ser particionado conforme segue.

$$A(g) = \begin{pmatrix} A_1(g) & A_2(g) \\ \mathbf{0} & A_3(g) \end{pmatrix}, \quad Q(g) = \begin{pmatrix} Q_1(g) & Q_2(g) \\ Q_2(g)' & Q_3(g) \end{pmatrix}, \quad \forall g \in \mathcal{G},$$

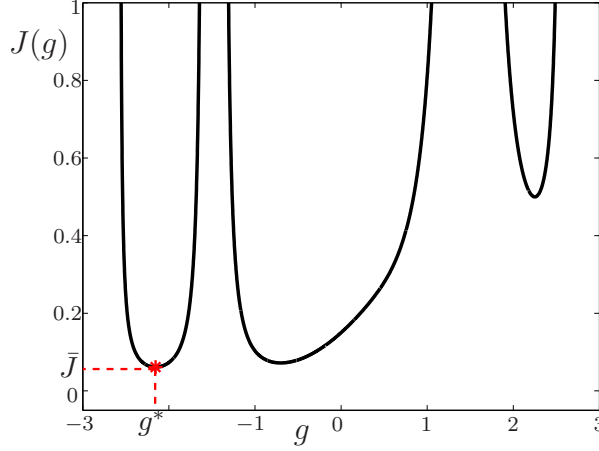


Figura 3.1: Gráfico do custo médio a longo prazo $J(g)$ em (3.9) para cada ação fixada $g \in \mathcal{G}$ no Exemplo 3.1. O ponto de mínimo é $(\bar{J}, g^*) = (0.0613, -2.155)$.

e

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

e as matrizes quadradas $A_1(\cdot)$, $Q_1(\cdot)$, e Σ_1 possuem dimensão fixada $m < n$. Seja S_{c1} definida como em (3.14) com $A_1(\cdot)$ e Σ_1 no lugar de $A(\cdot)$ e Σ , respectivamente. Portanto

$$\left\langle A(g)^{k'} Q(g) A(g)^k, S_c \right\rangle = \left\langle A_1(g)^{k'} Q_1(g) A_1(g)^k, S_{c1} \right\rangle, \quad \forall g \in \mathcal{G}, \forall k \geq 0,$$

e se $a_1 := \sup_{g \in \mathcal{G}} \|A_1(g)\|_s < 1$ e $q_1 := \sup_{g \in \mathcal{G}} \|Q_1(g)\| < \infty$ são válidas, então pode-se mostrar que Hipótese 3.3 é satisfeita com $M = q_1 m^2 \|S_{c1}\| / (1 - a_1^2)$.

3.2.3 Prova do Teorema 3.1

Apresentamos a seguir alguns resultados preliminares a prova do Teorema 3.1.

Lema 3.1 *Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tal que*

$$V_\alpha^*(X) \leq c_1 \|X\| + \frac{c_2}{1 - \alpha}, \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.15)$$

Prova: Seja $g \in \mathcal{G}$ uma ação estabilizante. Aplicando a ação fixada g na recorrência (3.8) para uma condição inicial $X_0 = X \in \mathcal{X}$ qualquer, podemos reescrever a recorrência na forma

$$X_k = A(g)^k X A(g)^{k'} + \sum_{j=0}^{k-1} A(g)^{k-1-j} \Sigma A(g)^{(k-1-j)'}, \quad \forall k \geq 0.$$

Por outro lado, por otimalidade podemos escrever

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(X) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \langle Q(g), X_k \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left\langle Q(g), A(g)^k X A(g)^{k'} + \sum_{j=0}^{k-1} A(g)^{k-1-j} \Sigma A(g)^{(k-1-j)'} \right\rangle \\ &\leq \|Q(g)\| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(\|A(g)^k\|^2 \|X\| + \sum_{j=0}^{\infty} \|A(g)^j\|^2 \|\Sigma\| \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como g é uma ação estabilizante, existe $0 < \rho < 1$ tal que $\|A(g)\|_s \leq \rho$, no qual $\|\cdot\|_s$ representa a norma espectral de matrizes. Além disso, existe $\beta > 0$ tal que $\|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|_s$ (vide (Lütkepohl, 1996, p.111)). Portanto, podemos concluir de (3.16) que

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(X) &\leq \beta^2 \|Q(g)\| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(\|A(g)^k\|_s^2 \|X\| + \sum_{j=0}^{\infty} \|A(g)^j\|_s^2 \|\Sigma\| \right) \\ &\leq \beta^2 \|Q(g)\| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left(\rho^{2k} \|X\| + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2j} \|\Sigma\| \right) \\ &\leq \beta^2 \|Q(g)\| \left(\frac{\|X\|}{1 - \alpha \rho^2} + \frac{\|\Sigma\|}{(1 - \alpha)(1 - \rho^2)} \right), \end{aligned}$$

e o resultado segue. $\square$

O próximo resultado estabelece a monotonicidade da função valor $V_\alpha^*(\cdot)$.

Lema 3.2 *Se $X, Y \in \mathcal{X}$, então*

$$X \geq Y \Rightarrow V_\alpha^*(X) \geq V_\alpha^*(Y), \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Prova: Fixe $\alpha \in (0, 1)$, e seja $\mathbf{f}_\alpha^* \in \mathbf{F}$ a política ótima descontada correspondente, ou seja, $V_\alpha^*(X) = V_\alpha(\mathbf{f}_\alpha^*, X)$. Denotaremos por $\{g_k^*\}$ e $\{X_k^*\}$ a sequência de ações

e de segundo momento, respectivamente, correspondentes a política $\mathbf{f}_\alpha^*$ e condição inicial $X_0 = X$ em (3.8). Defina o operador de evolução

$$\Phi(k, s) = A(g_{k-1}^*)A(g_{k-2}^*) \cdots A(g_s^*), \quad \text{para cada } k > s \geq 0, \quad (3.17)$$

com $\Phi(s, s) = I$. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \langle Q(g_k^*), X_k^* \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left\langle Q(g_k^*), \Phi(k, s)X\Phi(k, s)' + \sum_{j=s}^{k-1} \Phi(k, j+1)\Sigma\Phi(k, j+1)' \right\rangle. \end{aligned}$$

Note que se $X \geq Y$ então $\Phi(k, s)X\Phi(k, s)' \geq \Phi(k, s)Y\Phi(k, s)'$, logo

$$\langle Q(g_k^*), \Phi(k, s)X\Phi(k, s)' \rangle \geq \langle Q(g_k^*), \Phi(k, s)Y\Phi(k, s)' \rangle.$$

Temos disto que, se $X \geq Y$, então

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(X) &\geq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left\langle Q(g_k^*), \Phi(k, s)Y\Phi(k, s)' + \sum_{j=s}^{k-1} \Phi(k, j+1)\Sigma\Phi(k, j+1)' \right\rangle \\ &\geq V_\alpha^*(Y), \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. □

Lema 3.3 *Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$V_\alpha^*(X) - V_\alpha^*(\Sigma) \geq -c, \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Prova: Seja $\{g_k^*\}$ e $\{X_k^*\}$ de acordo com (3.8) e tal que

$$V_\alpha^*(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \langle Q(g_k^*), X_k^* \rangle.$$

Note que

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(X) &= \langle Q(g_0^*), X \rangle + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \langle Q(g_{k+1}^*), X_{k+1}^* \rangle \\ &\geq \langle Q(g_0^*), X \rangle + \alpha V_\alpha^*(X_1^*). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como $X_1^* \geq \Sigma$ para cada $X_0^* = X \in \mathcal{X}$ (veja (3.8)), temos do Lema 3.2 que $V_\alpha^*(X_1^*) \geq V_\alpha^*(\Sigma)$, do qual combinado com (3.18) implica que

$$V_\alpha^*(X) \geq \langle Q(g_0^*), X \rangle + \alpha V_\alpha^*(\Sigma) \geq \alpha V_\alpha^*(\Sigma). \quad (3.19)$$

Subtraindo ambos os lados de (3.19) pelo fator $V_\alpha^*(\Sigma)$ obtemos

$$V_\alpha^*(X) - V_\alpha^*(\Sigma) \geq -(1 - \alpha)V_\alpha^*(\Sigma). \quad (3.20)$$

O resultado então segue de (3.20) pois o Lemma 3.1 assegura a existência de uma constante $c > 0$ tal que $(1 - \alpha)V_\alpha^*(\Sigma) \leq c$. $\square$

Lema 3.4 *Se Hipótese 3.2 é satisfeita, então existem constantes positivas c_1, c_2 tal que*

$$V_\alpha^*(X) \leq c_1 \|X\| + c_2 + V_\alpha^*(\Sigma + S_c), \quad \forall \alpha \in (0, 1), \forall X \in \mathcal{X}, \quad (3.21)$$

no qual S_c satisfaz (3.14).

Prova: Sejam $g_{c_0}, \dots, g_{c_N}$ os controles que satisfazem Hipótese 3.2, e para uma condição inicial arbitrária $Z_0 = X \in \mathcal{X}$ defina as matrizes $Z_1, \dots, Z_{N+1}$ de acordo com

$$Z_{k+1} = A(g_{c_k})Z_k A(g_{c_k})' + \Sigma, \quad k = 0, \dots, N. \quad (3.22)$$

Iterando (3.22) obtemos (veja S_c em (3.14))

$$\begin{aligned} Z_{N+1} &= \Sigma + S_c + A(g_{c_N}) \dots A(g_{c_0}) X A(g_{c_0})' \dots A(g_{c_N})', \\ &= \Sigma + S_c, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para cada $Z_0 = X \in \mathcal{X}$, no qual a última igualdade segue da hipótese de controlabilidade para a origem $A(g_{c_N}) \dots A(g_{c_0}) = 0$. Agora criaremos a sequência $\{Z_k\}_{k=N+2}^\infty$ conforme a seguir. Fixe $\alpha \in (0, 1)$, e seja respectivamente $\{g_k^*\}$ e $\{X_k^*\}$ as sequências de ações e de segundo momento em (3.8) com condição inicial fixada $X_0^* = \Sigma + S_c$ e de tal modo que

$$V_\alpha^*(\Sigma + S_c) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \langle Q(g_k^*), X_k^* \rangle.$$

Tome $Z_{k+N+1} = X_k^*$, para todo $k \geq 0$. Note que

$$V_\alpha^*(\Sigma + S_c) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \langle Q(g_k^*), Z_{k+N+1} \rangle. \quad (3.24)$$

Através de um argumento de otimalidade e (3.24), temos

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(X) &\leq \sum_{k=0}^N \alpha^k \langle Q(g_{c_k}), Z_k \rangle + \alpha^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \langle Q(g_k^*), Z_{k+N+1} \rangle, \\ &= \sum_{k=0}^N \alpha^k \langle Q(g_{c_k}), Z_k \rangle + \alpha^{N+1} V_\alpha^*(\Sigma + S_c), \\ &\leq \sum_{k=0}^N \alpha^k \langle Q(g_{c_k}), Z_k \rangle + V_\alpha^*(\Sigma + S_c), \quad \forall Z_0 = X \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Por outro lado, temos de (3.23) que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \alpha^k \langle Q(g_{c_k}), Z_k \rangle &\leq N \left(\max_{k=0, \dots, N} \langle Q(g_{c_k}), Z_k \rangle \right) \\ &\leq Nq(\|X\| + \|\Sigma\| + \|S_c\|), \quad \forall Z_0 = X \in \mathcal{X} \end{aligned} \quad (3.26)$$

no qual $q := \max_{k=0, \dots, N} \|Q(g_{c_k})\|$. O resultado então segue de (3.25) e (3.26) pois $\alpha \in (0, 1)$ foi considerado arbitrário. $\square$

Vamos considerar a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO 1: A condição (H_1) no Teorema 3.1 é satisfeita. De fato, tomando $X = X_0 = \Sigma$ em (3.15), temos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$(1 - \alpha)V_\alpha^*(\Sigma) \leq c, \quad \forall \alpha \in (0, 1),$$

o que demonstra a afirmação.

AFIRMAÇÃO 2: Se a Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2 e 3.3 são satisfeitas então também é satisfeita a condição (H_2) .

Para auxiliar o argumento de demonstração desta afirmação, introduzimos uma notação preliminar. Primeiramente, lembramos que a Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2-3.3 asseguram a existência da política $\mathbf{f}_{\alpha_n} \in \mathbf{F}$ que é α_n -descontada ϵ -ótima, ou seja,

$$V_{\alpha_n}^*(\Sigma) \leq V_{\alpha_n}(\mathbf{f}_{\alpha_n}, \Sigma) \leq V_{\alpha_n}^*(\Sigma) + \epsilon. \quad (3.27)$$

Adiante fixaremos $\alpha_{n_0} \in (0, 1)$ para algum $n_0 \geq 0$, e denotaremos respectivamente $\{g_k\}$ e $\{X_k\}$ como as sequências de ações de controle e de segundo momento geradas em (3.8) usando $\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}$ e $X_0 = \Sigma$. Através desta notação, podemos escrever que o custo descontado correspondente a $\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}$ e $X_0 = \Sigma$ é dado por

$$V_{\alpha_{n_0}}(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}, \Sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \langle Q(g_k), X_k \rangle. \quad (3.28)$$

Vamos definir o operador de evolução $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ conforme

$$\phi(k, i) = A(g_{k-1}) \dots A(g_i) \quad \text{para cada } k > i \geq 0.$$

Através desta representação temos que

$$\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k) = \phi(k, 0) \quad \text{e} \quad X_k = \sum_{j=0}^k \phi(k, j) \Sigma \phi(k, j)', \quad \forall k \geq 0. \quad (3.29)$$

O restante da prova está dividida em duas partes. Na primeira parte provamos que a Hipótese 3.1 é suficiente para a condição (H_2) , enquanto que na segunda parte provamos que ambas as Hipóteses 3.2 e 3.3 são suficientes para (H_2) .

Prova: Hipótese 3.1 implica em (H_2)

Segue da Hipótese 3.1 que, dado $\delta > 0$ arbitrário, existe uma sequência de descontos $\{\alpha_n\}$ com $\alpha_n \uparrow 1$ (no qual α_n pode depender de δ) tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k \left\| \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k)' Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k) \right\| \leq M + \delta, \quad \forall n \geq 0. \quad (3.30)$$

Fixe $\alpha_{n_0} \in (0, 1)$ com $n_0 \geq 0$ arbitrário. Por otimalidade, para cada $X \in \mathcal{X}$, segue que

$$V_{\alpha_{n_0}}^*(X) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \left\langle Q(g_k), \phi(k, 0) X \phi(k, 0)' + \sum_{j=0}^{k-1} \phi(k, j+1) \Sigma \phi(k, j+1)' \right\rangle,$$

do qual combinado com (3.28) e (3.29) resulta em

$$\begin{aligned} V_{\alpha_{n_0}}^*(X) - V_{\alpha_{n_0}}(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}, \Sigma) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \langle Q(g_k), \phi(k, 0) (X - \Sigma) \phi(k, 0)' \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \left\langle \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k)' Q(g_k) \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k), X - \Sigma \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Empregando (3.27), (3.30) e (3.31) concluimos que

$$V_{\alpha_{n_0}}^*(X) - V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma) \leq V_{\alpha_{n_0}}^*(X) - V_{\alpha_{n_0}}(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}, \Sigma) + \epsilon \leq (M + \delta)(\|X - \Sigma\|) + \epsilon.$$

Como $n_0 \geq 0$ foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que vale a seguinte desigualdade para $\alpha_n \uparrow 1$:

$$h_{\alpha_n}(X) := V_{\alpha_n}^*(X) - V_{\alpha_n}^*(\Sigma) \leq (M + \delta)(\|X - \Sigma\|) + \epsilon, \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad (3.32)$$

o que demonstra a desigualdade no lado direito em (3.13). Por outro lado, a desigualdade no lado esquerdo em (3.13) segue diretamente do Lema 3.3. Portanto a Hipótese 3.1 implica em (H_2) . $\square$

Prova: Hipóteses 3.2 e 3.3 implicam em (H_2)

Segue da Hipótese 3.3 que, dado $\delta > 0$ arbitrário, existe uma sequência de descontos $\{\alpha_n\}$ com $\alpha_n \uparrow 1$ (no qual α_n pode depender de δ) tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k \left\langle \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k)' Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k), S_c \right\rangle \leq M + \delta, \quad \forall n \geq 0. \quad (3.33)$$

Fixe $\alpha_{n_0} \in (0, 1)$ para algum $n_0 \geq 0$, e seja respectivamente $\{g_k\}$ e $\{X_k\}$ a sequência de ações e de segundo momento geradas em (3.8) usando $\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}$ e $X_0 = \Sigma$. Usando esta notação, podemos escrever que o custo descontado correspondente é

$$V_{\alpha_{n_0}}(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}, \Sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \langle Q(g_k), X_k \rangle \quad (3.34)$$

Vamos definir o operador de evolução $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ conforme

$$\phi(k, i) = A(g_{k-1}) \dots A(g_i) \quad \text{para cada } k > i \geq 0.$$

Através desta representação temos que

$$\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k) = \phi(k, 0) \quad \text{e} \quad X_k = \sum_{j=0}^k \phi(k, j) \Sigma \phi(k, j)', \quad \forall k \geq 0. \quad (3.35)$$

Vamos agora considerar uma outra recorrência definida por

$$Z_{k+1} = A(g_k) Z_k A(g_k)' + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, \quad Z_0 := \Sigma + S_c.$$

Usando um argumento de otimalidade em conjunto com (3.28) e (3.29), obtemos

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma + S_c) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \langle Q(g_k), Z_k \rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \left\langle Q(g_k), \phi(k, 0) S_c \phi(k, 0)' + \sum_{j=0}^k \phi(k, j) \Sigma \phi(k, j)' \right\rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \left\langle \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k)' Q(g_k) \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k), S_c \right\rangle + V_{\alpha_{n_0}}(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}, \Sigma). \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Combinando (3.27), (3.33) e (3.36), temos

$$\begin{aligned}
 V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma + S_c) - V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma) &\leq V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma + S_c) - V_{\alpha_{n_0}}(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}}, \Sigma) + \epsilon \\
 &\leq \epsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n_0}^k \left\langle \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k)' Q(g_k) \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_{n_0}})}(k), S_c \right\rangle \\
 &\leq \epsilon + M + \delta. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, do Lemma 3.4 existem constantes positivas c_1, c_2 tal que

$$V_{\alpha_{n_0}}^*(X) \leq c_1 \|X\| + c_2 + V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma + S_c), \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.38)$$

Portanto de (3.37) e (3.38) obtemos

$$\begin{aligned}
 h_{\alpha_{n_0}}(X) &:= V_{\alpha_{n_0}}^*(X) - V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma) \leq c_1 \|X\| + c_2 + V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma + S_c) - V_{\alpha_{n_0}}^*(\Sigma) \\
 &\leq c_1 \|X\| + c_2 + \epsilon + M + \delta.
 \end{aligned}$$

Finalmente, como o índice n_0 foi escolhido arbitrariamente, podemos concluir que

$$h_{\alpha_n}(X) \leq c_1 \|X\| + c_2 + \epsilon + M + \delta, \quad \text{para cada } X \in \mathcal{X}, \quad \text{com } \alpha_n \uparrow 1, \quad (3.39)$$

o que prova a desigualdade no lado direito em (3.13). A desigualdade no lado esquerdo em (3.13) segue diretamente do Lema 3.3. Este argumento completa a prova de que as Hipóteses 3.2 e 3.3 implicam em (H_1) – (H_2) . $\square$

3.2.4 Condições suficientes para Hipótese 3.1

Apresentamos a seguir condições que implicam na Hipótese 3.1. Relembramos que esta hipótese é suficiente para garantir a existência de política ótima estacionária para o problema de custo médio a longo prazo (vide Corolário 3.1). A

principal condição a ser apresentada adiante requer que o custo por estágio seja uniformemente limitado para as trajetórias α -descontada ϵ -ótima com desconto tendendo a um. Além disso, uma noção de persistência de excitação também deve ser satisfeita.

Definição 3.3 *Considere a Definição 3.2, agora adotando a seguinte estrutura para o operador de evolução $\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$:*

$$\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(k, i) = A(f_{k-1}(X_{k-1})) \dots A(f_i(X_i)), \quad k > i \geq 0,$$

com $\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(k, 0) = A(f_{k-1}(X_{k-1})) \dots A(f_0(0))$, e $\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(k, k)$ sendo a matriz identidade.

Podemos agora apresentar o seguinte resultado.

Lema 3.5 *Para algum $\epsilon \geq 0$ and $\alpha_0 \in (0, 1)$, seja $\mathbf{f}_{\alpha} = \mathbf{f}_{\alpha, \epsilon} \in \mathbf{F}$ a política que satisfaz a Proposição 3.2 para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1)$. Considere as hipóteses:*

(C₁) *Existe uma constante $\gamma > 0$ tal que*

$$\|Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha})}\| \leq \gamma, \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, 1), \quad \forall k \geq 0;$$

(C₂) *Existem duas constantes positivas β_{α} e ξ_{α} tal que*

$$\|\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k+n, k)\| \leq \beta_{\alpha} \exp(-\xi_{\alpha} \cdot n), \quad \forall k > n \geq 0,$$

com $\sup_{\alpha \in [\alpha_0, 1)} \beta_{\alpha} < \infty$ e $\inf_{\alpha \in [\alpha_0, 1)} \xi_{\alpha} > 0$.

Se ambas as condições (C₁) e (C₂) são válidas então a Hipótese 3.1 é satisfeita.

Prova: A demonstração segue imediatamente da desigualdade

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left\| \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k, 0)' Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k, 0) \right\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k, 0)\|^2 \|Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha})}\| \\ &\leq \beta^2 \gamma / (1 - \exp(-\xi)), \end{aligned}$$

no qual $\beta := \sup_{\alpha \in [\alpha_0, 1)} \beta_{\alpha}$ e $\xi := \inf_{\alpha \in [\alpha_0, 1)} \xi_{\alpha}$. □

O corolário a seguir segue imediatamente do Corolário 3.1, p. 63, e Lema 3.5.

Corolário 3.2 *Se as ambas as condições (C_1) e (C_2) no Lema 3.5 são válidas, então existe uma política ótima estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ no custo médio e existe uma constante $\rho^* \geq 0$ tal que*

$$J^*(X) = J(\mathbf{f}^*, X) = \rho^*, \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Apresentamos a seguir condições suficientes para (C_1) e (C_2) . Relembramos a seguir um conceito conhecido na literatura como *persistência de excitação* (veja (Panteley et al., 2001) e (Loria et al., 2005) para mais detalhes).

Definição 3.4 *Dado $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ e $U_1, U_2 \in \mathbb{S}_+^n$, dizemos que a tripla $(\mathbf{f}, U_1, U_2)$ possui persistência de excitação se existir $\tau_1, \tau_2 > 0$ e $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\tau_1-1} \Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, k-i) U_1 \Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, k-i)' &\geq \sigma_1 I, \quad \forall k \geq \tau_1, \quad e \\ \sum_{i=0}^{\tau_2-1} \Phi_0^{(\mathbf{f})}(k+i, k)' U_2 \Phi_0^{(\mathbf{f})}(k+i, k) &\geq \sigma_2 I, \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Além disso, dizemos que a tripla $(\mathbf{f}_\alpha, U_1, U_2)$ possui persistência de excitação α -uniforme se a tripla $(\mathbf{f}_\alpha, U_1, U_2)$ possui persistência de excitação para cada $\alpha \in [\alpha_0, 1)$, para algum dado $\alpha_0 \in (0, 1)$, e os números $\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2$ não dependem de α .

Corolário 3.3 *Suponha que o operador $Q(\cdot)$ seja contínuo e que $\mathcal{G}(\Sigma) \equiv \mathcal{G}$. Seja $\mathbf{f}_\alpha \in \mathbf{F}$ como no Lema 3.5 e assuma que a próxima condição seja válida:*

(C_3) *Suponha que para algum $\alpha_0 \in (0, 1)$, $\nu > 0$, e uma matriz $\Upsilon \in \mathbb{S}_+^n$ tenhamos*

$$\mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_\alpha)} \leq \nu, \quad \text{and} \quad Q_k^{(\mathbf{f}_\alpha)} \geq \Upsilon, \quad \forall \alpha \in [\alpha_0, 1), \quad \forall k \geq 0;$$

e a tripla $(\mathbf{f}_\alpha, \Sigma, \Upsilon)$ possui persistência de excitação α -uniforme.

Então as condições (C_1) e (C_2) são válidas, e as conclusões do Corolário 3.2 também são válidas.

A demonstração do Corolário 3.3 encontra-se disponível na Seção 3.2.5.

Comentário 3.3 A hipótese de persistência de excitação α -uniforme necessária em (C_3) é satisfeita, por definição, se existirem constantes positivas δ_1, δ_2 satisfazendo $\Sigma > \delta_1 I$ e $\Upsilon > \delta_2 I$.[†]

Exemplo 3.2 Vamos considerar o sistema (3.1) satisfazendo

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ 2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 2.3 \\ 1 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad E = I,$$

e $A(g) := gA_1 + (1-g)A_2$ para cada g no intervalo compacto $\mathcal{G} = [0, 1]$. Considere uma função contínua arbitrária (possivelmente não-linear) $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{S}_+^2$ e assuma por um momento que (C_3) seja válido. Então temos do Corolário 3.3 que existe uma política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$ e uma constante $\rho^* \geq 0$ tal que

$$\rho^* = J^*(X_0) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle X_k^*, Q(g_k^*) \rangle \leq J(\mathbf{f}, X_0), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad \forall X_0 \in \mathcal{X},$$

no qual $g_k^* = f^*(X_k^*)$, e $X_{k+1}^* = A(g_k^*)X_k^*A(g_k^*)' + I$. Para fins de avaliação numérica, seja $C : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ a função de Vinogradov (Wu, 1974), ou seja,

$$C(g) = \begin{bmatrix} c_{11}(g) & c_{12}(g) \\ c_{21}(g) & c_{22}(g) \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{para cada } g \in \mathcal{G},$$

no qual

$$c_{11}(g) = -1 - 9 \cos^2(6g) + 12 \sin(6g) \cos(6g),$$

$$c_{12}(g) = 12 \cos^2(6g) + 9 \sin(6g) \cos(6g),$$

$$c_{21}(g) = -12 \sin^2(6g) + 9 \sin(6g) \cos(6g),$$

$$c_{22}(g) = -1 - 9 \sin^2(6g) - 12 \sin(6g) \cos(6g),$$

e tome $Q(g) = C(g)'C(g) + 10^{-5}I$ para cada $g \in \mathcal{G}$. Agora seja $\mathcal{G} = [0.55, 0.85]$, e note da Fig. 3.2 que a norma espectral $\|A(g)\|_s$ é estritamente menor que um para cada $g \in \mathcal{G}$. Usando este fato, segue que (C_3) é satisfeita. Se a sequência de ações de controle ótima $\{g_k^*\}$ converge, digamos para g^* , então com a ajuda de uma avaliação numérica obtemos $(\rho^*, g^*) = (3.086, 0.753)$, veja Fig. 3.3.

[†]Dado uma política $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ qualquer, e sabendo que $\Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, k) = I$, $\forall k \geq 0$, temos que $\Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, k)\Sigma\Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, k)' > \delta_1 I$ e $\Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, k)'\Upsilon\Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, k) > \delta_2 I$ e disto podemos concluir que $(\mathbf{f}_\alpha, \Sigma, \Upsilon)$ é α -uniformly persistently exciting.

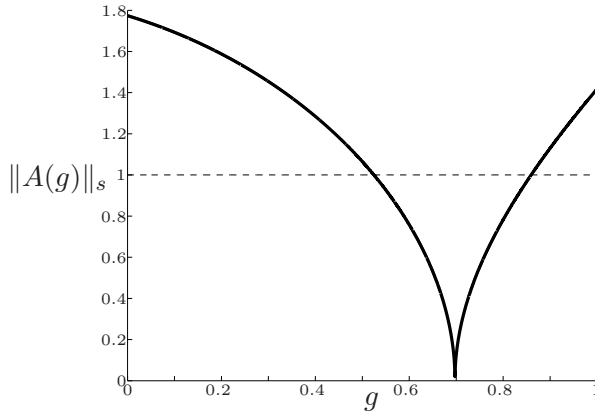


Figura 3.2: A norma espectral da função $A(\cdot)$ no Exemplo 3.2.

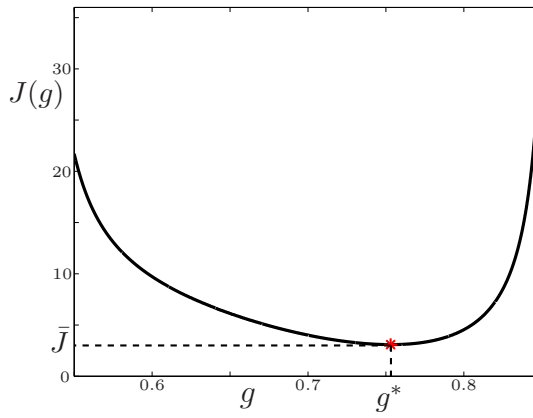


Figura 3.3: Gráfico do custo médio a longo prazo $J(g)$ em (3.9) para cada ação fixada $g \in \mathcal{G}$ de acordo com Exemplo 3.2. O ponto de mínimo é $(\bar{J}, g^*) = (3.086, 0.753)$.

3.2.5 Prova do Corolário 3.3

Vamos considerar a seguinte afirmação.

AFIRMAÇÃO 3: *Se $Q(\cdot)$ é operador contínuo e $\mathcal{G}(\Sigma) \equiv \mathcal{G}$, então a condição (C_3) implica em ambas (C_1) e (C_2) .*

De fato, mostraremos a Afirmação 3 usando os Lemas 3.7 e 3.8 a seguir para assegurar (C_1) e (C_2) , respectivamente. A prova do Corolário 3.3 então segue imediatamente através da combinação do Teorema 3.5 e o fato na Afirmação 3.

Tendo estabelecido este caminho, resta-nos provar os Lemas 3.7 e 3.8. Para este propósito, vamos considerar os conjuntos de nível de controle como segue.

$$G_\lambda(X) := \{g \in \mathcal{G}(X) \mid \langle Q(g), X \rangle \leq \lambda\}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.40)$$

Lema 3.6 *Seja $X, Y \in \mathcal{X}$ tal que $X \geq Y$ e $\mathcal{G}(X) \subseteq \mathcal{G}(Y)$. Então $G_\lambda(X) \subseteq G_\lambda(Y)$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*

Prova: Fixe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ e $X \in \mathcal{X}$. Podemos assumir que $G_\lambda(X)$ é não-vazio pois caso contrário o resultado segue trivialmente. Agora tome $g \in G_\lambda(X)$ e note que $g \in \mathcal{G}(X)$. Portanto $g \in \mathcal{G}(Y)$ pois, por hipótese, $\mathcal{G}(X) \subseteq \mathcal{G}(Y)$. Isto conduz à

$$X \geq Y \quad \Rightarrow \quad \langle Q(g), Y \rangle \leq \langle Q(g), X \rangle \leq \lambda,$$

que significa que $g \in G_\lambda(Y)$ e isto prova que $G_\lambda(X) \subseteq G_\lambda(Y)$. $\square$

Seja $\{X_k\}$ uma trajetória qualquer em (3.8), e suponha por um momento que $\mathcal{G}(X_k) \subseteq \mathcal{G}(\Sigma)$ para cada $k \geq 1$. Como $X_k \geq \Sigma$ para todo $k \geq 1$, segue do Lema 3.6 que

$$G_\lambda(X_k) \subseteq G_\lambda(\Sigma), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \forall k \geq 1. \quad (3.41)$$

Baseando-nos neste fato, provamos o lema a seguir.

Lema 3.7 *Para um dado $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$, tome $X_0 = 0$ e seja $\{X_k\}$ a trajetória correspondente em (3.8). Suponha que $\mathcal{G}(X_k) \subseteq \mathcal{G}(\Sigma)$ para cada $k \geq 1$ e que $Q(\cdot)$ seja uma função contínua. Se existir uma constante $\nu > 0$ tal que*

$$\mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})} \leq \nu, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.42)$$

então existe uma constante $\gamma > 0$ (que não depende de $\{f_k\}$) tal que $\|Q_k^{(\mathbf{f})}\| \leq \gamma$ para cada $k \geq 0$.

Prova: Escreva $\mathbf{f} = \{f_k\}$ e tome $g_k = f_k(X_k)$ para cada $k \geq 0$. A hipótese em (3.42) implica que $g_k \in G_\nu(X_k)$, $\forall k \geq 0$. Disto e de (3.41) temos que $g_k \in G_\nu(\Sigma)$, $\forall k \geq 0$. Portanto

$$Q(g_k) \in Q(G_\nu(X_k)) \subseteq Q(G_\nu(\Sigma)), \quad \forall k \geq 0 \quad (3.43)$$

Relembre que, da hipótese de inf-compacto, item (iii), p.60, o conjunto $G_\nu(\Sigma)$ é compacto. Como a função $Q(\cdot)$ é contínua por hipótese e $G_\nu(\Sigma)$ é compacto, temos que o contradomínio $Q(G_\nu(\Sigma))$ é compacto, conforme (Rudin, 1987, Th. 2.4, p. 36). Portanto o valor $\gamma = \max\{\|U\| : U \in Q(G_\nu(\Sigma))\}$ é finito e o resultado segue disto e de (3.43). $\square$

Agora, para completar a prova do Corolário 3.3, resta mostrar o Lema 3.8. Para isto, precisamos do próximo resultado auxiliar.

Proposição 3.3 (*Vargas e do Val, 2008a, Lemma 5*). *Para uma dada política $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$, tome $X_0 = 0$ e seja $\{X_k\}$ a sequência correspondente em (3.8). Se a tripla $(\mathbf{f}, \Sigma, \Upsilon)$ possui persistência de excitação, então existem duas constantes $\tau > 0$ e $\sigma > 0$ (que dependem unicamente das constantes $\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2$ da Definição 3.4) tal que*

$$\sum_{i=k}^{k+\tau} \langle \Upsilon, X_i \rangle \geq \sum_{j=\tau}^k \sigma \|\Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, j)\|^2, \quad \forall k \geq \tau. \quad (3.44)$$

Lema 3.8 *Suponha que $\mathbf{f}_\alpha \in \mathbf{F}$ satisfaça (C_3) , e seja $\{X_k^{(\mathbf{f}_\alpha)}\}$ a recorrência correspondente em (3.8) com $X_0^{(\mathbf{f}_\alpha)} = 0$. Se $\mathcal{G}(X_k^{(\mathbf{f}_\alpha)}) \subseteq \mathcal{G}(\Sigma)$ para cada $k \geq 0$, então existem constantes $\beta > 0$ e $\xi > 0$ (que não dependem de $\mathbf{f}_\alpha$) tal que*

$$\|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(k, i)\|^2 \leq \beta e^{-\xi(k-i)}, \quad \forall k \geq i \geq 0. \quad (3.45)$$

Prova: De (C_3) , existe uma constante $\nu > 0$ e uma matriz $\Upsilon \in \mathbb{S}_+^n$ tal que $\nu \geq \langle Q_k^{(\mathbf{f}_\alpha)}, X_k^{(\mathbf{f}_\alpha)} \rangle$ e $Q_k^{(\mathbf{f}_\alpha)} \geq \Upsilon$ para cada $k \geq 0$. Portanto,

$$(n+1)\nu \geq \sum_{i=k}^{k+n} \langle \Upsilon, X_i^{(\mathbf{f}_\alpha)} \rangle, \quad \forall k, n \geq 0. \quad (3.46)$$

Diminuindo, se necessário, a constante $\sigma > 0$ em (3.44), podemos mostrar após certa manipulação algébrica que, para alguma constante $\tau > 0$,

$$\sum_{i=k}^{k+\tau} \langle \Upsilon, X_i^{(\mathbf{f}_\alpha)} \rangle \geq \sigma \cdot \sum_{j=0}^k \|\Phi_0^{(\mathbf{f})}(k, j)\|^2, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.47)$$

Combinando (3.46) e (3.47), obtemos

$$M := (\tau + 1)\nu\sigma^{-1} \geq \sum_{j=0}^k \|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(k, j)\|^2, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.48)$$

Note que as constantes ν, τ e σ , por hipótese, não dependem de $\mathbf{f}_\alpha$. Para cada $n, m \geq 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} (n+1)\|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(n+m, n)\|^2 &= \sum_{j=0}^n \|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(n+m, j+m)\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(j+m, m)\|^2 \\ &\leq \sup_{k \geq i \geq 0} \|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(k, i)\|^2 \cdot \sum_{j=0}^{n+m} \|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(n+m, j)\|^2. \end{aligned}$$

De (3.48), a série mais a direita na desigualdade acima é limitada superiormente por uma constante $M > 0$ (que não depende de $\mathbf{f}_\alpha$), e o termo “sup” também possui o mesmo limitante. Portanto,

$$(n+1)\|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(n+m, n)\|^2 \leq M^2, \quad \forall n, m \geq 0. \quad (3.49)$$

Tomando

$$a_n := \sup_{m \geq 0} \|\Phi_0^{(\mathbf{f}_\alpha)}(n+m, n)\|^2, \quad \forall n \geq 0,$$

temos de (3.49) que $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e o resultado desejado segue do Lema 3.1 (veja Apêndice). $\square$

Apêndice

Lemma 3.1 *Seja $\{A_k\}$ uma sequência de matrizes limitada. Para cada $k > i$ e $i \geq 0$, defina $\phi(k, i) = A_{k-1} \dots A_i$ com $\phi(k, k)$ sendo a matriz identidade. Seja $\{a_n\}$ definida conforme*

$$a_n = \sup_{m \geq 0} \|\phi(m+n, n)\|, \quad \forall n \geq 0.$$

Se $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então existe $\beta > 0$ e $\xi > 0$ tal que

$$\|\phi(k, i)\| \leq \beta e^{-\xi(k-i)}, \quad \forall k \geq i \geq 0.$$

Proof: Tome arbitrariamente $\gamma > 1 + \sup_{k \geq 0} \|A_k\|$. Logo $\|\phi(m, n)\| \leq \gamma^{m-n}$ para cada $m \geq n$. Por hipótese existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|\phi(m + n, m)\| < \gamma^{-1}, \quad \forall m \geq 0.$$

Portanto para cada $k > 0$, podemos escrever

$$\|\phi(m + kn_0, m)\| \leq \prod_{\ell=0}^{k-1} \|\phi(m + (\ell + 1)n_0, m + \ell n_0)\| < \gamma^{-k}.$$

Além disso, se o número t satisfaz $kn_0 \leq t < (k + 1)n_0$, obtemos a identidade

$$\|\phi(t + m, m)\| = \|\phi(t + m, kn_0 + m)\phi(kn_0 + m, m)\|,$$

que implica $\|\phi(t + m, m)\| \leq \gamma^{n_0} \gamma^{-k}$. Mas como $t/n_0 < k + 1$ temos $\gamma^{-k} < \gamma^{(1-t/n_0)}$, e como resultado

$$\|\phi(t + m, m)\| \leq \gamma^{(n_0+1)} \gamma^{(-1/n_0)t}. \quad (3.50)$$

Agora se $t < n_0$ obtemos

$$\|\phi(t + m, m)\| \leq \gamma^{n_0} \leq \gamma^{(n_0+1)} \gamma^{(-1/n_0)t}. \quad (3.51)$$

Finalmente, podemos concluir de (3.50) e (3.51) que

$$\|\phi(t + m, m)\| \leq \beta e^{-\xi t}, \quad \forall t, m \geq 0,$$

tomando $\beta = \gamma^{n_0}$ e $\xi = \ln(\gamma)/n_0$. Este argumento completa a prova. $\square$

3.3 Artigo: Average optimal stationary policies: convexity and convergence conditions in linear stochastic control systems

Abstract

This paper provides a set of conditions for the existence of an optimal stationary policy in the long-run average cost control problem of linear stochastic

systems. The main conditions are based on convexity of the cost by stage and convergence of trajectories. The discrete-time system is assumed to be linear with respect to the state but the controls take an abstract state-feedback structure, possibly a nonlinear one. An application is considered to illustrate the derived theory.

3.3.1 Introduction

Consider a discrete-time stochastic linear system defined in a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$ as follows.

$$x_{k+1} = A(g_k)x_k + Ew_k, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (3.52)$$

where x_k and $w_k, k = 0, 1, \dots$ are processes taking values respectively, in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^q$, which represent the system state, and additive noisy input, respectively. The noisy input $\{w_k\}$ forms an iid process with zero mean and covariance matrix equal to the identity for each $k \geq 0$. The matrix E , of dimension $n \times q$, is given. The variable g_k , at the k -th stage, represents the *control action* and belongs to a prescribed set $\mathcal{G}$. We let A be a continuous operator, possibly nonlinear, that maps $\mathcal{G}$ to the space of real matrices of dimension $n \times n$.

The performance index we shall consider associated with (3.52) is the long-run average cost

$$\bar{J} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E[x_k' Q(g_k) x_k], \quad (3.53)$$

where $E[\cdot]$ denotes the mathematical expectation and Q is a given operator that maps $\mathcal{G}$ to the space of nonnegative symmetric matrices of dimension $n \times n$.

The control problem we are interested in is as follows. Determine, if exists, a policy $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_k, \dots\}$, that minimizes the long-run average cost (3.53) subject to (3.52). The policy $\mathbf{f}$ contains a set of control functions which specify the control action in feedback form $g_k = f_k(x_k)$ that will be applied at each stage k , whenever the state is x_k . As a matter of fact, the feedback functions f_k will be associated with the second order moment of x_k ; the use of quadratic cost in (3.53) allows for this choice. Further simplicity is attained if an stationary policy

of the form $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$ attains the minimum cost performance J in (3.53), and we seek conditions for that to occur.

In the context of Markov decision processes, the problem of seeking stationary optimal policies has been addressed by many investigations spanning many years; see (Bertsekas e Shreve, 1978), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1990), (Arapostathis et al., 1993). However, to the best of the author's knowledge, there are no results concerning the existence of stationary optimal policies for the system (3.52) with control cost (3.53), apart from (Vargas e do Val, 2008b) and (Vargas e do Val, n.d.b). The authors require in (Vargas e do Val, 2008b) an uniform exponential stability condition, whereas in (Vargas e do Val, n.d.b) a controllability to the origin (deadbeat control) condition is necessary to assure the result. The conditions in these two approaches are not comparable, in the sense that the condition of (Vargas e do Val, 2008b) may not imply on the one in (Vargas e do Val, n.d.b), and vice versa. In contrast to the papers (Vargas e do Val, 2008b) and (Vargas e do Val, n.d.b), neither stability nor controllability is required here. In point of fact, we employ different conditions, such as convexity and equicontinuity (see Assumption 3.1), and this sets the novelty of this approach.

The precise technical setup of this paper is now introduced. From the assumption on the process $\{w_k\}$, $k \geq 0$, we have that the second moment of the system state x_k in (3.52), represented by

$$X_k = \mathbb{E}[x_k x_k'], \quad \forall k \geq 0, \quad (3.54)$$

satisfies a deterministic matrix recurrence (see (3.59)), and there holds the identity

$$\mathbb{E}[x_k' Q(g_k) x_k] = \langle X_k, Q(g_k) \rangle, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k \geq 0,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the Frobenius inner product. Hence the long-run average cost (3.53) is identical to

$$\bar{J} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \langle X_k, Q(g_k) \rangle. \quad (3.55)$$

Thus we can recast the control problem as follows. Each control action $g_k = f_k(X_k)$ is specified by a function f_k that depends on X_k at the k -th stage, and the policy $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_k, \dots\}$ is a sequence of corresponding control functions (Bertsekas e Shreve, 1978), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996). Let $\mathbf{F}$ be the set of all feasible policies $\mathbf{f}$, and let $\mathbf{F}_s \subset \mathbf{F}$ be the set of all stationary policies, in such a way that if $\mathbf{f} \in \mathbf{F}_s$ then $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$. Let $\bar{J}(\mathbf{f}, X)$ be the cost $\bar{J}$ in (3.55) corresponding to a given policy $\mathbf{f}$ and $X_0 = X$. Since

$$\inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} \bar{J}(\mathbf{f}, X) \leq \bar{J}(\mathbf{f}, X), \quad \text{for each } X \text{ and } \mathbf{f} \in \mathbf{F},$$

we wish to determine under what conditions the equality

$$\inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} \bar{J}(\mathbf{f}, X) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}_s} \bar{J}(\mathbf{f}, X)$$

holds true. The main contribution of this paper is to assure that the stationary class $\mathbf{F}_s$ contains an optimal policy $\mathbf{f}^*$ satisfying

$$J(\mathbf{f}^*, X) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} J(\mathbf{f}, X) \tag{3.56}$$

for each X in a set $\mathcal{B}_0$.

The paper is organized as follows. Section 3.3.2 presents the necessary notation, definitions, assumptions, and the main result. The main result is presented in Theorem 3.1, and to illustrate it we introduce an application. Section 3.3.3 contains the proofs, and some concluding remarks are presented in Section 3.3.4.

3.3.2 Preliminaries, notations, and main results

The real and natural numbers are denoted by $\mathbb{R}$ and $\mathbb{N}$, respectively. The set of nonnegative real numbers is denoted by $\mathbb{R}_+$, and $\mathbb{R}^{n,m}$ is used to represent the space of all $n \times m$ real matrices. The superscript $'$ indicates the transpose of a matrix. Let $\mathbb{S}_+^n$ be the closed convex cone $\{U \in \mathbb{R}^{n,n} : U = U' \geq 0\}$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ will stand the Frobenius inner product in $\mathbb{S}_+^n$, and $\|\cdot\|$ will denote either the standard Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$ or the Frobenius norm for matrices. We say that a matrix sequence $\{U_k; k \geq 0\}$ is bounded if $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|U_k\| < \infty$.

The following definitions and conventions will apply throughout this paper.

- (i) $\mathcal{X}$ and $\mathcal{G}$ are given sets referred to as *state space* and *control space*, respectively. In particular, we assume that $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{S}_+^n$ and $\mathcal{G}$ are Borel spaces.
- (ii) For each $X \in \mathcal{X}$, there is given a nonempty measurable subset $\mathcal{G}(X)$ of $\mathcal{G}$. The set $\mathcal{G}(X)$ represents the set of *feasible controls* or *actions* when the system is in state $X \in \mathcal{X}$, and with the property that the graph

$$\text{Gr} := \{(X, g) | X \in \mathcal{X}, g \in \mathcal{G}(X)\} \quad (3.57)$$

of feasible state-actions pairs is measurable.

- (iii) (inf-compactness (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, p.28)). Let $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{S}_+^n$ be a lower semi-continuous function. The one-stage cost functional $\mathcal{C} : \text{Gr} \rightarrow \mathbb{R}_+$ is defined as follows:

$$\mathcal{C}(X, g) = \langle X, Q(g) \rangle, \quad \forall (X, g) \in \text{Gr}. \quad (3.58)$$

Moreover, for each $X \in \mathcal{X}$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+$, the set $\{g \in \mathcal{G}(X) | \mathcal{C}(X, g) \leq \lambda\}$ is compact.

- (iii') (continuous differentiability and convexity). For each $X \in \mathcal{X}$, the cost $\mathcal{C}(X, \cdot)$ is continuously differentiable and convex. We shall write $\mathcal{C}_g$ to denote the partial derivative of $\mathcal{C}$ with respect to the argument $g \in \mathcal{G}$.
- (iv) The measurable function $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ is called *feedback law* whenever $f(X) \in \mathcal{G}(X)$ for each $X \in \mathcal{X}$. A *policy* $\mathbf{f} = \{f_0, f_1, \dots\}$ is a sequence of feedback laws f_k , $k \geq 0$, and the set of all policies is denoted by $\mathbf{F}$. Elements of $\mathbf{F}$ of the form $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$ are referred to as *stationary policies*.
- (v) For a given policy $\mathbf{f} = \{f_k\} \in \mathbf{F}$, the second moment of x_k in (3.54) satisfies the recurrence (c.f. (Anderson e Moore, 1979, Ch.2))

$$X_{k+1} = A(g_k)X_k A(g_k)' + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, \quad X_0 = X \in \mathcal{X}, \quad (3.59)$$

with $\Sigma := EE'$, where the control action, applied at the k -th stage, obeys the rule $g_k = f_k(X_k)$. Accordingly, we represent the k -th stage cost by

$$\mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})} := \mathcal{C}(X_k, g_k) = \langle Q(g_k), X_k \rangle, \quad \forall k \geq 0.$$

It is important to make a distinction between the symbols $\bar{J}$, J , and $\underline{J}$. Namely, we focus the paper on the long-run average cost, defined as

$$\bar{J}(\mathbf{f}, X) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{C}_k^{(\mathbf{f})}, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad X \in \mathcal{X}; \quad (3.60)$$

but we also need the quantities $J(\mathbf{f}, X)$ and $\underline{J}(\mathbf{f}, X)$, which are defined as in (3.60) with “lim” and “lim inf” in place of “lim sup”, respectively.

The average cost control problem is to find a policy $\mathbf{f}^*$ such that

$$\bar{J}(\mathbf{f}^*, X) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} \bar{J}(\mathbf{f}, X) =: \bar{J}^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}_0, \quad (3.61)$$

where $\mathcal{B}_0$ is some subset of $\mathcal{X}$. The policy $\mathbf{f}^*$ satisfying (3.61) is referred to as *average cost optimal*, and the main contribution of this paper is to provide conditions to assure the existence of a stationary average cost optimal policy $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$.

The discounted criterion and the main result

For each $\alpha \in (0, 1)$, the discounted criterion we shall deal with is defined as

$$V_\alpha(\mathbf{f}, X) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathfrak{C}_k^{(\mathbf{f})}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad \forall X_0 = X \in \mathcal{X}, \quad (3.62)$$

where α denotes the *discount factor*. The associated control problem is

$$V_\alpha^*(X) := \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} V_\alpha(\mathbf{f}, X), \quad \forall X_0 = X \in \mathcal{X}. \quad (3.63)$$

Proposition 3.1 (*Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, Th.4.2.3, p.46*). *For each $\alpha \in (0, 1)$, there exists a stationary policy $\mathbf{f}_\alpha^* \in \mathbf{F}$ such that $V_\alpha^*(X) = V_\alpha(\mathbf{f}_\alpha^*, X)$ for each $X \in \mathcal{X}$.*

Stationary policies $\mathbf{f}_{\alpha_n}^* = \{f_n, f_n, \dots\}$ that satisfies Proposition 3.1 along a subsequence of discounts $\alpha_n \uparrow 1$ play an important role in the remaining analysis. Before presenting the next main assumption, let us recall the equicontinuity concept.

Definition 3.1 (Bartle, 1964, p.190). A sequence of functions $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ on $\mathcal{X}$ to $\mathcal{G}$ is said to be equicontinuous if, for each $\epsilon > 0$ there is a constant $\delta(\epsilon) > 0$ such that if $X, Y \in \mathcal{X}$ and $\|X - Y\| < \delta(\epsilon)$ then

$$\|f_n(X) - f_n(Y)\| < \epsilon, \quad \forall n \geq 0.$$

Let us consider the following assumption.

Assumption 3.1 There exists a sequence of discounts $\alpha_n \uparrow 1$ such that:

(C₀) The stationary policy

$$\mathbf{f}_{\alpha_n}^* = \{f_n, f_n, \dots\}, \quad \forall n \geq 0, \quad (3.64)$$

satisfies Proposition 3.1.

(C₁) The sequence of feedback laws $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ is equicontinuous.

(C₂) There exist a nonempty subset $\mathcal{B}_0$ of $\mathcal{X}$ and a constant $M > 0$ such that, if $X_0 \in \mathcal{B}_0$, then

$$J(f_n, X_0) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(f_n)} < M, \quad \forall n \geq 0. \quad (3.65)$$

(C₃) There exists a sequence $\{Z_k\}$ in $\mathcal{X}$ and a function $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ such that, for each $k \geq 0$,

$$X_k^{(f_n)} \rightarrow Z_k \quad \text{and} \quad f_n(Z_k) \rightarrow f(Z_k) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (3.66)$$

and the corresponding sequence of partial derivatives $\{\|\mathcal{C}_g(Z_k, f(Z_k))\|\}$ is bounded.

Now, we can state the following main result.

Theorem 3.1 If Assumption 3.1 holds, then there exist a stationary policy $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ and a set $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{X}$ such that

$$\bar{J}^*(X) = \bar{J}(\mathbf{f}^*, X) \leq \bar{J}(\mathbf{f}, X), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \forall X \in \mathcal{B}_0.$$

The proof of Theorem 3.1 is postponed to the next section.

An application

In this section we consider the linear-quadratic Gaussian (LQG) control problem. We shall show that the conditions of Assumption 3.1 are satisfied in the LQG setup, so that the result of Theorem 3.1 applies.

Let us consider the LQG control system

$$x_{k+1} = A(g)x_k + w_k, \quad \forall k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (3.67)$$

where $g \in \mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^{m,n}$, and

$$A(g) := A - Bg, \quad Q(g) := Q + g'Rg, \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

We assume that $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $Q \in \mathbb{S}_+^n$, and $R \in \mathbb{S}_+^m$, $R > 0$ are given matrices such that the pair (A, B) is stabilizable and $(Q^{1/2}, A)$ is detectable (see, for instance, (Lewis e Syrmos, 1995), (Davis e Vinter, 1985, Ch.6)). It is well-known that the optimal solution for the discounted LQG control problem is given by the so-called algebraic Riccati equation, i.e.,

$$S = \alpha A'SA + Q + \alpha^2 A'SB(\alpha B'SB + R)^{-1} B'SA \quad (3.68)$$

where the discounted optimal feedback law is (Davis e Vinter, 1985, Ch.6, p.263)

$$f_\alpha^*(X) = g_\alpha^* = (\alpha B'SB + R)^{-1} \alpha B'SA, \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.69)$$

Thus (C_0) holds. Note in (3.69) that the feedback law $f_\alpha^*(X)$ does not depend on $X \in \mathcal{X}$, so that the condition (C_1) is trivially satisfied for every subsequence $\alpha_n \uparrow 1$.

We claim that (C_2) is valid. Indeed, combining the facts that the Riccati equation (3.68) has a unique positive-semidefinite matrix S for each $\alpha \in (0, 1]$, that the matrix $A - Bg_\alpha^*$ is stable with $\alpha = 1$, and that $g_\alpha^* \rightarrow g_1^*$ as $\alpha \uparrow 1$, we can conclude that there exists $\epsilon > 0$ and $\xi < 1$ such that

$$\|A(g_\alpha^*)\|_s < \xi < 1, \quad \forall \alpha \in [1 - \epsilon, 1], \quad (3.70)$$

where $\|\cdot\|_s$ denotes the spectral norm. Using (3.70), one can show that, for each subsequence $\alpha_n \uparrow 1$ with $\alpha_n \in [1 - \epsilon, 1)$, there exists a corresponding $X(\alpha_n) \in \mathcal{X}$

such that (see (Kubrusly, 1986, Lem.L1, p.41))

$$X_k^{f_{\alpha_n}^*} \rightarrow X(\alpha_n) \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

Hence the limit in (3.65) does exist, see (Knopp, 1956, Th.1, p.33). This shows that (C_2) is valid.

To verify (C_3) , we recast (3.59) as

$$X_k^{(f_\alpha^*)} = A(g_\alpha^*)^k X_0 A(g_\alpha^*)^{k'} + \sum_{j=0}^{k-1} A(g_\alpha^*)^{k-j-1} \Sigma (A(g_\alpha^*)^{k-j-1})'.$$

Combining this identity, the convergence $g_\alpha^* \rightarrow g_1^*$, and (3.70), one can show that

$$X_k^{(f_\alpha^*)} \rightarrow Z_k \text{ as } \alpha \uparrow 1,$$

where $\{Z_k\}$ is a bounded sequence in $\mathcal{X}$. This implies that (C_3) holds true. Thus Assumption 3.1 is satisfied and the result of Theorem 3.1 applies for the LQG control problem.

Example 3.1 *To illustrate numerically the existence of the limit in (3.65), we consider the LQG single-input single-output control system (3.67) with parameters*

$$A = 2, \quad B = 3, \quad Q = 1, \quad R = 2.$$

The value of the limit (3.65) for a sequence $\alpha_n \uparrow 1$ is depicted in Fig. 3.4.

3.3.3 Proof of Theorem 3.1

This section is devoted to prove Theorem 3.1. We introduce some preliminary results before presenting the main argument of the proof. The next well-known result will be useful in the sequel.

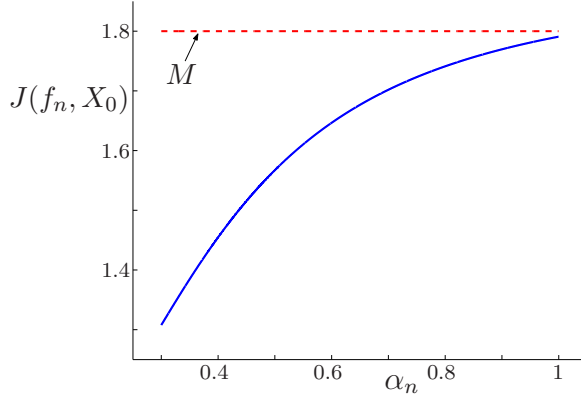


Figure 3.4: Plot of the limit $J(f_n, X_0)$ as in (3.65) for Example 3.1, with upper bound $M = 1.8$.

Proposition 3.2 (*Arapostathis et al., 1993, Th.A2*), (*Wirth, 2001, Cor.3.1*). *Let $\{c_k\}$ be a sequence of nonnegative numbers and $\alpha \in (0, 1)$. Then*

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k &\leq \liminf_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k c_k \\ &\leq \limsup_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k c_k \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k. \end{aligned}$$

The next result follows from Proposition 3.2 and an optimality argument.

Proposition 3.3 (*Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, p. 84*), (*Hernández-Lerma e Lasserre, 1990, p. 351*). *There holds*

$$\limsup_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) V_{\alpha}^*(X) \leq J^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.71)$$

Let us now consider the following useful result.

Proposition 3.4 (*Bartle, 1964, Lem.18.9, p.201*). *Let $r : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$. If, to some positive constant M , $\limsup_{\alpha \uparrow 1} r(\alpha) < M$, then there exists $\alpha_0 \in (0, 1)$ such that $r(\alpha) < M$ for each $\alpha \in [\alpha_0, 1)$.*

The next lemma extends the applicability of Proposition 3.4.

Lemma 3.2 *Let $r_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $n = 0, 1, \dots$, be such that*

$$\limsup_{\alpha \uparrow 1} r_n(\alpha) < M, \quad \forall n \geq 0.$$

Then there exists $\epsilon > 0$ and a subsequence $\{n_k\}$ from $\mathbb{N}$ such that

$$r_{n_k}(\alpha) < M, \quad \forall \alpha \in [1 - \epsilon, 1), \forall k \geq 0.$$

Proof: It follows from Proposition 3.4 that, for each $n = 0, 1, \dots$, there corresponds $\epsilon_n > 0$ such that

$$M > r_n(\alpha), \quad \forall \alpha \in [1 - \epsilon_n, 1) =: \vartheta_n. \quad (3.72)$$

Suppose for the moment that $\epsilon_n \downarrow 0$. Hence, from (3.72), $\vartheta_\infty := \bigcap_{n=0}^\infty \vartheta_n = \emptyset$. Set $r_\infty(\alpha) = \liminf_{n \rightarrow \infty} r_n(\alpha)$ for each $\alpha \in (0, 1)$. Since $\vartheta_\infty = \emptyset$, there is no $\alpha \in (0, 1)$ such that $M > r_\infty(\alpha)$. Hence $M \leq \liminf_{\alpha \uparrow 1} r_\infty(\alpha)$, which is a contradiction. Thus, it must be $\epsilon_n \not\rightarrow 0$, or equivalently, there must exist $\epsilon > 0$ such that $\epsilon_n \geq \epsilon$ for infinitely many values of n . This fact and (3.72) yield the result. $\square$

Remark 3.1 *By using an argument analogous to that used in the proof of Lemma 3.2, we can show that if*

$$m < \liminf_{\alpha \uparrow 1} r_n(\alpha), \quad \forall n \geq 0,$$

to some constant $m > 0$, then there exists $\epsilon > 0$ and a subsequence $\{n_k\}$ from $\mathbb{N}$ such that

$$m < r_{n_k}(\alpha), \quad \forall \alpha \in [1 - \epsilon, 1), \forall k \geq 0.$$

Recall the quantities $\bar{J}(\cdot)$, $J(\cdot)$, and $\underline{J}(\cdot)$. We can present the following auxiliary result.

Lemma 3.3 *If Assumption 3.1 holds, then*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J(f_n, X) \leq \bar{J}^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}_0,$$

where f_n and $\mathcal{B}_0$ is as in Assumption 3.1.

Proof: First, note from Proposition 3.2 that if $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ and $X \in \mathcal{X}$ then

$$\begin{aligned} \underline{J}(\mathbf{f}, X) &\leq \liminf_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) V_{\alpha}(\mathbf{f}, X) \\ &\leq \limsup_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) V_{\alpha}(\mathbf{f}, X) \leq \overline{J}(\mathbf{f}, X). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Fix $\epsilon > 0$ and let us define

$$m := \liminf_{n \rightarrow \infty} J(f_n, X) - \epsilon. \quad (3.74)$$

We then have $m < J(f_n, X)$ for infinitely many values of n (see Proposition 3.5 in Appendix). In addition, from Assumption 3.1(C_2) and (3.73), we can write

$$\begin{aligned} m < \underline{J}(f_n, X) &\leq \liminf_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) V_{\alpha}(f_n, X) \\ &\leq \limsup_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) V_{\alpha}(f_n, X) \leq \overline{J}(f_n, X) < M \end{aligned}$$

for infinitely many values of n . By setting

$$r_n(\alpha) = (1 - \alpha) V_{\alpha}(f_n, X), \quad \forall n \geq 0, \forall \alpha \in (0, 1),$$

we get from Lemma 3.2 and Remark 3.1 that there exist a constant $\epsilon_0 > 0$ and a subsequence $\{n_k\}$ from $\mathbb{N}$ satisfying

$$m < r_{n_k}(\alpha) = (1 - \alpha) V_{\alpha}(f_{n_k}, X) < M, \quad \forall \alpha \in [1 - \epsilon_0, 1).$$

But then, in view of the identity $V_{\alpha_n}^*(X) = V_{\alpha_n}(f_n, X)$ (see Assumption 3.1(C_0)), we have

$$m < r_{n_k}(\alpha_{n_k}) = (1 - \alpha_{n_k}) V_{\alpha_{n_k}}^*(X) < M, \quad (3.75)$$

provided that α_{n_k} is sufficiently near of 1. Passing the limit inferior in (3.75), we obtain

$$m \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - \alpha_{n_k}) V_{\alpha_{n_k}}^*(X). \quad (3.76)$$

Since

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (1 - \alpha_{n_k}) V_{\alpha_{n_k}}^*(X) \leq \limsup_{\alpha \uparrow 1} (1 - \alpha) V_{\alpha}^*(X),$$

it follows from (3.74), (3.76), and Proposition 3.3 that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} J(f_n, X) - \epsilon \leq \overline{J}^*(X).$$

The result then follows because $\epsilon > 0$ was taken arbitrarily. □

Lemma 3.4 *Let $\{\mathbf{f}_n\}_{n=0}^\infty$ be an arbitrary sequence of policies satisfying*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{J}(\mathbf{f}_n, X) \leq M \quad (3.77)$$

for some constant $M > 0$ and $X \in \mathcal{X}$. Then

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_n)} \right) \leq M.$$

Proof: Fix $\epsilon > 0$. By assumption, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\bar{J}(\mathbf{f}_n, X) < \epsilon + M, \quad \forall n \geq n_0.$$

Thus, if we consider sufficiently large values of n , then Proposition 3.5 (see Appendix) assures the existence of a natural number $\tilde{n}(\epsilon, \mathbf{f}_n)$ satisfying

$$N \geq \tilde{n}(\epsilon, \mathbf{f}_n) \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_n)} < (2\epsilon + M)N. \quad (3.78)$$

We now prove that the sequence $\{\tilde{n}(\epsilon, \mathbf{f}_n)\}_{n=n_0}^\infty$ is bounded above by a number that depends only on ϵ . Indeed, by way of contradiction, suppose that $\tilde{n}(\epsilon, \mathbf{f}_{n_k}) \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$ for some subsequence $\{n_k\}$ from $\mathbb{N}$. Note from (3.78) that

$$\tilde{n}(\epsilon, \mathbf{f}_{n_k}) > N \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_{n_k})} \geq (2\epsilon + M)N. \quad (3.79)$$

Setting $N_k = \tilde{n}(\epsilon, \mathbf{f}_{n_k}) - 1$ for each $k \geq 0$, we can write from (3.77) and (3.79) that

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{i=0}^{N_k-1} \mathcal{C}_i^{(\mathbf{f}_{n_k})} \geq 2\epsilon + M > \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{J}(\mathbf{f}_n, X),$$

which is absurd. Thus we can conclude that there exists a natural number $\bar{n}(\epsilon)$, uniform with respect to $\{\mathbf{f}_n\}_{n=0}^\infty$, such that

$$N \geq \bar{n}(\epsilon) \Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_n)} < (2\epsilon + M)N, \quad \forall n \geq n_0. \quad (3.80)$$

Taking the limit inferior of (3.80), we obtain

$$N \geq \bar{n}(\epsilon) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_n)} < (2\epsilon + M)N.$$

This shows the result since $\epsilon > 0$ was arbitrary. $\square$

The next result is an immediate application of the Fatou's lemma, see (Rudin, 1987, p.23).

Lemma 3.5 *Let $\{\mathbf{f}_n\}_{n=0}^\infty$ be a sequence of policies. Then, for each $N \geq 0$, there holds*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_n)} \geq \sum_{k=0}^{N-1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f}_n)}.$$

The next result will be useful in the sequel.

Lemma 3.6 *Let Assumption 3.1 holds. Then, for every fixed $k \geq 0$,*

$$f_n(X_k^{(f_n)}) \rightarrow f(Z_k) \text{ as } n \rightarrow \infty, \quad (3.81)$$

where f , f_n , $X_k^{(f_n)}$, and Z_k , $n = 0, 1, \dots$, $k = 0, 1, \dots$, are as in Assumption 3.1.

Proof: Since $\{f_n\}$ is equicontinuous by Assumption 3.1(C_1), given $\epsilon > 0$, there is a constant $\delta(\epsilon) > 0$ such that, if $X \in \mathcal{X}$ and $\|X - Z_k\| < \delta(\epsilon)$, then

$$\|f_n(X) - f_n(Z_k)\| < \epsilon, \quad \forall n \geq 0.$$

According to Assumption 3.1(C_3), $X_k^{(f_n)} \rightarrow Z_k$ as $n \rightarrow \infty$, so that for sufficiently large values of n we have $\|X_k^{(f_n)} - Z_k\| < \delta(\epsilon)$ and

$$\|f_n(X_k^{(f_n)}) - f_n(Z_k)\| < \epsilon \quad (3.82)$$

From Assumption 3.1(C_3), we have

$$\|f_n(Z_k) - f(Z_k)\| < \epsilon \quad (3.83)$$

for sufficiently large values of n . From (3.82) and (3.83),

$$\|f_n(X_k^{(f_n)}) - f(Z_k)\| \leq \|f_n(X_k^{(f_n)}) - f_n(Z_k)\| + \|f_n(Z_k) - f(Z_k)\| < 2\epsilon,$$

for all but a finite number of values of n . This implies the result since $\epsilon > 0$ was arbitrary. $\square$

The following lemma will be required in the sequel. For further details, see for instance (Cesari, 1983, p.102).

Lemma 3.7 *Let the cost $\mathcal{C}(X, \cdot)$ be convex and continuously differentiable. Then, for each $g, g_0 \in \mathcal{G}$,*

$$\mathcal{C}(X, g) \geq \mathcal{C}(X, g_0) + \langle g - g_0, \mathcal{C}_g(X, g_0) \rangle, \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.84)$$

Proof of Theorem 3.1

It follows from Lemma 3.3 that there exists a subsequence of feedback laws $\{f'_n\}_{n=0}^\infty$ from $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(f'_n, X) \leq \bar{J}^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}_0.$$

Using this fact in Lemma 3.4, we obtain

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(f'_n)} \right) \leq \bar{J}^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}_0. \quad (3.85)$$

Let us consider the following claim.

CLAIM: *There exists a feedback law f defining a well-behaved trajectory, i.e.,*

$$Y_{k+1} = A(f(Y_k))Y_k A(f(Y_k))' + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, Y_0 \in \mathcal{B}_0, \quad (3.86)$$

and the corresponding k -th cost by stage satisfies

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C} \left(X_k^{(f'_n)}, g_k^{(f'_n)} \right) \geq \mathcal{C}(Y_k, f(Y_k)) \quad (3.87)$$

where $g_k^{(f'_n)} := f'_n(X_k^{(f'_n)})$, $\forall n \geq 0$.

Hence, in view of (3.85), (3.86), (3.87), and Lemma 3.5, we may write

$$\bar{J}(f, X) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}(Y_k, f(Y_k)) \leq \bar{J}^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}_0.$$

Since $\bar{J}^*(X) \leq \bar{J}(\mathbf{f}, X)$ for all $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$, it follows that

$$\bar{J}(f, X) = \bar{J}^*(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}_0.$$

This proves that the stationary policy $\{f, f, \dots\}$ is average cost optimal and the result of Theorem 3.1 then follows.

The remaining part of this section is devoted to demonstrate the claim. For this purpose, we show in parallel that the sequence $\{Z_k\}$ as in Assumption 3.1(C_3) is identical to the sequence $\{Y_k\}$ in (3.86), i.e.,

$$Z_k = Y_k, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.88)$$

Let us recall the recurrence (3.59) evaluated to each feedback law f_n :

$$X_{k+1}^{(f_n)} = A \left(f_n(X_k^{(f_n)}) \right) X_k^{(f_n)} A \left(f_n(X_k^{(f_n)}) \right)' + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.89)$$

with $X_0 \in \mathcal{B}_0$.

An induction argument on k is now employed. Let (3.88) be valid for $k = 0$ and note from (3.84) that

$$\mathcal{C}(X_0, f_n(X_0)) \geq \mathcal{C}(X_0, f(X_0)) + \langle f_n(X_0) - f(X_0), \mathcal{C}_g(X_0, f(X_0)) \rangle$$

with $Y_0 = Z_0 = X_0$. Passing the limit inferior on both sides of this inequality, and considering that $f_n(X_0) \rightarrow f(X_0)$ (see (3.66)), we obtain

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}(X_0, f_n(X_0)) \geq \mathcal{C}(X_0, f(X_0)).$$

Moreover, we have $A(f_n(X_0)) \rightarrow A(f(X_0))$ since $A(\cdot)$ is continuous. It then follows from (3.86) and (3.89) that $X_1^{(f_n)} \rightarrow Z_1 = Y_1$. This shows that (3.86) and (3.87) hold for $k = 0$ since $\{f'_n\} \subseteq \{f_n\}$.

Let us now assume that (3.88) holds for $k = i$. The inequality (3.84) allows us to write

$$\begin{aligned} & \mathcal{C}(X_i^{(f_n)}, f_n(X_i^{(f_n)})) \\ & \geq \mathcal{C}(X_i^{(f_n)}, f(Z_i)) + \langle f_n(X_i^{(f_n)}) - f(Z_i), \mathcal{C}_g(X_i^{(f_n)}, f(Z_i)) \rangle. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Observing that (see (3.66))

$$\mathcal{C}_g(X_i^{(f_n)}, f(Z_i)) \rightarrow \mathcal{C}_g(Z_i, f(Z_i)) \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

that $\mathcal{C}_g(Z_i, f(Z_i))$ is bounded (see Assumption 3.1(C_3)), and that $f_n(X_i^{(f_n)}) \rightarrow f(Z_i)$ as $n \rightarrow \infty$ (see (3.81)), one can conclude that

$$\langle f_n(X_i^{(f_n)}) - f(Z_i), \mathcal{C}_g(X_i^{(f_n)}, f(Z_i)) \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

Thus, by passing the limit inferior on both sides of (3.90), we get that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}(X_i^{(f_n)}, f_n(X_i^{(f_n)})) \geq \mathcal{C}(Z_i, f(Z_i)),$$

which proves (3.87) for $k = i$.

On the other hand, by inspecting (3.86) and (3.89), and recalling that $X_i^{(f_n)} \rightarrow Z_i = Y_i$, that $X_{i+1}^{(f_n)} \rightarrow Z_{i+1}$, that $f_n(X_i^{(f_n)}) \rightarrow f(Z_i) = f(Y_i)$ (see (3.81)), and that $A(\cdot)$ is continuous, we can combine these facts to conclude that $X_{i+1}^{(f_n)} \rightarrow Y_{i+1}$. Hence $Z_{i+1} = Y_{i+1}$, which proves (3.88) for $k = i + 1$. This induction argument completes the proof of the Claim and Theorem 3.1 is thus proved. $\square$

3.3.4 Concluding remarks

This paper has shown that there exists an stationary optimal policy for the long-run average cost control problem provided that convexity and continuous differentiability conditions, together with Assumption 3.1, are satisfied. From these assumptions, Theorem 3.1 shows that an stationary optimal policy $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$ for the average cost problem exists. To illustrate the result in Theorem 3.1, we apply it to the LQG control problem.

Appendix

Proposition 3.5 (*Goldberg, 1964, Th.2.9L, p.50*). *Let $\{c_k\}$ be a sequence of real numbers. If*

$$m = \liminf_{k \rightarrow \infty} c_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} c_k = M,$$

then for any $\epsilon > 0$, $m - \epsilon < s_n < M + \epsilon$ for all but a finite number of values of n .

3.4 Comparação entre as condições suficientes para existência de política ótima estacionária no problema de custo médio a longo prazo

As condições das Hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 e da Seção 3.3, embora sejam distintas entre si, apresentam condições que garantem a existência de política ótima estacionária para o problema de controle de custo médio a longo prazo. Nesta seção, enfatizamos as diferenças entre estas condições.

Através de dois exemplos, veremos que a condição da Hipótese 3.1 pode não implicar naquela da Hipótese 3.2-3.3 e vice-versa. A comparação entre a condição da Seção 3.3 com aquelas das Hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 será apresentada na Seção 3.4.2 na sequência.

3.4.1 Condições das Hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 - comparação e exemplos

Vamos relembrar o principal resultado contido nos artigos.

Teorema 3.2 *Se Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2 e 3.3 valem, então existe uma política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$ que é ótima no custo médio e vale*

$$J^*(X) = J(\mathbf{f}^*, X) = \rho^*, \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

para alguma constante $\rho^* \geq 0$.

Exemplo 3.3 *Considere $\mathcal{G} = [-0.4, 1.6]$, e defina $A(\cdot)$ e $b(\cdot)$ como*

$$A(g) = 0.3\text{Re}\{g^{b(g)}\} \quad \text{and} \quad b(g) = g \sin(24g), \quad \forall g \in \mathcal{G},$$

no qual $\text{Re}\{z\}$ é a parte real da variável complexa z . O gráfico de $A(g)$, $g \in \mathcal{G}$, está mostrado na Fig. 3.5. Pode ser visto que existem $\beta > 0$ e $\xi > 0$ tal que

$$A(g_k) \dots A(g_i) \leq \beta \exp(-\xi(k-i)), \quad g_k, g_i \in \mathcal{G}, \quad k \geq i,$$

no qual $g_i, \dots, g_k$ são escolhidos arbitrariamente. Portanto

$$\|\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha n})}(k)\| \leq \beta \exp(-\xi k), \quad \forall n \geq 0.$$

Como $\mathcal{G}$ é compacto, o valor $q = \max_{g \in \mathcal{G}} \|Q(g)\|$ é finito sempre que $Q(\cdot)$ é uma função contínua. Então a Hipótese 3.1 é satisfeita e portanto o resultado do Teorema 3.2 é assegurado sempre que $Q(\cdot)$ é uma função contínua.

Por outro lado, não existe sequência finita de ações de controle $g_{c_0}, \dots, g_{c_N}$ tal que $A(g_{c_0}) \dots A(g_{c_N}) = 0$, logo a Hipótese 3.2 **não** é satisfeita. Mesmo assim, o resultado do Teorema 3.2 é válido.

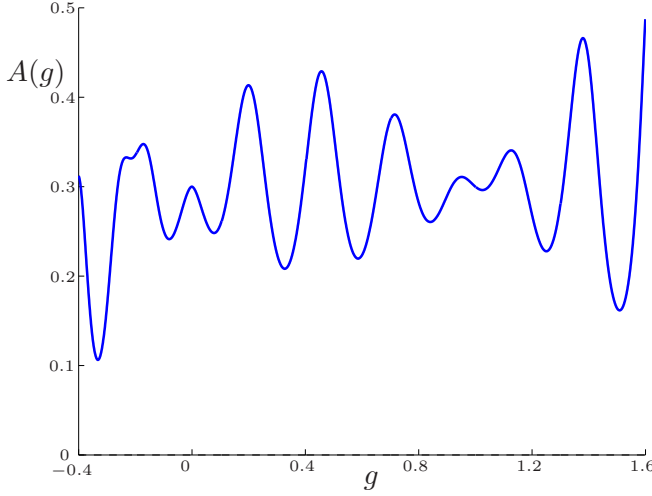


Figura 3.5: Gráfico da função $A(\cdot)$ no Exemplo 3.3.

Exemplo 3.4 Seja $\mathcal{G} = [-6, 6]$, e defina o operador $A(\cdot)$ conforme

$$A(g) = \frac{32 \sin(g)^2}{(5 + 4 \cos(g))^3} + \frac{4 \cos(g)}{(5 + 4 \cos(g))^2}, \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Existem quatro valores de $g \in \mathcal{G}$ que satisfazem $A(g) = 0$, veja Fig. 3.6. Portanto, $S_c = 0$ em (3.14) e Hipótese 3.3 é satisfeita trivialmente tomando $M = 0$. Isto implica que as condições das Hipóteses 3.2 e 3.3 são satisfeitas e o resultado do Teorema 3.2 é garantido. Por outro lado, é difícil verificar se existe o valor M na Hipótese 3.1, de tal modo que a hipótese **não** é satisfeita. Assim a Hipótese 3.1 poderia não ser usada para garantir o resultado do Teorema 3.2.

3.4.2 Sobre a condição da Seção 3.3

Para facilitar a referência, relembramos a principal condição da Seção 3.3.

Hipótese 3.4 (C_1) Existe uma sequência de descontos $\alpha_n \uparrow 1$ tal que: (a) a política estacionária $\mathbf{f}_{\alpha_n}^* = \{f_n, f_n, \dots\}$, $\forall n \geq 0$, satisfaz o Proposition 3.1, p.85; (b) a sequência de leis $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ é equicontínua; (c) existe um conjunto não-vazio $\mathcal{B}_0$ em $\mathcal{X}$ e uma constante $M > 0$ tal que, se $X_0 \in \mathcal{B}_0$, então

$$J(f_n, X_0) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(f_n)} < M, \quad \forall n \geq 0;$$

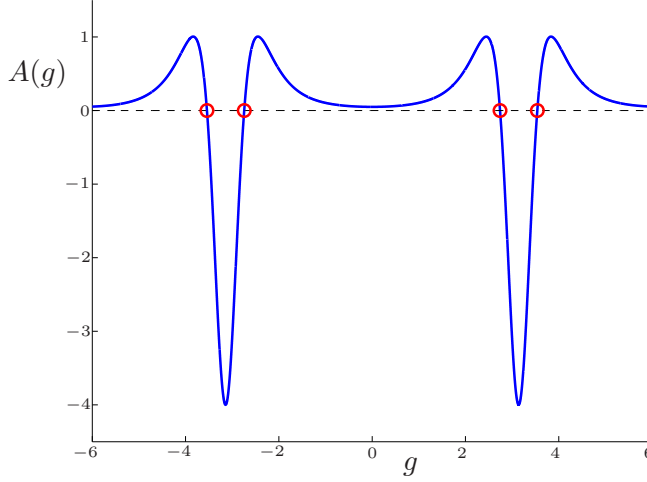


Figura 3.6: Gráfico da função $A(\cdot)$ no Exemplo 3.4.

(d) existe uma sequência $\{Z_k\}$ em $\mathcal{X}$ e uma função $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que, para cada $k \geq 0$, $X_k^{(f_n)} \rightarrow Z_k$ e $f_n(Z_k) \rightarrow f(Z_k)$ quando $n \rightarrow \infty$, e a sequência correspondente de derivadas parciais $\{\|\mathcal{C}_g(Z_k, f(Z_k))\|\}$ é limitada.

(C₂) Para cada $X \in \mathcal{X}$, o custo por estágio $\mathcal{C}(X, \cdot)$ é continuamente diferenciável e convexo.

Se a condição da Hipótese 3.4 é satisfeita então *Theorem 3.1*, p.86, garante a existência de uma política ótima estacionária para o problema de custo médio a longo prazo. Seguindo a notação do artigo da Seção 3.3, podemos concluir que existe $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ tal que

$$\bar{J}^*(X) = \bar{J}(\mathbf{f}^*, X) \leq \bar{J}(\mathbf{f}, X), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \forall X \in \mathcal{B}_0.$$

Ressaltamos três pontos importantes.

1. A técnica desenvolvida no artigo, que requer a Hipótese 3.4 para garantir a existência de $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$, é independente da técnica “vanishing discount approach” usada na Seção 3.2 (Teorema 3.1 e Corolário 3.1, p.63).
2. Impõe-se custo por estágio convexo na Hipótese 3.4 enquanto que nas condições da Seção 3.2 o custo por estágio pode assumir uma forma geral não-

convexa. Disto concluímos que as condições da Seção 3.2 podem não implicar na Hipótese 3.4.

3. A Hipótese 3.4 pode não implicar na condição de controlabilidade para a origem (Hipótese 3.2). De fato, foi mostrado na Aplicação da p.87 que o problema de controle clássico LQG satisfaz a Hipótese 3.4 quando o “par (A, B) é estabilizável”, o que por sua vez **não** implica na controlabilidade do par. Portanto, a Hipótese 3.4 pode **não** implicar na condição de controlabilidade para a origem da Hipótese 3.2.

3.5 Comentários

Este capítulo apresentou condições que asseguram a existência de uma política ótima estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ para o problema de custo médio a longo prazo. A existência de tal política é de interesse tanto teórico quanto no processo de aproximação de solução a ser introduzido no Capítulo 4.

Os resultados apresentados na Seção 3.2 (Teorema 3.1 e Corolário 3.1, p.63). empregam a técnica “vanishing discount approach” emprestada da teoria de Processos de Decisão Markovianos, enquanto que o resultado do artigo da Seção 3.3 é obtido de maneira independente. Na Seção 3.4 apresentamos uma discussão que enfatiza as principais diferenças entre as condições da Seção 3.2 e da Seção 3.3.

Os resultados apresentados neste capítulo assumem que a função $A : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ é determinística, porém é possível estendê-los para também tratar os sistemas na forma $x_{k+1} = A_{\theta(k)}(g_k)x_k + Ew_k$, $g_k \in \mathcal{G}$, $\forall k = 0, 1, \dots$, no qual $\{\theta(k)\}$ representa um processo markoviano e no k -ésimo instante de tempo, $A_{\theta(k)} \in \{A_1, \dots, A_N\}$, no qual cada $A_i : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$, $i = 1, \dots, N$ representa uma função conhecida. Portanto a aleatoriedade no sistema pode ser agora considerada tanto em $\{w_k\}$ como em $A_{\theta(k)}(\cdot)$. No Capítulo 5 estenderemos alguns resultados deste capítulo para tratar o caso do sistema linear com saltos markovianos e realimentação linear sem observação da cadeia.

Capítulo 4

Aproximação do custo médio a longo prazo

A contribuição deste capítulo pode ser dividida em duas frentes. Na primeira, provaremos que o mínimo custo do problema de N estágios, dividido por N , aproxima assintoticamente o mínimo custo médio a longo prazo correspondente. Na segunda, mostraremos a existência de limitantes inferior e superior para o custo quadrático de N estágios de sistemas lineares com saltos markovianos estáveis.

4.1 Introdução

Este capítulo provê resultados de aproximação do custo médio a longo prazo. Sob certas condições, o custo médio a longo prazo pode ser arbitrariamente aproximado por custos de horizonte finito. A principal contribuição deste capítulo segue em duas frentes, a serem tratadas respectivamente nas Seções 4.2 e 4.3 e motivadas a seguir.

Na primeira frente, consideramos o sistema estudado no Capítulo 3, ou seja,

$$x_{k+1} = A(g_k)x_k + Ew_k, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Apresentamos condições nas quais vale a aproximação

$$J_N^*/N \rightarrow J^* \quad (\text{quando } N \rightarrow \infty),$$

no qual J^* representa o mínimo custo médio a longo prazo e J_N^* denota o mínimo custo do problema de N estágios correspondente. Esta aproximação será par-

tualmente útil no Capítulo 5 para tratar o problema de controle de sistemas lineares com saltos markovianos quando o controlador não observa o modo da cadeia.

Sistemas lineares com saltos markovianos, com cadeia não necessariamente ergódica, são estudados na segunda frente de investigação deste capítulo. Consideramos a classe de sistemas na forma

$$x_{k+1} = A_{\theta(k)}x_k + E_{\theta(k)}w_k, \quad \forall k \geq 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \theta(0) \sim \pi_0, \quad (4.1)$$

no qual π_0 representa a distribuição inicial do processo markoviano $\{\theta(k); k \geq 0\}$. Assumindo que o sistema (4.1) é estável e que $\{\theta(k); k \geq 0\}$ é periódico ou aperiódico, mostramos que existem constantes positivas ρ , β_1 e β_2 tal que

$$|J^N - N\rho| \leq \beta_1\|\pi_0\| + \beta_2\|x_0\|, \quad \forall N \geq 1, \quad (4.2)$$

no qual J^N representa o custo quadrático usual de N estágios correspondente a (4.1), veja *Corollary 4.1*, p.128, e *Remark 4.2*, p.129. Didivindo-se ambos os lados de (4.2) por N e tomando-se $N \rightarrow \infty$ então concluímos que o custo médio a longo prazo é igual a ρ . Para uma representação deste custo quando sujeito a realimentação linear estabilizante, veja o *Theorem 4.2*, p.132, e *Corollary 4.3*, p.133, para a existência de solução do problema de controle correspondente.

4.2 Aproximação de custo médio a longo prazo ótimo para uma classe de sistemas lineares estocásticos

Considere um sistema linear estocástico discreto no tempo, definido num espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$ conforme a seguir.

$$x_{k+1} = A(g_k)x_k + Ew_k, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (4.3)$$

no qual x_k e $w_k, k = 0, 1, \dots$ são processos tomando valores respectivamente em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^q$, dos quais representam o espaço de estados e ruído aditivo na entrada, respectivamente. A entrada de ruído forma $\{w_k\}$ forma um processo iid de média

nula e matriz de covariância igual à identidade para cada $k \geq 0$. A matriz E , de dimensão $n \times q$, é dada. A variável g_k , no k -ésimo estágio, representa a *ação de controle* e pertence a um conjunto prescrito $\mathcal{G}$. Assumimos que A é um operador contínuo, possivelmente não-linear, que mapeia $\mathcal{G}$ no espaço de matrizes de dimensão $n \times n$.

Vamos considerar o custo de N estágios

$$J_N = \sum_{k=0}^{N-1} E[x'_k Q(g_k) x_k], \quad (4.4)$$

no qual $E[\cdot]$ denota a esperança matemática em relação a filtragem inicial $\mathcal{F}_0$, e Q é um dado operador que mapeia $\mathcal{G}$ no espaço das matrizes simétricas semidefinidas positivas de dimensão $n \times n$. O custo médio a longo prazo é definido como

$$\bar{J} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{J_N}{N}. \quad (4.5)$$

A ação de controle $g_k \in \mathcal{G}$ a ser implementada em (4.3) é conhecida e mensurável em relação a $\mathcal{F}_0$ e dependerá das *funções de realimentação* f_k , que por sua vez especificam a política $\mathbf{f} = \{f_0, \dots, f_k, \dots\}$ veja (Bertsekas e Shreve, 1978), (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996) para mais detalhes. Na verdade, as funções de realimentação f_k serão associadas ao segundo momento de x_k ; o uso de custo quadrático em (4.4) possibilita esta escolha.

O método de aproximação é dado a seguir. Se $\mathbf{F}$ denota o conjunto de todas as políticas factíveis $\mathbf{f}$, então o problema de controle de N estágios é definido por

$$J_N^* := \min_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} J_N, \quad (4.6)$$

e o problema de controle de custo médio a longo prazo é

$$\bar{J}^* := \min_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} \bar{J}. \quad (4.7)$$

A principal contribuição desta seção é determinar condições sob as quais

$$J_N^*/N \rightarrow \bar{J}^* \text{ as } N \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

no qual o valor $\bar{J}^*$ não depende da condição inicial x_0 . Pelo nosso conhecimento, não há resultado que aborde o problema de aproximação como em (4.8) para o

sistema (4.3). Como subproduto do resultado, as condições garantem a existência de uma política estacionária $\mathbf{f}$ que realizam o mínimo no lado direito de (4.7). Por política estacionária denotaremos todas aquelas na forma $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$.

4.2.1 Definições e notação

As definições e convenções a seguir se aplicarão ao longo deste capítulo.

- (i) $\mathcal{X}$ e $\mathcal{G}$ são conjuntos dados, conhecidos como *espaço de estados* e *espaço de controle*, respectivamente. Em particular, assumimos que $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{S}^{n_0}$ e $\mathcal{G}$ são espaços de Borel.
- (ii) Para cada $X \in \mathcal{X}$, existe um conjunto não-vazio mensurável $\mathcal{G}(X)$ subconjunto de $\mathcal{G}$. O conjunto $\mathcal{G}(X)$ representa o conjunto de todos os *controles admissíveis* ou *ações* quando o sistema está no estado $X \in \mathcal{X}$, e com propriedade que o grafo

$$\text{Gr} := \{(X, g) \in \mathcal{X} \times \mathcal{G} | g \in \mathcal{G}(X)\} \quad (4.9)$$

de estado-ações admissíveis é mensurável.

- (iii) (inf-compacto (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, p.28)). Seja $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{S}^{n_0}$ uma função semi-contínua inferior (*lower semi-continuous*). O funcional de custo por estágio $\mathcal{C} : \text{Gr} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é definido conforme abaixo:

$$\mathcal{C}(X, g) = \langle Q(g), X \rangle, \quad \forall (X, g) \in \text{Gr}. \quad (4.10)$$

Além disso, para cada $X \in \mathcal{X}$ e $r \in \mathbb{R}_+$, o conjunto $\{g \in \mathcal{G}(X) | \mathcal{C}(X, g) \leq r\}$ é compacto.

- (iv) A função mensurável $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ é denominada *lei de realimentação* sempre que $f(X) \in \mathcal{G}(X)$ para cada $X \in \mathcal{X}$. Uma *política* $\mathbf{f} = \{f_0, f_1, \dots\}$ é uma sequência de leis de realimentação f_k , $k \geq 0$, e o conjunto de todas as políticas possíveis é denotado por $\mathbf{F}$. Elementos de $\mathbf{F}$ na forma $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$ são denominados *política estacionária*.

- (v) (Estabilizabilidade). Seja $A : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ um operador conhecido. Assumimos que A é estabilizável, ou seja, existe uma ação de controle $g \in \mathcal{G}$ tal que os autovalores de $A(g)$ estão contidos num círculo de raio unitário.
- (vi) O segundo momento do estado x_k em (4.3) é representado por

$$X_k = E[x_k x_k'], \quad \forall k \geq 0. \quad (4.11)$$

Portanto vale a identidade

$$E[x_k' Q(g_k) x_k] = \langle X_k, Q(g_k) \rangle, \quad g_k \in \mathcal{G}, \quad \forall k \geq 0,$$

no qual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de Frobenius. Da hipótese do processo $\{w_k\}$, $k \geq 0$, e para uma dada política $\mathbf{f} = \{f_k\} \in \mathbf{F}$, a matriz de segundo momento $X_k \in \mathcal{X}$ em (4.11) satisfaz a recorrência (c.f. (Anderson e Moore, 1979, Ch.2))

$$X_{k+1} = A(g_k) X_k A(g_k)' + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, \quad X_0 = X \in \mathcal{X}, \quad (4.12)$$

no qual $\Sigma := EE' \in \mathbb{S}^{n_0}$ e o controle, aplicado no k -ésimo estágio, obedece a regra $g_k = f_k(X_k)$. Algumas vezes usaremos a notação $X_k^{(\mathbf{f})}$ para representar a dependência da recorrência (4.12) de uma política específica $\mathbf{f}$. De modo análogo, representamos o k -ésimo estágio de custo por

$$\mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})} := \mathcal{C}(X_k, g_k) = \langle Q(g_k), X_k \rangle, \quad \forall k \geq 0.$$

Para cada política $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ e cada estado inicial $X_0 = X \in \mathcal{X}$, o custo de N estágios é definido por

$$J_N(\mathbf{f}, X) := \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})}, \quad \forall N \geq 1. \quad (4.13)$$

e o custo médio a longo prazo é definido por

$$\bar{J}(\mathbf{f}, X) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})}. \quad (4.14)$$

O problema de controle de N estágios é determinar a sequência de leis de controle de realimentação $\psi_N^* := \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ tal que

$$J_N^*(X) := J_N(\psi_N^*, X) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} J_N(\mathbf{f}, X). \quad (4.15)$$

A existência de ψ_N^* , $N = 1, 2, \dots$ é assegurada pela hipótese de inf-compacto, veja (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996, Ch.3). O principal problema de controle sob investigação é o de custo médio a longo prazo, que é o de encontrar uma política $\mathbf{f}^*$ tal que

$$\bar{J}^*(X) := \bar{J}(\mathbf{f}^*, X) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} \bar{J}(\mathbf{f}, X), \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad (4.16)$$

Dizemos que uma política $\mathbf{f}^* \in \mathbf{F}$ é custo médio ótima se ela satisfaz (4.16).

Assim como no Capítulo 3, precisaremos considerar hipóteses que levam em consideração o custo descontando. Para cada $\alpha \in (0, 1)$, o critério de custo descontado é definido conforme

$$V_\alpha(\mathbf{f}, X) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad \forall X_0 = X \in \mathcal{X}, \quad (4.17)$$

no qual α representa o *fator de desconto*. O problema de controle associado é

$$V_\alpha^*(X) := \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} V_\alpha(\mathbf{f}, X), \quad \forall X_0 = X \in \mathcal{X}. \quad (4.18)$$

Vamos considerar como hipótese as condições da Proposição 3.1, p.61, conforme abaixo.

Hipótese 4.1 *As duas condições a seguir são válidas:*

(H_1) *Existe um estado $X_0 \in \mathcal{X}$, uma sequência de descontos $\{\alpha_n\}$ com $\alpha_n \uparrow 1$ e uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$(1 - \alpha_n)V_{\alpha_n}^*(X_0) \leq c_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(H_2) *Existe uma função mensurável $b : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ e uma constante $c_2 \geq 0$ tal que*

$$-c_2 \leq h_{\alpha_n}(X) \leq b(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

no qual $h_\alpha(X) := V_\alpha^(X) - V_\alpha^*(X_0)$, $\forall \alpha \in (0, 1)$.*

Apresentamos a seguir o principal resultado desta seção.

Teorema 4.1 *Suponha que a Hipótese 4.1 seja válida, e considere ψ_N^* , $N \geq 1$ como a sequência de funções de realimentação que satisfaz (4.15). Se*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b \left(X_N^{(\psi_N^*)} \right) / N = 0, \quad (4.19)$$

então existe uma constante $\rho \geq 0$ tal que

$$J_N^*(X)/N \rightarrow \rho = \bar{J}^*(X) \text{ as } N \rightarrow \infty, \quad (4.20)$$

para cada $X \in \mathcal{X}$.

A demonstração do Teorema 4.1 está disponível na Seção 4.2.3, p.111. Vamos considerar a seguir o seguinte corolário do Teorema 4.1.

Corolário 4.1 *Suponha que Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2 e 3.3 sejam válidas. Se o limite*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|X_N^{(\psi_N^*)}\|/N = 0, \quad (4.21)$$

existir, então a conclusão do Teorema 4.1 é válida.

A demonstração do Corolário 4.1 está disponível na Seção 4.2.4, p.114.

Comentário 4.1 *Cabe ressaltar que Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2 e 3.3 asseguram a existência de uma política ótima estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ tal que (veja Corolário 3.1, p.63)*

$$J^*(X) = J(\mathbf{f}^*, X) = \rho, \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

no qual $\rho \geq 0$ é a constante que satisfaz a aproximação em (4.20).

4.2.2 Aplicações

Ilustramos o resultado do Corolário 4.1 através de dois exemplos.

Exemplo 4.1 *Seja $\text{Re}(z)$ a representação da parte real da variável complexa z . Vamos definir em (4.3), $E = 1$, $\mathcal{G} = [-1, 1]$, e*

$$A(g) = 0.7\text{Re}(g^{g \sin(30g)}) - (60/(5 + 4 \cos(g))^3) \sin(g)^2, \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

O gráfico de $A(\cdot)$ está ilustrado na Fig. 4.1, e através de uma avaliação numérica obtemos

$$|A(g)| < 0.9998 \quad \text{for all } g \in \mathcal{G}. \quad (4.22)$$

Mostraremos agora que as condições das Hipóteses 3.1, 3.2 e 3.3 são satisfeitas simultaneamente se $Q : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função contínua qualquer (possivelmente não-linear). De fato, para ver que a Hipótese 3.1 é satisfeita, note da desigualdade

$$\left\| \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k)' Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k) \right\| \leq \max_{g \in \mathcal{G}} \|Q(g)\| \cdot \left[\max_{g \in \mathcal{G}} \|A(g)\| \right]^k$$

e de (4.22) que, para cada $\alpha \in (0, 1)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \left\| \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k)' Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha})} \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha})}(k) \right\| \leq (0.0002)^{-1} \max_{g \in \mathcal{G}} \|Q(g)\|.$$

Esta desigualdade mostra a Hipótese 3.1, e mostra também a Hipótese 3.3 pois existe a controlabilidade para a origem existir em um passo, ou seja, existem valores de $g_c \in \mathcal{G}$ tal que $A(g_c) = 0$, veja Fig. 4.1. Portanto $S_c = 0$ em (3.14) e logo a Hipótese 3.3 é válida trivialmente com $M = 0$.

Usando (4.22) novamente, pode-se mostrar que $\{X_k^{(\psi_k^)}\}$ é uma sequência limitada, e por isto o limite em (4.19) existe. Este argumento nos permite concluir do Corolário 4.1 que o custo ótimo de horizonte finito $J_N^*(X)$, dividido por N , aproxima assintoticamente o custo médio a longo prazo ótimo $\bar{J}^*(X)$, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ é válido*

$$|J_N^*(X)/N - \bar{J}^*(X)| < \epsilon$$

para valores suficientemente grandes de N .

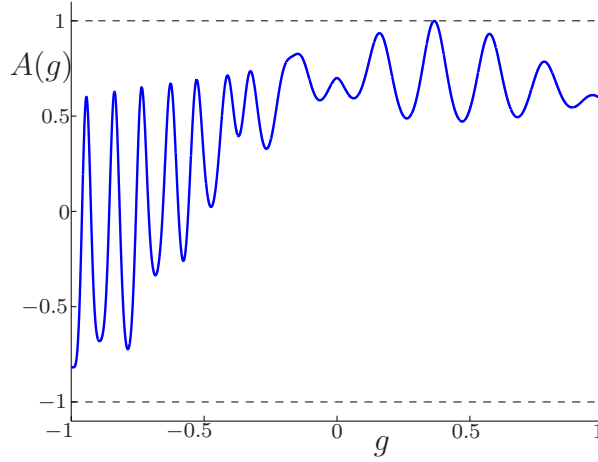


Figura 4.1: Gráfico da função $A(\cdot)$ no Exemplo 4.1.

Exemplo 4.2 Neste exemplo mostramos que o problema de controle linear quadrático gaussiano (LQG) enquadra-se na abordagem desta seção. Vamos considerar

$$A(g) = A - Bg, \quad Q(g) = Q + g'Rg, \quad \forall g \in \mathcal{G},$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad E = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 2,$$

no qual $\mathcal{G}$ é o conjunto de vetores reais de dimensão 2. A solução ótima $\psi_N^* = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ do problema de controle ótimo de N estágios LQG é dado por (Davis e Vinter, 1985, p.258), (Lewis e Syrmos, 1995, p.53)

$$f_k \left(X_k^{(\psi_N^*)} \right) = g_k^* = (B'S_{k+1}B + R)^{-1}B'S_{k+1}A, \quad (4.23)$$

no qual S_k satisfaz a equação algébrica de Riccati

$$S_k = A'S_{k+1}(I + BR^{-1}B'S_{k+1})^{-1}A + Q, \quad k = N-1, \dots, 0,$$

com $S_N = 0$. Note que a solução ótima em (4.23) não depende do estado do sistema $X_k^{(\psi_N^*)}$. Com a ajuda de uma avaliação numérica, podemos determinar a sequência $\{\|X_N^{(\psi_N^*)}\|\}$, veja Fig. 4.2. Cabe ressaltar que esta sequência converge, portanto o limite (4.19) existe. Além disso, é possível mostrar que a Hipótese

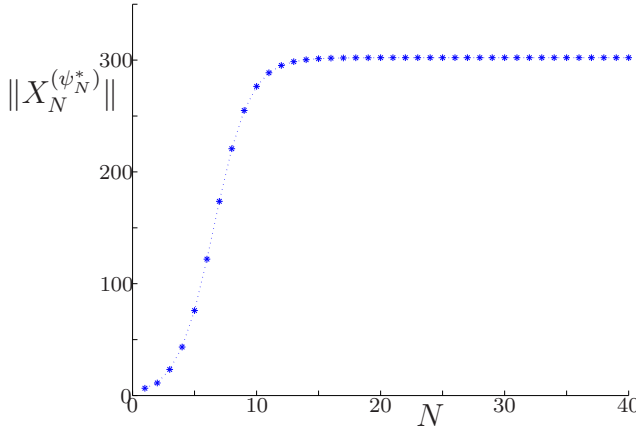


Figura 4.2: Gráfico da sequência $\{\|X_N^{(\psi_N^*)}\|\}$ no Exemplo 4.2.

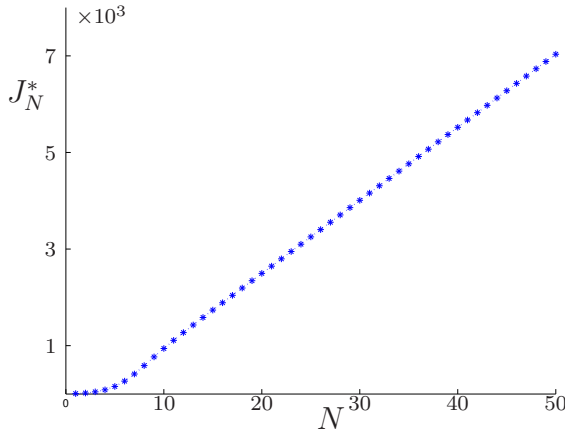


Figura 4.3: Gráfico do custo ótimo $J_N^*(X)$ no Exemplo 4.2.

3.1 é satisfeita pois a solução ótima descontada obedece a uma equação de Riccati descontada e realiza uma solução estabilizante sob hipótese de detetabilidade e estabilizabilidade, veja (Davis e Vinter, 1985, p.265). Portanto o resultado do Corolário 4.1 se aplica. Para ilustrar a convergência assegurada no corolário, realizamos uma avaliação numérica para o cômputo de $J_N^*(X)$ com $X = I$, conforme ilustrado na Fig. 4.3. A aproximação obedece

$$J_N^*(X)/N \rightarrow \rho = \bar{J}^*(X) = 151.27 \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

4.2.3 Prova do Teorema 4.1

Para provar o Teorema 4.1, introduziremos alguns resultados preliminares. Baseado na técnica “vanishing discount approach”, o próximo resultado é de fundamental importância na prova do Teorema 4.1. Para uma prova detalhada, veja ambos *Theorem 5.4.3, p.88* e *Remark 4, p.95* no livro (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996).

Proposição 4.1 *Se Hipótese 4.1 é satisfeita, então valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Existe uma sequência de fatores de desconto $\alpha_n \uparrow 1$ e uma constante ρ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha_n) V_{\alpha_n}^*(X) = \rho, \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (4.24)$$

- (ii) *Seja a função $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por*

$$h(X) := \liminf_{n \rightarrow \infty} h_{\alpha_n}(X), \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (4.25)$$

Então segue que $0 \leq h(X) \leq b(X)$ para cada $X \in \mathcal{X}$.

- (iii) *Existe uma função de realimentação f tal que*

$$\begin{aligned} \rho + h(X) &\geq \min_{g \in \mathcal{G}(X)} \left[\mathcal{C}(X, g) + h(A(g)XA(g)' + \Sigma) \right] \\ &= \mathcal{C}(X, f(X)) + h(A(f(X))XA(f(X))' + \Sigma), \quad \forall X \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

- (iv) *A lei de realimentação f que satisfaz (4.26) é tal que a política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f, f, \dots\}$ é ótima no custo médio, e além disso vale*

$$\rho = \bar{J}^*(X) = \bar{J}(\mathbf{f}^*, X), \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

no qual $\rho \geq 0$ é a constante que satisfaz (4.24).

O próximo resultado será útil na sequência.

Proposição 4.2 (*Arapostathis et al., 1993, Th.2.1*), (*Hernández-Lerma e Las-serre, 1996, Th.4.2.3, p.46*). *Sob hipótese de inf-compacto e estabilizabilidade, vale a identidade*

$$V_{\alpha}^*(X) = \min_{g \in \mathcal{G}(X)} \left[\mathcal{C}(X, g) + \alpha V_{\alpha}^*(A(g)XA(g)' + \Sigma) \right],$$

para cada $\alpha \in (0, 1)$ e $X \in \mathcal{X}$.

Agora combinamos as Proposições 4.1 e 4.2 para provar o próximo lema.

Lema 4.1 *Se Hipótese 4.1 é satisfeita, então vale a identidade*

$$\rho + h(X) = \min_{g \in \mathcal{G}(X)} \left[\mathcal{C}(X, g) + h(A(g)XA(g)' + \Sigma) \right], \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad (4.27)$$

no qual $\rho \geq 0$ e $h(\cdot)$ são conforme dados na Proposição 4.1.

Proof: Seja $\alpha_n \uparrow 1$ a sequência de fatores de descontos dada na Proposição 4.1. Como $h_{\alpha_n}(X) = V_{\alpha_n}^*(X) - V_{\alpha_n}^*(0)$, e usando a Proposição 4.2, podemos escrever

$$(1 - \alpha_n)V_{\alpha_n}^*(0) + h_{\alpha_n}(X) = \min_{g \in \mathcal{G}(X)} \left[\mathcal{C}(X, g) + \alpha_n \cdot h_{\alpha_n}(A(g)XA(g)' + \Sigma) \right], \quad (4.28)$$

que por sua vez implica que

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_n)V_{\alpha_n}^*(0) + h_{\alpha_n}(X) \\ \leq \mathcal{C}(X, g) + \alpha_n \cdot h_{\alpha_n}(A(g)XA(g)' + \Sigma), \quad \forall g \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Passando o limite inferior em (4.29) com respeito a $\alpha_n \uparrow 1$, e usando (4.24) e (4.25), obtemos

$$\rho + h(X) \leq \mathcal{C}(X, g) + h(A(g)XA(g)' + \Sigma), \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

Isto implica que

$$\rho + h(X) \leq \min_{g \in \mathcal{G}(X)} \left[\mathcal{C}(X, g) + h(A(g)XA(g)' + \Sigma) \right],$$

do qual combinado com (4.26) produz o resultado desejado. $\square$

Neste ponto podemos introduzir o principal argumento para a demonstração do Teorema 4.1.

Prova do Teorema 4.1

Mostraremos a seguir que o limite (4.20) no Teorema 4.1 é satisfeito. De fato, aplicando um argumento de indução em (4.27) temos que

$$n\rho + h(X_0) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})} + h(X_n^{(\mathbf{f})}), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}.$$

Temos em particular desta desigualdade que

$$n\rho + h(X_0) \leq J_n^*(X_0) + h(X_n^{(\psi_n^*)}), \quad (4.30)$$

com ψ_n^* sendo a n -ésima política ótima que satisfaz $J_n(\psi_n^*, X_0) = J_n^*(X_0)$ para cada $n \geq 0$.

Da hipótese de convergência em (4.19), temos que para cada $\epsilon > 0$ existe um número natural $n_0(\epsilon)$ tal que

$$n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow b(X_n^{(\psi_n^*)})/n < \epsilon. \quad (4.31)$$

Como $0 \leq h(X_n^{(\psi_n^*)}) \leq b(X_n^{(\psi_n^*)})$ para cada $n \geq 0$ (veja Proposição 4.1(ii)), segue de (4.30) e (4.31) que

$$n \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow \rho < J_n^*(X_0)/n + \epsilon. \quad (4.32)$$

Por outro lado, segue da Proposição 4.1(iii) que existe uma política estacionária $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$ tal que

$$n\rho + h(X_0) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})} + h(X_n^{(\mathbf{f})}), \quad \forall n \geq 1.$$

Mas então, como $\sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})} \geq J_n^*(X_0)$ e $h(X_n^{(\mathbf{f})}) \geq 0$, temos que $n\rho + h(X_0) \geq J_n^*(X_0)$, $\forall n \geq 1$. Isto significa que existe um número natural $n_1(\epsilon)$ tal que

$$n \geq n_1(\epsilon) \Rightarrow \rho + \epsilon > J_n^*(X_0)/n, \quad \forall n \geq 1. \quad (4.33)$$

Como resultado, combinamos (4.32) e (4.33) para concluir que

$$n \geq \max\{n_0(\epsilon), n_1(\epsilon)\} \Rightarrow -\epsilon < \rho - J_n^*(X_0)/n < \epsilon,$$

que é um modo equivalente de se escrever o resultado em (4.20). $\square$

4.2.4 Prova do Corolário 4.1

Prova: Da Hipótese 3.1 ou Hipóteses 3.2 e 3.3 segue respectivamente que a desigualdade (3.32) ou (3.39) implica que (veja páginas 71 e 72)

$$0 \leq h_{\alpha_n}(X) \leq c_1 \|X\| + c_2, \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

para alguma subsequência $\alpha_n \uparrow 1$ e constantes $c_1, c_2 \geq 0$. Tomando-se o limite inferior na desigualdade acima com relação a α_n temos que

$$0 \leq h(X) \leq c_1 \|X\| + c_2 =: b(X), \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

e o resultado então segue pois (4.21) implica em (4.19). $\square$

4.3 Artigo: Bounds for the Finite Horizon Cost of Markov Jump Linear Systems with Additive Noise and Convergence for the Average Cost

Abstract

This paper presents an analytic, systematic approach to handle functionals associated to Markov jump linear systems (MJLS) with periodic or aperiodic underlying Markov chain. We employ the second moment dynamics of the MJLS to provide tight two-sided bounds for finite quadratic cost functionals. The investigation of their asymptotic behaviour, either oscillatory or invariant in a unified way is one of the main results. The evaluation technique does not rely on Markov chain hypothesis such as ergodicity, or on results involving coupled Riccati equations that would restrict the control problem to the complete state observation case. The derived bounds allow for answers to important questions on the long run average cost problem, such as approximations via finite horizon cost, and existence of optimal solution relying on a mean square stabilizability condition.

4.3.1 Introduction

This paper focuses on the Markov jump linear system (MJLS) as studied in (Costa e Fragoso, 1993; Ji e Chizeck, 1990; Costa, Fragoso e Marques, 2005),

when the underlying Markov chain is finite-state and general, in the sense that it can form either a periodic or an aperiodic finite state chain that is not necessarily irreducible. The MJLS has a composite state $(x(k), \theta(k))$, where $x \in \mathbb{R}^n$ is the continuous state and θ is the jumping state that evolves according to an homogeneous Markov chain. Additive wide sense white noise sequence is also taken into account. Basically, MJLS are stochastic linear systems that comprise as particular subclasses the linear deterministic systems, periodic systems, and even systems with i.i.d. random parameters. They are well suited to model dynamic systems of practical importance, as they convey abrupt changes in structure or parameters, e.g., see (Zampolli, 2006) and (Costa e de Paulo, 2007) for applications in economy and stochastic finance, and (Khanbaghi et al., 2002) in control of paper mills.

The idea is to develop tools using the second moments of the MJLS, to obtain bounds for the cost functional of the type

$$J := \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \mathbb{E}[x(k)' Q(\theta(k)) x(k)], \quad (4.34)$$

for finite T and to investigate the limiting behaviour when the number of stages T tends to infinity. These tools are not available in the literature and provide the grips on the study of linear feedback control problems when the continuous state x and/or the Markov state θ are not fully observed. The control problem associated to (4.34) is a useful paradigm for many applications, see for instance (Hernández-Lerma e Lasserre, 1996) or (Arapostathis et al., 1993). Note that even in the context of MJLS with complete state observation and general Markov chain there is no result in the literature parallelling the ones obtained here. The results in (Costa, Fragoso e Marques, 2005, thm 4.6) take into account the ergodicity hypothesis.

Bounds for the cost J are associated with the well-posedness of the problem. In the literature the bounds are connected to basic conditions in different contexts such as conditions for existence of stabilizing receding horizon controls (Grimm et al., 2005; Costa e do Val, 2009) or uniform cost convergence (Costa e do Val, 2006; Jadbabaie e Hauser, 2005), among others. The present paper obtains some

bounds for the cost in (4.34) in a quite general scenario. For the limiting situation ($T \rightarrow \infty$) the main idea is to obtain an asymptotic evaluation on its own terms, valid for mean square stable or stabilizable MJLS's. The result is a two-sided evaluation that may vary cyclically with the period of the Markov chain, and when the chain is aperiodic, these bounds are symmetric with respect to an asymptote that represents the assured limiting behaviour, see Theorem 4.1, its corollary and the remarks in the sequel. Either periodic or aperiodic, a proper limiting sense for the asymptotic behaviour is developed. The evaluation is tight, in the sense that if one considers appropriate initial distribution for the Markov chain and initial conditional second moment matrices for the system, the two-sided evaluation shows no gap, see Remark 4.2.

These bounds allow us to study the limiting behaviour of (4.34) and to demonstrate that the long run average cost is finite under mean square stabilizability. The results apply to systems when the observation of the Markov state and/or the continuous state is not completely available to the controller, and the admissible class is formed by linear gains, yielding some understanding on this hard control problem.

After some preliminaries in Section 4.3.2, we deal in Section 4.3.6 with Markov chain convergence in the sense of a periodic limiting probability. The periodic behaviour has an impact on the problem, and we need to take into account a set of auxiliary systems for the MJLS, describing the dynamics of the conditioned second moment of the original system. In Section 4.3.7 we obtain the two-sided bound evaluation for the cost, which is presented in Theorem 4.1 and Corollary 4.1, after a serie of lemmas. Those deal with the separate effects on convergence of the various oscillatory terms associated to the additive noise, evolving Markov state and continuos state dynamics. After that, we are prepared to deal with the long run average cost. We bring this to Section 4.3.8 together with a perspective on the control problem with linear feedback within various state observation scenarios.

4.3.2 Definitions and preliminary results

Let $\mathbb{R}^n$ denote the n th dimensional Euclidean space with the usual norm $|\cdot|$. Let $\mathcal{R}^{r,s}$ (respectively, $\mathcal{R}^r$) represent the normed linear space formed by all $r \times s$ real matrices (respectively, $r \times r$) and $\mathcal{R}^{r*}$ the set $\{U \in \mathcal{R}^r : U = U'\}$ where U' denotes the transpose of U ; consider $\mathcal{R}^{r0}$ the closed convex cone $\{U \in \mathcal{R}^r : U = U' \geq 0\}$; $U \geq V$ signifies that $U - V \in \mathcal{R}^{r0}$. $\|U\|$ stands for the largest singular value of U .

Let $\mathcal{N} := \{1, \dots, N\}$ be a finite set, and let $\mathcal{M}^{r,s}$ denote the linear space formed by a number N of matrices such that $\mathcal{M}^{r,s} = \{U = (U_1, \dots, U_N) : U_i \in \mathcal{R}^{r,s}, i \in \mathcal{N}\}$; also, $\mathcal{M}^r \equiv \mathcal{M}^{r,r}$. For $U, V \in \mathcal{M}^r$, $U \geq V$ signifies that $U_i - V_i \in \mathcal{R}^{r0}$ for each $i \in \mathcal{N}$, and similarly for other mathematical relations. We denote by $\mathcal{M}^{r*}$ ($\mathcal{M}^{r0}$) the set $\mathcal{M}^r$ when it is made up by $U_i \in \mathcal{R}^{r*}$ ($U_i \in \mathcal{R}^{r0}$) for all $i \in \mathcal{N}$. Consider $tr\{\cdot\}$ as the trace operator. It is known that $\mathcal{M}^{r,s}$ equipped with the inner product

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^N tr\{U_i' V_i\}$$

forms a Hilbert space. For convenience, instead of dealing with the induced norm, we consider the equivalent supremum norm $\|U\| = \max_{i \in \mathcal{N}} \|U_i\|$. For an operator $\mathcal{U} : \mathcal{M}^{r*} \rightarrow \mathcal{M}^{r*}$, $\sigma(\mathcal{U})$ stands for the spectral radius of $\mathcal{U}$ and the corresponding norm is defined as $\|\mathcal{U}\| = \sup_{V \in \mathcal{M}^{r*}} \|\mathcal{U}(V)\| / \|V\|$.

Let $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, $\forall i, j \in \mathcal{N}$ be a stochastic matrix, i.e. $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$ and $p_{ij} \geq 0$ for all $i, j \in \mathcal{N}$. For convenience, we adopt here the notation of (Costa, do Val e Fragoso, 2005) and define, for each $U \in \mathcal{M}^n$, $V \in \mathcal{M}^{n*}$, the operator $\mathcal{T}_U : \mathcal{M}^{n*} \rightarrow \mathcal{M}^{n*}$, according to

$$\mathcal{T}_{U,i}(V) := \sum_{j=1}^N p_{ji} U_j V_j U_j', \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4.35)$$

We denote $\mathcal{T}^0(V) = V$, and for $t \geq 1$, we define $\mathcal{T}^t(V)$ recursively by $\mathcal{T}^t(V) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{t-1}(V))$ (the notation $\mathcal{T}$ is used instead of $\mathcal{T}_U$ whenever unambiguous). Notice that the operator $\mathcal{T}$ is linear and continuous.

Let us define the set of identity matrices $\mathbb{I} = \{I_1, \dots, I_N\} \in \mathcal{M}^{n0}$. We need the following auxiliary results, the proofs of which are omitted or quoted.

Proposition 4.1 *Let $U \in \mathcal{M}^{n*}$ and $V \in \mathcal{M}^{n0}$. The following assertions hold:*

- (i) $\|U\| \langle \mathcal{T}^k(\mathbb{I}), V \rangle \geq \langle \mathcal{T}^k(U), V \rangle,$
- (ii) $-\|U\| \langle \mathcal{T}^k(\mathbb{I}), V \rangle \leq \langle \mathcal{T}^k(U), V \rangle.$

Proposition 4.2 (i) *(Costa, Fragoso e Marques, 2005, Proposition 2.5) Let $\mathcal{U}$ be the operator $\mathcal{U} : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$. Then $\sigma(\mathcal{U}) < 1$ if and only if $\|\mathcal{U}^k\| \leq \beta \xi^k$, $k = 0, 1, \dots$ for some $0 < \xi < 1$ and $\beta \geq 1$.*

(ii) *Consider the following system in $\mathbb{R}^n$: $z(k+1) = Hz(k)$, $\forall k \geq 0$, $z(0) = z_0$, $H \in \mathbb{R}^n$. If $z(k) \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$, then there exist $\eta \geq 0$ and $0 \leq \zeta < 1$ such that*

$$\|z(k)\| \leq \eta \zeta^k \|z_0\|.$$

4.3.3 The Markov chain

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ be the fundamental probability space. Let $\Theta := \{\theta(k); k = 0, 1, \dots\}$ be the discrete-time homogeneous Markov chain, with $\mathcal{N}$ as state space. The state θ of the Markov chain at time k has an associated probability distribution, namely, $\pi_i(k) := \Pr(\theta(k) = i)$. Considering the N -dimensional vector $\pi(k) = [\pi_0(k), \dots, \pi_N(k)]$, the state distribution of the chain is given by $\pi(k) = \pi(0)\mathbb{P}^k$.

Proposition 4.3 (Çinlar, 1975, Ch.3) (i) *Let Θ be a finite Markov chain. If Θ is periodic with period δ , then $\mathbb{P}^\delta$ is the transition matrix of an aperiodic Markov chain.*

(ii) *Let Θ be a finite aperiodic Markov chain. Then for each initial distribution π_0 , there exists $\pi(\infty)$, possibly depending on π_0 , such that*

$$\pi(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(k).$$

4.3.4 The discrete-time Markov jump linear system

Consider the discrete-time Markov jump linear system (MJLS) $\mathcal{H}$, defined in a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, by:

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + E_{\theta(k)}w(k) \\ z(k) = x(k)'Q_{\theta(k)}x(k) \\ k \geq 0, x(0) = x_0, \pi(0) \sim \pi_0, \end{cases}$$

where (x, θ) is the state, with $x \in \mathbb{R}^n$ and θ takes values on $\mathcal{N}$. θ is the state of a Markov chain and the joint process $\{x, \theta\}$ is Markovian. The second expression in $\mathcal{H}$ represents the cost by stage z . The stochastic process $\{w(k); k \geq 0\}$ is a second-order i.i.d. sequence of ℓ -dimensional random vectors with zero mean values and covariance matrix $E[w(k)w(k)'] = I, \forall k \geq 0$, where $E[\cdot]$ and I represents the expected value and the identity matrix, respectively. We also know that $\{w(k); k \geq 0\}$ is independent from $\{\theta(k); k \geq 0\}$. In particular, $x(k)$ and $w(k)$ are independent random vectors. Moreover, the finite set of matrices are given: $A \in \mathcal{M}^n$, $E \in \mathcal{M}^{n,\ell}$ and $Q \in \mathcal{M}^{n0}$.

The performance index associated with $\mathcal{H}$ is an standard quadratic cost functional with a horizon of T stages defined by

$$J^T := \sum_{k=0}^T E_{x_0, \pi_0} [z(k)], \quad (4.36)$$

where $E_{x_0, \pi_0} [\cdot] \equiv E[\cdot | x(0) = x_0, \theta(0) \sim \pi_0]$ and the considered horizon T may be infinite.

4.3.5 Second moment matrices and related results

Let us define the set of matrices of second moments of the state $X(k) \in \mathcal{M}^{n0}$ as

$$X_i(k) = E_{x_0, \pi_0} [x(k)x(k)' \mathbb{1}_{\{\theta(k)=i\}}], \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad k \geq 0, \quad (4.37)$$

where π_0 and $x(0) = x_0$ are known vectors and $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ represents the Dirac function of the set $\mathcal{C}$. For instance, with this notation we can write

$$E_{x_0, \pi_0} [x(k)' Q_{\theta(k)} x(k)] = \langle X(k), Q \rangle$$

and hence, we can express the cost J^T in (4.36) as

$$J^T(X(0)) := \sum_{k=0}^T \langle X(k), Q \rangle. \quad (4.38)$$

We also define $\Sigma(k) \in \mathcal{M}^{n0}$, $k \geq 0$, as

$$\Sigma(k) = \mathcal{T}_E(\Pi(k)) \quad (4.39)$$

where $\Pi(k) = (\pi_1(k)I, \dots, \pi_N(k)I)$. It is a well known result that we can represent the dynamics of $X(k)$, $k \geq 0$, employing a linear operator, see e.g. (Costa, Fragoso e Marques, 2005), (Costa e Fragoso, 1995), or (Costa, do Val e Fragoso, 2005) for similar results. In particular, the next result is proven in (Costa, Fragoso e Marques, 2005, Ch.3).

Proposition 4.4 *Consider $V(k) \in \mathcal{M}^{n_0}$ defined according to*

$$\begin{cases} V(k+1) = \mathcal{T}_A(V(k)) + \Sigma(k), & k \geq 0, \\ V(0) = V \in \mathcal{M}^{n_0}. \end{cases} \quad (4.40)$$

Then,

$$X(k) = V(k)$$

provided that $V_i = \pi_i(0)x(0)x(0)', \forall i \in \mathcal{N}$.

Note that (4.40) expresses the dynamics of the conditional second moments of the original system $\mathcal{H}$. The system in (4.40) also allows to relate mean square stability of system $\mathcal{H}$ with the fact that the operator $\mathcal{T}_A$ is contractive. In this connection, we consider the following definition (see (Costa, do Val e Fragoso, 2005; Costa e Fragoso, 1995)). The lemma in the sequel is a mere consequence of the definition and of Proposition 4.1.

Definition 4.1 (Mean Square Stability) *We say that $\mathcal{H}$ is mean square stable (MSS) whenever $\sigma(\mathcal{T}_A) < 1$.*

Lemma 4.1 *Suppose that $\mathcal{H}$ is MSS. Then, for any $U \in \mathcal{M}^{n^*}$, $V \in \mathcal{M}^{n_0}$, and integers $T \geq t \geq 0$, there exists an scalar $\rho > 0$ such that*

$$\sum_{k=t}^T \langle \mathcal{T}_A^k(U), V \rangle \leq \rho \|U\|.$$

4.3.6 Convergence results and auxiliary systems

The section begins with an evaluation of a convergence bound for the Θ distribution π that involves the initial distribution $\pi(0)$.

Lemma 4.2 *Let Θ be a finite Markov chain with period δ . Then there exist $\eta \geq 0$ and $0 \leq \xi < 1$ such that*

$$\begin{aligned} \|\pi(k\delta + \ell) - \pi_\delta(\infty)\mathbb{P}^\ell\| &\leq \eta\xi^k \|\pi(0)\mathbb{P}^\ell - \pi_\delta(\infty)\mathbb{P}^\ell\|, \\ 0 \leq \ell &\leq \delta - 1, \quad \forall k \geq 0, \end{aligned}$$

where $\pi_\delta(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 \mathbb{P}^{k\delta}$ whenever $\pi(0) = \pi_0$.

Proof: Firstly, we have from Proposition 4.3 (i) that $\mathbb{P}^\delta$ corresponds to the probability transition matrix of an aperiodic Markov chain, and Proposition 4.3 (ii) ensures the existence of $\pi_\delta(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0(\mathbb{P}^\delta)^k$. Now we write that

$$\pi(k\delta + \ell) = \pi_0 \mathbb{P}^\ell \mathbb{P}^{k\delta} = (\pi_0 \mathbb{P}^\ell)(\mathbb{P}^\delta)^k,$$

and the simple change of variables

$$\tilde{\pi}(k) = \pi(k\delta + \ell) \tag{4.41}$$

yields $\tilde{\pi}(k) = (\pi_0 \mathbb{P}^\ell)(\mathbb{P}^\delta)^k = \pi(\ell)(\mathbb{P}^\delta)^k = \tilde{\pi}(0)(\mathbb{P}^\delta)^k$ which, in a recursive version, turns out to be

$$\tilde{\pi}(k+1) = \tilde{\pi}(k)\mathbb{P}^\delta, \quad \tilde{\pi}(0) = \pi_0 \mathbb{P}^\ell \tag{4.42}$$

and we evaluate

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(k+1) - \pi_\delta(\infty)\mathbb{P}^\ell &= \tilde{\pi}(k)(\mathbb{P}^\delta) - \pi_\delta(\infty)\mathbb{P}^\ell \\ &= \tilde{\pi}(k)(\mathbb{P}^\delta) - \pi_\delta(\infty)\mathbb{P}^\delta \mathbb{P}^\ell = (\tilde{\pi}(k) - \pi_\delta(\infty)\mathbb{P}^\ell)(\mathbb{P}^\delta). \end{aligned} \tag{4.43}$$

We can also write that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\pi}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 \mathbb{P}^\ell (\mathbb{P}^\delta)^k = [\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 (\mathbb{P}^\delta)^k] \mathbb{P}^\ell = \pi_\delta(\infty) \mathbb{P}^\ell. \tag{4.44}$$

From (4.43) and (4.44) we have that $\lim_{k \rightarrow \infty} (\tilde{\pi}(k) - \pi_\delta(\infty)\mathbb{P}^\ell) = 0$, and the result follows immediately from Proposition 4.3 (i). $\square$

Remark 4.1 *For an aperiodic Markov chain ($\delta = 1$), Lemma 4.2 reduces to*

$$\|\pi(k) - \pi(\infty)\| \leq \eta\xi^k \|\pi(0) - \pi(\infty)\|, \quad \forall k \geq 0,$$

where $\pi(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 \mathbb{P}^k$ whenever $\pi(0) = \pi_0$. In a sense, this represents an exponentially stable behaviour for π , since ξ and η are uniform and the dependence of $\pi(\infty)$ on π_0 appears explicitly, mimicking the stability concept. In general, convergence results involving the distribution π of Θ in the literature do not make this fact explicitly, as they are focused on the rate of convergence only, and the parameter η remains dependent on the initial distribution.

As stated in Lemma 4.2, from sequence $\pi(k)$, $k \geq 0$, we have for each $0 \leq \ell \leq \delta - 1$ that the subsequence $\pi(k\delta + \ell)$ converges to a different “limiting” distributions $\pi_\delta(\infty) \mathbb{P}^\ell$. In addition, it is simple to check that for each $0 \leq \ell \leq \delta - 1$, the subsequence defined as $\Pi_\ell(k) = \Pi(k\delta + \ell) = (\pi_1(k\delta + \ell)I, \dots, \pi_N(k\delta + \ell)I)$ converges to $\Pi_\ell(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Pi(k\delta + \ell)$. We also define for all $k \geq 1$ and $\ell = 0, \dots, \delta - 1$,

$$\Sigma_\ell(k) = \Sigma(k\delta + \ell) = \mathcal{T}_E(\Pi_\ell(k)), \quad (4.45)$$

and $\Sigma_\ell(\infty) \in \mathcal{M}^{n_0}$ as

$$\Sigma_\ell(\infty) = \mathcal{T}_E(\Pi_\ell(\infty)). \quad (4.46)$$

Needless to say, $\Sigma_\ell(\infty)$ may depend on π_0 .

From Proposition 4.4 we have that the second moment Σ of the additive noise drives the second moment matrices X of the system. Also, the structure of convergence along subsequences of $\Sigma(k)$, as presented in Lemma 4.2 can be taken into account in the system (4.40) as follows. We define the collection of dynamic systems Ψ_ℓ , $\ell = 0, \dots, \delta - 1$, as

$$\Psi_\ell : \begin{cases} X_\ell(k) = \mathcal{T}_A^\delta(X_\ell(k-1)) + S_\ell(k), & k \geq 1, \\ \text{with } X_\ell(0) = \mathcal{T}_A^\ell(X(0)) + \sum_{j=1}^\ell \mathcal{T}_A^{j-1}(\Sigma_{\ell-j}(0)), \end{cases} \quad (4.47)$$

where

$$S_\ell(k) = \sum_{j=1}^\delta \mathcal{T}_A^{j-1}(\Sigma_{\ell-j}(k)), \quad \forall k \geq 1. \quad (4.48)$$

In view of (4.46), for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$ we can define $S_\ell(\infty) := \lim_{k \rightarrow \infty} S_\ell(k)$.

The following relation with the original system (4.40) is straightforward to check, and the proof is omitted.

Lemma 4.3 $X_\ell(k) = X(k\delta + \ell)$ holds for each $k \geq 0$ and each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$.

Next we derive a generalization of the result presented in (Costa, Fragoso e Marques, 2005, pg. 52), and the proof is detailed in the Appendix A.

Proposition 4.5 *Suppose that $\mathcal{H}$ is mean square stable, and that Θ is a finite Markov chain with period δ . Then there exists, for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$, a limiting value $X_\ell(\infty) \in \mathcal{M}^{n_0}$ with the following properties:*

- (i) $X_\ell(k) \rightarrow X_\ell(\infty)$ as $k \rightarrow \infty$.
- (ii) $X_\ell(\infty) = \mathcal{T}_A^\delta(X_\ell(\infty)) + S_\ell(\infty)$.
- (iii) $X_\ell(\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_A^{k\delta}(S_\ell(\infty))$.

Definition 4.2 *For each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$, we define $J_\ell^T = 0$ whenever $T < \ell$; otherwise*

$$J_\ell^T = \sum_{k=0}^{n_\ell} E_{x_0, \pi_0} [z(k\delta + \ell)], \quad (4.49)$$

where n_ℓ is the largest integer such that $n_\ell\delta + \ell \leq T$.

Note that the cost (4.36) for all $T \geq 0$ can be expressed using Definition 4.2, i.e.,

$$J^T = \sum_{\ell=0}^{\delta-1} J_\ell^T. \quad (4.50)$$

Similarly to (4.38), we can write

$$J_\ell^T = \sum_{k=0}^{n_\ell} \langle X_\ell(k), Q \rangle, \quad \ell = 0, \dots, \delta - 1. \quad (4.51)$$

4.3.7 Bounds for the finite horizon cost

Next, a serie of lemmas presents auxiliary results that are targeted to the main result of this section, presented in Theorem 4.1. The plan is to assess the impact of different transient behaviour that are involved, to produce a tight evaluation for the finite horizon cost for MJLS with general finite-state underlying chain Θ .

Lemma 4.4 *Let δ be the period of Θ . If $\mathcal{H}$ is mean square stable, there exists a positive scalar γ such that, for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|S_{\ell}(k) - S_{\ell}(\infty)\| \leq \gamma \|\pi(0) - \pi_{\delta}(\infty)\|,$$

where $\pi_{\delta}(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 \mathbb{P}^{k\delta}$ whenever $\pi(0) = \pi_0$.

Proof: Let $e_j \in \mathbb{R}^N$ represent the j -th basis vector $e_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]'$. From the fact that $\sigma(\mathcal{T}_A) < 1$, there exist (c.f. Proposition 4.2 (i)) $\beta \geq 0$ and $0 \leq \alpha < 1$ such that $\|\mathcal{T}_A^m\| \leq \beta \alpha^m$, $m = 0, 1, \dots$. We employ this fact, (4.45), and (4.46) to evaluate, for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|S_{\ell}(k) - S_{\ell}(\infty)\| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{m=1}^{\delta} \mathcal{T}_A^{m-1} \left(\Sigma_{\ell-m}(k) - \Sigma_{\ell-m}(\infty) \right) \right\| \\ &\leq \frac{\beta(1 - \alpha^{\delta})}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\delta} \left\| \Sigma(k\delta + \ell - m) - \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma(k\delta + \ell - m) \right\| \\ &\leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\delta} \left\| \Sigma((k-1)\delta + \delta + \ell - m) \right. \\ &\quad \left. - \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma((k-1)\delta + \delta + \ell - m) \right\| \\ &\leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{2\delta-1} \left\| \Sigma((k-1)\delta + n) - \lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma((k-1)\delta + n) \right\| =: \varphi. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Employing (4.39), (4.46) and Lemma 4.2 we write

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\beta}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\delta-1} \left(\max_{j \in \mathcal{N}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}} p_{ij} E_i E_i' (\pi((k-1)\delta + n) - \pi_{\delta}(\infty) \mathbb{P}^n) e_i \right\| \right. \\ &\quad \left. + \max_{j \in \mathcal{N}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}} p_{ij} E_i E_i' (\pi(k\delta + n) - \pi_{\delta}(\infty) \mathbb{P}^n) e_i \right\| \right) \\ &\leq \frac{\beta}{1 - \alpha} \left(\max_{j \in \mathcal{N}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}} p_{ij} E_i E_i' \right\| \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\delta-1} \eta \xi^{k-1} (1 + \xi) \|\pi(0) \mathbb{P}^n - \pi_{\delta}(\infty) \mathbb{P}^n\| \end{aligned}$$

and recalling that $\|\mathbb{P}^n\| \leq 1$, $n = 0, \dots, \delta - 1$, we conclude that

$$\varphi \leq \frac{2\eta\beta\delta}{(1 - \xi)(1 - \alpha)} \left(\max_{j \in \mathcal{N}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}} p_{ij} E_i E_i' \right\| \right) \|\pi(0) - \pi_{\delta}(\infty)\|. \quad (4.53)$$

The proof follows immediately from (4.52) and (4.53). $\square$

The second moment Σ of the additive noise plays an important role here, and we deal with the related quantities $\tilde{S}_\ell(k) \in \mathcal{M}^{n*}$, $M_\ell(k) \in \mathcal{M}^{n0}$ and $\tilde{M}_\ell(k) \in \mathcal{M}^{n*}$ defined according to:

$$\tilde{S}_\ell(k) = S_\ell(k) - S_\ell(\infty), \quad k \geq 1, \quad \ell = 0, \dots, \delta - 1, \quad (4.54)$$

$$M_\ell(k) = \sum_{t=1}^k \mathcal{T}_A^{(k-t)\delta}(S_\ell(t)), \quad k \geq 1, \quad \ell = 0, \dots, \delta - 1, \quad (4.55)$$

$$\tilde{M}_\ell(k) = \sum_{t=1}^k \mathcal{T}_A^{(k-t)\delta}(\tilde{S}_\ell(t)), \quad k \geq 1, \quad \ell = 0, \dots, \delta - 1. \quad (4.56)$$

The effect on the cost associated solely with $S_\ell(k)$ is evaluated next.

Lemma 4.5 *Let δ be the period of Θ . If $\mathcal{H}$ is mean square stable, then for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$ the following holds:*

$$(i) \quad X_\ell(k) = \mathcal{T}_A^{k\delta}(X_\ell(0)) + M_\ell(k), \quad k \geq 1. \quad (4.57)$$

$$(ii) \quad M_\ell(k) = \tilde{M}_\ell(k) + X_\ell(\infty) - \mathcal{T}_A^{k\delta}(X_\ell(\infty)), \quad k \geq 1. \quad (4.58)$$

(iii) *There exists a positive scalar α such*

$$-\alpha \|\pi(0) - \pi_\delta(\infty)\| \leq \sum_{t=1}^T \langle \tilde{M}_\ell(t), Q \rangle \leq \alpha \|\pi(0) - \pi_\delta(\infty)\|, \quad \forall T \geq 1, \quad (4.59)$$

where $\pi_\delta(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 \mathbb{P}^{k\delta}$ whenever $\pi(0) = \pi_0$.

Proof: Proof of (i): It follows readily by combining (4.47) and (4.55).

Proof of (ii): For sake of notational simplicity we denote $\bar{S} = S_\ell(\infty)$, $\bar{X} = X_\ell(\infty)$, $S(k) = S_\ell(k)$, $\tilde{S}(k) = \tilde{S}_\ell(k)$, $M(k) = M_\ell(k)$ and $\tilde{M}(k) = \tilde{M}_\ell(k)$ for any fixed $\ell = 0, \dots, \delta - 1$. In addition, $\mathcal{T}$ stands for $\mathcal{T}_A^\delta$. From Proposition 4.5 (iii), we write

$$\bar{X} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(\bar{S}),$$

so that we have

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sum_{t=0}^{k-1} \mathcal{T}^t(\bar{S}) + \sum_{t=k}^{\infty} \mathcal{T}^t(\bar{S}) = \sum_{t=0}^{k-1} \mathcal{T}^t(\bar{S}) + \mathcal{T}^k\left(\sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{T}^t(\bar{S})\right) \\ &= \sum_{t=0}^{k-1} \mathcal{T}^t(\bar{S}) + \mathcal{T}^k(\bar{X}), \quad (4.60)\end{aligned}$$

which, in addition to (4.54)–(4.56), allows us to evaluate

$$\begin{aligned}\tilde{M}(k) &= \sum_{t=1}^k \mathcal{T}^{k-t}(S(t) - \bar{S}) = \sum_{t=1}^k \mathcal{T}^{k-t}(S(t)) - \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{T}^j(\bar{S}) \\ &= M(k) - \bar{X} + \mathcal{T}^k(\bar{X})\end{aligned}$$

Proof of (iii): Set $\Upsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{S}(k)\| \mathbb{I} \in \mathcal{M}^{n_0}$. It is immediate from Lemma 4.4 that $\|\Upsilon\| \leq \gamma \|\pi(0) - \pi_{\delta}(\infty)\|$, and we employ Lemma 4.1 to write

$$\left\langle \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{T}^t(\Upsilon), Q \right\rangle \leq \rho \|\Upsilon\| \leq \rho \gamma \|\pi(0) - \pi_{\delta}(\infty)\|. \quad (4.61)$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{T}^t(\Upsilon), Q \right\rangle &= \sum_{t=0}^{\infty} \left\langle \mathcal{T}^t\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\tilde{S}(k)\| \mathbb{I}\right), Q \right\rangle \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \mathcal{T}^t(\|\tilde{S}(k)\| \mathbb{I}), Q \right\rangle = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^t \left\langle \mathcal{T}^{t-k}(\|\tilde{S}(k)\| \mathbb{I}), Q \right\rangle \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^t \left\langle \|\tilde{S}(k)\| \mathcal{T}^{t-k}(\mathbb{I}), Q \right\rangle \geq \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^t \left\langle \|\tilde{S}(k)\| \mathcal{T}^{t-k}(\mathbb{I}), Q \right\rangle,\end{aligned}$$

which, together with Proposition 4.1(i), allows us to evaluate

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{t=0}^{\infty} \mathcal{T}^t(\Upsilon), Q \right\rangle &\geq \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^t \left\langle \mathcal{T}^{t-k}(\tilde{S}(k)), Q \right\rangle \\ &= \sum_{t=1}^T \left\langle \sum_{k=1}^t \mathcal{T}^{t-k}(\tilde{S}(k)), Q \right\rangle = \sum_{t=1}^T \langle \tilde{M}(t), Q \rangle. \quad (4.62)\end{aligned}$$

The right-hand side of (4.59) follows from (4.61) and (4.62), with $\alpha = \rho\gamma$. Similar arguments and Proposition 4.1 (ii) lead to the left-hand side of (4.59). $\square$

Theorem 4.1 *Assume that Θ is periodic with period δ , and that $\mathcal{H}$ is mean square stable. Then, for each $T \geq 0$, there exist non-negative scalars α and β (that do not depend on $T, X(0)$ or $\pi(0)$) such that, for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$,*

$$J_\ell^T \leq \alpha \|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| + \beta \|X_\ell(\infty) - X_\ell(0)\| \\ + \langle X_\ell(0), Q \rangle + n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle$$

and

$$J_\ell^T \geq -\alpha \|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| - \beta \|X_\ell(\infty) - X_\ell(0)\| \\ + \langle X_\ell(0), Q \rangle + n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle,$$

where n_ℓ is the largest integer such that $n_\ell \delta + \ell \leq T$,

$$X_\ell(\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_A^{k\delta}(S_\ell(\infty)), \quad \text{and} \quad \pi_\delta(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 \mathbb{P}^{k\delta}.$$

Proof: First suppose that $T \geq \delta$. Let n_ℓ be the largest integer such that $n_\ell \delta + \ell \leq T$ for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$. Here $\mathcal{T}$ stands for $\mathcal{T}_A^\delta$. We employ Lemma 4.5 to obtain an equivalent way to express the cost (4.51).

$$J_\ell^T - \langle X_\ell(0), Q \rangle = \sum_{k=1}^{n_\ell} \langle X_\ell(k), Q \rangle \\ = \sum_{k=1}^{n_\ell} (\langle \mathcal{T}^k(X_\ell(0)), Q \rangle + \langle M_\ell(k), Q \rangle) \\ = \sum_{k=1}^{n_\ell} (\langle \mathcal{T}^k(X_\ell(0)), Q \rangle + \langle \tilde{M}_\ell(k) + X_\ell(\infty) - \mathcal{T}^k(X_\ell(\infty)), Q \rangle) \\ = n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle + \sum_{k=1}^{n_\ell} \langle \mathcal{T}^k(X_\ell(0) - X_\ell(\infty)), Q \rangle + \sum_{k=1}^{n_\ell} \langle \tilde{M}_\ell(k), Q \rangle. \quad (4.63)$$

Now, we consider the second term on the right-hand side of (4.63). It follows from Lemma 4.1 that there exists a positive scalar β such that

$$\sum_{k=1}^{n_\ell} \langle \mathcal{T}^k(X_\ell(0) - X_\ell(\infty)), Q \rangle \leq \beta \|X_\ell(\infty) - X_\ell(0)\|.$$

This evaluation, together with the one in Lemma 4.5 (iii) for the third term on the right-hand side of (4.63), provides the upper bound for the cost in (4.63):

$$\begin{aligned} J_\ell^T &\leq \alpha \|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| + \beta \|X_\ell(\infty) - X_\ell(0)\| \\ &\quad + \langle X_\ell(0), Q \rangle + n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle. \end{aligned}$$

Now, for the lower bound, we employ Lemma 4.1 again to write

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_\ell} \langle \mathcal{T}^k(X_\ell(0) - X_\ell(\infty)), Q \rangle &= - \sum_{k=1}^{n_\ell} \langle \mathcal{T}^k(X_\ell(\infty) - X_\ell(0)), Q \rangle \\ &\geq -\beta \|X_\ell(\infty) - X_\ell(0)\|; \end{aligned}$$

this evaluation, Lemma 4.5 (iii), and (4.63) lead to the result. Considering now the case when $\ell \leq T < \delta$, we have $n_\ell = 0$, and thus $J_\ell^T - \langle X_\ell(0), Q_c \rangle = 0$. Finally, for $0 \leq T < \ell$, we have from Definition 4.2 that $J_\ell^T = 0$ and the proof is completed. $\square$

Corollary 4.1 *Suppose that $\mathcal{H}$ is mean square stable and that δ is the period of Θ . Then, for each $T \geq 0$, there exist non-negative scalars α and β (that do not depend on $T, X(0)$ or $\pi(0)$) such that*

$$\begin{aligned} J^T(X(0)) &\leq \alpha \delta \|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| + \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \left(\beta \|X_\ell(\infty) - X(\ell)\| + \langle X(\ell), Q \rangle \right) \\ &\quad + T \left\langle \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \frac{1}{\delta} X_\ell(\infty), Q \right\rangle \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} J^T(X(0)) &\geq -\alpha \delta \|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| + \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \left(-\beta \|X_\ell(\infty) - X(\ell)\| + \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \langle X(\ell), Q \rangle \right) \\ &\quad + T \left\langle \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \frac{1}{\delta} X_\ell(\infty), Q \right\rangle - 2(\delta-1) \left\langle \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \frac{1}{\delta} X_\ell(\infty), Q \right\rangle \end{aligned}$$

where n_ℓ is the largest integer such that $n_\ell \delta + \ell \leq T$,

$$X_\ell(\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_A^{k\delta}(S_\ell(\infty)), \quad \text{and} \quad \pi_\delta(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_0 \mathbb{P}^{k\delta}.$$

Proof: By summing up on ℓ the evaluation of Theorem 4.1 and applying the identity $J^T(X(0)) = \sum_{\ell=0}^{\delta-1} J_\ell^T$, we get

$$J^T(X(0)) \leq \alpha\delta\|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| + \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \left(\beta\|X_\ell(\infty) - X(\ell)\| + \langle X(\ell), Q \rangle + n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle \right) \quad (4.64)$$

$$J^T(X(0)) \geq -\alpha\delta\|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| + \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \left(-\beta\|X_\ell(\infty) - X(\ell)\| + \langle X(\ell), Q \rangle + n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle \right), \quad (4.65)$$

where n_ℓ is the largest integer such that $n_\ell\delta + \ell \leq T$. From the definition of n_ℓ , we have that $T - \delta + 1 \leq n_\ell\delta + \ell \leq T$, for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$. Hence,

$$\frac{T - 2\delta + 2}{\delta} \leq n_\ell \leq \frac{T}{\delta},$$

and we evaluate,

$$\sum_{\ell=0}^{\delta-1} n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle \leq \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \frac{T}{\delta} \langle X_\ell(\infty), Q \rangle \quad (4.66)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\delta-1} n_\ell \langle X_\ell(\infty), Q \rangle \geq \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \frac{T - 2\delta + 2}{\delta} \langle X_\ell(\infty), Q \rangle. \quad (4.67)$$

The proof follows immediately from (4.64), (4.65), (4.66) and (4.67). $\square$

For illustration, Figures 4.4 and 4.5 show the bounds in the Corollary 4.1 and costs $J^T(X(0))$ obtained for different initial conditions $X(0)$ in a numerical example with periodic Markov chain (with period $\delta = 3$). The data of the numerical example is presented in Appendix B.

Remark 4.2 *Some special cases can be evaluated by means of Corollary 4.1. For instance, if the Markov chain is aperiodic and $\pi(0) = \pi(\infty)$ it yields,*

$$\begin{aligned} & -\beta\|X(\infty) - X(0)\| + \langle X(0), Q \rangle + T\langle X(\infty), Q \rangle \\ & \leq J^T(X(0)) \leq \beta\|X(\infty) - X(0)\| + \langle X(0), Q \rangle + T\langle X(\infty), Q \rangle. \end{aligned}$$

This is the situation in the case with no jumps ($N = 1$); one has that $\delta = 1$ and $\pi(0) = \pi(\infty) = 1$, necessarily.

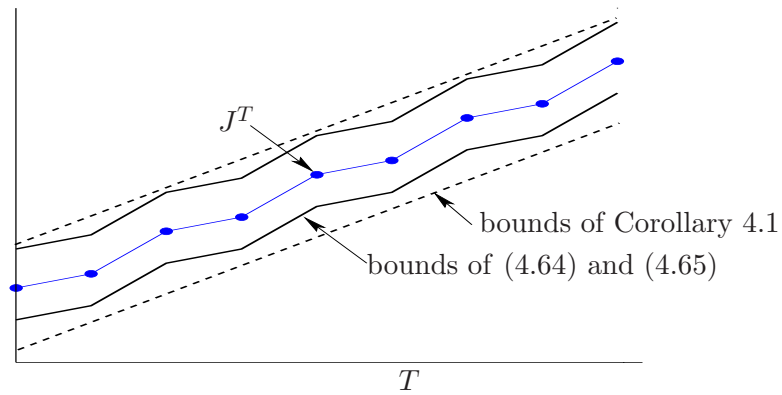


Figura 4.4: Bounds for the cost J^T in the Corollary 4.1 and inequalities (4.64) and (4.65).

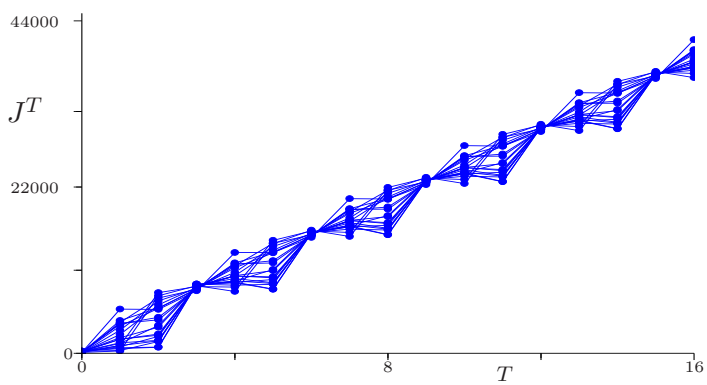


Figura 4.5: Costs $J^T(X(0))$ for 20 different values of $X(0)$ in a numerical example.

Also, if one sets the initial condition $X(0) = X(\infty)$, then $\pi(0) = \pi(\infty)$ necessarily and

$$J^T(X(\infty)) = (T+1)\langle X(\infty), Q \rangle,$$

i.e., the total cost is the cost per stage $\langle X(\infty), Q \rangle$ times the number of stages $T+1$, with no transient behavior. Also, if one considers the case with no additive noise, then one can obtain after some manipulations that for some β ,

$$J^T(X(0)) \leq \beta \|X(0)\|.$$

Another important result follows by considering $T \rightarrow \infty$, as we will see in Section 4.3.8.

4.3.8 The Long Run Average Cost

In this paper we are interested in the computation of the long run average costs (LRAC)

$$J_G^+ := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \mathbb{E}_{x_0, \pi_0} [z(k)], \quad (4.68)$$

$$J_G^- := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \mathbb{E}_{x_0, \pi_0} [z(k)], \quad (4.69)$$

for the controlled version of system $\mathcal{H}$,

$$\mathcal{H}_c : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + E_{\theta(k)}w(k) + B_{\theta(k)}u(k) \\ z(k) = x(k)'Q_{\theta(k)}x(k) + u(k)'R_{\theta(k)}u(k) \\ k \geq 0, x(0) = x_0, \pi(0) = \pi_0, \end{cases}$$

with $B \in \mathcal{M}^{n,r}$, and $R \in \mathcal{M}^{r,0}$, $R > 0$. Here $u \in \mathbb{R}^r$ is the control action and we assume that it takes the linear feedback form:

$$u(k) = G_{\theta(k)}x(k) \text{ or } u(k) = Gx(k) \quad \forall k \geq 0, \quad (4.70)$$

depending on the available information; the former is adopted in the case of complete state observation and the latter in case of observation of x only. Eventually,

one may impose the structure $G = LC$ for a given C when only $y(k) = Cx(k)$ is available. Note that (4.68) and (4.69) may depend on (x_0, π_0) or, equivalently on $X(0)$. Whenever necessary we denote $J_G^+(X(0))$ and similarly for other cost functionals.

It is a feature of this approach that the results will not depend on whether the states θ or x are fully observed or not; the linear state feedback structure allows us to deal with the closed-loop version for system $\mathcal{H}$ and apply the results of the previous sections to the corresponding system.

We denote by $\mathcal{T}_{A+BG}$ the operator of closed-loop version of system $\mathcal{H}_c$ with a feedback control G , and Proposition 4.4 yields that

$$X(k+1) = \mathcal{T}_{A+BG}(X(k)) + \Sigma(k), \quad k \geq 1.$$

where $A+BG$ is made up of matrices $A_i + B_i G_i$, $A_i + B_i G$ or $A_i + B_i G C_i$; similarly, for $Q + G'RG$. Also, Q_c stands for $Q + G'RG$.

Definition 4.3 (Mean Square Stabilizability) *We say that model $\mathcal{H}_c$ is mean square stabilizable whenever there exists a feedback control G in one of the aforementioned class of controls for which $\sigma(\mathcal{T}_{A+BG}) < 1$. We say that such G is a mean square stabilizing control.*

Next, we evaluate the LRAC.

Theorem 4.2 *Suppose that δ is the period of Θ and that G is a given mean square stabilizing control. Then,*

$$\bar{J}_G := J_G^- = J_G^+ = \left\langle \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \frac{1}{\delta} X_\ell(\infty), Q_c \right\rangle \quad (4.71)$$

where $X_\ell(\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}_{A+BG}^{k\delta}(S_\ell(\infty))$, $\ell = 0, \dots, \delta - 1$.

Proof: It follows from Corollary 4.1 and (4.38) that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J^T(X(0)) = \left\langle \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \frac{1}{\delta} X_\ell(\infty), Q_c \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=0}^T \mathbb{E}_{x_0, \pi_0} [z(k)]$$

and we can see that the LRAC costs (4.68) and (4.69) present no gap, leading to the result. $\square$

Corollary 4.1 together with Theorem 4.2 lead to an error bound for the approximation of the LRAC by the associate finite horizon cost.

Corollary 4.2 *There exists an scalar $\bar{J}_G(X(0))$ such that,*

$$\left| \bar{J}_G(X(0)) - \frac{J^T(X(0))}{T} + \frac{\sum_{\ell=0}^{\delta-1} \langle X(\ell), Q_c \rangle}{T} \right| \leq \frac{\alpha \delta \|\pi_\delta(\infty) - \pi(0)\| + \sum_{\ell=0}^{\delta-1} \beta \|X_\ell(\infty) - X(\ell)\| + 2(\delta - 1) \bar{J}_G}{T}. \quad (4.72)$$

Remark 4.3 *When Θ is an ergodic Markov chain, the limiting values $X_\ell(\infty)$, $\ell = 0, \dots, \delta-1$ do not depend on $X(0)$, e.g., see (Costa, Fragoso e Marques, 2005, Prop 3.36). Then the limiting value $\bar{J}_G$ in Theorem 4.2 and in Corollary 4.2 does not depend on the initial value $X(0)$. The LRAC is unique.*

Now, we turn our attention to the control problem. Suppose that $\mathcal{H}_c$ is mean square stabilizable. The LRAC control problem consists of minimizing the cost $\bar{J}_G$ in G within the class of stabilizing controls, i.e.,

$$J_{\text{opt}} = \inf_G \bar{J}_G. \quad (4.73)$$

It follows immediately from Theorem 4.2 that mean square stabilizability is a sufficient condition for existence of a finite cost in (4.73). The result generalizes the one in (Costa, Fragoso e Marques, 2005), which is valid for the particular case when the chain is ergodic and fully observed.

Corollary 4.3 *If $\mathcal{H}_c$ is mean square stabilizable, then there exists a solution for the LRAC control problem, i.e., there is G such that (4.73) holds.*

4.3.9 Conclusions

This paper derives the two-sided bound of Corollary 4.1 for the finite horizon cost J^T associated with MJLS with additive noise, in a setting that encompasses the situation when the Markov chain is finite-state but otherwise general, and the

MJLS state is not fully observed. For control purposes, a linear feedback control is chosen.

The bounds present the following interesting features: (a) They are tight in the sense that they present no gap when one guesses the cyclical stationary solutions $X^\ell(\infty)$, $0 \leq \ell \leq \delta - 1$ from the initial states. (b) An error bound for the approximation of the LRAC by the associate finite horizon cost is expressed in (4.72). (c) They assure the existence of the limiting cost $\bar{J}_G$ for any stabilizing control G and hence, of the optimal control.

These results set an initial landmark on the pursue for approximating solutions for the important problem of LRAC for MJLS with incomplete observation.

4.3.10 Appendix - Proof of Proposition 4.5

We say that a sequence $\{z(k) : k \geq 0\}$ in $\mathbb{R}^n$ (in $\mathcal{M}^{n_0}$) is Cauchy summable if

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{v \geq 0} \|z(k+v) - z(k)\| < \infty.$$

We prove below that the sequence $\{S_\ell(k) : k \geq 0\}$ as defined in (4.48) is Cauchy summable for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$. With this fact in hand, we can develop the proof of Proposition 4.5 by mimicking the proof of (Costa, Fragoso e Marques, 2005, Proposition 3.36).

Indeed, for each $\ell = 0, \dots, \delta - 1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{v \geq 0} \|S_\ell(k+v) - S_\ell(k)\| \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{v \geq 0} \|S_\ell(k+v) - S_\ell(\infty)\| + \|S_\ell(\infty) - S_\ell(k)\|. \end{aligned} \quad (4.74)$$

But from Lemma 4.4 it follows that $\|S_\ell(\infty) - S_\ell(k)\| \leq \gamma \|\pi(0) - \pi_\delta(\infty)\| < \infty$.

In addition, we can write that (see the proof of Lemma 4.4)

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{v \geq 0} \|S_{\ell}(k+v) - S_{\ell}(\infty)\| \\
& \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \left(\max_{j \in \mathcal{N}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}} p_{ij} E_i E'_i \right\| \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{v \geq 0} \sum_{n=0}^{\delta-1} \eta \xi^{k-1} (1 + \xi^v) \|\pi(0) \mathbb{P}^n - \pi_{\delta}(\infty) \mathbb{P}^n\| \\
& \leq \frac{2\beta\eta\delta}{(1-\alpha)(1-\xi)} \left(\max_{j \in \mathcal{N}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}} p_{ij} E_i E'_i \right\| \right) \|\pi(0) - \pi_{\delta}(\infty)\| < +\infty. \tag{4.75}
\end{aligned}$$

Thus, from (4.74) we get that $\{S_{\ell}(k) : k \geq 0\}$ is Cauchy summable.

4.3.11 Appendix - Numerical Example

We consider system $\mathcal{H}$ with $Q_i = I$, $R_i = 1$, $i \in \mathcal{N}$, and

$$\begin{aligned}
A_1 = A_3 &= \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ 2.3 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
E_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad E_3 = 10E_1, \quad E_4 = 10E_2.
\end{aligned}$$

4.3.12 Comentários da seção

A seção apresentou condições que asseguram que o custo ótimo de N estágios J_N^* , dividido pelo número de estágios, aproxima assintoticamente o custo médio a longo prazo ótimo $\bar{J}^*$, ou seja,

$$J_N^*/N \rightarrow \bar{J}^* \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

Este resultado principal está enunciado no Teorema 4.1 e seu Corolário 4.1. Uma questão importante relacionada a este problema está ainda em aberto, conforme a seguir. Uma tentativa de responder esta questão está sob investigação.

4.4 Comentários

Este capítulo apresentou resultados de aproximação de custo médio a longo prazo em duas frentes principais de investigação, correspondendo respectivamente aos artigos nas Seções 4.2 e 4.3.

No primeiro artigo, a principal contribuição foi apresentar condições nas quais o custo ótimo de N estágios (ou seja, J_N^*), dividido pelo número de estágios, aproxima assintoticamente o custo médio a longo prazo ótimo J^* , ou seja,

$$J_N^*/N \rightarrow J^* \text{ quando } N \rightarrow \infty. \quad (4.76)$$

Alguns pontos permanecem em aberto e carecem de investigação mais detalhada. Por exemplo, seja $\psi_N^* = \{f_0^{(N)}, \dots, f_N^{(N)}\}$ a política que realiza o mínimo em J_N^* . Talvez seja possível demonstrar que a trajetória ótima de segundo momento $\{X_k^{(\psi_N^*)}\}_{k=0}^N$ é estável para todo N suficientemente grande. Se esta afirmação for válida então podemos assumir a existência de uma constante $c > 0$ tal que $\|X_N^{(\psi_N^*)}\| \leq c\|X_0\|$, logo a condição $\lim_{N \rightarrow \infty} \|X_N^{(\psi_N^*)}\|/N = 0$ será satisfeita e assim o Corolário 4.1, p.107, assegura a aproximação em (4.76) e a existência de uma política ótima estacionária.

Outro ponto importante de investigação é em relação a dependência da política ψ_N^* em relação ao horizonte N , e um problema relacionado é o de garantir a existência de uma lei de realimentação f tal que $f_0^{(N)} \rightarrow f$ quando $N \rightarrow \infty$, no qual f realiza uma política ótima estacionária $\mathbf{f}^* = \{f, f, \dots\}$ para o custo médio a longo prazo (veja Capítulo 3).

No artigo da Seção 4.3, desenvolvemos condições de forma a garantir limitantes superior e inferior para o custo de N estágios de sistemas lineares com saltos markovianos, veja *Corollary 4.1*, p.128. Através destes limitantes conseguimos expressar o custo médio a longo prazo do sistema supondo realimentação linear e ação de controle estabilizante. Cabe ressaltar que impomos somente hipótese de periodicidade, mais fraca que ergodicidade, sobre a cadeia de Markov subjacente. Conforme motivado no artigo (veja Seção 4.3.8), este resultado de aproximação pode ser útil para caracterizar a solução do problema de controle quando o controlador não possui acesso completo aos estados de Markov.

Capítulo 5

Avaliação numérica

O capítulo anterior mostra que o custo ótimo do problema de N estágios, dividido por N , aproxima assintoticamente o mínimo custo médio a longo prazo se algumas hipóteses forem satisfeitas. Usaremos esta aproximação no problema de controle de custo médio a longo prazo (CMLP) de sistemas lineares com saltos markovianos (SLSM), no caso em que o controlador não tem acesso ao estado da cadeia de Markov. Combinando o método de aproximação e um algoritmo conhecido da literatura, conseguimos determinar numericamente a solução ótima do problema se uma conjectura sobre a solução for válida.

5.1 Introdução

Considere o processo estocástico, definido num espaço de probabilidade fixado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$, conforme a seguir:

$$x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + E_{\theta(k)}w(k),$$
$$\forall k \geq 0, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \theta(0) \sim \pi(0). \quad (5.1)$$

O estado do sistema e a variável de controle são representados, respectivamente, por $x(k) \in \mathbb{R}^n$ e $u(k) \in \mathbb{R}^m$. O processo $\{w(k); k \geq 0\}$ é iid com média nula e matriz de covariância igual a matriz identidade para cada $k \geq 0$; e $\Theta := \{\theta(k); k \geq 0\}$ representa uma cadeia de Markov homogênea, tomando valores conjunto finito $\mathcal{N} := \{1, \dots, n_\theta\}$. A matriz estocástica $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n_\theta$, é associada a Θ , com distribuição de probabilidade dada por $\pi_i(k) := \Pr(\theta(k) = i)$, sendo $\pi(0)$

a distribuição inicial. As matrizes A_i , B_i , e E_i , $i = 1, \dots, n_\theta$, são conhecidas e possuem dimensões compatíveis com as do sistema.

Dado $u(0), u(1), \dots$, podemos avaliar o custo médio a longo prazo associado à (5.1), conforme a seguir:

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[x(k)' Q_{\theta(k)} x(k) + u(k)' R_{\theta(k)} u(k)], \quad (5.2)$$

no qual $\mathbb{E}[\cdot]$ denota a esperança matemática e Q_i (R_i), $i = 1, \dots, n_\theta$, é matriz simétrica semidefinida (definida) positiva.

Assumimos uma estrutura de realimentação linear para o controle, sem observação da cadeia de Markov, dada por

$$u(k) = g(k)x(k), \quad \forall k \geq 0, \quad (5.3)$$

no qual $g(k)$ é matriz de dimensão $m \times n$. Aplicando (5.3) em (5.1) e (5.2) obtemos

$$x(k+1) = (A_{\theta(k)} + B_{\theta(k)}g(k))x(k) + E_{\theta(k)}w(k), \quad \forall k \geq 0, \quad (5.4)$$

no qual $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\theta(0) \sim \pi(0)$. Denotando por $\mathbf{G}$ o conjunto de todas as sequências admissíveis $\mathbf{g} = \{g(0), g(1), \dots\}$, podemos agora introduzir o problema de otimização no qual estamos interessados em avaliar:

$$J^* := \min_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} [x(k)' (Q_{\theta(k)} + g(k)' R_{\theta(k)} g(k)) x(k)] \right) \text{ sujeito a (5.4).} \quad (5.5)$$

O problema de controle estocástico em (5.5) encontra-se em aberto na literatura e não existe um método de otimização global capaz de determinar o valor J^* , exceto em alguns casos muito particulares. Neste capítulo apresentamos um método de aproximação para o cálculo do valor ótimo J^* . De fato, considere o problema de N -estágios

$$J_N^* = \min_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E} [x(k)' (Q_{\theta(k)} + g(k)' R_{\theta(k)} g(k)) x(k)] \right) \text{ sujeito a (5.4).} \quad (5.6)$$

Apresentaremos condições nas quais vale a aproximação

$$J_N^*/N \rightarrow J^* \text{ quando } N \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

para qualquer condição inicial x_0 e $\pi(0)$. Note que, se algum algoritmo consegue determinar $\mathbf{g}^* = \{g^*(0), \dots, g^*(N-1)\}$ que realiza o mínimo global J_N^* em (5.6), então este pode ser usado em (5.7) para determinar J^* . Até o momento desconhecemos a existência de algoritmo que assegure $\mathbf{g}^*$, porém uma possível alternativa é considerar o algoritmo proposto em (do Val e Başar, 1999), (Vargas et al., 2004), (Vargas, 2004). Nestes trabalhos, demonstra-se que o algoritmo lá proposto fornece $\mathbf{g} = \{g(0), \dots, g(N-1)\}$ que realiza um *mínimo local* do problema em (5.6). Portanto $\mathbf{g}$ é um candidato a $\mathbf{g}^*$, ou seja, $\mathbf{g}$ é solução-candidata a realizar o mínimo global em (5.6). Para ilustrar numericamente a aproximação em (5.7), conjecturamos que $\mathbf{g}$ realiza o *mínimo global* em (5.6), veja Conjectura 5.1.

Comentário 5.1 *No Capítulo 4, uma aproximação semelhante a (5.7) foi desenvolvida considerando o sistema $x(k+1) = A(g(k))x(k) + Ew(k)$, no qual $A(\cdot)$ é um operador determinístico. Na sequência, estenderemos os resultados de aproximação do Capítulo 4 para garantir (5.7), agora considerando o operador estocástico (veja (5.4))*

$$A_{\theta(k)}(g(k)) := A_{\theta(k)} + B_{\theta(k)}g(k), \quad \forall k \geq 0.$$

A seguir apresentamos com mais detalhes o SLSM, a descrição formal do problema de otimização, condições para a aproximação em (5.7) e método iterativo para cômputo de J^* .

5.2 Definições, conceitos básicos e formulação do problema

Seja $\mathcal{M}^{r,s}$ (respectivamente, $\mathcal{M}^r$) o espaço linear normado, formado por todas as matrizes reais $r \times s$ (respectivamente, $r \times r$) e considere $\mathcal{S}^{r0} \subset \mathcal{M}^r$ como o cone convexo fechado de todas as matrizes semidefinida positivas. Seja $\mathbb{M}^{r,s}$ o

espaço linear formado por um número n_θ de matrizes tais que $\mathbb{M}^{r,s} = \{U = (U_1, \dots, U_{n_\theta}) : U_i \in \mathbb{M}^{r,s}, i \in \mathcal{N}\}$; também $\mathbb{M}^r \equiv \mathbb{M}^{r,r}$. Para $U, V \in \mathbb{M}^r$, $U \geq V$ significa que $U_i - V_i \in \mathbb{S}^{r0}$ para cada $i \in \mathcal{N}$, e segue de maneira semelhante para outras relações matemáticas. Seja $\mathbb{S}^{r0} = \{U = (U_1, \dots, U_{n_\theta}) : U_i \in \mathbb{S}^{r0}, i \in \mathcal{N}\}$. Considere $\text{tr}\{\cdot\}$ como o operador traço. Sabe-se que $\mathbb{M}^{r,s}$ equipado com o produto interno

$$\langle U, V \rangle = \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{U_i' V_i\}$$

forma um espaço de Hilbert. A norma correspondente para o espaço $\mathbb{M}^{r,s}$ é definida por $\|U\| = \langle U, U \rangle^{1/2}$, $U \in \mathbb{M}^{r,s}$.

Assumimos aqui que os parâmetros em (5.1)-(5.2) são conhecidos: $A \in \mathbb{M}^{r,r}$, $B \in \mathbb{M}^{r,s}$, $E \in \mathbb{M}^{r,l}$, $Q \in \mathbb{S}^{r0}$, $R \in \mathbb{S}^{s0}$, $R > 0$.

5.2.1 Dinâmica de segundo momento associada

Desenvolvemos, nesta seção, uma forma equivalente determinística de expressar o problema de controle estocástico (5.5)-(5.4) que será conveniente para tratar o problema de otimização correspondente.

O segundo momento de $x(k)$, condicionado ao estado markoviano $\theta(k)$, é definido por $X(k) = \{X_1(k), \dots, X_{n_\theta}(k)\} \in \mathbb{S}^{r0}$

$$X_i(k) := E[x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta, \quad (5.8)$$

$k = 0, \dots, N$, no qual $\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ representa função indicadora do conjunto $\mathcal{C}$. Seja $\Sigma(k) = \{\Sigma_1(k), \dots, \Sigma_{n_\theta}(k)\} \in \mathbb{S}^{r0}$ definido conforme abaixo:

$$\Sigma_i(k) := \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \pi_j(k) E_j E_j', \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta. \quad (5.9)$$

Vamos considerar o operador $\mathcal{T} : \mathbb{S}^{r0} \times \mathbb{M}^{s,r} \rightarrow \mathbb{S}^{r0}$, seguindo a notação em (Costa, Fragoso e Marques, 2005, p.33), definido para cada $X \in \mathbb{S}^{r0}$ e $g \in \mathbb{M}^{s,r}$ por

$$\mathcal{T}_i(X, g) := \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (A_j + B_j g) X_j (A_j + B_j g)', \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta.$$

O resultado a seguir estabelece a dinâmica de $X(k)$.

Proposição 5.1 (*Vargas et al., 2004, Lem.3.1*), (*Costa, Fragoso e Marques, 2005, Prop.3.5, p.50*). Dada uma sequência $\{g(0), \dots, g(N-1)\} \in \mathbf{G}$, a recorrência a seguir é válida para cada $k = 0, \dots, N-1$:

$$X_i(k+1) = \mathcal{T}_i(X(k), g(k)) + \Sigma_i(k), \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta, \quad (5.10)$$

no qual $X_i(0) = \pi_i(0)x(0)x(0)'$.

Proposição 5.2 (*(Vargas et al., 2004, Lem.3.2), (Costa, Fragoso e Marques, 2005, p.32)*). Dado $U \in \mathbb{S}^{r0}$, vale a identidade

$$\mathbb{E}[x(k)'U_{\theta(k)}x(k)] = \langle U, X(k) \rangle, \quad \forall k = 0, \dots, N.$$

Denotaremos por $\mathbf{G}_N$ o conjunto de todas as possíveis sequências admissíveis de ações de controle $\mathbf{g}_N := \{g(0), \dots, g(N-1)\}$, em que cada $g(k)$, $k = 0, \dots, N-1$ pertence ao conjunto $\mathcal{M}^{s,r}$. Representaremos $\mathbf{G}_N$ e $\mathbf{g}_N$ simplesmente por $\mathbf{G}$ e $\mathbf{g}$ para simplificar a notação, sempre que a interpretação estiver clara. O custo de N estágios devido a uma sequência de ações $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ é definido por

$$\begin{aligned} J_N(X_0, \mathbf{g}) &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}[x(k)'(Q_{\theta(k)} + g(k)'R_{\theta(k)}g(k))x(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle Q + g(k)'Rg(k), X(k) \rangle, \end{aligned} \quad (5.11)$$

no qual a última igualdade segue imediatamente da Proposição 5.2 e $X(k)$, $k \geq 0$, satisfaz (5.10). O problema de controle de N estágios pode então ser reescrito na forma determinística equivalente:

$$J_N^*(X_0) = \min_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} J_N(X_0, \mathbf{g}) \text{ sujeito a (5.10)}. \quad (5.12)$$

Nosso objetivo será determinar condições de forma que seja possível realizar a aproximação

$$J_N^*(X_0)/N \rightarrow J^*(X_0) \text{ quando } N \rightarrow \infty,$$

no qual $J^*(X_0)$ representa o mínimo custo em (5.5).

5.2.2 Resultados para problema de horizonte finito

Apresentamos a seguir condição necessária de otimalidade para o problema J_N^* em (5.12), e logo adiante introduzimos o algoritmo que produz uma sequência de ganhos que satisfaz esta condição.

Considere o operador $\mathcal{E} : \mathbb{S}^{r_0} \rightarrow \mathbb{S}^{r_0}$, definido por $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n_\theta}\}$ e satisfazendo

$$\mathcal{E}_i(\phi) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ij} \phi_j, \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta, \quad \forall \phi \in \mathbb{S}^{r_0}.$$

Dado $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, defina $L(k) \in \mathbb{S}^{r_0}$ e $\omega(k) \in \mathbb{M}^{1,1}$ para cada $k = 0, \dots, N-1$, satisfazendo as equações recorrentes acopladas

$$\begin{aligned} L_i(k) &= Q_i + g(k)' R_i g(k) + (A_i + B_i g(k))' \mathcal{E}_i(L(k+1)) (A_i + B_i g(k)), \\ L_i(N) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta, \end{aligned} \quad (5.13)$$

e também

$$\begin{aligned} \omega_i(k) &= \mathcal{E}_i(\omega(k+1)) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L(k+1)) E_i E_i'\}, \\ \omega_i(N) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta, \end{aligned} \quad (5.14)$$

Usando (5.13) e (5.14) pode-se provar o resultado a seguir.

Proposição 5.3 (*Vargas et al., 2004, Prop.3.1*), (*Vargas, 2004*). Para cada $k_0 = 0, \dots, N-1$, vale a identidade

$$\sum_{k=k_0}^{N-1} \mathbb{E} [x(k)' (Q_{\theta(k)} + g(k)' R_{\theta(k)} g(k)) x(k)] = \langle L(k_0), X(k_0) \rangle + \pi(k_0) \omega(k_0).$$

Usando a Proposição 5.3, em conjunto com um argumento de programação dinâmica, podemos demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 5.4 (*Vargas et al., 2004, Th.3.1*), (*Vargas, 2004*). Suponha que a sequência de ações $\mathbf{g} = \{g(0), \dots, g(N-1)\} \in \mathbf{G}$ realiza o mínimo global do problema de N estágios, ou seja, $J_N(X_0, \mathbf{g}) = J_N^*(X_0)$. Então $\mathbf{g}$ satisfaz, para cada $k = 0, \dots, N-1$,

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} [(R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L(k+1)) B_i) g(k) + B_i' \mathcal{E}_i(L(k+1)) A_i] X_i(k) = 0, \quad (5.15)$$

no qual $X(k)$ e $L(k)$ são definidos conforme (5.10) e (5.13), respectivamente.

Comentário 5.2 Note na Proposição 5.4 que o controle $g(k)$ que realiza (5.15) depende de $X(k)$, portanto a expressão algébrica em (5.15) configura uma lei de realimentação admissível.

Comentário 5.3 A expressão em (5.15) é uma condição necessária de otimalidade. Ou seja, se $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ é tal que $J_N(X_0, \mathbf{g}) = J_N^*(X_0)$ então $\mathbf{g}$ satisfaz (5.15). Inversamente, se $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ satisfaz (5.15), então $\mathbf{g}$ pode ser um ponto de mínimo local e por isto pode ocorrer $J_N^*(X_0) < J_N(X_0, \mathbf{g})$.

Na seqüência, apresentamos um algoritmo baseado em um princípio variacional cuja solução satisfaz a condição de otimalidade da equação (5.15).

5.2.3 Algoritmo

Para encontrar uma solução $\{g(0), \dots, g(N-1)\}$ que satisfaz simultaneamente as equações matriciais acopladas (5.10), (5.13) e (5.15), empregaremos a seguir um método variacional. Este método foi desenvolvido inicialmente em (do Val e Başar, 1999) para problema sem ruído e depois foi estendido em (Vargas et al., 2004) para tratar problema com ruído.

A seguir, $\eta = 0, 1, \dots$ representa o contador de iterações. Definimos $\mathbf{g}^{(\eta)} := \{g^{(\eta)}(0), \dots, g^{(\eta)}(N-1)\} \in \mathbf{G}$, $\eta = 0, 1, \dots$ como uma seqüência de controles dada pelo algoritmo a seguir.

- *Passo 1:* Grave contador de iterações $\eta = 0$. Escolha uma seqüência inicial $\mathbf{g}^{(0)} \in \mathbf{G}$ qualquer.
- *Passo 2:* Para cada $k = 1, \dots, N$, encontre $X^{(\eta)}(k) \in \mathbb{S}^{r_0}$, solução do seguinte conjunto de equações:

$$X_i^{(\eta)}(k) = \mathcal{F}_i(X^{(\eta)}(k-1), g^{(\eta)}(k-1)) + \Sigma_i(k-1),$$

com $X_i^{(\eta)}(0) = \pi_i(0)x_0x'_0$, $i = 1, \dots, n_\theta$.

Após isto, faça $\eta = \eta + 1$ e $k = N - 1$ e siga para o próximo passo.

- *Passo 3*: Encontre $g^{(\eta)}(k)$ definido por

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} \left[\Lambda_i^{(\eta)}(k+1)g^{(\eta)}(k) + B_i' \mathcal{E}_i(L^{(\eta)}(k+1))A_i \right] X_i^{(\eta-1)}(k) = 0,$$

no qual $\Lambda^{(\eta)}(k) := R + B' \mathcal{E}(L^{(\eta)}(k))B$. Calcule $L^{(\eta)}(k) \in \mathbb{S}^0$ através de

$$\begin{aligned} L_i^{(\eta)}(k) = & Q_i + g^{(\eta)}(k)' R_i g^{(\eta)}(k) \\ & + (A_i + B_i g^{(\eta)}(k))' \mathcal{E}_i(L^{(\eta)}(k+1))(A_i + B_i g^{(\eta)}(k)), \end{aligned}$$

com $L^{(\eta)}(N) = 0$. Faça $k = k - 1$; se $k \geq 0$, retorne ao início do *Passo 3*.

- *Passo 4*: O critério de parada deve ser baseado na variação do custo entre $J_N(X_0, \mathbf{g}^{(\eta-1)})$ e $J_N(X_0, \mathbf{g}^{(\eta)})$. Se o critério de parada não é satisfeito, então retorne ao início do *Passo 2*.

Um método analítico para calcular a solução numérica do *Passo 3* está detalhado em (do Val e Başar, 1999), (Vargas, 2004, Apêndice).

Proposição 5.5 (*Vargas et al., 2004*), (*Vargas, 2004*). *As seqüências $\mathbf{g}^{(\eta)}$, $\eta = 0, 1, \dots$, geradas nos Passos 1-4 acima, são tais que*

$$J_N(X_0, \mathbf{g}^{(\eta+1)}) \leq J_N(X_0, \mathbf{g}^{(\eta)}), \quad \eta = 0, 1, \dots,$$

e $\mathbf{g} := \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{g}^{(\eta)}$ satisfaz a condição da Proposição 5.4.

Comentário 5.4 *O procedimento nos Passos 1-4, ao convergir, gera uma seqüência de ações $\mathbf{g} = \{g(0), \dots, g(N-1)\}$ que satisfaz simultaneamente as equações matriciais acopladas (5.10), (5.13), (5.14) e (5.15). Pela característica variacional do algoritmo, pode-se garantir que $\mathbf{g} = \{g(0), \dots, g(N-1)\}$ é um ponto de mínimo local para o problema de controle de N estágios.*

O método variacional nos *Passos 1-4* foi avaliado intensivamente nos últimos anos. Ele mostra-se eficaz, com tempo de processamento rápido, e com convergência num número pequeno de iterações η . Em diversos exemplos, avaliamos o algoritmo para dezenas de milhares de seqüências $\mathbf{g}^{(0)} \in \mathbf{G}$ distintas entre si, e

o algoritmo sempre convergiu para um custo mínimo independente de $\mathbf{g}^{(0)}$ escolhido. Este é um forte indício de que o custo obtido é o mínimo global. Além disso, a sequência $\mathbf{g} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{g}^{(\eta)}$ obtida nos experimentos numéricos também independe de $\mathbf{g}^{(0)}$. Apesar desta evidência numérica, Proposição 5.5 garante somente que $\mathbf{g}$ satisfaz simultaneamente (5.10), (5.13) e (5.15), e por isto $\mathbf{g}$ poderia ser um ponto de mínimo local ao invés de global (veja Comentário 5.3). Esta é uma questão em aberto na literatura. Levando-se em consideração o indício nos fatos experimentais, podemos introduzir a seguinte conjectura.

Conjectura 5.1 *Seja $\mathbf{g}^{(\eta)}, \eta = 0, 1, \dots$ gerado nos Passos 1–4. Então*

$$J_N^*(X_0) = J_N(X_0, \mathbf{g}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} J_N(X_0, \mathbf{g}^{(\eta)}),$$

no qual $\mathbf{g} := \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{g}^{(\eta)}$.

Relembrando que o principal objetivo deste capítulo é determinar o custo mínimo J^* do problema de controle de custo médio a longo prazo em (5.5), veremos a seguir condições que garantem a aproximação

$$J_N^*/N \rightarrow J^* \text{ quando } N \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

Assumindo válida a Conjectura 5.1, poderemos calcular o custo mínimo J^* através da aproximação em (5.16).

5.2.4 Condições de aproximação

Vamos assumir daqui para adiante que a cadeia de Markov $\Theta = \{\theta(k); k = 0, 1, \dots\}$ é *ergódica*. Disto segue que existe $\bar{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi(k)$ para qualquer $\pi(0)$. Adotando $\pi(0) = \bar{\pi}$, segue da recorrência $\pi(k) = \pi(0)\mathbb{P}^k$ e de (5.9) que

$$\Sigma_i := \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \pi_j E_j E_j' = \Sigma_i(k), \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta, \quad \forall k \geq 0. \quad (5.17)$$

Disto conclui-se que, se $\pi(0) = \bar{\pi}$, então $X(k) \in \mathbb{S}^0$ em (5.10) satisfaz a recorrência

$$X(k+1) = \mathcal{T}(X(k), g(k)) + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, \quad (5.18)$$

no qual $\{g(0), g(1), \dots\}$ é dado. Para simplificar a análise a seguir, assumiremos daqui para diante que $\pi(0) = \bar{\pi}$.

Definição 5.1 *Os conjuntos $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{S}^{r_0}$ e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}^{s,r}$ contém os estados e ações de controles admissíveis, respectivamente. Uma função mensurável $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ é chamada de lei de realimentação sempre que $f(X) \in \mathcal{G}$ para cada $X \in \mathcal{X}$. Uma política $\mathbf{f} = \{f_0, f_1, \dots\}$ é uma sequência de leis de realimentação f_k , $k \geq 0$, e o conjunto de todas as políticas é denotado por $\mathbf{F}$. Elementos em $\mathbf{F}$ expressos na forma $\mathbf{f} = \{f, f, \dots\}$ são referenciados como política estacionária.*

Dado uma política $\mathbf{f} = \{f_0, f_1, \dots\} \in \mathbf{F}$ e uma condição inicial $X_0 \in \mathcal{X}$, deve-se aplicar a regra $g(k) = f_k(X(k))$ no k -ésimo instante de tempo, no qual $X(k)$ satisfaz (5.18). Algumas vezes empregaremos a notação $X^{(\mathbf{f})}(k)$ para denotar a sequência em (5.18) correspondente a política $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$. O custo por estágio correspondente será

$$\mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})} := \langle Q + g(k)' R g(k), X^{(\mathbf{f})}(k) \rangle, \quad \forall k \geq 0.$$

O custo de N estágios pode então ser reescrito como

$$J_N(X_0, \mathbf{f}) := \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})}, \quad \forall N \geq 1, \quad (5.19)$$

e o problema de controle correspondente é o de encontrar uma sequência de leis de realimentação $\psi_N^* := \{f_0^*, \dots, f_{N-1}^*\}$ tal que

$$J_N^*(X) = J_N(X_0, \psi_N^*) = \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} J_N(X_0, \mathbf{f}). \quad (5.20)$$

Observe que, usando os resultados das Proposições 5.1 e 5.2 em conjunto com a notação recém-introduzida, podemos reescrever o problema estocástico em (5.5) numa forma determinística equivalente:

$$J^*(X_0) := \min_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} \left(\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{J_N(X_0, \mathbf{f})}{N} \right). \quad (5.21)$$

Considere o custo descontado definido por

$$V_\alpha(\mathbf{f}, X) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \mathcal{C}_k^{(\mathbf{f})}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{F}, \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Para tornar válida a aproximação em (5.16), precisaremos de condições baseadas no problema de controle de descontado, no qual é definido por

$$V_{\alpha}^*(X) := \inf_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} V_{\alpha}(\mathbf{f}, X), \quad \forall X_0 = X \in \mathcal{X}. \quad (5.22)$$

A definição a seguir simplifica a notação necessária adiante.

Definição 5.2 *Seja $\Sigma \in \mathbb{S}^{r_0}$ definido em (5.17) e faça $X_0 = \Sigma$. Para cada $\mathbf{f} = \{f_k\} \in \mathbf{F}$, considere $g(k) = f_k(X(k))$, $\forall k \geq 0$, no qual $X(k)$ satisfaz (5.18). Definimos a matriz de transição desde Σ , $\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{S}^{r_0}$, conforme a recorrência*

$$\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(1) = \mathcal{T}(\Sigma, g(0)), \quad \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(k+1) = \mathcal{T}\left(\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(k), g(k)\right), \quad k \geq 1,$$

com $\Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f})}(0)$ sendo o operador identidade. De modo análogo, definimos $Q_k^{(\mathbf{f})} \in \mathbb{S}^{r_0}$ de acordo com

$$Q_k^{(\mathbf{f})} = Q + g(k)' R g(k), \quad \forall k \geq 0.$$

Hipótese 5.1 *Existe uma sequência de descontos $\alpha_n \uparrow 1$ e políticas descontadas correspondentes $\mathbf{f}_{\alpha_n} \in \mathbf{F}$ que satisfazem $V_{\alpha_n}^*(X) = V_{\alpha_n}(\mathbf{f}_{\alpha_n}, X)$ e também vale*

$$M := \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^k \left\langle Q_k^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}, \Phi_{\Sigma}^{(\mathbf{f}_{\alpha_n})}(k) \right\rangle < \infty.$$

Note que a Hipótese 5.1 é uma extensão da Hipótese 3.1, p.63, para o caso de sistemas com saltos markovianos, e de modo análogo o resultado a seguir estende aquele do Corolário 4.1, p.107.

Proposição 5.6 *(Corolário 4.1, p.107). Suponha que Hipótese 5.1 seja válida. Se ψ_N^* , $N \geq 1$, é uma sequência de leis de realimentação que satisfaz (5.20), e se vale*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|X^{(\psi_N^*)}(N)\|/N = 0, \quad (5.23)$$

então existe uma constante positiva ρ (que não depende de X_0) tal que

$$J_N^*(X_0)/N \rightarrow \rho = J^*(X_0) \quad \text{quando } N \rightarrow \infty, \quad (5.24)$$

para cada $X_0 \in \mathcal{X}$. Além disso, existe uma política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ que realiza o mínimo $J^*(X)$ em (5.21).

O resultado da Proposição 5.6, combinado com a Conjectura 5.1, será de fundamental importância para determinar o custo mínimo J^* e por conseguinte a solução do problema de controle de custo médio a longo prazo em (5.5).

Comentário 5.5 *A Proposição 5.6 apresenta condições que asseguram a existência de uma política estacionária $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\}$ que realiza o mínimo em (5.21). A existência de tal política, no entanto, não implica na “estacionariedade das ações” correspondentes; ou seja, a sequência ótima de ações $\{g^*(k) = f^*(X_k^*); k \geq 0\}$ pode não convergir. Porém, se esta convergir, digamos para $g^* \in \mathcal{G}$, então pode-se provar que g^* satisfaz*

$$\rho = J^*(X_0) = \langle Q + g^{*'} R g^*, \bar{X} \rangle \text{ sujeito à } \bar{X} = \mathcal{T}(\bar{X}, g^*) + \Sigma, \quad (5.25)$$

no qual $\bar{X} = \lim_{k \rightarrow \infty} X(k)$. A procura pela ação g^* que satisfaz (5.25) foi tratada no artigo (do Val et al., 2002) e os autores desenvolveram um método LMI que fornece solução sub-ótima para (5.25). Para fins de comparação numérica, apresentamos este método LMI na Seção 5.5.

5.3 Aplicação numérica

O objetivo desta seção é, sob a Conjectura 5.1, obter a solução ótima $J^*(X)$ do problema de custo médio a longo prazo.

Para isto, usaremos o algoritmo dos *Passos 1–4* para calcular $J_N^*(X)$, $N \geq 1$, e pela aproximação (5.24) na Proposição 5.6 obteremos o valor $J^*(X)$. Para tornar válida esta aproximação, verificaremos numericamente a Hipótese 5.1 e o limite em (5.23).

Exemplo 5.1 *Apresentamos a seguir um exemplo adaptado de Geromel et al. (1993), que consiste num sistema incerto a tempo contínuo caracterizado por quatro pontos de operação distintos. Uma discretização no tempo foi realizada em (Geromel et al., 1993), levando a quatro sistemas lineares à tempo-discreto*

Parâmetros	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
a_{11}^i	0.9572	0.9693	0.9313	0.9498
a_{12}^i	0.8329	0.8767	2.3567	1.422
a_{13}^i	2.2670	1.9881	5.2814	3.8014
a_{21}^i	0.0127	0.0040	0.0102	-0.0327
a_{22}^i	0.9638	0.9694	0.9445	0.9161
a_{23}^i	-0.2682	-0.2691	-0.7538	-0.844
b_1^i	2.5873	11.4728	-1.379	4.7405
b_2^i	0.2909	0.2818	0.7506	0.6196

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros sujeitos a saltos markovianos para robô ERA.

dados por

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & a_{23}^i \\ 0 & 0 & 0.2231 \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b_1^i \\ b_2^i \\ -0.7769 \end{bmatrix}, \quad E_i = 0.5I, \\ Q_i = 0.1I, \quad R_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

no qual os parâmetros a_{ij}^i and b_i^i estão listados na Tabela 5.1. Assumimos que o sistema pode saltar de um ponto de operação para outro, de acordo com uma cadeia de Markov, portanto formando um SLSM. Adotaremos $x_0 = [-0.27 \ 1.2 \ 2.1]'$, distribuição inicial $\pi(0) = [0.2833 \ 0.1250 \ 0.2833 \ 0.3083]$ e matriz estocástica

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.00 & 0.10 & 0.10 \\ 0.00 & 0.30 & 0.60 & 0.10 \\ 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.40 \\ 0.00 & 0.10 & 0.40 & 0.50 \end{bmatrix}.$$

Assumimos que o controlador não possui acesso ao estado de Markov, por isto uma realimentação linear na forma $u(k) = g(k)x(k)$ é usada para controlar o sistema. O objetivo é determinar o mínimo custo médio a longo prazo J^* em (5.5) para SLSM sem observação da cadeia.

Usamos o software Matlab para implementar o algoritmo nos Passos 1-4. Assumindo válida a Conjectura 5.1, e usando a aproximação da Proposição 5.6, obtemos que o valor do custo médio a longo prazo ótimo é

$$\rho = J^*(X_0) = 2.8898.$$

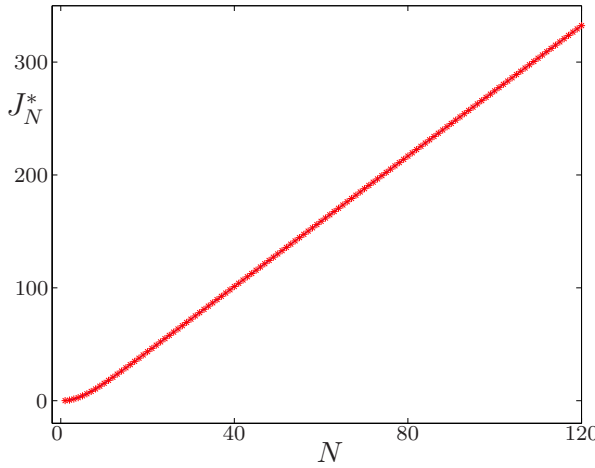


Figura 5.1: Custo ótimo J_N^* em função do número de estágios N para Exemplo 5.1.

O gráfico do custo ótimo J_N^* , em função do número de estágios N , está mostrado na Fig. 5.1. Percebemos que $J_N^*/N \rightarrow \rho$ quando N cresce e ρ não depende da condição inicial X_0 , sendo este fato confirmado pela Proposição 5.6.

Mostramos a seguir que as hipóteses da Proposição 5.6 são válidas numericamente. Seja $\mathbf{g}_N^* = \{g^*(0), \dots, g^*(N-1)\}$ a sequência de ações ótima correspondente a $J_N^*(X_0)$. Denotamos por $X^{(\mathbf{g}_N^*)}(k)$ a recorrência (5.18) correspondente a sequência $\mathbf{g}_N^*$. Através da avaliação numérica obtemos

$$\|X^{(\mathbf{g}_N^*)}(N)\|/N \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty,$$

pois a sequência $\{\|X^{(\mathbf{g}_N^*)}(N)\|\}_{N=1}^\infty$ converge, veja Fig. 5.2. Portanto a condição (5.23) na Proposição 5.1 é satisfeita.

A Hipótese 5.1 também é satisfeita numericamente. De fato, considere $\mathbf{g}_\alpha^* := \{g_\alpha^*(0), g_\alpha^*(1), \dots\}$ a sequência de ações ótima descontada que realiza o mínimo em (5.22). Usando o método descrito na Seção 5.4, obtemos numericamente $\mathbf{g}_{\alpha_n}^*$, para uma subsequência $\alpha_n \uparrow 1$, e usando $\mathbf{g}_{\alpha_n}^*$ determinamos o valor

$$M(\alpha_n) := \sum_{k=0}^{\infty} \langle Q_k^{(\mathbf{g}_{\alpha_n}^*)}, \Phi_\Sigma^{(\mathbf{g}_{\alpha_n}^*)}(k) \rangle, \quad \forall n \geq 0,$$

no qual $Q_k^{(\cdot)}$ e $\Phi_\Sigma^{(\cdot)}(k)$ aqui considerados são definidos similarmente como na Definição 5.2. Os valores $M(\alpha_0), M(\alpha_1), \dots$ estão mostrados na Fig. 5.3. Percebemos

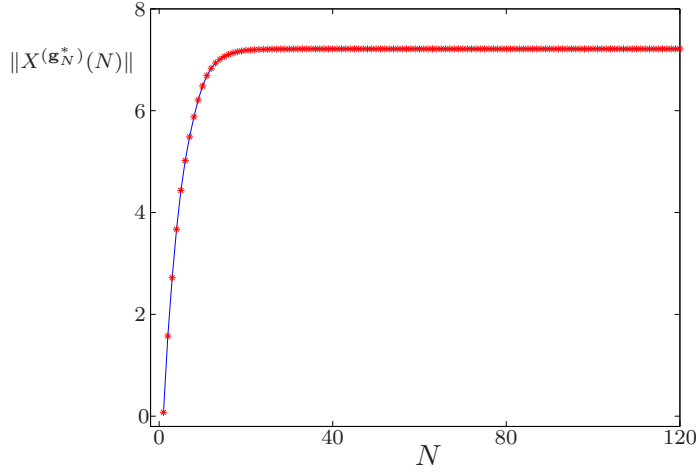


Figura 5.2: Norma de $X^{(\mathbf{g}_N^*)}(N)$ em função do número de estágios N no Exemplo 5.1.

que $M(\alpha_n)$, para cada $n \geq 0$, é limitado superiormente pelo valor 2.94. Por isto, o número M na Hipótese 5.1 satisfaz $0 \leq M \leq 2.94$ e disto concluímos que a Hipótese 5.1 é válida numericamente.

Podemos portanto concluir que, se a Conjectura 5.1 é válida, então o custo médio a longo prazo ótimo do problema de SLSM sem observação da cadeia é $\rho = J^*(X_0) = 2.8898$.

Comentário 5.6 Uma característica numérica observada tanto para o Exemplo 5.1, como para diversos outros exemplos, é a seguinte. Na medida em que o número de estágios N cresce, os elementos $g^*(0), g^*(1), \dots, g^*(N-1)$ da sequência de ações ótima $\mathbf{g}_N^*$ convergem ponto-a-ponto, ou seja,

$$g^*(0) \rightarrow \bar{g}^*(0), \dots, g^*(k) \rightarrow \bar{g}^*(k) \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Além disso, observamos que $\bar{g}^*(k) \rightarrow \bar{g}^*$ quando $k \rightarrow \infty$. Este é um indício de que $\bar{g}^*$ realiza o mínimo global J^* em (5.5), e se a Conjectura 5.1 é válida, então este indício se torna verdadeiro. No Exemplo 5.1, o mínimo $J^* = 2.8898$ é obtido através da ação invariante

$$\bar{g}^* = [-0.0850 \ -0.5351 \ 0.0568].$$

A Fig. 5.4 mostra o comportamento, em norma, da sequência de ações ótima $\mathbf{g}_N^* = \{g^*(0), \dots, g^*(N-1)\}$ e da sua trajetória correspondente $X^{(\mathbf{g}_N^*)}(k)$, $k =$

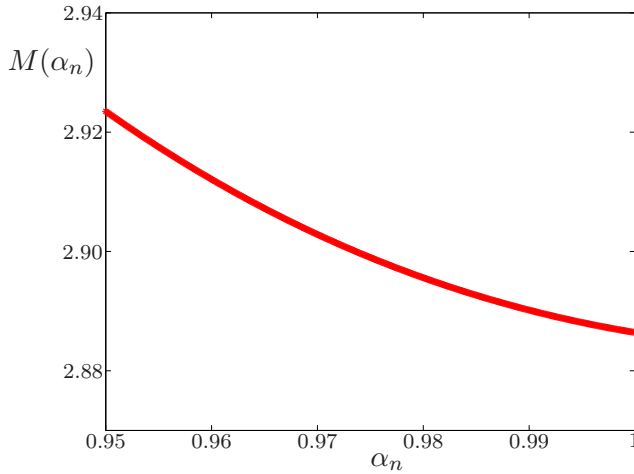


Figura 5.3: Curva da função $M(\cdot)$, em relação a uma subsequência $\alpha_n \uparrow 1$, de acordo com Exemplo 5.1.

$0, \dots, N - 1$, no Exemplo 5.1, tomando-se N suficientemente grande. Pode-se perceber na figura a convergência das ações de controle.

Comentário 5.7 Para fins de comparação, aplicamos o método LMI do artigo (do Val et al., 2002) (vide Seção 5.5) no Exemplo 5.1 e a ação obtida é $g = [-0.08456 \ -0.56335 \ 0.04294]$. Tomando $\mathbf{g} = \{g, g, \dots\}$ determinamos que o custo sub-ótimo do método LMI é $J(\mathbf{g}, X_0) = 2.9010$. Note que este custo sub-ótimo realiza uma boa aproximação para o ótimo $J^* = 2.8898$ obtido no Exemplo 5.1.

5.3.1 Aplicação robótica

O modelo considerado no exemplo a seguir foi estudado em (Vargas, 2004) no contexto de horizonte retrocedente de MJLS sem observação da cadeia. O objetivo aqui será determinar o custo médio a longo prazo ótimo J^* .

Exemplo 5.2 O exemplo apresentado nesta seção consiste no modelo linear de uma junta do European Robot Arm (ERA) (e.g. (Yang e Blanke, 2000)). Trata-se de um sistema a tempo contínuo, sujeito a falhas, que após discretização pode ser representado por um SLSM conforme abaixo (Vargas, 2004).

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + w(k) \quad (5.26)$$

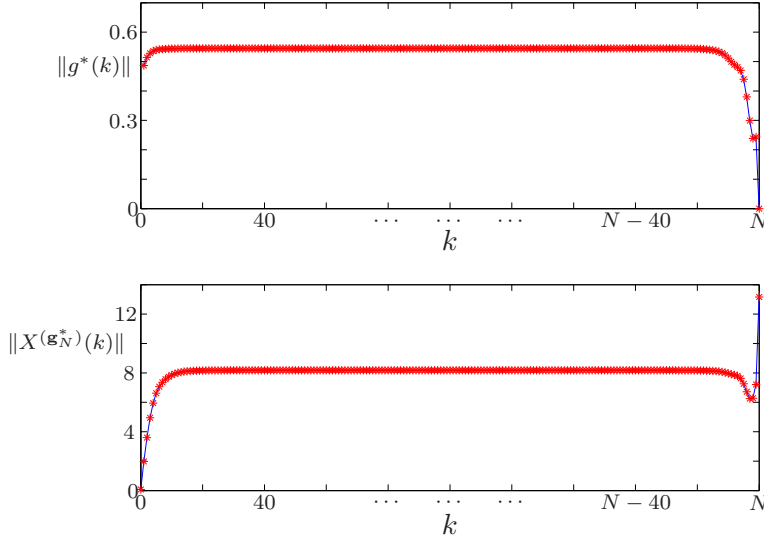


Figura 5.4: A curva superior apresenta a norma da ação $g^*(k)$ correspondente à sequência ótima $\mathbf{g}_N^* = \{g^*(0), \dots, g^*(N-1)\}$ obtida no Exemplo 5.1, sendo N um inteiro suficientemente grande. A curva inferior representa a norma de $X(\mathbf{g}_N^*)(k)$ correspondente.

em que as matrizes A_i e B_i no caso discreto são redefinidas conforme:

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0,05 & a_1^i & a_2^i \\ 0 & 1 & a_3^i & a_4^i \\ 0 & 0 & a_5^i & a_6^i \\ 0 & 0 & a_7^i & a_8^i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} b_1^i & b_1^i \\ b_2^i & b_2^i \\ b_3^i & b_3^i \\ b_4^i & b_4^i \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, 6,$$

nos quais os valores $a_1^i, \dots, a_8^i, b_1^i, \dots, b_4^i$ estão listados em (Vargas, 2004). Também consideramos de (Vargas, 2004) as matrizes de peso

$$Q_i \equiv \begin{bmatrix} 90.000 & 0 & 300 & 300 \\ 0 & 4 & 10 & 200 \\ 300 & 10 & 26 & 501 \\ 300 & 20 & 501 & 10.001 \end{bmatrix}, \quad R_i \equiv \begin{bmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 1,02 \end{bmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, 6,$$

Note que a magnitude elevada dos elementos da matriz Q_i em relação a R_i reflete a necessidade de penalizar mais intensamente o desvio de $x(k)$ em relação a origem, pois o ângulo da junta do eixo do motor representado em $x(k)$ deve estar o mais próximo possível da posição de origem. Usaremos, de acordo com (Vargas, 2004), a condição inicial $x_0 = [0,8808 \quad 1,0902 \quad -0,4943 \quad 1,4825]'$ e

matriz estocástica

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,07 & 0,03 & 0 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,1 & 0,05 & 0,15 & 0 & 0 \\ 0,85 & 0,05 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,05 & 0,05 & 0,25 & 0,05 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0,05 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,05 & 0,15 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

A distribuição inicial adotada é

$$\pi(0) = [0.87944 \quad 0.07108 \quad 0.03405 \quad 0.01423 \quad 0.00112 \quad 0.00008].$$

O objetivo do problema é analisar o comportamento de longo prazo de uma junta do ERA, sujeito a ruído nas medições e falhas no sistema, conforme representado no sistema (5.26). Assumimos que o controlador não possui acesso ao estado de Markov, e por isto impomos uma realimentação linear na forma $u(k) = g(k)x(k)$. Assumindo válida a Conjectura 5.1, usamos o algoritmo dos Passos 1-4 e a Proposição 5.6 para determinar que o custo médio a longo prazo ótimo é

$$J^* = 375.63.$$

Assim como observado no Exemplo 5.1, as ações ótima convergem conforme descrito no Comentário 5.6 e por isto foi possível determinar que

$$\bar{g}^* = \begin{bmatrix} 40.7817 & 9.6566 & 603.9900 & 12.8047 \\ 40.7817 & 9.6566 & 603.9900 & 12.8047 \end{bmatrix},$$

sendo $\bar{g}^*$ a ação invariante que realiza o mínimo global em (5.5), se a Conjectura 5.1 for válida. Aplicando controle $u(k) = \bar{g}^*x(k)$ no sistema (5.26), obtemos o comportamento do ângulo da junta do eixo inercial $x_1(k)$ e de saída $x_3(k)$, a cada instante de tempo k , no qual a trajetória amostrada $x(k) = [x_1(k), \dots, x_4(k)]'$ em (5.26) é determinada via simulação de Monte Carlo. A Fig. 5.5 mostra as realizações de $x_1(k)$ e $x_3(k)$, suas médias e desvio-padrões correspondentes. O método LMI da Seção 5.5 foi aplicado neste exemplo, porém a ferramenta computacional YALMIP/Sedumi não conseguiu produzir solução factível.

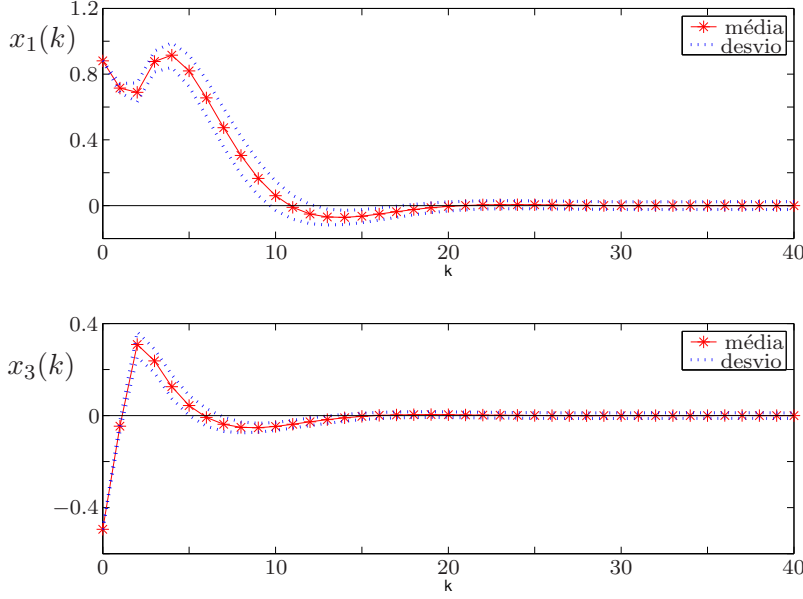


Figura 5.5: Média e desvio-padrão das trajetórias $x_1(k)$ e $x_3(k)$ no Exemplo 5.2.

5.4 Avaliação da Hipótese 5.1

A maior dificuldade apresentada pela Hipótese 5.1 é a sua verificação numérica. Veremos adiante que, se a Conjectura 5.1 é válida, então o método dos *Passos 1-4* pode ser usado para computar o valor M na Hipótese 5.1.

Dado $\mathbf{g} = \{g(0), \dots, g(N-1)\} \in \mathbf{G}$, vamos considerar o custo descontado de N estágios conforme a seguir:

$$V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \langle Q + g(k)' R g(k), X(k) \rangle, \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (5.27)$$

O problema de controle descontado correspondente é definido por

$$V_{N,\alpha}^*(X_0) = \min_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}), \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (5.28)$$

Usando o fato que $V_{N,\alpha}^*(X_0) \leq V_{N+1,\alpha}^*(X_0)$, e o Teorema da Convergência Monotônica (Bartle, 1964, p.111), pode-se demonstrar o lema a seguir.

Lema 5.1 *Para cada $\alpha \in (0, 1)$ vale a identidade*

$$V_\alpha^*(X_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} V_{N,\alpha}^*(X_0).$$

Veremos adiante que, se a Conjectura 5.1 é válida, então o custo ótimo descontado $V_{N,\alpha}^*(X_0)$ pode ser computado através de uma simples variação do algoritmo dos *Passos 1-4*.

Dado $\mathbf{g} = \{g(0), \dots, g(N-1)\} \in \mathbf{G}$, vamos considerar as equações recorrentes acopladas com desconto $\alpha \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} L_i(k) &= Q_i + g(k)' R_i g(k) + \alpha \cdot (A_i + B_i g(k))' \mathcal{E}_i(L(k+1)) (A_i + B_i g(k)), \\ L_i(N) &= 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta, \quad \forall k = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Note que a diferença entre (5.13) e (5.29) está no desconto $\alpha \in (0, 1)$ introduzido nesta última.

O resultado a seguir segue de uma simples variação da Proposição 5.4.

Lema 5.2 *Dado $\alpha \in (0, 1)$, suponha que $\mathbf{g} = \{g(0), \dots, g(N-1)\} \in \mathbf{G}$ é tal que $V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}) = V_{N,\alpha}^*(X_0)$. Então $\mathbf{g}$ satisfaz, para cada $k = 0, \dots, N-1$,*

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} [(R_i + \alpha \cdot B_i' \mathcal{E}_i(L(k+1)) B_i) g(k) + \alpha \cdot B_i' \mathcal{E}_i(L(k+1)) A_i] X_i(k) = 0, \quad (5.30)$$

no qual $X(k)$ e $L(k)$ são definidos conforme (5.10) e (5.29), respectivamente.

Apresentamos a seguir uma variação do algoritmo dos *Passos 1-4*. Considere $\eta = 0, 1, \dots$ o contador de iterações, e defina $\mathbf{g}^{(\eta)} := \{g^{(\eta)}(0), \dots, g^{(\eta)}(N-1)\} \in \mathbf{G}$, como uma seqüência de controles que satisfaz o algoritmo a seguir.

- *Passo 1'*: Procedimento idêntico ao *Passo 1*.
- *Passo 2'*: Procedimento idêntico ao *Passo 2*.
- *Passo 3'*: Encontre $g^{(\eta)}(k)$ definido por

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} \left[\Lambda_i^{(\eta)}(k+1) g^{(\eta)}(k) + \alpha B_i' \mathcal{E}_i(L^{(\eta)}(k+1)) A_i \right] X_i^{(\eta-1)}(k) = 0,$$

no qual $\Lambda^{(\eta)}(k) := R + \alpha B' \mathcal{E}(L^{(\eta)}(k)) B$. Calcule $L^{(\eta)}(k) \in \mathbb{S}^{r_0}$ através de

$$\begin{aligned} L_i^{(\eta)}(k) &= Q_i + g^{(\eta)}(k)' R_i g^{(\eta)}(k) \\ &\quad + \alpha (A_i + B_i g^{(\eta)}(k))' \mathcal{E}_i(L^{(\eta)}(k+1)) (A_i + B_i g^{(\eta)}(k)), \end{aligned}$$

com $L^{(\eta)}(N) = 0$. Faça $k = k - 1$; se $k \geq 0$, retorne ao início do *Passo 3*.

- *Passo 4'*: O critério de parada deve ser baseado na variação do custo entre $V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}^{(\eta-1)})$ e $V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}^{(\eta)})$. Se o critério de parada não é satisfeito, então retorne ao início do *Passo 2'*.

O resultado a seguir segue como extensão da Proposição 5.5.

Lema 5.3 *As seqüências $\mathbf{g}^{(\eta)}, \eta = 0, 1, \dots$, geradas nos Passos 1'-4' são tais que*

$$V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}^{(\eta+1)}) \leq V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}^{(\eta)}), \quad \eta = 0, 1, \dots,$$

e $\mathbf{g} := \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{g}^{(\eta)}$ satisfaz a condição do Lema 5.2.

Comentário 5.8 *Através de inspeção podemos verificar o seguinte fato. Se a Conjectura 5.1 vale, e se $\mathbf{g}^{(\eta)}, \eta = 0, 1, \dots$ é gerado nos Passos 1'-4', então*

$$V_{N,\alpha}^*(X_0) = V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} V_{N,\alpha}(X_0, \mathbf{g}^{(\eta)}),$$

no qual $\mathbf{g} := \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{g}^{(\eta)}$.

Levando-se em consideração o Lema 5.1 e Comentário 5.8, concluímos que os Passos 1'-4' podem ser usados para validar numericamente a Hipótese 5.1.

5.5 Método LMI sub-ótimo

Vamos considerar a seguir o método de otimização convexa LMI proposto em (do Val et al., 2002).

Escreva $Q \in \mathbb{S}^{r_0}$ e $R \in \mathbb{S}^{r_0}$, $R > 0$, na forma $Q = C'C$ e $R = D'D'$, com $C'D = 0$, e considere as variáveis $W \in \mathbb{S}^{r_0}$, $Z \in \mathbb{S}^{r_0}$ e as matrizes G e F de dimensões apropriadas no seguinte problema de otimização convexa LMI:

$$\gamma := \inf \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{W_i\}, \quad (5.31)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & C_i G + D_i F \\ \star & G + G' - \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} Z_j \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta; \quad (5.32)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i - \bar{\pi}_i E_i E_i' & A_i G + B_i F \\ \star & G + G' - \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} Z_j \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (5.33)$$

Proposição 5.7 *(do Val et al., 2002, Th.6). O valor γ em (5.31) é tal que $J^* \leq \gamma$, e a ação de controle definida por $g = FG^{-1}$ é estabilizante na média-quadrática.*

Considerando g que satisfaz a Proposição 5.7, faça $\mathbf{g} = \{g, g, \dots\}$ e assim obtemos o seu custo médio a longo prazo correspondente, i.e., $J(\mathbf{g}, X_0)$. Por otimalidade temos que $J^*(X_0) \leq J(\mathbf{g}, X_0)$, e portanto a otimização LMI em (5.31)-(5.33) fornece solução sub-ótima para o problema de custo médio a longo prazo em (5.5).

Capítulo 6

Conclusões

Neste capítulo apresentaremos uma síntese dos resultados, alguns comentários finais e sugestões de trabalhos futuros.

6.1 Sumário dos resultados

Nesta dissertação, estudamos sistemas lineares estocásticos avaliados para o custo médio a longo prazo (CMLP). Neste contexto, foi possível determinar que o sistema estocástico é assintoticamente estável na média se o CMLP é finito, e se hipóteses de controlabilidade, observabilidade, e $\{A_k\}$ limitado são satisfeitas. Condições foram fortalecidas para assegurar a estabilidade uniforme do segundo momento. Tais condições baseiam-se na convergência ou quase-periodicidade de $\{A_k\}$, ou em estruturas particulares sobre o custo, veja as condições na Seção 2.3. É interessante notar que os conceitos de estabilidade estocástica estão fortemente ligados a estabilidade do sistema autônomo $z_{k+1} = A_k z_k$, veja Capítulo 2.

Condições para a existência de política ótima estacionária no problema de controle CMLP, com estrutura abstrata de controle, foram apresentadas no Capítulo 3. As condições apresentadas são aquelas relacionadas ao custo descontado limitado, controlabilidade para origem, custo convexo, convergência de trajetória, entre outros. Cabe ressaltar que algumas condições, embora suficientes para a técnica de “vanishing discount approach” de Processos de Decisão Markovianos, não são comparáveis entre si (veja Seção 3.4) enquanto que outras condições tangenciam tal abordagem, veja a Seção 3.3 e a discussão na Seção 3.4.2, p.98.

O Capítulo 4 avança em duas frentes de investigação. Na primeira frente, apresentamos condições para que seja válida a aproximação

$$J_N^*/N \rightarrow J^*. \quad (6.1)$$

Na segunda frente, apresentamos condições que asseguram a existência de limitantes inferior e superior para custos de horizonte finito em sistemas lineares com saltos markovianos, com cadeia de Markov não necessariamente ergódica.

No Capítulo 5, a aproximação em (6.1) foi estendida para os sistemas lineares com saltos markovianos (SLSM). Esta extensão possibilitou tratar o problema de regulação CMLP de sistemas SLSM no caso em que o controlador não possui acesso aos estados de Markov, sendo este um problema de difícil solução que se encontra em aberto na literatura. Apresentamos um algoritmo variacional que é capaz de determinar um mínimo local para J_N^* , e sob a conjectura de que este mínimo local realiza o mínimo global, foi possível calcular o custo mínimo CMLP através de aproximação semelhante a (6.1). O algoritmo proposto foi ilustrado numericamente e sua solução foi comparada com aquela obtida por um método LMI da literatura que provê solução sub-ótima. O resultado do experimento traz um forte indício de que a conjectura é válida, porém pesquisas adicionais devem ser realizadas para validar tal afirmação.

6.2 Trabalhos futuros

Acreditamos que alguns dos pontos tratados nesta tese são merecedores de investigação mais detalhada no futuro. Listamos estes pontos a seguir.

- É de interesse determinar se as hipóteses de controlabilidade e observabilidade, fundamentais para os resultados do Capítulo 2, podem ser enfraquecidas para estabilizabilidade e detetabilidade, respectivamente.
- A dinâmica do segundo momento do estado e da saída, representados no Capítulo 2 respectivamente por $X(k)$ e $Y(k)$, são elementos que pertencem ao cone das matrizes semidefinidas positiva. Estender os resultados do Capítulo 2 para operadores positivos, de dimensão finita e/ou infinita, é de

interesse. Neste caso, um estudo mais aprofundado sobre as propriedades de controlabilidade e observabilidade em operadores que atuam em cones positivos deverá ser realizado.

- Os resultados de estabilidade desenvolvidos no Capítulo 2 assumem que as sequências de matrizes $\{A_k\}$, $\{B_k\}$, $\{C_k\}$ e $\{D_k\}$ são determinísticas e previamente conhecidas. É de interesse verificar se os conceitos de estabilidade se mantêm no caso em que os parâmetros $\{A_k\}$, $\{B_k\}$, $\{C_k\}$ e $\{D_k\}$ são variáveis aleatórias, e qual o comportamento correspondente do produto de matrizes $A_k \cdots A_i$, $k \geq i$.
- O Capítulo 3 contém condições que asseguram a existência de política ótima estacionária para o problema de custo médio a longo prazo. Talvez seja possível enfraquecer tais condições, ou mais precisamente, talvez seja possível assegurar que as trajetórias ótimas do problema de custo descontado sejam uniformemente estáveis quando avaliadas com desconto tendendo a um. Se este fato for válido, então o custo por estágio terá um limitante uniforme, independente do desconto, e assim valerá os resultados do Capítulo 3 que asseguram a existência de política ótima estacionária. Portanto, faz-se necessário investigar condições para a estabilidade uniforme da trajetória ótima em problemas com desconto tendendo a um.
- Uma linha de investigação de relevância no contexto de existência de política ótima estacionária é a seguinte. Considerando a notação do Capítulo 3, suponha que $\mathbf{f}^* = \{f^*, f^*, \dots\} \in \mathbf{F}$ seja uma política ótima estacionária para o problema de custo médio a longo prazo e que $\{g_k^*\}$ é a sequência de ações de controle correspondente. Resultados preliminares indicam que, se o par $(A(g_k^*), E)$ for controlável e o par $(A(g_k^*), Q(g_k^*)^{1/2})$ for observável, então existem constantes positivas β e ξ tal que

$$\|A(g_k^*) \cdots A(g_i^*)\| \leq \beta \exp(\xi(k - i)), \quad \forall k \geq i \geq 0,$$

o que implica que a sequência de segundo momento $\{X_k\}$, gerada pela

recursão (veja (3.8), p.60)

$$X_{k+1} = A(g_k^*)X_kA(g_k^*)' + \Sigma, \quad \forall k \geq 0, X_0 \in \mathcal{X}. \quad (6.2)$$

é uniformemente limitada. Portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Bartle, 1964, Th.12.4,p.112), a sequência $\{X_k\}$ possui uma subsequência convergente, digamos $\bar{X} = \lim_{i \rightarrow \infty} X_{k_i}$. Como por hipótese $g_k^* = f^*(X_k)$, para cada $k \geq 0$, então podemos concluir que se a função f^* é contínua então existe o limite $\bar{g}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} g_{k_i}^* = f^*(\bar{X})$. Este pode ser um indício de que, em regime permanente, a recorrência em (6.2) poderia atingir um comportamento de “ciclo-limite”, ou seja, a política ótima estacionária $\mathbf{f}^* \in \mathbf{F}$ levaria a trajetória ótima correspondente em (6.2) a ser tal que, para algum $\delta \geq 1$, aconteceria

$$X_{k\delta+\ell} \rightarrow \bar{X}_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, \delta, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

A existência deste comportamento em regime permanente é uma questão em aberto na literatura. Para fins de aplicação, é desejável que ocorra $\delta = 1$. Neste caso, uma única ação de controle ótima estacionária seria aplicada em (6.2) e a trajetória alcançaria um ponto de equilíbrio. A estrutura de operadores do Capítulo 3, o método de aproximação do Capítulo 4, em conjunto com a idéia de um ponto de equilíbrio, trazem perspectivas de solução de diversos problemas de controle em aberto na literatura, quais sejam o de controle estático de saída, descentralizado, simultâneo, entre outros (veja (Blondel e Tsitsiklis, 1997; Blondel e Tsitsiklis, 2000)).

- Na frente numérica, existe um forte indício de que a Conjectura 5.1 no Capítulo 5 seja válida. Se esta conjectura for verdadeira, então o problema de custo médio a longo prazo de sistemas com saltos markovianos sem observação da cadeia pode ser resolvido de maneira eficaz usando o método de aproximação descrito no Capítulo 5. Uma dificuldade relacionada ao método é que não está claro se a sequência de ações de controle do problema de horizonte finito converge à medida que o horizonte tende à infinito (vide Comentário 5.6, p.151). Se esta sequência de fato convergir então a solução

do problema de custo médio a longo prazo é assegurada pelo método. Deste modo, o método descrito nesta monografia abre perspectivas de obtenção de solução numérica tanto para o problema de regulação de saltos markovianos sem observação da cadeia como para os problemas de controle mencionados no tópico acima. Entretanto, uma investigação minuciosa deve ser empreendida para determinar se a Conjectura 5.1 é de fato válida e a sequência de ações de controle correspondente converge.

6.3 Artigos

Os resultados apresentados nesta tese deram origem aos seguintes trabalhos:

Periódico

Vargas, A. N., do Val, J.B.R., (2009), Average Cost and Stability of Time-Varying Linear Systems (**aceito condicionalmente**), ‘IEEE Transactions on Automatic Control’.

Vargas, A. N., do Val, J.B.R., (2009), Second Moment Stability of Time-Varying Stochastic Systems with Average Cost (**submetido**). ‘IEEE Transactions on Automatic Control’.

Vargas, A. N., do Val, J.B.R., (2009), On the Average Optimal Stationary Policies of Linear Stochastic Systems (**submetido**), ‘Mathematics of Control, Signals, and Systems’.

Vargas, A. N., do Val, J.B.R., (2009), Controllability to the origin for the existence of average optimal stationary policies of linear stochastic systems (**submetido**), ‘IEEE Transactions on Automatic Control’.

Costa, E. F., Vargas, A. N., do Val, J. B. R., (2009), Bounds for the Finite Horizon Cost of Markov Systems with Additive Noise and Convergence for Long-Run Average Cost (**submetido**), ‘Mathematics of Control, Signals, and Systems’.

Conferência

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., (2009), Existence of average optimal stationary policies in linear stochastic systems: a bounded cost condition (**aceito**), ‘The European Control Conference, Budapest, Hungary’.

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., (2009), Existence of average optimal stationary policies in linear stochastic systems: a controllability condition (**aceito**), 'The European Control Conference, Budapest, Hungary'.

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., (2008), Averaging and Stability of Time-Varying Discrete-Time Linear Systems, 'Proc. of the 17th IFAC World Congress. Seoul'. p.1305 - 1310

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., (2008), A result on the existence of optimal stationary policies for the average cost control problem of linear systems, 'XVII Congresso Brasileiro de Automática, Juiz de Fora-MG'.

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., (2008), On the existence of stationary optimal policies for the average cost control problem of linear systems with abstract state-feedback, 'Proc. 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico'. p.3682 - 3687.

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., Costa, E. F., (2007), On stability of linear time-varying stochastic discrete-time systems, 'Proc. European Control Conference, Kos, Grecia'. p.2423 - 2427.

Resultados em assuntos afins a esta tese, porém não inclusos nesta monografia, foram publicados durante o doutoramento e são listados a seguir:

Periódico

OLIVEIRA, R. C. L. F., Vargas, A. N., do Val, J.B.R., PERES, P. L. D., (2009), Robust stability, H2 analysis and stabilisation of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain probability matrix, 'International Journal of Control'. v.82, p.470 - 481.

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., Costa, E. F., (2006), Controle de horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos Markovianos para o problema de rastreamento com alvos dinâmicos, 'SBA. Sociedade Brasileira de Automática.' v.16, p.435 - 448.

Conferência

Vargas, A. N., Furloni, Walter, do Val, J. B. R., (2007), Control of Markov Jump Linear Systems with state and input constraints: a necessary optimality condition, 'Proc. 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, Foz do Iguacu, PR'.

OLIVEIRA, R. C. L. F., Vargas, A. N., do Val, J. B. R., PERES, P. L. D., (2007), Convergent LMI relaxations for robust analysis of uncertain discrete-time Markov jump linear systems, 'Proc. 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control, Foz do Iguacu, PR'.

Vargas, A. N., Costa, E. F., do Val, J. B. R., (2006), Bounds for the Finite Horizon Cost of Markov Jump Linear Systems with Additive Noise and Convergence for the Long Run Average Cost, 'Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA'. p.5543 - 5548.

Vargas, A. N., Furloni, Walter, do Val, J. B. R., (2006), Constrained Model Predictive Control of Jump Linear Systems with Noise and Non-observed Markov State, 'Proc. American Control Conference, Minneapolis, USA'. p.929 - 934.

Vargas, A. N., Costa, E. F., do Val, J. B. R., (2006), Bounds for the Finite Horizon Cost of Linear Systems with Additive Noise and Convergence for the Long Run Average Cost, 'CBA 2006, XVI Congresso Brasileiro de Automatica, Salvador, Bahia'. p.2153 - 2158.

Vargas, A. N., do Val, J. B. R., Furloni, Walter, (2006), Constrained Control Problem of Discrete-time Markov Jump Linear Systems with Observed State, 'CBA 2006, XVI Congresso Brasileiro de Automatica, Salvador, Bahia'. p.2784 - 2789.

Furloni, Walter, Vargas, A. N., do Val, J. B. R., (2006), Aplicação de Controle por Horizonte Retrocedente de Sistemas Lineares com Saltos Markovianos à Regulação de Tráfego Metroviário, 'CBA 2006, XVI Congresso Brasileiro de Automatica, Salvador, Bahia'. p.2063 - 2068.

Bibliografia

- Åström, K. J. (1970). *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academic Press, New York, NY.
- Anderson, B. D. O. e Moore, J. B. (1969). New results in linear system stability, *SIAM J. Control* **7**(3): 398–414.
- Anderson, B. D. O. e Moore, J. B. (1979). *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Anderson, B. D. O. e Moore, J. B. (1981). Detectability and stabilizability of discrete-time linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **19**(1): 20–32.
- Anderson, B. D. O. e Moore, J. B. (1990). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ, USA.
- Angelo, H. D. (1970). *Linear Time-Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston.
- Arapostathis, A., Borkar, V. S., Fernández-Gaucherand, E., Ghosh, M. K. e Marcus, S. I. (1993). Discrete-time controlled Markov processes with average cost criterion: A survey, *SIAM J. Control Optim.* **31**(2): 282–344.
- Athans, M., Castanon, D., Dunn, K. P., Greene, C. S., Lee, W. H., Sandell, N. R. e Willsky, A. S. (1977). The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method - Part I: Equilibrium flight, *IEEE Trans. Automat. Control* **22**(5): 768–780.
- Bartle, R. G. (1964). *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc.

- Benzaid, Z. (1999). On the constrained controllability of linear time-varying discrete systems, *IEEE Trans. Automat. Control* **44**(3): 608–612.
- Berger, M. A. e Wang, Y. (1992). Bounded semigroups of matrices, *Linear Algebra and its Applications* **166**: 21–27.
- Bertsekas, D. P. e Shreve, S. E. (1978). *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*, Academic Press.
- Blondel, V. D. e Tsitsiklis, J. N. (2000). A survey of computational complexity results in systems and control, *Automatica* **36**(9): 1249–1274.
- Blondel, V. e Tsitsiklis, J. N. (1997). NP-hardness of some linear control design problems, *SIAM J. Control Optim.* **35**(6): 2118–2127.
- Cesari, L. (1983). *Optimization-Theory and Applications. Problems with ordinary differential equations*, Springer Verlag. Applications of Mathematics, Vol. 17.
- Cho, Y. e Lam, J. (2001). A computational method for simultaneous LQ optimal control design via piecewise constant output feedback, *IEEE Trans. Systems Man Cybernetics Part B* **31**: 836–842.
- Çınlar, E. (1975). *Introduction to stochastic processes*, Prentice Hall, New York.
- Colonijs, F. e Wichtrey, T. (2009). Control systems with almost periodic excitations, *SIAM J. Control Optim.* **48**(2): 1055–1079.
- Conley, C. e Miller, R. (1965). Asymptotic stability without uniform stability: Almost periodic coefficients, *J. Differential Equations* **1**: 333–336.
- Corduneanu, C. (1961). *Almost Periodic Functions*, Vol. 22 of *Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics*, New York: Wiley Interscience.
- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2006). Obtaining stabilizing stationary controls via finite horizon cost, *Proc. American Control Conference, Minneapolis, Minnesota*, pp. 4297–4302.

- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2009). Uniform approximation of infinite horizon control problems for nonlinear systems and stability of the approximating controls, *IEEE Trans. Automat. Control* . to appear.
- Costa, E. F., do Val, J. B. R. e Fragoso, M. D. (2005). A new approach to detectability of discrete-time Markov jump linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **43**(6): 2132–2156.
- Costa, O. L. V. e de Paulo, W. L. (2007). Indefinite quadratic with linear costs optimal control of Markov jump with multiplicative noise systems, *Automatica* **43**: 587–597.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *J. Math. Anal. Appl.* **179**: 154–178.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1995). Discrete-time LQ-optimal control problems for finite Markov jump parameters systems, *IEEE Trans. Automat. Control* **40**: 2076–2088.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*, Springer-Verlag, New York.
- Daubechies, I. e Lagarias, J. C. (1992). Sets of matrices all infinite products of which converge, *Linear Algebra and its Applications* **161**: 227–263.
- Davis, M. H. A. e Vinter, R. B. (1985). *Stochastic Modelling and Control*, Chapman and Hall, London.
- Diagana, T., Elaydi, S. e Abdul-Aziz, Y. (2007). Population models in almost periodic environments, *J. Difference Equ. and Appl.* **13**(4): 239–260.
- do Val, J. B. R. e Başar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *J. Econom. Dynam. Control* **23**: 1099–1131.

- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. e Gonçalves, A. P. (2002). The H_2 control for jump linear systems: Cluster observations of the Markov state, *Automatica* **38**: 343–349.
- Dragan, V. e Morozan, T. (2006). Exponential stability for discrete time linear equations defined by positive operators, *Integral Equations Operator Theory* **54**: 465–493.
- Fink, A. (1974). *Almost Periodic Differential Equations*, Vol. 377 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Fink, A. M. (1972). Almost periodic functions invented for specific purposes, *SIAM Rev.* **14**(4): 572–581.
- Geromel, J. C. e Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **45**: 1915–1930.
- Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Souza, S. R. (1993). $\mathcal{H}_2$ -guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems, *Int. Journal of Control* **57**: 853–864.
- Goldberg, R. R. (1964). *Methods of Real Analysis*, Blaisdell Publishing Company.
- Grimm, G., Messina, M. J., Tuna, S. E. e Teel, A. R. (2005). Model predictive control: for want of a local control Lyapunov function, all is not lost, *IEEE Trans. Automat. Control* **50**: 546–558.
- Grüne, L. (1996). Numerical stabilization of bilinear control systems, *SIAM J. Control Optim.* **34**(6): 2024–2050.
- Grüne, L. e Wirth, F. (1999). Feedback stabilization of discrete-time homogeneous semi-linear systems, *Systems Control Lett.* **37**(12): 19–30.
- Gurvits, L. (1995). Stability of discrete linear inclusion, *Linear Algebra and its Applications* **231**: 47–85.

- Halanay, A. e Ionescu, V. (1994). *Time-Varying Discrete Linear Systems*, Birkhäuser, Basel.
- Hernandez-Lerma, O., Hennet, J. C. e Lasserre, J. B. (1991). Average cost Markov decision processes: Optimality conditions, *J. Math. Anal. Appl.* **158**: 396–406.
- Hernández-Lerma, O. e Lasserre, J. B. (1990). Average cost optimal policies for Markov control processes with Borel state space and unbounded costs, *Systems Control Lett.* **15**: 349–356.
- Hernández-Lerma, O. e Lasserre, J. B. (1996). *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*, Springer-Verlag, New York.
- Horn, R. A. e Johnson, C. R. (1990). *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Jadbabaie, A. e Hauser, J. (2005). On the stability of receding horizon control with a general terminal cost, *IEEE Trans. Automat. Control* **50**: 674–678.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990). Jump linear quadratic Gaussian control: Steady-state solution and testable conditions, *Control-Theory and Advanced Technology* **6**(3): 289–319.
- Johnson, T., Athans, M. e Skelton, G. (1971). Optimal control-surface locations for flexible aircraft, *IEEE Trans. Automat. Control* **16**(4): 320–331.
- Kailath, T. (1979). *Linear Systems*, Prentice-Hall.
- Kalman, R. E. (1960). Contribution to the theory of optimal control, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **5**(2): 102–119.
- Khanbaghi, M., Malhame, R. P. e Perrier, M. (2002). Optimal white water and broke recirculation policies in paper mills via jump linear quadratic control, *IEEE Trans. Automat. Control* **10**(4): 578–588.
- Knopp, K. (1956). *Infinite Sequences and Series*, Dover Publications, New York.

- Kozin, F. (1969). A survey of stability of stochastic systems, *Automatica* **5**: 95–112.
- Kubrusly, C. S. (1986). On discrete stochastic bilinear systems stability, *J. Math. Anal. Appl.* **113**: 36–58.
- Kubrusly, C. S. (1988). Uniform stability for time-varying infinite-dimensional discrete linear systems, *IMA J. Math. Control Inform.* **5**(4): 269–283.
- Kumar, P. R. e Varaiya, P. (1986). *Stochastic Systems: Estimation, identification and adaptive control*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Kwakernaak, H. e Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons Inc., New York, NY.
- Lewis, F. L. e Syrmos, V. L. (1995). *Optimal Control*, Wiley-Interscience, 2 ed.
- Li, C. W. e Blankenship, G. L. (1985). Optimal stochastic control of linear stochastic systems with poisson process coefficients, *Technical report*, Maryland Univ. College Park Dept. Electrical Eng. Available online at <http://handle.dtic.mil/100.2/ADA448196>.
- Loria, A., Panteley, E., Popovic, D. e Teel, A. R. (2005). A nested Matrosov theorem and persistency of excitation for uniform convergence in stable nonautonomous systems, *IEEE Trans. Automat. Control* **50**(2): 183–198.
- Luke, R. A., Dorato, P. e Abdallah, C. T. (1997). Linear-quadratic simultaneous performance design, *Proc. American Control Conference*, pp. 3602–3605.
- Lütkepohl, H. (1996). *Handbook of Matrices*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Mohler, R. R. e Kolodziej, W. J. (1980). An overview of stochastic bilinear control processes, *IEEE Trans. Systems Man Cybernetics* **10**: 913–918.
- Moore, J. B. e Anderson, B. D. O. (1980). Coping with singular transition matrices in estimation and control stability theory, *Internat. J. Control* **31**(3): 571–586.

- Oliveira, R. C. L. F., Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Peres, P. L. D. (2009). Robust stability, H2 analysis and stabilisation of discrete-time Markov jump linear systems with uncertain probability matrix, *Internat. J. Control* **82**(3): 470 – 481.
- Panteley, E., Loria, A. e Teel, A. (2001). Relaxed persistency of excitation for uniform asymptotic stability, *IEEE Trans. Automat. Control* **46**(12): 1874–1886.
- Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Publishing Co.; 3rd edition.
- Schal, M. (1993). Average optimality in dynamic programming with general state space, *Math. Oper. Res.* **18**: 163–172.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. e King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM Rev.* **49**: 545–592.
- Silverman, L. M. e Anderson, B. D. O. (1968). Controllability, observability and stability of linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **6**(1): 121–130.
- Stengel, R. F. (1986). *Stochastic Optimal Control: Theory and application*, John Wiley & Sons, Inc, New York, USA.
- Syrmos, V., Abdallah, C., Dorato, P. e Grigoriadis, K. (1997). Static output feedback—a survey, *Automatica* **33**: 125–137.
- Trench, W. F. (1999). Invertibly convergent infinite products of matrices, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **101**(1-2): 255–263.
- Van Willigenburg, L. G. e De Koning, W. (2008). Linear systems theory revisited, *Automatica* **44**(7): 1686–1696.
- Vargas, A. N. (2004). Controle por horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos Markovianos e ruído aditivo, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Estadual de Campinas. Disponível eletronicamente em www.cp.utfpr.edu.br/vargas/tese2004.pdf.

- Vargas, A. N. e do Val, J. B. R. (2008a). Averaging and stability of time-varying discrete-time linear systems, *Proc. 17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, pp. 1305–1310. Preprint available online at www.cp.utfpr.edu.br/vargas/ifac2008.pdf.
- Vargas, A. N. e do Val, J. B. R. (2008b). On the existence of stationary optimal policies for the average-cost control problem of linear systems with abstract state-feedback, *Proc. 47th IEEE Conf. on Decision and Control*, Cancun, Mexico, pp. 3682–3687.
- Vargas, A. N. e do Val, J. B. R. (n.d.a). Average cost and stability of time-varying linear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, ID:TN-08-679, submitted .
- Vargas, A. N. e do Val, J. B. R. (n.d.b). A controllability condition for the existence of average optimal stationary policies of linear stochastic systems, *European Control Conference - ECC2009*.
- Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Costa, E. F. (2004). Receding horizon control of Markov jump linear systems subject to noise and unobservable state chain, *Proc. 43th IEEE Conf. Decision Control*, pp. 4381–4386.
- Vesely, M. (2008). Construction of almost periodic sequences with given properties, *Electron. J. Differential Equations* **1**(126): 1–22.
- Whittle, P. (1982). *Optimization Over Time: Dynamic Programming and Stochastic Control*, Vol. 1, John Wiley and Sons Ltd.
- Willems, J. L. (1970). *Stability Theory of Dynamical Systems*, Thomas Nelson and Sons Ltd., Great Britain.
- Wirth, F. (2001). Asymptotic behavior of the value functions of discrete-time discounted optimal control, *J. Optim. Theory Appl.* **110**(1): 183–210.
- Wu, J. e Lee, T. (2005). Optimal static output feedback simultaneous regional pole placement, *IEEE Trans. Systems Man Cybernetics Part B* **35**: 881–893.

-
- Wu, M. Y. (1974). A note on stability of linear time-varying systems, *IEEE Trans. Automat. Control* **19**: 162–162.
- Yang, Z. e Blanke, M. (2000). The robust control mixer module method for control reconfiguration, *American Control Conference*.
- Zampolli, F. (2006). Optimal monetary policy in a regime-switching economy: The response to abrupt shifts in exchange rate dynamics, *J. Econom. Dynam. Control* **30**: 1527–1567.