

**Universidade Estadual de Campinas**  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA



**Alim Pedro de Castro Gonçalves**

# **Controle Dinâmico de Saída para Sistemas Discretos com Saltos Markovianos**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.  
Área de concentração: Automação.

Orientador: **Prof. Dr. José Claudio Geromel**

Campinas, SP  
2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

G589c      Gonçalves, Alim Pedro de Castro  
             Controle dinâmico de saída para sistemas discretos com  
             saltos markovianos / Alim Pedro de Castro Gonçalves.  
             –Campinas, SP: [s.n.], 2009.

             Orientador: José Cláudio Geromel  
             Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de  
             Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
             Computação.

             1. Teoria do Controle. 2. Sistemas lineares. 3. Sistemas  
             estocásticos. 4. Markov, Processos de. I. Geromel, José  
             Cláudio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade  
             de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Título em Inglês:	Dynamic output feedback for discrete-time Markov jump linear systems
Palavras-chave em Inglês:	Control Theory, Linear Systems, Stochastic Systems, Markov Processes
Área de concentração:	Automação
Titulação:	Doutor em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Karl Heinz Kienitz, Oswaldo Luiz do Valle Costa, João Bosco Ribeiro do Val, Wagner Caradori do Amaral
Data da defesa:	24/06/09
Programa de Pós-Graduação:	Engenharia Elétrica

**Alim Pedro de Castro Gonçalves**  
Mestre em Engenharia Elétrica .....FEEC/UNICAMP(2006)

# **Controle Dinâmico de Saída para Sistemas Discretos com Saltos Markovianos**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação.

Data da defesa: 24 de junho de 2009.

Banca Examinadora:

**Prof. Dr. José Claudio Geromel**

Orientador

**Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz** ..... ITA

**Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa** ..... EPUSP/USP

**Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val** .....DT/FEEC/UNICAMP

**Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral** ..... DCA/FEEC/UNICAMP

Campinas, SP  
2009

## COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO

**Candidato:** Alim Pedro de Castro Gonçalves

**Data da Defesa:** 24 de junho de 2009

**Título da Tese:** "Controle Dinâmico de Saída para Sistemas Discretos com Saltos Markovianos"

Prof. Dr. José Cláudio Geromel (Presidente): \_\_\_\_\_

Prof. Dr. Karl Heinz Kienitz: \_\_\_\_\_ *K. H. Kienitz*

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa: \_\_\_\_\_ *Oswaldo L. do Valle Costa*

Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral: \_\_\_\_\_ *W. Caradori do Amaral*

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val: \_\_\_\_\_ *João Bosco Ribeiro do Val*

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo o estudo do projeto de controladores dinâmicos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída para sistemas discretos com parâmetros sujeitos a saltos markovianos. Inicialmente, estudamos o caso de filtragem e propomos diferentes técnicas de projeto para casos especiais relacionados à disponibilidade do estado da cadeia de Markov, também chamado modo, ou a matriz de probabilidades de transição parcialmente conhecida. O resultado principal é a caracterização de todos os controladores dinâmicos lineares tais que a norma da saída controlada é limitada, levando a solução do problema de projeto do controlador linear ótimo  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ , sob a hipótese de conhecimento do modo por parte do controlador. Todos os projetos são expressos em termos de desigualdades matriciais lineares. Para ilustrar possíveis aplicações dos resultados teóricos, consideramos o projeto de um controlador cuja entrada é transmitida por um canal markoviano, além da modelagem estatística de falhas em sensores/atuadores.

**Palavras-chave:** Sistemas com saltos markovianos, sistemas a tempo discreto, realimentação de saída, controle por rede, desigualdades matriciais lineares.

## Abstract

This work addresses the  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback design problem for discrete-time Markov jump linear systems. Initially, we study the filtering problem and propose different design techniques to deal with the Markov parameter, often called mode, availability and/or partly known transition probability. The main result is the characterization of all linear controllers such that the controlled output norm remains bounded by a given level, yielding the complete solution of the mode-dependent  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  linear control design problem. All controllers are designed by solving linear matrix inequalities. The theory is illustrated by means of practical examples, consisting of control over data communication through a markovian channel and of statistical modelling of sensors/actuators failures.

**Keywords:** Markov jump linear systems, discrete-time systems, output feedback, network control, linear matrix inequalities.

*Para Carolina, jóia rara.*

# Agradecimentos

Da dissertação de mestrado sobrou um enorme ensinamento, maior talvez que todos os resultados técnicos: os agradecimentos devem ser escritos com muito cuidado, pois são o único capítulo que as pessoas mais queridas fora da academia vão entender. Essa lição cobre este pequeno texto de grande responsabilidade e nele me arrisco com prazer.

Quero agradecer à minha esposa Carolina, a quem já dediquei este trabalho. Se ela simplesmente aceitasse a minha decisão de seguir meu sonho, seria notável; mas ela deu aquele apoio incondicional, típico de quem ama. Ao nosso filho Inácio, que nasceu no momento em que esta tese começou a ser gerada e ajudou seu autor a rejuvenescer.

Aos meus pais, Nicolau e Jacy, que tanto suporte me deram nessa aventura em que me meti. Deles não ouvi palavra de dúvida ou receio, e quando precisei de sua ajuda, responderam prontamente. Também gostaria de agradecer à minha sogra Sebastiana por toda ajuda e torcida.

Ao pessoal da pós-graduação: Andréa, Anzai, Kazuo, Leonardo Nascimento, Nathalie, Renato que foram a minha turma durante o doutorado.

Aos meus colegas de laboratório, Grace Silva Deaecto e Rubens Hideo Korogui, por receberem tão bem a este “intruso” e pela companhia nas inúmeras reuniões de trabalho, uma ou até duas vezes por dia, na cantina da Mecânica.

Ao colega André Ricardo Fioravanti, co-autor dos artigos científicos gerados por este trabalho. Grande pesquisador e bom companheiro.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, verdadeiro orgulho dos paulistas, por acreditar na capacidade de nossas universidades e pelo apoio financeiro a esta pesquisa em particular.

Aos examinadores da banca, pela leitura cuidadosa do manuscrito e pelas discussões que melhoraram significativamente a versão final.

*Last but no least*, ao meu orientador José Cláudio Geromel, que soube tão bem me desafiar a superar meus limites e que nunca se esqueceu de comemorar essas mesmas conquistas.

# Índice

Lista de Figuras	xiii
Lista de Exemplos	xv
Lista de Símbolos	xvii
Trabalhos Publicados Pelo Autor	xviii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Conceitos básicos</b>	<b>5</b>
2.1 Notação . . . . .	5
2.2 Estabilidade . . . . .	7
2.3 Norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	12
2.4 Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	16
2.5 Considerações finais . . . . .	19
<b>3 Filtragem</b>	<b>21</b>
3.1 Filtragem $\mathcal{H}_2$ . . . . .	21
3.1.1 Filtragem $\mathcal{H}_2$ com o conhecimento do modo . . . . .	22
3.1.2 Filtragem $\mathcal{H}_2$ robusta e independente do modo . . . . .	33
3.2 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	39
3.2.1 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ com disponibilidade do modo . . . . .	40
3.2.2 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ robusta e independente do modo . . . . .	46
3.3 Casos especiais de filtragem . . . . .	48
3.3.1 Filtragem por agrupamentos . . . . .	48
3.3.2 Filtragem com probabilidades de transição incertas . . . . .	53
3.4 Considerações Finais . . . . .	59

---

<b>4</b>	<b>Controle Dinâmico de Saída</b>	<b>61</b>
4.1	Formulação do problema . . . . .	62
4.2	Controle $\mathcal{H}_2$ com o conhecimento do modo . . . . .	66
4.3	Controle $\mathcal{H}_\infty$ com disponibilidade do modo . . . . .	73
4.4	Considerações finais . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Aplicações</b>	<b>77</b>
5.1	Filtragem de sistema com saltos comparada à filtragem robusta . . . . .	78
5.2	Controle de sistemas sujeitos a falhas nos atuadores . . . . .	82
5.3	Controle de uma fila de veículos através da rede . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>
<b>A</b>	<b>Alguns resultados auxiliares</b>	<b>97</b>
<b>B</b>	<b>Tamanho médio das seqüências de pacotes corretos e defeituosos</b>	<b>103</b>
<b>C</b>	<b>Condição para cálculo de norma <math>\mathcal{H}_\infty</math> em um caso particular de MJLS</b>	<b>107</b>

# Lista de Figuras

1.1	Cadeia de Markov com três estados . . . . .	2
3.1	Filtro markoviano com conhecimento do modo . . . . .	23
3.2	Filtro markoviano independente do modo . . . . .	34
3.3	Sistema massa-mola-amortecedor . . . . .	45
3.4	Cadeia de Markov para um canal Gilbert-Elliot . . . . .	52
4.1	Controle markoviano com conhecimento do modo . . . . .	63
4.2	Norma $\mathcal{H}_2$ em função de $p_{R,R}$ para diferentes valores de $\kappa$ . . . . .	72
4.3	Razão entre normas $\mathcal{H}_\infty$ para controladores próprios e estritamente próprios . . . . .	75
5.1	Sistema massa-mola . . . . .	78
5.2	Resposta ao degrau dos sistemas descritos por (5.1) . . . . .	79
5.3	Custo $\mathcal{H}_2$ garantido para diferentes probabilidades de transição . . . . .	80
5.4	Custo $\mathcal{H}_\infty$ garantido para diferentes probabilidades de transição . . . . .	81
5.5	Norma $\mathcal{H}_2$ para diferentes probabilidades de transição . . . . .	83
5.6	Fila de veículos seguindo trajetória do líder . . . . .	84
5.7	Norma $\mathcal{H}_\infty$ em função da taxa de perda de pacotes . . . . .	86
5.8	Aceleração do veículo líder . . . . .	87
5.9	Custo quadrático para controladores $\mathcal{H}_\infty$ clássico e markoviano . . . . .	88
5.10	Média e desvio padrão para controladores $\mathcal{H}_\infty$ clássico e markoviano . . . . .	88

# Lista de Exemplos

1.1	Modelo macro-econômico . . . . .	2
2.1	Estabilidade de um sistema com modos instáveis . . . . .	10
2.2	Instabilidade de um sistema com modos estáveis . . . . .	11
3.1	Filtragem de planta de energia solar . . . . .	31
3.2	Filtragem em modelo macroeconômico . . . . .	32
3.3	Filtragem em coletor solar sem conhecimento do modo . . . . .	38
3.4	Filtragem em modelo macroeconômico sem conhecimento do modo . . . . .	38
3.5	Filtragem em sistema massa-mola . . . . .	44
3.6	Filtragem em sistema massa-mola sem observação do modo . . . . .	47
3.7	Filtragem em sistema massa-mola com disponibilidade de agrupamentos . . . . .	51
3.8	Número de LMIs para problemas com $\mathbb{P}$ parcialmente conhecida . . . . .	55
3.9	Filtragem com $\mathbb{P}$ parcialmente conhecida . . . . .	57
3.10	Filtro independente do modo com probabilidades de transição incertas . . . . .	58
4.1	Controle $\mathcal{H}_2$ em sistema massa-mola . . . . .	71
4.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ em sistema massa-mola . . . . .	74
C.1	Exemplo para cálculo de norma $\mathcal{H}_\infty$ em MJLS com $p_{ij} = p_j$ . . . . .	109

# Lista de Símbolos

- $\mathbb{N}$  - Conjunto dos números naturais.
- $\mathbb{R}$  - Conjunto dos números reais.
- $\mathbb{R}^{n \times m}$  - Conjunto das matrizes reais de dimensão  $n \times m$ .
- $\mathbb{K}$  - Conjunto dos  $N$  primeiros números naturais.
- $\mathbb{O}$  - Ordem de complexidade numérica.
- $\mathbb{P}$  - Matriz de probabilidades de transição.
- $X'$  - Transposto da matriz  $X$ .
- $X \geq (>)0$  - Matriz simétrica  $X$  é semi-definida (definida) positiva.
- $X \leq (<)0$  - Matriz simétrica  $X$  é semi-definida (definida) negativa.
- $\text{co}\{\cdot\}$  - Combinação convexa.
- $\text{diag}[X, Y]$  - Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes  $X$  e  $Y$ .
- $\text{tr}(X)$  - Traço da matriz  $X$ , que é igual à soma de seus autovalores.
- $\lambda(X)$  - Autovalor da matriz quadrada  $X$ .
- $v(X)$  - Autovetor da matriz quadrada  $X$ .
- $X^{-1}$  - Inversa da matriz  $X$ .
- - Cada um dos elementos simétricos em relação à diagonal principal de uma matriz simétrica
- - Fim de prova.
- ♦ - Fim de exemplo.

# Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. A. R. Fioravanti, A. P. C. Gonçalves, J. C. Geromel. “ $H_2$  Filtering of Discrete-time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities”, *International Journal of Control* **81**, 1221–1231, 2008.
2. J. C. Geromel, A. P. C. Gonçalves, A. R. Fioravanti. “Dynamic Output Feedback Control of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities”, *SIAM Journal on Control and Optimization* **48**, 573–593, 2009.
3. A. P. C. Gonçalves, A. R. Fioravanti, J. C. Geromel. “ $\mathcal{H}_\infty$  Filtering of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **54**, 1347–1351, 2009.
4. A. R. Fioravanti, A. P. C. Gonçalves, J. C. Geromel. “ $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Filtering of Discrete-time Markov Jump Linear Systems through Linear Matrix Inequalities”, *17th IFAC World Congress*, Seoul, Coréia do Sul, 2681–2686, 2008.
5. A. P. C. Gonçalves, A. R. Fioravanti, J. C. Geromel. “Dynamic Output Feedback  $\mathcal{H}_\infty$  Control of Discrete-time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities”, em ‘Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control’, Cancun, Mexico, 4787-4792, 2008.
6. A. R. Fioravanti, A. P. C. Gonçalves, J. C. Geromel. “Filtering of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems with Cluster Observation: An Approach to Gilbert-Elliot’s Network Channel”. Aceito para apresentação oral na *European Control Conference*, Budapest, Hungria, Agosto de 2009.

# Capítulo 1

## Introdução

No estudo de sistemas dinâmicos, o primeiro passo consiste em criar um modelo matemático a partir do qual seja possível prever com determinada precisão o comportamento físico de um conjunto de variáveis. Entretanto, sistemas físicos apresentam respostas geralmente mais complexas do que aquelas de um sistema com dinâmica invariante no tempo. Mudanças abruptas devidas a alterações ambientais, falhas ou reparos em sensores ou atuadores, mudanças no ponto de operação para plantas não-lineares, entre outras, podem provocar alterações substanciais na dinâmica do sistema. Em muitos casos não é possível modelar exatamente como ocorrem tais mudanças, pois a complexidade dos fenômenos físicos associados torna uma abordagem determinística proibitiva do ponto de vista prático. Os processos ditos estocásticos tornam-se interessantes por permitir que se leve tais eventos em consideração, baseando-se não em um modelo exato sobre como eles ocorrem no tempo, mas em estatísticas de ocorrência que permitam falar em probabilidades, valores esperados, variâncias etc. Uma das maneiras encontradas pelos pesquisadores para modelar mudanças abruptas na dinâmica de sistemas é escrevê-los como sub-sistemas com diferentes *modos de operação*. Cada modo é descrito por um conjunto de equações lineares e a aleatoriedade a ser levada em conta é modelada como uma mudança, ou um *salto*, entre os diferentes modos de operação. Sistemas com variáveis sujeitas a uma dinâmica, seja ela contínua ou discreta, somados a variáveis necessariamente discretas que podem alterar de valor abruptamente são também chamados de *sistemas híbridos*.

No caso específico a que nos referimos neste trabalho, tratamos de dinâmica discreta e de variáveis de salto que representam o modo de operação do sistema em um dado instante de tempo  $k \in \mathbb{N}$ . Vamos considerar que os modos são representados pelos elementos do conjunto  $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ . A probabilidade de ocorrer um salto para um dado modo no instante  $k + 1$  depende exclusivamente do modo no instante atual  $k$ , não importando o histórico anterior dos modos de operação por onde passou o sistema. Quando uma variável aleatória assume valores

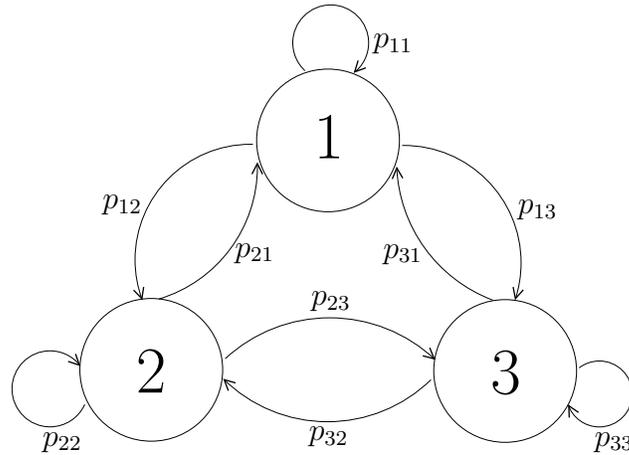


Figura 1.1: Cadeia de Markov com três estados

em um conjunto contável tal que a probabilidade de que seu valor mude para outro depende apenas de seu valor presente e não do histórico dos valores anteriores, dizemos que a variável assume valores de acordo com uma *cadeia de Markov*. Uma representação gráfica para uma cadeia de Markov com 3 estados está na Figura 1.1. Cada círculo numerado representa um modo de operação diferente para o sistema, ou seja, quando o sistema encontra-se em “1” ele exibe comportamento dinâmico ditado por equações diferentes daquelas que definem sua dinâmica quando ele está em “2” ou em “3”. As setas representam as probabilidades de saltos, ou dito de outra maneira, as probabilidades de que o sistema mude ou não de modo de operação dado o seu modo atual. É importante notar que, exceto no caso trivial em que alguma das probabilidades de transição seja 1, não é possível definir *a priori* qual será o modo de operação futuro de um sistema dado o atual, mas é possível dizer quais modos são mais ou menos prováveis.

**Exemplo 1.1** Como forma de ilustrar um sistema com dinâmica variável, considere o modelo macroeconômico multiplicador-acelerador de Samuelson, publicado originalmente em 1939. De fato, este foi o exemplo de aplicação usado por (Blair Jr. & Sworder 1975), que é um dos primeiros trabalhos da literatura a tratar sistemas com saltos markovianos a tempo discreto, como faremos aqui. O modelo é dado por

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w & 1+s-w \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (1.1)$$

onde o vetor  $x(k)$  representa o produto interno bruto, com  $x_2(k)$  sendo o valor no instante  $k$  e

Modo $i$	Nome	Descrição	$w_i$	$s_i$
1	Normal	Nível médio para $w$ e $s$	2,5	0,3
2	Expansão	Nível alto para $w$ (e baixo para $s$ )	47,3	-0,7
3	Contração	Nível baixo para $w$ (e alto para $s$ )	-5,3	0,9

Tabela 1.1: Modos de operação para modelo multiplicador-acelerador

$x_1(k)$  o valor no instante anterior. A entrada de controle  $u(k)$  representa os gastos governamentais. O parâmetro  $s$  mede a tendência marginal para poupança ( $1/s$  é o chamado multiplicador),  $w$  é um coeficiente de aceleração, que relaciona o investimento privado induzido pelo aumento (ou diminuição) do produto interno bruto em comparação com os períodos anteriores.

De acordo com dados do Departamento de Comércio dos Estados Unidos, os valores de  $w$  e  $s$  foram tabulados e divididos qualitativamente em três modos conforme Tabela 1.1 (Blair Jr. & Sworder 1975). A divisão é obtida observando a tendência aparentemente natural de poupar menos em tempos de bonança e mais nas crises, sendo inverso o comportamento para o investimento privado. As probabilidades de transição entre os diferentes modos, obtidas também de acordo com as estatísticas do Departamento de Comércio são

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,17 & 0,16 \\ 0,30 & 0,47 & 0,23 \\ 0,26 & 0,10 & 0,64 \end{bmatrix}$$

◆

O Exemplo 1.1 mostra claramente como a dinâmica de um sistema pode variar de acordo com condições ambientais externas pois é natural supor que a economia não se comporte da mesma maneira em todos os momentos. Contudo, algumas dúvidas importantes surgem do modelo (1.1). Ele é estável? Mais do que isso, como definir estabilidade para um sistema assim com diferentes modos? Basta olhar para os modos individualmente, ou será necessário um conceito diferente de estabilidade? Todos estes pontos relacionados com estabilidade e ainda as definições de norma  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  são detalhadas no Capítulo 2. Além das definições, também são derivadas condições para o teste de estabilidade e para o cálculo das referidas normas.

O Capítulo 3 trata do importante problema de filtragem, ou seja, da estimação de uma saída  $z$  baseada em um conjunto de medidas  $y$ . Aqui é importante considerar a hipótese de disponibilidade ou não do modo do sistema para o filtro. Outra hipótese interessante que exploramos é a de uma incerteza paramétrica na matriz de probabilidades de transição. Em todos os casos, derivamos as matrizes do filtro usando programas convexos com restrições em forma de desigual-

dades matriciais lineares, ou LMIs<sup>1</sup>. Comparamos os resultados obtidos para a minimização das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação com aqueles disponíveis na literatura.

O Capítulo 4 traz o principal resultado desta tese, a saber, a caracterização completa de todos os controladores dinâmicos lineares por realimentação de saída tais que as normas  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  estejam abaixo de um certo valor pré-estabelecido. O projeto é dado pela solução de problemas de otimização com restrições na forma de LMIs, que podem ser resolvidos usando rotinas numéricas consagradas. O ponto principal a ser salientado em nosso desenvolvimento é que não exigimos nenhuma estrutura particular para a matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$ , como feito por exemplo em (Seiler & Sengupta 2005).

Alguns casos de interesse prático são tratados no Capítulo 5. Para o caso de filtragem, mostramos como é possível projetar um filtro que leve em conta as probabilidades de transição, ainda que o modo do sistema seja desconhecido a cada instante, e o quanto este projeto pode ser melhor do que a filtragem robusta convencional. Outro exemplo importante é relacionado ao controle de um sistema através de uma rede. É natural supor que uma rede de dados apresente erros em rajadas, ou seja, há uma probabilidade maior de erro para o próximo pacote transmitido através da rede se o pacote atual estiver errado. De forma análoga, se o pacote atual for transmitido corretamente, há uma probabilidade maior de que o próximo também não apresente erros. Colocando em termos matemáticos, a probabilidade de erro de pacote em uma rede de dados com estas características depende apenas do estado atual da rede, o que é bem representado por uma cadeia de Markov. Além disso, a hipótese de disponibilidade do modo do sistema é adequada para este caso, pois existem protocolos de transmissão de dados que permitem determinar se houve ou não erro na transmissão do pacote. Finalmente, há o caso em que as probabilidades de erros no atuador são levadas em consideração para o projeto do controlador.

Algumas ferramentas necessárias para a derivação dos resultados obtidos ao longo da tese são demonstradas e discutidas em maior profundidade nos Apêndices. Entendemos que isso é necessário para manter a fluidez do texto sem prejuízo do rigor teórico e do tratamento de dúvidas que eventualmente ocorram ao leitor. As conclusões e perspectivas futuras encontram-se no Capítulo 6.

---

<sup>1</sup>do inglês *Linear Matrix Inequalities*.

# Capítulo 2

## Conceitos básicos

O objetivo deste capítulo é estabelecer a notação e os conceitos matemáticos básicos sobre as quais trabalhamos em seguida. O primeiro conceito fundamental é o de estabilidade, e discutimos através de exemplos se há ou não relação entre a estabilidade de cada modo e a estabilidade do sistema com saltos como um todo. Em seguida, apresentamos as definições das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para um sistema linear a tempo discreto sujeito a saltos markovianos, ou MJLS<sup>1</sup>. Fazemos uma discussão a respeito da influência no valor da norma  $\mathcal{H}_2$  da distribuição de probabilidade inicial da cadeia de Markov  $\mu$  e sugerimos uma definição alternativa para o caso em que esta informação não é conhecida (Fioravanti, Gonçalves & Geromel 2008b). Tanto para o cálculo das normas quanto para a definição de estabilidade, trabalhamos com problemas convexos com restrições na forma de LMIs. Os resultados deste capítulo não são novos e indicamos (Costa, Fragoso & Marques 2005) como a referência teórica fundamental para esta área de pesquisa.

### 2.1 Notação

No que segue, letras maiúsculas denotam matrizes e letras minúsculas vetores. Utilizamos letras gregas minúsculas para a representação de escalares e, tanto para matrizes como para vetores reais, temos que o símbolo ( ' ) denota a operação de transposição. Para matrizes quadradas, representamos por  $\text{tr}(\cdot)$  o traço, soma dos valores na diagonal principal, que é igual a soma dos seus autovalores.

Os conjuntos dos números naturais e reais são denominados por  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{R}$ , respectivamente.  $\mathbb{R}^n$  representa o espaço euclidiano n-dimensional e  $\mathbb{K}$  o conjunto finito dos  $N$  primeiros números

---

<sup>1</sup>do inglês *Markov jump linear system*.

naturais  $\{1, 2, \dots, N\}$ . Uma matriz é dita definida positiva ( $P > 0$ ) se para todo  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

$$x'Px > 0$$

Quando representamos matrizes por blocos, usamos o símbolo  $\bullet$  para representar genericamente cada um dos seus blocos simétricos, ou seja

$$\begin{bmatrix} A & \bullet \\ B & C \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix}$$

O simplex unitário no  $\mathbb{R}^N$ , composto por todos os vetores não negativos  $\mu \in \mathbb{R}^N$  tais que  $\mu_1 + \dots + \mu_N = 1$  é denominado por  $\Lambda$ . Dados  $N^2$  números reais não negativos  $p_{ij}$ , que satisfaçam as restrições  $p_{i1} + \dots + p_{iN} = 1$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $N$  matrizes reais  $X_j$  para todo  $j \in \mathbb{K}$ , a combinação convexa destas matrizes com pesos  $p_{ij}$  é definida por

$$X_{pi} := \sum_{j=1}^N p_{ij} X_j \quad (2.1)$$

De forma análoga, para matrizes definidas positivas, definimos a inversa da combinação convexa de inversas por

$$X_{qi} := \left( \sum_{j=1}^N p_{ij} X_j^{-1} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

Evidentemente,  $X_{pi}$  depende linearmente das matrizes  $X_1, X_2, \dots, X_N$  enquanto a dependência de  $X_{qi}$  com respeito às mesmas matrizes é não-linear. Adotamos as mesmas manipulações matemáticas para matrizes que dependem de dois índices  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , i.e. as definições (2.1) e (2.2) continuam válidas se substituirmos  $X_j$  por  $X_{ij}$ .

O símbolo  $\mathcal{E}\{\cdot\}$  denota a esperança matemática. Para qualquer sinal estocástico  $z(k) \in \mathbb{R}^r$  definido no domínio de tempo discreto  $k \in \mathbb{N}$ , a sua norma quadrática é definida pela quantidade

$$\|z\|_2^2 := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{z(k)'z(k)\} \quad (2.3)$$

O conjunto de todos os sinais  $z(k) \in \mathbb{R}^r$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tais que  $\|z\|_2^2 < \infty$  é denominado por  $\mathcal{L}_2^r$ .

## 2.2 Estabilidade

Um sistema com parâmetros sujeitos a saltos markovianos é representado a seguir

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= C_z(\theta_k)x(k) + E_z(\theta_k)w(k) \\ y(k) &= C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (2.4)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o estado do sistema,  $w(k) \in \mathbb{R}^m$  representa perturbações externas,  $z(k) \in \mathbb{R}^r$  é a saída a ser estimada,  $y(k) \in \mathbb{R}^q$  a saída medida e  $\theta_k = \theta(k)$  é uma variável aleatória tal que  $\{\theta(k) : k \in \mathbb{N}\}$  caracteriza uma cadeia de Markov.

Para cada valor de  $\theta_k \in \mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$ , onde  $N$  é o número de modos de operação do sistema, as matrizes de estado em (2.4) assumem uma determinada configuração. A matriz de probabilidades de transição é dada por  $\mathbb{P} = [p_{ij}]$  com  $p_{ij} = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j \mid \theta_k = i)$ , que devem satisfazer as restrições  $p_{ij} \geq 0$  e  $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . A fim de facilitar a apresentação, definimos que  $A(\theta_k) := A_i$ ,  $J(\theta_k) := J_i$ ,  $C_z(\theta_k) := C_{zi}$ ,  $E_z(\theta_k) := E_{zi}$ ,  $C_y(\theta_k) := C_{yi}$  e  $E_y(\theta_k) := E_{yi}$  sempre que  $\theta_k = i \in \mathbb{K}$ .

A seguir, apresentamos as definições de estabilidade disponíveis na literatura (Ji, Chizeck, Feng & Loparo 1991) para um sistema como (2.4).

**Definição 2.1** *Considere o modelo (2.4) com entrada  $w(k) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  e condições iniciais  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{K}$ . O sistema  $\mathcal{G}$  é*

a) *Estável por média quadrática, se para todo estado inicial  $(x_0, \theta_0)$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{x(k)'x(k) \mid x_0, \theta_0\} = 0 \quad (2.5)$$

b) *Estocasticamente estável, se para todo estado inicial  $(x_0, \theta_0)$*

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)'x(k) \mid x_0, \theta_0 \right\} < \infty \quad (2.6)$$

c) *Exponencialmente estável por média quadrática, se para cada estado inicial  $(x_0, \theta_0)$  existirem constantes  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta > 0$  tais que para todo  $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{E}\{x(k)'x(k) \mid x_0, \theta_0\} < \beta \alpha^k x_0' x_0 \quad (2.7)$$

Foi demonstrado em (Ji et al. 1991) que as definições acima são equivalentes para um MJLS

com cadeia de Markov finita, e portanto podemos nos referir a este conjunto de definições por estabilidade de segundo momento ou SMS<sup>2</sup>. Deste ponto em diante, sempre que nos referirmos à estabilidade de um MJLS, estamos falando em estabilidade de segundo momento.

A próxima proposição, formulada inicialmente por (Ji & Chizeck 1990) e ampliada por (Costa & Fragoso 1993), permite verificar a estabilidade de um sistema a partir de uma condição necessária e suficiente.

**Lema 2.2** *O sistema (2.4) com entrada w nula, é estável pelo segundo momento se e somente se existirem matrizes  $P_i = P_i' > 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  tais que as  $N$  desigualdades de Lyapunov acopladas*

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i < 0 \quad (2.8)$$

*possam ser simultaneamente satisfeitas.*

**Prova:** Para a suficiência, tomando por verdadeiras as desigualdades (2.8), podemos definir  $N$  matrizes  $W_i = W_i' > 0$ , que satisfaçam as equações

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i = -W_i \quad (2.9)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Considerando a função de Lyapunov estocástica:

$$V(\theta_k, x(k)) := x(k)' P(\theta_k) x(k) \quad (2.10)$$

podemos calcular:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\} - V(\theta_k, x(k)) &= x(k)' A_{\theta_k}' P_{p\theta_k} A_{\theta_k} x(k) - x(k)' P_{\theta_k} x(k) \\ &= -x(k)' W_{\theta_k} x(k) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir  $x(k) \neq 0$ . Desta forma, dividindo os dois lados da igualdade por  $V(\theta_k, x(k))$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\} - V(\theta_k, x(k))}{V(\theta_k, x(k))} &= -\frac{x(k)' W_{\theta_k} x(k)}{x(k)' P_{\theta_k} x(k)} \\ &\leq -\min_{i \in \mathbb{K}} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(W_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde  $\lambda_{\min}(\cdot)$  e  $\lambda_{\max}(\cdot)$  são respectivamente os autovalores mínimos e máximos das matrizes.

---

<sup>2</sup>do inglês, *Second Moment Stability*.

Definindo o escalar

$$\alpha := 1 - \min_{i \in \mathbb{K}} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(W_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \right\}$$

verificamos que, por um lado  $\alpha < 1$  pois  $W_i$  e  $P_i$  são matrizes definidas positivas, e, por outro lado, a partir de (2.12)

$$\alpha \geq \frac{\mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\}}{V(\theta_k, x(k))} > 0 \quad (2.13)$$

o que implica na existência de algum  $\alpha \in (0,1)$  tal que

$$\mathcal{E} \{V(\theta_{k+1}, x(k+1)) \mid \theta_k, x(k)\} \leq \alpha V(\theta_k, x(k)) \quad (2.14)$$

e portanto

$$\mathcal{E} \{V(\theta_k, x(k)) \mid \theta_0, x(0)\} \leq \alpha^k V(\theta_0, x(0)) \quad (2.15)$$

Podemos então calcular o somatório dos termos da desigualdade anterior para todo  $k$ . Utilizando o fato de que  $0 < \alpha < 1$ , isto resulta em:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^T V(\theta_k, x(k)) \mid \theta_0, x(0) \right\} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^T \alpha^k V(\theta_0, x(0)) \quad (2.16)$$

$$\leq \frac{1}{1 - \alpha} x(0)' P(\theta_0) x(0) \quad (2.17)$$

Porém, tem-se no caso geral que

$$\min_{i \in \mathbb{K}} \{ \lambda_{\min}(P_i) \} \mathcal{E} \{ x(k)' x(k) \} \leq \mathcal{E} \{ V(\theta_k, x(k)) \} \quad (2.18)$$

e desta forma, retomando que  $P_i > 0$ , chega-se a

$$\mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' x(k) \mid \theta_0, x(0) \right\} \leq \frac{1}{1 - \alpha} \frac{1}{\min_{i \in \mathbb{K}} \{ \lambda_{\min}(P_i) \}} x(0)' P_{\theta_0} x(0) := M(x(0), \theta_0)$$

mostrando a estabilidade de acordo com a desigualdade (2.6).

Para a necessidade, definindo a equação:

$$x(k)' P(T - k, \theta_k) x(k) := \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=k}^T x(n)' W(\theta_n) x(n) \mid \theta_k, x(k) \right\} \quad (2.19)$$

para o caso em que  $x(k) \neq 0$  e devido ao fato de  $W(\theta_n) > 0$ , tem-se que  $x(k)' P(T - k, \theta_k) x(k)$  ou cresce monotonicamente com o aumento de  $T$  pois um maior número de termos estritamente

positivos são adicionados, ou ele aumenta monotonicamente até que  $\mathcal{E} \{x(\eta)'W(\theta_\eta)x(\eta)\} = 0$  para algum  $\eta \geq k$ .

Devido à estabilidade do sistema, temos que os seguintes limites existem:

$$x(k)'P_i x(k) := \lim_{T \rightarrow \infty} x(k)'P(T-k, \theta_k = i)x(k) \quad (2.20)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{E} \left\{ \sum_{n=k}^T x(n)'W(\theta_n)x(n) \mid \theta_k = i, x(k) \right\} \quad (2.21)$$

Como estes limites são válidos para qualquer  $x(k)$ , temos

$$P_i := \lim_{T \rightarrow \infty} P(T-k, \theta_k = i) \quad (2.22)$$

Calculando os valores da equação (2.19) para  $k = 0$  e  $k = 1$  respectivamente, e subtraindo os resultados, obtemos:

$$x(0)'P(T, \theta_0 = i)x(0) - \sum_{j=1}^N p_{ij}x(0)'A_i'P(T-1, \theta_1 = j)A_i x(0) = x(0)'W_i x(0) \quad (2.23)$$

Finalmente, como esta equação é válida para qualquer  $x(0)$ , temos:

$$P(T, \theta_0 = i) - \sum_{j=1}^N p_{ij}A_i'P(T-1, \theta_1 = j)A_i = W_i \quad (2.24)$$

e com isso conclui-se que, ao se fazer  $T \rightarrow \infty$ , existe um conjunto de matrizes  $P_i = P_i' > 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , que satisfaz a igualdade

$$P_i - A_i' \left( \sum_{j=1}^N p_{ij}P_j \right) A_i = W_i \quad (2.25)$$

concluindo a prova ao relembrarmos que  $W_i > 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .  $\square$

Este conceito de estabilidade abre espaço para questionamentos interessantes sobre a relação entre a estabilidade dos modos e a estabilidade do MJLS como um todo. Os exemplos a seguir, retirados de (Ji & Chizeck 1990), ilustram como a estabilidade dos modos não é condição necessária nem suficiente para SMS.

**Exemplo 2.1** Considere um sistema com dois modos de operação, definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

com a matriz de transição de estados dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Note que ambos os modos são instáveis, pois tanto  $A_1$  quanto  $A_2$  tem autovalor igual a 2 e portanto fora do círculo unitário, porém as restrições de estabilidade são satisfeitas com as matrizes definidas positivas

$$P_1 = \begin{bmatrix} 30.2 & -13.6 \\ -13.6 & 10.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3.6 & -0.3 \\ -0.3 & 37.2 \end{bmatrix}$$

♦

**Exemplo 2.2** Agora considere outro sistema com dois modos de operação

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz de probabilidades de transição

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Note agora que ambos os modos são estáveis, pois tanto os autovalores de  $A_1$  quanto os de  $A_2$  tem módulo menor que 1, porém as restrições de estabilidade não podem ser satisfeitas para nenhuma matriz  $P_1, P_2 > 0$ .

♦

Embora as desigualdades (2.8) já estejam na forma de LMIs, elas apresentam algumas dificuldades que necessitam ser contornadas. A principal dificuldade técnica é a forma como as somas das probabilidades de saltos ocorrem nas desigualdades, envolvendo as matrizes de realização do espaço de estado e impedindo a utilização de transformações padrões presentes na literatura para representá-las de forma linear. Para efeito de comparação, lembramos que os sistemas MJLS a tempo contínuo apresentam tais somas como termos aditivos às desigualdades, e nunca envolvem

produtos com as matrizes  $A_1, A_2, \dots, A_N$  (de Farias, Geromel, do Val & Costa 2000).

O próximo teorema apresenta uma caracterização alternativa para a estabilidade de sistemas MJLS a tempo discreto. Como será demonstrado nos Capítulos 3 e 4, estas desigualdades são mais apropriadas para o projeto de filtros e controladores.

**Teorema 2.3** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *O Sistema  $\mathcal{G}$  é estável.*

ii) *Existem matrizes  $P_i = P_i' > 0$  tais que*

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet \\ A_i & P_{pi}^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.26)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Aplique o Complemento de Schur<sup>3</sup> à desigualdade (2.8). □

As desigualdades (2.26), no Teorema 2.3, apresentam diversas vantagens sobre aquelas do Lema 2.2. A notação utilizada no Teorema 2.3 põe em evidência que as desigualdades requeridas para testar a estabilidade envolvem apenas as matrizes de mesmo índice  $i \in \mathbb{K}$ , e o acoplamento entre os índices é expresso através de restrições de igualdade  $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} P_j$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , que não envolvem as matrizes  $A_i$  da dinâmica do sistema. Esta característica é muito útil para se derivar fórmulas simples e efetivas para uma parametrização das matrizes do espaço de estado dos filtros e controladores de sistemas MJLS.

## 2.3 Norma $\mathcal{H}_2$

Quando nos referimos a um problema de projeto de filtros ou controladores ótimos, está implícito neste conceito que alguma função objetivo é minimizada. Uma escolha natural para esta função é algum índice de desempenho representado por uma norma. Nesta seção apresentamos uma definição de norma  $\mathcal{H}_2$  para o sistema representado por (2.4). A norma  $\mathcal{H}_2$  se relaciona com o problema linear quadrático, e assim sendo, fornece uma medida da distância relativa do sistema em relação ao seu ponto de equilíbrio, dada uma condição inicial. Minimizar esta norma é, portanto, garantir convergência rápida de acordo com as premissas do projeto. A definição a seguir é a mesma apresentada em (do Val, Geromel & Gonçalves 2002).

---

<sup>3</sup>Mais detalhes sobre esta importante ferramenta estão no Apêndice A, Lema A.1.

**Definição 2.4 (Norma  $\mathcal{H}_2$ )** *Caso o sistema  $\mathcal{G}$  seja estável, definimos a sua norma  $\mathcal{H}_2$  como*

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 := \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \|z^{s,i}\|_2^2 \quad (2.27)$$

onde  $z^{s,i}$  representa a saída  $z(0), z(1), \dots$  obtida quando

- $x(0) = 0$  e a entrada é dada por  $w(k) = e_s \delta(k)$ , onde  $e_s \in \mathbb{R}^m$  é a  $s$ -ésima coluna da matriz identidade  $m \times m$  e  $\delta(k)$  é o impulso unitário discreto.
- $\theta_0 = i \in \mathbb{K}$  com probabilidade  $\mu_i = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$

Observe que a definição anterior é equivalente a considerar o sistema  $\mathcal{G}$  sem entrada e com condições iniciais dadas por  $x(0) = J_i e_s$ , onde  $\theta_0 = i \in \mathbb{K}$  com probabilidade  $\mu_i$  e  $s = 1, 2, \dots, m$ . É interessante observar que no caso determinístico, ou seja, se fizermos  $N = 1$ , a definição anterior se reduz à norma  $\mathcal{H}_2$  usual dos sistemas LTI<sup>4</sup> a tempo discreto.

Considere agora o caso em que cadeia de Markov está em estado estacionário em  $k = 0$ , i.e. ela já teria evoluído por muito tempo antes de se definir o instante inicial, de tal forma que a probabilidade de o modo atual ser um dos modos possíveis do conjunto  $\mathbb{K}$  é invariante no tempo. Para determinarmos esta distribuição estacionária, definimos

$$\pi_i(k) := \text{Prob}(\theta_k = i \in \mathbb{K}) \quad (2.28)$$

e o vetor  $\pi(k) \in \mathbb{R}^N$ , cujo  $i$ -ésimo elemento é dado por  $\pi_i(k)$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Podemos afirmar que

$$\pi(k+1) = \mathbb{P}' \pi(k) \quad (2.29)$$

de onde se conclui que, havendo distribuição estacionária, ela será dada pelo autovetor de  $\mathbb{P}'$  associado ao autovalor unitário. Naturalmente, este autovetor deve ser escalado para garantir que  $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$ .

Foi demonstrado por (Costa et al. 2005) que para o caso estacionário, ou seja  $\mu_i = \pi_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , o valor de norma calculado pela Definição 2.4 é equivalente a

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{z'(k)z(k)\} \quad (2.30)$$

onde  $z(k)$  é a saída do sistema (2.4) cuja entrada  $w(k)$  é um ruído branco em sentido amplo, independente de  $\theta_k \in \mathbb{K}$ .

---

<sup>4</sup>do inglês, *Linear Time Invariant*

Quando não for possível afirmar nada acerca de  $\mu_i$ , temos o seguinte

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}\|_2^2 &= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \|z^{s,i}\|_2^2 \\
&\leq \max_{\mu \in \Lambda} \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \|z^{s,i}\|_2^2 \\
&\leq \sup_{\theta_0 \in \mathbb{K}} \sum_{s=1}^m \|z^{s,\theta_0}\|_2^2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde a primeira desigualdade decorre diretamente do operador max e (2.31) vem do fato de que o máximo de uma função linear em um conjunto convexo ocorre em um dos seus pontos extremos. As relações dadas acima mostram que, para uma escolha adequada de probabilidades iniciais  $\mu_i$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , a norma  $\mathcal{H}_2$  de  $\mathcal{G}$  equivale à norma (2.27) no pior caso e corresponde ao modelo de quando não se tem disponível nenhuma informação do estado inicial  $\theta_0 \in \mathbb{K}$  do sistema. Claramente, para se determinar a norma de pior caso, a probabilidade de estado inicial deve ser incluída como uma variável a ser determinada no processo de otimização. Este ponto é retomado em maiores detalhes nos próximos capítulos.

A seguir mostramos como a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (2.4) pode ser calculada (Costa, do Val & Geromel 1997).

**Teorema 2.5** *A norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema  $\mathcal{G}$ , tal como definida por (2.27), pode ser calculada por:*

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(J_i' P_{pi} J_i + E_{zi}' E_{zi}) \tag{2.32}$$

onde  $P_i = P_i' > 0$  são as soluções das equações:

$$P_i = A_i' P_{pi} A_i + C_{zi}' C_{zi} \tag{2.33}$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Pela Definição 2.4, considerando  $x(0) = 0$  e  $\theta_0 = i \in \mathbb{K}$ , temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}\|_2^2 &= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} z(k)' z(k) \middle| \theta_0, x(0) \right\} \\
&= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)' C_{z\theta_k}' C_{z\theta_k} x(k) \middle| \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(E_{zi}' E_{zi})
\end{aligned}$$

Dado, por hipótese, que a equação (2.33) é satisfeita, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}\|_2^2 &= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' (P_{\theta_k} - A'_{\theta_k} P_{p\theta_k} A_{\theta_k}) x(k) \middle| \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(E'_{zi} E_{zi}) \\ &= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x(k)' P_{\theta_k} x(k) - x(k+1) P_{p\theta_k} x(k+1) \middle| \theta_0, x(0) \right\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(E'_{zi} E_{zi}) \end{aligned}$$

Mas, para todo  $j \geq 1$ , temos que  $\mathcal{E}\{P_{\theta_j}\} = \mathcal{E}\{P_{p\theta_{j-1}}\}$ , e desta forma

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}\|_2^2 &= \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^N \mu_i \mathcal{E} \{x(1)' P_{\theta_1} x(1) | \theta_0, x(0)\} + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(E'_{zi} E_{zi}) \\ &= \sum_{i=1}^N \mu_i \sum_{s=1}^m e'_s J'_i \mathcal{E} \{P_{\theta_1} | \theta_0\} J_i e_s + \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(E'_{zi} E_{zi}) \\ &= \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(J'_i \mathcal{E} \{P_{\theta_1} | \theta_0\} J_i + E'_{zi} E_{zi}) \end{aligned}$$

E, lembrando que  $\mathcal{E}\{P_{\theta_1} | \theta_0\} = P_{p\theta_0} = P_{pi}$ , completamos a prova.  $\square$

A partir deste resultado, não existem dificuldades em calcular  $\|\mathcal{G}\|_2^2$  através de desigualdades matriciais lineares. O ponto chave está na observação, presente em (Costa et al. 1997), de que se as equações matriciais (2.33) forem substituídas por uma desigualdade, então o termo à direita de (2.32) ainda é um limitante superior da norma, cuja minimização determina  $\|\mathcal{G}\|_2^2$ . Desta forma, utilizando-se o Complemento de Schur, obtemos

$$\|\mathcal{G}\|_2^2 = \inf_{(W_i, P_i) \in \Phi} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \quad (2.34)$$

onde  $\Phi$  é o conjunto de todas as matrizes simétricas  $(W_i, P_i)$  tais que as LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} J_i & P_{pi} & \bullet \\ E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.35)$$

e

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi} A_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.36)$$

sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

Do ponto de vista numérico, a determinação de  $\|\mathcal{G}\|_2^2$  através de LMIs nos parece muito eficiente e adequada. De fato, temos que lidar com  $2N$  desigualdades matriciais lineares,  $2N$  variáveis matriciais e  $N$  termos de acoplamento lineares da forma  $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij}P_j$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Além disso, a solução ótima global deste problema de programação convexa é calculada de forma direta, e não iterativamente.

O problema (2.34) pode ser levemente modificado para a determinação da norma de pior caso definida em (2.31). De fato, lembrando que o máximo entre  $N$  números equivale ao menor limitante superior deles, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{\theta_0 \in \mathbb{K}} \sum_{s=1}^m \|z^{s,\theta_0}\|_2^2 &= \max_{\mu \in \Lambda} \inf_{(W_i, P_i) \in \Phi} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \\ &= \inf_{\sigma, (W_i, P_i) \in \Phi} \{ \sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma \} \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde a segunda igualdade segue das relações de dualidade e da convexidade dos conjuntos  $\Lambda$  e  $\Phi$ . Isto mostra que a norma de pior caso pode ser determinada com um pequeno incremento do esforço numérico, correspondente em aumentar o número de variáveis em apenas um escalar e o número de LMIs por  $N$ .

## 2.4 Norma $\mathcal{H}_\infty$

Em complemento à norma  $\mathcal{H}_2$ , o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  pretende estabelecer um limitante para a influência da perturbação  $w$  na saída  $z$  do sistema, em vez de uma medida da velocidade de convergência. Este conceito é útil para medir a robustez de sistemas nos quais as eventuais alterações de parâmetros podem ser modeladas como perturbações  $w$  desconhecidas mas de norma limitada, i.e.  $w \in \mathcal{L}_2^m$ . Assim sendo, esta norma é definida (Costa & do Val 1996) para um MJLS da seguinte forma:

**Definição 2.6** *Assuma que  $\mathcal{G}$  é estável. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema  $\mathcal{G}$  da entrada  $w$  para a saída  $z$  é dada por*

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 = \sup_{0 \neq w \in \mathcal{L}_2^m, \theta_0 \in \mathbb{K}} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (2.38)$$

Novamente se observa que para o caso determinístico esta definição se reduz à definição clássica de norma  $\mathcal{H}_\infty$  dos sistemas LTI discretos.

Antes de apresentarmos as condições necessárias e suficientes que permitem o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , precisamos da seguinte definição (Ji & Chizeck 1988).

**Definição 2.7** O sistema  $\mathcal{G}$  é dito fracamente controlável se para cada estado inicial  $(x(0), \theta_0)$  e qualquer estado final  $(\bar{x}, \bar{\theta})$  existir um tempo finito  $T_c$  e uma entrada  $w(k)$  tal que

$$\text{Prob}(x(T_c) = \bar{x}) > 0 \quad (2.39)$$

$$\text{Prob}(\theta(T_c) = \bar{\theta}) > 0 \quad (2.40)$$

O próximo teorema mostra como a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um MJLS pode ser calculada usando LMIs (Seiler & Sengupta 2003).

**Teorema 2.8** Se o sistema  $\mathcal{G}$  é fracamente controlável, ele será estável e irá satisfazer a restrição de norma  $\|\mathcal{G}\|_\infty^2 < \gamma$  se e somente se existirem matrizes  $P_i = P_i' > 0$ , tais que

$$\begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_{pi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.41)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Para a suficiência, suponha que existam  $P_i = P_i' > 0$  que tais que as desigualdades (2.41) sejam satisfeitas. Assim, o primeiro bloco diagonal de (2.41) deve ser definido negativo

$$A_i' P_{pi} A_i - P_i < -C_{zi}' C_{zi} \leq 0 \quad (2.42)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Pela equação (2.8) do Lema 2.2, concluímos que o sistema é estável. Além disso, multiplicando a desigualdade (2.41) a esquerda pelo vetor  $[x(k)' w(k)']$  e a direita pelo seu transposto, temos:

$$x(k+1)' P_{pi} x(k+1) - x(k)' P_i x(k) + z(k)' z(k) - \gamma w(k)' w(k) \leq 0 \quad (2.43)$$

Calculando a esperança matemática para  $i = \theta_k$  em (2.43) e somando para todo  $k \geq 0$ , chegamos a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{x(k+1)' P_{p\theta_k} x(k+1) - x(k)' P_{\theta_k} x(k)\} + \|z\|_2^2 - \gamma \|w\|_2^2 \leq 0 \quad (2.44)$$

Por outro lado, como o sistema é estável e  $x(0) = 0$ , podemos afirmar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}\{x(k+1)' P_{p\theta_k} x(k+1) - x(k)' P_{\theta_k} x(k)\} = 0 \quad (2.45)$$

o que permite escrever

$$\|z\|_2^2 \leq \gamma \|w\|_2^2 \quad (2.46)$$

provando assim a suficiência do teorema. A prova de necessidade é extensa e pode ser vista em (Seiler & Sengupta 2003).  $\square$

Como discutido em (Seiler & Sengupta 2003), caso a premissa de controlabilidade fraca não seja satisfeita, somente a parte da suficiência do Teorema 2.8 continua válida.

A partir deste resultado, podemos facilmente calcular a norma  $\mathcal{H}_\infty$  através da solução de um problema de programação convexa com restrições na forma de LMIs. Para isso, aplicando o Complemento de Schur à equação (2.41), obtemos uma forma de calcular a norma  $\mathcal{H}_\infty$  a partir da solução de

$$\|\mathcal{G}\|_\infty^2 = \inf_{(\gamma, P_i) \in \Phi} \gamma \quad (2.47)$$

onde  $\Phi$  é o conjunto de todas as matrizes definidas positivas  $P_i = P_i' > 0$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$  tal que as LMIs

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{pi}A_i & P_{pi}J_i & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} & E_{zi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (2.48)$$

sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathbb{K}$ . É válido notar novamente que, do ponto de vista numérico, a determinação da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para MJLS utilizando LMIs também se apresenta como uma forma muito adequada e eficiente, pois é necessário lidar com  $N$  desigualdades matriciais lineares com  $N$  variáveis matriciais, 1 variável escalar, além dos  $N$  termos de acoplamento linear da forma  $P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij}P_j$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Como para o caso  $\mathcal{H}_2$ , se considerarmos o caso particular em que  $N = 1$ , (2.47) se reduz ao problema clássico de cálculo de norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas LTI. Além disso, se fizermos  $\gamma \rightarrow \infty$  em (2.48), recuperamos a restrição  $\mathcal{H}_2$  como em (2.36).

Um caso particular<sup>5</sup> interessante de MJLS é aquele em que a matriz  $\mathbb{P}$  apresenta linhas idênticas, ou seja,  $p_{ij} = p_j$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . No caso  $N = 2$ , a cadeia de Markov assim definida se reduz a um processo de Bernoulli, i.e. há dois símbolos cuja probabilidade de ocorrência em um determinado instante independe de sua ocorrência em instantes anteriores.

---

<sup>5</sup>Este caso particular – que tratamos adiante nos Capítulos 3 e 4 –, foi abordado em (Seiler & Sengupta 2005), mas entendemos não haver respaldo teórico na condição  $\mathcal{H}_\infty$  derivada naquele trabalho. Para uma discussão mais detalhada confira o Apêndice C.

## 2.5 Considerações finais

Neste capítulo, apresentamos as principais ferramentas teóricas para o projeto de filtros e de controladores dinâmicos por realimentação de saída. Apresentamos na Definição 2.1 os três conceitos de estabilidade mais utilizados para MJLS, bem como um método para calcular se um sistema é estável ou não (Teorema 2.2). Em seguida, apresentamos a Definição 2.4 para a norma  $\mathcal{H}_2$  e como ela é dependente da distribuição de probabilidades inicial  $\mu$ . Se o modo inicial do sistema for conhecido, ou se a cadeia de Markov associada se encontra em estado estacionário, então é possível definir  $\mu_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Entretanto, quando os valores de  $\mu_i$  não forem conhecidos, podemos deixar a distribuição inicial como variável do problema de otimização e usar a norma de pior caso, definida por (2.31). Apresentamos em seguida o método para cálculo da norma com LMIs, tanto para o caso em que se sabe o valor da distribuição inicial (2.34) quando para quando não se conhece essa variável (2.37). Para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  fizemos a mesma abordagem, apresentando sua definição e em seguida um método para seu cálculo usando LMIs através do problema (2.47). É importante destacar que nenhum dos resultados deste capítulo é novo e todos os conceitos aqui explorados podem ser conferidos em (Ji & Chizeck 1990), (Costa & Fragoso 1993), (do Val et al. 2002), (Seiler & Sengupta 2003) entre outras referências indicadas ao longo do texto.



# Capítulo 3

## Filtragem

Neste capítulo discutimos o problema do projeto de filtros que minimizem as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação para MJLS a tempo discreto. Para cada norma, trabalhamos sob as hipóteses de disponibilidade ou não para o filtro do modo de operação do sistema no instante  $k \in \mathbb{N}$ . Além disso, consideramos ainda a disponibilidade apenas do *agrupamento* a que pertence o modo de operação bem como de matriz de probabilidades de transição com valores incertos, mas pertencente a um conjunto convexo de vértices conhecidos. Em todos os casos, o projeto do filtro pode ser obtido através de programação convexa com restrições em forma de LMIs. O material é enriquecido com exemplos ilustrativos e comparativos com o que já existe na literatura sobre os temas. A maior parte do material teórico foi desenvolvido originalmente na dissertação de mestrado (Fioravanti 2007) ou nos artigos (Fioravanti et al. 2008b), (Gonçalves, Fioravanti & Geromel 2009), (Fioravanti, Gonçalves & Geromel 2008a), embora as hipóteses de disponibilidade parcial ou de probabilidades de transição parcialmente conhecidas sejam novas.

### 3.1 Filtragem $\mathcal{H}_2$

Nesta seção, abordamos o projeto de um filtro que minimize a norma  $\mathcal{H}_2$  do erro de estimação. Inicialmente consideramos o filtro linear, próprio, de ordem completa e com a informação do modo de Markov  $\theta_k \in \mathbb{K}$  no instante  $k \in \mathbb{N}$ . Trabalhamos com LMIs em vez de equações algébricas de Riccati acopladas, ou CARE<sup>1</sup>, o que permite que a solução seja obtida diretamente e não em um processo iterativo. A solução ótima encontrada é a mesma de (Costa & Tuesta 2004), que usa CARE, se restringirmos o filtro a ser estritamente próprio. O uso de LMIs também traz a vantagem de permitir a adição de restrições adicionais para tratar, por exemplo, de filtros robustos, o que não seria possível na formulação com CARE.

---

<sup>1</sup>do inglês *Coupled Algebraic Riccati Equations*

A adição de restrições ao problema original permite projetar filtros para os quais a informação do modo de operação do sistema não seja disponível. Para este caso, um projeto de filtro usando matrizes estendidas baseado no produto de Kroenecker foi proposto em (Costa & Guerra 2002b), usando CARE, e (Costa & Guerra 2002a), usando LMIs. Os filtros obtidos em tais artigos são estritamente próprios e de ordem  $nN$ , onde  $N$  é o número de modos dos sistema e  $n$  é a ordem da planta. O que torna os resultados de (Costa & Guerra 2002b) e (Costa & Guerra 2002a) ímpares do ponto de vista teórico é a obtenção de filtros ótimos, permitindo estabelecer o melhor desempenho possível na ausência da informação sobre o modo de operação. Nosso filtro independente do modo é sub-ótimo, porém é próprio e de ordem  $n$ , podendo ser calculado com menor complexidade numérica devido ao menor número de variáveis e à dimensão reduzida das LMIs envolvidas. Este aspecto pode ser relevante para aplicações práticas onde o número de estados de Markov seja moderado ou mesmo elevado.

### 3.1.1 Filtragem $\mathcal{H}_2$ com o conhecimento do modo

Considere o filtro linear de ordem completa e dependente do modo

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x_f(k+1) &= A_f(\theta_k)x_f(k) + B_f(\theta_k)y(k) \\ z_f(k) &= C_f(\theta_k)x_f(k) + D_f(\theta_k)y(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $x_f(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_f(0) = 0$ ,  $z_f(k) \in \mathbb{R}^r$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^q$ . As matrizes  $A_{fi}$ ,  $B_{fi}$ ,  $C_{fi}$  e  $D_{fi}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  têm dimensões compatíveis e nosso objetivo é determiná-las de maneira a minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  do erro de estimação obtido ao conectar o filtro  $\mathcal{F}$  ao sistema  $\mathcal{G}$ , cuja representação de estado é dada por (2.4) com entrada  $w(k) \in \mathbb{R}^m$ . A Figura 3.1 traz o esquema desta conexão<sup>2</sup>.

O erro de estimação  $e(k) = z(k) - z_f(k) \in \mathbb{R}^r$  satisfaz

$$\mathcal{G}_f : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{J}(\theta_k)w(k) \\ e(k) &= \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{E}(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $\tilde{x}(k) := [x(k)' \ x_f(k)']' \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é a variável de estado da planta  $\mathcal{G}$  e as matrizes indicadas são

$$\tilde{A}_i := \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fi}C_{yi} & A_{fi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_i := \begin{bmatrix} J_i \\ B_{fi}E_{yi} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\tilde{C}_i := \begin{bmatrix} C_{zi} - D_{fi}C_{yi} & -C_{fi} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i := E_{zi} - D_{fi}E_{yi} \quad (3.4)$$

<sup>2</sup>O símbolo  $\Delta$  indica o operador atraso unitário.

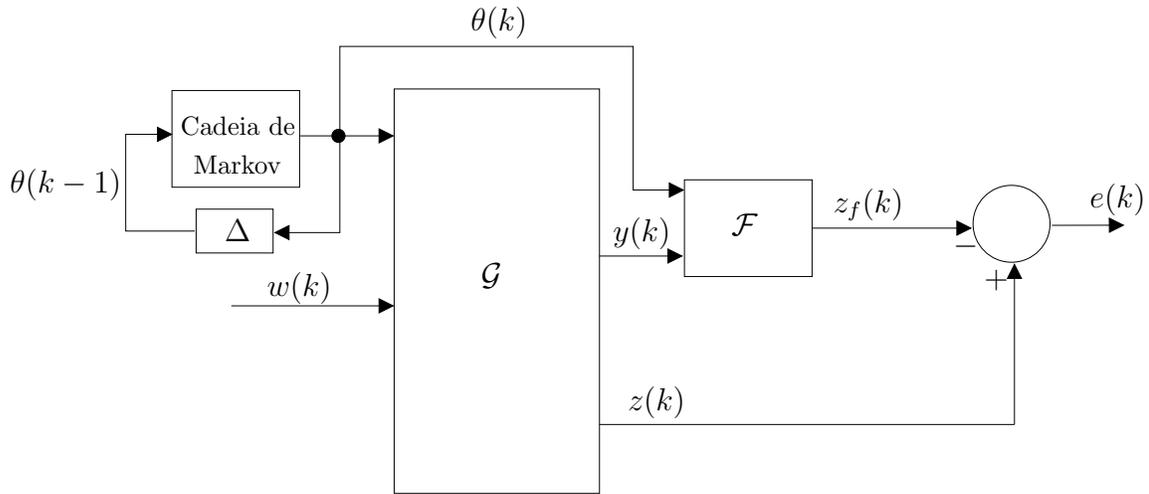


Figura 3.1: Filtro markoviano com conhecimento do modo

e, portanto, podemos escrever o problema a ser resolvido na forma

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \|\mathcal{G}_f\|_2^2 \quad (3.5)$$

É importante esclarecer que a formulação anterior para o projeto de filtro  $\mathcal{H}_2$  é não-convexa e difícil de resolver, i.e. geralmente não é possível encontrar sua solução ótima global seguindo esta formulação preliminar. Isto ocorre pois o cálculo da função objetivo  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2$  depende de variáveis (confira o problema (2.34)) que multiplicam as matrizes do filtro, que também são incógnitas, gerando um problema não convexo. A forma de contornar esta dificuldade é introduzir alguma mudança de variáveis bijetora que possa ser usada para expressar as restrições não-lineares de forma linear.

Queremos, portanto, calcular a solução ótima global do projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$  (3.5), que pode ser escrita como

$$\inf \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \quad (3.6)$$

onde o ínfimo é calculado com relação às matrizes  $\tilde{P}_i$ ,  $W_i$ ,  $A_{fi}$ ,  $B_{fi}$ ,  $C_{fi}$  e  $D_{fi}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  satisfazendo as desigualdades

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{J}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.7)$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{A}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{C}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.8)$$

onde  $W_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\tilde{P}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  e  $\tilde{P}_{pi} = \sum_{i=1}^N p_{ij} \tilde{P}_j \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  são variáveis matriciais simétricas e definidas positivas. Introduzimos em seguida as partições

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ U_i' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V_i' & \hat{Y}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} I & I \\ V_i' Y_i^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

cujos blocos pertencem a  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Verificamos imediatamente que

$$\tilde{T}_i' \tilde{P}_i \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} Z_i & Z_i \\ Z_i & X_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde  $Z_i = Y_i^{-1}$ , para todo  $i \in \mathbb{K}$ . É um fato conhecido<sup>3</sup> que se impusermos que a matriz do lado direito de (3.10) seja definida positiva, então sempre é possível determinar os blocos em (3.9) tais que  $\tilde{P}_i > 0$ . Mais ainda, isso pode ser conseguido mesmo se  $U_i$  ou  $V_i$  forem matrizes não-singulares fixadas arbitrariamente, sendo os outros blocos escolhidos de maneira a garantir  $\tilde{P}_i \tilde{P}_i^{-1} = I$ .

Agora vamos considerar que  $\tilde{P}_i > 0$  e adotar um raciocínio similar para a combinação convexa dessas matrizes. De (3.9) a mesma partição implica

$$\tilde{P}_{pi} = \sum_{i=1}^N p_{ij} \tilde{P}_j = \begin{bmatrix} X_{pi} & U_{pi} \\ U_{pi}' & \hat{X}_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

e denotando

$$\tilde{P}_{pi}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{1i} & R_{2i} \\ R_{2i}' & R_{3i} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} R_{1i}^{-1} & X_{pi} \\ 0 & U_{pi}' \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

manipulações algébricas simples deixam claro que

$$\tilde{Q}_i' \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} R_{1i}^{-1} & R_{1i}^{-1} \\ R_{1i}^{-1} & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

É importante ressaltar que as matrizes que definem os quatro blocos da inversa  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  dependem de maneira não-linear das quatro matrizes nos blocos de  $\tilde{P}_{pi}$ . Como  $R_{1i}^{-1} = X_{pi} - U_{pi} \hat{X}_{pi}^{-1} U_{pi}'$ , a

<sup>3</sup>A demonstração deste fato está no Apêndice A, Lema A.3.

matriz particionada em (3.13) pode ser escrita de forma linear se impusermos  $U_i = -\hat{X}_i$ , o que implica  $U_{pi} = -\hat{X}_{pi}$  e

$$\tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} X_{pi} + U_{pi} & X_{pi} + U_{pi} \\ X_{pi} + U_{pi} & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Pela discussão acima, mencionamos novamente que a escolha particular  $U_i = -\hat{X}_i$  pode ser feita sem perda de generalidade, implicando em uma  $U_i$  simétrica e definida negativa, portanto não-singular, para todo  $i \in \mathbb{K}$ . De fato, (3.11) implica que  $U_i = -\hat{X}_i = Y_i^{-1} - X_i = Z_i - X_i$  o que nos possibilita escrever (3.14) em sua forma final

$$\tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} Z_{pi} & Z_{pi} \\ Z_{pi} & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

A parametrização ora proposta das matrizes  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  converte (3.15) na combinação convexa de (3.10). Mais ainda, no caso geral, sem levar em conta a escolha particular de  $U_i$ , temos

$$\begin{aligned} R_{1i}^{-1} &= X_{pi} - U_{pi} \hat{X}_{pi}^{-1} U'_{pi} \\ &\geq \sum_{j=1}^N p_{ij} (X_j - U_j \hat{X}_j^{-1} U'_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^N p_{ij} Y_j^{-1} \\ &\geq Z_{pi} \end{aligned} \quad (3.16)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . A demonstração para a primeira desigualdade acima está no Apêndice A, Lema A.4. As relações (3.15) e (3.16) são os resultados chave que usamos para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_2$ . No próximo lema usamos estas propriedades matriciais para expressar de forma linear a primeira restrição (3.7) do problema (3.6).

**Lema 3.1** *Existe um filtro linear e dependente do modo na forma (3.2) e matrizes simétricas  $W_i, \tilde{P}_i > 0$  satisfazendo as desigualdades (3.7) para todo  $i \in \mathbb{K}$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $W_i, X_i, Z_i$  e matrizes  $F_i, K_i$  de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi} J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.17)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Além disso, sempre que (3.17) é satisfeita para todo  $i \in \mathbb{K}$ , uma solução possível para (3.7) é  $W_i$ ,  $B_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}F_i$ ,  $D_{fi} = K_i$  e

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ Z_i - X_i & X_i - Z_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (3.18)$$

**Prova:** Para a necessidade, vamos assumir que (3.7) é satisfeita. Particionando  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  como em (3.12) e multiplicando (3.7) a esquerda por  $\text{diag}[I, \tilde{Q}'_i, I]$  e a direita por sua transposta obtemos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{1i}^{-1}J_i & R_{1i}^{-1} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & R_{1i}^{-1} & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.19)$$

onde  $F_i := U_{pi}B_{fi}$  e  $K_i := D_{fi}$ . Multiplicando a esquerda por  $\text{diag}[I, Z_{pi}R_{1i}, I, I]$  e a direita por sua transposta e levando em conta que (3.16) implica em  $Z_{pi} \geq Z_{pi}R_{1i}Z_{pi}$ , podemos afirmar que (3.17) é válida.

Para a suficiência, assumimos que (3.17) é válida, o que implica em  $X_{pi} > Z_{pi} > 0$ . Assim, impondo  $U_i = Z_i - X_i$ , a matriz  $U_{pi} = Z_{pi} - X_{pi}$  é não-singular e podemos calcular  $B_{fi} = U_{pi}^{-1}F_i$  e  $D_{fi} = K_i$ . Por outro lado, levando em conta que esta escolha define

$$\tilde{P}_{pi} = \begin{bmatrix} X_{pi} & \bullet \\ Z_{pi} - X_{pi} & X_{pi} - Z_{pi} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.20)$$

verificamos imediatamente que  $R_{1i}^{-1} = Z_{pi}$ , pois  $\tilde{P}_{pi}^{-1}\tilde{P}_{pi} = I$ , e portanto vale a equação (3.15). A conclusão é que a desigualdade (3.17) pode ser re-escrita como

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}'_i\tilde{J}_i & \tilde{Q}'_i\tilde{P}_{pi}^{-1}\tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.21)$$

que multiplicada a esquerda por  $\text{diag}[I, \tilde{Q}'_i^{-1}, I]$  e a direita por sua transposta resulta na desigualdade (3.7). A existência de inversa para  $\tilde{Q}_i$  é garantida pela escolha de  $U_{pi}$  como sendo uma matriz quadrada e não singular.  $\square$

Como podemos ver, a prova do Lema 3.1 depende principalmente da desigualdade  $R_{1i}^{-1} \geq Z_{pi}$  e da existência de uma escolha particular de matrizes  $U_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  tal que ela seja satisfeita

na igualdade. Além disso, podemos notar que a linearização obtida foi em relação à inversa e não à matriz  $\tilde{P}_{pi}$ . Este fato é essencial também na prova da próxima proposição.

**Lema 3.2** *Existe um filtro dependente do modo na forma (3.2) e matrizes simétricas  $\tilde{P}_i > 0$  satisfazendo as desigualdades (3.8) para todo  $i \in \mathbb{K}$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $X_i$ ,  $Z_i$  e matrizes  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $F_i$ ,  $K_i$  de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} + M_i & X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.22)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Além disso, sempre que (3.22) for satisfeita para todo  $i \in \mathbb{K}$ , uma solução possível para (3.8) é  $A_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}M_i$ ,  $B_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}F_i$ ,  $C_{fi} = -L_i$ ,  $D_{fi} = K_i$  e

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & \bullet \\ Z_i - X_i & X_i - Z_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \quad (3.23)$$

**Prova:** Segue o mesmo padrão da prova do Lema 3.1. Para a necessidade, vamos assumir que a desigualdade (3.8) é válida. Particionando  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  como indicado respectivamente em (3.9) e (3.12); multiplicando (3.8) a esquerda por  $\text{diag}[\tilde{T}'_i, \tilde{Q}'_i, I]$  e a direita por sua transposta e adotando a mudança de variáveis  $M_i := U_{pi}A_{fi}V'_iZ_i$ ,  $F_i := U_{pi}B_{fi}$ ,  $L_i := -C_{fi}V'_iZ_i$  e  $K_i := D_{fi}$  chegamos a (3.22) com todos os  $Z_{pi}$  que aparecem na terceira linha e coluna substituídos por  $R_{1i}^{-1}$ . Como antes, a necessidade decorre de  $Z_{pi} \geq Z_{pi}R_{1i}Z_{pi}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

A suficiência vem da escolha particular da matriz  $U_i = Z_i - X_i$  implicando por (3.9) que a matriz  $V_i$  é simétrica, dada por  $V_i = Z_i^{-1}$ . Mais ainda, levando em conta que esta escolha implica  $\tilde{P}_i > 0$  como em (3.23),  $\tilde{P}_{pi} > 0$  como em (3.20) e que  $R_{1i}^{-1} = Z_{pi}$ , a mudança de variáveis nos permite chegar a

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}'_i \tilde{P}_i \tilde{T}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}'_i \tilde{A}_i \tilde{T}_i & \tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{C}_i \tilde{T}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.24)$$

que implica em (3.8) depois de multiplicar por  $\text{diag}[\tilde{T}'_i^{-1}, \tilde{Q}'_i^{-1}, I]$  a esquerda e por sua transposta a direita. A existência das inversas  $\tilde{T}_i^{-1}$  e  $\tilde{Q}_i^{-1}$  é garantida pela escolha de  $U_i$ , que implica  $V_i$  e  $U_{pi}$  não-singulares.  $\square$

Queremos ressaltar que este lema tem um aspecto muito interessante no que tange à natureza

não-linear da desigualdade (3.8). Pela definição adequada das matrizes  $\tilde{T}_i$  e  $\tilde{Q}_i$ , a desigualdade mencionada, que depende de duas variáveis diferentes  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$ , foi representada com sucesso de forma linear. Adicionalmente, como os dois lemas fazem uso da mesma mudança de variáveis, o resultado a seguir é imediato.

**Teorema 3.3** *Existe um filtro dependente do modo na forma (3.2) tal que  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 < \gamma$  se e somente se as LMIs (3.17) e (3.22) forem factíveis e*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) < \gamma \quad (3.25)$$

onde  $\mu_i = \text{Prob}(\theta_0 = i \in \mathbb{K})$ . Em caso afirmativo, um filtro adequado é dado pelas matrizes de estado  $A_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}M_i$ ,  $B_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}F_i$ ,  $C_{fi} = -L_i$  e  $D_{fi} = K_i$ .

A consequência mais importante do Teorema 3.3 é que a solução ótima global do problema de projeto de filtro  $\mathcal{H}_2$  (3.5) pode ser determinada alternativamente por

$$\inf_{\mathcal{X} \in \Omega} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \quad (3.26)$$

onde  $\mathcal{X} = (W_i, X_i, Z_i, M_i, F_i, L_i, K_i)$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  são variáveis matriciais e  $\Omega$  é o conjunto convexo de todas as soluções factíveis para as LMIs (3.17) e (3.22). Em outras palavras, o projeto do filtro ótimo que estamos tratando aqui foi convertido em um problema de programação convexa com restrições na forma de LMIs, o que possibilita o uso de ferramentas numéricas eficientes para a sua solução.

Para os casos em que não é possível determinar a distribuição de probabilidades inicial  $\mu_i$ , podemos usar a norma de pior caso (2.31) sem dificuldades adicionais. De fato, a convexidade do problema de projeto (3.26) nos permite concluir, usando propriedades de dualidade, que

$$\max_{\mu \in \Lambda} \inf_{\mathcal{X} \in \Omega} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) = \inf_{\sigma, \mathcal{X} \in \Omega} \{\sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma\} \quad (3.27)$$

deixando claro que o lado direito de (3.27) calcula o filtro ótimo dependente do modo associado à norma de pior caso. Na prática, ocorre o acréscimo de uma variável escalar  $\sigma$  e de  $N$  LMIs em relação ao problema (3.26).

Um ponto relevante a ser discutido é a existência de uma solução factível para o conjunto  $\Omega$ . Uma condição necessária para isso pode ser obtida aplicando-se o complemento do Schur às

primeiras três linhas e colunas da desigualdade (3.22) resultando em

$$X_i > Z_i > 0, A_i' Z_{pi} A_i - Z_i < 0 \quad (3.28)$$

que portanto requer que a planta  $\mathcal{G}$  seja estável. Esta é uma condição necessária para lidar com os casos de filtragem robusta e independente do modo da planta, dois problemas de projeto importantes a serem analisados na próxima seção. No caso presente, essa premissa pode ser eliminada e o problema (3.26) pode ser simplificado como indica o próximo corolário do Teorema 3.3. Para este fim, devemos calcular uma solução do problema (3.26) que se situa na fronteira do conjunto convexo aberto  $\Omega$ .

**Corolário 3.4** *O Problema (3.26) é equivalente a*

$$\inf_{(W_i, X_i, F_i, K_i) \in \Psi} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \quad (3.29)$$

onde  $\Psi$  é o conjunto de todas as matrizes  $W_i, X_i, F_i, K_i$  satisfazendo as LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.30)$$

e

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet \\ X_{pi} A_i + F_i C_{yi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.31)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Além disso, a realização no espaço de estado do filtro ótimo dependente do modo é dada pelas matrizes  $A_{fi} = A_i + X_{pi}^{-1} F_i C_{yi}$ ,  $B_{fi} = -X_{pi}^{-1} F_i$ ,  $C_{fi} = C_{zi} - K_i C_{yi}$  e  $D_{fi} = K_i$ .

**Prova:** Considerando o problema de projeto de filtro ótimo (3.26), notamos que as variáveis  $M_i$  e  $L_i$  só aparecem na LMI (3.22) e podem ser eliminadas. Para este fim, aplicando o Lema de Finsler<sup>4</sup> (Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994), vemos que (3.22) é satisfeita para algum  $M_i$  e  $L_i$  se e somente se as LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet \\ Z_{pi} A_i & Z_{pi} A_i & Z_{pi} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.32)$$

<sup>4</sup>A demonstração desta importante ferramenta de LMIs está no Apêndice A, Lema A.2.

e

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.33)$$

forem satisfeitas simultaneamente. As três desigualdades (3.17), (3.32) e (3.33) têm uma característica em comum, a saber, a solução ótima do problema (3.26) ocorrerá para  $Z_i > 0$  e conseqüentemente  $Z_{pi} > 0$  arbitrariamente pequenos. Assim, fazendo  $Z_i \rightarrow 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , a solução ótima localizada arbitrariamente próxima da fronteira do conjunto aberto  $\Omega$  tem que satisfazer (3.30) e (3.31). Finalmente, levando em conta que  $Z_{pi} \rightarrow 0$ , a factibilidade de (3.22) impõe  $M_i = -X_{pi}A_i - F_iC_{yi}$  e  $L_i = -C_{zi} + K_iC_{yi}$ . A afirmação posterior segue da realização do filtro no espaço de estado dada pelo Teorema 3.3.  $\square$

O Corolário 3.4 merece alguns comentários. Em primeiro lugar, para  $N = 1$  ele se reduz ao conhecido filtro de Kalman estacionário para sistemas LTI, veja (Anderson & Moore 1979). Para  $N > 1$  e  $D_{fi} = 0$  ele reproduz o resultado de (Costa & Tuesta 2004) onde o filtro ótimo  $\mathcal{H}_2$  estritamente próprio é obtido a partir da solução de  $N$  equações algébricas de Riccati acopladas. Neste sentido, o resultado do Corolário 3.4 é útil pois a solução ótima é obtida de uma única vez, evitando procedimentos iterativos e problemas de convergência para determinação do filtro ótimo.

Definindo o ganho  $G_i = -X_{pi}^{-1}F_i$ , o filtro ótimo dependente do modo é dado por

$$\mathcal{O} : \begin{cases} x_f(k+1) &= A(\theta_k)x_f(k) + G(\theta_k)(y(k) - C_y(\theta_k)x_f(k)) \\ z_f(k) &= C_z(\theta_k)x_f(k) + K(\theta_k)(y(k) - C_y(\theta_k)x_f(k)) \end{cases} \quad (3.34)$$

que exhibe a forma clássica de um observador baseado no modelo interno da planta. Como dito anteriormente, o conhecimento do modelo interno da planta em cada instante  $k \in \mathbb{N}$  permite que o filtro seja calculado mesmo para plantas  $\mathcal{G}$  instáveis. De fato, conectando o filtro  $\mathcal{O}$  ao sistema  $\mathcal{G}$ , o erro de estimação  $e(k) = z(k) - z_f(k) \in \mathbb{R}^r$  satisfaz

$$\mathcal{G}_o : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= (A(\theta_k) - G(\theta_k)C_y(\theta_k))\tilde{x}(k) + (J(\theta_k) - G(\theta_k)E_y(\theta_k))w(k) \\ e(k) &= (C_z(\theta_k) - K(\theta_k)C_y(\theta_k))\tilde{x}(k) + (E_z(\theta_k) - K(\theta_k)E_y(\theta_k))w(k) \end{cases} \quad (3.35)$$

onde,  $\tilde{x}(k) := x(k) - x_f(k) \in \mathbb{R}^n$  e  $w(k) \in \mathbb{R}^m$ . Aplicando os resultados da Seção 2.3 referentes

$i$	$A_i$	$J_i$	$C_{zi}$	$E_{zi}$	$C_{yi}$	$E_{yi}$
1	0,8353	[0,5 0]	1,0	[0 0]	1,0	[0 0,2]
2	0,9646	[0,3 0]	1,0	[0 0]	1,0	[0 0,1]

Tabela 3.1: Dados para Exemplo 3.1

ao cálculo da norma  $\|\mathcal{G}_o\|_2^2$ , temos

$$\|\mathcal{G}_o\|_2^2 = \inf_{(W_i, P_i)} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \quad (3.36)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi}(J_i - G_i E_{yi}) & P_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet \\ P_{pi}(A_i - G_i C_{yi}) & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.37)$$

o que torna aparente que, se considerarmos as matrizes  $F_i = -P_{pi}G_i$  e  $K_i$  também como variáveis em (3.36), ele se reduz exatamente ao problema (3.29) definido no Corolário 3.4. Note ainda que o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  requer que a dinâmica do erro de estimação (3.35) seja estável, porém o mesmo não é requerido para a planta  $\mathcal{G}$ .

Finalmente, é interessante perceber que a norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso (2.37) pode ser tratada sem grande dificuldade adicional. De fato, basta substituir o problema (3.29) no Corolário 3.4 por

$$\inf_{\sigma, (W_i, X_i, F_i, K_i) \in \Psi} \{\sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma\} \quad (3.38)$$

**Exemplo 3.1** Os dados deste exemplo foram retirados de (Sworder & Rogers 1983) e representam um modelo estocástico simples e unidimensional de uma estação coletora de energia solar. A representação de estado do modelo é como (3.1) com os valores numéricos da Tabela 3.1. A matriz de probabilidades de transição é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,30 & 0,70 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

e consideramos  $\mu = [2/3 \ 1/3]$ , que coincide com a distribuição estacionária da cadeia de Markov,

como é comum na literatura. Foram considerados dois projetos diferentes de filtros dependentes do modo, correspondendo aos filtros estritamente próprios e próprios, respectivamente:

- **Filtro estritamente próprio** - O problema de projeto de filtro ótimo  $\mathcal{H}_2$  conforme o Corolário 3.4 foi resolvido com restrições adicionais  $K_1 = K_2 = 0$  definindo um filtro na forma (3.34) com ganhos  $G_1 = 0,7192$  e  $G_2 = 0,9048$ . O custo mínimo associado foi  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 0,2156$ , repetindo o resultado obtido por (Costa & Tuesta 2004).
- **Filtro próprio** - Ao permitir que o filtro pudesse ser próprio, obtivemos pelo mesmo problema de projeto do Corolário 3.4 os ganhos  $G_1 = 0,7192$ ,  $G_2 = 0,9048$  e  $K_1 = 0,8610$ ,  $K_2 = 0,9380$ . Para este filtro, o custo mínimo obtido foi  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 0,0261$  que é mais de dez vezes menor que o custo mínimo com filtro estritamente próprio, indicando um ganho de performance em se considerar o projeto mais geral de filtros próprios.

◆

**Exemplo 3.2** Os dados foram retirados de (Costa et al. 1997). O modelo é uma leve adaptação do modelo macroeconômico de Samuelson estudado por (Blair Jr. & Sworder 1975). Para mais detalhes, confira o Exemplo 1.1. A matriz de probabilidades de transição é dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,67 & 0,17 & 0,16 \\ 0,30 & 0,47 & 0,23 \\ 0,26 & 0,10 & 0,64 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

mas agora minimizamos a norma de pior caso, como mostrada em (3.38). Os parâmetros para cada modo de operação são dados na Tabela 3.2. Para o caso dependente do modo, calculamos:

- **Filtro estritamente próprio** - O filtro ótimo na forma (3.34) com restrições adicionais  $K_1 = K_2 = K_3 = 0$  tem os ganhos conforme a Tabela 3.3. A norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso mínima obtida foi  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 3,1430$ .
- **Filtro próprio** - Eliminando as restrições sobre os ganhos  $K_1$ ,  $K_2$  e  $K_3$ , determinamos o filtro ótimo conforme o problema (3.38) e sua realização é dada na Tabela 3.4. Neste caso, a norma mínima obtida é  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 1,2561$ .

◆

Evidentemente, se o modo da planta não for conhecido exatamente, a solução fornecida pelo Corolário 3.4 não pode ser calculada. Entretanto, nestes casos importantes a solução do Teorema 3.3 ainda se aplica, com o uso de restrições adicionais. Estes casos particulares do projeto de filtro serão melhor explorados na próximas seções.

$i$	$A_i$	$J_i$	$C_{zi}$	$E_{zi}$	$C_{yi}$	$E_{yi}$
1	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,0158 & 0,9652 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[0,5 \ 1,0]$	$[0 \ 0]$	$[1 \ 0]$	$[0 \ 1]$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,0597 & 0,8064 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[0,5 \ 0,5]$	$[0 \ 0]$	$[1 \ 0]$	$[0 \ 1]$
3	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,0056 & 0,9051 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$[1,0 \ 0,5]$	$[0 \ 0]$	$[1 \ 0]$	$[0 \ 1]$

Tabela 3.2: Dados para Exemplo 3.2

$i$	1	2	3
$G_i$	$\begin{bmatrix} 0,6120 \\ 0,5808 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9012 \\ 0,7820 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5192 \\ 0,4729 \end{bmatrix}$

Tabela 3.3: Ganhos para filtro estritamente próprio dependente do modo

### 3.1.2 Filtragem $\mathcal{H}_2$ robusta e independente do modo

Nesta seção consideramos dois problemas para os quais o Corolário 3.4 não se aplica. Em outras palavras, para estes problemas a solução ótima global de (3.26) com  $Z_i \rightarrow 0$  não pode ser atingida devido a restrições adicionais que devemos levar em conta. Dessa maneira, os resultados que se baseiam em filtros determinados pela solução de um conjunto de CARE não podem ser utilizados para a busca de uma solução para estes casos particulares e de interesse prático. Mais ainda, as condições para a existência de filtros nestes casos particulares são apenas suficientes.

Vamos supor que as matrizes que aparecem em (2.4) não sejam conhecidas exatamente, mas pertençam a um politopo convexo

$$\mathcal{P} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A_i^l & J_i^l \\ C_{zi}^l & E_{zi}^l \\ C_{yi}^l & E_{yi}^l \end{bmatrix}, l = 1, \dots, N_p \right\} \quad (3.41)$$

definido pela combinação convexa de  $N_p$  vértices. Então, podemos obter uma solução com custo

$i$	1	2	3
$G_i$	$\begin{bmatrix} 0,5740 \\ 0,5447 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,9096 \\ 0,7892 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5443 \\ 0,4958 \end{bmatrix}$
$K_i$	0,8674	0,9214	0,8325

Tabela 3.4: Ganhos para filtro próprio dependente do modo

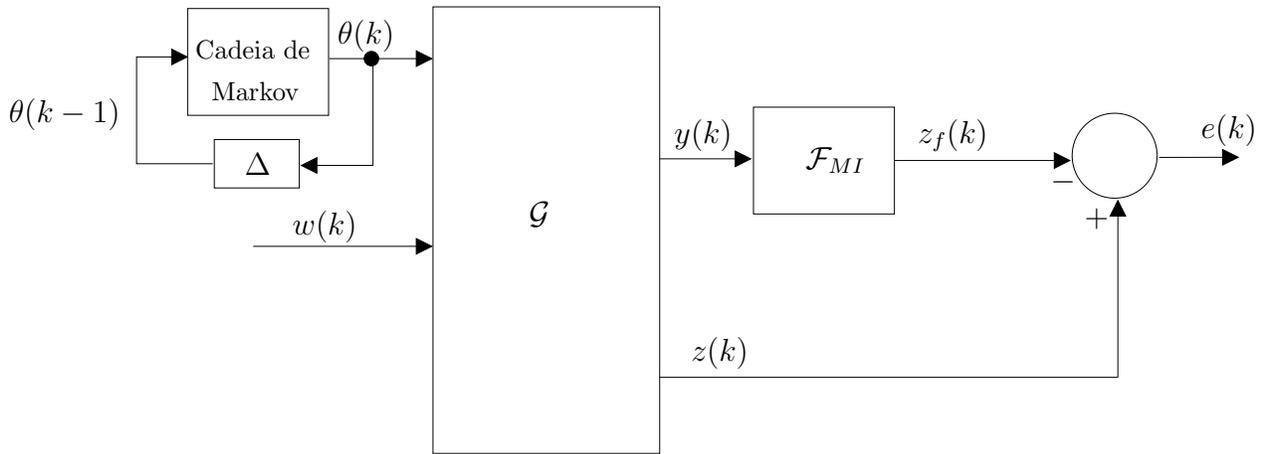


Figura 3.2: Filtro markoviano independente do modo

garantido para a norma  $\mathcal{H}_2$  a partir da solução ótima do problema (3.26) com  $\Omega = \bigcap_{l=1}^{N_p} \Omega_l$  onde  $\Omega_l$  é o conjunto definido pelas LMIs (3.17) e (3.22) calculadas em cada vértice do politopo (3.41). Como pode ser facilmente verificado, essa afirmação decorre diretamente da dependência linear das LMIs (3.17) e (3.22) com respeito às matrizes de espaço de estado que aparecem em (3.41).

O Teorema 3.3 também pode ser generalizado para tratar o caso de filtragem sem a disponibilidade para o filtro do modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$  em cada instante  $k \in \mathbb{N}$ , representado na Figura (3.2), onde o sub-índice  $MI$  remete ao termo em inglês *mode-independent*. O objetivo é projetar um filtro cuja representação de estado não dependa do modo de Markov  $\theta_k \in \mathbb{K}$ . Inicialmente observamos que impondo a  $\Omega$  as restrições adicionais

$$M_i = M, F_i = F, L_i = L, K_i = K \quad (3.42)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  então pelo Teorema 3.3 o filtro será independente do modo se a matriz de probabilidades de transição (veja (Seiler & Sengupta 2005) para mais detalhes) satisfizer

$$p_{ij} = p_j \quad (3.43)$$

para todo  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , já que neste caso particular  $Z_{pi} = \sum_{j=1}^N p_j Z_j$  e  $X_{pi} = \sum_{j=1}^N p_j X_j$  são matrizes constantes para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Cadeias de Markov com esta estrutura incluem como caso particular, quando  $N = 2$ , o processo estocástico do tipo Bernoulli, onde a probabilidade de  $\theta_k$  assumir um entre dois valores possíveis não depende do valor passado, sendo sempre constante.

No caso geral, i.e. se a condição (3.43) não for satisfeita, primeiramente adicionamos ao Teorema 3.3 uma variável de folga, como mostra o próximo teorema.

**Teorema 3.5** *Existe um filtro na forma dada por (3.1) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 < \gamma$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $X_i, Z_i, W_i$  e matrizes  $H_i, M_i, L_i, F_i$  e  $K_i$  de dimensões compatíveis que satisfaçam*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) < \gamma \quad (3.44)$$

além das LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi} J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ H_i J_i + F_i E_{yi} & 0 & H_i + H_i' + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.45)$$

e

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi} A_i & Z_{pi} A_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ H_i A_i + F_i C_{yi} + M_i & H_i A_i + F_i C_{yi} & 0 & H_i + H_i' + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} + L_i & C_{zi} - K_i C_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.46)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Em caso afirmativo, uma realização para o filtro é dada pelas matrizes de estado  $A_{fi} = -H_i^{-1} M_i$ ,  $B_{fi} = -H_i^{-1} F_i$ ,  $C_{fi} = -L_i$  e  $D_{fi} = K_i$ .

**Prova:** Para a suficiência, suponha que as LMIs (3.44), (3.45) e (3.46) sejam satisfeitas. Por (3.46) temos que  $X_i > Z_i$  e portanto  $X_{pi} - Z_{pi} > 0$ , implicando em

$$(X_{pi} - Z_{pi} - H_i)(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}(X_{pi} - Z_{pi} - H_i') \geq 0 \quad (3.47)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e desta forma

$$H_i(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}H'_i \geq H_i + H'_i + Z_{pi} - X_{pi} \quad (3.48)$$

Devido a (3.48), podemos substituir o termo  $H_i + H'_i + Z_{pi} - X_{pi}$  por  $H_i(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}H'_i$  na desigualdade (3.46) e ela permanece válida. Multiplicando essa nova desigualdade por  $\text{diag}[I, I, (X_{pi} - Z_{pi})H_i^{-1}, I]$  a esquerda e a direita por seu transposto, e levando em conta que  $F_i = -H_i B_{fi}$  e  $K_i = D_{fi}$ , obtemos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ (X_{pi} - Z_{pi})(J_i - B_{fi}E_{yi}) & 0 & X_{pi} - Z_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - D_{fi}E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.49)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Definindo  $\mathcal{I}$  por

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

e multiplicando (3.49) a esquerda por  $\mathcal{I}$  e a direita por  $\mathcal{I}'$  obtemos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}J_i + (Z_{pi} - X_{pi})B_{fi}E_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - D_{fi}E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.51)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Deste ponto em diante, a prova segue os mesmos passos usados no Lema 3.1. A partir da escolha particular  $U_i = Z_i - X_i < 0$  é possível escrever (3.51) como (3.21), com o uso das partições (3.9) e (3.12). Finalmente, multiplicando a esquerda por  $\text{diag}[I, \tilde{Q}'_i^{-1}, I]$  e a direita pela sua transposta, chegamos à desigualdade (3.7), que é uma das condições para o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  usando programação convexa, como exposto na Seção 2.3.

Para a desigualdade (3.45) seguimos os mesmos passos. Inicialmente, usamos (3.48) para substituir o quarto termo da diagonal principal  $H_i + H'_i + Z_{pi} - X_{pi}$  por  $H_i(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}H'_i$ , mantendo válida a desigualdade. Em seguida, reescrevemos o problema em termos de suas variáveis originais  $A_{fi}$ ,  $B_{fi}$ ,  $C_{fi}$  e  $D_{fi}$  e multiplicamos a desigualdade a esquerda por  $\text{diag}[I, I, I, (X_{pi} - Z_{pi})H_i^{-1}, I]$

e a direita pela sua transposta. Redefinimos  $\mathcal{I}$  como

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

para pré- e pós-multiplicarmos a desigualdade por  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{I}'$ , respectivamente. Novamente, pela escolha particular de  $U_i = Z_i - X_i < 0$  e com o uso das partições (3.9) e (3.12) chegamos a (3.24). Deste ponto em diante, seguimos os mesmos passos da prova de suficiência do Lema 3.2.

Para a prova da necessidade, partimos de (3.17) e definimos novamente uma matriz auxiliar

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Multiplicando (3.17) a esquerda por  $\mathcal{I}$  e a direita por  $\mathcal{I}'$  temos

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ (X_{pi} - Z_{pi})J_i + F_iE_{yi} & 0 & X_{pi} - Z_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.53)$$

que é idêntica a (3.45) com  $H_i = H'_i = X_{pi} - Z_{pi}$ . Para (3.18) fazemos procedimento idêntico, agora subtraindo da quarta linha a terceira, e fazendo o mesmo com as colunas para manter a simetria. Concluimos que, para  $H_i = H'_i = X_{pi} - Z_{pi}$  vale a desigualdade (3.46), concluindo a prova.  $\square$

Se observarmos agora as matrizes do filtro obtidas a partir do teorema anterior, vemos que é possível que elas sejam independentes do modo  $\theta_k = i \in \mathbb{K}$  se, além das restrições (3.42), também impusermos

$$H_i = H \quad (3.54)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Naturalmente, ao adicionar tais restrições às LMIs (3.45) e (3.46), o conjunto de restrições torna-se apenas suficiente, e portanto a minimização do lado esquerdo de (3.44) já não

fornece mais a norma  $\mathcal{H}_2$  mínima, mas um custo garantido. Como já mostrado, continua possível tratar o caso em que não se conhece  $\mu$ . De fato, a adição das restrições de igualdade (3.54) mantém a convexidade do problema, a relação (3.27) continua válida com  $\mathcal{X} = (X_i, Z_i, W_i, H, M, F, L, K)$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  representando as variáveis matriciais e  $\Omega$  tal que as LMIs (3.45), (3.46) mais as restrições (3.42) e (3.54) sejam factíveis.

**Exemplo 3.3** Vamos retomar os dados do Exemplo 3.1, supondo que o estado da cadeia de Markov não está disponível para o filtro. Como já mencionamos, neste caso não é possível obter o filtro na forma clássica de observador como (3.34).

- **Filtro estritamente próprio** - O problema de projeto de filtro do Teorema 3.5 foi resolvido com as restrições (3.42) e (3.54), além de  $K = 0$  para que o filtro obtido seja estritamente próprio. Chegamos a

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0,0000 & 0,8511 \\ \hline 1,0000 & 0 \end{array} \right] \quad (3.55)$$

e custo associado  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 0,2225$ . O filtro ótimo de ordem estendida independente do modo com projeto descrito em (Costa & Guerra 2002a) resultou  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 0,2202$ .

- **Filtro próprio** - Agora, eliminando a restrição  $K = 0$ , obtivemos o filtro

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 0,0000 & 0,8511 \\ \hline 0,1188 & 0,8812 \end{array} \right] \quad (3.56)$$

com custo associado  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 0,0264$ . Como antes, comparado ao filtro estritamente próprio, o filtro próprio apresenta um ganho significativo de desempenho.

Nosso projeto de filtro independente do modo resulta em um filtro sub-ótimo de dimensão  $n$  (neste caso, um filtro de primeira ordem), a grande dificuldade do programa é lidar com  $N$  blocos de dimensão  $\mathbb{O}(n)$  e  $\mathbb{O}(Nn^2)$  variáveis, enquanto no caso do filtro ótimo de ordem estendida de dimensão  $Nn$  (neste exemplo, um filtro de segunda ordem), é preciso resolver um bloco  $\mathbb{O}(N^2n)$ -dimensional com  $\mathbb{O}(N^2n^2)$  variáveis, o que poderia deixar o problema difícil de tratar, mesmo para um número moderado de modos.  $\blacklozenge$

**Exemplo 3.4** Para os mesmos dados usados no Exemplo 3.2, apresentamos agora os filtros próprio e estritamente próprio independentes do modo. Nos dois casos, o filtro é de ordem completa, i.e. da mesma ordem que a planta (3.1).

- **Filtro estritamente próprio** - Tratamos aqui com uma pequena modificação o Teorema 3.2 para o caso de norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso, bem como as restrições (3.42), (3.54) e  $K = 0$ , para todo  $i \in \mathbb{K}$ . A realização do filtro independente do modo é dada por

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -0,6046 & 0,9999 & 0,6047 \\ -1,0882 & 1,4637 & 0,5807 \\ \hline 2,8336 & -1,7133 & 0 \end{array} \right] \quad (3.57)$$

e a norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso satisfaz  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 \leq 4,6864$ . Para uma visão completa, é importante notar que o custo real foi calculado como  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 3,5108$ . Esta diferença é esperada, uma vez que estamos tratando de condições apenas suficientes.

- **Filtro próprio** - Permitindo agora que a variável  $K$  assuma valores diferentes de zero, obtemos a seguinte realização própria para o filtro independente do modo

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|c} -0,6040 & 1,0003 & 0,6038 \\ -1,1965 & 1,5852 & 0,5779 \\ \hline 0,8086 & -0,6463 & 1,0451 \end{array} \right] \quad (3.58)$$

juntamente com o custo garantido para a norma  $\mathcal{H}_2$  de pior caso  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 \leq 1,8403$  enquanto o valor real para a norma do erro de estimação é  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 = 1,6306$ .

Não foi possível comparar o filtro obtido com aquele projetado de acordo com (Costa & Guerra 2002a). Isto ocorre pois os resultados daquele trabalho só podem ser aplicados a modelos na forma (2.4) com  $C_z(\theta_k) = C_z$  e  $E_z(\theta_k) = 0$  para todo  $\theta_k \in \mathbb{K}$ . Acreditamos que seja possível generalizar o modelo adotado naquela referência, o que permitiria comparar os custos garantidos com o valor ótimo para a norma do erro de estimação. ♦

## 3.2 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção, abordamos o problema de filtragem  $\mathcal{H}_\infty$  para MJLS. Inicialmente, sob a hipótese de conhecimento do parâmetro de Markov, fazemos a caracterização de todos os filtros lineares tais que o erro de estimação fica limitado por um valor pré-estabelecido em termos da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , resultando na solução ótima global do problema de filtragem dependente do modo. Em seguida, baseado no mesmo conjunto de LMIs, detalhamos o projeto de um filtro robusto, capaz de lidar com incertezas politópicas. Finalmente, propomos um procedimento para o projeto de filtros independentes do modo de Markov.

O problema de determinar um filtro ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  estritamente próprio foi resolvido em (de Souza & Fragoso 2003) com o uso de LMIs. Naquele artigo, somente os ganhos de filtros na forma de observador baseado no modelo interno da planta foram obtidos, o que impede o uso dos resultados para fins de filtragem robusta. Quando nosso filtro é forçado a ser estritamente próprio, aquele proposto em (de Souza & Fragoso 2003) é obtido como um caso particular. Para MJLS a tempo discreto com duas dimensões, (Wu, Shi, Gao & Wang 2008) apresenta condições suficientes para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$ . No que segue, o conjunto de todos os filtros lineares próprios com norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação limitada é parametrizado. O conjunto é expresso em termos de LMIs, possibilitando a solução do problema de projeto do filtro ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  em um único passo, em vez de iterativamente; e a adição de restrições ao problema básico para, por exemplo, projetar filtros robustos em relação à incertezas paramétricas. Considerando a hipótese de indisponibilidade do modo de operação, (de Souza 2003) propõe condições suficientes que estabelecem um custo garantido para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , novamente apenas para filtros estritamente próprios. Fazendo nova restrição adicional ao problema principal podemos projetar filtros independentes do modo e compará-los àqueles apresentados em (de Souza 2003).

### 3.2.1 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ com disponibilidade do modo

Considere o filtro linear de ordem completa e dependente do modo  $\mathcal{F}$  representado pelo modelo de estado (3.1). Nosso objetivo é determinar as matrizes do filtro de maneira a minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação obtido ao conectar o filtro  $\mathcal{F}$  ao sistema  $\mathcal{G}$  (vide Figura 3.1). O erro de estimação satisfaz ao modelo (3.2) cujas matrizes são dadas por (3.3) e (3.4). Portanto, podemos escrever o problema a ser resolvido na forma

$$\min_{A_{fi}, B_{fi}, C_{fi}, D_{fi}} \|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 \quad (3.59)$$

Como no caso  $\mathcal{H}_2$ , o problema (3.59) é não-convexo e difícil de resolver nesta formulação padrão. Felizmente, a mesma mudança de variáveis usada anteriormente permite convertê-lo em um problema de programação convexa com restrições na forma de LMIs. Nesta seção calculamos a solução ótima global do problema  $\mathcal{H}_\infty$  com o disponibilidade do modo que pode ser definido por  $\inf \gamma$  sujeito a

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ \tilde{A}_i & \tilde{J}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{C}_i & \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.60)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ , onde como no caso  $\mathcal{H}_2$ , novamente as variáveis  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tilde{P}_j$  são matrizes simétricas de dimensão  $2n \times 2n$  e as outras matrizes são dadas pelas equações (3.3) e (3.4), onde  $A_{fi}$ ,  $B_{fi}$ ,  $C_{fi}$  e  $D_{fi}$  são variáveis a determinar.

Para tornar este problema linear em suas variáveis, utilizamos as mesmas partições definidas em (3.9) e (3.12), de tal forma que as relações (3.15) e (3.16) ainda se verificam e permanecem fundamentais para o projeto proposto. O próximo teorema mostra como essas propriedades são utilizadas para escrever de forma linear a restrição do projeto de filtro (3.60).

**Teorema 3.6** *Existe um filtro dependente do modo como (3.1) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 < \gamma$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $X_i$ ,  $Z_i$  e matrizes  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $F_i$  e  $K_i$  de dimensões compatíveis que satisfaçam as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} + M_i & X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.61)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Em caso afirmativo, uma realização factível para filtro dependente do modo de Markov é dada pelas matrizes de estado  $A_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}M_i$ ,  $B_{fi} = (Z_{pi} - X_{pi})^{-1}F_i$ ,  $C_{fi} = -L_i$  e  $D_{fi} = K_i$ .

**Prova:** Para a necessidade, vamos assumir que a desigualdade (3.60) é válida. Particionando  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  como em (3.9) e (3.12) respectivamente, multiplicando (3.60) por  $\text{diag}[\tilde{T}'_i, I, \tilde{Q}'_i, I]$  pela esquerda e por sua transposta pela direita, adotando a mudança de variáveis  $M_i = U_{pi}A_{fi}V'_iZ_i$ ,  $F_i = U_{pi}B_{fi}$ ,  $L_i = -C_{fi}V'_iZ_i$  e  $K_i = D_{fi}$  chegamos a

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ R_{1i}^{-1}A_i & R_{1i}^{-1}A_i & R_{1i}^{-1}J_i & R_{1i}^{-1} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} + M_i & X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & R_{1i}^{-1} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.62)$$

Multiplicando essa desigualdade por  $\text{diag}[I, I, I, Z_{pi}R_{1i}, I, I]$  a esquerda e por sua transposta a direita, e levando em consideração que (3.16) implica que  $Z_{pi} \geq Z_{pi}R_{1i}Z_{pi}$ , chegamos a (3.61).

Para a suficiência, consideramos que (3.61) é válida e usamos a escolha particular  $U_i = Z_i - X_i < 0$  que resulta a partir de (3.9) em  $V_i = Z_i^{-1}$ . Esta escolha fornece  $\tilde{P}_i > 0$  como em (3.9),  $\tilde{P}_{pi} > 0$  como em (3.11) e  $R_{1i}^{-1} = Z_{pi}$ , permitindo escrever

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}'_i \tilde{P}_i \tilde{T}_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}'_i \tilde{A}_i \tilde{T}_i & \tilde{Q}'_i \tilde{J}_i & \tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{C}_i \tilde{T}_i & \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.63)$$

que recai em (3.60) após multiplicação por  $\text{diag}[\tilde{T}'_i^{-1}, I, \tilde{Q}'_i^{-1}, I]$  a esquerda e por sua transposta a direita.  $\square$

A mais importante consequência do Teorema 3.6, assim como foi feito para o caso  $\mathcal{H}_2$ , é que a solução ótima global para o problema  $\mathcal{H}_\infty$  de projeto de filtro pode ser determinada a partir de

$$\inf_{(\gamma, X_i, Z_i, M_i, F_i, L_i, K_i) \in \Omega} \gamma \quad (3.64)$$

onde  $\Omega$  é o conjunto convexo de todas as soluções factíveis das LMIs (3.61). Em outras palavras, o projeto do filtro ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  dependente do modo foi convertido em uma problema de programação convexa com restrições definidas por LMIs.

Quanto à existência de uma solução factível para o conjunto  $\Omega$ , é interessante notar que ao se aplicar o complemento de Schur na LMI obtida da remoção das terceira, quinta e sexta linhas e colunas de (3.61), as condições de estabilidade de  $\mathcal{G}$  dadas por (3.28) também são necessárias. Esta condição sobre a planta  $\mathcal{G}$  é importante para os casos de filtragem de sistemas com incertezas politópicas ou independentes do modo de operação que são tratadas nas próximas seções, mas pode ser eliminada para o caso de filtragem com disponibilidade do modo, como mostra o seguinte corolário. De forma análoga àquela considerada no caso de norma  $\mathcal{H}_2$ , podemos simplificar o problema (3.64) considerando algumas propriedades da solução que se situa na fronteira do conjunto convexo aberto  $\Omega$ .

**Corolário 3.7** *O problema (3.64) é equivalente a*

$$\inf_{(\gamma, X_i, F_i, K_i) \in \Psi} \gamma \quad (3.65)$$

onde  $\Psi$  é o conjunto de todas as matrizes simétricas  $X_i$  e matrizes  $F_i, K_i$ , além do escalar  $\gamma \in \mathbb{R}$

tal que as LMIs

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.66)$$

sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Em caso afirmativo, as matrizes de estado do filtro ótimo dependente do modo são dadas por  $A_{fi} = A_i + X_{pi}^{-1}F_iC_{yi}$ ,  $B_{fi} = -X_{pi}^{-1}F_i$ ,  $C_{fi} = C_{zi} - K_iC_{yi}$  e  $D_{fi} = K_i$ .

**Prova:** Considerando o problema do projeto de filtro ótimo (3.64), as variáveis  $M_i$  e  $L_i$  podem ser eliminadas. Para isso, aplicamos novamente o Lema de Finsler (Boyd et al. 1994) e temos que a desigualdade (3.61) pode ser satisfeita para algum  $M_i$  e  $L_i$  se e somente se as LMIs

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.67)$$

e

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi}A_i + F_iC_{yi} & X_{pi}J_i + F_iE_{yi} & Z_{pi} & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.68)$$

forem satisfeitas simultaneamente para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Estas duas desigualdades possuem uma característica comum, ou seja, na solução ótima do problema (3.64) devemos ter  $Z_i > 0$  e conseqüentemente  $Z_{pi} > 0$  arbitrariamente pequenas. Desta forma, impondo  $Z_i \rightarrow 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , a solução ótima localizada arbitrariamente perto da fronteira das restrições das LMIs deve satisfazer as desigualdades (3.66). Finalmente, como  $Z_i \rightarrow 0$ , a factibilidade de (3.61) impõe que  $M_i = -X_{pi}A_i - F_iC_{yi}$  e  $L_i = -C_{zi} + K_iC_{yi}$ . Substituindo estes valores na representação de estado do filtro no Teorema 3.6 chegamos à representação enunciada no corolário.  $\square$

É interessante notar que, para o caso determinístico  $N = 1$  o filtro proposto no Corolário 3.7 se reduz ao conhecido filtro central  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas LTI (Anderson & Moore 1979). Para  $N > 1$ , ele generaliza os resultados obtidos por (de Souza & Fragoso 2003), pois lida com o projeto de filtros ótimos  $\mathcal{H}_\infty$  próprios, em vez de estritamente próprios ( $D_{fi} = 0$ ). Finalmente,

se considerarmos o par de ganhos  $G_i = -X_{pi}^{-1}F_i$  e  $K_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , então o filtro ótimo dependente do modo pode ser reescrito como um observador  $\mathcal{O}$  baseado no modelo interno da planta, como indicado em (3.34). Assim, a informação do modelo interno da planta a cada instante  $k \in \mathbb{N}$  permite que não seja mais mandatória a estabilidade de  $\mathcal{G}$  para a obtenção do filtro ótimo  $\mathcal{H}_\infty$ . De fato, conectando o filtro  $\mathcal{O}$  ao sistema  $\mathcal{G}$ , o erro de estimação  $e(k) = z(k) - z_f(k) \in \mathbb{R}^r$  é definido pelas equações de estado (3.35) que representam um sistema dinâmico denominado  $\mathcal{G}_o$  com entrada  $w(k) \in \mathbb{R}^m$  e estado  $\tilde{x}(k) = x(k) - x_f(k) \in \mathbb{R}^n$ . A partir dos resultados da Seção 2.4 temos que  $\|\mathcal{G}_o\|_\infty^2 < \gamma$  se e somente se as LMIs

$$\begin{bmatrix} P_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ P_{pi}(A_i - G_i C_{yi}) & P_{pi}(J_i - G_i E_{yi}) & P_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_i E_{yi} & E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.69)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  forem factíveis. Conseqüentemente, se considerarmos as matrizes  $P_i$ ,  $F_i = -P_{pi}G_i$ ,  $K_i$  e o escalar  $\gamma$  como variáveis, o problema

$$\inf_{(\gamma, P_i, F_i, K_i)} \{ \gamma : \text{sujeito a (3.69)} \} \quad (3.70)$$

se reduz exatamente àquele definido no Corolário 3.7 em (3.65). É importante novamente salientar que, o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  requer que a dinâmica do erro de estimação  $\mathcal{G}_o$  seja estável, porém a planta  $\mathcal{G}$  não precisa necessariamente satisfazer a esta mesma propriedade.

**Exemplo 3.5** Este exemplo considera um sistema formado por duas massas ligadas por um amortecedor e por uma mola. Uma das massas está conectada a uma parede através de outra mola, conforme a Figura 3.3. O problema consiste em estimar a posição da segunda massa medindo somente a velocidade da primeira. Além disso, esta informação é transmitida através de um canal markoviano, que pode inserir erro em cada pacote de dados. Vamos assumir que o filtro é capaz de detectar mas não de corrigir os pacotes defeituosos e neste caso deve descartá-los. A probabilidade de que um pacote bom seja recebido logo após outro pacote correto é dada por  $p_{R,R}$ , enquanto a probabilidade de que um pacote defeituoso seja recebido logo após outro pacote ruim é dada por  $p_{L,L}$ <sup>5</sup>. O estado é definido por  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]' \in \mathbb{R}^4$  e a perturbação é  $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t)]' \in \mathbb{R}^2$ , onde  $w_1(t)$  é uma perturbação na posição da primeira massa e  $w_2(t)$  é o ruído de medida da sua velocidade.

<sup>5</sup>Os sub-índices  $R$  e  $L$  referem-se aos termos em inglês *received* e *lost*, respectivamente.

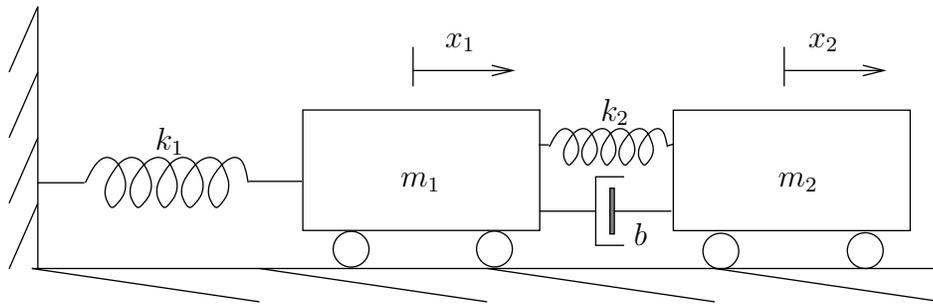


Figura 3.3: Sistema massa-mola-amortecedor

Os parâmetros físicos do sistema são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = 5 \quad [\text{kg}] \\ k_1 = 100 \quad [\text{N/m}] \\ m_2 = 10 \quad [\text{kg}] \\ k_2 = 50 \quad [\text{N/m}] \\ b = 1,8 \quad [\text{N.s/m}] \end{array} \right.$$

o que resulta no seguinte modelo para o sistema em tempo contínuo

$$\left[ \begin{array}{c|c} A_i & J_i \\ \hline C_{zi} & E_{zi} \\ \hline C_{y1} & E_{y1} \\ \hline C_{y2} & E_{y2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -30 & 10 & -0,36 & 0,36 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 0,18 & -0,18 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0,1 \end{array} \right]$$

onde podemos perceber que a dinâmica e a saída a ser estimada são as mesmas para os dois modos do sistema, enquanto a saída medida pode variar.

Em seguida o sistema foi discretizado com um segurador de ordem zero em cada entrada e um período de amostragem de  $T_s = 0,5$  [s] e chegamos a um modelo em tempo discreto como (2.4). Consideramos o canal como de alta qualidade ( $p_{R,R} = 0,98$ ) sujeito a erros em rajadas ( $p_{L,L} = 0,95$ ). Um modelo como este pode ser adequado para representar um canal sem fio que opera na maior parte do tempo de forma confiável, mas que pode apresentar erros de transmissão

abruptos, devidos a eventuais interferências.

A partir do Corolário 3.7, calculamos o filtro central ótimo. Neste caso, tanto o filtro próprio quanto o estritamente próprio dependentes do modo apresentaram praticamente o mesmo custo mínimo  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty = 1,3544$ .  $\blacklozenge$

### 3.2.2 Filtragem $\mathcal{H}_\infty$ robusta e independente do modo

De forma análoga ao que fizemos na Seção 3.1.2, vamos considerar agora dois casos em que não é possível aplicar o Corolário 3.7. Como já mencionado para o caso  $\mathcal{H}_2$ , a adição de restrições ao problema original torna os resultados apenas suficientes.

Vamos supor que as matrizes do sistema  $\mathcal{G}$  não sejam exatamente conhecidas, mas pertençam a um polítopo convexo como representado em (3.41). Uma solução de custo garantido pode ser obtida a partir da solução de (3.64) com  $\Omega = \bigcap_{l=1}^{N_p} \Omega_l$  onde  $\Omega_l$  é o conjunto definido pelas LMIs (3.61) calculadas em cada vértice do polítopo (3.41). Essa afirmação decorre diretamente da dependência linear das LMIs (3.61) com respeito às matrizes de espaço de estado que aparecem em (3.41).

Como na Seção 3.1.2, investigamos o caso em que o Teorema 3.6 pode ser usado para determinar filtros  $\mathcal{H}_\infty$  independentes do modo, de acordo com a Figura 3.2. Assim como acontece com a filtragem  $\mathcal{H}_2$ , também para este caso a estrutura particular de  $\mathbb{P}$  tal que  $p_{ij} = p_j$  para todo par  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  combinada com as restrições adicionais (3.42) permitem que seja calculado um filtro  $\mathcal{H}_\infty$  em que as matrizes de estado independam do modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$ . Sistemas com esta estrutura particular de matriz de probabilidades de transição são abordados em (Seiler & Sengupta 2005) em um contexto de controle de saída. Já no caso geral, sem quaisquer restrição à estrutura da matriz  $\mathbb{P}$ , acrescentamos variáveis de folga às LMIs (3.61), que serão usadas em seguida para garantir independência do modo. Inicialmente, considere o seguinte teorema.

**Teorema 3.8** *Existe um filtro dependente do modo como (3.1) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 < \gamma$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $X_i$ ,  $Z_i$  e matrizes  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $F_i$  e  $K_i$  de dimensões compatíveis que satisfaçam as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ H_iA_i + F_iC_{yi} + M_i & H_iA_i + F_iC_{yi} & H_iJ_i + F_iE_{yi} & 0 & H_i + H'_i + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_iC_{yi} + L_i & C_{zi} - K_iC_{yi} & E_{zi} - K_iE_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.71)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Em caso afirmativo, uma realização factível para o filtro é dada pelas matrizes de estado  $A_{fi} = -H_i^{-1}M_i$ ,  $B_{fi} = -H_i^{-1}F_i$ ,  $C_{fi} = -L_i$  e  $D_{fi} = K_i$ .

**Prova:** Para a suficiência, suponha que as LMIs (3.71) sejam satisfeitas para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Assim, da mesma forma com foi feito na prova do Teorema 3.5, podemos afirmar que vale (3.48) e substituir em (3.71) o termo  $H_i + H'_i + Z_{pi} - X_{pi}$  por  $H_i(X_{pi} - Z_{pi})^{-1}H'_i$  mantendo a desigualdade válida. Em seguida, multiplicamos a desigualdade obtida por  $\text{diag}[I, I, I, I, (X_{pi} - Z_{pi})H_i^{-1}, I]$  a esquerda e por sua transposta a direita e substituímos as variáveis  $M_i = -H_i A_{fi}$ ,  $F_i = -H_i B_{fi}$ ,  $L_i = -C_{fi}$  e  $K_i = D_{fi}$ . O próximo passo é somar aos blocos da quinta linha os da quarta, fazer o mesmo com as respectivas colunas e retomar a escolha  $U_i = Z_i - X_i < 0$  que resulta por (3.9) em  $V_i = Z_i^{-1}$ . Esta escolha fornece  $\tilde{P}_i > 0$  como em (3.9),  $\tilde{P}_{pi} > 0$  como em (3.11) além de  $R_{1i}^{-1} = Z_{pi}$ . Todas estas relações aliadas a (3.12) permitem reescrever a última desigualdade como (3.63), que recai em (3.60) após multiplicação a esquerda por  $\text{diag}[\tilde{T}'_i^{-1}, I, \tilde{Q}'_i^{-1}, I]$  e a direita por sua transposta.

Para a necessidade, partimos de (3.61) e definimos uma matriz auxiliar

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Pré-multiplicando (3.61) por  $\mathcal{I}$  e pós-multiplicando por  $\mathcal{I}'$  chegamos a uma desigualdade idêntica a (3.71) para  $H_i = H'_i = X_{pi} - Z_{pi}$ , concluindo a prova  $\square$

Basta observar as expressões para o filtro obtidas no Teorema 3.8 para perceber que ele será independente do modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$  se – além das restrições já mencionadas em (3.42) –, considerarmos também as restrições de igualdade  $H_i = H$  para todo  $i \in K$ . Evidentemente, a adição das restrições de igualdade às LMIs (3.71) reduz a condição do Teorema 3.8 a apenas suficiente. Logo, a minimização da variável  $\gamma$  não fornecerá mais o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  mínima, mas um custo garantido para o filtro independente do modo.

**Exemplo 3.6** Com os mesmos dados do Exemplo 3.5, calculamos o filtro  $\mathcal{H}_\infty$  agora considerando não ser possível identificar os pacotes defeituosos na transmissão, ou seja, sem disponibilidade do modo. Para isso usamos as LMIs do Teorema 3.8 adicionadas às restrições (3.42) e (3.54). O custo garantido permite afirmar que  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty \leq 2,0141$ , enquanto o filtro proposto em (de

Souza 2003) garante  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty \leq 2,1403$ . ♦

### 3.3 Casos especiais de filtragem

Nesta seção consideramos dois casos especiais de filtragem, para ambas as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . O primeiro caso é um compromisso entre o caso em que as matrizes do filtro são dependentes do modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$  em cada instante  $k \in \mathbb{N}$  e aquele em que elas são constantes independentemente do modo. Tratamos o caso em que o modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$  da planta no instante  $k \in \mathbb{N}$  não está exatamente disponível para filtro, mas somente o agrupamento ao qual esse modo pertence. Também podemos chamar este caso como o de disponibilidade parcial do modo da planta. Os agrupamentos de modos são tratados como subconjuntos disjuntos de  $\mathbb{K}$ , assim cada modo só pode pertencer a um único agrupamento. No contexto de realimentação de estado, esta abordagem foi apresentada em (do Val et al. 2002). Os resultados para o caso de filtragem serão apresentados em (Fioravanti, Gonçalves & Geromel 2009). Já o segundo caso, que pode ser considerado juntamente com o primeiro, é para incertezas nos valores representados na matriz  $\mathbb{P}$ . Consideramos que as probabilidades de transição podem não ser exatamente conhecidas, mas que a matriz  $\mathbb{P}$  pertence a um conjunto convexo do qual se conhecem os vértices.

#### 3.3.1 Filtragem por agrupamentos

Seja o conjunto  $\mathbb{L} = \{1, 2, \dots, N_c\}$  com  $N_c \leq N$  e defina o conjunto de modos possíveis da cadeia de Markov  $\mathbb{K}$  como sendo a união de  $N_c$  conjuntos disjuntos, i.e.  $\mathbb{K} \equiv \bigcup_{\ell \in \mathbb{L}} \mathbb{U}_\ell$  tais que  $\bigcap_{\ell \in \mathbb{L}} \mathbb{U}_\ell \equiv \emptyset$ . Associado à planta (2.4) considere o filtro de ordem completa com observação parcial

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x_f(k+1) &= A_{f\ell}x_f(k) + B_{f\ell}y(k) \\ z_f(k) &= C_{f\ell}x_f(k) + D_{f\ell}y(k) \end{cases} \quad (3.73)$$

onde  $x_f(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_f(0) = 0$  e  $\theta_k \in \mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$ . Isto implica que os  $N$  modos são divididos em  $N_c$  agrupamentos e consideramos possível medir a qual agrupamento  $\mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$  pertence um modo  $i \in \mathbb{K}$ , ainda que o modo propriamente dito não seja conhecido. Evidentemente, o caso dependente do modo ( $N_c = N$ ) e independente do modo ( $N_c = 1$ ) são casos particulares desta definição geral. As matrizes  $A_{f\ell}$ ,  $B_{f\ell}$ ,  $C_{f\ell}$  e  $D_{f\ell}$  para todo  $\ell \in \mathbb{L}$  têm dimensões compatíveis e o objetivo é determiná-las de modo a minimizar alguma norma do erro de estimação. Conectando o filtro (3.73) ao sistema (2.4), o erro de estimação segue o modelo

$$\mathcal{G}_f : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) &= \tilde{A}(\theta_k, \ell)\tilde{x}(k) + \tilde{J}(\theta_k, \ell)w(k) \\ e(k) &= \tilde{C}(\theta_k, \ell)\tilde{x}(k) + \tilde{E}(\theta_k, \ell)w(k) \end{cases} \quad (3.74)$$

onde as matrizes indicadas são dadas por

$$\tilde{A}_{il} := \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{f\ell}C_{yi} & A_{f\ell} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_{il} := \begin{bmatrix} J_i \\ B_{f\ell}E_{yi} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$\tilde{C}_{il} := \begin{bmatrix} C_{zi} - D_{f\ell}C_{yi} & -C_{f\ell} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_{il} := E_{zi} - D_{f\ell}E_{yi} \quad (3.76)$$

então, o problema a ser resolvido pode ser escrito na forma

$$\min_{A_{f\ell}, B_{f\ell}, C_{f\ell}, D_{f\ell}} \|\mathcal{G}_f\|_\alpha^2 \quad (3.77)$$

onde  $\alpha \in \{2, \infty\}$ . É importante esclarecer que a formulação anterior do problema de projeto de filtro é não-convexa e não se sabe resolvê-la, da mesma forma como os casos tratados anteriormente.

O próximo teorema aborda o projeto de um filtro que minimiza o custo garantido da norma  $\mathcal{H}_2$  do erro de estimação.

**Teorema 3.9** *Existe um filtro com disponibilidade parcial do modo como (3.73) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 < \gamma$  se existirem matrizes simétricas  $X_i$ ,  $Z_i$  e matrizes  $H_\ell$ ,  $M_\ell$ ,  $L_\ell$ ,  $F_\ell$ ,  $K_\ell$  de dimensão compatível satisfazendo as LMIs*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) < \gamma \quad (3.78)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ H_\ell J_i + F_\ell E_{yi} & 0 & H_\ell + H'_\ell + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} - K_\ell E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.79)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ H_\ell A_i + F_\ell C_{yi} + M_\ell & H_\ell A_i + F_\ell C_{yi} & 0 & H_\ell + H'_\ell + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_\ell C_{yi} + L_\ell & C_{zi} - K_\ell C_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.80)$$

para todo  $\ell \in \mathbb{L}$  e todo  $i \in \mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$ . Em caso afirmativo, uma realização para o filtro é dada por  $A_{f\ell} = -H_\ell^{-1}M_\ell$ ,  $B_{f\ell} = -H_\ell^{-1}F_\ell$ ,  $C_{f\ell} = -L_\ell$  e  $D_{f\ell} = K_\ell$ .

**Prova:** Basta acrescentar ao Teorema 3.5 as seguintes restrições de igualdade

$$H_i = H_\ell, M_i = M_\ell, F_i = F_\ell, L_i = L_\ell, K_i = K_\ell \quad (3.81)$$

para todo  $\ell \in \mathbb{L}$  e  $i \in \mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$ .  $\square$

O teorema anterior é a forma mais geral de representar o projeto de filtros que minimizam a norma  $\mathcal{H}_2$  do erro de estimação para diversas hipóteses acerca da disponibilidade do modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$  para o filtro a cada instante  $k \in \mathbb{N}$ . Ele permite o cálculo do filtro ótimo  $\mathcal{H}_2$  para o caso em que há disponibilidade total ( $N_c = N$ ) e indica uma solução de custo garantido para os casos sem disponibilidade ( $N_c = 1$ ) ou com disponibilidade apenas do agrupamento a que pertence um dado modo da planta ( $N_c < N$ ). Mais uma vez chamamos a atenção para o carácter necessário e suficiente das condições do Teorema 3.5, no qual consideramos a disponibilidade do modo; se as LMIs forem inactíveis podemos afirmar que não existe filtro tal que a norma  $\mathcal{H}_2$  do erro de estimação seja limitada. Porém, nos casos de disponibilidade parcial ou independência do modo, como as condições do Teorema 3.9 são apenas suficientes, a inactibilidade das LMIs não permite afirmar nada acerca da existência de um filtro tal que a norma  $\mathcal{H}_2$  do erro de estimação seja limitada.

Para o caso em que não for conhecida a distribuição de probabilidades inicial  $\mu$  é possível usar (3.27) com  $\mathcal{X} = (X_i, Z_i, W_i, H_\ell, M_\ell, F_\ell, L_\ell, K_\ell)$  para todo  $\ell \in \mathbb{L}$  e  $i \in \mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$  representando as variáveis matriciais e  $\Omega$  tal que as LMIs (3.79) e (3.80) sejam factíveis.

O próximo teorema fornece uma condição suficiente para o projeto de um filtro que minimiza um custo garantido para  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2$  no caso de disponibilidade parcial do modo da planta.

**Teorema 3.10** *Existe um filtro como (3.73) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 < \gamma$  se existirem matrizes simétricas  $X_i, Z_i$  e matrizes  $H_\ell, M_\ell, L_\ell, F_\ell, K_\ell$  de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}A_i & Z_{pi}A_i & Z_{pi}J_i & Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ H_\ell A_i + F_\ell C_{yi} + M_\ell & H_\ell A_i + F_\ell C_{yi} & H_\ell J_i + F_\ell E_{yi} & 0 & H_\ell + H'_\ell + Z_{pi} - X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} - K_\ell C_{yi} + L_\ell & C_{zi} - K_\ell C_{yi} & E_{zi} - K_\ell E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.82)$$

para todo  $\ell \in \mathbb{L}$  e todo  $i \in \mathbb{U}_\ell \subset \mathbb{K}$ . Em caso afirmativo, uma realização para o filtro é dada por  $A_{f\ell} = -H_\ell^{-1}M_\ell$ ,  $B_{f\ell} = -H_\ell^{-1}F_\ell$ ,  $C_{f\ell} = -L_\ell$  e  $D_{f\ell} = K_\ell$ .

**Prova:** Basta adicionar as restrições (3.81) às LMIs do Teorema 3.8.  $\square$

Para o caso  $\mathcal{H}_\infty$  valem os mesmos comentários acerca da suficiência do resultado com disponibilidade parcial ou sem disponibilidade do modo da planta. Nestes casos, a minimização em  $\gamma$  não fornece a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação, mas um custo garantido. Além disso, a não-factibilidade das LMIs (3.82) não exclui a possibilidade de existir um filtro por agrupamentos para o sistema (2.4) que imponha algum limitante superior para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Para o caso com disponibilidade total, contudo, o resultado é necessário e suficiente, e portanto o valor mínimo de  $\gamma$  é a norma  $\mathcal{H}_\infty$  mínima para o sistema com um filtro dependente do modo e a não factibilidade da restrição implica em inexistência de filtro tal que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação seja limitada.

**Exemplo 3.7** Neste exemplo, vamos retomar o mesmo sistema do Exemplo 3.5. Porém, vamos considerar um modelo mais complexo para o canal que transmite a informação medida no sistema até o filtro. Este modelo recebe na literatura o nome de canal Gilbert-Elliot (Gilbert 1960), (Elliot 1963).

Consideramos que a rede pode ter dois estados, que vamos chamar de BOM ou RUIM. Se o canal estiver no modo BOM, há uma probabilidade  $p_{GG}$  de que ele permaneça neste estado, e uma probabilidade complementar  $1 - p_{GG}$  de que ele mude para o estado RUIM. De forma análoga, com a rede em estado RUIM, há uma probabilidade  $p_{BB}$  de que ela permaneça no mesmo estado e uma probabilidade complementar  $1 - p_{BB}$  de que ela mude para BOM<sup>6</sup>. Tanto no estado BOM quanto no estado RUIM, é possível haver erros de pacote, com probabilidades  $p_{eG}$  e  $p_{eB}$ , respectivamente. A Figura 3.4 resume como opera a rede.

Vamos assumir que o protocolo de transmissão permite reconhecer se houve erro no pacote, que neste caso é rejeitado. Há quatro eventos possíveis, de acordo com o sucesso ou a falha na transmissão da medida  $y(k)$  pelo canal:

- Falha com a rede em condição RUIM
- Falha com a rede em condição BOM
- Sucesso com a rede em condição RUIM
- Sucesso com a rede em condição BOM

Evidentemente, graças ao protocolo é possível saber se houve sucesso ou falha na transmissão, mas não é possível saber qual a condição em que a rede opera em um dado instante. Em outras

---

<sup>6</sup>Os índices  $G$  e  $B$  vêm do inglês *good* e *bad*.

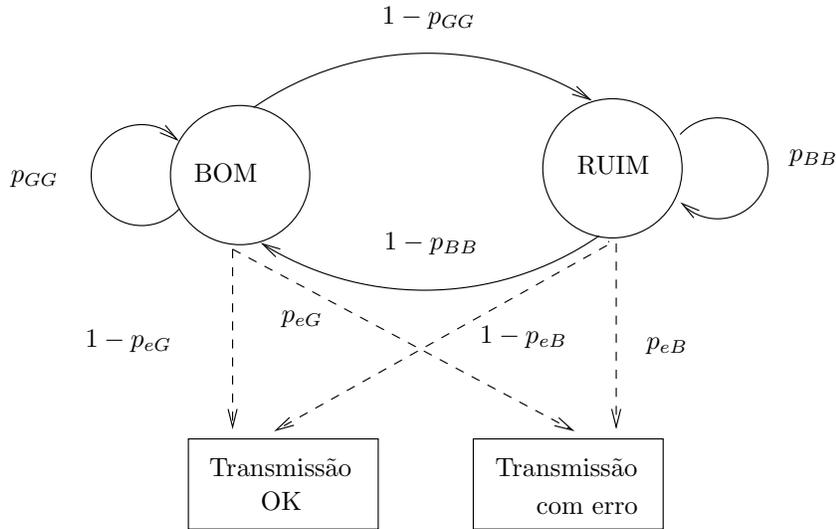


Figura 3.4: Cadeia de Markov para um canal Gilbert-Elliott

	Custo garantido	Valor real
Modo disponível	0,2639	0,2639
Disponibilidade parcial	0,2767	0,2723
Modo indisponível	0,9631	0,6832

Tabela 3.5: Norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o Exemplo 3.7

palavras, podemos considerar dois clusters dentre os quatro modos possíveis de nossa cadeia de Markov, ou com a notação usada até aqui

$$\mathbb{U}_1 = \{1,2\}$$

$$\mathbb{U}_2 = \{3,4\}$$

As probabilidades consideradas (Figura 3.4) são

$$p_{GG} = 0.925$$

$$p_{BB} = 0.62$$

$$p_{eB} = 0.275$$

$$p_{eG} = 0.02$$

que caracterizam um canal com relação sinal-ruído  $\text{SNR} = 5$  [dB] (Marcondes 2005). Usando as LMIs (3.82) nós obtivemos a representação de estado para o filtro e o custo garantido  $\gamma$ . O valor real da norma  $\mathcal{H}_\infty$  foi calculado usando (2.41) depois de conectar o filtro ao sistema. Os valores do custo garantido e os valores reais da norma  $\mathcal{H}_\infty$  foram comparados aos casos dependente e independente do modo na Tabela 3.5.

Para o caso em que o modo é disponível para o filtro, a minimização de  $\gamma$  restrito às LMIs (3.82) já fornece o valor da norma, razão por que custo garantido e valor real da norma são iguais. Também notamos que o custo garantido para o modelo com disponibilidade parcial é próximo do valor ótimo da norma, que é aquele dado para o caso em que há disponibilidade do modo da planta por parte do filtro. Finalmente, o caso com disponibilidade parcial permite obter valores muito menores para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação, o que indica que adotar um protocolo que permita reconhecer erros de transmissão compensa o aumento de complexidade.  $\blacklozenge$

### 3.3.2 Filtragem com probabilidades de transição incertas

Até o momento, nossas hipóteses para o caso da filtragem incluíram o conhecimento total das probabilidades de transição da cadeia de Markov que governa a evolução do modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$  em todos os instantes de tempo  $k \in \mathbb{N}$ . Tais probabilidades estão reunidas em uma matriz  $N \times N$  que denotamos por  $\mathbb{P}$ , nas quais o elemento  $(i, j)$  é dado por  $p_{ij} = \text{Prob}(\theta_{k+1} = j | \theta_k = i)$ . Uma forma de incluir incertezas em nosso modelo de MJLS seria considerar incertas algumas das probabilidades de transição. Exploramos este conceito com mais detalhe nesta seção.

Observando os Teoremas 3.5 e 3.8 podemos perceber dois fatos interessantes no que se refere às probabilidades de transição. O primeiro deles é que as restrições para o cálculos dos filtros  $\mathcal{H}_2$  (3.45) e (3.46) e  $\mathcal{H}_\infty$  (3.71) são lineares com relação às probabilidades de transição. Em segundo lugar, a representação do filtro indicada a partir da solução dos problemas convexos associados a essas LMIs não dependem das probabilidades. Isso permite considerar a matriz de probabilidades de transição como não perfeitamente conhecida, porém pertencente a um conjunto convexo com extremos conhecidos. Podemos acrescentar restrições para cada um dos vértices e chegamos a um resultado suficiente que pode permitir o projeto de um filtro com custo garantido, tanto para  $\|\mathcal{G}_f\|_2$  quanto  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty$ . Considere o sistema  $\mathcal{G}$  representado por (2.4), conectado ao filtro (3.1) conforme a Figura 3.1. Vamos considerar que a matriz de probabilidades de transição seja dada pela combinação convexa

$$\mathbb{P}_\lambda := \sum_{h=1}^{N_h} \lambda_h \mathbb{P}^h \quad (3.83)$$

onde  $\lambda_h \in \mathbb{R}$  para todo  $h \in \{1, 2, \dots, N_h\}$  tais que

$$\sum_{h=1}^{N_h} \lambda_h = 1 \quad (3.84)$$

Os elementos  $\lambda_h$  não são conhecidos exatamente, embora restritos a (3.84) e as matrizes  $\mathbb{P}^h$  são conhecidas para todo  $h \in \{1, 2, \dots, N_h\}$ . Vamos agora redefinir a combinação convexa

de matrizes em termos das probabilidades, a partir das matrizes de transição dos vértices do politopo considerado

$$X_{pi}^h := \sum_{j=1}^N p_{ij}^h X_j \quad (3.85)$$

onde  $p_{ij}^h$  é o elemento  $(i,j)$  da matriz  $\mathbb{P}^h$ , com  $h \in \{1, 2, \dots, N_h\}$ . De posse destas definições, é possível obter um filtro para probabilidades de transição desconhecidas – porém restritas a um politopo convexo de vértices conhecidos –, usando os seguintes teoremas.

**Teorema 3.11** *Existe um filtro como (3.1) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 < \gamma$  se existirem matrizes simétricas  $X_i, Z_i$  e matrizes  $H_i, M_i, L_i, F_i, K_i$  de dimensão compatível satisfazendo as LMIs*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) < \gamma \quad (3.86)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}^h J_i & Z_{pi}^h & \bullet & \bullet \\ H_i J_i + F_i E_{yi} & 0 & H_i + H'_i + Z_{pi}^h - X_{pi}^h & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.87)$$

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}^h A_i & Z_{pi}^h A_i & Z_{pi}^h & \bullet & \bullet \\ H_i A_i + F_i C_{yi} + M_i & H_i A_i + F_i C_{yi} & 0 & H_i + H'_i + Z_{pi}^h - X_{pi}^h & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} + L_i & C_{zi} - K_i C_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.88)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $h \in \{1, 2, \dots, N_h\}$ . Em caso afirmativo, uma realização para o filtro é dada por  $A_{fi} = -H_i^{-1} M_i$ ,  $B_{fi} = -H_i^{-1} F_i$ ,  $C_{fi} = -L_i$  e  $D_{fi} = K_i$ .

**Teorema 3.12** *Existe um filtro como (3.1) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 < \gamma$  se existirem matrizes simétricas  $X_i, Z_i$  e matrizes  $H_i, M_i, L_i, F_i, K_i$  de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Z_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_i & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ Z_{pi}^h A_i & Z_{pi}^h A_i & Z_{pi}^h J_i & Z_{pi}^h & \bullet & \bullet \\ H_i A_i + F_i C_{yi} + M_i & H_i A_i + F_i C_{yi} & H_i J_i + F_i E_{yi} & 0 & H_i + H'_i + Z_{pi}^h - X_{pi}^h & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} + L_i & C_{zi} - K_i C_{yi} & E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.89)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e todo  $h = \{1, 2, \dots, N_h\}$ . Em caso afirmativo, uma realização para o filtro é dada por  $A_{fi} = -H_i^{-1}M_i$ ,  $B_{fi} = -H_i^{-1}F_i$ ,  $C_{fi} = -L_i$  e  $D_{fi} = K_i$ .

A prova para os dois teoremas é simples. Partindo dos Teoremas 3.5 e 3.8 para os casos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  respectivamente, percebemos que as LMIs envolvidas são lineares nos parâmetros  $p_{ij}$  e portanto, se adicionarmos restrições para cada vértice  $\mathbb{P}^h$ , garantimos que as LMIs serão satisfeitas para qualquer  $\mathbb{P}_\lambda$  dentro do politopo. Mais ainda, a representação de estado do filtro não depende das probabilidades, o que garante que um único filtro é obtido. Naturalmente, as condições deixam de ser necessárias e suficientes tornando-se apenas suficientes.

Alguns comentários são importantes com relação às LMIs dos Teoremas 3.11 e 3.12. O raciocínio a seguir vale tanto para o caso  $\mathcal{H}_2$  quanto para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , então vamos por ora nos fixar às restrições (3.89). Aparentemente seriam necessárias  $NN_h$  LMIs para representar todo o conjunto de restrições. Entretanto, pode haver o caso em que dois ou mais vértices do politopo definidos pelas matrizes  $\mathbb{P}^h$  tenham linhas idênticas. Caso isso aconteça, as LMIs relacionadas àquela linha  $i \in \mathbb{K}$  serão idênticas para aqueles vértices  $h$ . Logo, isso permite diminuir drasticamente o número de restrições, tornando o problema tratável mesmo para um número elevado de modos de Markov. No exemplo a seguir, mostramos como isso pode ser utilizado na prática para gerar programas menos complexos.

**Exemplo 3.8** Considere um sistema com três modos de operação e matriz de probabilidades de transição dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} ? & [0,7, 0,9] & ? \\ 0,9 & ? & ? \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}$$

onde “?” indica probabilidade de transição desconhecida e  $[\cdot, \cdot, \cdot]$  representa um intervalo de probabilidades possíveis. Olhando apenas para as linhas de  $\mathbb{P}$ , é possível definir os vértices para cada uma delas como o conjunto  $\Omega_i$

$$\Omega_1 = \{[0,3 \ 0,7 \ 0], [0 \ 0,7 \ 0,3], [0,1 \ 0,9 \ 0], [0 \ 0,9 \ 0,1]\}$$

$$\Omega_2 = \{[0,9 \ 0,1 \ 0], [0,9 \ 0 \ 0,1]\}$$

$$\Omega_3 = \{[0,3 \ 0,3 \ 0,4]\}$$

evidenciando que serão necessárias 7 LMIs para representar todo o conjunto convexo. Se, entretanto, pensarmos em termos do número de vértices  $N_h$ , estamos falando de  $N_h = 8$  vértices que combinados a  $N = 3$  modos dariam um total de 24 LMIs, a se seguir o esquema geral representado, por exemplo, por (3.89).  $\blacklozenge$

Outro ponto se refere à estrutura de filtro que pode ser obtida. No caso com observação completa do modo, seções 3.1.1 e 3.2.1, foi mostrado que o filtro ótimo tem uma estrutura clássica de observador baseado no modelo interno da planta. Isso foi conseguido eliminando das LMIs as variáveis  $M_i$  e  $L_i$  e verificando que  $Z_i \rightarrow 0$  no caso ótimo. Infelizmente, para as desigualdades (3.88) e (3.89), embora seja possível eliminar tais variáveis usando o Lema de Finsler, não é mais possível afirmar que  $Z_i \rightarrow 0$ . Entretanto, ainda é possível obter um filtro na forma de observador se impusermos aos problemas tratados pelos Teoremas 3.11 e 3.12 um conjunto de restrições adicionais, como mostram os corolários a seguir

**Corolário 3.13** *Existe um filtro como (3.34) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_2^2 < \gamma$  se existirem matrizes simétricas  $X_i$  e matrizes  $H_i, F_i, K_i$  de dimensão compatível satisfazendo as LMIs*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) < \gamma \quad (3.90)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ H_i J_i + F_i E_{yi} & H_i + H'_i - X_{pi}^h & \bullet \\ E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.91)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet \\ H_i A_i + F_i C_{yi} & H_i + H'_i - X_{pi}^h & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.92)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e  $h \in \{1, 2, \dots, N_h\}$ . Em caso afirmativo, uma realização para o filtro é dada por  $A_{fi} = A_i + H_i^{-1} F_i C_{yi}$ ,  $B_{fi} = -H_i^{-1} F_i$ ,  $C_{fi} = C_{zi} - K_i C_{yi}$  e  $D_{fi} = K_i$ .

**Corolário 3.14** *Existe um filtro como (3.34) satisfazendo a restrição  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty^2 < \gamma$  se existirem matrizes simétricas  $X_i$  e matrizes  $H_i, F_i, K_i$  de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ H_i A_i + F_i C_{yi} & H_i J_i + F_i E_{yi} & H_i + H'_i - X_{pi}^h & \bullet \\ C_{zi} - K_i C_{yi} & E_{zi} - K_i E_{yi} & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (3.93)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$  e todo  $h \in \{1, 2, \dots, N_h\}$ . Em caso afirmativo, uma realização para o filtro é dada por  $A_{fi} = A_i + H_i^{-1} F_i C_{yi}$ ,  $B_{fi} = -H_i^{-1} F_i$ ,  $C_{fi} = C_{zi} - K_i C_{yi}$  e  $D_{fi} = K_i$ .

Para a prova de ambos os corolários basta forçar as seguintes restrições adicionais com relação

	Custo garantido
Modo disponível	0,2847
Disponibilidade parcial	0,2987
Modo indisponível	1,0113

Tabela 3.6: Norma  $\mathcal{H}_\infty$  para o Exemplo 3.9

às LMIs (3.87), (3.88) e (3.89)

$$Z_i \rightarrow 0 \quad (3.94)$$

$$M_i = -H_i A_i - F_i C_{yi} \quad (3.95)$$

$$L_i = -C_{zi} + K_i C_{yi} \quad (3.96)$$

Considerando o par de ganhos  $G_i = -H_i^{-1}F_i$  e  $K_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , o filtro que resulta da aplicação dos Corolários 3.13 e 3.14 exibe a forma clássica de um observador baseado no modelo interno da planta (3.34). Naturalmente, o modelo interno da planta só pode ser usado se houver conhecimento do modo do sistema  $\theta_k = i \in \mathbb{K}$  em cada instante de tempo  $k \in \mathbb{N}$ . Entretanto, nada impede que as hipóteses de disponibilidade parcial ou de independência do modo sejam adicionadas aos Teoremas 3.11 e 3.12. Nestes casos, basta trabalhar com restrições adicionais sobre as variáveis  $H_i$ ,  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $F_i$  e  $K_i$  que reflitam o nível de informação do filtro sobre o modo  $\theta_k \in \mathbb{K}$  em cada instante de tempo  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 3.9** Retomamos aqui os dados do Exemplo 3.7 e introduzimos uma variação de 10% para mais ou para menos no valor da probabilidade  $p_{eB}$ . A Tabela 3.6 traz os valores obtidos para o limitante superior da norma  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty$  aplicando o Teorema 3.12 para os mesmos casos de disponibilidade do modo explorados no Exemplo 3.7. Como esperado, o valor do custo garantido é maior ao levarmos em conta a possível variação em uma das probabilidades do modelo. Diferente da Tabela 3.5, agora não é mais possível calcular o valor da norma real do erro de estimação.

Para obter um filtro na forma de observador baseado no modelo interno, forçamos as variáveis  $Z_i$ ,  $M_i$  e  $L_i$  a assumirem os valores dados em (3.94)–(3.96). Não houve diferença entre o custo garantido obtido para o filtro em sua forma geral (linha “Modo Disponível” da Tabela 3.6) e o custo garantido para o filtro em formato de observador.  $\blacklozenge$

Não é intuitivo que o resultado do filtro em forma de observador seja igual ao caso mais geral, ainda que não seja uma impossibilidade matemática. Afinal, houve imposição de valor para algumas variáveis, o que em si já implica em resultado pior ou igual para o novo problema de otimização. Motivados por este exemplo particular, calculamos o filtro em forma de obser-

$i$	$A_i$	$J_i$	$C'_{zi}$	$E'_{zi}$	$C'_{yi}$	$E'_{yi}$
1	$\begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & -0,33 \\ 1 & 1,4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tabela 3.7: Dados para o Exemplo 3.10.

vador e o filtro sem as restrições adicionais para quatrocentas plantas  $\mathcal{G}$  e vértices  $\mathbb{P}^h$  gerados aleatoriamente. Constatamos que em todos os casos o filtro na forma de observador e o filtro na forma geral têm o mesmo custo garantido. Isso indicaria que a solução das LMIs (3.89) que fornece  $\gamma$  mínimo ocorreria com  $Z_i \rightarrow 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Infelizmente, não conseguimos provar esta conjectura, que será objeto de estudos futuros.

No exemplo a seguir, uma comparação entre o projeto de filtro proposto nesta seção e um resultado disponível na literatura.

**Exemplo 3.10** Este exemplo foi retirado de (de Souza 2003) para fins de comparação entre os dois métodos. Os dados da planta estão na Tabela 3.7 e as probabilidades de transição pertencem politopo convexo formado pelos vértices

$$\mathbb{P}^1 = \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}, \mathbb{P}^2 = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

O filtro estritamente próprio independente do modo obtido tem as matrizes de estado

$$A_f = \begin{bmatrix} -1,2558 & -0,4717 \\ 2,4881 & 0,9351 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 1,1139 \\ -2,0017 \end{bmatrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} -0,0469 & 0,9734 \end{bmatrix}$$

e garante uma norma  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty < 7,8252$ , melhorando o resultado de (de Souza 2003) que foi  $\|\mathcal{G}_f\|_\infty < 9,8247$ .  $\blacklozenge$

## 3.4 Considerações Finais

Nosso principal objetivo neste capítulo era parametrizar, com o uso de programação convexa e restrições na forma de LMIs, todos os filtros dinâmicos na forma (3.1) tais que a norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  do erro de estimação dado pelo sistema (3.2) seja limitada por um valor pré-especificado. Isto foi plenamente atingido pelo exposto nos Teoremas 3.3 e 3.6. A partir deste resultado, é possível calcular o filtro linear ótimo global para o problema de minimização das normas, conforme os Corolários 3.4 e 3.7. Uma propriedade importante do filtro ótimo é exibir a forma clássica de um observador baseado no modelo interno da planta. Outra possibilidade derivada do resultado principal é adicionar restrições ao problema para calcular filtros que respeitem requisitos extras de projeto. Dentre tais requisitos, destacam-se as hipóteses de como o modo de Markov está disponível para o filtro. Derivamos tanto o caso independente do modo, no qual o filtro não tem qualquer informação sobre o modo, confira Seções 3.1.2 e 3.2.2, quanto o caso em que o filtro não conhece o modo propriamente dito mas o subconjunto ao qual ele pertence, vide Seção 3.3.1. Finalmente, introduzimos o caso em que a matriz de probabilidades de transição não é exatamente conhecida, mas pertence a um politopo convexo do qual se conhecem apenas os vértices. Mostramos como este resultado exposto nos Teoremas 3.11 e 3.12 pode ser usado em conjunto com as demais hipóteses de disponibilidade do modo. Para o caso em que o modo é disponível, os Corolários 3.13 e 3.14, apresentam condições suficientes para que o filtro tenha a forma de um observador baseado no modelo interno da planta.



# Capítulo 4

## Controle Dinâmico de Saída

Neste capítulo, discutimos o projeto de controladores dinâmicos de saída  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para MJLS a tempo discreto. Sob a hipótese de disponibilidade do modo, que significa que o parâmetro de Markov está disponível para realimentação, fazemos a caracterização completa de todos os controladores lineares e de ordem completa tais que as normas  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada estejam limitadas a um valor pré-especificado, levando à solução ótima global do projeto de controladores que minimizem estas normas. O problema é expresso em termos de LMIs. Resolvemos alguns exemplos acadêmicos para ilustração do método proposto e comparação com outros resultados da literatura.

Uma consideração importante ao tratar do projeto de controladores para MJLS é se o modo do sistema está ou não disponível para o controlador em cada instante de tempo. Neste trabalho, consideramos apenas o projeto de controladores dependentes do modo por duas razões: primeiramente, em muitas situações práticas, os parâmetros são de fato mensuráveis, como em (Costa & Tuesta 2004), (Seiler & Sengupta 2005), (Sworder & Rogers 1983) e (Xiao, Hassibi & How 2000). Em segundo lugar, devido à mudança de variáveis utilizada para converter as restrições em LMIs, somente controladores dependentes do modo do sistema em cada instante podem ser obtidos sem adicionar algum nível de conservadorismo ao problema.

Para o caso em tempo contínuo, vários resultados estão disponíveis relacionados à solução completa dos problemas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , dentre os quais podemos citar (de Farias et al. 2000) e mais recentemente (Li & Ugrinovskii 2007). Entretanto, o mesmo não ocorre para sistemas a tempo discreto, para os quais somente alguns resultados estão disponíveis, por exemplo (Costa & Tuesta 2004), (Seiler & Sengupta 2005) e (Xiao et al. 2000). Em (Costa & Tuesta 2004) foi reportado um resultado muito importante, estendendo aos MJLS a validade do Princípio da Separação para o caso da norma  $\mathcal{H}_2$  e controladores estritamente próprios. O caso de realimentação de saída com critério  $\mathcal{H}_\infty$  foi tratado em (Seiler & Sengupta 2005), que além de também se concen-

trar a controladores lineares estritamente próprios, considerava o caso particular de matrizes de transição de probabilidade com linhas idênticas <sup>1</sup>. Finalmente, (Xiao et al. 2000) propõem lidar com o problema usando uma técnica de relaxação aplicada a desigualdades matriciais bilineares.

No que segue, tanto as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  são consideradas e ao contrário do que foi feito em (Seiler & Sengupta 2005), não fazemos qualquer hipótese acerca das probabilidades de transição da cadeia de Markov. Na próxima seção, tratamos da formulação precisa do problema e introduzimos uma mudança de variáveis bijetora que permite escrever de forma linear as dependências não-lineares entre as variáveis de otimização e as matrizes do espaço de estados do controlador. Na Seção 4.2, apresentamos a solução para o projeto de controladores que minimizam a norma  $\mathcal{H}_2$  e fazemos o mesmo na Seção 4.3 em relação à norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Observe que estes resultados, já publicados em (Geromel, Gonçalves & Fioravanti 2009) e (Gonçalves, Fioravanti & Geromel 2008), são necessários e suficientes para a classe de controladores considerada, i.e. ordem completa, próprios, lineares e dependentes do modo.

## 4.1 Formulação do problema

Seja o MJLS descrito pelas equações

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) &= A(\theta_k)x(k) + B(\theta_k)u(k) + J(\theta_k)w(k) \\ z(k) &= C_z(\theta_k)x(k) + D_z(\theta_k)u(k) + E_z(\theta_k)w(k) \\ y(k) &= C_y(\theta_k)x(k) + E_y(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (4.1)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u(k) \in \mathbb{R}^p$  é o controle,  $w(k) \in \mathbb{R}^m$  a perturbação externa,  $z(k) \in \mathbb{R}^r$  é a saída controlada e  $y(k) \in \mathbb{R}^q$  é a saída medida.

Associado a (4.1) considere o controlador linear de ordem completa, dependente do modo  $\theta_k$  e também sujeito a saltos markovianos

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_c(k+1) &= A_c(\theta_k)x_c(k) + B_c(\theta_k)y(k) \\ u(k) &= C_c(\theta_k)x_c(k) + D_c(\theta_k)y(k) \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $x_c(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_c(0) = 0$  e as matrizes  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_{ci}$  e  $D_{ci}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  têm dimensões compatíveis. Nosso objetivo é determinar tais matrizes de forma a minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada. Conectando o controlador (4.2) ao sistema (4.1) como indicado

<sup>1</sup>O Teorema 4 de (Seiler & Sengupta 2005) propõe uma única LMI como condição necessária e suficiente para o cálculo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  no caso em que  $p_{ij} = p_j$  para todo  $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Entretanto, entendemos que aquela condição é apenas necessária e portanto sem utilidade para impor uma restrição  $\mathcal{H}_\infty$ , como detalhamos no Apêndice C.

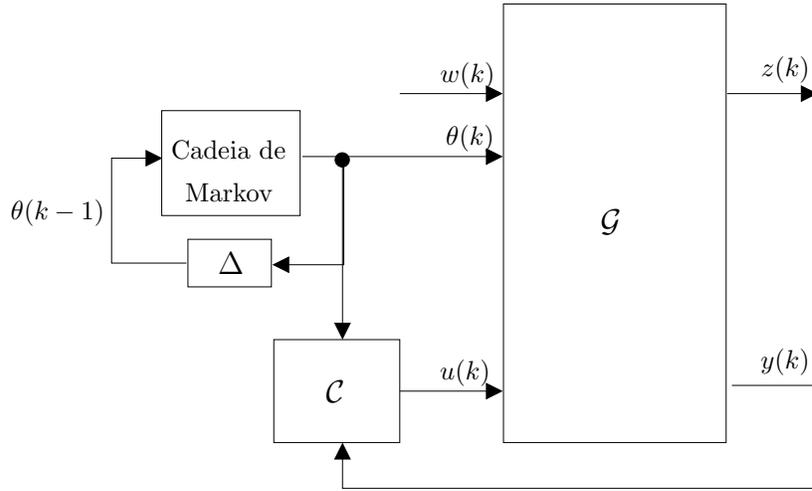


Figura 4.1: Controle markoviano com conhecimento do modo

na Figura 4.1, temos o seguinte modelo para o sistema em malha fechada

$$\mathcal{G}_c : \begin{cases} \tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{J}(\theta_k)w(k) \\ z(k) = \tilde{C}(\theta_k)\tilde{x}(k) + \tilde{E}(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $\tilde{x}(k) := [x(k)' \ x_c(k)']' \in \mathbb{R}^{2n}$  as matrizes do sistema em malha fechada são

$$\tilde{A}_i := \begin{bmatrix} A_i + B_i D_{ci} C_{yi} & B_i C_{ci} \\ B_{ci} C_{yi} & A_{ci} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J}_i := \begin{bmatrix} J_i + B_i D_{ci} E_{yi} \\ B_{ci} E_{yi} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\tilde{C}_i := \begin{bmatrix} C_{zi} + D_{zi} D_{ci} C_{yi} & D_{zi} C_{ci} \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i := E_{zi} + D_{zi} D_{ci} E_{yi} \quad (4.5)$$

assim, o problema a ser resolvido é escrito na forma final

$$\min_{A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci}} \|\mathcal{G}_c\|_\alpha^2 \quad (4.6)$$

onde  $\alpha = 2$  ou  $\alpha = \infty$ . É importante esclarecer que a formulação acima é não-convexa, nesta forma não se sabe calcular a solução ótima global. Como acontece para projeto do filtro, o cálculo da função objetivo  $\|\mathcal{G}_c\|_\alpha^2$  depende de um conjunto de variáveis de Lyapunov que multiplicam as matrizes do controlador produzindo, conseqüentemente, um problema não-convexo. A forma para contornar esta dificuldade é introduzir uma mudança de variáveis bijetora que permita escrever as restrições não-lineares em termos de relações lineares nas novas variáveis.

O controlador de ordem completa  $\mathcal{C}$  gera um sistema em malha fechada  $\mathcal{G}_c$  com o dobro da ordem da planta  $\mathcal{G}$ . Assim, o cálculo das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  requer o uso de matrizes simétricas  $\tilde{P}_i \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Dessa forma, vamos considerar  $\tilde{P}_i$  como matrizes simétricas reais de dimensão  $2n \times 2n$  particionadas de acordo com

$$\tilde{P}_i = \begin{bmatrix} X_i & U_i \\ U_i' & \hat{X}_i \end{bmatrix}, \tilde{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} Y_i & V_i \\ V_i' & \hat{Y}_i \end{bmatrix}, \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} Y_i & I \\ V_i' & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

onde todos os blocos são matrizes reais de dimensão  $n \times n$ . Imediatamente verificamos que

$$\tilde{T}_i' \tilde{P}_i \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} Y_i & I \\ I & X_i \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . É um fato conhecido<sup>2</sup> que, se impusermos que a matriz (4.8) seja definida positiva, então sempre é possível determinar os blocos em (4.7) de maneira a garantir  $\tilde{P}_i > 0$ . Mais ainda, isto pode ser feito mesmo que as matrizes  $U_i$  ou  $V_i$  sejam fixadas arbitrariamente para cada  $i \in \mathbb{K}$ , desde que não singulares. Desta maneira, no que segue vamos considerar  $\tilde{P}_i > 0$  e adotar uma abordagem semelhante para a combinação convexa dessas matrizes. A partição (4.7) implica

$$\tilde{P}_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tilde{P}_j = \begin{bmatrix} X_{pi} & U_{pi} \\ U_{pi}' & \hat{X}_{pi} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e denotando

$$\tilde{P}_{pi}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{1i} & R_{2i} \\ R_{2i}' & R_{3i} \end{bmatrix}, \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} I & X_{pi} \\ 0 & U_{pi}' \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

verificamos que

$$\tilde{Q}_i' \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} R_{1i} & I \\ I & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

É importante enfatizar que os quatro blocos que definem a inversa  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  dependem de forma não linear dos quatro blocos de  $\tilde{P}_{pi}$ . Entretanto, como  $R_{1i}^{-1} = X_{pi} - U_{pi} \hat{X}_{pi}^{-1} U_{pi}'$ , ao fixarmos  $U_i = -\hat{X}_i$  a matriz particionada em (4.11) se torna

$$\tilde{Q}_i' \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} (X_{pi} + U_{pi})^{-1} & I \\ I & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

De acordo com a discussão anterior, mencionamos novamente que a escolha particular  $U_i = -\hat{X}_i$

<sup>2</sup>Para uma discussão sobre este fato, confira o Apêndice A, Lema A.5.

pode ser feita sem perda de generalidade e restringe a matriz  $U_i$  a ser simétrica, definida negativa e portanto não-singular. Além disso, (4.7) implica em  $U_i = -\hat{X}_i = Y_i^{-1} - X_i$ . Recordando a notação introduzida em (2.2), podemos reescrever (4.12) na forma final

$$\tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} Y_{qi} & I \\ I & X_{pi} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

No caso geral, i.e. sem a escolha particular de  $U_i = \hat{X}_i$ , a igualdade  $R_{1i} = Y_{qi}$  não mais se verifica mas as matrizes  $R_{1i}$  são dadas por

$$R_{1i}^{-1} = X_{pi} - U_{pi} \hat{X}_{pi}^{-1} U'_{pi} \quad (4.14)$$

satisfazendo as desigualdades

$$\begin{aligned} R_{1i}^{-1} &\geq \sum_{j=1}^N p_{ij} (X_j - U_j \hat{X}_j^{-1} U'_j) \\ &\geq \sum_{j=1}^N p_{ij} Y_j^{-1} \\ &\geq Y_{qi}^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ . A demonstração da primeira desigualdade acima está no Apêndice A, Lema A.4. As relações (4.13) e (4.15) são os resultados fundamentais a serem usados posteriormente para a síntese de controle dinâmico por realimentação de saída.

Além das partições apresentadas até aqui, os resultados obtidos na seqüência dependem de escrever o problema (4.6) com restrições em termos de LMIs. Para tal, apresentamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{bmatrix} A_{ci} & B_{ci} \\ C_{ci} & D_{ci} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{pi} & X_{pi} B_i \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M_i - X_{pi} A_i Y_i & F_i \\ L_i & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_i & 0 \\ C_{yi} Y_i & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.16)$$

que determina unicamente o controlador dinâmico por realimentação de saída  $(A_{ci}, B_{ci}, C_{ci}, D_{ci})$  a partir das matrizes  $(M_i, F_i, L_i, K_i)$ , e vice-versa para todo  $i \in \mathbb{K}$ . De fato, observe que em (4.16) as inversas existem sempre que  $U_i$  e  $V_i$  forem não-singulares para todo  $i \in \mathbb{K}$ . A importância desta mudança de variáveis está em converter os projetos de controladores  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída enunciados anteriormente em problemas de programação convexa com restrições na forma de LMIs. Uma diferença em relação à determinação das matrizes do espaço de estado do

filtro ótimo  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  pelos Teoremas 3.3 e 3.5 está na presença em (4.16) das matrizes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_{yi}$  da planta  $\mathcal{G}$ , que variam com  $\theta_k = i \in \mathbb{K}$ . Este fato dificulta a obtenção de um controlador independente do modo, pois ainda que fosse possível adicionar restrições sobre as variáveis, de forma a torná-las constantes para todo  $\theta_k \in \mathbb{K}$ , não seria possível afirmar o mesmo para as matrizes da planta.

## 4.2 Controle $\mathcal{H}_2$ com o conhecimento do modo

Baseado nos resultados anteriores, nossa proposta nesta seção é calcular a solução ótima global para o problema que fornece um controlador  $\mathcal{H}_2$  dinâmico com realimentação de saída e que pode ser escrito como

$$\inf \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \quad (4.17)$$

onde o ínfimo é calculado com relação às variáveis  $\tilde{P}_i$ ,  $W_i$ ,  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_{ci}$  e  $D_{ci}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  satisfazendo as desigualdades

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{J}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.18)$$

e

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{A}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{C}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.19)$$

onde as matrizes do sistema em malha fechada são dadas em (4.4), (4.5) e  $\tilde{P}_i$  respeita a partição indicada em (4.7) para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Vale ressaltar que estas desigualdades matriciais não-lineares são expressas em termos da inversa  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$ , como foi feito no Capítulo 3 para filtragem, o que é essencial para se chegar a uma versão linear a partir da mudança de variáveis introduzida anteriormente.

**Lema 4.1** *Existe um controlador dinâmico por realimentação de saída dependente do modo, na forma (4.2) e matrizes simétricas  $W_i$ ,  $\tilde{P}_i > 0$  satisfazendo as desigualdades (4.18) para todo  $i \in \mathbb{K}$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $W_i$ ,  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_{ij}$  e matrizes  $F_i$ ,  $K_i$ ,  $H_i$  de*

dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ J_i + B_i K_i E_{yi} & H_i + H'_i - Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & I & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.20)$$

e

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.21)$$

para todo  $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Além disso, sempre que (4.20) - (4.21) forem satisfeitas, uma solução possível para (4.18) é dada por (4.16) com  $U_i = Y_i^{-1} - X_i$  e  $V_i = Y_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Para a necessidade, assuma que (4.18) seja válida. Particionando  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  como em (4.10) e por (4.18) obtemos

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}'_i & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{J}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_i & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ J_i + B_i K_i E_{yi} & R_{1i} & \bullet & \bullet \\ X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & I & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.23)$$

onde  $F_i = U_{pi} B_{ci} + X_{pi} B_i D_{ci}$  e  $K_i = D_{ci}$ . Levando em conta que (4.15) implica em  $Y_{qi} \geq R_{1i}$ , para  $H_i = Y_{qi}$  e  $Z_{ij} = Y_{qi} Y_j^{-1} Y_{qi} + \varepsilon I$  com  $\varepsilon > 0$  vemos que (4.21) é verificada e obtemos

$$\begin{aligned} H_i + H'_i - Z_{pi} &= Y_{qi} - \varepsilon I \\ &\geq R_{1i} - \varepsilon I \end{aligned} \quad (4.24)$$

logo, fazendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, é possível reescrever a desigualdade (4.23) trocando o termo  $R_{1i}$  por  $H_i + H'_i - Z_{pi}$ , obtendo justamente (4.20).

Para a suficiência, assuma que (4.20) e (4.21) são válidas. De (4.21) temos, por complemento de Schur,  $Z_{ij} > H'_i Y_j^{-1} H_i$  para todo  $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Multiplicando tais desigualdades por  $p_{ij}$  e somando para todo  $j \in \mathbb{K}$  obtemos

$$Z_{pi} \geq H'_i Y_{qi}^{-1} H_i \quad (4.25)$$

que por sua vez implica em

$$\begin{aligned}
H_i + H'_i - Z_{pi} &\leq H_i + H'_i - H'_i Y_{qi}^{-1} H_i \\
&\leq Y_{qi} - (H_i - Y_{qi})' Y_{qi}^{-1} (H_i - Y_{qi}) \\
&\leq Y_{qi}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ , o que permite escrever

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ J_i + B_i K_i E_{yi} & Y_{qi} & \bullet & \bullet \\ X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & I & X_{pi} & \bullet \\ E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{4.27}$$

onde o termo diagonal da segunda linha e coluna de (4.20) foi substituído por  $Y_{qi}$ . Conseqüentemente, podemos afirmar que  $X_{pi} > Y_{qi}^{-1} > 0$  e impondo  $U_i = Y_i^{-1} - X_i$  chegamos a  $V_i = Y_i$  e verificamos que a matriz  $U_{pi} = Y_{qi}^{-1} - X_{pi}$  é não-singular. Este último fato permite o uso da mudança de variáveis (4.16) para determinar as matrizes  $B_{ci}$  e  $D_{ci}$ . Por outro lado, levando em conta que esta escolha de  $U_i$  implica em

$$\tilde{P}_{pi} = \begin{bmatrix} X_{pi} & \bullet \\ Y_{qi}^{-1} - X_{pi} & X_{pi} - Y_{qi}^{-1} \end{bmatrix} > 0 \tag{4.28}$$

verificamos imediatamente que (4.13) é satisfeita e que  $R_{1i}^{-1} = Y_{qi}^{-1}$ . A conclusão é que a desigualdade (4.27) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} W_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}_i \tilde{J}_i & \tilde{Q}_i' \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \tag{4.29}$$

que multiplicada por  $\text{diag}[I, \tilde{Q}_i'^{-1}, I]$  a esquerda e por sua transposta a direita implica na desigualdade (4.18), completando a prova.  $\square$

Como podemos ver, a prova do Lema 4.1 depende principalmente da relação  $Y_{qi} \geq R_{1i}$  e da existência de um escolha particular de matrizes  $U_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  tais que a igualdade se verifique. Além disso, devemos notar que a função linear matricial  $H_i + H'_i - Z_{pi}$  aparecendo no segundo elemento da diagonal principal de (4.20) foi usada para representar de forma linear a função não-linear  $Y_{qi}$  (como já comentamos na Seção 2.1, lembramos a notação  $Z_{pi} := \sum_{j=1}^N p_{ij} Z_{ij}$ ). Este

aspecto também está presente no próximo lema, onde tratamos da outra restrição envolvida com o cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada.

**Lema 4.2** *Existe um controle dinâmico por realimentação de saída dependente do modo na forma (4.2) e matrizes simétricas  $\tilde{P}_i > 0$  satisfazendo as desigualdades (4.19) para todo  $i \in \mathbb{K}$  se e somente se existirem matrizes  $X_i, Y_i, Z_{ij}$  e matrizes  $M_i, L_i, F_i, K_i, H_i$  de dimensões compatíveis satisfazendo as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Y_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & X_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i Y_i + B_i L_i & A_i + B_i K_i C_{yi} & H_i + H'_i - Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ M_i & X_{pi} A_i + F_i C_{yi} & I & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} Y_i + D_{zi} L_i & C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.30)$$

e

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.31)$$

para todo  $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Além disso, sempre que (4.30)-(4.31) forem satisfeitas, uma solução possível para (4.19) é dada por (4.16) com  $U_i = Y_i^{-1} - X_i$  e  $V_i = Y_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** Em linhas gerais, a prova segue o mesmo padrão da prova do Lema 4.1. Para a necessidade, assuma que a desigualdade (4.19) seja válida. Particionando  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  como indicado em (4.7) e (4.10) respectivamente, multiplicando (4.19) por  $\text{diag}[\tilde{T}'_i, \tilde{Q}'_i, I]$  a esquerda, por sua transposta a direita e adotando a mudança de variáveis indicada em (4.16) chegamos à LMI (4.30) com  $R_{1i}$  no lugar de  $H_i + H'_i - Z_{pi}$  no bloco diagonal da terceira linha e coluna. Como anteriormente, a necessidade decorre de (4.24) fazendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, que permite substituir  $R_{1i}$  por  $H_i + H'_i - Z_{pi}$  mantendo a desigualdade válida.

A suficiência vem da escolha particular da matriz  $U_i = Y_i^{-1} - X_i$ , o que implica por (4.7) que  $V_i = Y_i$ . Mais ainda, levando em conta que tal escolha leva a  $\tilde{P}_{pi} > 0$  como em (4.28) e que  $R_{1i} = Y_{qi} \geq H_i + H'_i - Z_{pi}$ , a mudança de variáveis proposta permite escrever

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}'_i \tilde{P}_i \tilde{T}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{Q}'_i \tilde{A}_i \tilde{T}_i & \tilde{Q}'_i \tilde{P}_{pi}^{-1} \tilde{Q}_i & \bullet \\ \tilde{C}_i \tilde{T}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.32)$$

que implica em (4.19) depois de multiplicada por  $\text{diag}[\tilde{T}_i'^{-1}, \tilde{Q}_i'^{-1}, I]$  a esquerda e por sua transposta a direita. Isto conclui a prova do lema.  $\square$

Ressaltamos o aspecto interessante deste lema com relação à natureza não linear da desigualdade (4.19). A partir da definição adequada das matrizes  $\tilde{T}_i$  e  $\tilde{Q}_i$  a referida desigualdade, que depende de duas variáveis diferentes  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_{pi}^{-1}$  é expressa com sucesso em termos lineares. Como ambos os lemas anteriores fazem uso da mesma mudança de variáveis, o resultado seguinte é imediato.

**Teorema 4.3** *Existe um controlador linear por realimentação de saída na forma (4.2) tal que  $\|\mathcal{G}_c\|_2^2 < \gamma$  se e somente se existir uma solução factível para as LMIs (4.20), (4.30) e (4.31) satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) < \gamma \quad (4.33)$$

*Em caso afirmativo, o controle linear por realimentação de saída com saltos markovianos é definido pelas matrizes de estado  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_{ci}$  e  $D_{ci}$ , dadas em (4.16) com  $U_i = Y_i^{-1} - X_i$  e  $V_i = Y_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .*

**Prova:** Este teorema segue diretamente dos resultados dos Lemas 4.1 e 4.2, além do fato de que  $\|\mathcal{G}_c\|_2^2 < \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i)$  para todas as soluções factíveis das LMIs (4.20), (4.30) e (4.31).  $\square$

A consequência mais importante do Teorema 4.3 é que a solução ótima global do problema de projeto de controle  $\mathcal{H}_2$  (4.6) pode ser determinada alternativamente por

$$\inf_{\mathcal{X} \in \Omega} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) \quad (4.34)$$

onde  $\mathcal{X} = (W_i, X_i, Y_i, Z_{ij}, M_i, F_i, L_i, K_i, H_i)$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  representa as variáveis matriciais e  $\Omega$  é o conjunto convexo de todas as soluções factíveis para as LMIs (4.20), (4.30) e (4.31). Em outras palavras, o problema de controle por realimentação de saída com disponibilidade do modo foi convertido em um problema de programação convexa com restrições na forma de LMIs, o que possibilita o uso de métodos numéricos eficientes para a solução. Além disso, o Teorema 4.3 admite outra interpretação. Ele caracteriza o conjunto de todos os controladores lineares com saltos markovianos tais que a norma do sistema em malha fechada satisfaz a restrição  $\|\mathcal{G}_c\|_2^2 < \gamma$  para algum valor pré-especificado  $\gamma > 0$ .

Neste ponto, chamamos a atenção para o resultado de (Costa & Tuesta 2004) que é extremamente relevante do ponto de vista teórico. Trata-se ali do problema de controle  $\mathcal{H}_2$  para o

caso particular de planta  $\mathcal{G}$  (4.1) em que  $E_{zi} = 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  e para controladores  $\mathcal{C}$  (4.2) estritamente próprios, i.e. com  $D_{ci} = 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . O Princípio da Separação demonstrado em (Costa & Tuesta 2004) indica que é possível resolver o problema (4.6) projetando dois sistemas independentes e interligando a saída de uma à entrada de outro. O primeiro é um filtro ótimo  $\mathcal{H}_2$  que estima o estado  $x(k)$  da planta a partir de sua saída  $y(k)$ . O segundo é um controlador ótimo  $\mathcal{H}_2$  por realimentação de estado, projetado sob a hipótese de que *o estado  $x(k)$  estaria disponível para realimentação*. Embora esta última hipótese não seja verdadeira, o Princípio da Separação garante que realimentando o sistema com o estado *estimado* pelo filtro ótimo através dos ganhos do controlador obtemos a menor norma  $\mathcal{H}_2$  possível para o sistema em malha fechada  $\mathcal{G}_c$ . Naturalmente, para uma planta e um controlador com as características expostas acima, tanto o projeto proposto por (Costa & Tuesta 2004) como aquele do problema (4.34) devem produzir o mesmo resultado. Contudo, alertamos que o projeto ora proposto é mais geral ao permitir tratar casos em que o valor da norma não é ótimo, mas limitado a um certo valor pré-estabelecido, bem como obter controladores próprios.

Finalmente, é interessante notar que a norma de pior caso (2.31) pode ser tratada sem dificuldades adicionais. De fato, por dualidade, a convexidade do problema de projeto primal (4.34) nos permite concluir que

$$\max_{\mu \in \Lambda} \inf_{\mathcal{X} \in \Omega} \sum_{i=1}^N \mu_i \text{tr}(W_i) = \inf_{\sigma, \mathcal{X} \in \Omega} \{\sigma : \text{tr}(W_i) < \sigma\} \quad (4.35)$$

deixando claro que o lado direito de (4.35) calcula o controlador ótimo dependente do modo associado à norma de pior caso.

**Exemplo 4.1** Retomamos o sistema massa-mola já explorado no Exemplo 3.5. O objetivo é controlar a posição e a velocidade da segunda massa a partir da aplicação de uma força horizontal. Assumimos que a posição e a velocidade da primeira massa são medidas e estão disponíveis para o controlador através de um canal markoviano que pode ou não inserir erro a cada pacote de informação transmitido. Mantivemos a premissa de que o protocolo de transmissão de dados permite identificar pacotes defeituosos, que neste caso seriam descartados pelo controlador. A força é aplicada diretamente na massa, não sendo afetada pelos eventuais erros de transmissão.

A probabilidade de um pacote correto ser recebido imediatamente depois de um pacote também correto é dada por  $p_{R,R}$ , enquanto a probabilidade de um pacote ruim ser recebido depois de outro pacote ruim é dada por  $p_{L,L}$ . Logo, a razão entre o tamanho médio de seqüências

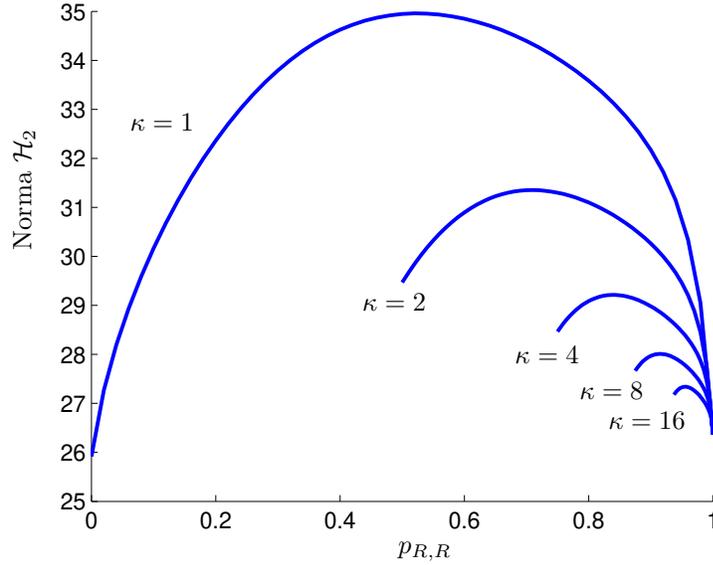


Figura 4.2: Norma  $\mathcal{H}_2$  em função de  $p_{R,R}$  para diferentes valores de  $\kappa$

de pacotes corretos e defeituosos é dada por<sup>3</sup>

$$\kappa = \frac{1 - p_{L,L}}{1 - p_{R,R}} \quad (4.36)$$

Como  $p_{L,L}$  e  $p_{R,R}$  são probabilidades, para cada valor fixo de  $\kappa$ , devemos ter  $1 - \kappa^{-1} \leq p_{R,R} \leq 1$  e  $p_{L,L} = (1 - \kappa) + \kappa p_{R,R}$ . Em aplicações práticas, podemos esperar que ambas as probabilidades  $p_{R,R}$  e  $p_{L,L}$  sejam altas, além de  $p_{R,R} > p_{L,L}$ , o que implicaria naturalmente em  $\kappa > 1$ .

Considerando  $\mu_1 = 0$  e  $\mu_2 = 1$ , ou seja, o modo inicial corresponde à transmissão sem falhas, projetamos os controladores  $\mathcal{H}_2$  dependentes do modo para um intervalo de diferentes valores de  $p_{R,R}$  e a Figura 4.2 mostra a norma  $\mathcal{H}_2$  gerada pela solução ótima de (4.34) para  $\kappa \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$ . Observe que para qualquer valor de  $p_{R,R}$  a norma  $\mathcal{H}_2$  mínima é menor a medida que  $\kappa$  aumenta. Além disso, para um mesmo valor de  $\kappa$  e valores pequenos de  $p_{R,R}$ , ocorre um aumento na norma mínima para um aumento de  $p_{R,R}$ , o que pode causar estranheza à primeira vista, pois indicaria um pior desempenho para uma maior probabilidade de sucesso na transmissão. Entretanto, isso pode ser explicado pela equação (4.36) pois para manter  $\kappa$  constante a probabilidade  $p_{L,L}$  também tem que aumentar. ♦

<sup>3</sup>Uma discussão maior a respeito das hipóteses com relação ao cálculo de (4.36) está no Apêndice B.

### 4.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ com disponibilidade do modo

Nesta seção tratamos o problema de controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$ . Conectando o controlador linear de ordem completa  $\mathcal{C}$  como definido em (4.2) ao sistema em malha aberta  $\mathcal{G}$ , o problema pode ser formulado como  $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \inf \gamma$  com relação a  $\gamma \in \mathbb{R}$  e às variáveis matriciais  $\tilde{P}_i$ ,  $A_{ci}$ ,  $B_{ci}$ ,  $C_{ci}$  e  $D_{ci}$  satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \gamma I & \bullet & \bullet \\ \tilde{A}_i & \tilde{J}_i & \tilde{P}_{pi}^{-1} & \bullet \\ \tilde{C}_i & \tilde{E}_i & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.37)$$

com matrizes do sistema em malha fechada dadas por (4.4) e (4.5) e  $\tilde{P}_i$  particionada de acordo com (4.7) para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Comparando com o caso de controle  $\mathcal{H}_2$  dependente do modo analisado na seção anterior, o leitor pode verificar facilmente que a mesma estratégia de mudança de variáveis funciona no presente contexto e pode ser resumida no próximo teorema.

**Teorema 4.4** *Existe um controlador dinâmico linear por realimentação de saída na forma (4.2) tal que  $\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 < \gamma$  se e somente se existirem matrizes simétricas  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_{ij}$  e matrizes  $M_i$ ,  $L_i$ ,  $F_i$ ,  $K_i$ ,  $H_i$  de dimensões compatíveis tais que as LMIs*

$$\begin{bmatrix} Y_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ I & X_i & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \gamma I & \bullet & \bullet & \bullet \\ A_i Y_i + B_i L_i & A_i + B_i K_i C_{yi} & J_i + B_i K_i E_{yi} & H_i + H'_i - Z_{pi} & \bullet & \bullet \\ M_i & X_{pi} A_i + F_i C_{yi} & X_{pi} J_i + F_i E_{yi} & I & X_{pi} & \bullet \\ C_{zi} Y_i + D_{zi} L_i & C_{zi} + D_{zi} K_i C_{yi} & E_{zi} + D_{zi} K_i E_{yi} & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0 \quad (4.38)$$

e

$$\begin{bmatrix} Z_{ij} & \bullet \\ H_i & Y_j \end{bmatrix} > 0 \quad (4.39)$$

sejam satisfeitas para todo  $i, j \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Além disso, sempre que (4.38)-(4.39) forem satisfeitas, uma solução de (4.37) é dada por (4.16) com  $U_i = Y_i^{-1} - X_i$  e  $V_i = Y_i$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

**Prova:** A prova segue argumentos e relações matemáticas similares aqueles já usados nas provas dos Lemas 4.1 e 4.2, sendo portanto omitida.  $\square$

Levando em conta apenas as restrições (4.20), (4.30) e (4.31) para o caso  $\mathcal{H}_2$  e as restrições (4.38), (4.39) para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , aparentemente seria possível tratar os casos de incertezas po-

litópicas nas matrizes da planta  $\mathcal{G}$  ou na matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$ , pois as LMIs citadas são lineares em relação aos dois conjuntos de parâmetros. Entretanto, chamamos a atenção novamente para a mudança de variáveis (4.16), que depende tanto das matrizes da planta quanto das probabilidades de transição, impossibilitando as duas abordagens que exploramos para o caso de filtragem no Capítulo 3.

Definindo o conjunto de variáveis matriciais  $\mathcal{Y} = (X_i, Y_i, Z_{ij}, M_i, F_i, L_i, K_i, H_i)$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  e o conjunto convexo  $\Xi$  de todas as soluções possíveis para as LMIs (4.38) e (4.39), a solução ótima do problema  $\mathcal{H}_\infty$  é dada por

$$\|\mathcal{G}_c\|_\infty^2 = \inf_{\gamma, \mathcal{Y} \in \Xi} \gamma \quad (4.40)$$

Logo, como no caso da norma  $\mathcal{H}_2$ , o projeto do controlador dinâmico por realimentação de saída com disponibilidade do modo foi convertido em um problema de programação convexa expresso em termos de LMIs.

O resultado do Teorema 4.4 supera os resultados anteriores da literatura que tratam da mesma classe de projeto de controladores, (Seiler & Sengupta 2005) e (Xiao et al. 2000). Primeiramente, ao contrário de (Seiler & Sengupta 2005) onde se impõe uma estrutura bastante restritiva para a matriz de probabilidades de transição, a saber  $p_{ij} = p_j$  para todo  $(i, j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  e somente se considera controladores estritamente próprios, não fazemos qualquer hipótese a respeito da matriz de probabilidades de transição e projetamos controladores próprios, que são um caso mais geral. Mais ainda, comparando com (Xiao et al. 2000) onde é apresentado um método iterativo para resolver desigualdades matriciais bilineares, aqui é possível resolver o problema em um único passo usando algum pacote computacional que lide com LMIs. Dessa maneira, acreditamos que a forma geral de calcular um controlador ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída aqui exposta seja inédita na literatura. Em face do exposto em (Costa & Tuesta 2004) para o caso  $\mathcal{H}_2$ , talvez seja possível representar o controlador ótimo usando o Princípio da Separação, permitindo assim projetá-lo como a conexão entre um estimador de estado e um controlador por realimentação de estado, ambos calculados para o valor ótimo da norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Exemplo 4.2** Consideramos novamente o conjunto de dados usado no Exemplo 4.1, agora para comparar a performance de controladores próprios e estritamente próprios. O problema de realimentação de saída  $\mathcal{H}_\infty$  (4.40) foi resolvido para demonstrar o ganho de desempenho ao se permitir que o controlador assuma a forma própria em vez da forma estritamente própria ( $D_{ci} = 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ ). A Figura 4.3 mostra a razão entre o desempenho produzido por controladores próprios e estritamente próprios que otimizam a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Como podemos ver, a melhoria é mais expressiva para valores maiores de  $\kappa$ , i.e. redes em que a média do tamanho das seqüências

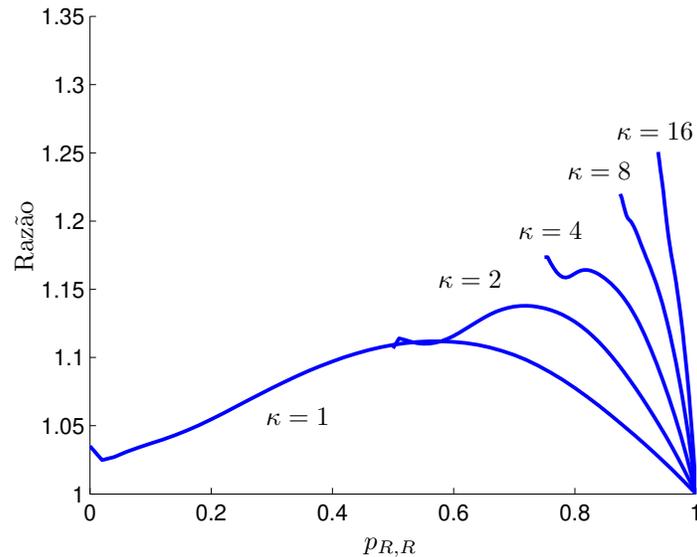


Figura 4.3: Razão entre normas  $\mathcal{H}_\infty$  para controladores próprios e estritamente próprios

corretas é muito maior que a média do tamanho das seqüências erradas. Quando  $p_{R,R}$  e  $p_{L,L}$  aproximam-se da unidade, o controlador ótimo torna-se estritamente próprio.  $\blacklozenge$

## 4.4 Considerações finais

Este capítulo apresentou os resultados principais desta tese. Nosso objetivo era parametrizar todos os controladores lineares próprios dependentes do modo na forma (4.2) com o uso de programação convexa e restrições na forma de LMIs de forma a manter as normas  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada abaixo de um valor pré-especificado. Este resultado foi atingido inteiramente nos Teoremas 4.3 e 4.4, sem fazer restrições sobre a planta, como  $E_{zi} = 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ ; sobre o controlador, como  $D_{ci} = 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ ; ou sobre a matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$ . Podemos utilizar os resultados obtidos tanto para projetar o controlador linear ótimo global para os problemas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , vide problemas (4.34) e (4.40), quanto para obter controladores que devam respeitar algumas limitações adicionais. Neste último caso, seria necessário adicionar ao problema novas LMIs que representem as restrições extras.



# Capítulo 5

## Aplicações

Neste capítulo pretendemos explorar a aplicação dos conceitos desenvolvidos até aqui, chamando a atenção para certos aspectos dos resultados, diferentemente do que fazemos para os exemplos dos capítulos anteriores, cuja finalidade é de ilustração e comparação com a literatura corrente.

Os MJLS têm uma vasta possibilidade de aplicações em campos muito diversos, alguns deles já citados como o controle de plantas através de redes de comunicação, controle de sistemas macroeconômicos e o controle de plantas dependentes de variáveis climáticas, como a captação de energia solar. Para o projeto de filtros, comparamos a performance de um filtro que leva em conta as probabilidades de transição entre dois modos definidos por matrizes dinâmicas diferentes, com o filtro robusto em relação a combinação convexa dessas matrizes. Para a síntese de controle, abordamos um caso em que se leva em conta no projeto do controlador o modelo estatístico das falhas nos atuadores, além de um exemplo em que os MJLS servem à modelagem de redes de comunicação, pois entendemos que esta é uma área promissora na pesquisa com grandes perspectivas de aplicação.

A idéia principal por trás dos exemplos escolhidos é ilustrar como é possível reduzir o conservadorismo na solução dos problemas em que parâmetros podem assumir diferentes valores. Como discutido em (Boyarsky & Shaked 2005), a abordagem robusta tradicional exige que o filtro ou controlador garanta um desempenho adequado para todos os pontos no interior do conjunto convexo definido pelos valores dos parâmetros, enquanto a abordagem estocástica permite que se concentre esforços nos valores com maior probabilidade de ocorrência dentro do intervalo. Portanto, ao lançar mão de modelos estocásticos, especialmente o de cadeia de Markov, é possível obter uma melhor performance em média, ainda que não haja garantia de que a variável que se deseja minimizar ficará sempre abaixo do valor pré-estabelecido.

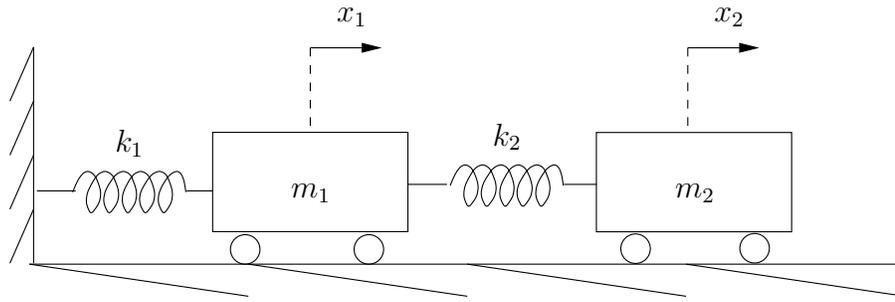


Figura 5.1: Sistema massa-mola

## 5.1 Filtragem de sistema com saltos comparada à filtragem robusta

Considere o sistema massa-mola usado em (Geromel & de Oliveira 2001) para o cálculo de um filtro robusto  $\mathcal{H}_2$ . O sistema é formado por dois carros conectados através de molas como na Figura 5.1, onde  $x_1$  e  $x_2$  são as posições de cada centro de massa,  $m_1$  e  $m_2$  são as massas de cada um dos carros e  $k_1$  e  $k_2$  são os coeficientes de elasticidade das molas. O parâmetro incerto é o coeficiente de atrito viscoso  $c$  dos carros com o ar. O estado do sistema é definido por  $x(t) = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]'$  e a entrada  $w(t)$  é uma perturbação na velocidade e na medida de posição do primeiro carro. O objetivo do filtro é estimar a posição do carro 2 a partir da posição do carro 1. Para os valores numéricos  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0,5$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ , a modelagem do sistema contínuo no espaço de estados é dada por

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} A & J \\ \hline C_y & E_y \\ C_z & E_z \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -c & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2c & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.1)$$

O sistema apresenta dois valores possíveis para o atrito viscoso com o ar:  $c_1 = 0,5$  e  $c_2 = 3,5$ , que são os valores dos extremos indicados em (Geromel & de Oliveira 2001). Para cada um destes valores, discretizamos o modelo (5.1) com taxa de amostragem  $T_s = 0,0372$ , um quarto da menor constante de tempo envolvida e segurador de ordem zero. A Figura 5.2 mostra a resposta

ao degrau do sistema contínuo e do sistema discretizado para cada modo de operação e podemos verificar o quanto as dinâmicas são diferentes entre si. Note que os valores numéricos foram escolhidos para este exemplo com a finalidade de gerar tal diferença entre os sub-sistemas e não representam valores físicos.

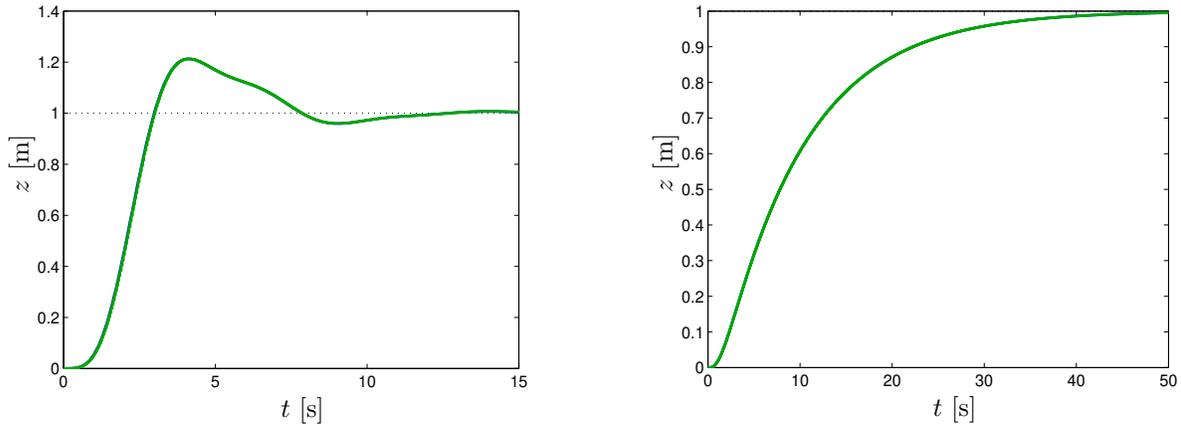


Figura 5.2: Resposta ao degrau dos sistemas descritos por (5.1)

Vamos considerar dois problemas aparentemente distintos, mas que são na prática equivalentes. O primeiro deles é o projeto de um filtro independente do modo para um MJLS com dois modos, cada um deles dado pela discretização de (5.1) com coeficiente de atrito viscoso  $c_1$  ou  $c_2$ . O segundo é o projeto de um filtro robusto para a planta cuja representação de estado pertence a um polítopo convexo com dois vértices conhecidos, a saber, a discretização de (5.1) para cada um dos valores  $c_1$  e  $c_2$ . No primeiro caso o sistema apresenta saltos entre dois modos distintos, enquanto no segundo ele é determinístico, porém incerto.

Para obter um filtro independente do modo no primeiro problema, vamos impor que  $\tilde{P}_i = \tilde{P}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$  em (3.7) e (3.8). Como a soma das probabilidades em cada linha de  $\mathbb{P}$  é unitária, temos

$$\tilde{P}_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tilde{P}_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} \tilde{P} = \tilde{P} \quad (5.2)$$

para todo  $i \in \mathbb{K}$ .

Note que a imposição da restrição sobre as variáveis de Lyapunov para o MJLS com dois modos torna a solução do problema (3.6) equivalente à obtenção do filtro robusto para o segundo problema. Mais ainda, a equivalência existe para qualquer matriz de probabilidades de transição  $\mathbb{P}$ . Em outras palavras, o projeto de filtro robusto pode ser entendido como o de um filtro independente do modo para um MJLS cujos modos são os extremos do polítopo que contém o

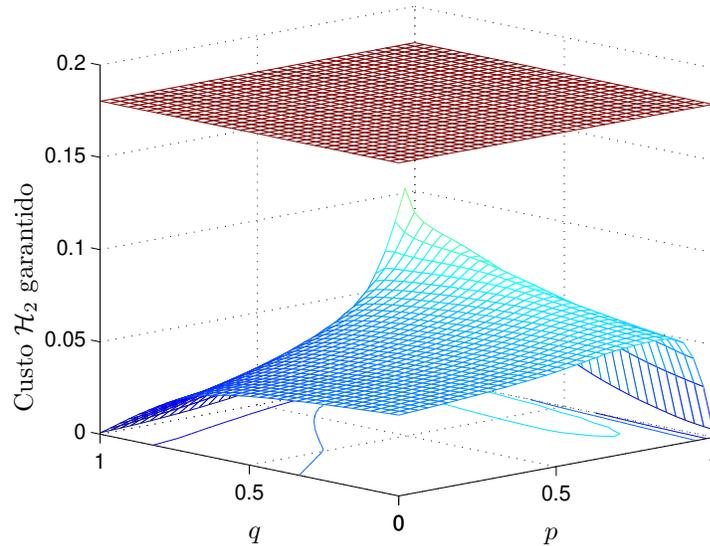


Figura 5.3: Custo  $\mathcal{H}_2$  garantido para diferentes probabilidades de transição

sistema incerto, desde que se imponha a restrição adicional  $\tilde{P}_i = \tilde{P}$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ . Assim, é possível comparar o custo garantido  $\mathcal{H}_2$  obtido para o filtro robusto com aquele obtido pelo filtro MJLS projetado de acordo com o exposto na Seção 3.1.2, pois podemos interpretar ambos os projetos como sendo de filtros independentes do modo para MJLS. Vale ressaltar que o filtro que estamos chamando robusto, não é robusto com relação ao parâmetro  $c \in [0,5, 3,5]$ , uma vez que os modelos das plantas deixam de ser lineares neste parâmetro após a discretização.

A comparação entre os custos garantidos para os dois tipos de filtros foi feita para um intervalo de valores de probabilidades de transição dados por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

e os resultados estão na Figura 5.3, onde vemos um plano horizontal que representa o valor para o custo garantido do filtro robusto, constante para todas as probabilidades de transição possíveis, e abaixo temos o valor do custo garantido para o filtro independente de modo projetado conforme indicado na Seção 3.1.2 e variando de acordo com as probabilidades de transição.

É interessante notar que neste caso estamos comparando dois modelos sub-ótimos: um modelo robusto em relação às matrizes dinâmicas dadas pela combinação convexa de dois vértices; e o

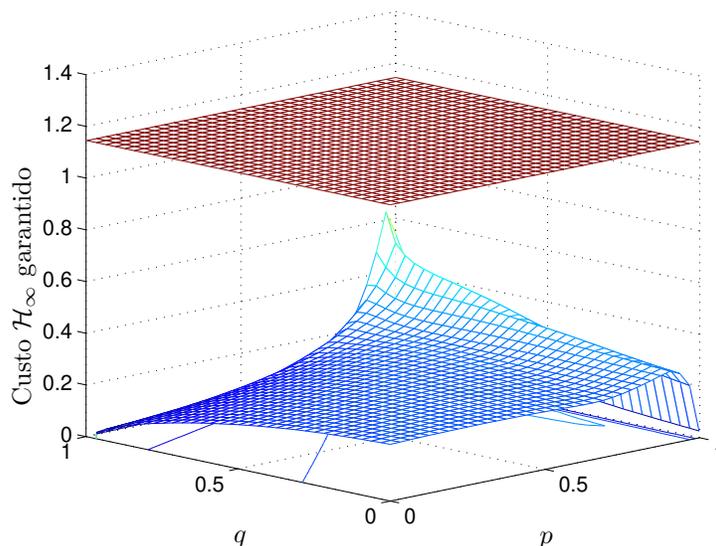


Figura 5.4: Custo  $\mathcal{H}_\infty$  garantido para diferentes probabilidades de transição

sistema com saltos markovianos entre tais matrizes, independente do modo. É possível perceber que a diferença entre os custos garantidos  $\mathcal{H}_2$  é maior que 40 % do valor obtido para a filtragem robusta, o que ilustra as enormes vantagens de se considerar as probabilidades de transição ao projetar um filtro robusto em relação a um parâmetro, ainda no caso pouco favorável de indisponibilidade do modo.

De forma análoga, para o caso  $\mathcal{H}_\infty$ , fizemos a mesma comparação entre o filtro robusto em relação à variação da matriz dinâmica dentro do conjunto convexo e o filtro com saltos markovianos independente do modo. O resultado está na Figura 5.4, onde o custo garantido para o filtro robusto é um valor constante em relação às probabilidades de transição e abaixo vemos a curva com os valores dos custos garantidos calculados pelo projeto de filtro da Seção 3.2.2. Insistimos que neste caso não foi considerado o melhor cenário possível em relação ao sistema com saltos, pois assumimos a hipótese de indisponibilidade do modo. Ainda assim, podemos perceber que a diferença entre os custos garantidos é maior que 50 % do custo garantido para filtro robusto, para todos os valores possíveis de probabilidade de transição.

Entendemos que estes exemplos ilustram o quanto pode ser vantajoso modelar um parâmetro incerto a partir de um modelo probabilístico em oposição a uma abordagem robusta tradicional. Enquanto no projeto de um filtro robusto se faz necessário garantir desempenho para toda a faixa de valores do parâmetro incerto, em um modelo como o de saltos markovianos, o projeto

é otimizado em função dos valores mais prováveis do parâmetro, permitindo obter um valor esperado menor para a função objetivo.

## 5.2 Controle de sistemas sujeitos a falhas nos atuadores

Uma possível aplicação para a modelagem descrita nesta tese é para o controle de plantas que podem apresentar falhas em sensores ou atuadores. Pode ser um requisito de projeto que um determinado desempenho seja atingido mesmo com a ocorrência de falhas. Neste caso, se for possível modelar as falhas como uma cadeia de Markov com probabilidades de transição entre os modos conhecida, é natural pensar na síntese de controlador como indicado no Capítulo 4. Mais ainda, o conhecimento do modo atual por parte do controlador é uma hipótese de apelo prático para tais sistemas, uma vez que é razoável imaginar que um sensor pode identificar o estado do atuador e informar esta variável ao controlador.

Considere um sistema massa-mola como representado pela Figura 5.1. Nosso objetivo é controlar a posição  $x_2$  aplicando uma força  $F$  no carro 2. Para tal fim, o controlador contará apenas com a medida da posição  $x_1$ . Os dados numéricos são parecidos com aqueles usados na seção anterior, mas para nos concentrarmos somente no aspecto de falha no atuador, vamos considerar a matriz dinâmica constante, com o valor do atrito viscoso dos carros com o ar dado por  $c = 2$ . Além disso, separamos a entrada em  $w = [w_1 \ w_2]'$ , onde  $w_1$  é uma entrada impulsiva utilizada para modelar a condição inicial de velocidade  $\dot{x}_1(0) = 1$  e  $w_2$  é o ruído de medida. Como o modo indica uma falha no atuador, a maior parte das matrizes do espaço de estado não dependem do modo, assumindo os valores

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}, & J_1 = J_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C_{y1} = C_{y2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{y1} = E_{y2} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C_{z1} = C_{z2} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_{z1} = D_{z2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e, de fato, a única matriz que apresenta alteração de acordo com o modo do sistema é a matriz  $B_i$  que pode assumir os valores

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}', \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$$

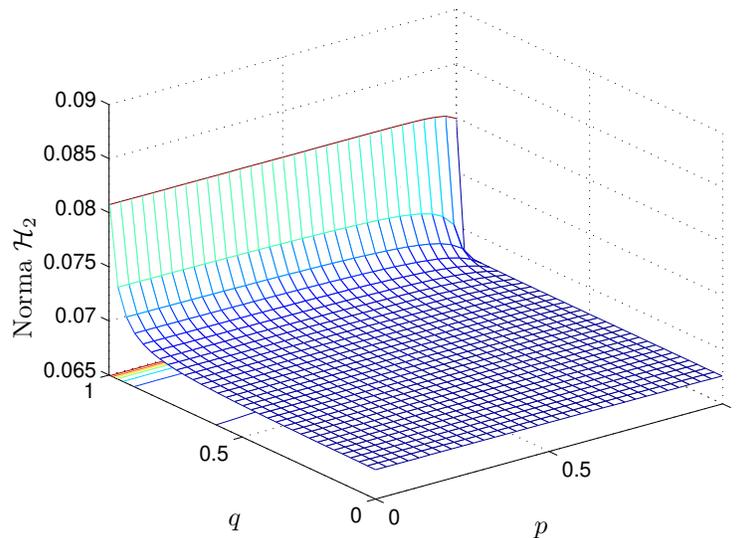


Figura 5.5: Norma  $\mathcal{H}_2$  para diferentes probabilidades de transição

onde o modo 1 representa operação normal e o modo 2 representa uma falha no atuador, que neste caso deixa de aplicar força ao sistema. Consideramos uma taxa de amostragem de  $T_s = 0,0712$ , que é um quarto da menor constante de tempo envolvida.

A Figura 5.5 mostra o valor da norma  $\mathcal{H}_2$  alcançada pelo controlador para diferentes valores de probabilidades de transição dadas por (5.3). Observe que o valor da norma  $\mathcal{H}_2$  aumenta para probabilidade de erro no atuador  $q$  crescente, indicando queda no desempenho. Com relação ao parâmetro  $p$ , notamos dois comportamentos para a variação da norma. Para valores altos de  $q$ , ou seja, probabilidade alta de um erro no atuador se repetir no próximo período de amostragem, um aumento na probabilidade de acerto  $p$  implica em desempenho melhor. Já para valores mais baixos de  $q$ , ou seja, um erro no atuador tem probabilidade pequena de se repetir, a variação em  $p$  não implica em diminuição da norma  $\mathcal{H}_2$ . Creditamos este último fato à inércia do sistema, isto é, se há força sendo aplicada (fato garantido por  $q$  pequeno), seja ela de forma intermitente (valor pequeno para  $p$ ), seja por períodos consecutivos (valor alto para  $p$ ), o efeito sobre o desempenho do sistema é o mesmo, pois o período de amostragem é pequeno em relação às constantes de tempo envolvidas.

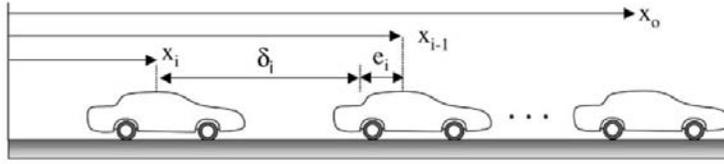


Figura 5.6: Fila de veículos seguindo trajetória do líder

### 5.3 Controle de uma fila de veículos através da rede

Considere o problema de um fila de veículos seguindo um veículo líder conforme descrito em (Seiler & Sengupta 2005) e representado graficamente na Figura 5.6. Seja  $x_0$  a posição do líder e  $x_i$  a posição do  $i$ -ésimo seguidor. A trajetória de referência para o veículo líder é representada por  $r_0$  e o erro de seguimento para o veículo líder é dado por  $e_0 = r_0 - x_0$ . O erro de espaçamento dos outros veículos são dados por  $e_i = x_{i-1} - x_i - \delta_i$  onde  $\delta_i$  é o espaçamento desejado. O objetivo de controle é forçar todos os erros de seguimento  $e_i$  para zero, através das entradas de controle  $u_i$  correspondentes ao sinal de aceleração do  $i$ -ésimo seguidor.

Ainda de acordo com (Seiler & Sengupta 2005), mesmo que o comportamento dinâmico de um veículo seja não-linear, o uso de um esquema de controle em dois níveis (Hedrick, M.Tomikuza & Varaiya 1994) permite considerarmos como razoável um modelo linear de terceira ordem para a dinâmica de cada veículo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ v_i(t) \\ a_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i(t) \\ v_i(t) \\ a_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} u_i(t) \quad (5.4)$$

onde  $x_i(t)$ ,  $v_i(t)$  e  $a_i(t)$  são a posição, a velocidade, a aceleração do  $i$ -ésimo veículo e  $\tau$  é a constante de tempo para o sistema de primeira ordem que modela a aceleração.

Assumimos que a medição usada para controlar o sistema é transmitida por uma rede sem fio usando um protocolo que permita detectar mas não corrigir os pacotes defeituosos. A cada instante de amostragem, os veículos comunicam suas medidas de posição, velocidade e aceleração para a rede. Se o pacote recebido estiver corrompido, o controlador o descarta e aguarda o próximo pacote. Também assumimos que todas as medições dos veículos são recebidas perfeitamente ou corrompidas e que portanto a cadeia de Markov tem dois modos  $\{L, R\}$  para pacotes perdidos e recebidos, respectivamente. A estatística da rede é conhecida, de tal forma que tanto a probabilidade de um pacote correto ser recebido depois de outro pacote é dada por  $p_{R,R}$  e a probabilidade de um pacote ser perdido por erro depois de outro pacote defeituoso é dada por

$p_{L,L}$ . Os dados comunicados para a rede são modelados como

$$\hat{y}_c(k) = \begin{cases} y_c(k) & \text{se } \theta(k) = R \\ \emptyset & \text{se } \theta(k) = L \end{cases} \quad (5.5)$$

onde  $\emptyset$  representa um pacote de informação corrompido e  $y_c$  é o vetor de medidas disponível para realimentação. Todos os carros da fila tem sensores embarcados para capturar os medidas de seu próprio movimento. Essas medidas são representadas por  $y_o$ , o que leva à seguinte saída disponível ao controlador em cada instante de tempo

$$y(k) := \begin{bmatrix} y_o(k) \\ \hat{y}_c(k) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Para este projeto consideramos dois carros. O estado do sistema é dado pela posição, velocidade e aceleração de cada um dos veículos em cada instante de tempo discreto  $k \in \mathbb{N}$ , ou seja  $x(k) = [x_0(k) \ v_0(k) \ a_0(k) \ x_1(k) \ v_1(k) \ a_1(k)]' \in \mathbb{R}^6$  e a entrada é dada por  $w(k) = [u_0(k) \ d_1(k) \ \eta_0(k)]' \in \mathbb{R}^3$ , onde  $u_0(k)$  é o sinal de referência para a aceleração do veículo líder,  $d_1(k)$  é uma perturbação na posição do veículo seguidor e  $\eta_0(k) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\eta_1(k) \in \mathbb{R}^3$  são os ruídos aditivos da medida do estado de cada carro. Em termos do sistema (4.1) temos

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ 0 & A_d \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \end{bmatrix} u_1(k) + \begin{bmatrix} B_d & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_d B_d & 0 \end{bmatrix} w(k) \quad (5.7)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_u \end{bmatrix} u_1(k) \quad (5.8)$$

$$y(k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_n I & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_n I \end{bmatrix} w(k) & \text{se } \theta(k) = R \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_n I \end{bmatrix} w(k) & \text{se } \theta(k) = L \end{cases} \quad (5.9)$$

Em (5.7),  $A_d$  e  $B_d$  representam as matrizes resultantes da discretização do modelo dinâmico (5.4) com segurador de ordem zero na entrada e período de amostragem  $T_s = 20$  [ms]. Consideramos neste exemplo que a dinâmica dos dois veículos é idêntica, com  $\tau = 100$  [ms], mas também seria possível considerar dinâmicas diferentes para cada veículo. Além disso, foi considerado um fator de escala  $\epsilon_d = 0,1$  para a perturbação  $d_1(k)$ . Em (5.8) temos a definição da variável a ser controlada  $z(k) = [e_1(k) \ u_1(k)]'$  que penaliza o erro de seguimento e o esforço de controle, cujo

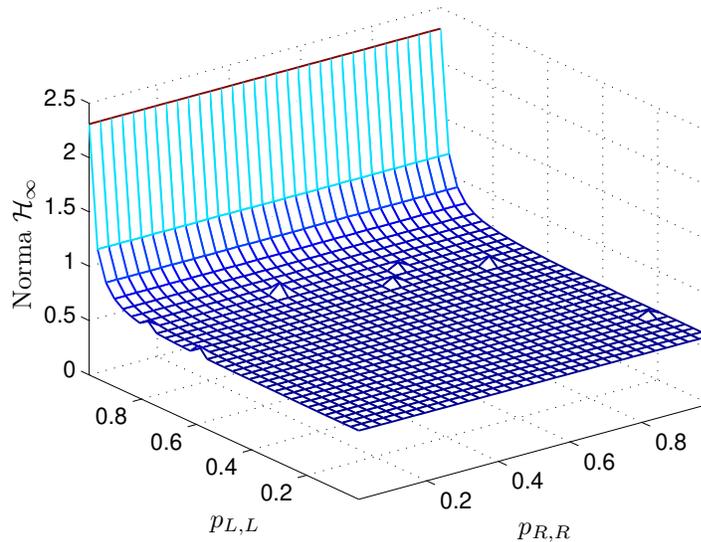


Figura 5.7: Norma  $\mathcal{H}_\infty$  em função da taxa de perda de pacotes

peso relativo é  $\epsilon_u = 1,0$ . A equação (5.9) traz o valor das medidas que realimentam o controlador, onde usamos o fator de escala para os ruídos de medida  $\epsilon_n = 0,1$  e também verificamos que não há transmissão das medidas do veículo líder quando ocorre perda de pacotes na rede. Os dados numéricos utilizados são os mesmos de (Seiler & Sengupta 2005).

A diferença importante com relação à abordagem proposta em (Seiler & Sengupta 2005) é que somos capazes de calcular o controlador linear ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  associado a qualquer valor de matriz de probabilidades de transição, e não apenas aquelas que satisfazem  $p_{R,R} = 1 - p_{L,L}$ . A Figura 5.7 mostra o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema controlado para todos os valores possíveis de taxas de perda de pacotes.

É interessante notar, ainda que contra-intuitivo, que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  não muda muito com relação a  $p_{R,R}$  para  $p_{L,L}$  dado. Contudo, se forem escolhidos dois pontos diferentes na Figura 5.7 com diferentes valores de  $p_{R,R}$  para um mesmo valor de  $p_{L,L}$ , ainda que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  seja a mesma, o controlador projetado é geralmente diferente. Isto não pode ser conseguido com o projeto proposto por (Seiler & Sengupta 2005) porque ele só pode ser calculado para redes tais que  $p_{L,L} = 1 - p_{R,R}$ . A Figura 5.7 mostra alguns picos que de acordo com nossa investigação devem-se a imprecisão numérica.

Finalmente, comparamos o controlador linear com saltos markovianos aqui proposto com o controlador clássico  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída para sistemas LTI. Para ambos sistemas,

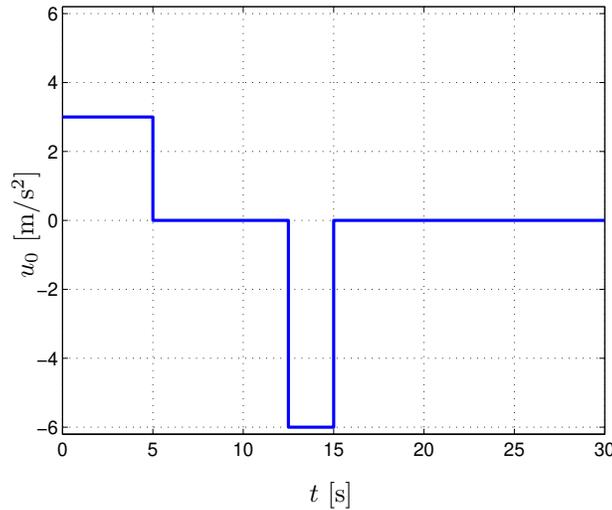


Figura 5.8: Aceleração do veículo líder

fizemos uma simulação de Monte Carlo com  $5 \times 10^3$  iterações. Usamos a seguinte matriz de probabilidades de transição tanto para o projeto quanto para a simulação posterior

$$\begin{bmatrix} p_{L,L} & p_{L,R} \\ p_{R,L} & p_{R,R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,92 & 0,08 \\ 0,02 & 0,98 \end{bmatrix}$$

correspondendo a um razão entre tamanho médio de seqüências certas e erradas  $\kappa = 4$ . Calculamos a entrada de forma a forçar que o veículo líder comece o movimento com aceleração constante de  $3 \text{ [m/s}^2\text{]}$  durante 5 segundos, velocidade constante pelos próximos  $7,5 \text{ [s]}$ , frenagem com aceleração de  $-6 \text{ [m/s}^2\text{]}$  pelos  $2,5 \text{ [s]}$  seguintes e aceleração nula deste ponto em diante, como ilustra a Figura 5.8.

Em cada iteração, calculamos a trajetória do custo quadrático  $z(t)'z(t)$ , tanto para o sistema conectado ao controlador linear com saltos markovianos quanto para o sistema conectado ao controlador clássico  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas LTI. A Figura 5.9 mostra a estimativa para o valor esperado de  $z(t)'z(t)$  a partir das  $5 \times 10^3$  realizações de Monte Carlo contra  $t = kT_s$  para  $k \in [0, 1,5 \times 10^3]$ , onde é evidente o melhor desempenho do controlador markoviano (linha sólida) quando comparado ao controlador clássico  $\mathcal{H}_\infty$  (linha tracejada), o qual não leva em conta as estatísticas de falha da rede em seu projeto.

É interessante observar que não é somente em relação ao valor esperado de  $z(t)'z(t)$  que o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  markoviano apresenta desempenho melhor que o controlador clássico. Este fato está ilustrado na Figura 5.10 onde, além do valor esperado da trajetória de  $z(t)'z(t)$ , também mostramos as trajetórias somadas e subtraídas de um desvio padrão. Nota-se perfeitamente que o

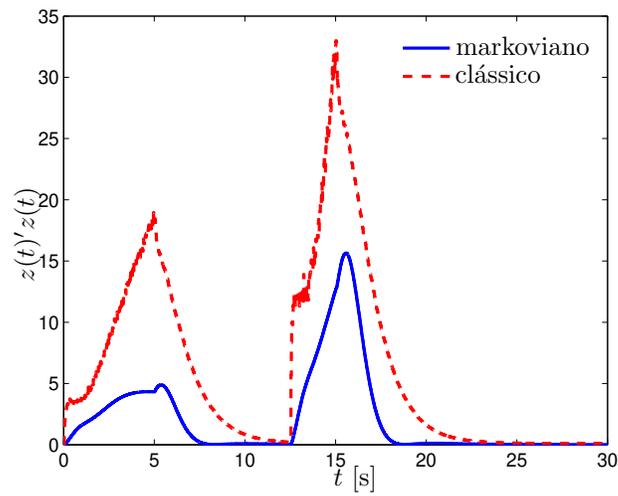


Figura 5.9: Custo quadrático para controladores  $\mathcal{H}_\infty$  clássico e markoviano

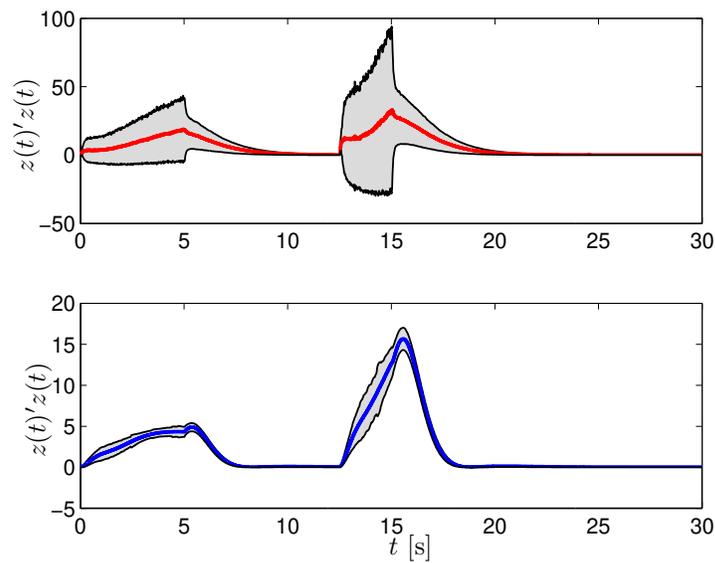


Figura 5.10: Média e desvio padrão para controladores  $\mathcal{H}_\infty$  clássico e markoviano

desvio padrão associado ao controlador linear com saltos markovianos é sensivelmente menor que o valor médio correspondente para todo tempo no intervalo considerado. O mesmo não ocorre para o controlador clássico  $\mathcal{H}_\infty$  cujo desvio padrão, em determinados instantes de tempo, excede o valor esperado. Nota-se ainda que o desvio padrão em relação à trajetória média aumenta nos instantes em que o controle deve ser mais efetivo, devido ao fato que a aceleração de referência torna-se não nula.

Este exemplo mostra a necessidade do emprego de controladores lineares markovianos para esta classe de sistemas dinâmicos controlados através de uma rede de comunicação, pois o uso de controladores determinísticos pode ser totalmente inviável.



# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Apresentamos a seguir um resumo do que consideramos as principais contribuições deste trabalho, além dos tópicos que mereceriam atenção em pesquisas futuras.

O problema de filtragem foi tratado como uma preparação para o caso mais complexo de síntese de controle por realimentação de saída através de LMIs, e também como forma de apresentar resultados mais recentes que não puderam ser incluídos em (Fioravanti 2007). A parametrização de todos os filtros lineares próprios e dependentes do modo, tais que as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  estejam limitadas a um valor pré-estabelecido, foi atingida usando transformações semelhantes às usadas para o projeto do controlador. Quanto às extensões, este trabalho inclui sistemas em que o modo é parcialmente disponível, como já abordado em (do Val et al. 2002) e (Gonçalves 2006) no contexto de realimentação de estado e também o caso de incertezas paramétricas na matriz de probabilidades de transição. De fato, com a formulação obtida é possível incluir as duas extensões dentro de um mesmo projeto.

A síntese de controlador por realimentação de saída com o uso de LMIs também foi obtida, tanto no caso  $\mathcal{H}_2$  quanto no caso  $\mathcal{H}_\infty$ . A formulação é bastante geral, parametrizando todos os controladores lineares, próprios e dependentes do modo tais que alguma das normas esteja limitada por um valor pré-especificado. Naturalmente, a minimização daquele valor leva à solução ótima para ambos os problemas sem a necessidade de se adotar qualquer restrição acerca da estrutura na matriz de probabilidades de transição. As possibilidades de aplicação dos controladores obtidos aqui são várias, como o caso do tratamento de perdas de pacotes em sistemas de comunicação ou o caso em que podem ocorrer falhas em sensores ou atuadores que possam ser modeladas a partir de cadeias de Markov. Nestes dois exemplos, a hipótese de que o modo de operação é conhecido a cada instante pelo controlador nos parece razoável.

Entendemos que há dois aspectos interessantes para pesquisas futuras. O primeiro deles é relacionado à obtenção do filtro baseado no modelo interno da planta para o caso em que a matriz

de probabilidades de transição não é perfeitamente conhecida. Como mostramos na Seção 3.3.2, este filtro pode ser obtido com a adição de uma restrição ao problema de obtenção de um filtro mais geral. Entretanto, exemplos numéricos parecem indicar que tal formulação tem o menor custo garantido possível, o que nos parece razoável. A demonstração formal de tal fato seria um avanço importante. Quanto ao outro tópico de pesquisa, já existe demonstração para um Princípio da Separação no caso de controle  $\mathcal{H}_2$  (Costa & Tuesta 2004). Naturalmente, tanto o controlador baseado no Princípio da Separação quanto aquele obtido com as LMIs apresentadas nesta tese terão o mesmo desempenho em termos daquela norma, mas ainda está em aberto demonstrar aquele princípio a partir de nossa formulação. Acreditamos que seria útil investir nesta direção para obter um Princípio da Separação também no caso  $\mathcal{H}_\infty$ , problema que, até onde sabemos, ainda se encontra em aberto na literatura corrente.

# Bibliografia

- Anderson, B. D. O. & Moore, J. B. (1979), *Optimal Filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Blair Jr., W. P. & Sworder, D. D. (1975), ‘Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria’, *International Journal of Control* **21**, 833–841.
- Boyarsky, S. & Shaked, U. (2005), ‘Robust  $H_\infty$  control design for best mean performance over an uncertain-parameters box’, *Systems & Control Letters* **54**, 585–595.
- Boyd, S. P., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory Design*, SIAM, Philadelphia.
- Costa, O., Fragoso, M. & Marques, R. (2005), *Discrete-Time Markov Jump Linear Systems*, Probability and Its Applications, Springer-Verlag.
- Costa, O. L. V. & do Val, J. B. R. (1996), ‘Full information  $\mathcal{H}_\infty$  control for discrete-time infinite Markov jump parameter systems’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **202**, 578–603.
- Costa, O. L. V., do Val, J. B. R. & Geromel, J. C. (1997), ‘A convex programming approach to  $H_2$  control of discrete-time markovian linear systems’, *International Journal of Control* **66**, 557–579.
- Costa, O. L. V. & Fragoso, M. D. (1993), ‘Stability Results for Discrete-Time Linear Systems with Markovian Jumping Parameters’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**, 154–178.
- Costa, O. L. V. & Guerra, S. (2002a), ‘Robust linear filtering for discrete-time hybrid Markov linear systems’, *International Journal of Control* **75**, 712–727.

- Costa, O. L. V. & Guerra, S. (2002b), ‘Stationary Filter for Linear Minimum Mean Square Error Estimator of Discrete-Time Markovian Jump Systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**, 1351–1356.
- Costa, O. L. V. & Tuesta, E. F. (2004), ‘ $H_2$ -Control and the Separation Principle for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems’, *Mathematics of Control, Signals and Systems* **16**, 320–350.
- de Farias, D. P., Geromel, J. C., do Val, J. B. R. & Costa, O. L. V. (2000), ‘Output Feedback Control of Markov Jump Linear Systems in Continuous-Time’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**, 944–949.
- de Souza, C. E. (2003), A mode-independent  $H_\infty$  filter design for discrete-time Markovian jump linear systems, in ‘Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control’, Vol. 3, pp. 2811–2816.
- de Souza, C. E. & Fragoso, M. D. (2003), ‘ $H_\infty$  filtering for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters’, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **13**, 1299–1316.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. & Gonçalves, A. P. C. (2002), ‘The  $H_2$ -control for jump linear systems: cluster observations of the Markov state’, *Automatica* **38**, 343–349.
- Elliot, E. O. (1963), ‘Estimates of error rates for codes on burst-error channels’, *Bell Systems Tech. Journal* **42**, 1977–1997.
- Fioravanti, A. R. (2007), Filtragem de sistemas discretos com parâmetros sujeitos a saltos markovianos, Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação/Unicamp.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2008a),  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  Filtering of Discrete-time Markov Jump Linear Systems through Linear Matrix Inequalities, in ‘Proceedings of the 17th IFAC World Congress’, Seoul, Coréia do Sul, pp. 2681–2686.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2008b), ‘ $H_2$  Filtering of Discrete-time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities’, *International Journal of Control* **81**, 1221–1231.
- Fioravanti, A. R., Gonçalves, A. P. C. & Geromel, J. C. (2009), Filtering of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems with Cluster Observation: An Approach to Gilbert-Elliot’s

- Network Channel, in ‘Proceedings of the European Control Conference, ECC’09’, Budapest, Hungria. Aceito para apresentação oral.
- Geromel, J. C. (1999), ‘Optimal Linear Filtering Under Parameter Uncertainty’, *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**, 168–175.
- Geromel, J. C. & de Oliveira, M. C. (2001), ‘ $H_2$  and  $H_\infty$  Robust Filtering for Convex Bounded Uncertain Systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**, 100–107.
- Geromel, J. C., Gonçalves, A. P. C. & Fioravanti, A. R. (2009), ‘Dynamic Output Feedback Control of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities’, *SIAM Journal on Control and Optimization* **48**, 573–593.
- Geromel, J. C. & Palhares, A. G. B. (2004), *Análise Linear de Sistemas Dinâmicos*, Editora Edgard Blücher LTDA.
- Gilbert, E. N. (1960), ‘Capacity of a burst-noise channel’, *Bell Systems Tech. Journal* **39**, 1253–1266.
- Gonçalves, A. P. C. (2006), Controle de sistemas lineares discretos com saltos markovianos sem informação completa dos estados da cadeia, Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação/Unicamp.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. & Geromel, J. C. (2008), Dynamic Output Feedback  $\mathcal{H}_\infty$  Control of Discrete-time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities, in ‘Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control’, Cancun, México, pp. 4787–4792.
- Gonçalves, A. P. C., Fioravanti, A. R. & Geromel, J. C. (2009), ‘ $\mathcal{H}_\infty$  Filtering of Discrete-Time Markov Jump Linear Systems Through Linear Matrix Inequalities’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **54**, 1347–1351.
- Hedrick, J., Tomikuza & Varaiya, P. (1994), ‘Control issues in automated highway systems’, *IEEE Control Systems Mag.* **14**, 21–32.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1988), ‘Controllability, observability and discrete-time markovian jump linear quadratic control’, *International Journal of Control* **48**, 481–498.
- Ji, Y. & Chizeck, H. J. (1990), ‘Jump linear quadratic control: Steady state solution and testable conditions’, *Control Theory and Advanced Technology* **5**, 289–319.

- Ji, Y., Chizeck, H. J., Feng, X. & Loparo, K. A. (1991), ‘Stability and control of discrete-time jump linear systems’, *Control Theory and Advanced Technology* **7**, 247–270.
- Li, L. & Ugrinovskii, V. A. (2007), ‘On necessary and sufficient conditions for  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control of Markov jump linear systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **52**, 1287–1292.
- Marcondes, G. A. B. (2005), Modelos Discretos para Análise de Ocorrência de Erros em Redes sem Fio, Dissertação de mestrado, Instituto Nacional de Telecomunicações.
- Scherer, C. (1995), Mixed  $H_2/H_\infty$  control, in A. Isidori, ed., ‘Trends in Control: A European Perspective’, Springer-Verlag, pp. 173–216.
- Seiler, P. & Sengupta, R. (2003), ‘A bounded real lemma for jump systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**, 1651–1654.
- Seiler, P. & Sengupta, R. (2005), ‘An  $H_\infty$  approach to networked control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **50**, 356–364.
- Sworder, D. D. & Rogers, R. O. (1983), ‘An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**, 971–978.
- Wu, L., Shi, P., Gao, H. & Wang, C. (2008), ‘ $\mathcal{H}_\infty$  filtering for 2D Markovian jump systems’, *Automatica* **44**, 1849–1858.
- Xiao, L., Hassibi, A. & How, J. (2000), Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach, in ‘Proceedings of the Amer. Control Conf.’, Chicago, USA, pp. 2199–2204.

# Apêndice A

## Alguns resultados auxiliares

Neste apêndice demonstramos alguns resultados auxiliares que são importantes para o desenvolvimento da tese, mas que preferimos exibir em separado para melhorar a fluência do texto. O próximo lema é uma ferramenta fundamental para representar restrições não lineares em forma de LMIs, explicitando que se tratam na verdade de conjuntos convexos.

**Lema A.1 (Complemento de Schur)** *A LMI, com  $X$  e  $Z$  simétricas*

$$\begin{bmatrix} X & Y' \\ Y & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.1})$$

*é válida se e somente se uma das seguintes condições for satisfeita*

*i)  $\{Z > 0, X > Y'Z^{-1}Y\}$*

*ii)  $\{X > 0, Z > YX^{-1}Y'\}$*

*O enunciado continua verdadeiro se o sinal  $>$  for trocado por  $<$  nas expressões acima.*

**Prova:** Para a necessidade, vamos assumir que a primeira condição acima é válida e portanto

$$Q = \begin{bmatrix} X - Y'Z^{-1}Y & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

Definimos a matriz não singular  $T$  como

$$T = \begin{bmatrix} I & Y'Z^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

e temos que  $TQT' > 0$ , pois  $Q > 0$ . Isto implica

$$TQT' = \begin{bmatrix} X & Y' \\ Y & Z \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.4})$$

e um procedimento análogo pode ser usado para a segunda condição.

Para a suficiência, como  $T$  é não singular, multiplicando (A.1) por  $T^{-1}$  a esquerda e por sua transposta a direita, chega-se a primeira condição, e um procedimento parecido, com outra matriz de transformação, pode ser usado para se chegar à segunda.  $\square$

O próximo lema, também conhecido como lema de Finsler, permite eliminar variáveis de LMIs que obedecem uma estrutura bem definida. Naturalmente, esta eliminação permite escrevê-las de forma mais simples. Sua aplicação é a principal ferramenta para a obtenção dos Corolários 3.4 e 3.7.

**Lema A.2 (Eliminação de Variáveis)** *Considerando que as matrizes  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  e  $A_{33}$  são simétricas, existe  $Q$  de dimensão apropriada satisfazendo a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A'_{21} & Q' - A'_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A'_{32} \\ Q - A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.5})$$

se e somente as desigualdades

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A'_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad \begin{bmatrix} A_{22} & A'_{32} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.6})$$

forem satisfeitas. Em caso afirmativo, uma possível solução é dada por

$$Q = A_{31} + A_{32}A_{22}^{-1}A_{21} \quad (\text{A.7})$$

**Prova:** Aplicando complemento de Schur a (A.5) com relação ao termo  $A_{22}$  temos

$$\begin{bmatrix} A_{11} & Q' - A'_{31} \\ Q - A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} A'_{21} \\ A_{32} \end{bmatrix} A_{22}^{-1} \begin{bmatrix} A_{21} & A'_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} - A'_{21}A_{22}^{-1}A_{21} & Q' - A'_{31} - A'_{21}A_{22}^{-1}A'_{32} \\ Q - A_{31} - A_{32}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{33} - A_{32}A_{22}^{-1}A'_{32} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.8})$$

Para que a desigualdade (A.8) seja válida, uma condição necessária é que seus blocos diagonais sejam matrizes definidas positivas. As desigualdades (A.6) surgem do complemento de Schur aplicado a estes blocos. Entretanto, (A.6) não são condições suficientes, pois é preciso levar em conta os blocos fora da diagonal principal de (A.8). Porém, para  $Q$  dado por (A.7), estes blocos se tornam nulos e as condições passam a ser também suficientes.  $\square$

No Capítulo 3, apresentamos uma estratégia para mudar as variáveis do problema e escrevê-lo em termos de LMIs. Parte fundamental desta estratégia consistiu em representar  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{P}_i^{-1}$  a partir de matrizes de blocos, de forma que a escolha particular de um desses blocos permitisse que o sistema pudesse ser escrito de forma linear em função das novas variáveis. O lema a seguir, baseado em (Geromel 1999) é fundamental para garantir a validade dessa escolha.

**Lema A.3** *Sejam as matrizes simétricas  $Z$  e  $X$  tais que*

$$\begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.9})$$

*É sempre possível definir as matrizes simétricas  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  e matrizes  $U$  e  $V$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.10})$$

onde  $Y = Z^{-1}$ .

**Prova:** Vamos assumir  $U$  não singular. A igualdade em (A.10) será válida se e somente se as quatro relações seguintes forem verdadeiras. Primeiro, devemos ter  $XY + UV' = I$  que permite determinar  $V = (I - YX)U'^{-1}$ . Em segundo lugar,  $XV + U\hat{Y} = 0$ , que permite determinar a matriz simétrica  $\hat{Y} = U^{-1}X(Y - X^{-1})XU'^{-1}$ . A terceira relação é  $U'Y + \hat{X}V' = 0$  que permite determinar  $\hat{X} = U'(X - Y^{-1})^{-1}U$ . Usamos a quarta relação para confirmar os resultados obtidos

$$\begin{aligned} U'V + \hat{X}\hat{Y} &= U'(I - YX)U'^{-1} + U'(X - Y^{-1})^{-1}X(Y - X^{-1})XU'^{-1} \\ &= U'((I - YX) - (X - Y^{-1})^{-1}X(I - YX))U'^{-1} \\ &= U'(I - (X - Y^{-1})^{-1}X)(I - YX)U'^{-1} \\ &= U'(X - Y^{-1})^{-1}(-Y^{-1})(I - YX)U'^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Por outro lado, qualquer solução factível de (A.9) implica em  $X > Y^{-1}$  e portanto  $I - YX$  não-singular. Assim,  $V$  é não-singular como também

$$T = \begin{bmatrix} I & I \\ V'Y^{-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Logo, por

$$T' \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.12})$$

podemos verificar a validade de (A.9) a partir de (A.10) e vice-versa pois  $T$  é não singular.  $\square$

A importância fundamental do Lema A.3 é permitir a escolha adequada de  $U_i$  tal que a desigualdade (3.13) possa ser escrita na forma linear (3.15). Contudo, alguma relação é necessária para o caso geral em que  $U_i$  é qualquer. Esta relação é estabelecida a partir do lema a seguir

**Lema A.4** *Sejam as probabilidades  $p_{ij}$ , as matrizes simétricas  $X_j > 0$  e  $\hat{X}_j > 0$  e as matrizes  $U_j$  para todo  $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Então*

$$X_{pi} - U_{pi}\hat{X}_{pi}^{-1}U'_{pi} \geq \sum_{j=1}^N p_{ij}(X_j - U_j\hat{X}_j^{-1}U'_j) \quad (\text{A.13})$$

**Prova:** Para qualquer conjunto de matrizes  $\hat{X}_j > 0$  e  $U_j$ ,  $j \in \mathbb{K}$  temos que

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} \begin{bmatrix} U_j\hat{X}_j^{-1}U'_j & U_j \\ U'_j & \hat{X}_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^N p_{ij} \begin{bmatrix} U_j \\ \hat{X}_j \end{bmatrix} \hat{X}_j^{-1} \begin{bmatrix} U'_j & \hat{X}_j \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{A.14})$$

Portanto, aplicando complemento de Schur à desigualdade anterior temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N p_{ij}U_j\hat{X}_j^{-1}U'_j &\geq \left( \sum_{j=1}^N p_{ij}U_j \right) \left( \sum_{j=1}^N p_{ij}\hat{X}_j \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^N p_{ij}U'_j \right) \\ &\geq U_{pi}\hat{X}_{pi}^{-1}U'_{pi} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Invertendo o sinal de (A.15) e somando dos dois lados o termo linear  $X_{pi} = \sum_{j=1}^N p_{ij}X_j$  chegamos ao resultado proposto.  $\square$

No Capítulo 4 foi utilizada uma partição diferente daquela indicada no Lema A.3. A partição que utilizamos deve-se a (Scherer 1995) e é exposta no próximo lema.

**Lema A.5** *Sejam as matrizes simétricas  $X$  e  $Y$  tais que*

$$\begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.16})$$

*Sempre é possível definir as matrizes simétricas  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  e matrizes  $U$  e  $V$  satisfazendo*

$$\begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.17})$$

**Prova:** A primeira parte, relacionada com a determinação de  $\hat{X}$ ,  $\hat{Y}$  e  $V$  à partir de  $X$  e  $Y$  satisfazendo a igualdade em (A.16) e  $U$  não-singular é idêntica àquela mostrada na demonstração do Lema A.3, sendo portanto omitida. Para o restante da prova, considere a transformação

$$T = \begin{bmatrix} Y & I \\ V' & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Logo, por

$$T' \begin{bmatrix} X & U \\ U' & \hat{X} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} Y & I \\ I & X \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.19})$$

podemos verificar a validade de (A.16) a partir de (A.17) e vice-versa pois  $T$  é não-singular.  $\square$



## Apêndice B

# Tamanho médio das seqüências de pacotes corretos e defeituosos

Na equação (4.36) do Exemplo 4.1, introduzimos o parâmetro  $\kappa$  como a razão entre o tamanho médio das seqüências de pacotes corretos e de pacotes defeituosos. Como mostramos naquela seção, isto permite relacionar as probabilidades  $p_{R,R}$  e  $p_{L,L}$  e avaliar o desempenho em função de um único parâmetro para a qualidade da rede, permitindo uma interpretação mais simples dos resultados. Também notamos que, dependendo da premissa levada em conta para o cálculo do tamanho médio das seqüências, os valores apresentados podem estar parametrizados em função de  $\kappa$  ou de  $\kappa^2$ .

Para o cálculo do tamanho médio de seqüências de pacotes corretos  $\bar{x}$ , *dado que foi recebido um pacote correto*, calculamos as probabilidades conforme a Tabela B.1.

O tamanho médio das seqüências corretas é dado pela esperança matemática da variável

Tamanho $x$	Probabilidade
1	$(1 - p_{R,R})$
2	$p_{R,R}(1 - p_{R,R})$
$\vdots$	$\vdots$
$n$	$p_{R,R}^{n-1}(1 - p_{R,R})$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela B.1: Probabilidades de ocorrência de seqüências corretas, dado que foi recebido um pacote correto.

aleatória  $x$ :

$$\bar{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n p_{R,R}^{n-1} (1 - p_{R,R}) \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) p_{R,R}^i (1 - p_{R,R}) \\ &= \left[ \sum_{i=0}^{\infty} i p_{R,R}^i + \sum_{i=0}^{\infty} p_{R,R}^i \right] (1 - p_{R,R}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

O cálculo das somas indicadas no interior das chaves da equação (B.2) pode ser feito com o uso de propriedades de transformada  $\mathcal{Z}$  (Geromel & Palhares 2004), que permite escrever

$$\mathcal{Z}\{p_{R,R}^i\} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} p_{R,R}^i = \frac{z}{z - p_{R,R}} \quad (\text{B.3})$$

para todo  $z$  complexo tal que  $|z| > p_{R,R}$ . Logo, fazendo  $z = 1$  temos o valor da primeira soma

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{R,R}^i = \frac{1}{1 - p_{R,R}} \quad (\text{B.4})$$

A partir de (B.3) podemos ainda escrever

$$-z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{p_{R,R}^i\} = -z \frac{d}{dz} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i} p_{R,R}^i \right] = \sum_{i=0}^{\infty} i z^{-i} p_{R,R}^i \quad (\text{B.5})$$

Por outro lado, para todo  $z$  no domínio de  $\mathcal{Z}\{p_{R,R}^i\}$  é possível escrever

$$-z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{p_{R,R}^i\} = -z \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{z - p_{R,R}} \right] = \frac{z p_{R,R}}{(z - p_{R,R})^2} \quad (\text{B.6})$$

logo, fazendo  $z = 1$  do lado direito de (B.5) e (B.6) e igualando os resultados, chegamos ao valor da segunda soma

$$\sum_{i=0}^{\infty} i p_{R,R}^i = \frac{p_{R,R}}{(1 - p_{R,R})^2} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (B.7) e (B.4) em (B.2) temos

$$\bar{x} = \frac{1}{1 - p_{R,R}} \quad (\text{B.8})$$

Tamanho $x$	Probabilidade
1	$\mu_R(1 - p_{R,R})$
2	$\mu_R p_{R,R}(1 - p_{R,R})$
$\vdots$	$\vdots$
$n$	$\mu_R p_{R,R}^{n-1}(1 - p_{R,R})$
$\vdots$	$\vdots$

Tabela B.2: Probabilidades de ocorrência de seqüências corretas em estado estacionário.

De forma análoga, o valor esperado para o tamanho de seqüências de pacotes defeituosos  $\bar{y}$ , dado que um pacote com erro foi recebido, pode ser calculado como

$$\bar{y} = \frac{1}{1 - p_{L,L}} \quad (\text{B.9})$$

e ao fazermos a razão  $\bar{x}/\bar{y}$  chegamos a  $\kappa$  como em (4.36).

Note que para o cálculo dos tamanhos médios realizados até aqui, partimos da premissa de que a seqüência analisada era de pacotes corretos ou defeituosos. Também seria possível fazer esta análise sem levar em conta o tipo de seqüência, ou seja, consideraríamos que houve uma seqüência de pacotes do mesmo tipo, sem assumir *a priori* que tais pacotes seriam corretos ou defeituosos. Para levar adiante tal hipótese, é preciso considerar a cadeia de Markov se encontra em estado estacionário e calcular sua a probabilidade para cada um dos possíveis estados. Como já discutido na Seção 2.3, este cálculo consiste em determinar o autovetor associado ao autovalor unitário da matriz  $\mathbb{P}'$ . A probabilidade de um pacote ser recebido corretamente é dada por

$$\mu_R = \frac{1 - p_{L,L}}{2 - p_{R,R} + p_{L,L}} \quad (\text{B.10})$$

e naturalmente, a probabilidade de um pacote ser recebido com defeito é  $\mu_L = 1 - \mu_R$ . Passamos então ao cálculo de  $\bar{x}$  conforme as probabilidades indicadas na Tabela B.2.

Fazendo as contas, chegamos a

$$\bar{x} = \frac{1 - p_{L,L}}{(2 - p_{R,R} + p_{L,L})(1 - p_{R,R})} \quad (\text{B.11})$$

e de forma análoga temos que o tamanho médio de seqüências de pacotes defeituosos é dado por

$$\bar{y} = \frac{1 - p_{R,R}}{(2 - p_{R,R} + p_{L,L})(1 - p_{L,L})} \quad (\text{B.12})$$

Logo, a razão entre o tamanho médio das seqüências de pacotes corretos e seqüências de pacotes defeituosos, em uma rede em estado estacionário, quando não se leva em consideração *a priori* o tipo de pacote que define a seqüência, é dado por

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \kappa^2 \tag{B.13}$$

implicando que toda a análise feita no Exemplo 4.1 permanece válida para as novas premissas, desde que se considere  $\kappa^2$  em vez de  $\kappa$  como parâmetro.

# Apêndice C

## Condição para cálculo de norma $\mathcal{H}_\infty$ em um caso particular de MJLS

No artigo (Seiler & Sengupta 2005) é apresentada uma condição para o cálculo de norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas  $\mathcal{G}$  na forma (2.4) com a restrição adicional de que os elementos da matriz de transição de probabilidade satisfaçam  $p_{ij} = p_j$  para  $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Em seu Teorema 4 afirma-se o seguinte:

**Teorema C.1** (Seiler & Sengupta 2005) *Assuma que  $p_{ij} = p_j$  para todo  $(i,j) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$  e o sistema  $\mathcal{G}$  (2.4) seja fracamente controlável.  $\mathcal{G}$  é SMS estável e  $\|\mathcal{G}\|_\infty < 1$ , se e somente se existir uma matriz simétrica  $P > 0$  que satisfaça a seguinte LMI*

$$\sum_{i=1}^N p_i \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.1})$$

Inicialmente demonstramos que (C.1) é uma condição necessária do Teorema 2.8. Seja o conjunto de restrições (2.41) com  $\gamma = 1$ , valor escolhido sem perda de generalidade, simplesmente para facilitar a comparação com o enunciado do Teorema C.1. De fato, se para cada  $i \in \mathbb{K}$  multiplicarmos a restrição equivalente por  $p_i$  e somarmos os resultados, chegamos a

$$\sum_{i=1}^N p_i \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_{pi} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i & J_i \\ C_{zi} & E_{zi} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^N p_i \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{C.2})$$

onde a desigualdade estrita ainda é válida pois  $p_i \geq 0$  para todo  $i \in \mathbb{K}$ , com pelo menos um  $p_i > 0$ , uma vez que  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Levando-se em consideração as probabilidades de transição é

possível escrever

$$P_{pi} = \sum_{j=1}^N p_j P_j = P \quad (\text{C.3})$$

o que nos leva a (C.1) a partir de (C.2).

A partir do seguinte contra-exemplo, pretendemos mostrar que (C.1) não é uma condição suficiente para assegurar que  $\|\mathcal{G}\|_\infty < \gamma$ , o que a invalida como condição para o cálculo de norma  $\mathcal{H}_\infty$  no caso particular em estudo. Para este fim, considere um sistema sem dinâmica

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) = 0 \\ z(k) = E_z(\theta_k)w(k) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

De acordo com o Teorema 2.8, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de tal sistema é dada por

$$\inf \left\{ \gamma : \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & \gamma I - E'_{zi} E_{zi} \end{bmatrix} > 0, i \in \mathbb{K} \right\} \quad (\text{C.5})$$

cuja solução é

$$\gamma = \max_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{\max}(E'_{zi} E_{zi}) \quad (\text{C.6})$$

onde  $\lambda_{\max}(\cdot)$  representa o autovalor máximo da matriz indicada. Lembrando a Definição 2.6, tal valor de norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser obtido aplicando ao sistema  $\mathcal{G}$  a entrada

$$w(k) = \begin{cases} v_{\max}(E_z(\theta_0)' E_z(\theta_0)), & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

onde  $v_{\max}(\cdot)$  é o autovetor unitário associado ao autovalor máximo da matriz indicada. Naturalmente,  $\theta_0$  em (C.7) deve ser tal que a relação entre a norma da saída  $\|z\|_2$  e a norma da entrada  $\|w\|_2$  seja máxima, como indicado em (2.38).

Passamos agora a analisar o mesmo problema usando a restrição proposta por (Seiler & Sengupta 2005) em que o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de (C.4) seria dado por

$$\inf \left\{ \gamma : \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & \gamma I - \sum_{i=1}^N p_i E'_{zi} E_{zi} \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (\text{C.8})$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lambda_{\max} \left( \sum_{i=1}^N p_i E'_{z_i} E_{z_i} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^N p_i \lambda_{\max}(E'_{z_i} E_{z_i}) \\
&\leq \max_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{\max}(E'_{z_i} E_{z_i})
\end{aligned} \tag{C.9}$$

A desigualdade (C.9) evidencia que a quantidade  $\gamma$  calculada usando a restrição proposta por (Seiler & Sengupta 2005) não é de fato a norma  $\mathcal{H}_{\infty}$  do sistema  $\mathcal{G}$ , mas apenas um limitante inferior.

**Exemplo C.1** Considere o sistema  $\mathcal{G}$  como (C.4) com dois modos de operação e matrizes  $E_{z_i}$  dadas por

$$E_{z_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_{z_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e matriz de probabilidades de transição dada por

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix}$$

Calculamos o valor de  $\gamma$  usando (C.5) e (C.8), respectivamente

$$\begin{aligned}
\max_{i=\{1,2\}} \lambda_{\max}(E'_{z_i} E_{z_i}) &= 1 \\
\lambda_{\max}(0,3E'_{z_1} E_{z_1} + 0,7E'_{z_2} E_{z_2}) &= 0,7
\end{aligned}$$

o que evidencia a diferença entre o valor calculado a partir do Teorema 2.8 e aquele proposto por (Seiler & Sengupta 2005) através do Teorema C.1.  $\blacklozenge$