



Universidade Estadual de Campinas

LCSI

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

**Controle da Máquina de Indução
com Tratamento de Incertezas**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica

por

Manoel Francisco Soares Neto

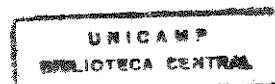
Engenheiro Eletricista - UFES

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura

Orientador - FEEC/UNICAMP/SP

Março de 1998

Este exemplar corresponde a redação final da tese
defendida por Manoel Francisco Soares Neto
e aprovada pela Comissão
Julgada em 05 / 03 / 1998
Celso Pascoli Bottura
Orientador



5818173

UNIDADE	-BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	So 11c
V. _____	Ex. _____
TCMBO	BC/34922
PROC.	395/98
C <input type="checkbox"/>	D <input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	04/05/98
N.º CPU	

CM-00115959-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

So 11c Soares Neto, Manoel Francisco
Controle da máquina de indução com tratamento de incertezas. / Manoel Francisco Soares Neto.-- Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Celso Pascoli Bottura
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Máquinas elétricas de indução. 2. Controle automático. 3. Teoria do controle. I. Bottura, Celso Pascoli. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.



Universidade Estadual de Campinas

LCSI Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Máquinas, Componentes e Sistemas Inteligentes
Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes

Tese : **Controle da Máquina de Indução
com Tratamento de Incertezas**

Autor : **Manoel Francisco Soares Neto**

Orientador : **Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura**

Aprovada em 05 de março de 1998 pela banca examinadora:

Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura (Presidente)

Prof. Dr. Takashi Yoneyama - ITA

Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira - UNICAMP

Agradecimentos

Ao Prof. Celso Pascoli Bottura, pela maneira ímpar de orientação durante a realização deste trabalho;

Ao Prof. Celso José Munaro, pelas oportunidades, incentivo e confiança em mim depositada;

Aos colegas Goiaba, Zumba e Gilmar, pelo apoio prestado durante a fase inicial deste trabalho;

Aos colegas do LCSI: Annabell, Fernando, Gilmar, João, Márcio, Maurício, Paulo, Rogério, Sérgio e Tetsu, pelas ajudas e momentos de descontração;

Aos demais colegas e amigos, sempre presentes em diversos momentos;

Aos familiares, pela paciência, apoio e compreensão;

Ao CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho uma nova abordagem baseada na teoria de controle *pós-moderno* é aplicada ao controle de uma máquina de indução sob orientação de campo. Transformações Fracionais Lineares (LFTs) são empregadas na representação dos modelos de estado dq da máquina de indução alimentada em corrente e em tensão de forma tal que suas inerentes não-estacionariedades possam ser consideradas incertezas estruturadas e parametrizadas por escalares. Estes escalares assumem valores dentro de um conjunto predeterminado, correspondendo à faixa nominal de operação e assim uma classe de modelos é derivada para a máquina. Objetivos de projeto tais como rastreamento de fluxo e de velocidade são convenientemente representados em uma estrutura genérica para análise/síntese robustas sobre a qual uma metodologia de otimização \mathcal{H}_∞ é aplicada para fornecer um controlador sub-ótimo garantindo estabilidade e desempenho robustos (ambos checados via análise- μ) para toda a classe de modelos da máquina de indução. Resultados de simulações são apresentados para mostrar o comportamento dinâmico alcançado usando esta proposta.

Abstract

In this work a new design approach based on a *postmodern* control theory is applied to the field-oriented control problem of an induction machine. Linear Fractional Transformations (LFTs) are employed to represent state-space current- and voltage-fed induction machine models in dq variables so that its inherent non-stationarity can be considered structured uncertainty and parameterized by scalars. These scalars take on values over a prescribed set, corresponding to the nominal operation range and thus a class of models is derived for the machine. Design objectives such as rotor flux and speed tracking are conveniently represented in a general framework for robustness analysis/synthesis on which an \mathcal{H}_∞ optimization method is applied to provide a suboptimal controller guaranteeing robust stability and performance (both checked via μ -analysis) for the whole class of induction machine models. Simulation results are given to show the dynamic behavior achieved using this proposal.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	3
1.2	Organização do Trabalho	3
2	Ferramentas Analíticas e de Projeto	4
2.1	Introdução	4
2.2	Robustez e Incerteza de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis	5
2.2.1	Incertezas Estruturadas e Não-estruturadas	5
2.2.2	Estabilidade e Desempenho Robustos	6
2.3	Transformação Fracional Linear	7
2.4	Representação de Incertezas via LFTs	9
2.4.1	Representação de Incertezas Paramétricas	9
2.4.2	Representação Geral de Incertezas no Espaço de Estado	9
2.4.3	Representação de Dinâmicas Não-modeladas	11
2.5	Controle \mathcal{H}_∞	13
2.5.1	Formulação do Problema	13
2.6	Valor Singular Estruturado	16
2.6.1	Teorema do Pequeno Ganho	17
2.6.2	Estrutura Geral para Tratamento Robusto de Sistemas	17
2.6.3	Valor Singular Estruturado Complexo	19
2.6.4	Valor Singular Estruturado Real/Complexo	21
2.6.5	Transformações Fracionais Lineares e μ	22
2.6.6	Estabilidade e Desempenho Robustos Estruturados	23
2.6.7	Análise de Robustez	24
2.7	Conclusão	28
3	Modelagem da Máquina de Indução com Tratamento de Incertezas	29
3.1	Introdução	29
3.2	Equações da Máquina em Variáveis das Fases	30
3.3	Equações da Máquina em Variáveis de um Sistema de Referência Arbitrário	31
3.4	Equações de Torque e Velocidade	35
3.5	Parametrização dos Modelos	35

3.5.1	Alimentação em Corrente	37
3.5.2	Alimentação em Tensão	38
3.6	Conclusão	39
4	Controle Vetorial \mathcal{H}_∞ Robusto da Máquina de Indução	40
4.1	Introdução	40
4.2	Dinâmica da Máquina de Indução sob Orientação de Campo	41
4.3	Controle Vetorial \mathcal{H}_∞ Robusto	42
4.3.1	Controle de Torque da Máquina Alimentada em Corrente	44
4.3.2	Controle de Torque da Máquina Alimentada em Tensão	47
4.3.3	Controle de Velocidade da Máquina Alimentada em Corrente	49
4.3.4	Controle de Velocidade da Máquina Alimentada em Tensão	56
4.4	Conclusão	57
5	Conclusão	61
A	Sistemas Lineares Multivariáveis	63
B	Normas de Sinais e de Sistemas	66
C	Caracterização de Desempenho via Normas Ponderadas	68
D	Características da Máquina de Indução	71
	Bibliografia	72

Notação

$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$
$C^{n \times m}$	Espaço das matrizes complexas de dimensão $n \times m$
\overline{C}_+	Semiplano direito fechado
I_n	Matriz identidade de ordem n
\mathcal{L}_2	Espaço de Lebesgue
Δ	Conjunto das matrizes de incerteza com estrutura bloco-diagonal
Δ	Elemento do conjunto Δ
$\mathcal{F}_u(M, \Delta)$	LFT superior sobre M com relação a Δ
$\mathcal{F}_l(M, \Delta)$	LFT inferior sobre M com relação a Δ
$\mu_\Delta(M)$	Valor singular estruturado de M com relação a Δ
$\rho(M)$	Raio espectral de M
$\bar{\sigma}(M)$	Valor singular máximo de M
$:=$	Definido como
$\text{diag}[a_1, \dots, a_n]$	Matriz diagonal $n \times n$ com a_i seu i -ésimo elemento diagonal
$Ric(H)$	Solução da equação de Riccati associada à matriz Hamiltoniana H
$\text{dom}(Ric)$	Conjunto de matrizes Hamiltonianas H
\mathcal{RH}_∞	Espaço das matrizes de transferência estáveis reais racionais próprias
$\ M\ _\infty$	Norma \mathcal{H}_∞ de um sistema M

Capítulo 1

Introdução

Os acionamentos elétricos de alto desempenho para muitas aplicações industriais foram, até recentemente, quase exclusivamente dominados pelas máquinas de corrente contínua (CC). As tecnologias disponíveis não viabilizavam a utilização de outros tipos de máquinas em situações de exigências sofisticadas, com a flexibilidade de permitir a regulação de várias variáveis como velocidade, posição, aceleração e torque. Alcançar boas características de acionamento utilizando máquinas de corrente alternada (CA) representa um desafio repleto de obstáculos, os quais vêm sendo gradativamente superados à medida que surgem novos recursos tecnológicos e propostas de controle para o problema.

Um passo notadamente importante foi dado por Blaschke que em [3] consagra o “Princípio da Orientação de Campo” como um dos mais aceitos na tentativa de igualar o desempenho dinâmico de acionamentos CA ao de acionamentos CC. Entretanto, devido ao complexo tratamento de sinais exigido, a implementação prática desta técnica somente foi possível 10 anos depois, no início dos anos 80, com a popularização dos computadores digitais e, ainda hoje, o aumento da sofisticação dos algoritmos de controle aplicados a este problema requer recursos mais avançados como os processadores digitais de sinais.

A inerente complexidade envolvida no controle das máquinas de indução motiva pesquisadores a apresentarem diversas propostas na literatura. Em particular, avanços recentes na teoria de controle vêm sendo aplicados com o intuito de solucionar satisfatoriamente o problema de controle da máquina de indução. Em [1], as variações da máquina são consideradas incertezas representadas por politopos e uma metodologia de otimização \mathcal{H}_2 restrita por tais politopos é aplicada no projeto de controladores robustos. Neste trabalho o controle da máquina de indução é tratado como um problema de controle robusto numa perspectiva “pós-moderna”, termo que tem sido utilizado para designar uma filosofia emergente e um conjunto de novas técnicas suficientemente distintos das abordagens clássica e moderna de controle.

No controle clássico, entre as décadas de 40 e 60, o objeto central de estudo é a função de transferência que dá lugar à teoria de espaço de estado no controle moderno dos anos 60 aos 80. A partir desta época entra em cena o controle pós-moderno, cujo

objeto central de estudo é a transformação fracional linear [18]. Sua generalização para a inclusão de incertezas nos modelos de sistemas dinâmicos permite o tratamento da robustez de sistemas de controle sujeitos a incertezas estruturadas através da teoria de valor singular estruturado (μ) introduzida por John C. Doyle [15].

No contexto de controle pós-moderno deste trabalho, a caracterização dos objetivos de desempenho em malha fechada é realizada através da medida de certas matrizes de transferência usando a norma \mathcal{H}_∞ . Esta norma fornece uma medida do maior tamanho que os sinais de saída podem assumir para uma certa classe de sinais de entrada e daí a importância de colocar os objetivos de controle como uma minimização de funções de transferência em malha fechada.

Para exemplificar considere um problema de rastreamento com rejeição de distúrbio, ruído de medida e limitações sobre o sinal de controle como mostrado na Figura 1.1 onde K é o controlador a ser projetado e G o sistema que deseja-se controlar.

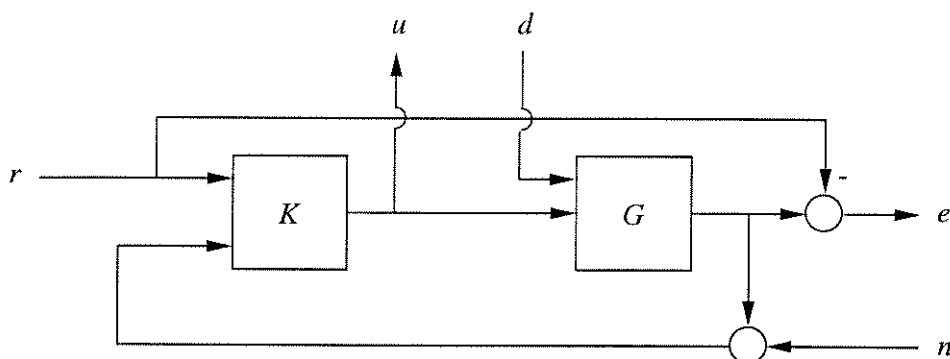


Figura 1.1: Objetivos de desempenho típicos em malha fechada.

Um objetivo de projeto para este sistema de controle seria

“Projetar K para manter erros de rastreamento e sinais de controle pequenos para todos os sinais razoáveis representando comandos de referência, ruídos e distúrbios externos.”

Consequentemente um objetivo de desempenho natural é o ganho de malha fechada das entradas exógenas (referências r , ruídos n e distúrbios d) para as variáveis reguladas (erros de rastreamento e , sinais de controle u). Se a matriz T denota o mapeamento em malha fechada das influências externas para as variáveis reguladas,

$$\begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix},$$

podemos associar bom desempenho ao fato de T ser pequena, i.é., apresentar uma pequena norma \mathcal{H}_∞ .

1.1 Objetivo

Este trabalho tem por objetivo tratar o problema de controle vetorial da máquina de indução como um problema de controle robusto numa perspectiva atual, visando a aplicação das metodologias de otimização \mathcal{H}_∞ e análise- μ introduzidas por John C. Doyle e colaboradores. Partindo de modelos básicos para a máquina alimentada em corrente ou tensão, realiza-se um tratamento de suas incertezas inerentes e caracterizam-se objetivos de projeto para que os controles de torque ou velocidade sejam realizados com um desempenho mínimo garantido em toda sua faixa de operação.

1.2 Organização do Trabalho

No Capítulo 2 são apresentadas as ferramentas de análise e projeto utilizadas dentro do contexto de controle pós-moderno para o controle da máquina de indução sob orientação de campo. A noção de robustez é introduzida a partir da caracterização dos tipos de incertezas que leva à apresentação dos conceitos de estabilidade e desempenho robustos. Uma seção é dedicada à Transformação Fracional Linear (LFT) e, em seguida, são mostradas as representações de incertezas mais comuns usando esta estrutura, sobre a qual a teoria de controle \mathcal{H}_∞ também é apresentada. O valor singular estruturado é em seguida definido e, baseados nele, os testes de robustez para sistemas com múltiplas fontes de incerteza são apresentados a fim de avaliarem a estabilidade e o desempenho robustos alcançados no projeto \mathcal{H}_∞ .

O Capítulo 3 mostra a modelagem da máquina nas variáveis das fases abc e as transformações que levam à representação da mesma em um sistema de referências dq . As não-estacionariedades dos modelos neste novo sistema de referências são consideradas incertezas e devidamente parametrizadas para descreverem toda uma faixa de operação da máquina em representações tipo LFTs.

No Capítulo 4 as informações apresentadas anteriormente são utilizadas juntamente com o estabelecimento dos critérios de desempenho para os projetos de controladores \mathcal{H}_∞ robustos à variação do ponto de trabalho da máquina. A robustez alcançada é avaliada pela análise- μ . Os projetos e simulações são realizados para os controles de torque e de velocidade nos casos da máquina alimentada em corrente e em tensão.

Finalmente, no Capítulo 5, o trabalho é concluído. Também estão incluídos quatro apêndices contendo informações auxiliares que completam a organização do texto.

Capítulo 2

Ferramentas Analíticas e de Projeto

2.1 Introdução

A abordagem do controle de sistemas dinâmicos numa perspectiva “pós-moderna” requer uma série de artifícios que vêm sendo introduzidos paralelamente ao desenvolvimento das novas teorias. Estes artifícios vão desde a forma de expressar quantitativamente o tamanho que um sinal ou sistema pode apresentar até uma representação adequada dos elementos que compõem o sistema de controle para sua análise e/ou síntese.

Além de garantir estabilidade, um sistema de controle deve atingir certas especificações de desempenho que podem ser descritas em termos do tamanho dos sinais de interesse, tais como sinais de erro, de controle, etc. O conceito de norma é utilizado neste trabalho como uma forma mais precisa de mensurar este tamanho e também como uma forma de mensurar o tamanho de uma função de transferência de um sistema Linear Invariante no Tempo (LTI). Além disso, a utilização de normas ponderadas para tornar a caracterização dos objetivos de desempenho matematicamente tratável é considerada.

Neste capítulo, a apresentação dos conceitos de estabilidade e desempenho nominais é estendida ao caso em que a planta contém incertezas, as quais são devidamente caracterizadas, levando aos conceitos de estabilidade e desempenho robustos. Uma nova função matricial chamada Transformação Fracional Linear (LFT) é introduzida, formando a plataforma básica sobre a qual os problemas de controle aqui abordados são adequadamente formulados. Esta formulação visa a aplicação da teoria de controle \mathcal{H}_∞ , ainda em desenvolvimento, mas com recursos atuais que permitem solucionar satisfatoriamente problemas de controle multivariável envolvendo a norma \mathcal{H}_∞ como medida de desempenho.

A apresentação de todos estes conceitos e definições é indispensável para a subsequente introdução da teoria de valor singular estruturado, cuja notação requerida para ser expressa precisamente é complicada, embora muitos de seus conceitos sejam

relativamente simples. Com esta teoria pode-se tratar de uma forma exata os problemas de estabilidade robusta e de desempenho robusto para sistemas com múltiplas fontes de incertezas, estruturadas ou não, assim permitindo que a análise/síntese dos sistemas de controle apresentem resultados menos conservativos.

2.2 Robustez e Incerteza de Sistemas Dinâmicos Multivariáveis

Para introduzir a noção de robustez suponha que, em virtude da modelagem imprecisa ou mesmo da variação de certos parâmetros, uma planta seja representada não por uma única função de transferência G mas por função de transferência pertencendo a um conjunto \mathcal{G} que considere suas incertezas inerentes. Admita alguma característica do sistema de controle, por exemplo, que seja *internamente estável* e que rastreie algum sinal de comando. Um controlador K é robusto com relação a esta característica se a mesma for satisfeita para todas as plantas em \mathcal{G} . Portanto, a noção de robustez requer um controlador, um conjunto de plantas e alguma das características do sistema, que no contexto deste trabalho serão definidas por estabilidade robusta ou desempenho robusto.

Uma boa apresentação dos resultados teóricos envolvendo robustez de sistemas monovariáveis (SISO) pode ser encontrada em [16]. Nesta referência é mostrado que se um sistema SISO possui boas características de *estabilidade robusta* e de *desempenho nominal*, então necessariamente possuirá características razoavelmente boas de *desempenho robusto*. Entretanto, tal comportamento não é geralmente verificado para sistemas multivariáveis (MIMO) como mostra [28], que também apresenta o papel desempenhado pelo valor singular estruturado no problema da análise e projeto de controle multivariável robusto.

2.2.1 Incertezas Estruturadas e Não-estruturadas

Nenhum modelo matemático pode descrever exatamente a dinâmica de um sistema físico. Por esta razão é importante termos algum conhecimento sobre a maneira pela qual os erros de modelamento podem degradar o desempenho de um sistema de controle e assim considerarmos esta informação na síntese do controlador.

As origens das incertezas sobre o modelo da planta são várias. Por exemplo, alguns parâmetros no modelo linear podem ser conhecidos apenas aproximadamente, com um valor nominal e uma faixa de variação possível (um resistor elétrico de valor R é especificado desta forma: $R = 100 \pm 10\% \Omega$). Além disso, podemos ter um modelo que descreve adequadamente o comportamento da planta em baixas frequências mas o comportamento em altas frequências é incerto. Outras fontes citadas são as não-linearidades e mudanças das condições de operação.

A maneira pela qual uma incerteza afeta o comportamento nominal de uma planta a caracteriza de duas formas:

- **Incerteza Estruturada:** Neste caso, um número finito de parâmetros da planta (normalmente representados por coeficientes de sua função de transferência ou elementos das suas matrizes de estado) pode ser explicitamente parametrizado por escalares que pertencem a algum intervalo de variação.
- **Incerteza Não-estruturada:** Quando o modelamento das incertezas de forma detalhada é muito complexo ou mesmo impossível, seus efeitos são agrupados em um único bloco “cheio” de incerteza. Este bloco é então convenientemente associado ao modelo nominal da planta de tal forma que a mudança provocada em seu comportamento seja global.

Do exposto, podemos dizer que a incerteza não-estruturada permite uma abrangência maior dos casos de erro de modelamento, ao passo que a incerteza estruturada, limitada neste aspecto, permite modelar os erros onde eles realmente ocorrem na planta, levando a resultados de análise e síntese que podem ser menos conservativos.

2.2.2 Estabilidade e Desempenho Robustos

O requisito básico de um projeto de controle é que o sistema em malha fechada seja estável. Um conceito mais amplo de estabilidade para sistemas de controle surge quando em sua representação são incluídas todas as funções de transferência em malha fechada relevantes. Portanto, se considerarmos a representação mostrada na Figura 2.1, a seguinte definição a relaciona com a idéia de estabilidade.

Definição 2.1 *Um sistema de controle linear invariante no tempo é internamente estável se as funções de transferência entre quaisquer dois pontos do sistema são estáveis, ou seja, têm todos os pólos no semi-plano complexo esquerdo aberto.*

Como consequência imediata desta definição, se as entradas exógenas r , d e n são limitadas em magnitude, assim também serão os sinais e , u e y . Então, estabilidade interna garante sinais internos limitados para todos os sinais exógenos limitados. A

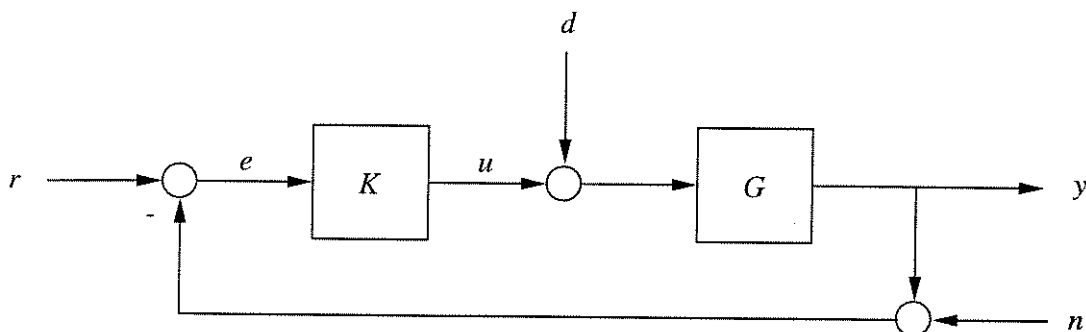


Figura 2.1: Sistema de controle geral.

definição de estabilidade interna também mostra a importância de não se considerar apenas as funções de transferência entrada-saída, como por exemplo de r para y . Esta

função de transferência pode ser estável, de tal modo que y seja limitada para r limitada e mesmo assim algum sinal interno pode ser ilimitado, provavelmente causando dano aos elementos que integram o sistema de controle.

Após a caracterização de um conjunto cujos elementos possam descrever um possível modelo para a planta real, torna-se necessária uma definição de estabilidade e desempenho relacionada a essa caracterização.

Definição 2.2 *Dada a descrição de um conjunto de modelos incertos \mathcal{G} e um conjunto de objetivos de desempenho, suponha que $G \in \mathcal{G}$ denote o modelo nominal e K o controlador. Então, o sistema de controle em malha fechada possui*

- **Estabilidade Nominal:** *se K estabiliza internamente o modelo nominal G .*
- **Desempenho Nominal:** *se os objetivos de desempenho são satisfeitos para a planta nominal G .*
- **Estabilidade Robusta:** *se K estabiliza internamente todas as plantas pertencentes a \mathcal{G} .*
- **Desempenho Robusto:** *se os objetivos de desempenho são satisfeitos para todas as plantas pertencentes a \mathcal{G} .*

As condições sob as quais estabilidade robusta e desempenho robusto são satisfeitos considerando-se várias hipóteses acerca do conjunto incerto \mathcal{G} serão apresentadas em seções posteriores, segundo a ótica da teoria de valor singular estruturado.

2.3 Transformação Fracional Linear

A utilização do valor singular estruturado na teoria de controle depende, em grande parte, de seu relacionamento com uma classe de malhas de realimentação chamadas Transformações Fracionais Lineares (LFTs). As LFTs fornecem uma estrutura que generaliza funções de transferência e suas realizações no espaço de estado, permitindo assim explicitar em suas representações os modelos de incertezas que afetam os sistemas físicos.

Definição 2.3 *Seja M uma matriz complexa particionada da seguinte forma*

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \in C^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$$

e sejam $\Delta_l \in C^{q_2 \times p_2}$ e $\Delta_u \in C^{q_1 \times p_1}$ outras duas matrizes complexas. Podemos então formalmente definir uma LFT inferior com relação a Δ_l como o mapeamento

$$\mathcal{F}_l(M, \cdot) : C^{q_2 \times p_2} \mapsto C^{p_1 \times q_1}$$

com

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) \triangleq M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}$$

dados que a inversa $(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}$ exista. Podemos também definir uma LFT superior com relação a Δ_u como

$$\mathcal{F}_u(M, \cdot) : C^{q_1 \times p_1} \mapsto C^{p_2 \times q_2}$$

com

$$\mathcal{F}_u(M, \Delta_u) \triangleq M_{22} + M_{21}\Delta_u(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}$$

dados que a inversa $(I - M_{11}\Delta_u)^{-1}$ exista.

A matriz M nas LFTs acima é chamada *matriz coeficiente*. As terminologias LFTs inferior e superior tornam-se evidentes ao considerarmos as representações em blocos de $\mathcal{F}_l(M, \Delta_l)$ e $\mathcal{F}_u(M, \Delta_u)$ mostradas nas Figuras 2.2(a) e 2.2(b), respectivamente.

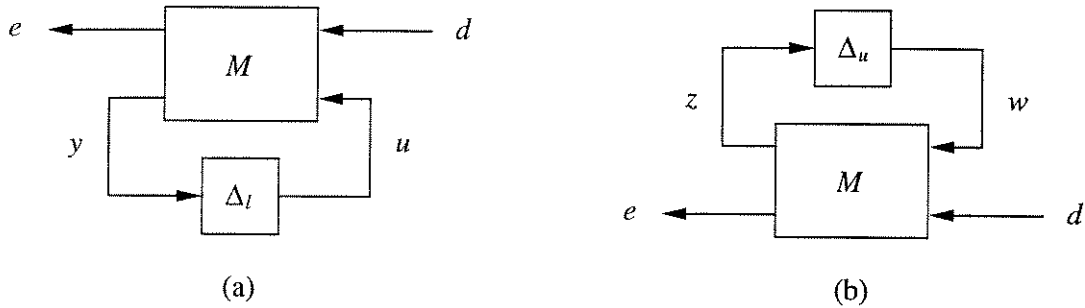


Figura 2.2: Representação em blocos de LFTs: (a) Inferior. (b) Superior.

Para o diagrama da Figura 2.2(a) podemos escrever

$$\begin{bmatrix} e \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix}$$

$$u = \Delta_l y$$

Realizando as multiplicações sobre a matriz particionada obtemos

$$\begin{aligned} e &= M_{11}d + M_{12}u \\ y &= M_{21}d + M_{22}u \end{aligned}$$

e substituindo a equação de realimentação $u = \Delta_l y$ nas equações acima

$$\begin{aligned} e &= M_{11}d + M_{12}\Delta_l y \\ y &= M_{21}d + M_{22}\Delta_l y \end{aligned}$$

A última equação pode ser reescrita como

$$y = (I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}d$$

que substituída na equação de e resulta em

$$\begin{aligned} e &= M_{11}d + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}d \\ e &= [M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}]d \\ e &= \mathcal{F}_l(M, \Delta_l)d \end{aligned}$$

Desta forma verificamos que o mapeamento apresentado na Figura 2.2(a) é igual à LFT inferior definida anteriormente. A verificação para o diagrama da Figura 2.2(b) é realizada de maneira análoga. Dizemos que a transformação fracional linear $\mathcal{F}_l(M, \Delta_l)$ é *bem definida* se $(I - M_{22}\Delta_l)$ for inversível, o que pode ser garantido quando M_{22} for estritamente própria [31].

2.4 Representação de Incertezas via LFTs

A idéia básica no modelamento de um sistema incerto é separar o que é conhecido do que é desconhecido através de uma conexão usando realimentação e limitar os valores possíveis dos elementos desconhecidos. Transformações fracionais lineares são utilizadas com esta intenção, pois proporcionam uma grande facilidade de manipulação e computação para tais sistemas.

2.4.1 Representação de Incertezas Paramétricas

Suponha que um parâmetro c possa assumir valores tais que

$$c_{min} \leq c \leq c_{max}.$$

Podemos escrever que $c = \bar{c} + \alpha\delta_c$, onde \bar{c} denota o valor nominal do parâmetro e α um ganho tal que $c \in [c_{min}, c_{max}]$ para todo $\delta_c \in [-1, 1]$. Sabendo que uma LFT inferior é dada por $\mathcal{F}_l(M, \Delta_l) = M_{11} + M_{12}\Delta_l(I - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}$, de imediato podemos representar c como $\mathcal{F}_l(M, \delta_c)$ fazendo $M_{11} = \bar{c}$, $M_{12}M_{21} = \alpha$, $M_{22} = 0$ e $\Delta_l = \delta_c$. Assim,

$$c = \mathcal{F}_l\left(\begin{bmatrix} \bar{c} & \alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \delta_c\right) = \bar{c} + \alpha\delta_c.$$

As LFTs apresentam propriedades importantes como, por exemplo, a de que a inversa de uma LFT é outra LFT sobre o mesmo Δ_l ou Δ_u e também a interconexão de LFTs ser novamente uma LFT [18]. Desta forma, a partir de uma representação em diagrama de blocos para um sistema dinâmico linear, os n parâmetros incertos de tal sistema (geralmente coeficientes das equações diferenciais que o descrevem) podem ser substituídos pela representação em blocos de uma LFT, resultando em interconexões de LFTs. É possível reorganizar estas interconexões tal que os blocos de incerteza Δ_i fiquem agrupados em um único bloco estruturado $\Delta = \text{diag}[\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n]$ e as respectivas matrizes coeficientes M_i agrupadas em outra matriz coeficiente P , resultando numa única representação macroscópica como mostrado na Figura 2.3 onde P é a matriz coeficiente resultante dependente das matrizes M_1, M_2, \dots, M_n e de seu diagrama de interconexões.

2.4.2 Representação Geral de Incertezas no Espaço de Estado

Para a classe especial de modelos no espaço de estado com coeficientes desconhecidos, será mostrado que este tipo de incerteza pode ser representado via LFTs

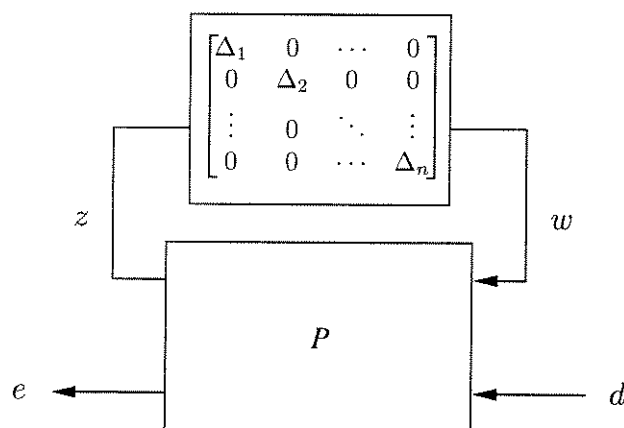


Figura 2.3: Representação macroscópica das interconexões de LFTs.

com relação a uma matriz de parâmetros incertos tal que as perturbações entrem no sistema através de realimentação. Considere um modelo incerto no espaço de estado,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i A_i & B_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i B_i \\ C_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i C_i & D_0 + \sum_{i=1}^m \delta_i D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^m \delta_i \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde para cada $i = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+n_y) \times (n+n_u)}.$$

Seja

$$r_i := \text{posto} \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix}$$

e fatore cada matriz como

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i \\ F_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i & H_i \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} E_i \\ F_i \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+n_y) \times r_i}, \quad \begin{bmatrix} G_i & H_i \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{r_i \times (n+n_u)}.$$

Agora, defina um sistema linear G_{ss} com entradas adicionais $w = [w_1 \ \dots \ w_m]'$ e saídas adicionais $z = [z_1 \ \dots \ z_m]'$ através das equações de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & E_1 & \cdots & E_m & B_0 \\ G_1 & 0 & \cdots & 0 & H_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_m & 0 & \cdots & 0 & H_m \\ C_0 & F_1 & \cdots & F_m & D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ \vdots \\ w_m \\ u \end{bmatrix}$$

como mostrado na Figura 2.4. O sistema incerto em (2.1) é representado como uma

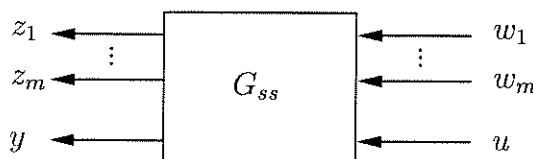


Figura 2.4: Sistema linear G_{ss} .

LFT em torno de G_{ss} , isto é

$$y = \mathcal{F}_u(G_{ss}, \Delta)u$$

onde Δ realiza o mapeamento $z \mapsto w$, e possui a estrutura dada por

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_m I_{r_m}] : \delta_i \in \mathbb{R}\}.$$

2.4.3 Representação de Dinâmicas Não-modeladas

Outra situação normalmente encontrada é a necessidade de se especificar uma porcentagem de incerteza dependente da frequência no comportamento real da planta, considerando assim dinâmicas que não são explicitamente representadas na estrutura do modelo. Uma abordagem comum para este caso é utilizar um modelo de incerteza cuja especificação consiste basicamente do modelo nominal $G(s)$ e de funções de ponderação estáveis $W_1(s)$ e $W_2(s)$ que caracterizam as estruturas espacial e frequencial da incerteza Δ . Fornecidos estes dados, podemos caracterizar o modelo do sistema pelo seguinte conjunto de incerteza aditiva

$$\Pi(s) = G(s) + W_1(s)\Delta(s)W_2(s), \quad \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < 1, \quad \forall \omega \geq 0$$

onde $\bar{\sigma}$ denota o valor singular máximo. Em diagrama de blocos, temos a representação mostrada na Figura 2.5, da qual podemos escrever

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_2 \\ W_1 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = H_{adit} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$w = \Delta z$$

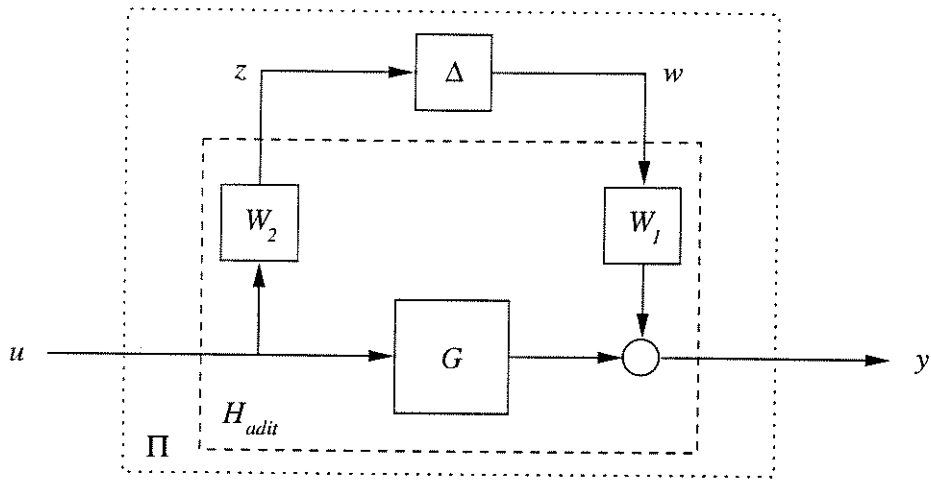


Figura 2.5: Representação de incerteza aditiva.

fornecendo, em termos de LFT, $y = \mathcal{F}_u(H_{adit}, \Delta)u$.

Uma representação alternativa a esta é a caracterização do modelo do sistema pelo conjunto de incerteza multiplicativa

$$\Gamma(s) = G(s)(I + W_1(s)\Delta(s)W_2(s)).$$

Uma vantagem da incerteza multiplicativa sobre a aditiva é que tanto as funções de transferência compensadas em malha fechada quanto o modelo original possuem a mesma representação multiplicativa das incertezas [16]. O diagrama de blocos corres-

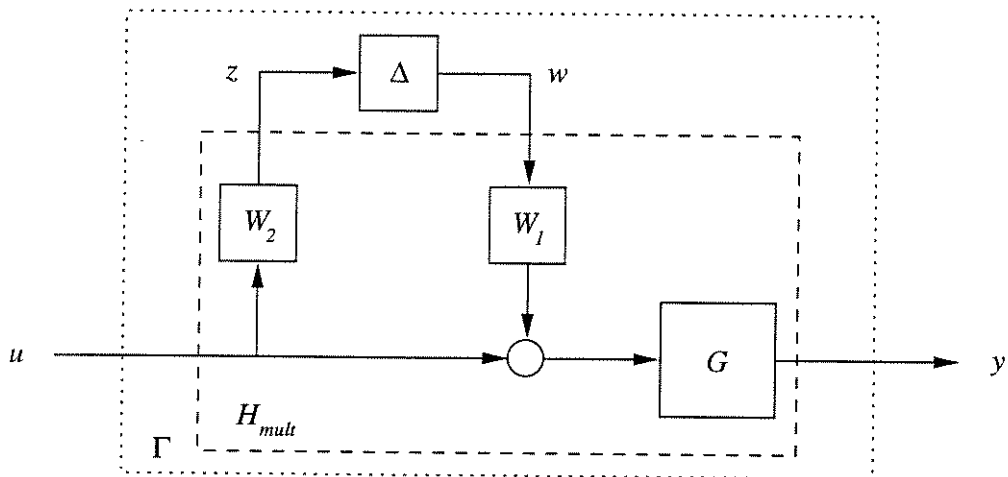


Figura 2.6: Representação de incerteza multiplicativa.

pondente neste caso aparece na Figura 2.6 com $y = \mathcal{F}_u(H_{mult}, \Delta)u$, onde

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_2 \\ GW_1 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = H_{mult} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$w = \Delta z$$

2.5 Controle \mathcal{H}_∞

Nesta seção são apresentados alguns aspectos relativos à solução de um problema \mathcal{H}_∞ padrão: para um dado número $\gamma > 0$, encontrar todos os controladores estabilizantes tais que a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência em malha fechada seja menor que γ . Os resultados mostrados são uma generalização direta dos resultados apresentados nas referências [17] e [19].

2.5.1 Formulação do Problema

Para introduzirmos a formulação do problema de controle \mathcal{H}_∞ , considere o sistema descrito pelo diagrama da Figura 2.7, onde P é a planta generalizada e K o

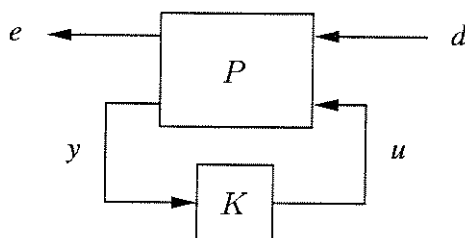


Figura 2.7: Representação do sistema de controle.

controlador. O bloco P contém o modelo da planta física mais todas as funções de ponderação. O sinal d contém todas as entradas externas, incluindo distúrbios, ruídos de sensores e os comandos; a saída e é um sinal de erro; y são as variáveis medidas e u a entrada de controle. A função de transferência em malha fechada de d para e resultante será denotada por $T_{ed} = \mathcal{F}_l(P, K)$.

O problema de *controle \mathcal{H}_∞ ótimo* consiste em encontrar todos os controladores admissíveis¹ K tais que $\|T_{ed}\|_\infty$ seja minimizada. Entretanto, a complexidade deste problema é normalmente elevada e na prática nem sempre a sua solução é necessária: pode ser mais “barato” obter controladores que são bem próximos (no sentido de norma) dos ótimos, sendo chamados de sub-ótimos. Desta forma estaremos considerando neste trabalho o problema de *controle \mathcal{H}_∞ sub-ótimo* que consiste em encontrar todos os controladores admissíveis K , se existem, tais que $\|T_{ed}\|_\infty < \gamma$ para um dado $\gamma > 0$.

A técnica padrão no espaço de estado para calcular controladores \mathcal{H}_∞ é selecionar um valor de γ e determinar se existe um controlador K tal que $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$. Este valor de γ é atualizado baseado em um algoritmo de biseção modificado, chamado de “iteração- γ ”. Este procedimento iterativo continua até que a magnitude da diferença entre o menor valor γ que “passou” e o maior valor γ que “falhou” seja pequena.

¹Controladores próprios que estabilizam internamente o sistema.

A realização da matriz de transferência P é considerada da forma

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

que é compatível com as dimensões $e(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$, $d(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ e o estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$. São feitas as seguintes hipóteses:

(H1) (A, B_2) é estabilizável e (C_2, A) é detectável;

(H2) $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ e $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$;

(H3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tem posto completo de coluna para todo ω ;

(H4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tem posto completo de linha para todo ω .

O tratamento do problema de controle \mathcal{H}_∞ está baseado nas hipóteses acima para a aplicação dos métodos de solução apresentados na literatura. De forma geral, o problema de encontrar K tal que o sistema de controle em malha fechada seja internamente estável será chamado de problema de *realimentação de saída* (RS). As soluções para este problema são construídas via argumento de separação a partir de quatro problemas especiais [17], cujas topologias se enquadram no diagrama de blocos padrão da Figura 2.7, mas com estruturas diferentes para P . São eles

- Informação Plena (IP);
- Controle Pleno (CP);
- Pré-alimentação de Distúrbio (PD);
- Estimação de Saída (ES).

Cada um dos quatro problemas herda algumas das hipóteses (H1)-(H4) apropriadamente e mostra-se que os resultados para os mesmos são condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador admissível tal que $\|T_{ed}\|_\infty < \gamma$, além da família de todos os controladores admissíveis tais que $\|T_{ed}\|_\infty < \gamma$. Os problemas CP e ES são duais aos IP e PD, respectivamente. A solução PD pode ser facilmente obtida da solução IP. As soluções para o problema de RS são construídas a partir dos resultados IP e ES (uma derivação dual poderia ser feita através dos resultados CP e PD).

A solução \mathcal{H}_∞ envolve duas matrizes Hamiltonianas H_∞ e J_∞ que são definidas como segue:

$$R := D_{1\bullet}^* D_{1\bullet} - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad D_{1\bullet} := \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} := D_{\bullet 1} D_{\bullet 1}^* - \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde} \quad D_{\bullet 1} := \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^* D_{1\bullet} \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} D_{1\bullet}^* C_1 & B^* \end{bmatrix}$$

$$J_\infty := \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C^* \\ -B_1 D_{\bullet 1}^* \end{bmatrix} \tilde{R}^{-1} \begin{bmatrix} D_{\bullet 1} B_1^* & C \end{bmatrix}$$

com as respectivas soluções de Riccati associadas dadas por

$$X_\infty := Ric(H_\infty) \quad \text{e} \quad Y_\infty := Ric(J_\infty).$$

O resultado principal para a solução do problema genérico de realimentação de saída é apresentado em termos das soluções das equações de Riccati para X_∞ e Y_∞ , juntamente com as matrizes F e L definidas por

$$F := \begin{bmatrix} F_{1\infty} \\ F_{2\infty} \end{bmatrix} := -R^{-1} [D_{1\bullet}^* C_1 + B^* X_\infty]$$

$$L := \begin{bmatrix} L_{1\infty} & L_{2\infty} \end{bmatrix} := -[B_1 D_{\bullet 1}^* + Y_\infty C^*] \tilde{R}^{-1}$$

e supõe-se que D , $F_{1\infty}$ e $L_{1\infty}$ são particionadas da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{c|c} & F' \\ \hline L' & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|ccc} & F_{11\infty}^* & F_{12\infty}^* & F_{2\infty}^* \\ \hline L_{11\infty}^* & D_{1111} & D_{1112} & 0 \\ L_{12\infty}^* & D_{1121} & D_{1122} & I \\ L_{2\infty}^* & 0 & I & 0 \end{array} \right].$$

Teorema 2.1 *Suponha que P satisfaz as hipóteses (H1)-(H4).*

- (a) *Existe um controlador admissível K tal que $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ (isto é, $\|T_{ed}\|_\infty < \gamma$) se e somente se*
- (i) $\gamma > \max(\bar{\sigma}[D_{1111}, D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{1111}^*, D_{1121}^*]);$
 - (ii) $H_\infty \in \text{dom}(Ric)$ com $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0;$
 - (iii) $J_\infty \in \text{dom}(Ric)$ com $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0;$
 - (iv) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2.$

(b) Dado que as condições da parte (a) são satisfeitas, então todos os controladores racionais internamente estabilizantes K satisfazendo $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ são dados por

$$K = \mathcal{F}_l(M_\infty, Q) \quad \text{para } Q \in \mathcal{RH}_\infty \text{ arbitrária} \quad \text{tal que } \|Q\|_\infty < \gamma$$

onde

$$M_\infty = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right]$$

$$\hat{D}_{11} = -D_{1121}D_{1111}^*(\gamma^2 I - D_{1111}D_{1111}^*)^{-1}D_{1112} - D_{1122},$$

$\hat{D}_{12} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ e $\hat{D}_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2}$ são quaisquer matrizes satisfazendo

$$\hat{D}_{12}\hat{D}_{12}^* = I - D_{1121}(\gamma^2 I - D_{1111}^*D_{1111})^{-1}D_{1121}^*,$$

$$\hat{D}_{21}^*\hat{D}_{21} = I - D_{1112}^*(\gamma^2 I - D_{1111}D_{1111}^*)^{-1}D_{1112},$$

e

$$\hat{B}_2 = Z_\infty(B_2 + L_{12\infty})\hat{D}_{12},$$

$$\hat{C}_2 = -\hat{D}_{21}(C_2 + F_{12\infty}),$$

$$\hat{B}_1 = -Z_\infty L_{2\infty} + \hat{B}_2\hat{D}_{12}^{-1}\hat{D}_{11},$$

$$\hat{C}_1 = F_{2\infty} + \hat{D}_{11}\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_2,$$

$$\hat{A} = A + BF + \hat{B}_1\hat{D}_{21}^{-1}\hat{C}_2$$

onde

$$Z_\infty = (I - \gamma^2 X_\infty Y_\infty)^{-1}.$$

Neste teorema, $\bar{\sigma}$ denota o valor singular máximo, o operador $Ric(\cdot)$ fornece a solução da equação de Riccati associada à matriz Hamiltoniana sobre a qual o mesmo é aplicado e $dom(Ric)$ é um conjunto de matrizes Hamiltonianas conforme convencionada a referência [31].

2.6 Valor Singular Estruturado

Em um projeto de controle, os critérios de estabilidade robusta e de desempenho robusto variam com a descrição da incerteza utilizada. Será mostrado que todos estes critérios podem ser tratados precisamente para sistemas com múltiplas fontes de incerteza usando uma estrutura unificada baseada no mecanismo de LFT já introduzido e no valor singular estruturado a ser apresentado nesta seção. O valor singular estruturado é uma ferramenta desenvolvida para tratar uma classe de problemas envolvendo perturbações matriciais que surge no controle robusto de sistemas multivariáveis. Estas perturbações são chamadas de perturbações fracionais lineares e são uma maneira natural de modelar vários tipos de incerteza em sistemas lineares, incluindo incerteza paramétrica no espaço de estado e incertezas aditiva e multiplicativa devido a dinâmicas não modeladas.

2.6.1 Teorema do Pequeno Ganho

Este teorema forma a base para os critérios de estabilidade robusta apresentados posteriormente. Nesta seção o mesmo será introduzido como um teste de estabilidade para um sistema nominal estável sob perturbações não-estruturadas. Considere o sistema interconectado como mostrado na Figura 2.8, com M uma matriz de transferência estável $n_z \times n_w$.

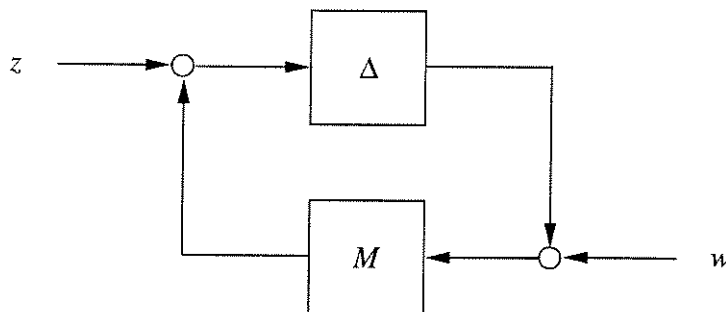


Figura 2.8: Malha de realimentação.

Uma questão importante é saber qual a maior perturbação Δ (no sentido de $\|\cdot\|_\infty$) tal que o sistema da Figura 2.8 permaneça estável. Já que os pólos em malha fechada são dados por $\det(I - M\Delta) = 0$, o sistema realimentado se torna instável se $\det(I - M(s)\Delta(s)) = 0$ para algum $s \in \overline{C}_+$. Da propriedade submultiplicativa da norma \mathcal{H}_∞ ,

$$\|M\Delta\|_\infty \leq \|M\|_\infty \|\Delta\|_\infty,$$

indicando que se garantirmos o produto das normas das duas matrizes de transferência menor que a unidade, a norma do produto será também limitada pela unidade, garantindo $\det(I - M\Delta) \neq 0$ e, portanto, estabilidade. O seguinte Teorema formaliza esta análise.

Teorema 2.2 (Teorema do Pequeno Ganho) *Suponha que $M \in \mathcal{RH}_\infty$ e seja $\gamma > 0$. Então o sistema interconectado mostrado na Figura 2.8 é bem definido e internamente estável para todo $\Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ com $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ se e somente se $\|M(s)\|_\infty < \gamma$.*

Prova: Veja [31]

2.6.2 Estrutura Geral para Tratamento Robusto de Sistemas

A fim de aplicar a teoria de valor singular estruturado ao projeto de sistemas de controle, as interconexões tradicionais dos diagramas de blocos que representam o problema de controle devem ser rearranjadas de tal forma que se apresentem como mostrado na Figura 2.9. O sistema denotado por P é a interconexão em malha aberta e contém todos os elementos conhecidos, incluindo o modelo nominal da planta e as

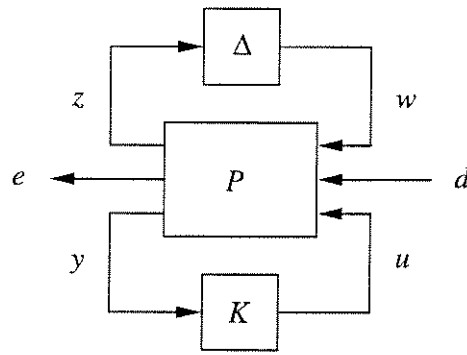


Figura 2.9: Estrutura geral para problemas de robustez.

funções de ponderação de desempenho e da incerteza. O bloco Δ é o elemento incerto do conjunto Δ que parametriza todo modelo de incerteza assumido no problema e K representa o controlador. O sistema P possui 3 conjuntos de entradas: as entradas de perturbações w , de distúrbios, ruídos e comandos d e de controles u ; e 3 conjuntos de saídas: as saídas de perturbações z , de erros e e de medidas y . Sua matriz de transferência é dada por

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{31}(s) & P_{32}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix}$$

e o sistema em malha fechada é uma LFT sobre a perturbação e o controlador, dada por

$$e = \mathcal{F}_u(\mathcal{F}_l(P, K), \Delta)d = \mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(P, \Delta), K)d.$$

Quando estivermos considerando o problema da análise de robustez, o controlador pode ser visto simplesmente como um componente do sistema e absorvido pela estrutura de interconexão. Denotando

$$M = \mathcal{F}_l(P, K) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

a estrutura geral reduz-se à Figura 2.10

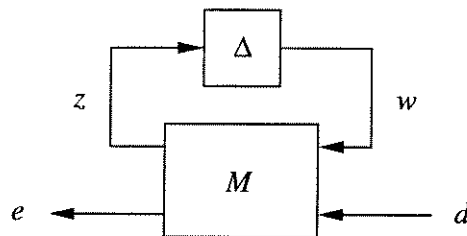


Figura 2.10: Estrutura de análise para problemas de robustez.

onde

$$e = \mathcal{F}_u(M, \Delta)d = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}]d.$$

Neste caso, supondo que K seja um controlador estabilizante para a planta nominal P , então $M \in \mathcal{RH}_\infty$. O sistema possui estabilidade robusta para todo $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ com $\|\Delta\|_\infty < 1$ se e somente se $\mathcal{F}_u(M, \Delta) \in \mathcal{RH}_\infty$ para todo Δ admissível², o que é garantido por $\|M_{11}\|_\infty \leq 1$ (Teorema do Pequeno Ganho). Entretanto, para sistemas com Δ constituída de múltiplas fontes de incerteza, o teste $\|M_{11}\|_\infty \leq 1$ implica em estabilidade robusta, mas a recíproca não é verdadeira, isto é, o sistema pode ser estável e $\|M_{11}\|_\infty \gg 1$ pois ignora a estrutura bloco-diagonal conhecida da incerteza Δ , sendo equivalente a considerá-la não-estruturada. Isto pode ser arbitrariamente conservativo já que sistemas podem ter $\|M_{11}\|_\infty$ arbitrariamente grande e mesmo assim $\|M_{11}\Delta\|_\infty < 1$, sendo portanto estáveis. A análise exata de estabilidade e desempenho para sistemas com incerteza estruturada requer uma nova função matricial chamada *valor singular estruturado*.

2.6.3 Valor Singular Estruturado Complexo

Na definição de valor singular estruturado, uma função matricial denotada por $\mu(\cdot)$, são consideradas matrizes $M \in C^{n \times n}$ e uma estrutura Δ (um conjunto de matrizes bloco-diagonais), da qual μ é dependente. Para cada problema esta estrutura é, em geral, diferente pois depende da incerteza e dos objetivos de desempenho do problema. Definir a estrutura envolve três especificações: o tipo de cada bloco que a compõe, o número total de blocos e suas dimensões.

Existem dois tipos de blocos: escalares repetidos e blocos cheios. Dois inteiros não-negativos, S e F , representam o número de blocos escalares repetidos e o número de blocos cheios, respectivamente. Para representar suas dimensões, são introduzidos inteiros positivos $r_1, \dots, r_S; m_1, \dots, m_F$. O i -ésimo bloco escalar repetido é $r_i \times r_i$ enquanto o j -ésimo bloco cheio é $m_j \times m_j$. Dados estes inteiros, definimos $\Delta \subset C^{n \times n}$ como

$$\Delta = \{\text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in C, \Delta_j \in C^{m_j \times m_j}\}. \quad (2.2)$$

Para haver consistência entre todas as dimensões, devemos ter

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n.$$

A seguinte notação é introduzida para subconjuntos de Δ limitados em norma:

$$\mathbf{B}_\Delta = \{\Delta \in \Delta : \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}.$$

²Incerteza que não cancela os pólos instáveis da planta nominal P na formação da planta real $\mathcal{F}_u(P, \Delta)$

Definição 2.4 Para $M \in C^{n \times n}$, $\mu_{\Delta}(M)$ é definido como

$$\mu_{\Delta}(M) := \frac{1}{\min\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \mathbf{\Delta}, \det(I - M\Delta) = 0\}}$$

a menos que nenhum $\Delta \in \mathbf{\Delta}$ torne $I - M\Delta$ singular, caso em que $\mu_{\Delta}(M) := 0$.

Podemos considerar uma interpretação de realimentação para $\mu_{\Delta}(M)$ neste ponto. Seja $M \in C^{n \times n}$ e a malha mostrada na Figura 2.11.

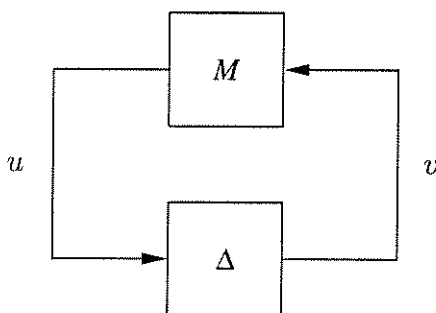


Figura 2.11: Malha de realimentação.

Desta figura podemos escrever as equações

$$u = Mv \quad \text{e} \quad v = \Delta u.$$

Contanto que $I - M\Delta$ seja não-singular, as únicas soluções u, v para as equações de malha são $u = v = 0$. Entretanto, se $I - M\Delta$ for singular, então existem infinitas soluções para as equações e as normas $\|u\|, \|v\|$ das soluções podem ser arbitrariamente grandes. Chamaremos o sistema realimentado de instável neste caso e de estável quando as únicas soluções são identicamente nulas. Neste contexto, $\mu_{\Delta}(M)$ é uma medida do menor Δ estruturado que ocasiona a instabilidade do sistema realimentado mostrado na Figura 2.11.

Podemos relacionar $\mu_{\Delta}(M)$ com quantidades familiares da álgebra linear quando $\mathbf{\Delta}$ é um dos dois conjuntos extremos:

- Se $\mathbf{\Delta} = \{\delta I_n : \delta \in C\}$ ($S = 1, F = 0, r_1 = n$), então $\mu_{\Delta}(M) = \rho(M)$
- Se $\mathbf{\Delta} = C^{n \times n}$ ($S = 0, F = 1, m_1 = n$), então $\mu_{\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M)$

Obviamente, para a estrutura geral $\mathbf{\Delta}$ definida anteriormente, devemos ter

$$\{\delta I_n : \delta \in C\} \subset \mathbf{\Delta} \subset C^{n \times n}.$$

Assim, a partir da definição de μ e dos dois casos especiais acima, concluímos que

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M).$$

Estes limitantes não são suficientes para informar o valor de $\mu_\Delta(M)$, pois o intervalo entre ρ e $\bar{\sigma}$ pode ser arbitrariamente grande [31]. Eles são refinados considerando-se transformações sobre M que não afetam $\mu_\Delta(M)$, mas afetam os limitantes ρ e $\bar{\sigma}$. Para tanto, são definidos os dois conjuntos de $C^{n \times n}$ seguintes:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{U \in \Delta : UU^* = I_n\} \\ \mathcal{D} &= \{\text{diag}[D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : \\ &D_i \in C^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathfrak{R}, d_j > 0\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Note que para qualquer $\Delta \in \Delta$, $U \in \mathcal{U}$ e $D \in \mathcal{D}$,

$$U^* \in \mathcal{U}, U\Delta \in \Delta, \Delta U \in \Delta, \bar{\sigma}(U\Delta) = \bar{\sigma}(\Delta U) = \bar{\sigma}(\Delta), D\Delta = \Delta D.$$

Consequentemente, temos o seguinte Teorema:

Teorema 2.3 *Para todo $U \in \mathcal{U}$ e $D \in \mathcal{D}$*

$$\mu_\Delta(MU) = \mu_\Delta(UM) = \mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(DMD^{-1}).$$

Portanto, os limites ρ e $\bar{\sigma}$ podem ser ajustados para

$$\max_{U \in \mathcal{U}} \rho(UM) \leq \max_{\Delta \in \mathcal{B}_\Delta} \rho(\Delta M) = \mu_\Delta(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}).$$

Estas relações formam a base das aproximações para o cálculo de $\mu_\Delta(M)$. Um limite inferior é baseado no resultado de [15] a partir do qual

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \rho(UM) = \mu_\Delta(M)$$

porém o problema de maximização pode ter máximos locais que não são globais. Assim, a busca local não garante a obtenção de μ , mas apenas fornece um limitante inferior. O limite superior pode ser reformulado como um problema de otimização convexa, mas infelizmente o limite superior não é sempre igual a μ . Para estruturas Δ que satisfazem $2S + F \leq 3$, o limite superior é sempre igual a $\mu_\Delta(M)$, e se $2S + F > 3$ existem matrizes para as quais μ é menor que o ínfimo [27]. Nestes casos, as informações dos limites superior e inferior permitem uma estimativa precisa de $\mu_\Delta(M)$, segundo indicam experimentos numéricos.

2.6.4 Valor Singular Estruturado Real/Complexo

Nas seções anteriores os conjuntos de perturbações considerados eram apenas complexos, como na equação (2.2). Entretanto, em algumas situações pode ser mais natural modelar as incertezas com perturbações reais, por exemplo quando os coeficientes reais de uma equação diferencial linear são incertos. Algoritmos têm sido desenvolvidos para testes de robustez com blocos de perturbações reais e complexos. A teoria

envolvida na determinação do limite superior neste caso tem uma descrição mais complicada que a do limite superior para o caso complexo: além das matrizes $D \in \mathcal{D}$ dadas por (2.3), existem matrizes G que exploram a estrutura real das perturbações.

Outra situação a ser considerada ocorre quando todos os blocos que compõem a estrutura de incertezas são reais. Neste caso a função μ não é necessariamente contínua o que pode causar problemas na convergência do algoritmo que computa o limite inferior, como convergir para um valor que é significativamente menor que o valor de μ ou até mesmo não convergir. Uma solução para este problema é apresentada em [2], bem como os tipos de incerteza tratados pelo *software* atualmente. Tal situação pode surgir no cálculo da estabilidade robusta de um sistema incerto, mas normalmente estamos interessados em objetivos de desempenho que levam a um bloco complexo cheio na estrutura dos blocos incertos e conseqüentemente a um bom comportamento do algoritmo que calcula o limite inferior.

2.6.5 Transformações Fracionais Lineares e μ

A utilização de μ na teoria de controle depende, em grande parte, da forma como se relaciona com as LFTs. Para explorar este relacionamento, considere uma matriz complexa M particionada como

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

e suponha que existam duas estruturas de blocos incertos, Δ_1 e Δ_2 , compatíveis em tamanho com M_{11} e M_{22} , respectivamente. Defina uma terceira estrutura Δ como

$$\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} : \Delta_1 \in \Delta_1, \Delta_2 \in \Delta_2 \right\}.$$

Existem, portanto, três estruturas com relação às quais μ pode ser calculado e para tanto será usada a notação: $\mu_1(\cdot)$ é calculado com relação a Δ_1 , $\mu_2(\cdot)$ é com relação a Δ_2 e $\mu_\Delta(\cdot)$ é com relação a Δ . Neste caso a LFT inferior $\mathcal{F}_l(M, \Delta_2)$ é definida como

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta_2) = M_{11} + M_{12}\Delta_2(I - M_{22}\Delta_2)^{-1}M_{21}.$$

Teorema 2.4 *A transformação fracional linear $\mathcal{F}_l(M, \Delta_2)$ é bem definida para todo $\Delta_2 \in \mathbf{B}_{\Delta_2}$ se e somente se $\mu_2(M_{22}) < 1$.*

Prova: Veja [31].

À medida que Δ_2 desvia de zero, a matriz $\mathcal{F}_l(M, \Delta_2)$ desvia de M_{11} . A faixa de valores que $\mu_1(\mathcal{F}_l(M, \Delta_2))$ assume está intimamente relacionada com $\mu_\Delta(M)$, como mostrado no teorema seguinte.

Teorema 2.5 (“Teorema da Malha Principal”) *São equivalentes:*

$$\mu_{\Delta}(M) < 1 \iff \begin{cases} \mu_2(M_{22}) < 1 \text{ e} \\ \max_{\Delta_2 \in \mathcal{B}_{\Delta_2}} \mu_1(\mathcal{F}_l(M, \Delta_2)) < 1 \end{cases}$$

Prova: Veja [31]

2.6.6 Estabilidade e Desempenho Robustos Estruturados

Teste de Estabilidade Robusta

A utilização mais conhecida de μ como uma ferramenta de análise é no domínio da frequência. Suponha que M seja uma função de transferência de um sistema linear, estável e multivariável possuindo n_w entradas e n_z saídas. Seja Δ uma estrutura como a da equação (2.2) e suponha que as dimensões sejam tais que $\Delta \subset C^{n_w \times n_z}$. Queremos considerar perturbações de realimentação para M que sejam sistemas dinâmicos com a estrutura bloco-diagonal do conjunto Δ . Definimos o conjunto de todas as funções de transferência bloco-diagonais, racionais e estáveis que possuem estrutura Δ por

$$\mathcal{M}(\Delta) := \{\Delta(\cdot) \in \mathcal{RH}_{\infty} : \Delta(s_o) \in \Delta \text{ para todo } s_o \in \overline{C}_+\}.$$

Teorema 2.6 *Seja $\beta > 0$. A malha mostrada na Figura 2.11 é bem definida e internamente estável para todo $\Delta(\cdot) \in \mathcal{M}(\Delta)$ com $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\beta}$ se e somente se*

$$\sup_{\omega \in \mathcal{R}} \mu_{\Delta}(M(j\omega)) \leq \beta$$

Prova: Veja [31].

Deste teorema conclui-se que o valor máximo do gráfico de μ da resposta em frequência que a perturbação “enxerga” determina o tamanho das perturbações para as quais a malha é robustamente estável.

Teste de Desempenho Robusto

Normalmente estabilidade não é a única propriedade de um sistema em malha fechada que deve ser robusta a perturbações. Tipicamente, existem distúrbios exógenos atuando sobre o sistema, o que resulta em erros de regulação e de rastreamento. Sob perturbação, o efeito que estes distúrbios têm sobre os sinais de erro pode aumentar bastante. Em muitos casos, bem antes do início da instabilidade, o desempenho em malha fechada degrada a um ponto inaceitável, e daí a necessidade de um teste de desempenho robusto. Tal teste indica o pior nível da degradação de desempenho associado a um dado nível de perturbações.

Suponha que M seja uma função de transferência estável e própria com $n_w + n_d$ entradas e $n_z + n_e$ saídas. Particione M de tal forma que M_{11} tenha n_w entradas e n_z saídas e assim por diante:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}.$$

Seja $\Delta \subset C^{n_w \times n_z}$ uma estrutura de blocos tal como em (2.2). Defina uma estrutura de blocos aumentada

$$\Delta_P := \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} : \Delta \in \Delta, \Delta_F \in C^{n_d \times n_e} \right\}.$$

O interesse está em tratar as questões de desempenho robusto em torno da malha mostrada na Figura 2.12 onde a função de transferência de $d \rightarrow e$ é denotada por $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$.

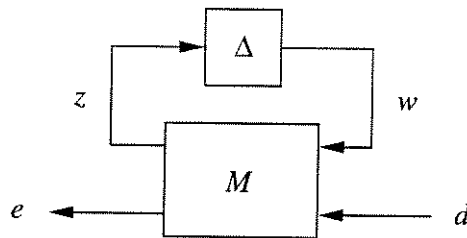


Figura 2.12: Estrutura para tratamento de desempenho robusto.

Teorema 2.7 *Seja $\beta > 0$. Para todo $\Delta(\cdot) \in \mathcal{M}(\Delta)$ com $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\beta}$, a malha mostrada na Figura 2.12 é bem definida, internamente estável e $\|\mathcal{F}_u(M, \Delta)\|_\infty \leq \beta$ se e somente se*

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta_P}(M(j\omega)) \leq \beta.$$

Prova: Veja [31].

2.6.7 Análise de Robustez

A partir da representação dos modelos incertos via LFTs e dos testes apresentados na seção anterior, podemos realizar a análise da robustez ou análise- μ destes sistemas incertos.

Análise da Estabilidade Robusta

Esta análise deve consistir dos seguintes passos:

1. Reestruturar o problema de acordo com a interconexão familiar mostrada pelo diagrama da Figura 2.11 onde M é um sistema linear conhecido (sistema nominal mais o controlador, normalmente) e Δ a perturbação estruturada.

2. Calcular a resposta em frequência de M .
3. Descrever a estrutura do conjunto de perturbações Δ à qual Δ pertence, como na equação (2.2).
4. Realizar o cálculo de μ sobre a resposta em frequência de M e em relação a Δ , i.é., $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ para $\omega \in \Omega$, onde Ω denota o conjunto das frequências sobre o qual o passo 2 foi realizado.
5. Plotar os limites obtidos no passo anterior para efetuar a análise.

Suponha que após a realização desses passos o valor de pico de $\mu_{\Delta}(M(j\omega))$ seja β . De acordo com o Teorema 2.6, isto significa que para todas as perturbações $\Delta \in \Delta$ e satisfazendo $\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < \frac{1}{\beta}$, o sistema perturbado é estável. Além disso, existe uma matriz de perturbação particular $\Delta \in \Delta$ satisfazendo $\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] = \frac{1}{\beta}$ que provoca instabilidade. Daí podemos entender

$$\frac{1}{\max_{\omega} \mu_{\Delta}(M(j\omega))}$$

como sendo uma margem de estabilidade com relação ao conjunto de incertezas estruturado afetando M .

Uma observação importante se faz necessária tendo em vista a inexatidão do cálculo de μ . Seja β_u o pico (em frequência) do limite superior para μ e β_l o pico do limite inferior. Então,

- Para toda matriz de perturbações $\Delta \in \Delta$ satisfazendo

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < \frac{1}{\beta_u},$$

o sistema perturbado é garantidamente estável;

- Existe uma matriz de perturbação particular $\Delta \in \Delta$ satisfazendo

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] = \frac{1}{\beta_l}$$

que garantidamente provoca instabilidade.

Portanto, o intervalo entre os limites superior e inferior traduz-se em intervalos entre as conclusões acerca da “garantia de apresentar estabilidade robusta” e da “garantia da não-estabilidade” para o sistema incerto.

Análise do Desempenho Robusto

Neste caso o diagrama de blocos do sistema incerto é transformado no diagrama genérico da Figura 2.12 analogamente ao caso anterior, exceto pela manutenção dos sinais exógenos no diagrama que nos permite evidenciar a função de transferência de $d \rightarrow e$ como $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$.

O desempenho de sistemas de controle MIMO é aqui caracterizado usando normas \mathcal{H}_∞ . Especificamente, supomos que um bom desempenho é equivalente a termos a norma \mathcal{H}_∞ de uma matriz de transferência T ponderada em malha fechada menor ou igual à unidade. No caso do desempenho robusto de sistemas incertos, estamos interessados em saber qual a maior norma alcançável por $\mathcal{F}_u(M, \Delta)$ quando Δ assume seus valores permitidos. Tendo em vista esta questão, a condição de desempenho robusto é definida como: a LFT da Figura 2.12 atinge desempenho robusto se for estável para todas as perturbações $\Delta \in \Delta$ satisfazendo $\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < 1$ e, além disso, se $\|\mathcal{F}_u(M, \Delta)\|_\infty \leq 1$ para todas estas perturbações.

A utilização de μ para testar o desempenho robusto parte da seguinte idéia: primeiramente, devemos relacionar o tamanho de uma função de transferência a um teste de estabilidade robusta. Pelo teorema do pequeno ganho, sabemos que para um dado sistema T , a norma $\|T\|_\infty \leq \beta$ se e somente se a malha de realimentação da Figura 2.13 for estável para todo $\Delta_F(s)$ satisfazendo $\|\Delta_F\|_\infty < \frac{1}{\beta}$. Em outras palavras, o

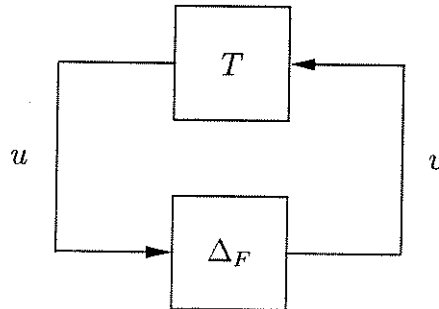


Figura 2.13: Desempenho como teste de robustez.

tamanho de uma função de transferência pode ser determinado usando um teste de estabilidade robusta. Desta forma, se considerarmos $T = \mathcal{F}_u(M, \Delta)$ e seguirmos o argumento anterior, temos que $\|\mathcal{F}_u(M, \Delta)\|_\infty \leq 1$ para todas as perturbações $\Delta \in \Delta$ satisfazendo $\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < 1$ se e somente se a LFT mostrada na Figura 2.14 for estável para todo $\Delta \in \Delta$ e para todo Δ_F estável satisfazendo $\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta_F(j\omega)] < 1$. Isto, no entanto, é exatamente um problema de estabilidade robusta para M , sujeito a matrizes de perturbações do tipo

$$\Delta_P = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix}.$$

Daí, usamos técnicas de estabilidade robusta em um problema aumentado, computando $\mu_{\Delta_P}(M(j\omega))$ para determinar os limites do desempenho robusto para o nosso

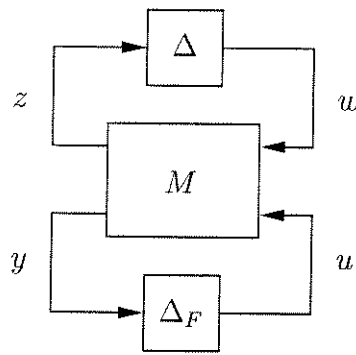


Figura 2.14: Estabilidade robusta com incerteza aumentada.

problema original. Em resumo, cada análise- μ de desempenho robusto consiste dos seguintes passos:

1. Reestruturar o problema de acordo com a interconexão familiar mostrada pelo diagrama da Figura 2.12, onde M é um sistema linear conhecido, Δ uma perturbação estruturada e d e e são o distúrbio e o erro generalizados que caracterizam o objetivo de desempenho.
2. Calcular a resposta em frequência de M .
3. Descrever a estrutura do conjunto de perturbações Δ .
4. Usar as dimensões dos canais de distúrbio e erro para definir o bloco de incertezas fictício Δ_F e acrescentá-lo à estrutura real de incertezas Δ para obter um conjunto de incertezas aumentado Δ_P .
5. Computar $\mu_{\Delta_P}(M(j\omega))$ sobre a resposta em frequência de M .
6. Plotar os limites obtidos no passo anterior para efetuar a análise.

Supondo que o pico (em frequência) do limite superior para μ seja β_u e o do limite inferior β_l , então

- Para toda matriz de perturbações $\Delta \in \Delta$ satisfazendo

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < \frac{1}{\beta_u},$$

o sistema perturbado é estável e $\|\mathcal{F}_u(M, \Delta)\|_{\infty} \leq \beta_u$;

- Existe uma matriz de perturbação particular $\Delta \in \Delta$ satisfazendo

$$\max_{\omega} \bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] = \frac{1}{\beta_l}$$

que provoca instabilidade ou $\|\mathcal{F}_u(M, \Delta)\|_{\infty} \geq \beta_l$.

Daí, assim como na análise de estabilidade robusta, concluímos que o intervalo entre os limites superior e inferior leva a “intervalos” na determinação precisa do desempenho robusto.

2.7 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os elementos essenciais para a abordagem do controle de sistemas dinâmicos numa perspectiva atual, em particular visando a aplicação das metodologias introduzidas por John C. Doyle e colaboradores. O objetivo é mostrar as ferramentas, conceitos e notações de uso geral que serão aplicados na resolução de um problema específico: o controle vetorial robusto da máquina de indução. Neste contexto tal resolução compreende, além da modelagem adequada do sistema, a especificação de critérios de projeto que devem ser garantidos pela síntese de controladores via técnicas de otimização e pela análise de robustez do sistema de controle em malha fechada assim obtido.

Capítulo 3

Modelagem da Máquina de Indução com Tratamento de Incertezas

3.1 Introdução

Uma máquina de indução pode ser abstratamente tratada como circuitos elétricos estacionários e girantes que estão magneticamente acoplados a fim de converter energia entre sistemas elétricos e mecânicos. A partir do modelamento destes circuitos e de simplificações introduzidas no acoplamento magnético em questão, técnicas clássicas da teoria de circuitos eletromagnéticos são utilizadas na derivação das equações de tensão e torque que descrevem a dinâmica da máquina de indução. Estas equações relacionam as tensões, fluxos de enlace e correntes estatóricas e rotóricas em termos das grandezas das fases abc . Tendo em vista o controle da máquina de indução pelo princípio da orientação de campo, são apresentadas as transformações que conduzem à representação das grandezas da máquina em um sistema de coordenadas dq que gira a uma velocidade arbitrária ω . Com esta transformação, a máquina passa a ser representada por um novo conjunto de equações, que a descreve como uma máquina fictícia bifásica. Com a escolha apropriada da velocidade ω obtém-se o modelo adequado para a utilização das técnicas de controle vetorial.

Embora linear, este modelo apresenta elementos que variam com o tempo e afetam, em maior ou menor proporção, sua dinâmica. As variações dos mesmos são convenientemente tratadas como incertezas e representadas por uma estrutura que permite a aplicação da teoria \mathcal{H}_∞ . Com isso, pretende-se minimizar a influência da variação de parâmetros e conseqüentemente dispensar o conhecimento dos valores instantâneos dos mesmos durante a ação de controle, tornando o sistema robusto neste sentido.

3.2 Equações da Máquina em Variáveis das Fases

Neste trabalho é considerada uma máquina de indução simétrica com enrolamentos trifásicos conectados em estrela e distribuídos senoidalmente¹. Outras simplificações como as adotadas em [20] são também consideradas, de forma que na maioria das aplicações seu comportamento possa ser adequadamente descrito pelo modelo aqui derivado. Os enrolamentos do estator são idênticos, cada qual possuindo N_s espiras equivalentes² e resistência elétrica R_s . Analogamente para o rotor, considera-se um número equivalente de N_r espiras e resistência R_r . Os circuitos elétricos correspondentes para os enrolamentos de estator e rotor estão mostrados respectivamente nas Figuras 3.1(a) e 3.1(b).

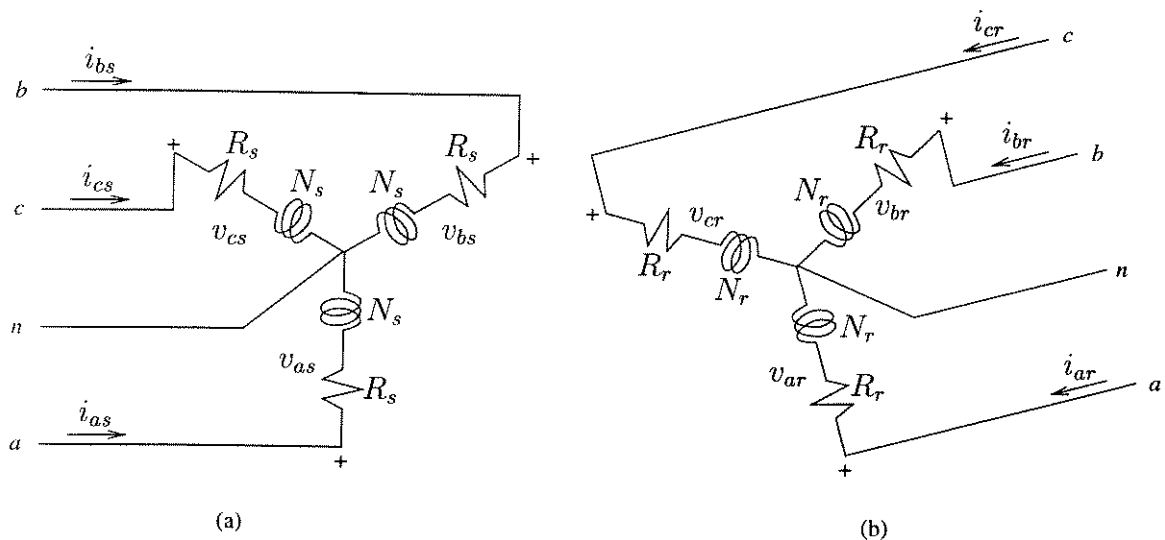


Figura 3.1: Circuitos elétricos dos enrolamentos da máquina de indução: (a) Estator. (b) Rotor.

Utilizando uma notação compacta, as equações de tensão em termos de variáveis das fases abc da máquina são expressas da seguinte forma

$$v_{abcs} = \mathbf{r}_s \dot{i}_{abcs} + p \lambda_{abcs} \quad (3.1)$$

$$v_{abcr} = \mathbf{r}_r \dot{i}_{abcr} + p \lambda_{abcr} \quad (3.2)$$

onde $f_{abcs} = [f_{as} \ f_{bs} \ f_{cs}]'$ e $f_{abcr} = [f_{ar} \ f_{br} \ f_{cr}]'$ são representações de quaisquer grandezas elétricas trifásicas da máquina relativas ao estator e rotor, respectivamente. As matrizes \mathbf{r}_s e \mathbf{r}_r são diagonais, cada uma com elementos repetidos R_s e R_r , e p é o operador derivada em relação ao tempo (d/dt). Desprezando-se a saturação

¹Distribuição de enrolamentos que produz uma onda de força magnetomotriz de entreferro senoidal para minimizar os harmônicos de tensão e de corrente.

²Espiras efetivamente enlaçadas pelos fluxos de dispersão e de magnetização de um acoplamento magnético.

magnética na máquina, podemos expressar os fluxos de enlace λ_{abcs} e λ_{abcr} em termos das correntes e indutâncias como em um sistema magneticamente linear

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abcs} \\ \lambda_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}'_{sr} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i_{abcr} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} \\ -\frac{1}{2}L_{ms} & -\frac{1}{2}L_{ms} & L_{ls} + L_{ms} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} \\ -\frac{1}{2}L_{mr} & -\frac{1}{2}L_{mr} & L_{lr} + L_{mr} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{sr} = L_{ms} \begin{bmatrix} \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta_r & \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta_r + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_r - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta_r \end{bmatrix}.$$

Nestas matrizes, L_{ls} e L_{ms} são as indutâncias de dispersão e de magnetização dos enrolamentos do estator e L_{lr} e L_{mr} são relativas ao rotor. θ_r denota o deslocamento angular elétrico do rotor. Observa-se que nas equações acima todas as variáveis rotóricas já estão referidas ao estator pela relação de espiras entre estator e rotor.

Usando (3.3), as equações de tensão (3.1) e (3.2) podem ser reescritas em função das correntes como

$$\begin{bmatrix} v_{abcs} \\ v_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s + p\mathbf{L}_s & p\mathbf{L}_{sr} \\ p\mathbf{L}'_{sr} & \mathbf{r}_r + p\mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{abcs} \\ i_{abcr} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Estas equações são variantes no tempo, tendo em vista sua dependência das indutâncias mútuas representadas por \mathbf{L}_{sr} que por sua vez são funções do deslocamento angular θ_r e logo da velocidade rotórica. Para eliminar as indutâncias variantes no tempo e conseqüentemente reduzir a complexidade das equações (3.4), aplicaremos uma transformação de variáveis que projeta as grandezas das três fases abc em um sistema de eixos ortogonais direto d e em quadratura q girando a uma velocidade arbitrária ω em relação a um ponto fixo no estator como mostrado na Figura 3.2. Escolhendo-se ω como sendo a velocidade síncrona é possível, por exemplo, fazer com que tais grandezas apareçam como quantidades CC (contínuas) em regime permanente de operação.

3.3 Equações da Máquina em Variáveis de um Sistema de Referência Arbitrário

A transformação de uma grandeza abc para $dq0$ no caso de circuitos estacionários (como o estator) é dada por

$$f_{qd0s} = \mathbf{K}_s f_{abcs} \quad (3.5)$$

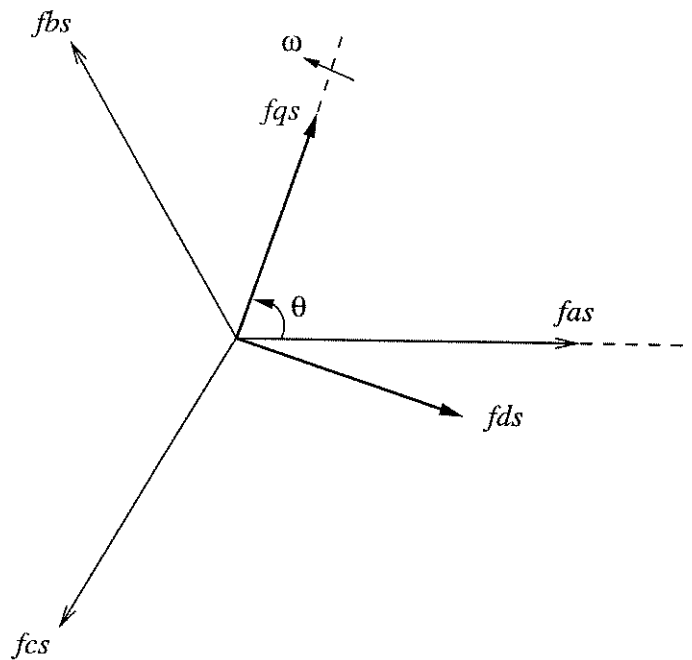


Figura 3.2: Sistemas de eixos estacionário e dq .

onde $f_{qd0s} = [f_{qs} \ f_{ds} \ f_{0s}]'$ é a representação compacta para o estator das grandezas de eixo em quadratura, eixo direto e das grandezas nulas que não estão associadas ao sistema de eixos dq . Elas se relacionam aritmeticamente com as variáveis abc , independentemente do deslocamento angular θ do sistema de referências arbitrário. A matriz \mathbf{K}_s é dada por

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \text{sen} \theta & \text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

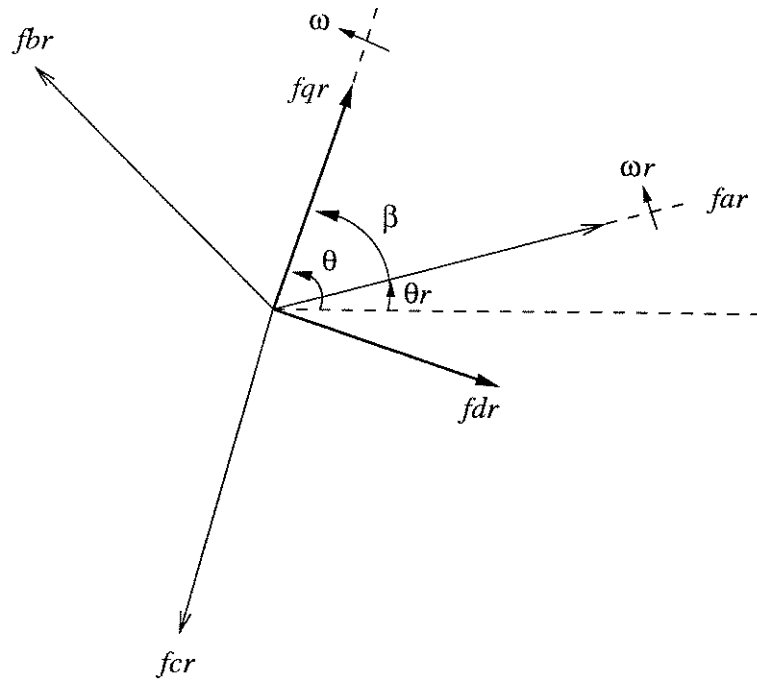
e o deslocamento angular do sistema de eixos dq é

$$\theta = \int_0^t \omega(\xi) d\xi + \theta(0).$$

A matriz que realiza a transformação inversa é

$$\mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Para o caso de circuitos não-estacionários (caso do rotor) devemos considerar seu movimento em relação ao sistema de referência, como na Figura 3.3 onde o deslocamento angular θ_r do rotor que gira à velocidade ω_r e do sistema de eixos dq são relacionados por $\beta = \theta - \theta_r$. A transformação neste caso é dada por

Figura 3.3: Sistemas de eixos não-estacionário e dq .

$$f_{qd0r} = \mathbf{K}_r f_{abc} \quad (3.6)$$

onde $f_{qd0r} = [f_{qr} \ f_{dr} \ f_{0r}]'$ é a representação compacta para o rotor das grandezas de eixo em quadratura, eixo direto e das grandezas nulas referidas ao estator. A matriz \mathbf{K}_r é

$$\mathbf{K}_r = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \beta & \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \sin \beta & \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

com

$$\theta_r = \int_0^t \omega_r(\xi) d\xi + \theta_r(0).$$

A matriz que realiza a transformação inversa é dada por

$$\mathbf{K}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 1 \\ \cos(\beta - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\beta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\beta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando as transformações apresentadas às variáveis das equações (3.1)-(3.2) e (3.3) chega-se à seguinte representação compacta no sistema de referência arbitrário [20]:

$$v_{qd0s} = \mathbf{r}_s i_{qd0s} + \omega \lambda_{dqs} + p \lambda_{qd0s} \quad (3.7)$$

$$v_{qd0r} = \mathbf{r}_r i_{qd0r} + (\omega - \omega_r) \lambda_{dqr} + p \lambda_{qd0r} \quad (3.8)$$

onde $\lambda_{dqs} = [\lambda_{ds} \ -\lambda_{qs} \ 0]'$ e $\lambda_{dqr} = [\lambda_{dr} \ -\lambda_{qr} \ 0]'$. Considerando o sistema trifásico equilibrado, as componentes de seqüência nula tornam-se iguais a zero, podendo ser eliminadas na notação compacta. Assim, reescrevemos as equações (3.7) e (3.8) como

$$v_{qds} = R_s i_{qds} - \omega J \lambda_{qds} + \dot{\lambda}_{qds} \quad (3.9)$$

$$v_{qdr} = R_r i_{qdr} - (\omega - \omega_r) J \lambda_{qdr} + \dot{\lambda}_{qdr} \quad (3.10)$$

onde $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e a equação (3.3) dos fluxos concatenados como

$$\lambda_{qds} = L_s i_{qds} + M i_{qdr} \quad (3.11)$$

$$\lambda_{qdr} = M i_{qds} + L_r i_{qdr} \quad (3.12)$$

onde $L_s = L_{ls} + M$ e $L_r = L_{lr} + M$ são as indutâncias próprias de estator e rotor, respectivamente e $M = \frac{3}{2} L_{ms}$ é a indutância mútua.

Resolvendo (3.11) e (3.12) para obter as correntes em função dos fluxos, tem-se

$$i_{qds} = a \lambda_{qds} - c \lambda_{qdr} \quad (3.13)$$

$$i_{qdr} = -c \lambda_{qds} + b \lambda_{qdr} \quad (3.14)$$

onde

$$a = \frac{1}{\sigma L_s}, \quad b = \frac{1}{\sigma L_r}, \quad c = \frac{M}{L_s L_r - M^2} \quad \text{e} \quad \sigma = 1 - \frac{M^2}{L_s L_r}.$$

Escolhendo ambas as componentes q e d dos fluxos de estator e de rotor como variáveis de estado e substituindo (3.13)-(3.14) em (3.9)-(3.10), tem-se

$$v_{qds} = R_s (a \lambda_{qds} - c \lambda_{qdr}) - \omega J \lambda_{qds} + \dot{\lambda}_{qds} \quad (3.15)$$

$$0 = R_r (-c \lambda_{qds} + b \lambda_{qdr}) - \omega_s J \lambda_{qdr} + \dot{\lambda}_{qdr} \quad (3.16)$$

onde $\omega_s = \omega - \omega_r$ é a velocidade de deslize (escorregamento) e as tensões de rotor v_{qdr} foram consideradas nulas para tratar do caso de motores com circuito de rotor curto-circuitado (em particular, gaiola de esquilo). Organizando as equações anteriores na representação tradicional em espaço de estado, obtemos

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{qds} \\ \dot{\lambda}_{qdr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a R_s I + \omega J & c R_s I \\ c R_r I & -b R_r I + \omega_s J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{qds} \\ \lambda_{qdr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} v_{qds} \quad (3.17)$$

onde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Na equação (3.17) observa-se a dependência explícita dos parâmetros da máquina e das velocidades ω e ω_s .

3.4 Equações de Torque e Velocidade

Na máquina de indução, uma parcela da energia elétrica que entra via estator é convertida em energia mecânica, resultando no torque eletromagnético T_e dado em Nm por [20]:

$$T_e = P i'_{abcs} \frac{\partial}{\partial \theta_r} [\mathbf{L}_{sr}] i_{abcr} \quad (3.18)$$

onde P é o número de pares de pólos e θ_r é o deslocamento angular elétrico do rotor. A expressão para este torque em termos de variáveis do sistema de referência arbitrário pode ser obtida substituindo-se as matrizes de transformação na equação anterior. Assim,

$$T_e = P [(\mathbf{K}_s)^{-1} i_{qd0s}]' \frac{\partial}{\partial \theta_r} [\mathbf{L}_{sr}] (\mathbf{K}_r)^{-1} i_{qd0r}. \quad (3.19)$$

Esta equação fornece o torque expresso em termos das correntes como

$$T_e = \frac{3}{2} PM (i_{qs} i_{dr} - i_{ds} i_{qr}). \quad (3.20)$$

Outras expressões equivalentes para o torque eletromagnético de uma máquina de indução são

$$T_e = \frac{3}{2} P (\lambda_{qr} i_{dr} - \lambda_{dr} i_{qr}) \quad (3.21)$$

$$T_e = \frac{3}{2} P (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \quad (3.22)$$

$$T_e = \frac{3}{2} P \frac{M}{L_r} (\lambda_{dr} i_{qs} - \lambda_{qr} i_{ds}). \quad (3.23)$$

Finalmente, torque e velocidade rotórica se relacionam por

$$\dot{\omega}_r = \frac{P}{J_m} (T_e - C_1 \omega_r - T_L) \quad (3.24)$$

onde J_m é o momento de inércia do rotor e da carga conectada ao seu eixo em kgm^2 , C_1 é o coeficiente de atrito viscoso em Nms e T_L é o torque resistente da carga.

3.5 Parametrização dos Modelos

A aplicação das técnicas de otimização \mathcal{H}_∞ apresentadas no capítulo anterior requer uma representação adequada para o modelo cujo sistema físico deseja-se controlar. Além disso, nenhum modelo matemático único pode exatamente representar um sistema físico real. Baseando-se neste fato, o termo incerteza é usado para designar diferenças entre modelos e realidade, sendo várias as formas de descrevê-las.

Nesta seção a metodologia de representação de incertezas apresentada na seção 2.4.2 é utilizada a fim de convenientemente descrever nossos modelos por LFTs, onde

os parâmetros incertos da máquina aparecem explicitamente parametrizados em uma conexão de realimentação, separados do modelo conhecido ou invariante. Por uma questão de simplificação, seja a representação compacta das equações (3.17) dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{qds} \\ \dot{\lambda}_{qdr} \end{bmatrix} = A_v \begin{bmatrix} \lambda_{qds} \\ \lambda_{qdr} \end{bmatrix} + B_v v_{qds} \quad (3.25)$$

onde

$$A_v = \begin{bmatrix} a_{v1}I + a_{v2}J & a_{v3}I \\ a_{v4}I & a_{v5}I + a_{v6}J \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_v = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} a_{v1} &= -aR_s & a_{v4} &= cR_r \\ a_{v2} &= \omega & a_{v5} &= -bR_r \\ a_{v3} &= cR_s & a_{v6} &= \omega_s \end{aligned}$$

Observa-se que este modelo descreve a dinâmica dos fluxos de rotor e de estator para uma máquina alimentada em tensão. No caso de alimentação em corrente, estaremos interessados apenas na dinâmica dos fluxos de rotor e, portanto, a equação

$$\dot{\lambda}_{qdr} = A_c \lambda_{qdr} + B_c i_{qds} \quad (3.26)$$

com $A_c = a_{c1}I + a_{c2}J$ e $B_c = b_{c1}I$ fornece o modelo adequado para

$$a_{c1} = -\frac{R_r}{L_r}, \quad a_{c2} = \omega_s \quad \text{e} \quad b_{c1} = \frac{R_r}{L_r} M.$$

Considerando o modelo dado pela equação (3.17), observa-se que as incertezas aparecem como elementos variantes no tempo nas matrizes de estado, isto é, as velocidades ω_s e ω variam com o ponto de trabalho da máquina. No entanto, como a máquina trabalha em uma faixa de operação previamente determinada, estes elementos podem ser parametrizados com um valor nominal e uma faixa de possível variação. Neste trabalho as faixas de velocidade consideradas foram $0 \leq \omega_s \leq \omega_{smax}$, $0 \leq \omega_r \leq \omega_{rmax}$ e $0 \leq \omega \leq \omega_{max}$. Assim, baseando-se nestas suposições, podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega &= \bar{\omega}(1 + \delta_1) \\ \omega_s &= \bar{\omega}_s(1 + \delta_2) \end{aligned}$$

com $\delta_1, \delta_2 \in [-1, 1]$ e $\bar{\omega}, \bar{\omega}_s$ representando valores nominais ou médios dentro de seus respectivos intervalos de variação, isto é, $\bar{\omega} = \frac{1}{2}\omega_{max}$ e $\bar{\omega}_s = \frac{1}{2}\omega_{smax}$.

Na representação compacta, os elementos de A_v e A_c afetados por estas variações são modificados de acordo, fornecendo

$$a_{v2} = \bar{\omega}(1 + \delta_1), \quad a_{v6} = \bar{\omega}_s(1 + \delta_2) \quad \text{e} \quad a_{c2} = \bar{\omega}_s(1 + \delta_2).$$

Em seguida passamos à representação dos modelos via transformação fracional linear para os casos alimentação em corrente e alimentação em tensão.

3.5.1 Alimentação em Corrente

Substituindo o elemento parametrizado a_{c2} na matriz A_c da equação (3.26) obtemos

$$\begin{aligned} A_c &= a_{c1}I + \bar{w}_s(1 + \delta_1)J \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^1 \delta_i A_i \end{aligned}$$

onde

$$A_0 = a_{c1}I + \bar{w}_s J \quad \text{e} \quad A_1 = \bar{w}_s J$$

Realizamos as fatorações

$$A_i = E_i G_i$$

onde $E_i \in \mathbb{R}^{n \times r_i}$, $G_i \in \mathbb{R}^{r_i \times n}$, n é o número de estados e $r_i = \text{posto}(A_i)$, para $i = 1$. Assim,

$$E_1 = \alpha \bar{w}_s J, \quad G_1 = \frac{1}{\alpha} I \quad \text{e} \quad r_1 = 2$$

onde α é um escalar real de ponderação escolhido na etapa de projeto. A equação (3.26) é aumentada definindo-se entradas e saídas extras como na equação abaixo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & E_1 & B_0 \\ G_1 & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ u \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_I := \left[\begin{array}{c|cc} A_0 & E_1 & B_0 \\ \hline G_1 & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

onde $x = \lambda_{qdr}$ é o vetor de estados, $B_0 = B_c$ e $C_0 = I$. O sistema incerto dado por (3.26) teve os próprios estados λ_{qr} e λ_{dr} escolhidos como saída y , i_{qds} como entrada de controle u e agora pode ser representado por uma LFT superior com relação a Δ_I , denotada por $\mathcal{F}_u(G_I, \Delta_I)$, como no diagrama da Figura 3.4. Nesta representação, a

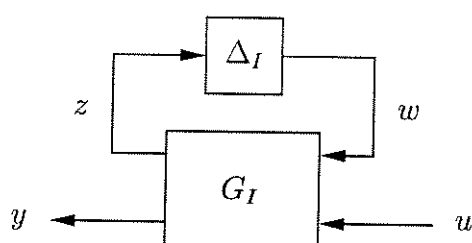


Figura 3.4: Máquina de indução alimentada em corrente representada via LFT.

saída de perturbação $z = z_1$ e entrada de perturbação $w = w_1$ estão relacionadas por $w = \Delta_I z$, onde $\Delta_I = \delta_1 I_{r_1}$. A função de transferência em malha fechada de $u \rightarrow y$ é dada por $y = \mathcal{F}_u(G_I, \Delta_I)u$, resultando na seguinte equação de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + E\Delta_I G)x + B_0 u \\ y = C_0 x \end{cases}$$

onde $E = E_1$ e $G = G_1$. Desta forma chegamos à parametrização que descreve a classe de todos os modelos da máquina de indução alimentada em corrente quando a variável δ_1 assume valores pertencentes ao intervalo $[-1, 1]$. Em particular, quando $\delta_1 = 0$, o modelo representa um ponto intermediário na faixa de operação previamente especificada.

3.5.2 Alimentação em Tensão

Repetindo o procedimento anterior para o modelo descrito pela equação (3.25), temos

$$\begin{aligned} A_v &= \begin{bmatrix} a_{v1}I + \bar{\omega}(1 + \delta_1)J & a_{v3}I \\ a_{v4}I & a_{v5}I + \bar{\omega}_s(1 + \delta_2)J \end{bmatrix} \\ &= A_0 + \sum_{i=1}^2 \delta_i A_i \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a_{v1}I + \bar{\omega}J & a_{v3}I \\ a_{v4}I & a_{v5}I + \bar{\omega}_sJ \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} \bar{\omega}J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}_sJ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Apenas a matriz A_v possui elementos incertos e, novamente, as fatorações se reduzem a

$$A_i = E_i G_i$$

onde E_i , G_i e r_i são definidos como anteriormente para $i = 1, 2$. Desta forma,

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} \alpha \bar{\omega}J \\ 0 \end{bmatrix}, & G_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha}I & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad r_1 = 2; \\ E_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \bar{\omega}_sJ \end{bmatrix}, & G_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha}I \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad r_2 = 2; \end{aligned}$$

Neste caso, a equação (3.25) aumentada é

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & E_1 & E_2 & B_0 \\ G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ G_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_V := \left[\begin{array}{c|ccc} A_0 & E_1 & E_2 & B_0 \\ \hline G_1 & 0 & \cdots & 0 \\ G_2 & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

onde $x = [\lambda'_{qds} \ \lambda'_{qdr}]'$ é o vetor de estados, $B_0 = B_v$ e $C_0 = [0 \ I]$. A saída y é dada por λ_{qdr} e a entrada de controle u corresponde a v_{qds} . Representamos o modelo parametrizado pela LFT superior $\mathcal{F}_u(G_V, \Delta_V)$ como mostrado na Figura 3.5.

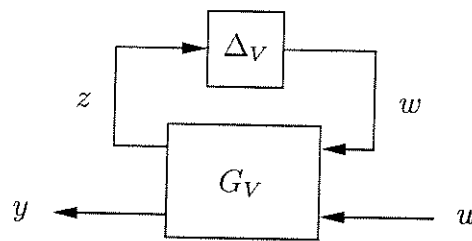


Figura 3.5: Máquina de indução alimentada em tensão representada via LFT.

Nesta figura, as saídas e entradas de perturbação são dadas respectivamente por $z = [z'_1 \ z'_2]'$ e $w = [w'_1 \ w'_2]'$ com $w = \Delta_V z$, onde $\Delta_V = \text{diag}[\delta_1 I_{r_1} \ \delta_2 I_{r_2}]$. Definindo $E = [E_1 \ E_2]$ e $G = [G'_1 \ G'_2]'$, o sistema G_V é dado por

$$G_V = \left[\begin{array}{c|cc} A_0 & E & B_0 \\ \hline G & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e, em malha fechada, $y = \mathcal{F}_u(G_V, \Delta_V)u$, resultando na representação de estado

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + E\Delta_V G)x + B_0 u \\ y = C_0 x \end{cases}$$

3.6 Conclusão

Neste capítulo, partindo de hipóteses apropriadas, obtivemos os modelos que descrevem a dinâmica da máquina de indução. Estes modelos, embora lineares, são não-estacionários pois apresentam elementos das matrizes de estado que variam com o tempo. Utilizando um procedimento geral para incerteza linear no espaço de estado, tais variações dos modelos foram representadas como incertezas paramétricas em uma estrutura adequada, a LFT, a fim de aplicarmos as técnicas de otimização \mathcal{H}_∞ e análise- μ apresentadas no capítulo anterior. Este procedimento permitiu modelar as não-estacionariedades de forma estruturada, isto é, representando a incerteza por parâmetros que descrevem exatamente onde e com qual intensidade ela influencia o sistema real, assim viabilizando um tratamento mais preciso do modelo, seja do ponto de vista de análise ou síntese.

Capítulo 4

Controle Vetorial \mathcal{H}_∞ Robusto da Máquina de Indução

4.1 Introdução

Por um longo tempo a utilização das máquinas de corrente contínua foi dominante em aplicações industriais exigindo elevado desempenho dinâmico. Devido a sua própria construção, o fluxo de campo e a força magnetomotriz são mantidos em uma orientação espacial mutuamente perpendicular, independentemente da velocidade rotórica. Em consequência desta ortogonalidade “natural”, uma máquina CC possui uma estrutura de controle muito simples baseada em eixos ortogonais, na qual fluxo e torque são desacoplados, permitindo uma máxima sensibilidade nas respostas de torque. Entretanto, o comutador mecânico destas máquinas introduz limitações em sua potência e velocidade, além de exigir manutenções periódicas que são indesejáveis. Estes fatores, aliados ao desenvolvimento dos dispositivos de estado sólido utilizados em eletrônica de potência, contribuíram para o desenvolvimento de estratégias aplicadas ao controle das máquinas de corrente alternada (CA) que começaram a ser utilizadas na indústria.

As estratégias ou métodos de controle das máquinas CA classificam-se basicamente em dois grupos: os métodos de controle escalar e vetorial. Os métodos de controle escalar se relacionam apenas com o controle da magnitude de uma variável e os sinais de comando e de realimentação são grandezas CC proporcionais às respectivas variáveis. Já nos métodos de controle vetorial, a magnitude e a fase de uma variável vetorial são ambas controladas. Esta última estratégia permite que torque e fluxo sejam desacoplados, desta forma obtendo um desempenho similar ao fornecido por uma máquina CC, ao passo que a estratégia de controle escalar, embora apresente um desempenho dinâmico inferior, é de implementação mais simples.

Neste capítulo, o controle vetorial da máquina de indução é tratado como um problema de controle \mathcal{H}_∞ robusto. Utilizando os modelos parametrizados apresentados no capítulo anterior, caracterizamos objetivos de projeto através de funções de ponderação e representamos o problema de controle por uma estrutura genérica que

permite a aplicação das modernas técnicas de otimização \mathcal{H}_∞ e análise- μ já apresentadas. Com esta metodologia de projeto obtemos controladores que garantem os níveis de desempenho estabelecidos para toda uma faixa de operação. Em cada projeto são apresentados resultados de simulações que mostram o comportamento dinâmico alcançado pela máquina usando tais controladores.

4.2 Dinâmica da Máquina de Indução sob Orientação de Campo

A obtenção do desacoplamento entre fluxo e torque da máquina de indução está condicionada a um fornecimento de componentes de corrente que estejam orientadas em fase e em quadratura com o vetor fluxo rotórico λ_r . Isto pode ser realizado escolhendo a velocidade ω como a velocidade instantânea de λ_r e fixando a fase do sistema de referência dq tal que o fluxo rotórico seja totalmente alinhado sobre o eixo d , resultando em

$$\lambda_{qr} = 0.$$

Tal procedimento representa o princípio de orientação de campo em termos das variáveis dq . O diagrama vetorial da Figura 4.1 mostra as componentes das correntes e do fluxo rotórico orientado segundo o sistema de eixos dq . Em seguida apresentamos

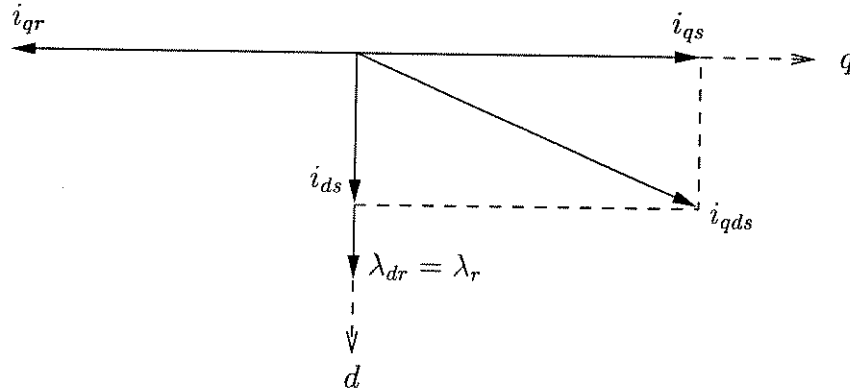


Figura 4.1: Componentes q e d das correntes e fluxo rotórico orientado.

as novas equações às quais são reduzidas as equações de uma máquina sob orientação de campo. Reescrevendo (3.10) na forma expandida, assumindo $\lambda_{qr} = 0$ e $\dot{\lambda}_{qr} = 0$, temos

$$0 = R_r i_{qr} + \omega_s \lambda_{dr} \Rightarrow \omega_s = -\frac{R_r i_{qr}}{\lambda_{dr}} \quad (4.1)$$

$$0 = R_r i_{dr} + p \lambda_{dr} \Rightarrow i_{dr} = -\frac{p \lambda_{dr}}{R_r} \quad (4.2)$$

Da equação (3.12),

$$\lambda_{qr} = M i_{qs} + L_r i_{qr} = 0 \quad \Rightarrow \quad i_{qr} = -\frac{M}{L_r} i_{qs} \quad (4.3)$$

$$\lambda_{dr} = M i_{ds} + L_r i_{dr} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{dr} = \frac{M}{1 + p\tau_r} i_{ds}, \text{ usando (4.2)} \quad (4.4)$$

onde $\tau_r = L_r/R_r$ denota a constante de tempo rotórica. Substituindo (4.3) e (4.4) em (4.1), obtemos

$$\omega_s = \frac{\left(\frac{1}{\tau_r}\right) i_{qs}}{\left(\frac{1}{1+p\tau_r}\right) i_{ds}}. \quad (4.5)$$

Em regime estacionário, tem-se

$$\lambda_{dr} = M i_{ds} \quad (4.6)$$

$$\omega_s = \frac{1}{\tau_r} \frac{i_{qs}}{i_{ds}} \quad (4.7)$$

e a equação de torque eletromagnético (3.23) torna-se

$$T_e = \frac{3PM}{2L_r} \lambda_{dr} i_{qs} \quad (4.8)$$

ou em termos da frequência de escorregamento

$$T_e = \frac{3P}{2R_r} \lambda_{dr}^2 \omega_s. \quad (4.9)$$

Observa-se pelas relações (4.6) e (4.8) que fluxo e torque são controlados de forma independente, respectivamente pelas componentes i_{ds} e i_{qs} da corrente estatórica, sendo possível obter sensibilidade máxima nas respostas de torque.

4.3 Controle Vetorial \mathcal{H}_∞ Robusto

A fim de obtermos desacoplamento entre o fluxo rotórico e o torque eletromagnético da máquina de indução em toda sua faixa de operação, abordamos a manutenção da orientação de campo como um problema de rastreamento de fluxo robusto à variação do ponto de trabalho da máquina, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\lambda_{qdr}^*(t) - \lambda_{qdr}(t)] = \epsilon_1 \quad (4.10)$$

em toda sua faixa de operação para um erro ϵ_1 pequeno. Inicialmente apresentamos o sistema de controle através do diagrama de blocos padrão como na Figura 4.2. O diagrama mostra o modelo incerto da planta $\mathcal{F}_u(G, \Delta)$, o controlador K a ser projetado e as funções de ponderação W_{cmd} , W_e e W_u interconectadas para a caracterização do nosso objetivo de projeto: manter o erro de rastreamento e_1 do fluxo rotórico pequeno

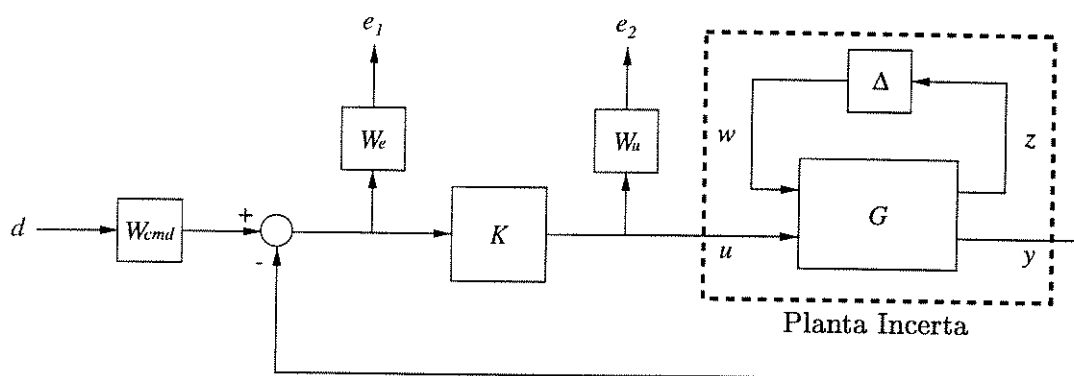


Figura 4.2: Sistema de controle padrão ponderado.

para todos os sinais de referência d limitados e para a classe de todas as plantas parametrizadas por Δ . Para atender este objetivo é usada a metodologia de otimização \mathcal{H}_∞ apresentada na seção 2.5 na obtenção do controlador K e, em seguida, aplicada a análise- μ da seção 2.6 para checar a robustez em malha fechada alcançada. Há necessidade, portanto, de reorganizar os elementos que compõem o diagrama da Figura 4.2 de forma tal que seja possível sua representação macroscópica pela estrutura genérica para tratamento de robustez que a Figura 4.3 exhibe, onde a planta generalizada P agrega todas as informações como tipos de sinais medidos, regulados e atuantes, além das interconexões dos elementos do sistema de controle na sua representação padrão. Nesta figura o vetor $e = [e'_1 \ e'_2]'$ denota o conjunto das saídas ponderadas de erro e_1 e

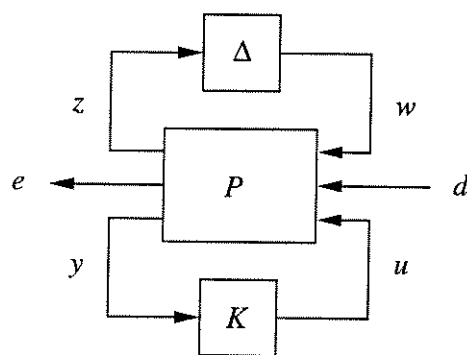


Figura 4.3: Estrutura genérica para tratamento de robustez.

de controle e_2 ; o vetor $d = \lambda_{qdr}^* = [\lambda_{qr}^* \ \lambda_{dr}^*]'$ representa a entrada das referências para as componentes do fluxo rotórico.

Expressar o objetivo de projeto matematicamente significa escolher funções de ponderação apropriadas para levar em conta restrições sobre a faixa de frequência de rastreamento, sinais de controle e de comando. Seguindo a idéia apresentada no Apêndice C, a função W_{cmd} foi escolhida para transformar os sinais de comando normalizados (degraus unitários) em sinais de comando típicos para as componentes

de fluxo λ_{qr} e λ_{dr} . Como estamos interessados na orientação de campo, escolhemos

$$W_{cmd} = \begin{bmatrix} w_{cmd1} & 0 \\ 0 & w_{cmd2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 \\ 0 & \lambda_r \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

onde $\lambda_r = 0,62$ como calculado no Apêndice D. Desta forma, quando aplicamos referências de amplitude unitária para o fluxo, já está sendo considerada a importância relativa destas referências nas funções que fazem parte da matriz de transferência a ter sua norma \mathcal{H}_∞ minimizada. É importante observar que mesmo sabendo da atribuição $\lambda_{qr}^* = 0$ para esta componente de fluxo, não é possível assumir $w_{cmd1} = 0$ pois tal atitude viola a hipótese H2 pressuposta no Teorema 2.1. Por esta mesma razão W_u foi escolhida como sendo

$$W_u = 10^{-5}I. \quad (4.12)$$

Finalmente, o erro de rastreamento foi ponderado pela função

$$W_e(s) = w_e(s)I$$

onde $w_e(s)$ apresenta características de um filtro passa-baixas e sua inversa deve estar relacionada ao tamanho do erro de rastreamento permitido em baixas frequências. Assim, quando $\|\mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(P, \Delta), K)\|_\infty \approx 1$, os erros de rastreamento assumem valores da ordem de $|w_e(0)|^{-1}$.

Havendo estabelecido as funções de ponderação anteriores, realizamos os projetos dos controladores para os dois casos de modelos parametrizados no Capítulo 3: alimentação em corrente e alimentação em tensão.

4.3.1 Controle de Torque da Máquina Alimentada em Corrente

O projeto do controlador, neste caso, é realizado para o modelo da máquina $\mathcal{F}_u(G_I, \Delta_I)$, apresentado na seção 3.5.1. Este modelo substitui $\mathcal{F}_u(G, \Delta)$ no diagrama da Figura 4.2 a fim de compor a estrutura geral da Figura 4.3.

Para minimizar o efeito da incerteza presente no modelo, além de considerarmos a função de transferência de $d \rightarrow e$, também são consideradas as funções de transferência de $w \rightarrow z$, $w \rightarrow e$ e $d \rightarrow z$ na estrutura de síntese mostrada na Figura 4.4.

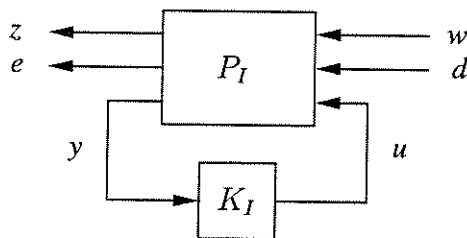


Figura 4.4: Estrutura de síntese para alimentação em corrente.

Utilizando os dados fornecidos no Apêndice D, aplicamos o algoritmo de iterações- γ [2] na tentativa de encontrar um controlador sub-ótimo K_I tal que $\|\mathcal{F}_l(P_I, K_I)\|_\infty < \gamma$. Várias tentativas de escolha para a ponderação $w_e(s)$ do erro de rastreamento e para o escalar α das fatorações apresentadas na seção 3.5.1 foram realizadas. Uma escolha que gerou bons resultados foi $w_e(s) = \frac{5 \times 10^5}{s + 5 \times 10^2}$ e $\alpha = 10$. Com isso, o algoritmo forneceu o controlador

$$K_I = \left[\begin{array}{c|c} A_{K_I} & B_{K_I} \\ \hline C_{K_I} & D_{K_I} \end{array} \right]$$

onde

$$A_{K_I} = 10^6 \begin{bmatrix} -10.73 & -0.00 & -374.05 & -0.05 \\ 0.55 & -4.33 & 0.01 & -2972.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 \\ -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$B_{K_I} = 10^3 \begin{bmatrix} -4344.48 & 0.00 \\ 240.62 & -0.06 \\ -0.31 & 0.00 \\ -0.00 & -0.31 \end{bmatrix},$$

$$C_{K_I} = 10^6 \begin{bmatrix} -0.32 & -0.00 & -162.54 & -0.02 \\ -0.00 & -1.88 & 0.00 & -1291.42 \end{bmatrix},$$

$$D_{K_I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\gamma \approx 0.6458$. Observe que a ordem do controlador é a ordem da planta generalizada, isto é, a ordem do modelo da máquina mais a ordem das funções de ponderação, como dado pelo Teorema 2.1.

O passo seguinte a esta etapa do projeto consiste na análise de robustez alcançada pelo controlador K_I . Havendo parametrizado os modelos por incertezas estruturadas, estabilidade robusta e desempenho robusto podem ser testados usando a teoria de valor singular estruturado apresentada na seção 2.6 (análise- μ). Para tanto é necessário representar K_I absorvido pela planta P_I , resultando na estrutura de análise da Figura 4.5 onde $H_I = \mathcal{F}_l(P_I, K_I)$. Aplicando os passos 2-5 e 2-6 da seção 2.6.7 sobre

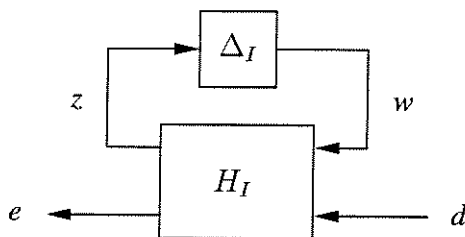
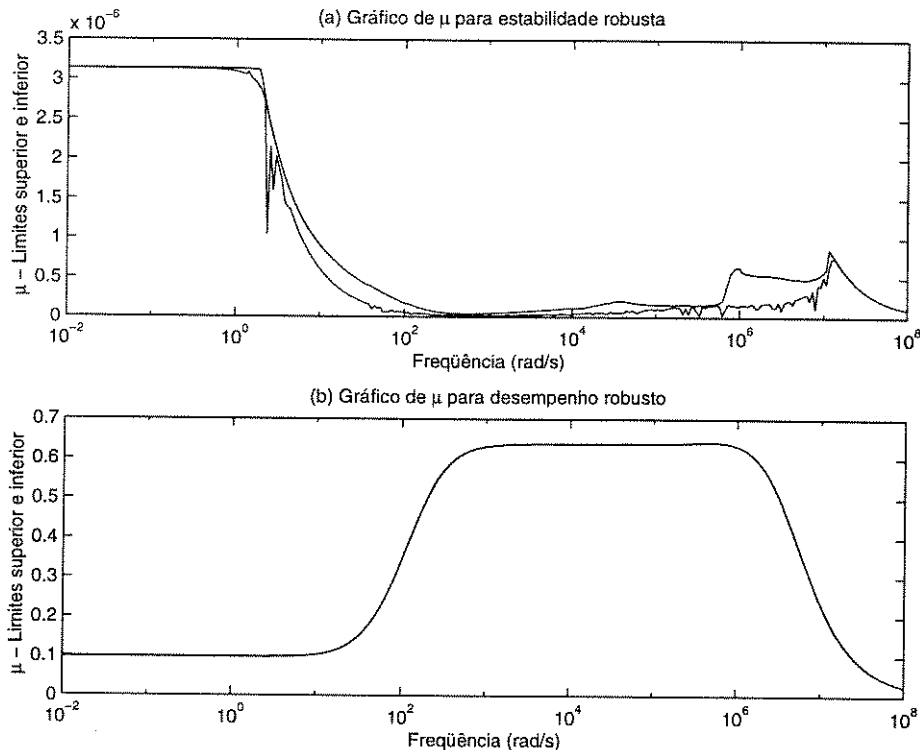


Figura 4.5: Estrutura de análise para alimentação em corrente.

a estrutura da Figura 4.5 obtemos os gráficos de μ para estabilidade e desempenho robustos mostrados na Figura 4.6. A análise dos limites superiores β_u de tais gráficos nos permite concluir que:

- A estabilidade está garantida para todas as perturbações Δ_I com $\|\Delta_I\|_\infty < \frac{1}{\beta_u} \approx \frac{1}{3.1356 \times 10^{-6}} = 3.1892 \times 10^5$, implicando em estabilidade sobre toda a faixa de operação da máquina o que corresponde a $\|\Delta_I\|_\infty \leq 1$.
- O desempenho robusto é também alcançado já que neste caso $\beta_u \approx 0.6412 < 1$, significando que para todo Δ_I com $\|\Delta_I\|_\infty < \frac{1}{\beta_u} \approx \frac{1}{0.6412} = 1.5596$, temos $\|\mathcal{F}_u(H_I, \Delta_I)\|_\infty \leq \beta_u$ e o erro de rastreamento é mantido inferior ao valor $\frac{\beta_u}{|w_e(0)|} \approx 0.6412 \times 10^{-3}$.


 Figura 4.6: Gráficos de μ .

Apresentamos na Figura 4.7 a seguir os resultados mostrando o comportamento dinâmico alcançado pelo motor de indução caracterizado no Apêndice D, para o controlador K_I obtido. Uma referência normalizada tipo degrau unitário $\lambda_{qdr}^* = [0 \ 1]'$ é aplicada ao sistema para levar à orientação do campo com fluxo rotórico nominal. Desta forma, podemos usar a relação $T_e^* = \frac{3P}{2R_r} \lambda_{dr}^2 \omega_s^*$ para obter a referência de escorregamento ω_s^* correspondente ao torque desejado T_e^* e a relação $\omega^* = \omega_r + \omega_s^*$ para obter a frequência de alimentação necessária. Determinamos uma referência inicial de torque $T_e^* = 4$ Nm que após a máquina atingir o estado de regime foi alterada para $T_e^* = -4$ Nm, mudando seu sentido de rotação. Observa-se que durante todo este ciclo de operação as componentes do fluxo rotórico permaneceram alinhadas, sendo robustas à variação do ponto de trabalho. Da mesma forma a componente de corrente i_{ds} , responsável pela magnetização da máquina, não se altera e a componente i_{qs} tem seu sinal invertido para produzir o torque eletromagnético solicitado. Notamos que

a rápida variação do sinal de fluxo produz correntes elevadas (proporcionais a esta taxa de variação) que foram limitadas no valor de pico da corrente eficaz nominal especificada na máquina, isto é, $I_{max} = 5,8$ A. Este procedimento é usual na prática e fornece resultados satisfatórios que são difíceis de serem alcançados ajustando somente as ponderações W_u .

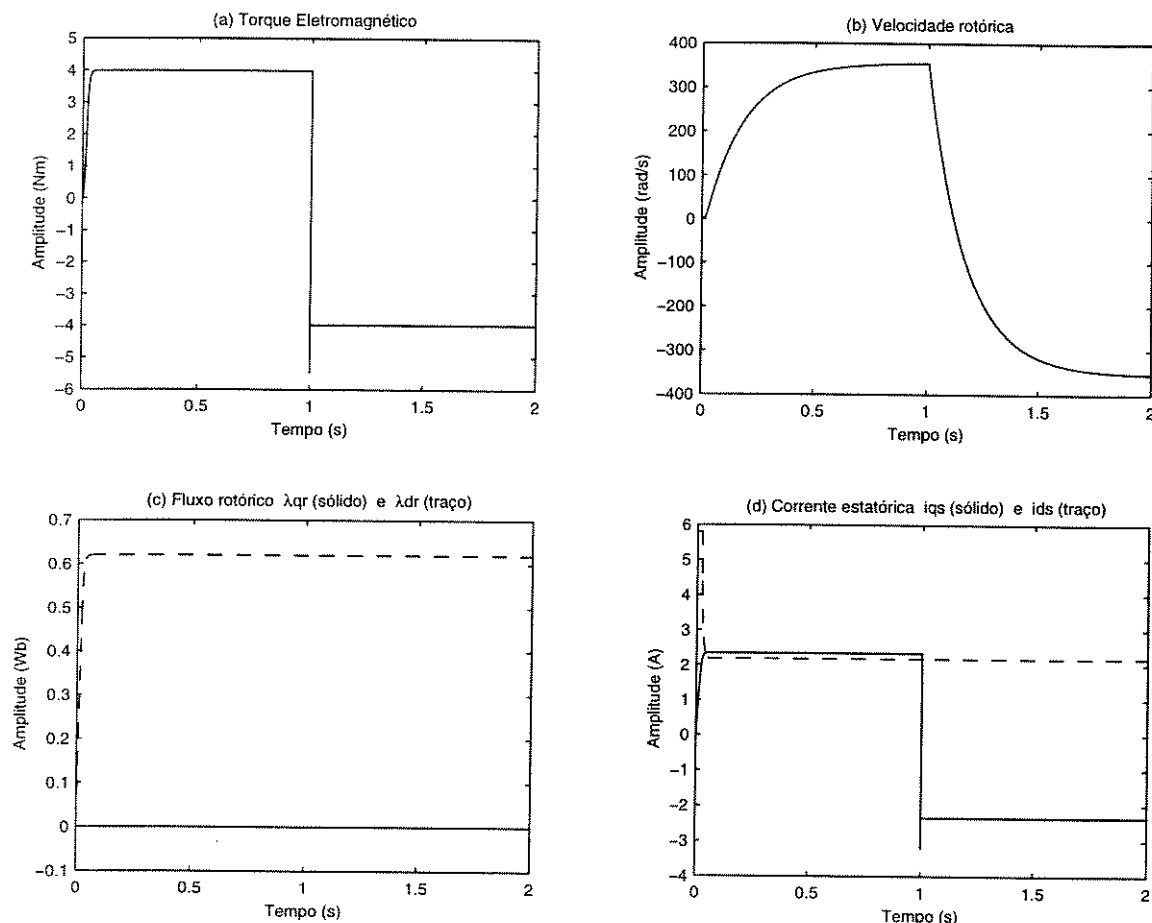


Figura 4.7: Grandezas da máquina: controle de torque e alimentação em corrente.

4.3.2 Controle de Torque da Máquina Alimentada em Tensão

A sistemática de projeto usada neste caso é a mesma da seção anterior. O modelo da máquina é dado por $\mathcal{F}_u(G_V, \Delta_V)$, como derivado na seção 3.5.2, e a estrutura de síntese é mostrada pela Figura 4.8. Novamente as escolhas da ponderação e do escalar α das fatorações foram realizados após algumas tentativas de projeto, sendo $w_e(s) = \frac{5 \times 10^1}{s + 5 \times 10^{-1}}$ e $\alpha = 10$ responsáveis pelos “bons resultados” apresentados a seguir. Aplicando o algoritmo de iterações- γ , obtém-se

$$K_V = \begin{bmatrix} A_{K_V} & B_{K_V} \\ C_{K_V} & D_{K_V} \end{bmatrix}$$

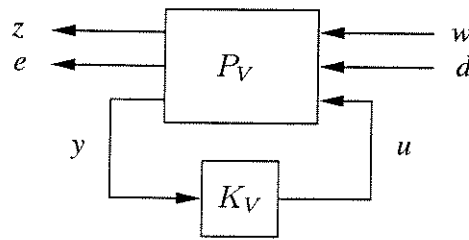


Figura 4.8: Estrutura de síntese para alimentação em tensão.

onde

$$A_{K_V} = 10^5 \begin{bmatrix} -0.10 & -0.00 & -1835.46 & 0.00 & -7.20 & -0.14 \\ 0.00 & -0.11 & 561.24 & -0.51 & 0.54 & -14.61 \\ 0.00 & -0.00 & -100.02 & -0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.00 & 0.00 & 111.08 & -0.01 & 0.00 & -0.00 \\ -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 \\ 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$B_{K_V} = 10^5 \begin{bmatrix} -1818.03 & 0.00 \\ 555.98 & -0.03 \\ -99.08 & 0.00 \\ 110.04 & -0.01 \\ -0.00 & -0.00 \\ -0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$C_{K_V} = 10^3 \begin{bmatrix} -10.27 & 0.02 & -24.26 & 0.22 & -726.96 & -13.84 \\ 0.02 & -10.94 & 0.43 & -48.29 & 54.52 & -1474.54 \end{bmatrix},$$

$$D_{K_V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que fornece $\|\mathcal{F}_l(P_V, K_V)\|_\infty \approx \gamma = 0.5486$.

A etapa da análise de robustez é repetida, agora sobre a estrutura da Figura 4.9 onde $H_V = \mathcal{F}_l(P_V, K_V)$. Podemos verificar pelos gráficos da Figura 4.10 que tanto estabilidade robusta quanto desempenho robusto são alcançados pelo projeto, já que os valores de pico dos gráficos de μ não atingem a unidade.

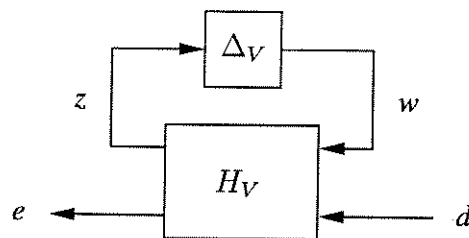
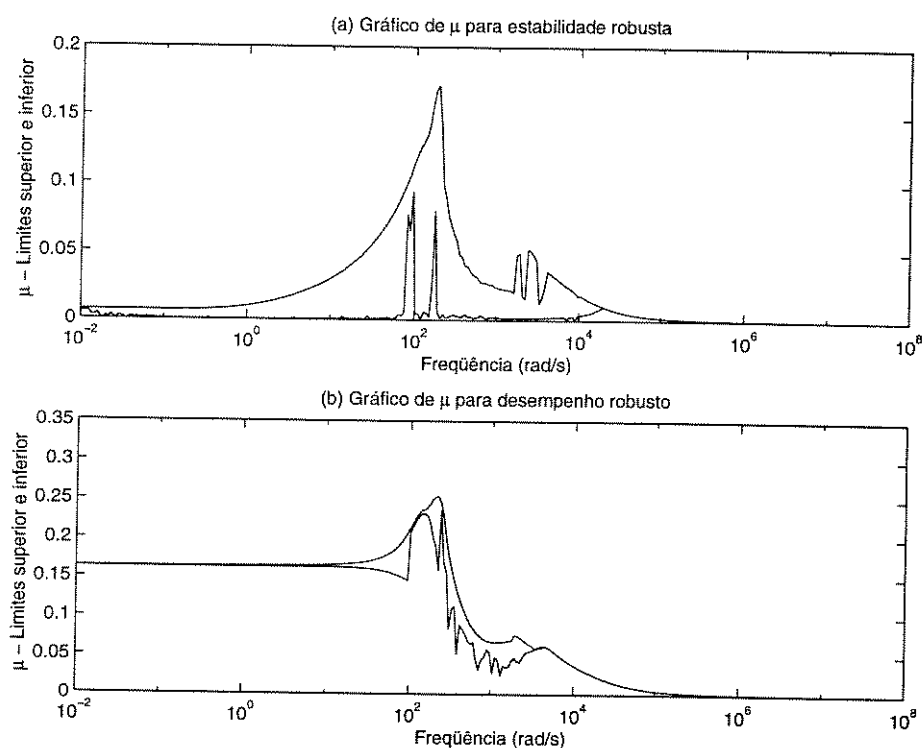


Figura 4.9: Estrutura de análise para alimentação em tensão.


 Figura 4.10: Gráficos de μ .

Os resultados da simulação neste caso foram obtidos para o mesmo ciclo de operação do caso anterior, aqui também se aplicando aquelas observações. Nota-se na Figura 4.11 a presença das tensões no sistema de eixos dq fornecidas pelo controlador projetado.

4.3.3 Controle de Velocidade da Máquina Alimentada em Corrente

Um grande número de aplicações industriais exige uma regulação de velocidade precisa e respostas rápidas de torque, podendo ser alcançadas usando o princípio da orientação de campo. Nesta seção, tanto a orientação de campo quanto o controle de velocidade são tratados como objetivos de projeto a serem alcançados independentemente do ponto de operação do motor.

Foi mostrado na seção 4.2 que sob orientação de campo torque e escorregamento são diretamente relacionados por

$$T_e = \frac{3P}{2R_r} \lambda_{dr}^2 \omega_s.$$

A dinâmica da velocidade, dada pela equação (3.24), pode ser aproximada por

$$\dot{\omega}_r \approx \frac{P}{J_m} \left(\frac{3P}{2R_r} \lambda_{dr}^2 \omega_s - C_1 \omega_r - T_L \right),$$

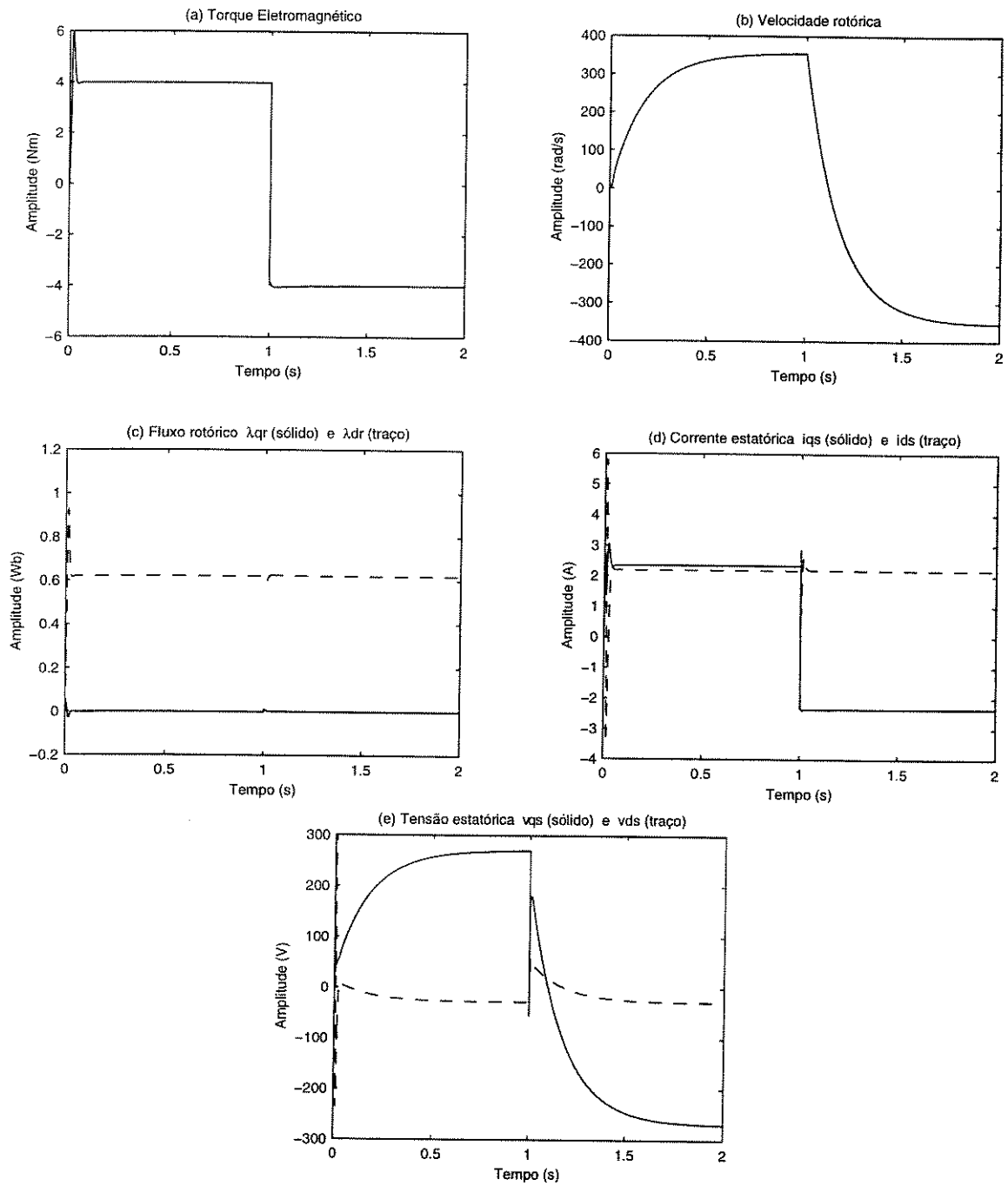


Figura 4.11: Grandezas da máquina: controle de torque e alimentação em tensão.

se garantirmos que a equação (4.10) é rapidamente satisfeita para um ϵ_1 suficientemente pequeno. Usando $\omega_s = \omega - \omega_r$, a equação anterior torna-se

$$\dot{\omega}_r = \frac{P}{J_m} \left[- \left(\frac{3P}{2R_r} \lambda_{dr}^2 + C_1 \right) \omega_r - T_L + \frac{3P}{2R_r} \lambda_{dr}^2 \omega \right]. \quad (4.13)$$

Por simplicidade de notação reescrevemos (4.13) como

$$\dot{\omega}_r = a_{\omega_r} \omega_r + b_{1\omega_r} T_L + b_{2\omega_r} \omega \quad (4.14)$$

onde

$$a_{\omega_r} = -\frac{P}{J_m} \left(\frac{3P}{2R_r} \lambda_{dr}^2 + C_1 \right), \quad b_{1\omega_r} = -\frac{P}{J_m} \quad \text{e} \quad b_{2\omega_r} = \frac{3P^2}{2R_r J_m} \lambda_{dr}^2.$$

A equação (3.26) é expandida para incluir a dinâmica da velocidade rotórica (4.14) resultando em

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{qdr} \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{c1}I + a_{c2}J & 0 \\ 0 & a_{\omega_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{qdr} \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_c & 0 \\ b_{1\omega_r} & 0 & b_{2\omega_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ i_{qds} \\ \omega \end{bmatrix} \\ &= A_{c\omega_r} \begin{bmatrix} \lambda_{qdr} \\ \omega_r \end{bmatrix} + B_{c\omega_r} \begin{bmatrix} T_L \\ i_{qds} \\ \omega \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O controle de velocidade é finalmente estabelecido como outro problema de rastreamento, isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\omega_r^*(t) - \omega_r(t)] = \epsilon_2 \quad (4.15)$$

deve ser alcançado pelo mesmo controlador que fornece (4.10).

Como a dinâmica da velocidade não acrescentou nenhum elemento incerto no modelo, a parametrização neste caso é idêntica à apresentada na seção 3.5.1, exceto pelo aumento da ordem das matrizes fatoradas. Assim,

$$\begin{aligned} A_{c\omega_r} &= A_0 + \delta_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_{c1}I + \bar{\omega}_s J & 0 \\ 0 & a_{\omega_r} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_s J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_{c\omega_r} &= B_0 \quad \Rightarrow \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & B_c & 0 \\ b_{1\omega_r} & 0 & b_{2\omega_r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

$$A_1 = E_1 G_1 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \begin{bmatrix} \alpha \bar{\omega}_s J \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} I & 0 \end{bmatrix}.$$

Definindo entradas e saídas extras w_1 e z_1 para os escalares δ_1 que parametrizam as variações do modelo incerto, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & E_1 & B_0 \\ G_1 & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ u \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_{I\omega_r} = \left[\begin{array}{c|cc} A_0 & E_1 & B_0 \\ \hline G_1 & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

onde $x = [\lambda'_{qdr} \ \omega_r]'$ é o vetor de estados e $C_0 = I_3$, disponibilizando todos os estados na saída y . A entrada u é formada pelas componentes u_1 relativa ao distúrbio de carga T_L e u_2 relativa às entradas de controle i_{qds} e ω . A representação da classe de todas as plantas parametrizadas por $\Delta_I = \delta_1 I$ é dada pela LFT da Figura 4.12, e o diagrama padrão de blocos para o sistema de controle de velocidade está na Figura 4.13. Assim como no controle de torque, funções de ponderação são utilizadas

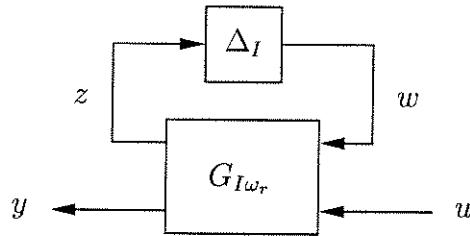


Figura 4.12: Representação da máquina de indução alimentada em corrente via LFT.

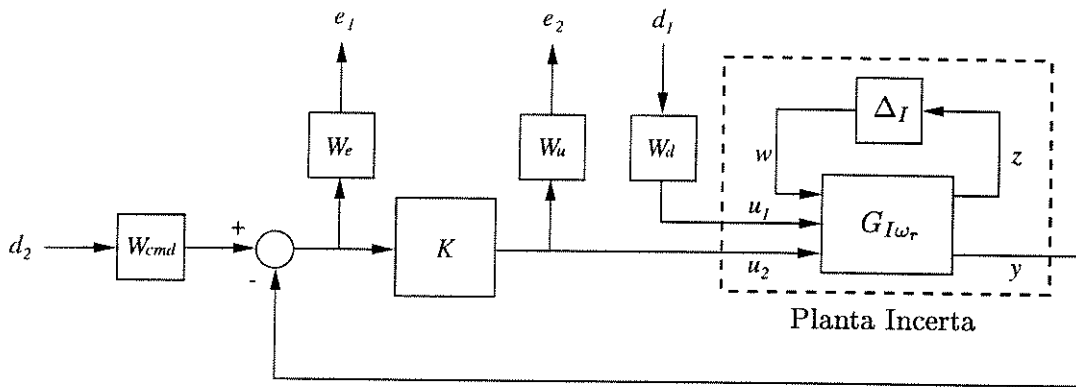


Figura 4.13: Sistema de controle de velocidade ponderado.

para caracterizar nosso objetivo de projeto: manter os erros de rastreamento de fluxo e velocidade e_1 pequenos para todos os sinais limitados de distúrbio $d_1 = T_L$ e de referência $d_2 = [\lambda'_{qdr} \ \omega_r^*]'$, para todos os pontos de operação da planta $\mathcal{F}_u(G_{I\omega_r}, \Delta_I)$. À diagonal da função de ponderação W_{cmd} dada por (4.11) acrescentamos o elemento $w_{cmd3} = 360$ que fornece referência de velocidade rotórica nominal quando ω_r^* é um sinal normalizado tipo degrau unitário, resultando em

$$W_{cmd} = \begin{bmatrix} w_{cmd1} & 0 & 0 \\ 0 & w_{cmd2} & 0 \\ 0 & 0 & w_{cmd3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0.62 & 0 \\ 0 & 0 & 360 \end{bmatrix}.$$

Procedimento similar é realizado para a ponderação W_u dada por (4.12) onde o elemento adicionado impede a violação da hipótese H2, assim

$$W_u = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

A ponderação de distúrbio W_d também redimensiona distúrbios de carga normalizados tipo degraus unitários em valores típicos que podem ocorrer. Baseando-se nos dados nominais da máquina, especifica-se $W_d = 4$.

As restrições sobre as faixas de frequências de rastreamento são dadas pela matriz

$$W_e(s) = \begin{bmatrix} w_{e_1}(s)I & 0 \\ 0 & w_{e_2}(s) \end{bmatrix}$$

onde $w_{e_1}(s)$ e $w_{e_2}(s)$ ponderam os erros de rastreamento de fluxo e velocidade, respectivamente. Como a dinâmica do fluxo é mais rápida que a da velocidade, é necessário considerar tal fato na escolha das ponderações, o que fornece $w_{e_1}(s) = \frac{5 \times 10^5}{s+5 \times 10^2}$ e $w_{e_2}(s) = \frac{5 \times 10^{-3}}{s+5 \times 10^{-4}}$. Reorganizando o diagrama da Figura 4.13, obtemos uma estrutura de síntese similar à da Figura 4.4 sobre a qual o algoritmo de iterações- γ é aplicado, fornecendo

$$K_{I\omega_r} = \left[\begin{array}{c|c} A_{K_{I\omega_r}} & B_{K_{I\omega_r}} \\ \hline C_{K_{I\omega_r}} & D_{K_{I\omega_r}} \end{array} \right]$$

onde

$$A_{K_{I\omega_r}} = 10^6 \begin{bmatrix} -10.73 & -0.00 & -0.00 & -374.05 & -0.05 & 0.00 \\ 0.55 & -4.33 & -0.00 & 0.01 & -2972.00 & -0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.01 \\ 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$B_{K_{I\omega_r}} = 10^3 \begin{bmatrix} -4344.48 & 0.00 & 0.00 \\ 240.62 & -0.06 & -0.00 \\ 0.00 & -0.00 & -0.00 \\ -0.31 & -0.00 & -0.00 \\ 0.00 & -0.31 & -0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$C_{K_{I\omega_r}} = 10^6 \begin{bmatrix} -0.32 & -0.00 & -0.00 & -162.54 & -0.02 & 0.00 \\ -0.00 & -1.88 & -0.00 & 0.00 & -1291.42 & -0.00 \\ -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$D_{K_{I\omega_r}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\|\mathcal{F}_l(P_{I\omega_r}, K_{I\omega_r})\|_\infty \approx \gamma = 0.6458$.

As garantias de estabilidade e desempenho robustos são dadas pelas análises dos gráficos da Figura 4.14. Como o limite superior do gráfico da Figura 4.14(a) é $\beta_u \approx 3.1356 \times 10^{-6}$, nenhuma perturbação Δ_I tal que $\|\Delta_I\|_\infty < \frac{1}{\beta_u} \approx 3.1892 \times 10^5$ provoca a instabilidade do sistema, garantindo estabilidade para a faixa de operação da máquina, equivalente a $\|\Delta_I\|_\infty \leq 1$. Da mesma forma, o limite superior para o gráfico da

Figura 4.14(b) é $\beta_u \approx 0.6412$, significando que para todo Δ_I tal que $\|\Delta_I\|_\infty < \frac{1}{\beta_u} \approx 1.5596$, temos $\|\mathcal{F}_u(H_{I\omega_r}, \Delta_I)\|_\infty \leq \beta_u \approx 0.6412$ e os erros de rastreamento mantidos inferiores a $\frac{\beta_u}{|w_{e_2}(0)|} \approx \frac{0.6412}{10} = 0.06412$ para a velocidade.

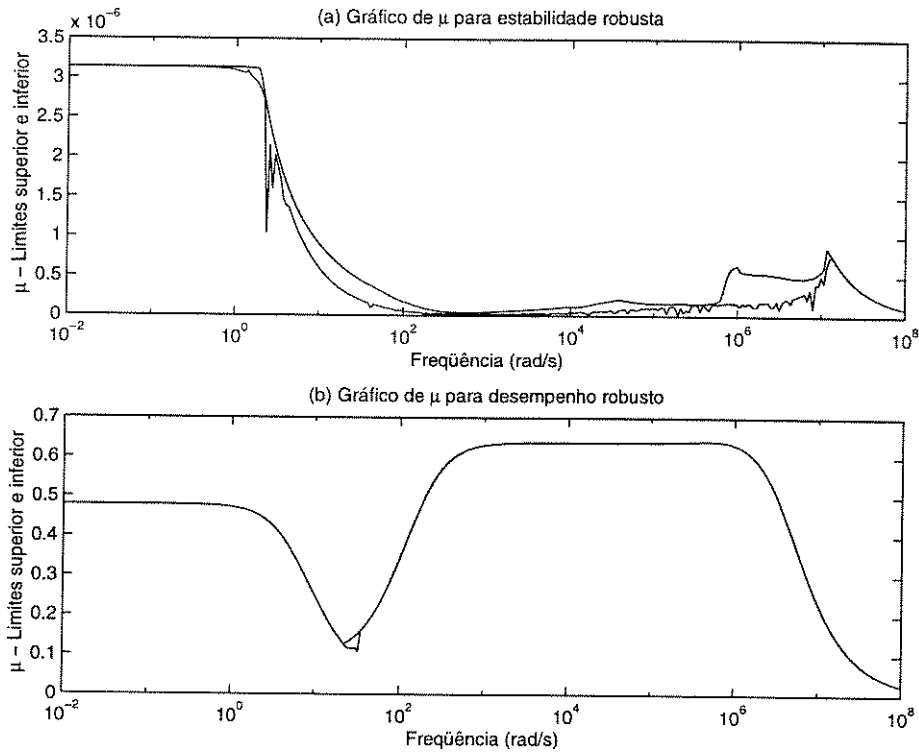


Figura 4.14: Gráficos de μ .

Os resultados de simulação apresentados na Figura 4.15 a seguir, foram obtidos aplicando uma referência $\lambda_{qdr}^* = [0 \ 1]'$ para orientação do fluxo rotórico e uma referência tipo onda quadrada $\omega_r^* = \pm 1$ para o controle de velocidade. Note que o fluxo é mantido orientado após um pequeno transitório devido à súbita mudança do sentido de rotação, provocada pela rápida inversão do torque eletromagnético desenvolvido pela máquina. A rejeição de distúrbios também foi verificada para uma referência de velocidade $\omega_r^* = 0,5$ (180 rad/s) e operação a meia-carga, quando um distúrbio tipo degrau aumentando em 100% a carga resistente é aplicado. Uma resposta quase instantânea de torque é gerada para compensar o acréscimo da carga e para manter regulada a velocidade, como mostram as Figuras 4.16(a) e 4.16(b).

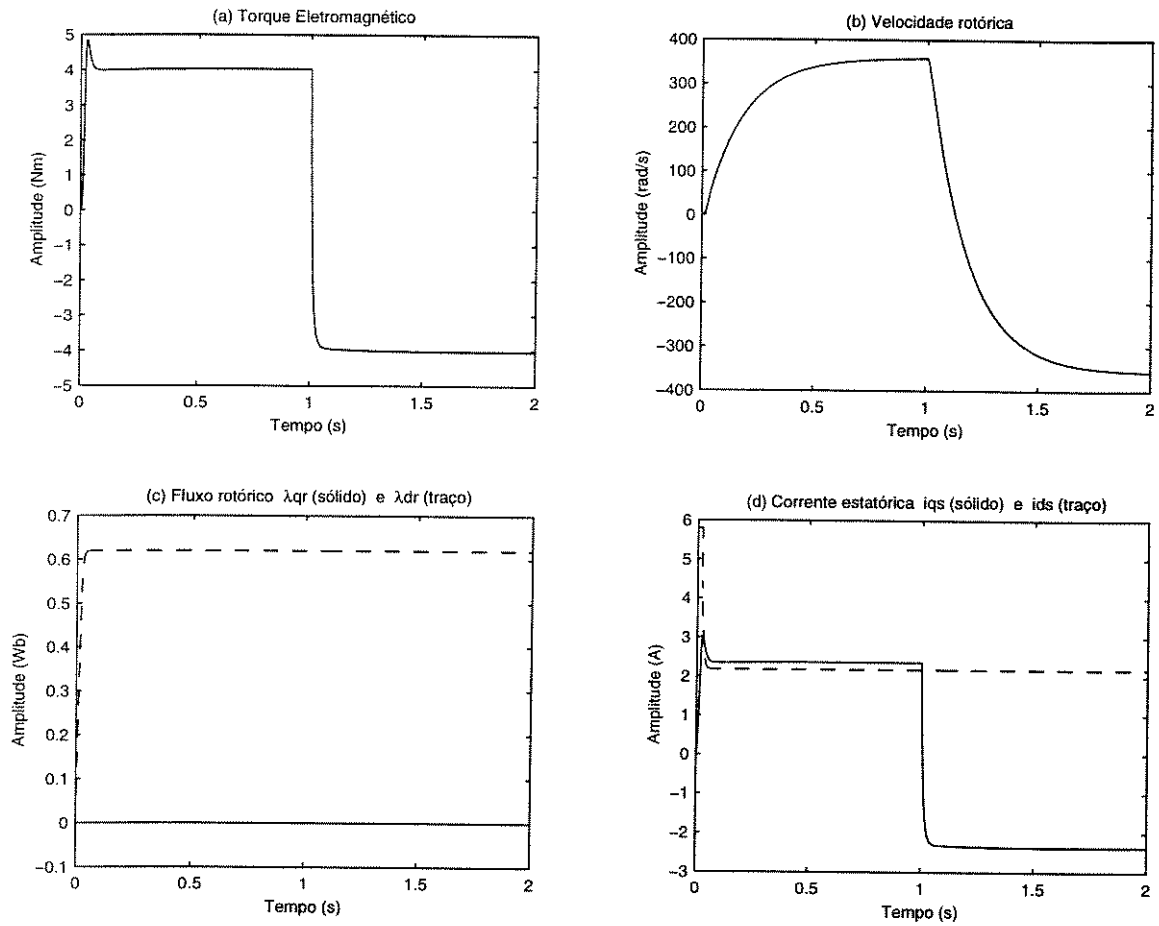


Figura 4.15: Grandezas da máquina: controle de velocidade e alimentação em corrente.

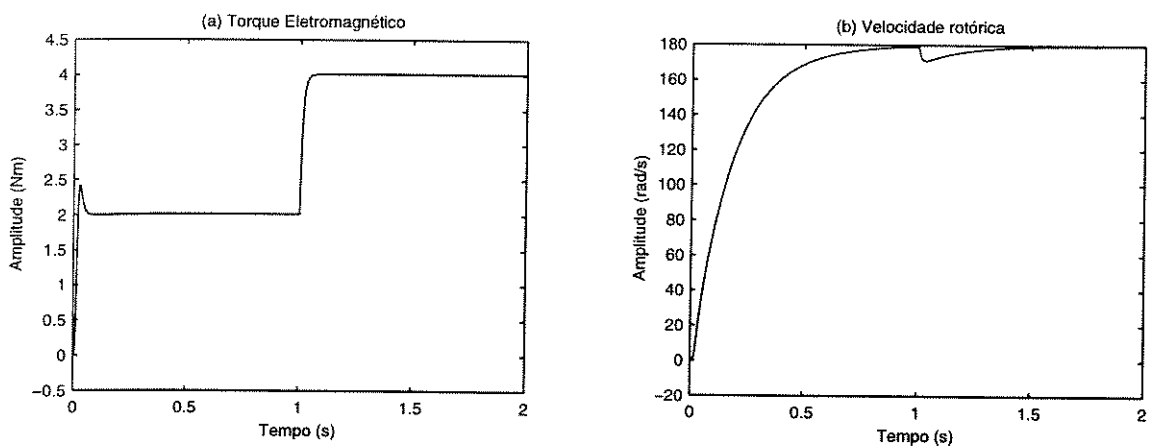


Figura 4.16: Rejeição de distúrbio: controle de velocidade e alimentação em corrente.

4.3.4 Controle de Velocidade da Máquina Alimentada em Tensão

Neste caso a equação (4.14) é acrescentada à equação (3.25) formando o modelo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{qds} \\ \dot{\lambda}_{qdr} \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{v1}I + a_{v2}J & a_{v3}I & 0 \\ a_{v4}I & a_{v5}I + a_{v6}J & 0 \\ 0 & 0 & a_{\omega_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{qds} \\ \lambda_{qdr} \\ \omega_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{1\omega_r} & 0 & b_{2\omega_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_L \\ v_{qds} \\ \omega \end{bmatrix} \\ &= A_{v\omega_r} \begin{bmatrix} \lambda_{qds} \\ \lambda_{qdr} \\ \omega_r \end{bmatrix} + B_{v\omega_r} \begin{bmatrix} T_L \\ v_{qds} \\ \omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Os elementos adicionados a este modelo não são incertos, logo sua parametrização é obtida aumentando-se a ordem das matrizes fatoradas apresentadas na seção 3.5.2. Portanto, as matrizes

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} a_{v1}I + \bar{\omega}J & a_{v3}I & 0 \\ a_{v4}I & a_{v5}I + \bar{\omega}_s J & 0 \\ 0 & 0 & a_{\omega_r} \end{bmatrix}, & A_1 &= \begin{bmatrix} \bar{\omega}J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}_s J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_1 &= \begin{bmatrix} \alpha \bar{\omega} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & G_1 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} I & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \bar{\omega}_s J \\ 0 \end{bmatrix}, & G_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha} I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

são usadas para compor o sistema da Figura 4.17

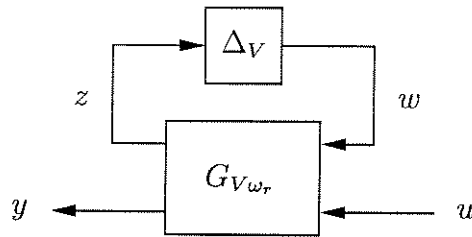


Figura 4.17: Representação da máquina de indução alimentada em tensão via LFT.

onde

$$G_{V\omega_r} = \left[\begin{array}{c|ccc} A_0 & E_1 & E_2 & B_0 \\ \hline G_1 & 0 & 0 & 0 \\ G_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

A saída y possui os estados $[\lambda'_{qdr} \ \omega_r]'$ e a entrada $u = [u_1 \ u_2]'$ com $u_1 = T_L$ e $u_2 = [v'_{qds} \ \omega]'$.

As ponderações escolhidas neste caso para o rastreamento de fluxo e de velocidade foram, respectivamente, $w_{e1}(s) = \frac{10^2}{s+10^{-1}}$ e $w_{e2} = \frac{10^{-2}}{s+10^{-3}}$. Após a aplicação dos algoritmos de iterações- γ chega-se a $\|\mathcal{F}_l(P_{V\omega_r}, K_{V\omega_r})\|_\infty \approx \gamma = 1.0830$ para o controlador

$$K_{V\omega_r} = \left[\begin{array}{c|c} A_{K_{V\omega_r}} & B_{K_{I\omega_r}} \\ \hline C_{K_{I\omega_r}} & D_{K_{I\omega_r}} \end{array} \right]$$

onde

$$A_{K_{V\omega_r}} = 10^6 \begin{bmatrix} -0.10 & -0.00 & -18.62 & -0.98 & -0.00 & -0.78 & -14.89 & -0.00 \\ -0.00 & -0.24 & 10.88 & -84.72 & -0.00 & 19.66 & -1285.99 & -0.00 \\ 0.00 & -0.00 & -1.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.00 & 0.00 & 6.66 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.01 \\ -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$B_{K_{V\omega_r}} = 10^4 \begin{bmatrix} -1847.25 & 0.00 & 0.00 \\ 1382.82 & -0.02 & -0.00 \\ -100.10 & 0.00 & 0.00 \\ 665.66 & -0.01 & -0.00 \\ -0.00 & 0.00 & -0.00 \\ -0.00 & -0.00 & -0.00 \\ -0.00 & -0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

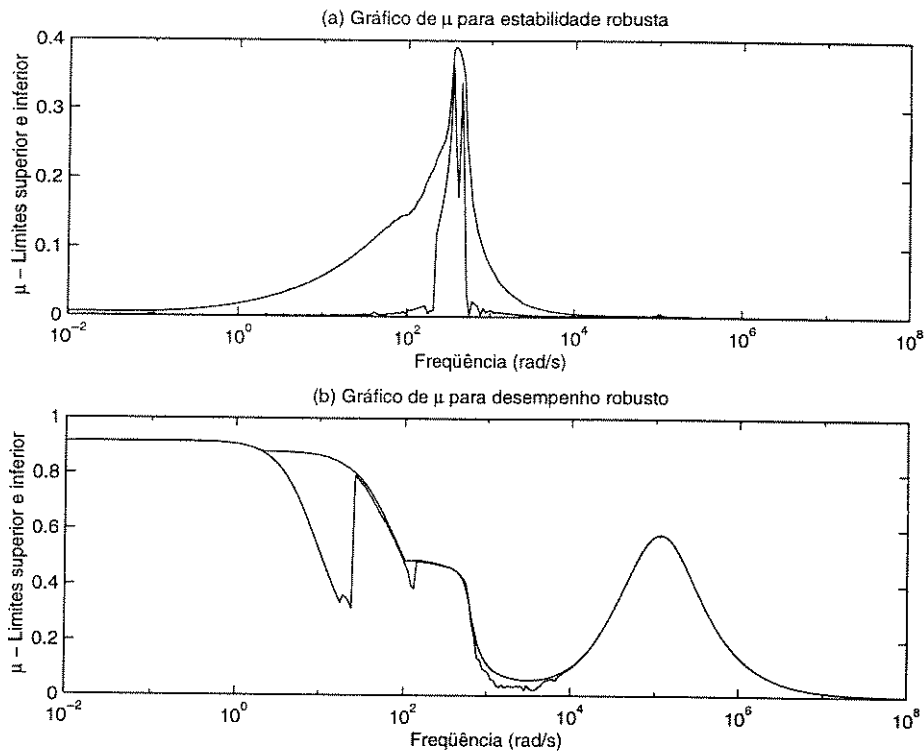
$$C_{K_{V\omega_r}} = 10^6 \begin{bmatrix} -0.10 & -0.00 & -0.13 & -0.98 & -0.00 & -0.78 & -14.90 & -0.00 \\ -0.00 & -0.24 & -2.96 & -84.80 & -0.00 & 19.68 & -1287.21 & -0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.00 & -0.00 & 0.00 & -0.00 \end{bmatrix},$$

$$D_{K_{V\omega_r}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Realizando a análise- μ sobre este projeto, concluímos através dos gráficos da Figura 4.18 que o sistema controlado é robustamente estável para $\|\Delta_V\|_\infty < \frac{1}{\beta_u} \approx \frac{1}{0.3907} = 2.5595$ e apresenta desempenho robusto, isto é, $\|\mathcal{F}_u(H_{V\omega_r}, \Delta_V)\|_\infty \leq \beta_u \approx 0.9154$ para todo $\|\Delta_V\|_\infty < \frac{1}{\beta_u} \approx 1.0924$, garantindo os erros de rastreamento $\frac{\beta_u}{|w_{e1}(0)|} \approx \frac{0.9154}{10^3} = 9.154 \times 10^{-4}$ e $\frac{\beta_u}{|w_{e2}(0)|} \approx 0.915410 = 0.09154$ respectivamente para fluxo e velocidade seja qual for o ponto de operação da máquina satisfazendo $\|\Delta_V\|_\infty < \frac{1}{\beta_u} \approx 1.0924$. Finalmente o procedimento de simulação aplicado na seção anterior é repetido neste caso, fornecendo os resultados mostrados nas Figuras 4.19 e 4.20.

4.4 Conclusão

Neste capítulo, as metodologias de controle \mathcal{H}_∞ e análise- μ do Capítulo 2 foram aplicadas aos modelos parametrizados no Capítulo 3 a fim de alcançar os objetivos de

Figura 4.18: Gráficos de μ .

projeto em cada caso estudado: controle de torque ou de velocidade para a máquina de indução alimentada em corrente ou tensão. A sistemática adotada, de caráter generalista, permitiu que os projetos fossem realizados mediante pequenas alterações em algumas de suas fases distintas: modelagem, definição dos critérios de desempenho, síntese/otimização \mathcal{H}_∞ e avaliação de robustez (análise- μ).

A partir de considerações apropriadas, foi possível simplificar a dinâmica não-linear da velocidade rotórica baseando-se na flexibilidade da ponderação isolada dos objetivos de desempenho e na garantia de tê-los atendidos em toda uma faixa de operação através da análise- μ . Os resultados das simulações apresentaram um comportamento dinâmico satisfatório, demonstrando a contribuição desta proposta no sentido delineado pelo capítulo introdutório deste trabalho.

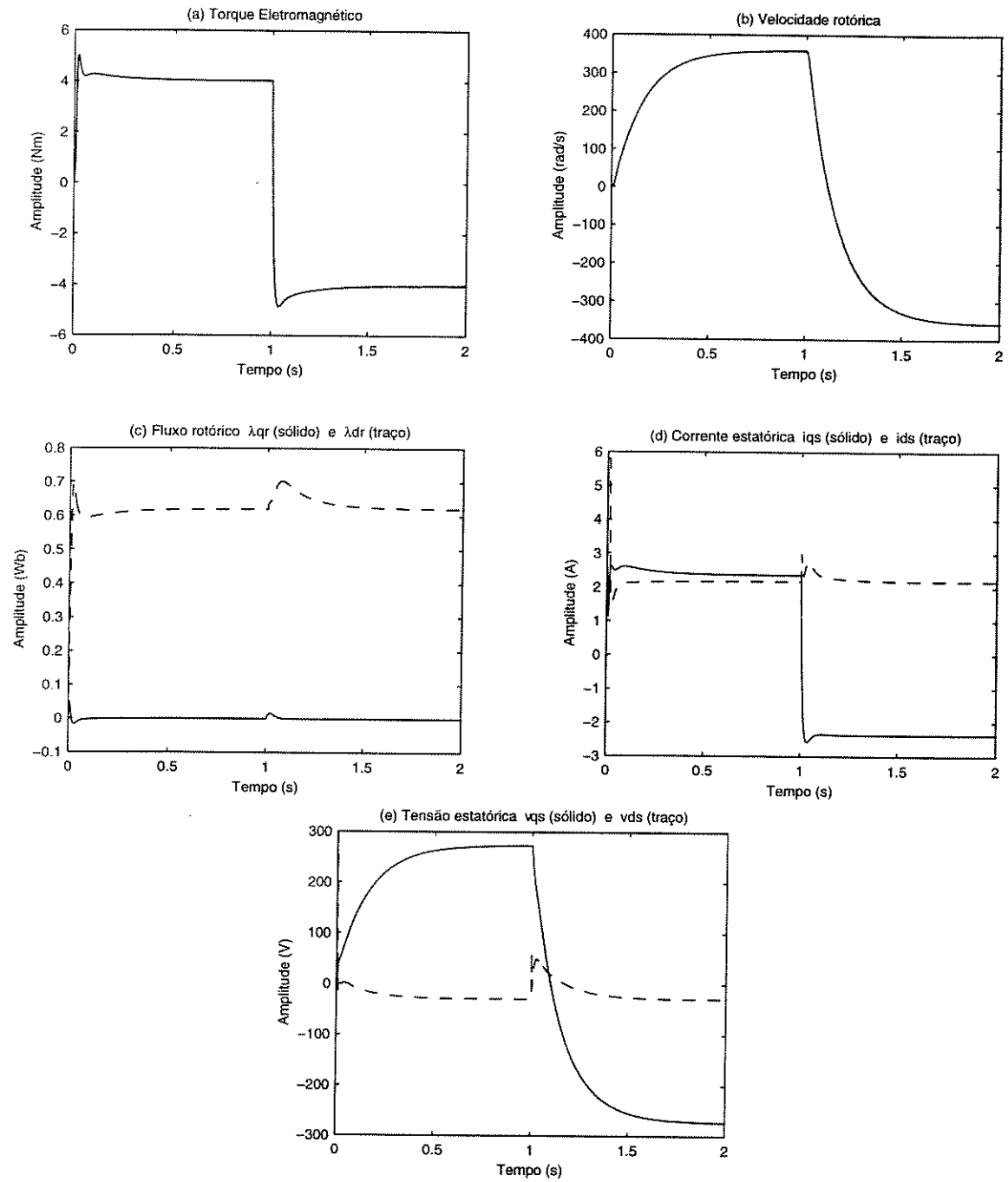


Figura 4.19: Grandezas da máquina: controle de velocidade e alimentação em tensão.

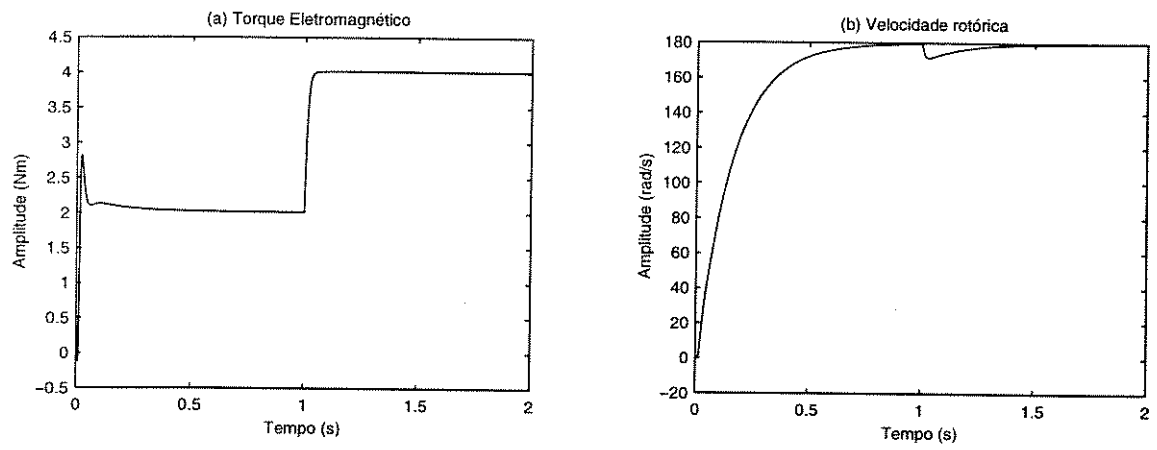


Figura 4.20: Rejeição de distúrbio: controle de velocidade e alimentação em tensão.

Capítulo 5

Conclusão

O controle vetorial da máquina de indução é tratado neste trabalho seguindo tendências atuais da teoria de controle. Em particular, priorizamos a aplicação de metodologias introduzidas por Doyle e colaboradores numa perspectiva pós-moderna, centrada no emprego da transformação fracional linear.

A fim de possibilitar tal abordagem, foram reunidos no Capítulo 2 os elementos teóricos básicos que são utilizados como ferramentas nas diversas fases que integram os outros capítulos deste trabalho.

O Capítulo 3 mostra inicialmente uma modelagem tradicional para a máquina de indução nas variáveis das fases abc e as transformações que levam ao modelo nas variáveis de um sistema de coordenadas dq . Esse modelo, embora linear, é não-estacionário e portanto tem sua dinâmica alterada em função do tempo. Para que sua não-estacionariedade fosse considerada na síntese dos controladores, foi realizado um tratamento de incertezas consistindo na parametrização dos elementos variantes no tempo como elementos incertos para a formação de uma classe de modelos representada via LFT. Esta fase de tratamento é indispensável pois prepara os modelos de forma adequada para as fases subseqüentes do projeto.

Na definição dos objetivos de projeto dada pelo Capítulo 4, foram estabelecidos os níveis de desempenho admissíveis para a orientação das componentes de fluxo rotórico visando sensibilidade máxima no controle de torque e para a regulação de velocidade, ambos nos casos da máquina alimentada em tensão ou corrente. O método de orientação de campo utilizado está baseado no rastreamento de fluxo e, portanto, apresenta a dificuldade adicional de necessitar que o mesmo seja estimado ou medido por sensores. No entanto, tal dificuldade é compensada pela insensibilidade à variação de parâmetros (especialmente a constante de tempo rotórica) que o método escolhido apresenta. Com a robustez da orientação de campo garantida por esta escolha, os aspectos de robustez (estabilidade e desempenho) foram relacionados à variação do ponto de operação da máquina, traduzida em não-estacionariedade do seu modelo dinâmico. O tratamento desta não-estacionariedade como incerteza, apresentado no Capítulo 3, resultou em uma nova representação para os modelos da máquina de

indução no espaço de estado, sobre a qual é possível aplicar técnicas de otimização \mathcal{H}_∞ e análise- μ , respectivamente na síntese dos controladores e avaliação de robustez do sistema em malha fechada. Salientamos que esta representação também permite a incorporação direta dos objetivos de robustez no processo de síntese, já que a mesma pode ser realizada levando-se em consideração a minimização da influência da incerteza através da minimização das funções de transferência a ela associadas.

Os resultados das simulações apresentaram um comportamento dinâmico bastante satisfatório, demonstrando a contribuição desta proposta no sentido de abordar a máquina de indução por metodologias recentes tanto a nível de modelagem quanto a nível de controle.

Com relação à continuidade deste trabalho algumas propostas podem ser citadas:

- Os controladores sub-ótimos derivados apresentam a vantagem de não necessitarem de nenhum tipo de ajuste ou adaptação *on-line* para garantir estabilidade e desempenho robustos quanto aos critérios estabelecidos durante a etapa de projeto. Entretanto, suas elevadas ordens (inerentes ao método de otimização \mathcal{H}_∞ empregado) tornam a implementação destes controladores mais complexa e com maiores chances de falhas. Tais problemas sugerem a aplicação de técnicas para a redução de ordem dos mesmos de forma tal que a estabilidade em malha fechada seja garantida e a degradação do desempenho minimizada com os novos controladores de ordem reduzida.
- Uma abordagem similar poderia ser aplicada ao esquema de controle vetorial indireto, visando a redução da sensibilidade à variação de parâmetros. Também poderiam ser considerados modelos para os inversores de alimentação e a síntese dos controladores realizada levando-se em conta essa dinâmica adicional.
- A fim de viabilizar a implementação deste trabalho, os aspectos práticos envolvidos como por exemplo a implementação digital dos controladores e a influência da amostragem de sinais na estabilidade e degradação do desempenho devem ser considerados. Finalmente, uma versão totalmente no domínio discreto do tempo para a presente abordagem sem dúvida apresentaria contribuições significantes neste campo de investigações.

Apêndice A

Sistemas Lineares Multivariáveis

Neste apêndice são apresentados alguns aspectos básicos, porém de grande importância para o tratamento de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas que é realizado ao longo deste trabalho.

Considere um sistema linear com a seguinte representação no espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é chamado de estado do sistema, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é a entrada do sistema e $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ é a saída do sistema. Desta forma, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, $C \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathfrak{R}^{p \times m}$.

Um sistema dinâmico é chamado de monovariável (SISO) quando possui uma única entrada ($m = 1$) e uma única saída ($p = 1$). Caso contrário, o sistema é chamado de multivariável (MIMO). A matriz de transferência correspondente de u para y é definida como

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

onde $U(s)$ e $Y(s)$ são as transformadas de Laplace de $u(t)$ e $y(t)$ com condições iniciais nulas ($x(0) = 0$). Daí, temos

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Note que, para sistemas multivariáveis, $G(s)$ é uma matriz cujos elementos são funções de transferência que relacionam suas múltiplas entradas e saídas.

Também é usada a seguinte notação para representar matrizes de transferência

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Note que $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ é uma matriz $\in \mathfrak{R}^{(n+p) \times (n+m)}$ e não uma matriz de transferência.

Na representação destes sistemas por diagrama de blocos, é tradicional desenhar as setas (principalmente no caso SISO) indicando o sentido da esquerda para a direita

como na Figura A.1(a). Entretanto, a representação com as setas indicando o sentido oposto como na Figura A.1(b) é consistente com as operações matriciais, sendo preferível para o caso MIMO.

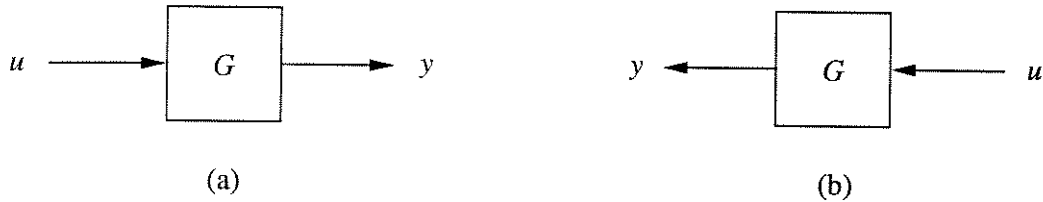


Figura A.1: Representações: (a) Tradicional. (b) Multivariável.

Outra questão a ser considerada é a resposta em frequência dos sistemas multivariáveis. Para o sistema dado por $G(s)$, temos

$$y_k(j\omega) = \sum_{i=1}^m g_{ki}(j\omega)u_i(j\omega), \quad (1 \leq k \leq p)$$

ou, na forma expandida

$$\begin{bmatrix} y_1(j\omega) \\ y_2(j\omega) \\ \vdots \\ y_p(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}(j\omega) & g_{12}(j\omega) & \cdots & g_{1m}(j\omega) \\ g_{21}(j\omega) & g_{22}(j\omega) & \cdots & g_{2m}(j\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p1}(j\omega) & g_{p2}(j\omega) & \cdots & g_{pm}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(j\omega) \\ u_2(j\omega) \\ \vdots \\ u_m(j\omega) \end{bmatrix}$$

onde $g_{ki}(j\omega)$ são os elementos que compõem a matriz $G(j\omega)$ e $y_k(j\omega)$, $u_i(j\omega)$ os elementos que compõem os vetores de saída $y(j\omega)$ e entrada $u(j\omega)$, respectivamente. Nota-se que a magnitude da saída $y(j\omega)$ é uma composição que depende não só da magnitude da entrada $u(j\omega)$ mas também da direção determinada pelos elementos $u_i(j\omega)$. Assim, a resposta em frequência da relação entre saída e entrada (dada pelos Diagramas de Bode, no caso SISO) necessita de uma ferramenta que generalize o conceito de ganho para sistemas MIMO. Os valores singulares definidos a seguir são uma ferramenta adequada para tal generalização.

Definição A.1 *Seja $A \in C^{n \times m}$ e $k = \min(n, m)$. Os valores singulares de A , denotados por $\sigma_i(A)$, são dados por*

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

onde supõe-se que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$.

Em particular, podemos definir os valores singulares máximo $\bar{\sigma}$ e mínimo $\underline{\sigma}$ como

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(A) &:= \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| \\ \underline{\sigma}(A) &:= \min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|. \end{aligned}$$

Isto é, $\bar{\sigma}$ e $\underline{\sigma}$ fornecem o maior e menor ganhos que o vetor $x \in C^m$ pode experimentar ao ser realizada a transformação Ax .

Observe que $\|\cdot\|$ é usado para representar a norma Euclideana de vetores, isto é,

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou a norma espectral de matrizes

$$\|A\| := \max_i \sqrt{\lambda_i(A^*A)}.$$

Apêndice B

Normas de Sinais e de Sistemas

Existem várias formas de se definir normas de um sinal $z(t)$ no domínio do tempo [11]. Por conveniência será utilizada a norma \mathcal{L}_2 cuja definição é dada a seguir.

Definição B.1 *Seja $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, isto é, $z(t) \in \mathbb{R}^n$ para $t \geq 0$. A norma \mathcal{L}_2 do sinal vetorial $z(t)$ é definida como*

$$\|z\|_2 := \left(\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^n z_i(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \|z_i\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta norma é apropriada para sinais transitórios, que decaem a zero com o tempo, isto é, com energia total finita.

Consideremos o sistema dinâmico linear representado no espaço de estado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$$

ou, em termos de função de transferência

$$z(s) = T(s)w(s), \quad T(s) := C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Duas medidas matematicamente convenientes para a matriz de transferência $T(s)$ no domínio da frequência são as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , definidas a seguir.

Definição B.2 *Seja $T(s)$ a matriz de transferência de um sistema dinâmico linear. Então as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ de $T(s)$, denotadas respectivamente por $\|T\|_2$ e $\|T\|_\infty$, são definidas por*

$$\|T\|_2 := \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}[T(j\omega)T^*(j\omega)]d\omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\|T\|_\infty := \max_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[T(j\omega)].$$

Pode ser mostrado que $\|T\|_2$ e $\|T\|_\infty$ satisfazem as propriedades axiomáticas de normas, isto é

- (i) $\|T\| \geq 0, \|T\| = 0 \iff T = 0$;
- (ii) $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$, α escalar;
- (iii) $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$, (desigualdade triangular).

Outra propriedade importante da norma \mathcal{H}_∞ é que ela é submultiplicativa,

$$\|T_1 T_2\|_\infty \leq \|T_1\|_\infty \|T_2\|_\infty.$$

Ambas as normas definidas para o sistema T possuem interpretações no domínio do tempo. Se w representa um ruído branco de intensidade unitária, então a norma $\|T\|_2$ é uma medida da variância de estado estacionário do sinal de saída z . Com relação ao significado de $\|T\|_\infty$, suponhamos que a única informação disponível sobre o sinal de entrada w é que sua energia seja finita, isto é, $\|w\|_2 < \infty$. Mostra-se que o maior aumento de energia experimentado por este sinal é dado pela norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência que o mesmo alimenta, ou seja

$$\max_{w \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \|T\|_\infty.$$

No contexto de valor singular estruturado apresentado na literatura, a forma matematicamente mais natural de se caracterizar um desempenho aceitável é em termos da norma $\|\cdot\|_\infty$. Por esta razão, as discussões apresentadas neste trabalho estão tratando de aspectos relativos às características desta norma.

Apêndice C

Caracterização de Desempenho via Normas Ponderadas

Em qualquer critério de desempenho, devemos considerar

- A magnitude relativa de influências externas;
- A dependência em frequência dos sinais;
- A importância relativa das magnitudes das variáveis reguladas.

Desta forma, se descrevemos o objetivo de desempenho por meio de uma norma matricial, este na verdade deve ser uma norma ponderada

$$\|W_L T W_R\|$$

onde as funções matriciais de ponderação W_L e W_R são dependentes da frequência, para considerar restrições de largura de faixa e conteúdo espectral dos sinais exógenos.

A utilização de especificações de desempenho ponderadas, no projeto de sistemas de controle multivariáveis, é indispensável na maioria das vezes. Alguns componentes de um sinal vetorial são normalmente mais importantes que outros e/ou nem sempre são medidos utilizando o mesmo sistema métrico. Nestes casos as funções de ponderação são essenciais para tornarem tais componentes comparáveis. Além disso, podemos estar interessados na rejeição de erros em uma certa faixa de frequências (por exemplo, baixas frequências) e daí algumas ponderações dependentes da frequência devem ser escolhidas.

Em geral, o diagrama apresentado na Figura 1.1 é transformado e aparece como mostra a Figura C.1. Para este novo modelo, temos as seguintes interpretações:

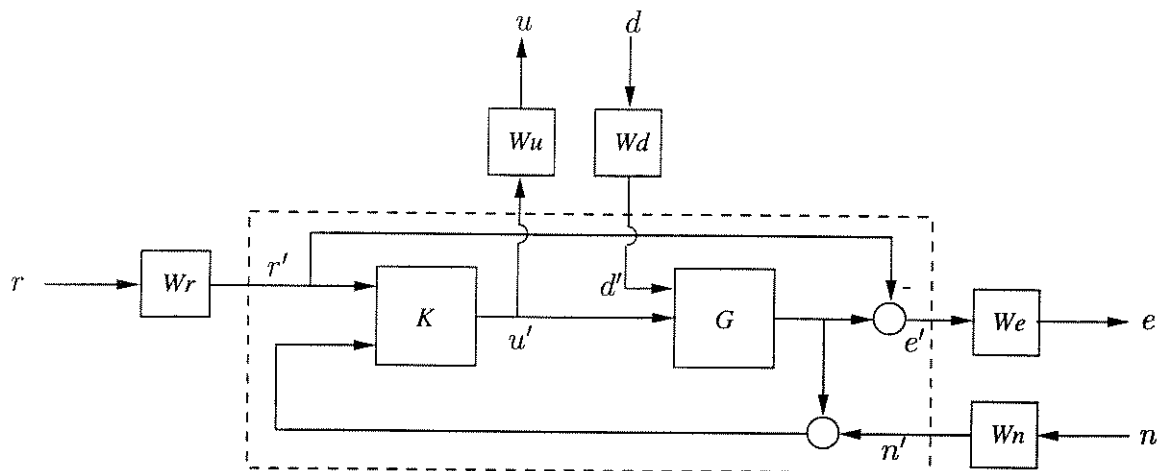


Figura C.1: Objetivos típicos de desempenho ponderados em malha fechada.

Sinal	Significado
r	Comando de referência normalizado
r'	Comando de referência típico
d	Distúrbios exógenos normalizados
d'	Distúrbios exógenos típicos
n	Ruído de sensor normalizado
n'	Ruído de sensor típico
u	Sinais de controle ponderados
u'	Sinais de controle reais
e	Erros de rastreamento ponderados
e'	Erros de rastreamento reais

- W_r é usada em problemas exigindo rastreamento de um sinal de referência para transformar sinais de referência normalizados em sinais de referência reais ou típicos que esperamos ocorrer.
- W_d pode ser escolhida para refletir o conteúdo frequencial e a magnitude dos distúrbios exógenos que afetam a planta.
- W_e pondera a diferença entre o sinal de comando e a resposta da planta. Frequentemente desejamos um rastreamento mais preciso em baixas frequências e menos preciso nas frequências elevadas o que requer W_e apresentando características de um filtro passa-baixas. O inverso de W_e deve estar relacionado ao tamanho permitido do erro de rastreamento.
- W_u é usada para penalizar os sinais de controle, refletindo as restrições a que estão sujeitos tais sinais.
- W_n representa modelos no domínio da frequência dos ruídos apresentados pelos sinais medidos. Cada sinal fornecido pelos sensores possui algum ruído, fre-

quentemente maior em uma determinada faixa de frequências e a ponderação W_n tenta introduzir esta informação no problema de controle.

Assim, podemos representar a Figura C.1 anterior pelo diagrama de blocos da Figura C.2 onde

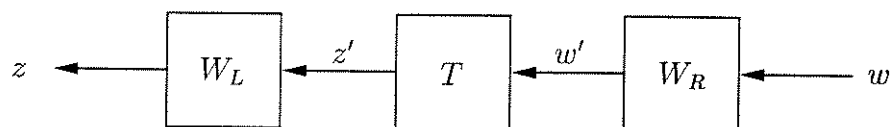


Figura C.2: Sistema MIMO ponderado.

$$z = \begin{bmatrix} e \\ u \end{bmatrix}, \quad z' = \begin{bmatrix} e' \\ u' \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}, \quad w' = \begin{bmatrix} r' \\ d' \\ n' \end{bmatrix},$$

$$W_L = \begin{bmatrix} W_e & 0 \\ 0 & W_u \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} W_r & 0 & 0 \\ 0 & W_d & 0 \\ 0 & 0 & W_n \end{bmatrix}$$

e

$$z = W_L z' = W_L T w' = W_L T W_R w.$$

A limitação da norma ponderada $\|W_L T W_R\|_\infty$ implicará em limitações sobre os sinais w' e z' obedecendo às formas descritas pelas matrizes de ponderação, que por sua vez devem refletir os objetivos de desempenho dependentes da frequência desejados.

Nota-se que a escolha apropriada das funções de ponderação é um passo muito importante no processo de projeto do controlador e também uma tarefa não-trivial, pois podem ser tratadas como parâmetros de ajuste escolhidos para alcançar o melhor compromisso entre os objetivos conflitantes.

Apêndice D

Características da Máquina de Indução

Na tabela D.1 são fornecidos os parâmetros da máquina de indução utilizados nas simulações. O fabricante também fornece uma velocidade nominal para a mesma de 1705 rpm ($\approx 178,5$ rad/s) o que implica num escorregamento nominal de frequência angular elétrica aproximadamente igual a 20 rad/s.

Motor de Indução	–	1 CV, 220/380 V, 60 Hz
Resistência de estator	R_s	7.1 Ω
Indutância de estator	L_s	310.5 mH
Resistência de rotor	R_r	5.78 Ω
Indutância de rotor	L_r	310.5 mH
Indutância mútua	M	284.56 mH
Momento de Inércia	J_m	0.0038 kgm ²
Atrito viscoso	C_1	0.0015 Nms
Pares de pólos	P	2

Tabela D.1: Parâmetros da máquina de indução.

O torque nominal é calculado por

$$T_{enom} = \frac{CV_{nom}}{\omega_{rnom}} = \frac{1 \text{ CV}}{1705 \text{ rpm}} \Rightarrow T_{enom} \approx 4 \text{ Nm.}$$

O fluxo rotórico nominal é calculado pela relação

$$T_{enom} = \frac{3}{2} P \frac{|\lambda_{rnom}|^2}{R_r} \omega_{snom} \Rightarrow |\lambda_{rnom}| \approx 0,62.$$

As faixas de operação consideradas foram $0 \leq \omega_r \leq \omega_{rmax}$, $0 \leq \omega_s \leq \omega_{smax}$ e $0 \leq \omega \leq \omega_{max}$ onde $\omega_{rmax} = 360$ rad/s, $\omega_{smax} = 20$ rad/s e $\omega_{max} = 380$ rad/s.

Bibliografia

- [1] Augusto Filho, S. A., *Controle discreto \mathcal{H}_2 da máquina de indução via modelagem incerta sobre domínios paramétricos convexos*, Tese de Mestrado, FEE, UNICAMP, Campinas, 1994.
- [2] Balas, G. J., Doyle, J. C., Glover, K., Packard, A., Smith, R., *μ -Analysis and synthesis toolbox user's guide*, MuSyn Inc., Minneapolis, MN, Novembro, 1995.
- [3] Blaschke, F., The principle of field orientation as applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machines, *Siemens Review*, vol. 39, no. 5, pp. 217–220, Maio, 1972.
- [4] Bose, B. K., *Power electronics and AC drives*, Prentice Hall, 1986.
- [5] Bottura, C. P. e Augusto Filho, S. A., A parameter plane approach for state space induction machine modeling and control, *Proceedings of the 5th Electrimacs*, vol. 2, pp. 611–616, Saint-Nazaire, França, 1996.
- [6] Bottura, C. P., Augusto Filho, S. A. e Silvino, J. L., \mathcal{H}_2 robust digital vector control for the induction machine, *IEE Proc. – Control Theory Appl.*, vol. 143, no. 3, pp. 237–243, Maio, 1996.
- [7] Bottura, C. P. e Barreto, G., *Veículos elétricos*, Editora da UNICAMP, 1989.
- [8] Bottura, C. P., Soares Neto, M. F. e Augusto Filho, S. A., \mathcal{H}_∞ Robust field-oriented control of an induction motor, *ICEM 98 - International Conference on Electrical Machines*, Istanbul, Turquia, 2-4 de Setembro, 1998, aceito.
- [9] Bottura, C. P., Soares Neto, M. F. e Augusto Filho, S. A., Robust speed control of an induction motor: an \mathcal{H}_∞ control theory approach with field orientation and μ analysis, *3rd Portuguese Conference on Automatic Control - CONTROLO 98*, Coimbra, Portugal, 9-11 de Setembro, 1998, aceito.
- [10] Bottura, C. P., Soares Neto, M. F. e Augusto Filho, S. A., Modelagem da máquina de indução com tratamento de incertezas via LFT, 1998, submetido.
- [11] Boyd, S. e Barrat, C., *Linear controller design - Limits of performance*, Prentice Hall, 1991.

- [12] Caminhas, W. M., *Estratégias de controle de velocidade de motor de indução*, Tese de Mestrado, CPGEE, UFMG, Belo Horizonte, 1989.
- [13] Chen, C. T., *Linear systems theory and design*, Holt, Rinehart and Wiston, 1984.
- [14] Cruz, J. J., *Controle robusto multivariável*, Edusp, 1996.
- [15] Doyle, J. C., Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE-Proceedings*, vol. 129, parte D, no. 6, pp. 242–250, 1982.
- [16] Doyle, J. C., Francis, B. e Tannenbaum, A., *Feedback control theory*, MacMillan, 1991.
- [17] Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar P. P. e Francis, B. A., State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, Agosto, 1989.
- [18] Doyle, J. C., Packard, A. e Zhou, K., Review of LFTs, LMIs and μ , *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1227–1232, 1991.
- [19] Glover, K. e Doyle, J. C., State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an \mathcal{H}_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity, *Systems and Control Letters*, vol. 11, pp. 167–172, 1988.
- [20] Krause, P. C., *Analysis of electric machinery*, McGraw-Hill Book Company, 1986.
- [21] Leonhard, W., *Control of electrical drives*, Springer-Verlag, 1985.
- [22] Leonhard, W., 20 years field orientation, 10 years digital signal processing with controlled AC-drives, *Anais do 8^o CBA*, pp. 34–39, Belém - PA, 1990.
- [23] Marchiori, G. C., *Controle robusto multivariável frequencial com modelo interno via valor singular estruturado*, Tese de Mestrado, FEE, UNICAMP, Campinas, 1994.
- [24] Monmasson, E. e Ballois, S., Robustness study of an indirect field oriented control with parametric uncertainty, *Proceedings of the 5th Electrimacs*, vol. 2, pp. 369–374, Saint-Nazaire, França, 17-19 de Setembro, 1996.
- [25] Morari, M. e Zafiriou, E., *Robust process control*, Prentice-Hall, 1989.
- [26] Novotny, D. W. e Lipo, T. A., *Dynamics and control of induction motor drives*, Clarendon Press - Oxford, 1995.
- [27] Packard, A., Doyle, J. C., The complex structured singular value, *Automatica*, vol. 29, no. 1, pp. 71–109, 1993.

-
- [28] Packard, A., Doyle, J. C. e Balas, G., Linear, multivariable robust control with a μ perspective, *Transactions of the ASME - Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 115, pp. 426–438, Junho, 1993.
- [29] Schüffner Neto, F. H., *Controle de motor de indução de gaiola via inversor fonte de corrente transistorizado*, Tese de Mestrado, FEE, UNICAMP, Campinas, 1984.
- [30] Silvino, J. L., *Modelamento e observador discreto não estacionário para máquina de indução*, Tese de Doutorado, FEE, UNICAMP, Campinas, 1992.
- [31] Zhou, K., Doyle, J. C. e Glover, K., *Robust and optimal control*, Prentice Hall, 1996.