



**Universidade Estadual de Campinas**  
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

---

## Controle Singular de Sistemas Incertos

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutorado em Engenharia Elétrica.

por

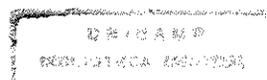
**Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi**  
Engenheiro Eletricista — UFMG  
Mestre em Engenharia Elétrica — UFMG

Maio de 1998

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres** FEEC/UNICAMP

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por *Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi* e aprovada pela Comissão Julgadora em 19 de maio de 1998.

  
Orientador



9816436

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T1139c
T139c	
V. Ex.	
TOMADO DO	34726
PROD.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	11/08/98
N.º CPD	

CM-00115024-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

T139c

Takahashi, Ricardo Hiroshi Caldeira  
Controle singular de sistemas incertos / Ricardo  
Hiroshi Caldeira Takahashi.- - Campinas,SP:[s.n.], 1998.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de  
Computação.

1. Teoria de controle. 2. Sistemas lineares. 3.  
Otimização matemática. I. Peres, Pedro Luis Dias. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Banca Examinadora

- Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (Presidente)  
FEEC / UNICAMP
- Prof. Dr. Liu Hsu  
COPPE / UFRJ
- Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira  
FEIS / UNESP
- Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani  
FEEC / UNICAMP
- Prof. Dr. Rafael Santos Mendes  
FEEC / UNICAMP

*a meus pais*  
*a minha companheira*  
*a minhas filhas*

## Agradecimentos

Tendo concluído este trabalho (melhor talvez seria dizer esta etapa de um trabalho que, por princípio, não terá um fim jamais), é importante lembrar que o esforço de investigação científica não é redutível a atos de criação individuais. Um resultado científico pressupõe antes, por trás do autor que o assina, uma complexa teia de uma cultura que o engendrou. É chegado o momento de mencionar a dimensão das relações interpessoais, a coletividade, da qual é fruto a presente tese.

O ambiente existente no Departamento de Telemática da UNICAMP, lugar em que estiveram a todo momento no ar as perguntas certas a serem respondidas, foi para mim de primordial importância. Para fundamentar minhas reflexões, freqüentei cursos e mantive prolongadas discussões com diversos dos melhores pesquisadores na área de teoria de controle, membros do corpo docente da FEEC-UNICAMP. Dentre eles, cabe destacar os professores Paulo A. V. Ferreira e Basílio E. A. Milani. Os colegas Reinaldo M. Palhares, Maurício C. de Oliveira, Sérgio L. C. de Oliveira e Pedro B. Gapski também compartilharam comigo, ora suas indagações, ora suas conjecturas, ora suas descobertas, com grande generosidade.

Cabe especial menção ao orientador deste trabalho, prof. Pedro L. D. Peres. Dele, posso afirmar, aprendi a *praxis* do trabalho de artesão da ciência, saber que não se transmite senão através do convívio diário entre mestre e aprendiz.

Não é possível ainda esquecer os fios de minha história pessoal, que permitiram que fosse eu o autor do presente trabalho. Para me referir aos grandes mestres que engendraram toda uma geração de jovens pesquisadores na engenharia elétrica da UFMG tenho de citar os professores José Celso B. Andrade e Ronaldo T. Pena, como elos para mim visíveis de uma corrente cujo início se perde no tempo.

Devo agradecimentos em particular aos demais colegas da UFMG que gentilmente se dispuseram a suportar temporariamente uma sobrecarga de trabalho para permitir meu afastamento na UNICAMP. Agradeço ainda a concessão de uma bolsa de doutoramento, através do programa PICD-CAPES, dentro da quota da UFMG.

Finalmente, é preciso reconhecer que nunca será possível enumerar todas as pessoas que estiveram ao meu lado e que concorreram para que eu percorresse a trajetória que segui. A elas, somente posso dizer que jamais considerarei este um mero êxito individual, mas uma obra coletiva por acaso materializada por meu intermédio. Que saibam que o prazer da caminhada em boa companhia é para mim um objetivo maior que a conquista do troféu no fim.



# Sumário

<b>I</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Perspectiva Histórica</b>	<b>5</b>
1.1	Descrição Geral do Trabalho . . . . .	6
1.2	Perspectiva Epistemológica . . . . .	8
1.3	Evolução dos Paradigmas da Teoria de Controle . . . . .	9
1.3.1	Controle Clássico . . . . .	10
1.3.2	Controle Ótimo . . . . .	11
1.3.3	Controle Moderno . . . . .	12
1.3.4	Teorias da Estabilização . . . . .	15
1.4	Paradigma Emergente: O Controle Robusto . . . . .	18
1.4.1	Controle $\mathcal{H}_\infty$ e Métodos Correlatos . . . . .	19
1.4.2	Controle por Sistemas de Estrutura Variável . . . . .	21
1.4.3	Controle com Perturbações Paramétricas Limitadas a Conjuntos . . . . .	21
1.5	Quadro Epistemológico Geral . . . . .	22
1.6	Conclusão . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Problema de Regulação Ótima</b>	<b>27</b>
2.1	Sistema Dinâmico . . . . .	27
2.1.1	Incertezas de Modelo . . . . .	28
2.2	Problema de Regulação Ótima . . . . .	29
2.3	RO em Norma $\mathcal{L}_p$ . . . . .	30
2.4	Regularidade/Singularidade . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Controle Ótimo Singular: Quadro Teórico Atual</b>	<b>33</b>
3.1	Controle Ótimo: Regularidade e Singularidade . . . . .	33
3.2	Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$ . . . . .	35
3.2.1	Formulação do Problema $\mathcal{H}_2$ . . . . .	35
3.3	Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$ Singular . . . . .	37
3.3.1	Regularização via processo limite . . . . .	38
3.3.2	Análise via matriz de dissipação . . . . .	38
3.3.3	Solução completa via abordagem geométrica . . . . .	38
3.4	Controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	40
3.4.1	Formulação do Problema $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	40
3.5	Controle $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma$ -Restrito Singular . . . . .	43
3.5.1	$\epsilon$ -regularização . . . . .	44
3.5.2	Decomposição regular/singular . . . . .	44

3.5.3	Parametrização de múltiplos controladores . . . . .	45
3.5.4	Famílias de equações de Riccati . . . . .	45
3.5.5	O problema com informação completa . . . . .	45
3.6	Controle $\mathcal{H}_\infty$ Ótimo Singular . . . . .	46
3.6.1	Enfoque no valor de $\gamma^*$ . . . . .	46
3.6.2	O problema $\mathcal{H}_\infty$ na otimalidade . . . . .	47
3.6.3	Controle $\mathcal{H}_\infty$ mínima entropia singular . . . . .	47
3.7	Conclusão . . . . .	48
 <b>II SOLUÇÃO CONCEITUAL</b>		 <b>51</b>
<b>4</b>	<b>Decomposição Regular/Singular</b>	<b>55</b>
4.1	Especificação do Sistema . . . . .	55
4.2	Resultados Principais . . . . .	55
4.3	Algoritmo de Decomposição e Forma Canônica . . . . .	58
4.3.1	Forma Canônica Regular/Singular . . . . .	61
4.3.2	Demonstração do Teorema 4.1 . . . . .	63
4.4	Interpretação Geométrica . . . . .	66
4.5	Exemplo Numérico . . . . .	68
4.6	Conclusão . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Rastreamento de Sinais</b>	<b>75</b>
5.1	Problema de Rastreamento de Sinais . . . . .	76
5.1.1	Decomposição em Níveis . . . . .	78
5.2	Sistemas Conhecidos: Rastreamento Exato . . . . .	80
5.3	Sistemas Conhecidos: Rastreamento Assintótico . . . . .	83
5.3.1	Rastreamento Instantâneo . . . . .	85
5.4	Sistemas Incertos: Quase-Rastreamento . . . . .	86
5.5	Conclusão . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Ganhos Elevados Estabilizantes</b>	<b>93</b>
6.1	Sistemas com Estrutura Controle Completo . . . . .	93
6.1.1	Sistemas com Incerteza Limitada em Norma . . . . .	94
6.1.2	Sistemas com Incerteza Politópica . . . . .	96
6.2	Decomposição Ganho Finito / Ganho Elevado . . . . .	98
6.2.1	Sistemas IP - Decomposição EGE/NEGE . . . . .	99
6.2.2	Sistemas ILN - Decomposição EGE/NEGE . . . . .	102
6.3	Conclusão . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Decomposição de Sistemas Incertos</b>	<b>105</b>
7.1	Preliminares . . . . .	106
7.1.1	Determinação dos Espaços Ganho-Finitos . . . . .	107
7.2	Algoritmo de Decomposição R/S Generalizada . . . . .	109
7.3	Teorema de Decomposição . . . . .	114
7.4	Forma Canônica Regular/Singular Generalizada . . . . .	116
7.5	Conclusão . . . . .	118

<b>8</b>	<b>Regulação Ótima do Núcleo Regular</b>	<b>121</b>
8.1	Preliminares . . . . .	122
8.1.1	Transformação para a forma padrão generalizada . . . . .	123
8.2	Problema de Regulação Custo-Garantido Ótima . . . . .	124
8.2.1	Regularidade do problema de regulação custo-garantido ótimo . . . . .	125
8.3	Problema Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	127
8.3.1	Formulação convexa do problema misto . . . . .	128
8.3.2	Projeto do regulador ótimo $\mathcal{H}_2$ . . . . .	129
8.3.3	Projeto do regulador ótimo $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	130
8.4	Sistemas com Incerteza Limitada em Norma . . . . .	130
8.4.1	Regulador $\mathcal{H}_2$ custo-garantido ótimo . . . . .	131
8.4.2	Regulador $\mathcal{H}_\infty$ custo-garantido ótimo . . . . .	132
8.4.3	Regulador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ custo-garantido ótimo . . . . .	133
8.5	Sistemas com Incerteza Politópica . . . . .	134
8.6	Exemplos Numéricos . . . . .	136
8.7	Conclusão . . . . .	137
<b>III</b>	<b>REALIZAÇÃO POR MODOS DESLIZANTES</b>	<b>139</b>
<b>9</b>	<b>Modos Deslizantes: Controle Descontínuo</b>	<b>143</b>
9.1	Controle por Modos Deslizantes . . . . .	144
9.1.1	Soluções de Sistemas em Modos Deslizantes . . . . .	147
9.1.2	Problema de Projeto de MD . . . . .	150
9.1.3	Equivalência com Controle por Ganhos Elevados . . . . .	152
9.2	Preliminares dos Teoremas de Síntese . . . . .	152
9.3	Sistemas EGPD . . . . .	155
9.3.1	Cálculo do supremo de $\epsilon$ . . . . .	157
9.3.2	Reprojeto de $G$ . . . . .	158
9.4	Controlador Modos Deslizantes . . . . .	165
9.4.1	Projeto dos Parâmetros do Controlador . . . . .	166
9.5	Relação com Trabalhos Anteriores . . . . .	170
9.6	Conclusão . . . . .	172
	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>175</b>
	<b>Notas Finais</b>	<b>177</b>
	Programa de Pesquisas Complementar . . . . .	179
	<b>APÊNDICE</b>	<b>181</b>
<b>A</b>	<b>Definições de Referência</b>	<b>183</b>
A.1	Espaços e Normas . . . . .	183
A.2	Espaços Topológicos . . . . .	185
A.3	Espaços de Sinais . . . . .	187
A.4	Operadores e Normas Induzidas . . . . .	190

A.5	Sistemas Dinâmicos . . . . .	194
A.5.1	Incertezas de Modelo . . . . .	195
A.5.2	Normas de Sistemas Dinâmicos . . . . .	196
A.5.3	Estabilidade de Sistemas Dinâmicos . . . . .	201
A.6	Entrada de Controle / Saída Controlada . . . . .	203
A.6.1	Estabilização de Sistemas Dinâmicos . . . . .	205
A.7	Métodos Numéricos e Otimização . . . . .	206
A.7.1	Fatoração QR . . . . .	206
A.7.2	Inequações Matriciais Lineares . . . . .	207
A.7.3	Otimização com Restrições LMI . . . . .	209

**Bibliografia****211**

# Notação

A notação a ser empregada neste trabalho é listada nesta seção. Procurou-se aqui utilizar símbolos de uso corrente, preservando a notação padrão para cada entidade representada. Nos casos em que tal prática iria gerar ambiguidade de significado, foi necessário atribuir novos símbolos a algumas entidades<sup>1</sup>. Além da notação listada nesta seção, cujo significado matemático presume-se que seja do conhecimento do leitor, há conceitos adicionais que serão definidos ao longo do trabalho, aos quais eventualmente serão atribuídos novos símbolos não listados abaixo.

- .  $\mathbb{N}$  - conjunto dos números naturais
- .  $\mathbb{R}$  - corpo dos números reais
- .  $\mathbb{C}$  - corpo dos números complexos
- .  $\mathbb{R}_+$  - conjunto dos números reais não negativos
- .  $\mathbb{C}_-$  - semiplano esquerdo aberto de  $\mathbb{C}$
- .  $\bar{\mathbb{C}}_-$  - semiplano esquerdo fechado de  $\mathbb{C}$
- .  $\mathbb{C}_+$  - semiplano direito aberto de  $\mathbb{C}$
- .  $\bar{\mathbb{C}}_+$  - semiplano direito fechado de  $\mathbb{C}$
- .  $\mathbb{C}_o$  - eixo imaginário de  $\mathbb{C}$
- .  $\bar{\mathcal{X}}$  - o fecho do conjunto  $\mathcal{X}$
- .  $\text{conv } \bar{\mathcal{X}}$  - o fecho convexo do conjunto  $\mathcal{X}$
- .  $\mathcal{X}^\circ$  - o interior do conjunto  $\mathcal{X}$
- .  $\partial\mathcal{X}$  - a fronteira do conjunto  $\mathcal{X}$
- .  $\triangleq$  - é definido por
- .  $\in$  - pertence a
- .  $\subset$  - contém

---

<sup>1</sup>Isso ocorre, por exemplo, com o símbolo  $\sigma$  que, na literatura, tanto significa o espectro de uma matriz quanto os valores singulares da mesma. Foi necessário portanto atribuir outro símbolo para representar *espectro*.

- .  $\subset$  - está contido em
- .  $\cap$  - interseção
- .  $\cup$  - união
- .  $\emptyset$  - conjunto vazio
- .  $|x|$  - valor absoluto de  $x \in \mathbb{C}$
- .  $\Re(x)$  - parte real de  $x \in \mathbb{C}$
- .  $\Im(x)$  - parte imaginária de  $x \in \mathbb{C}$
- .  $\sup(\mathcal{X})$  - supremo do conjunto de números reais  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$
- .  $\text{ess sup}(\mathcal{X})$  - supremo essencial do conjunto  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$
- .  $\inf(\mathcal{X})$  - ínfimo do conjunto  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$
- .  $\{x_i\}$  - seqüência de números reais
- .  $\max(\mathcal{X})$  - máximo elemento de um conjunto de números reais  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ , ou máximo elemento de uma subseqüência finita de uma seqüência  $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$  a qual converge para  $\sup(\mathcal{X})$
- .  $\min(\mathcal{X})$  - mínimo elemento de um conjunto de números reais  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ , ou mínimo elemento de uma subseqüência finita de uma seqüência  $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$  a qual converge para  $\inf(\mathcal{X})$
- .  $\dim(\mathcal{X})$  ou  $\dim(x)$  - dimensão do espaço  $\mathcal{X}$  ou do vetor  $x$
- .  $[x]_i$  - o  $i$ -ésimo vetor de um conjunto ordenado de vetores  $x$
- .  $[X]_i$  - a  $i$ -ésima matriz de um conjunto ordenado de matrizes  $X$
- .  $\rho(X)$  - posto da matriz  $X$
- .  $X'$  - transposta da matriz  $X$
- .  $X^*$  - matriz conjugada transposta da matriz  $X$
- .  $X^{-R}$  - inversa à direita da matriz  $X$
- .  $X^{-L}$  - inversa à esquerda da matriz  $X$
- .  $\sigma_i(X)$  -  $i$ -ésimo valor singular da matriz  $X$
- .  $\sigma_{\max}(X)$  - maior valor singular da matriz  $X$
- .  $\lambda_i(X)$  -  $i$ -ésimo autovalor da matriz  $X$
- .  $\lambda_{\max}(X)$  - o autovalor da matriz  $X$  com maior parte real
- .  $\lambda_{\min}(X)$  - o autovalor da matriz  $X$  com menor parte real

- .  $\varsigma(X)$  - espectro da matriz  $X$ , ou seja, o conjunto dos autovalores da matriz  $X$
- .  $f \otimes g$  - operação de convolução entre os sinais  $f$  e  $g$
- .  $\mathcal{D}(T)$  - o domínio do operador  $T$
- .  $\mathcal{N}(T)$  - espaço nulo da matriz  $T$  ou do operador  $T$  (dependendo do contexto)
- .  $\mathcal{R}(T)$  - espaço range da matriz  $T$  ou do operador  $T$
- .  $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$  - operação soma direta dos subespaços  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$
- .  $\mathcal{X}^\perp$  - complemento ortogonal do subespaço  $\mathcal{X}$  em relação ao espaço
- .  $i : j$  - números naturais maiores ou iguais a  $i$  e menores ou iguais a  $j$
- .  $i : k : j$  - números naturais variando de  $k$  em  $k$ , a partir de  $i$  (inclusive) até  $j$  (inclusive)
- .  $\square$  - fim de enunciado
- .  $\diamond$  - fim de nota
- .  $\blacksquare$  - fim de demonstração
- .  $\diamond$  - fim de exemplo



# Lista de Abreviaturas

- CCIC** - Controle Completo e Informação Completa
- CDSI** - Controle Determinístico de Sistemas Incertos
- DN** - Decomposição em Níveis
- DGEI** - determinação das Direções Ganho-Elevado Instabilizantes
- EDLDD** - Equação Diferencial com Lado Direito Descontínuo
- EDO-ILN** - Escalamento Diagonal Ótimo - Incertezas Limitadas em Norma
- EDO-IP** - Escalamento Diagonal Ótimo - Incertezas Politópicas
- EGE/NEGE** - Estabilizável por Ganho Elevado / Não Estabilizável por Ganho Elevado
- EGPD** - Entrada G-Positiva Definida
- GEVP** - “Generalized EigenValue Problem”
- ICCRE** - Incerto com Controle Completo e Realimentação de Estados
- ILN** - Incerteza Limitada em Norma
- IP** - Incerteza Politópica
- LQ** - Linear Quadrático
- LQG** - “Linear Quadratic Gaussian” ou Linear Quadrático Gaussiano
- LMI** - “Linear Matrix Inequality”
- MD** - Modos Deslizantes
- MGNI** - determinação da Matriz de Ganhos elevados Não Instabilizantes
- MIMO** - “Multiple Input Multiple Output”
- RCGO** - Regulação Custo-Garantido Ótima
- RO** - Regulação Ótima
- R/S** - Regular/Singular

**R/S-G** - Regular/Singular Generalizada

**SDECSC** - Sistema Dinâmico com Entrada de Controle e Saída Controlada

**SEV** - Sistema de Estrutura Variável

**SISO** - “Single Input Single Output”

**VSS** - “Variable Structure Systems”

Parte I

# INTRODUÇÃO

Os capítulos iniciais deste trabalho destinam-se a formular o problema a ser tratado e a situá-lo no contexto do conhecimento já estabelecido.

O primeiro capítulo faz a apresentação sucinta dos resultados que serão obtidos no corpo desta tese. Procura-se situar tais resultados num contexto histórico, na tentativa de identificar seu possível significado dentro do campo de conhecimento da teoria de controle. Para isso, é feita uma breve apresentação da evolução dessa teoria, nos seus aspectos relevantes para a delimitação do campo de estudos aqui abrangido. É feito um esforço de sistematização da lógica dessa evolução, de maneira a elucidar a necessidade de esforços teóricos do tipo daquele aqui empreendido.

O capítulo 2 destina-se à formulação do problema-protótipo que será o substrato sobre o qual será construída toda a cadeia de resultados a serem obtidos nesta tese: o *problema de regulação ótima de sistemas incertos*, com critério genérico de normas  $\mathcal{L}_p$ .

No capítulo 3, é feito um levantamento geral dos resultados existentes na literatura relativos ao problema de controle ótimo singular com critério de normas de sistemas. Os problemas em questão são casos particulares do problema geral definido no capítulo 2. São identificadas algumas lacunas nas abordagens existentes. Finalmente, é detalhada a relação do presente trabalho de tese com os trabalhos já publicados. Procura-se precisar em que aspectos o presente trabalho segue alguma tradição anterior, e em que aspectos são aqui propostas inovações.

Antes de iniciar a leitura do texto, o leitor é alertado para o fato de que o apêndice A, situado ao final deste volume, é dedicado à formulação precisa de todas as definições e teoremas pré-existentes na literatura, sobre os quais será construído o restante do presente trabalho. Esse apêndice tem como objetivo servir de referência para a leitura do texto desta tese; assim, é feita a coletânea da maior parte do conhecimento necessário para essa leitura. Por motivo de economia de espaço, a apresentação é feita de forma axiomática, sem preocupação didática. Ainda com o objetivo de referência, é realizada a uniformização de notação e de conceitos, estabelecendo-se a precisa versão dos resultados existentes que será utilizada no restante desta tese.

# Capítulo 1

## Perspectiva Histórica

Este capítulo introdutório é devotado à apresentação, em linhas gerais, do trabalho a ser desenvolvido no restante desta tese. Aqui se procura estabelecer o significado do trabalho desenvolvido dentro de um contexto geral, histórico, da evolução da teoria de controle, em seus aspectos relevantes para a compreensão do presente trabalho.

A primeira seção deste capítulo sumariza, de maneira informal, os resultados desta tese. É feita a tentativa de explicar de maneira conceitual (verbal) o conjunto dos resultados obtidos, bem como seu possível papel instrumental para auxiliar em um esforço de unificação de diversas áreas da *teoria de controle*.

A seguir é definido o panorama teórico dentro do qual será feita a análise da evolução da teoria de controle, nos seus aspectos que desencadeiam o quadro com que se depara o presente trabalho. É feita a referência às fontes do ferramental de teoria do conhecimento que será empregado, sem no entanto se empreender nenhum esforço para explicar tal ferramental. O leitor interessado deve procurar diretamente tais fontes.

Uma vez precisadas as ferramentas para a análise epistemológica, passa-se a um esforço de descrição (também verbal) dos principais pontos de inflexão dentro da teoria de controle (nos seus aspectos aqui relevantes). Essas ferramentas de análise são aplicadas na formulação de algumas hipóteses, ainda preliminares, do significado da trajetória percorrida.

Procura-se assim desenhar o quadro atual, com a identificação das principais contradições hoje presentes na teoria, tanto no nível mais superficial de adequação dos dados empíricos<sup>1</sup> às prescrições teóricas, quanto no nível mais profundo de disputa entre concepções epistemológicas distintas enquanto candidatas a se tornarem a base filosófica da teoria de controle.

Conclui-se o capítulo com a formulação de algumas conjecturas a respeito da fundamentação da teoria de controle, em seu (suposto) atual paradigma dominante emergente, o *controle robusto*. Todo trabalho de pesquisa científica implica em uma série de escolhas de caminhos e formas dentre incontáveis alternativas, durante todo o seu desenvolvimento. As escolhas realizadas ao longo do presente trabalho de tese podem ser compreendidas quando colocadas na perspectiva dessas conjecturas epistemológicas, as quais delineiam um programa de pesquisa com contornos relativamente nítidos, e conseqüências em larga escala previsíveis.

---

<sup>1</sup>O leitor é alertado para o fato de que não é simples definir *o que são* dados empíricos no contexto da teoria de controle. Tal discussão no entanto não é aprofundada aqui.

## 1.1 Descrição Geral do Trabalho

O tema do controle ótimo singular de sistemas dinâmicos tem aparecido de maneira recorrente na literatura de controle, sob a forma de uma questão inevitável que se segue ao desenvolvimento de métodos de projeto de controladores ótimos que dependem de algumas hipóteses de *regularidade*<sup>2</sup>. Este trabalho se insere, de certa forma, nessa classe de trabalhos, ao estudar determinadas famílias de métodos de controle ótimo de sistemas dinâmicos lineares multivariáveis com parâmetros possivelmente incertos, quando se removem as hipóteses usuais de regularidade. As hipóteses empregadas para assegurar a propriedade de regularidade, na maioria dos tipos de controle ótimo, são expressas sob a forma de uma modificação no funcional de custo a ser minimizado, de maneira a incorporar um termo de ponderação da ação de controle. O presente trabalho lida precisamente com a remoção, parcial ou total, desse tipo de hipótese em uma ampla gama de métodos de projeto de controladores ótimos.

Os métodos de síntese de controladores ótimos estudados neste trabalho terão os critérios de custo a serem minimizados sempre expressos em termos de normas de determinados sinais (as “saídas” do sistema) diante de sinais de perturbação pertencentes a determinadas classes. Em particular, enquadram-se nos casos aqui abordados o critério de otimização da norma  $\mathcal{H}_2$  e todos os critérios do tipo normas induzidas  $\mathcal{L}_p$  do sistema (o que inclui, portanto, a norma  $\mathcal{H}_\infty$ ). Será aqui obtida uma sistemática para decomposição do problema original em termos de um problema de ordem reduzida equivalente, no qual prevalece a hipótese de ponderação positiva definida do vetor de entradas de controle (no caso de sistemas com parâmetros precisamente conhecidos). Supondo que haja disponibilidade de um ferramental adequado para obtenção da solução do problema de ordem reduzida, com suas hipóteses de regularidade satisfeitas (supondo portanto a suficiência da hipótese de regularidade adotada), é determinada então a sistemática para síntese do controlador para o sistema completo, com soluções singulares cujo *núcleo* consiste na solução regular de ordem reduzida. O autor deste trabalho não tem conhecimento, na literatura, de outro tratamento do problema de controle ótimo singular em tal generalidade.

Outro aspecto central deste trabalho consiste na apresentação, pela primeira vez na literatura, de uma solução para controles do tipo *custo garantido ótimo* de sistemas incertos com a remoção das hipóteses de regularidade. O controle do tipo custo garantido ótimo para sistemas com parâmetros incertos já vem sendo estudado desde o final da década de 80. No entanto, até o momento, toda a literatura tratando do tema do controle ótimo singular, em qualquer de suas variações, sempre assumiu como hipótese o conhecimento preciso dos parâmetros do sistema dinâmico.

Pode-se conjecturar sobre as causas do relativo atraso no desenvolvimento da teoria do controle singular de sistemas incertos. Essas causas poderiam estar associadas a vários fatores, dentre os quais é possível listar:

1. Existe uma noção intuitiva da “fragilidade” da situação de singularidade de um sistema dinâmico, que pode levar à expectativa de que não ocorresse singularidade, na prática, em sistemas incertos.
2. É bastante difundida a prática de se basear o projeto de controladores para sistemas incertos não em métodos ótimos, mas em métodos sub-ótimos, nos quais apenas se

---

<sup>2</sup>Hipóteses de regularidade são hipóteses introduzidas em um problema de otimização com o objetivo de garantir que a solução do problema seja composta exclusivamente de valores finitos.

impõe uma restrição ao funcional de custo, sem que seja feita a otimização desse funcional. Dessa forma, tem sido possível evitar a singularidade que estaria associada à otimização do funcional, por meio do tratamento de uma pseudo-singularidade associada ao problema restrito, baseado na busca de soluções não-singulares no espaço de soluções factíveis. Isso tem desviado a atenção do problema legítimo de singularidade que está associado à otimalidade do funcional.

3. A própria estrutura da hipótese de regularidade torna-se diferente no caso de sistemas incertos. Não era conhecido, até o presente momento, um critério para identificar os problemas de controle singulares, separando-os dos problemas regulares, no caso de sistemas com parâmetros incertos.

Essas três dificuldades são tratadas pelo presente trabalho.

O presente trabalho lida, pela primeira vez na literatura, com o problema do controle custo-garantido ótimo singular de sistemas a parâmetros incertos. O conceito de singularidade, aplicado a essa classe de problemas de otimização, leva à generalização, neste trabalho, das hipóteses de regularidade a serem empregadas nesses problemas, de forma a restabelecer critérios capazes de separar os problemas de projeto de controladores custo-garantido ótimo em dois conjuntos disjuntos e complementares: os problemas regulares e os problemas (legitimamente) singulares.

Esse critério de separação permite um tratamento do problema de controle singular, no caso de sistemas incertos, inteiramente análogo à solução proposta para o caso de sistemas a parâmetros precisamente conhecidos. O esquema de decomposição do sistema até a determinação de um sistema reduzido regular é então transposto, de maneira imediata, para o caso dos sistemas a parâmetros incertos. Toda a generalidade obtida para o caso a parâmetros conhecidos é portanto preservada no caso de parâmetros incertos.

Um aspecto da teoria de controle singular que já foi sugerido em parte das publicações existentes, mas jamais foi focado de maneira sistemática, refere-se às propriedades de robustez intrinsecamente associadas ao controlador resultante. O sistema em malha fechada é capaz de rejeitar, com tal controlador, perturbações tanto do tipo *sinais exógenos arbitrários* quanto do tipo *parâmetros incertos e dinâmica não-linear* em determinadas direções do espaço de estados. Essa robustez deriva precisamente da singularidade desse controlador. Um dos eixos do presente trabalho consiste na explicitação dessas propriedades de robustez, em termos de um *quase-desacoplamento de distúrbios por ganhos elevados* (ou “almost disturbance decoupling via high gains”). Tanto no caso de sistemas a parâmetros precisamente conhecidos quanto no caso de sistemas a parâmetros incertos, essa robustez *geométrica* se verifica e é aqui identificada de maneira precisa. No caso de sistemas a parâmetros incertos, essa ferramenta de robustez é adicionada a ferramentas do tipo *ganhos pequenos e estabilização quadrática*, as quais vêm sendo intensamente pesquisadas nos últimos anos. Uma discussão preliminar a esse respeito foi desenvolvida como preparação para o presente trabalho de tese e publicada em [116]. Note-se que a primeira dificuldade listada acima fica dessa forma superada, uma vez que a singularidade torna-se naturalmente associada ao tratamento de incertezas, deixando de ser entendida como contraditória com tal tratamento.

Há alguns trabalhos publicados recentemente na literatura em que é feita a associação entre ferramentas de robustez dos tipos “small gain” e “high gains”. Isso porém tem sido feito de maneira *ad hoc*, pela mera justaposição de técnicas aparentemente diferentes. O presente autor não tem conhecimento de outros trabalhos em que tal associação seja feita de maneira sistemática, através das propriedades de singularidade do problema de otimização,

fazendo emergir todas as diferentes propriedades de robustez de uma única formulação, com exceção de alguns trabalhos realizados como pesquisa exploratória para o presente trabalho de tese publicados em [114, 113, 112].

Por fim, este trabalho ainda explora a conexão, já identificada por alguns trabalhos publicados na literatura, entre os controladores do tipo “high gains” e os controladores do tipo *modos deslizantes* (“sliding modes”). É indicada a possibilidade de se implementar os controladores “high gains” resultantes do problema ótimo singular, os quais são meras abstrações matemáticas, em termos de controladores modos deslizantes, para os quais existe toda uma sistemática que possibilita a síntese física dos controladores. Um trabalho nessa linha, realizado como preparação para o presente trabalho de tese, foi publicado em [114]. Por uma questão de restrição de tempo para execução do presente trabalho, essa conexão não é explorada aqui até suas últimas conseqüências, o que implicaria no estudo dos “higher order sliding modes”, teoria hoje ainda incipiente.

Um problema particular, porém relevante, que foi possível resolver dentro da teoria convencional de modos deslizantes através do ferramental aqui desenvolvido, é o do tratamento das incertezas na matriz de entradas de controle. A perspectiva aqui empregada permite não apenas agrupar todas as tentativas anteriores de atacar o problema, como também permite identificar limites teóricos até onde será possível avançar com o desenvolvimento futuro de novos métodos de síntese, limites esses não vislumbrados na literatura publicada até o momento. Em particular, é apresentado um método sub-ótimo que permite a aproximação de tal limite teórico; melhores aproximações dependeriam do desenvolvimento de novas ferramentas de otimização.

## 1.2 Perspectiva Epistemológica

Embora ainda esteja por ser formulada uma teoria do desenvolvimento científico nas ciências da engenharia (ciências que investigam a possibilidade de se construir mecanismos não existentes na natureza), pode-se extrapolar a sistematização filosófica que já foi elaborada para as ciências da natureza, em uma tentativa de caracterizar o escopo e a natureza do presente trabalho. Para uma discussão inicial a respeito das dificuldades dessa empresa, ver o capítulo 13, “tecnologia e filosofia”, da obra [13]. O conjunto do presente trabalho pode ser entendido como parte do esforço permanente da comunidade científica, no sentido de produzir teorias com maior poder explanatório, agregando cada vez um maior número de teorias precedentes, articuladas em torno de um núcleo cada vez menor de princípios fundamentais. A evolução das ciências do controle automático parece indicar a necessidade de um maior esforço de tal natureza neste momento, tendo em vista a relativa diversidade de técnicas que foram desenvolvidas ao longo dessas duas últimas décadas, cujas formulações são presentemente incomensuráveis.

A natureza do esforço teórico aqui empreendido pode ser traduzido para a formulação apresentada por Mario Bunge na obra [12], capítulo 7, “simplicidade no trabalho teórico”. Chame-se a atenção para os conceitos de *conectividade conceitual* e de *simplicidade da base predicativa*. Dentre os *desideratos da teoria científica* listados por Bunge, são particularmente relevantes para o enquadramento do trabalho aqui desenvolvido: (2) sistematicidade ou unidade conceitual; (6) simplicidade semântica; (7) coerência externa; (8) poder explanatório; (11) extensibilidade. O papel dos demais desideratos não é facilmente avaliável, ao menos num primeiro momento.

A seção a seguir apresenta um breve resumo da evolução dos corpos teóricos que confluem no trabalho ora apresentado. É feita aqui uma tentativa preliminar de sistematizar o desenvolvimento pregresso em termos históricos, utilizando o conceito de *paradigma científico* no sentido definido por Thomas Kuhn [65]. Deve-se relativizar neste ponto uma aparente contradição existente entre a concepção de Kuhn e a de Bunge, no que tange à formulação de uma *história da ciência*. Na concepção de Kuhn não há a necessidade, na passagem de um paradigma ao paradigma seguinte, de qualquer aprofundamento da teoria no sentido definido por Bunge, com seus desideratos. Neste trabalho assume-se a hipótese de que, embora tal mudança de paradigma aparentemente possa ocorrer com essa *ausência de sentido* (*sentido* segundo Bunge), isso ocorre apenas em passagens tomadas isoladamente<sup>3</sup>. O conjunto da história da ciência, segundo a hipótese aqui adotada, efetivamente *evolui* num sentido muito próximo daquele definido por Bunge, desde que se tome um período histórico suficientemente longo para análise. A fundamentação dessa hipótese (que necessita, evidentemente, ser demonstrada) não será objeto do presente trabalho, estando incluída no programa de pesquisas futuras do presente autor.

Outro ponto a ser esclarecido em relação à formulação de Kuhn refere-se ao próprio conceito de *paradigma científico*. Tal conceito, como originalmente estabelecido por Kuhn, envolveria a noção de um *consenso* na comunidade científica a respeito das teorias adotadas em dado momento. Tomado ao pé da letra tal conceito, seria imprópria a referência à coexistência de paradigmas distintos em determinados momentos. Deve-se notar, entretanto, que tal inconsistência se dissolve quando se admite a coexistência de diferentes comunidades científicas relativamente separadas, seja por barreiras geográficas e políticas, seja por barreiras informais, devidas à origem distinta de linhas de pesquisa diversas em campos do conhecimento diferentes. Mais ou menos nesse sentido é possível falar da coexistência dos paradigmas do *controle clássico* e do *controle ótimo*. Além disso, a existência de um consenso não implica na inexistência de vozes dissidentes. Assim, é possível ainda falar no confronto, ao longo da década de 70, entre o paradigma do *controle moderno* (que era efetivamente um consenso) com o paradigma do *controle clássico*; seria talvez mais apropriado falar em confronto com grupos de pesquisadores cujo referencial teórico ainda estava assentado no paradigma já ultrapassado do *controle clássico*. Nesse sentido, entenda-se toda referência que será feita no texto a seguir a tal confronto de paradigmas.

Em determinados locais, são empregados também os conceitos de *refutação* e *corroboração* de hipóteses e de teorias, o que é feito no estrito sentido definido por Karl Popper [92]. Também no sentido definido por Popper na mesma obra, aparece o conceito de *dimensão* de uma teoria, aqui renomeado, o que envolve uma sutil reformulação, como a *entropia* associada a tal teoria. No âmbito do presente trabalho, pode-se entender os dois termos como sinônimos; a discussão específica sobre tal reconceitualização não será feita aqui.

### 1.3 Evolução dos Paradigmas da Teoria de Controle

Nesta seção é esboçada uma tentativa de coordenar os dados históricos que diretamente antecederam o conjunto de teorias relevantes para a construção do presente trabalho. São particularmente importantes:

---

<sup>3</sup>Tal *ausência de sentido* pontual talvez possa ser exemplificada em uma das passagens de paradigma aqui relatadas, do *controle clássico* para o *controle moderno* que, em dado momento, conforme será descrito a seguir, se tornam teorias incomensuráveis.

- a passagem do paradigma do *controle clássico* para o paradigma do *controle moderno*,
- a simplificação do *controle ótimo* baseado no *cálculo variacional* para formulações específicas, principalmente do tipo *linear quadrático*,
- a emergência da questão do tratamento de incertezas de modelo (que ocorreu paralelamente em duas vertentes distintas da teoria de controle),
- o desenvolvimento das técnicas de *perturbações singulares* e ao mesmo tempo, porém inicialmente independentemente, do *controle por modos deslizantes* e do *controle min-max*, os dois últimos vindo a convergir para o chamado *controle determinístico de sistemas incertos*,
- o surgimento do controle  $\mathcal{H}_\infty$  e a reformulação do controle *linear quadrático* em termos da otimização da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema, dentro de um contexto de questionamento do paradigma do *controle moderno* e simultânea retomada (parcial) de uma visão epistemológica associada ao paradigma do *controle clássico*.

A articulação desses eventos, com a busca de uma lógica subjacente aos mesmos, é o tema desta seção.

### 1.3.1 Controle Clássico

A atual situação de instabilidade paradigmática da teoria de controle tem fortes conexões com a transição do paradigma do *controle clássico*, baseado em funções de transferência e respostas freqüenciais (modelos entrada-saída) para o paradigma do *controle moderno*, baseado em espaços de estados (modelo com variáveis internas), durante a década de 60. Conforme será visto, tal transição envolveu em sua superfície um compromisso entre um *critério de abrangência* (que indicava a princípio a preponderância do controle moderno, cuja classe de problemas tratáveis era muito mais ampla que a do controle clássico) e um *critério de êxito* (que com o passar do tempo foi reforçando o paradigma do controle clássico, o qual continuava a ser aplicado em muito maior escala, no ambiente industrial, que o controle moderno). Sob a superfície dessa polêmica duradoura, este trabalho irá arriscar a hipótese da existência de um conflito mais básico, entre posições epistemológicas distintas.

O controle clássico, desenvolvido principalmente nas décadas de 30 e 40, tratava primariamente de sistemas com uma entrada e uma saída (sistemas SISO, do inglês “single input single output”), tendo desenvolvido ferramentas de notável generalidade e poder explanatório. O exemplo máximo do refinamento teórico obtido dentro do paradigma do controle clássico talvez seja o *critério de Nyquist* para estabilidade de sistemas, o qual é necessário e suficiente para estabilidade de sistemas lineares com parâmetros precisamente conhecidos, mas ainda se aplica (reduzindo-se à suficiência) a sistemas não-lineares e/ou com parâmetros desconhecidos<sup>4</sup>. Ao lado disso, eram freqüentemente empregadas ferramentas gráficas, que serviam para guiar a sensibilidade do projetista na concepção de sistemas, em uma sistemática envolvendo regras nem sempre muito claras de projeto e objetivos nem sempre formulados de maneira explícita. Apesar do seu título, a referência [80] traz um extenso apanhado dos métodos e técnicas associados ao paradigma do controle clássico, onde tais características ficam evidentes.

<sup>4</sup>O autor do presente trabalho não teve acesso ao trabalho original de Nyquist [79]. No entanto, a maioria dos livros-texto tratando da teoria clássica de controle faz uma apresentação do assunto, por exemplo [80].

As técnicas desenvolvidas dentro do controle clássico foram largamente empregadas na prática, estando associadas a toda a evolução da indústria de base dos anos 30 em diante. A necessidade de aplicação a problemas de complexidade muito maior que aqueles para os quais a teoria havia sido originalmente concebida levou à agregação à mesma de um volumoso conjunto de práticas *ad hoc*, formuladas a partir de intuições dos aplicadores e fundamentadas principalmente na verificação empírica de seu funcionamento. Dessa forma eram tratados, em particular, os problemas de controle de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO, do inglês “Multiple Input Multiple Output”) nos quais havia ocorrência de interação entre essas diversas variáveis. Para reduzir essa interação (a qual não se enquadrava dentro do domínio do controle clássico) a própria concepção dos sistemas a serem controlados era modificada, na tentativa de construir sistemas com variáveis ao menos aproximadamente independentes. Isso, naturalmente, impunha limites não apenas à eficiência dos sistemas possíveis de serem projetados, como também à própria possibilidade de se projetarem sistemas além de certo grau de complexidade.

Pode-se identificar, associada ao paradigma do controle clássico, uma orientação para descrição dos sistemas em termos de entradas-saídas (modelos de *caixa-preta*). Pode-se portanto classificar essa teoria dentre aquelas de natureza *fenomenológica* [12]. Há uma mais ou menos explícita tentativa de evitar as descrições físicas de fenômenos internos aos modelos, sob o pretexto de evitar a remodelagem. É importante notar a consistência dessa orientação com tendências da época, que estavam na moda em diversos campos do conhecimento, tais como a psicologia e a sociologia, na origem da chamada *cibernética*.

### 1.3.2 Controle Ótimo

Em paralelo com o desenvolvimento do paradigma do controle clássico (e inclusive antes do surgimento desse paradigma), existe um fluxo constante de trabalhos dentro do que seria o *paradigma do controle ótimo*, o qual se origina ainda no século XVIII e que possui, ao longo de sua história, uma orientação prática muito menor que o controle clássico. Esse fluxo de trabalhos tem origem na física e na matemática, e trata essencialmente do controle de sistemas dinâmicos com estrutura bastante simples, cujos parâmetros se assume conhecer com precisão. Os problemas típicos associados a esse paradigma seriam a execução pelo sistema de determinadas trajetórias, com a minimização de determinados funcionais cujo significado se traduziria em parâmetros físicos, tais como tempo de percurso, energia gasta, etc. Um pouco da história do controle ótimo é relatada no artigo [110].

Em termos práticos, era muito difícil a aplicação dos métodos de controle ótimo, não tanto pela exigência de um conhecimento preciso dos parâmetros do sistema (essa polêmica não estava em foco àquela época), mas principalmente pela complexidade computacional associada à matemática relativamente sofisticada do *cálculo variacional* em que se baseava o controle ótimo. Exceto para casos muito simples, era impossível à época a determinação das leis ótimas de controle, de forma que não houve uma verdadeira disputa entre o controle ótimo e o controle clássico: o primeiro tratava essencialmente de exercícios teóricos, enquanto o segundo resolvia as questões práticas<sup>5</sup>.

O paradigma do controle ótimo, no entanto, trazia embutida uma postura epistemológica diametralmente oposta à do controle clássico. O controle ótimo pressupunha o conhecimento dos mecanismos físicos internos que operavam dentro dos sistemas a serem controlados,

---

<sup>5</sup>Sussmann e Willems [110] levantam a hipótese de que a teoria de controle ótimo teria tido aplicações bélicas na antiga União Soviética, motivo pelo qual teve ali seu maior desenvolvimento no século XX.

ou pelo menos a possibilidade deste conhecimento. Trata-se portanto de uma teoria de descrição dos *mecanismos* que explicam o comportamento do sistema. Deve-se notar que, apesar de estar em desacordo com a teoria de maior sucesso prático (o controle clássico), o controle ótimo garantia maior consistência e conectividade com o domínio científico da física. As leis físicas, já amplamente dominadas no nível relevante para a construção de artefatos a serem controlados, seriam naturalmente incorporadas à camada limítrofe da teoria de controle, articulando dessa forma com maior força essa teoria ao restante do edifício científico.

### 1.3.3 Controle Moderno

A década de 60 assiste a um processo de mudança de paradigma singularmente veloz, dentro da teoria de controle. Em muito pouco tempo é substituído o tratamento dos sistemas em termos de respostas em frequência (descrições entrada-saída) por um tratamento em termos de sistemas de equações diferenciais (representação por espaço de estados), que postulava a descrição de todo um mecanismo interno de funcionamento. Alguns dos principais fatores que induziram tal mudança foram:

- o trabalho de Kalman [56], mostrando a possibilidade de considerar de maneira explícita modelos de ruídos injetados no sistema, para obtenção das variáveis internas de maneira “ótima” (*filtro de Kalman*);
- o trabalho de Luenberger<sup>6</sup> [73], mostrando a possibilidade de reconstruir as variáveis internas do sistema a partir de dados de entrada-saída;
- o trabalho de Kalman [57], apresentando uma decomposição canônica do sistema (representado em termos de espaço de estados), evidenciando as propriedades de *controlabilidade* e de *observabilidade*, assim indicando os limites teóricos dentro dos quais é possível a utilização de controladores para alterar o desempenho de sistemas<sup>7</sup>;
- o trabalho de Ackerman<sup>8</sup> [1] relacionado à alocação de pólos, mostrando a grande flexibilidade para o projeto de controladores, no que se refere à escolha do desempenho do sistema em malha fechada, quando se utilizam em tal projeto as variáveis internas do sistema;
- a dedução de fórmulas específicas que permitem o projeto de controladores ótimos do tipo *linear quadrático* para sistemas representados na forma de espaço de estados<sup>9</sup>, baseadas na solução de equações de Ricatti (um problema computacionalmente simples) e não mais no cálculo variacional. A combinação do controlador *linear quadrático*

---

<sup>6</sup>O trabalho de Luenberger é muito similar ao de Kalman acima citado, tendo importância principalmente enquanto uma consolidação explícita da epistemologia do *mecanismo visível*, tendo provocado inicialmente maior impacto que o próprio trabalho original de Kalman.

<sup>7</sup>O trabalho original acima citado de Kalman é de difícil acesso para o leitor ocidental; o autor do presente trabalho não teve de fato acesso à fonte citada. Entretanto, detalhes de seu conteúdo são hoje de uso corrente, podendo ser encontrados por exemplo em livros-texto como [19].

<sup>8</sup>O presente autor não teve acesso a tal referência original. No entanto, os resultados ali descritos são hoje bastante conhecidos, ver por exemplo [55].

<sup>9</sup>Este resultado também está associado ao nome de Kalman [58], embora haja aí a participação independente de outros grupos de pesquisadores.

com o *filtro de Kalman*, através do *princípio da separação* (outro resultado importante demonstrado nessa época) levou ao arquetípico controlador *linear quadrático gaussiano*, ou LQG [5].

Diversas eram as vantagens que se tornavam evidentes da abordagem moderna (então emergente) em relação à clássica, sob diversos pontos de vista. Associadas à migração do corpo principal da teoria de controle de um caráter *fenomenológico* para um caráter de *mecanismo interno*, herança do paradigma do controle ótimo, vêm:

- o avanço na compreensão das propriedades estruturais dos sistemas dinâmicos, com o conseqüente fortalecimento da fundamentação matemática da teoria de controle;
- o fortalecimento da conexão da teoria de controle com as demais teorias científicas (em particular a física).

A combinação desses dois fatores gerou uma fertilidade sem precedentes no campo da teoria de controle. Uma ampla gama de novos problemas se colocavam dentro do novo paradigma, em contraste com a relativa esterilidade que era percebida dentro do paradigma do controle clássico.

Considerando um critério de abrangência, a teoria moderna ampliava (ao menos em princípio) de maneira considerável a classe dos problemas cuja solução poderia ser obtida. Pela primeira vez, estava disponível uma teoria que era capaz de descrever com precisão os fenômenos próprios de sistemas MIMO, e ainda prescrever métodos claramente formulados para o projeto de controladores para esses sistemas, levando em conta tais fenômenos explicitamente.

O resultado dos métodos de projeto no controle moderno, em particular aqueles baseados em otimização (como o método LQG), tornava-se ainda *reprodutível*, no sentido de que um mesmo problema resolvido duas vezes levaria em ambas as vezes ao mesmo resultado, necessariamente. Em outras palavras, para modificar o resultado de um projeto seria necessário modificar explicitamente suas premissas e/ou formulação. Isso, em contraste com a utilização da “sensibilidade” do projetista no processo de determinação de um controlador, dentro do paradigma do controle clássico, significava que a teoria de controle moderno se situava em um patamar superior de sistematicidade metodológica<sup>10</sup>.

Sob o ponto de vista prático, a capacidade de síntese de controladores associada à teoria de controle moderno não era apenas conceitual, traduzindo-se em métodos computacionalmente factíveis de projeto. Uma fonte de problemas eminentemente práticos serviu de motivação (e forneceu pesado financiamento) para o desenvolvimento da teoria de controle moderno: o setor aeroespacial, trabalhando principalmente na questão da navegação impulsionada por foguetes [95]. A “corrida espacial” que teve lugar nas décadas de 50 e 60 desempenhou papel central nessa questão.

Devido a essa conjugação de fatores, ainda na década de 60 os métodos de espaço de estados, associados à teoria de controle moderno, ganharam preponderância dentro da comunidade dedicada ao desenvolvimento da teoria de controle, assumindo em curto espaço de tempo o papel de paradigma dominante. Essa posição perdurou até o início da década de 80.

<sup>10</sup> Evidentemente, não se elimina por completo a componente subjetiva do processo de projeto, que continua a estar presente no nível da escolha das premissas e/ou formulação do problema. A vantagem de se trabalhar em níveis superiores de sistematicidade é a clarificação de uma maior porção da estrutura do problema, o que em princípio aumenta os limites de desempenho que se esperam obter do controlador projetado.

### A Polêmica Controle Moderno $\times$ Controle Clássico

As décadas de 60 e 70 foram marcadas, no entanto, como o período em que se estabeleceu no campo da engenharia de controle o chamado “gap” entre a teoria e a prática. Por um lado, uma axiomatização rigorosa da teoria de controle no espaço de estados (a *abordagem geométrica* [127]) chegou a repercutir de maneira profunda em um domínio conexo da matemática (a *álgebra linear*). Diversos grupos de pesquisa em matemática passaram a trabalhar no domínio da teoria de controle. De outro lado, a maior parte dos sistemas industriais em construção e em operação continuou a se basear nos métodos da teoria de controle clássico, com muito poucas exceções, à inteira revelia de todo o desenvolvimento teórico efetuado no campo do controle moderno. O “gap” teoria-prática tornou-se célebre, e possibilitou a manutenção de uma polêmica duradoura entre os paradigmas de controle moderno e controle clássico, apesar da preponderância do primeiro enquanto referencial teórico. A respeito dessa polêmica, é interessante comparar a posição moderada de Rosenbrock [95], contrastando-a com a posição de Horowitz [51] de crítica frontal ao controle moderno e pelo retorno ao paradigma clássico.

Não seria simples e possivelmente também não seria frutífero tentar delinear as circunstâncias exatas pelas quais a teoria de controle moderno deixou de ser aplicada em larga escala, apesar de sua constituição teórica ser bastante convincente<sup>11</sup>. Uma análise *a posteriori* dos fatos tende a revelar, à luz daquilo que pode ser considerado o paradigma de controle atualmente vigente (o qual será analisado a seguir), que os métodos de espaço de estados encontraram dificuldades principalmente no que se refere à acomodação de incertezas nos modelos dos sistemas considerados. Um exame mais minucioso dos fatos, no entanto, parece mostrar que essa explicação não é inteiramente satisfatória pois sabe-se que, em uma grande parcela dos casos práticos nos quais foi mantido o controlador clássico, este poderia ter sido substituído por um controlador moderno, com desempenho igual ou melhor, mesmo sem nenhum recurso a técnicas de tratamento de incertezas de modelo.

De qualquer forma, no seio da polêmica com a teoria de controle clássico surgiram diversas técnicas *ad hoc* para tentar realizar a acomodação das incertezas paramétricas do sistema. Essas técnicas não emergiam de maneira natural da formulação do controle moderno, de maneira que sua introdução forçada acabou sendo feita à custa da economia de princípios teóricos e da coesão do corpo da teoria resultante. Note-se que a própria teoria de controle clássico também não dispunha de ferramental adequado, a princípio, para tratamento de incertezas paramétricas, e a reivindicação de sua superioridade de base conceitual para coordenar essa classe de fenômenos é posterior ao estabelecimento do controle moderno enquanto paradigma predominante<sup>12</sup>.

O raciocínio implícito na defesa do controle clássico e na crítica ao controle moderno pode ser sumarizado, de maneira esquemática, da seguinte forma:

- O modelo com que se trabalha deveria ser compatível com o conhecimento que efetivamente se dispõe a respeito do sistema, para que se obtivesse resultados significativos.
- Na maioria dos casos de aplicação prática da teoria de controle existiria alguma incerteza quanto ao modelo do sistema a ser controlado.

<sup>11</sup> Vez por outra é esboçada uma explicação de natureza voluntarista para o fenômeno, que oscila entre: (i) o conservadorismo da indústria para aplicar técnicas novas e (ii) o descomprometimento dos teóricos do controle com as aplicações práticas e sua orientação puramente acadêmica.

<sup>12</sup> Esse detalhe fundamental para a compreensão da polêmica pode ser depreendido, por exemplo, da história narrada por Rosenbrock [95].

- Os modelos do tipo entrada-saída seriam menos sujeitos a erros que os modelos que pressupõem a existência de variáveis internas (em princípio desconhecidas), pelo fato de trabalharem apenas com dados em princípio diretamente observáveis.
- Assim sendo, o modelo entrada-saída deveria ser o preferido.

Fica assim evidente o fundo epistemológico dessa polêmica que, superficialmente, inicia-se em uma disputa através de um critério de eficácia e que prossegue, após certo tempo, em uma disputa por um critério de abrangência teórica.

Dados hoje estabelecidos como factuais são:

1. Controladores obtidos pelas técnicas modernas tornam-se frágeis quando a incerteza a respeito dos parâmetros do sistema controlado ultrapassa certos limiares. Controladores projetados segundo as técnicas clássicas (recicladas durante a polêmica dos paradigmas) mantêm um desempenho adequado em uma maior faixa de variação de parâmetros.
2. Por outro lado, alguns setores industriais com características particulares, em primeiro lugar o setor aeroespacial, puderam com base nas técnicas do paradigma do controle moderno projetar novos sistemas que seriam impossíveis de serem sequer concebidos com base nas técnicas clássicas.

Essa incomensurabilidade de paradigmas foi (ao menos difusamente) percebida, tornando-se uma *anomia* paradigmática. Esta é a chave para compreensão da mudança de paradigma seguinte, que leva ao que pode ser considerado o paradigma atual (ou emergente): o *controle robusto*.

#### 1.3.4 Teorias da Estabilização

Antes de abordar o possível surgimento de um paradigma atual (emergente), do controle robusto, é necessário focar um conjunto de teorias que trabalharam, ao longo do período da polêmica acima narrada, em alguns fundamentos da teoria de controle. Tais teorias são aqui agrupadas sob a denominação genérica de *teorias da estabilização*, e serviram de ponte, da situação de crise de paradigma existente ao final da década de 70, para o possível estabelecimento do novo paradigma do *controle robusto*. A questão da filiação de cada uma dessas teorias ao paradigma em crise, do *controle moderno*, ao paradigma anterior, do *controle clássico*, ou mesmo a comunidades científicas isoladas por motivos geo-políticos (na antiga União Soviética) é discutida durante a apresentação a seguir, sendo o leitor alertado para o fato de que a resposta a tal questão não é simples.

Não será feita aqui uma tentativa de citar exaustivamente todas as correntes teóricas que se multiplicaram ao longo do período de existência do paradigma do *controle moderno* e ao longo de sua crise. São abordadas apenas as correntes que pesquisavam especificamente o problema da estabilização de sistemas (possivelmente incertos). Tais correntes fazem parte do eixo dos acontecimentos relevantes para a compreensão do quadro em que se situa o presente trabalho. O leitor no entanto é alertado para o fato de que alguns aspectos do atual paradigma emergente, aqui nomeado *controle robusto*, e que não são aqui discutidos, são resultantes da influência de outras correntes teóricas desenvolvidas no decorrer da década de 70, nomeadamente as teorias do *controle adaptativo*, do *controle estocástico*, do *controle digital*, bem como algumas áreas correlatas mas não incluídas na teoria de controle, tais

como a *teoria da otimização* ou a *inteligência artificial* (principalmente em suas vertentes “fuzzy” e conexionista). No entanto, ainda há um longo caminho a percorrer até a integração de todas essas áreas, e outras mais não citadas acima, em uma única teoria abrangente.

### Fundamentos da Estabilidade I: Métodos no Espaço de Estados

Iniciou-se na década de 60 a tentativa de aplicação de critérios muito gerais para estabilidade de sistemas, enunciados ainda no final do século XIX, pelo matemático russo Lyapunov [74]. Tais critérios foram desenvolvidos para aplicação a equações diferenciais, sendo portanto imediatamente associáveis à estabilização de sistemas descritos na forma de espaço de estados. Esses critérios não se restringiam (como a maioria dos outros criados na teoria de controle clássico e herdados pela teoria de controle moderno) a sistemas lineares e nem sequer impunham determinada estrutura às equações diferenciais que descreviam o sistema.

Durante a década de 70, o critério analítico de Lyapunov foi convertido em um critério de síntese de controladores, dentro da corrente teórica denominada *controle determinístico de sistemas incertos* (ver, por exemplo, [45, 69]). Essa corrente empregava controladores não-lineares para estabilização de sistemas possivelmente não-lineares com parâmetros possivelmente incertos (dependendo no entanto de uma certa estrutura para essa incerteza). Depois se viu que esse tipo de métodos de síntese correspondia a um trabalho iniciado anteriormente (ainda na década de 50, ver [120]) e desenvolvido em paralelo no leste europeu, o controle por *sistemas de estrutura variável*, que veio a se tornar um dos ramos do atual paradigma do controle robusto. A fusão dessas correntes parece tornar-se definitiva a partir do trabalho [14].

Muito mais tarde, ao final da década de 80, os métodos de Lyapunov foram novamente aproveitados de forma independente para síntese de controladores<sup>13</sup>. Foi formulada a definição da *estabilidade quadrática* (e posteriormente da *estabilidade robusta*) de sistemas incertos, baseada em funções de Lyapunov. A origem dessa abordagem parece ser um artigo publicado em língua russa em 1978 [76]. Alguns anos depois, as mesmas idéias reaparecem (sem referência ao trabalho pioneiro) em publicações ocidentais [50, 8]. Um desenvolvimento decisivo foi apresentado em [40], com a proposição do problema de estabilização enquanto um problema convexo de otimização<sup>14</sup>. Isso gerou toda uma família de métodos que foram incorporados, a princípio desajeitadamente, a outro ramo do atual paradigma do controle robusto, o ramo da robustez “small gain” (o qual descende de técnicas de estabilização entrada-saída). Para um exemplo de tal fusão, ver [88].

Epistemologicamente, os métodos de Lyapunov são descendentes diretos da concepção de uma natureza dotada de objetos com mecanismos internos acessíveis. É interessante ver, no entanto, que ao permitir a acomodação de incertezas em sistemas, acabam induzindo em algumas instâncias a associação desses sistemas (em princípio conhecidos) a blocos do tipo caixa-preta. Delineia-se um modelo epistemológico do tipo caixa-cinzenta, como uma modificação da caixa com mecanismo visível.

<sup>13</sup>A principal diferença em relação à abordagem anteriormente descrita é o fato de, neste caso, empregar-se a fórmula da função de Lyapunov restrita ao caso linear.

<sup>14</sup>O significado dessa formulação extrapola o contexto do problema específico de estabilização em que a mesma se originou. A convexidade do problema garante a possibilidade de solução de maneira determinística (com certeza de determinação da solução ótima, caso tal solução exista) e eficiente. Algum tempo após a publicação de tal trabalho, tornou-se um procedimento padrão dentro da teoria de controle a tentativa de formular todos os problemas de síntese em termos de problemas convexos.

Trabalhos independentes da metodologia de Lyapunov (porém conexos com essa metodologia) foram desenvolvidos, no final da década de 50 e ao longo da década de 60, tendo por objetivo precisamente fazer a associação de um sistema com parâmetros conhecidos, descrito no espaço de estados, com outro sistema desconhecido, sobre o qual se conhecem apenas algumas propriedades de entrada-saída. O problema geral abordado sob esse ponto de vista ficou conhecido como *problema Lur'e*, ou *problema de estabilidade absoluta*.

Têm grande relevância, enquanto fundamento para a teoria da estabilidade atualmente estudada:

- o *lema de Kalman-Yacubovitch* (definindo os sistemas *estritamente positivos reais*, ou SPR);
- o *teorema da passividade*, que resolve o problema Lur'e para sistemas SPR associados a caixas-pretas de determinadas características;
- o *critério do círculo*, que resolve problemas Lur'e para sistemas com incertezas confinadas a *setores*;
- o *critério de Popov*, que também trata problemas Lur'e em sistemas *autônomos* via métodos de *multiplicadores*.

Para uma explanação sobre tais desenvolvimentos, ver [122]. Tais trabalhos pressupunham todos, de maneira explícita, a conexão de um sistema cujo mecanismo interno é visível com outro sistema do tipo caixa-preta. O modelo da *caixa-cinza* torna-se, dentro dessa linha, a natureza específica do objeto de trabalho.

Esses trabalhos têm importantes desdobramentos, cuja descrição não será no entanto tentada aqui. Para citar alguns exemplos, a estabilidade absoluta serve de fundamento para a teoria do controle adaptativo por modelo de referência, enquanto o critério da passividade tem servido de ferramenta geral para o controle de sistemas não-lineares, incluindo sistemas a parâmetros distribuídos.

### Fundamentos da Estabilidade II: Métodos Entrada-Saída

O estudo da estabilidade sob o ponto de vista de modelos do tipo entrada-saída possui origens bastante mais recentes que para o caso de modelos de espaço de estados. Esse estudo é inaugurado em meados da década de 60, já em pleno processo de transição do paradigma do controle clássico para o paradigma do controle robusto. George Zames, autor dos principais trabalhos dentro do campo [132, 133, 137], relata dessa forma sua motivação para o desenvolvimento de tais resultados:

*“Then, in 1963, Roger Brockett came to MIT. He had been working on state space stability. He described progress in that field and challenged the author to produce analogous stability results without using the state concept.”*

Essa citação é retirada de um trabalho recente [136], cujo tema é a história da teoria da estabilidade e robustez em modelos entrada-saída.

O trabalho de Zames [132, 133, 137] em muito se aproxima dos resultados descritos anteriormente, associados ao problema da estabilidade absoluta; no entanto, os métodos de espaço de estados e de entrada-saída ainda hoje não podem ser considerados inteiramente equivalentes [122]. *Este é um fato fundamental associado aos dois tipos de modelos de*

*sistemas*, segundo Zames [136]. O argumento de Zames para explicar a irredutibilidade das duas abordagens tem conseqüências profundas para a estrutura epistemológica da teoria de controle, sendo central para a análise desenvolvida no presente capítulo:

**Proposição 1.1** *Os modelos de sistemas estabelecidos segundo o formalismo entrada-saída não são redutíveis a modelos dentro do formalismo espaço de estados, e vice-versa.*

**DEMONSTRAÇÃO:** Essa irredutibilidade decorre do fato de que a aproximação de uma vizinhança em uma descrição do tipo entrada-saída pode ser arbitrariamente (ou infinitamente) difícil em um modelo espaço de estados, e vice-versa. ■

Os resultados de Zames [132, 133, 137], por diversas razões (aí incluídas sofisticação matemática e complexidade computacional) apenas muito recentemente vieram a dar origem a técnicas de síntese de controladores [38]. Entretanto, tais trabalhos tiveram grande repercussão enquanto fonte de fundamentação teórica para a teoria de controle, inicialmente em sua vertente baseada em modelos entrada-saída (o antigo controle clássico). Esses trabalhos (precedidos de alguns outros do mesmo autor) introduziram a utilização de métodos da teoria dos operadores (análise funcional) dentro da teoria de controle. De particular importância para o desenvolvimento futuro da teoria, seria o trabalho<sup>15</sup> [131], no qual foi enunciado o *teorema do ganho pequeno* (“small gain theorem”).

É muito sutil a inflexão que se operou, nesse ponto, no modelo epistemológico pressuposto pela teoria de controle em questão. A formulação acima apresentada da necessidade do emprego tanto do modelo entrada-saída quanto do modelo espaço de estados, em uma complementaridade estrutural na descrição dos sistemas físicos, tem como implicação lógica uma epistemologia da caixa-cinzenta (ou seja, da conexão de caixas cujo mecanismo é visível com caixas-pretas). Tal epistemologia deixa de ser um modelo a ser empregado provisoriamente até que se disponha de meios para a abertura de todas as caixas-pretas; a natureza do conhecimento que pode ser obtido a respeito de sistemas passa a ser fundamentalmente descrita dessa forma. Não há nenhuma evidência de que algum pesquisador estivesse consciente dessas implicações, à época, nem mesmo Zames.

## 1.4 Paradigma Emergente: O Controle Robusto

A teoria de controle ingressou na década de 80 em plena crise de paradigma. Já foi relatado acima o surgimento de uma incomensurabilidade entre a teoria de controle moderno e a linha teórica que prosseguiu dentro da tradição do controle clássico. Fazia-se necessária uma teoria que, a um só tempo, abrangesse de maneira conceitual uma ampla classe de problemas, mas também incorporasse como parte intrínseca desses problemas a existência de alguma incerteza sobre o sistema.

A progressiva consciência dessa anomalia no paradigma dominante, à parte tentativas recorrentes para a restauração do paradigma clássico, levou a teoria de controle moderno a tentar incorporar os desenvolvimentos obtidos nas diversas linhas de trabalho direcionadas para o estudo de estabilidade de sistemas. Essa tentativa era mais ou menos óbvia, uma vez que tais linhas de trabalho lidavam explicitamente com sistemas a parâmetros incertos,

<sup>15</sup>O presente autor não teve acesso a tal trabalho.

modelando a incerteza de diversas formas. Como já se viu acima, as linhas de pesquisa sobre estabilidade lançaram bases epistemológicas cuja fórmula delineava a resolução da anomalia existente, com a incorporação de uma *epistemologia da incerteza*.

No atual estágio da teoria de controle, não se pode afirmar com certeza que exista hoje um paradigma dominante já completamente formado, com um núcleo comum de técnicas, métodos e um repertório comum de problemas típicos. Houve uma certa proliferação de métodos e técnicas distintos, que seguiram tradições independentes dentro da teoria de controle, ao longo dos anos 70 e 80, no bojo da instabilidade paradigmática que foi crescendo naquele período. Podem-se no entanto hoje identificar alguns pontos focais para os quais têm convergido essas tradições distintas, e que possivelmente compõem o quadro de um paradigma em formação, o *controle robusto*:

- a axiomatização da teoria nos termos da *abordagem geométrica* e da *análise funcional* (espaços normados e teoria de operadores);
- a aplicação de técnicas de otimização de desempenho (com a tentativa sistemática da obtenção de formulações *convezas*);
- a explicitação das incertezas a que se encontra sujeito o processo de modelagem do sistema, associada à utilização de técnicas para minimizar e/ou eliminar os efeitos dessas incertezas.

Essas são características comuns de tradições teóricas bastante distintas, ainda hoje não unificadas em termos de um conjunto de princípios mínimo e coerente. O “Symposium on Robust Control Design” do IFAC (International Federation of Automatic Control) foi realizado pela primeira vez<sup>16</sup> em 1994, e novamente em 1997. Examinando os anais desses simpósios, pode-se perceber a existência de duas vertentes principais que reivindicam a denominação de *controle robusto*: o controle  $\mathcal{H}_\infty$  e métodos correlatos, e o controle por *sistemas de estrutura variável*. Além dos dois grupos, um terceiro grupo de métodos mais difusamente delineado (no que diz respeito à pertinência a um núcleo comum de métodos e técnicas) ainda se situa na família do controle robusto: os métodos de *incerteza pertencente a conjuntos limitados* (ou métodos de “bounded set”).

#### 1.4.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ e Métodos Correlatos

Em 1976, Zames apresenta uma conferência que posteriormente é publicada em forma de artigo [134], na qual sustenta pela primeira vez a possibilidade do projeto de sistemas com desempenho robusto descrito em termos da minimização de uma função de sensibilidade em uma norma de operador (ponderada), tal como a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Tal trabalho apresentava apenas a estrutura teórico-conceitual de mecanismos de projeto para os quais não se possuía, naquele momento, nenhum ferramental que viabilizasse sua execução computacional. O objetivo principal de tal trabalho (ver [136]) era refutar conjecturas formuladas à época, que enunciavam a impossibilidade matemática da redução da sensibilidade dos sistemas dinâmicos em geral (a consequência de serem válidas tais conjecturas teria sido a necessidade do retorno à “metodologia assistemática” do controle clássico para se lidar com o problema do tratamento da sensibilidade de sistemas).

<sup>16</sup> Em 1991 havia sido realizado um “Workshop on Robust Control Design”, também promovido pelo IFAC.

Em associação com o matemático B. Helton, Zames partiu de resultados (então largamente desconhecidos, tanto na engenharia de controle quanto na própria matemática) obtidos na década de 20 pelos também matemáticos Nevanlinna e Pick, dentro da teoria da interpolação. Zames e Helton obtiveram uma generalização da teoria de Nevanlinna e Pick que permitiu a formulação do problema de minimização de sensibilidade, divisando-se a existência de soluções explícitas e possivelmente em fórmula fechada. Estava aberto o caminho para uma teoria da otimização da robustez, que veio a ser conhecida como a *teoria do controle*  $\mathcal{H}_\infty$ . Essa teoria foi exposta no artigo [135], que rapidamente se tornou um dos trabalhos de maior impacto dentro da teoria de controle em todos os tempos.

O trabalho de Zames foi todo desenvolvido no contexto de modelos entrada-saída. Nesse contexto, ele obteve soluções conceituais para os problemas, as quais eram no entanto de elevada complexidade computacional. A busca por ferramentas utilizáveis para o projeto de controladores concentrou os esforços de grande número de pesquisadores no início da década de 80. Gradualmente, foi sendo reintroduzida a formulação em termos de espaço de estados dentro dos trabalhos desses pesquisadores. Os trabalhos [32] e [33] são marcados por uma formulação híbrida, e pelo desenvolvimento de um ferramental de projeto já operacional, no entanto ainda rudimentar, de difícil aplicabilidade. A continuidade do esforço de pesquisa acabou resultando na tradução de toda a metodologia  $\mathcal{H}_\infty$  para o campo dos modelos do tipo espaço de estados, o que é sintetizado em outro trabalho que se tornou pedra angular da teoria a partir de então, publicado por Doyle *et al.* [26]. Esse trabalho estabelece a conexão entre o controle  $\mathcal{H}_\infty$  e o controle LQG (rebatizado controle  $\mathcal{H}_2$ ). A solução do problema  $\mathcal{H}_\infty$  é apresentada em termos de soluções de equações de Riccati modificadas, com uma formulação cuja estrutura muito se aproxima da solução clássica do problema LQG. Com isso, tornou-se disponível o ferramental computacional necessário para o projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$ , agora baseado em modelos do tipo espaço de estados.

No livro [140] Zhou *et al.* denominam, de maneira bem-humorada, o novo paradigma emergente (no caso, o paradigma associado ao controle  $\mathcal{H}_\infty$ ) de “pós-moderno” e ao mesmo tempo chamam de “monstro” o próprio tema do livro: a teoria resultante do controle  $\mathcal{H}_\infty$  no espaço de estados (esse livro fornece uma exposição abrangente da teoria do controle  $\mathcal{H}_\infty$  sob uma perspectiva atual).

É importante citar o desenvolvimento, durante a década de 80, da chamada *síntese*  $\mu$  [82], que consiste em um conjunto de técnicas *ad hoc* (embora com rigoroso fundamento matemático) cujo objetivo é o de reduzir a conservatividade no projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  diante de sistemas dinâmicos com incertezas dotadas de estrutura. A questão do tratamento das incertezas de modelo é hoje central na teoria de controle, e sua completa sistematização talvez seja um dos principais pontos programáticos do paradigma hoje emergente.

A incerteza postulada pela teoria de controle  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser definida como a incerteza do tipo *limitada em norma*. Tal tipo de incerteza possui como características principais:

- a incerteza não está confinada (ao menos não necessariamente) a determinadas direções do espaço de estados;
- a incerteza também não está sequer confinada ao próprio espaço de parâmetros do sistema, podendo estar presente em dimensões não cobertas por tal espaço;
- essa incerteza pode ser compreendida como uma vizinhança do sistema, visto como um operador, num espaço de operadores.

### 1.4.2 Controle por Sistemas de Estrutura Variável

Na antiga União Soviética, ainda na década de 50, iniciou-se o desenvolvimento de uma abordagem para a teoria de controle que ficaria desconhecida no ocidente até o final da década de 70: o controle por *sistemas de estrutura variável* (SEV). A história desse desenvolvimento é relatada no artigo [120]. A difusão dessa corrente de pensamento no ocidente se inicia com a publicação do trabalho [118], em língua inglesa, pelo pesquisador russo V. Utkin.

Contrariamente à tradição ocidental, essa abordagem utiliza controladores não-lineares como ponto de partida, e destina-se explicitamente ao tratamento de incertezas do sistema.

Inicialmente, o vínculo com a teoria clássica de controle representou uma dificuldade para a obtenção de resultados mais poderosos dentro da abordagem SEV. A necessidade de utilizar apenas entradas e saídas e suas derivadas impunha limitações ao alcance da teoria. Com a incorporação, durante a década de 60, do formalismo da teoria de controle moderno, foi possível desenvolver técnicas bastante gerais que, de maneira flexível, permitiam lidar com sistemas multivariáveis (MIMO) sujeitos a classes bastante amplas de incertezas [119, 120].

Durante as décadas de 70 e 80, com sua difusão no ocidente, a abordagem SEV acabou encontrando áreas fronteiriças com as quais possuía grande similaridade de métodos e de fundamentos, o que permitiu uma maior consolidação do campo. É importante citar a teoria dos *sistemas singularmente perturbados*; o controle por *ganhos elevados* (“high gains”) [129] e o *controle min-max* (ou *controle determinístico de sistemas incertos*) [45, 69]. Posteriormente, surgiu ainda a teoria do *quase-desacoplamento de perturbações* (“almost disturbance decoupling”), vinculada à *abordagem geométrica* [125], que forneceu uma base importante para a axiomatização matemática do campo.

A teoria dos SEV sempre teve vinculação explícita com o problema da rejeição de perturbações. Seu fundamento matemático tem sido, desde a migração para o quadro da teoria de controle moderno, a estabilização de sistemas via modelos de espaço de estados, em particular por critérios de Lyapunov. O tipo de perturbação particular para o qual os SEV se adequam possui como características:

- as perturbações devem estar confinadas a determinados subespaços do espaço de estados (as direções “matching”);
- as perturbações devem ser limitadas, não sendo necessária nenhuma outra hipótese sobre as mesmas;
- uma vez satisfeitas as condições de “matching” e de limitação das perturbações, estas são *quase-rejeitadas* pelo controlador SEV, o qual oferece uma propriedade de *quase-invariância* que é mais forte que uma simples *robustez*.

### 1.4.3 Controle com Perturbações Paramétricas Limitadas a Conjuntos

Um grupo grande de resultados que não se enquadram em nenhuma das duas vertentes acima pode ser classificado em um terceiro tipo de técnicas de controle robusto. Tais resultados, embora teoricamente menos coesos que os grupos anteriores quando vistos em conjunto, possuem a característica de modelar a incerteza dos sistemas em termos de faixas de variação de parâmetros (ou de conjuntos de parâmetros possíveis). Não há, em geral, a necessidade de restringir a incerteza a determinados subespaços do espaço de estados; nem

há, porém, a possibilidade de capturar, com essa representação, perturbações que caiam fora do espaço de parâmetros assumido para o sistema.

Nessa classe podem ser incluídos (sem a intenção de esgotar a lista): os métodos baseados na estabilidade de Kharitonov [63]; o trabalho de Bhattacharyya [18]; os métodos de estabilidade quadrática e estabilidade robusta, baseados em funções de Lyapunov (ver por exemplo [41]); o trabalho recente de Ackermann [2].

## 1.5 Quadro Epistemológico Geral

No presente, apesar de se delinear o surgimento de um novo paradigma da teoria de controle, o *controle robusto*, ainda existe um quadro de certa indefinição. Parece definitivamente incorporada à teoria de controle a noção de que as incertezas são parte constituinte, inextrinsecavelmente, dos sistemas a serem controlados. A questão passa a ser a de como representar tais incertezas, de maneira a utilizar todo o conhecimento que for possível extrair do sistema em dadas circunstâncias, e como combinar de maneira significativa as parcelas conhecidas do sistema com a informação que for possível obter das parcelas desconhecidas, de maneira a levar o sistema em malha fechada resultante a seus limites de desempenho possíveis de serem atingidos, gerenciando-se ao mesmo tempo o risco associado às incertezas para que permaneça abaixo de patamares aceitáveis.

Um conjunto de teorias ainda incomensuráveis (principalmente devido ao seu desenvolvimento teórico independente e até mesmo geograficamente disperso durante longo período) procura lidar com tais questões. Um desafio que se coloca para a teoria de controle hoje é o de encontrar bases comuns que permitam:

- determinar os fundamentos dos quais derivam todas essas teorias, em termos de um reduzido número de princípios gerais;
- reformular todas essas teorias em termos desses princípios gerais unificados, de maneira que todas se tornem variações de uma única teoria-protótipo;
- a partir dessa unificação, desenvolver métodos sistemáticos para avaliar a adequação a cada caso de um controlador robusto específico derivado daquela família geral.

Há também ainda um esforço por fazer, para elucidação das bases epistemológicas que deveriam estar associadas ao desenvolvimento desse novo paradigma da teoria de controle. As questões que se colocam em uma primeira análise seriam:

- fundamentar logicamente e matematicamente a necessidade da teoria da caixa-cinzen-ta, a qual aparentemente encontra-se bem estabelecida “empiricamente”;
- elucidar o próprio conceito de *dado empírico* sobre o qual se constrói a teoria de controle, visando o estabelecimento de critérios adequados para *corroboração* e *refutação* de hipóteses dentro da teoria de controle;
- coordenar os dados epistemológicos acima com a epistemologia geral, aplicada ao conjunto do edifício científico (buscando a coesão e coerência do conjunto do saber humano).

A questão epistemológica não se situa dentro do escopo que foi delimitado para o presente trabalho, de forma que não haverá uma discussão mais sistemática e rigorosa do assunto aqui. É importante entretanto explicitar as premissas filosóficas que perpassam todo este trabalho, e que coordenam todas as opções que foram tomadas de forma e conteúdo. Num nível bastante geral, o presente autor apresenta como conjecturas:

1. A maioria das chamadas *ciências naturais* possui objetos de estudo de *primeira ordem*, ou seja, mecanismos e processos com uma natureza específica. Essas ciências têm por missão o desvendamento detalhado desses mecanismos e processos. As fronteiras do trabalho de detalhamento da natureza, nesses casos, podem ser dadas pelos mecanismos de nível hierárquico inferior, superior ou colateral, objetos de campos científicos vizinhos. Podem ainda ser objetos *provisoriamente* desconhecidos, pertencentes ou ao próprio campo ou a campos vizinhos, que afetam os fenômenos estudados mas cuja natureza não se conhece, sendo portanto modelados como caixas-pretas<sup>17</sup>, ao menos conceitualmente. O problema-protótipo nessas ciências poderia ser enunciado como: “dada uma situação de disponibilidade de informação a respeito de determinada classe de fenômenos, obter mais informação, organizando-a em estruturas de mínima entropia”.
2. A teoria de controle possui objetos de estudo de *segunda ordem*, que são mecanismos genéricos tomados em condições de disponibilidade de informação genéricas. Como em algumas outras teorias da família da *ciência dos sistemas*, o fenômeno sob foco é um conjunto de propriedades emergentes, que passam a existir precisamente a partir da conexão de partes diversas em padrões de crescente complexidade. É irrelevante, nessa família de teorias, a natureza das partes componentes do sistema.
3. Na teoria de controle, procura-se determinar os limites da possibilidade de intervir em um sistema tendo em vista um objetivo específico, sendo um dado do problema (e não o alvo do problema) o padrão de informação disponível. Diferentemente do problema científico usualmente colocado, o problema-protótipo da teoria de controle pode ser enunciado como: “dada uma estrutura matematicamente descrita (sem uma natureza específica subjacente) associada a determinado padrão de disponibilidade de informação, determinar um conjunto (o mais amplo possível) de propriedades que se pode impor ao sistema através de leis de intervenção (ações de controle) que façam uso apenas da informação disponível, especificando ainda a lei de intervenção associada a cada elemento do conjunto de propriedades possíveis de serem obtidas”. Em outras palavras, os casos de mínima informação sobre o sistema (sistemas caixa-preta) ou de máxima informação (sistemas com mecanismo visível) são apenas dois casos extremos, particulares, de problemas que podem ser tratados pela teoria de controle. Uma teoria de controle mais geral (mais madura) deveria tratar de todo o espectro de problemas situado entre esses extremos, de forma a esgotar o conjunto de objetos de interesse. Dentro da teoria de controle, faz parte da natureza desses objetos o padrão de disponibilidade de informação a seu respeito.
4. Pode-se especular a respeito de um possível papel das *ciências dos sistemas* (que incluem a teoria de controle), para a articulação das demais ciências na teia científica

---

<sup>17</sup>Notar que isso não é equivalente à eliminação das incertezas na descrição da natureza.

total. Esse papel cresce na medida em que se desenvolvem ferramentas sistemáticas para a incorporação de incertezas no estudo de mecanismos (genéricos). Isso está de acordo com paradigmas científicos emergentes num âmbito geral, os quais vêm refutando a possibilidade de um estudo da natureza em bases inteiramente determinísticas, reservando dessa forma um lugar permanente para a incerteza na descrição do universo.

Os itens acima poderiam servir de base para um *manifesto programático* do paradigma emergente do *controle robusto*, sob a interpretação dada pelo presente autor. A formalização dessa discussão não será feita aqui. O esforço teórico empreendido especificamente neste trabalho pode ser enunciado, dentro desses marcos epistemológicos, da seguinte forma:

Procurar uma teoria de *mínima dimensão* (*mínima entropia*) capaz de incorporar diferentes classes de incertezas (com suas respectivas classes de robustez resultantes) atualmente conhecidas, articulando na forma de uma única família diversas teorias atualmente empregadas de maneira disjunta no tratamento de cada classe. Idealmente, uma única teoria com tais características deveria poder ser particularizada de maneira a resultar em cada uma das diversas teorias atualmente existentes. A combinação dessas teorias atuais deixaria assim de ser uma prática *ad hoc*, tornando-se a mera aplicação de uma teoria geral a uma situação específica.

Por fim, como conseqüência de toda a análise acima efetivada, deve-se notar que ao lado do problema epistemológico, de determinação das metodologias adequadas para tratamento dos problemas na teoria de controle, coloca-se um problema que, em última análise, é inseparável do primeiro: o problema ontológico, de análise de uma suposta essência dos objetos a serem estudados pela teoria de controle. Essa questão ontológica inserida dentro da discussão epistemológica é o centro de debates que estão sendo travados no momento em que a presente tese está sendo escrita, dentro do campo da filosofia da ciência. Para uma discussão a tal respeito no âmbito da filosofia da física, ver [20].

O presente autor pensa que o caso específico da teoria de controle pode enriquecer o debate em curso, devido a algumas peculiaridades da área:

- A teoria de controle (assim como outras ciências da engenharia) trata, em sua instância de interface com a natureza, do problema geral de determinar a estrutura dos artefatos que *podem vir a ser* construídos.
- Portanto, diferentemente da matemática, a teoria de controle não deve ser apenas auto-consistente, tendo de obedecer a restrições de correspondência com objetos existentes ou passíveis de serem construídos no mundo físico.
- Diferentemente também da física, a teoria de controle não tem à sua disposição fenômenos “reais” cuja estrutura deva examinar. Seu objeto, mais similar ao da matemática, pode ser entendido em larga escala como de natureza conceitual, existindo a princípio apenas no campo das possibilidades.
- As chamadas *restrições de engenharia*, usualmente ignoradas (pelo menos enquanto princípio) nas ciências naturais, também definem em parte a natureza dos objetos estudados na teoria de controle. O número de objetos admitidos na teoria aumenta,

em ordens de grandeza, quando às restrições matemáticas e físicas se acrescentam restrições de operacionalidade, custo, confiabilidade, etc<sup>18</sup>. Exatamente pela natureza em princípio conceitual da teoria de controle, não surgem problemas de consistência para a incorporação (ou não incorporação) de tais restrições.

- Assim, a teoria mais abrangente, no campo da teoria de controle, será aquela que admitir a possibilidade de construção de sistemas em uma maior variedade de circunstâncias. Isso implica em uma ontologia do objeto da teoria de controle essencialmente multiforme. Não há, em suma, uma essência uniforme que define o formato do conhecimento que se deve supor para os sistemas a serem controlados, em geral. O que há é uma variedade de objetos por princípio conhecidos de maneiras distintas, todos os quais se deseja controlar. O objetivo específico da teoria de controle é o de determinar os limites de desempenho passíveis de serem atingidos, *dadas as circunstâncias que delimitam o objeto a ser controlado*.

Deve-se notar que a questão da natureza do objeto da teoria de controle, aqui comentada, passa ao largo da discussão da doutrina do *realismo científico* nas ciências naturais. Em outras palavras, o fato de um mesmo sistema físico, conhecido de duas formas diferentes, gerar dois objetos diferentes para a teoria de controle não tem nenhuma implicação no que se refere à ontologia desse sistema; em particular o fato de o sistema continuar sendo fisicamente o mesmo nos dois casos não fica abalado. Não há aqui, portanto, nenhuma intenção de se sugerir a extrapolação de conclusões a respeito da ontologia dos objetos da teoria de controle para a ontologia dos objetos da física (ou outra ciência natural), com base em uma analogia superficial com fenômenos de indeterminação ou de incerteza surgidos por exemplo na mecânica quântica<sup>19</sup>.

A questão filosófica relevante, aqui suscitada, se refere à adequação de uma estrutura teórica à natureza dos objetos de seu campo de interesse. O ponto em discussão é a passagem de uma epistemologia de caráter *normativo*, que prescreve modelos gerais para teorias científicas, para uma epistemologia de caráter *gerativo*, que se aplica ao desenvolvimento de teorias científicas num processo dinâmico de co-geração da *realidade*<sup>20</sup> que estas pretendem descrever.

## 1.6 Conclusão

O presente trabalho de tese se propõe a atingir objetivos bastante modestos, diante de tal quadro de demandas. Esses objetivos foram expostos no início deste capítulo. Este capítulo foi concebido para situar esses objetivos, contextualizando-os dentro da história da teoria de

---

<sup>18</sup>É interessante apontar a aparente contradição dessa afirmação: em geral, posto um problema, o acréscimo de restrições faz diminuir e não aumentar o número de soluções. A questão aqui é outra: dado um conjunto cujos elementos poderiam ser denominados *problemas irrestritos* e outro conjunto cujos elementos poderiam ser denominados *restrições de engenharia*, o conjunto dos *problemas* da teoria de controle poderia ser definido como o conjunto formado pelas combinações dos elementos dos dois primeiros conjuntos, incluindo ainda o próprio conjunto dos problemas irrestritos. Nesse sentido, a introdução das restrições amplia combinatorialmente a classe dos problemas abordados pela teoria.

<sup>19</sup>Para uma apresentação do debate acerca da realidade material das entidades previstas nas teorias físicas, em particular na mecânica quântica, ver [20].

<sup>20</sup>Realidade entendida neste contexto como o conjunto de entidades manipuladas pela teoria.

controle, bem como dentro de uma evolução dessa teoria, segundo linhas claramente identificáveis. A análise do significado epistemológico dos eventos progressos foi o fio condutor da detecção de uma lógica que é intrínseca à evolução da teoria de controle.

Deve-se notar que, não por coincidência, optou-se por abordar neste trabalho três tipos de incertezas:

- Será abordado o controle robusto de sistemas com incertezas limitadas em norma. Essas incertezas são o protótipo da incerteza associada aos métodos da família “small gains” (ou controle  $\mathcal{H}_\infty$ ).
- O presente trabalho também aborda os sistemas de estrutura variável (SEV), com sua respectiva modelagem de incertezas do tipo “matching”.
- Um protótipo da incerteza manipulada dentro dos métodos de *perturbações paramétricas limitadas a conjuntos* (“bounded sets”) é a incerteza do tipo *politopo*, a qual também será objeto de estudo dentro do presente trabalho.

O núcleo comum de articulação da teoria de controle nessas três vertentes é aqui um problema de otimização. Ao longo deste trabalho será mostrado que, dependendo de como for definido tal problema de otimização, irá emergir a robustez “small gain”, a robustez “matching”, a robustez “bounded set”, ou qualquer combinação dessas três.

Espera-se portanto que este trabalho cumpra o papel de contribuir para a consolidação do paradigma do *controle robusto*, menos enquanto uma extensão desse paradigma para além de suas fronteiras, e mais enquanto a proposição de um rearranjo interno da teoria, na busca de uma configuração de *mínima entropia* que coordene o conhecimento já existente, resignificando-o.

## Capítulo 2

# Problema de Regulação Ótima de Sistemas Dinâmicos Lineares

Neste capítulo é apresentado o problema de regulação ótima de sistemas dinâmicos, tema central deste trabalho. Define-se inicialmente a classe de sistemas dinâmicos a serem abordados e o problema de regulação ótima de tais sistemas. A seguir é apresentada a questão da possível singularidade de problemas de regulação ótima, sendo discutidas as conseqüências advindas de tal situação.

### 2.1 Sistema Dinâmico

Nesta seção, estabelece-se o sistema dinâmico que dará origem ao problema a ser estudado neste trabalho. Será assumido um sistema dinâmico linear, com parâmetros possivelmente incertos, assumindo-se como objetivo de controle a regulação da saída desse sistema de acordo com um determinado critério de custo.

Neste trabalho serão considerados sistemas dinâmicos com entrada de controle e saída controlada (SDECSCs), descritos por equações diferenciais ordinárias lineares com parâmetros constantes. A forma geral da equação do sistema aqui adotado é descrita no espaço de estados por:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ z(t) = Gx(t) + Fw(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

No sistema acima,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{v \times n}$  e  $F \in \mathbb{R}^{v \times q}$ .

Assume-se a respeito do sistema (2.1) que:

(H1) a matriz  $B$  possui posto completo de colunas;

(H2) o par  $(A, B)$  é estabilizável.

É importante ressaltar que não é assumida aqui nenhuma hipótese a respeito do posto matrizes  $D$  ou  $C$ .

Nesse sistema,  $x(t)$  é o vetor de estados,  $u(t)$  o vetor de entradas de controle e  $w(t)$  o vetor de perturbações exógenas. O vetor  $z(t)$  representa o conjunto de informações disponíveis para a síntese do controle, ou seja:

$$u(t) = g(z(t))$$

Sendo  $f : \mathcal{F}^m \mapsto \mathbb{R}$  uma função que mapeia o espaço dos sinais de  $m$  componentes na reta real, tem-se que  $y(t)$  representa o conjunto de sinais que compõem o funcional de custo  $J$  do problema de regulação ótima (a ser definido adiante):

$$J = f(y) ; \quad y \in \mathcal{F}^m$$

O sistema dinâmico acima descrito será estudado principalmente na forma particular:

- Realimentação completa de estados:  $G = \mathbf{I}$  e  $F = \mathbf{0}$ .

Também será abordada, em determinado momento, a forma particular:

- Problema com informação completa:  $\rho(F) = q$  e  $G'F = \mathbf{0}$ .

### 2.1.1 Incertezas de Modelo

As matrizes do sistema são em geral incertas, sendo tal incerteza modelada por:

$$(A, B, C, D, E, F, G) \in \mathcal{P} \tag{2.2}$$

Na equação (2.2) acima os valores dos parâmetros do sistema  $(A, B, C, D, E, F, G)$  são desconhecidos, mas o conjunto  $\mathcal{P}$  que contém esses valores é conhecido. Naturalmente, haverá casos particulares nos quais determinadas matrizes serão consideradas precisamente conhecidas, sendo as demais matrizes consideradas incertas. Deve-se notar que, na maior parte deste trabalho, será assumida a hipótese de que apenas as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $E$  são incertas, sendo precisamente conhecidas as matrizes de ponderação do problema ótimo,  $C$  e  $D$ , e as matrizes de aquisição de informação,  $F$  e  $G$ .

Ao longo deste trabalho, será livremente empregada a notação  $A \in \mathcal{P}$  para expressar “ $(A, B, C, D, E, F, G) \in \mathcal{P}$  para alguma sêxtupla  $(B, C, D, E, F, G)$ ”, sempre que tal simplificação não causar ambiguidade. O mesmo se aplica a todas as matrizes do sistema.

O conjunto  $\mathcal{P}$  ao qual pertencem os parâmetros do sistema dinâmico  $\Sigma$  irá assumir as seguintes formas particulares ao longo deste trabalho:

- $\mathcal{P}$  como um único ponto. Neste caso, o sistema é precisamente conhecido.
- $\mathcal{P}$  como um politopo convexo com número de vértices igual a  $\nu$ . Neste caso, os parâmetros do sistema satisfazem uma relação do tipo:

$$(A, B, C, D, E, F, G) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i (A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i) \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1 ; \quad \alpha_i \geq 0$$

- $\mathcal{P}$  como um conjunto limitado em norma. Os parâmetros do sistema devem neste caso satisfazer:

$$\begin{aligned}
 A &= A_o + W_A \Delta_A M_A \\
 B &= B_o + W_B \Delta_B N_B \\
 E &= E_o + W_E \Delta_E Q_E \\
 F &= F_o + Z_F \Delta_F N_F \\
 G &= G_o + Z_G \Delta_Z M_Z
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

sendo que os *parâmetros nominais* ( $A_o, B_o, E_o, F_o, G_o$ ) e as matrizes  $W_{(\cdot)}, M_{(\cdot)}, N_{(\cdot)}, Q_{(\cdot)}$  e  $Z_{(\cdot)}$  são conhecidos, enquanto as matrizes  $\Delta_{(\cdot)}$ , sendo desconhecidas, satisfazem:

$$\|\Delta_{(\cdot)}\|_{\infty} = \sigma_{\max}(\Delta_{(\cdot)}) \leq 1 \tag{2.5}$$

## 2.2 Problema de Regulação Ótima

Nesta seção é estabelecido o problema de minimização de determinada norma da saída  $y(t)$  do sistema  $\Sigma$ , dado que é conhecida a saída  $z(t)$  e que é possível sintetizar funções arbitrárias do tempo  $u(t)$ . O problema aqui definido é denominado *problema de regulação ótima* (problema RO), sendo formalizado em termos de um funcional custo de generalidade suficiente para enquadrar toda uma família de problemas de minimização de critérios de norma que serão abordados nos próximos capítulos. Em particular, serão explicitamente abordados os problemas de minimização das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_{\infty}$  de sistemas.

**Definição 2.1 (Problema RO)** *Sejam  $\Sigma$  um sistema dinâmico conforme definido em (2.1),  $\Omega$  uma classe de sinais no espaço  $\mathcal{F}^q$ , e  $\Xi(\Sigma, \Omega, x_o)$  o conjunto de soluções do sistema para tal classe de sinais de entrada. Seja ainda  $F(y)$  uma norma dos sinais  $y(t) \in \mathcal{F}^m$ . O problema de regulação ótima (problema RO) é definido como o problema de determinação de  $u^*(t)$  tal que:*

$$\begin{aligned}
 u^*(t) &= \arg \min_{u(t)} \sup_{w(t)} F(y) \\
 \text{s.a.:} & \begin{cases} u(t) = g(z(t)) \text{ para algum } g : \mathbb{R}^v \mapsto \mathbb{R}^p \\ w(t) \in \Omega \\ (y, u) \in \Xi(\Sigma, \Omega, x_o) \\ x(0) = x_o \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

□

## 2.3 Regulação Ótima em Norma $\mathcal{L}_p$

A família de funcionais  $F(y)$  especificada na definição do problema RO acima inclui as normas  $\mathcal{L}_p$ ,  $p \geq 1$ . Diversas classes importantes de problemas se enquadram na formulação do problema RO com esses funcionais, tais como:

- $\Omega$  contém um único elemento  $w(t)$ , e o funcional de custo  $F(y)$  corresponde a uma norma  $\mathcal{L}_p$  da saída  $y(t)$  para essa entrada específica.
- $\Omega$  é definido como o conjunto dos sinais  $w(t)$  que possuem determinada norma  $\mathcal{L}_p$  menor que 1 e o funcional  $F(y)$  é uma norma  $\mathcal{L}_q$  de  $y(t)$ . Nesse caso, trata-se de um problema de minimização de uma norma induzida.

O problema de minimização da norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência em malha fechada de  $w$  para  $y$  recai no caso de minimização da norma  $\mathcal{L}_2$  da saída para uma entrada específica, no caso a entrada impulsiva. Já o problema de minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  dessa mesma função de transferência recai na minimização de uma norma induzida de  $\mathcal{L}_2$  para  $\mathcal{L}_2$ . Uma discussão específica desses problemas será tema de um capítulo posterior.

Outros problemas que vêm sendo estudados recentemente e que também se enquadram na formulação do problema RO são: minimização da norma  $\mathcal{L}_\infty$  da saída dado um sinal específico de entrada (entrada impulsiva); minimização da norma  $\mathcal{L}_\infty$  da saída para sinais de entrada cuja norma  $\mathcal{L}_\infty$  é menor que 1. Tais problemas não serão especificamente abordados neste trabalho, embora os resultados gerais obtidos para o problema RO genérico sejam válidos para os mesmos.

## 2.4 Regulação Ótima: Regularidade e Singularidade

O problema de regulação ótima do sistema  $\Sigma$  recai em duas classes de problemas com características bastante distintas, dependendo do posto de colunas da matriz  $D$  ser completo ou não. Essa diferença estrutural entre os dois casos é devida ao fato de, no caso de posto completo, haver um custo associado à execução de qualquer ação de controle, enquanto no segundo caso ações de controle aplicadas em determinadas direções do espaço são livres de ponderação na função custo. Assim, no segundo caso é possível aplicar ações de controle em princípio ilimitadas nas direções “não ponderadas”. Para uma matriz  $C$  fixa, a norma da saída do sistema seria minimizada, no caso singular, até patamares que não seriam possíveis de atingir caso as ações de controle fossem completamente ponderadas.

Essa questão é exemplificada abaixo, para uma classe particular de problemas do tipo *controle barato* (“cheap control”), com sinais de perturbação no espaço imagem da matriz de entradas de controle.

EXEMPLO 2.1 Considere-se o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} w \\ y &= [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \epsilon Du \end{aligned} \tag{2.7}$$

Assuma-se que  $B$  é uma matriz quadrada não-singular. Nesse caso, tem-se que  $\mathcal{R}(E) \subset \mathcal{R}(B)$ . Assuma-se também que a matriz  $D$  possui posto completo de colunas. A ponderação das entradas de controle na saída do sistema depende, portanto, do parâmetro  $\epsilon$ .

Considere-se então o problema de projeto do controlador com estrutura de realimentação completa de estados:

$$u = Kx \quad (2.8)$$

com um critério de otimalidade do tipo norma  $\mathcal{L}_p$  de  $y$ , dada uma classe de sinais  $w$  e uma condição inicial nula ( $x_0 = 0$ ).

Impõe-se uma estrutura de controlador parametrizada por  $\epsilon$ :

$$u = \frac{1}{\epsilon} [ K_1 \quad K_2 ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Impõe-se ainda, como hipótese adicional, a ortogonalidade entre a imagem de  $B$  e o espaço nulo de  $K$ :

$$\rho(BK_2) = \rho(B) \quad (2.10)$$

Nesse caso:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + \frac{1}{\epsilon}BK_1 & A_{22} + \frac{1}{\epsilon}BK_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} w \quad (2.11)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ \epsilon\dot{x}_2 &= (\epsilon A_{21} + BK_1)x_1 + (\epsilon A_{22} + BK_2)x_2 + \epsilon Ew \end{aligned} \quad (2.12)$$

Estudando agora o caso singular, ou seja,  $\epsilon \rightarrow 0$ , observa-se que o controlador parametrizado na forma (2.9) assume uma estrutura do tipo *ganhos elevados* ("high gains"). A malha fechada tende, no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$ , para:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ 0 &= BK_1x_1 + BK_2x_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Como por hipótese  $B$  e  $BK_2$  são quadradas e não-singulares, tem-se:

$$0 = K_1x_1 + K_2x_2 \quad \therefore x_2 = K_2^{-1}K_1x_1 \quad (2.14)$$

ou seja, a relação entre  $x_1$  e  $x_2$  torna-se algébrica. A dinâmica em malha fechada passa a ser descrita por:

$$\dot{x}_1 = (A_{11} + A_{12}K_2^{-1}K_1)x_1 \quad (2.15)$$

O sistema passa a apresentar, portanto, uma dinâmica de ordem reduzida, em que a entrada de perturbação  $w$  tem seu efeito cancelado. Tal efeito de cancelamento está diretamente relacionado à estrutura de ganhos elevados e não se verificaria, em geral, para  $K$  finito (pode ocorrer, em alguns casos, a possibilidade de desacoplamento total de perturbações com ganhos finitos).

Logo, a estrutura de ganhos elevados mostrada acima sempre conduz ao controlador ótimo, qualquer que seja a norma sendo otimizada, para sistemas da classe que foi considerada.  $\diamond$

O próximo capítulo é dedicado à apresentação dos resultados já publicados na literatura, relacionados com o caso singular (ou seja,  $D'D \neq 0$ ) de problemas de regulação ótima em norma  $\mathcal{L}_p$ .

Será visto o quanto o problema geral definido neste capítulo difere, e o quanto se aproxima de tradições de pesquisa existentes.



## Capítulo 3

# Controle Ótimo Singular: Quadro Teórico Atual

Este capítulo faz uma apresentação do estágio atual do conhecimento sobre o tópico específico do *controle ótimo singular*. Essa discussão é importante porque delimita exatamente o campo no qual será desenvolvido o presente trabalho de tese. Conforme discutido no capítulo 2, o eixo do presente trabalho é a formulação de um problema de controle ótimo singular que, abordado de maneira conveniente, dará origem a controladores com diversas propriedades interessantes de robustez, nisso permitindo o estabelecimento de bases teóricas comuns para uma variedade de técnicas de controle robusto hoje vagamente conectadas. Este capítulo apresenta um panorama do conhecimento disponível sobre casos particulares, já estudados, do problema de controle ótimo singular aqui formulado e das soluções hoje existentes para tal problema.

É feita a apresentação dos resultados que são correlacionados com aqueles que serão aqui obtidos. Procura-se aqui, na medida das possibilidades deste autor, citar de maneira completa a literatura existente, organizando-a e colocando-a em perspectiva. O objetivo nesta etapa será o de delimitar o estágio atual do conhecimento no que se refere aos aspectos específicos abordados, procurando identificar brevemente as lacunas que serão exploradas no presente trabalho.

Convém esclarecer que o presente capítulo, estando situado na parte introdutória desta tese, cumpre o papel de revisar apenas a bibliografia correlata com o problema básico tratado neste trabalho, qual seja, o controle ótimo singular. Os diversos desdobramentos desse problema não são tratados neste capítulo. Isso é feito para obter uma maior legibilidade do texto, sendo que as questões relativas a alguns desdobramentos serão apresentadas posteriormente, à medida em que sua revisão se fizer necessária.

### 3.1 Controle Ótimo: Regularidade e Singularidade

Não será feita aqui uma tentativa de resumir todo o desenvolvimento da teoria de controle ótimo de sistemas dinâmicos. O leitor interessado nos fundamentos gerais do controle ótimo, desenvolvidos a partir do cálculo variacional, é remetido às referências [72, 71].

A *regularidade* de uma lei de controle é definida como a propriedade dos sinais de controle associados a tal lei serem estritamente limitados (ou seja, pertencentes ao espaço  $\mathcal{L}_\infty$ ) [21].

De maneira genérica, considere-se então o sistema dinâmico:

$$\dot{x} = f(x, t, u, d) \quad (3.1)$$

Considere-se ainda o seguinte funcional (chamado *funcional de custo*):

$$J = \int_a^b L(x) dt \quad (3.2)$$

A lei de controle  $u^*(t)$  é dita ser ótima se:

$$u^* = \min_u J \quad (3.3)$$

sob a restrição da equação dinâmica (3.1). Se:

$$|u^*(t)| < \infty \quad \forall t \in [a, b] \quad (3.4)$$

então o controle ótimo  $u^*(t)$  é dito ser *regular*.

Nos métodos de projeto de controladores ótimos mais usuais, adota-se como procedimento padrão para a obtenção de leis de controle regulares a adição ao funcional de custo (o qual deve ser minimizado pela lei de controle) de um termo de penalização da ação de controle. Nesse caso, redefine-se o funcional de custo como:

$$J = \int_a^b (L(x) + M(u)) dt \quad (3.5)$$

sendo válida a hipótese (R1):

**(R1)**  $M(\cdot)$  é uma função convexa estritamente definida positiva para valores não-nulos do argumento.

Esse tipo de procedimento na maioria dos casos conduz efetivamente à síntese de leis de controle regulares, embora não haja garantia de que tal efeito de regularização ocorra [21].

O controle de sistemas dinâmicos com a otimização da norma  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada vem sendo largamente empregado como sistemática de síntese de controladores para sistemas lineares multivariáveis [4, 140]. Para ambas as normas, os métodos de projeto do controlador ótimo foram originalmente desenvolvidos supondo uma regularização do tipo descrito pela equação (3.5) e uma hipótese do tipo (R1). Essa hipótese é necessária para a regularidade da lei de controle ótima resultante, em ambos os casos, embora não seja suficiente no caso de otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  [98].

No presente trabalho é suposto um sistema dinâmico linear, com parâmetros possivelmente incertos, sendo que se deseja otimizar uma norma do sistema (possivelmente uma norma  $\mathcal{H}_p$  genérica). Não se supõe no entanto uma hipótese como (R1), o que implica em que o problema de controle ótimo é possivelmente singular. Nos capítulos que se seguem, é apresentado um procedimento geral para a decomposição do problema de otimização possivelmente singular de tal maneira que sua solução seja dada em termos da solução de um problema de ordem reduzida no qual é válida uma hipótese do tipo (R1), acrescida de leis precisas para a passagem dessa solução regular de ordem reduzida para uma solução completa possivelmente contendo sinais pertencentes ao conjunto das *distribuições*<sup>1</sup>. A solução completa do problema, portanto, passa a depender apenas da disponibilidade de maquinário adequado para resolver o problema de ordem reduzida, no qual é válida uma hipótese do tipo (R1).

<sup>1</sup>Ou seja, sinais que possivelmente contêm a função impulso mais suas derivadas e integrais.

## 3.2 Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$

Um dos problemas típicos abordados pela teoria de controle moderno no início de seu desenvolvimento foi o controle linear quadrático. O controle linear quadrático em sua versão estocástica e com função custo regular deu origem ao paradigma do controle LQG (linear quadrático gaussiano) — uma das técnicas mais populares de síntese de controladores hoje disponíveis, que se tornou uma espécie de “padrão” para o projeto de sistemas multivariáveis. As referências [124] e [5] (respectivamente tratando do controle LQ e LQG) foram publicadas no período em que estava se consolidando a teoria do controle linear quadrático, sendo ambas apresentações extensas e em profundidade do assunto, tendo exercido influência sobre trabalhos posteriores.

Pela primeira vez na teoria de controle foi possível, com a metodologia LQG, partir do modelo do sistema e de seus sinais de perturbação e obter de maneira inteiramente algorítmica um controlador (estático ou baseado em observador, mas sempre de ordem menor ou igual à do sistema controlado) com propriedades de desempenho em malha fechada de alta qualidade, sem depender em princípio de procedimentos de ajuste *ad-hoc*. Dentre as características que se esperam obter do controle LQG, em condições adequadas de projeto, podem ser enumeradas as propriedades de margens de ganho e de fase usualmente “seguras” (no caso de parâmetros precisamente conhecidos), e ainda uma certa tolerância à presença de atrasos puros de tempo. Além disso, sua interpretação em termos de minimização de custos de energia freqüentemente é significativa. A referência [4] faz uma apresentação didática e detalhada, sob um ponto de vista moderno, tanto do projeto de controladores lineares quadráticos quanto da análise de suas propriedades.

Recentemente, tal técnica de projeto veio a ser reinterpretada, em termos da minimização da norma  $\mathcal{H}_2$  de determinada função de transferência associada ao sistema dinâmico e à função objetivo. Conceitualmente, isso implica em não mais considerar o problema-protótipo no qual determinado sistema com condições iniciais arbitrárias deveria ser conduzido à origem com custo quadrático mínimo; o problema-protótipo passaria a ser definido como o de minimizar um custo quadrático (norma  $\mathcal{H}_2$ ) da saída desse sistema, diante de perturbações estocásticas sendo injetadas nas equações de estados de maneira persistente. Essa questão de interpretação física do problema de controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  é discutida em detalhe nas referências [5, 7].

### 3.2.1 Formulação do Problema $\mathcal{H}_2$

Nesta subseção é apresentado um sumário da teoria de controle ótimo  $\mathcal{H}_2$  no contexto de sistemas lineares invariantes no tempo com realimentação de estados completa e horizonte infinito de tempo.

**Definição 3.1 (Problema LQ)** *Dado o sistema dinâmico:*

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.6}$$

*com estado inicial  $x(0) = x_0$ , determinar  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que:*

$$J(x_0, u) \triangleq \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + 2u'(t)Sx(t) + u'(t)Ru(t)] dt \tag{3.7}$$

*seja mínimo.*

□

Aqui tem-se  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , e  $Q$ ,  $S$ ,  $R$  são matrizes de dimensões compatíveis tais que:

$$M \triangleq \begin{bmatrix} Q & S' \\ S & R \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

é simétrica não-negativa semidefinida. Casos especiais deste problema geral são o problema não singular, em que  $R > 0$ , e o problema-padrão (“standard problem”), em que  $R > 0$  e  $S = 0$ .

A solução completa para o problema padrão foi um dos importantes resultados obtidos no início do desenvolvimento da teoria de controle no espaço de estados, tendo dado origem ao paradigma do controle LQG [5]. O problema não singular por sua vez pode ser reduzido ao problema-padrão por meio de uma transformação do tipo  $u = Fx + v$ . A solução do problema-padrão é dada pela lei de realimentação linear com ganhos constantes:

$$\begin{aligned} u(t) &= Kx(t) \\ K &= -R^{-1}B'P \end{aligned} \quad (3.9)$$

sendo  $P$  a solução definida positiva de:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (3.10)$$

A equação (3.10) é a forma algébrica da *equação de Riccati*.

É interessante reformular o problema em termos da seguinte decomposição para a matriz  $M$  [48]:

$$\begin{bmatrix} Q & S' \\ S & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C' \\ D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Isto é sempre possível, uma vez que  $M \geq 0$ . Com isso, pode-se introduzir a “saída” artificial  $y = Cx + Du$  e considerar o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.12)$$

A expressão (3.7) é reescrita:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty y'(t)y(t)dt \quad (3.13)$$

O problema não-singular é estabelecido em termos da relação:  $R = D'D > 0$ , o que ocorre se e somente se  $D$  possui posto completo de colunas. Adicionalmente, se  $D'C = 0$ , o problema é padrão. Se o problema não singular não é padrão, existe uma transformação que o leva a tal forma [48].

Naturalmente, a solução do problema é a mesma substituindo-se a condição inicial por uma perturbação persistente não-correlacionada entrando em todo o espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Ew \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.14)$$

A otimização do sistema (3.14) segundo o critério (3.13) é equivalente ao problema de minimização da norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência da entrada de perturbações  $w$  para a saída  $y$ :

**Definição 3.2 (Problema  $\mathcal{H}_2$ )** *Seja a matriz de transferência:*

$$H(s) = C_f(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}E \quad (3.15)$$

onde  $A_f$  e  $C_f$  correspondem às matrizes em malha fechada sob a realimentação através da matriz de ganhos  $K$ :

$$A_f = A + BK \quad (3.16)$$

$$C_f = C + DK$$

Determinar a matriz  $K$  que minimiza a norma  $\mathcal{H}_2$  de  $H(s)$  assim definida:

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \text{Tr} [H'(-j\omega)H(j\omega)] d\omega \quad (3.17)$$

□

A solução do problema  $\mathcal{H}_2$  corresponde exatamente<sup>2</sup> à solução do problema LQ, sendo dada por (3.9) convenientemente adaptada (caso do problema-padrão):

$$u(t) = Kx(t)$$

$$K = -(D'D)^{-1}B'P \quad (3.18)$$

$$A'P + PA - PB(D'D)^{-1}B'P + C'C = 0$$

A solução (3.18) não é válida para problemas singulares, uma vez que envolve a inversão da matriz  $D'D$ .

### 3.3 Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$ Singular

O problema do controle linear quadrático com ponderações singulares nas entradas de controle é mais difícil de ser tratado que o problema regular. Um fluxo contínuo de publicações vem investigando o assunto desde final da década de 60, e apenas recentemente têm surgido soluções razoavelmente completas para o problema [126]. No entanto, ainda há diversas questões em aberto com relação à possibilidade de síntese dos controladores ótimos [107], bem como em relação à interpretação dos resultados obtidos.

Nesta subseção, faz-se uma revisão das diversas abordagens empregadas para tratamento do problema linear quadrático singular.

<sup>2</sup>Entenda-se tal correspondência no sentido da igualdade do controlador  $K$  resultante nos dois casos. A igualdade também do critério de custo dos dois casos dependeria da hipótese adicional de que  $x_o x_o' = EE'$ .

### 3.3.1 Regularização via processo limite

A abordagem mais freqüentemente encontrada na literatura tem sido a de considerar o problema singular enquanto o limite de um problema regular com um parâmetro escalar  $\epsilon$  que multiplica a matriz  $D'D$  tendendo a zero:

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty [x'(t)C'Cx(t) + u'(t)\epsilon D'Du(t)] dt \quad (3.19)$$

Seguindo essa abordagem, podem ser citados: [31], [44], [66], [54] e [97]. Desses autores, [54] e [97] desenvolvem seus trabalhos utilizando a teoria de sistemas singularmente perturbados.

Uma limitação desse tipo de abordagem é a dificuldade de tratar matrizes  $D$  com deficiência de posto porém com posto não nulo.

### 3.3.2 Análise via matriz de dissipação

Uma segunda abordagem para o estudo do problema  $\mathcal{H}_2$  singular utiliza uma análise indireta do problema, baseada nas soluções de uma inequação matricial linear, que no caso regular recai na equação algébrica de Riccati. Define-se a matriz de dissipação como [102]:

$$F(K) = \begin{bmatrix} A'K + KA + C'C & KB + C'D \\ B'K + D'C & D'D \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A solução do problema singular está relacionada com a minimização do posto de  $F(K)$ , sendo que a matriz  $K^*$  que resolve o problema é máxima<sup>3</sup> dentre as matrizes simétricas que satisfazem à inequação de dissipação:

$$F(K) \geq 0 \quad (3.21)$$

Essa linha de trabalhos começa com o artigo de Willems [124], no qual não é feita uma tentativa de estudo específico do problema singular. Nesse trabalho, no entanto, são estabelecidas as questões e ferramentas que seriam exploradas mais tarde. O problema do controle ótimo singular  $\mathcal{H}_2$  é estudado em [102], seguindo as sugestões de Willems. Nessa mesma linha aparece ainda o trabalho [117].

### 3.3.3 Solução completa via abordagem geométrica

A referência [125] desenvolveu a teoria dos subespaços quase-controlados invariantes. A referência [48] formulou e demonstrou a hipótese de que tal teoria constituiria uma ferramenta genérica para o estudo de problemas da classe linear quadrático singular ótimo. Essa referência desenvolveu soluções completas para o caso de sistemas de mínima fase. A abordagem empregada em [48] envolve a transformação de variáveis:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u \\ \tilde{x} &= x - B\tilde{u} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Com essa transformação aplicada uma ou mais vezes, o sistema torna-se regular nas novas variáveis.

---

<sup>3</sup>Diz-se que uma matriz  $X$  pertencente a um conjunto de matrizes simétricas é *máxima* nesse conjunto se  $X - W \geq 0$  para toda  $W$  pertencente a tal conjunto.

Essa abordagem para “regularização” aparentemente é inaugurada no trabalho [77], sendo posteriormente empregada ainda em [39].

Partindo das bases calcadas na abordagem geométrica para análise do problema linear quadrático singular, lançadas em [48], a referência [126] resolve o problema singular  $\mathcal{H}_2$  de maneira completa. São preliminarmente definidos os subespaços:

$\mathcal{V}^*$  - o subespaço de anulamento da saída (“output nulling”);

$\mathcal{R}^*$  - o subespaço controlável de anulamento da saída (“controllable output nulling”);

$\mathcal{V}_a^*$  - o subespaço de  $\mathcal{L}_\infty$ -quase anulamento da saída;

$\mathcal{R}_a^*$  - o subespaço controlável de  $\mathcal{L}_\infty$ -quase anulamento da saída;

$\mathcal{V}_b^*$  - o subespaço de  $\mathcal{L}_2$ -quase anulamento da saída;

$\mathcal{R}_b^*$  - o subespaço controlável de  $\mathcal{L}_2$ -quase anulamento da saída.

Esses subespaços são então empregados como primitivas para a determinação da solução do problema LQ singular. O centro dessa abordagem do problema é a determinação de sub-problemas regulares que podem ser resolvidos de maneira convencional. As soluções para as trajetórias ótimas são dadas então em termos de composições de subespaços. O sistema (3.14) é decomposto de forma a ficar com a estrutura:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{13} \\ B_{14} \\ B_{15} \end{bmatrix} \bar{u}_1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ B_{23} \\ B_{24} \\ B_{25} \end{bmatrix} \bar{u}_2$$

$$y_1 = \bar{u}_1 \tag{3.23}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Essa decomposição do espaço de estados é tal que:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 \tag{3.24}$$

sendo que:

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{R}^*$$

$$\mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 = \mathcal{V}^*$$

$$\mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 = \mathcal{R}_a^*$$

$$\mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 = \mathcal{R}_b^*$$

Na maioria dos trabalhos desenvolvidos dentro do quadro da *abordagem geométrica*, uma dificuldade apontada pelos próprios autores desses trabalhos<sup>4</sup> refere-se ao cálculo dos

<sup>4</sup>Tal é o caso, por exemplo, de [125].

subespaços supremos invariantes, como aqueles acima citados. Usualmente é apresentado apenas um “algoritmo conceitual”, que em geral não conta com o atributo da *estabilidade numérica*. Embora já tenha sido mostrada a possibilidade de cômputo de tais subespaços supremos com algoritmos numericamente estáveis, isso não é feito usualmente devido à complexidade dos algoritmos envolvidos.

A abordagem a ser desenvolvida no presente trabalho irá obter, para o caso do problema  $\mathcal{H}_2$  singular com parâmetros precisamente conhecidos, uma decomposição semelhante àquela acima apresentada, partindo no entanto de uma base conceitual assentada apenas na álgebra matricial clássica. Isso irá permitir a utilização de algoritmos numericamente estáveis e com estrutura bastante simples para determinação da decomposição do sistema.

### 3.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Ao final da década de 70 o chamado *controle  $\mathcal{H}_\infty$*  foi formalmente proposto em um trabalho pioneiro de George Zames [135]. Esse trabalho aplicava a teoria de operadores (da análise funcional) para modelar sistemas dinâmicos como elementos de espaços de Banach. Com esse ferramental, abordava-se o problema de *redução da sensibilidade* do sistema em malha fechada tanto a perturbações aditivas injetadas em entradas do sistema quanto a incertezas nos próprios parâmetros do sistema.

Não havia entretanto, num primeiro momento, as ferramentas computacionais capazes de efetivar as técnicas de controle conceitualmente propostas por Zames, num quadro teórico de sistemas modelados por entrada-saída. A busca por tais ferramentas concentrou os esforços de grande número de pesquisadores no início da década de 80. Gradualmente, foi sendo reintroduzida a formulação em termos de espaço de estados dentro dos trabalhos desses pesquisadores. Os trabalhos [32] e [33] são marcados por uma formulação híbrida, e pelo desenvolvimento de um ferramental de projeto já operacional, no entanto ainda rudimentar, de difícil aplicabilidade. O trabalho [26], culminando uma série de desenvolvimentos teóricos empreendidos durante os anos 80 [138, 33, 91, 60, 61, 43, 141] promove a integração do controle  $\mathcal{H}_\infty$  ao contexto geral dos métodos no espaço de estados. Ali se estabelece a conexão entre o controle  $\mathcal{H}_\infty$  e o controle LQG (rebatizado controle  $\mathcal{H}_2$ ). A solução do problema  $\mathcal{H}_\infty$  é apresentada em termos de soluções de equações de Ricatti modificadas, com uma formulação cuja estrutura muito se aproxima da solução clássica do problema LQG. Com isso, tornou-se disponível o ferramental computacional necessário para o projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$ , agora baseado em modelos do tipo espaço de estados. O estágio atual da teoria do controle  $\mathcal{H}_\infty$  é descrito, de maneira extensiva, no recente livro [140].

#### 3.4.1 Formulação do Problema $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção, os principais resultados relativos ao controle  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas na forma de espaço de estados, com realimentação completa de estados e horizonte infinito de tempo são sumarizados.

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas lineares invariantes no tempo é igual à norma induzida  $\mathcal{L}_2$  da entrada para a saída desses sistemas. Esta propriedade é explorada na definição abaixo do problema  $\mathcal{H}_\infty$ .

#### Definição 3.3 (Problema $\mathcal{H}_\infty$ )

Dado o sistema dinâmico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3.26}$$

O problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restrito é definido como o problema de determinação da lei de controle  $u_\gamma(t)$  tal que a norma  $\mathcal{L}_2$  induzida da entrada  $w(t)$  para a saída  $y(t)$  seja menor, em malha fechada, que determinado valor  $\gamma$  preestabelecido:

$$u_\gamma : \left\{ \frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma \right\}\tag{3.27}$$

O problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo é definido como o problema de determinação da lei de controle  $u_\infty(t)$  tal que a norma  $\mathcal{L}_2$  induzida da entrada  $w(t)$  para a saída  $y(t)$  seja mínima em malha fechada:

$$u_\infty = \arg \min_{u(t)} \max_{\|w(t)\|_2=1} \|y\|_2\tag{3.28}$$

□

Deve-se a Khargonekar e Poola [61] a demonstração de que, no caso de realimentação completa de estados, a solução do problema  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo é alcançada por um controlador do tipo realimentação estática de estados. Isso permite reescrever o problema  $\mathcal{H}_\infty$  da seguinte forma:

**Definição 3.4 (Problema  $\mathcal{H}_\infty$  - Realimentação de Estados)**

Seja dado o sistema dinâmico:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ew \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3.29}$$

no qual é possível a realimentação completa de estados, ou seja, é possível escrever:

$$u(t) = f(x(t))\tag{3.30}$$

Seja a matriz de transferência em malha fechada:

$$H(s) = C_f(sI - A_f)^{-1}E\tag{3.31}$$

onde  $A_f$  e  $C_f$  correspondem às matrizes em malha fechada sob a realimentação através da matriz de ganhos  $K$ :

$$\begin{aligned}A_f &= A + BK \\ C_f &= C + DK\end{aligned}\tag{3.32}$$

A solução do problema ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  nesse caso equivale a determinar a matriz  $K$  que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H(s)$  assim definida:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{s \in \mathbb{C}_+} \sigma_{max}(H(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \text{ess } \sigma_{max}(H(j\omega))\tag{3.33}$$

A solução do problema  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restrito corresponde a determinar uma matriz  $K$  tal que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H(s)$  acima definida seja menor que  $\gamma$ .

□

A grande importância representada pelos métodos de projeto de controladores baseados em minimização de normas  $\mathcal{H}_\infty$  não deriva propriamente das características de atenuação de sinais de distúrbios assim obtidas, mas principalmente da robustez que se assegura, dada uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema, diante de perturbações de modelo introduzidas na forma de subsistemas parasitas conectados entre a saída e a entrada em questão. Esse resultado, conhecido como *teorema do ganho pequeno*, origina-se no trabalho de Zames ainda na década de 60 [131]. Essa robustez, em linhas gerais, pode ser expressa nos seguintes termos: considere-se um sistema dinâmico  $H$  como mostrado na figura 3.1, com vetor de entradas de controle  $u(t)$ , vetor de estados  $x(t)$ , vetor de entradas de perturbação  $w(t)$  e vetor de saídas controladas  $y(t)$ . Suponha-se que, controlado pelo controlador  $G$ , esse

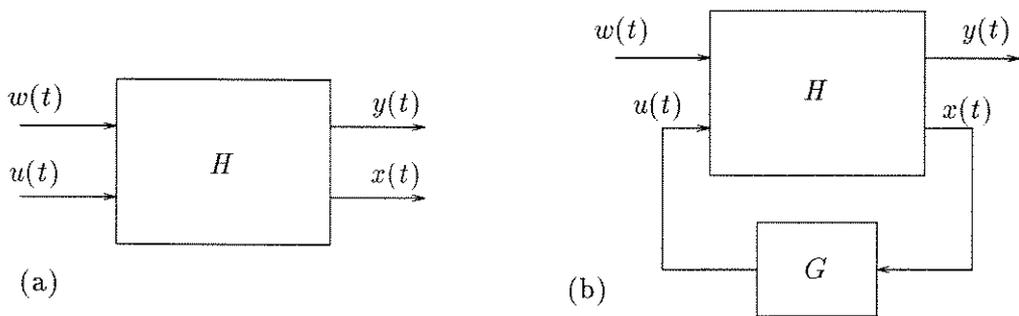


Figura 3.1: (a) Sistema dinâmico  $H$  a ser controlado: vetor de entradas de controle  $u(t)$ , vetor de estados  $x(t)$ , vetor de entradas de perturbação  $w(t)$  e vetor de saídas controladas  $y(t)$ . (b) Sistema dinâmico em malha fechada com controlador  $G$ .

sistema presente em malha fechada uma norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que  $\gamma$ . O *teorema do ganho pequeno* afirma que se for agora considerado o mesmo sistema  $H$ , não mais tendo  $w(t)$  como um vetor de sinais de perturbação e  $y(t)$  como um vetor de sinais de saída controlada, mas como respectivamente a saída e a entrada de um subsistema  $\Delta$  (ver figura 3.2) que representa as *incertezas de modelo* presentes, então o sistema em malha fechada permanecerá estável para todo  $\Delta$  com norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que  $1/\gamma$ .

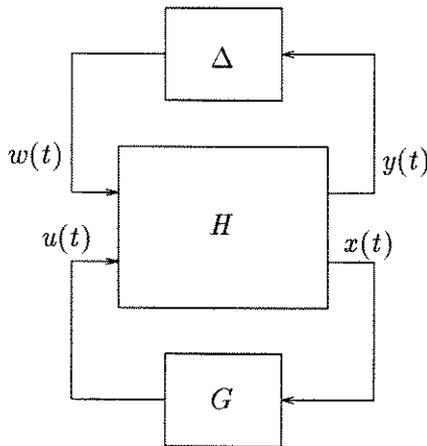


Figura 3.2: Sistema dinâmico  $H$  controlado pelo controlador  $G$  e com incerteza modelada por  $\Delta$ .

Adotando-se a simplificação de que determinado sistema dinâmico descrito por (3.29) se encontre na *forma padrão*, ou seja, que:

- $C'D = 0$
- $D'D > 0$

tem-se que a equação de síntese do controlador de realimentação de estados  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restrito é dada por:

$$K = (D'D)^{-1}B'W^{-1} \quad (3.34)$$

sendo a matriz  $W = W' > 0$  a solução simétrica definida positiva da equação de Riccati:

$$AW + WA' + WC'CW + \gamma^{-2}EE' - B(D'D)^{-1}B' = 0 \quad (3.35)$$

O problema de síntese de controladores  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restritos com realimentação estática de estados, para valores de  $\gamma$  maiores que o mínimo  $\gamma$  possível,  $\gamma^*$  (ou seja, para problemas sub-ótimos diferentes do problema ótimo  $\mathcal{H}_\infty$ ), pode ser resolvido por infinitos controladores diferentes. O controlador especificamente produzido por (3.34) é denominado o *controlador central*  $\mathcal{H}_\infty$ . O espaço de controladores-solução do problema no entanto diminui à medida em que  $\gamma$  se aproxima de  $\gamma^*$ , sendo que ao se atingir  $\gamma = \gamma^*$  (problema ótimo) a única solução<sup>5</sup> é dada por (3.34), para (3.35) calculada com  $\gamma = \gamma^*$ .

Naturalmente, a solução (3.34) não se aplica a sistemas singulares, nos quais  $D'D$  não é estritamente definida positiva.

### 3.5 Controle $\mathcal{H}_\infty$ $\gamma$ -Restrito Singular

Como consequência da multiplicidade de soluções para o problema  $\gamma$ -restrito quando  $\gamma$  é maior que o valor ótimo  $\gamma^*$ , o único caso em que a solução do problema  $\mathcal{H}_\infty$  passa necessariamente por (3.34) é no problema  $\mathcal{H}_\infty$ -ótimo. Só nesse caso então se caracteriza a singularidade legítima, quando  $D'D$  não é estritamente definida positiva. Claramente, nos casos  $\gamma$ -restritos, apesar da matriz  $D'D$  ser possivelmente singular, se houver uma solução singular com  $\gamma^* < \gamma$ , pode-se sempre encontrar uma solução não-singular, ou seja, que não envolva sinais de controle fora de  $\mathcal{L}_\infty$ .

Essa é a base para determinação de soluções do chamado *problema  $\mathcal{H}_\infty$  singular* (na realidade, o problema  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restrito com ponderações singulares) na maior parte da literatura que até o momento se dedicou ao assunto. Tal é o caso nas referências [22, 35, 53, 105, 109, 108]. A referência [103] propõe a otimização de um critério de norma  $\mathcal{H}_2$  (regularmente definido) sob uma restrição  $\mathcal{H}_\infty$  singular, de forma que possui subjacente a mesma lógica de tratamento da singularidade.

De maneira implícita, o mesmo ocorre nas referências [91, 141] que, sendo precursoras da aplicação de equações de Riccati à solução do problema  $\mathcal{H}_\infty$ , formulam a solução desse problema em termos de famílias de equações de Riccati, contendo parâmetros livres que permitiriam a busca de soluções distintas dentro do espaço de soluções possíveis.

A única exceção a tal esquema de tratamento da singularidade através da utilização dos graus de liberdade associados ao problema restrito aparece na referência [23]. Nessa

<sup>5</sup>Existem outras soluções que envolvem controladores dinâmicos; a unicidade aqui afirmada refere-se à família dos controladores do tipo realimentação estática de estados.

referência, emprega-se a hipótese de disponibilidade de informação sobre o vetor de perturbações injetado no sistema. Dessa forma, o controle do tipo desacoplamento de perturbações pode ser feito sem recurso a ganhos elevados. Mesmo com a restritividade da hipótese utilizada, bastante forte, tal metodologia poderia ter sido utilizada para obtenção do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo; isso no entanto não foi feito em tal referência.

### 3.5.1 $\epsilon$ -regularização

O procedimento típico dessa linha de trabalhos é adotado, por exemplo, em [22]. Agrega-se à matriz  $D$  uma matriz qualquer  $Q$  multiplicada por um parâmetro  $\epsilon$ , de tal forma que a matriz  $\bar{D}$  dada por:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D & \epsilon Q \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

possua posto completo de colunas para todo  $\epsilon > 0$ . Feito isso, basta agora encontrar um valor de  $\epsilon$  suficientemente pequeno para que o problema  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restrito, com a matriz  $D$  substituída por  $\bar{D}$ , seja factível. Encontrado o controlador que soluciona esse problema com  $\bar{D}$ , tem-se que esse controlador também soluciona o problema com a matriz  $D$ , uma vez que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema no segundo caso deve ser necessariamente estritamente menor que no primeiro.

### 3.5.2 Decomposição regular/singular

As referências [108, 105] aplicam uma abordagem mais sutil. Em primeiro lugar, o sistema é decomposto, sendo reescrito como a conexão de dois sub-sistemas, um dos quais é *fortemente controlável* (“strongly controllable”) e isento de custo de controle, enquanto o outro é regularmente ponderado. Essa decomposição é realizada por meio de uma realimentação preliminar. Note-se que o sistema decomposto resultante é muito similar ao resultado do algoritmo de decomposição regular/singular, que será apresentado no capítulo 4 desta tese, apesar de não ser exatamente equivalente. O subproblema regular é então resolvido da maneira usual, através de uma equação de Riccati, enquanto o subproblema singular é resolvido por meio de uma realimentação de estados usual, na qual se impõe que a rejeição de perturbações em malha fechada (recordar que o sistema em questão é fortemente controlável e portanto admite a atenuação de perturbações para qualquer fator de atenuação  $\epsilon > 0$ ) seja menor que determinado limiar, de tal forma que o sistema completo interligado atenda à restrição de norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que  $\gamma$ . Note-se em primeiro lugar a vantagem desta abordagem em relação à anterior, uma vez que separa-se a parte “regular” da ação de controle (que é calculada por métodos confiáveis) da parte “singular”, sendo que esta última deve satisfazer uma restrição. Isso, ao menos conceitualmente, introduz mais estrutura no algoritmo de projeto, trazendo maior confiabilidade ao resultado. Entretanto, o cálculo da parte “singular” da ação de controle envolve a determinação do supremo de seqüências de espaços  $(A, B)$ -invariantes. Já existem métodos numericamente estáveis capazes de realizar esses cálculos; no entanto tais métodos não são utilizados pela maioria dos autores que desenvolveram trabalhos dentro da abordagem de decomposição regular/singular. Segundo os próprios autores dos trabalhos, isto pode gerar dificuldades numéricas para a execução dos algoritmos de síntese.

A referência [109], embora tratando de problemas mais complexos, considerando horizontes finitos de tempo, sistemas variantes no tempo e realimentação dinâmica de saída, utiliza essencialmente a mesma abordagem básica.

### 3.5.3 Parametrização de múltiplos controladores

As referências [53, 35] utilizam o ferramental de LMI's ("Linear Matrix Inequalities") para fornecer famílias de soluções para o problema  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restrito. Um caso particular de tais soluções, como detalhadamente explicado em [35], seria o equivalente ao controlador central, que no caso singular não poderia ser aplicado. Outras soluções parametrizadas nesses trabalhos não se tornam singulares (isto é, continuam no espaço  $\mathcal{L}_\infty$ ) quando a matriz  $D$  deixa de ter posto completo de colunas, desde que  $\gamma$  continue maior que  $\gamma^*$ .

A determinação dessas soluções (para um problema de factibilidade) pode ser feita por meio de algoritmos convexos de otimização para os quais se dispõe de um maquinário computacional de elevada eficiência já desenvolvido. Essa é a grande vantagem de tal tipo de abordagem. Por essa razão, no presente trabalho de tese, a abordagem de formulação dos problemas de síntese em termos de problemas convexos de otimização (com formato de LMI's) também será empregada, em um contexto no entanto diferente daquele das referências [53, 35].

### 3.5.4 Famílias de equações de Riccati

As referências [91] e [141] empregam basicamente o mesmo esquema, evitando a necessidade de introduzir uma hipótese de não-singularidade de  $D'D$ . É definida uma família de equações de Riccati com a seguinte estrutura (esta é a equação que aparece em [91]; na outra referência a equação é bastante similar):

$$A'P + PA - \frac{1}{\epsilon}PB\Phi B'P + \frac{1}{\gamma}PDD'P + \frac{1}{\gamma}E'E + \epsilon Q = 0 \quad (3.37)$$

Nessa equação, os parâmetros  $\Phi$  e  $Q$  são livres, e garante-se a existência do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  desde que a equação possua solução  $P$  positiva definida para algum valor suficientemente pequeno<sup>6</sup> do escalar  $\epsilon$ . O controlador resultante é dado por:

$$F = -\frac{1}{2\epsilon}\Phi B'P \quad (3.38)$$

Chama-se a atenção para a similaridade dessa solução com aquela dada por (3.34), com  $\Phi$  "substituindo" a inversa de  $D'D$ .

### 3.5.5 O problema com informação completa

O recente trabalho [23] apresenta um procedimento de síntese do controlador que resolve o problema singular  $\gamma$ -restrito, baseando-se entretanto em uma hipótese extremamente forte, que é a disponibilidade de informação completa a respeito das perturbações injetadas no sistema. O procedimento desenvolvido em [23] pode ser delineado da seguinte forma:

1. Faz-se uma decomposição do sistema, resultando em um subsistema regular e um subsistema de *dinâmica zero*, por meio de um procedimento recursivo. Apesar da referência apontar um procedimento apenas conceitual para execução dessa decomposição, pode-se perceber sua similaridade com a decomposição que será proposta no capítulo 4 do presente trabalho (publicada em [114]<sup>7</sup>, apresentado no mesmo congresso que [23]).

<sup>6</sup>Note-se que isso não quer dizer que o valor de  $\epsilon$  deva ser necessariamente próximo de zero.

<sup>7</sup>Tal trabalho abordava o problema ótimo  $\mathcal{H}_2$ .

2. A seguir, o conhecimento do vetor de perturbações permite o cancelamento exato das perturbações injetadas no subsistema de dinâmica zero.
3. O subsistema de dinâmica zero também produz parte do vetor de entradas para o subsistema regular. O problema  $\mathcal{H}_\infty$  no subsistema regular é resolvido pelos métodos usuais.

É importante notar que:

- O método desenvolvido nesse artigo seria diretamente aplicável ao problema de otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  pois, ao eliminar as perturbações no sistema de dinâmica zero, elimina automaticamente também a singularidade da ação de controle. Explicando de outra forma: a ação de controle necessária para eliminar a perturbação passa a ser conhecida e limitada (como a própria perturbação). Essa ação de controle (na parte singular do sistema) é também evidentemente ótima. Essa possibilidade de extrapolação para o problema ótimo não é mencionada em [23].
- O presente trabalho (assim como [114]), após realizar a decomposição do sistema nos mesmos moldes propostos em [23] e [114], elimina a hipótese de necessidade de informação a respeito da perturbação por meio de uma abordagem do tipo *quase-desacoplamento de perturbações* (ou “almost disturbances decoupling”), em lugar da abordagem de *desacoplamento exato de perturbações* utilizada em [23]. O preço desse abrandamento de hipóteses será a necessidade de uma ação de controle *singular*, descrita em termos de *ganhos elevados* (“high gains”). Tal ação de controle será entretanto ainda implementável, conforme proposto em [114] e discutido no capítulo 9 do presente trabalho, em termos de um controlador do tipo *modos deslizantes* (possivelmente de ordem superior).

### 3.6 Controle $\mathcal{H}_\infty$ Ótimo Singular

A questão do controle  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo singular, ou seja, o problema formulado efetivamente como uma otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada com ponderações singulares na matriz de entrada, recebeu alguma atenção na literatura. O presente autor tem conhecimento de referências ao assunto nos trabalhos [36, 87, 100, 106]. Entretanto, a questão do projeto do controlador ótimo singular só é abordada, com limitações, em [106].

Note-se que diversos trabalhos já abordaram o tema correlato, porém diverso do aqui tratado, do controle  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas que são singulares em malha aberta (ou singularmente perturbados). Nesses casos, o controle é regularmente ponderado, e a singularidade não está associada ao surgimento de ganhos elevados na lei de controle. Esse é o caso dos trabalhos [34, 75, 81, 85, 86, 128].

#### 3.6.1 Enfoque no valor de $\gamma^*$

Os trabalhos [36] e [87] trabalham especificamente a questão do valor da função custo (norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada) atingida quando da solução do problema de controle singular.

A referência [36] adota a abordagem de decompor o sistema, até a determinação de um “núcleo regular”, para o qual seria válida a aplicação de técnicas regulares, o que

permitiria o cálculo preciso do valor ótimo da função objetivo no caso do controlador ótimo singular. Deve-se notar que essa é a única referência na literatura pesquisada por este autor na qual houve a preocupação de se fazer uma decomposição exclusivamente baseada em transformações ortogonais (portanto numericamente estáveis), preocupação essa que será seguida também no presente trabalho. No entanto, o cálculo desse valor ótimo para a função objetivo tem por finalidade, aparentemente, apenas a determinação de um limitante inferior para  $\gamma$  para ser usado em problemas de síntese  $\gamma$ -restritos.

O trabalho [87], por sua vez, estuda o comportamento da norma  $\mathcal{H}_\infty$  e também da norma  $\mathcal{H}_2$  de sistemas cujo controle recebe ponderações parametrizadas por um escalar  $\epsilon$ . A questão posta nesse trabalho é a de relacionar essas funções com tal escalar.

### 3.6.2 O problema $\mathcal{H}_\infty$ na otimalidade

A referência [100]<sup>8</sup> estuda as propriedades gerais do problema  $\mathcal{H}_\infty$  na otimalidade. O objetivo geral do trabalho é determinar controladores que atinjam ou aproximem arbitrariamente a otimalidade sem a utilização de “high gains”. Note-se que o mesmo autor havia demonstrado em outro trabalho a possibilidade de ocorrência de “high gains” mesmo em problemas com entradas regularmente ponderadas, no caso do problema de otimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$  [98]. Dessa forma, no trabalho [100], promove-se uma decomposição prévia que elimina as ponderações singulares do sistema, e trabalha-se a partir daí com problemas regularmente ponderados. A classe de problemas tratados nesse trabalho é, portanto, precisamente complementar à classe dos problemas que serão objeto do presente estudo, de forma que tais resultados não são relevantes no presente contexto.

### 3.6.3 Controle $\mathcal{H}_\infty$ mínima entropia singular

O trabalho [106] não aborda diretamente o controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$ . O problema ali proposto é o de minimização de uma *função entropia* (a qual é um limitante para a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema), com uma restrição na norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema; tem-se portanto uma variante do problema  $\gamma$ -restrito. No entanto, a função a ser minimizada possui as mesmas características de singularidade do problema  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo (mesmo para  $\gamma > \gamma^*$ ) e, em particular, coincide com o problema  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo para  $\gamma = \gamma^*$ .

O artigo faz a caracterização das soluções do problema utilizando um par de inequações matriciais quadráticas e mais um par de condições de posto. Todas essas condições podem ser sintetizadas em termos de um conjunto de equações de Riccati de ordem reduzida, regulares, do mesmo tipo desenvolvido em [108, 105] (envolvendo, portanto, as mesmas decomposições de sistema).

No momento de fornecer a solução em termos de síntese do controlador ótimo, o trabalho [106] apenas demonstra que, em geral, tal controlador será não-próprio (deixando implícita uma suposta impossibilidade de implementação), e desenvolve apenas o caso particular em que é possível o *desacoplamento completo de distúrbios por realimentação*. Para esse caso particular, tal trabalho fornece as equações explícitas de síntese do controlador.

Deve-se notar que, como em [108, 105], no artigo [106] também é feito o alerta quanto à possível instabilidade numérica associada ao cálculo das decomposições envolvidas na solução do problema. Tal instabilidade estaria associada à necessidade de determinação de

<sup>8</sup> Esse trabalho emprega uma curiosa terminologia, designando por “high gain” tanto os controladores cuja norma é ilimitada quanto os controladores cuja dimensão é ilimitada.

determinados subespaços invariantes supremos, envolvidos no cômputo das transformações necessárias.

### 3.7 Conclusão

Para encerrar este capítulo, é apresentada agora a vinculação do presente trabalho de tese com o panorama da literatura aqui descrito.

- Este trabalho aborda problemas de controle ótimo em norma  $\mathcal{L}_p$  do sinal de saída, com formulação singular. Sob essa ótica, ele se insere mais fortemente dentro da tradição da pesquisa desenvolvida a respeito do problema  $\mathcal{H}_2$  singular, uma vez que o problema  $\mathcal{H}_\infty$  singular mereceu até o momento escassa atenção. Os problemas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  constituem casos particulares do problema geral tratado aqui, e que não foi ainda abordado sob esse ponto de vista genérico.
- A estratégia de ataque ao problema singular aqui utilizada é essencialmente aquela de decompor o sistema em suas parcelas regular e singular, para então resolver um problema regular de ordem reduzida mais um problema de *dinâmica zero*. Tal estratégia pode ser considerada clássica<sup>9</sup>, uma vez que as soluções definitivas para o problema  $\mathcal{H}_2$  singular bem como algumas soluções preliminares do problema  $\mathcal{H}_\infty$  ( $\gamma$ -restrito) singular são baseadas nesse tipo de decomposição. Neste trabalho, é mostrado que a mesma decomposição se aplica genericamente aos problemas singulares em normas  $\mathcal{L}_p$  do sinal de saída.
- A abordagem usualmente empregada para decomposição do sistema em suas partes regular e singular é a de formular tal decomposição em termos de subespaços supremos invariantes. A determinação de tais subespaços é um problema computacionalmente complexo. Embora já haja disponibilidade de métodos numericamente estáveis para a determinação desses subespaços, sua utilização ainda não se encontra difundida no contexto dos trabalhos publicados na literatura, desenvolvidos em conexão com o problema aqui tratado. No presente trabalho, contrariamente à tradição, empregam-se técnicas de álgebra matricial convencional numericamente estáveis, em um esquema recursivo muito simples que conduz à decomposição desejada. Um único trabalho publicado sobre o tema do controle ótimo singular leva em consideração tal preocupação com a estabilidade numérica da decomposição do sistema, embora utilize procedimentos diferentes daqueles aqui empregados.
- Uma vez isolada a parte singular do sistema, aqui se aplica um esquema de “almost disturbance decoupling” para síntese dos sinais a serem injetados na parte regular do sistema. Esse esquema permite inclusive a quase-rejeição de determinadas perturbações injetadas no sistema, tornando-o robusto diante das mesmas. Resultados com significado exatamente equivalente a esses aqui apresentados já foram publicados previamente, nos trabalhos mais recentes relativos ao problema  $\mathcal{H}_2$  singular. Alguns passos na mesma direção também foram dados, sem atingir o mesmo alcance, no âmbito do problema  $\mathcal{H}_\infty$  singular. Neste trabalho é mostrado que tal procedimento

---

<sup>9</sup>Note-se que, apesar de clássica, essa estratégia está longe de poder ser considerada padrão, sendo que a abordagem mais comum para o problema é a da  $\epsilon$ -regularização. Isso provavelmente se deve à relativa complexidade das decomposições envolvidas, usualmente feitas dentro do quadro da *abordagem geométrica*.

pode ser aplicado genericamente aos problemas singulares em norma  $\mathcal{L}_p$  do sinal de saída.

- Fugindo inteiramente à tradição da pesquisa sobre o tema do controle ótimo singular de sistemas dinâmicos, é aqui estudado o tema do controle *custo-garantido ótimo* singular de sistemas incertos (sistemas com modelos não precisamente conhecidos). Não existe na literatura nenhum exemplo de abordagem sobre tal tema. O presente trabalho irá desenvolver os resultados concernentes a tal assunto como generalizações dos resultados relativos a sistemas precisamente conhecidos. Dessa forma, toda a sistemática aqui desenvolvida para tratamento dos problemas singulares em norma  $\mathcal{L}_p$  de sistemas precisamente conhecidos torna-se apenas um caso particular de uma sistemática mais geral, também tratando da singularidade em limitantes das normas  $\mathcal{L}_p$  para sistemas incertos.
- Para tratar dos sistemas incertos, é aqui empregada a formulação do problema de controle singular em termos de LMI's. Ao contrário dos trabalhos existentes de aplicação de LMI's a problemas de cálculo de controladores singulares<sup>10</sup>, a abordagem aqui desenvolvida envolve uma decomposição preliminar do sistema em suas partes regular e singular. Essa decomposição é formulada em termos de LMI's. A resolução do problema regular de ordem reduzida é formulada por sua vez em termos de novas LMI's. Não há paralelo na literatura para a abordagem aqui empregada.

---

<sup>10</sup>Atualmente existem trabalhos publicados sobre tal tema apenas para o caso de problemas  $\mathcal{H}_\infty$   $\gamma$ -restritos, isto é, para problemas de factibilidade com uma restrição de norma  $\mathcal{H}_\infty$  singular. Esses trabalhos não envolvem decomposições do sistema.



Parte II

**SOLUÇÃO CONCEITUAL**

Esta segunda parte do trabalho dedica-se à obtenção de uma *solução conceitual* do problema de regulação ótima singular, definido na parte I. O termo *solução conceitual* é aqui utilizado em referência a soluções que utilizam conceitos matematicamente significativos porém sem correspondência física, tais como o sinal *delta de Dirac* e suas derivadas.

No capítulo 4 é apresentada uma decomposição do sistema dinâmico, no caso de parâmetros precisamente conhecidos, que particiona o sistema em: (i) um subsistema com ponderações regulares (cujo controle ótimo é determinável através de algoritmos regulares convencionais), denominado *núcleo regular*, e (ii) um subsistema cujos sinais de controle são não ponderados, denominado *subsistema de saída prescritível*, o qual pode gerar com um custo adicional nulo um sinal arbitrário a ser injetado no primeiro subsistema.

O capítulo 5 analisa a questão da síntese de sinais arbitrários na saída do *subsistema de saída prescritível*. Inicialmente, esse subsistema é novamente decomposto, agora numa seqüência de subsistemas com estrutura de *controle completo*. Tais subsistemas são denominados *níveis* do sistema. A seguir, é examinada a questão da síntese de sinais arbitrários na saída de um sistema com estrutura *controle completo*, sob diversas condições de informação. Em um sistema com essa estrutura *controle completo*, é mostrado que o problema de rastreamento de sinais arbitrários implica na utilização de sinais de controle envolvendo funções *delta de Dirac*. Fica estabelecida a conveniência do emprego do controle do tipo *ganhos elevados*, devido à sua menor necessidade de disponibilidade de informação. Um resultado central obtido no capítulo 5 consiste na demonstração de que o esquema de controle por *ganhos elevados* conduz naturalmente à rejeição de incertezas paramétricas nos sistemas com estrutura *controle completo*.

No capítulo 6, são abordados inicialmente sistemas com estrutura *controle completo* com parâmetros incertos (incertezas dos tipos politópica e limitada em norma). Com base em determinadas condições suficientes, estabelece-se a estabilizabilidade de sistemas incertos com essa estrutura, através de ganhos elevados. É apresentado um algoritmo de síntese dos ganhos elevados estabilizantes para a solução do problema de rastreamento de sinal. A seguir, é apresentada a extensão dos resultados para o caso geral de sistemas controláveis. Com esse resultado, é mostrado que no caso geral de *subsistemas de saída prescritível* estabilizáveis por ganhos elevados, é possível o rastreamento de saída, o que é feito por meio de sinais de controle envolvendo funções *delta de Dirac* e suas derivadas.

No capítulo 7 as condições de estabilizabilidade formuladas no capítulo 6 são empregadas como critérios para definição de uma nova decomposição do sistema dinâmico. Analogamente ao desenvolvimento apresentado no capítulo 4, o sistema dinâmico é particionado em (i) um subsistema no qual é possível aplicar uma lei de controle tipo *ganhos elevados*; e (ii) um subsistema no qual devem-se aplicar controles por ganhos finitos. O primeiro subsistema será denominado *subsistema de saída prescritível*, sendo o exato análogo do subsistema homônimo definido no capítulo 4, agora generalizado para o caso de sistemas com parâmetros incertos. O segundo subsistema será denominado *núcleo regular generalizado*, e irá conter tanto a parcela do sistema que não admite ganhos elevados em virtude de ponderações em seus sinais de controle (como no capítulo 4) quanto a parcela que não admite ganhos elevados devido à sua não estabilizabilidade sob os mesmos (fenômeno cuja origem está na presença de incertezas).

Finalmente no capítulo 8 é abordado o *problema de regulação ótima* (ou *regulação custo garantido ótima*, no caso de sistemas incertos) do *núcleo regular generalizado* do sistema dinâmico (o qual se reduz ao *núcleo regular* no caso de sistemas com parâmetros precisamente conhecidos). Serão particularmente tratados problemas de otimização de normas  $\mathcal{H}_2$

e  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência em malha fechada, bem como algumas variações desses problemas. Utilizando critérios de custo garantido que são precisamente complementares aos critérios utilizados para a definição do *subsistema de saída prescritível*, estabelece-se a lei de controle que minimiza o (um limitante do) máximo da função custo no conjunto de incertezas considerado. Devido a essa complementaridade, tal lei de controle será *regular*, ou seja, será determinada por ganhos de realimentação finitos. Os sinais de controle necessários para a execução de tal lei poderão ser sintetizados, em parte, no *subsistema de saída prescritível*, conforme formulação do capítulo 6. O restante do vetor de sinais de controle é injetado diretamente pelas entradas de controle do sistema dinâmico. Dessa forma, se completa o problema de projeto do regulador ótimo, sob o ponto de vista conceitual.

## Capítulo 4

# Decomposição Regular/Singular

Neste capítulo é estudada a estrutura de sistemas com realimentação completa de estados e parâmetros precisamente conhecidos. É desenvolvida aqui uma transformação para um sistema equivalente com a estrutura de dois sistemas de ordem reduzida interconectados em malha fechada. A propriedade relevante de tal decomposição é o fato de o problema de regulação ótima genérico (possivelmente singular) do sistema original poder ser resolvido em termos da solução de um problema RO **regular** em um dos sub-sistemas.

As transformações desenvolvidas neste capítulo servirão de ponto de partida para decomposições similares a serem desenvolvidas nos próximos capítulos para sistemas com forma mais geral. A forma final decomposta (forma canônica R/S) ainda será a base para a síntese de reguladores ótimos robustos para o sistema em questão, tópico que será abordado nos capítulos finais deste trabalho.

### 4.1 Especificação do Sistema

Seja o sistema linear invariante no tempo com parâmetros precisamente conhecidos:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ z(t) = x(t) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (4.1)$$

As dimensões das matrizes e os significados dos sinais são definidos como em (2.1). Assumem-se as hipóteses (H1) de estabilizabilidade do par  $(A, B)$  e (H2) de posto completo de  $B$ .

### 4.2 Resultados Principais

O resultado principal deste capítulo consiste no seguinte teorema:

**Teorema 4.1** *Dado um sistema na forma (4.1) com as correspondentes hipóteses (H1) e (H2), existem transformações (não-singulares) de coordenadas  $\bar{x} = T_x x$  e  $\bar{u} = T_u u$  tais que  $\Sigma$  é equivalente à interconexão de dois sub-sistemas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  dados por:*

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} + \bar{E}_{11}w \\ y = \bar{C}_{11}\bar{x}_1 + \begin{bmatrix} \bar{C}_{12} & \bar{D}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} & \bar{B}_{21} \\ \bar{A}_{31} & \bar{B}_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{22} \\ \bar{B}_{32} \end{bmatrix} \bar{u}_2 + \begin{bmatrix} \bar{E}_{21} \\ \bar{E}_{31} \end{bmatrix} w \\ \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.3)$$

sendo  $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}_1 \oplus \bar{\mathcal{X}}_2 \oplus \bar{\mathcal{X}}_3$  e  $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}}_1 \oplus \bar{\mathcal{U}}_2$ ; com as seguintes propriedades :

- i. a matriz  $\begin{bmatrix} \bar{C}_{12} & \bar{D}_{11} \end{bmatrix}$  possui posto completo de colunas;
- ii. a matriz  $\begin{bmatrix} \bar{A}_{23} & \bar{B}_{22} \\ \bar{A}_{33} & \bar{B}_{32} \end{bmatrix}$  possui posto completo de linhas;
- iii. o sub-sistema  $\Sigma_2$  é controlável a partir da entrada  $\bar{u}_2$ ;
- iv. o canal de  $\bar{u}_2$  para  $\bar{x}_2$  no sub-sistema  $\Sigma_2$ :
  - (a) é tal que  $\dim(\bar{\mathcal{U}}_2) \geq \dim(\bar{\mathcal{X}}_2)$ ;
  - (b) não apresenta zeros de transmissão.

□

A prova de tal teorema será fornecida na próxima seção, com base em um procedimento construtivo para a determinação de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ .

Note-se que a saída do sistema interconectado depende apenas dos estados e das entradas do sub-sistema (4.2). O seguinte corolário será formulado precisamente e depois extraído do teorema 4.1, em capítulo posterior:

**Corolário 4.1** *Dados  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , existe um compensador linear com sinais de entrada  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_2^{ref}$  e com saída  $u_2$  que, aplicada à entrada do sistema  $\Sigma_2$ , permite fazer  $\|x_2 - x_2^{ref}\| < \epsilon$  para toda tripla  $(u_1, x_1, w)$  satisfazendo  $\|(u_1, x_1, w)\| < \delta$ .* □

Uma conseqüência do corolário 4.1 é o fato de que, dada uma solução  $(x_2^*, u_1^*)$  do problema RO do sistema reduzido  $\Sigma_1$ , é possível sintetizar  $x_2^*$  na saída de  $\Sigma_2$ , a partir da entrada  $u_2^*$ . O sistema interconectado  $\Sigma$  teria, nesse caso, a solução do problema RO dada por  $(u_1^*, u_2^*)$ , uma vez que as variáveis de  $\Sigma_2$  são irrelevantes para o cômputo do custo.

As definição de *núcleo regular* do sistema é cunhada a partir da decomposição definida no teorema 4.1:

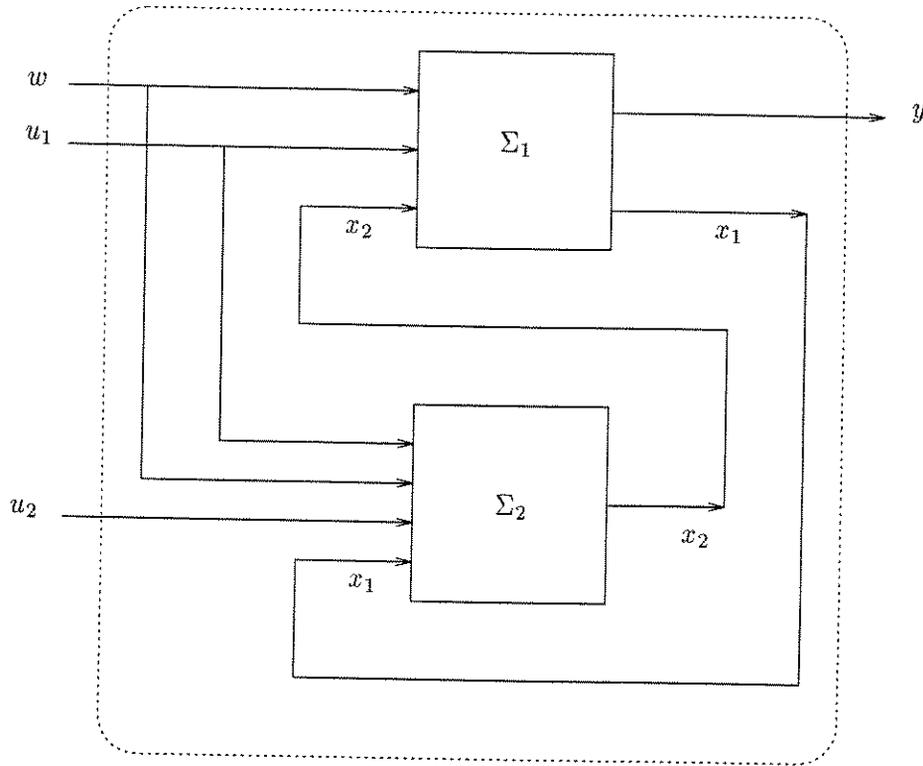


Figura 4.1: Sistema visto como uma interconexão de dois sub-sistemas. A saída  $y(t)$  depende dos sinais do sistema  $\Sigma_1$  apenas, enquanto o sistema  $\Sigma_2$  é inversível.

**Definição 4.1 (Núcleo Regular)** Dado um sistema  $\Sigma$  do tipo (4.1), seu núcleo regular é definido como o sub-sistema  $\Sigma_1$  conforme determinado pelo teorema 4.1, com as seguintes características:

- i. suas entradas de controle são ponderadas com pesos diferentes de zero na equação de saída;
- ii. seus vetores de entradas de perturbação e de saída controlada são iguais aos correspondentes vetores do sistema original;
- iii. sua dinâmica torna-se idêntica à dinâmica do sistema original quando se restringem as variáveis de estado do sistema não presentes neste subsistema a obedecerem a equações puramente algébricas que as relacionam às variáveis de estado do subsistema.

□

O subsistema  $\Sigma_2$ , por outro lado, pertence a uma classe especial de sistemas, definida como *sistemas de saída prescritível*:

**Definição 4.2 (Sistema de Saída Prescritível)** Denomina-se sistema de saída prescritível todo sistema com a estrutura do subsistema  $\Sigma_2$ , conforme determinado na equação (4.3) e nos itens (ii) e (iv) do teorema 4.1.

□

A diferença fundamental entre os problemas RO de ordem completa e de ordem reduzida (resolvido sobre o núcleo regular do sistema) reside no fato de que neste último problema a matriz de transmissão direta das entradas para a saída possui posto de colunas completo. Isto faz com que o problema RO possua soluções ditas *regulares*, que são, em diversos casos, determináveis por meio de algoritmos numéricos confiáveis. Ao contrário, o problema RO com deficiência de posto em tal matriz leva a soluções ditas *singulares*, as quais usualmente não podem ser determinadas numericamente de maneira confiável a partir dos mesmos algoritmos. Do corolário 4.1 decorre portanto a importância do teorema 4.1. Tal fato será explorado nos próximos capítulos deste trabalho.

### 4.3 Algoritmo de Decomposição e Forma Canônica

O algoritmo apresentado nesta seção será utilizado na prova do teorema 4.1. A forma final do sistema irá corresponder à forma prescrita no teorema, por construção. Essa estrutura final será formalizada após a apresentação do algoritmo, passando a ser denominada *forma canônica regular/singular* ou, abreviadamente, forma R/S.

Esse algoritmo servirá também como procedimento numericamente estável para obtenção dessa forma canônica. Tal forma canônica será utilizada como base para a síntese de controladores ótimos em capítulos posteriores.

Defina-se a matriz:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4.4)$$

A matriz (4.4) irá representar o sistema (4.1) a partir deste ponto, de maneira a tornar mais sintética a notação desta seção. A matriz  $E$  não é incluída nessa representação, uma vez que esta não é relevante na decomposição, sofrendo transformações apenas induzidas pela estrutura das demais matrizes.

O procedimento construtivo para decomposição regular/singular é derivado a seguir. As seguintes convenções serão adotadas para tornar a apresentação mais concisa:

As submatrizes das matrizes decompostas serão denotadas, na equação principal, pela mesma letra que denota a matriz original, sem o emprego de sub-índices. No texto, a referência a essas submatrizes será feito através da notação usual  $(\cdot)_{ij}$  para denotar o bloco da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna.

O símbolo  $\mathcal{X}_i$  denotará o  $i$ -ésimo subespaço componente do espaço  $\mathcal{X}$ . O mesmo se aplica a  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{U}$ .

Um quadrado circundando determinada partição de uma matriz irá indicar o bloco sob transformação. Assim, em cada passo haverá a indicação de um bloco resultante da transformação do passo anterior e de um bloco a ser transformado neste passo (naturalmente, no primeiro passo não haverá um passo anterior). A seqüência de passos deixará clara a distinção entre essas indicações.

Blocos com símbolo em negrito irão denotar blocos de posto completo. Blocos adjacentes em negrito, na mesma matriz, denotarão um único bloco de posto completo. Para as matrizes  $A$  e  $B$  tal notação indicará posto completo de linhas. Para as matrizes  $C$  e  $D$ , posto completo de colunas.

Blocos inteiramente compostos de zeros serão indicados por  $\mathbf{0}$ .

— ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO REGULAR/SINGULAR —

{

**Inicialização:** Inicializa-se a variável indicadora de fim do algoritmo fazendo:  $P \leftarrow -1$

**Passo 1:** Tome-se o sistema original:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4.5)$$

Se  $D$  possui posto completo de colunas

Então  $P \leftarrow 0$  (Parada **P0**: o sistema é regular, e o algoritmo não se aplica.)

Se  $P < 0$

Então

{

**Passo 2:** Uma mudança nas coordenadas de  $\mathcal{U}$  coloca a matriz  $D$  na forma:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} A & B & B \\ \hline C & D & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (4.6)$$

**Passo 3:** Aplica-se uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}$  tal que:

$$\left[ \begin{array}{cc|c|c} A & A & B & \mathbf{0} \\ A & A & B & B \\ \hline C & C & D & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (4.7)$$

Se  $C_{12}$  possui posto completo de colunas

Então  $P \leftarrow 1$  (Parada **P1**:  $\mathcal{X}_1$  é o núcleo regular do sistema.)

**Enquanto**  $P < 0$  **Faça**

{

**Passo 4:** Procede-se a uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}_2$  tal que:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} A & A & A & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & B & B & B \\ \hline C & C & \mathbf{0} & D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (4.8)$$

Se  $A_{13}$  possui posto completo de linhas

Então  $P \leftarrow 2$  (Parada **P2**: o sistema é completamente singular.)

Se  $A_{13}$  é um bloco nulo

Então  $P \leftarrow 3$  (Parada **P3**:  $\mathcal{X}_1$  é o núcleo regular do sistema.)

Se  $P < 0$

Então

{

**Passo 5:** Procede-se agora a uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}_1$  de tal maneira que:

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} A & A & A & \boxed{0} & B & 0 & 0 \\ A & A & A & \boxed{A} & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & A & B & B & B \\ \hline C & \boxed{C} & C & 0 & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.9)$$

Se  $C_{12}$  tem posto completo de colunas

Então  $P \leftarrow 1$  (Parada **P1**:  $\mathcal{X}_1$  é o núcleo regular do sistema.)

}

Se  $P < 0$

Então

{

**Passo 6:** Redefinir o sistema fazendo:  $\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ .

}

}

Se  $P = 2$

Então

{

**Passo 7:** O sistema após o passo 4 (com parada  $P = 2$ ) está na seguinte forma:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} A & A & A & B & 0 & 0 \\ A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & B & B & B \\ \hline \boxed{C} & C & 0 & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.10)$$

Procede-se então a uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}_1$  de maneira a se obter:

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} A & A & A & A & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & A & B & B & B \\ \hline \boxed{0} & \boxed{C} & C & 0 & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.11)$$



---

 Forma Canônica Regular/Singular

$$\begin{aligned}
 A_i^j &= \mathbf{0} \quad \forall j = 6 : 2 : h ; \quad i = 1 : j - 4 \\
 \mathcal{N} \left( (A_{j-3|j-2}^j)' \right) &= \mathbf{0} \quad \forall j = 6 : 2 : h \\
 \mathcal{N} \left( (A_2^4)' \right) &= \mathbf{0} \\
 B_{1|h-2}^{2|3} &= \mathbf{0} \\
 \det(B_{h-1|h}^{2|3}) &\neq 0 \\
 C^j &= \mathbf{0} \quad \forall j = 4 : 2 : h \\
 \mathcal{N}(C^2) &= \mathbf{0} \tag{4.12} \\
 \mathcal{N}(C^j) &= \mathbf{0} \quad \forall j = 3 : 2 : h - 1 \\
 \mathcal{N}(D^1) &= \mathbf{0} \\
 D^{2|3} &= \mathbf{0} \\
 (P1) : A_1^4 &= \mathbf{0} \\
 (P2) : C^1 &= \mathbf{0} ; \quad \mathcal{N}(A_1^4) = \mathbf{0} \\
 (P3) : A_1^4 &= \mathbf{0} ; \quad \dim(\mathcal{X}_2) = 0
 \end{aligned}$$


---

Dependendo do critério de parada com que veio a terminar o algoritmo de decomposição, a forma canônica acima possui uma dentre três estruturas alternativas, veja o exemplo a seguir. Observe-se ainda que, para garantir a consistência da fórmula acima, é preciso assumir, por convenção, que se  $M$  é uma matriz de dimensão nula, então  $\mathcal{N}(M) = \mathbf{0}$ .

**EXEMPLO 4.1** Para exemplificar essa decomposição, é apresentada abaixo a menor estrutura que possui todas as propriedades “interessantes” associadas à forma canônica geral, para os três critérios de parada do algoritmo:

Critério de parada (P1):

$$\left[ \begin{array}{cccccc|ccc} A & A & A & 0 & A & 0 & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & 0 & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & A & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & A & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & A & A & A & B & B & B \\ \hline C & C & C & 0 & C & 0 & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.13)$$

Nesse sistema  $\mathcal{X}_1$  consiste no núcleo regular do sistema.

Critério de parada (P2):

$$\left[ \begin{array}{cccccc|ccc} A & A & A & A & A & 0 & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & 0 & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & A & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & A & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & A & B & B & B \\ A & A & A & A & A & A & B & B & B \\ \hline 0 & C & C & 0 & C & 0 & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.14)$$

Agora o sistema não possui núcleo regular. Isso significa que todos os estados podem ser arbitrariamente deslocados pelos sinais de custo zero do sistema, existindo portanto uma solução de custo zero do problema de regulação ótima.

Critério de parada (P3):

$$\left[ \begin{array}{cccccc|ccc} A & A & 0 & A & 0 & & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & & B & B & B \\ A & A & A & A & A & & B & B & B \\ \hline C & C & 0 & C & 0 & & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.15)$$

Neste caso,  $\dim(\mathcal{X}_2) = 0$ , de maneira que o espaço de estados é dado por  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6$ . O núcleo regular do sistema é outra vez  $\mathcal{X}_1$ .

◇

### 4.3.2 Demonstração do Teorema 4.1

A demonstração do teorema começa com a identificação de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  na forma canônica regular/singular, o que pode ser feito por inspeção. Para maior clareza, tal identificação é apresentada a seguir para o caso particular do exemplo 4.1, sistema (4.13), correspondente

a uma parada (P1). O caso geral pode ser tratado de maneira similar.

$$\bar{A}_{11} = A_{11}$$

$$\left[ \bar{A}_{12} \mid \bar{B}_{11} \right] = \left[ A_{12} \quad A_{13} \quad A_{15} \mid B_{11} \right]$$

$$\bar{C}_{11} = C_{11}$$

$$\left[ \bar{C}_{12} \mid \bar{D}_{11} \right] = \left[ C_{12} \quad C_{13} \quad C_{15} \mid D_{11} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \hline \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|cc} A_{22} & A_{23} & A_{25} & \mathbf{A}_{24} & \mathbf{0} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} & A_{34} & \mathbf{A}_{36} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} & A_{54} & A_{56} \\ \hline A_{42} & A_{43} & A_{45} & A_{44} & \mathbf{A}_{46} \\ A_{62} & A_{63} & A_{65} & A_{64} & A_{66} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} \bar{A}_{21} & \bar{B}_{21} \\ \hline \bar{A}_{31} & \bar{B}_{31} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{21} & B_{21} \\ A_{31} & B_{31} \\ \hline A_{51} & B_{51} \\ A_{41} & B_{41} \\ A_{61} & B_{61} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{B}_{22} \\ \hline B_{32} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B}_{52} & \mathbf{B}_{53} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{B}_{62} & \mathbf{B}_{63} \end{array} \right]$$

As matrizes à esquerda em todas as equações acima referem-se às matrizes em (4.2) e (4.3), enquanto as matrizes à direita referem-se a (4.13). A notação de submatrizes em negrito para indicar blocos de posto completo (de linhas para  $A$  e  $B$  e de colunas para  $C$  e  $D$ ) foi acima preservada. Claramente:

$$\bar{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X}_1$$

$$\bar{\mathcal{X}}_2 = \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_5$$

$$\bar{\mathcal{X}}_3 = \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_6$$

Estabelecida essa identidade (facilmente extrapolável para o caso geral), passa-se à verificação das propriedades da estrutura. Essa verificação também será feita, por motivo de clareza, apenas para esse mesmo caso particular. O caso geral, no entanto, pode ser demonstrado através dos mesmos procedimentos.

i. por construção, a matriz  $\left[ \bar{C}_{12} \quad \bar{D}_{11} \right]$  possui posto completo de colunas;

ii. também por construção, a matriz  $\left[ \begin{array}{c|c} \bar{A}_{23} & \bar{B}_{22} \\ \hline \bar{A}_{33} & \bar{B}_{32} \end{array} \right]$  possui posto completo de linhas;

iii. Para provar a controlabilidade de  $\Sigma_2$ , defina-se:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} & A_{24} & \mathbf{0} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} & A_{34} & \mathbf{A}_{36} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} & A_{54} & A_{56} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} & A_{44} & \mathbf{A}_{46} \\ A_{62} & A_{63} & A_{65} & A_{64} & A_{66} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{52} & \mathbf{B}_{53} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{62} & \mathbf{B}_{63} \end{bmatrix}$$

É claramente possível uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3$  tal que:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{52} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{62} & \mathbf{B}_{63} \end{bmatrix}$$

Obtém-se de  $\tilde{B}$  o posto completo nas bloco-linhas 3 e 5. De  $(\tilde{A}\tilde{B}^2)$  obtém-se posto completo de linhas nas bloco-linhas 2 e 4, devido ao posto completo de linhas nas matrizes  $(\mathbf{A}_{36}\mathbf{B}_{63})$  e  $(\mathbf{A}_{46}\mathbf{B}_{63})$ . Façam-se agora transformações na coluna 6 de  $\tilde{A}$  tais que:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} & A_{24} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{32} & A_{33} & A_{35} & A_{34} & \mathbf{0} & {}_2\mathbf{A}_{36} \\ A_{52} & A_{53} & A_{55} & A_{54} & \mathbf{0} & {}_2A_{56} \\ A_{42} & A_{43} & A_{45} & A_{44} & {}_1\mathbf{A}_{46} & \mathbf{0} \\ A_{62} & A_{63} & A_{65} & A_{64} & \mathbf{0} & {}_2A_{66} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{52} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ {}_1\mathbf{B}_{62} & {}_1\mathbf{B}_{63} \\ {}_2\mathbf{B}_{62} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

sendo  ${}_1\mathbf{A}_{46}$  quadrada não-singular. Por construção, o posto de linhas de  ${}_1\mathbf{A}_{46}$  é igual ao número de colunas de  $\mathbf{A}_{24}$  e maior ou igual ao posto de linhas desse bloco, de maneira que  $(\mathbf{A}_{24} {}_1\mathbf{A}_{46} {}_1\mathbf{B}_{63})$  possui posto completo de linhas.

Tomando-se um subconjunto das linhas da matriz de controlabilidade:

$$\begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B}^2|_3 & \tilde{A}\tilde{A}\tilde{B}^3 \end{bmatrix}$$

obtém-se uma matriz que possui posto completo de linhas. Assim, a matriz de controlabilidade possui posto completo de linhas, e o sistema é controlável.

- iv. (a) Num caso extremo, as matrizes  $\mathbf{A}_{24}$  e  $\begin{bmatrix} \mathbf{A}'_{36} & \mathbf{A}'_{46} \end{bmatrix}'$  podem ter posto completo de linhas e de colunas, isto é, serem quadradas. Nesse caso,  $\dim(\bar{\mathcal{X}}_2) = \dim(\bar{\mathcal{U}}_2)$ . Em geral, é possível que essas matrizes possuam mais colunas que linhas (o inverso não é possível, pois por construção possuem posto completo de linhas), de maneira que, em geral,  $\dim(\bar{\mathcal{X}}_2) \leq \dim(\bar{\mathcal{U}}_2)$ .

(b) Para analisar o problema dos zeros de transmissão, monta-se a matriz:

$$\Phi = \left[ \begin{array}{ccccc|cc} s\mathbf{I} - A_{22} & -A_{23} & -A_{25} & -A_{24} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A_{32} & s\mathbf{I} - A_{33} & -A_{35} & -A_{34} & -A_{36} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A_{52} & -A_{53} & s\mathbf{I} - A_{55} & -A_{54} & -A_{56} & \mathbf{B}_{52} & \mathbf{B}_{53} \\ -A_{42} & -A_{43} & -A_{45} & s\mathbf{I} - A_{44} & -A_{46} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -A_{62} & -A_{63} & -A_{65} & -A_{64} & s\mathbf{I} - A_{66} & \mathbf{B}_{62} & \mathbf{B}_{63} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

O posto de linhas de  $\Phi$  é claramente completo e invariante para todo  $s$ , pois há matrizes de posto completo de linhas em todas as bloco-linhas, em posições fora da bloco-diagonal principal. Como, do sub-item anterior, o número de colunas de  $\Phi$  é maior ou igual ao número de linhas, então o posto de  $\Phi$  é igual ao seu número de linhas, e não depende de  $s$ . Assim, não há valores de  $s$  para os quais  $\Phi$  diminui seu posto, isto é, não há zeros de transmissão [94].

■

## 4.4 Interpretação Geométrica

Nesta seção, os resultados anteriormente apresentados neste capítulo serão reformulados dentro do paradigma da *abordagem geométrica*. Esse formalismo é útil para estabelecer com maior clareza a natureza das entidades envolvidas na decomposição proposta.

São definidos os seguintes subespaços dos espaços  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{U}$ :

espaço de entradas  
singularmente ponderado:  $\mathcal{U}_s = \mathcal{N}(D)$

espaço de entradas  
regularmente ponderado:  $\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_s^\perp$

subespaço singularmente  
vinculado de ordem 1:  $\mathcal{X}_s^1 = B\mathcal{U}_s$

subespaço singularmente vinculado  
singularmente ponderado de ordem  $i$ :  $\mathcal{X}_{ss}^i = \mathcal{N}(C) \cap \mathcal{X}_s^i$

subespaço singularmente vinculado  
regularmente ponderado de ordem  $i$ :  $\mathcal{X}_{sr}^i = \mathcal{N}(C)^\perp \cap \mathcal{X}_s^i$

subespaço singularmente vinculado de ordem $i$ , $i \geq 2$ :	$\mathcal{X}_s^i = A\mathcal{X}_{ss}^{i-1} \cap (\mathcal{X}_s^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{X}_s^{i-1})^\perp$
subespaço singularmente controlável:	$\mathcal{X}_s = \oplus_i \mathcal{X}_s^i$
subespaço singularmente controlável singularmente ponderado:	$\mathcal{X}_{ss} = \oplus_i \mathcal{X}_{ss}^i$
subespaço singularmente controlável regularmente ponderado:	$\mathcal{X}_{sr} = \oplus_i \mathcal{X}_{sr}^i$
subespaço não singularmente controlável:	$\mathcal{X}_r = \mathcal{X}_s^\perp$
espaço de sinais arbitrariamente conformáveis regularmente ponderado:	$\mathcal{Z}_r = \mathcal{U}_r \oplus \mathcal{X}_{sr}$

Postas essas definições, é possível reformular o teorema 4.1 com base nas mesmas. Antes, é instrutivo mapear os subespaços que aparecem nas definições de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  nos subespaços definidos nesta seção. A tabela de equivalência é:

$$\bar{\mathcal{X}}_1 = \mathcal{X}_r \quad \bar{\mathcal{X}}_2 = \mathcal{X}_{sr} \quad \bar{\mathcal{X}}_3 = \mathcal{X}_{ss} \quad \bar{\mathcal{U}}_1 = \mathcal{U}_r \quad \bar{\mathcal{U}}_2 = \mathcal{U}_s \quad (4.16)$$

A formulação geométrica do teorema 4.1 fica:

**Teorema 4.2** *Considere-se o sistema dinâmico  $\Sigma$  definido pelos mapeamentos lineares:*

$$\Sigma : \begin{cases} [\mathcal{X}, (\mathcal{W}, \mathcal{U})] \stackrel{\mathcal{S}}{\mapsto} \mathcal{X} \\ (\mathcal{X}, \mathcal{U}) \stackrel{\mathcal{T}}{\mapsto} \mathcal{Y} \end{cases} \quad (4.17)$$

sendo o mapeamento  $\mathcal{S}$  estabilizável por meio de um mapeamento  $\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{U}$  e sendo o mapeamento  $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{X}$  injetivo. Então os espaços  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{U}$  podem ser decompostos em:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathcal{X}_r \oplus \mathcal{X}_{sr} \oplus \mathcal{X}_{ss} \\ \mathcal{U} &= \mathcal{U}_r \oplus \mathcal{U}_s \end{aligned} \quad (4.18)$$

sendo esses subespaços relacionados através dos sistemas dinâmicos  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  definidos pelos mapeamentos lineares:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} [\mathcal{X}_r, (\mathcal{X}_{sr}, \mathcal{U}_r, \mathcal{W})] \stackrel{\mathcal{S}_1}{\mapsto} \mathcal{X}_r \\ (\mathcal{X}_r, \mathcal{X}_{sr}, \mathcal{U}_r) \stackrel{\mathcal{T}_1}{\mapsto} \mathcal{Y} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\Sigma_2 : \{[(\mathcal{X}_{sr}, \mathcal{X}_{ss}), (\mathcal{X}_r, \mathcal{U}_r, \mathcal{U}_s, \mathcal{W})] \stackrel{\mathcal{S}_2}{\mapsto} (\mathcal{X}_{sr}, \mathcal{X}_{ss})\} \quad (4.20)$$

sendo válidas as propriedades:

- (i)  $\mathcal{T}_1$  é um mapa injetivo;  
(ii)  $(\mathcal{S}_2|_{\mathcal{U}_s}) = \mathcal{X}_{sr} \oplus \mathcal{X}_{ss}$ ;  
(iii.1)  $\dim(\mathcal{X}_{sr}) \leq \dim(\mathcal{U}_s)$ .

□

Note-se que o item (iii.2) do teorema 4.1 não foi acima reformulado no contexto geométrico, uma vez que a nova apresentação não iria diferir da original.

EXEMPLO 4.2 O Exemplo 4.1 é agora reformulado, em termos dos subespaços definidos nesta seção.

Parada (P1) - Sistema (4.13)

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 & \mathcal{X}_{ss}^2 = \mathcal{X}_4 & \mathcal{X}_s = \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6 \\
\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_1 & \mathcal{X}_{sr}^2 = \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_r = \mathcal{X}_1 \\
\mathcal{X}_s^1 = \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6 & \mathcal{X}_s^3 = \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_{sr} = \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_5 \\
\mathcal{X}_{ss}^1 = \mathcal{X}_6 & \mathcal{X}_{ss}^3 = \emptyset & \mathcal{X}_{ss} = \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_6 \\
\mathcal{X}_{sr}^1 = \mathcal{X}_5 & \mathcal{X}_{sr}^3 = \mathcal{X}_2 & \mathcal{Z}_r = \mathcal{U}_r \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_5 \\
\mathcal{X}_s^2 = \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 & & 
\end{array}$$

Parada (P2) - Sistema (4.14)

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 & \mathcal{X}_{ss}^2 = \mathcal{X}_4 & \mathcal{X}_s = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6 = \mathcal{X} \\
\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_1 & \mathcal{X}_{sr}^2 = \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_r = \emptyset \\
\mathcal{X}_s^1 = \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6 & \mathcal{X}_s^3 = \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_{sr} = \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_5 \\
\mathcal{X}_{ss}^1 = \mathcal{X}_6 & \mathcal{X}_{ss}^3 = \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_{ss} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_6 \\
\mathcal{X}_{sr}^1 = \mathcal{X}_5 & \mathcal{X}_{sr}^3 = \mathcal{X}_2 & \mathcal{Z}_r = \mathcal{U}_r \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_5 \\
\mathcal{X}_s^2 = \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 & & 
\end{array}$$

Parada (P3) - sistema (4.15)

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 & \mathcal{X}_s^2 = \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 & \mathcal{X}_r = \mathcal{X}_1 \\
\mathcal{U}_r = \mathcal{U}_1 & \mathcal{X}_{ss}^2 = \mathcal{X}_4 & \mathcal{X}_{sr} = \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_5 \\
\mathcal{X}_s^1 = \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6 & \mathcal{X}_{sr}^2 = \mathcal{X}_3 & \mathcal{X}_{ss} = \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_6 \\
\mathcal{X}_{ss}^1 = \mathcal{X}_6 & \mathcal{X}_s^3 = \emptyset & \mathcal{Z}_r = \mathcal{U}_r \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_5 \\
\mathcal{X}_{sr}^1 = \mathcal{X}_5 & \mathcal{X}_s = \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6 & 
\end{array}$$

Notar que no caso (P3) tem-se  $\dim(\mathcal{X}_2) = 0$ , de maneira que  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6$ .

◇

## 4.5 Exemplo Numérico

Esta seção é inteiramente dedicada à apresentação de um exemplo numérico da aplicação do algoritmo de decomposição R/S.

EXEMPLO 4.3 Para a criação de um exemplo da aplicação do algoritmo de decomposição R/S a ser apresentado com o objetivo de visualização do resultado, deve-se levar em conta que o estabelecimento prévio de sistemas para teste que se sabe serem singulares não pode ser feito de maneira aleatória. A estrutura do sistema a ser decomposto deve ser estabelecida de forma que a singularidade esteja *a priori* presente. A estratégia a ser aqui seguida será então:

1. criar matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  compostas exclusivamente de 0's e de 1's, as quais portanto trazem portanto uma estrutura mínima de singularidade;
2. substituir os 1's nessas matrizes por números aleatórios (deve-se notar que, com essa manobra, a singularidade anteriormente embutida continua presente e que é possível, ao menos em princípio, dependendo dos números que vierem a ser introduzidos, haver singularidades imprevistas);
3. gerar de maneira aleatória matrizes não singulares de transformação para os espaços de estados, entradas e saídas, aplicando tais transformações ao sistema anteriormente formado.

Seguindo esses passos, obtém-se um sistema com forma aleatória que possui assegurada, no entanto, uma estrutura de singularidade.

Deve-se ainda notar que é necessária uma elevada dimensão do sistema para que seja possível o surgimento dos fenômenos que foram discutidos neste capítulo. Assim, será aqui apresentado um sistema com número de estados  $n = 10$ , número de entradas  $p = 4$  e número de saídas  $m = 4$ .

A estrutura inicialmente estabelecida, em termos de 0's e 1's é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Feita a substituição dos 1's por números aleatórios e a transformação dos espaços por matrizes não singulares também aleatórias, obtém-se:

$$A = \begin{bmatrix} 18.4717 & 2.0569 & -8.3913 & -41.0496 & -4.7642 \\ 32.2309 & 5.7065 & -9.0987 & -64.1470 & -9.0601 \\ -7.4916 & -4.3396 & 3.2597 & 37.4762 & 1.4610 \\ -18.6423 & 3.4275 & 9.2669 & 18.6390 & 4.8223 \\ 29.1296 & 3.1522 & -17.1086 & -65.9744 & -8.4820 \\ -12.7890 & 1.2379 & -3.1667 & 0.0701 & 3.3222 \\ 18.3147 & -1.4537 & -28.9385 & -76.1412 & 0.8514 \\ 41.9735 & 2.3694 & -19.5336 & -84.1875 & -9.5030 \\ 5.7528 & -6.3120 & -26.2344 & -42.7493 & 2.4189 \\ -39.0623 & -1.1552 & -6.4184 & 22.2189 & 12.5711 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -33.6966 & 21.3094 & -17.3069 & -33.1978 & 20.7906 \\ -50.6927 & 35.5417 & -28.9433 & -54.0099 & 31.8975 \\ 12.1664 & -16.5208 & 11.5678 & 30.4796 & -15.5431 \\ 32.4870 & -13.8970 & 13.4602 & 14.7354 & -10.9385 \\ -59.4519 & 33.8423 & -29.2250 & -50.8351 & 33.4986 \\ 5.0369 & -7.3203 & 6.4827 & 4.2552 & 1.1720 \\ -69.6696 & 26.6225 & -24.2873 & -52.5011 & 43.3215 \\ -78.1212 & 43.2080 & -36.1045 & -67.7406 & 45.6161 \\ -47.8846 & 14.1278 & -14.4624 & -25.0747 & 23.4207 \\ 23.2761 & -29.8727 & 24.3033 & 29.0143 & -6.7580 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2.8447 & 4.9097 & 2.7284 & -8.1950 \\ 5.8502 & 7.7048 & 4.8306 & -13.6287 \\ -6.2076 & 0.0425 & -2.4733 & 3.3666 \\ 2.6457 & -7.4316 & -1.2777 & 8.7122 \\ 3.2987 & 9.1454 & 4.5670 & -13.5486 \\ 0.4415 & -3.0895 & -0.5360 & 4.5028 \\ 0.5971 & 8.5596 & 3.9570 & -9.9163 \\ 3.3339 & 11.5587 & 5.1053 & -17.3709 \\ -3.6479 & 8.9037 & 2.1551 & -8.4943 \\ -2.3402 & -9.0312 & -2.8835 & 15.4760 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3.7851 & -2.4490 & -1.3470 & 0.1073 & 1.3534 \\ -1.3149 & -3.8162 & -1.0222 & 0.6417 & 1.7047 \\ 26.3835 & -9.7487 & 4.3206 & 4.2889 & 1.5247 \\ 27.8656 & -1.6579 & 6.2372 & 3.2224 & -1.7675 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.8659 & 0.7239 & 1.0133 & -0.0626 & -1.8207 \\ 1.7271 & 1.2535 & 0.3423 & -0.2606 & -2.2910 \\ -3.3403 & 4.9306 & -7.7349 & -2.2930 & -2.6106 \\ -6.5738 & 1.3229 & -7.5243 & -1.1250 & 2.3930 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3.4494 & -5.6545 & -0.6585 & 5.1546 \\ -7.2465 & 13.9467 & 2.3218 & -12.9926 \\ 2.7091 & -2.6992 & 0.2734 & 2.2256 \\ -1.5706 & -0.4293 & -1.0637 & 0.7966 \end{bmatrix}$$

Após a aplicação do algoritmo de decomposição R/S, obteve-se o seguinte conjunto de matrizes do sistema:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1.2566 & 0.2638 & 1.8682 & 0.0376 & -0.0752 \\ -0.4047 & -0.6440 & 2.5655 & 0.4134 & -0.2323 \\ 0.9972 & -0.0832 & 1.3773 & 0.1066 & -0.0717 \\ -2.8594 & -1.1679 & 4.5303 & 2.2399 & 0.4316 \\ 0.8007 & 0.4869 & -4.1041 & 0.0465 & 0.5134 \\ 0.3175 & -2.9634 & -10.7094 & -3.7716 & -1.7834 \\ 3.6293 & -6.9402 & 0.5982 & 1.4666 & 3.6359 \\ -33.4681 & 51.9406 & -14.3070 & -1.7558 & -8.7525 \\ -100.7602 & 129.2163 & -5.2617 & 34.5062 & -4.9278 \\ -161.6317 & 154.7464 & 42.5390 & 25.7017 & -64.9333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.2439 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.8258 & 0.5651 & -0.1459 & 0.0201 & 0.0570 \\ -4.0546 & -2.0164 & 0.1070 & -0.0147 & -0.0418 \\ 1.4222 & 0.3056 & 0.0928 & 0.0120 & 0.0341 \\ -28.6963 & -12.4055 & 5.8033 & -0.5519 & -1.3291 \\ -24.3680 & -23.4295 & 9.2784 & -1.8337 & -1.3873 \\ -54.2513 & -20.1913 & 14.1718 & -1.9898 & -3.6468 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} -0.1826 & -0.0793 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0374 & 0.0089 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0369 & 0.0708 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.7564 & -0.7868 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.2904 & -0.1463 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.3422 & 1.3293 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.6959 & -1.6847 & 0.0000 & 0.0000 \\ 5.7406 & 5.5039 & 0.0000 & 0.0000 \\ -19.5877 & 6.4278 & 0.0088 & 0.2873 \\ -30.5388 & 24.2129 & -3.5676 & 8.2558 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} -18.9280 & -9.7672 & 21.4915 & 4.6013 & -1.0775 \\ -10.6787 & 1.5582 & 23.2873 & -2.5541 & 0.0000 \\ -7.0277 & -3.0901 & 9.4829 & 1.1786 & 0.0000 \\ 7.8542 & 3.4538 & -10.5977 & -1.3174 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 4.2643 & 1.2122 & 0.0000 & 0.0000 \\ 7.1466 & -2.2878 & 0.0000 & 0.0000 \\ -20.3555 & 0.4185 & 0.0000 & 0.0000 \\ -4.9651 & 1.0158 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

São determinadas matrizes ortonormais não singulares de transformação  $X$ ,  $Y$  e  $U$  tais que:

$$A_d = XAX'$$

$$B_d = XBU'$$

$$C_d = YCX'$$

$$D_d = YDU'$$

Note-se que no algoritmo R/S apresentado neste capítulo, não se prevê a utilização de transformações no espaço de saídas  $\mathcal{Y}$ . Na versão desse algoritmo efetivamente implementada, no entanto, faz-se uso de tal transformação para simplificar certas passagens. Pode-se entretanto facilmente verificar que, substituindo-se  $Y$  pela matriz identidade nas relações acima, ainda assim a decomposição resultante da aplicação apenas de  $X$  e  $U$  resultaria em matrizes decompostas com as mesmas propriedades que aquelas acima obtidas.

Para estimar o erro numérico envolvido na decomposição que foi efetivada, calculam-se os máximos erros associados às transformações inversas:

$$e_A = \|A - X'A_dX\|_\infty = 5.6843 \times 10^{-14}$$

$$e_B = \|B - X'B_dU\|_\infty = 8.8818 \times 10^{-15}$$

$$e_C = \|C - Y'C_dX\|_\infty = 8.8818 \times 10^{-15}$$

$$e_D = \|D - Y'D_dU\|_\infty = 6.2172 \times 10^{-15}$$

Extrai-se o subsistema *núcleo regular* do sistema decomposto:

$$A_r = \begin{bmatrix} 1.2566 & 0.2638 & 1.8682 \\ -0.4047 & -0.6440 & 2.5655 \\ 0.9972 & -0.0832 & 1.3773 \end{bmatrix}$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0.0376 & -0.0752 & -0.1826 & -0.0793 \\ 0.4134 & -0.2323 & 0.0374 & 0.0089 \\ 0.1066 & -0.0717 & 0.0369 & 0.0708 \end{bmatrix}$$

$$C_r = \begin{bmatrix} -18.9280 & -9.7672 & 21.4915 \\ -10.6787 & 1.5582 & 23.2873 \\ -7.0277 & -3.0901 & 9.4829 \\ 7.8542 & 3.4538 & -10.5977 \end{bmatrix}$$

$$D_r = \begin{bmatrix} 4.6013 & -1.0775 & 4.2643 & 1.2122 \\ -2.5541 & 0.0000 & 7.1466 & -2.2878 \\ 1.1786 & 0.0000 & -20.3555 & 0.4185 \\ -1.3174 & 0.0000 & -4.9651 & 1.0158 \end{bmatrix}$$

Calculando-se o posto da matriz  $D_r$ , obtém-se:

$$\rho(D_r) = 4$$

o que mostra que a regularização realmente foi efetivada.

Finalmente, determina-se o subsistema de saída prescritível:

$$A_p = \begin{bmatrix} 2.2399 & 0.4316 & 1.2439 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0465 & 0.5134 & 0.8258 & 0.5651 & -0.1459 & 0.0201 & 0.0570 \\ -3.7716 & -1.7834 & -4.0546 & -2.0164 & 0.1070 & -0.0147 & -0.0418 \\ 1.4666 & 3.6359 & 1.4222 & 0.3056 & 0.0928 & 0.0120 & 0.0341 \\ -1.7558 & -8.7525 & -28.6963 & -12.4055 & 5.8033 & -0.5519 & -1.3291 \\ 34.5062 & -4.9278 & -24.3680 & -23.4295 & 9.2784 & -1.8337 & -1.3873 \\ 25.7017 & -64.9333 & -54.2513 & -20.1913 & 14.1718 & -1.9898 & -3.6468 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0088 & 0.2873 \\ -3.5676 & 8.2558 \end{bmatrix}$$

Após a montagem da matriz de controlabilidade do par  $(A_p, B_p)$ , faz-se a verificação de que o posto da mesma é 7. Portanto, o sistema de saída prescritível é efetivamente controlável.

◇

## 4.6 Conclusão

Neste capítulo foi desenvolvido um algoritmo numericamente estável (baseado no algoritmo QR) para a decomposição de um sistema singular em dois subsistemas distintos, o *sistema a saída prescritível* e o *núcleo regular*. O primeiro subsistema tem a propriedade de ter todas as entradas ponderadas com custo zero no problema de regulação ótima, e de ser controlável. Dessa forma, tal subsistema pode gerar sinais arbitrários para serem injetados no segundo subsistema. O segundo subsistema, por sua vez, define um problema de regulação ótima de ordem reduzida *regular*.

A questão do tratamento do problema de regulação ótima quando o sistema está decomposto nesse formato será o tema dos próximos capítulos. O algoritmo aqui desenvolvido será ainda generalizado, nos próximos capítulos, para lidar também com sistemas com parâmetros incertos.



## Capítulo 5

# Rastreamento de Sinais

No capítulo 4, posto um problema de regulação ótima de um sistema dinâmico  $\Sigma$ , foi desenvolvida uma decomposição do sistema em termos da interconexão de dois sub-sistemas,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , respectivamente denominados *núcleo regular* e *subsistema de saída prescritível* de  $\Sigma$ . A característica principal desses sub-sistemas é que o primeiro é excitado por sinais de controle cuja ponderação na função objetivo do problema RO é não-singular. Todos os sinais de controle singularmente ponderados são injetados apenas em  $\Sigma_2$ . Foi anunciado (corolário 4.1) que a particular estrutura com que foi construído  $\Sigma_2$  seria conveniente para possibilitar a síntese, a partir dos sinais de controle não-ponderados desse sub-sistema, de sinais de saída arbitrários para serem injetados em  $\Sigma_1$ . Assim, o problema RO se reduziria à regulação ótima do sub-sistema  $\Sigma_1$ .

A determinação do sinal de entrada para  $\Sigma_2$  que produz um sinal de referência arbitrário na saída do mesmo é o *problema de rastreamento de sinais* no subsistema. Este capítulo tem por objetivo analisar o problema de rastreamento de sinais em sistemas com a estrutura do sub-sistema  $\Sigma_2$ , apresentando as técnicas adequadas para sua solução. Será mostrado que, sob condições de informação completa (isto é, conhecimento dos distúrbios) existe uma solução exata para o problema, o que equivale a um desacoplamento completo dos distúrbios. Na ausência de informação completa, a solução adquire a forma de um quase-desacoplamento de distúrbios (“almost disturbance decoupling”), que aproxima assintoticamente a solução exata através de *ganhos elevados* (“high gains”).

Será visto que a solução do problema de quase-desacoplamento de distúrbios, através do mesmo mecanismo que permite a quase-rejeição de perturbações desconhecidas, irá também possibilitar, de maneira imediata, a rejeição de incertezas paramétricas no modelo do sistema. Serão estudadas especificamente perturbações paramétricas dos tipos *incerteza limitada em norma* e *incerteza politópica*. No caso de sistemas incertos, só haverá soluções do tipo quase-desacoplamento de distúrbios, não sendo possível a síntese de controles do tipo desacoplamento completo de distúrbios nem mesmo sob condições de informação completa.

Ao final do presente capítulo, serão estabelecidas condições suficientes para a existência de leis de controle do tipo ganhos elevados para sistemas com incertezas dos tipos considerados. Atendidas essas condições, serão apresentados algoritmos para o projeto de tais leis de controle.

Tendo em vista suas propriedades de robustez diante de incertezas, tanto nos parâmetros do modelo quanto nos sinais exógenos que são injetados no sistema, a lei de controle do tipo ganhos elevados será a base de toda a sistemática de controle a ser desenvolvida nos

próximos capítulos deste trabalho. A apresentação das leis de controle baseadas em rejeição completa de perturbações neste capítulo tem apenas o objetivo de servir de etapa construtiva para o controle por ganhos elevados.

## 5.1 Problema de Rastreamento de Sinais

O sistema em questão neste capítulo é dado por:

$$\Sigma_s : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \end{bmatrix} w \\ x_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.1)$$

Inicialmente, todos os parâmetros do sistema são supostos precisamente conhecidos. Sobre tal sistema impõem-se as hipóteses:

(H1) a matriz  $\begin{bmatrix} A_{12} & B_{12} \\ A_{22} & B_{22} \end{bmatrix}$  possui posto completo de linhas;

(H2)  $\Sigma_s$  é controlável a partir da entrada  $u_2$ ;

(H3)  $\dim(\mathcal{U}_2) \geq \dim(\mathcal{X}_1)$ ;

(H4) o canal de  $u_2$  para  $x_1$  não apresenta zeros de transmissão.

O sistema com essas hipóteses pertence à classe dos sistemas do tipo *saída prescritível*; ver definição 4.2.

O problema de síntese (rastreamento) de sinais arbitrários na saída  $x_1$  do sistema  $\Sigma_s$  é definido como:

**Definição 5.1 (Rastreamento de Sinal)** *O problema de rastreamento de sinal na saída do sistema  $\Sigma_s$  descrito por (5.1) consiste em determinar um sinal  $u_{sol}$  tal que:*

$$u_2(t) \equiv u_{sol}(t, x, w) \Rightarrow x_1(t) \equiv x_{ref}(t) \quad \forall w(t), u_1(t) \quad (5.2)$$

□

Infelizmente, a solução exata do problema de rastreamento de sinal requer em geral o conhecimento do sinal de perturbação  $w(t)$  para a determinação do sinal de entrada  $u_2(t)$ . Em situação de ausência de informação acerca do sinal de perturbação, é possível o *quase-rastreamento de sinal* pela saída do sistema:

**Definição 5.2 (Quase-Rastreamento de Sinal)** *Dados  $\epsilon > 0$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  e uma norma  $\mathcal{L}_p$ , o problema de quase-rastreamento de sinal pela saída do sistema  $\Sigma_s$  descrito por (5.1) consiste em determinar um sinal  $u_{sol}$  tal que:*

$$u_2(t) \equiv u_{sol}(t, x) \Rightarrow \|x_1(t) - x_{ref}(t)\|_p < \epsilon \quad \forall \|w(t)\|_p < \delta_1, \|u_1(t)\|_p < \delta_2 \quad (5.3)$$

O sistema é dito quase-inversível se for possível o quase-rastreamento de sinal para toda tripla  $(\epsilon, \delta_1, \delta_2)$  com  $\epsilon > 0$ ,  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$ .

□

NOTA 5.1 A solução do problema de rastreamento de sinal pela saída de um sistema corresponde a um controle com desacoplamento completo de distúrbios ("disturbance decoupling"), enquanto o quase-rastreamento corresponde a um controle com quase-desacoplamento de distúrbios ("almost disturbance decoupling"). O rastreamento exato de sinais será implementado, em geral, através de ganhos de controle finitos, quando o mesmo for possível. O quase-rastreamento, por outro lado, quando não recair em um rastreamento exato, necessariamente irá envolver ganhos elevados ("high gains") para uma aproximação assintótica do desacoplamento completo de distúrbios à medida em que  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

◇

Seja pelo mecanismo de rastreamento exato, seja pelo de quase-rastreamento, será visto a seguir que sempre é possível a síntese de sinais arbitrários na saída do sistema  $\Sigma_s$ .

O teorema a seguir é a base dos métodos de rastreamento empregados neste trabalho.

**Teorema 5.1** *Seja um sistema  $\Sigma_s$  conforme definido em (5.1), com as correspondentes hipóteses H1, H2, H3 e H4. Tal sistema pode ser decomposto em uma seqüência de  $r$  sub-sistemas do tipo:*

$$(\Sigma_s)_i : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_a \\ \dot{z}_b \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} R_{aa} & R_{ab} \\ R_{ba} & R_{bb} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} H_{aa} \\ H_{ba} \end{bmatrix}_i [d]_i + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ J_{ba} \end{bmatrix}_i [e]_i + \\ + \begin{bmatrix} L_{aa} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_i [g]_i + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ V_{ba} \end{bmatrix}_i [v]_i + \begin{bmatrix} Q_{aa} \\ Q_{ba} \end{bmatrix}_i w \\ [h]_i = \begin{bmatrix} U_{aa} & U_{ab} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix}_i \end{cases} \quad (5.4)$$

interconectados segundo:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_r \\ \mathcal{Z}_i &= (\mathcal{Z}_a \oplus \mathcal{Z}_b)_i \\ \mathcal{X} &= \mathcal{Z}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{Z}_r \\ [x]_1 &= [h]_1 \\ [g]_i &= [h]_{i+1} \quad \forall i < r \\ \dim([z_a]_r) &= \dim([g]_r) = 0 \\ [d]_1 &= [u]_1 \\ [d]_i &= \begin{bmatrix} [d]_{i-1} \\ [v]_{i-1} \\ [z]_{i-1} \end{bmatrix} \quad \forall i > 1 \\ [e]_i &= [z]_{i+1} \quad \forall i < r \\ [e]_r &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.5)$$

sendo que o posto de linhas de  $(L_{aa})_i$ , de  $(V_{ba})_i$  e de  $\begin{bmatrix} U_{aa} & U_{ab} \end{bmatrix}_i$  é completo para todo  $i$ .  $\square$

DEMONSTRAÇÃO: A prova deste teorema é decorrência imediata do algoritmo de decomposição de níveis, apresentado a seguir.  $\blacksquare$

A partir desse teorema são cunhadas as seguintes definições:

**Definição 5.3 (Nível)** *O  $i$ -ésimo nível de um sistema é definido como o  $i$ -ésimo subsistema da decomposição definida por (5.4) e (5.5).*  $\square$

**Definição 5.4 (Sistema a Controle Completo)** *Um sistema em que a matriz de entradas de controle possui posto completo de linhas é denominado sistema a controle completo.*  $\square$

Claramente, cada nível de um sistema possui a estrutura de *controle completo*.

O teorema 5.1 decompõe o sistema (5.1) em sub-sistemas denominados *níveis*. A interpretação relevante desse teorema é: cada nível é possivelmente diretamente excitado pelas entradas de perturbação ( $w, d, e$ ) e pelas entradas de controle ( $v, g$ ), sendo estas capazes de controlar perfeitamente a saída  $h$ . Parte do vetor de controle de cada nível (a parte equivalente a  $g$ ) corresponde à saída do nível subsequente. O último nível é controlado apenas por entradas pertencentes ao vetor de entradas do sistema original. Assim, é possível uma ação de controle em cascata que irá controlar perfeitamente a saída do primeiro nível. Essa idéia será demonstrada e explorada nas próximas sessões deste capítulo.

NOTA 5.2 Deve-se notar que o número de níveis de um sistema  $\Sigma_s$  corresponde a um mais o grau relativo desse sistema no canal de  $u_2$  para  $x_1$ .  $\diamond$

### 5.1.1 Decomposição em Níveis

A seguir, é apresentado um algoritmo que decompõe o sistema  $\Sigma_s$  em *níveis*, ou *algoritmo DN*.

Seja a matriz  $\tilde{M}$  (definida a seguir) do sistema escrita segundo a notação adotada nos algoritmos de decomposição. Acrescente-se a tal notação a convenção de que um bloco da matriz  $A$  em negrito adjacente a um bloco da matriz  $B$  também em negrito corresponde a um único bloco que, em conjunto, possui posto completo de linhas.

— ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO EM NÍVEIS —

{

**Inicialização:** Inicialmente, tem-se a estrutura definida em (5.1):

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} A & A & \boxed{B} \\ A & A & \boxed{B} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Inicializar o contador de níveis fazendo  $\ell \leftarrow 0$ .

**Enquanto** o posto de linhas de  $B_{11}$  for incompleto **Faça**

{

**Passo 1:** Incrementar o contador de níveis:  $\ell \leftarrow \ell + 1$ .

**Passo 2:** Uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}_1$  faz surgir um bloco nulo concentrando a deficiência de posto de linhas do bloco  $B_{11}$  acima. Como consequência do posto completo de linhas de  $\tilde{M}$ , diante desse bloco nulo surge um bloco na matriz  $A$  com posto completo de linhas:

$$\begin{bmatrix} A & A & A & \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \\ A & A & A & B \\ A & A & A & B \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

**Passo 3:** Tomando a estrutura assim obtida:

$$\begin{bmatrix} A & A & \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \\ A & A & A & B \\ A & A & A & B \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

procede-se agora a mudanças de coordenadas em  $\mathcal{X}_1$  e em  $\mathcal{U}$ , com o propósito de revelar o posto de colunas dos blocos  $A_{13}$  e  $B_{21}$ :

$$\begin{bmatrix} A & A & \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & A \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \\ A & A & A & B \\ A & A & A & B \\ A & A & A & B \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Como consequência do posto completo de linhas de  $\tilde{M}$ , tem-se que as matrizes  $\begin{bmatrix} A_{34} & B_{31} \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} A_{44} & B_{41} \end{bmatrix}$  possuem ambas posto de linhas completo.

**Passo 4:** Redefinir o sistema, fazendo:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} A_{33} & A_{34} & B_{31} \\ A_{43} & A_{44} & B_{41} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

}

}

— FIM DO ALGORITMO DN —

O  $i$ -ésimo nível de um sistema é dado pelo subespaço  $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$  após o passo 3 do algoritmo de decomposição em níveis para  $\ell = i$  com  $i < r$ . O último nível do sistema, de número  $\ell = r$ , é obtido após o final do algoritmo como o subespaço  $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$  resultante. Os sinais de entrada de controle do  $i$ -ésimo nível de um sistema são dados por  $g_i = x_3$  e  $v_i = u_2$  após o passo 3 do algoritmo de decomposição em níveis, para  $\ell = i$  com  $i < r$ . Os sinais de entrada de controle do nível  $\ell = r$  são dados por  $v_r = u_1$  do sistema resultante após o fim do algoritmo.

NOTA 5.3 Por inspeção pode-se verificar que o algoritmo DN é válido para todo sistema da forma (5.1). Assim, a exposição do algoritmo serve como demonstração do teorema 5.1.  $\diamond$

NOTA 5.4 Caso o sistema  $\Sigma_s$  a ser decomposto em níveis seja o sub-sistema  $\Sigma_2$  proveniente da decomposição R/S, não é necessária a aplicação do algoritmo acima, uma vez que a decomposição em níveis já se encontra pronta, como subproduto da decomposição R/S.  $\diamond$

EXEMPLO 5.1 Para exemplificar a estrutura obtida ao final do algoritmo de decomposição em níveis, é mostrado abaixo um sistema cuja decomposição terminou no terceiro nível:

$$\begin{bmatrix} A & A & \mathbf{A} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & A & A & A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ A & A & A & A & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & B \\ A & A & A & A & A & A & \mathbf{0} & \mathbf{B} & B \\ A & A & A & A & A & A & \mathbf{B} & B & B \\ A & A & A & A & A & A & \mathbf{B} & B & B \end{bmatrix}$$

O nível 1 é composto dos subespaços  $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ . O nível 2, dos subespaços  $\mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4$ . O nível 3, dos subespaços  $\mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6$ . Os sinais de entrada de controle dos níveis são respectivamente constituídos pelos subespaços  $\mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{U}_3$  (nível 1),  $\mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{U}_2$  (nível 2) e  $\mathcal{U}_1$  (nível 3).  $\diamond$

## 5.2 Sistemas Conhecidos: Rastreamento Exato

A decomposição de um sistema em níveis é feita com o objetivo de evidenciar a estrutura de um algoritmo de controle que permita, a partir das entradas de controle, fazer com que a saída do sistema faça o rastreamento de sinais arbitrários (inversão do sistema). Uma vez decomposto, o sistema passa a ser formado por blocos que têm a mesma estrutura e que são conectados em cascata, de maneira que o problema de inversão do sistema pode ser decomposto em uma seqüência de problemas de inversão de sistemas menores, cada um com a tal estrutura.

Essa estrutura comum aos blocos elementares (níveis) do sistema leva a versões diferentes de algoritmos de inversão, segundo se assuma que os sinais de entrada são todos conhecidos ou não. Nesta seção será admitido que o vetor de distúrbios  $w(t)$  é conhecido, bem como o vetor de entradas de controle não singulares (neste capítulo considerado um vetor de entradas determinísticas)  $u_1(t)$ . Nesta situação, os blocos elementares de sistema (níveis) possuem a estrutura de *controle completo e informação completa*, definida a seguir.

**Definição 5.5 (Sistema CCIC)** O sistema com controle completo e informação completa, ou sistema CCIC, é definido como o sistema descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Hd \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{5.11}$$

As matrizes acima possuem dimensões compatíveis. Nesse sistema:

- i.  $u(t)$  corresponde a um vetor de entradas de controle arbitrariamente sintetizáveis;
- ii.  $d(t)$  corresponde a um vetor de perturbações conhecidas;
- iii.  $B$  e  $C$  possuem ambas posto completo de linhas.

□

Nesta seção, inicialmente é resolvido o problema de inversão do sistema CCIC. Considerando que o sistema  $\Sigma_s$  definido por (5.1) encontra-se decomposto em níveis, cada um com a estrutura de um sistema CCIC, a solução do problema de inversão é deduzida a seguir para cada nível do sistema.

**Teorema 5.2** *Considere-se um sistema CCIC, conforme definido em (5.11). Seja  $B^{-R}$  uma inversa à direita arbitrariamente escolhida da matriz  $B$ . Assuma-se que exista uma matriz  $C^{-R}$ , inversa à direita de  $C$ , tal que  $C^{-R}y_{ref}(0) = x(0)$ . Dado um sinal  $y_{ref}(t)$ , considere-se o sinal descrito por:*

$$u_{ref}(t) = B^{-R} \left( C^{-R} \dot{y}_{ref}(t) - AC^{-R}y_{ref}(t) - Hd(t) \right) \quad (5.12)$$

Então:

- i.  $u(t) = u_{ref}(t)$  dado por (5.12) produz o rastreamento exato do sinal  $y_{ref}(t)$  pelo sinal  $y(t)$ , isto é:

$$y(t) - y_{ref}(t) \equiv \mathbf{0} \quad \forall t > 0 \quad (5.13)$$

com a rejeição completa dos distúrbios  $d(t)$ .

- ii. Se  $y_{ref}(t)$  e  $d(t)$  são sinais absolutamente contínuos continuamente diferenciáveis (isto é,  $y_{ref}(t), d(t) \in \mathcal{C}^\infty$ ) então  $u_{ref} \in \mathcal{C}^\infty$ .

□

**DEMONSTRAÇÃO:** O fato de  $u_{ref} \in \mathcal{C}^\infty$  é decorrente do espaço  $\mathcal{C}^\infty$  ser fechado sob as operações de integração e diferenciação. A demonstração da rejeição completa de distúrbios é questão de mera substituição da lei de controle na equação do sistema. Observe-se que a existência de pelo menos uma inversa à direita para as matrizes  $B$  e  $C$  é garantida pela hipótese de posto completo de linhas. ■

**NOTA 5.5** O rastreamento de estados corresponde ao caso particular do teorema 5.2 em que  $C = \mathbf{I}$ , não exigindo nenhuma hipótese adicional.

◇

Com base nesse teorema, os corolários a seguir apresentam a síntese de sinais de controle para o rastreamento de sinais de referência pela saída de um sistema decomposto em níveis. O corolário 5.1 apenas transpõe o teorema para o  $i$ -ésimo nível de um sistema. O corolário 5.2 faz a composição dos níveis, possibilitando o rastreamento de um sinal pela saída do sistema original.

**Corolário 5.1** *Seja o sistema  $\Sigma_s$  decomposto em seus níveis  $(\Sigma_s)_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , conforme definido em (5.1), (5.4) e (5.5). Considerando o  $i$ -ésimo nível, seja dado o sinal de referência  $h_i^{ref}$ . Assuma-se que:*

$$h_i^{ref}, d_i, e_i, w \in \mathcal{C}^\infty \quad (5.14)$$

e que  $\left[ \begin{array}{cc} U_{aa} & U_{ab} \end{array} \right]_i^{-R} h_i^{ref}(0) = z_i(0)$ . Então a lei de controle:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} g_i^{ref} \\ v_i^{ref} \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{cc} L_{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & V_{ba} \end{array} \right]_i^{-R} \left( \left[ \begin{array}{cc} U_{aa} & U_{ab} \end{array} \right]_i^{-R} h_i^{ref} - \right. \\ &\quad \left. \left[ \begin{array}{cc} R_{aa} & R_{ab} \\ R_{ba} & R_{bb} \end{array} \right]_i \left[ \begin{array}{cc} U_{aa} & U_{ab} \end{array} \right]_i^{-R} h_i^{ref} - \left[ \begin{array}{ccc} H_{aa} & \mathbf{0} & Q_{aa} \\ H_{ba} & J_{ba} & Q_{ba} \end{array} \right]_i \left[ \begin{array}{c} d_i \\ e_i \\ w \end{array} \right] \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

faz a saída  $h_i(t)$  rastrear exatamente o sinal de referência  $h_i^{ref}(t)$ , ou seja:

$$h_i(t) - h_i^{ref}(t) \equiv \mathbf{0} \quad \forall t > 0 \quad (5.16)$$

Além disso,  $g_i^{ref}$  e  $v_i^{ref}$  pertencem a  $\mathcal{C}^\infty$ .

□

**Corolário 5.2** *Seja o sistema  $\Sigma_s$  decomposto em seus níveis  $(\Sigma_s)_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , conforme definido em (5.1), (5.4) e (5.5). Então, dado um sinal  $x_1^{ref}$  tal que  $x_1(0) = x_1^{ref}(0)$ :*

i. *Existe um sinal  $u^{ref}$  que produz o rastreamento exato de  $x_1^{ref}(t)$  por  $x_1(t)$ , isto é:*

$$x_1(t) - x_1^{ref}(t) \equiv \mathbf{0} \quad \forall t > 0 \quad (5.17)$$

Tal sinal  $u^{ref}$  corresponde a uma transformação de coordenadas do vetor  $v^{ref}$  composto dos sub-vetores  $v_1^{ref}, \dots, v_r^{ref}$ , dados por (5.15) e pela lei de interconexão (5.5) acrescida de:

$$\begin{aligned} h_1^{ref} &= x_1^{ref} \\ h_{i+1}^{ref} &= g_i^{ref} \end{aligned} \quad (5.18)$$

ii. *Se  $(x_1^{ref}, w(t), u_1(t)) \in \mathcal{C}^\infty$  então  $u^{ref} \in \mathcal{C}^\infty$ .*

□

**DEMONSTRAÇÃO:** O fato adicional a ser demonstrado neste corolário é a preservação de  $u^{ref}$  no espaço  $\mathcal{C}^\infty$ . Tal fato decorre imediatamente de todos os sinais injetados em cada sub-sistema pertencerem a tal espaço e gerarem saídas no mesmo, e do fato desse espaço ser fechado sob diferenciação e integração.

■

### 5.3 Sistemas Conhecidos: Rastreamento Assintótico

O rastreamento exato de sinais desenvolvido na seção anterior pressupunha sempre a igualdade inicial entre o vetor de referência e o correspondente vetor controlado. A ausência dessa condição inicial, mantida uma restrição de que o sinal de controle  $u(t)$  pertença a  $\mathcal{C}^\infty$ , irá implicar na impossibilidade de rastreamento exato. Nesta seção serão estudadas então técnicas para garantir o rastreamento ao menos assintótico, nessas condições, ainda para sistemas do tipo CCIC.

**Lema 5.1** *Considere-se um sistema CCIC, conforme definido em (5.11). Seja dado um sinal  $y_{ref}(t)$ . Considere-se o sinal descrito por:*

$$u_{ref}(t) = B^{-R} \left( C^{-R} \dot{y}_{ref}(t) - AC^{-R} y_{ref}(t) - Hd(t) \right) \quad (5.19)$$

sendo  $B^{-R}$  e  $C^{-R}$  inversas à direita arbitrariamente escolhidas para  $B$  e  $C$ . Assuma-se que  $y(0) \neq y_{ref}(0)$ , e que a matriz  $A$  possua todos os autovalores com parte real estritamente negativa. Defina-se  $x_{ref}(t) \triangleq C^{-R} y_{ref}(t)$ . Então:

- i.  $u(t) = u_{ref}(t)$  dado por (5.19) produz o rastreamento assintótico do sinal  $y_{ref}(t)$  pelo sinal  $y(t)$ , isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_{ref}(t)) = 0 \quad (5.20)$$

- ii. A dinâmica do erro de rastreamento  $e_x(t) \triangleq x(t) - x_{ref}(t)$  e  $e_y(t) \triangleq y(t) - y_{ref}(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= Ae_x(t) \\ e_y(t) &= Ce_x(t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

- iii. Se  $d(t) \in \mathcal{C}^\infty$  então  $u_{ref}(t) \in \mathcal{C}^\infty$ .

□

DEMONSTRAÇÃO: O item (ii) vem por substituição direta de (5.19) na equação do sistema. De (ii) e da hipótese de que  $A$  possui autovalores com parte real estritamente negativa decorre o item (i). O item (iii) é consequência de  $\mathcal{C}^\infty$  ser fechado sob as operações de integração e diferenciação. ■

Evidentemente, é possível modificar a maneira como o erro de rastreamento converge para zero, através de modificações na entrada  $u(t)$ . Uma possível maneira de se alterar a convergência do sinal controlado para o sinal de referência seria a substituição do sinal de referência original  $x_{ref}(t)$  por um outro sinal de referência  $x_{ras}(t)$  o qual seria igual ao vetor controlado no instante  $t = 0$  e se aproximaria do sinal de referência original após esse instante. Outra possibilidade seria introduzir uma realimentação do erro, alterando a dinâmica do mesmo. Essas possibilidades são examinadas nos lemas a seguir.

**Lema 5.2 (Rastreamento por sinal de referência)** *Considere-se um sistema CCIC, conforme definido em (5.11). Sejam  $C^{-R}$  e  $B^{-R}$  inversas à direita arbitrariamente escolhidas para as matrizes  $C$  e  $B$ . Seja dado um sinal  $y_{ref}(t)$ . Defina-se  $x_{ref}(t) \triangleq C^{-R} y_{ref}(t)$ . Assuma-se que  $x(0) \neq x_{ref}(0)$ . Considere-se o sinal descrito por:*

$$u_{ras}(t) = B^{-R} \left( C^{-R} \dot{y}_{ras}(t) - AC^{-R} y_{ras}(t) - Hd(t) \right) \quad (5.22)$$

sendo  $y_{ras}(t)$  uma função qualquer no espaço  $\mathcal{C}^\infty$  tal que:

$$\begin{aligned} C^{-R}y_{ras}(0) &= x_{ras}(0) = x(0) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (x_{ras}(t) - x_{ref}(t)) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Então:

i.  $u(t) = u_{ras}(t)$  dado por (5.22) produz o rastreamento assintótico do sinal  $y_{ref}(t)$  pelo sinal  $y(t)$ , isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_{ref}(t)) = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

ii. A função erro de rastreamento  $e_x(t) \triangleq x(t) - x_{ref}(t)$  é dada por:

$$e_x(t) = x_{ras}(t) - x_{ref}(t) \quad (5.25)$$

iii.  $d(t) \in \mathcal{C}^\infty$  implica em  $u_{ref}(t) \in \mathcal{C}^\infty$ .

□

**Lema 5.3 (Rastreamento por realimentação de erro)** Considere-se um sistema CC-IC, conforme definido em (5.11). Sejam  $C^{-R}$  e  $B^{-R}$  inversas à direita arbitrariamente escolhidas para as matrizes  $C$  e  $B$ . Seja dado um sinal  $y_{ref}(t)$ . Defina-se  $x_{ref}(t) \triangleq C^{-R}y_{ref}(t)$ . Assuma-se que  $x(0) \neq x_{ref}(0)$ . Considere-se o sinal descrito por:

$$u_{fbk}(t) = B^{-R} \left( C^{-R}\dot{y}_{ref}(t) - AC^{-R}y_{ref}(t) - Hd(t) \right) + K \left( x(t) - C^{-R}y_{ref}(t) \right) \quad (5.26)$$

Então:

i. Se os autovalores de  $(A+BK)$  possuem parte real estritamente negativa, então o sinal  $u(t) = u_{fbk}(t)$  dado por (5.26) produz o rastreamento assintótico do sinal  $y_{ref}(t)$  pelo sinal  $y(t)$ , isto é:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y_{ref}(t)) = \mathbf{0} \quad (5.27)$$

A dinâmica do erro de rastreamento  $e_x(t) \triangleq x(t) - x_{ref}(t)$  é dada por:

$$\dot{e}_x(t) = (A+BK)e_x(t) \quad (5.28)$$

ii.  $(d(t), y_{ref}(t)) \in \mathcal{C}^\infty$  implica em  $u_{fbk}(t) \in \mathcal{C}^\infty$ .

□

NOTA 5.6 Claramente, o método de controle mostrado no lema 5.3 não é mais que um caso particular do método do lema 5.2.

◇

NOTA 5.7 Tanto a ação de controle prescrita no lema 5.2 quanto aquela prescrita no lema 5.3 não podem realizar a rejeição instantânea do erro de condição inicial, caso haja a restrição de que o sinal de controle  $u(t)$  permaneça no espaço  $\mathcal{C}^\infty$ .

◇

### 5.3.1 Rastreamento Instantâneo

Tendo em vista a observação contida na Nota 5.7, é apresentada nesta subseção uma maneira de se implementar o rastreamento instantâneo de sinais de referência, sob condição de erro no estado inicial. Para tanto, é necessário admitir que o sinal de entrada  $u(t)$  esteja contido num espaço que, contendo o espaço anterior  $\mathcal{C}^\infty$ , seja ainda completo (*espaço de Banach*) sob a norma  $\mathcal{L}_\infty$  e fechado sob as operações de integração e diferenciação.

Esse espaço, que será denominado *espaço das distribuições* (ver [48, 126, 125]),  $\mathbb{D}$ , deve conter, portanto, funções descontínuas (as quais são limites de seqüências de funções contínuas e devem pertencer ao espaço, por ser este completo). Por ser fechado sob a derivação, o espaço  $\mathbb{D}$  contém também a função  $\delta(t)$  (delta de Dirac), que é a derivada de uma função descontínua, bem como suas derivadas de ordem superior. Como consequência de ser fechado sob integração,  $\mathbb{D}$  contém ainda funções contínuas com derivadas descontínuas.

**Lema 5.4 (Rastreamento Instantâneo: Controle Impulsivo)** *Considere-se um sistema CCIC, conforme definido em (5.11). Sejam  $C^{-R}$  e  $B^{-R}$  inversas à direita arbitrariamente escolhidas para as matrizes  $C$  e  $B$ . Seja dado um sinal  $y_{ref}(t)$ . Defina-se  $x_{ref}(t) \triangleq C^{-R}y_{ref}(t)$ . Assuma-se que  $x(0) \neq x_{ref}(0)$ . Considere-se  $u(t)$  um vetor de entradas de controle arbitrariamente sintetizáveis no espaço  $\mathbb{D}$  e  $d(t)$  um vetor de perturbações conhecidas, também em  $\mathbb{D}$ . Considere-se o sinal descrito por:*

$$u_{ras}(t) = B^{-R} \left( C^{-R}\dot{y}_{ras}(t) - AC^{-R}y_{ras}(t) - Hd(t) \right) \quad (5.29)$$

sendo  $y_{ras}(t) \in \mathbb{D}$  uma função tal que:

$$\begin{aligned} C^{-R}y_{ras}(0) &= x_{ras}(0) = x(0) \\ x_{ras}(t) - x_{ref}(t) &= \mathbf{0} \quad \forall t > 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Então:

i.  $u(t) = u_{ras}(t)$  dado por (5.29) produz o rastreamento instantâneo do sinal  $y_{ref}(t)$  pelo sinal  $y(t)$ , isto é:

$$y(t) - y_{ref}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t > 0 \quad (5.31)$$

ii.  $u_{ras}(t)$  pode ser explicitamente formulada como:

$$u_{ras}(t) = B^{-R} \left( C^{-R}\dot{y}_{ref}(t) - AC^{-R}y_{ref}(t) - Hd(t) - \delta(t)A(x(t) - C^{-R}y_{ref}(t)) \right) \quad (5.32)$$

sendo tal expressão a única solução de (5.29), (5.30).

□

Devido à unicidade de todos os sinais no lema 5.4, é possível ainda inferir diretamente a consequência da aplicação da técnica apresentada no lema 5.3, no limite em que os pólos do sistema são alocados em menos infinito (um sistema que leva o erro para zero em um tempo arbitrariamente pequeno). Como é possível construir uma seqüência de Cauchy de ganhos  $K$  como rota para esse limite, os sinais resultantes deverão ser necessariamente iguais aos do lema 5.4. Esse raciocínio é formalizado no lema a seguir:

**Lema 5.5 (Rastreamento Instantâneo: Ganhos Elevados)** *Considere-se um sistema CCIC, conforme definido em (5.11). Sejam  $C^{-R}$  e  $B^{-R}$  inversas à direita arbitrariamente escolhidas para as matrizes  $C$  e  $B$ . Seja dado um sinal  $y_{ref}(t)$ . Defina-se  $x_{ref}(t) \triangleq C^{-R}y_{ref}(t)$ . Assuma-se que  $x(0) \neq x_{ref}(0)$ . Considere-se  $u(t)$  um vetor de entradas de controle arbitrariamente sintetizáveis no espaço  $\mathbb{D}$  e  $d(t)$  um vetor de perturbações conhecidas, também em  $\mathbb{D}$ . Considere-se o sinal descrito por:*

$$u_{fbk}(t, \epsilon) = B^{-R} \left( C^{-R} \dot{y}_{ref}(t) - AC^{-R}y_{ref}(t) - Hd(t) \right) + \frac{K}{\epsilon} \left( x(t) - C^{-R}y_{ref}(t) \right) \quad (5.33)$$

sendo  $K$  qualquer matriz tal que os autovalores de  $BK$  sejam todos providos de parte real estritamente negativa, ou seja,  $\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_-$ . Seja  $u_{fbk}^*(t)$  o sinal dado por:

$$u_{fbk}^*(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_{fbk}(t, \epsilon) \quad (5.34)$$

Então:

- i.  $u(t) = u_{fbk}^*(t)$  dado por (5.33) produz o rastreamento instantâneo do sinal  $y_{ref}(t)$  pelo sinal  $y(t)$ , isto é:

$$y(t) - y_{ref}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t > 0 \quad (5.35)$$

- ii. A expressão de  $u_{fbk}^*(t)$  é dada unicamente por:

$$u_{fbk}^*(t) = B^{-R} \left( C^{-R} \dot{y}_{ref}(t) - AC^{-R}y_{ref}(t) - Hd(t) - \delta(t)A(x(t) - C^{-R}y_{ref}(t)) \right) \quad (5.36)$$

□

NOTA 5.8 O resultado apresentado no lema 5.5 é consideravelmente mais forte que aquele apresentado no lema 5.3, uma vez que agora a escolha da matriz  $K$  depende apenas de conhecimento a respeito da matriz  $B$ . Além disso, qualquer escolha de  $K$  tal que  $BK$  possua autovalores com parte real estritamente negativa conduz ao mesmo resultado, mesmo para escolhas completamente diferentes.

◇

## 5.4 Sistemas Incertos: Quase-Rastreamento

Até este ponto foi considerado apenas o problema do rastreamento de sinais de referência para sistemas com parâmetros precisamente conhecidos e com entradas de perturbação conhecidas. Nesta seção passam a ser abordados sistemas com entradas desconhecidas. Como o tratamento de incerteza de sinais não é diferente, no atual contexto, do tratamento de incertezas de modelo, o estudo a seguir não irá analisar em separado essas classes de incertezas.

A seguir é definido então o *sistema incerto com controle completo e realimentação de estados*, ou sistema ICCRE, que corresponde genericamente à estrutura de cada nível de um sistema  $\Sigma_s$  após a decomposição em níveis, quando se admitem incertezas paramétricas e sinais desconhecidos no sistema original.

**Definição 5.6 (Sistema ICCRE)** O sistema incerto com controle completo e realimentação de estados, ou sistema ICCRE, é definido como o sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Hd \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{5.37}$$

sendo compatíveis as dimensões das matrizes. Nesse sistema:

- i. É conhecida apenas a matriz  $C$  do sistema.
- ii.  $C$  possui posto completo de linhas.
- iii. As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $H$  são supostas desconhecidas, porém pertencentes a um conjunto limitado conhecido  $\mathcal{U}$ :

$$(A, B, H) \in \mathcal{U}\tag{5.38}$$

- iv.  $B$  não é deficiente em posto de linhas para nenhuma instância de  $B \in \mathcal{U}$ .
- v. O sinal  $u(t)$  é um vetor de entradas de controle arbitrariamente sintetizáveis no espaço  $\mathbb{D}$ .
- vi. O vetor de estados  $x(t)$  é suposto conhecido.
- vii. O vetor de perturbações  $d(t)$  pertence ao espaço  $\mathbb{D}$  e é suposto desconhecido, porém limitado em norma  $\mathcal{L}_\infty$ , ou seja:

$$\|d(t)\|_\infty \leq \gamma\tag{5.39}$$

para algum  $\gamma$  finito.

□

**Teorema 5.3** Considere-se um sistema ICCRE, conforme a definição 5.6. Seja um sinal  $y_{ref}(t) \in \mathcal{C}^\infty$  com norma  $\mathcal{L}_\infty$  limitada. Seja  $C^{-R}$  uma inversa à direita arbitrariamente escolhida para  $C$ . Defina-se  $x_{ref}(t) \triangleq C^{-R}y_{ref}(t)$ . Assuma-se que exista uma matriz  $K$  tal que os autovalores de  $BK$  sejam todos providos de parte real estritamente negativa para toda instância de  $B \in \mathcal{U}$ , ou seja,  $\varsigma(BK) \subset \mathcal{C}_- \quad \forall B \in \mathcal{U}$ . Considere-se o sinal descrito por:

$$u_{ps}(t, \epsilon) = \frac{K}{\epsilon} \left( x(t) - C^{-R}y_{ref}(t) \right)\tag{5.40}$$

Seja  $u_{ps}^*(t)$  o sinal dado por:

$$u_{ps}^*(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u_{ps}(t, \epsilon)\tag{5.41}$$

Então:

- i.  $u(t) = u_{ps}^*(t)$  produz o rastreamento instantâneo do sinal  $y_{ref}(t)$  pelo sinal  $y(t)$ , isto é:

$$y(t) - y_{ref}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t > 0\tag{5.42}$$

- ii. A expressão de  $u_{ps}^*(t)$  é dada unicamente por:

$$u_{ps}^*(t) = B^{-R} \left( C^{-R}\dot{y}_{ref}(t) - AC^{-R}y_{ref}(t) - Hd(t) - \delta(t)A(x(t) - C^{-R}y_{ref}(t)) \right)\tag{5.43}$$



□

DEMONSTRAÇÃO: A substituição de  $u_{ps}^*(t)$  na equação do sistema conduz a:

$$\dot{x} = \left( A + B \frac{K}{\epsilon} \right) x - B \frac{K}{\epsilon} x_{ref} + Hd$$

o que, por dominância para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, leva a:

$$\dot{x} \approx B \frac{K}{\epsilon} x - B \frac{K}{\epsilon} x_{ref}$$

que é, para todo  $\epsilon$  suficientemente pequeno, um sistema dinâmico estável, devido à hipótese de autovalores estritamente negativos da matriz  $BK$ . No limite em que  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , tem-se que:

$$BK(x - x_{ref}) = 0$$

Como todos os sinais do sistema (em particular também  $x(t)$ ) estão contidos em  $\mathbb{D}$  (espaço de Banach), então o limite acima existe e é também estável. Novamente com a hipótese de autovalores com parte real estritamente negativa para a matriz  $BK$ , tem-se que o espaço nulo dessa matriz é apenas a origem do espaço de estados, de onde:

$$x = x_{ref} \quad \forall t > 0$$

A expressão explícita do sinal  $u_{ps}^*(t)$  é decorrência da equivalência da solução neste caso com a solução do caso CCIC. ■

NOTA 5.9 Uma conseqüência da expressão explícita do sinal  $u_{ps}^*(t)$  fornecida pelo teorema 5.3 é que, caso haja incerteza apenas em  $A$ , ou apenas em  $B$ , ou apenas em  $H$ , ou ainda apenas em  $d(t)$ , sendo as demais três incógnitas conhecidas, é possível determinar também a quarta incógnita, como subproduto da síntese da lei de controle (5.40). Observe-se que a síntese desse controle em si não depende de nenhuma dessas incógnitas, sendo baseada apenas no conhecimento do vetor de estados. ◇

A contrapartida do teorema 5.3 pode ser estabelecida como:

**Lema 5.6** *Considere-se um sistema ICCRE, conforme a definição 5.6. Assuma-se que não existe nenhuma matriz  $K$  tal que os autovalores de  $BK$  sejam todos providos de parte real estritamente negativa para toda instância de  $B \in \mathcal{U}$ , ou seja,  $\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall B \in \mathcal{U}$ . Nesse caso, não existe nenhuma lei de controle do tipo ganhos elevados que estabiliza o sistema para toda instância de  $B \in \mathcal{U}$ .* □

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração decorre do fato de que os autovalores do sistema em malha fechada, para tal classe de controladores, serão iguais aos autovalores da matriz  $BK$  divididos por uma constante pequena positiva. Como sempre haverá autovalores com parte real nula ou positiva, o sistema não pode ser estabilizado dessa forma. ■

O exemplo a seguir ilustra o caso em que um sistema não é estabilizável por meio de ganhos elevados.

EXEMPLO 5.2 Considere-se um sistema com estrutura controle completo escalar:

$$\dot{x} = ax + bu$$

Nesse sistema,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Seja  $b_1 \leq b \leq b_2$ . Seja também  $a = -1$ . O estudo da estabilizabilidade desse sistema via ganhos elevados corresponde ao estudo do sistema em malha fechada:

$$u = \frac{k}{\epsilon} x$$

$$\therefore \dot{x} = \left( a + \frac{bk}{\epsilon} \right) x$$

para  $\epsilon \rightarrow 0$ . O autovalor  $\lambda$  da "matriz" dinâmica tende, para  $\epsilon$  pequeno, ao valor

$$\lambda = \frac{bk}{\epsilon}$$

Assim, a malha fechada será estável, sob ganhos elevados, para  $bk < 0$ . Se  $b_1 > 0$  tem-se que:

$$k < 0 \Rightarrow bk < 0 \quad \forall b \in [b_1, b_2]$$

Se  $b_2 < 0$ , correspondentemente tem-se que:

$$k > 0 \Rightarrow bk < 0 \quad \forall b \in [b_1, b_2]$$

No entanto, se  $b_1 < 0$  e  $b_2 > 0$ , tem-se que:

$$\text{sign}(b_1 k) = -\text{sign}(b_2 k) \quad \forall k \neq 0$$

Nesse último caso, o sistema não é estabilizável por ganhos elevados, pois necessariamente haverá, para todo  $k$  que se escolha, alguma instância da matriz incerta  $b$  para a qual a dinâmica de malha fechada terá autovalor positivo.

Esse último sistema, no entanto, é estabilizável para realimentação por ganhos finitos. Considere-se:

$$u = kx$$

de forma que:

$$\dot{x} = (-1 + bk)x$$

Seja  $b_{max} = \max(|b_1|, |b_2|)$ . Tomando-se:

$$|k| < \frac{1}{b_{max}}$$

tem-se que  $(-1 + bk)$  será sempre negativo, e o sistema preservará sua estabilidade qualquer que seja a instância assumida por  $b$  dentro do conjunto de incertezas admissíveis.

◇

## 5.5 Conclusão

Neste capítulo foi estudada a questão da geração de sinais de controle que permitissem o rastreamento de sinais na saída do *subsistema de saída prescritível*. Para tal estudo, esse subsistema foi inicialmente decomposto em uma seqüência de sistemas interconectados (os seus *níveis*), cada um com estrutura de *controle completo*.

Foi especificamente apresentada a decomposição (5.4) para sistemas com estrutura do tipo (5.1). Tal decomposição (a *decomposição em níveis*) permite escrever o sistema como

uma seqüência de subsistemas conectados em cascata (níveis). Cada nível é controlado pelo nível subsequente, e o último nível é controlado pelo vetor de entradas do sistema. Dessa forma, o problema de controle da saída do sistema se reduz a uma seqüência de problemas de controle dos subsistemas.

Foram examinadas diversas estratégias para a realização do rastreamento de sinais na saída de sistemas com estrutura de *controle completo*, sob diversas condições de disponibilidade de informação a respeito dos parâmetros do sistema e a respeito dos sinais de perturbação nele injetados. Foi apresentada uma família de soluções para o problema de rastreamento de sinais de referência arbitrários pela saída de sistemas do tipo (5.4), ou seja, subsistemas correspondentes aos *níveis* do sistema (5.1). Sob condições de informação completa (conhecimento dos sinais de distúrbios) e de modelo perfeito (ausência de incertezas), mostrou-se que é possível o rastreamento exato da referência (soluções (5.12), (5.29) e (5.34)). Em condições de incerteza de modelo e presença de perturbações desconhecidas, mostrou-se que ainda é possível o quase-rastreamento do sinal de referência (solução (5.41)).

Mostrou-se que a lei de controle do tipo *ganhos elevados* é adequada para a realização do rastreamento de saída nos sistemas com estrutura de *controle completo* em que o controlador, para sintetizar o sinal de controle, não possui acesso nem aos sinais exógenos de perturbação nem ao modelo exato das equações dinâmicas do próprio sistema. Essa situação corresponde bem às condições encontradas na maioria das situações de controle de plantas reais. Em contraste, as premissas de conhecimento perfeito de todos os sinais de perturbação injetados no sistema e do modelo exato do sistema são aproximadamente válidas, na prática, apenas para uma classe bastante restrita de casos.

Dessa forma, em virtude de suas propriedades de robustez que o qualificam para controlar uma ampla variedade de sistemas, o controlador do tipo ganhos elevados será adotado neste trabalho. Tal controlador será a base da síntese de leis de controle que executarão a etapa de quase-rastreamento de sinais, dentro do esquema do regulador ótimo singular delineado no capítulo 4.

No capítulo 6, analisam-se as condições de existência dos controladores tipo ganhos elevados, como função das incertezas presentes no modelo. Estabelecida a existência de tais controladores, é apresentada ainda uma metodologia para determinação dos mesmos.

No capítulo 7, a condição de existência de controladores tipo ganhos elevados servirá como critério para a construção de algoritmos de decomposição regular/singular para sistemas incertos. Essencialmente, será feita a decomposição em um subsistema para o qual existe o controle tipo ganhos elevados, e outro subsistema para o qual tal controle não existe.

No capítulo 8, será feita a interligação do subsistema de saída prescritível (o qual será sujeito a um rastreamento de saída, através do controle modos deslizantes) com o subsistema núcleo regular, sobre o qual será aplicada uma lei de regulação ótima da saída (sintetizada com a utilização das saídas do outro subsistema). Dessa forma, estará resolvido o problema de regulação ótima de sistemas dinâmicos incertos que este trabalho se propôs a tratar.

O controlador do tipo *ganhos elevados* exerce portanto um papel central na abordagem aqui delineada, sendo a base de todo o desenvolvimento a ser feito nos capítulos 6, 7 e 8, o qual permitirá resolver o *problema de regulação ótima* de sistemas com parâmetros incertos.

Na parte III, será abordada a questão da implementabilidade física do controlador ganhos elevados. Será proposta uma estrutura de controle por modos deslizantes como alternativa para realização do controlador ganhos elevados.

As diversas alternativas de rastreamento exato de sinal diferentes da solução *ganhos elevados* que foram examinadas neste capítulo não serão mais abordadas, em vista de sua

provável fragilidade diante de eventuais imperfeições de informação.

O controlador tipo ganhos elevados assume então um papel de pedra angular no desenvolvimento deste trabalho. É importante no entanto salientar que haveria ainda uma alternativa diferente para solução do mesmo problema aqui estudado. Seria possível abordar o mesmo problema sob o ponto de vista de obtenção de uma “informação quase-perfeita” através de observadores tipo ganhos elevados. Note-se que é possível obter informação inclusive a respeito das incertezas de parâmetros do sistema, através de tais observadores.

Tal informação quase-perfeita poderia então ser utilizada para a síntese de controles do tipo quase-rastreamento de sinais que utilizassem a mesma estrutura das leis de controle tipo “rastreamento exato” acima descartadas para o desenvolvimento do presente trabalho, em lugar da lei de controle tipo “ganhos elevados”. Essa abordagem pode ser considerada dual em relação à aqui adotada. A pesquisa em tal direção, cujos primeiros passos já foram esboçados pelo autor e colaboradores [115, 113, 112], será tema de trabalhos futuros.



## Capítulo 6

# Ganhos Elevados Estabilizantes

No capítulo 5 foi mostrado que, devido às suas propriedades de rejeição de distúrbios e incertezas paramétricas, as leis de controle do tipo *ganhos elevados* são bastante convenientes para a solução do *problema de rastreamento de sinais*. Posto isso, emergem duas questões:

- i. Quais sistemas admitem a estabilização por ganhos elevados?
- ii. Como calcular o controlador ganhos elevados que estabiliza determinado sistema?

Essas questões serão o objeto de estudo do presente capítulo.

No capítulo 5 a solução para o problema de rastreamento de sinais pela saída de sistemas incertos, apresentada no teorema 5.3, requer por hipótese a existência de uma matriz  $K$  determinada tal que  $\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_-$  para todas as instâncias admissíveis da matriz incerta  $B$ .

Neste capítulo são estabelecidas condições suficientes para a existência de tal matriz  $K$ , para sistemas incertos dos tipos *incerteza limitada em norma* e *incerteza politópica*. A verificação dessas condições, bem como a determinação de soluções particulares, é formulada em termos de *Inequações Matriciais Lineares* (LMI's). Considerando sistemas com incertezas dos tipos *politópica* e *limitada em norma*, serão apresentados algoritmos para determinação de controladores *ganhos elevados* que os estabilizem. Serão respectivamente empregados os critérios (suficientes) de estabilidade: *estabilidade quadrática por Lyapunov* e *estabilidade pelo teorema do ganho pequeno*.

Será mostrado que, em virtude da presença de incertezas paramétricas na matriz de entrada de controle, alguns sistemas não admitirão leis de controle do tipo *ganhos elevados*. Em tais sistemas, os ganhos elevados, se aplicados em todo o espaço de entradas de controle, sempre implicarão na instabilidade para algumas instâncias admissíveis dos parâmetros incertos. No entanto, a aplicação de ganhos elevados apenas em determinados subespaços do espaço de entradas de controle pode ainda preservar a estabilizabilidade do sistema, mediante a aplicação de ganhos finitos no complemento ortogonal de tal subespaço.

Uma decomposição do sistema será assim definida, separando a parcela do sistema estabilizável via ganhos elevados da parcela na qual o controle deve ser de ganhos finitos.

### 6.1 Sistemas com Estrutura Controle Completo

Inicialmente são tratados aqui os sistemas com estrutura *controle completo*. Tais sistemas formam a classe para a qual foi estudada e proposta a metodologia de controle por *ganhos*

*elevados*, no final do capítulo 5. Esta seção será então dedicada à determinação de controladores para sistemas com tal estrutura, nos casos agora específicos de incertezas dos tipos *politópica* e *limitada em norma*. A generalização dos resultados que serão aqui estabelecidos será o tema da próxima seção deste capítulo.

### 6.1.1 Sistemas com Incerteza Limitada em Norma

Com base no teorema do ganho pequeno, são deduzidas a seguir condições para a estabilidade em ganhos elevados de sistemas tipo ICCRE cuja matriz de entradas de controle possui incerteza limitada em norma possivelmente variante no tempo<sup>1</sup>.

**Teorema 6.1 (Incerteza Limitada em Norma (1))** *Considere-se que uma matriz  $B$  incerta pertença a um conjunto  $\mathcal{U}$  cuja estrutura é de incerteza limitada em norma:*

$$\mathcal{U} : \{B \mid B = B_o + M\Delta_b N ; \|\Delta_b\|_\infty < 1\} \quad (6.1)$$

*Assuma-se que  $B_o$  possua posto igual ao seu número de linhas. Caso a inequação matricial linear (LMI) abaixo:*

$$\begin{bmatrix} -(MM' + B_o Z + Z' B_o') & Z' N' \\ & NZ & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (6.2)$$

*seja factível na variável  $Z$ , então todo  $K$  que faça o par  $(NK, B_o K)$  observável, tendo a forma:*

$$K = ZP \quad (6.3)$$

*para alguma matriz  $P = P' > 0$  e  $Z$  factível irá satisfazer:*

$$\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall B \in \mathcal{U} \quad (6.4)$$

□

DEMONSTRAÇÃO: A LMI em (6.2) é equivalente, por complemento de Schur, a:

$$B_o Z + Z' B_o' + Z' N' N Z + M M' < 0$$

Faça-se agora  $Z = KP^{-1} = KW$  (o que, pela hipótese de  $P > 0$  sempre será possível):

$$B_o K W + W' K' B_o' + W' K' N' N K W + M M' < 0$$

Esta inequação implica, juntamente com a hipótese de observabilidade do par  $(NK, B_o K)$ , pelo teorema A.9, em que o sistema:

$$\dot{x} = B_o K x + M \phi$$

$$\psi = N K x$$

<sup>1</sup>É possível até mesmo substituir a incerteza matricial por um operador dinâmico com a mesma restrição de norma, sem prejuízo da validade dos resultados aqui apresentados. Essa discussão, no entanto, não será empreendida aqui.

é estável com-norma  $\mathcal{H}_\infty$  de sua matriz de transferência da entrada  $\phi$  para a saída  $\psi$  menor que 1. Para se aplicar agora o teorema do ganho pequeno torce-se:

$$\phi = \Delta\psi$$

Essa conexão em-malha fechada ser estável implica em-que:

$$\varsigma(B_oK + M\Delta_bNK) \subset \mathbb{C}_-$$

o que ocorre, pelo teorema do ganho pequeno, para todo  $\Delta_b$  tal que  $\|\Delta_b\|_\infty < 1$ . ■

NOTA 6.1 No caso de se restringir a incerteza  $\Delta_b$  no teorema 6.1 a ser do tipo estático, com  $\Delta_b \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tem-se que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $\Delta_b$  é igual à sua norma-2 matricial (ou seja, igual ao máximo valor singular da matriz  $\Delta_b$ ). ◇

Esse teorema apresenta um inconveniente sério para sua aplicabilidade: a exigência de que o par  $(NK, B_oK)$  seja observável. Não se conhece uma forma de expressar tal restrição em termos de LMI's, de forma que a mesma não pode ser incluída no processo de otimização (via um método de pontos interiores com restrições LMI's, conforme se supõe ao longo de todo este trabalho) que irá determinar uma solução factível. A restrição deve, portanto, ser verificada *a posteriori*.

O teorema a seguir é dedicado à remoção de tal hipótese de observabilidade, a qual é substituída por uma hipótese de estabilidade da matriz  $B_oK$ . Ao custo de alguma conservatividade, essa manobra permitirá a formulação do problema de determinação da matriz  $K$  factível em termos de um problema de factibilidade com restrições LMI's.

**Teorema 6.2 (Incerteza Limitada em Norma (2))** *Considere-se que uma matriz  $B$  incerta pertença a um conjunto  $\mathcal{U}$  cuja estrutura é de incerteza limitada em norma:*

$$\mathcal{U} : \{B \mid B = B_o + M\Delta_bN ; \|\Delta_b\|_\infty < 1\} \quad (6.5)$$

*Assuma-se que  $B_o$  possua posto igual ao seu número de linhas. Suponha-se que a inequação matricial linear:*

$$\begin{bmatrix} -(MM' + B_oZ + Z'B_o') & Z'N' \\ NZ & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (6.6)$$

*é factível na variável  $Z$  e existem duas matrizes  $K$  e  $P = P' > 0$  tais que*

$$K = ZP \quad (6.7)$$

$$\varsigma(B_oK) \subset \mathbb{C}_-$$

*para um  $Z$  factível. Então a matriz  $K$  satisfazendo (6.7) para  $Z$  satisfazendo (6.6) é tal que*

$$\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall B \in \mathcal{U} \quad (6.8)$$

□

DEMONSTRAÇÃO: No teorema A.9 a hipótese de observabilidade era utilizada para assegurar a condição de estabilidade assintótica do sistema. Assim, a introdução dessa condição como hipótese permite dispensar a hipótese de observabilidade. ■

NOTA 6.2 Observe-se que a condição de estabilidade estrita dos autovalores da matriz  $B_o K$  é uma condição suficiente para a observabilidade do par  $(NK, B_o K)$ . ◇

Esse último teorema permite o estabelecimento do problema de factibilidade com restrições LMI's que permite o cálculo da matriz  $K$  que irá gerar os ganhos elevados estabilizantes. Na fórmula proposta abaixo, aplica-se o critério de estabilidade de Lyapunov para garantir a estabilidade de  $B_o K$ .

---

Determinação de  $K$  Estabilizante (ILN)

$$\begin{bmatrix} -(MM' + B_o Z + Z' B'_o) & Z' N' \\ NZ & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (6.9)$$

$$B_o Z + Z' B'_o < 0$$

$$K = ZP \quad \forall P = P' > 0$$


---

NOTA 6.3 A conservatividade da fórmula acima é devido ao fato de se utilizar a mesma matriz  $P$  (implícita na variável  $Z$ ) para as duas LMI's. Uma fórmula não conservativa permitiria a aplicação de matrizes simétricas positivas definidas diferentes nas duas equações. Isso levaria a um sistema de inequações matriciais bilineares (BMI's), cuja resolução é computacionalmente mais complexa, estando portanto fora dos objetivos propostos neste trabalho. ◇

### 6.1.2 Sistemas com Incerteza Politópica

Para o caso de incerteza politópica será aplicado o teorema da estabilidade de Lyapunov para geração de critérios de estabilidade sob ganhos elevados.

**Teorema 6.3 (Incertezas Politópicas)** *Seja uma matriz incerta  $B$  pertencente a um conjunto  $\mathcal{U}$  dado por um politopo convexo:*

$$\mathcal{U} : \left\{ B \mid B = \sum_{i=1}^v \alpha_i B_i \ ; \ \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \ ; \ \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (6.10)$$

Então, caso o sistema de inequações matriciais lineares:

$$B_i Z + Z' B'_i < 0 \quad i = 1, \dots, v \quad (6.11)$$

seja factível, também será verdade que:

$$\exists K \mid \varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall B \in \mathcal{U} \quad (6.12)$$

sendo que todo  $K$  com a forma:

$$K = ZW \quad (6.13)$$

para  $Z$  solução de (6.11) e para todo  $W = W' > 0$  satisfaz (6.12).  $\square$

DEMONSTRAÇÃO: Faça-se  $Z = KW^{-1} = KP$ . Isso sempre é possível, devido à hipótese de que  $W > 0$ . Substituindo no sistema de LMI's obtém-se:

$$B_i K P + P K' B_i' < 0 \quad i = 1, \dots, v$$

Note-se que foi utilizado o fato de que  $W = W'$ , que implica em que  $P = P'$ . A linearidade da inequação acima implica em sua validade em todo o interior do politopo, ou seja:

$$B K P + P K' B' < 0 \quad \forall B \in \mathcal{U}_B$$

Por Lyapunov agora, tem-se que:

$$\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall B \in \mathcal{U}_B$$

■

Para facilitar a leitura deste trabalho, a fórmula de determinação da matriz  $K$  que produz a estabilidade ganhos elevados do sistema é apresentada em destaque:

---

Determinação de  $K$  Estabilizante (IP)

$$B_i Z + Z' B_i' < 0 \quad i = 1, \dots, v \quad (6.14)$$

$$K = ZW \quad \forall W = W' > 0$$


---

NOTA 6.4 Esta fórmula apresenta uma conservatividade de mesma natureza que a fórmula similar para sistemas ILN. Aqui a conservatividade se expressa na utilização da mesma matriz  $W$  (implícita na variável  $Z$ ) para todos os pontos no interior do politopo. Uma fórmula não conservativa iria permitir, em princípio, a utilização de uma matriz simétrica definida positiva diferente para cada ponto no interior do politopo, como meio de verificação da condição de estabilidade de Lyapunov. Tal problema, bem mais complexo, também não será abordado neste trabalho.  $\diamond$

NOTA 6.5 O teorema 6.3 pode ser interpretado como um procedimento de verificação da estabilidade quadrática do sistema:

$$\dot{x} = Bu \quad (6.15)$$

para a matriz incerta  $B \in \mathcal{U}$ .  $\diamond$

Os teoremas 6.1 e 6.3 fornecem maneiras diretas de se fazer a determinação da estabilizabilidade, via ganhos elevados, de sistemas ICCRE cujas matrizes de entradas de controle são incertas, para incertezas respectivamente do tipo limitadas em norma e politópicas. São apresentadas condições suficientes para tal estabilizabilidade. Essas condições possuem a forma de restrições do tipo LMI (inequações matriciais lineares), sendo portanto diretamente computáveis por meio de programas de otimização convexa (por exemplo, algoritmos de pontos interiores) com convergência eficiente (em tempo polinomial) e garantida para uma solução, se pelo menos uma existir. Estando determinada a existência de soluções, os teoremas ainda fornecem fórmulas para o cálculo de pelo menos uma solução.

## 6.2 Decomposição Ganho Finito / Ganho Elevado

Na seção precedente, foram formulados algoritmos que permitem decidir se o vetor de entradas de sistemas do tipo *controle completo* admite ou não a aplicação de leis de controle do tipo *ganhos elevados*. Nos casos em que admite, foram ainda estabelecidos algoritmos para determinação desses ganhos.

Nesta seção será abordado o caso em que determinadas direções do espaço de entradas admitem a aplicação de ganhos elevados, enquanto outras direções não o admitem. Remove-se aqui a hipótese de que o sistema possua estrutura de controle completo, uma vez que o objetivo desta seção é a determinação de um subespaço do espaço de entradas, por menor que seja, no qual é possível aplicar ganhos elevados sem que o sistema seja com isso instabilizado. A estabilização do sistema deverá ser completada com a utilização de ganhos finitos, caso isso não seja possível apenas com ganhos elevados.

O problema aqui em questão é portanto formulado como a determinação de uma matriz  $K$  tal que  $\varsigma(BK + K'B') \subset \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_o$  para toda instância de  $B$ . Com isso é implicitamente determinado um subespaço do espaço de entradas que estabiliza quadraticamente, através de ganhos elevados, um subespaço do espaço de estados. Será aqui proposta uma decomposição dos espaços de estados e de entradas para explicitar esses subespaços, sendo tal decomposição denominada *decomposição EGE/NEGE*, em referência a *decomposição espaço estabilizável por ganho elevado / espaço não estabilizável por ganho elevado*.

O lema a seguir estabelece uma restrição estrutural que deverá ser obedecida pelos controladores tipo “ganhos elevados” não-instabilizantes, tanto no caso de incertezas politópicas quanto no caso de incertezas limitadas em norma.

**Lema 6.1** *Seja uma matriz  $B$ , já decomposta em suas submatrizes de posto completo de linhas e de posto zero:*

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

*Seja também uma matriz de ganhos  $K$ , particionada de maneira arbitrária segundo:*

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

*Então tem-se que:*

$$BK + K'B' \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{B}_2 K_2 + K_2' \bar{B}_2' \leq 0 \\ K_1 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.18)$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Este lema é decorrência direta do teorema A.14, mais o fato de que a inversa de Moore-Penrose da matriz  $0$  é ela própria. ■

### 6.2.1 Sistemas IP - Decomposição EGE/NEGE

O teorema a seguir estabelece o resultado fundamental para a determinação de matrizes  $K$  admissíveis para a construção de ganhos elevados não-instabilizantes, no caso de incertezas politópicas.

**Teorema 6.4 (Incerteza Politópica)** *Considere-se que uma matriz  $B$  incerta pertença a um conjunto  $\mathcal{U}$  cuja estrutura é a de um politopo convexo:*

$$\mathcal{U} : \left\{ B \mid B = \sum_{i=1}^v \alpha_i B_i ; \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 ; \alpha_i \geq 0 \right\} \quad (6.19)$$

Então, caso o sistema de inequações matriciais lineares:

$$B_i Z + Z' B_i' \leq 0 \quad i = 1, \dots, v \quad (6.20)$$

seja factível, também será verdade que:

$$\exists K \mid \sigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_0, \forall B \in \mathcal{U} \quad (6.21)$$

sendo que todo  $K$  com a forma:

$$K = ZW \quad (6.22)$$

para todo  $W = W' > 0$ , satisfaz (6.12). □

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é essencialmente a mesma do teorema 6.3. ■

NOTA 6.6 O teorema 6.4 não depende de condições tais como a existência de uma imagem-comum entre as diversas instâncias da matriz  $B$  incerta para fornecer uma matriz  $K$  que gera ganhos elevados não-instabilizantes. No entanto, a aplicação *a priori* do lema 6.1 permitiria a redução do espaço de busca do algoritmo de otimização, e poderia aumentar a confiabilidade do resultado obtido. *A posteriori*, o resultado obtido deverá, naturalmente, possuir a forma prescrita pelo lema 6.1. ◇

Esse resultado, a um só tempo, remove a hipótese de que o sistema possua estrutura de controle completo e possibilita que a matriz  $K$  resultante possua eventualmente posto incompleto de linhas.

Uma matriz  $K$  resultante com posto incompleto de linhas pode significar que, no subespaço do espaço de entradas correspondente a  $\mathcal{N}(K)$ , não se admite ganhos elevados. Naturalmente, no subespaço  $\mathcal{R}(K)$  é possível a aplicação de ganhos elevados. Essa observação sugere o *algoritmo de decomposição EGE/NEGE*, apresentado a seguir, para determinação do maior subespaço no qual é possível a aplicação de ganhos elevados.

Inicialmente, define-se a seguir uma metodologia particular para resolução de problemas de factibilidade LMI's em termos de problemas de minimização de um determinado funcional linear com restrições LMI's, o qual será denominado *procedimento MinFac*.

**Definição 6.1 (Procedimento MinFac)** *Considere-se o problema de determinação de uma solução factível  $X$  para o conjunto de restrições LMI's dado por:*

$$P_i(X) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \quad (6.23)$$

A solução MinFac desse problema,  $X^*$ , é dada por:

$$\begin{aligned} X^* &= \arg_X \min_{\delta, X} \delta \\ \text{sujeito a: } &\begin{cases} P_i(X) \leq \delta \mathbf{I} \quad \forall i = 1, \dots, v \\ \delta > -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.24)$$

□

NOTA 6.7 Caso na solução do problema de otimização acima ocorra  $\delta < 0$ , então o problema será estritamente factível. Note-se que se as restrições LMI do problema não possuírem termo constante, então sempre haverá a solução marginalmente factível  $X = \mathbf{0}$  e  $\delta = 0$ .

◇

O procedimento MinFac é importante devido ao resultado expresso no seguinte lema:

**Lema 6.2** *Considere-se o conjunto de restrições LMI's na variável  $X$ :*

$$A_i X B_i + B_i' X' A_i' \leq 0 \quad \forall i \quad (6.25)$$

*Assuma-se que é adotado um algoritmo de pontos interiores na solução do problema MinFac. Então:*

$$\{\exists X \neq \mathbf{0} \mid A_i X B_i + B_i' X' A_i' \leq 0 \quad \forall i\} \Rightarrow X^* \neq \mathbf{0} \quad (6.26)$$

*sendo  $X^*$  a solução do problema MinFac.*

□

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração desse lema decorre do fato dos algoritmos de pontos interiores empregarem métodos de barreira, o que implica no deslocamento do ponto solução para o interior do conjunto factível.

■

O algoritmo de decomposição EGE/NEGE-IP (algoritmo EGE/NEGE para sistemas com incertezas politópicas), apresentado a seguir, assume as mesmas hipóteses estabelecidas no enunciado do teorema 6.4. Assuma-se também que o procedimento MinFac é executado por meio de um algoritmo de pontos interiores.

— ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO EGE/NEGE - IP —

{

**Determinar** a solução MinFac  $K^*$  do problema de factibilidade 6.20.

**Enquanto**  $\mathcal{R}(K^*) \neq \mathbf{0}$

{  
**Fazer** transformações nas coordenadas dos espaços de estados e de entradas de controle, de forma a obter:

$$K^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Pelo lema 6.1, essas transformações colocam todos os vértices  $B_i$  do politopo  $\mathcal{U}$  na forma:

$$B_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & B \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}_i \quad (6.28)$$

**Redefinir** cada vértice do politopo  $\mathcal{U}_b$ ,  $B_i$  como:

$$B_i = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix}_i \quad (6.29)$$

**Determinar** a nova solução MinFac  $K^*$  do problema de factibilidade 6.20.

}

**Reconstruir** as matrizes  $B_i$  e  $K$ , obtidas pela composição de todas as transformações de coordenadas, obtendo:

$$B_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & B \\ \mathbf{0} & B \end{bmatrix}_i \quad (6.30)$$

sendo definidos:

$$B_i^h = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_i \quad B_i^f = \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix}_i \quad (6.31)$$

e

$$K^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

sendo definida:

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

}

— FIM DO ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO EGE/NEGE - IP —

**Teorema 6.5** *Sejam as matrizes  $B_i^h$ ,  $B_i^f$  e  $K$  resultantes do algoritmo de decomposição EGE/NEGE-IP. Definam-se os conjuntos  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{U}_f$  como os menores politopos convexos que contêm respectivamente as matrizes  $B_i^h$  e  $B_i^f$ . São válidas as propriedades:*

$$\mathbf{B}_{11}\mathbf{K} < 0 \quad \forall B_h \in \mathcal{U}_h \quad (6.34)$$

e

$$\{B_f K \leq 0 \quad \forall B_f \in \mathcal{U}_f\} \Rightarrow K = \mathbf{0} \quad (6.35)$$

□

**DEMONSTRAÇÃO:** A primeira propriedade é válida por construção. A segunda decorre imediatamente do lema 6.2.

■

### 6.2.2 Sistemas ILN - Decomposição EGE/NEGE

No caso de sistemas com incerteza limitada em norma, a situação é bastante diferente. Examine-se uma matriz  $B$  incerta que pertence a um conjunto  $\mathcal{U}$  cuja estrutura é de incerteza limitada em norma:

$$\mathcal{U} : \{B \mid B = B_o + M\Delta_b N ; \|\Delta_b\|_\infty < 1\} \quad (6.36)$$

O papel das matrizes  $M$  e  $N$ , que determinam a estrutura da incerteza, é elucidado nos lemas a seguir.

**Lema 6.3** *Seja uma matriz  $B$  incerta conforme definida em (6.36). Então:*

$$\exists K \in \mathcal{N}(N) \mid BK + K'B' \leq 0 \forall B \in \mathcal{U} \quad (6.37)$$

Além disso, caso ocorra:

$$\mathcal{R}(B_o) \not\supseteq \mathcal{R}(M) \quad (6.38)$$

então

$$\nexists K \mid NK \neq \mathbf{0} ; BK + K'B' \leq 0 \forall B \in \mathcal{U} \quad (6.39)$$

□

**DEMONSTRAÇÃO:** A condição (6.37) é evidente, pelo menos para  $K = \mathbf{0}$ . Casos mais gerais podem ocorrer, nos quais:

$$BK + K'B' = B_o K + K'B'_o \leq \mathbf{0} ; K \in \mathcal{N}(N)$$

A condição (6.38) implica no fato de que  $M\Delta NK + K'N'\Delta'M'$  pode ser feito menor ou maior que zero por uma escolha conveniente de  $\Delta$ , fora do espaço imagem de  $B_o K + K'B'_o$ , desde que  $K$  não esteja no espaço nulo de  $N$ . ■

**NOTA 6.8** O lema 6.3 diz que caso a condição (6.38) se verifique, então o maior subespaço do espaço de entradas no qual é possível aplicar ganhos elevados coincide com o espaço nulo da matriz  $N$ . Neste subespaço, sempre será possível a aplicação de ganhos elevados. ◇

Com base no lema 6.3, é construído o algoritmo de *decomposição EGE/NEGE-ILN* (algoritmo EGE/NEGE para sistemas com incerteza limitada em norma).

— ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO EGE/NEGE - ILN —

{

**Determinar** a imagem de  $B_o$ , fazendo a decomposição no espaço de estados:

$$B_o = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{B}_o \end{bmatrix}$$

Aplicar a mesma transformação de coordenadas na matriz  $M$ , obtendo:

$$M = \begin{bmatrix} \hat{M} \\ \bar{M} \end{bmatrix}$$

Determinar o espaço nulo de  $N$ , fazendo a transformação das coordenadas do espaço de entradas tal que:

$$N = \begin{bmatrix} N^1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Aplicar a mesma transformação de coordenadas na matriz  $B_o$ , obtendo:

$$B_o = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{B}_o^1 & \bar{B}_o^2 \end{bmatrix}$$

Se  $\hat{M} = \mathbf{0}$

Então

{

Determinar  $Z^1$  tal que:

$$\begin{bmatrix} -(\bar{M}\bar{M}' + \bar{B}_o^1 Z^1 + (\bar{B}_o^1 Z^1)') & (N^1 Z^1)' \\ N^1 Z^1 & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (6.40)$$

$$\bar{B}_o^1 Z^1 + (\bar{B}_o^1 Z^1)' < 0$$

seja factível.

Escolher uma matriz  $P^1 = (P^1)' > 0$  qualquer, fazendo:

$$K^1 \leftarrow Z^1 P^1$$

}

Senão  $K^1 \leftarrow \mathbf{0}$

Determinar  $Z^2$  tal que:

$$\bar{B}_o^2 Z^2 + (\bar{B}_o^2 Z^2)' < 0 \quad (6.41)$$

Escolher uma matriz  $P^2 = (P^2)' > 0$  qualquer, fazendo:

$$K^2 \leftarrow Z^2 P^2$$

Fazer  $K \leftarrow \begin{bmatrix} K^1 \\ K^2 \end{bmatrix}$

}

— FIM DO ALGORITMO EGE/NEGE - ILN —

O teorema a seguir estabelece a validade do algoritmo EGE/NEGE-ILN.

**Teorema 6.6 (Incerteza Limitada em Norma (3))** *Considere-se que uma matriz  $B$  incerta pertença a um conjunto  $\mathcal{U}$  cuja estrutura é de incerteza limitada em norma:*

$$\mathcal{U} : \{B \mid B = B_o + M\Delta_b N ; \|\Delta_b\|_\infty < 1\} \quad (6.42)$$

*Seja uma matriz  $K$  determinada segundo o algoritmo EGE/NEGE-ILN. Então:*

$$\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_o \quad \forall B \in \mathcal{U} \quad (6.43)$$

□

**DEMONSTRAÇÃO:** Sejam  $B^1$  e  $B^2$  as submatrizes da matriz incerta  $B$ , correspondentes às submatrizes  $B_o^1$  e  $B_o^2$  respectivamente. São analisadas a seguir inicialmente a partição  $K^1$  e depois a partição  $K^2$  de  $K$ .

*Partição  $K^1$ :* Inicialmente observe-se que, dada a condição  $\hat{M} = \mathbf{0}$ , a segunda restrição LMI em (6.40) implica que o sistema:

$$\dot{x} = \bar{B}_o^1 K^1 x + \bar{M} \phi$$

$$\psi = N^1 K^1 x$$

é quadraticamente estável. Juntamente com a primeira restrição LMI em (6.40), isso implica que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da entrada para a saída desse sistema é menor que 1. Pelo teorema do ganho pequeno, fica assim demonstrada a estabilidade do sistema para todas instâncias de  $B^1$  incerta. Removendo-se seja a condição de  $\hat{M} = \mathbf{0}$ , seja a de factibilidade das LMI's, tem-se  $K^1 = \mathbf{0}$  e  $\varsigma(B^1 K^1) \subset \mathbb{C}_o$ .

*Partição  $K^2$ :* Como  $K^2 \in \mathcal{N}(N)$ , tem-se que  $\varsigma(B^2 K^2) = \varsigma(B_o^2 K^2)$ . Por outro lado, a restrição LMI em (6.41) implica que  $\varsigma(B_o^2 K^2) \subset \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_o$ . A conjugação desses dois fatos leva ao resultado desejado.

■

### 6.3 Conclusão

Foram estabelecidas neste capítulo condições suficientes para que sistemas incertos com incerteza limitada em norma e com incerteza politópica admitam controladores tipo ganhos elevados estabilizantes. A seguir, foi analisada a situação em que tais controladores não existem, e foi estabelecida uma metodologia para determinação dos maiores subespaços do espaço de entradas nos quais é possível aplicar ganhos elevados de maneira a não levar o sistema à instabilidade para alguma instância das incertezas.

Em todos os casos, foram apresentadas ainda maneiras sistemáticas para determinação de matrizes  $K$  que servem de geratrizes para o controlador ganhos elevados, seja ele estabilizante, seja não-estabilizante.

## Capítulo 7

# Decomposição de Sistemas Incertos

No capítulo 4 foi abordado um problema de regulação ótima de sistemas cujos parâmetros são precisamente conhecidos. Tal problema, quando formulado em termos de ponderações singulares das entradas e estados do sistema, motivou a decomposição do sistema em dois subsistemas: o *núcleo regular* e o *subsistema com saída prescritível*. O controle do primeiro subsistema recaía em um problema de regulação ótima regular, enquanto o controle do segundo recaía em um problema isento de custos. Foi assim sugerido que o problema de regulação ótima do sistema completo poderia ser resolvido em termos do controle ótimo (regular) do primeiro subsistema, com os sinais ótimos de controle sendo gerados através de uma síntese dos mesmos na saída do segundo subsistema.

O capítulo 6 ocupou-se do problema de gerar sinais arbitrários na saída de sistemas cuja estrutura corresponde à estrutura dos *subsistemas com saída prescritível*, os quais foram obtidos no capítulo 4. Tais sistemas foram inicialmente mais uma vez decompostos em uma seqüência de subsistemas, denominados *níveis*, cada nível possuindo a estrutura de *controle completo*. A idéia seria a de que, começando do  $r$ -ésimo nível, cada nível iria gerar em sua saída os sinais que seriam utilizados como entradas no nível imediatamente anterior. Assim, o primeiro nível iria sintetizar os sinais que deveriam ser a saída do sistema. O segundo nível geraria os sinais necessários para controlar o primeiro nível, e assim por diante.

A seguir, foi estudada a síntese de sinais arbitrários pela saída de sistemas com estrutura *controle completo* (o *problema de rastreamento de sinais*). Foi mostrado que uma solução do tipo *ganhos elevados* seria a mais conveniente pois, além de não necessitar de informação a respeito de possíveis sinais de perturbação, ainda possibilita a rejeição de incertezas paramétricas. Com esse tipo de controle na realidade obtém-se não o *rastreamento de sinais*, mas o *quase-rastreamento de sinais*, isto é, a diferença entre o sinal sintetizado e o sinal de referência possui norma arbitrariamente pequena.

Considerando dois modelos de incertezas paramétricas, as incertezas *politópicas* e as incertezas *limitadas em norma*, foram propostos métodos para a síntese de controladores do tipo *ganhos elevados*, em sistemas com estrutura *controle completo*. Foram determinadas as condições nas quais tais controladores existem com característica de estabilização global da malha fechada (para todo o conjunto de incertezas). Tais condições, que são conceitualmente necessárias e suficientes, tornaram-se apenas suficientes quando foram especializadas em termos de métodos de síntese do controlador para modelos específicos de incertezas.

Tal informação será combinada com a informação relativa à ponderação dos sinais do sistema dinâmico em uma função custo do problema de regulação ótima, para a síntese de um algoritmo de decomposição do sistema em seu *núcleo regular generalizado* e seu *subsistema de saída prescritível*.

Defina-se então o *procedimento de determinação da matriz geratriz de ganhos elevados não-instabilizantes*, o qual será aqui denominado *procedimento MGNI*:

**Definição 7.1 (Procedimento MGNI)** *Define-se o procedimento de determinação da matriz geratriz de ganhos elevados não instabilizantes, ou procedimento MGNI, como o algoritmo que, tendo por entradas um sistema com a forma (7.1) e o modelo de incertezas paramétricas associado (7.2), retorna a matriz  $K$  geratriz de ganhos elevados não-instabilizantes conforme (7.3):*

$$K \leftarrow \text{MGNI}(B, \mathcal{P}) \quad (7.7)$$

tal que  $\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_- \forall B \in \mathcal{P}$ .

□

NOTA 7.1 Observe-se que o procedimento MGNI sempre terá, como entradas relevantes, apenas a matriz  $B$  e a incerteza associada em  $\mathcal{P}$ . Os demais parâmetros do sistema são irrelevantes.

◇

Os algoritmos EGE/NEGE-IP e EGE/NEGE-ILN, desenvolvidos no capítulo 6, são duas instâncias possíveis do procedimento MGNI. Agora, com base nesse procedimento, definem-se os *espaços ganho-finitos* e os *máximos espaços ganho-finitos*.

**Definição 7.2 (Espaços Ganho-Finitos)** *Dado um sistema incerto definido por (7.1) e (7.2), sejam os subespaços  $\mathcal{F}$  do espaço de entradas desse sistema tais que:*

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}(F') \quad (7.8)$$

sendo a matriz  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  qualquer matriz que satisfaça:

$$FK = \mathbf{0} \quad \forall K / \{K \leftarrow \text{MGNI}(B, \mathcal{P})\} \quad (7.9)$$

Os subespaços  $\mathcal{F}$  assim definidos são denominados *espaços de entradas ganho-finitas do sistema*.

□

**Definição 7.3 (Máximos Espaços Ganho-Finitos)** *Seja  $\Phi$  o conjunto de todos os espaços  $\mathcal{F}$  de entradas ganho-finitas de determinado sistema. Define-se o máximo espaço das entradas ganho-finitas  $\mathcal{F}^*$  desse sistema como o espaço  $\mathcal{F}$  de maior dimensão, isto é:*

$$\mathcal{F}^* \triangleq \begin{cases} \mathcal{F}^* \in \Phi \\ \mathcal{F}^* \cap \mathcal{F} = \mathcal{F} \quad \forall \mathcal{F} \in \Phi \end{cases} \quad (7.10)$$

□

Agora se define o procedimento computacional para determinação do subespaço  $\mathcal{F}^*$ , que será empregado no algoritmo de decomposição desenvolvido a seguir.

**Definição 7.4 (Procedimento DGEI)** *Seja dado um sistema com parâmetros incertos, conforme definido nas equações (7.1) e (7.2). Seja ainda  $\mathcal{F}^*$  o máximo espaço das entradas ganho-finitas do sistema. Define-se o procedimento de determinação das direções ganho-elevado-instabilizantes ou procedimento DGEI como o procedimento que, tendo por entradas a matriz  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  do sistema e a incerteza associada no conjunto  $\mathcal{P}$ , retorna a matriz  $F$  tal que:*

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{R}(F') \quad (7.11)$$

Por conveniência, adota-se a notação:

$$F \leftarrow DGEI(B, \mathcal{P}, p) \quad (7.12)$$

para indicar a utilização do procedimento DGEI em um algoritmo, retornando uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , sendo  $p \geq m$ .

□

NOTA 7.2 Não foi apresentada uma prova formal de que as únicas instâncias do procedimento MGNI apresentadas neste trabalho, os algoritmos EGE/NEGE, devam conduzir necessariamente a uma matriz  $K$  geratriz de ganhos elevados não-instabilizantes de máximo posto. Em princípio, seria possível a produção de matrizes  $K$  com posto inferior à dimensão do máximo espaço ganhos-elevados estabilizável (o complemento do máximo espaço das entradas ganho-finitas). No entanto, deve-se notar que:

- i. A busca de soluções estritamente no interior da região factível, por meio de procedimentos MinFac (conforme descrito no capítulo 6), irá em geral produzir soluções de máximo posto. Espera-se que seja relativamente rara a ocorrência de soluções com posto menor que o máximo permitido pela estrutura do problema.
- ii. Ocorrendo um caso de surgimento de uma solução  $K$  com posto menor que o máximo, o erro que vier a ser causado no algoritmo de decomposição devido a esse fato será detectado no momento em que for realizada a síntese do controlador custo-garantido ótimo para o subsistema tomado como núcleo regular do sistema. O problema de síntese, pretensamente regular, levará a uma solução ilimitada (similar a uma solução ganhos elevados, porém numericamente não confiável).
- iii. Uma vez detectado o erro, sempre será possível perturbar a “solução”  $K$  inicialmente encontrada, uma vez que trata-se de um problema simplesmente de factibilidade, de maneira a que seja determinada uma nova solução, de posto maior.

Em vista dessa argumentação, passa-se a admitir a partir deste ponto que sejam disponíveis implementações do procedimento DGEI conforme especificado na definição 7.4.

◇

## 7.2 Algoritmo de Decomposição R/S Generalizada

A seguir é apresentado o algoritmo que realiza a decomposição do sistema em um *núcleo regular generalizado* e em um *subsistema com saída prescritível*. Tal algoritmo consiste em uma simples modificação do algoritmo de decomposição R/S apresentado no capítulo 4, a qual leva em conta, juntamente com as ponderações originais do problema de regulação ótima (as quais proíbem ganhos elevados nas direções de sua imagem), também as proibições de aplicação de ganhos elevados advindos da presença de incertezas em matrizes de entrada de sinais. Esse algoritmo será denominado *algoritmo de decomposição R/S generalizado*, ou *algoritmo R/S-G*.

O algoritmo apresentado nesta seção será utilizado na prova do teorema 7.1. A forma final do sistema irá corresponder à forma prescrita no teorema, por construção. Essa estrutura final será formalizada após a apresentação do algoritmo, passando a ser denominada *forma canônica regular/singular generalizada* ou, abreviadamente, forma R/S-G.

Esse algoritmo servirá também como procedimento para obtenção dessa forma canônica. Tal forma canônica será utilizada como base para a síntese de controladores ótimos no próximo capítulo.

Como no capítulo 4, define-se a matriz:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (7.13)$$

A matriz (7.13) irá representar o sistema (7.1) a partir deste ponto, de maneira a tornar mais sintética a notação desta seção. A matriz  $E$  não é incluída nessa representação, uma vez que esta não é relevante na decomposição, sofrendo transformações apenas induzidas pela estrutura das demais matrizes.

As incertezas do sistema, representadas no conjunto  $\mathcal{P}$ , têm papel importante na decomposição que será desenvolvida a seguir. Apesar de não constar explicitamente da notação adotada, deve ficar entendido que o conjunto  $\mathcal{P}$  deve ser submetido a todas as transformações de coordenadas aplicadas ao sistema. A cada vez que  $\mathcal{P}$  for evocado durante o algoritmo, estará implícito que se trata de tal conjunto nas coordenadas correntes no ponto de chamada em questão.

O procedimento construtivo para decomposição regular/singular é derivado a seguir. As mesmas convenções empregadas no capítulo 4 serão adotadas, para tornar a apresentação mais concisa, sendo abaixo repetidas para facilitar a leitura deste trabalho:

As submatrizes das matrizes decompostas serão denotadas, na equação principal, pela mesma letra que denota a matriz original, sem o emprego de sub-índices. No texto, a referência a essas submatrizes será feito através da notação usual  $(\cdot)_{ij}$  para denotar o bloco da  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna.

O símbolo  $\mathcal{X}_i$  denotará o  $i$ -ésimo subespaço componente do espaço  $\mathcal{X}$ . O mesmo se aplica a  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{U}$ .

Um quadrado circundando determinada partição de uma matriz irá indicar o bloco sob transformação. Assim, em cada passo haverá a indicação de um bloco resultante da transformação do passo anterior e de um bloco a ser transformado nesse passo (naturalmente, no primeiro passo não haverá uma transformação anterior). A seqüência de passos deixará clara a distinção entre essas indicações.

Blocos com símbolo em **negrito** irão denotar blocos de posto completo. Blocos adjacentes em **negrito**, na mesma matriz, denotarão um único bloco de posto completo. Para as matrizes  $A$  e  $B$  tal notação indicará posto completo de linhas. Para as matrizes  $C$  e  $D$ , posto completo de colunas.

Blocos inteiramente compostos de zeros serão indicados por  $\mathbf{0}$ .

Para deixar clara a relação do algoritmo R/S-G com o algoritmo R/S (apresentado no capítulo 4), a numeração dos passos será mantida. Alguns dos passos do algoritmo R/S serão desdobrados em mais de um passo no algoritmo R/S-G, sendo esse desdobramento denotado por uma numeração em termos de sub-sequências (por exemplo, os passos 3.1, 3.2 e 3.3 do algoritmo R/S-G correspondem ao passo 3 do algoritmo R/S).

Esses desdobramentos de passos sempre ocorrem no momento de se verificar se determinado sinal é regularmente ponderado ou não. No algoritmo R/S bastava verificar o posto das matrizes  $D$  ou  $C$  nas posições correspondentes. Já no caso do algoritmo R/S-G é necessário, além disso, verificar se tal sinal encontra-se em uma direção ganho-elevado instabilizante ou não, o que é feito estendendo-se as matrizes  $D$  ou  $C$  com matrizes indicadoras das direções instabilizantes. A única diferença entre os algoritmos R/S e R/S-G consiste, então, do fato de que no segundo é necessário providenciar tal extensão das matrizes de ponderação, sendo criadas as matrizes estendidas  $\Psi$  e  $\Gamma$  respectivamente correspondentes a  $C$  e  $D$ . Em todo o restante, o algoritmo R/S-G é idêntico ao algoritmo R/S.

— ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO REGULAR/SINGULAR GENERALIZADA —

{

**Inicialização:** Inicializa-se a variável indicadora de fim do algoritmo fazendo:  $P \leftarrow -1$

**Passo 1.1:** Calculam-se as direções de entradas ganho-elevado instabilizantes, pela aplicação do algoritmo DGEI:

$$F \leftarrow \text{DGEI}(B, \mathcal{P}, m) \quad (7.14)$$

**Passo 1.2:** Definem-se as matrizes aumentadas:

$$\left[ \Psi \mid \Gamma \right] \leftarrow \left[ \begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \mathbf{0} & F \end{array} \right] \quad (7.15)$$

Tome-se o sistema modificado:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \Psi & \Gamma \end{array} \right] \quad (7.16)$$

Se  $\Gamma$  possui posto completo de colunas

**Então**  $P \leftarrow 0$  (Parada **P0**: o sistema é regular, e o algoritmo não se aplica.)

Se  $P < 0$

**Então**

{

**Passo 2:** Uma mudança nas coordenadas de  $\mathcal{U}$  coloca a matriz  $\Gamma$  na forma:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} A & B & B \\ \hline \Psi & \Gamma & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.17)$$

**Passo 3.1:** Aplica-se uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}$  tal que:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} A & A & B & \mathbf{0} \\ A & A & B & \mathbf{B} \\ \hline \Psi & \Psi & \Gamma & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.18)$$

**Passo 3.2:** Aplica-se o algoritmo DGEI considerando como matriz de entrada a matriz  $A_{12}$ :

$$F \leftarrow \text{DGEI}(A_{12}, \mathcal{P}, m) \quad (7.19)$$

**Passo 3.3:** Redefine-se a matriz aumentada  $\Psi$ :

$$\Psi \leftarrow \begin{bmatrix} C & C \\ \mathbf{0} & F \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

de maneira que:

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Psi_{12} = \begin{bmatrix} C_{12} \\ F \end{bmatrix}$$

obtendo-se dessa forma o sistema aumentado modificado:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} A & A & B & \mathbf{0} \\ A & A & B & \mathbf{B} \\ \hline \Psi & \Psi & \Gamma & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.21)$$

Se  $\Psi_{12}$  possui posto completo de colunas

**Então**  $P \leftarrow 1$  (Parada **P1**:  $\mathcal{X}_1$  é o núcleo regular do sistema.)

**Enquanto**  $P < 0$

{

**Passo 4:** Procede-se a uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}_2$  tal que:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} A & A & A & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline \Psi & \Psi & \mathbf{0} & \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.22)$$

Se  $A_{13}$  possui posto completo de linhas

**Então**  $P \leftarrow 2$  (Parada **P2**: o sistema é completamente singular.)

Se  $A_{13}$  é um bloco nulo

**Então**  $P \leftarrow 3$  (Parada **P3**:  $\mathcal{X}_1$  é o núcleo regular do sistema.)

Se  $P < 0$

**Então**

{  
**Passo 5.1:** Procede-se agora a uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}_1$  de tal maneira que:

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} A & A & A & \mathbf{0} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & \mathbf{A} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline \Psi & \Psi & \Psi & \mathbf{0} & \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.23)$$

**Passo 5.2:** Aplica-se o algoritmo DGEI considerando como matriz de entrada a matriz  $A_{12}$  (observe-se que os índices se referem à partição corrente):

$$F \leftarrow \text{DGEI}(A_{12}, \mathcal{P}, m) \quad (7.24)$$

**Passo 5.3:** Redefine-se a matriz aumentada  $\Psi$  de maneira que:

$$\Psi_{11} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Psi_{12} = \begin{bmatrix} C_{12} \\ F \end{bmatrix}$$

(note-se que  $\Psi_{13}$  e  $\Psi_{14}$  permanecem inalterados), obtendo-se dessa forma o sistema aumentado modificado:

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} A & A & A & \mathbf{0} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & \mathbf{A} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline \Psi & \Psi & \Psi & \mathbf{0} & \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.25)$$

Se  $\Psi_{12}$  tem posto completo de colunas

Então  $P \leftarrow 1$  (Parada **P1**:  $\mathcal{X}_1$  é o núcleo regular do sistema.)

}

Se  $P < 0$

Então

{

**Passo 6:** Redefine-se o sistema fazendo:  $\mathcal{X} \leftarrow \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ .

}

}

Se  $P = 2$

Então

{

**Passo 7:** O sistema após o passo 4 (com parada  $P = 2$ ) está na seguinte forma:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} A & A & A & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline \Psi & \Psi & \mathbf{0} & \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.26)$$

Procede-se então a uma transformação nas coordenadas de  $\mathcal{X}_1$  de maneira a se obter:

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} A & A & A & A & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & A & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{0} & \Psi & \Psi & \mathbf{0} & \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (7.27)$$

}  
}  
}

— FIM DO ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO R/S-G —

### 7.3 Teorema de Decomposição

O resultado principal deste capítulo é agora sintetizado em termos do seguinte teorema:

**Teorema 7.1** *Seja dado um sistema  $\Sigma$  na forma (7.1) com incertezas paramétricas descritas por (7.2), sendo válida a hipótese (H1). Aplique-se o algoritmo R/S-G acima definido nesse sistema, assim obtendo as matrizes  $\Psi$  e  $\Gamma$ . Então existem transformações (não-singulares) de coordenadas  $\bar{x} = T_x x$  e  $\bar{u} = T_u u$  tais que  $\Sigma$  é equivalente à interconexão de dois sub-sistemas  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  dados por:*

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \begin{bmatrix} \bar{A}_{12} & \bar{B}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} + \bar{E}_{11}w \\ y = \bar{\Psi}_{11}\bar{x}_1 + \begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{12} & \bar{\Gamma}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7.28)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_{21} & \bar{B}_{21} \\ \bar{A}_{31} & \bar{B}_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{u}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{22} \\ \bar{B}_{32} \end{bmatrix} \bar{u}_2 + \begin{bmatrix} \bar{E}_{21} \\ \bar{E}_{31} \end{bmatrix} w \\ \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7.29)$$

sendo  $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}_1 \oplus \bar{\mathcal{X}}_2 \oplus \bar{\mathcal{X}}_3$  e  $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}}_1 \oplus \bar{\mathcal{U}}_2$ ; com as seguintes propriedades :

- i. a matriz  $\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_{12} & \bar{\Gamma}_{11} \end{bmatrix}$  possui posto completo de colunas;
- ii. a matriz  $\begin{bmatrix} \bar{A}_{23} & \bar{B}_{22} \\ \bar{A}_{33} & \bar{B}_{32} \end{bmatrix}$  possui posto completo de linhas;
- iii. o sub-sistema  $\Sigma_2$  é controlável a partir da entrada  $\bar{u}_2$ ;
- iv. o canal de  $\bar{u}_2$  para  $\bar{x}_2$  no subsistema  $\Sigma_2$ :

- (a) é tal que  $\dim(\bar{\mathcal{U}}_2) \geq \dim(\bar{\mathcal{X}}_2)$ ;  
 (b) não apresenta zeros de transmissão.

□

DEMONSTRAÇÃO: O resultado deste teorema é obtido por uma aplicação direta do teorema 4.1, com as matrizes aumentadas  $\Psi$  e  $\Gamma$  substituindo as matrizes  $C$  e  $D$ .

■

Como no caso do teorema 4.1, a saída do sistema interconectado depende apenas dos estados e das entradas do sub-sistema (7.28). O corolário 4.1 pode ser extraído, sem alterações, também do teorema 7.1:

**Corolário 7.1** *Dados  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$ , existe um compensador linear com sinais de entrada  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_2^{ref}$  e com saída  $u_2$  que, aplicada à entrada do sistema  $\Sigma_2$ , permite fazer  $\|x_2 - x_2^{ref}\| < \epsilon$  para toda tripla  $(u_1, x_1, w)$  satisfazendo  $\|(u_1, x_1, w)\| < \delta$ .*

□

A definição de *núcleo regular generalizado* do sistema é cunhada a partir da decomposição definida no teorema 7.1:

**Definição 7.5 (Núcleo Regular Generalizado)** *Dado um sistema  $\Sigma$  do tipo (7.1), seu núcleo regular generalizado é definido como o sub-sistema  $\Sigma_1$  conforme determinado pelo teorema 7.1, com as seguintes características:*

- i. suas entradas de controle devem possuir pelo menos uma das características:
  - (a) ser ponderadas com pesos diferentes de zero na equação de saída;
  - (b) ser acionadas por linhas completamente nulas de uma matriz de ganhos  $K$  para toda  $K$  que seja geratriz de ganhos elevados não-instabilizantes.
- ii. seus vetores de entradas de perturbação e de saída controlada são iguais aos correspondentes vetores do sistema original;
- iii. sua dinâmica torna-se idêntica à dinâmica do sistema original quando se restringem as variáveis de estado do sistema não presentes neste subsistema a obedecerem a equações puramente algébricas que as relacionam às variáveis de estado do subsistema.

□

O subsistema  $\Sigma_2$  pertence à classe dos *sistemas de saída prescritível*, definida da mesma forma que no capítulo 4:

**Definição 7.6 (Sistema de Saída Prescritível)** *Denomina-se sistema de saída prescritível todo sistema com a estrutura do subsistema  $\Sigma_2$ , conforme determinado na equação (7.29) e nos itens (ii) e (iv) do teorema 7.1.*

□

Da mesma forma que no capítulo 4, a decomposição aqui desenvolvida implica (via corolário 7.1) que o problema geral de regulação ótima de um sistema dinâmico, agora possivelmente incerto, pode ser resolvido por meio de algoritmos convencionais aplicados sobre o subsistema  $\Sigma_1$  (agora o *núcleo regular generalizado*). Não mais se tem, no caso incerto, um problema regular convencional, mas um problema com *regularidade generalizada*. Será mostrado no capítulo 8 que tal classe de problemas não irá acrescentar nenhuma dificuldade à resolução de algoritmos do tipo *custo garantido ótimo*.

## 7.4 Forma Canônica Regular/Singular Generalizada

O algoritmo de decomposição mais uma vez conduz a uma forma canônica para o sistema, que será agora denominada *forma canônica regular/singular generalizada* ou, abreviadamente, *forma R/S-G*. Para apresentar uma fórmula representativa de tal forma canônica, emprega-se aqui a mesma notação utilizada na definição da forma canônica R/S (capítulo 4):

- $(\cdot)^i$  -  $i$ -ésima bloco-coluna da matriz argumento;
- $(\cdot)_i$  -  $i$ -ésima bloco-linha da matriz argumento;
- $(\cdot)^{i:j}$  - conjunto de bloco-colunas da matriz argumento desde a  $i$ -ésima (inclusive) até a  $j$ -ésima (inclusive);
- $(\cdot)_{i:j}$  - conjunto de bloco-linhas da matriz argumento desde a  $i$ -ésima (inclusive) até a  $j$ -ésima (inclusive).

Seja o espaço de estados particionado, na forma R/S-G, em  $h$  subespaços  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{X}_h$ . Sem perda de generalidade,  $h$  será considerado um número par. Haverá casos degenerados em que determinados subespaços poderão possuir dimensão zero, o que permite postular para todos os sistemas  $h = 2k$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ .

A forma canônica R/S-G é dada por:

---

 Forma Canônica Regular/Singular Generalizada

$$\begin{aligned}
 A_i^j &= \mathbf{0} \quad \forall j = 6 : 2 : h ; \quad i = 1 : j - 4 \\
 \mathcal{N} \left( (A_{j-3|j-2}^j)' \right) &= \mathbf{0} \quad \forall j = 6 : 2 : h \\
 \mathcal{N} \left( (A_2^4)' \right) &= \mathbf{0} \\
 B_{1|h-2}^{2|3} &= \mathbf{0} \\
 \det(B_{h-1|h}^{2|3}) &\neq 0 \\
 C^j &= \mathbf{0} \quad \forall j = 4 : 2 : h \\
 D^{2|3} &= \mathbf{0} \\
 (P1) : A_1^4 &= \mathbf{0} \\
 (P2) : C^1 &= \mathbf{0} ; \quad \mathcal{N}(A_1^4) = \mathbf{0} \\
 (P3) : A_1^4 &= \mathbf{0} ; \quad \dim(\mathcal{X}_2) = 0
 \end{aligned} \tag{7.30}$$


---

Da mesma forma que no capítulo 4, dependendo do critério de parada com que veio a terminar o algoritmo de decomposição, a forma canônica acima possui uma dentre três estruturas alternativas. Observe-se ainda que, para garantir a consistência da fórmula acima, é preciso assumir, por convenção, que se  $M$  é uma matriz de dimensão nula, então  $\mathcal{N}(M) = \mathbf{0}$ .

A diferença entre a forma canônica R/S-G e a forma canônica R/S se apresenta apenas no fato de que a primeira não necessariamente conduz a submatrizes das matrizes  $C$  e  $D$  com posto de colunas completo.

**EXEMPLO 7.1** Para exemplificar a decomposição R/S-G, é apresentada abaixo a menor estrutura que possui todas as propriedades “interessantes” associadas à forma canônica, para os três critérios de parada do algoritmo:

Critério de parada (P1):

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc}
 A & A & A & \mathbf{0} & A & \mathbf{0} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 A & A & A & \mathbf{A} & A & \mathbf{0} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 A & A & A & A & A & \mathbf{A} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 A & A & A & A & A & \mathbf{A} & B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 A & A & A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\
 A & A & A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\
 \hline
 C & C & C & \mathbf{0} & C & \mathbf{0} & D & \mathbf{0} & \mathbf{0}
 \end{array} \right] \tag{7.31}$$

Nesse sistema  $\mathcal{X}_1$  consiste no núcleo regular do sistema. Apesar de as ponderações sobre  $\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_5$  e  $\mathcal{U}_1$  não necessariamente serem regulares, sabe-se que um problema de custo garantido ótimo que tomar a matriz  $[ A_{12} \ A_{13} \ A_{15} \ B_{11} ]$  como matriz de entrada conduzirá a uma solução do tipo ganhos finitos, em virtude das incertezas do sistema.

Critério de parada (P2):

$$\left[ \begin{array}{cccccc|ccc} A & A & A & \mathbf{A} & A & 0 & B & 0 & 0 \\ A & A & A & \mathbf{A} & A & 0 & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & \mathbf{A} & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & \mathbf{A} & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ A & A & A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline 0 & C & C & 0 & C & 0 & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.32)$$

Agora o sistema não possui núcleo regular. Isso significa que todos os estados podem ser arbitrariamente deslocados pelos sinais de custo zero do sistema, existindo portanto uma solução de custo zero do problema de regulação ótima.

Critério de parada (P3):

$$\left[ \begin{array}{ccccc|ccc} A & A & 0 & A & 0 & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & \mathbf{A} & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & \mathbf{A} & B & 0 & 0 \\ A & A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ A & A & A & A & A & B & \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \hline C & C & 0 & C & 0 & D & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.33)$$

Neste caso,  $\dim(\mathcal{X}_2) = 0$ , de maneira que o espaço de estados é dado por  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_3 \oplus \mathcal{X}_4 \oplus \mathcal{X}_5 \oplus \mathcal{X}_6$ . O núcleo regular do sistema é outra vez  $\mathcal{X}_1$ . Mais uma vez, um problema de custo garantido ótimo considerando a matriz de entradas  $[ A_{13} \ A_{15} \ B_{11} ]$  teria solução regular.

◇

## 7.5 Conclusão

Um dos objetivos do presente trabalho é o de formular uma metodologia para, dado um sistema dinâmico com parâmetros incertos, realizar o projeto de um controlador ótimo em determinada norma, com critério de otimalidade possivelmente singular. A abordagem aqui adotada consiste em decompor o sistema em um subsistema cujos sinais são regulares (isto é, são impedidos de assumir valores arbitrariamente grandes), e em outro subsistema cujos sinais, podendo ser arbitrariamente designados, são algebricamente vinculados aos sinais do primeiro subsistema para garantir a otimalidade do funcional de custo. No caso de sistemas a parâmetros precisamente conhecidos, o primeiro subsistema foi definido como o *núcleo regular* do sistema, enquanto o segundo foi definido como o *subsistema de saída prescritível*.

Foi mostrado em capítulos anteriores que, em sistemas incertos, determinados sinais são proibidos de assumir valores arbitrariamente grandes, não apenas em virtude da ponderação dos mesmos no funcional de custo a ser otimizado, mas também devido ao fato de que, ante as incertezas presentes no sistema, a aplicação de ganhos arbitrariamente grandes nesses sinais implicaria na possibilidade de instabilização do sistema em malha fechada. Assim, generaliza-se o conceito de sinal regular que passa a compreender, no caso incerto, os sinais regularmente ponderados e também os sinais possivelmente instabilizantes sob ganhos elevados.

Ainda em capítulos anteriores, foi desenvolvida uma metodologia para a determinação de matrizes geratrizes de ganhos elevados não-instabilizantes para sistemas incertos.

Neste capítulo essas matrizes geratrizes foram empregadas para a determinação das direções nos espaços de entradas e de estados que não admitem ganhos elevados. Foram então definidas matrizes generalizadas de ponderação dos sinais do sistema incerto, formadas pelas matrizes de ponderação do funcional de custo aumentadas com as matrizes indicadoras das direções ganhos-elevados instabilizantes. Assim foi definido um sistema com parâmetros precisamente conhecidos que é equivalente, sob o ponto de vista de regularidade/singularidade dos sinais, ao sistema com parâmetros incertos original.

O sistema equivalente, com matrizes generalizadas de ponderação de sinais, pôde então ser decomposto da mesma maneira que os sistemas com parâmetros precisamente conhecidos. Foi assim definida a separação (denominada *decomposição regular/singular generalizada*) do sistema em um *núcleo regular generalizado* e em um *sistema de saída prescritível*.

Será mostrada, no próximo capítulo, uma metodologia para o projeto de reguladores do tipo *custo garantido ótimo* para o primeiro subsistema. As propriedades por construção asseguradas desse núcleo regular generalizado irão garantir a regularidade do projeto.



## Capítulo 8

# Regulação Ótima do Núcleo Regular Generalizado

Nos capítulos precedentes, um sistema dinâmico submetido a um problema de regulação ótima possivelmente singular deu origem a dois subsistemas interconectados: o *núcleo regular* (ou *núcleo regular generalizado*) e o *subsistema de saída prescritível*. Foi mostrado que é possível sintetizar, a custo zero, qualquer sinal na saída do segundo subsistema. Dessa forma, todo o custo associado ao problema de regulação ótima está vinculado aos sinais do primeiro subsistema. Os sinais de saída do segundo subsistema podem assim ser considerados como entradas arbitrariamente sintetizáveis a serem aplicadas no primeiro subsistema.

O problema de regulação do sistema completo se reduz, portanto a um problema de regulação apenas do primeiro subsistema. Os sinais determinados por uma lei ótima de controle serão então gerados seja diretamente das entradas de controle do sistema completo, seja a partir das saídas do segundo subsistema.

Neste capítulo, será mostrado que o subsistema *núcleo regular* (ou *núcleo regular generalizado*, no caso de sistemas incertos) obtido nos capítulos 4 e 7 dá origem a problemas regulares de síntese de reguladores ótimos (ou reguladores custo-garantido ótimos, no caso incerto). Isto significa que o problema de regulação ótima, aplicado a sistemas com tal estrutura, levará a ganhos de realimentação finitos e bem determinados.

O presente trabalho irá estudar em maior detalhe os casos de reguladores ótimos em norma  $\mathcal{H}_2$  e em norma  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas incertos com incertezas dos tipos politópica e limitada em norma. Será mostrado aqui que algoritmos já apresentados na literatura para projeto de reguladores custo-garantido ótimos nessas normas, para sistemas incertos com incertezas desses tipos são imediatamente aplicáveis a sistemas com estrutura de núcleo regular generalizado. Dessa forma, estende-se a aplicabilidade de tais algoritmos, que vêm sendo até o presente empregados mediante a hipótese de regularidade estrita (não generalizada).

De acordo com a proposta deste trabalho, serão aqui utilizados apenas algoritmos de síntese baseados em *inequações matriciais lineares* (LMI's). A formulação dos problemas em termos de custos garantidos ótimos, incorporando incertezas paramétricas, segue as linhas desenvolvidas nas referências [41] e [88]. A adaptação dos problemas para a forma de LMI's utiliza parametrizações similares às apresentadas em [83] e [62].

## 8.1 Preliminares

Considere-se o sistema dinâmico  $\Sigma$ , com estrutura de *núcleo regular generalizado*, obtido como saída do algoritmo de decomposição regular/singular generalizada (algoritmo R/S-G):

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ z(t) = \Psi x(t) + \Gamma u(t) \end{cases} \quad (8.1)$$

com incertezas paramétricas modeladas por:

$$\begin{aligned} P &= (A, B, E) \\ P &\in \mathcal{P} \end{aligned} \quad (8.2)$$

O conjunto  $\mathcal{P}$  é suposto conhecido. As matrizes  $\Psi$  e  $\Gamma$  correspondem às matrizes de ponderação generalizada, sintetizadas durante a execução do algoritmo de decomposição R/S-G. O sinal  $z(t)$  não tem significado relevante no presente contexto. As dimensões e significados das demais matrizes e sinais são definidos como em (2.1).

Sendo os espaços  $\mathcal{W}$  e  $\mathcal{Y}$  respectivamente associados aos sinais  $w(t)$  e  $y(t)$ , definem-se ainda os espaços  $\mathcal{W}_1$ ,  $\mathcal{W}_2$ ,  $\mathcal{Y}_1$  e  $\mathcal{Y}_2$  tais que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 \\ \mathcal{Y} &= \mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2 \end{aligned} \quad (8.3)$$

com os sinais  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$ ,  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  respectivamente associados.

NOTA 8.1 Observe-se que  $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$  e  $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$  não são necessariamente iguais à origem. Também não se excluem as possibilidades de que, por exemplo,  $\mathcal{W}_1$  seja vazio ou de que seja igual a  $\mathcal{W}$ .  $\diamond$

O sistema fica particionado:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_1 w_1(t) + E_2 w_2(t) \\ y_1(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t) \\ y_2(t) = C_2 x(t) + D_2 u(t) \\ z(t) = \Psi x(t) + \Gamma u(t) \end{cases} \quad (8.4)$$

Faça-se  $H_{w_i y_j}$  denotar a função de transferência em malha fechada da entrada  $w_i$  para a saída  $y_j$ :

$$H_{w_i y_j}(s) = (C_j + D_j K)(sI - A - BK)^{-1} E_i \quad (8.5)$$

A respeito do sistema  $\Sigma$ , assumem-se as hipóteses:

(H1) o par  $(A, B)$  é estabilizável  $\forall P \in \mathcal{P}$

(H2)  $\Gamma' \Gamma > 0$ (H3)  $D' C = \mathbf{0}$ 

**Definição 8.1 (Regularidade Generalizada e Regularidade Estrita)** *Define-se a propriedade de regularidade generalizada de um sistema a parâmetros incertos como a validade da hipótese (H2) para o mesmo.*

*No caso particular em que for válida a propriedade  $D' D > 0$  será dito que o sistema possui a propriedade de regularidade estrita.*

□

NOTA 8.2 Observe-se que os sistemas com estrutura de *núcleo regular* possuem, por construção, a propriedade de *regularidade generalizada*.

◇

**Definição 8.2 (Forma Padrão, F.P. Estrita e F.P. Generalizada)** *Quando as hipóteses (H2) e (H3) são verificadas em sistemas a parâmetros precisamente conhecidos (nessa situação (H2) se reduz a  $D' D > 0$ ), diz-se usualmente que o sistema se apresenta na forma padrão [48].*

*No caso de sistemas a parâmetros incertos, será dito que o mesmo se encontra na forma padrão generalizada se as hipóteses (H1) e (H2) forem verificadas. Caso adicionalmente se verifique  $D' D > 0$ , será dito que o sistema se encontra na forma padrão estrita.*

□

A hipótese (H3) é assumida por convenção, pois permite simplificar a apresentação dos algoritmos de projeto dos reguladores ótimos. Caso a hipótese (H3) não se verifique inicialmente, sempre será possível transformar um sistema que esteja em uma forma não padrão em um sistema na forma padrão generalizada por meio de simples mudanças de coordenadas. Essa transformação, bastante conhecida no caso de sistemas estritamente regulares [48], será desenvolvida na próxima subseção para o caso de sistemas singulares. Dessa forma, assume-se (H3) sem perda de generalidade.

### 8.1.1 Transformação para a forma padrão generalizada

Seja um sistema descrito por (8.1) e (8.2). Considere-se esse sistema em um conjunto de coordenadas do espaço de entradas tais que:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

sendo  $D_{11}$  tal que:

$$D'_{11} D_{11} > 0 \quad (8.7)$$

Defina-se um novo vetor de entradas  $v(t)$  tal que:

$$u(t) = - \begin{bmatrix} (D'_{11} D_{11})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} D' C x(t) + v(t) \quad (8.8)$$

Com esse novo vetor de entradas, o sistema fica:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left( A - B \begin{bmatrix} (D'_{11}D_{11})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} D'C \right) x + Bv \\ y &= \left( C - D \begin{bmatrix} (D'_{11}D_{11})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} D'C \right) x + Dv \\ z &= \left( \Psi - \Gamma \begin{bmatrix} (D'_{11}D_{11})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} D'C \right) x + \Gamma v \end{aligned} \quad (8.9)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left( A - B \begin{bmatrix} (D'_{11}D_{11})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} D'C \right) \\ \bar{C} &= \left( C - D \begin{bmatrix} (D'_{11}D_{11})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} D'C \right) \\ \bar{\Psi} &= \left( \Psi - \Gamma \begin{bmatrix} (D'_{11}D_{11})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} D'C \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{A}x + Bv \\ y &= \bar{C}x + Dv \\ z &= \bar{\Psi}x + \Gamma v \end{aligned} \quad (8.11)$$

Por inspeção, pode-se observar que:

$$D'\bar{C} = \mathbf{0} \quad (8.12)$$

ou seja, esse sistema está na *forma padrão generalizada*.

Para simplificar a notação neste capítulo, será assumido que o sistema descrito por (8.1) e (8.2) já foi submetido a tal transformação. Notar que essa transformação implica em mudanças apenas nas matrizes  $A$  e  $C$  e em suas respectivas incertezas paramétricas. A transformação em si não é afetada pelas incertezas, determinada a partir das matrizes (precisamente conhecidas)  $C$  e  $D$ .

## 8.2 Problema de Regulação Custo-Garantido Ótima

No capítulo 2 foi definido genericamente o *problema de regulação ótima* de sistemas dinâmicos. Tal problema é a seguir formulado em termos de *custos garantidos*, assim se tornando aplicáveis, de forma significativa, a sistemas com incertezas paramétricas.

**Definição 8.3 (Função Custo Garantido)** *Sejam  $\Sigma$  um sistema dinâmico conforme definido em (8.1) e (8.2),  $\Omega$  uma classe de sinais no espaço  $\mathcal{F}^q$ , e  $\Xi(\Sigma, \mathcal{P}, \Omega, x_0)$  o conjunto das possíveis soluções do sistema para tal classe de sinais de entrada e para todas as instâncias dos parâmetros incertos consideradas. Seja  $F(y)$  uma norma dos sinais*

$y(t) \in \mathcal{F}^m$ . Seja agora  $\Phi(F, \Xi)$  uma função que limita superiormente  $F(y)$  no conjunto  $\Xi(\Sigma, \mathcal{P}, \Omega, x_o)$ , de forma que:

$$\Phi(F, \Xi) \geq F(y) \quad \forall y(t) \in \Xi(\Sigma, \mathcal{P}, \Omega, x_o) \quad (8.13)$$

A função  $\Phi(F, \Xi)$  é denominada uma função custo garantido do sistema em relação à norma  $F$ .

□

**Definição 8.4 (Problema RCGO)** *Sejam  $\Sigma$  um sistema dinâmico conforme definido em (8.1) e (8.2),  $\Omega$  uma classe de sinais no espaço  $\mathcal{F}^q$ , e  $\Xi(\Sigma, \mathcal{P}, \Omega, x_o)$  o conjunto das possíveis soluções do sistema para tal classe de sinais de entrada e para todas as instâncias dos parâmetros incertos consideradas. Sejam  $F(y)$  uma norma dos sinais  $y(t) \in \mathcal{F}^m$  e  $g(x) : \{\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p\}$  uma função, e seja  $\Phi(F, \Xi)$  uma função custo garantido. O problema de regulação custo-garantido ótima (problema RCGO) é definido como o problema de determinação de  $u^*(t)$  tal que:*

$$u^*(t) = \arg \min_{u(t)} \sup_{w(t), \mathcal{P}} \Phi$$

$$s.a.: \begin{cases} u(t) = g(x(t)) \\ w(t) \in \Omega \\ (y, u) \in \Xi(\Sigma, \mathcal{P}, \Omega, x_o) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (8.14)$$

sendo que o sistema dinâmico em malha fechada com a lei de controle custo-garantido ótima deve ser necessariamente estável.

□

**NOTA 8.3** O problema RCGO se enquadrará dentro da definição de problema RO sempre que a função  $\Phi$  for uma norma. Nem sempre este será o caso, nos problemas específicos estudados a seguir. No entanto, sempre que a incerteza for anulada em um problema RCGO, isto é, sempre que os sistemas considerados tiverem parâmetros precisamente conhecidos, recuperar-se-á a estrutura do problema RO.

◇

Nas seções que se seguem, o problema de regulação custo-garantido ótimo será formulado especificamente para os casos de funcionais de custo dos tipos norma  $\mathcal{H}_2$  e norma  $\mathcal{H}_\infty$  de funções de transferência. Tais normas serão aplicadas isoladamente ou em alguma combinação (critério misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ). Serão estudados sistemas com incertezas paramétricas dos tipos limitada em norma e politópica.

### 8.2.1 Regularidade do problema de regulação custo-garantido ótimo

Define-se a *regularidade* de problemas de projeto de controladores:

**Definição 8.5 (Regularidade de Problemas de Projeto)** *Seja um problema de projeto de regulador ótimo ou de regulador custo-garantido ótimo para determinado sistema. Diz-se que o mesmo é um problema regular se para toda condição inicial finita do sistema o controle resultante  $u^*(t)$  assume apenas valores finitos para todo instante de tempo a partir do início:*

$$|x_o| < \infty \Rightarrow \|u^*(t)\|_\infty < \infty \quad (8.15)$$

□

NOTA 8.4 No caso de projeto de controladores do tipo realimentação estática de estados, aqui considerado em detalhe, a regularidade do problema de projeto equivale à matriz  $K$  de ganhos de realimentação resultante do projeto ser estabilizante e composta apenas de elementos finitos.

◇

O aspecto central de inovação em relação ao conhecimento atualmente registrado na literatura a ser apresentado neste capítulo é sintetizado no teorema a seguir.

**Teorema 8.1** *Considere-se o sistema (8.1) (sistema com estrutura de núcleo regular generalizado) com parâmetros incertos conforme (8.2). Considere-se o problema de projeto de ganhos estáticos de realimentação de estados. Se para toda instância dos parâmetros incertos no conjunto  $\mathcal{P}$  um problema de regulação ótima formulado em termos de uma norma  $F$  do sinal  $z(t)$  for regular então o correspondente problema de regulação custo-garantido ótima no conjunto  $\mathcal{P}$  formulado em termos dessa mesma norma aplicada ao sinal  $y(t)$  também será regular.*

□

DEMONSTRAÇÃO: Sem perda de generalidade, escreva-se:

$$z = \begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} D \\ \bar{D} \end{bmatrix} u$$

Colocando o vetor de entradas de controle em coordenadas convenientes:

$$\begin{bmatrix} y \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Por construção do sistema tipo núcleo regular generalizado, tem-se que  $\mathbf{D}$  e  $\bar{\mathbf{D}}$  possuem posto completo de colunas e a última é uma matriz quadrada. Então a lei de controle resultante terá a estrutura:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} x$$

Por inspeção, observa-se que a matriz de ganhos  $K_1$  tem elementos limitados pelo crescimento da norma do sinal  $y(t)$ , o que vale tanto no projeto dos reguladores ótimos para a norma de  $z(t)$  quanto no projeto dos reguladores custo-garantido ótimos para a norma de  $y(t)$ . Por outro lado, a aplicação de ganhos infinitos em qualquer direção dentro do subespaço que contém  $u_2$  leva o sistema à instabilidade (por construção, essas são as direções ganho-infinito instabilizantes). Como o projeto custo-garantido de reguladores tem implícita a restrição de garantia de estabilidade para toda instância dos parâmetros incertos, a matriz de ganhos  $K_2$  é necessariamente também do tipo ganhos-finitos.

■

### 8.3 Problema Misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

O primeiro tipo de critério a ser especificamente otimizado neste trabalho se denomina *critério misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$* . Na formulação desse critério, define-se inicialmente um funcional  $\theta$  que é um limitante da norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência de  $w_2$  para  $y_2$  no sistema (8.4):

$$\theta \geq \|H_{w_2 y_2}\|_2 \quad (8.16)$$

O *problema misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$*  é formulado como a minimização desse funcional com a restrição adicional de que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de  $w_1$  para  $y_1$  seja menor que um valor estabelecido  $\gamma$ . Busca-se uma lei de controle do tipo realimentação estática de estados:

$$u(t) = Kx(t) \quad (8.17)$$

No caso de parâmetros precisamente conhecidos ter-se-ia:

$$\begin{aligned} K_{op} &= \min_K \theta(K) \\ \text{sujeito a: } &\left\{ \begin{array}{l} \|H_{w_1 y_1}\|_\infty \leq \gamma \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8.18)$$

No caso incerto a formulação do problema de regulação custo-garantido ótima com um critério misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  ficaria:

$$\begin{aligned} K_{op} &= \min_K \max_P \theta(K, P) \\ \text{sujeito a: } &\left\{ \begin{array}{l} \|H_{w_1 y_1}\|_\infty \leq \gamma \\ P \in \mathcal{P} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (8.19)$$

O projeto de controladores com tal tipo de critério tem sido objeto de intensa pesquisa [42, 47, 59, 62, 78, 89, 90, 101, 111]. A motivação para tais estudos é a possibilidade de combinar as propriedades convencionais de minimização da energia da perturbação (critério  $\mathcal{H}_2$ ) com a robustez diante de perturbações de modelo não-estruturadas (característica do critério  $\mathcal{H}_\infty$ ). Para uma discussão mais aprofundada sobre o tema, o leitor é remetido às referências citadas.

Neste trabalho, em adição a toda a motivação intrínseca ao critério misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ , acrescenta-se um motivo para sua apresentação em destaque: o fato de tal critério conduzir diretamente aos critérios  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  puros mediante operações simples. Isso torna mais sintética a apresentação dos problemas de regulação ótima nessas normas, reforçando-se a unidade no tratamento dos diversos problemas ao longo do texto.

Na subseção a seguir é apresentada uma formulação em termos de LMI's de um caso particular do problema misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  que admite enquadramento em tal forma. Os resultados apresentados seguem a referência [62]. O problema tratado envolve apenas sistemas com parâmetros precisamente conhecidos. As mesmas função custo e restrições serão adaptadas nas seções seguintes para sistemas com incertezas politópicas e limitadas em norma.

### 8.3.1 Formulação convexa do problema misto

Considere-se um caso particular do sistema (8.4) no qual  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2$ , sendo portanto  $E_1 = E_2 = E$ . Assumam-se parâmetros precisamente conhecidos (ou seja,  $\mathcal{P}$  possui um único elemento). Em tal sistema, se a inequação de Riccati

$$W(A + BK)' + (A + BK)W + EE' + \gamma^{-2}W(C_1 + D_1K)'(C_1 + D_1K)W \leq 0 \quad (8.20)$$

tiver solução definida positiva  $W > 0$  então

$$\|H_{wy_1}\|_\infty \leq \gamma \quad (8.21)$$

A norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema é dada por:

$$\|H_{wy_2}\|_2^2 = \text{tr}((C_2 + D_2K)L_c(C_2 + D_2K)') \quad (8.22)$$

sendo  $L_c$  a solução simétrica positiva definida da equação de Lyapunov:

$$(A + BK)L_c + L_c(A + BK)' + EE' = 0 \quad (8.23)$$

Tem-se no entanto que:

$$\text{tr}((C_2 + D_2K)W(C_2 + D_2K)') \geq \text{tr}((C_2 + D_2K)L_c(C_2 + D_2K)') \quad (8.24)$$

para  $W$  solução de (8.20). Tomando-se então uma matriz  $\Theta$  tal que:

$$(C_2 + D_2K)W(C_2 + D_2K)' \leq \Theta \quad (8.25)$$

tem-se que:

$$\|H_{wy_2}\|_2^2 \leq \text{tr}(\Theta) \quad (8.26)$$

Define-se agora uma nova variável  $Z$  como:

$$Z = KW \quad (8.27)$$

o que permite reescrever (8.20) da seguinte forma:

$$WA' + AW + Z'B' + BZ + EE' + \gamma^{-2}[(C_1W + D_1Z)'(C_1W + D_1Z)] \leq 0 \quad (8.28)$$

e (8.25) da forma:

$$(C_2W + D_2Z)W^{-1}(C_2W + D_2Z)' \leq \Theta \quad (8.29)$$

Aplicando-se agora a fórmula complementar de Schur obtém-se o seguinte problema de otimização de um funcional linear com restrições LMI's:

---

Regulador Misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

$$(\theta^*)^2 = \min_{Z, W} \text{tr}(\Theta)$$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \Theta & C_2W + D_2Z \\ (C_2W + D_2Z)' & W \end{array} \right] \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -(WA' + AW + Z'B' + BZ + EE') & (C_1W + D_1Z)' \\ C_1W + D_1Z & \gamma^2\mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \end{array} \right. \quad (8.30)$$

$$\|H_{wy_2}\|_2 \leq \theta^*$$

$$\|H_{wy_1}\|_\infty \leq \gamma$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

A validade da fórmula de projeto acima é demonstrada na referência [62], seguindo os mesmos passos acima delineados. As próximas subseções são dedicadas à obtenção de fórmulas de projeto para os reguladores ótimos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  a partir do regulador misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ .

NOTA 8.5 Não se conhece até o presente nenhuma formulação convexa para o problema misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  genérico. A convexidade da fórmula (8.30) é obtida ao custo de se considerar um único vetor de entradas de perturbação no sistema. Mesmo assim, a solução obtida ainda é uma aproximação, pois impõe-se a mesma matriz  $W$  para as expressões associadas à norma  $\mathcal{H}_2$  e à norma  $\mathcal{H}_\infty$ .  $\diamond$

### 8.3.2 Projeto do regulador ótimo $\mathcal{H}_2$

O regulador ótimo  $\mathcal{H}_2$  é obtido simplesmente fazendo-se  $\gamma \rightarrow \infty$ . Tal expediente transforma a equação de Riccati (8.20) em uma Riccati convencional do tipo associado a problemas lineares quadráticos:

$$W(A + BK)' + (A + BK)W + EE' \leq 0 \quad (8.31)$$

O problema (8.30) se reduz a:

---

Regulador Ótimo  $\mathcal{H}_2$

$$(\theta^*)^2 = \min_{Z, W} \text{tr}(\Theta)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Theta & C_2W + D_2Z \\ (C_2W + D_2Z)' & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ -(WA' + AW + Z'B' + BZ + EE') \geq 0 \end{cases} \quad (8.32)$$

$$\|H_{wy_2}\|_2 = \theta^*$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

Observe-se que nesse caso o valor de  $\theta^*$  coincide com o valor ótimo da norma  $\mathcal{H}_2$ .

### 8.3.3 Projeto do regulador ótimo $\mathcal{H}_\infty$

O regulador ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  por sua vez é obtido pela minimização de um funcional  $\delta$  definido como:

$$\delta = \gamma^2 \quad (8.33)$$

em substituição ao funcional  $\theta$ . Assim, elimina-se também a restrição envolvendo  $\Theta$  que deixa de ter significado neste contexto:

---

Regulador Ótimo  $\mathcal{H}_\infty$

$$\delta^* = \min_{Z, W} \delta$$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -(WA' + AW + Z'B' + BZ + EE') & (C_1W + D_1Z)' \\ C_1W + D_1Z & \delta \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \right. \quad (8.34)$$

$$\|H_{wy_1}\|_\infty \leq \sqrt{\delta^*}$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

## 8.4 Sistemas com Incerteza Limitada em Norma

Seja um sistema (8.1) com incerteza limitada em norma:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} A = A_0 + M\Delta N \\ B = B_0 + M\Delta R \end{cases}, \quad \|\Delta\|_\infty < 1 \quad (8.35)$$

sendo os demais parâmetros do sistema precisamente conhecidos. Escrevem-se os sinais relativos à incerteza:

$$\phi = \Delta \otimes \zeta \quad (8.36)$$

de maneira que o sistema fica representado por:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + Ew(t) + M\phi(t) \\ y_1(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \\ y_2(t) = C_2x(t) + D_2u(t) \\ \zeta(t) = Nx(t) + Ru(t)z(t) = \Psi x(t) + \Gamma u(t) \end{cases} \quad (8.37)$$

Levar em consideração a incerteza no sistema (8.37) equivale a introduzir no projeto do regulador a restrição de que a função de transferência de malha fechada de  $\phi$  para  $\zeta$  possua norma  $\mathcal{H}_\infty$  menor que um:

$$\|H_{\phi\zeta}\|_\infty < 1 \quad (8.38)$$

Isso garante, pelo teorema do ganho pequeno, a estabilidade do sistema para toda instância dos parâmetros dentro do conjunto de incertezas. O regulador custo-garantido ótimo é obtido simplesmente acrescentando-se tal restrição ao respectivo problema de projeto ótimo, para cada norma em questão.

Para que o problema seja enquadrado dentro da classe abordada na subseção 8.3.1, com formulação convexa, é preciso agrupar as entradas de perturbação (paramétrica e de sinais exógenos) do sistema em uma única nova entrada  $\eta$ :

$$\eta = \begin{bmatrix} w \\ \phi \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

o que permite reescrever o sistema como:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + G\eta(t) \\ y_1(t) = C_1x(t) + D_1u(t) \\ y_2(t) = C_2x(t) + D_2u(t) \\ \zeta(t) = Nx(t) + Ru(t)z(t) = \Psi x(t) + \Gamma u(t) \end{cases} \quad (8.40)$$

sendo  $G$  definida como:

$$G = \begin{bmatrix} E & M \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

NOTA 8.6 O procedimento de agrupar as diferentes entradas de perturbação em um único vetor terá como consequência, naturalmente, a introdução de certo conservatismo nos resultados de projeto custo-garantido ótimo que serão obtidos a seguir.

◇

### 8.4.1 Regulador $\mathcal{H}_2$ custo-garantido ótimo

No caso de um critério  $\mathcal{H}_2$  puro, a saída  $y_1$  não é relevante. O problema de projeto, tomado como o problema (8.32) mais a restrição (8.38) (de estabilidade do sistema para toda instância dos parâmetros incertos) recai em uma formulação com uma estrutura idêntica à do problema misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  (problema (8.30)):

---

Regulador  $\mathcal{H}_2$  Custo Garantido (ILN)

$$(\theta^*)^2 = \min_{Z,W} \text{tr}(\Theta)$$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \Theta & C_2W + D_2Z \\ (C_2W + D_2Z)' & W \end{array} \right] \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -(WA' + AW + Z'B' + BZ + GG') & (NW + RZ)' \\ NW + RZ & \mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \end{array} \right. \quad (8.42)$$

$$\|H_{wy_2}\|_2 \leq \|H_{\eta y_2}\|_2 \leq \theta^*$$

$$\|H_{\phi\zeta}\|_\infty \leq \|H_{\eta\zeta}\|_\infty \leq 1$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

### 8.4.2 Regulador $\mathcal{H}_\infty$ custo-garantido ótimo

Toma-se agora o problema (8.32) mais a restrição (8.38). Com isso obtém-se o procedimento de projeto do regulador  $\mathcal{H}_\infty$  custo-garantido ótimo para sistemas com incerteza limitada em norma:

---

Regulador  $\mathcal{H}_\infty$  Custo Garantido (ILN)

$$\delta^* = \min_{Z,W} \delta$$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} -(WA' + AW + Z'B' + BZ + GG') & (C_1W + D_1Z)' \\ C_1W + D_1Z & \delta\mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -(WA' + AW + Z'B' + BZ + GG') & (NW + RZ)' \\ NW + RZ & \mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \end{array} \right. \quad (8.43)$$

$$\|H_{wy_1}\|_\infty \leq \|H_{\eta y_1}\|_\infty \leq \sqrt{\delta^*}$$

$$\|H_{\phi\zeta}\|_\infty \leq \|H_{\eta\zeta}\|_\infty \leq 1$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

### 8.4.3 Regulador misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ custo-garantido ótimo

Para obter-se o procedimento de projeto do regulador custo-garantido ótimo com critério misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  basta incorporar a restrição (8.38) à formulação (8.30):

---

Regulador Misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  (ILN)

$$(\theta^*)^2 = \min_{Z,W} \text{tr}(\Theta)$$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \Theta & C_2W + D_2Z \\ (C_2W + D_2Z)' & W \end{array} \right] \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -(WA' + AW + Z'B' + BZ + GG') & (C_1W + D_1Z)' \\ C_1W + D_1Z & \gamma^2\mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -(WA' + AW + Z'B' + BZ + GG') & (NW + RZ)' \\ NW + RZ & \mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \end{array} \right. \quad (8.44)$$

$$\|H_{wy_2}\|_2 \leq \|H_{\eta y_2}\|_2 \leq \theta^*$$

$$\|H_{wy_1}\|_\infty \leq \|H_{\eta y_1}\|_\infty \leq \gamma$$

$$\|H_{\phi\zeta}\|_\infty \leq \|H_{\eta\zeta}\|_\infty \leq 1$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

## 8.5 Sistemas com Incerteza Politópica

Considere-se agora o sistema (8.4) com incertezas paramétricas do tipo politópico:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} A = \sum_{i=1}^v \alpha_i A_i \\ B = \sum_{i=1}^v \alpha_i B_i \\ \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \end{cases} \quad (8.45)$$

Os demais parâmetros do sistema são assumidos como precisamente conhecidos.

No caso de incertezas politópicas como acima descritas, as formulações baseadas em LMI's deduzidas para o caso de parâmetros precisamente conhecidos são adaptadas de maneira direta. Em virtude da linearidade das restrições, basta acrescentar um conjunto de restrições para cada vértice do politopo de incertezas. A verificação simultânea das restrições em todos os vértices implicará na sua verificação também em todo o interior do politopo de incertezas. Os procedimentos de projeto então ficam:

---

### Regulador $\mathcal{H}_2$ Custo Garantido (IP)

$$(\theta^*)^2 = \min_{Z, W} \text{tr}(\Theta)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Theta & C_2 W + D_2 Z \\ (C_2 W + D_2 Z)' & W \end{bmatrix} \geq 0 \\ -(W A_i' + A_i W + Z' B_i' + B_i Z + E E') \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \end{cases} \quad (8.46)$$

$$\|H_{wy_2}\|_2 = \theta^*$$

$$K_{op} = Z_{op} W_{op}^{-1}$$


---

---

Regulador  $\mathcal{H}_\infty$  Custo Garantido (IP)

$$\delta^* = \min_{Z, W} \delta$$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} -(WA'_i + A_iW + Z'B'_i + B_iZ + EE') & (C_1W + D_1Z)' \\ C_1W + D_1Z & \delta \mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \\ \forall i = 1, \dots, v \end{array} \right. \quad (8.47)$$

$$\|H_{wy_1}\|_\infty \leq \sqrt{\delta^*}$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

---

Regulador Misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  (IP)

$$(\theta^*)^2 = \min_{Z, W} \text{tr}(\Theta)$$

sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} \Theta & C_2W + D_2Z \\ (C_2W + D_2Z)' & W \end{array} \right] \geq 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} -(WA'_i + A_iW + Z'B'_i + B_iZ + EE') & (C_1W + D_1Z)' \\ C_1W + D_1Z & \gamma^2 \mathbf{I} \end{array} \right] \geq 0 \\ \forall i = 1, \dots, v \end{array} \right. \quad (8.48)$$

$$\|H_{wy_2}\|_2 \leq \theta^*$$

$$\|H_{wy_1}\|_\infty \leq \gamma$$

$$K_{op} = Z_{op}W_{op}^{-1}$$


---

## 8.6 Exemplos Numéricos

Esta seção se destina à apresentação de exemplos para ilustrar as técnicas de projeto discutidas neste capítulo. Para abreviar a discussão dos resultados, será empregado em todos os casos o algoritmo de projeto  $\mathcal{H}_\infty$  custo-garantido ótimo; os outros algoritmos teriam no entanto comportamento semelhante se aplicados aos mesmos sistemas.

Inicialmente, apresenta-se um exemplo de projeto do controlador para um sistema com parâmetros incertos, porém regularmente ponderado no sentido convencional.

EXEMPLO 8.1 Seja o sistema dinâmico:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew$$

$$y = Cx + Du$$

As matrizes  $A$  e  $B$  desse sistema são incertas, sendo tais que:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.0269 & 1.0287 \\ -0.9585 & -1.9822 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.0537 & 1.0154 \\ -0.9532 & -2.0428 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5000 \end{bmatrix}$$

tendo-se:

$$A = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2 \quad ; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$B = \beta B_1 + (1 - \beta)B_2 \quad ; \quad 0 \leq \beta \leq 1$$

As demais matrizes do sistema são dadas por:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como  $D'D = 1$ , tem-se que esse sistema é regularmente ponderado, no sentido convencional. O problema de projeto do controlador custo garantido ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  leva à seguinte matriz de ganhos:

$$K_{op} = \begin{bmatrix} -3.1458 & -2.2793 \end{bmatrix}$$

com o valor do limitante ótimo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  dado por:

$$\gamma_{op} = 1.8527$$

◇

Agora considera-se um sistema com ponderação singular no controle.

EXEMPLO 8.2 Seja o mesmo sistema considerado no exemplo 8.1. Substitua-se a matriz  $D$  de ponderação da entrada de controle pela matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso significa que agora o problema de projeto do controlador custo-garantido ótimo está formulado de maneira singular. Aplicando-se ao sistema o mesmo algoritmo utilizado no exemplo 8.1, obtém-se a matriz de ganhos:

$$K_{op} = \begin{bmatrix} -3.6001 & -0.0026 \end{bmatrix} \times 10^7$$

com o valor ótimo do limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$  dado por:

$$\gamma_{op} = 0.9849$$

Como era de se esperar, o valor do limitante ótimo é menor neste caso que no exemplo anterior. No entanto, os cálculos efetivados para o projeto de  $K_{op}$  tornam-se pouco confiáveis nesse contexto de existência de singularidade no problema. Observe-se que a matriz  $K_{op}$  resultante da aplicação do algoritmo nesse caso efetivamente possui elementos de valores elevados (como era de se esperar), porém finitos. Para que fosse possível a determinação confiável do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  custo-garantido ótimo para esse sistema, seria necessário primeiro decompô-lo através de algoritmos que separassem seu núcleo regular de seu subsistema de entrada prescritível, conforme foi discutido nos capítulos anteriores deste trabalho.

◇

A seguir, é apresentado mais um exemplo, agora de um sistema que, no sentido convencional do termo, seria singular. Tal sistema, no entanto, devido à estrutura das incertezas presentes na matriz de entrada de controle, apresenta a propriedade de *regularidade generalizada*.

**EXEMPLO 8.3** Seja considerado o mesmo sistema estudado no exemplo 8.2 (o sistema ainda possui, portanto, ponderação singular no controle). Substituam-se os vértices do politopo de incertezas da matriz de entrada de controle considerada por:

$$B = \beta B_1 + (1 - \beta) B_2$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

Por inspeção, pode-se perceber que tal estrutura de incertezas não admite a aplicação de ganhos infinitos na entrada de controle. A aplicação do mesmo algoritmo de projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  custo-garantido ótimo conduz ao resultado:

$$K_{op} = [ 0.0408 \quad -0.1301 ]$$

O valor ótimo do limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty$  é, neste caso:

$$\gamma_{op} = 2.8272$$

Deve-se notar neste caso que o sistema, mesmo sendo singular no sentido convencional, levou à determinação de um controlador custo-garantido ótimo com todos os ganhos finitos.

◇

## 8.7 Conclusão

Neste capítulo foi mostrado que um problema de regulação custo-garantido ótimo aplicado a sistemas com estrutura de núcleo regular generalizado será um *problema regular* sempre que o sistema com as saídas aumentadas resultantes do algoritmo de decomposição R/S-G (que tem a estrutura de um núcleo regular estrito), submetido ao mesmo critério de projeto, resultar em um *problema regular*. A regularidade ou não de ambos depende, no entanto, da norma específica utilizada para definir o problema de projeto.

A seguir, com base em um algoritmo de projeto de regulador ótimo com critério misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  desenvolvido para sistemas a parâmetros precisamente conhecidos, foram desenvolvidos os algoritmos de projeto de regulador custo-garantido ótimo com critérios puros

$\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  e misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  para sistemas a parâmetros incertos com incertezas dos tipos limitado em norma e politópica.

Com os resultados deste capítulo, completam-se os passos necessários para a solução do problema originalmente proposto neste trabalho, de projeto de reguladores ótimos (ou custo-garantido ótimos) para sistemas a parâmetros incertos com critério de otimização singular.

Parte III

**REALIZAÇÃO POR MODOS  
DESLIZANTES**

A terceira parte deste trabalho tem por objetivo fazer uma transposição dos resultados obtidos na parte II para uma formulação em que os mesmos possam ser aplicados diretamente à síntese de controladores. Por esse motivo, é introduzido o formalismo do *controle por modos deslizantes* o qual, conforme sabe-se hoje, é uma das possíveis realizações do controle por *ganhos elevados*. É importante indicar que existe hoje acumulada uma vasta experiência relativa à implementação prática de controladores modos deslizantes em diversas classes de sistemas físicos, de forma que um controlador descrito em termos desse formalismo pode ser prontamente construído e conectado ao sistema em questão.

O capítulo 9 faz a transposição acima proposta para um subconjunto dos controladores que foram descritos na parte II deste trabalho. Embora haja naturalmente uma limitação dos resultados possíveis de serem obtidos quando se introduz uma restrição de implementabilidade prática (tal limitação é claramente identificada no capítulo 9), não foram explorados ainda, no presente trabalho, os limites teoricamente plausíveis para tal transposição. Essa tarefa é deixada para trabalhos futuros.



## Capítulo 9

# Modos Deslizantes em Sistemas com Controle Descontínuo

Nos capítulos precedentes, um sistema a ser controlado por um regulador ótimo com função custo possivelmente singular foi decomposto em dois subsistemas, um *núcleo regular* e um *sistema de saída prescritível*. Este último foi por sua vez decomposto em uma seqüência de subsistemas com estrutura particular (estrutura tipo *controle completo*), denominados *níveis*.

Foi mostrado que o problema de regulação ótima do sistema pode ser resolvido em termos de um problema regular de regulação ótima sobre o núcleo regular. Esse problema regular, ao ser resolvido, gera um problema de rastreamento de referência pela saída do subsistema a controle completo. Esse problema de rastreamento de referência, por sua vez, é resolvido em termos de uma seqüência de problemas de rastreamento de referência para cada um dos níveis. Esses últimos problemas são finalmente resolvidos em termos de leis de controle do tipo *ganhos elevados* que permitem a rejeição tanto de sinais de perturbação desconhecidos quanto de incertezas de modelo.

Encontra-se bem estabelecida na literatura a equivalência entre sistemas de controle do tipo *ganhos elevados* e sistemas de controle por *modos deslizantes*. Tal equivalência foi formalizada em termos da teoria dos *sistemas singularmente perturbados* [129]. Essa equivalência pode ser útil sob o ponto de vista de implementação dos controles a ganhos elevados, uma vez que os controladores a modos deslizantes prevêm:

- i. avaliações de funcionais finitos dos sinais do sistema para a tomada de decisão quanto ao sinal de controle a ser aplicado;
- ii. utilização somente de sinais de controle limitados (embora descontínuos).

Essas propriedades contrastam com as propriedades formais dos controladores a ganhos elevados que, em princípio, baseiam-se na avaliação de funcionais lineares de valor infinito, para a síntese de sinais de controle também possivelmente infinitos. A simples substituição do funcional infinito por um funcional composto de ganhos *muito-grandes-porém-finitos* nem sempre é um procedimento numericamente aceitável, e a simples introdução de saturações nos sinais sintetizados é um procedimento *ad-hoc* cujas conseqüências não são explicitamente consideradas ao adotar-se diretamente o método de ganhos elevados. Dessa forma, a teoria dos controladores a modos deslizantes pode ser interpretada como a formalização de uma metodologia de implementação dos controladores com estrutura de ganhos elevados.

Neste capítulo, controladores em modos deslizantes são empregados para a síntese da estrutura de controle a ganhos elevados que foi desenvolvida nos capítulos precedentes. Tal estrutura foi desenvolvida com o objetivo de fazer o *quase-rastreamento* de sinais arbitrários pela saída de sistemas pertencentes à classe dos *níveis*. São aqui estudados sistemas a *controle completo* cujos sinais de controle admitem descontinuidades. Assim, a classe de sistemas em questão neste capítulo inclui o último nível do sistema com saída prescritível, bem como ainda os sistemas a saída prescritível compostos de um único nível. A maioria dos controladores modos deslizantes estudados na literatura enquadra-se nesse último caso.

A metodologia de síntese do controlador modos deslizantes a ser empregada neste capítulo segue o padrão convencionalmente empregado na teoria de modos deslizantes: a partir de determinada lei de controle de estrutura variável, constrói-se uma função candidata a *função de Lyapunov*. São então determinados os valores dos parâmetros dessa lei de controle de forma a assegurar que a função construída se qualifique como função de Lyapunov, assim sendo garantida a convergência global do controlador.

Por restrições de tempo, não foi possível incluir no presente trabalho de tese a extensão da aplicação dos controladores modos deslizantes a sistemas cuja decomposição envolve diversos *níveis*. Fica aqui apenas indicado que já foi iniciado o trabalho para viabilização de tal extensão, o qual envolve a síntese de *modos deslizantes de ordem superior* [70].

O presente capítulo inicia-se com uma apresentação da teoria do controle por modos deslizantes, orientada para a solução do problema aqui proposto. A seguir, tal teoria é utilizada para resolver o problema do rastreamento de referência pela saída de um sistema com estrutura de controle completo.

Algoritmos completos de síntese serão aqui apresentados, para sistemas com incertezas dos tipos *politopo* e *incerteza limitada em norma*. Esses algoritmos são formulados em termos de problemas de otimização do tipo LMI's. Especial ênfase será dada aqui ao tratamento de incertezas na matriz de entradas de controle do sistema, sendo os resultados obtidos comparados com outros resultados relatados na literatura.

## 9.1 Controle por Modos Deslizantes

Nesta seção são apresentados os conceitos que estruturam a teoria dos *modos deslizantes*. O material aqui apresentado é apenas o necessário para a solução do problema de rastreamento de sinais nos sistemas pertencentes à classe em consideração. Para exposições em maior detalhe dessa teoria, o leitor é remetido ao livro [119] e aos artigos tutoriais [118, 14, 120, 52].

Os modos deslizantes são um caso particular dos *sistemas de estrutura variável* (SEV).

**Definição 9.1 (Sistema de Estrutura Variável)** *Seja um sistema dinâmico com vetor de estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ . Considere-se que o espaço  $\mathbb{R}^n$  está dividido em  $v$  regiões disjuntas  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_v$ , todas de dimensão  $n$ , satisfazendo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j &= \emptyset \quad \forall i \neq j \\ \overline{\mathcal{V}_1} \cup \dots \cup \overline{\mathcal{V}_v} &= \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{9.1}$$

*Assuma-se que as fronteiras  $\partial\mathcal{V}_i$  dessas regiões possuam dimensão menor que  $n$ . Nessas condições, o sistema dinâmico é denominado sistema de estrutura variável se sua equação*

dinâmica é regida por  $v$  conjuntos de equações, cada um desses conjuntos associado a uma das regiões  $\mathcal{V}_i$ , na qual o conjunto é localmente válido:

$$\dot{x} = \phi_i(x, t) \Leftrightarrow x(t) \in \mathcal{V}_i \quad (9.2)$$

sendo cada função  $\phi_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  contínua (ver definição de operador contínuo) em toda a correspondente região  $\mathcal{V}_i$ .

□

**Definição 9.2 (Região de Mono-Estrutura)** Define-se como região de mono-estrutura cada região  $\mathcal{V}_i$  associada à definição anterior de sistema de estrutura variável, na qual é válido um único conjunto de equações diferenciais contínuas para o sistema.

□

**Definição 9.3 (Superfície de Chaveamento)** Dado um controle a estrutura variável, uma superfície de chaveamento  $\mathcal{S}_w$  desse sistema é definida como um subconjunto do conjunto  $\mathcal{F}$  das fronteiras  $\mathcal{F}_i$  das regiões de mono-estrutura  $\mathcal{V}_i$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= \partial\mathcal{V}_i \\ \mathcal{F} &= \bigcup_{i=1}^v \mathcal{F}_i \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\mathcal{S}_w \subset \mathcal{F}$$

□

NOTA 9.1 As superfícies de chaveamento podem incluir pontos que pertençam simultaneamente a fronteiras de duas ou mais regiões de mono-estrutura. É possível que determinadas superfícies de chaveamento sejam parte da fronteira de apenas uma região de mono-estrutura. Nessa situação, essas superfícies poderão corresponder a descontinuidades na equação dinâmica associada à região.

◇

Observe-se que, quando se tratar de superfícies de chaveamento separando regiões de um espaço de dimensão  $n$ , essas superfícies possuirão dimensão menor ou igual a  $n - 1$ . Superfícies de dimensão igual a  $n - 1$  podem ser descritas em termos de uma equação, enquanto superfícies de dimensão menor que  $n - 1$  podem ser descritas como sistemas de equações:

**Definição 9.4 (Equações de Superfícies)** Sejam  $\varphi_i(\cdot)$  funcionais contínuos. O sistema de equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_w &: \{x \mid \varphi_i(x) = 0\} \\ \varphi_i(\cdot) &: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \end{aligned} \quad (9.4)$$

é dito ser a equação da superfície  $\mathcal{S}_w$ .

□

NOTA 9.2 Superfícies de dimensão menor que  $n - 1$  podem ser interpretadas como a interseção de duas ou mais superfícies de dimensão  $n - 1$ . Essa caracterização das superfícies de chaveamento é conveniente, pois permite adicionalmente avaliar de que lado da superfície se encontra, a cada momento, o vetor de estados, estando essa informação associada ao sinal do funcional  $\varphi_i(x)$ .

◇

Um sistema de estrutura variável possui uma dinâmica que é, portanto, possivelmente descontínua nas fronteiras das regiões  $\mathcal{V}_i$ . Um sistema dinâmico controlado pode se tornar, em malha fechada, um sistema de estrutura variável em virtude da aplicação de uma lei de controle descontínua, denominada *controle a estrutura variável*:

**Definição 9.5 (Controle a Estrutura Variável)** *Seja um sistema dinâmico com vetor de estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  e vetor de entradas de controle  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ . Considere-se que o espaço  $\mathbb{R}^n$  está dividido em  $v$  regiões disjuntas  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_v$  cujas fronteiras possuem dimensão menor que  $n$ , satisfazendo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j &= \emptyset \quad \forall i \neq j \\ \overline{\mathcal{V}_1} \cup \dots \cup \overline{\mathcal{V}_v} &= \mathbb{R}^n \\ \dim(\partial\mathcal{V}_i) &< n \end{aligned} \tag{9.5}$$

O controle é dito controle a estrutura variável se é definido por  $v$  leis distintas, cada uma dessas associada a uma das regiões  $\mathcal{V}_i$ , na qual prevalece:

$$u(t) = \beta_i(x, t) \Leftrightarrow x(t) \in \mathcal{V}_i \tag{9.6}$$

□

A lei de controle do tipo estrutura variável é portanto possivelmente descontínua nas superfícies de chaveamento.

**NOTA 9.3** A questão fundamental para a formulação de um controle a estrutura variável é a determinação, a cada instante, da região na qual o vetor de estados se encontra, para a aplicação da lei de controle associada a tal região. Essa determinação pode ser feita através da verificação da passagem do vetor de estados através das fronteiras de dimensão  $n - 1$  que separam regiões. Note-se que o cruzamento de fronteiras que não separam regiões (cujos pontos fazem fronteira com uma única região) não representa problema para a determinação da lei de controle, uma vez que esta não é mudada após o cruzamento.

◇

Neste ponto, é possível definir os *sistemas em modos deslizantes* e os *controladores modos deslizantes*.

**Definição 9.6 (Superfície de Deslizamento)** *Um subconjunto  $\mathcal{S}$  de uma superfície de chaveamento é dito ser uma superfície de deslizamento se o vetor de estados, ao nela ingressar, fica confinado a permanecer em uma vizinhança arbitrariamente pequena dessa região durante um intervalo de tempo maior que zero:*

$$x(t_0) \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists t_1 > 0 \mid \beta(\mathcal{S}, \epsilon) \supset x(t_0 + \delta_t) \quad \forall \epsilon > 0, \delta_t \in (0, t_1), \tag{9.7}$$

Na equação acima,  $\beta(\mathcal{S}, \epsilon)$  denota o conjunto de pontos cuja distância em relação à superfície  $\mathcal{S}$  é menor ou igual a  $\epsilon$ .

□

**Definição 9.7 (Modos Deslizantes)** *Um sistema de estrutura variável é dito estar em modos deslizantes quando seu vetor de estados encontra-se confinado a uma superfície de deslizamento.*

□

**Definição 9.8 (Controle Modos Deslizantes)** *Um controle modos deslizantes é um controle a estrutura variável que faz com que o sistema dinâmico entre em modos deslizantes em uma superfície de deslizamento composta pela interseção de uma ou mais superfícies de chaveamento.*

□

Deve-se notar que, dado um sistema dinâmico de dimensão  $n$  o qual se encontra em modos deslizantes, a superfície de deslizamento possui dimensão  $n - r$ , sendo  $1 \leq r \leq n$ . No caso de sistemas com controle modos deslizantes,  $r$  é o número de equações linearmente independentes necessárias para descrever a equação da superfície de deslizamento.

Para os propósitos deste trabalho, será suficiente considerar superfícies de deslizamento  $S$  definidas por subespaços lineares, as quais serão denominadas *superfícies de deslizamento planas*.

**Definição 9.9 (Superfícies Planas)** *Seja a superfície  $S$  determinada por:*

$$S = \mathcal{N}(G) \tag{9.8}$$

$$G \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad r < n$$

*Tal superfície é denominada superfície plana. sua equação é dada por:*

$$g(x) = Gx \tag{9.9}$$

$$g(x) = 0$$

□

### 9.1.1 Soluções de Sistemas em Modos Deslizantes

A fundamentação matemática da teoria dos modos deslizantes, é formulada em termos da *teoria das equações diferenciais com lado direito descontínuo*. Essa teoria foi desenvolvida nas décadas de 50 e 60 pelo matemático russo Filippov. O leitor ocidental tem acesso a tal teoria através da referência em língua inglesa [29]. Os métodos desenvolvidos por Filippov permitiram estabelecer as condições de existência e unicidade de soluções, bem como as técnicas para determinação das mesmas, quando o sistema dinâmico encontra uma linha ou superfície de descontinuidade infinitas vezes durante um intervalo de tempo finito. Este é precisamente o caso de sistemas em modos deslizantes.

Alguns poucos fatos a respeito de soluções de sistemas em modos deslizantes são aqui catalogados a seguir.

**Definição 9.10 (Equação Diferencial com Lado Direito Descontínuo)** *Seja a equação diferencial:*

$$\dot{y} = v(t, y) \tag{9.10}$$

*sendo  $y \in \mathbb{R}^m$ . Assuma-se que  $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  é uma função vetorial Lebesgue-mensurável localmente limitada. Se a função  $v(\cdot, \cdot)$  é contínua em quase todo lugar e descontínua em conjuntos de medida zero do espaço  $\mathbb{R}^m$ , então a equação é dita uma equação diferencial com lado direito descontínuo (EDLDD).*

□

NOTA 9.4 A definição de *equação diferencial com lado direito descontínuo* (EDLDD) acima é um pouco mais geral que a definição, anteriormente apresentada, de *sistema de estrutura variável*, pois admite que a região de descontinuidade da equação seja variante no tempo. Esta definição de EDLDD é no entanto mais restrita que a classe de problemas estudados em [29], tendo sido cunhada com o objetivo de abranger os sistemas aqui em consideração.

◇

A definição de EDLDD (como proposta aqui) é mais conveniente para o estudo das soluções do sistema, enquanto a definição de SEV realça as propriedades geométricas do sistema, mais relevantes para o projeto de modos deslizantes. Assim, optou-se aqui pela apresentação de ambas.

**Teorema 9.1** *Seja uma equação diferencial com lado direito descontínuo, conforme definição 9.10. Tal equação é equivalente à inclusão diferencial:*

$$\dot{y} \in V(y) \quad (9.11)$$

sendo o conjunto  $V(y)$  definido por:

$$Y_\alpha : \{y \mid v(y) \text{ é contínua em } y\}$$

$$U(y_o) : \left\{ v(y_o) \mid v(y_o) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v(y_o + \epsilon \delta_y) \ ; \ (y_o + \epsilon \delta_y) \in Y_\alpha \ \forall \ \epsilon < \epsilon_o \right\} \quad (9.12)$$

$$V(y_o) = \text{conv } \overline{U(y_o)}$$

ou seja,  $V(y_o)$  é o fecho convexo do conjunto de todos os possíveis limites de  $v(y_\alpha)$  quando  $y_\alpha \rightarrow y_o$ , sendo  $\{y_\alpha\}$  os pontos de continuidade de  $v$ .

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [29].

■

**Definição 9.11 (Solução de uma EDLDD)** *A solução de uma EDLDD é definida como a função  $y(t)$  absolutamente contínua satisfazendo a inclusão diferencial (9.11) em quase todo lugar.*

□

NOTA 9.5 Caso a equação diferencial não seja descontínua, ou caso seja contínua por partes com a solução atingindo uma região de descontinuidade apenas um número finito de vezes em cada intervalo de tempo finito, a definição de *solução* acima irá coincidir com as definições usuais de solução de equações diferenciais.

◇

**Teorema 9.2 (Unicidade da Solução)** *Seja a equação diferencial:*

$$\dot{y} = v(t, y) \quad (9.13)$$

sendo  $y \in \mathbb{R}^m$ , uma EDLDD. Seja  $D = \mathcal{D}(v)$ . Assuma-se que  $v(\cdot, \cdot)$  é mensurável em seu domínio  $D$ . Assuma-se que, para todo conjunto  $Q$  limitado e fechado tal que  $Q \subset D$ , existe uma função  $B(t)$  integrável tal que, em quase todo lugar em  $Q$  verifica-se:

$$\|f(t, y)\| \leq B(t) \quad (9.14)$$

Suponha-se que para quaisquer dois pontos  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  de  $D$ , com a possível exceção de pontos pertencentes a um conjunto de medida zero, para  $\|y_1 - y_2\| < \epsilon_0$ , sendo  $\epsilon_0 > 0$ , se verifica a desigualdade:

$$(y_1 - y_2)'(f(t, y_1) - f(t, y_2)) \leq \|y_1 - y_2\| L(t, \|y_1 - y_2\|) \quad (9.15)$$

sendo a função  $L(\cdot, \cdot)$  uma função mensurável que satisfaz:

$$\begin{aligned} L(t, u) &= 0 \quad \forall u \leq 0 \\ L(t, u) &\leq K(t) \end{aligned} \quad (9.16)$$

e  $K(t)$  é integrável. Então, se a equação:

$$\frac{du}{dt} = L(t, u) \quad (9.17)$$

para qualquer  $t_0$  sob a condição inicial  $u(t_0) = 0$  na região  $t \geq t_0$  possui apenas a solução nula  $u \equiv 0$ , então o sistema 9.13 possui solução única no domínio  $D$ .

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [29].

■

NOTA 9.6 Este resultado concernente à unicidade de soluções pode ser interpretado como equivalente à “estabilidade” da diferença de duas soluções,  $y_d(t) = y_1(t) - y_2(t)$ . Se tal estabilidade se verifica (o que é verificado com  $y_d' y_d < 0$ , pela equação (9.15)) então duas soluções começando na mesma condição inicial seguirão a mesma trajetória.

◇

Embora em geral haja mais de uma solução satisfazendo um sistema EDLDD, há uma situação (que inclui todos os casos a serem tratados neste trabalho) que sempre terá soluções únicas:

**Teorema 9.3** *Seja o sistema dinâmico com entrada de controle afim:*

$$\dot{x} = f(t, x) + B(t, x)u(t) \quad (9.18)$$

sendo que  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$ . Um controlador de estrutura variável é conectado, com descontinuidade em superfícies de chaveamento planas:

$$g(x) = Gx = 0 \quad (9.19)$$

Assumindo-se que se verifique a condição de transversalidade:

$$\rho(GB) = \rho(G) = \rho(B) \quad \forall t \quad (9.20)$$

tem-se que a solução do sistema EDLDD resultante é sempre única.

□

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração deste resultado pode ser obtida na referência [119]. ■

**Definição 9.12 (Controle Equivalente)** *Seja o sistema EDLDD abaixo:*

$$\dot{x} = v(t, x, u) \quad (9.21)$$

com descontinuidade descrita por:

$$g(t, x) = \mathbf{0} \quad (9.22)$$

Admita-se que as soluções desse sistema sejam únicas, e que a descontinuidade em  $g(t, x) = 0$  seja causada por uma lei de controle descontínua (controle por estrutura variável). Suponha-se que haja indução de modos deslizantes sobre a descontinuidade. O sinal contínuo  $u_{eq}(t)$  satisfazendo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(t, x, u_{eq}) \\ g(t, x) &\equiv \mathbf{0} \end{aligned} \quad (9.23)$$

é denominado controle equivalente. □

NOTA 9.7 O sistema dinâmico submetido ao sinal de controle dado pelo *controle equivalente* possui solução igual à única solução do mesmo sistema submetido ao sinal de controle por estrutura variável, para toda condição inicial pertencente à superfície de descontinuidade (ver [119]). ◇

### 9.1.2 Problema de Projeto de MD

A função  $g(x)$  na definição de *superfícies planas* (definição 9.9) possui  $r$  componentes. A superfície  $\mathcal{S}$  pode ser interpretada nesse caso como a interseção de  $r$  superfícies  $\mathcal{S}_i$ , cada uma com dimensão  $n - 1$ . Sendo  $G_i$  a  $i$ -ésima linha da matriz  $G$ , tem-se que cada uma dessas superfícies é dada pela equação:

$$\mathcal{S}_i : g_i(x) = G_i x = 0 \quad (9.24)$$

Tal interpretação dá origem à seguinte abordagem para a síntese de controladores cujo objetivo é induzir modos deslizantes sobre a superfície  $\mathcal{S}$ : Pode-se associar a cada superfície assim descrita (pelo menos) uma componente  $u_i$  do vetor  $u(t)$  de entradas de controle, a qual irá sofrer um chaveamento sobre a superfície  $\mathcal{S}_i$ :

$$u_i(x, t) = \begin{cases} \phi_{i+}(x, t) & \Leftrightarrow g_i(x) > 0 \\ \phi_{i-}(x, t) & \Leftrightarrow g_i(x) < 0 \end{cases} \quad (9.25)$$

Dessa forma, o sistema em malha fechada pode ser caracterizado como sistema de estrutura variável e as superfícies  $\mathcal{S}_i$  como suas superfícies de chaveamento. Para caracterizar o sistema como em modos deslizantes e essas superfícies como de deslizamento é necessário ainda caracterizar a estabilidade local das mesmas. Isso pode ser feito a partir da condição:

$$\exists \epsilon > 0 \mid \{g_i(x)\dot{g}_i(x) < 0 \forall x \mid 0 < |g_i(x)| < \epsilon\} \quad (9.26)$$

Essa condição equivale à estabilidade de Lyapunov de  $g_i(x) = 0$  [119].

Outra abordagem possível seria a síntese de uma lei de controle que fosse descontínua apenas em  $\mathcal{S}$  (nesse caso o sistema de estrutura variável seria formado de uma única região de mono-estrutura). Isso é feito, por exemplo, pela lei de controle:

$$u(x, t) = \phi \left( \frac{g}{\|g\|} \right) \quad (9.27)$$

sendo  $\phi(\cdot)$  uma função contínua. Pode-se observar que o argumento de  $\phi$  é descontínuo em  $g = \mathbf{0}$ . Nesse caso, é necessário determinar a estabilidade local apenas de  $g(x) = \mathbf{0}$ , sendo irrelevante a estabilidade de cada componente  $g_i(x) = 0$ . Pode-se adotar o critério:

$$\exists \epsilon > 0 \mid \{g(x)' \dot{g}(x) < 0 \forall x \mid 0 < \|g(x)\| < \epsilon\} \quad (9.28)$$

Do ponto de vista de projeto, a síntese de um controle modos deslizantes consiste em duas etapas:

1. A escolha das superfícies de chaveamento nas quais será induzido o deslizamento.
2. A escolha das leis de controle que irão prevalecer em cada região mono-estrutura. Esta etapa pode envolver a determinação de novas superfícies de chaveamento (com a conseqüente subdivisão das regiões mono-estrutura), as quais entretanto não se tornarão superfícies de deslizamento.

A primeira etapa acima equivale ao projeto da dinâmica do sistema em malha fechada, quando em modos deslizantes. Essa dinâmica irá determinar a evolução do sistema de ordem reduzida (ordem  $n - r$ ) que consiste na projeção da dinâmica original do sistema sobre a superfície de deslizamento, sujeita às entradas de perturbação também projetadas sobre essa superfície.

Os sistemas que serão estudados neste capítulo possuem a estrutura particular de uma associação de sistemas do tipo *controle completo*, ou seja, sistemas que possuem entradas de controle linearmente independentes em número igual ao número de estados. Isso significa que a interseção das  $n$  superfícies de deslizamento que serão induzidas irá possuir dimensão zero, ou seja, não haverá dinâmica de ordem reduzida. Assim, a discussão quanto à escolha da superfície de deslizamento em associação com uma escolha de uma dinâmica de ordem reduzida não possui relevância neste contexto particular.

Esse fato pode ser interpretado da seguinte forma: Considerando o sistema inicialmente estabelecido no capítulo 4, tal sistema foi decomposto em um subsistema denominado núcleo regular e outro subsistema denominado sistema com saída prescritível. Em tal decomposição já está implícita a escolha de uma superfície de deslizamento, uma vez que a origem do espaço de estados do segundo sistema corresponde a um subespaço do sistema completo, quando realizada a soma direta dos espaços de estados dos dois subsistemas. Da mesma forma, o sistema com saída prescritível também se encontra decomposto em sistemas denominados níveis. A origem do espaço de estados de cada nível corresponde a uma superfície no espaço de estados do sistema saída prescritível.

Assim, os resultados a serem obtidos neste capítulo, relativos à estabilidade da *origem* de subsistemas a controle completo sob um controle modos deslizantes equivalem à estabilidade de modos deslizantes sobre *superfícies* do sistema composto. O comportamento global do sistema será determinado por essas superfícies. Essas superfícies são resultado (implícito)

de uma decomposição do sistema, tendo essa decomposição se originado da resolução de um problema de regulação ótima singular.

A síntese do controle em modos deslizantes, no presente contexto, envolve portanto apenas a segunda etapa acima, sendo que a primeira etapa já foi implicitamente executada através da decomposição do sistema.

### 9.1.3 Equivalência com Controle por Ganhos Elevados

Foi mostrado em [129] que, quando em *modos deslizantes*, um sistema com controle por estrutura variável comporta-se exatamente como se estivesse sendo controlado por ganhos elevados, sendo o espaço nulo da matriz de ganhos elevados igual à superfície de deslizamento. Isso significa que, no caso de haver deslizamento sobre a superfície de chaveamento dada por  $\mathcal{N}(K)$ , são equivalentes os controles:

$$u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\epsilon} x \quad (9.29)$$

e:

$$u_i = \begin{cases} \phi_{i+}(x) \Leftrightarrow K_i x > 0 \\ \phi_{i-}(x) \Leftrightarrow K_i x < 0 \end{cases} \quad (9.30)$$

Naturalmente, quando o vetor de estados encontra-se fora da superfície de deslizamento, a equivalência não se verifica.

A consequência importante dessa equivalência para o desenvolvimento deste trabalho será a possibilidade de utilização dos resultados obtidos nos capítulos precedentes, relativos ao cálculo de ganhos para controle por ganhos elevados, para a obtenção direta de superfícies de deslizamento equivalentes.

## 9.2 Preliminares dos Teoremas de Síntese

Neste capítulo são considerados sistemas do tipo ICCRE (sistemas incertos a controle completo com realimentação completa de estados), conforme a definição 5.6. Esta seção é dedicada ao estabelecimento das definições e hipóteses que serão utilizados como premissas pelos teoremas a serem enunciados nas seções seguintes. Será desenvolvida a seguir, nas próximas seções, uma lei de controle por modos deslizantes com característica de estabilidade e convergência global, para determinada classe de sistemas.

Seja um sistema ICCRE descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Hd \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (9.31)$$

no qual  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $d \in \mathbb{R}^q$ . Conforme a definição de sistema ICCRE, as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $H$  são incertas, pertencentes a um conjunto limitado conhecido  $\mathcal{U}$ :

$$A \in \mathcal{U}_A \quad B \in \mathcal{U}_B \quad H \in \mathcal{U}_H \quad (9.32)$$

Sejam  $A_0 \in \mathcal{U}_A$ ,  $B_0 \in \mathcal{U}_B$  e  $H_0 \in \mathcal{U}_H$ . Definam-se ainda os conjuntos  $\mathcal{U}_{DA}$ ,  $\mathcal{U}_{DB}$  e  $\mathcal{U}_{DH}$  tais que:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U}_A &\Leftrightarrow \Delta_A \in \mathcal{U}_{DA} \mid A = A_0 + \Delta_A \\ B \in \mathcal{U}_B &\Leftrightarrow \Delta_B \in \mathcal{U}_{DB} \mid B = B_0 + \Delta_B \\ H \in \mathcal{U}_h &\Leftrightarrow \Delta_H \in \mathcal{U}_{DH} \mid H = H_0 + \Delta_H \end{aligned} \quad (9.33)$$

Outras propriedades do sistema considerado são:  $B$  possui posto completo de linhas, e  $d(t)$  é limitado em norma  $\mathcal{L}_\infty$ . Sem perda de generalidade, será suposto que:

$$\sup_t \|d(t)\|_2 \leq 1 \quad (9.34)$$

Note-se que a norma-2 vetorial é equivalente (no sentido de equivalência de normas) à norma- $\infty$  vetorial, de maneira que a condição (9.34), correspondente a uma limitação na norma-2 do vetor a cada instante de tempo, implica na limitação da norma  $\mathcal{L}_\infty$  do sinal (porém não vice-versa).

O objetivo deste capítulo é desenvolver um controlador do tipo *modos deslizantes* que realize o quase-rastreamento de um sinal  $y_{ref}(t)$  pela saída  $y(t)$  do sistema. Inicialmente, a partir dessa referência para a saída do sistema, deve-se definir uma referência para os estados do sistema:

$$x_{ref}(t) = C^{-R} y_{ref}(t) \quad (9.35)$$

onde  $C^{-R}$  representa qualquer inversa à direita da matriz  $C$  (a escolha não é única). Dessa maneira, obtém-se uma referência que, se for seguida pelo vetor de estados, irá implicar em que a saída do sistema terá também seguido o seu sinal de referência. Define-se assim o erro de estados:

$$e_x(t) = x(t) - x_{ref}(t) \quad (9.36)$$

O controlador será formulado no espaço do erro de estados. O sistema, nesse novo espaço, é descrito por:

$$\dot{e}_x = Ae_x + Bu + Hd + Ax_{ref} + \dot{x}_{ref} \quad (9.37)$$

Assuma-se adicionalmente a respeito do sinal de referência que:

$$\begin{aligned} \sup_t \|x_{ref}(t)\|_2 &\leq \xi_1 \\ \sup_t \|\dot{x}_{ref}(t)\|_2 &\leq \xi_2 \end{aligned} \quad (9.38)$$

para algum par  $\xi_1 > 0$ ,  $\xi_2 > 0$ .

Assuma-se que exista uma matriz  $K$  tal que  $\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_-$  para todas as instâncias da matriz incerta  $B$ . Conforme visto no capítulo 5, essa condição é necessária para que o sistema seja estabilizável por ganhos elevados (e, por consequência, também por modos deslizantes). Tal  $K$  pode ser calculado, se for dado um conjunto  $\mathcal{U}$  do tipo incerteza limitada em norma, através do teorema 6.1, ou através do teorema 6.3, caso o conjunto  $\mathcal{U}$  seja do tipo politopo. Como  $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$  com  $r \geq n$ , pode-se fazer:

$$K = LF \quad (9.39)$$

com  $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$  e  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Como  $\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_-$ , necessariamente  $\rho(L) = \rho(F) = \rho(K) = n$ . Faz-se agora uma transformação no vetor de entradas  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ , que é mapeado em um vetor  $\mu(t) \in \mathbb{R}^n$  através da matriz  $L$ :

$$u(t) = L\mu(t) \quad (9.40)$$

O vetor  $\mu(t)$  passa a ser empregado como o novo vetor de entradas do sistema, para o propósito de projeto da lei de controle.

O controle em modos deslizantes será implementado sobre uma superfície  $\mathcal{S}$  dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \{e_x \mid Ge_x = \mathbf{0}\} \\ G \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned} \quad (9.41)$$

sendo  $\rho(G) = n$ . Defina-se a função:

$$g(t) = Ge_x(t) \quad (9.42)$$

Devido à equivalência existente entre controle por ganhos elevados e controle por modos deslizantes, pode-se afirmar que o conjunto  $\mathcal{G}$  de matrizes  $G$  tal que a superfície de deslizamento  $\mathcal{S}$  dada por (9.41) pode suportar modos deslizantes estáveis, com o novo vetor de entradas de controle  $\mu(t)$ , é dado por:

$$\mathcal{G} : \{G \mid \varsigma(BLG) \subset \mathbb{C}_- \forall B \in \mathcal{U}\} \quad (9.43)$$

Naturalmente, dado um  $K$  tal que  $\varsigma(BK) \subset \mathbb{C}_-$ , e de posse da decomposição  $K = LF$ , tem-se que  $G = F$  satisfaz a condição acima. Inicialmente, é possível considerar  $K = L$  e  $G = I$ . Posteriormente, essa escolha de  $G$  será modificada, tanto com o objetivo de, em determinadas situações, tornar factível um controle por modos deslizantes globalmente estável, como também para reduzir a conservatividade do controle, em quaisquer circunstâncias.

Algumas premissas são agora estabelecidas para simplificar a notação. Define-se a função  $h(t)$ :

$$h(t) = Hd(t) + Ax_{ref}(t) + \dot{x}_{ref}(t) \quad (9.44)$$

Como a matriz  $B_0L$  é quadrada não-singular, é possível fazer:

$$BL = (B_0 + \Delta_B)L = B_0L(\mathbf{I} + (B_0L)^{-1}\Delta_BL) \quad (9.45)$$

de forma que a dinâmica do erro fica:

$$\dot{e}_x = (A_0 + \Delta_A)e_x + B_0L(\mathbf{I} + (B_0L)^{-1}\Delta_BL)\mu + h \quad (9.46)$$

após serem explicitadas as incertezas e utilizando a entrada em suas coordenadas reduzidas.

Por conveniência, defina-se a matriz  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \Delta_BL(B_0L)^{-1} \quad (9.47)$$

Essa matriz irá aparecer com frequência na dedução da convergência global da lei de controle que será proposta. Defina-se também o conjunto limitado  $\mathcal{U}_\Gamma$  ao qual pertence  $\Gamma$ , resultante do mapeamento de  $\mathcal{U}_{DB}$  pela transformação acima:

$$\mathcal{U}_\Gamma : \left\{ \Gamma \mid \Gamma = \Delta_BL(B_0L)^{-1} \forall \Delta_B \in \mathcal{U}_{DB} \right\} \quad (9.48)$$

### 9.3 Sistemas com Entrada G-Positiva Definida

A lei de controle por estrutura variável que será proposta na próxima seção, induzindo modos deslizantes em  $\mathcal{N}(G)$ , fará o sistema ICCRE globalmente estável em malha fechada. Ela se aplicará a sistemas cuja incerteza na matriz de entradas  $\Delta_B$  atende a determinada condição. Nesta seção tais sistemas são definidos como *sistemas com matriz de entrada G-positiva definida*, ou sistemas EGPD.

**Definição 9.13 (Sistemas EGPD)** Os sistemas com matriz de entrada G-positiva definida são sistemas com estrutura de controle completo tais que, dadas as definições da seção 9.2, tem-se que:

$$z'G(\mathbf{I} + \Gamma)G^{-1}z > \epsilon \|z\|_2^2 \quad \forall z \neq \mathbf{0}, \Gamma \in \mathcal{U}_\Gamma \quad (9.49)$$

para algum escalar  $\epsilon > 0$ . O supremo do conjunto de escalares  $\epsilon$  para os quais a desigualdade se verifica será denotado por  $\epsilon^*$ .

□

NOTA 9.8 Como se assume que existe uma instância da matriz  $\Delta_B \in \mathcal{U}_{DB}$  tal que  $\Delta_B = \mathbf{0}$ , então o escalar  $\epsilon$  necessariamente pertence ao intervalo  $(0, 1)$  da reta real. Já o supremo  $\epsilon^*$  pertence ao intervalo  $(0, 1]$ , assumindo o valor extremo 1 apenas no caso de ausência de incertezas (ou seja,  $\Delta_B \equiv \mathbf{0}$ ).

◇

O lema a seguir possibilita a verificação da condição de EGPD de um sistema no caso de incertezas politópicas:

**Lema 9.1** Postas as definições da seção 9.2 e dado um escalar  $\epsilon \in (0, 1)$ , tem-se que:

$$z'G(\mathbf{I} + \Gamma)G^{-1}z > \epsilon \|z\|_2^2 \quad \forall z \neq \mathbf{0}, \Gamma \in \mathcal{U}_\Gamma \quad (9.50)$$

se e somente se:

$$(1 - \epsilon)\mathbf{I} + \frac{1}{2} \left( G\Gamma G^{-1} + (G^{-1})'\Gamma'G \right) > \mathbf{0} \quad \forall \Gamma \in \mathcal{U}_\Gamma \quad (9.51)$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Note-se inicialmente que a expressão (9.51) é equivalente a:

$$\mathbf{I} + \frac{1}{2} \left( G\Gamma G^{-1} + (G^{-1})'\Gamma'G \right) - \epsilon\mathbf{I} > \mathbf{0} \quad \forall \Gamma \in \mathcal{U}_\Gamma$$

o que ocorre se e somente se:

$$z' \left( \mathbf{I} + G\Gamma G^{-1} - \epsilon\mathbf{I} \right) z > 0 \quad \forall \Gamma \in \mathcal{U}_\Gamma, z \neq \mathbf{0}$$

Esse fato é decorrência direta de:

$$X = \frac{X + X'}{2} + \frac{X - X'}{2}$$

e de:

$$z'(X - X')z = 0 \quad \forall z$$

para uma matriz  $X$  genérica. ■

O lema 9.1 expressa uma condição genérica, válida para incertezas com estrutura qualquer. No caso de incertezas politópicas, no entanto, a verificação da condição de EGPD é feita pela simples verificação da inequação 9.51 em todos os vértices do sistema incerto:

**Lema 9.2** *Considere-se o conjunto de hipóteses estabelecidas na seção 9.2. Seja  $\Gamma$  uma matriz pertencente a um conjunto  $\mathcal{U}_\Gamma$  com estrutura de polítopo convexo:*

$$\mathcal{U}_\Gamma : \left\{ \Gamma = \sum_{i=1}^v \alpha_i \Gamma_i \ , \ \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \ , \ \alpha_i \geq 0 \ \forall \ i = 1, \dots, v \right\} \quad (9.52)$$

*Então o sistema será EGPD com  $\epsilon^* > \epsilon$  se e somente se o seguinte conjunto de inequações matriciais lineares:*

$$(1 - \epsilon)\mathbf{I} + \frac{1}{2} \left( G\Gamma_i G^{-1} + (G^{-1})' \Gamma_i' G' \right) > 0 \ \forall \ i = 1, \dots, v \quad (9.53)$$

*for satisfeito.*

□

**DEMONSTRAÇÃO:** Esse resultado decorre imediatamente da linearidade da desigualdade em relação a  $\Gamma$  e da convexidade de  $\mathcal{U}_\Gamma$ , em conjunto com o resultado do lema 9.1.

■

No caso de incertezas limitadas em norma, a verificação da condição EGPD é feita por meio de propriedades de norma:

**Lema 9.3** *Seja  $\Delta_B$  uma matriz pertencente a um conjunto  $\mathcal{U}_{DB}$  com estrutura de incerteza limitada em norma:*

$$\mathcal{U}_{DB} : \{ \Delta_B = M\Delta N \ , \ \|\Delta\|_\infty < 1 \} \quad (9.54)$$

*Seja também dado o escalar  $\epsilon \in (0, 1)$ . Então a condição*

$$\|GM\|_\infty \left\| NL(B_0L)^{-1}G^{-1} \right\|_\infty \leq 1 - \epsilon \quad (9.55)$$

*é suficiente para o sistema ser EGPD com  $\epsilon^* > \epsilon$ .*

□

**DEMONSTRAÇÃO:** Tem-se que:

$$\|GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}v\|_2 \leq \|GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty \|v\|_2$$

pelo fato de a norma  $\mathcal{H}_\infty$  ser equivalente ao ganho em norma-2 vetorial. Agora, da expressão acima e do fato de um produto escalar de vetores ser máximo (em valor absoluto) quando esses vetores são colineares:

$$v'v \|GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty \geq v'GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}v$$

Examinando agora essa norma  $\mathcal{H}_\infty$ :

$$\|GM\|_\infty \|NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty < 1 - \epsilon$$

$$\Rightarrow \|GM\|_\infty \|\Delta\|_\infty \|NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty < 1 - \epsilon$$

$$\Rightarrow \|GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty < 1 - \epsilon$$

A última implicação decorre do fato de a norma  $\mathcal{H}_\infty$  ser uma norma induzida, sendo portanto submultiplicativa. Logo:

$$v'v \|GM\|_\infty \|\Delta\|_\infty \|NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty \geq v'v \|GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty$$

Acrescentando as hipóteses de que  $\|\Delta\|_\infty < 1$  e  $\|GM\|_\infty \|NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty \leq 1 - \epsilon$  e combinando as desigualdades:

$$|v'v| \geq \frac{|v'GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}v|}{1 - \epsilon}$$

Como  $v'v > 0$  e  $1 - \epsilon > 0$ , tem-se que:

$$v'((1 - \epsilon)\mathbf{I} + GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1})v > 0$$

o que é válido para todo  $\Delta$  |  $\|\Delta\|_\infty < 1$ .

■

NOTA 9.9 A condição de EGPD é verificável por meio de condições necessárias e suficientes para sistemas com incerteza politópica. Para sistemas com incerteza limitada em norma, no entanto, a verificação é feita através de condições apenas suficientes.

◇

### 9.3.1 Cálculo do supremo de $\epsilon$

Seja o escalar  $\epsilon^*$  dado por:

$$\begin{aligned} \epsilon^* &= \sup \epsilon \\ \text{tal que: } &\begin{cases} z'((1 - \epsilon)\mathbf{I} + G\Gamma G^{-1})z > 0 \\ \forall z \neq \mathbf{0}, \Gamma \in \mathcal{U}_\Gamma \end{cases} \end{aligned} \quad (9.56)$$

O valor de  $\epsilon^*$  pode ser determinado, de maneira exata, através do lema 9.2, no caso de incertezas politópicas. Para incertezas limitadas em norma, é possível calcular apenas um limitante inferior de  $\epsilon^*$ , através do lema 9.3.

Para o caso de incertezas politópicas,  $\epsilon^*$  é simplesmente a solução do problema de otimização linear:

---

#### Cálculo de $\epsilon^*$ - Incerteza Politópica

$$\begin{aligned} \epsilon^* &= \max_{\epsilon} \epsilon \\ \text{sujeito a: } &\begin{cases} (1 - \epsilon)\mathbf{I} + \frac{1}{2} (G\Gamma_i G^{-1} + G^{-1'}\Gamma_i' G') > 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \\ 0 < \epsilon < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (9.57)$$


---

Esse problema de otimização deve sempre convergir para uma solução, se ela existir, uma vez que a função objetivo é linear e as restrições também o são. A factibilidade desse problema é condição necessária e suficiente para se estabelecer que o sistema é EGPD, o que vem diretamente do lema 9.2.

Para o caso de incertezas limitadas em norma, o lema 9.3 fornece apenas um limitante inferior  $\epsilon_*$  para o valor de  $\epsilon^*$ , dado por:

---

Cálculo de  $\epsilon_*$  - Incerteza Limitada em Norma

$$\epsilon_* = 1 - \|GM\|_\infty \left\| NL(B_0L)^{-1}G^{-1} \right\|_\infty \quad (9.58)$$


---

Obtém-se, por essa fórmula, um  $\epsilon_*$  tal que  $\epsilon_* \leq \epsilon^*$ . O procedimento de verificação da condição de EGPD, nesse caso, se resume a verificar se tal número é positivo, conforme estabelecido no lema 9.3.

### 9.3.2 Reprojetor de $G$

Haverá casos em que o sistema não é EGPD para nenhum escalar  $\epsilon > 0$ . Em outras situações, mesmo o sistema sendo EGPD, o valor de  $\epsilon^*$  é muito pequeno, o que naturalmente leva a leis de controle com elevado esforço de controle (ver a próxima seção), o que não é conveniente. Ocorrendo isso, ainda é possível tentar alterar o projeto das matrizes  $L$  e  $G$ , uma vez que o critério para escolha das mesmas foi simplesmente a condição:

$$\varsigma((B_0 + \Delta_B)LG) \subset \mathbb{C}_- \quad \forall \Delta_B \in \mathcal{U}_{DB} \quad (9.59)$$

Quaisquer matrizes  $G$  e  $L$  satisfazendo essa restrição poderiam ser utilizadas, e uma escolha adequada destas pode eventualmente levar a que o sistema se torne EGPD.

O problema de reprojetor das matrizes  $L$  e  $G$  para cálculo das matrizes ótimas  $L^*$  e  $G^*$ , em sua forma mais geral, pode ser definido como:

$$(L^*, G^*) = \arg_{L,G} \min_{\Delta_B \in \mathcal{U}_{DB}} \max_{L,G,\epsilon} \epsilon$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} (1 - \epsilon)\mathbf{I} + \frac{1}{2} (G\Delta_B L(B_0L)^{-1}G^{-1} + (G^{-1})'(\Delta_B L(B_0L)^{-1})'G) > 0 \\ \varsigma((B_0 + \Delta_B)LG) \subset \mathbb{C}_- \end{cases} \quad (9.60)$$

Esse problema assim formulado é não-linear e não-convexo, não sendo conhecido ainda um método de otimização que o resolva genericamente. Dessa maneira, opta-se aqui pelo desenvolvimento de métodos simplificados, para determinação de valores sub-ótimos de  $\epsilon^*$ , com matrizes  $L$  e  $G$  também sub-ótimas.

Observe-se que o projeto da matriz  $K = LG$  não foi feito (capítulo 6) a partir de restrições equivalentes a (9.59), tendo sido utilizadas condições mais restritivas porém verificáveis com facilidade. A seguir serão apresentados procedimentos que, preservando as restrições empregadas no projeto de  $K$ , irão explorar alguns graus de liberdade existentes com o objetivo de tentar transformar um sistema que não é EGPD em um sistema que o é, ou ainda com o objetivo de aumentar o valor de  $\epsilon^*$  de um sistema EGPD. Naturalmente, esses objetivos nem sempre serão factíveis.

Os procedimentos aqui apresentados se limitarão a atuar sobre a matriz  $G$ , preservando  $L$  constante. Será projetada uma matriz  $G_r$  que será igual ao produto da matriz  $G$  original por uma matriz  $D$  diagonal com elementos estritamente positivos:

$$\begin{aligned} G_r &= DG \\ D_{ij} &= 0 \quad \forall i \neq j \\ D_{ii} &> 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{9.61}$$

Sem perda de generalidade (pois a matriz  $G$  original sempre pode ser absorvida em  $L$ , assim tomando-se  $G = I$ ), será suposto que a matriz  $G$  original satisfaz  $G = G' > 0$ .

O lema a seguir estabelece o fato de que tal modificação irá preservar a estabilidade ganhos elevados do sistema, isto é, continuará válida a condição  $\varsigma(BLG_r) \subset \mathbb{C}_-$ , dado que se assumiu  $\varsigma(BLG) \subset \mathbb{C}_-$  e  $G = G' > 0$ .

**Lema 9.4** *Seja uma matriz  $X$  tal que:*

$$\varsigma(X) \subset \mathbb{C}_- \tag{9.62}$$

*Seja também uma matriz  $P$  tal que  $P = P' > 0$ . Nesse caso tem-se que:*

$$\varsigma(XP) \subset \mathbb{C}_- \tag{9.63}$$

□

**DEMONSTRAÇÃO:** Por Lyapunov (teorema A.11), tem-se que existe uma matriz  $Q$  tal que:

$$XQ + QX' < 0$$

$$Q = Q' > 0$$

Seja agora  $W = P^{-1}Q$ . Tem-se que:

$$XPW + WPX' < 0$$

$$W = W' > 0$$

o que estabelece o resultado desejado. ■

Como corolário desse lema, estabelece-se que, dado um sistema em que  $\varsigma(BLG) \subset \mathbb{C}_-$  para  $G = G' > 0$ , então  $\varsigma(BL) \subset \mathbb{C}_-$  e, por conseguinte, também  $\varsigma(BLG_r) \subset \mathbb{C}_-$ .

Posto isso, serão desenvolvidos algoritmos para escolha de uma matriz  $D$  que maximize  $\epsilon^*$  (no caso de incertezas politópicas) ou  $\epsilon_*$  (caso as incertezas sejam limitadas em norma). O lema a seguir, extraído de [11], formula o princípio segundo o qual serão construídos esses algoritmos.

**Lema 9.5** *Dada uma matriz quadrada  $X$ , o valor da função  $v(X)$  definida por*

$$v(X) \triangleq \inf \left\{ \|DXD^{-1}\|_{\infty} \mid D \text{ diagonal positiva-definida} \right\} \tag{9.64}$$

corresponde à solução do problema de otimização:

$$v(X) = \min_{P, \gamma} \gamma$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} X'PX < \gamma^2 P \\ P > 0 \text{ e diagonal} \\ \gamma > 0 \end{cases} \quad (9.65)$$

sendo  $D$  dado por  $D = \sqrt{P}$  para a matriz  $P$  minimizante. □

**DEMONSTRAÇÃO:** A demonstração do fato acima decorre de, para  $D$  diagonal e não singular, a expressão:

$$(DXD^{-1})'(DXD^{-1}) < \gamma^2 \mathbf{I}$$

ser equivalente a:

$$M'D'DM < \gamma^2 D'D$$

Toma-se então  $P = D'D$ , o que completa a prova. ■

**NOTA 9.10** O problema de otimização envolvido no lema 9.5 pertence à classe dos problemas denominados *problema de autovalor generalizado* (ou GEVP, do inglês “generalized eigenvalue problem”). Tais problemas não são convexos, mas apenas quasi-convexos [11] (observe-se que aparece o produto de duas variáveis de otimização, uma escalar outra matricial). Apesar de haver algoritmos que em princípio conduzem à solução ótima global, tais algoritmos são menos eficientes e confiáveis que aqueles para problemas do tipo LMI’s anteriormente tratados. ◇

### Incertezas Politópicas

O algoritmo a seguir é designado *algoritmo EDO-IP*, em referência a *algoritmo de escalamento diagonal ótimo para incertezas politópicas*. Esse algoritmo está estruturado de forma a tentar obter uma matriz diagonal positiva  $D$  de escalamento que maximiza o valor de  $\epsilon^*$  do sistema, possibilitando a síntese de controles menos conservativos. Eventualmente, caso o sistema não seja EGPD (isto é, caso possua  $\epsilon^* < 0$ ), tal maximização poderá tornar o sistema EGPD (fazendo  $\epsilon^* > 0$ ). Como subproduto, o algoritmo fornece o valor de  $\epsilon^*$  sob o escalamento ótimo.

— ALGORITMO EDO-IP —

{

**Inicialização:**  $\mathcal{E} \leftarrow \emptyset, D \leftarrow \mathbf{I}$

Para  $i \leftarrow 1$  até  $v$  Faça

$$\left[ \begin{array}{l} \epsilon_i \leftarrow \max_{\epsilon} \epsilon \\ \text{sujeito a: } \left\{ (1 - \epsilon)\mathbf{I} + \frac{1}{2} (G\Gamma_i G^{-1} + G^{-1'} \Gamma_i' G') > 0 \right. \end{array} \right. \quad (9.66)$$

$$\epsilon^{**} \leftarrow \min_i \epsilon_i$$

Repita

{

$$D_0 \leftarrow D$$

$$G_0 \leftarrow G$$

$$\epsilon^* \leftarrow \epsilon^{**}$$

$$\mathcal{E}^* \leftarrow \{i \mid \epsilon_i = \epsilon^*\} \quad (\text{o conjunto de índices que minimizam } \epsilon_i)$$

$$\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^* \quad (\text{o conjunto de índices que em alguma iteração minimizaram } \epsilon_i)$$

Calcular a matriz  $D$  de escalamento ótimo para o conjunto  $\mathcal{E}$  de vértices:

$$\left[ \begin{array}{l} P^* \leftarrow \arg_P \min_{P, \gamma} \gamma \\ \text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} (G^{-1})' \Gamma_i' G' P G \Gamma_i G^{-1} < \gamma^2 P \quad \forall i \in \mathcal{E} \\ P > 0 \text{ e diagonal} \\ \gamma > 0 \end{array} \right. \\ D \leftarrow \sqrt{P^*} \end{array} \right. \quad (9.67)$$

$$G \leftarrow DG$$

Para  $i \leftarrow 1$  até  $v$  Faça

$$\left[ \begin{array}{l} \epsilon_i \leftarrow \max_{\epsilon} \epsilon \\ \text{sujeito a: } \left\{ (1 - \epsilon)\mathbf{I} + \frac{1}{2} (G\Gamma_i G^{-1} + G^{-1'} \Gamma_i' G') > 0 \right. \end{array} \right. \quad (9.68)$$

$$\epsilon^{**} \leftarrow \min_i \epsilon_i$$

}

Até  $\epsilon^{**} \geq \epsilon^*$  ou  $\mathcal{E} = \{i = 1, \dots, v\}$

Se  $\epsilon^{**} > \epsilon^*$

Então

{

$$D \leftarrow D_0$$

$$\begin{array}{l}
 G \leftarrow G_0 D \\
 \} \\
 \}
 \end{array}$$

— FIM DO ALGORITMO EDO-IP —

NOTA 9.11 Pela própria formulação do critério de parada, a cada iteração do algoritmo EDO-IP o valor de  $\epsilon^*$  deve crescer monotonicamente. É razoável esperar que o algoritmo execute várias iterações antes de parar, uma vez que a cada iteração é incluído no problema de escalamento ótimo um novo vértice de “pior caso” que não havia sido considerado na iteração anterior. O algoritmo termina quando o “pior caso” corrente não puder ser melhorado.

◇

NOTA 9.12 Observe-se que a restrição do problema de otimização 9.67 não é necessariamente válida no interior do polítopo, pois a mesma não é linear em relação aos parâmetros incertos  $\Gamma_i$ . No entanto, sua validade apenas nos vértices do polítopo já é suficiente para o propósito de determinação de uma matriz de escalamento ótimo  $D$ . Tal matriz a seguir é utilizada no cálculo de um novo valor de  $\epsilon^*$  (problema 9.68), sendo agora as restrições lineares, e o valor válido para todo o polítopo.

◇

### Incertezas Limitadas em Norma

O algoritmo a seguir apresentado é designado *algoritmo EDO-ILN*, em referência a *algoritmo de escalamento diagonal ótimo para incertezas limitadas em norma*. Tal algoritmo procura obter uma matriz diagonal positiva  $D$  de escalamento que maximiza o valor de  $\epsilon_*$  (limitante inferior de  $\epsilon^*$ ) de um sistema com incertezas limitadas em norma. Caso tal sistema não seja EGPD segundo a estimativa de limitante inferior (isto é, caso  $\epsilon_* < 0$ ), o algoritmo EDO-ILN pode eventualmente torná-lo EGPD segundo essa estimativa (isto é, fazer  $\epsilon_* > 0$ ). Como subproduto, o algoritmo fornece o valor de  $\epsilon_*$  sob o escalamento ótimo.

A notação  $\nu_{max}(X)$  irá indicar, no que se segue, o autovetor (com norma-2 vetorial unitária) associado ao maior autovalor da matriz  $X$ , a qual se supõe que seja simétrica definida positiva ( $X = X' > 0$ ).

O lema a seguir é necessário para o desenvolvimento do algoritmo EDO-ILN.

**Lema 9.6** *Seja uma matriz  $X$  incerta com incerteza limitada em norma:*

$$\begin{aligned}
 X &= P\Delta Q \\
 \|\Delta\|_\infty &\leq 1
 \end{aligned}
 \tag{9.69}$$

*Uma instância admissível de  $\Delta$  tal que*

$$\|X\|_\infty = \|P\|_\infty \|Q\|_\infty
 \tag{9.70}$$

*é dada por:*

$$\Delta = \nu_{max}(P'P)\nu'_{max}(QQ')
 \tag{9.71}$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Sejam  $v_p = \nu_{max}(P'P)$  e  $v_q = \nu_{max}(QQ')$ . O fato da fórmula acima para  $\Delta$  ser admissível vem do fato de que:

$$\Delta v_q = v_p \quad \therefore \quad \|\Delta v_q\|_2 = 1$$

e do fato de qualquer outro vetor unitário  $v$  implicar em um produto interno  $v'_q v$  menor que 1, de forma que:

$$\|\Delta v\|_2 = \|v_p v'_q v\|_2 = |v'_q v| < 1 \quad \forall v \mid \|v\|_2 = 1, \quad v \neq v_q$$

Agora estudando a norma de  $X$ :

$$\|X\|_\infty = \sup_{\|z\|_2=1} \|Xz\|_2$$

para  $X$  dado por:

$$X = P v_p v'_q Q$$

Tem-se que:

$$v'_q Q Q' v_q = \|Q\|_\infty^2$$

de forma que:

$$P v_p v'_q Q Q' v_q \|Q\|_\infty^{-1} = P v_p \|Q\|_\infty$$

ou:

$$\|P v_p \|Q\|_\infty\|_2 = \|P\|_\infty \|Q\|_\infty$$

Ou seja, o vetor unitário:

$$z = Q' v_q \|Q\|_\infty^{-1}$$

maximiza o valor de  $\|P \Delta Q z\|_2$ , fazendo:

$$\|P \Delta Q z\|_2 = \|P\|_\infty \|Q\|_\infty$$

Pela propriedade submultiplicativa de normas induzidas, mais o fato da norma de  $\Delta$  ser igual a 1, tal valor deve ser igual à norma de  $X$ . ■

O algoritmo EDO-ILN, apresentado a seguir, é construído com o objetivo de maximizar o limitante  $\epsilon_*$  dado por:

$$\epsilon_* = 1 - \|GM\|_\infty \left\| NL(B_0 L)^{-1} G^{-1} \right\|_\infty \quad (9.72)$$

Assim, a idéia é encontrar uma matriz diagonal positiva definida  $D$  que minimize simultaneamente  $\|DGM\|_\infty$  e  $\|NL(B_0 L)^{-1} G^{-1} D^{-1}\|_\infty$ . A aproximação a ser adotada no algoritmo EDO-ILN envolve a minimização da norma:

$$\left\| DGM \Delta NL(B_0 L)^{-1} G^{-1} D^{-1} \right\|_\infty \quad (9.73)$$

para uma matriz  $\Delta$  escolhida de acordo com o lema 9.6:

$$\Delta = \nu_{max}(M' G' G M) \nu'_{max}(NL(B_0 L)^{-1} G^{-1} (G')^{-1} (L' B'_0)^{-1} L' N') \quad (9.74)$$

A seguir, atualiza-se a matriz  $G$  e recalcula-se a matriz de escalamento ótimo  $D$ . A cada passo de cálculo de  $D$ , preservam-se ainda as restrições adotadas no passo anterior, de maneira a se construir gradativamente um politopo que representa uma “aproximação interna” do conjunto de incertezas limitadas em norma.

{

**Inicialização:**  $i \leftarrow 0$

$$\epsilon_* \leftarrow \|GM\|_\infty \|NL(B_0L)^{-1}G^{-1}\|_\infty$$

**Repita**

{

$$i \leftarrow i + 1$$

$$v_1 \leftarrow \nu_{\max}(M'G'GM)$$

$$v_2 \leftarrow \nu_{\max}(NL(B_0L)^{-1}G^{-1}(G')^{-1}(L'B'_0)^{-1}L'N')$$

$$\Delta \leftarrow v_1 v_2'$$

$$Q_i \leftarrow GM\Delta NL(B_0L)^{-1}G^{-1}$$

**Calcular** a matriz  $D$  de escalamento ótimo:

$$\left[ \begin{array}{l} P^* \leftarrow \arg_P \min_{P,\gamma} \gamma \\ \text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} Q_j' P Q_j < \gamma^2 P \quad \forall j = 1, \dots, i \\ P > 0 \text{ e diagonal} \\ \gamma > 0 \end{array} \right. \\ D \leftarrow \sqrt{P^*} \end{array} \right. \quad (9.75)$$

$$G_* \leftarrow DG$$

$$\epsilon_{**} \leftarrow \|G_*M\|_\infty \|NL(B_0L)^{-1}G_*^{-1}\|_\infty$$

**Se**  $\epsilon_{**} > \epsilon_*$

{

$$G \leftarrow G_*$$

$$\epsilon_* \leftarrow \epsilon_{**}$$

}

}

**Até** ( $\epsilon_{**} \leq \epsilon_*$ ) e ( $i > n$ )

}

— FIM DO ALGORITMO EDO-ILN —

NOTA 9.13 Este algoritmo foi construído com critério de parada tal que, após a iteração número  $n$ , o valor de  $\epsilon_*$  deve crescer monotonicamente, caso o algoritmo não pare. Antes do passo  $n$ , é permitido que o algoritmo não promova melhoria em  $\epsilon_*$ . Recorde-se que  $BL \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Essa regra foi estabelecida heurísticamente, em uma série de experimentos numéricos, nos quais se verificou que, via de regra, a partir do passo  $n$  sempre há alguma melhoria no valor de  $\epsilon_*$  (na maioria das vezes o valor de  $\epsilon_*$  começa a melhorar antes disso).

◇

## 9.4 Controlador Modos Deslizantes

Na seção anterior, foi estabelecida a classe de sistemas adequada para a abordagem a ser aqui desenvolvida, os sistemas EGPD. Passa-se agora à síntese do controlador modos deslizantes para tais sistemas.

**Teorema 9.4** *Considere-se o conjunto de hipóteses e definições estabelecidos na seção 9.2. Assuma-se que o sistema seja EGPD. Então existem escalares  $\beta_1$  e  $\beta_2$  positivos, tais que a lei de controle dada por:*

$$\mu = -(B_0 L)^{-1} \left( A_0 e_x + \beta_1 G^{-1} \frac{g}{\|g\|_2} + \beta_2 G^{-1} g \right) \quad (9.76)$$

produz convergência global do vetor de estados  $e_x(t)$  para  $\mathcal{N}(G)$ .

□

DEMONSTRAÇÃO: A aplicação da lei (9.76) na equação dinâmica (9.46) leva a:

$$\dot{e}_x = (\Delta_A - \Gamma A_0) e_x - \beta_2 (\mathbf{I} + \Gamma) G^{-1} g - \beta_1 (\mathbf{I} + \Gamma) G^{-1} \frac{g}{\|g\|_2} + h$$

Na equação acima foi utilizado o parâmetro  $\Gamma$ , segundo a definição (9.47). Observando que  $e_x = G^{-1} g$ , passa-se para o espaço da variável  $g$ :

$$\dot{g} = [G(\Delta_A - \Gamma A_0)G^{-1} - \beta_2 G(\mathbf{I} + \Gamma)G^{-1}] g - \beta_1 G(\mathbf{I} + \Gamma)G^{-1} \frac{g}{\|g\|_2} + h$$

Para estabelecer a convergência global do sistema para  $g = 0$ , emprega-se a função:

$$V(g) = g' g$$

como candidata a função de Lyapunov. A função  $V(g)$  é positiva para todo  $g \neq 0$ . Sua derivada é dada por:

$$\dot{V} = 2g' \dot{g} = g' Q_2 g + g' Q_1 g + g' h$$

sendo:

$$Q_1 = -\frac{\beta_1 G(\mathbf{I} + \Gamma)G^{-1}}{\|g\|_2}$$

$$Q_2 = [G(\Delta_A - \Gamma A_0)G^{-1} - \beta_2 G(\mathbf{I} + \Gamma)G^{-1}]$$

Observa-se agora que um escalar  $\eta$  satisfazendo:

$$\eta \geq \sup_{(\mathcal{U}_A, \mathcal{U}_\Gamma)} \|G(\Delta_A - \Gamma A_0)G^{-1}\|_\infty$$

é um número finito computável (o procedimento de cálculo de tal escalar será apresentado adiante, em subseção dedicada à síntese do controlador). Então:

$$|g' G(\Delta_A - \Gamma A_0)G^{-1} g| \leq \eta \|g\|_2^2$$

Por outro lado já foi mostrado que, dado o conjunto  $\mathcal{U}_B$  e desde que o sistema seja EGPD, é possível calcular um escalar  $\epsilon_*$  tal que

$$v'((1 - \epsilon_*)\mathbf{I} + G\Gamma G^{-1})v > 0 \quad \forall v \neq 0, \quad \Gamma \in \mathcal{U}_\Gamma$$

Utilizando a hipótese de que o sistema é EGPD e assumindo-se conhecido tal  $\epsilon_*$ , vem:

$$g' \beta_2 (\mathbf{I} + G \Gamma G^{-1}) g > \|g\|_2^2 \beta_2 \epsilon_*$$

Dessa forma, é possível estabelecer que, para um escalar  $\beta_2$  escolhido suficientemente grande, é válida a relação:

$$g' Q_2 g < -\|g\|_2^2 \beta_2 \epsilon_* + \eta \|g\|_2^2 < 0$$

Agora, estudando  $g' Q_1 g$ :

$$g' Q_1 g = -g' \frac{\beta_1 G (\mathbf{I} + \Gamma) G^{-1}}{\|g\|_2} g$$

$$\therefore g' Q_1 g < -\beta_1 \epsilon_* \|g\|_2$$

Seja um escalar  $\theta$  satisfazendo:

$$\theta \geq \sup_t \|h(t)\|_2$$

Por hipótese, sempre será possível encontrar  $\theta$  satisfazendo essa relação (isso será feito na próxima seção). Observando-se que:

$$|g' G h| \leq \|g\|_2 \|G\|_\infty \theta$$

obtém-se, para  $\beta_1$  suficientemente grande:

$$g' Q_1 g + g' G h < -\beta_1 \epsilon_* \|g\|_2 + |g' G h| \leq -\beta_1 \epsilon_* \|g\|_2 + \|G\|_\infty \theta \|g\|_2 < 0$$

Dessa forma, para  $\beta_1$  e  $\beta_2$  suficientemente grandes, obtém-se:

$$\dot{V} < 0$$

Isso qualifica  $V(g)$  como uma função de Lyapunov, o que estabelece a convergência global do vetor  $g(t)$  para a origem  $g = \mathbf{0}$ , dada a lei de controle (9.76) (com  $\beta_1$  e  $\beta_2$  adequados). ■

**NOTA 9.14** As condições (suficientes) que foram encontradas no capítulo 6 para estabilizabilidade do sistema através de ganhos elevados, não são equivalentes às condições determinadas neste capítulo para existência de modos deslizantes globalmente convergentes no mesmo sistema. A classe de sistemas que aqui se determinou serem estabilizáveis por meio de modos deslizantes é mais restrita que a classe para a qual se determinou a possibilidade de estabilização por ganhos elevados (pode-se verificar, por inspeção, que a primeira classe está estritamente contida na segunda). Deve-se notar que, apesar de o comportamento do sistema sob ganhos elevados ser equivalente ao comportamento sob modos deslizantes quando o vetor de estados se encontra na superfície de deslizamento, tal equivalência não prevalece fora dessa superfície. ◇

### 9.4.1 Projeto dos Parâmetros do Controlador

Para se completar o projeto do controlador modos deslizantes que realiza o rastreamento da saída de um sistema a controle completo, resta determinar valores adequados para os parâmetros  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . As equações de projeto obtidas como condição para a função  $V(g)$  se qualificar enquanto função de Lyapunov, na demonstração do teorema 9.4, assim garantindo convergência global do sistema sob a lei de controle (9.76) são:

---

Determinação de  $\beta_1$  e  $\beta_2$

$$\begin{aligned} \beta_2 &> \frac{\eta}{\epsilon_*} \\ \beta_1 &> \frac{\|G\|_\infty \theta}{\epsilon_*} \end{aligned} \tag{9.77}$$


---

Quanto aos parâmetros envolvidos nessas equações:

- O valor de  $\epsilon_*$  foi determinado na seção 9.3 (notar que, no caso de incertezas politópicas, toma-se  $\epsilon_* = \epsilon^*$ ).
- A matriz  $G$  foi projetada na seção 9.3 como o produto de diversas matrizes diagonais de escalamento. Por convenção, pode-se sempre adotar então  $\|G\|_\infty = 1$ , o que é feito sem perda de generalidade, uma vez que a multiplicação de uma matriz de escalamento por um escalar não altera o resultado do escalamento.

Resta portanto determinar os valores de  $\eta$  e de  $\theta$ .

Para a determinação desses dois parâmetros, será necessário calcular limitantes superiores para a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de matrizes incertas, para os casos de incerteza politópica e de incerteza limitada em norma. A seguir são então apresentados procedimentos para o cálculo desses limitantes.

### Limitantes da norma $\mathcal{H}_\infty$ de matrizes incertas

Seja uma matriz  $X$  incerta, pertencente a um conjunto  $\mathcal{U}_X$ . Deseja-se determinar para tal matriz um valor  $\gamma(X)$  tal que:

$$\gamma(X) \geq \|X\|_\infty \quad \forall X \in \mathcal{U}_X \tag{9.78}$$

No caso de incertezas politópicas, pode-se aplicar de maneira imediata o lema a seguir.

**Lema 9.7** *Seja  $X$  uma matriz qualquer. É válida a relação:*

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 \mathbf{I} & X' \\ X & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \gamma > \|X\|_\infty \tag{9.79}$$

□

**DEMONSTRAÇÃO:** Diretamente da definição de norma  $\mathcal{H}_\infty$  vem:

$$\gamma^2 - X'X > 0 \Leftrightarrow \gamma > \|X\|_\infty$$

Aplicando-se o complemento de Schur sobre essa desigualdade (teorema A.14), obtém-se o resultado desejado.

■

Então, no caso de incertezas politópicas, ou seja:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^v \alpha_i X_i \\ \sum_{i=1}^v \alpha_i &= 1 \quad , \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \end{aligned} \tag{9.80}$$

tem-se que o menor valor possível para  $\gamma(X)$  é dado por:

---

Cálculo de  $\gamma(X)$  - Incerteza Politópica

$$\begin{aligned} \gamma(X) &= \min_{\gamma} \gamma \\ \text{sujeito a: } &\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma^2 \mathbf{I} & X_i' \\ X_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} &> 0 \\ \forall i &= 1, \dots, v \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{9.81}$$


---

No caso de incertezas limitadas em norma a matriz  $X$  é dada por:

$$\begin{aligned} X &= P \Delta Q \\ \|\Delta\|_{\infty} &\leq 1 \end{aligned} \tag{9.82}$$

A função  $\gamma(X)$  nesse caso é simplesmente dada por:

---

Cálculo de  $\gamma(X)$  - Incerteza Limitada em Norma

$$\gamma(X) = \|P\|_{\infty} \|Q\|_{\infty} \tag{9.83}$$


---

A correção dessa fórmula, como menor valor possível para  $\gamma(X)$ , pode ser inferida do fato de que existe uma matriz  $\Delta$  que faz a norma atingir tal valor (ver lema 9.6), e do fato de que a norma não pode superar tal valor (pela propriedade submultiplicativa das normas induzidas).

### Determinação de $\eta$

O escalar  $\eta$  é definido por:

$$\eta \geq \sup_{(\Delta_A, \Gamma)} \left\| G(\Delta_A - \Gamma A_0) G^{-1} \right\|_{\infty} \tag{9.84}$$

No caso de  $(\Delta_A, \Gamma)$  serem incertezas politópicas, o menor valor de  $\eta$  que atende a tal desigualdade é igual a:

---

 Cálculo de  $\eta$  - Incertezas Politópicas
 

---

$$\eta = \gamma \left( G(\Delta_A - \Gamma A_0)G^{-1} \right) \quad (9.85)$$


---

sendo esse valor calculado diretamente através de (9.81). Isso é possível devido ao fato de o argumento da função  $\gamma(\cdot)$  acima ser ainda um politopo.

Para  $(\Delta_A, \Gamma)$  matrizes com incerteza limitada em norma, é necessário aplicar-se mais uma majoração, fazendo:

---

 Cálculo de  $\eta$  - Incertezas Limitadas em Norma
 

---

$$\eta = \gamma(G\Delta_A G^{-1}) + \gamma(G\Gamma A_0 G^{-1}) \quad (9.86)$$


---

NOTA 9.15 O valor obtido para  $\eta$  no caso politópico é não-conservativo, sendo efetivamente o menor valor que garante a desigualdade 9.84. No caso de incertezas limitadas em norma, foi introduzida alguma conservatividade com a aplicação da desigualdade triangular de normas. Seria possível buscar, nesse caso, valores menos conservativos para  $\eta$  através da solução de um problema de otimização linear com restrições lineares e bilineares, assim se recaindo num problema de otimização BMI (do inglês "*bilinear matrix inequalities*"). Tal metodologia para redução do conservatismo, no entanto, não será aqui desenvolvida, pois envolveria a aplicação de métodos de otimização diversos daqueles que são consistentemente empregados ao longo todo este trabalho (otimização de problemas com restrições LMI's via algoritmos de pontos interiores).

◇

### Determinação de $\theta$

O escalar  $\theta$  é definido por:

$$\theta \geq \sup_t \|h(t)\|_2 \quad (9.87)$$

A função  $h(t)$ , por sua vez, é definida como:

$$h(t) = Hd(t) + Ax_{ref}(t) + \dot{x}_{ref}(t) \quad (9.88)$$

Sobre os sinais envolvidos na formação de  $h(t)$  sabe-se que:

$$\begin{aligned} \sup_t \|d(t)\|_2 &\leq 1 \\ \sup_t \|x_{ref}(t)\|_2 &\leq \xi_1 \\ \sup_t \|\dot{x}_{ref}(t)\|_2 &\leq \xi_2 \end{aligned} \quad (9.89)$$

Deve-se levar ainda em consideração o fato de as matrizes  $H$  e  $A$  serem incertas, pertencentes a um conjunto conhecido  $\mathcal{U}$ . Assim:

---

Cálculo de  $\theta$

$$\theta = \gamma(H) + \xi_1 \gamma(A) + \xi_2 \quad (9.90)$$


---

A fórmula para  $\gamma(H)$  e  $\gamma(A)$  deve ser escolhida de acordo com o tipo de incertezas presente (politópica ou limitada em norma).

## 9.5 Relação com Trabalhos Anteriores

A lei de controle por estrutura variável dada por (9.76) possui forma similar à de certo tipo de leis de chaveamento convencionalmente empregadas em controladores modos deslizantes. Tal tipo de lei de controle é baseada na realimentação de um erro  $s$  através de um termo da forma:

$$u = \frac{s}{\|s\|} \quad (9.91)$$

sendo  $s$  um vetor. A origem dessa estrutura de controle parece remontar aos trabalhos [45, 69, 25, 46], onde tal estrutura é denominada *controle min-max*, e onde o objetivo de controle é formulado como sendo a obtenção da “*uniform ultimate boundedness*” do sistema em malha fechada. Essa linha de pensamento é algumas vezes denominada *controle determinístico de sistemas incertos* (abreviadamente, CDSI). Tal linha foi desenvolvida a partir do início da década de 70, a princípio independentemente da teoria dos sistemas de estrutura variável. Ao final da década de 70, os pesquisadores atuando nesse campo já estavam conscientes da similaridade entre seus resultados e os do controle VSS.

No entanto, a comunidade de pesquisadores atuando no campo dos sistemas de estrutura variável parece só ter tomado conhecimento de tais resultados a partir do final da década de 80, com o surgimento de trabalhos como [14, 123, 130], nos quais é utilizada a estrutura de controle (9.91). No contexto da teoria de modos deslizantes, essa estrutura recebe as denominações de “*eventual sliding modes*” em [52], “*unit sliding mode control*” em [6] e “*univector nonlinearity*” em [14, 123, 130].

O teorema 9.4 consiste na aplicação de uma variação daquela estrutura clássica (9.91) para o caso de sistemas incertos com incerteza na matriz de entrada de controle, além das incertezas nos demais parâmetros do sistema e em sinais exógenos de perturbação. As incertezas na matriz de entrada de controle vêm trazendo considerável dificuldade ao projeto de controladores modos deslizantes. Para uma discussão da natureza dessas dificuldades, considere-se o sistema simplificado:

$$\dot{x} = Ax + (B + \Delta_B)u \quad (9.92)$$

Será a seguir examinada a possibilidade de implementação de modos deslizantes sobre tal sistema, segundo as diversas metodologias propostas (em geral, os sistemas considerados nos diversos trabalhos são mais complexos; no entanto o sistema acima servirá para ilustrar as dificuldades de cada abordagem).

O primeiro trabalho, no campo dos VSS, que tenta levar em consideração incertezas na matriz de entrada em projetos de controladores modos deslizantes parece ser [14]. Entretanto esse trabalho assume que é suficiente a condição de “*matching*”:

$$\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(\Delta_B) \quad (9.93)$$

para que seja possível o projeto do controlador modos deslizantes estabilizante. Tal premissa está equivocada, sendo a prova desse equívoco apresentada no lema 5.6 desta tese. A condição é apenas necessária para que seja possível a rejeição da incerteza. Outros trabalhos posteriores [52, 37, 139, 68] incorreram no mesmo equívoco.

O trabalho [10] lida com um caso bastante particular do problema, em que a ação de controle é escalar (sistema de uma única entrada). Nesse caso, é possível estabelecer uma condição necessária e suficiente para que o sistema seja estabilizável em presença da incerteza  $\Delta_B$ , qual seja:

$$B + \Delta_B > 0 \quad \forall \Delta_B \quad (9.94)$$

A condição apresentada no presente trabalho, de que o sistema seja EGPD, inclui a condição acima como caso particular.

Em [27] assume-se que:

$$\|\Delta_B u\| < k \quad (9.95)$$

para um escalar fixo conhecido  $k$ . Isso implica que tal condição só admitirá leis de controle que incluam uma saturação do sinal de controle, caso a própria incerteza  $\Delta_B$  não possua uma saturação em cascata. Observe-se que a ação de controle proposta em tal trabalho propõe um controle com termo proporcional aos estados, o que implica que a saturação necessária para fazer prevalecer a condição acima deve estar implícita na estrutura da entrada de controle<sup>1</sup>. Logo, tal trabalho não se aplica à classe dos sistemas lineares invariantes no tempo com incerteza na matriz de entrada de controle, na qual não seria possível garantir tal saturação; a própria entrada de controle deve ser não-linear para se adequar às hipóteses estabelecidas em tal trabalho.

Nos trabalhos [9, 24], dentro da linha CDSI, e nos trabalhos [28, 93], dentro da linha VSS, é assumido que:

$$\|B_2^{-1} \Delta_{B2}\| \leq 1 \quad (9.96)$$

sendo  $B_2$  e  $\Delta_{B2}$  matrizes quadradas tais que:

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \Delta_B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta_{B2} \end{bmatrix} \quad (9.97)$$

Fazendo essa mesma decomposição em  $B$  e  $\Delta_B$ , os trabalhos [45, 46] assumem que:

$$\lambda_{\min} \left( \frac{B_2^{-1} \Delta_{B2} + \Delta'_{B2} (B'_2)^{-1}}{2} \right) > -1 \quad (9.98)$$

Pode-se verificar por inspeção que a hipótese (9.96) é um caso particular da hipótese (9.98), pois essa última admite que os autovalores máximos da matriz considerada sejam arbitrariamente grandes, sendo sua norma portanto também arbitrariamente grande. A hipótese

<sup>1</sup>Observe-se que a presença de um termo proporcional aos estados no cálculo do vetor de entradas de controle implica que esse vetor não é considerado limitado *a priori*.

(9.98) por sua vez é equivalente a:

$$\mathbf{I} + \left( \frac{B_2^{-1} \Delta_{B_2} + \Delta'_{B_2} (B'_2)^{-1}}{2} \right) > 0 \quad (9.99)$$

o que quase corresponde à condição (formulada no presente trabalho) de o sistema ser EGPD, tornando-se um caso particular dessa condição por não envolver uma matriz de normalização  $G$ , como neste trabalho, possuindo portanto menos graus de liberdade.

Para se empregar a hipótese (9.98) (bem como também a hipótese (9.96)), deve-se fazer a verificação de um critério dependente apenas de matrizes do sistema, sem nenhuma participação de matrizes de projeto. Caso essa verificação venha a falhar, não há nada a se fazer, em princípio. Na realidade, seria possível mudar a transformação de coordenadas que gerou a decomposição acima. Mas essa possibilidade não é explicitada nos trabalhos citados. Já a hipótese de que o sistema seja EGPD, aqui adotada, depende explicitamente das matrizes  $G$  e  $L$ , que são parâmetros do controlador. Em caso de falha da hipótese EGPD para determinados parâmetros é possível escolher outras matrizes  $G$  e  $L$  que, atendendo à restrição de estabilizabilidade em ganhos elevados, atenda simultaneamente à condição EGPD. No presente trabalho são também apresentados algoritmos sub-ótimos para cálculo de uma matriz  $G$  que apresente mínima conservatividade. Efeito equivalente seria possível de obter, via uma escolha adequada de transformação de coordenadas, apenas nos trabalhos [45, 46]. No entanto, tal fato não foi ainda reconhecido na literatura de que tomou conhecimento o presente autor.

O trabalho [104] estabelece, como condição para o projeto do controlador modos deslizantes, que exista um escalar conhecido  $K_g$  tal que a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$\|\Delta_B\| < K_g \quad (9.100)$$

Tal condição, pode-se constatar, não é suficiente para que exista uma matriz  $K$  tal que a matriz  $(B + \Delta_B)K$  possua autovalores com parte real estritamente negativa para todo  $\Delta_B$ , não sendo portanto suficiente para que seja possível o projeto de um controlador modos deslizantes que estabilize o sistema incerto. Curiosamente, tal trabalho escapa, aparentemente por acaso, de incorrer no mesmo equívoco dos trabalhos que postularam a suficiência da condição de “*matching*” ao assumir, em determinado ponto do desenvolvimento da lei de controle, que:

$$\mathbf{I} + M_1 \Delta_B M_2 + M_2' \Delta_B M_1' > 0 \quad (9.101)$$

para determinadas matrizes  $M_1$  e  $M_2$ . Tal desigualdade não pode ser deduzida das hipóteses que haviam sido estabelecidas mas, se fosse adotada enquanto hipótese, bastaria para que o resultado obtido fosse correto. Nesse caso, a condição seria equivalente à empregada no presente trabalho. As matrizes  $M_1$  e  $M_2$  são obtidas de transformações de coordenadas do sistema. Caso não se verifique a condição acima, é possível mudar tais transformações de coordenadas, como em [45, 46]. No caso do trabalho [104], no entanto, essa possibilidade fica ainda menos clara, pelas circunstâncias em que a hipótese foi colocada.

## 9.6 Conclusão

Posta essa perspectiva dos trabalhos relatados na literatura, pode-se sumarizar a contribuição original embutida nas seções 9.2 a 9.4 do presente trabalho:

- Foi formulada a condição de que o sistema seja EGPD, sendo demonstrada sua suficiência para que seja possível a síntese de um controle por modos deslizantes globalmente estável. Essa condição revela-se a condição suficiente mais abrangente atualmente existente, englobando as demais condições propostas na literatura enquanto casos particulares.
- Foram propostos algoritmos sub-ótimos para a verificação da condição EGPD, assumindo-se determinados modelos de incertezas. Esses algoritmos se prestam tanto para reduzir a conservatividade do projeto do controlador (reduzindo o valor necessário da ação de controle) quanto para eventualmente até tornar factíveis projetos que seriam de outra forma infactíveis. Não existe nada similar relatado na literatura.
- Embora seguindo as linhas de demonstração de convergência já adotadas em alguns trabalhos, foi aqui proposta pela primeira vez uma sistemática específica para o projeto de controladores modos deslizantes globalmente convergentes para sistemas com incertezas tanto do tipo politópica quanto do tipo limitada em norma. Através dessas sistemáticas propostas, passa-se dos dados do sistema (com suas incertezas) diretamente aos parâmetros do controlador, utilizando-se procedimentos completamente padronizados.
- Esses procedimentos são inteiramente baseados em técnicas de otimização com formulação LMI's (incluindo LMI's do tipo GEVP's), sendo portanto solucionáveis através de algoritmos eficientes e confiáveis. A aplicação desse tipo de técnica não é comum no contexto da teoria de modos deslizantes, sendo que, exceto trabalhos de autoria do presente autor [116], aparentemente só existe na literatura um relato da aplicação de LMI's em projeto de modos deslizantes, no trabalho [49], mesmo assim em contexto diferente do aqui abordado.

Deve-se observar que, embora o material contido no presente capítulo se refira a sistemas com estrutura *controle completo*, isto não significa menor generalidade em relação aos trabalhos da literatura com os quais é feita comparação. O controle de sistemas sobre os quais se impõe apenas a restrição de controlabilidade sempre poderá ser reduzido ao controle de um subsistema com estrutura *controle completo* em cascata com outro subsistema cujos sinais de controle se originarão no primeiro. Essa metodologia, pela primeira vez apresentada em [121], é hoje um procedimento padrão no projeto de controladores modos deslizantes, sendo de fato utilizada na maioria dos trabalhos citados na seção 9.5.

Os métodos desenvolvidos neste capítulo não são ainda suficientes para tratar do problema geral do rastreamento de sinais em sistemas com saída prescritível. Isso se deve ao fato desses sistemas serem uma composição de diversos subsistemas, cada um com estrutura controle completo, os níveis. Os sinais de controle de cada nível podem ser tanto sinais exógenos quanto sinais sintetizados como saídas dos níveis subseqüentes. Admite-se que os sinais de controle exógenos possam ser descontínuos, porém exige-se que sejam finitos. Assim, nenhum subsistema pode gerar em sua saída sinais descontínuos (o que exigiria entradas de controle impulsivas). Por essa razão, os sinais de controle aplicados nos níveis do subsistema de saída prescritível, exceto o último, devem ser sinais contínuos, uma vez que são sinais originários dos níveis subseqüentes. O tratamento desse problema mais geral é deixado para trabalhos a serem desenvolvidos futuramente.



# CONCLUSÃO

# Notas Finais

Concluindo este trabalho, é importante sumarizar os resultados aqui obtidos e identificar as principais questões que ficam em aberto, derivadas da trama aqui desenvolvida. A organização das idéias apresentadas nesta tese é a seguir descrita de maneira informal, sem seguir necessariamente a ordem seqüencial dos capítulos, numa tentativa de delinear com clareza os problemas que foram tratados e as soluções que foram propostas.

Inicialmente, são repassados os passos seguidos na abordagem dos sistemas com parâmetros precisamente conhecidos:

- Foram abordados os problemas de controle ótimo cujas funções objetivo são normas do vetor de sinais de saída para determinada classe de sinais de entrada de perturbação. Essa definição inclui, em particular, a otimização da norma  $\mathcal{H}_2$  de sistemas, bem como a otimização de qualquer norma  $\mathcal{L}_p$  induzida, dentre elas a norma  $\mathcal{H}_\infty$  (que é a norma  $\mathcal{L}_2$  induzida). Foram estudadas as conseqüências da remoção da hipótese de regularidade usualmente empregada na descrição desses problemas de controle, qual seja a inclusão nos sinais de saída a serem ponderados na função objetivo de termos que penalizam todas as componentes do vetor de entradas de controle.
- Definido o problema dessa forma, foi mostrado que essa classe de problemas admite uma regularização, baseada na decomposição do sistema para determinação de um núcleo regular de ordem reduzida e de um subsistema de saída prescritível. O sistema completo é equivalente à conexão desses dois subsistemas. O procedimento de decomposição do sistema desenvolvido aqui se aplica de maneira universal a todos os problemas da classe considerada.
- O núcleo regular obtido do procedimento de decomposição possui a hipótese de regularidade restaurada. Caso se disponha de maquinário computacional para determinação da solução do problema regular na norma considerada, tal maquinário pode ser diretamente aplicado a tal núcleo regular, produzindo uma solução ótima de ordem reduzida. Neste trabalho foram aplicados algoritmos convexos de determinação de controladores ótimos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  baseados em LMI's, como instâncias de problemas para os quais se dispõem de soluções mediante as hipóteses usuais de regularidade.
- A passagem da solução de ordem reduzida para a solução de ordem completa, que otimiza a função objetivo sobre o sistema original, é feita através da síntese dos sinais de controle prescritos pelo controlador ótimo de ordem reduzida (operando sobre o núcleo regular) nas saídas do subsistema de saída prescritível. Essa síntese é isenta de

custo, e constitui-se em um problema de quase-desacoplamento de distúrbios (“almost disturbance decoupling”), envolvendo portando a utilização de ganhos elevados (“high gains”).

Os mesmos passos, em essência, foram também seguidos no caso dos sistemas com parâmetros incertos:

- No que se refere à definição do problema de otimização para sistemas incertos, fez-se a substituição da otimização de funcionais que corresponderiam a determinada norma da saída do sistema pela otimização de funcionais que teriam o significado de um limitante superior dessa mesma norma para todo o conjunto de incertezas considerado. Ao invés de um problema de controle ótimo, passa a haver um problema de controle custo-garantido ótimo.
- Foi estudada a questão da regularidade ou singularidade dos problemas de custo-garantido ótimo. Mostrou-se que, para determinados tipos de incertezas em sistemas, as hipóteses necessárias para garantir a regularidade desses problemas são mais fracas que no caso dos problemas sem incertezas de parâmetros. Isso ocorre porque, com essas incertezas, a aplicação de ganhos elevados poderia levar o sistema à instabilidade para determinadas instâncias dos parâmetros incertos. Para limitar o funcional de custo-garantido, é então automaticamente necessário limitar a ação de controle. Foi mostrado que algoritmos já existentes de projeto de controladores custo-garantido ótimos, os quais se supunha necessitarem das hipóteses convencionais de regularidade, resolvem de maneira inteiramente satisfatória também os problemas formulados com a suposição da hipótese mais fraca de regularidade generalizada.
- Dessa forma, foi cunhada uma definição de regularidade generalizada, aplicável aos problemas de controle custo-garantido ótimo. Com tal definição, foi possível formular um critério de separação<sup>2</sup> entre os sistemas singulares e os sistemas com regularidade generalizada. Esse critério foi expresso em termos de algoritmos convexos, baseados em LMI's, prontamente aplicáveis a sistemas com incertezas dos tipos limitada em norma e politópica (outras estruturas de incertezas poderiam ter sido estudadas segundo a mesma metodologia).
- Com base naquele critério de separação entre sistemas singulares e sistemas com regularidade generalizada, foi possível construir um algoritmo de decomposição regular/singular inteiramente análogo ao algoritmo empregado no caso de parâmetros precisamente conhecidos. O sistema novamente é decomposto em um núcleo regular (agora generalizado) e em um subsistema de saídas prescritíveis.
- Exatamente como no caso de parâmetros precisamente conhecidos, a solução completa do problema de controle custo-garantido ótimo é obtida pela composição da solução de ordem reduzida regular, associada ao núcleo regular generalizado, com um problema de quase-desacoplamento de distúrbios, associado ao subsistema de saídas prescritíveis. A solução completa, portanto, também é formulada em termos de controladores tipo ganhos elevados.

---

<sup>2</sup>Tal critério ainda não é inteiramente satisfatório, pois envolve a noção de estabilidade quadrática.

Em ambos os casos, para implementação física dos ganhos elevados obtidos como solução do problema de controle ótimo, são estudados os controladores em modos deslizantes. Tais controladores, ao menos localmente, são equivalentes aos controladores tipo ganhos elevados, possuindo entretanto toda uma sistemática já bem estudada de implementação em sistemas físicos. No caso de sistemas incertos, desenvolveu-se aqui uma metodologia de projeto desses controladores modos deslizantes que, para alguns casos, viabiliza o projeto de controladores que de outra forma não poderiam ser obtidos e, em qualquer caso, reduz a conservatividade da lei de controle resultante.

Deve-se notar que, com a formulação aqui proposta, a metodologia de projeto dos controladores ótimos singulares para sistemas com parâmetros precisamente conhecidos tornou-se um caso particular de uma metodologia mais geral, de projeto de controladores custo-garantido ótimo singulares. Nesses últimos, são em princípio incorporados os três princípios básicos do controle robusto: a robustez ganhos pequenos (“small gains”), que se aplica desde que esteja envolvido um critério de norma  $\mathcal{H}_\infty$ ; a robustez geométrica, que desacopla distúrbios em determinadas direções do espaço (associada ao procedimento de quase-desacoplamento de distúrbios e, por conseguinte, ao controle por modos deslizantes); e a robustez a variações paramétricas no interior de conjuntos (aqui exemplificada através da robustez do tipo estabilidade quadrática). A formulação de controladores robustos híbridos, dentro do quadro aqui proposto, passa a ser mera aplicação de uma metodologia geral, que pode ser particularizada para cada tipo “puro” de robustez.

## Programa de Pesquisas Complementar

O trabalho que aqui se encerra deixa em aberto algumas questões que é pertinente listar aqui, com o objetivo de realçar as lacunas que não foram preenchidas devido à limitação de tempo. A lista apresentada a seguir é bastante breve, procurando se ater a pontos que estariam em princípio dentro do escopo do trabalho aqui proposto:

- Estudar sistemas com realimentação de saídas, seja baseados em controladores do tipo ganhos estáticos, seja em compensadores dinâmicos, seja em observadores.
- Ampliar a classe de incertezas consideradas, de maneira a incluir: restrições integrais quadráticas e incertezas não-paramétricas estruturadas. Aplicar especificamente, tanto os modelos já estudados, quanto esses acima especificados, para modelar incertezas de medidores e de atuadores (estas últimas particularmente importantes em implementações de controladores em modos deslizantes).
- Desenvolver a teoria dos modos deslizantes de ordem superior, de maneira a poder aplicar tal metodologia de implementação de controladores a um maior subconjunto dos controladores tipo ganhos elevados obtidos como resultado do problema de quase-desacoplamento de perturbações.
- Desenvolver a extensão dos resultados para o caso de sistemas discretos, determinando as condições sob as quais tal extensão seria pertinente.



# APÊNDICE

## Apêndice A

# Definições de Referência

Neste apêndice são estabelecidas diversas definições matemáticas, delimitando o universo das entidades estudadas neste trabalho.

As definições aqui apresentadas são provenientes das fontes citadas. Por vezes, a definição é adaptada, tanto em termos formais quanto de notação, com o objetivo de assegurar a consistência metodológica do conjunto dos conceitos formulados, bem como a coerência com o material desenvolvido no restante deste trabalho. Entretanto, a definição apresentada é sempre equivalente à encontrada na fonte original. Este apêndice apenas compila conceitos e fatos já definidos na literatura, tendo sido incluído com o objetivo de tornar preciso o significado dos termos a serem empregados no restante do trabalho.

### A.1 Espaços e Normas

As definições contidas nesta seção seguem as referências [19] e [122].

**Definição A.1 (Corpo)** *Um corpo consiste num conjunto, denotado  $\mathbb{F}$ , de elementos denominados escalares, e duas operações chamadas adição ( $+$  :  $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$ ) e multiplicação ( $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$ ), satisfazendo as seguintes condições  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ :*

(C1)  $\alpha + \beta \in \mathbb{F}$  e  $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{F}$ .

(C2)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  e  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ .

(C3)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  e  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ .

(C4)  $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$ .

(C5)  $\mathbb{F}$  contém um elemento denotado por 0 e um elemento denotado por 1 tais que:  $\alpha + 0 = \alpha$  e  $\alpha \cdot 1 = \alpha$ .

(C6) A todo  $\alpha \in \mathbb{F}$  corresponde um elemento  $\beta \in \mathbb{F}$  tal que  $\alpha + \beta = 0$ .

(C7) A todo  $\alpha \neq 0 \in \mathbb{F}$  corresponde um elemento  $\beta \in \mathbb{F}$  tal que  $\alpha \cdot \beta = 1$ .

□

**Definição A.2 (Espaços Vetoriais Lineares)** *Um espaço vetorial linear é caracterizado por um conjunto  $\mathcal{V}$ , um corpo  $\mathbb{F}$  e duas operações, a operação adição vetorial ( $+$  :  $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ ) e a operação multiplicação por escalar ( $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ ), tais que os seguintes axiomas sejam válidos  $\forall x, y, z \in \mathcal{V}$  e  $\forall c, c_1, c_2 \in \mathbb{F}$ :*

$$(V1) \quad x + y = y + x.$$

$$(V2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z.$$

$$(V3) \quad \text{Existe um elemento } \mathbf{0} \in \mathcal{V} \text{ tal que } x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x, \quad \forall x \in \mathcal{V}.$$

$$(V4) \quad \text{Para cada } x \in \mathcal{V} \text{ existe um elemento denotado por } -x \in \mathcal{V} \text{ tal que } x + (-x) = \mathbf{0}.$$

$$(V5) \quad c_1 \cdot (c_2 \cdot x) = (c_1 c_2) \cdot x.$$

$$(V6) \quad c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y.$$

$$(V7) \quad (c_1 + c_2) \cdot x = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x.$$

$$(V8) \quad 1 \cdot x = x.$$

□

**Definição A.3 (Subespaço Vetorial)** Denomina-se subespaço vetorial a qualquer subconjunto  $\mathcal{M}$  de um espaço vetorial linear  $\mathcal{V}$  (sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ) tal que:

1.  $x, y \in \mathcal{M} \Rightarrow x + y \in \mathcal{M}$
2.  $x \in \mathcal{M}, c \in \mathbb{F} \Rightarrow c \cdot x \in \mathcal{M}$ .

□

**Definição A.4 (Norma)** Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial sobre o corpo dos reais. Uma função  $F : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$  com imagem no conjunto dos números reais e domínio no conjunto  $\mathcal{V}$  é denominada uma norma dos elementos de  $\mathcal{V}$  se satisfaz as seguintes propriedades  $\forall x, y \in \mathcal{V}$  e  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ :

$$(N1) \quad F(x) \geq 0, F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}.$$

$$(N2) \quad F(\alpha x) = |\alpha| F(x).$$

$$(N3) \quad F(x + y) \leq F(x) + F(y).$$

A notação  $\|x\|$  será empregada genericamente neste texto para indicar  $F(x)$ . O contexto deverá deixar claro a que espaço e a que norma específicos tal notação se refere.

□

**Definição A.5 (Normas Vetoriais  $p$ )** Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  um vetor real de dimensão finita, e seja  $x_i$  sua  $i$ -ésima componente escalar. Sua norma  $p$ , denotada por  $\|x\|_p$ , é definida pela expressão:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (A.1)$$

Para  $p = \infty$  a definição é:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (A.2)$$

□

**Definição A.6 (Espaços Normados)** Um espaço normado  $\mathcal{E}$  é um par ordenado  $(\mathcal{V}, F)$  em que  $\mathcal{V}$  é um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{F}$  e  $F : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R}$  é uma norma aplicável aos elementos de  $\mathcal{V}$ . O espaço normado  $\mathcal{E}$  é definido como:

$$x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (F(x) < \infty, x \in \mathcal{V}) \quad (\text{A.3})$$

□

**Definição A.7 (Convergência de Seqüência)** Seja uma série ordenada de vetores  $\{x_i, i = 1, \dots, \infty\}$  pertencentes a um espaço vetorial normado  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ . Diz-se que essa série converge para  $x_0 \in \mathcal{X}$  se, para todo escalar  $\epsilon > 0$ , existe um inteiro  $N = N(\epsilon)$  tal que:

$$\|x_i - x_0\| < \epsilon, \quad \forall i \geq N \quad (\text{A.4})$$

□

**Definição A.8 (Seqüência de Cauchy)** Seja uma série ordenada de vetores  $\{x_i, i = 1, \dots, \infty\}$  pertencentes a um espaço vetorial normado  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ . Essa série é denominada uma seqüência de Cauchy se, para todo escalar  $\epsilon > 0$ , existe um inteiro  $N = N(\epsilon)$  tal que:

$$\|x_i - x_j\| < \epsilon \quad \forall i, j > N \quad (\text{A.5})$$

□

**Definição A.9 (Espaço de Banach)** Um espaço linear normado  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  é dito ser completo, ou um espaço de Banach, se toda seqüência de Cauchy em  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  converge para um elemento de  $\mathcal{X}$ .

□

## A.2 Espaços Topológicos

As definições a seguir são extraídas de [96].

**Definição A.10 (Espaços Topológicos)** Um espaço topológico é um conjunto  $S$  para o qual uma coleção  $\tau$  de subconjuntos, denominados conjuntos abertos foi especificada, com as seguintes propriedades:

- i.  $S$  é aberto;
- ii.  $\emptyset$  é aberto;
- iii. a interseção de dois conjuntos abertos quaisquer é um conjunto aberto;
- iv. a união de dois conjuntos abertos quaisquer é um conjunto aberto.

□

Uma possível maneira de definir conjuntos abertos em espaços vetoriais normados, para estabelecer topologias nos mesmos, é apresentada a seguir:

**Definição A.11 (Conjunto Aberto em Espaços Normados)** *Seja  $\mathcal{X}$  um conjunto contido em um espaço normado. O conjunto  $\mathcal{X}$  é dito ser aberto se:*

$$x_o \in \mathcal{X} \Rightarrow \exists \epsilon \mid x \in \mathcal{X} \forall \|x - x_o\| < \epsilon \quad (\text{A.6})$$

□

Independentemente da definição de conjunto aberto a ser adotada (não é necessário adotar a definição baseada em norma acima), as demais definições apresentadas a seguir nesta seção são válidas.

**Definição A.12 (Complemento de Conjunto)** *Seja  $\mathcal{X} \subset \mathcal{Q}$  um conjunto contido em outro conjunto  $\mathcal{Q}$ . O conjunto  $\mathcal{Y}$  é o complemento de  $\mathcal{X}$  em relação a  $\mathcal{Q}$  se:*

$$\begin{aligned} \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} &= \mathcal{Q} \\ \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} &= \emptyset \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

□

**Definição A.13 (Conjunto Fechado)** *Seja  $\mathcal{X}$  um conjunto contido em um espaço topológico. O conjunto  $\mathcal{X}$  é dito ser fechado se seu complemento em relação ao espaço for aberto.*

□

**Definição A.14 (Fecho de Conjunto)** *Seja  $\mathcal{X}$  um conjunto contido em um espaço topológico. O fecho de  $\mathcal{X}$ , denotado por  $\overline{\mathcal{X}}$ , é definido como a interseção de todos os conjuntos fechados que contêm  $\mathcal{X}$ .*

□

**Definição A.15 (Interior de Conjunto)** *Seja  $\mathcal{X}$  um conjunto contido em um espaço topológico. O interior de  $\mathcal{X}$ , denotado por  $\mathcal{X}^\circ$ , é definido como a união de todos os conjuntos abertos contidos em  $\mathcal{X}$ .*

□

**Definição A.16 (Fronteira de Conjunto)** *Seja  $\mathcal{X}$  um conjunto contido em um espaço topológico. A fronteira de  $\mathcal{X}$ , denotada por  $\partial\mathcal{X}$ , é definida como a diferença entre o fecho de  $\mathcal{X}$  e seu interior:*

$$\begin{aligned} \partial\mathcal{X} &\subset \overline{\mathcal{X}} \\ \partial\mathcal{X} \cap \mathcal{X}^\circ &= \emptyset \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

□

**Definição A.17 (Vizinhança)** *Seja um ponto  $x$  contido em um espaço topológico. Uma vizinhança de  $x$  é qualquer conjunto aberto que contenha  $x$ .*

□

**Definição A.18 (Conjunto Convexo)** *Seja um conjunto  $\mathcal{X}$ , contido em um espaço vetorial, e seja a função  $x(x_1, x_2, \alpha)$  definida por:*

$$x(x_1, x_2, \alpha) = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \quad (\text{A.9})$$

para  $x_1$  e  $x_2$  elementos do espaço vetorial e  $\alpha$  um escalar. Se se verificar:

$$\{x_1, x_2 \in \mathcal{X} ; 0 \leq \alpha \leq 1\} \Rightarrow x(x_1, x_2, \alpha) \in \mathcal{X} \quad (\text{A.10})$$

então o conjunto  $\mathcal{X}$  é dito ser convexo.

□

**Definição A.19 (Fecho Convexo)** O fecho convexo de um conjunto  $\mathcal{X}$ , denotado por  $\text{conv } \overline{\mathcal{X}}$ , é definido como a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm o conjunto  $\overline{\mathcal{X}}$ .

□

### A.3 Espaços de Sinais

Nesta seção são apresentados conceitos definidos nas referências [96] e [122].

**Definição A.20 (Sinais)<sup>1</sup>** Seja definido o conjunto  $\mathcal{F}$  de funções reais de uma variável:

$$\mathcal{F} \triangleq \{f : f(h) \in \mathbb{R} \quad \forall h \in \mathbb{R}\} \quad (\text{A.11})$$

De maneira análoga, definem-se os conjuntos  $\mathcal{F}^k$ :

$$\mathcal{F}^k \triangleq \{f : f(h) \in \mathbb{R}^k \quad \forall h \in \mathbb{R}\} \quad (\text{A.12})$$

para  $k \in \mathbb{N}$  finito. (Note-se que  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^1$ ). Os elementos de  $\mathcal{F}^k$  são denominados sinais.

□

**Definição A.21 (Espaços Vetoriais de Sinais)** Os conjuntos dos sinais,  $\mathcal{F}^k$ , acima definidos, munidos do corpo dos números reais ( $\mathbb{R}$ ) com suas operações escalares usuais de soma e multiplicação e da operação de soma vetorial definida por:

$$s = s_1 + s_2 \Leftrightarrow s(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathcal{F}^k \quad (\text{A.13})$$

são denominados espaços de sinais.

□

**Definição A.22 (Classes de Sinais)** Seja o conjunto  $\mathcal{F}^q$  de sinais  $w(t) \in \mathbb{R}^q$ . Defina-se uma classe de sinais de  $\mathcal{F}^q$  como um subconjunto  $\Omega \subset \mathcal{F}^q$ .

□

**Definição A.23 (Sinal Contínuo)** Seja um espaço vetorial de sinais  $\mathcal{F}^k$ , munido de uma norma  $\|\cdot\|$ . Um sinal  $x(t) \in \mathcal{F}^k$  é dito ser um sinal contínuo no ponto  $t = t_0$  se para todo escalar  $\epsilon > 0$  existe um outro escalar  $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$  tal que

$$\|x(t) - x(t_0)\| < \epsilon \quad \forall t : |t - t_0| < \delta \quad (\text{A.14})$$

Se  $x(t)$  é contínuo para todo ponto  $t$ , então  $x(t)$  é dito ser um sinal contínuo.

□

<sup>1</sup>Esta nomenclatura está de acordo, por exemplo, com a definição apresentada em [67].

**Definição A.24 (Espaços  $\mathcal{C}[a, b]$  e  $\mathcal{C}^0$ )** O espaço  $(\mathcal{C}[a, b])^k$  é definido como o subespaço de um espaço vetorial de sinais  $\mathcal{F}^k$  composto pelos sinais contínuos no intervalo  $[a, b]$ . O espaço  $(\mathcal{C}^0)^k$  corresponde ao espaço  $(\mathcal{C}[a, b])^k$  para  $[a, b] \rightarrow (-\infty, \infty)$ .

□

NOTA A.1 Pode-se mostrar que o subconjunto dos sinais contínuos pertencentes a um espaço vetorial de sinais  $\mathcal{F}^k$  constitui-se de fato em um subespaço.

◇

**Definição A.25 (Espaços  $\mathcal{C}^p$ )** O espaço  $(\mathcal{C}^p)^k$  é definido como o subespaço de um espaço vetorial de sinais  $\mathcal{F}^k$  composto dos sinais contínuos pertencentes a  $\mathcal{F}^k$  cujas derivadas até a ordem  $p$  sejam também contínuas (ou seja, pertençam a  $\mathcal{C}^0$ ).

□

NOTA A.2 Pode-se mostrar que o subconjunto dos sinais contínuos pertencentes a um espaço vetorial de sinais  $\mathcal{F}^k$  cujas derivadas até a ordem  $p$  são também sinais contínuos constitui-se de fato em um subespaço.

◇

**Definição A.26 (Espaço  $\mathcal{C}^\infty$ )** O espaço  $(\mathcal{C}^\infty)^k$  é definido como o subespaço de um espaço vetorial de sinais  $\mathcal{F}^k$  composto pelos sinais contínuos pertencentes a  $\mathcal{F}^k$  cujas derivadas de qualquer ordem sejam também contínuas (isto é, sejam também pertencentes a  $\mathcal{C}^\infty$ ).

□

NOTA A.3 A relação:

$$\mathcal{C}^0 \supset \dots \supset \mathcal{C}^i \supset \mathcal{C}^{i+1} \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty \quad (\text{A.15})$$

é facilmente verificável.

◇

**Definição A.27 (Função delta de Dirac)** A função  $\delta(t)$ , denominada função delta de Dirac, é definida como sendo a função que satisfaz às propriedades:

$$\begin{cases} \delta(0) = \infty \\ \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

□

**Definição A.28 (Derivadas de  $\delta(t)$ )** A derivada de ordem  $q$  da função delta de Dirac é definida como a função que satisfaz a:

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{0^+} \frac{d^q \delta(t)}{dt^q} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^q \delta(t)}{dt^q} dt = \frac{d^{q-1} \delta(t)}{dt^{q-1}} \\ \int_{0^-}^{0^+} \frac{d \delta(t)}{dt} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \delta(t)}{dt} dt = \delta(t) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

□

**Definição A.29 (Espaço  $\mathbb{D}^k$ )** O espaço  $\mathbb{D}^k$ , denominado espaço das distribuições<sup>2</sup>, é aqui definido como o espaço vetorial das funções com  $k$  componentes (ou seja, o espaço  $\mathcal{F}^k$ ), incluindo os sinais descontínuos, contendo ainda as derivadas de qualquer ordem desses sinais, definidas em termos da função delta de Dirac e suas derivadas.

□

**Definição A.30 (Normas  $\mathcal{L}_p$ )** Seja  $\mathcal{F}^k$  um espaço vetorial de sinais. Para  $1 \leq p \leq \infty$ , as normas  $\mathcal{L}_p$  são funções  $F : \mathcal{F}^k \mapsto \mathbb{R}_+$  definidas como:

$$F(x) = \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^k \int_a^b |x_i(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.18})$$

sendo  $x_i$  a  $i$ -ésima componente do vetor  $x$ . A norma  $\mathcal{L}_\infty$  é definida como a função  $F : \mathcal{F}^k \mapsto \mathbb{R}_+$  tal que:

$$F(x) = \|x\|_\infty = \text{ess sup}_{t,i} |x_i(t)| \quad (\text{A.19})$$

□

**Definição A.31 (Espaços  $\mathcal{L}_p$ )** Os espaços  $\mathcal{L}_p$  são definidos como os maiores subespaços de um espaço vetorial de sinais  $\mathcal{F}^k$  tais que:

$$x \in \mathcal{L}_p \Leftrightarrow \{\|x\|_p < \infty, x \in \mathcal{F}^k\} \quad (\text{A.20})$$

Tal definição é válida para  $p \geq 1$ , incluindo  $p = \infty$ .

□

NOTA A.4 Observe-se que os espaços  $\mathcal{E}^p$  não são completos (isto é, não são espaços de Banach), enquanto os espaços  $\mathcal{L}_p$  o são.

◇

**Definição A.32 (Truncamento de Sinal)** Seja um sinal definido pela função  $f(t)$ . O truncamento desse sinal no tempo  $T$  é definido como a função  $f_T(t)$  dada por:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \forall t \leq T \\ 0 & \forall t > T \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

□

**Definição A.33 (Espaços  $\mathcal{L}_p$  Estendidos)** O espaço  $\mathcal{L}_{pe}$ , denominado espaço  $\mathcal{L}_p$  estendido, é composto pelos sinais  $f(t)$  cujo truncamento  $f_T(t)$  para qualquer  $T$  finito pertence ao espaço  $\mathcal{L}_p$ :

$$f(t) \in \mathcal{L}_{pe} \Leftrightarrow f_T(t) \in \mathcal{L}_p \quad \forall T < \infty \quad (\text{A.22})$$

□

**Definição A.34 (Transformada de Laplace)** A transformada de Laplace de um sinal  $x(t)$ , denotada por  $X(s)$ , é definida por:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt \quad (\text{A.23})$$

□

<sup>2</sup>Para uma exposição rigorosa a respeito de espaços de distribuições, ver [96]. A forma simplificada de definição aqui adotada é utilizada em [125, 48, 126], e é mais geral que a apresentada em [122].

## A.4 Operadores e Normas Induzidas

Nesta seção são apresentados conceitos extraídos das referências [64] e [96].

**Definição A.35 (Função, Mapeamento, Operador, Imagem, Imagem Inversa, Conjunto Imagem, Domínio, Co-Domínio, Range<sup>3</sup>)** *Sejam  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  dois conjuntos e  $A \subset \mathcal{X}$  um subconjunto qualquer. Um mapeamento (ou operador, ou ainda uma função)  $T$  de  $A$  em  $\mathcal{Y}$  é definido como a relação que associa a cada  $x \in A$  um único  $y \in \mathcal{Y}$ , sendo denotado por:*

$$y = T(x) \quad (\text{A.24})$$

ou ainda:

$$T : A \mapsto \mathcal{Y} \quad (\text{A.25})$$

O conjunto  $A$  é denominado domínio do mapeamento  $T$ , e o conjunto  $\mathcal{Y}$  é denominado co-domínio. O vetor  $y \in \mathcal{Y}$  associado por  $T$  ao vetor  $x \in A$  é denominado imagem de  $x$ , enquanto o vetor  $x \in A$  ao qual está associado um vetor  $y \in \mathcal{Y}$  é denominado imagem inversa de  $y$ , sendo tal conceito denotado por:

$$x = T^{-1}(y) \quad (\text{A.26})$$

O conjunto imagem de um conjunto  $\mathcal{M} \in A$ , denotada por  $T(\mathcal{M})$ , é definido como o conjunto de todas as imagens de vetores pertencentes ao subconjunto  $\mathcal{M}$ :

$$T(\mathcal{M}) : \{y = T(x) \mid x \in \mathcal{M}\} \quad (\text{A.27})$$

O conjunto imagem do domínio de  $T$  é denominado range do operador  $T$ . A notação a seguir será adotada neste trabalho:

$\mathcal{D}(T)$  - denotando o domínio de  $T$ ;

$\mathcal{R}(T)$  - denotando o range de  $T$ .

□

**Definição A.36 (Operador Linear)** *Um operador linear  $T$  é um operador tal que:*

- i. o seu domínio  $\mathcal{D}(T)$  é um espaço vetorial e o seu range  $\mathcal{R}(T)$  está contido num espaço vetorial sobre o mesmo corpo;
- ii. para todo  $x, y \in \mathcal{D}(T)$  e para todo escalar  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} T(x + y) &= T(x) + T(y) \\ T(\alpha x) &= \alpha T(x) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

□

---

<sup>3</sup>A literatura em português à qual o autor deste trabalho teve acesso não faz distinção entre os conceitos de “conjunto imagem” e de “range” de um operador, denotando ambos por “imagem”. Como tal distinção se faz necessária, optou-se aqui por utilizar o termo em inglês, cujo significado é convencionalmente aceito, a se cunhar um neologismo em português para expressar o conceito.

**Definição A.37 (Espaço Nulo)** Dado um operador linear  $T$  com domínio  $\mathcal{D}(T)$ , define-se o espaço nulo de  $T$ , denotado por  $\mathcal{N}(T)$ , como o conjunto de todos os  $x$  em  $\mathcal{D}(T)$  cujas imagens sejam o vetor nulo, ou seja:

$$\mathcal{N}(T) : \{x \in \mathcal{D}(T) \mid T(x) = \mathbf{0}\} \quad (\text{A.29})$$

□

**Teorema A.1** Seja  $T$  um operador linear. Então seu range  $\mathcal{R}(T)$  e seu espaço nulo  $\mathcal{N}(T)$  são ambos espaços vetoriais.

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver demonstração em [64].

■

**Definição A.38 (Operador Linear Limitado)** Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços normados e  $T : \mathcal{D}(T) \mapsto Y$  um operador linear, sendo  $\mathcal{D}(T) \subset X$ . O operador  $T$  é dito ser um operador limitado se existe um número real  $c$  tal que:

$$\|Tx\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(T) \quad (\text{A.30})$$

□

**Definição A.39 (Norma de Operador)** Seja o operador linear limitado  $T$ . A norma desse operador, denotada por  $\|T\|$ , é definida pela expressão:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad (\text{A.31})$$

□

Observe-se que não há ambigüidade no emprego da mesma notação para designar a norma de um vetor e a norma de um operador pois, como será visto a seguir, os operadores lineares podem ser interpretados como sendo também elementos de espaços vetoriais normados.

**Lema A.1** Seja  $T$  um operador linear limitado. Então:

i. A definição de norma de  $T$  dada por (A.31) é equivalente a:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\| \quad (\text{A.32})$$

ii. A norma definida por (A.31) satisfaz à definição A.4 de norma.

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [64].

■

**Definição A.40 (Operador Contínuo)** *Seja  $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathcal{Y}$  um operador (não necessariamente linear), com  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X}$ , sendo ainda  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  espaços normados. O operador  $T$  é contínuo em um ponto  $x_0 \in \mathcal{D}(T)$  se para todo escalar  $\epsilon > 0$  existe um escalar  $\delta > 0$  tal que:*

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon \quad \forall x \in \mathcal{D}(T), \|x - x_0\| < \delta \quad (\text{A.33})$$

*O operador  $T$  é contínuo se for contínuo em todos os pontos  $x \in \mathcal{D}(T)$ .*

□

**Teorema A.2** *Seja  $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathcal{Y}$  um operador linear, sendo  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{X}$  e  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  dois espaços normados. Então:*

- i.  $T$  é contínuo se e somente se  $T$  é limitado.*
- ii. Se  $T$  é contínuo em um único ponto, então  $T$  é contínuo.*

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [64].

■

**Lema A.2** *Sejam os operadores lineares limitados  $T_1 : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Z}$  e  $T_2 : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ . A composição desses operadores, denotada por  $T_1T_2 : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Z}$ , é tal que:*

$$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\| \|T_2\| \quad (\text{A.34})$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [64].

■

**Definição A.41 (Soma de Operadores e Produto por Escalar)** *Sejam dois espaços normados  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  sobre o mesmo corpo. Denote-se por  $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  ao conjunto de todos os operadores lineares limitados de  $\mathcal{X}$  para  $\mathcal{Y}$ . Sejam  $T, T_1, T_2 \in B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  e seja um escalar  $\alpha$ . As operações soma de elementos e produto por escalar nesse conjunto são definidas por:*

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)x &= T_1x + T_2x \\ (\alpha T)x &= \alpha Tx \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

□

**Teorema A.3** *Sejam dois espaços normados  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  sobre o mesmo corpo. O conjunto  $B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  de todos os operadores lineares limitados de  $\mathcal{X}$  para  $\mathcal{Y}$  constitui-se ele próprio em um espaço normado, com a norma estabelecida na definição A.39.*

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [64].

■

**Definição A.42 (Espaço Fechado sob T)**<sup>4</sup> Seja um espaço vetorial  $\mathcal{X}$ , sobre cujos elementos está definido um operador  $T(\cdot)$  tal que:

$$T : \{y = T(x) \mid x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\} \quad (\text{A.36})$$

O espaço  $\mathcal{X}$  é dito fechado sob a operação  $T$  se  $y = T(x) \in \mathcal{Y} \forall x \in \mathcal{X}$ .

□

NOTA A.5 Os espaços  $\mathcal{C}^\infty$  e  $\mathbb{D}$ , por construção, são fechados sob as operações de integração e de diferenciação. Tal não se aplica aos espaços  $\mathcal{C}^p$  para  $p < \infty$ , os quais não são fechados sob diferenciação.

◇

**Definição A.43 (Valores Singulares)** A função valores singulares de uma matriz, é definida pela relação:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad (\text{A.37})$$

sendo que  $\lambda_i(\cdot)$  indica o  $i$ -ésimo autovalor do argumento. A notação  $\sigma(A)$  representa o conjunto dos valores singulares da matriz  $A$ , enquanto a notação  $\sigma_{max}(A)$  representa o maior valor singular da matriz  $A$ .

□

**Definição A.44 (Normas Matriciais  $p$  Induzidas)** Seja uma matriz real  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , considerada enquanto um operador que mapeia um espaço vetorial de dimensão finita  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  noutro espaço vetorial de dimensão também finita,  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^m$ :  $A : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$ . Suponha-se que ambos os espaços sejam equipados com a mesma norma vetorial  $p$ . A  $p$ -norma matricial induzida, denotada<sup>5</sup> por  $\|A\|_{M_p}$ , é definida como a norma induzida desse operador sobre esses espaços com essa norma. Para os casos particulares de  $p = 1, 2$  e  $\infty$  são obtidas as fórmulas:

$$\begin{aligned} \|A\|_{M_1} &= \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ \|A\|_{M_2} &= \sigma_{max}(A) \\ \|A\|_{M_\infty} &= \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

□

NOTA A.6 A  $p$ -norma matricial é definida para matrizes tomadas como operadores que relacionam espaços vetoriais de dimensões finitas. Se as matrizes forem tomadas no sentido de operadores que relacionam espaços vetoriais de sinais, as  $p$ -normas matriciais continuam válidas enquanto normas induzidas de um espaço  $\mathcal{L}_p$  para outro espaço  $\mathcal{L}_p$ . Entretanto, chama-se a atenção para o fato de essas normas matriciais não coincidirem com as normas  $\|\cdot\|_p$  quando as matrizes são consideradas elementos de espaços  $\mathcal{H}_p$  (esses espaços serão definidos adiante).

◇

<sup>4</sup>Esta definição é uma simplificação daquela de operador fechado apresentada em [96].

<sup>5</sup>Essa notação é adotada para diferenciar a norma matricial da norma  $\mathcal{H}_p$ , também aplicável a matrizes, a qual será denotada pelo símbolo padrão para norma,  $\|\cdot\|_p$ .

**Definição A.45 ( $\mathcal{L}_p$ -Estabilidade)** *Sejam os espaços de sinais  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , ambos  $\mathcal{L}_{pe}$ , e seja um operador  $T$  que os relaciona:*

$$T : \{y = T(x) \mid x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}\} \quad (\text{A.39})$$

*O operador  $T$  é dito  $\mathcal{L}_p$ -estável<sup>6</sup> se:*

$$x \in \mathcal{L}_p \Rightarrow y \in \mathcal{L}_p \quad (\text{A.40})$$

□

## A.5 Sistemas Dinâmicos

Nesta seção são adotadas definições que aproximadamente seguem os conceitos apresentados nas referências [127] e [122].

Inicialmente, define-se o que é um sistema dinâmico:

**Definição A.46 (Sistema Dinâmico)** *Sejam  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{U}$  espaços vetoriais lineares. Um sistema dinâmico consiste no par de mapeamentos  $(S, T)$  tais que:*

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}, \mathcal{U}) &\stackrel{S}{\mapsto} \mathcal{X} \\ (\mathcal{X}, \mathcal{U}) &\stackrel{T}{\mapsto} \mathcal{Y} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

*Caso os mapeamentos  $(S, T)$  sejam lineares, o sistema dinâmico é dito linear.*

□

Definem-se também as representações operacionais de um sistema dinâmico, no caso linear de dimensão finita:

**Definição A.47 (Representação por Espaço de Estados)** *Sejam  $x \in \mathcal{X}$ ,  $u \in \mathcal{U}$  e  $y \in \mathcal{Y}$ . Um sistema de equações na forma:*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

*é chamado de representação por espaço de estados do sistema dinâmico linear  $(S, T)$ .*

□

**Definição A.48 (Representação por Matriz de Transferência)** *Sejam  $U(s)$  e  $Y(s)$  respectivamente as transformadas de Laplace de  $u(t)$  e  $y(t)$ . A equação matricial na variável  $s$ :*

$$Y(s) = [C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (\text{A.43})$$

*é chamada de representação por matriz de transferência do sistema dinâmico linear  $(S, T)$ . A matriz:*

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D \quad (\text{A.44})$$

*é denominada matriz de transferência do sistema.*

□

---

<sup>6</sup>Embora a  $\mathcal{L}_p$ -estabilidade seja tradicionalmente definida para relações binárias e não para operadores, aqui será adotada uma definição em termos desses últimos, por medida de economia de definições.

**Definição A.49 (Núcleo Convolutacional)** *Seja  $G(s)$  a matriz de transferência de um sistema dinâmico linear com  $m$  entradas e  $r$  saídas. Define-se o núcleo convolutacional  $g(t)$  desse sistema como a transformada de Laplace inversa de  $G(s)$ , ou seja:*

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \{G(s)\} \quad (\text{A.45})$$

sendo que  $g(t) \in \mathcal{F}^{r \times m}$  é uma matriz cujos elementos são sinais.

□

**Definição A.50 (Representação Convolutacional)** *Seja  $g(t)$  o núcleo convolutacional de um sistema dinâmico linear, e sejam  $u(t)$  e  $y(t)$  respectivamente seu vetor de entradas e seu vetor de saídas. A representação convolutacional desse sistema é dada por:*

$$y(t) = g(t) \otimes u(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (\text{A.46})$$

□

NOTA A.7 Se os sinais de entrada e saída de um sistema dinâmico pertencem a espaços normados, então tal sistema dinâmico linear em suas representações convolutacional e por matriz de transferência satisfaz à definição de operador linear (não necessariamente limitado). Dessa forma, as normas induzidas de operadores aplicam-se ao sistema se este for um operador limitado. Aplica-se ainda o conceito de  $\mathcal{L}_p$ -estabilidade.

◇

### A.5.1 Incertezas de Modelo

Freqüentemente, quando se vai estudar as propriedades de determinado sistema dinâmico que deve corresponder a um sistema físico, não é possível determinar com precisão o modelo associado a tal sistema físico. No entanto, muitas vezes é possível determinar um conjunto de modelos que “com certeza” contém o modelo exato do sistema físico. Através do estudo de propriedades comuns a todos os modelos pertencentes a tal conjunto, é possível determinar algumas das propriedades do modelo desconhecido. Essa abordagem será utilizada neste trabalho para tratar de incertezas de modelos.

Embora seja possível utilizar essa metodologia para todos os tipos de modelos de sistemas dinâmicos, aqui serão definidos apenas dois tipos particulares de *conjuntos de incertezas* (conjuntos que contêm o modelo incerto), ambos associados aos modelos do tipo *espaço de estados*. Define-se, antes, o caso genérico de sistemas incertos com modelos do tipo *espaços de estados*.

**Definição A.51 (Sistema Incerto)** *Dado um sistema em sua representação por espaço de estados, define-se o conjunto de incertezas de seu modelo como o conjunto  $\mathcal{P}$  tal que:*

$$(A, B, C, D) \in \mathcal{P} \quad (\text{A.47})$$

sendo o conjunto  $\mathcal{P}$  conhecido. Um sistema cujo modelo pode assumir qualquer valor dentro do conjunto  $\mathcal{P}$  é denominado sistema incerto.

□

A seguir, definem-se as duas classes particulares de sistemas incertos que serão tratadas ao longo deste trabalho, os sistemas com *incerteza politópica* e os sistemas com *incerteza limitada em norma*.

**Definição A.52 (Incerteza Politópica)** *Seja um sistema incerto cujo modelo em espaço de estados é tal que:*

$$(A, B, C, D) \in \mathcal{P} \quad (\text{A.48})$$

*Diz-se que o conjunto de incertezas  $\mathcal{P}$  é um politopo (incertezas politópicas) se esse conjunto for dado por:*

$$(A, B, C, D) = \sum_{i=1}^v \alpha_i (A, B, C, D)_i \quad (\text{A.49})$$

$$\sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, v$$

*sendo conhecidos os  $v$  vértices  $(A, B, C, D)_i$ .*

□

**Definição A.53 (Incerteza Limitada em Norma)** *Seja um sistema incerto cujo modelo em espaço de estados é tal que:*

$$(A, B, C, D) \in \mathcal{P} \quad (\text{A.50})$$

*Diz-se que  $\mathcal{P}$  é um conjunto limitado em norma se parâmetros do sistema satisfizerem:*

$$\begin{aligned} A &= A_o + W_A \Delta_A M_A \\ B &= B_o + W_B \Delta_B M_B \\ C &= C_o + W_C \Delta_C M_C \\ D &= D_o + W_D \Delta_D M_D \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

*sendo que os parâmetros nominais  $(A_o, B_o, C_o, D_o)$  e as matrizes  $W_{(\cdot)}$  e  $M_{(\cdot)}$  são conhecidos, enquanto as matrizes  $\Delta_{(\cdot)}$ , sendo desconhecidas, satisfazem:*

$$\|\Delta_{(\cdot)}\|_{\infty} = \sigma_{\max}(\Delta_{(\cdot)}) \leq 1 \quad (\text{A.52})$$

□

NOTA A.8 A condição estabelecida na definição de *sistemas com incerteza limitada em norma* sobre a matriz incerta  $\Delta_{(\cdot)}$  é apresentada sobre sua norma  $\mathcal{H}_{\infty}$ , sendo a matriz considerada um operador no espaço  $\mathbb{R}\mathcal{H}_{\infty}$ . Essa norma é igual ao ganho  $\mathcal{L}_2$  (definido a seguir) dessa matriz, vista como um elemento do espaço  $\mathbb{MF}$  de operadores tipo núcleo convolucional, ou ainda é igual à norma matricial  $\|\cdot\|_{M_2}$  (para este caso de matriz de elementos constantes).

◇

## A.5.2 Normas de Sistemas Dinâmicos

O conteúdo desta subseção é extraído das referências [26], [122] e [140].

Conforme foi visto, um sistema dinâmico pode ser interpretado como um operador, herdando portanto as normas induzidas definidas para operadores. Os operadores, por sua vez, podem ser interpretados como elementos de espaços vetoriais. Os operadores matriz de transferência e núcleo convolucional serão especificamente tratados nesta subseção para

constituírem espaços vetoriais normados que serão interpretados como espaços normados de sistemas.

Inicialmente, são definidos os espaços vetoriais que irão conter como elementos os operadores matriz de transferência e núcleo convolucional:

**Definição A.54 (Espaços  $\mathcal{E}$  e  $\mathbb{M}\mathcal{E}$ )** O espaço vetorial  $\mathcal{E}$  é definido como o espaço das funções de uma variável complexa, sobre o corpo dos reais:

$$\mathcal{E} : \{F(s) \mid s \in \mathbb{C}, F(s) \in \mathbb{C}\} \quad (\text{A.53})$$

O espaço  $\mathbb{M}\mathcal{E}$  é definido como o espaço das matrizes cujos elementos são pertencentes ao espaço  $\mathcal{E}$ , sendo definidas as operações de soma de elementos e multiplicação por escalar desse espaço no sentido matricial usual.

□

**Definição A.55 (Espaço  $\mathbb{M}\mathcal{F}$ )** O espaço vetorial  $\mathbb{M}\mathcal{F}$  é definido como o espaço das matrizes cujos elementos são pertencentes ao espaço de sinais  $\mathcal{F}$ , ou seja, são funções de uma variável real sobre o corpo dos números reais, sendo definidas as operações de soma de elementos e multiplicação por escalar desse espaço no sentido matricial usual.

□

Naturalmente, os operadores núcleo convolucional pertencem ao espaço  $\mathbb{M}\mathcal{F}$ , enquanto os operadores matriz de transferência pertencem ao espaço  $\mathbb{M}\mathcal{E}$ . Ainda é necessário especificar um subespaço do espaço  $\mathbb{M}\mathcal{E}$  que irá conter as matrizes de transferência de maior interesse:

**Definição A.56 (Espaços  $\mathbb{R}\mathcal{E}$  e  $\mathbb{R}\mathbb{M}\mathcal{E}$ )** O espaço  $\mathbb{R}\mathcal{E}$  é definido como o subespaço do espaço  $\mathcal{E}$  formado pelas funções reais-rationais próprias da variável complexa, ou seja, funções que são expressas como razões de polinômios na variável complexa  $s$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\mathcal{E} : \left\{ G(s) \mid G(s) = \frac{N(s)}{M(s)} \right\} \\ N(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_n s^n \\ M(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_m s^m \\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R} \\ m \geq n \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

O espaço  $\mathbb{R}\mathbb{M}\mathcal{E}$  é o subespaço de  $\mathbb{M}\mathcal{E}$  cujos elementos são matrizes com elementos contidos em  $\mathbb{R}\mathcal{E}$ .

□

Considere-se inicialmente o espaço vetorial dos operadores núcleo convolucional. As normas  $\mathcal{L}_p$  da entrada e saída do sistema irão induzir os ganhos  $\mathcal{L}_p$  do sistema, definidos a seguir:

**Definição A.57 (Ganho  $\mathcal{L}_p$ )** Seja um sistema dinâmico com núcleo convolucional  $g(t) \in \mathbb{MF}$ , vetor de entradas  $u(t)$  e vetor de saídas  $y(t)$ . O ganho  $\mathcal{L}_p$  desse sistema, denotado pelo símbolo  $\gamma_p$ , é definido por:

$$\gamma_p(g) = \sup_u \frac{\|y\|_p}{\|u\|_p} \quad (\text{A.55})$$

□

Os ganhos  $\mathcal{L}_p$  são normas do espaço  $\mathbb{MF}$ . Especificamente, a norma induzida pela norma  $\mathcal{L}_2$  (ou seja, o ganho  $\mathcal{L}_2$ ) será frequentemente utilizada neste trabalho como norma de sistemas dinâmicos.

Para tratar de operadores tipo matriz de transferência, são introduzidas as *normas  $\mathcal{H}_p$* . São aqui apresentadas apenas as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ .

**Definição A.58 (Normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ )** Seja o espaço vetorial  $\mathbb{ME}$  das matrizes de funções de uma variável complexa, sobre o corpo dos reais. A norma  $\mathcal{H}_2$  dos elementos  $F(s)$  desse espaço é definida por:

$$\|F(s)\|_2 = \sup_{\zeta > 0} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(F^*(\zeta + j\omega)F(\zeta + j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.56})$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  dos elementos  $F(s)$  de  $\mathbb{ME}$  é definida por:

$$\|F(s)\|_\infty = \sup_{\Re(s) > 0} \sigma_{\max}(F(s)) \quad (\text{A.57})$$

□

**Definição A.59 (Espaços  $\mathcal{H}_p$  e  $\mathbb{RH}_p$ )** O espaço  $\mathcal{H}_p$  é definido como o subespaço do espaço das matrizes de funções de uma variável complexa,  $\mathbb{ME}$ , que possuem a correspondente norma  $\mathcal{H}_p$  finita. O espaço  $\mathbb{RH}_p$  é definido como o subespaço do espaço das matrizes de funções reais-rationais próprias de uma variável complexa,  $\mathbb{RME}$ , constituído pelos elementos que possuem a correspondente norma  $\mathcal{H}_p$  finita.

□

NOTA A.9 Os espaços  $\mathcal{H}_p$  são denominados *espaços de Hardy*.

◇

Alguns fatos são a seguir estabelecidos, relacionando normas da matriz de transferência do sistema com a representação convolucional do mesmo.

**Teorema A.4** Seja um sistema dinâmico com núcleo convolucional  $g(t) \in \mathbb{MF}$  e matriz de transferência  $G(s) \in \mathbb{RME}$ . Suponha-se que esse sistema seja  $\mathcal{L}_2$ -estável. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência desse sistema é igual ao ganho  $\mathcal{L}_2$  de seu núcleo convolucional:

$$\|G(s)\|_\infty = \gamma_2(g(t)) \quad (\text{A.58})$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver, por exemplo, [140].

■

**Teorema A.5** *Seja um sistema dinâmico com núcleo convolucional  $g(t) \in \mathbb{MF}$  e matriz de transferência  $G(s) \in \mathbb{RME}$ . Suponha-se que esse sistema possua  $m$  entradas e  $r$  saídas. Suponha-se ainda que esse sistema seja  $\mathcal{L}_2$ -estável. Sejam  $m$  vetores  $e_i \in \mathbb{R}^m$  os componentes de uma base ortonormal do espaço de vetores de entrada. A norma  $\mathcal{H}_2$  da matriz de transferência  $G(s)$  é dada por:*

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|y_i(t)\|_2^2} \quad (\text{A.59})$$

$$y_i(t) = g(t) \otimes u_i(t) \quad , \quad u_i(t) = e_i \delta(t)$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [26]. ■

Por fim, são a seguir estabelecidas relações entre as normas de sistemas e suas representações na forma espaço de estados. São inicialmente apresentadas relações envolvendo equações matriciais.

**Definição A.60 (Gramianos de Controlabilidade e de Observabilidade)** *Seja um sistema dinâmico  $H_{cl}$  dado por:*

$$H_{cl} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (\text{A.60})$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $z \in \mathbb{R}^q$ . Os gramianos de controlabilidade,  $L_c$ , e de observabilidade,  $L_o$ , desse sistema são as matrizes que satisfazem a:

$$\begin{aligned} AL_c + L_c A' + BB' &= 0 \\ A' L_o + L_o A + C' C &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

□

**Teorema A.6** *Seja um sistema dinâmico  $H_{cl}$  dado por:*

$$H_{cl} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (\text{A.62})$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $z \in \mathbb{R}^q$ . A norma  $\mathcal{H}_2$  desse sistema é dada por:

$$\|H_{cl}\|_2^2 = \text{tr}(CL_c C') = \text{tr}(B' L_o B) \quad (\text{A.63})$$

sendo as matrizes  $L_o$  e  $L_c$  respectivamente os gramianos de observabilidade e de controlabilidade do sistema.

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [26].

■

**Teorema A.7** *Seja um sistema dinâmico  $H_{cl}$  dado por:*

$$H_{cl} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (\text{A.64})$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $z \in \mathbb{R}^q$ . Seja  $\gamma > 0$  dado e assumamos que  $\varsigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ , sendo que  $\varsigma(\cdot)$  denota o conjunto dos autovalores (espectro) da matriz argumento. Tem-se então que, se o par  $(C, A)$  for observável, são equivalentes as afirmações:

- i.  $\|H_{cl}\|_\infty < \gamma$
- ii. existe  $P = P' > 0$  tal que:

$$PA + A'P + C'C + \gamma^{-2}PBB'P = 0 \quad (\text{A.65})$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [26].

■

Tanto para o desenvolvimento de algoritmos de busca de soluções baseados em otimização quanto para o tratamento de sistemas com incertezas paramétricas, é conveniente estabelecer critérios baseados em desigualdades matriciais, ao invés de igualdades. Isso leva à determinação apenas de limitantes superiores para as normas, não sendo mais possível a determinação de valores exatos para essas normas. As desigualdades imediatamente decorrentes das igualdades acima são apresentadas a seguir.

**Teorema A.8** *Seja um sistema dinâmico  $H_{cl}$  dado por:*

$$H_{cl} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (\text{A.66})$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $z \in \mathbb{R}^q$ . A norma  $\mathcal{H}_2$  desse sistema é dada por:

$$\begin{aligned} \|H_{cl}\|_2^2 &\leq \text{tr}(CPC') \\ \|H_{cl}\|_2^2 &\leq \text{tr}(B'WB) \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

sendo  $P$  e  $W$  quaisquer matrizes satisfazendo:

$$\begin{aligned} P &= P' > 0 \\ AP + PA' + BB' &\leq 0 \\ W &= W' > 0 \\ A'W + WA + C'C &\leq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [84].

■

**Teorema A.9** *Seja um sistema dinâmico  $H_{cl}$  dado por:*

$$H_{cl} : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bw \\ z = Cx \end{cases} \quad (\text{A.69})$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $z \in \mathbb{R}^q$ . Seja  $\gamma > 0$ . Tem-se então que, se o par  $(C, A)$  for observável, são equivalentes as afirmações:

- i.  $\|H_{cl}\|_{\infty} < \gamma$  e  $\varsigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ ,
- ii. existe  $P = P' > 0$  tal que:

$$PA + A'P + C'C + \gamma^{-2}PBB'P \leq 0 \quad (\text{A.70})$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [84].

■

NOTA A.10 A generalização do cálculo das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_{\infty}$  para o caso de sistemas dinâmicos incertos com incertezas politópicas pode ser encontrada na referência [84], baseadas em desigualdades matriciais lineares. Para maiores detalhes a respeito de relações envolvendo normas de sistemas e inequações matriciais, recomenda-se a consulta a tal referência bem como às referências lá citadas.

◇

### A.5.3 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

Nesta subseção é definida a estabilidade de sistemas dinâmicos, sendo a seguir colecionados alguns resultados que se constituem em critérios para determinação da estabilidade.

**Definição A.61 (Estabilidade e Estabilidade Assintótica)** *Um sistema dinâmico representado por (A.41) é dito ser estável se o mapeamento dado por:*

$$(\mathcal{X}, \mathbf{0}) \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{X} \quad (\text{A.71})$$

definir sinais  $x(t)$  tais que:

$$\|x(t)\|_{\infty} < \infty \quad (\text{A.72})$$

Se, adicionalmente, tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0} \quad (\text{A.73})$$

então o sistema é dito assintoticamente estável.

□

**Teorema A.10** *Um sistema dinâmico é assintoticamente estável se e somente se o operador definido por sua representação convolucional for  $\mathcal{L}_p$ -estável para todo  $p \in [1, \infty]$ .*

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver [122].

■

O teorema a seguir é um dos resultados mais antigos concernentes à estabilidade de sistemas (aplicado ao caso particular de sistemas lineares): a estabilidade pelo *método indireto Lyapunov*. Tal resultado será extensivamente empregado no curso deste trabalho.

**Teorema A.11 (Estabilidade de Lyapunov)** *Seja o sistema dinâmico dado por:*

$$\dot{x} = Ax \tag{A.74}$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ . *Esse sistema é estável, isto é:*

$$\varsigma(A) \subset \mathbb{C}_- \tag{A.75}$$

se e somente se existem  $M = M' > 0$  e  $N = N' > 0$  tais que:

$$A'M + MA = -N \tag{A.76}$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Para uma prova desse teorema de Lyapunov, ver [19] ou [122].

■

Para tratar com a estabilidade de sistemas incertos, é necessário que haja testes passíveis de serem realizados sobre todo o conjunto  $\mathcal{P}$ , que garantam a estabilidade de cada instância de sistema pertencente ao conjunto. Um teste que será utilizado com frequência neste trabalho é o da *estabilidade quadrática*, baseado na estabilidade de Lyapunov.

**Definição A.62 (Estabilidade Quadrática)** *Seja um sistema dinâmico com representação de estados (A.42), com parâmetros incertos pertencentes ao conjunto  $\mathcal{P}$ , sendo esse conjunto um politopo ou um conjunto limitado em norma. O sistema dinâmico com tais incertezas é dito quadraticamente estável se existe uma matriz  $P = P' > \mathbf{0}$  tal que:*

$$PA + A'P < \mathbf{0} \quad \forall A \in \mathcal{P} \tag{A.77}$$

□

O *teorema do ganho pequeno* (ou *small gain theorem*), apresentado a seguir, é a base de grande parte das metodologias existentes de obtenção de robustez de controladores dentro do paradigma de “controle  $\mathcal{H}_\infty$ ”. Esse teorema relaciona o ganho  $\mathcal{L}_2$  de dois sistemas com a estabilidade do sistema composto pela conexão em malha fechada dos sistemas. Esse teorema será o mecanismo fundamental, utilizado neste trabalho, para assegurar a estabilidade de sistemas com incerteza limitada em norma.

**Teorema A.12 (Teorema do Ganho Pequeno)** *Seja um sistema dinâmico  $H \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ , abaixo representado em termos da transformada de Laplace da entrada e da saída:*

$$\psi(s) = H(s)\phi(s) \quad (\text{A.78})$$

*Assuma-se que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  desse sistema é dada por  $\|H(s)\|_\infty = \gamma$ . Considere-se a conexão em malha fechada dessa matriz de transferência com um sistema dinâmico  $\Delta \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ :*

$$\phi(s) = \Delta(s)\psi(s) \quad (\text{A.79})$$

*sendo que  $\Delta$  pertence à classe  $\mathcal{G}$  dos sistemas dinâmicos cuja norma  $\mathcal{H}_\infty$  é menor ou igual a um número  $\eta$ :*

$$\mathcal{G} : \{\Delta \mid \|\Delta\|_\infty \leq \eta\} \quad (\text{A.80})$$

*Nesse caso, essa conexão em malha fechada é estável para todo  $\Delta \in \mathcal{G}$  se e somente se  $\eta\gamma < 1$ , ou seja:*

$$(\mathbf{I} - H\Delta)^{-1} \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty \forall \Delta \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \eta < \gamma^{-1} \quad (\text{A.81})$$

□

DEMONSTRAÇÃO: Ver demonstração desse teorema em [140].

■

NOTA A.11 Na formulação acima apresentada, o teorema do ganho pequeno afirma a estabilidade de uma interconexão de dois sistemas desde que o produto de suas normas  $\mathcal{H}_\infty$  seja menor que 1. Isso equivale a que o produto dos ganhos  $\mathcal{L}_2$  desses sistemas seja menor que 1. Uma versão diferente do teorema do ganho pequeno, envolvendo ganhos  $\mathcal{L}_p$  dos sistemas, para  $p \geq 1$  genérico, é apresentada em [122]. Em virtude da estrutura das incertezas de sistema postuladas neste trabalho, a formulação apresentada acima será suficiente no presente contexto.

◇

## A.6 Sistemas Dinâmicos com Entrada de Controle e Saída Controlada

Define-se agora um sistema dinâmico com uma caracterização especial dos sinais de entrada e de saída que possibilita a síntese de controladores, o *sistema dinâmico com entrada de controle e saída controlada*. De maneira mais concisa, tais sistemas serão simplesmente denominados, na maior parte deste trabalho, *sistemas dinâmicos*, sendo que o contexto irá deixar clara a distinção em relação ao conceito de sistemas dinâmicos anteriormente estabelecido. Nesta seção, tais sistemas serão referenciados pela sigla SDECSC.

SDECSCs são sistemas dinâmicos nos quais é possível medir certas variáveis e, a partir dessas medidas, sintetizar sinais que serão injetados em entradas (ditas entradas de controle). Dessa forma, é possível intervir na evolução temporal dos sinais de um SDECSC, de maneira a aproximá-los de sinais desejados (ditos de referência), ainda minimizando os desvios causados por sinais injetados em outras entradas (ditas entradas de perturbação). O objeto de estudo do presente trabalho é precisamente o controle de SDECSCs (para o caso particular de sinais de referência identicamente nulos, ou seja, problemas de regulação).

**Definição A.63 (Sistema Dinâmico com Entrada de Controle e Saída Controlada (SDECSC))** *Sejam  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  espaços vetoriais lineares, tais que seja possível definir um sistema dinâmico  $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  relacionando o espaço  $\mathcal{Z}$  ao espaço  $\mathcal{U}$ . O sistema dinâmico  $\Sigma$  que será aqui estudado é definido pela tripla de mapeamentos  $(\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{M})$  tais que:*

$$\Sigma : \begin{cases} (\mathcal{X}, (\mathcal{U}, \mathcal{W})) \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{X} \\ (\mathcal{X}, \mathcal{U}) \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{Y} \\ (\mathcal{X}, \mathcal{W}) \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathcal{Z} \end{cases} \quad (\text{A.82})$$

*O espaços acima são denominados:*

- $\mathcal{X}$  - espaço de estados,
- $\mathcal{U}$  - espaço de entradas de controle,
- $\mathcal{W}$  - espaço de entradas de perturbação,
- $\mathcal{Y}$  - espaço de saídas controladas,
- $\mathcal{Z}$  - espaço de saídas medidas.

*Os espaços vetoriais lineares  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  contêm, respectivamente, os vetores  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $u(t)$  e  $w(t)$ . O sistema  $\Sigma$  assim definido é denominado sistema dinâmico com entrada de controle e saída controlada.*

□

Neste trabalho serão considerados SDECSCs descritos por conjuntos finitos de equações diferenciais ordinárias lineares com parâmetros constantes. A forma geral da equação do SDECSC é descrita na forma de espaço de estados por:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ z(t) = Gx(t) + Fw(t) \\ x(0) = x_o \end{cases} \quad (\text{A.83})$$

As matrizes do sistema são em geral incertas, sendo tal incerteza modelada por:

$$(A, B, C, D, E, F, G) \in \mathcal{P} \quad (\text{A.84})$$

Em particular, serão estudadas neste trabalho incertezas dos tipos politópica e limitada em norma.

**Definição A.64 (Soluções de  $\Sigma$ )** *Seja o sistema  $\Sigma$  conforme definido em (A.83). Defina-se o conjunto de soluções do sistema  $\Sigma$  como sendo o conjunto  $\Xi(\Sigma, \Omega, x_o)$  dos pares de sinais  $(y, u) \in \mathcal{F}^m \times \mathcal{F}^p$  que satisfazem o sistema  $\Sigma$  para algum  $w(t) \in \Omega$ , dado  $x_o \in \mathbb{R}^n$ .*

□

### A.6.1 Estabilização de Sistemas Dinâmicos

Um objetivo intrínseco ao controlador a ser estudado neste trabalho (bem como à maioria dos controladores) é o de garantir que o sistema em malha fechada seja estável, ainda que o sistema dinâmico não controlado seja instável. A possibilidade de se atingir tal objetivo é definida a seguir como a propriedade de *estabilizabilidade* de um SDECSC.

**Definição A.65 (Estabilizabilidade)** *Um SDECSC do tipo definido por (A.83) é dito estabilizável se existe um sinal  $u(t) = f(x(t))$  tal que a equação*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + Bf(x(t)) \quad (\text{A.85})$$

defina um sistema estável.

□

Para o caso de sistemas incertos, adota-se um critério mais restrito de estabilizabilidade (apenas suficiente), a *estabilizabilidade quadrática*. Tal critério, definido a seguir, viabiliza o projeto de controladores por meio de métodos simples.

**Definição A.66 (Estabilizabilidade quadrática)** *Um sistema dinâmico do tipo definido por (A.83) com incertezas de modelo pertencentes ao conjunto  $\mathcal{P}$  conforme definido por (A.84) é dito ser quadraticamente estabilizável se existe um sinal  $u(t)$  dado por:*

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c x(t) \\ u(t) &= C_c z(t) + D_c x(t) \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

tal que o sistema dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_c & BC_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.87})$$

seja quadraticamente estável.

□

Outro resultado fornece um controlador tipo ganhos estáticos que estabiliza um sistema linear, mantendo a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da malha fechada abaixo de determinado limiar  $\gamma$ . A solução do problema é formulada em termos de uma inequação matricial. Esse critério, utilizado em conjunto com o *teorema do ganho pequeno*, possibilita a síntese de controladores estabilizantes para sistemas com incertezas limitadas em norma. As equações de síntese do controlador são fornecidas no teorema a seguir para sistemas colocados em uma forma normalizada, para simplificar a apresentação.

**Teorema A.13** *Seja um sistema dinâmico  $H$  dado por:*

$$H : \begin{cases} \dot{x} = Ax + B_2 u + B_1 w \\ z = Cx + Du \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

em que  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $w \in \mathbb{R}^r$  e  $z \in \mathbb{R}^q$ . Assumam-se as hipóteses:

$$D'D = I \quad C'D = 0 \quad (\text{A.89})$$

Seja ainda o conjunto  $\mathcal{K}$  definido como:

$$\mathcal{K} : \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \varsigma(A + B_2 K) \subset \mathbb{C}_-\} \quad (\text{A.90})$$

Seja  $\gamma > 0$  dado. Assumindo que  $(A, B_2)$  é estabilizável e  $(A, C)$  é observável, existe  $K \in \mathcal{K}$  tal que  $\|H\|_\infty \leq \gamma$  se e somente se existe  $W = W' > 0$  tal que:

$$AW + WA' + WC'CW + \gamma^{-2}B_1B_1' - B_2B_2' \leq 0 \quad (\text{A.91})$$

Nesse caso, a matriz  $K$  dada por:

$$K = -B_2'W^{-1} \quad (\text{A.92})$$

é uma solução do problema. □

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [99]. ■

## A.7 Métodos Numéricos e Otimização

Todo o maquinário desenvolvido neste trabalho tanto para análise quanto para síntese de sistemas é baseado em duas ferramentas:

- i. a *fatoração QR* (é possível utilizar sua variante “rank revealing”);
- ii. a otimização de critérios lineares com restrições do tipo “inequações matriciais lineares” (abreviadamente *LMI's*, do inglês “Linear Matrix Inequalities”).

Tais ferramentas possuem em comum o fato de já terem sido bem estudadas, sob os pontos de vista de estabilidade numérica e complexidade computacional. Hoje existem disponíveis rotinas computacionais bastante robustas que permitem a determinação de soluções confiáveis para problemas formulados em termos dos problemas elementares acima.

### A.7.1 Fatoração QR

A definição a seguir fornece uma descrição operacional de uma implementação computacional da *fatoração QR*, conforme será utilizada neste trabalho. Deve-se notar que seriam possíveis descrições operacionais diferentes, tema que não será abordado aqui.

**Definição A.67 (Fatoração QR)** *Seja uma matriz  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Defina-se uma fatoração QR da matriz  $X$  como o par de matrizes  $Q$  e  $R$  tal que:*

$$\begin{aligned} X &= QR \\ Q'Q &= I \\ R_{ij} &= 0 \quad \forall i > j \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

$$R \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

□

Postula-se aqui a existência de algoritmos para execução da fatoração QR com as seguintes características:

- i. estabilidade numérica - isso significa que uma perturbação  $\mathcal{O}(\epsilon)$  (ou seja, da ordem de grandeza de um parâmetro  $\epsilon$  próximo de zero) na matriz  $X$  causa uma perturbação  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  nas matrizes  $Q$  e  $R$ .
- ii. complexidade polinomial - tal propriedade significa que o tempo de processamento do algoritmo de decomposição QR para uma matriz  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é limitado superiormente por um polinômio na variável  $k = nm$ .

Na prática, não seria necessária a premissa de complexidade computacional, mas apenas de factibilidade computacional para todos os problemas até determinada dimensão, que seria a máxima dimensão de interesse. O requisito acima estabelecido de estabilidade numérica também poderia ser um pouco relaxado, sem prejuízo da aplicabilidade do algoritmo aos propósitos deste trabalho.

Discussões acerca das propriedades acima para implementações diversas do algoritmo de decomposição QR podem ser encontradas nas referências [16, 17, 30].

### A.7.2 Inequações Matriciais Lineares

Diversas especificações de desempenho e robustez em sistemas dinâmicos podem ser descritas em termos de *inequações matriciais lineares*, ou LMI's. Uma coletânea de resultados dessa natureza pode ser encontrada em [11]. A seguir define-se o conceito de *inequação matricial linear*.

**Definição A.68 (Inequação Matricial Linear)** *Sejam dois conjuntos de variáveis matriciais  $X_1, \dots, X_n$  e  $Y_1, \dots, Y_m$  e três conjuntos de matrizes constantes  $A_1, \dots, A_n$ ,  $B_1, \dots, B_n$  e  $C_0, \dots, C_m$ . Assuma-se que  $Y_i = Y_i'$  e que  $C_0 = C_0'$ . Uma inequação matricial linear (LMI) é definida como uma inequação afim nas variáveis e com termos simétricos:*

$$C_0 + \sum_{i=1}^m C_i Y_i C_i' + \sum_{j=1}^n (A_j X_j B_j + B_j' X_j' A_j') \leq 0 \quad (\text{A.94})$$

Uma LMI nas variáveis  $X$  e  $Y$  pode ser representada sinteticamente por:

$$P(X, Y) \leq 0 \quad (\text{A.95})$$

A desigualdade em uma LMI pode ser tanto estrita quanto não estrita. □

Um teorema de grande importância estabelece uma relação de equivalência entre determinadas inequações quadráticas<sup>7</sup> e determinadas inequações matriciais lineares. Para a apresentação desse teorema, faz-se necessário inicialmente definir o conceito de *inversa de Moore-Penrose* de matrizes reais quadradas.

<sup>7</sup>A classe das inequações quadráticas a que tal resultado se aplica corresponde às inequações quadráticas que definem conjuntos factíveis convexos.

**Definição A.69 (Inversa de Moore-Penrose)** *Seja uma matriz  $A$  quadrada com coeficientes reais. Sua inversa de Moore-Penrose é definida como a única matriz  $X$  que soluciona o conjunto de equações:*

$$\begin{aligned} AXA &= A \\ XAX &= X \\ (AX)' &= AX \\ (XA)' &= XA \end{aligned} \tag{A.96}$$

Adota-se a notação  $A^+$  para denotar a inversa de Moore-Penrose da matriz quadrada  $A$ . □

Com essa definição, apresenta-se a seguir o teorema que estabelece uma equivalência entre restrições quadráticas e restrições lineares, incluindo restrições não estritas.

**Teorema A.14 (Complemento de Schur)** *Sejam as matrizes  $Q(x) = Q'(x)$ ,  $R(x) = R'(x)$  e  $S(x)$ , todas dependendo de maneira afim da variável  $x$ . Então:*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S'(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{A.97}$$

se e somente se for válido pelo menos um dos pares de desigualdades (i) e (ii) abaixo definidos:

$$(i) \begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S'(x) > 0 \end{cases} \tag{A.98}$$

$$(ii) \begin{cases} Q(x) > 0 \\ R(x) - S'(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0 \end{cases} \tag{A.99}$$

Tem-se ainda que:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S'(x) & R(x) \end{bmatrix} \geq 0 \tag{A.100}$$

se e somente se for válido pelo menos um dentre os conjuntos de condições (iii) e (iv) abaixo definidos:

$$(iii) \begin{cases} R(x) \geq 0 \\ R(x)R^+(x)S'(x) = S(x) \\ Q(x) - S(x)R^+(x)S'(x) \geq 0 \end{cases} \tag{A.101}$$

$$(iv) \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ Q(x)Q^+(x)S(x) = S'(x) \\ R(x) - S'(x)Q^+(x)S(x) \geq 0 \end{cases} \tag{A.102}$$

Essas relações de equivalência são denominadas complementos de Schur. □

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [3].

■

NOTA A.12 Um histórico do surgimento e desenvolvimento dos *complementos de Schur* é apresentado na referência [15]. Discute-se ali o surgimento de tal relação no trabalho de Sylvester, em meados do século XIX, sua formalização no trabalho de Schur no início do século XX, e sua forma atual, envolvendo pseudo-inversas e matrizes semi-definidas (e não apenas estritamente definidas), apresentada pela primeira vez na referência [3].

◇

Com a equivalência acima estabelecida, problemas de otimização com restrições e/ou funcionais de custo quadráticos convexos podem ser mapeados em problemas de otimização com restrições LMI's e funcionais de custo lineares. Isso possibilita sua resolução em tempo polinomial com convergência global garantida através de algoritmos de pontos interiores, assunto que será discutido na próxima subseção.

### A.7.3 Otimização com Restrições LMI

Nesta subseção definem-se os problemas de *factibilidade*, de *minimização de funcional linear*, e de *minimização de autovalor generalizado*, todos com variável matricial e restrições do tipo LMI's.

Nas definições a seguir assume-se a existência de duas variáveis matriciais,  $X$  e  $Y$ . Tal premissa tem apenas o objetivo de simplificar a notação. A extensão das definições para o caso de um número qualquer de variáveis matriciais é imediata.

**Definição A.70 (Problema de Factibilidade LMI's)** Dado um conjunto de LMI's nas variáveis matriciais  $X$  e  $Y$ :

$$P_i(X, Y) > 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, v \quad (\text{A.103})$$

define-se o problema de factibilidade associado a essas LMI's como o problema de determinar uma instância das variáveis  $X$  e  $Y$  que satisfaça simultaneamente a todas as LMI's.

□

**Definição A.71 (Problema de Minimização de Funcional Linear)** Dado um conjunto de LMI's nas variáveis matriciais  $X$  e  $Y$ :

$$P_i(X, Y) > 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, v \quad (\text{A.104})$$

e dado um funcional linear  $f(X, Y)$ :

$$f(X, Y) = c_1 X c_2 + d_1 Y d_2 \quad (\text{A.105})$$

define-se o problema de minimização de funcional linear com restrições LMI's como o problema de determinação da instância  $X^*, Y^*$  das variáveis que, satisfazendo simultaneamente todas as LMI's, minimiza o funcional linear no conjunto factível:

$$(X^*, Y^*) = \arg \inf_{X, Y} f(X, Y) \quad (\text{A.106})$$

sujeito a:  $\{P_i(X, Y) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, v$

□

**Definição A.72 (Problema de Minimização de Autovalor Generalizado)** *Seja dado um conjunto de LMI's nas variáveis matriciais  $X$  e  $Y$ :*

$$P_i(X, Y) > 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, v \quad (\text{A.107})$$

*Seja ainda um conjunto de inequações do tipo:*

$$\begin{aligned} Q_i(X, Y) < \lambda R_i(X, Y) \quad ; \quad i = 1, \dots, z \\ R_i(X, Y) > 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, z \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

em que  $\lambda$  é uma variável escalar e as matrizes  $Q_i$  e  $R_i$  dependem de maneira afim das variáveis  $X$  e  $Y$ . O problema de minimização de autovalor generalizado associado a essas restrições é definido como:

$$\begin{aligned} (X^*, Y^*) = \arg_{X, Y} \inf_{X, Y, \lambda} \lambda \\ \text{sujeito a: } \begin{cases} P_i(X, Y) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, v \\ Q_i(X, Y) < \lambda R_i(X, Y) \quad \forall i = 1, \dots, z \\ R_i(X, Y) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, z \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

□

Os três problemas acima (principalmente os dois primeiros) serão os formatos nos quais serão colocados todos os problemas de otimização a serem formulados neste trabalho.

Os dois primeiros problemas acima são convexos, enquanto o terceiro é quase-convexo. Em todos os casos, há *algoritmos de pontos interiores* capazes de determinar com confiabilidade, em tempo polinomial, uma solução  $(X_*, Y_*)$  que se aproxima de uma distância  $\epsilon > 0$  da solução global do problema (ver referência [11]).

Exceto no caso do *problema de factibilidade*, não é possível atingir em tempo finito a solução exata do problema de otimização através de técnicas de pontos interiores. Dessa forma, para todos os fins práticos, substitui-se a determinação de um *ponto de ínfimo*  $(X^*, Y^*)$  de um conjunto pela determinação do *mínimo*  $(X_*, Y_*)$  de uma subsequência finita de pontos  $(X_i, Y_i)$ ,  $i \leq N$ , desde que tal subsequência pertença a uma *seqüência de Cauchy* que converge para  $(X^*, Y^*)$ . Adota-se um critério de convergência associado ao fato do mínimo da subsequência haver atingido uma distância menor que  $\epsilon$  em relação ao ótimo global, para algum  $\epsilon > 0$ .

Assim, ao longo de todo este trabalho, os problemas cuja solução analítica está associada à determinação de ínfimos serão substituídos por problemas de otimização associados à determinação de mínimos de subsequências finitas:

$$\begin{aligned} J^* = \inf J(x) \quad \Bigg| \quad J_* = \min J(x) \\ \text{sujeito a: } \{g(x) < 0\} \quad \Bigg| \quad \text{sujeito a: } \{g(x) < 0\} \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

$$|J^* - J_*| < \epsilon$$

Tal substituição será sistematicamente efetivada, ao longo deste trabalho, sem outra referência às razões aqui apresentadas para tal prática.

# Bibliografia

- [1] J. Ackermann. Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum. *Regelungstechnik und Prozessdatenverarbeitung*, 7:297–300, 1972.
- [2] J. Ackermann. *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters*. Springer-Verlag, 1993.
- [3] A. Albert. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses. *SIAM J. Appl. Math.*, 17(2):434–440, 1969.
- [4] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, 1989.
- [5] M. Athans. The role and use of the stochastic linear-quadratic-gaussian problem in control system design. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16(6):529–552, 1971.
- [6] S. V. Baida. Unit sliding mode control in continuous and discrete-time systems. *Int. J. Contr.*, 57(5):1125–1132, 1993.
- [7] A. E. Barabanov and A. A. Pervozvanskii. Optimization by frequency-uniform criteria ( $\mathcal{H}_\infty$  theory). *Autom. Rem. Contr., Pt. 2*, 53(9):1301–1327, 1992.
- [8] B. R. Barmish. Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 28:848–850, 1983.
- [9] B. R. Barmish, M. Corless, and G. Leitmann. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 21(2):246–255, 1983.
- [10] G. Bartolini, A. Ferrara, and E. Usai. Applications of a sub-optimal discontinuous control algorithm for uncertain second order systems. *Int. J. Rob. Nonlin. Contr.*, 7(4):299–319, 1997.
- [11] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [12] M. Bunge. *Teoria e Realidade (trad.)*. Série Debates 72. Ed. Perspectiva, 1974.
- [13] M. Bunge. *Epistemologia: Curso de Atualização (trad.)*. T. A. Queiroz Editor, 2a edition, 1987. (Epistemología: Curso de Actualización, Ed. Ariel S/A, Barcelona, 1980).
- [14] R. A. De Carlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews. Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. *Proc. IEEE*, 76(3):212–232, 1988.

- [15] D. Carlson. What are Schur complements, anyway? *Lin. Alg. Appl.*, 74:257–275, 1986.
- [16] T. F. Chan. Rank revealing QR factorizations. *Lin. Alg. Appl.*, 88/89:67–82, 1987.
- [17] T. F. Chan and P. C. Hansen. Some applications of the rank revealing QR factorization. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 13(3):727–741, 1992.
- [18] H. Chapellat, M. Dahleh, and S. P. Bhattacharyya. On robust nonlinear stability of interval control systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36(1):59–67, 1991.
- [19] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Harcourt Brace College Pub., 1984.
- [20] S. S. Chibeni. *Aspectos da Descrição Física da Realidade*. Coleção CLE - 21. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da UNICAMP, 1997.
- [21] F. H. Clarke and R. B. Vinter. Regularity properties of optimal controls. *SIAM J. Contr. Optim.*, 28(4):980–997, 1990.
- [22] B. R. Copeland and M. G. Safonov. A generalized eigenproblem solution for singular  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  problems. *Contr. Dyn. Sys.*, 50:331–394, 1992.
- [23] D. R. Copesey and D. J. N. Limebeer. Singular full information  $\mathcal{H}_\infty$  control. In *Proc. 35th IEEE Conf. Dec. Contr.*, pages 997–1002, Kobe - Japan, 1996.
- [24] M. Corless and G. Leitmann. Componentwise bounded controllers for robust exponential convergence. *J. Dyn. Sys. Meas. Contr., Trans. ASME*, 119:73–79, 1997.
- [25] M. J. Corless and G. Leitmann. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 26(5):1139–1144, 1981.
- [26] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis. State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 34(8):831–847, 1989.
- [27] C. Edwards and S. K. Spurgeon. Sliding mode output tracking with application to a multivariable high temperature furnace problem. *Int. J. Rob. Nonlin. Contr.*, 7(4):337–351, 1997.
- [28] F. Esfandiari and H. K. Khalil. Stability analysis of a continuous implementation of variable structure control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36(5):616–620, 1991.
- [29] A. F. Filippov. Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Mathematics Society Transactions*, 2-2:199–231, 1964.
- [30] L. V. Foster. Rank and null space calculations using matrix decomposition without column interchanges. *Lin. Alg. Appl.*, 74:47–71, 1986.
- [31] B. A. Francis. The optimal linear quadratic time-invariant regulator with cheap control. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 24(4):616–621, 1979.

- [32] B. A. Francis. *A Course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 88. Springer-Verlag, 1987.
- [33] B. A. Francis and J. C. Doyle. Linear control theory with an H-inf optimality criterion. *SIAM J. Contr. Opt.*, 25(4):815–844, 1987.
- [34] E. Fridman. Near-optimal  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear singularly perturbed systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 41(2):236–240, 1996.
- [35] P. Gahinet. Explicit controller formulas for LMI-based  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. *Automatica*, 32(7):1007–1014, 1996.
- [36] P. Gahinet and A. J. Laub. Reliable computation of  $\gamma_{opt}$  in singular  $\mathcal{H}_\infty$  control. In *Proc. IFAC Symp. Rob. Contr.*, pages 255–260, Rio de Janeiro - Brasil, 1994.
- [37] W. Gao and J. C. Hung. Variable structure control of nonlinear systems: a new approach. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 40(1):45–55, 1993.
- [38] P. B. Gapski and J. C. Geromel. A convex approach to the absolute stability problem. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 39(9):1929–1932, 1994.
- [39] T. Geerts. Continuity properties of the cheap control problem without stability. *Lin. Alg. Appl.*, 122/ 123/ 124:65–104, 1989.
- [40] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 29:381–402, 1991.
- [41] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza.  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Sys. Contr. Lett.*, 19:23–27, 1992.
- [42] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. A convex approach to the mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control problem for discrete- time uncertain systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 33(6):1816–1833, 1995.
- [43] K. Glover and J. C. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an  $\mathcal{H}_\infty$ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Sys. Contr. Lett.*, 11:167–172, 1988.
- [44] J. Grasman. On a class of optimal control problems with an almost cost-free solution. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 27(2):441–445, 1982.
- [45] S. Gutman. Uncertain dynamical systems — a Lyapunov min-max approach. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 24(3):437–443, 1979.
- [46] S. Gutman and Z. Palmor. Properties of min-max controllers in uncertain dynamical systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, 20(6):850–861, 1982.
- [47] W. M. Haddad, D. S. Bernstein, and D. Mustafa. Mixed-norm  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  regulation and estimation: the discrete-time case. *Sys. Contr. Lett.*, 16:235–247, 1991.
- [48] J. L. M. Hautus and L. M. Silverman. System structure and singular control. *Lin. Alg. Appl.*, 50:369–402, 1983.

- [49] B. S. Heck, S. V. Yallapragada, and M. K. H. Fan. Numerical methods to design the reaching phase of output feedback variable structure control. *Automatica*, 31(2):275–279, 1995.
- [50] C. V. Hollot and B. R. Barmish. Optimal quadratic stabilizability of uncertain linear systems. In *Proc. 18th Allerton Conf. Comm. Contr. Comp.*, Univ. Illinois, Monticello, USA, 1980.
- [51] I. M. Horowitz and U. Shaked. Superiority of transfer function over state-variable methods in linear time-invariant feedback system design. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 20(1):84–97, 1975.
- [52] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung. Variable structure control: a survey. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 40(1):2–22, 1993.
- [53] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general  $\mathcal{H}_\infty$  control problem: existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317, 1994.
- [54] R. E. O'Malley Jr. and A. Jameson. Singular perturbation and singular arcs - I. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 20:218–226, 1975.
- [55] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall Inc., 1980.
- [56] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME - J. Bas. Eng.*, pages 35–45, 1960.
- [57] R. E. Kalman. Canonical structure of linear dynamical systems. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, 48(4):596–600, 1962.
- [58] R. E. Kalman. When is a linear system optimal? *Trans. ASME, J. Basic Eng., ser. D*, 86(1):51–60, 1964.
- [59] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, and M. A. Rotea. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control for discrete-time systems via convex optimization. *Automatica*, 29(1):57–70, 1993.
- [60] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and M. A. Rotea.  $\mathcal{H}_\infty$  optimal control with state feedback. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 33(8):786–788, 1988.
- [61] P. P. Khargonekar and K. R. Poola. Uniformly optimal control of linear time-invariant plants: nonlinear time-varying controllers. *Sys. Contr. Lett.*, 6(5):303–308, 1986.
- [62] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control: a convex optimization approach. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36(7):824–837, 1991.
- [63] V. L. Kharitonov. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations (in Russian). *Differential Uravnen*, 14:2086–2088, 1978.
- [64] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Inc., 1978.

- [65] T. S. Kuhn. *A Estrutura das Revoluções Científicas (trad.)*. Série Debates 115. Ed. Perspectiva, 1992. (The Structure of Scientific Revolutions, The Univ. of Chicago Press, 1962).
- [66] H. Kwakernaak and R. Sivan. The maximally achievable accuracy of linear optimal regulators and linear optimal filters. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 17:79–86, 1972.
- [67] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Modern Signals and Systems*. Prentice-Hall, Inc., 1991.
- [68] C. M. Kwan. Sliding mode control of linear systems with mismatched uncertainties. *Automatica*, 31(2):303–307, 1995.
- [69] G. Leitmann. Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties. *J. Dyn. Sys. Meas. Contr., Trans. ASME*, 101(3), 1979.
- [70] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *Int. J. Contr.*, 58(6):1247–1263, 1993.
- [71] F. L. Lewis and V. L. Syrmos. *Optimal Control*. Prentice-Hall, 1995.
- [72] D. Luenberger. *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley, 1969.
- [73] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Trans. Mil. Electron.*, 8:74–80, 1964.
- [74] A. N. Lyapunov. The general problem of motion stability (translation of the original paper, in Russian, of 1893). *Int. J. Contr.*, 55:531–773, 1992.
- [75] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda.  $\mathcal{H}_\infty$  control for descriptor systems: a matrix inequalities approach. *Automatica*, 33(4):669–673, 1997.
- [76] A. M. Meilakhs. Design of stable control systems subject to parametric perturbation. *Automatika i Telemekhanika*, 10:5–16, 1978.
- [77] P. J. Moylan and J. B. Moore. Generalizations of singular optimal control theory. *Automatica*, 7:591–598, 1971.
- [78] E. Nobuyama and P. P. Khargonekar. A generalization in mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control with state feedback. *Sys. Contr. Lett.*, 25:289–293, 1995.
- [79] H. Nyquist. Regeneration theory. *Bell Systems Tech. J.*, 11:126–147, 1932.
- [80] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall Inc., 1970.
- [81] H. M. Oloomi and M. E. Sawan.  $\mathcal{H}_\infty$  model matching problem for singularly perturbed systems. *Automatica*, 32(3):369–377, 1996.
- [82] A. Packard, J. Doyle, and G. Balas. Linear multivariable robust control with a  $\mu$  perspective. *J. Dyn. Sys. Meas. Contr., Trans. ASME*, 115:426–438, 1993.
- [83] R. M. Palhares. Controle  $\mathcal{H}_\infty$  no Espaço de Variáveis de Estado. Master's thesis, FEE-UNICAMP, 1995.

- [84] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres.  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{H}_2$  guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *Int. J. Sys. Sci.*, 28(2):183–188, 1997.
- [85] Z. Pan and T. Basar.  $\mathcal{H}_\infty$  optimal control for singularly perturbed systems. Part I: perfect state measurements. *Automatica*, 29(2):401–423, 1993.
- [86] Z. Pan and T. Basar.  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control for singularly perturbed systems - Part II: imperfect state measurements. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39(2):280–299, 1994.
- [87] M. A. Pasumanskii and A. A. Pervosvanskii. Limiting accuracy of linear feedback systems and asymptotic behavior of the  $\mathcal{H}_2$  norm and  $\mathcal{H}_\infty$  norm. *Autom. Rem. Contr.*, 56(7):925–932, 1995.
- [88] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza.  $\mathcal{H}_\infty$  guaranteed cost control for uncertain continuous time linear systems. *Sys. Contr. Lett.*, 20:413–418, 1993.
- [89] M. A. Peters and P. A. Iglesias. Connections between minimum entropy control and mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control for time-varying systems. *Sys. Contr. Lett.*, 26:341–347, 1995.
- [90] M. A. Peters and A. A. Stoorvogel. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control in a stochastic framework. *Lin. Alg. Appl.*, 205-206:971–996, 1994.
- [91] I. R. Petersen. Disturbance attenuation and  $\mathcal{H}_\infty$  optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 32(5):427–429, 1987.
- [92] K. R. Popper. *A Lógica da Pesquisa Científica (trad.)*. Ed. Cultrix, 1974. (Logic der Forschung, 5a. ed. 1973; 1a. ed. 1934).
- [93] S. E. Rebiai and A. S. I. Zinober. Stabilization of uncertain distributed parameter systems. *Int. J. Contr.*, 57(5):1167–1175, 1993.
- [94] H. H. Rosenbrock. The zeros of a system. *Int. J. Contr.*, 18:297–299, 1971.
- [95] H. H. Rosenbrock. The future of control. *Automatica*, 13:389–392, 1977.
- [96] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., 2nd edition, 1991.
- [97] P. Sannuti. Direct singular perturbation analysis of high-gain and cheap control problems. *Automatica*, 19:41–51, 1983.
- [98] C. Scherer.  $\mathcal{H}_\infty$  control by state feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence. *Sys. Contr. Lett.*, 12:383–391, 1989.
- [99] C. Scherer.  $\mathcal{H}_\infty$  control by state-feedback and fast algorithms for the computation of optimal  $\mathcal{H}_\infty$  norms. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 35(10):1090–1099, 1990.
- [100] C. W. Scherer. The state-feedback  $\mathcal{H}_\infty$  problem at optimality. *Automatica*, 30(2):293–305, 1994.
- [101] C. W. Scherer. Multiobjective  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 40(6):1054–1062, 1995.
- [102] J. M. Schumacher. The role of the dissipation matrix in singular optimal control. *Sys. Contr. Lett.*, 2:262–266, 1983.

- [103] L. Smith, D. B. Ridgely, D. Walker, and J. Luke. Application of a mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  approach with a singular  $\mathcal{H}_\infty$  constraint. *Int. J. Sys. Sci.*, 28(1):55–64, 1997.
- [104] S. K. Spurgeon and R. Davies. A nonlinear control strategy for robust sliding mode performance in the presence of unmatched uncertainty. *Int. J. Contr.*, 57(5):1107–1123, 1993.
- [105] A. A. Stoorvogel. The singular  $\mathcal{H}_\infty$  control problem with dynamic measurement feedback. *SIAM J. Contr. Opt.*, 29(1):160–184, 1991.
- [106] A. A. Stoorvogel. The singular minimum entropy  $\mathcal{H}_\infty$  control problem. *Sys. Contr. Lett.*, 16:411–422, 1991.
- [107] A. A. Stoorvogel. The singular  $\mathcal{H}_2$  control problem. *Automatica*, 28(3):627–631, 1992.
- [108] A. A. Stoorvogel and H. L. Trentelman. The quadratic matrix inequality in singular  $\mathcal{H}_\infty$  control with state feedback. *SIAM J. Contr. Opt.*, 28(5):1190–1208, 1990.
- [109] A. A. Stoorvogel and H. L. Trentelman. The finite-horizon singular  $\mathcal{H}_\infty$  control problem with dynamic measurement feedback. *Lin. Alg. Appl.*, 187:113–161, 1993.
- [110] H. J. Sussmann and J. C. Willems. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. *IEEE Contr. Sys. Mag.*, 17(3):32–44, 1997.
- [111] M. Sznaier. An exact solution to general SISO mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  problems via convex optimization. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39(12):2511–2517, 1994.
- [112] R. H. C. Takahashi, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. Discrete-time singular observers:  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  optimality and unknown inputs. In *Proc. 36th IEEE Conf. Dec. Contr.*, pages 4810–4815, San Diego, USA, 1997.
- [113] R. H. C. Takahashi, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. Noise patterns in observed systems: from optimal filtering to singular observers. In *IFAC Symp. Rob. Contr. Des.*, pages 477–482, Budapest, Hungary, 1997.
- [114] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres. Sliding modes solution for the  $\mathcal{H}_2$  singular problem. In *Proc. 35th IEEE Conf. Dec. Contr.*, volume 1, pages 243–248, Kobe, Japan, 1996.
- [115] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres. Unknown input observers for uncertain systems: a unifying approach and enhancements. In *Proc. 35th IEEE Conf. Dec. Contr.*, pages 1483–1488, Kobe, Japan, 1996.
- [116] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres.  $\mathcal{H}_\infty$  design of switching surfaces for sliding modes control with non-matching disturbances. In *Proc. 36th IEEE Conf. Dec. Contr.*, pages 4046–4051, San Diego, USA, 1997.
- [117] H. L. Trentelman. Families of linear quadratic problems: continuity properties. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 32(4):323–329, 1987.
- [118] V. I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 22(2):212–222, 1977.

- [119] V. I. Utkin. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR Publishers, 1978.
- [120] V. I. Utkin. Variable structure systems: present and future. *Autom. Rem. Contr.*, 44:1005–1020, 1984.
- [121] V. I. Utkin and K. D. Yang. Methods for constructing discontinuity planes in multi-dimensional variable structure systems. *Autom. Rem. Contr.*, 39:1466–1470, 1978.
- [122] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Inc., 2nd edition, 1993.
- [123] B. L. Walcott and S. H. Zak. Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications. *IEEE Trans. Sys. Man Cyb.*, 18(1):88–104, 1988.
- [124] J. C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 16:621–634, 1971.
- [125] J. C. Willems. Almost invariant subspaces, an approach to high gain feedback design - part I: almost controlled invariant subspaces. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 26(1):235–252, 1981.
- [126] J. C. Willems, A. Kitapci, and L. M. Silverman. Singular optimal control: A geometric approach. *SIAM J. Contr. Opt.*, 24:323–337, 1986.
- [127] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control - a Geometric Approach*. Springer-Verlag, 1974.
- [128] H. Xu and K. Mizukami. Infinite-horizon differential games of singularly perturbed systems: a unified approach. *Automatica*, 33(2):273–276, 1997.
- [129] K. K. D. Young, P. V. Kokotovic, and V. I. Utkin. A singular perturbation analysis of high-gain feedback systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 22(6):931–938, 1977.
- [130] S. H. Zak, J. D. Brehove, and M. J. Corless. Control of uncertain systems with unmodeled actuator and sensor dynamics and incomplete state information. *IEEE Trans. Sys. Man. Cyb.*, 19(2):241–257, 1989.
- [131] G. Zames. Functional analysis applied to nonlinear feedback systems. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 10:392–404, 1963.
- [132] G. Zames. On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems: part I. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 11(2):228–238, 1966.
- [133] G. Zames. On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems: part II. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 11(3):465–447, 1966.
- [134] G. Zames. On the metric complexity of causal linear systems:  $\epsilon$ -entropy and  $\epsilon$ -dimension for continuous time. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 24(2):222–230, 1979.
- [135] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 26(2):301–320, 1981.

- [136] G. Zames. Input-output feedback stability and robustness, 1959-85. *IEEE Contr. Sys. Magaz.*, 16(3):61-66, 1996.
- [137] G. Zames and P. L. Falb. Stability conditions for systems with monotone and slope-restricted nonlinearities. *SIAM J. Control*, 6(1):89-108, 1968.
- [138] G. Zames and B. A. Francis. Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 28(5):585-601, 1983.
- [139] R. Zanasi. Sliding mode using discontinuous control algorithms of integral type. *Int. J. Contr.*, 57(5):1079-1099, 1993.
- [140] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, 1996.
- [141] K. Zhou and P. P. Khargonekar. An algebraic Riccati equation approach to  $\mathcal{H}_\infty$  optimization. *Sys. Contr. Lett.*, 11:85-91, 1988.