



Universidade Estadual de Campinas
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TELEMÁTICA

Filtragem Robusta: Uma Abordagem por Desigualdades Matriciais Lineares

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutorado em Engenharia Elétrica.

por

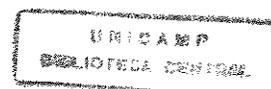
Reinaldo Martinez Palhares
Engenheiro Eletricista — EEE/UFG
Mestre em Engenharia Elétrica — FEEC/UNICAMP

Junho de 1998

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres** FEEC/UNICAMP

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por *Reinaldo Martinez Palhares* e aprovada pela Comissão Julgadora em 09 de junho de 1998.


Orientador



9816322

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	
	Unicamp
	P175f
V.º	Es.
TEMPO B.	34.702
PROG.	395/98
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	11/08/98
N.º CPD	

CM-00114997-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P175f

Palhares, Reinaldo Martinez

Filtragem robusta: uma abordagem por desigualdades matriciais lineares / Reinaldo Martinez Palhares. - - Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Kalman, Filtragem de. 2. Teoria de estimativa. 3. Otimização matemática. 4. Riccati, Equação de. 5. Sistemas lineares. I. Peres, Pedro Luis Dias. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Banca Examinadora

- Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres (Presidente)
Departamento de Telemática – FEEC / UNICAMP
- Prof. Dr. Carlos Emanuel de Souza
Departamento de Sistemas e Controle – LNCC/CNPq
- Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa
Departamento de Engenharia Eletrônica – EPUSP
- Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val
Departamento de Telemática – FEEC / UNICAMP
- Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira
Departamento de Telemática – FEEC / UNICAMP
- Prof. Dr. Basílio Ernesto de Almeida Milani (Suplente)
Departamento de Telemática – FEEC / UNICAMP
- Prof. Dr. Wagner Caradori do Amaral (Suplente)
Departamento de Engenharia de Computação e Automação Industrial – FEEC / UNICAMP

À Veruschka, intrépida alma gêmea e mulher fascinante; aos meus pais, que me ensinaram o pendor pela vida; e às novas chamadas de alegria: Flora, Felipe, Diego e Vinícius.

“Assim como no reino das estrelas são às vezes dois sóis que determinam a órbita de um planeta, e em alguns casos há sóis de cor diversa que iluminam um só planeta, ora com luz vermelha, ora com luz verde, logo irradiando simultaneamente e inundando-o de luz multicolorida: assim também nós, homens modernos, graças à complicada mecânica de nosso “firmamento”, estamos determinados por morais diferentes; nossas ações brilham alternativamente com cores distintas, raras vezes são unívocas - e com freqüência realizamos ações multicoloridas.”

Friedrich Nietzsche, Além do Bem e do Mal, Nossas Virtudes - [215]. Tradução Paulo C. de Souza - São Paulo: Companhia das Letras, 1992.

“Valeu a pena? Tudo vale a pena se a alma não é pequena.”

Fernando Pessoa, Mar Português.

Agradecimentos

A vida é um amontoado de experiências e sonhos “contraídos” ao longo de convivências multifacetadas. O trabalho acadêmico não poderia ser diferente.

Sou grato ao Prof. Pedro L. D. Peres, pelo apoio e rigor que me motivaram a transpor as minhas próprias limitações. Sou grato também aos mestres e amigos de todas as horas, Sérgio L. C. Oliveira e Ricardo H. C. Takahashi, pelos infindáveis debates, inúmeros desafios e conselhos muito valiosos. Ao Prof. Takahashi, em especial, por me apresentar a teoria de observadores em modos deslizantes. Agradeço, em particular, o Prof. José C. Geromel pelo grande interesse e importantes discussões. Dos amigos Maurício C. de Oliveira e Pedro B. Gapski tive a satisfação de receber apoio espiritual e marretadas, frutos de inúmeras altercações.

Sou grato também ao interesse e apoio dos amigos, Edvaldo Assunção, Ubirajara F. Moreno, Domingos C. W. Ramos, Jaudelice C. de Oliveira, Aurenice M. Oliveira, Ely C. de Paiva, José Reginaldo H. Carvalho, Juan Camino, Prof. Ivanil S. Bonatti, Prof. Basílio E. A. Milani, Prof. Paulo A. V. Ferreira e demais colegas e professores do departamento.

Não poderia deixar de agradecer o carinho dos meus irmãos Lana, Honorato, Demétrio e Antônio Eduardo, e aos amigos distantes, que “compartilharam” e estimularam esta aventura.

Resta expressar minha gratidão à FAPESP, por conceder esta bolsa de estudos (processo nº 95/00302-7).

Conteúdo

Resumo	1
Abstract	3
Notação e Definições	5
Lista de Definições	8
1 O Problema de Filtragem	11
1.1 Formulação do Problema	11
1.2 Perspectiva Histórica	13
1.3 Proposta e Descrição do Trabalho	16
2 Filtragem Ótima \mathcal{H}_∞	19
2.1 Introdução	19
2.2 Abordagem Clássica por Equação de Riccati	21
2.2.1 Sistemas Contínuos	21
2.2.2 Sistemas Discretos	22
2.3 Abordagem Convexa por \mathcal{LMIs}	23
2.3.1 Sistemas Contínuos	23
2.3.2 Sistemas Discretos	26
2.4 Exemplos	28
2.5 Conclusão	30
2.6 Notas e Referências	30
3 Filtragem Robusta \mathcal{H}_∞ - Sistemas Contínuos	33
3.1 Introdução	33
3.2 Incertezas do Tipo Limitado em Norma	35
3.2.1 Formulação por Equação de Riccati	35
3.2.2 Formulação por \mathcal{LMIs} acopladas	37
3.3 Incertezas do Tipo Politópica	41
3.3.1 Abordagem Convexa por \mathcal{LMIs}	41
3.4 Filtragem Robusta $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	49
3.5 Exemplo	53
3.6 Conclusão	54
3.7 Notas e Referências	59

4	Filtragem Robusta \mathcal{H}_∞ - Sistemas Discretos	67
4.1	Introdução	67
4.2	Incertezas do Tipo Limitado em Norma	68
4.2.1	Formulação por Equação de Riccati	68
4.2.2	Formulação por \mathcal{LMIs} acopladas	71
4.3	Incertezas do Tipo Politópica	75
4.3.1	Abordagem Convexa por \mathcal{LMIs}	75
4.4	Filtragem Robusta $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$	83
4.5	Exemplos	87
4.6	Conclusão	96
4.7	Notas e Referências	96
5	Filtragem Singular Sujeita a Entradas Desconhecidas	103
5.1	Introdução	103
5.2	Esquema de Decomposição	105
5.2.1	Separação dos Distúrbios <i>Arbitrários</i>	105
5.2.2	Decomposição Regular/Singular	107
5.2.3	Forma Canônica Regular/Singular	109
5.3	Projeto do Observador em Modos Deslizantes	114
5.3.1	Sistemas Contínuos	114
5.3.2	Sistemas Discretos	119
5.4	Esquema de Filtragem	120
5.5	Exemplo	121
5.6	Conclusão	125
5.7	Notas e Referências	128
6	Conclusões e Perspectivas	131
6.1	Propostas de Trabalhos Futuros	132
	Bibliografia	135
A	Desigualdades Matriciais Lineares	151
B	Análise de Robustez	155
B.1	Introdução	155
B.2	Custo Garantido \mathcal{H}_2	156
B.3	Custo Garantido \mathcal{H}_∞	156

Lista de Figuras

1.1	Configuração Geral do Problema de Filtragem.	11
1.2	Filtro (\mathcal{F}) conectado ao sistema (\mathcal{S}) (veja a página 6 para a definição de \star). . .	13
3.1	Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.108) conectado ao sistema incerto (3.106), considerando-se os vértices A_1, A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.1.	55
3.2	Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.109) conectado ao sistema incerto (3.106) e considerando os vértices A_1, A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.1.	56
3.3	Atenuação de ruídos pré-especificada $\gamma \times$ limitante superior $Tr(H)$ para a norma \mathcal{H}_2 - Exemplo 3.1.	57
3.4	Filtro (\mathcal{F}_c^g) conectado ao sistema incerto (\mathcal{S}_c), descrito em (3.1) e (3.112), onde $\xi_i(t) = \mathbf{0}, i = 1, \dots, \alpha$	60
3.5	Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.136) conectado ao sistema incerto (3.106), considerando-se os vértices A_1, A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.2.	64
3.6	Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.137) conectado ao sistema incerto (3.106), considerando-se os vértices A_1, A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.2.	65
4.1	Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (4.111) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente distribuídos no intervalo $[-1; 1]$ com $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.2.	89
4.2	Evolução do erro de filtragem para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (4.111) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente espaçados no intervalo $[-1; 1]$ - Exemplo 4.2.	90
4.3	Evolução do erro de filtragem para o filtro robusto misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (4.112) ($\gamma = 9$) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente espaçados no intervalo $[-1; 1]$ - Exemplo 4.2.	91
4.4	Diagrama de valores singulares para o filtro robusto misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (4.112) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente distribuídos no intervalo $[-1; 1]$ e $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.2.	92

4.5	Diagrama de valores singulares para os vértices $i = 1, \dots, 8$ considerando o filtro robusto (4.114) conectado ao sistema incerto (4.113) com $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.3.	94
4.6	Diagrama de valores singulares para os vértices $i = 1, \dots, 8$ considerando o filtro robusto (4.114) conectado ao sistema incerto (4.113) - Exemplo 4.3 (esta figura representa um <i>zoom</i> ao redor de $\omega = 0$ (rad/s) da figura 4.5).	95
4.7	Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (4.140) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente distribuídos no intervalo $[-1; 1]$ com $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.4.	101
4.8	Diagrama de valores singulares máximo para os vértices $i = 1, \dots, 8$ considerando o filtro robusto (4.141) conectado ao sistema incerto (4.113) - Exemplo 4.5 (esta figura representa um <i>zoom</i> ao redor de $\omega = 0$ (rad/s), pois o diagrama atenua para $\frac{\pi}{8} \leq \omega \leq \pi$).	102
5.1	Evolução dos estados do sistema com a entrada $g(t)$ - Exemplo 5.1.	126
5.2	Comportamento dos erros de estimativa de estados ($x(t) - \hat{x}(t)$) associados ao <i>núcleo regular</i> ($e_r(t)$) e à parte <i>singular</i> - $e_s(t)$ - Exemplo 5.1.	127

Lista de Tabelas

- 2.1 Valores ótimos de atenuação de ruídos para as abordagens por Riccati e \mathcal{LMI} e os respectivos ganhos constantes de filtragem associados - Exemplo 2.1. . . . 29
- 3.1 Alguns valores numéricos para o filtro misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ associado a atenuação de ruídos γ pré-especificada e o respectivo limitante da norma \mathcal{H}_2 - Exemplo 3.1. 58

Resumo

Este trabalho trata do problema de filtragem robusta para sistemas dinâmicos lineares contínuos e discretos no tempo. Mais precisamente, discute-se o problema de filtragem linear de ordem completa para sistemas incertos tendo como critério de desempenho a norma \mathcal{H}_∞ .

Primeiramente, são apresentados e discutidos resultados existentes na literatura baseados em equações do tipo Riccati e (no caso de incertezas do tipo limitada em norma) em Desigualdades Matriciais Lineares — \mathcal{LMIs} (do inglês, Linear Matrix Inequalities) acopladas.

A seguir, é proposta uma solução por \mathcal{LMIs} para sistemas com incertezas paramétricas do tipo politópicas. Essa solução, baseada em condições necessárias (no sentido de que o erro de filtragem é quadraticamente estável) e suficientes, permite que o filtro de custo garantido \mathcal{H}_∞ ótimo seja obtido a partir de procedimentos convexos de otimização, com convergência assegurada. A extensão da solução para o caso de filtragem robusta mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ é também apresentada.

Além disso, aborda-se o problema de filtragem singular (isto é, filtragem para sistemas nos quais o vetor de saídas não é inteiramente corrompido pelo sinal de ruídos) sujeito a entradas desconhecidas, sendo proposta uma estrutura para o estimador que conjuga a robustez do filtro \mathcal{H}_∞ com propriedades padrão de observadores com entradas desconhecidas.

Abstract

This work deals with the problem of robust filtering for both continuous and discrete-time dynamic linear systems. More precisely, the problem of full order linear filtering for uncertain systems with \mathcal{H}_∞ norm performance criterion is analyzed.

Firstly, the results from the literature based on Riccati like equations and (for norm bounded uncertainty) on coupled Linear Matrix Inequalities — \mathcal{LMIs} are presented and discussed.

Then, an \mathcal{LMIs} based solution is proposed for systems with polytope type parameter uncertainties. This solution, based on necessary (in the sense that the filtering error is quadratically stable) and sufficient conditions, allows the optimal \mathcal{H}_∞ guaranteed cost to be obtained through convex optimization procedures, with convergence assured. The extension to the case of robust mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering is also presented.

Moreover, the problem of singular filtering (that is, the filtering problem for systems in which the output is not completely corrupted by the noise signal) subject to unknown inputs is also addressed, and a solution based on a decomposition algorithm is proposed, in such a way that a particular structure is imposed to the filter, combining the robustness of the \mathcal{H}_∞ filter with unknown input observer standard properties.

Notação e Definições

- \mathbb{N} denota o conjunto dos números naturais
- \mathbb{R} (\mathbb{C}) denota o conjunto dos números reais (complexos)
- \mathbb{C} é particionado como $\mathbb{C}^- \cup \mathbb{C}^o \cup \mathbb{C}^+$, onde $\mathbb{C}^- = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) < 0\}$, $\mathbb{C}^o = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) = 0\}$ and $\mathbb{C}^+ = \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) > 0\}$
- \mathbb{R}^n é o espaço euclidiano real
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ ($\mathbb{C}^{m \times n}$) é o espaço normado real das matrizes reais (complexas) munido da norma espectral, $\|M\| = \sigma_{max}(M)$
- $\sigma_{max}(M)$ denota o valor singular máximo da matriz M
- \mathcal{B}_1 denota a bola aberta de raio unitário centrada na origem
- $\lambda(M)$ denota o espectro da matriz M
- \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão apropriada
- $\mathbf{0}$ é a matriz nula de dimensão apropriada
- $\mathfrak{S}(M)$ denota a imagem do operador representado por M
- $\mathcal{N}(M)$ denota o espaço nulo do operador representado por M
- M' denota a matriz transposta de M
- M^* denota o conjugado transposto da matriz M
- M^\perp denota a matriz ortogonal a M
- $M > \mathbf{0}$ ($M \geq \mathbf{0}$) é definida (semidefinida) positiva
- $M < \mathbf{0}$ ($M \leq \mathbf{0}$) é definida (semidefinida) negativa
- $\text{Tr}(M)$ representa o traço da matriz M
- $\mathcal{E}(\cdot)$ denota a esperança matemática
- $\text{diag}[m_1, \dots, m_n]$ denota uma matriz com os elementos (ou blocos) m_i , $i = 1, \dots, n$, na diagonal principal

- \sup_{ess} denota o supremo essencial
- $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$ representa todas as matrizes de transferência, racionais, com coeficientes reais, estáveis e próprias
- $\mathbb{R}\mathcal{H}_2$ representa todas as matrizes de transferência, racionais, com coeficientes reais, estáveis e estritamente próprias
- $\mathcal{L}_2[0; \infty)$ denota o espaço (de Hilbert) das funções de quadrado integrável a Lebesgue no intervalo $[0; \infty)$
- $\ell_2[0; \infty)$ denota o espaço (de Hilbert) das seqüências reais (complexas) de quadrado somável entre $[0; \infty)$
- $\mathcal{V}(\cdot)$ denota o conjunto dos vértices $i, i = 1, \dots, \ell$ de um polítopo convexo
- LIT de Linear e Invariante no Tempo
- \mathcal{LMIs} do inglês *Linear Matrix Inequalities*
- \mathcal{RQIs} de Restrições Quadráticas Integráveis
- $\partial x(t)$ denota $\dot{x}(t)$ e $x(t+1)$ para sistemas contínuos e discretos no tempo, respectivamente
- ν representa a variável de frequência s para sistemas contínuos ou o operador de deslocamento no tempo ζ para sistemas discretos
- \star representa um integrador para sistemas contínuos ou um atraso em tempo para sistemas discretos
- \mathcal{U} denota o espaço dos sinais Gaussianos de média nula ou os sinais $\mathcal{L}_2[0; \infty)$ ($\ell_2[0; \infty)$).
- $(\cdot)_{ij}^h$ representa uma matriz onde i e j denotam a linha e a coluna e o escalar h denota o passo do algoritmo
- $(\cdot)_i^h$ representa elementos de um vetor onde i denota a linha e h o passo do algoritmo
- χ_i denota o subespaço associado ao sub-vetor de estados x_i
- \oplus denota a soma direta de subespaços
- $\dim(v)$ denota a dimensão de um vetor v
- $M^\#$ denota qualquer inversa à esquerda da matriz M
- $sign$ denota a função sinal, isto é,

$$sign(m) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{se } m > 0 \\ 0, & \text{se } m = 0 \\ -1, & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

NOTA N.1 Usa-se de forma indistinta no texto a representação de uma matriz também para indicar a transformação linear definida pela matriz, isto é, dada M , matriz de ordem $m \times n$, representar-se-á também por M a transformação linear definida por $M(q) = Mq$, com $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{T}$, onde \mathbb{V} e \mathbb{T} são dois espaços vetoriais convenientes.

◇

NOTA N.2 Seja $M : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{T}$, onde \mathbb{V} e \mathbb{T} são dois espaços vetoriais convenientes. Dizer que M é sobrejetiva significa dizer que o subespaço $\mathfrak{S}(M)$ é igual ao \mathbb{T} , ou que $Mq = h$ tem solução $\forall h \in \mathbb{T}$.

◇

Definição D.1 (INVERSA GENERALIZADA DE MOORE-PENROSE). Se $M \in \mathbb{C}^{m \times n}$, então a inversa generalizada de M é definida como a única matriz $M^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times m}$ tal que

- a) $MM^\dagger M = M$,
- b) $M^\dagger MM^\dagger = M^\dagger$,
- c) $(MM^\dagger)^* = MM^\dagger$,
- d) $(M^\dagger M)^* = M^\dagger M$.

Se M é quadrada e não singular $M^\dagger = M^{-1}$.

□

Definição D.2 (ESPAÇOS DE HARDY \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞). O espaço \mathcal{H}_2 consiste das funções (matriciais) de quadrado integrável e analíticas em \mathbb{C}^+ e o espaço \mathcal{H}_∞ representa as funções (matriciais) limitadas e analíticas em \mathbb{C}^+ .

□

Definição D.3 (NORMA \mathcal{H}_2). Seja $H(\nu) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_2$. Define-se a norma \mathcal{H}_2 para sistemas contínuos no tempo como

$$\|H\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(H(j\omega)^* H(j\omega)) d\omega$$

e para sistemas discretos no tempo por

$$\|H\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}(H(e^{j\omega})^* H(e^{j\omega})) d\omega$$

□

Definição D.4 (NORMA \mathcal{H}_∞). Seja $H(\nu) \in \mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$. Define-se a norma \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos no tempo como

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{s \in \mathbb{C}^+} \{\sigma_{max}(H(s))\} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \text{ess} \{\sigma_{max}(H(j\omega))\}$$

e para sistemas discretos no tempo por

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in [-\pi, \pi]} \text{ess} \{\sigma_{max}(H(e^{j\omega}))\}$$

□

Definição D.5 (ATENUAÇÃO DE RUÍDOS γ). $\gamma \in \mathbb{R}$ é denominado um nível de atenuação de ruídos para um sistema representado pela matriz de transferência $H(\nu)$ se satisfaz a desigualdade $\|H\|_\infty \leq \gamma$, $\gamma > 0$ com $H(\nu) \in \mathbb{RH}_\infty$. □

Lista de Definições

- $(P_{\infty\gamma})$ define o Problema 1.1
- \mathcal{S} definido em (1.1)
- \mathcal{F} definido em (1.2)
- \mathcal{F}_K definido em (2.2)
- A_ψ definido em (2.3)
- B_ψ definido em (2.5)
- \mathcal{T}_ψ definido em (2.4)
- $H_{zw}^K(\nu)$ definido em (2.6)
- **(H-i)** apresentado na página 19
- **(H-ii)** apresentado na página 21
- **(H-iii)** apresentado na página 21
- \mathcal{K}_γ^c definido em (2.9)
- **(H-iv)** apresentado na página 22
- \mathcal{K}_γ^d definido em (2.12)
- $\mathcal{L}_\infty^c(\gamma)$ definido em (2.21)
- \mathcal{L}_∞^c definido em (2.22)

- C_γ^c definido em (2.23)
- S_c definido em (3.1)
- \mathcal{F}_c definido em (3.2)
- $(P_{\infty\gamma}^{rc})$ define o Problema 3.1
- (C-i) apresentado na página 33
- T_c definido em (3.3)
- (C-ii) apresentado na página 35
- \mathcal{P}_c definido em (3.33)
- H_{zw} definido em (3.37) para sistemas contínuos e em (4.37) para sistemas discretos
- H_{zy} definido em (3.68) para sistemas contínuos e em (4.93) para sistemas discretos
- \mathcal{J} definido em (3.71)
- \mathcal{J}_V definido em (3.72)
- \mathcal{SD}_c definido em (3.77)
- $(P_{2\infty\gamma}^{rc})$ define o Problema 3.2
- \mathcal{J}_2 definido em (3.100)
- \mathcal{J}_{2V} definido em (3.101)
- \mathcal{P}_c^g definido em (3.115)
- \mathcal{F}_c^g definido em (3.116)
- T_c^g definido em (3.117)
- \mathcal{J}^g definido em (3.133)
- \mathcal{J}_V^g definido em (3.134)
- S_d definido em (4.1)
- \mathcal{F}_d definido em (4.2)
- T_d definido em (4.3)
- (D-i) apresentado na página 67
- $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ define o Problema 4.1
- (D-ii) apresentado na página 69
- (D-iii) apresentado na página 69

- \mathcal{P}_d definido em (4.33)
- \mathcal{G} definido em (4.73)
- \mathcal{G}_V definido em (4.74)
- $(P_{2\infty\gamma}^{rd})$ define o Problema 4.2
- \mathcal{G}_2 definido em (4.101)
- \mathcal{G}_{2V} definido em (4.102)
- \mathcal{P}_d^g definido em (4.118)
- \mathcal{F}_d^g definido em (4.119)
- \mathcal{T}_d^g definido em (4.120)
- \mathcal{G}^g definido em (4.137)
- \mathcal{G}_V^g definido em (4.138)
- \mathcal{S}_u definido em (5.1)
- (U-i) apresentado na página 104
- (U-ii) apresentado na página 104
- distúrbio *limitado* definido na página 104
- distúrbio *arbitrário* definido na página 104

Capítulo 1

O Problema de Filtragem

1.1 Formulação do Problema

Considere o diagrama de blocos ilustrado na figura 1.1, onde o sinal de entrada $w \in \mathbb{R}^m$ denota o vetor de ruídos não-mensuráveis que inclui os ruídos que corrompem as medidas e os distúrbios de processo; $y \in \mathbb{R}^r$ denota o sinal de saídas medidas; $z \in \mathbb{R}^p$ é o sinal a ser estimado; $\hat{z} \in \mathbb{R}^p$ é a estimativa e $\tilde{z} \in \mathbb{R}^p$ é o sinal de saída do erro de estimativa, isto é, $\tilde{z} \triangleq z - \hat{z}$.

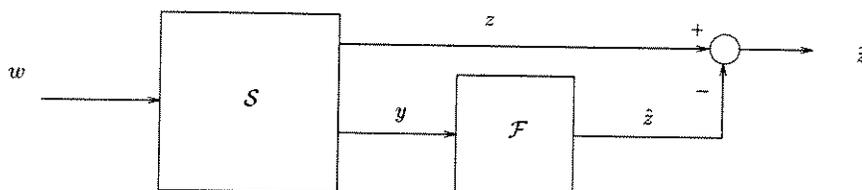


Figura 1.1: Configuração Geral do Problema de Filtragem.

Seja S um sistema linear e invariante no tempo (LIT) de dimensão finita com realização no espaço de estados dada por:

$$(S :) \quad \begin{cases} \partial x(t) = Ax(t) + Bw(t), & x(0) = x_0, \quad t \in [0; \infty) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ z(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

tal que $x \in \mathbb{R}^n$.

Sob este cenário, o problema de filtragem a ser abordado neste trabalho consiste em encontrar a estimativa \hat{z} do sinal z tal que, para algum critério de desempenho, como por exemplo a norma \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 , o erro de estimativa \tilde{z} seja minimizado. As estimativas

disponíveis são baseadas no conjunto de medidas obtidas a cada instante de tempo, no caso, $\{y(k) \mid k \leq t\}$. Nesse sentido, o objetivo é então projetar um filtro \mathcal{F} que é denotado pelo seguinte sistema linear e invariante no tempo de dimensão finita dado por:

$$(\mathcal{F} :) \quad \begin{cases} \partial \hat{x}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), & \hat{x}(0) = \mathbf{0} \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n_f}$ representa o estado estimado. A função de transferência da dinâmica do erro de filtragem do sinal w para \hat{z} com o filtro (\mathcal{F}) conectado ao sistema (\mathcal{S}) (veja figura 1.2) é denotada por $H_{\hat{z}w}(\nu)$ (veja a página 6 para a definição de ν).

A fim de caracterizar o erro de filtragem \hat{z} e o filtro \mathcal{F} , considerem-se as seguinte definições.

Definição 1.1 (ERRO DE FILTRAGEM LIMITADO). \hat{z} é denominado um erro de filtragem limitado se, para todo $x(0) \in \mathbb{R}^n$ existe $\rho > 0$, tal que $\|\hat{z}\| \leq \rho$, $t \geq 0$, sempre que $w(t)$ é limitado. \square

Definição 1.2 (FILTRO ADMISSÍVEL). \mathcal{F} é um filtro admissível se e somente se \mathcal{F} é assintoticamente estável e, dada qualquer condição inicial $x(0) \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{z}(t) = \mathbf{0}$, sempre que $w(t) = \mathbf{0}$. \square

O foco central deste trabalho consistirá em tratar o problema de filtragem, apresentado anteriormente, levando em conta o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ . Lançando mão das definições 1.1 e 1.2, denotar-se-á por problema geral de filtragem \mathcal{H}_∞ a formulação a seguir.

Problema 1.1 ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}$) (PROBLEMA SUB-ÓTIMO \mathcal{H}_∞). Assuma que o vetor de ruídos $w(t)$ seja limitado, i.e., $w(t) \in \mathcal{L}_2[0; \infty)$ ($\ell_2[0; \infty)$). Dada uma atenuação de ruídos $\gamma > 0$, encontre um filtro (\mathcal{F}) admissível, tal que \hat{z} seja um erro de filtragem limitado satisfazendo a relação

$$\|\hat{z}\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2, \quad x(0) = \mathbf{0}, \quad w(t) \neq \mathbf{0} \quad (1.3)$$

\triangle

Note que, pela formulação do problema, apenas condições iniciais nulas para o sistema serão consideradas, embora, pela definição de filtro admissível, o efeito de condições iniciais fixas mas não nulas sobre o erro de filtragem decaia assintoticamente a zero.

As várias abordagens a serem estudadas nesse trabalho levam em conta o enunciado do problema ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}$). Para o caso de incertezas nos parâmetros do modelo, que envolve o projeto de um filtro robusto que *garanta* um limitante $\|H_{\hat{z}w}\|_\infty < \gamma$, reformular-se-á convenientemente ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}$) em função das incertezas admissíveis para o sistema. Note ainda que será tratado apenas o caso de ordem completa, isto é, $n_f = n$.

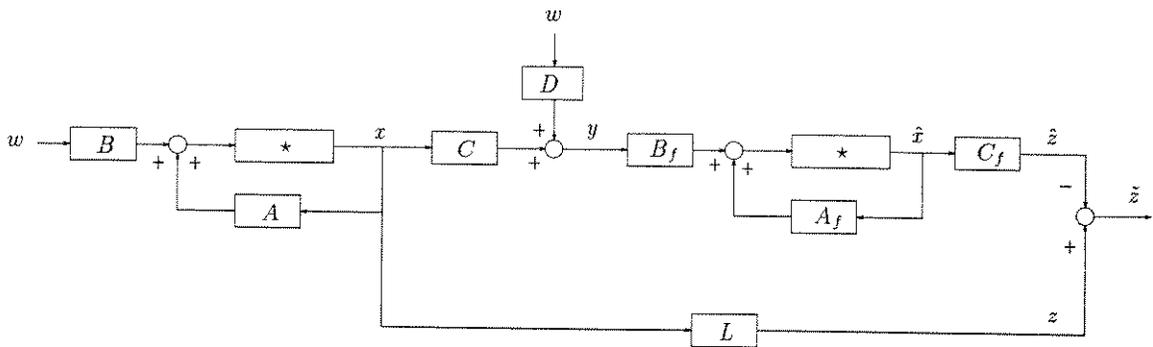


Figura 1.2: Filtro (\mathcal{F}) conectado ao sistema (\mathcal{S}) (veja a página 6 para a definição de \star).

1.2 Perspectiva Histórica

“As primeiras inspirações para o desenvolvimento da teoria de estimativa aparentemente foram motivadas pelos estudos astronômicos; mais especificamente, o estudo do movimento de cometas e planetas usando medidas obtidas através de telescópios. O movimento destes corpos celestiais pode ser completamente caracterizado por seis parâmetros, e o problema de estimativa considerado foi o de inferir os valores destes parâmetros a partir das medidas obtidas. Para resolver este problema relacionado com o movimento de revolução dos corpos celestiais, o método de mínimos quadráticos foi criado por um ‘jovem revolucionário’ de sua época, Karl Friedrich Gauss. Gauss tinha 18 anos de idade quando lançou mão do método de mínimos quadráticos em 1795. O conceito Gaussiano de estimativa por mínimos quadráticos forneceu a base para uma infinidade de técnicas e teorias de estimativa durante os mais de 170 anos seguintes, porém, provavelmente, nenhuma tão útil em termos atuais como o filtro de Kalman¹.”

H. W. Sorenson, [Sor70, pag. 63]

O problema de estimativa de estados, abordado pelo filtro de Kalman clássico [Kal60], leva em conta um modelo estocástico para o sinal de distúrbios entrando no sistema e corrompendo completamente o espaço de estados. O procedimento de estimativa consiste em projetar um ganho (“filtro”) variante no tempo, de forma a minimizar o erro quadrático médio em relação à estimativa. Uma retrospectiva histórica completa, sobre técnicas de estimativa que fundamentaram e estimularam o desenvolvimento teórico do filtro de Kalman em espaço de estados, é apresentada de forma elegante em [Sor70]. Uma extensão à abordagem do problema de estimativa proposto em [Kal60], considerando entradas determinísticas atuando sobre o sistema, foi introduzida por Luenberger em [Lue64]. Nesse trabalho, utilizando uma estrutura denominada observador, as entradas e saídas disponíveis do sistema são utilizadas para construir uma estimativa do vetor de estados do sistema sem o envolvimento de nenhum procedimento de otimização. A confrontação destas abordagens permite concluir que a estrutura do estimador proposto para o filtro ótimo em [Kal60, Teorema 3] precede ao observador proposto em [Lue64].

¹Este texto em português é uma tradução livre do autor desta tese.

Desde então, vários trabalhos têm abordado o problema de filtragem com base nos resultados introduzidos por Kalman como, por exemplo, pode ser visto no tutorial em teoria de filtragem e estimativa apresentado em [Rho71] (similarmente, o tutorial sobre o problema de observação por Luenberger [Lue71]) no fascículo especial sobre teoria de estimativa do *IEEE Transactions on Automatic Control* de 1971, volume 16, número 6. Além disso, outras importantes referências, ainda no contexto desses primeiros momentos, incluem: o problema de filtragem contínuo no tempo, isto é, o filtro de Kalman-Bucy [KB61], [Kai68] e trabalhos mostrando que o erro de estimativa ao usar-se um ganho constante ao invés de um ganho variante no tempo, quando dada uma covariância qualquer associada à condição inicial, aproxima-se de zero quando o horizonte de tempo considerado é infinito [Fri67], [SF69].

Nesse cenário, o problema de estimativa envolvendo procedimentos de otimização com critério do tipo norma \mathcal{H}_2 (em relação ao erro de filtragem) surge como consequência natural da teoria do filtro de Kalman, quando se supõe que o sinal de entrada possui propriedades estatísticas conhecidas; particularmente, um processo de ruído branco. Assim, a variância mínima do erro de filtragem pode ser avaliada como uma norma \mathcal{H}_2 . Na atualidade, vários trabalhos têm abordado características envolvendo a teoria de estimativa [GS97], [Baş91], [GM89], [GMS95], [MGG97], [HSK96a], [HSK96b], bem como o problema de filtragem \mathcal{H}_2 [Toi96], [XYS96], [ZDG96], [WG97], [PP98b], [PP97], [KRB96] [YS96], [Xi97].

Por outro lado, em muitas aplicações é comum a ausência de informações estatísticas suficientes sobre a densidade espectral de potência do sinal de distúrbios. Na verdade, em alguns casos o sinal de ruído pode não ser caracterizado como um processo estocástico, mas sim como um sinal determinístico de energia limitada [BCdN96]. Desta forma, surgem na teoria de filtragem, abordagens alternativas utilizando como critério a norma \mathcal{H}_∞ (importante índice de robustez, usado no projeto de controladores já há algum tempo).

Os primeiros trabalhos tratando do problema de filtragem \mathcal{H}_∞ envolveram técnicas no domínio da frequência, [GS90] (modelos polinomiais para a planta e os distúrbios), [Sha90], [Her89], [Gri96], [YHB96]. Mas, no entanto, destacam-se as várias abordagens desenvolvidas no espaço de estados envolvendo o estudo de condições necessárias e suficientes descritas em termos de equações do tipo Riccati [NK91], [ST92], [SY90], [DGF94], [YS91a], [TK96]. Particularmente, em [YS91b], o problema de filtragem \mathcal{H}_∞ é interpretado sob a seguinte óptica: o filtro procura estabelecer a melhor estimativa de $z(t)$ que minimize o critério \mathcal{H}_∞ , enquanto o *pior* sinal de distúrbios tenta impedir uma medida apropriada, maximizando o critério \mathcal{H}_∞ . Tal interpretação, isto é, um jogo de dois oponentes com soma zero, realça a característica “minimax” do problema de filtragem \mathcal{H}_∞ . Podem-se citar alguns trabalhos abordando o tema sob esta óptica [YS92b], [YS92a], [YS93], [ST92], [BB95]. Também nesta última estratégia, a equação de Riccati desempenha um papel central no projeto do filtro. O problema de filtragem \mathcal{H}_∞ tem sido abordado considerando ainda outras variações: filtros FIR (Finite Impulse Response) [KRY96]; sistemas periódicos [XdS93]; atrasos no sistema [NR97], [PSdS96]; sistemas não lineares [FS97], [BS96], [YCWB95]; condição inicial incerta [Ich95], [Ich96]; estudo da convergência da solução da equação diferencial de Riccati \mathcal{H}_∞ [BCdN97b] ou [BCdN97a]; sistemas baseados em dados amostrais [SNK93]; projeto do filtro \mathcal{H}_∞ para compor um controle baseado no observador [SN95]; filtragem mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (veja a seção 2.6). Além disso, o problema de filtragem ótima \mathcal{H}_∞ tem sido estudado através de formulações descritas em termos de \mathcal{LMZ} s: [PK97], [WG97], [GW96], [PP98b], [TPP97b], [PP97], [TPP97a], [KRB96], [KR92].

Apesar da reduzida sensibilidade do filtro \mathcal{H}_∞ frente a incertezas no sinal de ruídos, o

projeto realístico de um filtro deve levar em consideração também a presença de incertezas no modelo, que são inerentes aos sistemas físicos (erros de medidas, variações de parâmetros, tolerâncias de especificações, etc.). Com essas preocupações, surge o denominado problema de filtragem robusta (ou de custo garantido) que, desde o início, tem sido abordado basicamente por meio de duas equações do tipo Riccati parametrizadas por escalares positivos, considerando incertezas paramétricas do tipo limitada em norma. Dentro deste contexto, duas vertentes se delinearam: o projeto do filtro robusto de Kalman (ou de custo garantido \mathcal{H}_2) e o problema de filtragem de custo garantido \mathcal{H}_∞ .

Com relação ao problema robusto de filtragem \mathcal{H}_2 , inúmeros trabalhos na literatura têm tratado do tema tanto para sistemas contínuos como para sistemas discretos no tempo: [SdS94], [XdS95], [MSP96], [PM96], [SP97], [BCdN96], [PM94], [XS94], [PM91], [DK95]. Em [SdS94], [XdS95], [BCdN96] o filtro robusto é projetado de forma a minimizar um limitante superior para a covariância do erro de filtragem, isto é, para a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência associada ao erro de estimação. A conexão entre filtro robusto e o conceito de estimadores quadraticamente estáveis é introduzida em [PM91], discutindo o projeto de estimadores que garantam um limitante superior para a covariância [PM96], [PM94], [XS94], [XSdS94]. Em [SP97] é proposta uma estratégia para a construção de um estimador de custo garantido no caso em que parte das medidas não está disponível.

Entre os resultados com relação ao problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ caracterizados na literatura, destacam-se: para sistemas lineares contínuos e discretos no tempo (horizonte infinito e finito) [XdS95], [YDS94], [dS94], [MAV94], [XdSF91b]; projeto de um estimador \mathcal{H}_∞ com restrição sobre a variância (critério misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) [WGU97], [LS94]; entradas determinísticas no sistema incerto [dSSF95]; sistemas não lineares [XdSW96], [NF94], [SS97], [SSdS96], [dS94], [dSXW93]; filtro FIR robusto [KdSR96]; abordagem por teoria de jogos [TSdS94]; saltos Markovianos [dSF96b], [dSF96a]; sistemas lineares periódicos [XdS93], [XdSF91a]; medidas baseadas em dados amostrais [SdSX93].

Apenas bem mais recentemente é que o problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ começou a ser abordado por técnicas envolvendo \mathcal{LMIs} , motivadas principalmente por trabalhos em teoria de controle por realimentação de saída [GA94], [IS94], [AG95], [IS95], [Gah96], [CG96], [SGC97]. Seguindo a estratégia discutida em [Gah96], [GA94], Li e Fu em [LF95], [LF97] propuseram uma nova abordagem para o problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ , tanto para sistemas contínuos como discretos no tempo, e incertezas descritas como restrições quadráticas integráveis. Em [LF97], são apresentadas condições suficientes para o projeto do filtro robusto descritas em termos de duas \mathcal{LMIs} acopladas, isto é, não convexas.

Além disso, ao contrário do problema de custo garantido de controle \mathcal{H}_∞ com incertezas do tipo politópicas, isto é, pertencentes a domínios poliedrais convexos e amplamente discutidas na literatura [BPG89], [GPB91], [GPS92], [PGS93], [PGB93], [GPS93], [GPS94], [PGS94], [GPS95], [PP95b], [AG95], [PP95a], [PRP96], [RPP96], [PTP97], [POP98], o problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ e/ou \mathcal{H}_2 com incertezas do tipo politópicas não havia sido abordado na literatura até o momento. Concomitantemente aos resultados neste trabalho, Geromel e colegas têm abordado os problemas de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 com incertezas do tipo politópicas através de \mathcal{LMIs} em [Ger98], [GBG98], [GdO98].

Uma outra importante linha, que tem recebido atenção na teoria de filtragem, trata do caso de sistemas singulares (possivelmente incertos), isto é, sistemas com o vetor de saídas medidas parcialmente (ou completamente) isento de ruído. A resolução dos problemas de filtragem singular (incluindo o projeto de filtros de ordem reduzida) \mathcal{H}_2 e/ou \mathcal{H}_∞ , tem

sido abordada através de formulações derivadas de equações algébricas [HY96], [CB93], [XYS96], [BK94]; procedimentos de otimização em termos de \mathcal{LMIs} [GW97], [PK97], [WG97], [GW96], [PP98b], [PP97], [LF97], [Sha97], [PP98b], [PP98a], [PP98c]; e procedimentos geométricos [Sch85].

Particularmente, uma nova fronteira do problema de filtragem singular, que tem recebido pouca atenção, é o projeto de uma estrutura para o filtro para sistemas sujeitos a entradas desconhecidas, isto é, entradas arbitrárias atuando sobre direções específicas do espaço de estados.

Observadores sujeitos a entradas desconhecidas têm sido estudados há um certo tempo [TP96], [DU95] (modo deslizantes), [SGR95], [CYH94], [DZX94] [MGR94], [GS91], [KVR80], [Bha78], [WDD75]. Esta classe de observadores é projetada no sentido de poder desacoplar as entradas de natureza arbitrária que atuam sobre certas direções do espaço de estados.

Mais recentemente, alguns trabalhos têm explorado técnicas recursivas para o projeto de filtros de Kalman em sistemas sujeitos a entradas desconhecidas [HP98], [DZON95]. Particularmente, em [HZD96], o projeto do filtro sujeito a entradas desconhecidas em [DZX94] é estendido para o caso no qual as incertezas são aglutinadas em uma variável de erro que por sua vez é tratada como pertencente a um conjunto elipsoidal. Porém, o problema de filtragem singular, tratando critérios ótimos do tipo \mathcal{H}_2 e/ou \mathcal{H}_∞ com entradas arbitrárias atuando sobre o espaço de estados, praticamente não tem sido discutido na literatura.

1.3 Proposta e Descrição do Trabalho

A proposta deste trabalho é discutir e propor soluções para os seguintes problemas até o momento pouco estudados ou mesmo em aberto na literatura: (i) O problema de filtragem de custo garantido \mathcal{H}_∞ e misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ para sistemas com incertezas do tipo politópicas (abordagem por \mathcal{LMIs}) e (ii) o problema de filtragem singular sujeita a entradas desconhecidas combinando estratégias de observadores do tipo modos deslizantes e critérios do tipo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

O trabalho é dividido em três partes:

- A primeira parte, compreendendo o capítulo 2, aborda o problema de filtragem \mathcal{H}_∞ para sistemas precisamente conhecidos, contínuos e discretos no tempo. Condições de solubilidade do problema ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}$) são discutidas em termos da solubilidade de uma equação do tipo Riccati. Além disso, o estudo para sistemas precisamente conhecidos envolve o projeto de um filtro (\mathcal{F}) que satisfaça o problema ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}$) e garanta um limitante mínimo de atenuação de ruídos para a norma \mathcal{H}_∞ . Tal caracterização, denominada problema de filtragem ótima \mathcal{H}_∞ , é abordada através de procedimentos de otimização convexos descritos em termos de \mathcal{LMIs} [PP98b], [PP97]. Nesse capítulo discute-se ainda a ocorrência de altos ganhos de filtragem no caso contínuo, bem como o problema de filtragem singular. Dois exemplos e comentários sobre filtragem mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, métodos numéricos e propriedades de equações de Riccati e \mathcal{LMIs} finalizam o capítulo.

- A segunda parte do trabalho trata do problema de filtragem robusta com critério do tipo \mathcal{H}_∞ para sistemas incertos. O estudo deste problema para o caso de sistemas contínuos no tempo é apresentado no capítulo 3, enquanto no capítulo 4 discute-se a solução para sistemas discretos no tempo. Nos dois capítulos, apresenta-se uma pequena revisão das abordagens por equações de Riccati (basicamente propostas por de Souza e colegas, [XdS95], [dS94]

[XdSF91b], [XdSW96]) e por \mathcal{LMIs} acopladas ([LF97], [LF95]), considerando incertezas do tipo limitadas em norma.

Além disso, para sistemas com incertezas do tipo politópicas, propõe-se um novo projeto de um filtro robusto admissível que garanta erro de filtragem limitado e dinâmica do erro de filtragem quadraticamente estável para um nível pré-especificado de atenuação de ruídos. Tendo como ponto de partida as versões contínua e discreta do *Bounded Real Lemma*, e lançando mão de técnicas envolvendo \mathcal{LMIs} , amplamente exploradas na teoria de controle, o problema do custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ é formulado em termos de um procedimento convexo de otimização descrito por \mathcal{LMIs} . A mesma estratégia é também utilizada para abordar o problema do custo garantido de filtragem mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Além disso, são consideradas generalizações do projeto inicial, como, por exemplo, incertezas nas matrizes do sinal a ser estimado e o projeto de um filtro próprio. Vale chamar a atenção que tanto a forma quanto o desenvolvimento teórico dos capítulos 3 e 4 se assemelham muito, pois as formulações em termos de \mathcal{LMIs} , ao contrário da abordagem por equações de Riccati, envolvem as mesmas transformações de similaridades nos casos contínuo e discreto no tempo.

Esta nova resolução do problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ através de procedimentos convexos de otimização para o problema do custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ , com extensões para o problema misto de filtragem robusta $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ e restrições sobre a dinâmica do filtro, é explorada em [PP98a], [PP98c] e [PP98d].

- A terceira parte do trabalho, descrita no capítulo 5, é dedicada ao estudo do problema de filtragem singular sujeita a entradas desconhecidas atuando sobre o espaço de estados [TPP97b], [TPP97a], [TPP98]. Uma nova formulação para o projeto de uma estrutura para o filtro é apresentada, associando as características dos observadores sujeitos a entradas de natureza arbitrária e a robustez dos filtros \mathcal{H}_∞ e/ou \mathcal{H}_2 para certas classes de ruídos. Alguns exemplos são discutidos, e comentários sobre o projeto de observadores em modos deslizantes e o método de controle equivalente são apresentados.

O capítulo 6 apresenta as conclusões cabíveis, e os apêndices A e B discutem, respectivamente, complemento de Schur e cálculo de custos garantidos \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 [PTP97].

Capítulo 2

Filtragem Ótima \mathcal{H}_∞

2.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo do problema de filtragem \mathcal{H}_∞ sem incertezas paramétricas no modelo do sistema. Uma revisão abordando a síntese de uma estrutura para o filtro \mathcal{H}_∞ através da solvabilidade de equações algébricas do tipo Riccati ou desigualdades matriciais lineares (*LMIs*) é apresentada, tanto para sistemas contínuos como discretos no tempo. No projeto envolvendo *LMIs*, condições necessárias e suficientes são derivadas diretamente do chamado *Bounded Real Lemma*, por meio do complemento de Schur (veja Apêndice A).

Considere o seguinte sistema LIT dado por

$$(\mathcal{S} :) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), & x(0) = x_o, \quad t \in [0; \infty) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) \\ z(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saídas medidas, $w \in \mathbb{R}^m$ é vetor de sinal de ruído (incluindo ruídos de medida e processo) e $z \in \mathbb{R}^p$ é o sinal a ser estimado. Além disso, assuma a seguinte hipótese

(H-i) o par (A, C) é detectável.

Como discutido na seção 1.1, o problema de filtragem \mathcal{H}_∞ consiste em encontrar uma estimativa do sinal z tal que o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ seja minimizado com respeito ao erro de filtragem. Nesse sentido, o objetivo é projetar um filtro admissível² como em (1.2), descrito por

$$(\mathcal{F}_K :) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)), & \hat{x}(0) = \mathbf{0} \\ \hat{z}(t) = L\hat{x}(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $K \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é o ganho constante de filtragem a ser determinado. Além disso, a hipótese **(H-i)** assegura que existe K tal que

²Veja definição 1.2.

$$A_\psi \triangleq A - KC \quad (2.3)$$

verifique $\lambda(A_\psi) \in \mathbb{C}^-$. Note que a escolha de (\mathcal{F}_K) é sem perda de generalidade (veja [YS91a] para uma discussão a respeito) e, além disso, (\mathcal{F}_K) tem a estrutura padrão do filtro de Kalman-Luenberger.

Definindo-se o erro de estado como $\tilde{x}(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$, então a dinâmica do erro de filtragem $\tilde{z}(t)$ é dada por

$$(\mathcal{T}_\psi :) \quad \begin{cases} \partial \tilde{x}(t) = A_\psi \tilde{x}(t) + B_\psi w(t), & \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \\ \tilde{z}(t) = C_\psi \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

onde

$$B_\psi \triangleq B - KD, \quad C_\psi \triangleq L \quad (2.5)$$

e

$$H_{\tilde{z}w}^K(\nu) \triangleq C_\psi(\nu \mathbf{I} - A_\psi)^{-1} B_\psi \quad (2.6)$$

denota a matriz de transferência do sinal de ruído w para o erro de filtragem \tilde{z} .

Sob a óptica do problema geral de filtragem \mathcal{H}_∞ ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}$) (veja problema 1.1), a versão do problema ótimo consiste em obter o mínimo valor de atenuação de ruídos, denotado por γ^* , tal que

$$\inf_{\mathcal{F}_K} \|H_{\tilde{z}w}^K\|_\infty = \gamma^*$$

isto é, a norma \mathcal{H}_∞ é minimizada com respeito ao erro de filtragem. Note que sempre existe γ^* , mas pode não existir um ganho constante de filtragem K (ou um filtro admissível) que assegure (atinja) γ^* . De fato, para sistemas contínuos, pode ser necessária uma seqüência de ganhos constantes de filtragem (K_κ) com

$$\|L(s\mathbf{I} - A + K_\kappa C)^{-1}(B - K_\kappa D)\|_\infty \leq \gamma_\kappa, \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \gamma_\kappa \rightarrow \gamma^*, \quad \text{tal que} \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|K_\kappa\| \rightarrow \infty$$

A seqüência (K_κ) é denominada uma seqüência de altos ganhos. Um estudo completo sobre o tema no contexto de controle ótimo \mathcal{H}_∞ pode ser encontrado em [Sch89] e [Sch90]. Em [POP98], [Pal95] e [PK97] são apresentadas idéias a respeito de como aproximar γ^* tal que $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|K_\kappa\| < \infty$, $\gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^* + \epsilon$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, via procedimentos convexos de otimização.

2.2 Abordagem Clássica por Equação de Riccati

2.2.1 Sistemas Contínuos

O problema $(P_{\infty\gamma})$ tem sido abordado na literatura (veja, por exemplo, [NK91] e referências internas) por uma estratégia envolvendo a solvabilidade de uma equação do tipo Riccati. Antes, porém, considere o sistema dado em (2.1) e assuma que

(H-ii) D define uma transformação linear sobrejetiva.

(H-iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega\mathbf{I} & B \\ C & D \end{bmatrix}$ têm posto completo de linhas $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

A hipótese (H-iii) garante que o sistema não tem zeros invariantes sobre o eixo imaginário, enquanto que a hipótese (H-ii) indica que todas as medidas são ruidosas, de forma que o problema de filtragem é denominado *não singular*³.

Teorema 2.1 *Considere as hipóteses (H-i), (H-ii) e (H-iii) e seja $\gamma > 0$ dado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *Existe um filtro admissível tal que $\|H_{zw}^K\|_{\infty} < \gamma$.*

ii) *Existe $P = P' \geq \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo*

$$\hat{A}P + P\hat{A}' + P(\gamma^{-2}L'L - C'(DD')^{-1}C)P + \hat{B}\hat{B}' = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

onde

$$\hat{A} = A - BD'(DD')^{-1}C$$

$$\hat{B} = B(\mathbf{I} - D'(DD')^{-1}D)$$

$$\lambda(\hat{A} + \gamma^{-2}L'LP - C'(DD')^{-1}CP) \in \mathbb{C}^-$$

Além disso, um filtro admissível tal que $\|H_{zw}^K\|_{\infty} < \gamma$, é da forma (2.2) com o ganho constante de filtragem dado por

$$K_{Ric}^c = (PC' + BD')(DD')^{-1}. \quad (2.8)$$

□

Prova: Veja [NK91]. ■

³Note que o termo *singularidade* não diz respeito apenas aos zeros invariantes no infinito, mas pode denotar também a presença de zeros invariantes sobre o eixo imaginário no caso contínuo [Sch92b], [Sch92a].

O teorema mostra que para $\gamma > 0$ fixado, é possível caracterizar um sub-conjunto particular de ganhos constantes de filtragem que resolvem o problema sub-ótimo ($\mathcal{P}_{\infty\gamma}$), ou seja,

$$\mathcal{K}_\gamma^c \triangleq \{K_{Ric}^c \mid \|H_{zw}^K\|_\infty \leq \gamma, \lambda(A_\psi) \in \mathbb{C}^-\} \quad (2.9)$$

tal que $\mathcal{K}_\gamma^c \neq \emptyset$ se, e somente se, (2.7) admitir uma solução definida positiva.

O valor ótimo de robustez \mathcal{H}_∞ , γ^* , pode ser calculado por um método de bissecção considerando que, para uma precisão relativa $\epsilon > 0$, $\mathcal{K}_\gamma^c \neq \emptyset$ e $\gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^* + \epsilon$.

2.2.2 Sistemas Discretos

Considere o sistema apresentado em (2.1) e assuma que

$$\text{(H-iv)} \quad \begin{bmatrix} A - e^{j\omega} \mathbf{I} & B \\ C & D \end{bmatrix} \text{ têm posto completo de linhas } \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Uma abordagem para o problema ($\mathcal{P}_{\infty\gamma}$) no caso de sistemas discretos no tempo, envolvendo a existência de solução para uma equação discreta do tipo Riccati (veja, por exemplo, [TK96] ou [TK95]), é apresentada no teorema a seguir.

Teorema 2.2 *Considere as hipóteses (H-i) e (H-iv) e seja $\gamma > 0$ fixo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) *Existe um filtro admissível tal que $\|H_{zw}^K\|_\infty < \gamma$.*

ii) *Existe $P = P' \geq \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo*

$$APA' - P - (AP\hat{C}' + \hat{B})V^{-1}(AP\hat{C}' + \hat{B})' + BB' = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

onde

$$\hat{B} = [BD' \quad \mathbf{0}], \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C \\ L \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} DD' + CPC' & CPL' \\ LPC' & -\gamma^2 \mathbf{I} + LPL' \end{bmatrix}$$

tal que

$$\hat{V} = DD' + CPC' > \mathbf{0}$$

$$\gamma^2 \mathbf{I} - LPL' + (LPC')\hat{V}^{-1}(CPL') > \mathbf{0}$$

$$\lambda(A - (AP\hat{C}' + \hat{B})V^{-1}\hat{C}) \in \mathcal{B}_1$$

Além disso, um filtro admissível satisfazendo o limitante $\|H_{zw}^K\|_\infty < \gamma$, é da forma (2.2) com o ganho constante de filtragem dado por

$$K_{Ric}^d = (APC' + BD' + (APL')(\gamma^2\mathbf{I} - LPL')^{-1}(LPC')) \times \\ \times (DD' + CPC' + (CPL')(\gamma^2\mathbf{I} - LPL')^{-1}(LPC'))^{-1}. \quad (2.11)$$

□

Prova: Veja [XdSF91b, Teorema 2.2], [HBM91, Teorema 6.1]; [Sto90, Teorema 7.3] para o caso dual de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação estática de estado; [YS91a] para $D[B' \ D'] = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}]$. Veja ainda [TK96, Teorema 1] ou [TK95] onde o teorema acima é estabelecido para solucionar um problema do tipo *model matching* tal que (\mathcal{F}_K) seja própria com uma estrutura dual ao controle \mathcal{H}_∞ em [Sto90, Teorema 7.2]. ■

Note que, ao contrário do projeto para sistemas contínuos, o ganho constante de filtragem depende do nível de atenuação de ruídos. Além disso, pelo teorema anterior conclui-se que para $\gamma > 0$ fixado, o conjunto definido por

$$\mathcal{K}_\gamma^d \triangleq \{K_{Ric}^d \mid \|H_{zw}\|_\infty \leq \gamma, \lambda(A_\psi) \in \mathcal{B}_1\} \quad (2.12)$$

é tal que $\mathcal{K}_\gamma^d \neq \emptyset$ se, e somente se, (2.10) admitir uma solução definida positiva.

Da mesma forma que na seção anterior, pode-se aplicar uma estratégia do tipo bissecção para aproximar o valor ótimo γ^* , desde que $\mathcal{K}_\gamma^d \neq \emptyset$.

2.3 Abordagem Convexa por \mathcal{LMIs}

2.3.1 Sistemas Contínuos

Nesta seção, o conhecido resultado que relaciona a estabilidade e a limitação prescrita de uma função matricial de transferência no $\mathbb{R}\mathcal{H}_\infty$, com uma solução definida positiva para a inequação algébrica de Riccati, isto é, o *Bounded Real Lemma*, é usado como ponto de partida para estabelecer os resultados do projeto do filtro ótimo \mathcal{H}_∞ envolvendo \mathcal{LMIs} . Especificamente para o caso contínuo, vários autores têm apresentado abordagens por \mathcal{LMIs} para o problema de filtragem \mathcal{H}_∞ como, por exemplo, [KR92], [KRB96], [PK97], [WG97], [GW96], [TPP97b], [LF95], [LF97].

Lema 2.1 (BOUNDED REAL LEMMA). *Seja $\gamma > 0$ fixo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

- i) A_ψ é estável, isto é, $\lambda(A_\psi) \in \mathbb{C}^-$, e $\|H_{zw}^K\|_\infty < \gamma$.
- ii) Existe $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A'_\psi P + PA_\psi + C'_\psi C_\psi + \gamma^{-2} PB_\psi B'_\psi P < \mathbf{0} \quad (2.13)$$

□

Prova: Veja, por exemplo, [ZC96, Lema 3.1]. ■

Várias referências a respeito do lema acima podem ser encontradas na literatura como, por exemplo, em [ZDG96, Corolário 13.27], [Sch89], [ZKSN95], [KPZ90], [GA94], [dS94], [BGFB94], [And66], [Pal95, Teorema 2.4].

Teorema 2.3 *Seja $\gamma > 0$ fixo. Existe um filtro admissível \mathcal{F}_K tal que $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ se, e somente se, existirem matrizes $Y = Y' > \mathbf{0}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ satisfazendo a seguinte desigualdade matricial linear:*

$$\Upsilon(Y, Z, \gamma) > \mathbf{0} \quad (2.14)$$

onde a função matricial Υ é definida por

$$\Upsilon(Y, Z, \gamma) \triangleq \begin{bmatrix} -A'Y - YA + ZC + C'Z' & L' & (YB - ZD) \\ L & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ (YB - ZD)' & \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

No caso afirmativo, o ganho constante de filtragem \mathcal{H}_∞ é dado por

$$K_{\mathcal{LMI}}^c = Y^{-1}Z \quad (2.16)$$

□

Prova: (*Necessidade*). Assuma que exista um filtro admissível \mathcal{F}_K tal que

$$\|C_\psi(s\mathbf{I} - A_\psi)^{-1}B_\psi\|_\infty < \gamma \quad (2.17)$$

então pelo Lema 2.1, existe $P = P' > \mathbf{0}$ satisfazendo

$$(A - KC)'P + P(A - KC) + C'_\psi C_\psi + \gamma^{-2}P(B - KD)(B - KD)'P < \mathbf{0} \quad (2.18)$$

para A_ψ , B_ψ e C_ψ definidos em (2.3) e (2.5). Manipulando (2.18) e definindo $Z \triangleq PK$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$, obtém-se

$$A'P + PA - C'Z' - ZC + L'L + \gamma^{-2}(PB - ZD)(PB - ZD)' < \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Aplicando o complemento de Schur na inequação acima, a desigualdade matricial linear (2.14), para $P \triangleq Y$, é encontrada. Portanto, $Y = Y' > \mathbf{0}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ satisfazem (2.14).

(*Suficiência*). Se existem $Y = Y' > \mathbf{0}$, $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$, então $\Upsilon(Y, Z, \gamma) > \mathbf{0}$, que pelo complemento de Schur é equivalente à seguinte inequação

$$(A - Y^{-1}ZC)'P + P(A - Y^{-1}ZC) + L'L + \gamma^{-2}P(B - Y^{-1}ZD)(B - Y^{-1}ZD)'P < \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Implicando assim, pelo Lema 2.1, que $K_{\mathcal{LMI}}^c \triangleq Y^{-1}Z$ é um ganho constante que estabiliza assintoticamente a dinâmica do erro de filtragem com atenuação de ruídos γ . ■

Definem-se os seguintes conjuntos

$$\mathcal{L}_\infty^c(\gamma) \triangleq \{(Y, Z) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times r} \mid Y = Y' > \mathbf{0}, \Upsilon(Y, Z, \gamma) > \mathbf{0}\} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{L}_\infty^c \triangleq \{(Y, Z, \gamma) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times r} \times \mathbb{R} \mid Y = Y' > \mathbf{0}, \gamma > 0, \Upsilon(Y, Z, \gamma) > \mathbf{0}\} \quad (2.22)$$

O Teorema 2.3 permite estabelecer que $\mathcal{L}_\infty^c(\gamma) \neq \emptyset$ se, e somente se, existir um filtro admissível \mathcal{F}_K tal que $\|H_{zw}^K\|_\infty < \gamma$.

Definindo-se

$$\mathcal{C}_\gamma^c \triangleq \{K_{\mathcal{LMI}}^c \mid \|H_{zw}^K\|_\infty \leq \gamma, \lambda(A_\psi) \in \mathbb{C}^- \} \quad (2.23)$$

conclui-se que se $\mathcal{L}_\infty^c(\gamma) \neq \emptyset$, então a função $\phi_c : \mathcal{L}_\infty^c(\gamma) \rightarrow \mathcal{C}_\gamma^c$ é tal que $\phi_c(Y, Z) = Y^{-1}Z$ está bem definida e é injetiva. Logo \mathcal{C}_γ^c contém os ganhos constantes de filtragem para uma dada atenuação de ruídos γ . Desta forma, o problema de filtragem ótima \mathcal{H}_∞ envolvendo um procedimento convexo de otimização por \mathcal{LMI} s é apresentado a seguir.

Teorema 2.4 *A solução de*

$$\min_{Y, Z, \delta} \delta \quad (2.24)$$

sujeito a

$$(Y, Z, \delta) \in \mathcal{L}_\infty^c \quad (2.25)$$

é tal que, $\delta \triangleq \gamma^2$,

$$\|H_{zw}^K\|_\infty = \sqrt{\delta^*} \quad (2.26)$$

e

$$K_{\mathcal{LMI}}^c = Y^{-1}Z \quad (2.27)$$

é o ganho constante ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ . \square

Prova: Imediata a partir do Teorema 2.3, usando o fato que o problema é convexo. Também aqui pode-se estabelecer uma certa precisão relativa $\epsilon > 0$, tal que $\mathcal{C}_\gamma^c \neq \emptyset$ e $\gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^* + \epsilon$. \blacksquare

NOTA 2.1 *Sob a óptica da abordagem por LMIs, a hipótese apresentada em (H-ii) somente faz sentido para a abordagem clássica por equações de Riccati, pois o problema de filtragem é singular no seguinte sentido: se (H-ii) não é verificada, não é possível obter-se numericamente um ganho constante de filtragem na abordagem por Riccati.* \diamond

2.3.2 Sistemas Discretos

O problema de filtragem ótimo \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos, assim como no caso contínuo, pode (a partir da versão discreta do *Bounded Real Lemma*) ser elaborado como um problema convexo de otimização envolvendo apenas LMIs. Algumas referências têm tratado este tema, considerando especificamente abordagens por LMIs, tais como [PP97], [PP98b], [PP98a], [GW96], [WG97], [LF95], [LF97], [TPP97a].

Considere a versão do *Bounded Real Lemma* apresentada em [ZDG96, Teorema 21.16].

Lema 2.2 (BOUNDED REAL LEMMA). *Seja $\gamma > 0$ fixo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A_ψ é estável, isto é, $\lambda(A_\psi) \in \mathcal{B}_1$, e $\|H_{zw}^K\|_\infty < \gamma$.

ii) Existe $P = P' > \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A_\psi & B_\psi \\ C_\psi & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\psi & B_\psi \\ C_\psi & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (2.28)$$

\square

Prova: Veja [ZDG96], [dSX92]. \blacksquare

Ao contrário do caso contínuo apresentado na seção anterior, optou-se aqui por apresentar diretamente o procedimento convexo de otimização. Os mesmos conjuntos e discussões, porém, continuam válidos.

Teorema 2.5 A solução de

$$\min_{Y,Z,\delta} \delta \quad (2.29)$$

sujeito a

$$Y > \mathbf{0} \quad (2.30)$$

$$\begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} & A'Y - C'Z' & L' \\ \mathbf{0} & \delta\mathbf{I} & B'Y - D'Z' & \mathbf{0} \\ YA - ZC & YB - ZD & Y & \mathbf{0} \\ L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (2.31)$$

onde $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $\delta \triangleq \gamma^2$, é tal que

$$\|H_{zw}^K\|_\infty = \sqrt{\delta^*} \quad (2.32)$$

e

$$K_{\mathcal{LMI}}^d = Y^{-1}Z \quad (2.33)$$

é o ganho constante ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ . \square

Prova: (Suficiência) Suponha que existam (Y, Z, δ) satisfazendo (2.30) e (2.31). Lançando mão do complemento de Schur, (2.31) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} YA - ZC & YB - ZD \\ L & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Y^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} YA - ZC & YB - ZD \\ L & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde $\delta \triangleq \gamma^2$. Manipulando (2.34) obtém-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A - Y^{-1}ZC & B - Y^{-1}ZD \\ L & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} A - Y^{-1}ZC & B - Y^{-1}ZD \\ L & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.35)$$

implicando que para $K_{\mathcal{LMI}}^d \triangleq Y^{-1}Z$, $P \triangleq Y$ e γ solucionam (2.28), assegurando desta forma que o limitante $\|H_{zw}^K\|_\infty < \gamma$ é satisfeito e a dinâmica do erro de filtragem é assintoticamente estável.

(*Necessidade*) Por outro lado, assumamos que para $\gamma > 0$ fixado e **(H-i)**, existe K tal que $\|H_{\tilde{z}w}^K\|_\infty < \gamma$ e $\lambda(A_\psi) \in \mathcal{B}_1$, implicando assim que $P = P' > \mathbf{0}$ satisfaz (2.28). Pelo complemento de Schur (2.28) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} YA - YKC & YB - YKD \\ L & \mathbf{0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Y^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} YA - YKC & YB - YKD \\ L & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.36)$$

tal que $Z \triangleq YK$, $Y \triangleq P$ e $\delta \triangleq \gamma^2$ são soluções factíveis para (2.30) e (2.31).

Além disso, como o problema de otimização é convexo (critério linear sujeito a restrições lineares), a solução ótima (Y, Z, δ) é tal que $K_{\mathcal{LMI}}^d = Y^{-1}Z$ assegurando

$$\min_{K_{\mathcal{LMI}}^d} \|H_{\tilde{z}w}^K\|_\infty = \gamma^* = \sqrt{\delta^*}$$

■

O teorema acima permite concluir que existe um filtro admissível \mathcal{F}_K se, e somente se, existirem (Y, Z, δ) satisfazendo (2.30) e (2.31). Além disso, como colocado em [BB95, Teorema 7.6 e Nota 7.4], a hipótese **(H-i)** assegura que o nível ótimo de atenuação de ruídos γ^* é finito nos Teoremas 2.5 e 2.4. Da mesma forma que no caso contínuo, pode-se estabelecer uma certa precisão relativa $\epsilon > 0$, tal que $\delta^* \leq \delta \leq \delta^* + \epsilon$ e $\{K_{\mathcal{LMI}}^d \mid \|H_{\tilde{z}w}^K\|_\infty \leq \sqrt{\delta}, \lambda(A_\psi) \in \mathcal{B}_1\} \neq \emptyset$.

2.4 Exemplos

Exemplo 2.1 Considere o seguinte sistema contínuo e LIT [dS94], [XdS95] descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.4545 \\ 0.9090 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = [0 \quad 100] x(t) + w(t) \\ z(t) = [0 \quad 100] x(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

onde $w(t) \in \mathcal{L}_2[0; \infty)$. A tabela 2.1 apresenta os valores mínimos de γ e o ganho constante de filtragem associado para as abordagens por \mathcal{LMI} s (Teorema 2.4) e Riccati. Pode-se perceber a necessidade de uma seqüência de altos ganhos (como discutido na seção 2.1) para se aproximar do valor ótimo de atenuação de ruídos. Portanto, impondo na abordagem por \mathcal{LMI} s a restrição adicional $Y \geq \epsilon \mathbf{I}$, $\epsilon = 10^{-2}$ obtém-se, $\gamma = 1.0040$ e

$$K_{\mathcal{LMI}}^c = \begin{bmatrix} 110.4385 \\ 2.1479 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Abordagem	γ	K
Riccati	1.000000145	$10^6 \times \begin{bmatrix} 3.0655 \\ 0.0334 \end{bmatrix}$
\mathcal{LMI}	1.000000145	$10^6 \times \begin{bmatrix} 3.0144 \\ 0.0332 \end{bmatrix}$

Tabela 2.1: Valores ótimos de atenuação de ruídos para as abordagens por Riccati e \mathcal{LMI} e os respectivos ganhos constantes de filtragem associados - Exemplo 2.1.

Exemplo 2.2 Considere o seguinte sistema discreto LIT, investigado em [PP98b] e descrito por

$$A = \begin{bmatrix} 0.2424 & 0.5443 & 0.2165 \\ 0.7263 & -0.1879 & 0.8834 \\ 0.1985 & 0.2312 & 0.2325 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.3076 & 0.3126 \\ 0.9330 & 0.3616 \\ 0.2146 & 0.2922 \end{bmatrix}$$

$$C = [10 \quad 0 \quad 10], \quad D = [0.5664 \quad 0.4826], \quad L = [10 \quad 0 \quad 10] \quad (2.39)$$

O valor ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ obtido, lançando mão do procedimento de otimização apresentado no Teorema (2.5), é dado por $\gamma = 9.6066$ com o ganho ótimo de filtragem dado por

$$K_{\mathcal{LMI}}^d = \begin{bmatrix} 0.0538 \\ 0.0682 \\ 0.0342 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

e

$$Y = \begin{bmatrix} 2854.7033 & 328.7524 & -4629.1417 \\ 328.7524 & 207.0158 & -804.4738 \\ -4629.1417 & -804.4738 & 8562.3157 \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} 17.8047 \\ 4.3175 \\ -11.3018 \end{bmatrix}$$

Calculando a norma \mathcal{H}_∞ (Apêndice B) do sistema associado ao erro de filtragem (\mathcal{T}_ψ), considerando o ganho de filtragem acima, obtém-se

$$\|L(\zeta\mathbf{I} - (A - K_{\mathcal{LMI}}^d C))^{-1}(B - K_{\mathcal{LMI}}^d D)\|_\infty = 9.6066$$

e, portanto, o valor mínimo é atingido.

A abordagem por equação de Riccati (Teorema 2.2) fornece como solução de (2.10),

$$P = \begin{bmatrix} 0.3467 & 0.2801 & 0.2137 \\ 0.2801 & 0.9284 & 0.2386 \\ 0.2137 & 0.2386 & 0.1488 \end{bmatrix}$$

e o ganho constante de filtragem é dado por

$$K_{Ric}^d = \begin{bmatrix} 0.0538 \\ 0.0682 \\ 0.0342 \end{bmatrix}$$

2.5 Conclusão

Neste capítulo, as abordagens clássicas do problema de filtragem \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos e discretos no tempo, tomando como estratégia a solvabilidade de equações algébricas do tipo Riccati, foram revistas para o caso de modelos com parâmetros precisamente conhecidos.

Além disso, examinou-se o mesmo tema em um ambiente envolvendo apenas \mathcal{LMIs} , permitindo assim tratar o problema de filtragem \mathcal{H}_∞ , nos casos contínuos e discretos no tempo, por meio de procedimentos convexos de otimização.

Ao contrário das formulações envolvendo equações de Riccati, a hipótese de medidas completamente corrompidas pelo sinal de ruído pode ser relaxada para as formulações por \mathcal{LMIs} . Porém, no caso contínuo, como discutido em [Sch94] (para o problema de controle \mathcal{H}_∞), o ganho constante ótimo de filtragem⁴ \mathcal{H}_∞ é tal que $\|K_{\mathcal{LMI}}\| \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow \gamma^*$. No capítulo 5 este assunto será convenientemente abordado.

2.6 Notas e Referências

Equação Algébrica de Riccati

Um dos principais temas em teoria de controle e filtragem tem sido o estudo de propriedades particulares das soluções e métodos numéricos abordando as (in)equações algébricas de Riccati, que surgem nos modelos contínuos e discretos no tempo. Inúmeras referências exploram estes assuntos, tais como [PLJ80], [dSGG86], [GLR86], [Fai86], [Fai87], [RV88], [Sch91], [IW92], [RR92b], [RR92a], [LL93], [RT93], [SS95], [Sch95b], [Zho96], [Meh96].

Desigualdades Matriciais Lineares

Vários métodos numéricos propõem-se a solucionar problemas de otimização descritos em termos de \mathcal{LMIs} [VB97] e, dentre eles, os métodos de pontos interiores ([NN94]) têm se mostrado mais

⁴Veja também [Sha97] para uma discussão a respeito de filtragem singular para sistemas contínuos.

eficientes. Vários pacotes computacionais, com interfaces relativamente simples, estão disponíveis hoje em dia para lidar com problemas de factibilidade ou otimização descritos por \mathcal{LMIs} , tais como LMILAB, disponível comercialmente ([GNLC95], [GN97], [NG94], [GN94]), LMITool com versão gratuita ([GND95], [VB94]) e LMISOL em uma pré-versão ([dOdFG97]). Para uma revisão histórica sobre desigualdades matriciais lineares veja, particularmente, o trabalho de Carlson [Car86], além de [BFBG94] e [BGFB94].

Problema de Filtragem Mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

Os artifícios empregados no problema de filtragem \mathcal{H}_∞ podem ser estendidos para o caso envolvendo a minimização de um critério do tipo norma \mathcal{H}_2 , de tal forma que um certo nível de atenuação de ruídos limite a norma \mathcal{H}_∞ . Este tipo de compromisso, entre a norma \mathcal{H}_2 e um nível prescrito de atenuação de ruídos, tem sido explorado, por exemplo, em [BH89], [HBM91], [HHK97], [HHK96], [HK97], [LS94], [RSI96], [WH96] e [TS96] envolvendo formulações dependentes de equações de Riccati. Por outro lado, alguns trabalhos exploraram este tema por meio de procedimentos convexos de otimização ou descrições convexas baseados apenas em \mathcal{LMIs} . Como exemplo pode-se citar [KR92], [KRB96] para sistemas contínuos e [PP98b], [TPP97a], [PP97] para sistemas discretos no tempo.

Capítulo 3

Filtragem Robusta \mathcal{H}_∞ - Sistemas Contínuos

3.1 Introdução

Considere o sistema incerto contínuo LIT dado por

$$(\mathcal{S}_c :) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} H_{1i}\xi_i(t), & x(0) = x_o, \quad t \in [0; \infty) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} H_{2i}\xi_i(t) \\ z(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$ é o vetor de saídas medidas, $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o sinal de entrada de ruído (incluindo ruídos de medida e processo) e $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ é o sinal a ser estimado. Os sinais $\xi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$ são as variáveis de incertezas, as quais serão definidas convenientemente mais à frente. As matrizes H_{1i} e H_{2i} são matrizes constantes conhecidas, $i = 1, \dots, \alpha$. Optou-se por descrever o sistema incerto (\mathcal{S}_c) de forma idêntica à apresentada em [LF95], [LF97], onde o escalar α caracteriza a quantidade de elementos na incerteza estruturada. Além disso, esta descrição pode englobar incertezas dos tipos: restrições quadráticas integráveis, limitado em norma e politópicas (veja [PGB93] para uma comparação entre incertezas do tipo limitado em norma e politópicas no contexto de controle robusto).

A seguinte hipótese é estabelecida:

- **(C-i)** O sistema (\mathcal{S}_c) é quadraticamente estável⁵.

⁵Um sistema é dito ser quadraticamente estável se existe $P = P' > 0$ tal que para todas as incertezas admissíveis em A

$$A'P + PA < 0.$$

Esta hipótese garante que o erro de filtragem é limitado, já que, como será mostrado, a estabilidade assintótica da dinâmica do erro de filtragem é dirigida pelos estados do sistema (\mathcal{S}_c) compostos com os estados do filtro admissível. Note que esta hipótese implica ainda que o sistema (\mathcal{S}_c) é detectável ([XdS95]).

Considere o filtro (1.2) dado por

$$(\mathcal{F}_c :) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), & \hat{x}(0) = \mathbf{0} \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

A dinâmica do erro de filtragem é então descrita por

$$(\mathcal{T}_c :) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} w(t) + \tilde{H} \tilde{\xi}(t) \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\tilde{z} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ é o erro de filtragem e \tilde{x} , $\tilde{\xi}$, \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} e \tilde{H} serão adequadamente definidas.

Sob este novo cenário, envolvendo incertezas no modelo do sistema, o problema sub-ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$) é reformulado a fim de que o projeto do filtro robusto garanta um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ . Desta forma o problema a ser tratado consiste em:

Problema 3.1 ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$) (PROBLEMA DE FILTRAGEM ROBUSTA \mathcal{H}_∞). *Assuma que o vetor de ruídos $w(t) \in \mathcal{L}_2[0; \infty)$. Dada uma atenuação de ruídos $\gamma > 0$ fixa, determine um filtro (\mathcal{F}_c) admissível, tal que \tilde{z} seja um erro de filtragem limitado satisfazendo*

$$\|\tilde{z}\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2, \quad \tilde{x}(0) = \mathbf{0}, \quad w(t) \neq \mathbf{0} \quad (3.4)$$

para todas as incertezas admissíveis ao sistema (\mathcal{S}_c) . △

Várias têm sido as formas de descrever as incertezas do sistema (\mathcal{S}_c) , tais como, estruturas do tipo limitado em norma, restrições quadráticas integráveis ou politópicas. Particularmente, as restrições quadráticas integráveis \mathcal{RQIs} incluem as estruturas do tipo limitado em norma.

A síntese de (\mathcal{F}_c) atendendo ao problema ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$) e envolvendo as várias formas de descrição das incertezas será estudada a seguir. Na seção 3.2, apresentar-se-á uma abordagem por equações do tipo Riccati ([XdS95]) e por \mathcal{LMIs} acopladas envolvendo \mathcal{RQIs} ([LF95], [LF97]). Nestas formulações, o problema de filtragem robusto \mathcal{H}_∞ é convertido em um problema de filtragem \mathcal{H}_∞ do tipo “escalar”.

Na seção 3.3, uma nova estratégia para a síntese de um filtro admissível (\mathcal{F}_c) , tratando incertezas do tipo politópicas no problema ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$) por meio de \mathcal{LMIs} [PP98c], [PP98d] será discutida. Além disso, esta última abordagem permitirá formular o problema de custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ em termos de um procedimento convexo de otimização (similar ao apresentado em [PP98b] para o caso discreto). Para esta abordagem o Lema 2.1 estabelecerá um ponto de partida para elaborar condições necessárias e suficientes para a síntese de um filtro robusto admissível. Como extensão, esta nova abordagem abre espaço para tratar o problema de custo garantido de filtragem mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ na seção 3.4.

3.2 Incertezas do Tipo Limitado em Norma

3.2.1 Formulação por Equação de Riccati

Considere o sistema incerto (3.1), onde $\alpha = 1$ e

$$\xi(t) \triangleq \Delta(t)E_1x(t) + \Delta(t)E_2w(t) \quad (3.5)$$

de tal modo que $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{l \times k}$ é uma matriz variante no tempo e desconhecida, com elementos mensuráveis a Lebesgue satisfazendo $\|\Delta\| \leq 1, \forall t \geq 0$. E_1 e E_2 são matrizes constantes conhecidas.

Considerando (3.1), (3.2) e (3.5), a dinâmica do erro de filtragem (3.3) é representada pelas matrizes

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A_f + B_f C & B_f C \\ A - A_f - B_f C & A - B_f C \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B_f D \\ B - B_f D \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L - C_f \quad C_f], \quad \tilde{H} \triangleq \begin{bmatrix} B_f H_2 \\ H_1 - B_f H_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \Delta(t)\tilde{E}\tilde{x}(t) + \Delta(t)E_2w(t) \quad (3.8)$$

$$\tilde{E} \triangleq [E_1 \quad E_2], \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Considere a seguinte hipótese:

(C-ii) $[D \quad H_2]$ define uma transformação linear sobrejetiva.

Esta hipótese é necessária para garantir a viabilidade numérica do cálculo da solução de uma equação do tipo Riccati envolvida no projeto do filtro robusto. Além disso, indica que o problema, por meio desta abordagem, deve ser necessariamente não-singular. O resultado a seguir estabelece quando o problema (P_{∞}^{rc}) pode ser resolvido.

Lema 3.1 *Considere o sistema incerto (S_c) com (3.5) satisfazendo as hipóteses (C-i) e (C-ii) e seja $\gamma > 0$ fixo. Assuma que para um dado filtro da forma (\mathcal{F}_c) e para algum $\epsilon > 0$ exista uma solução $P = P' \geq 0, P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ satisfazendo*

$$\hat{A}P + P\hat{A}' + \gamma^{-2}P\tilde{C}'\tilde{C}P + \epsilon P\tilde{E}'(\mathbf{I} + \epsilon E_2 R^{-1} E_2')\tilde{E}P + \frac{1}{\epsilon}\tilde{H}\tilde{H}' + \tilde{B}R^{-1}\tilde{B}' = 0 \quad (3.10)$$

onde

$$\lambda(\hat{A} + \gamma^{-2}\tilde{C}'\tilde{C}P + \epsilon\tilde{E}'\tilde{E}P + \epsilon^2 E_2 R^{-1} E_2'\tilde{E}P) \in \mathbb{C}^-$$

$$\hat{A} = \tilde{A} + \epsilon\tilde{B}R^{-1}E_2'\tilde{E}$$

$$R = \mathbf{I} - \epsilon E_2' E_2$$

Então as afirmações a seguir são verdadeiras.

(i) O filtro (\mathcal{F}_c) é admissível.

(ii) A dinâmica do erro de filtragem é assintoticamente estável e satisfaz $\|\tilde{z}\|_2 < \gamma \|w\|_2$, $\forall w(t) \neq \mathbf{0}$, para todas as incertezas admissíveis.

□

Prova: Veja [dS94] e [XdS95].

■

O próximo teorema (apresentado em [XdS95]) mostra qual a estrutura adequada ao filtro (\mathcal{F}_c) , que satisfaz o Lema 3.1 e soluciona o problema $(P_{\infty\gamma}^{rc})$.

Teorema 3.1 *Considere o sistema incerto (S_c) e (3.5) satisfazendo as hipóteses (C-i) e (C-ii) e seja $\gamma > 0$ fixado. Se existir um escalar $\epsilon > 0$ satisfazendo $\epsilon E_2' E_2 < \mathbf{I}$, tal que as seguintes condições sejam verificadas:*

(i) *Existe uma solução $X = X' \geq \mathbf{0}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo*

$$A_\epsilon X + X A_\epsilon' + X(\gamma^{-2} L' L + \epsilon E_1' R_\epsilon^{-1} E_1) X + \frac{1}{\epsilon} H_1 H_1' + B R^{-1} B' - \hat{C}_\epsilon' V_\epsilon^{-1} \hat{C}_\epsilon = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

onde

$$\lambda(A_\epsilon + \gamma^{-2} L' L X + \epsilon E_1' R_\epsilon^{-1} E_1 X - C_\epsilon' V_\epsilon^{-1} \hat{C}_\epsilon) \in \mathbb{C}^-$$

$$R = \mathbf{I} - \epsilon E_2' E_2$$

$$R_\epsilon = (\mathbf{I} + \epsilon E_2 R^{-1} E_2')^{-1}$$

$$A_\epsilon = A + \epsilon B R^{-1} E_2' E_1$$

$$C_\epsilon = C + \epsilon D R^{-1} E_2' E_1$$

$$\hat{C}_\epsilon = C_\epsilon X + \frac{1}{\epsilon} H_2 H_1' + D R^{-1} B'$$

$$V_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} H_2 H_2' + D R^{-1} D'$$

(ii) *Existe uma solução $S = S' \geq \mathbf{0}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo*

$$A_\epsilon S + S A_\epsilon' + \epsilon S E_1' R_\epsilon^{-1} E_1 S + \gamma^{-2} X L' L X + \frac{1}{\epsilon} H_1 H_1' + B R^{-1} B' = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

onde $X \geq 0$ é a solução estabilizante de (3.11) e

$$\lambda(A_\epsilon + \epsilon E_1' R_\epsilon^{-1} E_1 S) \in \mathbb{C}^-$$

Então o problema $(P_{\infty\gamma}^{rc})$ é solúvel.

Quando as condições (i) e (ii) são satisfeitas, um filtro robusto \mathcal{H}_∞ apropriado (\mathcal{F}_ϵ) é descrito pelas matrizes

$$\begin{cases} A_f = A_\epsilon + \epsilon X E_1' R_\epsilon^{-1} E_1 - B_f C_\epsilon \\ B_f = (X C_\epsilon' + \frac{1}{\epsilon} H_1 H_2' + B R^{-1} D') V_\epsilon^{-1} \\ C_f = L \end{cases} \quad (3.13)$$

□

Prova: Veja [XdS95]. ■

NOTA 3.1 Como discutido em [XdS95], apesar da solução estabilizante S de (3.12) não influir no cálculo do filtro robusto dado pelas matrizes em (3.13), faz-se necessário verificar para um mesmo $\epsilon > 0$, com $X \geq 0$ satisfazendo (3.11), se existe também $S \geq 0$ satisfazendo (3.12). Esta necessidade pode ser vista pelo seguinte fato: pode-se mostrar, usando propriedades de solução mazimal da equação de Riccati [RV88], que $S \geq X \geq 0$. Definindo-se

$$P \triangleq \begin{bmatrix} S - X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

tem-se $P \geq 0$. Tomando a dinâmica do erro de filtragem com as matrizes do filtro (\mathcal{F}_ϵ) dados em (3.13), após várias manipulações, verifica-se que P satisfaz (3.10), assegurando assim que o filtro obtido é admissível. ◇

NOTA 3.2 A escolha de $C_f = L$, no projeto do filtro (3.13), é imposta no sentido de eliminar a dependência explícita do erro de filtragem com relação aos estados do sistema (S_ϵ) . ◇

Aqui também pode-se estabelecer um algoritmo do tipo bisseção para aproximar o valor ótimo do custo garantido de atenuação de ruídos γ^* , desde que o Teorema 3.1 seja satisfeito.

3.2.2 Formulação por \mathcal{LMI} s acopladas

Considere o sistema incerto (3.1), de forma que as variáveis incertas $\xi_i(t), i = 1, \dots, \alpha$, satisfaçam as seguintes restrições \mathcal{RQI} s:

$$\int_0^T \|\xi_i(t)\|^2 \leq \int_0^T \|E_{1i}x(t) + E_{2i}w(t) + E_{3i}\xi(t)\|^2, \quad \text{quando } T \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, \alpha \quad (3.14)$$

onde $\xi(t) \triangleq [\xi'_1(t) \ \dots \ \xi'_\alpha(t)]$. E_{1i} e E_{2i} são matrizes constantes conhecidas. Para simplificar a notação adotar-se-á

$$H_1 \triangleq [H_{11} \ \dots \ H_{1\alpha}], \quad H_2 \triangleq [H_{21} \ \dots \ H_{2\alpha}] \quad (3.15)$$

$$E'_1 \triangleq [E'_{11} \ \dots \ E'_{1\alpha}], \quad E'_2 \triangleq [E'_{21} \ \dots \ E'_{2\alpha}], \quad E'_3 \triangleq [E'_{31} \ \dots \ E'_{3\alpha}] \quad (3.16)$$

As matrizes da dinâmica do erro de filtragem (3.3) são dadas por

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L \quad -C_f], \quad \tilde{H} \triangleq \begin{bmatrix} H_1 \\ B_f H_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \xi(t), \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Neste cenário envolvendo \mathcal{RQIs} , a desigualdade (3.4) no problema $(\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc})$ é reescrita como

$$\int_0^{\tilde{T}} \|\tilde{z}\|^2 < \gamma^2 \int_0^{\tilde{T}} \|w\|^2, \quad \text{quando } T \rightarrow \infty, \quad w(t) \neq \mathbf{0}, \quad \tilde{x}(0) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

A elaboração de uma estratégia em [LF95], [LF97] por \mathcal{LMIs} , para tratar o problema $(\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc})$ com (3.20), passa pela técnica de “escalar” o problema por meio do denominado \mathcal{S} -*procedure* (discutido no final deste capítulo). Tal artifício é ressaltado no item (i) do próximo teorema, onde condições que garantem que um dado filtro seja admissível e \tilde{z} seja um erro de filtragem limitado são apresentadas.

Definem-se as seguintes matrizes

$$E_{1e} \triangleq [E_1 \quad \mathbf{0}] \quad \text{e} \quad J \triangleq \text{diag}[\tau_1 \mathbf{I}_{k_1}, \dots, \tau_\alpha \mathbf{I}_{k_\alpha}] \quad (3.21)$$

Teorema 3.2 *Considere o sistema incerto (\mathcal{S}_c) e seja $\gamma > 0$ fixado. As afirmações a seguir são equivalentes e garantem que um dado filtro (\mathcal{F}_c) é admissível tal que \tilde{z} é um erro de filtragem limitado satisfazendo (3.22) para todas as incertezas atendendo (3.14).*

(i) *Existem $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\tau_1 > 0, \dots, \tau_\alpha > 0$ assegurando que*

$$\begin{aligned} & 2\tilde{x}'P(\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w + \tilde{H}\xi) + \sum_{i=1}^{\alpha} \tau_i (\|E_{1i}x + E_{2i}w + E_{3i}\xi\|^2 - \|\xi_i\|^2) \\ & + \|\tilde{C}\tilde{x}\|^2 - \gamma^2\|w\|^2 < 0, \quad \forall (\tilde{x}', w', \xi')' \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

(ii) Existem $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $J > \mathbf{0}$ definido em (3.21) satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} + E'_{1e}JE_{1e} + \tilde{C}'\tilde{C} & P\tilde{B} + E'_{1e}JE_2 & P\tilde{H} + E'_{1e}JE_3 \\ \tilde{B}'P + E'_2JE_{1e} & -\gamma^2\mathbf{I} + E'_2JE_2 & E'_2JE_3 \\ \tilde{H}'P + E'_3JE_{1e} & E'_3JE_2 & -J + E'_3JE_3 \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.23)$$

(iii) Existem $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $J > \mathbf{0}$ definido em (3.21) satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & P\tilde{B} & P\tilde{H} & \tilde{C}' & E'_{1e}J \\ \tilde{B}'P & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E'_2J \\ \tilde{H}'P & \mathbf{0} & -J & \mathbf{0} & E'_3J \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ JE_{1e} & JE_2 & JE_3 & \mathbf{0} & -J \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.24)$$

(iv) Existe $J > \mathbf{0}$ tal que o sistema auxiliar abaixo é assintoticamente estável e satisfaz $\|H_{\tilde{z}_a w_a}\|_\infty < 1$, onde $H_{\tilde{z}_a w_a}$ é a função de transferência de w_a para \tilde{z}_a :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \tilde{A}x_a(t) + [\gamma^{-1}\tilde{B} \quad \tilde{H}J^{-1/2}]w_a(t) \\ \tilde{z}_a(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ J^{1/2}E_{1e} \end{bmatrix}x_a(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma^{-1}J^{1/2}E_2 & J^{1/2}E_3J^{-1/2} \end{bmatrix}w_a(t) \end{cases} \quad (3.25)$$

□

Prova: Veja [LF97].

■

Manipulando convenientemente o sistema auxiliar (3.25) parametrizado em J , obtém-se um sistema equivalente em “malha-aberta” dado por

$$\begin{cases} \dot{x}_s(t) = Ax_s(t) + [\gamma^{-1}B \quad H_1J^{-1/2}]w_s(t) \\ z_s(t) = \begin{bmatrix} L \\ J^{1/2}E_1 \end{bmatrix}x_s(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma^{-1}J^{1/2}E_2 & J^{1/2}E_3J^{-1/2} \end{bmatrix}w_s(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}u(t) \\ y(t) = Cx_s(t) + [\gamma^{-1}D \quad H_2J^{-1/2}]w_s(t) \end{cases} \quad (3.26)$$

com o controlador

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f\hat{x}(t) + B_fy(t) \\ u(t) = C_f\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

Desta forma, o problema $(\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc})$ para o sistema (3.1) com (3.14) é convertido em um problema padrão de controle \mathcal{H}_∞ do tipo “escalar” para o sistema auxiliar em “malha-aberta” (3.26), envolvendo apenas a síntese de um controlador (3.27). Esta conversão do problema em [LF95], [LF97], permite lançar mão (diretamente por substituição) da formulação por \mathcal{LMIs} apresentada em [GA94, Teorema 4.3] ou [Gah96, Teorema 2.1]. A solvabilidade do problema $(\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc})$ é formalizada a seguir.

Teorema 3.3 *Seja $\gamma > 0$ fixo. Denote por \mathcal{N}_S qualquer matriz cujas colunas formam uma base do espaço nulo de $[C \ D \ H_2]$. Se existirem matrizes simétricas $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $J > \mathbf{0}$ (definida em (3.21)) que satisfaçam as \mathcal{LMIs} (3.28), (3.29) e (3.30) abaixo, então o problema $(\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc})$ é solúvel.*

$$\begin{bmatrix} AR + RA' & RE'_1 & B & H_1 J^{-1} \\ E_1 R & -J^{-1} & E_2 & E_3 J^{-1} \\ B' & E'_2 & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ J^{-1} H'_1 & J^{-1} E'_3 & \mathbf{0} & -J^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.28)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}'_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} A'S + SA & SB & SH_1 & L' & E'_1 J \\ B'S & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E'_2 J \\ H'_1 S & \mathbf{0} & -J & \mathbf{0} & E'_3 J \\ \hline L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ JE_1 & JE_2 & JE_3 & \mathbf{0} & -J \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} R & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & S \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.30)$$

□

Prova: Veja [LF97]. ■

Note que a inequação (3.28) é afim nas variáveis R , $J_s \triangleq J^{-1}$ e $\delta \triangleq \gamma^2$, enquanto a inequação (3.29) é afim nas variáveis S , J e δ . Portanto, as inequações não são conjuntamente lineares em J . Para contornar esta não linearidade, definem-se $\beta_i \triangleq \tau_i / (1 + \tau_i)$, $i = 1, \dots, \alpha$, onde $\tau_i > 0$ se, e somente se, $\beta_i \in (0, 1)$. Escolhe-se então um conjunto de pontos suficientemente significativos em relação a cada $\beta_i \in (0, 1)$. Portanto, para cada ponto do conjunto $(\beta_1, \dots, \beta_\alpha)$ é suficiente verificar se existe uma solução factível para (3.28), (3.29) e (3.30).

De posse das matrizes R , S e J que satisfaçam o teorema acima, basta reconstruir o controle (3.27) para o sistema auxiliar (3.26) por meio do Lema da Projeção (Eliminação) em [GA94, Teorema 4.2], ou de forma explícita como em [Gah96, Algoritmo 3.1]. Note ainda que as matrizes R e S são necessariamente definidas positivas.

Para o caso em que $\alpha = 1$, isto é, $J = \tau_1 \mathbf{I}$ e $E_3 = \mathbf{0}$, a descrição por \mathcal{LMIs} acopladas é idêntica àquela formulada por equações de Riccati na seção 3.2.1 anterior.

NOTA 3.3 *Em [LF95], [LF97], tenta-se estabelecer um problema de factibilidade descrito por \mathcal{LMIs} não acopladas para o caso denominado “bloco de incerteza escalar”, isto é, $\alpha = 1$. Para tanto,*

multiplica-se a transformação de similaridade dada por $\text{diag}[J^{1/2}, J^{1/2}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$, à direita e à esquerda em (3.28), e logo após utiliza-se o complemento de Schur obtendo:

$$\begin{bmatrix} A\tilde{R} + \tilde{R}A' + \gamma^{-2}BB'J + H_1H_1' & \tilde{R}E_1' + \gamma^{-2}BE_2'J + H_1E_3' \\ E_1\tilde{R} + \gamma^{-2}E_2B'J + E_3H_1' & -\mathbf{I} + \gamma^{-2}E_2E_2'J + E_3E_3' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (3.31)$$

onde $\tilde{R} \triangleq RJ$. Com isso, o problema é reescrito em termos das \mathcal{LMI} s (3.31), (3.29) e (3.30) que seriam conjuntamente lineares em \tilde{R} , S e J . Entretanto, contrariamente ao afirmado em [LF95], [LF97], tal descrição não é válida, pois não é possível estabelecer uma transformação de similaridade para a inequação (3.30) sem que se introduzam novas não linearidades. De fato, multiplicando (3.30) à direita e à esquerda por $\text{diag}[J^{1/2}, \mathbf{I}]$ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & J^{1/2} \\ J^{1/2} & S \end{bmatrix}$$

inviabilizando uma formulação linear. ◇

3.3 Incertezas do Tipo Politópica

3.3.1 Abordagem Convexa por \mathcal{LMI} s

Considere o sistema incerto (\mathcal{S}_c), descrito em (3.1), com $\xi_i(t) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, \alpha$. Os parâmetros incertos do modelo são considerados agora como pertencentes a um conjunto convexo compacto do tipo politópico, isto é,

$$(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c \quad (3.32)$$

$$\mathcal{P}_c \triangleq \left\{ (A, B, C, D) \mid (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i (A_i, B_i, C_i, D_i); \tau_i \geq 0; \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i = 1 \right\} \quad (3.33)$$

Sem perda de generalidade, considere $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c$ arbitrário porém fixo. As matrizes da dinâmica do erro de filtragem (3.3) são descritas, neste caso, por

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L \quad -C_f], \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \mathbf{0}, \quad \tilde{H} \triangleq \mathbf{0} \quad (3.36)$$

Além disso, a matriz de transferência do sinal de entrada de ruídos w para o erro de filtragem \tilde{z} é descrita por

$$H_{\tilde{z}w}(s) \triangleq \tilde{C}(s\mathbf{I} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \quad (3.37)$$

Baseado na versão do *Bounded Real Lemma* para sistemas contínuos apresentada no Lema 2.1, o teorema a seguir estabelece a solvabilidade do problema de filtragem em termos de duas \mathcal{LMI} s.

Teorema 3.4 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O filtro (\mathcal{F}_c) em (3.2) é um filtro admissível com erro de filtragem \tilde{z} , para $x(0) = \mathbf{0}$, satisfazendo $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \sqrt{\delta}$ se, e somente se existirem $R = R'$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = X'$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tais que*

$$\Gamma(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) < \mathbf{0} \quad (3.38)$$

$$X - R > \mathbf{0} \quad (3.39)$$

onde a função matricial Γ é definida por

$$\Gamma(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} A'R + RA & RA + A'X + C'Z' + M' & RB & L' - N' \\ A'R + XA + ZC + M & A'X + XA + ZC + C'Z' & XB + ZD & L' \\ B'R & B'X + D'Z' & -\delta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ L - N & L & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

□

Prova: (Necessidade). Assuma que para $\delta > 0$ fixo, exista um filtro (\mathcal{F}_c) admissível como em (3.2), de tal forma que $\lambda(\tilde{A}) \in \mathbb{C}^-$ e $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \sqrt{\delta}$, implicando pelo Lema 2.1 que para

$$A_\psi \triangleq \tilde{A}, \quad B_\psi \triangleq \tilde{B}, \quad C_\psi \triangleq \tilde{C} \quad \text{e} \quad H_{\tilde{z}w}^K \triangleq H_{\tilde{z}w}$$

existe $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ satisfazendo (2.13).

Aplicando o complemento de Schur à inequação matricial (2.13) obtém-se

$$\Lambda(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) < \mathbf{0} \quad (3.41)$$

onde a função matricial Λ é definida como

$$\Lambda(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & P\tilde{B} & \tilde{C}' \\ \tilde{B}'P & -\delta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e $\delta \triangleq \gamma^2$.

Como $P = P' > \mathbf{0}$, define-se $S \triangleq P^{-1}$, tais que P e S sejam particionadas da forma

$$P \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad S \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S'_{12} & S_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.43)$$

Usando o fato que $PS = \mathbf{I}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} P_{11}S_{11} + P_{12}S'_{12} & P_{11}S_{12} + P_{12}S_{22} \\ P'_{12}S_{11} + P_{22}S'_{12} & P'_{12}S_{12} + P_{22}S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

segue de (3.43) e (3.44) que

$$P_{11} > \mathbf{0}, \quad S_{11} > \mathbf{0} \quad \text{e} \quad P_{11} > S_{11}^{-1} \quad (3.45)$$

(veja o apêndice A para detalhes). Portanto,

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.46)$$

Note que de (3.44), a identidade

$$P_{12}S'_{12} = \mathbf{I} - P_{11}S_{11} \quad (3.47)$$

para S_{11} e P_{11} satisfazendo (3.46) é tal que $\mathbf{I} - P_{11}S_{11}$ é não singular e, portanto, P_{12} e S_{12} têm posto de linha completo⁶. Desta forma, verifica-se que P satisfaz a identidade $PJ = \tilde{J}$ para

$$J \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ S'_{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} & P_{11} \\ \mathbf{0} & P'_{12} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

de tal forma que as matrizes J e \tilde{J} são inversíveis.

Definindo-se

$$\hat{J} = \text{diag}[J, \mathbf{I}, \mathbf{I}], \quad \hat{J} \in \mathbb{R}^{(2n+m+p) \times (2n+m+p)} \quad (3.49)$$

e multiplicando (3.41) à direita e à esquerda, respectivamente, por \hat{J}' e \hat{J} obtém-se a inequação matricial

$$\Lambda_J(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) < \mathbf{0} \quad (3.50)$$

onde a função matricial Λ_J é definida por

$$\Lambda_J(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} J'\tilde{A}'\tilde{J} + \tilde{J}'\tilde{A}J & \tilde{J}'\tilde{B} & J'\tilde{C}' \\ \tilde{B}'\tilde{J} & -\delta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{C}'J & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Efetuada algumas manipulações algébricas em (3.50), isto é,

⁶Se a restrição em (3.46) fosse do tipo \geq , $\mathbf{I} - P_{11}S_{11}$ poderia ser singular. Neste caso as matrizes P_{12} e S_{12} podem ser perturbadas de $\epsilon > 0$, de tal forma a forçar a obtenção do posto completo.

$$\tilde{J}' \tilde{A} J = \begin{bmatrix} AS_{11} & A \\ P_{11}AS_{11} + P_{12}B_fCS_{11} + P_{12}A_fS'_{12} & P_{11}A + P_{12}B_fC \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\tilde{J}' \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ P_{11}B + P_{12}B_fD \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$J' \tilde{C}' = \begin{bmatrix} S_{11}L' - S_{12}C'_f \\ L' \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

obtem-se

$$\hat{\Lambda}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, S_{12}, P_{12}, A_f, B_f, C_f, \delta) < \mathbf{0} \quad (3.55)$$

onde

$$\hat{\Lambda}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, S_{12}, P_{12}, A_f, B_f, C_f, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} AS_{11} + S_{11}A' & A + S_{11}A'P_{11} + S_{11}C'B'_fP'_{12} + S_{12}A'_fP'_{12} \\ A' + P_{11}AS_{11} + P_{12}B_fCS_{11} + P_{12}A_fS'_{12} & A'P_{11} + P_{11}A + P_{12}B_fC + C'B'_fP'_{12} \\ B' & B'P_{11} + D'B'_fP'_{12} \\ LS_{11} - C_fS'_{12} & L \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\begin{bmatrix} B & S_{11}L' - S_{12}C'_f \\ P_{11}B + P_{12}B_fD & L' \\ -\delta \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Definindo-se

$$Z \triangleq P_{12}B_f, \quad \tilde{Z} \triangleq C_fS'_{12} \quad \text{e} \quad \hat{Z} \triangleq P_{12}A_fS'_{12} \quad (3.57)$$

a inequação (3.55) é equivalente a

$$\tilde{\Lambda}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, Z, \tilde{Z}, \hat{Z}, \delta) < \mathbf{0} \quad (3.58)$$

com

$$\tilde{\Lambda}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, Z, \tilde{Z}, \hat{Z}, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} AS_{11} + S_{11}A' & A + S_{11}A'P_{11} + S_{11}C'Z' + \hat{Z}' \\ A' + P_{11}AS_{11} + ZCS_{11} + \tilde{Z} & A'P_{11} + P_{11}A + C'Z' + ZC \\ B' & B'P_{11} + D'Z' \\ LS_{11} - \tilde{Z} & L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & S_{11}L' - \tilde{Z}' \\ P_{11}B + ZD & L' \\ -\delta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Por fim, pré e pós-multiplicando a inequação matricial não-linear (3.58) pela transformação de similaridade denotada por

$$\text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}] \quad (3.60)$$

e definindo-se uma nova mudança de variáveis dada por

$$R \triangleq S_{11}^{-1}, \quad X \triangleq P_{11}, \quad M \triangleq \hat{Z}R, \quad N \triangleq \tilde{Z}R \quad (3.61)$$

obtém-se a \mathcal{LMI} apresentada em (3.38).

Aplicando a mesma linha de transformações acima, com respeito a $P = P' > \mathbf{0}$, tem-se

$$\hat{P} = J'PJ = J'\tilde{J} = \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

e ainda

$$\text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}] \times \hat{P} \times \text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}] \quad (3.63)$$

de tal forma que, pelo complemento de Schur aplicado a (3.63), obtém-se (3.39), isto é,

$$X - S_{11}^{-1} = X - R > \mathbf{0} \quad (3.64)$$

(*Suficiência*). Suponha que existam (R, X, M, N, Z, δ) satisfazendo as \mathcal{LMI} s (3.38) e (3.39). Multiplicando (3.38) à direita e à esquerda pela transformação de similaridade

$$\text{diag} [R^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$$

e definindo-se

$$S_{11} \triangleq R^{-1}, \quad P_{11} \triangleq X, \quad \tilde{Z} \triangleq NS_{11}, \quad \hat{Z} \triangleq MS_{11} \quad (3.65)$$

obtém-se prontamente (3.58).

A restrição (3.39) assegura que, para $P_{11} \triangleq X$ e $S_{11} \triangleq R^{-1}$, a matriz $\mathbf{I} - P_{11}S_{11}$ é inversível e, portanto, pode ser fatorada como em (3.47), isto é, $\mathbf{I} - P_{11}S_{11} = P_{12}S'_{12}$ de tal forma que P_{12} e S_{12} são matrizes quadradas inversíveis. Deste modo, as matrizes J e \tilde{J} , definidas em (3.48), são então inversíveis. Portanto, dadas as matrizes inversíveis P_{12} e S_{12} , isto claramente define uma correspondência bijetiva entre as variáveis Z, \tilde{Z}, \hat{Z} e A_f, B_f, C_f explicitadas em (3.57), considerando o filtro de ordem n descrito por

$$H_{\hat{z}_y}(s) \triangleq C_f(s\mathbf{I} - A_f)^{-1}B_f \quad (3.66)$$

Desta forma, a inequação (3.55) é estabelecida.

Como J é inversível, definindo-se $P \triangleq \tilde{J}J^{-1}$, segue que (3.50) (que é equivalente a (3.55) aplicando-se as identidades (3.52), (3.53) e (3.54)) multiplicado à direita e à esquerda por

$$J_{\tilde{z}} \triangleq \text{diag} [J^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$$

fornece (3.41).

Da restrição (3.39), segue imediatamente que $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

Conclui-se portanto do Lema 2.1 que, para $A_\psi \triangleq \tilde{A}$, $B_\psi \triangleq \tilde{B}$, $C_\psi \triangleq \tilde{C}$ e $H_{\tilde{z}_w}^K \triangleq H_{\tilde{z}_w}$, o filtro (\mathcal{F}_c) em (3.66), por construção, estabiliza assintoticamente a dinâmica do erro de filtragem assegurando $\|H_{\tilde{z}_w}\|_\infty < \sqrt{\delta}$. ■

NOTA 3.4 Como discutido na página 34 a hipótese (C-i) assegura a detectabilidade do sistema (\mathcal{S}_c), fato que também pode ser observado no bloco (2, 2) da restrição (3.38). ◇

NOTA 3.5 A restrição $R > \mathbf{0}$ está implícita no bloco (1, 1) em (3.38) (por hipótese, o sistema (\mathcal{S}_c) é quadraticamente estável), assegurando $X > \mathbf{0}$ a partir de (3.39). ◇

NOTA 3.6 As manipulações algébricas decorrentes das matrizes J e \tilde{J} , formadas a partir das submatrizes que definem P e S , têm sido amplamente usadas em vários artigos para o projeto de controladores de realimentação de saída [SGC97], [Gah96], [CG96], [AG95], [dOGB98], [GBdO98], [BH97], [Sch95a]. ◇

NOTA 3.7 Alguns trabalhos têm lançado mão de mudanças de variáveis similares às apresentadas em (3.61) como, por exemplo, [dOGB98], [GBdO98], [BH97], [Sch95a]. Particularmente, mudanças de variáveis similares às definidas em (3.57) aparecem constantemente nos trabalhos de Gahinet e colegas [CG96], [SGC97], [Gah96], [AG95]. ◇

Note que, como $\Gamma(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta)$, definida em (3.40), é uma expressão afim com respeito a todas as matrizes envolvidas, a extensão dos resultados do Teorema 3.4 para tratar sistemas incertos em domínios convexos limitados, isto é, $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c$, é imediata.

A partir do Teorema 3.4, uma estrutura particular para o filtro admissível (\mathcal{F}_c) pode ser estabelecida. De fato, a partir de (3.57) obtém-se

$$A_f = P_{12}^{-1} \hat{Z}(S'_{12})^{-1}, \quad C_f = \tilde{Z}(S'_{12})^{-1}, \quad B_f \triangleq P_{12}^{-1} Z \quad (3.67)$$

portanto, a matriz de transferência da saída medida $y(t)$ para a saída estimada $\hat{z}(t)$, é equivalente a

$$H_{\hat{z}_y}(s) = \tilde{Z}(S'_{12})^{-1}(s\mathbf{I} - P_{12}^{-1}\hat{Z}(S'_{12})^{-1})^{-1}P_{12}^{-1}Z \quad (3.68)$$

ou ainda

$$H_{\hat{z}_y}(s) = \tilde{Z}(s(P_{12}S'_{12}) - \hat{Z})^{-1}Z$$

Aplicando a identidade (3.47) tem-se

$$H_{\hat{z}_y}(s) = \tilde{Z}(s(\mathbf{I} - P_{11}S_{11}) - \hat{Z})^{-1}Z$$

Finalmente, lançando mão da mudança de variáveis definida em (3.61), a função de transferência do filtro (\mathcal{F}_c) é denotada por

$$H_{\hat{z}_y}(s) = \tilde{Z}R(s(R - X) - \hat{Z}R)^{-1}Z$$

ou, especificamente em termos das matrizes do enunciado do Teorema 3.4,

$$H_{\hat{z}_y}(s) = N(s(R - X) - M)^{-1}Z \quad (3.69)$$

com

$$\begin{cases} A_f = (R - X)^{-1}M \\ B_f = (R - X)^{-1}Z \\ C_f = N \end{cases} \quad (3.70)$$

Portanto, o projeto do filtro desejado envolve apenas as variáveis de otimização R , X , M , N , e Z , evitando assim o cálculo das matrizes P_{12} e S_{12} como em [Gah96], [SGC97].

A fim de estender os resultados do Teorema 3.4 para tratar o caso incerto, isto é, o problema ($\mathcal{P}_{\infty\gamma}^{rc}$), definem-se os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Gamma(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) < \mathbf{0}, \\ &\quad X - R > \mathbf{0}, \forall(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_v &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Gamma(A_i, B_i, C_i, D_i, R, X, M, N, Z, \delta) < \mathbf{0}, \\ &\quad X - R > \mathbf{0}, \forall(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_c)\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

De posse dessas definições, como as \mathcal{LMIs} (3.38) e (3.39) são afins em relação a todas as variáveis envolvidas, conclui-se que $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_V$ (veja [GPB91]). Sob esta nova óptica, basta então verificar as restrições apenas nos vértices do politopo.

Corolário 3.1 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O problema $(P_{\infty\gamma}^{rc})$ é solúvel $\forall(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c$ com a dinâmica do erro de filtragem (T_c) quadraticamente estável com atenuação de ruídos $\gamma^{\bar{r}}$ se, e somente se existirem $R = R', R \in \mathbb{R}^{n \times n}, X = X', X \in \mathbb{R}^{n \times n}, M \in \mathbb{R}^{n \times n}, N \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ de forma que*

$$(R, X, M, N, Z, \delta) \in \mathcal{J}_V \quad (3.73)$$

Em caso afirmativo, o filtro admissível é descrito por (3.69)-(3.70). \square

Prova: Imediata a partir do Teorema 3.4 e da equivalência $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_V$. \blacksquare

Desta forma, o custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ pode ser formulado como um procedimento convexo de otimização descrito em termos de \mathcal{LMIs} .

Corolário 3.2 *A solução de*

$$\min_{R, X, M, N, Z, \delta} \delta \quad (3.74)$$

sujeito a

$$(R, X, M, N, Z, \delta) \in \mathcal{J}_V \quad (3.75)$$

é tal que $\sqrt{\delta}$ é o custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ , isto é,

$$\|H_{\bar{z}w}\|_\infty < \gamma, \quad \forall(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c \quad (3.76)$$

Neste caso, o filtro admissível é descrito por (3.69)-(3.70). \square

Prova: A prova é imediata a partir do Corolário 3.1, usando a identidade $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_V$ e o fato que a função objetivo é linear sujeita a restrições lineares. Portanto, o problema de otimização é convexo. \blacksquare

⁷Como em [Xie96], o erro de filtragem (T_c) é dito ser quadraticamente estável com atenuação de ruídos γ se, e somente se, existir $P = P > 0, P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que (3.124) é satisfeita, $\forall(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) \in \mathcal{P}_d$.

NOTA 3.8 A restrição (3.39), isto é, $X - R > 0$ indica que o procedimento de otimização é restrito a computar uma estrutura de ordem completa para o filtro denotado em (3.69) ($n = n_f$). No entanto, esta restrição poderia ser relaxada para uma desigualdade do tipo $\geq \epsilon$, se posto($R - X$) = $n_f < n$, então a matriz de transferência do filtro (3.69) é equivalente ao sistema descriptor denotado por

$$(\mathcal{SD}_c :) \quad \begin{cases} (R - X) \dot{\hat{x}}(t) = M\hat{x}(t) + Zy(t), & \hat{x}(0) = 0 \\ \dot{z}(t) = N\hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.77)$$

e um filtro de ordem reduzida é obtido. \diamond

3.4 Filtragem Robusta $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

A caracterização do problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ ($P_{\infty\gamma}^{rc}$), na seção 3.3, permite estender aqueles resultados para o chamado problema de custo garantido de filtragem mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, que consiste em minimizar um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 com respeito ao erro de filtragem, enquanto um nível pré-especificado de atenuação de ruídos é garantido para todas as incertezas admissíveis. Este problema é apresentado formalmente a seguir.

Problema 3.2 ($P_{2\infty\gamma}^{rc}$) (PROBLEMA DE FILTRAGEM ROBUSTA $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$). *Determine um filtro (\mathcal{F}_c) admissível de forma que um limitante superior para a variância do erro de filtragem,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)' \tilde{z}(t)\} \quad (3.78)$$

seja minimizado e, além disso, assegure que \tilde{z} seja um erro de filtragem limitado satisfazendo $\|\tilde{z}\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2, \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c$ (\mathcal{P}_c foi definido em (3.33)). \triangle

Note que, na formulação do problema acima, a classe do sinal de entrada de ruídos w não é explicitada. Além disso, esta formulação matemática envolve a mesma função de transferência do sinal de ruídos para o erro de filtragem, tanto para a variância do erro de filtragem, quanto para a norma induzida \mathcal{L}_2 . Em outras palavras, um único canal deve associar características diferentes para um mesmo sinal de ruídos w . Desta forma, como observado em [HBM91], no contexto do critério \mathcal{H}_2 , o sinal w é caracterizado como um sinal de ruído branco com densidade espectral de potência igual à matriz identidade, simultaneamente, sob a óptica da norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência representando a dinâmica do erro de filtragem, a mesma entrada de ruídos tem a interpretação alternativa de ser um sinal de energia limitada, isto é, $w(t) \in \mathcal{L}_2[0; \infty)$.

Sem perda de generalidade, considere $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c$ arbitrário porém fixo. As matrizes da dinâmica do erro de filtragem (3.3) são descritas, neste caso, por

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L \quad -C_f], \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \mathbf{0}, \quad \tilde{H} \triangleq \mathbf{0} \quad (3.81)$$

Além disso, a matriz de transferência do sinal de entrada de ruídos w para o erro de filtragem \tilde{z} é definida como

$$H_{\tilde{z}w}(s) \triangleq \tilde{C}(s\mathbf{I} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \quad (3.82)$$

A variância do erro de filtragem é denotada pela norma \mathcal{H}_2 ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)'\tilde{z}(t)\} = \|H_{\tilde{z}w}\|_2^2 \quad (3.83)$$

e pode ser computada, no espaço de estados, por

$$\|H_{\tilde{z}w}\|_2^2 = \text{Tr}\{\tilde{B}'G\tilde{B}\} \quad (3.84)$$

onde $G = G' > \mathbf{0}$, $G \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ satisfaz a seguinte equação do Grammiano de observabilidade

$$\tilde{A}'G + G\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{C} = \mathbf{0} \quad (3.85)$$

Note que \tilde{A} é assintoticamente estável se, e somente se, $G = G' > \mathbf{0}$. Definindo-se a função matricial

$$\Xi_c(\tilde{G}) \triangleq \tilde{A}'\tilde{G} + \tilde{G}\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{C} \quad (3.86)$$

e o conjunto

$$\mathcal{M}_c \triangleq \{\tilde{G} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \tilde{G} = \tilde{G}' > \mathbf{0}, \Xi_c(\tilde{G}) \leq \mathbf{0}\} \quad (3.87)$$

segue que qualquer matriz $\tilde{G} \in \mathcal{M}_c$ é tal que

$$\text{Tr}\{\tilde{B}'\tilde{G}\tilde{B}\} \geq \text{Tr}\{\tilde{B}'G\tilde{B}\} \quad (3.88)$$

pois $\tilde{G} \geq G \in \mathcal{M}_c$.

Posto isto, o problema de filtragem misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pode ser reformulado como

$$\min_{P, H} \text{Tr}\{H\} \quad (3.89)$$

sujeito a $\Omega(\tilde{B}, P, H) > \mathbf{0}$, $P \in \mathcal{M}_c$ tal que $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \gamma$.

onde

$$\Omega(\tilde{B}, P, H) \triangleq \begin{bmatrix} H & \tilde{B}'P \\ P\tilde{B} & P \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

A partir do Lema 2.1, pode-se caracterizar $\text{Tr}\{H\}$ como um limitante superior para a variância do erro de filtragem sempre que a restrição $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \gamma$ for verificada. Para tanto, uma estratégia (embora mais conservativa) consiste em impor a mesma matriz P tanto para a inequação de Lyapunov como para a \mathcal{LMI} (2.13) (que garante o limitante para a norma \mathcal{H}_∞). De fato, considere a inequação (2.13) (onde $A_\psi \triangleq \tilde{A}$, $B_\psi \triangleq \tilde{A}$, $C_\psi \triangleq \tilde{C}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$) dada por

$$\tilde{A}'P + P\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{C} + \gamma^{-2}P\tilde{B}\tilde{B}'P < \mathbf{0} \quad (3.91)$$

que é equivalente a

$$\Xi_c(P) < -\gamma^{-2}P\tilde{B}\tilde{B}'P \quad (3.92)$$

Como $P\tilde{B}\tilde{B}'P \geq \mathbf{0}$, é imediato concluir que

$$\Xi_c(P) < \mathbf{0} \Rightarrow P \geq G \quad (3.93)$$

implicando, portanto, que $\text{Tr}\{H\} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)'\tilde{z}(t)\}$ é de fato um limitante para a norma \mathcal{H}_2 . Este procedimento é formalmente apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.5 *Seja $\gamma > 0$ fixado e considere $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c$ arbitrário porém fixo. A solução ótima de*

$$\min_{R, X, M, N, Z, H} \text{Tr}\{H\} \quad (3.94)$$

sujeito a

$$\Psi(B, D, H, Z, R, X) > \mathbf{0} \quad (3.95)$$

$$\Gamma(A, B, C, D, R, X, Z, M, N, \gamma^2) < \mathbf{0} \quad (3.96)$$

onde $R = R'$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = X'$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $H = H'$, $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$, a função matricial $\Gamma(\cdot)$ foi definida em (3.40) e $\Psi(\cdot)$ é definida por

$$\Psi(B, D, H, Z, R, X) \triangleq \begin{bmatrix} H & B'R & B'X + D'Z' \\ RB & R & R \\ XB + ZD & R & X \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

é tal que $\text{Tr}\{H\} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)'\tilde{z}(t)\}$ assegurando que $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \gamma$. Neste caso, o filtro (\mathcal{F}_c) admissível é dado por (3.69)-(3.70) \square

Prova: A prova segue imediatamente do Teorema 3.4 e do fato que a função objetivo é linear sujeita a restrições lineares, de forma que o problema de otimização é convexo. \square

limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 é garantido pela restrição (3.95) (que inclui a restrição $X - R > \mathbf{0}$), enquanto $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ é assegurada pela \mathcal{LMI} (3.96).

A restrição (3.95) é estabelecida da seguinte forma: multiplica-se $\Omega(\tilde{B}, P, H) > \mathbf{0}$ em (3.89), à direita e à esquerda por $diag[\mathbf{I}, J']$ e $diag[\mathbf{I}, J]$, de forma a obter

$$\Omega_J(\tilde{B}, P, H) \triangleq \begin{bmatrix} H & \tilde{B}'\tilde{J} \\ \tilde{J}'\tilde{B} & J'\tilde{J} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.98)$$

ou equivalentemente

$$\tilde{\Omega}(B, D, P_{11}, S_{11}, H) \triangleq \begin{bmatrix} H & B' & B'P_{11} + D'B_f'P_{12}' \\ B & S_{11} & \mathbf{I} \\ P_{11}B + P_{12}B_fD & \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.99)$$

onde J e \tilde{J} foram definidas em (3.48) para $PJ = \tilde{J}$. Definindo-se a mudança de variável $Z \triangleq P_{12}B_f$ e então, pré e pós-multiplicando $\tilde{\Omega}(B, D, P_{11}, S_{11}, H)$ por $diag[\mathbf{I}, S_{11}^{-1}, \mathbf{I}]$, a \mathcal{LMI} (3.95) é obtida para $X \triangleq P_{11}$ e $R \triangleq S_{11}^{-1}$. ■

Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Psi(B, D, H, Z, R, X) > \mathbf{0}, \\ &\Gamma(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) < \mathbf{0}, \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c\} \end{aligned} \quad (3.100)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2\mathcal{V}} &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Psi(B_i, D_i, H, Z, R, X) > \mathbf{0}, \\ &\Gamma(A_i, B_i, C_i, D_i, R, X, M, N, Z, \delta) < \mathbf{0}, \forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_c)\} \end{aligned} \quad (3.101)$$

Como $\Psi(\cdot)$ e $\Gamma(\cdot)$ são expressões afins com relação a todas as matrizes envolvidas, segue que $\mathcal{J}_2 \equiv \mathcal{J}_{2\mathcal{V}}$ e, portanto, o problema de filtragem misto ($\mathcal{P}_{2\infty\gamma}^{rc}$) pode ser reformulado como um problema de otimização descrito em termos de \mathcal{LMI} s.

Corolário 3.3 *A solução ótima de*

$$\min_{R, X, M, N, Z, H} \text{Tr}\{H\} \quad (3.102)$$

sujeito a

$$(R, X, M, N, Z, H, \gamma^2) \in \mathcal{J}_{2\nu} \quad (3.103)$$

é tal que

$$\text{Tr}\{H\} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)' \tilde{z}(t)\} \quad (3.104)$$

e

$$\|H_{\tilde{z}w}\|_{\infty} < \gamma, \quad \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}_c \quad (3.105)$$

Neste caso, o filtro robusto admissível é descrito por (3.69)-(3.70). \square

Prova: A prova é imediata a partir do Teorema 3.5, usando a identidade $\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_{\nu}$. \blacksquare

3.5 Exemplo

Exemplo 3.1 Considere o seguinte sistema LIT contínuo no tempo investigado em [XdS95]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 + \zeta \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -0.4545 \\ 0.9090 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = [0 \quad 100] x(t) + w(t) \\ z(t) = [0 \quad 100] x(t) \end{cases} \quad (3.106)$$

onde o sinal de entrada de ruídos é considerado como pertencente a classe $\mathcal{L}_2[0; \infty)$. Além disso, assume-se que o parâmetro incerto ζ satisfaz $|\zeta| \leq 0.3$, de forma que o sistema (3.106) é quadraticamente estável. Neste caso, os dois vértices do conjunto poliedral $\mathcal{V}(\mathcal{P}_d)$ são denotados pelas matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.7 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1.3 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Na abordagem por equação de Riccati proposta por Xie e de Souza em [XdS95] e discutida na seção 3.2.1, o valor mínimo do nível de atenuação de ruídos encontrado é $\gamma_R = 1.255$. Por outro lado, o custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_{∞} utilizando os resultados do Corolário 3.2, permitem obter $\gamma = 1.000091$ e (\mathcal{F}_c) descrito pelas matrizes

$$A_f = 10^6 \times \begin{bmatrix} -0.0000047 & -6.1125475 \\ 0.0000009 & -0.0665042 \end{bmatrix}, \quad B_f = 10^4 \times \begin{bmatrix} 6.1125820 \\ 0.0665041 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [0 \quad 99.9993] \quad (3.108)$$

Note que este exemplo caracteriza a existência de seqüências de filtragem de altos ganhos, isto é,

$$\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty \leq \gamma_\kappa, \quad \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \gamma_\kappa \rightarrow \gamma^*, \text{ tal que } \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|B_{f_\kappa}\| \rightarrow \infty$$

Tal caracterização foi discutida na seção 2.1, como uma extensão da abordagem do problema de controle \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos [Sch89], [Sch90], [POP98]. A fim de se evitar um comportamento numérico indesejável, a restrição $X - R > \mathbf{0}$ pode ser substituída por $X - R > \epsilon \mathbf{I}$, $\epsilon > 0$ de forma que $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|B_{f_\kappa}\| < \infty$, $\gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^* + \xi$, $\xi > 0$. Considerando $X - R > 10^{-2} \mathbf{I}$, o procedimento de otimização apresentado no Corolário 3.2 permite obter $\gamma = 1.0079$ com

$$A_f = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0.0000274 & -1.0759941 \\ 0.0001002 & -0.0204252 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 107.5863 \\ 2.0375 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [0 \quad 100] \tag{3.109}$$

As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram, respectivamente, os diagramas de valores singulares para os filtros robustos (3.108) e (3.109) conectados ao sistema incerto (3.106), considerando os vértices (3.107) e o sistema nominal ($\zeta = 0$). Pelos diagramas observa-se que de fato os valores de γ encontrados representam custos garantidos de filtragem \mathcal{H}_∞ levando em conta o filtro projetado.

Para o projeto do filtro misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, a figura 3.3 ilustra a relação entre os valores de atenuação de ruídos pré-especificados γ e os valores dos limitantes superiores $Tr(H)$ para a norma \mathcal{H}_2 . A tabela 3.1 apresenta, para alguns valores pré-especificado de γ , os respectivos limitantes da norma \mathcal{H}_2 e as matrizes do filtro associado.

3.6 Conclusão

Neste capítulo, o problema de custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ foi abordado envolvendo várias formas de descrição das incertezas do sistema. Dois procedimentos apresentados na literatura, abordando incertezas do tipo limitada em norma, foram revistos, a saber: abordagens por equações de Riccati [XdS95] e por \mathcal{LMIs} acopladas [LF95], [LF97].

Sob o cenário de incertezas do tipo politópicas, elaborou-se uma nova abordagem para o problema de custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ , descrita em termos de um procedimento convexo de otimização envolvendo apenas \mathcal{LMIs} . Como consequência, esta nova abordagem foi estendida para tratar o problema de custo garantido de filtragem misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Além disso, especificações adicionais como, por exemplo, restringir a dinâmica do filtro a uma certa região podem ser incorporadas utilizando as técnicas por \mathcal{LMIs} apresentadas [PP98c].

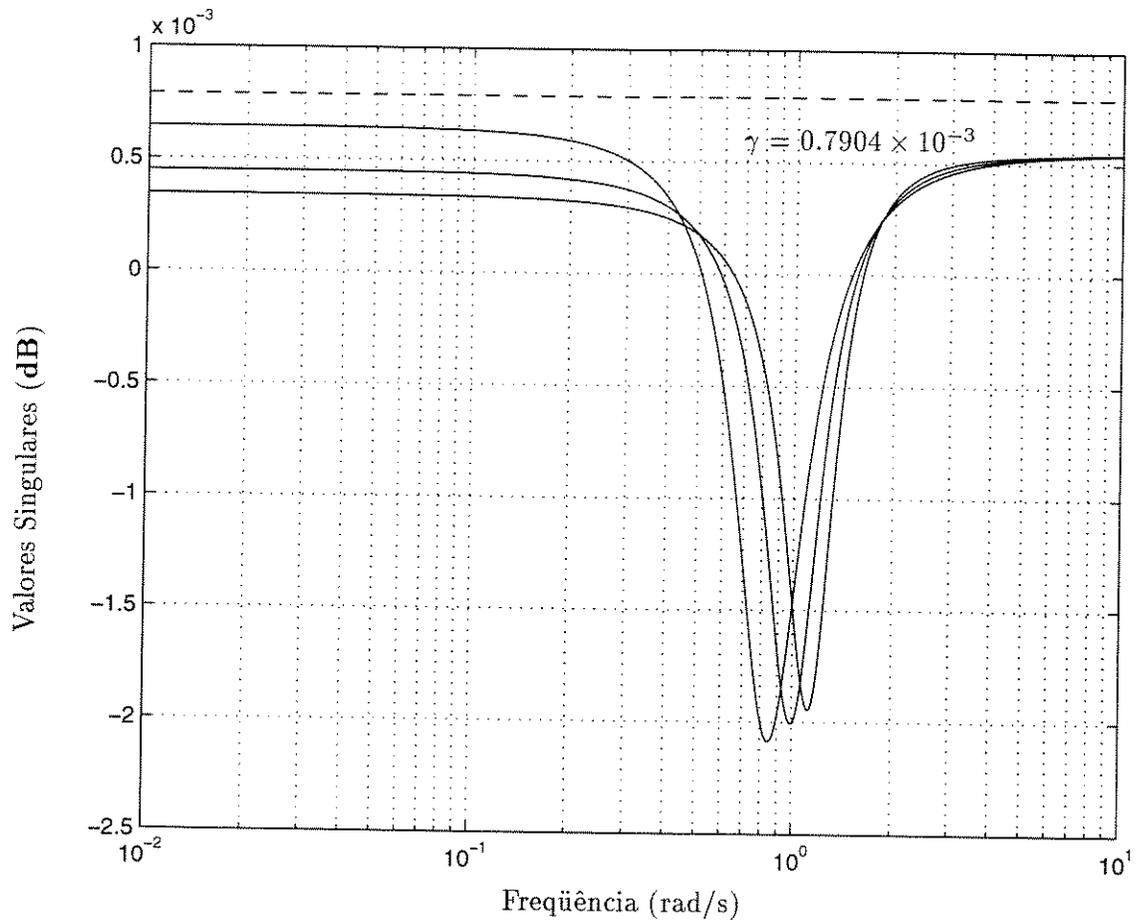


Figura 3.1: Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.108) conectado ao sistema incerto (3.106), considerando-se os vértices A_1 , A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.1.

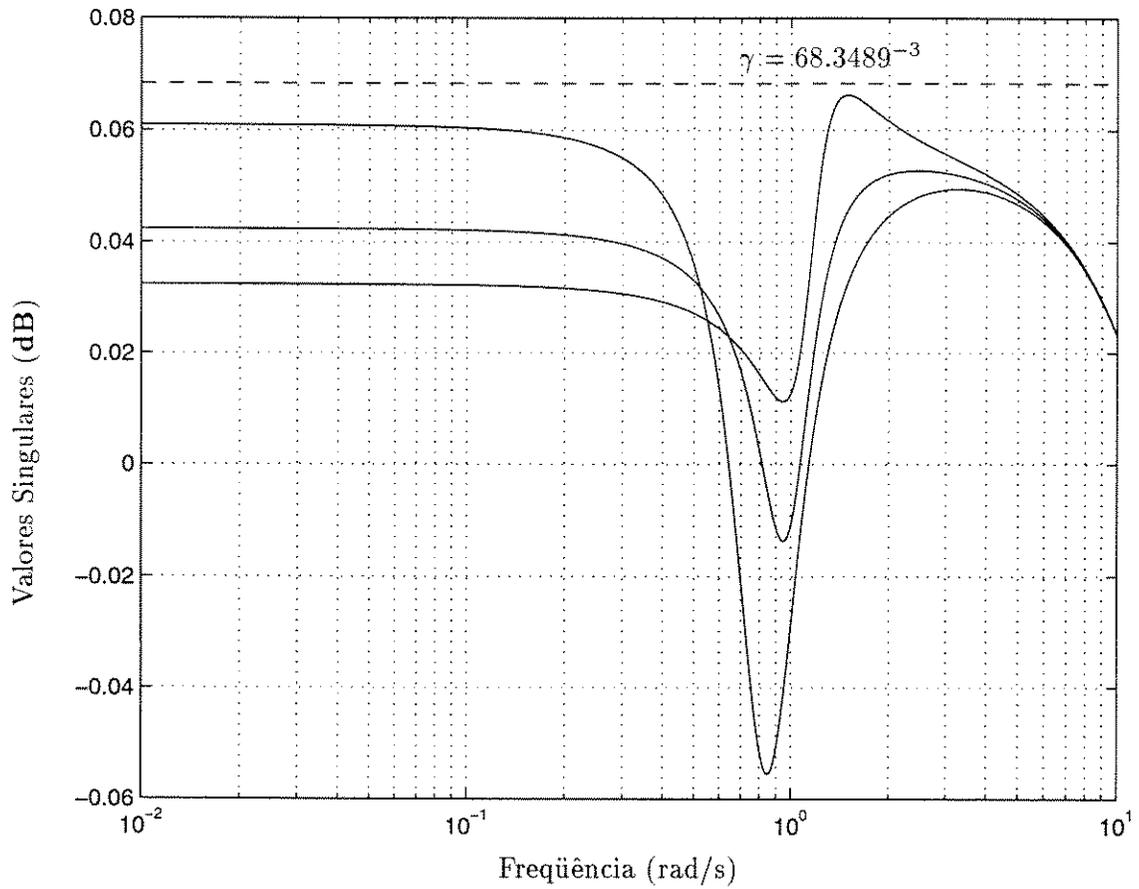


Figura 3.2: Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.109) conectado ao sistema incerto (3.106) e considerando os vértices A_1 , A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.1.

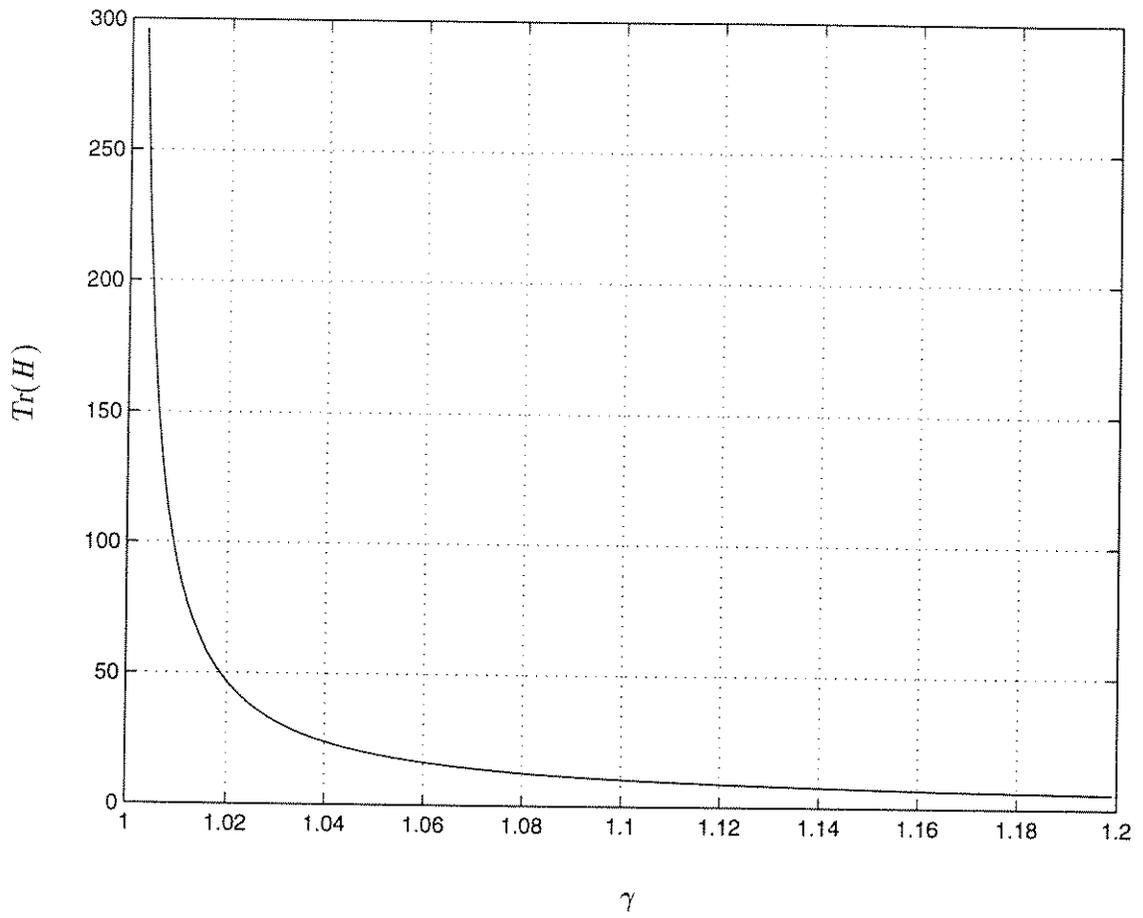


Figura 3.3: Atenuação de ruídos pré-especificada $\gamma \times$ limitante superior $Tr(H)$ para a norma \mathcal{H}_2 - Exemplo 3.1.

γ	$\text{Tr}(H)$	A_f	B_f	C_f
1.05	19.4557	$\begin{bmatrix} 0.2618 & -1765.5008 \\ 1.0017 & -111.0018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17.6421 \\ 1.1050 \end{bmatrix}$	$[0 \ 100]$
1.1	10.3259	$\begin{bmatrix} 0.2531 & -920.7940 \\ 1.0016 & -101.8574 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.1952 \\ 1.0135 \end{bmatrix}$	$[0 \ 100]$
1.255	4.8140	$\begin{bmatrix} 0.2275 & -408.3037 \\ 1.0013 & -96.3055 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.0708 \\ 0.9580 \end{bmatrix}$	$[0 \ 100]$
1000	1.7146	$\begin{bmatrix} 0.1027 & -113.7324 \\ 1.0000 & -93.1148 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.1273 \\ 0.9261 \end{bmatrix}$	$[0 \ 100]$

Tabela 3.1: Alguns valores numéricos para o filtro misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ associado a atenuação de ruídos γ pré-especificada e o respectivo limitante da norma \mathcal{H}_2 - Exemplo 3.1.

3.7 Notas e Referências

S-procedure

Para F_0, \dots, F_p funções quadráticas da variável $s \in \mathbb{R}^h$, definem-se

$$F_i(s) \triangleq s' T_i s + 2u_i' s + v_i, \quad i = 0, \dots, l, \quad T_i = T_i'$$

Considere a seguinte condição sobre F_0, \dots, F_p :

$$F_0(s) \geq 0 \quad \forall s \text{ tal que } F_i(s) \geq 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (3.110)$$

Se existirem escalares $\tau_1 \geq 0, \dots, \tau_l \geq 0$, tais que

$$\forall s, \quad F_0(s) - \sum_{i=1}^l \tau_i F_i(s) \geq 0 \quad (3.111)$$

então (3.110) verifica-se. Como observado em [BGFB94], se as funções F_i forem afins, então (3.110) e (3.111) são equivalentes e o resultado acima é conhecido como Lema de Farkas.

Generalizações

Neste capítulo procurou-se criar uma certa padronização para a apresentação das diferentes abordagens. Para tanto, adotou-se como modelo a estratégia [XdS95] apresentada na seção 3.2.1, onde a solvabilidade do problema de filtragem robusta ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$) passa pela determinação de um filtro (\mathcal{F}_c) admissível *estritamente próprio*.

No entanto, cabe ressaltar que, a abordagem por \mathcal{LMI} s acopladas [LF95] e [LF97], exposta na seção 3.2.2, permite também lidar com o projeto de um filtro próprio robusto, bem como tratar o caso em que a saída a ser estimada z , no sistema (3.1), inclua incertezas do tipo (3.14) e que, eventualmente, possa ser corrompida por um sinal ruidoso, isto é,

$$z(t) = Lx(t) + Tw(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} H_{3i} \xi_i(t) \quad (3.112)$$

Neste caso a \mathcal{LMI} (3.29) é reescrita da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}'_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} A'S + SA & SB & SH_1 & L' & E'_1 J \\ B'S & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & T' & E'_2 J \\ H'_1 S & \mathbf{0} & -J & H'_3 & E'_3 J \\ \hline L & T & H_3 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ JE_1 & JE_2 & JE_3 & \mathbf{0} & -J \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (3.113)$$

Tais generalizações também podem ser incorporadas pela abordagem descrita em termos de \mathcal{LMI} s proposta na seção 3.3, para tratar o problema ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$). De fato, considere o sistema incerto (\mathcal{S}_c), descrito em (3.1) e (3.112), onde $\xi_i(t) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, \alpha$.

Os parâmetros incertos do modelo são considerados agora como pertencentes a um conjunto convexo compacto do tipo politópico, isto é,

$$(A, B, C, D, L, T) \in \mathcal{P}_c^g \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c^g &\triangleq \{ (A, B, C, D, L, T) \mid (A, B, C, D, L, T) = \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i (A_i, B_i, C_i, D_i, L_i, T_i); \tau_i \geq 0; \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i = 1 \} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Considere o filtro próprio denotado por

$$(\mathcal{F}_c^g :) \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), & \hat{x}(0) = \mathbf{0} \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t) + D_f y(t) \end{cases} \quad (3.116)$$

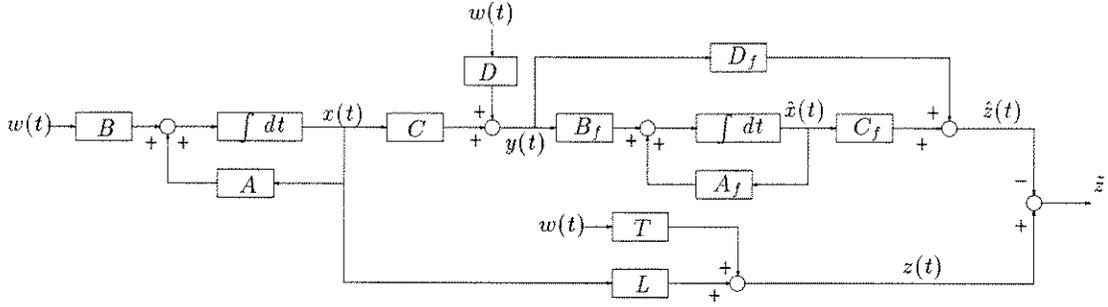


Figura 3.4: Filtro (\mathcal{F}_c^g) conectado ao sistema incerto (\mathcal{S}_c) , descrito em (3.1) e (3.112), onde $\xi_i(t) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, \alpha$.

A dinâmica do erro de filtragem (figura 3.4) é então descrita por

$$(\mathcal{T}_c^g :) \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} w(t) \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{D} w(t) \end{cases} \quad (3.117)$$

onde

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L - D_f C \quad -C_f], \quad \tilde{D} \triangleq T - D_f D, \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

Com isto, a versão para o Teorema 3.4 é apresentada a seguir.

Teorema 3.6 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O filtro (\mathcal{F}_c^g) em (3.116) é um filtro admissível com erro de filtragem \tilde{z} , para $x(0) = \mathbf{0}$, satisfazendo a relação $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \sqrt{\delta}$ se, e somente se existirem $R = R'$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = X'$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$ tais que*

$$\Gamma_g(A, B, C, D, L, T, R, X, M, N, Z, D_f, \delta) < \mathbf{0} \quad (3.120)$$

$$X - R > 0 \quad (3.121)$$

onde a função matricial $\Gamma_g(\cdot)$ é definida por

$$\Gamma_g(A, B, C, D, L, T, R, X, M, N, Z, D_f, \delta) \triangleq$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} A'R + RA & RA + A'X + C'Z' + M' & RB & L' - C'D_f' - N' \\ A'R + XA + ZC + M & A'X + XA + ZC + C'Z' & XB + ZD & L' - C_f'D_f' \\ B'R & B'X + D'Z' & -\mathbf{I} & T' - D'D_f' \\ L - D_fC - N & L - D_fC & T - D_fD & -\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

□

Prova: (Necessidade). A prova segue a mesma linha do Teorema 3.4, considerando, no entanto, uma inequação mais geral no Lema 2.1, que leva em conta a matriz \tilde{D} em (3.119) (veja, por exemplo, [GA94], [BGFB94], [IS94], [ZKSN95], [AG95], [PTP97]):

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{C}'\tilde{C} & P\tilde{B} + \gamma^{-2}\tilde{C}'\tilde{D} \\ \tilde{B}'P + \gamma^{-2}\tilde{D}'\tilde{C} & \gamma^{-2}\tilde{D}'\tilde{D} - \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.123)$$

ou, pelo complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & P\tilde{B} & \tilde{C}' \\ \tilde{B}'P & -\mathbf{I} & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.124)$$

onde $\delta \triangleq \gamma^2$.

Multiplicando (3.124) à direita e à esquerda, respectivamente, por \tilde{J}' e \tilde{J} definida em (3.49) obtém-se

$$\begin{bmatrix} J'\tilde{A}'\tilde{J} + \tilde{J}'\tilde{A}J & \tilde{J}'\tilde{B} & J'\tilde{C}' \\ \tilde{B}'\tilde{J} & -\mathbf{I} & \tilde{D}' \\ \tilde{C}'\tilde{J} & \tilde{D} & -\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.125)$$

Logo, para (3.52), (3.53) e

$$J'\tilde{C}' = \begin{bmatrix} S_{11}L' - S_{11}C'D_f' - S_{12}C_f' \\ L' - C'D_f' \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

tem-se que (3.125) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} AS_{11} + S_{11}A' & A + S_{11}A'P_{11} + S_{11}C'B_f'P_{12}' + S_{12}A_f'P_{12}' \\ A' + P_{11}AS_{11} + P_{12}B_fCS_{11} + P_{12}A_fS_{12}' & A'P_{11} + P_{11}A + P_{12}B_fC + C'B_fP_{12}' \\ B' & B'P_{11} + D'B_fP_{12}' \\ LS_{11} - D_fCS_{11} - C_fS_{12}' & L - D_fC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ P_{11}B + P_{12}B_fD \\ -\mathbf{I} \\ T - D_fD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}L' - S_{11}C'D_f' - S_{12}C_f' \\ L' - C'D_f' \\ T' - D'D_f' \\ -\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.127)$$

Pré e pós-multiplicando a inequação matricial não-linear (3.127) pela transformação de similaridade denotada por

$$\text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}] \quad (3.128)$$

e usando a mudança de variáveis definida em (3.57), isto é,

$$Z \triangleq P_{12}B_f, \quad \tilde{Z} \triangleq C_f S'_{12} \quad \text{e} \quad \hat{Z} \triangleq P_{12}A_f S'_{12} \quad (3.129)$$

obtem-se

$$\begin{bmatrix} S_{11}^{-1}A + A'S_{11}^{-1} & S_{11}^{-1}A + A'P_{11} + C'Z' + S_{11}^{-1}\hat{Z}' \\ A'S_{11}^{-1} + P_{11}A + ZC + \tilde{Z}S_{11}^{-1} & A'P_{11} + P_{11}A + C'Z' + ZC \\ B'S_{11}^{-1} & B'P_{11} + D'Z' \\ L - D_f C - \tilde{Z}S_{11}^{-1} & L - D_f C \\ S_{11}^{-1}B & L' - C'D'_f - S_{11}^{-1}\tilde{Z}' \\ P_{11}B + ZD & L' - C'D'_f \\ -\mathbf{I} & T' - D'D_f \\ T - D_f D & -\delta\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.130)$$

Por fim, definindo-se uma nova mudança de variáveis dada por

$$R \triangleq S_{11}^{-1}, \quad X \triangleq P_{11}, \quad M \triangleq \hat{Z}R, \quad N \triangleq \tilde{Z}R \quad (3.131)$$

obtem-se a \mathcal{LMI} apresentada em (3.120).

(Suficiência). Segue os mesmos passos da apresentada no Teorema 3.4. \blacksquare

De forma equivalente a (3.69) e (3.70) na seção 3.3, uma estrutura particular para o filtro (\mathcal{F}_c^g) em (3.116) pode ser estabelecida. De fato, usando as mudanças de variáveis em (3.129) e (3.131) obtém-se

$$(\mathcal{F}_c^g) : \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (R - X)^{-1}M\hat{x}(t) + (R - X)^{-1}Zy(t), & \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(t) = N\hat{x}(t) + D_f y(t) \end{cases} \quad (3.132)$$

Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^g &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, D_f, \delta) \mid \Gamma_g(A, B, C, D, L, T, R, X, M, N, Z, D_f, \delta) < 0, \\ &X - R > 0, \forall(A, B, C, D, L, T) \in \mathcal{P}_c^g\} \end{aligned} \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_v^g &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, D_f, \delta) \mid \Gamma_c(A_i, B_i, C_i, D_i, L_i, T_i, R, X, M, N, Z, D_f, \delta) < 0, \\ &X - R > 0, \forall(A_i, B_i, C_i, D_i, L_i, T_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_c^g)\} \end{aligned} \quad (3.134)$$

onde, naturalmente, $\mathcal{J}^g \equiv \mathcal{J}_v^g$. Portanto, o Corolário 3.1 pode ser rerepresentado da seguinte forma.

Corolário 3.4 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O problema de filtragem robusta ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$) considerando (\mathcal{F}_c^g) é solúvel $\forall(A, B, C, D, L, T) \in \mathcal{P}_c^g$ e a dinâmica do erro de filtragem (T_c^g) é quadraticamente estável*

com atenuação de ruídos γ se, e somente se, existirem $R = R'$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = X'$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$ de forma que

$$(R, X, M, N, Z, D_f, \delta) \in \mathcal{J}_V^g \quad (3.135)$$

Em caso afirmativo, o filtro admissível é descrito por (3.132). \square

Prova: Imediata a partir do Teorema 3.6 e da equivalência $\mathcal{J}^g \equiv \mathcal{J}_V^g$. \blacksquare

Embora o problema $(P_{\infty\gamma}^{rc})$ permita uma formulação matemática geral do tipo $(A, B, C, D, L, T) \in \mathcal{P}_2^g$, sob o ponto de vista de projeto, no entanto, poder-se-ia questionar qual o significado de abordar o caso em que a matriz L é incerta, já que a mesma representa uma escolha de ponderações sobre uma combinação de estados do sistema. Essa questão pode ser interpretada da seguinte forma: suponha, por hipótese, que em um dado mercado financeiro, as cotações de um grupo de moedas estrangeiras, do ouro, as principais ações, bem como a confiança dos investidores representem as variáveis de estado. Suponha também que o mesmo mercado esteja sujeito a influências externas de âmbito governamental, porém limitadas a um conjunto de decisões no sentido de regular o mercado. A oscilação das cotações e a confiança dos investidores são modeladas como incertezas do tipo politópica, bem como possíveis incertezas associadas às decisões governamentais. Suponha que um certo investidor, deseje estabelecer um *portfolio* neste mercado financeiro que lhe garanta, a longo prazo, uma certa faixa de rentabilidade L com o menor risco possível γ . Seria então razoável supor que, na rentabilidade a ser estimada incluem-se incertezas a partir da combinação da oscilação das cotações e da confiança dos investidores.

Note que, com relação ao projeto para o problema de filtragem robusta $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, isto é, $(P_{2\infty\gamma}^{rc})$, é imprescindível que o filtro considerado seja estritamente próprio. Isto decorre do fato do critério \mathcal{H}_2 admitir somente funções pertencentes ao $\mathbb{R}\mathcal{H}_2$.

Exemplo 3.3 Considere o sistema incerto apresentado no exemplo 3.1 da seção 3.5, sendo que o projeto envolve agora a determinação de um filtro próprio como em (\mathcal{F}_2^g) . Seguindo os mesmos passos do exemplo 3.1 e considerando o Corolário (3.4), o valor mínimo de atenuação de ruídos é dado por $\gamma^* = 1.00000175 = 1.5175 \times 10^{-5}$ dB com as matrizes⁸ do filtro robusto descritas como:

$$A_f = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0 & -4.8691 \\ 0 & -0.0528 \end{bmatrix}, \quad B_f = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.8691 \\ 0.0528 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [0 \quad 0.0796], \quad D_f = 0.9992 \quad (3.136)$$

Novamente pode-se perceber a ocorrência de altos ganhos no projeto do filtro robusto e, portanto, como discutido no exemplo 3.1, pode-se impor $X - R > \epsilon \mathbf{I}$, $\epsilon = 10^{-4}$ obtendo-se assim $\gamma = 1.00008929 = 7.7550 \times 10^{-4}$ dB com

$$A_f = 10^2 \times \begin{bmatrix} 0.0008 & -6.0380 \\ 0.0100 & -0.0803 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 6.0281 \\ 0.0753 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [0 \quad 0.0577], \quad D_f = 0.9994 \quad (3.137)$$

⁸Os valores das matrizes do filtro apresentados neste exemplo foram arredondados para os 4 primeiros algarismos significativos. No entanto, os diagramas de valores singulares foram plotados considerando a precisão máxima disponível no MATLAB.

Nas figuras 3.5 e 3.6 são apresentados, respectivamente, os diagramas de valores singulares considerando os dois vértices e o sistema nominal ($\zeta = 0$) do exemplo 3.1, para os filtros robustos (3.136) e (3.137) conectados ao sistema incerto. O caráter de custo garantido \mathcal{H}_∞ dos valores de γ obtidos tanto para $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|B_f \nu\| \rightarrow \infty$ como para $X - R > \epsilon \mathbf{I}$ pode ser observado nos diagramas (envolvendo o projeto de filtros com estrutura própria).

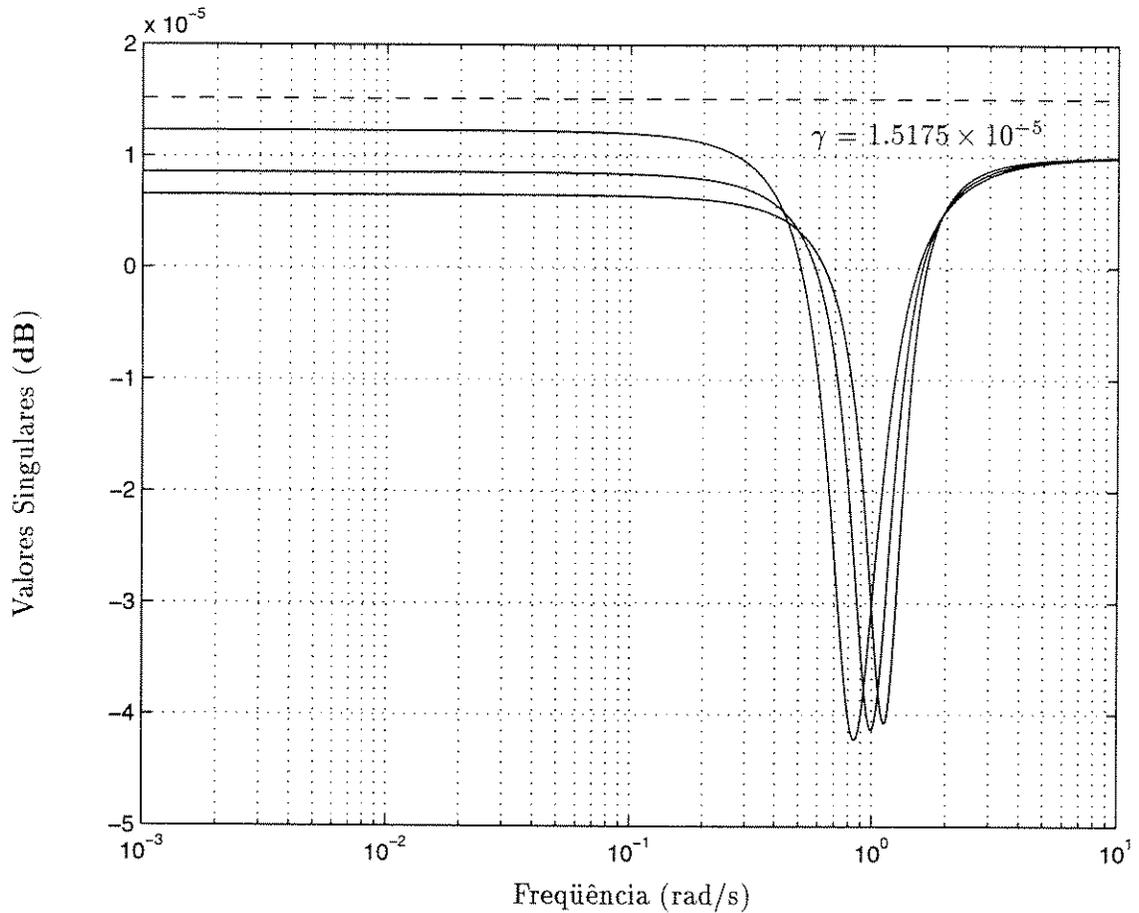


Figura 3.5: Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.136) conectado ao sistema incerto (3.106), considerando-se os vértices A_1 , A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.2.

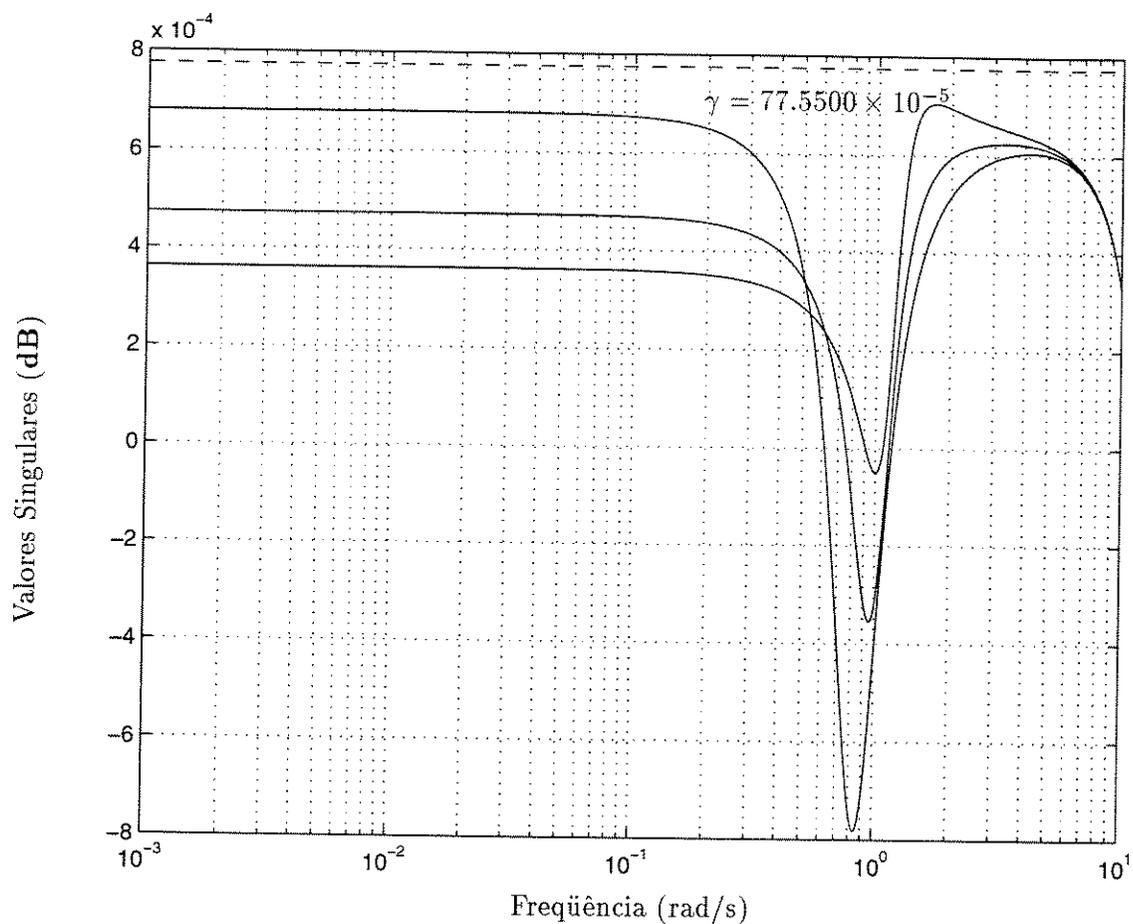


Figura 3.6: Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (3.137) conectado ao sistema incerto (3.106), considerando-se os vértices A_1 , A_2 e o sistema nominal ($\zeta = 0$) - Exemplo 3.2.

Capítulo 4

Filtragem Robusta \mathcal{H}_∞ - Sistemas Discretos

4.1 Introdução

Considere o sistema incerto discreto LIT dado por

$$(\mathcal{S}_d :) \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bw(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} H_{1i}\xi_i(t), & x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} H_{2i}\xi_i(t) \\ z(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^r$ é o vetor de saídas medidas, $w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é o sinal de entrada de ruído (incluindo ruídos de medida e processo) e $z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$ é o sinal a ser estimado. Os sinais $\xi_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{k_i}$ representam as variáveis de incertezas; as matrizes H_{1i} e H_{2i} são matrizes constantes conhecidas, $i = 1, \dots, \alpha$.

A seguinte hipótese é estabelecida:

- **(D-i)** O sistema (\mathcal{S}_d) é quadraticamente estável⁹.

A hipótese **(D-i)** garante que o erro de filtragem é limitado, já que a estabilidade assintótica da dinâmica do erro de filtragem é ditada pelos estados do sistema (\mathcal{S}_d) compostos com os estados do filtro admissível.

Considere o filtro (1.2) dado por

⁹Um sistema é dito ser quadraticamente estável se existe $P = P' > \mathbf{0}$ tal que para todas as incertezas admissíveis em A

$$A'PA - P < \mathbf{0}.$$

$$(\mathcal{F}_d:) \quad \begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), & \hat{x}(0) = \mathbf{0} \\ \hat{z}(t) = C_f \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

A dinâmica do erro de filtragem é então descrita por

$$(\mathcal{T}_d:) \quad \begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}w(t) + \tilde{H}\tilde{\xi}(t) \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $\tilde{z} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$ é o erro de filtragem e \tilde{x} , $\tilde{\xi}$, \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} e \tilde{H} serão adequadamente definidas.

Sob esta nova óptica, envolvendo incertezas nos parâmetros do sistema, o problema sub-ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ ($\mathcal{P}_{\infty\gamma}$) é reformulado a fim de que o projeto do filtro robusto garanta um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ . Desta forma o problema a ser tratado consiste em:

Problema 4.1 ($\mathcal{P}_{\infty\gamma}^{rd}$) (PROBLEMA DE FILTRAGEM ROBUSTA \mathcal{H}_∞). *Assuma que o vetor de ruídos $w(t) \in \ell_2[0; \infty)$. Dada uma atenuação de ruídos $\gamma > 0$ fixa, determine um filtro (\mathcal{F}_d) admissível, tal que \tilde{z} seja um erro de filtragem limitado satisfazendo*

$$\|\tilde{z}\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2, \quad \tilde{x}(0) = \mathbf{0}, \quad w(t) \neq \mathbf{0} \quad (4.4)$$

para todas as incertezas admissíveis ao sistema (\mathcal{S}_d) . △

Como discutido no capítulo 3, as incertezas do sistema (\mathcal{S}_d) podem ser caracterizadas como estruturas do tipo limitado em norma, restrições quadráticas integráveis, politópicas, etc.

A síntese de (\mathcal{F}_d) atendendo ao problema $(\mathcal{P}_{\infty\gamma}^{rd})$ e envolvendo várias formas de descrição das incertezas será objeto do estudo a seguir. Similarmente ao capítulo anterior, a seção 4.2 tratará de duas abordagens: a primeira por equações do tipo Riccati ([XdSF91b]) e a segunda por \mathcal{LMIs} acopladas envolvendo \mathcal{RQIs} ([LF95], [LF97]). Nestas formulações, o problema de filtragem robusto \mathcal{H}_∞ é convertido em um problema de filtragem \mathcal{H}_∞ do tipo “escalar”.

Na seção 4.3, uma nova estratégia para a síntese de um filtro admissível (\mathcal{F}_d) , considerando incertezas do tipo politópicas no problema $(\mathcal{P}_{\infty\gamma}^{rd})$ em termos de \mathcal{LMIs} [PP98b], será discutida. Como extensão desta última abordagem, o problema de custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ em termos de um procedimento convexo de otimização será apresentado. Do mesmo modo que na seção 2.3.2, o Lema 2.2 estabelecerá um ponto de partida para elaborar condições necessárias e suficientes para a síntese de um filtro robusto admissível. Além disso, esta nova abordagem por \mathcal{LMIs} permitirá tratar o problema de filtragem de custo garantido misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ na seção 4.4.

4.2 Incertezas do Tipo Limitado em Norma

4.2.1 Formulação por Equação de Riccati

Considere o sistema incerto (4.1), onde $\alpha = 1$ e

$$\xi(t) \triangleq \Delta(t)E_1x(t) \quad (4.5)$$

de tal modo que $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{l \times k}$ é uma matriz variante no tempo e desconhecida que satisfaz $\|\Delta\| \leq 1, \forall t = 0, 1, \dots$. A matriz E_1 é uma matriz constante conhecida.

Considerando (4.1), (4.2) e (4.5), a dinâmica do erro de filtragem (4.3) é representada pelas matrizes

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ A - A_f - B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B - B_f D \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L - C_f \quad C_f], \quad \tilde{H} \triangleq \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 - B_f H_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \Delta(t)E_1\tilde{x}(t) \quad (4.8)$$

$$\tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Além disso, assumamos que $C_f = L$, de forma que a dependência explícita do erro de filtragem com relação ao estado do sistema (\mathcal{S}_d) seja eliminada.

Considere as seguintes hipóteses:

(D-ii) $[D \quad H_2]$ define uma transformação linear sobrejetiva.

(D-iii) A matriz A é não singular.

Estas hipóteses são necessárias para garantir a viabilidade numérica do cálculo da solução de uma equação do tipo Riccati envolvida no projeto do filtro robusto. O resultado a seguir estabelece quando o problema (P_{∞}^{rd}) possui solução.

Lema 4.1 *Considere o sistema incerto (\mathcal{S}_d) com (4.5) satisfazendo as hipóteses (D-i), (D-ii) e (D-iii) e seja $\gamma > 0$ fixo. Assuma que para um dado filtro da forma (\mathcal{F}_d) e para algum $\epsilon > 0$ exista uma solução $P = P' \geq \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ satisfazendo*

$$\tilde{A}P\tilde{A}' - P + \tilde{A}P\tilde{C}'_1(\mathbf{I} - \tilde{C}'_1P\tilde{C}'_1)^{-1}\tilde{C}'_1P\tilde{A}' + \tilde{B}_1\tilde{B}'_1 = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

onde

$$\tilde{B}_1 = [\gamma^{-1}\tilde{B} \quad \epsilon^{-1}\tilde{H}]$$

$$\tilde{C}'_1 = \begin{bmatrix} \epsilon E_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\tilde{A} + \tilde{C}'_1(\mathbf{I} - \tilde{C}'_1P\tilde{C}'_1)^{-1}\tilde{C}'_1P\tilde{A}') \in \mathcal{B}_1$$

Então as afirmações a seguir são verdadeiras.

(i) O filtro (\mathcal{F}_d) é admissível.

(ii) A dinâmica do erro de filtragem é assintoticamente estável e satisfaz $\|\tilde{z}\|_2 < \gamma\|w\|_2$, $\forall w(t) \neq \mathbf{0}$, para todas as incertezas admissíveis.

□

Prova: Veja a prova do Teorema 3.4 em [XdSW96]. ■

O próximo teorema (apresentado em [XdSF91b]) mostra qual a estrutura adequada ao filtro (\mathcal{F}_d) , para que satisfaça o problema $(\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{\mathbf{r}d})$.

Teorema 4.1 *Considere o sistema incerto (S_d) e (4.5) satisfazendo as hipóteses (D-i), (D-ii) e (D-iii) e seja $\gamma > 0$ fixado. Se existir um escalar $\epsilon > 0$, tal que as seguintes condições sejam verificadas:*

(i) *Existe uma solução $X = X' \geq \mathbf{0}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo*

$$A'XA - X + \gamma^{-2}A'X\bar{B}(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{B}'X\bar{B})^{-1}\bar{B}'XA + \epsilon^2E_1'E_1 = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

onde

$$\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{B}'X\bar{B} > \mathbf{0}$$

$$\bar{B} = [B \quad \frac{\gamma}{\epsilon}H_1]$$

$$\lambda(A + \gamma^{-2}\bar{B}(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{B}'X\bar{B})^{-1}\bar{B}'XA) \in \mathcal{B}_1$$

(ii) *Existe uma solução $S = S' \geq \mathbf{0}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo*

$$\hat{A}S\hat{A}' - S - (\hat{A}S\hat{C}' + \hat{B}\hat{D}'_1)(\hat{C}S\hat{C}' + \hat{R})^{-1}(\hat{A}S\hat{C}' + \hat{B}\hat{D}'_1)' + \hat{B}\hat{B}' = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

tal que

$$(a) \hat{U} \triangleq \mathbf{I} - \gamma^{-2}LSL' > \mathbf{0}$$

$$(b) \lambda(\hat{A} - (\hat{A}S\hat{C}' + \hat{B}\hat{D}'_1)(\hat{C}S\hat{C}' + \hat{R})^{-1}\hat{C}) \in \mathcal{B}_1.$$

As matrizes \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , \hat{D}_1 e \hat{R} são dadas por

$$\hat{A} = A + \gamma^{-2}\bar{B}(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{B}'P\bar{B})^{-1}\bar{B}'XA$$

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \bar{B}(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{B}'P\bar{B})^{-1/2} \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} C + \gamma^{-2}[D \quad \frac{\gamma}{\epsilon}H_2](\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{B}'X\bar{B})^{-1}\bar{B}'XA \\ \gamma^{-1}L \end{bmatrix} \\ \hat{D} &= [D \quad \frac{\gamma}{\epsilon}H_2](\mathbf{I} - \gamma^{-2}\bar{B}'X\bar{B})^{-1/2} \\ \hat{D}_1 &= \begin{bmatrix} \hat{D} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \hat{R} &= \begin{bmatrix} \hat{D}\hat{D}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Então, o problema $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ é solúvel.

Quando as condições (i) e (ii) são satisfeitas, um filtro (\mathcal{F}_d) robusto \mathcal{H}_{∞} apropriado é descrito pelas matrizes

$$\begin{cases} A_f = \hat{A} - B_f\hat{C} \\ B_f = (\hat{B}\hat{D}' + \hat{A}\hat{V}\hat{C}')(\hat{C}\hat{V}\hat{C}' + \hat{D}\hat{D}')^{-1} \\ C_f = L \end{cases} \quad (4.13)$$

onde

$$\hat{V} = S + \gamma^{-2}SL'\hat{U}^{-1}LS$$

□

Prova: Veja [XdSF91b, Teorema 3.1], [XdSW96, Teorema 3.4]. ■

NOTA 4.1 As referências associadas à abordagem por meio de equações de Riccati no caso discreto, têm permitido apenas tratar incertezas nas matrizes A e C (este fato decorre de dificuldades de manipulação evidentes, como no Teorema 4.1) ◇

4.2.2 Formulação por LMIs acopladas

Considere o sistema incerto (4.1), de forma que as variáveis incertas $\xi_i(t), i = 1, \dots, \alpha$, satisfaçam as seguintes restrições \mathcal{RQI} s:

$$\sum_{t=0}^T \|\xi_i(t)\|^2 \leq \sum_{t=0}^T \|E_{1i}x(t) + E_{2i}w(t) + E_{3i}\xi(t)\|^2, \quad \text{quando } T \rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, \alpha \quad (4.14)$$

onde $\xi(t) \triangleq [\xi'_1(t) \ \dots \ \xi'_\alpha(t)]$. E_{1i} e E_{2i} são matrizes constantes conhecidas. Para simplificar a notação adotar-se-á

$$H_1 \triangleq [H_{11} \ \dots \ H_{1\alpha}], \quad H_2 \triangleq [H_{21} \ \dots \ H_{2\alpha}] \quad (4.15)$$

$$E'_1 \triangleq [E'_{11} \ \dots \ E'_{1\alpha}], \quad E'_2 \triangleq [E'_{21} \ \dots \ E'_{2\alpha}], \quad E'_3 \triangleq [E'_{31} \ \dots \ E'_{3\alpha}] \quad (4.16)$$

As matrizes da dinâmica do erro de filtragem (4.3) são dadas por

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L \quad -C_f], \quad \tilde{H} \triangleq \begin{bmatrix} H_1 \\ B_f H_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \xi(t), \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Neste cenário envolvendo \mathcal{RQIs} , a desigualdade (4.4) no problema $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ é reescrita como

$$\sum_{t=0}^T \|\tilde{z}\|^2 < \gamma^2 \sum_{t=0}^T \|w\|^2, \quad \text{quando } T \rightarrow \infty, \quad w(t) \neq \mathbf{0}, \quad \tilde{x}(0) = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

A elaboração de uma estratégia em [LF95], [LF97] por \mathcal{LMIs} , para tratar o problema $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ com (4.20), passa pela técnica de “escalar” o problema por meio do denominado \mathcal{S} -*procedure* (discutido no final do capítulo 3). Tal artifício é ressaltado no item (i) do próximo teorema, onde condições que garantem que um dado filtro seja admissível e \tilde{z} seja um erro de filtragem limitado são apresentadas.

Definem-se as seguintes matrizes

$$E_{1e} \triangleq [E_1 \quad \mathbf{0}] \quad \text{e} \quad J \triangleq \text{diag}[\tau_1 \mathbf{I}_{k_1}, \dots, \tau_\alpha \mathbf{I}_{k_\alpha}] \quad (4.21)$$

Teorema 4.2 *Considere o sistema incerto (\mathcal{S}_d) e seja $\gamma > 0$ fixado. Todas as afirmações a seguir são equivalentes e, se satisfeitas, garantem que um dado filtro (\mathcal{F}_d) é admissível e que \tilde{z} é um erro de filtragem limitado satisfazendo (4.22) para todas as incertezas atendendo (4.14).*

(i) *Existem $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $\tau_1 > 0, \dots, \tau_\alpha > 0$ assegurando que*

$$\begin{aligned} & (\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w + \tilde{H}\xi)' P (\tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w + \tilde{H}\xi) - \tilde{x}' P \tilde{x} + \|\tilde{C}\tilde{x}\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 + \\ & + \sum_{i=1}^{\alpha} \tau_i (\|E_{1i}x + E_{2i}w + E_{3i}\xi\|^2 - \|\xi_i\|^2) < 0, \quad \forall (\tilde{x}', w', \xi')' \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

(ii) Existem $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $J > \mathbf{0}$ definido em (4.21) satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P\tilde{A} - P + E'_{1e}JE_{1e} + \tilde{C}'\tilde{C} & \tilde{A}'P\tilde{B} + E'_{1e}JE_2 \\ \tilde{B}'P\tilde{A} + E'_2JE_{1e} & -\gamma^2\mathbf{I} + \tilde{B}'P\tilde{B} + E'_2JE_2 \\ \tilde{H}'P\tilde{A} + E'_3JE_{1e} & \tilde{H}'P\tilde{B} + E'_3JE_2 \\ \tilde{A}'P\tilde{H} + E'_{1e}JE_3 \\ \tilde{B}'P\tilde{H} + E'_2JE_3 \\ -J + \tilde{H}'P\tilde{H} + E'_3JE_3 \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.23)$$

(iii) Existem $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e $J > \mathbf{0}$ definido em (4.21) satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P\tilde{A} - P & \tilde{A}'P\tilde{B} & \tilde{A}'P\tilde{H} & \tilde{C}' & E'_{1e}J \\ \tilde{B}'P\tilde{A} & -\gamma^2\mathbf{I} + \tilde{B}'P\tilde{B} & \tilde{B}'P\tilde{H} & \mathbf{0} & E'_2J \\ \tilde{H}'P\tilde{A} & \tilde{H}'P\tilde{B} & -J + \tilde{H}'P\tilde{H} & \mathbf{0} & E'_3J \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ JE_{1e} & JE_2 & JE_3 & \mathbf{0} & -J \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.24)$$

(iv) Existe $J > \mathbf{0}$ tal que o sistema auxiliar abaixo é assintoticamente estável e satisfaz $\|H_{\tilde{z}_a w_a}\|_\infty < 1$, onde $H_{\tilde{z}_a w_a}$ é a função de transferência de w_a para \tilde{z}_a :

$$\begin{cases} x_a(t+1) = \tilde{A}x_a(t) + [\gamma^{-1}\tilde{B} \quad \tilde{H}J^{-1/2}]w_a(t) \\ \tilde{z}_a(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ J^{1/2}E_{1e} \end{bmatrix} x_a(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma^{-1}J^{1/2}E_2 & J^{1/2}E_3J^{-1/2} \end{bmatrix} w_a(t) \end{cases} \quad (4.25)$$

□

Prova: Veja [LF97].

■

Manipulando convenientemente o sistema auxiliar (4.25) parametrizado em J , obtém-se um sistema equivalente em “malha-aberta” dado por

$$\begin{cases} x_s(t+1) = Ax_s(t) + [\gamma^{-1}B \quad H_1J^{-1/2}]w_s(t) \\ z_s(t) = \begin{bmatrix} L \\ J^{1/2}E_1 \end{bmatrix} x_s(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \gamma^{-1}J^{1/2}E_2 & J^{1/2}E_3J^{-1/2} \end{bmatrix} w_s(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = Cx_s(t) + [\gamma^{-1}D \quad H_2J^{-1/2}]w_s(t) \end{cases} \quad (4.26)$$

com o controlador

$$\begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t) \\ u(t) = C_f \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.27)$$

Deste modo, o problema $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ para o sistema (4.1) com (4.14) é convertido em um problema padrão de controle \mathcal{H}_∞ do tipo “escalar” para o sistema auxiliar em “malha-aberta” (4.26), envolvendo apenas a síntese de um controlador (4.27). Esta conversão do problema em [LF95], [LF97], permite a utilização (diretamente por substituição) da formulação por \mathcal{LMIs} apresentado em [GA94, Teorema 5.2] ou [Gah96, Teorema 4.1]. A solvabilidade do problema $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ é formalizada a seguir.

Teorema 4.3 *Seja $\gamma > 0$ fixo. Denote por \mathcal{N}_S qualquer matriz cujas colunas formam uma base do espaço nulo de $[C \ D \ H_2]$. Se existirem matrizes simétricas $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $J > \mathbf{0}$ (definida em (4.21)) que satisfaçam as \mathcal{LMIs} (4.28), (4.29) e (4.30) abaixo, então o problema $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ é solúvel.*

$$\begin{bmatrix} ARA' - R & ARE'_1 & B & H_1 J^{-1} \\ E_1 RA' & -J^{-1} + E_1 RE'_1 & E_2 & E_3 J^{-1} \\ B' & E'_2 & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ J^{-1} H'_1 & J^{-1} E'_3 & \mathbf{0} & -J^{-1} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.28)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}'_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} A'SA - S & A'SB & A'SH_1 & L' & E'_1 J \\ B'SA & -\gamma^2 \mathbf{I} + B'SB & B'SH_1 & \mathbf{0} & E'_2 J \\ H'_1 SA & H'_1 SB & -J + H'_1 S H_1 & \mathbf{0} & E'_3 J \\ \hline L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ JE_1 & JE_2 & JE_3 & \mathbf{0} & -J \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (4.29)$$

$$\begin{bmatrix} R & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & S \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (4.30)$$

□

Prova: Veja [LF97]. ■

Note que a inequação (4.28) é afim nas variáveis R , $J_s \triangleq J^{-1}$ e $\delta \triangleq \gamma^2$, enquanto a inequação (4.29) é afim nas variáveis S , J e δ . Portanto, as inequações não são conjuntamente lineares em J . Para contornar esta não linearidade, definem-se $\beta_i \triangleq \tau_i / (1 + \tau_i)$, $i = 1, \dots, \alpha$, onde $\tau_i > 0$ se, e somente se, $\beta_i \in (0, 1)$. Escolhe-se então um conjunto de pontos suficientemente significativos em relação a cada $\beta_i \in (0, 1)$. Portanto, para cada ponto do conjunto $(\beta_1, \dots, \beta_\alpha)$ é suficiente verificar se existe uma solução factível para (4.28), (4.29) e (4.30).

Com as matrizes R , S e J que satisfazem teorema acima, basta reconstruir o controlador (4.27) para o sistema auxiliar (4.26) por meio do Lema da Projção (Eliminação) em

[GA94, Teorema 4.2], ou de forma explicita como em [Gah96, Algoritmo 4.1]. Note ainda que as matrizes R e S são necessariamente definidas positivas.

Para o caso em que $\alpha = 1$, isto é, $J = \tau_1 \mathbf{I}$ e $E_3 = \mathbf{0}$, a descrição por \mathcal{LMIs} acopladas é idêntica àquela formulada por equações de Riccati na seção anterior 4.2.1.

NOTA 4.2 Em [LF95], [LF97], tenta-se estabelecer um problema de factibilidade descrito por \mathcal{LMIs} não acopladas para o caso denominado “bloco de incerteza escalar”, isto é, $\alpha = 1$. Para tanto, é usada a transformação de similaridade dada por $\text{diag}[J^{1/2}, J^{1/2}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$, que multiplicada à direita e à esquerda em (4.28), e logo após usando o complemento de Schur obtém-se:

$$\begin{bmatrix} A\tilde{R}A' - \tilde{R} + \gamma^{-2}BB'J + H_1H_1' & A\tilde{R}E_1' + \gamma^{-2}BE_2'J + H_1E_3' \\ E_1\tilde{R}A' + \gamma^{-2}E_2B'J + E_3H_1' & -\mathbf{I} + \gamma^{-2}E_2E_2'J + E_3E_3' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.31)$$

onde $\tilde{R} \triangleq RJ$. Com isso, o problema é reescrito em termos das \mathcal{LMIs} (4.31), (4.29) e (4.30) que seriam conjuntamente lineares em \tilde{R} , S e J . Entretanto, contrariamente ao afirmado em [LF95], [LF97], tal descrição não é válida, pois não é possível estabelecer uma transformação de similaridade para a inequação (4.30) sem que se introduzam novas não linearidades. De fato, multiplicando (4.30) à direita e à esquerda por $\text{diag}[J^{1/2}, \mathbf{I}]$ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{R} & J^{1/2} \\ J^{1/2} & S \end{bmatrix}$$

inviabilizando uma formulação linear. ◇

4.3 Incertezas do Tipo Politópica

4.3.1 Abordagem Convexa por \mathcal{LMIs}

Considere o sistema incerto (4.1) com $\xi_i(t) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, \alpha$. Os parâmetros incertos do modelo são considerados agora como pertencentes a um conjunto convexo compacto do tipo politópico, isto é,

$$(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d \quad (4.32)$$

$$\mathcal{P}_d \triangleq \left\{ (A, B, C, D) \mid (A, B, C, D) = \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i (A_i, B_i, C_i, D_i); \tau_i \geq 0; \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i = 1 \right\} \quad (4.33)$$

Sem perda de generalidade, considere $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d$ arbitrário porém fixo. As matrizes da dinâmica do erro de filtragem (4.3) são descritas, neste caso, por

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L \quad -C_f], \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \mathbf{0}, \quad \tilde{H} \triangleq \mathbf{0} \quad (4.36)$$

Além disso, a matriz de transferência do sinal de entrada de ruídos w para o erro de filtragem \tilde{z} é dada por

$$H_{\tilde{z}w}(\zeta) \triangleq \tilde{C}(\zeta\mathbf{I} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \quad (4.37)$$

Baseado na versão do *Bounded Real Lemma* para sistemas discretos apresentada no Lema 2.2, o teorema a seguir estabelece a solvabilidade do problema de filtragem em termos de duas *LMIs*.

Teorema 4.4 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O filtro (\mathcal{F}_d) em (4.2) é um filtro admissível com erro de filtragem \tilde{z} , para $x(0) = \mathbf{0}$, satisfazendo $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \sqrt{\delta}$ se, e somente se, existirem $R = R'$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = X'$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ tais que*

$$\Pi(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) > \mathbf{0} \quad (4.38)$$

$$X - R > \mathbf{0} \quad (4.39)$$

onde a função matricial Π é definida por

$$\Pi(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} R & R & \mathbf{0} & A'R & A'X + C'Z' + M' & L' - N' \\ R & X & \mathbf{0} & A'R & A'X + C'Z' & L' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta\mathbf{I} & B'R & B'X + D'Z' & \mathbf{0} \\ RA & RA & RB & R & R & \mathbf{0} \\ XA + ZC + M & XA + ZC & XB + ZD & R & X & \mathbf{0} \\ L - N & L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

□

Prova: (Necessidade). Assuma que para $\delta > 0$ fixo, exista um filtro (\mathcal{F}_d) admissível como em (4.2), de tal forma que $\lambda(\tilde{A}) \in \mathcal{B}_1$ e $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \sqrt{\delta}$, implicando pelo Lema 2.2 que para

$$A_\psi \triangleq \tilde{A}, \quad B_\psi \triangleq \tilde{B}, \quad C_\psi \triangleq \tilde{C} \quad \text{e} \quad H_{\tilde{z}w}^K \triangleq H_{\tilde{z}w}$$

existe $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ satisfazendo (2.28).

Efetuada uma simples manipulação algébrica na inequação (2.28), obtém-se

$$\begin{bmatrix} P\tilde{A} & P\tilde{B} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\tilde{A} & P\tilde{B} \\ \tilde{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.41)$$

que, pelo complemento de Schur, é equivalente a

$$\Upsilon(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) > \mathbf{0} \quad (4.42)$$

onde a função matricial Υ é definida como

$$\Upsilon(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & \tilde{A}'P & \tilde{C}' \\ \mathbf{0} & \delta\mathbf{I} & \tilde{B}'P & \mathbf{0} \\ P\tilde{A} & P\tilde{B} & P & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

e $\delta \triangleq \gamma^2$.

Como $P = P' > \mathbf{0}$, define-se $S \triangleq P^{-1}$, tais que P e S sejam particionadas da forma

$$P \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad S \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S'_{12} & S_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.44)$$

Usando o fato que $PS = \mathbf{I}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} P_{11}S_{11} + P_{12}S'_{12} & P_{11}S_{12} + P_{12}S_{22} \\ P'_{12}S_{11} + P_{22}S'_{12} & P'_{12}S_{12} + P_{22}S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

segue de (4.44) e (4.45) que

$$P_{11} > \mathbf{0}, \quad S_{11} > \mathbf{0} \quad \text{e} \quad P_{11} > S_{11}^{-1} \quad (4.46)$$

(veja o apêndice A para detalhes). Portanto,

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.47)$$

Note que de (4.45), a identidade

$$P_{12}S'_{12} = \mathbf{I} - P_{11}S_{11} \quad (4.48)$$

para S_{11} e P_{11} satisfazendo (4.47) é tal que $\mathbf{I} - P_{11}S_{11}$ é não singular e, portanto, P_{12} e S_{12} têm posto de linha completo¹⁰. Desta forma, verifica-se que P satisfaz a identidade $PJ = \tilde{J}$ para

$$J \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ S'_{12} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{J} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I} & P_{11} \\ \mathbf{0} & P'_{12} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

de forma que as matrizes J , \tilde{J} são inversíveis.

Definindo-se

$$\hat{J} = \text{diag}[J, \mathbf{I}, J, \mathbf{I}], \quad \hat{J} \in \mathbb{R}^{(2n+m+2n+p) \times (2n+m+2n+p)} \quad (4.50)$$

¹⁰Veja a nota de rodapé número 6 na página 43.

e multiplicando (4.42) à direita e à esquerda, respectivamente, por \hat{J}' e \hat{J} obtém-se a inequação matricial

$$\Upsilon_J(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) > \mathbf{0} \quad (4.51)$$

onde a função matricial Υ_J é definida por

$$\Upsilon_J(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, P, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} J' \tilde{J} & \mathbf{0} & J' \tilde{A}' \tilde{J} & J' \tilde{C}' \\ \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} & \tilde{B}' \tilde{J} & \mathbf{0} \\ \tilde{J}' \tilde{A} J & \tilde{J}' \tilde{B} & J' \tilde{J} & \mathbf{0} \\ \tilde{C}' J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Após efetuar algumas manipulações algébricas em (4.51), isto é,

$$\tilde{J}' \tilde{A} J = \begin{bmatrix} AS_{11} & A \\ P_{11} AS_{11} + P_{12} B_f C S_{11} + P_{12} A_f S'_{12} & P_{11} A + P_{12} B_f C \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\tilde{J}' \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ P_{11} B + P_{12} B_f D \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$J' \tilde{C}' = \begin{bmatrix} S_{11} L' - S_{12} C'_f \\ L' \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

obtém-se

$$\hat{\Upsilon}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, S_{12}, P_{12}, A_f, B_f, C_f, \delta) > \mathbf{0} \quad (4.56)$$

onde

$$\hat{\Upsilon}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, S_{12}, P_{12}, A_f, B_f, C_f, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & P_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} \\ AS_{11} & A & B \\ P_{11} AS_{11} + P_{12} B_f C S_{11} + P_{12} A_f S'_{12} & P_{11} A + P_{12} B_f C & P_{11} B + P_{12} B_f D \\ LS_{11} - C_f S'_{12} & L & \mathbf{0} \\ S_{11} A' & S_{11} A' P_{11} + S_{11} C' B'_f P'_{12} + S_{12} A'_f P'_{12} & S_{11} L' - S_{12} C'_f \\ A' & A' P_{11} + C'_f B'_f P'_{12} & L' \\ B' & B' P_{11} + D' B'_f P'_{12} & \mathbf{0} \\ S_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & P_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Definindo-se

$$Z \triangleq P_{12}B_f, \quad \tilde{Z} \triangleq C_f S'_{12} \quad \text{e} \quad \hat{Z} \triangleq P_{12}A_f S'_{12} \quad (4.58)$$

a inequação (4.56) é equivalente a

$$\hat{\Upsilon}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, Z, \tilde{Z}, \hat{Z}, \delta) > \mathbf{0} \quad (4.59)$$

com

$$\tilde{\Lambda}(A, B, C, D, S_{11}, P_{11}, Z, \tilde{Z}, \hat{Z}, \delta) \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & P_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} \\ AS_{11} & A & B \\ P_{11}AS_{11} + ZCS_{11} + \hat{Z} & P_{11}A + ZC & P_{11}B + ZD \\ LS_{11} - \tilde{Z} & L & \mathbf{0} \\ S_{11}A' & S_{11}A'P_{11} + S_{11}C'Z' + \hat{Z}' & S_{11}L' - \tilde{Z}' \\ A' & A'P_{11} + C'Z' & L' \\ B' & B'P_{11} + D'Z' & \mathbf{0} \\ S_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & P_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Por fim, pré e pós-multiplicando a inequação matricial não-linear (4.59) pela transformação de similaridade denotada por

$$\text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, S_{11}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}] \quad (4.61)$$

e definindo-se uma nova mudança de variáveis dada por

$$R \triangleq S_{11}^{-1}, \quad X \triangleq P_{11}, \quad M \triangleq \hat{Z}R, \quad N \triangleq \tilde{Z}R \quad (4.62)$$

obtém-se a \mathcal{LMI} apresentada em (4.38).

Aplicando a mesma linha de transformações acima, com respeito a $P = P' > \mathbf{0}$, tem-se

$$\hat{P} = J'PJ = J'\tilde{J} = \begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

e ainda

$$\text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}] \times \hat{P} \times \text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}] \quad (4.64)$$

de tal forma que, pelo complemento de Schur aplicado a (4.64), obtém-se (4.39), isto é,

$$X - S_{11}^{-1} = X - R > \mathbf{0} \quad (4.65)$$

(*Suficiência*). Suponha que existam (R, X, M, N, Z, δ) satisfazendo as *LMIs* (4.38) e (4.39). Multiplicando (4.38) à direita e à esquerda pela transformação de similaridade

$$\text{diag} [R^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, R^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$$

e definindo-se

$$S_{11} \triangleq R^{-1}, \quad P_{11} \triangleq X, \quad \tilde{Z} \triangleq NS_{11}, \quad \hat{Z} \triangleq MS_{11} \quad (4.66)$$

obtém-se prontamente (4.59).

A restrição (4.39) assegura que, para $P_{11} \triangleq X$ e $S_{11} \triangleq R^{-1}$, a matriz $\mathbf{I} - P_{11}S_{11}$ é inversível e, portanto, pode ser fatorada como em (4.48), isto é, $\mathbf{I} - P_{11}S_{11} = P_{12}S'_{12}$ de tal forma que P_{12} e S_{12} são matrizes quadradas inversíveis. Deste modo, as matrizes J e \tilde{J} , definidas em (4.49), são então inversíveis. Portanto, dadas as matrizes inversíveis P_{12} e S_{12} , com Z, \tilde{Z} e \hat{Z} obtidas de (4.66), tem-se que A_f, B_f e C_f são unicamente determinadas pela mudança de variáveis definida em (4.58), considerando o filtro de ordem n descrito por

$$H_{\hat{z}y}(\zeta) \triangleq C_f(\zeta\mathbf{I} - A_f)^{-1}B_f \quad (4.67)$$

Desta forma, a inequação (4.56) é estabelecida.

Como J é inversível, definindo-se $P \triangleq \tilde{J}J^{-1}$, segue que (4.51) (que é equivalente a (4.56) aplicando-se as identidades (4.53), (4.54) e (4.55)) multiplicado à direita e à esquerda por

$$J_T \triangleq \text{diag} [J^{-1}, \mathbf{I}, J^{-1}, \mathbf{I}]$$

fornece (4.42) que, por sua vez, pelo complemento de Schur, é equivalente a (2.28).

Da restrição (4.39), segue imediatamente que $P = P' > \mathbf{0}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$.

Conclui-se portanto do Lema 2.2 que, para $A_\psi \triangleq \tilde{A}$, $B_\psi \triangleq \tilde{B}$, $C_\psi \triangleq \tilde{C}$ e $H_{\hat{z}w}^K \triangleq H_{\hat{z}w}$, o filtro (\mathcal{F}_d) em (4.67), por construção, estabiliza assintoticamente a dinâmica do erro de filtragem assegurando $\|H_{\hat{z}w}\|_\infty < \sqrt{\delta}$. ■

Veja as notas 3.6 e 3.7 sobre outros trabalhos na literatura relacionados com as mudanças de variáveis apresentadas.

NOTA 4.3 Observe que a restrição (4.39) está embutida nos blocos

$$\begin{bmatrix} R & R \\ R & X \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

em (4.38) e, portanto, poderia ser desconsiderada. ◇

Note que, como $\Pi(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta)$, definida em (4.40), é uma expressão afim com respeito a todas as matrizes envolvidas, a extensão dos resultados do Teorema 4.4 para tratar sistemas incertos em domínios convexos limitados, isto é, $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d$, é imediata.

A partir do Teorema 4.4, uma estrutura particular para o filtro admissível (\mathcal{F}_d) pode ser estabelecida. De fato, a partir de (4.58) obtém-se

$$A_f = P_{12}^{-1} \hat{Z}(S'_{12})^{-1}, \quad C_f = \tilde{Z}(S'_{12})^{-1}, \quad B_f \triangleq P_{12}^{-1} Z \quad (4.69)$$

portanto, a matriz de transferência da saída medida $y(t)$ para a saída estimada $\hat{z}(t)$, é equivalente a

$$H_{\hat{z}y}(\zeta) = \tilde{Z}(S'_{12})^{-1} (\zeta \mathbf{I} - P_{12}^{-1} \hat{Z}(S'_{12})^{-1})^{-1} P_{12}^{-1} Z \quad (4.70)$$

ou ainda

$$H_{\hat{z}y}(\zeta) = \tilde{Z}(\zeta(P_{12}S'_{12}) - \hat{Z})^{-1} Z$$

Aplicando a identidade (4.48) tem-se

$$H_{\hat{z}y}(\zeta) = \tilde{Z}(\zeta(\mathbf{I} - P_{11}S_{11}) - \hat{Z})^{-1} Z$$

Finalmente, lançando mão da mudança de variáveis definida em (4.62), a função de transferência do filtro (\mathcal{F}_d) é denotada por

$$H_{\hat{z}y}(\zeta) = \tilde{Z}R(\zeta(R - X) - \hat{Z}R)^{-1} Z$$

ou, especificamente em termos das matrizes do enunciado do Teorema 4.4,

$$H_{\hat{z}y}(\zeta) = N(\zeta(R - X) - M)^{-1} Z \quad (4.71)$$

com

$$\begin{cases} A_f &= (R - X)^{-1} M \\ B_f &= (R - X)^{-1} Z \\ C_f &= N \end{cases} \quad (4.72)$$

Portanto, o projeto do filtro desejado envolve apenas as variáveis de otimização, evitando assim o cálculo das matrizes P_{12} e S_{12} como em [Gah96], [SGC97].

Para estender os resultados do Teorema 4.4 para o caso incerto, isto é, o problema ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}^{rc}$), definem-se os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Pi(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) > \mathbf{0}, \\ &X - R > \mathbf{0}, \forall(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d\} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_V &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Pi(A_i, B_i, C_i, D_i, R, X, M, N, Z, \delta) > \mathbf{0}, \\ &X - R > \mathbf{0}, \forall(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_d)\} \end{aligned} \quad (4.74)$$

De posse dessas definições, como as \mathcal{LMI} s (4.38) e (4.39) são afins em relação a todas as variáveis envolvidas, conclui-se que $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_V$ (Veja [GPB91]). Sob esta nova óptica, basta então verificar as restrições apenas nos vértices do politopo.

Corolário 4.1 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O problema $(P_{\infty\gamma}^{rd})$ é solúvel $\forall(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d$ com a dinâmica do erro de filtragem (T_d) quadraticamente estável com atenuação de ruídos γ^{11} se, e somente se, existirem $R = R', R \in \mathbb{R}^{n \times n}, X = X', X \in \mathbb{R}^{n \times n}, M \in \mathbb{R}^{n \times n}, N \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ de forma que*

$$(R, X, M, N, Z, \delta) \in \mathcal{G}_V \quad (4.75)$$

Em caso afirmativo, o filtro admissível é descrito por (4.71)-(4.72). \square

Prova: Imediata a partir do Teorema 4.4 e da equivalência $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_V$. \blacksquare

Desta forma, o custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos pode ser formulado como um procedimento convexo de otimização descrito em termos de \mathcal{LMI} s.

Corolário 4.2 *A solução de*

$$\min_{R, X, M, N, Z, \delta} \delta \quad (4.76)$$

sujeito a

$$(R, X, M, N, Z, \delta) \in \mathcal{G}_V \quad (4.77)$$

¹¹Assim como em [Xie96], o erro de filtragem (T_d) é dito ser quadraticamente estável com atenuação de ruídos γ se, e somente se existir $P = P > \mathbf{0}, P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que (4.128) é satisfeita, $\forall(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) \in \mathcal{P}_d$.

é tal que $\sqrt{\delta}$ é o custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ , isto é,

$$\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \gamma, \quad \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d \quad (4.78)$$

Neste caso, o filtro admissível é descrito por (4.71)-(4.72). \square

Prova: A prova é imediata a partir do Corolário 4.1, usando a identidade $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_V$ e o fato que a função objetivo é linear sujeita a restrições lineares e, portanto, o problema de otimização é convexo. \blacksquare

O mesmo comentário na nota 3.8 pode ser estendido para o caso discreto.

4.4 Filtragem Robusta $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

A caracterização do problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ ($P_{\infty\gamma}^{rd}$), na seção 4.3, permite entender aqueles resultados para o chamado problema de custo garantido de filtragem mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, que consiste em minimizar um limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 com respeito ao erro de filtragem, enquanto um nível pré-especificado de atenuação de ruídos é garantido para todas as incertezas admissíveis. Este problema é apresentado formalmente a seguir.

Problema 4.2 ($P_{2\infty\gamma}^{rd}$) (PROBLEMA DE FILTRAGEM ROBUSTA $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$). *Determine um filtro (\mathcal{F}_d) admissível de forma que um limitante superior para a variância do erro de estimativa,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)' \tilde{z}(t)\} \quad (4.79)$$

seja minimizado e, além disso, assegure que \tilde{z} seja um erro de filtragem limitado satisfazendo $\|\tilde{z}\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2, \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d$ (\mathcal{P}_d foi definido em (4.33)). \triangle

Como comentado na seção 3.4, o sinal de entrada de ruídos w pode ser interpretado especificamente, no contexto do critério \mathcal{H}_2 , como um sinal de ruído branco com densidade espectral de potência igual à matriz identidade e, simultaneamente, sob a óptica da norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência e da dinâmica do erro de filtragem, a mesma entrada de ruídos tem a interpretação alternativa de ser um sinal de energia limitado, isto é, $w(t) \in \ell_2[0; \infty)$.

Sem perda de generalidade, considere $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d$ arbitrário porém fixo. As matrizes da dinâmica do erro de filtragem (4.3) são descritas, neste caso, por

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L \quad -C_f], \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$\tilde{\xi}(t) \triangleq \mathbf{0}, \quad \tilde{H} \triangleq \mathbf{0} \quad (4.82)$$

Além disso, a matriz de transferência do sinal de entrada de ruídos w para o erro de filtragem \tilde{z} é definida como

$$H_{\tilde{z}w}(\zeta) \triangleq \tilde{C}(\zeta\mathbf{I} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} \quad (4.83)$$

A variância do erro de filtragem é denotada pela norma \mathcal{H}_2 ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)' \tilde{z}(t)\} = \|H_{\tilde{z}w}\|_2^2 \quad (4.84)$$

e pode ser computada no espaço de estados, isto é:

$$\|H_{\tilde{z}w}\|_2^2 = \text{Tr}\{\tilde{B}'G\tilde{B}\} \quad (4.85)$$

onde $G = G' > \mathbf{0}$, $G \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ satisfaz a seguinte equação do Grammiano de observabilidade

$$\tilde{A}'G\tilde{A} - G + \tilde{C}'\tilde{C} = \mathbf{0} \quad (4.86)$$

Note que, \tilde{A} é assintoticamente estável se, e somente se, $G = G' > \mathbf{0}$. Definindo-se a função matricial

$$\Xi_d(\tilde{G}) \triangleq \tilde{A}'\tilde{G}\tilde{A} - \tilde{G} + \tilde{C}'\tilde{C} \quad (4.87)$$

e o conjunto

$$\mathcal{M}_d \triangleq \{\tilde{G} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid \tilde{G} = \tilde{G}' > \mathbf{0}, \Xi_d(\tilde{G}) \leq \mathbf{0}\} \quad (4.88)$$

segue que qualquer matriz $\tilde{G} \in \mathcal{M}_d$ é tal que

$$\text{Tr}\{\tilde{B}'\tilde{G}\tilde{B}\} \geq \text{Tr}\{\tilde{B}'G\tilde{B}\} \quad (4.89)$$

pois $\tilde{G} \geq G \in \mathcal{M}_d$.

Com isto, o problema de filtragem misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pode ser reformulado como

$$\min_{P, H} \text{Tr}\{H\} \quad (4.90)$$

sujeito a $\Omega(\tilde{B}, P, H) > \mathbf{0}$, $P \in \mathcal{M}_d$ tal que $\|H_{\tilde{z}w}\|_\infty < \gamma$.

onde

$$\Omega(\tilde{B}, P, H) \triangleq \begin{bmatrix} H & \tilde{B}'P \\ P\tilde{B} & P \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

A partir do Lema 2.2, pode-se caracterizar $\text{Tr}\{H\}$ como um limitante superior para a variância do erro de filtragem, toda vez que a restrição $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ for verificada. Para tanto, uma estratégia (embora mais conservativa) consiste em impor a mesma matriz P tanto para a inequação de Lyapunov como para a \mathcal{LMI} (2.28) (que garante o limitante para a norma \mathcal{H}_∞). De fato, aplicando o complemento de Schur à inequação (2.28) (onde $A_\psi \triangleq \tilde{A}$, $B_\psi \triangleq \tilde{A}$, $C_\psi \triangleq \tilde{C}$, $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$) obtém-se

$$\tilde{A}'P\tilde{A} - P + \tilde{C}'\tilde{C} + \gamma^{-2} \tilde{A}'P\tilde{B}(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\tilde{B}'P\tilde{B})^{-1}\tilde{B}'P\tilde{A} < \mathbf{0} \quad (4.92)$$

que é equivalente a

$$\Xi_d(P) < -\gamma^{-2} \tilde{A}'P\tilde{B}(\mathbf{I} - \gamma^{-2}\tilde{B}'P\tilde{B})^{-1}\tilde{B}'P\tilde{A} \quad (4.93)$$

Como por hipótese \tilde{A} é estável (D-i), segue que ([dSX92, Teorema 2.1])

$$\mathbf{I} - \gamma^{-2}\tilde{B}'P\tilde{B} > \mathbf{0} \Rightarrow \Xi_d(P) < \mathbf{0} \Rightarrow P \geq G \quad (4.94)$$

implicando, portanto, que $\text{Tr}\{H\} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)'\tilde{z}(t)\}$, isto é, $\text{Tr}\{H\}$ é um limitante para a norma \mathcal{H}_2 . Este procedimento é formalmente apresentado no teorema a seguir.

Teorema 4.5 *Seja $\gamma > 0$ fixado e considere $(A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d$ arbitrário porém fixo. A solução ótima de*

$$\min_{R, X, M, N, Z, H} \text{Tr}\{H\} \quad (4.95)$$

sujeito a

$$\Psi(B, D, H, Z, R, X) > \mathbf{0} \quad (4.96)$$

$$\Pi(A, B, C, D, R, X, Z, M, N, \gamma^2) > \mathbf{0} \quad (4.97)$$

onde $R = R'$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = X'$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $H = H'$, $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Pi(\cdot)$ foi definida em (4.40) e $\Psi(\cdot)$ é dada por

$$\Psi(B, D, H, Z, R, X) \triangleq \begin{bmatrix} H & B'R & B'X + D'Z' \\ RB & R & R \\ XB + ZD & R & X \end{bmatrix} \quad (4.98)$$

é tal que $\text{Tr}\{H\} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\tilde{z}(t)'\tilde{z}(t)\}$ assegurando que $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$. Neste caso, o filtro (\mathcal{F}_d) admissível é dado por (4.71)-(4.72) \square

Prova: A prova segue imediatamente do Teorema 4.4 e do fato que a função objetivo é linear sujeita a restrições lineares, de forma que o problema de otimização é convexo. \square

limitante superior para a norma \mathcal{H}_2 é garantido pela restrição (4.96) (que inclui a restrição $X - R > \mathbf{0}$), enquanto $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ é assegurado pela \mathcal{LMI} (4.97).

A restrição (4.96) é estabelecida da seguinte forma: multiplica-se (4.91), à direita e à esquerda por $diag[\mathbf{I}, J']$ e $diag[\mathbf{I}, J]$, de forma a obter

$$\Omega_J(\tilde{B}, P, H) \triangleq \begin{bmatrix} H & \tilde{B}'\tilde{J} \\ \tilde{J}'\tilde{B} & J'J \end{bmatrix} \quad (4.99)$$

ou equivalentemente

$$\tilde{\Omega}(B, D, P_{11}, S_{11}, H) \triangleq \begin{bmatrix} H & B' & B'P_{11} + D'B'_fP'_{12} \\ B & S_{11} & \mathbf{I} \\ P_{11}B + P_{12}B_fD & \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

onde J e \tilde{J} foram definidas em (4.49) para $PJ = \tilde{J}$. Definindo-se a mudança de variável $Z \triangleq P_{12}B_f$ e então, pré e pós multiplicando $\tilde{\Omega}(B, D, P_{11}, S_{11}, H)$ por $diag[\mathbf{I}, S_{11}^{-1}, \mathbf{I}]$, a \mathcal{LMI} (4.96) é obtida para $X \triangleq P_{11}$ e $R \triangleq S_{11}^{-1}$. ■

Considere os seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Psi(B, D, H, Z, R, X) > \mathbf{0}, \\ &\quad \Pi(A, B, C, D, R, X, M, N, Z, \delta) > \mathbf{0}, \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d\} \end{aligned} \quad (4.101)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2V} &\triangleq \{(R, X, M, N, Z, \delta) \mid \Psi(B_i, D_i, H, Z, R, X) > \mathbf{0}, \\ &\quad \Pi(A_i, B_i, C_i, D_i, R, X, M, N, Z, \delta) > \mathbf{0}, \forall (A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_d)\} \end{aligned} \quad (4.102)$$

Como $\Psi(\cdot)$ e $\Pi(\cdot)$ são expressões afins com relação a todas as matrizes envolvidas, segue que $\mathcal{G}_2 \equiv \mathcal{G}_{2V}$ e, portanto, o problema de filtragem misto ($\mathbf{P}_{2\infty\gamma}^{rd}$) pode ser reformulado como um problema de otimização descrito em termos de \mathcal{LMIs} .

Corolário 4.3 *A solução de*

$$\min_{R, X, M, N, Z, H} \text{Tr}\{H\} \quad (4.103)$$

sujeito a

$$(R, X, M, N, Z, H, \gamma^2) \in \mathcal{G}_{2\nu} \quad (4.104)$$

é tal que

$$\text{Tr}\{H\} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}\{\bar{z}(t)' \bar{z}(t)\} \quad (4.105)$$

e

$$\|H_{\bar{z}w}\|_{\infty} < \gamma, \quad \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{P}_d \quad (4.106)$$

Neste caso, o filtro robusto admissível é descrito por (4.71)-(4.72). \square

Prova: A prova é imediata a partir do Teorema 4.5, usando a identidade $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}_{\nu}$. \blacksquare

4.5 Exemplos

Exemplo 4.1 Considere o sistema discreto LIT precisamente conhecido descrito no exemplo 2.2 (página 29). Aplicando a estratégia proposta no Corolário 4.3 para $\ell = 1$, obtém-se $\gamma = 9.6065$ com

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.3352 & 0.5335 & -0.2378 \\ 0.0593 & -0.1839 & 0.1686 \\ -0.1596 & 0.2270 & -0.0751 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.0538 \\ 0.0682 \\ 0.0342 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [10.6860 \quad 0.1928 \quad 8.5343] \quad (4.107)$$

Note que a matriz B_f é idêntica ao ganho constante de filtragem $K_{\mathcal{LMI}}^d$ obtido na abordagem proposta pelo Teorema 2.5, assim como o nível de atenuação de ruídos.

Exemplo 4.2: Considere o sistema incerto discreto e LIT descrito por

$$\begin{cases} x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.1 + 0.4\rho & -0.5 + 0.3\rho \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + 0.3\rho \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = [-10 + 0.2\rho \quad 6 + 0.15\rho] x(t) + [1.1 + 0.15\rho] w(t) \\ z(t) = [4 \quad 1] x(t) \end{cases} \quad (4.108)$$

onde $|\rho| \leq 1$ ($\rho = 0$ para o sistema nominal). Note que o sistema incerto (4.108) pode ser descrito como $(A_i, B_i, C_i, D_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_d)$, $i = 1, 2$, isto é,

$$(A_1, B_1, C_1, D_1) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1.3 \end{bmatrix}, [-9.8 \quad 6.15], [1.25] \right) \quad (4.109)$$

$$(A_2, B_2, C_2, D_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \end{bmatrix}, [-10.2 \quad 5.85], [0.95] \right) \quad (4.110)$$

Lançando mão do procedimento de otimização proposto no Corolário 4.2, o custo garantido ótimo \mathcal{H}_∞ de filtragem é dado por $\gamma = 7.3715 = 17.3511\text{dB}$ com as matrizes do filtro robusto descritas por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.0829 & 0.7213 \\ -0.0397 & -0.3456 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.0080 \\ 0.0001 \end{bmatrix}, C_f = [3.9863 \quad 1.0697] \quad (4.111)$$

A figura 4.1 apresenta o diagrama de valores singulares para este projeto de filtro \mathcal{H}_∞ (4.111) conectado ao sistema incerto (4.111). Note que pelo diagrama a eficiência do custo garantido \mathcal{H}_∞ acima torna-se evidente. Na figura 4.1 escolheu-se onze valores igualmente espaçados para o parâmetro incerto ρ dentro do intervalo $[-1; 1]$.

Um projeto alternativo de filtro robusto pode ser escolhido de forma a se considerar um compromisso entre as norma \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com relação ao erro de filtragem. Para tal estratégia, proposta no Corolário 4.3, considere o nível de atenuação de ruídos $\gamma = 9$. Neste caso o custo garantido \mathcal{H}_2 obtido é $\text{Tr}\{H\} = 23.8023$ com o filtro robusto associado dado por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.3929 & 0.6539 \\ -0.1536 & -0.3356 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.0411 \\ -0.0075 \end{bmatrix}, C_f = [4.0216 \quad 1.1236] \quad (4.112)$$

Com o intuito de simular o sistema, considere que o vetor de estados inicial é precisamente conhecido e dado por $x(0) = [4 \quad -0.2]'$. As figuras 4.2 e 4.3 apresentam, respectivamente, o comportamento limitado do erro de filtragem quando os filtros robusto (4.111) (projeto \mathcal{H}_∞) e (4.112) (projeto misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) são conectados ao sistema incerto (4.108). A escolha de diferentes valores de γ , de forma que o problema de otimização apresentado no Corolário 4.3 seja factível, pode mudar o comportamento dinâmico do erro de filtragem. A figura 4.4 apresenta o diagrama de valores singulares para o filtro robusto misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (4.112) conectado ao sistema incerto (4.111) considerando $\gamma = 9 = 19.0849\text{dB}$.

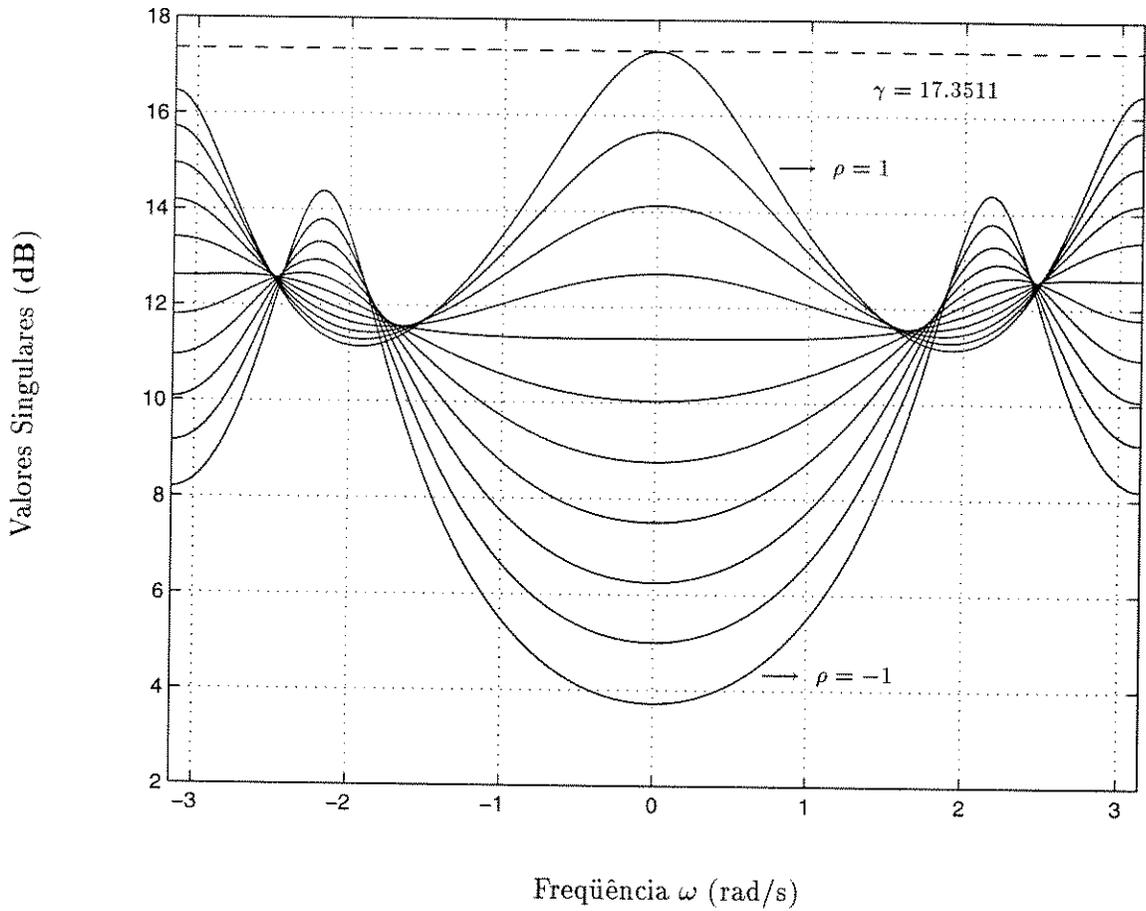


Figura 4.1: Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (4.111) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente distribuídos no intervalo $[-1; 1]$ com $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.2.

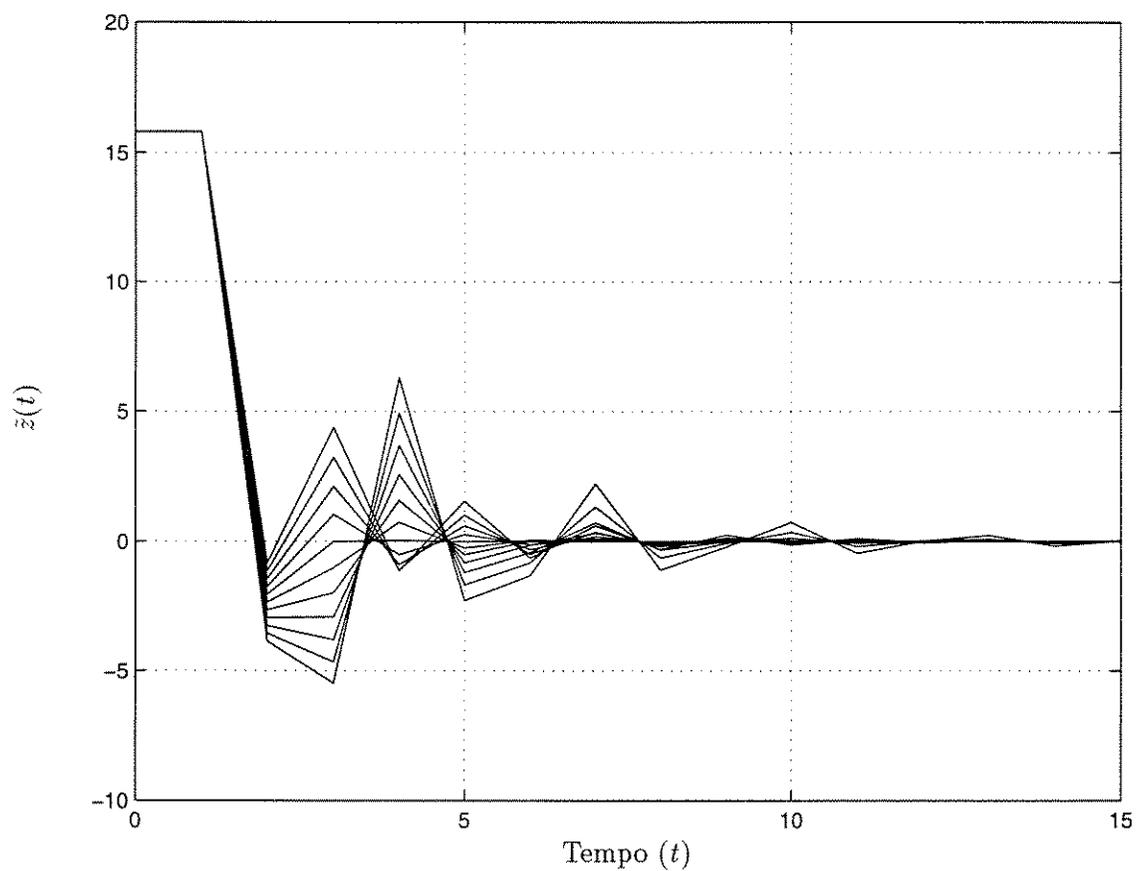


Figura 4.2: Evolução do erro de filtragem para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (4.111) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente espaçados no intervalo $[-1; 1]$ - Exemplo 4.2.

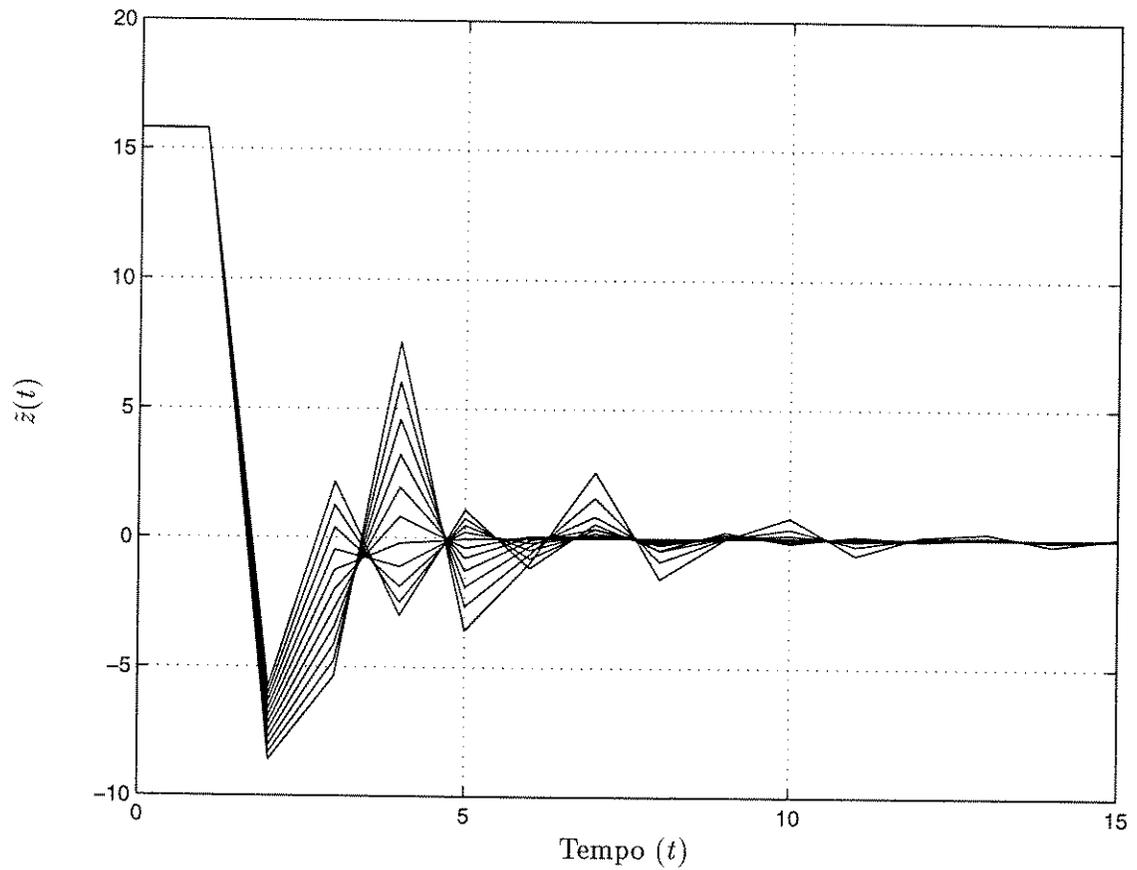


Figura 4.3: Evolução do erro de filtragem para o filtro robusto misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (4.112) ($\gamma = 9$) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente espaçados no intervalo $[-1; 1]$ - Exemplo 4.2.

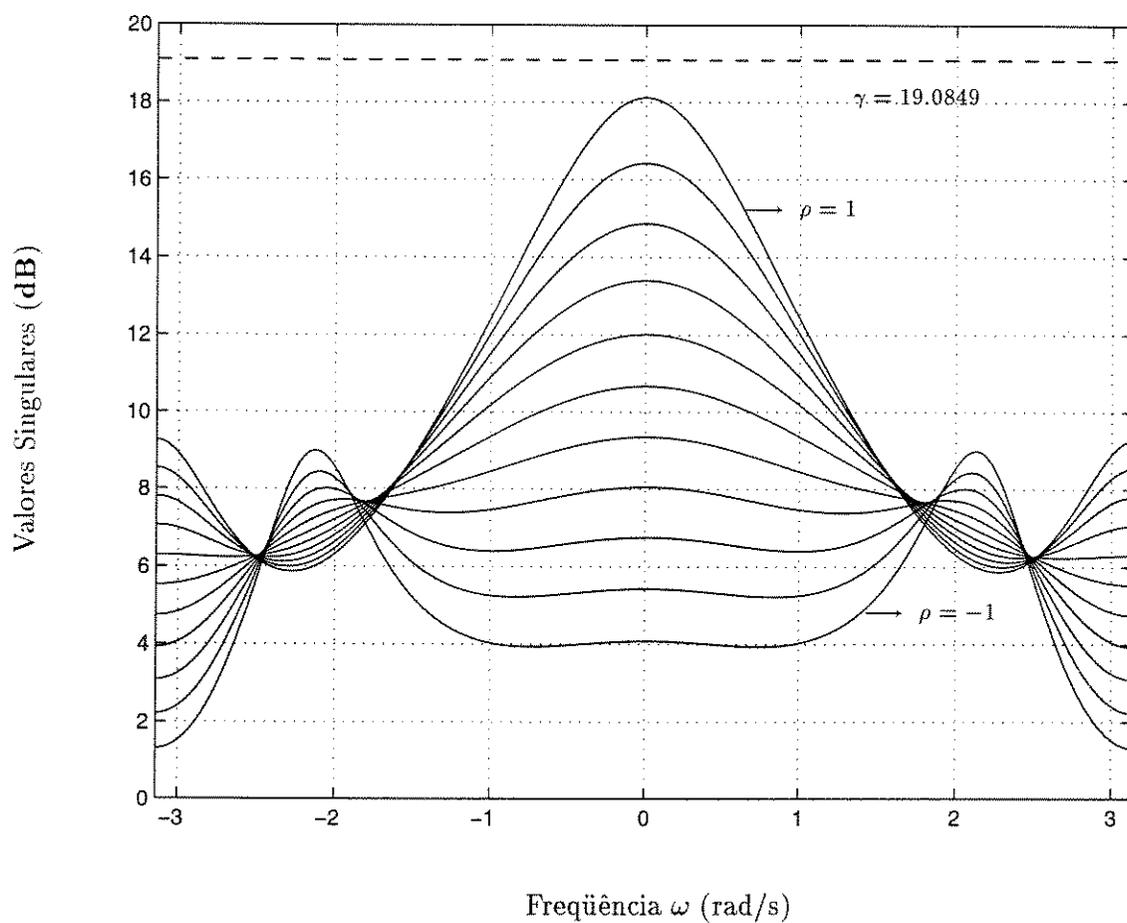


Figura 4.4: Diagrama de valores singulares para o filtro robusto misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (4.112) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente distribuídos no intervalo $[-1; 1]$ e $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.2.

Exemplo 4.3: Considere o sistema LIT apresentado em [RTS65]

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x^1(t+1) \\ x^2(t+1) \\ x^3(t+1) \\ x^4(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & \eta & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.606 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau \end{bmatrix} w(t) \\ \\ y(t) = [1 \ \phi \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix} + w(t) \\ \\ z(t) = [1 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ x^3(t) \\ x^4(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.113)$$

Assuma que alguns parâmetros do sistema acima são limitados da forma

$$0.90 \leq \eta \leq 0.99, \quad 0.0079 \leq \tau \leq 0.0794, \quad 0 \leq \phi \leq 1$$

Este sistema, como apontado em [RTS65], pode ser considerado como uma versão linearizada do movimento de entrada em curso de um satélite deslocando-se em órbita circular. O movimento do satélite é afetado tanto pelo arrasto¹² constante como pelo estocástico. Um estudo a respeito da influência do arrasto na trajetória de satélites pode ser encontrado em [Rau65]. As variáveis de estado podem ser consideradas como sendo a posição angular (x^1), velocidade (x^2) e aceleração (constante) (x^3). A variável de estado (x^4) é uma componente estocástica da aceleração gerada por um processo Guass-Markov de primeira ordem [Rau65].

Do problema de otimização enunciado no Corolário 4.2, pode-se obter o custo garantido ótimo \mathcal{H}_∞ dado por $\gamma = 25.4594$, com o filtro robusto descrito por

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.0369 & 1.3775 & -43.6246 & 1.0038 \\ -0.0259 & 0.9596 & 2.1701 & 0.5715 \\ 0 & 0 & 0.9708 & 0 \\ 0 & 0.0092 & 1.1533 & 0.6075 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 1.0127 \\ 0.0261 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [1.0001 \quad 0.9889 \quad -1.0752 \quad 0.4457] \quad (4.114)$$

As figuras 4.5 e 4.6 ilustram o diagrama de valores singulares para cada vértice considerando o filtro robusto (4.114) conectado ao sistema incerto (4.113). Portanto, pode-se perceber que o nível de atenuação ruídos $\gamma = 25.7948 = 28.2307 \text{ dB}$ (denotado pela linha tracejada) é um custo garantido \mathcal{H}_∞ de filtragem para o sistema incerto, i.e., $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma, \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{D}$.

¹²Força de resistência ao avanço de um veículo espacial.

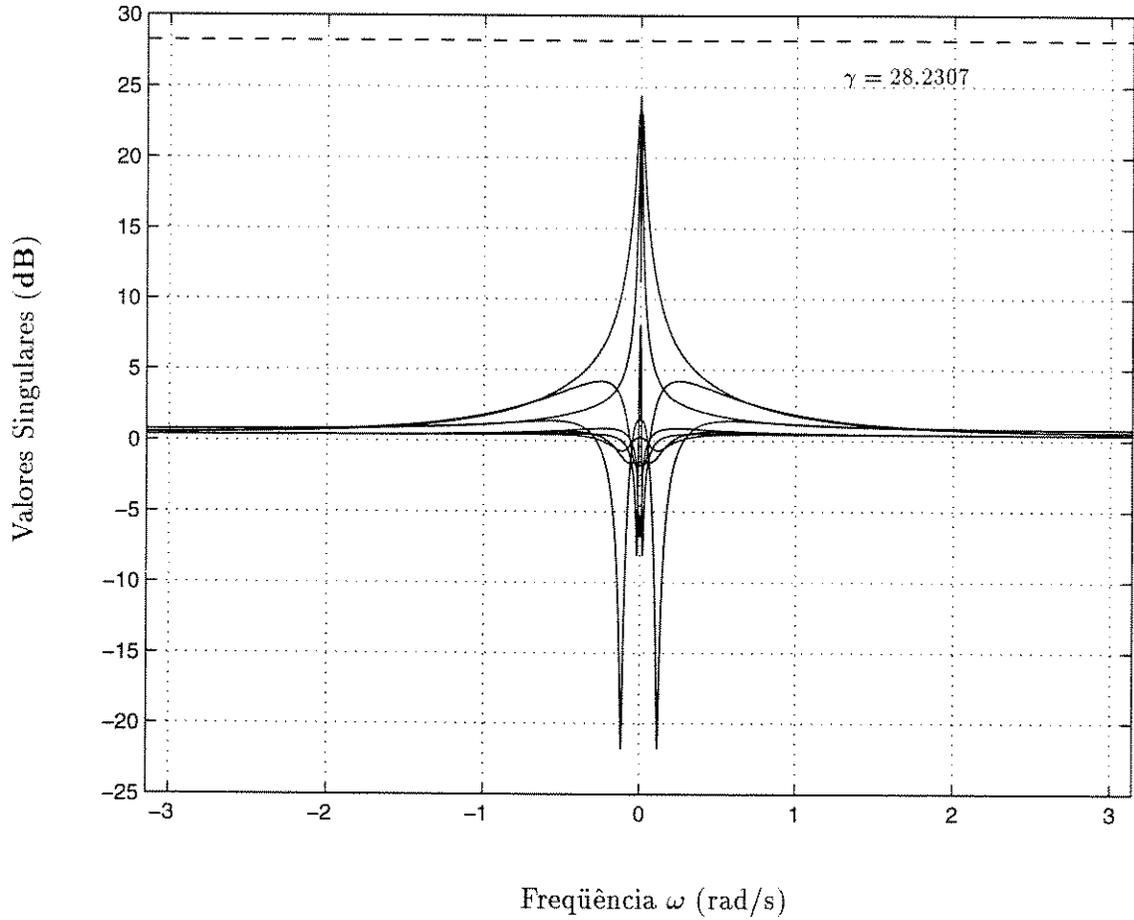


Figura 4.5: Diagrama de valores singulares para os vértices $i = 1, \dots, 8$ considerando o filtro robusto (4.114) conectado ao sistema incerto (4.113) com $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.3.

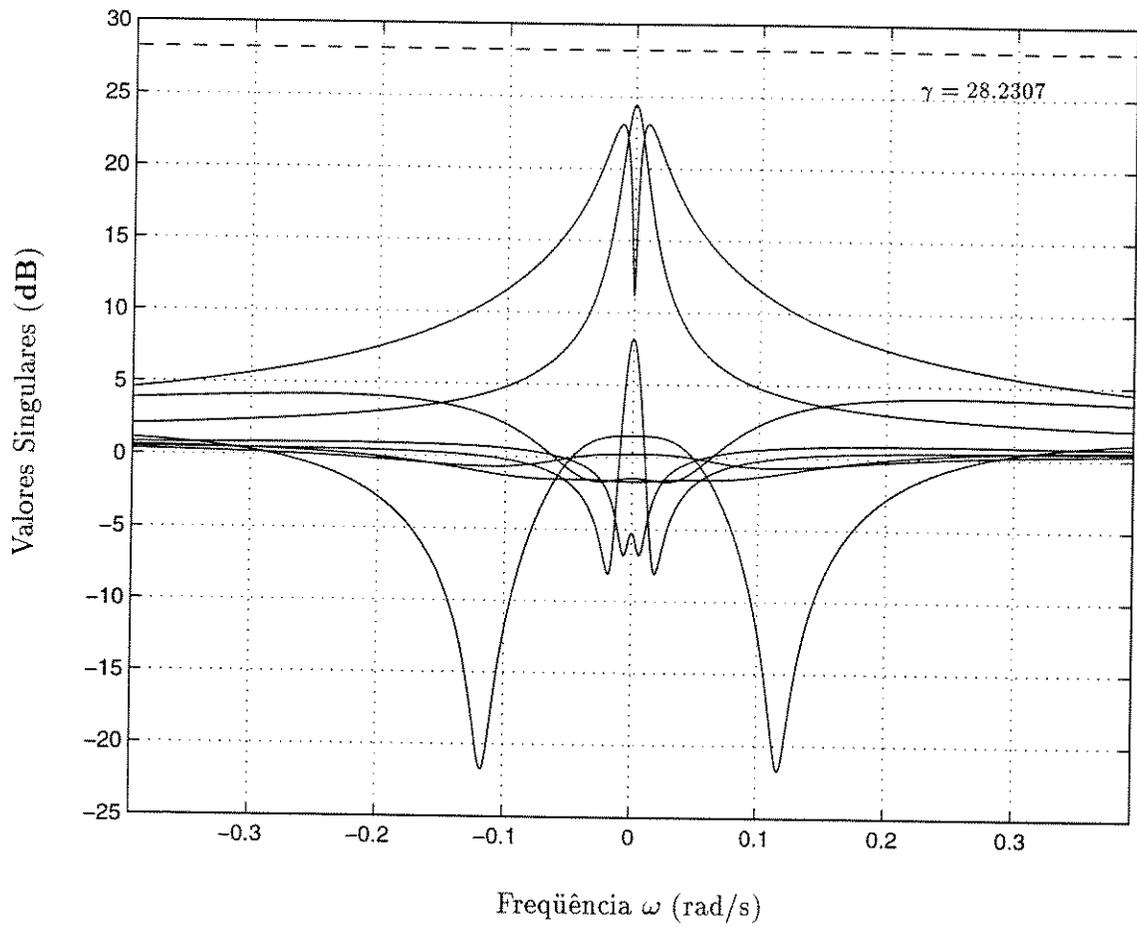


Figura 4.6: Diagrama de valores singulares para os vértices $i = 1, \dots, 8$ considerando o filtro robusto (4.114) conectado ao sistema incerto (4.113) - Exemplo 4.3 (esta figura representa um *zoom* ao redor de $\omega = 0$ (rad/s) da figura 4.5).

4.6 Conclusão

Este capítulo dedicou-se ao problema de síntese de filtros robustos com custo garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares e discretos no tempo. A primeira parte envolveu o estudo do problema de filtragem robusto \mathcal{H}_∞ , com incertezas descritas do tipo limitada em norma, sendo apresentadas duas abordagens conhecidas para o problema: equações de Riccati ([XdSF91b]) e \mathcal{LMIs} acopladas ([LF95], [LF97]).

Na segunda parte do capítulo, o problema de custo garantido ótimo de filtragem \mathcal{H}_∞ foi abordado para sistemas com incertezas descritas como poliedrais. Tendo como partida o *Bounded Real Lemma* e utilizando técnicas envolvendo \mathcal{LMIs} (conhecidas da teoria de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída), uma nova estratégia para o projeto do filtro robusto \mathcal{H}_∞ é proposta em termos de um procedimento de otimização convexa. Como extensão, esta estratégia permitiu elaborar uma nova abordagem por \mathcal{LMIs} para tratar o problema de custo garantido de filtragem misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

4.7 Notas e Referências

Generalizações

Do mesmo modo que na seção 3.7, procurou-se criar uma certa padronização para a apresentação das diferentes abordagens, isto é, sintetizar um filtro *estritamente próprio*. Mas como colocado naquela ocasião, a abordagem por \mathcal{LMIs} acopladas [LF95] e [LF97], exposta na seção 4.2.2, permite também no caso discreto, estender os resultados para o projeto de um filtro próprio robusto, além de tratar o caso em que a saída a ser estimada z , no sistema (4.1), possa ser corrompida por um sinal ruidoso e incluir incertezas do tipo (4.14), isto é,

$$z(t) = Lx(t) + Tw(t) + \sum_{i=1}^{\alpha} H_{3i}\xi_i(t) \quad (4.115)$$

Neste caso a \mathcal{LMI} (4.29) é reescrita da seguinte forma

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}'_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|cc} A'SA - S & A'SB & A'SH_1 & L' & E'_1 J \\ B'SA & -\gamma^2 \mathbf{I} + B'SB & B'SH_1 & T' & E'_2 J \\ H'_1 SA & H'_1 SB & -J + H'_1 SH_1 & H'_3 & E'_3 J \\ \hline L & T & H_3 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ JE_1 & JE_2 & JE_3 & \mathbf{0} & -J \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0} \quad (4.116)$$

Da mesma forma, a abordagem por \mathcal{LMIs} proposta na seção 4.3 permite englobar estas mesmas generalizações para o problema ($\mathcal{P}_{\infty\gamma}^{rd}$). Para tanto, basta considerar o sistema incerto (\mathcal{S}_d), descrito em (4.1) e (4.115), onde $\xi_i(t) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, \alpha$.

Os parâmetros incertos do modelo pertencem a um conjunto convexo compacto do tipo politópico, isto é,

$$(A, B, C, D, L, T) \in \mathcal{P}_d^g \quad (4.117)$$

$$\mathcal{P}_d^g \triangleq \{ (A, B, C, D, L, T) \mid (A, B, C, D, L, T) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i (A_i, B_i, C_i, D_i, L_i, T_i); \tau_i \geq 0; \sum_{i=1}^{\ell} \tau_i = 1 \} \quad (4.118)$$

Considere o filtro próprio denotado por

$$(\mathcal{F}_d^g :) \quad \begin{cases} \hat{x}(t+1) = A_f \hat{x}(t) + B_f y(t), & \hat{x}(0) = \mathbf{0} \\ \tilde{z}(t) = C_f \hat{x}(t) + D_f y(t) \end{cases} \quad (4.119)$$

A dinâmica do erro de filtragem é então descrita por

$$(\mathcal{T}_d^g :) \quad \begin{cases} \tilde{x}(t+1) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} w(t) \\ \tilde{z}(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t) + \tilde{D} w(t) \end{cases} \quad (4.120)$$

onde

$$\tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

$$\tilde{C} \triangleq [L - D_f C \quad -C_f], \quad \tilde{D} \triangleq T - D_f D, \quad \tilde{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Com isto, a versão para o Teorema 4.4 é apresentada a seguir.

Teorema 4.6 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O filtro (\mathcal{F}_d^g) em (4.119) é um filtro admissível com erro de filtragem \tilde{z} , para $x(0) = \mathbf{0}$, satisfazendo $\|H_{\tilde{z}w}\|_{\infty} < \sqrt{\delta}$ se, e somente se, existirem $R = R'$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X = X'$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$ tais que*

$$\Pi_g(A, B, C, D, L, T, R, X, M, N, Z, D_f, \delta) > \mathbf{0} \quad (4.123)$$

$$X - R > \mathbf{0} \quad (4.124)$$

onde a função matricial $\Pi_g(\cdot)$ é definida por

$$\triangleq \begin{bmatrix} R & R & \mathbf{0} & A'R & A'X + C'Z' + M' & L' - C'D_f' - N' \\ R & X & \mathbf{0} & A'R & A'X + C'Z' & L' - C'D_f' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} & B'R & B'X + D'Z' & T' - D'D_f' \\ RA & RA & RB & R & R & \mathbf{0} \\ XA + ZC + M & XA + ZC & XB + ZD & R & X & \mathbf{0} \\ L - D_f C - N & L - D_f C & T - D_f D & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.125)$$

□

Prova: (Necessidade). A prova segue a mesma linha do Teorema 4.4, considerando, no entanto, uma inequação mais geral no Lema 2.2, que leva em conta a matriz \tilde{D} (veja, por exemplo, [ZDG96], [dSX92], [GA94], [ZKSN95], [PTP97]):

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.126)$$

ou

$$\begin{bmatrix} P\tilde{A} & P\tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P\tilde{A} & P\tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \quad (4.127)$$

que, pelo complemento de Schur, é equivalente a

$$\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & \tilde{A}'P & \tilde{C}' \\ \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} & \tilde{B}'P & \tilde{D}' \\ P\tilde{A} & P\tilde{B} & P & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & \tilde{D} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.128)$$

onde $\delta \triangleq \gamma^2$.

Multiplicando (4.128) à direita e à esquerda, respectivamente, por J' e \tilde{J} definida em (4.50) obtém-se

$$\begin{bmatrix} J'\tilde{J} & \mathbf{0} & J'\tilde{A}'\tilde{J} & J'\tilde{C}' \\ \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} & \tilde{B}'\tilde{J} & \tilde{D}' \\ \tilde{J}'\tilde{A}J & \tilde{J}'\tilde{B} & J'\tilde{J} & \mathbf{0} \\ \tilde{C}J & \tilde{D} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.129)$$

Logo, para (4.53), (4.54) e

$$J'\tilde{C}' = \begin{bmatrix} S_{11}L' - S_{11}C'D_f' - S_{12}C_f' \\ L' - C'D_f' \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

tem-se que (4.129) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & P_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} \\ AS_{11} & A & B \\ P_{11}AS_{11} + P_{12}B_fCS_{11} + P_{12}A_fS'_{12} & P_{11}A + P_{12}B_fC & P_{11}B + P_{12}B_fD \\ LS_{11} - D_fCS_{11} - C_fS'_{12} & L - D_fC & T - D_fD \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.131)$$

$$\begin{bmatrix} S_{11}A' & S_{11}A'P_{11} + S_{11}C'B_fP'_{12} + S_{12}A_fP'_{12} & S_{11}L' - S_{11}C'D_f' - S_{12}C_f' \\ A' & A'P_{11} + C'B_fP'_{12} & L' - C'D_f' \\ B' & B'P_{11} + D'B_fP'_{12} & T' - D'D_f' \\ S_{11} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & P_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.131)$$

Pré e pós-multiplicando a inequação matricial não-linear (4.131) pela transformação de similaridade denotada por

$$\text{diag} [S_{11}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, S_{11}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}] \quad (4.132)$$

e usando a mudança de variáveis definida em (4.58), isto é,

$$Z \triangleq P_{12}B_f, \quad \tilde{Z} \triangleq C_fS'_{12} \quad \text{e} \quad \hat{Z} \triangleq P_{12}A_fS'_{12} \quad (4.133)$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix}
S_{11}^{-1} & S_{11}^{-1} & 0 \\
S_{11}^{-1} & P_{11} & 0 \\
0 & 0 & \delta \mathbf{I} \\
S_{11}^{-1} A & S_{11}^{-1} A & S_{11}^{-1} B \\
P_{11} A + ZC + \hat{Z} S_{11}^{-1} & P_{11} A + ZC & P_{11} B + ZD \\
L - D_f C - \tilde{Z} S_{11}^{-1} & L - D_f C & T - D_f D \\
A' S_{11}^{-1} & A' P_{11} + C' Z' + S_{11}^{-1} \hat{Z}' & L' - C' D_f - S_{11}^{-1} \tilde{Z}' \\
A' S_{11}^{-1} & A' P_{11} + C' Z' & L' - C' D_f' \\
B' S_{11}^{-1} & B' P_{11} + D' Z' & T' - D' D_f' \\
S_{11}^{-1} & S_{11}^{-1} & 0 \\
S_{11}^{-1} & P_{11} & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{I}
\end{bmatrix} > 0 \quad (4.134)$$

Por fim, definindo-se uma nova mudança de variáveis dada por

$$R \triangleq S_{11}^{-1}, \quad X \triangleq P_{11}, \quad M \triangleq \hat{Z} R, \quad N \triangleq \tilde{Z} R \quad (4.135)$$

obtem-se a \mathcal{LMI} apresentada em (4.123).

(Suficiência). Segue os mesmos passos da apresentada no Teorema 4.4. \blacksquare

De forma equivalente a (4.71) e (4.72) na seção 4.3, uma estrutura particular para o filtro (\mathcal{F}_c^g) em (4.119) pode ser estabelecida. De fato, usando as mudanças de variáveis em (4.133) e (4.135) obtém-se

$$(\mathcal{F}_c^g) : \begin{cases} \hat{x}(t+1) = (R - X)^{-1} M \hat{x}(t) + (R - X)^{-1} Z y(t), & \hat{x}(0) = 0 \\ \hat{z}(t) = N \hat{x}(t) + D_f y(t) \end{cases} \quad (4.136)$$

Considere os seguintes conjuntos

$$\mathcal{G}^g \triangleq \{(R, X, M, N, Z, D_f, \delta) \mid \Pi_g(A, B, C, D, L, T, R, X, M, N, Z, D_f, \delta) > 0, \\ X - R > 0, \forall (A, B, C, D, L, T) \in \mathcal{P}_d^g\} \quad (4.137)$$

$$\mathcal{G}_V^g \triangleq \{(R, X, M, N, Z, D_f, \delta) \mid \Pi_g(A_i, B_i, C_i, D_i, L_i, T_i, R, X, M, N, Z, D_f, \delta) > 0, \\ X - R > 0, \forall (A_i, B_i, C_i, D_i, L_i, T_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_d^g)\} \quad (4.138)$$

onde, naturalmente, $\mathcal{G}^g \equiv \mathcal{G}_V^g$. Portanto, o Corolário 4.1 pode ser reapresentado da seguinte forma.

Corolário 4.4 *Seja $\delta \triangleq \gamma^2 > 0$ fixado. O problema de filtragem robusto $(\mathbf{P}_{\infty}^{rd})$ considerando (\mathcal{F}_d^g) é solúvel $\forall (A, B, C, D, L, T) \in \mathcal{P}_d^g$ e a dinâmica do erro de filtragem (T_d^g) é quadraticamente estável com atenuação de ruídos γ se, e somente se, existirem $R = R', R \in \mathbb{R}^{n \times n}, X = X', X \in \mathbb{R}^{n \times n}, M \in \mathbb{R}^{n \times n}, N \in \mathbb{R}^{p \times n}, Z \in \mathbb{R}^{n \times r}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times r}$ de forma que*

$$(R, X, M, N, Z, D_f, \delta) \in \mathcal{G}_V^g \quad (4.139)$$

Em caso afirmativo, o filtro admissível é descrito por (4.136). \square

Prova: Imediata a partir do Teorema 4.6 e da identidade $G^g \equiv \mathcal{G}_V^g$. ■

Exemplo 4.4 Considere o mesmo sistema incerto apresentado no exemplo 4.2 da seção 4.5, com a imposição de uma estrutura própria como em (\mathcal{F}_d^g) ao filtro robusto. Seguindo os mesmos passos do exemplo 4.2 e considerando o Corolário 4.4, obtém-se o custo garantido \mathcal{H}_∞ de filtragem $\gamma = 5.9533 = 15.4952\text{dB}$, com as matrizes do filtro (\mathcal{F}_d^g) dadas por

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.1571 & 2.4551 \\ -0.0638 & -0.7419 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -0.0309 \\ 0.0095 \end{bmatrix}, C_f = [0.6489 \quad 2.4044], D_f = -0.3223 \quad (4.140)$$

A figura 4.7 apresenta o diagrama de valores singulares para o filtro robusto (4.140) conectado ao sistema (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente distribuídos no intervalo $[-1; 1]$. Pode-se notar então que o valor de γ encontrado é um custo garantido \mathcal{H}_∞ levando em conta o projeto de um filtro próprio como em (4.140).

Exemplo 4.5 Considere novamente o sistema incerto (4.113) apresentado no exemplo 4.3. O projeto de um filtro robusto próprio associado a um custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ pode ser obtido minimizando o valor de γ no Corolário 4.4. Desta forma, é possível obter $\gamma = 11.2046$ e

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.1724 & 3.1451 & -84.9683 & 3.5004 \\ -0.0528 & 0.9805 & 0.2671 & 1.0886 \\ 0 & 0 & 0.9820 & 0.0003 \\ -0.0007 & 0.0079 & 0.9895 & 0.6169 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 1.1328 \\ 0.0526 \\ 0 \\ 0.0006 \end{bmatrix}$$

$$C_f = [-0.0295 \quad 0.5472 \quad -16.9794 \quad -0.1808], D_f = 1.0284 \quad (4.141)$$

O diagrama de valores singulares para o filtro robusto (4.141) conectado ao sistema incerto (4.113) considerando o custo garantido $\gamma = 20.9879\text{dB}$ é apresentado na figura 4.8.

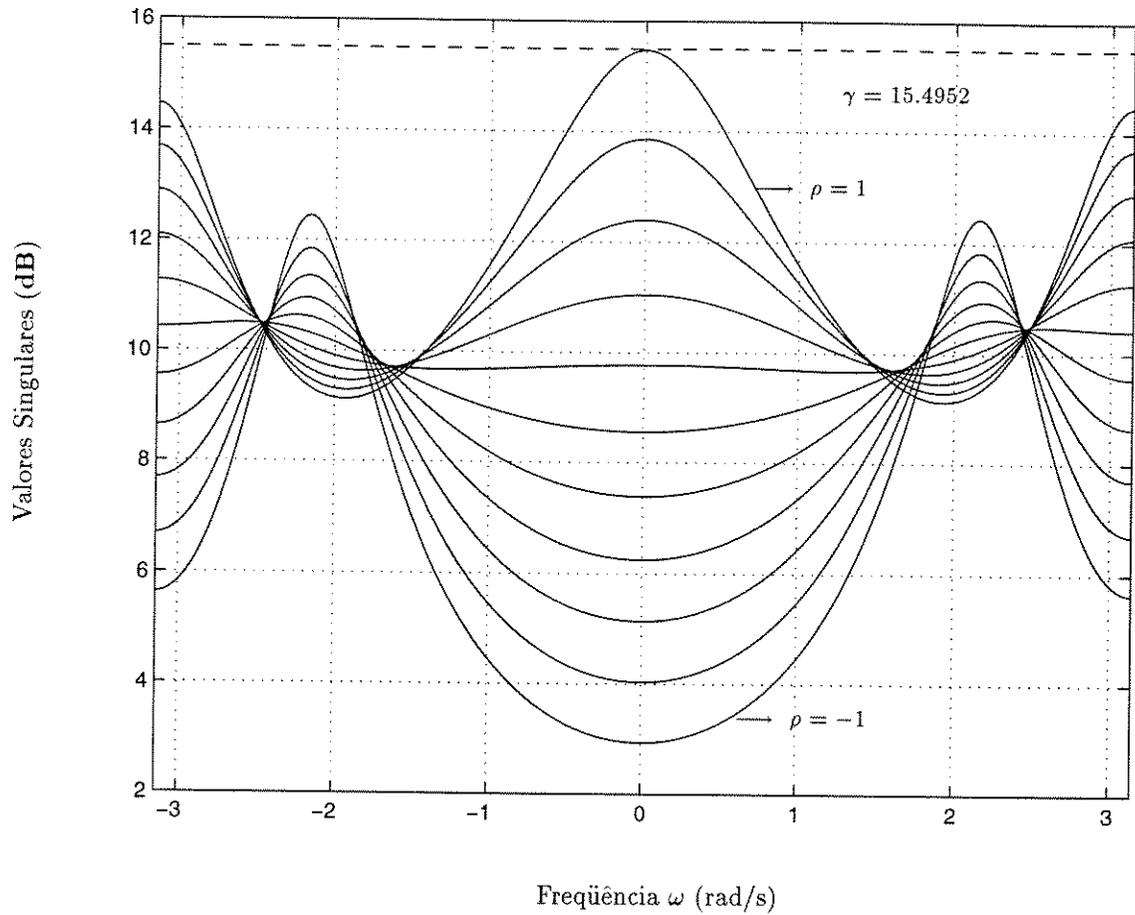


Figura 4.7: Diagrama de valores singulares para o filtro robusto \mathcal{H}_∞ (4.140) conectado ao sistema incerto (4.108), considerando que o parâmetro incerto ρ assume onze valores igualmente distribuídos no intervalo $[-1; 1]$ com $-\pi \leq \omega \leq \pi$ - Exemplo 4.4.

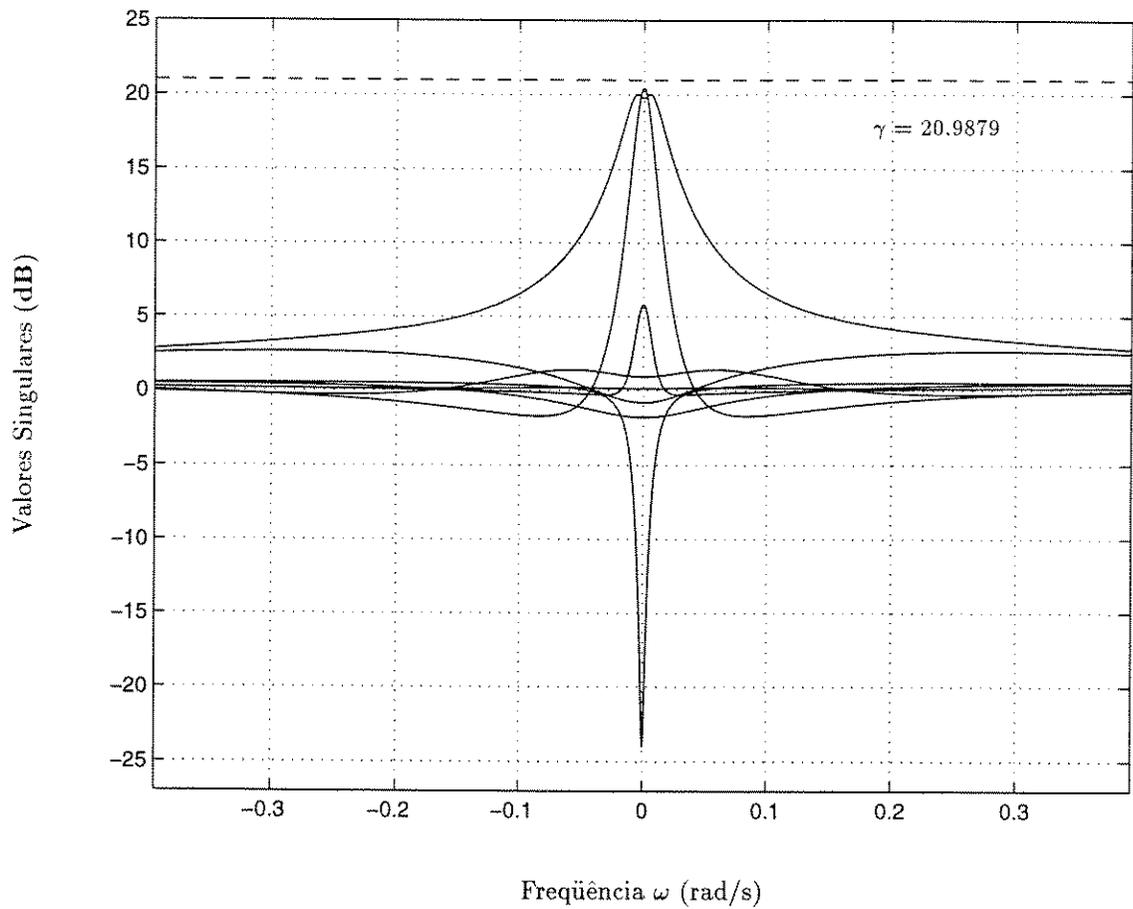


Figura 4.8: Diagrama de valores singulares máximo para os vértices $i = 1, \dots, 8$ considerando o filtro robusto (4.141) conectado ao sistema incerto (4.113) - Exemplo 4.5 (esta figura representa um *zoom* ao redor de $\omega = 0$ (rad/s), pois o diagrama atenua para $\frac{\pi}{8} \leq |\omega| \leq \pi$).

Capítulo 5

Filtragem Singular Sujeita a Entradas Desconhecidas

5.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo de uma família de observadores que tem como casos particulares os *observadores sujeitos a entradas desconhecidas* e os *filtros* \mathcal{H}_∞ e/ou \mathcal{H}_2 . A idéia principal da abordagem consiste em estabelecer um caso geral que corresponda a uma transição dos dois casos particulares acima, isto é, uma transição dos padrões de distúrbios de completamente *singular* para inteiramente *regular*. No caso geral serão consideradas simultaneamente entradas de natureza arbitrária e \mathcal{L}_2 (ℓ_2) ou Gaussianas.

Uma característica dos *observadores sujeitos a entradas desconhecidas* ([DZX94], [TP96], [DU95], [YW88], [KVR80]) é a de desacoplar os distúrbios de natureza arbitrária que atuam sobre o espaço de estados do sistema em algumas direções específicas (distúrbios que satisfazem uma condição de *matching*). Uma técnica comumente utilizada na literatura é o chamado projeto do observador em “modos deslizantes”, envolvendo necessariamente sistemas *singulares*, discutido, por exemplo, em [TP96], [DU95], [SHM87]. No caso de sistemas discretos, o projeto do observador em “modos deslizantes” é obtido de forma direta, bastando para tanto, como será mostrado, fazer uma escolha apropriada de atrasos no tempo para o projeto do observador. No entanto, no caso do projeto de observadores em sistemas contínuos, aplica-se uma técnica de chaveamento, conhecida como método de controle equivalente¹³ [Dra92], [DU95], à equação do observador [TP96], de forma a gerar uma característica de “modos deslizantes”, isto é, manter através do chaveamento o erro de estimativa sobre uma determinada superfície. A escolha deste tipo de projeto é motivada pela característica de se estabelecer a convergência do estado estimado \hat{x} para x em um tempo finito [DU95], ao contrário da convergência assintótica dos projetos apresentados em [DZX94], [YW88].

Por outro lado, a estratégia de filtragem com critérios do tipo \mathcal{H}_∞ ou \mathcal{H}_2 se desenrola em um ambiente no qual o sinal de ruído, pertencente à classe de sinais \mathcal{U} , corrompe totalmente (ou parcialmente) o espaço de estados e o espaço de medidas, e os distúrbios não são completamente desacoplados, mas apenas atenuados.

Nesse cenário, surgem ainda os problemas de filtragem *singular*, nos quais a saída medida

¹³Veja a seção de notas e referências apresentada no final deste capítulo.

é parcialmente (ou completamente) livre de ruídos, permitindo estimativas não corrompidas do subespaço do espaço de estados. Uma importante propriedade das soluções dos problemas *singulares* é o surgimento de algumas direções do espaço de estados com a possibilidade de desacoplagem completa de distúrbios. Esta propriedade estabelece uma conexão natural entre filtros $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ ótimos e *observadores sujeitos a entradas desconhecidas*, que tornam-se casos particulares de uma estrutura mais geral, permitindo assim, uma sistematização para o projeto de observadores nos casos contínuo e discreto no tempo [TPP98], [TPP97b], [TPP97a].

NOTA 5.1 *O cenário proposto neste capítulo diverge, em certo grau, dos anteriores no seguinte sentido: as estratégias por LMI's propostas para solucionar o problema de filtragem ($\mathbf{P}_{\infty\gamma}$) permitem tratar o caso singular; porém, não na presença de uma entrada de natureza arbitrária atuando sobre o sistema.* \diamond

Considere o seguinte sistema LIT dado por

$$(\mathcal{S}_u :) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) + Eu(t) + Hf(t), & x(0) = x_o, \quad t \in [0; \infty) \\ y(t) = Cx(t) + Dw(t) + Fu(t) \\ z(t) = Lx(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saídas medidas, $u \in \mathbb{R}^q$ is o vetor de entradas determinísticas e $z \in \mathbb{R}^p$ é o sinal a ser estimado. Considere que

$$w(t) \in \mathcal{U}^m \quad (5.2)$$

Neste sentido, o vetor de sinal de ruídos $w \in \mathbb{R}^m$, será denominado vetor de distúrbios *limitados*, enquanto $f(t) \in \mathbb{R}^f$ será denominado vetor de distúrbios *arbitrários*. O sinal $f(t)$ é um sinal não mensurável sobre o qual nenhuma hipótese é considerada. Porém, uma condição de *matching* é exigida para a matriz de entrada H . Define-se a transformação :

$$R : \mathcal{N}(R) = \mathfrak{S}(D) \quad (5.3)$$

A condição de *matching* é dada por:

$$\text{posto}(H) = \text{posto}(RCH) \quad (5.4)$$

A condição acima é sempre necessária, no sentido de desacoplar as entradas de natureza arbitrária que atuam em algumas direções específicas no espaço de estados. Além disso, assume-se que:

(U-i) o sistema (5.1) é observável.

(U-ii) a matriz C tem posto de linhas completo (sem perda de generalidade).

O problema a ser tratado consiste em projetar um observador que possua as características robustas de um filtro \mathcal{H}_∞ associado ao observador em modos deslizantes, de forma a desacoplar as entradas arbitrárias.

Problema 5.1 (P_s^u) (PROBLEMA DE FILTRAGEM SINGULAR SUJEITA A ENTRADAS DESCONHECIDAS). *Assuma que o vetor de ruídos $w(t) \in \mathcal{U}^m$. Determine uma estrutura para o estimador tal que o erro de estados $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ satisfaça $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}(e(t)) = 0$. Além disso, o filtro é projetado de forma a minimizar a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência, do sinal de entrada $w(t)$ para o erro de filtragem $\tilde{z}(k) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$. \triangle*

Note que apenas a parte *regular* da saída (isto é, a parte corrompida pelo sinal de ruído) contribui para a norma da função de transferência, de forma que o critério \mathcal{H}_∞ será definido com relação ao *núcleo regular* a ser apresentado na seção 5.2.2.

5.2 Esquema de Decomposição

O algoritmo de decomposição do sistema atua de forma a estabelecer uma parte *singular* e outra *regular*. O sub-sistema *regular* está associado com o subespaço no qual o ruído corrompe as estimativas de estado. O sub-sistema *singular* está associado ao subespaço livre de ruídos. Desta forma, o sub-sistema *singular* permite a obtenção determinística das trajetórias de estados a partir das medidas disponíveis.

5.2.1 Separação dos Distúrbios Arbitrários

Esta primeira parte do algoritmo atua sobre o problema original de forma a reduzi-lo a um problema sem a presença de distúrbios *arbitrários*. Suponha que a matriz D não tem posto de linhas completo (isto é, pelo menos uma direção do vetor de saídas medidas não é corrompida). Levando em conta a hipótese (U-ii), tem-se:

Passo 1: *Implemente uma transformação de coordenadas nos vetores y e x de forma que o sistema (5.1) pode ser reescrito como:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbf{0} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Denote por

$$\ell \triangleq \text{posto}(D_{11}) \quad (5.6)$$

o número de saídas regularmente corrompidas, e

$$s \triangleq m - \ell \quad (5.7)$$

o número de saídas livres de distúrbios (singularmente medidas). No sistema (5.5) o subvetor $y_2 \in \mathbb{R}^s$. A partição correspondente de x foi definida de forma que $x_2 \in \mathbb{R}^s$, impondo também a partição na equação dinâmica.

Após este passo, os bloco relevantes de posto completo são:

- $D_{11} \rightarrow$ posto completo de linhas
- $C_{11} \rightarrow$ posto completo de linhas
- $C_{22} \in \mathbb{R}^{s \times s} \rightarrow$ posto completo de linhas e colunas
- $H_{21} \rightarrow$ posto completo de colunas (garantido pela condição de *matching*).

Passo 2: *Implemente um nova transformação de similaridade com respeito à base do subvetor x_2 , a fim de obter um matriz quadrada não singular H_{31} :*

$$\begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \\ \partial x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} H_{11} \\ \mathbf{0} \\ H_{31} \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \mathbf{0} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.8)$$

Após este passo, os bloco relevantes de posto completo são:

- $D_{11} \rightarrow$ posto completo de linhas
- $C_{11} \rightarrow$ posto completo de linhas
- $\begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \rightarrow$ posto completo de linhas e colunas
- $H_{31} \rightarrow$ posto completo de linhas e colunas

Passo 3: *Defina a variável:*

$$d(t) \triangleq H_{31}^{-1}(\partial x_3(t) - A_{33}x_3(t)) \quad (5.9)$$

Note que esta variável é, em princípio, precisamente conhecida a partir das medidas não corrompidas y_2 . Desta forma, a variável $f(t)$ é reescrita como:

$$f(t) = d(t) - H_{31}^{-1}(A_{31}x_1(t) + A_{32}x_2(t) + B_{31}w(t)) \quad (5.10)$$

Então, o sistema de equações torna-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \\ \partial x_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{31} & A_{12} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{32} & A_{13} \\ & A_{21} & A_{22} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} B_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}B_{31} \\ B_{21} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} H_{11} \\ \mathbf{0} \\ H_{31} \end{bmatrix} d(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.11) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \mathbf{0} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

A correspondência do sistema acima com (5.8) é imediata. De fato, tomando a equação associada a x_1 e substituindo $d(t)$ por $f(t) + H_{31}^{-1}(A_{31}x_1(t) + A_{32}x_2(t) + B_{31}w(t))$, obtém-se a equivalência. O mesmo é válido para as equações de x_2 e x_3 . Pode-se notar então que a variável de distúrbios arbitrários foi desacoplada no sistema (5.11).

Passo 4: Considere agora apenas as equações associadas ao sub-vetor $[x'_1 \ x'_2]'$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{31} & A_{12} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{32} \\ & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} B_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}B_{31} \\ B_{21} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} H_{11} & A_{13} & E_{11} \\ \mathbf{0} & A_{23} & E_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ x_3(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbf{0} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & C_{13} & F_{11} \\ \mathbf{0} & C_{23} & F_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(t) \\ x_3(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (5.12) \end{aligned}$$

Note que todas as “entradas determinísticas” foram agrupadas em um único vetor. Desta forma, a decomposição do sistema recaiu em um sistema descrito como em (5.1), com $H = \mathbf{0}$.

5.2.2 Decomposição Regular/Singular

A segunda parte do algoritmo permite a determinação do sistema denominado neste trabalho como *núcleo regular*, se tal núcleo existir. Considere o sistema da forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbf{0} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Considere ℓ e s definidos em (5.6) e (5.7), com $H = \mathbf{0}$ (isto é, após a implementação descrita na seção anterior). No sistema (5.13) o sub-vetor $y_2 \in \mathbb{R}^s$. A partição correspondente ao vetor x foi definida de forma que $x_2 \in \mathbb{R}^s$.

Os blocos relevantes de posto completo são:

- $D_{11} \rightarrow$ posto completo de linhas
- $C_{11} \rightarrow$ posto completo de linhas
- $C_{22} \in \mathbb{R}^{s \times s} \rightarrow$ posto completo de linhas e colunas

Se $[B'_{21} \ D'_{11}]'$ é de posto completo de linhas, pare o algoritmo; o núcleo regular é dado por χ_1 , com o vetor de medidas $[y'_1 \ x'_2]'$. Caso contrário, esta segunda parte do algoritmo deve ser implementada, pois é possível obter mais informações perfeitas com respeito aos estados.

Passo 1: Decomponha B_{21} de forma a encontrar uma matriz $[B'_{21} \ D'_{11}]'$ de posto completo de linhas na composição $[B'_{21} \ \mathbf{0} \ D'_{11}]'$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \\ \partial x_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \mathbf{0} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Se $\text{posto}(A_{31}) = 0$, então a decomposição pára neste ponto, não sendo possível obter mais informações exatas a respeito de x_1 , e o núcleo regular é o subespaço χ_1 com o vetor de medidas y_1 . Caso contrário, siga para o passo 2, pois a equação de $\partial x_3(t)$ é livre de ruídos, sendo possível extrair mais informações perfeitas com relação a x_1 .

Note que a composição das matrizes de entrada de ruídos $[B'_{21} \ D'_{11}]'$ pode estabelecer, durante a decomposição, uma combinação entre as variáveis de estados com alguma componente corrompida do sinal de saídas medidas.

Passo 2: Como $\text{posto}(A_{31}) \neq 0$, pode-se executar uma transformação de similaridade sobre x_1 de forma que:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \\ \partial x_3(t) \\ \partial x_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \end{bmatrix} u(t) \\
\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{23} & C_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} u(t)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Após este passo, A_{42} tem posto completo de colunas (por construção), sendo portanto inversível à esquerda. Sendo assim, o sub-vetor x_2 é completamente determinado a partir da equação $\partial x_4(t)$, além dos sub-vetores x_3 e x_4 .

Neste ponto, se $[B'_{21} \ B'_{31} \ D'_{11}]'$ tem posto completo de linhas, o algoritmo pára e o sistema correspondente ao *núcleo regular* é χ_1 , com o vetor de medidas y_1 .

Se $\dim(\chi_1) = 0$, o algoritmo também pára, e não existe um *núcleo regular* no sistema.

Se $\dim(\chi_1) \neq 0$ e $[B'_{21} \ B'_{31} \ D'_{11}]'$ não tem posto completo de linhas, considere o sub-sistema dado por $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3$ e retorne ao passo 1. Como a dimensão do subespaço considerado é estritamente menor à cada iteração, o algoritmo pára após um número finito de passos.

5.2.3 Forma Canônica Regular/Singular

Assim, o sistema (5.1) pode ser colocado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \\ \partial x_3(t) \\ \partial x_4(t) \\ \partial x_5(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{31} \\ H_{41} \\ H_{51} \end{bmatrix} g(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \\ E_{51} \end{bmatrix} u(t) \\
\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{23} & C_{24} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix} +
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} u(t)$$

Onde

$$g(t) = f(t) + Vx(t) + Uw(t) \quad (5.17)$$

com V e U definidos em (5.10). A forma acima tem as seguintes propriedades:

(U-1) C_{35} é quadrada e tem posto completo

(U-2) $\begin{bmatrix} C_{23} & C_{24} \end{bmatrix}$ é quadrada e tem posto completo

(U-3) D_{11} tem posto completo de linhas

(U-4) A_{42} , se não for nula, tem posto completo de colunas

(U-5) H_{51} é quadrada e tem posto completo

Mais decomposições podem ser implementadas no subespaço $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3$ se A_{42} não é nula e $\begin{bmatrix} B'_{21} & B'_{31} & D'_{11} \end{bmatrix}'$ não tem posto completo de linhas. Neste caso, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \partial x_1(t) \\ \partial x_2(t) \\ \partial x_3(t) \\ \partial x_4(t) \\ \partial x_5(t) \\ \partial x_6(t) \\ \partial x_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ \mathbf{0} \\ B_{51} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{31} \\ H_{41} \\ H_{51} \\ H_{61} \\ H_{71} \end{bmatrix} g(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \\ E_{51} \\ E_{61} \\ E_{71} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.18) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{25} & C_{26} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \begin{bmatrix} D_{11} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ F_{31} \end{bmatrix} u(t)$$

O subespaço $\chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3 \oplus \chi_5$ pode ser novamente decomposto, se $A_{42} \neq \mathbf{0}$ e a matriz $[B'_{21} \ B'_{31} \ B'_{51} \ D'_{11}]'$ não tiver posto completo de linhas.

Definem-se as seguintes matrizes

$$M_1 = \emptyset \quad (5.19)$$

$$M_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} M_{i-1} \\ B_{i1} \end{bmatrix} & , \text{ se } B_{i1} \neq \mathbf{0} \\ M_{i-1} & , \text{ se } B_{i1} = \mathbf{0} \end{cases} \quad \forall i \geq 2 \quad (5.20)$$

Considerando a definição acima, uma propriedade adicional da forma canônica, em seu formato final, é dada a seguir:

(U-6) Uma das seguintes condições verifica-se:

1. χ_1 é vazio
2. χ_1 não é vazio (neste caso, $[M'_i \ D'_{11}]'$ tem posto completo de linha, para i máximo, ou χ_2 é vazio)

No caso (U-6.2), existe um *núcleo regular* nas equações dinâmicas do sistema, dado pelo subespaço χ_1 . Nesta situação, as estratégias de filtragem, com critério do tipo \mathcal{H}_∞ , apresentadas no capítulo 2, podem ser aplicadas ao *núcleo regular*.

No caso (U-6.1), no entanto, o sistema é completamente *singular*. Nesta situação, o erro de observação (isto é, $x - \hat{x}$) pode ser eliminado em um tempo finito, já que não existe ruído corrompendo a saída medida.

A fim de se evitar uma notação confusa e densa, o projeto do observador será desenvolvido apenas para o sistema (5.18). Generalizações para sistemas com mais blocos são diretas.

Uma visão geral do procedimento de decomposição é apresentada no algoritmo que se segue.

— ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO REGULAR/SINGULAR —

- Considere a hipótese (U-ii)

{1

Inicialização : Inicializa-se a variável indicadora de fim do algoritmo fazendo: $P \leftarrow -1$

Passo 1: Toma-se o sistema original (5.1) na forma:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & B & H & E \\ \hline C & D & F & - \end{array} \right] \quad (5.21)$$

Se D possui posto de linhas completo

Então $P \leftarrow 0$ (Parada **P0**: o sistema não é singular, e o algoritmo não se aplica.)

Se $P < 0$

{2

Passo 2: (SEPARAÇÃO DOS DISTÚRBIOS ARBITRÁRIOS) Uma mudança de coordenadas nos vetores y e x coloca o sistema original na forma

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} A_{11} & A_{12} & B_{11} & H_{11} & E_{11} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & H_{21} & E_{21} \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & F_{11} & - \\ \mathbf{0} & C_{22} & \mathbf{0} & F_{21} & - \end{array} \right] \quad (5.22)$$

Passo 3: Aplica-se uma transformação de similaridade no subespaço χ_2 de forma que H_{31} seja inversível:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & H_{11} & E_{11} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & \mathbf{0} & E_{21} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & H_{31} & E_{31} \\ \hline C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & F_{11} & - \\ \mathbf{0} & C_{22} & C_{23} & \mathbf{0} & F_{21} & - \end{array} \right] \quad (5.23)$$

Passo 4: Define-se

$$d(t) \triangleq H_{31}^{-1}(\partial x_3(t) - A_{33}x_3(t)) \quad (5.24)$$

De maneira que (5.23) pode ser reescrito da forma

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{31} & A_{12} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{32} & A_{13} & B_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}B_{31} & H_{11} & E_{11} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & \mathbf{0} & E_{21} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{33} & \mathbf{0} & H_{31} & E_{31} \\ \hline C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & F_{11} & - \\ \mathbf{0} & C_{22} & C_{23} & \mathbf{0} & F_{21} & - \end{array} \right] \quad (5.25)$$

Passo 5: Redefine-se o sistema (5.25) em termos do subespaço $\chi_1 \oplus \chi_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{31} & A_{12} - H_{11}H_{31}^{-1}A_{32} & B_{11} - H_{11}H_{31}^{-1}B_{31} & H_{11} & A_{13} & E_{11} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & \mathbf{0} & A_{23} & E_{21} \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & \mathbf{0} & C_{13} & F_{11} \\ \mathbf{0} & C_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{23} & F_{21} \end{array} \right] \quad (5.26)$$

2}

{3

Passo 6: (DETERMINAÇÃO DO NÚCLEO REGULAR) Considere o sistema (5.22) com $H = \mathbf{0}$

Se $[B'_{21} \ D'_{11}]'$ possui posto completo de linhas

Então $P \leftarrow 1$

(Parada P1: χ_1 é o núcleo regular.)

Senão Enquanto $P < 0$

{4

Passo 7: Decomponhe-se B_{21} tal que

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & E_{11} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & E_{21} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \mathbf{0} & E_{31} \\ \hline C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & F_{11} \\ \mathbf{0} & C_{22} & C_{23} & \mathbf{0} & F_{21} \end{array} \right] \quad (5.27)$$

possua $[B'_{21} \ D'_{11}]'$ com posto completo de linhas

Se $\text{posto}(A_{31}) = 0$

Então $P \leftarrow 1$

(Parada P1: χ_1 é o núcleo regular.)

Se $P < 0$

Passo 8: Proceder-se uma transformação nas coordenadas de χ_1 de forma que:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & B_{11} & E_{11} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & B_{21} & E_{21} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & B_{31} & E_{31} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & \mathbf{0} & E_{41} \\ \hline C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & D_{11} & F_{11} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & C_{23} & C_{24} & \mathbf{0} & F_{21} \end{array} \right] \quad (5.28)$$

Se $[B'_{21} \ B'_{31} \ D'_{11}]'$ possui posto completo de linhas

Então

Se $\dim(x_1) \neq 0$, $P \leftarrow 1$

(Parada P1: χ_1 é o núcleo regular.)

Se $\dim(x_1) = 0$, $P \leftarrow 2$

(Parada P2: o sistema é completamente singular.)

Se $P < 0$

Passo 9: Redefine-se o sistema a ser decomposto fazendo: $\chi \leftarrow \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_3$, e a condição $\text{posto}(A_{31})$ é reescrita como $\text{posto}(A_{42})$.

4}

3}

1}

O produto final do algoritmo fornece o sistema decomposto na forma canônica Regular/Singular em (5.18), podendo gerar um núcleo regular χ_1 (condição (U-6.2)) ou levar a um sistema completamente singular (condição (U-6.1)).

5.3 Projeto do Observador em Modos Deslizantes

5.3.1 Sistemas Contínuos

Considere o sistema (5.18), e defina a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \\ \dot{\hat{x}}_5(t) \\ \dot{\hat{x}}_6(t) \\ \dot{\hat{x}}_7(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \\ \hat{x}_5(t) \\ \hat{x}_6(t) \\ \hat{x}_7(t) \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{31} \\ H_{41} \\ H_{51} \\ H_{61} \\ H_{71} \end{bmatrix} g(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \\ E_{51} \\ E_{61} \\ E_{71} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{52} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{63} \\ \mathbf{R}_{71} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (5.29)
 \end{aligned}$$

$$v_1(t) = \text{sign}(y_3(t) - C_{37}\hat{x}_7(t) - F_{31}u(t))$$

$$\begin{bmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(y_2(t) - C_{25}\hat{x}_5(t) - C_{26}\hat{x}_6(t) - F_{21}u(t)) \\ \text{sign}(y_1(t) - C_{15}\hat{x}_5(t) - C_{16}\hat{x}_6(t) - F_{11}u(t)) \end{bmatrix}$$

Uma escolha conveniente de \mathbf{R}_{71} , \mathbf{R}_{52} e \mathbf{R}_{63} garante a convergência das estimativas \hat{x}_5 , \hat{x}_6 e \hat{x}_7 para os estados x_5 , x_6 e x_7 em tempo finito. A matriz

$$\tilde{R} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{52} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{63} \\ \mathbf{R}_{71} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

é denominada matriz de chaveamento, no sentido de introduzir no estimador os sinais de chaveamento v_1 , v_2 e v_3 . Assim, uma vez que um chaveamento com características rápidas é estabelecido em todos os componentes do vetor v , a convergência verifica-se [TP96], [DU95], [Dra92].

Considere agora a equação do erro de estimativa, na qual o comportamento do chaveamento acima é estabelecido, de forma que : $\dot{e}_5 = e_5 = \mathbf{0}$, $\dot{e}_6 = e_6 = \mathbf{0}$ e $\dot{e}_7 = e_7 = \mathbf{0}$. Então,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \\ \dot{e}_4(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \\ e_4(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ \mathbf{0} \\ B_{51} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{52} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{63} \\ \mathbf{R}_{71} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Lançando mão do método de controle equivalente [Dra92] (veja a discussão ao final deste capítulo), tem-se,

$$\bar{v}_3 = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_3 dt \quad (5.31)$$

portanto, de (5.30),

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = [A_{63} \ A_{64}]^\# \mathbf{R}_{63} \bar{v}_3 \quad (5.32)$$

Considere, agora, uma nova estrutura do observador que explore as informações disponíveis sobre o erro :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) \\ \dot{\hat{x}}_5(t) \\ \dot{\hat{x}}_6(t) \\ \dot{\hat{x}}_7(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \\ \hat{x}_5(t) \\ \hat{x}_6(t) \\ \hat{x}_7(t) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{31} \\ H_{41} \\ H_{51} \\ H_{61} \\ H_{71} \end{bmatrix} g(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \\ E_{51} \\ E_{61} \\ E_{71} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{34} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{45} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{52} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{63} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{71} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} \quad (5.33)
\end{aligned}$$

$$v_1(t) = \text{sign}(y_3(t) - C_{37}\hat{x}_7(t) - F_{31}u(t))$$

$$\begin{bmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(y_2(t) - C_{25}\hat{x}_5(t) - C_{26}\hat{x}_6(t) - F_{21}u(t)) \\ \text{sign}(y_2(t) - C_{25}\hat{x}_5(t) - C_{26}\hat{x}_6(t) - F_{21}u(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}([A_{63} \ A_{64}]^\# \mathbf{R}_{63} \bar{v}_3) \\ \text{sign}([A_{63} \ A_{64}]^\# \mathbf{R}_{63} \bar{v}_3) \end{bmatrix}$$

Novamente, uma escolha acertada de \mathbf{R}_{34} e \mathbf{R}_{45} pode assegurar a convergência em tempo finito das estimativas \hat{x}_3 e \hat{x}_4 para os estados x_3 e x_4 . A convergência é também estabelecida quando todos os componentes de v_4 e v_5 iniciam um comportamento de chaveamento em alta frequência. A partir deste momento, verifica-se que: $\dot{e}_3 = e_3 = \mathbf{0}$ e $\dot{e}_4 = e_4 = \mathbf{0}$. Portanto, a equação do erro de estimativa é dada por:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ \mathbf{0} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ \mathbf{0} \\ B_{51} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{34} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{45} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{52} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{63} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{71} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \\ v_5(t) \end{bmatrix} \quad (5.34)
\end{aligned}$$

e (como anteriormente):

$$\bar{v}_5 = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_5 dt \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} K \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \\ \hat{x}_3(t) \\ \hat{x}_4(t) \\ \hat{x}_5(t) \\ \hat{x}_6(t) \\ \hat{x}_7(t) \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ H_{31} \\ H_{41} \\ H_{51} \\ H_{61} \\ H_{71} \end{bmatrix} g(t) + \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \\ E_{51} \\ E_{61} \\ E_{71} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{26} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{34} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{45} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{52} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{63} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{71} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} y_1 \quad (5.38)
\end{aligned}$$

$$v_1 = \text{sign}(y_3(t) - C_{37}\hat{x}_7 - F_{31}u(t))$$

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(y_2(t) - C_{25}\hat{x}_5 - C_{26}\hat{x}_6 - F_{21}u(t)) \\ \text{sign}(y_3(t) - C_{37}\hat{x}_7 - F_{31}u(t)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}([A_{63} \ A_{64}]^\# \mathbf{R}_{63}\bar{v}_3) \\ \text{sign}([A_{42} \ \mathbf{R}_{45}]^\# \bar{v}_5) \end{bmatrix}$$

$$v_6 = \text{sign}([A_{42} \ \mathbf{R}_{45}]^\# \bar{v}_5)$$

O problema agora se restringe a projetar uma matriz ótima de filtragem K correspondendo à parte regularmente corrompida. Para tanto, um vetor de informações perfeitas denotado por $p(t)$ é definido como:

$$p(t) = \begin{bmatrix} x_2(t)' & x_3(t)' & x_4(t)' & x_5(t)' & x_6(t)' & x_7(t)' & g(t)' & u(t)' \end{bmatrix}' \quad (5.39)$$

Como a informação corrompida associada ao distúrbio *limitado* está agrupada em algumas parcelas, pode-se definir uma nova variável de “medidas” regularmente ruidosas dada por:

$$q(t) = P x_1(t) + Q w(t) = \begin{bmatrix} C_{11} \\ \bar{A}_{21} \\ A_{31} \\ A_{51} \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \bar{B}_{21} \\ B_{31} \\ B_{51} \end{bmatrix} w(t) \quad (5.40)$$

Na equação acima, \bar{B}_{21} e \bar{A}_{21} denotam partições de posto completo de linhas dos blocos B_{21} e A_{21} , respectivamente.

Portanto, o projeto depende apenas da determinação de uma matriz de filtragem ótima K correspondendo à parte regularmente corrompida, isto é:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) = & (A_{11} - KP)\hat{x}_1(t) + Ky_1(t) + \\ & + \left[\begin{array}{cccccccc} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & H_{11} & E_{11} \end{array} \right] p(t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.3.2 Sistemas Discretos

Considere o sistema com a estrutura (5.18). Os primeiros passos serão dedicados à determinação dos estados *singulares*. Considere o subespaço χ_7 dado por:

$$x_7(t) = C_{37}^{-1}(y_3(t) - F_{31}u(t)) \quad (5.42)$$

A partir deste ponto, o próximo passo é a determinação do vetor de distúrbios *arbitrários* $g(t)$:

$$g(t) = H_{71}^{-1}(x_7(t+1) - A_{77}x_7(t) - E_{71}u(t)) \quad (5.43)$$

Na seqüência, o subespaço $\chi_6 \oplus \chi_5$ é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{25} & C_{26} \end{bmatrix}^{-1} (y_2(t) - F_{21}u(t)) \quad (5.44)$$

e a informação adquirida é empregada na determinação de $\chi_4 \oplus \chi_3$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} A_{63} & A_{64} \end{bmatrix}^{\#} \left(x_6(t+1) - \begin{bmatrix} A_{65} & A_{66} & A_{67} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} - \right. \\ & \left. - H_{61}g(t) - E_{61}u(t) \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Por fim, o último subespaço com informações perfeitas é χ_2 :

$$x_2(t) = A_{42}^{\#} \left(x_4(t+1) - \begin{bmatrix} A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} - H_{41}g(t) - E_{41}u(t) \right) \quad (5.46)$$

Desta forma, um vetor de informações perfeitas denotado por $p(t)$ é definido como:

$$p(t) = \begin{bmatrix} x_2(t)' & x_3(t)' & x_4(t)' & x_5(t)' & x_6(t)' & x_7(t)' & g(t)' & u(t)' \end{bmatrix}' \quad (5.47)$$

Note que agora a informação corrompida associada ao distúrbio *limitado* está agrupada. Define-se então uma nova variável de “medidas” regularmente ruidosas:

$$q(t) = Px_1(t) + Qw(t) = \begin{bmatrix} C_{11} \\ \bar{A}_{21} \\ A_{31} \\ A_{51} \end{bmatrix} x_1(t) + \begin{bmatrix} D_{11} \\ \bar{B}_{21} \\ B_{31} \\ B_{51} \end{bmatrix} w(t) \quad (5.48)$$

$$= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_5(t+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & \mathbf{0} & F_{11} \\ A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & H_{21} & E_{21} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & H_{31} & E_{31} \\ A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & H_{51} & E_{51} \end{bmatrix} p(t)$$

Na equação acima, \bar{B}_{21} e \bar{A}_{21} denotam partições de posto completo de linhas dos blocos B_{21} e A_{21} , respectivamente.

Então, o problema de filtragem da parte regularmente corrompida é definido como: encontre uma matriz ótima K na estrutura:

$$\hat{x}_1(t+1) = (A_{11} - KP)\hat{x}_1(t) + Kq(t) + \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & H_{11} & E_{11} \end{bmatrix} p(t) \quad (5.49)$$

5.4 Esquema de Filtragem

Considere o sistema de ordem reduzida obtido a partir do procedimento de decomposição, no caso em que o subespaço χ_1 é não nulo, de dimensão n_r (isto é, a condição (U-6.2)

verifica-se):

$$\begin{cases} \partial x_1(t) = A_{11}x_1(t) + B_{11}w(t) + E_r p(t), & x_1(0) = x_o \\ q(t) = Px_1(t) + Qw(t) \\ z_r(t) = L_r x_1(t) \end{cases} \quad (5.50)$$

onde $x_1 \in \mathbb{R}^{n_r}$ é o vetor de estados de ordem reduzida, $w \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada exógena de distúrbios *limitados*, $q \in \mathbb{R}^l$ é o vetor estendido de saídas medidas, $z_r \in \mathbb{R}^{p_r}$ é a combinação linear das variáveis de estado de ordem reduzida a ser estimada e $p \in \mathbb{R}^{r_r}$ é o vetor de entradas conhecidas incluindo o vetor de entradas determinísticas $u(t)$, o vetor de distúrbios *arbitrários* $g(t)$ (definido em (5.17)) e também os estados singularmente determinados $x_j(t)$, $j = 2, \dots, b$.

A matriz E_r é definida como:

$$E_r \triangleq \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & H_{11} & E_{11} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

O esquema de filtragem consiste então em resolver o problema de filtragem (com critério \mathcal{H}_∞ ou misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$), para o sistema (5.50), usando as diversas técnicas apresentadas nos capítulos anteriores. Por exemplo, considerando as abordagens por \mathcal{LMI} s apresentadas no Teoremas 2.4 e 2.5 para os casos contínuo e discreto, respectivamente.

5.5 Exemplo

Exemplo 5.1 Considere o seguinte sistema discreto LIT discutido em [TPP97a], sem entradas determinísticas atuando sobre o sistema, isto é, $u(t) = \mathbf{0}$, e apresentado na forma canônica regular/singular da seção 5.2.3:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0381 & 0.2347 & 0.1938 & -0.3096 & 0.3422 & 0.1206 & 0.1151 \\ -0.4873 & 0.0045 & 0.0504 & -0.1326 & -0.0624 & -0.1428 & 0.0318 \\ 0 & 0 & 0.4582 & 0.1222 & -0.0787 & 0.4735 & 0.0320 \\ -0.3341 & 0.3333 & 0.7975 & 0.2134 & 0.1174 & 0.0341 & 0.0707 \\ 0 & 0 & 0.4458 & -0.5110 & 0.3513 & 0.8987 & -0.1885 \\ 0 & 0 & 0.0766 & 0.3650 & 0.1159 & -0.0304 & 0.1672 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 0.2666 & 0.2467 & 0.6940 & 0.8171 \\ 0.9701 & 0.8440 & 0.4558 & 0.0221 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1607 & 0.7078 & 0.5824 & 0.9915 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0.6762 & 0.9448 & 0.4604 & 0.6056 & 0.3438 & 0.0150 & 0.7830 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6701 & 0.8292 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5228 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2742 \end{bmatrix} \\
 D &= \begin{bmatrix} 0.7467 & 0.4364 & 0.0063 & 0.5848 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 H &= [0.7539 \quad 0.1712 \quad 0.0043 \quad 0.4957 \quad 0.0799 \quad 0.1631 \quad 0.9033]'
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

O sistema acima tem apenas uma componente do vetor de saídas medidas $y(t)$ regularmente corrompida, denotada por y_1 , e três variáveis precisamente conhecidas ou *singulares*, y_2 , y_3 e y_4 . Seguindo os passos do projeto do observador em modos deslizantes da seção (5.3.2), e lembrando que $u(t) = \mathbf{0}$, as variáveis de estado x_5 , x_6 e x_7 são obtidas diretamente das componentes precisamente conhecidas do vetor de saídas medidas:

$$x_7(t) = C_{47}^{-1} y_4(t) = 3.6470 y_4(t) \tag{5.53}$$

$$\begin{bmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{25} & C_{26} \\ C_{35} & C_{36} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4923 & -2.3669 \\ 0 & 1.9128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} \tag{5.54}$$

A partir da equação de $x_7(t+1)$ é possível determinar a variável de distúrbios $g(t)$,

$$g(t) = H_{71}^{-1} C_{47}^{-1} y_4(t+1) - H_{71}^{-1} A_{77} C_{41}^{-1} y_4(t) = [4.0374 \quad -1.0990] \begin{bmatrix} y_4(t+1) \\ y_4(t) \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

Além disso, usando as equações de $x_5(t+1)$ e $x_6(t+1)$, as variáveis de estado $x_3(t)$ e $x_4(t)$ também podem ser obtidas diretamente, isto é,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{43} & A_{44} \\ A_{53} & A_{54} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_5(t+1) \\ x_6(t+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{55} & A_{56} & A_{57} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5(t) \\ x_6(t) \\ x_7(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{51} \\ H_{61} \end{bmatrix} g(t) \right) \\
&= - \begin{bmatrix} A_{43} & A_{44} \\ A_{53} & A_{54} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{55} & A_{56} & A_{57} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{25} & C_{26} \\ C_{35} & C_{36} \end{bmatrix}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_{47}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} \\
&\quad - \begin{bmatrix} A_{43} & A_{44} \\ A_{53} & A_{54} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_{51} \\ H_{61} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{71}^{-1} C_{47}^{-1} & H_{71}^{-1} A_{77} C_{41}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_4(t+1) \\ y_4(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} A_{43} & A_{44} \\ A_{53} & A_{54} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{25} & C_{26} \\ C_{35} & C_{36} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_2(t+1) \\ y_3(t+1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2.6984 & 0.5623 & -2.2503 & -1.3858 & -0.7631 & 0.3119 \\ -0.5663 & 5.1225 & -1.3319 & -0.1830 & 1.0710 & -1.2450 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_2(t+1) \\ y_3(t+1) \\ y_4(t+1) \end{bmatrix} \\
&\hspace{15em} (5.56)
\end{aligned}$$

A equação de $x_4(t+1)$, no entanto, não fornece informações exatas, pois é corrompida por parte do sinal ruidoso $[B_{41} \ B_{42} \ B_{43} \ B_{44}]$. Por outro lado, apesar da equação $x_3(t+1)$ não ser corrompida pelo sinal de ruído, não é útil no sentido de se obter mais informações sobre o vetor de estados, pois $A_{32} = \mathbf{0}$ e $A_{31} = \mathbf{0}$.

Desta forma, o *núcleo regular* é então composto pelos estados x_1 e x_2 . As fontes disponíveis de informações regularmente corrompidas são formadas pelas equações de $y_1(t)$ e $x_4(t+1)$.

Note que a equação $x_3(t+1)$, por não sofrer influência do sinal de ruído, não atende ao propósito de fornecer informações corrompidas. Além disso, como

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \\ D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada e de posto completo, isto significa que não há mais informações redundantes que possam ser obtidas.

Portanto, o vetor de informações exatas $p(t)$, definido em (5.47), é dado na forma:

$$p(t-1) = \begin{bmatrix} 2.6984 & 0.5623 & -2.2503 & -1.3858 & -0.7631 & 0.3119 \\ -0.5663 & 5.1225 & -1.3319 & -0.1830 & 1.0710 & -1.2450 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4923 & -2.3669 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.9128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6470 \\ 0 & 0 & 4.0374 & 0 & 0 & -1.0990 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_2(t-1) \\ y_3(t-1) \\ y_4(t-1) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Esta equação matricial¹⁴ sintetiza as informações adquiridas através das equações do projeto do observador (5.53) – (5.56). Já o vetor contendo informações corrompidas $q(t)$, definido em (5.48), é dado por:

$$q(t-1) = \begin{bmatrix} y_1(t-1) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$- \begin{bmatrix} 0.4604 & 0.6056 & 0.3438 & 0.0150 & 0.7830 & 0 \\ 0.7975 & 0.2134 & 0.1174 & 0.0341 & 0.0707 & 0.4957 \end{bmatrix} p(t-1)$$

O estimador de ordem reduzida associado ao *núcleo regular* definido em (5.49), é dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t+1) \\ \hat{x}_2(t+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.0381 & 0.2347 \\ -0.4873 & 0.0045 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \\ &+ K \left(q(t) - \begin{bmatrix} 0.6762 & 0.9448 \\ -0.3341 & 0.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \right) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0.1938 & -0.3096 & 0.3422 & 0.1206 & 0.1151 & 0.7539 \\ 0.0504 & -0.1326 & -0.0624 & -0.1428 & 0.0318 & 0.1712 \end{bmatrix} p(t) \end{aligned} \quad (5.59)$$

e o sinal de ruído entra no sistema associado ao *núcleo regular*, isto é, o sistema descrito em (5.50), através das matrizes:

$$\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2666 & 0.2467 & 0.6940 & 0.8171 \\ 0.9701 & 0.8440 & 0.4558 & 0.0221 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.7467 & 0.4364 & 0.0063 & 0.5848 \\ 0.1607 & 0.7078 & 0.5824 & 0.9915 \end{bmatrix}$$

A matriz de combinação de estados L_r é escolhida como:

$$L_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

¹⁴Tanto o vetor contendo informações exatas como o vetor de informações corrompidas, sofreram um atraso para se adequar ao projeto.

Aplicando, por exemplo, a estratégia proposta no Teorema 2.5 para o projeto de um filtro robusto \mathcal{H}_∞ , obtém-se o ganho de filtragem:

$$K = \begin{bmatrix} 0.1022 & 0.6409 \\ 0.0726 & 0.5212 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

com o nível de atenuação de ruídos mínimo dado por $\gamma = 0.5619$.

De posse do ganho constante de filtragem K acima, o projeto do observador/filtro proposto como na seção 5.3.2 está completo.

A fim de simular o sistema com o projeto do observador/filtro, considere o seguinte sinal $g(t)$ entrando no espaço de estados

$$g(t) = 8 \cos\left(\frac{\pi t}{5} + 1.5\right) \quad (5.63)$$

e uma determinada condição inicial associada ao vetor de estados, dada por

$$x(0) = [-0.7271 \quad 6.1986 \quad 4.4538 \quad 2.8475 \quad -0.2344 \quad -11.5879 \quad -13.0667]' \quad (5.64)$$

O sinal $w(t)$ foi escolhido como sendo um ruído branco de média zero e matriz de covariância igual à identidade.

Na figura 5.1 apresenta-se a evolução dos estados do sistema com a entrada $g(t)$. A figura 5.2 mostra o comportamento dos erros de estimativa de estados e_r e e_s , associados, respectivamente, ao *núcleo regular* ($x_1(t)$ e $x_2(t)$) e à parte *singular* denotada pelo subsistema formado pelos estados $[x_3(t) \quad x_4(t) \quad x_5(t) \quad x_6(t) \quad x_7(t)]'$. Nota-se a completa eliminação do erro e_s após um tempo finito (duas componentes, inclusive, inicializam-se com erro nulo), e a atenuação propiciada pela otimização \mathcal{H}_∞ para o erro regular e_r .

5.6 Conclusão

Neste capítulo estudou-se o projeto de estruturas específicas para o observador/filtro considerando diferentes padrões de distúrbios.

Mostrou-se que, devido à natureza das entradas arbitrárias (que devem ser obrigatoriamente desacopladas em certas direções), e dos sinais de ruídos do tipo $w(t) \in \mathcal{U}^m$ (que não são necessariamente rejeitados, mas apenas atenuados), associados as características dos problemas de filtragem singular, foi possível projetar, de forma conjunta, uma estrutura do estimador levando em conta a eficiência dos observadores em modos deslizantes e a robustez dos filtros com critério \mathcal{H}_∞ .

Variações dos padrões de distúrbios associadas a problemas específicos, permitem tratar o problema de filtragem ótimo $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$ e o projeto de observadores com entradas desconhecidas como casos particulares da estrutura do estimador proposto.

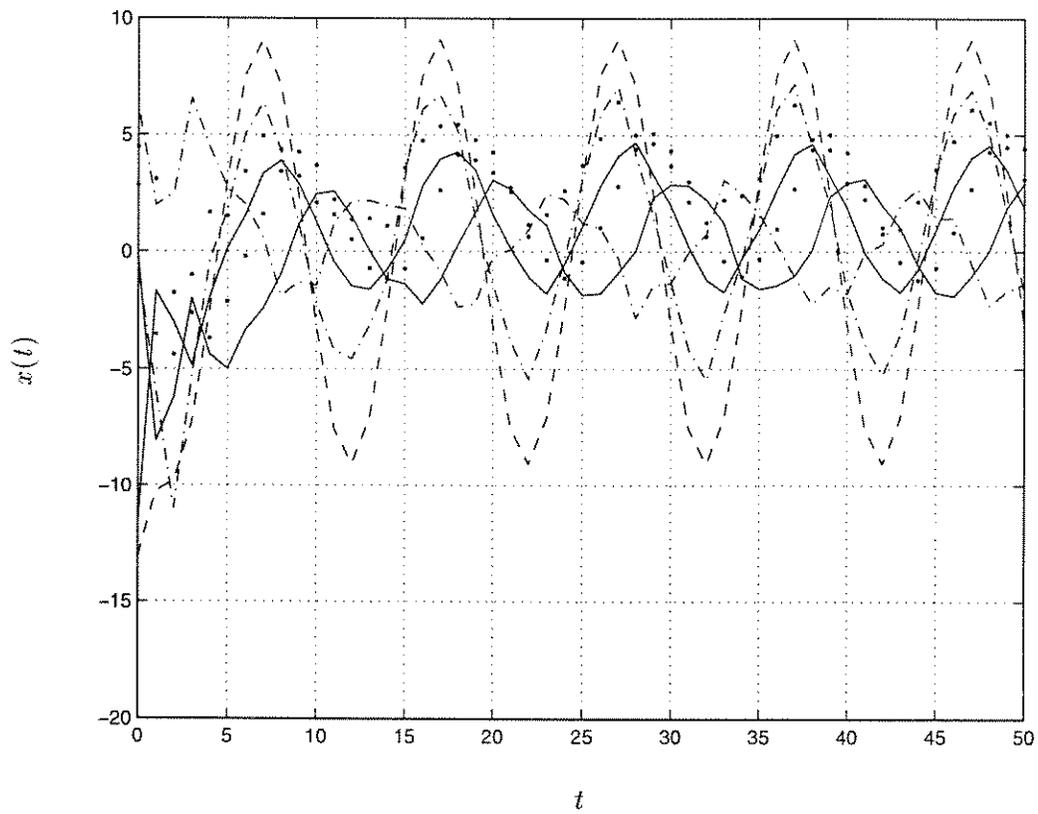


Figura 5.1: Evolução dos estados do sistema com a entrada $g(t)$ - Exemplo 5.1.

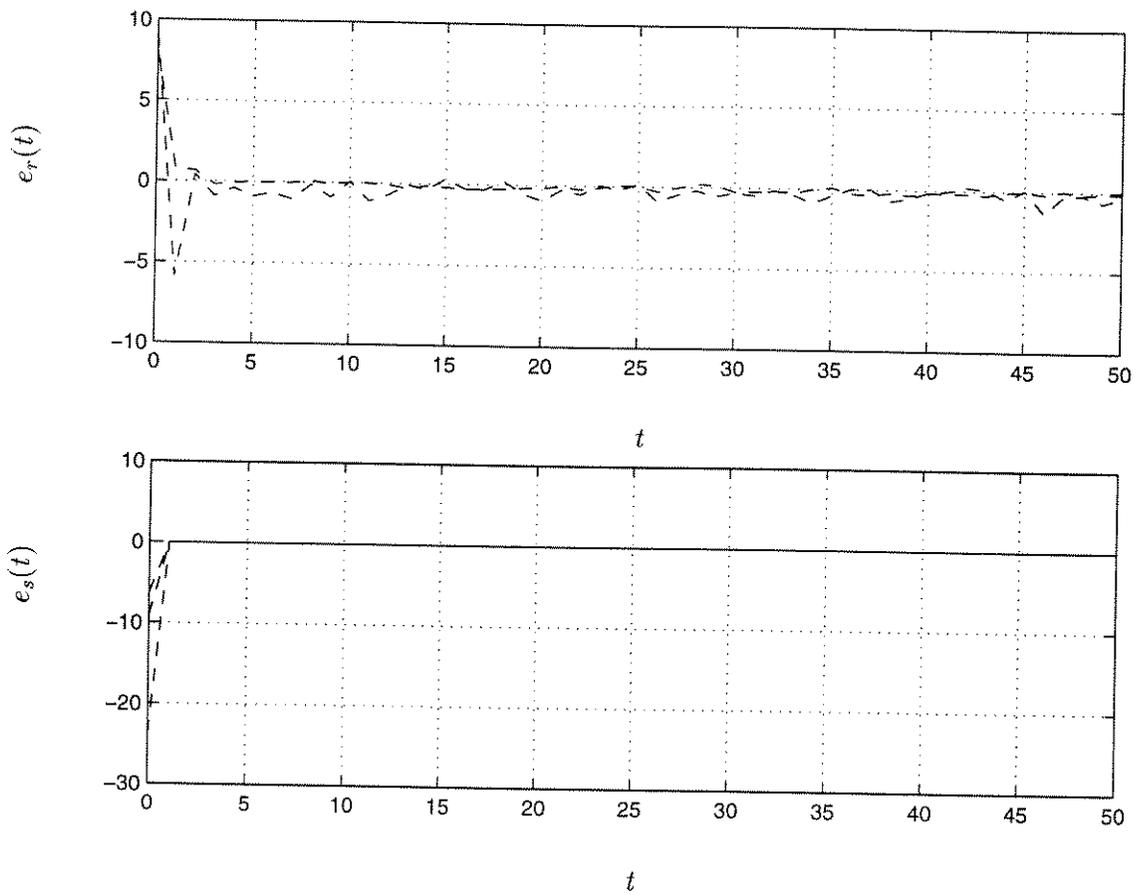


Figura 5.2: Comportamento dos erros de estimativa de estados $(x(t) - \hat{x}(t))$ associados ao núcleo regular ($e_r(t)$) e à parte singular - $e_s(t)$ - Exemplo 5.1.

5.7 Notas e Referências

Observadores em Modos Deslizantes - Método de Controle Equivalente

Considere o sistema contínuo LIT descrito como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (5.65)$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $\text{posto}(B) = m_o$.

A abordagem do projeto de observadores baseado em modos deslizantes para sistemas contínuos [DU95], por construção, é similar à do projeto dos observadores de ordem completa do tipo Luenberger, acrescida porém de uma discontinuidade:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K \text{sign}(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (5.66)$$

Através de uma escolha apropriada do ganho constante K , a característica de “deslizamento” ocorre para (5.66) ao longo da variedade $y(t) - C\hat{x}(t) = 0$. O projeto do observador baseia-se na aplicação seqüencial de transformações sobre os estados reduzindo o sistema à forma de blocos como em [DIL+90a], [DIL+90b].

O sistema (5.65) pode ser dividido em dois sistemas independentes de dimensões menores ($m_o, n - m$) através de uma transformação de coordenadas do vetor de estados, isto é,

$$\begin{bmatrix} z \\ x_1 \end{bmatrix} = M_1 x, \quad z \in \mathbb{R}^{n-m_o}, \quad x_1 \in \mathbb{R}^{m_o} \quad (5.67)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} B^\perp \\ (B_p)^\perp \end{bmatrix}, \quad \text{posto}(B^\perp) = n - m_o \quad (5.68)$$

onde os vetores linha da matriz B^\perp são ortogonais aos vetores colunas da matriz B que formam a matriz B_p de dimensão $n \times m_o$, com $\text{posto}(B_p) = m_o$. Esta transformação não singular (5.68) produz as equações :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_{zz}z(t) + A_{zx_1}x_1(t) + B_z u(t) \\ \dot{x}_1(t) = A_{x_1z}z(t) + A_{x_1x_1}x_1(t) + B_{x_1} u(t) \end{cases} \quad (5.69)$$

O observador em modos deslizantes [DU95] associado ao primeiro sub-sistema de (5.69) é dado por

$$\dot{\hat{z}}(t) = A_{zz}\hat{z}(t) + A_{zx_1}\hat{x}_1(t) + B_z u(t) + K_1 \text{sign}(z - \hat{z}) \quad (5.70)$$

e a dinâmica associada ao erro de estimativa $\tilde{z}(t) \triangleq z(t) - \hat{z}(t)$ é descrita por

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A_{zz}\tilde{z}(t) + A_{zx_1}\tilde{x}_1(t) - K_1 \text{sign}(\tilde{z}(t)) \quad (5.71)$$

Com uma escolha apropriada do ganho constante de observação K_1 o “deslizamento” acontece em (5.71) ao longo da superfície $\tilde{z} = 0$.

Para o segundo sub-sistema de (5.69) pode-se usar a equação do observador da forma

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = A_{x_1z}z(t) + A_{x_1x_1}\hat{x}_1(t) + B_{x_1} u(t) - K_2 K_1 \text{sign}(z(t) - \hat{z}(t)) \quad (5.72)$$

que produz a seguinte equação para o erro de estimativa $\tilde{x}_1(t) \triangleq x_1(t) - \hat{x}_1(t)$,

$$\tilde{x}_1(t) = A_{x_1x_1}\tilde{x}_1(t) - K_2K_1\text{sign}(\tilde{z}(t)) \quad (5.73)$$

De acordo com o método de controle equivalente [Dra92], o sistema em modos deslizantes comporta-se como se $K_1\text{sign}(\tilde{z}(t))$ fosse substituído por seu valor equivalente $(K_1\text{sign}(\tilde{z}(t)))_{eq}$ que pode ser calculado a partir do sub-sistema (5.71) assumindo que $\tilde{z}(t) = 0$, $\dot{\tilde{z}}(t) = 0$. Portanto,

$$(K_1\text{sign}(\tilde{z}(t)))_{eq} = A_{z_{x_1}}\tilde{x}_1(t) \quad (5.74)$$

Substituindo (5.74) em (5.73) obtém-se

$$\tilde{x}_1(t) = (A_{x_1x_1} - K_2A_{z_{x_1}})\hat{x}_1(t) \quad (5.75)$$

Como apontado em [DU95], se o sistema (5.69) é observável, então o par $(A_{x_1x_1}, A_{z_{x_1}})$ é também observável e, portanto, existe um ganho constante K_2 , de forma que uma escolha apropriada desse ganho leva à convergência, $\tilde{x}_1 \rightarrow 0$.

Uma segunda forma de projetar um observador compatível consiste em continuar transformando o sistema como anteriormente até a equação (5.71) e introduzir a seguinte mudança de variável:

$$z_1(t) = K_1^{-1}A_{z_{x_1}}x_1(t) \quad (5.76)$$

O segundo sistema em (5.69) pode ser decomposto da forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = A_{z_1z_1}z_1(t) + A_{z_1x_2}x_2(t) + B_{z_1}u(t) \\ \dot{x}_2(t) = A_{x_2z_1}z_1(t) + A_{x_2x_2}x_2(t) + B_{x_2}u(t) \end{cases} \quad (5.77)$$

O observador para o primeiro sub-sistema de (5.77) é descrito por

$$\dot{\hat{z}}_1(t) = A_{z_1z_1}\hat{z}_1(t) + A_{z_1x_2}\hat{x}_2(t) + B_{z_1}u(t) + K_3\text{sign}(z_1(t) - \hat{z}_1(t)) \quad (5.78)$$

onde é necessário obter as medidas z_1 . Porém, de acordo com (5.74) e (5.76), segue que

$$z_1(t) - \hat{z}_1(t) = (\text{sign}(\tilde{z}(t)))_{eq} \quad (5.79)$$

e o valor equivalente acima pode ser usado no observador (5.78):

$$\dot{\hat{z}}_1(t) = A_{z_1z_1}\hat{z}_1(t) + A_{z_1x_2}\hat{x}_2(t) + B_{z_1}u(t) + K_3\text{sign}(\text{sign}(\tilde{z}(t)))_{eq} \quad (5.80)$$

Como discutido em [DU95], para sistemas com aplicações reais, o valor equivalente $(\text{sign}(\tilde{z}(t)))_{eq}$, por seu significado físico, é um valor médio da vibração em alta frequência da variável $\text{sign}(\tilde{z}(t))$. O valor equivalente $(\text{sign}(\tilde{z}(t)))_{eq}$ pode ser obtido usando-se um filtro passa baixas, com constante de tempo suficientemente pequena para passar componentes de baixa frequência, porém suficientemente grande para eliminar as componentes de alta frequência causadas por comportamentos não ideais. O observador que converge em um tempo finito pode ser obtido repetindo o procedimento seqüencialmente.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Este trabalho centrou-se na investigação de estratégias para solucionar classes de problemas de filtragem robusta para sistemas lineares, invariantes, contínuos e discretos no tempo. Estas classes de problemas dividiram-se em:

- (i) filtragem \mathcal{H}_∞ para sistemas precisamente conhecidos;
- (ii) filtragem robusta \mathcal{H}_∞ (ou custo garantido \mathcal{H}_∞) para sistemas com incertezas nos parâmetros do modelo;
- (iii) filtragem singular para sistemas sujeitos a entradas de natureza arbitrária.

Em um primeiro momento, reviram-se estratégias clássicas de solubilidade do problema de filtragem \mathcal{H}_∞ para o caso de modelos com parâmetros precisamente conhecidos, baseadas na solvabilidade de equações algébricas do tipo Riccati. Além disso, abordou-se o mesmo problema em termos da factibilidade de problemas convexos de otimização, convenientemente descritos por meio de desigualdades matriciais lineares (\mathcal{LMIs}).

Na investigação da segunda classe de problemas, isto é, problemas de custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ , inicialmente, reviram-se as abordagens por equações de Riccati, considerando incertezas do tipo limitadas em norma (basicamente propostas por de Souza e colegas, [XdS95], [dS94] [XdSF91b], [XdSW96]) e por \mathcal{LMIs} acopladas (não globalmente convexas), considerando restrições quadráticas integráveis (\mathcal{RQIs}) ([LF97], [LF95]).

Para esta classe de problemas, isto é, filtragem \mathcal{H}_∞ para sistemas com incertezas do tipo politópica, uma contribuição deste trabalho consistiu em estruturar o projeto de um filtro robusto admissível estritamente próprio de forma a garantir um erro de filtragem limitado e dinâmica do erro de filtragem quadraticamente estável com atenuação de ruídos γ . De fato, lançando mão de várias manipulações e simplificações envolvendo desigualdades matriciais lineares, e tendo como ponto de partida as versões contínua e discreta do *Bounded Real Lemma*, uma nova estratégia, baseada em condições necessárias (no sentido de que o erro de filtragem é quadraticamente estável com atenuação de ruídos γ) e suficientes, foi proposta para solucionar o problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ a partir da factibilidade de procedimentos convexos de otimização descritos em termos de \mathcal{LMIs} .

Estabeleceu-se ainda, baseada na abordagem por \mathcal{LMIs} desenvolvida no problema de custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ , uma nova formulação sub-ótima para o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ de filtragem robusta.

Além disso, como extensão, desenvolveu-se o projeto do filtro próprio de custo garantido \mathcal{H}_∞ ótimo, com incertezas nas matrizes do sinal a ser estimado. Em virtude do projeto do filtro próprio resultar em \mathcal{LMI} s com mais “informações” em seus blocos, é de se esperar que o valor do custo garantido seja menos conservativo quando comparado ao projeto de um filtro estritamente próprio, o que pode ser comprovado nos exemplos apresentados. De fato, o conjunto de filtros robustos estritamente próprios pode ser visto como um subconjunto dos filtros robustos próprios.

Outra classe de problemas de filtragem robusta, investigada neste trabalho, envolveu a determinação de uma estrutura para o estimador que assegurasse uma outra “qualidade” de robustez ao projeto, isto é, solucionar o problema de filtragem singular frente a entradas de natureza desconhecida atuando no sistema. Mostrou-se que, por meio de uma estratégia baseada em transformações de similaridade, o sistema inicial pode desacoplar as entradas desconhecidas, sendo decomposto em uma forma canônica, de maneira a caracterizar um sub-sistema *singular* associado aos estados obtidos precisamente, e um outro denominado *regular* associado aos estados corrompidos por sinais exógenos. Esta formulação permitiu sistematizar em um mesmo projeto as características dos observadores sujeitos a entradas de natureza arbitrária e a robustez do filtro \mathcal{H}_∞ para certas classes de ruídos.

As formulações propostas não devem ser vistas de forma separada, mas sim, como um conjunto de estratégias que se complementam e interagem no intuito de fornecer subsídios para o projeto de filtros robustos.

6.1 Propostas de Trabalhos Futuros

As abordagens apresentadas neste trabalho estimulam a continuidade da investigação de problemas, ainda pouco estudados, relacionados à teoria de filtragem robusta. Alguns pontos podem ser levantados como linhas de estudo:

- O estudo de problemas de filtragem singular para sistemas com incertezas nos parâmetros do modelo sujeitos a entradas desconhecidas;
- Custo garantido de filtragem \mathcal{H}_∞ e/ou \mathcal{H}_2 para sistemas com entradas determinísticas (discutido, por meio de técnicas de cálculo variacional, em [dSSF95]) através de desigualdades matriciais lineares e incertezas do tipo politópicas;
- Filtragem robusta \mathcal{H}_∞ para sistemas do tipo *descriptors* ([Xi97], [DBZ97]) e filtragem robusta \mathcal{H}_∞ e/ou \mathcal{H}_2 com filtros de ordem reduzida ([GW97], [PK97]) e incertezas do tipo politópicas;
- Problema de filtragem para sistemas incertos sujeitos a entradas com magnitude limitada, isto é, filtragem robusta \mathcal{L}_1 (ℓ_1) (discutido, para sistemas precisamente conhecidos, em [VANK96], [NAP96], [NP92]);
- Estudo do denominado problema de *smoothing* com critério do tipo \mathcal{H}_∞ para sistemas incertos, isto é, estimativa baseada na combinação de medidas passadas e futuras *off-line* ([NK91], [GS97], [MSP96]);
- Filtragem robusta \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares ([XdSW96], [SS97]);

-
- Filtragem robusta \mathcal{H}_∞ para sistemas incertos com atrasos no tempo (discutido, por exemplo, em [PSdS96], [NR97]);
 - Estudo do problema de filtragem robusta \mathcal{H}_∞ considerando horizonte finito envolvendo *DLMIs* (Differential Linear Matrix Inequalities) ([Sch95a]).

Bibliografia

- [AG95] A. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled \mathcal{H}_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):853–864, 1995.
- [Alb69] A. Albert. Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(2):434–440, 1969.
- [And66] B. D. O. Anderson. Algebraic description of bounded real lemma. *Electronics Letters*, 2:464–465, 1966.
- [Baş91] T. Başar. Optimum performance levels for minimax filters, predictors and smoothers. *Systems & Control Letters*, 16:309–317, 1991.
- [BB95] T. Başar and P. Bernhard. *\mathcal{H}_∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. System & Control: Foundations & Applications, Boston, USA, 1995.
- [BCdN96] P. Bolzern, P. Colaneri, and G. de Nicolao. Optimal robust filtering time-varying parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 63(3):557–576, 1996.
- [BCdN97a] P. Bolzern, P. Colaneri, and G. de Nicolao. \mathcal{H}_∞ differential Riccati equation: convergence properties and finite escape phenomena. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1):113–118, 1997.
- [BCdN97b] P. Bolzern, P. Colaneri, and G. de Nicolao. Transient and asymptotic analysis of discrete-time \mathcal{H}_∞ filters. *European Journal of Control*, 3(4):317–324, 1997.
- [BFBG94] S. Boyd, E. Feron, V. Balakrishnan, and L. El Ghaoui. History of linear matrix inequalities in control theory. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 31–34, Baltimore - USA, 1994.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1994.
- [BH89] D. S. Bernstein and W. M. Haddad. Steady-state Kalman filtering with an \mathcal{H}_∞ error bound. *Systems & Control Letters*, 12:9–16, 1989.
- [BH97] D. Banjerdpongchai and J. P. How. *LMI* synthesis of parametric robust \mathcal{H}_∞ controllers. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 493–498, Albuquerque, New Mexico, USA, June, 1997.

- [Bha78] S. P. Bhattacharyya. Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23(3):483–484, 1978.
- [BK94] M. Bettayeb and D. Kavranoglu. Reduced-order \mathcal{H}_∞ filtering. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1884–1888, Baltimore - USA, 1994.
- [BPG89] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *System & Control Letters*, 13:65–72, 1989.
- [BS96] N. Berman and U. Shaked. \mathcal{H}_∞ nonlinear filtering. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4):281–296, 1996.
- [Car86] D. Carlson. What are Schur complements, anyway? *Linear Algebra and Its Applications*, 74:257–275, 1986.
- [CB93] P. Chevrel and H. Bourles. Reduced order \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ observers singular measurement noise case. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2915–2916, San Antonio, USA, 1993.
- [CG96] M. Chilali and P. Gahinet. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An *LMI* Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367, 1996.
- [CYH94] S. K. Chang, W. T. You, and P. L. Hsu. General-structured unknown input observers. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 666–670, Baltimore - USA, 1994.
- [DBZ97] M. Darouach, M. Boutayeb, and M. Zasadzinski. Kalman filtering for continuous descriptor systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2108–2112, Albuquerque, New Mexico, USA, June, 1997.
- [DGF94] X. Ding, L. Guo, and R. Friedrich. Comparison of observer schemes and its application to \mathcal{H}_∞ -optimal estimation. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3918–3923, Lake Buena Vista, USA, 1994.
- [DIL⁺90a] S. V. Drakunov, D. B. Izosimov, A. G. Luk'yanov, V. A. Utkin, and V. I. Utkin. The block control principle. Part I. *Automation and Remote Control*, 51(5):601–608, 1990.
- [DIL⁺90b] S. V. Drakunov, D. B. Izosimov, A. G. Luk'yanov, V. A. Utkin, and V. I. Utkin. The block control principle. Part II. *Automation and Remote Control*, 51(6):737–746, 1990.
- [DK95] Ž. M. Durović and B. D. Kovačević. QQ-plot approach to robust Kalman filtering. *International Journal of Control*, 61(4):837–857, 1995.
- [dOdFG97] M. C. de Oliveira, D. P. de Farias, and J. C. Geromel. *LMISol (Version 1.0)*. User's Guide, LAC/DT/FEEC - UNICAMP, April, 1997.

- [dOGB98] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Discrete-time systems \mathcal{H}_2 norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers. 1998. Submitted.
- [Dra92] S. V. Drakunov. Sliding mode observers based on equivalent control method. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2368–2369, Tucson, USA, 1992.
- [dS94] C. E. de Souza. \mathcal{H}_∞ and robust estimation. *Revista SBA Controle & Automação*, 5:4–46, 1994.
- [dSF96a] C. E. de Souza and M. D. Fragoso. \mathcal{H}_∞ filtering for Markovian jump linear systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4814–4818, Kobe, Japan, 1996.
- [dSF96b] C. E. de Souza and M. D. Fragoso. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain Markovian jump linear systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4808–4813, Kobe, Japan, 1996.
- [dSGG86] C. E. de Souza, M. R. Geves, and G. C. Goodwin. Riccati equations in optimal filtering of nonstabilizable system having singular state transition matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(9):831–838, 1986.
- [dSSF95] C. E. de Souza, U. Shaked, and M. Fu. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(3):709–719, 1995.
- [dSX92] C. E. de Souza and L. Xie. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback \mathcal{H}_∞ controllers. *Systems & Control Letters*, 18:61–71, 1992.
- [dSXW93] C. E. de Souza, L. Xie, and Y. Wang. \mathcal{H}_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 20:419–426, 1993.
- [DU95] S. Drakunov and V. I. Utkin. Sliding mode observers. Tutorial. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3376–3378, New Orleans - USA, 1995.
- [DZON95] M. Darouach, M. Zasadzinski, A. B. Onana, and S. Nowakowski. Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems. *International Journal of Systems Science*, 26(10):2015–2028, 1995.
- [DZX94] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3):606–609, 1994.
- [Fai86] L. E. Faibusovich. Algebraic Riccati equation and symplectic algebra. *International Journal of Control*, 43(3):781–792, 1986.
- [Fai87] L. E. Faibusovich. Matrix Riccati inequality: existence of solutions. *Systems & Control Letters*, 9:59–64, 1987.

- [Fri67] B. Friedland. On the effect of incorrect gain in Kalman filter. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12:610, 1967.
- [FS97] E. Fridman and U. Shaked. On regional nonlinear \mathcal{H}_∞ -filtering. *Systems & Control Letters*, 29:233–240, 1997.
- [GA94] P. Gahinet and A. Apkarian. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.
- [Gah96] P. Gahinet. Explicit controller formulas for \mathcal{LMI} -based \mathcal{H}_∞ synthesis. *Automatica*, 32(7):1007–1014, 1996.
- [GBdO98] J. C. Geromel, J. M. Bernussou, and M. C. de Oliveira. \mathcal{H}_2 norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control. 1998. Submitted.
- [GBG98] J. C. Geromel, J. Bernussou, and G. Garcia. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. 1998. Submitted.
- [GdO98] J. C. Geromel and M. C. de Oliveira. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for convex bounded uncertain systems. 1998. Submitted.
- [Ger98] J. C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. 1998. Submitted.
- [GLR86] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman. On hermitian solutions of the symmetric algebraic Riccati equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(6):1323–1334, 1986.
- [GM89] G. C. Goodwin and M. C. Middleton. The class of all stable unbiased state estimators. *Systems & Control Letters*, 13:161–163, 1989.
- [GMS95] G. C. Goodwin, D. Q. Mayne, and J. Shim. Trade-offs in Linear Filter Design. *Automatica*, 31(10):1367–1376, 1995.
- [GN94] P. Gahinet and A. Nemirovskii. General-purpose \mathcal{LMI} solvers with benchmarks. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3162–3165, San Antonio, USA, 1994.
- [GN97] P. Gahinet and A. Nemirovskii. The projective method for solving linear matrix inequalities. *Mathematical Programming*, 77(2):163–190, 1997.
- [GND95] L. El Ghaoui, R. Nikoukhah, and F. Delebecque. *LMITOOL: A Front-end for LMI Optimization*. User's Guide, available via anonymous ftp to ftp.ensta.fr, under /pub/elghaoui/limitool, February, 1995.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox for use with Matlab*. User's Guide, The Math Works Inc., May, 1995.
- [GPB91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29:381–402, 1991.

- [GPS92] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. \mathcal{H}_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 19:23–27, 1992.
- [GPS93] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. \mathcal{H}_2 guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 57(4):853–864, 1993.
- [GPS94] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1072–1075, 1994.
- [GPS95] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. A convex approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for discrete-time uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(6), 1995.
- [Gri96] M. J. Grimble. \mathcal{H}_∞ optimal multichannel linear deconvolution filters, predictors and smoothers. *International Journal of Control*, 63(3):519–533, 1996.
- [GS90] M. J. Grimble and A. El Sayed. Solution of the \mathcal{H}_∞ optimal linear filtering problem for discrete-time systems. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 38(7):1092–1104, 1990.
- [GS91] Y. Guan and M. Saif. A novel approach to the design of unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5):632–635, 1991.
- [GS97] G. C. Goodwin and M. M. Seron. Fundamental design tradeoffs in filtering, prediction, and smoothing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9):1240–1251, 1997.
- [GW96] K. M. Grigoriadis and J. T. Watson. Suboptimal \mathcal{H}_∞ filtering via linear matrix inequalities. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 197–202, San Francisco, USA, 1996.
- [GW97] K. M. Grigoriadis and J. T. Watson. Reduced-order \mathcal{H}_∞ and $\mathcal{L}_2\text{-}\mathcal{L}_\infty$ filtering via linear matrix inequalities. *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, 33(4):1326–1338, 1997.
- [HBM91] W. M. Haddad, D. S. Bernstein, and D. Mustafa. Mixed-norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ regulation and estimation: the discrete-time case. *Systems & Control Letters*, 16:235–247, 1991.
- [Her89] M. A. Hersh. \mathcal{H}_∞ filtering of multivariable systems. *International Journal of Control*, 50(4):1143–1151, 1989.
- [HHK96] B. Halder, B. Hassibi, and T. Kailath. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ estimation: preliminary analytic characterization and a numerical solution. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 37–42, San Francisco, USA, 1996.

- [HHK97] B. Halder, B. Hassibi, and T. Kailath. State-space structure of finite horizon optimal mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filters. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 784–785, Albuquerque, USA, June, 1997.
- [HK97] B. Hassibi and T. Kailath. On nonlinear filters for mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ estimation. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2820–2824, Albuquerque, USA, June, 1997.
- [HP98] M. Hou and R. J. Patton. Optimal filtering for systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):445–449, 1998.
- [HSK96a] B. Hassibi, A. H. Sayed, and T. Kailath. Linear estimation in Krein spaces - part I: theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(1):18–33, 1996.
- [HSK96b] B. Hassibi, A. H. Sayed, and T. Kailath. Linear estimation in Krein spaces - part II: applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(1):34–49, 1996.
- [HY96] C. S. Hsu and X. Yu. Reduced order \mathcal{H}_∞ filters with singular measurements. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 65–70, San Francisco, USA, 1996.
- [HZD96] M. Hayar, M. Zasadzinski, and M. Darouach. Robust Kalman filtering for uncertain systems subject to unknown inputs: the discrete-time case. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, volume 1, pages 55–58, San Francisco, USA, 1996.
- [Ich95] A. Ichikawa. \mathcal{H}_∞ -control and filtering with initial uncertainty for time-varying systems. *International Journal of Systems Science*, 26(9):1633–1657, 1995.
- [Ich96] A. Ichikawa. \mathcal{H}_∞ -control and filtering with initial uncertainty for infinite dimensional systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(5):431–452, 1996.
- [IS94] T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: \mathcal{LMI} existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317, 1994.
- [IS95] T. Iwasaki and R. E. Skelton. The XY-centring algorithm for the dual \mathcal{LMI} problem: a new approach to fixed-order control design. *International Journal of Control*, 62(6):1257–1272, 1995.
- [IW92] V. Ionescu and M. Weiss. On computing the stabilizing solution of the discrete-time Riccati equation. *Linear Algebra and Its Applications*, 174:229–238, 1992.
- [Kai68] T. Kailath. An innovation approach to least-squares estimation - Part I: Linear filtering in additive white noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 13:646–655, 1968.
- [Kal60] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of ASME - Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.

- [KB61] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of ASME - Journal of Basic Engineering*, 83:95–108, 1961.
- [KdSR96] O. K. Kwon, C. E. de Souza, and H. S. Ryu. Robust \mathcal{H}_∞ FIR filter for discrete-time uncertain systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4819–4824, Kobe, Japan, 1996.
- [KPZ90] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and K. Zhou. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilizability and \mathcal{H}_∞ control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3):356–361, 1990.
- [KR92] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2299–2304, Tucson, USA, 1992.
- [KRB96] P. P. Khargonekar, M. A. Rotea, and E. Baeyens. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4):313–330, 1996.
- [KRY96] O. K. Kwon, H. S. Ryu, and K. S. Yoo. Robust \mathcal{H}_∞ FIR filter for uncertain systems. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 517–522, San Francisco, USA, 1996.
- [KVR80] P. Kudva, N. Viswanadham, and A. Ramakrishna. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(1):113–115, 1980.
- [LF95] H. Li and M. Fu. An *LMF* approach to robust \mathcal{H}_∞ filtering for linear systems. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3608–3613, New Orleans, USA, 1995.
- [LF97] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust \mathcal{H}_∞ filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(9):2338–2350, 1997.
- [LL93] L. Z. Lu and W. W. Lin. An iterative algorithm for the solution of the discrete time algebraic Riccati equations. *Linear Algebra and Its Applications*, 188–189:465–488, 1993.
- [LS94] S. Lee and J. L. Stein. Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ state estimation for systems with real parameter uncertainties. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2217–2221, Baltimore, USA, 1994.
- [Lue64] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8:74–80, 1964.
- [Lue71] D. G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596–602, 1971.
- [MAV94] R. S. Mangoubi, B. D. Appleby, and G. C. Verghese. Stochastic interpretation of \mathcal{H}_∞ and robust estimation. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3943–3948, Lake Buena Vista, USA, 1994.

- [Meh96] V. Mehrmann. A step toward a unified treatment of continuous and discrete time control problems. *Linear Algebra and Its Applications*, 241–243:749–779, 1996.
- [MGG97] D. Q. Mayne, R. W. Grainger, and G. C. Goodwin. Nonlinear filters for linear signal models. *IEE Proceeding - Control Theory and Applications*, 144(4):281–286, 1997.
- [MGR94] D. Maquin, B. Gaddouna, and J. Ragot. Estimation of unknown inputs in linear systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1195–1197, Baltimore - USA, 1994.
- [MSP96] S. O. R. Moheimani, A. V. Savkin, and I. R. Petersen. Robust filtering, prediction, smoothing and observability of uncertain systems. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4794–4799, Kobe, Japan, 1996.
- [NAP96] K. Nagpal, J. Abedor, and K. Poolla. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:899–927, 1996.
- [NF94] S. K. Nguang and M. Fu. \mathcal{H}_∞ filtering for known and uncertain nonlinear systems. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, pages 329–334, Rio de Janeiro, Brazil, 1994.
- [NG94] A. Nemirovskii and P. Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 840–844, Baltimore, USA, 1994.
- [NK91] K. M. Nagpal and P. P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an \mathcal{H}_∞ setting. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(2):152–166, 1991.
- [NN94] Y. Nesterov and A. Nemirovski. *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Application*. SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
- [NP92] K. M. Nagpal and K. Poolla. On ℓ_1 filtering and smoothing. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1238–1242, Tucson, USA, 1992.
- [NR97] K. M. Nagpal and R. Ravi. \mathcal{H}_∞ control and estimation problems with delayed measurements: state-space solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(4):1217–1243, 1997.
- [Pal95] R. M. Palhares. *Controle \mathcal{H}_∞ no Espaço de Variáveis de Estado*. Tese de Mestrado, FEEC/UNICAMP, Abril, 1995.
- [PGB93] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains. *Automatica*, 29(2):491–493, 1993.

- [PGS93] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. \mathcal{H}_∞ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 20:413–418, 1993.
- [PGS94] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. Optimal \mathcal{H}_∞ state feedback control for continuous-time linear systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 82(2):343–359, 1994.
- [PK97] P. Park and T. Kailath. \mathcal{H}_∞ filtering via convex optimization. *International Journal of Control*, 66(1):15–22, 1997.
- [PLJ80] T. Pappas, A. J. Laub, and N. R. Sandell Jr. On the numerical solution of the discrete-time algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(4):631–641, 1980.
- [PM91] I. R. Petersen and D. C. McFarlane. Robust state estimation for uncertain systems. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2630–2631, Brighton, UK, 1991.
- [PM94] I. R. Petersen and D. C. McFarlane. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic control*, 39(9):1971–1977, 1994.
- [PM96] I. R. Petersen and D. C. McFarlane. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4):267–280, 1996.
- [POP98] R. M. Palhares, S. L. C. Oliveira, and P. L. D. Peres. Relating two different approaches of \mathcal{H}_∞ state feedback control. *Revista SBA - Controle & Automação*, 9(2):77–84, 1998.
- [PP95a] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado: um procedimento convexo de otimização via \mathcal{LMI} s. In *Anais do XVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, volume 1, pages 210–214, Curitiba, Brasil, 1995.
- [PP95b] P. L. D. Peres and R. M. Palhares. Optimal \mathcal{H}_∞ state feedback control for discrete-time linear systems. In *Proceedings of the Second Latin American Seminar on Advanced Control*, pages 61–66, Santiago, Chile, 1995.
- [PP97] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems – an \mathcal{LMI} approach. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, volume 3, pages 1120–1125, Guimarães, Portugal, 1997.
- [PP98a] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. An \mathcal{LMI} guaranteed cost filtering design for discrete-time systems with convex bounded uncertainty. 1998. Submitted.
- [PP98b] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems – an \mathcal{LMI} approach. *International Journal of Systems Science*, 1998. To appear.

- [PP98c] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ filtering design with pole placement constraint via \mathcal{LMI} s. In *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1998. Submitted.
- [PP98d] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ filtering design with pole placement constraint in an \mathcal{LMI} setting. In *XIII Congresso Latino-Americano de Controle Automático*, 1998. To appear.
- [PRP96] R. M. Palhares, D. C. W. Ramos, and P. L. D. Peres. Alternative \mathcal{LMI} s characterization of \mathcal{H}_2 and central \mathcal{H}_∞ discrete-time controllers. In *Proceedings 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1495–1496, Kobe, Japan, 1996.
- [PSdS96] A. W. Pila, U. Shaked, and C. E. de Souza. \mathcal{H}_∞ filtering for continuous-time linear systems with delay. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 49–54, San Francisco, USA, 1996.
- [PTP97] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres. \mathcal{H}_∞ and \mathcal{H}_2 Guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, 1997.
- [Rau65] H. E. Rauch. Optimum estimation of satellite trajectories including random fluctuations in drag. *AIAA Journal*, 3:717–722, 1965.
- [Rho71] I. B. Rhodes. A tutorial introduction to estimation and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):688–706, 1971.
- [RPP96] D. C. W. Ramos, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. Caracterização de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas discretos por desigualdades matriciais lineares. In *Anais do XI Congresso Brasileiro de Automática*, volume 1, pages 67–72, São Paulo, SP, 1996.
- [RR92a] A. C. M. Ran and L. Rodman. Stable Hermitian solutions of discrete algebraic Riccati equations. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 5:165–193, 1992.
- [RR92b] A. C. M. Ran and L. Rodman. Stable solutions of real algebraic matrix Riccati equations. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 30(1):63–81, 1992.
- [RSI96] H. Rotstein, M. Sznaier, and M. Idan. $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering theory and an aerospace application. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4):347–366, 1996.
- [RT93] A. C. M. Ran and H. L. Trentelman. Linear quadratic problems with indefinite cost for discrete-time systems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 14:776–797, 1993.
- [RTS65] H. E. Rauch, F. Tung, and C. T. Striebel. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems. *AIAA Journal*, 3:1445–1450, 1965.

- [RV88] A. C. M. Ran and R. Vreugdenhil. Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous- and discrete-time systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 99:63–83, 1988.
- [Sch85] J. M. Schumacher. A geometric approach to the singular filtering problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(11):1075–1082, 1985.
- [Sch89] C. Scherer. \mathcal{H}_∞ -control by state-feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence. *Systems & Control Letters*, 12:383–391, 1989.
- [Sch90] C. Scherer. \mathcal{H}_∞ control by state-feedback and fast algorithms for the computation of optimal \mathcal{H}_∞ norms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(10):1090–1099, 1990.
- [Sch91] C. Scherer. The solution set of the algebraic Riccati equation and the algebraic Riccati inequality. *Linear Algebra and Its Applications*, 153:99–122, 1991.
- [Sch92a] C. Scherer. \mathcal{H}_∞ control by state-feedback for plants with zeros on the imaginary axis. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 30(1):123–142, 1992.
- [Sch92b] C. Scherer. \mathcal{H}_∞ optimization without assumptions on finite or infinite zeros. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30(1):143–166, 1992.
- [Sch94] C. Scherer. The state-feedback \mathcal{H}_∞ problem at optimality. *Automatica*, 30(2):293–305, 1994.
- [Sch95a] C. Scherer. *Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ Control*. Trends in Control, edited by A. Isidori, Springer-Verlag, Berlin, pag. 173–216, 1995.
- [Sch95b] C. Scherer. The algebraic Riccati equation and inequality for systems with uncontrollable modes on the imaginary axis. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 16:1308–1327, 1995.
- [SdS94] U. Shaked and C. E. de Souza. Robust Minimum Variance Filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(11):2474–2483, 1994.
- [SdSX93] P. Shi, C. E. de Souza, and L. Xie. Robust \mathcal{H}_∞ filtering for uncertain systems with sampled-data measurements. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 793–798, San Antonio, USA, 1993.
- [SF69] R. A. Singer and P. A. Frost. On the relative performance of the Kalman and Wiener filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14:390–394, 1969.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via \mathcal{LMI} optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911, 1997.
- [SGR95] G. Schreier, B. Gaddouna, and J. Ragot. Matrices computation of an unknown-input observer. *International Journal of Systems Science*, 26(4):991–998, 1995.
- [Sha90] U. Shaked. \mathcal{H}_∞ -minimum error state estimation of linear stationary processes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5):554–558, 1990.

- [Sha97] U. Shaked. The effect of system zeros on the achievable \mathcal{H}_∞ estimation level. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(10):1469–1472, 1997.
- [SHM87] J. J. Slotine, J. K. Hedrick, and E. A. Misawa. On sliding observers for nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control - Transactions of the ASME*, 109:245–252, 1987.
- [SN95] J. Stoustrup and H. Niemann. The filtered \mathcal{H}_∞ state feedback problem. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4394–4395, Seattle, USA, June, 1995.
- [SNK93] W. Q. Sun, K. M. Nagpal, and P. P. Khargonekar. \mathcal{H}_∞ control and filtering for sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(8):1162–1175, 1993.
- [Sor70] H. W. Sorenson. Least-squares estimation: from Gauss to Kalman. *IEEE Spectrum*, 7(7):63–68, 1970.
- [SP97] A. V. Savkin and I. R. Petersen. Robust filtering with missing data and a deterministic description of noise and uncertainty. *International Journal of Systems Science*, 28(4):373–378, 1997.
- [SS95] A. A. Stoorvogel and A. Saberi. Continuity properties of solutions to \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Riccati equations. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4335–4340, New Orleans, USA, 1995.
- [SS97] M. Shergei and U. Shaked. Robust \mathcal{H}_∞ estimation of nonlinear discrete-time processes. *International Journal of Control*, 67(4):603–617, 1997.
- [SSdS96] M. Shergei, U. Shaked, and C. E. de Souza. Robust \mathcal{H}_∞ nonlinear estimation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 10(4-5):395–408, 1996.
- [ST92] U. Shaked and Y. Theodor. \mathcal{H}_∞ -optimal estimation: a tutorial. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2278–2286, Tucson, USA, 1992.
- [Sto90] A. A. Stoorvogel. *The \mathcal{H}_∞ Control Problem: A State Space Approach*. Ph.D. Thesis, Mathematics Department of the Eindhoven University of Technology, 1990.
- [SY90] U. Shaked and I. Yaesh. Estimation variance and \mathcal{H}_∞ -error minimization of stationary processes with perfect measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3):310–314, 1990.
- [TK95] K. Takaba and T. Katayama. Discrete-time algebraic Riccati equation arising in \mathcal{H}_∞ filtering problem. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4163–4168, New Orleans, USA, 1995.

- [TK96] K. Takaba and T. Katayama. Discrete-time \mathcal{H}_∞ algebraic Riccati equation and parametrization of all \mathcal{H}_∞ filters. *International Journal of Control*, 64(6):1129–1149, 1996.
- [Toi96] H. T. Toivonen. A robust \mathcal{H}_2 problem for discrete-time systems. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 279–284, San Francisco, USA, 1996.
- [TP96] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres. Unknown input observers for uncertain systems: a unifying approach and enhancements. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1483–1488, Kobe, Japan, 1996.
- [TPP97a] R. H. C. Takahashi, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. Discrete-time singular observers: $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimality and unknown inputs. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4810–4815, San Diego, USA, 1997.
- [TPP97b] R. H. C. Takahashi, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. Noise patterns in observed systems: from optimal filtering to singular observers. In *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Robust Control Design*, pages 477–482, Budapest, Hungary, 1997.
- [TPP98] R. H. C. Takahashi, R. M. Palhares, and P. L. D. Peres. Discrete-time singular observers: $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ optimality and unknown inputs. *International Journal of Control*, 1998. Submitted.
- [TS96] Y. Theodor and U. Shaked. A dynamic game approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ estimation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4):331–345, 1996.
- [TSdS94] Y. Theodor, U. Shaked, and C. E. de Souza. A game theory approach to robust discrete-time \mathcal{H}_∞ estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6):1486–1495, 1994.
- [VANK96] T. Vincent, J. Abedor, K. Nagpal, and R. P. Khargonekar. Discrete-time estimators with guaranteed peak-to-peak performance. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 43–48, San Francisco, USA, 1996.
- [VB94] V. Vandenberghe and S. Boyd. *SP: Software for Semidefinite Programming*. User's Guide, available via anonymous ftp to isl.stanford.edu, under /pub/boyd/semidef_prog, December, 1994.
- [VB97] L. Vandenberghe and V. Balakrishnan. Algorithms and software for \mathcal{LMI} problems in control. *IEEE Control Systems Magazine*, 17(5):89–95, 1997.
- [WDD75] S. H. Wang, E. J. Davison, and P. Dorato. Observing the states of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20:716–717, 1975.

- [WG97] J. T. Watson and K. M. Grigoriadis. Optimal unbiased filtering via linear matrix inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2825–2829, Albuquerque, New Mexico, USA, June, 1997.
- [WGU97] Z. Wang, Z. Guo, and H. Unbehauen. Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -state estimation for discrete-time systems with error variance constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(10):1431–1435, 1997.
- [WH96] B. F. Wu and H. H. Hsu. An innovation approach to optimize a Kalman filter with an \mathcal{H}_∞ error bound by secant method. *International Journal of Systems Science*, 27(7):651–660, 1996.
- [XdS93] L. Xie and C. E. de Souza. \mathcal{H}_∞ state estimation for linear periodic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11):1704–1707, 1993.
- [XdS95] L. Xie and C. E. de Souza. On robust filtering for linear systems with parameter uncertainty. In *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2087–2092, New Orleans, USA, 1995.
- [XdSF91a] L. Xie, C. E. de Souza, and M. D. Fragoso. \mathcal{H}_∞ filtering for linear periodic systems with parameter uncertainty. *Systems & Control Letters*, 17:343–350, 1991.
- [XdSF91b] L. Xie, C. E. de Souza, and M. Fu. \mathcal{H}_∞ estimation for discrete-time linear uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1:111–123, 1991.
- [XdSW96] L. Xie, C. E. de Souza, and Y. Wang. Robust filtering for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems: an \mathcal{H}_∞ approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4):297–312, 1996.
- [Xi97] H. Xi. The guaranteed estimation performance filter for discrete-time descriptor systems with uncertain noise. *International Journal of Systems Science*, 28(1):133–121, 1997.
- [Xie96] L. Xie. Output feedback \mathcal{H}_∞ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 63(4):741–750, 1996.
- [XS94] L. Xie and Y. C. Soh. Robust Kalman filtering for uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 22:123–129, 1994.
- [XSdS94] L. Xie, Y. C. Soh, and C. E. de Souza. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1310–1314, 1994.
- [XYS96] L. Xie, W. Y. Yan, and Y. C. Soh. \mathcal{L}_2 optimal reduced order filter design. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4270–4275, Kobe, Japan, 1996.
- [YCWB95] J. Ying-Cun and G. Wei-Bing. Nonlinear \mathcal{H}_∞ control and estimation of optimal \mathcal{H}_∞ gain. *Systems & Control Letters*, 24:321–332, 1995.

- [YDS94] Y. X. Yao, M. Darouach, and J. Schaefer. A robust \mathcal{H}_∞ estimator design for linear uncertain system. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3568–3580, Baltimore - USA, 1994.
- [YHB96] X. Yu, C. S. Han, and R. H. Bamberger. \mathcal{H}_∞ deconvolution filter design and its applications in image restoration. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4802–4807, Kobe, Japan, 1996.
- [YS91a] I. Yaesh and U. Shaked. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: \mathcal{H}_∞ optimal linear control and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1264–1271, 1991.
- [YS91b] I. Yaesh and U. Shaked. Nondefinite least squares and its relation to \mathcal{H}_∞ -minimum error state estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(12):1469–1472, 1991.
- [YS92a] I. Yaesh and U. Shaked. Game theory approach to optimal linear state estimation and its relation to the minimum \mathcal{H}_∞ -norm estimation. *IEEE Transactions on automatic control*, 37(6):828–831, 1992.
- [YS92b] I. Yaesh and U. Shaked. Game theory approach to state estimation of linear discrete-time processes and its relation to \mathcal{H}_∞ -optimal estimation. *International Journal of Control*, 55(6):1443–1452, 1992.
- [YS93] I. Yaesh and U. Shaked. Game theory approach to finite-time horizon optimal estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(6):957–963, 1993.
- [YS96] I. Yaesh and U. Shaked. Design of linear tracking filters via robust \mathcal{H}_2 optimization. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, 32(1):388–394, 1996.
- [YW88] F. Yang and R. W. Wilde. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7):677–681, 1988.
- [ZC96] Y. Zhou and X. Chen. On the algebraic approach to \mathcal{H}_∞ control. In *Proceedings of the 13th IFAC Triennial World Congress*, pages 505–510, San Francisco, USA, 1996.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall International, Inc., USA, 1996.
- [Zho96] Y. Zhou. Convergence of the discrete-time Riccati equation to its maximal solution. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2665–2670, Kobe, Japan, 1996.
- [ZKSN95] K. Zhou, P. P. Khargonekar, J. Stoustrup, and H. H. Niemann. Robust performance of systems with structured uncertainties in state space. *Automatica*, 31(2):249–255, 1995.

Apêndice A

Desigualdades Matriciais Lineares

Este apêndice apresenta condições necessárias e suficientes para a caracterização de condições de positividade e não-negatividade de uma desigualdade matricial linear, isto é, uma *LMZ*. Tal caracterização, apresentada em [Alb69], é exposta no teorema a seguir (conhecido como Complemento de Schur):

Teorema A.1 [Alb69] *Seja*

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)} \quad (\text{A.1})$$

onde P_{11} e P_{22} são matrizes simétricas.

i) $P \geq \mathbf{0}$ se e somente se $P_{11} \geq \mathbf{0}$, $P_{11}P_{11}^\dagger P_{12} = P_{12}$ e $P_{22} - P'_{12}P_{11}^\dagger P_{12} \geq \mathbf{0}$.

ii) $P > \mathbf{0}$ se e somente se $P_{11} > \mathbf{0}$, $P_{11} - P_{12}P_{22}^\dagger P'_{12} > \mathbf{0}$ e $P_{22} - P'_{12}P_{11}^{-1}P_{12} \geq \mathbf{0}$. \square

Prova: Para o item (i). *Suficiência.* Seja $P \geq \mathbf{0}$, então existe a fatoração $P = HH'$ para algum H de posto de linha $n + m$. Tomando

$$H = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

tais que X e Y tenham posto de linha n e m , respectivamente, e calculando

$$HH' = \begin{bmatrix} XX' & XY' \\ YX' & YY' \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

segue que

$$P_{11} = XX' \geq \mathbf{0}, \quad P_{12} = XY' \quad (\text{A.4})$$

Como XX^\dagger é a projeção sobre a imagem de X e essa imagem coincide com a imagem de P_{11} , segue que $P_{11}P_{11}^\dagger = XX^\dagger$ e então $P_{11}P_{11}^\dagger P_{12} = (XX^\dagger)(XY') = (XX^\dagger X)Y' = XY' = P_{12}$. Logo, definindo $U \triangleq Y - P_{12}^\dagger P_{11}^\dagger X$ tem-se

$$P_{22} - P_{12}^\dagger P_{11}^\dagger P_{12} = UU' \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$

Necessidade. Defina as seguintes expressões

$$U \triangleq [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}], \quad U \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)} \quad (\text{A.6})$$

$$V \triangleq [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}], \quad V \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)} \quad (\text{A.7})$$

$$X \triangleq P_{11}^{\frac{1}{2}} U \quad (\text{A.8})$$

$$Y \triangleq P_{12}^\dagger P_{11}^\dagger P_{11}^{\frac{1}{2}} U + (P_{22} - P_{12}^\dagger P_{11}^\dagger P_{12})^{\frac{1}{2}} V \quad (\text{A.9})$$

então, como $UV' = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^\dagger & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} [X' \quad Y'] \geq \mathbf{0} \quad (\text{A.10})$$

(ii) *Suficiência.* Se $P > \mathbf{0}$ então $P_{11} > \mathbf{0}$ pois $\det(P_{11}) > 0$. Da mesma forma $P_{22} > \mathbf{0}$. Defina $S \triangleq P^{-1}$, logo S pode ser particionado como

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}' & S_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{A.11})$$

usando o fato que $PS = \mathbf{I}$, isto é,

$$\begin{bmatrix} P_{11}S_{11} + P_{12}S_{12}' & P_{11}S_{12} + P_{12}S_{22} \\ P_{12}'S_{11} + P_{22}S_{12}' & P_{12}'S_{12} + P_{22}S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

obtêm-se

$$S_{11} = (P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}')^{-1} \quad (\text{A.13})$$

$$S_{22} = (P_{22} - P_{12}'P_{11}^{-1}P_{12})^{-1} \quad (\text{A.14})$$

$$S_{12} = -P_{11}^{-1}P_{12}S_{11} \quad (\text{A.15})$$

$$S_{12}' = -P_{22}^{-1}P_{12}'S_{22} \quad (\text{A.16})$$

Como $S > \mathbf{0}$, segue que $S_{11} > \mathbf{0}$ e $S_{22} > \mathbf{0}$, implicando então que

$$S_{11}^{-1} > \mathbf{0} \quad \text{e} \quad S_{22}^{-1} > \mathbf{0} \quad (\text{A.17})$$

Para mostrar a necessidade, como $P_{11} > \mathbf{0}$, segue que $P'_{12}P_{11}^{-1}P_{12} \geq \mathbf{0}$ tal que

$$P_{22} = (P_{22} - P'_{12}P_{11}^{-1}P_{12}) + P'_{12}P_{11}^{-1}P_{12} > \mathbf{0} \quad (\text{A.18})$$

Tomando S_{11} , S_{12} , S'_{12} e S_{22} definidos como em (A.13)–(A.16) segue que $PS = \mathbf{I}$, de forma que P é não-singular e pelo item (i), $P \geq \mathbf{0}$, implicando portanto que $P > \mathbf{0}$. ■

NOTA A.1 Observe que a condição (ii) é equivalente à relação: $P_{11} > \mathbf{0}$, $P_{22} > \mathbf{0}$, $P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P'_{12} > \mathbf{0}$ e $P_{22} - S_{12}S_{22}^{-1}S'_{12} > \mathbf{0}$. Observe ainda que, de (A.13) e (A.17), segue que

$$S_{11} > \mathbf{0}, \quad P_{11} > S_{11}^{-1} \quad (\text{A.19})$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & P_{11} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (\text{A.20})$$

◇

Apêndice B

Análise de Robustez

B.1 Introdução

O projeto, considerado neste trabalho, de filtros robustos para sistemas com incertezas do tipo politópica, envolve a minimização dos critérios de robustez \mathcal{H}_∞ ou de desempenho \mathcal{H}_2 . Para verificar as especificações de medida de robustez e/ou desempenho, bem como a estabilidade do filtro robusto conectado ao sistema incerto, são introduzidos nas próximas seções o cálculo dos custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ em termos de \mathcal{LMIs} . Para uma caracterização completa veja [PTP97].

Considere o seguinte sistema LIT

$$\begin{cases} \partial x(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}w(t) \\ z(t) &= \tilde{C}x(t) + \tilde{D}w(t) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

com $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{q \times r}$, e seja a matriz de transferência da entrada w para a saída z dada por

$$H_{zw}(\nu) = \tilde{C}(\nu\mathbf{I} - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \quad (\text{B.2})$$

com $H_{zw}(\nu) \in \mathbb{RH}_\infty$.

Uma metodologia por \mathcal{LMIs} para o cálculo dos custos garantidos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ é apresentada nas próximas seções, no sentido de satisfazer:

$$\begin{aligned} \gamma_c &\geq \|H_{zw}\|_\infty && \forall (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) \in \mathcal{P}_c \\ \gamma_d &\geq \|H_{zw}\|_\infty && \forall (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}) \in \mathcal{P}_d \\ \delta_c &\geq \|H_{zw}\|_2 && \forall (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \mathbf{0}) \in \mathcal{P}_c \\ \delta_d &\geq \|H_{zw}\|_2 && \forall (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \mathbf{0}) \in \mathcal{P}_d \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Os conjuntos \mathcal{P}_c e \mathcal{P}_d foram definidos em (3.33) e (4.33).

B.2 Custo Garantido \mathcal{H}_2

A norma \mathcal{H}_2 ao quadrado de $H_{zw}(\nu)$ (com $\tilde{D} = \mathbf{0}$) pode ser expressa em termos da solução do Gramiano de controlabilidade G_c . Então, para $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \mathbf{0}) \in \mathcal{P}_c$ (\mathcal{P}_d) arbitrário porém fixo, a minimização da norma para sistemas contínuos e discretos no tempo é descrita, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \min_{G_c > \mathbf{0}} \|H_{zw}\|_2^2 &= \text{Tr}(\tilde{C}G_c\tilde{C}') \\ \text{s.a. } \tilde{A}G_c + G_c\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}' &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

e

$$\begin{aligned} \min_{G_c > \mathbf{0}} \|H_{zw}\|_2^2 &= \text{Tr}(\tilde{C}G_c\tilde{C}') \\ \text{s.a. } \tilde{A}G_c\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}' - G_c &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Aplicando o complemento de Schur (Teorema A.1) em (B.4) e (B.5) e usando a propriedade de solução minimal das equações dos Gramianos acima, segue que o custo garantido \mathcal{H}_2 pode ser calculado através de um procedimento convexo de otimização descrito, respectivamente, para os sistemas contínuos como

$$\begin{aligned} \delta_c^2 &= \min_{M, G} \text{Tr}\{M\} \\ \text{s.a. } \begin{bmatrix} G & G\tilde{C}'_i \\ \tilde{C}_i G & M \end{bmatrix} &\geq \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} -(\tilde{A}_i G + G\tilde{A}'_i) & \tilde{B}_i \\ \tilde{B}'_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} &> \mathbf{0}, \quad \forall (\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \mathbf{0}) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_c) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

e para os sistemas discretos por

$$\begin{aligned} \delta_d^2 &= \min_{M, G} \text{Tr}\{M\} \\ \text{s.a. } \begin{bmatrix} G & G\tilde{C}'_i \\ \tilde{C}_i G & M \end{bmatrix} &\geq \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} G & \tilde{A}_i G & \tilde{B}_i \\ G\tilde{A}'_i & G & \mathbf{0} \\ \tilde{B}'_i & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} &> \mathbf{0}, \quad \forall (\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \mathbf{0}) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_d) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

B.3 Custo Garantido \mathcal{H}_∞

O cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ segue imediatamente das versões do lema que relaciona a estabilidade e limitação prescrita da matriz de transferência $H_{zw}(\nu)$ com uma solução

definida positiva para a inequação de Riccati, nos casos contínuo (Lema 2.1) e discreto (Lema 2.2). Para tanto, através do complemento de Schur aplicado ao Lema 2.1 com (3.123) e ao Lema 2.2 combinado com (4.127), os procedimentos de otimização a seguir permitem efetuar o cálculo do custo garantido \mathcal{H}_∞ para os casos contínuo

$$\gamma_c^2 = \min_{\mu_c, P > \mathbf{0}} \mu_c$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} -\tilde{A}'_i P - P \tilde{A}_i & P \tilde{B}_i & \tilde{C}'_i \\ \tilde{B}'_i P & \mathbf{I} & \tilde{D}'_i \\ \tilde{C}_i & \tilde{D}_i & \mu_c \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \forall (\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_c) \quad (\text{B.8})$$

e discreto

$$\gamma_d^2 = \min_{\mu_d, P > \mathbf{0}} \mu_d$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & \tilde{A}'_i P & \tilde{C}'_i \\ \mathbf{0} & \mu_d \mathbf{I} & \tilde{B}'_i P & \tilde{D}'_i \\ P \tilde{A}_i & P \tilde{B}_i & P & \mathbf{0} \\ \tilde{C}_i & \tilde{D}_i & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad \forall (\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i) \in \mathcal{V}(\mathcal{P}_d) \quad (\text{B.9})$$