

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Departamento de Comunicações

Decodificação Multiestágio de Esquemas de Modulação Multidimensional Codificada

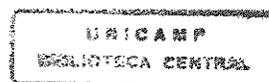
Por: Eng. Naylamp López Guerrero
Orientador: Prof. Dr. Jaime Portugheis

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida por NAYLAMP LÓPEZ GUERRERO aprovada pela Comissão Julgada em 19.06.98

Jaime Portugheis
Orientador

Julho 1998



5059185

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L881d

López Guerrero, Naylamp

Decodificação multiestágio de esquemas de modulação multidimensional codificada / Naylamp López Guerrero. --Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Jaime Portugheis

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Modulação digital. 2. Comunicações digitais. 3. Teoria da codificação. I. Portugheis, Jaime. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

A meus pais.

No fim, tudo dá certo. Se não deu, é porque ainda não chegou ao fim

Fernando Sabino

Agradecimentos

Voluntariamente ou não, muitas pessoas contribuíram e me ajudaram para cumprir meu objetivo de realizar o curso de mestrado. A todas essas pessoas, eu dedico este agradecimento.

Agradeço a minha família, aos meus adoráveis pais, Julio e Eva, por todo o apoio e carinho. As minhas queridas irmãs, que continuem seus estudos e possam alcançar conquistas muito maiores que esta. As minhas duas vovós, as quais sempre terei na memória.

A esse grande professor e sobretudo amigo Jaime Portuguez, de quem eu tive a sorte de ser seu orientado, pelos seus valiosos conselhos, pela orientação do trabalho e sobretudo pelo exemplo.

Agradeço em especial a Rocio, a quem muito amo. Obrigado pelo teu carinho, teu amor e pela tua compreensão.

Agradeço a todos os meus amigos, Cacá, Rivelino, Matheus, Ricardo, Niudomar, Veloso, Gustavo, PHD, Jau, Miguel, Cosme, Guillermo, Ernesto, Mário, Vicente, Paula, Rómulo e em geral a todos os meus camaradas dos diferentes departamentos da FEEC e da UNICAMP, pelos bons e gratos momentos juntos. Em eles encontre sempre a alegria necessária para ocultar a saudade da terrinha.

Agradeço ao professor Renato Baldini Filho, ao professor Weiler Finamore e ao professor Celso de Almeida, por aceitarem participar da banca julgadora.

Finalmente, um agradecimento à instituição CAPES, que possibilitou o curso de posgraduação.

Sumário

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

ABSTRACT

I - INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO DIGITAL

1.1 - INTRODUÇÃO	1
1.2 - SISTEMA TRADICIONAL DE COMUNICAÇÃO DIGITAL.....	2
1.2.1 - Fonte de dados	3
1.2.2 - Codificador de Fonte.....	3
1.2.3 - Codificador de Canal	4
1.2.4 - Modulador.....	4
1.2.5 - Canal de Comunicação	5
1.2.6 - Receptor	5
1.3 - SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES DIGITAIS COM MODULAÇÃO CODIFICADA.....	5
1.3.1 - Modulação Codificada com Trelças	6
1.3.2 - Mapeamento bits - sinais	7
1.3.3 - Modulação Codificada com Códigos de Bloco.....	7
1.3.4 - Modulação Multidimensional Codificada.....	8
1.4 - MODELO DO CANAL DE COMUNICAÇÃO.....	8
1.5 - A PESQUISA.....	10
1.6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	11

II - CONCEITOS BÁSICOS DE MODULAÇÃO CODIFICADA

2.1 - INTRODUÇÃO	12
2.2 - PARTIÇÃO DE UNGERBOECK	12
2.2.1 - Partição para esquemas de modulação bidimensionais.....	13
2.2.2 - Partição para esquemas de modulação multidimensionais	15
2.3 - CODIFICADOR BCM.....	16
2.3.1 - Codificador BCM multinível	17
2.4 - TAXA DE CODIFICAÇÃO	19
2.5 - DISTÂNCIA EUCLIDIANA QUADRÁTICA MÍNIMA	19
2.6 - GANHO ASSINTÓTICO.....	19
2.7 - DECODIFICADOR BCM.....	21
2.7.1 - Decodificador BCM de máxima verossimilhança.....	21
2.7.1.1 - Probabilidade de Erro de Bloco	22
2.7.2 - Decodificador BCM multiestágio	22
2.7.2.1 - Código do Estágio.....	23
2.7.2.2 - Código Interno do Estágio	24
2.7.2.3 - Código Externo do Estágio	24
2.7.2.4 - Decodificação MV do Estágio	24
2.7.2.5 - Decodificador ME.....	26
2.7.2.6 - Probabilidade de Erro de Bloco	27
2.8 - INVARIÂNCIA ROTACIONAL.....	28
2.8.1 - Código com Invariância à Rotação de Fase.....	28
2.8.2 - Esquemas de Modulação Codificada com Invariância a Rotação de Fase	29

III - PROBABILIDADE DE ERRO

3.1 - CONCEITOS BÁSICOS.....	30
3.2 - LIMITANTE DE UNIÃO.....	32
3.3 - LIMITANTE DE DISTÂNCIA MÍNIMA	33
3.4 - LIMITANTE TANGENCIAL (BERLEKAMP).....	34
3.5 - LIMITANTE DE ESFERA TANGENCIAL.....	35

3.6 - LIMITANTE HUGHES-HERZBERG-POLTYREV (H2P).....	36
3.7 - ANÁLISE DOS LIMITANTES SUPERIORES.....	38
3.8 - EXEMPLOS	39
3.8.1 - Exemplo 1.....	39
3.8.2 - Exemplo 2	41
3.9 - CONCLUSÕES	43

IV - UM EXEMPLO DE MODULAÇÃO MULTIDIMENSIONAL

CODIFICADA COM CÓDIGOS DE BLOCO

4.1 - INTRODUÇÃO	44
4.2 - PROJETO DO CÓDIGO.....	45
4.3 - PROJETO DO DECODIFICADOR	47
4.3.1 - Decodificador por Máxima Verossimilhança.....	48
4.3.2 - Decodificador Multiestágio	49
4.3.2.1 - Agrupamentos.....	49
4.3.2.2 - Estágio 1.....	51
4.3.2.3 - Estágio 2.....	55
4.3.2.4 - Estágio 3.....	57
4.3.2.5 - Estágio 4.....	59
4.3.2.6 - Decodificação Multiestágio	61
4.4 - RESULTADOS	61

V - DESEMPENHO DA MODULAÇÃO MULTIDIMENSIONAL CODIFICADA

5.1 - INTRODUÇÃO	66
5.2 - CÓDIGOS COM BCM MULTIDIMENSIONAL.....	67
5.2.1 - Esquema 1.....	67
5.2.2 - Esquema 2.....	68
5.2.3 - Esquema 3.....	68
5.3 - CÓDIGOS BCM BIDIMENSIONAIS	69
5.3.1 - Esquema 4.....	70
5.3.2 - Esquema 5.....	70

5.4 - ANÁLISE DOS ESQUEMAS BCM.....	70
5.5 - BCM MULTIDIMENSIONAL COM DECODIFICAÇÃO INTERNA SUBÓTIMA.....	75
5.5.1 - Algoritmo 1. Decodificação por Multiestágio . MV no primeiro e no segundo estágio (ME-DS).....	76
5.5.2 - Algoritmo 2. Decodificação por Multiestágio . Decisão por distância de Hamming no primeiro e MV no segundo estágio. (ME-DH).....	77
5.5.3 - Algoritmo 3. Decodificação por Multiestágio. Decisão por MV no primeiro estágio e sem decodificar o segundo. (ME-NC).....	77
5.5.4 - Desempenhos dos três algoritmos.....	78
5.6 - MELHORANDO O DESEMPENHO DO DECODIFICADOR ME.....	80
5.7 - CONCLUSÕES	83

VI - CONCLUSÕES

6.1 - CONCLUSÕES	84
6.2 - TRABALHOS FUTUROS	87

ANEXO 1 : Geradores Multidimensionais

BIBLIOGRAFIA

APÊNDICE A - GRUPOS REPRESENTATIVOS

A.1 – EXEMPLO A.1. CÓDIGO BINÁRIO SOB MODULAÇÃO 8-PSK.	A-3
A.2 - EXEMPLO A.1. CÓDIGO BCM BIDIMENSIONAL SOB MODULAÇÃO 8-PSK.	A-4

APÊNDICE B :TRELIÇAS E COMPLEXIDADES

B.1 TRELIÇA DE VERIFICAÇÃO DE PARIDADE	B-2
B.2 CÓDIGO DE PARIDADE BINÁRIO (N , N-1 , 2).....	B-3
B.3 CÓDIGO REED-MULLER $RM_{3,1}$	B-5
B.4 CÓDIGO DE PARIDADE QUATERNÁRIO	B-7
B.5 FUNÇÃO CROSS-OVER	B-9
B.6 CÓDIGO REED-MULLER $RM_{3,1}$ COM TRANSIÇÕES PARALELAS.	B-13
B.7 CÓDIGO REED-MULLER $RM_{3,1}$ CONCATENADO COM O CÓDIGO DE PARIDADE.....	B-14

Lista de Figuras

FIGURA 1.1. SISTEMA DE COMUNICAÇÃO DIGITAL.....	3
FIGURA 2.1. PARTIÇÃO DA CONSTELAÇÃO 8PSK	14
FIGURA 2.2. REPRESENTAÇÃO EQUIVALENTE DA PARTIÇÃO DA CONSTELAÇÃO 8PSK.....	14
FIGURA 2.3. PARTIÇÃO DA CONSTELAÇÃO 4D-4PSK	16
FIGURA 2.4. CODIFICADOR MULTINÍVEL.....	18
FIGURA 2.5. DECODIFICADOR DO ESTÁGIO.....	25
FIGURA 2.6. DECODIFICADOR MULTIESTÁGIO.....	27
FIGURA 2.7. ESQUEMA BCM INVARIANTE À ROTAÇÃO DE FASE.....	29
FIGURA 3.1. REGIÕES DE ERRO SEGUINDO O LIMITANTE DE UNIÃO.....	32
FIGURA 3.2. REGIÃO DE ERRO SEGUINDO O LIMITANTE DE DISTÂNCIA MÍNIMA.	33
FIGURA 3.3. GRÁFICO UTILIZADO PARA A DEDUÇÃO DO LIMITANTE DE BERLEKAMP.....	34
FIGURA 3.4. GRÁFICO PARA A DEDUÇÃO DO LIMITANTE DE ESFERA TANGENCIAL	35
FIGURA 3.5. GRÁFICO USADO NA DEDUÇÃO DO LIMITANTE H2P	37
FIGURA 3.6. DESEMPENHO DOS LIMITANTES PARA O EXEMPLO 1	40
FIGURA 3.7. DESEMPENHO DOS LIMITANTES PARA O EXEMPLO 2.....	42
FIGURA 4.1. TRELIÇA DE DECODIFICAÇÃO DO EXEMPLO 4.1	51
FIGURA 4.2. TRELIÇA DO PRIMEIRO ESTÁGIO.....	53
FIGURA 4.3. TRELIÇA DO SEGUNDO ESTÁGIO.....	56
FIGURA 4.4. TRELIÇA DO TERCEIRO ESTÁGIO	57
FIGURA 4.5. TRELIÇA DO QUARTO ESTÁGIO.....	59
FIGURA 4.6. DESEMPENHOS DOS ESTÁGIOS 1 E 3.....	62
FIGURA 4.7. DESEMPENHOS DOS ESTÁGIOS 2 E 4.....	63
FIGURA 4.8. DESEMPENHOS DOS DECODIFICADORES ANALISADOS.....	65
FIGURA 5.1. LIMITANTES SUPERIORES DOS CINCO ESQUEMAS PROPOSTOS.....	73
FIGURA 5.2. COMPARAÇÃO ENTRE OS LIMITANTES SUPERIORES E AS SIMULAÇÕES.....	74
FIGURA 5.3. TRELIÇA DO CÓDIGO INTERNO DO ESTÁGIO 1	76

FIGURA 5.4. SIMULAÇÃO DOS ALGORITMOS DE DECODIFICAÇÃO SUBÓTIMA PROPOSTOS.....	79
FIGURA 5.5. TRELIÇA DO CÓDIGO EXTERNO DO ESTÁGIO 1	80
FIGURA 5.6. RESULTADOS DA SIMULAÇÃO	82
FIGURA A.1. ESTRUTURA MULTINÍVEL DO CÓDIGO DO EXEMPLO A.2	A-5
FIGURA A.2. VETORES DIFERENÇA A SEREM UTILIZADOS	A-5
FIGURA B.1. TRELIÇA DE VERIFICAÇÃO DE PARIDADE DE N SEÇÕES E M ESTADOS	B-2
FIGURA B.2. TRELIÇA DO CÓDIGO DE PARIDADE BINÁRIO	B-3
FIGURA B.3. TRELIÇA DO CÓDIGO $RM_{3,1}$	B-5
FIGURA B.4. TRELIÇA DO CÓDIGO DE PARIDADE QUATERNÁRIO PARA $N=4$	B-7
FIGURA B.5. TRELIÇAS DO CÓDIGO ORIGINAL E DO CÓDIGO DEPOIS DA UTILIZAÇÃO DA FUNÇÃO “CROSS-OVER”	B-10
FIGURA B.6. TRELIÇA DO CÓDIGO UTILIZANDO DUAS VEZES A FUNÇÃO “CROSS-OVER”	B-12
FIGURA B.7. TRELIÇA DO CÓDIGO $RM_{3,1}$ COM TRANSIÇÕES PARALELAS	B-13
FIGURA B.8. TRELIÇA DO CÓDIGO $RM_{3,1}$ CONCATENADO COM O CÓDIGO DE PARIDADE	B-14

Lista de Tabelas

TABELA 4.1. GERADORES DE COMPRIMENTO 8.....	46
TABELA 4.2. COMPOSIÇÃO DO BLOCO CODIFICADO.....	47
TABELA 4.3. COMPOSIÇÃO FINAL DO BLOCO CODIFICADO.....	47
TABELA 4.4. ESPECTRO DE DISTÂNCIAS DO DECODIFICADOR POR MV.....	48
TABELA 4.5. AGRUPAMENTOS FORMADOS COM GERADORES MULTIDIMENSIONAIS.....	50
TABELA 4.6. COEFICIENTES DO DECODIFICADOR MULTIESTÁGIO.....	61
TABELA 5.1. COMPOSIÇÃO DO CÓDIGO 1.....	67
TABELA 5.2. COMPOSIÇÃO DO CÓDIGO 2.....	68
TABELA 5.3. COMPOSIÇÃO DO CÓDIGO 3.....	69
TABELA 5.4. COMPOSIÇÃO DO CÓDIGO 4.....	69
TABELA 5.5. ESPECTRO DE DISTÂNCIAS DOS CINCO ESQUEMAS.....	71
TABELA 5.6. COMPLEXIDADES DOS DECODIFICADORES.....	71
TABELA A.1. ESPECTRO DE DISTANCIAS DO CÓDIGO (8,7,2).....	A-3
TABELA A.2. GRUPO REPRESENTATIVO DO CÓDIGO (8,7,2).....	A-4
TABELA A.3. ESPECTRO DE DISTANCIAS DO EXEMPLO A.2.....	A-5
TABELA A.4. GRUPO REPRESENTATIVO DO EXEMPLO A.2.....	A-9

Resumo

Neste trabalho discutimos a decodificação multiestágio de esquemas de modulação codificada para o canal aditivo Gaussiano. Utilizaremos constelações de sinais multidimensionais ao invés dos esquemas tradicionais que usam constelações de sinais bidimensionais. Restringiremos o estudo a esquemas que usam somente símbolos PSK, dado que tais esquemas são os mais adequados para determinados tipos de canais, como por exemplo o canal de satélite.

Os esquemas de modulação codificada a serem estudados serão caracterizados por dois elementos: o código a ser enviado pelo transmissor e o decodificador/demodulador usado no receptor. O código é o resultado dos diferentes tipos de codificação aplicados nos bits de informação, enquanto o decodificador/demodulador serve para recuperar a palavra enviada do sinal afetado pelo canal. Nosso maior interesse será no uso de decodificadores do tipo multiestágio para os diferentes códigos projetados.

Com o objetivo de poder comparar os esquemas aqui construídos com esquemas codificados já existentes, iremos usar dois parâmetros próprios de qualquer esquema de transmissão: a probabilidade de erro de bloco do sistema para diferentes valores da relação sinal – ruído, e a complexidade envolvida no processo de decodificação do sinal recebido.

Abstract

In this dissertation, the decoding of block coded modulation schemes is considered. Multidimensional signal constellations are studied instead of traditional schemes that use two-dimensional signal constellations. This investigation is restricted to the use of PSK based schemes, because this kind of schemes are more appropriate for certain communication channels, e.g. the satellite channel.

The block coded modulation schemes investigated are defined by the transmitter's code and by the decoder/demodulator of the receiver. The transmitter's code is the result of different error-protection codes applied to the information bits. The decoder/demodulator recovers the information of the affected signal received. Our main focus was on the use of multistage decoders for the different codes constructed.

In order to compare the schemes constructed with other schemes that already exist, two usual parameters are used: the block error probability for different signal-to-noise-ratio values and the decoding complexity.

Capítulo 1

Introdução aos Sistemas de Comunicação Digital

1.1 Introdução

Com o decorrer dos anos, é maior o uso dos sistemas de comunicação digital no mundo inteiro. Tal aumento no número de aplicações vem acompanhado de um aumento exponencial no número de usuários dispostos a desfrutar dos avanços da tecnologia. Para satisfazer esta crescente demanda porém, os novos sistemas de comunicação digital tem que brindar segurança e confiabilidade aos usuários. Além disso, é preciso cumprir com os requisitos próprios da aplicação e com os estabelecidos pelos padrões existentes. Em aplicações que envolvam transmissão de vídeo ou que sejam do tipo interativo, a taxa de transmissão de dados é um fator crítico, considerando que a largura de faixa disponível é limitada. É por isso que cada vez é maior a demanda de sistemas eficientes de comunicações que consigam transmitir uma maior quantidade de informação dentro de uma largura de faixa determinada.

Um dos desenvolvimentos mais notáveis em comunicações com eficiência de largura de faixa nos últimos 20 anos é a introdução de uma técnica que combina o processo de codificação de dados com o processo de modulação de sinais. Tal técnica

conhecida como modulação codificada, permite transmissões confiáveis a velocidades maiores sem comprometer a eficiência na largura de faixa.

O tratamento de codificação e modulação como partes inseparáveis de um único sistema foi sugerido inicialmente por Massey[1]. Dois anos depois, Ungerboeck introduziu em [2] (publicado em 1982 [3]), o primeiro esquema de modulação codificada. Nesse esquema códigos convolucionais foram combinados com diversas constelações de sinais de modulação para formar códigos modulados mediante um apropriado mapeamento de bits em sinais.

Foi a utilização da técnica de modulação codificada que permitiu ao International Telecommunications Union (ITU-T) em 1991, definir o padrão V.32 para a transmissão de dados binários através de linhas telefônicas comuns para comunicações entre computadores ou via fax a 14400 bps numa largura de faixa de aproximadamente 2700 Hz [4] .

Atualmente, é possível observar o importante impacto da técnica de modulação codificada sobre outras aplicações de largura de faixa restrita. Esta sob estudo a utilização de tal técnica para transmissão de dados através de diferentes tipos de canais de transmissão (de satélite e ópticos) para diferentes aplicações (HDTV digital, comunicações espaciais e comunicações móveis).

1.2 Sistema Tradicional de Comunicação Digital

A Figura 1.1 mostra os elementos básicos de um sistema tradicional de comunicação digital. O sistema é digital porque usa uma seqüência de símbolos de um alfabeto finito para representar a informação. A transmissão de dados em forma digital, permite o uso de uma série de poderosas técnicas de processamento de sinais que de outra forma não estariam disponíveis.

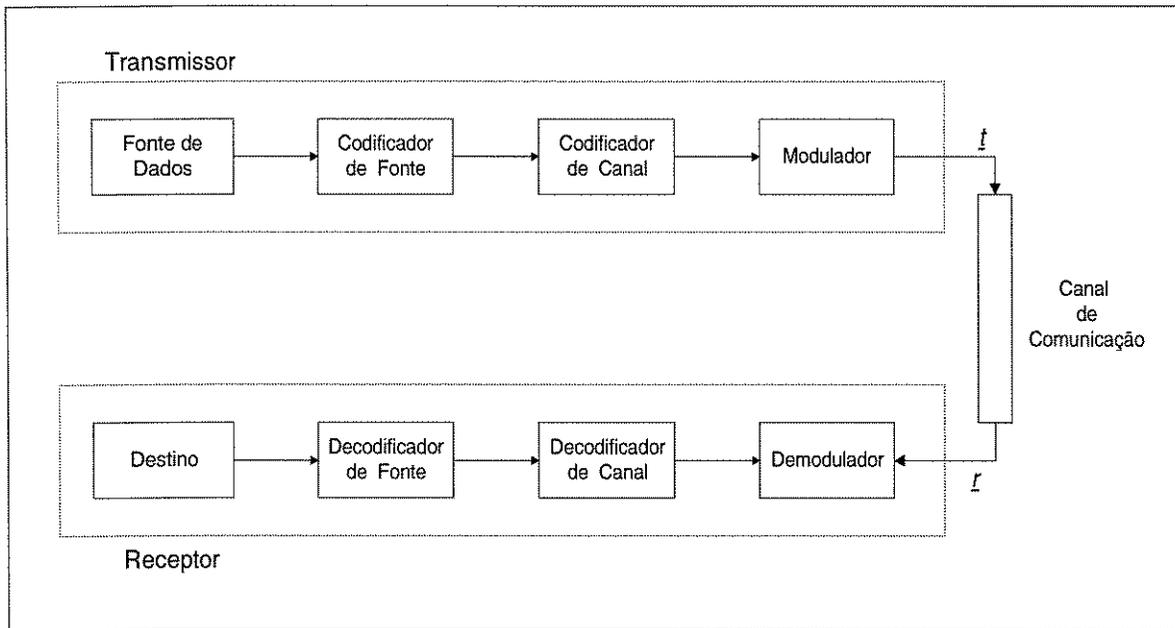


Figura 1.1 Sistema de Comunicação Digital

1.2.1 Fonte de dados

A fonte de dados é a fonte que gera a informação a ser transmitida. A fonte é do tipo digital porque a saída é uma seqüência de valores discretos. A origem da informação pode ser do tipo analógica e/ou digital dependendo da aplicação. No caso de ser analógica, supõe-se que o sinal de informação é amostrado, quantizado e finalmente digitalizado.

1.2.2 Codificador de Fonte

Dos conceitos básicos da teoria de informação (ver Cover e Thomas [5]) sabe-se que uma das características desejadas em qualquer fonte de dados é que a saída seja de natureza aleatória. Claramente, no caso de uma fonte digital binária, se o símbolo 1 e o símbolo 0 tem a mesma probabilidade de ocorrência, o conhecimento da saída da fonte outorga a maior quantidade de informação. Usualmente, as fontes não são aleatórias e contem quantidades significativas de redundância. O papel de codificador de fonte é de aleatorizar a fonte, devido a que não se quer gastar recursos do sistema transmitindo dados predizíveis através do canal.

1.2.3 Codificador de Canal

O objetivo do codificador de canal é introduzir uma capacidade de correção de erros na saída do codificador de fonte, para combater erros de transmissão do canal. Para alcançar tal objetivo, redundância é adicionada à saída do codificador de fonte. A maneira tradicional consiste em adicionar bits de verificação de paridade aos bits de informação. Shu Lin e Costello Jr. [6] mostram diversas técnicas de proteger os bits de informação a custos de aumentar o tamanho da mensagem a ser enviada, o que requer uma maior velocidade de transmissão.

1.2.4 Modulador

O modulador faz a interface entre o codificador de canal e o canal de transmissão. A fonte, o codificador de fonte e o codificador de canal podem ser vistos como uma fonte binária modificada que alimenta o modulador. O modulador logo, pode ser visto com a interface entre a fonte de dados e o canal. Canais físicos requerem sinais elétricos, sinais de rádio ou sinais ópticos. A forma da saída do demodulador depende da natureza física do canal e é escolhida para obter tanto simplicidade do sistema como ótimo desempenho na detecção.

O modulador mapeia os símbolos de informação em sinais que podem ser eficientemente transmitidos sobre o canal de comunicação. A seleção do formato da modulação pode ser um problema complexo, devido à variedade de constelações existentes e as diferentes características de performance de cada uma. Na maioria dos casos a seleção do formato da modulação decide-se por considerações de potência e de largura de faixa disponível para a aplicação.

1.2.5 Canal de Comunicação

O canal de comunicação é o meio pelo qual vai ser enviada a informação ao receptor. O canal afeta os sinais transmitidos de forma não predizível, porém, dependendo de fatores como o meio de propagação, o ambiente de operação, a potência do sinal e a largura de faixa do sinal, diversos modelos foram projetados para estimar o comportamento do canal.

1.2.6 Receptor

A função do receptor é a de recuperar a informação transmitida através do canal. Cada bloco realiza a função inversa do bloco correspondente no transmissor. Assim, o demodulador realiza o processo inverso do modulador, e o decodificador de canal o processo inverso do codificador de canal, etc.

Proakis [7] apresenta critérios teóricos assim como critérios práticos para o projeto de um receptor. Assim, são revisadas as considerações de sincronismo, filtros de recepção, detecção ótima, detecção subótima, necessárias para a implementação de um receptor de comunicações digitais.

1.3 Sistemas de Comunicações Digitais com Modulação Codificada

Uma das desvantagens do sistema tradicional de comunicação digital é que para aumentar a velocidade de transmissão da informação sem aumentar a largura de faixa, precisa-se aumentar a potência do transmissor ou aumentar o número de sinais na constelação do modulador.

Porém, em sistemas cuja taxa de transmissão é próxima à capacidade do canal ou em canais com restrições na potência de transmissão, só a segunda alternativa é viável. Mas, o aumento de sinais na constelação do modulador traz como consequência uma aproximação dos possíveis sinais a serem transmitidos. Isto

refletir-se-á numa maior probabilidade de erro na transmissão e por conseguinte numa degradação da qualidade do serviço da aplicação.

Um exemplo de tal situação é o canal de satélite móvel, onde a largura de faixa de um usuário é restrita pelo desejo de acomodar o maior número de usuários numa determinada largura de faixa de transmissão total, e a potência de transmissão é limitada pelo limite de densidade de fluxo de potência na radiação da transmissão do satélite e o tamanho da antena móvel.

1.3.1 Modulação Codificada com Treliças

Mediante a combinação de códigos convolucionais com diferentes constelações de sinais de modulação, Ungerboeck [2][3] construiu códigos com capacidade de correção de erros que permitiam, com grande eficiência, transmissão confiável de dados em situações de largura de faixa limitada. Tal esquema é conhecido na atualidade como Modulação Codificada com Treliças TCM (do inglês Trellis Coded Modulation), devido à utilização de códigos convolucionais na construção do código. Desde a publicação do artigo [2], houve um grande número de pesquisas na construção de códigos TCM e vários bons códigos foram descobertos ([8]-[15]).

Em TCM, a constelação de sinais do modulador é dividida em subconjuntos, tais que os sinais dentro de cada subconjunto tem separação maior do que no conjunto original. Alguns dos bits de informação são convolucionados no codificador e a saída do codificador é usada para escolher um dos subconjuntos formados. Os bits de informação restantes servem para escolher um sinal dentro do subconjunto escolhido.

No receptor, o sinal recebido ao invés de ser primeiro demodulado e logo decodificado como no sistema tradicional, aqui é processado pelo receptor que combina demodulação com decodificação num processo só. Como consequência disso, o parâmetro que governa o desempenho do sistema de transmissão não é mais a distância de Hamming do código convolucional mais sim (para um canal aditivo gaussiano) a distância Euclidiana entre duas seqüências transmitidas.

Logo, a otimização de um projeto de TCM vai ser baseado nas distâncias Euclidianas ao invés das distâncias de Hamming, portanto a eleição do código e da constelação de sinais não poderão ser feitas separadamente.

Uma modulação codificada propriamente projetada pode prover significativos ganhos de codificação sobre esquemas de modulação não codificada com nulo ou pequeno aumento da largura de faixa. Para atingir ganhos de 3 - 5 dB a complexidade de decodificação é razoável, enquanto que para valores maiores a 5 dB o aumento é drástico e a implementação do decodificador resulta não prática.

Dependendo da constelação de sinais a ser utilizada na modulação, TCM pode ser classificado em dois tipos básicos, TCM tipo lattice (usando constelações M-PAM e M-QASK) e TCM tipo amplitude constante (M-PSK). Os de amplitude constante tem menor eficiência de potência comparado com de tipo lattices , mas são mais adequados para certos canais. (canais de satélite contendo amplificadores não - lineares).

1.3.2 Mapeamento bits - sinais

A grande inovação do sistema proposto por Ungerboeck recai na maneira como os m bits de informação são mapeados sobre os sinais da constelação. Tal mapeamento é feito através da partição de conjuntos. A maioria das constelações de sinais podem ser particionadas de forma sistemática para formar uma série de subconjuntos menores. Se a partição é bem feita, as subconstelações resultantes têm uma distância Euclidiana mínima maior do que a constelação original.

Em qualquer projeto de modulação codificada, a partição da constelação de sinais do modulador em subconjuntos com distâncias mínimas internas maiores tem um papel principal, pois define o mapeamento a ser usado pelo modulador e prove um limitante aproximado da mínima distância Euclidiana entre duas seqüências do código.

1.3.3 Modulação Codificada com Códigos de Bloco

A idéia de combinar codificação por códigos de blocos e modulação BCM (do inglês Block Coded Modulation) foi originada por Imai and Hirakawa em 1977 [16], onde eles propuseram uma técnica por multiníveis para combinar códigos de bloco binários componentes com a constelação de sinais para formar um bloco de modulação codificada. Esta técnica multinível logo foi usada e estendida por outros para construir blocos de modulação codificada [17]-[28].

A vantagem de utilizar códigos de bloco ao invés de códigos convolucionais na construção do esquema de modulação codificada, é a possibilidade de construir de maneira simples códigos com invariância à rotação de fase (ver seção 2.8), os quais permitem a rápida recuperação do sincronismo na recepção nos casos em que este é perdido.

1.3.4 Modulação Multidimensional Codificada

Ao invés de usar constelações de sinais de duas dimensões (M-QAM, M-PSK), Biglieri e Elia [22] mostram que, mediante a adequada partição da constelação, é possível a obtenção de bons códigos BCM e TCM baseados em constelações multidimensionais.

O uso de sinais multidimensionais explica-se devido à necessidade de aumentar o número de sinais da constelação sem acrescentar de maneira drástica a complexidade do receptor. Espaços de sinais de 4 dimensões podem ser obtidos facilmente a partir de constelações bidimensionais e utilizando polarização ortogonal ou multiplexação por frequência ou multiplexação por tempo.

O uso de constelações de sinais multidimensionais para a construção de esquemas TCM foi logo aprofundado em [15] e [29]. Neles foi visto que a modulação multidimensional codificada outorga uma serie de vantagens sobre a modulação bidimensional codificada.

Usando constelações multidimensionais tem-se mais flexibilidade na obtenção de taxas de informação assim como mais facilidade na obtenção de códigos parcial ou totalmente transparentes à rotação de fase da constelação.

1.4 Modelo do Canal de Comunicação

O canal físico de um sistema de comunicação afeta o sinal transmitido produzindo atenuação e introduzindo-lhe ruído. A atenuação é geralmente causada pela absorção de energia e espalhamento no meio de propagação. Em comunicações via canal de satélite esse efeito é chamado de ‘perdas no espaço livre’ e depende tipicamente do quadrado da distância. Em aplicações rádio móvel, a atenuação não é fixa mais tende a flutuar com a velocidade do veículo e com a geometria dos obstáculos ao redor e do terreno. Prédios, montanhas e árvores podem fazer com que o sinal viaje por vários caminhos. Como tais caminhos têm diferentes distâncias, as diferentes cópias do sinal podem interferir de forma construtiva ou destrutiva, dependendo da localização do receptor. Tais canais são chamados de “canais de desvanecimento por multipercurso” e são estudados em Proakis [7].

O ruído introduzido pelo canal também pode tomar uma série de formas diferentes. A forma mais comum de ruído é o calor do ambiente no hardware do transmissor e/ou receptor e no meio de propagação. Outras fontes são a interferência de co-canal e/ou canal adjacente, ruído de disparo em fotodetectores e fenômenos climáticos. O modelo de ruído mais comum é o modelo de ruído branco aditivo gaussiano (AWGN do inglês Additive White Gaussian Noise) . Tal modelo é simples e fácil de ser analisado numa variedade de contextos, e pode proporcionar um modelo preciso do que está acontecendo em alguns sistemas de comunicação.

O modelo AWGN produz resultados muito próximos à realidade quando aplicado a canais de satélite e canais terrestres em linha de visada. O ruído AWGN é aditivo no sentido que o impacto do ruído no sinal transmitido pode ser representado como uma variável aleatória adicionada ao sinal modulado. Assim, é possível definir o ruído como uma variável z gaussiana com média zero e variância σ^2 , com a seguinte função de distribuição

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-z^2/2\sigma^2} \quad (1.1)$$

A porção branca do AWGN refere-se à densidade espectral do ruído, o qual assume-se que é constante e de valor $N_0/2$ em todo o espectro de frequência. Isto é fisicamente impossível dado que requer uma energia infinita, porém esta suposição provê resultados precisos quando é aplicado ao análise de um sistema de comunicação de largura de faixa limitada.

1.5 A pesquisa

Uma vez introduzidos os conceitos de sistema de comunicação digital e de esquemas de modulação codificada, é possível definir o tema da minha pesquisa, da qual este manuscrito é a sua parte culminante.

Cada vez é maior o número de aplicações que apresentam restrições tanto de largura de faixa assim como de potência. Além disso, aplicações que envolvem o uso de satélites requerem maiores cuidados na hora de projetar o sistema de comunicação, devido à não linearidade dos amplificadores utilizados para o enlace de subida e o enlace de descida.

Por isso, é cada vez maior o interesse colocado no estudo de esquemas BCM feitos baseados em constelações M-PSK (M-PSK BCM). Assim, é possível a obtenção de códigos eficientes no uso da largura de faixa, e simultaneamente que evitem a presença de distorções à saída do demodulador.

Nesta tese, estuda-se o desempenho do uso de modulação PSK multidimensional para a construção de esquemas de modulação codificada com códigos de bloco para canais com ruído aditivo gaussiano. São apresentados os critérios e o procedimento para a construção de tais esquemas.

Os esquemas multidimensionais serão construídos usando a técnica de construção por multiníveis enquanto que a decodificação será feita por múltiplos estágios. Tais conceitos serão explicados no Capítulo 2. Os esquemas multidimensionais construídos serão comparados com esquemas BCM bidimensionais que apresentem parâmetros semelhantes. Serão usados como critérios de comparação a complexidade do processo de demodulação – decodificação e o desempenho dos esquemas construídos para diferentes valores de potência no transmissor.

A estrutura da tese é como segue, no Capítulo 2 serão apresentados e explicados os conceitos básicos para a construção de um esquema de modulação codificada. Dado que é preciso avaliar o desempenho dos esquemas construídos para efeitos de comparação, no Capítulo 3 mostra-se uma ferramenta útil para a predição do desempenho de um esquema. No Capítulo 4 é mostrado em detalhe o processo de construção de um esquema BCM multidimensional e são calculados o desempenho e a complexidade do esquema construído.

No capítulo 5 são introduzidos diferentes esquemas BCM multidimensionais. Comparam-se tanto as complexidades como os desempenhos desses esquemas com esquemas BCM bidimensionais semelhantes. Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões e comentários sobre o trabalho realizado.

1.6 Considerações Finais

Para uma melhor compreensão dos conceitos básicos apresentados neste Capítulo, sugere-se a leitura de [5],[7] e [30]. A teoria de codificação e decodificação de dados pode ser revisada em [6] e [31].

Para uma maior profundidade nos conceitos de modulação codificada com treliças (TCM) recomenda-se a leitura de [32]. Neste, são explicados de maneira clara os procedimentos e critérios para a construção e decodificação de esquemas TCM, não só para o canal aditivo gaussiano mas o canal com desvanecimento, usando tanto constelações de sinais bidimensionais como também constelações multidimensionais.

Esquemas de modulação codificada com códigos de bloco para diferentes constelações de sinais podem ser encontrados em [16]-[28]. Estudos para a aplicação de modulação codificada com códigos de bloco (BCM) em canais com desvanecimento podem ser encontrados em [33]. Finalmente, pesquisas sobre BCM com distintos graus de proteção nos bits de informação podem ser encontrados em [34] .

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Modulação Codificada

2.1 Introdução

Nesta capítulo são apresentados brevemente os principais conceitos referentes a modulação codificada a serem usados no desenvolvimento desta tese. Tais conceitos são válidos independentemente da constelação de sinais a ser utilizada para a modulação. Porém, dado que o objetivo da presente tese limita-se exclusivamente ao uso de símbolos PSK em esquemas de modulação codificada, a maioria dos conceitos serão apresentados enfocando-os para os uso de constelações de sinais M-PSK.

2.2 Partição de Ungerboeck

Proposta por Ungerboeck [3] em 1982, permite a partição da constelação de sinais a ser utilizada na modulação em múltiplos subgrupos, tais que a distância Euclidiana mínima de quaisquer dos subgrupos é maior que a distância Euclidiana do grupo original.

Seja Ω_0 o conjunto de símbolos do esquema de modulação a ser utilizado. A regra de partição por conjuntos consiste em dividir o conjunto Ω_0 em p_0 subconjuntos $\Omega_1(i)$ tendo em consideração os seguintes critérios:

- $\Omega_1(i) \subseteq \Omega_0$ $i = 0, 1, \dots, p_0$.
- A distância Euclidiana mínima de $\Omega_1(i)$ é maior ou igual à distância Euclidiana mínima de Ω_0 .
- Se as distâncias Euclidianas forem iguais, o número de sinais que distam d_{\min} em $\Omega_1(i)$ deve ser menor do que o número em Ω_0 .
- Uma vez finalizada a primeira partição, rotulam-se os p_0 subconjuntos Ω_1 obtidos com valores do alfabeto $\{0, 1, \dots, p_0-1\}$.

Repete-se o mesmo procedimento para cada um dos subconjuntos Ω_1 . O processo só acaba quando depois de m partições a cardinalidade dos subconjuntos resultantes é igual a 1 ($|\Omega_m| = 1$).

Finalmente, cada sinal é rotulado com os valores dos símbolos utilizados até chegar a ele. Nesta tese, irá-se trabalhar exclusivamente com códigos binários, portanto $p_i = 2$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$.

2.2.1 Partição para esquemas de modulação bidimensionais

Na Figura 2.1 mostra-se a aplicação da regra de partição de Ungerboeck para uma constelação 8-PSK. Representando cada um dos sinais da constelação por números inteiros, é possível descrever a partição de uma constelação M-PSK de uma forma alternativa. Na Figura 2.2 mostra-se o equivalente para o caso da constelação 8-PSK.

Usando a representação da Figura 2.2, a seguinte expressão pode ser derivada para obter o símbolo PSK a ser transmitido:

$$S = [2^0] * b_0 + [2^1] * b_1 + \dots + [2^{I-1}] * b_{I-1} \quad (2.1)$$

onde $I = \log_2 M$,

b_0, b_{I-1} são os bits usados para fazer as partições dos conjuntos.

Exemplo. No caso da constelação 8-PSK das Figuras 2.1 e 2.2 a expressão 2.1 resulta

$$S = [1]*b_0 + [2]*b_1 + [4]*b_2 \quad (2.2)$$

b_0 , b_1 e b_2 representam os bits de decisão de cada um dos subconjuntos.

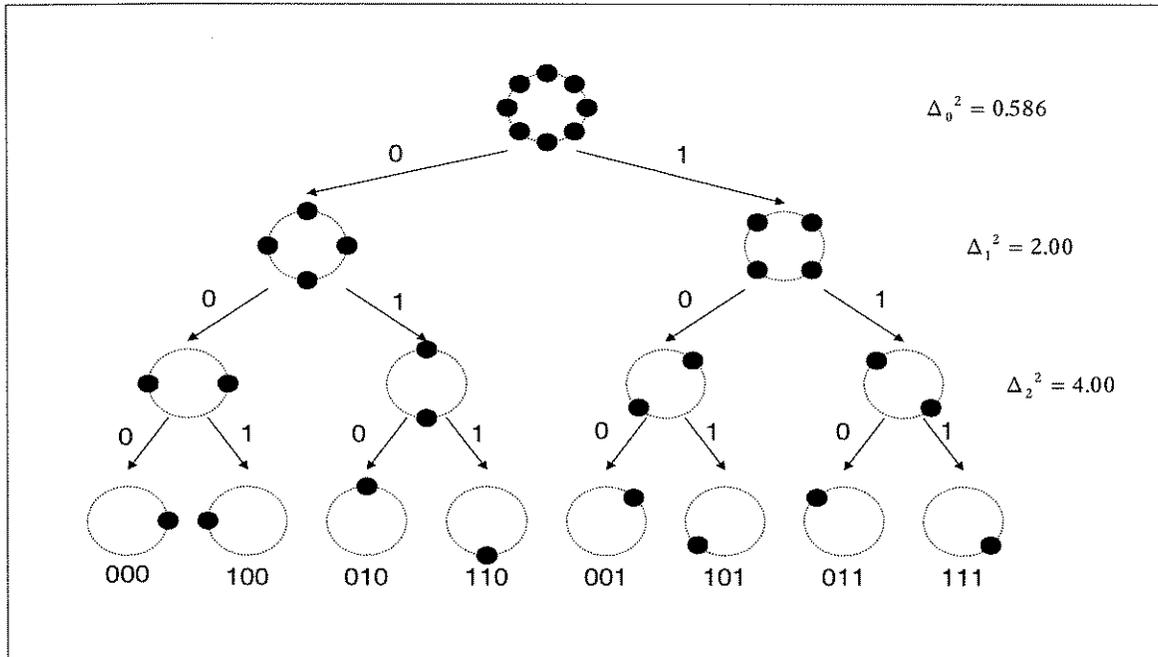


Figura 2.1 Partição da constelação 8PSK

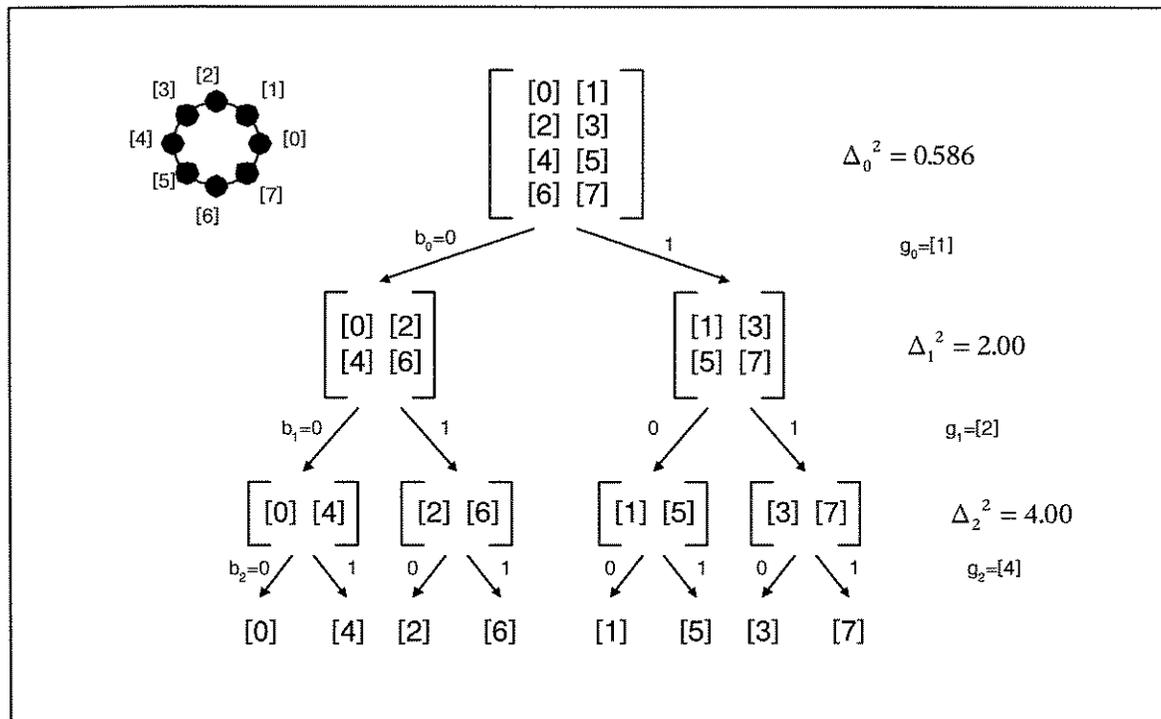


Figura 2.2 Representação equivalente da partição da constelação 8PSK

2.2.2 Partição para esquemas de modulação multidimensionais

Aplicando o mesmo procedimento que no caso de modulação bidimensional, inicialmente procede-se a definir a constelação primária. Neste caso a constelação a ser particionada, vem dada por todas as possíveis combinações de L - símbolos M-PSK.

Para a obtenção dos geradores, os quais serão usados para as partições dos conjuntos, utiliza-se a técnica descrita em [15] a qual descompõe a constelação inicial em códigos binários de comprimento L . No Anexo 1, são mostrados os geradores obtidos para modulações 2L-dimensionais em 8-PSK. Embora para comprimentos maiores que 4, sugere-se a duplicação dos geradores já obtidos, nesta tese preferiu-se utilizar a técnica original de decomposição da constelação original em códigos binários de comprimento L .

A seguinte expressão pode ser usada para descrever a partição da constelação a ser usada na modulação

$$S = g_0 * b_0 + g_1 * b_1 + \dots + g_{L-1} * b_{L-1} \quad (2.3)$$

onde

$$L = \log_2 M,$$

$2L$ é a dimensão da constelação,

$$L = L * I,$$

e $g_0 \dots g_{L-1}$ são os geradores da partição.

As somas da expressão 2.3 podem ser módulo 2 ou módulo M . Se forem módulo 2, teriam que representar-se os sinais da constelação por números binários ao invés de números inteiros. Pietrobon et al [15] e Baldini e Farrell [27] mostram que o uso da adição sob módulo M , permite a obtenção de códigos invariantes à rotação de fase assim como obtém-se uma distribuição uniforme de pontos em torno de cada palavra código.

Exemplo. Para a constelação 4D-4PSK os seguintes geradores são obtidos

$$[01], [11], [02], [22]$$

Logo, a partição pode ser descrita da seguinte maneira :

$$S = [01]*b_0 + [11]*b_1 + [02]*b_2 + [22]*b_3 \quad (2.4)$$

onde $b_0..b_3$ são os bits usados nas decisões. A Figura 2.3 mostra a partição completa da constelação 4D-4PSK.

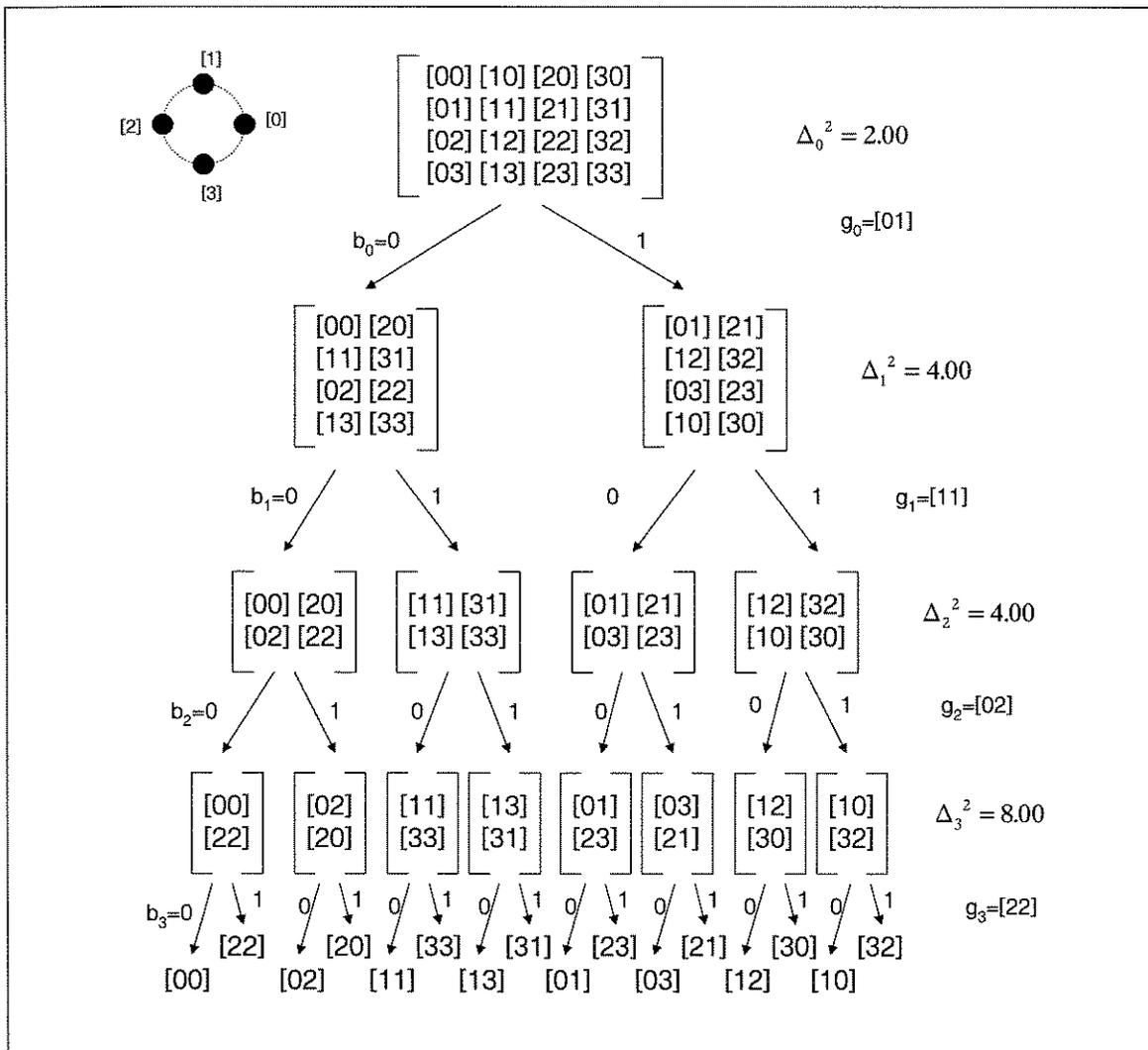


Figura 2.3 Partição da constelação 4D-4PSK

2.3 Codificador BCM

O processo de codificação de um esquema com modulação codificada é equivalente ao processo de codificação de um código concatenado. Enquanto que Portugéis [28] apresenta a definição geral de um código concatenado, aqui vai-se apresentar somente no caso específico de códigos binários como códigos externos.

Sejam $B_i = (n_b, k_i, \delta_i)$ $0 \leq i \leq m-1$, códigos binários com distância de Hamming mínima δ_i e com k_i bits de informação. Alinhando as m palavras código $b_i \in B_i$ a serem enviadas, forma-se o seguinte arranjo

$$V(b_0 b_1 \dots b_{m-1}) = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0(n_b-1)} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1(n_b-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{(m-1)0} & b_{(m-1)1} & \dots & b_{(m-1)(n_b-1)} \end{pmatrix}$$

No caso de modulação codificada, as palavras a serem transmitidas são formadas depois de mapear o arranjo $V(b_0 b_1 \dots b_{m-1})$ num vetor composto por n_b sinais de modulação.

2.3.1 Codificador BCM multinível

Embora tenha-se várias alternativas para o processo de mapeamento dos bits, o esquema que apresenta maiores vantagens tanto na hora de projetar o código assim como na hora de definir o decodificador a ser utilizado é o sistema de construção por multiníveis.

Neste sistema, o mapeamento consiste em substituir cada coluna do arranjo por um sinal da constelação de modulação a ser utilizada. Se for utilizada uma modulação codificada multidimensional, cada coluna será substituída por L símbolos bidimensionais (no desenvolvimento desta tese chamaremos tais sistemas como $2L$ -BCM).

A relação entre a dimensão da modulação ($2L$) é o número m de códigos externos B_i a serem utilizados, vem dada por :

$$m \leq L \cdot \log_2 M \quad (2.5)$$

onde M é o número de sinais da constelação bidimensional primária.

Com o método de construção por multiníveis, o processo de decodificação reduz-se a trocar cada coluna do arranjo formado pelo sinal etiquetado com a mesma seqüência de bits na partição da constelação de modulação.

A construção de códigos BCM por multiníveis permite a obtenção de códigos com distâncias Euclidianas arbitrárias, assim como também a obtenção de códigos com invariância à rotação de fase.

Códigos com construção multinível podem ser divididos em duas categorias : básicos e não básicos. Os do tipo básico são construídos com códigos binários externos independentes um do outro. Porém, este tipo de código apresenta um número de vizinhos¹ muito alto, o qual afeta a performance do código. Uma maneira de solucionar esse problema, é introduzindo interdependência entre os códigos externos a serem utilizados. Em [26], estuda-se a função cross-over, a qual diminui o número de vizinhos ao custo de uma complexidade maior na decodificação dos códigos externos.

A Figura 2.4 mostra um codificador BCM multinível. A modulação codificada é feita utilizando uma constelação de $2L$ dimensões, os códigos externos usados são de comprimento n .

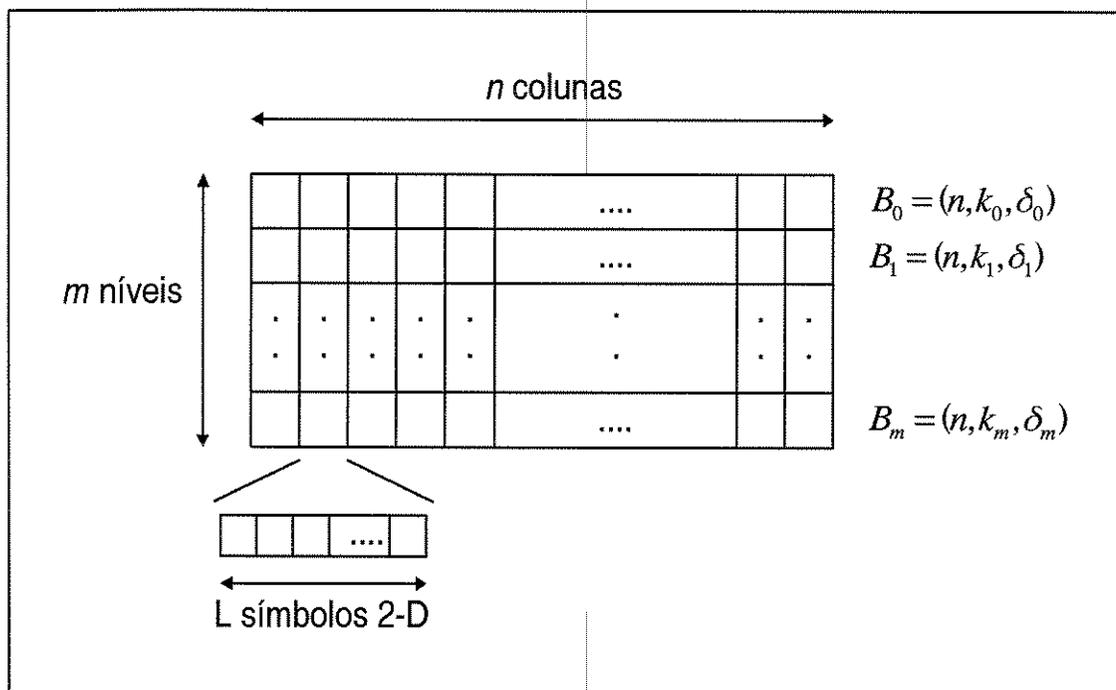


Figura 2.4 Codificador multinível

¹ Chamam-se de vizinhos às palavras código que distam D_{Emin} da palavra transmitida, onde D_{Emin} é a distância Euclidiana mínima do código. Em geral, pode-se assumir como transmitida a palavra toda nula.

2.4 Taxa de codificação

A taxa de codificação de um código BCM é o número de bits de informação por cada símbolo 2D enviado, e vem dada por

$$R[C] = \frac{\log_2 |C|}{L \cdot n} \text{ bits/símbolo}, \quad (2.6)$$

Porém, na literatura recente, prefere-se utilizar a taxa efetiva de codificação do código, que é o número de bits de informação por dimensão,

$$R[C] = \frac{\log_2 |C|}{2 \cdot L \cdot n} \text{ bits/dimensão} \quad (2.7).$$

No desenvolvimento desta tese, porém utilizar-se-á o conceito de taxa de codificação ao invés de taxa efetiva de codificação.

2.5 Distância Euclidiana Quadrática Mínima

A distância Euclidiana quadrática mínima de um código BCM construído por multiníveis é determinada pela expressão

$$d_{min} \geq \min_{i=1..m} \{d_i \cdot \delta_i\} \quad (2.8)$$

onde d_i é a distancia Euclidiana quadrática do gerador correspondente ao nível i

δ_i é a distancia mínima de Hamming do código externo correspondente ao nível i .

2.6 Ganho Assintótico

O ganho de codificação g é dado pela diferença entre o valor da razão E_b/N_o (dB) de um sistema básico de modulação não codificada (sistema convencional) e o valor da razão E_b/N_o (dB) de um dado sistema de modulação codificada usada para se atingir a mesma taxa de erro de bit (BER), isto é

$$g = \left(\frac{E_b}{N_o} \Big|_{nao-codif} \right) - \left(\frac{E_b}{N_o} \Big|_{codif} \right) \text{ [dB]} \quad (2.9)$$

onde E_b é a energia média por bit

$N_o / 2$ é a densidade espectral do ruído aditivo gaussiano.

O ganho assintótico entre sistemas codificados e não codificados é obtido quando E_b/N_o tende a infinito, e pode ser expresso por:

$$g_{\infty} = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \frac{\log M_c}{\log M_{nc}} R_c \frac{D_{Ec}^2}{D_{Enc}^2} \right\} \quad (2.10)$$

onde:

- M_c e M_{nc} são as cardinalidades dos alfabetos da modulação codificada e da não codificada respectivamente,
- R_c é a taxa de codificação,
- D_{Ec}^2 e D_{Enc}^2 são as distâncias Euclidianas mínimas para modulação codificada e não codificada respectivamente.

Exemplo 2.1. Utilizando a partição da constelação 4D-4PSK feita na Figura 2.3, e definindo os seguintes códigos externos $B_0=(4,1,4)$, $B_1=B_2=(4,3,2)$ e $B_3=(4,4,1)$, obtém-se um código com taxa de codificação 11/8 (1.38 bits/símbolo).

A distancia Euclidiana quadrática mínima do código vem dada por :

$$d_{min} \geq \min \{4 \cdot 2.00, 2 \cdot 4.00, 2 \cdot 4.00, 1 \cdot 8.00\} = 8.00$$

Se na entrada do codificador se tivessem as seguintes palavras código :

$$b_0=[1111] , b_1=[1100] , b_2=[1001] , b_3=[1011]$$

formaria-se o seguinte arranjo :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

logo as colunas seriam mapeadas na constelação de sinais. Da Figura 2.3, obtém-se que a seqüência de símbolos 4-PSK a ser transmitida é :

$$V = [3][2][1][2][2][3][2][1]$$

O ganho assintótico sobre a modulação 4-PSK não codificada é 9.18 dB. Porém, devido à menor taxa de codificação o código construído requer um maior largura de faixa do que o código com modulação 4-PSK não codificada.

2.7 Decodificador BCM

O processo de decodificação do sinal recebido, que é o sinal transmitido afetado pelo ruído aditivo gaussiano do canal, pode ser feito de duas maneiras: de maneira ótima ou de maneira subótima.

A maneira ótima, chamada de Decodificação por Máxima Verossimilhança (MV), consiste em encontrar a palavra código mais próxima do sinal recebido. Para isto, precisam-se calcular as distâncias Euclidianas do sinal recebido a todas as palavras códigos pertencentes ao código C.

Foram desenvolvidas muitas técnicas para realizar a decodificação MV da seqüência recebida. Tais técnicas incluem o uso de tabelas [35], transformadas [36], treliças [37] e/ou algoritmos híbridos [38]. Porém dado que a modulação codificada é uma forma de código concatenado, a tarefa de decodificação pode apresentar uma complexidade de implementação muito grande².

Técnicas de decodificação que possuem pior desempenho do que a decodificação por máxima verossimilhança são chamadas de subótimas. Aproveitando a estrutura multinível com a que são formados as palavras código no codificador BCM, Takata et al [39] propõem uma decodificação subótima, onde a decodificação é feita por etapas ou estágios.

2.7.1 Decodificador BCM de máxima verossimilhança

O processo de decodificação consiste em estimar a palavra código v enviada pelo transmissor, a partir do sinal R recebido no receptor. Uma regra de decisão que escolhe a palavra código c^* de C que maximiza a função verossimilhança

$$p(R|c^*) \geq p(R|c); \forall c \neq c^* \quad (2.11)$$

é chamada de regra de decisão por máxima verossimilhança.

² Complexidade medida em número de operações de soma e restas necessárias.

Para um canal com ruído branco aditivo gaussiano, tal regra de decisão é equivalente a escolher a palavra código cujo vetor código³ minimize a distância Euclidiana quadrática

$$DE^2(R, \bar{c}^*) \leq DE^2(R, \bar{c}); \forall c \neq c^* \quad (2.12)$$

2.7.1.2 Probabilidade de Erro do Bloco

Acontece um erro de bloco no sistema quando a palavra decodificada \hat{v} é diferente da palavra código enviada v . A probabilidade de acontecer um erro de bloco (ou probabilidade de erro de bloco) P_{WE} num decodificador por máxima verossimilhança é determinada por

$$P_{WE} = \sum_{i=1}^{|C|} P(c_i) \cdot P(WE|c_i), \quad (2.13)$$

onde $P(WE|c_i)$ é a probabilidade de erro de bloco dado que a palavra código c_i foi enviada e $P(c_i)$ é a probabilidade de transmitir a palavra código c_i .

2.7.2 Decodificador BCM multiestágio

Conhecendo a composição do código a ser transmitido, projeta-se o decodificador multiestágio (ME) com a finalidade de reduzir a complexidade de implementação do decodificador. Devido a que é um decodificador subótimo, o decodificador multiestágio apresenta pior desempenho do que o decodificador MV.

Em cada estágio vai-se achar a palavra código mais próxima da seqüência recebida. A decodificação em cada estágio pode ser feita de maneira ótima ou de maneira subótima.

³ Nesta tese iremos chamar de palavra código ao arranjo formado pelas palavras binárias (ver seção 2.3) enquanto chamaremos de vetor código a seqüência de símbolos PSK a ser enviada.

2.7.2.1 Código do Estágio

Seja C um código de bloco construído com modulação codificada, composto por m códigos binários B_1, B_2, \dots, B_m e seja o estágio h ($1 \leq h \leq m$) projetado para decodificar os códigos componentes binários B_j, \dots, B_{t-1} ($1 \leq j < t \leq m$).

Para a decodificação do estágio deve-se assumir o seguinte :

- Não aconteceu nenhum erro na decodificação dos estágios anteriores.
- Os códigos binários a serem decodificados nos estágios posteriores não tem codificação.

Como resultado de tais suposições, obtém-se que o código a ser decodificado no estágio é diferente do código C utilizado no sistema de transmissão. O código do estágio (C') vem dado por

$$C' = VE_1 \cdot g_1 + VE_2 \cdot g_2 + \dots + VE_{j-1} \cdot g_{j-1} + B_j \cdot g_j + B_{j+1} \cdot g_{j+1} + \dots + B_{t-1} \cdot g_{t-1} + X_t \cdot g_t + \dots + X_m \cdot g_m \quad (2.14)$$

onde : $1 \leq j \leq t \leq m$,

g_1, g_2, \dots, g_m são os geradores da modulação,

$VE_1, VE_2, \dots, VE_{j-1}$ são as palavras código decodificadas nos estágios anteriores,

$B_j, B_{j+1}, \dots, B_{t-1}$ são os códigos componentes a serem decodificados neste estágio,

X_t, X_{t+1}, \dots, X_m são os códigos componentes assumidos sem codificação neste estágio.

Dado que a somatória das palavras decodificadas nos estágios anteriores resulta numa palavra código, a expressão anterior pode também ser escrita como :

$$C' = \bar{v} + B_j \cdot g_j + B_{j+1} \cdot g_{j+1} + \dots + B_{t-1} \cdot g_{t-1} + X_t \cdot g_t + \dots + X_m \cdot g_m \quad (2.15)$$

onde

$$\bar{v} = VE_1 \cdot g_1 + VE_2 \cdot g_2 + \dots + VE_{j-1} \cdot g_{j-1} \quad (2.16)$$

Devido à linearidade do código C' , a estrutura da treliça de decodificação do código C' é independente do valor do vetor código \bar{v} decodificado nos estágios anteriores. Portanto pode-se assumir em geral que a palavra transmitida foi a palavra toda nula, e dado que não aconteceu nenhum erro nos estágios anteriores $\bar{v} = \bar{0}$.

2.7.2.2 Código Interno do Estágio

Como foi visto na seção anterior, no processo de decodificação do estágio, assume-se que os códigos componentes do código C a serem decodificados nos estágios posteriores não apresentam codificação.

Logo, por ser um conjunto de sinais que não contém informação para efeitos de decodificação do estágio, iremos chamar de código interno do estágio ao conjunto de vetores formados da somatória dos geradores correspondentes aos códigos sem codificação.

$$C_i = b_i \cdot g_i + b_{i+1} \cdot g_{i+1} + \dots + b_m \cdot g_m \quad (2.17)$$

onde :

g_i gerador correspondente ao nível i do codificador multinível,

b_i bit do código componente correspondente ao nível i (X_i).

2.7.2.3 Código Externo do Estágio

O processo de decodificação do estágio, consiste em decodificar os bits de informação contidos nas palavras código $b_j b_{j+1} \dots b_{t-1}$. No desenvolvimento desta tese denotaremos por código externo do estágio ao código conformado pela soma dos $t-j$ códigos binários componentes a serem decodificados no estágio.

$$C^e = B_j \cdot g_j + B_{j+1} \cdot g_{j+1} + \dots + B_{t-1} \cdot g_{t-1} \quad (2.18)$$

onde :

g_i gerador correspondente ao nível i do codificador multinível,

B_i código componente correspondente ao nível i do codificador multinível .

2.7.2.4 Decodificação MV do Estágio

Usando os conceitos de código interno e código externo do estágio é possível descrever o procedimento para a decodificação por máxima verossimilhança do estágio.

Seja $\mathbf{k} = \sum_{i=j}^{t-1} k_i$, onde k_i é o número de bits de informação do código componente do nível i . Para cada uma das $2^{\mathbf{k}}$ possíveis palavras do código externo do estágio é formado o arranjo multinível da Figura 2.5

- Para cada uma das n colunas do arranjo é achado o vetor $\bar{s} = \sum_{i=j}^{t-1} b_i \cdot g_i$, onde b_i é o bit do código do nível i e g_i é o gerador correspondente.
- Para cada valor de \bar{s} encontrado, forma-se o conjunto $D = \{\bar{s} + \bar{v} / \bar{v} \in C^i\}$ sendo C^i o código interno do estágio.
- Procura-se dentro de cada conjunto D pelo vetor código mais próximo da seqüência recebida correspondente, guardando-se a métrica respectiva.
- Somam-se as n métricas obtidas, resultando assim a métrica total da palavra código.

No final do processo, escolhe-se a palavra código que apresentou menor distância Euclidiana à seqüência recebida.

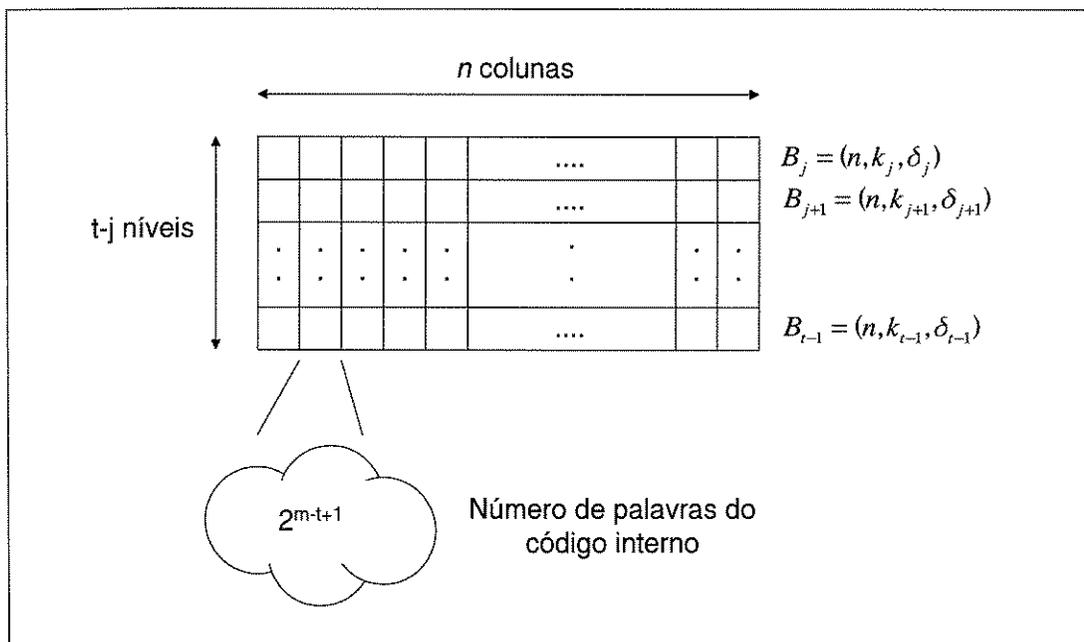


Figura 2.5 Decodificador do Estágio

Uma variante do processo descrito pode reduzir a complexidade de decodificação do estágio e por conseguinte o tempo de processamento. Neste novo procedimento, a decodificação é feita em duas etapas.

- Na primeira etapa, o arranjo da Figura 2.5 é seccionado em n colunas. Para cada coluna, são calculados os 2^{t_j} vetores \bar{s} possíveis. Para cada valor de \bar{s} calculado, forma-se o conjunto D e encontra-se a seqüência de símbolos 2L-D PSK mais próxima da seqüência recebida correspondente. No final, são guardadas as $n \cdot 2^{t-j}$ métricas obtidas.
- Na segunda etapa, são geradas as 2^k possíveis palavras código. Usando os valores obtidos na primeira etapa, é possível encontrar a distância Euclidiana de cada palavra código à seqüência recebida. No final, escolhe-se a palavra código que apresentou menor métrica.

Com este novo procedimento são formados $n \cdot 2^{t-j}$ conjuntos D , ao invés do procedimento original que formava $n \cdot 2^k$ conjuntos D .

2.7.2.5 Decodificador ME

A Figura 2.6 mostra esquematicamente o procedimento geral de decodificação por múltiplos estágios. Como foi visto na seção anterior, a decodificação em cada estágio pode ser feito em duas etapas.

Na primeira etapa (A_i) calculam-se todas as possíveis métricas para cada coluna, enquanto que na segunda etapa (B_i) geram-se todas as palavras código e elege-se a de menor distância Euclidiana.

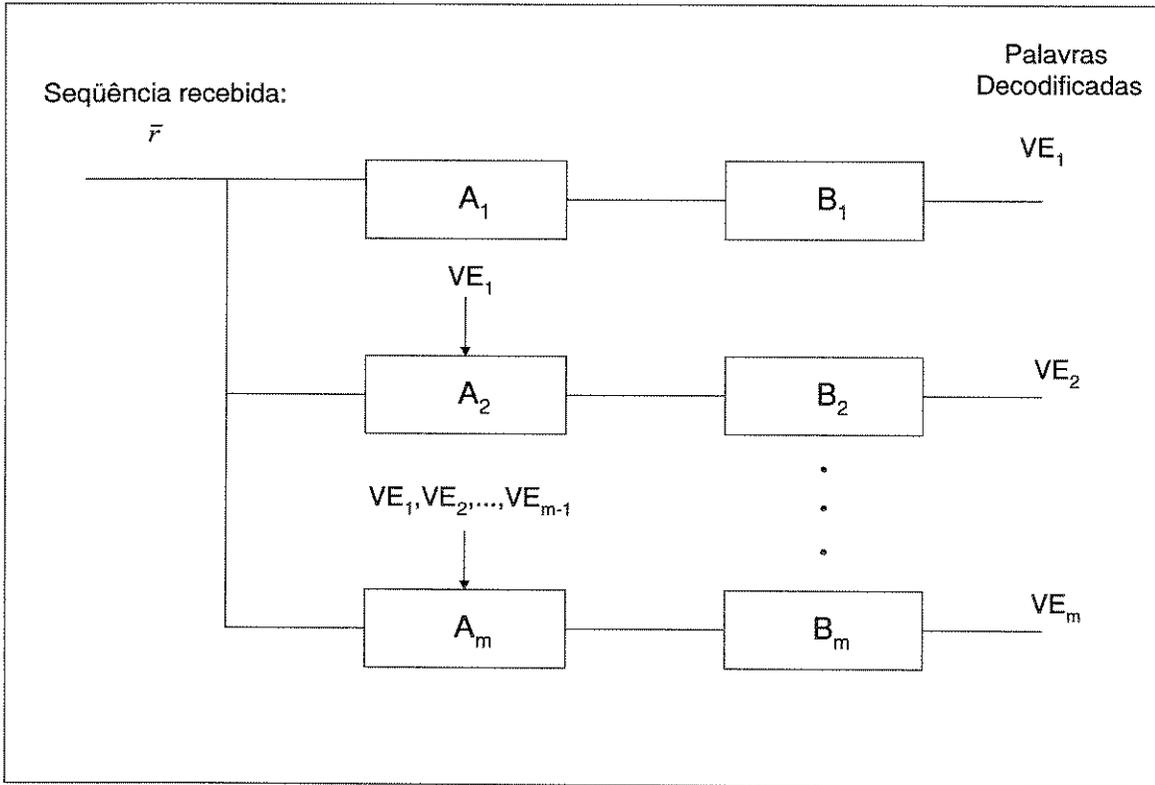


Figura 2.6 Decodificador Multiestágio

2.7.2.6 Probabilidade de Erro de Bloco

Para o caso de um decodificador multiestágio, a probabilidade de erro de bloco pode ser determinada por

$$P_{WE} = P_0(WE) + P_1(WE, G_0) + \dots + P_j(WE, G_0 G_1 \dots G_{j-1}) \quad (2.19)$$

onde

$P_0(WE)$ é a probabilidade de errar no primeiro estágio,

G_i é o evento de decodificação correta no estágio i ,

$P_k(WE, G_i)$ é a probabilidade de errar no estágio k e não ter errado nos estágios anteriores.

Devido a $P_k(WE, G_i)$ poder ser escrita como $P_k(WE|G_i) \cdot P(G_i)$ e que para valores altos da relação sinal - ruído, o valor de $P(G_i)$ tende a 1.0, a probabilidade de erro de bloco do decodificador ME pode ser avaliada por :

$$P_{WE} = P_0(WE) + P_1(WE | G_0) + \dots + P_j(WE | G_0 G_1 \dots G_{j-1}) \quad (2.20)$$

2.8 Invariância Rotacional

Um dos problemas mais críticos que se apresenta na hora de construir receptores para a demodulação de sinais M-PSK é a presença de valores de offset na fase da portadora. Receptores digitais tipicamente utilizam phase-locked-loops (PLL) para gerar uma estimativa da fase do sinal recebido [7]. Tal estimativa é logo realimentada no receptor para demodular e decodificar os sinais seguintes.

Por uma série de razões, a estimativa da fase pode ser não precisa. Por exemplo, offset de fase pode ser resultado do ruído de ambiente do canal ou da deteriorização dos componentes do receptor. Se o offset for prolongado, varias palavras código podem ser perdidas, e o PLL pode ficar numa condição de instabilidade. Como consequência o receptor perde o sincronismo.

Nessa condição de instabilidade, o sincronismo só é recuperado quando a estimativa da fase resulta numa seqüência válida do código. Logo, é desejável que as seqüências de sinais codificadas mostrem tanta simetria a rotações de fase como for possível.

Baldini e Farrell [27], apresentam condições para a construção de códigos BCM com invariância à rotação de fase baseados em constelações de sinais bidimensionais. Portugheis [28] apresenta condições para o caso geral de códigos concatenados e portanto, para a construção de códigos BCM multidimensionais.

2.8.1 Código com Invariância à Rotação de Fase

Um código de bloco possui invariância à rotação de fase (código transparente) de $t \cdot (2\pi / M)$ radianos se e somente se para qualquer vetor código \underline{v} pertencente ao código C ,

$$\underline{v} + \underline{t} \in C \quad (2.21)$$

onde \underline{t} é o vetor código (t, t, \dots, t) , sendo t uma variável de valor desconhecido mas assumida constante durante o período de transmissão de uma palavra código de C .

2.8.2 Esquemas de Modulação Codificada com Invariância a Rotação de Fase de Fase

Se o código de bloco a ser transmitido é um código transparente, é possível a utilização de um esquema de codificação diferencial para eliminar os efeitos de rotação de fase. A Figura 2.7 mostra o esquema do novo sistema de codificação / decodificação, onde são aproveitadas as características do código C a ser utilizado (Portugheis [28]), ser um grupo fechado sob a adição e simultaneamente conter o vetor código $\underline{1} = (1,1,1,\dots,1)$.

Ressalta-se que os elementos de memória a serem utilizados no sistema são de comprimento n (n -D), o qual adiciona um atraso de $n \cdot T_s$ ao tempo de decodificação / demodulação do sistema, sendo T_s o período de transmissão de um símbolo PSK.

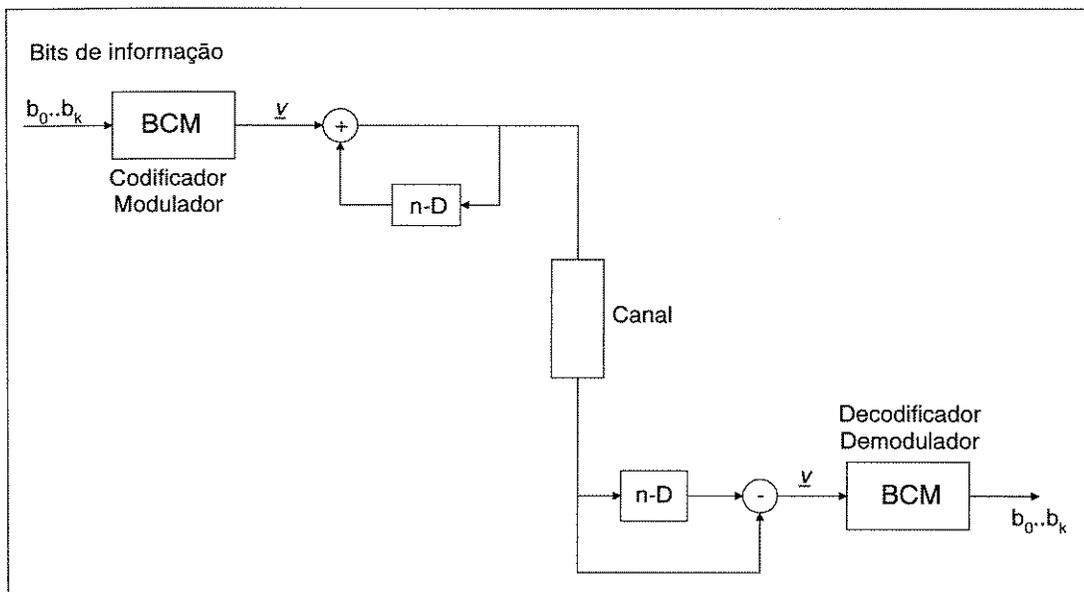


Figura 2.7 Esquema BCM invariante à rotação de fase.

Capítulo 3

Probabilidade de Erro

3.1 Conceitos Básicos

Um dos parâmetros que se usa para caracterizar um sistema de codificação é a estimação da probabilidade de erro no processo de decodificação da sequência recebida para diferentes valores da relação sinal - ruído (RSR) no receptor. Conhecendo-se o desempenho da decodificação, pode-se calcular a potência necessária no transmissor para manter a qualidade da transmissão dentro das especificações requeridas do sistema.

A Modulação Codificada por Blocos (do inglês Block Coded Modulation - BCM) por ser um esquema de transmissão digital que mistura as vantagens do codificador e do modulador; deve ser caracterizada corretamente para poder-se comparar diferentes processos de modulação e codificação de maneira justa.

Além disso, dado que a estrutura de modulação codificada pode ser usada como código interno numa concatenação com um código Reed-Solomon externo, é importante o cálculo de um valor mais exato da probabilidade de erro para valores baixos e médios de

RSR, a fim de que possamos obter uma melhor estimativa do desempenho do sistema concatenado.

Embora o modelo do processo de codificação e decodificação seja simples de simular, o tempo de simulação pode ser inadequado na maioria dos casos. Por isso, na hora de se projetar um código para proteger os bits de informação, prefere-se usar os dados e características do sistema de comunicação para obter-se uma estimativa do desempenho do código. Os limitantes superiores da probabilidade de erro do sistema são os cálculos teóricos obtidos sob o conhecimento do comprimento do código, esquema de modulação, espectro de distâncias Euclidianas dos vetores código, comportamento do canal e do processo de decodificação.

O limitante superior comumente utilizado é o limitante de união, o qual dá uma boa medida da probabilidade de erro para valores altos de RSR. Porém, para valores baixos e médios de RSR o limitante de união é ineficaz, devido principalmente à superposição das regiões de erro para uma mesma palavra enviada. Logo, é necessário a utilização de outros algoritmos a fim de obter uma melhor estimativa da probabilidade de erro.

Neste capítulo são revisados rapidamente tanto o limitante de união assim como os limitantes alternativos, para logo analisar-se as vantagens e desvantagens de cada um. São mostrados dois exemplos simples de aplicação para a comparação dos cálculos obtidos.

Em todos os algoritmos desenvolvidos assume-se que um vetor código composto de n símbolos PSK foi transmitido. Logo, esse vetor pode ser representado por um vetor real \underline{t} de $2n$ componentes. Dado que todos os símbolos PSK têm a mesma energia (assume-se unitária), todos os vetores código pertencentes ao código C têm a mesma energia, pelo que podem ser representado como um grupo de sinais situados na superfície de uma hipersfera de $2n$ dimensões, de raio \sqrt{n} e com centro na origem de coordenadas.

O ruído adicionado pelo canal é do tipo AWGN, o qual pode ser representado como um vetor de $2n$ variáveis aleatórias, denotado por $\underline{z}=(z_1, z_2, \dots, z_{2n})$ onde cada componente z_i é uma variável gaussiana de média nula, variância σ^2 e com função densidade de probabilidade

$$f_z(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-z_i^2/2\sigma^2} \quad (3.1).$$

O sinal recebido no decodificador - demodulador pode ser escrito como a soma vetorial do vetor \underline{t} transmitido e do vetor \underline{z} adicionado pelo canal. As probabilidades de erro a serem calculadas são as probabilidades de que o decodificador decida por uma palavra código diferente da palavra código enviada.

3.2 Limitante de União

Seja λ_{ij} a probabilidade de erro na decodificação assumindo que as únicas palavras código existentes são c_i e c_j pertencentes ao código C . Para um canal de ruído aditivo gaussiano de variância σ^2 por dimensão, λ_{ij} é determinado por :

$$\lambda_{ij} = Q\left(\frac{\delta_{ij}}{2\sigma}\right) \quad (3.2)$$

onde δ_{ij} é a distância Euclidiana entre os vetores código \underline{c}_i e \underline{c}_j , e $Q(\cdot)$ é a função definida por

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2/2} dy \quad (3.3)$$

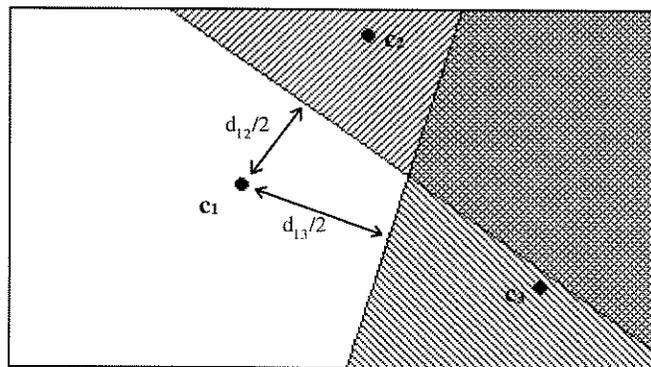


Figura 3.1. Regiões de erro seguindo o limitante de União

A probabilidade de erro vem determinada pela probabilidade que o sinal recebido cair numa das regiões de erro como é mostrado na Figura 3.1. Seja A_k o número de vetores código a uma distância Euclidiana δ_k do vetor código \underline{c}_i . Logo, a probabilidade de

erro na decodificação da palavra recebida dado que a palavra código transmitida foi \underline{c}_i é limitada pela seguinte somatória (a qual é chamada de limitante de união)

$$Pe(\underline{c}_i) \leq \sum_{k=1}^N A_k Q\left(\frac{\delta_k}{2\sigma}\right) \quad (3.4)$$

3.3 Limitante de Distância Mínima

Dado que o vetor código mais próximo do vetor código enviado \underline{c}_i encontra-se a uma distância Euclidiana d_{\min} , o algoritmo do limitante de distância mínima vai assumir que se produz um erro na decodificação se a distância Euclidiana entre o sinal recebido e o sinal enviado for maior que $d_{\min}/2$.

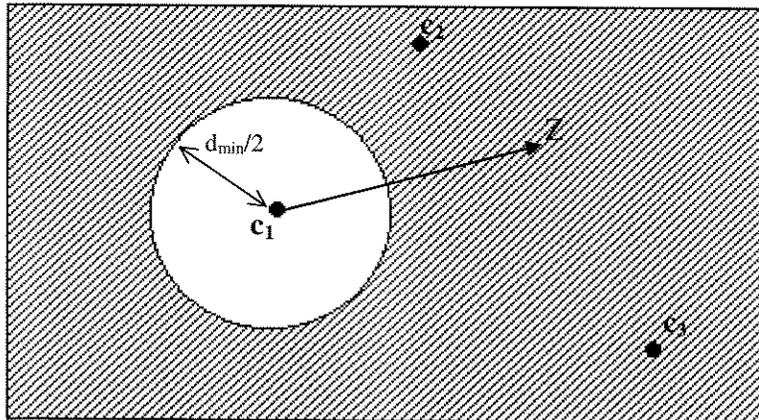


Figura 3.2 . Região de erro seguindo o limitante de Distância Mínima.

Logo, o algoritmo reduz-se a calcular a probabilidade de que a norma do vetor \underline{z} de $2n$ componentes gaussianas com variância σ^2 cada e independentes, seja menor que $d_{\min}/2$. Essa probabilidade é determinada por :

$$Pe(c_i) \leq \bar{\Gamma}(n, d_{\min}^2 / 8\sigma^2), \quad (3.5)$$

onde $\bar{\Gamma}(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (3.6)$

e $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (3.7)$

3.4 Limitante Tangencial (Berlekamp)

Este algoritmo foi apresentado inicialmente por Berlekamp [40] para códigos binários. Posteriormente, Hertzberg e Poltyrev [41] generalizaram o algoritmo para qualquer código de bloco que utilize modulação PSK.

Seja \underline{c}_1 o vetor código transmitido, e z_1 a componente do ruído \underline{z} na direção ao centro da esfera envolvente (ver seção 3.1 Conceitos Básicos); a probabilidade de acontecer um erro E na decodificação pode ser descrita em função da variável γ (ver Figura 3.3) da seguinte maneira:

$$Pe = \Pr(E|z_1 \leq \gamma) \Pr(z_1 \leq \gamma) + \Pr(E|z_1 > \gamma) \Pr(z_1 > \gamma) \quad (3.8)$$

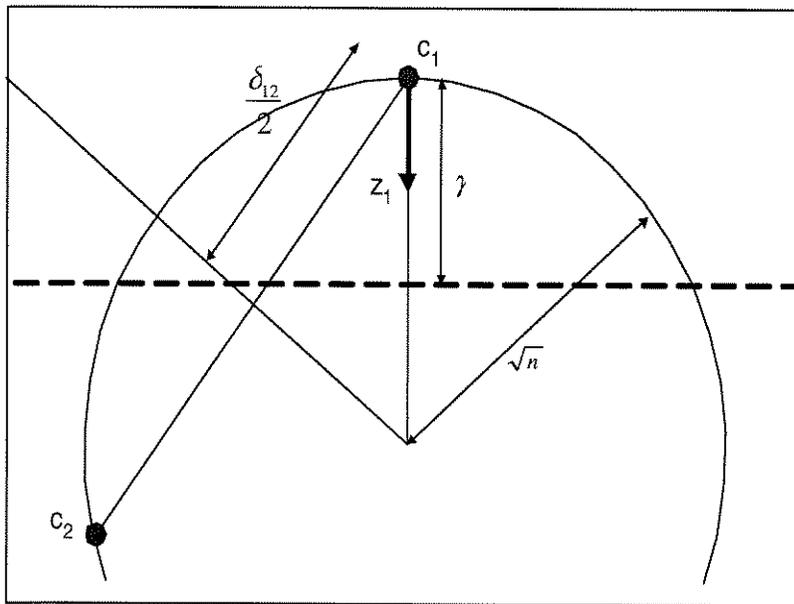


Figura 3.3. Gráfico utilizado para a dedução do limitante de Berlekamp.

Como $\Pr(E|z_1 > \gamma) \leq 1$, a probabilidade de erro é limitada por :

$$Pe \leq \min_{\gamma} \left\{ \Pr(E, z_1 \leq \gamma) + \Pr(z_1 > \gamma) \right\} \quad (3.9)$$

Manipulando a Equação 3.9 , chega-se à seguinte expressão que limita a probabilidade de erro :

$$Pe(c_i) \leq \sum_{k=1}^N A_k Q\left(\frac{\delta_k}{2\sigma}\right) Q\left(\frac{\delta_k^2 / 4 - \sqrt{n}\gamma_o}{\sqrt{n - \delta_k^2 / 4}\sigma}\right) + Q\left(\frac{\gamma_o}{\sigma}\right) \quad (3.10)$$

onde γ_0 é o valor da variável γ que resolve a equação :

$$\sum_{k=1}^N A_k Q \left(\frac{\sqrt{n} - \gamma}{\sqrt{n - \delta_k^2 / 4}} \delta_k / 2 \sigma \right) = 1 \quad (3.11).$$

3.5 Limitante de Esfera Tangencial

Este limitante foi desenvolvido por Poltyrev [42] para códigos binários. Herzberg e Poltyrev [41] ampliaram o limitante para qualquer código cujos vetores tenham a mesma energia.

A probabilidade de erro (E) na decodificação, dado que foi enviado o vetor código \underline{c}_1 (ver Figura 3.4), pode ser escrita da seguinte maneira :

$$P_e = \Pr(E|z \in C_n(\theta))\Pr(z \in C_n(\theta)) + \Pr(E|z \notin C_n(\theta))\Pr(z \notin C_n(\theta)), \quad (3.12)$$

onde $C_n(\theta)$ é um cone 2n-dimensional de ângulo θ e centro na origem de coordenadas, e \underline{z} é o ruído adicionado pelo canal. Dado que $\Pr(E|Z \notin C_n(\theta)) \leq 1$, a probabilidade de erro é limitada por :

$$P_e \leq \min_{\theta} \{ \Pr(E|z \in C_n(\theta))\Pr(z \in C_n(\theta)) + \Pr(z \notin C_n(\theta)) \} \quad (3.13)$$

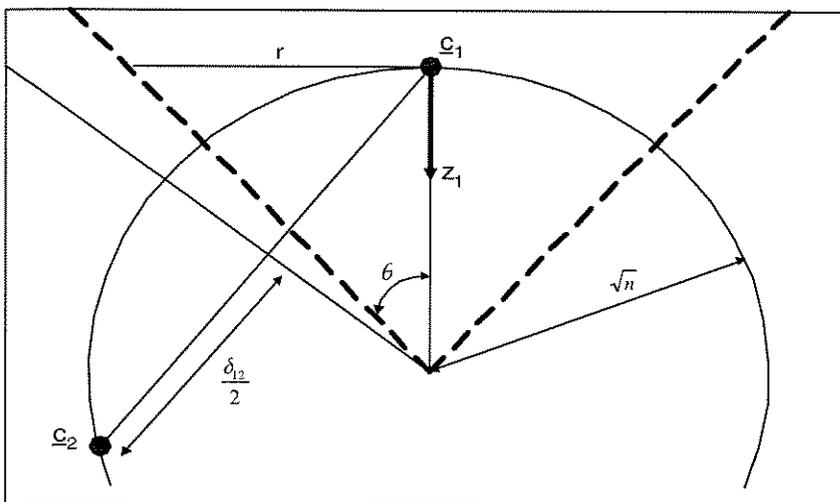


Figura 3.4. Gráfico para a dedução do limitante de esfera tangencial.

Desenvolvendo a Equação 3.13 , chega-se ao seguinte limitante para a probabilidade de erro na decodificação :

$$Pe(c_i) \leq \min_r \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_z(z_1) \cdot \left\{ \sum_{k: \delta_k/2 < \alpha_k} \left[A_k Q(\beta_k(z_1)/\sigma) \cdot \int_0^{r_{z_1}^2 - \beta_k^2(z_1)} f_{y_1}(y_1) dy_1 \right] + \int_{r_{z_1}^2}^{\infty} f_y(y) dy \right\} \cdot dz_1 \right\} \quad (3.14)$$

onde

$f_{y_1}(y_1)$ função densidade de probabilidade Chi-quadrada de ordem $2n-2$,

$f_y(y)$ função densidade de probabilidade Chi-quadrada de ordem $2n-1$,

$f_z(z_1)$ função de densidade de probabilidade normal,

$$r = \sqrt{n} \cdot \tan \theta \quad , \quad r_{z_1} = (\sqrt{n} - z_1) \cdot \tan \theta \quad ,$$

$$\beta_k(z_1) = \frac{\sqrt{n} - z_1}{\sqrt{n - \delta_k^2/4}} \cdot \delta_k/2 \quad \text{e} \quad \alpha_k = r \sqrt{1 - \delta_k^2/4n} \quad .$$

O valor mínimo é atingido para o valor de r que resolve a seguinte equação

$$\sum_{k: \delta_k/2 < \alpha_k} A_k \frac{\Gamma(\frac{2n-1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(n-1)} \int_0^{\theta_k} \text{sen}^{(2n-3)}(u) du = 1 \quad (3.15)$$

onde

$$\theta_k = \cos^{-1} \left[(\delta_k/2r) / \sqrt{1 - \delta_k^2/4n} \right] \quad . \quad (3.16)$$

3.6 Limitante Hughes-Herzberg-Poltyrev (H2P)

Este limitante para códigos esféricos (cujos vetores código tenham a mesma energia) foi inicialmente desenvolvido por Hughes [43], para posteriormente ser melhorado por Herzberg e Poltyrev [44] .

A probabilidade de erro (E) na decodificação, dado que foi enviada o vetor código \mathbf{c}_1 (ver Figura 3.5), pode ser escrita da seguinte maneira :

$$Pe = \Pr(E\|\mathbf{z}\| \leq t) \Pr(\|\mathbf{z}\| \leq t) + \Pr(E\|\mathbf{z}\| > t) \Pr(\|\mathbf{z}\| > t) \quad (3.17)$$

onde t é o raio de uma esfera 2n-dimensional com centro no vetor código enviado e $\|\mathbf{z}\|$ é a norma do ruído \mathbf{z} adicionado pelo canal.

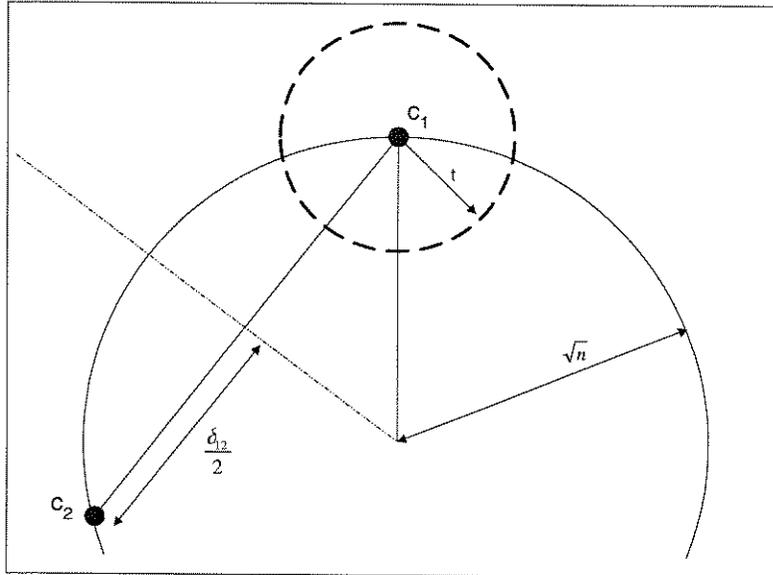


Figura 3.5. Gráfico usado na dedução do limitante H2P

Dado que $\Pr(E\|\mathbf{z}\| > t) \leq 1$, a probabilidade de erro é limitada por

$$Pe(c_i) \leq \min_t \left\{ \sum_{j=1}^{N(t)} A_j P(e_j, \|\mathbf{z}\| \leq t) + \Pr(\|\mathbf{z}\| > t) \right\}, \quad (3.18)$$

onde $N(t)+1$ é o menor valor de j tal que $t \leq \delta_j/2$, e as probabilidades envolvidas podem ser calculadas das seguintes fórmulas

$$\Pr(\|\mathbf{z}\| > t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \Gamma(n, t^2 / 2\sigma^2) \quad (3.19)$$

$$\Pr(e_i, \|\mathbf{z}\| < t) \leq \left\{ 1 - \frac{1}{\Gamma(v)} \Gamma(v, \frac{t^2 - \delta_i^2 / 4}{2\sigma^2}) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\delta_i}{2\sqrt{2}\sigma}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right\} \quad (3.20)$$

onde

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad v = \frac{2n-1}{2}$$

e

$$\operatorname{erfc}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

3.7 Análise dos limitantes superiores

Observa-se um compromisso entre a eficiência e a complexidade do cálculo do limitante superior.

O limitante de distância mínima é o mais simples de todos, precisa somente dos valores da variância do ruído, da dimensão do vetor código transmitido e da distância Euclidiana do vetor código mais próximo ao vetor enviado. Porém seu desempenho é muito pobre quando é comparado com os outros limitantes.

Com o limitante de união, que é o limitante mais usado para cálculo de probabilidades de erro, obtem-se valores muito confiáveis da probabilidade de erro para valores altos da RSR, mas para valores baixos e médios a os resultados não são mais fidedignos. Além disso, para o cálculo do limitante precisa-se da lista inteira do espectro de distâncias Euclidianas do vetor código considerado.

O limitante tangencial de Berlekamp, proporciona um valor mais próximo dos valores obtidos pela simulação, mas ainda apresenta o problema de serem considerados todos os coeficientes para o cálculo do limitante. Já o cálculo do limitante de esfera tangencial permite um truncamento do número de coeficientes. Além disso, Herzberg e Poltyrev [41] mostram que o valor do limitante tangencial de Berlekamp pode ser derivado da fórmula do limitante de esfera tangencial. Portanto, o valor do limitante de esfera tangencial sempre é menor que o valor do limitante tangencial de Berlekamp.

A complexidade do cálculo do limitante de esfera tangencial, é determinada fundamentalmente pelas duas integrais duplas a serem estimadas, as quais contém funções chi-quadrada de ordem $2n$ multiplicadas por funções do tipo erro complementar (erfc).

O limitante H2P apresenta maior número de integrais a serem calculadas, mas com a vantagem de todas serem fáceis de calcular. Do mesmo modo, o limitante H2P permite

o truncamento do número de termos a serem considerados no cálculo do limitante da probabilidade de erro.

3.8 Exemplos

Apresentam-se dois exemplos de sistemas de codificação para a comparação dos limitantes estudados. Em ambos casos, assume-se que o decodificador é de máxima verossimilhança.

3.8.1 Exemplo 1.

Seja C um código de bloco sob modulação 8-PSK definido da seguinte maneira:

$$C = [1] * c_1(24,12,8) + [2] * c_2(24,23,2) + [4] * c_3(24,24,1) \quad (3.21)$$

onde o código c_1 é o código de Golay estendido (24,12,8), c_2 é o código de paridade (24,23,2) e os bits restantes não têm codificação.

O código C define um esquema com BCM bidimensional, de comprimento 24, com taxa de codificação $59/24=2.458$ bits/símbolo. A lista das 14 primeiras distâncias Euclidianas junto com seus coeficientes para a palavra toda nula estão na tabela 3.1. Os valores dos limitantes superiores obtidos são mostrados na Figura 3.6.

A_k	δ_k
1128	4.0000
97152	4.6864
3108864	6.6864
5275648	7.0296
48964608	7.5147
168820736	9.0296
24870912	9.3726
24870912	9.5148
63307776	9.8580
1554432	11.3728
1519386624	11.8580
397934592	12.2010
8388608	14.0592
6366953472	14.2012

Tabela 3.1. Espectro de distâncias do exemplo 1

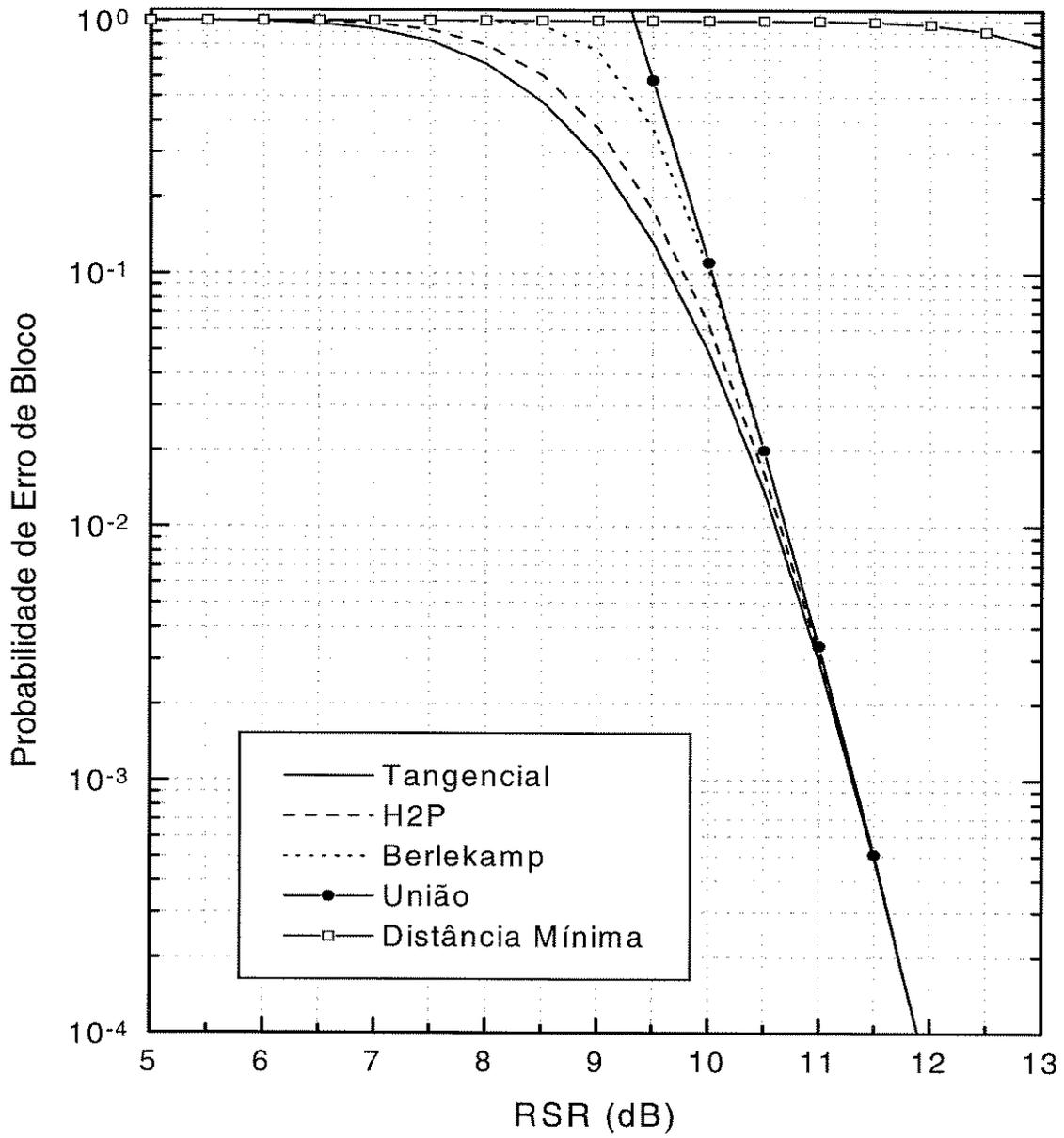


Figura 3.6. Limitantes superiores para o Exemplo 1

3.7.2 Exemplo 2 .

Seja C o código de bloco sob modulação 8-PSK definido por :

$$C = [1]*c1(16,5,8) + [2]*c2(16,15,2) + [4]*c3(16,16,1) \quad (3.22)$$

onde c1 é o código Reed-Muller $RM_{4,1}$ ¹, c2 é o código de paridade (16,15,2) e os bits restantes não têm codificação.

O código C é um código de comprimento 16, com taxa de codificação $36/16=2.25$. Assumindo como enviada a palavra toda nula e mediante o uso do conceito de **Grupos Representativos** (ver Apêndice A) descobre-se que somente é necessária a lista das 7 primeiras distâncias Euclidianas, as quais aparecem na Tabela 3.2. Os valores dos limitantes são mostrados na Figura 3.7.

A_k	δ_k
496	4.0000
3840	4.6864
61440	6.6864
30720	7.515
32768	9.3726
491520	9.5148
524288	12.2012

Tabela 3.2. Distâncias Euclidianas e coeficientes de erro para o código C2

¹ No desenvolvimento desta tese, entendera-se por $RM_{n,r}$ aos códigos binários Reed - Muller de comprimento 2^n e distância mínima de Hamming 2^{n-r} [6].

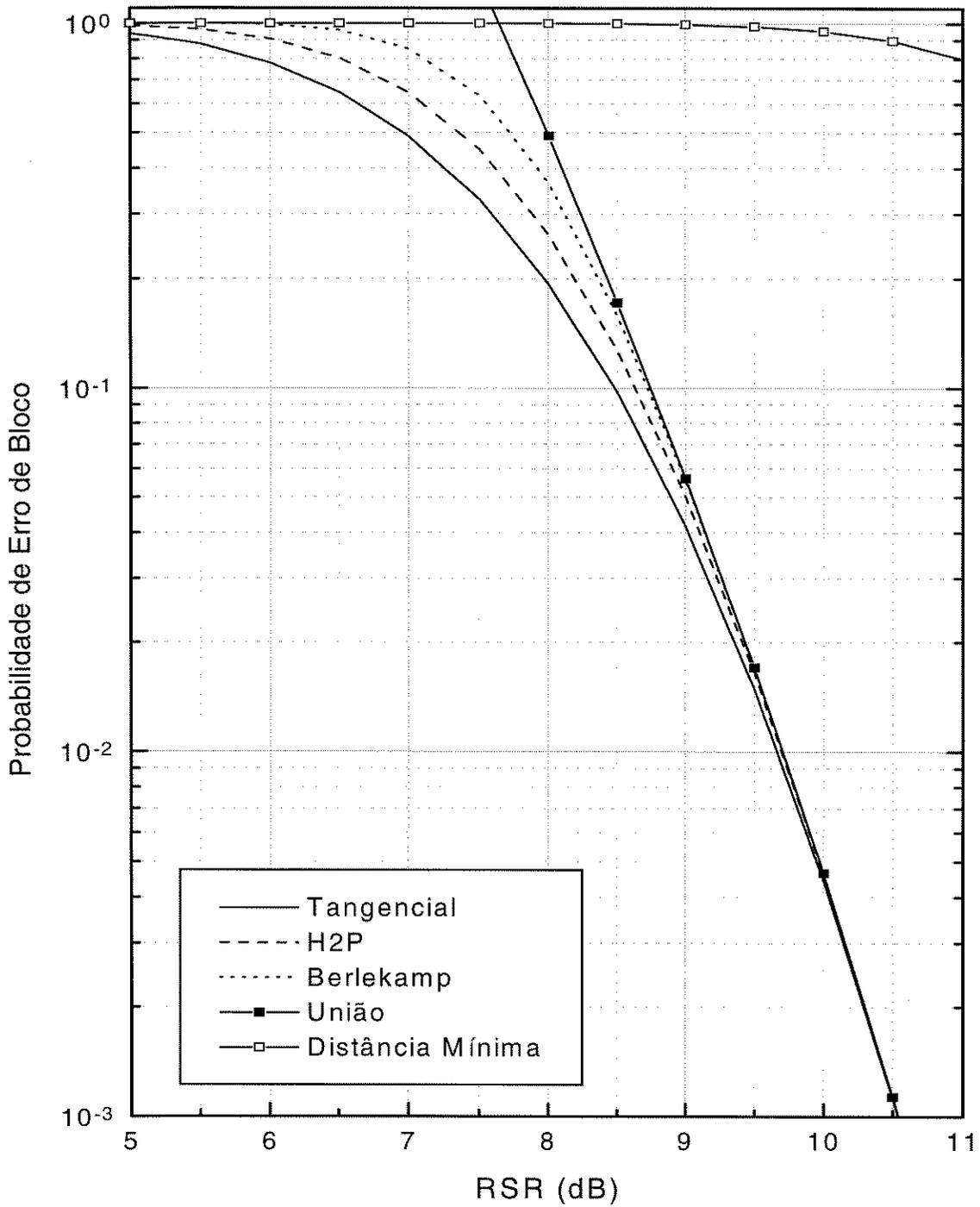


Figura 3.7. Limitantes superiores para o Exemplo 2

3.8 Conclusões

Observou-se um melhor desempenho do limitante de Esfera Tangencial no cálculo da probabilidade de erro do sistema como relação aos limitantes de União, de Distância Mínima e de Berlekamp .

Dado que não é possível fazer uma comparação teórica entre o limitante de Esfera Tangencial e o limitante H2P, devido à não semelhança dos métodos utilizados na hora de deduzi-los, não é possível assegurar que o limitante de Esfera Tangencial sempre é melhor do que o limitante H2P.

No desenvolvimento desta tese, vão-se avaliar sempre ambos limitantes para todos os valores de RSR e escolher-se-á aquele que apresente menor valor.

Capítulo 4

Um exemplo de modulação multidimensional codificada com códigos de bloco.

4.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se o projeto de um esquema de modulação codificada BCM multidimensional. Mostra-se o procedimento para a construção do código assim como a maneira de se projetar o decodificador.

Para a construção do código utilizam-se os geradores multidimensionais apresentados por Pietrobon et al [15]. Isto permite o uso de códigos de relativa simplicidade como códigos externos.

Estuda-se as diferentes possibilidades de realização do decodificador, tendo como parâmetros o desempenho do decodificador frente ao ruído do canal assim como a complexidade do processo de decodificação.

O desempenho será avaliado através das probabilidades de erro na decodificação do bloco de dados para diferentes valores da RSR, enquanto que a

complexidade será medida em termos do número de operações do tipo aditivas a serem realizadas para a decodificação do bloco de dados.

Por último, apresentam-se também os espectros de distâncias para cada um dos decodificadores, com o propósito de analisar o grau de predição dos limitantes superiores de erro com respeito aos valores obtidos das simulações dos decodificadores.

4.2 Projeto do Código

Seguindo o método de construção multinível explicado no Capítulo 2, o bloco codificado vai ser formado da soma dos geradores multidimensionais da partição multiplicados pelas palavras dos códigos externos.

Com o propósito de comparar o sistema de codificação com BCM multidimensional a ser projetado, com sistemas de codificação com BCM bidimensional e com sistemas de codificação convencionais, o código deverá ter taxa de codificação próxima às taxas de códigos já existentes. Neste caso, vai-se propor um código com taxa de codificação de $63/32$ semelhante à taxa de codificação do código bidimensional $RM_{5,1}RM_{5,3}RM_{5,4}$ apresentado em [26] e próxima a taxa de codificação do 4 - PSK sem codificação.

Com a finalidade de utilizar códigos externos simples, para facilitar o processo de decodificação, escolheu-se geradores multidimensionais de comprimento 8 . A lista completa dos geradores de comprimento 8 para modulação 8-PSK é mostrada na Tabela 4.1, incluindo as distâncias Euclidianas quadráticas (D.E.Q.) de cada um à palavra toda nula (peso quadrático).

A eleição dos códigos externos foi feita baseada nos seguintes critérios:

- O comprimento do bloco final tem que ser de 32 símbolos 8-PSK. Dado que são utilizados geradores de comprimento 8, os códigos externos terão que ser de comprimento 4.

	Gerador	D.E.Q.
g0	[00000001]	0.5858
g1	[11000000]	1.1716
g2	[10100000]	1.1716
g3	[10001000]	1.1716
g4	[00000002]	2.0000
g5	[11110000]	2.3432
g6	[11001100]	2.3432
g7	[10101010]	2.3432
g8	[22000000]	4.00
g9	[20200000]	4.00
g10	[20002000]	4.00
g11	[00000004]	4.00
g12	[11111111]	4.6864
g13	[22220000]	8.00
g14	[22002200]	8.00
g15	[20202020]	8.00
g16	[44000000]	8.00
g17	[40400000]	8.00
g18	[40004000]	8.00
g19	[22222222]	16.00
g20	[44440000]	16.00
g21	[44004400]	16.00
g22	[40404040]	16.00
g23	[44444444]	32.00

Tabela 4.1. Geradores de comprimento 8 para modulação 8-PSK

- A distância mínima do código para BCM multidimensional

$$d_{min} \geq \min_{i=1..l} \{d_{hi} \cdot \delta_i\}, \quad (4.1)$$

onde δ_i é a distância Euclidiana do gerador do nível i , d_{hi} é a distância de Hamming do código binário externo do nível i e l é o numero de níveis do código.

- O espectro de distâncias da palavra toda nula, dando-se ênfase ao número de vizinhos.
- O código deverá apresentar invariância à rotações, para utilização de codificação/decodificação diferencial no processo de decodificação.

Considerando esses critérios, projeta-se a seguinte estrutura de bloco codificado, contendo 20 níveis e usando os geradores g4,g5...,g23 da Tabela 4.1.

Geradores	Código Externo
g4..g7	(4,1,4)
g8..g12	(4,3,2)
g13..g23	(4,4,1)

Tabela 4.2. Composição do bloco codificado

Com a finalidade de reduzir o número de vizinhos, às custas de um processo de decodificação mais complexo, utiliza-se a função cross-over desenvolvida em [26] e denotada aqui por $f(\cdot)$, a qual introduz interdependência entre dois códigos externos consecutivos. Logo, a estrutura final do bloco codificado é a seguinte:

Geradores	Código Externo
g4,g5	(4,1,4)
g6	$f(v5)$
g7	$f(v4)$
g8	$v4 = (4,4,1)$
g9	$v5 = (4,4,1)$
g10,g11,g12	(4,3,2)
g13,g14,...,g23	(4,4,1)

Tabela 4.3. Composição final do bloco codificado

O código final tem uma distância Euclidiana quadrática mínima de 8.00, apresenta um ganho assintótico de 5.95 dB com respeito ao 4-PSK (QPSK) não codificado e tem uma taxa de codificação de 1.968 bits/símbolo. Esta taxa é menor do que a taxa do QPSK (2.00 bits/símbolo) não codificado, o qual vai produzir um pequeno incremento da largura da faixa de transmissão.

4.4 Projeto do Decodificador

Analisa-se a implementação do decodificador para o código projetado utilizando como parâmetros basicamente o nível de complexidade do processo de decodificação, e o desempenho do decodificador sob a presença de ruído aditivo gaussiano no canal de transmissão.

Como foi visto no capítulo 2, a decodificação do bloco codificado pode ser feita de maneira ótima (decodificação por MV) ou de maneira sub-ótima. Uma das

formas sub-ótimas de realizar a decodificação é fazendo-a em múltiplos estágios (decodificação por ME), aproveitando a estrutura multinível do bloco codificado.

As duas alternativas serão estudadas, supondo a utilização de decisão suave na decodificação de cada um dos códigos externos. Não serão analisados os casos de decodificação dos códigos externos usando decisão abrupta, decisão por distância mínima, ou decisão por distância limitada [39].

4.4.1 Decodificador por Máxima Verosimilhança

Utilizando um decodificador por máxima verosimilhança (que poderia ser visto como um decodificador multiestágio composto por um estágio só) obter-se-ia o seguinte espectro de distâncias (10 primeiras componentes) para a palavra toda nula.

Coefficientes	Distância Euclidiana Quadrática
4 272	8.0000
12 288	8.6864
59 136	9.3728
98 304	11.5148
306 432	12.0000
888 832	12.2012
2 334 720	12.6864
29 200 384	13.3728
786 432	14.0592
344 064	14.3432

Tabela 4.4. Espectro de distâncias do decodificador por MV

Devido ao número de níveis (20) e ao uso de funções “cross-over” na construção do código, é necessário o uso de algoritmos complexos para determinar a estrutura da treliça de decodificação. Como consequência disso, o cálculo do número de operações do tipo aditivas necessárias para a decodificação da sequência recebida é difícil de estimar.

Contudo, os coeficientes da Tabela 4.4 serão utilizados na hora de comparar o desempenho do decodificador MV com o desempenho do decodificador ME (ver seção 4.5).

4.4.2 Decodificador Multiestágio

Das 512¹ possíveis maneiras de fazer a decodificação multiestágio, escolheu-se uma das que apresentou melhores coeficientes na hora de calcular o espectro de distâncias (assumindo como transmitida a palavra toda nula) sem deixar de considerar a complexidade nos decodificadores.

A composição do decodificador multiestágio é a seguinte:

Estágio 1 : códigos 0,1,...,5

Estágio 2 : código 6

Estágio 3 : código 7

Estágio 4 : códigos 8,9,...,19

4.4.2.1 Agrupamentos

Como foi visto no Capítulo 2 (ver seção 2.7.2.1) no processo de decodificação multiestágio, o código a ser decodificado em um estágio é conformado pelas palavras código decodificadas nos estágios anteriores, pelos códigos a serem decodificados no estágio e pelos códigos a serem decodificados nos estágios posteriores.

Devido a que estes últimos são assumidos não codificados, os geradores multidimensionais associados a esses códigos formam uma constelação multidimensional de sinais PSK, onde serão buscadas as sequências de símbolos mais próximas da sequência recebida.

No desenvolvimento desta tese, denomina-se código externo ao código conformado pelos códigos binários componentes a serem decodificados no estágio, enquanto denominaremos de código interno do estágio ao código formado pelos geradores cujos códigos binários correspondentes não serão decodificados neste estágio.

¹ O número de possíveis combinações vem dado por 2^n onde n é o número de códigos externos que apresentam codificação não nula.

Exemplo 4.1. Seja C o código com modulação QPSK 4-dimensional codificada que apresenta o seguinte esquema²

$$C = [11]*C_1(4,1,4) +_4 [20]*C_2(4,3,2) +_4 [22]*C_3(4,4,1)$$

e seja projetado o seguinte decodificador multiestágio para a decodificação da sequência recebida.

Estágio 1 : Código 1

Estágio 2 : Códigos 2 e 3.

No primeiro estágio o código a ser decodificado é dado por

$$C1 = [11]*C_1(4,1,4) +_4 [20]*C_2(4,4,1) +_4 [22]*C_3(4,4,1)$$

ou equivalentemente :

$$\text{Código externo do 1º estágio } C_{1e} : [11]* C_1(4,1,4)$$

$$\text{Código interno do 1º estágio } C_{1i} : [20]*b_2 +_4 [22]*b_3$$

onde b_2 e b_3 são os bits das palavras código de C_2 e C_3 .

A decodificação do estágio implica a decodificação da treliça do código externo do estágio, onde cada ramo de cada seção da treliça representa um coset do código interno. Devido ao código estar definido sobre um alfabeto Z_m , todas as treliças de decodificação dos cosets do código interno terão a mesma estrutura que a do código interno original, por isso todas apresentam a mesma complexidade de decodificação.

Devido à presença de múltiplos geradores na construção do código com modulação multidimensional, a treliça do código interno pode resultar numa treliça simples de implementar ou de pouca complexidade.

Na Tabela 4.5 mostram-se os códigos internos a serem utilizados neste Capítulo formados a partir de agrupamentos dos geradores multidimensionais da Tabela 4.1.

Gerador	C1	C2	C3	C4
[22220000]			X	X
[22002200]			X	X
[20202020]			X	X
[22222222]			X	X
[00000004]	X		X	
[44000000]	X	X	X	X
[40400000]	X	X	X	X
[40004000]	X	X	X	X
[44440000]	X	X	X	X
[44004400]	X	X	X	X
[40404040]	X	X	X	X
[44444444]	X	X	X	X

Tabela 4.5. Agrupamentos formados com geradores multidimensionais

² Nos casos em que for utilizada, a expressão $+_M$ implica soma módulo M .

onde

- C1 : [4]*(8,8,1)
- C2 : [4]*(8,7,2)
- C3 : [2]*RM3,1 +₄ [4]*(8,8,1)
- C4 : [2]*RM3,1 +₄ [4]*(8,7,2).

Tanto as estruturas das treliças como também os cálculos das complexidades do processo de decodificação dos distintos agrupamentos da Tabela 4.5 são mostrados no Apêndice B.

Exemplo 4.1 (continuação). Utilizando um agrupamento similar ao caso C1 da Tabela 4.5, é possível observar que o código interno do primeiro estágio (C_{1i}) é equivalente ao código [2]*(2,2,1). Logo, a treliça de decodificação do código interno pode ser representada por 4 palavras símbolo em paralelo [00],[02],[20],[22].

A treliça de decodificação do estágio 1 é mostrada na Figura 4.1. Neste caso, para cada uma das 4 seções da treliça é preciso a decodificação de duas vezes o código interno (C_{1i} e $C_{1i} + [11]$) para encontrar a palavra código do código externo transmitida.

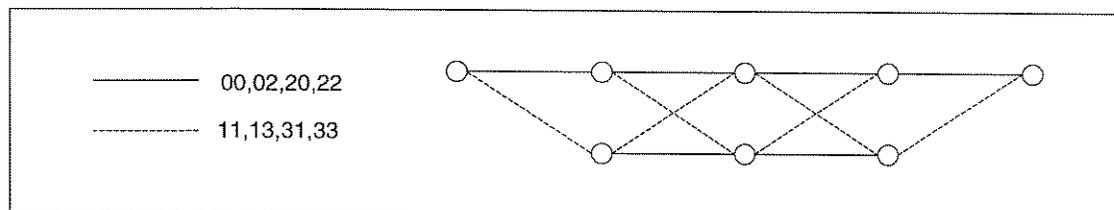


Figura 4.1 Treliça de decodificação do Exemplo 4.1

4.4.2.2 Estágio 1

Neste estágio vão-se decodificar as seis primeiras palavras código do código C definido na Tabela 4.3. Dado que se assume que o resto das palavras (v_6, v_7, \dots, v_{19}) não tem codificação, o código C_1 resultante a ser decodificado no primeiro estágio é dado por

$$\begin{aligned}
 C_1 = & [00000002] * v_0 +_8 [11110000] * v_1 +_8 [11001100] * v_2 +_8 [10101010] * v_3 \\
 & +_8 [22000000] * v_4 +_8 [20200000] * v_5 +_8 [20002000] * v_6 +_8 [00000004] * v_7 \\
 & +_8 [11111111] * v_8 +_8 [22220000] * v_9 +_8 [22002200] * v_{10} +_8 [20202020] * v_{11} \\
 & +_8 [22222222] * v_{12} +_8 [44000000] * v_{13} +_8 [40400000] * v_{14} +_8 [40004000] * v_{15} \\
 & +_8 [44440000] * v_{16} +_8 [44004400] * v_{17} +_8 [40404040] * v_{18} +_8 [44444444] * v_{19}
 \end{aligned}$$

onde :

$$v_0, v_1 \in (4,1,4)$$

$$v_2 \in f(v_5)$$

$$v_3 \in f(v_4)$$

$$v_4, v_5, \dots, v_{19} \in (4,4,1)$$

Utilizando a notação descrita na seção 4.2.2.1, o código C_1 pode ser descrito por :

$$C_{1e} = [00000002] * V_0 +_8 [11110000] * V_1 +_8 [11001100] * V_2 +_8 [10101010] * V_3 \\ +_8 [22000000] * V_4 +_8 [20200000] * V_5$$

$$C_{1i} = [2] v(RM_{3,1}) +_8 [4] v(8,8,1) +_8 [20002000] v(1,1,1) +_8 [11111111] v(1,1,1)$$

A treliça do código C_1 equivalente é mostrada na Figura 4.2. As treliças 1.A e 1.B correspondem ao código interno C_{1i} , enquanto as treliças 1.C e 1.D correspondem ao código externo (C_{1e}) formado pelas palavras dos códigos a serem decodificadas neste estágio.

Cada ramo diferente de cada uma das seções da treliça do código externo (1.C + 1.D) requer a decodificação do seu respectivo código interno. A obtenção do código interno de cada ramo é mediante a soma do coset do ramo com cada uma das palavras que pertencem ao código interno da palavra toda nula. Isto facilita o processo de decodificação pois todas as treliças dos códigos internos apresentam estruturas idênticas.

O coset de cada ramo é a combinação dos geradores multimensionais dos códigos externos. Neste caso, tem-se 2^6 (o código externo é composto por seis códigos binários) cosets por cada seção da treliça do código externo, resultando num total de 256 quando é multiplicado pelo número de seções da treliça (4).

O código interno do estágio 1 é conformado pelo agrupamento C3 da Tabela 4.5 junto com três cosets ([20002000], [11111111], [31113111]), todos em paralelo. Como a decodificação do coset [20002000] pode ser derivada da decodificação do coset [00000000], a complexidade da decodificação do código interno (1.A + 1.B) resulta menor que 4 vezes a decodificação da treliça 1.A. Procedimento similar se utilizará na decodificação da treliça 1.D, onde a complexidade de decodificação dos

cosets pode ser reduzida usando parte dos cálculos realizados no coset da palavra toda nula.

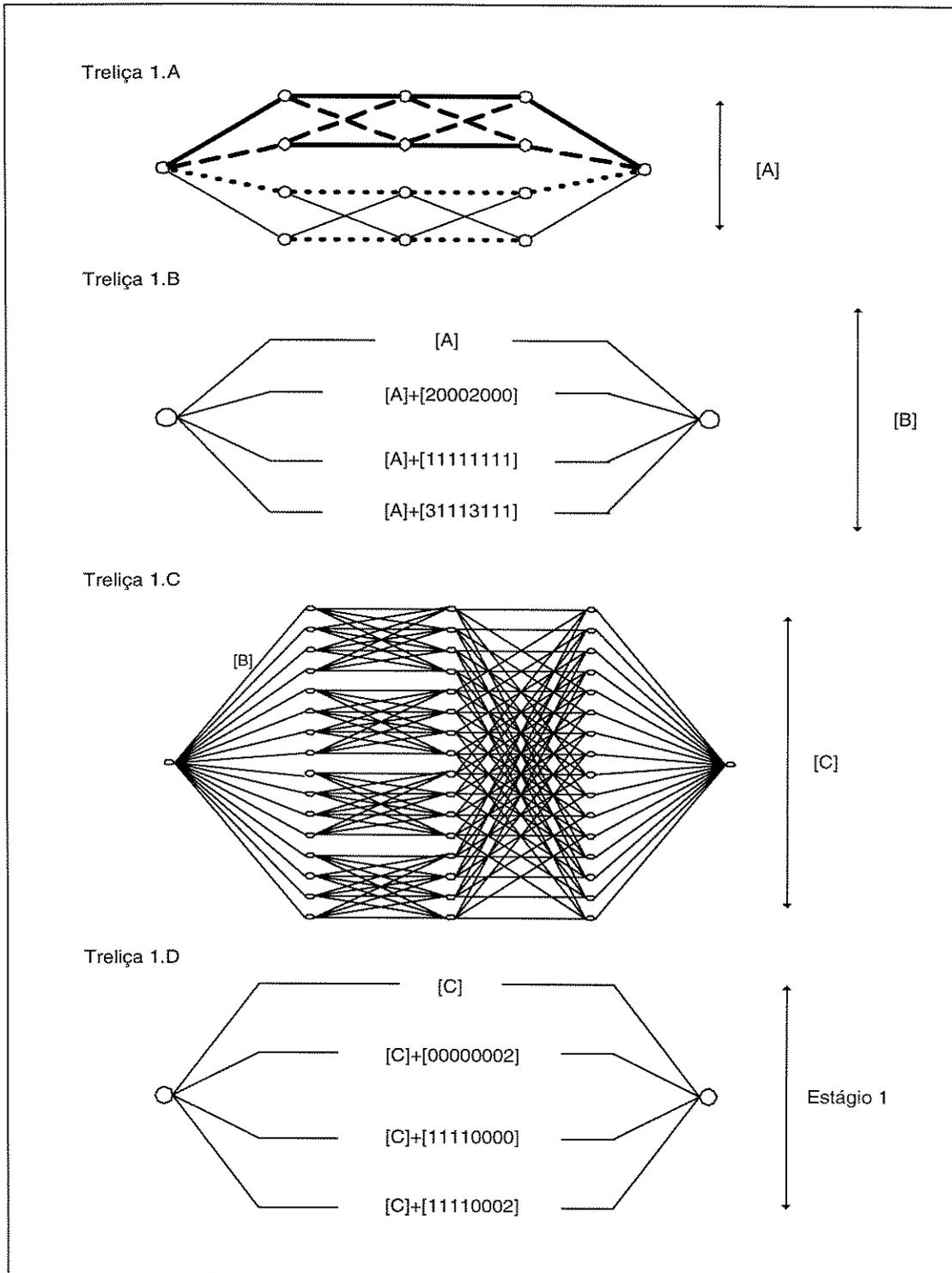


Figura 4.2. Treliça do primeiro estágio.

O cálculo da complexidade da treliça da Figura 4.1 pode ser feito da seguinte maneira:

Treliça 1.A

Apêndice B. caso VI

Total operações aditivas	24
--------------------------	----

Treliça 1.B

Treliça [A]	24
-------------	----

Coset [20002000]	19
------------------	----

Coset [11111111]	24
------------------	----

Coset [31113111]	19
------------------	----

3 comparações	3
---------------	---

Total operações aditivas	89
--------------------------	----

Treliças 1.C + 1.D

Coset [C] : 64 treliças 1.B	5696
-----------------------------	------

Coset [00000002] :	4800
--------------------	------

Coset [11110000] :	5696
--------------------	------

Coset [11110002] :	4800
--------------------	------

4 treliças com cross-over duplo

(apêndice B. caso V)	1020
------------------------	------

3 comparações	3
---------------	---

Estágio 1

Total operações aditivas	22015
--------------------------	-------

4.4.2.3 Estágio 2

Neste estágio vai-se decodificar a palavra v_6 do código C . Dado que se assume que o resto das palavras (v_7, v_8, \dots, v_{19}) não tem codificação, o código C_2 resultante a ser decodificado no segundo estágio é dado por:

$$C_2 = VE1 +_8 [20002000] * v_6 +_8 [00000004] * v_7 +_8 [11111111] * v_8 +_8 [22220000] * v_9 \\ +_8 [22002200] * v_{10} +_8 [20202020] * v_{11} +_8 [22222222] * v_{12} +_8 [44000000] * v_{13} \\ +_8 [40400000] * v_{14} +_8 [40004000] * v_{15} +_8 [44440000] * v_{16} +_8 [44004400] * v_{17} \\ +_8 [40404040] * v_{18} +_8 [44444444] * v_{19}$$

onde :

$VE1$ palavra decodificada no primeiro estágio

$v_6 \in (4,3,2)$

$v_7 \dots v_{19} \in (4,4,1)$

De forma geral, é possível assumir que no primeiro estágio foi decodificada a palavra toda nula, devido a que a estrutura da treliça de decodificação do estágio não depende das palavras decodificadas nos estágios anteriores (somente mudam os valores dos cosets). Logo, o código C_2 a ser decodificado pode ser descrito como

$$C_{2e} = [20002000] * v_6$$

$$C_{2i} = [2] v(RM_{3,1}) +_8 [4] v(8,8,1) +_8 [11111111] v(1,1,1)$$

A treliça do código C_2 equivalente é mostrada na Figura 4.3. As treliças 2.A e 2.B correspondem ao código interno C_{2i} , enquanto a treliça 2.C corresponde ao código externo C_{2e} que é um código de paridade.

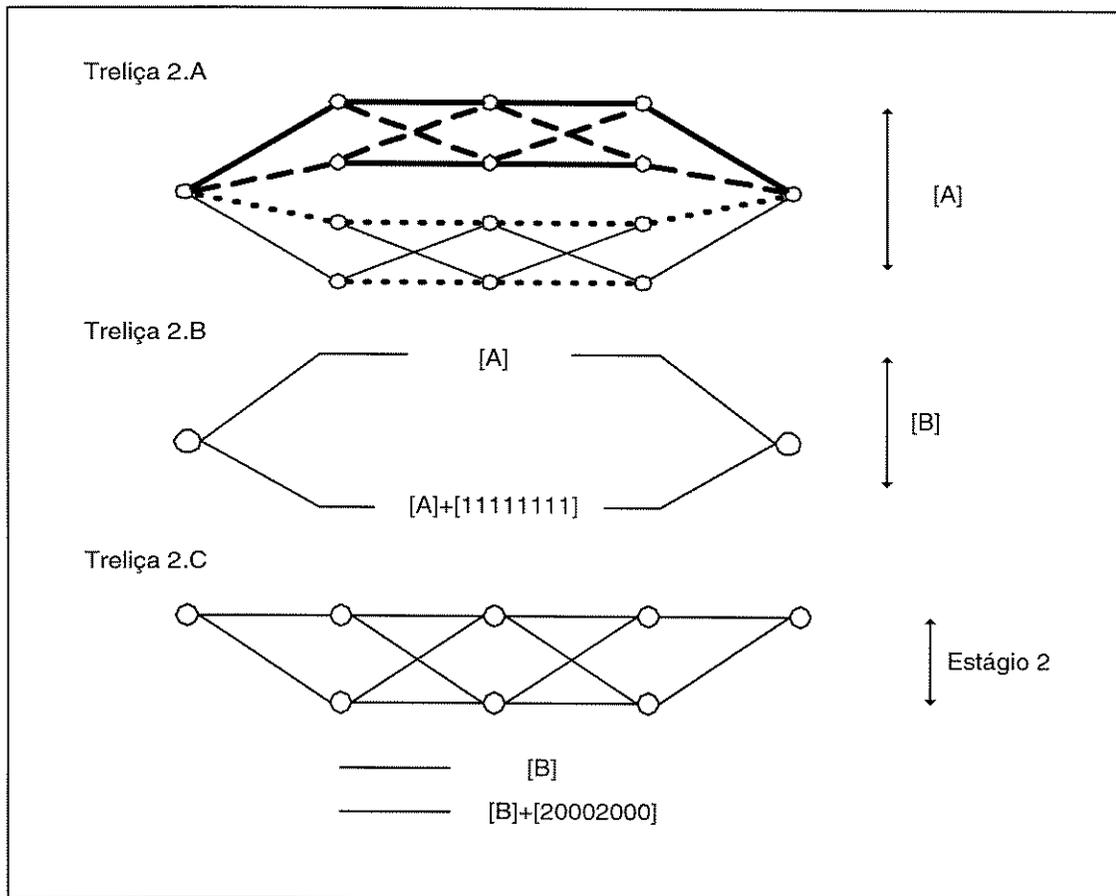


Figura 4.3. Treliça do segundo estágio

Devido ao código interno neste estágio ser similar ao código interno do primeiro estágio, é possível utilizar os resultados já obtidos na decodificação do primeiro estágio para a decodificação do segundo. Assim obtém-se uma redução na complexidade da treliça às custas de um aumento na quantidade de memória requerida.

O cálculo da complexidade da treliça da Figura 4.2 pode ser feito da seguinte maneira:

Treliça 2.A

Decodificada no estágio 1	
total operações aditivas	0

Treliça 2.B

2 treliças 2.A	0
1 comparação	1
total operações aditivas	1

Treliça 2.C

8 treliças 2.B	8
Código de Paridade (n=4) (apêndice B. caso II)	7

Estágio 2

Total operações aditivas	15
--------------------------	----

4.4.2.4 Estágio 3

Neste estágio vai-se decodificar a palavra v_7 do código C . Dado que se assume que o resto das palavras do código C ($v_8..v_{19}$) não tem codificação, o código C_3 resultante a ser decodificado no terceiro estágio é dado por:

$$C_3 = VE1 +_8 VE2 +_8 [00000004] * v_7 +_8 [11111111] * v_8 +_8 [22220000] * v_9 \\ +_8 [22002200] * v_{10} +_8 [20202020] * v_{11} +_8 [22222222] * v_{12} +_8 [44000000] * v_{13} \\ +_8 [40400000] * v_{14} +_8 [40004000] * v_{15} +_8 [44440000] * v_{16} +_8 [44004400] * v_{17} \\ +_8 [40404040] * v_{18} +_8 [44444444] * v_{19}$$

onde :

VE1 palavra decodificada no primeiro estágio

VE2 palavra decodificada no segundo estágio

$v_7 \in (4,3,2)$

$v_8 .. v_{19} \in (4,4,1)$

Assumindo que nos dois estágios anteriores foram decodificadas as palavras código toda nulas, o código C_3 a ser decodificado seria equivalente a :

$$C_{3e} = [00000004] * V_7$$

$$C_{3i} = [2] v(RM_{3,1}) +_8 [4] v(8,7,2) +_8 [11111111] v(1,1,1)$$

A treliça do código C_3 equivalente é mostrada na Figura 4.4. As treliças 3.A e 3.B correspondem ao código interno C_{3i} , enquanto a treliça 3.C corresponde ao código externo C_{3e} que é determinado pela palavra v_7 .

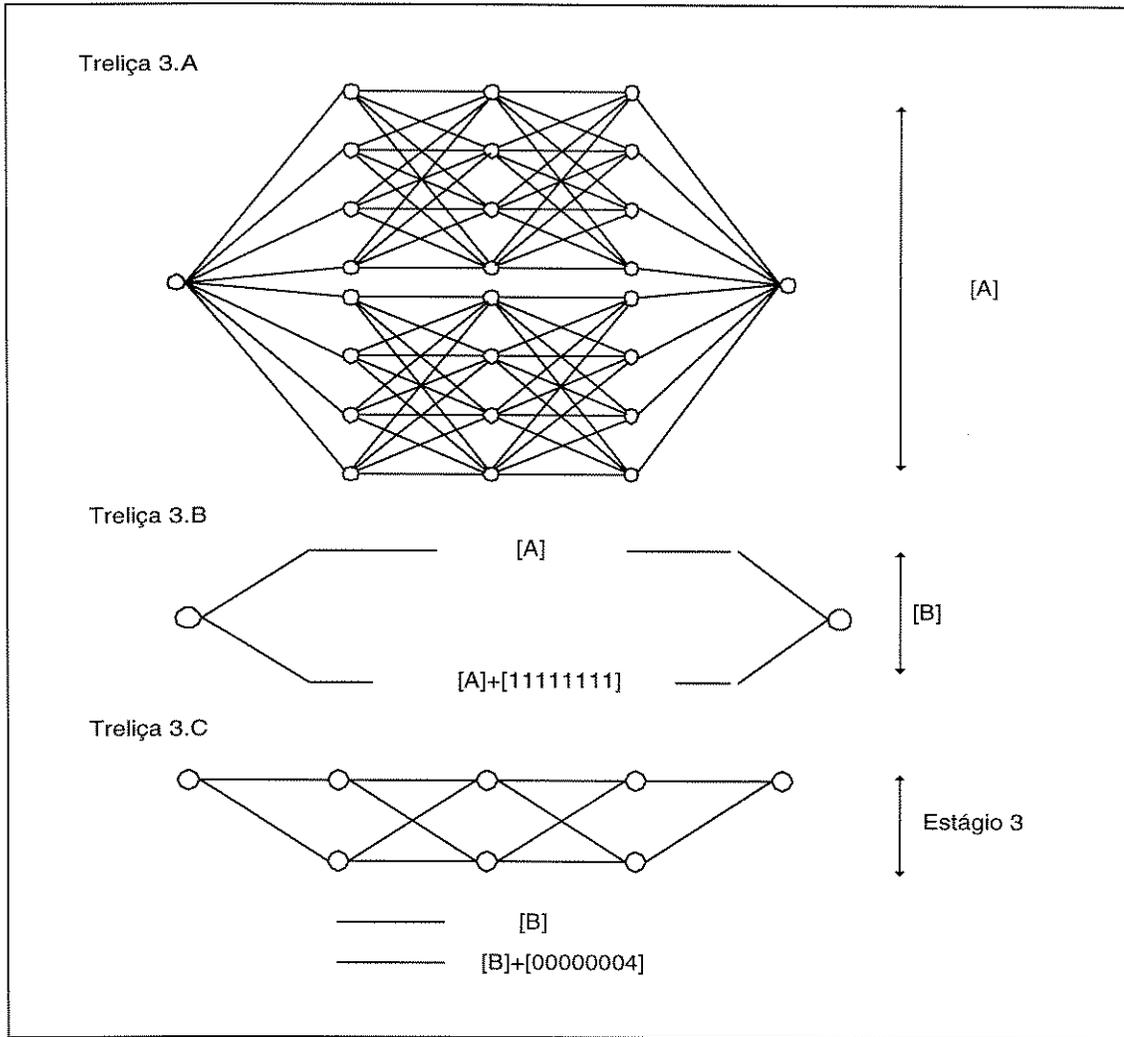


Figura 4.4. Treliça do terceiro estágio

No cálculo da complexidade da treliça do terceiro estágio, novamente aproveitou-se o fato de que o coset muda só numa posição comparado com a palavra toda nula para reduzir o número de operações do tipo aditivas a serem efetuadas. O cálculo da complexidade pode ser feito da seguinte maneira:

Treliça 3.A

Apêndice B. caso VII

total operações aditivas	151
--------------------------	-----

Treliça 3.B

2 treliças 3.A	302
1 comparação	1
total operações aditivas	303

Treliça 3.C

4 treliças [B]	1212
4 cosets [B]+[00000004]	220
Código de Paridade (n=4)	
(apêndice B. caso II)	7

Estágio 3

Total operações aditivas	1439
--------------------------	------

4.4.2.5 Estágio 4

No último estágio, o código C_4 a ser decodificado é dado por :

$$C_4 = VE1 +_8 VE2 +_8 VE3 +_8 [11111111] * v8 +_8 [22220000] * v9 +_8 [22002200] * v10 +_8 [20202020] * v11 +_8 [22222222] * v12 +_8 [44000000] * v13 +_8 [40400000] * v14 +_8 [40004000] * v15 +_8 [44440000] * v16 +_8 [44004400] * v17 +_8 [40404040] * v18 +_8 [44444444] * v19$$

onde :

VE1 palavra decodificada no primeiro estágio

VE2 palavra decodificada no segundo estágio

VE3 palavra decodificada no terceiro estágio

$v8 \in (4,3,2)$

$v9 .. v19 \in (4,4,1)$

Assumindo que nos três primeiros estágios foram decodificadas as palavras código toda nulas, o código C_4 a ser decodificado é equivalente a :

$$C_{4e} = [11111111] * V8$$

$$C_{4i} = [2] v(RM_{3,1}) +_8 [4] v(8,7,2)$$

A treliça do código C_4 equivalente é mostrada na Figura 4.5. As treliças 4.A e 4.B correspondem ao código interno C_{4i} , enquanto a treliça 4.C corresponde ao código externo C_{4e} que é determinado pela palavra $v8$.

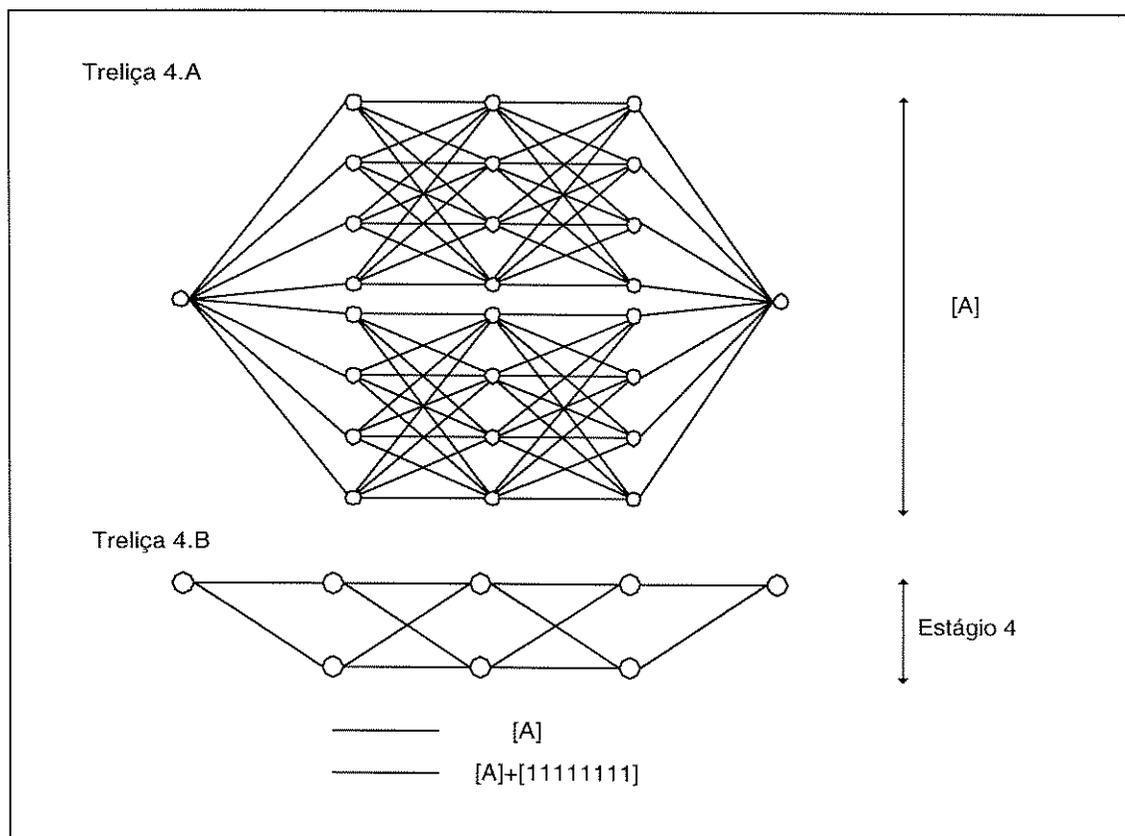


Figura 4.5. Treliça do quarto estágio

Novamente, podem-se usar resultados já obtidos na decodificação do terceiro estágio para a resolução da treliça do quarto estágio. O cálculo da complexidade pode ser feito da seguinte maneira:

Treliça 4.A

Calculada no terceiro estágio
 total operações aditivas 0

Treliça 4.B

8 treliças 4.A 0
 Código de Paridade (n=4)
 (apêndice B. caso II) 7

Estágio 4

Total operações aditivas 7

4.4.2.6 Decodificação Multiestágio

Na Tabela 4.6 mostram-se os dez primeiros coeficientes do espectro de distâncias de cada um dos estágios assim como do decodificador multiestágio final para a palavra toda nula. Esses coeficientes serão utilizados na hora de calcular os limitantes superiores das probabilidades de erro de cada estágio e do decodificador ME completo.

A complexidade do decodificador, é dada pela soma das complexidades de todos os estágios. Nesse caso, a complexidade final é de 23476 operações do tipo aditivas.

D.E.Q.	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio 4	Total M.E.
8.0000	10 240	1 536	384	560	12 720
8.6864	86 016	3 072	0	0	89 088
9.3728	272 384	1 536	0	1 536	275 456
10.6864	524 288	0	0	0	524 288
11.3728	5 767 168	0	0	0	5 767 168
11.5148	688 128	24 576	12 288	0	1 249 280
12.0000	1 040 384	67 584	10 752	1 792	1 120 512
12.2012	4 358 144	24 576	0	0	4 382 720
12.6864	15 163 392	141 312	12 288	0	15 316 992
13.3728	141 000 704	122 880	0	0	141 123 584

Tabela 4.6. Coeficientes do decodificador multiestágio

4.5 Resultados

As Figuras 4.6 e 4.7 mostram o desempenho dos diferentes estágios. Apresentam-se as simulações dos estágios assim como as previsões obtidas baseadas nos espectros de distâncias. Observa-se que a probabilidade de erro do sistema é basicamente a probabilidade de erro que obtém-se no primeiro estágio.

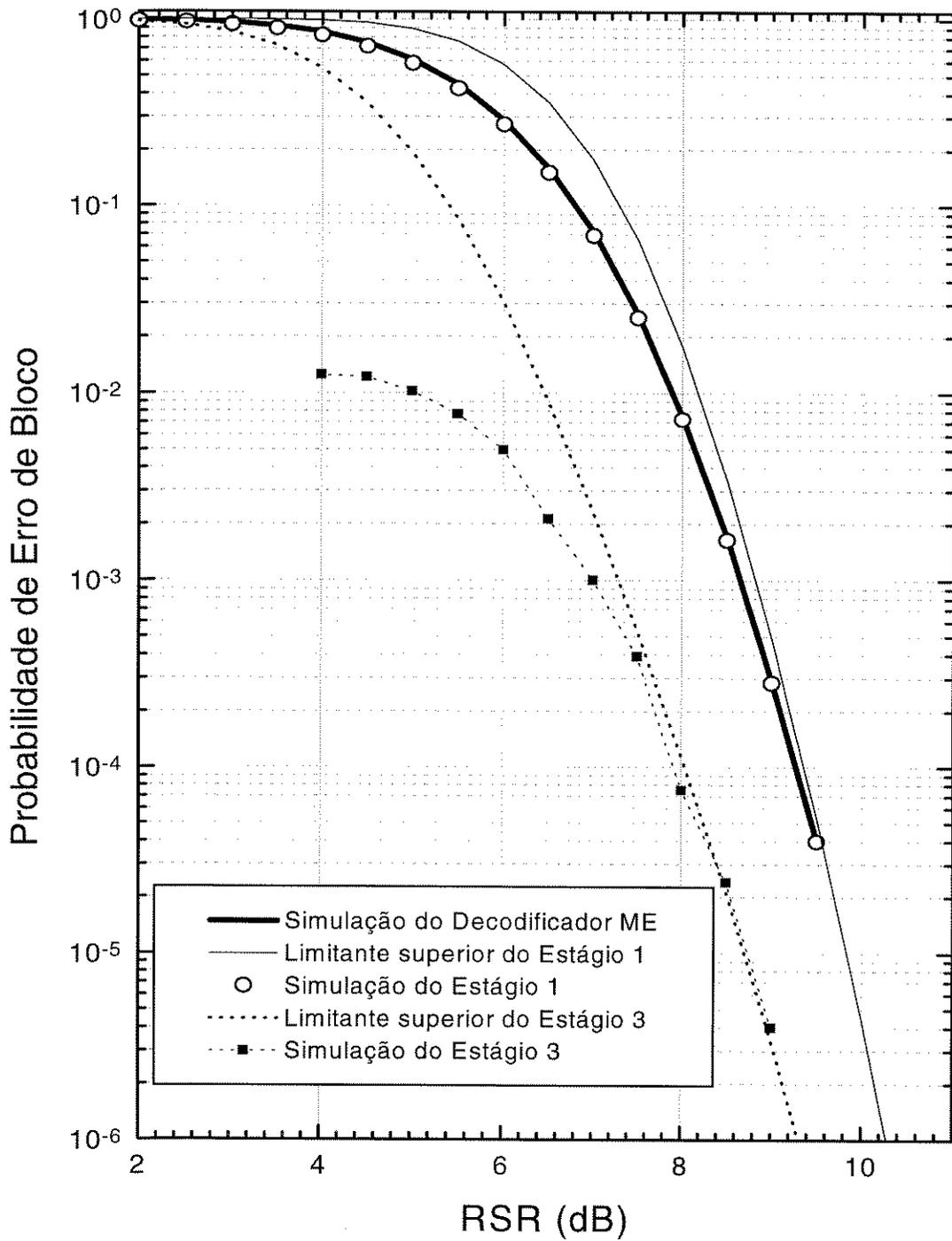


Figura 4.6. Comparação entre os limitantes superiores e as simulações dos estágios 1 e 3

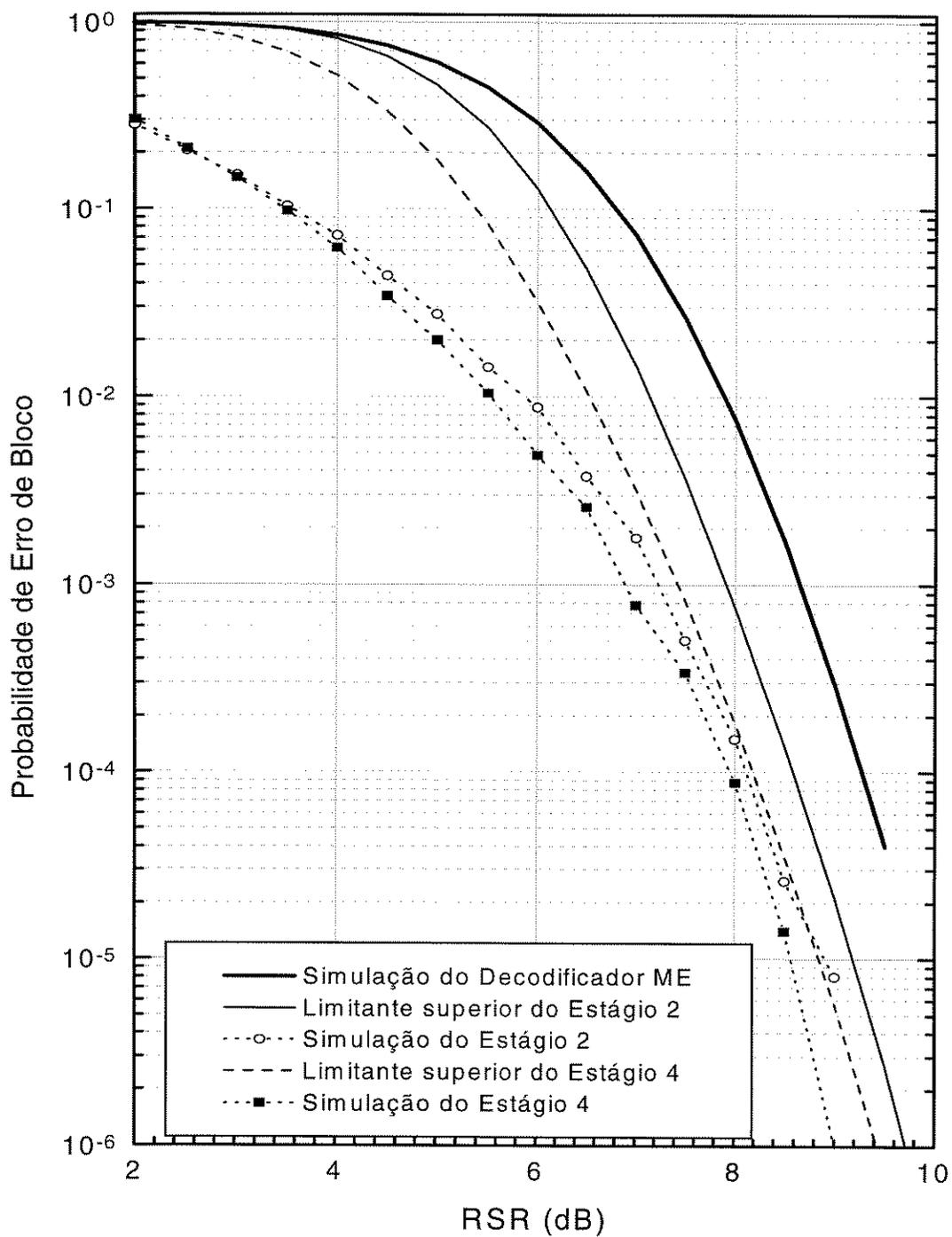


Figura 4.7 Comparação entre os limitantes superiores e as simulações para os estágios 2 e 4.

A eficácia dos limitantes superiores para cada um dos estágios, ou seja, o grau de predição do verdadeiro valor da probabilidade de erro dos estágios, vê-se afetado nos últimos estágios devido à dificuldade de aplicar o conceito de Grupos Representativos (ver Apêndice A) em cada um deles. Isto refletiu-se numa redundância de termos considerados no momento de calcular os coeficientes do espectro de distâncias.

Na Figura 4.8 mostram-se os resultados da simulação do decodificador multiestágio assim como os limitantes superiores obtidos com base no espectro de distâncias para o caso de decodificação por MV e o de decodificação por ME.

Observa-se que para valores de probabilidade de erro inferiores a 10^{-3} , a diferença dos valores do limitante e da simulação não superam o valor de 0.2 dB. Logo, é factível concluir que para valores médios e altos de RSR, é suficiente a observação do limitante superior de um código para estimar o seu desempenho.

Do mesmo modo, pode-se afirmar que o fato de ter usado um decodificador sub-ótimo (decodificador ME) em vez de um decodificador por MV, ocasionou a perda de aproximadamente 0.5 dB para transmissões com especificações de probabilidade de erro menor a 10^{-3} , enquanto ocasiona a perda de aproximadamente 0.25 dB se a especificação for de probabilidade de erro menor a 10^{-6} . Porém, essa pequena perda no desempenho é amplamente compensada na hora de considerar a complexidade dos dois decodificadores.

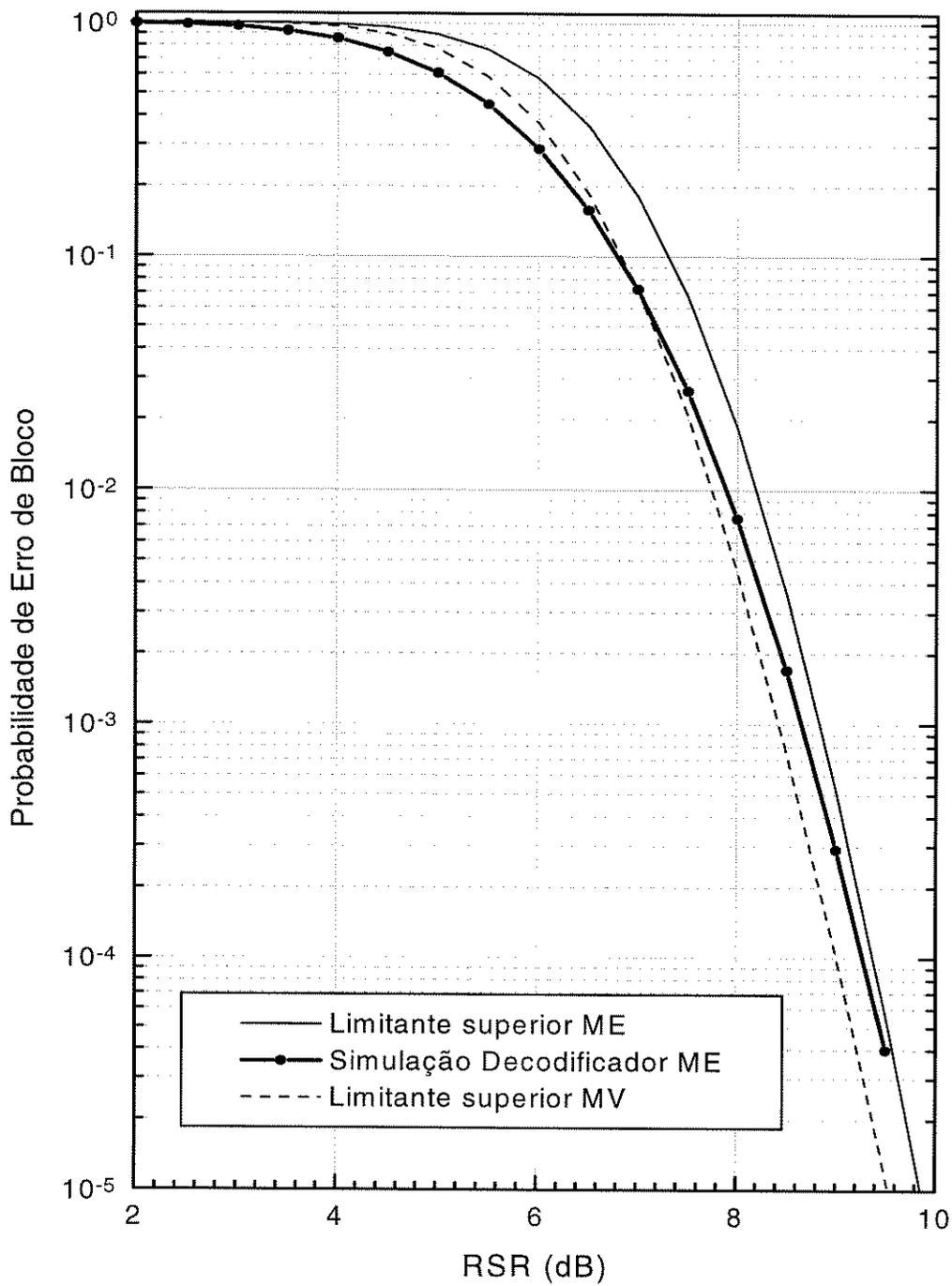


Figura 4.8. Desempenho do decodificador MV e do decodificador ME

Capítulo 5

Desempenho da modulação multidimensional codificada

5.1 Introdução

Neste capítulo vão-se comparar esquemas de modulação codificada construídos utilizando-se um alfabeto de sinais multidimensionais, com um esquema construído com modulação bidimensional. Usaram-se como critérios de comparação o desempenho do esquema de codificação sob a presença de ruído de canal e a complexidade do processo de decodificação, complexidade esta, medida em número de operações do tipo aditivas.

Com o propósito de reduzir as complexidades das decodificações sem comprometer os desempenhos dos esquemas, propõem-se duas variantes do processo de decodificação multiestágio e analisam-se os resultados obtidos da simulação.

Finalmente, com o objetivo de melhorar o desempenho dos esquemas às custas de um pequeno aumento na complexidade da decodificação, estuda-se um novo procedimento de decodificação da seqüência recebida.

5.2 Códigos com BCM multidimensional

No que segue apresentam-se três esquemas com modulação multidimensional. Além de se mostrar a composição do código, especificam-se a estrutura do decodificador e a complexidade do processo de decodificação da seqüência recebida.

5.2.1 Esquema 1

Seja o código 1, um código BCM multidimensional para 8-PSK, formado a partir dos geradores de comprimento 8 da tabela 4.1, com códigos externos de comprimento 4 e com construção multinível determinada por

Nível	Gerador	Código Externo
0	g4	(4,1,4)
1	g5	f(v6)
2	g6	f(v5)
3	g7	f(v4)
4	g8	v4 = (4,4,1)
5	g9	v5 = (4,4,1)
6	g10	v6 = (4,4,1)
7	g11,g12	(4,3,2)
8..19	G13..g23	(4,4,1)

Tabela 5.1. Composição do Código 1

Para a decodificação da seqüência recebida, utiliza-se um decodificador multiestágio com a seguinte estrutura:

Estágio 1 : Códigos 0,1,...,7

Estágio 2 : Códigos 8,9,...,19

Supondo decodificação por máxima verossimilhança em cada um dos estágios e fazendo em cada um deles cálculos similares aos mostrados no Capítulo 4, obtém-se uma complexidade de **327 870** operações do tipo aditivas.

5.2.2 Esquema 2

Utiliza-se o código descrito no esquema anterior, que usa três vezes a função cross-over explicada em [26], com a seguinte composição multinível

Nível	Gerador	Código Externo
0	g4	(4,1,4)
1	g5	f(v6)
2	g6	f(v5)
3	g7	f(v4)
4	g8	v4 = (4,4,1)
5	g9	v5 = (4,4,1)
6	g10	v6 = (4,4,1)
7,8	g11,g12	(4,3,2)
9..19	g13..g23	(4,4,1)

Tabela 5.2. Composição do Código 2

Desta vez, para a decodificação da sequência recebida, utiliza-se um decodificador multiestágio com a seguinte estrutura:

Estágio 1 : Códigos 0,1,...,7

Estágio 2 : Código 8

Estágio 2 : Códigos 9,10,...,19

Supondo decodificação por máxima verossimilhança em cada um dos estágios, e fazendo cálculos similares aos realizados no Capítulo 4, obtém-se uma complexidade de **27500** operações do tipo aditivas.

5.2.3 Esquema 3

Seja o código 3 o código BCM multidimensional para 8-PSK, estudado no capítulo 4, que apresentava a construção multinível mostrada na Tabela 5.3.

Nível	Gerador	Código Externo
0,1	g4,g5	(4,1,4)
2	g6	f(v5)
3	g7	f(v4)
4	g8	v4 = (4,4,1)
5	g9	v5 = (4,4,1)
6,7,8	g10,g11,g12	(4,3,2)
9..19	g13..g23	(4,4,1)

Tabela 5.3. Composição do Código 3

Para a decodificação da seqüência recebida, escolhe-se o decodificador multiestágio também analisado no Capítulo 4, cuja estrutura era:

Estágio 1 : Códigos 0,1,...,5

Estágio 2 : Código 6

Estágio 3 : Código 7

Estágio 4 : Códigos 8,9,...,19

Como foi demonstrado a complexidade desse decodificador multiestágio é de **23576** operações do tipo aditivas.

5.3 Códigos BCM bidimensionais

Apresentam-se dois esquemas BCM bidimensionais, baseados no código proposto por Kasami et al [39] e que apresenta a seguinte estrutura multinível

Nível	Gerador	Código Externo
0	[1]	RM _{5,1}
1	[2]	RM _{5,3}
2	[4]	(32,31,2)

Tabela 5.4. Composição do Código 4

5.3.1 Esquema 4

Neste esquema a decodificação da seqüência recebida é feita utilizando um decodificador por máxima verossimilhança. Utilizando as treliças de decodificação para códigos $RM_{n,r}$ apresentadas em Forney [37], é possível determinar uma estrutura para a treliça de decodificação MV do código 4. Neste caso considerou-se uma treliça formada da concatenação das treliças dos dois últimos níveis ($RM_{5,3}$ e $(32,31,2)$), repetida 32 vezes devido ao número de palavras do código $RM_{5,1}$. A complexidade total para a decodificação da seqüência recebida considerando tal estrutura é de aproximadamente **1 605 567** operações do tipo aditivas.

5.3.2 Esquema 5

Neste esquema BCM bidimensional utiliza-se o código 4 mostrado na Tabela 5.4 e a decodificação da seqüência recebida é feita utilizando um decodificador multiestágio com a seguinte estrutura

Estágio 1 : Código 0

Estágio 2 : Código 1

Estágio 3 : Código 2

Utilizando as treliças para códigos $RM_{n,r}$ descritas por Forney[37] e fazendo cálculos similares aos mostrados no capítulo 4 obtém-se uma complexidade total de **3357** operações do tipo aditivas.

5.4 Análise dos esquemas BCM

Os cinco esquemas de codificação - decodificação apresentados possuem taxa de 63/32 bits/símbolo, distância Euclidiana mínima quadrática de 8.00 e ganho assintótico de 5.95 dB com respeito à modulação Q-PSK não codificada.

Na Tabela 5.5 mostram-se os dez primeiros coeficientes do espectro de distâncias dos cinco esquemas, assumindo como transmitida a palavra toda nula, enquanto que na Tabela 5.6 mostram-se as complexidades dos respectivos decodificadores.

D.E.Q	Esquema 1	Esquema 2	Esquema 3	Esquema 4	Esquema 5
8.0000	3 248	5 552	12 720	10 416	20 336
8.6864	25 088	50 176	89 088	0	0
9.3728	85 760	220 160	275 456	126 976	4 063 232
10.6864	131 072	262 144	524 288	0	0
11.3728	917 504	1 835 008	5 767 168	0	130 023 424
11.5148	212 992	413 696	1 249 280	0	0
12.0000	163 072	313 600	1 120 512	1 166 592	555 520
12.2012	1 347 584	2 695 168	4 382 720	0	0
12.6864	2 900 992	8 514 136	15 316 992	0	0
13.3728	43 061 248	86 122 496	141 123 584	30 474 240	1 950 351 360

Tabela 5.5. Espectro de distâncias dos cinco esquemas

Esquema	Complexidade
Esquema 1	327 870
Esquema 2	27 500
Esquema 3	23 576
Esquema 4	1 605 567
Esquema 5	3 357

Tabela 5.6. Complexidades dos decodificadores

Na Figura 5.1 mostram-se os limitantes superiores dos desempenhos dos cinco esquemas propostos, obtidos utilizando-se os espectros de distâncias da Tabela 5.5. Da observação dos limitantes podem-se obter as seguintes conclusões:

- Os esquemas 1 e 4 apresentam desempenhos similares para valores baixos e médios de SNR, enquanto que para valores altos o esquema 1 tende a ser melhor (aproximadamente 0.1 dB de diferença para valores de probabilidade de erro de 10^{-8}) devido basicamente ao menor número de vizinhos como resultado da utilização de uma função cross-over triplo (ver Tabela 5.5). Porém a complexidade do decodificador do esquema 4, torna-o não prático para fins de implementação, enquanto que o decodificador do esquema 1 é mais viável.

- O esquema 2, que utiliza o mesmo código que o esquema 1, com a diferença de possuir um estágio a mais no decodificador, apresenta em média uma perda de aproximadamente 0.12 dB no desempenho com respeito ao esquema 1 (0.15 para probabilidade de erro de 10^{-2} e 0.1 para 10^{-8}). Porém, tal perda é compensada na hora de avaliar a factibilidade da construção do decodificador (327870 vs 25670 operações aditivas).
- O esquema 3 apresenta uma perda menor a 0.1 dB quando é comparado com o esquema 2, apresentando ambos esquemas complexidades similares. Aparentemente não traria nenhuma vantagem a sua implementação no lugar da do esquema 2.
- O esquema 5, com BCM bidimensional e decodificador multiestágio, possui menor complexidade no processo de decodificação, porém seu desempenho com respeito ao esquema 2 apresenta uma perda de 0.4 dB para probabilidades de erro de 10^{-3} e 0.2 dB para probabilidades de erro de 10^{-8} .

Contudo, a simulação de dois dos esquemas analisados, revela que os ganhos prognosticados pelos limitantes superiores podem estar sobrevalorizados. Na Figura 5.2 se mostra a simulação e o limitante do esquema 3 (BCM multidimensional) e do esquema 5 (BCM bidimensional).

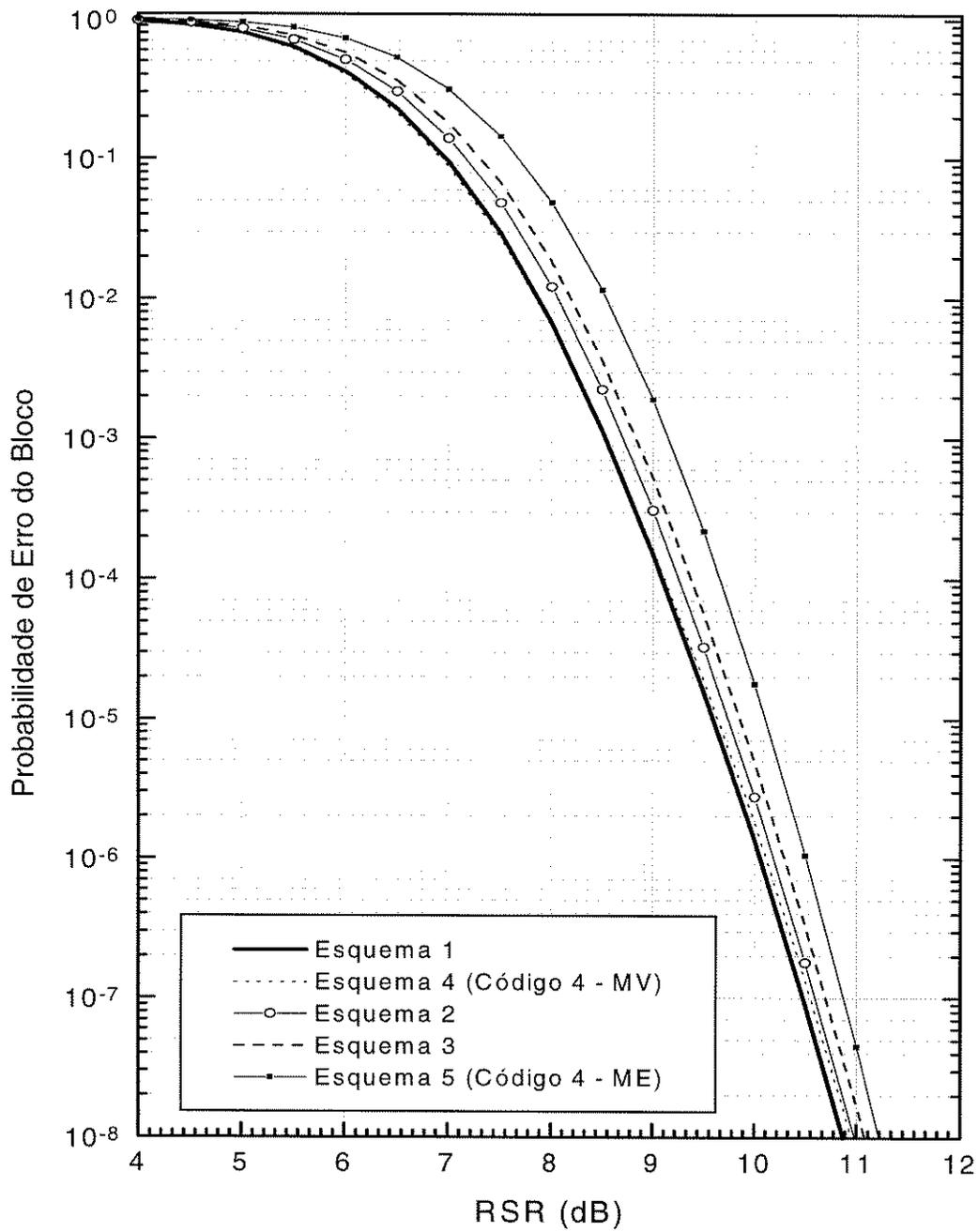


Figura 5.1. Limitantes superiores dos cinco esquemas propostos

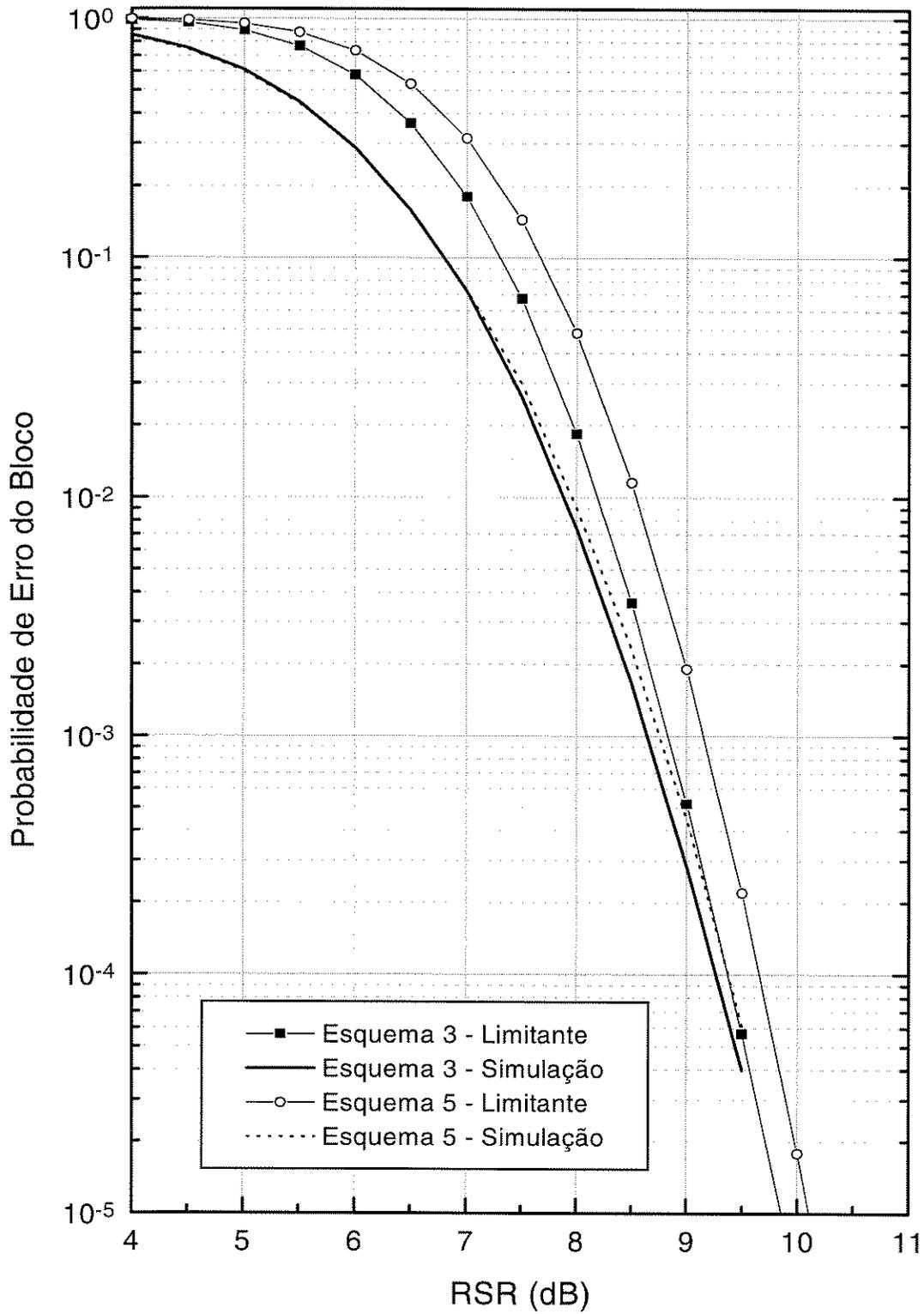


Figura 5.2. Comparação entre os limitantes superiores e as simulações

O esquema 3, com modulação multidimensional codificada e complexidade equivalente a 23576 operações do tipo aditivas, possui um ganho real de 0.1 dB com respeito ao esquema 5, de modulação bidimensional codificada e complexidade equivalente a 3357 operações do tipo aditivas.

Apesar de haver utilizado algoritmos melhorados para o cálculo dos limitantes superiores dos códigos, o ganho real obtido através das simulações difere do ganho teórico obtido mediante os limitantes. Isto implica que para efeitos de poder prever e comparar os desempenhos de códigos ou esquemas, os limitantes superiores são uma ferramenta muito útil, porém os ganhos sugeridos devem ser conferidos através de simulações.

5.5 BCM Multidimensional com decodificação interna subótima

Como foi visto no Capítulo 4 (Um exemplo de BCM multidimensional) a decodificação por multiestágios consiste em dividir em múltiplos estágios o processo de decodificação. Assim, em cada estágio realiza-se a decodificação de um código interno (formado pelos códigos a não serem decodificados no estágio) e de um código externo (formado pelos códigos a serem decodificados).

Dado que o código interno não contém bits de informação a serem considerados no estágio, a finalidade da sua decodificação é a obtenção da métrica da palavra código mais próxima da sequência recebida. Esta métrica afinal, será utilizada para a decodificação do código externo do estágio.

Dos cálculos feitos para determinar a complexidade do esquema 3, observa-se que é o primeiro estágio que apresenta a maior complexidade. Utilizando técnicas subótimas na decodificação do código interno do primeiro estágio, pode-se obter uma redução na complexidade do decodificador sem comprometer o desempenho do esquema.

Na Figura 5.3 mostra-se o código interno do estágio 1 do esquema 3. Ao invés do que foi realizado no Capítulo 4, desta vez utilizaram-se 3 técnicas subótimas para a decodificação no primeiro estágio da sequência recebida.

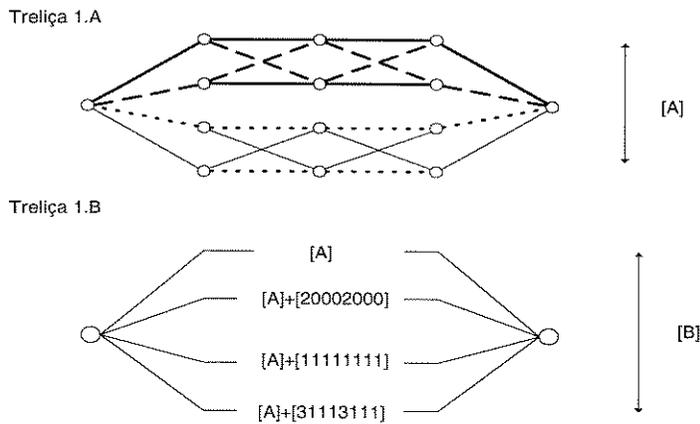


Figura 5.3 Treliça do código interno do estágio 1

5.5.1 Algoritmo 1. Decodificação por Multiestágio . MV no primeiro e no segundo estágio (ME-DS).

Da observação da treliça do código interno (ver Figura 5.3) pode-se vislumbrar que a decodificação pode ser feita de maneira menos complexa que fazendo-a por MV. A decodificação será realizada em duas etapas ou estágios. No primeiro estágio se decidirá se a seqüência recebida está mais próxima de alguma palavra que contem a palavra [11111111] no primeiro nível ou se está mais próxima de alguma palavra que contém a palavra [00000000] no primeiro nível.

Se estiver mais próxima da palavra com [00000000], a decodificação no segundo estágio será feita só nos ramos superiores (ramos [A] e [A]+[20002000]). Caso contrário a decodificação será feita nos ramos inferiores (ramos [A]+[11111111] e [A]+[31113111]).

A composição dos códigos a serem decodificados em cada estágio seria

Estágio 1 : $[11111111]*b_1 + [2]*(8,8,1) + [4]*(8,8,1)$

Estágio 2: $[20002000]*b_2 + [22220000]*b_3 + [22002200]*b_4 + [20202020]*b_5 + [22222222]*b_6 + [4]*(8,8,1)$

A complexidade do primeiro estágio é de 15 operações do tipo aditivas. O segundo estágio compreende só duas treliças [A]. Logo, a decodificação do código interno reduz-se a 59 operações do tipo aditivas.

Com este algoritmo a complexidade do estágio 1 do esquema 3 passa de 22015 a 16127 operações do tipo aditivas, enquanto a complexidade total do decodificador do esquema 3 passa de 23576 a 17688 operações do tipo aditivas.

5.5.2 Algoritmo 2. Decodificação por Multiestágio . Decisão por distância de Hamming no primeiro e MV no segundo estágio. (ME-DH).

O código interno é decodificado em dois estágios como no primeiro algoritmo. No primeiro estágio cada um dos sinais da sequência recebida serão decodificados por decisão abrupta, obtendo-se afinal uma palavra decodificada. Se o peso de Hamming da palavra no primeiro nível da palavra decodificada for maior que 4, no segundo estágio decidirá-se pelos ramos inferiores. Se for menor que 4 a decisão no segundo estágio será feita nos ramos superiores. Em caso de igualdade ($w_H = 4$) a decisão pelos ramos superiores ou inferiores será aleatória.

A composição dos códigos em cada estágio é

Estágio 1 : $[11111111]*b_1 + [2]*(8,8,1) + [4]*(8,8,1)$

Estágio 2: $[20002000]*b_2 + [22220000]*b_3 + [22002200]*b_4 + [20202020]*b_5 + [22222222]*b_6 + [4]*(8,8,1)$

Neste caso, a complexidade do primeiro estágio é nula. Logo, a decodificação do código interno reduz-se a 44 operações do tipo aditivas.

Com este algoritmo a complexidade do estágio 1 do esquema 3 passa de 22015 a 12287 operações do tipo aditivas, enquanto a complexidade total do decodificador do esquema 3 passa de 23576 a 13848 operações do tipo aditivas.

5.5.3 Algoritmo 3. Decodificação por Multiestágio. Decisão por MV no primeiro estágio e sem decodificar o segundo. (ME-NC).

Este algoritmo é uma variante do primeiro algoritmo apresentado, dado que no primeiro estágio vai-se decidir em função da palavra $[11111111]$ no primeiro nível da palavra decodificada. Porém, neste algoritmo não será realizada a decodificação do

segundo estágio, portanto a métrica obtida na decodificação por MV do primeiro estágio será a métrica do código interno.

O código a ser decodificado é equivalente a $C = [11111111]*b1 + [2]*(8,8,1) + [4]*(8,8,1)$

A decodificação do código interno neste caso implica a realização de 15 operações do tipo aditivas. Logo, a complexidade do estágio 1 se reduz a 4863 operações do tipo aditivas e a complexidade total do decodificador do esquema 3 se reduz a 6424.

5.5.4 Desempenhos dos três algoritmos

A Figura 5.4 mostra os desempenhos dos três algoritmos de decodificação subótima propostos, junto com os desempenhos do esquema 3 (decodificação MV no primeiro estágio, 23576 operações aditivas) e do esquema 5 (BCM bidimensional com decodificação ME, 3357 o.a.).

Observa-se que o fato de ter alterado a decodificação do código interno se reflete numa degradação do comportamento do estágio 1 e por conseguinte do comportamento do esquema completo.

Tanto o algoritmo 1 como o algoritmo 2 apresentam perdas de 0.2 e 0.3 dB com respeito ao esquema 5 bidimensional para uma probabilidade de erro de bloco de 10^{-4} . A diferença tende a ser maior para valores maiores da relação sinal ruído.

Devido que o esquema 5 apresenta melhor comportamento que os algoritmos propostos e com complexidade menor, uma implementação prática dos algoritmos analisados seria fútil.

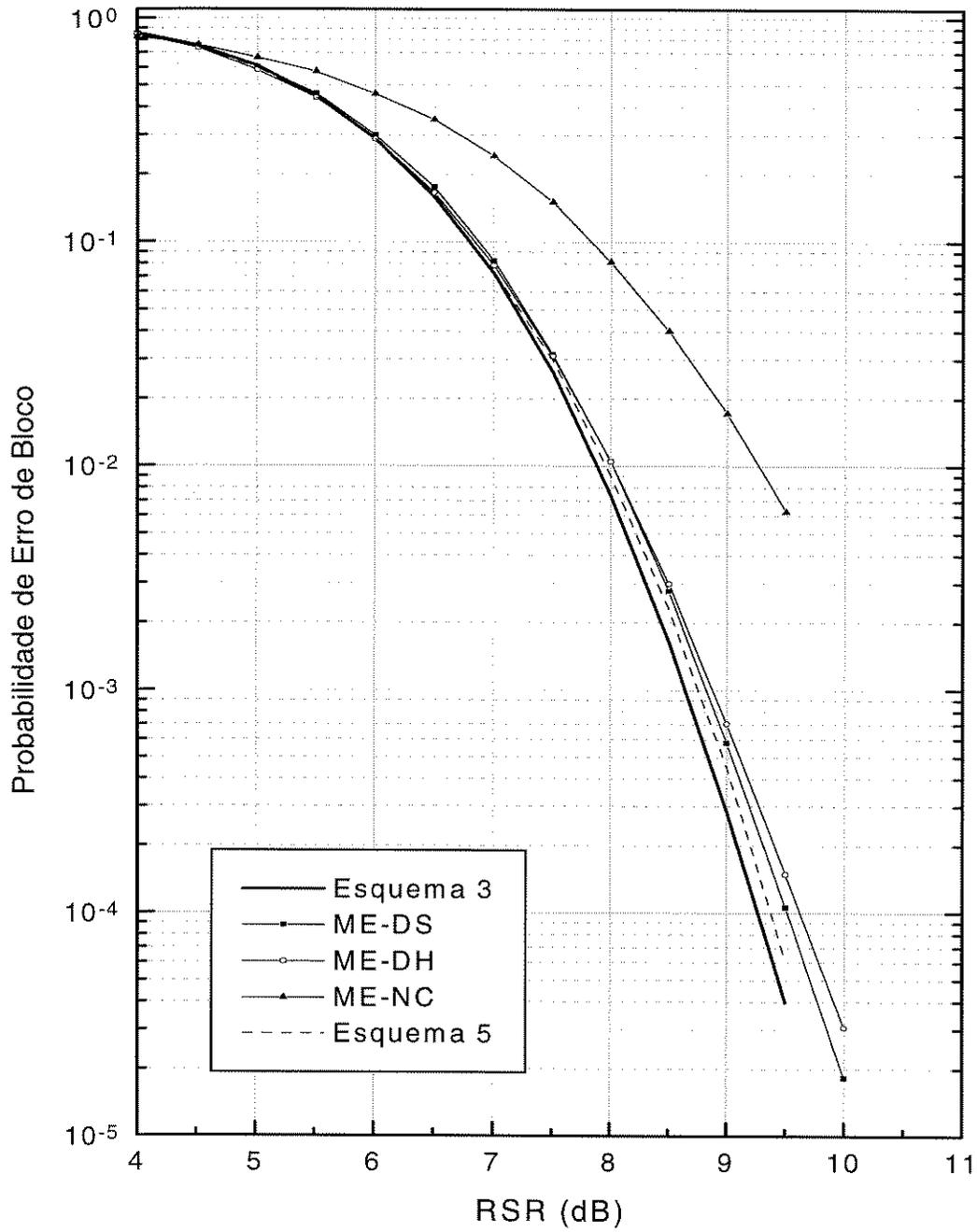


Figura 5.4 Simulação dos algoritmos de decodificação subótima propostos

5.6 Melhorando o desempenho do decodificador ME

Como foi visto no Capítulo 2, o fato de fazer uma decodificação por múltiplos estágios apresenta a desvantagem que se houver um erro na decodificação no primeiro estágio, a decodificação nos estágios posteriores não conseguiria corrigi-lo. Para evitar esse problema Dettmar et al [45] apresentam um novo algoritmo de decodificação por múltiplos estágios.

Nesse novo algoritmo, se a distância Euclidiana da seqüência recebida à palavra decodificada no primeiro estágio for menor que $d_{\min}/2$, a palavra decodificada está correta e continua a decodificação nos estágios posteriores.

Se não for menor, escolhem-se as L palavras código do primeiro estágio mais próximas à seqüência recebida e efetua-se a decodificação dos estágios posteriores para cada uma das L palavras. No final, escolhe-se a melhor dentre as L métricas finais.

O aumento na complexidade deste algoritmo, comparado com o decodificador ME comum, vem dado pela complexidade necessária para encontrar as L palavras código mais próximas da seqüência recebida no primeiro estágio e pelas $L-1$ vezes a mas que é feita a decodificação dos estágios posteriores.

Para o caso do esquema 3, a implementação desse algoritmo implicaria na procura das L palavras mais próximas da seqüência recebida em cada um dos quatro ramos (ver Figura 5.5) para finalmente escolher as L mais próximas.

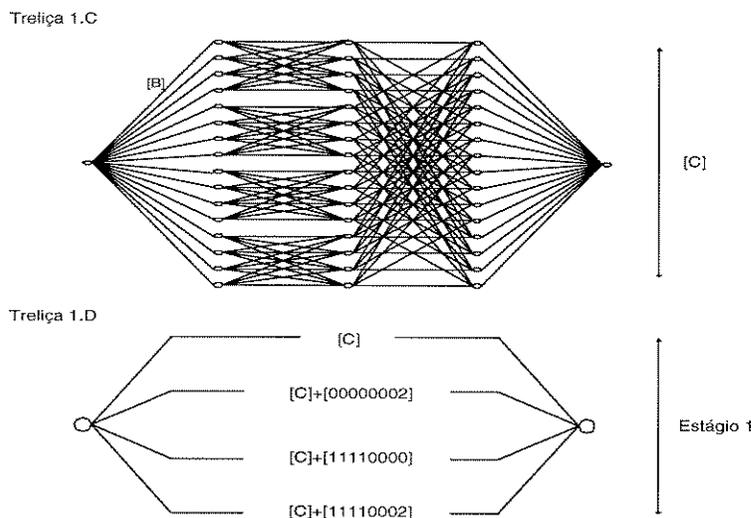


Figura 5.5 Treliça do código externo do estágio 1

Para obter as duas palavras mais próximas da seqüência recebida na treliça da função cross-over dupla pode-se usar o Algoritmo de Pollack [46]. Assim, a complexidade da decodificação da treliça aumentaria em 148 operações do tipo aditivas.

Devido que o Estágio 1 apresenta 4 treliças cross-over dupla em paralelo e que precisa-se encontrar as duas métricas menores do estágio completo, a nova complexidade de decodificação do estágio 1 é 22615 operações do tipo aditivas.

Além disso, nos casos em que for preciso, a decodificação dos estágios posteriores será feita para cada uma das duas métricas decodificadas no primeiro estágio. Contudo, a complexidade do novo decodificador seria de 25638 o.a.

Na Figura 5.8 mostra-se o desempenho do novo algoritmo aplicado no esquema 3 para $L=2$ junto com o desempenho do esquema 3 com decodificação multiestágio comum ($L=1$), o desempenho do esquema 5 e o limitante superior do código 3 com decodificação por MV (ver seção 4.4.1).

Observa-se que o ligeiro aumento na complexidade do decodificador refletiu-se em uma melhora do desempenho do esquema 3 (0.25 dB com respeito ao esquema 5 para uma probabilidade de erro de 10^{-4}).

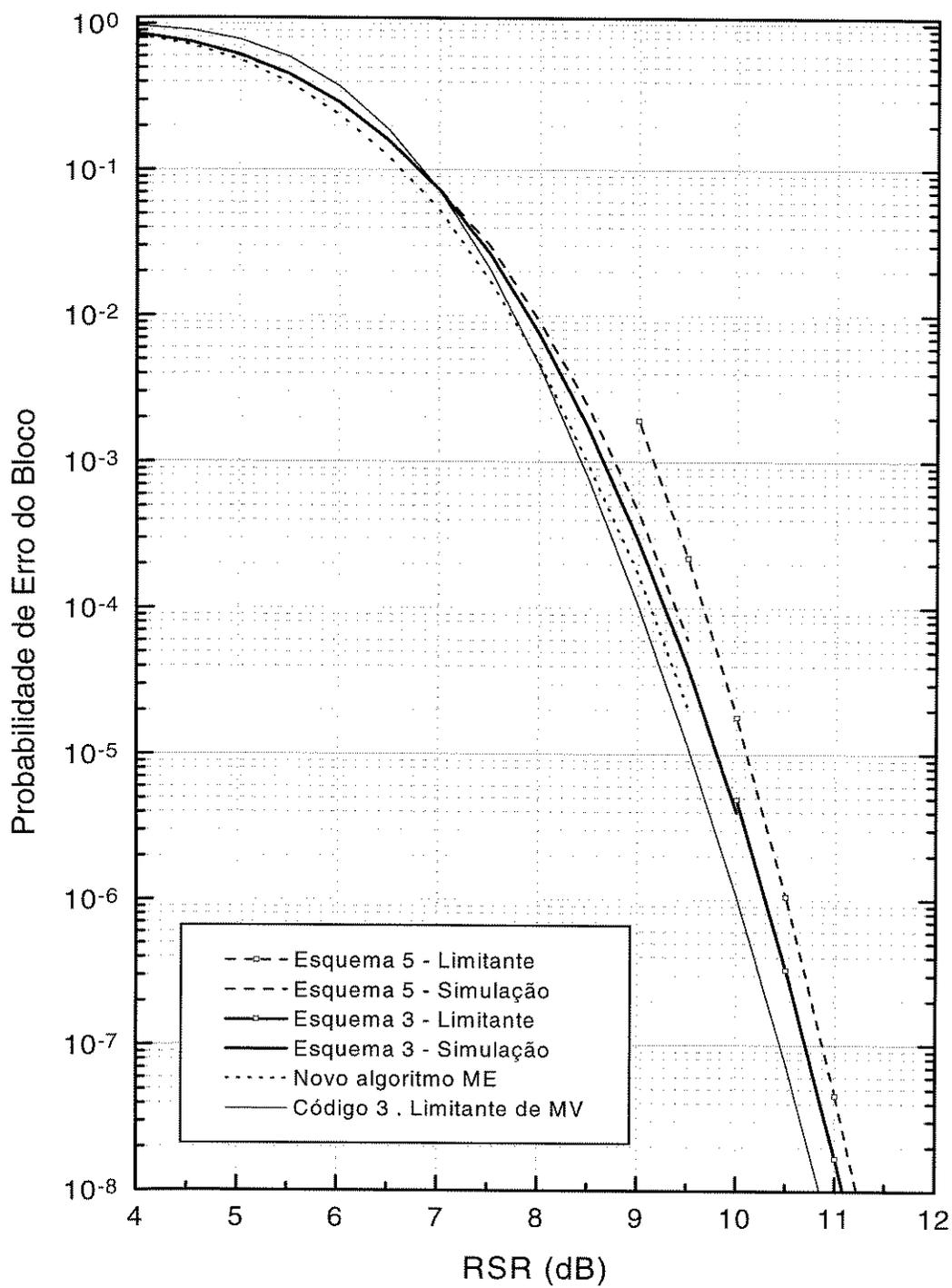


Figura 5.6. Simulação do novo algoritmo ME

5.7 Conclusões

Foram comparados diversos esquemas de modulação codificada. Utilizou-se como critérios de comparação o desempenho dos esquemas para diferentes valores da relação sinal ruído e a complexidade do processo de decodificação medida em operações do tipo aditivas.

Dos cinco esquemas estudados, os três com modulação codificada multidimensional e decodificação por multiestágios apresentavam melhor desempenho do que o esquema com modulação bidimensional e decodificação por multiestágio, devido basicamente ao menor número de vizinhos. Porém, a complexidade destes três esquemas resultou maior que a complexidade do esquema com modulação bidimensional.

Com o objetivo de reduzir a complexidade do esquemas, propuseram-se algoritmos de decodificação subótima nos códigos internos dos estágios. Avaliou-se a redução na complexidade e a degradação do desempenho.

Finalmente, foi apresentado um novo algoritmo para melhorar o desempenho do decodificador multiestágio. Observou-se que foi possível atingir o desempenho do esquema com modulação bidimensional e decodificação por máxima verossimilhança com uma considerável redução na complexidade.

Capítulo 6

Conclusões

Nesta tese foram revisados os conceitos de modulação multidimensional codificada e modulação bidimensional codificada, mostrando-se que esta última é um caso particular da primeira e que é possível a obtenção de códigos com melhor desempenho para um canal com ruído aditivo gaussiano usando a modulação multidimensional.

Apresentaram-se os critérios e o procedimento para a construção de esquemas com modulação multidimensional codificada. Usou-se a técnica de construção multinível dado que a mesma permite a adequada eleição dos códigos componentes assim como permite estabelecer a distância euclidiana mínima do código a ser formado.

Para a obtenção dos geradores multidimensionais a serem utilizados na formação do código, aplicou-se a regra de partição de conjuntos de Ungerboeck na constelação de sinais multidimensionais moduladores. Nesta tese estudou-se unicamente o caso em que a modulação é feita na fase da portadora (M-PSK).

O emprego de geradores multidimensionais outorga uma maior flexibilidade para a eleição dos códigos componentes. Como foi visto, prefere-se usar códigos cujas

treliças de decodificação sejam simples de implementar e que requeiram poucas operações do tipo aditivas.

Uma das vantagens da presença de múltiplos códigos componentes é que permite a introdução de interdependência entre eles com a finalidade de melhorar o espectro de distâncias, e por conseguinte melhorar o desempenho do código à custa de um ligeiro aumento na complexidade da decodificação.

Além disso, a estrutura multinível com a qual é construído o código, permite garantir um conjunto de propriedades tais como invariância à rotação de fase, linearidade e invariância do espectro de distâncias.

Para poder caracterizar e comparar um esquema de modulação codificada mostrou-se que é preciso estimar tanto a probabilidade de erro para diferentes valores de relação sinal – ruído, assim como a complexidade envolvida no processo de decodificação.

Para a estimativa das probabilidades de erro, apresentaram-se ferramentas para calcular limitantes superiores da probabilidade de erro do esquema. Tais ferramentas são úteis para prever o comportamento de um esquema. Porém, dado que tais limitantes foram derivados do Limitante de União, todos resultam em quantidades similares para valores altos da relação sinal – ruído. Portanto, se o grau de predição do limitante de união para valores altos da relação sinal – ruído estiver incorreto, os valores obtidos dos outros limitantes não serão confiáveis.

Para avaliar a complexidade envolvida no processo de decodificação de um código com modulação codificada, apresentou-se uma nova forma de calcular a complexidade de decodificação. Diferentemente de [15] e [39], onde a complexidade de decodificação é calculada em função do número de estados da treliça de decodificação, neste caso preferiu-se caracterizar a complexidade pelo número de operações do tipo aditivas a serem efetuadas. Isto permite conjecturar uma estimativa mais fidedigna da complexidade dado que as complexidades de decodificação dos códigos internos são consideradas. Em todos os casos, foi assumido que não se tem restrições de memória e que as operações de endereçamento de dados e operações binárias não se consideram.

Com o objetivo de melhorar o desempenho do código com modulação bidimensional codificada $C_{B,9,32}$ e decodificação por múltiplos estágios apresentado em [26], projetaram-se três esquemas de modulação multidimensional codificada. Os

três esquemas projetados apresentaram menor número de vizinhos no espectro de distâncias e obtiveram ligeiros ganhos no desempenho comparado com o esquema bidimensional.

Porém, apesar de utilizar códigos binários de treliças simples como códigos componentes da estrutura multinível, o número de operações do tipo aditivas necessárias (complexidade) para a decodificação dos três esquemas projetados, resultou maior do que a complexidade do esquema bidimensional, que utiliza códigos binários componentes com treliças de decodificação mais complicadas. A maior complexidade é devida à repetida decodificação dos códigos internos para cada um dos estágios projetados.

Devido à presença de agrupamentos (ver seção 4.3) é possível a implementação de técnicas subótimas de decodificação dos códigos internos dos estágios. Com o uso de tais técnicas, a complexidade de implementação do decodificador pode ser reduzida até chegar a níveis semelhantes aos do decodificador de modulação bidimensional codificada. Porém, tal redução refletir-se-á em uma degradação do desempenho do esquema, degradação que deverá ser avaliada através de simulações antes de estudar a sua implementação prática.

A simplicidade das treliças de decodificação dos códigos externos dos estágios, permite a inovação de técnicas em busca de melhorar o desempenho do decodificador completo às custas de razoáveis aumentos na complexidade da decodificação. Com estas alterações é possível atingir desempenhos de esquemas construídos com modulação bidimensional codificada e com decodificação por máxima verossimilhança, com a vantagem de ter reduzido a complexidade do processo de decodificação.

Contudo, com a introdução dos conceitos de paralelismo e bidirecionalidade [47] na área de planejamento de circuitos integrados de aplicação específica (ASICS), observa-se que as treliças de decodificação tanto dos códigos internos assim como dos códigos externos dos estágios apresentam estruturas simples mas repetitivas. Isto permite tanto uma maior velocidade de processamento, que é uma das limitações do sistema, assim como também um barateamento nos custos da implementação física do decodificador.

Finalmente, com a aplicação de códigos Reed - Solomon à sequência de símbolos PSK a serem enviados (ver Kasami et al [24]), os modestos ganhos obtidos

com o uso de modulação multidimensional poderão ser incrementados. Além disso, o sistema ganha proteção contra surtos de erros, adicionalmente à proteção contra erros aleatórios adquirida mediante o uso de codificação nos bits de informação.

6.2 Trabalhos Futuros

Existe atualmente um grande interesse na construção de esquemas de modulação codificada em blocos (BCM) devido principalmente ao cada vez maior número de aplicações com restrições de potência e de largura de faixa.

Como foi visto no desenvolvimento desta tese, a decodificação por múltiplos estágios permite reduzir consideravelmente a complexidade do processo de decodificação sem comprometer o desempenho do esquema. Assim, é possível obter esquemas de modulação multidimensional codificada com desempenho superior ao dos esquemas de modulação codificada bidimensional.

Porém, esquemas diferentes podem ser obtidos, se ao invés de utilizar a probabilidade de erro de bloco como parâmetro do desempenho do esquema a ser construído, utiliza-se a probabilidade de erro de bit, como é sugerido por Burr e Lunn[48] e Herzberg [49].

Por outro lado, como foi mencionado no Capítulo 1, a presente pesquisa limitou-se ao uso de fontes de dados de tipo binárias. É de se esperar, a existência de esquemas de modulação multidimensional codificada construídas mediante o uso de fonte de dados do tipo não binárias.

Finalmente, de maneira similar ao acontecido com a técnica de modulação codificada usando códigos convolucionais (TCM), é motivo de futuras pesquisas o uso de BCM multidimensional em canais de comunicação com desvanecimento ou com ruído aditivo não gaussiano.

Anexo 1

Geradores multidimensionais obtidos da aplicação da Regra de partição de Ungerboeck em constelações de sinais 2Lx8PSK

Nível da Partição (p)	L = 2		L = 3 (I)		L = 3 (II)		L = 3 (III)		L = 4		L = 8	
	Δ_p^2	Ger.	Δ_p^2	Ger.	Δ_p^2	Ger.	Δ_p^2	Ger.	Δ_p^2	Ger.	Δ_p^2	Ger.
0	0.586	[01]	0.586	[111]	0.586	[001]	0.586	[001]	0.586	[0001]	0.586	[00000001]
1	1.172	[11]	1.172	[110]	0.586	[011]	0.586	[011]	1.172	[0011]	1.172	[11000000]
2	2.00	[02]	1.172	[011]	1.757	[111]	1.757	[111]	1.172	[0101]	1.172	[10100000]
3	4.00	[22]	2.00	[222]	2.00	[222]	2.00	[002]	2.00	[0002]	1.172	[10001000]
4	4.00	[04]	4.00	[220]	4.00	[220]	2.00	[022]	2.343	[1111]	2.00	[00000002]
5	8.00	[44]	4.00	[022]	4.00	[022]	4.00	[444]	4.00	[0022]	2.343	[11110000]
6	-	-	4.00	[444]	4.00	[444]	6.00	[222]	4.00	[0202]	2.343	[11001100]
7	-	-	8.00	[440]	8.00	[440]	8.00	[440]	4.00	[0004]	2.343	[10101010]
8	-	-	8.00	[044]	8.00	[044]	8.00	[044]	8.00	[2222]	4.00	[22000000]
9	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[0044]	4.00	[20200000]
10	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[0404]	4.00	[20002000]
11	-	-	-	-	-	-	-	-	16.00	[4444]	4.00	[00000004]
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4.686	[11111111]
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[22220000]
14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[22002200]
15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[20202020]
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[44000000]
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[40400000]
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8.00	[40004000]
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	16.00	[22222222]
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	16.00	[44440000]
21	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	16.00	[44004400]
22	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	16.00	[40404040]
23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	32.00	[44444444]

Bibliografia

- [1]. Massey, J.L. Coding and Modulation in Digital Communications. *Proceedings of the 1974 International Zurich Seminar on Digital Communications*, Zurich, Switzerland, p. E2(1)-E2(4), Mar. 1974.
- [2]. Ungerboeck, G., Csajka, I. On improving data-link performance by increasing the channel alphabet and introducing sequence coding. In: *International Symposium on Information Theory*, Ronneby, Sweden, June 1976.
- [3]. Ungerboeck, G. Channel coding with multilevel/phase signals. *IEEE Transactions in Information Theory*, v. IT-28, n.1, p. 55-67, Jan. 1982.
- [4]. Rec. V.32 bis, A duplex modem operating at data signalling rates of up to 14 400 bit/s for use on the general switched telephone network and on leased point-to-point 2-wire telephone-type circuits. Blue Book, Fascicle VIII.1, Series V - Data communication over the telephone network. Version 2/1991.
- [5]. Cover, T., Thomas, J. *Elements of information theory*. Wiley-Interscience, c1991. ISBN 0471062596.
- [6]. Lin, S., Costello Jr., D. *Error control coding : fundamentals and applications*. Prentice-Hall, c1983.
- [7]. Proakis, J. *Digital Communications*. McGraw-Hill, c1983. ISBN 0070509271.
- [8]. Forney, G. , Gallager, R., Lang, C., Longstaff, F., Quereshi, S. Efficient Modulation for band-limited channels. *IEEE Jornal of Selected Areas on Communications*, v. SAC-2, n.5, p. 632-647, Sept. 1984.

- [9]. Calderbanck, A., Sloane, An eight-dimensional trellis code. *IEEE Proceedings*, v.74, p. 757-759, May 1986.
- [10]. Wilson, S. Rate 5/6 trellis-coded 8-PSK. *IEEE Transactions on Communications*, v. COM-34, n.10,p. 1045-1049, Oct. 1986.
- [11]. Calderbanck, A., Sloane, New trellis codes based on lattices and cosets. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.IT-33, n.2,p. 177-195, Mar. 1987.
- [12]. Wei, L. Trellis-coded modulation with multidimensional constelations. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.IT-33, p. 483-501, July 1987.
- [13]. Divsalar, D., Simon, M. Multiple trellis coded modulation (MTCM). *IEEE Transactions on Communications*, v.36, p. 410-419, Apr. 1988.
- [14]. Rouanne, M., Costello, D. A lower bound on the minimum euclidean distance of trellis coded modulation schemes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 34, pt. I, p.1011-1020, Sept. 1988.
- [15]. Pietrobon, S., Deng, R., Lafanechère, A., Ungerboeck, G. and Costello, D. Trellis-coded multidimensional phase modulation. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.36, n.1, p.63-89, Jan. 1990.
- [16]. Imai, H., Hirakawa, S. A new multilevel coding method using error correcting codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. IT-23, n.3, p 371-376, May 1977.
- [17]. Cusack, E. Error Control codes for QAM signaling. *Electronics Letters*, v.20, n.2, p.62-63, Jan. 1984.
- [18]. Ginzburg, V. Multidimensional signals for a continuos channel. *Probl. Peredach Inform.*, v.20, n.1, p.28-46, 1984.
- [19]. Sayegh, S. A class of optimum block codes in signal space. *IEEE Transactions on Communications*, v. COM-30, n.10, p.1043-1045, Oct. 1986.
- [20]. Tanner, R. Algebraic construction of large euclidean distance combined coding modulation systems. Abstracts of Papers, 1986 IEEE International Symposium on Information Theory, Ann Arbor, MI, October 6-9, 1986.
- [21]. Kasami, T., Takata, T., Fujiwara, T., Lin, S. Error control systems with combined block coding and Mary PSK modulations. *Proceedings 10th*

- Symposium on Information Theory and its Applications, Enoshima, Japan, p.393-398, Nov. 1987.
- [22]. Biglieri, E., Elia, M. Multidimensional modulation and coding. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.34, n.4, p.803-809, July 1988.
- [23]. Calderbank, A. Multilevel codes and multistage decoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.35, n.1, p.87-98, Jan. 1989.
- [24]. Kasami, T., Takata, T., Fujiwara, T., Lin, S. A concatenated coded modulation scheme for error control. *IEEE Transactions on Communications*, v.38, n.6, p.752-763, June 1990.
- [25]. Kasami, T., Takata, T., Fujiwara, T., Lin, S. On linear structure and phase rotation invariant properties of block 2^l -PSK modulation codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.37, n.1, p.164-167, Jan.1991.
- [26]. Kasami, T., Takata, T., Fujiwara, T., Lin, S. On multilevel block modulation codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.37, n.4, p.965-975, July 1991.
- [27]. Baldini, R., Farrel, P. Coded modulation based on rings of integers modulo-q. Part 1:Block Codes. *IEE Proceedings on Communications*, v.141, n.3, June 1994.
- [28]. Portugueis, J. Generalized Concatenated Codes for M-PSK Modulation. Doctoral thesis. Technical University of Darmstadt, 1992, Germany.
- [29]. Rajpal, S., Rhee, D., Lin, S. Multidimensional MPSK trellis codes. Proceedings of 14th Symposium on Information Theory and Its Applications, Ibusuki, Japan, v.1, Dec. 11-14, 1991, p. 393-396.
- [30]. Schawrtz, M. Transmision de Informacion, Modulacion y Ruido. Mc Graw Hill. 3ra edicion 1994.
- [31]. Wicker, S. Error Control Systems for Digital Communication and Storage. Prentice Hall.
- [32]. Biglieri, E., Divsalar, D., McLane, P., Simon, M. Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications. Macmillan Publishing Company. ISBN 0-02-309965-8.
- [33]. Portugueis, J., de Alencar, C. On the construction of MPSK block codes for fading channels. Proceedings of the 1995 IEEE International Symposium

- on Information Theory, Whistler, Canada, p.153, Sept. 1995.
- [34]. Morelos, R., Takeshita, O., Imai, H. Multilevel Block Coded Modulation with UEP. Proceedings of the 1997 IEEE International Symposium on Information Theory, ULM, Germany, p. 441, June 29-July 4, 1997.
- [35]. Conway, J., Sloane, N. Decoding techniques for codes and lattices, including the Golay code and the Leech lattice. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.IT-32, p.41-50, 1986.
- [36]. Be'ery, Y., Snyders, J. Optimal soft decision block decoders based on fast Hadamard transform. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.IT-32, p.355-364, 1986.
- [37]. Forney, G. Coset codes – Part II : Binary Lattices and related codes. *IEEE Transactions on Information Theory* , v. IT-34, p.1152-1187, Sept. 1988.
- [38]. Snyders, J., Be'ery, Y. Maximum Likelihood Soft Decoding of Binary Block Codes and Decoders for the Golay Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.IT-35, n.5, p.963-975, Sept. 1989.
- [39]. Takata, T., Ujita, S., Kasami, T., Lin, S. Multistage Decoding of Multilevel Block M-PSK Modulation Codes and Its Performance Analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*. v.39, n.4, p. 1204-1218, July 1993.
- [40]. Berlekamp, E. The technology of error-correction codes. Proceedings IEEE, v.68, p. 564-593, May 1980.
- [41]. Herzberg, H., Poltyrev, G. The error probability of M-ary PSK block coded modulation schemes. *IEEE Transactions on Communications*, v.44, n.4, April 1996.
- [42]. Herzberg, H., Poltyrev, G. Bounds for the probability of decoding error in coded modulation structures. Proceedings CISS 1992, Princeton, NJ, p. 307-311, Mar. 1992.
- [43]. Hughes, B. On the error probability of signals in additive white Gaussian noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.37, p. 151-155, Jan. 1991.
- [44]. Poltyrev, G. Bounds on the decoding error probability of binary linear codes via their spectrum. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.40, p.1284-1292, July 1994.

- [45]. Dettmar, U., Portugheis, J., Hentsch, H. New Multistage Decoding Algorithm. *Electronics Letters*, v.28, n.7, March 26, 1992.
- [46]. Jones, R., Steele, N. Mathematics in communications theory. Ellis Horwood Limited, 1989.
- [47]. Moorthy, H., Lin, S., Uehara, G. Good Trellises for IC Implementation of viterbi Decoders for Linear Block Codes. *IEEE Transactions on Communications*, v. 45, n.1, Jan. 1997.
- [48]. Burr, A., Lunn, T. Block Coded Modulation Optimized for Finite Error Rate on the White Gaussian Noise Channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.43, n.1, p. 373-385, Jan. 1997.
- [49]. Herzberg, H. On the Spectrum of Distances of a Multilevel Code, Decoded by a Multistage Decoder. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.43, n.5, p. 1736-1740, Sept. 1997.
- [50]. Biglieri, E., Sandri, A., Spalvieri, A. Computing Upper Bounds to Error Probability of Coded Modulations Schemes. *IEEE Transactions on Communications*, v.44, n.7, p.786-790, July 1996.
- [51]. Biglieri, E., Caire, G., Taricco, G. Expurgating the Union Bound to Error Probability: A Generalization of the Verdú-Shields Theorem. Proceedings of the International Symposium on Information Theory, Ulm, Germany, p. 373, June 29- July 4, 1997.
- [52]. Verdú, S. Maximum likelihood sequence detection for intersymbol interference channels : A new upper bound on error probability. *IEEE Transactions on Information Theory*, v.IT-33, n.1, p.62-68, Jan. 1987.

Apêndice A

Grupos Representativos

Um dos parâmetros necessários para o projeto de um esquema de codificação - decodificação é o cálculo da probabilidade de erro para diferentes valores de relação sinal - ruído (RSR). Como foi visto no Capítulo 3, talvez a ferramenta mais utilizada para a estima da probabilidade de erro é o limitante de União definido por

$$P(e / \bar{x}_0) \leq \sum_{i=1}^{M-1} P(\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}_i) \quad (\text{A.1})$$

onde \bar{x}_i são vetores código do código C , $M = |C|$ e $P(\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}_i)$ é a probabilidade de decidir pelo vetor código \bar{x}_i dado que foi enviado o vetor código \bar{x}_0 e sem considerar a existência dos vetores código de C restantes.

Porém, o limitante de união não proporciona uma boa estimativa da probabilidade de erro para valores baixos e médios de RSR, devido fundamentalmente à superposição das regiões de erro das palavras código.

Verdú [51] e posteriormente Biglieri et al [52], apresentam condições para a redução de termos redundantes no limitante de união, para canais com ruído aditivo gaussiano e interferência intersimbólica. Já Kasami et al [24][26], introduzem o conceito de Grupo Representativo de um código para um canal com ruído aditivo gaussiano.

Seja C um código de bloco de comprimento n , representado por um conjunto de sinais reais em \mathfrak{R}^{2n} e seja $U(\bar{x})$ a região do espaço definida por

$$U(\bar{x}) = \{\bar{r} \in \mathfrak{R}^{2n} / DE^2(\bar{r}, \bar{x}) < DE^2(\bar{r}, \bar{0})\} \quad (A.2)$$

onde \bar{x} é um vetor código pertencente ao código C diferente do vetor código correspondente à palavra toda nula. Define-se como Grupo Representativo do código C ao subconjunto T de vetores código \bar{x} pertencentes a C , tais que

$$\bigcap_{\bar{x} \in T} U(\bar{x}) = \bigcap_{\bar{x} \in C - \{\bar{0}\}} U(\bar{x}) \quad (A.3).$$

Logo, o limitante de união é reduzido a :

$$P(e / \bar{x}_0) \leq \sum_{\bar{x}_i \in T} P(\bar{x}_0 \rightarrow \bar{x}_i). \quad (A.4)$$

Para a determinação do Grupo Representativo de um código, é precisa a análise de cada um dos vetores códigos. Para determinar se um vetor código pode ser excluído do sumatorio do limitante de união, Biglieri et al [52] apresentam a seguinte condição necessária e suficiente para códigos esféricos

$$\text{“Se } \bar{x}_k = \bar{x}_0 + \sum_{\bar{x}_j \in T} \alpha_j \cdot (\bar{x}_j - \bar{x}_0) \quad , \quad \alpha_j \in \mathfrak{R}, \alpha_j \geq 0 \quad (A.5)$$

então \bar{x}_k pode ser expurgado do limitante do união. Caso contrario, \bar{x}_k deve ser considerado.”

O procedimento para encontrar o Grupo Representativo de um código C, consiste em tentar expressar cada vetor código em função de vetores código de menor distância Euclidiana à palavra toda nula.

A continuação mostram-se dois exemplos de cálculo do Grupo Representativo de códigos com modulação M-PSK. Ressalta-se que as operações da equação A.2 a serem efetuadas para cada vetor código são operações vetoriais.

A.1. Exemplo A.1 Código binário com modulação BPSK

Seja C o código de paridade binário (8,7,2) sob modulação BPSK. Na Tabela A.1 mostra-se a composição do código binário em função da distância de Hamming (D.H.), assim como o espectro de distâncias para o vetor código correspondente à palavra toda nula em função da distância Euclidiana quadrática (D.E.Q.).

Coefficiente	D.H.	D.E.Q.
1	0	0.00
28	2	8.00
70	4	16.00
28	6	24.00
1	8	32.00

Tabela A.1. Espectro de distancias do código (8,7,2)

A análise para a obtenção do Grupo Representativo do código seria a seguinte:

I Palavras com distância de Hamming (d_H)=2 . Dado que para nenhuma das palavras de $d_H=2$ é possível encontrar o conjunto de valores α_j da equação A.2 , todas as palavras de $d_H=2$ pertencem ao Grupo Representativo.

II Palavras com $d_H=4$. Para qualquer palavra com $d_H=4$ é possível encontrar os α_j correspondentes.

A palavra código 00111100, cujo vetor código é $S_0 S_0 S_1 S_1 S_1 S_1 S_0 S_0$, pode ser excluída do limitante de União (não pertence ao Grupo Representativo) devido que

$$[S_0 S_0 S_1 S_1 S_1 S_1 S_0 S_0] = \bar{0} + (1) \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + (1) \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0]$$

onde S_0 e S_1 são os símbolos da constelação BPSK, e $\bar{\Delta}_0$ e $\bar{\Delta}_1$ são os vetores diferenças S_0-S_0 e S_1-S_0

III Palavras com $d_H=6$ e $d_H=8$. Como no item b, qualquer vetor código correspondente a uma palavra código com $d_H=6$ ou $d_H=8$ pode ser descrito como a soma vetorial de vetores código correspondentes a palavras código com $d_H=2$, portanto podem ser excluídas do limitante de união.

Finalmente , o Grupo Representativo do código binário (8,7,2) sob modulação BPSK é mostrado na Tabela A.2.

Coeficiente	D.E.Q.
28	8.00

Tabela A.2 Grupo Representativo do código (8,7,2)

A.2 Exemplo A.2 . Código BCM bidimensional sob modulação 8-PSK

Seja C o código BCM sob modulação 8-PSK definido por

$$C = [1]*(4,1,4) + [2]*(4,3,2) + [4]*(4,4,1)$$

cujo espectro de distâncias para a palavra toda nula¹ é mostrado na Tabela A.3

¹ Entenda-se o vetor código correspondente à palavra toda nula .

Coeficiente	D.E.Q.
1	0.00
8	2.3432
28	4.00
32	5.1716
118	8.00
32	10.8284
28	12.00
8	13.6568
1	16.00

Tabela A.3 Espectro de distancias do Exemplo A.2

Para a análise do Grupo Representativo do código, iremos considerar os vetores diferença de cada um dos símbolos da constelação 8-PSK ao símbolo S_0 mostrados na Figura A.2. A análise será feita para cada palavra código de C e utilizando a estrutura multinível com a qual foi construído.



Figura A.1. Estrutura multinível do código do Exemplo A.2

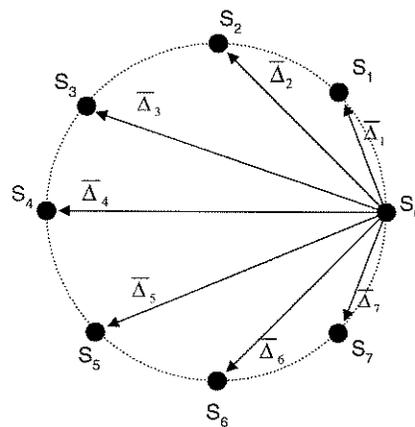


Figura A.2. Vetores diferença a serem utilizados

I Palavras com distância de Hamming ($d_{1H}=0$) no primeiro nível e distância de Hamming ($d_{2H}=0$) no segundo nível.

0	0	0	0
0	0	0	0
1	0	0	0

$$\text{Coef} = \binom{4}{1} = 4$$

$$\text{DEQ} = 1 \cdot (4.0) = 4.0$$

0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	0	0

$$\alpha_1 = 1.0 \quad \alpha_2 = 1.0$$

$$S_4 S_4 S_0 S_0 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0]$$

0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	0

$$\alpha_1 = 1.0 \quad \alpha_2 = 1.0$$

$$\alpha_3 = 1.0$$

$$S_4 S_4 S_4 S_0 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0]$$

0	0	0	0
0	0	0	0
1	1	1	1

$$\alpha_1 = 1.0 \quad \alpha_2 = 1.0$$

$$\alpha_3 = 1.0 \quad \alpha_4 = 1.0$$

$$S_4 S_4 S_4 S_4 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_4]$$

II Palavras com distância de Hamming ($d_{1H}=0$) no primeiro nível.

0	0	0	0
1	1	0	0
x	x	0	0

$$x = \{0, 1\}$$

$$\text{Coef} = \binom{4}{2} \cdot 2^2 = 24$$

$$\text{DEQ} = 2 \cdot (2.0) = 4.0$$

0	0	0	0
1	1	0	0
x	x	1	0

$$x = \{0, 1\}$$

$$\alpha_1 = 1.0 \quad \alpha_2 = 1.0$$

$$S_2 S_2 S_4 S_0 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_4 \bar{\Delta}_0]$$

0	0	0	0
1	1	1	1
x	x	x	x

$$x = \{0, 1\}$$

$$\alpha_1 = 1.0 \quad \alpha_2 = 1.0$$

$$S_2 S_2 S_2 S_2 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2]$$

III Palavras com distância de Hamming (d_{1H}) = 4 no primeiro nível.

1	1	1	1
0	0	0	0
0	0	0	0

Coef = 1
DEQ = $4 \cdot (0.5858) = 2.3432$

1	1	1	1
0	0	0	0
1	0	0	0

Coef = $\binom{4}{1} \cdot 1 = 4$
DEQ = $3 \cdot (0.5858) + 1 \cdot (3.4142) = 5.1716$

1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	0	0

$\alpha_1 = 0.4142$ $\alpha_2 = 0.5858$
 $\alpha_3 = 0.4142$ $\alpha_4 = 1.0$

$S_5 S_5 S_1 S_1 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0]$

1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	0

$\alpha_1 = 0.4142$ $\alpha_2 = 0.5858$
 $\alpha_3 = 0.4142$ $\alpha_4 = 1.0$

$S_5 S_5 S_5 S_1 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_5 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_5 \bar{\Delta}_1] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0]$

1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	1	1

$\alpha_1 = 2.4142$ $\alpha_2 = 3.4142$

$S_5 S_5 S_5 S_5 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7]$

1	1	1	1
1	1	0	0
0	0	0	0

$\alpha_1 = 0.5858$ $\alpha_2 = 0.4142$
 $\alpha_3 = 1.0$ $\alpha_4 = 0.4142$

$S_3 S_3 S_1 S_1 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0]$

1	1	1	1
1	1	0	0
0	0	1	0

$\alpha_1 = 0.5858$ $\alpha_2 = 0.4142$
 $\alpha_3 = 1.0$ $\alpha_4 = 0.4142$

$S_3 S_3 S_5 S_1 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_5 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_5 \bar{\Delta}_1] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0]$

1	1	1	1
1	1	0	0
0	0	1	1

$\alpha_1 = 0.5858$ $\alpha_2 = 0.4142$
 $\alpha_3 = 1.0$ $\alpha_4 = 0.4142$

$S_3 S_3 S_5 S_5 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_5 \bar{\Delta}_5] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_5 \bar{\Delta}_5] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0]$

1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	0

Coef = $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$
DEQ = $3 \cdot (0.5858) + 1 \cdot (3.4142) = 5.1716$

1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1

$$\text{Coef} = \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 24$$

$$\text{DEQ} = 2^*(0.5858) + 2^*(3.4142) = 8.00$$

1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1

$$\alpha_1 = 0.4142 \quad \alpha_2 = 0.5858$$

$$\alpha_3 = 0.4142 \quad \alpha_4 = 1.0$$

$$S_7 S_3 S_5 S_5 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_3 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_3 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6]$$

1	1	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0

$$\text{Coef} = \binom{4}{2} \cdot 1 = 6$$

$$\text{DEQ} = 4^*(0.5858) = 2.3432$$

1	1	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1

$$\text{Coef} = \binom{4}{2} \cdot 2 = 12$$

$$\text{DEQ} = 3^*(0.5858) + 1^*(3.4142) = 5.1716$$

1	1	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\alpha_1 = 0.4142 \quad \alpha_2 = 0.5858$$

$$\alpha_3 = 0.4142 \quad \alpha_4 = 1.0$$

$$S_7 S_7 S_5 S_5 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6]$$

1	1	1	1
1	1	1	1
0	0	0	0

$$\alpha_1 = 3.4142 \quad \alpha_2 = 2.4142$$

$$S_3 S_3 S_3 S_3 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7]$$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	0	0	0

$$\alpha_1 = 0.5858 \quad \alpha_2 = 0.4142$$

$$\alpha_3 = 1.0 \quad \alpha_4 = 0.4142$$

$$S_7 S_3 S_3 S_3 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_3 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_3 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6]$$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	0	0

$$\alpha_1 = 0.5858 \quad \alpha_2 = 0.4142$$

$$\alpha_3 = 1.0 \quad \alpha_4 = 0.4142$$

$$S_7 S_7 S_3 S_3 = \bar{0} + \alpha_1 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_1] + \alpha_2 \cdot [\bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_7] + \alpha_3 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_2 \bar{\Delta}_2] + \alpha_4 \cdot [\bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_0 \bar{\Delta}_6 \bar{\Delta}_6]$$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	0

$$\text{Coef} = \binom{4}{3} \cdot 1 = 4$$

$$\text{DEQ} = 3^*(0.5858) + 1^*(3.4142) = 5.1716$$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

$$\text{Coef} = \binom{4}{4} \cdot 1 = 1$$

$$\text{DEQ} = 4^*(0.5858) = 2.3432$$

O Grupo Representativo do código C é mostrado na Tabela A.4. Em geral para o cálculo do Grupo Representativo de um código precisa-se conhecer a composição completa do código. No caso de um código com esquema BCM, precisam-se conhecer a composição de cada um dos códigos a serem aplicados nos níveis.

Coeficiente	D.E.Q.
8	2.3432
28	4.00
32	5.1716
24	8.00

Tabela A.4 Grupo Representativo do código do Exemplo A.2

Dos exemplos A.1 e A.2 conclui-se que o número de vizinhos do espectro de distâncias não é alterado. De forma geral pode-se demonstrar que os vizinhos da palavra toda nula sempre pertencem ao Grupo Representativo. Um algoritmo de busca do Grupo Representativo, consistiria em gerar paulatinamente todos os vetores código do código e tentar expressá-los em função de vetores código mais próximos à seqüência toda nula.

Porém, para códigos com comprimento maior de 8 ou códigos com número de vizinhos alto, a busca do conjunto de valores α_j pode ser inadequada e/ou não necessária para o nosso objetivo de obter um limitante mais preciso.

Apêndice B

Treliças e complexidades

Neste apêndice apresenta-se o cálculo da complexidade de alguns dos decodificadores usados nesta tese. Em vez de se medir a complexidade pelo número de ramos na seção central da treliça, o que é feito por Wei [12] e Kasami et al [24], a complexidade aqui vai ser medida pelo número de operações do tipo aditivas que precisam-se fazer para decodificar a seqüência recebida.

A decodificação de treliças mais complexas, às vezes pode ser decomposta em várias treliças simples dispostas em série, em paralelo ou concatenadas. Nesses casos além da palavra decodificada, vai-se precisar do valor final da métrica da seqüência recebida para cada uma das treliças.

Por isso, apresenta-se o cálculo do número de operações do tipo aditivas necessárias para decodificar a palavra recebida não só quando se precise do valor final da métrica mas também como quando não for necessário.

Ressalta-se que as operações do tipo lógicas, assim como os possíveis endereçamentos de dados na memória, operações usadas na construção de tabelas, não serão consideradas no cálculo do número de operações do tipo aditivas.

Em todos os casos vai-se assumir que são obtidas as distâncias Euclidianas quadráticas do sinal recebido a todos os símbolos da constelação usados na modulação M-PSK.

B.1 Treliça de verificação de paridade .

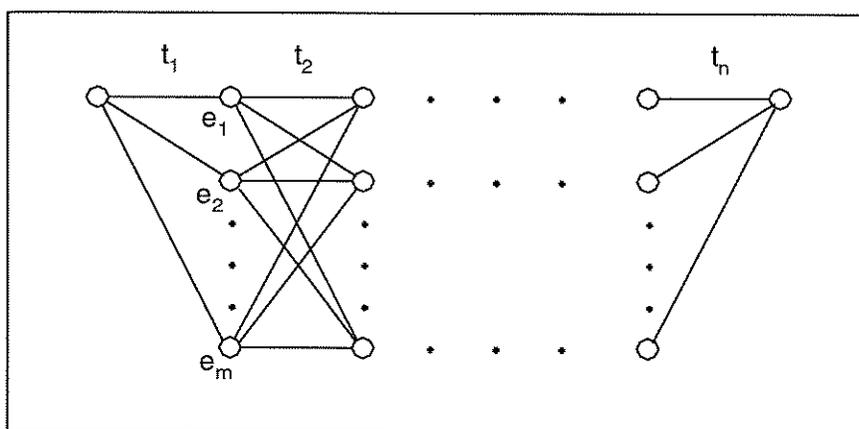


Figura B.1. Treliça de verificação de paridade de n seções e m estados

Para o caso geral de uma treliça de verificação de paridade de m estados, os ramos da treliça podem ser associados a elementos do $GF(m)$ ou de Z_m , sem afetar no processo de decodificação.

Assumindo que é conhecida a métrica de cada ramo, as operações aditivas do tipo aditivas a serem efetuadas em cada nó (excetuando os da primeira seção) são :

somas	m
comparações	m-1

	2m-1

Dado que o número de nós de decisão da treliça é $m \cdot (n-2) + 1$, o número total de operações aditivas (a complexidade) é dada por

$$(2m-1) \cdot [m \cdot (n-2) + 1]$$

No final da decodificação obtém-se a palavra código enviada assim como a métrica da seqüência recebida .

B.2 Código de paridade binário (n , n-1 , 2).

Método 1 . Utilizando o caso I para $m=2$

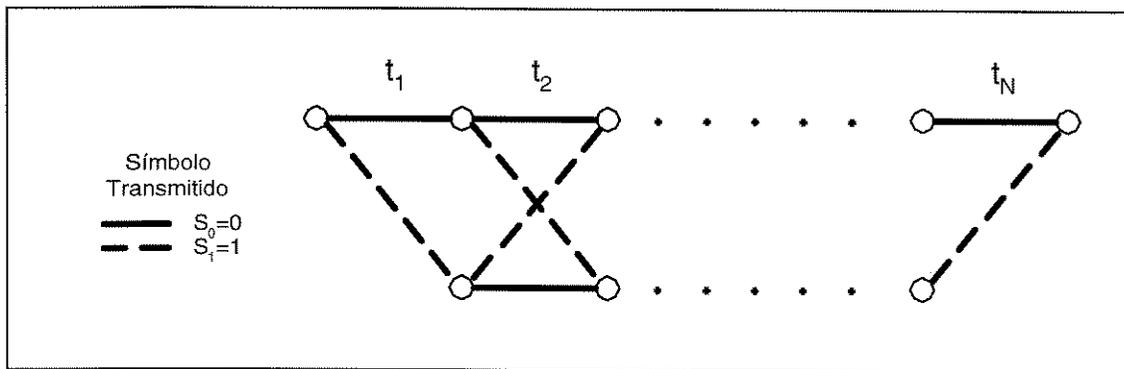


Figura B.2. Treliça do código de paridade binário

Número total de operações aditivas = $6n-9$. Obtém-se a palavra código enviada assim como a métrica da seqüência recebida.

Método 2. Utilizando o Algoritmo de Wagner

Procedimento a seguir :

1. Usando decisão abrupta em cada uma das n componentes do vetor \bar{r} recebido, forma-se o vetor \bar{b} composto por n valores binários.
2. Calcula-se a síndrome s do vetor \bar{b} , $S = H \cdot \bar{b}^T$,

onde H é a matriz de verificação de paridade

$$H = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$$

3. Se $\bar{S} = \bar{0}$, então aceita-se \bar{b} como a palavra transmitida.

4. Se $\bar{S} \neq \bar{0}$, acha-se o seguinte valor

$$\min_i \{ f(b_i \oplus S, r_i) - f(b_i, r_i) \} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

onde b_i : i-ésimo bit do vetor \bar{b}

r_i : i-ésimo sinal bidimensional do vetor r recebido

$f(a, t)$: distancia Euclidiana quadrática entre o o sinal t e o símbolo BPSK correspondente ao bit a .

e muda-se o bit na posição onde ocorre o valor mínimo.

O número de operações do tipo aditivas vem dada por : **n-1** comparações

Se for preciso o valor da métrica final, o número de operações aditivas sobe a :

somas	n-1
comparações	n-1
soma final	1
Total operações aditivas	2n-1

No caso em que r_i represente não só um símbolo mas uma sequência de símbolos, associa-se um elemento de Z_2 ou $GF(2)$ a cada sequência, e a decisão abrupta é feita baseadas nas métricas destas. Nesse caso, a decisão abrupta implicaria **n** operações aditivas a mais a serem realizadas.

B.3 Código Reed-Muller $RM_{3,1}$

Método 1 . Utilizando treliças .

Iremos considerar a treliça de Forney [37]. O número de operações aditivas é calculado considerando a treliça total como se fossem dois códigos de paridade em paralelo. Aplica-se o Algoritmo de Wagner em cada um.

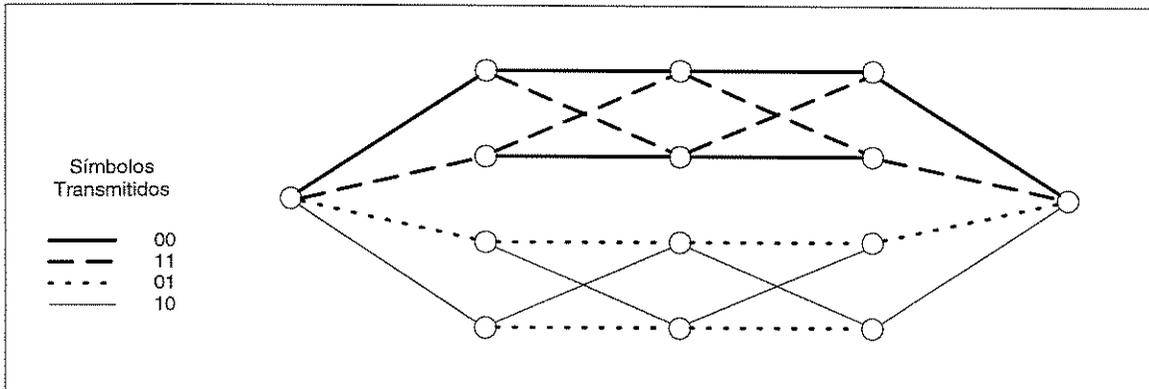


Figura B.3. Treliça do código $RM_{3,1}$

Número de operações aditivas :

Cálculo das métricas de cada ramo :	16
2 códigos de paridade ($n=4$) :	14
Comparação final :	1
Total operações aditivas	31.

Método 2. Utilizando o Algoritmo de Wagner generalizado.

Iremos considerar o algoritmo de Wagner generalizado sugerido por Snyders e Be'ery [36]. Como no caso do código de paridade, faz-se primeiro decisão abrupta nos símbolos recebidos. O número de operações aditivas vai depender da síndrome obtida. O procedimento geral para decodificar a sequência recebida sem obter a métrica final é o seguinte:

1. Usando decisão abrupta em cada uma das n componentes do vetor \bar{r} recebido, forma-se o vetor \bar{b} composto por n símbolos binários.

2. Calcula-se a síndrome \bar{s} do vetor \bar{b} , que vem dada por :

$$\bar{s} = H \cdot \bar{b}^T$$

onde H é a matriz de verificação

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Se $\bar{s} = \bar{0}$, então aceita-se \bar{b} como a palavra transmitida.

4. Se $\bar{s} \neq \bar{0}$, formam-se os grupos de colunas de H que somadas módulo 2 resultem na síndrome obtida. Procede-se a calcular para cada um dos grupos formados os valores da seguinte somatória (denominada *conf*).

$$conf = \sum_{i \in R} [f(b_i \oplus 1, r_i) - f(b_i, r_i)] \quad ,$$

onde b_i : i -ésimo bit do vetor \bar{b}

r_i : i -ésimo sinal bidimensional do vetor r recebido

$f(a, t)$: distancia euclidiana quadrática entre o sinal t e o símbolo BPSK correspondente ao bit a

R : conjunto de índices do grupo

5. Escolhe-se o menor valor de *conf* calculado e mudam-se os bits que correspondem às colunas que formam o grupo.

6. SNYDERS e BE'ERY [4] mostram que o número de grupos a serem formados depende da síndrome obtida, razão pela qual o número de operações aditivas a serem efetuadas não é constante. Na média o número de operações do tipo aditivas a serem realizadas para decodificar a palavra recebida é de **16** e nunca excede de 18.

Se fosse preciso o valor final da métrica da palavra recebida, fariam-se 8 operações aditivas a mais. O número total de operações aditivas a serem realizadas seria, na média, de **24**.

No caso em que a componente r_i do vetor recebido represente não só um símbolo mas uma sequência de símbolos, a decisão abrupta é feita baseada nas métricas das sequências. Nesse caso, a decisão abrupta implicaria **8** operações aditivas a mais a serem realizadas.

B.4 Código de paridade quaternário .

Método 1 . Utilizando a treliça do código

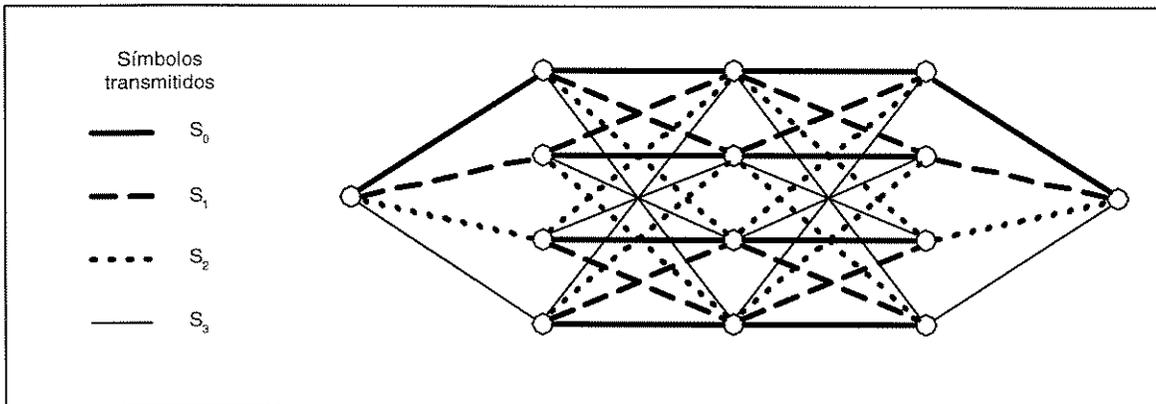


Figura B.4. Treliça do código de paridade quaternário para $n=4$.

Usando o caso geral do caso I, para $m=4$, o número de operações aditivas vem dado por $7 \cdot (4n-7)$. Obtém-se tanto a palavra decodificada como a métrica final da sequência recebida.

Método 2. Algoritmo de Wagner generalizado para GF(4).

Como uma extensão do Algoritmo de Wagner para códigos binários, apresenta-se um procedimento para decodificar uma seqüência de n símbolos pertencentes a um código de paridade em GF(4).

1. Usando decisão abrupta em cada uma das n componentes do vetor \bar{r} recebido, forma-se o vetor \bar{b} composto por n símbolos de GF(4).

2. Calcula-se a síndrome S do vetor \bar{b} , que é dada por :

$$S = H \cdot \bar{b}^T$$

onde $H = [1\ 1\ \dots\ 1]$

3. Se $S = 0$, então aceita-se \bar{b} como a palavra transmitida.

4. Se $S \neq 0$, procede-se a achar as posições e os valores de $conf_1$, $conf_2$ e $conf_3$

$$conf_1 = \min_i \{f(b_i \oplus S, r_i) - f(b_i, r_i)\}$$

$$conf_2 = \min_i \{f(b_i \oplus \lambda, r_i) - f(b_i, r_i)\}$$

$$conf_3 = \min_i \{f(b_i \oplus S \oplus \lambda, r_i) - f(b_i, r_i)\}$$

onde λ : elemento de GF(4) diferente de 0 e S

b_i : i -ésimo símbolo do vetor \bar{b}

r_i : i -ésimo sinal bidimensional do vetor r recebido

$f(a,t)$: distancia euclidiana quadrática entre o sinal t e o símbolo PSK correspondente ao símbolo a

R : conjunto de índices do grupo

i : $1, 2, \dots, n$

5. Se $conf_1 > conf_2 + conf_3$, procede-se a mudar os símbolos b_i nas posições correspondentes aos símbolos $b_i + \lambda$ e $b_i + \lambda + S$. Caso contrário, muda-se o símbolo b_i na posição de $conf_1$ pelo símbolo $b_i + S$.

O número de operações do tipo aditivas necessárias para a decodificação da seqüência recebida, sem determinar o valor final da métrica, vem dado por :

Subtrações	n
Comparações	$3(n-1)$
Soma $conf_2+conf_3$	1
Comparação final	1
Total operações aditivas	$4n-1$

Para decodificar a palavra recebida obtendo a métrica da seqüência recebida :

Somas das métricas	$n-1$
Decodificador anterior	$4n-1$
Soma final	1
Total operações aditivas	$5n-1$

No caso em que r_i represente não só um símbolo mas uma seqüência de símbolos, a decisão abrupta é feita baseada nas métricas das seqüências. Nesse caso, a decisão abrupta implicaria $2n$ operações aditivas a mais a serem realizadas.

B.5 Função cross-over

A função “cross-over” foi proposta por Kasami et al [26] no sentido de reduzir o número de vizinhos mais próximos de uma palavra código, introduzindo interdependência entre dois códigos adjacentes. Com a aplicação da função cross-over obtém-se uma melhora no desempenho do código em troca de uma maior complexidade no processo de decodificação.

A trelça da função “cross-over” é derivada das trelças dos códigos originais. Na Figura B.5 apresentam-se um exemplo de uma trelça de um do código original e do código depois de ser aplicada a função “cross-over”.

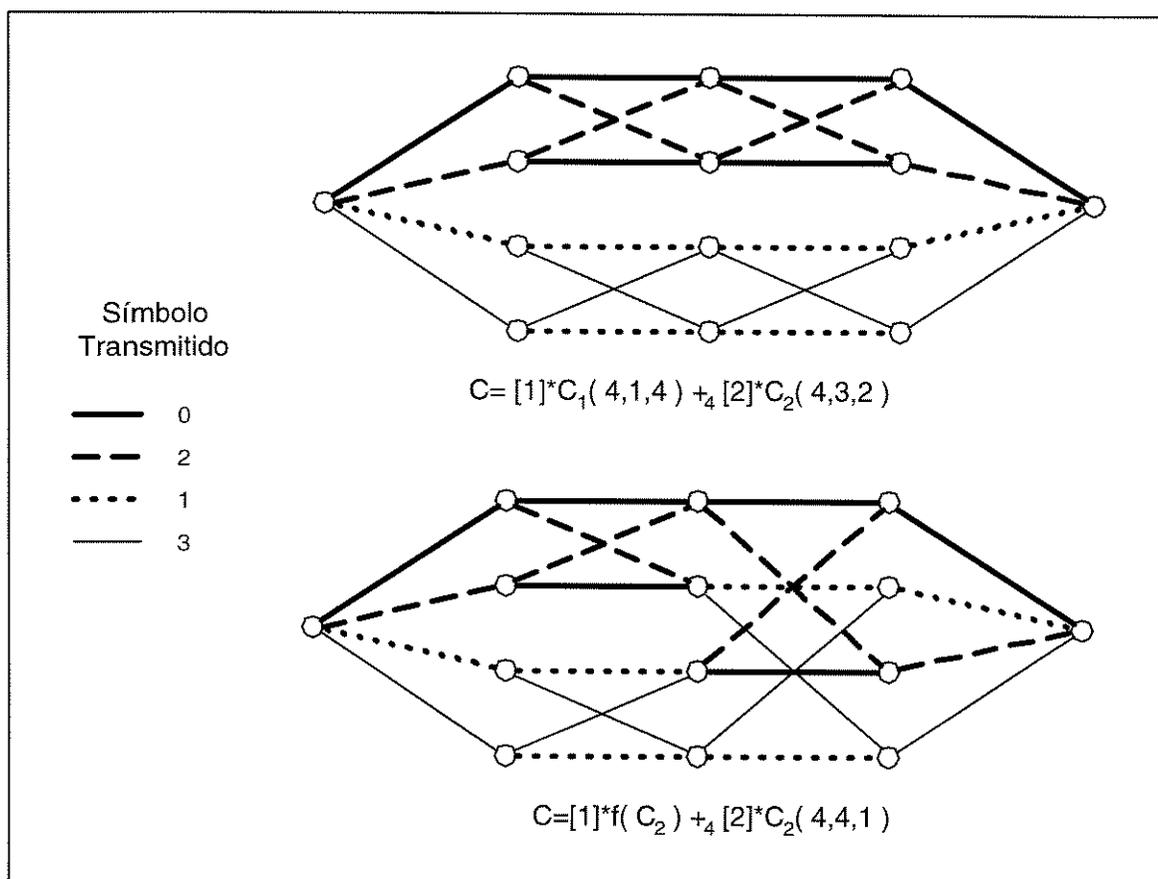


Figura B.5 Treliças do código original e do código depois da utilização da função “cross-over”.

Apesar das alterações na terceira seção da treliça, observa-se que o número de caminhos que chegam e saem de cada nó é o mesmo que na treliça do código original. Logo, é possível o cálculo do número de operações aditivas como se fosse o código original.

Número de operações aditivas :

2 treliças de paridade (m=2, n=4)	30
1 comparação	1
Total operações aditivas	31

Melhor desempenho, porém maior complexidade no decodificador, é obtido quando a função “cross-over” é aplicada sobre diversos pares de códigos internos. No código estudado nesta tese (ver Tabela 4.3), onde a função “cross-over” é utilizada duas vezes, a treliça de decodificação tem estrutura similar à treliça do código

$$C = [1]*f(C_4) +_{16} [2]*f(C_3) +_{16} [4]*C_3(4,4,1) +_{16} [8]*C_4(4,4,1)$$

que foi derivado do código :

$$C = [1]*(4,1,4) +_{16} [2]*(4,1,4) +_{16} [4]*(4,3,2) +_{16} [8]*(4,3,2)$$

Como a treliça deste último pode ser descrita como quatro treliças de paridade quaternária ¹(ver o caso IV deste Apêndice) em paralelo e que a função “cross-over” muda só a metade da estrutura da treliça, a treliça do código modificado apresenta a estrutura mostrada na Figura B.6.

Como no primeiro caso, apesar das alterações na estrutura da treliça, o número de operações aditivas a serem efetuadas pode ser calculado a partir das treliças simples que a compõem.

Número de operações aditivas:

4 treliças tipo Caso I (m=4 , n=4)	252
3 comparações	3
Total operações aditivas	255

¹ A soma do código [8]*(4,4,1) com o código [16]*(4,4,1) forma um código cuja treliça de decodificação é equivalente à treliça do código de paridade quaternário.

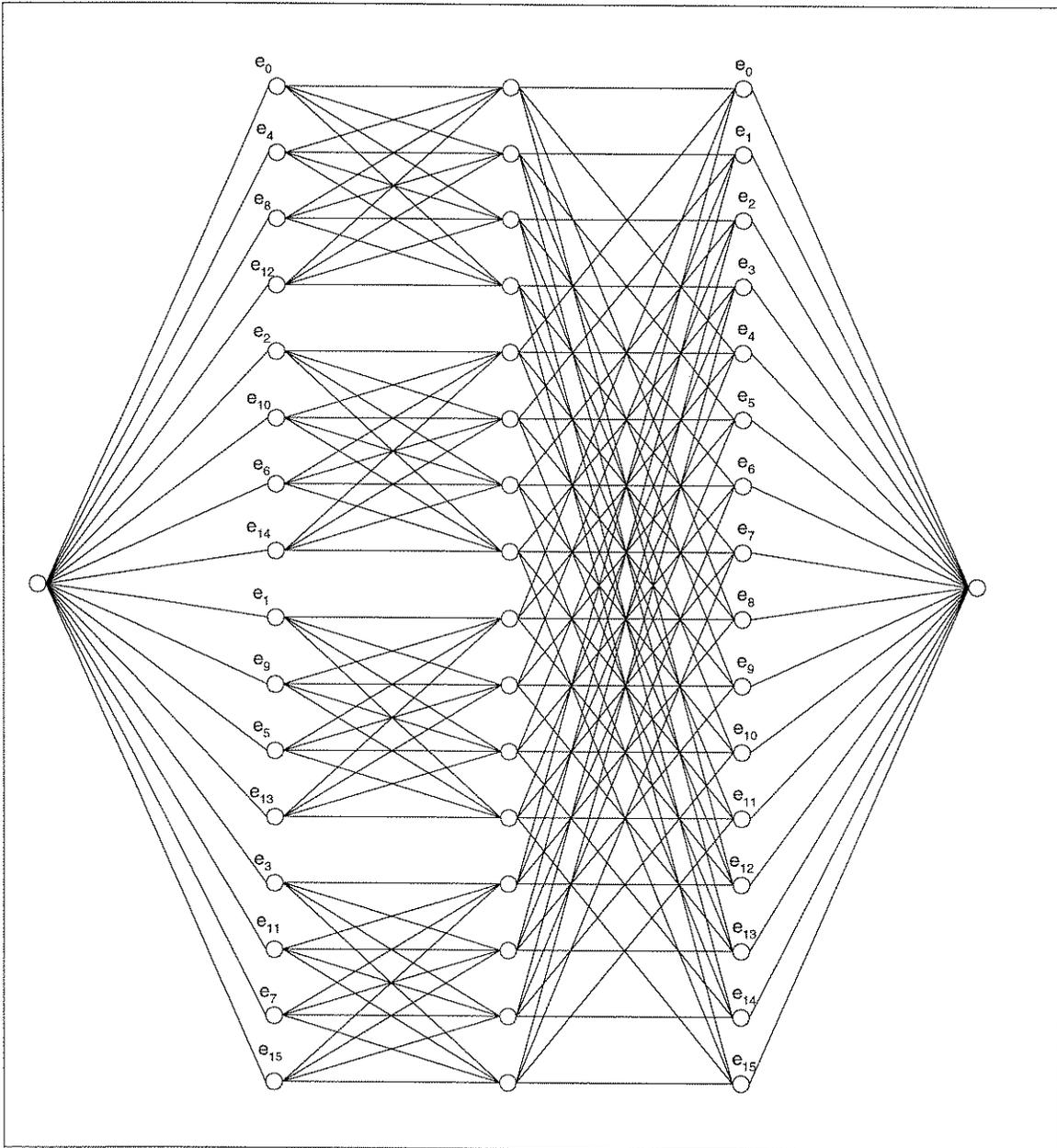


Figura B.6. Trelça do código utilizando duas vezes a função “cross-over”

B.6 Código Reed-Muller $RM_{3,1}$ com transições paralelas.

O código que é obtido da seguinte expressão :

$$C = [2] * RM_{3,1} (8 , 4 , 4) +_8 [4] * (8 , 8 , 1)$$

é equivalente ao código Reed-Muller do caso III com a diferença de que neste caso cada um dos ramos da treliça equivale a 4 possíveis sequências ao invés de uma só.

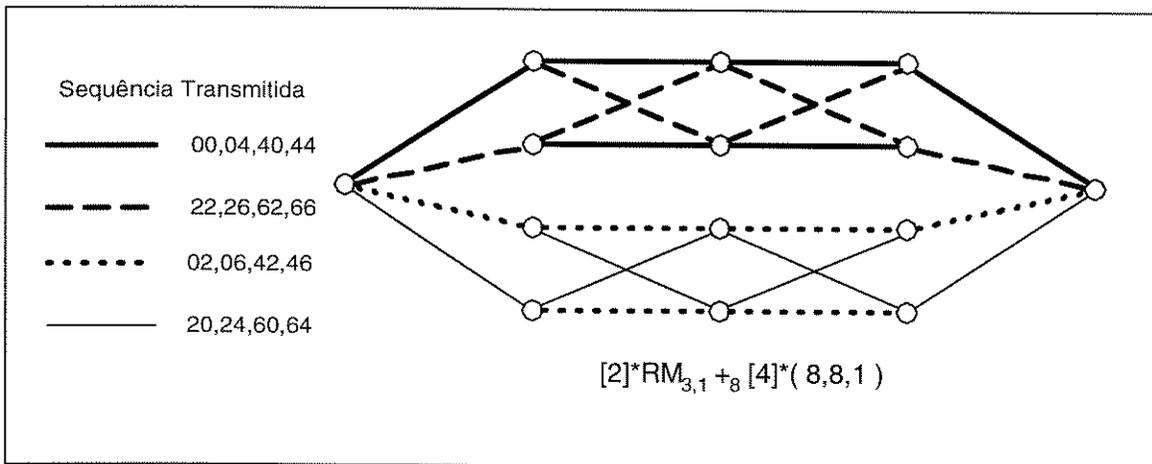


Figura B.7. Treliça do código $RM_{3,1}$ com transições paralelas

Devido à natureza do código, as transições paralelas podem ser resolvidas utilizando-se decisão abrupta. Logo, pode-se decodificar este código seguindo o método sugerido no caso II. A decisão pela sequência mais próxima da sequência recebida precisará de **16** operações do tipo aditivas, e de **24** se for necessário o valor da métrica final.

B.7 Código Reed-Muller $RM_{3,1}$ concatenado com o código de paridade.

O código é formado pela seguinte expressão :

$$C = [2] * RM_{3,1} (8 , 4 , 4) +_8 [4] * (8 , 7 , 2)$$

composto por duas trelças do tipo paridade em $GF(4)$ em paralelo. Nesse caso, as transições paralelas não podem ser resolvidas usando decisão abrupta, pois é preciso primeiro calcular as métricas de cada ramo.

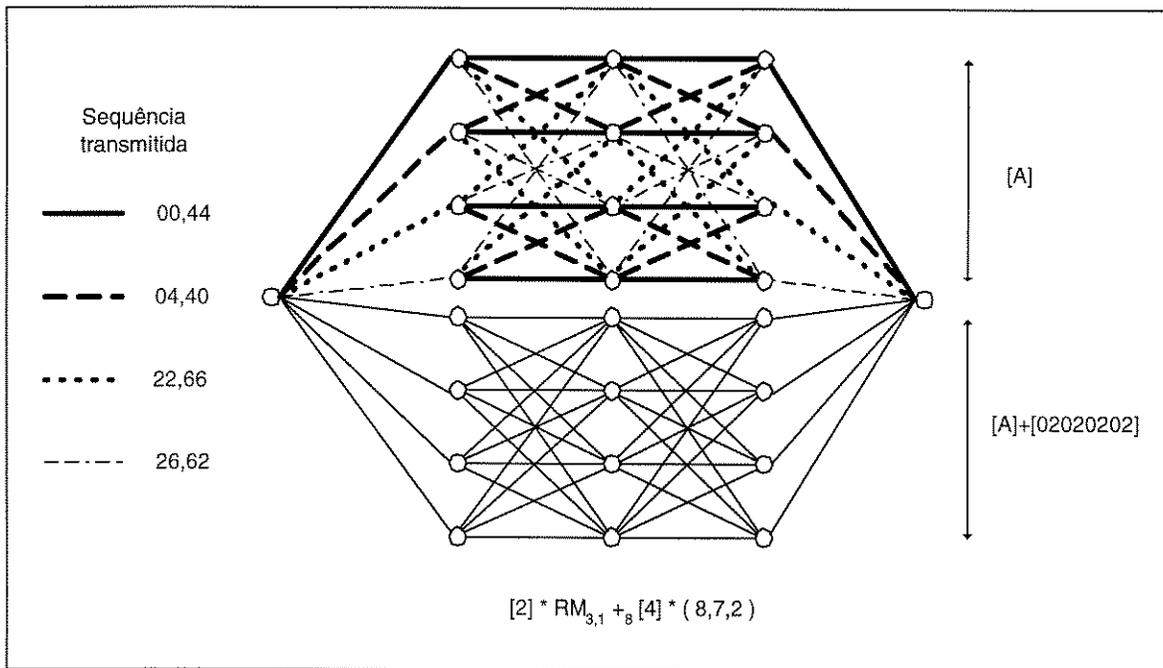


Figura B.8. Treliça do código $RM_{3,1}$ concatenado com o código de paridade

O cálculo do número de operações do tipo aditivas necessárias para decodificar a sequência recebida pode ser feito da seguinte maneira:

Cálculo da métrica de um ramo	
2 somas	2
1 comparação	1
total operações aditivas	3

Cálculo da treliça

32 ramos	96
2 treliças de paridade em GF(4)	54
1 comparação	1
Total operações aditivas	151