

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO**  
**DEPARTAMENTO DE SISTEMAS E CONTROLE DE ENERGIA**

**PARÂMETROS LONGITUDINAIS E TRANSVERSAIS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO**  
**CALCULADOS A PARTIR DAS CORRENTES E TENSÕES DE FASE**

**Sérgio Kurokawa**

Orientador: Prof. Dr. José Pissolato Filho

Co-orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Cristina Dias Tavares

**Banca Examinadora:**

|  |              |
|--|--------------|
| Prof. Dr. Carlos Alberto de Castro Júnior                                  | UNICAMP      |
| Prof. Dr. Carlos Manuel J. C. M. Portela                                   | COPPE - UFRJ |
| Prof. Dr. Carlos Rodrigues de Souza  | UNICAMP      |
| Prof <sup>a</sup> . Dr <sup>a</sup> . Francisca Aparecida de Camargo Pires | UNICAMP      |
| Prof. Dr. Washington Luiz Araújo Neves                                     | UFCG         |

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA**.

**Campinas/2003**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

K966p Kurokawa, Sérgio  
Parâmetros longitudinais e transversais de linhas de  
transmissão calculados a partir das correntes e tensões de fase  
/ Sérgio Kurokawa. --Campinas, SP: [s.n.], 2003.

Orientadores: José Pissolato Filho; Maria Cristina Dias  
Tavares.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Linhas elétricas aéreas. 2. Modelos matemáticos. 3.  
Impedância (Eletricidade). 4. Autovalores. 5. Matrizes  
(Matemática). 6. Circuitos elétricos – Corrente alternada. 7.  
Análise modal. I. Pissolato Filho, José. II. Tavares, Maria  
Cristina Dias. III. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. IV.  
Título.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é desenvolver um processo de cálculo dos parâmetros longitudinais e transversais da linha de transmissão a partir das correntes e tensões de fase da linha. O método utiliza o conceito de impedância equivalente que é a impedância calculada em um extremo da linha considerando o outro extremo em aberto e em curto circuito, respectivamente. Inicialmente são desenvolvidas equações que relacionam as correntes e tensões nas fases com as impedâncias equivalentes da linha. Em seguida, são mostradas equações que relacionam as impedâncias equivalentes com as funções de propagação modais da linha. Utilizando as impedâncias equivalentes e a função de propagação de cada modo é possível obter os parâmetros longitudinais e transversais da linha no domínio modal. Para converter os parâmetros do domínio modal para o domínio das fases são utilizadas duas matrizes de transformação: Em uma situação utiliza-se a matriz de transformação modal exata e em outra situação, utiliza-se a matriz de Clarke como sendo a única matriz de transformação. São obtidos resultados para uma linha trifásica, com comprimento de 500 km, sem transposição e com plano de simetria vertical, cuja tensão nominal é 440 kV. Os resultados obtidos com o uso da matriz de transformação exata confirmaram que o método desenvolvido está matematicamente correto. Os resultados obtidos com o uso da matriz de Clarke mostraram que se as correntes e tensões de fase, em função da frequência, são conhecidas é possível obter, com algumas aproximações, os parâmetros longitudinais e transversais desta linha.

## ABSTRACT

The objective of this work is to develop a methodology to improve a proceeding to calculate the longitudinal and shunt transmission line parameters using phase currents and voltages. The methodology uses the equivalent impedance concept (that are impedance calculated at one terminal considering the other terminal with zero current (open) and, in other situation, with zero voltage (short-circuited)). Initially, equations that relate the equivalent impedance with modal propagation functions are developed. Using the equivalent impedance and propagation function is possible to calculate longitudinal and shunt parameters in mode domain. Conversion between mode domain and phase domain is done with modal transformation matrix and, in other situation, with Clarke matrix. Results are obtained for a non-transposed three-phase transmission line with vertical symmetry plane, 440 kV and 500 km length. Mathematical proceedings are approved with the use of modal transformation matrix. The use of Clarke matrix has shown that methodology can be used, with some approximations, to calculate longitudinal and shunt parameters of a transmission line which is in operation.



## **Órgãos financiadores**

CAPES – Pagamento de bolsa de doutorado (PICD) durante o desenvolvimento do trabalho

UNESP – Pagamento de salário do autor durante o período em que o mesmo desenvolvia o trabalho com afastamento integral de suas funções na Universidade;

FUNDUNESP, FUNCAMP E PROAP/UNICAMP – Fornecimento de verbas para pagamento de passagens e diárias para participação em congressos nacionais e internacionais;



Para Raquel, Gabriel e  
Matheus



“Dirige os meus passos nos teus caminhos  
para que as minhas pegadas não vacilem”

(Salmo 17:5)



## **Agradecimentos**

Ao Prof. Dr. José Pissolato Filho e a Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Maria Cristina Tavares pela orientação durante o desenvolvimento do trabalho e ao Prof. Dr. Carlos Manoel Portela pela revisão dos artigos.

A minha esposa Raquel pelo incentivo e compreensão durante minha ausência.

Aos colegas Brito, Eliane e Marcus pelo companheirismo e descontração.

Enfim um agradecimento especial para todos os colegas do DSCE/FEEC/UNICAMP, com os quais mantive contato durante o desenvolvimento da tese, que juntos criaram um ambiente de convívio saudável e respeitoso que muito contribuiu para que este trabalho tivesse êxito.



# SUMÁRIO

## Capítulo 1 Introdução

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Evolução histórica das linhas de transmissão | 01 |
| 1.2. Modelos de linhas de transmissão             | 03 |
| 1.3. Parâmetros da linha de transmissão           | 04 |

## Capítulo 2 Efeito dos cabos pára-raios sobre os parâmetros de linhas aéreas

|  |    |
|--|----|
| 2.1. Introdução  | 07 |
| 2.2. Efeito sobre linhas de transmissão genéricas      | 08 |
| 2.3. Efeito sobre linhas de transmissão trifásicas     | 12 |
| 2.3.1. Linha com parâmetros constantes                 | 15 |
| 2.3.2. Linhas com parâmetros dependentes da frequência | 21 |
| 2.4. Conclusões  | 25 |

## Capítulo 3 Modos exatos e Quase-modos

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Introdução  | 27 |
| 3.2. Modos exatos da linha   | 28 |
| 3.2.1. Matrizes de impedâncias e admitâncias modais                | 31 |
| 3.2.2. Relação entre as matrizes $[T_V]$ e $[T_I]$                 | 32 |
| 3.2.3. Relação entre as matrizes $[\lambda_m]$ , $[Z_m]$ e $[Y_m]$ | 33 |
| 3.3. Quase-modos da linha de transmissão                           | 34 |
| 3.4. Solução das equações diferenciais no domínio dos modos        | 37 |
| 3.5. Conclusões  | 38 |

## Capítulo 4 Impedâncias equivalentes

|  |    |
|--|----|
| 4.1. Introdução  | 41 |
| 4.2. Definição de impedância equivalente                                     | 41 |
| 4.3. Impedâncias equivalentes dos modos exatos da linha                      | 43 |
| 4.4. Influência da matriz de transformação sobre as impedâncias equivalentes | 51 |



|  |    |
|--|----|
| 4.4.1. Comparação entre o modo 1 e o quase-modo $\alpha$ | 52 |
| 4.4.2. Comparação entre o modo 2 e o quase-modo $\beta$  | 54 |
| 4.4.3. Comparação entre o modo 3 e o quase-modo zero     | 57 |
| 4.5. Conclusões  | 58 |

## **Capítulo 5 Impedâncias equivalentes calculadas a partir das correntes e tensões de fase**

|  |    |
|--|----|
| 5.1. Introdução  | 59 |
| 5.2. Correntes e tensões modais da linha   | 59 |
| 5.3. Correntes e tensões nas fases da linha  | 62 |
| 5.3.1. Linha com o receptor em aberto  | 63 |
| 5.3.2. Linha com o receptor em curto circuito  | 64 |
| 5.4. Matrizes $[A_m]$ e $[M_m]$ para linhas genéricas  | 68 |
| 5.5. Matrizes $[A_m]$ e $[M_m]$ para linhas trifásicas   | 69 |
| 5.6. Matrizes $[A_m]$ e $[M_m]$ para linhas trifásicas com plano de simetria vertical              | 73 |
| 5.7. Cálculo das impedâncias equivalentes de uma linha trifásica<br>com plano de simetria vertical | 74 |
| 5.7.1. Correntes e tensões nas fases   | 75 |
| 5.7.2. Impedâncias equivalentes  | 82 |
| 5.7.3. Influência da matriz de transformação   | 86 |
| 5.8. Conclusões  | 89 |

## **Capítulo 6 Parâmetros da linha calculados a partir das correntes e tensões de fase, Utilizando a matriz $[T_I]$**

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 6.1. Introdução                      | 91  |
| 6.2. Funções de propagação           | 92  |
| 6.2.1. Componente imaginária         | 95  |
| 6.2.2. Correção da função F          | 97  |
| 6.3. Cálculo dos parâmetros da linha | 102 |
| 6.3.1. Parâmetros longitudinais      | 103 |
| 6.3.2. Parâmetros transversais       | 106 |
| 6.4. Conclusões                      | 109 |



**Capítulo 7 Parâmetros da linha calculados a partir das correntes e tensões de fase,  
Utilizando a matriz de Clarke**

|  |     |
|--|-----|
| 7.1. Introdução  | 111 |
| 7.2. Funções de propagação   | 112 |
| 7.2.1. Componente imaginária   | 115 |
| 7.2.2. Correção da função F  | 117 |
| 7.3. Cálculo dos parâmetros da linha   | 119 |
| 7.3.1. Parâmetros longitudinais  | 119 |
| 7.3.2. Parâmetros transversais   | 122 |
| 7.4. Análise do erro   | 125 |
| 7.4.1. Parâmetros longitudinais  | 125 |
| 7.4.2. Parâmetros transversais   | 128 |
| 7.5. Conclusões  | 130 |
| <b>Conclusões</b>  | 131 |
| <b>Referências bibliográficas</b>  | 135 |
| <b>Apêndice</b> Cálculo da função de propagação a partir das correntes e tensões de fase | 141 |



# 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Evolução histórica das linhas de transmissão [6, 12]

A transmissão de energia elétrica é talvez a contribuição de maior importância que a engenharia ofereceu à civilização moderna. Entre suas visíveis manifestações, as mais expressivas são as linhas de transmissão de alta tensão sobre elevadas torres de aço que cruzam o país em todas as direções. Transportando milhares de megawatts de energia, estas linhas interligam as estações geradoras distantes com os centros urbanos de carga ou unem, em sistemas cooperativos, as instalações de produção de energia de grandes áreas geográficas.

No entanto, somente no final do século XIX é que foi possível, graças aos trabalhos de cientistas como Siemens, Gramme e Pacinotti, a obtenção de energia elétrica em quantidades razoáveis a partir da energia mecânica. Somente em 1879-1880, porém, com a invenção da lâmpada incandescente por Thomas A. Edison, é que a energia elétrica teve seu grande impulso. A partir de 1882, quando foi inaugurada a central elétrica de Pearl, pelo mesmo Edison, fornecendo iluminação pública e energia para motores em parte da cidade de Nova York, começaram a surgir os primeiros sistemas comerciais de eletricidade, em diversos países do mundo. Com eles também tiveram início problemas com o transporte e a distribuição de energia elétrica, então gerada e consumida em tensão contínua. A expansão dos sistemas incipientes e o uso da energia hidráulica eram limitados devido à queda de tensão e ao efeito Joule. Para evitar a utilização de condutores de seções maiores, as centrais elétricas eram construídas relativamente próximas umas das outras. O grande potencial hidroelétrico ficava fora de alcance, pois a energia era consumida na tensão em que era produzida, não havendo solução imediata à vista para os problemas de corrente contínua.

Por volta de 1884/1885 foi inventado o transformador, que permitia elevar e abaixar a tensão alternada com alto grau de rendimento. Nessas condições, o problema de transmissão em tensões mais elevadas, portanto com menores perdas de energia, estava resolvido. Destaca-se neste

## Introdução

período, duas realizações que podem ser consideradas notáveis para a época: Em 1886 foi construída na Itália uma linha monofásica com 29,5 km, conduzindo 2700 HP para Roma e em 1888 foi construída uma linha trifásica de 11 kV e 180 km na Alemanha.

A invenção, entre 1885 e 1888, dos motores a indução, devida a Ferraris e Tesla, deu novo impulso aos sistemas de tensão alternada em detrimento dos sistemas de tensão contínua, que foram, pouco a pouco sendo substituídos. Mais e mais energia elétrica passou a ser utilizada, crescendo continuamente as potências das centrais elétricas; os novos locais que favoreciam aproveitamentos hidroelétricos tornavam-se cada vez mais remotos, exigindo tensões sempre mais elevadas e linhas mais longas, avolumando-se os problemas. Assim é que, por volta de 1903, a tensão de 60 kV era atingida; em 1910, 150 kV. Por volta de 1922 entrou em operação a primeira linha de 230 kV, em 1936, uma linha de 287 kV. Esta somente foi suplantada em 1950, com a entrada em serviço de uma linha de cerca de 1000 km de comprimento e tensão de 400 kV na Suécia. Por volta de 1955 foram construídas as primeiras linhas em 345 kV nos Estados Unidos, onde se iniciaram estudos e experiências, visando à implantação de linhas de 500 kV. Entre 1964 e 1967, no Canadá, foram projetadas e construídas as primeiras linhas de 735 kV.

A primeira linha de transmissão de que se tem registro no Brasil foi construída por volta de 1883, na cidade de Diamantina, Minas Gerais. Esta linha transportava energia gerada em uma usina hidroelétrica, constituída de duas rodas d'água e dois dínamos Gramme, a uma distância de 2 km, aproximadamente. A energia transmitida através desta linha acionava bombas hidráulicas em uma mina de diamantes. Consta que era a linha mais longa do mundo, na época. Em 1901, com a entrada em serviço da central Hidroelétrica de Santana do Parnaíba, a então The San Paulo Tramway Light and Power Co. Ltd. construiu as primeiras linhas de seus sistemas de 40 kV. Em 1914, com a entrada em serviço da Usina Hidroelétrica de Utopararanga, a mesma empresa introduziu o padrão 88 kV. Esse padrão de tensão foi, em seguida, adotado pela Companhia Paulista de Estradas de Ferro, Estrada de Ferro Sorocabana e, através desta, pela USELPA, que futuramente viria a integrar o sistema CESP. Entre 1945 e 1947 construiu-se a primeira linha de 230 kV no Brasil, com um comprimento aproximado de 330 km. Esta linha, destinada a interligar os sistemas Rio Light e São Paulo Light, operava inicialmente em 170 kV, passando, em 1950, a operar com 230 kV. Foi também a primeira interligação de dois sistemas importantes realizados no Brasil. Vieram, a partir daí, em rápida sucessão, as linhas de 230 kV do sistema da Cia. Hidroelétrica de São Francisco, 161 e 345 kV da CEMIG e FURNAS, 460 kV da CESP, as linhas de 500 kV de FURNAS e 800 kV do sistema Itaipu. De acordo com dados disponíveis na página do Operador Nacional do Sistema

## Introdução

Elétrico (ONS), no final de 2002 a rede de transmissão brasileira era formada por mais de 72000 km de linhas de transmissão em tensões iguais ou superiores a 230 kV conforme mostra a tabela 1.1.

| Tensão (kV) | Extensão (km) |
|-------------|---------------|
| 230         | 33290,0       |
| 345         | 9021,0        |
| 440         | 6667,5        |
| 500         | 19525,2       |
| 600 (cc)    | 1612,0        |
| 750         | 2683,0        |

Tabela 1.1-Tensões de transmissão do sistema elétrico brasileiro

### **1.2 Modelos de linhas de transmissão**

Na literatura existem diversas representações para as linhas de transmissão. Quanto à técnica de simulação utilizada, os modelos podem ser classificados em dois grandes grupos que são os modelos descritos no domínio do tempo e os modelos descritos no domínio da frequência [30].

Nos modelos do primeiro grupo, a solução é obtida diretamente em função do tempo sem o uso de transformadas inversas (de Fourier ou de Laplace) enquanto que no segundo grupo a solução é primeiramente obtida no domínio da frequência e, em seguida, convertida para o domínio do tempo através de transformadas inversas. Os modelos escritos no domínio da frequência são limitados quanto à sua capacidade de representar corretamente alterações na configuração do sistema (tais como faltas e manobras) e apresentam dificuldades quanto à representação de elementos não lineares.

Os modelos de linhas de transmissão também podem ser classificados quanto à natureza de seus parâmetros em modelos a parâmetros concentrados e modelos a parâmetros distribuídos. Os modelos a parâmetros concentrados são de fácil utilização [29], mas não podem representar adequadamente a linha em toda a faixa de frequências que estão presentes em fenômenos de natureza transitória. Na maior parte dos casos estes modelos aumentam a amplitude das harmônicas de ordem elevada, distorcendo as formas de ondas e produzindo picos exagerados [28]. Os modelos com parâmetros distribuídos dependentes da frequência são considerados mais precisos que os modelos que consideram os parâmetros constantes [1]. Atualmente, nos modelos com parâmetros

## Introdução

concentrados a dependência da frequência é representada através da associação série e paralela de elementos R e L [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48 e 49].

As linhas de transmissão polifásicas podem ainda ser representadas no domínio modal [10, 53] ou no domínio das fases [2, 32, 34]. Os modelos que representam linhas polifásicas no domínio modal requerem o cálculo de autovetores e autovalores das matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  da linha. A linha polifásica com  $n$  fases é então convertida em  $n$  linhas monofásicas independentes e matematicamente equivalentes ao sistema polifásico original.

### **1.3 Parâmetros da linha de transmissão**

Os parâmetros da linha de transmissão são variáveis em função da frequência devido aos efeitos solo e pelicular. Para calcular estes parâmetros utilizam-se as equações de Carson e as equações modificadas de Bessel, considerando as seguintes simplificações [47]:

- O solo é plano nas vizinhanças da linha;
- O solo é homogêneo, sendo a condutividade e a constante dielétrica independentes da frequência e constantes ao longo de toda a extensão da linha;
- Os condutores são paralelos entre si e o solo, sendo seus raios muito inferiores às distâncias envolvidas;
- Os efeitos terminais da linha e das estruturas são desprezados na determinação do campo eletromagnético;
- Os cabos pára-raios de aço da linha possuem permeabilidade magnética constante;
- Os cabos de fase, compostos por fios encordoados com alma de aço, são representados através de um condutor com seção reta com a forma de coroa circular, onde a corrente na alma de aço é desprezada.

Desconsiderar as simplificações anteriores no cálculo dos parâmetros da linha seria bastante complicado. No entanto, se for possível obter os parâmetros longitudinais e transversais da linha a partir das correntes e tensões nas fases da mesma, pode-se considerar que, para o comprimento de linha em questão, os resultados estarão livres das simplificações mencionadas anteriormente uma vez que os parâmetros seriam obtidos a partir de dados obtidos na linha de transmissão já construída.

## Introdução

O objetivo deste trabalho é propor um método de cálculo dos parâmetros longitudinais e transversais da linha a partir das correntes e tensões nas fases da mesma. O processo baseia-se no cálculo das funções de propagação, no domínio modal, a partir das correntes e tensões em um extremo da linha, considerando o outro extremo em aberto e em curto-circuito.

No capítulo 2 é feito um estudo da variação dos parâmetros longitudinais da linha em função da frequência, com e sem cabos pára-raios, considerando os efeitos solo e pelicular.

O capítulo 3 mostra a decomposição da linha em seus modos e também as maneiras como estes modos podem ser representados.

O capítulo 4 introduz o conceito de impedâncias equivalentes dos modos da linha. Mostra, também, qual é a influência da matriz de transformação sobre a impedância equivalente.

No capítulo 5 mostra-se a relação que existe entre as impedâncias equivalentes dos modos e as correntes e tensões nas fases da linha.

Nos capítulos 6 e 7 são mostradas as equações que relacionam as funções de propagação com as impedâncias equivalentes. Com as funções de propagação e as impedâncias equivalentes de cada um dos modos calcula-se os parâmetros longitudinais e transversais modais da linha. Em seguida, utilizando-se as transformações modais ou a matriz de Clarke, é possível obter os parâmetros da linha no domínio das fases.

No capítulo 8 mostra-se uma série de conclusões referentes ao trabalho desenvolvido, bem como são dadas sugestões para trabalhos futuros.

O apêndice mostra a solução e a análise das equações que expressam a função de propagação em função das impedâncias equivalentes modais.

Esta tese foi elaborada de maneira tal que os resultados obtidos são mostrados logo ao término do desenvolvimento de cada tópico. Em cada capítulo, aplica-se o tópico desenvolvido em uma linha trifásica, de 440 kV e 500 km de comprimento.

A escolha da linha mencionada no parágrafo anterior deve-se ao fato da mesma possuir um plano de simetria vertical, sendo possível então substituir a matriz de transformação modal pela matriz de Clarke. O efeito da transposição será desprezado, de modo que a linha poderá ser aproximada por uma linha hipotética sem transposição. No decorrer deste texto, sempre que for mencionado o termo “linha sem transposição”, deve-se considerar que se trata de uma situação hipotética.

## Introdução

# 2

## EFEITO DOS CABOS PÁRA-RAIOS SOBRE OS PARÂMETROS DE LINHAS AÉREAS

### 2.1 Introdução

Diversos artigos publicados mostram que os parâmetros longitudinais de uma linha de transmissão são variáveis em função da frequência, sendo que esta dependência é devida aos efeitos solo e pelicular [9, 47].

O efeito pelicular pode ser calculado à partir das funções de Bessel [47] e está relacionado com o fato de que em materiais considerados bons condutores de corrente elétrica, a potência eletromagnética é transmitida somente na região superficial do condutor [6, 17].

Quanto ao efeito solo, diversos trabalhos mostram estudos dos parâmetros da linha de transmissão considerando o retorno de correntes através do solo. Verifica-se que as expressões mais utilizadas para calcular os parâmetros da linha, considerando o retorno de corrente através do solo, são, para linhas aéreas, as expressões de Carson e, para cabos subterrâneos, as expressões de Pollaczek [7, 8, 37, 38].

Os modelos de Carson e de Pollaczek são válidos para solos semi-infinitos e homogêneos, onde são desconsideradas as correntes de deslocamento. Uma outra condição para que sejam válidas as equações de Carson e de Pollaczek é que o comprimento de onda das ondas consideradas seja suficientemente grande quando comparado com as dimensões geométricas transversais [38].

As equações de Carson e de Pollaczek são equações que envolvem integrais cujos limites de integração são infinitos. Tradicionalmente estas integrais são calculadas de maneira aproximada, através da utilização de séries infinitas. Para linhas aéreas, são propostas séries infinitas e também algumas aproximações convenientes, específicas para baixas e altas frequências [8, 38].

Em um trabalho recente, Kurokawa *et alii* [20] mostra que cabos pára-raios, aterrados em todas as estruturas, também exercem influência nos parâmetros longitudinais da linha de transmissão.

Inicialmente, será feita uma análise teórica da influência que os cabos pára-raios exercem nos parâmetros longitudinais de uma linha de transmissão genérica que possui  $n$  condutores fase e  $p$  cabos pára-raios. Em seguida será analisada uma linha trifásica real com dois cabos pára-raios.

Serão desenvolvidas expressões genéricas mostrando a influência dos cabos pára-raios sob as impedâncias próprias e mútuas das fases de uma linha de transmissão hipotética, cujos parâmetros são considerados independentes em relação a frequência. A mesma análise, porém desenvolvida de maneira computacional, é feita para uma linha trifásica com dois pára-raios cujos parâmetros são considerados dependentes da frequência.

## 2.2 Efeito sobre linhas de transmissão genéricas

As equações telegráficas fundamentais de uma linha de transmissão com  $n$  fases e  $p$  cabos pára-raios são [5, 41, 53]:

$$\frac{\partial^2 [V(\omega, x)]}{\partial x^2} = [Z(\omega)][Y(\omega)][V(\omega, x)] \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 [I(\omega, x)]}{\partial x^2} = [Y(\omega)][Z(\omega)][I(\omega, x)] \quad (2.2)$$

$[Z(\omega)]$  e  $[Y(\omega)]$  são as matrizes de impedância longitudinal por unidade de comprimento e de admitância shunt por unidade de comprimento, respectivamente, e são variáveis em função da frequência.

$[Z(\omega)]$  será denominada matriz primitiva e de acordo com Tavares [47] pode ser escrita como sendo:

$$[Z(\omega)] = [Z(\omega)]_{\text{pelicular}} + [Z(\omega)]_{\text{ext}} + [Z(\omega)]_{\text{solo}} \quad (2.3)$$

Onde:

$[Z(\omega)]_{\text{pelicular}}$  Matriz de impedância longitudinal causada pelo efeito pelicular (impedância interna) considerando o solo com condutividade infinita;

$[Z(\omega)]_{\text{ext}}$  Matriz de impedância longitudinal (impedância externa) considerando o solo com condutividade infinita;

$[Z(\omega)]_{\text{solo}}$  Contribuição do solo considerando que a permeabilidade magnética do ar e do solo são iguais à permeabilidade magnética do vácuo.

$[Z(\omega)]$  pode ser decomposta em uma matriz real e em uma matriz imaginária, conforme mostra a equação 2.4.

$$[Z(\omega)] = [R(\omega)] + j\omega[L(\omega)] \quad (2.4)$$

$[R(\omega)]$  e  $[L(\omega)]$  são, respectivamente, as matrizes de resistências e indutâncias. Estas matrizes são dependentes da frequência [9, 20, 29, 31, 48].

$[V(\omega)]$  e  $[I(\omega)]$  são, respectivamente, vetores de tensões e correntes.  $[V(\omega)]$  contém as tensões transversais entre cada uma das fases e a terra, e entre cada um dos cabos pára-raios e a terra.  $[I(\omega)]$  contém as correntes longitudinais nas fases e nos cabos pára-raios.

Para uma linha com  $n$  fases e  $p$  cabos pára-raios,  $[Z(\omega)]$  é uma matriz quadrada de dimensões  $(n+p) \times (n+p)$  que pode ser escrita como sendo:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} [Z_{FF}(\omega)] & [Z_{FP}(\omega)] \\ [Z_{PF}(\omega)] & [Z_{PP}(\omega)] \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Sendo:

$[Z_{FF}(\omega)]$  Matriz de dimensão  $n \times n$ , cujos elementos são as impedâncias próprias e mútuas das fases da linha;

$[Z_{PF}(\omega)]$  Matriz de dimensão  $n \times p$ , cujos elementos são as impedâncias mútuas entre as fases e os cabos pára-raios;

$[Z_{FP}(\omega)]$  Matriz de dimensão  $p \times n$ , cujos elementos são as impedâncias mútuas entre os cabos pára-raios e as fases;

$[Z_{PP}(\omega)]$  Matriz de dimensão  $p \times p$ , cujos elementos são as impedâncias próprias e mútuas dos cabos pára-raios;

$[V(\omega)]$  e  $[I(\omega)]$ , para uma linha de transmissão genérica, são escritas como sendo:

$$[V(\omega, x)] = \begin{bmatrix} [V_F(\omega, x)] \\ [V_P(\omega, x)] \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[I(\omega, x)] = \begin{bmatrix} [I_F(\omega, x)] \\ [I_P(\omega, x)] \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Sendo:

$[V_F(\omega, x)]$  Matriz coluna cujos elementos são as tensões transversais entre cada uma das fases e a terra;

$[V_P(\omega, x)]$  Matriz coluna cujos elementos são as tensões transversais entre cada um dos cabos pára-raios e a terra;

$[I_F(\omega, x)]$  Matriz coluna cujos elementos são as correntes longitudinais nas fases;

$[I_P(\omega, x)]$  Matriz coluna cujos elementos são as correntes longitudinais nos cabos pára-raios.

A figura 2.1 mostra uma representação esquemática de um trecho de uma linha de transmissão genérica, situado entre duas estruturas A e B. Neste trecho, para simplificar a representação, considera-se que a flecha a meio vão é nula. Considera-se também que neste trecho de linha as admitâncias transversais são nulas.

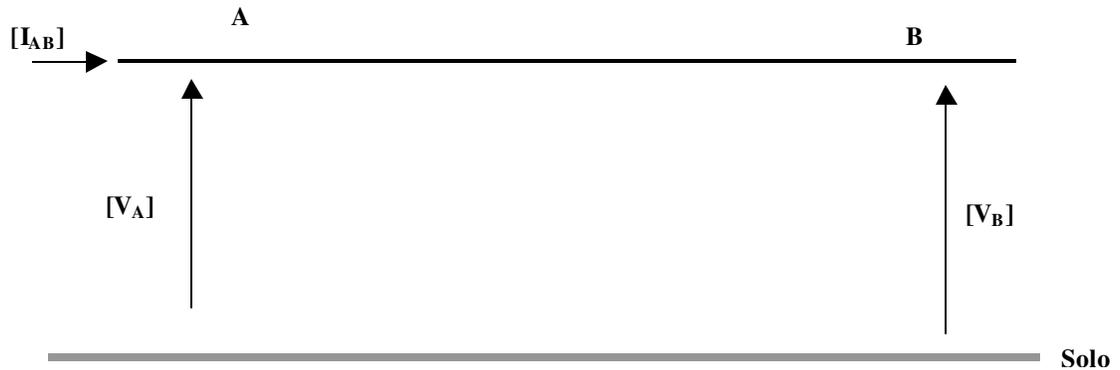


Figura 2.1 - Representação de uma fase da linha situada entre as estruturas A e B

Na figura 2.1, têm-se:

$[V_A(\omega)]$  Vetor com as tensões entre cada um dos condutores (fases e cabos pára-raios) e a terra na estrutura A da linha;

$[V_B(\omega)]$  Vetor com as tensões entre cada um dos condutores (fases e cabos pára-raios) e a terra na estrutura B da linha;

$[I_{AB}(\omega)]$  Vetor com as correntes longitudinais em cada um dos condutores (fases e cabos pára-raios) entre as estruturas A e B da linha.

Desprezando a admitância transversal da linha pode-se escrever a seguinte relação para a linha mostrada na figura 2.1:

$$[\Delta V(\omega)] = [V_A(\omega)] - [V_B(\omega)] \quad (2.8)$$

A equação 2.8 também pode ser escrita como sendo:

$$[\Delta V(\omega)] = [Z_{AB}(\omega)][I_{AB}(\omega)] \quad (2.9)$$

Na expressão 2.9  $[Z_{AB}(\omega)]$  é a matriz de impedância longitudinal da linha.

Substituindo, na equação 2.9, a matriz  $[Z_{AB}(\omega)]$  pela matriz  $[Z(\omega)]$  definida na equação 2.5 obtém-se:

$$\begin{bmatrix} [\Delta V_F(\omega)] \\ [\Delta V_P(\omega)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Z_{FF}(\omega)] & [Z_{FP}(\omega)] \\ [Z_{PF}(\omega)] & [Z_{PP}(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I_F(\omega)] \\ [I_P(\omega)] \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Sendo:

$[\Delta V_F(\omega)]$  vetor com as diferenças de tensões entre as estruturas A e B para os condutores fase da linha;

$[\Delta V_P(\omega)]$  vetor com as diferenças de tensões entre as estruturas A e B para os cabos pára-raios.

Desenvolvendo a expressão 2.10:

$$[\Delta V_F(\omega)] = [Z_{FF}(\omega)][I_F(\omega)] + [Z_{FP}(\omega)][I_P(\omega)] \quad (2.11)$$

$$[\Delta V_P(\omega)] = [Z_{PF}(\omega)][I_F(\omega)] + [Z_{PP}(\omega)][I_P(\omega)] \quad (2.12)$$

Considerando que os cabos pára-raios são aterrados em todas as estruturas, pode-se considerar que o vetor  $[\Delta V_P(\omega)]$  é nulo, ou seja:

$$[\Delta V_P(\omega)] = 0 \quad (2.13)$$

Substituindo a equação 2.13 na equação 2.12, obtém-se:

$$[I_P(\omega)] = -[Z_{PP}(\omega)]^{-1}[Z_{PF}(\omega)][I_F(\omega)] \quad (2.14)$$

Substituindo  $[I_P(\omega)]$ , obtida da equação 2.14, na expressão 2.11, obtém-se [12]:

$$[\Delta V_F(\omega)] = [Z_{FF}(\omega)][I_F(\omega)] - [Z_{FP}(\omega)][Z_{PP}(\omega)]^{-1}[Z_{PF}(\omega)][I_F(\omega)] \quad (2.15)$$

A expressão 2.15 pode ser escrita como sendo:

$$[\Delta V_F(\omega)] = [Z'(\omega)][I_F(\omega)] \quad (2.16)$$

Sendo:

$$[Z'(\omega)] = [Z_{FF}(\omega)] - [Z_{FP}(\omega)][Z_{PP}(\omega)]^{-1}[Z_{PF}(\omega)] \quad (2.17)$$

Na equação 2.17,  $[Z'(\omega)]$  possui dimensão  $n \times n$  e é a matriz que contém as impedâncias próprias e mútuas da linha, já considerando que os efeitos dos cabos pára-raios foram implicitamente representados nas fases.  $[Z'(\omega)]$  será denominada matriz reduzida, conforme consta em alguns trabalhos [12, 15].

A equação 2.17 mostra que os efeitos dos cabos pára-raios podem ser rebatidos sobre as fases da linha. Nestas condições a matriz de impedância longitudinal da linha é a matriz reduzida  $[Z'(\omega)]$ .

### 2.3 Efeito sobre linhas de transmissão trifásicas

Considere uma linha de transmissão trifásica com dois cabos pára-raios aterrados em todas as estruturas, conforme mostra a figura 2.2.

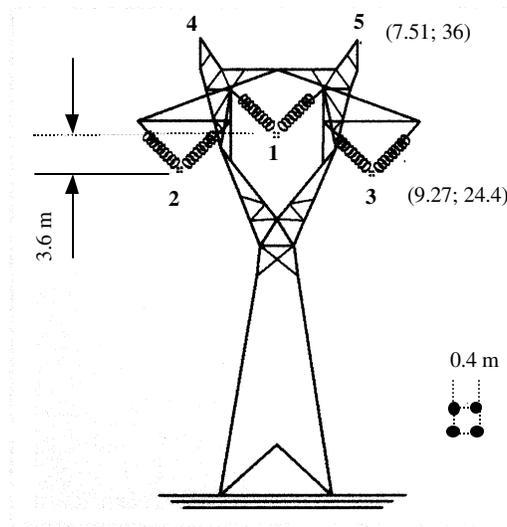


Figura 2.2 - Linha de transmissão trifásica

A linha mostrada na figura 2.2 é uma linha de transmissão trifásica cujas fases 1, 2 e 3 são constituídas de 4 subcondutores do tipo Grosbeak. Os condutores 4 e 5 são os cabos pára-raios do tipo EHSW-3/8”. A resistividade do solo foi considerada igual a 1000 Ohms.m.

Devido ao plano de simetria vertical que passa sobre a fase 1 da linha mostrada na figura 2.2, a sua matriz de impedância longitudinal pode ser escrita como sendo:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} A(\omega) & D(\omega) & D(\omega) & E(\omega) & E(\omega) \\ D(\omega) & B(\omega) & H(\omega) & F(\omega) & G(\omega) \\ D(\omega) & H(\omega) & B(\omega) & G(\omega) & F(\omega) \\ E(\omega) & F(\omega) & G(\omega) & C(\omega) & N(\omega) \\ E(\omega) & G(\omega) & F(\omega) & N(\omega) & C(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

De maneira geral os elementos de  $[Z(\omega)]$  são constituídos de uma parcela resistiva e uma parcela indutiva e são escritos como sendo:

$$Z_{ii}(\omega) = R_{ii}(\omega) + j\omega L_{ii}(\omega) \quad (2.19)$$

$$Z_{ij}(\omega) = R_{ij}(\omega) + j\omega L_{ij}(\omega) \quad (2.20)$$

Sendo:

$R_{ii}(\omega)$  Resistência da fase  $i$ , variável em função da frequência;

$R_{ij}(\omega)$  Resistência mútua entre as fases  $i$  e  $j$ , variável em função da frequência;

$L_{ii}(\omega)$  Indutância própria, da fase  $i$ , variável em função da frequência;

$L_{ij}(\omega)$  Indutância mútua, entre as fases  $i$  e  $j$ , variável em função da frequência.

As matrizes  $[Z_{FF}(\omega)]$ ,  $[Z_{FP}(\omega)]$ ,  $[Z_{PF}(\omega)]$  e  $[Z_{PP}(\omega)]$  são escritas como sendo:

$$[Z_{FF}(\omega)] = \begin{bmatrix} A(\omega) & D(\omega) & D(\omega) \\ D(\omega) & B(\omega) & H(\omega) \\ D(\omega) & H(\omega) & B(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$[Z_{FP}(\omega)] = \begin{bmatrix} E(\omega) & E(\omega) \\ F(\omega) & G(\omega) \\ G(\omega) & F(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[Z_{PF}(\omega)] = \begin{bmatrix} E(\omega) & F(\omega) & G(\omega) \\ E(\omega) & G(\omega) & F(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[Z_{PP}(\omega)] = \begin{bmatrix} C(\omega) & N(\omega) \\ N(\omega) & C(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Sendo:

$[Z_{FF}(\omega)]$  Matriz 3 x 3, cujos elementos são as impedâncias próprias e mútuas das fases;

$[Z_{PF}(\omega)]$  Matriz 2 x 3 cujos elementos são as impedâncias mútuas entre as fases e os pára-raios;

$[Z_{FP}(\omega)]$  Matriz 3 x 2 cujos elementos são as impedâncias mútuas entre os pára-raios e as fases;

$[Z_{PP}(\omega)]$  Matriz 2 x 2 cujos elementos são as impedâncias próprias e mútuas dos cabos pára-raios;

Desconsiderando a presença dos cabos pára-raios na linha mostrada na figura 2.2, a matriz de impedâncias longitudinais  $[Z(\omega)]_{spr}$  torna-se:

$$[Z(\omega)]_{spr} = \begin{bmatrix} A(\omega) & D(\omega) & D(\omega) \\ D(\omega) & B(\omega) & H(\omega) \\ D(\omega) & H(\omega) & B(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Na equação 2.25 observa-se que a matriz primitiva da linha sem cabos pára-raios é igual à matriz  $[Z_{FF}(\omega)]$  mostrada na equação 2.21, ou seja:

$$[Z(\omega)]_{spr} = [Z_{FF}(\omega)] \quad (2.26)$$

Para obter o efeito dos cabos pára-raios, as matrizes das equações 2.21-2.24 são substituídas na equação 2.17. Obtém-se então a matriz reduzida  $[Z'(\omega)]$  expressa como sendo:

$$[Z'(\omega)] = \begin{bmatrix} z'_{11}(\omega) & z'_{12}(\omega) & z'_{13}(\omega) \\ z'_{21}(\omega) & z'_{22}(\omega) & z'_{23}(\omega) \\ z'_{31}(\omega) & z'_{32}(\omega) & z'_{33}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Onde os elementos da matriz  $[Z'(\omega)]$  são escritos como sendo:

$$z'_{11}(\omega) = A(\omega) - \frac{2E^2(\omega)}{C(\omega) + N(\omega)} \quad (2.28)$$

$$z'_{22}(\omega) = B(\omega) - \frac{C(\omega)(F^2(\omega) + G^2(\omega)) - 2F(\omega)N(\omega)G(\omega)}{C^2(\omega) - N^2(\omega)} \quad (2.29)$$

$$z'_{12}(\omega) = D(\omega) - \frac{E(\omega)(F(\omega) + G(\omega))}{C(\omega) + N(\omega)} \quad (2.30)$$

$$z'_{23}(\omega) = H(\omega) - \frac{2F(\omega)G(\omega)C(\omega) - N(\omega)(F^2(\omega) + G^2(\omega))}{C^2(\omega) - N^2(\omega)} \quad (2.31)$$

$$z'_{22}(\omega) = z'_{33}(\omega) \quad (2.32)$$

$$z'_{12}(\omega) = z'_{13}(\omega) = z'_{21}(\omega) = z'_{31}(\omega) \quad (2.33)$$

$$z'_{23}(\omega) = z'_{32}(\omega) \quad (2.34)$$

As equações 2.21 - 2.27 mostram que as impedâncias próprias  $z'_{22}(\omega)$  e  $z'_{33}(\omega)$  são iguais. Quanto à impedância própria  $z'_{11}(\omega)$ , ela difere das impedâncias próprias  $z'_{22}(\omega)$  e  $z'_{33}(\omega)$ . As impedâncias mútuas  $z'_{12}(\omega)$  e  $z'_{13}(\omega)$  também são idênticas.

Os resultados mostram também que os cabos pára-raios não alteram os efeitos provenientes da simetria da linha, ou seja  $[Z'(\omega)]$  é uma matriz simétrica. No entanto quando se insere o efeito dos cabos pára-raios nas fases da linha, as impedâncias próprias e mútuas das fases são alteradas.

### 2.3.1 Linha com parâmetros constantes

Considerando, em uma situação hipotética, que a linha de transmissão mostrada na figura 2.2 está situada sob um solo ideal cuja condutividade é infinita, pode-se afirmar que, nestas condições, a resistência do solo é nula. Desprezando o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais da linha, obtém-se:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} A(\omega) & D(\omega) & D(\omega) & E(\omega) & E(\omega) \\ D(\omega) & B(\omega) & H(\omega) & F(\omega) & G(\omega) \\ D(\omega) & H(\omega) & B(\omega) & G(\omega) & F(\omega) \\ E(\omega) & F(\omega) & G(\omega) & C(\omega) & N(\omega) \\ E(\omega) & G(\omega) & F(\omega) & N(\omega) & C(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

A matriz  $[Z(\omega)]$ , mostrada na equação 2.35, pode ser dividida nas matrizes  $[Z_{FF}(\omega)]$ ,  $[Z_{FP}(\omega)]$ ,  $[Z_{PF}(\omega)]$  e  $[Z_{PP}(\omega)]$ .

Devido à hipótese de que os parâmetros longitudinais são constantes, os elementos de  $[Z(\omega)]$ , na equação 2.35, são escritos como sendo:

$$Z_{ii}(\omega) = R_{ii} + j\omega L_{ii} \quad (2.36)$$

$$Z_{ij}(\omega) = j\omega L_{ij} \quad (2.37)$$

Onde:

$R_{ii}$  Resistência da fase  $i$ , independente da frequência;

$L_{ii}$  Indutância própria, da fase  $i$ , independente da frequência;

$L_{ij}$  Indutância mútua, entre as fases  $i$  e  $j$ , independente da frequência.

Desconsiderando a presença dos cabos pára-raios na linha mostrada na figura 2.2, obtém-se a seguinte matriz primitiva  $[Z(\omega)]_{\text{spr}}$ :

$$[Z(\omega)]_{\text{spr}} = \begin{bmatrix} A(\omega) & D(\omega) & D(\omega) \\ D(\omega) & B(\omega) & H(\omega) \\ D(\omega) & H(\omega) & B(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

A influência dos cabos pára-raios pode ser obtida através da substituição dos elementos da equação 2.35 na equação 2.17. Desta forma, a matriz  $[Z'(\omega)]$  será constituída dos seguintes elementos:

$$R'_{11}(\omega) = R_{11} + \frac{2\omega^2 R_{44} L_{14}^2}{(R_{44})^2 + \omega^2 (L_{44} + L_{45})^2} \quad (2.39)$$

$$L'_{11}(\omega) = L_{11} - \frac{2\omega^2 L_{14}^2 (L_{44} + L_{45})}{(R_{44})^2 + \omega^2 (L_{44} + L_{45})^2} \quad (2.40)$$

$$R'_{22}(\omega) = R_{22} - \frac{(-L_{24}^2 - L_{25}^2)\omega^2 (R_{44})^3 + ((L_{45}^2 + L_{44}^2)(-L_{24}^2 - L_{25}^2) + 4L_{44}L_{24}L_{25}L_{45})\omega^4 R_{44}}{(R_{44}^2 + \omega^2(-L_{44}^2 + L_{45}^2))^2 + 4\omega^2 R_{44}^2 L_{44}^2} \quad (2.41)$$

$$L'_{22}(\omega) = L_{22} - \frac{(-L_{44}(-L_{24}^2 - L_{25}^2) + 2L_{24}L_{25}L_{45})\omega^2 R_{44}^2 + (L_{45}^2 - L_{44}^2)(L_{44}(-L_{24}^2 - L_{25}^2) + 2L_{24}L_{25}L_{45})\omega^4}{(R_{44}^2 + \omega^2(L_{45}^2 - L_{44}^2))^2 + 4\omega^2 R_{44}^2 L_{44}^2} \quad (2.42)$$

$$R'_{12}(\omega) = \frac{L_{14}(L_{24} + L_{25})\omega^2 R_{44}}{R_{44}^2 + \omega^2 (L_{44} + L_{45})^2} \quad (2.43)$$

$$L'_{12}(\omega) = L_{12} - \frac{L_{14}(L_{24} + L_{25})(L_{44} + L_{45})\omega^2}{R_{44}^2 + \omega^2 (L_{44} + L_{45})^2} \quad (2.44)$$

$$R'_{23}(\omega) = -\frac{-2L_{24}L_{34}\omega^2 R_{44}^3 + 2(-L_{24}L_{34}(L_{44}^2 + L_{45}^2) + L_{44}L_{45}(L_{24}^2 + L_{34}^2))\omega^4 R_{44}}{(R_{44}^2 + \omega^2(L_{45}^2 - L_{44}^2))^2 + 4\omega^2 R_{44}^2 L_{44}^2} \quad (2.45)$$

$$L'_{23}(\omega) = L_{23} - \frac{(2L_{24}L_{34}L_{44} + L_{45}(L_{24}^2 + L_{34}^2))\omega^2 R_{44}^2 + (L_{45}^2 - L_{44}^2)(-2L_{24}L_{34}L_{44} + L_{45}(L_{24}^2 + L_{34}^2))\omega^4}{(R_{44}^2 + \omega^2(L_{45}^2 - L_{44}^2))^2 + 4\omega^2 R_{44}^2 L_{44}^2} \quad (2.46)$$

Os elementos  $R'_{ii}(\omega)$ ,  $R'_{ij}(\omega)$ ,  $L'_{ii}(\omega)$  e  $L'_{ij}(\omega)$  são as impedâncias próprias e mútuas da linha considerando os pára-raios implicitamente representados nas fases. Estas impedâncias são escritas como sendo:

$$Z'_{ii}(\omega) = R'_{ii}(\omega) + j\omega L'_{ii}(\omega) \quad (2.47)$$

$$Z'_{ij}(\omega) = R'_{ij}(\omega) + j\omega L'_{ij}(\omega) \quad (2.48)$$

Onde:

- $R'_{ii}(\omega)$  Resistência da fase  $i$ , considerando os cabos pára-raios implicitamente representados nas fases;
- $L'_{ii}(\omega)$  Indutância própria da fase  $i$ , considerando os cabos pára-raios implicitamente representados nas fases;
- $R'_{ij}(\omega)$  Resistência mútua entre as fases  $i$  e  $j$ , considerando os pára-raios implicitamente representados nas fases;
- $L'_{ij}(\omega)$  Indutância mútua entre as fases  $i$  e  $j$ , considerando os pára-raios implicitamente representados nas fases.

As equações 2.39-2.46 mostram que os parâmetros longitudinais, inicialmente constantes, de uma linha sem cabos pára-raios tornam-se dependentes da frequência quando se considera a presença de cabos pára-raios conectados à terra em todas as estruturas. A presença de cabos pára-raios conectados à terra em todas as estruturas faz com que as resistências das fases tornem-se dependentes da frequência. O mesmo acontece com as indutâncias próprias e mútuas. Pode-se verificar também, após a introdução dos cabos pára-raios, a presença de resistências mútuas (o termo “resistência mútua” é utilizado também no trabalho de Saad *et alii* [38]) variáveis em função da frequência.

As próximas figuras mostram o efeito da introdução de cabos pára-raios aterrados em uma linha cujos parâmetros são constantes. Inicialmente os parâmetros da linha foram calculados para uma frequência de 60 Hz e em seguida, utilizando as expressões 2.36-2.43, calculou-se os elementos da matriz reduzida considerando frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

As figuras 2.3-2.6 mostram as resistências da matriz primitiva e da matriz reduzida.

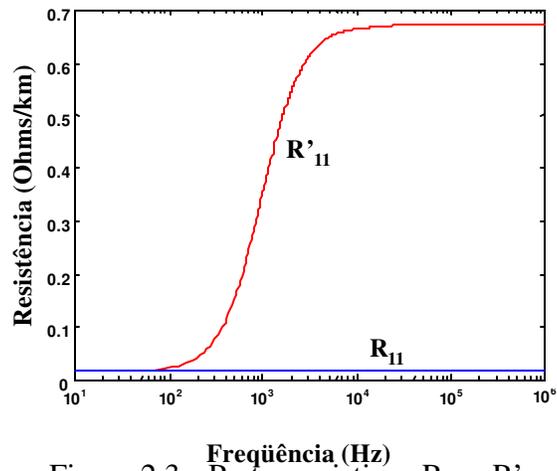


Figura 2.3 - Partes resistivas  $R_{11}$  e  $R'_{11}$

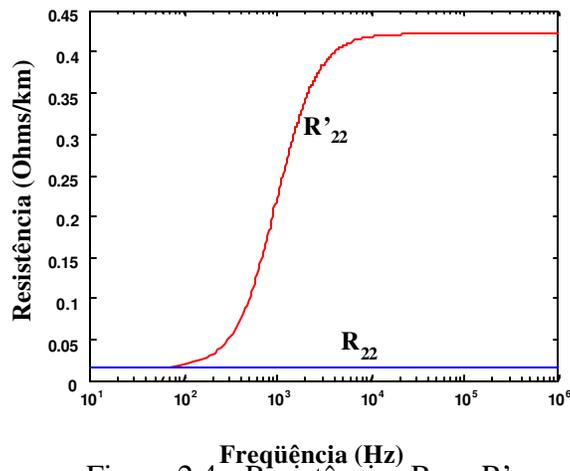


Figura 2.4 - Resistências  $R_{22}$  e  $R'_{22}$

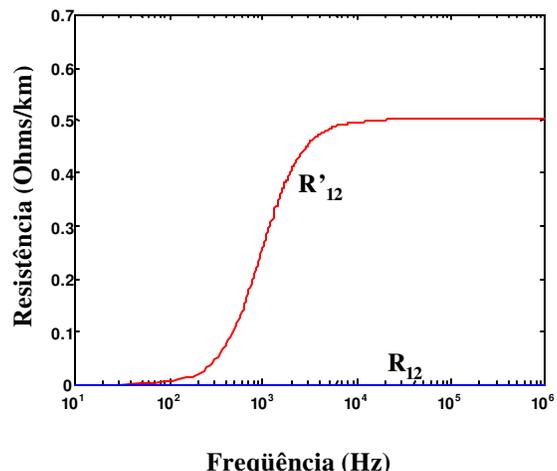


Figura 2.5 - Resistências  $R_{12}$  e  $R'_{12}$

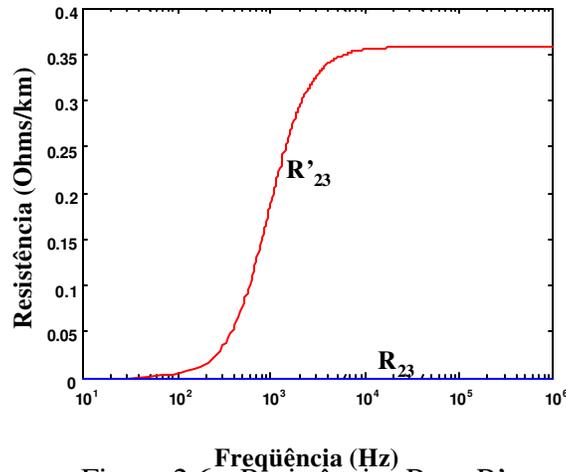


Figura 2.6 - Resistências  $R_{23}$  e  $R'_{23}$

As figuras 2.3-2.6 mostram que a presença de cabos pára-raios, aterrados em todas as estruturas, fez com que as resistências das fases, que inicialmente eram constantes, tornassem-se dependentes da frequência. A inserção dos cabos pára-raios deu origem a resistências mútuas variáveis em função da frequência.

Observa-se que em frequências inferiores a 100 Hz, presença de cabos pára-raios não altera os valores das partes resistivas das impedâncias da linha que está sendo estudada. Para a faixa de frequência compreendida entre 100 Hz e 10 kHz, as partes resistivas das impedâncias próprias e mútuas tornam-se dependentes da frequência e em frequências superiores a 10 kHz, as partes resistivas tornam-se novamente constantes, mas com valores maiores que os valores iniciais.

As figuras 2.7-2.10 mostram as indutâncias da matriz primitiva e da matriz reduzida.

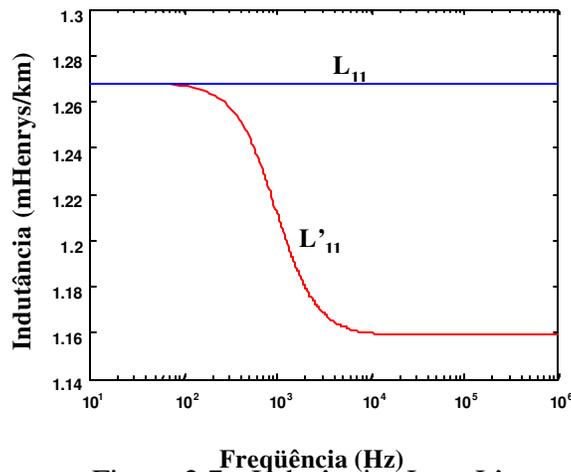


Figura 2.7 - Indutâncias  $L_{11}$  e  $L'_{11}$

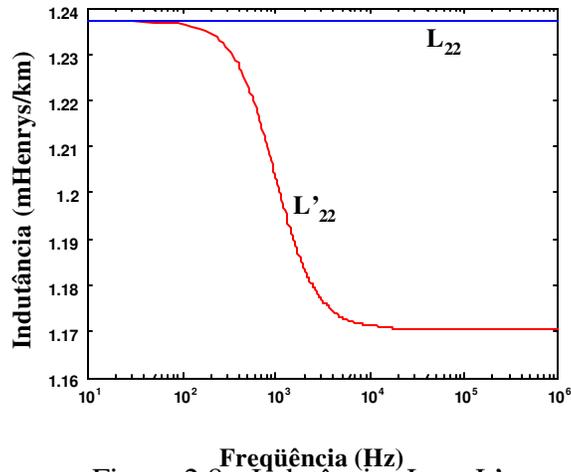


Figura 2.8 - Indutâncias  $L_{22}$  e  $L'_{22}$

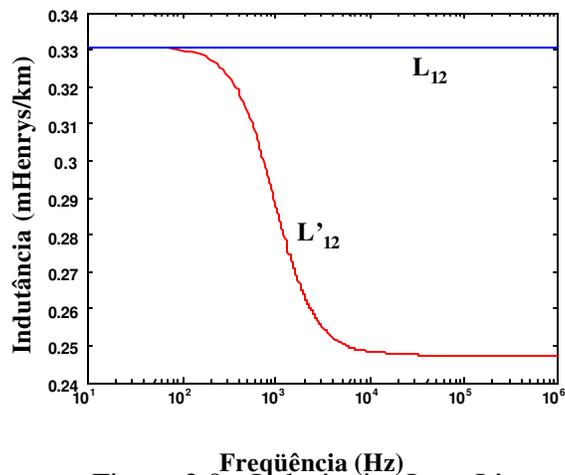


Figura 2.9 - Indutâncias  $L_{12}$  e  $L'_{12}$

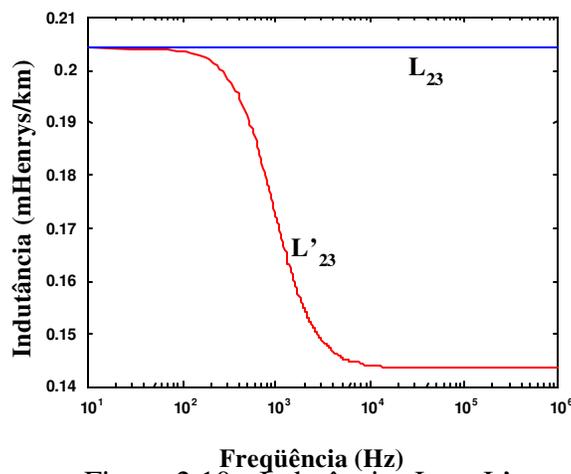


Figura 2.10 - Indutâncias  $L_{23}$  e  $L'_{23}$

As figuras 2.7-2.10 mostram que os cabos pára-raios aterrados em todas as estruturas transformam as indutâncias constantes em indutâncias variáveis em função da frequência. Em

freqüências inferiores a 100 Hz os cabos pára-raios não alteram as indutâncias próprias e mútuas. Para freqüências compreendidas entre 100 Hz e 10 kHz, a presença de cabos pára raios transformam as indutâncias constantes em indutâncias variáveis em função da freqüência. Em freqüências superiores a 10 kHz, as indutâncias tornam-se constantes novamente, mas com um valor inferior ao valor inicial.

### 2.3.2 Linha com parâmetros dependentes da freqüência

Neste item será considerado que a linha de transmissão, mostrada na figura 2.2, está sob um solo não ideal, com condutividade finita e que as distâncias entre os condutores é muito maior que a soma dos raios dos condutores. Desta maneira os parâmetros da linha são variáveis em função da freqüência e a matriz primitiva pode ser escrita como sendo:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} A(\omega) & D(\omega) & D(\omega) & E(\omega) & E(\omega) \\ D(\omega) & B(\omega) & H(\omega) & F(\omega) & G(\omega) \\ D(\omega) & H(\omega) & B(\omega) & G(\omega) & F(\omega) \\ E(\omega) & F(\omega) & G(\omega) & C(\omega) & N(\omega) \\ E(\omega) & G(\omega) & F(\omega) & N(\omega) & C(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

As impedâncias próprias e mútuas na matriz  $[Z(\omega)]$ , mostradas na equação 2.44 são, respectivamente, escritas como sendo [47]:

$$Z_{ii}(\omega) = R_{ii}(\omega) + j\omega L_{ii}(\omega) \quad (2.50)$$

$$Z_{ij}(\omega) = R_{ij}(\omega) + j\omega L_{ij}(\omega) \quad (2.51)$$

Na equação 2.50  $R_{ii}(\omega)$  é a resistência da fase  $i$  da linha devida aos efeitos solo e pelicular. O termo  $L_{ii}(\omega)$  é a indutância própria, que varia em função da freqüência, e é composta pela indutância externa e pelas indutâncias devidas aos efeitos solo e pelicular [38, 47].

Na equação 2.51  $R_{ij}(\omega)$  é a resistência mútua [38] provocada pelo efeito solo. O termo  $L_{ij}$  é a indutância mútua que é composta da indutância externa e das indutâncias devidas aos efeitos solo e pelicular

Considerando a linha sem os cabos pára-raios, obtém-se a seguinte matriz primitiva  $[Z(\omega)]_{spr}$ :

$$[Z(\omega)]_{spr} = \begin{bmatrix} A(\omega) & D(\omega) & D(\omega) \\ D(\omega) & B(\omega) & H(\omega) \\ D(\omega) & H(\omega) & B(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

A influência dos cabos pára-raios pode ser obtida através da substituição dos elementos da equação 2.49 na equação 2.17. Desta forma, a matriz  $[Z'(\omega)]$  será escrita como sendo:

$$[Z'(\omega)] = \begin{bmatrix} z'_{11}(\omega) & z'_{12}(\omega) & z'_{13}(\omega) \\ z'_{21}(\omega) & z'_{22}(\omega) & z'_{23}(\omega) \\ z'_{31}(\omega) & z'_{32}(\omega) & z'_{33}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Na equação 2.53, cada um dos elementos da matriz reduzida  $[Z'(\omega)]$  é escrito como sendo:

$$Z'_{ii}(\omega) = R'_{ii}(\omega) + j\omega L'_{ii}(\omega) \quad (2.54)$$

$$Z'_{ij}(\omega) = R'_{ij}(\omega) + j\omega L'_{ij}(\omega) \quad (2.55)$$

Sendo:

$R'_{ii}(\omega)$  Resistência da fase  $i$ , considerando os cabos pára-raios já rebatidos sob as fases;

$L'_{ii}(\omega)$  Indutância própria da fase  $i$ , considerando os cabos pára-raios já rebatidos sob as fases;

$R'_{ij}(\omega)$  Resistência mútua entre as fases  $i$  e  $j$ , considerando os pára-raios já rebatidos sob as fases;

$L'_{ij}(\omega)$  Indutância mútua entre as fases  $i$  e  $j$ , considerando os pára-raios já rebatidos sob as fases.

Em seguida serão mostrados os parâmetros longitudinais da linha, com e sem cabos pára-raios, considerando a influência dos efeitos solo e pelicular. Os efeitos solo e pelicular foram calculados a partir das equações mostradas em Tavares [47].

As figuras 2.11-2.14 mostram as resistências da matriz primitiva e da matriz reduzida.

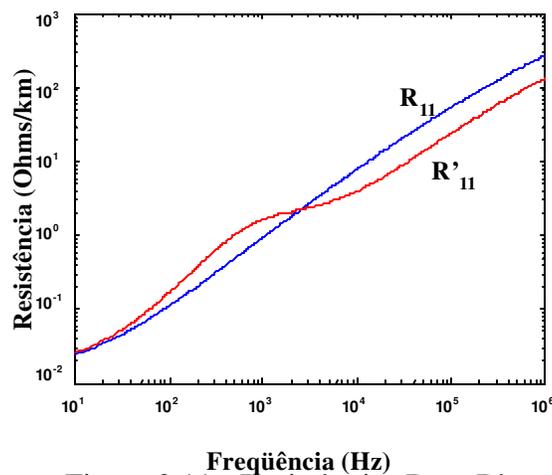


Figura 2.11 - Resistências  $R_{11}$  e  $R'_{11}$

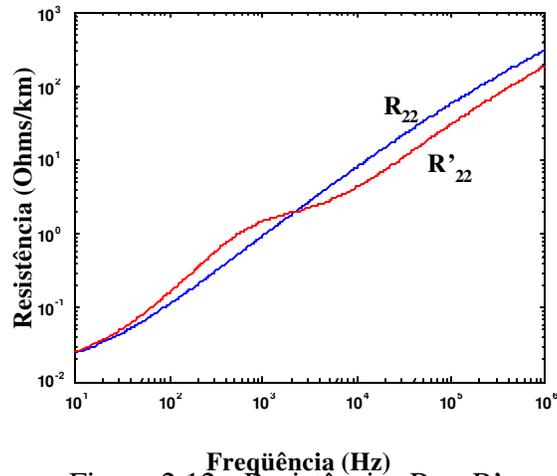


Figura 2.12 - Resistências  $R_{22}$  e  $R'_{22}$

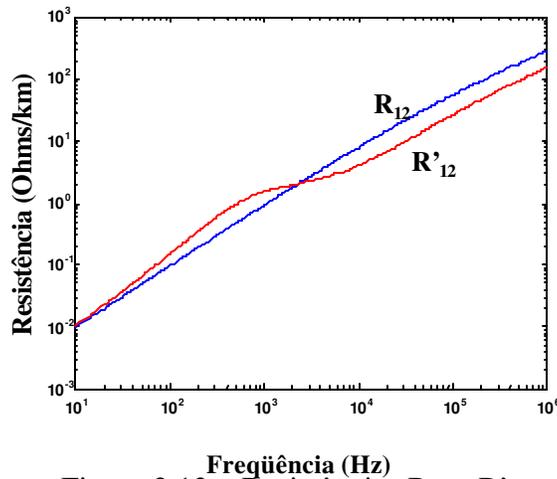


Figura 2.13 - Resistências  $R_{12}$  e  $R'_{12}$

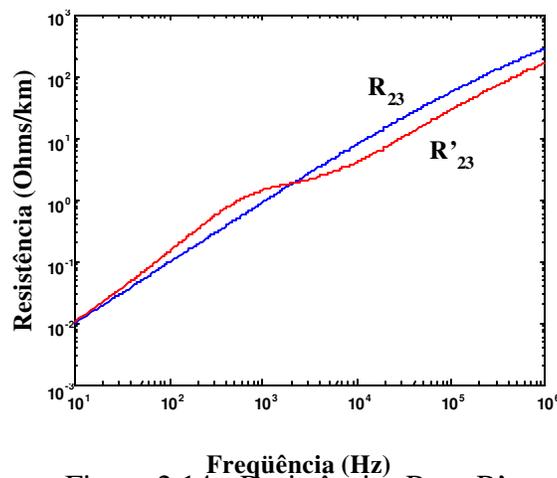


Figura 2.14 - Resistências  $R_{23}$  e  $R'_{23}$

As figuras 2.11-2.14 mostram que em frequências inferiores a 100 Hz, a presença dos cabos pára-raios parece não afetar as partes resistivas das impedâncias próprias e mútuas da linha. Para

freqüências compreendidas entre 100 Hz e 2 kHz, os cabos pára-raios fazem com que as partes resistivas das impedâncias próprias e mútuas sejam maiores que os correspondentes valores para a linha sem os cabos pára-raios. Em freqüências compreendidas entre 2 kHz e 1 MHz a presença dos cabos pára-raios fazem com que as partes resistivas sejam menores que os correspondentes valores para a linha sem os cabos pára-raios.

As figuras 2.15-2.18 mostram as indutâncias da matriz primitiva e da matriz reduzida.

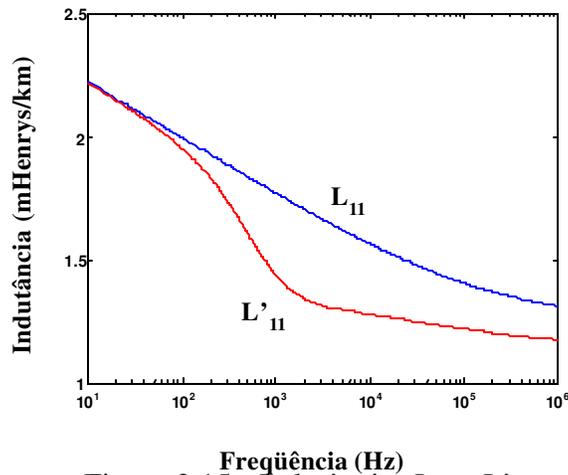


Figura 2.15 - Indutâncias  $L_{11}$  e  $L'_{11}$

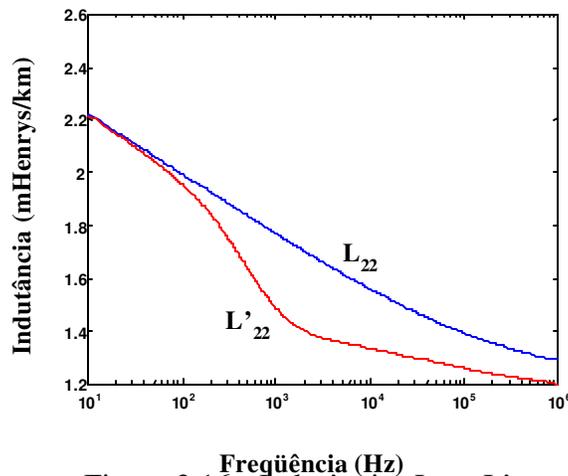


Figura 2.16 - Indutâncias  $L_{22}$  e  $L'_{22}$

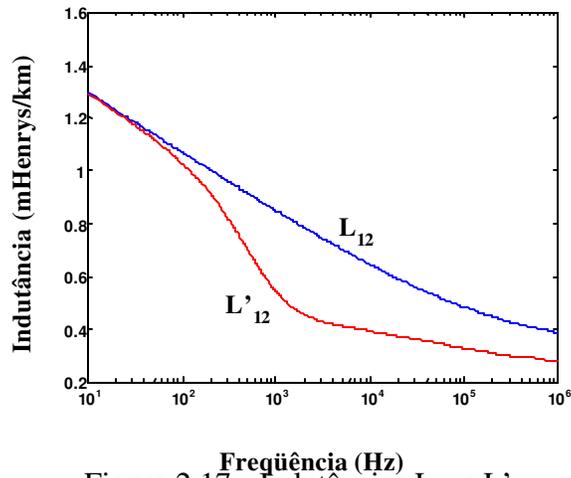


Figura 2.17 - Indutâncias  $L_{12}$  e  $L'_{12}$

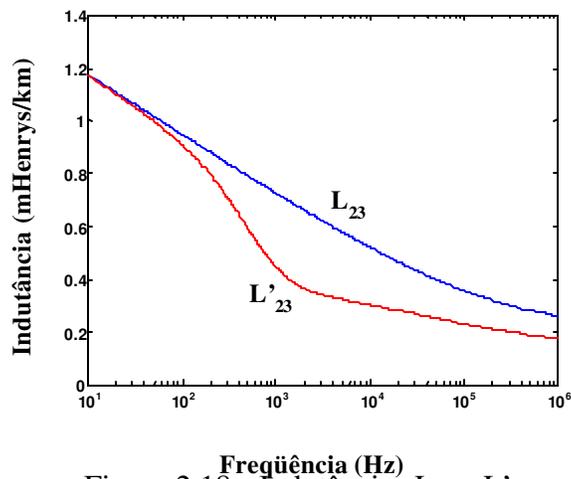


Figura 2.18 - Indutâncias  $L_{23}$  e  $L'_{23}$

As figuras 2.15-2.18 mostram que a presença de cabos pára-raios altera os valores das indutâncias da linha de transmissão. Em frequências inferiores a 50 Hz, a presença de cabos pára-raios na linha parece não afetar o comportamento das indutâncias da mesma. Em frequências compreendidas entre 50 Hz e 1 MHz as indutâncias têm seus valores reduzidos devido à presença dos cabos pára-raios.

## 2.4 Conclusões

A presença de cabos pára-raios aterrados em todas as estruturas alteram os parâmetros longitudinais da linha de transmissão.

Partindo de uma hipotética linha de transmissão cujos parâmetros são constantes, foi possível mostrar analiticamente como é a influência dos cabos pára-raios nos parâmetros longitudinais. Mostrou-se que as resistências e as indutâncias próprias e mútuas de uma linha sem

## Capítulo 2 – Efeito dos cabos pára-raios sobre os parâmetros de linhas aéreas

cabos pára-raios, cujos parâmetros foram considerados constantes, tornam-se dependentes da frequência quando se considera a presença de cabos pára-raios nesta linha. Os cabos pára-raios também produzem termos reais nas impedâncias mútuas. Uma análise gráfica mostrou que em baixas frequências, os cabos pára-raios não alteram as resistências e indutâncias da linha cujos parâmetros foram considerados constantes. Para uma faixa de frequência intermediária, os cabos pára-raios fazem com que as resistências da linha tornem-se variáveis em função da frequência. Em altas frequências, a presença de cabos pára-raios faz com que as resistências e indutâncias da linha tornem-se constantes, mas com valores inferiores aos parâmetros longitudinais da linha sem cabos pára-raios.

Quando se considera que os parâmetros da linha são dependentes da frequência, constata-se que os cabos pára-raios afetam os parâmetros. A maneira como os parâmetros são alterados depende da faixa de frequência considerada.

# 3

## MODOS EXATOS E QUASE-MODOS

### 3.1 Introdução

As equações diferenciais de segunda ordem que descrevem uma linha de transmissão polifásica são de difícil solução devido ao acoplamento entre as fases. Uma importante ferramenta de análise de sistemas polifásicos é a técnica que desacopla as fases dos mesmos [27]. Desta maneira, um sistema que possui  $n$  fases acopladas pode ser transformado em  $n$  sistemas monofásicos que são matematicamente idênticos ao sistema original.

Para um sistema polifásico genérico, a matriz com os autovetores do produto matricial  $[Z][Y]$  desacopla as fases da linha [53]. Existem, para um único produto  $[Z][Y]$ , diversos conjuntos de autovetores que desacoplam a linha. A definição de um conjunto específico de autovetores é feita através da imposição de uma restrição adicional. Uma restrição bastante utilizada é a de que cada um dos autovetores do conjunto possua módulo unitário [27, 47, 53].

No caso de linhas de transmissão trifásicas, sem perdas, idealmente transpostas e cujos parâmetros são constantes, Long *et alii* [27] utiliza como matrizes de transformação a transformação de Clarke, a transformação de componentes simétricas e as componentes de Park.

Neste capítulo serão estudados dois tipos de transformações. A primeira será a transformação que decompõe a linha em seus modos exatos, e a segunda será a transformação que decompõe a linha em seus quase-modos [45, 46, 47, 48].

Os modos exatos são totalmente desacoplados entre si e são obtidos a partir da utilização das matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  como sendo as matrizes de transformação [48, 53]. As matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  são os autovetores associados aos produtos  $[Y][Z]$  e  $[Z][Y]$ , respectivamente, sendo, de maneira geral, matrizes complexas, cujos elementos são dependentes da frequência.

Os quase-modos são obtidos a partir do uso da matriz de Clarke como sendo a única matriz de transformação. A matriz de Clarke é uma matriz real e constante, cujos elementos são independentes

da frequência, de fácil implementação em softwares que realizam simulações diretamente no domínio do tempo. Se a linha de transmissão é idealmente transposta a matriz de Clarke decompõe a mesma em seus modos exatos. No entanto, se a linha não é idealmente transposta, mas possui um plano de simetria vertical a matriz de Clarke decompõe a linha em seus quase-modos que podem, em algumas situações, ser considerados idênticos aos modos exatos [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49].

Neste capítulo será mostrado o processo de decomposição da linha, cujos parâmetros são dependentes da frequência, em seus modos exatos e também em seus quase-modos.

### 3.2 Modos exatos da linha

As equações diferenciais de primeira ordem para uma linha de transmissão com  $n$  fases são [5, 41, 53]:

$$\frac{d[V]}{dx} = -[Z][I] \quad (3.1)$$

$$\frac{d[I]}{dx} = -[Y][V] \quad (3.2)$$

As equações diferenciais de segunda ordem para uma linha de transmissão com  $n$  fases, escritas no domínio das frequências são [5, 41, 53]:

$$\frac{d^2[V]}{dx^2} = [Z][Y][V] \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2[I]}{dx^2} = [Y][Z][I] \quad (3.4)$$

Nas equações 3.1-3.4 as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  são, respectivamente, as matrizes de impedância longitudinal e de admitância transversal por unidade de comprimento da linha. A matriz  $[Z]$  leva em consideração o efeito pelicular, o efeito do retorno através do solo e a reatância externa dos condutores. Os vetores  $[V]$  e  $[I]$  são os vetores de tensões e correntes de fase, respectivamente.

As equações 3.1-3.4 estão no domínio das fases e são de difícil resolução, uma vez que os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  são, de maneira genérica, distintos (as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  não são matrizes diagonais). No entanto tais produtos podem ser transformados em matrizes diagonais a partir da utilização de uma transformação de similaridade. Neste caso os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  resultarão em matrizes diagonais cujos elementos são os autovalores dos produtos matriciais [32,34, 53].

A matriz  $[\lambda_v]$ , que é a matriz com os autovalores de  $[Z][Y]$ , é calculada através da seguinte relação [53]:

$$[\lambda_v] = [T_v]^{-1}[Z][Y][T_v] \quad (3.5)$$

Os autovalores  $[\lambda_l]$  do produto matricial  $[Y][Z]$  são [53]:

$$[\lambda_l] = [T_l]^{-1}[Y][Z][T_l] \quad (3.6)$$

Nas equações 3.5 e 3.6, as matrizes  $[T_v]$  e  $[T_l]$  são, respectivamente, as matrizes cujas colunas são os autovetores das matrizes  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ .

Os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ , de maneira genérica, são distintos e, portanto as matrizes  $[T_v]$  e  $[T_l]$  são diferentes. Estas matrizes são iguais somente quando as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  são funções da mesma matriz, o que ocorre somente quando o sistema é totalmente equilibrado [53]. No entanto, mesmo sendo  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  matrizes distintas seus determinantes (e conseqüentemente seus autovalores  $[\lambda_v]$  e  $[\lambda_l]$ ) são iguais [35], ou seja:

$$[\lambda_v] = [\lambda_l] \quad (3.7)$$

Denominando os autovalores dos produtos  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  de  $[\lambda_m]$ , obtém-se:

$$[\lambda_m] = [\lambda_v] \quad (3.8)$$

$$[\lambda_m] = [\lambda_l] \quad (3.9)$$

Substituindo as equações 3.8 e 3.9 nas equações 3.5 e 3.6, respectivamente, fica:

$$[\lambda_m] = [T_v]^{-1}[Z][Y][T_v] \quad (3.10)$$

$$[\lambda_m] = [T_l]^{-1}[Y][Z][T_l] \quad (3.11)$$

Fazendo a pré-multiplicação das equações 3.10 e 3.11 por  $[T_v]$  e  $[T_l]$ , respectivamente, obtém-se:

$$[T_v][\lambda_m] = [Z][Y][T_v] \quad (3.12)$$

$$[T_l][\lambda_m] = [Y][Z][T_l] \quad (3.13)$$

Fazendo a pós-multiplicação das equações 3.12 e 3.13 por  $[T_V]^{-1}$  e  $[T_I]^{-1}$ , respectivamente, obtém-se:

$$[Z][Y] = [T_V][\lambda_m][T_V]^{-1} \quad (3.14)$$

$$[Y][Z] = [T_I][\lambda_m][T_I]^{-1} \quad (3.15)$$

Substituindo as equações 3.14 e 3.15 nas equações 3.2 e 3.3, respectivamente, fica:

$$\frac{d^2[V]}{dx^2} = [T_V][\lambda_m][T_V]^{-1}[V] \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2[I]}{dx^2} = [T_I][\lambda_m][T_I]^{-1}[I] \quad (3.17)$$

Pré multiplicando as equações 3.16 e 3.17 por  $[T_V]^{-1}$  e  $[T_I]^{-1}$ , respectivamente, obtém-se:

$$\frac{d^2[T_V]^{-1}[V]}{dx^2} = [\lambda_m][T_V]^{-1}[V] \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2[T_I]^{-1}[I]}{dx^2} = [\lambda_m][T_I]^{-1}[I] \quad (3.19)$$

Nas equações 3.18 e 3.19 pode-se definir as correntes e tensões modais como sendo:

$$[V_m] = [T_V]^{-1}[V] \quad (3.20)$$

$$[I_m] = [T_I]^{-1}[I] \quad (3.21)$$

Manipulando as equações 3.20 e 3.21 obtém-se:

$$[V] = [T_V][V_m] \quad (3.22)$$

$$[I] = [T_I][I_m] \quad (3.23)$$

Onde  $[V_m]$  e  $[I_m]$  são os vetores com as tensões e as correntes modais da linha, respectivamente.

Substituindo  $[V]$  e  $[I]$  das equações 3.22 e 3.23 nas equações 3.18 e 3.19, respectivamente, obtém-se:

$$\frac{d^2[V_m]}{dx^2} = [\lambda_m][V_m] \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2[I_m]}{dx^2} = [\lambda_m][I_m] \quad (3.25)$$

As expressões 3.24 e 3.25 são as equações diferenciais dos modos exatos da linha. Devido ao fato de que  $[\lambda_m]$  é uma matriz diagonal, pode-se afirmar que a linha de  $n$  fases foi decomposta em  $n$  modos.

### 3.2.1 Matrizes de impedâncias e de admitâncias modais exatas

Substituindo os vetores  $[V]$  e  $[I]$  das equações 3.22 e 3.23 nas equações 3.1 e 3.2 fica:

$$\frac{d[T_v][V_m]}{dx} = -[Z][T_I][I_m] \quad (3.26)$$

$$\frac{d[T_I][I_m]}{dx} = -[Y][T_v][V_m] \quad (3.27)$$

Pré multiplicando as equações 3.26 e 3.27 por  $[T_v]^{-1}$  e  $[T_I]^{-1}$ , respectivamente, obtém-se:

$$\frac{d[V_m]}{dx} = -[T_v]^{-1}[Z][T_I][I_m] \quad (3.28)$$

$$\frac{d[I_m]}{dx} = -[T_I]^{-1}[Y][T_v][V_m] \quad (3.29)$$

As equações 3.28 e 3.29 podem ser escritas como sendo:

$$\frac{d[V_m]}{dx} = -[Z_m][I_m] \quad (3.30)$$

$$\frac{d[I_m]}{dx} = -[Y_m][V_m] \quad (3.31)$$

Nas equações 3.30 e 3.31  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são, respectivamente, as matrizes de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais modais exatas da linha. Estas matrizes são escritas como sendo:

$$[Z_m] = [T_v]^{-1}[Z][T_I] \quad (3.32)$$

$$[Y_m] = [T_I]^{-1}[Y][T_v] \quad (3.33)$$

As matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são matrizes diagonais, conforme mostrarão os resultados obtidos nos próximos itens.

### 3.2.2 Relação entre as matrizes $[T_v]$ e $[T_I]$

Considerando que a impedância mútua entre as fases  $i$  e  $j$  é idêntica à impedância mútua entre as fases  $j$  e  $i$ , pode-se afirmar que:

$$[Z] = [Z]^T \quad (3.34)$$

$$[Y] = [Y]^T \quad (3.35)$$

Nas equações 3.34 e 3.35 as  $[Z]^T$  e  $[Y]^T$  são as matrizes transpostas de  $[Z]$  e  $[Y]$ , respectivamente.

Substituindo as equações 3.34 e 3.35 na equação 3.10, obtém-se:

$$[\lambda_m] = [T_v]^{-1} [Z]^T [Y]^T [T_v] \quad (3.36)$$

Utilizando propriedades matriciais [35], pode-se escrever:

$$[Z]^T [Y]^T = ([Y][Z])^T \quad (3.37)$$

Substituindo a equação 3.37 na equação 3.36, fica:

$$[\lambda_m] = [T_v]^{-1} ([Y][Z])^T [T_v] \quad (3.38)$$

Transpondo os dois lados da equação 3.11, obtém-se:

$$[\lambda_m]^T = ([T_v]^{-1} [Y][Z])^T [T_v]^T \quad (3.39)$$

Re-agrupando o lado direito da equação 3.39:

$$[\lambda_m]^T = ([T_v]^{-1} [Y]) ([Z][T_v])^T \quad (3.40)$$

A equação 3.40 pode ser rescrita como sendo [35]:

$$[\lambda_m]^T = ([Z][T_v])^T ([T_v]^{-1} [Y])^T \quad (3.41)$$

Desenvolvendo o lado direito de 3.41 à partir do mesmo desenvolvimento feito na equação 3.40, obtém-se:

$$[\lambda_m]^T = ([T_1]^T [Z]^T)([Y]^T ([T_1]^{-1})^T) \quad (3.42)$$

Considerando que  $[\lambda_m]$  é uma matriz diagonal, pode-se afirmar que:

$$[\lambda_m] = [\lambda_m]^T \quad (3.43)$$

Com base na equação 3.43 pode-se afirmar que as equações 3.38 e 3.42 são idênticas. Portanto tem-se:

$$[T_v]^{-1} ([Y][Z])^T [T_v] = [T_1]^T [Z]^T [Y]^T ([T_1]^{-1})^T \quad (3.44)$$

Desenvolvendo o termo  $([Y][Z])^T$  no lado esquerdo da equação 3.44:

$$[T_v]^{-1} [Z]^T [Y]^T [T_v] = [T_1]^T [Z]^T [Y]^T ([T_1]^{-1})^T \quad (3.45)$$

Observando a expressão 3.45 pode-se concluir que:

$$[T_v]^{-1} = [T_1]^T \quad (3.46)$$

A expressão 3.46 mostra que existe uma relação entre as matrizes  $[T_v]$  e  $[T_1]$ . Portanto, basta calcular uma das matrizes e, a partir de 3.46 obter a outra matriz.

### 3.2.3 Relação entre as matrizes $[\lambda_m]$ , $[Z_m]$ e $[Y_m]$

Fazendo o produto das equações 3.32 e 3.33:

$$[Z_m][Y_m] = [T_v]^{-1} [Z][T_1][T_1]^{-1} [Y][T_v] \quad (3.47)$$

Desenvolvendo a equação 3.47:

$$[Z_m][Y_m] = [T_v]^{-1} [Z][Y][T_v] \quad (3.48)$$

Comparando as equações 3.10 e 3.48, pode-se afirmar que a matriz  $[\lambda_m]$  pode ser escrita como sendo:

$$[\lambda_m] = [Z_m][Y_m] \quad (3.49)$$

Fazendo o produto das equações 3.33 e 3.32:

$$[Y_m][Z_m] = [T_1]^{-1}[Y][T_v][T_v]^{-1}[Z][T_1] \quad (3.50)$$

Desenvolvendo a equação 3.50:

$$[Y_m][Z_m] = [T_1]^{-1}[Y][Z][T_1] \quad (3.51)$$

Comparando as equações 3.11 e 3.51:

$$[\lambda_m] = [Y_m][Z_m] \quad (3.52)$$

As equações 3.49 e 3.52 mostram que os produtos  $[Z_m][Y_m]$  e  $[Y_m][M_m]$  são idênticos. Portanto, as matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são matrizes diagonais.

Substituindo as equações 3.49 e 3.52 nas equações 3.24 e 3.25, obtém-se:

$$\frac{d^2[V_m]}{dx^2} = [Z_m][Y_m][V_m] \quad (3.53)$$

$$\frac{d^2[I_m]}{dx^2} = [Y_m][Z_m][I_m] \quad (3.54)$$

As equações 3.53 e 3.54 são as equações diferenciais modais da linha. Uma vez que as matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são diagonais, as equações 3.53 e 3.54 estão desacopladas e suas soluções são conhecidas [5].

### 3.3 Quase-modos da linha de transmissão

Quando a linha de transmissão é idealmente transposta a matriz de Clarke separa a linha em seus modos exatos. Em situações em que uma linha não pode ser considerada idealmente transposta mas possui um plano de simetria vertical, pode-se, com algumas aproximações, utilizar a matriz de Clarke para determinar os modos exatos. Nestas condições obtém-se a linha decomposta em seus quase-modos. Para linhas decompostas em seus quase-modos, as matrizes  $[Y_{qm}]$  e  $[Z_{qm}]$  possuem alguns elementos não nulos fora da diagonal principal, que serão desprezados. Devido ao fato de que

estas matrizes não são matrizes diagonais, não se obtém os modos exatos da linha e sim os seus quase-modos [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49].

Portanto, considerando a linha trifásica, transposta ou não, os modos exatos 1, 2 e 3 podem ser considerados equivalentes aos quase-modos  $\alpha$ ,  $\beta$  e zero, respectivamente.

Substituindo a matriz  $[T_1]$  pela matriz de Clarke, obtém-se:

$$[T_1] = [T_{\text{clarke}}] \quad (3.55)$$

Substituindo a equação 3.55 na equação 3.46:

$$[T_V]^{-1} = [T_{\text{clarke}}]^T \quad (3.56)$$

Nas equações 3.55 e 3.56  $[T_{\text{clarke}}]$  é a matriz de Clarke, que é expressa como sendo [27, 43, 45, 47]:

$$[T_{\text{clarke}}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Substituindo as equações 3.55 e 3.56 nas equações 3.32 e 3.33, obtém-se as impedâncias e as admitâncias dos quase-modos da linha, respectivamente, expressas através de:

$$[Z_{\text{qm}}] = [T_{\text{clarke}}]^T [Z] [T_{\text{clarke}}] \quad (3.58)$$

$$[Y_{\text{qm}}] = [T_{\text{clarke}}]^{-1} [Y] ([T_{\text{clarke}}]^T)^{-1} \quad (3.59)$$

Se a linha de transmissão é idealmente transposta, as matrizes  $[Z_{\text{qm}}]$  e  $[Y_{\text{qm}}]$  são idênticas às matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$ . Ou seja, nestas condições a matriz de Clarke decompõe a linha em seus modos exatos [3, 4, 49].

Caso a linha possua um plano de simetria vertical, mas não possa ser considerada idealmente transposta, as matrizes  $[Z_{\text{qm}}]$  e  $[Y_{\text{qm}}]$  são escritas como sendo [42, 43, 44, 46, 48, 49]:

$$[Z_{qm}] = \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & 0 & Z_{\alpha 0} \\ 0 & Z_{\beta} & 0 \\ Z_{0\alpha} & 0 & Z_0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$[Y_{qm}] = \begin{bmatrix} Y_{\alpha} & 0 & Y_{\alpha 0} \\ 0 & Y_{\beta} & 0 \\ Y_{0\alpha} & 0 & Y_0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

As equações 3.60 e 3.61 mostram que quando a linha não é idealmente transposta, existe acoplamento entre os quase-modos  $\alpha$  e zero. No entanto, em determinadas situações, o acoplamento entre os modos  $\alpha$  e zero pode ser desconsiderado [42, 43, 44, 46, 48, 49]. Nestas condições, as matrizes  $[Z_{qm}]$  e  $[Y_{qm}]$  tornam-se:

$$[Z_{qm}] \cong \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

$$[Y_{qm}] \cong \begin{bmatrix} Y_{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & Y_0 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

As correntes e tensões dos quase-modos são obtidas a partir da substituição das equações 3.55 e 3.56 nas equações 3.20 e 3.21, ou seja:

$$[V_{qm}] = [T_{clarke}]^T [V] \quad (3.64)$$

$$[I_{qm}] = [T_{clarke}]^{-1} [I] \quad (3.65)$$

Substituindo as grandezas modais  $[V_m]$ ,  $[I_m]$ ,  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  pelas correspondentes grandezas dos quase-modos  $[V_{qm}]$ ,  $[I_{qm}]$ ,  $[Z_{qm}]$  e  $[Y_{qm}]$  nas equações 3.24 e 3.25, obtém-se as equações diferenciais dos quase-modos da linha, que são:

$$\frac{d^2[V_{qm}]}{dx^2} = [Z_{qm}][Y_{qm}][V_{qm}] \quad (3.66)$$

$$\frac{d^2[I_{qm}]}{dx^2} = [Y_{qm}][Z_{qm}][I_{qm}] \quad (3.67)$$

Considerando as simplificações feitas para chegar às equações 3.64 e 3.65, pode-se dizer que as equações 3.66 e 3.67 são também desacopladas e suas soluções são conhecidas.

### 3.4 Solução das equações diferenciais no domínio dos modos

Nos itens anteriores foi verificado que a linha pode ser decomposta em seus modos exatos ou em seus Quase-modos. Este procedimento desacopla as fases da linha e permite substituir o sistema de  $n$  fases por um sistema de  $n$  linhas monofásicas desacopladas entre si, matematicamente idênticas ao sistema original, simplificando o estudo e análise do sistema.

A figura 3.1 mostra um modo genérico  $k$  de uma linha de transmissão, representado através de um quadripolo.



Figura 3.1 - Modo  $k$  da linha

As equações que descrevem o quadripolo mostrado na figura 3.1 são [19]:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Os termos  $A$  e  $D$  são a impedância de entrada de circuito aberto e a impedância de saída de circuito aberto, respectivamente, enquanto que os termos  $B$  e  $C$  são as impedâncias de transferência de circuito aberto [19].

Na figura 3.1,  $V_A$  e  $V_B$  são as tensões enquanto que  $I_A$  e  $I_B$  são as correntes nos extremos da linha de transmissão.

As equações diferenciais do modo  $k$  da linha são:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = ZYV \quad (3.69)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = YZI \quad (3.70)$$

Nas equações 3.69 e 3.70  $V$  e  $I$  são as tensões e correntes em função da posição  $x$  ao longo do modo da linha e  $Z$  e  $Y$  são as impedâncias longitudinais e as admitâncias transversais deste

modo. Considerando os efeitos solo e pelicular, os elementos R e L que constituem a impedância Z são variáveis em função da frequência [9, 20, 29, 31, 48].

Utilizando a solução das equações diferenciais mostradas nas equações 3.69 e 3.70, pode-se escrever as correntes e tensões do quadripolo mostrado na figura 3.1 como sendo [5]:

$$V_A = V_B \cosh(\sqrt{ZY}d) - I_B \sqrt{\frac{Z}{Y}} \sinh(\sqrt{ZY}d) \quad (3.71)$$

$$I_A = -I_B \cosh(\sqrt{ZY}d) + V_B \sqrt{\frac{Y}{Z}} \sinh(\sqrt{ZY}d) \quad (3.72)$$

As equações 3.71 e 3.72 descrevem as correntes e tensões, em função da frequência, nos extremos do modo  $k$  de uma linha de comprimento  $d$ .

Escrevendo as equações 3.71 e 3.72 sob a forma da equação 3.68, obtém-se:

$$A = D = Z_{ck} \frac{\cosh(\gamma_k d)}{\sinh(\gamma_k d)} \quad (3.73)$$

$$B = C = Z_{ck} \frac{1}{\sinh(\gamma_k d)} \quad (3.74)$$

Nas equações 3.73 e 3.74  $Z_{ck}$  e  $\gamma_k$  são, respectivamente, a impedância característica e a constante de propagação do modo  $k$  da linha e são escritos como sendo [5, 6, 28]:

$$Z_{ck} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (3.75)$$

$$\gamma_k = \sqrt{ZY} \quad (3.76)$$

### 3.5 Conclusões

Neste capítulo fez-se um estudo das equações diferenciais que descrevem uma linha de transmissão com  $n$  fases mutuamente acopladas. As equações diferenciais são de difícil resolução devido ao fato de que as fases são acopladas. Para contornar as dificuldades de resolução costuma-se decompor a linha com  $n$  fases em  $n$  modos desacoplados.

De maneira genérica, os autovetores associados ao produto  $[Z][Y]$  constituem a matriz de transformação da linha. No entanto, em se tratando de linhas trifásicas idealmente transpostas pode-

se utilizar, como matriz de transformação, diversas outras matrizes tais como a transformação de Clarke, a transformação de componentes simétricas ou a transformação de Park.

Quando se utiliza a matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação, obtém-se os modos exatos de uma linha trifásica idealmente transposta que possui um plano de simetria vertical. No entanto, se a linha possui um plano de simetria vertical, mas não pode ser considerada idealmente transposta, a transformação de Clarke decompõe a linha em seus quase-modos que possuem um acoplamento entre os modos  $\alpha$  e zero. Em diversos trabalhos verifica-se que este acoplamento é desprezado.

A vantagem em se utilizar os quase-modos em substituição aos modos exatos da linha que não é idealmente transposta é que os autovetores geralmente são números complexos, variáveis em função da frequência, difíceis de serem implementados em programas computacionais que realizam simulações diretamente no domínio do tempo. Quanto à matriz de Clarke, a mesma pertence ao conjunto dos números reais, é constante e seus elementos podem ser facilmente implementados em programas computacionais tais como o Microtran e o Saber que realizam simulações diretamente no domínio do tempo.

Utilizando as soluções das equações diferenciais mencionadas anteriormente para representar a linha, pode-se calcular as correntes e tensões da mesma no domínio da frequência, sendo que os valores das correntes e tensões, no domínio do tempo, podem ser obtidos com o uso de algoritmos de transformações inversas (tais como a transformada rápida de Fourier).



# 4

## IMPEDÂNCIAS EQUIVALENTES

### 4.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado o conceito de impedância equivalente para os modos exatos de uma linha de transmissão representados através de um único circuito  $\pi$  longo. Em seguida, calcula-se as impedâncias equivalentes da linha trifásica com plano de simetria vertical, sem transposição, de 440 kV e 500 km de comprimento. Também será verificada a influência que a substituição da matriz de transformação modal pela matriz de Clarke exerce sobre as impedâncias equivalentes da linha.

### 4.2 Definição de impedância equivalente

A figura 4.1 mostra um quadripolo genérico.



Figura 4.1 - Quadripolo genérico

As equações que descrevem o quadripolo genérico da figura 4.1 são [19]:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Na equação 4.1  $Z_{11}$  e  $Z_{22}$  são, respectivamente, a impedância de entrada e de saída de circuito aberto enquanto que os termos  $Z_{12}$  e  $Z_{21}$  são as impedâncias de transferência de circuito aberto [19].

#### Capítulo 4 – Impedâncias equivalentes

A impedância equivalente de circuito aberto será definida como sendo a impedância vista à partir de um extremo do quadripolo, considerando que o outro extremo está com os terminais em aberto [21, 22, 23, 24, 25]. Com base nesta definição a equação 4.1 torna-se:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Desenvolvendo a equação 4.2:

$$V_A = Z_{11}I_A \quad (4.3)$$

A equação 4.3 mostra que a impedância de entrada de circuito aberto é igual à impedância equivalente de circuito aberto,  $Z_{eqab}$ , do quadripolo. Desta forma, tem-se:

$$Z_{eqab} = Z_{11} \quad (4.4)$$

A impedância equivalente de curto-circuito será definida como sendo a impedância vista através de um dos extremos considerando o outro extremo em curto-circuito. Com base nesta definição, a equação 4.2 torna-se:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Desenvolvendo a equação 4.5:

$$V_A = Z_{11}I_A + Z_{12}I_B \quad (4.6)$$

$$0 = Z_{21}I_A + Z_{22}I_B \quad (4.7)$$

Da expressão 4.7, pode-se expressar  $I_B$  como sendo:

$$I_B = -I_A \left( \frac{Z_{21}}{Z_{22}} \right) \quad (4.8)$$

Substituindo  $I_B$ , obtido na equação 4.8, na equação 4.6:

$$V_A = Z_{11}I_A - I_A \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \quad (4.9)$$

Reescrevendo 4.9:

$$V_A = \left( Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \right) I_A \quad (4.10)$$

Na expressão 4.10, o termo  $\left( Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \right)$  é a impedância equivalente de curto-circuito do quadripolo. Portanto, pode-se escrever:

$$Z_{\text{eqcc}} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22}} \quad (4.11)$$

Na equação 4.11,  $Z_{\text{eqcc}}$  é a impedância equivalente de curto-circuito.

### 4.3 Impedâncias equivalentes dos modos exatos da linha

Considere um modo exato  $k$  de uma linha de transmissão representado através de um único circuito  $\pi$  longo. Este circuito  $\pi$  longo pode ser representado através do quadripolo mostrado na figura 4.2.

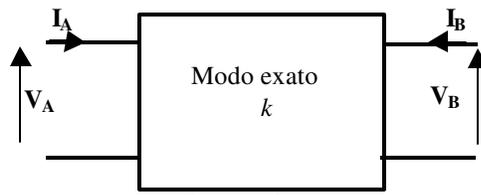


Figura 4.2 - Modo exato  $k$

Foi mostrado no capítulo 3 que as equações que descrevem o modo exato  $k$  são:

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Na equação 4.12 os termos A, B, C e D são escritos como sendo [5]:

$$A = D = Z_{\text{ck}} \frac{\cosh(\gamma_k d)}{\sinh(\gamma_k d)} \quad (4.13)$$

$$B = C = Z_{\text{ck}} \frac{1}{\sinh(\gamma_k d)} \quad (4.14)$$

#### Capítulo 4 – Impedâncias equivalentes

Utilizando os conceitos de impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto-circuito que foram definidos nas equações 4.4 e 4.11, pode-se expressar as impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto-circuito do modo exato  $k$  como sendo:

$$Z_{\text{eqab}(k)} = A \quad (4.15)$$

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = A - \frac{BC}{D} \quad (4.16)$$

Considerando que os termos A e D são idênticos e que os termos B e C são idênticos, pode-se reescrever a equação 4.16 como sendo:

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = A - \frac{B^2}{A} \quad (4.17)$$

Manipulando a expressão 4.17:

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = \frac{A^2 - B^2}{A} \quad (4.18)$$

Substituindo a expressão de A da equação 4.13 na equação 4.15, obtém-se a impedância equivalente de circuito aberto do modo exato  $k$  da linha como sendo:

$$Z_{\text{eqab}(k)} = Z_{\text{ck}} \frac{\cosh(\gamma_k d)}{\sinh(\gamma_k d)} \quad (4.19)$$

Substituindo as expressões de A e B (equações 4.13 e 4.14, respectivamente) na equação 4.18, obtém-se:

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = \frac{1}{Z_{\text{ck}} \frac{\cosh(\gamma_k d)}{\sinh(\gamma_k d)}} \left( \left( Z_{\text{ck}} \frac{\cosh(\gamma_k d)}{\sinh(\gamma_k d)} \right)^2 - \left( \frac{Z_{\text{ck}}}{\sinh(\gamma_k d)} \right)^2 \right) \quad (4.20)$$

Desenvolvendo a expressão 4.20:

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = \frac{Z_{\text{ck}}^2}{Z_{\text{ck}} \frac{\cosh(\gamma_k d)}{\sinh(\gamma_k d)}} \left( \frac{\cosh^2(\gamma_k d)}{\sinh^2(\gamma_k d)} - \frac{1}{\sinh^2(\gamma_k d)} \right) \quad (4.21)$$

Desenvolvendo 4.21:

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = \frac{Z_{\text{ck}} \sinh(\gamma_k d)}{\cosh(\gamma_k d)} \left( \frac{\cosh^2(\gamma_k d) - 1}{\sinh^2(\gamma_k d)} \right) \quad (4.22)$$

O termo  $(\cosh^2(\gamma_k d) - 1)$  pode ser escrito como sendo [26]:

$$\cosh^2(\gamma_k d) - 1 = \sinh^2(\gamma_k d) \quad (4.23)$$

Substituindo a equação 4.23 na equação 4.22:

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = \frac{Z_{\text{ck}} \sinh(\gamma_k d)}{\cosh(\gamma_k d)} \left( \frac{\sinh^2(\gamma_k d)}{\sinh^2(\gamma_k d)} \right) \quad (4.24)$$

Simplificando a expressão 4.24:

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = Z_{\text{ck}} \frac{\sinh(\gamma_k d)}{\cosh(\gamma_k d)} \quad (4.25)$$

A expressão 4.25 mostra a impedância equivalente de curto-circuito do modo exato  $k$  da linha.

As expressões 4.19 e 4.25 podem ser escritas na forma de tangentes e co-tangentes hiperbólicas. Desta forma as impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto-circuito do modo exato  $k$  tornam-se, respectivamente:

$$Z_{\text{eqab}(k)} = Z_{\text{ck}} \cot \text{gh}(\gamma_k d) \quad (4.26)$$

$$Z_{\text{eqcc}(k)} = Z_{\text{ck}} \text{tgh}(\gamma_k d) \quad (4.27)$$

As figuras a seguir mostrarão as impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto-circuito da linha trifásica simétrica de 440 kV e 500 km de comprimento (figura 2.2).

As figuras 4.6 e 4.7 mostram o módulo e o argumento da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 1 na faixa de frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

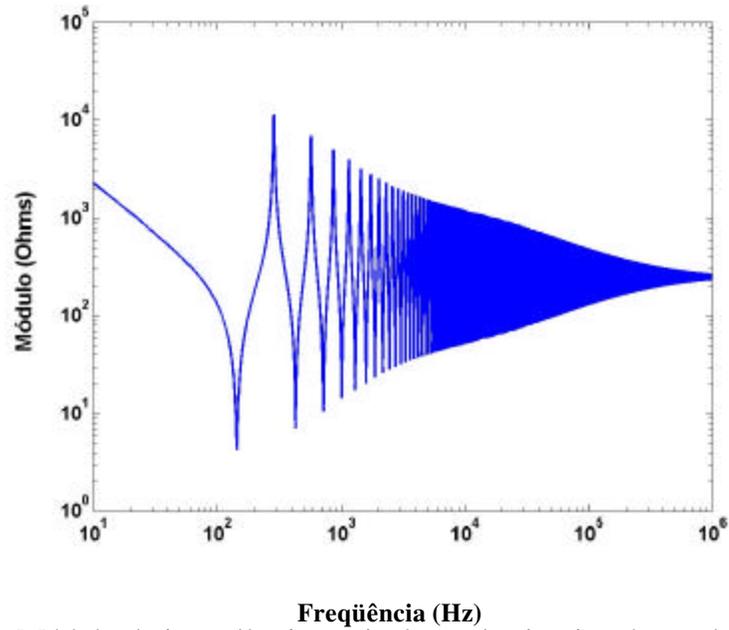


Figura 4.6 - Módulo da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 1

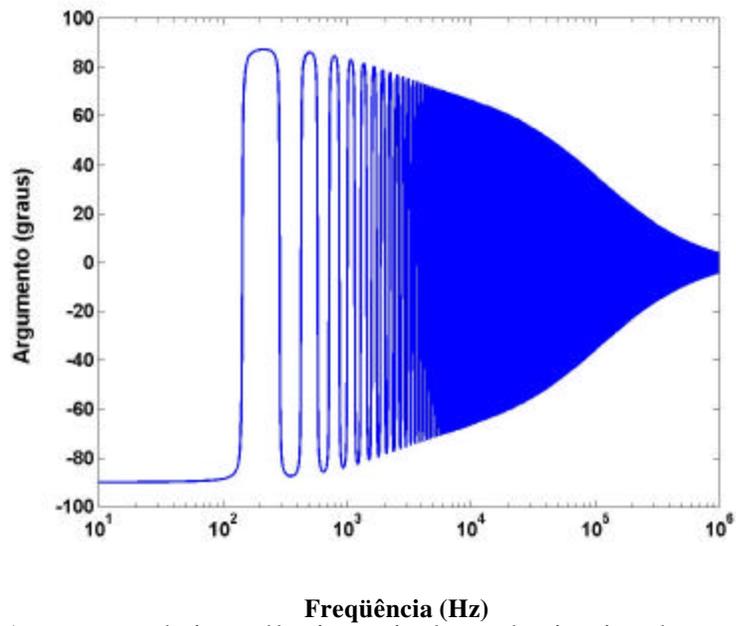


Figura 4.7 - Argumento da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 1

As figuras 4.8 e 4.9 mostram o módulo e o argumento da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 2 na faixa de frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

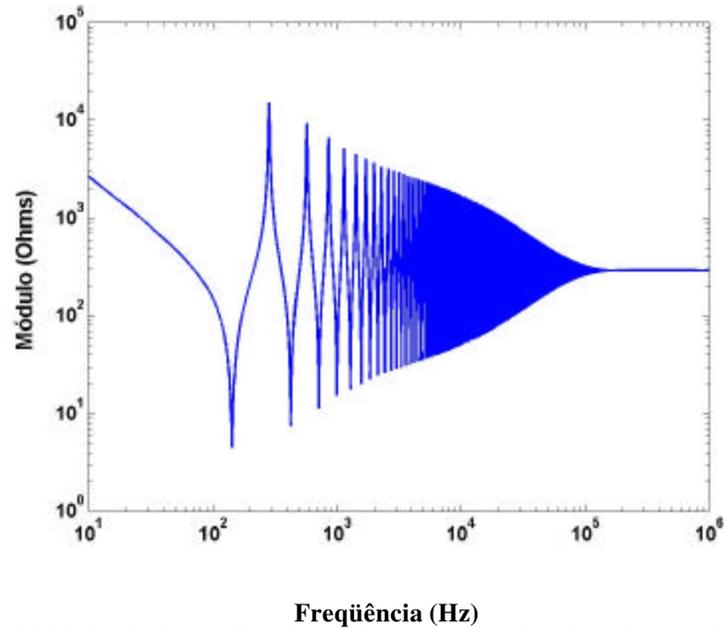


Figura 4.8 - Módulo da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 2

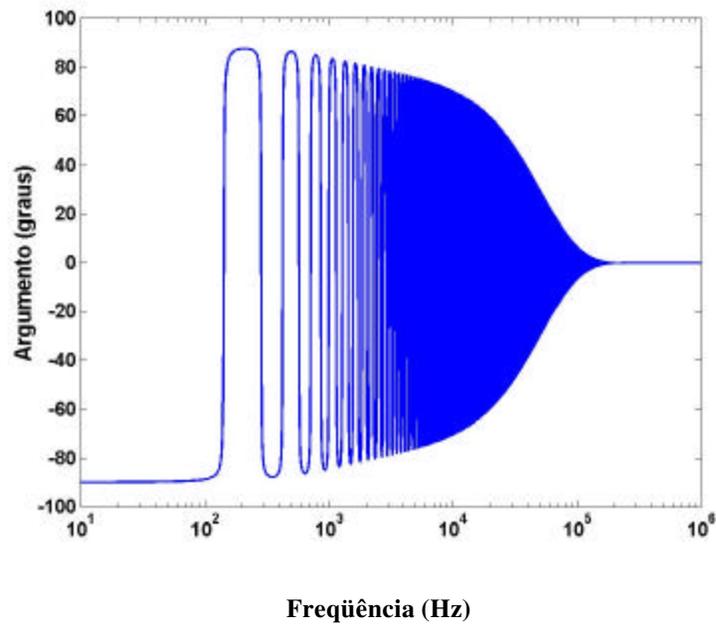


Figura 4.9 - Argumento da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 2

As figuras 4.10 e 4.11 mostram o módulo e o argumento da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 3 na faixa de frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

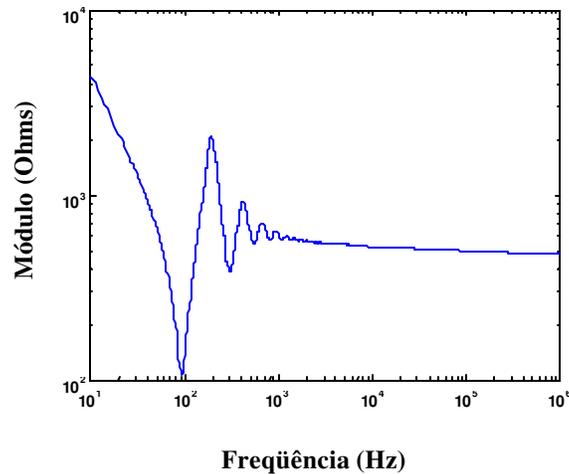


Figura 4.10 - Módulo da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 3

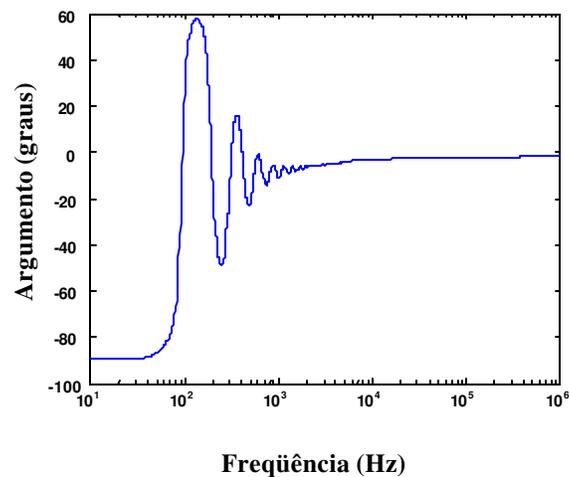


Figura 4.11 - Argumento da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 3

As figuras 4.6-4.11 mostram que a linha aberta, cujos modos exatos são representados através de um único circuito  $\pi$  longo, comporta-se, em baixas frequências, como sendo circuitos de natureza capacitiva. Em uma faixa de frequências intermediárias a linha comporta-se como circuitos de natureza indutiva (argumento está entre 0 e  $-90$  graus) em algumas faixas de frequências e como um circuito de natureza capacitiva (argumento está entre 0 e 90 graus) em outras faixas de frequências. Em altas frequências a linha tende a comportar-se como um circuito resistivo.

As figuras 4.12 e 4.13 mostram o módulo e o argumento da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 1 na faixa de frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

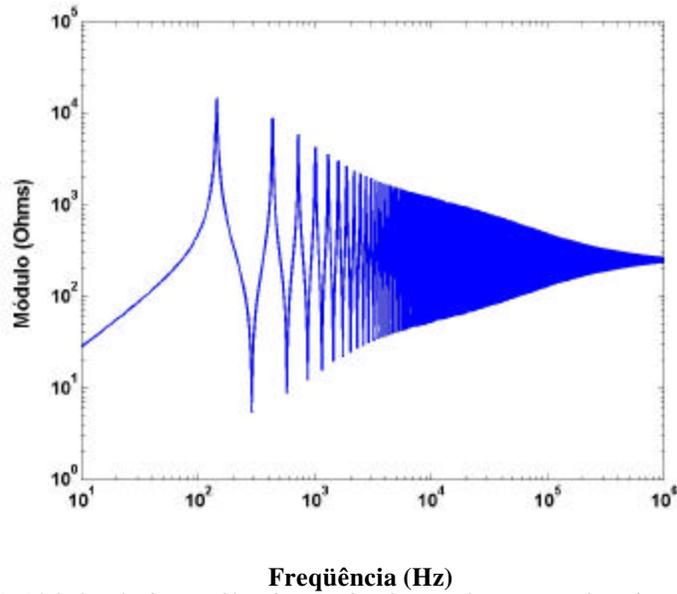


Figura 4.12 - Módulo da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 1

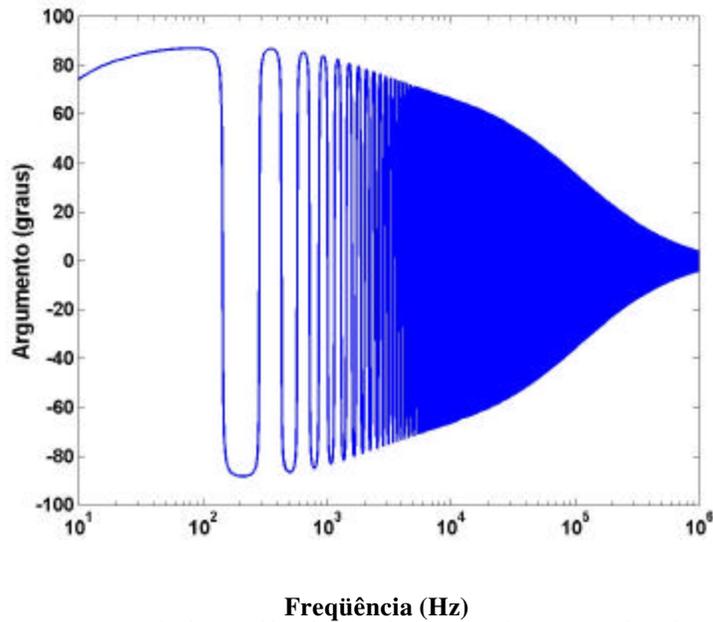


Figura 4.13 - Argumento da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 1

As figuras 4.14 e 4.15 mostram o módulo e o argumento da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 2 na faixa de frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

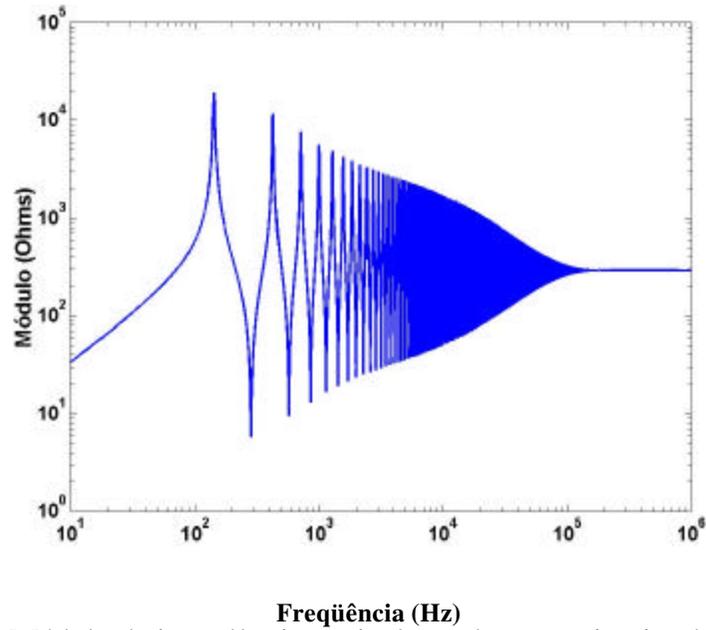


Figura 4.14 - Módulo da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 2

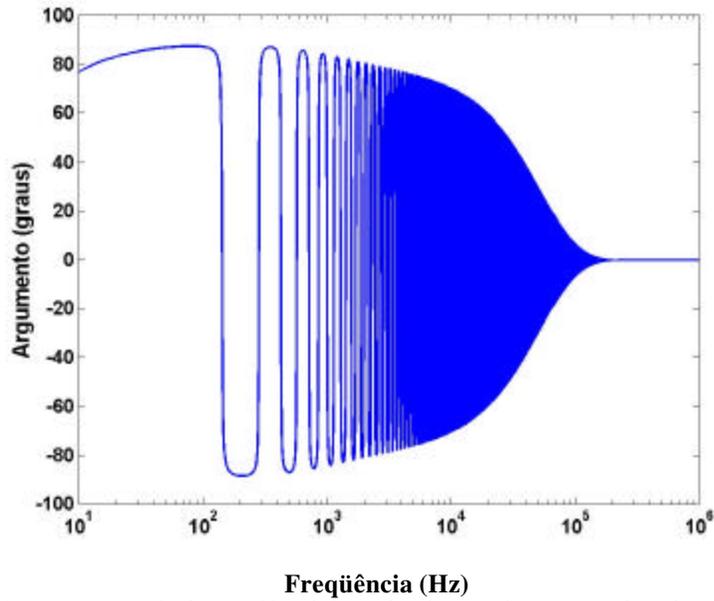


Figura 4.15 - Argumento da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 2

As figuras 4.16 e 4.17 mostram o módulo e o argumento da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 3 na faixa de frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

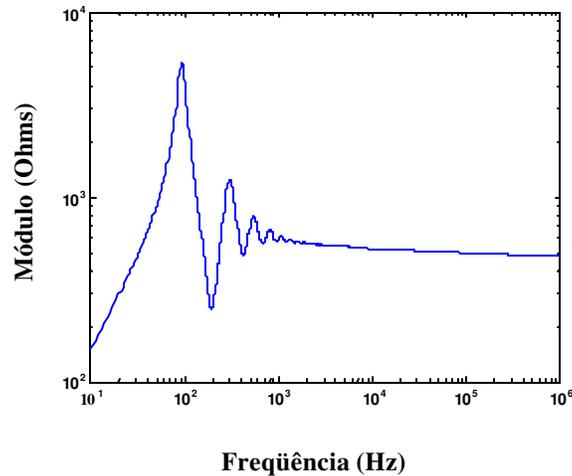


Figura 4.16 - Módulo da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 3

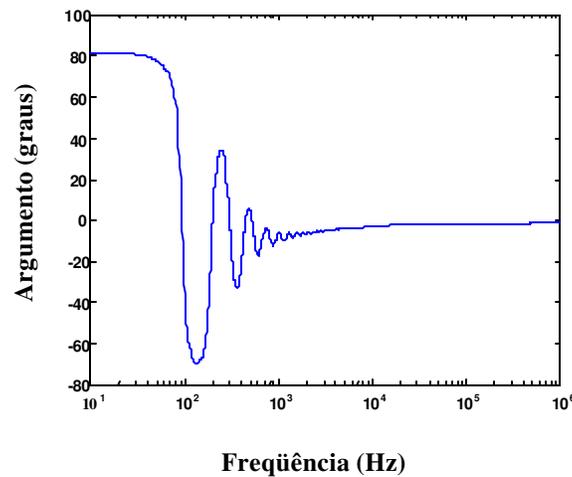


Figura 4.17 - Argumento da impedância equivalente de curto-circuito do modo exato 3

As figuras 4.12-4.17 mostram que a linha com um dos extremos em curto-circuito, cujos modos exatos são representados através de um único circuito  $\pi$  longo, comporta-se, em baixas frequências, como um circuito de natureza indutiva. Em frequências intermediárias esta linha comporta-se como circuitos de natureza indutiva (argumento está entre 0 e  $-90$  graus) em algumas faixas de frequências e como um circuito de natureza capacitiva (argumento está entre 0 e 90 graus) em outras faixas de frequências. Em altas frequências a linha tende a comportar-se como um circuito resistivo.

#### 4.4 Influência da matriz de transformação sobre as impedâncias equivalentes

Neste item será verificado qual é a influência que a matriz de transformação exerce no cálculo das impedâncias equivalentes dos modos (ou quase-modos) da linha. Para isto, serão criados dois modelos de linha. No primeiro modelo, as fases da linha serão desacopladas através da matriz

de transformação  $[T_I]$  enquanto que no segundo modelo será utilizada a matriz de Clarke como sendo a única matriz de transformação. Em seguida serão calculadas as impedâncias equivalentes de circuito aberto dos dois modelos, através das equações que foram desenvolvidas. As diferenças constatadas nas impedâncias equivalentes dos modos exatos e dos quase-modos são devidas à utilização da matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação.

#### 4.4.1 Comparação entre o modo 1 e o quase-modo $\alpha$

As figuras 4.44 e 4.45 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento da impedância equivalente de circuito aberto do modo exato 1 e do quase-modo  $\alpha$  em frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 kHz.

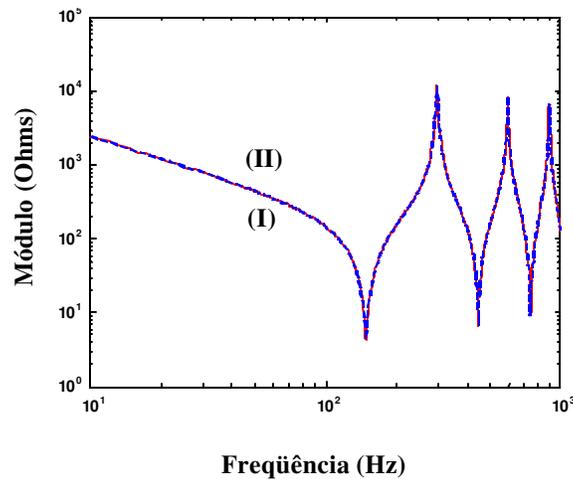


Figura 4.44 - Módulo da impedância equivalente do modo exato 1 (I) e do quase-modo  $\alpha$  (II)

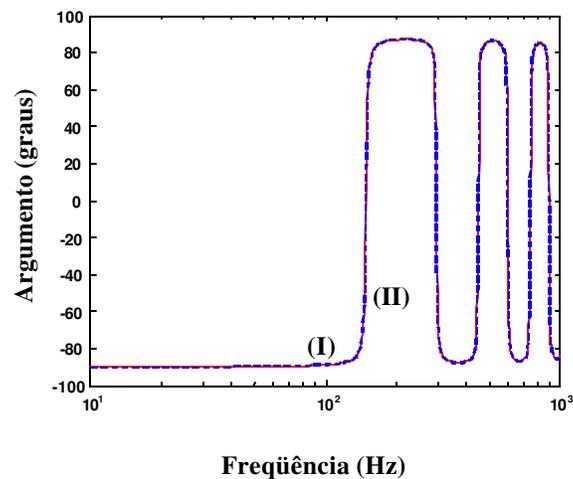


Figura 4.45 - Argumento da impedância equivalente do modo exato 1 (I) e do quase-modo  $\alpha$  (II)

As figuras 4.46 e 4.47 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento da impedância equivalente do modo exato 1 e do quase-modo  $\alpha$  em frequências compreendidas entre 1 kHz e 3 kHz.

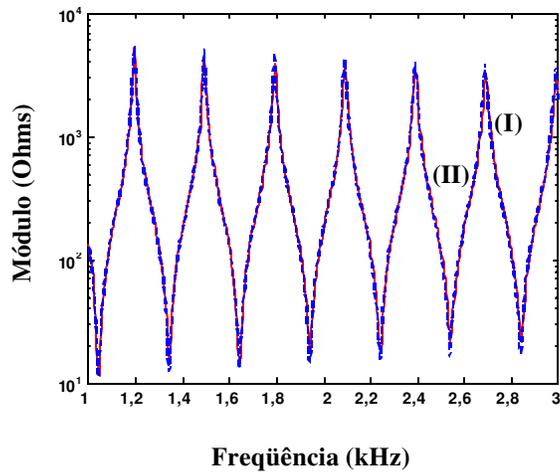


Figura 4.46 - Módulo da impedância equivalente do modo exato 1 (I) e do quase-modo  $\alpha$  (II)

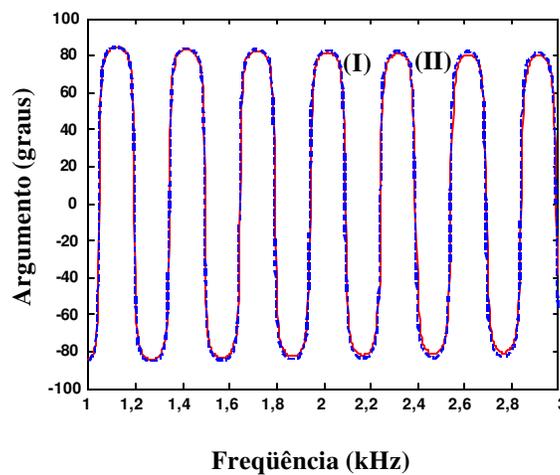


Figura 4.47 - Argumento da impedância equivalente do modo exato 1 (I) e do quase-modo  $\alpha$  (II)

As figuras 4.48 e 4.49 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento da impedância equivalente do modo exato 1 e do quase-modo  $\alpha$  em frequências entre 6 kHz e 7 kHz.

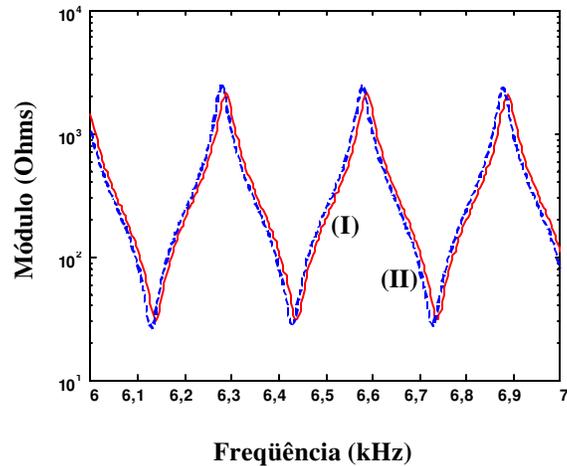


Figura 4.48 - Módulo da impedância equivalente do modo exato 1 (I) e do quase-modo  $\alpha$  (II)

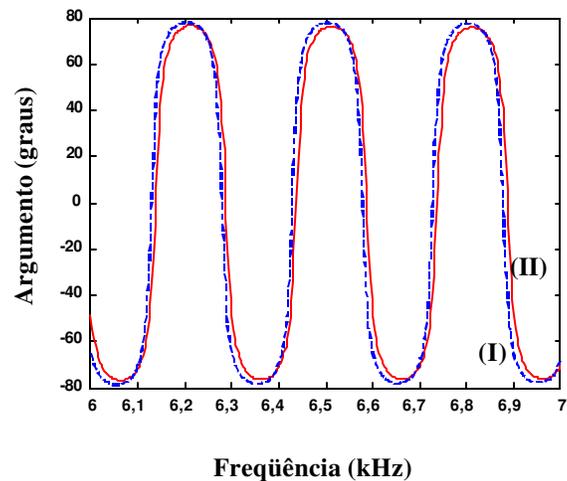


Figura 4.49 - Argumento da impedância equivalente do modo exato 1 (I) e do quase-modo  $\alpha$  (II)

As figuras 4.44-4.49 mostram que a utilização da matriz de Clarke em substituição à matriz de transformação modal produz defasagens na impedância equivalente do quase-modo  $\alpha$ , fazendo com que as frequências de ressonância do modo exato 1 e do quase-modo  $\alpha$  sejam diferentes. A diferença entre as frequências de ressonância aumenta à medida que a frequência aumenta.

#### 4.4.2 Comparação entre o modo 2 e o quase-modo $\beta$

As figuras 4.50 e 4.51 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento da impedância equivalente do modo exato 2 e do quase-modo  $\beta$  em frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 kHz.

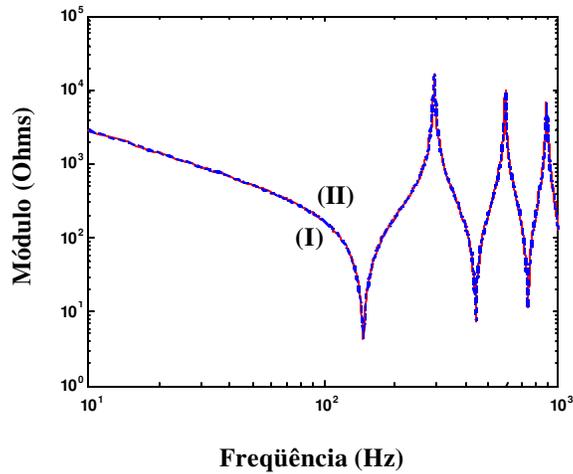


Figura 4.50 - Módulo da impedância equivalente do modo exato 2 (I) e do quase-modo  $\beta$  (II)

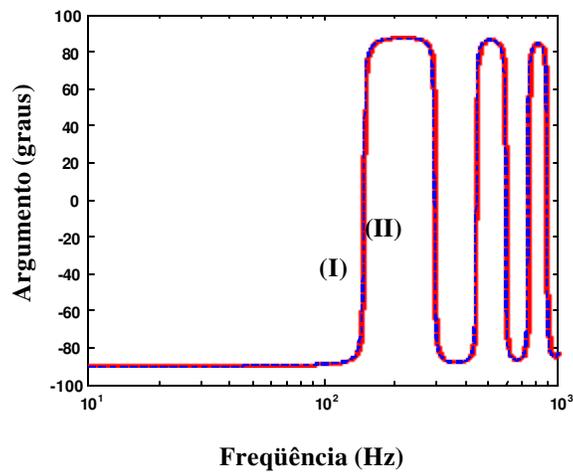


Figura 4.51 - Argumento da impedância equivalente do modo exato 2 (I) e do quase-modo  $\beta$  (II)

As figuras 4.52 e 4.53 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento da impedância equivalente do modo exato 2 e do quase-modo  $\beta$  em frequências entre 1 kHz e 3 kHz.

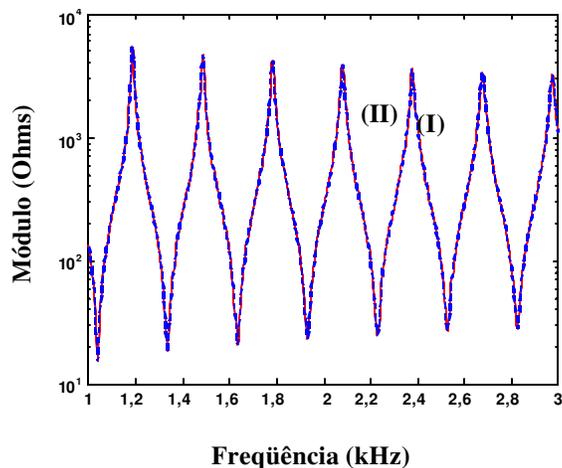


Figura 4.52 - Módulo da impedância equivalente do modo exato 2 (I) e do quase-modo  $\beta$  (II)

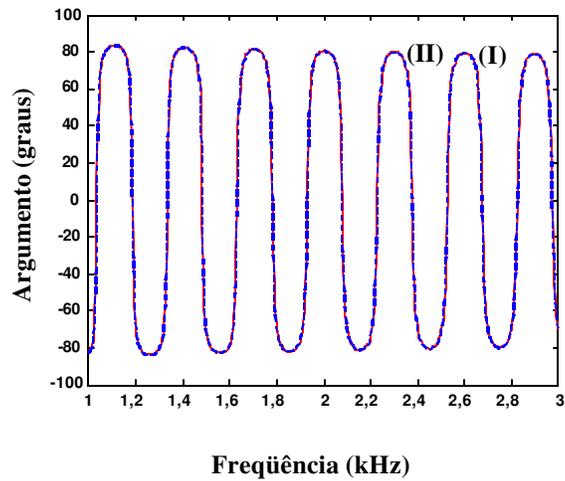


Figura 4.53 - Argumento da impedância equivalente do modo exato 2 (I) e do quase-modo  $\beta$  (II)

As figuras 4.54 e 4.55 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento da impedância equivalente do modo exato 2 e do quase-modo  $\beta$  em frequências entre 6 kHz e 7 kHz.

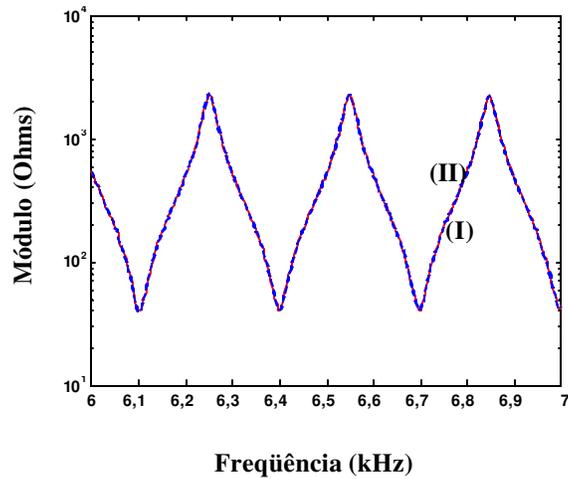


Figura 4.54 - Módulo da impedância equivalente do modo exato 2 (I) e do quase-modo  $\beta$  (II)

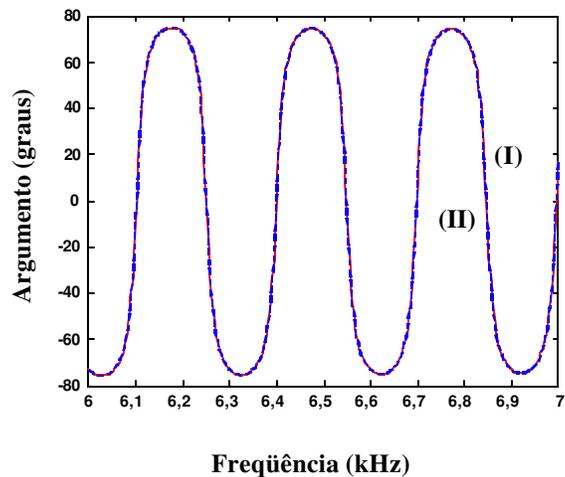


Figura 4.55 - Argumento da impedância equivalente do modo exato 2 (I) e do quase-modo  $\beta$  (II)

As figuras 4.50-4.55 mostram que a utilização da matriz de Clarke em substituição à matriz de transformação modal não produz alterações na impedância equivalente do quasi-modo  $\beta$ . Este resultado já era esperado uma vez que em diversos trabalhos verifica-se que, em se tratando de linhas com plano de simetria vertical, o quase-modo  $\beta$  é idêntico a um modo exato [42, 43, 44, 46, 49].

#### 4.4.3 Comparação entre o modo exato 3 e o quase-modo zero

As figuras 4.56 e 4.57 mostram, respectivamente, o módulo e o argumento da impedância equivalente do modo “exato” 3 e do “Quase-modo” zero em frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 MHz.

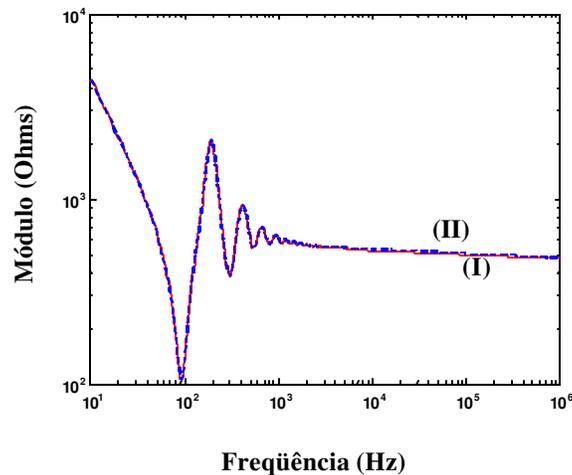


Figura 4.56 - Módulo da impedância equivalente do modo exato 3 (I) e do quase-modo zero (II)

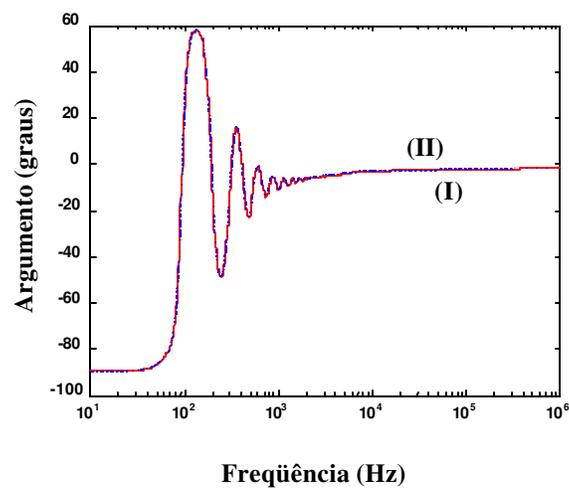


Figura 4.57 - Argumento da impedância equivalente do modo exato 3 (I) e do quase-modo zero (II)

## **4.5 Conclusões**

Neste capítulo foram desenvolvidos os conceitos de impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto-circuito. A impedância equivalente de circuito aberto de um quadripolo é a impedância calculada em um extremo, considerando que o outro extremo está aberto. A impedância equivalente de curto-circuito de um quadripolo é a impedância calculada em um dos extremos do quadripolo, considerando que o outro extremo está em curto-circuito.

Os cálculos das impedâncias equivalentes que foram realizados mostraram que, de maneira geral, uma linha de transmissão comporta-se, em baixas frequências, como um circuito de natureza capacitiva (quando a linha está com um dos extremos em aberto) e como um circuito de natureza indutiva (quando a linha está com um dos extremos em curto-circuito). Em uma faixa de frequências intermediárias, os cálculos das impedâncias equivalentes mostraram que a linha comporta-se como circuitos de natureza indutiva (argumento está entre 0 e  $-90$  graus) em algumas faixas de frequências e como um circuito de natureza capacitiva (argumento está entre 0 e 90 graus) em outras faixas de frequências. Em altas frequências a linha tende a comportar-se como um circuito resistivo.

Os resultados mostraram a influência que a matriz de transformação, utilizada para desacoplar as fases da linha, exerce nas impedâncias equivalentes. Foi possível verificar que quando se utiliza a matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação, o quase-modos  $\alpha$  apresenta frequências de ressonância diferentes das frequências de ressonância do modo exato 1. As impedâncias equivalentes do modo exato 2 e do quase-modo  $\beta$  não apresentaram diferenças entre si, uma vez que a componente  $\beta$  é um modo exato.

# 5

## IMPEDÂNCIAS EQUIVALENTES CALCULADAS A PARTIR DAS CORRENTES E TENSÕES DE FASE

### 5.1 Introdução

Neste capítulo serão determinadas expressões que relacionam as correntes e tensões nas fases da linha em função das impedâncias equivalentes modais da mesma. Inicialmente serão determinadas as expressões de correntes e tensões modais da linha. Em seguida, utilizando-se as matrizes de transformação exatas, as correntes e tensões serão convertidas para o domínio das fases. Em seguida serão obtidas relações matemáticas entre as correntes e tensões modais da linha e as impedâncias equivalentes. Utilizando-se as matrizes de transformação é possível obter as relações entre as correntes e tensões de fase da linha e as impedâncias equivalentes dos modos.

Os resultados obtidos neste capítulo serão utilizados no capítulo 6 de modo tal que uma vez conhecidas as correntes e tensões nas fases da linha, seja possível obter os parâmetros longitudinais e transversais da mesma.

Serão apresentados resultados de simulação para a linha da figura 2.2, que é uma linha trifásica simétrica sem transposição, cuja tensão nominal é 440 kV e o comprimento é 500 km.

### 5.2 Correntes e tensões modais da linha

Considere uma linha de transmissão com  $n$  fases, cujo efeito dos cabos pára-raios já estão inseridos nas fases. Esta linha de transmissão pode ser decomposta em  $n$  modos, sendo que não existe acoplamento entre os mesmos.

A figura 5.1 mostra um modo  $k$  da linha.

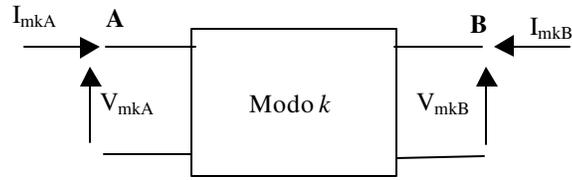


Figura 5.1 - Modo  $k$  representado através de um quadripolo

Na figura 5.1, tem-se:

$V_{mkA}$  tensão no extremo A do modo  $k$  da linha;

$V_{mkB}$  tensão no extremo B do modo  $k$  da linha;

$I_{mkA}$  corrente no extremo A do modo  $k$  da linha;

$I_{mkB}$  corrente no extremo B do modo  $k$  da linha;

Pode-se escrever as tensões de entrada e de saída,  $V_{mkA}$  e  $V_{mkB}$ , respectivamente, como sendo a soma de duas componentes de tensões. Uma das componentes é devido à corrente  $I_{mkA}$  e a outra componente é devido à corrente  $I_{mkB}$ .

As equações que relacionam as tensões nos extremos A e B com as correntes nos mesmos extremos são:

$$V_{mkA} = \sqrt{\frac{z_{nk}}{y_{nk}}} \frac{\cosh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)} I_{mkA} + \sqrt{\frac{z_{nk}}{y_{nk}}} \frac{1}{\sinh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)} I_{mkB} \quad (5.1)$$

$$V_{mkB} = \sqrt{\frac{z_{nk}}{y_{nk}}} \frac{1}{\sinh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)} I_{mkA} + \sqrt{\frac{z_{nk}}{y_{nk}}} \frac{\cosh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)} I_{mkB} \quad (5.2)$$

Nas equações 5.1 e 5.2, tem-se:

$z_{mk}$  impedância longitudinal do modo  $k$ , em ohms/km;

$y_{mk}$  admitância transversal do modo  $k$  em mho/km;

$d$  comprimento da linha, em km.

As equações 5.1 e 5.2 podem ser escritas, resumidamente, como sendo:

$$V_{mkA} = A_{mk} I_{mkA} + B_{mk} I_{mkB} \quad (5.3)$$

$$V_{mkB} = C_{mk} I_{mkA} + D_{mk} I_{mkB} \quad (5.4)$$

Sendo:

$$A_{mk} = \sqrt{\frac{z_{nk}}{y_{nk}}} \frac{\cosh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)} \quad (5.5)$$

$$B_{mk} = \sqrt{\frac{z_{nk}}{y_{nk}}} \frac{1}{\sinh(\sqrt{z_{nk} y_{nk}} d)} \quad (5.6)$$

$$C_{mk} = B_{mk} \quad (5.7)$$

$$D_{mk} = A_{mk} \quad (5.8)$$

Os parâmetros  $A_{mk}$ ,  $B_{mk}$ ,  $C_{mk}$  e  $D_{mk}$  são denominados parâmetros de impedância de circuito aberto. O termo  $A_{mk}$  é a impedância de entrada de circuito aberto,  $D_{mk}$  é a impedância de saída de circuito aberto e os termos  $B_{mk}$  e  $C_{mk}$  são as impedâncias de transferência de circuito aberto.

No capítulo 4 mostrou-se que o termo  $A_{mk}$  é a impedância equivalente de circuito aberto do modo  $k$ .

Estendendo as equações 5.3 e 5.4 para os  $n$  modos da linha obtém-se as equações que relacionam as tensões, nos extremos A e B, com as correntes, nos mesmos extremos, para todos os modos. Portanto, na forma matricial, tem-se:

$$[V_{mA}] = [A_m][I_{mA}] + [B_m][I_{mB}] \quad (5.9)$$

$$[V_{mB}] = [C_m][I_{mA}] + [D_m][I_{mB}] \quad (5.10)$$

Nas equações 5.9 e 5.10, as matrizes  $[A_m]$ ,  $[B_m]$ ,  $[C_m]$  e  $[D_m]$  são escritas como sendo:

$$[A_m] = \begin{bmatrix} A_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} B_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$[C_m] = \begin{bmatrix} C_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$$[D_m] = \begin{bmatrix} D_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{mm} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

A partir das expressões 5.9 e 5.10 pode-se expressar as correntes e tensões modais no extremo A da linha em função das correntes e tensões modais no extremo B da mesma. Desta forma obtém-se:

$$[I_{mA}] = \{[C_m]^{-1}[V_{mB}]\} - \{[C_m]^{-1}[D_m][I_{mB}]\} \quad (5.15)$$

$$[V_{mA}] = \{[A_m][C_m]^{-1}[V_{mB}]\} + \{[B_m] - \{[A_m][C_m]^{-1}[D_m]\}\}[I_{mB}] \quad (5.16)$$

### 5.3 Correntes e tensões nas fases da linha

As equações matriciais 5.15 e 5.16 mostram as correntes e tensões modais em um extremo em função das correntes e tensões modais no outro extremo da linha. Neste item, as equações 5.15 e 5.16 serão expressas no domínio das fases.

No capítulo 3 foram mostradas as seguintes relações:

$$[V_m] = [T_V]^{-1}[V_f] \quad (5.17)$$

$$[I_m] = [T_I]^{-1}[I_f] \quad (5.18)$$

Nas equações 5.17 e 5.18 tem-se:

$[V_f]$  vetor com as tensões de fase;

$[V_m]$  vetor com as tensões modais;

$[I_f]$  vetor com as correntes de fase;

$[I_m]$  vetor com correntes modais;

As matrizes  $[T_V]$  e  $[T_I]$  são as matrizes que diagonalizam os produtos  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ , respectivamente. As matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  são as impedâncias longitudinais e as admitâncias transversais, respectivamente, escritas no domínio das fases. Os elementos das matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  estão expressos por unidade de comprimento da linha.

Substituindo as equações 5.17 e 5.18 nas expressões 5.15 e 5.16 tem-se:

$$[T_V]^{-1}[V_{fA}] = \{[A_m][C_m]^{-1}[T_V]^{-1}[V_{fB}]\} + \{[B_m] - [A_m][C_m]^{-1}[D_m]\}\{[T_I]^{-1}[I_{fB}]\} \quad (5.19)$$

$$[T_I]^{-1} [I_{fA}] = \{ [C_m]^{-1} [T_V]^{-1} [V_{fB}] \} - \{ [C_m]^{-1} [D_m] [T_I]^{-1} [I_{fB}] \} \quad (5.20)$$

Pré-multiplicando as equações 5.19 e 5.20 pelas matrizes  $[T_V]$  e  $[T_I]$ , respectivamente, obtém-se:

$$[V_{fA}] = \{ [T_V] [A_m] [C_m]^{-1} [T_V]^{-1} [V_{fB}] \} + \{ [T_V] \{ [B_m] - [A_m] [C_m]^{-1} [D_m] \} [T_I]^{-1} [I_{fB}] \} \quad (5.21)$$

$$[I_{fA}] = \{ [T_I] [C_m]^{-1} [T_V]^{-1} [V_{fB}] \} - \{ [T_I] [C_m]^{-1} [D_m] [T_I]^{-1} [I_{fB}] \} \quad (5.22)$$

As equações 5.21 e 5.22 mostram, respectivamente, as tensões e correntes no extremo A escritas em função das correntes e tensões no extremo B. Nestas equações as correntes e tensões são grandezas de fase, enquanto que as matrizes  $[A_m]$ ,  $[B_m]$ ,  $[C_m]$  e  $[D_m]$  estão escritas no domínio modal. Portanto temos uma relação entre grandezas de fase (tensões e correntes) e grandezas modais (matrizes  $[A_m]$ ,  $[B_m]$ ,  $[C_m]$  e  $[D_m]$ ).

### 5.3.1 Linha com o receptor em aberto

Considere o extremo B da linha em aberto. Nestas condições as correntes de fase no extremo B é nula. Portanto as correntes de fase no extremo B é nula, ou seja:

$$[I_{fB}] = [0] \quad (5.23)$$

Substituindo a equação 5.23 nas expressões 5.21 e 5.22:

$$[V_{fA}] = [T_V] [A_m] [C_m]^{-1} [T_V]^{-1} [V_{fB}] \quad (5.24)$$

$$[I_{fA}] = [T_I] [C_m]^{-1} [T_V]^{-1} [V_{fB}] \quad (5.25)$$

Reescrevendo 5.25:

$$[V_{fB}] = [T_V] [C_m] [T_I]^{-1} [I_{fA}] \quad (5.26)$$

Substituindo a equação 5.26 na equação 5.24:

$$[V_{fA}] = [T_V] [A_m] [C_m]^{-1} [T_V]^{-1} [T_V] [C_m] [T_I]^{-1} [I_{fA}] \quad (5.27)$$

A expressão 5.27 resulta em:

$$[V_{fA}] = [T_V][A_m][T_I]^{-1}[I_{fA}] \quad (5.28)$$

Denominando os vetores  $[V_{fA}]$  e  $[I_{fA}]$  de  $[V_{aberto}]$  e  $[I_{aberto}]$ , respectivamente, a equação 5.28 torna-se:

$$[V_{aberto}] = [T_V][A_m][T_I]^{-1}[I_{aberto}] \quad (5.29)$$

A expressão 5.29 relaciona as impedâncias equivalentes de circuito aberto, escritas no domínio dos modos, com as correntes e tensões de fase no extremo A da linha quando o extremo B está aberto.

### 5.3.2 Linha com o receptor em curto-circuito

Se o extremo B da linha está em curto-circuito, as tensões de fase neste extremo são nulas. Desta forma tem-se:

$$[V_{fB}] = [0] \quad (5.30)$$

Substituindo a equação 5.30 nas expressões 5.21 e 5.22:

$$[V_{fA}] = [T_V] \{ [B_m] - [A_m][C_m]^{-1}[D_m] \} [T_I]^{-1} [I_{fB}] \quad (5.31)$$

$$[I_{fA}] = -[T_I][C_m]^{-1}[D_m][T_I]^{-1}[I_{fB}] \quad (5.32)$$

Na expressão 5.32 pode-se escrever o vetor  $[I_{fB}]$  em função de  $[I_{fA}]$ , ou seja:

$$[I_{fB}] = -[T_I][D_m]^{-1}[C_m][T_I]^{-1}[I_{fA}] \quad (5.33)$$

Substituindo 5.33 em 5.31:

$$[V_{fA}] = [T_V] \{ [B_m] - [A_m][C_m]^{-1}[D_m] \} [T_I]^{-1} \{ -[T_I][D_m]^{-1}[C_m][T_I]^{-1}[I_{fA}] \} \quad (5.34)$$

Desenvolvendo 5.34:

$$[V_{fA}] = -\{ [T_V][B_m][T_I]^{-1}[T_I][D_m]^{-1}[C_m][T_I]^{-1}[I_{fA}] \} + \{ [T_V][A_m][C_m]^{-1}[D_m][T_I]^{-1}[T_I][D_m]^{-1}[C_m][T_I]^{-1}[I_{fA}] \} \quad (5.35)$$

Simplificando 5.35:

$$[V_{fA}] = -\{[T_V][B_m][D_m]^{-1}[C_m][T_I]^{-1}[I_{fA}]\} + \{[T_V][A_m][T_I]^{-1}[I_{fA}]\} \quad (5.36)$$

Fatorando 5.36:

$$[V_{fA}] = [T_V] \{-[B_m][D_m]^{-1}[C_m] + [A_m]\} [T_I]^{-1} [I_{fA}] \quad (5.37)$$

Denominando a matriz  $\{-[B_m][D_m]^{-1}[C_m] + [A_m]\}$ , da expressão 5.37, de  $[M_m]$  tem-se:

$$[M_m] = -[B_m][D_m]^{-1}[C_m] + [A_m] \quad (5.38)$$

Substituindo a expressão 5.38 na expressão 5.37:

$$[V_{fA}] = [T_V][M_m][T_I]^{-1}[I_{fA}] \quad (5.39)$$

A expressão 5.39 mostra a relação entre uma grandeza expressa no domínio modal, que é a matriz  $[M_m]$ , com as correntes e tensões de fase no extremo A da linha quando o extremo B está em curto-circuito. Deve-se agora determinar o significado da matriz  $[M_m]$ .

Substituindo os elementos das matrizes  $[A_m]$ ,  $[B_m]$ ,  $[C_m]$  e  $[D_m]$ , mostradas nas equações 5.11-5.14, na expressão 5.38 tem-se:

$$[M_m] = \begin{bmatrix} -\frac{B_{m1}C_{m1}}{D_{m1}} + A_{m1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{B_{m2}C_{m2}}{D_{m2}} + A_{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{B_{mn}C_{mn}}{D_{mn}} + A_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

O i-ésimo elemento da diagonal principal, mostrado em 5.40 é:

$$M_m(i,i) = -\frac{B_{mi}C_{mi}}{D_{mi}} + A_{mi} \quad (5.41)$$

Nas equações 5.7 e 5.8, mostrou-se que existem as seguintes relações:

$$C_{mi} = B_{mi} \quad (5.42)$$

$$D_{mi} = A_{mi} \quad (5.43)$$

Substituindo 5.42 e 5.43 em 5.41:

$$M_m(i,i) = -\frac{(B_{mi})^2}{A_{mi}} + A_{mi} \quad (5.44)$$

A equação 5.44 pode ser escrita na forma:

$$M_m(i,i) = \frac{1}{A_{mi}} \left( -(B_{mi})^2 + (A_{mi})^2 \right) \quad (5.45)$$

Substituindo os elementos  $A_{mi}$  e  $B_{mi}$ , mostrados nas equações 5.5 e 5.6, na expressão 5.45:

$$M_m(i,i) = \frac{1}{\sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}} \frac{\cosh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}}} \left( -\left( \sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}} \frac{1}{\sinh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \right)^2 + \left( \sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}} \frac{\cosh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \right)^2 \right) \quad (5.46)$$

Manipulando 5.46:

$$M_m(i,i) = \frac{1}{\sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}} \frac{\cosh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}}} \left( \frac{z_{mi}}{y_{mi}} \left( -\frac{1}{\sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} + \frac{\cosh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \right) \right) \quad (5.47)$$

Desenvolvendo 5.47:

$$M_m(i,i) = \frac{\left( \frac{z_{mi}}{y_{mi}} \right)}{\sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}} \frac{\cosh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}}} \left( \frac{-1 + \cosh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \right) \quad (5.48)$$

Desenvolvendo 5.48:

$$M_m(i,i) = \frac{\sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}}}{\frac{\cosh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}} \left( \frac{-1 + \cosh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \right) \quad (5.49)$$

O termo  $\left(-1 + \cosh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)\right)$  faz parte de uma das identidades fundamentais das funções hiperbólicas [26]. Esta identidade fundamental pode ser escrita da seguinte forma:

$$\cosh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d) - \sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d) = 1 \quad (5.50)$$

De 5.50 pode-se obter:

$$\sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d) = -1 + \cosh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d) \quad (5.51)$$

Substituindo 5.51 em 5.49:

$$M_m(i,i) = \frac{\sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}}}{\cosh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \left( \frac{\sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\sinh^2(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \right) \quad (5.52)$$

Desenvolvendo e simplificando 5.52:

$$M_m(i,i) = \sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}} \frac{\sinh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)}{\cosh(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d)} \quad (5.53)$$

Desenvolvendo 5.53:

$$M_m(i,i) = \sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}} \operatorname{tgh}(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d) \quad (5.54)$$

Conforme foi mostrado no capítulo 4, o termo  $M_m(i,i)$  na expressão 5.54 é a impedância equivalente de curto-circuito do  $i$ -ésimo modo da linha. Portanto, a equação 5.39 mostra a relação entre as correntes e tensões de fase e as impedâncias equivalentes modais de curto-circuito.

Denominando os vetores  $[V_{fA}]$  e  $[I_{fA}]$  de  $[V_{curto}]$  e  $[I_{curto}]$ , respectivamente, a equação 5.39 torna-se:

$$[V_{curto}] = [T_V] [M_m] [T_I]^{-1} [I_{curto}] \quad (5.55)$$

A expressão 5.55 relaciona as impedâncias equivalentes modais de curto-circuito com as correntes e tensões de fase no extremo A da linha quando o extremo B está curto-circuito.

#### 5.4 Matrizes $[A_m]$ e $[M_m]$ para linhas genéricas

No item 5.3 foi mostrado que existe uma relação entre as correntes e tensões de fase de uma linha de transmissão de  $n$  fases e as impedâncias equivalentes modais da mesma. O próximo passo consiste em escrever as impedâncias equivalentes modais da linha em função das correntes e tensões nas fases.

As relações entre as correntes e tensões de fase de uma linha de transmissão de  $n$  fases e as impedâncias equivalentes modais da mesma, obtidas no item 5.3, são:

$$[V_{aberto}] = [T_v][A_m][T_I]^{-1}[I_{aberto}] \quad (5.56)$$

$$[V_{curto}] = [T_v][M_m][T_I]^{-1}[I_{curto}] \quad (5.57)$$

Nas expressões 5.55 e 5.56 os termos  $[T_v][A_m][T_I]^{-1}$  e  $[T_v][M_m][T_I]^{-1}$  são matrizes com as impedâncias equivalentes da linha no domínio das fases. Estas matrizes serão denominadas  $[A_f]$  e  $[M_f]$ , respectivamente. Desta forma, tem-se:

$$[A_f] = [T_v][A_m][T_I]^{-1} \quad (5.58)$$

$$[M_f] = [T_v][M_m][T_I]^{-1} \quad (5.59)$$

Substituindo as expressões 5.58 e 5.59 nas expressões 5.56 e 5.57, respectivamente:

$$[V_{aberto}] = [A_f][I_{aberto}] \quad (5.60)$$

$$[V_{curto}] = [M_f][I_{curto}] \quad (5.61)$$

Nas expressões 5.60 e 5.61, as matrizes  $[A_f]$  e  $[M_f]$  são matrizes com  $n^2$  elementos enquanto que os vetores  $[V_{aberto}]$ ,  $[I_{aberto}]$ ,  $[V_{curto}]$  e  $[I_{curto}]$ , possuem somente  $n$  elementos cada um.

Desta forma a equação 5.60 é um sistema com  $n$  equações e  $n^2$  incógnitas. Para que este sistema possua uma única solução, será necessário obter  $n$  vetores de tensões  $[V_{aberto}]$  que, conseqüentemente, determinam  $n$  vetores de correntes  $[I_{aberto}]$ . Os vetores de tensão devem ser escolhidos de modo tal que os sistemas de equações resultantes possuam uma única solução.

As condições necessárias para a obtenção da matriz  $[A_f]$  devem ser também observadas no momento de determinar a matriz  $[M_f]$  a partir da equação 5.61.

Uma vez calculadas as matrizes  $[A_f]$  e  $[M_f]$ , pode-se calcular as matrizes  $[A_m]$  e  $[M_m]$ . A partir das equações 5.58 e 5.59 tem-se:

$$[A_m] = [T_v]^{-1} [A_f] [T_i] \quad (5.62)$$

$$[M_m] = [T_v]^{-1} [M_f] [T_i] \quad (5.63)$$

### 5.5 Matrizes $[A_m]$ e $[M_m]$ para linhas trifásicas

Considere uma linha trifásica, com fases A, B e C, em que os efeitos dos cabos pára-raios já estão inseridos nas fases. Nesta linha, os vetores  $[V_{aberto}]$  e  $[I_{aberto}]$  são escritos como sendo:

$$[V_{aberto}] = [V_{abA} \quad V_{abB} \quad V_{abC}]^T \quad (5.64)$$

$$[I_{aberto}] = [I_{abA} \quad I_{abB} \quad I_{abC}]^T \quad (5.65)$$

Na equação 5.64 as tensões  $V_{abA}$ ,  $V_{abB}$  e  $V_{abC}$  são as tensões nas fases A, B e C, respectivamente, da linha e na equação 5.65 as correntes  $I_{abA}$ ,  $I_{abB}$  e  $I_{abC}$  são as correntes nas fases A, B e C, respectivamente, da linha.

A matriz  $[A_f]$  para a linha trifásica descrita anteriormente é escrita como sendo:

$$[A_f] = \begin{bmatrix} A_{fAA} & A_{fAB} & A_{fAC} \\ A_{fBA} & A_{fBB} & A_{fBC} \\ A_{fCA} & A_{fCB} & A_{fCC} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Substituindo as expressões 5.64-5.66 na expressão 5.62:

$$\begin{bmatrix} V_{abA} \\ V_{abB} \\ V_{abC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{fAA} & A_{fAB} & A_{fAC} \\ A_{fBA} & A_{fBB} & A_{fBC} \\ A_{fCA} & A_{fCB} & A_{fCC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abA} \\ I_{abB} \\ I_{abC} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Desenvolvendo a equação 5.67:

$$V_{abA} = A_{fAA} I_{abA} + A_{fAB} I_{abB} + A_{fAC} I_{abC} \quad (5.68)$$

$$V_{abB} = A_{fBA} I_{abA} + A_{fBB} I_{abB} + A_{fBC} I_{abC} \quad (5.69)$$

$$V_{abC} = A_{fCA} I_{abA} + A_{fCB} I_{abB} + A_{fCC} I_{abC} \quad (5.70)$$

Considerando, nas equações 5.68-5.70, que as tensões e correntes são conhecidas tem-se um sistema de 3 equações com 9 incógnitas, sendo que as incógnitas são os elementos  $A_{fAA}$ ,  $A_{fAB}$ ,  $A_{fAC}$ ,  $A_{fBA}$ ,  $A_{fBB}$ ,  $A_{fBC}$ ,  $A_{fCA}$ ,  $A_{fCB}$  e  $A_{fCC}$ . Para que este sistema tenha solução única, será considerado que a linha, com uma das extremidades em aberto, foi submetida a 3 situações. Na

primeira situação a linha é alimentada com o vetor de tensões  $[V_{aberto}]_1$ ; na segunda situação a linha é alimentada com o vetor de tensões  $[V_{aberto}]_2$  e na terceira situação a linha é alimentada com o vetor de tensões  $[V_{aberto}]_3$ . De posse dos vetores de tensões de fase  $[V_{aberto}]_1$ ,  $[V_{aberto}]_2$  e  $[V_{aberto}]_3$  é possível obter os vetores de correntes de fase  $[I_{aberto}]_1$ ,  $[I_{aberto}]_2$  e  $[I_{aberto}]_3$ . Está sendo considerado que os vetores de correntes de fase  $[I_{aberto}]_1$ ,  $[I_{aberto}]_2$  e  $[I_{aberto}]_3$  são vetores LI.

Da primeira situação obtém-se os vetores de correntes e tensões de fase da linha como sendo:

$$[V_{aberto}]_1 = [V_{abA(1)} \quad V_{abB(1)} \quad V_{abC(1)}]^T \quad (5.71)$$

$$[I_{aberto}]_1 = [I_{abA(1)} \quad I_{abB(1)} \quad I_{abC(1)}]^T \quad (5.72)$$

Substituindo as equações 5.71 e 5.72 na expressão 5.60:

$$\begin{bmatrix} V_{abA(1)} \\ V_{abB(1)} \\ V_{abC(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{fAA} & A_{fAB} & A_{fAC} \\ A_{fBA} & A_{fBB} & A_{fBC} \\ A_{fCA} & A_{fCB} & A_{fCC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abA(1)} \\ I_{abB(1)} \\ I_{abC(1)} \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

Da segunda situação obtém-se os vetores de correntes e tensões de fase da linha como sendo:

$$[V_{aberto}]_2 = [V_{abA(2)} \quad V_{abB(2)} \quad V_{abC(2)}]^T \quad (5.74)$$

$$[I_{aberto}]_2 = [I_{abA(2)} \quad I_{abB(2)} \quad I_{abC(2)}]^T \quad (5.75)$$

Substituindo as equações 5.74 e 5.75 na expressão 5.60:

$$\begin{bmatrix} V_{abA(2)} \\ V_{abB(2)} \\ V_{abC(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{fAA} & A_{fAB} & A_{fAC} \\ A_{fBA} & A_{fBB} & A_{fBC} \\ A_{fCA} & A_{fCB} & A_{fCC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abA(2)} \\ I_{abB(2)} \\ I_{abC(2)} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Da terceira situação obtém-se os vetores de correntes e tensões de fase da linha como sendo:

$$[V_{aberto}]_3 = [V_{abA(3)} \quad V_{abB(3)} \quad V_{abC(3)}]^T \quad (5.77)$$

$$[I_{aberto}]_3 = [I_{abA(3)} \quad I_{abB(3)} \quad I_{abC(3)}]^T \quad (5.78)$$

Substituindo as equações 5.77 e 5.78 na expressão 5.60:

$$\begin{bmatrix} V_{abA(3)} \\ V_{abB(3)} \\ V_{abC(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{fAA} & A_{fAB} & A_{fAC} \\ A_{fBA} & A_{fBB} & A_{fBC} \\ A_{fCA} & A_{fCB} & A_{fCC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abA(3)} \\ I_{abB(3)} \\ I_{abC(3)} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Desenvolvendo as equações matriciais 5.73, 5.76 e 5.79:

$$V_{abA(1)} = A_{fAA} I_{abA(1)} + A_{fAB} I_{abB(1)} + A_{fAC} I_{abC(1)} \quad (5.80)$$

$$V_{abB(1)} = A_{fBA} I_{abA(1)} + A_{fBB} I_{abB(1)} + A_{fBC} I_{abC(1)} \quad (5.81)$$

$$V_{abC(1)} = A_{fCA} I_{abA(1)} + A_{fCB} I_{abB(1)} + A_{fCC} I_{abC(1)} \quad (5.82)$$

$$V_{abA(2)} = A_{fAA} I_{abA(2)} + A_{fAB} I_{abB(2)} + A_{fAC} I_{abC(2)} \quad (5.83)$$

$$V_{abB(2)} = A_{fBA} I_{abA(2)} + A_{fBB} I_{abB(2)} + A_{fBC} I_{abC(2)} \quad (5.84)$$

$$V_{abC(2)} = A_{fCA} I_{abA(2)} + A_{fCB} I_{abB(2)} + A_{fCC} I_{abC(2)} \quad (5.85)$$

$$V_{abA(3)} = A_{fAA} I_{abA(3)} + A_{fAB} I_{abB(3)} + A_{fAC} I_{abC(3)} \quad (5.86)$$

$$V_{abB(3)} = A_{fBA} I_{abA(3)} + A_{fBB} I_{abB(3)} + A_{fBC} I_{abC(3)} \quad (5.87)$$

$$V_{abC(3)} = A_{fCA} I_{abA(3)} + A_{fCB} I_{abB(3)} + A_{fCC} I_{abC(3)} \quad (5.88)$$

Re-escrevendo as equações 5.80-5.88:

$$V_{abA(1)} = A_{fAA} I_{abA(1)} + A_{fAB} I_{abB(1)} + A_{fAC} I_{abC(1)} + A_{fBA} 0 + A_{fBB} 0 + A_{fBC} 0 + A_{fCA} 0 + A_{f32CB} 0 + A_{fCC} 0 \quad (5.89)$$

$$V_{abB(1)} = A_{fAA} 0 + A_{fAB} 0 + A_{fAC} 0 + A_{fBA} I_{abA(1)} + A_{fBB} I_{abB(1)} + A_{fBC} I_{abC(1)} + A_{fCA} 0 + A_{fCB} 0 + A_{fCC} 0 \quad (5.90)$$

$$V_{abC(1)} = A_{fAA} 0 + A_{fAB} 0 + A_{fAC} 0 + A_{fBA} 0 + A_{fBB} 0 + A_{fBC} 0 + A_{fCA} I_{abA(1)} + A_{fCB} I_{abB(1)} + A_{fCC} I_{abC(1)} \quad (5.91)$$

$$V_{abA(2)} = A_{fAA} I_{abA(2)} + A_{fAB} I_{abB(2)} + A_{fAC} I_{abC(2)} + A_{fBA} 0 + A_{fBB} 0 + A_{fBC} 0 + A_{fCA} 0 + A_{fCB} 0 + A_{fCC} 0 \quad (5.92)$$

$$V_{abB(2)} = A_{fAA} 0 + A_{fAB} 0 + A_{fAC} 0 + A_{fBA} I_{abA(2)} + A_{fBB} I_{abB(2)} + A_{fBC} I_{abC(2)} + A_{fCA} 0 + A_{fCB} 0 + A_{fCC} 0 \quad (5.93)$$

$$V_{abC(2)} = A_{fAA} 0 + A_{fAB} 0 + A_{fAC} 0 + A_{fBA} 0 + A_{fBB} 0 + A_{fBC} 0 + A_{fCA} I_{abA(2)} + A_{fCB} I_{abB(2)} + A_{fCC} I_{abC(2)} \quad (5.94)$$

$$V_{abA(3)} = A_{fAA} I_{abA(3)} + A_{fAB} I_{abB(3)} + A_{fAC} I_{abC(3)} + A_{fBA} 0 + A_{fBB} 0 + A_{fBC} 0 + A_{fCA} 0 + A_{fCB} 0 + A_{fCC} 0 \quad (5.95)$$

$$V_{abB(3)} = A_{fAA} 0 + A_{fAB} 0 + A_{fAC} 0 + A_{fBA} I_{abA(3)} + A_{fBB} I_{abB(3)} + A_{fBC} I_{abC(3)} + A_{fCA} 0 + A_{fCB} 0 + A_{fCC} 0 \quad (5.96)$$

$$V_{abC(3)} = A_{fAA} 0 + A_{fAB} 0 + A_{fAC} 0 + A_{fBA} 0 + A_{fBB} 0 + A_{fBC} 0 + A_{fCA} I_{abA(3)} + A_{fCB} I_{abB(3)} + A_{fCC} I_{abC(3)} \quad (5.97)$$

Escrevendo as equações 5.89-5.97 na forma matricial:

Capítulo 5 – Impedâncias equivalentes calculadas a partir das correntes e tensões de fase

$$\begin{bmatrix} V_{abA(1)} \\ V_{abB(1)} \\ V_{abC(1)} \\ V_{abA(2)} \\ V_{abB(2)} \\ V_{abC(2)} \\ V_{abA(3)} \\ V_{abB(3)} \\ V_{abC(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{abA(1)} & I_{abB(1)} & I_{abC(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{abA(1)} & I_{abB(1)} & I_{abC(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{abA(1)} & I_{abB(1)} & I_{abC(1)} \\ I_{abA(2)} & I_{abB(2)} & I_{abC(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{abA(2)} & I_{abB(2)} & I_{abC(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{abA(2)} & I_{abB(2)} & I_{abC(2)} \\ I_{abA(3)} & I_{abB(3)} & I_{abC(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{abA(3)} & I_{abB(3)} & I_{abC(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{abA(3)} & I_{abB(3)} & I_{abC(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{fAA} \\ A_{fAB} \\ A_{fAC} \\ A_{fBA} \\ A_{fBB} \\ A_{fBC} \\ A_{fCA} \\ A_{fCB} \\ A_{fCC} \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

A partir da expressão 5.98 é possível escrever os elementos da matriz  $[A_f]$  em função das correntes e das tensões. Desta forma, tem-se:

$$\begin{bmatrix} A_{fAA} \\ A_{fAB} \\ A_{fAC} \\ A_{fBA} \\ A_{fBB} \\ A_{fBC} \\ A_{fCA} \\ A_{fCB} \\ A_{fCC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{abA(1)} & I_{abB(1)} & I_{abC(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{abA(1)} & I_{abB(1)} & I_{abC(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{abA(1)} & I_{abB(1)} & I_{abC(1)} \\ I_{abA(2)} & I_{abB(2)} & I_{abC(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{abA(2)} & I_{abB(2)} & I_{abC(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{abA(2)} & I_{abB(2)} & I_{abC(2)} \\ I_{abA(3)} & I_{abB(3)} & I_{abC(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{abA(3)} & I_{abB(3)} & I_{abC(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{abA(3)} & I_{abB(3)} & I_{abC(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{abA(1)} \\ V_{abB(1)} \\ V_{abC(1)} \\ V_{abA(2)} \\ V_{abB(2)} \\ V_{abC(2)} \\ V_{abA(3)} \\ V_{abB(3)} \\ V_{abC(3)} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

Utilizando o mesmo raciocínio que foi utilizado para obter os elementos da matriz  $[A_f]$  é possível escrever os elementos da matriz  $[M_f]$  como sendo:

$$\begin{bmatrix} M_{f11} \\ M_{f12} \\ M_{f13} \\ M_{f21} \\ M_{f22} \\ M_{f23} \\ M_{f31} \\ M_{f32} \\ M_{f33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{ccA(1)} & I_{ccB(1)} & I_{ccC(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ccA(1)} & I_{ccB(1)} & I_{ccC(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ccA(1)} & I_{ccB(1)} & I_{ccC(1)} \\ I_{ccA(2)} & I_{ccB(2)} & I_{ccC(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ccA(2)} & I_{ccB(2)} & I_{ccC(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ccA(2)} & I_{ccB(2)} & I_{ccC(2)} \\ I_{ccA(3)} & I_{ccB(3)} & I_{ccC(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ccA(3)} & I_{ccB(3)} & I_{ccC(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ccA(3)} & I_{ccB(3)} & I_{ccC(3)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{ccA(1)} \\ V_{ccB(1)} \\ V_{ccC(1)} \\ V_{ccA(2)} \\ V_{ccB(2)} \\ V_{ccC(2)} \\ V_{ccA(3)} \\ V_{ccB(3)} \\ V_{ccC(3)} \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

Uma vez obtidas os elementos das matrizes  $[A_f]$  e  $[M_f]$ , pode-se obter as matrizes  $[A_m]$  e  $[M_m]$  a partir das equações 5.62 e 5.63.

### 5.6 Matrizes $[A_m]$ e $[M_m]$ para linhas trifásicas com plano de simetria vertical

Para determinar as impedâncias equivalentes nos itens 5.4 e 5.5 foi considerado que as matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  são conhecidas. Uma vez que o cálculo destas matrizes utiliza os parâmetros longitudinais e transversais da linha, pressupõe-se que os mesmos são conhecidos.

os parâmetros longitudinais e transversais da linha são conhecidos sendo possível então determinar as matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$ .

No entanto, se a finalidade é calcular as impedâncias equivalentes dos modos da linha a partir das correntes e tensões de fase, pressupõe-se que somente as correntes e tensões de fase são conhecidas. Deste modo, nos itens 5.4 e 5.5 seria possível obter somente as matrizes  $[A_f]$  e  $[M_f]$ .

No entanto se a linha trifásica possui um plano de simetria vertical, a conversão entre grandezas de fase e grandezas modais poder ser feita sem o uso das matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  sendo que, conforme mostrado nos capítulos 3 e 4, estas matrizes podem ser substituídas pela matriz de Clarke.

Substituindo, nas equações 5.62 e 5.63, as matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  pela matriz de Clarke obtém-se as matrizes  $[A_{qm}]$  e  $[M_{qm}]$  que são, respectivamente, as matrizes de impedâncias equivalentes dos Quase-modos da linha em aberto e em curto-circuito. Desta forma tem-se:

$$[A_{qm}] = [T_{clarke}]^{-1} [A_f] [T_{clarke}] \quad (5.101)$$

$$[M_{qm}] = [T_{clarke}]^{-1} [M_f] [T_{clarke}] \quad (5.102)$$

A matriz de Clarke possui uma característica tal que:

$$[T_{clarke}]^{-1} = [T_{clarke}]^T \quad (5.103)$$

Substituindo 5.103 nas equações 5.101 e 5.102:

$$[A_{qm}] = [T_{clarke}]^T [A_f] [T_{clarke}] \quad (5.104)$$

$$[M_{qm}] = [T_{clarke}]^T [M_f] [T_{clarke}] \quad (5.105)$$

Se a linha de transmissão não é transposta, as matrizes  $[A_{qm}]$  e  $[M_{qm}]$  são do tipo [42, 43, 44, 45, 46, 48, 49]:

$$[A_{qm}] = \begin{bmatrix} A_{\hat{a}} & 0 & A_{\hat{a}0} \\ 0 & A_{\hat{a}} & 0 \\ A_{0\hat{a}} & 0 & A_0 \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

$$[M_{qm}] = \begin{bmatrix} M_{\hat{a}} & 0 & M_{\hat{a}0} \\ 0 & M_{\hat{a}} & 0 \\ M_{0\hat{a}} & 0 & M_0 \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

Desprezando os termos mútuos das matrizes  $[A_{qm}]$  e  $[M_{qm}]$ , as mesmas podem ser escritas como sendo:

$$[A_{qm}] \cong \begin{bmatrix} A_{\hat{a}} & 0 & 0 \\ 0 & A_{\hat{a}} & 0 \\ 0 & 0 & A_0 \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

$$[M_{qm}] \cong \begin{bmatrix} M_{\hat{a}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\hat{a}} & 0 \\ 0 & 0 & M_0 \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

As matrizes mostradas nas equações 5.108 e 5.109 podem, com um pequeno erro, ser consideradas como sendo as matrizes de impedâncias equivalentes dos modos.

### 5.7 Cálculo das impedâncias equivalentes de uma linha trifásica com plano de simetria vertical

Neste item serão calculadas as matrizes  $[A_m]$ ,  $[M_m]$ ,  $[A_{qm}]$  e  $[M_{qm}]$  a partir das correntes e tensões nas fases da linha. A seguir serão feitas comparações entre as matrizes  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$  e entre as matrizes  $[M_m]$  e  $[M_{qm}]$ .

As matrizes  $[A_m]$  e  $[M_m]$  são calculadas a partir da hipótese de que os parâmetros longitudinais e transversais da linha são conhecidos. Desta forma pode-se calcular as matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$ .

O cálculo das matrizes  $[A_{qm}]$  e  $[M_{qm}]$  partem da hipótese de que não dispomos de informações referentes aos parâmetros longitudinais e transversais da linha. Neste caso as matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  são substituídas pela matriz de Clarke.

Considere uma linha de transmissão trifásica de 440 kV, com dois cabos pára-raios aterrados em todas as estruturas, conforme mostra a figura 5.2. Os dados referentes a esta linha estão descritos no capítulo 2.

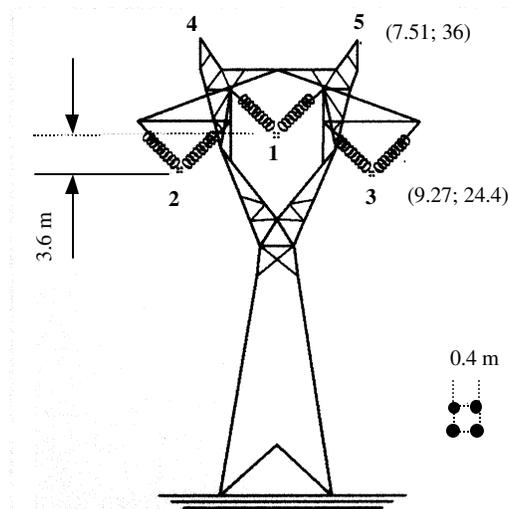


Figura 5.2 - Linha de transmissão trifásica de 440 kV

Após o rebatimento dos cabos pára-raios a linha da figura 5.2 é transformada na linha mostrada na figura 5.3.

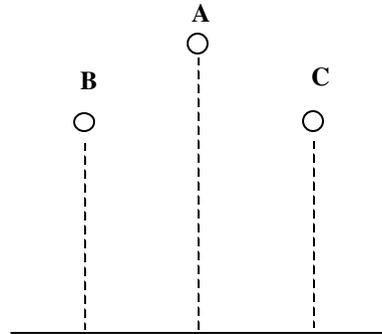


Figura 5.3 - Linha com os cabos pára-raios rebatidos nas fases

### 5.7.1 Correntes e tensões nas fases

O cálculo das correntes e tensões nas fases da linha seguiu o seguinte procedimento:

- Inicialmente considerou-se um vetor de tensões aplicado nas fases da linha (para a linha com o receptor em curto-circuito e em aberto), conforme mostram as figuras 5.4 e 5.5.

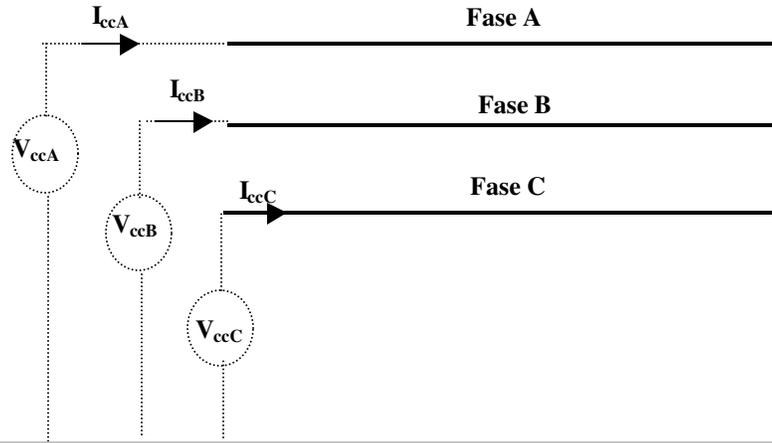


Figura 5.4 - Simulação de medição de correntes e tensões na linha, considerando o receptor em curto-circuito

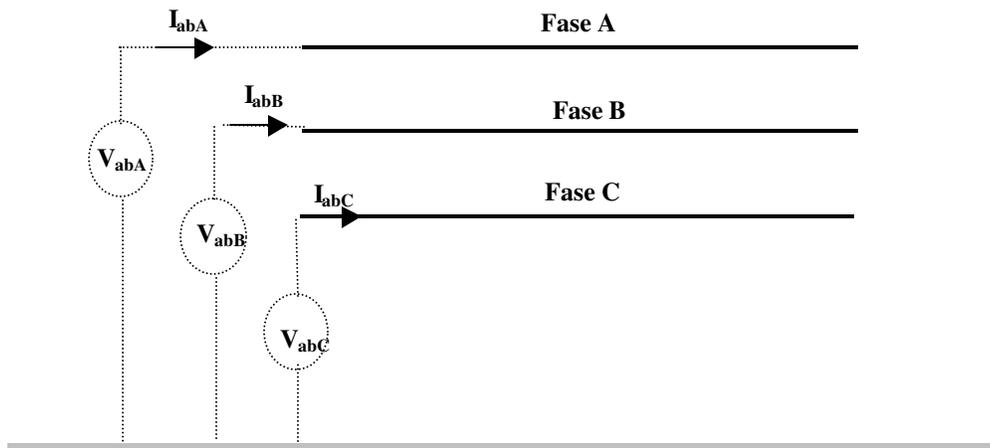


Figura 5.5 - Simulação de medição de correntes e tensões na linha, considerando o receptor aberto

b) A linha foi desacoplada em seus modos exatos a partir das matrizes  $T_I$  e  $T_V$ .

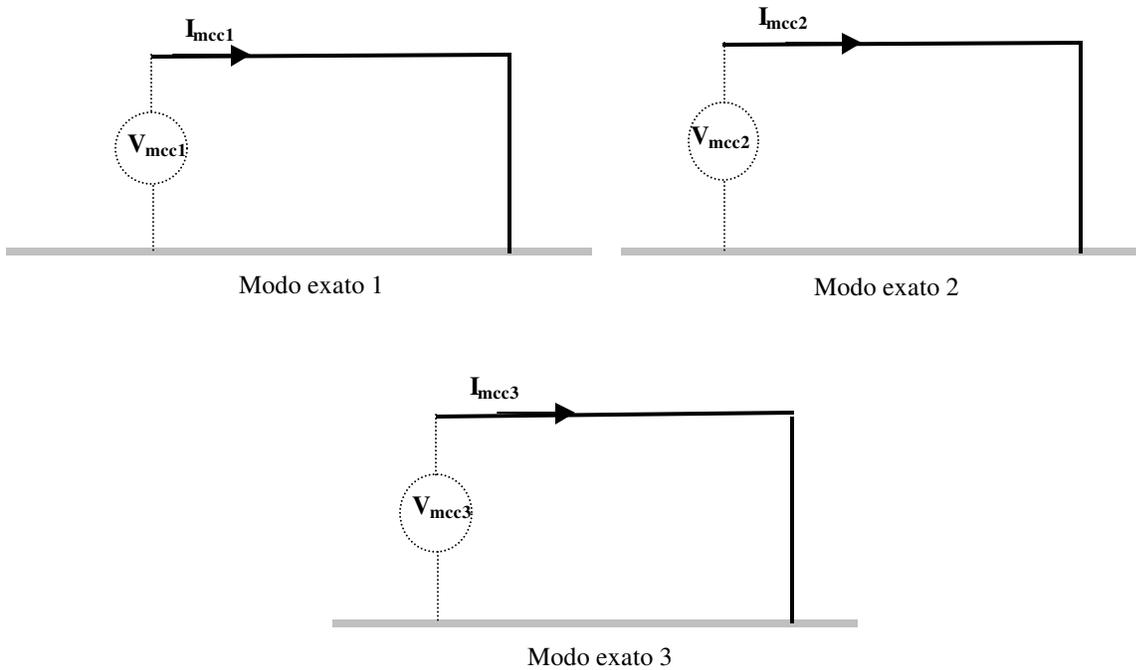


Figura 5.6 - Decomposição da linha, com o receptor em curto-circuito, em seus modos exatos

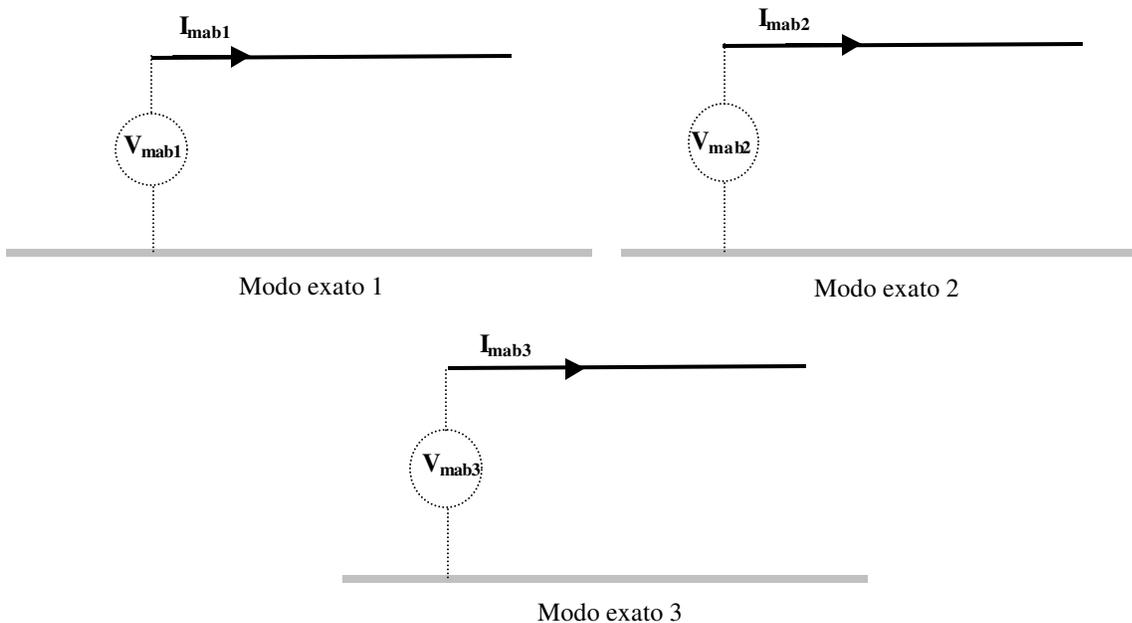


Figura 5.7 - Decomposição da linha, com um dos extremos em aberto, em seus modos “exatos”

c) Em seguida considerando as tensões aplicadas, calculou-se as correntes em cada um dos modos exatos, considerando a linha com o receptor em curto-circuito e em circuito aberto.

Para a linha com o receptor em curto-circuito, tem-se:

$$I_{mcc1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_{m1}}{y_{m1}}}} \cot gh(\sqrt{Z_{m1} y_{m1} d}) V_{mcc1} \quad (5.110)$$

$$I_{mcc2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_{m2}}{y_{m2}}}} \cot gh(\sqrt{Z_{m2} y_{m2} d}) V_{mcc2} \quad (5.111)$$

$$I_{mcc3} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_{m3}}{y_{m3}}}} \cot gh(\sqrt{Z_{m3} y_{m3} d}) V_{mcc3} \quad (5.112)$$

Para a linha com o receptor em aberto, tem-se:

$$I_{mab1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_{m1}}{y_{m1}}}} \operatorname{tgh}(\sqrt{Z_{m1} y_{m1} d}) V_{mab1} \quad (5.113)$$

$$I_{mab2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_{m2}}{y_{m2}}}} \operatorname{tgh}(\sqrt{Z_{m2} y_{m2} d}) V_{mab2} \quad (5.114)$$

$$I_{mab3} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_{m3}}{y_{m3}}}} \operatorname{tgh}(\sqrt{Z_{m3} y_{m3} d}) V_{mab3} \quad (5.115)$$

Sendo:

$V_{mcc1}$ ,  $V_{mcc2}$  e  $V_{mcc3}$  Tensões modais aplicadas na linha, considerando o receptor em curto-circuito

$V_{mab1}$ ,  $V_{mab2}$  e  $V_{mab3}$  Tensões modais aplicadas na linha, considerando o receptor em aberto

$I_{mcc1}$ ,  $I_{mcc2}$  , e  $I_{mcc3}$  Correntes modais, considerando o receptor da linha em curto-circuito

$I_{mab1}$ ,  $I_{mab2}$  , e  $I_{mab3}$  Correntes modais, considerando o receptor em aberto

$d$  Comprimento da linha

d) As correntes são então convertidas para o domínio das fases.

Para a linha com o receptor em curto-circuito:

$$[I_{\text{curto}}] = \begin{bmatrix} I_{ccA} \\ I_{ccB} \\ I_{ccC} \end{bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} I_{mcc1} \\ I_{mcc2} \\ I_{mcc3} \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

$$[\mathbf{V}_{\text{curto}}] = \begin{bmatrix} V_{\text{ccA}} \\ V_{\text{ccB}} \\ V_{\text{ccC}} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_V] \begin{bmatrix} V_{\text{mcc1}} \\ V_{\text{mcc2}} \\ V_{\text{mcc3}} \end{bmatrix} \quad (5.117)$$

Para a linha com um dos extremos em aberto:

$$[\mathbf{I}_{\text{aberto}}] = \begin{bmatrix} I_{\text{abA}} \\ I_{\text{abB}} \\ I_{\text{abC}} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_I] \begin{bmatrix} I_{\text{mab1}} \\ I_{\text{mab2}} \\ I_{\text{mab3}} \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

$$[\mathbf{V}_{\text{aberto}}] = \begin{bmatrix} V_{\text{abA}} \\ V_{\text{abB}} \\ V_{\text{abC}} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}_V] \begin{bmatrix} V_{\text{mab1}} \\ V_{\text{mab2}} \\ V_{\text{mab3}} \end{bmatrix} \quad (5.119)$$

Sendo:

$I_{\text{ccA}}, I_{\text{ccB}},$  e  $I_{\text{ccC}}$  Correntes nas fases, considerando o receptor em curto-circuito

$I_{\text{abA}}, I_{\text{abB}},$  e  $I_{\text{abC}}$  Correntes nas fases, considerando o receptor aberto

$V_{\text{ccA}}, V_{\text{ccB}},$  e  $V_{\text{ccC}}$  Tensões nas fases, considerando o receptor em curto-circuito

$V_{\text{abA}}, V_{\text{abB}},$  e  $V_{\text{abC}}$  Tensões nas fases, considerando o receptor aberto

Foram utilizados os seguintes vetores de tensões:

$$[\mathbf{V}_{\text{aberto}}]_1 = [\mathbf{V}_{\text{curto}}]_1 = [1 \ 0 \ 0] \quad (5.120)$$

$$[\mathbf{V}_{\text{aberto}}]_2 = [\mathbf{V}_{\text{curto}}]_2 = [0 \ 1 \ 0] \quad (5.121)$$

$$[\mathbf{V}_{\text{aberto}}]_3 = [\mathbf{V}_{\text{curto}}]_3 = [0 \ 1 \ 1] \quad (5.122)$$

As figuras 5.8-5.10 mostram as correntes nas fases da linha, considerando que o receptor está aberto, quando são aplicadas as tensões do vetor  $[\mathbf{V}_{\text{aberto}}]_1$  em frequências compreendidas entre 10 Hz e 10 kHz.

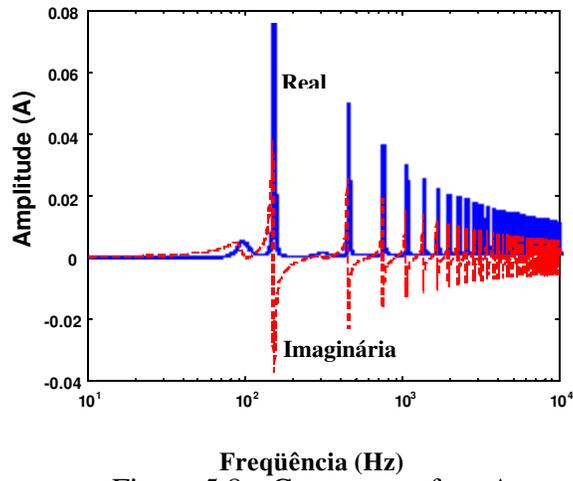


Figura 5.8 - Corrente na fase A

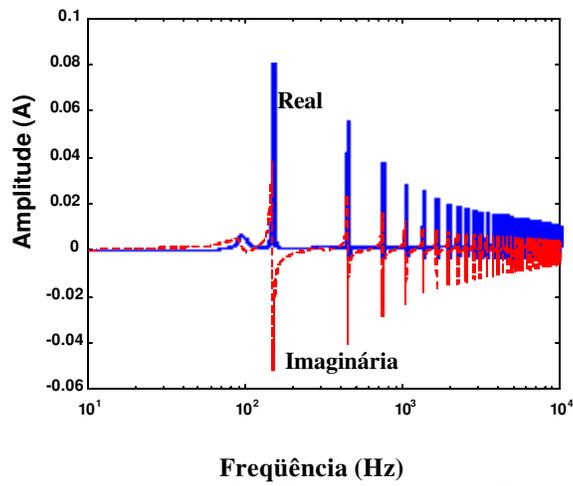


Figura 5.9 - Corrente na fase B

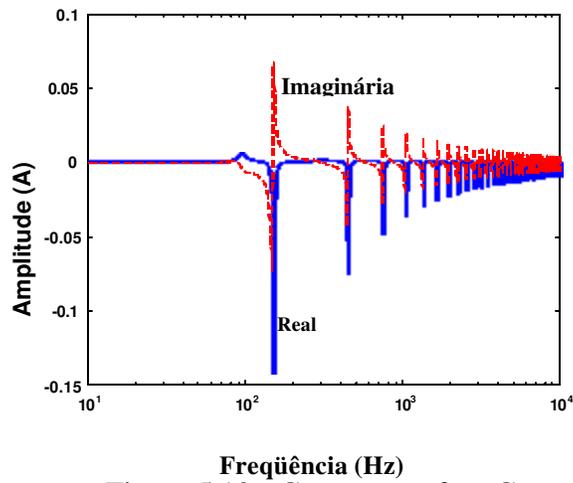


Figura 5.10 - Corrente na fase C

As figuras 5.11-5.13 mostram as correntes nas fases da linha, considerando que o receptor está aberto, quando são aplicadas as tensões do vetor  $[V_{\text{curto}}]_1$  em frequências compreendidas entre 10 Hz e 10 kHz.

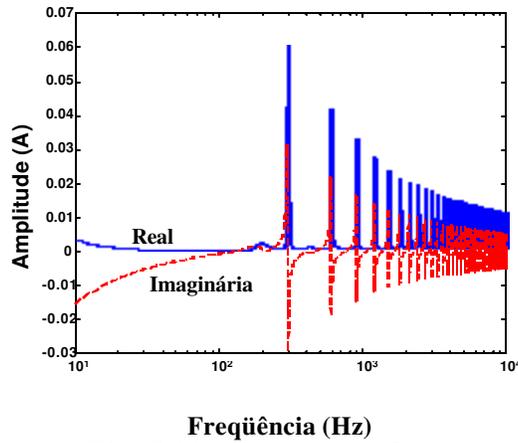


Fig. 5.11 - Corrente na fase A

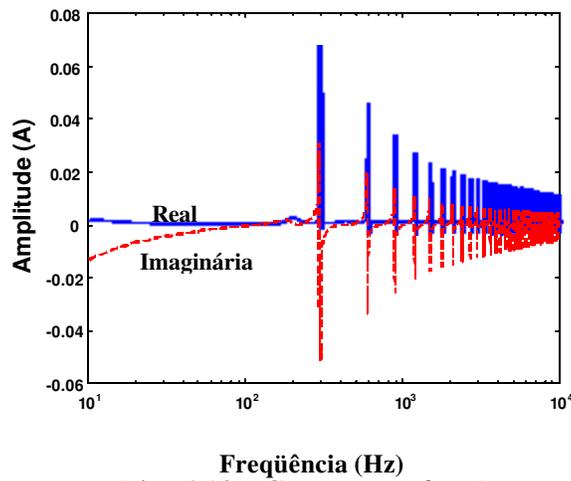


Fig. 5.12 - Corrente na fase B

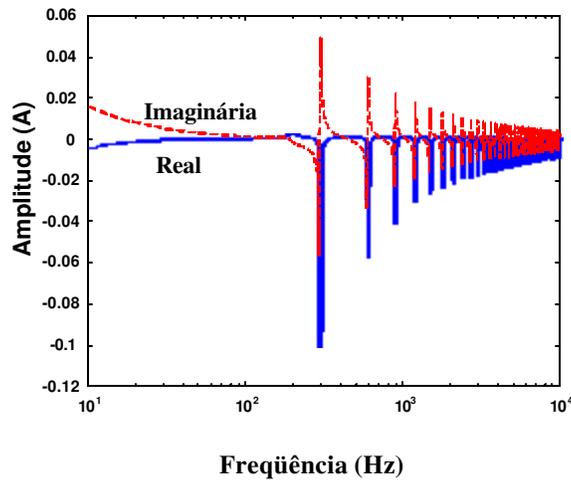


Fig. 5.13 - Corrente na fase C

### 5.7.2 Impedâncias equivalentes

De posse das correntes e tensões de fase da linha, pode-se obter as matrizes  $[A_f]$  e  $[M_f]$  através das equações 5.99 e 5.100. Em seguida, utilizando as equações 5.62 e 5.63, calcula-se as matrizes  $[A_m]$  e  $[M_m]$ . As matrizes  $[A_{qm}]$  e  $[M_{qm}]$  são calculadas, a partir das matrizes  $[A_f]$  e  $[M_f]$ , utilizando as equações 5.101 e 5.102.

A figura 5.14 mostra o módulo dos elementos  $A_{m1}$  e  $A_\alpha$  das matrizes  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$ , respectivamente.

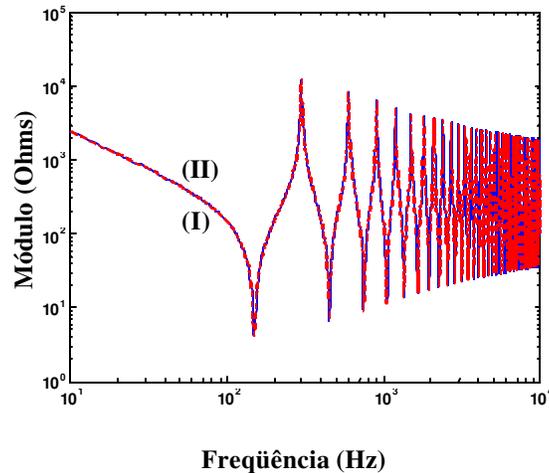


Figura 5.14 - Módulo dos elementos  $A_{m1}$  (I) e  $A_\alpha$  (II)

A figura 5.15 mostra o argumento dos elementos  $A_{m1}$  e  $A_\alpha$  das matrizes  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$ , respectivamente.

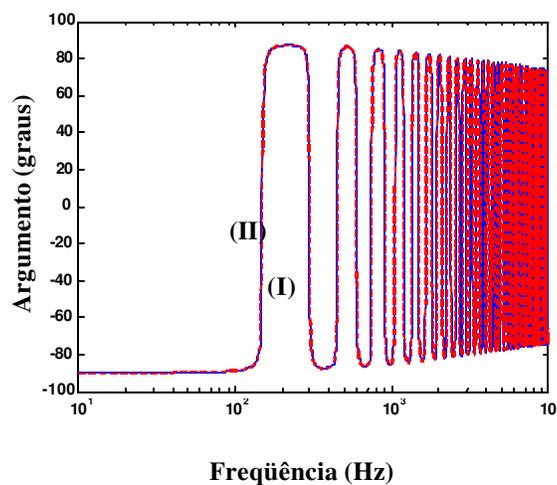


Figura 5.15 - Argumento dos elementos  $A_{m1}$  (I) e  $A_\alpha$  (II)

A figura 5.16 mostra o módulo de  $A_{m2}$  e  $A_\beta$  das matrizes  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$ , respectivamente.

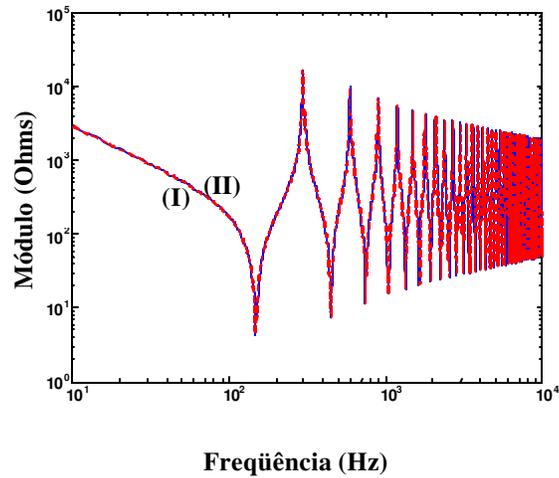


Figura 5.16 - Módulo dos elementos  $A_{m2}$  (I) e  $A_{\beta}$  (II)

A figura 5.17 mostra o argumento de  $A_{m22}$  e  $A_{\beta}$  de  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$ , respectivamente.

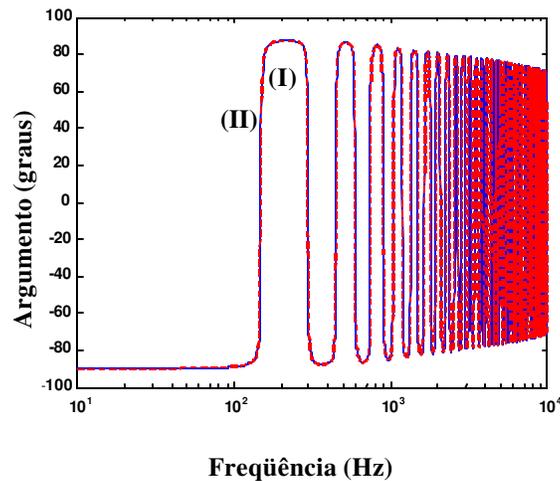


Figura 5.17 - Argumento dos elementos  $A_{m22}$  (I) e  $A_{\beta}$  (II)

A figura 5.18 mostra o módulo de  $A_{m3}$  e  $A_0$  das matrizes  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$ , respectivamente.

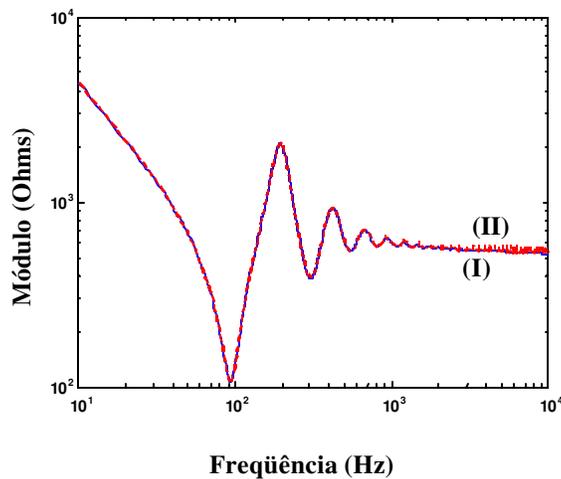


Figura 5.18 - Módulo dos elementos  $A_{m3}$  (I) e  $A_0$  (II)

A figura 5.19 mostra o argumento de  $A_{m3}$  e  $A_0$ .

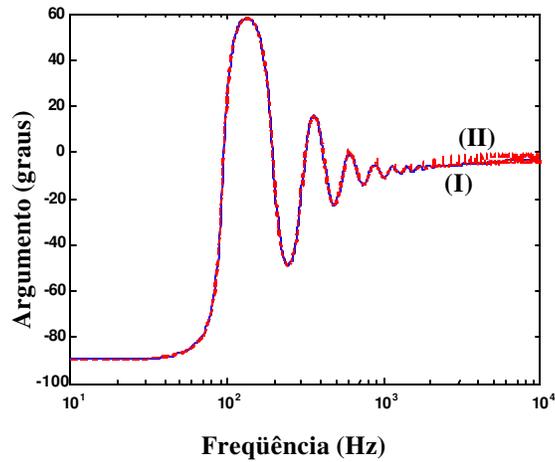


Figura 5.19 - Argumento dos elementos  $A_{m3}$  (I) e  $A_0$  (II)

A figura 5.20 mostra o módulo dos elementos  $M_{m1}$  e  $M_\alpha$ .

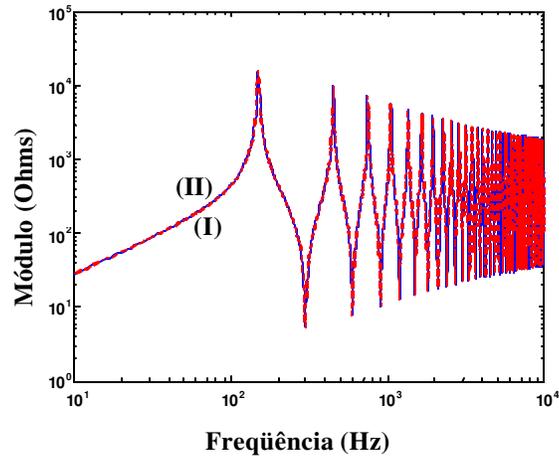


Figura 5.20 - Módulo dos elementos  $M_{m1}$  (I) e  $M_\alpha$  (II)

A figura 5.21 mostra o argumento dos elementos  $M_{m1}$  e  $M_\alpha$ .

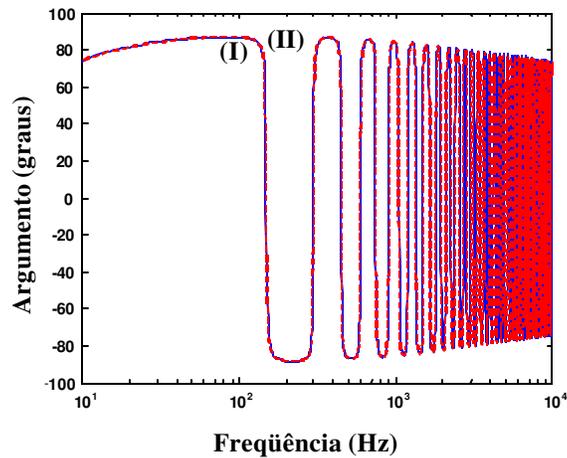


Figura 5.21 - Argumento do elemento  $M_{m1}$  (I) e  $M_\alpha$  (II)

A figura 5.22 mostra o módulo dos elementos  $M_{m2}$  e  $M_{\beta}$ .

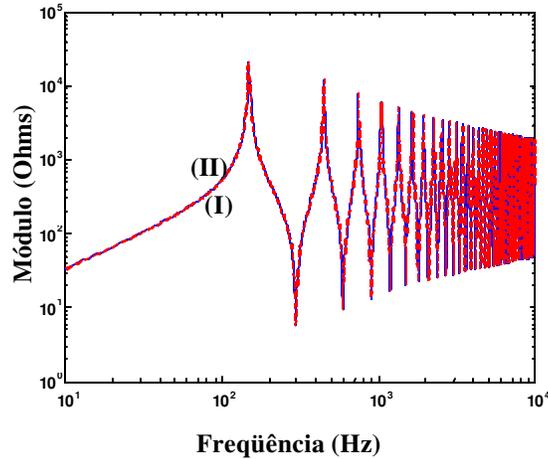


Figura 5.22 - Módulo dos elementos  $M_{m2}$  (I) e  $M_{\beta}$  (II)

A figura 5.23 mostra o argumento dos elementos  $M_{m2}$  e  $M_{\beta}$  das matrizes  $[M_m]$  e  $[M_{qm}]$ , respectivamente.

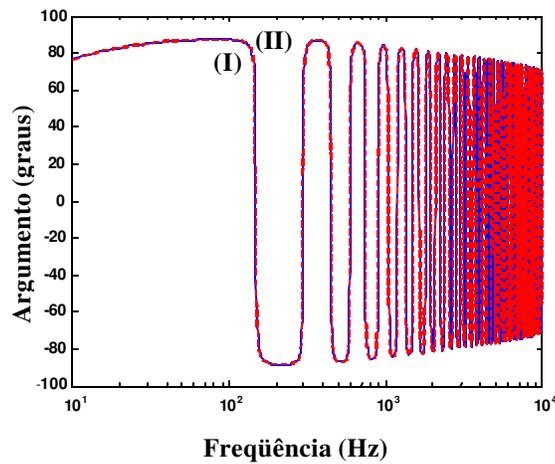


Figura 5.23 - Argumento dos elementos  $M_{m2}$  (I) e  $M_{\beta}$  (II)

A figura 5.24 mostra o módulo dos elementos  $M_{m3}$  e  $M_0$ .

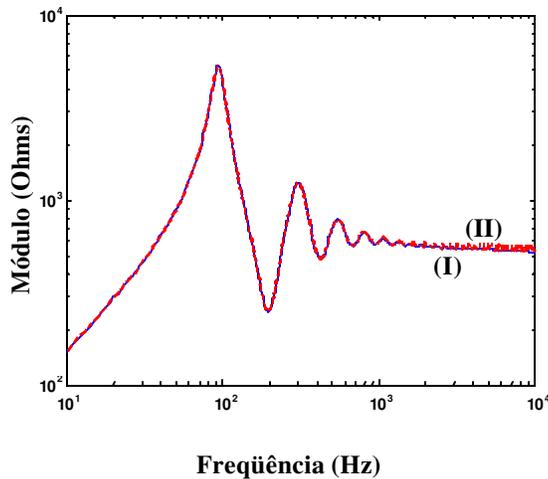


Figura 5.24 - Módulo dos elementos  $M_{m3}$  (I) e  $M_0$  (II)

A figura 5.25 mostra o módulo dos elementos  $M_{m3}$  e  $M_0$ .

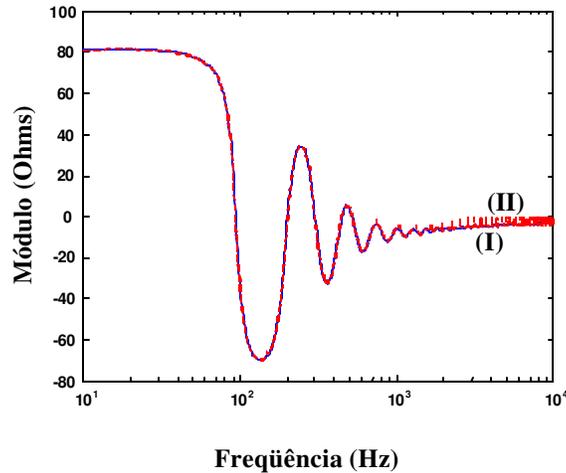


Figura 5.25 - Argumento do elemento  $M_{m3}$  (I) e  $M_0$  (II)

As figuras 5.14 - 5.25 mostraram as impedâncias equivalentes modais, de circuito aberto e de curto-circuito, calculadas à partir das correntes e tensões medidas nas fases da linha. Os resultados mostraram que a utilização da matriz de Clarke, em substituição às matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$ , aparentemente, não provocou grandes alterações nos resultados. No próximo será feita uma análise quantitativa do erro provocado pelo uso da matriz de Clarke em substituição às matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$ .

### 5.7.3 Influência da matriz de transformação

Neste item será verificada a influência da matriz de transformação sobre as impedâncias equivalentes que são calculadas a partir das correntes e tensões de fase. Para tanto, será calculada a diferença que existe entre os elementos  $A_m(i,i)$  e  $A_{qm}(i,i)$  das matrizes  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$ , respectivamente. Deste modo, será possível verificar a magnitude do erro cometido quando as matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  são substituídas pela matriz de Clarke. O mesmo procedimento será feito para os elementos  $M_m(i,i)$  e  $M_{qm}(i,i)$  das matrizes  $[M_m]$  e  $[M_{qm}]$ .

A diferença entre os elementos das matrizes  $[A_m]$  e  $[A_{qm}]$  será calculado como sendo:

$$\text{erro} = 100 \left| \frac{A_m(i,i) - A_{qm}(i,i)}{A_m(i,i)} \right| \quad (5.123)$$

Para as matrizes  $[M_m]$  e  $[M_{qm}]$ , a diferença entre seus elementos é:

$$\text{erro} = 100 \left| \frac{M_m(i,i) - M_{qm}(i,i)}{M_m(i,i)} \right| \quad (5.124)$$

A figura 5.26 mostra o erro existente entre os elementos  $A_{m1}$  e  $A_\alpha$

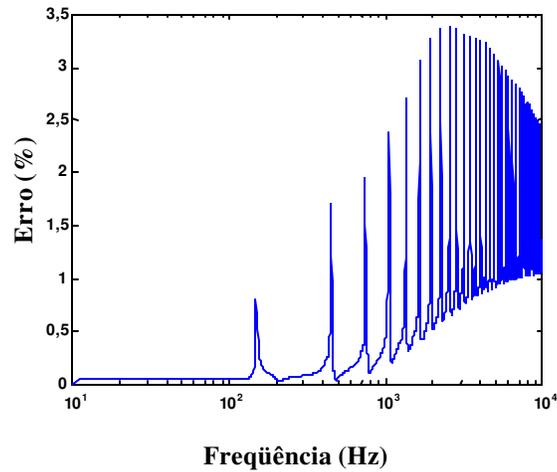


Figura 5.26 - Erro do elemento  $A_\alpha$  em relação ao elemento  $A_{m1}$

A figura 5.27 mostra o erro existente entre os elementos  $A_{m2}$  e  $A_\beta$ .

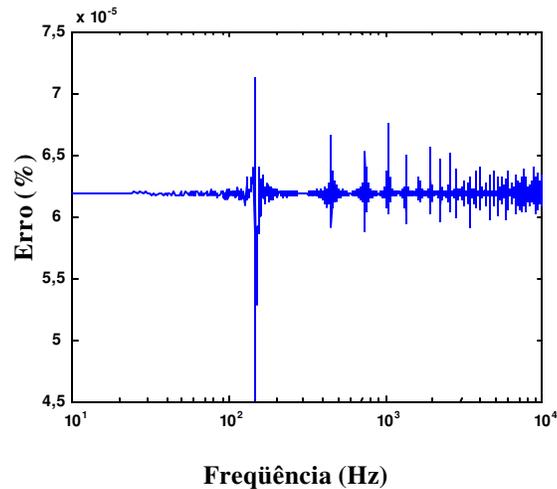


Figura 5.27 - Erro do elemento  $A_\beta$  em relação ao elemento  $A_{m2}$

A figura 5.28 mostra o erro existente entre os elementos  $A_{m3}$  e  $A_0$

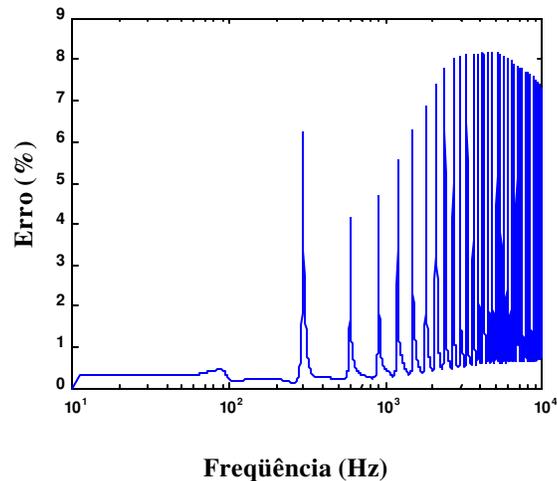


Figura 5.28 - Erro do elemento  $A_0$  em relação ao elemento  $A_{m3}$

A figura 5.29 mostra o erro existente entre os elementos  $M_{m1}$  e  $M_{\alpha}$

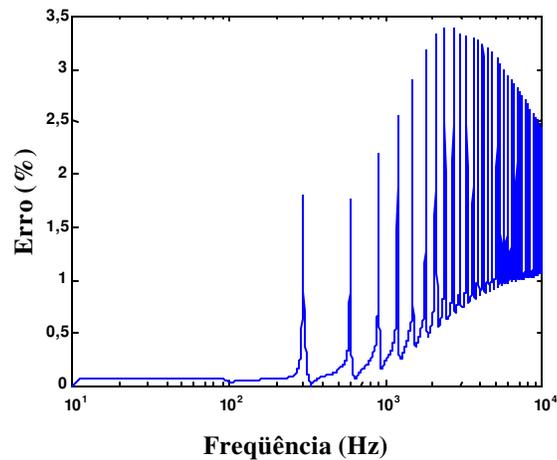


Figura 5.29 - Erro do elemento  $M_{\alpha}$  em relação ao elemento  $M_{m1}$

A figura 5.30 mostra o erro existente entre os elementos  $M_{m2}$  e  $M_{\beta}$ .

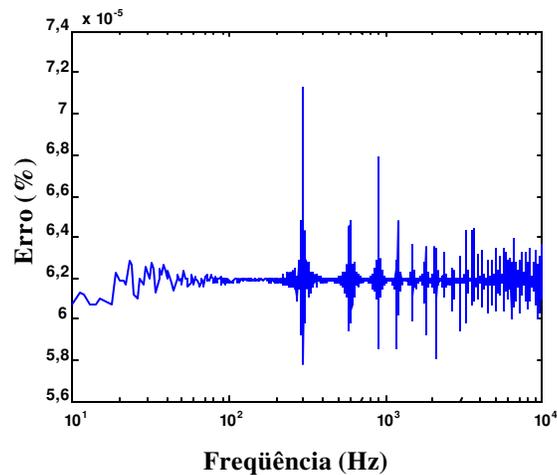


Figura 5.30 - Erro do elemento  $M_{\beta}$  em relação ao elemento  $M_{m2}$

A figura 5.31 mostra o erro existente entre os elementos  $M_{m33}$  e  $M_0$ .

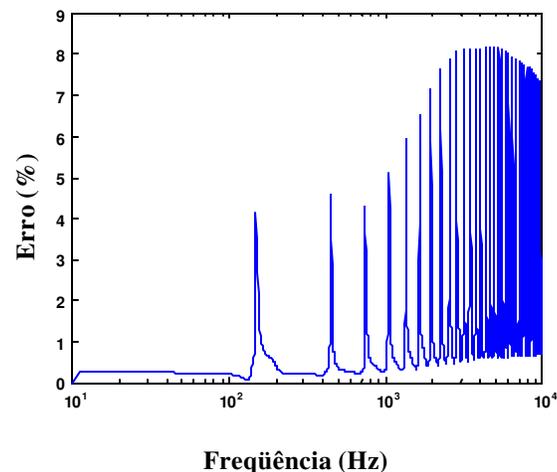


Figura 5.31 - Erro do elemento  $M_0$  em relação ao elemento  $M_{m33}$

As figuras 5.26 - 5.31 mostram que os maiores erros cometidos quando se utiliza a matriz de Clarke ocorrem em frequências específicas (nas frequências de ressonâncias). Os resultados também mostram que, exceto em frequências específicas, o erro nos modos 1 e 3 são menores que 1%. O Quase-modo beta é um modo exato, uma vez que o mesmo não apresenta diferenças em relação ao modo 2.

## **5.8 Conclusões**

Neste capítulo foram desenvolvidas expressões que relacionam as impedâncias equivalentes dos modos da linha com as correntes e tensões de fase da mesma.

O processo de cálculo desenvolvido requer o uso das matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$ , grandezas estas que não são conhecidas em se tratando de linhas cujos parâmetros são desconhecidos. No entanto, em se tratando de linhas trifásicas sem transposição, mas com um plano de simetria vertical, as matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  podem ser substituídas pela matriz de Clarke sem que as impedâncias equivalentes sofram grandes alterações.

Os maiores erros resultantes da utilização da matriz de Clarke ocorrem em valores pontuais de frequências, sendo que, exceto nestes pontos específicos, o erro é inferior a 1%. O modo 2 não é alterado devido à utilização da matriz de Clarke.



# 6

## PARÂMETROS DA LINHA CALCULADOS A PARTIR DAS CORRENTES E TENSÕES DE FASE, UTILIZANDO A MATRIZ $[T_1]$

### 6.1 Introdução

No capítulo 5 foi mostrado que as impedâncias equivalentes podem ser obtidas a partir das correntes e tensões de fase da linha. Uma vez obtidas as impedâncias equivalentes pode-se calcular as funções de propagação de cada um dos modos a partir das impedâncias equivalentes. Também é possível calcular as impedâncias características modais a partir das impedâncias equivalentes. Uma vez que a função de propagação e a impedância característica são conhecidas, é possível calcular as impedâncias longitudinais e as admitâncias transversais dos modos da linha e, em seguida, convertê-los para o domínio das fases.

Neste capítulo será mostrado o processo de cálculo dos parâmetros da linha de transmissão a partir das impedâncias equivalentes.

A figura 6.1 mostra um diagrama de blocos que descreve todo o processo de cálculo dos parâmetros da linha de transmissão a partir das correntes e tensões de fase, considerando o uso da matriz de transformação  $[T_1]$ .

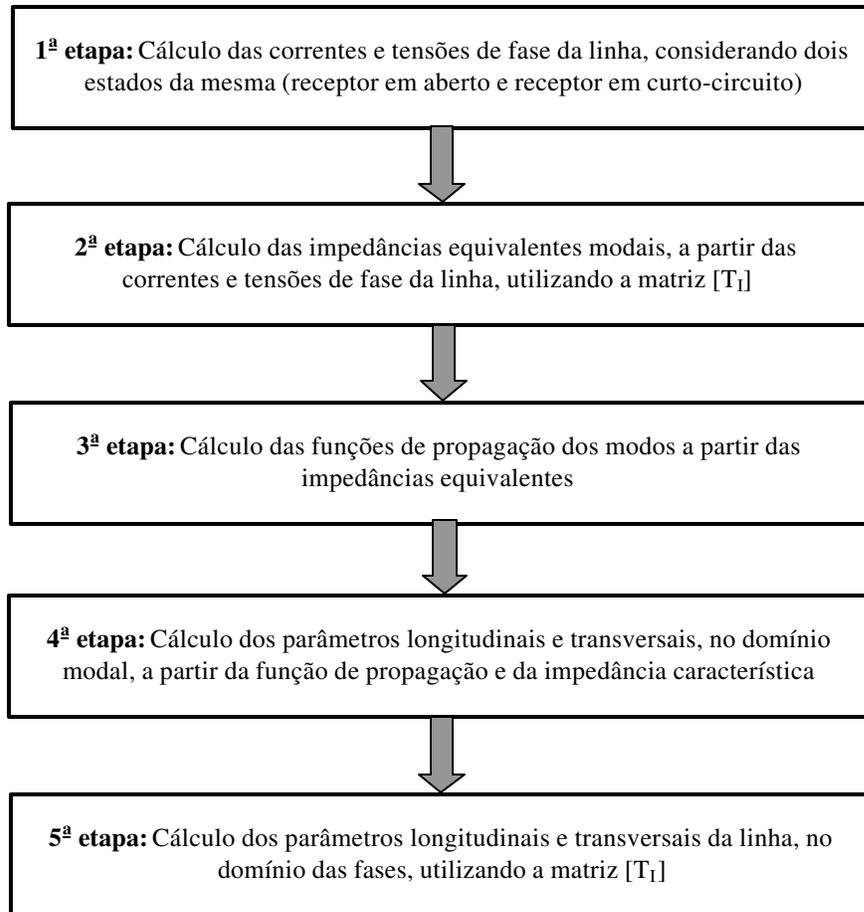


Figura 6.1 - Cálculo dos parâmetros da linha de transmissão a partir das correntes e tensões de fase

As etapas 1 e 2 dos diagramas de blocos, mostrados na figura 6.1, foram desenvolvidas no capítulo 5 enquanto que as etapas 3, 4 e 5 serão desenvolvidas neste capítulo.

## 6.2 Funções de propagação

No apêndice foi desenvolvida uma expressão em que é possível calcular a função de propagação  $\gamma_i$ , do  $i$ -ésimo modo da linha, em função das impedâncias equivalentes deste modo. De acordo com esta expressão, a função de propagação  $\gamma_i$  é expressa através de:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{1}{2d} (\ln(x) + jF) \quad (6.1)$$

Onde:

$$x = \frac{(1 + C_3)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \quad (6.2)$$

$$F = \text{Arc cos} \left( - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)^2 + C_4^2}{\sqrt{1 - (C_3^2 + C_4^2)^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (6.3)$$

$$\sqrt{\frac{A_{mi}}{M_{mi}}} = C_3 + jC_4 \quad (6.4)$$

Na expressão 6.1 a função  $\ln(x)$  define a componente real de  $\gamma$ , enquanto que a função  $F$  define a componente imaginária. Os termos  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$  são as impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto-circuito, respectivamente, do  $i$ -ésimo modo. As impedâncias  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$  foram obtidas a partir das correntes e tensões de fase da linha, conforme mostrado no capítulo 5.

Para uma linha cujos parâmetros são conhecidos, pode-se calcular a constante de propagação do  $i$ -ésimo modo através de [11, 29]:

$$\tilde{\alpha}_i = \sqrt{z_{mi} y_{mi}} \quad (6.5)$$

Os termos  $z_{mi}$  e  $y_{mi}$  na equação 6.5 são, respectivamente, a impedância longitudinal e a admitância transversal do  $i$ -ésimo modo da linha. Os termos  $z_{mi}$  e  $y_{mi}$  foram obtidos a partir dos parâmetros da linha, no domínio das fases, que foram calculados no capítulo 2.

A seguir serão mostradas as funções de propagação dos modos da linha trifásica, da figura 5.2, calculadas através da equação 6.1. Estes resultados serão comparados com os resultados obtidos através da expressão 6.5.

As figuras 6.2-6.4 mostram, respectivamente a componente real das funções de propagação dos modos exato 1, 2 e 3 ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ ) obtida através das equações 6.1 (curva I) e 6.5 (curva II).

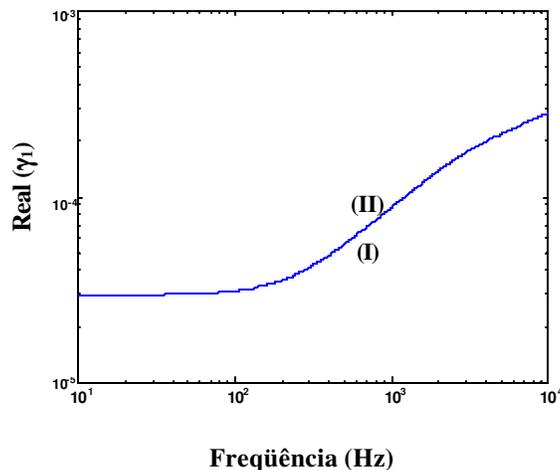


Figura 6.2 - Componente real de  $(\gamma_1)$

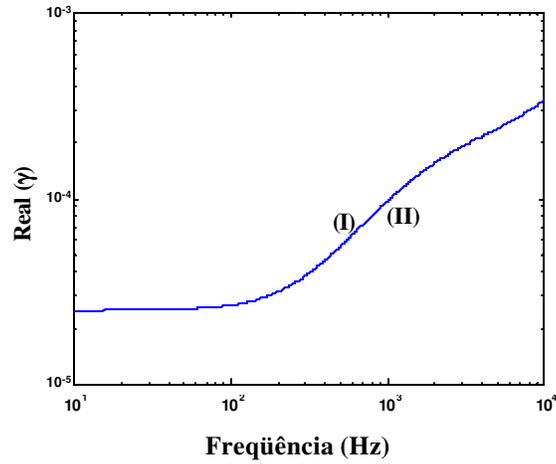


Figura 6.3 - Componente real de  $\gamma_2$

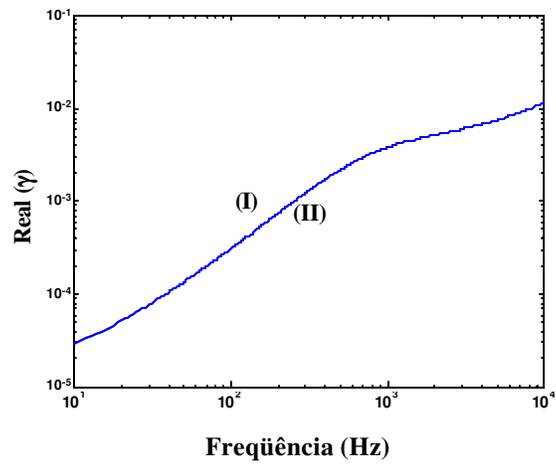


Figura 6.4 - Componente real de  $\gamma_3$

As figuras 6.5-6.7 mostram, respectivamente a componente imaginária de  $\gamma$  dos modos exato 1, 2 e 3 ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ ) obtida através das equações 6.1 (curva I) e 6.5 (curva II).

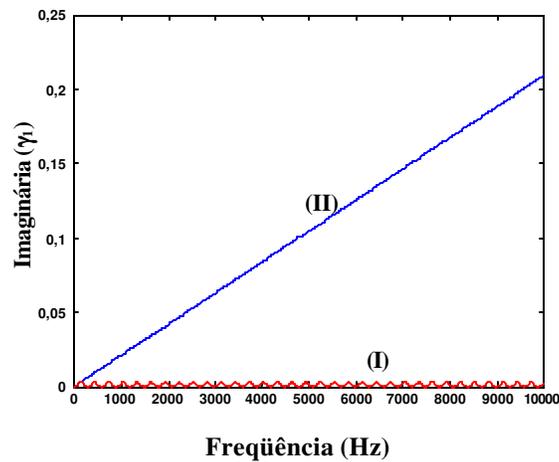


Figura 6.5 - Componente imaginária de  $\gamma_1$

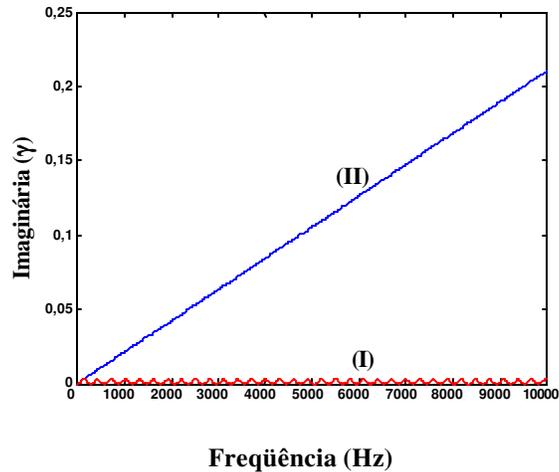


Figura 6.6 - Componente imaginária de  $\gamma_2$

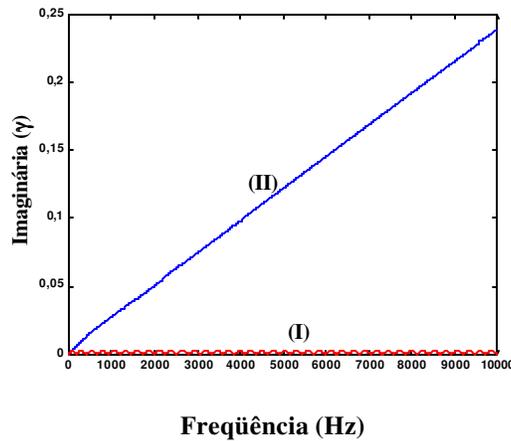


Figura 6.7 - Componente imaginária de  $\gamma_3$

As figuras 6.2-6.4 mostram que as equações 6.1 e 6.5 apresentam os mesmos resultados, quando utilizadas para calcular a componente real de  $\gamma$ . No entanto, conforme mostram as figuras 6.5-6.7, o mesmo não acontece com a parte imaginária.

A seguir, será feita uma análise dos resultados das equações 6.1 e 6.5, quando utilizadas para calcular a componente imaginária de  $\gamma$ .

### 6.2.1 Componente imaginária

As figuras 6.8-6.10 mostram, respectivamente a componente imaginária das funções de propagação dos modos exato 1, 2 e 3 ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ ) obtida através das equações 6.1 (curva I) e 6.5 (curva II) em frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 kHz.

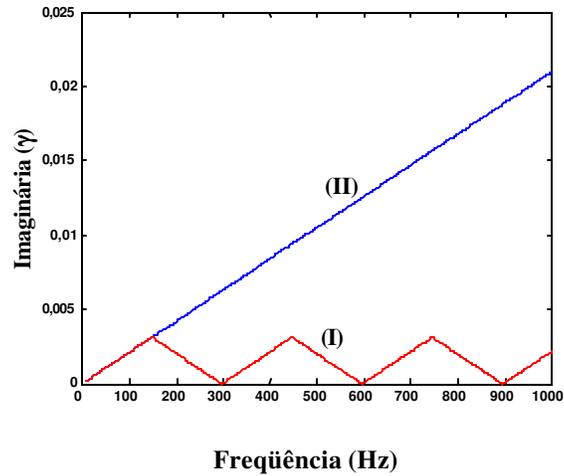


Figura 6.8 - Componente imaginária de  $\gamma_1$

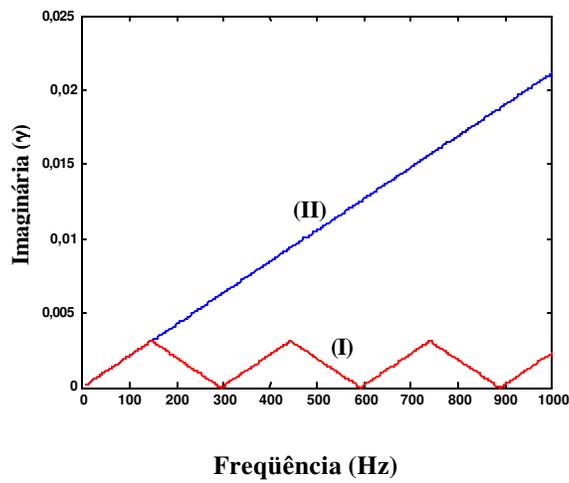


Figura 6.9 - Componente imaginária de  $\gamma_2$

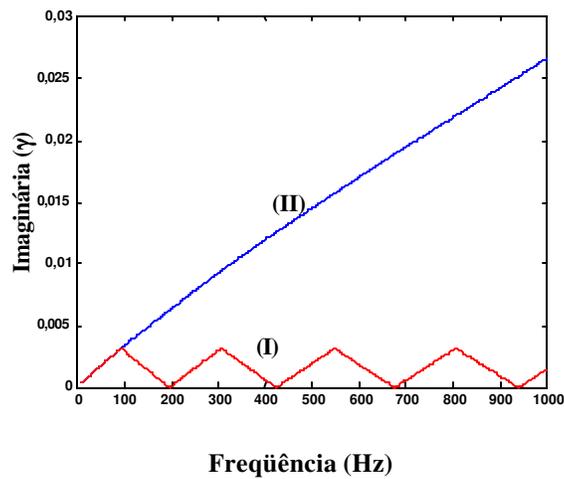


Figura 6.10 - Componente imaginária de  $\gamma_3$

As figuras 6.8-6.10 mostram que a curva I, obtida através da função F é coincidente com a curva I somente em uma faixa de frequência inicial.

O comportamento periódico da curva I é devido à natureza da componente imaginária da função mostrada na equação 6.1 Esta função é uma função inversa do co-seno [26] que possui como domínio o intervalo  $[-1, 1]$  e como imagem o intervalo  $[0, \pi/2d]$ . Portanto, no primeiro intervalo de frequência que corresponde ao domínio  $[-1, 1]$  a componente imaginária de  $\gamma$  calculada através da expressão 6.1 assume os valores  $[0, \pi/2d]$ . Para os demais intervalos de frequências, correspondentes ao domínio  $[-1, 1]$ , a função assume os valores do intervalo  $[0, \pi/2d]$  acrescidos do valor  $\pi/2d$  que corresponde a meia volta no círculo trigonométrico.

A figura 6.11 mostra, graficamente, o que foi comentado no parágrafo anterior.

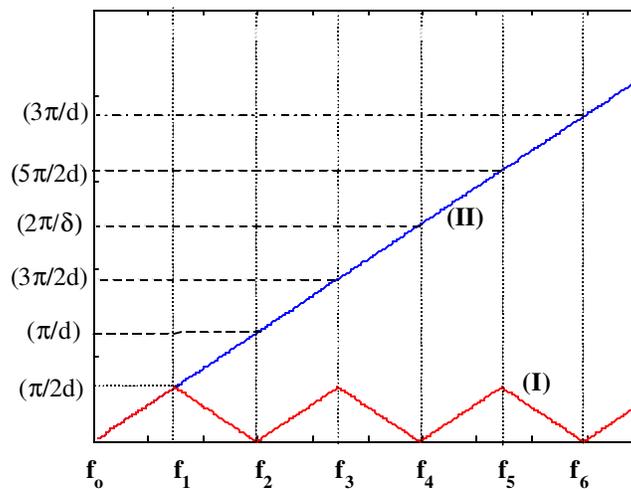


Figura 6.11 - Componente imaginária de  $\gamma$

Portanto, a função F deve ser corrigida de modo tal que para valores de frequência maiores que  $f_1$  esta função assumira os valores da curva II.

### 6.2.2 Correção da função F

Deve-se ajustar a função F de modo tal que a mesma seja coincidente com a curva II para todos os valores de frequência.

Considere a função F' definida como sendo a curva I ajustada. Considere também a função G como sendo componente imaginária de  $\gamma$ , obtida através da equação 6.5. Deste modo, as funções F' e G devem ser idênticas.

A figura 6.12 mostra um trecho genérico das funções F, F' e G.

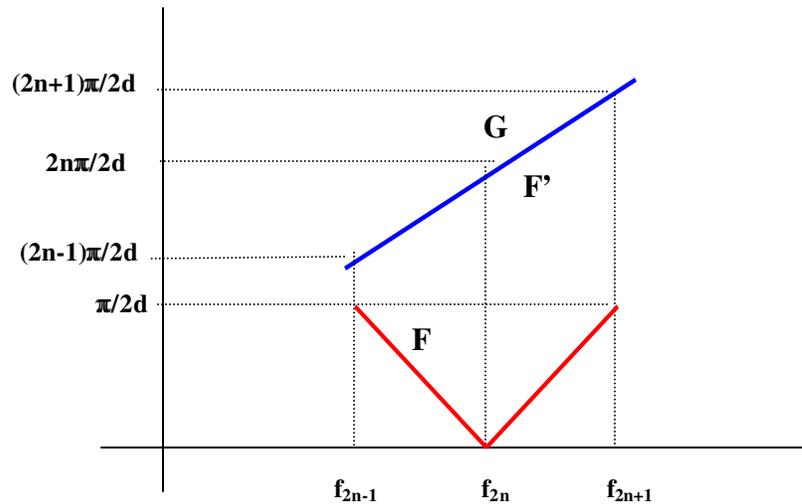


Figura 6.12 - Funções F, F' e G.

Com base nas figuras 6.11 e 6.12 é possível expressar  $F'$  em função de  $F$ . Deste modo, obtém-se:

$$\text{Para } f \in [f_0, f_1] \Leftrightarrow F' = F \quad (6.6)$$

$$\text{Para } f \in [f_1, f_2] \Leftrightarrow F' = \frac{\pi}{d} - F \quad (6.7)$$

$$\text{Para } f \in [f_2, f_3] \Leftrightarrow F' = \frac{\pi}{d} + F \quad (6.8)$$

$$\text{Para } f \in [f_3, f_4] \Leftrightarrow F' = \frac{2\pi}{d} - F \quad (6.9)$$

$$\text{Para } f \in [f_4, f_5] \Leftrightarrow F' = \frac{2\pi}{d} + F \quad (6.10)$$

$$\text{Para } f \in [f_5, f_6] \Leftrightarrow F' = \frac{3\pi}{d} - F \quad (6.11)$$

$$\text{Para } f \in [f_6, f_7] \Leftrightarrow F' = \frac{3\pi}{d} + F \quad (6.12)$$

Generalizando as expressões 6.6-6.12 pode-se expressar  $F'$  em função de  $F$ , nos intervalos genéricos  $[f_{2n-1}, f_{2n}]$  e  $[f_{2n}, f_{2n+1}]$  como sendo:

$$\text{Para } f \in [f_{2n-1}, f_{2n}] \Leftrightarrow F' = \frac{2n\pi}{2d} - F \quad (6.13)$$

$$\text{Para } f \in [f_{2n}, f_{2n+1}] \Leftrightarrow F' = \frac{2n\pi}{2d} + F \quad (6.14)$$

Nas expressões 6.13 e 6.14 deve-se considerar  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Estas expressões definem  $F'$  em função de  $F$ , de modo tal que as funções  $F'$  e  $G$  sejam idênticas em toda a faixa de frequência

considerada. Portanto, a função  $F'$  representa a componente imaginária de  $\gamma$  obtida através da equação 6.1.

Uma condição necessária para se calcular  $F'$  através das expressões 6.13 e 6.14 é que os valores de frequências em que ocorrem os pontos de máximo e de mínimo da função  $F$  devem ser todos conhecidos. Os valores máximos e mínimos de  $F$  são, respectivamente, zero e  $\frac{\pi}{2d}$ . Resta, portanto, determinar todas as frequências em que ocorrem os pontos de máximo e de mínimo.

As equações 6.13 e 6.14 definem a função  $F'$  em cada intervalo cujos extremos são valores máximos e mínimos, consecutivos, de  $F$ . Pode-se também calcular  $F'$  em função de  $F$  não em intervalos, definido por máximos e mínimos consecutivos, e sim de forma pontual.

Para obter  $F'$  na forma pontual, deve-se derivar ambos os membros das equações 6.13 e 6.14 em relação à frequência, obtendo então:

$$\text{Para } f \in [f_{2n-1}, f_{2n}] \Leftrightarrow \frac{\partial F'}{\partial f} = -\frac{\partial F}{\partial f} \quad (6.15)$$

$$\text{Para } f \in [f_{2n}, f_{2n+1}] \Leftrightarrow \frac{\partial F'}{\partial f} = \frac{\partial F}{\partial f} \quad (6.16)$$

Na figura 6.12 observa-se que a derivada da função  $F$  em relação à frequência é negativa no intervalo  $[f_{2n-1}, f_{2n}]$  e positiva no intervalo  $[f_{2n}, f_{2n+1}]$ . Desta forma, as equações 6.15 e 6.16 podem ser re-escritas como sendo:

$$\text{Para } \frac{\partial F}{\partial f} < 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F'}{\partial f} = -\frac{\partial F}{\partial f} \quad (6.17)$$

$$\text{Para } \frac{\partial F}{\partial f} > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F'}{\partial f} = \frac{\partial F}{\partial f} \quad (6.18)$$

Considerando que as frequências consecutivas  $f_k$  e  $f_{k-1}$  são bastante próximas, pode-se fazer a seguinte aproximação [26]:

$$\frac{\partial F'}{\partial f} = \frac{F'(f_k) - F'(f_{k-1})}{f_k - f_{k-1}} \quad (6.19)$$

Onde  $F'(f_k)$  e  $F'(f_{k-1})$  são os valores da função  $F'$  calculadas nas frequências  $f_k$  e  $f_{k-1}$ , respectivamente.

Da expressão 6.19 obtém-se:

$$F'(f_k) = \frac{\partial F'}{\partial f} (f_k - f_{k-1}) + F'(f_{k-1}) \quad (6.20)$$

Substituindo as expressões de  $\frac{\partial F'}{\partial f}$ , obtidas nas expressões 6.17 e 6.18, na expressão 6.20 obtém-se:

$$F'(f_k) = -\frac{\partial F(f_k)}{\partial f}(f_k - f_{k-1}) + F'(f_{k-1}) \quad \text{para } \frac{\partial F(f_k)}{\partial f} < 0 \quad (6.21)$$

$$F'(f_k) = \frac{\partial F(f_k)}{\partial f}(f_k - f_{k-1}) + F'(f_{k-1}) \quad \text{para } \frac{\partial F(f_k)}{\partial f} > 0 \quad (6.22)$$

As equações 6.21 e 6.22 podem ser escritas na forma de uma única equação, se o conceito de função módulo [26] for utilizado no termo  $\frac{\partial F}{\partial f}$ . Desta forma, o termo  $F'(f_k)$  será escrito como:

$$F'(f_k) = \left| \frac{\partial F(f_k)}{\partial f} \right| (f_k - f_{k-1}) + F'(f_{k-1}) \quad (6.23)$$

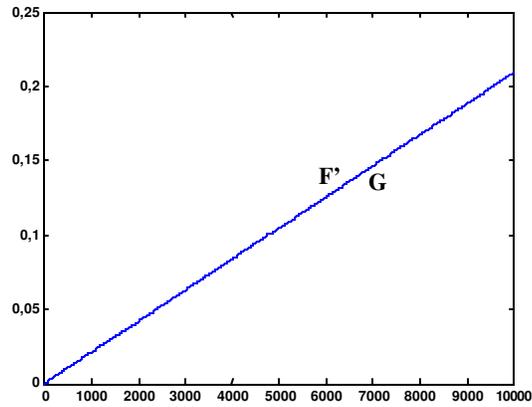
Sendo  $\left| \frac{\partial F(f_k)}{\partial f} \right|$  o módulo de  $\frac{\partial F(f_k)}{\partial f}$ .

A função F não é uma função explícita da frequência. Portanto, o termo  $\frac{\partial F(f_k)}{\partial f}$  deve ser calculado da mesma maneira como foi definido, na equação 6.19, o termo  $\frac{\partial F'(f_k)}{\partial f}$ .

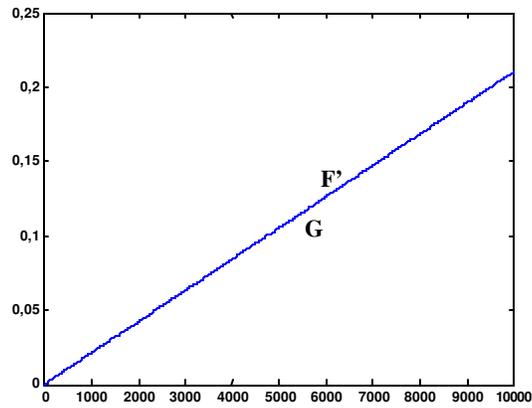
Portanto a função F pode ser ajustada através das equações 6.13 e 6.14 ou através da equação 6.23. Se o ajuste for feito através das equações 6.13 e 6.14 há a necessidade de se conhecer as frequências em que ocorrem os pontos de máximos e de mínimos da função F. No entanto, caso seja utilizada a equação 6.23 para ajustar F não há a necessidade de se conhecer as frequências em que ocorrem os pontos de máximo e de mínimo da função F mas, deve-se considerar que as frequências em que as correntes e tensões foram obtidas são bastante próximas de modo tal que a equação 6.19 possa ser utilizada.

Neste item, serão utilizadas as equações 6.13 e 6.14 no processo de correção, uma vez que os pontos de máximo e de mínimo da função F são facilmente obtidos.

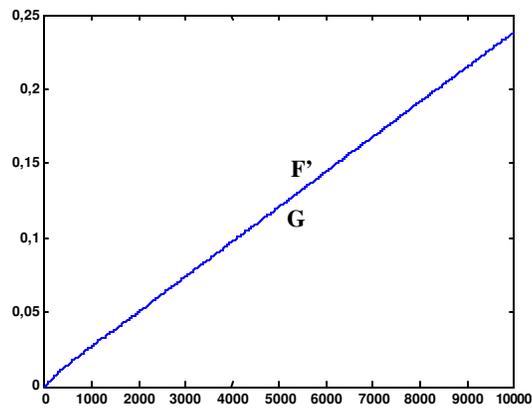
As figuras 6.13-6.15 mostram, respectivamente as funções F' e G dos modos da linha.



**Figura 6.13 - Funções F' e G do modo 1**



**Figura 6.14 - Funções F' e G para o modo 2**



**Figura 6.15 - Funções F' e G para o modo 3**

As figuras 6.13-6.15 mostram que as funções F' e G dos modos da linha são coincidentes. Portanto, pode-se afirmar que a função F' é a componente imaginária da função de propagação que foi calculada a partir das impedâncias equivalentes.

### 6.3 Cálculo dos parâmetros da linha

No apêndice 1, mostra-se que existe a seguinte relação entre as impedâncias equivalentes e os parâmetros longitudinais e transversais da linha:

$$A_{mi} M_{mi} = \frac{z_{mi}}{y_{mi}} \quad (6.24)$$

Na expressão 6.24,  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$  são as impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto-circuito, respectivamente, do  $i$ -ésimo modo da linha enquanto que  $z_{mi}$  e  $y_{mi}$  são, respectivamente, a impedância longitudinal e a admitância transversal do  $i$ -ésimo modo.

A função de propagação  $\gamma_i$  do  $i$ -ésimo modo é escrita como sendo:

$$\tilde{\alpha}_i = \sqrt{z_{mi} y_{mi}} \quad (6.25)$$

Os termos  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$  são calculados a partir das correntes e tensões de fase da linha, conforme foi mostrado no capítulo 5 enquanto que  $\gamma_i$  foi calculado a partir de  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$  conforme mostrado no capítulo 6. Portanto, as equações 6.24 e 6.25 definem um sistema em que as incógnitas são as impedâncias longitudinais e as admitâncias transversais da linha.

A solução do sistema definido pelas equações 6.24 e 6.25 é:

$$z_{mi} = \tilde{\alpha}_i \sqrt{A_{mi} M_{mi}} \quad (6.26)$$

$$y_{mi} = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\sqrt{A_{mi} M_{mi}}} \quad (6.27)$$

Considerando que os termos  $A_{mi}$ ,  $M_{mi}$  e  $\gamma_i$  são calculados a partir das correntes e tensões de fase, pode-se afirmar que as equações permitem o cálculo das impedâncias longitudinais e das admitâncias transversais como funções das correntes e tensões de fase da linha.

Após o cálculo dos termos  $z_{mi}$  e  $y_{mi}$ , para todos os modos da linha, obtém-se as matrizes de impedâncias longitudinais  $[Z_m]$  e de admitâncias transversais  $[Y_m]$  no domínio dos modos. Em seguida, utilizando a matriz de transformação modal  $[T_1]$ , é possível obter as matrizes de impedâncias longitudinais  $[Z]$  e de admitâncias transversais  $[Y]$  no domínio das fases como sendo:

$$[Z] = ([T_1]^T)^{-1} [Z_m] [T_1]^{-1} \quad (6.28)$$

$$[Y] = [T_1] [Y_m] [T_1]^T \quad (6.29)$$

A seguir serão mostrados os parâmetros da linha da figura 5.2, que foram calculados a partir das correntes e tensões de fase. Estes parâmetros também serão calculados a partir das informações referentes à geometria da torre, conforme mostrado no capítulo 2.

As curvas referentes aos parâmetros calculados a partir das correntes e tensões de fase receberão a denominação de “curva I” enquanto que as curvas referentes aos parâmetros calculados a partir da geometria da torre receberão a denominação de “curva II”.

### 6.3.1 Parâmetros longitudinais

A figuras 6.16-6.19 mostram as resistências e indutâncias próprias da linha.

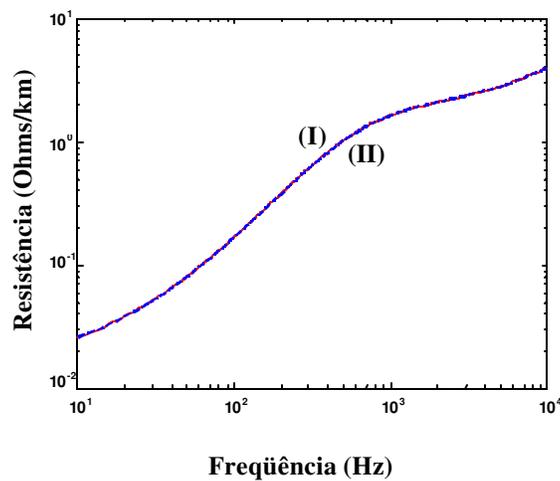


Figura 6.16 - Resistência própria da fase 1 ( $R_{11}$ )

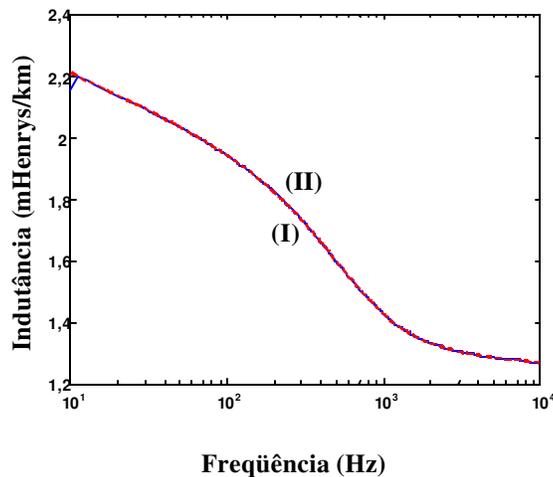


Figura 6.17 - Indutância própria da fase 1 ( $L_{11}$ )

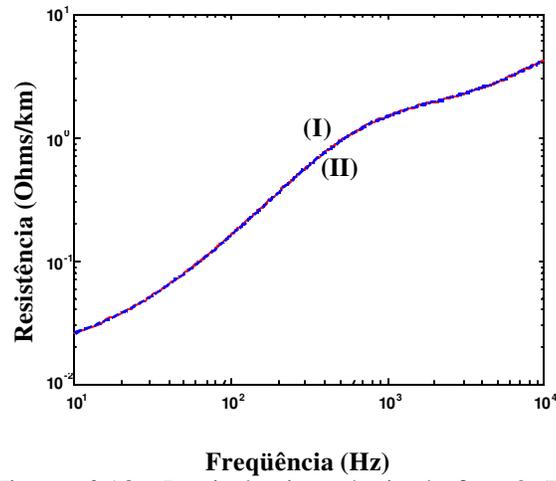


Figura 6.18 - Resistência própria da fase 2 ( $R_{22}$ )

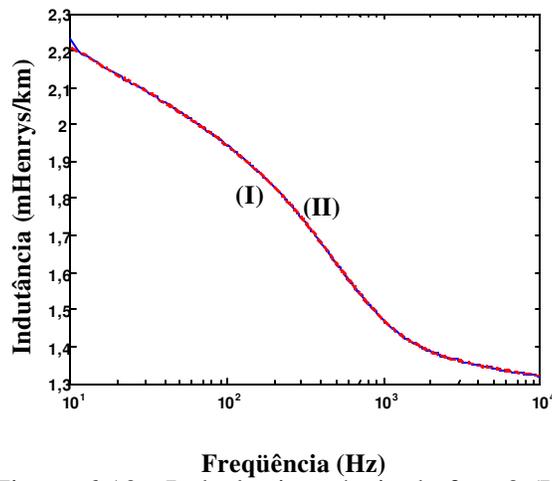


Figura 6.19 - Indutância própria da fase 2 ( $L_{22}$ )

As figuras 6.20-6.23 mostram as resistências e indutâncias mútuas da linha.

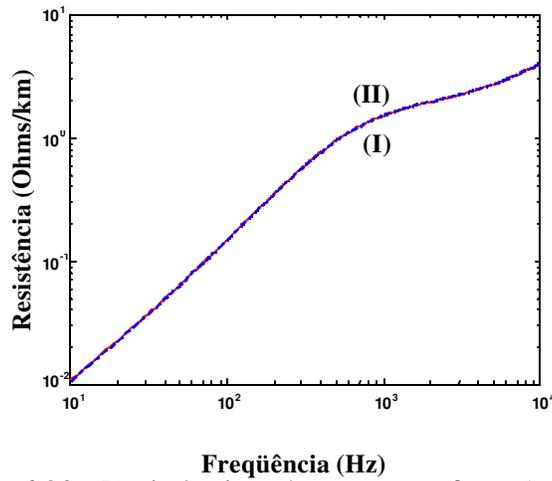


Figura 6.20 - Resistência mútua entre as fases 1 e 2 ( $R_{12}$ )

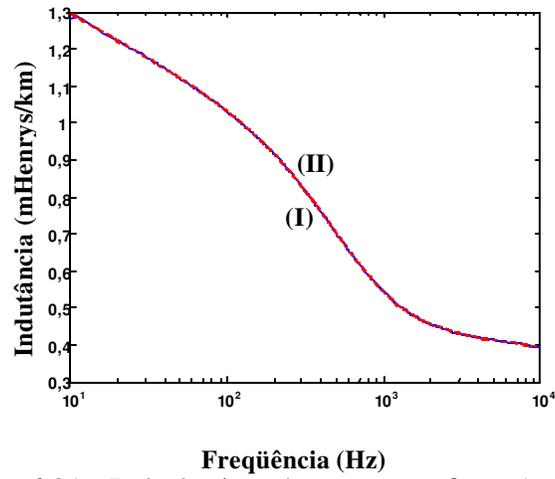


Figura 6.21 - Indutância mútua entre as fases 1 e 2 ( $L_{12}$ )

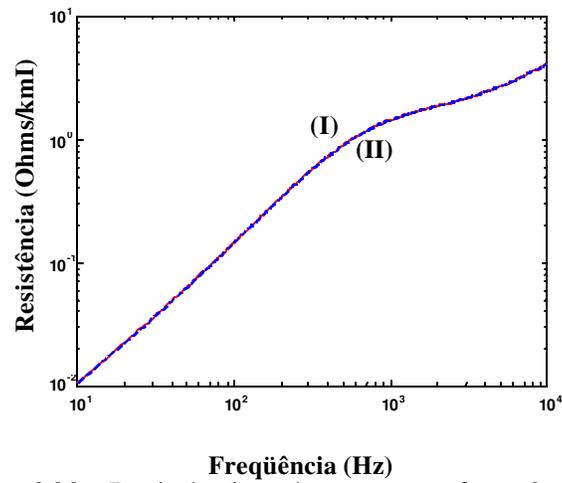


Figura 6.22 - Resistência mútua entre as fases 2 e 3 ( $R_{23}$ )

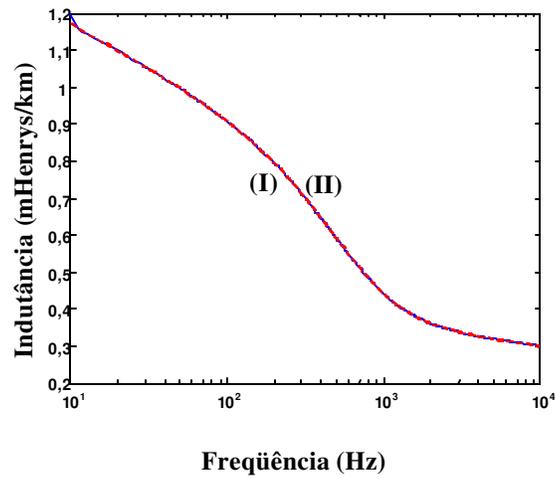


Figura 6.23 - Indutância mútua entre as fases 2 e 3 ( $L_{23}$ )

As figuras 6.16-6.23 mostram que quando se considera que a matriz  $[T_I]$  é conhecida, os parâmetros longitudinais da linha calculados a partir das correntes e tensões de fase são idênticos aos parâmetros da linha calculados a partir da geometria da torre.

### 6.3.2 Parâmetros transversais

Na linha mostrada no capítulo 5, considerou-se que as condutâncias eram nulas. Neste item serão mostradas as condutâncias calculadas a partir das correntes e tensões de fase da linha.

As figuras 6.24-6.27 mostram as condutâncias próprias e mútuas da linha.

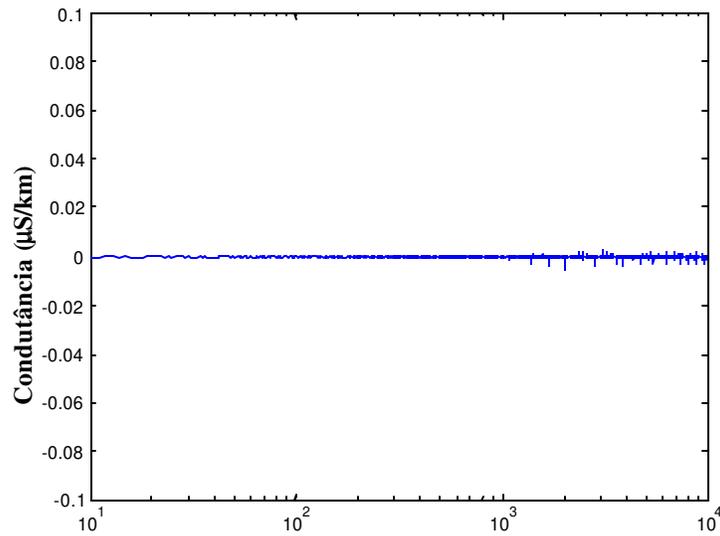


Figura 6.24 - Condutância própria da fase 1 ( $G_{11}$ )

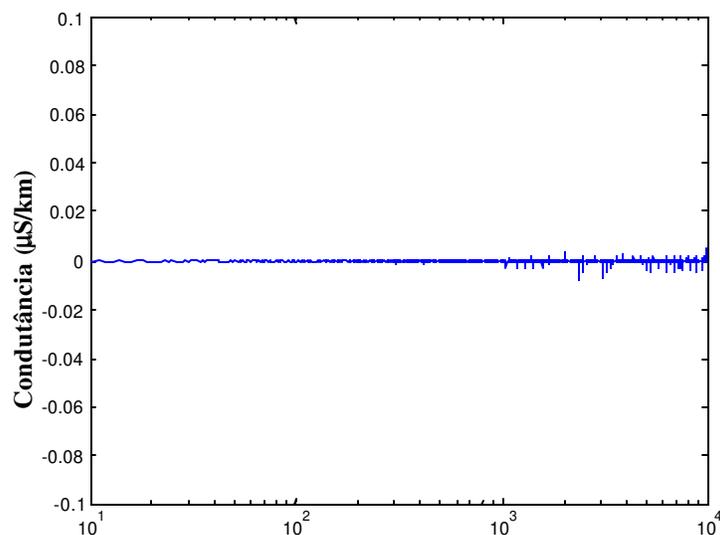


Figura 6.25 - Condutância própria da fase 2 ( $G_{22}$ )

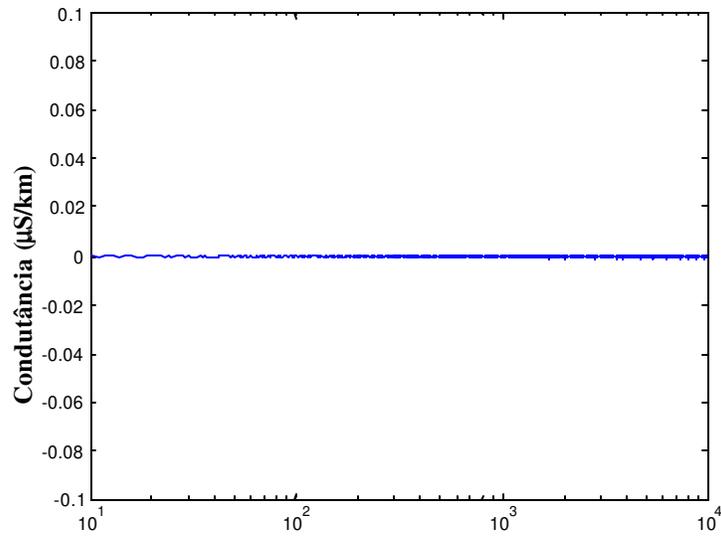


Figura 6.26 - Condutância mútua entre as fases 1 e 2 ( $G_{12}$ )

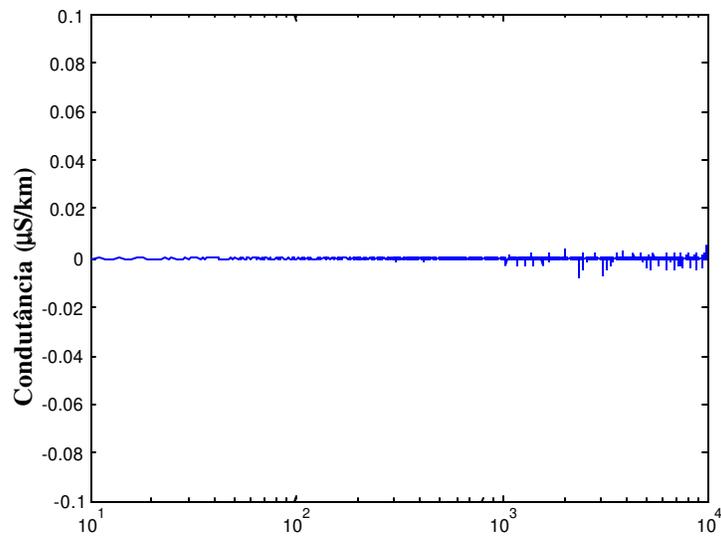


Figura 6.27 - Condutância mútua entre as fases 2 e 3 ( $G_{23}$ )

As figuras 6.28-6.31 mostram as capacitâncias aparentes que foram calculadas a partir das correntes e tensões de fase da linha (curva I) e a partir da geometria da linha (curva II).

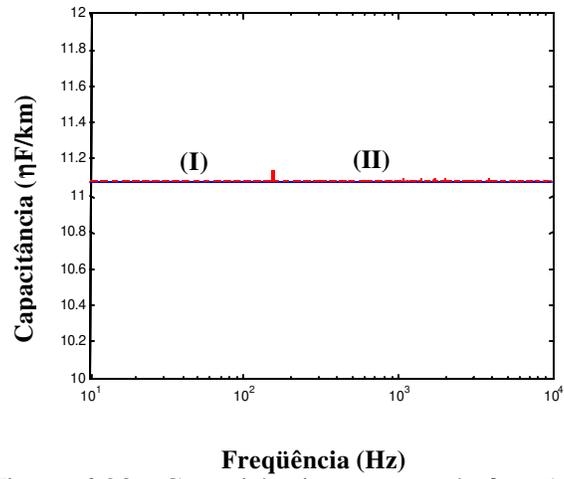


Figura 6.28 - Capacitância aparente da fase 1 ( $C_{11}$ )

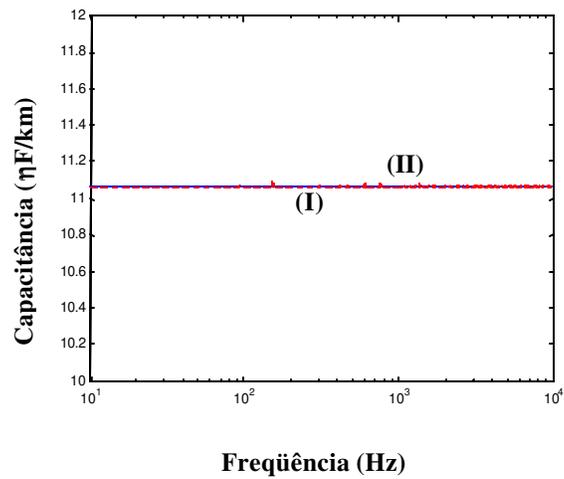


Figura 6.29 - Capacitâncias aparente da fase 2 ( $C_{22}$ )

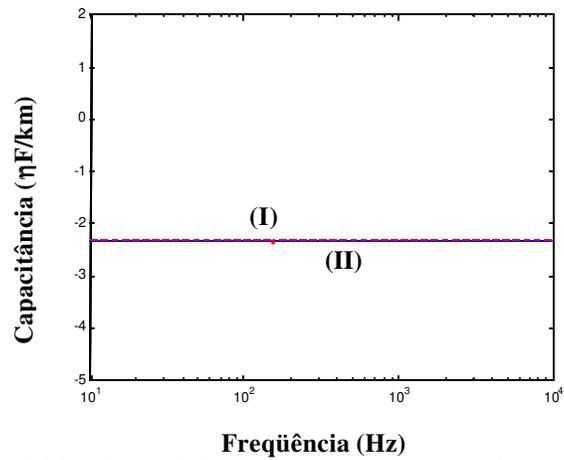


Figura 6.30 - Capacitância aparente entre as fases 1 e 2 ( $C_{12}$ )

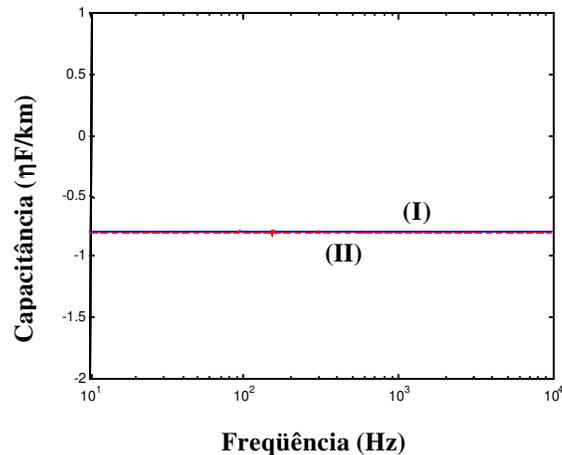


Figura 6.31 - Capacitância aparente entre as fases 2 e 3 ( $C_{23}$ )

As figuras 6.24-6.31 mostram que os parâmetros transversais que foram calculados a partir das correntes e tensões de fase da linha são praticamente idênticos aos parâmetros transversais que foram calculados a partir da geometria da torre.

#### 6.4 Conclusões

Neste capítulo foi mostrado um método que possibilita o cálculo dos parâmetros longitudinais e transversais da linha a partir das correntes e tensões de fase. O método pode ser aplicado em qualquer tipo de linha de transmissão, desde que a matriz de transformação modal  $[T_1]$  da mesma seja conhecida.

O método baseia-se em uma equação, desenvolvida neste trabalho, que relaciona as funções de propagação modais com as impedâncias equivalentes da linha. Uma vez que as impedâncias equivalentes também foram obtidas a partir das correntes e tensões, conclui-se que é possível relacionar as funções de propagação com as correntes e tensões de fase da linha.

A equação que foi desenvolvida permite calcular diretamente a componente real da função de propagação. Quanto à parte imaginária, a mesma pode ser obtida após um ajuste nos resultados obtidos com a equação desenvolvida.

O método foi testado em uma linha trifásica, com plano de simetria vertical, com 500 km de comprimento e tensão nominal de 440 kV. Os parâmetros longitudinais e transversais desta linha foram calculados a partir da equação desenvolvida e em seguida foram comparados com os parâmetros que foram calculados a partir da geometria da torre. Os resultados obtidos são idênticos, comprovando que o método desenvolvido está correto.



# 7

## PARÂMETROS DA LINHA CALCULADOS A PARTIR DAS CORRENTES E TENSÕES DE FASE, UTILIZANDO A MATRIZ DE CLARKE

### 7.1 Introdução

No método de cálculo dos parâmetros da linha a partir das correntes e tensões de fase que foi desenvolvido anteriormente, existe a necessidade de que a matriz de transformação modal  $[T_1]$  seja conhecida. Para se determinar a matriz  $[T_1]$  deve-se conhecer os parâmetros da linha. No entanto, se os parâmetros são conhecidos, não há a necessidade de determiná-los.

No entanto, se a linha de transmissão é uma linha trifásica que possui um plano de simetria vertical, a matriz de transformação modal pode ser substituída pela matriz de Clarke. Portanto, para este tipo particular de linha, o método pode ser realmente utilizado para que se possa calcular os parâmetros da linha a partir das correntes e tensões de fase. Neste caso, a matriz de Clarke é utilizada em substituição à matriz  $[T_1]$  no momento em que se calcula as impedâncias equivalentes modais e quando se calcula os parâmetros da linha no domínio das fases.

A figura 7.1 mostra um diagrama de blocos que descreve todo o processo de cálculo dos parâmetros da linha de transmissão a partir das correntes e tensões de fase, considerando o uso da matriz de Clarke.

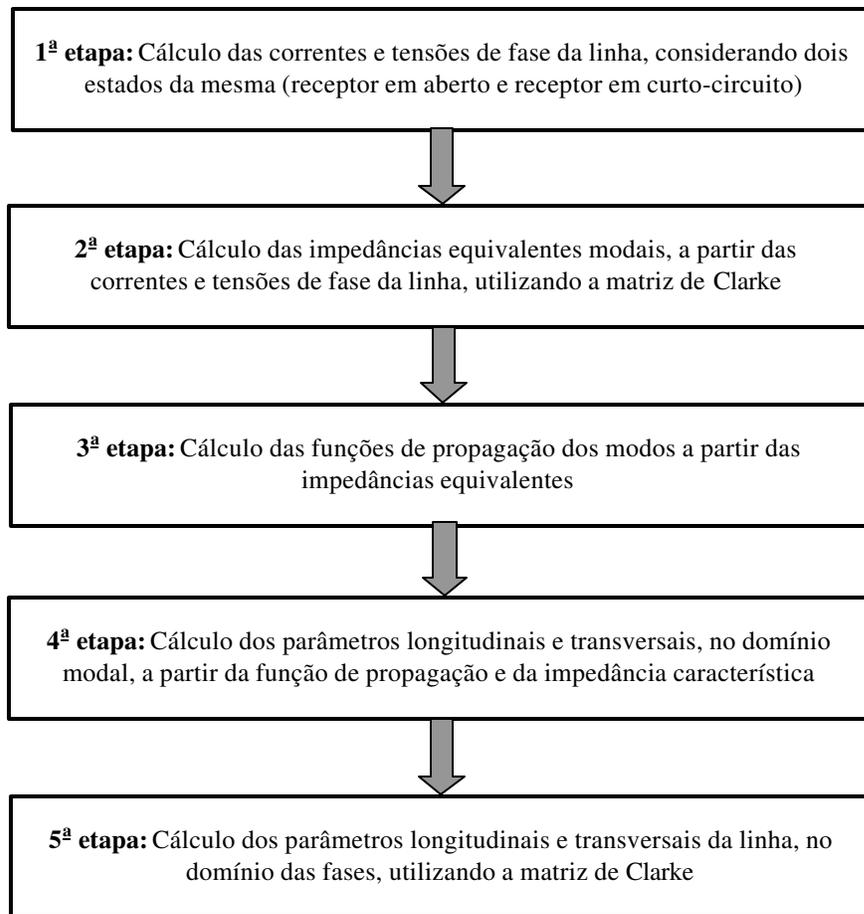


Figura 7.1 - Cálculo dos parâmetros da linha de transmissão a partir das correntes e tensões de fase, utilizando a matriz de Clarke

As etapas 1 e 2 dos diagramas de blocos, mostrados na figura 7.1, foram desenvolvidas no capítulo 5 enquanto que as etapas 3, 4 e 5 serão desenvolvidas neste capítulo.

## 7.2 Funções de propagação

As funções de propagação são calculadas através da equação 6.1. Estes resultados serão comparados com os resultados obtidos através da expressão 6.5. No entanto, deve-se considerar que as impedâncias equivalentes foram calculadas com o uso da matriz de Clarke.

As figuras 7.2-7.4 mostram, respectivamente a componente real das funções de propagação dos modos 1, 2 e 3 ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ ) obtida através das equações 6.1 (curva I) e 6.5 (curva II).

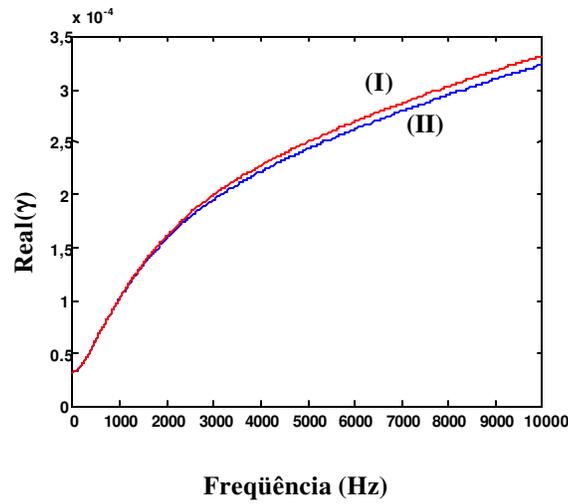


Figura 7.2 - Componente real de  $(\gamma_1)$

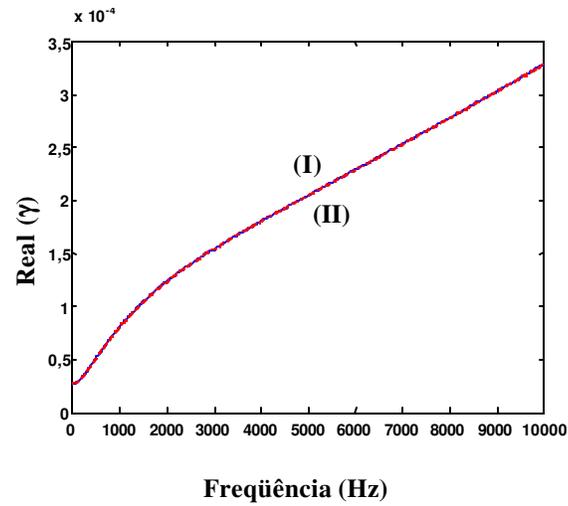


Figura 7.3 - Componente real de  $(\gamma_2)$

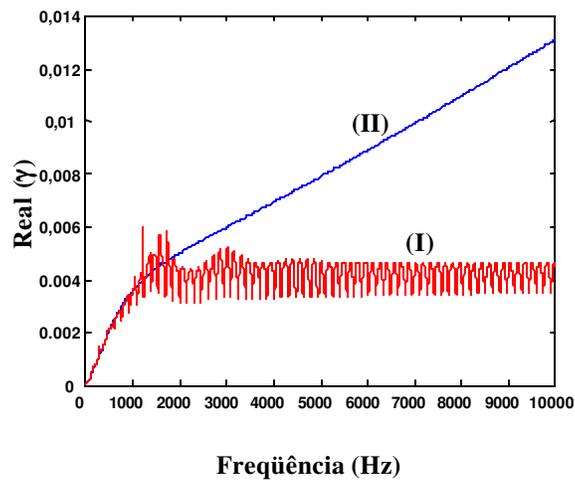


Figura 7.4 - Componente real de  $(\gamma_3)$

As figuras 7.5-7.7 mostram, respectivamente, a componente imaginária das funções de propagação dos modos ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ ) obtida através das equações 6.1 (curva I) e 6.5 (curva II).

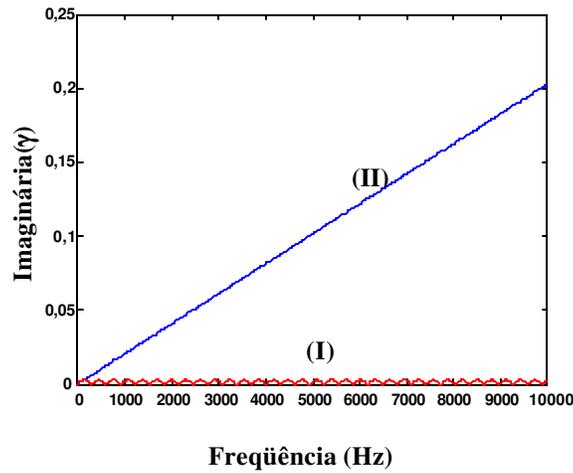


Figura 7.5 - Componente imaginária de ( $\gamma_1$ )

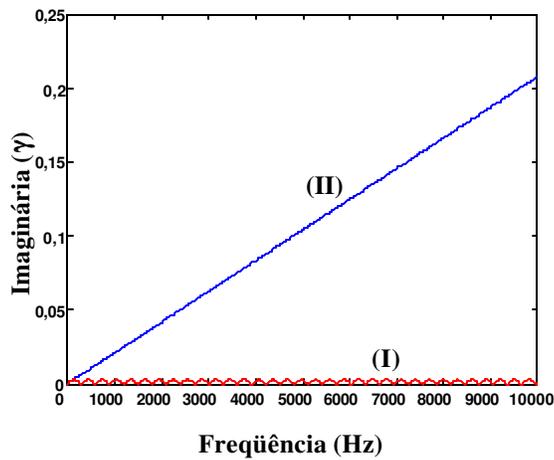


Figura 7.6 - Componente imaginária de ( $\gamma_2$ )

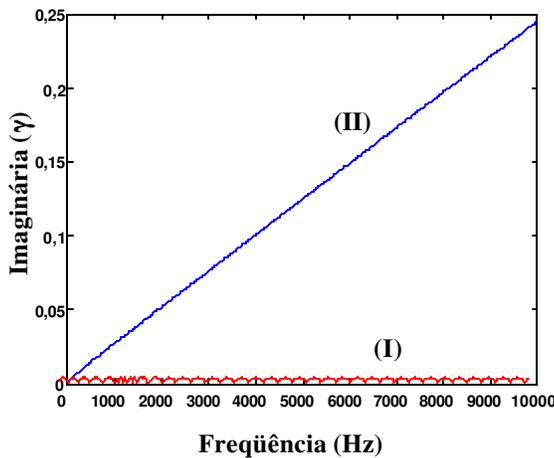


Figura 7.7 - Componente imaginária de ( $\gamma_3$ )

As figuras 7.2-7.4 mostram que as equações 6.1 e 6.5 apresentam uma pequena diferença, quando utilizadas para calcular a componente real de  $\gamma_1$ . Quando aplicadas no cálculo da componente real de  $\gamma_2$ , as equações 6.1 e 6.5 apresentam o mesmo resultado. A componente real de  $\gamma_3$  apresentou resultados bem distintos quando calculada através da equação 6.1 e através da equação 6.5. A componente imaginária de  $\gamma$ , mostrada nas figuras 7.5-7.7, apresentou resultados diferentes quando calculadas através da equação 6.1 e através da equação 6.5.

A seguir, será feita uma análise dos resultados das equações 6.1 e 6.5, quando utilizadas para calcular a componente imaginária de  $\gamma$ .

### 7.2.1 Componente imaginária

As figuras 7.8-7.10 mostram, respectivamente, a componente imaginária das funções de propagação dos modos 1, 2 e 3 ( $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$ ) obtida através das equações 6.1 (curva I) e 6.5 (curva II) em frequências compreendidas entre 10 Hz e 1 kHz.

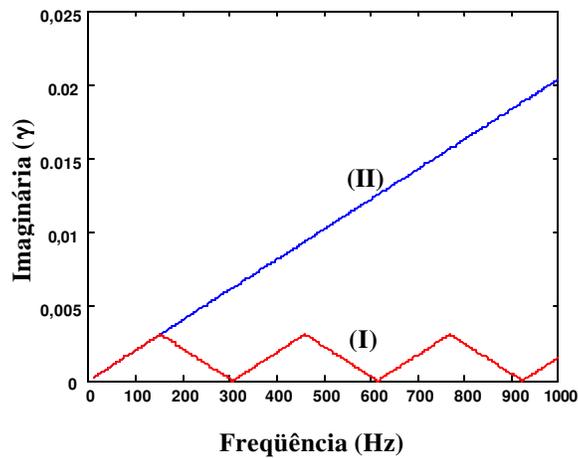


Figura 7.8 - Componente imaginária de ( $\gamma_1$ )

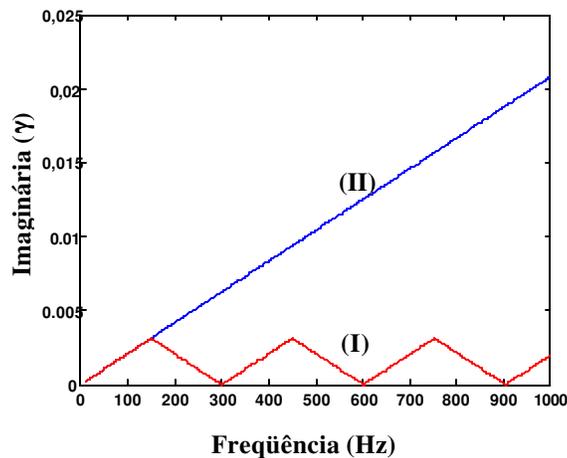


Figura 7.9 - Componente imaginária de ( $\gamma_2$ )

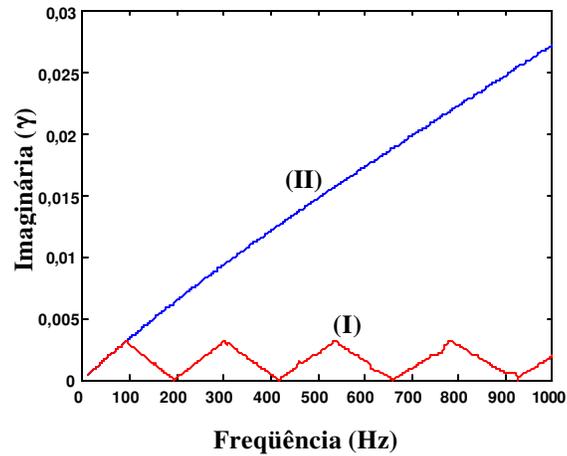


Figura 7.10 - Componente imaginária de ( $\gamma_3$ )

As figura 7.11 e 7.12 mostram a componente imaginária de  $\gamma$  do modo 3 obtida através da equação 6.1 em frequências entre 1 kHz e 3 kHz e entre 8 kHz e 10 kHz, respectivamente.

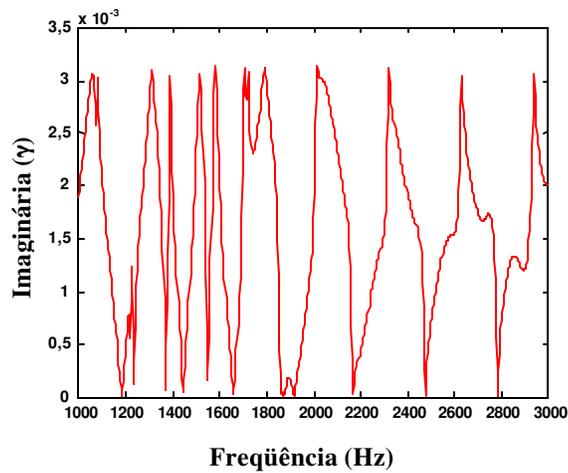


Figura 7.11 - Componente imaginária de ( $\gamma_3$ )

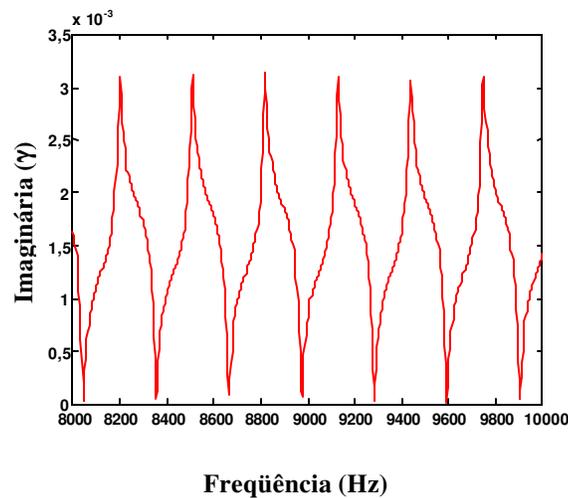


Figura 7.12 - Componente imaginária de ( $\gamma_3$ )

As figuras 7.8-7.12 mostram que a curva I, obtida através da função F (capítulo 6) é coincidente com a curva II somente em uma faixa de frequência inicial. Nas demais frequências a função F, para  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , possui um comportamento triangular com valores máximos e mínimos bem definidos. Quanto à função F para  $\gamma_3$ , a mesma também possui formato triangular, mas apresenta distorções que dificultam a localização das frequências em que ocorrem os valores máximos e mínimos.

### 7.2.2 Correção da função F

Deve-se ajustar a função F de modo tal que a mesma seja coincidente com a curva II, que é definida através da função G (capítulo 6), para todos os valores de frequência. A função ajustada F recebe o nome de F'.

As funções F de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  serão corrigidas através das equações 6.13 e 6.14, uma vez que as frequências em que ocorrem os valores máximos e mínimos são facilmente identificadas. A equação 6.23 também poderia ser utilizada para correção de F.

Quanto à função F de  $\gamma_3$ , a mesma será corrigida através das equações 6.13 e 6.14 e também através da equação 6.23.

As figuras 7.13 e 7.14 mostram as funções F' e G dos modos 1 e 2, respectivamente, da linha.

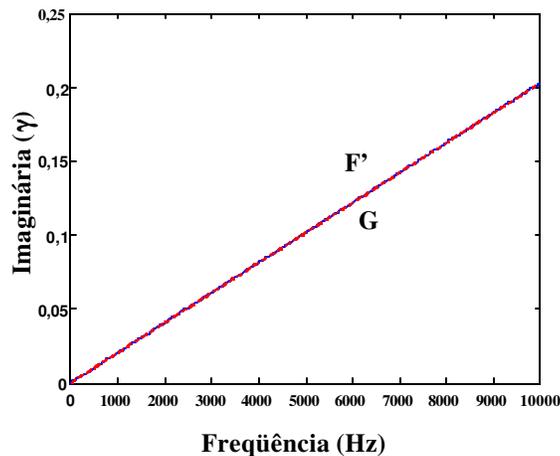


Figura 7.13 - Funções F' e G do modo 1

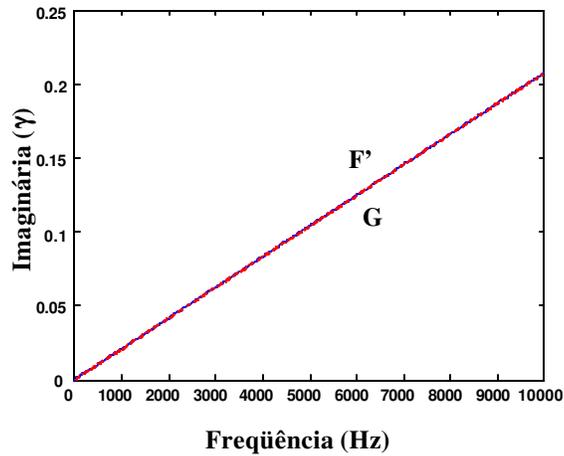


Figura 7.14 - Funções F' e G do modo 2

A figura 7.15 mostra a função F' e G do modo 3, sendo que F foi ajustada através das equações 6.13 e 6.14.

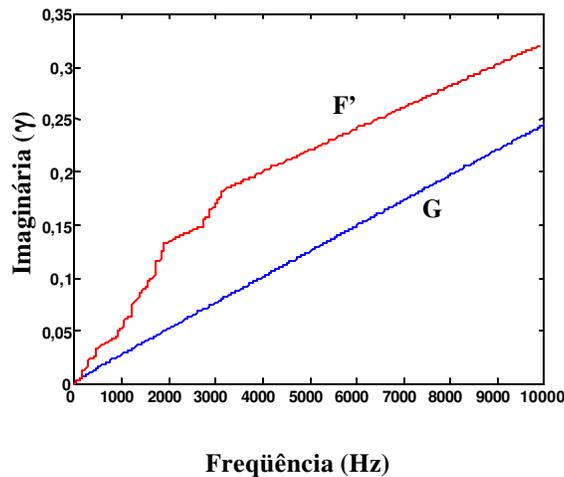


Figura 7.15 - Funções F' e G do modo 3

A figura 7.16 mostra a função F' e G do modo 3, sendo que F foi ajustada através da equação 6.23.

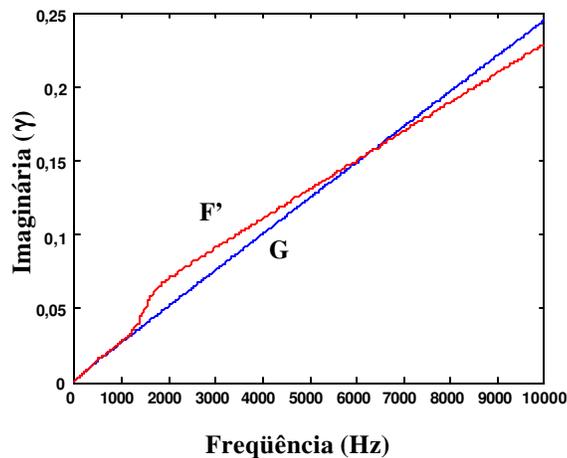


Figura 7.16 - Funções F' e G do modo 3

As figuras 7.13-7.16 mostram que a função F dos modos 1 e 2 são ajustadas perfeitamente através das equações 6.13 e 6.14.

Quanto à função F do modo 3, os resultados mostram que a mesma é melhor ajustada através da equação 6.23. Pode-se verificar que o máximo erro de ajuste ocorre em uma frequência em torno de 2 kHz

### 7.3 Cálculo dos parâmetros da linha

Os parâmetros da linha no domínio dos modos são calculados a partir das expressões 6.26 e 6.27. Em seguida, utilizando as expressões 6.28 e 6.29, calcula-se os parâmetros no domínio das fases.

Substituindo, nas expressões 6.28 e 6.29, a matriz  $[T_I]$  pela matriz de Clarke, obtém-se:

$$[Z] \cong [T_{\text{Clarke}}][Z_m][T_{\text{Clarke}}]^{-1} \quad (7.1)$$

$$[Y] \cong [T_{\text{Clarke}}][Y_m][T_{\text{Clarke}}]^{-1} \quad (7.2)$$

A seguir serão mostrados os parâmetros da linha da figura 5.2, que foram calculados a partir das correntes e tensões de fase. Estes parâmetros também serão calculados a partir das informações referentes à geometria da torre, conforme mostrado no capítulo 2.

As curvas referentes aos parâmetros calculados a partir das correntes e tensões de fase receberão a denominação de “curva I” enquanto que as curvas referentes aos parâmetros calculados a partir da geometria da torre receberão a denominação de “curva II”.

#### 7.3.1 Parâmetros longitudinais

A figuras 7.17-7.20 mostram as resistências e indutâncias próprias da linha.

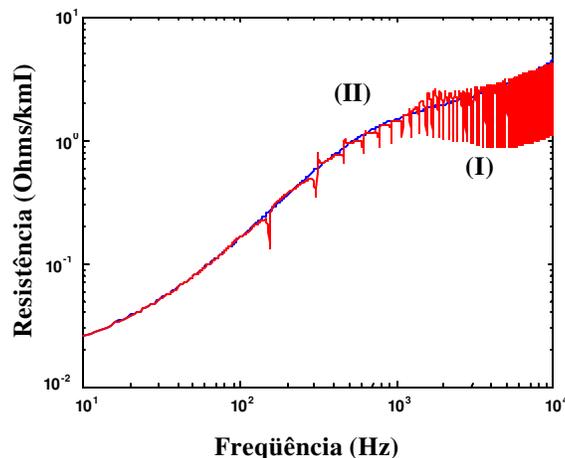


Figura 7.17 - Resistência própria da fase 1 ( $R_{11}$ )

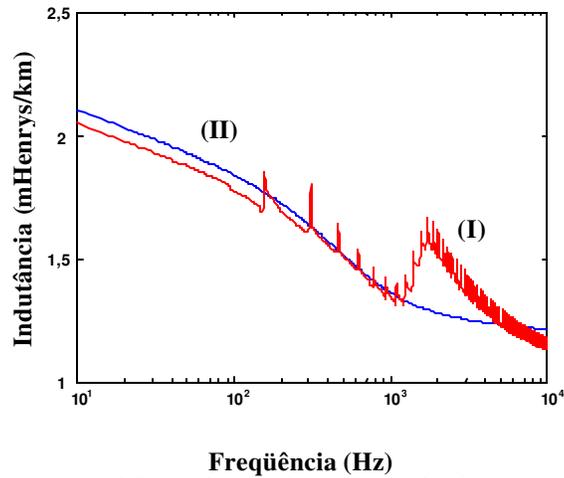


Figura 7.18 - Indutância própria da fase 1 ( $L_{11}$ )

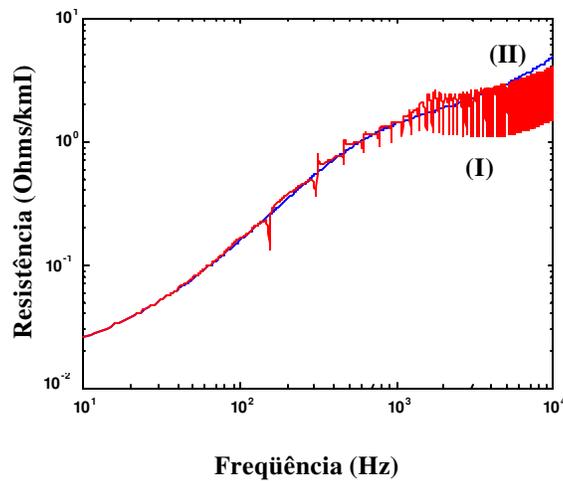


Figura 7.19 - Resistência própria da fase 2 ( $R_{22}$ )

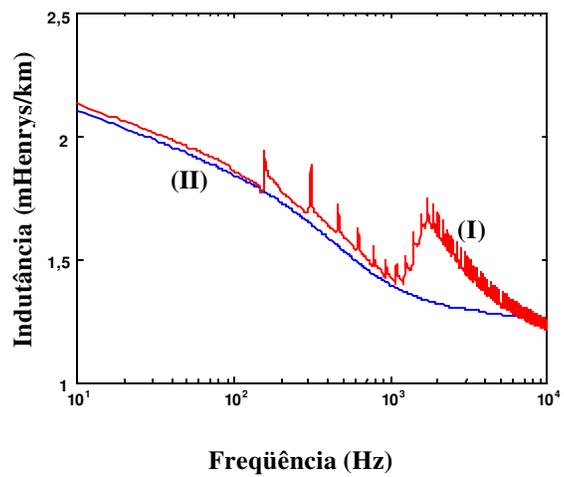


Figura 7.20 - Indutância própria da fase 2 ( $L_{22}$ )

As figuras 7.21-7.24 mostram as resistências e indutâncias mútuas da linha.

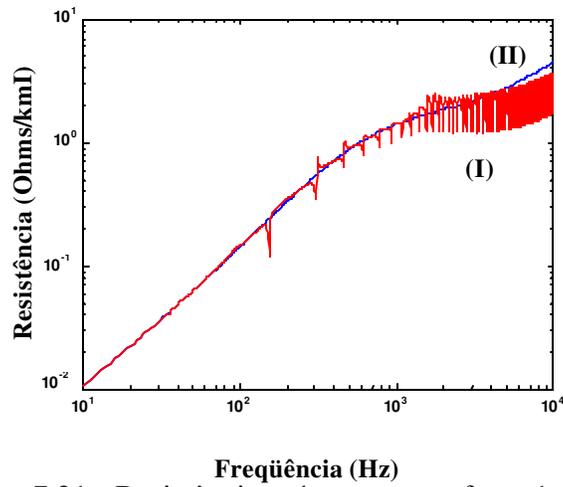


Figura 7.21 - Resistência mútua entre as fases 1 e 2 ( $R_{12}$ )

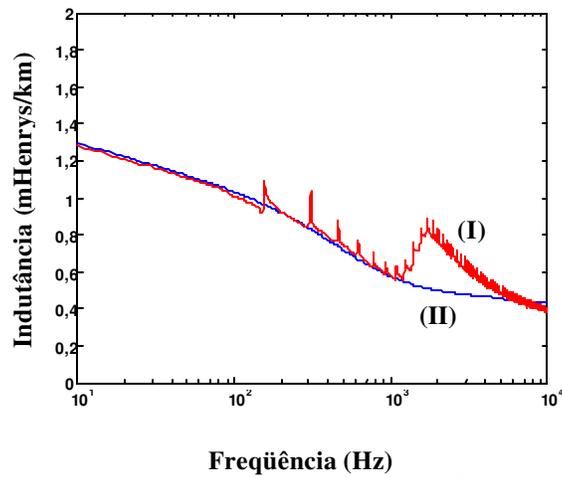


Figura 7.22 - Indutância mútua entre as fases 1 e 2 ( $L_{12}$ )

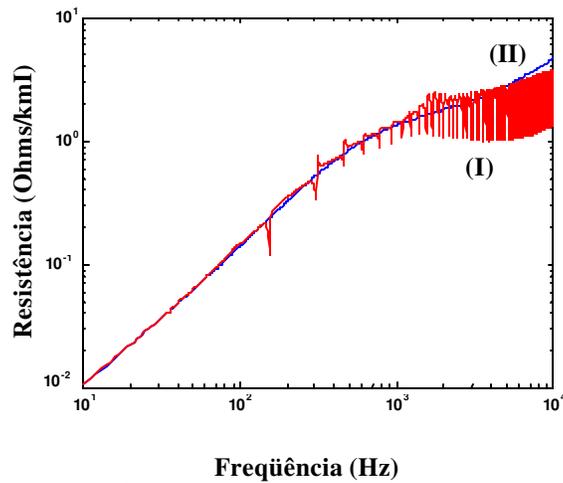


Figura 7.23 - Resistência mútua entre as fases 2 e 3 ( $R_{23}$ )

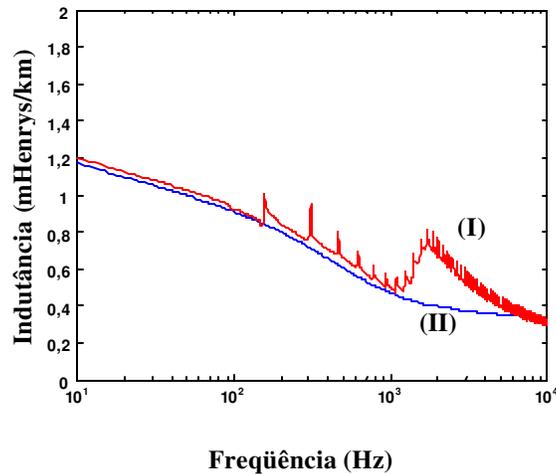


Figura 7.24 - Indutância mútua entre as fases 2 e 3 ( $L_{23}$ )

As figuras 7.17-7.24 mostram que quando se utiliza a matriz de Clarke em substituição a matriz  $[T_I]$ , os parâmetros longitudinais da linha calculados a partir das correntes e tensões de fase apresentam um erro em relação aos parâmetros longitudinais que foram calculados a partir da geometria da torre. Os resultados mostraram também que quando se utiliza a matriz de Clarke, os parâmetros calculados a partir das correntes e tensões apresentam variações bruscas em determinadas frequências.

### 7.3.2 Parâmetros transversais

Na linha mostrada no capítulo 5, considerou-se que as condutâncias eram nulas. Neste item serão mostradas as condutâncias calculadas a partir das correntes e tensões de fase da linha.

As figuras 7.25-7.28 mostram as condutâncias próprias e mútuas da linha.

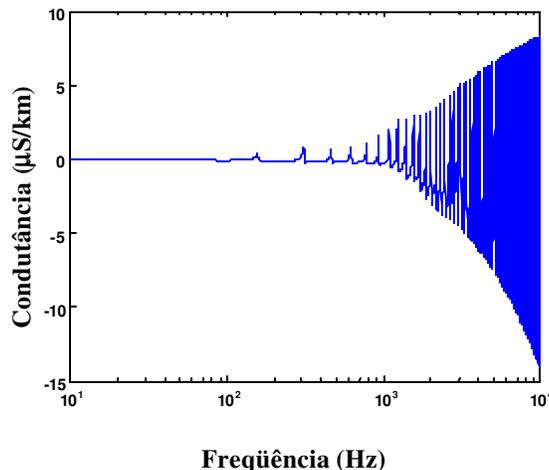


Figura 7.25 - Condutância própria da fase 1 ( $G_{11}$ )

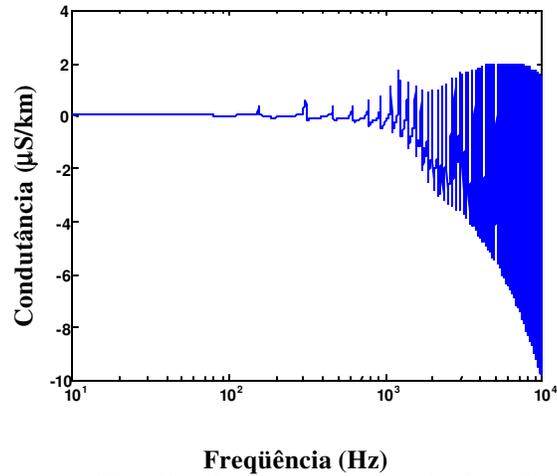


Figura 7.26 - Condutância própria da fase 2 ( $G_{22}$ )

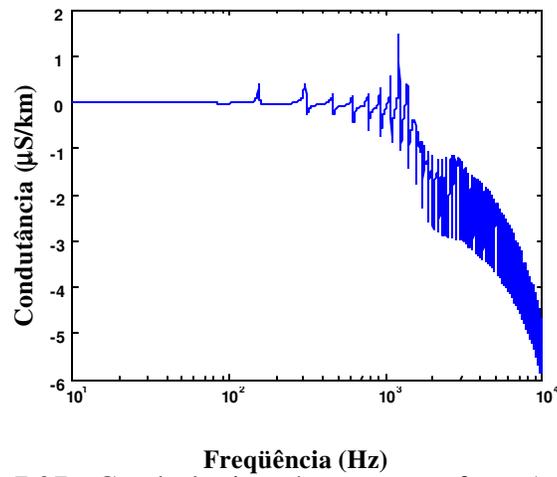


Figura 7.27 - Condutância mútua entre as fases 1 e 2 ( $G_{12}$ )

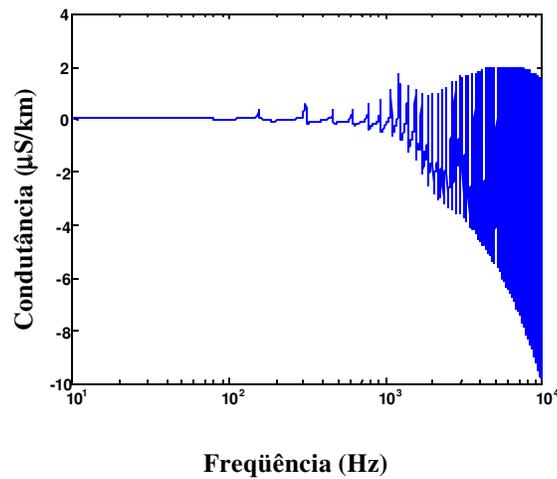


Figura 7.28 - Condutância mútua entre as fases 2 e 3 ( $G_{23}$ )

As figuras 7.29-7.32 mostram as capacitâncias aparentes que foram calculadas a partir das correntes e tensões de fase da linha (curva I) e mostram também as capacitâncias aparentes que foram calculadas a partir da geometria da linha (curva II).

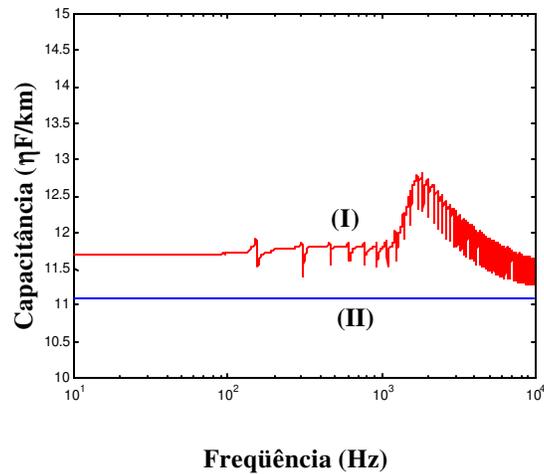


Figura 7.29 - Capacitância aparente da fase 1 ( $C_{11}$ )

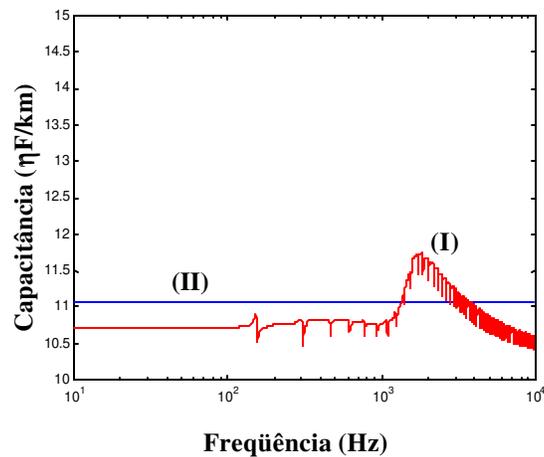


Figura 7.30 - Capacitância aparente da fase 2 ( $C_{22}$ )

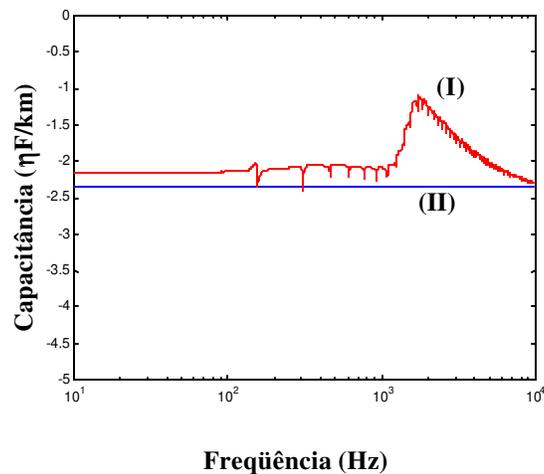


Figura 7.31 - Capacitância aparente entre as fases 1 e 2 ( $C_{12}$ )

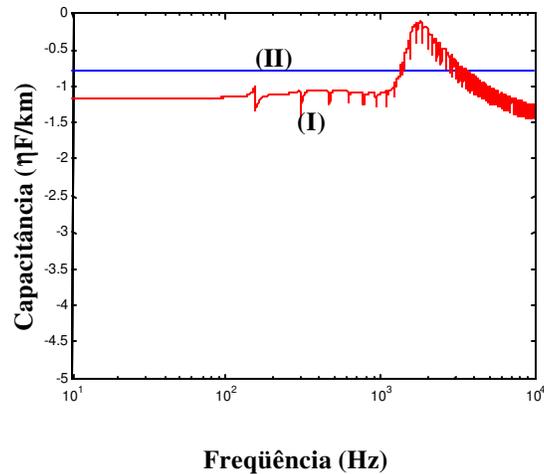


Figura 7.32 - Capacitância aparente entre as fases 2 e 3 ( $C_{23}$ )

As figuras 7.25-7.32 mostram que os parâmetros transversais que foram calculados a partir das correntes e tensões de fase da linha apresentam erros quando comparados com os parâmetros que foram calculados a partir da geometria da linha. Os resultados mostraram também que o uso da matriz de Clarke em substituição à matriz  $[T_1]$  produz variações bruscas nos parâmetros em determinadas frequências.

#### 7.4 Análise do erro

Neste item será mostrado o erro que é cometido quando a matriz de transformação  $[T_1]$  é substituída pela matriz de Clarke.

##### 7.4.1 Parâmetros longitudinais

As figuras 7.33-7.36 mostram o erro existente nas resistências e indutâncias próprias quando a matriz  $[T_1]$  é substituída pela matriz de Clarke.

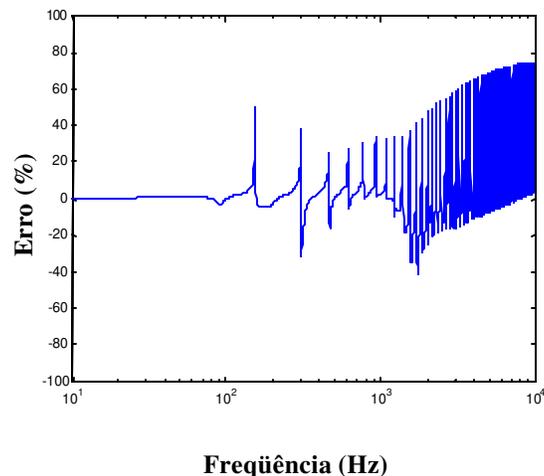


Figura 7.33 - Erro existente na resistência própria da fase 1

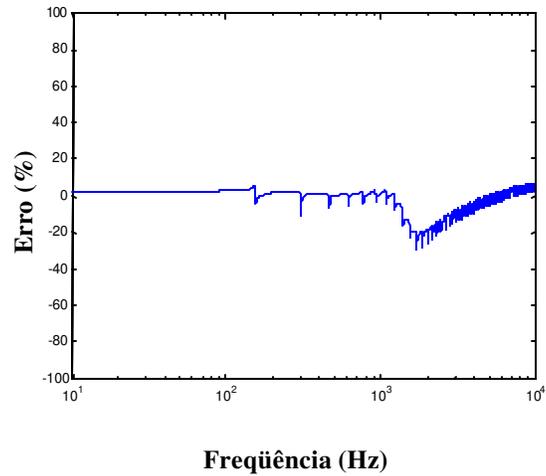


Figura 7.34 - Erro existente na indutância própria da fase 1

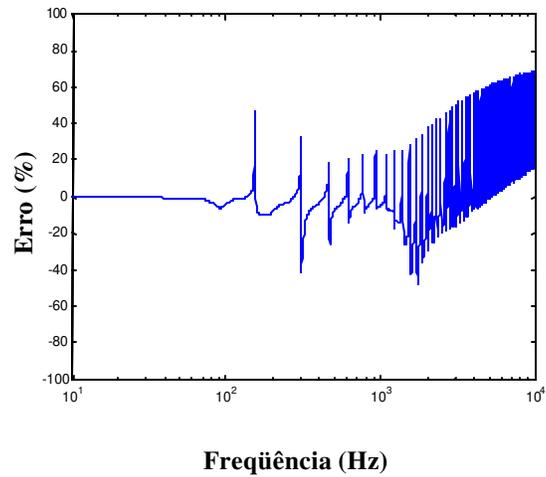


Figura 7.35 - Erro existente na resistência própria da fase 2

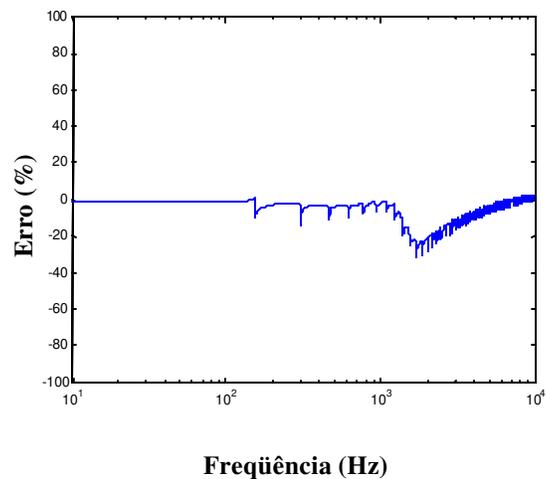


Figura 7.36 - Erro existente na indutância própria da fase 2

As figuras 7.37-7.40 mostram o erro existente nas resistências e indutâncias mútuas quando a matriz  $[T_1]$  é substituída pela matriz de Clarke.

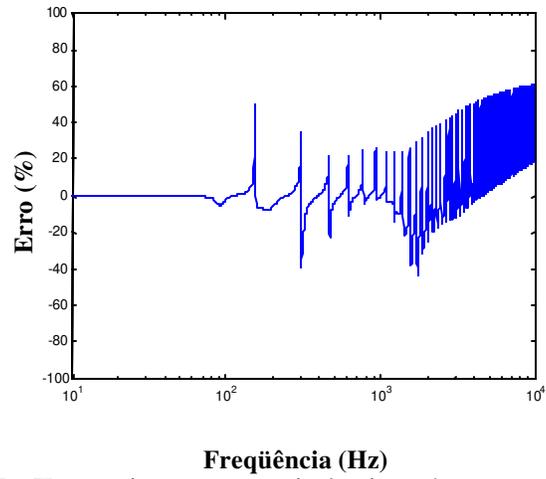


Figura 7.37 - Erro existente na resistência mútua entre as fases 1 e 2

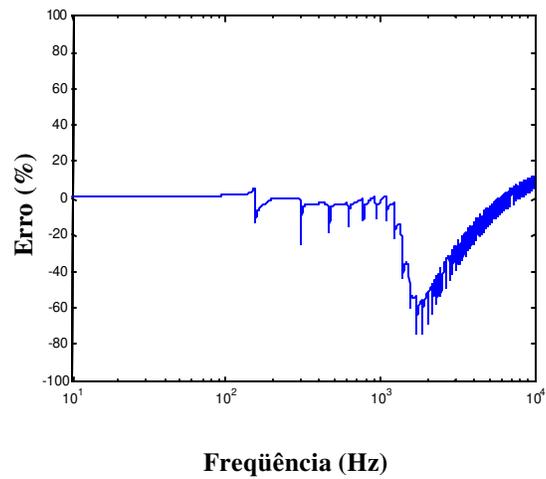


Figura 7.38 - Erro existente na indutância mútua entre as fases 1 e 2

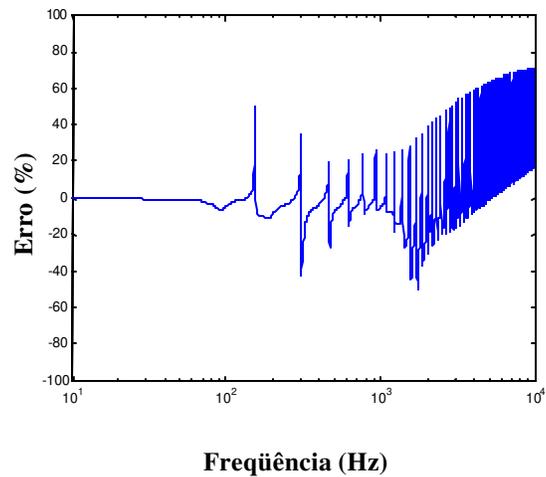


Figura 7.39 - Erro existente na resistência mútua entre as fases 2 e 3

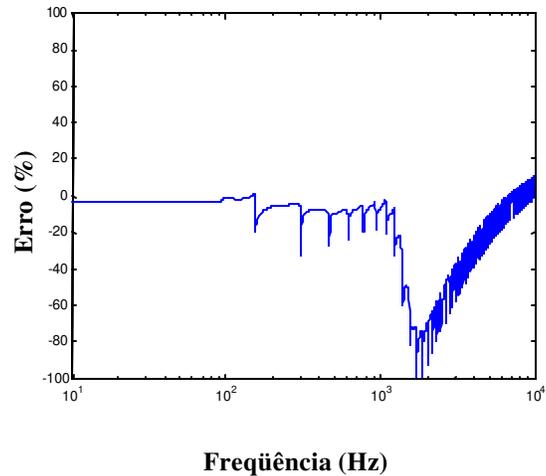


Figura 7.40 - Erro existente na indutância mútua entre as fases 2 e 3

As figuras 7.33-7.40 mostram que o erro existente nos parâmetros longitudinais é relativamente pequeno, exceto nas frequências em que os parâmetros sofrem variações bruscas e nas frequências em que a função  $F'$  e  $G$  do modo 3 apresentaram as maiores diferenças.

#### 7.4.2 Parâmetros transversais

As figuras 7.41-7.44 mostram o erro existente nas capacitâncias aparentes quando a matriz  $[T_1]$  é substituída pela matriz de Clarke.

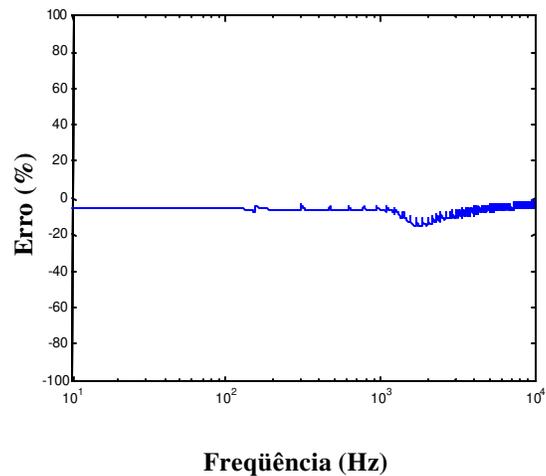


Figura 7.41 - Erro existente na capacitância aparente da fase 1

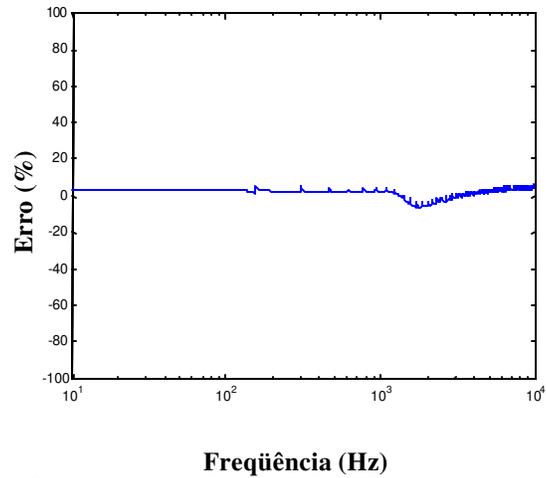


Figura 7.42 - Erro existente na capacitância aparente da fase 2

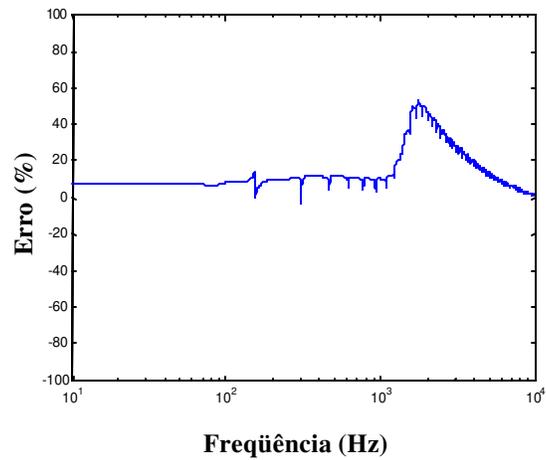


Figura 7.43 - Erro existente na capacitância aparente entre as fases 1 e 2

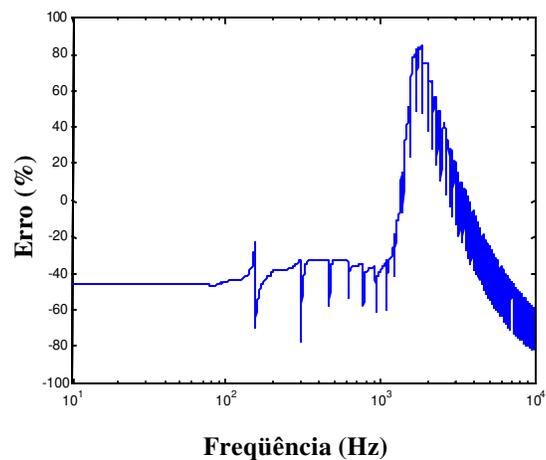


Figura 7.44 - Erro existente na capacitância aparente entre as fases 2 e 3

As figuras 7.41-7.44 mostram que o erro existente nas capacitâncias aparentes é maior nas frequências em que os parâmetros sofrem variações bruscas e nas frequências em que a função  $F'$  e

G do modo 3 apresentaram as maiores diferenças. Observa-se também que as capacitâncias aparentes mútuas apresentam maior erro em relação às capacitâncias aparentes próprias.

## **7.5 Conclusões**

Neste capítulo foi mostrado um método que possibilita o cálculo dos parâmetros longitudinais e transversais de linhas trifásicas, que possuem um plano de simetria vertical, a partir das correntes e tensões de fase. O método é semelhante ao método desenvolvido no capítulo 6, sendo que aqui a matriz de transformação modal  $[T_1]$  é substituída pela matriz de Clarke.

Os resultados mostraram que durante o cálculo das funções de propagação dos modos, a utilização da matriz de Clarke afeta principalmente o modo 3. No modo 3 a componente real da função de propagação é distorcida e a componente imaginária não pôde ser perfeitamente ajustada.

Pode-se constatar que os parâmetros apresentam maiores erros nas frequências onde os valores variam bruscamente e também na frequência onde a componente imaginária de  $\gamma_3$  apresentou o maior erro durante o ajuste. De maneira geral, os maiores erros foram verificados no cálculo das capacitâncias. As indutâncias e resistências apresentaram um erro aparentemente pequeno, exceto nas frequências onde estes parâmetros variam bruscamente e nas frequências onde o ajuste da componente imaginária de  $\gamma_3$  apresenta maior erro.

# 8

## CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um método de cálculo dos parâmetros longitudinais e transversais da linha de transmissão a partir das correntes e tensões medidas nas fases da mesma.

No capítulo 2 foi feito um estudo dos parâmetros de uma linha, com e sem cabos pára-raios, considerando a influências dos efeitos solo e pelicular. Desta forma foi possível verificar a influência da frequência nos parâmetros da linha. Constatou-se que a presença de cabos pára-raios aterrados em todas as estruturas alteram os parâmetros longitudinais da linha de transmissão. Os resultados mostraram que em baixas frequências, os cabos pára-raios não alteram as resistências e indutâncias da linha cujos parâmetros foram considerados constantes. Para uma faixa de frequência intermediária, os cabos pára-raios fazem com que as resistências da linha tornem-se variáveis em função da frequência. Em altas frequências, a presença de cabos pára-raios faz com que as resistências e indutâncias da linha tornem-se constantes, mas com valores diferentes dos valores sem pára-raios. Em se tratando de linhas cujos parâmetros são dependentes da frequência, constatou-se que os cabos pára-raios afetam os mesmos. A maneira como os parâmetros são alterados depende da faixa de frequência considerada.

No capítulo 3 foi feito um estudo referente aos modos exatos e aos “Quase-modos” da linha de transmissão. De maneira genérica, as matrizes de transformação são os autovetores associados aos produtos  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ . Estes autovetores não são únicos mas possuem como característica básica o fato de que a matriz inversa dos autovetores é idêntica à matriz conjugada transposta dos autovetores. Em se tratando de linhas trifásicas idealmente transpostas, ou linhas trifásicas sem transposição ideal mas que possuem um plano de simetria vertical, pode-se utilizar como matrizes de transformações a transformação de Clarke, a transformação de componentes simétricas e a transformação de Park. Os modos exatos são obtidos à partir da utilização dos autovetores da matriz  $[Z][Y]$  como sendo a matriz de transformação que desacopla as fases da linha. Quando se utiliza a

## Conclusões

matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação, obtém-se os modos exatos de uma linha trifásica idealmente transposta que possui um plano de simetria vertical. No entanto se a linha possui um plano de simetria vertical mas não pode ser considerada idealmente transposta, a transformação de Clarke leva-nos aos “Quase-modos” da linha. Os “Quase-modos” possuem um acoplamento entre os modos  $\alpha$  e zero. Em diversos trabalhos verifica-se que este acoplamento pode ser desprezado, de modo tal que os “Quase-modos” sejam aproximadamente iguais aos modos exatos. Existe uma vantagem em se utilizar os “Quase-modos” em substituição aos modos exatos da linha que não é idealmente transposta: Os autovetores geralmente são números complexos variáveis em função da frequência que são difíceis de serem implementados em programas computacionais que realizam simulações diretamente no domínio do tempo, enquanto que os elementos da matriz de Clarke são reais e constantes e podem ser facilmente implementados em programas computacionais que realizam simulações diretamente no domínio do tempo.

No capítulo 4 foi feita uma análise das impedâncias equivalentes da linha. Foram desenvolvidos os conceitos de impedâncias equivalentes de circuito aberto e de curto circuito. A impedância equivalente de circuito aberto de um quadripolo é a impedância calculada em um extremo, considerando que o outro extremo está aberto. A impedância equivalente de curto circuito de um quadripolo é a impedância calculada em um dos extremos do quadripolo, considerando que o outro extremo está em curto circuito. Foram calculadas as impedâncias equivalentes dos modos da linha, considerando a mesma decomposta em seus modos à partir da matriz exata e à partir da matriz de Clarke. Desta forma foi possível verificar a influência da matriz de transformação nas impedâncias equivalentes. Foi possível verificar que quando se utiliza a matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação, os quase-modos  $\alpha$  e zero apresentam frequências de ressonâncias diferentes das frequências de ressonâncias dos modos exatos 1 e 3, respectivamente. As impedâncias equivalentes do modo exato 2 e do quase-modo  $\beta$  não apresentaram diferenças entre si.

No capítulo 5 foram desenvolvidas expressões que relacionam as impedâncias equivalentes dos modos da linha com as correntes e tensões nas fases da mesma. Verificou-se que o processo de cálculo das impedâncias equivalentes dos modos em função de correntes e tensões nas fases da linha requer o conhecimento das matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$ , grandezas estas que não são conhecidas em se tratando de linhas cujos parâmetros são desconhecidos. Constatou-se que a matriz de Clarke pode ser utilizada em substituição às matrizes  $[T_I]$  e  $[T_V]$  sem que as impedâncias equivalentes sofram grandes alterações. Os maiores erros resultantes da utilização da matriz de Clarke ocorrem em

## Conclusões

valores pontuais de frequências, sendo que, exceto nestes pontos específicos, o erro é inferior a 1%. O modo 2 não é alterado devido à utilização da matriz de Clarke

No capítulo 6 calculou-se os parâmetros da linha em função das correntes e tensões nas fases. Inicialmente foram calculadas as funções de propagação dos modos da linha à partir das correntes e tensões medidas nas fases, considerando que a matriz de transformação  $[T_1]$  é conhecida. Nestas condições, verificou-se que a componente real de  $\gamma$  obtida a partir das correntes e tensões é idêntica à componente real obtida a partir da geometria da torre. No entanto, o mesmo não ocorreu com a parte imaginária de  $\gamma$ , cujo comportamento foi o de uma função triangular periódica. Foi necessário desenvolver uma técnica para ajustar os valores das funções triangulares de modo a obter a parte imaginária das funções de propagação. Em seguida foi possível calcular os parâmetros da linha.

No capítulo 7 foram desenvolvidas equações que permitem calcular os parâmetros longitudinais e transversais de uma linha trifásica, simétrica que possui um plano de simetria vertical, utilizando somente as equações de correntes e tensões nas fases e a matriz de Clarke como sendo a matriz de transformação. O procedimento desenvolvido neste capítulo pode servir de referência para trabalhos que visam calcular os parâmetros de linhas a partir de correntes e tensões medidas nas fases da mesma sem a necessidade de se considerar as simplificações que atualmente são feitas durante o cálculo dos parâmetros a partir da geometria da torre.

Fica como sugestão para trabalhos futuros a análise das variações bruscas que ocorrem nos parâmetros bem como o desenvolvimento de técnicas que minimizem estas variações. Uma outra sugestão para futuros trabalhos seria a utilização deste processo de cálculo dos parâmetros longitudinais e transversais em linhas de circuito duplo.

## Conclusões

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ametani, A., “A Highly Efficient method for Calculating Transmission Line Transients”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 95, Nº 5, setembro/outubro 1976, págs. 1545-1551.
- [2] Angelidis, G e A. Semlyen, “Direct Phase-Domain Calculation of Transmission Line Transients Using Two-Sided Recursions”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 10, Nº 2, abril 1995, págs. 941-949.
- [3] Brandão Faria, J. A. e J. H. Briceño, “Modal Analysis of Untransposed Bilateral Three-Phase Lines –A Perturbation Approach”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 12, Nº 1, janeiro 1997, págs. 497-504.
- [4] Brandão Faria, J. A. e J. H. Briceño, “On the Modal Analysis of Asymmetrical Three-Phase Transmission Lines Using Standard Transformation Matrices”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 12, Nº 4, outubro 1997, págs. 1760-1765.
- [5] Budner, A., “Introduction of Frequency-Dependent Line Parameters into as Electromagnetic Transients Program”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 89, Nº 1, janeiro 1970, págs. 88-97.
- [6] Chipman, R. A., “Teoria e Problemas de Linhas de Transmissão”, Editora Mc Graw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo, SP, 1976.
- [7] D’Amore, M. e M. S. Sarto, “A new Formulation of Lossy Ground Return Parameters for Transient Analysis of Multiconductor Dissipative Lines”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 12, Nº 1, janeiro 1997, págs. 303-314.
- [8] Deri, A., G. Tevan, A. Semlyen e A. Castanheira, “The Complex Ground Return Plane – A Simplified Model for Homogeneous and Mult-Layer Earth Return”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. PAS-100, Nº 8, agosto 1981, págs. 3686-3693.

## Referências bibliográficas

- [9] Dommel, H. W., “Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single and Multiphase Networks”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, abril 1969, págs. 388-399.
- [10] Dufour C., H. Le-Huy, J. C. Soumagne e A. Hakimi, “Real-Time Simulation of Power Transmission Lines Using Marti Model with Optimal Fitting on Dual-DSP Card”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, Nº 1, janeiro 1996, págs. 412-419.
- [11] Dufour, C. e H. Le-Huy, “Highly Accurate Modeling of Frequency-Dependent Balanced Transmission Lines”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 15, Nº 2, abril 2000, págs. 610-615.
- [12] Fuchs, R. D., “Transmissão de Energia Elétrica: Linha Aéreas; teoria das Linhas em Regime Permanente”, 2ª edição, Editora livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, R.J., 1979.
- [13] Gustavsen, B., J. Sletbak e T. Henriksen, “Calculation of Electromagnetic Transients in Transmission Cables and Lines Taking Frequency Dependent Effects Accurately into Account”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 10, Nº 2, abril 1995, págs. 1076-1082.
- [14] Gustavsen, B. e A. Semlyen, “Combined Phase and Modal Domain Calculation of Transmission Line Transients Based on Vector Fitting”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 13, Nº 2, abril 1998, págs. 596-604.
- [15] Gustavsen, B. e A. Semlyen, “Simulation of Transmission Line Transients Using Vector Fitting and Modal Decomposition”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 13, Nº 2, abril 1998, págs. 605-614.
- [16] Gustavsen, B. e A. Semlyen, “Calculation of Transmission Line Transients Using Polar Decomposition”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 13, Nº 3, julho 1998, págs. 855-862.
- [17] Hayt, W. H., “Eletromagnetismo”, 3ª edição, Editora Livros Técnicos e Científicos S. A. ,Rio de Janeiro, RJ., 1983.
- [18] Henriksen T., “Including High Order Rational Functions in EMTP a Comparison Between Alternative methods with Emphasis on Accuracy”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 12, Nº 1, janeiro 1997, págs. 372-379.
- [19] Irwin, J. D., “Análise de Circuitos em Engenharia”, 4ª edição, Editora Makron Books, São Paulo, SP, 2000.
- [20] Kurokawa, S., J. Pissolato, M. C. Tavares e C. M. Portela, “Analyzing the Transmission Line Parameters in Frequency Domain”, *IEEE/PES 2001 Winter Meeting*, Columbus, Ohio, EUA, 2001.

## Referências bibliográficas

- [21] Kurokawa, S., J. Pissolato, M. C. Tavares e C. M. Portela, “Analysis of a Transmission Line Model Using an Equivalent Impedance Test Concept”, *International Conference on power Systems Transients (PST'2001)*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001, págs. 31-36.
- [22] Kurokawa, S., J. Pissolato, M. C. Tavares e C. M. Portela, “Applying a new methodology to Verify Transmission Line Model performance – The Equivalent Impedance Test”, *IEEE/PES 2001 Summer Meeting*, Vancouver, Canadá, 2001.
- [23] Kurokawa, S., J. Pissolato, M. C. Tavares e C. M. Portela, “Indirect Analysis Performance of the Transmission Line Model”, *IEEE/PES T&D 2002 Latin America*, São Paulo, SP, 2002.
- [24] Kurokawa, S., J. Pissolato, M. C. Tavares e C. M. Portela, “Influência dos Cabos Pára-Raios nos Parâmetros Longitudinais da Linha de Transmissão”, *Encontro de Pesquisadores em Sistemas de Potência (II SisPot)*, Campinas, SP, 2002.
- [25] Kurokawa, S., J. Pissolato, M. C. Tavares e C. M. Portela, “Análise dos Quasi-Modos da Linha de Transmissão Utilizando o Conceito de Impedâncias equivalente de Circuito Aberto”, *XIV Congresso Brasileiro de Automática (CBA 2002)*, Natal, RN, Brasil, 2002.
- [26] Leithold, L., “O Cálculo com Geometria Analítica”, 3ª edição, Editora Harbra Ltda, São Paulo, SP, 1994.
- [27] Long, R. W. e D. Gelopulos, “Component Transformations-Eigenvalue Analysis Succinctly Defines their Relationships”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 101, Nº 10, outubro 1982, págs. 4055-4063.
- [28] Martí, J. R., “Accurate Modeling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transients Simulations”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 101, Nº 1, janeiro 1982, págs. 147-155.
- [29] Marti, L., “Low-Order Approximation of Transmission Line Parameters for Frequency-Dependent Models”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 102, Nº 11, novembro 1983, págs. 3582-3589.
- [30] Marti, L., “Simulation of Transients in Underground Cables with Frequency-Dependent Modal Transformation Matrices”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 3, Nº 3, julho 1988, págs. 1099-1110.
- [31] Meyer, W. S. e H. W. Dommel, “Numerical Modelling of Frequency-Dependent Transmission Line Parameters in an Electromagnetic Transients Program”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 93, setembro/outubro 1974, págs. 1401-1409.

## Referências bibliográficas

- [32] Nguyen, H. V., H. W. Dommel e J. R. Martí, “Direct Phase-Domain Modeling of Frequency-Dependent Overhead Transmission Lines”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 12, Nº 3, julho 1997, págs. 1335-1342.
- [33] Nguyen, T. T. e H. Y. Chan, “Evaluation of Modal Transformation matrices for Overhead Transmission Lines and Underground Cables by Optimization Method”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 17, Nº 1, janeiro 2002, págs. 200-209.
- [34] Noda, T., N. Nagaoka e A. Ametani, “Phase Domain Modeling of Frequency-Dependent Transmission Lines by Means of an ARMA Model”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, Nº 1, janeiro 1996, págs. 401-411.
- [35] Ogata, K., “Discrete Time Control Systems”, Editora Prentice Hall International, 1987.
- [36] Pettersson, P., “Propagation of Waves on a Wire above a Lossy Ground – Different Formulations with Approximations”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 14, Nº 3, julho 1999, págs. 1173-1180.
- [37] Rachidi, F., C. A. Nucci e M. Ianoz, “Transient Analysis of Multiconductor Lines Above a Lossy Ground”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 14, Nº 1, janeiro 1999, págs. 294-302.
- [38] Saad, O, G. Gaba e M. Giroux, “A Closed-Form Approximation for Ground Return Impedance of Underground Cables”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, Nº 3, julho 1996, págs. 1536-1545.
- [39] Semlyen, A. e A. Dabuleanu, “Fast and Accurate Switching Transient Calculations on Transmission Lines With Ground Return Using Recursive Convolutions”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 94, Nº 2, março/abril 1975, págs. 561-571.
- [40] Semlyen, A. e A. Roth, “Calculation of Exponential Propagation Step Responses-Accurately for Three Base Frequencies”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 96, Nº 2, março/abril 1977, págs. 667-672.
- [41] Snelson, J. K., “Propagation of travelling Waves on Transmission Lines – Frequency Dependent Parameters”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS 91 , janeiro/fevereiro 1972, págs. 85-91.
- [42] Tavares, M. C., J. Pissolato e C. M. Portela, “New Mode-Domain Representation of Transmission Line for Power Systems Studies”, *ISCAS’98*, Monterey, California, EUA, 1998, Vol. 3, págs. 501-504.

#### Referências bibliográficas

- [43] Tavares, M. C., J. Pissolato e C. M. Portela, “New Mode Domain Multiphase Transmission Line Model – Transformation Matrix Modeling”, *POWERCON'98*, Beijing, China, 1998, Vol. 2, págs. 855-859.
- [44] Tavares, M. C., J. Pissolato e C. M. Portela, “New Mode Domain Multiphase Transmission Line Model Applied to Transient Studies”, *POWERCON'98*, Beijing, China, 1998, Vol. 2, págs. 865-869.
- [45] Tavares, M. C., J. Pissolato e C. M. Portela, “New Mode Domain Multiphase Transmission Line Model – Clarke Transformation Evaluation”, *POWERCON'98*, Beijing, China, 1998, Vol. 2, págs. 860-864.
- [46] Tavares, M. C., J. Pissolato e C. M. Portela, “New Mode-Domain Representation of Transmission Line – Clarke Transformation Analysis”, *ISCAS'98*, Monterey, California, EUA, 1998, Vol. 3, págs. 497-500.
- [47] Tavares, M. C., “Modelo de Linha de Transmissão Polifásico Utilizando Quase-Modos”, *Tese de Doutorado*, UNICAMP, Brasil, 1998.
- [48] Tavares, M. C., J. Pissolato e C. M. Portela, “Mode Domain Multiphase Transmission Line Model – Use in Transients Studies”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, artigo PE-430-PWRD-0-04-1998.
- [49] Tavares, M. C., J. Pissolato e C. M. Portela, “Quasi-Modes Multiphase Transmission Line Model”, *Electric Power Systems Research*, N<sup>o</sup> 49, 1999, págs. 159-167.
- [50] Wedepohl, L., “Application of Matrix Methods to the Solution of Travelling-Wave Phenomena in Polyphase Systems”, *Proceeding IEE*, Vol. 110, N<sup>o</sup> 12, dezembro 1963, págs. 2200-2212.
- [51] Wedepohl, L., “Electrical Characteristics of Polyphase Transmission Systems with Special Reference to Boundary-Value Calculations at Power-Line Carrier Frequencies”, *Proceeding IEE*, Vol. 112, N<sup>o</sup> 11, novembro 1965, págs. 2103-2112.
- [52] Wedepohl, L., e D. J. Wilcox, “Transient Analysis of Underground Power-Transmission Systems”, *Proceeding IEE*, Vol. 120, N<sup>o</sup> 2, fevereiro 1973, págs. 253-260.
- [53] Wedepohl L. M., H. V. Nguyen e G. D. Irwin, “Frequency-Dependent Transformation Matrices for Untransposed Transmission Lines Using Newton-Raphson Method”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, N<sup>o</sup> 3, agosto 1996, págs. 1538-1546.

## Referências bibliográficas

# Apêndice

## CÁLCULO DA FUNÇÃO DE PROPAGAÇÃO A PARTIR DAS CORRENTES E TENSÕES DE FASE

### 1.1 Introdução

No capítulo 5 mostrou-se o procedimento para obter as matrizes  $[A_m]$  e  $[M_m]$  em função das correntes e tensões de fase da linha.

Neste apêndice será mostrado o desenvolvimento algébrico da função que relaciona a função de propagação modal com as impedâncias equivalentes.

### 1.2 Relação entre as impedâncias equivalentes e a função de propagação modal

No capítulo 4 foi mostrado que as impedâncias equivalentes de cada modo da linha pode ser escrita como sendo

$$A_{mi} = \sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}} \cot \operatorname{gh}(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d) \quad (1.1)$$

$$M_{mi} = \sqrt{\frac{z_{mi}}{y_{mi}}} \operatorname{tgh}(\sqrt{z_{mi} y_{mi}} d) \quad (1.2)$$

Sendo:

$A_{mi}$  impedância equivalente de circuito aberto do  $i$ -ésimo modo da linha

$M_{mi}$  impedância equivalente de curto circuito do  $i$ -ésimo modo da linha

$z_{mi}$  impedância longitudinal do  $i$ -ésimo modo

$y_{mi}$  admitância transversal do  $i$ -ésimo modo

$d$  comprimento da linha

Multiplicando os elementos  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$  das expressões 1.1 e 1.2, obtém-se:

$$A_{mi} M_{mi} = \frac{Z_{mi}}{y_{mi}} \quad (1.3)$$

A função de propagação do i-ésimo modo da linha é definida como sendo:

$$\tilde{\alpha}_i = \sqrt{z_{qmi} y_{qmi}} \quad (1.4)$$

Substituindo  $\gamma_i$  da equação 1.4 nas expressões 1.1 e 1.2, obtém-se:

$$A_{mi} = \sqrt{\frac{Z_{mi}}{y_{mi}}} \cot gh(\tilde{\alpha}_i d) \quad (1.5)$$

$$M_{mi} = \sqrt{\frac{Z_{mi}}{y_{mi}}} \operatorname{tgh}(\tilde{\alpha}_i d) \quad (1.6)$$

Dividindo a equação 1.5 pela equação 1.6:

$$\frac{A_{mi}}{M_{mi}} = \cot gh^2(\tilde{\alpha}_i d) \quad (1.7)$$

A expressão 1.7 mostra uma relação implícita entre  $\gamma_i$  e as impedâncias equivalentes  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$ . O próximo passo será obter uma função que relaciona de maneira explícita  $\gamma_i$  e as impedâncias equivalentes  $A_{mi}$  e  $M_{mi}$ .

### 1.3 Desenvolvimento das soluções para $\gamma_i$

Da expressão 1.7 pode-se obter:

$$\cot gh(\tilde{\alpha}_i d) = \sqrt{\frac{A_{mi}}{M_{mi}}} \quad (1.8)$$

O termo  $\sqrt{\frac{A_{mi}}{M_{mi}}}$  da expressão 1.8 possui duas raízes que são:

$$\sqrt{\frac{A_{mi}}{M_{mi}}} = \begin{cases} = C_3 + jC_4 & (1.9(a)) \\ = -C_3 - jC_4 & (1.9(b)) \end{cases}$$

Sendo:

$$C_3 = \cos\left(\frac{(\theta_A - \theta_M)}{2}\right) \quad (1.9)$$

$$C_4 = \text{sen}\left(\frac{(\theta_A - \theta_M)}{2}\right) \quad (1.10)$$

Onde:

$\theta_A$  Argumento de  $A_{mi}$

$\theta_M$  Argumento de  $M_{mi}$

Portanto, a expressão 1.8 pode ser escrita como sendo:

$$\cot \text{gh}(\tilde{\alpha}_i d) = \begin{cases} C_3 + jC_4 & (1.11(a)) \\ -C_3 - jC_4 & (1.11(b)) \end{cases}$$

Em seguida, a função de propagação modal  $\gamma_i$  será escrita como função explícita dos termos  $C_3$  e  $C_4$ .

A função  $\cot \text{gh}(\gamma_i d)$  é escrita como sendo:

$$\cot \text{gh}(\tilde{\alpha}_i d) = \frac{e^{\tilde{\alpha}_i d} + e^{-\tilde{\alpha}_i d}}{e^{\tilde{\alpha}_i d} - e^{-\tilde{\alpha}_i d}} \quad (1.12)$$

Fazendo  $(\tilde{\alpha}_i d) = A + jB$ , é possível escrever:

$$e^{\tilde{\alpha}_i d} = e^{A+jB} = e^A [\cos(B) + j\text{sen}(B)] \quad (1.13)$$

$$e^{-\tilde{\alpha}_i d} = e^{-A-jB} = e^{-A} [\cos(B) - j\text{sen}(B)] \quad (1.14)$$

Substituindo as expressões 1.13 e 1.14 na expressão 1.12:

$$\cot \text{gh}(\tilde{\alpha}_i d) = \frac{e^A [\cos(B) + j\text{sen}(B)] + e^{-A} [\cos(B) - j\text{sen}(B)]}{e^A [\cos(B) + j\text{sen}(B)] - e^{-A} [\cos(B) - j\text{sen}(B)]} \quad (1.15)$$

Desenvolvendo e simplificando a expressão 1.15:

$$\cot \text{gh}(\tilde{\alpha}_i d) = \frac{(e^{2A} - e^{-2A}) - j2\text{sen}(2B)}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)} \quad (1.16)$$

Igualando as expressões 1.16 e 1.11(a), obtém-se:

$$C_3 + jC_4 = \frac{(e^{2A} - e^{-2A}) - j2\text{sen}(2B)}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)} \quad (1.17)$$

Onde, na expressão 1.17,  $(\tilde{a}_i d) = A + jB$ .

Separando a expressão 1.17 em suas componentes real e imaginária, fica:

$$C_3 = \frac{(e^{2A} - e^{-2A})}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)} \quad (1.18)$$

$$C_4 = \frac{-2\text{sen}(2B)}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)} \quad (1.19)$$

Desenvolvendo a expressão 1.18:

$$e^{4A}(C_3 - 1) - e^{2A}(2C_3 \cos(2B)) + (C_3 + 1) = 0 \quad (1.20)$$

Considerando o termo  $e^{2A}$ , da equação 1.20, como sendo a incógnita, pode-se afirmar que esta equação possui duas soluções que são:

$$e^{2A} = \begin{cases} \frac{C_3 \cos(2B) + \sqrt{1 - C_3^2 \text{sen}^2(2B)}}{C_3 - 1} & (1.21(a)) \\ \frac{C_3 \cos(2B) - \sqrt{1 - C_3^2 \text{sen}^2(2B)}}{C_3 - 1} & (1.21(b)) \end{cases}$$

Fazendo o quociente entre as expressões 1.19 e 1.18, obtém-se:

$$\frac{C_4}{C_3} = \frac{\frac{-2\text{sen}(2B)}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)}}{\frac{(e^{2A} - e^{-2A}) - j2\text{sen}(2B)}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)}} \quad (1.22)$$

Substituindo a expressão 1.21(a) na expressão 1.22, e em seguida fazendo as devidas simplificações, obtém-se:

$$\text{sen}(2B) = \frac{2C_4}{-C_4^2 - (C_3^2 - 1)} \cos(2B) \quad (1.23)$$

Da expressão 1.23 é possível obter:

$$\cos(2B) = \begin{cases} + \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} & (1.24(a)) \\ - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} & (1.24(b)) \end{cases}$$

Substituindo as expressões 1.23 e 1.24(a) na expressão 1.21(a) obtém-se:

$$e^{2A} = \frac{-(1 + C_3)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \quad (1.25)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\tilde{\alpha}_i d) = A + jB$  e que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.25 e 1.24(a), respectivamente, pode-se obter a primeira solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{-(1 + C_3)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \left( + \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.26)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\tilde{\alpha}_i d) = A + jB$  e que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.25 e 1.24(b), respectivamente, pode-se obter a segunda solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{C_3 + 1}{C_3 - 1} \right) \left( \frac{(1 - C_3)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right) + j \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \left( - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.27)$$

Substituindo as expressões 1.23 e 1.24(a) na expressão 1.21(b) obtém-se:

$$e^{2A} = \frac{C_3 + 1}{C_3 - 1} \left( \frac{-(C_3 - 1)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.28)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\tilde{\alpha}_i d) = A + jB$  e que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.28 e 1.24(a), respectivamente, pode-se obter a terceira solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left[ \left( \frac{C_3 + 1}{C_3 - 1} \right) \left( \frac{-(C_3 - 1)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right] + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left[ \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right] \quad (1.29)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\tilde{\alpha}_i d) = A + jB$  e que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.28 e 1.24(b), respectivamente, pode-se obter a quarta solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(C_3 + 1)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right] + j \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left[ - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right] \quad (1.30)$$

Para que sejam obtidas as outras quatro soluções para  $(\gamma_i d)$ , deve-se igualar as expressões 1.16 e 1.11(b), obtendo assim:

$$-C_3 - jC_4 = \frac{(e^{2A} - e^{-2A}) - j2\text{sen}(2B)}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)} \quad (1.31)$$

Decompondo a expressão 1.31 em suas partes real e imaginária:

$$C_3 = - \frac{(e^{2A} - e^{-2A})}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)} \quad (1.32)$$

$$C_4 = \frac{2\text{sen}(2B)}{(e^{2A} + e^{-2A}) - 2\cos(2B)} \quad (1.33)$$

Desenvolvendo e simplificando a expressão 1.32:

$$e^{4A}(C_3 + 1) - e^{2A}(2C_3 \cos(2B)) + (C_3 - 1) = 0 \quad (1.34)$$

A equação 1.34 possui duas soluções para a incógnita  $e^{2A}$  que são:

$$e^{2A} = \begin{cases} \frac{C_3 \cos(2B) + \sqrt{1 - C_3^2 \sin^2(2B)}}{C_3 + 1} & (1.35(a)) \\ \frac{C_3 \cos(2B) - \sqrt{1 - C_3^2 \sin^2(2B)}}{C_3 + 1} & (1.35(b)) \end{cases}$$

Fazendo o quociente entre as expressões 1.33 e 1.32:

$$\frac{C_4}{C_3} = \frac{-2 \operatorname{sen}(2B)}{e^{2A} - e^{-2A}} \quad (1.36)$$

Substituindo a expressão 1.35(a) na expressão 1.36 e fazendo as devidas simplificações, obtém-se:

$$\operatorname{sen}^2(2B) = \frac{4C_4^2}{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2} \quad (1.37)$$

A partir da expressão 1.37 pode-se escrever:

$$\cos(2B) = \begin{cases} + \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} & (1.38(a)) \\ - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} & (1.38(b)) \end{cases}$$

Substituindo as expressões 1.37 e 1.38(a) na expressão 1.35(a), obtém-se:

$$e^{2A} = \frac{(C_3 - 1)}{C_3 + 1} \left( \frac{-(C_3 + 1)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.39)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\tilde{a}_i d) = A + jB$  e que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.39 e 1.38(a), respectivamente, pode-se obter a quinta solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{a}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{C_3 - 1}{C_3 + 1} \right) \left( \frac{-(C_3 + 1)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right) + j \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left( + \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.40)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\odot \delta) = A + \phi B e$  que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.39 e 1.38(b), respectivamente, pode-se obter a sexta solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{a}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(1 - C_3)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left( - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.41)$$

Substituindo as expressões 1.37 e 1.38(a) na expressão 1.35(b) obtém-se:

$$e^{2A} = \frac{-(1 - C_3)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \quad (1.42)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\odot \delta) = A + \phi B e$  que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.42 e 1.38(a), respectivamente, pode-se obter a sétima solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{a}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{-(1 - C_3)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left( + \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.43)$$

Considerando que o termo  $(\gamma_i d)$  foi escrito como  $(\tilde{a}_i \delta) = A + \phi B e$  que os termos A e B podem ser obtidos das equações 1.42 e 1.38(b), respectivamente, pode-se obter a oitava solução para  $(\gamma_i d)$  como sendo:

$$\tilde{a}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{C_3 - 1}{C_3 + 1} \right) \left( \frac{(C_3 + 1)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right) + j \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left( - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.44)$$

#### 1.4 Análise das soluções para $\gamma_i$

Verificou-se no item 1.3 que existem 8 soluções possíveis para o termo  $\tilde{a}_i$ , sendo que estas soluções foram mostradas nas expressões 1.26, 1.27, 1.29, 1.30, 1.40, 1.41, 1.43 e 1.44.

Reescrevendo as soluções para  $\gamma_i d$  têm-se:

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{-(1+C_3)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( \frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.45)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{C_3 + 1}{C_3 - 1} \right) \left( \frac{(1-C_3)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( -\frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.46)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{C_3 + 1}{C_3 - 1} \right) \left( \frac{-(C_3 - 1)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( \frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.47)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(C_3 + 1)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( -\frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.48)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{C_3 - 1}{C_3 + 1} \right) \left( \frac{-(C_3 + 1)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( \frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.49)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(1-C_3)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left( -\frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.50)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{-(1-C_3)^2 - C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arc cos} \left( \frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.51)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{C_3 - 1}{C_3 + 1} \right) \left( \frac{(C_3 + 1)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( -\frac{1-(C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1-(C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.52)$$

As equações 1.45-1.52 mostram que as soluções do termo  $\gamma_i d$  são constituídas de uma função logaritmo natural e de uma função inversa do co-seno. Para que uma das expressões citadas anteriormente possa ser utilizada como uma solução, é necessário que as duas funções que a constituem sejam definidas para valores de  $C_3$  e  $C_4$  pertencentes ao conjunto dos números reais.

A tabela 1.1 mostra o domínio de cada uma das soluções de  $\gamma_i d$ .

| Solução de $\gamma_{id}$ | Domínio de $\gamma_{id}$  |  |
|--------------------------|---|--|
|                          | Componente real   | Componente imaginária  |
| Solução 1.45             | { }   | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.46             | $C_3 \in \mathfrak{R}, C_4 \in \mathfrak{R} / C_3 > 1 \text{ ou } C_3 < -1$ | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.47             | $C_3 \in \mathfrak{R}, C_4 \in \mathfrak{R} / -1 < C_3 < 1$                 | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.48             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R}$                                       | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.49             | $C_3 \in \mathfrak{R}, C_4 \in \mathfrak{R} / -1 < C_3 < 1$                 | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.50             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$          | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.51             | { }   | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.52             | $C_3 \in \mathfrak{R}, C_4 \in \mathfrak{R} / C_3 > 1 \text{ ou } C_3 < -1$ | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |

Tabela 1.1 - Domínio das componentes real e imaginária de  $\gamma_{id}$

O domínio de uma solução para  $\gamma_{id}$  corresponde à intersecção dos domínios das componentes real e imaginária. Fazendo a intersecção dos domínios das soluções de  $\gamma_{id}$  mostrados na tabela 1.1, obtém-se:

| Solução de $\gamma_{id}$ | Domínio de $\gamma_{id}$   |
|--------------------------|--|
| Solução 1.45             | { }  |
| Solução 1.46             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / C_3 > 1 \text{ ou } C_3 < -1 \text{ e } (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |
| Solução 1.47             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / -1 < C_3 < 1 \text{ e } (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$                 |
| Solução 1.48             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$   |
| Solução 1.49             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / -1 < C_3 < 1 \text{ e } (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$                 |
| Solução 1.50             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$   |
| Solução 1.51             | { }  |
| Solução 1.52             | $C_3 \text{ e } C_4 \in \mathfrak{R} / C_3 > 1 \text{ ou } C_3 < -1 \text{ e } (C_3, C_4) \neq (\pm 1, 0)$ |

Tabela 1.2 - Domínio de  $\gamma_{id}$

A tabela 1.2 mostra que as soluções de  $\gamma_{id}$  que possuem o domínio mais amplo são as soluções 1.48 e 1.50. Portanto, será considerado que o termo  $\gamma_{id}$  possui duas soluções que são as soluções 1.48 e 1.50.

Reescrevendo as soluções 1.48 e 1.50:

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(C_3 + 1)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.53)$$

$$\tilde{\alpha}_i d = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(1 - C_3)^2 + C_4^2}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) + j \frac{1}{2} \text{Arccos} \left( - \frac{1 - (C_3^2 + C_4^2)}{\sqrt{(1 - (C_3^2 + C_4^2))^2 + 4C_4^2}} \right) \quad (1.54)$$

As equações 1.53 e 1.54 mostram que as funções que relaciona a função de propagação com as impedâncias características possuem a mesma componente imaginária. Quanto à componente real, observa-se que as mesmas são expressas de maneira diferente nas expressões 1.53 e 1.54. Neste trabalho será adotada a equação 1.53 como solução para o termo  $\gamma_i d$ .