

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO

Walter Furloni

CONTROLE EM HORIZONTE FINITO COM RESTRIÇÕES DE
SISTEMAS LINEARES DISCRETOS COM SALTOS MARKOVIANOS



Campinas
2009

Walter Furloni

CONTROLE EM HORIZONTE FINITO COM RESTRIÇÕES DE
SISTEMAS LINEARES DISCRETOS COM SALTOS MARKOVIANOS

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de Mes-
tre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Automação e Controle.

Orientador: João Bosco Ribeiro do Val



Campinas
2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

F978c	Furloni, Walter Controle em horizonte finito com restrições de sistemas lineares discretos com saltos markovianos / Walter Furloni. --Campinas, SP: [s.n.], 2009. Orientador: João Bosco Ribeiro do Val. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. 1. Processos estocásticos. 2. Markov, Processos de. 3. Sistemas lineares. I. Val, João Bosco Ribeiro do. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.
-------	--

Título em Inglês: Constrained control problem within a finite horizon of markovian jump discrete linear systems

Palavras-chave em Inglês: Stochastic processes, Markov processes, Linear systems

Área de concentração: Automação

Titulação: Mestre em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Oswaldo Luiz do Valle Costa, Pedro Luis Dias Peres

Data da defesa: 22 /05/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Elétrica

Walter Furloni

Engenheiro de Eletrônica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

CONTROLE EM HORIZONTE FINITO COM RESTRIÇÕES DE
SISTEMAS LINEARES DISCRETOS COM SALTOS MARKOVIANOS

Dissertação de mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres
FEEC/UNICAMP

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa
DETC/ESCOLA POLITÉCNICA - USP

Campinas
2009

COMISSÃO JULGADORA - TESE DE MESTRADO

Candidato: Walter Furloni

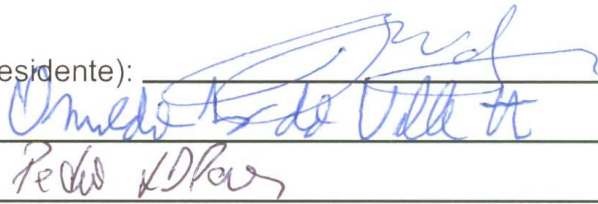
Data da Defesa: 22 de maio de 2009

Título da Tese: "Controle em Horizonte Finito com Restrições de Sistemas Lineares Discretos com Saltos Markovianos"

Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val (Presidente):

Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa:

Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres:



The image shows three handwritten signatures in blue ink, each written over a horizontal line. The first signature is for Prof. Dr. João Bosco Ribeiro do Val, the second for Prof. Dr. Oswaldo Luiz do Valle Costa, and the third for Prof. Dr. Pedro Luís Dias Peres.

DEDICADA À ALICE.

Agradecimentos

Caro leitor,

Sempre encontrei ajuda e bondade pelos caminhos que trilhei até aqui e agora. Sei que também prestei ajudas, mas não tenho dúvidas de que o balanço é deficitário. Agradeço a todos que se juntaram a Deus para me ajudar.

Quanto a este trabalho em particular, quero estender meus agradecimentos à minha esposa Alice, aos meus filhos Rafael e Gabriela, aos meus enteados Carlos, Cristina e Cleber, às minhas netas Vitória, Júlia e Giovanna e aos amigos por terem sabido compreender que a redução de minhas presença e atenção não afetou meu amor.

Ainda quanto a este trabalho, por ele ter sido terminado, quero agradecer imensamente:

- ao professor Dr. João Bosco, que como meu orientador, não mediu esforços de dedicação e paciência no meu processo de desenferrujamento;
- aos amigos Alessandro e Ricardo, pela amizade sincera e apoio no desfazimento dos diversos nós que apareceram no decorrer desta pesquisa;
- a todos os demais amigos do Departamento de Telemática – FEEC, que sempre de boa vontade davam apoio contínuo na eliminação de dúvidas passageiras;
- à minha sobrinha Ivi, pelo carinho dedicado à correção ortográfica do texto desta monografia.

Finalmente, agradeço a DEUS por ter me criado, por ter sempre me ajudado e por ter colocado esse pessoal todo citado acima no meu caminho.

“Conheça-te a tí mesmo.”

Sócrates

Resumo

O objetivo deste trabalho é propor e resolver o problema de controle em horizonte finito com restrições de Sistemas Lineares Discretos com Saltos Markovianos (SLDSM) na presença de ruído. As restrições dos vetores de estado e de controle não são rígidas e são estabelecidas por valores limites dos seus respectivos primeiro e segundo momentos. O controlador baseia-se numa estrutura de realimentação linear de estados, devendo minimizar uma função custo quadrática. Consideram-se duas situações com respeito à informação disponível da cadeia de Markov associada: num primeiro caso o estado da cadeia de Markov é conhecido em cada instante e num segundo caso dispõe-se apenas de sua distribuição probabilística inicial. Uma formulação determinística do problema estocástico é desenvolvida de modo que as condições necessárias de otimalidade propostas e as restrições possam ser facilmente incluídas utilizando-se desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMI). A inclusão de restrições constitui a principal contribuição, uma vez que elas são pertinentes a vários campos de aplicação tais como indústria química, transporte de massa, economia, etc. Para ilustração do método são apresentadas duas aplicações: uma referente à regulação de tráfego em linhas metroviárias e outra referente ao problema de seleção de ativos de portfólios em aplicações financeiras.

Palavras-chave: processos estocásticos; cadeia de Markov; sistemas lineares discretos por saltos markovianos; ruídos aditivo e multiplicativo; controle em horizonte finito; Controle em Horizonte Retrocedente (CHR); custo linear quadrático; realimentação linear de estados.

Abstract

The purpose of this work is to propose and solve the constrained control problem within a finite horizon of Markovian Jump Discrete Linear Systems (MJCLS) driven by noise. The constraints of the state and control vectors are not rigid and limits are established respectively to their first and second moments. The controller is based on a linear state feedback structure and shall minimize a quadratic cost function. Two cases regarding the available information of the Markovian chain states are considered: firstly the Markov chain states are known at each step and secondly only its initial probability distribution is available. A deterministic formulation to the stochastic problem is developed in order that the proposed necessary optimality conditions and the constraints are easily included by using Linear Matrix Inequalities (LMI). The constraints consideration constitutes the main contribution, since they are pertinent to several application fields as for example chemical industry, mass transportation, economy etc. Two applications are presented for illustration: one refers to metro lines traffic regulation and another refers to the financial investment income control.

Key-words: stochastic processes; Markov chain; markovian jump discrete linear systems; additive and multiplicative noise; finite horizon control; receding horizon control (RHC); quadratic linear cost; linear state feedback.

Sumário

Lista de Figuras	xix
Lista de Tabelas	xxi
Notação	xxiii
Introdução geral	1
Motivação	1
Objeto do estudo e cenário atual	2
Premissas e estrutura da dissertação	9
1 Formulação do problema e resultados básicos	11
1.1 Formulação do problema	12
1.1.1 Formulação para estado de Markov observável	12
1.1.2 Formulação para estado de Markov não observável	14
1.2 Definições, conceitos e resultados básicos	15
1.2.1 Variáveis auxiliares e expressões determinísticas para as restrições	15
1.2.2 Dinâmicas equivalentes	17
1.2.3 Expressões determinísticas para o custo	21
1.3 Formulação determinística equivalente	26
1.3.1 Formulação determinística com custo na forma direta	26
1.3.2 Formulação determinística alternativa	26
1.3.3 Considerações gerais	27
2 Condições necessárias de otimalidade e solução	29
2.1 Condições necessárias de otimalidade	29
2.2 Método numérico para o caso genérico	30
2.2.1 Princípio básico do método	30
2.2.2 Formulação do problema utilizando desigualdades matriciais lineares	32

2.2.3	Algoritmo de otimização	35
2.3	Adaptações do método numérico para os demais casos	38
2.4	Exemplo ilustrativo	40
3	Caso da cadeia de Markov observável e restrições apenas no segundo momento	47
3.1	Formulação do problema	47
3.2	Solução ótima para regulação irrestrita	49
3.3	Solução ótima para regulação restrita	52
3.4	Exemplo ilustrativo	54
4	Aplicações	57
4.1	Implementação	57
4.2	Regulação de tráfego de trens em linhas metropolitanas	62
4.2.1	Definições e modelo de estado equivalente adotado	63
4.2.2	Exemplo de aplicação para solução e simulação numéricas	66
4.2.3	Solução e simulação numéricas	66
4.3	Seleção dinâmica de portfólio em aplicações financeiras	69
4.3.1	Definições e modelo de estado equivalente adotado	69
4.3.2	Considerações para aplicação e problemas típicos	72
4.3.3	Exemplo de aplicação para solução e simulação numéricas	74
4.3.4	Um outro exemplo de aplicação	80
4.3.5	Comentários finais	82
5	Conclusões	85
5.1	Sumário dos resultados	85
5.2	Estudos futuros	87
A	Resultados básicos para o caso de ruído multiplicativo	89
A.1	Dinâmica das variáveis auxiliares	90
A.1.1	Caso do estado de Markov observável	90
A.1.2	Caso do estado de Markov não observável	95
A.2	Equivalente determinístico para o funcional de custo	96
A.2.1	Caso do estado de Markov observável	96
A.2.2	Caso do estado de Markov não observável	102
	Bibliografia	103

Lista de Figuras

1	Cadeia de Markov homogênea.	3
2	Diagrama do modelo de estado de $\mathcal{G}$	4
3	Diagrama do modelo de estado de $\mathcal{G}_m$	6
4	Princípio do CHR no intervalo $[k_0, k_1]$	6
2.1	Evolução do custo $J_{\mathbf{G}(\eta)}^T$ para θ observável e não observável.	41
2.2	Coordenadas de $E[x(t)]$ para θ observável.	42
2.3	Autovalores de $(E[x^2(t)] - \bar{X}(t))$ para θ observável.	43
2.4	Coordenadas de $E[u(t)]$ para θ observável.	43
2.5	Autovalores de $(E[u^2(t)] - \bar{U}(t))$ para θ observável.	43
2.6	Coordenadas de $E[x(t)]$ para θ não observável.	44
2.7	Autovalores de $(E[x^2(t)] - \bar{X}(t))$ para θ não observável.	44
2.8	Coordenadas de $E[u(t)]$ para θ não observável.	44
2.9	Autovalores de $(E[u^2(t)] - \bar{U}(t))$ para θ não observável.	45
4.1	Diagrama esquemático dos procedimentos numéricos.	58
4.2	Transferência de trens entre plataformas.	64
4.3	Dados para o trem da plataforma 1 no instante inicial	68
4.4	Problema 1 - Resultados da solução e simulação numéricas.	77
4.5	Problema 2 - Resultados da solução e simulação numéricas.	79
4.6	Problema 3 - Resultados da solução numérica.	81
4.7	Problema 4 - Resultados da solução e simulação numéricas.	83

Lista de Tabelas

4.1	Restrição da Esperança como parâmetro	80
-----	---	----

Notação

Para uma melhor visualização, os teoremas, proposições, lemas, corolários e comentários têm seus textos em fonte *ênfatisada* e são numerados na ordem em que aparecem. As provas terminam com o símbolo $\square$, de forma a diferenciá-las do restante do texto.

Para simplificação, uma matriz M qualquer contendo elementos m_{ij} na i -ésima linha e j -ésima coluna poderá, algumas vezes, vir a ser indicada por $M = [m_{ij}]$. De forma análoga, um vetor v com a i -ésima coordenada v_i , poderá, algumas vezes, vir a ser indicado por $v = [v_i]$.

A seguir, apresenta-se uma breve lista de símbolos que serão usados com maior frequência neste trabalho:

$E[\cdot]$	Esperança matemática
$\mathcal{N}$	Espaço de estados da Cadeia de Markov
n_θ	Número de estados da Cadeia de Markov
$\theta(k)$	Estado da Cadeia de Markov no instante k
p_{ij}	Probabilidade de transição do estado i para j
$\mathbb{P} = [p_{ij}], \forall i, j \in \mathcal{N}$	Matriz de transição de probabilidade
$\mu_{t k}$	Distribuição de probabilidade no instante t dado o conhecimento até o instante k
$E_{x_k, \mu_{k k}}[\cdot]$	Representação para $E[\cdot x(k) = x_k, \theta(k) \sim \mu_{k k}]$
$\mathbb{R} (\mathbb{R}^m) (\mathbb{R}^{m,n})$	Conjunto dos números reais (Espaço real euclidiano de dimensão m) (Espaço linear normado de todas as matrizes reais $m \times n$)
$\mathbb{S}^m (\mathbb{S}^{m0}) (\mathbb{S}^{m+})$	Espaço linear normado de todas as matrizes reais simétricas (semi-definidas positivas) (definidas positivas) de ordem m
$\ell_i(U) (c_j(U)) (e_{\ell,j}(U))$	Linha i (coluna j)(elemento i, j) da matriz U
U'	Transposta da matriz U
U^{-1}	Inversa da matriz U

$\ \cdot\ $ ($\ U\ $)	Norma vetorial padrão em $\mathbb{R}^n$ (correspondente norma induzida da matriz U)
$U \geq 0$ ($U > 0$)	Para o caso de matrizes simétricas U é semidefinida positiva (definida positiva). Caso contrário seus elementos $u_{\ell,c} \geq 0$ ($u_{\ell,c} > 0$)
$\mathbf{U}$	Sequência ou conjunto $\{U_1, \dots, U_{n_\theta}\}$
$\mathcal{R}^{m,n}$ ($\mathcal{R}^m$) ($\mathcal{R}$)	Espaço linear das sequências $\mathbf{U}$ onde $U_i \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($\mathbb{R}^m$) ($\mathbb{R}$) para $i = 1, \dots, n_\theta$
$\mathcal{S}^m$ ($\mathcal{S}^{m0}$) ($\mathcal{S}^{m+}$)	Espaço linear das sequências $\mathbf{U}$ onde $U_i \in \mathcal{S}^m$ ($\mathcal{S}^{m0}$) ($\mathcal{S}^{m+}$) para $i = 1, \dots, n_\theta$
$\mathbf{U} \geq \mathbf{V}$ ($\mathbf{U} > \mathbf{V}$)	Se sequências de matrizes simétricas Matriz $(U_i - V_i) \in \mathcal{S}^m$ semidefinida positiva (definida positiva) e se não simétricas os elementos $(U_i - V_i)_{\ell,c} \geq 0$ ($(U_i - V_i)_{\ell,c} > 0$), $\ell = 1, \dots, m$, $c = 1, \dots, n$, para todo $i = 1, \dots, n_\theta$
I_n	Matriz identidade de ordem $n \times n$
$\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$	Função delta de Dirac ou indicadora
$\text{tr}\{\cdot\}$	Traço de matriz
$\mathcal{E}_i(\mathbf{U}) = \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij} U_j$	Operador sobre o conjunto $\mathbf{U}$
$\mathcal{D}_j(\mathbf{U}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} p_{ij} U_i$	Operador sobre o conjunto $\mathbf{U}$
$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{U_i' V_i\}$	Produto interno de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$
$\ \mathbf{U}\ _2^2 = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{U_i' U_i\}$	Norma $\ \cdot\ _2$ de $U \in \mathcal{S}^m$. É conhecido que $\mathcal{S}^m$ com essa norma forma um espaço de Hilbert, com produto interno dado pela relação acima
q^{-1}	Operador de atraso unitário.

Introdução geral

Apresentam-se a seguir, os principais pontos que motivaram o desenvolvimento deste trabalho, bem como o seu posicionamento no contexto atual de estudos correlatos existentes na literatura. Indica-se também como os capítulos estão organizados, enfatizando os objetivos desta pesquisa.

Motivação

Os seguintes aspectos podem, de forma bem generalizada, caracterizar a motivação para o presente estudo:

- Sistemas dinâmicos sujeitos a fenômenos aleatórios que apresentam mudanças abruptas em sua estrutura ou parâmetros têm despertado interesse crescente e, em muitos casos, modelos dessa natureza podem ser caracterizados por Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLDSM), que formam uma classe de processos estocásticos.
- Restrições nos esforços de controle e/ou valores de variáveis de estado ou mesmo saída, quer sejam de natureza operacional ou administrativa, também se tornaram rotineiras nas especificações de síntese de controladores.
- Em muitas aplicações o interesse se limita a um horizonte finito, permitindo soluções de projeto específicas para o caso. Em alguns casos, particularmente quando o horizonte é relativamente curto, os controladores são projetados em cada instante para todo o horizonte a frente a partir daquele instante. Nos casos de horizonte mais longo, para os quais a técnica de Controle em Horizonte Retrocedente (CHR) vem sendo muito aplicada, quer seja no meio acadêmico como na indústria, controladores são projetados em cada instante para o horizonte retrocedente considerado.
- São poucos os estudos de controle em horizonte finito de SLDSM, na presença de restrições, ruído aditivo na entrada e/ou ruído multiplicativo, não havendo nenhum estudo para o caso de não observabilidade dos estados da cadeia de Markov.

Este trabalho vem justamente preencher essa lacuna nesta área de processos estocásticos SLDSM.

Uma característica peculiar deste trabalho a ser considerada é o enfoque dado ao tratamento das restrições. Uma vez que se trata de sistemas estocásticos, a adoção de restrições rígidas nas variáveis de estado e controle torna-se impraticável. Adotam-se neste trabalho restrições impostas aos primeiro e segundo momentos dos vetores de estado e de controle.

Objeto do estudo e cenário atual

Apresentam-se a seguir alguns conceitos básicos que caracterizam o objeto deste estudo associando o seu correspondente cenário atual.

Os processos SLDSM

Sempre que as incertezas de um ou mais parâmetros de um sistema puderem ser modeladas assumindo aleatoriamente em cada instante de tempo um certo número finito de valores e, dessa forma, definir o mesmo número finito de diferentes estruturas para o sistema, podemos caracterizar cada uma dessas estruturas como um modo ou forma de operação daquele sistema. Em particular, se a transição entre esses modos possuir estrutura estocástica markoviana, então essas transições podem ser representadas através de uma Cadeia de Markov com um número de estados finito à qual se associa uma determinada matriz de probabilidades de transição.

De forma geral, os Sistemas Lineares com Saltos Markovianos (SLDSM) são sistemas estocásticos cuja dinâmica altera-se aleatoriamente de forma abrupta em certos instantes e se comportam como sistemas lineares entre estes instantes. As alterações na dinâmica se referem a mudanças repentinas em parâmetros do sistema, cujo valor ocorre de acordo com uma Cadeia de Markov, isto é, a mudança para outro modo de operação ocorre de acordo com certa probabilidade (conhecida *a priori*), dependente apenas do modo de operação no qual o sistema se encontre em cada instante.

Sistemas SLDSM formam uma importante classe de sistemas lineares estocásticos, e um considerável interesse tem sido focado nestes sistemas nos últimos anos, particularmente no que concerne à análise, condições de estabilidade e problemas de controle ótimo desses sistemas. Pode-se citar (Ji e Chizeck, 1990a; Ji e Chizeck, 1990b; Costa e Fragoso, 1993; Costa e Fragoso, 1995; Costa, do Val e Fragoso, 2005; Costa, Fragoso e Marques, 2005) como importantes contribuições no desenvolvimento teórico de SLDSM. Os processos SLDSM podem ser utilizados para modelar sistemas dinâmicos sujeitos a mudanças abruptas, tais como troca ou falha de componentes, alterações ambientais súbitas, modificação do ponto de operação de sistemas, alterações repentinas em parâmetros de processos econômicos, entre outras. Aplicações podem ser encontradas, como exemplo, em sistemas aeronáuticos (Athans et al., 1977), sistemas robóticos (Saridis, 1983), receptores térmicos solares (Sworder e Rogers, 1983), modelos macroeconômicos (do Val e Başar, 1999; Costa e de Paulo, 2007), indústria de manufatura de papel (Khanbaghi et al., 2002) e controle em rede (Zampolli, 2006).

Formalmente pode-se caracterizar os SLDSM como se segue:

Seja $\mathcal{N} := \{1, \dots, n_\theta\}$ um conjunto finito.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$ o espaço de probabilidade fundamental. Seja ainda $k_0 \geq 0$ e $\Theta := \{\theta(k); k = k_0, k_0 + 1, \dots\}$ uma Cadeia de Markov homogênea a tempo discreto, tomando valores no conjunto $\mathcal{N}$, tendo $\mathbb{P} = [p_{ij}]$, $\forall i, j \in \mathcal{N}$ como matriz de transição de probabilidade. O estado da Cadeia de Markov, num certo instante $k + t$, condicionado ao conhecimento até o instante k , é determinado conforme uma certa distribuição de probabilidade $\mu_{k+t|k}$ em $\mathcal{N}$, ou seja, $\mu_{k+t|k}(i) := \Pr(\theta(k+t) = i \mid \mathcal{F}_k)$. Considerando o vetor n_θ -dimensional $\mu_{k+t|k} = [\mu_{k+t|k}(1), \dots, \mu_{k+t|k}(n_\theta)]'$, a distribuição do estado da cadeia $\mu_{k+t|k}$ é definida como $\mu_{k+t|k} = (\mathbb{P}^t)' \mu_{k|k}$. Quando, nos próximos capítulos, utilizar-se $k = 0$, denotar-se-á $\mu_{t|0}$ simplesmente por μ_t .

A Figura 1 ilustra o processo de saltos da cadeia de Markov $\{\theta(k); k = k_0, k_0 + 1, \dots\}$ a tempo discreto.

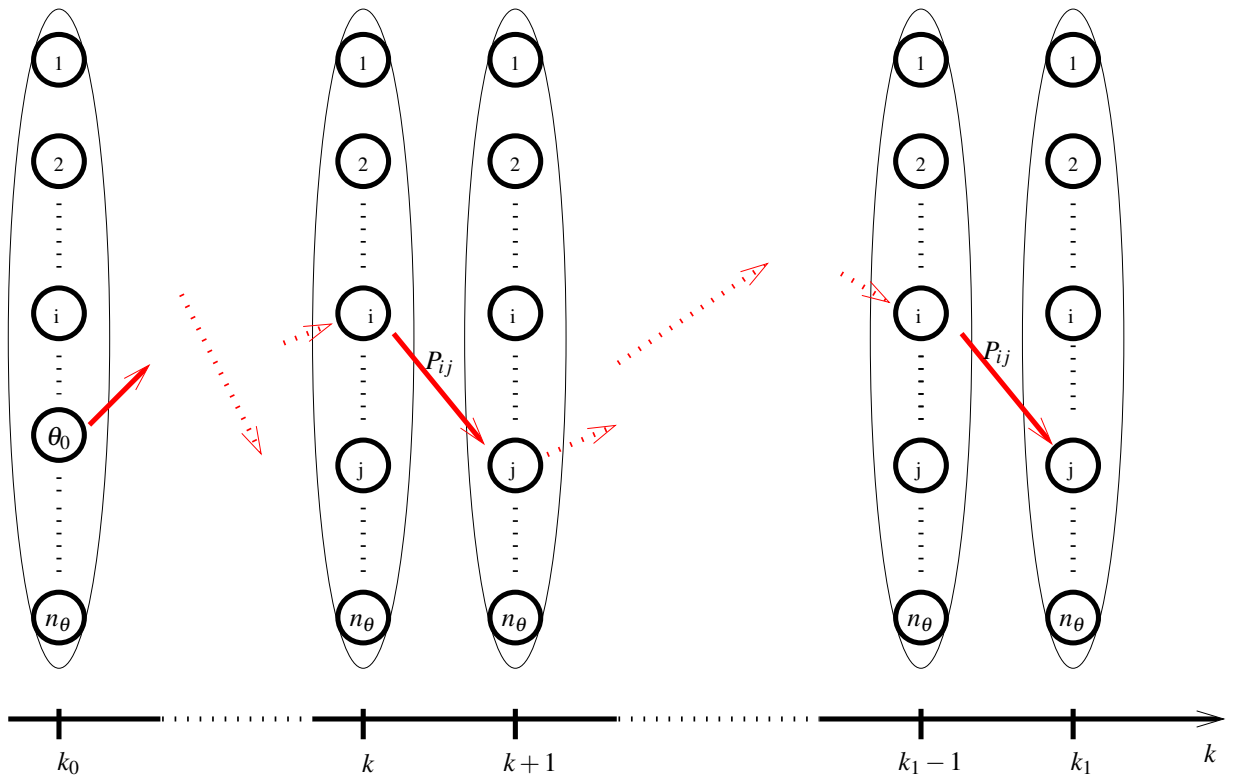


Figura 1: Cadeia de Markov homogênea.

Seja $\mathbb{R}^{m,n}$ ($\mathbb{R}^m$) ($\mathbb{R}$) o espaço linear normado de todas as matrizes reais $m \times n$ (vetores reais de ordem m) (escalares) e seja $\mathcal{R}^{m,n}$ ($\mathcal{R}^m$) ($\mathcal{R}$) o espaço linear das sequências $\mathbf{U} := \{U_1, \dots, U_{n_\theta}\}$ em que $U_i \in \mathbb{R}^{m,n}$ ($\mathbb{R}^m$) ($\mathbb{R}$) para $i = 1, \dots, n_\theta$. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais.

Definem-se $A := \{A_i \in \mathbb{R}^{r,r} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{r,r}$, $B := \{B_i \in \mathbb{R}^{r,s} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{r,s}$, $C := \{C_i \in \mathbb{R}^{p,r} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{p,r}$, $D := \{D_i \in \mathbb{R}^{p,s} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{p,s}$ e $H := \{H_i \in \mathbb{R}^{r,\ell} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{r,\ell}$ como um conjunto de matrizes associadas.

De maneira formal, os SLDSMs abordados neste trabalho são representados pelo sistema discreto no tempo na forma:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x(k+1) = A_{\theta(k)}x(k) + B_{\theta(k)}u(k) + H_{\theta(k)}w(k), \\ y(k) = C_{\theta(k)}x(k) + D_{\theta(k)}u(k), \\ \theta(k+1) \sim \mu(k+1) = \mathbb{P}'\mu(k), \\ x(k_0) = x_0 \in \mathbb{R}^r, \\ \theta(k_0) \sim \mu_0, \end{cases}$$

com $k = \{k_0, k_0 + 1, \dots\} \subset \mathbb{N}$, sendo que os vetores de estado, controle, ruído e saída são representados respectivamente por $x(k) \in \mathbb{R}^r$, $u(k) \in \mathbb{R}^s$, $w(k) \in \mathbb{R}^\ell$ e $y(k) \in \mathbb{R}^p$. O processo estocástico $w(k)$ é uma sequência de vetores aleatórios de segunda ordem i.i.d.¹, com média nula e matriz de covariância finita representada por $\Sigma := E[w(k)w(k)'] \in \mathbb{S}^{\ell^0}$, $\forall k$. Também sabe-se que $w(k)$ é independente de $\theta(k)$ e em particular, $x(k)$ e $w(k)$ são vetores aleatórios independentes.

Note que as matrizes $A_{\theta(k)}$, $B_{\theta(k)}$, $C_{\theta(k)}$, $D_{\theta(k)}$ e $H_{\theta(k)}$ de dimensões apropriadas são funções do processo $\Theta = \{\theta(k); k \geq k_0\}$. Consequentemente, quando $\theta(k) = i$, $i \in \mathcal{N}$, têm-se A_i , B_i , C_i , D_i e H_i respectivamente.

A Figura 2 ilustra o diagrama do modelo de estado de $\mathcal{G}$.

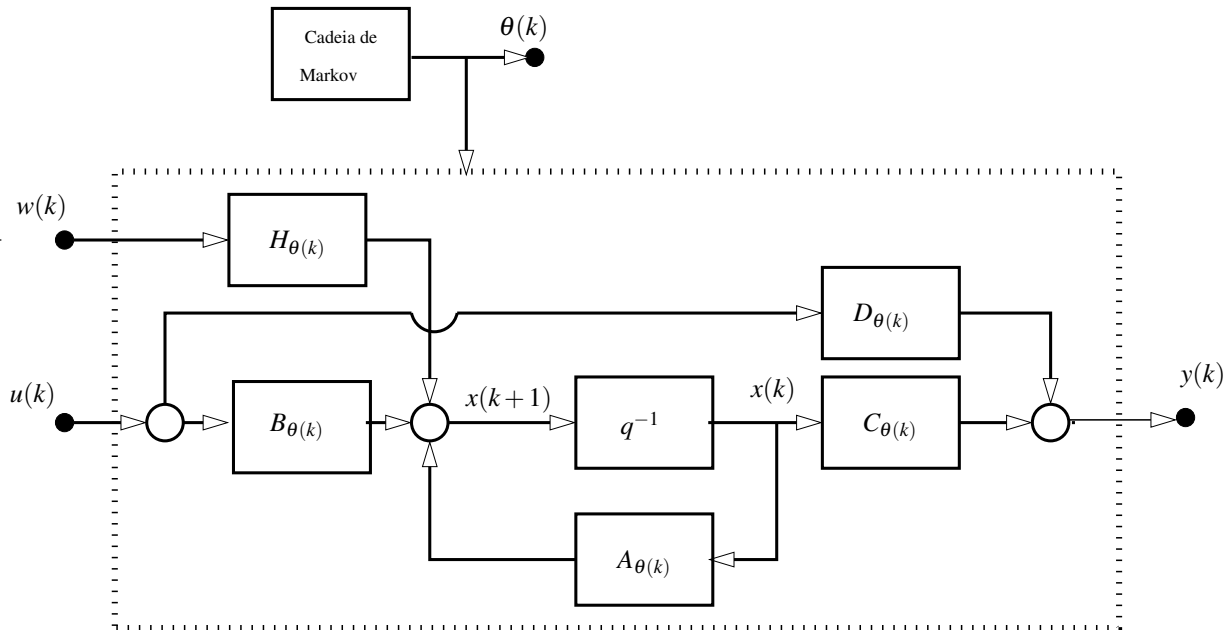


Figura 2: Diagrama do modelo de estado de $\mathcal{G}$.

Os processos SLDSM com ruído multiplicativo

Em várias aplicações, além da consideração de mudanças abruptas dos parâmetros, faz-se necessário modelar os sistemas com ruído estocástico multiplicativo.

¹independente, identicamente distribuído.

Para isso, no espaço de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, P)$, considere adicionalmente para $k \geq k_0$:

- $w_{s_1}^x(k)$; $s_1 = 1, \dots, v$ variáveis aleatórias de média zero e matriz de covariância $\rho^x = E[w_i^x(k)w_j^x(k)]$ e independentes da cadeia de Markov $\theta(k)$ e do ruído aditivo $w(k)$.
- $w_{s_2}^u(k)$; $s_2 = 1, \dots, v$ variáveis aleatórias de média zero e matriz de covariância $\rho^u = E[w_i^u(k)w_j^u(k)]$ e independentes da cadeia de Markov $\theta(k)$ e do ruído aditivo $w(k)$.
- A correlação mútua entre $w_{s_1}^x(k)$ e $w_{s_2}^u(k)$ dada por $\rho^{xu} = E[w_{s_1}^x(k)w_{s_2}^u(k)]$.
- As condições iniciais x_0 e θ_0 são independentes de $w(k)$, $w_{s_1}^x(k)$ e $w_{s_2}^u(k)$ e adicionalmente $x_0 \in \mathbb{R}^r$ tem segundo momento finito.
- Para $\ell \neq k$, $E[w_{s_1}^x(k)w_{s_1}^x(\ell)] = 0$, $E[w_{s_1}^u(k)w_{s_1}^u(\ell)] = 0$ e $E[w_{s_1}^x(k)w_{s_1}^u(\ell)] = 0$.

Em muitos processos, o mesmo ruído dá origem às matrizes estocásticas de estado e de controle, quando de sua representação através de modelo de estado. Nessa situação, tem-se $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, em que I representa a matriz identidade. Em particular, para este trabalho, considera-se esse caso. Essa consideração possibilita a formulação do problema utilizando-se a técnica de LMIs, com simplificação significativa na obtenção da solução do problema.

Definem-se as coleções de matrizes $\bar{A}$, $\tilde{A}_{s_1}$, $\bar{B}$ e $\tilde{B}_{s_2}$ por:

$$\begin{aligned}\bar{A} &:= \{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_{n_\theta}\} = \{\bar{A}_i \in \mathbb{R}^{r,r} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{r,r}. \\ \tilde{A}_{s_1} &:= \{\tilde{A}_{1,s_1}, \dots, \tilde{A}_{n_\theta,s_1}\} = \{\tilde{A}_{i,s_1} \in \mathbb{R}^{r,r} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{r,r}, s_1 = 1, \dots, v. \\ \bar{B} &:= \{\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_{n_\theta}\} = \{\bar{B}_i \in \mathbb{R}^{r,s} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{r,s}. \\ \tilde{B}_{s_2} &:= \{\tilde{B}_{1,s_2}, \dots, \tilde{B}_{n_\theta,s_2}\} = \{\tilde{B}_{i,s_2} \in \mathbb{R}^{r,s} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{R}^{r,s}, s_2 = 1, \dots, v.\end{aligned}$$

Definem-se também $A_{\theta(k)}(k)$ e $B_{\theta(k)}(k)$ por:

$$A_{\theta(k)}(k) = \bar{A}_{\theta(k)} + \sum_{s_1=0}^v \tilde{A}_{\theta(k),s_1} w_{s_1}^x(k). \quad (1)$$

$$B_{\theta(k)}(k) = \bar{B}_{\theta(k)} + \sum_{s_2=0}^{v^u} \tilde{B}_{\theta(k),s_2} w_{s_2}^u(k). \quad (2)$$

Denominando o SLDSM com ruído multiplicativo por $\mathcal{G}_m$, tem-se para $k \geq k_0$:

$$\mathcal{G}_m : \begin{cases} x(k+1) = \left(\bar{A}_{\theta(k)} + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{\theta(k),s_1} w_{s_1}^x(k) \right) x(k) + \left(\bar{B}_{\theta(k),s_2} + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{\theta(k),s_2} w_{s_2}^u(k) \right) u(k) + H_{\theta(k)} w(k), \\ y(k) = C_{\theta(k)} x(k) + D_{\theta(k)} u(k), \\ \theta(k+1) \sim \mu(k+1) = \mathbb{P}' \mu(k), \\ x(k_0) = x_0, \\ \theta(k_0) \sim \mu_0. \end{cases}$$

A Figura 3 ilustra o diagrama de estado do $\mathcal{G}_m$.

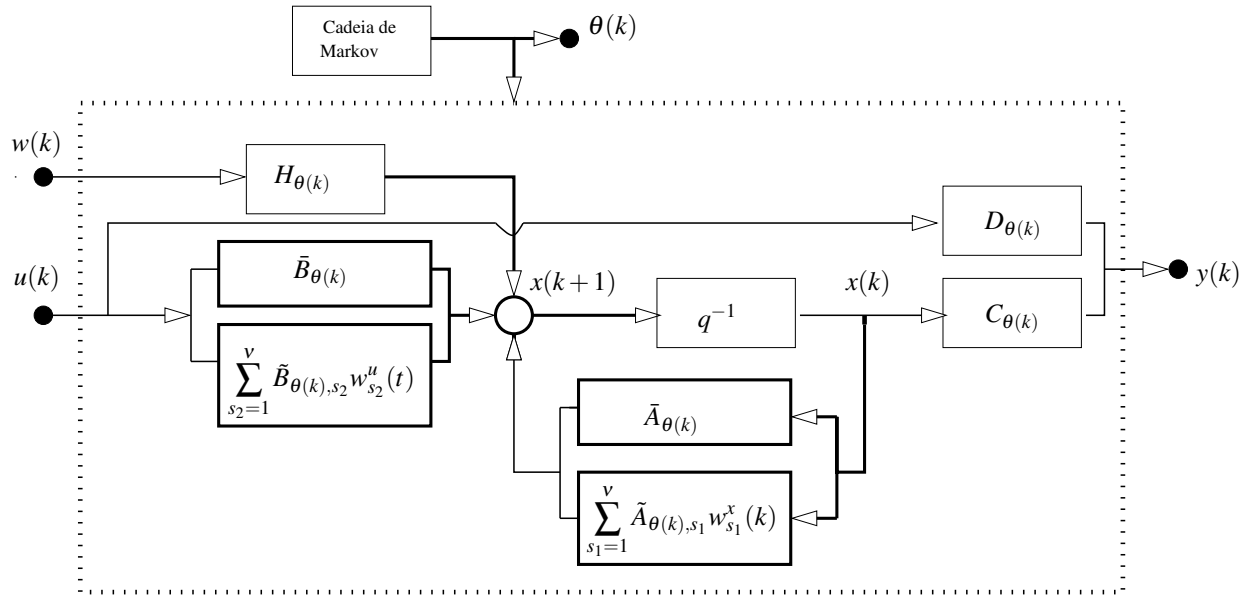


Figura 3: Diagrama do modelo de estado de $\mathcal{G}_m$.

Controle em horizonte retrocedente (CHR)

Seja $[k_0, k_1] \in \mathbb{N}$ com $k_0 \geq 0$ o intervalo de interesse para controle do SLDSM em estudo. Seja também um intervalo $T \leq k_1 - k_0$. Pelo princípio de controle em horizonte retrocedente, ao invés de se buscar de uma só vez uma solução de controle para todo o horizonte à frente, no intervalo $[k_0, k_1]$ de estudo, limita-se a um horizonte T mais reduzido, denominado de retrocedente. Dessa forma não há necessidade de se ter o modelo preciso do sistema a longo prazo, podendo os possíveis valores dos parâmetros e as probabilidades de transição entre eles serem revistas a qualquer momento, devendo ser confiáveis dentro do horizonte de tamanho T .

Em cada instante $k \in [k_0, k_1]$, a partir das informações disponíveis e critérios de projeto aplicados para o intervalo do horizonte retrocedente, isto é, para o intervalo $[k, k+T]$, determina-se a sequência de controles $\{u^*(k), \dots, u^*(k+T-1)\}$ que atende aqueles critérios. Faz-se $u(k) = u^*(k)$ e a parte restante da sequência é descartada.

A Figura 4 ilustra o princípio acima que se repete para todo $k \in [k_0, k_1]$.

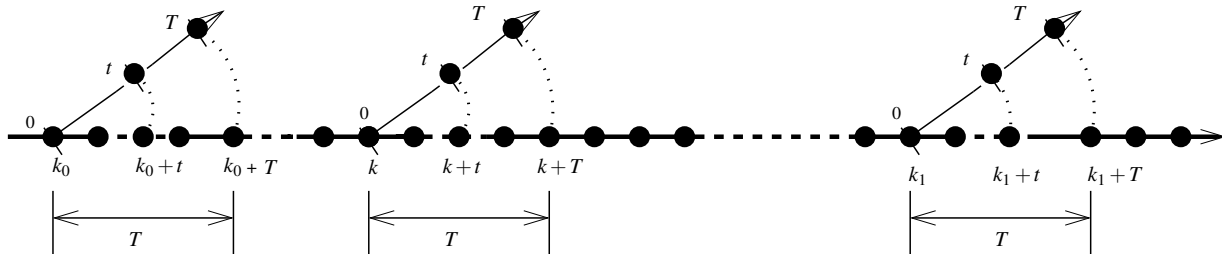


Figura 4: Princípio do CHR no intervalo $[k_0, k_1]$.

A técnica de controle em horizonte retrocedente tem sido estudada, como mostra a literatura, há muito tempo, particularmente por (Kwon et al., 1983) e (Bitmead et al., 1990) para sistemas lineares determinísticos, e por (Mayne e Michalska, 1990) para sistemas não-lineares. Resultados iniciais aplicados em SLDSM são um pouco mais recentes (do Val e Başar, 1999; Costa e do Val, 2000). Também conhecido como controle em horizonte deslizante, ou ainda como *Model Predictive Control* (MPC) (vide, por exemplo (Camacho e Bordons, 1999; Mosca, 1995)), o controle em horizonte retrocedente tem-se mostrado como uma estratégia de sucesso, tanto no meio acadêmico como na indústria, com diversas aplicações em processos industriais.

Controlador e índice de desempenho

Adota-se um controlador simples por realimentação linear de estado. Para isso assume-se que o estado $x(k)$ é observável. Quanto ao estado $\theta(k)$ da cadeia de Markov do SLDSM, consideram-se dois casos: $\theta(k)$ também observável, sendo portanto disponível para o controlador ou não observável quando se tem disponível apenas a sua distribuição de probabilidades. Para o intervalo $k, \dots, k+T$, $k \in [k_0, k_1]$ tem-se o controlador dado por:

- Caso em que $\theta(k)$ também é observável, quando então a lei de controle linear pode assumir a forma:

$$u(k+t) = K(k+t, \theta(k+t))x(k+t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (3)$$

- Caso em que $\theta(k)$ não é observável e $\mu_{k+t|k}$ é a única informação disponível, quando então a lei de controle linear pode assumir a forma:

$$u(k+t) = K(k+t)x(k+t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (4)$$

Para o caso de θ observável, seja $\mathbf{K}_\theta^k := \{K^{k+t} \in \mathbb{M}^{s,r}, t = 0, \dots, T-1\}$ uma sequência de ganhos de realimentação para o horizonte T , a partir do instante k . Seja $\mathcal{K}_\theta^k$ a classe de todos os valores admissíveis para $\mathbf{K}_\theta^k$, no instante k .

Para o caso de θ não observável, seja $\mathbf{K}^k := \{K(k+t) \in \mathbb{M}^{s,r}, t = 0, \dots, T-1\}$ uma sequência de ganhos de realimentação para o horizonte T , a partir do instante k . Seja $\mathcal{K}^k$ a classe de todos os valores admissíveis para $\mathbf{K}^k$.

Para índice de desempenho, adota-se o custo quadrático usual envolvendo os vetores de estado e de controle. Como se sabe, este custo provê uma relação de compromisso entre as magnitudes dos esforços de controle e do estado do sistema.

Adotando-se $E_{x_k, \mu_k}[\cdot]$ para representar $E[\cdot | x(k) = x_k, \theta(k) \sim \mu_k]$, e $J^{k,T}$ para representar o custo no instante k e horizonte T , define-se aquele índice de desempenho por:

$$J^{k,T} := E_{x_k, \mu_k} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \|y(k+t)\|^2 + \|S_{\theta(k+T)}x(k+T)\|^2 \right], \quad (5)$$

na qual $S \in \mathbb{R}^{p,r}$.

Objetivando conveniência, sem perda de generalidade, para todo $i \in \mathcal{N}$, consideram-se:

$$\begin{aligned} C_i' D_i &:= 0; \\ C_i' C_i &:= Q_i \geq 0; \\ D_i' D_i &:= R_i > 0; \\ S_i' S_i &:= F_i \geq 0. \end{aligned}$$

Dessa forma a expressão do custo em (5) é equivalente à:

$$J^{k,T} := E_{x_k, \mu_k} \left[\sum_{t=0}^{T-1} x(k+t)' Q_{\theta(k+t)} x(k+t) + u(k+t)' R_{\theta(k+t)} u(k+t) + x(k+T)' F_{\theta(k+T)} x(k+T) \right]. \quad (6)$$

Dependendo da extensão do intervalo de estudo $[k_0, k_1]$, duas situações podem ser caracterizadas. Num primeiro caso determina-se em cada instante k para o horizonte variável $T(k) = k_1 - k$, a sequência $\{K^*(k), \dots, K^*(k_1 - 1)\}$ que atende os critérios de projeto. No outro caso, aplica-se, conforme já descrita, a técnica CHR em cada instante $k \in [k_0, k_1]$, e determina-se em cada um desses instantes k , a sequência ótima $\{K^*(k), \dots, K^*(k+T-1)\}$ que atende os critérios de projeto no horizonte retrocedente $[k, k+T]$. Em ambos os casos, trata-se de um problema de controle em horizonte finito.

Caracterização das restrições

Apesar da importância das restrições, o seu tratamento em sistemas estocásticos é incipiente. No contexto estocástico de SLDSM, uma solução conservadora ao problema SLDSM com restrições, com horizonte infinito e cadeia de Markov observável foi proposta em (Costa e Assumpção, 1996). Em particular, a conexão SLDSM-CHR com restrições foi apresentada somente em (Costa et al., 1999), também conservadora, com a cadeia de Markov completamente observável e restrições no segundo momento. Como já foi mencionado, e que constitui importante motivação, é o fato de não se encontrar na literatura corrente nenhum trabalho de controle de SLDSM com a cadeia de Markov não observável, com restrições nos primeiro e segundo momentos.

Na ausência de restrições, encontram-se trabalhos que já consideram a não observabilidade dos estados da cadeia de Markov. Entre eles podem ser citados (do Val e Başar, 1999) que não considera ruído aditivo, e (Vargas et al., 2004a), no qual se introduz o ruído.

A principal contribuição deste trabalho é o desenvolvimento de ferramentas que levam em conta restrições no primeiro e segundo momentos dos vetores de estado e de controle. Em sistemas estocásticos, as variáveis de estado e de controle, com raríssimas exceções, são estocásticas e, portanto, diferentemente do que ocorre nos sistemas determinísticos, as restrições, normalmente impostas a essas variáveis, são substituídas por restrições impostas aos seus valores esperados, às suas variâncias, aos seus segundos momentos, etc.

Formalmente, para todo $k \in [k_0, k_1]$, as restrições são expressas por:

$$E_{x_k, \mu_{k|k}}[x(k+t)x(k+t)'] < \bar{X}(k+t), \quad \bar{X}(k+t) \in \mathbb{S}^{r+}, \quad t = 0, \dots, T; \quad (7)$$

$$E_{x_k, \mu_{k|k}}[u(k+t)u(k+t)'] < \bar{U}(k+t), \quad \bar{U}(k+t) \in \mathbb{S}^{s+}, \quad t = 0, \dots, T-1; \quad (8)$$

e

$$\underline{x}(k+t) < E_{x_k, \mu_{k|k}}[x(k+t)] < \bar{x}(k+t), \quad \bar{x}(k+t) \in \mathbb{R}^r, \quad t = 0, \dots, T; \quad (9)$$

$$\underline{u}(k+t) < E_{x_k, \mu_{k|k}}[u(k+t)] < \bar{u}(k+t), \quad \bar{u}(k+t) \in \mathbb{R}^s, \quad t = 0, \dots, T-1; \quad (10)$$

sendo que $\bar{X}(k+t)$, $\bar{U}(k+t)$, $\bar{x}(k+t)$ e $\bar{u}(k+t)$ são dados *a priori*.

Premissas e estrutura da dissertação

Chama-se aqui a atenção para as duas situações de projeto definidas exclusivamente pela aplicação considerada:

- a de horizonte variável, quando se determina a partir do instante inicial k_0 , para cada instante de tempo k , a política de controle (e portanto o controlador) para o intervalo $[k, k_1]$ e que corresponde ao caso de horizonte curto quando se redesenha o controlador, se necessário, para horizontes cada vez menores.
- a de utilização da técnica de controle em horizonte retrocedente, quando, em cada instante $k \in [k_0, k_1]$, a política de controle é revista considerando o horizonte T , bem menor que $k_1 - k_0$.

Em ambos os casos, os problemas a serem resolvidos são semelhantes e consistem em determinar a partir do estado do sistema num determinado instante, a sequência de controles em horizonte finito, de forma a atender os critérios de projeto pré-estabelecidos.

Neste trabalho adotam-se como premissas:

- o controle por realimentação linear do estado x , sendo este considerado sempre acessível, conforme (3) e (4) respectivamente para os casos de θ observável ou não observável,
- o custo linear quadrático conforme (5) ou (6),
- as restrições estocásticas podendo incluir limitações nos primeiro e segundo momentos dos vetores de estado e de controle, conforme (7) a (10) e
- para o caso de se ter o SLDSM com ruído multiplicativo, assumem-se os ruídos de estado e controle idênticamente distribuídos, o que facilita a solução, e que abrange uma grande quantidade de aplicações.

A estrutura é descrita a seguir:

No Capítulo 1, apresentam-se a formulação do problema e resultados preliminares que vão permear todo desenvolvimento do trabalho. Apresenta-se e procura-se caracterizar o problema de controle através de um controlador por realimentação linear de estado e índice de desempenho quadrático de complexidade restrita associados. Caracterizam-se também as restrições, impostas aos primeiros e segundos momentos dos vetores de estado e controle.

No Capítulo 2, desenvolvem-se as condições necessárias de otimalidade e apresenta-se a solução de projeto dada por método baseado em procedimento variacional. Apresentam-se uma metodologia de cálculo utilizando LMIs e um exemplo ilustrativo com aplicação direta da mesma.

No Capítulo 3, estuda-se um caso particular em que o estado da cadeia de Markov é observável e as restrições são impostas apenas aos segundos momentos dos vetores de estado e de controle. Em particular, condições necessárias de otimalidade são desenvolvidas, e é mostrado que a solução ótima pode ser obtida diretamente através de um único conjunto de LMIs, sem necessidade do procedimento variacional apresentado no Capítulo 2. Apresenta-se um exemplo ilustrativo com aplicação direta da mesma.

No Capítulo 4, apresentam-se duas aplicações práticas, utilizando a metodologia exposta. A primeira corresponde a uma proposta de regulação de tráfego de trens em linhas metroviárias considerando um novo enfoque na caracterização do aspecto aleatório da chegada de passageiros nas plataformas. Modela-se o coeficiente de tráfego como estados de uma cadeia de Markov, convertendo-se o denominado modelo de tempo real (MTR) da literatura para um SLDSM com ruído. Para solução, adota-se a técnica de controle em horizonte retrocedente empregando-se o método desenvolvido no Capítulo 2. A segunda aplicação corresponde ao problema de seleção ótima de carteira de ativos em aplicações financeiras. Modela-se a evolução das taxas de retorno estocásticas dos diversos ativos, em função de cenários de mercado e estes constituem os estados de uma cadeia de Markov homogênea. Apresenta-se a solução para o instante inicial, considerando todo o horizonte à frente, que também é obtida, empregando-se o método desenvolvido no Capítulo 2.

Finalmente, o Capítulo 5 é dedicado a conclusões, bem como a sugestões de possíveis trabalhos futuros.

Formulação do problema e resultados básicos

Uma vez introduzidos os conceitos básicos e as definições que constituem o objeto deste trabalho, faz-se necessário formular mais precisamente o problema. Neste capítulo, apresentam-se a formulação do problema e resultados preliminares básicos para a sua solução.

Dados um SLDSM e toda informação que lhe é associada no instante k e um horizonte T , o problema resume-se em determinar para o horizonte $[k, k + T]$, o controlador restrito que fornece a sequência $[K^k, \dots, K^{k+T}]$, de forma a se ter para $t = 1, \dots, T - 1$, o controle $u(k + t) = K^{k+t}x(k + t)$ dentro das restrições correspondentes, o estado do sistema também mantido dentro das restrições que lhe são impostas e minimizando um funcional de custo dado. Para aplicação em controle por horizonte retrocedente, o horizonte T é constante. Uma vez dados o horizonte T e o intervalo de interesse $[k_0, k_1]$, o problema envolve a determinação daquele controlador em cada instante $k \in [k_0, k_1]$.

Dessa forma, para todo k , a sequência $\{k, \dots, k + T\}$ é substituída por $\{0, \dots, T\}$, $x_0 = x(k)$, $\mu_0 = \mu(k)$. As classes de controle $\mathcal{K}_\theta^k$ ou $\mathcal{K}^k$ serão indicadas simplesmente por $\mathcal{K}_\theta$ ou $\mathcal{K}$, conforme tratar-se de θ observável ou não.

Os resultados apresentados, na sua maioria, correspondem a uma transformação do problema de natureza estocástica e assim formulado originalmente, num problema determinístico equivalente de menor complexidade. Incluem também definições e conceitos usuais de SLDSM's.

Como poderá ser notado, os seguintes passos são seguidos para a obtenção de solução do problema:

- Formulação estocástica inicial para o problema de controle ótimo,
- Definição de variáveis auxiliares envolvendo ambas as variáveis de estado (x e θ), associadas aos 1o. e 2o. momentos do vetor de estado,
- Expressões determinísticas da dinâmica dos 1o. e 2o. momentos,
- Expressão determinística para o custo, envolvendo variáveis auxiliares adicionais,
- Formulação determinística equivalente para o problema de controle ótimo estocástico,

- Apresentação da formulação determinística através de desigualdades matriciais lineares, e finalmente;
- Solução do problema propriamente dita.

Dessa forma, apresentam-se, na próxima seção, o problema e, nas seções subsequentes, as definições, os conceitos e resultados utilizados para transformar o problema original em formas determinísticas equivalentes. Vale lembrar que o enfoque agora é a inclusão de restrições conforme explanado anteriormente.

1.1 Formulação do problema

Nesta seção formula-se o problema na sua forma estocástica original. Para isso, sem maiores detalhes, reproduzem-se a seguir as expressões do SLDSM, do controlador, do sistema controlado, das restrições e do custo para o intervalo $[0, T]$. Para detalhes, veja o Capítulo Introdução geral, convertendo $k + t$ para t .

O SLDSM com ruídos aditivo e multiplicativo:

$$\mathcal{G}_m: \begin{cases} x(t+1) = \left(\bar{A}_{\theta(t)} + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{\theta(t),s_1} w_{s_1}^x(t) \right) x(t) + \left(\bar{B}_{\theta(t)} + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{\theta(t),s_2} w_{s_2}^u(t) \right) u(t) + H_{\theta(t)} w(t), \\ y(t) = C_{\theta(t)} x(t) + D_{\theta(t)} u(t), \\ y(T) = S_{\theta(T)} x(T), \\ \theta(t+1) \sim \mu(t+1) = \mathbb{P}' \mu(t), \\ x(0) = x_0, \\ \mu(0) = \mu_0, \\ t = 0, \dots, T-1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Simplificando a notação, adotam-se:

$$A_{\theta(t)}^t = \bar{A}_{\theta(t)} + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{\theta(t),s_1} w_{s_1}^x(t). \quad (1.2)$$

$$B_{\theta(t)}^t = \bar{B}_{\theta(t)} + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{\theta(t),s_2} w_{s_2}^u(t). \quad (1.3)$$

Neste ponto faz-se importante lembrar a premissa adotada neste trabalho com respeito ao ruído multiplicativo, que corresponde a se ter o mesmo ruído para o estado (matrizes A) e controle (matrizes B) e estacionário, isto é, $\rho^x(t) = \rho^u(t) = \rho^{xu}(t) = I$, em que I representa a matriz identidade.

1.1.1 Formulação para estado de Markov observável

- O controlador definido na Introdução em (3), é dado por:

$$u(t) = K_{\theta(t)}^t x(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (1.4)$$

- Seja $\mathbf{K}_\theta := \{K^t \in \mathcal{R}^{s,r}, t = 0, \dots, T-1\}$ uma sequência de ganhos de realimentação para o horizonte T e seja $\mathcal{K}_\theta$ a classe de todos os valores admissíveis para $\mathbf{K}_\theta$.
- Seja $\mathcal{G}_{\mathbf{K}_\theta}^T$ o SLDSM controlado, dado por:

$$\mathcal{G}_{\mathbf{K}_\theta}^T : \begin{cases} x(t+1) = (A_{\theta(t)}^t + B_{\theta(t)}^t K_{\theta(t)}^t) x(t) + H_{\theta(t)} w(t), \\ y(t) = (C_{\theta(t)} + D_{\theta(t)} K_{\theta(t)}^t) x(t), \\ y(T) = S_{\theta(T)} x(T), \\ \theta(t+1) \sim \mu(t+1) = \mathbb{P}' \mu(t), \\ x(0) = x_0, \\ \theta(0) = \theta_0, \\ t = 0, \dots, T-1. \end{cases} \quad (1.5)$$

- O custo definido na Introdução em (5) na forma direta em função das matrizes $C_{\theta(t)}$, $D_{\theta(t)}$ e $S_{\theta(t)}$ ou em (6) em função das matrizes $Q_{\theta(t)}$, $R_{\theta(t)}$ e $F_{\theta(t)}$ é dado por:

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \|(C_{\theta(t)} + D_{\theta(t)} K_{\theta(t)}^t) x(t)\|^2 + \|(S_{\theta(T)} x(T))\|^2 \right]. \quad (1.6)$$

ou

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{T-1} x(t)' (Q_{\theta(t)} x(t) + K_{\theta(t)}^{t'} R_{\theta(t)} K_{\theta(t)}^t x(t) + x(T)' F_{\theta(t)} x(T) \right]. \quad (1.7)$$

- As restrições correspondentes ao vetor de estado, definidas anteriormente na Introdução em (7) e (8), são dadas por:

$$E_{x_0, \mu_0} [x(t) x(t)'] < \bar{X}(t), \quad t = 0, \dots, T. \quad (1.8)$$

$$\underline{x}(t) < E_{x_0, \mu_0} [x(t)] < \bar{x}(t), \quad t = 0, \dots, T. \quad (1.9)$$

- As restrições correspondentes ao vetor de controle, definidas anteriormente na Introdução em (9) e (10), são dadas respectivamente por:

$$E_{x_0, \mu_0} [K_{\theta(t)}^t x(t) x(t)' K_{\theta(t)}^{t'}] < \bar{U}(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (1.10)$$

$$\underline{u}(t) < E_{x_0, \mu_0} [K_{\theta(t)}^t x(t)] < \bar{u}(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (1.11)$$

- O problema de controle ótimo estocástico é formulado por:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{K}_\theta} J_{\mathbf{K}_\theta}^T, \text{ dado por (1.6) ou (1.7),} \\ & s.a : \begin{cases} \text{dinâmica do processo dada por } \mathcal{G}_{\mathbf{K}_\theta}, \\ \text{restrições dadas por (1.8)–(1.11).} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.1.2 Formulação para estado de Markov não observável

- O controlador definido na Introdução em (4) é dado por:

$$u(t) = K^t x(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (1.13)$$

- Seja $\mathbf{K} := \{K^t \in \mathbb{M}^{s,r}, t = 0, \dots, T-1\}$ uma sequência de ganhos de realimentação para o horizonte T e seja $\mathcal{K}$ a classe de todos os valores admissíveis para $\mathbf{K}$.
- O SLDSM controlado $\mathcal{G}_{\mathbf{K}}^T$ é dado por:

$$\mathcal{G}_{\mathbf{K}}^T : \begin{cases} x(t+1) = (A_{\theta(t)}^t + B_{\theta(t)}^t K(t))x(t) + H_{\theta(t)} w(t), \\ y(t) = (C_{\theta(t)} + D_{\theta(t)} K(t))x(t), \\ y(T) = S_{\theta(T)} x(T), \\ \theta(t+1) \sim \mu(t+1) = \mathbb{P}' \mu(t), \\ x(0) = x_0, \\ \mu(0) = \mu_0, \\ t = 0, \dots, T-1. \end{cases} \quad (1.14)$$

- O custo na forma direta definido na Introdução em (5) em função das matrizes $C_{\theta(t)}$, $D_{\theta(t)}$ e $S_{\theta(t)}$ ou em (6) em função das matrizes $Q_{\theta(t)}$, $R_{\theta(t)}$ e $F_{\theta(t)}$, dado por:

$$J_{\mathbf{K}}^T = \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \|(C_{\theta(t)} + D_{\theta(t)} K(t))x(t)\|^2 + \|(S_{\theta(T)} x(T))\|^2 \right]. \quad (1.15)$$

ou

$$J_{\mathbf{K}}^T = \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{T-1} x(t)' (Q_{\theta(t)} x(t) + K^{t'} R_{\theta(t)} K^t) x(t) + x(T)' F_{\theta(T)} x(T) \right]. \quad (1.16)$$

- As restrições correspondentes ao vetor de estado, definidas anteriormente na Introdução em (7) e (8), são dadas por:

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t)x(t)'] < \bar{X}(t), \quad t = 0, \dots, T, \quad (1.17)$$

$$\underline{x}(t) < \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(t)] < \bar{x}(t), \quad t = 0, \dots, T, \quad (1.18)$$

- As restrições correspondentes ao vetor de controle, definidas anteriormente na Introdução em (9) e (10), são dadas por:

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [K(t)x(t)x(t)'K(t)'] < \bar{U}(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \quad (1.19)$$

$$\underline{u}(t) < \mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [K(t)x(t)] < \bar{u}(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (1.20)$$

- O problema de controle ótimo estocástico é formulado por:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{K}} J_{\mathbf{K}}^T, \text{ dado por (1.15) ou (1.16),} \\ & s.a : \begin{cases} \text{dinâmica do processo dada por } \mathcal{G}_{\mathbf{K}}, \\ \text{restrições dadas por (1.8), (1.9), (1.19) e (1.20).} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.21)$$

1.2 Definições, conceitos e resultados básicos

As definições, conceitos e resultados a seguir representam uma compilação ordenada dos resultados preliminares, a maioria já disponibilizada em literatura, principalmente em (do Val e Bařar, 1999; Costa e do Val, 2000; Vargas, 2004; Costa, Fragoso e Marques, 2005) e serão intensamente utilizados ao longo dos próximos capítulos.

Neste ponto é importante recapitular a notação utilizada (ver a parte Notação deste documento). Além da sequência temporal $0, \dots, T$ do horizonte considerado, distingue-se a sequência $1, \dots, n_\theta$ correspondente ao espaço de estados de $\theta(t)$ da cadeia de Markov.

Considerando a natural associação de variáveis aos estados de Markov, será comum a adoção de sequências ou coleções dessas variáveis associadas a $\mathcal{N}$. Por exemplo, a sequência $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_{n_\theta})$ é uma sequência associada aos estados de Markov, em que U_i corresponde ao estado $\theta(t) = i$. Não será utilizada notação diferenciada para sequência ou coleção de matrizes (vetores) (escalares) associada aos n_θ estados de Markov. O próprio contexto indica tratar-se de uma coleção ou de um simples elemento. Por exemplo $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m,n}$ representa uma coleção de n_θ matrizes reais de ordem $m \times n$ e $U \in \mathbb{R}^{m,n}$ representa uma matriz de ordem $m \times n$.

Recapitula-se o conceito de produto interno (ver a parte Notação deste documento) entre duas coleções $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_{n_\theta})$ e $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_{n_\theta})$, simbolizado por $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$ e dado por $\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \sum_{i \in \mathcal{N}} \text{tr}\{U_i' V_i\}$. Recapitula-se também o conceito de norma $\|\mathbf{U}\|_2$, $\mathbf{U} \in \mathcal{S}^m$, que é dada por $\|\mathbf{U}\|_2^2 = \langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle$.

Objetivando simplificação de notação $U(\theta(t))$ pode ser representada simplesmente por $U_{\theta(t)}$ ou mesmo U_i e similarmente $U(t, \theta(t))$ por $U_{\theta(t)}^t$ ou mesmo U_i^t . Também com o mesmo objetivo, utilizam-se operadores específicos definidos caso a caso. De forma geral ao se escrever, por exemplo, $Y = f(\Phi, \Delta, \Psi)$ com $\Phi \in \mathcal{U}$, e $\Psi \in \mathcal{V}$, e $\Delta \in \mathbb{W}$, isto é, Φ e Ψ são coleções de n_θ matrizes e Δ uma matriz e não coleção, subentende-se $Y_i = f(\Phi_i, \Delta, \Psi_i)$, $i = 1, \dots, n_\theta$.

Antecipam-se os dois operadores essenciais e de maior emprego. Para a coleção ϕ de matrizes, vetores ou escalares:

$$\begin{aligned} Y = \mathcal{D}(\phi) &\iff Y_i = \mathcal{D}_i(\phi) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \phi_j. \\ Z = \mathcal{E}(\phi) &\iff Z_i = \mathcal{E}_i(\phi) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ij} \phi_j. \end{aligned}$$

1.2.1 Variáveis auxiliares e expressões determinísticas para as restrições

Considerando as características do problema, torna-se conveniente a definição de duas variáveis auxiliares $\mathbf{X}^t \in \mathcal{S}^{r_0}$ e $\mathcal{X}^t \in \mathcal{R}^r$: $\mathbf{X}^t = \{X_i^t \in \mathcal{S}^{r_0}, \quad i = 1, \dots, n_\theta\}$ como um conjunto de matrizes relacionadas ao segundo momento do vetor de estado e $\mathcal{X}^t = \{\mathcal{X}_i^t \in \mathbb{R}^r, \quad i = 1, \dots, n_\theta\}$ como um conjunto

de vetores-coluna relacionados ao primeiro momento de estado tal que:

$$X_i^t := E_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)'\mathbb{I}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta \quad (1.22)$$

$$\mathcal{X}_i^t := E_{x_0, \mu_0}[x(t)\mathbb{I}_{\{\theta(t)=i\}}], \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta \quad (1.23)$$

$t = 0, \dots, T$, tal que $x(0) = x_0$ é um vetor conhecido e $\mathbb{I}_{\mathcal{C}}$, representa função indicadora do conjunto $\mathcal{C}$. Lembre-se que a distribuição da cadeia no instante t é obtida conforme $\mu_t = (\mathbb{P}')^t \mu_0$ com μ_0 representando a distribuição inicial conhecida.

Essas variáveis constituem as bases que permitem transformar o problema de natureza estocástica em um problema de natureza determinística de resolução facilitada e o lema a seguir, apresentado em (Vargas, 2004), trata de propriedades fundamentais associadas às definições acima, de uso bastante amplo nos resultados à frente.

Lema 1.1 *Sejam quaisquer sequências $\mathbf{U} = \{U_i \in \mathbb{S}^{r_0} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{S}^{r_0}$, $\phi = \{\phi_i \in \mathbb{R}^r : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{R}^r$ e $\alpha = \{\alpha_i \in \mathbb{R} : i \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{R}$. As seguintes relações são válidas:*

$$\begin{aligned} (i) \quad E_{x_0, \mu_0}[x(t)'U_{\theta(t)}x(t)] &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{U_i X_i^t\} = \langle U, X^t \rangle \\ (ii) \quad E_{x_0, \mu_0}[\phi_{\theta(t)}x(t)] &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \phi_i' \mathcal{X}_i^t = \langle \phi', \mathcal{X}^t \rangle \\ (iii) \quad E_{x_0, \mu_0}[\alpha_{\theta(t)}] &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \alpha_i \mu^t(i) = \langle \mu^t, \alpha \rangle \end{aligned}$$

Prova: Ver (Vargas, 2004), página 11. □

Os dois próximos resultados apresentam respectivamente uma forma equivalente de expressar as restrições do vetor de estado dadas por (1.8) e (1.9) e as restrições do vetor de controle dadas por (1.10) e (1.11), para θ observável e dadas por (1.19) e (1.20) para θ não observável.

Lema 1.2 *As quatro desigualdades correspondentes às restrições dadas por (1.8) a (1.11), são equivalentes a:*

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} X_i^t < \bar{X}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.24)$$

$$\underline{x}(t) < \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_i^t < \bar{x}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.25)$$

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t X_i^t K_i^{t'} < \bar{U}(t), \quad \forall t \in [0, T-1], \quad (1.26)$$

$$\underline{u}(t) < \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t \mathcal{X}_i^t < \bar{u}(t), \quad \forall t \in [0, T-1]. \quad (1.27)$$

Prova:

Considerando as definições de X_i^t , $\mathcal{X}_i^t$ e lembrando que $u(t) = K_i^t x(t)$, têm-se as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} E_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)'] &= E_{x_0, \mu_0}\left[\sum_{i=1}^{n_\theta} x(t)x(t)' \mathbb{1}_{\theta(t)=i}\right] = \sum_{i=1}^{n_\theta} E_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)' \mathbb{1}_{\theta(t)=i}] = \sum_{i=1}^{n_\theta} X_i^t. \\ E_{x_0, \mu_0}[x(t)] &= E_{x_0, \mu_0}\left[\sum_{i=1}^{n_\theta} x(t) \mathbb{1}_{\theta(t)=i}\right] = \sum_{i=1}^{n_\theta} E_{x_0, \mu_0}[x(t) \mathbb{1}_{\theta(t)=i}] = \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_i^t. \\ E_{x_0, \mu_0}[u(t)u(t)'] &= E_{x_0, \mu_0}\left[\sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t x(t)x(t)' K_i^{t'} \mathbb{1}_{\theta(t)=i}\right] = \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t X_i^t K_i^{t'}. \\ E_{x_0, \mu_0}[u(t)] &= E_{x_0, \mu_0}\left[\sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t x(t) \mathbb{1}_{\theta(t)=i}\right] = \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t \mathcal{X}_i^t. \end{aligned}$$

Substituindo essas equivalências nas desigualdades (1.8) a (1.11), obtêm-se (1.24) a (1.27). $\square$

Lema 1.3 *As duas desigualdades correspondentes às restrições dadas por (1.19) e (1.20) são respectivamente equivalentes a :*

$$K^t \sum_{i=1}^{n_\theta} X_i^t K^{t'} < \bar{U}(t), \quad \forall t \in [0, T-1], \quad (1.28)$$

$$\underline{u}(t) < K^t \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_i^t < \bar{u}(t), \quad \forall t \in [0, T-1]. \quad (1.29)$$

Prova: Considerando as definições de X_i^t e $\mathcal{X}_i^t$, e lembrando que $u(t) = K^t x(t)$, têm-se as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} E_{x_0, \mu_0}[u(t)u(t)'] &= E_{x_0, \mu_0}[K^t x(t)x(t)' K^{t'}] = K^t E_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)'] K^{t'} = K^t \sum_{i=1}^{n_\theta} X_i^t K^{t'}. \\ E_{x_0, \mu_0}[u(t)] &= E_{x_0, \mu_0}[K^t x(t)] = K^t E_{x_0, \mu_0}[x(t)] = K^t \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_i^t. \end{aligned}$$

Substituindo essas equivalências nas desigualdades (1.19) e (1.20), obtêm-se (1.28) e (1.29). $\square$

1.2.2 Dinâmicas equivalentes

A seguir são apresentadas as expressões determinísticas das dinâmicas das variáveis X^t e $\mathcal{X}^t$. Para o SLDSM sem ruído multiplicativo, essas expressões podem ser encontradas em (Costa, Fragoso e Marques, 2005), capítulo 3) e (Vargas, 2004). Para o caso de ruído multiplicativo, essas expressões estão desenvolvidas no Apêndice A.

Os lemas a seguir fornecem as dinâmicas para o caso de SLDSM com ruído multiplicativo. Para o caso de SLDSM sem ruído multiplicativo, basta fazer $A_i = \bar{A}_i$, $B_i = \bar{B}_i$, $\tilde{A}_{i,k} = 0$ e $\tilde{B}_{i,k} = 0$ para $i = 1, \dots, n_\theta$ e $k = 1, \dots, \nu$.

Lema 1.4 Para θ observável as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ \bar{A}_j X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{\ell=1}^v \rho^x(s_1, \ell) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t \tilde{A}_{j,\ell}' \right. \\
 &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{\ell=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^u(\ell, s_2) \tilde{B}_{j,\ell} K_j^t X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
 &\quad + \bar{A}_j X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
 &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_2=1}^v \sum_{s_1=1}^v \rho^{xu}(s_2, s_1) \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t \tilde{A}_{j,s_1}' \\
 &\quad \left. + \mu_t(j) H_j \Sigma H_j' \right\}. \tag{1.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \mathcal{X}_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) \mathcal{X}_j^t. \tag{1.31}
 \end{aligned}$$

E no caso de $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, em que I é a matriz identidade, tem-se:

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) X_j^t (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t)' + \sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t) X_j^t (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t)' \right\} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \mu_t(j) H_j \Sigma H_j'. \tag{1.32}
 \end{aligned}$$

Prova: Ver Apêndice A. □

Lema 1.5 Para θ não observável as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ \bar{A}_j X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{\ell=1}^v \rho^x(s_1, \ell) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t \tilde{A}_{j,\ell}' \right. \\
 &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{\ell=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^u(\ell, s_2) \tilde{B}_{j,\ell} K_j^t X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
 &\quad + \bar{A}_j X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
 &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_2=1}^v \sum_{s_1=1}^v \rho^{xu}(s_2, s_1) \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t \tilde{A}_{j,s_1}' \\
 &\quad \left. + \mu_t(j) H_j \Sigma H_j' \right\}. \tag{1.33}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \mathcal{X}_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) \mathcal{X}_j^t. \tag{1.34}
 \end{aligned}$$

E no caso de $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, em que I é a matriz identidade, tem-se:

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ (\bar{A}_j + \bar{B}_j K^t) X_j^t (\bar{A}_j + \bar{B}_j K^t)' + \sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K^t) X_j^t (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K^t)' \right\} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \mu_t(j) H_j \Sigma H_j'.
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Prova: Ver Apêndice A. □

As expressões dadas por (1.32) e (1.31) podem ser reescritas utilizando o operador $\mathcal{D}$ definido anteriormente por:

$$X^{t+1} = \mathcal{D}((\bar{A} + \bar{B}K^t)X^t(\bar{A} + \bar{B}K^t)') + \sum_{s_1=1}^v \mathcal{D}((\tilde{A}_{s_1} + \tilde{B}_{s_1}K^t)'X^t(\tilde{A}_{s_1} + \tilde{B}_{s_1}K^t)) + \mathcal{D}(\mu^t H_j \Sigma H_j'). \tag{1.36}$$

$$\mathcal{X}^{t+1} = \mathcal{D}((\bar{A} + \bar{B}K^t)\mathcal{X}^t). \tag{1.37}$$

Como se pode notar, essas expressões são mais compactas e correspondem às dinâmicas para o caso de θ observável se $K^t \in \mathcal{R}^{s,r}$. Se, no entanto, $K^t \in \mathbb{R}^{s,r}$, trata-se do caso de θ não observável.

A seguir são introduzidos outros operadores.

Operadores auxiliares de notação: Os operadores descritos a seguir, de uso generalizado, constituem ferramentas essenciais para simplificação da notação. Para $\phi \in \mathcal{S}^{r0}$, $\Delta \in \mathcal{R}^{s,r}$ ou $\Delta \in \mathbb{R}^{s,r}$ e $\xi \in \mathcal{R}^r$, $i \in \mathcal{N}$ definem-se:

Para $\Delta \in \mathcal{R}^{s,r}$: $\mathcal{T} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0}$ em que $\mathcal{T}_i(\phi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (A_j + B_j \Delta_j) \phi_j (A_j + B_j \Delta_j)'$.

$\bar{\mathcal{T}} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0}$ em que $\bar{\mathcal{T}}_i(\phi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j \Delta_j) \phi_j (\bar{A}_j + \bar{B}_j \Delta_j)'$.

$\tilde{\mathcal{T}}_{s_1} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0}$ em que $\tilde{\mathcal{T}}_{i,s_1}(\phi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} \Delta_j) \phi_j (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} \Delta_j)'$.

$\mathcal{V} : \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{R}^r$ em que $\mathcal{V}_i(\xi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (A_j + B_j \Delta_j) \xi_j$.

$\bar{\mathcal{V}} : \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{R}^r$ em que $\bar{\mathcal{V}}_i(\xi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j \Delta_j) \xi_j$.

Para $\Delta \in \mathbb{R}^{s,r}$: $\mathcal{T} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0}$ em que $\mathcal{T}_i(\phi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (A_j + B_j \Delta) \phi_j (A_j + B_j \Delta)'$.

$$\tilde{\mathcal{T}} : \mathbb{S}^{r0} \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathbb{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \tilde{\mathcal{T}}_i(\phi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji}(\bar{A}_j + \bar{B}_j \Delta) \phi_j (\bar{A}_j + \bar{B}_j \Delta)'$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{s_1} : \mathbb{S}^{r0} \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathbb{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \tilde{\mathcal{T}}_{i,s_1}(\phi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji}(\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} \Delta) \phi_j (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} \Delta)'$$

$$\mathcal{V} : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathbb{R}^r \quad \text{em que} \quad \mathcal{V}_i(\xi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji}(A_j + B_j \Delta) \xi_j.$$

$$\bar{\mathcal{V}} : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathbb{R}^r \quad \text{em que} \quad \bar{\mathcal{V}}_i(\xi, \Delta) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji}(\bar{A}_j + \bar{B}_j \Delta) \xi_j.$$

Os operadores $\mathcal{T}$, $\tilde{\mathcal{T}}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{s_1}$, $\mathcal{V}$ e $\bar{\mathcal{V}}$ são, como se pode perceber, ligeiramente distintos para $\Delta \in \mathbb{R}^{s,r}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{s,r}$. No entanto, não terão notação diferenciada, sendo cada caso definido pelo contexto.

Nas expressões das dinâmicas de X^t aparece claramente uma parcela que corresponde ao ruído aditivo na entrada, que passará a ser identificada por $\Psi^t \in \mathbb{S}^{r0}$. Tem-se então:

$$\Psi_i^t := \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \mu_j^t H_j \Sigma H_j', \quad \forall i = 1, \dots, n_\theta. \quad (1.38)$$

As dinâmicas de X_i^t e $\mathcal{X}_i^t$ do Lema 1.4 e do Lema 1.5, para o caso de $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} I$, em que I é a matriz identidade, podem ser escritas utilizando os operadores introduzidos anteriormente. Com a utilização apenas do operador $\mathcal{D}$, encontram-se expressões para as dinâmicas, que serão muito úteis à frente, quando se utilizará a técnica de LMIs. A proposição a seguir apresenta essas expressões.

Proposição 1.1 *Para cada $t = 0, \dots, T-1$, tem-se que:*

$$\begin{aligned} (i) \quad X^{t+1} &= \mathcal{D} \left((\bar{A} + \bar{B} K^t) X^t (\bar{A} + \bar{B} K^t)' \right) \\ &\quad + \sum_{s_1=1}^v \mathcal{D} \left((\tilde{A}_{s_1} + \tilde{B}_{s_1} K^t) X^t (\tilde{A}_{s_1} + \tilde{B}_{s_1} K^t)' \right) \\ &\quad + \mathcal{D} \left(\mu^t H \Sigma H' \right), \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$(ii) \quad \mathcal{X}^{t+1} = \mathcal{D} \left((\bar{A} + \bar{B} K^t) \mathcal{X}^t \right), \quad (1.40)$$

$$(iii) \quad \Psi^t = \mathcal{D} \left(\mu^t H \Sigma H' \right), \quad (1.41)$$

são relações válidas sempre que $X_i^0 = \mu_0(i) x(0) x(0)', \forall i \in \mathcal{N}$, e $\mathcal{X}_i^0 = \mu_0(i) x(0), \forall i = 1, \dots, n_\theta$. Para θ observável $K^t \in \mathbb{R}^{s,r}$ e para θ não observável $K^t \in \mathbb{R}^{s,r}$.

Prova: Basta lembrar a definição do operador $\mathcal{D}(\phi)$ e empregá-lo diretamente nas expressões correspondentes para obter (i), (ii) e (iii). Nas expressões acima, para K^t em $\mathbb{R}^{s,r}$, tem-se o caso de θ observável e para K^t em $\mathbb{R}^{s,r}$, tem-se o caso de θ não observável. $\square$

As expressões das dinâmicas com a utilização dos operadores $\tilde{\mathcal{T}}$, $\tilde{\mathcal{T}}_{s_1}$ e $\bar{\mathcal{V}}$ são dadas pela proposição a seguir:

Proposição 1.2 Para cada $t = 0, \dots, T-1$, tem-se que:

$$(i) \quad X^{t+1} = \tilde{\mathcal{T}}(X^t, K^t) + \sum_{s_1=1}^v \tilde{\mathcal{T}}_{s_1}(X^t, K^t) + \Psi^t, \quad (1.42)$$

$$(ii) \quad \varkappa^{t+1} = \tilde{\mathcal{V}}(\varkappa^t, K^t), \quad (1.43)$$

são relações válidas sempre que $X_i^0 = \mu_0(i)x(0)x(0)', \forall i \in \mathcal{N}$, e $\varkappa_i^0 = \mu_0(i)x(0), \forall i \in \mathcal{N}$. Para θ observável K^t em $\mathbb{R}^{s,r}$ e para θ não observável K^t em $\mathbb{R}^{s,r}$.

Prova: Basta aplicar em (1.32) e (1.35) os operadores $\tilde{\mathcal{T}}(\phi, \Delta)$ e $\tilde{\mathcal{T}}_{s_1}(\phi, \Delta)$ com $\phi = X^t$ e $\Delta = K^t$ para obter (i) e aplicar em (1.31) e (1.34) o operador $\tilde{\mathcal{V}}(\phi, \Delta)$ com $\phi = \varkappa^t$ e $\Delta = K^t$ para obter (ii). Para $K^t \in \mathbb{R}^{s,r}$ tem-se o caso de θ observável e para $K^t \in \mathbb{R}^{s,r}$ tem-se o caso de θ não observável. $\square$

1.2.3 Expressões determinísticas para o custo

Serão apresentadas, nesta subseção, expressões determinísticas equivalentes para o custo que, juntamente com as expressões determinísticas das dinâmicas de X^t e $\varkappa^t$, facilitam a obtenção de soluções.

Expressão para custo na forma direta: O lema a seguir apresenta uma forma equivalente de expressar os custos $J_{\mathbf{K}_\theta}^T$ definido em (1.6) e $J_{\mathbf{K}}^T$ definido em (1.15), em função de X_i^t .

Lema 1.6 (1.6) e (1.15) são respectivamente equivalentes a:

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{\hat{C}_i^t X_i^t \hat{C}_i^{t'} + S_i X_i^T S_i'\}, \quad \hat{C}_i^t := C_i + D_i K_i^t. \quad (1.44)$$

$$J_{\mathbf{K}}^T = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{\hat{C}_i^t X_i^t \hat{C}_i^{t'} + S_i X_i^T S_i'\}, \quad \hat{C}_i^t := C_i + D_i K^t. \quad (1.45)$$

Prova: Veja (Costa, Fragoso e Marques, 2005). $\square$

Expressão determinística alternativa para o funcional de custo: Indica-se a seguir uma outra equivalência determinística para o funcional de custo, que será essencialmente útil na solução do problema e, como já mencionado, tem bases nos princípios de programação dinâmica. Apresentam-se resultados extraídos diretamente da literatura em (do Val e Başar, 1999; Costa e do Val, 2000; Vargas, 2004; Costa, Fragoso e Marques, 2005), correspondentes a SLDSM sem ruído multiplicativo e que são estendidos para o caso de SLDSM com ruído multiplicativo no Apêndice A.

Definem-se os funcionais de custo $J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t)$ para θ observável e $J_{\mathbf{K}}^T(t)$ para θ não observável, e apresentam-se as proposições correspondentes que estabelecem as expressões determinísticas equivalentes para os mesmos.

Para θ observável:

Definição 1.1 *Seja $\mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta$. O funcional*

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t) := E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{T-1} x(\ell)' \left(Q + K^{\ell'} R K^\ell \right) x(\ell) + x(T)' F x(T) \right] \quad (1.46)$$

é denominado custo remanescente correspondente a $\mathbf{K}_\theta$ no instante t .

Para θ não observável:

Definição 1.2 *Seja $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$. O funcional*

$$J_{\mathbf{K}}^T(t) := E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{T-1} x(\ell)' \left(Q + K^\ell R K^\ell \right) x(\ell) + x(T)' F x(T) \right] \quad (1.47)$$

é denominado custo remanescente correspondente a $\mathbf{K}$ no instante t .

As proposições a seguir estabelecem as expressões dos custos remanescentes definidos acima:

Proposição 1.3 *Para todo $t = 0, \dots, T$, o funcional $J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t)$ é dado por:*

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t) = E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L_t^t x(t) + \omega_t^t] = \langle L^t, X^t \rangle + \mu_t' \omega^t, \quad (1.48)$$

com L_t^t e ω_t^t dados por:

$$L_t^t = \Xi_t^t + \Gamma_t^t K_t^t + K_t^{t'} \Gamma_t^{t'} + K_t^t \Lambda_t^t K_t^t, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad L_t^T = F_t^T, \quad (1.49)$$

$$\omega_t^t = \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\}, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad \omega_t^T = 0, \quad (1.50)$$

em que Ξ_t^t , Γ_t^t e Λ_t^t são dadas por:

$$\Xi_t^t = Q_i + \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,s_1}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (1.51)$$

$$\Gamma_t^t = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (1.52)$$

$$\Lambda_t^t = R_i + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \rho^u(k, s_2) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,k}, \quad t = 0, \dots, T. \quad (1.53)$$

Prova: Ver Proposição A.1 e Lema A.3 do Apêndice A. □

Proposição 1.4 Para todo $t = 0, \dots, T$, o funcional $J_{\mathbf{K}}^T(t)$ é dado por:

$$J_{\mathbf{K}}^T(t) = E_{x_0, \mu_0}[x(t)' L_i^t x(t) + \omega_i^t] = \langle L^t, X^t \rangle + \mu_i^t \omega^t, \quad (1.54)$$

com L_i^t e ω_i^t dados por:

$$L_i^t = \Xi_i^t + \Gamma_i^t K^t + K^{t'} \Gamma_i^{t'} + K^{t'} \Lambda_i^t K^t, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad L_i^T = F_i^T, \quad (1.55)$$

$$\omega_i^t = \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\}, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad \omega_i^T = 0, \quad (1.56)$$

em que Ξ_i^t , Γ_i^t e Λ_i^t são dadas por:

$$\Xi_i^t = Q_i + \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,s_1}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (1.57)$$

$$\Gamma_i^t = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (1.58)$$

$$\Lambda_i^t = R_i + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \rho^u(k, s_2) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,k}, \quad t = 0, \dots, T. \quad (1.59)$$

Prova: Ver Proposição A.2 e Lema A.4 do Apêndice A. □

Como se pode observar das expressões dos funcionais de custo têm-se:

- ω_i^t é independente de K^t ou K_i^t para todo $t = 0, \dots, T-1$.
- Ξ_i^t , Γ_i^t e Λ_i^t são independentes de K_i^t (ou K^t) no instante t , mas dependem de K_i^m (ou K^m), $m = t+1, \dots, T-1$, através de $\mathcal{E}(L^{t+1})$.
- L^t é dependente de K_i^m (ou K^m), $m = t, \dots, T-1$.

Duas simplificações são pertinentes e são consideradas. A primeira corresponde ao SLDSM ainda com ruído multiplicativo, mas com $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, em que I é a matriz identidade. A segunda corresponde ao SLDSM sem ruído multiplicativo. Para essas simplificações bastam as expressões modificadas de Ξ_i^t , Γ_i^t e Λ_i^t , uma vez que L_i^t é determinado por essas variáveis e K_i^t (ou K^t).

Para o SLDSM com $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, tem-se:

$$\Xi_i^t = Q_i + \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,s_1}. \quad (1.60)$$

$$\Gamma_i^t = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho_{s_1, s_2} \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2}. \quad (1.61)$$

$$\Lambda_i^t = R_i + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_1}. \quad (1.62)$$

Para o SLDSM sem ruído multiplicativo, tem-se:

$$\Xi_i^t = Q_i + A_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) A_i. \quad (1.63)$$

$$\Gamma_i^t = A_i^{t'} \mathcal{E}_i(L^{t+1}) B_i'. \quad (1.64)$$

$$\Lambda_i^t = R_i + B_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) B_i. \quad (1.65)$$

Operadores auxiliares: Consideram-se a seguir operadores adicionais e essenciais para simplificação da notação. Para $\phi \in \mathcal{S}^{r0}$, $\Delta \in \mathcal{R}^{s,r}$ ou $\Delta \in \mathbb{R}^{s,r}$, $\alpha \in \mathcal{R}$, $s_1 \in [1, v]$ e $i \in \mathcal{N}$ definem-se:

Para θ observável:

$$\bar{\mathcal{L}} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \bar{\mathcal{L}}_i(\phi, \Delta) = (\bar{A}_i + \bar{B}_i \Delta)' \mathcal{E}_i(\phi) (\bar{A}_i + \bar{B}_i \Delta).$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{s_1} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \tilde{\mathcal{L}}_{i,s_1}(\phi, \Delta) = (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} \Delta)' \mathcal{E}_i(\phi) (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} \Delta).$$

$$\mathcal{L} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathcal{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \mathcal{L}_i(\phi, \Delta) = \bar{\mathcal{L}}_i(\phi, \Delta) + \sum_{s_1=1}^v \tilde{\mathcal{L}}_{i,s_1}(\phi, \Delta).$$

Para θ não observável:

$$\bar{\mathcal{L}} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \bar{\mathcal{L}}_i(\phi, \Delta) = (\bar{A}_i + \bar{B}_i \Delta)' \mathcal{E}_i(\phi) (\bar{A}_i + \bar{B}_i \Delta).$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{s_1} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \tilde{\mathcal{L}}_{i,s_1}(\phi, \Delta) = (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} \Delta)' \mathcal{E}_i(\phi) (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} \Delta).$$

$$\mathcal{L} : \mathcal{S}^{r0} \times \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathcal{S}^{r0} \quad \text{em que} \quad \mathcal{L}_i(\phi, \Delta) = \bar{\mathcal{L}}_i(\phi, \Delta) + \sum_{s_1=1}^v \tilde{\mathcal{L}}_{i,s_1}(\phi, \Delta).$$

Os operadores $\mathcal{L}$, $\bar{\mathcal{L}}$ e $\tilde{\mathcal{L}}_{s_1}$ são, como se pode perceber, ligeiramente distintos para $\Delta \in \mathcal{R}^{s,r}$ e $\Delta \in \mathbb{R}^{s,r}$. No entanto não terão notação diferenciada, sendo cada caso definido pelo contexto.

A seguir desenvolve-se a expressão de L^t para o caso de SLDSM com ruído multiplicativo e $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$.

Para θ observável: Substituindo Ξ_i^t , Γ_i^t e Λ_i^t em (1.49), pelas suas expressões dadas respectivamente por (1.51), (1.52) e (1.53) e desenvolvendo-a, tem-se:

$$\begin{aligned}
L_i^t &= Q_i + K_i^{t'} R_i K_i^t \\
&+ \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,k} \\
&+ (\bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2}) K_i^t \\
&+ K_i^{t'} ((\bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2})') \\
&+ K_i^{t'} (\bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^u(s_2, k) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,k}) K_i^t.
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Substituindo $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, verifica-se o cancelamento dos termos cruzados nos somatórios e separam-se os termos com as matrizes $\bar{A}$ e $\bar{B}$ dos termos com as matrizes $\tilde{A}_{s_1}$ e $\tilde{B}_{s_2}$, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
L_i^t &= Q_i + K_i^{t'} R_i K_i^t + (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i^t)' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) (\bar{A}_i + \bar{B}_i K_i^t) \\
&+ \sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} K_i^t)' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} K_i^t).
\end{aligned} \tag{1.67}$$

E por fim, introduzem-se os operadores, que levam à expressão de L_i^t mais compacta:

$$\begin{aligned}
L_i^t &= Q_i + K_i^{t'} R_i K_i^t + \bar{\mathcal{L}}_i^t(L^{t+1}, K^t) + \sum_{s_1=1}^v \tilde{\mathcal{L}}_{i,s_1}^t(L^{t+1}, K^t) \\
&= Q_i + K_i^{t'} R_i K_i^t + \mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t), \quad t = T-1, \dots, 0, \\
L_i^T &= F_i, \quad i = 1, \dots, n_\theta.
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Para θ não observável, basta substituir K_i^t por K^t na expressão acima.

$$\begin{aligned}
L_i^t &= Q_i + K^{t'} R_i K^t + \bar{\mathcal{L}}_i^t(L^{t+1}, K^t) + \sum_{s_1=1}^v \tilde{\mathcal{L}}_{i,s_1}^t(L^{t+1}, K^t) \\
&= Q_i + K^{t'} R_i K^t + \mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t), \quad t = T-1, \dots, 0, \\
L_i^T &= F_i, \quad i = 1, \dots, n_\theta.
\end{aligned} \tag{1.69}$$

Das expressões do funcional de custo dados pelas equações (1.48) e (1.54), respectivamente para θ observável e θ não observável, tem-se para o custo total:

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T(0) = E_{x_0, \mu_0} [x(0)' L_i^t x(0) + \omega_i^0] = \langle L^0, X^0 \rangle + \mu_0' \omega^0. \tag{1.70}$$

$$J_{\mathbf{K}}^T(0) = E_{x_0, \mu_0} [x(0)' L_i^t x(0) + \omega_i^0] = \langle L^0, X^0 \rangle + \mu_0' \omega^0. \tag{1.71}$$

Notar que, embora as expressões sejam idênticas, L^t (e portanto L^0) tem expressões distintas.

1.3 Formulação determinística equivalente

A seguir são apresentadas duas formulações para o problema. Na primeira, considera-se o custo na forma direta e, como será visto, apresentam-se algumas limitações na aplicação. A segunda formulação corresponde a uma alternativa baseada nos princípios de programação dinâmica.

1.3.1 Formulação determinística com custo na forma direta

As expressões (1.44) e (1.45) constituem as expressões determinísticas diretas para o funcional de custo e o problema de controle ótimo estocástico pode ser traduzido por:

Caso de θ observável:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \min_{\mathbf{K}_\theta} J_{\mathbf{K}_\theta}^T \text{ dado por (1.44)} \\ s.a : \left\{ \begin{array}{l} \text{dinâmica de } X^t \text{ dada por (1.42),} \\ \text{dinâmica de } \mathcal{X}^t \text{ dada por (1.43),} \\ \text{uma ou mais restrições entre (1.24), (1.25), (1.26) e (1.27),} \\ \text{em que } \mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta := \{K^t \in \mathbb{R}^{s,r} : t = 0, \dots, T-1\} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Caso de θ não observável:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \min_{\mathbf{K}} J_{\mathbf{K}}^T \text{ dado por (1.45)} \\ s.a : \left\{ \begin{array}{l} \text{dinâmica de } X^t \text{ dada por (1.42),} \\ \text{dinâmica de } \mathcal{X}^t \text{ dada por (1.43),} \\ \text{uma ou mais restrições entre (1.24), (1.25), (1.28) e (1.29),} \\ \text{em que } \mathbf{K} \in \mathcal{K} := \{K^t \in \mathbb{R}^{s,r} : t = 0, \dots, T-1\} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.73)$$

1.3.2 Formulação determinística alternativa

Considerando que o SLDSM sem ruído multiplicativo é na realidade um caso particular do SLDSM com ruído multiplicativo, representa-se a seguir a formulação equivalente do problema considerando o SLDSM com ruído multiplicativo:

Para θ observável:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \min_{\mathbf{K}_\theta} J_{\mathbf{K}_\theta}^T(0) \text{ dado por (1.70)} \\ s.a : \left\{ \begin{array}{l} \text{equação recorrente acoplada de } L^t \text{ dada por (1.49),} \\ \text{equação recorrente acoplada de } \omega^t \text{ dada por (1.50),} \\ \text{dinâmica de } \mathcal{X}^t \text{ dada por (1.43),} \\ \text{dinâmica de } X^t \text{ dada por (1.42),} \\ \text{restrição de segundo momento de } x(t) \text{ dada por (1.24),} \\ \text{restrição de primeiro momento de } x(t) \text{ dada por (1.25),} \\ \text{restrição de segundo momento de } u(t) \text{ dada por (1.26),} \\ \text{restrição de primeiro momento de } u(t) \text{ dada por (1.27),} \\ \text{em que } \mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta := \{K^t \in \mathbb{R}^{s,r} : t = 0, \dots, T-1\}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Para θ não observável:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \min_{\mathbf{K}} J_{\mathbf{K}}^T(0) \text{ dado por (1.71)} \\ s.a : &\left\{ \begin{array}{l} \text{equação recorrente acoplada de } L^t \text{ dada por (1.55),} \\ \text{equação recorrente acoplada de } \omega^t \text{ dada por (1.56),} \\ \text{dinâmica de } \varkappa^t \text{ dada por (1.43),} \\ \text{dinâmica de } X^t \text{ dada por (1.42),} \\ \text{restrição de segundo momento de } x(t) \text{ dada por (1.24),} \\ \text{restrição de primeiro momento de } x(t) \text{ dada por (1.25),} \\ \text{restrição de segundo momento de } u(t) \text{ dada por (1.28),} \\ \text{restrição de primeiro momento de } u(t) \text{ dada por (1.29),} \\ \text{em que } \mathbf{K} \in \mathcal{K} := \{K^t \in \mathbb{R}^{s,r} : t = 0, \dots, T-1\}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.75)$$

1.3.3 Considerações gerais

Considere a seguinte classificação dos problemas a serem resolvidos:

- quanto ao : SLDSM com ruído multiplicativo, SLDSM com ruído multiplicativo em que, os ruídos do estado e do controle são identicamente distribuídos, e SLDSM sem ruído multiplicativo.
- quanto à diSLDSMsponibilidade de informação sobre θ : SLDSM com θ observável e θ não observável.
- quanto às restrições estocásticas: restrições nos 1o.s e 2o.s momentos e restrições apenas nos 2o.s momentos.

As expressões para as dinâmicas e as restrições envolvendo as variáveis K^t , X^t e $\varkappa^t$ são todas complexas e interrelacionadas e conseqüentemente, lida-se com problemas complexos e intratáveis analiticamente. Para superar essa dificuldade, um método com procedimento de cálculo variacional é desenvolvido e apresentado no Capítulo 2 e abrange todos os casos da classificação acima, exceto SLDSM com ruído multiplicativo na forma mais geral. Com a premissa citada para o ruído multiplicativo possibilita-se a utilização da técnica de LMIs, que facilita os cálculos numéricos.

É claro que a busca de soluções analíticas bem como de condições necessárias e suficientes de otimalidade sempre estiveram priorizadas no decorrer do presente trabalho. Considerando o caso θ observável e limitando-se as restrições aos segundos momentos, tem-se uma redução significativa na complexidade do problema e para esse caso específico, a solução pode ser obtida de forma direta, isto é, sem necessidade de cálculo variacional. O desenvolvimento do método para esse caso, sem considerar ruído multiplicativo, é apresentado no Capítulo 3. Para esse caso, a solução corresponde a um ótimo global, o que não ocorre com o caso do problema anterior.

Condições necessárias de otimalidade e solução

Neste capítulo, estuda-se a solução dos problemas formalizados em (1.74) e (1.75), respectivamente para θ observável e θ não observável.

A solução proposta baseia-se em condições necessárias de otimalidade sob a qual um método variacional é desenvolvido.

Inicialmente, para simplificação de cálculos, o problema de controle ótimo é reformulado empregando-se a técnica de desigualdades matriciais lineares. Finalmente apresenta-se o algoritmo propriamente dito.

Para evitar repetições de resultados similares para os diversos casos, apresenta-se o método numérico para o caso mais genérico, que corresponde ao SLDSM com ruído multiplicativo e θ observável. Em seguida são apresentadas as adaptações correspondentes para os demais casos.

Para ilustrar o método, um exemplo numérico é apresentado na última seção com objetivo exclusivamente didático para mostrar a convergência do funcional de custo no processo iterativo e as trajetórias otimizadas de algumas variáveis satisfazendo às restrições impostas às mesmas.

2.1 Condições necessárias de otimalidade

As condições necessárias de otimalidade constituem as bases para a solução do problema. A partir dessas condições, um método numérico é desenvolvido, uma vez que o problema na sua forma completa, apresenta-se intratável por meios exclusivamente analíticos. Essas bases tem sua caracterização no teorema definido a seguir. Chama-se à atenção que $K^t \in \mathcal{R}^{s,r}$ correspondendo ao caso de θ observável.

Teorema 2.1 *Suponha que $\mathbf{K}_\theta = \arg \min_{\mathbf{G}_\theta \in \mathcal{K}_\theta} J_{\mathbf{G}_\theta}^T$. Então $\mathbf{K}_\theta$ satisfaz, para cada $t = 0, \dots, T-1$:*

$$\begin{aligned} \min_G \langle Q + G^t R G^t + \mathcal{L}(L^{t+1}, G^t), X^t \rangle \\ = \langle Q + K^{t'} R K^t + \mathcal{L}(L^{t+1}, K^t), X^t \rangle, \end{aligned} \quad (2.1)$$

e as restrições (1.24), (1.25), (1.26) e (1.27), com L^t , ω^t , X^t e $\mathcal{K}^t$, dados por (1.49), (1.50), (1.42) e (1.43) respectivamente.

Prova: Para qualquer $\mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta$, avalia-se o efeito da escolha da regra K^t no custo $J_{\mathbf{K}_\theta}^T$, e emprega-se a representação dada na Proposição 1.3 para o custo remanescente no instante t . Pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \arg \min_{K^t} J_{\mathbf{K}_\theta}^T &= \arg \min_{K^t} \sum_{\ell=0}^{T-1} \langle Q + (K^\ell)' R K^\ell + \mathcal{L}^\ell(L^{\ell+1}, K^\ell), X^\ell \rangle + \langle F, X^T \rangle \\ &= \arg \min_{K^t} \sum_{\ell=t}^{T-1} \langle Q + (K^\ell)' R K^\ell + \mathcal{L}^\ell(L^{\ell+1}, K^\ell), X^\ell \rangle + \langle F, X^T \rangle \\ &= \arg \min_{K^t} \langle L^t, X^t \rangle + \mu_t \omega^t = \arg \min_{K^t} \langle L^t, X^t \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que para obter a última igualdade, usa-se o fato de que $\mu^t \omega^t$ não depende de K^t . Então, usando (1.68) em (2.2) obtém-se (2.1). $\square$

Nota-se, como no princípio de otimalidade de Bellman, que esse teorema mostra que cada elemento K^t da sequência $\mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta$, que minimiza $J_{\mathbf{K}_\theta}^T(0)$, minimiza também o custo remanescente $J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t)$ no instante t .

2.2 Método numérico para o caso genérico

Considera-se nesta seção o caso mais genérico, que corresponde ao SLDSM com ruído multiplicativo, θ observável e restrições nos primeiros e segundos momentos dos vetores de estado e controle. As adaptações para os outros casos serão apresentadas na seção subsequente.

2.2.1 Princípio básico do método

O método apresenta um procedimento iterativo e a sequência de iterações é definida por $\eta \in \{0, 1, \dots\}$. Para cada iteração associa-se uma sequência admissível de controles:

$$\mathbf{G}_\theta(\eta) := \{G^0(\eta), \dots, G^t(\eta), \dots, G^{T-1}(\eta)\} \in \mathcal{K}_\theta,$$

e conseqüentemente são associadas também as sequências $X^t(\eta)$, $\mathcal{X}^t(\eta)$, $L^t(\eta)$ e $\omega^t(\eta)$, definidas por:

$$\mathcal{X}_i^{t+1}(\eta) = \mathcal{V}_i^t(\mathcal{X}^t(\eta)), \quad t \in [0, T-1], \quad \mathcal{X}_i^0(\eta) = \mu_i^0 x(0) \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (2.3)$$

$$X_i^{t+1}(\eta) = \mathcal{T}_i^t(X^t(\eta), G^t(\eta)) + \Psi_i^t(\eta), \quad t \in [0, T-1], \quad X_i^0(\eta) = \mu_i^0 x(0) x(0)' \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (2.4)$$

$$L_i^t(\eta) = Q_i + G^{t'}(\eta) R_i G^t(\eta) + \mathcal{L}_i^t(L^{t+1}(\eta), G^t(\eta)) \quad t \in [0, T-1], \quad L_i^T(\eta) = F_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (2.5)$$

$$\omega_i^t(\eta) = \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}(\eta)) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) H_i \Sigma^t H_i'\} \quad t \in [0, T-1], \quad \omega_i^T = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.6)$$

E a expressão alternativa de $L^t(\eta)$, que explicita $G^t(\eta)$, é dada por:

$$\begin{aligned} L_i^t(\eta) &= \Xi_i^t(\eta) + \Gamma_i^t(\eta) G_i^t(\eta) + \Gamma_i^{t'}(\eta) G_i^{t'}(\eta) + G_i^{t'}(\eta) \Lambda_i^t(\eta) G_i^t(\eta), \quad t \in [0, T-1], \quad \forall i \in \mathcal{N}, \\ L_i^T(\eta) &= F_i, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

em que: $\Xi^t(\eta)$, $\Gamma^t(\eta)$ e $\Lambda^t(\eta)$ são dadas por:

$$\Xi_i^t(\eta) = Q_i + \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) \tilde{A}_{i,s_1}, \quad t \in [0, T-1], \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.8)$$

$$\Gamma_i^t(\eta) = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho_{s_1,s_2} \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) \tilde{B}_{\theta(t),s_2}, \quad t \in [0, T-1], \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.9)$$

$$\Lambda_i^t(\eta) = R_i + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) \tilde{B}_{i,s_1}, \quad t \in [0, T-1], \forall i \in \mathcal{N}. \quad (2.10)$$

Associa-se também o custo remanescente $J_{\mathbf{G}(\eta)}^T(t)$ utilizando a equação (1.48).

$$J_{\mathbf{G}(\eta)}^T(t) = \langle L^t(\eta), X^t(\eta) \rangle + \mu_t' \omega^t(\eta). \quad (2.11)$$

E considerando que a sequência é factível, as restrições dos vetores de estado e controle são atendidas e dadas por:

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} X_i^t(\eta) < \bar{X}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.12)$$

$$\underline{x}(t) < \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_i^t(\eta) < \bar{x}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t X_i^t(\eta) K_i^{t'} < \bar{U}(t), \quad \forall t \in [0, T-1], \quad (2.14)$$

$$\underline{u}(t) < \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i^t \mathcal{X}_i^t(\eta) < \bar{u}(t), \quad \forall t \in [0, T-1]. \quad (2.15)$$

O princípio do método é analisar as condições e/ou implicações da alteração do ganho G^t de uma determinada sequência $\mathbf{G}(\eta) := \{G^0(\eta), \dots, G^t(\eta), \dots, G^{T-1}(\eta)\} \in \mathcal{K}_\theta$, $\eta = 0, 1, \dots$ de controles admissível para t variando de 1 a $T-1$.

Para todo $t \in [0, T-1]$, definem-se as sequências η_t intermediárias entre as iterações $\eta-1$ e η por:

$$\mathbf{G}(\eta_t) := \{G^0(\eta), \dots, G^{t-1}(\eta), G^t(\eta-1), G^{t+1}(\eta-1), \dots, G^{T-1}(\eta-1)\}. \quad (2.16)$$

E por extensão, define-se também:

$$\mathbf{G}(\eta_T) := \mathbf{G}(\eta). \quad (2.17)$$

É fácil notar que $\mathbf{G}(\eta_0) = \mathbf{G}(\eta-1)$.

O elemento $G^t(\eta-1) \in \mathcal{R}^{s,r}$ (candidato a ter seu valor alterado na sequência da iteração η), é posto como variável. É fácil notar que a eventual substituição de $G^t(\eta-1)$ por $G^t(\eta_t)$, que constituirá o elemento $G^t(\eta)$, implicará possivelmente em novos valores para $\{X^{t+1}(\eta), \dots, X^T(\eta)\}$, $\{\mathcal{X}^{t+1}(\eta), \dots, \mathcal{X}^T(\eta)\}$, $\{L^t(\eta), \dots, L^0(\eta)\}$, $\{\omega^{t-1}(\eta), \dots, \omega^0(\eta)\}$, e $J_{\mathbf{G}(\eta)}^T(t)$ para qualquer t .

O problema de determinar-se esse novo elemento $G^t(\eta_t)$, que minimize o custo remanescente $J_{\mathbf{G}(\eta)}^T(t)$, mantendo a nova sequência $\mathbf{G}(\eta_{t+1})$ admissível, pode ser formulado para cada $t \in [0, T-1]$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \gamma^t &:= \min_{G^t(\eta_t)} \langle L^t, X^t \rangle \quad t \in [0, T-1] \\ s.a : &\begin{cases} \text{equação recorrente acoplada de } L^t \text{ dada por (2.5),} \\ \text{equação recorrente acoplada de } \omega^t \text{ dada por (2.6),} \\ \text{dinâmica de } \mathcal{X}^t \text{ dada por (2.3),} \\ \text{dinâmica de } X^t \text{ dada por (2.4),} \\ \text{restrição de segundo momento de } x(t) \text{ dada por (2.12),} \\ \text{restrição de primeiro momento de } x(t) \text{ dada por (2.13),} \\ \text{restrição de segundo momento de } u(t) \text{ dada por (2.14),} \\ \text{restrição de primeiro momento de } u(t) \text{ dada por (2.15),} \\ \mathbf{G}(\eta_t) = \{G^0(\eta), \dots, G^{t-1}(\eta), G^t(\eta_t), G^{t+1}(\eta-1), \dots, G^T(\eta-1)\} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.2.2 Formulação do problema utilizando desigualdades matriciais lineares

Objetivando simplificar os cálculos previstos no estabelecimento do método numérico anunciado, pode-se formular o problema (2.18) utilizando LMIs. E no campo das LMIs, um resultado básico extremamente importante, denominado de Lema do complemento de Schur, exerce um papel chave. Por isso, recapitula-se o mesmo a seguir:

Lema 2.1 . *Suponha $S > 0$. Então*

$$\begin{bmatrix} Z & Y \\ Y' & S \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow Z > YS^{-1}Y'.$$

Prova: Ver (Boyd et al., 1994) Capítulo 2, página 7. □

Na expressão da dinâmica de X^t bem como da equação recorrente para L^t anteriores, não se chamou a atenção para qualquer restrição sobre o coeficiente de correlação $\rho(s_1, s_2)$ entre os ruídos $w_{s_1}^x(t)$ e $w_{s_2}^u(t)$. Para o emprego da técnica de LMIs para resolver o problema, faz-se necessário considerar $\rho(s_1, s_2) = 1$ para $s_1 = s_2$ e $\rho(s_1, s_2) = 0$ para $s_1 \neq s_2$.

No texto a seguir, a hipótese acima é devidamente considerada, uma vez que é condicionante para algumas LMIs.

Considere o problema (2.18) para o qual a sequência $\mathbf{K}_\theta(\eta_t) = \{G^0(\eta), \dots, G^{t-1}(\eta), G^t(\eta-1), G^{t+1}(\eta-1), \dots, G^{T-1}(\eta-1)\} \in \mathcal{K}_\theta$ é admissível. Associada a essa sequência tem-se $X^t(\eta_t)$, $\mathcal{X}^t(\eta_t)$, $L^t(\eta_t)$, $\omega^t(\eta_t)$ e $J_{\mathbf{K}_\theta}^T(\eta_t)$ completamente definidos e as restrições atendidas em $[0, T]$. Na sequência acima deve ser verificado se $G^t(\eta-1)$ pode ser substituído por um novo valor $G^t(\eta_t)$ de modo que a nova sequência $\mathbf{G}(\eta_{t+1}) := \{G^0(\eta), \dots, G^{t-1}(\eta), G^t(\eta_t), G^{t+1}(\eta-1), \dots, G^{T-1}(\eta-1)\}$ permaneça admissível e que minimize $J_{\mathbf{G}(\eta_t)}^T$.

Tomam-se $X^t = X^t(\eta)$, $\mathcal{X}^t = \mathcal{X}^t(\eta)$, $L^{t+1} = L^{t+1}(\eta - 1)$ e $G^m = G^m(\eta - 1)$, $m = t + 1, \dots, T - 1$. Tomam-se também $\Xi^t(\eta)$, $\Gamma^t(\eta)$ e $\Lambda^t(\eta)$ associadas a $L^{t+1}(\eta - 1)$:

Consideram-se as variáveis $G^t(\eta_t) = \{G_1^t, \dots, G_{n_\theta}^t\} \in \mathbb{R}^{s,r}$; $W = \{W_1, \dots, W_{n_\theta}\} \in \mathbb{S}^{r+}$; $Z_u = \{Z_{u_1}, \dots, Z_{u_{n_\theta}}\} \in \mathbb{S}^{r+}$; $\bar{Y} = \{\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n_\theta}\} \in \mathbb{S}^{r+}$ e $\tilde{Y}_{s_1} = \{\tilde{Y}_{1,s_1}, \dots, \tilde{Y}_{n_\theta,s_1}\} \in \mathbb{S}^{r+}$, com $s_1 = 1, \dots, v$; $Z^m = \{Z_1^m, \dots, Z_{n_\theta}^m\} \in \mathbb{S}^{r+}$ e $z^m = \{z_1^m, \dots, z_{n_\theta}^m\} \in \mathbb{R}^r$, $m = t + 1, \dots, T$.

Define-se o seguinte problema de otimização convexa por LMIs:

$$\gamma^t(\eta_t) := \inf \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{W_i\}. \quad (2.19)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} W_i - (X_i^t)^{\frac{1}{2}} \Xi_i^t (X_i^t)^{\frac{1}{2}} - (X_i^t)^{\frac{1}{2}} (\Gamma_i^t G_i^t + G_i^t \Gamma_i^t) (X_i^t)^{\frac{1}{2}} & (X_i^t)^{\frac{1}{2}} G_i^t \Lambda_i^t \\ \star & \Lambda_i^t \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.20)$$

Nas LMIs acima e nas a seguir, o símbolo $\star$ representa o simétrico do bloco (1,2).

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_i & (\bar{A}_i + \bar{B}_i G_i^t) (X_i^t)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.21a)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{i,s_1} & (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} G_i^t) (X_i^t)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad s_1 = 1, \dots, v. \quad (2.21b)$$

$$Z_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \bar{Y}_j + \sum_{s_1=1}^v \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \tilde{Y}_{j,s_1} + \Psi_i^t; \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.22)$$

$$Z_i^{m+1} = \tilde{\mathcal{J}}_i^t(Z^m, G^m) + \sum_{s_1=1}^v \tilde{\mathcal{J}}_{i,s_1}^m(Z^m, G^m) + \Psi_i^m, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad m = t + 1, \dots, T - 1. \quad (2.23)$$

$$z_i^{t+1} = \tilde{\mathcal{V}}_i^t(\mathcal{X}^t, G^t), \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.24)$$

$$z_i^{m+1} = \tilde{\mathcal{V}}_i^t(\mathcal{X}^m, G^m), \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad m = t + 1, \dots, T - 1. \quad (2.25)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{u_i} & G_i^t (X_i^t)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.26a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} Z_{u_i} < \bar{U}(t). \quad (2.26b)$$

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} G_i^m Z_i^m G_i^{m'} < \bar{U}(m), \quad m = t + 1, \dots, T - 1. \quad (2.27)$$

$$\underline{u}(t) < \sum_{i=1}^{n_\theta} G_i^t(\eta_t) \mathcal{Z}_i^t < \bar{u}(t). \quad (2.28)$$

$$\underline{u}(m) < \sum_{i=1}^{n_\theta} G_i^m \mathcal{Z}_i^m < \bar{u}(m), \quad m = t+1, \dots, T-1. \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} Z_i^m < \bar{X}(m), \quad m = t+1, \dots, T. \quad (2.30)$$

$$\underline{x}(m) < \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{Z}_i^m < \bar{x}(m), \quad ; \quad m = t+1, \dots, T. \quad (2.31)$$

O seguinte teorema mostra que o problema de otimização acima exposto é factível.

Teorema 2.2 *Se existe uma sequência de controles $\mathbf{G}(\eta) = \{G^0(\eta), \dots, G^{T-1}(\eta)\} \in \mathcal{K}_\theta$ que satisfaça simultaneamente as dinâmicas (2.3) e (2.4) e as restrições (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15), então o problema de otimização com LMIs em (2.19)–(2.25) tem uma solução factível para $t = 0, \dots, T-1$.*

Prova: Seja uma sequência $\mathbf{G}(\eta) \in \mathcal{K}_\theta$. Por hipótese, $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Omitem-se os índices η ou η_t . Dado $t \in \{0, \dots, T\}$, deve-se encontrar algum $Z^m \in \mathbb{S}^{r+}, m = t+1, \dots, T$ tal que (2.27) e (2.30) sejam atendidas. De (2.12) e (2.14) segue que tomando

$$Z_i^m = X_i^m, \quad \forall i \in \mathcal{N}; \quad m = t+1, \dots, T, \quad (2.32)$$

obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{N}} Z_i^m &= \sum_{i \in \mathcal{N}} X_i^m < \bar{X}(m), \quad m = t+1, \dots, T, \text{ e} \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} G_i^m Z_i^m G_i^{m'} &= \sum_{i \in \mathcal{N}} G_i^m X_i^m G_i^{m'} < \bar{U}(m) \quad m = t+1, \dots, T-1, \end{aligned}$$

o que mostra que (2.27) e (2.30) são validadas. Adicionalmente, a desigualdade (2.26a) é obtida pela aplicação direta do Lema do complemento de Schur em (2.14) relativo ao bloco (2,2).

Agora mostra-se (2.21a) e (2.21b). De (2.32), $X_i^{t+1} \leq Z_i^{t+1}, \forall i \in \mathcal{N}$, e certamente existem $\bar{Y} \in \mathbb{S}^{r+}$ e $\tilde{Y}_{s_1} \in \mathbb{S}^{r+}, s_1 = 1, \dots, v$ tais que, por (1.32) e (2.22),

$$(\bar{A}_i + \bar{B}_i G_i^t) X_i^t (\bar{A}_i + \bar{B}_i G_i^t)' < \bar{Y}_i, \quad i = 1, \dots, n_\theta.$$

$$(\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} G_i^t) X_i^t (\tilde{A}_{i,s_1} + \tilde{B}_{i,s_1} G_i^t)' < \tilde{Y}_{i,s_1}, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad s_1 = 1, \dots, v.$$

Aplicando também o Lema do complemento de Schur nas desigualdades acima, obtêm-se (2.21a) e (2.21b).

Adicionalmente, as igualdades (2.22) e (2.23) seguem como consequência de (1.32), (2.21a) e (2.30). As desigualdades (1.25) e (1.27) implicam (2.28), (2.29), (2.31), (2.24) e (2.25) de forma direta.

Finalmente, mostra-se que (2.20) é satisfeita. Dado qualquer $G_i^t \in \mathbb{R}^{s,r}$, $\exists W_i \in \mathbb{S}^{r+}$, $i = 1, \dots, n_\theta$, tal que

$$W_i > (X_i^t)^{\frac{1}{2}} [Q_i + (G_i^t)' R_i G_i^t + \mathcal{L}_i(L^{t+1}, G_i^t)] (X_i^t)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.33)$$

para todo $i = 1, \dots, n_\theta$. Usando o Lema do complemento de Schur nas desigualdades acima obtém-se (2.20), e este argumento mostra que o problema é factível para qualquer $t \in [0, T - 1]$. $\square$

Lema 2.2 *O problema formulado por (2.19)–(2.20) e o problema*

$$\gamma'(\eta_t) := \min_{G^t(\eta_t)} \langle L^t, X^t \rangle \quad (2.34)$$

são equivalentes.

Prova: Aplicando o Lema do complemento de Schur com respeito ao bloco (2,2) em (2.20), nota-se que (2.20) é satisfeita se e somente se

$$W_i > (X_i^t)^{\frac{1}{2}} [Q_i + (G_i^t)' R_i G_i^t + \mathcal{L}_i(L^{t+1}, G_i^t)] (X_i^t)^{\frac{1}{2}},$$

para todo $i = 1, \dots, n_\theta$. Então

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{W_i\} > \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{[Q_i + (G_i^t)' R_i G_i^t + \mathcal{L}_i(L^{t+1}, G_i^t)] X_i^t\}, \quad (2.35)$$

e tomando o menor $W \in \mathbb{S}^{r+}$ tal que (2.35) ainda seja satisfeita implica em

$$\inf \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{W_i\} = \gamma,$$

que mostra o resultado. $\square$

2.2.3 Algoritmo de otimização

Com base no teorema e lema anteriores, pode-se prover um método numérico para solução do problema. Seja $\eta = 0, 1, \dots$ um contador de iterações, e $G^t(\eta) = (G_1^t(\eta), \dots, G_{n_\theta}^t(\eta))$ uma sequência de controles para todo $t = 0, \dots, T - 1$. Seja agora $\mathbf{G}(\eta) := \{G^0(\eta), \dots, G^{T-1}(\eta)\} \in \mathcal{K}_\theta$ uma sequência de controles admissíveis. Considere também o seguinte algoritmo recursivo:

- *Passo 1:* Seja $\eta = 0$. Tome, se existir, uma sequência inicial $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{K}_\theta$ que satisfaça (2.3), (2.4) e (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15). Adicionalmente, faça $X_i^0(\eta) = \mu_0(i)x_0$ e $x_i^0(\eta) = \mu_0(i)x_0$, $\forall i \in \mathcal{N}$, $\eta = 0, 1, \dots$

- *Passo 2:* Para $t = T - 1, T - 2, \dots, 0$, calcule $L_i^t(\eta) \in \mathcal{S}^{r_0}$ e $\omega_i^t(\eta) \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathcal{N}$ como

$$L_i^t(\eta) = Q_i + G_i^t(\eta)' R_i G_i^t(\eta) + \mathcal{L}_i(L^{t+1}(\eta), G_i^t(\eta)), \quad (2.36)$$

$$\omega_i^t(\eta) = \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}(\eta)) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}(\eta)) H_i \Sigma H_i'\}, \quad (2.37)$$

com $L_i^T(\eta) = F_i$ e $\omega_i^T(\eta) = 0, \forall i \in \mathcal{N}$.

Faça $\eta = \eta + 1$ e vá para o próximo passo (notar que $t = 0$).

- *Passo 3:* Tome $X^t = X^t(\eta_t)$, $\mathcal{X}^t = \mathcal{X}^t(\eta_t)$, $L^t = L^t(\eta_t)$ e $G_i^m = G_i^m(\eta_t), m = t + 1, \dots, T - 1$. Considere as variáveis de sequências matriciais $G^t(\eta) \in \mathcal{R}^{s,r}$, $W = \{W_1, \dots, W_{n_\theta}\} \in \mathcal{S}^{r+}$, $Zu = \{Zu_1, \dots, Zu_{n_\theta}\} \in \mathcal{S}^{r+}$, $\bar{Y} = \{\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n_\theta}\} \in \mathcal{S}^{r+}$, $\tilde{Y}_{s_1} = \{\tilde{Y}_{1,s_1}, \dots, \tilde{Y}_{n_\theta,s_1}\} \in \mathcal{S}^{r+}$, com $s_1 = 1, \dots, v$, $Z^m = \{Z_1^m, \dots, Z_{n_\theta}^m\} \in \mathcal{S}^{r+}$, e as variáveis de sequência de vetores $z^m = \{z_1^m, \dots, z_{n_\theta}^m\} \in \mathcal{R}^r, m = t + 1, \dots, T$, e resolva o problema de otimização convexa via LMIs definido por (2.19)–(2.31), obtendo $G^t(\eta) = G_1^t, \dots, G_{n_\theta}^t$.

Depois de resolver (2.19)–(2.31), se

$$\gamma^t(\eta_t) = \gamma^t(\eta - 1), \text{ tome } G_i^t(\eta) = G_i^t(\eta - 1). \quad (2.38)$$

Caso contrário, considere o valor obtido de $G_i^t(\eta_t)$. Calcule $X^{t+1}(\eta) \in \mathcal{S}^{r_0}$ e $\mathcal{X}^{t+1}(\eta) \in \mathcal{R}^r$, solução do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} X_i^{t+1} &= \Psi_i^t + \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j G_j^t) X_j^t (\bar{A}_j + \bar{B}_j G_j^t)' \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} \left(\sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} G_j^t) X_j^t (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} G_j^t)' \right), \quad i = 1, \dots, n_\theta, \\ \mathcal{X}_i^{t+1} &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j G_j^t(\eta)) \mathcal{X}_j^t, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \end{aligned}$$

Faça $t = t + 1$; se $t \leq T - 1$, volte ao início do *Passo 3*.

- *Passo 4:* Critério de parada. Está relacionado com a variação do custo $J_{\mathbf{G}(\eta)}^T - J_{\mathbf{G}(\eta-1)}^T < \varepsilon$. Se o critério de parada não é satisfeito, então volte ao *Passo 2*.

Comentário 2.1 Como demonstrado no Teorema 2.2, o método numérico acima sempre fornecerá uma solução se for inicializado com uma sequência factível $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{K}_\theta$. Como é de praxe em sistemas com restrições, não existe método numérico direto que faça busca entre todas $\mathbf{G}(0)$ em $\mathcal{K}_\theta$. No entanto, para qualquer $\mathbf{G}(0) \in \mathcal{K}_\theta$, os Passos 1–4 garantem uma solução factível otimizada localmente.

Apresenta-se agora o resultado que garante a convergência do método dado pelo algoritmo anterior.

Teorema 2.3 A sequência $(J_{\mathbf{G}(\eta)}^T)_{\eta=0}^\infty$ gerada pelos Passos 1–4 é não crescente e converge. Além disso, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\eta)$ satisfaz a condição do Teorema 2.1.

Prova: Facilmente vê-se que $(J_{\mathbf{G}(\eta)}^T)_{\eta=0}^\infty$ é limitado inferiormente, uma vez que $0 \leq J_{\mathbf{G}(\eta)}^T, \eta = 0, 1, \dots$

Para provar a convergência basta mostrar que $(J_{\mathbf{G}(\eta)}^T)_{\eta=0}^\infty$ é de fato uma sequência monotônica não crescente.

Toma-se qualquer $\eta \in \{1, 2, \dots\}$ e define-se a sequência de controles de (2.16) e (2.17), reescritas a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\eta_t) &:= \{G^0(\eta), \dots, G^{t-1}(\eta), G^t(\eta-1), G^{t+1}(\eta-1), \dots, G^{T-1}(\eta-1)\}, \quad t \in [0, T-1]. \\ \mathbf{G}(\eta_T) &:= \mathbf{G}(\eta). \end{aligned}$$

Notar que $\mathbf{G}(\eta_0) = \mathbf{G}(\eta-1)$.

Com esta definição, $J_{\mathbf{G}(\eta)}^T = J_{\mathbf{G}(\eta_T)}^T$ e $J_{\mathbf{G}(\eta-1)}^T = J_{\mathbf{G}(\eta_0)}^T$. A seguir encontra-se a variação do custo devido a dois conjuntos subsequentes $\mathbf{G}(\eta_t)$ e $\mathbf{G}(\eta_{t+1})$, de acordo com o procedimento em *Passo 3*. Note que $G^t(\eta-1)$ em $\mathbf{G}(\eta_t)$ é substituído por $G^t(\eta)$ em $\mathbf{G}(\eta_{t+1})$, e todos os termos remanescentes em ambas as sequências continuam os mesmos. Observe primeiramente que (veja Lema 3.5 em (Vargas et al., 2004b) também aplicável ao caso em estudo):

$$X^m(\eta_t) = X^m(\eta_{t+1}), \quad \forall 0 \leq m \leq t,$$

e

$$\omega^m(\eta_t) = \omega^m(\eta_{t+1}), \quad \forall 0 \leq m \leq T.$$

Assim, $\mu_t'(\omega^t(\eta_t) - \omega^t(\eta_{t+1})) = 0$. Agora, pode-se escrever de acordo com a Proposição 1.3 a variação do custo no instante t .

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{G}(\eta_{t+1})}^T(t) - J_{\mathbf{G}(\eta_t)}^T(t) &= \langle Q + G^t(\eta)' R G^t(\eta) + \mathcal{L}(L^{t+1}, G^t(\eta)), X^t \rangle \\ &\quad - \langle Q + G^t(\eta-1)' R G^t(\eta-1) + \mathcal{L}(L^{t+1}, G^t(\eta-1)), X^t \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por outro lado, do Lema 2.2 segue que $G^t(\eta)$ obtido por (2.19)–(2.25) é tal que

$$G^t(\eta) = \arg \min_G \langle Q + G' R G + \mathcal{L}(L^{t+1}, G), X^t \rangle. \quad (2.40)$$

Portanto de (2.39) e (2.40), $\exists \alpha^t \in \mathbb{R}, \alpha^t \geq 0, t = 0, \dots, T-1$, tal que

$$J_{\mathbf{G}(\eta_t)}^T(t) - J_{\mathbf{G}(\eta_{t+1})}^T(t) = \alpha^t, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (2.41)$$

Adicionando (2.41) de $t = 0$ a $t = T-1$ obtém-se:

$$J_{\mathbf{G}(\eta-1)}^T - J_{\mathbf{G}(\eta)}^T = \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t \geq 0, \quad (2.42)$$

o que implica que a sequência $(J_{\mathbf{G}(\eta)}^T)_{\eta=0}^\infty$ é monotônica não crescente. Assim $(J_{\mathbf{G}(\eta)}^T)_{\eta=0}^\infty$ converge e esse fato implica que existe $\mathbf{G}_\infty \in \mathcal{K}_\theta$ tal que $\mathbf{G}_\infty = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\eta)$, pois a condição (2.38) no *Passo 3* garante que $G^t(\eta) = G^t(\eta-1)$ quando $\eta \rightarrow \infty$.

Finalmente conclui-se que a sequência de ganhos de realimentação $\mathbf{G}_\infty$ satisfaz as condições necessárias de otimalidade do Teorema 2.1, e $\mathcal{K}^t, X^t, L^t$ e ω^t obtidos por $\mathbf{G}_\infty$ de acordo com (1.31), (1.32), (1.68) e (1.50), respectivamente, e também as desigualdades (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15). $\square$

2.3 Adaptações do método numérico para os demais casos

Na Seção 2.2 considera-se o caso mais geral de ruído multiplicativo e estado de Markov observável. O ideal seria escrever textos semelhantes para os demais casos, alterando, quando aplicável, aquele texto e as referências citadas no mesmo. Considerando a baixa quantidade das diferenças e objetivando simplificação, prefere-se expor as diferenças e listar as adaptações para os outros casos.

Para SLDSM sem ruído multiplicativo: Para SLDSM sem ruído multiplicativo, as matrizes do sistema não são estocásticas e portanto nas expressões das dinâmicas de $X^t(\eta)$ e $x^t(\eta)$ e nas equações acopladas recorrentes de $L^t(\eta)$ e suas variáveis associadas $\Lambda^t(\eta)$, $\Gamma^t(\eta)$ e $\Xi^t(\eta_t)$ fazem-se $\bar{A}_i = A_i$, $\bar{A}_{i,s_1} = 0$, $\bar{B}_i = B_i$ e $\bar{B}_{i,s_2} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n_\theta$ e $s_1 = s_2 = 1, \dots, v$. Nas expressões com operadores isso equivale a: $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot, \cdot)$ e $\tilde{\mathcal{L}}(\cdot, \cdot)$ são eliminados e $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot, \cdot)$, $\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \cdot)$ e $\tilde{\mathcal{L}}(\cdot, \cdot)$ são substituídos respectivamente por $\mathcal{T}(\cdot, \cdot)$, $\mathcal{V}(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{L}(\cdot, \cdot)$.

Na formulação do problema utilizando LMIs, para o caso sem ruído multiplicativo, as variáveis $\tilde{Y}_{s_1} \in \mathbb{S}^{r+}$ são eliminadas, $\tilde{Y}_i$ é substituída por Y_i , termos com o operador $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot, \cdot)$ são eliminados e termos com os operadores $\tilde{\mathcal{T}}(\cdot, \cdot)$ e $\tilde{\mathcal{V}}(\cdot, \cdot)$, são substituídos respectivamente por $\mathcal{T}(\cdot, \cdot)$ e $\mathcal{V}(\cdot, \cdot)$. Em consequência:

As LMIs dadas por (2.21a) e as LMIs dadas por (2.21b) são substituídas por um único conjunto de LMIs dado por:

$$\begin{bmatrix} Y_i & (A_i + B_i G_i^t)(X_i^t)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.43)$$

As LMIs dadas por (2.22) são substituídas por:

$$Z_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} Y_j + \Psi_i^t ; \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.44)$$

As LMIs dadas por (2.23) são substituídas por:

$$Z_i^{m+1} = \mathcal{T}_i^t(Z^m, G^m) + \Psi_i^m \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad m = t+1, \dots, T-1. \quad (2.45)$$

As LMIs dadas por (2.24) são substituídas por:

$$z_i^{t+1} = \mathcal{V}_i^t(\kappa^t, G^t) ; \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (2.46)$$

Para θ não observável: Para θ não observável, $G^t(\eta)$ (ou $K^t(\eta)$) pertencente a $\mathbb{R}^{s,r}$ deve ser considerado como $G^t(\eta)$ (ou $K^t(\eta)$) pertencente a $\mathbb{R}^{s,r}$, e portanto, todo $G_i^t(\eta)$ (ou $K_i^t(\eta)$) deve ser substituído por $G^t(\eta)$ (ou $K^t(\eta)$) $\in \mathbb{R}^{s,r}$. Consequentemente as expressões das restrições em (2.14) e

(2.15) são respectivamente dadas por:

$$K^t \sum_{i=1}^{n_\theta} X_i^t(\eta) K^{t'} < \bar{U}(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (2.47)$$

$$\underline{u}(t) < K^t \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_i^t(\eta) < \bar{u}(t), \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (2.48)$$

E essas novas expressões das restrições de controle para θ não observável, permitem simplificação na formulação do problema utilizando LMIs. Não há mais necessidade das variáveis Zu_i , que são portanto eliminadas e em consequência:

As LMIs (2.26a) e (2.26b) são substituídas por uma única LMI, dada por:

$$\begin{bmatrix} \bar{U}(t) & G^t \left(\sum_{i=1}^{n_\theta} X_i^t \right)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0. \quad (2.49)$$

As LMIs dadas por (2.27) passam a ser dadas por:

$$G^m \left(\sum_{i=1}^{n_\theta} Z_i^m \right) G^{m'} < \bar{U}(m), \quad m = t+1, \dots, T-1. \quad (2.50)$$

A LMI dada por (2.28) passa a ser dada por:

$$\underline{u}(t) < G^t \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_i^t < \bar{u}(t). \quad (2.51)$$

As LMIs dadas por (2.29) passam a ser dadas por:

$$\underline{u}(m) < G^m \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{Z}_i^m < \bar{u}(m), \quad m = t+1, \dots, T-1. \quad (2.52)$$

Para SLDSM sem ruído multiplicativo e θ não observável: Para o caso de SLDSM sem ruído multiplicativo e θ não observável, todas as adaptações listadas acima para os dois casos devem ser consideradas.

Validade geral dos resultados: Quanto ao Teorema 2.1, basta uma inspeção para verificar que o mesmo é válido para os diversos casos, devendo apenas substituir as expressões das restrições e das variáveis envolvidas para aquelas correspondentes a cada caso. Igualmente verifica-se que o Teorema 2.2, o Lema 2.20, o algoritmo propriamente dito e o Teorema 2.3 valem para todos os casos com as adaptações descritas.

2.4 Exemplo ilustrativo

Considere o mesmo exemplo apresentado em (Vargas et al., 2004b), para o qual impõem-se restrições nos vetores de estado e de controle. O SLDSM é de terceira ordem dado por:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i(1,1) & a_i(1,2) & a_i(1,3) \\ a_i(2,1) & a_i(2,2) & a_i(2,3) \\ 0 & 0 & 0.2231 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} b_i(1,1) & b_i(1,2) & b_i(1,3) & b_i(1,4) \\ b_i(2,1) & b_i(2,2) & b_i(2,3) & b_i(2,4) \\ -0.7769 & -3*0.7769 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$H_i = I, Q_i = I, R_i = 1, F_i = 0, i = 1, 2, 3, 4,$$

em que os parâmetros são os mesmos listados em (Geromel et al., 1993):

$$a_i(1:2, 1:3) = m_i(1:2, 1:3) \text{ e } b_i(1:2, 1) = m_i(1:2, 4), b_i(1:2, 2) = 3 * m_i(1:2, 4),$$

$$b_i(1:2, 3) = -1 * m_i(1:2, 4) \text{ e } b_i(1:2, 3) = -10 * m_i(1:2, 4) \text{ com } m_i \text{ dado por:}$$

$$m_1(1,1) = 0.9572; m_1(1,2) = 0.8329; m_1(1,3) = 2.2670; m_1(1,4) = 2.5873;$$

$$m_2(1,1) = 0.9693; m_2(1,2) = 0.8767; m_2(1,3) = 1.9881; m_2(1,4) = 11.4728;$$

$$m_3(1,1) = 0.9313; m_3(1,2) = 2.3567; m_3(1,3) = 5.2814; m_3(1,4) = -1.3790;$$

$$m_4(1,1) = 0.9498; m_4(1,2) = 1.4220; m_4(1,3) = 3.8014; m_4(1,4) = 4.7405;$$

$$m_1(2,1) = 0.0127; m_1(2,2) = 0.9638; m_1(2,3) = -0.2682; m_1(2,4) = 0.2909;$$

$$m_2(2,1) = 0.0040; m_2(2,2) = 0.9694; m_2(2,3) = -0.2691; m_2(2,4) = 0.2818;$$

$$m_3(2,1) = 0.0102; m_3(2,2) = 0.9445; m_3(2,3) = -0.7538; m_3(2,4) = 0.7506;$$

$$m_4(2,1) = -0.0327; m_4(2,2) = 0.9161; m_4(2,3) = -0.8440; m_4(2,4) = 0.6196.$$

Consideram-se adicionalmente dados $T = 4$, $x_0 = [-0.27 \ 1.2 \ 2.1]'$, $\mu_0 = [0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25]'$, $\mathbb{P} = [p_{ii} = 0.88, p_{ij} = 0.04, \forall i, j \in \mathcal{N}, i \neq j]$ e $\Sigma = 0.25I$.

Para restrições e apenas para fins didáticos, considera-se a imposição das seguintes restrições aos vetores de estado e controle:

$$\bar{X}(t) = 112I + 8E, \quad \underline{x}(t) = [-5 \ -5 \ -5]', \quad \bar{x}(t) = [5 \ 5 \ 5]',$$

$$\bar{U}(t) = 0.8I + 0.2E, \quad \underline{u}(t) = [-0.6 \ -0.6 \ -0.6]', \quad \bar{u}(t) = [0.6 \ 0.6 \ 0.6]',$$

em que I representa a matriz identidade e E representa a matriz com todos elementos iguais a 1.

Na solução computacional empregam-se o "software" *matlab* e as ferramentas de "LMI solvers" SeDuMi com interface Yalmip (Sturm, 1999).

Consideram-se os casos de θ observável e θ não observável. Uma vez aplicado o algoritmo, os resultados obtidos são descritos a seguir.

A Figura 2.1 ilustra a evolução do custo $J_{G_\theta(\eta)}^T$ e de $J_{G(\eta)}^T$ em função do número de iterações η . Pode-se observar que o algoritmo converge rapidamente para o valor de custo mínimo local que, como esperado, no presente caso de θ observável, é inferior ao obtido para θ não observável. E como também esperado, esses valores são maiores do que o valor obtido para o mesmo problema na ausência de restrições em (Vargas et al., 2004b).

Parte-se de uma mesma trajetória inicial de custo $J_{G_\theta(0)}^T = J_{G(0)}^T = 179,024$ e os custos da trajetórias otimizadas são 32.540 e 98.85, respectivamente para θ observável e θ não observável.

A sequência otimizada $\mathbf{K}_\theta = \{K^0, K^1, K^2, K^3\}$ com $K^t \in \mathcal{R}^{3,4}$, correspondente ao caso de θ observável, é dada por:

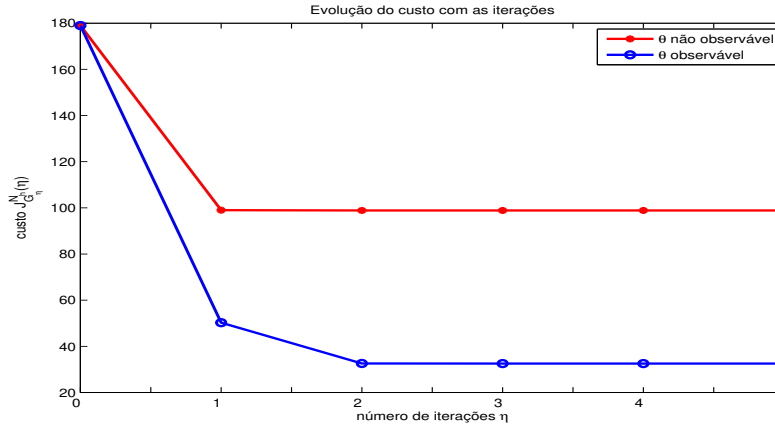


Figura 2.1: Evolução do custo $J_{G(\eta)}^T$ para θ observável e não observável.

$$\begin{aligned}
 K_1^0 &= \begin{bmatrix} -0.0301 & -0.0567 & 0.0232 \\ 0.2946 & 0.0014 & 0.0213 \\ 0.2160 & 0.0542 & -0.0175 \\ 0.0922 & 0.0534 & 0.0786 \end{bmatrix}, \quad K_2^0 = \begin{bmatrix} -0.0181 & -0.0183 & 0.0100 \\ -0.2890 & -0.0399 & -0.0086 \\ 0.1842 & 0.0342 & -0.0172 \\ -0.0302 & 0.0041 & 0.0187 \end{bmatrix}, \\
 K_3^0 &= \begin{bmatrix} -16.6502 & 14.6970 & -10.4457 \\ -2.4575 & 33.0497 & -18.9260 \\ -4.0080 & -0.2537 & -0.7813 \\ -2.7110 & 0.3679 & -0.7231 \end{bmatrix}, \quad K_4^0 = \begin{bmatrix} 0.1888 & -0.1635 & 0.1197 \\ -0.1527 & -0.0315 & 0.0050 \\ 0.2522 & 0.0326 & -0.0413 \\ 0.0583 & 0.0143 & 0.0973 \end{bmatrix}. \\
 \\
 K_1^1 &= \begin{bmatrix} -0.0034 & -0.0084 & -0.0009 \\ -0.0101 & -0.0251 & -0.0028 \\ 0.0038 & 0.0332 & -0.0324 \\ 0.0326 & 0.0263 & 0.0863 \end{bmatrix}, \quad K_2^1 = \begin{bmatrix} -0.0008 & -0.0039 & 0.0045 \\ -0.0025 & -0.0117 & 0.0136 \\ 0.0012 & 0.0198 & -0.0350 \\ 0.0075 & 0.0023 & 0.0252 \end{bmatrix}, \\
 K_3^1 &= \begin{bmatrix} 0.0120 & 0.0395 & 0.0662 \\ 0.0361 & 0.1182 & 0.1983 \\ -0.0533 & -0.2071 & -0.2698 \\ -0.0256 & -0.0053 & -0.1886 \end{bmatrix}, \quad K_4^1 = \begin{bmatrix} -0.0010 & -0.0083 & 0.0064 \\ -0.0030 & -0.0250 & 0.0191 \\ -0.0027 & 0.0353 & -0.0722 \\ 0.0187 & 0.0209 & 0.0887 \end{bmatrix}. \\
 \\
 K_1^2 &= \begin{bmatrix} -0.0039 & -0.0038 & -0.0037 \\ -0.0116 & -0.0114 & -0.0111 \\ 0.0067 & 0.0066 & -0.0162 \\ 0.0320 & 0.0314 & 0.0832 \end{bmatrix}, \quad K_2^2 = \begin{bmatrix} -0.0009 & -0.0008 & 0.0035 \\ -0.0027 & -0.0025 & 0.0104 \\ 0.0015 & 0.0014 & -0.0286 \\ 0.0074 & 0.0069 & 0.0236 \end{bmatrix}, \\
 K_3^2 &= \begin{bmatrix} 0.0054 & 0.0108 & 0.0388 \\ 0.0163 & 0.0325 & 0.1163 \\ -0.0094 & -0.0188 & -0.0898 \\ -0.0452 & -0.0900 & -0.2695 \end{bmatrix}, \quad K_4^2 = \begin{bmatrix} -0.0021 & -0.0034 & -0.0028 \\ -0.0062 & -0.0101 & -0.0084 \\ 0.0036 & 0.0058 & -0.0178 \\ 0.0172 & 0.0280 & 0.0755 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$K_1^3 = K_2^3 = K_3^3 = K_4^3 = \text{zeros}(4, 3).$$

A sequência otimizada $\mathbf{K} = \{K^0, K^1, K^2, K^3\}$ com $K^t \in \mathbb{R}^{3,4}$, correspondente ao caso de θ não observável, é dada por:

$$K^0 = \begin{bmatrix} -1.334 & 0.532 & -0.456 \\ -0.462 & -0.000 & -0.000 \\ -0.529 & 0.001 & -0.204 \\ -0.213 & 0.075 & 0.000 \end{bmatrix}, \quad K^1 = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.011 & 0.009 \\ 0.006 & 0.032 & 0.028 \\ -0.015 & -0.072 & -0.066 \\ 0.010 & 0.035 & 0.038 \end{bmatrix},$$

$$K^2 = \begin{bmatrix} -0.001 & -0.001 & 0.003 \\ -0.003 & -0.003 & 0.010 \\ 0.001 & 0.002 & -0.028 \\ 0.007 & 0.008 & 0.026 \end{bmatrix}, \quad K^3 = \text{zeros}(4, 3).$$

Apresentam-se a seguir algumas ilustrações cujo objetivo é apenas didático. Por isso, objetivando maior clareza, as diferentes coordenadas das diversas variáveis vetoriais não são identificadas.

Para θ observável, as Figuras 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5, que mostram respectivamente as coordenadas de $E[x(t)]$ restritas entre -5 e $+5$, os autovalores de $(E[x(t)^2] - \bar{X}(t))$ devidamente menores ou iguais a zero, as coordenadas de $E[u(t)]$ restritas entre -0.6 e $+0.6$ e os autovalores de $(E[u(t)^2] - \bar{U}(t))$ também devidamente menores ou iguais a zero, ilustram o atendimento às restrições no horizonte T .

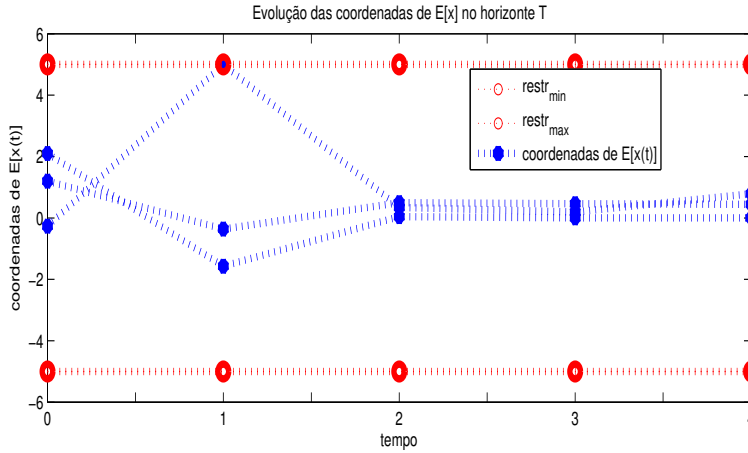


Figura 2.2: Coordenadas de $E[x(t)]$ para θ observável.

Para θ não observável, de forma análoga, o atendimento às restrições no horizonte T é ilustrado nas figuras 2.6, 2.7, 2.8 e 2.9, que mostram respectivamente as coordenadas de $E[x(t)]$ restritas entre -5 e $+5$, os autovalores de $(E[x(t)^2] - \bar{X}(t))$ devidamente menores ou iguais a zero, as coordenadas de $E[u(t)]$ restritas entre -0.6 e $+0.6$ e os autovalores de $(E[u(t)^2] - \bar{U}(t))$ também devidamente menores ou iguais a zero.

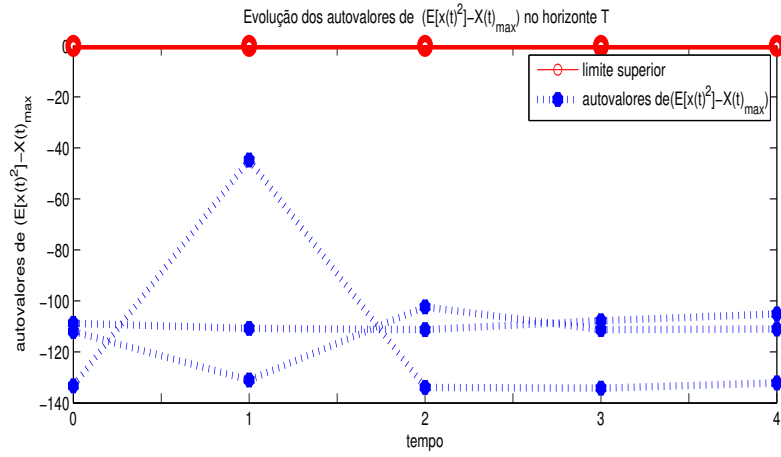


Figura 2.3: Autovalores de $(E[x^2(t)] - \bar{X}(t))$ para θ observável.

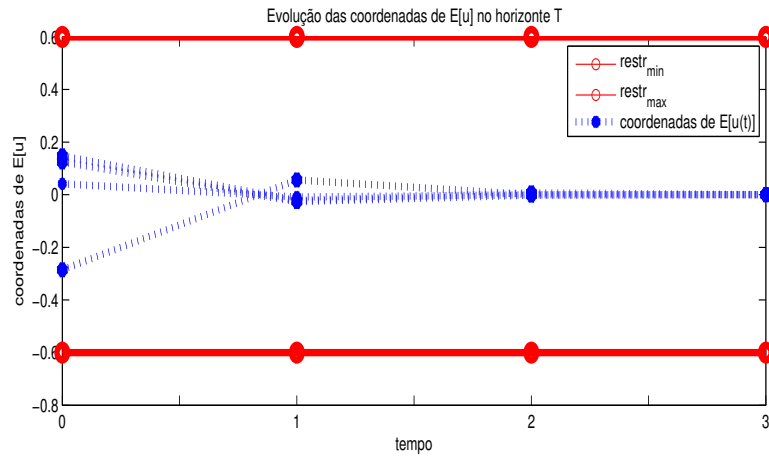


Figura 2.4: Coordenadas de $E[u(t)]$ para θ observável.

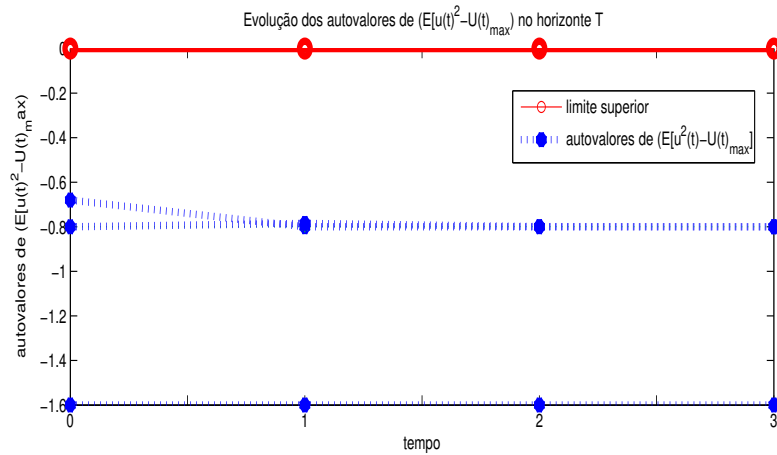


Figura 2.5: Autovalores de $(E[u^2(t)] - \bar{U}(t))$ para θ observável.

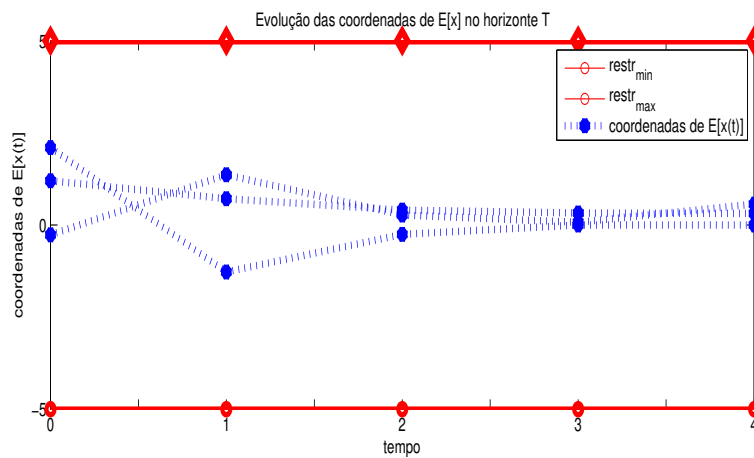


Figura 2.6: Coordenadas de $E[x(t)]$ para θ não observável.

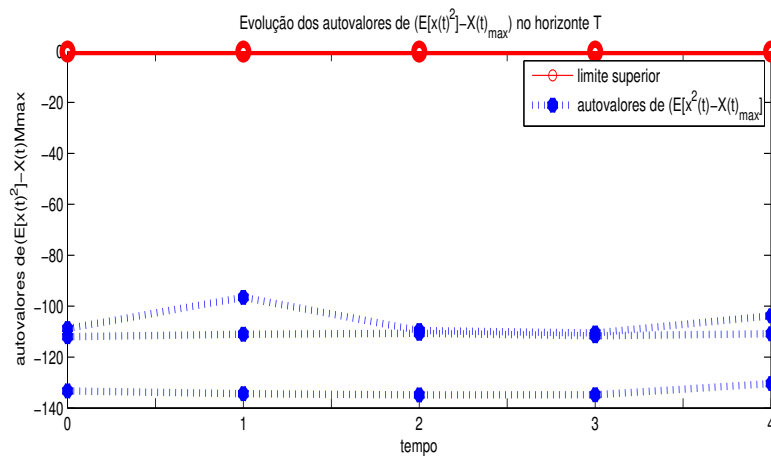


Figura 2.7: Autovalores de $(E[x^2(t)] - \bar{X}(t))$ para θ não observável.

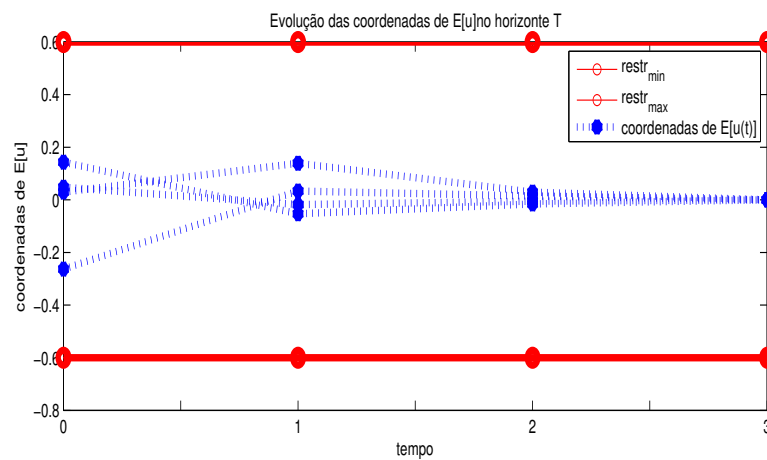


Figura 2.8: Coordenadas de $E[u(t)]$ para θ não observável.

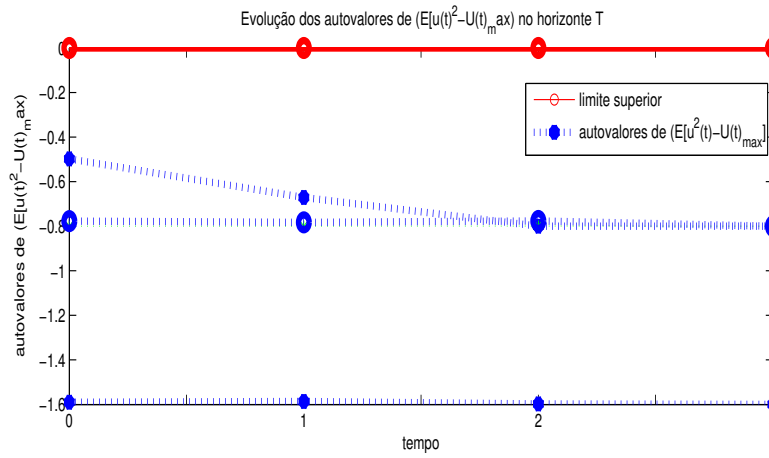


Figura 2.9: Autovalores de $(E[u^2(t)] - \bar{U}(t))$ para θ não observável.

Conclusões parciais Com o exemplo apresentado, notam-se, pelas ilustrações, os aspectos de convergência requerida, o atendimento das restrições de primeiro e segundo momentos e a comparação dos custos para θ observável e não observável.

O método numérico com procedimento variacional, apresentado neste capítulo, constitui-se numa ferramenta eficaz e ao mesmo tempo simples a ser utilizada em inúmeras aplicações. A simplicidade se deve à praticidade de solução numérica com a utilização de LMIs.

Para o caso de SLDSM com ruído multiplicativo, essa simplicidade tem o preço de aplicar-se apenas nos casos em que os ruídos de estado (matriz A estocástica) e controle (matriz B estocástica) são idênticamente distribuídos. No entanto, o método não perde importância uma vez que são inúmeras as aplicações práticas que se encaixam nessas condições.

Caso da cadeia de Markov observável e restrições apenas no segundo momento

Em problemas de controle ótimo estocástico objetiva-se sempre a busca por condições necessárias e suficientes de otimalidade e nem sempre esse objetivo é alcançado. No Capítulo 2, a solução apresentada utiliza um procedimento numérico envolvendo cálculo variacional que se baseia em condições necessárias de otimalidade e portanto pode-se garantir apenas uma otimalidade local.

Considera-se agora neste capítulo, um problema menos complexo que os estudados, caracterizado por $\theta(t)$ sempre observável, sem quaisquer restrições nos primeiros momentos, e ausência de ruído multiplicativo. Para esse problema, apresenta-se uma solução utilizando também a técnica de LMIs com procedimento numérico mais simples e sem a necessidade de cálculo variacional. Como a solução satisfaz as condições necessárias e suficientes de otimalidade, pode-se afirmar que a mesma corresponde a um ótimo global.

3.1 Formulação do problema

Esse problema corresponde àquele formulado no Capítulo 1 em (1.12), do qual se eliminam as restrições de primeiro momento.

Considerando a observabilidade de x e de θ para todo $t = 0, \dots, T - 1$, e assumindo uma estrutura de realimentação linear de estado, define-se o controlador dado por:

$$u(t) = K(t, \theta(t))x(t), \quad t = 0, \dots, T - 1, \quad (3.1)$$

em que $K(t, \theta(t)) \in \mathbb{R}^{s,r}$, $\theta(t) = 1, \dots, n_\theta$, e $t = 1, \dots, T - 1$. Seja $\mathbf{K}_\theta := \{K^t \in \mathcal{M}^{s,r}, t = 0, \dots, T - 1\}$ uma sequência de ganhos de realimentação para o horizonte T e seja $\mathcal{K}_\theta$ a classe de todos os valores admissíveis para $\mathbf{K}_\theta$.

O sistema com essa classe de controlador é dado por:

$$\mathcal{G}_{\mathbf{K}_\theta}^T : \begin{cases} x(t+1) = (A_{\theta(t)} + B_{\theta(t)}K(t, \theta(t)))x(t) + H_{\theta(t)}w(t), \\ y(t) = (C_{\theta(t)} + D_{\theta(t)}K(t, \theta(t)))x(t), \\ y(T) = S_{\theta(T)}x(T), \\ \theta(t+1) \sim \mu(t+1) = \mathbb{P}'\mu(t), \\ x(0) = x_0, \\ \theta(0) = \theta_0, \\ t = 0, \dots, T-1. \end{cases} \quad (3.2)$$

A função custo é definida por:

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{T-1} \|(C_{\theta(t)} + D_{\theta(t)}K(t, \theta(t)))x(t)\|^2 + \|(S_{\theta(T)}x(T))\|^2 \right]. \quad (3.3)$$

E as restrições são dadas por:

$$E[\|u(t)\|^2] \leq \bar{U}(t) \quad \text{e} \quad E[\|x(t)\|^2] \leq \bar{X}(t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T, \quad (3.4)$$

nas quais $\bar{U}(t)$ e $\bar{X}(t)$ são sequências de matrizes dadas.

E o problema pode ser sumarizado por:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{K}_\theta} J_{\mathbf{K}_\theta}^T, \text{ dado por (3.3),} \\ & s.a : \begin{cases} \text{dinâmica do processo dada por } \mathcal{G}_{\mathbf{K}_\theta}, \\ \text{restrições dadas por (3.4).} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Parte-se da formulação determinística do problema já apresentada em (1.72) no Capítulo 1, que adaptada para o presente caso, é dada por:

$$\begin{aligned} & \gamma^0 = \min_{\mathbf{K}_\theta} J_{\mathbf{K}_\theta}^T \text{ dado por (1.44)} \\ & s.a : \begin{cases} \text{dinâmica de } X^t \text{ dada por (1.39),} \\ \text{restrição de 2o. momento do estado (1.24),} \\ \text{restrição de 2o. momento do controle (1.27),} \\ \text{em que } \mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta := \{K^t \in \mathcal{R}^{s,r} : t = 0, \dots, T-1\} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

No problema sem restrições, os elementos de $\mathbf{K}_\theta$ são usualmente computados por meio das bem conhecidas equações algébricas acopladas de Riccati (ver (Costa, Fragoso e Marques, 2005; do Val et al., 1999) entre outros). Na presença de restrições, essas equações não fornecem a solução ótima.

A seguir, é apresentado um método baseado em um problema de otimização convexa escrito em termos de LMIs, que determina a solução que satisfaz as condições necessárias e suficientes de otimalidade. Portanto essa solução corresponde ao caso de otimalidade global para o problema de controle (3.5).

Este método é detalhado a partir da próxima seção.

3.2 Solução ótima para regulação irrestrita

Supõe-se inicialmente um sistema sem restrições e não controlado, isto é, um sistema autônomo (isto é $u(t) = 0$). Para esse sistema faz-se $K(t, \theta(t)) = 0$ nas expressões do custo (1.44) e da dinâmica do segundo momento (1.39), na forma determinística, obtendo-se:

Para o custo:

$$J^T(X(0)) = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{C_i X_i(t) C_i' + S_i X_i(T) S_i'\}. \quad (3.7)$$

Para a dinâmica do 2o. momento de $x(t)$:

$$\begin{aligned} X_i(t+1) &= \sum_{j=1}^{n_\theta} P_{ji} (A_j X_j(t) A_j' + \mu_j(t) H_j \Sigma H_j'), \quad t \in [0, T-1], \\ X_i(0) &= \mu_i(0) x(0) x(0)', \quad \forall i \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para facilitar a notação, utiliza-se o operador $\mathcal{D}(\phi) : \mathbb{S}^{r_0} \rightarrow \mathbb{S}^{r_0}$ para $\phi \in \mathbb{S}^{r_0}$ já definido anteriormente no Capítulo 1 por $\mathcal{D}_i(\phi) = \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \phi_j$.

Utilizando $(AX(t)A' + \mu(t)H\Sigma H') \in \mathbb{S}^{r_0}$ para representar a coleção dos n_θ elementos dados por $(A_j X_j(t) A_j' + \mu_j(t) H_j \Sigma H_j') \in \mathbb{S}^{r_0}$ e o operador $\mathcal{D}(\phi)$ definido acima, a expressão da dinâmica em (3.8) passa a ser representada por:

$$\begin{aligned} X_i(t+1) &= \mathcal{D}_i(AX(t)A' + \mu(t)H\Sigma H'), \quad t \in [0, T-1], \\ X_i(0) &= \mu_i(0) x(0) x(0)', \quad \forall i \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Apresenta-se a seguir uma forma equivalente de expressar o custo (3.7) sujeito a (3.9). Considere o seguinte problema de otimização:

$$\rho_1 := \inf \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{C_i X_i(t) C_i' + S_i X_i(T) S_i'\} \quad (3.10)$$

s.a:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i(AP(t)A' + \mu(t)H\Sigma H') - P_i(t+1) &< 0, \quad t = 0, \dots, T-1, \\ P_i(0) = X_i(0) &= \mu_i(0) x(0) x(0)', \quad \forall i \in \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Lema 3.1 *O valor de ρ_1 dado por (3.10)–(3.11) é igual ao valor de $J^T(X(0))$ dado por (3.7).*

Prova: Desde que o custo J^T em (3.3) pode ser expresso por (3.7), o valor de $X(t) \in \mathbb{S}^{r_0}$ satisfazendo (3.9) pode ser aproximado por $P(t)$ em (3.11) para todo $t = 1, \dots, T-1$. De fato, tal aproximação satisfaz $\|X(t) - P(t)\| \leq \varepsilon$ com $\varepsilon \rightarrow 0$, o que é garantido pelo “ínfimo” em (3.10). Isto prova o resultado. $\square$

Considera-se agora um problema de otimização em LMIs, com as variáveis $R(t) \in \mathbb{S}^{r+}$ e $W(t) \in \mathbb{S}^{r+}$ que será muito útil a frente.

$$\rho_2 := \inf \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{W_i(t)\}, \quad (3.12)$$

$$W_i(0) - C_i X_i(0) C_i' > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta; \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} W_i(t) & C_i \mathcal{D}_i(R(t-1)) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} W_i(T) & S_i \mathcal{D}_i(R(T-1)) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(T-1)) \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.15)$$

$$R_i(0) - A_i X_i(0) A_i' - \mu_i(0) H_i \Sigma H_i' > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} R_i(t) - \mu_i(t) H_i \Sigma H_i' & A_i \mathcal{D}_i(R(t-1)) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (3.17)$$

O símbolo $\star$ representa o simétrico do bloco $(1, 2)$.

O resultado a seguir é útil para provar o resultado principal deste capítulo.

Lema 3.2 *Os problemas descritos anteriormente são equivalentes, isto é, $\rho_1 = \rho_2$.*

Prova: ($\rho_1 \geq \rho_2$). Suponha que (3.10)–(3.11) sejam válidas. Então de (3.11) segue que existe $\Delta(t) \in \mathbb{S}^{r+}$ tal que

$$-\mathcal{D}_i(\Delta(t)) = \mathcal{D}_i(AP(t)A' + \mu(t)H\Sigma H') - P_i(t+1) < 0,$$

para todo $t = 0, \dots, T-1$. Tome-se $R_i(t) = A_i P_i(t) A_i' + \mu_i(t) H_i \Sigma H_i' + \Delta_i(t)$ para todo $i \in \mathcal{N}$. Assim:

$$R_i(t) > A_i P_i(t) A_i' + \mu_i(t) H_i \Sigma H_i', \quad (3.18)$$

e (3.16) é provada para $t = 0$ desde que $P(0) = X(0)$. Para provar o resultado para $t = 1, \dots, T-1$, observe-se do Lema do complemento de Schur que a desigualdade (3.18) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} R_i(t) - \mu_i(t) H_i \Sigma H_i' & A_i P_i(t) \\ \star & P_i(t) \end{bmatrix} > 0. \quad (3.19)$$

Faça $P_i(t+1) = \mathcal{D}_i(R(t))$ para todo $i \in \mathcal{N}$. Aplicando-se o operador linear $\mathcal{D}_i(\cdot)$ em (3.18) tem-se:

$$P_i(t+1) = \mathcal{D}_i(R(t)) > \mathcal{D}_i(AP(t)A' + \mu(t)H\Sigma H'). \quad (3.20)$$

Empregando (3.19) e (3.20), obtém-se a desigualdade (3.17). Ainda mais, a desigualdade (3.14) é obtida combinando o lema do complemento de Schur e o fato de que existe $W(t) \in \mathbb{S}^{r+}$ tal que $W_i(t) > C_i P_i(t) C_i'$ e todo $t = 0, \dots, T-1$ e $W_i(T) > S_i P_i(T) S_i'$ para todo $i \in \mathcal{N}$. Isto mostra que $\rho_1 \geq \rho_2$.

($\rho_1 \leq \rho_2$) Usando o lema do complemento de Schur em (3.17), tem-se:

$$R_i(t) > A_i \mathcal{D}_i(R(t-1)) A_i' + \mu_i(t) H_i \Sigma H_i'. \quad (3.21)$$

Faça $P_i(t) = \mathcal{D}_i(R(t-1))$ para todo $i \in \mathcal{N}$. Aplicando-se o operador $\mathcal{D}_i(\cdot)$ em (3.21), tem-se:

$$P_i(t+1) = \mathcal{D}_i(R(t)) > \mathcal{D}_i(AP(t)A' + \mu(t)H\Sigma H'), \quad (3.22)$$

que mostra (3.11) para $t = 1, \dots, T-1$. A desigualdade (3.11) também é válida para $t = 0$ desde que (3.16) implica $P_i(0) = \mathcal{D}_i(R(0)) > \mathcal{D}_i(AX(0)A' + \mu(0)H\Sigma H')$ para todo $i \in \mathcal{N}$. Finalmente, a implicação (3.14) $\Rightarrow W_i(t) > C_i \mathcal{D}_i(R(t-1))C_i' = C_i P_i(t)C_i'$ é obtida por raciocínio análogo, e é claro que (3.13) $\Rightarrow W_i(0) > C_i X_i(0)C_i' = C_i P_i(0)C_i'$ e (3.15) $\Rightarrow W_i(T) > S_i X_i(T)S_i' = S_i P_i(0)S_i'$. Portanto $\rho_1 \leq \rho_2$. Este argumento completa a prova. $\square$

Com base nesses resultados, apresenta-se agora um método para resolver o problema de regulação irrestrita como formulado em (3.5), mas sem as restrições. As restrições em (3.4) serão adicionadas logo em seguida.

Considera-se o seguinte problema de otimização por LMIs, com as seguintes variáveis matriciais $R(t) \in \mathbb{S}^{r+}$, $W(t) \in \mathbb{S}^{s+}$, $Z(t) \in \mathbb{R}^{r,s}$, e $G \in \mathbb{R}^{s,r}$ dado por:

$$\gamma := \inf \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{W_i(t)\}, \quad (3.23)$$

$$W_i(T) - S_i \mathcal{D}_i(R(T-1))S_i' > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.24)$$

$$\begin{bmatrix} W_i(t) & C_i \mathcal{D}_i(R(t-1)) + D_i Z_i(t) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} W_i(0) & (C_i + D_i G_i)X_i(0)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.26)$$

$$\begin{bmatrix} R_i(t) - \mu_i(t)H_i\Sigma H_i' & A_i \mathcal{D}_i(R(t-1)) + B_i Z_i(t) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0, \quad t = 1, \dots, T-1; \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} R_i(0) - \mu_i(0)H_i\Sigma H_i' & (A_i + B_i G_i)X_i(0)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta. \quad (3.28)$$

Teorema 3.1 *O valor γ dado por (3.23)–(3.28) é uma solução ótima para o problema de controle em (3.3). Ainda mais, o controle por realimentação de estado em (3.1) é ótimo fazendo-se*

$$K_i(t) = Z_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1))^{-1}, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad e \quad K(0) = G.$$

Prova: Aplicando o controle por realimentação de estado $u(t)$ definido por (3.1) em J^* , tem-se da dinâmica (forma determinística), dada por (3.9) que:

$$J^* = \inf_{K(0), \dots, K(T-1)} \sum_{i=1}^{n_\theta} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \text{tr}\{\tilde{C}_i(t)X_i(t)\tilde{C}_i(t)'\} + \text{tr}\{S_i X_i(T)S_i'\} \right\} \quad (3.29)$$

$$X_i(t+1) = \mathcal{D}_i(\tilde{A}(t)X(t)\tilde{A}(t)' + \mu(t)H\Sigma H'), \quad X_i(0) = x(0)x(0)'\mathbb{1}_{\{\theta_0\}}, \quad \forall i \in \mathcal{N}, \quad (3.30)$$

em que $\tilde{A}(t) := A + BK(t)$ and $\tilde{C}(t) := C + DK(t)$ para todo $t = 0, \dots, T-1$. Comparando (3.29)–(3.30) com (3.7)–(3.9), pode-se prontamente verificar que os Lemas 3.1 e 3.2 são válidos com $\{\tilde{A}(t), \tilde{C}(t)\}$ em lugar de (A, C) . Em consequência disso, a solução de (3.12)–(3.16) com $(\tilde{A}(t), \tilde{C}(t))$ em lugar de

(A, C) é de fato uma solução ótima para (3.29)-(3.30). Ou seja, tem-se que $\rho_3 \leq J^* \leq \rho_3 + \varepsilon$, em que:

$$\rho_3 := \inf \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^{n_\theta} \text{tr}\{W_i(t)\}, \quad (3.31)$$

$$W_i(T) - S_i \mathcal{D}_i(R(T-1)) S_i' > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} W_i(t) & \tilde{C}_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.33)$$

$$W_i(0) - \tilde{C}_i(0) X_i(0) \tilde{C}_i(0)' > 0, \quad i = 1, \dots, n_\theta, \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} R_i(t) - \mu_i(k) H_i \Sigma H_i' & \tilde{A}_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0, \quad t = 1, \dots, T-1, \quad (3.35)$$

$$R_i(0) - \tilde{A}_i(0) X_i(0) \tilde{A}_i(0)' - \mu_i(0) H_i \Sigma H_i' > 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (3.36)$$

Resta provar que: (3.31)–(3.36) é equivalente a (3.23)–(3.28). Para esse propósito, faça

$$Z_i(t) = K_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)), \quad k = 1, \dots, T-1.$$

Observe então que as seguintes identidades são válidas:

$$\tilde{A}_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) = A_i \mathcal{D}_i(R(t-1)) + B_i Z_i(t), \quad \tilde{C}_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) = C_i \mathcal{D}_i(R(t-1)) + D_i Z_i(t),$$

para $t = 1, \dots, T-1$ e todo $i \in \mathcal{N}$. Isto prova a equivalência entre (3.25) e (3.33) ((3.27) e (3.35)). A equivalência entre (3.26) e (3.34) ((3.28) e (3.36)) é obtida aplicando o lema do complemento de Schur com $K(0) = G$. Este argumento completa a prova. $\square$

Comentário 3.1 A solução γ obtida em (3.23)–(3.28) é a solução ótima do problema de otimização irrestrita com observação completa da cadeia de Markov. Esta solução coincide com aquela obtida pelo método de Riccati. A principal contribuição deste capítulo é fornecer um método para obtenção da solução ótima com restrições nos segundos momentos, situação esta em que o método de Riccati não é aplicável.

3.3 Solução ótima para regulação restrita

As restrições de (3.4), conforme o Lema 1.2, são dadas na forma determinística equivalente por:

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} X_i(t) < \bar{X}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.37)$$

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} K_i(t) X_i(t) K_i(t)' < \bar{U}(t), \quad \forall t \in [0, T-1]. \quad (3.38)$$

Para inclusão das restrições, adicionam-se ao problema as variáveis $Z_u(t) \in \mathbb{S}^{s^+}$ e as seguintes

LMIs:

$$\bar{X}(t) > \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{D}_i(R(t-1)), \quad t = 1, \dots, T; \quad (3.39)$$

$$\bar{U}(t) > \sum_{i=1}^{n_\theta} Z_{ui}(t), \quad t = 0, \dots, T-1; \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ui}(t) & Z_i(t) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0, \\ t = 1, \dots, T-1, \quad i = 1, \dots, n_\theta; \quad (3.41)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{ui}(0) & G_i X_i(0)^{\frac{1}{2}} \\ \star & I \end{bmatrix} > 0, \\ i = 1, \dots, n_\theta; \quad (3.42)$$

A prova é feita em alguns passos. Mostra-se inicialmente a equivalência entre (3.37) e (3.39) e a seguir a equivalência entre (3.38) e (3.40)–(3.42).

Lema 3.3 (3.37) $\Leftrightarrow$ (3.39).

Prova: [(3.37) $\Leftarrow$ (3.39)]. Segue facilmente de (3.22), pois $\|X(t) - P(t)\| \leq \varepsilon$ com $\varepsilon \rightarrow 0$, veja a prova do Lema 3.1.

[(3.37) $\Rightarrow$ (3.39)]. Por hipótese, existe um conjunto de matizes $\Delta(t) = \{\Delta_i(t) \in \mathbb{S}^{r^+} : \Delta_i(t) \rightarrow 0, i \in \mathcal{N}\}$ (como na prova do Lema 3.2) tal que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n_\theta} X_i(t) < \sum_{i=1}^{n_\theta} X_i(t) + \mathcal{D}_i(S(t)) < \bar{X}(t),$$

$\forall t = 0, \dots, T-1$. Uma vez que

$$X_i(t+1) = \mathcal{D}_i(\tilde{A}X(t)\tilde{A}' + \mu(t)H\Sigma H'), \quad \forall i \in \mathcal{N},$$

toma-se $R_i(t) = \tilde{A}_i X_i(t) \tilde{A}_i' + \mu_i(t) H_i \Sigma H_i' + \Delta_i(t)$ e obtém-se (3.39). $\square$

Para mostrar a equivalência entre (3.38) e (3.40)–(3.42), introduz-se o seguinte resultado auxiliar.

Lema 3.4 As desigualdades (3.38) são válidas se e somente se as desigualdades

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) &> \sum_{i=1}^{n_\theta} Z_{ui}(t), \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ Z_{ui}(t) &> K_i(t) P_i(t) K_i(t)', \\ \forall i \in \mathcal{N}, \quad \forall t &= 0, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (3.43)$$

são válidas, em que $P(t) = \mathcal{D}(R(t-1))$, $t = 1, \dots, T-1$, e $P(0) = X(0)$.

Prova: [(3.38) $\Leftarrow$ (3.43)]. Segue facilmente do fato de se ter $P(t) = \mathcal{D}(R(t-1))$, $Pt > Xt$, $t = 1, \dots, T-1$, e $P(0) = X(0)$.

[(3.38) $\Rightarrow$ (3.43)]. É imediato que existe $R(t) \in \mathbb{S}^{r+}$ tal que (ver a prova do Lema 3.3)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i(t) X_i(t) K_i(t)' \\ &< \sum_{i=1}^{n_\theta} K_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) K_i(t)' < \bar{U}(t), \end{aligned}$$

é válido para todo $t = 1, \dots, T-1$. Tome $P(t) = \mathcal{D}(R(t-1))$ e o resultado é obtido. $\square$

Lema 3.5 (3.40)–(3.42) $\Leftrightarrow$ (3.43).

Prova: A prova envolve alguns conceitos de LMIs que são endereçados na prova do Lema 3.2. Por hipótese $K_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) = Z_i(t)$, $\forall i \in \mathcal{N}$, $t = 1, \dots, T-1$. [(3.40)–(3.42) $\Leftarrow$ (3.43)]. Em (3.41) faça $\mathcal{D}_i(R(t-1)) = \mathcal{D}_i(R(t-1))' = P_i(t)$, $\forall i \in \mathcal{N}$, $\forall t = 1, \dots, T-1$. Então desde que $P_i(t) = \mathcal{D}_i(R(t-1)) > 0$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} Z_{ui}(t) & K_i(t) P_i(t) \\ \star & P_i(t) \end{bmatrix} > 0,$$

que é equivalente a (3.43) pelo Lema de Schur. Para $t = 0$, (3.42) é implicada por (3.43) imediatamente por equivalência de Schur. [(3.40)–(3.42) $\Rightarrow$ (3.43)]. Segue de (3.41) que $\mathcal{D}_i(R(t-1)) > 0$ (ver a prova do Lema 3.2), e substituindo $Z_{ui}t$ em (3.41) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} Z_{ui}(t) & K_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) \\ \star & \mathcal{D}_i(R(t-1)) \end{bmatrix} > 0,$$

que é equivalente a (3.43) pelo Lema de Schur e $K_i(t) \mathcal{D}_i(R(t-1)) = Z_i(t)$. Assim a equivalência entre (3.38) e (3.40)–(3.42) segue pelo Lema 3.4 e 3.5, e completa a prova. $\square$

3.4 Exemplo ilustrativo

Para exemplo de aplicação do método apresentado, considera-se o mesmo exemplo de SLDSM apresentado no Capítulo 2, também como exemplo ilustrativo em sua seção 2.4. Considera-se $H_i = I$, $i = 1, 2, 3, 4$ e para as matrizes do custo:

$$C_i = S_i = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$i = 1, 2, 3, 4,$

Consideram-se $T = 4$, $x_0 = [-0.27 \ 1.2 \ 2.1]'$, $\mu_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]'$, $\mathbb{P} = [p_{ii} = 0.88, p_{ij} = 0.04, \forall i, j \in \mathcal{N}, i \neq j]$ e $\Sigma = 0.25I$, em que I representa a matriz identidade. Adotam-se as seguintes restrições:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 120 & 8 & 8 \\ 8 & 120 & 8 \\ 8 & 8 & 120 \end{bmatrix}, \bar{U} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 1.0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1.0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Foi usado o software SeDuMi (Sturm, 1999) para implementação do problema em LMIs, e o custo ótimo obtido para o problema de controle é $J_{\mathbf{K}_\theta}^4 = 14.4023$. A sequência otimizada $\mathbf{K}_\theta = \{K^0, K^1, K^2, K^3\}$, com $K^t \in \mathbb{R}^{3,4}$, é dada por:

$$K_1^0 = \begin{bmatrix} 0.1799 & 0.2710 & 0.2553 & -0.7061 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad K_2^0 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$K_3^0 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad K_4^0 = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}.$$

$$K_1^1 = \begin{bmatrix} -0.0009 & 0.0054 & -0.0364 & 0.0319 \\ -0.1024 & -0.2484 & 0.3438 & 0.0070 \\ 0.0358 & 0.1091 & -0.2359 & 0.0910 \end{bmatrix}, \quad K_2^1 = \begin{bmatrix} -0.0008 & 0.0001 & -0.0080 & 0.0087 \\ -0.0842 & -0.2259 & 0.3941 & -0.0839 \\ 0.0284 & 0.0822 & -0.1638 & 0.0532 \end{bmatrix},$$

$$K_3^1 = \begin{bmatrix} 0.0241 & 0.0653 & -0.1168 & 0.0274 \\ 0.0678 & 0.2170 & -0.4992 & 0.2145 \\ 0.1363 & 0.3416 & -0.5133 & 0.0354 \end{bmatrix}, \quad K_4^1 = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0052 & -0.0254 & 0.0200 \\ -0.0375 & -0.0901 & 0.1212 & 0.0064 \\ 0.0347 & 0.1101 & -0.2510 & 0.1062 \end{bmatrix}.$$

$$K_1^2 = \begin{bmatrix} 0.0159 & 0.0478 & -0.1004 & 0.0359 \\ -0.2528 & -0.6277 & 0.9169 & -0.0289 \\ 0.1257 & 0.3359 & -0.5787 & 0.1125 \end{bmatrix}, \quad K_2^2 = \begin{bmatrix} 0.0023 & 0.0086 & -0.0232 & 0.0122 \\ -0.2171 & -0.5894 & 1.0471 & -0.2323 \\ 0.0683 & 0.1914 & -0.3603 & 0.0978 \end{bmatrix},$$

$$K_3^2 = \begin{bmatrix} 0.0252 & 0.0712 & -0.1357 & 0.0383 \\ 0.0729 & 0.2424 & -0.5815 & 0.2618 \\ 0.1409 & 0.3654 & -0.5911 & 0.0800 \end{bmatrix}, \quad K_4^2 = \begin{bmatrix} 0.0287 & 0.0801 & -0.1498 & 0.0400 \\ -0.1693 & -0.4365 & 0.6974 & -0.0859 \\ 0.2765 & 0.7460 & -1.3087 & 0.2758 \end{bmatrix}.$$

$$K_1^3 = \begin{bmatrix} -0.0083 & -0.0145 & -0.0017 & 0.0246 \\ -0.0080 & -0.0146 & 0.0017 & 0.0209 \\ -0.0184 & -0.0307 & -0.0108 & 0.0598 \end{bmatrix}, \quad K_2^3 = \begin{bmatrix} -0.0024 & -0.0041 & -0.0004 & 0.0069 \\ -0.0025 & -0.0049 & 0.0022 & 0.0052 \\ -0.0036 & -0.0049 & -0.0076 & 0.0161 \end{bmatrix},$$

$$K_3^3 = \begin{bmatrix} 0.0096 & 0.0165 & 0.0033 & -0.0295 \\ 0.0187 & 0.0315 & 0.0089 & -0.0591 \\ 0.0560 & 0.0980 & 0.0087 & -0.1628 \end{bmatrix}, \quad K_4^3 = \begin{bmatrix} -0.0052 & -0.0088 & -0.0018 & 0.0158 \\ -0.0086 & -0.0156 & 0.0015 & 0.0227 \\ -0.0189 & -0.0310 & -0.0138 & 0.0638 \end{bmatrix}.$$

O problema de controle ótimo sem restrições também é resolvido, eliminando-se as LMIs (3.39)–(3.42) correspondentes a elas e nesse caso o custo ótimo coincide com aquele obtido pelo método de Riccati (ver Capítulo 4 em (Costa, Fragoso e Marques, 2005)). O valor para o custo na ausência de restrições $J_{\mathbf{K}_\theta}^4 = 14.0796$.

Aplicações

Neste capítulo, duas aplicações são estudadas de forma a ilustrar qualitativamente a metodologia desenvolvida no Capítulo 2. Na primeira aplicação, considera-se o problema de regulação de tráfego de trens em linhas metropolitanas utilizando a técnica de controle em horizonte retrocedente (CHR), e na segunda, analisa-se um problema de seleção dinâmica de carteiras de ações em aplicações financeiras obtendo a solução para todo o horizonte apenas no instante inicial. Apenas para referência e diferenciação, denomina-se este caso de controle em horizonte finito (CHF). São feitas algumas considerações sobre as implementações computacionais, antes de se apresentarem as aplicações propriamente ditas.

4.1 Implementação

A Figura 4.1 ilustra de forma sucinta como as duas situações de aplicação, CHR e CHF, utilizam a metodologia de otimização de trajetória desenvolvida. É claro que as aplicações, antes de mais nada, possam e devam ser modeladas por um SLSM. Daí tem-se inicialmente o modelamento e a caracterização dos dados do SLSM que representa a aplicação.

O **Procedimento 1** baseado no algoritmo descrito na Subseção 2.2.3 e adaptado para cada caso na Seção 2.3 constitui a base para as duas situações e corresponde ao bloco ALGORITMO na Figura 4.1.

No caso CHF, determina-se diretamente no instante inicial k_0 , a sequência $\mathbf{K} = \{K^{k_0}, \dots, K^{k_1-1}\}$ do controlador para todo o horizonte $k_1 - k_0$ e sempre que necessário em qualquer instante intermediário $k_\ell \in [k_0, k_1]$ recalcula-se a nova sequência $\{K_\ell^k, \dots, K^{k_1}\}$ a partir de k_ℓ para o novo horizonte. Para isso utiliza-se o **Procedimento 1**. No presente trabalho, apresentam-se os resultados apenas para o instante inicial. Para verificação, faz-se uma simulação de quantidade significativa de trajetórias de $\mathcal{G}_\theta$ ou $\mathcal{G}$ no intervalo $[k_0, k_1]$, conforme descrito no **Procedimento 2**.

No caso CHR, o controlador é definido passo a passo em função das novas condições iniciais do sistema em cada instante $k \in [k_0, k_1]$, sempre com horizonte T . Dessa forma há necessidade de simular as novas condições iniciais em cada passo, repetindo-se o **Procedimento 1** para todo $k \in [k_0, k_1]$. Descreve-se no **Procedimento 3** a simulação completa que é inseparável da determinação do contro-

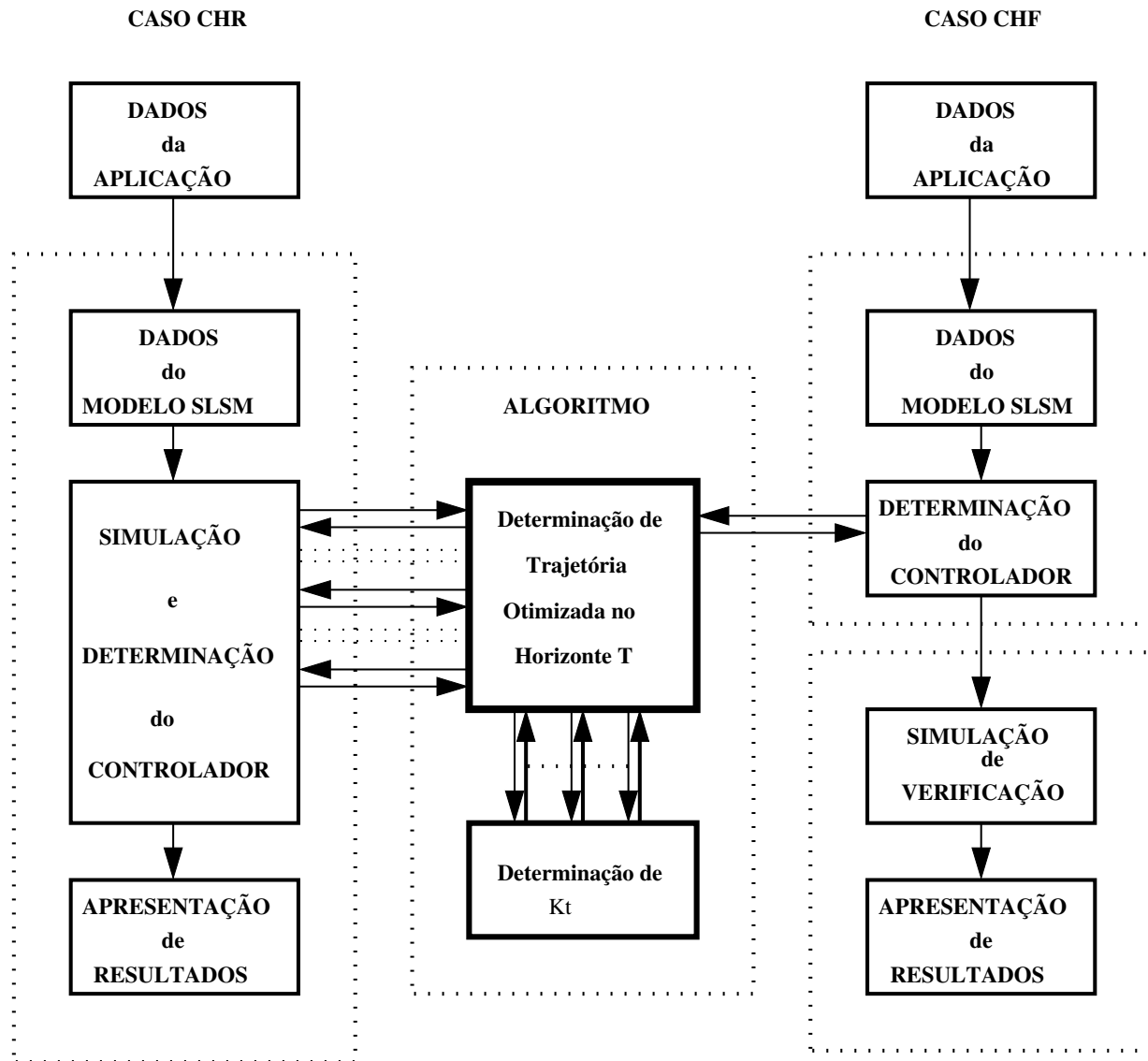


Figura 4.1: Diagrama esquemático dos procedimentos numéricos.

lador, conforme indicado na Figura 4.1. Em uma simulação completa, portanto, o **Procedimento 1** é ativado $k_1 - k_0$ vezes.

Nas simulações emprega-se o procedimento de Monte-Carlo para obtenção de dados estatísticos confiáveis. Além das definições dos valores dos vários ruídos, para as quais utilizam-se as rotinas convencionais do "software" *matlab*, para a cadeia de Markov em particular, utiliza-se o **Procedimento 4**, denominado Máquina de Sorteio, que realiza o sorteio do estado $\theta(k)$ a cada novo instante k .

Para esses problemas, devido à grande quantidade de dados gerados pela implementação e à aleatoriedade envolvida, a análise deve ser baseada em gráficos que representem a média e desvio padrão de $x(k)$, $u(k)$ e $J_{\mathbf{K}(k)}^{k, k+T}(k)$ para todo $k \in [k_0, k_1]$, no caso de CHR ou simplesmente em gráficos que representem a média e desvio padrão de $x(k)$, $u(k)$ para todo $k \in [k_0, k_1]$, e $J_{\mathbf{K}(k_0)}^{k_0, k_1}(k_0)$.

Procedimento 1 Geração de sequência de ganhos otimizada

Objetivo: Gerar uma trajetória restrita ótima no horizonte T para o sistema $\mathcal{G}_\theta$ ou $\mathcal{G}$ aplicando o algoritmo apresentado em 2.2.3 e adaptado para o caso apropriado conforme Seção 2.3;

Entrada: Todos os parâmetros e variáveis considerados em $\mathcal{G}_\theta$ (ou $\mathcal{G}$), horizonte, restrições, condições iniciais e parâmetros de custo.

Saída: Ganho $\mathbf{G}_\theta \in \mathcal{K}_\theta$ ou $\mathbf{G} \in \mathcal{K}$

INÍCIO

Gera uma trajetória inicial restrita

$(\mathbf{G}_\theta, J_{\mathbf{G}_\theta}^T)$ ou $(\mathbf{G}, J_{\mathbf{G}}^T) = \text{Algoritmo em 2.2.3}$

Opcionalmente gera ilustrações da convergência do custo $J_{\mathbf{G}_\theta}^T(\eta) \times \eta$ ou $J_{\mathbf{G}}^T(\eta) \times \eta$ e ilustrações das coordenadas de $E[x(t)]$ e de $\text{autv}(E[\|x(t)\|^2] - \bar{X}(t))$ para $t \in [0, T]$ e ilustrações das coordenadas de $E[u(t)]$ e de $\text{autv}(E[\|u(t)\|^2] - \bar{U}(t))$ para $t \in [0, T - 1]$, em que $\text{autv}(\cdot)$ representa os autovalores. FIM

Procedimento 2 Simulação para horizonte finito

Objetivo: Calcular a trajetória restrita ótima do sistema $\mathcal{G}_\theta$ ou $\mathcal{G}$ em $[k_0, k_1]$ e realizar a simulação completa de verificação;

Entrada: Todos os parâmetros e variáveis considerados em $\mathcal{G}_\theta$ ou $\mathcal{G}$, restrições, condições iniciais e parâmetros de custo.

Saída: Ganho $\mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta$ ou $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$ para todo intervalo $[k_0, k_1]$ e ilustrações da simulação na forma gráfica.

INÍCIO

Gera uma trajetória inicial restrita em $[k_0, k_1]$

$(\mathbf{K}_\theta, J_{\mathbf{K}_\theta}^{k_0, k_1})$ ou $(\mathbf{K}, J_{\mathbf{K}}^{k_0, k_1}) = \text{Algoritmo em 2.2.3};$

N_{rep} = número de repetições;

para $int = 1$ **até** N_{rep} **faça**

$stage = 0; k = k_0; x(k) = x_{k_0}; v_{state} = \mu_{0|0};$

$(i, v_{state}) = \text{Máquina de Sorteio}(v_{state})$ ou valor inicial dado para caso de θ observável;

enquanto $stage < (k_1 - k_0)$ **faça**

$t = stage;$

sorteia ruído aditivo $w(k)$, sorteia eventuais ruídos multiplicativos e determina as matrizes estocásticas A_i, B_i e H_i ;

$u(k) = K_i^k x(k)$ ou $u(t) = K^k x(k);$

$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + H_i w(k);$

Determine valores para eventuais variáveis específicas da aplicação;

$(i, v_{state}) = \text{Máquina de Sorteio}(\mathbb{P}' v_{state});$

$stage = stage + 1; k = k + 1;$

finaliza enquanto

Tabule de forma acumulativa os dados de $x(k), u(k)$ e eventuais outras variáveis específicas;

finaliza para

Estime a média e desvio padrão das realizações de $x(k), u(k)$ e $J_{\mathbf{K}}^{k_0, k_1}(k_0);$

Estime a média e desvio padrão das realizações das eventuais variáveis específicas da aplicação;

Gere figuras representando a média e desvio padrão de $x(k), u(k)$ para $k \in [k_0, k_1];$

Gere figuras representando a média e desvio padrão de eventuais variáveis específicas da aplicação; FIM

Procedimento 3 Simulação principal para horizonte retrocedente

Objetivo: Calcular a trajetória restrita do sistema $\mathcal{G}_\theta$ ou $\mathcal{G}$ em $[k_0, k_1]$ utilizando a técnica de CHR e realizar a simulação completa.

Entrada: Todos os parâmetros e variáveis considerados em $\mathcal{G}_\theta$ ou $\mathcal{G}$.

Saída: Na forma gráfica.

INÍCIO

Gera uma trajetória inicial restrita

N_{rep} = número de repetições;

k_0 e k_1 = intervalo para validação do controle retrocedente;

para $int = 1$ **até** N_{rep} **faça**

$stage = 0$; $k = k_0$; $x(k) = x_{k_0}$; $v_{state} = \mu_{k|k}$;

$(i, v_{state}) = \text{Máquina de Sorteio}(v_{state})$;

enquanto $stage < (k_1 - k_0)$ **faça**

$(\mathbf{G}_\theta^k, J_{\mathbf{G}_\theta}^{k,T})$ ou $(\mathbf{G}, J_{\mathbf{G}^k}^{k,T}) = \text{Algoritmo da Subseção 2.2.3 adaptado para o caso apropriado conforme Seção 2.3}$;

$u(k) = K_i^k x(k)$ ou $u(k) = K^k x(k)$;

$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + H_i w(k)$;

Determine valores para eventuais variáveis específicas da aplicação;

$(i, v_{state}) = \text{Máquina de Sorteio}(\mathbb{P}' v_{state})$;

$stage = stage + 1$; $k = k + 1$;

finaliza enquanto

Estime a média e desvio padrão das realizações de $x(k)$, $u(k)$ e $J_{\mathbf{G}_k}^{k,T}$, $k \in [k_0, k_1]$;

Estime a média e desvio padrão das realizações das eventuais variáveis específicas da aplicação;

finaliza para

Gere figuras representando a média e desvio padrão de x , u e $J_{\mathbf{G}_k}^{k,T}$, $k \in [k_0, k_1]$;

Gere figuras representando a média e desvio padrão de eventuais variáveis específicas da aplicação; FIM

Procedimento 4 Máquina de Sorteio

Objetivo: Realiza um sorteio aleatório, baseado na distribuição dada pelo vetor μ_{state} , e grava um valor para o estado $\theta(k) = i \in \mathcal{N}$.

Entrada: Vetor de estados μ_{state} .

Saída: Estado i e um novo vetor v_{state} .

INÍCIO

n_θ = número de estados da cadeia de Markov;

v_{acum} = vetor de zeros de comprimento n ;

para $j = 1$ **até** n_θ **faça**

$v_{acum} = v_{acum} + \mu_{state}$;

$\mu_{state} = [0 ; \mu_{state}]$;

$\mu_{state}(n+1) = []$;

finaliza para

$rand$ = gere um número aleatório entre 0 e 1;

i = encontre menor índice do vetor v_{acum} tal que $v_{acum}(i) > rand$;

$v_{state} = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$ em que 1 se localiza na posição i ; FIM

4.2 Regulação de tráfego de trens em linhas metropolitanas

O problema de regulação do tráfego de trens numa linha metroviária consiste na manutenção dos horários programados de chegada e partida dos trens nas plataformas. As ações de controle, geralmente de forma descentralizada, ocorrem em cada plataforma através do comando a cada trem do tempo de parada naquela plataforma e o tempo de percurso dela até a próxima. O que é comandado, na realidade, é o desvio em relação ao programa nominal de tráfego.

Apresenta-se neste trabalho uma alternativa ao problema de regulação de tráfego de trens em linhas metroviárias, assumindo:

- operação com "headway" (o intervalo de tempo entre trens subsequentes) idêntico nas diversas plataformas; o tempo de parada em cada plataforma proporcional ao "headway" e o tempo de percurso entre plataformas é independente da lotação dos trens. Denomina-se de coeficiente de tráfego a razão de proporcionalidade do tempo de parada e o "headway".
- o coeficiente de tráfego do conjunto de plataformas pode assumir um número finito de valores, correspondentes aos estados de uma cadeia de Markov homogênea definida, estados estes que representam cenários da procura por esse meio de transporte em cada plataforma.
- o número de trens é igual ao número de plataformas e as restrições são impostas aos 1o. e 2o. momentos dos vetores dos desvios de horários (vetor de estado) e dos desvios dos tempos de percurso (vetor de controle).

A aleatoriedade de chegada de passageiros em cada plataforma caracteriza um processo estocástico, que geralmente, ao lado de outras alternativas, pode ser modelado por uma cadeia de Markov homogênea. Perturbações operacionais nas ações de controle, isto é, nos tempos de parada/percurso em/entre plataformas são modeladas por um ruído aditivo na entrada, e finalmente, restrições operacionais e administrativas, em adição às restrições intrínsecas de segurança, são geralmente impostas aos desvios de horários programados dos trens (satisfação do público usuário) e aos desvios de tempos de percurso nominais (limitação operacional real ou relativa a aspectos econômicos).

No contexto determinístico, há vários trabalhos publicados que discutem tanto a modelagem como as técnicas para a solução do problema de regulação, com restrições nas variáveis de estado e controle bem como incertezas nos parâmetros, com especial interesse em aplicações, vide (Breusegem et al., 1991) e (Milani e Corrêa, 1997).

Sugere-se a configuração do denominado Modelo de Tempo Real (MTR), normalmente adotado como um modelo de eventos, adaptado a um Sistema Linear com Saltos Markovianos (SLSM), com as devidas restrições. Adota-se a técnica de controle em horizonte retrocedente (CHR) e para isso impõe-se uma limitação no ruído aditivo de entrada.

4.2.1 Definições e modelo de estado equivalente adotado

Como já exposto, há uma programação de tráfego, que estabelece os horários de chegada e partida dos trens em cada plataforma, sendo o horário de partida nominal igual ao horário de chegada nominal acrescido do intervalo de tempo de parada nominal. Indica-se por x_k^i o desvio em relação à programação do trem i na plataforma k , que significa dizer desvio da chegada em relação ao horário de chegada que seria idêntico ao desvio da partida em relação ao horário de partida se o intervalo de tempo de parada fosse o nominal. Os desvios x_k^i são observados ou estimados com as chegadas. As ações de controle ocorrem em cada plataforma através do comando a cada trem da variação que deve ser aplicada à soma $s_k^i + r_k^i$ em que s_k^i é o intervalo de tempo de parada naquela plataforma e r_k^i o tempo de percurso por esse trem, daquela plataforma até a próxima. O que é comandado, na realidade, é o desvio em relação ao programa nominal de tráfego. Indica-se por u_k^i a variação forçada daquela adição, que representa o controle.

As bases para a modelagem são as de (Sasama e Ohkawa, 1983) definidas para uma linha aberta de N plataformas $k = 1, 2, \dots, N$, na qual, a partir de uma extremidade (pátio alimentador de trens, constituindo a plataforma $k = 0$) são injetados trens de forma sequencial $j = 1, 2, \dots$ que saem pela outra extremidade (pátio de recebimento, que, geralmente é o mesmo que o de alimentação). Se fosse o caso de uma linha fechada, ter-se-ia um número finito de M trens e as plataformas seriam atingidas de forma sequencial $k = 1, 2, \dots, N, N+1, \dots$.

Limita-se aqui ao caso de linhas abertas e adota-se a premissa de que os tempos de percursos dos trens entre plataformas subsequentes têm o mesmo valor nominal. A derivação do modelo se baseia na transferência de trens entre plataformas, conforme ilustra a Figura 4.2.

Seja $t_k^i = T_k^i + x_k^i$ o instante de partida do i -ésimo trem da k -ésima plataforma, no qual T_k^i representa o valor nominal da programação de trens e x_k^i a variação. Analogamente, seja $r_k^i = R_k^i + u_k^i$ o tempo de percurso do i -ésimo trem entre as k -ésima e $(k+1)$ -ésima plataformas, no qual R_k^i representa o valor nominal e u_k^i o desvio do valor nominal, a variável de controle. Seja s_{k+1}^i o intervalo de tempo de parada para desembarque e embarque de passageiros, do i -ésimo trem na $(k+1)$ -ésima plataforma. Pode-se então inferir que:

$$t_{k+1}^i = t_k^i + r_k^i + s_{k+1}^i. \quad (4.1)$$

No intervalo de tempo $h_{k+1}^i = t_{k+1}^i - t_{k+1}^{i-1}$, que representa um período de tempo decorrido desde a passagem do trem anterior, ocorre a chegada aleatória de passageiros à plataforma, que deverão, em princípio, embarcar. Neste modelo simplificado, supõe-se que o tempo de parada na plataforma seja uma função linear desse tempo de acúmulo de passageiros na plataforma. Considerando um valor mínimo operacional (tempo de parada mínimo, definido pelas condições operacionais) S_{0_k} de parada na plataforma k , pode-se escrever:

$$s_{k+1}^i = c_{k+1}(t_{k+1}^i - t_{k+1}^{i-1}) + S_{0_{k+1}}. \quad (4.2)$$

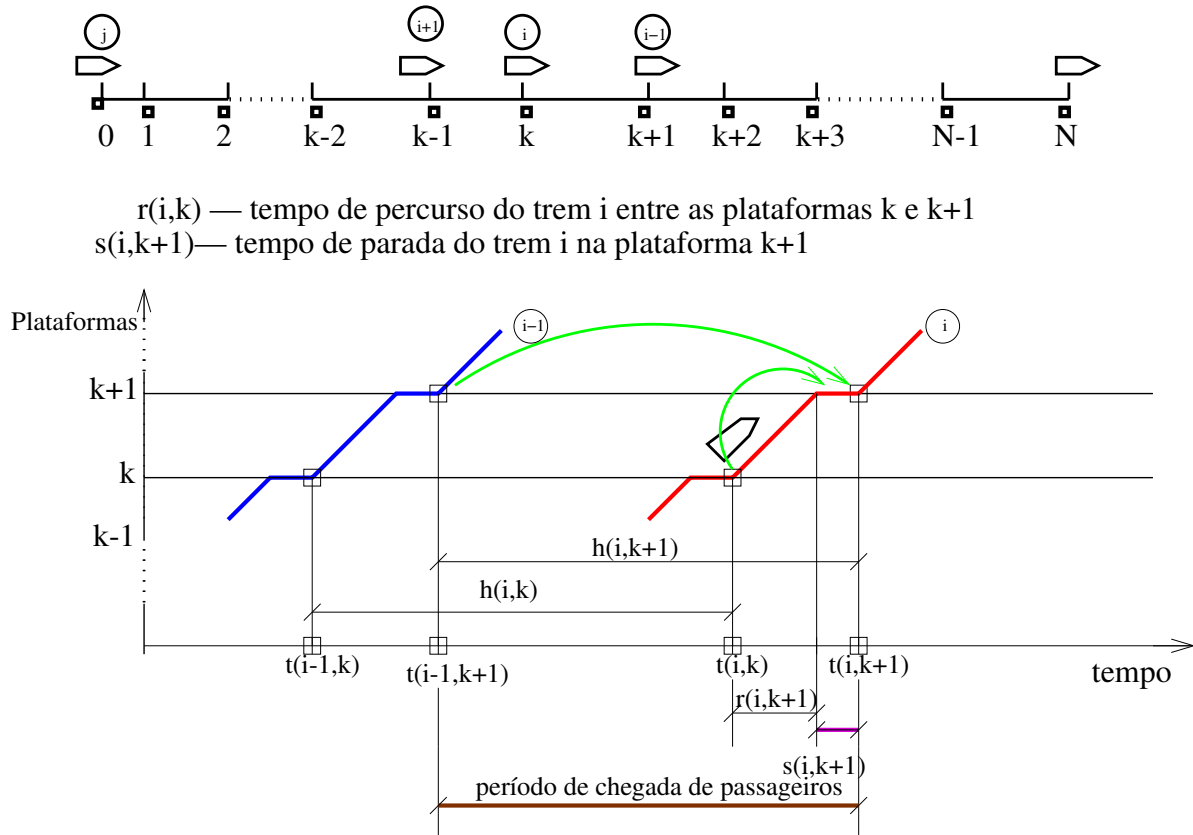


Figura 4.2: Transferência de trens entre plataformas.

em que c_{k+1} é o coeficiente de tráfego da plataforma $k+1$, que constitui o parâmetro que define a aleatoriedade do processo. Esses coeficientes são determinados experimentalmente para cada estação.

A partir de (4.1) e (4.2), e adicionalmente admitindo um ruído aditivo de entrada ω_k^i , correspondente a variações aleatórias dos tempos de percurso e parada, obtêm-se a equação de transferência de trens entre plataformas:

$$(1 - c_{k+1})x_{k+1}^i + c_{k+1}x_{k+1}^{i-1} = x_k^i + u_k^i + \omega_k^i \quad (4.3)$$

A partir dessa equação, conforme definidos na literatura, consideram-se os vários modelos: MRP, MRT e MTR, respectivamente, modelo recorrente de plataformas, modelo recorrente de trens e modelo de tempo real. Para a presente aplicação adota-se o MTR. Uma melhor forma de apresentar a equação (4.3) é a seguinte:

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{1 - c_{k+1}}x_k^i - \frac{c_{k+1}}{1 - c_{k+1}}x_{k+1}^{i-1} + \frac{1}{1 - c_{k+1}}u_k^i + \frac{1}{1 - c_{k+1}}\omega_k^i \quad (4.4)$$

O modelo de estado (MTR) desse sistema linear discreto constitui praticamente um modelo de eventos, em que estes representam a situação da linha como um todo operando com N trens, podendo ser caracterizados pela injeção de trens a partir do pátio de alimentação e a correspondente saída desses trens na extremidade oposta. Um evento j ocorre com a liberação de um trem de número sequencial

também j , na plataforma zero para entrada na linha. Os N trens anteriores em princípio se encontram, cada um deles, em uma das N plataformas à frente, no horário, atrasado ou adiantado. Define-se a variável $X(j) = [x_1^{j-1} x_2^{j-2} \dots x_N^{j-N}]'$ para indicar a informação dos N trens anteriores.

Define-se para a linha como um todo o seguinte modelo de estado:

$$\mathcal{G} : \begin{cases} X(j+1) = A(C_{\theta(j)})X(j) + B(C_{\theta(j)})U(j) + B(C_{\theta(j)})V(j) \\ \theta(j+1) \sim \mu(j+1) = \mathbb{P}'\mu(j), \\ 0 \leq j_0 \leq j_1, X(j_0) = X_0 \text{ e } \theta(j_0) \sim \mu_0, \end{cases}$$

em que:

$$\begin{aligned} X(j) &= [x_1^{j-1} x_2^{j-2} \dots x_N^{j-N}]' \\ U(j) &= [u_0^j u_1^{j-1} \dots u_{N-1}^{j-N+1}]' \\ V(j) &= [v_0^j v_1^{j-1} \dots v_{N-1}^{j-N+1}]' \\ C_{\theta(j)} &= [C_{\theta(j),1} \ C_{\theta(j),2} \dots C_{\theta(j),N}]' \end{aligned}$$

O vetor $C_{\theta(j)}(k)$, é constituído dos N coeficientes de tráfego (um para cada plataforma naquele evento) que representam, como já mencionado, a razão entre o intervalo de tempo de espera dos trens nas plataformas e o intervalo de tempo entre trens sucessivos nessas mesmas plataformas.

$B(C_{\theta(j)})$ é uma matriz diagonal com a diagonal dada por:

$$\text{diag}(B(C_{\theta(j)})) = \left[\frac{1}{1-C_{\theta(j),1}} \quad \frac{1}{1-C_{\theta(j),2}} \quad \dots \quad \frac{1}{1-C_{\theta(j),N}} \right]'$$

$A(C_{\theta(j)})$ é uma matriz bi-diagonal inferior com as diagonais principal e secundária inferior dadas por:

$$\text{diag}(A(C_{\theta(j)})) = \left[\frac{-C_{\theta(j),1}}{1-C_{\theta(j),1}} \quad \frac{-C_{\theta(j),2}}{1-C_{\theta(j),2}} \quad \dots \quad \frac{-C_{\theta(j),N}}{1-C_{\theta(j),N}} \right]'$$

$$\text{diagsec}(A(C_{\theta(j)})) = \left[\frac{1}{1-C_{\theta(j),2}} \quad \frac{1}{1-C_{\theta(j),3}} \quad \dots \quad \frac{1}{1-C_{\theta(j),N}} \right]'$$

em que $\theta(j) \in \{1, 2, \dots, n_\theta\}$, é um dos n_θ estados da cadeia de Markov cuja matriz de probabilidade de transição dada por $\mathbb{P}$, modela a natureza aleatória do processo.

$X(j)$, $U(j)$ e $V(j) \in \mathbb{R}^N$ representam os vetores de estado, de controle e do distúrbio externo do sistema, no evento j , sendo N igual ao número de plataformas e ao número de trens anteriores considerados em cada evento. Os vetores $X(j)$ e $U(j)$ espelham a situação dos N trens anteriores e englobam, nas suas coordenadas, os vários x_k^i (desvio do tempo de partida do trem i na plataforma k em relação ao horário programado) e u_k^i (desvio a ser adotado no intervalo de tempo nominal de transferência de trens entre plataformas ($k \rightarrow k+1$), que é a soma do tempo de parada desse trem j na plataforma k com o tempo de percurso desse trem i entre as plataformas k e $k+1$). O termo v_k^i representa o distúrbio aleatório nos dois tempos citados anteriormente, que compõem o controle, constituindo o vetor de ruído de média nula e correlação Σ . O vetor $V(j)$ engloba os vários v_k^i .

Para um trem genérico j (aquele trem que no evento j está na plataforma zero), seu atraso na plataforma k , $1 \leq k \leq N$ é dado pela k -ésima coordenada do vetor de estado $X(j+k)$, isto é,

$x_k^j = X(j+k)(k)$ e o controle aplicado ao mesmo na plataforma k , $0 \leq k \leq N-1$ é dado pela $(k+1)$ -ésima coordenada do vetor de controle $U(j+k)$, isto é, $u_k^j = U(j+k)(k+1)$.

Para simplificar a visualização da imagem dos trens nas plataformas, basta verificar que para o instante do evento de injeção do trem j na linha, isto é, o trem j está na plataforma 0 (pátio de liberação de trens), os N trens anteriores estão respectivamente, trem $j-1$ na plataforma 1, trem $j-2$ na 2, e assim por diante com o trem $j-N$ na plataforma N , e os anteriores ainda, (lembrando a sequência infinita de trens) já tendo saído da linha. Assim no evento $j+k$ (trem $j+k$ na plataforma zero), tem-se o trem j na plataforma k . Dessa forma, para se acompanhar um trem genérico por toda linha de N plataformas, basta considerar-se um intervalo de eventos de k_0 a k_1 , com $k_1 = k_0 + N$, e o trem $k_0 - 1$, que está na plataforma 1 no instante inicial k_0 .

4.2.2 Exemplo de aplicação para solução e simulação numéricas

Considera-se para aplicação numérica, com as devidas adaptações, o mesmo exemplo utilizado em (Corrêa, 1999), para ilustrar o estudo de regulação robusta com restrições no qual adota-se o vetor de coeficientes de tráfego C como incerto, variando entre um mínimo C^L e um máximo C^U . Neste estudo, considera-se esse vetor de tráfego como estocástico de Markov com $n_\theta = 3$; $\mathbb{P} = [p_{ii} = 0.4, p_{ij} = 0.1, \forall i, j \in \theta, i \neq j]$,

$$C_1 = C^U = [0.200 \ 0.210 \ 0.250 \ 0.200 \ 0.120 \ 0.150 \ 0.250 \ 0.170 \ 0.180 \ 0.125]',$$

$$C_2 = C^L = [0.180 \ 0.189 \ 0.225 \ 0.180 \ 0.108 \ 0.135 \ 0.225 \ 0.153 \ 0.162 \ 0.112]' \text{ e}$$

$$C_3 = [0.190 \ 0.200 \ 0.238 \ 0.190 \ 0.114 \ 0.143 \ 0.237 \ 0.162 \ 0.171 \ 0.119]'$$

Demais dados considerados são os seguintes: $T = 4$, $N = 10$, $\mu_0 = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]'$

$$X_0 = [\ 30 \ -30 \ 0 \ -30 \ 30 \ 0 \ 0 \ 30 \ -30 \ 0]'$$

$\Sigma = 9I_{10}$ sendo I_{10} a matriz identidade de ordem 10.

Seja $e_r := [1, \dots, 1]' \in \mathbb{R}^r$. Adotam-se os seguintes valores para os limitantes do primeiro momento do estado e controle:

$$\begin{aligned} -30e_{10} &< E_{X(0), \mu_0}[X(j)] < 30e_{10}, \quad j = k_0, \dots, k_1 + T, \\ -18e_{10} &< E_{X(0), \mu_0}[U(j)] < 18e_{10}, \quad j = k_0, \dots, k_1 + T - 1, \end{aligned}$$

Adotam-se para restrições de segundo momento de $X(j)$ e $U(j)$:

$$\begin{aligned} E_{X(0), \mu_0}[X(j)X(j)'] &< 5400, \quad j = k_0, \dots, k_1 + T, \\ E_{X(0), \mu_0}[U(j)U(j)'] &< 3200, \quad j = k_0, \dots, k_1 + T - 1, \end{aligned}$$

e matrizes de ponderação do custo $Q_i = I_{10}$, $R_i = 3I_{10}$, $F_i = I_{10}$, $i = 1, 2, 3$.

4.2.3 Solução e simulação numéricas

Para a solução, deve-se obter inicialmente o modelo de estado equivalente, no caso o MTR conforme exposto anteriormente. Neste modelo pode ser notado na equação (4.4) que o termo x_k^j é multiplicado pelo fator $(1 - c_{k+1})^{-1} > 1$ para obtenção de x_{k+1}^j , mostrando que mesmo que não haja desvio

de horário do trem $j - 1$ (trem anterior) na plataforma $k + 1$ (plataforma seguinte), sem controle na plataforma k , o desvio do trem j na plataforma $k + 1$ será maior que o seu desvio na plataforma k , indicando portanto claramente comportamento de um sistema instável.

As matrizes equivalentes A_i , B_i e H_i , com $i \in \{1, 2, 3\}$, obtidas para o modelo com as fórmulas da subseção anterior, são as seguintes: São dadas apenas a diagonal e/ou a diagonal inferior através dos vetores d e d_i .

$$d(A_1) = [-0.250 \quad -0.266 \quad -0.333 \quad -0,250 \quad -0,136 \quad -0,176 \quad -0,333 \quad -0,205 \quad -0,220 \quad -0,143]$$

$$d_i(A_1) = [1.266 \quad 1.333 \quad 1.250 \quad 1.136 \quad 1.176 \quad 1.333 \quad 1.205 \quad 1.220 \quad 1.143]$$

$$d(A_2) = [-0.220 \quad -0.233 \quad -0.290 \quad -0.220 \quad -0.121 \quad -0.156 \quad -0.290 \quad -0.181 \quad -0.193 \quad -0.126]$$

$$d_i(A_2) = [1.233 \quad 1.290 \quad 1.220 \quad 1.121 \quad 1.156 \quad 1.290 \quad 1.181 \quad 1.193 \quad 1.126]$$

$$d(A_3) = [-0.235 \quad -0.250 \quad -0.312 \quad -0.235 \quad -0.129 \quad -0.167 \quad -0.311 \quad -0.193 \quad -0.206 \quad -0.135]$$

$$d_i(A_3) = [1.250 \quad 1.312 \quad 1.235 \quad 1.129 \quad 1.167 \quad 1.311 \quad 1.193 \quad 1.206 \quad 1.135]$$

$$d(B_1) = [1.250 \quad 1.266 \quad 1.333 \quad 1.250 \quad 1.136 \quad 1.176 \quad 1.333 \quad 1.205 \quad 1.220 \quad 1.143]$$

$$d(B_2) = [1.220 \quad 1.233 \quad 1.290 \quad 1.220 \quad 1.121 \quad 1.156 \quad 1.290 \quad 1.181 \quad 1.193 \quad 1.126]$$

$$d(B_3) = [1.235 \quad 1.250 \quad 1.312 \quad 1.235 \quad 1.129 \quad 1.167 \quad 1.311 \quad 1.193 \quad 1.206 \quad 1.135]$$

$$H_1 = B_1, H_2 = B_2 \text{ e } H_3 = B_3.$$

Para solução do problema, é utilizada a técnica de CHR, com horizonte de $T = 4$ eventos à frente. Para se obter as informações de um trem genérico por toda linha com $N = 10$ estações, faz-se necessário considerar o intervalo de estudo de pelo menos 10 eventos ($j_1 - j_0 = 10$) e opta-se por manter fixo o horizonte, ao invés de ir reduzindo-o nas etapas finais. Para isso utiliza-se o **Procedimento 1**, tendo sido feitas 20 realizações, a partir das quais obtêm-se os valores da esperança e do desvio padrão do atraso e controle referentes ao trem que se encontrava na plataforma 1 no instante inicial, ao longo de toda a linha, cujos valores são dados por:

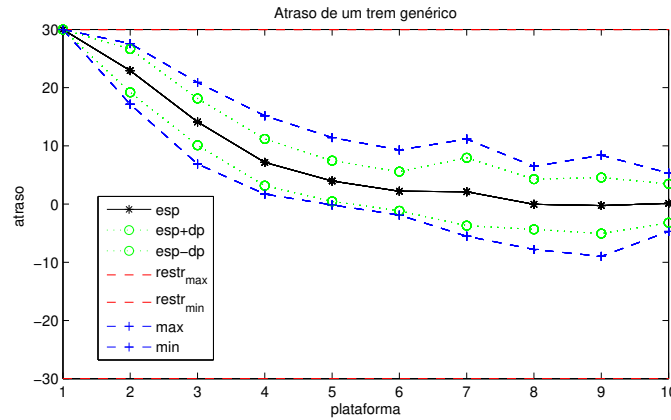
$$E[\text{atraso}] = [30.000 \quad 22.923 \quad 14.118 \quad 7.165 \quad 3.954 \quad 2.206 \quad 2.111 \quad -0.034 \quad -0.255 \quad 0.137]$$

$$Dp[\text{atraso}] = [0.000 \quad 3.724 \quad 4.017 \quad 4.016 \quad 3.497 \quad 3.364 \quad 5.829 \quad 4.321 \quad 4.819 \quad 3.342]$$

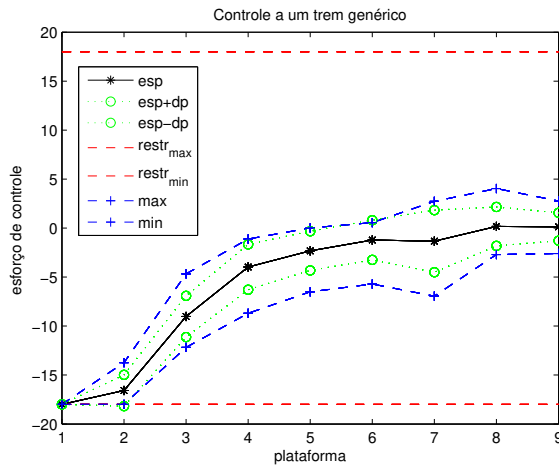
$$E[\text{controle}] = [-18.000 \quad -16.577 \quad -9.025 \quad -3.977 \quad -2.324 \quad -1.222 \quad -1.339 \quad 0.169 \quad 0.135]$$

$$Dp[controle] = [0 \quad 1.592 \quad 2.101 \quad 2.318 \quad 1.994 \quad 2.028 \quad 3.172 \quad 1.981 \quad 1.423]$$

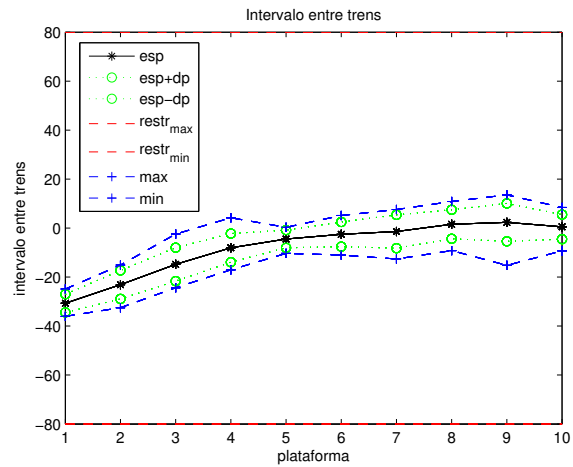
A Figura 4.3 ilustra para o trem da Plataforma 1 no instante inicial, o atraso, o controle e a variação do "headway" nas plataformas ao longo da linha. Nas legendas das ilustrações, *esp* indica o valor esperado, *dp* indica o desvio padrão, *max* e *min* indicam respectivamente os valores máximo e mínimo encontrados. Os valores das restrições, isto é, dos limitantes superior e inferior, são indicados por *restr_{max}* e *restr_{min}* respectivamente.



(a) Atraso ao longo da linha



(b) Controle ao longo da linha



(c) Intervalo com o trem seguinte ao longo da linha

Figura 4.3: Dados para o trem da plataforma 1 no instante inicial .

Na simulação, aumentando-se os pesos $Q_{\theta(t)}$ e $F_{\theta(t)}$, que estão relacionadas aos desvios dos horários nominais, dá-se ênfase à satisfação dos usuários em detrimento de aspectos econômicos relacionados com manutenção da via, de material rodante e consumo de combustível. E com o aumento de $R_{\theta(t)}$, essa ênfase é invertida. Embora não se tenha feito comparação direta com outras alternativas de

regulação (não é o objetivo deste trabalho), a medida que a otimização considera horizontes à frente, cada vez maiores, é esperada uma variação mais suave das variáveis de estado e controle até o alcance do valor de regime da regulação.

4.3 Seleção dinâmica de portfólio em aplicações financeiras

A otimização de portfólios de investimentos tem sido objeto de pesquisa crescente desde 1952, quando o trabalho pioneiro de Markowitz (Markowitz, 1952) foi publicado. Os parâmetros taxa de retorno e volatilidade dos preços dos diversos ativos de composição de um portfólio continuam sendo os elementos chave nos modelos financeiros empregados. E recentemente, para refletir mais apropriadamente o movimento do mercado, esses parâmetros são modulados por uma cadeia de Markov, que define as oscilações ocasionadas pelas várias tendências ditadas pelo estado da economia. Entre os vários trabalhos na área destacam-se (Li e Ng, 2000), (Çakmak e Özekici, 2006), (Costa e Araujo, 2007), (Costa e de Paulo, 2007) e (Costa e Okimura, 2009).

Sempre houve discussão sobre a formulação mais adequada para a otimização de um portfólio. Ao lado da função utilidade média-variância, desde o princípio utilizada, a pesquisa tem sido intensa na busca de modelos que maximizem funções de utilidade diferentes. No entanto a dificuldade de associação dessas funções aos perfis dos investidores, e mesmo seu entendimento por eles (há mais transparência com a média-variância), além de uma maior dificuldade computacional, tem-se mantido em destaque o enfoque da média-variância.

Objetivando uma implementação computacional factível, é que se propõe a utilização da metodologia desenvolvida neste trabalho, como uma alternativa a ser adotada na alocação de ativos para composição otimizada de portfólios. Apresentam-se a seguir as definições básicas e o modelo adotado para adaptação à presente metodologia.

4.3.1 Definições e modelo de estado equivalente adotado

Considere um portfólio composto de n ativos, e que num determinado momento t , o preço unitário de mercado (valor de venda) desses ativos seja dado por $S(t) = [S_1(t) \dots S_n(t)]' \in \mathbb{R}^n$, em que $S_i(t) \in \mathbb{R}$ representa o preço unitário de mercado do ativo i nesse instante t . Supõe-se agora uma carteira dada por $a(t) = [a_1(t) \dots a_n(t)]' \in \mathbb{R}^n$ em que $a_i(t) \in \mathbb{R}$ representa o valor na moeda desse mercado correspondente ao valor aplicado no ativo i (supõe-se a possibilidade de quaisquer valores fracionários para o quantitativo de unidades de qualquer ativo de forma a tomar valores em um contínuo).

Denominando o valor da carteira por $x(t) \in \mathbb{R}$ e o vetor unitário e_n dado por $e_n = [1 \dots 1]' \in \mathbb{R}^n$ tem-se:

$$x(t) = e_n' a(t) \quad (4.5)$$

Dada a natureza aleatória dos preços dos diversos ativos, define-se a rentabilidade dos mesmos pelo vetor aleatório $R(t) = [R_1(t) \dots R_n(t)]' \in \mathbb{R}^n$, de tal forma que $S_i(t+1) = S_i(t)R_i(t), i = 1 \dots n$.

$$R(t) = [e_n + \eta] + \Gamma w^r(t) \quad (4.6)$$

ou, adicionalmente, ao caracterizar uma flutuação do mercado segundo um processo de Markov $\theta(t)$, define-se a rentabilidade para cada modo de mercado, isto é, considera-se $R(t) \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo o seguinte processo:

$$R_i(t) = [e_n + \eta_i] + \Gamma_i w^r(t) \quad (4.7)$$

para o qual

- $\eta_i \in \mathbb{R}^n$, tal que $e_n + \eta_i$ representa o vetor valor esperado da rentabilidade da evolução de preços do instante t para $t + 1$, para o cenário i ,
- $\Gamma_i \Gamma_i' \in \mathbb{S}^n$, representa a matriz de covariância da rentabilidade da evolução de preços do instante t para $t + 1$, para o cenário i ,
- $\{w^r(t); t = 0, \dots\}$ é uma sequência de vetores aleatórios independentes de dimensão n com média zero e covariância I , matriz identidade, isto é, $E[w^r(t)] = 0$ e $E[w^r(t)w^r(t)'] = I$,
- $i \in \{1 \dots n_\theta\}; t \geq 0$ é uma cadeia de Markov,
- $w^r(t)$ e i são sequências independentes entre si.

Como pode ser notado, a natureza estocástica da rentabilidade é dupla, isto é, para cada cenário do mercado que corresponde a um estado da cadeia de Markov, tem-se a dependência com o processo $w^r(t)$.

Dessa forma, redefinindo a rentabilidade por $R(t) \in \mathbb{R}^n$ tem-se para todo $i \in [1 \dots n_\theta]$ e $t \in [0 \dots T]$:

$$R_i(t) = (e_n + \eta_i) + \Gamma_i w^r(t) \sim N(E[R_i], Cov[R_i]) \quad (4.8)$$

em que:

$$E[R_i] = e_n + \eta_i \quad (4.9)$$

$$Cov[R_i] = \Gamma_i \Gamma_i'. \quad (4.10)$$

Denomina-se o processo por $\mathcal{F}$, que pode ser definido por:

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x(t+1) = R'_{\theta(t)}(t)a(t), \\ x(t) = e'_n a(t), \\ \theta(t+1) \sim \mu(t+1) = \mathbb{P}'\mu(t), \\ x(0) = x_0, \\ \mu(0) = \mu_0, \\ t = 0, \dots, T-1. \end{cases} \quad (4.11)$$

Assume-se, como normalmente feito nos trabalhos na área, que as seguintes condições são satisfeitas:

- recursos são ilimitados e disponibilizados para todos os ativos,
- compra e venda a curto prazo é permitida para todos os ativos,
- adições ou retiradas de capital não são permitidas durante todo horizonte de investimento e
- custos das transações são desprezíveis.

Desenvolve-se a seguir a definição de modelo de estado, equivalente ao modelo acima, cujas matrizes serão obtidas a partir do vetor de rentabilidade.

Vê-se que as coordenadas de $a(t) \in \mathbb{R}^n$ representam os valores aplicados aos ativos correspondentes às mesmas. Escolhe-se um dos ativos que será denominado de referência (sem perda de generalidade adota-se o primeiro) e o valor aplicado no mesmo é $a_1(t)$. Denominando por $u(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$ o vetor cujas coordenadas são os $n - 1$ valores aplicados aos $n - 1$ ativos, nesse instante t , tem-se:

$$a_1(t) + e'_{n-1}u(t) = x(t) \quad (4.12)$$

A expressão acima traduz o fato de que o valor total da carteira é reaplicado em todo instante e a expressão $x(t+1) = R'_{\theta(t)}(t)a(t)$ dá o montante obtido e a ser reaplicado no instante seguinte, isto é, caracteriza a dinâmica definida por (4.11).

Particionando o vetor rentabilidade $R_i(t)$ em $R_{r_i}(t) \in \mathbb{R}$ correspondente ao ativo de referência e $R_{u_i}(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$, correspondente aos demais ativos, definem-se:

$$R_{r_i}(t) = 1 + \eta_{r_i} + \Gamma_{r_i}w^r(t) \quad (4.13)$$

$$R_{u_i}(t) = e_{n-1} + \eta_{u_i} + \Gamma_{u_i}w^r(t) \quad (4.14)$$

nas quais $\eta_{r_i} \in \mathbb{R}$ corresponde ao primeiro elemento de η_i , $\eta_{u_i} \in \mathbb{R}^{n-1}$ corresponde ao vetor com os demais elementos de η_i , $\Gamma_{r_i} \in \mathbb{M}^{1,n}$ corresponde à primeira linha de Γ_i e $\Gamma_{u_i} \in \mathbb{M}^{n-1,n}$ corresponde à matriz com as demais linhas de Γ_i .

Pode-se escrever:

$$x(t+1) = R_{r_i}(t)a_1(t) + R'_{u_i}(t)u(t) \quad (4.15)$$

Substituindo $a_1(t)$ de (4.12) em (4.15) tem-se:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= R_{r_i}(t)(x(t) - e'_{n-1}u(t)) + R'_{u_i}(t)u(t) \\ &= R_{r_i}(t)x(t) + (R'_{u_i}(t) - R_{r_i}(t)e'_{n-1})u(t) \\ &= R_{r_i}(t)x(t) + (R_{u_i}(t) - e_{n-1}R_{r_i}(t))'u(t). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Substituindo $R_{r_i}(t)$ dado por (4.13) e $R_{u_i}(t)$ dado por (4.14) em (4.16) obtém-se:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (1 + \eta_{r_i} + \Gamma_{r_i}(t)w^r(t))x(t) \\ &\quad + (\eta_{u_i} - e_{n-1}\eta_{r_i} + [\Gamma_{u_i}(t) - e_{n-1}\Gamma_{r_i}(t)]w^r(t))'u(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Lembrando a definição geral do SLSM com ruído multiplicativo:

$$x(t+1) = (\bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^n \tilde{A}_i w_{s_1}^x(t))x(t) + (\bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^n \tilde{B}_i w_{s_2}^u(t))u(t). \quad (4.18)$$

Comparando (4.18) com (4.17), vê-se que $w^x(t) = w^u(t) = w^r(t)$ e obtém-se:

$$A_i(t) = R_{r_i}(t) = 1 + \eta_{r_i} + \Gamma_{r_i}w^r(t). \quad (4.19)$$

$$\bar{A}_i = 1 + \eta_{r_i}. \quad (4.20)$$

$$\tilde{A}_{i,s_1} = \Gamma_{r_i}(s_1), \quad s_1 = 1, \dots, n. \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} B_i(t)' &= R_{u_i}(t) - e_{n-1}R_{r_i}(t) \\ &= \eta_{u_i} - e_{n-1}\eta_{r_i} + [\Gamma_{u_i} - e_{n-1}\Gamma_{r_i}]w^r(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\bar{B}_i' = (\eta_{u_i} - e_{n-1}\eta_{r_i}). \quad (4.23)$$

$$\tilde{B}_{i,s_2}(t)' = [\Gamma_{u_i} - e_{n-1}\Gamma_{r_i}](s_2), \quad s_2 = 1, \dots, n. \quad (4.24)$$

4.3.2 Considerações para aplicação e problemas típicos

No modelo acima, nota-se que o ruído de controle é o mesmo que o de estado, pois $w^x(t) = w^u(t) = w^r(t)$. Portanto, a condição de se ter $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$ é válida e o método numérico do Capítulo 2 pode ser aplicado.

Um outro ponto, a ser observado, diz respeito ao emprego da técnica de *DML's* para resolver o problema, como exposto na Subseção 2.2.2 do Capítulo 2. Nas *DML's* (2.20), na posição (2,2) aparece Λ_i^t que deve ser uma matriz invertível. Analisa-se a expressão de Λ_i^t em (1.53), que é aqui reproduzida:

$$\Lambda_i^t = R_i + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2} \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (4.25)$$

Se $R_i > 0$ já haverá garantia de $\Lambda_i^t > 0$, mas nos casos em que $R_i = 0$, faz-se necessário ter-se $L_i^T = F_i > 0$ para garantir a positividade de Λ_i^t através de parcela(s) adicionadas a R_i . Portanto, deve-se ter para o caso R_i ou F_i ou ambas positivas definidas.

Deve ser lembrado que, no modelo SLSM desenvolvido, o vetor de controle engloba apenas $n-1$ ativos uma vez que, um deles é adotado como ativo de referência. Qualquer matriz R_i , adotada positiva

definida, isto é, $R_i > 0$, estaria penalizando aqueles $n - 1$ ativos, sem peso algum para o ativo de referência. Desse fato resulta a conveniência de se ter $R_i = 0$ e a consequente necessidade de se ter $F_i > 0$. Com essas ponderações, o funcional de custo utilizado é dado por:

$$J^{0,T} := E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{t=0}^{T-1} (x(t)' Q_{\theta(t)} x(t)) + x(T)' F_{\theta(T)} x(T) \right]. \quad (4.26)$$

Uma outra forma conveniente de se expressar o vetor de aplicação $a(t)$ é através de percentuais do valor total $x(t)$, isto é, $a(t) = p(t)x(t)$, em que $p(t)$ representa a composição percentual do portfólio em cada instante de tempo. Por exemplo, para quatro ativos, têm-se:

$$a(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{bmatrix} = p(t)x(t) = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{bmatrix} x(t),$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i(t) = x(t) \implies \sum_{i=1}^4 p_i(t) = 1.$$

A seguir são apresentados três problemas de aplicação imediata do método desenvolvido no Capítulo 2.

Problema 1:

Determinar a alocação $a(t)$, $t = 0, \dots, T - 1$, de um portfólio $x(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)$ em $t = 0, \dots, T - 1$ de forma a se ter o 1o. momento $E[x(t)] > x_{\min}(t)$, $t = 0, \dots, T$ e minimizar $J^{0,T}$ dado por (4.26), com $Q_i = F_i = I$. Notar que, neste problema, não estão incluídas as restrições para as alocações nos diversos ativos, podendo inclusive assumirem valores negativos, fato este comum na maioria dos trabalhos na área de otimização de portfólios (compra e venda de ativos a curto prazo).

Problema 2:

Corresponde ao Problema 1, com a inclusão de restrições nos ativos, no caso adotadas as restrições $E[a(t)] > 0_n$, isto é, $E[a_i(t)] > 0$, $i = 1, \dots, n$. Correspondem às restrições no vetor de controle, que podem ser transferidas para a matriz de ganho de realimentação de estado por:

$$e'_{n-1} * K^t < 1 \text{ e } K^t > 0.$$

Comentário 4.1 Ambos os problemas, enunciados anteriormente, correspondem à minimização de $\sum_{t=0}^T E[x^2(t)]$, isto é, do somatório dos segundos momentos do valor total da carteira ao longo de todo o período, sujeita à restrição de $E[x(t)] > x_{\min}(t)$, isto é, do 1o. momento ser superior a um valor dado, também ao longo do período. Estes problemas não constituem o clássico problema da média - variância conhecido na literatura, uma vez que não se está minimizando diretamente a variância. Considerando que $E[x^2(t)] = \text{Var}[x(t)] + E[x(t)]^2$, em que $\text{Var}[x(t)]$ representa a variância, observa-se que minimizar $E[x^2(t)]$ implica em minimizar as parcelas $\text{Var}[x(t)]$ e $E[x(t)]^2$. A minimização de

$E[x(t)]^2$ está limitada inferiormente em $x_{\min}^2(t)$, uma vez que $E[x(t)] > x_{\min}(t)$. No caso de $E[x(t)] - x_{\min}(t) \rightarrow 0$, a minimização do 2o. momento ocorre com a minimização da variância. Então a partir de um determinado valor da restrição de 1o. momento, o problema é equivalente ao de variância mínima. Para se determinar qual é esse limiar de restrição de 1o. momento, basta considerar $x_{\min}(t)$ como variável e ir incrementando progressivamente $x_{\min}(t)$ a partir de um valor inicial relativamente baixo. Aplicando-se sucessivamente o procedimento de otimização, obtém-se $x_{\min}^*(t)$, $t = 0, \dots, T$, denominado aqui de limiar para variância mínima, a partir do qual, $E[x(t)] - x_{\min}(t) \rightarrow 0$, para $t = 1, \dots, T$.

Comentário 4.2 Com respeito à factilidade, isto é, existência de solução para o problema, pode-se perceber que o Problema 2, pelo fato de haver restrições no controle, pode não apresentar solução a partir de algum valor de $x_{\min}^+(t)$, denominado aqui de limiar para a não factilidade.

Problema 3:

Corresponde às observações 4.1 e 4.2. Determinar, para o Problema 2 acima, o limiar para variância mínima $x_{\min}^*(t)$, $t = 0, \dots, T$ e o limiar para não factilidade $x_{\min}^+(t)$, $t = 0, \dots, T$.

4.3.3 Exemplo de aplicação para solução e simulação numéricas

Consideram-se os dados do problema de otimização de portfólio apresentado em (Costa e de Paulo, 2007) e em (Li e Ng, 2000), nos quais são considerados três modos de mercado: regular, otimista e pessimista, isto é, $n_\theta = 3$, e matriz de transição de probabilidades constante no tempo e dada por:

$$\mathbb{P}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Consideram-se carteiras de aplicação compostas de $n = 4$ ativos, sendo o primeiro deles definido como referência, podendo o investidor aplicar em todos eles. Os dados da rentabilidade definidos pelos vetores η_i e pelas matrizes Γ_i , para $i = 1, 2, 3$ são os seguintes:

- Para $\theta(t) = 1$, isto é, modo regular do mercado:

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 0.210 \\ 0.162 \\ 0.246 \\ 0.228 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0.1679 & 0.1242 & 0.0802 & 0.0947 \\ 0.1242 & 0.1930 & 0.0959 & 0.1056 \\ 0.0802 & 0.0959 & 0.6405 & 0.0346 \\ 0.0947 & 0.1056 & 0.0346 & 0.3510 \end{bmatrix}.$$

- Para $\theta(t) = 2$, isto é, modo pessimista do mercado:

$$\eta_2 = \begin{bmatrix} 0.190 \\ 0.147 \\ 0.223 \\ 0.207 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0.1591 & 0.1196 & 0.0761 & 0.0899 \\ 0.1196 & 0.1836 & 0.0914 & 0.1007 \\ 0.0761 & 0.0914 & 0.6105 & 0.0333 \\ 0.0899 & 0.1007 & 0.0333 & 0.3349 \end{bmatrix}.$$

- Para $\theta(t) = 3$, isto é, modo otimista do mercado:

$$\eta_3 = \begin{bmatrix} 0.231 \\ 0.178 \\ 0.270 \\ 0.250 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0.1760 & 0.1310 & 0.0841 & 0.0991 \\ 0.1310 & 0.2021 & 0.1007 & 0.1112 \\ 0.0841 & 0.1007 & 0.6716 & 0.0560 \\ 0.0991 & 0.1112 & 0.0360 & 0.3681 \end{bmatrix}.$$

Adotam-se adicionalmente os seguintes dados para os problemas: $T = 10$, $x_0 = x(0) = 1$, $\mu^0 = [1/3, 1/3, 1/3]'$ e $w(t) \sim (0, 0)$, isto é, ruído aditivo nulo. Quanto ao custo, $Q = F = I_1$, em que I_n indica a matriz identidade de ordem n , e é dado por (4.26).

Considera-se $\theta(t)$ não observável ao longo do horizonte.

Para a restrição de 1o. momento considera-se: $x_{min}(t) = (1 + t_{ref})^t$, com $t_{ref} = 0.178$.

Apresentam-se, a seguir, a solução e a simulação numéricas com os dados acima para os três problemas descritos na subseção anterior.

Solução e simulação numéricas:

Para a solução, obtém-se inicialmente o modelo de estado equivalente, conforme exposto anteriormente. Neste modelo, a situação de malha aberta corresponde a uma aplicação exclusiva no ativo de referência, considerado conforme dado, o primeiro dos quatro. Não se trata de ativo para "benchmark" apenas, no qual geralmente não se aplica, e que é utilizado apenas para comparação. Pelo contrário, trata-se de ativo como os demais, podendo como estes, receber parcela de aplicação no mesmo. A solução do problema é que vai definir quanto aplicar em cada ativo ao longo do período.

As matrizes equivalentes para o modelo $\bar{A}_i$, $\tilde{A}_{i,s_1}$, $\bar{B}'_i$ e $\tilde{B}'_{i,s_2}$, para $i \in \{1, 2, 3\}$ e s_1 e $s_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, são obtidas, respectivamente, a partir das equações (4.20), (4.21), (4.23) e (4.24).

- Para $\theta(t) = 1$:

$$\bar{A}_1 = [1.2100],$$

$$\tilde{A}_{1,1} = [0.1679], \quad \tilde{A}_{1,2} = [0.1242], \quad \tilde{A}_{1,3} = [0.0802], \quad \tilde{A}_{1,4} = [0.0947].$$

$$\bar{B}'_1 = \begin{bmatrix} -0.0480 \\ 0.0360 \\ 0.0180 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}'_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.0437 \\ -0.0877 \\ -0.0732 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}'_{1,2} = \begin{bmatrix} 0.0688 \\ -0.0283 \\ -0.0186 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}'_{1,3} = \begin{bmatrix} 0.0157 \\ 0.5603 \\ -0.0456 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}'_{1,4} = \begin{bmatrix} 0.0109 \\ -0.0601 \\ 0.2563 \end{bmatrix}.$$

- Para $\theta(t) = 2$:

$$\bar{A}_2 = [1.1900],$$

$$\tilde{A}_{2,1} = [0.1591], \quad \tilde{A}_{2,2} = [0.1196], \quad \tilde{A}_{2,3} = [0.0761], \quad \tilde{A}_{2,4} = [0.0899].$$

$$\bar{B}'_2 = \begin{bmatrix} -0.0430 \\ 0.0330 \\ 0.0170 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}'_{2,1} = \begin{bmatrix} -0.0395 \\ -0.0830 \\ -0.0692 \end{bmatrix}, \tilde{B}'_{2,2} = \begin{bmatrix} 0.0640 \\ -0.0282 \\ -0.0189 \end{bmatrix}, \tilde{B}'_{2,3} = \begin{bmatrix} 0.0153 \\ 0.5344 \\ -0.0428 \end{bmatrix}, \tilde{B}'_{2,4} = \begin{bmatrix} 0.0108 \\ -0.0566 \\ 0.2450 \end{bmatrix}.$$

- Para $\theta(t) = 3$:

$$\bar{A}_3 = [1.2310],$$

$$\tilde{A}_{3,1} = [0.1760], \tilde{A}_{3,2} = [0.1310], \tilde{A}_{3,3} = [0.0841], \tilde{A}_{3,4} = [0.0991].$$

$$\bar{B}'_3 = \begin{bmatrix} -0.0530 \\ 0.0390 \\ 0.0190 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}'_{3,1} = \begin{bmatrix} -0.0450 \\ -0.0919 \\ -0.0769 \end{bmatrix}, \tilde{B}'_{3,2} = \begin{bmatrix} 0.0711 \\ -0.0303 \\ -0.0198 \end{bmatrix}, \tilde{B}'_{3,3} = \begin{bmatrix} 0.0166 \\ 0.5875 \\ -0.0481 \end{bmatrix}, \tilde{B}'_{3,4} = \begin{bmatrix} 0.0121 \\ -0.0431 \\ 0.2690 \end{bmatrix}.$$

Utilizam-se os procedimentos descritos para a solução do problema e, a título de verificação, simulações Monte-Carlo são realizadas. A seguir, são apresentados os valores calculados e os resultados de 1000 simulações realizadas, para o Problema 1, para o qual a única restrição imposta é $E[x] > x_{min}(t) = (1 + t_{ref})^t$, com $t_{ref} = 0,178$, e para o Problema 2 quando, além dessa restrição, adota-se também $E[a_i(t)] > 0$ para cada ativo $i = 1, \dots, 4$.

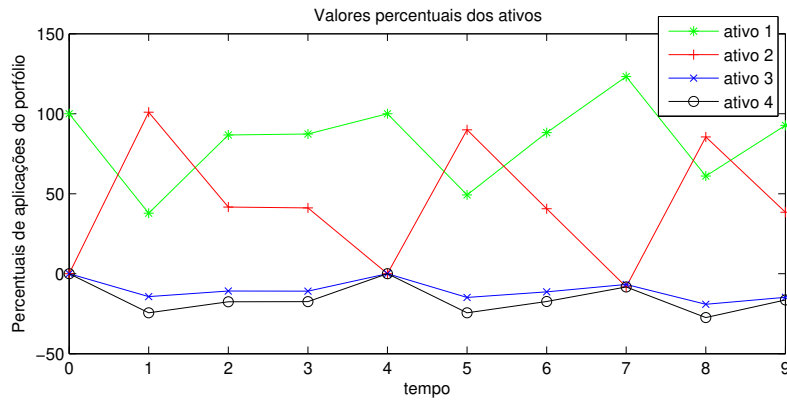
Problema 1:

A seguir, apresentam-se os resultados de projeto e da simulação com 1000 realizações para o Problema 1. A Figura 4.4 apresenta:

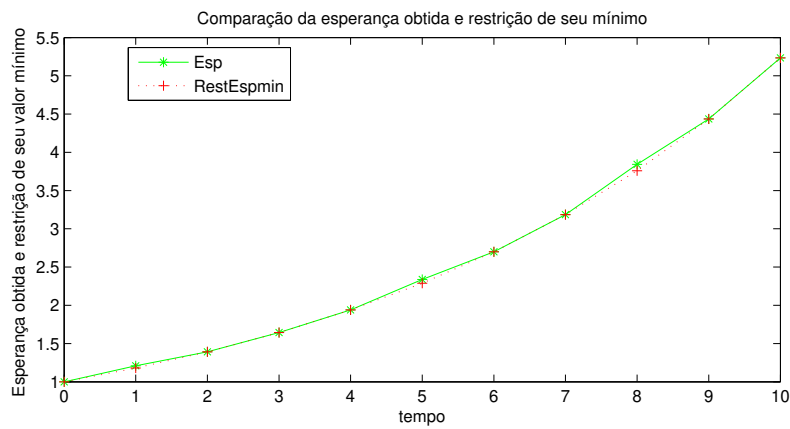
- a evolução projetada dos ativos em percentual do total do portfólio, que corresponde ao controlador $K(t) = [a_2(t) \ a_3(t) \ a_4(t)]' / 100$ e o percentual do ativo de referência $a_1(t) / 100$.
- a evolução projetada da esperança do total do portfólio e sua restrição de mínimo,
- a evolução simulada do total do portfólio.

Nas legendas dessas ilustrações *esp* indica o valor esperado, *dp* indica desvio padrão e *restr* indica a restrição do valor mínimo aceitável para a valor esperado do total da carteira.

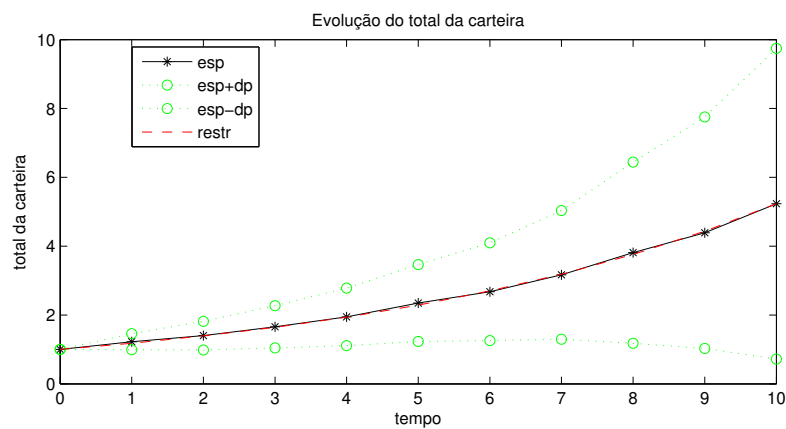
Os resultados da aplicação para o final do período, isto é, $T = 10$ são: $E[x(10)] = 5,15$ e $Dp[x(10)] = 3,79$. Como se pode notar, os resultados da simulação mostram o atendimento às condições de projeto, bem como aos resultados do projeto.



(a) Solução: Evolução dos ativos em percentual



(b) Solução: Evolução da esperança do total do portfólio



(c) Simulação: Evoluçãa da esperança e desvio padrão do total do portfólio

Figura 4.4: Problema 1 - Resultados da solução e simulação numéricas.

Problema 2:

A seguir, apresentam-se os resultados de projeto e da simulação com 1000 realizações para o Problema 2. A Figura 4.5 apresenta:

- a evolução projetada dos ativos em percentual do total do portfólio, que corresponde ao controlador $K(t) = [a_2(t) \ a_3(t) \ a_4(t)]' / 100$ e o percentual do ativo de referência $a_1(t) / 100$.
- a evolução projetada da esperança do total do portfólio e sua restrição de mínimo,
- a evolução simulada do total do portfólio.

Nas legendas dessas ilustrações *esp* indica o valor esperado, *dp* indica desvio padrão e *restr* indica a restrição do valor mínimo aceitável para a valor esperado do total da carteira.

Os resultados da aplicação para o final do período, isto é, $T = 10$ são: $E[x(10)] = 5,15$ e $Dp[x(10)] = 3,93$. Como se pode notar, os resultados da simulação mostram o atendimento às condições de projeto, bem como aos resultados do projeto.

Comentário 4.3 *Como pode se observar, o mesmo valor de $E[x(T)]$ foi obtido para ambos os problemas, apesar de políticas distintas de controle. Isso mostra justamente a situação em que $E[x(t)] - x_{min}(t) \rightarrow 0$ em ambos os casos, caracterizando também variâncias mínimas. Já os valores da variância, como esperado, são distintos.*

Problema 3:

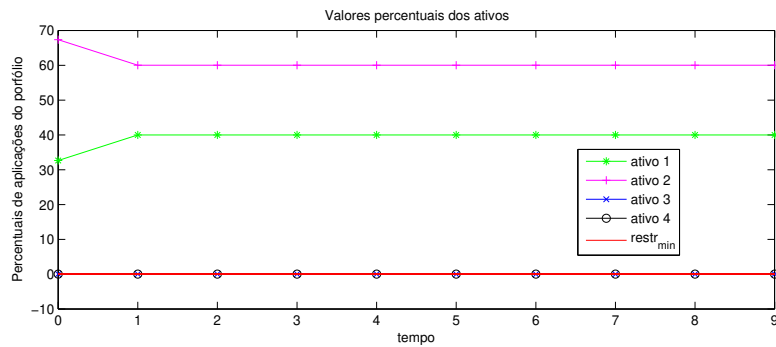
Como já exposto, deve-se determinar também $x_{min}^*(t)$. Seja $\Delta(t) = E[x(t)] - x_{min}(t)$. Para uma determinada restrição $x_{min}(t)$, o controle ótimo minimizando o 2o. momento, leva a uma solução para a qual se tem $E[x(t)] > x_{min}(t)$. Pode-se então definir um processo numérico iterativo $k = 0, \dots$, em que para todo k tem-se a restrição $x_{min}^k(t)$ e a solução correspondente obtida $E[x^k(t)]$. Faz-se $x_{min}^{k+1}(t) = E[x^k(t)]$, partindo de uma restrição inicial qualquer, por exemplo $x_{min}^0(t) = (1 + t_{ref}^0)^t$.

Nos resultados apresentados a seguir parte-se de $x_{min}^0(t)$ correspondente a um $t_{ref}^0 = 0,12$ e com restrições nas aplicações, isto é, o Problema 2. Verifica-se, para esse valor inicial de restrição, que $E[x(t)] > x_{min}^0(t)$ para $t = 1, \dots, T$. E para critério de parada da iteração acima, toma-se uma tolerância $tol(k)$ dada por:

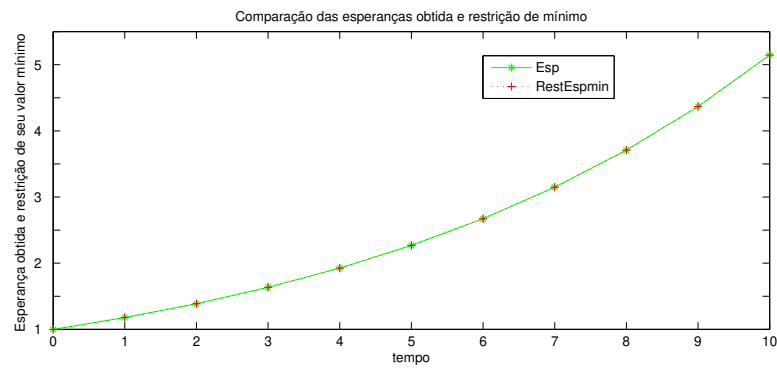
$$tol(k) = \max\{\|\Delta(t)/x_{min}^k(t)\|, t = 1, \dots, T\} < 10^{-5}$$

Com o procedimento acima, encontra-se $x_{min}^*(t)$, que corresponde a $t_{ref}^* = 0,1565$. A Tabela 4.1 indica resultados obtidos da esperança e do desvio padrão com o procedimento de otimização, para alguns valores da restrição de valor mínimo para $E[x]$. Como pode ser notado, a partir do valor correspondente a $t_{ref} = 0,1595$, passa-se a obter $E[x(t)] = x_{min}(t)$. A partir do valor de $x_{min}(t)$, correspondente a um $t_{ref} = 0,207$, o problema se torna infactível. Esse resultado é obtido diretamente do método numérico via *DML's* que fornece o alerta.

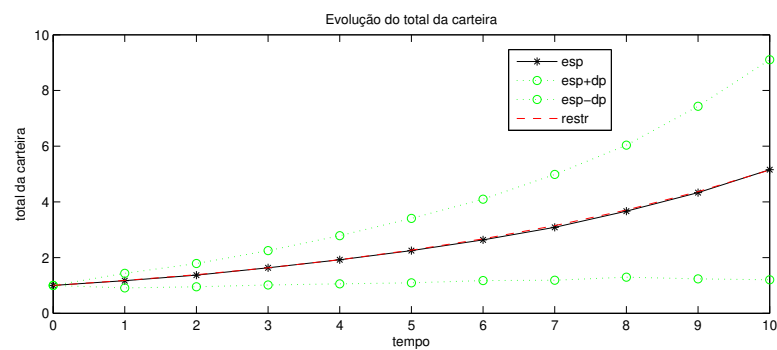
A seguir, apresentam-se os resultados de projeto. A Figura 4.6 apresenta:



(a) Solução: Evolução dos ativos em percentual



(b) Solução: Evolução da esperança do total do portfólio



(c) Simulação: Evolução da esperança e desvio padrão do total do portfólio

Figura 4.5: Problema 2 - Resultados da solução e simulação numéricas.

Tabela 4.1: Restrição da Esperança como parâmetro

t_{ref}	$x_{min}(T)$	$E[x(T)]$	$E[x(T)] - x_{min}(T)$	$Dp[x(T)]$
0,12	3,11	4,39	1,28	3,64
0,15	4,05	4,39	0,25	3,64
0,1595	4,39	4,39	0	3,64
0,16	4,41	4,41	0	3,65
0,18	5,23	5,23	0	3,97
0,20	6,19	6,19	0	4,38
0,207	6,54	—	—	—

- a evolução projetada dos ativos em percentual do total do portfólio, que correspondem ao controlador $K(t) = [a_2(t) \ a_3(t) \ a_4(t)]' / 100$ e o percentual do ativo de referência $a_1(t) / 100$.
- a evolução projetada da esperança do total do portfólio e sua restrição de mínimo,

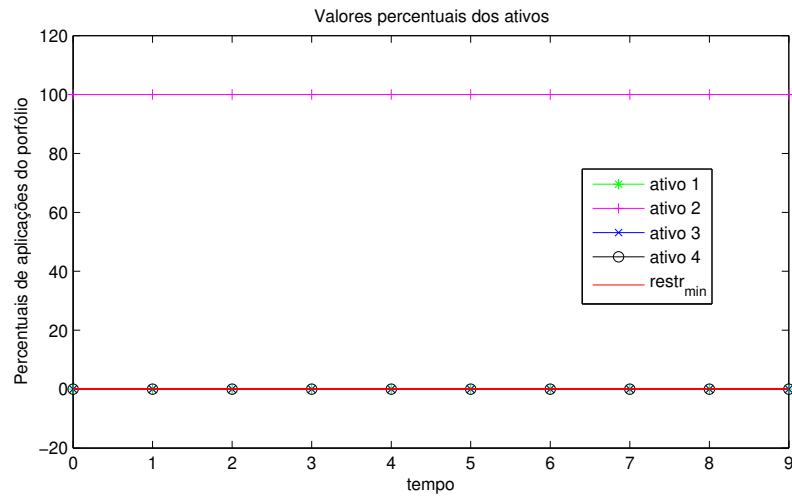
Nas legendas dessas ilustrações *esp* indica o valor esperado, *dp* indica desvio padrão e *restr* indica a restrição do valor mínimo aceitável para a valor esperado do total da carteira.

Os resultados da aplicação para o final do período, isto é, $T = 10$ são indicados na tabela 4.1 para $t_{ref} = 0,1595$.

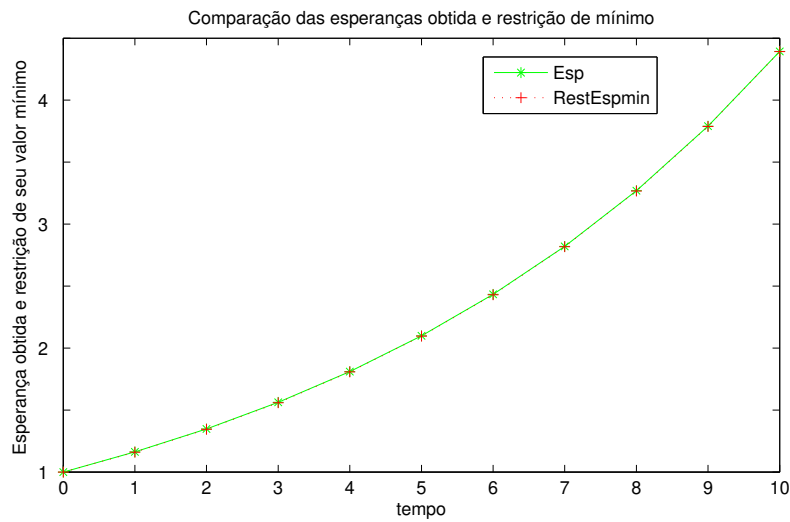
4.3.4 Um outro exemplo de aplicação

Considera-se nesta subseção um outro exemplo de aplicação, de natureza mais prática que aquele apresentado na subseção anterior. Apenas para efeito de referência, denomina-se o mesmo de Problema 4, embora o diferencial para com os anteriores refere-se apenas aos dados de aplicação e não a um novo tipo de problema.

Utilizam-se dados parciais do exemplo numérico apresentado em (Costa e Okimura, 2009). O investidor deve alocar sua riqueza entre cinco ativos de risco e um ativo livre de risco num horizonte de investimento de 24 meses. Os cinco ativos de risco correspondem a cinco das maiores companhias que entram na composição do índice S&P500: Exxon Mobil, GE, Microsoft, ATT e Citigroup. O ativo sem risco corresponde a títulos de dez anos do tesouro do governo americano. Os preços de fechamento mensal daquelas ações de 2000 até o final de 2006 foram utilizados para estimar a média e a covariância da rentabilidade. São considerados dois modos de mercado: em alta ou em baixa, assim definidos, se o preço de fechamento num determinado mês é maior ou menor que a média móvel dos preços de fechamento dos últimos 12 meses, incluindo o mesmo. Em função das observações naquele período, considera-se uma matriz de transição de probabilidades constante no tempo e dada por $p_{ij}(t) = 0.5$ para $i = 1, 2$. Os dados da rentabilidade, definida pelos vetores η_i e pelas matrizes Γ_i com $i = 1, 2$, são extraídos das matrizes dadas em (Costa e Okimura, 2009), das quais são desconsideradas as duas últimas linhas, não empregadas nesta aplicação. Para as matrizes obtidas, a primeira linha corresponde ao ativo sem risco, que é utilizado como ativo de referência e, as cinco linhas restantes correspondem aos cinco ativos de risco na ordem em que foram citados acima.



(a) Solução: Evolução dos ativos em percentual



(b) Solução: Evolução da esperança do total do portfólio

Figura 4.6: Problema 3 - Resultados da solução numérica.

- Para $\theta(t) = 1$, isto é, modo do mercado em alta:

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 0.00382 \\ 0.02602 \\ 0.02348 \\ 0.04271 \\ 0.01558 \\ 0.03773 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} 5.31 & -0.59 & 0.55 & 0.87 & -0.23 & 0.33 \\ 0.64 & 482.35 & 45.00 & -19.61 & 56.50 & -19.84 \\ 0.44 & 45.00 & 540.77 & 94.27 & 27.77 & 121.29 \\ 0.91 & -19.61 & 94.27 & 973.81 & 70.98 & 118.49 \\ -0.32 & 56.50 & 27.77 & 70.98 & 828.16 & 87.39 \\ 0.42 & -19.84 & 121.29 & 118.49 & 87.39 & 549.77 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

- Para $\theta(t) = 2$, isto é, modo do mercado em baixa:

$$\eta_2 = \begin{bmatrix} 0.00399 \\ 0.00658 \\ 0.02683 \\ 0.05283 \\ 0.01677 \\ 0.02582 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 5.65 & 1.05 & -0.22 & -2.49 & 0.70 & 0.34 \\ 1.05 & 477.14 & 8.81 & 18.63 & 130.05 & 80.66 \\ -0.22 & 8.81 & 566.87 & 68.56 & 123.23 & 79.09 \\ -2.49 & 18.63 & 68.56 & 919.13 & 66.50 & 46.12 \\ 0.70 & 130.05 & 123.23 & 66.50 & 758.00 & 59.27 \\ 0.34 & 80.66 & 79.09 & 46.12 & 59.27 & 603.71 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

Com procedimento idêntico ao utilizado anteriormente, determinam-se as matrizes do modelo de estado do *SLSM* com ruído multiplicativo. O problema é determinar a melhor alocação que minimize o segundo momento $E[x^2(t)]$, sujeita às restrições $E[x(t)] > x_{\min}(t)$ para todo $t = 0, \dots, T$ e $E[u(t)] > 0$ para todo $t = 0, \dots, T - 1$. Como já discutido anteriormente, se $E[x(t)] - x_{\min}(t) \rightarrow 0$, tem-se também a minimização da variância. Para o exemplo, considera-se $x_{\min}(t) = (1 + t_{ref})^t$ com $t_{ref} = 0,0070$.

A seguir, apresentam-se os resultados de projeto e da simulação com 1000 realizações para o Problema 4. A Figura 4.7 apresenta:

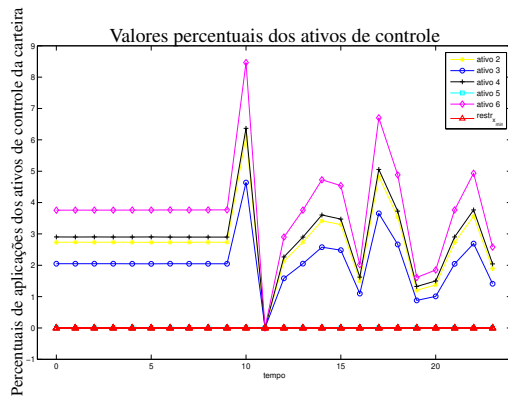
- a evolução projetada dos ativos em percentual do total do portfólio, que corresponde ao controlador $K(t) = [a_2(t) \ a_3(t) \ a_4(t) \ a_5(t) \ a_6(t)]' / 100$,
- a evolução projetada da esperança do total do portfólio e sua restrição de mínimo,
- a evolução simulada do total do portfólio.

Considerando que o percentual do ativo de referência $a_1(t)/100$ é muito superior aos demais, opta-se por não incluí-lo na ilustração, objetivando uma melhor visualização dos resultados. Com a sequência de controles de projeto, obtêm-se $E[x(24)] = 1,1822$ e $Dp[x(24)] = 0,0308$. Na simulação, com 1000 realizações, foram obtidos 1,1847 para a esperança e 0,0306 para o desvio padrão.

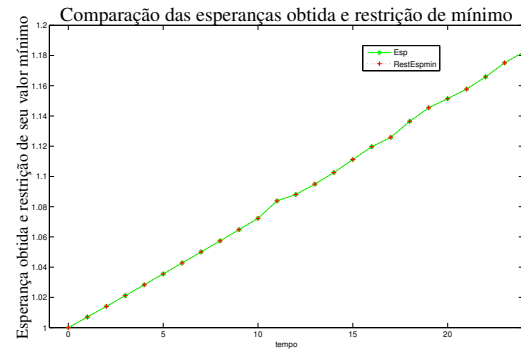
4.3.5 Comentários finais

Os exemplos apresentados constituem uma demonstração da utilidade prática do método, tanto pela simplicidade como pela facilidade de inclusão de restrições adicionais. Mostram também que muitos problemas de variância mínima podem ser resolvidos facilmente com o mesmo.

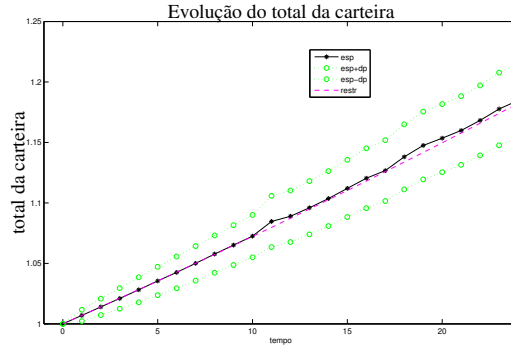
A simplicidade conseguida com a utilização da técnica de DML's tem obviamente um preço. No presente caso, de aplicação em problemas de composição de portfólios, o requisito, já explanado, de



(a) Solução: Evolução dos ativos em percentual



(b) Solução: Evolução da esperança do total do portfólio



(c) Simulação: Evolução da esperança e desvio padrão do total do portfólio

Figura 4.7: Problema 4 - Resultados da solução e simulação numéricas.

se ter R_i (matrizes de peso para o vetor de controle) ou F_i (matrizes de peso para o vetor de estado em $t = T$) ou ambas positivas definidas, constitui uma limitação para algumas aplicações, como por exemplo, aquela apresentada em (Costa e Okimura, 2009).

Em adição à simplicidade, deve-se notar o aspecto positivo de restringir as alocações a valores positivos, nem sempre considerado em outros métodos disponibilizados em literatura.

Conclusões

Neste capítulo, apresenta-se uma síntese dos resultados, acompanhada de alguns comentários finais. Adicionalmente, são apresentadas sugestões de possíveis trabalhos futuros que possam vir a complementar esses resultados.

5.1 Sumário dos resultados

Neste trabalho, estudou-se o problema de controle em horizonte finito com restrições de *SLSM's* com ruídos multiplicativo e aditivo na entrada, limitando-se o controlador a uma realimentação linear de estado simples $u(k) = K_{\theta(k)}(k)x(k)$ ou $u(k) = K(k)x(k)$, conforme se tenha o estado de Markov $\theta(k)$ observado ou não. A inclusão de restrições impostas aos primeiro e segundo momentos dos vetores de estado e controle constituem a sua principal contribuição.

Para o horizonte considerado, quer seja total, ou parcial na técnica de controle em horizonte retrocedente, adota-se um funcional de custo quadrático, que deve ser minimizado. Nesse processo de otimização obtém-se a sequência ótima $\mathbf{K}_\theta$ ou $\mathbf{K}$, pertencente à classe de todos os controles admissíveis, classe esta dependente das restrições impostas, qualitativa e quantitativamente.

Como comumente utilizado na área, variáveis auxiliares diretas ou na forma de equações recorrentes acopladas são adotadas, permitindo a obtenção de um problema de otimização equivalente na forma determinística, de solução facilitada pelo emprego de desigualdades matriciais lineares. Para a solução desenvolveu-se um método numérico variacional envolvendo vários e sucessivos processos de otimização, cujas bases estão nas condições necessárias de otimalidade que permitem garantir um ótimo local a partir de qualquer sequência inicial que atenda as restrições impostas.

Para o caso em que as restrições são limitadas aos segundos momentos e o estado de Markov $\theta(k)$ é observado, derivou-se, quando se tem o SLSM sem ruído multiplicativo, uma metodologia que permite obter, se existir, a sequência $\mathbf{K}_\theta$, para todo o horizonte considerado, num único processo de otimização. Ainda mais, essa sequência, se existir, corresponde ao mínimo global, uma vez que as condições obtidas para a solução são necessárias e suficientes.

Considerando a abrangência quanto ao ruído, para aplicações cuja modelagem requer a conside-

ração das matrizes do sistema como estocásticas, como, por exemplo, composição ótima de carteiras de investimento, o método pode ser aplicado.

Um resultado lateral, mas de extrema importância que o estudo permitiu concluir, está relacionado com a técnica de controle em horizonte retrocedente aplicada a sistemas estocásticos com restrições de natureza estocástica. Quando se consideram as restrições dessa natureza em qualquer variável, não se está restringindo essa variável aos limites definidos por aquelas restrições. Pode ocorrer, principalmente quando há ruído, que num determinado passo, o sistema seja levado a um estado, a partir do qual, como preconiza a técnica de horizonte retrocedente, não se consiga achar uma nova sequência factível no novo horizonte.

Foi apresentada uma aplicação utilizando controle em horizonte retrocedente para o caso de regulação de trens em linhas metroviárias. Considerou-se para o caso uma limitação no ruído de forma a se permitir a simulação da solução encontrada. Outra aplicação apresentada, para a qual se utiliza a metodologia para todo o horizonte de projeto, é o de seleção de portfólios em otimização de aplicações financeiras.

Adicionalmente, no capítulo onde são apresentadas as duas aplicações numéricas, são descritos os procedimentos computacionais que incluem simulações de Monte-Carlo e que foram aplicados de forma a ilustrar qualitativamente a teoria desenvolvida. Através dos resultados obtidos e apresentados graficamente para as duas aplicações, pode-se concluir que o presente estudo poderá ajudar a resolver outros problemas envolvendo SLSM's na presença de restrições.

Os estudos desenvolvidos nesta dissertação deram origem aos seguintes trabalhos:

Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Furloni, W. , Constrained Control Problem of Discrete-time Markov Jump Linear Systems with Observed State, Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática, pp. 2063–2068, Salvador, BA, Brasil, Outubro 2006.

Furloni, W., Vargas, A. N. e do Val, J. B. R. , Aplicação de controle por horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos markovianos à regulação de tráfego metroviário, Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática, pp. 2784–2789, Salvador, BA, Brasil, Outubro 2006.

Vargas, A. N. e Furloni, W., e do Val, J. B. R. , Constrained Model Predictive Control of Jump Linear Systems with Noise and Non-Observed Markov State, Proceedings of the 2006 American Control Conference, pg 929-934, Minneapolis, MN, USA, Junho 2006.

Vargas, A. N., Furloni, W. e do Val, J. B. R. , Control of Markov Jump Linear Systems with State and Input Constraints: A Necessary Optimality Condition, Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC07), Foz do Iguaçu, PR, Brazil, October 2007.

5.2 Estudos futuros

Considerando que o estudo apresentado se limita ao caso de controle restrito com controlador linear simples $u(k) = K(k)x(k)$, sugere-se realizar estudo similar para o caso de $u(k) = r(k) + K(k)x(k)$. Prevê-se que a facilidade de se utilizar a técnica de desigualdades matriciais lineares seja comprometida.

Para o caso de θ observável, sugere-se realizar estudo para inclusão das restrições de 1o.s momentos, bem como estender os resultados para SLSM com ruído multiplicativo.

Quanto ao problema de aplicação da técnica de controle em horizonte retrocedente para sistemas com restrições de natureza estocástica, sugere-se um estudo para uma revisão da técnica de modo a definir alternativas para o caso de, por exemplo, chegar-se a um estado num determinado estágio a partir do qual é impossível levar o sistema ao estágio seguinte, dentro das restrições.

Esforços na busca de soluções que forneçam o ótimo global devem ser continuados.

E finalmente, sem que se possa considerar esta lista encerrada, a utilização de outros índices de desempenho, como normas $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, na presença de restrições, poderia ser objeto de estudo específico.

Resultados básicos para o caso de ruído multiplicativo

Neste apêndice estão demonstrados resultados básicos relacionados ao SLDSM com ruído multiplicativo no que tange às dinâmicas das variáveis auxiliares e à expressão determinística para o funcional de custo. Considere o SLDSM conforme definido no capítulo 1 em (1.1):

$$\mathcal{G}_m: \begin{cases} x(t+1) = \left(\bar{A}_{\theta(t)} + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{\theta(t),s_1} w_{s_1}^x(t) \right) x(t) + \left(\bar{B}_{\theta(t),s_2} + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{\theta(t),s_2} w_{s_2}^u(t) \right) u(t) + H_{\theta(t)} w(t), \\ \theta(t+1) \sim \mu(t+1) = \mathbb{P}' \mu(t), \\ x(0) = x_0, \\ \mu(0) = \mu_0, \\ t = 0, \dots, T-1. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

em que, no espaço de probabilidade fundamental $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, para $t = 0, \dots, T$:

- $w(t)$ é uma sequência de vetores aleatórios de segunda ordem i.i.d.¹, com média nula e matriz de covariância finita $\rho^w(t) := E[w(t)w(t)'] = \Sigma \in \mathbb{S}^{r_0}$, independente de $\theta(t)$ e de $x(t)$,
- $w_{s_1}^x(t); s_1 = 1, \dots, v$ são sequências de variáveis aleatórias i.i.d., de media zero e matriz de correlação (covariância) $\rho^x(t) := E[w_i^x(t)w_j^x(t)]$ e independentes da cadeia de Markov $\theta(t)$ e do ruído aditivo $w(t)$,
- $w_{s_2}^u(t); s_2 = 1, \dots, v$ são sequências de variáveis aleatórias i.i.d., de media zero e matriz de correlação (covariância) $\rho^u(t) := E[w_i^u(t)w_j^u(t)]$ e independentes da cadeia de Markov $\theta(t)$ e do ruído aditivo $w(t)$,
- $w_{s_1}^x(t); s_1 = 1, \dots, v$ e $w_{s_2}^u(t); s_2 = 1, \dots, v$ tem correlação mútua dada por $\rho^{xu}(t) := E[w_i^x(t)w_j^u(t)]$

¹independente, identicamente distribuído.

- as sequências $\{w_{s_1}^x(t); s_1 = 1, \dots, v\}$, $\{w_{s_2}^u(t); s_2 = 1, \dots, v\}$ e $w(t)$ são sequências i.i.d. e são independentes das condições iniciais x_0 e θ_0 e adicionalmente $x_0 \in \mathbb{R}^r$ tem segundo momento finito.

Quando se tem o mesmo ruído para o estado (matrizes A) e para o controle (matrizes B) tem-se $\rho^{xu}(t) := E[w_i^x(t)w_j^u(t)] = I$, em que I é a matriz identidade.

A.1 Dinâmica das variáveis auxiliares

De maneira análoga ao caso sem ruído multiplicativo, definem-se as variáveis $X^t = \{X_i^t \in \mathbb{S}^{r_0}\} \in \mathbb{S}^{r_0}$ e $\mathcal{X}^t = \{\mathcal{X}_i^t \in \mathbb{R}^r\} \in \mathbb{R}^r$ e para as quais desenvolvem-se as dinâmicas correspondentes.

A.1.1 Caso do estado de Markov observável

Lema A.1 Para θ observável as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0}[x(t+1)x(t+1)'\mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ \bar{A}_j X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{\ell=1}^v \rho^x(s_1, \ell) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t \tilde{A}_{j,\ell}' \right. \\
 &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{\ell=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^u(\ell, s_2) \tilde{B}_{j,\ell} K_j^t X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
 &\quad + \bar{A}_j X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
 &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_2=1}^v \sum_{s_1=1}^v \rho^{xu}(s_2, s_1) \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t \tilde{A}_{j,s_1}' \\
 &\quad \left. + \mu_t(j) H_j \Sigma H_j' \right\} \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad \mathcal{X}_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0}[x(t+1)\mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) \mathcal{X}_j^t \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

E no caso de se ter $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, em que I é a matriz identidade, tem-se:

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0}[x(t+1)x(t+1)'\mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
 &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) X_j^t (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t)' + \sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t) X_j^t (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t)' \right\} \\
 &\quad + \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \mu_t(j) H_j \Sigma H_j'. \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

Prova:

Prova de (i) Basta desenvolver as expressões notando a independência estocástica entre as variáveis.

$$\begin{aligned}
X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
&= \sum_{j \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} E_{x_0, \mu_0} [(A_j^t x(t) + B_j^t u(t) + H_j w(t)) (A_j^t x(t) + B_j^t u(t) + H_j w(t))' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} E_{x_0, \mu_0} [\underbrace{(A_j^t x(t) + B_j^t u(t)) (A_j^t x(t) + B_j^t u(t))'}_{Y_j^t} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} E_{x_0, \mu_0} [\underbrace{H_j w(t) w'(t) H_j'}_{\Phi_i^t} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}], \tag{A.5}
\end{aligned}$$

em que na passagem acima se consideram $w(t)$ e $x(t)$ independentes entre si, $w(t)$ e $u(t)$ independentes entre si, bem como as independências estatísticas das sequências $\{w_{s_1}^x(t); s_1 = 1, \dots, v\}$ e $\{w_{s_2}^u(t); s_2 = 1, \dots, v\}$ com $w(t)$.

Desenvolve-se a seguir Y_j^t , adotando-se $u(t) = K_j^t x(t)$, que corresponde, portanto, ao caso de θ observado.

$$\begin{aligned}
Y_j^t &= E_{x_0, \mu_0} [(A_j^t x(t) x'(t) A_j^{t'} + A_j^t x(t) u'(t) B_j^{t'} + B_j^t u(t) x'(t) A_j^{t'} + B_j^t u(t) u'(t) B_j^{t'}) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \\
&= \underbrace{E_{x_0, \mu_0} [A_j^t x(t) x'(t) A_j^{t'} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}]}_{T_1} + \underbrace{E_{x_0, \mu_0} [A_j^t x(t) u'(t) B_j^{t'} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}]}_{T_{12}} + \underbrace{E_{x_0, \mu_0} [B_j^t u(t) x'(t) A_j^{t'} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}]}_{T_{21}} \\
&\quad + \underbrace{E_{x_0, \mu_0} [B_j^t u(t) u'(t) B_j^{t'} \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}]}_{T_2}.
\end{aligned}$$

Substituindo $A_j^t = \bar{A}_j + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} w_{s_1}^x(t)$ e $B_j^t = \bar{B}_j + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j,s_2} w_{s_2}^u(t)$ e considerando as sequências $\{w_{s_1}^x(t); s_1 = 1, \dots, v\}$ e $\{w_{s_2}^u(t); s_2 = 1, \dots, v\}$ com média nula, e matrizes de auto correlação dadas por respectivamente $\rho^x(t)$ e $\rho^u(t)$ e correlação mútua dada por $\rho^{xu}(t)$ e as independências estatísticas, tem-se:

$$\begin{aligned}
T_1 &= E_{x_0, \mu_0} [(\bar{A}_j + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} w_{s_1}^x(t)) (x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) (\bar{A}_j + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} w_{s_1}^x(t))'] \\
&= E_{x_0, \mu_0} [\bar{A}_j (x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) \bar{A}_j'] + E_{x_0, \mu_0} [\bar{A}_j (x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} w_{s_1}^x(t)] \\
&\quad + E_{x_0, \mu_0} [\sum_{s_1=1}^v w_{s_1}^x(t) \tilde{A}_{j,s_1}' (x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) \bar{A}_j'] \\
&\quad + E_{x_0, \mu_0} [\sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} w_{s_1}^x(t) (x(t) x(t)' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) \sum_{s_1=1}^v w_{s_1}^x(t) \tilde{A}_{j,s_1}']. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Na expressão acima notar que $E_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] = X_j^t$, as segunda e terceira parcelas se anulam pois $E_{x_0, \mu_0}[w_{s_1}^x(t)] = 0$ e na quarta parcela aparece o produto de dois somatórios que, ao ser desenvolvido, produz termos que são as esperanças do produto $w_{s_1}^x w_{\ell}^x$, que são elementos da matriz de correlação $\rho^x(t)$. Com isso tem-se para T_1 :

$$T_1 = \bar{A}_j X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{\ell=1}^v \rho^x(s_1, \ell) \tilde{A}_{j, s_1} X_j^t \tilde{A}_{j, \ell}' \quad (\text{A.7})$$

Desenvolvendo T_2 tem-se:

$$\begin{aligned} T_2 &= E_{x_0, \mu_0}[(\bar{B}_j + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j, s_2} w_{s_2}^u(t)) K_j^t (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} (\bar{B}_j + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j, s_2} w_{s_2}^u(t))'] \\ &= E_{x_0, \mu_0}[\bar{B}_j K_j^t (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} \bar{B}_j'] \\ &\quad + E_{x_0, \mu_0}[\bar{B}_j K_j^t (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} \sum_{s_2=1}^v w_{s_2}^u(t)' \tilde{B}_{j, s_2}'] \\ &\quad + E_{x_0, \mu_0}[\sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j, s_2} w_{s_2}^u(t) K_j^t (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} \bar{B}_j'] \\ &\quad + E_{x_0, \mu_0}[\sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j, s_2} w_{s_2}^u(t) K_j^t (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} \sum_{\ell=1}^v w_{\ell}^u(t)' \tilde{B}_{j, \ell}']. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Na expressão acima notar que $E_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] = X_j^t$, as segunda e terceira parcelas se anulam pois $E_{x_0, \mu_0}[w_{s_2}^u(t)] = 0$ e na quarta parcela aparece o produto de dois somatórios que ao ser desenvolvido, produz termos que são as esperanças do produto $w_{s_2}^u w_{\ell}^u$, que são elementos da matriz de correlação $\rho^u(t)$. Com isso tem-se para T_2 :

$$T_2 = \bar{B}_j K_j^t X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{s_2=1}^v \sum_{\ell=1}^v \rho^u(s_2, \ell) \tilde{B}_{j, s_2} K_j^t X_j^t \tilde{B}_{j, \ell}' \quad (\text{A.9})$$

Desenvolvendo T_{12} tem-se:

$$\begin{aligned} T_{12} &= E_{x_0, \mu_0}[(\bar{A}_j + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j, s_1} w_{s_1}^x(t)) (x(t)x'(t)\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} (\bar{B}_j + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j, s_2} w_{s_2}^u(t))'] \\ &= E_{x_0, \mu_0}[\bar{A}_j (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) \bar{B}_j'] \\ &\quad + E_{x_0, \mu_0}[\bar{A}_j (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} \sum_{s_2=1}^v w_{s_2}^u(t)' \tilde{B}_{j, s_2}'] \\ &\quad + E_{x_0, \mu_0}[\sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j, s_1} w_{s_1}^x(t) (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) K_j^{t'} \bar{B}_j'] \\ &\quad + E_{x_0, \mu_0}[\sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j, s_1} w_{s_1}^x(t) (x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}) \sum_{s_2=1}^v w_{s_2}^u(t)' \tilde{B}_{j, s_2}']. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Na expressão acima notar que $E_{x_0, \mu_0}[x(t)x(t)'\mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] = X_j^t$, as segunda e terceira parcelas se anulam pois $E_{x_0, \mu_0}[w_{s_1}^x(t)] = 0$ e $E_{x_0, \mu_0}[w_{s_2}^u(t)] = 0$ e na quarta parcela aparece o produto de dois somatórios que ao ser desenvolvido, produz termos que são as esperanças do produto $w_{s_1}^x w_{s_2}^u$, que são elementos da matriz de correlação cruzada $\rho^{x,u}(t)$. Com isso tem-se para T_{12} :

$$T_{12} = \bar{A}_j X_j^t K_j^{t'} \bar{B}'_j + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}'_{j,s_2}. \quad (\text{A.11})$$

Considerando o fato de que T_{21} é o transposto de T_{12} tem-se:

$$T_{21} = \bar{B}_j K_j^t X_j^t \bar{A}'_j + \sum_{s_2=1}^v \sum_{s_1=1}^v \rho^{xu}(s_2, s_1) \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t \tilde{A}'_{j,s_1}. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo T_1 , T_{12} , T_{21} e T_2 em Y_j^t , fatorando as expressões sem somatórios, tem-se:

$$\begin{aligned} Y_j^t &= T_1 + T_{12} + T_{21} + T_2 \\ &= \bar{A}_j X_j^t \bar{A}'_j + \sum_{s_1=1}^v \sum_{\ell=1}^v \rho^x(s_1, \ell) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t \tilde{A}'_{j,\ell} \\ &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t K_j^{t'} \bar{B}'_j + \sum_{\ell=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^u(\ell, s_2) \tilde{B}_{j,\ell} K_j^t X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}'_{j,s_2} \\ &\quad + \bar{A}_j X_j^t K_j^{t'} \bar{B}'_j + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}'_{j,s_2} \\ &\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t \bar{A}'_j + \sum_{s_2=1}^v \sum_{s_1=1}^v \rho^{xu}(s_2, s_1) \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t \tilde{A}'_{j,s_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Para Φ_j^t tem-se:

$$\Phi_j^t = E_{x_0, \mu_0}[H_j w(t) w'(t) H_j' \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] = H_j E_{x_0, \mu_0}[w(t) w'(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] H_j' = H_j \mu_i^t \Sigma H_j' = \mu_j^t H_j \Sigma H_j'. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo Y_j^t e Φ_j^t na expressão inicial de X_i^{t+1} obtem-se (1.30), o que prova (i).

Prova de (ii) Para (ii) tem-se de forma análoga:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0}[x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{N}} E_{x_0, \mu_0}[x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i, \theta(t)=j\}}] \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} E_{x_0, \mu_0}[(A_j^t x(t) + B_j^t u(t) + H_j w(t)) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \underbrace{E_{x_0, \mu_0}[(A_j^t x(t) + B_j^t u(t)) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}]}_{Y_j^t}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Desenvolve-se a seguir y_j^t adotando-se $u(t) = K_j^t x(t)$, que corresponde portanto ao caso de $\theta(t)$ observado.

$$\begin{aligned}
y_j^t &= E_{x_0, \mu_0}[(A_j^t x(t) + B_j^t u(t)) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \\
&= E_{x_0, \mu_0}[(A_j^t + B_j^t K_j^t) x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \\
&= E_{x_0, \mu_0} \left[\left((\bar{A}_j + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} w_{s_1}^x(t)) + (\bar{B}_j + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j,s_2} w_{s_2}^u(t)) K_j^t \right) x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}} \right] \\
&= (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) E_{x_0, \mu_0} [x(t) \mathbb{1}_{\{\theta(t)=j\}}] \\
&= (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) \mathcal{X}_j^t.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Substituindo y_j^t na expressão inicial de $\mathcal{X}_i^{t+1}$ obtém-se (1.31), o que prova (ii).

Prova de (iii) No caso de se ter $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, em que I é a matriz identidade, eliminando-se os termos cruzados que se anulam, tem-se:

$$\begin{aligned}
Y_j^t &= \bar{A}_j X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t \tilde{A}_{j,s_1}' \\
&\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
&\quad + \bar{A}_j X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_1}' \\
&\quad + \bar{B}_j K_j^t X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t \tilde{A}_{j,s_1}'.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Separam-se os termos com $\bar{A}$ e $\bar{B}$ dos que contêm $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ obtendo-se:

$$\begin{aligned}
Y_j^t &= \bar{A}_j X_j^t \bar{A}_j' + \bar{B}_j K_j^t X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \bar{A}_j X_j^t K_j^{t'} \bar{B}_j' + \bar{B}_j K_j^t X_j^t \bar{A}_j' \\
&= \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t \tilde{A}_{j,s_1}' + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t K_j^{t'} \tilde{B}_{j,s_1}' + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j,s_2} K_j^t X_j^t \tilde{A}_{j,s_1}'.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Fatorando-se cada conjunto dos termos acima, tem-se:

$$Y_j^t = (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) X_j^t (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t)' + \sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t) X_j^t (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t)'. \tag{A.19}$$

Finalmente, substituindo Y_j^t e Φ^t na expressão inicial de X_i^{t+1} , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t) X_j^t (\bar{A}_j + \bar{B}_j K_j^t)' + \sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t) X_j^t (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K_j^t)' \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} (\mu_t(j) H_j \Sigma H_j').
\end{aligned} \tag{A.20}$$

que prova (iii). $\square$

A.1.2 Caso do estado de Markov não observável

Lema A.2 Para θ não observável as seguintes igualdades são válidas:

$$\begin{aligned}
(i) \ X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ \bar{A}_j X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{\ell=1}^v \rho^x(s_1, \ell) \tilde{A}_{j,s_1} X_j^t \tilde{A}_{j,\ell}' \right. \\
&\quad + \bar{B}_j K^t X_j^t K^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{\ell=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^u(\ell, s_2) \tilde{B}_{j,\ell} K^t X_j^t K^{t'} \tilde{B}_{j,s_2}' \\
&\quad + \bar{A}_j X^t K^{t'} \bar{B}_j' + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{j,s_1} X^t K^{t'} X_j^t \tilde{B}_{j,s_2}' \\
&\quad + \bar{B}_j K^t X_j^t \bar{A}_j' + \sum_{s_2=1}^v \sum_{s_1=1}^v \rho^{xu}(s_2, s_1) \tilde{B}_{j,s_2} K^t X^t \tilde{A}_{j,s_1}' \\
&\quad \left. + \mu_t(j) H_j \Sigma H_j' \right\}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \ \mathcal{X}_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1) \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
&= \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ji} (\bar{A}_j + \bar{B}_j K^t) \mathcal{X}_j^t.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

E no caso de se ter $\rho^x = \rho^u = \rho^{xu} = I$, em que I é a matriz identidade, tem-se:

$$\begin{aligned}
(iii) \ X_i^{t+1} &= E_{x_0, \mu_0} [x(t+1)x(t+1)' \mathbb{1}_{\{\theta(t+1)=i\}}] \\
&= \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \left\{ (\bar{A}_j + \bar{B}_j K^t) X_j^t (\bar{A}_j + \bar{B}_j K^t)' + \sum_{s_1=1}^v (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K^t) X_j^t (\tilde{A}_{j,s_1} + \tilde{B}_{j,s_1} K^t)' \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n_\theta} p_{ji} \mu_t(j) H_j \Sigma H_j'.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Prova: Segue-se, de forma análoga, a sequência da prova do Lema 1.4 substituindo K_j^t por K^t . $\square$

A.2 Equivalente determinístico para o funcional de custo

Nesta seção, desenvolve-se uma expressão determinística equivalente ao funcional $J_{\mathbf{K}_\theta}^T$ (ou $J_{\mathbf{K}}^T$), que será útil no processo de otimização.

Define-se para um controle $\mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta$ (ou $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$), uma variável aleatória na forma:

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=t}^{T-1} q(\ell) + p(T) \mid x(t), \theta(t) \right], t = 0, \dots, T-1, \\ q(\ell) &= x'(\ell) Q_{\theta(\ell)} x(\ell) + u'(\ell) R_{\theta(\ell)} u(\ell), \\ W(T, x(T), \theta(T)) &= p(T) = x(T)' F_{\theta(T)} x(T). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Essa variável será útil na simplificação da expressão do funcional de custo. De uma outra forma, equivalente, pode-se reescrever a equação acima por:

$$\begin{aligned} W(t, x(t), \theta(t)) &= \mathbb{E} \left[q(t) + \sum_{\ell=t+1}^{T-1} q(\ell) + p(T) \mid x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + \mathbb{E} \left[\sum_{\ell=t+1}^{T-1} q(\ell) + p(T) \mid x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{\ell=t+1}^{T-1} q(\ell) + p(T) \mid x(t+1), \theta(t+1) \right] \mid x(t), \theta(t) \right] \\ &= q(t) + \mathbb{E} [W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) \mid x(t), \theta(t)], \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

em que na terceira igualdade utiliza-se o fato de que o processo conjunto $\{x(t), \theta(t)\}$ é markoviano (vide Teorema 2.19 em (Çinlar, 1975, p.37)).

A.2.1 Caso do estado de Markov observável

O lema a seguir fornece uma forma equivalente do custo em função de variáveis auxiliares adicionais para o caso de θ observável, quando $K^t \in \mathbb{R}^{s,r}$. Para simplificação de notação, faz-se $\theta(t) = i$, sempre que não houver comprometimento do entendimento.

Lema A.3 *O funcional (A.24) é expresso equivalentemente à função quadrática*

$$W(t, x(t), i) = x(t)' L_i^t x(t) + \omega_i^t, \quad (\text{A.26})$$

com L_i^t e ω_i^t dados por:

$$L_i^t = \Xi_i^t + \Gamma_i^t K_i^t + K_i^{t'} \Gamma_i^{t'} + K_i^{t'} \Lambda_i^t K_i^t, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad L_i^T = F_i^T, \quad (\text{A.27})$$

$$\omega_i^t = \mathcal{E}_i(\omega_i^{t+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L_i^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\}, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad \omega_i^T = 0, \quad (\text{A.28})$$

em que Ξ_i^t , Γ_i^t e Λ_i^t são dadas por:

$$\Xi_i^t = Q_i + \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,s_1}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (\text{A.29})$$

$$\Gamma_i^t = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (\text{A.30})$$

$$\Lambda_i^t = R_i + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \rho^u(k, s_2) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,k}, \quad t = 0, \dots, T. \quad (\text{A.31})$$

Prova: Utiliza-se o procedimento da indução. Para $t = T$, utilizando a definição em (A.24) e os valores dados em $t = T$ tem-se:

$$W(T, x(T, i)) = x(T)' F_i^T x(T) = x(T) L_i^T x(T), \quad (\text{A.32})$$

e o resultado é válido para $t = T$.

Suponha que $W(t+1, x(t+1), \theta(t+1)) = x(t+1)' L_i^{t+1} x(t+1) + \omega_{\theta(t+1)}^{t+1}$ seja válido.

Então por (A.25) e equação dinâmica de $\mathcal{G}_m$ tem-se:

$$\begin{aligned} W(t, x(t), i) &= q(t) + E[x(t+1)' L_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) | i, x(t)] \\ &= q(t) + E[x(t+1)' L_{\theta(t+1)}^{t+1} x(t+1) | i, x(t)] + E[\omega_{\theta(t+1)}^{t+1} | i, x(t)] \\ &= q(t) + E[(A_i^t x(t) + B_i^t u(t) + H_i^t \omega(t))' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \\ &\quad (A_i^t x(t) + B_i^t u(t) + H_i^t \omega(t)) | i, x(t)] + E[\omega_{\theta(t+1)}^{t+1} | i, x(t)] \\ &= q(t) + E[x(t)' A_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} A_i^t x(t) | i, x(t)] \\ &\quad + E[u(t)' B_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} B_i^t u(t) | i, x(t)] \\ &\quad + E[x(t)' A_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} B_i^t u(t) | i, x(t)] \\ &\quad + E[u(t)' B_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} A_i^t x(t) | i, x(t)] \\ &\quad + E[\omega(t)' H_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} H_i^t \omega(t) | i, x(t)] + E[\omega_{\theta(t+1)}^{t+1}]. \end{aligned}$$

Considerando que $x(t)$ é conhecido e $u(t) = K_i^t x(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
W(t, x(t), i) = & \underbrace{q(t) + x(t)' E[A_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} A_i^t | i, x(t)]}_{T_x} x(t) \\
& + x(t)' \underbrace{K_i^{t'} E[B_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} B_i^t | i, x(t)]}_{T_u} K_i^t x(t) \\
& + x(t)' \underbrace{E[A_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} B_i^t | i, x(t)]}_{T_{xu}} K_i^t x(t) \\
& + x(t)' \underbrace{K_i^{t'} E[B_i^{t'} L_{\theta(t+1)}^{t+1} A_i^t | i, x(t)]}_{T_{ux}} x(t) \\
& + \underbrace{\text{tr} \mathcal{E}_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H_i' + \mathcal{E}_i(\omega(t+1))}_{T_\omega}.
\end{aligned} \tag{A.33}$$

A seguir desenvolvem-se T_x , T_u e T_{xu} .

Substituindo $A_j^t = \bar{A}_j + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{j,s_1} w_{s_1}^x(t)$ e $B_j^t = \bar{B}_j + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{j,s_2} w_{s_2}^u(t)$ e considerando as sequências $\{w_{s_1}^x(t); s_1 = 1, \dots, v\}$ e $\{w_{s_2}^u(t); s_2 = 1, \dots, v\}$ com média nula, e matrizes de auto correlação dadas por respectivamente $\rho^x(t)$ e $\rho^u(t)$ e correlação mútua dada por $\rho^{xu}(t)$ e as independências estatísticas, tem-se:

Para T_x :

$$\begin{aligned}
T_x = & E[(\bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{i,s_1} w_{s_1}^x(t))' L_{\theta(t+1)}^{t+1} (\bar{A}_i + \sum_{k=1}^v \tilde{A}_{i,k} w_k^x(t)) | i, x(t)] \\
= & E[\bar{A}_i' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \bar{A}_i | i, x(t)] + E[\bar{A}_i' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{i,s_1} w_{s_1}^x(t) | i, x(t)] \\
& + E[\sum_{s_1=1}^v w_{s_1}^x(t)' \tilde{A}_{i,s_1}' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \bar{A}_i | i, x(t)] \\
& + E[\sum_{s_1=1}^v w_{s_1}^x(t)' \tilde{A}_{i,s_1}' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{i,s_1} w_{s_1}^x(t) | i, x(t)].
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Na expressão acima, notar que $E[L_{\theta(t+1)}^{t+1} | i, x(t)] = \mathcal{E}_i(L^{t+1})$, as segunda e terceira parcelas se anulam, pois $E[w_{s_1}^x(t)] = 0$, e na quarta parcela, aparece o produto de dois somatórios, que ao ser desenvolvido, produz termos que são as esperanças do produto $w_{s_1}^x w_k^x$, que são elementos da matriz de correlação $\rho^x(t)$. Com isso tem-se para T_x :

$$T_x = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,k} \tag{A.35}$$

Para T_u :

$$\begin{aligned}
T_u &= E[(\bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{i,s_2} w_{s_2}^u(t))' L_{\theta(t+1)}^{t+1} (\bar{B}_i + \sum_{k=1}^v \tilde{B}_{i,k} w_k^u(t)) | i, x(t)] \\
&= E[\bar{B}_i' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \bar{B}_i | i, u(t)] + E[\bar{B}_i' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{i,s_2} w_{s_2}^u(t) | i, x(t)] \\
&\quad + E[\sum_{s_2=1}^v w_{s_2}^u(t)' \tilde{B}_{i,s_2}' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \bar{B}_i | i, x(t)] \\
&\quad + E[\sum_{s_2=1}^v w_{s_2}^u(t)' \tilde{B}_{i,s_2}' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \sum_{k=1}^v \tilde{B}_{i,k} v w_k^u(t) | i, x(t)]. \tag{A.36}
\end{aligned}$$

Na expressão acima, notar que $E[L_{\theta(t+1)}^{t+1} | i, x(t)] = \mathcal{E}_i(L^{t+1})$, as segunda e terceira parcelas se anulam, pois $E[w_{s_2}^u(t)] = 0$, e na quarta parcela, aparece o produto de dois somatórios, que ao ser desenvolvido, produz termos que são as esperanças do produto $w_{s_1}^u w_k^u$, que são elementos da matriz de correlação $\rho^u(t)$. Com isso tem-se para T_u :

$$T_u = \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^u(s_2, k) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,k}. \tag{A.37}$$

Para T_{xu} :

$$\begin{aligned}
T_{xu} &= E[(\bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{i,s_1} w_{s_1}^x(t))' L_{\theta(t+1)}^{t+1} (\bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{i,s_2} w_{s_2}^u(t)) | i, x(t)] \\
&= E[\bar{A}_i' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \bar{B}_i | i, x(t)] + E[\bar{A}_i' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \sum_{s_1=1}^v \tilde{A}_{i,s_1} w_{s_1}^u(t) | i, x(t)] \\
&\quad + E[\sum_{s_1=1}^v w_{s_1}^x(t)' \tilde{A}_{i,s_1}' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \bar{B}_i | i, x(t)] \\
&\quad + E[\sum_{s_1=1}^v w_{s_1}^x(t)' \tilde{A}_{i,s_1}' L_{\theta(t+1)}^{t+1} \sum_{s_2=1}^v \tilde{B}_{i,s_2} v w_{s_2}^u(t) | i, x(t)]. \tag{A.38}
\end{aligned}$$

Na expressão acima, notar que $E[L_{\theta(t+1)}^{t+1} | i, x(t)] = \mathcal{E}_i(L^{t+1})$, as segunda e terceira parcelas se anulam, pois $E[w_{s_1}^x(t)] = 0$ e $E[w_{s_2}^u(t)] = 0$, e na quarta parcela aparece o produto de dois somatórios, que ao ser desenvolvido, produz termos que são as esperanças do produto $w_{s_1}^x w_{s_2}^u$, que são elementos da matriz de correlação ρ^{xu} . Com isso tem-se para T_{xu} :

$$T_{xu} = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2}. \tag{A.39}$$

Considerando o fato de que T_{ux} é o transposto de T_{xu} tem-se:

$$T_{ux} = \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_2=1}^v \sum_{s_1=1}^v \rho^{xu}(s_2, s_1) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,s_1}. \tag{A.40}$$

Lembrando que $q(t) = x(t)'Q_i x(t) + u(t)'R_i u(t)$ e $u(t) = K_i^t x(t)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 W(t, x(t), i) &= x(t)'Q_i x(t) + x(t)'K_i^{t'} R_i K_i^t x(t) + x(t)'T_x x(t) \\
 &\quad + x(t)'T_{xu} K_i^t x(t) + x(t)'K_i^{t'} T_{ux} x(t) + x(t)'K_i^{t'} T_u K_i^t x(t) + T_\omega \\
 &= x(t)' \underbrace{(Q_i + K_i^{t'} R_i K_i^t + T_x + T_{xu} K_i^t + K_i^{t'} T_{ux} + K_i^{t'} T_u K_i^t)}_{\mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t)} x(t) + \omega_i^t.
 \end{aligned} \tag{A.41}$$

Desenvolvendo $\mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t) &= \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,k} \\
 &\quad + (\bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2}) K_i^t \\
 &\quad + K_i^{t'} (\bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2})' \\
 &\quad + K_i^{t'} (\bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^u(s_2, k) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,k}) K_i^t.
 \end{aligned} \tag{A.42}$$

E para $W(t, x(t), i)$ tem-se:

$$W(t, x(t), i) = x(t)'(Q_i + K_i^{t'} R_i K_i^t + \mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t))x(t) + \omega_i^t, \tag{A.43}$$

em que $\mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t)$ é dada por (A.42).

A expressão acima corresponde à forma de indicar a variável aleatória $W(t, x(t), i)$ pelas parcelas, uma correspondente ao estágio t e outra correspondente aos estágios subsequentes a partir $t+1$, ambas dependentes de K_i^t .

E para L_i^t tem-se:

$$L_i^t = Q_i + K_i^{t'} R_i K_i^t + \mathcal{L}_i^t(L^{t+1}, K^t), \tag{A.44}$$

que leva à expressão (A.26) do Lema A.3.

Outra forma de apresentá-la é muito útil nos problemas em que se busca determinar K_i^t , corresponde à separação dos termos das diferentes ordens de K_i^t .

$$\begin{aligned}
 W(t, x(t), i) &= x(t)'Q_i x(t) + u(t)'R_i u(t) + x(t)'T_x x(t) \\
 &\quad + x(t)'T_{xu} K_i^t x(t) + x(t)'K_i^{t'} T_{ux} x(t) + x(t)'K_i^{t'} T_u K_i^t x(t) + T_\omega \\
 &= x(t)' \underbrace{\left(\underbrace{Q_i + T_x}_{\Xi_i^t} + \underbrace{T_{xu} K_i^t + K_i^{t'} T_{ux}}_{\Gamma_i^t} + \underbrace{K_i^{t'} T_{ux}}_{\Gamma_i^{t'}} + \underbrace{K_i^{t'} (R_i + T_u) K_i^t}_{\Lambda_i^t} \right)}_{L_i^t} x(t) + \omega_i^t.
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

E considerando T_x , T_u e T_{xu} , têm-se para Ξ_i^t , Γ_i^t e Λ_i^t :

$$\begin{aligned}\Xi_i^t &= Q_i + \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{A}_{i,k} \\ \Gamma_i^t &= \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \tilde{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,s_2} \\ \Lambda_i^t &= R_i^t + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^u(s_2, k) \tilde{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \tilde{B}_{i,k}.\end{aligned}$$

E com as substituições indicadas, $W(t, x(t), i)$ é dado por:

$$W(t, x(t), i) = x(t)' L_i^t x(t) + \omega_i^t,$$

em que

$$\begin{aligned}L_i^t &= \Xi_i^t + \Gamma_i^t K_i^t + K_i^{t'} \Gamma_i^{t'} + K_i^{t'} \Lambda_i^t K_i^t, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad L_i^T = F_i^T, \\ \omega_i^t &= \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\}, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad \omega_i^T = 0,\end{aligned}$$

o que completa a prova. $\square$

Mais uma definição, comumente utilizada, é a do custo remanescente no instante t , que é dada por:

Definição A.1 *Seja $\mathbf{K}_\theta \in \mathcal{K}_\theta$. O funcional*

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t) = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{T-1} q(\ell) + p(T) \right] \quad (\text{A.46})$$

é denominado custo remanescente no instante t correspondente à $\mathbf{K}_\theta$.

A seguir, apresenta-se uma expressão determinística equivalente para o funcional $J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t)$, que será útil na análise de otimalidade.

Proposição A.1 *Para cada $t = 0, \dots, T$, sejam L^t e ω^t definidos de acordo com (A.27)–(A.28). Então, o funcional $J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t)$ é idêntico à*

$$J_{\mathbf{K}_\theta}^T(t) = E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L_i^t x(t) + \omega_i^t] = \langle L^t, X^t \rangle + \mu_i^t \omega^t. \quad (\text{A.47})$$

Prova: Note, que através da Definição A.1, (A.24) e Lema A.3, tem-se:

$$\begin{aligned}J_{\mathbf{K}}^T(t) &= E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{T-1} q(\ell) + p(T) \right] \\ &= E_{x_0, \mu_0} \left[E \left[\sum_{\ell=t}^{T-1} q(\ell) + p(T) \mid x(t), i \right] \right] \\ &= E_{x_0, \mu_0} [W(t, x(t), i)] \\ &= E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L_i^t x(t) + \omega_i^t],\end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

válido para cada $t = 0, \dots, T$. Aplicando o Lema 1.1 em (A.48), encontra-se (A.47). $\square$

A.2.2 Caso do estado de Markov não observável

Para θ não observável, quando $K^t \in \mathcal{R}^{s,r}$, o lema, a seguir, fornece uma forma equivalente do custo em função de variáveis auxiliares adicionais, definidas de forma semelhante às definidas para θ observável. Para simplificação de notação, faz-se $\theta(t) = i$.

Lema A.4 *O funcional (A.24) é expresso equivalentemente à função quadrática*

$$W(t, x(t), i) = x(t)' L_i^t x(t) + \omega_i^t, \quad (\text{A.49})$$

com L_i^t e ω_i^t dados por:

$$L_i^t = \Xi_i^t + \Gamma_i^t K^t + K^{t'} \Gamma_i^{t'} + K^{t'} \Lambda_i^t K^t, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad L_i^T = F_i^T, \quad (\text{A.50})$$

$$\omega_i^t = \mathcal{E}_i(\omega^{t+1}) + \text{tr}\{\mathcal{E}_i(L^{t+1}) H_i \Sigma H_i'\}, \quad t = 0, \dots, T-1, \quad \omega_i^T = 0, \quad (\text{A.51})$$

em que Ξ_i^t , Γ_i^t e Λ_i^t são dadas por:

$$\Xi_i^t = Q_i + \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{k=1}^v \rho^x(s_1, k) \bar{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{A}_{i,s_1}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (\text{A.52})$$

$$\Gamma_i^t = \bar{A}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_1=1}^v \sum_{s_2=1}^v \rho^{xu}(s_1, s_2) \bar{A}_{i,s_1}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_{i,s_2}, \quad t = 0, \dots, T, \quad (\text{A.53})$$

$$\Lambda_i^t = R_i + \bar{B}_i' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_i + \sum_{s_2=1}^v \rho^u(k, s_2) \bar{B}_{i,s_2}' \mathcal{E}_i(L^{t+1}) \bar{B}_{i,k}, \quad t = 0, \dots, T. \quad (\text{A.54})$$

Prova: Segue-se, de forma análoga, a sequência da prova do Lema (A.3), substituindo K_i^t por K^t , nos passos intermediários e nos resultados. $\square$

Define-se como feito para θ observável:

Definição A.2 *Seja $\mathbf{K} \in \mathcal{K}$. O funcional*

$$J_{\mathbf{K}}^T(t) = E_{x_0, \mu_0} \left[\sum_{\ell=t}^{T-1} q(\ell) + p(T) \right] \quad (\text{A.55})$$

é denominado custo remanescente no instante t correspondente à $\mathbf{K}$.

A proposição a seguir estabelece a expressão determinística equivalente para o funcional $J_{\mathbf{K}}^T(t)$ que será útil na análise de otimalidade.

Proposição A.2 *Para cada $t = 0, \dots, T$, sejam L^t e ω^t definidos de acordo com (A.50) e (A.51). Então, o funcional $J_{\mathbf{K}}^T(t)$ é idêntico à:*

$$J_{\mathbf{K}}^T(t) = E_{x_0, \mu_0} [x(t)' L_i^t x(t) + \omega_i^t] = \langle L^t, X^t \rangle + \mu_i^t \omega^t \quad (\text{A.56})$$

Prova: Segue-se, de forma análoga, a sequência da prova da Proposição A.1 substituindo K_i^t por K^t , nos passos intermediários e resultados desenvolvidos na subseção anterior para i observável. $\square$

Bibliografia

- Athans, M., Castanon, D., Dunn, K. P., Greene, C. S., Lee, W. H., Sandell, N. R. e Willsky, A. S. (1977). The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method - Part I: Equilibrium flight, *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**(5): 768–780.
- Bitmead, R. R., Gevers, M. e Wertz, V. (1990). *Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's G. P. C.*, Prentice Hall, Sydney, Australia.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Breusegem, V. V., Campion, G. e Bastin, G. (1991). Traffic modeling and state feedback control for metro lines, *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(7): 770–784.
- Camacho, E. F. e Bordons, C. (1999). *Model Predictive Control*, Springer-Verlag, London.
- Çakmak, U. e Özekici, S. (2006). Portfolio optimization in stochastic markets, *Mathematical Methods of Operations Research* **63**(1): 151–168.
- Çinlar, E. (1975). *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice Hall, New York.
- Corrêa, S. S. (1999). *Regulação Robusta de Tráfego em Linhas de Metrô*, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Costa, E. F. e do Val, J. B. R. (2000). Stability of receding horizon control of Markov jump linear systems without jump observations, *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, Vol. 6, Chicago, IL, USA, pp. 4289–4293.
- Costa, E. F., do Val, J. B. R. e Fragoso, M. D. (2005). A new approach to detectability of discrete-time infinite Markov jump linear systems, *SIAM Journal on Control and Optimization* **43**(6): 2132–2156.

- Costa, O. L. V. e Araujo, M. (2007). Um modelo generalizado de otimização de carteiras em média-variância com saltos markovianos, *Anais do VII Encontro Brasileiro de Finanças*, São Paulo, SP, Brasil.
- Costa, O. L. V. e Assumpção, E. O. (1996). Discrete-time constrained quadratic control of Markovian jump linear systems, *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, pp. 1763–1764.
- Costa, O. L. V., Assumpção, E. O., Boukas, E. K. e Marques, R. P. (1999). Constrained quadratic state feedback control for discrete-time Markovian jump linear systems, *Automatica* **35**(4): 617–626.
- Costa, O. L. V. e de Paulo, W. L. (2007). Indefinite quadratic with linear costs optimal control of markov jump with multiplicative noise systems, *Automatica* **43**(4): 587–597.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1993). Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **179**(1): 154–178.
- Costa, O. L. V. e Fragoso, M. D. (1995). Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(12): 2076–2088.
- Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Marques, R. P. (2005). *Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems*, Springer-Verlag, New York.
- Costa, O. L. V. e Okimura, R. T. (2009). Discrete-time mean variance optimal control of linear systems with Markovian jump and multiplicative noise, *International Journal of Control* **82**(2): 256–267.
- do Val, J. B. R. e Başar, T. (1999). Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem, *Journal of Economics Dynamics and Control* **23**: 1099–1131.
- do Val, J. B. R., Geromel, J. C. e Costa, O. L. V. (1999). Solutions for the linear quadratic control problem of Markov jump linear systems, *Journal of Optimization Theory and Applications* **103**(2): 283–311.
- Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Souza, S. R. (1993). $\mathcal{H}_2$ -guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems, *International Journal of Control* **57**(4): 853–864.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990a). Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7): 777–788.
- Ji, Y. e Chizeck, H. J. (1990b). Jump linear quadratic Gaussian control: Steady-state solution and testable conditions, *Control-Theory and Advanced Technology* **6**(3): 289–319.
- Khanbaghi, M., Malhame, R. P. e Perrier, M. (2002). Optimal white water and broke recirculation policies in paper mills via jump linear quadratic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **10**(4): 578–588.

- Kwon, W. H., Bruckstein, A. M. e Kailath, T. (1983). Stabilizing state-feedback design via the moving horizon method, *International Journal of Control* **37**(3): 631–643.
- Li, D. e Ng, W.-I. (2000). Optimal dynamic portfolio selection: Multi-period mean-variance formulation, *Mathematical Finance* **10**: 387–406.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection, *The Journal of Finance* **7**(1): 77–91.
- Mayne, D. Q. e Michalska, H. (1990). Receding horizon control of nonlinear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(7): 814–824.
- Milani, B. E. A. e Corrêa, S. S. (1997). Decentralized robust regulation of metro lines, *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, Vol. 1, Albuquerque, NM, USA, pp. 218–219.
- Mosca, E. (1995). *Optimal, Predictive, and Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Saridis, G. N. (1983). Intelligent robotic control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**(5): 547–557.
- Sasama, H. e Ohkawa, Y. (1983). Floating traffic control for public transportation systems, *Proceedings of the 4th IFAC Conference on Control and Transport Systems*, Baden-Baden, Germany.
- Sturm, J. F. (1999). Using SeDuMi, a Matlab Toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11-12**: 625–653.
- Sworder, D. D. e Rogers, R. O. (1983). An LQ-solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver, *IEEE Transactions on Automatic Control* **28**(28): 971–978.
- Vargas, A. N. (2004). Controle por horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos markovianos e ruído aditivo, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Estadual de Campinas. Disponível eletronicamente em <http://libdigi.unicamp.br/>.
- Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Costa, E. F. (2004a). Controle de horizonte retrocedente de sistemas lineares com saltos Markovianos para o problema de rastreamento com alvos dinâmicos, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Automática*, Gramado, RS, Brasil.
- Vargas, A. N., do Val, J. B. R. e Costa, E. F. (2004b). Receding horizon control of Markov jump linear systems subject to noise and unobservable state chain, *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, Paradise Island, The Bahamas, pp. 4381–4386.
- Zampolli, F. (2006). Optimal monetary policy in a regime-switching economy: The response to abrupt shifts in exchange rate dynamics, *Journal of Economic Dynamics and Control* **30**(9–10): 1527–1567.