

Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Elétrica
Departamento da Telemática

**PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA FUZZY APLICADA A UM
PROBLEMA DE TRANSPORTE MULTIPRODUTO
EM FERROVIAS**

Rossana Rebello Mendes

Orientador : **Prof. Dr. Akebo Yamakami**

*Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
Elétrica e de Computação da Universidade Estadual
de Campinas como requisito parcial para obtenção
do Título de Doutor em Engenharia Elétrica*

Setembro 1999

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M522p	<p>Mendes, Rossana Rebello Programação matemática fuzzy aplicada a um problema de transporte multiproduto em ferrovias / Rossana Rebello Mendes. - -Campinas, SP: [s.n.], 2003.</p> <p>Orientador: Akebo Yamakami. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.</p> <p>1. Otimização matemática. 2. Ferrovias. 3. Transporte ferroviário. 4. Programação (Matemática). I. Yamakami, Akebo. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.</p>
-------	---

A minha família :

Henrique, meu noivo

Vera, minha mãe

Rinaldo, meu pai

Raquele, Renata e Leticia, minhas irmãs

Yuri, meu cunhado

Geney, minha avó

E ao meu futuro sobrinho.

Agradecimentos

- *Em especial ao meu orientador Akebo Yamakami, pela orientação, atenção, apoio e companheirismo durante estes anos todos.*
- *Aos professores, Takaaki Ohishi e Basílio Ernesto de A. Milani (UNICAMP), Carlos Magnus Carlson Filho e a Eveli Teixeira (CTI) pela participação no julgamento deste trabalho.*
- *A família Faraldo, pelo carinho de sempre.*
- *Aos amigos do Departamento de Telemática, pela amizade.*
- *Aos amigos da PÓS, pelo companheirismo.*
- *A Elza Aoki, pela ajuda e atenção.*
- *A CAPES, pela ajuda financeira.*

Resumo

Nesta tese resolve-se um problema de transporte multifluxo, sujeito a restrições de trecho, frota, balanceamento associado a ida e a redistribuição dos vagões descarregados. Além disso, considera-se imprecisões nos custos e nas capacidades dos trechos.

Técnicas de programação matemática fuzzy foram utilizadas como método de resolução.

Também foram introduzidas adaptações na teoria clássica de grafos para tratar do problema com incertezas.

Mostram-se exemplos da aplicação dos algoritmos aos dados de um sistema ferroviário real e faz-se uma análise dos resultados obtidos. Tal análise comprovou que a metodologia utilizada fornece resultados satisfatórios para esse problema.

Palavras-Chave: Problema de transporte multiproduto fuzzy, Grafos fuzzy, Multiproduto, Otimização.

Abstract

In this thesis it solves a multicommodity transportation problem with restrictions, such as: traction limitation, freight-car number limitation, redistribution of empty freight-car, considering imprecisions on the costs and on the capacities of the tracks.

Fuzzy mathematical programming approaches were utilized as resolution method.

Adaptations to the classical graph theory to treat the problem with uncertainties were introduced.

Finally, it presents an examples for applying this algorithm in real data from railroad system and it discusses the obtained results.

Keywords: Fuzzy multicommodity transportation problem, Fuzzy graphs, Multicommodity, Optimization.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução.....	01
1.1. Definição da Tese.....	02

Capítulo 2

Modelagem Matemática do Problema de Transporte Multiproduto Linear.....	07
2.1. Introdução.....	08
2.2. Modelo Matemático.....	10
2.2.1. Forma matricial.....	13
2.3. Exemplo	15

Capítulo 3

Problema de Transporte Multiproduto Fuzzy.....	19
3.1. Introdução.....	20
3.2. Problema de Transporte Multiproduto Fuzzy.....	20
3.3. Métodos de Resolução.....	21
3.3.1. Método de Zimmermann.....	21
3.3.2. Método de Delgado, Verdegay e Vila.....	27
3.3.3. Extensão.....	30
3.3.4. Exemplo.....	32
3.4. Análise de Sensibilidade.....	39
3.4.1. Exemplo.....	41

Capítulo 4

Grafos Fuzzy	43
4.1. Introdução	44
4.2. Formulação Matemática	47
4.3. Resolução do Problema de Transporte com custo e capacidade fuzzy utilizando grafos fuzzy	49
4.4. Exemplo	53
4.5. Conclusões	60

Capítulo 5

Resolvendo o Problema de Transporte Fuzzy via grafos fuzzy	62
5.1. Introdução	63
5.2. Algoritmo de Resolução	63
5.3. Exemplos	66

Capítulo 6

Conclusões e Propostas Futuras	84
6.1. Conclusões	85
6.2. Propostas Futuras	87

Referências Bibliográficas	88
---	-----------

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1. DEFINIÇÃO DA TESE

Neste trabalho é desenvolvido um modelo que objetiva alocar vagões de trem numa rede ferroviária da melhor maneira possível, sujeito a restrições adicionais. O modelo possui vários produtos que precisam ser transportados de sua origem a seu destino, gerando um custo de transporte. Esse custo pode variar de produto para produto.

Para transportar esses produtos, é considerado uma frota de vagões de vários tipos como por exemplo, tanque, frigorífico, fechado, entre outros. A frota de cada um desses tipos de vagão possui um número limite de unidades.

A cada trecho de linha é associado uma capacidade máxima de tração.

Para cada produto, é determinado um tempo de percurso, que é definido de acordo com a duração real das viagens das estações de origem às de destino, ao qual adiciona o tempo de pátio do vagão carregado. Para o cálculo do tempo de pátio é considerado o período em que os vagões estão ociosos, em determinadas estações aguardando seu carregamento ou descarga e, quando necessário, a inclusão de unidades, para prosseguimento da viagem.

Nas últimas décadas, diversos modelos matemáticos têm sido propostos para a resolução dos problemas das ferrovias. Entre eles destacam-se os modelos de otimização e simulação. Esses dois tipos de modelos são importantes, pois um pode vir a complementar o outro. Muitas vezes os modelos de otimização são utilizados para as tarefas diárias. Essas tarefas constituem a determinação da melhor alocação dos vagões vazios e o roteamento de vagões pela rede, entre outras. Esses modelos procuram apresentar o sistema da forma mais

real possível e tem como objetivos a minimização do custo de transporte, maximização do lucro ou diminuição dos atrasos, dependendo do modelo.

A minimização do custo é conseguida alocando da forma mais econômica os recursos da ferrovia, como por exemplo fazendo a melhor escolha dos caminhos para os trens, da distribuição dos vagões vazios para as estações que deles estão precisando e da utilização da capacidade das estações, entre outras.

O transporte ferroviário, tratado neste trabalho, possui a estrutura de um problema de transporte multiproduto (PTM), pois possui o fluxo de várias comodidades compartilhando uma mesma rede ferroviária. Um PTM é caracterizado pela necessidade de distinção entre os fluxos das unidades de cada comodidade, pois cada uma delas possui origem e destino diferentes, porém interdependentes. Assad [4] e Kennington [14] apresentam estudos dos principais algoritmos de multifluxo lineares e não lineares.

Particionamento e decomposição são as duas abordagens básicas que têm sido usadas para desenvolver técnicas especializadas em problemas de multifluxo.

A abordagem de particionamento é uma especialização do método simplex revisado, onde a base atual é particionada para explorar sua estrutura especial bloco angular.

A abordagem de decomposição transforma o problema de multifluxo num problema mestre de otimização e vários subproblemas independentes, onde cada um desses é um problema de fluxo em rede a custo mínimo, sendo coordenados pelo problema mestre. Lasdon [16], Assad [4] e Kennington [14] apresentam informações sobre a abordagem de decomposição.

Alguns trabalhos, relacionados à ferrovia, inspiraram este trabalho. São eles : Luchesi [17], Alves [2] e Mendes [18]. O primeiro modelou um problema de alocação de carga em ferrovias. Tinha como objetivo encontrar quais os melhores caminhos a serem seguidos pelos produtos sujeitos a restrições de tração dos trechos, limitação das frotas de tipos de vagões e de balanceamento de produtos nas estações. O modelo previu a impossibilidade de se transportar todos os produtos diante das restrições impostas e criou uma estrutura de caminhos alternativos para transportar os produtos em excesso. Um método de multifluxo em rede foi escolhido para resolução desse problema, que é basicamente uma especialização do método Primal-Simplex Revisado aplicado a uma rede de nós e arcos.

Alves [2] modelou um problema de alocação de vagões numa rede ferroviária, considerando os custos de distribuição dos produtos e de redistribuição dos meios de transportes descarregados, assim como as limitações de frota e de trecho. Os problemas de otimização de transporte de carga e de redistribuição dos vagões descarregados foram solucionados separadamente, com base no método exato de programação linear aplicado ao grafo. Um algoritmo heurístico foi desenvolvido para fazer a integração destes dois planos.

Mendes [18] resolveu o problema proposto por Alves [2] de forma exata. O Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe, uma abordagem de decomposição, foi o método utilizado no estudo.

Durante esse trabalho, várias etapas foram realizadas, que enumeramos a seguir:

A modelagem do problema encontrado em Mendes [18] foi generalizada, de modo que cada produto pudesse ser transportado por mais de um tipo de vagão. Por outro lado, essa modelagem diminuiu substancialmente o número de variáveis.

Introduziu-se na nova modelagem incertezas na função objetivo, nas restrições e nos coeficientes. Para resolver o problema, um modelo que é a integração dos métodos desenvolvidos por Zimmermann, Delgado et al. e Werners foi desenvolvido.

Zimmermann [31] considera que a função objetivo e as restrições do problema não são bem definidas e o método proposto por Delgado et al. [8] trabalha com coeficientes da função objetivo e das restrições sendo fuzzy (nebulosos). Werners trabalha com a pior e a melhor solução do problema como sendo os limites permitidos aos custos.

Uma análise de sensibilidade foi realizada com o intuito de saber como cada restrição influencia na solução do problema.

A seguir, foi investido esforço para procurar resolver estes problemas multiproducto com incertezas, utilizando teoria de grafos.

O precursor no estudo de grafos fuzzy foi Rosenfeld [28]. Segundo sua definição, um grafo fuzzy \tilde{G} é um par (\tilde{V}, \tilde{E}) onde \tilde{V} é um conjunto fuzzy em V e \tilde{E} é uma relação fuzzy em $V \times V$ tal que

$$\mu_{\tilde{E}}(v, v') \leq \min(\mu_{\tilde{V}}(v), \mu_{\tilde{V}}(v')).$$

onde $\mu(\cdot)$ é uma função de pertinência.

Dubois, Prade, Klein e Okada trouxeram importantes contribuições nessa área.

Os dois primeiros generalizaram o método de Ford e Floyd para o caso fuzzy. Klein [15] e Okada [27] estudaram o problema de caminho mínimo fuzzy. O primeiro usa programação dinâmica e encontra os caminhos correspondentes ao grau de pertinência linear

que pode substituir um decisor. Esse arco pode receber um valor inteiro para o comprimento entre 1 e um inteiro fixado. O segundo introduz uma relação de ordem entre números fuzzy baseado em “fuzzy min” proposto por Dubois e Prade [12].

Inicialmente foi resolvido um problema clássico de transporte via grafos fuzzy. Para isto, foram introduzidas algumas adaptações na teoria de grafo clássica para elaboração de algoritmos capazes de tratar as incertezas. Mais objetivamente, problemas em redes com custo fuzzy, com capacidade fuzzy e com custo e capacidade fuzzy foram estudados.

O problema de transporte multiproducto fuzzy aplicado à ferrovia pode ser resolvido também utilizando grafos fuzzy.

Optou-se por trabalhar com teoria de grafos devido à algumas vantagens, tais como, redução de cálculos, melhor visualização e entendimento do problema.

O presente trabalho teve como meta resolver o problema de transporte multiproducto fuzzy utilizando programação matemática fuzzy e aplicá-lo num sistema ferroviário.

No próximo capítulo encontra-se a formulação matemática do problema de transporte multiproducto linear e o capítulo 3 apresenta o problema de transporte multiproducto fuzzy. A seguir, encontra-se o capítulo de grafos fuzzy. A resolução do problema de transporte multiproducto fuzzy via grafos fuzzy é apresentada no capítulo 5 e as conclusões encontram-se no capítulo 6.

CAPÍTULO 2

Modelagem Matemática do Problema de Transporte Multiproduto Linear

2.1. INTRODUÇÃO

Problemas multiproduto em redes aparecem quando várias comodidades compartilham arcos numa rede capacitada. Esse tipo de rede aparece em sistemas de comunicação, sistemas de tráfego urbano, sistemas de distribuição de produção, sistemas ferroviários, entre outros. Em particular, a alocação eficiente de veículos de modo a atender uma certa demanda como também a distribuição dos veículos descarregados num certo destino é um problema comum para todos os tipos de transporte de cargas.

No caso de ferrovias, o decisor deve considerar, além do problema de transporte, a alocação de vagões descarregados e a distribuição de vagões vazios para minimizar o custo de transporte, sujeito a restrições práticas e físicas, tais como o número total de vagões, capacidades nos trechos, tipos de vagões e balanceamento. Uma maneira de modelar uma rede ferroviária é olhá-la como um grafo, onde cada nó representa uma determinada estação e cada arco representa um determinado trecho.

Trabalha-se com um modelo que objetiva alocar vagões de trem numa malha ferroviária, visando a minimização do custo total, sujeito as limitações de trecho e de frota, balanceamento associado a ida do vagão carregado e redistribuição dos vagões esvaziados. O modelo possui vários produtos que precisam ser transportados de sua origem a seu destino, gerando um custo de transporte. Associa-se a cada produto uma origem, um destino e uma quantidade a ser transportada. Esse transporte é feito através de vagões de carga que compartilham a mesma malha ferroviária.

Existem tipos de vagões específicos para cada produto. Cada tipo de produto pode ser levado por mais de um tipo de vagão e o mesmo tipo de vagão pode transportar vários tipos de

produto. Assim, o vagão ao ser descarregado na estação-destino, não precisa retornar à mesma estação-origem, podendo ir até à estação de origem mais próxima que necessite, em específico, desses vagões vazios para efetuar um novo transporte dos produtos.

O problema é modelado como um problema de otimização linear que deve tratar, simultaneamente, de dois subproblemas : o problema de carga, que define a "ida" do vagão quando ele está carregando o produto e o problema do vagão vazio, que define a "volta" do vagão para ser novamente carregado após ter sido descarregado.

Uma formulação matemática é desenvolvida com uma função objetivo, que visa minimizar os custos do transporte de carga (ida do vagão) e o do percurso do vagão vazio (volta do vagão), sujeito a restrições de balanceamento, limitação de frota e de tração. A presença das restrições de trecho e de frota faz com que nem todos os produtos consigam atender as suas respectivas demandas. Assim, a escolha do produto e a quantidade a ser transportada devem envolver o problema de redistribuição dos vagões descarregados nos destinos.

O subproblema que descreve a volta do vagão é influenciado apenas pelas restrições de balanceamento e de frota.

O problema tratado aqui possui a estrutura de um problema de transporte multiproduto, pois possui o fluxo de várias comodidades compartilhando uma mesma malha ferroviária. Vários algoritmos clássicos para resolver essa classe de problemas podem ser encontrados, usando métodos de decomposição e particionamento ([4, 13, 14, 19]), métodos heurísticos ([2]) e outros. Os métodos encontrados em [4], [13] e [14] resolvem o problema sem considerar a redistribuição dos vagões descarregados nos seus destinos, ao contrário dos

encontrados em [19] e [2].

O modelo aqui proposto é uma generalização da minha tese de mestrado, Mendes [18], pois uma nova modelagem foi desenvolvida para que cada produto pudesse ser transportado por mais de um tipo de vagão, além de diminuir substancialmente o número de variáveis.

2.2. MODELO MATEMÁTICO

A modelagem matemática do problema de transporte multiproduto, já mencionada anteriormente, é descrita de maneira sucinta e objetiva nos próximos itens. Explicações mais detalhadas podem ser encontrada em Mendes [18].

O problema pode ser modelado como o seguinte problema linear multiproduto:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_k (\sum_j (C_{jk} \cdot X_{jk}) + C'_k \cdot X'_k) \\
 & A_j \cdot X_j = r_j; \quad j = 1, \dots, J \\
 & \sum_{j \in J^k} A_j (X_{jk} + X'_k) = 0; \quad k = 1, \dots, K \\
 & \sum_j E_j \cdot X_j^i \leq b_i; \quad i = 1, \dots, I \\
 & \sum_{j \in J^k} (T_j \cdot \delta_j \cdot X_{jk}) + T' \cdot X'_k \leq f_k \\
 & X_j = \sum_k X_{jk}; \quad j = 1, \dots, J \\
 & X_{jk} \geq 0, \quad X'_k \geq 0; \quad \forall_j \forall_k
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde:

j : representa os produtos;

k : representa os tipos de vagões;

i : representa os trechos;

J : número total de tipos de produtos;

K : número total de tipos de vagões;

I : número total de trechos no grafo;

C_{jk} : vetor custo por unidade do vagão k carregando produto j ;

C'_k : vetor custo por unidade do vagão k descarregando no trecho i para produto j ;

X_{jk} : fluxo do produto j transportado pelo vagão tipo k na rede;

X'_k : fluxo do vagão vazio k referente ao carregamento do produto j na rede;

J^k : conjunto dos produtos transportados pelo vagão tipo k ;

b_i : vetor coluna da capacidade de tração por arco;

T_j : escalar representando os tempos de viagem gasto para transportar o produto j de sua origem ao seu destino;

T' : vetor dos tempos de viagem gasto pelos vagões-vazios para percorrer cada trecho;

f_k : frota de vagão tipo k disponível.

\hat{A}_j : matriz nó-arco incidência do grafo referente ao produto j , representando a ferrovia, considerando os arcos artificiais;

\hat{A}_j : matriz \hat{A}_j modificada, isto é, possui uma coluna de zeros nas colunas correspondentes aos arcos artificiais.

A função objetivo do problema visa minimizar os custos de transporte de carga e de percurso do vagão vazio.

Associa-se um custo por tonelada a cada produto transportado em cada trecho da malha.

O modelo é sujeito as seguintes restrições : de balanceamento, de limitação de frota e de limitação de trecho.

As restrições (1) e (2) são de balanceamento associado à ida e à volta do vagão respectivamente.

A restrição de tração (3) nos trechos da malha garante que a soma dos fluxos dos vagões de qualquer trecho não exceda a sua capacidade de tração. Cada trecho de linha gera uma restrição de tração. Usa-se *toneladas* como unidade de medida para a máxima tração num trecho.

Em (4) encontra-se outra restrição do modelo que é a restrição de frota. Ela impede que a frota máxima de cada tipo de vagão seja ultrapassada. O tempo de percurso do vagão, na ida e na volta, é usado para ponderar a equação representado pela constante " T_j " e pelo vetor " T " respectivamente.

A equação (5) representa a quantidade total transportada do produto "j".

Usa-se a cadência, quantidade diária permitida, para determinar a quantidade do produto a ser transportado. Ela é definida de acordo com a capacidade de pátio.

A alocação dos vagões é feita da seguinte maneira : tanto para a alocação dos vagões carregados quanto para alocação dos vagões vazios deverão ser alocados aqueles que forneçam menor custo de transporte a ferrovia.

onde:

$$c^k = [C_{jk} \ C'_k]$$

$$x^k = [X_{jk} \ X'_k]$$

$$r^k = [r_j \ 0]$$

$$b = [b_i \ f_k]$$

$$B = \begin{bmatrix} A^1 & & \\ & A^2 & \\ & & A^k \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} E \\ \hline F \\ \hline G \end{bmatrix}$$

2.3. EXEMPLO

Nesta seção apresenta-se um pequeno exemplo de uma aplicação do modelo proposto numa parte do sistema ferroviário do Estado de São Paulo utilizando o Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe como método de resolução.

A figura 2.1 mostra a rede ferroviária em questão. A descrição dos trechos e dos produtos é apresentada nas tabelas 2.1 e 2.2, respectivamente e as informações sobre os vagões na tabela 2.3. Na tabela 2.4 encontra-se a solução do exemplo.

Tabela 2.1: Dados referentes aos trechos

Arcos	Estação origem	Estação destino	Capacidade máxima (t)	Tempo-vazio (dia)
1	I	II	3000	1
2	II	III	3000	1
3	II	I	1000	1
4	III	II	3000	1

Tabela 2.2: Dados referentes aos produtos

Produto	Estação origem	Estação destino	Cadência (t)	Custo (dia)	Tempo (dia)	Capacidade (t)	Tipo vagão
P1	I	III	500	4	3	50	I
P2	III	I	1000	4	3	50	I e II
P3	II	I	1000	3	3	50	II

Tabela 2.3: Frota máxima por tipo de vagão

Tipo	Máximo (un.)	tara (t)
I	51	25
II	30	25

Tabela 2.4: Solução do exemplo

Produtos	Custo total (dia)	Quantidade transportada (t)	Tipo de vagão
P1	1800	450	I
P2	1200	300	I
P3	1050	350	II

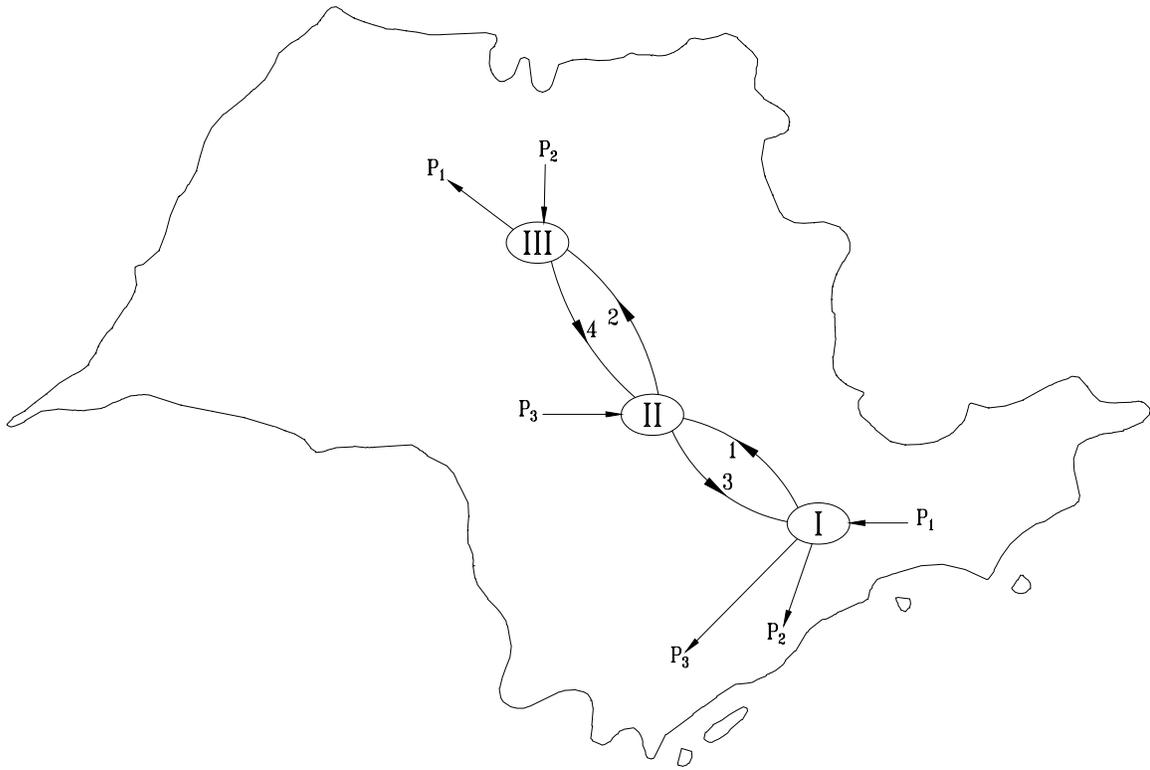


Figura 2.1: Rede ferroviária

A presença das restrições de trecho e de frota neste exemplo faz com que todos os produtos não consigam atender suas respectivas demandas.

Como P1 e P2 utilizam o vagão tipo I, tem-se 9 vagões carregando P1, partindo do nó I e chegando no nó III. Agora a estação III contém 9 vagões vazios que deverão carregar P2. Como existe um limite no número de vagões, 6 deles seguem transportando P2 e os outros três seguem vazios de volta ao nó I.

O vagão tipo II transportou 350 toneladas de P3 devido a presença da restrição de tração no trecho 3.

Esse caso mostra que o algoritmo trata corretamente o problema de distribuição dos vagões descarregados.

Capítulo 3

Problema de Transporte Multiproducto

Fuzzy

3.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se um modelo geral de problema de transporte multiproduto linear fuzzy, envolvendo simultaneamente no conjunto de restrições números fuzzy e restrições fuzzy, não esquecendo dos custos fuzzy e função objetivo fuzzy. Para resolver esse problema introduz-se um método baseado nos métodos de programação linear fuzzy de Zimmermann [31] e Delgado et al. [8].

Fez-se também análise de sensibilidade com o propósito de obter informações sobre a influência de cada restrição na solução do problema.

3.2. PROBLEMA DE TRANSPORTE MULTIPRODUTO FUZZY

O modelo de programação linear (2.2) é útil quando o decisor está absolutamente seguro sobre seus parâmetros. Como no mundo real existem incertezas nas medições de custos, demandas, tempos de viagens e quantidade de cada tipo de vagão, a teoria nebulosa (fuzzy) foi usada para tratar dessas incertezas.

Geralmente os decisores possuem bons valores aproximados para esses parâmetros e admitem flexibilidades em certas restrições. Em resumo, eles preferem um intervalo de soluções adequadas a suas aspirações a uma única solução como aquela fornecida pelos modelos de decisão convencionais. Uma maneira de se obter essa flexibilidade é desenvolver um modelo de programação linear fuzzy para incluir incertezas nos custos, restrições e coeficientes.

Esse problema pode ser modelado como :

$$\tilde{\min} Z = \sum_{k=1}^K (\tilde{c}^k x^k)$$

s.a

$$\tilde{B}x^k = \tilde{r}^k; \quad k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K \tilde{D}^k x^k \leq \tilde{b}$$

$$x^k \geq 0; \quad k = 1, \dots, K \quad (3.1)$$

onde (3.1) representa o problema de transporte multiproduto fuzzy e o símbolo “ \sim ” representa que a função objetivo, as restrições e os coeficientes são fuzzy.

A interpretação de uma função objetivo fuzzy é que a condição de otimalidade não precisa ser rigorosamente satisfeita e dizer que os custos e recursos são fuzzy significa que esses valores são incertos.

3.3. Métodos de Resolução

3.3.1. Método de Zimmermann

Nesse método, somente a função objetivo e as restrições do problema (2.2) não são bem definidas. Então o problema pode ser formulado como um problema de transporte multiproduto fuzzy:

$$\tilde{\min} Z = \sum_{k=1}^K (c^k x^k)$$

$$Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K D^k x^k \cong b$$

$$x^k \geq 0; \quad k = 1, \dots, K \quad (3.2)$$

Na teoria de conjunto fuzzy, a função objetivo e restrições são representadas por conjuntos fuzzy e a intersecção de todos esses conjuntos fuzzy geralmente corresponde a lógica “AND“ representada pelo operador min.

Num ambiente fuzzy, o grau de pertinência de um dado X num conjunto fuzzy é representado por uma função de pertinência $\mu(X) \in [0, 1]$. Usando o método proposto por Bellman e Zadeh [5], onde $X \in R^n$ é um conjunto de alternativas possíveis, então a função objetivo fuzzy G e restrições fuzzy C são, respectivamente, conjuntos fuzzy $\mu_G, \mu_C \in F(X)$. Assim, o espaço de decisão D , que é definido pela função de pertinência $\mu_D \in F(X)$, é dado por :

$$\mu_D = \min(\mu_G, \mu_C) \quad \text{ou} \quad \mu_D(x) = \mu_G(x) \wedge \mu_C(x), \quad x \in X$$

Para otimizar a decisão, ou seja, encontrar o melhor $x \in X$ que satisfaz simultaneamente a função objetivo e as restrições, defini-se a maximização de decisão como a solução de maior grau de pertinência para o espaço de decisão D e o problema (3.2) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \max \lambda \\
& \text{s.a} \\
& \mu_G \geq \lambda \\
& \mu_C \geq \lambda \\
& \mu_G, \mu_C \text{ e } \lambda \in [0,1]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde:

$$\lambda = \mu_D = \min(\mu_G, \mu_C)$$

e:

$$\mu_G = \begin{cases} 1 - \frac{(\sum c^k x^k) - b_0}{t_0} & ; \text{ se } b_0 < (\sum c^k x^k) < b_0 + t_0 \\ 1 & ; \text{ se } (\sum c^k x^k) \leq b_0 \\ 0 & ; \text{ se } (\sum c^k x^k) \geq b_0 + t_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\mu_C = \begin{cases} 1 - \frac{(\sum D^k x^k) - b}{t} & ; \text{ se } b < (\sum D^k x^k) < b + t \\ 1 & ; \text{ se } (\sum D^k x^k) \leq b \\ 0 & ; \text{ se } (\sum D^k x^k) \geq b + t \end{cases} \tag{3.5}$$

onde b_0 é o nível de aspiração do decisor e t, t_0 são as violações permitidas pelo decisor do vetor b e da meta b_0 , respectivamente.

Seja $\lambda = (1 - \theta)$, então o problema (3.3) é equivalente a:

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s.a} \\
 & \mu_G \geq (1 - \theta) \\
 & \mu_C \geq (1 - \theta) \\
 & \mu_G, \mu_C \quad \theta \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Assim, baseado nas equações (3.4), (3.5) e (3.6), pode-se reescrever (3.2) como:

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s.a} \\
 & \sum_{k=1}^K (c^k x^k) \leq b_0 + \theta t_0 \\
 & Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K \\
 & \sum_{k=1}^K D^k x^k \leq b + \theta t \\
 & x^k \geq 0; \quad \theta \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde:

b_0 : é a meta da função objetivo

t_0 : é a tolerância máxima da função objetivo b_0

t : é a tolerância máxima de b

Pode-se observar que no problema (3.7) a função objetivo e as restrições são equações de desigualdade. Supondo que b_0 não é conhecido, pode-se usar a função de pertinência de Werners “ μ_G ” para resolver o problema. A figura 3.1 mostra a função de pertinência da função objetivo.

$$\mu_G = \begin{cases} 1 - \frac{(\sum c^k x^k) - Z^L}{Z^S - Z^L} & ; \text{ se } Z^L < (\sum c^k x^k) < Z^S \\ 1 & ; \text{ se } (\sum c^k x^k) \leq Z^L \\ 0 & ; \text{ se } (\sum c^k x^k) \geq Z^S \end{cases} \quad (3.8)$$

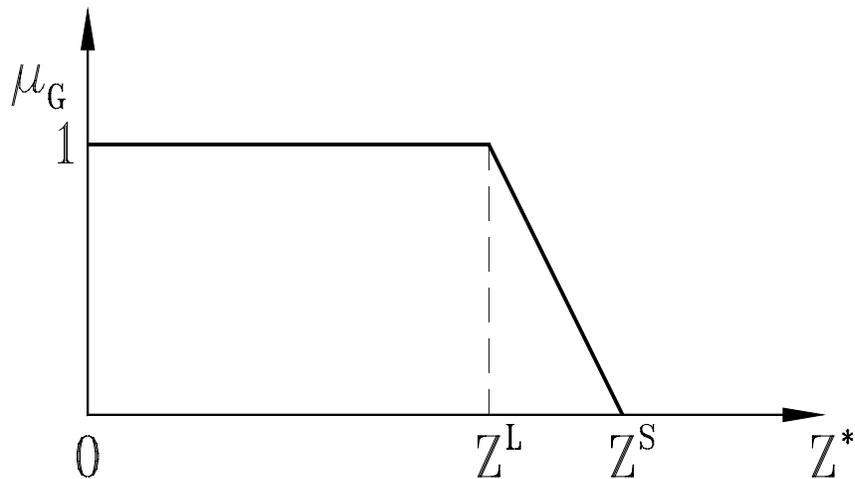


Figura 3.1: Função de pertinência da função objetivo

onde $Z^L = Z^*(\theta = 0)$; $Z^S = Z^*(\theta = 1)$; $t = Z^S - Z^L$ e Z^* é a solução ótima do seguinte problema:

$$\min Z = \sum_{k=1}^K (c^k x^k)$$

$$Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K D^k x^k \leq b + \theta t$$

$$x^k \geq 0; \quad \theta \in [0, 1] \tag{3.9}$$

Antes de resolver o problema (3.7), o problema (3.9) deve ser resolvido e assim o problema (3.7) é transformado em:

$$\min \theta$$

s.a

$$\sum_{k=1}^K (c^k x^k) \leq Z^L + \theta(Z^S - Z^L)$$

$$Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K D^k x^k \leq b + \theta t$$

$$x \geq 0; \quad \theta \in [0, 1] \tag{3.10}$$

Os problemas (3.7) e (3.9) podem ser resolvido usando métodos convencionais e suas soluções ótimas são únicas.

3.3.2. Método de Delgado, Verdegay e Vila

Considere um Problema de Transporte Multiproduto Fuzzy cujos coeficientes da função objetivo e das restrições não são exatamente conhecidos. Esses valores podem ser modelado através de números fuzzy do tipo LR de acordo com a definição de Dubois e Prade [10, 11, 12]. O conjunto de números fuzzy LR é denotado por $N(\mathfrak{R})$ e são definidos por suas funções de pertinência.

Suponha que os coeficientes das restrições tenham valores a_{ij} e b_i sendo que

$$a_{ij} - \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq a_{ij} + \bar{a}_{ij} \quad \text{e} \quad b_i - \underline{b}_i \leq b_i \leq b_i + \bar{b}_i$$

Enfim, pode-se assumir no problema (3.7) que :

$\exists \mu_{ij} \in N(\mathfrak{R}) : \mu_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]; \forall i,j$; definindo os números fuzzy a_{ij} e

$\exists \mu_i \in N(\mathfrak{R}) : \mu_i : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]; \forall i$; para cada restrição de linha que define os números fuzzy b_i e

$\exists \mu^i \in F[N(\mathfrak{R})] : \mu^i : [N(\mathfrak{R})] \rightarrow [0,1]; \forall i,j$; que fornece, para todo $x_j \in \mathbb{R}^n$, a suficiência entre os números fuzzy $\tilde{a}_{ij} x_j$ e \tilde{b}_i , com relação a i -ésima restrição.

Um método para resolver essa classe de problema foi proposto por Delgado, Verdegay e Vila [8]. Esse método consiste na substituição do conjunto de restrição fuzzy pelo seguinte conjunto convexo fuzzy:

$$\tilde{a}_{ij} x_j \leq \tilde{b}_i + \tilde{t}_i(1 - \lambda); \quad \forall i, \lambda \in [0,1]$$

Considerando a definição de números triangulares fuzzy, Delgado et al. [8] define duas relações de desigualdades diferentes, $\forall \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i, \tilde{t}_i \in N(\mathfrak{R})$:

$$a_{ij}^o x_j \leq_1 b_i^o + t_i^o(1 - \lambda)$$

$$\bar{a}_{ij} x_j \leq_2 \bar{b}_i + \bar{t}_i(1 - \lambda)$$

onde:

$$\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^o, \underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}); \quad \tilde{b}_i = (b_i^o, \underline{b}_i, \bar{b}_i); \quad \tilde{t}_i = (t_i^o, \underline{t}_i, \bar{t}_i)$$

Para estabelecer uma informação adicional sobre o problema pode-se definir uma terceira relação de desigualdade para os números triangulares fuzzy similar as outras duas relações acima:

$$\underline{a}_{ij} x_j \leq_3 \bar{b}_i + \bar{t}_i(1 - \lambda)$$

Então, de acordo com as três relações acima, três problemas auxiliares diferentes são derivados para resolver o problema (3.7) com coeficientes fuzzy:

$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{k=1}^K (c^{0^k} x^k) \leq b_0^0 + \theta t_0^0 \\
& Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K \\
& \sum_{k=1}^K D^{0^k} x^k \leq b^0 + \theta t^0 \\
& x \geq 0; \quad \theta \in [0, 1]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{k=1}^K (\bar{c}^k x^k) \leq \underline{b}_0 + \theta \underline{t}_0 \\
& Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K \\
& \sum_{k=1}^K \bar{D}^k x^k \leq \underline{b} + \theta \underline{t} \\
& x \geq 0; \quad \theta \in [0, 1]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& \text{s.a} \\
& \sum_{k=1}^K (\underline{c}^k x^k) \leq \bar{b}_0 + \theta \bar{t}_0 \\
& Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K \\
& \sum_{k=1}^K \underline{D}^k x^k \leq \bar{b} + \theta \bar{t} \\
& x^k \geq 0; \quad \theta \in [0, 1]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Os problemas (3.11), (3.12) e (3.13) podem ser resolvidos usando os algoritmos padrões [5, 7, 8, 1] e soluções diferentes para (3.7) são obtidas.

Os conjuntos (3.11), (3.12) e (3.13) são problemas de transporte multiproducto fuzzy como (3.7) com a diferença principal que estes são formulados utilizando os limitantes inferior, médio e superior dos coeficientes das restrições de (3.7).

As soluções obtidas são fornecidas ao decisor, o qual deve escolher a melhor solução para o problema de acordo com as suas aspirações.

3.3.3. Extensão

Nas seções anteriores foi descrito um modelo para problema de transporte multiproducto fuzzy (3.7) que é transformado em outros problemas mais tratáveis (3.11), (3.12) e (3.13).

Pode-se olhar os resultados do problema (3.12) e (3.13) como sendo os limites permitidos aos custos. Então, se W^L é a solução de (3.12) e W^S é a solução de (3.13), esses valores fornecem os limitantes inferior e superior, respectivamente.

Se a aspiração do decisor for conhecer a melhor solução entre W^L e W^S , ele pode usar o método de Werners, resolvendo o problema:

$$\min \theta$$

s.a

$$\sum_{k=1}^K (c^{o^k} x^k) \leq W^L + \theta(W^S - W^L)$$

$$Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K D^{o^k} x^k \leq b^o + \theta t^o$$

$$x^k \geq 0; \quad \theta \in [0, 1] \tag{3.14}$$

onde a função de pertinência da restrição é fornecida em (3.5) e a função de pertinência da função objetivo é :

$$\mu_G = \begin{cases} 1 - \frac{(\sum c^k x^k) - W^L}{W^S - W^L} & ; \text{ se } W^L < (\sum c^k x^k) < W^S \\ 1 & ; \text{ se } (\sum c^k x^k) \leq W^L \\ 0 & ; \text{ se } (\sum c^k x^k) \geq W^S \end{cases} \tag{3.15}$$

A característica principal desse método é que o decisor pode definir tolerâncias aceitáveis para as restrições e para a função objetivo e obter a melhor situação e a pior situação, que são usadas para determinar a solução mais aceitável satisfazendo as incertezas escolhidas.

3.3.4. Exemplo

Nesta seção apresenta-se um exemplo de uma aplicação do modelo proposto no sistema ferroviário do Estado de São Paulo (FEPASA) [23]. A figura 3.2 mostra a rede ferroviária em questão. A descrição dos trechos e dos produtos é apresentada nas tabelas 3.1 e 3.2, respectivamente e as informações sobre os vagões na tabela 3.3.

Tabela 3.1: Dados referentes aos trechos

Arcos	Estação origem	Estação destino	Capacidade máxima (t)	Tempo-vazio (dia)
1	I	II	3000	1
2	II	III	3000	1
3	II	I	1000	1
4	III	II	3000	1

Tabela 3.2: Dados referentes aos produtos

Produto	Estação origem	Estação destino	Cadência (t)	Custo (dia)	Tempo (dia)	Capacidade (t)	Tipo vagão
P1	I	III	500	4	3	50	I
P2	III	I	1000	4	3	50	I e II
P3	II	I	1000	3	3	50	II

Tabela 3.3: Frota máxima por tipo de vagão

Tipo	Máximo (un.)	Tara (t)
I	50	25
II	30	25

Baseado nos dados dessas tabelas o problema pode ser modelado como o seguinte problema de transporte multiproduto:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (C_{jk} \cdot X_{jk}) + C'_k \cdot X'_k \right) \\
& \bar{A}_j \cdot X_j = r_j; \quad j = 1, \dots, 3 \\
& \sum_{j \in J^k} \bar{A}_j (X_{jk} + X'_k) = 0; \quad k = 1, 2 \\
& \sum_j E_j \cdot X_j^i \leq b_i; \quad i = 1, \dots, 4 \\
& \sum_{j \in J^k} (T_j \cdot \delta_j \cdot X_{jk}) + T' \cdot X'_k \leq f_k \\
& X_j = \sum_{k=1}^2 X_{jk}; \quad j = 1, \dots, 3 \\
& X_{jk} \geq 0, \quad X'_k \geq 0; \quad \forall_j \forall_k
\end{aligned} \tag{3.16}$$

O problema (3.16) pode ser transformado num problema linear fuzzy dado por:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\min} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (\tilde{C}_{jk} \cdot X_{jk}) + \tilde{C}'_k \cdot X'_k \right) \\
& \bar{A}_j \cdot X_j = r_j; \quad j = 1, \dots, 3 \\
& \sum_{j \in J^k} \bar{A}_j (X_{jk} + X'_k) = 0; \quad k = 1, 2 \\
& \sum_j \tilde{E}_j \cdot X_j^i \leq \tilde{b}_i; \quad i = 1, \dots, 4 \\
& \sum_{j \in J^k} (\tilde{T}_j \cdot \tilde{\delta}_j \cdot X_{jk}) + \tilde{T}' \cdot X'_k \leq \tilde{f}_k \\
& X_j = \sum_{k=1}^2 X_{jk}; \quad j = 1, \dots, 3 \\
& X_{jk} \geq 0, \quad X'_k \geq 0; \quad \forall_j \forall_k
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Assim, os problemas auxiliares para resolver (3.17), de acordo com a metodologia discutida na seção 3.3.2, são os seguintes:

$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (C_{jk}^0 \cdot X_{jk}) + C'_k \cdot X'_k \right) \leq r_0^0 + \theta t_0^0 \\
& \bar{A}_j^0 \cdot X_j = r_j^0 + \theta t_j^0 \quad j = 1, \dots, 3 \\
& \sum_{j \in J^k} \bar{A}_j^0 (X_{jk} + X'_k) = 0; \quad k = 1, 2 \\
& \sum_j E_j^0 \cdot X_j^i \leq b_i^0 + \theta t_i^0; \quad i = 1, \dots, 4 \\
& \sum_{j \in J^k} (T_j^0 \cdot \delta_j^0 \cdot X_{jk}) + T'^0 \cdot X'_k \leq f_k^0 + \theta t_k^{\prime\prime 0} \\
& X_j = \sum_{k=1}^2 X_{jk}; \quad j = 1, \dots, 3 \\
& X_{jk} \geq 0, \quad X'_k \geq 0; \quad \forall_j \forall_k \\
& \theta \in [0, 1]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (\underline{C}_{jk} \cdot X_{jk}) + \bar{C}'_k \cdot X'_k \right) \leq \bar{r}_0 + \theta \bar{t}_0 \\
& \bar{A}_j \cdot X_j = \underline{r}_j + \theta \underline{t}_j \quad j = 1, \dots, 3 \\
& \sum_{j \in J^k} \bar{A}_j (X_{jk} + X'_k) = 0; \quad k = 1, 2
\end{aligned}$$

$$\sum_j \bar{E}_j \cdot X_j^i \leq \underline{b}_i + \theta \underline{t}'_i; \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\sum_{j \in J^k} (\bar{T}_j \cdot \bar{\delta}_j \cdot X_{jk}) + T' \cdot X'_k \leq \underline{f}_k + \theta \underline{t}''_k$$

$$X_j = \sum_{k=1}^2 X_{jk}; \quad j = 1, \dots, 3$$

$$X_{jk} \geq 0, \quad X'_k \geq 0; \quad \forall_j \forall_k$$

$$\theta \in [0, 1] \tag{3.19}$$

min θ

$$\sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (\bar{C}_{jk} \cdot X_{jk}) + \underline{C}'_k \cdot X'_k \right) \leq \underline{r}_0 + \theta \underline{t}_0$$

$$\bar{A}_j \cdot X_j = \bar{r}_j + \theta \bar{t}_j \quad j = 1, \dots, 3$$

$$\sum_{j \in J^k} \bar{A}_j (X_{jk} + X'_k) = 0; \quad k = 1, 2$$

$$\sum_j \underline{E}_j \cdot X_j^i \leq \bar{b}_i + \theta \bar{t}'_i; \quad i = 1, \dots, 4$$

$$\sum_{j \in J^k} (\underline{T}_j \cdot \underline{\delta}_j \cdot X_{jk}) + \underline{T}' \cdot X'_k \leq \bar{f}_k + \theta \bar{t}''_k$$

$$X_j = \sum_{k=1}^2 X_{jk}; \quad j = 1, \dots, 3$$

$$X_{jk} \geq 0, \quad X'_k \geq 0; \quad \forall_j \forall_k$$

$$\theta \in [0, 1] \tag{3.20}$$

As soluções (em toneladas) dos três problemas acima são:

- Problema (3.18)

$$X_{11} = (441.50, 441.50, 0, 0)$$

$$X_{21} = (0, 0, 291.5, 291.5)$$

$$X_{22} = (0, 0, 0, 0)$$

$$X_{32} = (0, 0, 375, 0)$$

$$X'_1 = (0, 0, 75, 75)$$

$$X'_2 = (187.5, 0, 0, 0)$$

- Problema (3.19)

$$X_{11} = (281.25, 281.25, 0, 0)$$

$$X_{21} = (0, 0, 281.25, 281.25)$$

$$X_{22} = (0, 0, 0, 0)$$

$$X_{32} = (0, 0, 270, 0)$$

$$X'_1 = (0, 0, 0, 0)$$

$$X'_2 = (135, 0, 0, 0)$$

- Problema (3.20)

$$X_{11} = (550, 550, 0, 0)$$

$$X_{21} = (0, 0, 320.85, 320.85)$$

$$X_{22} = (0, 0, 412.5, 412.5)$$

$$X_{32} = (0, 0, 0, 0)$$

$$X'_1 = (0, 0, 114.57, 114.57)$$

$$X'_2 = (206.25, 206.25, 0, 0)$$

Com base nesses resultados o decisor pode analisar seu problema considerando imprecisões na função objetivo e nas restrições, tendo também uma ferramenta para analisar e aprender sobre a influência dos coeficientes fuzzy em seu problema. Ou seja, se não existem imprecisões no problema, o custo será de 4394.5 enquanto se o decisor considerar as imprecisões dos custos e restrições, o custo será entre 4027.5 e 4491.7 para o sistema ferroviário.

Usando a extensão discutida na seção 3.3.3, pode-se resolver o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 (C_{jk}^0 \cdot X_{jk}) + C_k^{\prime 0} \cdot X_k' \right) \leq W^L + \theta(W^S - W^L) \\
 & \bar{A}_j^0 \cdot X_j = r_j^0 + \theta t_j^0 \quad j = 1, \dots, 3 \\
 & \sum_{j \in J^k} A_j^0 (X_{jk} + X_k') = 0; \quad k = 1, 2 \\
 & \sum_j E_j^0 \cdot X_j^i \leq b_i^0 + \theta t_i^{\prime 0}; \quad i = 1, \dots, 4 \\
 & \sum_{j \in J^k} (T_j^0 \cdot \delta_j^0 \cdot X_{jk}) + T_k^{\prime 0} \cdot X_k' \leq f_k^0 + \theta t_k^{\prime \prime 0} \\
 & X_j = \sum_{k=1}^2 X_{jk}; \quad j = 1, \dots, 3 \\
 & X_{jk} \geq 0, \quad X_k' \geq 0; \quad \forall_j \forall_k \\
 & \theta \in [0, 1] \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

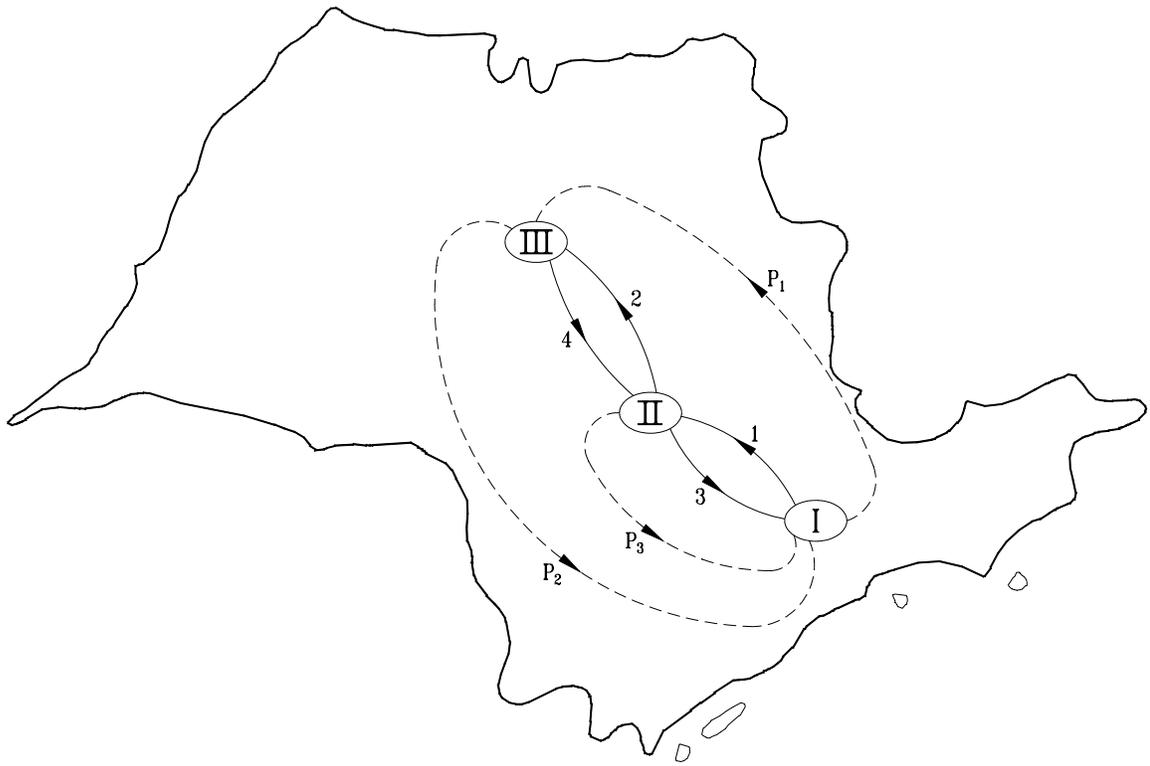


Figura 3.2: Rede ferroviária.

cuja solução é $X_{11} = (370.85, 370.85, 0, 0)$

$$X_{21} = (0, 0, 370.85, 370.85)$$

$$X_{22} = (0, 0, 0, 0)$$

$$X_{32} = (0, 0, 295.85, 0)$$

$$X'_1 = (0, 0, 0, 0)$$

$$X'_2 = (147.925, 0, 0, 0)$$

sendo $w^L = 4027.5$, $w^S = 4491.7$ e o valor da função objetivo é igual à 4027.5.

3.4. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Nesta seção faz-se análise de sensibilidade do problema de transporte multiproduto com função objetivo fuzzy e restrições fuzzy com o propósito de obter informações sobre a influência de cada restrição na solução do problema, através da introdução de variáveis que representam o grau de satisfação.

Utiliza-se como método de resolução uma generalização do método de Zimmermann.

A característica principal desse método é a análise da importância de cada restrição na solução do problema. Associou-se um θ_G a um sub-conjunto de custos da função objetivo, obtendo-se, assim, uma avaliação da influência de cada conjunto de custos na solução geral.

Na teoria de conjunto fuzzy, a função objetivo e restrições são representadas por conjuntos fuzzy e num ambiente fuzzy, o grau de pertinência de um dado X num conjunto

fuzzy é representado por uma função de pertinência $\mu(X) \in [0, 1]$. Sendo $X \in \mathbb{R}^n$ um conjunto de alternativas possíveis, então a função objetivo fuzzy G e restrições fuzzy C são, respectivamente, conjuntos fuzzy $\mu_C \in \mathbb{R}^m$ e $\mu_G \in \mathbb{R}$, onde m é o número de restrições consideradas.

Então o problema de transporte multiproduto fuzzy pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 & \max (S_G \theta_G + S_C \theta_C) \\
 & \text{s.a} \\
 & \mu_G \geq \theta_G \\
 & \mu_C \geq \theta_C \\
 & \mu_G, \mu_{Ci}, \theta_G \text{ e } \theta_{Ci} \in [0,1], \forall i
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde S_C é um vetor linha de 1's, cuja dimensão é igual à quantidade de θ associados às restrições, S_G é um vetor linha de 1's, cuja dimensão é igual à quantidade de θ associados às funções objetivos e θ_G e θ_{Ci} representam os valores de pertinência.

Assim, baseado nas equações (3.22), (3.4) e (3.5), pode-se reescrever (3.1) como:

$$\begin{aligned}
 & \max (S_G \theta_G + S_C \theta_C) \\
 & \text{s.a} \\
 & (c^k x^k) \leq b_0 + (1 - \theta_G)t_0; \quad k = 1, \dots, K \\
 & Bx^k = r^k; \quad k = 1, \dots, K \\
 & \sum_{k=1}^K D^k x^k \leq b + (1 - \theta_C)t \\
 & x^k \geq 0; \quad \theta_G \text{ e } \theta_{Ci} \in [0,1], \forall i
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pode-se observar que o problema acima pode ser resolvido usando métodos convencionais e sua solução em geral é única.

3.4.1. Exemplo

Este exemplo utiliza a mesma rede e os mesmos dados do exemplo anterior, salvo a capacidade de tração do trecho 3 que passa a ser 570 toneladas.

Tabela 3.4: Solução do exemplo

Produto	Custo total (dia)	Quant. transp. (t)	Tipo vagão
P1	2000	500	I
P2	1000	250	I
P3	504	168	II

Tabela 3.5: Resultados dos θ 's

θ referente a:	Valor
função obj. (vagão I)	0.1667
função obj. (vagão II)	1
frota I	0
frota II	1
trecho 1	1
trecho 2	1
Trecho 3	0
Trecho 4	1

A solução obtida é apresentada na tabela 3.4 e o valor de cada θ é encontrado na tabela 3.5, onde pode-se fazer algumas considerações:

- como P1 e P2 utilizam o vagão tipo I, tem-se 10 vagões carregando P1, partindo do nó I e chegando no nó III. Agora a estação III contém 10 vagões vazios que deverão carregar P2. Como existe um limite no número de vagões, 5 deles seguem transportando P2 e os outros 5 seguem vazios de volta ao nó I. Observe que o θ referente a frota tipo I é igual a zero.

Esse caso mostra que o algoritmo trata corretamente o problema de distribuição dos vagões descarregados.

- o vagão tipo II transportou 168 toneladas de P3 devido a presença da restrição de tração no trecho 3. Pode-se observar que o valor de θ referente ao trecho 3 é igual a zero.
- os custos referentes à “volta” dos vagões vazios tipo I e tipo II são 250 e 84, respectivamente.

Baseado na tabela 5, pode-se analisar a importância de cada restrição na solução do problema. Quando $\theta = 0$, significa que a restrição em questão atingiu seu limite, incluindo sua tolerância máxima e quando $\theta = 1$, tem-se uma situação onde a restrição está com folga. Pode ocorrer valores de θ intermediários entre 0 e 1, quando o nível de influência da restrição não estiver em nenhum dos extremos. Neste caso, o valor de θ fornece o grau de comprometimento da restrição.

CAPÍTULO 4

Grafos Fuzzy

4.1. INTRODUÇÃO

Teoria de grafo é amplamente utilizada em problemas de pesquisa operacional devido a algumas vantagens, tais como, redução de cálculos, melhor visualização e entendimento do problema.

Grafo é tradicionalmente um par $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito de vértices e E uma relação em $V \times V$, isto é, um conjunto de pares ordenados de vértices, sendo esses pares arestas de G .

A introdução de incertezas nos custos e nas capacidades dos arcos no grafo, traz a necessidade de modificar os algoritmos de grafos clássicos para tratar dessas novas características.

De acordo com a definição de Rosenfeld [28], um grafo fuzzy \tilde{G} é um par (\tilde{V}, \tilde{E}) onde \tilde{V} é um conjunto fuzzy em V e \tilde{E} é uma relação fuzzy em $V \times V$ tal que

$$\mu_{\tilde{E}}(v, v') \leq \min(\mu_{\tilde{V}}(v), \mu_{\tilde{V}}(v')).$$

onde $\mu(\cdot)$ é uma função de pertinência.

Os conceitos fuzzy a seguir serão usados para definir os algoritmos:

a) Seja \tilde{a} um número fuzzy com uma função de pertinência $\mu_{\tilde{a}}(x)$. O conjunto de níveis α de \tilde{a} é o conjunto $[\tilde{a}]_{\alpha} = \{x / \mu_{\tilde{a}}(x) \geq \alpha\}$ onde $\alpha \in [0, 1]$.

b) A soma e subtração de números fuzzy é definida como segue:

$$(a, \alpha, \beta)_{LR} + (b, \gamma, \delta)_{LR} = (a+b, \alpha+\gamma, \beta+\delta)$$

$$(a, \alpha, \beta)_{LR} - (b, \gamma, \delta)_{LR} = (a-b, \alpha-\delta, \beta-\gamma)$$

c) Um caminho ρ num grafo fuzzy é uma sequência de nós distintos x_0, x_1, \dots, x_n tal que $\mu(x_{i-1}, x_i) > 0, 1 \leq i \leq n$. Aqui $n \geq 0$ é chamado de comprimento de ρ . Os pares consecutivos $\mu(x_{i-1}, x_i)$ são chamados de arcos do caminho.

d) Para qualquer caminho $\rho = x_0, x_1, \dots, x_n$, defini-se o μ -comprimento de ρ como a soma dos pesos recíprocos dos arcos de ρ , isto é,

$$\lambda(\rho) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mu(x_{i-1}, x_i)}$$

Se $n = 0$, defini-se que $\lambda(\rho) = 0$. Para $n \geq 1$, tem-se que $\lambda(\rho) \geq 1$. Para quaisquer dois nós x, y , podemos definir suas μ -distância como o menor μ -comprimento de qualquer caminho de x para y .

e) A intensidade de um caminho ρ é definida como $\wedge_{i=1}^n \mu(x_{i-1}, x_i)$. Em outras palavras, a intensidade de um caminho $\delta(\rho)$ é definida como o peso de arco mais fraco do caminho. Se o caminho tem comprimento zero, é conveniente definir sua intensidade como sendo $\delta(x_0)$. Um caminho com $x_0 = x_n$ e $n \geq 3$ é chamado de ciclo.

f) Um grafo conexo e sem ciclo é chamado de árvore.

Klein [15] e Okada [27] estudaram o problema de caminho mínimo fuzzy. O primeiro usa programação dinâmica e encontra os caminhos correspondentes ao grau de pertinência linear que pode substituir um decisor. Esse arco pode receber um valor inteiro para o comprimento entre 1 e um inteiro fixado. O segundo introduz uma relação de ordem entre números fuzzy baseado em “fuzzy min” proposto por Dubois e Prade [12].

Neste capítulo resolve-se um problema de transporte linear com custo e capacidade fuzzy.

Foram introduzidas algumas adaptações na teoria de grafo clássica para elaboração de algoritmos capazes de tratar as incertezas. Mais objetivamente, problemas em redes com custo fuzzy, com capacidade fuzzy e com custo e capacidade fuzzy foram estudados.

Para encontrar o melhor caminho dentre vários outros, um programa de fluxo máximo à custo mínimo fuzzy foi utilizado.

Os algoritmos propostos foram aplicados em um problema de transporte e os resultados obtidos foram analisados.

As principais contribuições desse capítulo são os algoritmos para resolver os problemas usando teoria de grafo com imprecisão. Esses algoritmos podem resolver outros problemas que podem ser modelados como grafos fuzzy e também podem ser estendidos para problemas de transporte multiproduto.

Na próxima seção encontra-se a formulação matemática do problema, a seção 4.3 apresenta a resolução do problema de transporte com custo e capacidade fuzzy utilizando grafos fuzzy. As aplicações e os resultados computacionais são apresentados na seção 4.4 e as conclusões encontram-se na seção 4.5.

4.2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Um problema de transporte pode ser formulado como um problema linear [1], dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & Cx \\ \text{s.a} \quad & \\ & Ax \leq b \\ & 0 \leq x \leq u \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

C: representa o custo de transporte

x: representa o fluxo nos arcos

A: é a matriz nó-arco incidência formada por -1, 0 e 1

b: é o vetor de recursos

u: representa a capacidade do arco

Suponha que o valor de c e u em (4.1) não estejam bem definidos. Então esse problema pode ser modelado como:

$$\begin{aligned}
& \min \tilde{C}x \\
& \text{s.a} \\
& Ax \leq b \\
& 0 \leq x \leq \tilde{u}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

onde (4.2) representa o problema de transporte fuzzy e o símbolo “~” representa que o custo e a capacidade são fuzzy. A teoria fuzzy é usada para tratar de incertezas nas medições de custo e capacidade.

O objetivo desse capítulo é resolver o problema (4.2).

Zimmermann [31] e Delgado et. Al [9] trataram este problema. O primeiro formulou e resolveu um problema linear fuzzy, com imprecisões na função objetivo e nas restrições. O segundo considerou que os coeficientes da função objetivo e das restrições não eram bem conhecidos. Esses valores foram modelados como números fuzzy do tipo LR de acordo com a definição de Dubois e Prade. O método proposto por Delgado et. al é baseado no conceito de relação de comparação entre números fuzzy. Foi provado que relações diferentes induzem modelos auxiliares e soluções diferentes. O problema de transporte multiproduto fuzzy foi resolvido por Mendes e Yamakami [21]. Eles modelaram um problema de transporte multiproduto linear com função objetivo fuzzy e restrições fuzzy. Para resolvê-lo, foi introduzido um método que reduz o modelo de transporte linear fuzzy em vários problemas de programação linear convencionais que são facilmente resolvidos por algoritmos padrões.

Neste capítulo resolve-se um problema de transporte fuzzy via grafos fuzzy usando o conceito de números fuzzy.

4.3. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE TRANSPORTE COM CUSTO E CAPACIDADE FUZZY UTILIZANDO GRAFOS FUZZY

O objetivo dessa seção é resolver o problema de transporte fuzzy via grafos fuzzy, ou seja, trabalha-se com custos e capacidades tratados como números fuzzy.

A rede aqui considerada é um grafo orientado $G=(N,A)$, constituído de um conjunto finito de nós $N=\{1,\dots,n\}$ e um conjunto de m arcos orientados ligando pares de nós.

Cada arco é denotado por um par (i,j) , onde $i,j \in N$ e $i \neq j$. Os arcos são rotulados com custo de transporte e com capacidade de transporte entre dois nós.

O problema é dividido em 3 casos: com custo fuzzy, com capacidade fuzzy e com custo e capacidade fuzzy.

a) *GRAFO COM CUSTO FUZZY*

Nesse caso, trabalha-se com incerteza no custo e capacidade conhecida. Assumindo que o custo é um número triangular fuzzy, a figura 4.1 mostra a função de pertinência do custo.

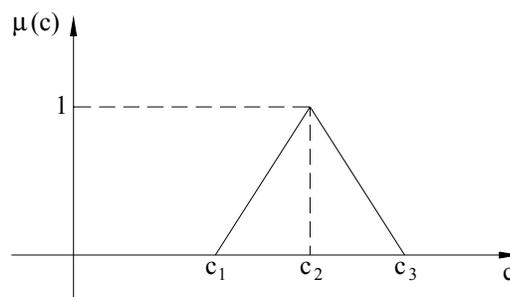


Figura 4.1: Função de pertinência do custo

onde

$\mu(x)$: representa a função de pertinência do custo

$c=(c_1, c_2, c_3)$: representa o custo fuzzy

c_1 : representa o limitante inferior do custo

c_2 : representa o valor “crisp” do custo

c_3 : representa o limitante superior do custo

Para resolver o grafo com custo fuzzy, fez-se adaptações no algoritmo com relação ao teste de otimalidade e ao cálculo das variáveis não básicas, utilizando comparação de números fuzzy.

Os potenciais são utilizados para definir os caminhos mais curtos, baseando-se na pertinência μ -comprimento.

Procura-se o caminho com maior μ -comprimento e menor potencial.

Caso haja vários caminhos com μ -comprimentos iguais, deve-se escolher aquele com maior intensidade ou usar a intensidade como α -nível.

Como o custo é um número triangular fuzzy, o teste de otimalidade para as variáveis não básicas usa o seguinte critério:

- a) Se o arco $(i,j) \in U$, onde U é o conjunto dos arcos com fluxo em seus limites superiores então o custo relativo, Cr , é dado por

$$Cr_2 = Cr_2 - [(1-\alpha) \cdot (Cr_2 - Cr_1)]$$

ou

b) Se o arco $(i,j) \in L$, onde L é o conjunto dos arcos com fluxo em seus limites inferiores, então o custo relativo, Cr , é dado por

$$Cr_2 = Cr_2 + [(1-\alpha) \cdot (Cr_3 - Cr_2)]$$

Pode-se obter soluções com valor de pertinência (ou confiabilidade) pré-estabelecida (α -nível).

b) *GRAFO COM CAPACIDADE FUZZY*

Nesse caso, considera-se a capacidade de cada arco como um número trapezoidal fuzzy e o custo de transporte como exato. A figura 4.2 mostra a função de pertinência da capacidade.

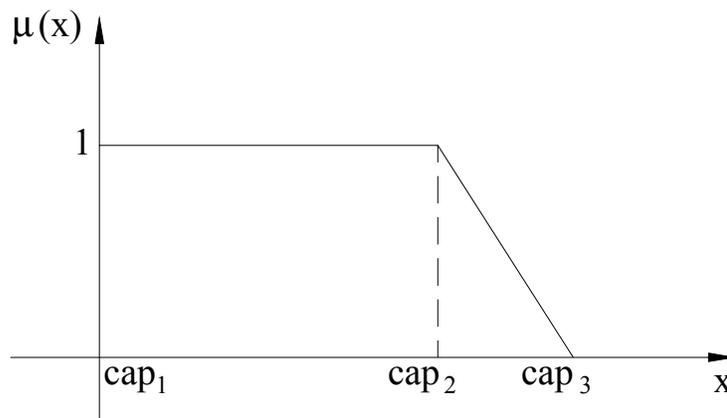


Figura 4.2: Função de pertinência da capacidade

$\mu(x)$ representa a função de pertinência da capacidade, $cap=(cap_1, cap_2, cap_3)$ é a capacidade fuzzy, onde cap_1 é o limite inferior, cap_2 é o valor exato da capacidade e cap_3 é o limite superior.

Sem perda de generalidade, nesse trabalho assume-se que o limite inferior é zero.

Pode-se observar que o valor da função de pertinência é 1 quando a quantidade transportada não ultrapassa a capacidade cap_2 e esse valor começa a diminuir quando a quantidade transportada é maior.

Para resolver o problema de fluxo em rede considerando a capacidade fuzzy, constrói-se a rede original com os arcos originais, todos com custo e capacidade exatos.

Observando a figura 4.2, o valor da função de pertinência começa a diminuir quando o fluxo é maior do que cap_2 . Nesse caso, cria-se o segundo arco com o custo dado pela fórmula:

$$c = c \cdot [f(\alpha, x, ls)]$$

onde c representa o custo, $\alpha \in [0,1]$ e ls representa o limitante superior do arco.

A descrição do algoritmo é dada a seguir:

Passo 1: Construir a rede original com os arcos originais, todos com custo e capacidade exatos.

Passo 2: Resolver o PFCM (problema de fluxo à custo mínimo)

Passo 3: Na solução obtida, identificar os produtos que deixaram de ser transportados.

Passo 4: Para os arcos já saturados, criar um paralelo, com o custo ($C_0 + \Delta \text{Custo}$) devido a não linearidade e capacidade Δx .

Passo 5: Se toda a demanda de cada produto já foi transportada ou se a capacidade do arco atingiu seu limite superior, incluindo a quantidade máxima permitida acima de limite superior, pare. Senão, vá para 6.

Passo 6: Colocar Δx como demanda a mais na rede e resolver o PFCM

Se a solução anterior é igual a atual ou se não existe $\Delta x > 0$, pare. Caso contrário, vá para 7.

Passo 7: Corrigir os custos dos segundos arcos (arcos paralelos), baseado na nova solução e voltar para o passo 2.

c) *GRAFO COM CUSTO E CAPACIDADE FUZZY*

O algoritmo desenvolvido para resolver esse problema é a união dos dois casos anteriores.

4.4. EXEMPLO

Nesta seção, um exemplo é utilizado para ilustrar a metodologia estudada. O grafo é constituído de cinco nós e dezesseis arcos, cada um com limites inferior e superior.

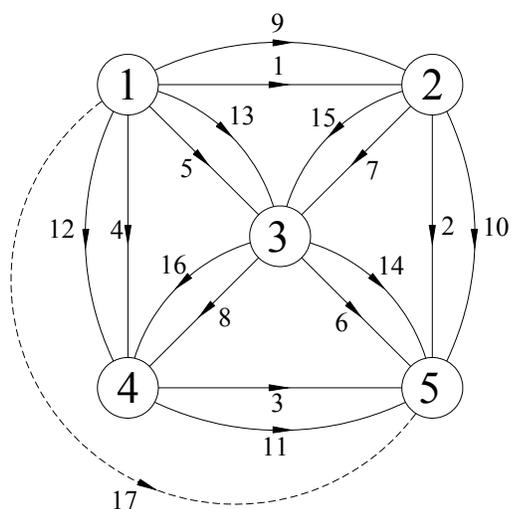


Figura 4.3: Rede do exemplo

Tabela 4.1: Dados referente aos produtos

Produto	Nó inicial	Nó final	Quantidade a ser transportada
P1	1	5	900

Tabela 4.2: Dados referente aos arcos

Arco	Nó origem	Nó destino	Custo ₁ (c ₁)	Custo ₂ (c ₂)	Custo ₃ (c ₃)	Limite inferior	Limite superior	Δ capacidade
1	1	2	1.8	2.0	2.2	0	200	100
2	2	5	1.8	2.0	2.2	0	3000	50
3	4	5	1.8	2.0	2.2	0	3000	50
4	1	4	3.6	4.0	4.4	0	150	150
5	1	3	2.7	3.0	3.3	0	100	100
6	3	5	1.8	2.0	2.2	0	3000	50
7	2	3	1.8	2.0	2.2	0	3000	50
8	3	4	1.8	2.0	2.2	0	3000	50

A rede em questão é mostrada na figura 4.3. Nela, os arcos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 representam os arcos originais da rede, os arcos 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16 representam os segundos arcos que serão usados nos casos capacidade fuzzy e custo e capacidade fuzzy e o número 17 representa o arco artificial que balanceia o fluxo na rede.

A tabela 4.1 apresenta os nós inicial e final e a quantidade a ser transportada do produto P1.

A tabela 4.2 possui a descrição da rede. Nesta constam os nós-origem e destino dos arcos, os custos fuzzy de cada arco, os limites inferior e superior e a quantidade máxima que pode ser transportada acima do limite superior.

Os resultados são apresentados nas tabelas 4.3 a 4.5 e são analisados para os três casos: custo fuzzy, capacidade fuzzy e custo e capacidade fuzzy.

CASO “a”. Exemplo com *custo incerto e capacidade conhecida*

A solução é apresentada na tabela 4.3. Neste caso, opta-se por encontrar a pior, a média e a melhor solução.

Tabela 4.3: Solução do exemplo para o caso “a”

Valor de α	Quantidade transportada (t)	Função objetivo 1	Função objetivo 2	Função objetivo 3
0	450	1980	2200	2420
0.1	450	2002	2200	2398
0.2	450	2024	2200	2376
0.3	450	2046	2200	2354
0.4	450	2068	2200	2332
0.5	450	2090	2200	2310
0.6	450	2112	2200	2288

0.7	450	2134	2200	2266
0.8	450	2156	2200	2240
0.9	450	2178	2200	2222
1.0	450	2200	2200	2200

Pode-se observar que para valores diferentes de α , a quantidade transportada foi a mesma, 450 ton, devido a restrição nos arcos 1, 4 e 5, ou seja, como o custo é fuzzy e a capacidade é exata, o máximo que os arcos 1, 4 e 5 podem suportar é 200, 150 e 100 toneladas, respectivamente.

A figura 4.4 mostra o gráfico de $\alpha \times$ (custo/quantidade transportada) para o caso “a”. Nela, pode-se observar o espalhamento em torno do valor exato, ou seja, quanto maior o valor de α menor o espalhamento.

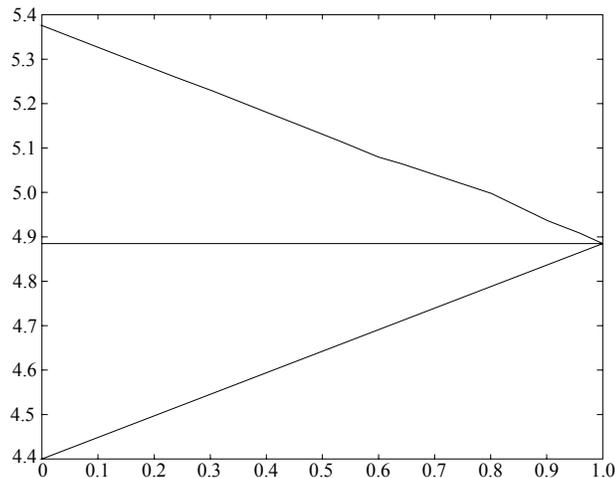


Figura 4.4: Gráfico de $\alpha \times$ (custo/quantidade transportada) para o caso “a”.

CASO “b”. Exemplo com *custo conhecido e capacidade incerta*

A função de correção do custo utilizada nesse exemplo é dada por:

$$C(x) = C \cdot \exp[(1-\alpha) \cdot \Delta x / (\text{cap}_3 - \text{cap}_2)]$$

onde x é o fluxo da rede no arco, $\Delta x = \begin{cases} x - \text{cap}_2, & \text{if } x > \text{cap}_2 \\ 0, & \text{if } x \leq \text{cap}_2 \end{cases}$

Portanto, é assumido que o custo aumenta exponencialmente quando o fluxo é maior que cap_2 (figura 4.5).

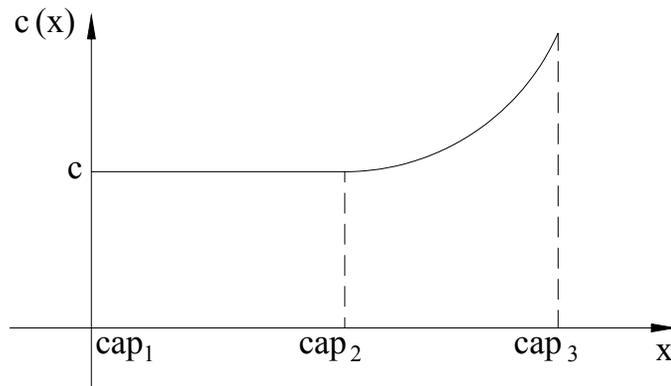


Figura 4.5: Gráfico da Capacidade \times Custo

Tabela 4.4: Solução do exemplo para o caso “b”

Valor de α	Quantidade transportada (t)	Função objetivo	Custo/quantidade transportada (t)
0	800	5890	7.36
0.1	765	5265	6.88
0.2	730	4718	6.46
0.3	695	4240	6.10
0.4	660	3823	5.8
0.5	625	3456	5.53

0.6	590	3136	5.32
0.7	555	2855	5.14
0.8	520	2608	5.02
0.9	485	2392	4.93
1.0	450	2200	4.89

A figura 4.6 mostra a solução da tabela 4.4 para $\alpha=0.5$ e o gráfico de $\alpha \times$ (custo/quantidade transportada) é mostrado na figura 4.7. Pode-se observar que a tabela 4.4 e a curva da figura 4.7 mostra que a relação $\alpha \times$ (custo/quantidade transportada) não é linear e quando diminui-se o valor de α , a quantidade transportada e o valor da função objetivo aumenta. Isso ocorre porque quanto menor o valor de α , maior pode ser a quantidade transportada e portanto, mais caro fica esse transporte.

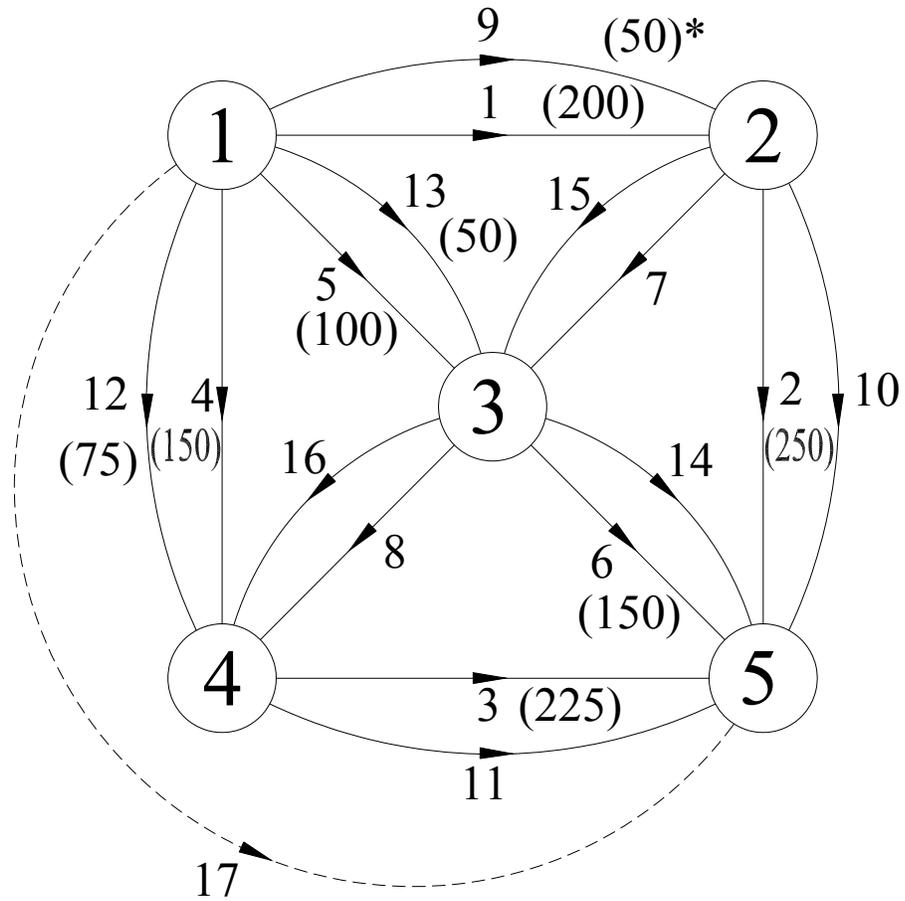


Figura 4.6: Solução da caso “b” para $\alpha=0.5$

()*: quantidade transportada em ton.

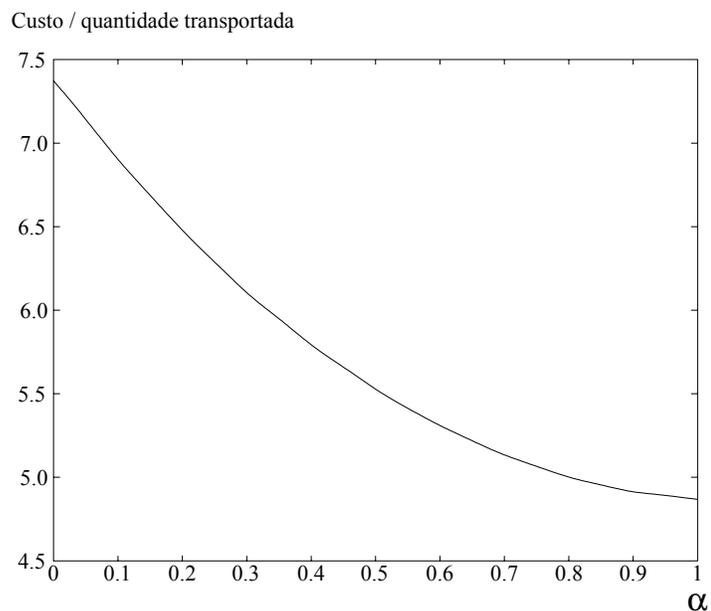


Figura 4.7: Gráfico de α x (custo/quantidade transportada) para o caso “b”.

CASO “c”. Exemplo com *custo e capacidade incertos*.

Tabela 4.5: Solução do exemplo para o caso “c” .

Valor de α	Quantidade transportada (t)	Função objetivo 1	Função objetivo 2	Função objetivo 3
0	800	5301	5890	6479
0.1	765	4791	5265	5739
0.2	730	4341	4718	5096
0.3	695	3944	4240	4537
0.4	660	3593	3823	4052
0.5	625	3284	3457	3630
0.6	590	3011	3136	3262
0.7	555	2770	2855	2941
0.8	520	2556	2608	2661
0.9	485	2368	2391	2415
1.0	450	2200	2200	2200

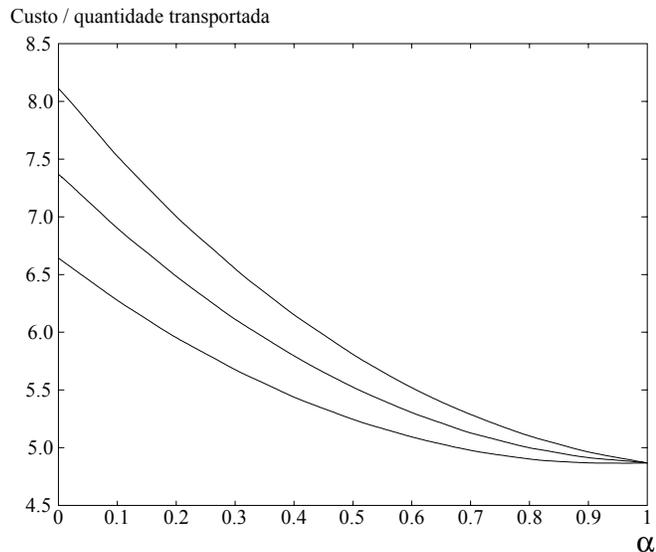


Figura 4.8: Gráfico de α x (custo/quantidade transportada) para o caso “c”

Neste caso pode-se observar que o custo/quantidade transportada diminui quando o valor de α aumenta numa forma não-linear.

A figura 4.8, que mostra o gráfico de α x (custo/quantidade transportada), é uma junção das figuras 4.4 e 4.5. Ou seja, está intimamente ligada ao espalhamento em torno do valor exato e ao aumento do custo devido ao aumento da capacidade do arco.

4.5. CONCLUSÕES

Nesse capítulo resolveu-se um problema linear fuzzy via grafos fuzzy. O problema de transporte estudado considera que os custos e as capacidades dos arcos não são precisamente conhecidos.

Esse trabalho traz importantes contribuições, pois os algoritmos desenvolvidos resolvem problemas usando teoria de grafo com imprecisão.

O problema foi dividido em três casos e para cada caso um algoritmo foi desenvolvido. No primeiro, considerou-se o custo com imprecisão, o segundo tratou da imprecisão nas capacidades e no terceiro, trabalhou-se com incertezas nos custos e nas capacidades.

Esses algoritmos podem ser usados para resolver outros problemas que podem ser modelados como grafos fuzzy e também podem ser aplicados em problemas de grande porte.

Aplicou-se os algoritmos em um exemplo e a análise das soluções obtidas permitiu concluir que os resultados foram satisfatórios.

Pôde-se observar que a teoria de grafos fuzzy fornece mais informações do que técnicas matemáticas exatas, principalmente sobre o valor de α e o algoritmo mostrou ser muito eficiente do ponto de vista computacional.

CAPÍTULO 5

Resolvendo o PTM Fuzzy via Grafos Fuzzy

5.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo resolve-se um problema de transporte multiproduto com imprecisões via grafos fuzzy.

Para resolver o problema, desenvolveu-se um algoritmo onde os custos e as capacidades são tratados como números fuzzy.

Aplicou-se o algoritmo num sistema ferroviário e os resultados obtidos são analisados.

A modelagem matemática do problema de transporte multiproduto linear encontra-se no capítulo 2.

5.2. ALGORITMO DE RESOLUÇÃO

O algoritmo desenvolvido para resolver o problema de transporte multiproduto via grafos fuzzy é uma generalização dos três algoritmos do capítulo anterior.

Utilizou-se um algoritmo baseado no procedimento de carregamento progressivo, levando em consideração os aspectos de incerteza. Estas incertezas são tratadas utilizando as idéias apresentadas no capítulo anterior, ou seja, as incertezas nos custos são tratados através da adaptação dos conceitos de μ -caminhos e de intensidade associado ao critério de otimalidade fuzzy, e as incertezas nas capacidades são tratados fazendo um mapeamento dos valores de pertinência dos arcos em relação ao limitante superior, para os conceitos de μ -caminhos.

A escolha do processo de carregamento progressivo baseia-se no fato de os custos dos arcos serem não-lineares.

A descrição do algoritmo é dada a seguir:

Passo 1: Leitura dos dados da rede (nós, arcos, produtos e tipos de vagão)

Passo 2: Construção do grafo fuzzy

Passo 3: Achar o caminho mínimo para todos os produtos, resolvendo o problema de caminho mínimo fuzzy

Passo 4: Definição do incremento para carregar (Δx)

- a) Se é a primeira iteração, guardar o valor limitante do fluxo (VL) para manter o custo do arco invariante (o menor dentre todos os arcos) e fazer $\Delta x = VL + del$ (incremento do carregamento progressivo)
- b) Em outros casos, fazer $\Delta x = del$

Passo 5: Cálculo do custo total $C_{Pi} = C_{Ii} + C_{Vi}$ onde C_{Ii} é o custo de ida do produto i e C_{Vi} é o custo da volta do produto i

- a) Se existe volta com vagão vazio, para cada tipo de frota, calcular o custo de volta (C_{Vi}), para cada produto, injetando um incremento de Δx do produto i e calcular o custo de volta. Vá para o passo 6.
- b) Caso contrário, fazer $C_{Pi} = C_{Ii}$ (custo do produto i é igual ao custo de ida do produto i). Vá para o passo 6.

Passo 6: Utilizando um vetor $PRIORI(i)$, ordenar em ordem crescente (com números fuzzy) por custo CPI , os produtos.

Se todos $PRIORI = \infty$, fim. Caso contrário, vá para o passo 7.

Passo 7: Achar a frota disponível do vagão j , (F_j) para o produto $PRIORI(I)=1$

a) Se $QRT_i = 0$, onde QRT_i é a quantidade restante do produto i a ser transportada, fazer $PRIORI(I) = \infty$ e ir para o passo 6. Caso contrário, ir para o passo 8.

b) Se $F_j = 0$, verificar se tem outro tipo de vagão que pode transportar o produto i .

Se não tiver, fazer $PRIORI = \infty$ e voltar para o passo 6.

Caso contrário, fazer $F_j =$ novo tipo de vagão e ir para 7 b)

Caso contrário ir para o passo seguinte.

Passo 8: Determinar:

$$\Delta x = \min\{QRT_i, F_j, del\}$$

$$QRT_i = QRT_i - \Delta x$$

$$F_j = F_j - \Delta x$$

Rodar o programa de fluxo de custo mínimo fuzzy com nova demanda.

Passo 9: Recalcular os custos nos arcos em função dos novos valores dos fluxos nos arcos (somente para os segundos arcos, representando a capacidade fuzzy). Vá para o passo 3.

5.3. EXEMPLOS

Apresentam-se nesta seção exemplos onde são realizados alguns testes aplicando a metodologia mencionada e descrita nesse capítulo.

Os exemplos representam um sistema ferroviário de transporte de carga multiproduto, onde foram utilizados dados da rede ferroviária de carga do Estado de São Paulo (cedidos pela FEPASA).

Esses resultados são analisados por dois exemplos que representam uma rede ferroviária com diferentes características que diferem quanto à quantidade de produtos a transportar, às rotas, ao tamanho de suas redes e às restrições, entre outros.

Cada exemplo contém dados referente aos produtos, trechos e frotas. Os dados e seus respectivos resultados computacionais são apresentados em tabelas, facilitando sua compreensão.

Cada trecho da malha é representado por dois arcos, com sentidos opostos. Cada um desses pares de arcos possui igual capacidade máxima de tração.

O primeiro exemplo possui uma rede constituída de três nós e quatro arcos, transporta três produtos e trabalha com dois tipos de vagões e tem objetivo fundamentalmente didático. O segundo exemplo trabalha com uma rede de quinze nós e trinta e quatro arcos, transporta doze produtos e possui três tipos de vagões.

Exemplo 1

Nesta seção, um pequeno exemplo de uma aplicação do modelo proposto numa parte

do sistema ferroviário do Estado de São Paulo (figura 5.1) é utilizado para ilustrar a metodologia estudada. O grafo é constituído de três nós e quatro arcos, transporta três produtos e trabalha com dois tipos de vagões.

Tabela 5.1: Dados referente aos produtos

Produtos	Nó origem	Nó destino	Cadência (t)	Custo 1	Custo 2	Custo 3	Tempo	Capac. vagão	Tipo vagão
P1	1	3	550	2.7	3.0	3.3	2	50	I
P2	3	1	1000	1.8	2.0	2.2	2	50	I
P3	2	1	1100	2.7	3.0	3.3	1	50	II

Tabela 5.2: Dados referente a frota

Tipo de vagão	Nº de vagões disponíveis	Tara
I	40	25
II	66	25

Tabela 5.3: Dados referente aos arcos

Arco	Nó origem	Nó destino	Custo 1	Custo 2	Custo 3	Custo volta	LSA *	Limite inferior	Limite superior	Tempo vazio
1	1	2	1.8	2.0	2.2	1.0	100	0	3300	1.0
2	2	3	2.7	3.0	3.3	1.0	150	0	3300	1.0
3	2	1	1.8	2.0	2.2	1.0	50	0	2200	1.0
4	3	2	2.7	3.0	3.3	1.0	80	0	3300	1.0

* quantidade máxima que pode ser transportada acima do limite superior

Tabela 5.4: Solução do exemplo

Valor de α	Quantidade transportada (ton.)		
	P1	P2	P3
0.0	500	400	1100
0.1	500	395	1100
0.2	500	390	1100
0.3	500	385	1100
0.4	500	380	1100
0.5	500	375	1100
0.6	500	370	1100
0.7	500	365	1100
0.8	500	360	1100
0.9	500	355	1100
1.0	500	350	1100

Tabela 5.5: Solução do exemplo

Valor de α	Quantidade total transportada (ton.) em cada arco			
	arco 1	arco 2	arco 3	arco 4
0.0	500	500	1500	400
0.1	500	500	1495	395
0.2	500	500	1490	390
0.3	500	500	1485	385
0.4	500	500	1480	380
0.5	500	500	1475	375
0.6	500	500	1470	370
0.7	500	500	1465	365
0.8	500	500	1460	360
0.9	500	500	1455	355
1.0	500	500	1450	350

Tabela 5.6: Custo total gerado para transportar os três produtos

Valor de α	Custo 1	Custo 2	Custo 3
0.0	5040	5600	6160
0.1	5031	5590	6149
0.2	5022	5580	6138
0.3	5013	5570	6127
0.4	5004	5560	6116
0.5	4995	5550	6105
0.6	4986	5540	6094
0.7	4977	5530	6083
0.8	4968	5520	6072
0.9	4959	5510	6061
1.0	4950	5500	6050

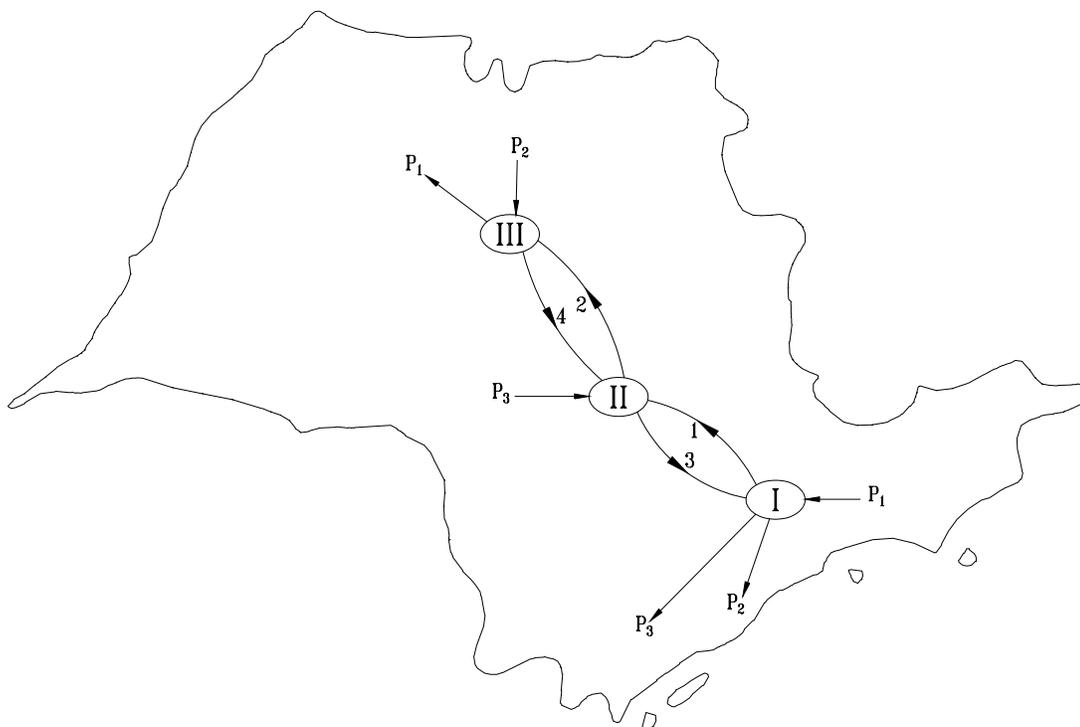


Figura 5.1: Rede ferroviária

Os dados referentes aos trechos, produtos e frota são encontrados nas três primeiras tabelas, respectivamente. Estes são suficientes para a aplicação do algoritmo.

Na tabela 5.1 encontram-se as estações-origem e destino dos produtos, as cadências, isto é, a quantidade diária permitida, os custos fuzzy que a ferrovia gasta nos transportes, as capacidades, ou seja, a capacidade máxima que cada vagão-vazio pode transportar, os tempos de viagem que os vagões levam para transportar determinado produto e o tipo de vagão que transporta este produto.

A tabela 5.2 possui as informações sobre a frota disponível, os tipos de vagões que a compõem e o peso (tara) dos mesmos vazios.

Todas as informações dos trechos estão na tabela 5.3. Nesta constam as estações-origem e destino de cada trecho, os custos fuzzy de cada arco, o custo de volta, a quantidade máxima que pode ser transportada acima do limite superior, os limites inferior e superior de cada arco e o tempo que o vagão-vazio gasta para percorrer aquele trecho.

As soluções do exemplo 1 para diferentes valores de α encontram-se nas tabelas 5.4 a 5.6.

A tabela 5.4 apresenta a quantidade transportada de cada produto, na tabela 5.5 encontra-se a quantidade total transportada em cada arco e a tabela 5.6 possui o custo fuzzy (custo 1, custo 2 e custo 3) para transportar os três produtos juntos.

A análise dos exemplos será feita para $\alpha=1.0$ e $\alpha=0.0$. No primeiro caso, tem-se o problema “crisp” e o problema totalmente relaxado encontra-se no segundo caso.

Analisando o problema para $\alpha=1.0$ pode-se observar que:

- Os produtos P1 e P2 são carregados pela frota tipo I. Analisando a tabela 5.4 e a figura 5.2, observa-se que nenhum desses produtos consegue atender as suas respectivas demandas, devido a restrição de frota.
- A frota de vagões tipo II não transporta todo o produto P3 porque o arco número 3 já atingiu sua capacidade máxima de tração.
- Como P1 e P2 utilizam o vagão tipo I, tem-se 10 vagões carregando P1, partindo do nó I e chegando no nó III. Agora a estação III contém 10 vagões vazios que deverão carregar P2. Como existe um limite no número de vagões 7 deles seguem transportando P2 e os outros três seguem vazios de volta ao nó I. Esse caso mostra que o algoritmo trata corretamente o problema de distribuição dos vagões descarregados.
- O algoritmo trata corretamente o problema da volta dos vagões descarregados (vazios) nos destinos.

Analisando os resultados obtidos para $\alpha=0.0$, tem-se:

- Pode-se observar que a quantidade transportada do produtos P2 aumenta enquanto a quantidade transportada do produto P1 não se altera. Isso ocorre devido a presença da restrição de frota.
- A restrição de tração impede que o produto carregado pelo vagão tipo II consiga atender toda sua demanda. A figura 5.3 mostra que os arco 3 atingiu a sua capacidade máxima de tração.

- Pode-se observar na tabela 5.5 que no arco 3 estão sendo transportados 1500 toneladas, o que corresponde a 30 vagões. Como a tara do vagão é 25 ton., então o vagão carregado pesa 75 ton. (50 + 25). Portanto no arco 3 tem-se 2.250 ton. ($30 \times 75 = 2.250$). Logo, esse arco atingiu seu limite máximo, ou seja, atingiu seu limite superior (2200 ton.) mais a quantidade permitida acima do limite superior (50).

Numa breve comparação entre os resultados obtidos para $\alpha=0.0$ e $\alpha=1.0$, observa-se que quando o problema está totalmente relaxado ($\alpha=0.0$), a capacidade de tração do arco aumenta e conseqüentemente uma quantidade maior de produtos pode ser transportada.

Nesse exemplo a quantidade transportada do produto P2 aumenta de 350 para 400 toneladas. Esse aumento não ocorre para os outros produtos devido as limitações de número de vagões e da capacidade no arco 3.

Também é observado que quanto menor o valor de α , maior a capacidade de tração nos arcos e maior o custo.

Com as soluções em mãos, o decisor deve escolher qual delas melhor se adapta a sua situação ou necessidade.

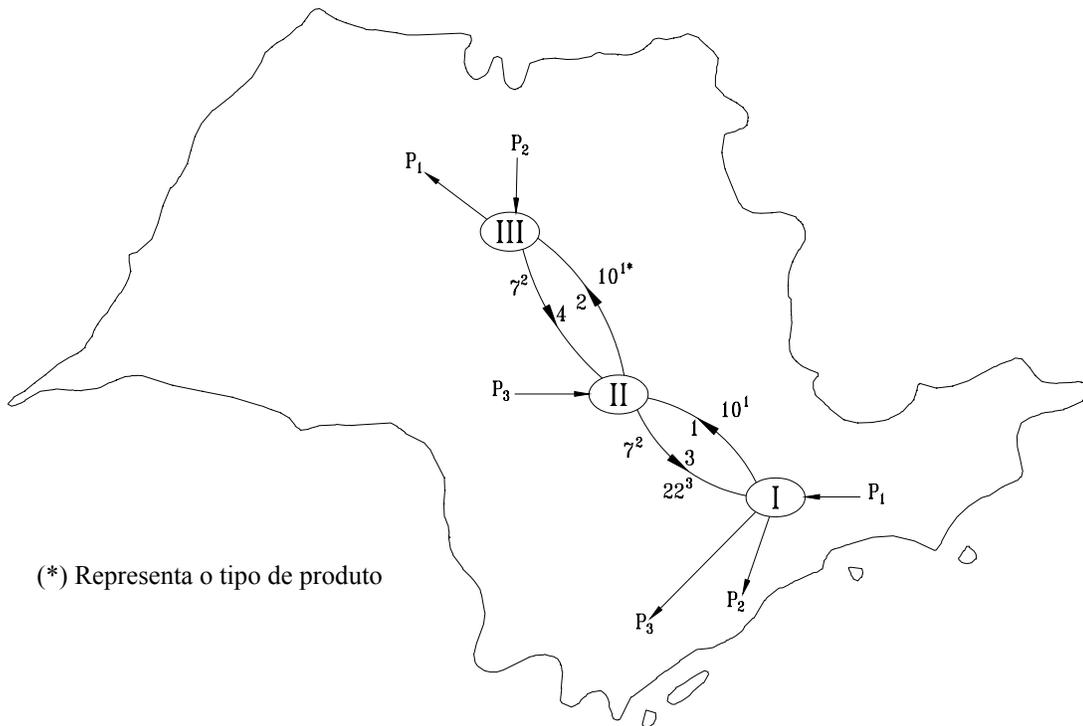
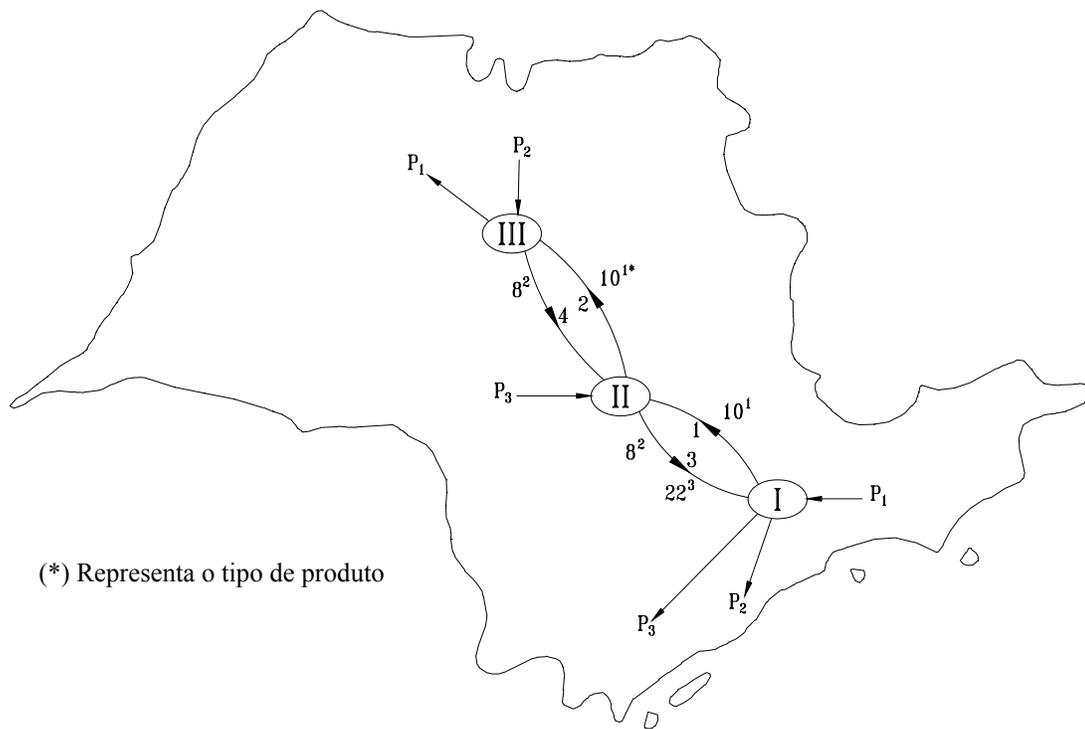


Figura 5.2: Grafo solução para $\alpha=1.0$



(*) Representa o tipo de produto

Figura 5.3: Grafo solução para $\alpha=0.0$

Exemplo 2

Neste exemplo aplica-se o algoritmo numa rede maior, constituída de 15 nós e 34 arcos, transporta 12 produtos e trabalha com 3 tipos de vagões.

Possui restrição de trecho e de frota.

A rede em questão é mostrada na figura 5.4. A descrição do produto encontra-se na tabela 5.7, os dados da rede na tabela 5.8, as disponibilidades de cada tipo de vagão encontram-se na tabela 5.9 e as soluções, que variam de acordo com o valor de α , são apresentadas nas tabelas 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13.

Tabela 5.7: Dados referente aos produtos

Produtos	Nó origem	Nó destino	Cadência (t)	Custo 1	Custo 2	Custo 3	Tempo	Capac. vagão	Tipo vagão
P1	4	7	1000	12	13	14	3	50	1
P2	4	15	1000	24	25	26	3	50	1
P3	4	13	1000	12	13	14	3	50	1
P4	5	1	1000	11	12	13	4	50	1
P5	15	3	1000	11	12	13	3	50	1
P6	12	10	1000	11	12	13	3	50	1
P7	9	1	2000	12	13	14	3	50	2
P8	6	1	2000	12	13	14	5	50	2
P9	14	1	2000	11	12	13	4	50	2
P10	1	9	2000	12	13	14	3	50	2
P11	1	15	2000	11	12	13	5	50	2
P12	1	6	2000	12	13	14	5	50	3

Tabela 5.8: Dados referente aos arcos

Arco	Nó origem	Nó destino	Custo 1	Custo 2	Custo 3	Custo volta	LSA	Limite inferior	Limite superior	Tempo vazio
1	1	2	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
2	2	3	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
3	3	4	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
4	4	5	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
5	5	6	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
6	6	7	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0

7	2	8	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
8	8	9	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
9	9	13	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
10	8	12	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
11	10	3	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
12	3	11	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
13	11	12	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
14	12	13	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
15	4	11	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
16	11	14	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
17	14	15	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
18	2	1	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
19	3	2	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
20	4	3	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
21	5	4	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
22	6	5	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
23	7	6	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
24	8	2	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
25	9	8	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
26	13	9	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
27	12	8	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
28	3	10	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
29	11	3	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
30	12	11	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
31	13	12	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
32	11	4	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
33	14	11	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0
34	15	14	1.8	2.0	2.2	1.0	225.	0	2200	1.0

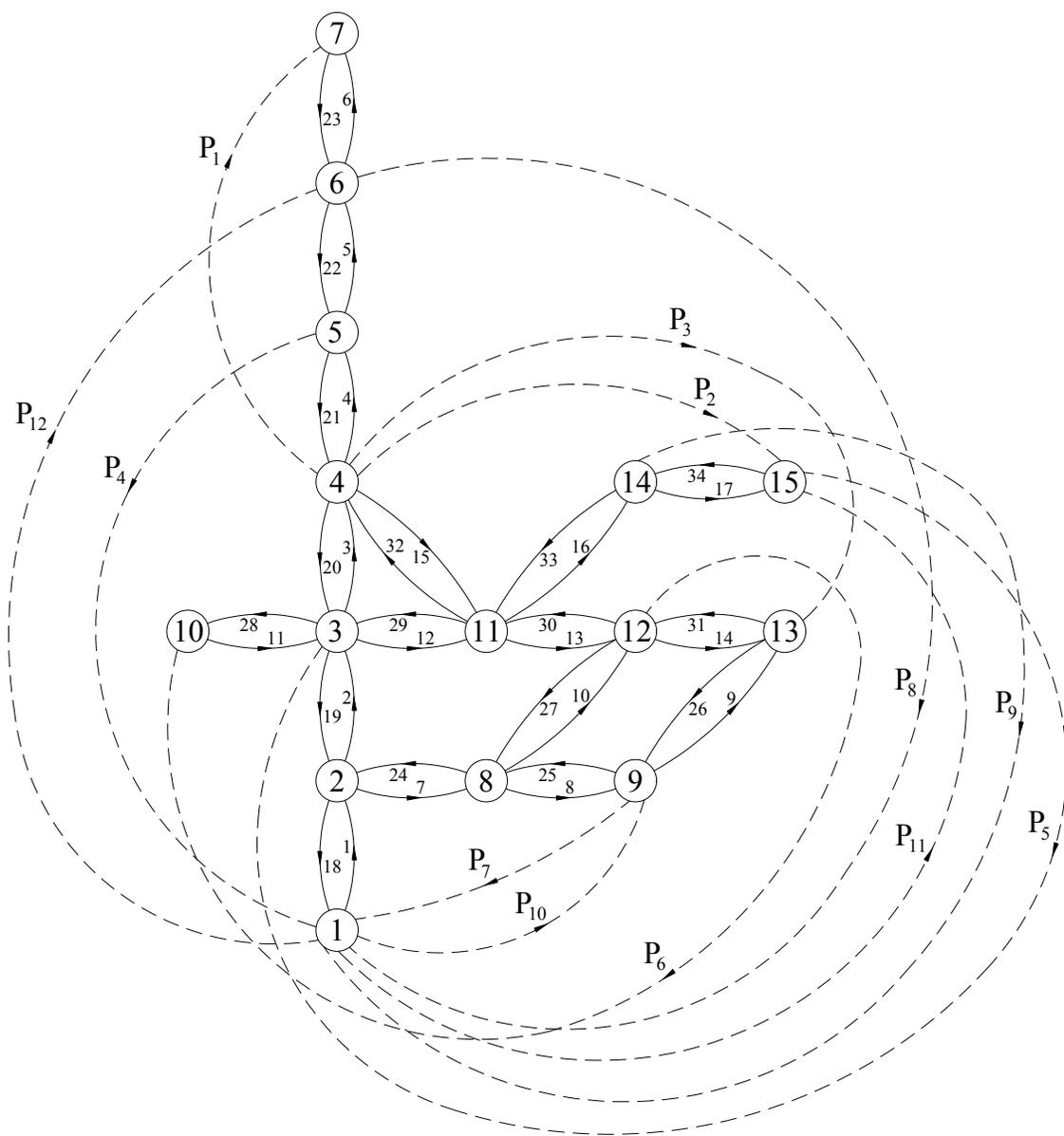


Figura 5.4: Grafo do exemplo

Tabela 5.9: Dados referente a Frota

Tipo de vagão	Nº de vagões disponíveis	Tara
I	400	25
II	540	25

III	2000	25
-----	------	----

Tabela 5.10 Solução do exemplo para os produtos transportados pela frota I

Valor de α	Quantidade transportada (ton.)					
	P1	P2	P3	P4	P5	P6
0.0	775	50	1000	50	1000	1000
0.1	775	50	1000	50	1000	1000
0.2	775	50	1000	50	1000	1000
0.3	933.3	50	1000	50	1000	757.5
0.4	775	50	1000	50	1000	1000
0.5	775	50	1000	50	1000	1000
0.6	1000	50	1000	50	782	1000
0.7	775	50	1000	50	1000	1000
0.8	775	50	1000	50	1000	1000
0.9	775	50	1000	50	1000	1000
1.0	775	50	1000	50	1000	1000

Tabela 5.11 Custo total gerado para transportar os doze produtos

Valor de α	Custo 1	Custo 2	Custo 3
0.0	82750	89775	96800
0.1	82750	89775	96800
0.2	82270	89255	96240
0.3	80962.5	87818.3	94674.2
0.4	81550	88475	95400
0.5	81250	88149.5	95050
0.6	81008.3	87870	94731.7
0.7	80350	87175	94000
0.8	79930	86720	93510
0.9	79690	86460	93230
1.0	79150	85875	92600

Tabela 5.12: Solução do exemplo para os produtos transportados pela frota II

Valor de α	Quantidade transportada (ton.)				
	P7	P8	P9	P10	P11
0.0	1450	50	50	1500	50
0.1	1450	50	50	1500	50
0.2	1430	50	50	1480	50

0.3	1407.5	50	50	1457.5	50
0.4	1400	50	50	1450	50
0.5	1387.5	50	50	1437.5	50
0.6	1365	50	50	1415	50
0.7	1350	50	50	1400	50
0.8	1320	50	50	1395	50
0.9	1322.5	50	50	1372.5	50
1.0	1300	50	50	1350	50

Tabela 5.13: Solução do exemplo para o produto transportado pela frota III

Valor de α	Quantidade transportada de P12 (ton.)
0.0	50
0.1	50
0.2	50
0.3	50
0.4	50
0.5	50
0.6	50
0.7	50
0.8	50
0.9	50
1.0	50

Analisando o problema para $\alpha=1.0$ pode-se observar que:

- Os produtos P1, P2, P3, P4, P5 e P6 são transportados pelo vagão tipo I. Os produtos P3, P5 e P6 conseguiram atender as suas respectivas demandas. Devido a presença da restrição no arco 18, somente 50 toneladas de P4 foram transportadas e devido a presença da restrição de frota, P1 e P2 não atenderam as suas respectivas demandas. Observando a figura 5.5, pode-se verificar que o arco número 18 atingiu sua capacidade máxima de tração.

- Os produtos P7, P8, P9, P10 e P11 são carregados pela frota tipo II. Analisando a tabela 5.12 e a figura 5.5, observa-se que nenhum desses produtos consegue atender as suas respectivas demandas, devido a restrição de tração.
- A frota de vagões tipo III não transporta todo o produto P12 porque o arco número 1 já atingiu sua capacidade máxima de tração.
- O algoritmo trata corretamente o problema da volta dos vagões descarregados (vazios) nos destinos.

Analisando os resultados obtidos para $\alpha=0.0$, tem-se:

- Quando $\alpha=0$ e o valor de LSA é 225, isto significa que cada arco pertencente a rede pode transportar a sua capacidade inicial + LSA, ou seja, (2200 + 225) toneladas. Esse valor em números de vagões é calculado da seguinte forma: $(2200+225)/75$, onde 75 é a soma do peso do vagão carregado + tara.
- Embora neste caso o problema esteja totalmente relaxado, a solução para os produtos carregados pela frota de vagões tipo I é a mesma obtida para $\alpha=1$. Isso ocorre devido a presença da restrição de frota.
- Pode-se observar que a quantidade transportada dos produtos P7 e P10 aumenta. A restrição de tração impede que os produtos carregados pelo vagão tipo II consigam atender todas as suas demandas. A figura 5.6 mostra que os arcos 1 e 18 atingiram as suas capacidades máximas de tração. Essa capacidade pode ser 2425 toneladas ou 32 vagões.

- A frota de vagões tipo III não transporta todo o produto P12 porque o arco número 1 já atingiu sua capacidade máxima de tração, incluindo a quantidade permitida acima do limite superior.
- Com este exemplo, pretende-se mostrar que o algoritmo é viável para casos de médio porte, mais especificamente, para redes próximas da do Estado de São Paulo e é eficiente computacionalmente, pois seu tempo de execução é pequeno.

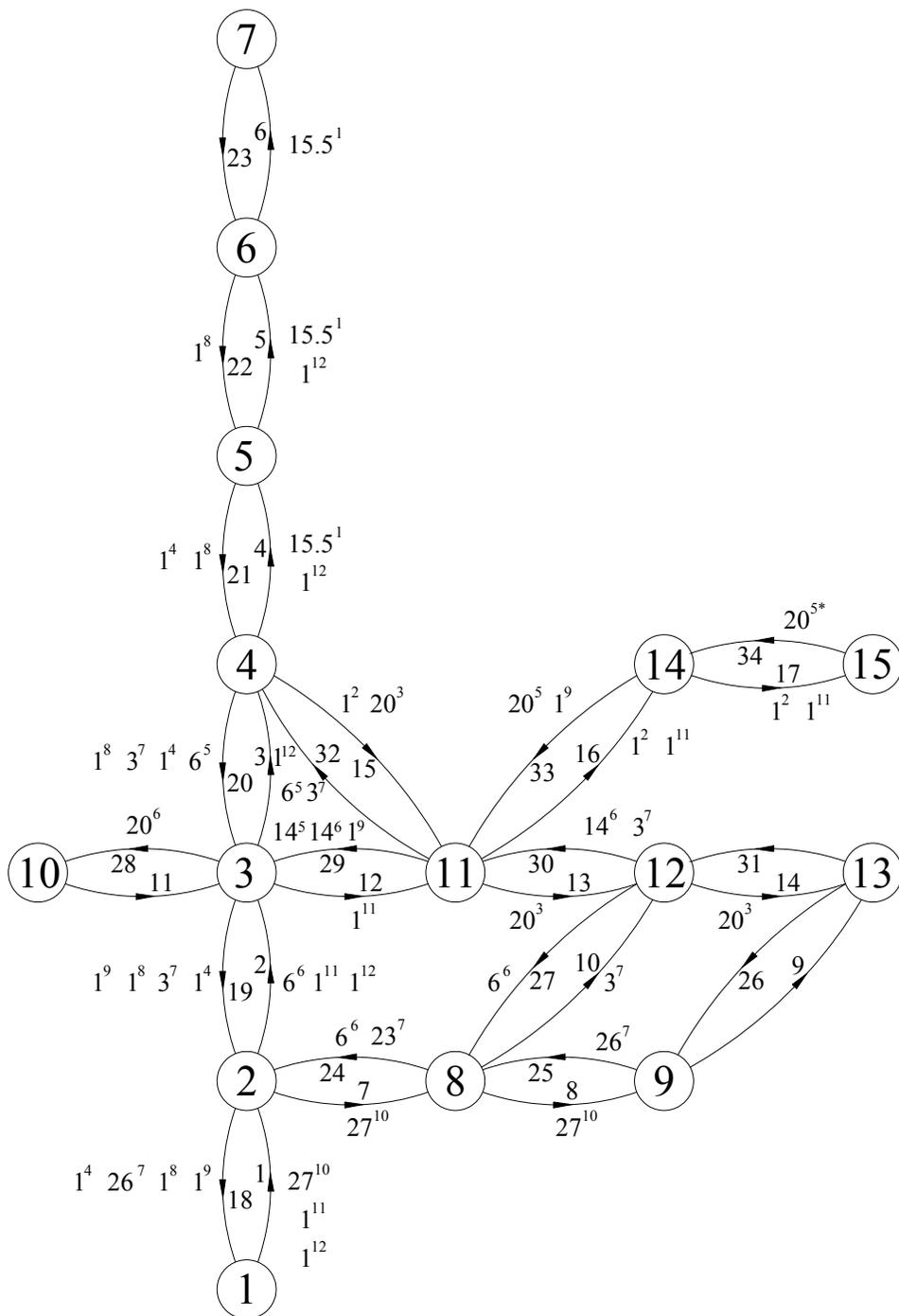


Figura 5.5: Grafo solução para $\alpha=1.0$

CAPÍTULO 6

Conclusões e Propostas Futuras

6.1. CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como meta resolver o problema de transporte multiproduto fuzzy via grafos fuzzy e aplicá-lo num sistema ferroviário.

Para isto, algumas etapas foram cumpridas. Partiu-se da modelagem matemática do Problema de Transporte Multiproduto Linear encontrada no trabalho de Mendes [18] e fez-se uma generalização, de modo que uma nova modelagem foi desenvolvida para que cada produto pudesse ser transportado por mais de um tipo de vagão. Além disso, essa modelagem diminuiu substancialmente o número de variáveis, o que para problemas de grande porte é uma melhoria considerável. Baseado na nova modelagem, iniciou-se o estudo do problema de Transporte Multiproduto Linear Fuzzy (PTMLF), envolvendo simultaneamente no conjunto de restrições números fuzzy e restrições fuzzy, não esquecendo dos custos fuzzy e função objetivo fuzzy. Para resolver esse problema introduziu-se um método baseado nos métodos de programação linear fuzzy de Zimmermann [31] e Delgado et al. [8]. Como resultado, conseguiu-se transformar o problema em questão em vários problemas lineares, facilmente resolvidos por algoritmos padrões.

Fez-se também análise de sensibilidade do PTMLF com o propósito de obter informações sobre a influência de cada restrição na solução do problema, através da introdução de variáveis que representam o grau de satisfação.

Em cada uma dessas etapas, exemplos foram utilizados para comprovar a eficiência da metodologia estudada.

Em seguida, a área de interesse foi grafos fuzzy. Resolveu-se um problema de

transporte linear com custo e capacidade fuzzy via grafos fuzzy. Dividiu-se o problema em três casos: grafo com custo fuzzy, grafo com capacidade fuzzy e grafo com custo e capacidade fuzzy e, para cada caso, um algoritmo foi desenvolvido. Adaptações na teoria de grafo clássica para elaboração de algoritmos capazes de tratar as incertezas foram introduzidas.

As principais contribuições desse capítulo são os algoritmos para resolver os problemas usando teoria de grafo com imprecisão. Esses algoritmos podem resolver outros problemas que podem ser modelados como grafos fuzzy e também podem ser estendidos para problemas de transporte multiproduto.

Finalmente o problema de transporte multiproduto fuzzy estava pronto para ser resolvido via grafos fuzzy.

O algoritmo desenvolvido para resolver esse problema é uma generalização dos três algoritmos propostos no capítulo anterior.

Aplicou-se o algoritmo desenvolvido num sistema ferroviário com dados reais.

Pode-se observar que a teoria de grafos fuzzy fornece mais informações do que técnicas matemáticas exatas, principalmente sobre o valor de α e o algoritmo mostrou ser muito eficiente do ponto de vista computacional.

Os exemplos foram utilizados para testar a metodologia adotada. Alguns foram montados a partir dos dados fornecidos pela FEPASA, tornando-os bem próximos da realidade e outros, possuem a finalidade de permitir a sua análise quanto à redistribuição dos vagões esvaziados no destino.

Os resultados computacionais comprovaram a eficiência do método e mostraram que os resultados obtidos foram satisfatórios. Assim sendo, acredita-se que os objetivos do

trabalho foram alcançados, tais como: a modelagem do problema foi aprimorada, o PTML foi fuzzificado e resolvido utilizando métodos consagrados de programação matemática fuzzy. Além disso, fez-se uma rápida análise de sensibilidade com o objetivo de estudar a influência de cada restrição na solução do problema. Resolveu-se também o problema de transporte multiproduto fuzzy via grafos fuzzy, onde os resultados de aplicações em redes reais foram exaustivamente analisados e suas otimalidades confirmadas.

6.2. PROPOSTAS FUTURAS

Apesar de comprovada a eficiência da metodologia utilizada, seria interessante estender o estudo para problemas com custos não-lineares fuzzy.

Também seria interessante estender a teoria fuzzy para problemas com espaço de restrição não-lineares fuzzy.

Uma outra melhoria seria estabelecer formalmente a programação não-linear fuzzy e também escrever uma teoria de grafos fuzzy formal.

É opinião dos autores que a teoria fuzzy deva ser aplicada em programação inteira.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFIAS

- [1] AHUJA, R.; MAGNANTI, T and ORLIN, J. : Network Flows - Theory, Algorithms and Applications, Printice-Hall, 1993.

- [2] ALVES, I.C. : Uma Metodologia para Resolver um Problema de Transporte Multiproduto num Sistema Ferroviário, Tese de Mestrado, UNICAMP, 1993.

- [3] ALVES, I.C.; YAMAKAMI, A. and GOMIDE, F. : “An Approach for Fuzzy Linear Multicommodity Transportation Problems and this Application”, Fuzz-IEEE/IFES’95, 2, 773-780, 1995.

- [4] ASSAD, A.A. : *Multicommodity Network Flows - A Survey*, Networks, vol. 8, 1978.

- [5] BELLMAN, R. and ZADEH, L.A. : *Decision Making in a Fuzzy Environment*, *Managemnt Science*, vol. B17, pp. 141-164, 1970.

- [6] DANTZIG, G.B. : Linear Programming and Extensions, Princeton, N.J, 1963.

- [7] DELGADO, M.; VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A. : Imprecise Costs in Mathematical Programming Problems, *Control and Cybernets* 16(2), pp.113-121, 1987.

- [8] DELGADO, M.; VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A. : A General Model for Fuzzy Linear Programming, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 29, pp. 21-29, 1989.

- [9] DELGADO, M.; VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A. : Relating Different Approaches to Solve Linear Programming Problems with Imprecise Costs, Fuzzy Sets and Systems, vol. 37, pp. 33-42, 1990.
- [10] DUBOIS, D. and PRADE, H. : Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications, Academic Press, Ne York, 1975.
- [11] DUBOIS, D. and PRADE, H. : Operations on Fuzzy Numbers, Int. J. Systems Sci, vol. 9 n° 6, pp. 613-626, 1978.
- [12] DUBOIS, D. and PRADE, H. : Systems of Linear Fuzzy Constraints, Fuzzy Sets and Systems, 3, 37-48, 1980.
- [13] KENNINGTON, J.L. : A Survey of Linear Cost Multicommodity Network Flow, Operations Research, vol. 26, n° 2, 1978.
- [14] KENNINGTON, J.L. : “Algorithms for Network Programming”, Operation Research, John Wiley, 1978.
- [15] KLEIN, C.M. : Fuzzy Shortest Paths. Fuzzy Sets and Systems, 39, pp. 27-41, 1991.
- [16] LASDON, L.S. : Optimization Theory for Large Systems, Mc Millan Co., pp. 144-206, 1970.

- [17] LUCHESI, H. : Alocação de Material Rodante em Ferrovias, Tese de Mestrado, UNICAMP, 1989.
- [18] MENDES, R.R : Transporte Multiproduto Generalizado: Modelagem e Aplicações à Ferrovia, Tese de Mestrado, FEEC-UNICAMP, 1995.
- [19] MENDES, R R. and YAMAKAMI, A. : Um Modelo para Problemas de Transporte Multiproduto Integrado em Ferrovias, VIII CLAIO Latin Iberian American Congress on Operation Research and System Engineering, 1996.
- [20] MENDES, R.R. and YAMAKAMI, A. : Modelling and Solving a Class of Multicommodity Transportation Problem, IFIP WG7.6 Working Conference, França, pp. 24.1-24.4, 1996.
- [21] MENDES, R.R.; YAMAKAMI, A. and ALVES, I.C. : Modelling and Solving a Class of Fuzzy Multicommodity Transportation Problem, Sixth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Barcelona, vol. I, pp. 313-318, 1997.
- [22] MENDES, R.R. and YAMAKAMI, A. : Planejamento de Transporte Multiproduto em Ferrovias: Análise de Sensibilidade Usando Teoria de Programação Matemática Fuzzy, SOBRAPO, Salvador, 1997.

- [23] MENDES, R.R. and YAMAKAMI, A. : Multicommodity Transportation Planning in Railway – In: Pedrycs W & Gomide F. – Introduction to Fuzzy Sets Analysis and Design, pp. 453-460.
- [24] MENDES, R.R. and YAMAKAMI, A. : Fuzzy Network Algorithms and Applications to Transportation Problems, - Computational Intelligence for Modelling, Control & Automation, ed. IOS Press, pp. 441-448.
- [25] MENDES, R.R. and YAMAKAMI, A. : Solving a Multicommodity Transportation Problem Using Graph Theory, aceito pela comunidade da IFORS'99 (International Federational of Operational Research Societies), Beijing, China, 1999.
- [26] MENDES, R.R. and YAMAKAMI, A. : Multicommodity Transportation Planning in Railway: Fuzzy Graph Approach, aceito pela comunidade da FUZZ-IEEE'99, Seul, Coréia, 1999.
- [27] OKADA, S. and SOPER, T. : A Method for Solving Shortest Path Problem on the Network with Fuzzy Arc Lengths, IFSA, vol. III, pp. 189-194, 1997.
- [28] ROSENFELD, A : Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes, Academic Press, New York, 1975.
- [29] YOUNG, J.L. and CHING, L.H. : Interactive Fuzzy Linear Programming, Fuzzy Sets and Systems, vol. 45, pp.169-183, 1992.

- [30] ZHUKOVIN, V. YE. : Fuzzy Multicriterial Decision-Making Problems, Sovietiv Journal of Comp. and Syst. Sci., vol. 24 M-6 N-D, pp.33-37, 1986.
- [31] ZIMMERMANN, H.J. : Description and Optimization of Fuzzy System, Internat. J. General Systems, vol. 2, pp. 209-215, 1976.
- [32] ZIMMERMANN, H.J. : “Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions”, Studies in the Management Sciences, vol. 20, pp. 109-121, 1984.