



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E
DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

***ESTUDO DE RESSONADORES NÃO-
LINEARES A FIBRA E SUAS APLICAÇÕES
EM PROCESSAMENTO ÓPTICO DE SINAIS
PARA COMUNICAÇÕES***

AUTOR: Rubens Viana Ramos

ORIENTADOR: Rui Fragassi Souza

*Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação da
Universidade Estadual de Campinas
como parte dos requisitos exigidos para
a obtenção do grau de Mestre em
Engenharia Elétrica.*

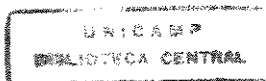
Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por: Rubens Viana Ramos
e aprovada pela Comissão Julgadora em
06/03/98.


Orientador

Campinas-SP
Março - 1998

5812594
R147e

33987/BC



UNIDADE	BC		
N.º CHAMADA:			
V.	Ex.		
TOMBO BC/	33.987		
PROC.	395/98		
C	☐	D	☒
PREGO	R\$ 11,00		
DATA	28/05/98		
N.º CPD			

CM-00112970-6

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R147e Ramos, Rubens Viana
Estudo de ressonadores não-lineares a fibra e suas aplicações em processamento óptico de sinais para comunicações. / Rubens Viana Ramos.--Campinas, SP: [s.n.], 1998.

Orientador: Rui Fragassi Souza
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Fibras óticas. 2. Sólitons. 3. Ressonadores de cavidade. 4. Comportamento caótico nos sistemas. I. Souza, Rui Fragassi. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

RESUMO

Esta dissertação trata do estudo teórico de dispositivos não-lineares a fibra visando a utilização em sistemas de comunicações. Grande ênfase é dada aos ressonadores ópticos, enquanto que os acopladores não-lineares surgem como um complemento a ser utilizado em conjunto com o ressonador. Os modelos teóricos são expostos e simulações numéricas dos mesmos são realizadas.

Iniciamos com uma revisão da propagação de pulsos em meios não-lineares. Seguimos com a revisão de sólitons e da técnica numérica *split-step* Fourier para a solução da equação não-linear de Schrödinger. Simulações dos casos mais comuns são realizadas. Prosseguimos com a descrição do funcionamento e simulação numérica de acopladores não-lineares.

O maior e principal capítulo deste trabalho trata dos ressonadores ópticos. As características destes ressonadores são inferidas a partir da determinação dos diagramas de bifurcações e atratores, relativos às variáveis características dos pulsos de saída. Comportamentos periódicos, caóticos e de autopulsação são explorados. Finalizamos com algumas aplicações, em sistemas de comunicações, dos ressonadores e acopladores não-lineares.

Nos Apêndices, apresentamos os programas utilizados nas simulações da dissertação, tratamos da base analítica da solução da equação não-linear de Schrödinger e propomos um modelo analítico para o ressonador com amplificador inserido no laço.

A principal contribuição desta dissertação reside na proposição da utilização de ressonadores ópticos não-lineares a fibra, como dispositivos práticos em comunicações ópticas, e o oferecimento de métodos de análise e caracterização destes dispositivos. Ressaltamos que a proposição do ressonador com duplo anel, com sua caracterização e utilização como gerador de pulsos, a utilização do ressonador simples em conjunto com o acoplador não-linear e o modelamento analítico do ressonador através do método variacional, são temas não encontrados em nossa pesquisa bibliográfica.

ABSTRACT

This work deals with the theoretical study of nonlinear fiber devices, useful in communications systems. Emphasis is given to optical resonators, while nonlinear couplers are introduced as a complement to these devices. Theoretical models are introduced and their numerical simulations are performed.

In the beginning, a review of pulse propagation in nonlinear media is presented. This is followed by the introduction of the soliton concept and the split-step Fourier numerical technique for the solution of the nonlinear Schrödinger equation (NLSE). Simulation of some simple cases are performed. After that, the description of operation and numerical simulations are presented for the nonlinear coupler.

The main chapter of this work deals with optical resonators. Their characteristics are analysed from the point of view of their bifurcation diagrams and attractors, related to the characteristics variables of the output pulses. Periodic, chaotic and self-pulsating behaviors are explored. After that, some applications of resonators and nonlinear couplers in communications systems is presented.

In the Appendices, we present the computer programs used in the simulations, we deal with the analytical basis for the solution of the NLSE and we propose an analytical model for the resonator that includes an amplifier in the loop.

The main contribution of this work is the proposal of the use of the nonlinear optical fiber resonators as practical devices in optical communications and the outline of methods for the analysis and characterization of these devices. The use of the double ring resonators as a pulse generator, the joint use of a single loop resonator with a nonlinear coupler and the analytical modeling of the resonator by the variational method, are topics that we did not find in our bibliographical research.

AGRADECIMENTOS

Quero expressar meus sinceros agradecimentos, aos amigos do DMO, pelos agradáveis momentos, em especial a Ivan, Cosme e Janete, pela inestimável ajuda. Aos colegas cearenses Matheus, Jaudelice, Carlos Eduardo, Niudomar e Ricardo, pelo companheirismo e incentivo, a Rodrigo Cavalcanti pelos conselhos, amizade e colaboração durante a vida acadêmica. Ao professor Leonardo Mendes pela disposição em colaborar com esta dissertação. Ao professor Gregory Surdutovich pelos ensinamentos e discussões de dinâmica não-linear, além da amizade e incentivo. Ao professor Rui Fragassi que, com sua extrema simplicidade e honestidade, me orientou de forma exemplar, mantendo um permanente diálogo e exigindo, de minha parte, criatividade e perseverança, além da amizade e paciência. Ao CNPq por financiar este trabalho. Aos amigos Vítor e Caio pela amizade e confiança. A Fabiana Campos Neres amiga e companheira em todos os momentos. A meu pai José Pedro Nogueira, minha mãe Maria Nilza Viana e meus irmãos Márcio, Nilma e Mara que, em todos os momentos, estavam presentes dando todo apoio para que meus objetivos fossem alcançados. A Mardônio Salmito, pela atenção e paciência. Por Fim, a Deus a quem tudo devo.

*Na perfeita obra de Deus, a ciência é
o grau de liberdade do homem.*

SUMÁRIO

RESUMO

1. INTRODUÇÃO	1
2. PROPAGAÇÃO DE PULSOS EM FIBRAS ÓPTICAS SOB REGIME NÃO-LINEAR	
2.1 Introdução	2
2.2 Dedução da Equação de Propagação em Meio Não-Linear	2
3. SÓLITONS	
3.1 Introdução	8
3.2 Solução Numérica da Equação Não-Linear de Schrödinger (ENLS)	10
3.3 Instabilidade Modulacional	17
4. ACOPLADORES NÃO-LINEARES	
4.1 Introdução	21
4.2 Modelamento e Simulações do Acoplador Não-linear	21
5. RESSONADORES ÓPTICOS	
5.1 Introdução	24
5.2 Ressonador em Anel a Fibra Óptica	24
5.3 Ressonador Óptico a Fibra sem Dispersão	26
5.4 Ressonador Óptico a Fibra com Dispersão	31
5.5 Ressonador Óptico a Fibra com Duplo Anel	36
5.6 Ressonador Óptico a Fibra com Duplo Anel e sem Dispersão	37
5.7 Ressonador Óptico a Fibra com Duplo Anel e com Dispersão	40
6. APLICAÇÃO DOS RESSONADORES A FIBRA E ACOPLADORES NÃO-LINEARES	
6.1 Introdução	44
6.2 Gerador de Pulsos Ópticos	44
6.3 Modulador Óptico e Compressor de Largura de Pulsos	44
7. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	
7.1 Conclusões	49
7.2 Perspectiva	49
<i>APÊNDICE 1 - Software de Simulação</i>	<i>51</i>
<i>APÊNDICE 2 - Transformada de Espalhamento Inverso</i>	<i>63</i>

<i>APÊNDICE 3 - Método Variacional para Solução da ENLS</i>	74
<i>APÊNDICE 4 - Modelamento Analítico do Ressonador Simples, com Amplificador Inserido no Laço, Através do Método Variacional</i>	85
<i>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</i>	88

CAPÍTULO I

Introdução

O controle tecnológico na fabricação de lasers, fotodetectores e fibras possibilitou que os sistemas de comunicações ópticas substituíssem, com grandes vantagens, as redes convencionais de comunicações a fio. As fibras ópticas, por possuírem uma grande largura de faixa útil, possibilitam a implementação de um grande número de serviços a altas taxas de transmissão de dados. Fibras de baixíssimas perdas e dispersão deslocada, amplificadores ópticos a fibras dopadas e pulsos solitônicos são algumas das inovações que vêm sendo utilizadas para superar cada vez mais os limites de taxa de transmissão e de distância máxima alcançada nas redes a fibra.

Os efeitos não-lineares em fibras, presentes quando da aplicação de luz de alta intensidade, geralmente degradam a comunicação mas, se devidamente utilizados, trazem benefícios. Este é o caso da utilização de pulsos com forma solitônica e amplificação Raman estimulada [Ref. 1.1]. As fibras podem, ainda, ser usadas na construção de dispositivos ópticos não-lineares, como acopladores e ressonadores ópticos. Este último possui comportamento dinâmico bastante rico, apresentando biestabilidade, bifurcações e caos [Refs. 4.2, 4.4], com grande potencialidade de aplicação em geradores e modeladores de pulsos ópticos [Ref. 4.2] e criptografia caótica óptica [Ref. 4.1], dentre outras. Os acopladores não-lineares podem ser usados em aplicações de chaveamento óptico ultra-rápido, compressão de pulsos e portas lógicas ópticas [Refs. 5.1, 5.2 e 5.3].

Estudos exaustivos vêm sendo realizados para tornar as redes completamente ópticas, possibilitando maior confiabilidade, maior velocidade de operação e menor custo com manutenção e com “up-grading” da taxa de transmissão. Nesta direção, a presente dissertação realiza o estudo e aplicação de ressonadores ópticos e acopladores não-lineares, para o processamento de sinais ópticos em redes de comunicações.

A dissertação está dividida em sete capítulos. O Capítulo II é uma revisão da propagação de uma onda, em um meio com dependência não-linear do índice de refração com a intensidade da onda (Efeito Kerr). O Capítulo III trata da revisão de sólitons e da simulação numérica, através do método *split-step* Fourier, das situações mais comuns envolvendo sólitons. O Capítulo IV descreve o acoplador não-linear, incluindo algumas simulações do mesmo. O Capítulo V introduz os ressonadores a fibra, caracterizando-os através de um modelo teórico e simulações numéricas do mesmo. O Capítulo VI mostra a aplicação destes acopladores e ressonadores no processamento de sinais ópticos. Por fim, no Capítulo VII, expomos as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros. O Apêndice 1 traz a listagem dos programas usados nas simulações realizadas nesta dissertação. O Apêndice 2 apresenta, sem exagerado rigor matemático, o método do espalhamento inverso e como usá-lo para encontrar a solução analítica da equação não-linear de Schrödinger. O Apêndice 3 mostra o método variacional, como alternativa para o estudo quantitativo e qualitativo da solução da equação não-linear de Schrödinger. Finalmente, no Apêndice 4, é proposto um modelo analítico, baseado no método variacional, para o ressonador simples com amplificador inserido no laço.

CAPÍTULO II

Propagação de Pulsos em Fibras Ópticas sob Regime Não-Linear

2.1 Introdução

A propagação de pulsos em fibras ópticas é um fenômeno do eletromagnetismo clássico e, como tal, é bem descrito pelas equações de Maxwell. Aplicando-se relações constitutivas, através do tensor susceptibilidade elétrica, para caracterizar a relação entre a polarização elétrica e o campo elétrico, a aproximação de variação lenta da envoltória e outras aproximações, junto à equação de onda, determina-se a equação que descreve a propagação, em regime não-linear, de pulsos em fibras ópticas [Refs. 1.1, 1.2, 1.3].

2.2 Dedução da Equação de Propagação em Meio Não-Linear

Sejam as equações de Maxwell:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.2.4)$$

com as seguintes relações constitutivas:

$$B = \mu_0 H + M \quad (2.2.5)$$

$$D = \epsilon_0 E + P \quad (2.2.6)$$

nas quais

ρ - densidade volumétrica de cargas livres [C/m³].

J - vetor densidade de corrente de condução [A/m²].

E - vetor campo elétrico [V/m].

H - vetor intensidade magnética [A/m].

D - vetor deslocamento elétrico [C/m²].

B - vetor campo magnético [Tesla].

M - vetor polarização magnética induzida [Tesla].

P - vetor polarização elétrica induzida [C/m²].

ϵ_0 - permissividade elétrica do vácuo = $8,854 \times 10^{-12}$ F/m.

μ_0 - permeabilidade magnética do vácuo = $4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

As Eqs. (2.2.1) e (2.2.2) exprimem, respectivamente, que a variação temporal do campo magnético é fonte de um campo elétrico e que a variação temporal do campo elétrico é fonte de um campo magnético. A Eq. (2.2.3) exprime a inexistência de

monopólos magnéticos, enquanto que a Eq. (2.2.4) é a lei de Gauss, indicando a presença de cargas pontuais como fontes ou sorvedouros das linhas de campo elétrico. Para materiais dielétricos, como a sílica, matéria prima das fibras ópticas, temos $\mathbf{J} = 0$ e $\rho = 0$; além disso, para materiais não magnéticos, como a fibra, temos $\mathbf{M} = 0$.

Nessas condições, tomando o rotacional da Eq. (2.2.1) e usando (2.2.2) e (2.2.5), obtemos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\partial \left(\mu_o \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)}{\partial t} \quad (2.2.7)$$

Usando, em (2.2.7), a Eq. (2.2.6) e a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (2.2.8)$$

obtemos:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_o \epsilon_o \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_o \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (2.2.9)$$

Em geral, a polarização pode ser vista como a soma de uma parte linear mais uma parte não-linear, Eq. (2.2.10) abaixo, sendo a linear, $\mathbf{P}_L$, devida à susceptibilidade de primeira ordem $\chi^{(1)}$, enquanto que a polarização não-linear, $\mathbf{P}_{NL}$, em uma primeira aproximação, é devida à susceptibilidade elétrica de terceira ordem $\chi^{(3)}$. Por tratar-se de vidro, a sílica não apresenta $\chi^{(2)}$ [Ref. 1.1].

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL} \quad (2.2.10)$$

A relação entre $\mathbf{P}$ e $\mathbf{E}$, longe das frequências de ressonância do meio, portanto sem absorção da luz, é dada por [Ref. 1.1]:

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_o \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}(t - \tau) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau \quad (2.2.11)$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_o \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (2.2.12)$$

As Eqs. (2.2.11) e (2.2.12) são relações de convolução entre a polarização e o campo elétrico. Assumindo que a resposta não-linear é instantânea, o que é aplicável a pulsos com larguras $\geq 0,1$ ps, uma vez que a contribuição eletrônica para $\chi^{(3)}$ ocorre em uma escala de tempo de alguns fs, $\chi^{(3)}$ é dada por três funções delta $\delta(t - \tau_i)$. Obtém-se, então, para a Eq. (2.2.12) [Ref 1.1]:

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_o \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.13.a)$$

cujas componentes são dadas por:

$$P_{NLi} = \epsilon_o \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l \quad (2.2.13.b)$$

na qual $\chi_{ijkl}^{(3)}$ é um elemento da matriz que representa o tensor susceptibilidade elétrica. Neste momento, algumas simplificações serão feitas [Ref 1.1]:

- P_{NL} é considerada como uma pequena perturbação de P_L .
- A polarização dos campos é considerada constante durante a propagação.
- Os campos são quase monocromáticos, isto é, a largura do espectro, $\Delta\omega$, centrado em ω_o , é tal que $\Delta\omega/\omega_o \ll 1$.

Aplicando a aproximação de variação lenta da envoltória para E , P_L e P_{NL} , e considerando a polarização dos campos linear, escrevemos:

$$E(\mathbf{r}, t) = \hat{x} \operatorname{Re}[e(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_o t)] \quad (2.2.14)$$

$$P_L(\mathbf{r}, t) = \hat{x} \operatorname{Re}[p_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_o t)] \quad (2.2.15)$$

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \hat{x} \operatorname{Re}[p_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_o t)] \quad (2.2.16)$$

Substituindo as Eqs. (2.2.14)-(2.2.16) em (2.2.11)-(2.2.13) e desprezando o termo em $3\omega_o$, obtemos [Ref. 1.1]:

$$p_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_o \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t-\tau) \cdot e(\mathbf{r}, \tau) \exp(i\omega_o(t-\tau)) d\tau \quad (2.2.17)$$

$$\frac{1}{2} [P_{NL} \exp(-i\omega_o) + c.c.] = \chi_{xxx}^{(3)} \frac{1}{8} [e(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_o) + c.c.]^3 \quad \therefore \quad (2.2.18.a)$$

$$\frac{1}{2} [P_{NL} \exp(-i\omega_o) + c.c.] = \chi_{xxx}^{(3)} \frac{3}{8} [e|e|^2 \exp(-i\omega_o) + c.c.] \quad (2.2.18.b)$$

Logo

$$p_{NL}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_o \epsilon_{NL} e(\mathbf{r}, t) \quad (2.2.18.c)$$

na qual

$$\epsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxx}^{(3)} |e(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.2.19)$$

ϵ_{NL} é a contribuição não-linear para a constante dielétrica. A invariança de ϵ com as coordenadas espaciais implica em :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.2.20)$$

Substituímos (2.2.10), (2.2.14)-(2.2.18) e (2.2.20) em (2.2.9) e aplicamos a transformada de Fourier em ambos os lados da equação resultante, considerando ε_{NL} constante, obtendo:

$$\nabla^2 \tilde{e}(r, \omega) + \varepsilon(\omega) k_o^2 \tilde{e}(r, \omega) = 0 \quad (2.2.21)$$

na qual

$$k_o^2 = \mu_o \varepsilon_o \omega^2 \quad (2.2.22)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(I)}(\omega) + \varepsilon_{NL} \quad (2.2.23)$$

O índice de refração é definido por [Refs. 1.1, 1.2 e 1.3]

$$n(\omega) = n_I(\omega) + n_2 |e(r, t)|^2 \quad (2.2.24)$$

n_I e n_2 são, respectivamente, o coeficiente linear e coeficiente não-linear do índice de refração n . Sejam as conhecidas relações [Ref. 1.1]:

$$\varepsilon = \left(n + \frac{i\alpha c}{2\omega} \right)^2 \quad (2.2.25)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{n_1 c} \text{Im}[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \quad (2.2.26)$$

$$n_1(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \text{Re}[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)] \quad (2.2.27)$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo e α as perdas do meio. Substituindo (2.2.19), (2.2.23), (2.2.24), (2.2.26) e (2.2.27) em (2.2.25), encontramos o valor de n_2 :

$$n_2 = \frac{3}{8n_1} \chi_{xxxx}^{(3)} \quad (2.2.28)$$

Para resolvermos a Eq. (2.2.21), aplicamos a técnica de separação de variáveis, assumindo que a solução possui a seguinte forma:

$$\tilde{e}(r, \omega - \omega_o) = \tilde{A}(z, \omega - \omega_o) f(x, y) \exp(i\beta_o z) \quad (2.2.29)$$

$\tilde{A}$ representa a variação da amplitude com a coordenada z e, sua transformada de Fourier inversa, dá a variação temporal da envoltória. $f(x, y)$ representa a distribuição radial do campo. Por fim, β_o é a constante de propagação do campo. Substituindo (2.2.29) em (2.2.21) encontramos as seguintes equações para $f(x, y)$ e $\tilde{A}(z, \omega - \omega_o)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_o^2 - v^2]f = 0 \quad (2.2.30)$$

$$2i\beta_o \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (v^2 - \beta_o^2)\tilde{A} = 0 \quad (2.2.31)$$

Em (2.2.31) a aproximação $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} = 0$ foi usada devido à variação lenta da envoltória.

Para resolvermos as Eqs. (2.2.30) e (2.2.31) fazemos a seguinte aproximação para a constante dielétrica, partindo da Eq. (2.2.25) [Ref. 1.1]:

$$\varepsilon(\omega) = \left(n + i \frac{\alpha}{2k_o} \right)^2 = \left(n_1 + n_2 |e(\mathbf{r}, t)|^2 + i \frac{\alpha}{2k_o} \right)^2 = (n_1 + \Delta n)^2 \cong n_1^2 + 2n_1 \Delta n \quad (2.2.32)$$

sendo

$$\Delta n = n_2 |e(\mathbf{r}, t)|^2 + i \frac{\alpha}{2k_o} \quad (2.2.33)$$

Inicialmente resolvemos (2.2.30) fazendo $\varepsilon(\omega) = n_1^2(\omega)$ e obtemos a distribuição modal $f(x, y)$ e a correspondente constante de propagação $\beta(\omega)$. Na teoria de perturbação de primeira ordem, Δn não afeta a distribuição modal $f(x, y)$ mas modifica a constante de propagação, agora igual a [Ref. 1.1]:

$$v(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta \quad (2.2.34)$$

na qual [Refs. 1.1 e 1.6]

$$\Delta\beta = \frac{k_o \int \int_{-\infty}^{\infty} \Delta n |f(x, y)|^2 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy} \quad (2.2.35)$$

Para a solução de (2.2.31) começamos com a seguinte aproximação [Ref. 1.1]:

$$v^2 - \beta_o^2 \cong 2\beta_o(v - \beta_o) = 2\beta_o(\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_o) \quad (2.2.36)$$

Na obtenção de (2.2.36) foi feito o uso da Eq. (2.2.34). Substituindo (2.2.36) em (2.2.31), ficamos com:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i(\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_o)\tilde{A} \quad (2.2.37)$$

Para encontrarmos a variação temporal de A , realizamos os seguintes procedimentos em (2.2.37):

- Expandimos $\beta(\omega)$ em série de Taylor em torno de ω_o e, tomando apenas os termos de menores potências, os substituímos em (2.2.37)

- Tomamos a transformada inversa de Fourier da equação resultante do passo anterior.

Como resultado destes dois procedimentos, obtemos:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + i\Delta\beta A \quad (2.2.38)$$

sendo

$$\beta_n = \frac{\partial^n \beta}{\partial \omega^n} \quad (2.2.39)$$

De (2.2.33) e (2.2.35) calculamos $\Delta\beta$ e o substituímos em (2.2.38), obtendo [Ref. 1.1]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + iR|A|^2 A - \frac{\alpha}{2} A \quad (2.2.40)$$

na qual

$$R = \frac{n_2 k_o \int \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^4 dx dy}{\int \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,y)|^2 dx dy} \quad (2.2.41)$$

β_1 e β_2 são, respectivamente, o inverso da velocidade de grupo e a dispersão de velocidade de grupo (GVD). R é o coeficiente de não-linearidade da fibra.

A Eq. (2.2.40) não leva em consideração outros efeitos não-lineares, como os espalhamentos Raman e Brillouin, nem é adequada para pulsos ultracurtos ($\leq 0,1$ ps), mas é suficientemente precisa para as discussões feitas nesta dissertação.

CAPÍTULO III

Sólitons Ópticos

3.1 Introdução

Sólitons são pacotes de ondas, representados por soluções de algumas equações diferenciais parciais não-lineares que aparecem em diversos ramos da física. Os sólitons se propagam preservando sua forma ou modificando-a de forma periódica, mesmo após a colisão com outros sólitons [Refs. 1.1,1.2,1.3,1.4]. O sóliton mantém sua forma através do balanceamento dos efeitos de não-linearidade e de dispersão no meio onde o mesmo está se propagando. Esta peculiaridade é de extrema importância em sistemas de comunicações ópticas, uma vez que um dos principais fatores limitantes de altas taxas de transmissão de dados é a dispersão.

Partiremos da Eq. (2.2.40), para a evolução da envoltória do pulso, abaixo reescrita, e faremos uma série de transformações:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} + iR|A|^2 A - \frac{\alpha}{2} A \quad (3.1.1)$$

Seja um pulso incidente na fibra com largura T_o e potência de pico P_o . A largura T_o é a diferença entre os tempos para os quais a amplitude do pulso cai a 1/e da amplitude máxima. Começamos por definir o tempo normalizado, segundo a largura do pulso, e pondo o referencial espacial com a mesma velocidade de grupo (acompanhando o pulso). Definimos, também, uma nova coordenada espacial:

$$\tau = \frac{t - \beta_1 z}{T_o} \quad (3.1.2)$$

$$Z = z \quad (3.1.3)$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial Z} - \frac{\beta_1}{T_o} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (3.1.4.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{T_o} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (3.1.4.b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{T_o^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \quad (3.1.4.c)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3} = \frac{1}{T_o^3} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \quad (3.1.4.d)$$

Após a substituição de (3.1.4) em (3.1.1), obtemos:

$$\frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{i\beta_2}{2T_o^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - \frac{1\beta_3}{6T_o^3} \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} = iR|A|^2 A - \frac{\alpha}{2} A \quad (3.1.5)$$

Fazendo agora, $A(Z, \tau) = \sqrt{P_o} u(Z, \tau)$ e substituindo em (3.1.5), temos:

$$\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{i\beta_2}{2T_o^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{1\beta_3}{6T_o^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = iRP_o|u|^2 u - \frac{\alpha}{2} u \quad (3.1.6.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{1}{L_D} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{1 \operatorname{sgn}(\beta_3)}{6} \frac{1}{L_G} \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} = i \frac{1}{L_{NL}} |u|^2 u - \frac{\alpha}{2} u \quad (3.1.6.b)$$

sendo os comprimentos L_D , L_G e L_{NL} dados por:

$$L_D = \frac{T_o^2}{|\beta_2|} \quad (3.1.7.a)$$

$$L_G = \frac{T_o^3}{|\beta_3|} \quad (3.1.7.b)$$

$$L_{NL} = \frac{1}{RP_o} \quad (3.1.7.c)$$

L_D e L_G são os comprimentos de dispersão relativos a β_2 e β_3 , respectivamente, e L_{NL} é o comprimento não-linear. Estes comprimentos permitem determinar, aproximadamente, a partir de qual comprimento de fibra, já percorrido pelo pulso, os efeitos de dispersão e não-linearidade tornam-se significativos. Se, por exemplo, o comprimento da fibra, L , for muito menor que os comprimentos de dispersão, então apenas os efeitos de não-linearidades precisam ser levados em conta. Fazendo agora, $\xi = Z/L_D$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Z} = \frac{1}{L_D} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (3.1.8)$$

Substituindo (3.1.8) em (3.1.6.b), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\operatorname{sgn}(\beta_3)}{6} N_2^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} - iN^2 |u|^2 u = -\Gamma u \quad (3.1.9)$$

com

$$N_2^2 = \frac{L_D}{L_G} \quad (3.1.10.a)$$

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} \quad (3.1.10.b)$$

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2} L_D \quad (3.1.10.c)$$

Fazendo agora, $F = Nu$, ficamos com:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} - \frac{\operatorname{sgn}(\beta_3)}{6} N^2 \frac{\partial^3 F}{\partial \tau^3} - i|F|^2 F = -\Gamma F \quad (3.1.11)$$

Se $\beta_3 = 0$ e $\Gamma = 0$, (3.1.11) reduz-se para:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} - i|F|^2 F = 0 \quad (3.1.12)$$

que é a equação não-linear cúbica conhecida como equação não-linear de Schrödinger e que apresenta soluções solitônicas. A mesma pode ser resolvida analiticamente através do método do espalhamento inverso (vide Apêndice 2) ou pode-se encontrar uma solução analítica aproximada através do método variacional (vide Apêndice 3), ou ainda numericamente, usando, por exemplo, o método do *split-step* Fourier [Refs. 2.1,2.2,2.4,2.5]. O parâmetro N , anteriormente definido, indica, quando inteiro, a ordem do soliton e o número de pólos no método do espalhamento inverso. Este parâmetro permite calcular a potência de pico, P_o , necessária para a formação de um soliton de ordem N , se o pulso incidente possui largura T_o . Os solitons ópticos obedecem a Eq. (3.1.12) em um meio sem perdas. O soliton fundamental (ou de ordem 1) mantém sua forma inalterada, enquanto que os solitons de ordem superior, $N > 1$, alteram significativamente sua forma durante a propagação mas, após uma distância, chamada período solitônico, retoma sua forma inicial. O sinal de β_2 influencia diretamente no tipo de soliton que vai se propagar. Se $\beta_2 > 0$, a fibra está na região de dispersão normal e apenas solitons escuros (pulso de ausência de luz) são permitidos. Por outro lado, se $\beta_2 < 0$, a fibra está na região de dispersão anômala e apenas solitons claros são possíveis.

A presença de perdas na fibra acarreta a perda das propriedades solitônicas do pulso, uma vez que a não-linearidade vai sendo vencida pela dispersão ao longo da distância de propagação. Este problema pode ser contornado através da inserção de amplificadores ópticos, distribuídos ou concentrados, ao longo da fibra. A consideração de β_3 é especialmente importante quando se está operando próximo à região de dispersão zero da fibra. β_3 acarreta a formação de uma estrutura oscilatória, nas partes de níveis inferiores do pulso, as quais se dispersam durante da propagação. Nesta situação, a forma espectral do pulso fica dividida em dois picos bem definidos [Ref. 1.1].

3.2 Solução Numérica da Equação Não-Linear de Schrödinger (ENLS)

Diversas técnicas numéricas [Ref. 1.1,2.1 e 2.3] vêm sendo utilizadas para obter a solução da ENLS onde, geralmente, cada uma delas apresenta uma vantagem em relação às demais. Optamos por utilizar o método conhecido como *split-step* Fourier. Este consiste, basicamente, em dividir a propagação em dois passos. Primeiramente, consideramos uma pequena propagação em um meio apenas com não-linearidades e, em seguida, consideramos uma pequena propagação em um meio apenas com dispersão. A Eq. (3.1.11), aqui repetida, é discretizada como mostrado a seguir:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} + \frac{\operatorname{sgn}(\beta_3)}{6} N_2^2 \frac{\partial^3 F}{\partial \tau^3} + i|F|^2 F - \Gamma F \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = (L + N)F \quad (3.2.2)$$

$$L = -\frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\operatorname{sgn}(\beta_3)}{6} N_2^2 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} - \Gamma \quad (3.2.3)$$

$$N = i|F|^2 \quad (3.2.4)$$

L e N são operadores que representam a parte linear e não-linear, respectivamente, da propagação. A solução da ENLS é avançada, de um ponto para outro, através da seguinte equação [Refs. 1.1 e 2.1] para a amplitude da envoltória:

$$F(\xi + h, \tau) \approx \exp(hL) \exp(hN) F(\xi, \tau) \quad (3.2.5)$$

h é o passo de discretização espacial. Seja $B = \exp(hN)F$; então, fazendo uso da Eq. (3.2.4), a equação matricial correspondente é:

$$\begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \\ \vdots \\ B(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(ih|F(\xi,0)|^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(ih|F(\xi,1)|^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(ih|F(\xi,2)|^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \exp(ih|F(\xi,n)|^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(\xi,0) \\ F(\xi,1) \\ F(\xi,2) \\ \vdots \\ F(\xi,n) \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

Para o próximo passo, utilizamos a transformada de Fourier na solução da parte linear. O operador linear $L(i\omega)$, no domínio da frequência, é obtido trocando as derivadas temporais de L por $(i\omega)^n$ onde n é a ordem da derivada. Realizando este procedimento, obtemos:

$$L(i\omega) = \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \omega^2 - \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_3)}{6} N_2^2 \omega^3 - \Gamma \quad (3.2.7)$$

A faixa de variação de ω é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{L_T} \left[\frac{-k}{2}, \frac{-k}{2} + 1, \dots, 0, 1, 2, \dots, \frac{k}{2} - 1 \right] \quad (3.2.8)$$

onde L_T é o comprimento da janela temporal e k é o número de amostras feitas nesta janela. k geralmente é escolhido tal que seja igual a 2^P , P inteiro, pois, nestas condições, o algoritmo de FFT pode ser usado para o cálculo da transformada de Fourier, o que é a

grande vantagem do método. Finalmente, tomamos a transformada inversa de Fourier do resultado parcial até então obtido, para voltarmos ao domínio do tempo:

$$F(\xi + h,\tau) = \mathfrak{F}^{-1}\left[\exp(hL(i\omega))\mathfrak{F}(B)\right] \tag{3.2.9}$$

$\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{F}^{-1}$ representam a transformada de Fourier e sua inversa, respectivamente.

Uma segunda versão deste algoritmo, conhecida como *split-step* Fourier simétrico, consiste em dividir a propagação em três passos, estando o passo não-linear entre dois passos com dispersão. A equação de evolução fica da seguinte forma:

$$F(\xi + h,\tau) \approx \exp\left(\frac{h}{2}L\right)\exp\left(\int_{\xi}^{\xi+h}N(z)dz\right)\exp\left(\frac{h}{2}L\right)F(\xi,\tau) \tag{3.2.10}$$

A integral inclui a dependência de N em ξ . Caso o passo h seja suficientemente pequeno, então, a integral pode ser aproximada por (hN) . Podemos, também, aproximar a integral por:

$$\int_{\xi}^{\xi+h}N(z)dz \approx \frac{h}{2}\left[N(\xi) + N(\xi + h)\right] \tag{3.2.11}$$

O cálculo de $N(\xi+h)$ exige o uso iterativo da Eq. (3.2.10). Calculamos $F(\xi+h)$ usando apenas $N(\xi)$. Com $F(\xi+h)$ obtemos $N(\xi+h)$ e, então, recalculamos $F(\xi+h)$ usando $N(\xi)$ e $N(\xi+h)$.

A Tabela 3.2.1 descreve as condições das simulações realizadas e as Figs. 3.2.1 a 3.2.7, a seguir, mostram os resultados numéricos das simulações para as situações mais comuns da Eq. (3.2.1), obtidas com o algoritmo de *split-step* Fourier simétrico (vide Apêndice 1).

SIMULAÇÃO	α [dB.km ⁻¹]	β_2 [ps ² .km ⁻¹]	β_3 [ps ³ .km ⁻¹]	N	$F(\xi=0, \tau)$
I,II,III	0	-20,4	0	1,2,3	Nsech(τ)
IV	0,3	-20,4	0	1	Nsech(τ)
V	0	0	0,1	1	Nsech(τ)
VI	0	-20,4	0	1	Nsech(τ)exp(-i0,25 τ^2)
VII	0	-20,4	0	1	N(sech(τ -3,5)+sech(τ +3,5))

Tabela 3.2.1 - Dados utilizados nas simulações da ENLS

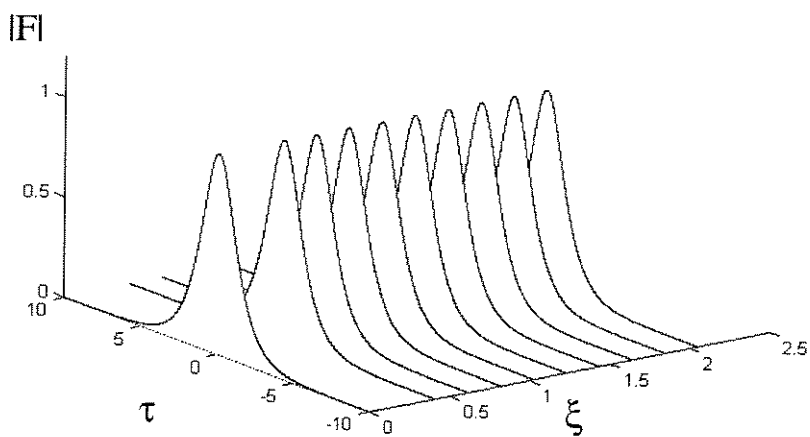


Fig. 3.2.1 - Sóliton fundamental usando os dados da simulação I na Tab. 3.2.1.

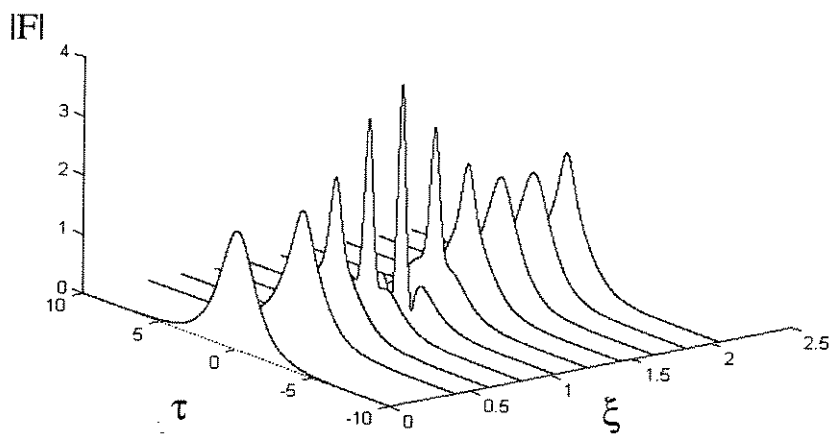


Fig. 3.2.2 - Sóliton de segunda ordem usando os dados da simulação II na Tab. 3.2.1.

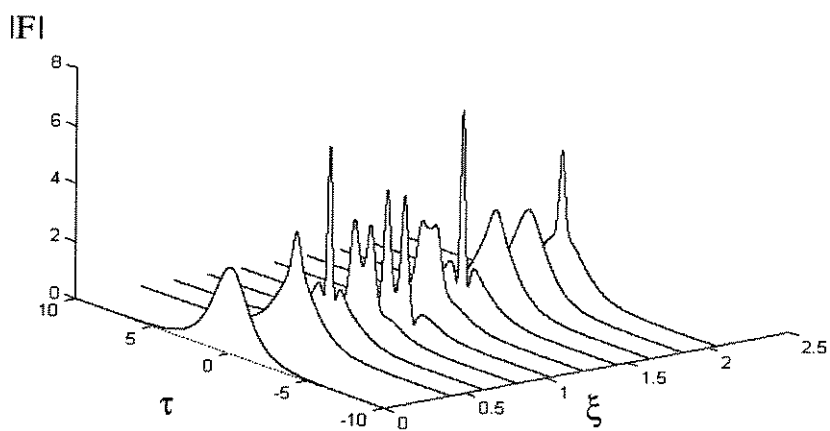


Fig. 3.2.3 - Sóliton de terceira ordem usando os dados da simulação III na Tab. 3.2.1.

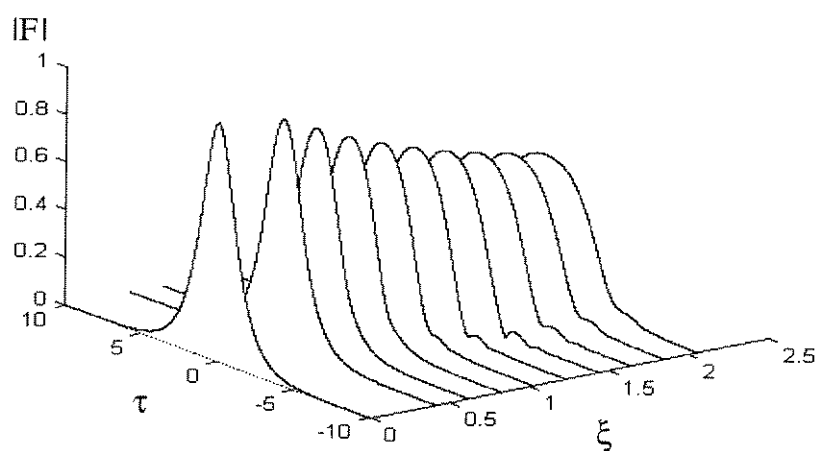


Fig. 3.2.4 - Sóliton fundamental, com perdas, usando os dados da simulação IV na Tab. 3.2.1.

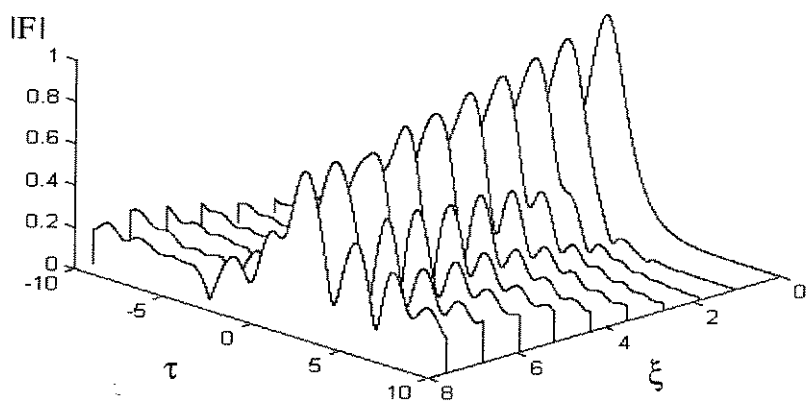


Fig. 3.2.5 - Sóliton fundamental com dispersão de terceira ordem, usando os dados da simulação V na Tab. 3.2.1.

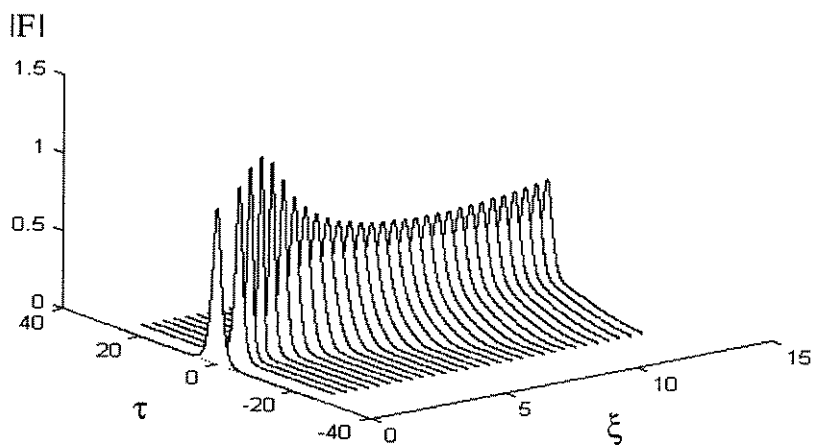


Fig. 3.2.6 - Sóliton fundamental com gorgoio inicial usando os dados da simulação VI na Tab. 3.2.1.

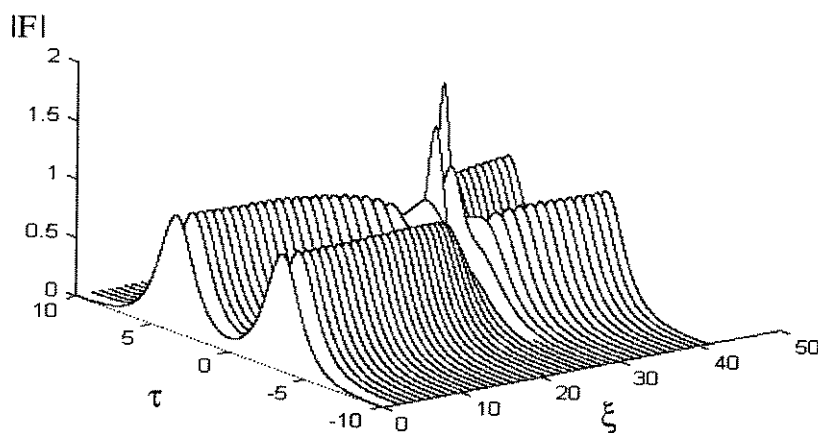


Figura 3.2.7 - Interação de dois sólitons usando os dados da simulação VII na Tab. 3.2.1.

As soluções de equações diferenciais parciais, encontradas utilizando-se métodos baseados na FFT, devem possuir condições de contorno periódicas, mesmo quando no sistema físico real elas não existam. Para resolver este problema, sugeriu-se [Ref. 2.4] a adição de um termo na equação diferencial parcial, absorvedor da radiação que tivesse que escapar pelas fronteiras. A ENLS, com o termo absorvedor inserido, fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} - i|F|^2 F + \gamma(\tau)F = 0 \quad (3.2.12)$$

sendo

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \left(\sec h^2 \left[\varepsilon \left(\tau - \frac{L_T}{2} \right) \right] + \sec h^2 \left[\varepsilon \left(\tau + \frac{L_T}{2} \right) \right] \right) \quad (3.2.13)$$

com

$$F\left(\xi, -\frac{L_T}{2}\right) = F\left(\xi, \frac{L_T}{2}\right) \quad F_\tau\left(\xi, -\frac{L_T}{2}\right) = F_\tau\left(\xi, \frac{L_T}{2}\right) \quad (3.2.14)$$

L_T é o comprimento da janela temporal. A função de absorção, $\gamma(\tau)$, introduz perdas nas vizinhanças dos contornos, em $\tau = \pm 0,5L_T$, sem violar suas periodicidades. Os parâmetros γ_0 e ε são escolhidos tal que o espalhamento nas paredes absorvedoras sejam mínimos. Os valores escolhidos para simulação são [Ref. 2.4] $\gamma_0 = 20$ e $\varepsilon = 1$. As Figs. 3.2.8 e 3.2.9, a seguir, mostram as simulações das Eqs. (3.1.12) e (3.2.12) para o campo de entrada na fibra igual a:

$$F(0, \tau) = (1 + 0,6 \cos(7\tau)) \operatorname{sech}(\tau) \quad (3.2.15)$$

Este campo de entrada é a superposição de um sólito fundamental com uma perturbação rápida do mesmo. O uso da ENLS normal não permite que a radiação escape pelas fronteiras, ocasionando a destruição do sólito, enquanto que a ENLS

modificada absorve a radiação que deveria escapar pelas fronteiras, fazendo com que o sóliton se mantenha ao longo da propagação.

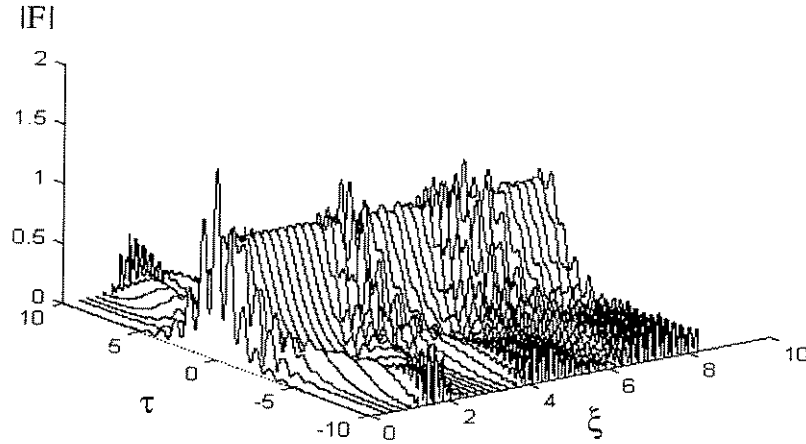


Fig. 3.2.8 - Solução da ENLS sem o termo absorvedor. $\gamma(\tau) = 0$.

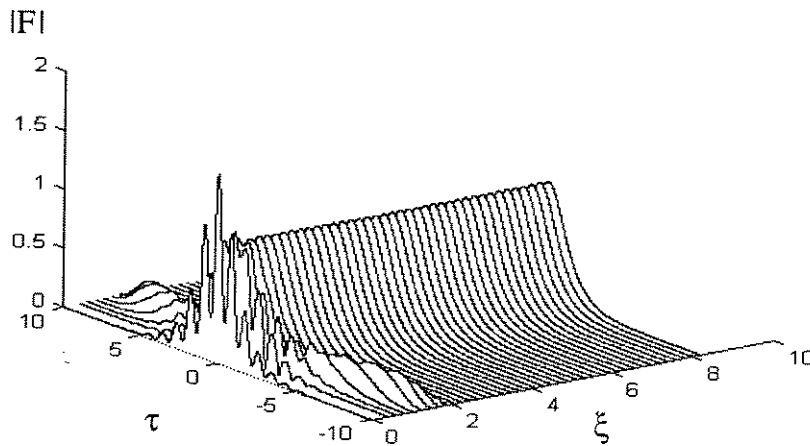


Fig. 3.2.9 - Solução da ENLS com o termo absorvedor $\gamma(\tau)$.

Com a mesma idéia, acima exposta, sugeriu-se [Ref. 2.5] a ENLS modificada da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} - i|F|^2 F + \gamma(\tau)(|F|^2 - 1)F = 0 \quad (3.2.16)$$

sendo

$$\gamma(\tau) = \gamma_0 \left(\operatorname{sech}^2 \left[\varepsilon \left(\tau - \frac{L_T}{2} \right) \right] + \operatorname{sech}^2 \left[\varepsilon \left(\tau + \frac{L_T}{2} \right) \right] \right) \quad (3.2.17)$$

para a análise da propagação de sólitons escuros. As Figs. 3.2.10 e 3.2.11, a seguir, mostram as simulações das Eqs. (3.1.12) e (3.2.16), com $\gamma_0 = 20$ e $\varepsilon = 1$, para o campo de entrada na fibra igual a:

$$F(0, \tau) = \tanh(\tau/8) \quad (3.2.18)$$

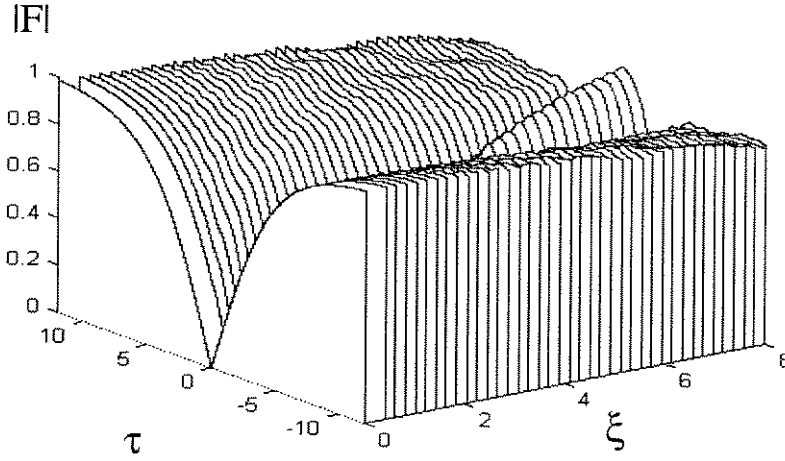


Fig. 3.2.10 - Solução da ENLS sem o termo absorvedor. $\gamma(\tau)=0$.

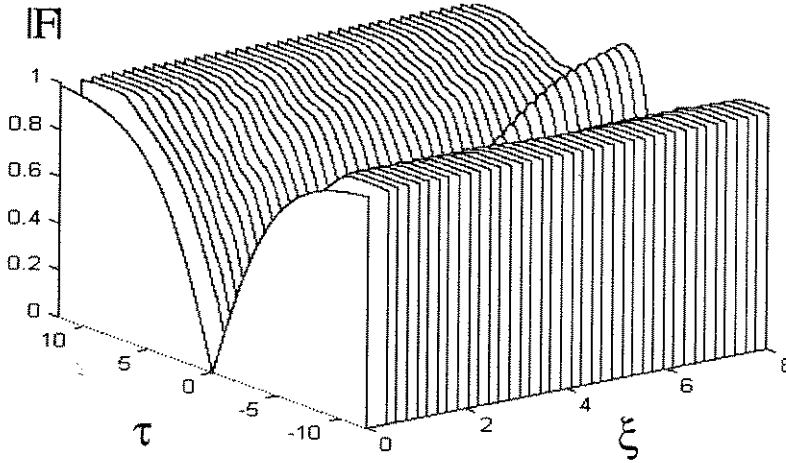


Fig. 3.2.11 - Solução da ENLS com o termo absorvedor $\gamma(\tau)$.

3.3 Instabilidade Modulacional

A instabilidade modulacional [Refs. 1.1 e 1.5] (IM) é o crescimento exponencial de perturbações fracas do estado estacionário, como resultado do balanceamento entre dispersão da velocidade de grupo (GVD) e não-linearidade (automodulação de fase). Em fibras ópticas, a IM é responsável pela quebra de uma excitação óptica cw em sólitons. No caso de uma fonte externa ser colocada para superpor à fonte óptica cw, então teremos a IM induzida na fibra, com a quebra da luz cw em pulsos. As Figs. 3.3.1 a 3.3.5, a seguir, mostram simulações da IM induzida, excitando a Eq. (3.1.12) com o pulso de entrada na fibra da forma [Ref. 1.5]:

$$F(0, \tau) = 1 + A_m \sin\left(\frac{2\pi\tau}{T_m}\right) \quad (3.3.1)$$

na qual A_m e T_m são, respectivamente, a amplitude e o período da perturbação. As figuras mostram as formas das ondas, nos valores da coordenada solitônica espacial ξ , dados na Tabela 3.3.1.

Simulação	α [dB.km ⁻¹]	β_2 [ps ² .km ⁻¹]	β_3 [ps ³ .km ⁻¹]	A_m	T_m	ξ		
I	0,3	-20,4	0	0,2	24	0	5,125	-
II	0,3	-20,4	0	0,8	12	0	1,435	1,854

Tabela 3.3.1 - Dados usados nas simulações da IM.

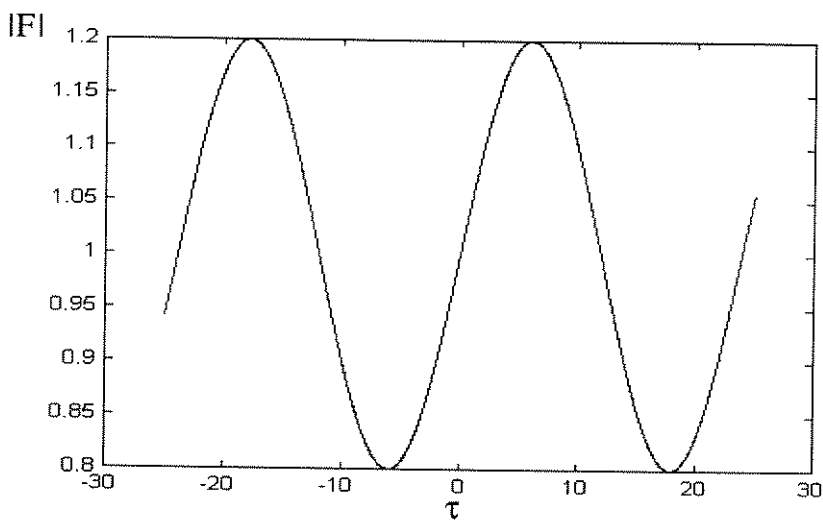


Fig. 3.3.1 - $|F(\xi, \tau)|$ para $\xi = 0$ usando os dados da simulação I na Tab. 3.3.1.

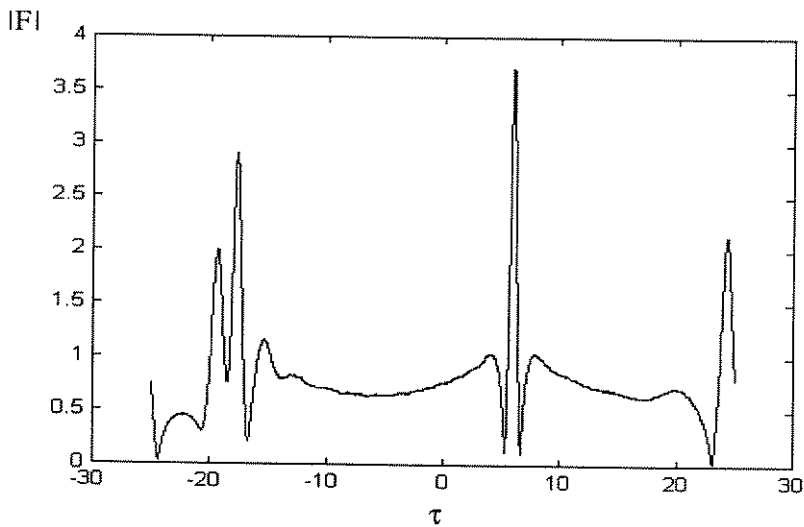


Fig. 3.3.2 - $|F(\xi, \tau)|$ para $\xi = 5,125$ usando os dados da simulação I na Tab. 3.3.1.

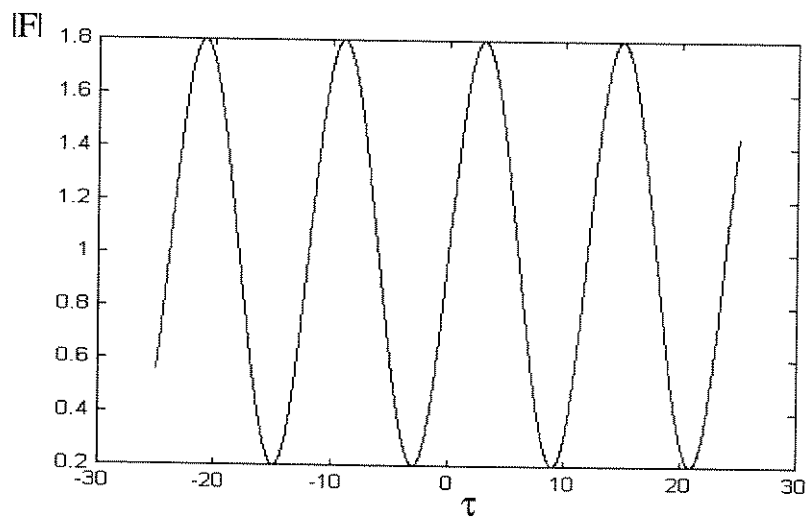


Fig. 3.3.3 - $|F(\xi, \tau)|$ para $\xi = 0$ usando os dados da simulação II na Tab. 3.3.1.

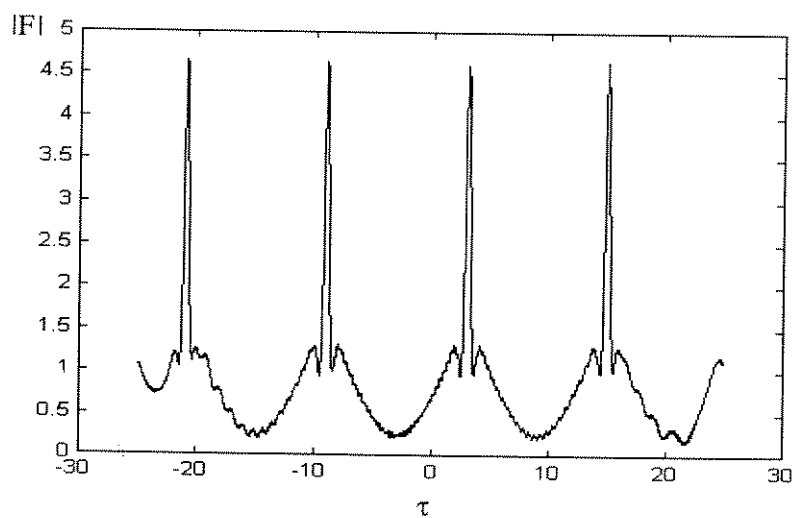


Fig. 3.3.4 - $|F(\xi, \tau)|$ para $\xi = 1,435$ usando os dados da simulação II na Tab. 3.3.1.

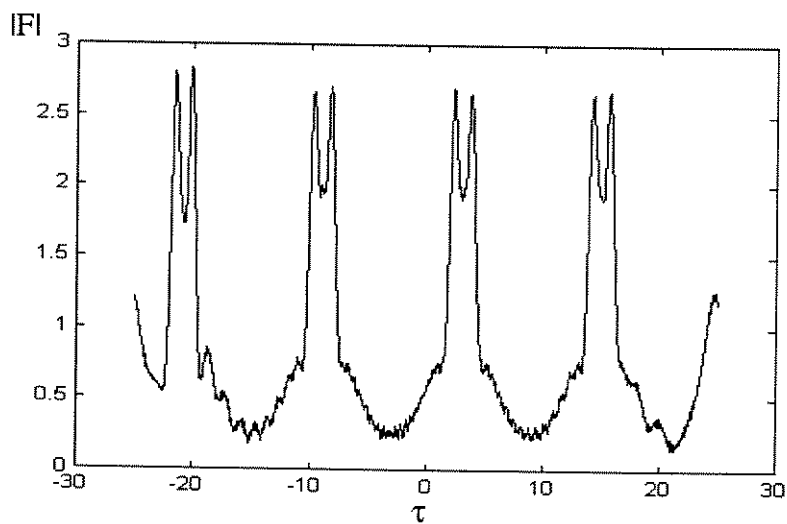


Fig. 3.3.5 - $|F(\xi, \tau)|$ para $\xi = 1,854$ usando os dados da simulação II na Tab. 3.3.1.

À medida que a luz cw e a perturbação senoidal se propagam, vai havendo um estreitamento das cristas, com a formação de picos nos pontos de máximos da senóide. No continuar da propagação, estes pulsos vão se dividindo em outros. A taxa de repetição dos pulsos é dada pelo período de oscilação da senóide e independe da amplitude da mesma. A distância de propagação necessária para a formação dos picos depende da amplitude e do período da perturbação. Quanto maior for a amplitude A_m e menor for o período T_m , menor será a distância necessária para a formação dos pulsos, que tenderão a um formato solitônico [Ref. 1.5].

CAPÍTULO IV

Acopladores Não-Lineares a Fibra

4.1 Introdução

Os acopladores ópticos não-lineares a fibra, geralmente consistem de duas fibras ópticas com núcleos fundidos ou bastante próximos um do outro, de modo a permitir que modos evanescentes se acoplem entre os núcleos. Este acoplamento provoca a transferência de energia de um núcleo para o outro. Por isso, os acopladores ópticos não-lineares são candidatos naturais a desempenharem a função de chaveadores ópticos de alta velocidade e de compressão de pulsos [Refs. 5.1,5.2,5.3 e 5.5]. A característica interessante destes acopladores é que, para um dado comprimento do acoplador, a transmissividade do mesmo depende da intensidade do pulso incidente. Durante o chaveamento, a energia do pulso incidente em uma das fibras se distribui entre os dois guias até que, num certo comprimento de fibra do acoplador, esteja toda ela no outro guia.

A transmissividade dependente da intensidade do pulso, provoca uma “quebra” do pulso incidente, devido às diferenças de intensidade nas diferentes regiões do pulso [Ref. 5.4]. O acoplador “vê” o pulso como uma sequência de diferentes níveis cw, e opera em tais níveis de acordo com a sua transmissividade característica cw. Este efeito é indesejado em sistemas de comunicações. No entanto, caso os pulsos de entrada no acoplador sejam sólitons, não ocorrerá a “quebra” dos pulsos. Portanto, em operação comum, os acopladores não-lineares devem ser utilizados em sistemas de comunicações solitônicos. A Fig. 4.1.1 a seguir, ilustra o acoplador não-linear.

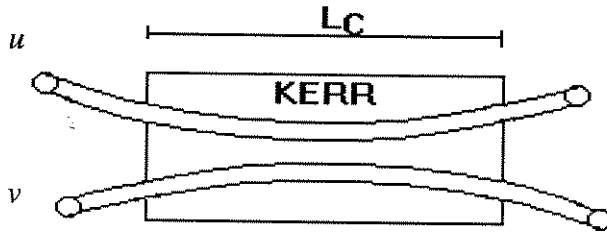


Fig. 4.1.1 - Acoplador não-linear

4.2 Modelamento e Simulações do Acoplador Não-linear

As equações que modelam o acoplador não-linear são [Refs. 5.1 e 5.2]:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u + Kv = 0 \quad (4.2.1.a)$$

$$i \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau^2} + |v|^2 v + Ku = 0 \quad (4.2.1.b)$$

$$L_c = \frac{\pi}{2C} \quad (4.2.2)$$

$$K = \frac{z_o}{L_c} = CL_D \quad (4.2.3)$$

L_D é o já mencionado comprimento de dispersão. K é o parâmetro de acoplamento que relaciona o período solitônico, $z_o = 0,5\pi L_D$, e o comprimento do acoplador L_C . C é a constante de acoplamento linear, considerada constante. O acoplador também é considerado sem perdas intrínsecas e sem perdas no acoplamento. A Tabela 4.2.1 mostra as condições em que as simulações foram realizadas e as Figs. 4.2.1 a 4.2.4 mostram os resultados correspondentes obtidos.

SIMULAÇÃO	K	$u(\xi=0,\tau)$	$v(\xi=0,\tau)$
I	1	$\text{sech}(\tau)$	0
II	1	$4,5\text{sech}(4,5\tau)$	0

Tabela 4.2.1 - Dados utilizados nas simulações do acoplador não-linear.

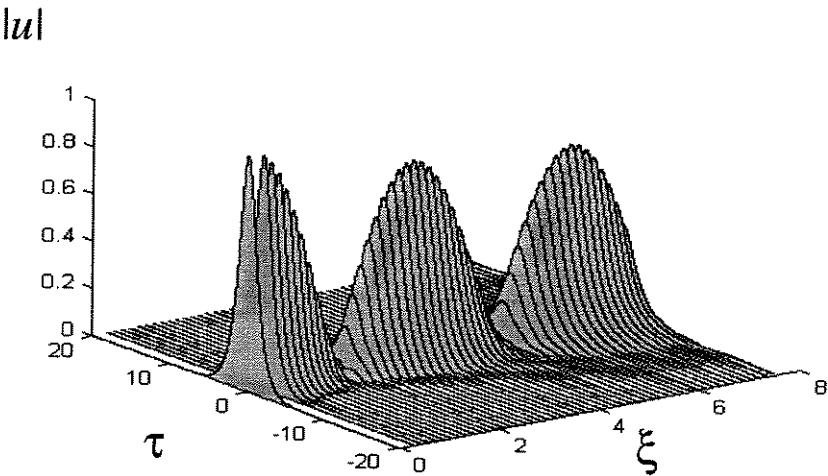


Fig. 4.2.1 - $|u(\xi,\tau)|$ usando dados da simulação I na Tab. 4.2.1.

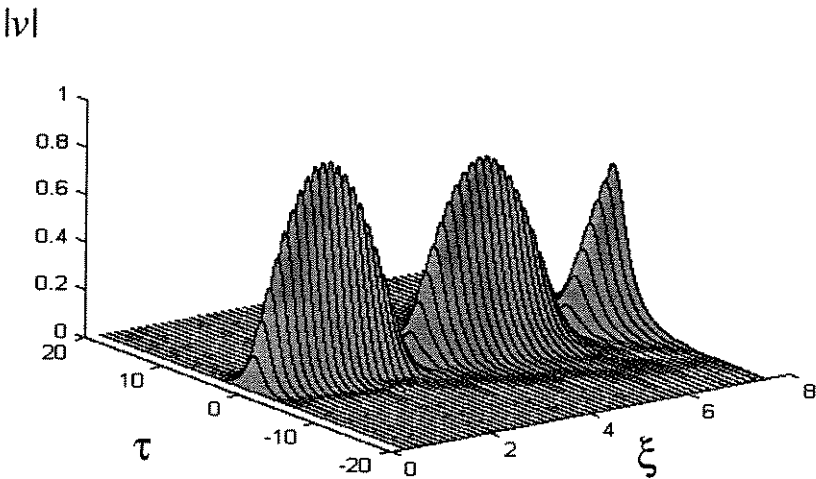


Fig. 4.2.2 - $|v(\xi,\tau)|$ usando dados da simulação I na Tab. 4.2.1.

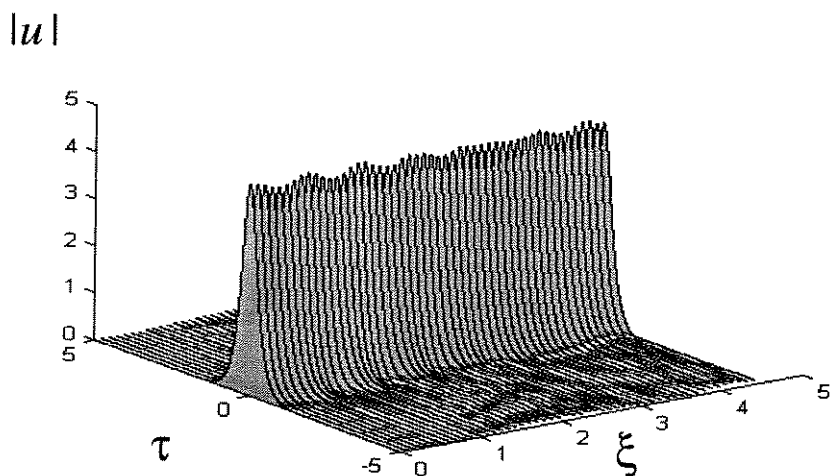


Fig. 4.2.3 - $|u(\xi, \tau)|$ usando dados da simulação II na Tab. 4.2.1.

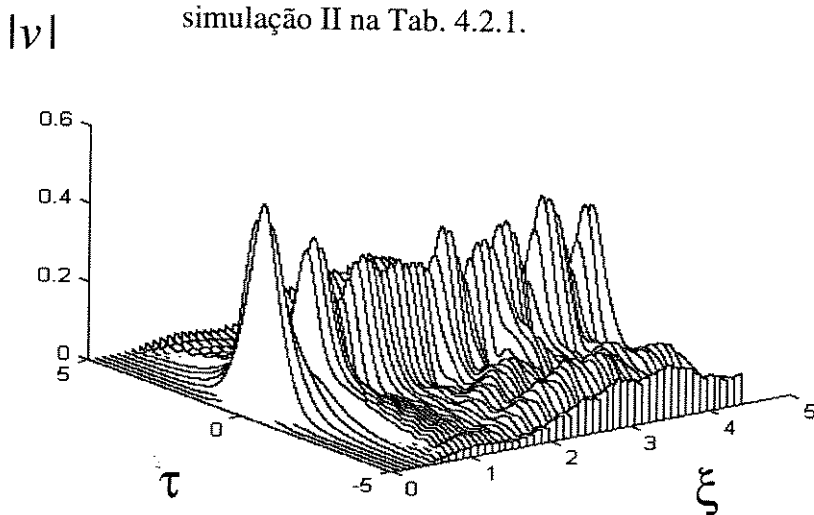


Fig. 4.2.4 - $|v(\xi, \tau)|$ usando dados da simulação II na Tab. 4.2.1.

As Simulações I e II, realizadas com os mesmos parâmetros do acoplador, contrastam duas situações extremas. A Simulação I mostra a completa transferência de energia de uma fibra para a outra, caracterizando o chaveamento, enquanto que a Simulação II mostra uma situação em que quase não há transferência de energia entre as fibras.

CAPÍTULO V

Ressonadores Ópticos

5.1 Introdução

Cavidades ópticas ressonantes são dispositivos que possuem uma realimentação óptica, através de espelhos ou acopladores ópticos. O uso de um meio, com algum parâmetro com resposta não-linear em relação ao campo elétrico, dentro do ressonador, fornece a este uma rica dinâmica, apresentando-se como um dispositivo prático para o estudo de efeitos não-lineares, como biestabilidade, bifurcações e caos. A Fig. 5.1 ilustra um típico ressonador em anel usando espelhos. O meio inserido no interior da cavidade apresenta atenuação (ganho) [Refs. 4.7,4.9] e/ou índice de refração [Ref. 4.11] com dependência não-linear em relação ao campo elétrico E .

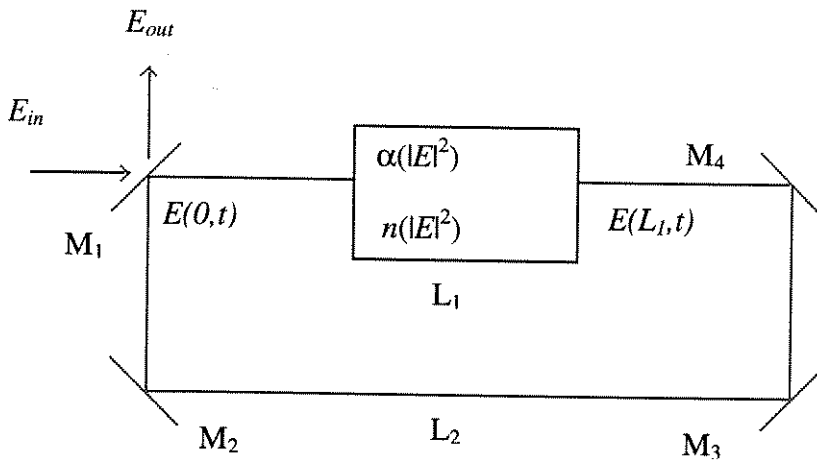


Fig. 5.1 - Ressonador em anel com elemento não-linear inserido.

$\alpha \equiv$ atenuação (ganho)

$n \equiv$ índice de refração

$L_1 \equiv$ comprimento do meio não-linear

$L_2 \equiv$ comprimento total do ressonador - L_1

$R \equiv$ reflectância do espelho

$T \equiv$ transmitância do espelho

$M_1 \equiv$ espelho com $R < 1$

M_2, M_3 e $M_4 \equiv$ espelhos com $R = 1$

5.2 Ressonador em Anel a Fibra Óptica

Substituindo o meio não-linear por uma fibra óptica, na qual o efeito Kerr é aproveitado, e os espelhos por um acoplador óptico, teremos um ressonador a fibra. O acoplador óptico é considerado linear, pontual e sem perdas no acoplamento, possuindo um coeficiente de acoplamento (relativo à intensidade) k e perda intrínseca (relativa à intensidade) γ . A Fig. 5.2.1 mostra o acoplador e abaixo dela estão as equações de acoplamento [Ref. 4.5]. Todas as equações e análises se referem à envoltória do campo, $E(z,t)$.

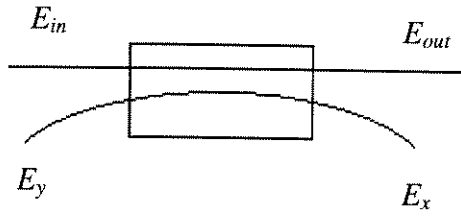


Fig. 5.2.1 - Acoplador óptico linear

$$E_{out} = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}} \left[(1-k)^{\frac{1}{2}} E_{in} + ik^{\frac{1}{2}} E_y \right] \quad (5.2.1.a)$$

$$E_x = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}} \left[ik^{\frac{1}{2}} E_{in} + (1-k)^{\frac{1}{2}} E_y \right] \quad (5.2.1.b)$$

As equações do acoplador indicam que ele causa um deslocamento de fase de $0,5\pi$ rad entre as portas de entrada e saída. Para $k = 0$ não há acoplamento, enquanto que, para $k = 1$, o acoplamento cruzado é total.

O ressonador a fibra é composto pelo acoplador, acima descrito, e por um trecho de fibra monomodo de comprimento L . A luz incidente no ressonador é suposta linearmente polarizada e a fibra é do tipo que preserva a polarização. A Fig. 5.2.2 ilustra o ressonador em anel a fibra.

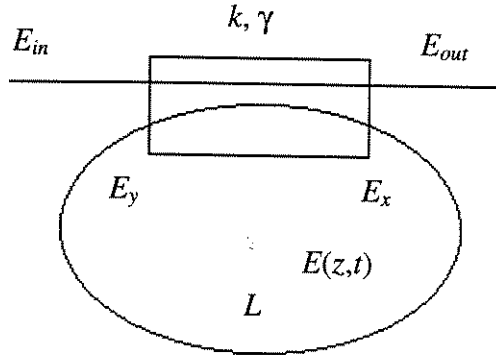


Fig. 5.2.2 - Ressonador óptico em anel a fibra

$E(z,t)$ é o campo elétrico para uma posição z qualquer na fibra, no tempo t . Assim, $E_x(t) = E(z = 0, t)$ e $E_y(t) = E(z = L, t)$. Definimos, agora, G como sendo um operador não-linear que relaciona E_y a E_x . As Eqs. (5.2.1) e o operador G determinam a dinâmica do ressonador. Integrando numericamente a ENLS, obtemos G , ou seja, dado o campo de entrada E_x , após este propagar a distância L , sujeito à ENLS, obtemos E_y . Além disso, o campo, ao se propagar de $z = 0$ a $z = L$, experimenta um deslocamento linear de fase, $\varphi = \beta L$, sendo $\beta = 2\pi / \lambda$, em que λ é o comprimento de onda.

O comprimento L discretiza espacialmente a equação dinâmica do ressonador pois, em cada volta neste, o campo percorre a distância L . Equivalentemente, poderíamos discretizar o tempo, sendo o período de discretização igual ao intervalo de tempo necessário para a luz dar uma volta no ressonador, e que será chamado tempo de

trânsito, T_t . As equações espacialmente discretizadas, que modelam o comportamento do ressonador, são dadas a seguir, sendo n o número da volta no ressonador:

$$E_{out}(n, t) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[(1 - k)^{\frac{1}{2}} E_{in}(n, t) + ik^{\frac{1}{2}} E_y(n, t) \exp(i\beta L) \right] \quad (5.2.2.a)$$

$$E_x(n, t) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[ik^{\frac{1}{2}} E_{in}(n, t) + (1 - k)^{\frac{1}{2}} E_y(n, t) \exp(i\beta L) \right] \quad (5.2.2.b)$$

$$E_y(n, t) = G(E_x(n - 1, t)) \quad (5.2.3)$$

5.3 Ressonador Óptico a Fibra sem Dispersão

Primeiramente, consideremos que o comprimento da fibra, L , é bem menor que os comprimentos de dispersão L_D e L_G . Neste caso, podemos desprezar os efeitos de dispersão e aproximar a ENLS por [Ref. 1.1, 4.21]:

$$\frac{\partial E(z, \tau)}{\partial z} = iR|E(z, \tau)|^2 E(z, \tau) - \frac{\alpha}{2} E(z, \tau) \quad (5.3.1.a)$$

na qual

$$\tau = t - \frac{z}{V_g} \quad (5.3.1.b)$$

V_g é a velocidade grupo. A solução de (5.3.1.a) é:

$$E(z, \tau) = E(0, \tau) \exp \left(\left(-\frac{\alpha}{2} + iR|E(0, \tau)|^2 \right) \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(\alpha z)] \right) \quad (5.3.2)$$

A Eq. (5.3.2) implica que a envoltória, ao se propagar pela fibra, sofre uma atenuação devida às perdas da fibra e uma mudança de fase proporcional à intensidade do pulso incidente. Devido à atenuação, o comprimento efetivo do laço de fibra, L_{EF} , é menor que o comprimento esperado, caso não houvesse atenuação. L_{EF} é dado por:

$$L_{EF} = \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(\alpha L)] \quad (5.3.3)$$

Por simplificação de notação, o comprimento efetivo da fibra será sempre designado por L . O conjunto de equações, que modela o ressonador a fibra sem dispersão, é [Ref. 4.11]:

$$E_{out}(n, \tau) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[(1 - k)^{\frac{1}{2}} E_{in}(n, \tau) + ik^{\frac{1}{2}} E_y(n, \tau) \right] \quad (5.3.4.a)$$

$$E_x(n, \tau) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[ik^{\frac{1}{2}} E_{in}(n, \tau) + (1 - k)^{\frac{1}{2}} E_y(n, \tau) \right] \quad (5.3.4.b)$$

$$E_y(n, \tau) = E_x(n - 1, \tau) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} L + i\beta_o L + iR|E_x(n - 1, \tau)|^2 L \right) \quad (5.3.5)$$

Abandonando, por alguns momentos, o índice n e trabalhando com as Eqs. (5.3.4) e (5.3.5), deduzimos a equação dinâmica do ressonador, discreta no espaço, como mostrado a seguir:

De (5.3.4.b) temos que:

$$E_y = \frac{E_x}{(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}(1-k)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ik^{\frac{1}{2}} E_{in}}{(1-k)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.3.6)$$

Substituindo (5.3.6) em (5.3.4.a), tem-se:

$$E_x = i \frac{(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} E_{in} - i \frac{(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} E_{out} \quad (5.3.7)$$

Fazendo

$$T = \frac{E_{out}}{E_{in}} \quad (5.3.8)$$

obtemos:

$$|E_x|^2 = \frac{|E_{in}|^2}{k} \left[(1-k)|T|^2 - (1-\gamma)^{\frac{1}{2}}(1-k)^{\frac{1}{2}}(T+T^*) + (1-\gamma) \right] \quad (5.3.9)$$

Agora, usando (5.3.5) em (5.3.4.b), obtemos:

$$E_x = \frac{i(1-\gamma)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} E_{in}}{1 - (1-\gamma)^{\frac{1}{2}}(1-k)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} L + i\beta_o L + iR|E_x|^2 L\right)} \quad (5.3.10)$$

Substituindo (5.3.10) em (5.3.4.a), e usando (5.3.8), chegamos a:

$$T = \frac{(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}(1-k)^{\frac{1}{2}} - (1-\gamma) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} L + i\beta_o L + iR|E_x|^2 L\right)}{1 - (1-\gamma)^{\frac{1}{2}}(1-k)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} L + i\beta_o L + iR|E_x|^2 L\right)} \quad (5.3.11)$$

T é a transmissividade do ressonador. Substituindo (5.3.9) em (5.3.11) e retornando o índice n , chegamos, finalmente, à equação discreta que modela o comportamento dinâmico do ressonador a fibra monomodo:

$$T_{n+1} = \frac{M - (1-\gamma) \exp\left(-\rho + i\varphi + i\frac{\tau_{in}}{k} \left[(1-k)|T_n|^2 - M(T_n + T_n^*) + (1-\gamma) \right] \right)}{1 - M \exp\left(-\rho + i\varphi + i\frac{\tau_{in}}{k} \left[(1-k)|T_n|^2 - M(T_n + T_n^*) + (1-\gamma) \right] \right)} \quad (5.3.12)$$

na qual

$$M = \left[(1 - \gamma)(1 - k) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.3.13)$$

$$\rho = 0,5\alpha L \quad (5.3.14)$$

$$\tau_{in} = R|E_{in}|^2 L \quad (5.3.15)$$

$$\varphi = \beta_o L = (2\pi/\lambda)L \quad (5.3.16)$$

A Eq. (5.3.12) representa um mapa não-linear e pode ser trabalhada com todas as ferramentas usadas em dinâmica não-linear, como plano de fase, expoentes de Lyapunov e atratores [Ref. 4.8], para sua compreensão.

Para as simulações, fizemos $\gamma = 0,05$, $k = 0,95$ e $\alpha = 0,3$ dB. As variáveis de entrada são τ_{in} e φ . A Fig. 5.3.1 mostra o diagrama de bifurcação e as Figs. 5.3.2 e 5.3.3 mostram os expoentes de Lyapunov, todas para $\varphi = 0,9\pi$ rad. A Fig. 5.3.4 mostra o diagrama de bifurcação e as Figs. 5.3.5 e 5.3.6 mostram os expoentes de Lyapunov, todas para $\varphi = 1,54\pi$ rad. Por fim, a Fig. 5.3.7 mostra os valores de τ_{in} que acarretam a primeira bifurcação, para φ variando de 0 a 2π rad.

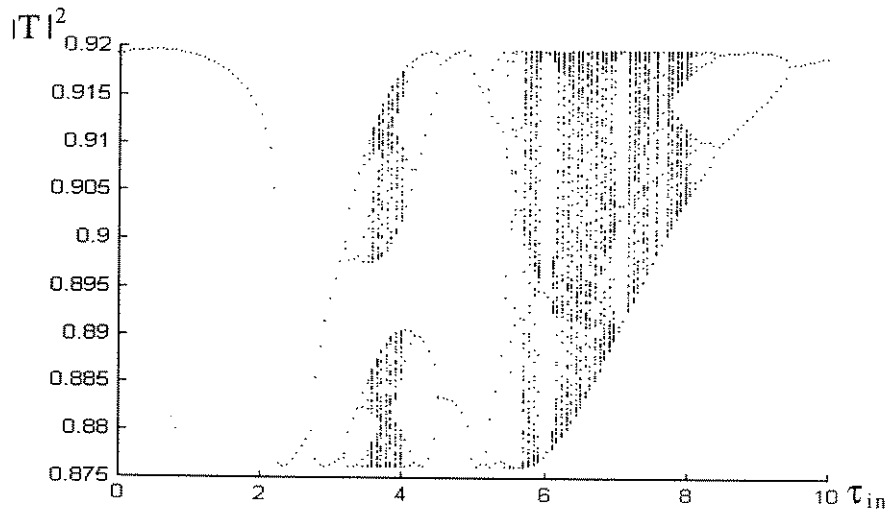


Fig. 5.3.1 - Diagrama de Bifurcação para $\varphi = 0,9\pi$ rad.

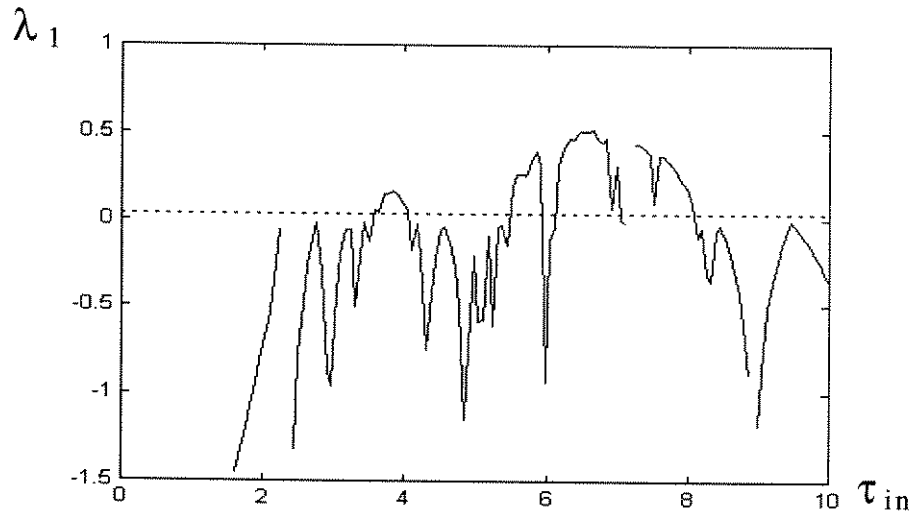


Fig. 5.3.2 - Expoente de Lyapunov λ_1 , para $\varphi = 0,9\pi$ rad.

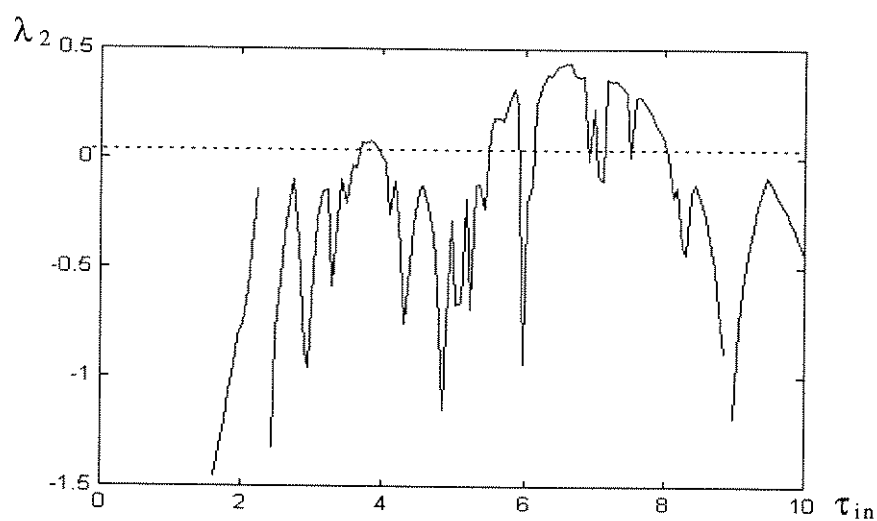


Fig. 5.3.3 - Expoente de Lyapunov λ_2 , para $\varphi = 0,9\pi$ rad.

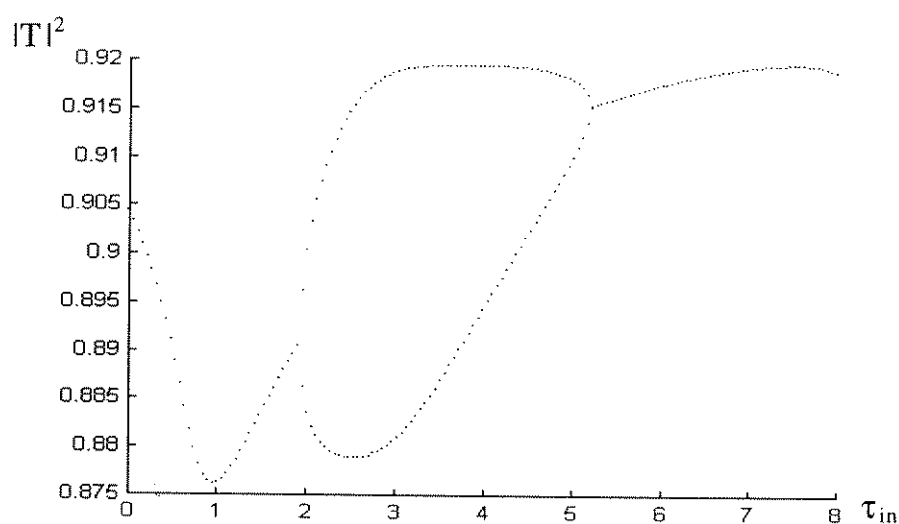


Fig. 5.3.4 - Diagrama de Bifurcação para $\varphi = 1,54\pi$ rad.

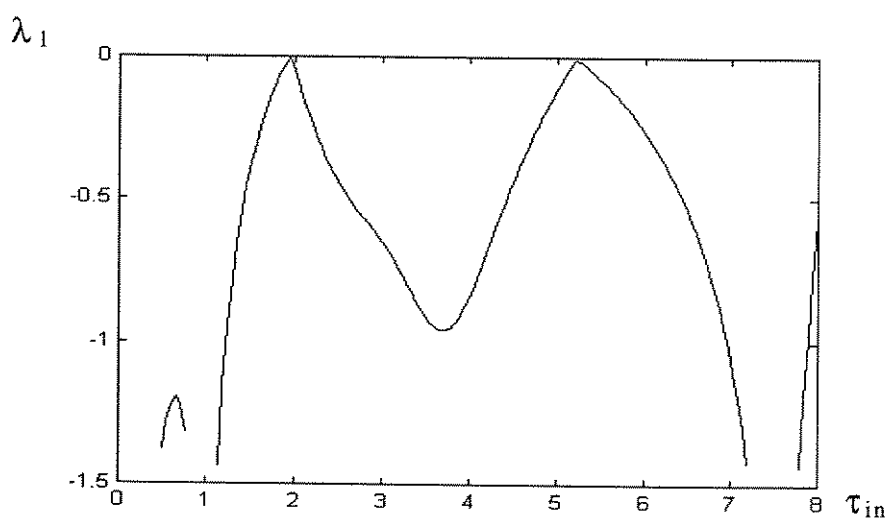


Fig. 5.3.5 - Expoente de Lyapunov λ_1 , para $\varphi = 1,54\pi$ rad.

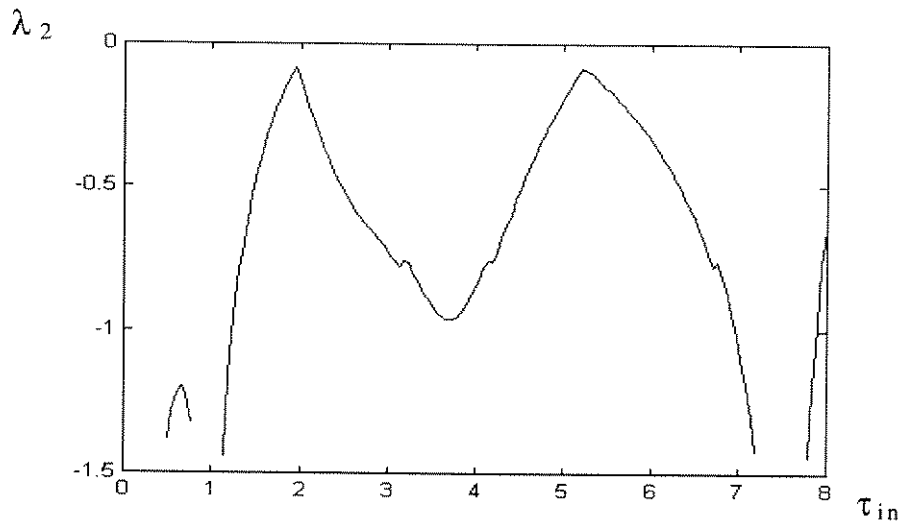


Fig. 5.3.6 - Exponente de Lyapunov λ_2 , para $\varphi = 1,54\pi$ rad.

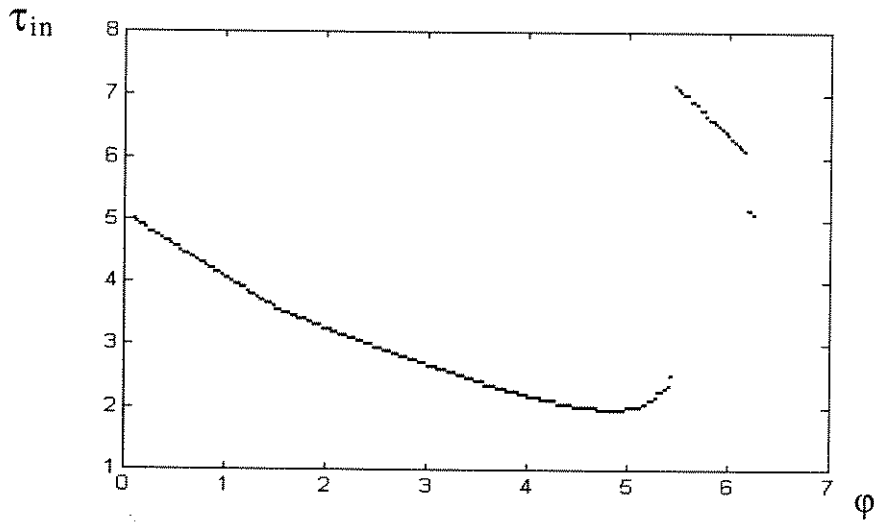


Fig. 5.3.7 - Plano τ_{in} X φ

A Eq. (5.3.12) pode ser separada em duas se considerarmos as partes real e imaginária de T_n , formando assim um sistema 2×2 e, por isso, temos dois expoentes de Lyapunov λ_1 e λ_2 . A função destes expoentes é determinar se o sistema é caótico ou não. O sistema não apresentará dinâmica caótica se todos seus expoentes de Lyapunov forem nulos ou negativos. Caso contrário o sistema será caótico. A Fig. 5.3.1 mostra uma grande variedade de dinâmicas possíveis, dependendo do parâmetro τ_{in} . Percebemos que, nas regiões de grande densidade de pontos, há a possibilidade haver caos, o que é confirmado pelos expoentes de Lyapunov das Figs. 5.3.2 e 5.3.3. Também, através da observação das Figs. 5.3.1 a 5.3.3, percebemos a existência de regiões com comportamento periódico inseridas entre as regiões caóticas. Mudando-se apenas o parâmetro φ , de $0,9\pi$ rad para $1,54\pi$ rad, notamos uma completa mudança no comportamento global do sistema. A Fig. 5.3.4 apresenta, no máximo, um comportamento periódico com período dois. A inexistência de caos pode ser comprovada através das Figs. 5.3.5 e 5.3.6. Por fim, a Fig. 5.3.7 permite que, fixado φ , possamos escolher a potência luminosa de entrada, através do valor de τ_{in} , para a qual ocorrerá a primeira bifurcação. Observamos que, para $\varphi \approx 1,54\pi$ rad o valor de τ_{in} será mínimo.

5.4 Ressonador Óptico a Fibra com Dispersão

A análise descrita na seção anterior não se presta ao estudo de ressonadores alimentados com pulsos de curta duração e/ou fibras com comprimentos consideráveis, onde a dispersão de velocidade grupo (GVD) não pode ser desprezada. Diversos experimentos [Refs. 4.15,4.22] têm mostrado a discrepância entre o estudo teórico e os resultados práticos obtidos em tais situações. A importância da dispersão de velocidade de grupo pode ser explicada [Refs. 4.14,4.24] da seguinte maneira: Imaginemos que o ressonador seja alimentado por pulsos e que estes pulsos de entrada sejam divididos em fatias temporais infinitesimalmente estreitas. Na ausência de dispersão e com exato sincronismo da taxa de repetição dos pulsos de entrada com o tempo de trânsito na cavidade, cada fatia temporal do pulso emergente da cavidade interagirá somente com a fatia temporal correspondente do pulso incidente no ressonador, não tendo nenhuma interação com as fatias temporais vizinhas. Conseqüentemente, as fatias temporais evoluirão independentemente umas das outras. Caso algumas destas fatias venham a exibir dinâmica caótica, e outras não, formar-se-á um paradoxo pois, fatias infinitesimalmente próximas exibirão comportamentos macroscópicos diferentes, o que produziria um espectro óptico infinitamente largo. A inclusão da dispersão de velocidade de grupo remove o paradoxo, uma vez que ela provoca a interação entre fatias vizinhas, criando uma correlação na evolução das mesmas. Quanto maior a dispersão, mais correlacionadas estarão as fatias temporais vizinhas.

Para determinar o comportamento dinâmico do ressonador, recorreremos novamente às simulações. A simulação consiste de dois passos por volta no ressonador: propagação na fibra e interferência no acoplador [Refs. 4.13,4.14,4.17]. O sinal de entrada terá período sempre em sincronismo com o tempo de trânsito do ressonador, isto é, igual ou múltiplo inteiro de T_r . A cada volta do sinal no ressonador, a saída $E_{out}(n)$ é armazenada e a integral representando o momento de ordem zero, Eq. (5.4.1), e o valor do campo para $\tau = 0$, Eq. (5.4.2), do pulso de saída, são calculados para formarem séries numéricas discretas, a fim de serem utilizadas como variáveis do plano de fase [Ref. 4.20]:

$$S(n) = \int_{-\infty}^{\infty} |E_{out}(n)|^2 d\tau \quad (5.4.1)$$

$$H_c(n) = E_{out}(n, \tau = 0) \quad (5.4.2)$$

As simulações referem-se à Fig. 5.4.1 e as Tabelas 5.4.1 e 5.4.2 mostram os valores dos parâmetros usados em tais simulações.

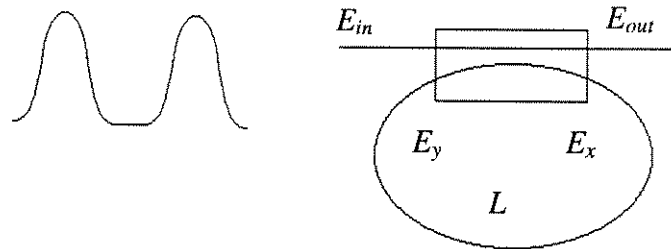


Fig. 5.4.1 - Ressonador alimentado por um trem de pulsos.

λ [μm]	β_2 [ps ² /km]	β_3 [ps ³ /km]	α [dB/km]	R [w ⁻¹ km ⁻¹]
1,55	-20,4	0,1	0,3	1,3

Tabela 5.4.1 - Dados utilizados na simulação do ressonador com dispersão.

O sinal de entrada no ressonador será um trem de pulsos da forma:

$$E_{in} = N \sqrt{\frac{|\beta_2|}{RT_1^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{T_1}\right) \tag{5.4.3}$$

onde

$$T_1 = \frac{T_0}{1,6574544} \tag{5.4.4}$$

SIMULAÇÃO	N	φ_I [rad]	T_0 [ps]	k	γ
I	[0,25:0,0227:2,5] [*]	$(1,54 + 10^8)\pi$	4	0,95	0,05
II	1,6801	$(1,54 + 10^8)\pi$	4	0,95	0,05
III	1,7028	$(1,54 + 10^8)\pi$	4	0,95	0,05
IV	1	$(1,54 + 15.10^8)\pi$	4	0,95	0,05
V	[0,25:0,0227:2,5] [*]	$(0,9 + 10^8)\pi$	4	0,95	0,05
VI	1,8617	$(0,9 + 10^8)\pi$	4	0,95	0,05
VII	1,5	$(0,9 + 15.10^8)\pi$	4	0,95	0,05

Tabela 5.4.2 - Dados para as simulações do ressonador simples com dispersão. * [valor inicial : passo : valor final]

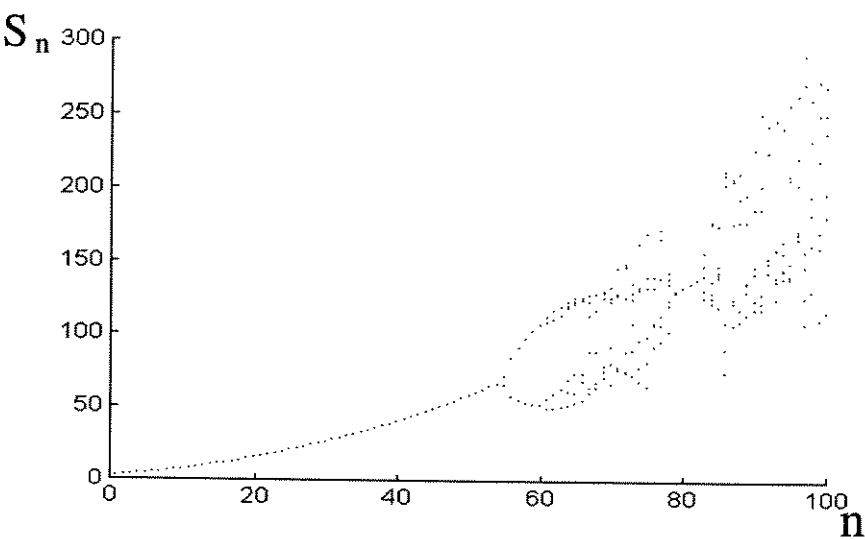


Fig. 5.4.2 - Diagrama de bifurcação, usando os dados da simulação I na Tab. 5.4.2.

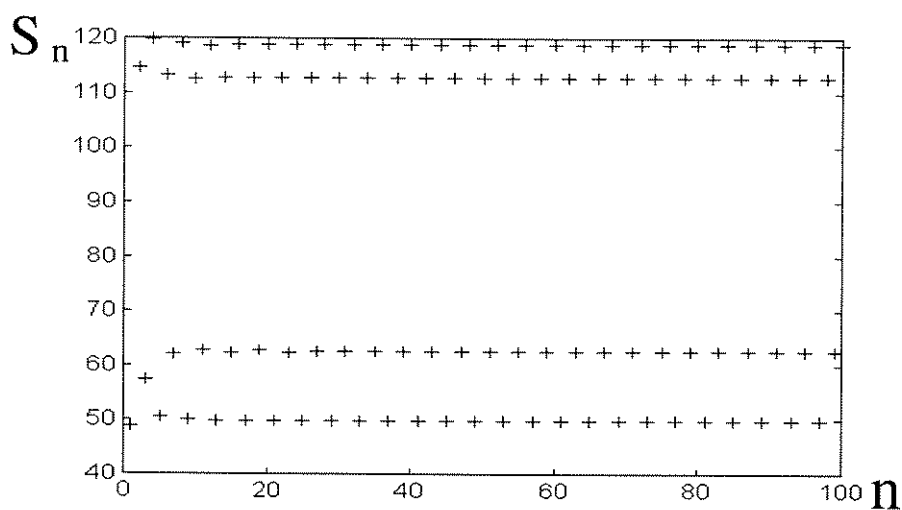


Fig. 5.4.3 - Ressonador operando em quatro estados, usando os dados da simulação II na Tab. 5.4.2.

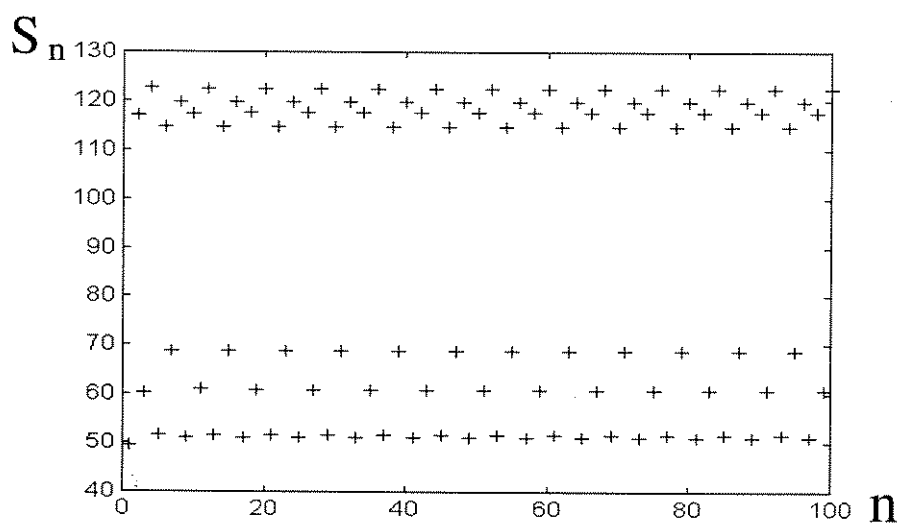


Fig. 5.4.4 - Ressonador operando em sete estados, usando os dados da simulação III na Tab. 5.4.2.

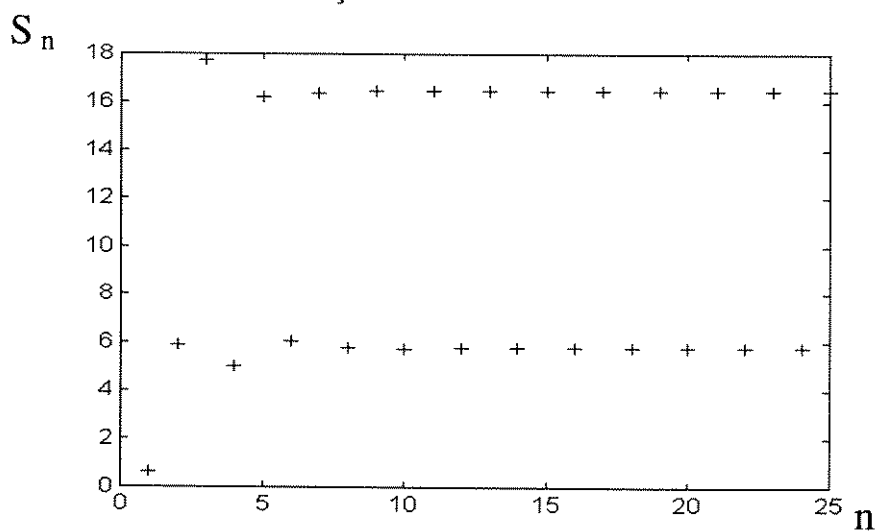


Fig. 5.4.5 - Ressonador operando em dois estados, usando os dados da simulação IV na Tab. 5.4.2.

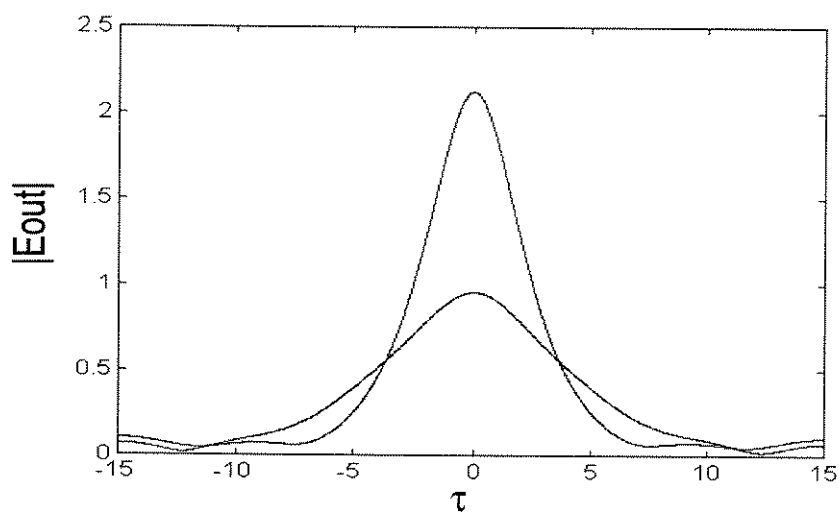


Fig. 5.4.6 - Pulsos de saída do ressonador operando em dois estados, usando os dados da simulação IV na Tab. 5.4.2.

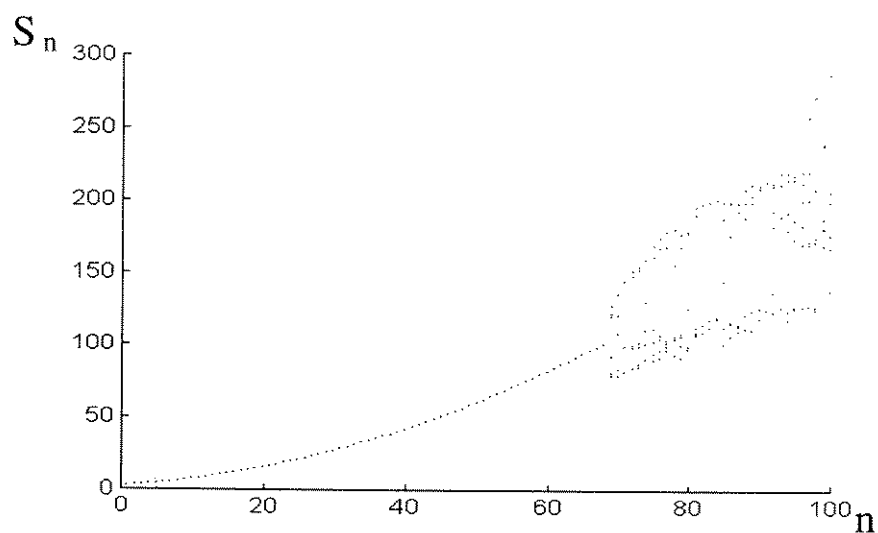


Fig. 5.4.7 - Diagrama de bifurcação, com dispersão, usando os dados da simulação V na Tab. 5.4.2.

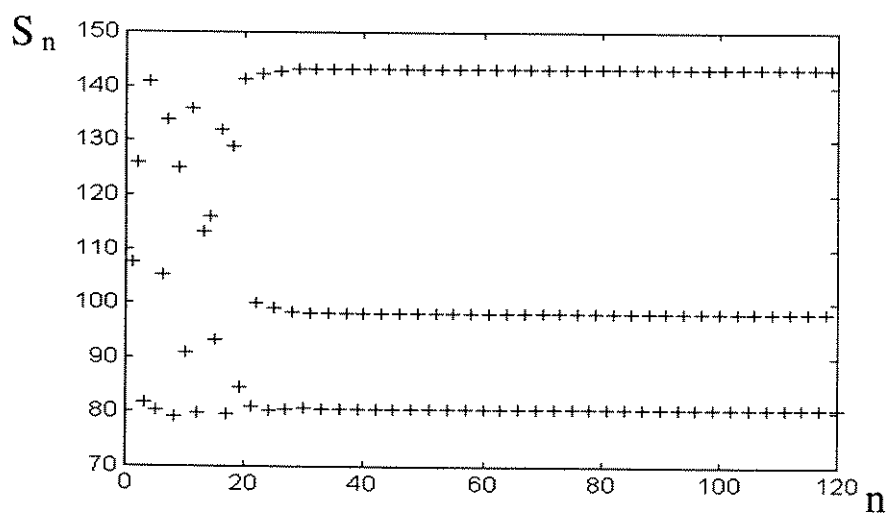


Fig. 5.4.8 - Ressonador operando em três estados, usando os dados da simulação VI na Tab. 5.4.2.

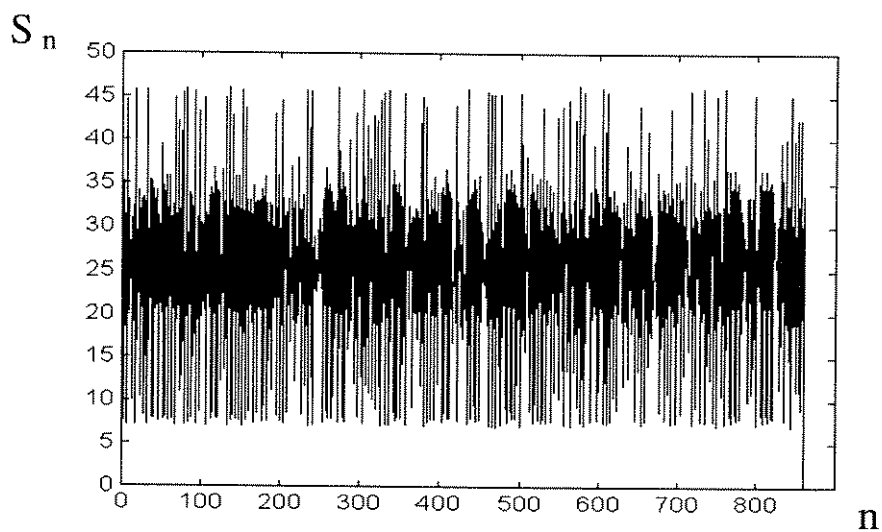


Fig. 5.4.9 - Ressonador operando em estado caótico, usando os dados da simulação VII na Tab. 5.4.2.

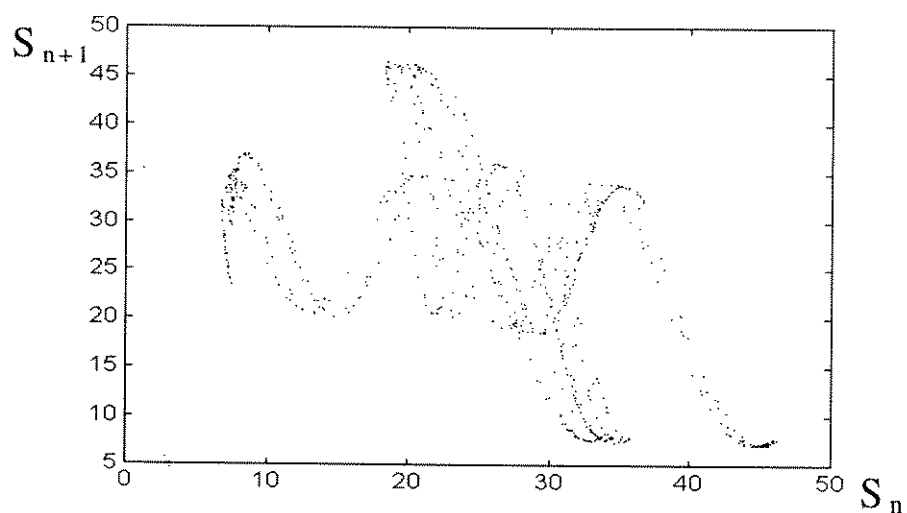


Fig. 5.4.10 - Plano de fase global: $S_{n+1} \times S_n$, usando os dados da simulação VII na Tab. 5.4.2.

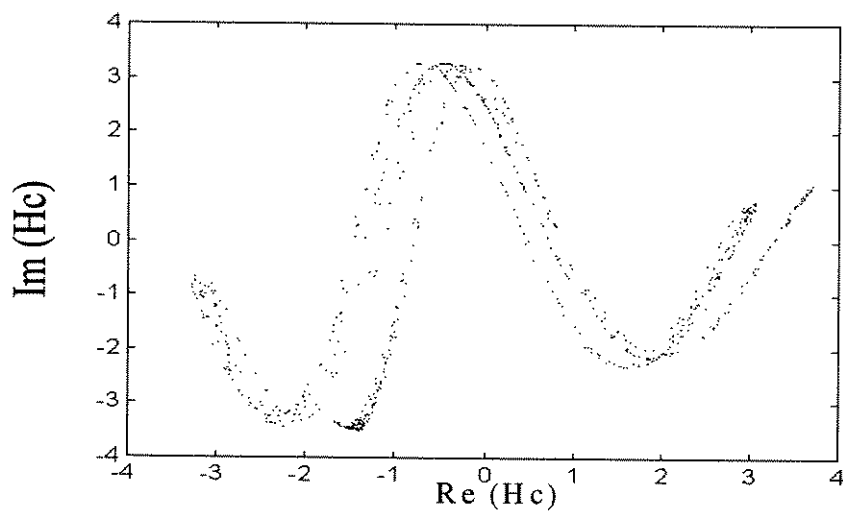


Fig. 5.4.11 - Plano de fase local: $\text{real}(H_c) \times \text{Imag}(H_c)$, usando os dados da simulação VII na Tab. 5.4.2.

Os diagramas de bifurcações do ressonador, Figs. 5.4.2 e 5.4.7 para $\varphi = 1,54\pi$ rad e $\varphi = 0,9\pi$ rad + $10^8\pi$ rad, respectivamente, foram calculados, tendo como parâmetro de controle, a variável N da Eq. (5.4.3) (o ganho variável de um amplificador inserido no laço também poderia ser utilizado como parâmetro de controle, vide Apêndice 4). Dividimos N em cem partes iguais, variando de 0,25 a 2,5, com passo igual a 0,0227. Cada ponto da coordenada horizontal destas figuras, n , corresponde à n -ésima iteração, correspondendo a $N = 0,25 + 0,0227n$. A escolha da variável N para controlar a dinâmica do ressonador, se deve à facilidade prática de variar seu valor. Estes diagramas mostram a possibilidade do ressonador operar com diferentes quantidades de estados possíveis, dependendo do valor de N . As Figs. 5.4.3, 5.4.4 e 5.4.8 mostram o ressonador operando em quatro, sete e três estados, respectivamente. As Figs. 5.4.5 e 5.4.6 apresentam, respectivamente, o ressonador operando em dois estados e a forma dos pulsos de saída para tal situação. Por fim, a Fig. 5.4.9 ilustra o ressonador operando em regime caótico. As Figs. 5.4.10 e 5.4.11 mostram, respectivamente, um atrator global, baseado na Eq. (5.4.1), e um atrator local, baseado na Eq. (5.4.3). O atrator global dá a evolução do momento de ordem zero dos pulsos de saída. O atrator local mostra a evolução do campo, no tempo $\tau = 0$, dos pulsos de saída. A afirmação de que o ressonador está operando em regime caótico é baseada na aparência dos atratores e da série S_n , uma vez que, nenhum método numérico ou analítico, como o cálculo dos expoentes de Lyapunov ou dimensão dos atratores, foi usado para comprová-la.

5.5 Ressonador Óptico a Fibra com Duplo Anel

Uma segunda configuração de ressonadores a fibra está mostrado na Fig. 5.5.1 formando um ressonador com duplo anel. Esta configuração de ressonador apresenta uma maior complexidade de comportamento e, resultados não obtidos com o ressonador de anel simples, como autopulsação, são esperados. L_1 , L_2 e L_3 são os comprimentos dos trechos de fibra utilizados. k_i e γ_i representam, respectivamente, o coeficiente de acoplamento e perda intrínseca do acoplador interno, ambos relativos à intensidade, enquanto que k_e e γ_e representam o mesmo para o ressonador externo.

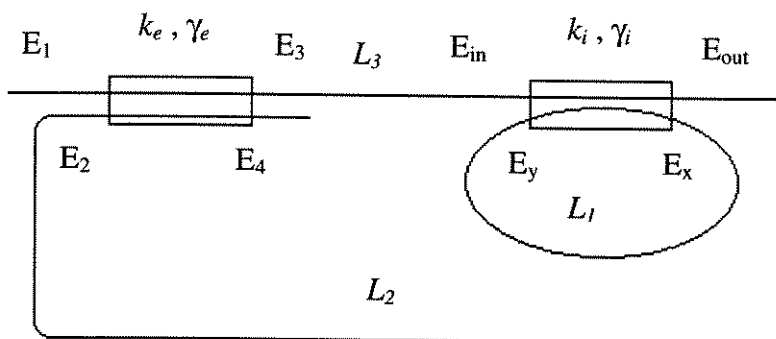


Fig. 5.5.1 - Ressonador com duplo anel

5.6 Ressonador Óptico a Fibra com Duplo Anel e sem Dispersão

Sob as mesmas condições expostas para o ressonador com anel simples, a dispersão pode ser desprezada e as equações do ressonador com duplo anel ficam:

$$E_{out} = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[(1 - k)^{\frac{1}{2}} E_{in} + i k^{\frac{1}{2}} E_y \right] \quad (5.6.1)$$

$$E_x = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[i k^{\frac{1}{2}} E_{in} + (1 - k)^{\frac{1}{2}} E_y \right] \quad (5.6.2)$$

$$E_y = E_x \exp(-\alpha L_1 + i\beta L_1 + R|E_x|^2 L_1) \quad (5.6.3)$$

$$E_3 = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[(1 - k)^{\frac{1}{2}} E_1 + i k^{\frac{1}{2}} E_2 \right] \quad (5.6.4)$$

$$E_4 = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \left[i k^{\frac{1}{2}} E_1 + (1 - k)^{\frac{1}{2}} E_2 \right] \quad (5.6.5)$$

$$E_2 = E_{out} \exp(-\alpha L_2 + i\beta L_2 + iR|E_{out}|^2 L_2) \quad (5.6.6)$$

$$E_{in} = E_3 \exp(-\alpha L_3 + i\beta L_3 + iR|E_3|^2 L_3) \quad (5.6.7)$$

$$I = \frac{E_{out}}{E_{in}} \quad (5.6.8)$$

$$Y = \frac{E_4}{E_1} \quad (5.6.9)$$

Trabalhando de forma semelhante à exposta na Seção 5.3, obtemos:

$$I = \frac{M_1 - (1 - \gamma) \exp(-\alpha L_1 + i\beta L_1 + iR|E_x|^2 L_1)}{1 - M_1 \exp(-\alpha L_1 + i\beta L_1 + iR|E_x|^2 L_1)} \quad (5.6.10)$$

$$Y = \frac{i M_2 + (1 - \gamma) I C \exp(i|E_3|^2 (R|I|^2 L_2 \rho + R L_3))}{1 - i M_2 I C \exp(i|E_3|^2 (R|I|^2 L_2 \rho + R L_3))} \quad (5.6.11)$$

$$|E_3|^2 = \frac{|E_1|^2}{(1 - k)} \left[k|Y|^2 + iM_2(Y - Y^*) + (1 - \gamma) \right] \quad (5.6.12)$$

$$|E_x|^2 = \frac{|E_1|^2}{k(1 - k)} \left[k|Y|^2 + iM_2(Y - Y^*) + (1 - \gamma) \right] \left[(1 - k)|I|^2 - M_1(I + I^*) + (1 - \gamma) \right] \rho \quad (5.6.13)$$

sendo

$$M_1 = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} (1 - k)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6.14)$$

$$M_2 = k^{\frac{1}{2}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6.15)$$

$$C = \exp(-\alpha(L_2 + L_3) + i\beta(L_2 + L_3)) \quad (5.6.16)$$

$$\rho = \exp(-2\alpha L_3) \quad (5.6.17)$$

Y e I são, respectivamente, as transmissividades do anel externo e interno. Por simplificação, as seguintes transformações são feitas:

$$\alpha L_i = \rho_i \quad (5.6.18.a)$$

$$\beta L_i = \varphi_i \quad (5.6.18.b)$$

$$R|E_1|^2 L_i = \tau_i \quad (5.6.18.c)$$

$$i=1,2 \text{ e } 3$$

As variáveis de entrada são φ_1 , φ_2 , φ_3 , τ_1 , and ρ_1 . Em um experimento prático, os comprimentos L_1 , L_2 e L_3 , a intensidade do laser de entrada e α devem ser selecionados, tal que os valores de entrada fixados sejam satisfeitos. Os demais valores são obtidos a partir de:

$$\tau_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1} \tau_1 \quad (5.6.19.a)$$

$$\rho_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1} \rho_1 \quad (5.6.19.b)$$

$$i = 2,3$$

As Eqs. (5.6.10) e (5.6.11), quando discretizadas, formam um mapa bidimensional que, simplificadamente, escrevemos como:

$$I_{n+1} = G_1(I_n, Y_n) \quad (5.6.20)$$

$$Y_{n+1} = G_2(I_n, Y_n) \quad (5.6.20)$$

G_1 e G_2 são obtidos a partir de (5.6.10) - (5.6.13). A Tabela 5.6.1 mostra os valores dos parâmetros utilizados nas simulações.

Simulação	τ	φ_1 (rad)	φ_2 (rad)	φ_3 (rad)	k_i	k_e	$\gamma_i = \gamma_e$
I	$[0,1:0,03:3]^*$	$1,54\pi$	$1,15\pi$	0	0,95	0,95	0,05
II	3	$1,54\pi$	$1,15\pi$	0	0,95	0,95	0,05
III	$[0,1:0,03:3]^*$	$1,54\pi$	π	$0,1\pi$	0,95	0,95	0,05
IV	2,5	$1,54\pi$	π	$0,1\pi$	0,95	0,95	0,05

Tabela 5.6.1 - Dados para as simulações do duplo anel sem dispersão. * [valor inicial : passo : valor final]

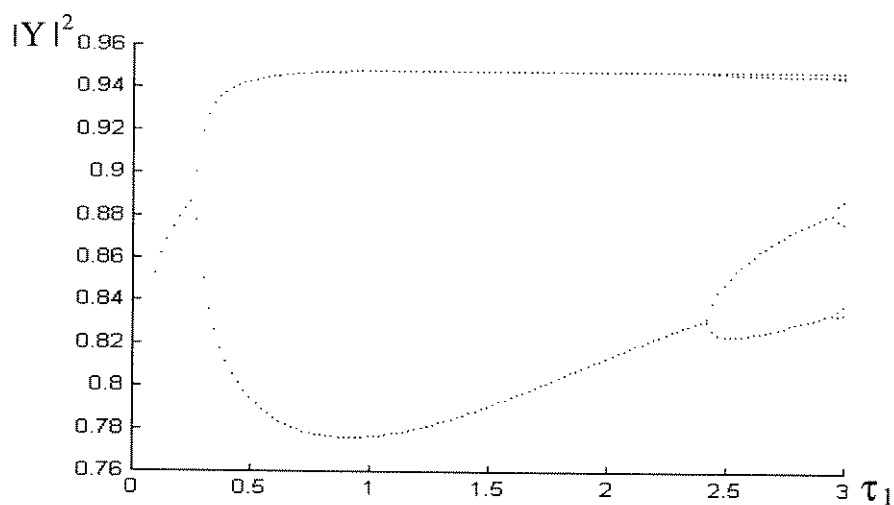


Fig. 5.6.1 - Diagrama de bifurcação para anel duplo, usando os dados da simulação I na Tab 5.6.1.

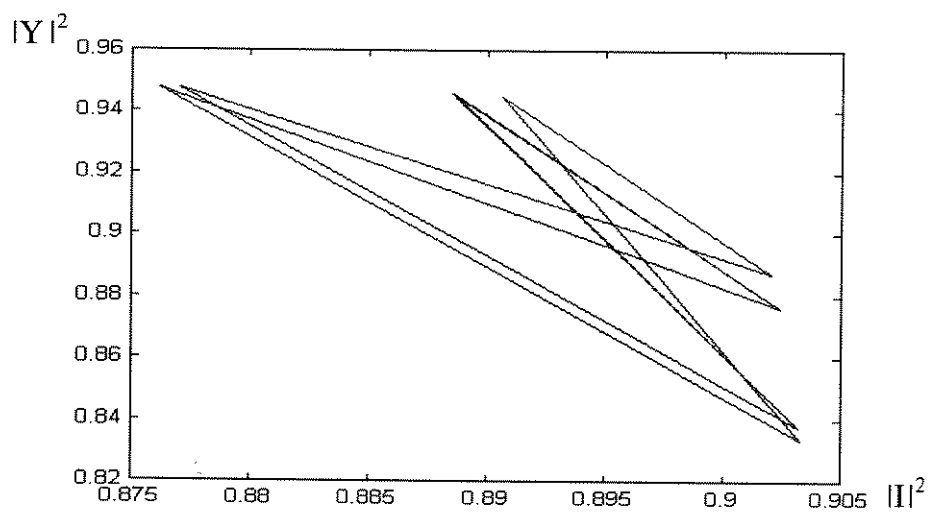


Fig. 5.6.2 - Plano de fase $|Y|^2 \times |I|^2$, usando os dados da simulação II na Tab 5.6.1.

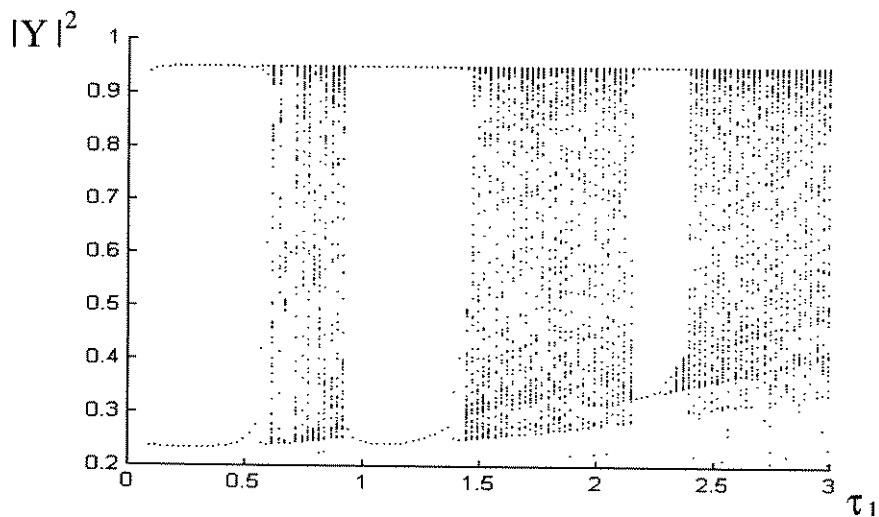


Fig. 5.6.3 - Diagrama de bifurcação para anel duplo, usando os dados da simulação III na Tab. 5.6.1.

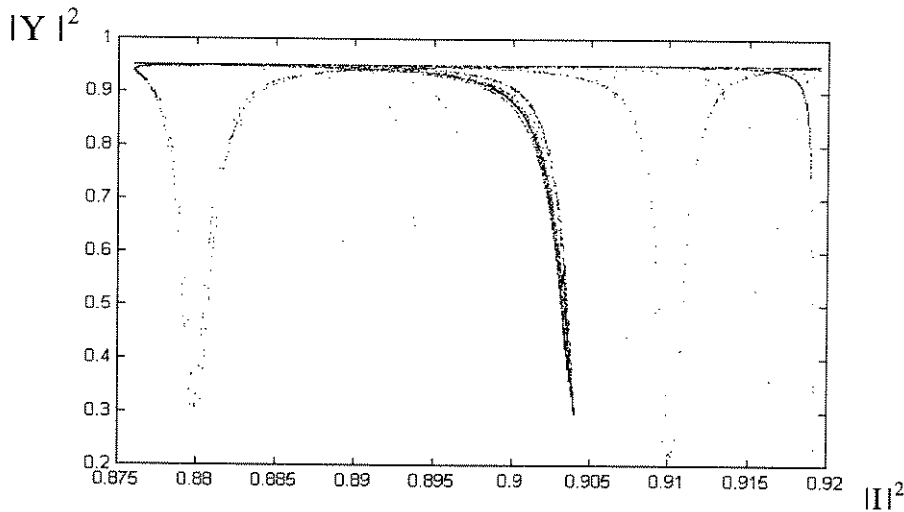


Fig. 5.6.4 - Plano de fase $|Y|^2 \times |II|^2$, usando os dados da simulação IV na Tab. 5.6.1.

A Fig. 5.6.1 apresenta o diagrama de bifurcação para L_3 suficientemente pequeno tal que φ_3 possa ser desprezado. A Fig. 5.6.2 apresenta o plano de fase, nas condições especificadas, para τ_l fixo em um valor onde não existe caos. Nesta figura podemos observar a existência de uma dinâmica do tipo *flip-flop*, isto é, quando $|Y|^2$ aumenta de valor, $|II|^2$ diminui e vice-versa. Este comportamento indica a possibilidade de autopulsação. A Fig. 5.6.3 apresenta o diagrama de bifurcação, levando em consideração φ_3 . Neste, observamos um comportamento mais complexo e com uma maior excursão de saída, que o da Fig. 5.6.1, para a mesma faixa de variação de τ_l . Finalmente, a Fig. 5.6.4 apresenta o plano de fase, nas condições especificadas, para τ_l assumindo um valor onde ocorre caos.

5.7 Ressonador Óptico a Fibra com Duplo Anel e com Dispersão

Nesta seção voltamos a considerar a dispersão de velocidade de grupo. Excitamos a configuração da Fig. 5.5.1 com um sinal de forma dada pela Eq. (5.7.1). Um pulso senoidal montado em um nível cw é usado como gatilho. Depois, apenas o nível cw é mantido na entrada do ressonador duplo. A Tabela 5.7.1 mostra os valores utilizados na simulação.

$$E_{in} = cw + N \sin\left(\frac{2\pi\tau}{T_0}\right) \quad (5.7.1)$$

N	cw	k_i	k_e	$\varphi_1 = \varphi_2$ e $\varphi_3 = 0$ [rad]	β_2 [ps ² /km]	β_3 [ps ³ /km]	α [dB/km]	T_o [ps]
0,5	1	0,95	0,6	$(1,54 + 15 \cdot 10^8) \pi$	-20,4	0,1	0,3	15

Tabela 5.7.1 - Dados utilizados na simulação do anel duplo com dispersão.

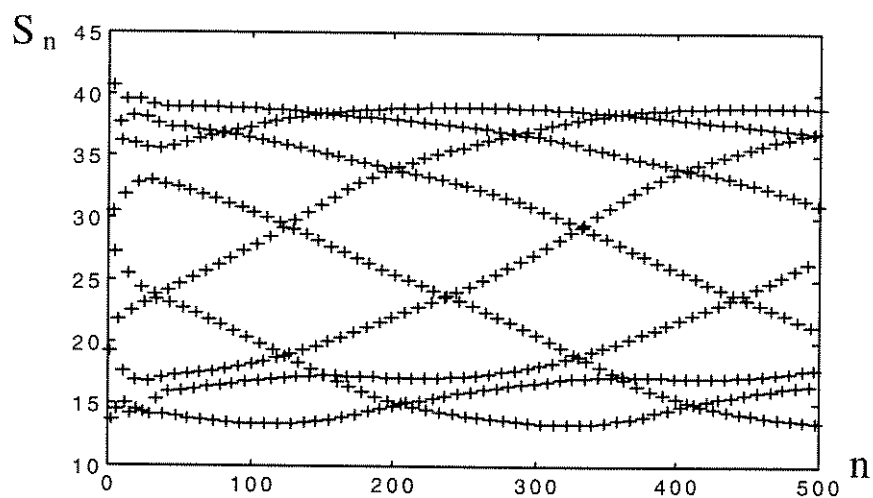


Fig. 5.7.1 - $S_n \times n$

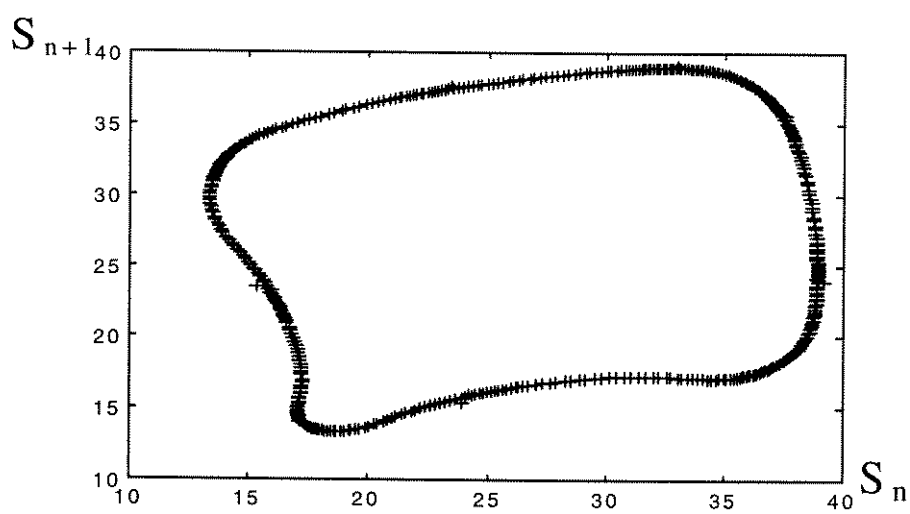


Fig. 5.7.2 - Plano de fase global: contorno de $S_{n+1} \times S_n$, com 430 pontos.

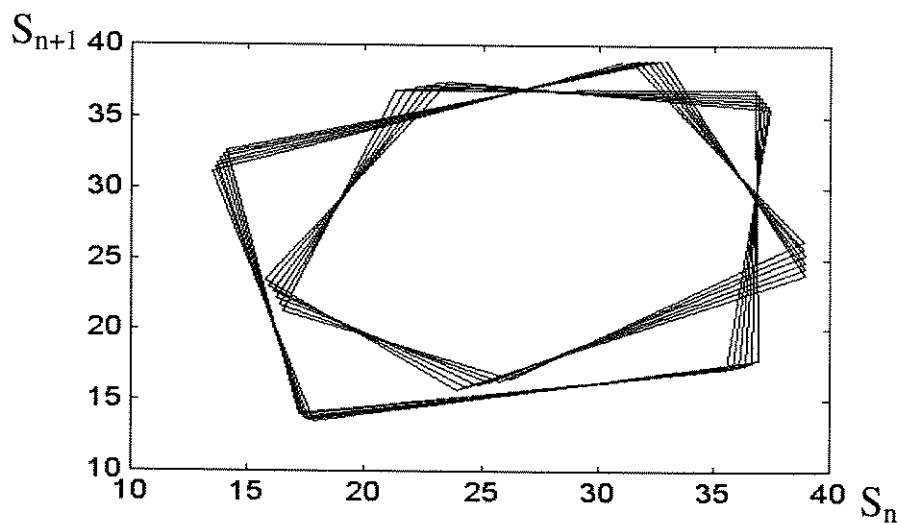


Fig. 5.7.3 - Plano de fase global: $S_{n+1} \times S_n$, com 54 pontos.

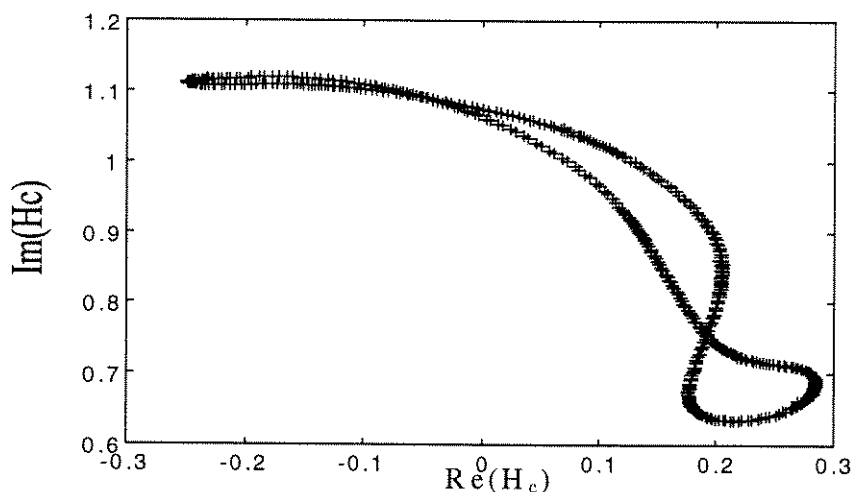


Fig. 5.7.4 - Plano de fase local: contorno de $\text{Im}(H_c) \times \text{Re}(H_c)$.

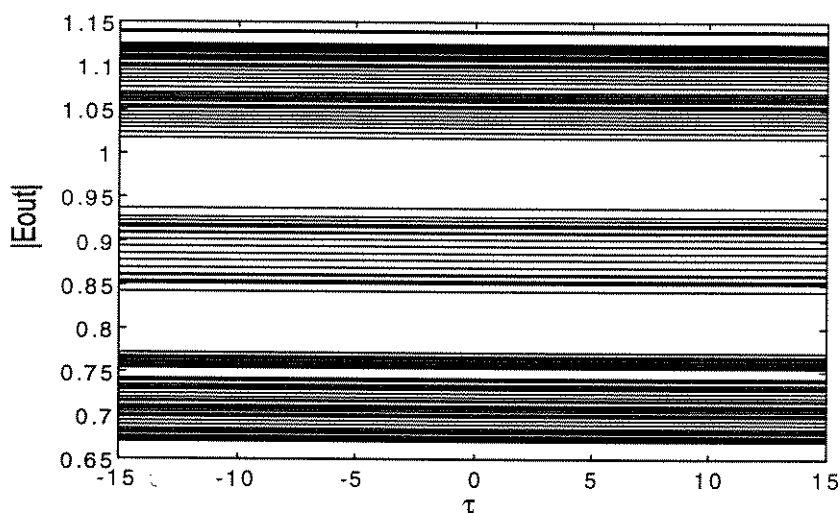


Fig. 5.7.5 - Forma de onda na saída do ressonador

A Fig. 5.7.1 mostra a variação do momento de ordem zero dos pulsos na saída do ressonador. Foi calculada com 500 voltas no ressonador duplo e indica, de forma clara, que a saída não será constante, apesar de estar presente na entrada apenas um valor cw . Esta afirmativa é confirmada pela Fig. 5.7.5 que apresenta a forma de onda na saída do ressonador. Nesta figura podemos observar que há uma variação no valor cw presente na saída. As Figs. 5.7.2 e 5.7.4 apresentam, respectivamente, as formas dos atratores global e local. A Fig. 5.7.3 mostra como ocorre a evolução do atrator global com apenas as últimas 54 voltas no ressonador. Nesta curva notamos que, a cada nove voltas (nove pontos), o momento de ordem zero retorna para um valor próximo ao do ponto de partida. Este comportamento parece ser periódico ou quase periódico. Para termos uma melhor compreensão do comportamento, traçamos as curvas relacionando a distância entre dois pontos consecutivos do atrator global, Fig. 5.7.6, e a razão entre dois pontos consecutivos da sequência de valores do momento de ordem zero, S_n , Fig. 5.7.7.

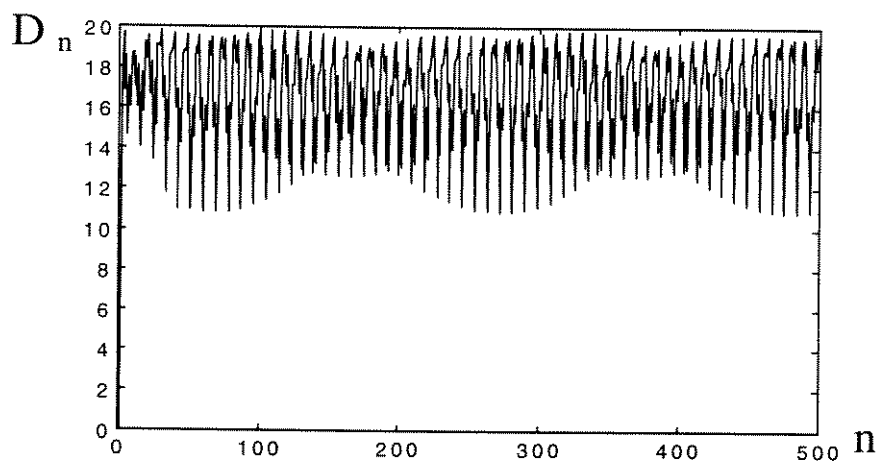


Fig. 5.7.6 - Distância entre dois pontos consecutivos do atrator global (D_n).

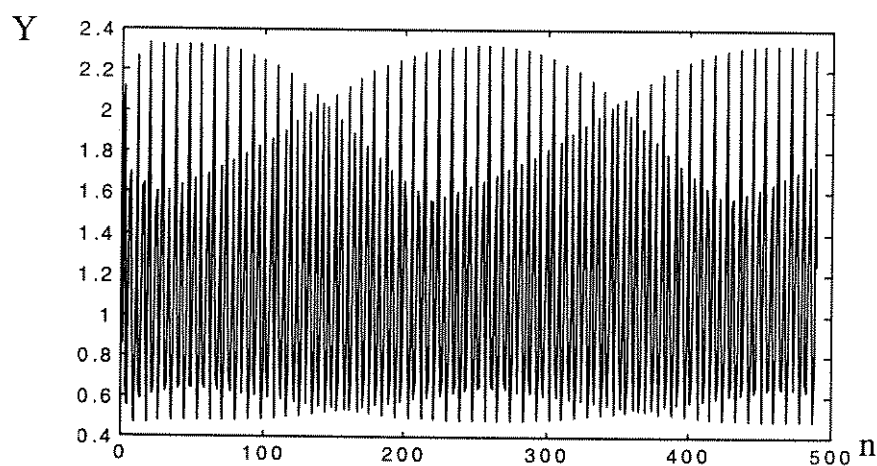


Fig. 5.7.7 - $Y = \left(\frac{S_{n+1}}{S_n} \right)$

Nas Figs. 5.7.6 e 5.7.7 podemos observar um comportamento periódico mas não com período único, indicando uma composição de diferentes frequências. O espectro discreto, mostrado na Fig. 5.7.8, confirma o comportamento periódico.

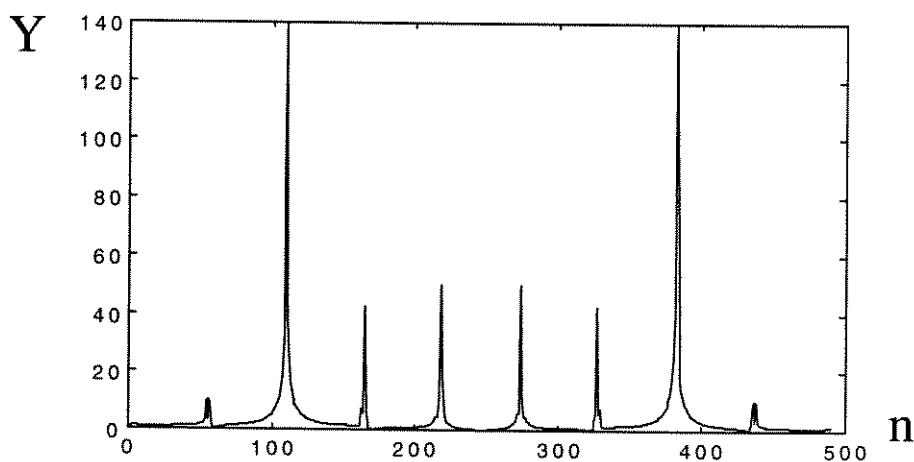


Fig. 5.7.8 - $Y = \text{FFT}\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)$

CAPÍTULO VI

Aplicação dos Ressonadores a Fibra e Acopladores Não-Lineares

6.1 Introdução

Como exemplo da aplicação dos ressonadores ópticos e acopladores não-lineares, no processamento óptico de sinais para sistemas de comunicações, apresentamos, baseado nas simulações realizadas, alguns dispositivos simples para a geração, modulação e compressão de pulsos ópticos.

6.2 Gerador de Pulsos Ópticos

Na Fig. 6.2.1 apresentamos o gerador de pulsos ópticos constituído do ressonador com duplo anel. Um pulso único de entrada, montado em um sinal CW, é usado como gatilho, havendo, após a passagem deste pulso, a permanência apenas do sinal CW na entrada. Como mostrado nas simulações da Seção 5.7, a saída permanecerá oscilante. Os pulsos gerados podem não ter forma adequada para a utilização direta mas, com a escolha ótima dos parâmetros envolvidos e um pós-processamento (como filtragem, por exemplo), deverá fornecer pulsos de forma bem definida e úteis.

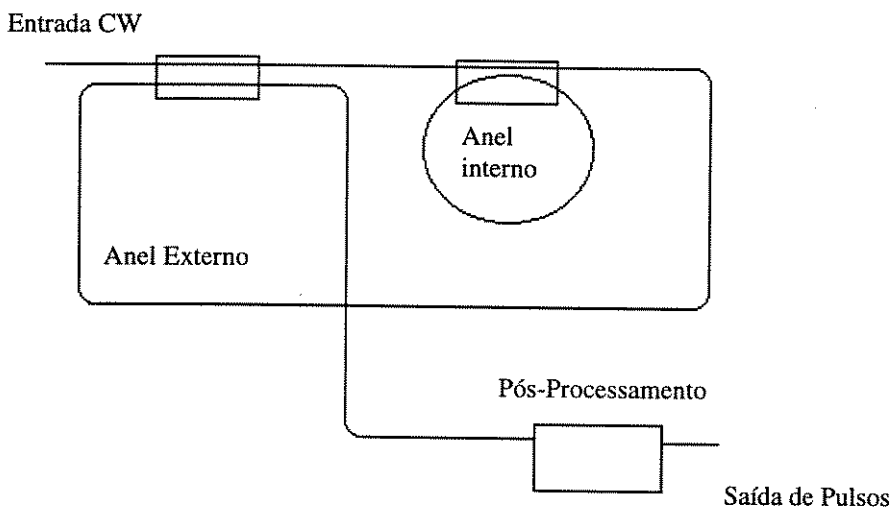


Fig. 6.2.1 - Gerador de pulsos ópticos

6.3 Modulador Óptico e Compressor de Largura de Pulsos

O modulador e o compressor de largura de pulsos são baseados no ressonador a anel simples, seguido de um acoplador não-linear. O modulador funciona da seguinte forma: o ressonador trabalha, dependendo da amplitude do sinal de entrada e que será o sinal modulante, em dois ou três estados possíveis, isto é, gerando na saída seqüências de pulsos com duas ou três amplitudes possíveis. Para a operação do ressonador em dois estados, o acoplador, devidamente caracterizado, faz o chaveamento do pulso de pequena intensidade para uma carga casada, que evitará reflexões, enquanto que, o pulso com maior intensidade deverá passar pelo acoplador sem sofrer alterações ou ser comprimido. A diferença entre a intensidade dos pulsos de pequena intensidade e grande

intensidade deverá ser tal que permita o acoplador realizar bem esta função. Para o ressonador operando em três estados deveremos ter dois estados de baixa intensidade suficientemente próximos, que serão chaveados, e um terceiro de alta intensidade, que passará sem alterações ou será comprimido pelo acoplador. Como a distância temporal entre os pulsos na saída do ressonador é constante e igual ao tempo de trânsito do pulso na cavidade, T_i , teremos após o acoplador, pulsos distanciados de $2T_i$, quando ocorrer o chaveamento de um pulso de baixa intensidade, e $3T_i$, quando ocorrer o chaveamento de dois pulsos de baixa intensidade, dependendo da amplitude dos pulsos de entrada no ressonador. Por fim, o espaçamento temporal entre os pulsos na saída do acoplador pode ser modulado, de forma discreta, pela intensidade dos pulsos de entrada no ressonador.

O compressor de largura de pulsos usa o ressonador para gerar pulsos com forma adequada para que estes, quando passem pelo acoplador, sofram uma compressão. A função do acoplador, aqui, não é fazer chaveamento mas comprimir a largura dos pulso. A Fig. 6.3.1 mostra a configuração do modulador/compressor:

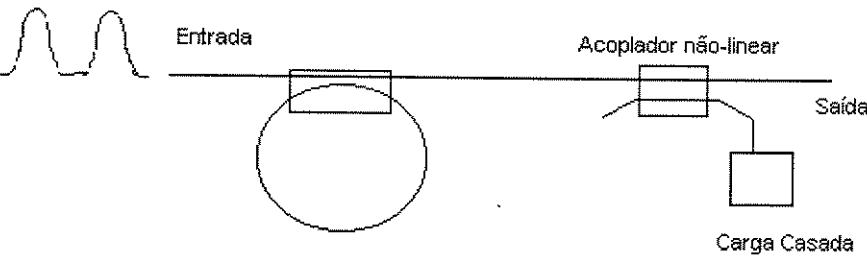


Fig. 6.3.1 - Modulador/Compressor óptico.

O esquema da Fig. 6.3.1 foi simulado segundo as condições descritas na Tabela 6.3.1. Nos gráficos apresentados abaixo, u é o pulso na saída do ressonador e entrada do acoplador. U é o pulso na saída do acoplador e que será, também, a saída do conjunto. V é a saída do acoplador que é conectada à carga casada. ξ é a coordenada espacial relacionada com o comprimento de dispersão L_D .

Simulação	φ (rad)	k	γ	E_{in}	K
I	$1,54\pi+15.10^8\pi$	0,95	0,05	$1,15\text{sech}(0,4144\tau)$	1
II	$1,54\pi+15.10^8\pi$	0,95	0,05	$2,5\text{sech}(0,4144\tau)$	2

Tabela 6.3.1 - Dados utilizados nas simulações do modulador/compressor óptico apresentado na Fig. 6.3.1.

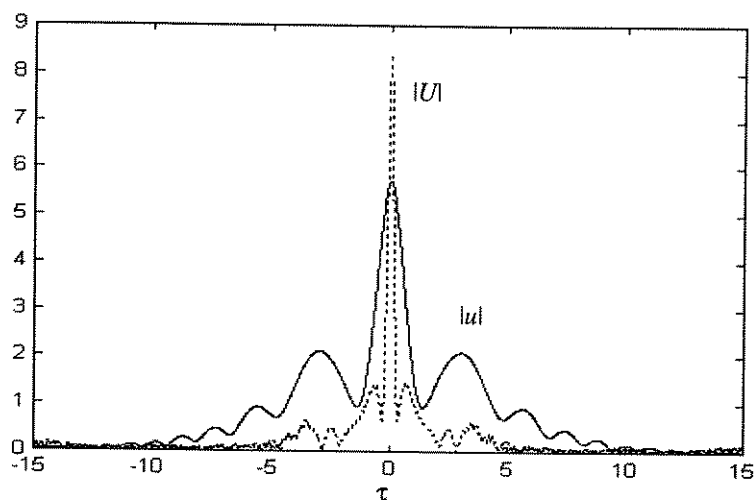


Fig. 6.3.2 - Pulsos na posição $\xi = 1,2566$, usando os dados da simulação I da Tab. 6.3.1 (estado 1)

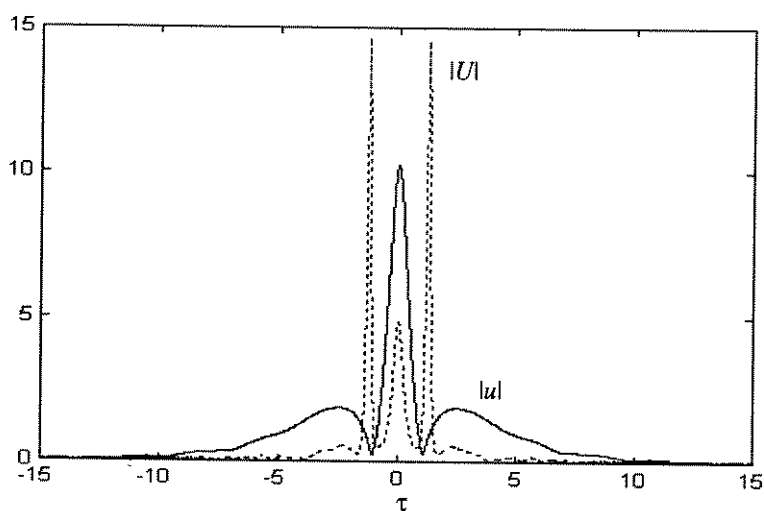


Fig. 6.3.3 - Pulsos na posição $\xi = 1,2566$, usando os dados da simulação I da Tab. 6.3.1 (estado 2)

As Figs. 6.3.2 e 6.3.3 mostram o resultado para a configuração da Fig. 6.3.1 atuando como compressor de largura de pulsos, nas quais as linhas sólidas representam os pulsos na saída do ressonador, que opera em dois estados, enquanto que as linhas pontilhadas representam os pulsos na saída do acoplador. Pode-se perceber a compressão dos pulsos e a quebra do pulso na Fig. 6.3.3. As Figs. 6.3.4 a 6.3.7, a seguir, mostram a configuração da Fig. 6.3.1 atuando como modulador. Novamente, a linha sólida representa o pulso na saída do ressonador e a linha pontilhada representa o pulso na saída do acoplador. As Figs. 6.3.4 e 6.3.5 mostram que o pulso de baixa intensidade foi quase totalmente chaveado para a saída da carga casada. As Figs. 6.3.6 e 6.3.7 mostram que o pulso de alta intensidade foi comprimido e parte dele foi acoplada à carga casada.

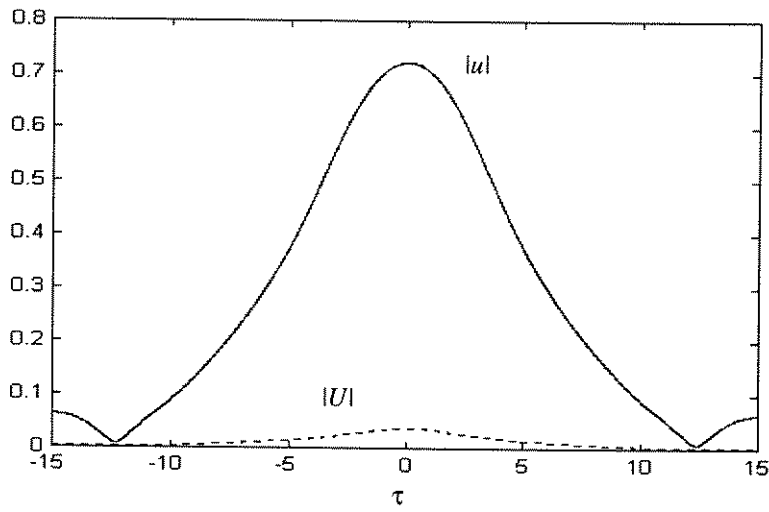


Fig. 6.3.4 - Pulsos na posição $\xi = 11,3097$, usando os dados da simulação II da Tab. 6.3.1

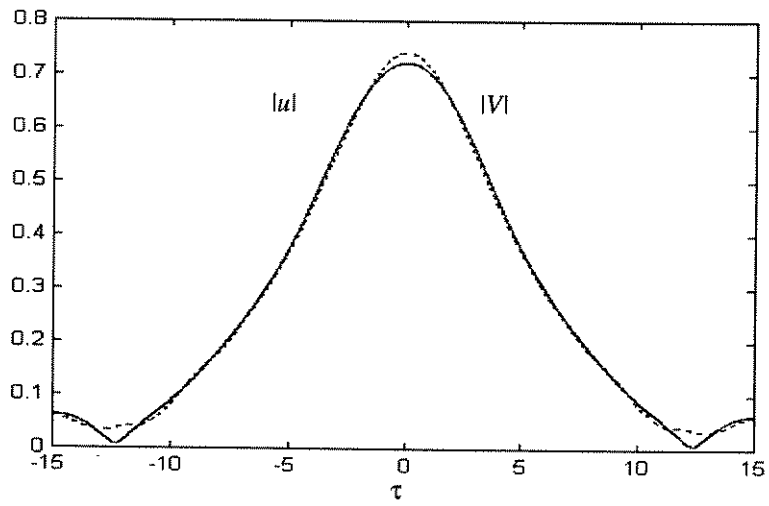


Fig. 6.3.5 - Pulsos na posição $\xi = 11,3097$, usando os dados da simulação II da Tab. 6.3.1

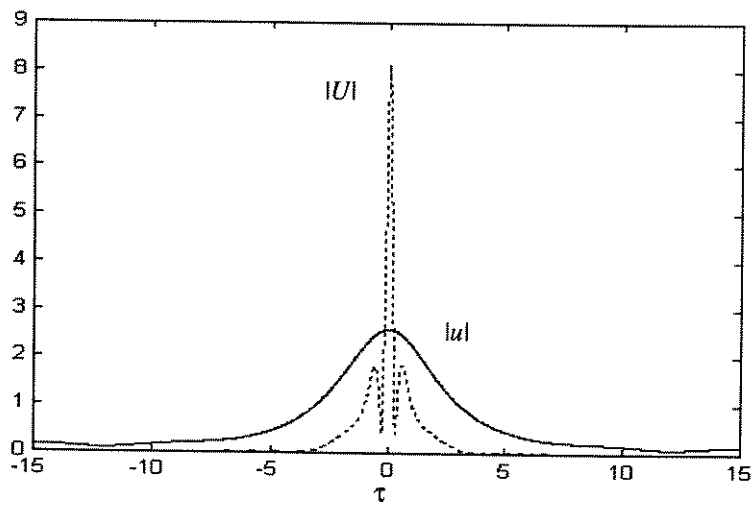


Fig. 6.3.6 - Pulsos na posição $\xi = 11,3097$, usando os dados da simulação II da Tab. 6.3.1

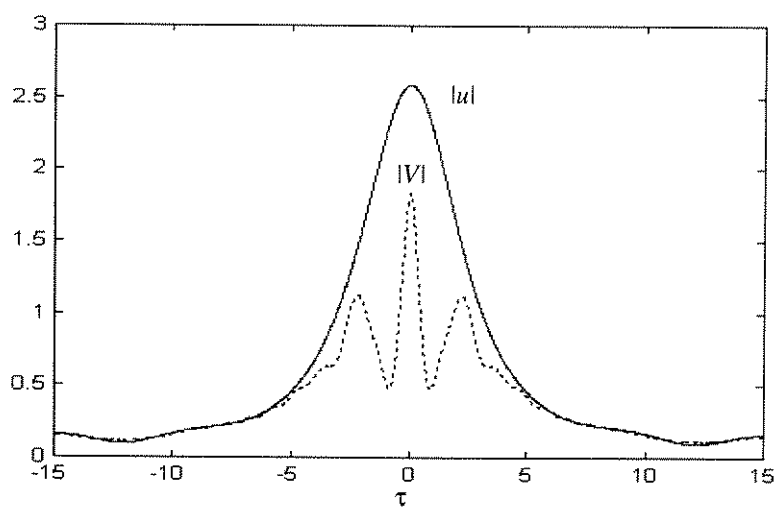


Fig. 6.3.7 - Pulsos na posição $\xi = 11,3097$, usando os dados da simulação II da Tab. 6.3.1

CAPÍTULO VII

Conclusões e Perspectivas

7.1 Conclusões

Aproveitando a não-linearidade das fibras ópticas podemos construir dispositivos ópticos não-lineares, como ressonadores e acopladores. Como mostrado no Cap. VI, estes dispositivos, em conjunto, podem atuar como geradores de pulsos, modeladores de pulsos, moduladores e compressores de largura de pulso. Outras aplicações também são possíveis, mas não foram objetivo de estudo nesta dissertação, como criptografia caótica e gerador de pulsos para CDMA óptico. Tomando como referência as simulações realizadas, algumas conclusões podem ser inferidas:

- Devido ao pequeno valor do coeficiente de não-linearidade da fibra, grandes comprimentos de fibra e lasers de alta potência são necessários para que os efeitos não-lineares sejam significativos.
- Um estudo analítico que permita explorar todas as características de funcionamento do ressonador não é viável, uma vez que nenhum modelo analítico do mesmo foi, até agora, proposto.
- O estudo do ressonador, através de simulações numéricas, exige a utilização de computadores de grande porte, pois o número de parâmetros a serem variados é grande e a simulação para cada conjunto de parâmetros é demorada.
- O ressonador com duplo anel permite um *mode-locking* totalmente passivo.
- Os ressonadores ópticos se apresentam como dispositivos práticos para a comprovação experimental dos conceitos e teorias de dinâmica não-linear.
- A dinâmica não-linear do ressonador, com anel duplo, é extremamente rica e oferece a possibilidade de descobrirmos constantes que sejam características do sistema, isto é, independentes da escolha dos valores dos parâmetros do ressonador.
- O modelo analítico proposto para o ressonador, baseado no método variacional, pode oferecer bons resultados quando utilizado em casos particulares.

7.2 Perspectivas

Nesta dissertação, procuramos apenas iniciar um estudo sobre dispositivos ópticos não-lineares a fibra. Diversos experimentos utilizando o ressonador e o acoplador não-linear, em conjunto, podem ser realizados e prometem oferecer bons resultados tecnológicos e científicos. Como possibilidade de trabalhos futuros podemos citar:

- Utilização de um acoplador não-linear no ressonador óptico.

- Utilização de amplificador óptico inserido no laço do ressonador, com ganho variável, para ser usado como parâmetro de controle.
- Configuração de ressonadores em série e/ou paralelo, ligados ou não por acopladores não-lineares.
- Configuração de ressonadores com mais de uma entrada de pulsos.
- Desenvolvimento de *softwares* que permitam a simulação da propagação simultânea de pulsos, em diferentes partes dos dispositivos, para simular as configurações acima descritas.
- Obtenção de uma expressão analítica para o comportamento do ressonador.
- Configurar o ressonador para operação em regime caótico e utilizar uma malha de realimentação externa para controle do caos.
- Verificar a possibilidade de utilização destes dispositivos em lógica digital óptica.

APÊNDICE 1

Software de Simulação

A1.1 Introdução

Para as simulações numéricas das equações existentes na presente dissertação, optamos por usar o software MATLAB 4.0. O MATLAB é um software escrito em linguagem C e que apresenta enormes facilidades de programação, cálculo matricial e armazenagem de dados, além de possuir poderosas rotinas gráficas. Estas facilidades permitem que programas complexos sejam escritos em poucas linhas. A desvantagem do MATLAB é a sua velocidade de processamento, que é menor que a de outras linguagens estruturadas.

Neste apêndice damos a listagem e explicamos, de forma bastante breve, os principais programas utilizados para as simulações desta dissertação.

A1.2 Função Split2.m

A função **split2.m** calcula, através do método *split-step* Fourier, o campo que se propaga por um trecho de fibra com tamanho L , dividindo este comprimento em quinze partes iguais. **Split2.m** recebe como parâmetros de entrada:

- Vetor correspondente ao operador linear $L(i\omega)$ descrito no Capítulo III.
- Campo no início da fibra.
- Variável indicando se o método utilizado será *split-step* Fourier básico ($Tp=2$) ou *split-step* Fourier simétrico ($Tp=1$).
- Passo de discretização espacial, h .
- Comprimento da fibra, L .

Fornece, na saída, o campo na posição $z = L$, ou seja, no fim da fibra. Esta função é utilizada pelos programas pulsos.m e pulsos2.m.

Listagem de split2.m

```
function [F] = split2(D1,S1,Tp,h,L)
global R
if (L~=0)
fim=ceil(L/(14*h))
for p=2:15,
if (Tp==1)
for cont=1:fim,
C=ifft(D1.*fft(S1));
B=exp(h*i*R*(abs(C).^2)).*C;
S1=ifft(D1.*fft(B));
end
elseif (Tp==2)
for cont=1:fim,
S1=ifft(D1.*fft(exp(h*i*R*(abs(S1).^2)).*S1));
```

```

end
end
p
end
end
F=S1;

```

A1.3 NLSE1.m

O programa **nlse1.m** resolve numericamente, usando o método *split-step* Fourier, as ENLS acopladas.

$$\frac{\partial u}{\partial z} + d_u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2u} \frac{\partial u^2}{\partial t^2} + R_3 v - iR_1 \left[|u|^2 + \alpha |v|^2 \right] u = 0 \quad (\text{A1.3.1})$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + d_v \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_{2v} \frac{\partial v^2}{\partial t^2} + R_3 u - iR_2 \left[|v|^2 + \alpha |u|^2 \right] v = 0 \quad (\text{A1.3.2})$$

O corpo deste programa está dividido em três partes:

- Entrada de valores para os parâmetros da fibra e formas dos pulsos u e v nas entradas.
- Implementação do método *split-step* Fourier.
- Armazenamento e apresentação gráfica das variáveis de saída.

Apesar de ter como finalidade principal o cálculo das Eqs. acopladas (A1.3.1) e (A1.3.2), o programa **nlse1.m** também pode ser usado para simular a ENLS bastando, para isso, fazer as variáveis α , R_3 e d_u nulas.

Listagem de nlse1.m

```

home
clear
pack
tmin=-15;
tmax=15;
dift=tmax-tmin;
Ts=dift/2047;
t=tmin:Ts:tmax;
n=length(t);
dw=2*pi/(n*Ts);
w1=dw*[0:n/2-1];
w2=dw*[-(n/2):-1];
w=[w1 w2];
L=4;
h=0.009;
B2u=-1;
B2v=-1;
R1=1;
R2=1;

```

```

R3=1;
du=0;
dv=0;
alfa=0;
fprintf('Vg du = %f \n',du);
fprintf('Vg dv = %f \n',dv);
fprintf('GVD B2u = %f \n',B2u);
fprintf('GVD B2v = %f \n',B2v);
fprintf('COEF. NÃO-LINEAR R1 = %f \n',R1);
fprintf('COEF. NÃO-LINEAR R2 = %f \n',R2);
fprintf('COEF. LINEAR R3 = %f \n',R3);
fprintf('COEF. ALFA = %f \n',alfa);
fprintf('PASSO h = %f \n',h);
disp('APERTE QUALQUER TECLA');
pause;
tp=0;
while (tp~=10)
tp=menu('PARÂMETROS','du','dv','B2u','B2v','R1','R2','R3','ALFA','h','SAIR');
if (tp==1)
du=input('ENTRE COM du ');
elseif (tp==2)
dv=input('ENTRE COM dv ');
elseif (tp==3)
B2u=input('ENTRE COM B2u ');
elseif (tp==4)
B2v=input('ENTRE COM B2v ');
elseif (tp==5)
R1=input('ENTRE COM R1 ');
elseif (tp==6)
R2=input('ENTRE COM R2 ');
elseif (tp==7)
R3=input('ENTRE COM R3 ');
elseif (tp==8)
alfa=input('ENTRE COM ALFA ');
elseif (tp==9)
h=input('ENTRE COM h ');
end
end
ot=input('TECLADO OU ARQUIVO (1/2) ');
if (ot==1)
op=menu('FORMA DO PULSO u','SECANTE HIPERBÓLICA','TANGENTE
HIPERBÓLICA','DUPLA SECANTE');
if (op~=3)
Nu=input('ENTRE COM Nu ');
tou=input('ENTRE COM tou ');
end
if (op==1)
tu=(tou)/1.6574544;
u=Nu*sech(t/tu);

```

```

elseif (op==2)
tu=(tou)/0.385968416;
u=exp((-t.^2/600).^5).*(Nu*tanh(t/tu));
elseif (op==3)
N=input('ENTRE COM N ');
Au=input('ENTRE COM Au ');
dt=input('ENTRE COM A SEPARACAO dt ');
u=N*(sech(Au*(t+dt))-sech(Au*(t-dt)));
end
op=menu('FORMA DO PULSO v','SECANTE HIPERBÓLICA','TANGENTE
HIPERBÓLICA');
Nv=input('ENTRE COM Nv ');
tov=input('ENTRE COM tov ');
if (op==1)
tv=(tov)/1.6574544;
v=Nv*sech(t/tv);
elseif (op==2)
tv=(tov)/0.385968416;
v=exp((-t.^2/600).^5).*(Nv*tanh(t/tv));
end
else
load dados2.mat
u=pulso(29,:);
v=pulso(28,:);
clear pulso area
end
x=zeros(50,2048);
tpm=zeros(50,2048);
p1=zeros(50,2048);
p2=zeros(50,2048);
p3=zeros(50,2048);
tpm(1,:)=t;
p1(1,:)=u;
p2(1,:)=v;
p3(1,:)=u+v;
Du=exp(0.5*h*(i*du*w+0.5*i*B2u*(w.^2)));
Dv=exp(0.5 *h*(i*dv*w+0.5*i*B2v*(w.^2)));
B1=zeros(1,2048);
B2=zeros(1,2048);
%-----
fim=ceil(L/(49*h))
for p=2:50,
for cont=1:fim,
Cu=ifft(Du.*fft(u));
Cv=ifft(Dv.*fft(v));
if (R3==0)
Bu=exp(h*i*R1*((abs(Cu).^2)+alfa*(abs(Cv).^2))).*Cu;
Bv=exp(h*i*R2*((abs(Cv).^2)+alfa*(abs(Cu).^2))).*Cv;
else

```

```

f1=R3*Cv+R1*(abs(Cu).^2+alfa*abs(Cv).^2).*Cu;
f2=R3*Cu+R2*(abs(Cv).^2+alfa*abs(Cu).^2).*Cv;
Bv=Cv+i*h*f2;
Bu=Cu+i*h*f1;
for cnt=1:3,
f3=R3*Bv+R1*(abs(Bu).^2+alfa*abs(Bv).^2).*Bu;
f4=R3*Bu+R2*(abs(Bv).^2+alfa*abs(Bu).^2).*Bv;
Bu=Cu+(h/2)*i*(f1+f3);
Bv=Cv+(h/2)*i*(f2+f4);
end
end
u=ifft(Du.*fft(Bu));
v=ifft(Dv.*fft(Bv));
end
if (any(isnan(abs(u))))|any(isnan(abs(v))))
    break;
end
x(p,:)=(p-1)*h*fim*ones(1,2048);
tpm(p,:)=t;
p1(p,:)=u;
p2(p,:)=v;
p3(p,:)=u+v;
p
end
%-----
fill3(x',tpm',abs(p1),'G');
pause;
fill3(x',tpm',abs(p2),'G');

```

A1.4 Pulsos.m

O programa **pulsos.m** se destina à simulação do ressonador simples a fibra. Ele se utiliza da função **split2.m** para realizar a propagação do pulso na fibra do ressonador. O corpo deste programa está dividido em três partes:

- Entrada de valores para os parâmetros da fibra e do acoplador. Escolha da forma dos pulsos que alimentam o ressonador.
- Criação de variáveis e cálculo das variáveis de saída.
- Armazenamento e apresentação gráfica das variáveis de saída.

A finalidade principal deste programa é a determinação da forma dos pulsos na saída do ressonador, dada uma forma fixa de pulsos na entrada. Pequenas mudanças em **pulsos.m** o torna apto para o cálculo do diagrama de bifurcação do ressonador.

Listagem de pulsos.m

```

clear
pack
home
global R

```

```

%-----PARÂMETROS DA FIBRA-----
op=menu('ESCOLHA O COMP. DE ONDA','1.31um','1.55um');
if(op==1)
op2=menu('ESCOLHA UMA FIBRA','FIBRA 1 -> B2=0.25 B3=-0.08 a=0.3db','FIBRA
2 -> B2=7.4 B3=-0.075 a=0.3');
if(op2==1)
B2=0.25/1000; B3=-0.08/1000; a=0.0000345; R=0.0048;
else
B2=7.4/1000; B3=-0.075/1000; a=0.0000345; R=0.0048;
end
else
op2=menu('ESCOLHA UMA FIBRA','FIBRA 1 -> B2=-20.4 B3=0.1 a=0.3db','FIBRA
2 -> B2=-2.5 B3=0.1 a=0.3db');
if (op2==1)
B2=-20.4/1000; B3=0.1/1000; a=0.0000345; R=0.0013;
else
B2=-2.5/1000; B3=0.1/1000; a=0.0000345; R=0.0013;
end
end
k=0.95;g=0.05;
opq=0;
while (opq~=3)
opq=menu('DESEJA ALTERAR OS PARÂMETROS k e/ou g?','k','g','sair');
if (opq==1)
k=input('ENTRE COM k ');
elseif (opq==2)
g=input('ENTRE COM g ');
end
fprintf('COEF. ACOPLAMENTO k = %f \n',k);
fprintf('PERDAS g = %f \n',g);
pause;
end
Mi=sqrt((1-k)*(1-g));
M2i=sqrt((1-g)*k);
%-----MUDANÇAS DOS PARÂMETROS DA FIBRA-----
opq=menu('DESEJA ALTERAR OS PARÂMETROS ?','SIM', 'Não');
if (opq==1)
home
op2=0;
while (op2~=5),
op2=menu('ESCOLHA O PARÂMETRO',...
'DISPERSÃO B2',...
'DISPERSÃO B3',...
'ATENUAÇÃO a',...
'NÃO-LINEAR R',...
'SAIR');
if (op2==1)
B2=input('ENTRE COM B2 ');
B2=B2/1000;

```

```

elseif (op2==2)
B3=input('ENTRE COM B3 ');
B3=B3/1000;
elseif (op2==3)
a=input('ENTRE COM a ');
a=a/4.343;
elseif (op2==4)
R=input('ENTRE COM R ');
end
if (op2~=5)
fprintf('DISPERSÃO B2 = %f \n',B2);
fprintf('DISPERSÃO B3 = %f \n',B3);
fprintf('ATENUAÇÃO a = %f \n',a);
fprintf('COEF. NÃO-LINEAR R = %f \n',R);
disp('APERTE QUALQUER TECLA');
pause;
home
end
end
end
%-----UNIDADES-----
%----- B2=B3=Ps/m --- R=1/(Wm) ---- a=1/m -----
%-----ENTRADA DE DADOS-----
opt=input('TECLADO/ARQUIVO (1/2) ');
q1=input('ENTRE COM q1 ');
NV=input('ENTRE COM O NÚMERO DE VOLTAS ');
tp=menu('ALGORITMO','SPLIT-STEP SIMÉTRICO','SPLIT-STEP BÁSICO');
if (opt==1)
N=input('ENTRE COM A AMPLITUDE DO PULSO ');
to=input('ENTRE COM A LARGURA DO PULSO ');
op3=menu('FORMA DO PULSO','SECANTE HIPERBÓLICA','GAUSSIANA');
t1=(to)/1.6574544;
else
load dados2.mat
u=pulso(29,:);
v=pulso(28,:);
clear pulso area Lm Hm Hc
end
h=1.5;
if (op==1)
B=2*pi/(1.31*1e-6);
else
B=2*pi/(1.55*1e-6);
end
L=q1/B
%-----CRIAÇÃO DE VETORES-----
area=zeros(1,NV);
Lm=zeros(1,NV);
Hm=zeros(1,NV);

```

```

Hc=zeros(1,NV);
H=zeros(1,2048);
E1=zeros(1,2048);
pulso=zeros(NV,2048);
%-----
tmin=-15;
tmax=15;
dift=tmax-tmin;
Ts=dift/2047;
t=tmin:Ts:tmax;
n=length(t);
dw=2*pi/(n*Ts);
w1=dw*[0:n/2-1];
w2=dw*[-(n/2):-1];
w=[w1 w2];
if (tp==1)
D=exp(0.5*h*(0.5*i*B2*(w.^2)-i*(B3/6)*(w.^3)-a/2));
else
D=exp(h*(0.5*i*B2*(w.^2)-(B3/6)*i*(w.^3)-a/2));
end
%-----
Ex=zeros(1,2048);
Ey=zeros(1,2048);
for nv=1:NV,
    if (opt==1)
        E1=N*sqrt(abs(B2)/(R*sqr(t1)))*sech(t/t1);
    else
        if (any(~rem(nv,2)))
            E1=u;
        else
            E1=v;
        end
    end
    H=Mi*E1+i*M2i*Ey*exp(i*q1);
    Ex=i*M2i*E1+Mi*Ey*exp(i*q1);
    Ey=split2(D,Ex,tp,h,L);
    vet=integral(t,H);
    area(nv)=vet(1);
    Lm(nv)=vet(2);
    Hm(nv)=H(750);
    Hc(nv)=H(1024);
    pulso(nv,:)=abs(H);
    nv
    save dados4 Lm area Hm Hc pulso
end

```

A1.5 Pulsos2.m

O programa **pulsos2.m** é destinado à simulação do ressonador com duplo anel. Todas as informações referentes a **pulsos.m** são válidas para **pulsos2.m**.

Listagem de pulsos2.m

```
clear
pack
home
global R
%-----PARÂMETROS DA FIBRA-----
op=menu('ESCOLHA O COMP. DE ONDA','1.31um','1.55um');
if(op==1)
op2=menu('ESCOLHA UMA FIBRA','FIBRA 1 -> B2=0.25 B3=-0.08 a=0.3db','FIBRA
2 -> B2=7.4 B3=-0.075 a=0.3');
if(op2==1)
B2=0.25/1000; B3=-0.08/1000; a=0.0000345; R=0.0048;
else
B2=7.4/1000; B3=-0.075/1000; a=0.0000345; R=0.0048;
end
else
op2=menu('ESCOLHA UMA FIBRA','FIBRA 1 -> B2=-20.4 B3=0.1 a=0.3db','FIBRA
2 -> B2=-2.5 B3=0.1 a=0.3db');
if (op2==1)
B2=-20.4/1000; B3=0.1/1000; a=0.0000345; R=0.0013;
else
B2=-2.5/1000; B3=0.1/1000; a=0.0000345; R=0.0013;
end
end
k=0.95;g=0.05;
ke=0.95; ge=0.05;
opq=0;
while (opq~=5)
opq=menu('DESEJA ALTERAR OS PARÂMETROS ki e/ou gi?','ki','gi','ke','ge','sair');
if (opq==1)
k=input('ENTRE COM ki ');
elseif (opq==2)
g=input('ENTRE COM gi ');
elseif (opq==3)
ke=input('ENTRE COM ke ');
elseif (opq==4)
ge=input('ENTRE COM ge ');
end
fprintf('COEF. ACOPLAMENTO ki = %f \n',k);
fprintf('PERDAS gi = %f \n',g);
fprintf('COEF. ACOPLAMENTO ke = %f \n',ke);
fprintf('PERDAS ge = %f \n',ge);
pause;
end
Mi=sqrt((1-k)*(1-g));
```

```

M2i=sqrt((1-g)*k);
Me=sqrt((1-ke)*(1-ge));
M2e=sqrt((1-ge)*ke);
%-----MUDANÇAS DOS PARÂMETROS DA FIBRA-----
opq=menu('DESEJA ALTERAR OS PARÂMETROS ?','SIM', 'Não');
if (opq==1)
home
op2=0;
while (op2~=5),
op2=menu('ESCOLHA O PARÂMETRO',...
'DISPERSÃO B2',...
'DISPERSÃO B3',...
'ATENUAÇÃO a',...
'NÃO-LINEAR R',...
'SAIR');
if (op2==1)
B2=input('ENTRE COM B2 ');
B2=B2/1000;
elseif (op2==2)
B3=input('ENTRE COM B3 ');
B3=B3/1000;
elseif (op2==3)
a=input('ENTRE COM a ');
a=a/4.343;
elseif (op2==4)
R=input('ENTRE COM R ');
end
if (op2~=5)
fprintf('DISPERSÃO B2 = %f \n',B2);
fprintf('DISPERSÃO B3 = %f \n',B3);
fprintf('ATENUAÇÃO a = %f \n',a);
fprintf('COEF. NÃO-LINEAR R = %f \n',R);
disp('APERTE QUALQUER TECLA');
pause;
home
end
end
end
%-----UNIDADES-----
%----- B2=B3=Ps/m --- R=1/(Wm) ---- a=1/m -----
%-----ENTRADA DE DADOS-----
q1=input('ENTRE COM q1 ');
cw=input('ENTRE COM A AMPLITUDE CW ');
N=input('ENTRE COM A AMPLITUDE DO PULSO ');
to=input('ENTRE COM A LARGURA DO PULSO ');
NV=input('ENTRE COM O NÚMERO DE VOLTAS ');
tp=menu('ALGORITMO','SPLIT-STEP SIMÉTRICO','SPLIT-STEP BÁSICO');
op3=menu('FORMA DO PULSO','SECANTE HIPERBÓLICA','SINUSOIDAL');
op4=menu('EXCITAÇÃO','CW','TREM DE PULSOS');

```

```

h=0.5;
if (op==1)
B=2*pi/(1.31*1e-6);
else
B=2*pi/(1.55*1e-6);
end
L=q1/B
t1=(to)/1.6574544;
%-----CRIAÇÃO DE VETORES-----
area=zeros(1,NV);
Lm=zeros(1,NV);
Hm=zeros(1,NV);
Hc=zeros(1,NV);
E1=zeros(1,2048);
E2=zeros(1,2048);
E4=zeros(1,2048);
Ein=zeros(1,2048);
Eout=zeros(1,2048);
Ex=zeros(1,2048);
Ey=zeros(1,2048);
pulso=zeros(NV,2048);
%-----
tmin=-15;
tmax=15;
dift=tmax-tmin;
Ts=dift/2047;
t=tmin:Ts:tmax;
n=length(t);
dw=2*pi/(n*Ts);
w1=dw*[0:n/2-1];
w2=dw*[-(n/2):-1];
w=[w1 w2];
if (tp==1)
D=exp(0.5*h*(0.5*i*B2*(w.^2)-i*(B3/6)*(w.^3)-a/2));
else
D=exp(h*(0.5*i*B2*(w.^2)-(B3/6)*i*(w.^3)-a/2));
end
%-----
if (op3==1)
E1=cw+N*sqrt(abs(B2)/(R*sqr(t1)))*sech(t/t1);
elseif (op3==2)
E1=cw+N*sin(2*pi*t/t1);
end
for nv=1:NV,
E4=i*M2e*E1+Me*E2*exp(i*q1);
Ein=Me*E1+i*M2e*E2*exp(i*q1);
Eout=Mi*Ein+i*M2i*Ey*exp(i*q1);
Ex=i*M2i*Ein+Mi*Ey*exp(i*q1);
Ey=split2(D,Ex,tp,h,L);

```

```

E2=split2(D,Eout,tp,h,L);
if (op4==1)
    E1=cw*ones(1,2048);
end
vet=integral(t,E4);
area(nv)=vet(1);
Lm(nv)=vet(2);
Hm(nv)=E4(750);
Hc(nv)=E4(1024);
pulso(nv,:)=abs(E4);
nv
save dados5 Lm area Hm Hc pulso
end

```

APÊNDICE 2

Transformada de Espalhamento Inverso (TEI)

A2.1 - Introdução

Problemas de espalhamento inverso são de grande interesse para a ciência. Na engenharia elétrica, o exemplo mais típico é o da construção da imagem de um objeto irradiado, através da radiação espalhada pelo mesmo. Em outras palavras, a radiação espalhada pelo objeto serão os dados a serem utilizados na construção da imagem do mesmo. A TEI, para a solução de equações diferenciais parciais não-lineares, utiliza as mesmas idéias. O objeto que espalha as ondas é uma função potencial e os dados espalhados são devidamente escolhidos e utilizados na construção daquele. A relação entre os dados espalhados e o potencial que os espalha é unívoca. A idéia básica é transformar a equação diferencial parcial não-linear de duas variáveis em dois sistemas de equações lineares para uma função de onda, relacionados entre si por uma condição de compatibilidade. Os sistemas são descritos por [Ref. 6.5]:

$$L(Z)\Psi = \zeta \Psi \quad (A2.1.1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Z} = M(Z)\Psi \quad (A2.1.2)$$

L e M são operadores diferenciais em T . A Eq. (A2.1.1) é uma equação de autovalores, com autovalores ζ , enquanto que a Eq. (A2.1.2) dá a evolução, em Z , da função de onda Ψ . Aqui, particularmente, temos [Refs. 6.1 e 6.5]:

$$\frac{d\zeta}{dZ} = 0 \quad (A2.1.3)$$

Portanto, L evolui de tal forma que seus autovalores permanecem constantes. A condição de compatibilidade entre (A2.1.1) e (A2.1.2) é [Ref. 6.5]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z \partial T} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial Z} \quad (A2.1.4)$$

que junto com (A2.1.3) dá:

$$\frac{\partial L}{\partial Z} = ML - LM \equiv [M, L] \quad (A2.1.5)$$

M e L formam o chamado “ par de Lax ” do sistema integrável. A Eq. (A2.1.5) é a equação de Lax e dá a representação, em forma de operadores, de um sistema integrável. O par de Lax para a ENLS é [Ref. 6.5]:

$$L = \begin{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial T} & q \\ -q^* & -i \frac{\partial}{\partial T} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.6})$$

$$M = \begin{pmatrix} i \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{2} i |q|^2 & q \frac{\partial}{\partial T} + \frac{1}{2} \frac{\partial q}{\partial T} \\ -q^* \frac{\partial}{\partial T} - \frac{1}{2} \frac{\partial q^*}{\partial T} & -i \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{1}{2} i |q|^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.7})$$

Portanto a ENLS pode ser escrita na forma de (A2.1.5), utilizando (A2.1.6) e (A2.1.7) [Ref. 6.1]. $q(T, Z)$ é o potencial que espalha ψ . A utilização da TEI consiste em resolver primeiramente o problema de espalhamento direto para $q(T, 0)$, este já previamente conhecido, determinando os dados espalhados e suas evoluções com Z . Uma vez determinados os dados espalhados, os utilizaremos para resolver o problema inverso. Nas próximas seções, sem exagerado rigor matemático, descreveremos as etapas e resolveremos o problema direto para $q(T, 0) = A \text{sech}(T)$.

A2.2 - O Problema do Espalhamento Direto

O problema do espalhamento direto consiste em encontrar os dados espalhados pelo potencial, em $Z = 0$. Para isso, devemos resolver a Eq. (A2.1.1), aqui repetida, e encontrar seus autovalores.

$$i \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} + q \Psi_2 = \zeta \Psi_1 \quad (\text{A2.2.1})$$

$$-i \frac{\partial \Psi_2}{\partial T} - q^* \Psi_1 = \zeta \Psi_2 \quad (\text{A2.2.2})$$

Para $\zeta = \xi$, pertencentes aos reais, definimos dois pares de soluções linearmente independentes, o primeiro par é $\phi(Z, T, \xi)$ e $\bar{\phi}(Z, T, \xi)$, e o segundo $\psi(Z, T, \xi)$ e $\bar{\psi}(Z, T, \xi)$

onde:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A2.2.3.a})$$

$$\bar{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix} \quad (\text{A2.2.3.b})$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A2.2.4.a})$$

$$\bar{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_2^* \\ -\psi_1^* \end{pmatrix} \quad (\text{A2.2.4.b})$$

Tais soluções devem possuir os seguintes comportamentos assintóticos [Refs. 6.1, 6.2 e 6.5]:

$$\phi(Z, T, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\xi T), \quad T \rightarrow -\infty \quad (\text{A2.2.5})$$

$$\bar{\phi}(Z, T, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(i\xi T), \quad T \rightarrow -\infty \quad (\text{A2.2.6})$$

$$\psi(Z, T, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(i\xi T), \quad T \rightarrow +\infty \quad (\text{A2.2.7})$$

$$\bar{\psi}(Z, T, \xi) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-i\xi T), \quad T \rightarrow +\infty \quad (\text{A2.2.8})$$

Estas soluções estão relacionadas por :

$$\phi = a\bar{\psi} + b\psi \rightarrow \begin{pmatrix} a \exp(-i\xi T) \\ b \exp(i\xi T) \end{pmatrix}, \quad T \rightarrow +\infty \quad (\text{A2.2.9})$$

$$\bar{\phi} = \bar{b}\bar{\psi} - \bar{a}\psi \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{b} \exp(-i\xi T) \\ -\bar{a} \exp(i\xi T) \end{pmatrix}, \quad T \rightarrow +\infty \quad (\text{A2.2.10})$$

Os coeficientes $a, \bar{a}, b$ e $\bar{b}$ formarão os dados espalhados. Tais coeficientes são obtidos através dos wronskianos (determinantes) das matrizes formadas pelas soluções $\phi, \bar{\phi}, \psi$ e $\bar{\psi}$ [Ref. 6.2]:

$$a = W(\phi, \psi) \quad (\text{A2.2.11.a})$$

$$b = -W(\phi, \bar{\psi}) \quad (\text{A2.2.11.b})$$

$$\bar{a} = W(\bar{\phi}, \bar{\psi}) \quad (\text{A2.2.11.c})$$

$$\bar{b} = W(\bar{\phi}, \psi) \quad (\text{A2.2.11.d})$$

nas quais

$$W(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (\text{A2.2.12})$$

Utilizando (A2.2.9)-(A2.2.12) é fácil encontrar que:

$$W(\phi, \bar{\phi}) = -1 \quad (\text{A2.2.13})$$

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \quad (\text{A2.2.14})$$

$a(\zeta, Z)$ pode ser analiticamente estendida à metade superior do plano $\text{Re}(\zeta) \times \text{Im}(\zeta)$, enquanto que $\bar{a}(\zeta, Z)$ pode ser analiticamente estendida à metade inferior do mesmo plano. Os autovalores discretos ζ_K , $K=1,2,\dots,N$, do sistema (A2.2.1) e (A2.2.2), pertencentes à metade superior do plano $\text{Re}(\zeta) \times \text{Im}(\zeta)$, ($\text{Im}(\zeta) > 0$), são os zeros de $a(\zeta, Z)$ e os demais autovalores discretos, pertencentes à metade inferior do plano $\text{Re}(\zeta) \times$

$\text{Im}(\zeta)$, ($\text{Im}(\zeta) > 0$), são os zeros de $\bar{a}(\zeta, Z)$. No geral, $b(\zeta, Z)$ e $\bar{b}(\zeta, Z)$ são definidos apenas no eixo real de ζ mas, se $q(T, \zeta, Z)$ tiver um suficiente decaimento exponencial quando $T \rightarrow \pm\infty$, as regiões de analiticidade poderão ser estendidas e $b(\zeta_K, Z)$ será o valor de b no autovalor ζ_K ; o mesmo vale para $\bar{b}$, com os autovalores na metade inferior do plano ($\text{Im}(\zeta_K) < 0$). Os dados espalhados são:

$$\frac{b(T, \zeta, Z)}{a(T, \zeta, Z)} \quad (\text{A2.2.15})$$

$$\frac{\bar{b}(T, \zeta, Z)}{\bar{a}(T, \zeta, Z)} \quad (\text{A2.2.16})$$

$$\frac{\bar{b}(T, \zeta, Z)}{a(T, \zeta, Z)} \quad (\text{A2.2.17})$$

$$\frac{b(T, \zeta, Z)}{\bar{a}(T, \zeta, Z)} \quad (\text{A2.2.18})$$

para ζ no eixo real, e os resíduos dos pólos destes quocientes. Para pólos simples, temos os resíduos de (A2.2.15) dados por:

$$\text{Res}_{\zeta=\zeta_K} \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} = \frac{b(\zeta_K)}{\frac{\partial a(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_K}} \quad (\text{A2.2.19})$$

Para que possamos construir o potencial, para qualquer valor da coordenada Z , devemos saber como os dados espalhados evoluem com Z . Esta evolução é encontrada usando (A2.1.2) e (A2.1.7) e são da seguinte forma [Ref. 6.1 e 6.5]:

$$a(\zeta, Z) = a(\zeta, 0) \quad (\text{A2.2.20})$$

$$\bar{a}(\zeta, Z) = \bar{a}(\zeta, 0) \quad (\text{A2.2.21})$$

$$b(\zeta, Z) = b(\zeta, 0) \exp(2i\zeta^2 Z) \quad (\text{A2.2.22})$$

$$\bar{b}(\zeta, Z) = \bar{b}(\zeta, 0) \exp(-2i\zeta^2 Z) \quad (\text{A2.2.23})$$

A2.3 - O Problema Inverso

Possuindo os dados espalhados e a forma de evolução dos mesmos com Z , podemos construir o potencial q aplicando as fórmulas de inversão descritas nas Refs. 6.1, 6.2 e 6.5:

$$\bar{\psi}(T, \zeta, Z) \exp(i\zeta T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{b(\zeta', Z)}{a(\zeta', Z)} \frac{\psi(T, \zeta', Z)}{\zeta' - \zeta} \exp(i\zeta' T) d\zeta' \quad (\text{A2.3.1})$$

$$\bar{\phi}(T, \zeta, Z) \exp(-i\zeta T) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{\bar{b}(\zeta', Z)}{a(\zeta', Z)} \frac{\phi(T, \zeta', Z)}{\zeta' - \zeta} \exp(-i\zeta' T) d\zeta' \quad (\text{A2.3.2})$$

$$\psi(T, \zeta, Z) \exp(-i\zeta T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{\bar{b}(\zeta', Z)}{\bar{a}(\zeta', Z)} \frac{\bar{\psi}(T, \zeta', Z)}{\zeta' - \zeta} \exp(-i\zeta' T) d\zeta' \quad (\text{A2.3.3})$$

$$\phi(T, \zeta, Z) \exp(i\zeta T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{b(\zeta', Z)}{\bar{a}(\zeta', Z)} \frac{\bar{\phi}(T, \zeta', Z)}{\zeta' - \zeta} \exp(i\zeta' T) d\zeta' \quad (\text{A2.3.4})$$

O contorno C_1 é o contorno no plano complexo ζ , começando em $\zeta = -\infty + i0^+$, passando sobre todos os zeros de $a(\zeta, Z)$ e terminando em $\zeta = +\infty + i0^+$. O contorno C_2 é o contorno no plano complexo ζ , começando em $\zeta = -\infty + i0^-$, passando sob todos os zeros de $\bar{a}(\zeta, Z)$ e terminando em $\zeta = +\infty + i0^-$. As Eqs. (A2.3.1)-(A2.3.4) podem ser colocadas na forma de equações integrais lineares do tipo de Marchenko [Refs. 6.1 e 6.2]:

$$\bar{K}(T, Z, Y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(T + Y, Z) + \int_T^\infty K(T, Z, S) F(S + Y, Z) dS = 0 \quad (Y > T) \quad (\text{A2.3.5})$$

$$K(T, Z, Y) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{F}(T + Y, Z) - \int_T^\infty \bar{K}(T, Z, S) \bar{F}(S + Y, Z) dS = 0 \quad (Y > T) \quad (\text{A2.3.6})$$

$$\bar{L}(T, Z, Y) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} G(T + Y, Z) - \int_{-\infty}^T L(T, Z, S) G(S + Y, Z) dS = 0 \quad (Y < T) \quad (\text{A2.3.7})$$

$$L(T, Z, Y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{G}(T + Y, Z) + \int_{-\infty}^T \bar{L}(T, Z, S) \bar{G}(S + Y, Z) dS = 0 \quad (Y < T) \quad (\text{A2.3.8})$$

nas quais

$$K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A2.3.9})$$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A2.3.10})$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A2.3.11})$$

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A2.3.12})$$

$K, \bar{K}, L$ e $\bar{L}$ são chamados de núcleos. $F, \bar{F}, G$ e $\bar{G}$ valem, respectivamente:

$$F(w,Z) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{c_1} \frac{b(\zeta,Z)}{a(\zeta,Z)} \exp(i\zeta w) d\zeta = -i \sum_{k=1}^N \frac{b(\zeta_k,Z)}{\left. \frac{\partial a(\zeta,Z)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_k}} \exp(i\zeta_k w) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\xi,Z)}{a(\xi,Z)} \exp(i\xi w) d\xi \quad (\text{A2.3.13})$$

$$\bar{F}(w,Z) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{c_2} \frac{\bar{b}(\zeta,Z)}{\bar{a}(\zeta,Z)} \exp(-i\zeta w) d\zeta = i \sum_{k=1}^N \frac{\bar{b}(\zeta_k,Z)}{\left. \frac{\partial \bar{a}(\zeta,Z)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_k}} \exp(-i\zeta_k w) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}(\xi,Z)}{\bar{a}(\xi,Z)} \exp(-i\xi w) d\xi \quad (\text{A2.3.14})$$

$$G(w,Z) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{c_1} \frac{\bar{b}(\zeta,Z)}{a(\zeta,Z)} \exp(-i\zeta w) d\zeta = i \sum_{k=1}^N \frac{\bar{b}(\zeta_k,Z)}{\left. \frac{\partial a(\zeta,Z)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_k}} \exp(-i\zeta_k w) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{b}(\xi,Z)}{a(\xi,Z)} \exp(-i\xi w) d\xi \quad (\text{A2.3.15})$$

$$\bar{G}(w,Z) \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{c_2} \frac{b(\zeta,Z)}{\bar{a}(\zeta,Z)} \exp(i\zeta w) d\zeta = -i \sum_{k=1}^N \frac{b(\zeta_k,Z)}{\left. \frac{\partial \bar{a}(\zeta,Z)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_k}} \exp(i\zeta_k w) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\xi,Z)}{\bar{a}(\xi,Z)} \exp(i\xi w) d\xi \quad (\text{A2.3.16})$$

nas quais o teorema dos resíduos foi usado e todos os pólos foram considerados simples. Se a ou $\bar{a}$ têm zeros no eixo real, então, no somatório, i é trocado por $i/2$ para estes pólos e a integral é trocada por seu valor principal de Cauchy. Finalmente, o valor de $q(T,Z)$ é encontrado a partir de [Ref. 6.1, 6.2]:

$$K_1(T,T,Z) = -\bar{L}_1(T,T,Z) = -\frac{q(T,Z)}{2} \quad (\text{A2.3.17})$$

$$K_2(T,T,Z) = \bar{K}_1(T,T,Z) = -\frac{1}{2} \int_T^{\infty} |q(T,Z)|^2 dT \quad (\text{A2.3.18})$$

$$L_1(T,T,Z) = -\bar{L}_2(T,T,Z) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^T |q(T,Z)|^2 dT \quad (\text{A2.3.19})$$

A2.4 Determinação dos Dados Espalhados para $q(0,T) = A \operatorname{sech}(T)$

Começamos resolvendo o problema direto com as seguintes substituições nas Eqs. (A2.2.1) e (A2.2.2):

$$\Psi_1 = \psi_1 \exp(i\zeta T) \quad (\text{A2.4.1})$$

$$\Psi_2 = \psi_2 \exp(i\zeta T) \quad (\text{A2.4.2})$$

$$q(0,T) = A \operatorname{sech}(T) \quad (\text{A2.4.3})$$

Após as substituições obtemos:

$$i \frac{\partial \psi_1}{\partial T} - 2\zeta \psi_1 + A \sec h(T) \psi_2 = 0 \quad (\text{A2.4.4})$$

$$-i \frac{\partial \psi_2}{\partial T} = A \sec h(T) \psi_1 \quad (\text{A2.4.5})$$

Resolvendo para ψ_1 , em (A2.4.5), e substituindo em (A2.4.4), chegamos a :

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial T^2} + [2i\zeta + \tanh(T)] \frac{\partial \psi_2}{\partial T} + A^2 \sec^2 h(T) \psi_2 = 0 \quad (\text{A2.4.6})$$

Utilizamos, agora, a seguinte transformação em (A2.4.6) :

$$\psi_2 = F(w(T)) \quad (\text{A2.4.7})$$

Após simples manipulações algébricas, obtemos:

$$\left(\frac{dw}{dT} \right)^2 \frac{d^2 F(w)}{dw^2} + \left\{ [2i\zeta + \tanh(T)] \frac{dw}{dT} + \frac{d^2 w}{dT^2} \right\} \frac{dF(w)}{dw} + A^2 \sec^2 h(T) F(w) = 0 \quad (\text{A2.4.8})$$

Procuramos, agora, igualar a Eq. (A2.4.8) a uma equação diferencial ordinária com coeficientes variáveis cuja solução seja conhecida. Se fizermos [Ref. 6.3]:

$$\left(\frac{dw}{dT} \right)^2 = w(1-w) \quad (\text{A2.4.9})$$

cuja solução é:

$$w = \frac{1}{2} [1 + \tanh(T)] \quad (\text{A2.4.10})$$

e substituímos (A2.4.10) em (A2.4.8), obtemos:

$$w(1-w) \frac{d^2 F}{dw^2} + \left(i\zeta + \frac{1}{2} - w \right) \frac{dF}{dw} + A^2 F = 0 \quad (\text{A2.4.11})$$

A Eq. (A2.4.11) tem uma forma padrão conhecida, sua solução é uma função hipergeométrica e é representada por uma série de potências. A forma de F não é necessária, mas algumas de suas propriedades, abaixo relacionadas, serão usadas.

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)} \quad (\text{A2.4.12})$$

$$\frac{dF(a,b;c;w)}{dw} = \frac{ab}{c} F(a+1,b+1;c+1;w) \quad (\text{A2.4.13})$$

$$F(a,b;c;w) = (1-w)^{c-a-b} F(c-a,c-b;c;w) \quad (\text{A2.4.14})$$

$$F(a,b;c;0) = 1 \quad (\text{A2.4.15})$$

sendo

$$a = A \quad (\text{A2.4.16})$$

$$b = -A \quad (\text{A2.4.17})$$

$$c = i\zeta + \frac{1}{2} \quad (\text{A2.4.18})$$

Γ é a conhecida função gama dada por :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (\text{A2.4.19})$$

com as seguintes propriedades:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \quad (\text{A2.4.20.a})$$

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha} \quad (\text{A2.4.20.b})$$

Esta última implica em :

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k)} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (\text{A2.4.21})$$

De (A2.4.7), temos:

$$\psi_2 = F\left(A, -A; i\zeta + \frac{1}{2}; w\right) \quad (\text{A2.4.22})$$

Fazendo uso de (A2.4.5) e (A2.4.13), encontramos:

$$\psi_1 = \frac{A \sec h(T)}{2\left(i\zeta + \frac{1}{2}\right)} F\left(A+1, 1-A; i\zeta + \frac{3}{2}; w\right) \quad (\text{A2.4.23})$$

Voltamos, agora, às Eqs. (A2.4.1) e (A2.4.2) e realizamos as seguintes substituições:

$$\Psi_1 = \phi_1 \exp(-i\zeta T) \quad (\text{A2.4.24})$$

$$\Psi_2 = \phi_2 \exp(-i\zeta T) \quad (\text{A2.4.25})$$

$$q(0, T) = A \sec h(T) \quad (\text{A2.4.26})$$

Procedendo de forma semelhante à anterior, encontramos :

$$\phi_1 = F\left(A, -A; \frac{1}{2} - i\zeta; w\right) \quad (\text{A2.4.27})$$

$$\phi_2 = \frac{-A \sec h(T)}{2\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right)} F\left(A + 1, 1 - A; \frac{3}{2} - i\zeta; w\right) \quad (\text{A2.4.28})$$

Os dois pares de soluções encontrados são os pares descritos na Seção A2.2:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{F\left(A, -A; \frac{1}{2} + i\zeta; 1\right)} \begin{pmatrix} \frac{A \sec h(T)}{2\left(\frac{1}{2} + i\zeta\right)} F\left(A + 1, 1 - A; \frac{3}{2} + i\zeta; w\right) \\ F\left(A, -A; \frac{1}{2} + i\zeta; w\right) \end{pmatrix} \exp(i\zeta T) \quad (\text{A2.4.29})$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\left(A, -A; \frac{1}{2} - i\zeta; w\right) \\ \frac{-A \sec h(T)}{2\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right)} F\left(A + 1, 1 - A; \frac{3}{2} - i\zeta; w\right) \end{pmatrix} \exp(-i\zeta T) \quad (\text{A2.4.30})$$

É fácil verificar que (A2.4.29) e (A2.4.30) satisfazem as condições (A2.2.5)-(A2.2.8). De (A2.2.9) e (A2.2.10), verificamos que:

$$\phi_1 \rightarrow a \exp(-i\zeta T) \quad (\text{A2.4.31})$$

$$\phi_2 \rightarrow b \exp(i\zeta T) \quad (\text{A2.4.32})$$

$$\phi_2^* \rightarrow \bar{b} \exp(-i\zeta T) \quad (\text{A2.4.33})$$

$$\phi_1^* \rightarrow \bar{a} \exp(i\zeta T) \quad (\text{A2.4.34})$$

quando $T \rightarrow \infty$.

Usando (A2.4.30), (A2.4.31) e (A2.4.34), obtemos:

$$a = F\left(A, -A; \frac{1}{2} - i\zeta; 1\right) \quad (\text{A2.4.35})$$

$$a = \bar{a}^* \quad (\text{A2.4.36})$$

Com (A2.4.30) e (A2.4.32), temos:

$$b = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{-A \sec h(T) F\left(A+1, 1-A; \frac{3}{2} - i\zeta; w\right)}{2\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right)} \exp(-2i\zeta T) \quad (\text{A2.4.37})$$

Usando (A2.4.10) e (A2.4.14) em (A2.4.37), obtemos:

$$b = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{-Aw^{1/2} (1-w)^{1/2} (1-w)^{\frac{-1-i\zeta}{2}} F\left(\frac{1}{2} - i\zeta - A, \frac{1}{2} - i\zeta + A; \frac{3}{2} - i\zeta; w\right) w^{-i\zeta}}{\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right) (1-w)^{-i\zeta}} \quad (\text{A2.4.38})$$

Mas

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow 1} F\left(\frac{1}{2} - i\zeta - A, \frac{1}{2} - i\zeta + A; \frac{3}{2} - i\zeta; w\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} - i\zeta\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} - i\zeta\right)}{\Gamma(A+1) \Gamma(1-A)} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2} - i\zeta\right)}{A \Gamma(A) \Gamma(1-A)} = \frac{\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right) \text{sen}(\pi A)}{A \text{sen}\left(\pi\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right)\right)} \end{aligned} \quad (\text{A2.4.39})$$

As Eqs. (A2.4.12), (A2.4.20.a) e (A2.4.20.b) foram utilizadas para a obtenção de (A2.4.39).

Portanto, com (A2.4.38) e (A2.4.39), obtemos:

$$b = -\frac{\text{sen}(\pi A)}{\cosh(\pi \zeta)} \quad (\text{A2.4.40})$$

É direta a verificação que:

$$\bar{b} = b^* = b \quad (\text{A2.4.41})$$

Os autovalores discretos que procuramos são os zeros de a ($\text{Im}(\zeta) > 0$) e $\bar{a}$ ($\text{Im}(\zeta) < 0$). De (A2.4.35) e (A2.4.12), temos:

$$a = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2} - i\zeta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\zeta - A\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\zeta + A\right)} \quad (\text{A2.4.42})$$

Os zeros de a são os pólos do denominador de (A2.4.42). Fazemos, agora:

$$\begin{aligned}\zeta &= \xi + i\eta \\ \eta &> 0\end{aligned}\tag{A2.4.43}$$

Substituindo (A2.4.43) em (A2.4.42) e usando (A2.4.21), encontramos que os pólos de

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\xi + \eta - A\right)\tag{A2.4.44}$$

são dados por:

$$\frac{1}{2} - i\xi + \eta - A = 0, -1, -2, -3, \dots\tag{A2.4.45}$$

Da Eq. (A2.4.45), podemos notar a importância do valor de pico da secante hiperbólica, A , para a solução da ENLS. Para que haja algum pólo, devemos ter inicialmente $\xi = 0$. O valor de A determinará quantos pólos existem. Por exemplo, se $A = 1$ então $\eta = 0,5$ será o único valor que satisfaz (A2.4.45); logo, só existirá um pólo. Se $A = 2$, então poderemos ter $\eta = 0,5$ e $\eta = 1,5$ e, portanto, existirão dois pólos. É simples verificar que o segundo termo do denominador de (A2.4.42) não tem pólos. Agindo de forma semelhante, encontraremos que os pólos de $\bar{a}$ são os conjugados dos pólos de a .

Conhecendo a , $\bar{a}$, b , $\bar{b}$ e os autovalores discretos, usamos as equações da Seção A2.3 para encontrarmos a função $q(z, T)$. Se A for um número inteiro, então, de (A2.4.40) e (A2.4.41), verifica-se que as integrais no segundo membro das Eqs. (A2.3.13)-(A2.3.16) serão nulas. Nesta situação, a solução é chamada de N sólito, onde N é a ordem do sólito e o número de autovalores discretos.

APÊNDICE 3

Método Variacional para Solução da Equação Não-Linear de Schrödinger

A3.1 Introdução

O método variacional [Ref. 3.8] é uma alternativa para a solução de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, sendo extensivamente usado. O método consiste, basicamente, em encontrar o lagrangeano, função de outra função e suas derivadas, tal que, quando a função, solução procurada da equação diferencial, for posta no lagrangeano, a integral deste no espaço considerado, alcançará um valor extremo, isto é, um mínimo ou máximo. Como o problema de encontrar a função que minimiza o lagrangeano é tão difícil quanto encontrar a solução da equação diferencial diretamente, aplicamos ao lagrangeano, como aproximação, uma função teste com parâmetros variáveis. Aplicamos àquela as equações de Euler-Lagrange [Ref. 3.8], obtendo um sistema de equações diferenciais geralmente mais simples que o original. A aproximação será tão boa quanto melhor for a escolha da função teste.

Para a ENLS, a função teste será o produto de secante hiperbólica e exponencial complexa. A secante hiperbólica fornece, como parâmetros, a amplitude e largura do pulso, enquanto a exponencial fornece a fase e gorjeio. Todos os parâmetros serão funções da coordenada de posição. Aplicamos, então, as equações de Euler-Lagrange e obteremos um sistema de equações diferenciais ordinárias relacionando os parâmetros.

A3.2 Aplicação à ENLS

Seja a ENLS, representando o caso geral de fibra com dispersão, perdas e/ou ganhos, que são funções da coordenada espacial ξ :

$$i \frac{\partial F}{\partial \xi} + d(\xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} + C(\xi) |F|^2 F = 0 \quad (\text{A3.2.1})$$

Seja, agora, a função energia:

$$E(u) = \iint_{\Omega} L \left(u, u^*, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u^*}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \tau}, \frac{\partial u^*}{\partial \tau} \right) d\xi d\tau \quad (\text{A3.2.2})$$

L é o lagrangeano e, se desejarmos que a Eq. (A3.2.2) represente a Eq. (A3.2.1), E atingirá um valor extremo quando $u = F$. Ω é o espaço $\xi \times \tau$. Vamos, agora, definir uma função qualquer $h(\xi, \tau)$, pertencente ao domínio Ω , e que se anule na fronteira ($c\Omega$) do mesmo. Com isso, podemos definir a função u na vizinhança da função F como:

$$u = F + \alpha h \quad (\text{A3.2.3})$$

e, portanto, temos E parametrizada por α . Para que E possua um extremo devemos ter:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (\text{A3.2.4})$$

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial u^*} \frac{\partial u^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial u_{\xi}} \frac{\partial u_{\xi}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial u_{\xi}^*} \frac{\partial u_{\xi}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial u_{\tau}} \frac{\partial u_{\tau}}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial u_{\tau}^*} \frac{\partial u_{\tau}^*}{\partial \alpha} \right) d\xi d\tau \quad (\text{A3.2.5})$$

Calculando as derivadas de u , u_{ξ} e u_{τ} (o sub-índice indica a derivada parcial em relação à variável contida no mesmo) em relação a α e separando os termos complexos conjugados, obtemos:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u} h + \frac{\partial L}{\partial u_{\xi}} h_{\xi} + \frac{\partial L}{\partial u_{\tau}} h_{\tau} \right) d\xi d\tau + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial u^*} h^* + \frac{\partial L}{\partial u_{\xi}^*} h_{\xi}^* + \frac{\partial L}{\partial u_{\tau}^*} h_{\tau}^* \right) d\xi d\tau \quad (\text{A3.2.6})$$

Seja, agora, a integração por partes, para duas variáveis, como mostrada abaixo [Ref. 3.9]:

$$\iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial (fg)}{\partial x} - g \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\partial \Omega} f g dy - \iint_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x} dx dy \quad (\text{A3.2.7})$$

Se g se anula na fronteira $\partial \Omega$, ficamos com:

$$\iint_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x} dx dy = - \iint_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x} dx dy \quad (\text{A3.2.8})$$

Usando a Eq. (A3.2.8) na primeira parte do lado direito da Eq. (A3.2.6), obtemos:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial u_{\xi}} h_{\xi} d\xi d\tau = - \iint_{\Omega} h \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial L}{\partial u_{\xi}} d\xi d\tau \quad (\text{A3.2.9})$$

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial u_{\tau}} h_{\tau} d\xi d\tau = - \iint_{\Omega} h \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial u_{\tau}} d\xi d\tau \quad (\text{A3.2.10})$$

Substituindo (A3.2.9) e (A3.2.10) em (A3.2.6), e exigindo que cada termo do segundo membro se anule individualmente, obtemos para o primeiro termo de (A3.2.6):

$$\iint_{\Omega} h \left(\frac{\partial L}{\partial F} - \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial F_{\xi}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial F_{\tau}}}{\partial \tau} \right) d\xi d\tau = 0 \quad (\text{A3.2.11})$$

Como $h(\xi, \tau)$ é uma função qualquer, para que a Eq. (A3.2.11) seja satisfeita, devemos ter:

$$\frac{\partial L}{\partial F} - \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial F_{\xi}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial F_{\tau}}}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{A3.2.12})$$

Para o segundo termo do lado direito da Eq. (A3.2.6) , trabalhando de forma semelhante, obtemos:

$$\frac{\partial L}{\partial F^*} - \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial F_{\xi}^*}}{\partial \xi} - \frac{\partial \frac{\partial L}{\partial F_{\tau}^*}}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{A3.2.13})$$

O sub-índice indica a derivada parcial em relação à variável contida no mesmo. Neste momento, devemos encontrar o lagrangeano L de tal forma que, quando este for substituído nas Eqs. (A3.2.13) e (A3.2.12) , apareça a Eq. (A3.2.1) e sua complexa conjugada. O lagrangeano abaixo [Ref. 3.1,3.2,3.4] satisfaz essas condições:

$$L = \frac{i}{2} \left(F \frac{\partial F^*}{\partial \xi} - F^* \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) + d(\xi) \left| \frac{\partial F}{\partial \tau} \right|^2 - \frac{C(\xi)}{2} |F|^4 \quad (\text{A3.2.14})$$

Assumimos, agora, uma forma padrão para F :

$$F = a(\xi) T \left(\frac{\tau}{b(\xi)} \right) \exp \left[i\theta(\xi) + i\mu(\xi)\tau^2 \right] \quad (\text{A3.2.15})$$

θ - Fase

μ - *Chirp* (Gorjeio)

a - Amplitude

b - Largura

T - secante hiperbólica

Após a substituição deste F em (A3.2.14), obtemos:

$$L = a^2 |T|^2 \left(\theta_{\xi} + \mu_{\xi} \tau^2 \right) + d \left[4a^2 |T|^2 \mu^2 \tau^2 + \frac{a^2}{b^2} \left| \frac{dT}{dS} \right|^2 \right] - \frac{C}{2} a^4 |T|^4 \quad (\text{A3.2.16})$$

$$S = \frac{\tau}{b} \quad (\text{A3.2.17})$$

Para tornar L função de uma única variável, fazemos sua integração em relação a τ :

$$\langle L \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} L d\tau \quad (\text{A3.2.18})$$

$$\begin{aligned} \langle L \rangle = & a^2 b \theta_{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^2 dS + a^2 b^3 \mu_{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^2 S^2 dS - \frac{C}{2} a^4 b \int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^4 dS + \\ & + d \left[\frac{a^2}{b} \int_{-\infty}^{\infty} |T_S(S)|^2 dS + 4a^2 b^3 \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^2 S^2 dS \right] \end{aligned} \quad (\text{A3.2.19})$$

Substituindo $\langle L \rangle$ nas equações de Euler-Lagrange (Eqs. (A3.2.12) e (A3.2.13) para uma variável, abaixo escritas), obtemos:

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \theta} - \frac{d \left(\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \theta_{\xi}} \right)}{d\xi} = 0 \Rightarrow a^2(\xi) b(\xi) \equiv N^2 \quad (\text{A3.2.20})$$

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \mu} - \frac{d \left(\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial \mu_{\xi}} \right)}{d\xi} = 0 \Rightarrow \frac{db}{d\xi} = 4d(\xi) \mu(\xi) b(\xi) \quad (\text{A3.2.21})$$

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial a} - \frac{d \left(\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial a_{\xi}} \right)}{d\xi} = 0 \quad (\text{A3.2.22})$$

$$\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial b} - \frac{d \left(\frac{\partial \langle L \rangle}{\partial b_{\xi}} \right)}{d\xi} = 0 \quad (\text{A3.2.23})$$

Manipulando algebricamente as Eqs. (A3.2.20), (A3.2.22) e (A3.2.23), obtemos:

$$\frac{d\mu}{d\xi} + 4d(\xi) \mu^2(\xi) = \frac{d(\xi) K_1}{b^4} - \frac{C(\xi) N^2 K_2}{b^3} \quad (\text{A3.2.24})$$

sendo

$$K_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |T_s(S)|^2 dS}{\int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^2 S^2 dS} \quad (\text{A3.2.25})$$

$$K_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^4 dS}{4 \int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^2 S^2 dS} \quad (\text{A3.2.26})$$

Fazendo

$$V(\xi) = \mu(\xi) b(\xi) \quad (\text{A3.2.27})$$

e substituindo nas Eqs. (A3.2.21) e (A3.2.24), ficamos com o sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares abaixo:

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{d(\xi)K_1}{b^3} - \frac{C(\xi)N^2 K_2}{b^2} \quad (\text{A3.2.28})$$

$$\frac{db}{d\xi} = 4d(\xi)V \quad (\text{A3.2.29})$$

Também, através da manipulação das Eqs. (A3.2.22) e (A3.2.23), chegamos a:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{C(\xi)N^2 K_4}{b} - \frac{d(\xi)K_3}{b^2} \quad (\text{A3.2.30})$$

$$K_3 = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} |T_s(S)|^2 dS}{\int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^2 dS} \quad (\text{A3.2.31})$$

$$K_4 = \frac{5 \int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^4 dS}{2 \int_{-\infty}^{\infty} |T(S)|^2 dS} \quad (\text{A3.2.32})$$

A3.3 ENLS Em Um Meio Sem Perdas ou Ganhos

Para obtermos a ENLS, a partir da Eq. (A3.2.1), fazemos $d(\xi) = 0,5$ e $C(\xi) = 1$. A função T é uma secante hiperbólica e, por isso, as Eqs. (A3.2.25) e (A3.2.26) valem, respectivamente, $K_1 = 2$ e $K_2 = 4/\pi^2$. Desta forma, as Eqs. (A3.2.28) e (A3.2.29) se tornam:

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{1}{b^3} - \frac{4N^2}{\pi^2 b^2} \quad (\text{A3.3.1})$$

$$\frac{db}{d\xi} = 2V \quad (\text{A3.3.2})$$

com as seguintes condições iniciais:

$$b(\xi=0) = b_o \text{ (largura inicial do pulso)} \quad (\text{A3.3.3})$$

$$V(\xi=0) = 0 \Rightarrow \mu(\xi=0) = 0 \text{ (gorjeio inicial nulo)} \quad (\text{A3.3.4})$$

$$a(\xi=0) = \frac{N}{\sqrt{b_o}} \text{ (amplitude inicial)} \quad (\text{A3.3.5})$$

Com a solução do sistema de Eqs. (A3.3.1) e (A3.3.2), as demais funções que compõem a solução padrão, Eq. (A3.2.15), são obtidas a partir das equações abaixo:

$$a(\xi) = \frac{N}{\sqrt{b(\xi)}} \quad (\text{A3.3.6})$$

$$\mu(\xi) = \frac{V(\xi)}{b(\xi)} \quad (\text{A3.3.7})$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{K_4 N^2}{b(\xi)} - \frac{K_3}{2b^2(\xi)} \quad (\text{A3.3.8})$$

Iniciamos a solução do sistema dividindo (A3.3.1) por (A3.3.2):

$$\frac{dV}{db} = \frac{b^{-3} - Kb^{-2}}{2V} \quad (\text{A3.3.9})$$

$$K = \frac{4N^2}{\pi^2} \quad (\text{A3.3.10})$$

Após integração da Eq. (A3.3.9), com as condições iniciais (A3.3.3) e (A3.3.4), encontramos:

$$V = \frac{\sqrt{\frac{1}{2b_o^2} - \frac{K}{b_o}}}{b} \sqrt{(b - b_o) \left(b + \frac{b_o}{1 - 2Kb_o} \right)} \quad (\text{A3.3.11})$$

A Eq. (A3.3.11) define o plano de fase $V \times b$. V deve ser real e, portanto, a relação entre K e b_o define quais os valores que b poderá assumir. Distinguimos entre dois casos:

- 1º caso : $Kb_o < 0,5$

Nesta situação, para que V assuma valores reais, b deverá pertencer a um dos intervalos:

$$b < \frac{-b_o}{1-2Kb_o} \text{ ou } b > b_o \quad (\text{A3.3.12})$$

Assumindo que b só terá valores positivos, isto implica que a largura do pulso crescerá indefinidamente, a partir de b_o , representando a dispersão do pulso e, portanto, a não formação de sóliton. As Figs. A3.3.1 e A3.3.2 mostram o plano de fase e o crescimento quase linear de b com a coordenada espacial ξ , nas condições de $N = 1$ e $b_o = 1$, o que corresponde a $kb_o = 0,4053$.

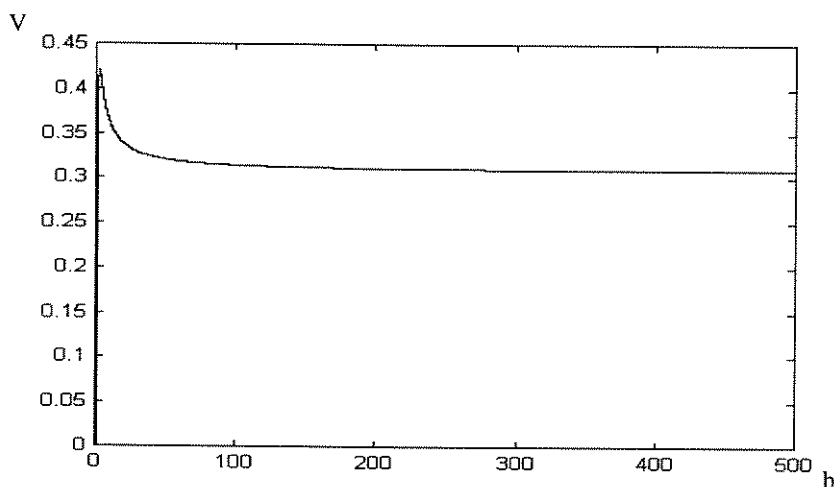


Fig. A3.3.1 - Plano de Fase $V \times b$

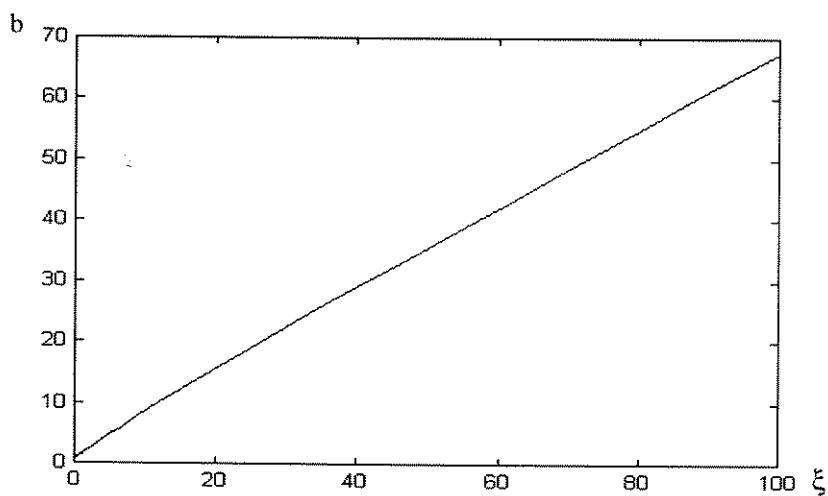


Fig. A3.3.2 - Dinâmica da largura do pulso - $b \times \xi$

- 2º caso: $Kb_o > 0,5$

Nesta situação, para que V assumia valores reais, b deverá pertencer ao intervalo:

$$\min\left(b_o, \frac{-b_o}{1-2Kb_o}\right) > b > \max\left(b_o, \frac{-b_o}{1-2Kb_o}\right) \quad (\text{A3.3.13})$$

O valor da largura do pulso fica confinado, oscilando entre os dois extremos do intervalo, durante a propagação. A amplitude do pulso também oscilará, devido à Eq. (A3.3.6). Se o intervalo de oscilação, que é dependente do produto Kb_o , for pequeno, teremos uma boa aproximação da propagação de sólitons. As Figs. A3.3.3 e A3.3.4 mostram o plano de fase e o comportamento oscilatório de b com a coordenada espacial ξ , nas condições de $N = 1$ e $b_o = 2,46$, correspondendo a $kb_o = 0,997$.

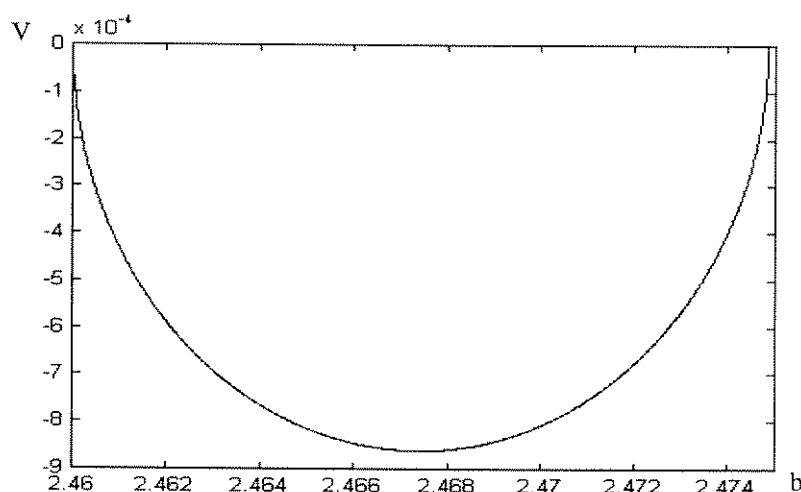


Fig. A3.3.3 - Plano de Fase $V \times b$

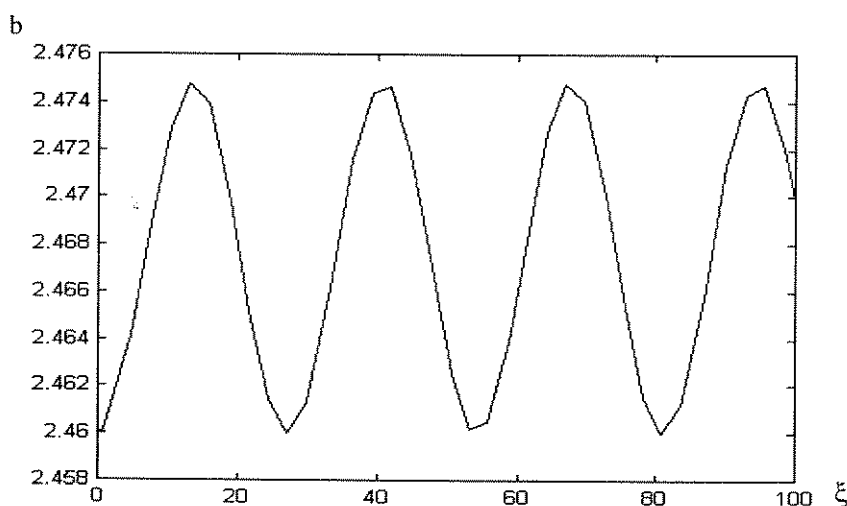


Fig. A3.3.4 - Dinâmica da largura do pulso - $b \times \xi$

A3.4 ENLS Em Um Meio Com Perdas e Ganhos

Na transmissão de dados a longas distâncias, as perdas na fibra devem ser compensadas por amplificadores ópticos, por exemplo, EDFA (Erbium Doped Fiber Amplifier) sob pena do pulso deixar de ser solitônico, devido à superação dos efeitos da não-linearidade pela dispersão e, até, chegar a níveis de intensidade que comprometeriam a inteligibilidade do sinal pelo receptor. O espaçamento destes

amplificadores, ξ_a , deve ser tal que permita a recuperação do sóliton, após este passar por aquele. A configuração é mostrada na Fig. A3.4.1:

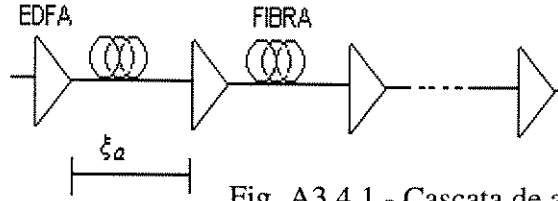


Fig. A3.4.1 - Cascata de amplificadores ópticos espaçados de ξ_a .

Esta configuração pode ser modelada pela ENLS com a inclusão do termo G , normalizado pelo comprimento de dispersão, representando o ganho com dependência da coordenada espacial ξ :

$$i \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} + |F|^2 F = -i\Gamma F + iG(\xi)F \quad (\text{A3.4.1})$$

Se o comprimento de fibra de um amplificador individual for bem menor que o período solitônico, então ele poderá ser representado pela função delta [Ref. 3.5]. O ganho G , neste caso, fica igual a:

$$G(\xi) = \sum_{n=1}^K \alpha_n \delta(\xi - \xi_n) \quad (\text{A3.4.2})$$

Em (A3.4.2), α_n representa o ganho individual do n -ésimo amplificador. Neste caso, a Eq. (A3.4.1) fica na forma:

$$i \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} + |F|^2 F = i \left\{ -\Gamma + \sum_{n=1}^K \alpha_n \delta(\xi - \xi_n) \right\} F \quad (\text{A3.4.3})$$

A Eq. (A3.4.3) não está na forma hamiltoniana mas, usando a transformação [Refs. 3.3 e 3.4]:

$$F = u \cdot \exp(H(\xi)) \quad (\text{A3.4.4})$$

na qual

$$H(\xi) = \int_0^\xi \left\{ -\Gamma + \sum_{n=1}^K \alpha_n \delta(\zeta - \xi_n) \right\} d\zeta \quad (\text{A3.4.5})$$

obtemos

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \exp(2H(\xi)) |u|^2 u = 0 \quad (\text{A3.4.6})$$

A Eq. (A3.4.6) está na forma hamiltoniana, sendo estruturalmente idêntica à Eq. (A3.2.1) com $d(\xi) = 0,5$ e $C(\xi) = \exp(2H(\xi))$. Para acharmos uma solução qualitativa, partimos das Eqs. (A3.2.28) e (A3.2.29), aplicamos os mesmos passos lá realizados, e encontramos os valores possíveis de b que fazem V assumir sempre valores reais. Novamente, temos dois casos:

- 1º caso: $Kb_o C(\xi) < 0,5$

Nesta situação, para que V assuma valores reais, b deverá pertencer a um dos intervalos

$$b < \frac{-b_o}{1-2Kb_o C(\xi)} \text{ ou } b > b_o \quad (\text{A3.4.7})$$

Portanto, para kb_o dado pela amplitude e largura iniciais do pulso, quando $C(\xi)$ for tal que $Kb_o C(\xi) < 0,5$, b crescerá.

- 2º caso: $Kb_o C(\xi) > 0,5$

Nesta situação, para que V assuma valores reais, b deverá pertencer ao intervalo

$$\min\left(b_o, \frac{-b_o}{1-2Kb_o C(\xi)}\right) > b > \max\left(b_o, \frac{-b_o}{1-2Kb_o C(\xi)}\right) \quad (\text{A3.4.8})$$

A largura do pulso oscilará entre os dois extremos do intervalo, que dependem de ξ , durante a propagação. A amplitude do pulso também oscilará, devido à Eq. (A3.3.6). Devemos conhecer $C(\xi)$ para inferirmos o comportamento qualitativo de b . Efetuando a integral da Eq. (A3.4.5), encontramos que $C(\xi)$ é dado por:

$$C(\xi) = \begin{cases} C_{n-1} \exp(-2\Gamma(\xi - (n-1)\xi_a)) & \text{para } (n-1)\xi_a < \xi < n\xi_a \\ (1+\alpha_n)^2 C_{n-1} \exp(-2\Gamma\xi_a) = C_n & \text{em } \xi = n\xi_a + \varepsilon^+ \end{cases} \quad (\text{A3.4.9})$$

ε^+ é um pequeno incremento positivo. C_n é o valor de $C(\xi)$ a ε^+ à direita do n -ésimo amplificador. Percebemos que, se fizermos o ganho $\alpha_n = \exp(\Gamma\xi_a) - 1$, para todo n , então $C(\xi)$ será periódico, com período ξ_a , e as perdas nos trechos de fibra passiva serão compensadas pelos ganhos dos amplificadores. O comportamento periódico de $C(\xi)$ impõe a b um comportamento também periódico, no qual b cresce durante o percurso entre os amplificadores e, logo após atravessar um destes, retoma seu valor inicial. Se ξ_a for suficientemente pequeno, poderemos ter a situação caracterizada pelo caso dois, no qual não há alargamento contínuo do pulso em nenhum instante. Tal situação implica no uso de um maior número de amplificadores, com o aumento direto nos custos de projeto.

A3.5 Uso do Método Variacional em Acopladores Não-Lineares

Mostrando sua grande aplicabilidade, o método variacional também pode ser aplicado no estudo analítico de acopladores não-lineares. Aqui apenas apresentamos a formulação.

O sistema de equações que modelam o acoplador é [Refs. 5.1,5.2,5.3 e 5.4]:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u + Kv = 0 \quad (\text{A3.5.1.a})$$

$$i \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau^2} + |v|^2 v + Ku = 0 \quad (\text{A3.5.1.b})$$

$$L_c = \frac{\pi}{2C} \quad (\text{A3.5.2})$$

$$K = \frac{z_o}{L_c} = CL_D \quad (\text{A3.5.3})$$

K é o parâmetro de acoplamento que relaciona o período solitônico z_o e o comprimento do acoplador L_c , e C é a constante de acoplamento linear. O lagrangeano foi encontrado como sendo [Ref. 5.2]:

$$L = i \frac{1}{2} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{4} \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|^2 - \frac{1}{4} \left| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right|^2 + \frac{1}{4} |u|^4 + \frac{1}{4} |v|^4 + kuv^* + c.c. \quad (\text{A3.5.4})$$

As soluções padrões para u e v são [Ref. 5.2]:

$$u = a(\xi) \sec h \left(\frac{\tau}{b(\xi)} \right) \cos(\varphi(\xi)) \exp \left[i\theta(\xi) + i\mu(\xi)\tau^2 \right] \quad (\text{A3.5.5})$$

$$v = a(\xi) \sec h \left(\frac{\tau}{b(\xi)} \right) \sin(\varphi(\xi)) \exp \left[i\theta(\xi) + i\mu(\xi)\tau^2 \right] \quad (\text{A3.5.6})$$

φ é o ângulo de acoplamento que determina o acoplamento da potência entre os núcleos das fibras. Os demais parâmetros têm os mesmos significados de quando foram usados na Seção A3.2. Podemos definir a transmissividade do acoplador como a razão entre as energias do sinal que entra no acoplador e o que sai pela mesma fibra:

$$T = \frac{|u(\xi = L_c, \tau = 0)|^2}{|u(\xi = 0, \tau = 0)|^2} = \cos^2(\varphi(\xi)) \quad (\text{A3.5.7})$$

Substituindo (A3.5.5) e (A3.5.6) em (A3.5.4), e trabalhando, como na Seção A3.2, pode-se determinar analiticamente a transmissividade T , com razoável grau de realidade, dentro dos limites impostos pelas formas padrões de u e v .

APÊNDICE 4

Modelamento Analítico do Ressonador Simples, com Amplificador Inserido no Laço, Através do Método Variacional

A4.1 Introdução

Aproveitamos os resultados obtidos no Apêndice 3, através do método variacional, para propor um simples, aproximado e restrito modelo analítico do ressonador óptico com amplificador inserido no laço. A Fig. A4.1.1 apresenta a configuração a ser modelada:

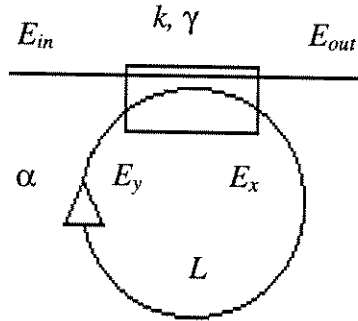


Fig. A4.1.1 - Ressonador com amplificador inserido no laço

O amplificador será modelado apenas pelo ganho α . A fibra é considerada sem perdas. Apenas um pulso é inserido no ressonador; depois disso, fazemos $E_{in} = 0$. O amplificador é responsável pela permanência deste pulso dentro do ressonador, uma vez que as perdas intrínsecas do acoplador o atenuaria.

A4.2 Modelamento Analítico

Incluindo α nas Eqs. (5.2.2.a)-(5.2.3), do Cap. V, temos:

$$E_{out}(n,t) = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}} \left[(1-k)^{\frac{1}{2}} E_{in}(n,t) + i\alpha k^{\frac{1}{2}} E_y(n,t) \exp(i\beta L) \right] \quad (A4.2.1)$$

$$E_x(n,t) = (1-\gamma)^{\frac{1}{2}} \left[ik^{\frac{1}{2}} E_{in}(n,t) + \alpha (1-k)^{\frac{1}{2}} E_y(n,t) \exp(i\beta L) \right] \quad (A4.2.2)$$

$$E_y(n,t) = G(E_x(n-1,t)) \quad (A4.2.3)$$

Todas as variáveis envolvidas têm os mesmos significados já descritos anteriormente. Semelhante ao Apêndice 3, o campo E , em qualquer instante e posição, será da forma:

$$E = a(z) \sec h \left(\frac{t}{b(z)} \right) \exp(i\theta(z) + i\mu(z)t^2) \quad (A4.2.4)$$

Portanto, teremos:

$$E_x = a(z=0) \sec h \left(\frac{t}{b(z=0)} \right) \exp(i\theta(z=0) + i\mu(z=0)t^2) \quad (\text{A4.2.5})$$

$$E_y = a(z=L) \sec h \left(\frac{t}{b(L=0)} \right) \exp(i\theta(z=L) + i\mu(z=L)t^2) \quad (\text{A4.2.6})$$

Conhecendo as formas de evolução da amplitude, largura, fase e gorjeio com z , podemos construir o operador G , da Eq. (A4.2.3). A equação a ser resolvida pelo método variacional é:

$$i \frac{\partial E}{\partial z} - \frac{1}{2} |\beta_2| \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + R|E|^2 = 0 \quad (\text{A4.2.7})$$

A forma de solução padrão é dada por (A4.2.4). Utilizando os resultados do Apêndice 3, encontramos :

$$a^2(z)b(z) = N^2 \quad (\text{A4.2.7})$$

$$V(z) = \mu(z)b(z) \quad (\text{A4.2.8})$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{\frac{|\beta_2|}{2} K_1}{b^3} - \frac{\gamma N^2 K_2}{b^2} \quad (\text{A4.2.9})$$

$$\frac{db}{dz} = 2|\beta_2|V \quad (\text{A4.2.10})$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\gamma N^2 K_4}{b} - \frac{\frac{|\beta_2|}{2} K_3}{b^2} \quad (\text{A4.2.11})$$

K_1 , K_2 , K_3 e K_4 são dados, respectivamente, pelas Eqs. (A3.2.25), (A3.2.26), (A3.2.31) e (A3.2.32), para a função secante hiperbólica. Resolvendo as Eqs. (A4.2.9)-(A4.2.11), obtemos:

$$\sqrt{b^2 + \frac{\vartheta}{c}b + \frac{A}{c}} - \frac{\vartheta}{2c} \ln \left(\frac{2c\sqrt{b^2 + \frac{\vartheta}{c}b + \frac{A}{c}} + \vartheta + 2cb}{2\sqrt{c}V_0b_0 + \vartheta + 2cb_0} \right) = 2\beta_2\sqrt{c}L + \frac{V_0b_0}{\sqrt{c}} \quad (\text{A4.2.12})$$

$$V = \sqrt{\frac{\vartheta}{b} + \frac{A}{b^2} + c} \quad (\text{A4.2.13})$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{K_3}{4\sqrt{A}} \ln \left(\frac{2\sqrt{A}\sqrt{\frac{A}{b^2} + \frac{\vartheta}{b} + c} + \frac{2A}{b} + \vartheta}{2\sqrt{A}V_0 + \frac{2A}{b_0} + \vartheta} \right) + \frac{\vartheta K_4}{2K_2\sqrt{c}} \ln \left(\frac{2c\sqrt{b^2 + \frac{\vartheta}{c}b + \frac{A}{c}} + \vartheta + 2cb}{2\sqrt{c}V_0b_0 + \vartheta + 2cb_0} \right) \quad (\text{A4.2.14})$$

sendo

$$b_0 = b(z=0) \quad (\text{A4.2.15})$$

$$V_0 = V(z=0) \quad (\text{A4.2.16})$$

$$\theta_0 = \theta(z=0) \quad (\text{A4.2.17})$$

$$\vartheta = \frac{RN^2 K_2}{|\beta_2|} \quad (\text{A4.2.18})$$

$$A = \frac{-K_1}{4} \quad (\text{A4.2.19})$$

$$c = \frac{K_1}{4b_0^2} - \frac{\vartheta}{b_0} + V_0^2 \quad (\text{A4.2.20})$$

A presença de L em (A4.2.12) já discretiza espacialmente as equações. Os valores iniciais ($z=0$) são substituídos em E_x , enquanto que os valores finais ($z=L$), calculados usando (A4.2.7), (A4.2.8), (A4.2.12)-(A4.2.20), são substituídos em E_y .

Usando as Eqs. (A4.2.1), (A4.2.2), (A4.2.7), (A4.2.8) e (A4.2.12)-(A4.2.20) podemos formar um mapa não-linear que pode ser simulado rapidamente, uma vez que não existe a simulação da propagação do campo na fibra.

Para cada volta no ressonador temos que calcular os novos valores iniciais que serão utilizados. Através das Eqs. (A4.2.2) e (A4.2.4), encontramos que:

$$b_0(n) = b_L(n-1) \quad (\text{A4.2.21})$$

$$a_0(n) = \alpha(1-\gamma)^{\frac{1}{2}}(1-k)^{\frac{1}{2}} a_L(n-1) \quad (\text{A4.2.22})$$

$$\theta_0(n) = \theta_L(n-1) + \beta L \quad (\text{A4.2.23})$$

$n \geq 2$ é o número da volta. Para a primeira volta, os valores iniciais são obtidos a partir dos valores de E_{in} e da Eq. (A4.2.1).

A validade deste modelo está condicionada à capacidade do método variacional representar bem a solução da ENLS, o que ocorre para uma faixa restrita de valores de amplitude e largura de pulso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

I. Sólitons

- 1.1 Agrawal, Govind P., *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, New York, 1990.
- 1.2 Gomes, Anderson S. L., "Aplicações da fotônica em telecomunicações," *Minicurso do TELEMÓ 96*, Curitiba.
- 1.3 Kumar, Ajit, "Soliton dynamics in a monomode optical fibre," *Physics Reports*, vol 187, pp. 63-108, 1990.
- 1.4 Crosignani, Bruno, "Nonlinear effects in optical fibers," *Fiber and Integrated Optics*, vol. 11, pp. 235-252, 1992.
- 1.5 Hasegawa, Akira, "Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers," *Optical Letters*, vol. 9, pp. 288-290, july 1984.
- 1.6 Verdeyen, Joseph T., *Laser Electronics*, Prentice Hall, 3rd edition, 1995.

II. Métodos Numéricos

- 2.1 Weideman, J. A. C., and B. M. Herbest, "Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation," *SIAM Journal Numerical Analysis*, vol. 23, pp. 485-507, june 1986.
- 2.2 Pathria, D., and J. L. Morris, "Pseudo-spectral solution of nonlinear Schrödinger equations," *Journal of Computational Physics*, vol. 87, pp. 108-125, 1990.
- 2.3 Ghafouri-Shiraz, H., and P. Schum, "Analysis of soliton propagation in an optical fiber using a Fourier-series approach," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 8, pp. 210-212, march 1995.
- 2.4 Berg P., P. L. Christiansen, and O. Skovgaard, "Split-step spectral method for nonlinear Schrödinger equation with absorbing boundaries," *Journal of Computational Physics*, vol. 72, pp. 501-503, 1987.
- 2.5 Geisler, T., P. L. Christiansen, J. Mork, and P. S. Ramanujam "Split-step spectral method for nonlinear Schrödinger equation with constant background intensities," *Journal of Computational Physics*, vol. 86, pp. 492-495, 1990.

III. Método Variacional

- 3.1 Anderson, D., "Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers," *Physical Review A*, vol. 27, pp. 3135-3145, june 1983.
- 3.2 Anderson D., M. Lisak, and T. Reichel, "Asymptotic propagation properties of pulses in a soliton-based optical-fiber communication system," *Journal Optical Society of America B*, vol. 5, pp. 207-210, february 1988.

- 3.3 Bullough, R. K., A. P. Fordy and S. V. Manakov, "Adiabatic invariants theory of near-integrable system with damping," *Physics Letters*, vol. 91A, pp. 98-100, august 1982.
- 3.4 Gabitov, I., Elena G. Shapiro, and Sergei K. Turitsyn, "Optical pulse dynamics in fiber links with dispersion compensation," *Optics Communications*, vol. 134, pp. 317-329, 1997.
- 3.5 Malomed, Boris A., "Resonant transmission of a chirped soliton in a long optical fiber with periodic amplification," *Journal Optical Society of America B*, vol. 13, pp. 677-693, april 1996.
- 3.6 Lisak, M., A. Höök, and D. Anderson, "Symbiotic solitary-wave pairs sustained by cross-phase modulation in optical fibers," *Journal Optical Society of America B*, vol. 7, pp. 810-814, may 1990.
- 3.7 Höök, A., D. Anderson, and M. Lisak, "Soliton supported pulses at normal dispersion in optical fibers," *Journal Optical Society of America B*, vol. 10, pp. 2313-2320, december 1993.
- 3.8 Marion, Jerry B., and Stephen T. Thornton, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Fourth edition, Saunders College Publishing, Philadelphia, 1995.
- 3.9 Bassanezi, Rodney C., and Wilson Ferreira Jr., *Equações Diferenciais com Aplicações*, Harbra, São Paulo, 1988.

IV. Ressonador

- 4.1 Daisy, R., and Baruch Fischer, "Synchronization of chaotic nonlinear optical ring oscillators," *Optics Communications*, vol. 133, pp. 282-286, january 1997.
- 4.2 Ramos, Rubens V., and Rui F. Souza, "Observation of Bifurcation in a Non-linear Optical Fiber Ring Resonator and its Use as Pulse Generator," *Anais XV SBT/97*, Vol. 1, pp. 109-113, Recife, setembro 1997.
- 4.3 Smith, K., N. J. Doran and P. G. J. Wigley, "Pulse shaping, compression, and pedestal suppression employing a nonlinear-optical loop mirror," *Optics Letters*, vol. 15, pp. 1294-1296, november 1990.
- 4.4 Nakatsuka, H., S. Asaka, H. Itoh, K. Ikeda and M. Matsuoka, "Observation of Bifurcation to chaos in a all-optical bistable system," *Physical Review Letters*, vol. 50, pp. 109-112, january 1983.
- 4.5 Stokes, L. F., M. Chodorow and H. J. Shaw, "All-single mode fiber resonator," *Optical Letters*, vol. 7, pp. 288-290, february 1982.
- 4.6 Carmichael, H. J., "Optical bistability and multimode instabilities," *Physical Review Letters*, vol. 52, pp. 1292-1295, april 1984.
- 4.7 Luo, L. and P. L. Chu, "Optical bistability in a coupled fiber ring resonator system with nonlinear absorptive medium," *Optics Communications*, vol. 129, pp. 224-228, 1996.

- 4.8 Fielder-Ferrara, N., e Carmen P. Cintra, *Caos: uma introdução*, Edgar Blücher, São Paulo, 1995.
- 4.9 Gainer, A.V., e G. I. Surdutovich, "Quasisoliton propagation in a dissipative bistable system," *Kyantovaya Elektron*, vol. 15, pp. 975-977, may 1988.
- 4.10 Haelterman, M., "Ikeda instability and transverse effects in nonlinear ring resonators," *Optics Communication*, vol. 100, pp. 389-398, july 1993.
- 4.11 Crosignani, B., B. Daino, P. Di Porto and S. Wabnitz, "Optical multistability in a fiber-optic passive-loop resonator," *Optics Communication*, vol. 59, pp. 309-312, september 1986.
- 4.12 JA, Y. H., "Vernier operation of fiber ring and loop resonators," *Fiber and Integrated Optics*, vol. 14, pp. 225-244, 1995.
- 4.13 Steinmeyer, G., D. Jaspert and F. Mitschke, "Observation of a periodic-doubling sequence in a nonlinear optical fiber ring cavity near zero dispersion," *Optics Communications*, vol. 104, pp. 379-384, 1994.
- 4.14 Steinmeyer, G., F. Mitschke, A. Buchholz, M. Hänsel, M. Heuer, and A. Schwache, "Dynamical pulse shaping in a nonlinear resonator," *Physical Review A*, vol. 52, pp. 830-838, july 1995.
- 4.15 Mitschke, F., G. Steinmeyer and A. Schwache, "Generation of one-dimensional optical turbulence," *Physica D*, vol. 96, pp. 251-258, 1996.
- 4.16 Martin, B., van der Mark, Juleon M. Schins and Ad Lagendijk, "Beyond the Ikeda map: a nonlinear optical ring cavity excited with picosecond pulses," *Optics Comm.*, Vol.98, pp. 120-126, 1993.
- 4.17 Jorge, G., F. C. Bienzobas and Marc Haelterman, "Optical bistability and temporal symmetry-breaking instability in nonlinear fiber resonator," *Fiber and Integrated Optics*, vol. 14, pp. 337-346, 1995.
- 4.18 Haelterman, M., S. trillo and S. Wabnitz, "Dissipative modulation instability in a nonlinear dispersive ring cavity," *Optics Communications*, vol. 91, pp. 401-407, 1992.
- 4.19 Haelterman, M., S. trillo and S. Wabnitz, "Generation of ultrahigh repetition rate soliton trains in fiber ring," *Electronics Letters*, vol. 29, pp. 119-121, january 1993.
- 4.20 Blow, K. J., and N. J. Doran, "Global and local chaos in the pumped nonlinear Schrödinger equation," *Physical Review Letters*, vol. 52, pp. 526-529, february 1984.
- 4.21 Prol, M., F. Javier, R. Gómez, P. Chamorro and D. J. Santos, "Instability and chaos in a two coupler fiber ring resonator," *Fiber and Integrated Optics*, vol. 14, pp. 331-335, 1995.
- 4.22 Sakamoto, T., "Steady-state analysis of a saturable nonlinear amplifying fibre loop resonator," *Journal of Modern Optics*, vol. 43, pp. 2165-2170, 1996.
- 4.23 Vallée, R., "Temporal instabilities in the output of an all-fiber ring cavity," *Optics Communications*, vol. 81, pp. 419-426, 1991.
- 4.24 Vallée, R., "Role of the group velocity dispersion in the onset of instabilities in a nonlinear ring cavity," *Optics Communications*, vol. 93, pp. 389-399, 1992.

V. Acoplador Não-Linear

- 5.1 Wang Q., P. K. A. Wai, C. J. Chen and C. R. Menyuk, "Numerical modeling of soliton-dragging logic gates," *Journal Optical Society of America B*, Vol. 10, pp. 2030-2039, 1993.
- 5.2 Chu, P. L., B. A. Malomed and G. D. Peng, "Soliton switching and propagation in nonlinear fiber couplers: analytical results," *Journal Optical Society of America B*, Vol. 10, pp. 1379-1385, 1993.
- 5.3 Trillo, S. and S. Wabnitz, "Soliton switching in fiber nonlinear directional couplers," *Optical Letters*, Vol. 13, pp. 672-674, 1988.
- 5.4 Chu, Pak L., Yuri S. K., Boris A. Malomed, Gang-Ding Peng and Manuel L. Quiroga, "Soliton controlling, switching, and splitting in nonlinear fused-fiber couplers," *Journal Optical Society of America B*, Vol. 12, pp. 898-903, 1995.
- 5.5 Yang, Jianke, "Coherent Structures in weakly birefringent nonlinear optical fibers," *Studies in Applied Mathematics*, pp. 127-148, 1997.

VI. Transformada de Espalhamento Inverso

- 6.1 Zakharov, V. E. and A. B. Shabat, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media," *Soviet Physics JETP*, Vol. 34, N° 1, pp. 62-69, january 1972.
- 6.2 Ablowitz, Mark J., David J. Kaup, Alan C. Newell and Harvey Segur, "The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems," *Studies in Applied Mathematics*, Vol. LIII, N° 4, pp.249-315, december 1974.
- 6.3 Miles, John W., "An envelope soliton problem," *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 41, N° 2, october 1981.
- 6.4 Kodama, Yuji and Mark J. Ablowitz, "Perturbations of solitons and solitary waves," *Studies in Applied Mathematics*, Vol. 64, pp.225-245, 1981.
- 6.5 Kodama, Yuji, Akihiro Maruta and Akira Hasegawa, "Long distance communications with solitons," *Quantum Optics*, Vol. 6, pp. 463-516, 1994.