



Contribuições para Análise, Cálculo e Modelagem de Sistemas de Vácuo

Francisco Tadeu Degasperi

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Vitor Baranauskas.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Dirceu Pereira

Prof. Dr. Furio Damiani

Prof. Dr. José Alexandre Diniz

Prof. Dr. João Roberto Moro

Prof. Dr. Peter Jürgen Tatsch

Prof. Dr. Sérgio Gama

Prof. Dr. Vitor Baranauskas

Departamento de Semicondutores, Instrumentos e Fotônica
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2006

Nº CHAMADA: _____

T/UNICAMP D363c

V. _____ 'EX. _____

TOMBO BCCL 75022

PROC 16-145-07

C _____ D <

PREÇO 11,00

DATA 14-11-07

BIB-ID 415426

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

D363c Degasperi, Francisco Tadeu
Contribuições para análise, cálculo e modelagem de
sistemas de vácuo / Francisco Tadeu Degasperi. --
Campinas, SP: [s.n.], 2006.

Orientador: Vitor Baranauskas
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação.

1. Vácuo. 2. Vácuo - Tecnologia. 3. Difusão. 4.
Modelagem física. 5. Pressão. I. Baranauskas, Vitor. II.
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título.

Título em Inglês: Contributions to analysis, calculation and modeling of vacuum
systems

Palavras-chave em Inglês: Vacuum technology, Vacuum systems, Vacuum modeling,
Diffusion equation, Pressure field in vacuum

Área de concentração: Eletrônica, Microeletrônica e Optoeletrônica

Titulação: Doutor em Engenharia Elétrica

Banca examinadora: Dirceu Pereira, Furio Damiani, José Alexandre Diniz, João
Roberto Moro, Peter Jürgen Tatsch, Sérgio Gama

Data da defesa: 13/07/2006

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Elétrica

**Dedico este trabalho
aos meus pais, Francisco e Armelinda.**

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Vitor Baranauskas, que me acolheu em seu grupo de pesquisa, onde sempre encontrei um clima de cooperação em um ambiente de profissionalismo, incentivo e cordialidade.

Ao Departamento de Semicondutores, Instrumentos e Fotônica da FEEC da UNICAMP pela recepção no programa de pós-graduação.

À Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FATEC-SP, do Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza – CEETEPS ligado e vinculado à Universidade Estadual Paulista – UNESP pelo incentivo e apoio à pesquisa e às atividades de ensino junto ao Laboratório de Tecnologia do Vácuo da FATEC-SP.

Contribuições para Análise, Cálculo e **Modelagem de Sistemas de Vácuo**

Conteúdo

Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Conteúdo	iv
Resumo/Abstract	vii
Capítulo 1. Ciência e Tecnologia do Vácuo	1
1.1 Introdução.....	1
1.2 Organização dos Capítulos desta Tese.....	5
1.3 Tópicos de Projeto em Tecnologia do Vácuo.....	8
1.4 Breve Histórico da Ciência e da Tecnologia do Vácuo.....	10
1.5 Aplicações da Tecnologia do Vácuo.....	14
1.6 Abordagens nos Cálculos, Análises e Modelagens em Tecnologia do Vácuo.....	21
1.6.1 Tratamento Discreto.....	23
1.6.2 Tratamento Contínuo.....	28
1.7 Alcance, Limitações e Dificuldades nos Cálculos e nas Análises Tradicionais em Tecnologia do Vácuo.....	31
1.8 Síntese da Tese.....	33
1.9 Referências.....	35
Capítulo 2. Princípios Físicos e Equações Fundamentais	41
2.1 Introdução.....	41
2.2 Teoria Cinética dos Gases para Projetos de Sistemas de Vácuo.....	43
2.3 Fontes de Gases e Vapores nos Sistemas de Vácuo.....	48
2.4 Transporte de Gases em Vácuo.....	56
2.5 Modelagem e Análise Discretas de Sistemas de Vácuo.....	58
2.6 Modelagem e Análise Contínuas de Sistemas de Vácuo.....	61
2.6.1 Equação para o Campo de Pressão Unidimensional.....	63

2.6.2	Equação para o Campo de Pressão Bidimensional.....	73
2.6.2.1	Equação para o Campo de Pressão Bidimensional – Coordenadas Cartesianas.....	75
2.6.2.2	Equação para o Campo de Pressão Bidimensional – Coordenadas Polares	76
2.6.3	Equação para o Campo de Pressão Tridimensional – Coordenadas Cartesianas e Cilíndricas.....	78
2.7	Formulações Discreta e Contínua como Complementares.....	82
2.9	Referências.....	84
Capítulo 3. Sistemas de Vácuo Complexos.....		91
3.1	Introdução.....	91
3.2	Modelagem Discreta de Sistemas de Vácuo.....	93
3.2.1	Sistema de Pré-Vácuo com Bomba <i>Roots</i>	95
3.2.2	Sistema de Alto-Vácuo com Bomba Difusora.....	108
3.3	Modelagem Contínua de Sistemas de Vácuo.....	124
3.3.1	Tubo com Taxa de Degaseificação Constante.....	126
3.3.2	Tubo com Trechos de Diferentes Taxas de Degaseificação.....	129
3.3.3	Tubo com Velocidades de Bombeamento Diferentes nas Extremidades.....	134
3.3.4	Tubo com Fonte de Gás Transiente Impulsiva.....	140
3.3.5	Tubo com Várias Fontes de Gases Transiente Impulsiva.....	146
3.3.6	Tubo com Fonte Gás Transiente Impulsiva no Tempo e Extensiva na Posição....	148
3.3.7	Tubo com Fonte de Gás Transiente Impulsiva no Tempo e na Posição e com Fonte de Gás Impulsiva no Tempo e Extensiva na Posição.....	156
3.3.8	Campo de Pressão em Tubo Cônico com Degaseificação Constante e Fonte de Gás Transiente Impulsiva na Posição e no Tempo.....	163
3.3.9	Campo de Pressão em Estruturas Aceleradoras com Cavidades Ressonantes.....	166
3.3.10	Campo de Pressão em Sistemas de Vácuo Bidimensionais.....	168
3.4	Discussão.....	178
3.5	Alcance e Limitações das Formulações Discreta e Contínua.....	178
3.6	Referências.....	179
Capítulo 4. Conclusão, Trabalhos Futuros e Perspectivas.....		183

Apêndices	187
Apêndice A. Processo de Bombeamento em Vácuo – Abordagem Discreta.....	189
Apêndice B. Equação de Difusão de Gases no Regime de Escoamento Molecular.....	209
Apêndice C. Expressões Matemáticas para as Curvas de Velocidade de Bombeamento de Bombas de Vácuo.....	263
Apêndice D. Comparação entre a Abordagem Discreta e a Abordagem Contínua na Modelagem de Sistemas de Vácuo.....	279
Apêndice E. Modelagem do Vazamento Virtual.....	307
Apêndice F. Modelagem da Injeção Controlada de Gases.....	329
Apêndice G. Escoamento dos Gases e Vapores no Regime de Escoamento Molecular Considerado como um Fenômeno de Difusão.....	345

Resumo

O principal objetivo deste trabalho foi contribuir para o cálculo, análise e modelagem de sistemas de vácuo de uso geral. As contribuições ocorreram na criação, desenvolvimento e aprimoramento de ferramentas matemáticas tanto analíticas como numéricas para modelar e analisar detalhadamente sistemas de vácuo. Foram consideradas duas maneiras de modelar sistemas de vácuo, denominadas de formulação discreta e contínua. Na formulação discreta os sistemas de vácuo são tratados de modo que a pressão em função do tempo na câmara de vácuo pode ser obtida a partir de especificações das fontes de gases e vapores, das dimensões da linha de bombeamento e das bombas de vácuo. Foram considerados nos cálculos e nas modelagens os quatro regimes de escoamento presentes nos sistemas de vácuo em geral. Foram também consideradas em detalhe as condutâncias e as fontes gasosas importantes para processos em vácuo em geral, além de obtidas as expressões matemáticas para as curvas de velocidade de bombeamento das bombas de vácuo comumente utilizadas em circuitos de vácuo. Foram utilizados nas análises numéricas os métodos de *Euler-Heun* e *Runge-Kutta* de segunda e quarta ordens. Na formulação contínua os sistemas de vácuo foram modelados de forma que a pressão possa ser determinada em todas as suas partes e em função do tempo. Foram obtidas as equações de difusão para sistemas de vácuo unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais estacionários e transientes. Foram estudados em detalhe e exemplificados sistemas de vácuo por meio das formulações discreta e contínua. Sistemas de vácuo com geometrias tubulares e planares foram modelados com o estabelecimento preciso das definições das grandezas condutância específica e *throughput* específico para as fontes de gases e condições de contorno pertinentes à descrição a partir de equações diferenciais parciais. Para exemplificar os conceitos e abordagens desenvolvidas, foram tratados de casos realísticos encontrados em laboratórios e na indústria.

Palavras-Chaves: Tecnologia do Vácuo, Sistemas de Vácuo, Modelagem em Vácuo, Equação de Difusão, Campo de Pressão em Vácuo.

Abstract

The main propose of this work is to toward in modeling of general vacuum systems. In addition, the aims of this work are to create, develop and improve analytic and numerical mathematical tools in order to model and to analyze vacuum systems in detail. Two different modeling ways to vacuum systems have been considered, denoted discrete and continuum formulations. In the discrete formulation the vacuum systems are treated in a way such that inside the vacuum chamber the pressure as a function of time can be obtained from the specification of the gas and vapor sources, from the pumping line dimensions and from the choice of the vacuum pumps. The conductance and the gas sources were considered important to vacuum processes in general besides the mathematical expressions obtained to pumping speed curves of the vacuum pumps. The numerical analysis was done through the *Euler-Heun* and the *Runge-Kutta* of second and fourth order methods. In the continuum formulation the vacuum systems were modeled in a way such that the pressure can be determined in all parts and as a function of the time. To perform this modeling were defined specific conductance and specific throughput to general gas sources. Vacuum systems with one-dimension or tubular forms and two-dimensions or planar forms were studied in detail and exemplified with the definitions of the quantities and the appropriate partial differential equations boundary conditions. The concepts, definitions and approach were applied in realistic cases, with typical laboratory and industry dimensions.

Keywords: Vacuum Technology, Vacuum Systems, Vacuum Modeling, Diffusion Equation, Pressure Field in Vacuum.

Capítulo 1

Ciência e Tecnologia do Vácuo

Neste capítulo apresentamos uma visão geral da tecnologia do vácuo com seus objetivos e aplicações, assim como os seus métodos de análise, cálculo e modelagem. Discutimos os principais objetivos e a síntese deste trabalho de tese e a sua organização. Fizemos uma exposição da inserção da tecnologia do vácuo na atualidade tanto na pesquisa básica como na pesquisa aplicada, assim como, em inúmeras atividades industriais. Apresentamos um breve relato histórico dos marcos do desenvolvimento da ciência e da tecnologia do vácuo. Continuando, discutimos como são realizados os cálculos e as análises dos sistemas de vácuo em geral – sistemas de pré-vácuo e alto-vácuo –, enfatizando o alcance e as limitações da abordagem tradicional disponível para os projetos. Apresentamos uma visão dos métodos para a modelagem de sistemas de vácuo, discutindo as dificuldades para a sua construção, a obtenção das soluções matemáticas e as simplificações feitas.

1.1 Introdução.

A tecnologia do vácuo é utilizada em muitas etapas de fabricação e transformação de diversos produtos e também é utilizada intensamente na pesquisa tanto básica como aplicada. Os sistemas de vácuo têm inúmeras formas e dimensões decorrentes das diferentes tarefas e quantidades de gases presentes nos processos realizados à baixa pressão. Há também processos, que mesmo ocorrendo em pressão atmosférica, ou ainda em altas pressões, utilizam a tecnologia do vácuo. Nestes casos, realizamos a remoção dos gases, e em seguida, introduzimos gases ou vapores de processo ou para armazenamento. A diversificação dos sistemas de vácuo faz com que seus cálculos e projetos sejam geralmente distintos entre si e temos que na maior parte deles de difícil execução, particularmente quando os detalhes inerentes a cada caso devem ser observados e levados em consideração. Do ponto de vista prático, para uma escolha adequada da instrumentação utilizada nas instalações de sistemas de vácuo, é fundamental uma compreensão dos conceitos básicos envolvidos no processo de bombeamento de gases e vapores em baixa pressão. Desta forma, o modelo físico-matemático a ser construído deve representar adequada e suficientemente o processo em estudo e análise.

Assim, a identificação dos detalhes e das particularidades do sistema de vácuo assume uma importância fundamental, uma vez que eles influenciarão e, em muitos casos, determinarão objetivamente a escolha adequada dos equipamentos da instalação sendo projetada. Geralmente os equipamentos e instrumentos utilizados nos sistemas de vácuo são caros. Somente este último fato, acreditamos, justifica a elaboração de um estudo aprofundado do processo a ser realizado, com a construção de modelos, cálculos e análises, com o propósito de escolher adequadamente a instrumentação e os equipamentos. Cabe mencionar que ocorrem com os projetos de sistemas de vácuo, mesmos os de grande porte fabricados por empresas conceituadas, a especificação inadequada de alguns de seus instrumentos e equipamentos. Nestes casos constatamos, via de regra, que não houve um estudo suficientemente aprofundado do processo a ser realizado em vácuo. Em geral, simplificações exageradas foram o motivo principal, afastando demasiadamente a modelagem da realidade física. Ilustrando uma situação como comum em tecnologia do vácuo: como decorrência de um erro de projeto, podemos ter o caso da especificação de bombas de vácuo insuficientes para que se possa atingir uma pressão previamente requerida. Neste caso podemos corrigir este erro de projeto aumentando a velocidade de bombeamento, fazendo, por exemplo, a instalação suplementar de uma ou mais bombas de vácuo. Situações como estas trazem um aumento dos custos e podem diminuir substancialmente a remuneração das empresas fabricantes, e ainda, quase certamente atrasam a instalação e a operação completa do equipamento.

Sob o ponto de vista estritamente da natureza física do vácuo é importante mencionar que a remoção total das moléculas dos gases e vapores presentes em um recipiente é uma tarefa impossível. Este fato, antes de ser uma limitação devido às questões práticas, é uma limitação de princípio físico. Assim, por mais que se retirem moléculas do gás da câmara de vácuo, ainda sempre teremos inúmeras moléculas no volume devido às questões físicas inerentes à natureza. Discutiremos este fato nos próximos capítulos ao apresentarmos e quantificarmos as fontes de gases encontradas nos sistemas de vácuo.

Os processos e aplicações de vácuo acontecem em uma larga faixa de pressão. Temos que tanto nas aplicações industriais como nas aplicações científicas do vácuo a pressão se estende por 15 ordens de grandeza, ou seja, da pressão atmosférica ao nível do mar de aproximadamente 10^5 Pa ou 10^3 mbar até pressões da ordem de 10^{-10} Pa ou 10^{-12} mbar. Mais precisamente, a atmosfera padrão é igual a 101.323 Pa ou 1013,23 mbar ou ainda 760 torr. Em situações muito particulares, geralmente em laboratórios, foram alcançadas pressões da ordem de 10^{-12} Pa ou 10^{-14} mbar. Definimos *vácuo* da seguinte forma: são as pressões que estão abaixo da pressão atmosférica local, ou de outra forma, qualquer pressão menor que a pressão atmosférica local ou ambiente.

Como já afirmamos, os trabalhos que envolvem a tecnologia do vácuo estão cada vez mais sofisticados e exigentes, aumentando as dificuldades de projeto, impondo desta forma uma modelagem físico-matemática bastante elaborada. Apesar do exposto, constatamos que os recursos de análise e cálculo disponíveis não são suficientemente poderosos e abrangentes para tratar detalhadamente as situações que exigem uma modelagem mais sofisticada. Cabe um esclarecimento com relação a esta última afirmação: queremos dizer que não há recursos práticos disponíveis de cálculo para a maioria dos profissionais que atuam na indústria ou na pesquisa e necessitam construir modelos para realizar análises detalhadas de sistemas de vácuo. As grandes empresas fabricantes de equipamentos de vácuo têm programas computacionais para os seus cálculos e modelagens, sendo estes programas computacionais de uso restrito destas empresas e são em geral bastante especializados e geralmente desenvolvidos para aplicações específicas. Assim, os profissionais do setor industrial e de pesquisa que trabalham com projetos de vácuo sentem a necessidade de plataformas para os seus cálculos a fim de realizar de forma segura os seus projetos. Fazendo um paralelo, vemos que os profissionais da área de eletro-eletrônica encontram disponíveis várias ferramentas computacionais que atendem bastante bem os seus trabalhos de análise e modelagem de circuitos elétricos em geral. Nestes casos as ferramentas computacionais são bem desenvolvidas e disseminadas e com vasta literatura disponível, apresentando vários casos de estudos propostos e solucionados.

A maioria dos textos sobre tecnologia do vácuo apresenta um estudo suficientemente profundo – em suas bases físicas e fundamentais – sobre o comportamento dos gases e vapores em sistemas de vácuo. Ocorre que há uma distância bastante grande entre os conceitos apresentados e a sua utilização para a realização de cálculos detalhados de sistemas de vácuo. Identificamos que a teoria disponível em geral é de difícil implementação, tornando a maior parte destes bons trabalhos sobre os fundamentos teóricos frustrantes e algumas vezes inúteis. Do ponto de vista prático, para a maioria dos projetistas de sistemas de vácuo, cria-se uma sensação de impotência frente a todo o material teórico.

A modelagem detalhada de sistemas de vácuo requer um bom conhecimento do processo específico em questão e ainda sobre o comportamento do escoamento dos gases nas tubulações e orifícios. Em geral, os problemas matemáticos originados na modelagem são do tipo de equações diferenciais ordinárias e parciais. Ainda, cabe realçar que o escoamento dos gases rarefeitos é fortemente dependente da região de pressão – temos quatro tipos de regimes de escoamento ocorrendo em sistemas de vácuo em geral –, e há conceitos físicos bastantes distintos para cada um desses regimes de escoamento, que devem estar presentes nos cálculos. Somente este último fato ocupa uma boa parte da modelagem detalhada de sistemas de vácuo.

Em suma, considerando todos os aspectos citados acima identificamos a necessidade de uma boa plataforma de cálculos – abrangente, profunda e de uso amigável! – para as demandas atuais na área de tecnologia do vácuo. Exemplificando uma situação corriqueira: muitas aplicações do vácuo exigem o bombeamento de gases e vapores na região de pré-vácuo. Nesta região de pressão as condutâncias têm seus valores fortemente dependentes da pressão, assim como a velocidade de bombeamento de algumas bombas de vácuo, portanto, a velocidade efetiva de bombeamento – velocidade que efetivamente bombeia a câmara de vácuo – também dependerá fortemente da pressão. Desta forma, para os sistemas de pré-vácuo, a obtenção dos valores da pressão em função do tempo na câmara de vácuo necessariamente passa pela solução numérica de uma equação diferencial ordinária não linear.

Do exposto acima, pretendemos justificar o desenvolvimento e a construção de uma plataforma para realizar cálculos detalhados em tecnologia do vácuo, uma vez que as análises de fato, comumente realizadas nos projetos de sistemas de vácuo por meio dos recursos disponíveis, são muito simplificadas. Por exemplo, em muitos cálculos de sistemas de pré-vácuo a condutância da linha de bombeamento é considerada constante tanto no regime de escoamento viscoso laminar como no regime transiente, sendo que esta suposição é completamente fora da realidade. Também, consideramos constante a velocidade de bombeamento das bombas de pré-vácuo. Como consequência dessas simplificações excessivas, teremos que a velocidade efetiva de bombeamento será também constante. Em situações como estas, os cálculos relativos à evolução temporal da pressão na câmara de vácuo poderão apresentar valores bastante distintos dos observados experimentalmente, dependendo das dimensões da linha de bombeamento. Certamente, podemos considerar a análise deste tipo de situação adotando intervalos de pressão e supondo modelos simples para cada um desses intervalos, e assim, obter a solução para o intervalo de pressão de trabalho. Isto faz parte da essência da solução numérica de problemas que são formulados por meio de equações diferenciais. Neste contexto, é desejável a disponibilidade de uma plataforma confiável e versátil para a análise de sistemas de vácuo que considere aspectos e particularidades relevantes de projeto, sem a necessidade de introduzir simplificações exageradas que adultere e descaracterize a modelagem do sistema físico.

Uma característica encontrada nos cálculos convencionais realizados nos projetos de sistemas de vácuo, mesmo com uma plataforma sofisticada para cálculos, é que obtemos um valor único de pressão para um dado instante para todo o espaço da câmara de vácuo. Isto é intrinsecamente decorrente do tipo de modelagem adotado. Este é o assunto central deste trabalho de tese. Ocorre que para muitos sistemas de vácuo, os valores de pressão são fortemente dependentes da posição na câmara de vácuo. A formulação matemática disponível para a análise de

sistemas de vácuo, em geral encontrada nos textos sobre tecnologia do vácuo, somente nos fornece um valor único de pressão em função do tempo para todo o volume da câmara de vácuo. Este valor único de pressão podemos chamar grosseiramente de pressão média; não há precisão no termo “pressão média”. Em muitas aplicações da tecnologia do vácuo é desejável, sendo mesmo que em alguns casos determinante e essencial, o conhecimento da pressão em cada ponto da câmara de vácuo em função do tempo. Além da pressão, também devemos muitas vezes conhecer o seu gradiente nas regiões onde estarão sendo realizados os processos em vácuo.

O presente trabalho visa contribuir para desenvolver e criar um instrumental para análise detalhada de sistemas de vácuo, que inclua particularidades do processo de bombeamento de gases e vapores, e ainda, que torne possível determinar a distribuição espacial da pressão em função do tempo, além de instrumental para a modelagem de sistemas de vácuo por meio de análises convencionais. Do ponto de vista prático, criamos uma plataforma de cálculo para servir de instrumental físico-matemático para modelagens detalhadas de sistemas de vácuo de uso geral e amplo. A teoria e os programas computacionais desenvolvidos são amplamente discutidos, analisados, exemplificados e documentados. Complementando, discutimos o alcance de utilização do material de análise desenvolvido e sua extensão de aplicação. Também apresentamos criticamente as possíveis limitações e restrições nos modelos construídos. Nestes casos, apresentaremos possíveis alternativas para adequar uma melhor modelagem à realidade física.

1.2 Organização dos Capítulos desta Tese.

Esta tese está dividida em 4 capítulos e 7 apêndices. No *Capítulo 1 – Ciência e Tecnologia do Vácuo* apresentamos as idéias e objetivos principais da tecnologia do vácuo, com um breve histórico da ciência e da produção do vácuo, e também as principais aplicações desta tecnologia tanto na indústria como na pesquisa. Em seguida, apresentamos as abordagens e métodos usuais adotados pelos projetistas na área de vácuo, enfatizando o seu alcance e as suas limitações. Definimos os dois tipos de tratamento físico-matemático dos sistemas de vácuo: o *discreto* e o *contínuo*, como convencionamos chamá-los. Detalhamos e discutimos os resultados que podem ser alcançados por meio destes dois tipos de análise, com as suas dificuldades inerentes e as suas limitações. Apresentamos em seguida, em sua forma mais simples, a equação diferencial fundamental para o processo de bombeamento em vácuo, explicitando e explicando os termos referentes às várias fontes de gases e vapores importantes à tecnologia do vácuo.

No *Capítulo 2 – Princípios Físicos e Equações Fundamentais* apresentamos os conceitos físicos fundamentais para a construção da formulação matemática necessária para a análise detalhada de sistemas de vácuo. Discutimos as abordagens discreta e contínua dos sistemas de

vácuo e as suas formulações, assim como as vantagens e limitações em cada uma delas. Ainda, discutimos e argumentamos as duas formulações como sendo complementares entre si. Para a formulação discreta de sistemas de vácuo obtivemos a equação diferencial fundamental para o processo de bombeamento de gases e vapores. Apresentamos também uma descrição das fontes gasosas importantes para a modelagem de sistemas de vácuo. No caso da formulação contínua de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo é obtida a equação diferencial a derivadas parciais para o campo escalar de pressão para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional, dependentes e não-dependentes do tempo. São discutidos os aspectos físicos e matemáticos relativos ao estabelecimento das condições de contorno e condição inicial para as modelagens tanto discreta como contínua. Finalizando, é feita uma discussão sobre a consideração do fenômeno de transporte de gases e vapores no regime de escoamento molecular como sendo um fenômeno de origem difusiva.

No *Capítulo 3 – Sistemas de Vácuo Complexos* são apresentados vários casos de estudos, usando as formulações obtidas, em problemas bastante atuais e relevantes em tecnologia do vácuo. No caso da formulação para o tratamento discreto de sistemas de vácuo apresentamos sistemas de pré-vácuo usando bomba mecânica de palhetas rotativas de dois estágios, usando bomba *roots - booster mecânica*. Para os sistemas de alto-vácuo usando a bomba injetora de vapor – *booster* de vapor, a bomba de difusão e a bomba turbomolecular. Nestas situações obtivemos a pressão na câmara de vácuo em função do tempo, sendo considerada a condutância como dependente da pressão, quando for o caso, e ainda considerada a velocidade de bombeamento como função da pressão. Estes problemas são resolvidos numericamente por meio de códigos computacionais desenvolvidos neste trabalho de tese utilizando os programas *MathcadTM* e *MapleTM*. Na abordagem contínua de sistemas de alto-vácuo são considerados casos com geometria predominantemente de uma dimensão espacial – geometrias tipo tubular. Também, modelamos sistemas de alto-vácuo com geometria de duas dimensões espaciais, – geometrias com uma de suas dimensões pequenas comparadas às outras duas dimensões. Apresentamos as soluções de alguns problemas de interesse para o caso bidimensional, tanto problemas estacionários como transientes, com fontes gasosas transientes impulsivas. Finalizando o capítulo, discutimos sistemas de alto-vácuo de geometria arbitrária, apresentando o alcance e as limitações deste tipo de análise e modelagem.

O *Capítulo 4 – Conclusão, Críticas e Perspectivas* traz a conclusão do trabalho por meio de uma discussão crítica das reais possibilidades da utilização da modelagem dos sistemas de vácuo utilizando a formulação contínua. Apresentamos também uma discussão sobre as grandezas de condutância específica e a função matemática para as fontes de gases e vapores, principalmente em duas e três dimensões obtidas neste trabalho. Para o caso da abordagem discreta de sistemas de

vácuo apresentamos o fato de a plataforma desenvolvida para a modelagem, análise e cálculo estar disponível para uso público. Apresentamos uma discussão crítica sobre o seu alcance e as possíveis melhorias que podem ser implementadas nos códigos numéricos desenvolvidos. Com relação às perspectivas de trabalhos futuros, apresentamos uma lista de possíveis problemas de interesse a serem estudados e comparados os seus resultados com o método de *Monte Carlo* e com dados experimentais.

Optamos por desenvolver detalhadamente a teoria e a argumentação principal referentes às análises e modelagens de sistemas de vácuo nos apêndices. A maior parte do trabalho apresentado nos apêndices é original, seja na sua proposição, ou seja, no seu desenvolvimento bastante rigoroso e detalhado.

Com relação aos apêndices temos que no *Apêndice A – Processo de Bombeamento em Vácuo – Abordagem Discreta* desenvolvemos em detalhe a dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – para a realização da modelagem discreta. A dedução rigorosa deixa claro cada termo da equação e o seu papel e a sua participação no processo assistido a vácuo. Analisamos também o balanço de átomos e moléculas entre os termos da equação e interpretamos fisicamente cada um deles. Definimos também as principais grandezas da tecnologia do vácuo.

No *Apêndice B – Equação de Difusão de Gases no Regime de Escoamento Molecular* apresentamos as equações diferenciais parciais para a modelagem de sistemas de alto-vácuo usando a abordagem contínua. Deduzimos em detalhe as equações de difusão para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional dependentes e não-dependentes do tempo. No caso bidimensional consideramos as coordenadas cartesianas e polares e no caso tridimensional as coordenadas cartesianas e cilíndricas. Definimos a condutância específica – grandeza que consideramos fundamental e essencial à análise contínua – para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional. Definimos matematicamente as fontes gasosas extensivas e impulsivas no tempo e no espaço. Em seguida verificamos a coerência entre as várias expressões e conseguimos recuperar a equação diferencial bidimensional a partir da imposição de simetria no caso tridimensional. Este procedimento também foi feito para o caso bidimensional e assim recuperando a equação do caso unidimensional. O mesmo procedimento foi feito para o caso unidimensional até degenerar ao caso da equação diferencial da abordagem discreta, ou seja, dependente exclusivamente do tempo. Desta forma, mostramos coerência interna na modelagem contínua.

No *Apêndice C – Expressões Matemáticas para as Curvas de Velocidade de Bombeamento de Bombas de Vácuo* desenvolvemos expressões matemáticas para as curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão para várias bombas de vácuo. Estas expressões são importantes

para a modelagem de sistemas de vácuo em geral por meio da abordagem discreta. As expressões matemáticas foram obtidas considerando o ajuste das curvas de velocidades de bombeamento disponíveis nos catálogos das bombas de vácuo.

No *Apêndice D – Comparação entre a Abordagem Discreta e a Abordagem Contínua na Modelagem de Sistemas de Vácuo* fizemos um estudo detalhado considerando a comparação das abordagens discreta e contínua para a análise de sistemas de vácuo. Identificamos também quando é possível fazer apenas uma análise do sistema de vácuo usando a abordagem discreta, dispensando a abordagem contínua, esta última sempre mais trabalhosa. Os casos de estudo considerados neste apêndice mostraram muito sobre o comportamento geral dos sistemas de vácuo, principalmente do papel determinante da condutância, considerado pelo autor deste trabalho como a mais expressiva e importante grandeza para a modelagem dos sistemas de vácuo.

No *Apêndice E – Modelagem do Vazamento Virtual* construímos um modelo bastante detalhado do vazamento virtual. Obtivemos uma função que representa bastante bem o comportamento desta fonte gasosa em sistemas de vácuo. Argumentamos da importância do seu conhecimento a fim de poder identificar a sua ocorrência nos sistemas de vácuo.

No *Apêndice F – Modelagem da Injeção Controlada de Gases* consideramos o caso de termos de introduzir gases e vapores de forma controlada em sistemas de vácuo, a partir da passagem do gás através de um bocal, sendo esta a situação mais comum e simples, não por isso menos confiável e precisa. O estudo pode ser aplicado para outras formas de injeção de gases e também de vapores.

Finalmente, no *Apêndice G – escoamento dos Gases e Vapores no Regime de escoamento Molecular Considerado como um Fenômeno de Difusão* fizemos uma discussão, que procurou ser bastante profunda, sobre a consideração do transporte de gases no regime de escoamento molecular como sendo um fenômeno de natureza difusiva. Esta discussão é essencial para a modelagem de sistemas de vácuo por meio da abordagem contínua. Apresentamos vários casos de estudo que foram modelados por meio da equação de difusão e que foram comparados com o método de Monte Carlo. A comparação dos resultados obtidos por meio dos dois métodos de análise encorajam-nos a continuar e aprofundar as modelagens de sistemas de vácuo com os gases escoando no regime molecular a partir da equação de difusão.

1.3 Tópicos de Projeto em Tecnologia do Vácuo.

Diversos processos industriais e experiências tanto na ciência básica como aplicada assim como na tecnologia são realizadas em baixas pressões. Há ainda os processos nos quais removemos os gases ativos por meio da realização do vácuo e, posteriormente introduzimos um gás inerte ou

ativo recuperando a pressão atmosférica ou uma outra pressão maior que a atmosférica. Quando alteramos a pressão em uma câmara de vácuo, as seguintes grandezas físicas mudam de valor: a densidade do gás, o livre caminho médio, o tempo de formação de uma camada de moléculas – monocamada – em uma superfície e o fluxo de moléculas incidindo em uma superfície [1-7]. Todas as aplicações e utilizações da tecnologia do vácuo giram em torno da mudança dos valores das grandezas expostas acima. As principais razões para a utilização do vácuo nos processos em geral são:

- Remover os gases ativos presentes na atmosfera da câmara de vácuo do processo a ser realizado. Os gases e vapores ativos são prejudiciais ou inconvenientes para uma série de processos industriais e experiências científicas.
- Diminuir a transferência de calor por condução e por convecção entre o meio interno e o meio externo de um recipiente.
- Conseguir deformações mecânicas, movimentos, levantamento e/ou sustentação de peças por meio de diferenças de pressão.
- Aumentar o trajeto ou livre caminho de partículas elementares, tais como, átomos, elétrons, íons e moléculas para que não colidam com as moléculas da atmosfera da câmara de vácuo.
- Atingir densidades gasosas necessárias para a obtenção de colunas de gases ionizados, plasmas frios ou plasmas de altas temperaturas.
- Remover vapores ou gases absorvidos em materiais líquidos ou sólidos.
- Obter superfícies limpas e degaseificadas.

A tecnologia do vácuo tem como principal tarefa a produção eficiente de baixas pressões em recipientes – chamadas geralmente de câmaras de vácuo. Para que este objetivo seja alcançado com sucesso e eficiência, devemos considerar e ter presente os seguintes pontos durante o projeto de sistema de vácuo [8-9]:

- Pressão final a ser atingida e pressão de trabalho.
- Características marcantes do processo em questão, como por exemplo, se haverá gases corrosivos ou explosivos.
- Identificação do regime de escoamento dos gases e vapores.
- Cálculo das condutâncias e cálculo da velocidade efetiva de bombeamento.
- Escolha das bombas de vácuo, dos sensores de pressão e dos componentes auxiliares.
- Processos de limpeza e condicionamento do sistema de vácuo.
- Roteiro para acompanhamento do desempenho do sistema de vácuo e o seu registro no decorrer da utilização do equipamento.

- Cronograma de manutenção preventiva.
- Planejamento das possíveis manutenções corretivas e reformas que poderão ocorrer no sistema de vácuo.
- Realização freqüente de novos testes de desempenho do sistema de vácuo.

Devemos enfatizar que além dos pontos listados acima servirem para nortear o projeto, ou seja, eles devem ser pensados e considerados durante a fase de projeto, eles deverão também estar sempre na ordem do dia. Com isso queremos expressar que constantemente deveremos ter presente os pontos referentes à uma melhor operação, manutenção preventiva, manutenção corretiva, testes de desempenho e outros aprimoramentos dos sistemas de vácuo.

Há uma variedade muito grande de tipos de sistemas de vácuo, operando em várias faixas de pressão, sendo que cada tipo demanda exigências próprias referentes aos pontos listados acima. Merecem ser citados também os sistemas de vácuo com características especiais, uma vez que eles em geral são de difícil projeto, operação e manutenção. Como exemplo, podemos citar os sistemas de vácuo com injeção controlada de gases e vapores tóxicos, corrosivos ou inflamáveis, ou ainda com a presença de plasmas e gases altamente ionizados, ou também com grandes quantidades de vapor de água a ser bombeado.

Com o propósito de alcançar as pressões pretendidas nos vários processos em vácuo, dentro do tempo previamente determinado, devemos ter sempre presente o comportamento geral dos gases e vapores. Na câmara de vácuo os gases ocupam o volume e estão também presentes nas superfícies internas. Os gases a serem bombeados deverão encontrar as bombas de vácuo, ou seja, deverão percorrer toda a tubulação que une a câmara de vácuo ao sistema de bombeamento de gases. Neste contexto, para que o processo de bombeamento dos gases e vapores seja eficiente, deveremos considerar o conhecimento físico-químico da matéria no estado gasoso, a sua interação com as superfícies sólidas e líquidas que compõem o sistema de vácuo e o transporte destes gases e vapores pelas tubulações [1-11].

1.4 Breve Histórico da Ciência e da Tecnologia do Vácuo.

A palavra “*vácuo*” provem do latim e significa “*vazio*”. Os filósofos gregos pensaram sobre o vácuo e o “horror” que a Natureza tem dele. Existem indícios que os egípcios e os chineses obtiveram o vácuo por meio de foles quando supriam de ar os fornos para fundição. Há também registros de que na antiga Roma e na antiga Alexandria havia sido produzido vácuo quando bombeavam água das minas. Foi no período renascentista, contudo, com os trabalhos pioneiros de *Galileu* e de seu estudante *Torricelli* que a realização do vácuo tornou-se uma tarefa científica. Foram notáveis os trabalhos de *Torricelli* sobre a medição da pressão atmosférica utilizando tubos

preenchidos com água ou mercúrio. O espaço vazio acima da coluna de mercúrio foi identificado por *Torricelli* como sendo uma região de vácuo absoluto, isto ocorreu em 1643, um ano após a morte de *Galileu*. Atualmente sabemos que rigorosamente falando temos a pressão de vapor de mercúrio no espaço acima da coluna de mercúrio. Contemporâneos de *Galileu* também especularam sobre o vácuo, entre eles temos *Bacon*, *Pascal* e *Descartes*, sendo que seus trabalhos influenciaram filosoficamente por vários anos o pensamento ocidental.

Outro fato marcante, foi a famosa e espetacular experiência dos Hemisférios de Magdeburg, realizada em 1650 por *Otto von Guericke*. Muitos creditam a *von Guericke* o pioneirismo na construção da bomba de vácuo, necessária para evacuar o ar dos volumes dos hemisférios. O seu ponto de partida foi a bomba de água de pistão, que a partir dela introduziu melhorias em suas vedações. Devemos ter em mente que quando propostas as idéias sobre o vácuo além da questão da sua produção em si, considerando os equipamentos desenvolvidos e construídos, havia paralelamente a questão relativa à mudança no pensamento humano frente aos novos fenômenos da natureza, e mais, a mudança do próprio Homem frente a uma nova maneira de ver a natureza.

Em 1825 *Dumas* conseguiu produzir vácuo a partir da substituição do ar de um recipiente por vapor de água, e em seguida com a condensação do vapor por meio do resfriamento das paredes do recipiente. Em meados do século XIX *Robert Willhelm Bunzen* conseguiu bombear gás usando um jato de líquido a alta velocidade. Este fato está na essência do princípio de funcionamento das bombas de alto-vácuo dos tipos ejetor de vapor e difusora.

A tecnologia do vácuo começou a ter crescimento científico com as primeiras construções de tubos para descargas elétricas em gases. Ocorreu neste período um intenso “círculo virtuoso”, ou seja, a física desenvolveu-se muito com os estudos dos gases ionizados, dando início à física atômica, e era preciso produzir pressões mais baixas nos arranjos experimentais, trazendo um enorme progresso à tecnologia do vácuo. Em 1873 *Lodyguin* inventou a lâmpada incandescente com filamento de carbono, necessitando diminuir a quantidade de gases ativos do seu bulbo. Em 1883 *Edison* descobriu a emissão de elétrons pelo efeito termoiônico.

Em 1887 *Hertz* e *Stoletov* descobriram experimentalmente o efeito fotoelétrico. A primeira identificação de que certos materiais tinham a propriedade de reter gases e vapores foi feita por *Malginani* em 1884, durante a fabricação de lâmpadas elétricas. Este fato trouxe o conhecimento das substâncias que modernamente chamamos de “getter”, tão utilizadas em muitos dos modernos sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo. Além de ter realizado o isolamento de líquidos em baixas temperaturas, com a invenção da garrafa térmica, *Dewar* em 1904 também propôs um método de absorver gases utilizando carvão ativado resfriado.

Em 1906, com os trabalhos pioneiros de *Gaede*, tem início a moderna tecnologia do vácuo, com a invenção da primeira bomba rotativa de mercúrio e em seguida selada a óleo, com algumas características que permanecem até hoje nas bombas mecânicas de pré-vácuo. Em 1911 *Gaede* projetou a primeira bomba de arraste molecular, ponto de partida para as modernas bombas turbomoleculares e também as bombas turbomoleculares-*drag*. Entre 1914 e 1916, *Gaede*, *Langmuir* e *Borikov* projetaram independentemente a bomba difusora de mercúrio, conseguindo atingir pressões de 10^{-6} mbar. Desta forma, surgiu o alto-vácuo como o conhecemos hoje. As bombas difusoras foram intensamente estudadas por *Hablanian*, na segunda metade do século XX, que introduziu inúmeras melhorias nesta bomba de alto-vácuo e também em métodos experimentais para a medição de velocidade de bombeamento. Em trabalhos conjuntos com *Langmuir*, *Dushman* realizou vários trabalhos importantes relacionados à produção de tubos eletrônicos de potência. *Burch* construiu em 1928 a bomba difusora com vapor de óleo, além de melhorar as outras bombas de vácuo existentes. Muitos avanços na produção do vácuo foram feitos durante a Primeira Guerra Mundial, em função da fabricação de sistemas eletrônicos de potência voltados à transmissão de ondas eletromagnéticas com o objetivo das telecomunicações. O mesmo ocorreu durante a Segunda Guerra Mundial, neste caso, foram desenvolvidos os geradores de microondas de potência, os sistemas de separação isotópica de urânio para a produção da bomba atômica e ainda, dentro do Projeto Manhattan, a invenção do detector de vazamentos com espectrômetro de massa.

Do ponto de vista da medição do vácuo, como já mencionado, o ponto de partida foi à medição da pressão atmosférica, por *Torricelli*, com o uso da coluna de mercúrio. Seguindo, muito tempo depois, *McLeod* inventou em 1874 o manômetro, que leva o seu nome, e que era capaz de medir pressões até 10^{-4} mbar. Até o início dos anos 80 do século XX, o manômetro *McLeod* foi usado como padrão primário em baixas pressões. Cabe mencionar que o princípio de funcionamento do manômetro *McLeod* está sustentado pela lei de *Boyle-Mariotte* em conjunto com a lei de *Stevin*. Em 1909 *Pirani* desenvolveu o manômetro com resistência elétrica e em 1916, *Buckley* inventou o manômetro de ionização dos gases. Continuando a evolução, muitas áreas da física e da engenharia exigiram cada vez mais sofisticadas na área de vácuo. Cabe notar que a física atômica, física nuclear, a indústria de tubos eletrônicos, a física de plasmas, e mais recentemente as atividades de pesquisa e industriais em microeletrônica têm dado um impulso extraordinário à tecnologia do vácuo. Atualmente conseguimos atingir pressões da ordem de 10^{-12} mbar em sistemas de extremo alto-vácuo envolvendo instalações com aceleradores de partículas elementares, anéis de armazenamento de elétrons, prótons e anti-prótons, e ainda, na fabricação de semicondutores. Em condições extremas e bastante particulares conseguiu-se obter pressões da ordem de 10^{-14} mbar.

Finalizando, não podemos ficar sem mencionar os trabalhos em ciência básica, que tiveram um papel central para a compreensão do comportamento dos gases rarefeitos. As primeiras contribuições sistemáticas vieram com os trabalhos, em nível fenomenológico, de *Boyle*, *Mariotte*, *Lavoisier*, *Charles* e *Gay-Lussac*. Posteriormente tivemos as contribuições sustentadas na hipótese da teoria atômica da matéria, de *Avogadro* e *Dalton*. Cabe mencionar que os estudos que levaram à moderna concepção atômica da matéria foram realizados com sistemas gasosos. Em seguida, tivemos os trabalhos de *Bernoulli*, *Maxwell*, *van der Waals*, *Gibbs* e *Boltzmann* na aplicação da mecânica clássica aos sistemas gasosos fundamentados na hipótese atômica da matéria. Cabe lembrar que no final do século XIX ocorreu um embate dos mais importantes e belos da história da ciência e que determinou de vez a incorporação da hipótese atômica ao conhecimento da Humanidade. Certamente estamos falando da disputa entre os energeticistas, liderados por *Ostwald* e *Mach*, e os atomistas, liderados por *Boltzmann*. A partir do final do século XIX, tivemos as primeiras hipóteses sobre a estrutura interna dos átomos e, em seguida, o surgimento da teoria quântica, com o aprofundamento da teoria cinética dos gases e a mecânica estatística. Estas teorias criaram ferramentas teóricas fundamentais para estudar o comportamento dos gases interagindo entre si e com as paredes dos sistemas de vácuo, essencial para o desenvolvimento do ultra alto-vácuo.

Durante o século XX também ocorreram desenvolvimentos teóricos importantes para a tecnologia do vácuo. Entre eles podemos mencionar os trabalhos sobre o transporte de gases rarefeitos em regime molecular de 1909 devidos a *Knudsen*. Posteriormente estes estudos foram complementados e estendidos por *Smoluchowsky* em trabalhos iniciados em 1910; cabe mencionar que ele mesmo desenvolveu independentemente de *Einstein*, a teoria sobre o movimento browniano. Trabalhos adicionais sobre o fluxo de gases no regime molecular foram feitos por *Clausing*, introduzindo o coeficiente de probabilidade de transmissão para os choques moleculares com os gases escoando em tubos. Desenvolvimentos adicionais nesta área foram também realizados por *Steckelmacher*. Do ponto de vista da física relativa ao fenômeno da interação de gases com as paredes do sistema de vácuo, *Knudsen* introduziu a regra que leva o seu nome, relativo às moléculas ejetadas de uma superfície. Este trabalho foi fundamental para os primeiros cálculos de condutância em sistemas de alto-vácuo. Podemos também mencionar os trabalhos de *Consa* sobre os estudos experimentais sobre a regra de *Knudsen*. Estudos importantes têm sido realizados por *Berman* sobre a degaseificação de moléculas de água em sistemas de alto-vácuo. Muito tem sido desenvolvido na área de materiais e seus processos de limpeza e condicionamento, cabendo mencionar os trabalhos de *Benvenuti* na área dos aceleradores de partículas. Dignos de nota são os trabalhos de *Redhead*

sobre as bases físicas do ultra alto-vácuo, que continuam influenciando até os dias de hoje as atividades na área de vácuo, e também os trabalhos de *Roth* sobre técnicas de vedação.

Certamente o estudo histórico do desenvolvimento da ciência e da tecnologia do vácuo é muito apaixonante e estimulante, mas este não é o objetivo central deste trabalho de tese. Podemos finalizar esta seção dizendo que desenvolvimentos importantes têm sido feitos recentemente sobre a modelagem de sistemas de vácuo voltados aos processos realizados a plasma, principalmente na indústria de microeletrônica. Também, muito tem sido feito sobre a modelagem de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo por meio do método de *Monte Carlo*, podemos citar os trabalhos de *Kersevan*. A análise de sistemas de pré-vácuo tem sido bastante estudada usando os programas computacionais desenvolvidos para a mecânica dos fluidos. Finalizando, os cálculos realizados em tecnologia do vácuo não estão sendo atualizados com os últimos desenvolvimentos sobre a física dos gases rarefeitos. Vemos que na área da dinâmica dos gases rarefeitos encontramos os maiores desenvolvimentos sobre o comportamento dos gases, e eles estão sendo aplicados diretamente à aeronáutica e à astronáutica. Neste ano de 2006 temos, pela primeira vez, a realização de um encontro conjunto entre especialistas da área de dinâmica dos gases rarefeitos e da área de tecnologia do vácuo. Certamente será uma oportunidade para a tecnologia do vácuo se colocar ao lado dos últimos desenvolvimentos sobre a cinética e a dinâmica dos gases e vapores [1,22].

1.5 Aplicações da Tecnologia do Vácuo.

A tecnologia do vácuo é empregada em uma grande variedade de processos industriais e atividades tecnológicas e científicas. Há casos em que o vácuo torna mais eficiente um processo de fabricação, apesar de não ser essencial. Em outros casos o vácuo é vital e indispensável para uma ou várias etapas de processo ou fabricação. O propósito principal da realização do vácuo é alterar a atmosfera em um recipiente. Alterando a atmosfera do recipiente teremos tanto a alteração da pressão como também a alteração da composição da mistura gasosa original. Em geral, estes dois efeitos ocorrem simultaneamente. Em algumas situações, estaremos interessados em fazer baixar a pressão da câmara de vácuo, em outras situações, estaremos mais interessados em remover os gases ativos e, posteriormente, completar com algum gás inerte, mesmo que retornando à pressão atmosférica ou a uma pressão maior que a pressão atmosférica [1-14].

Para termos uma melhor compreensão dos processos realizados a vácuo, podemos relacionar os fenômenos físicos que ocorrem com a variação de pressão. Ainda, podemos fazer uma classificação das aplicações da tecnologia do vácuo de acordo com a mudança de propriedades físicas dos gases em baixas pressões. Por exemplo, podemos apresentar a seguinte classificação relacionada com a física relativa à variação de pressão nos gases e vapores.

- a) A situação física de *baixa pressão*. Temos como principal objetivo a criação de uma diferença de pressão entre os meios interno e externo à câmara de vácuo. Podemos usar este fato para deformar, carregar, fixar, transportar, coletar, limpar, freiar, sustentar, suspender e separar.
- b) A situação física de *baixa densidade molecular*. No caso, temos três principais objetivos a serem alcançados:
- Remover os gases quimicamente ativos da câmara de vácuo. Com isso podemos evitar reações químicas – principalmente as oxidações –, empacotar em atmosferas inertes, fundir, tratar metais e encapsular produtos.
 - Remover os gases e vapores dissolvidos em materiais. Podemos secar produtos em temperatura ambiente, em baixa ou em altas temperaturas, degaseificar, liofilisar e remover líquido e vapor em materiais sólidos.
 - Diminuir a transferência de energia entre meios. Conseguimos obter isolamento térmica, isolamento elétrica, ou isolar o meio externo para criar um meio diferente.
- c) A situação física de *grandes caminhos livres médios*. O objetivo a ser alcançado é evitar, ou pelo menos minimizar, o número de colisões atômicas e moleculares entre si, ou de feixes de partículas com a atmosfera dentro da câmara de vácuo. As aplicações são os tubos eletrônicos em geral (raio-X, cinescópios, fotocélulas, válvulas), aceleradores de partículas, espectrômetros de massa, espectroscópios ópticos, feixes de elétrons para máquinas de solda, microscópios eletrônicos, válvulas *klystron e girotrons*, evaporadoras para filmes finos, anéis de armazenamento de partículas, a indústria de microeletrônica e separadores de isótopos.
- d) A situação física de *longos tempos para a formação de uma monocamada*. O objetivo principal é conseguir superfícies limpas, com poucos gases adsorvidos. Podemos criar superfícies preparadas para o estudo e aplicação em adesão, emissão de elétrons (alteração da função-trabalho), variação do coeficiente de atrito, estudos em física de superfícies, dopagem de materiais e estudo do comportamento no espaço sideral.

A seguir, apresentaremos algumas importantes aplicações da tecnologia do vácuo. A intenção é mostrar a variedade e a diversidade das áreas que usam o vácuo. O vácuo pode ser utilizado em várias etapas de processo de fabricação, apesar de o produto final não precisar estar em vácuo. Entretanto, ocorrem situações em que o produto, para funcionar, precisa permanecer em vácuo para o seu funcionamento.

Podemos fazer uso do vácuo para criar diferenças de pressão; assim, aparecerão forças resultantes em áreas – da ordem $10^5 \text{ Nm}^{-2} = 10^5 \text{ Pa}$ – podendo levantar ou sustentar pesos ou ainda equilibrar outras forças. Também podemos transportar peças leves e pesadas. Como exemplo, levantamos chapas de metal por meio da ação de ventosas, ou ainda, removemos poeira com

aspiradores de pó, aspiradores de secreções em operações cirúrgicas, remoção de vísceras de animais e peixes, coleta de gases e vapores para análises e coleta de sangue. Pelo mesmo princípio, podemos fixar peças em máquinas operatrizes durante as usinagens. Usamos a força resultante para conformar chapas de materiais plásticos aquecidos. Podemos também usar a força para freiar. Utilizamos ainda, a diferença de pressão, para acelerar o processo de filtragem. É importante observar que nestas aplicações a força resultante obtida pela diferença de pressão é uniforme, estendendo-se uniformemente por toda a peça. O nível de uniformidade é da ordem das distâncias entre moléculas!

Na fabricação de bulbos para iluminação elétrica, das centenárias lâmpadas incandescentes até as lâmpadas que fazem uso de descargas elétricas e ainda aquelas baseadas em efeitos de emissão de campo, a tecnologia do vácuo é necessária para produzir atmosferas rarefeitas e inertes para posterior preenchimento com gás ou vapor específico. Removendo a maior parte da atmosfera ativa não ocorrerá a forte oxidação do filamento, ou ainda, será possível ocorrer descargas elétricas controladas em gases, dependendo do tipo de lâmpada. A produção dos primeiros tipos de lâmpadas está intimamente ligada ao desenvolvimento das primeiras bombas de vácuo.

Ainda dentro das aplicações do vácuo, que requerem atmosferas quimicamente neutras, temos a metalurgia a vácuo. Assim, durante a fundição os metais estarão protegidos da oxidação ou da formação de bolsões gasosos internos. O vácuo também é empregado na sinterização, recozimento e outros tratamentos térmicos em metais. Em processos de soldagem, como por exemplo, o de brasagem ou por meio de feixe de elétrons, as partes envolvidas na soldagem precisam estar protegidas por uma atmosfera rarefeita e inerte.

No empacotamento e no encapsulamento de alguns produtos perecíveis ou sensíveis à oxidação, o uso do vácuo tem-se mostrado muito eficiente. O produto a ser protegido estará envolvido por uma atmosfera composta quase que exclusivamente de gases inertes. Também, cabe mencionar que ao remover o ar da atmosfera, grande quantidade das bactérias e outros microorganismos estarão sendo também removidos, pois serão arrastados pelo fluxo de gás durante o processo de bombeamento. As indústrias alimentícias, farmacêuticas, químicas e de componentes eletrônicos utilizam largamente esta técnica.

Encontramos também no vácuo um meio eficiente para remoção de umidade e outros vapores impregnados em materiais sólidos e líquidos. As indústrias farmacêuticas e alimentícias são as maiores usuárias desta técnica.

Dentro do contexto dos processos de secagem e mesmo naqueles de extração de umidade e vapores há várias formas de realizá-los com a assistência do vácuo. Temos inúmeros processos industriais realizados a vácuo que são realizados em temperatura ambiente ou em baixas

temperaturas, muitas vezes criogênicas, e também os que ocorrem em altas temperaturas. Exemplificando, a liofilização ocorre em baixas temperaturas devido ao fato de a remoção da umidade precisar ser muito lenta a fim de não danificar o material biológico. Também verificamos uma forma excelente de conservar alguns produtos, entre eles o plasma sanguíneo, sem que ocorra a coagulação. Existem técnicas de conservação de obras de arte e objetos de valor histórico que são feitos sob vácuo. Em museus de ciências biológicas, muitos corpos de animais são armazenados com técnicas de conservação baseadas em vácuo. Outra aplicação é a impregnação em vácuo. No caso, queremos remover a umidade e outros gases e vapores e, em seguida, preencher com um material líquido ou gasoso. A ocorrência mais comum é a impregnação de óleos isolantes elétricos nos transformadores, e ainda, nos capacitores, chaves elétricas e cabos de alta tensão. Há também a introdução de cristal líquido nos mostradores de informação como outra aplicação do vácuo.

Incluindo às aplicações já mencionadas, temos aquelas referentes aos isolamentos térmico e elétrico. Os principais exemplos são as garrafas térmicas ou vasos de *Dewar*, e também, as válvulas eletrônicas, as cavidades ressonantes dos aceleradores de partículas, os acumuladores de carga elétrica nos aceleradores eletrostáticos de partículas, tubos para laser, chaves elétricas a vácuo, etc. Também com o propósito de isolar, temos os simuladores espaciais. Os satélites e outros artefatos a serem operados no espaço sideral são ensaiados e estudados em enormes câmaras de vácuo de laboratório. Desta forma, testam-se os dispositivos dentro de condições que serão encontradas em alturas em torno de 500 a 800 km.

O funcionamento de vários equipamentos e instrumentos e processos em vácuo, mais precisamente em alto-vácuo e ultra alto-vácuo, fundamentam-se nas propriedades do comprimento do livre caminho médio. O propósito do vácuo é diminuir a incidência ou até mesmo evitar as colisões dos átomos e moléculas entre si. Como principais aplicações temos os tubos aceleradores de partículas elementares, os microscópios eletrônicos, tubos de raios-X, mostradores de informação por efeito de campo, de plasma e tubos de raios catódicos, anéis de armazenagem, fotocélulas, separadores de isótopos, dispositivos em geral que operam com feixes de partículas, fotomultiplicadoras, e ainda, os equipamentos em geral de deposição de filmes finos por evaporação ou sublimação, etc. Cabe mencionar que muitos dos exemplos mencionados acima constituem instrumentos científicos e industriais de tecnologia sofisticada.

Outras importantes aplicações do vácuo são aquelas que requerem superfícies muito limpas. Ao expormos as superfícies dos materiais à atmosfera uma quantidade de átomos e moléculas dela ficará em equilíbrio com a superfície e volume do material. Assim, quando estivermos interessados no estudo das propriedades das superfícies dos materiais deveremos remover grande número das partículas adsorvidas, uma vez que as moléculas e radicais alteram as propriedades das superfícies e

adulterarão as análises da superfície. Neste caso particularmente o alto-vácuo e ultra alto-vácuo devem ser alcançados para atingir as condições desejáveis de trabalho. O motivo é que o bombardeio de átomos e moléculas na superfície em estudo deverá ser pequeno e o tempo de formação de uma monocamada será conseqüentemente grande, suficiente para podermos realizar o estudo. As aplicações mais importantes estão nas análises de superfícies em geral, nos fenômenos relacionados à adesão, atrito, emissão de elétrons e alteração de reatividade das superfícies, técnicas de caracterização, e outros.

As aplicações citadas nesta seção mostram que a atuação da tecnologia do vácuo na indústria e na ciência é abrangente. Verificamos ainda que o número de novas aplicações está em constante crescimento. Constatamos também que o desenvolvimento experimental de algumas áreas da ciência está intimamente ligado ao desenvolvimento de novas técnicas e instrumentação na área da tecnologia do vácuo. Ademais, em contrapartida, desenvolvimentos que ocorrem em várias áreas da ciência e tecnologia em geral influenciam muito o desenvolvimento da tecnologia do vácuo [6,16].

Podemos de um modo geral, classificar as aplicações do vácuo em função das diferentes necessidades impostas pela indústria, pela pesquisa tecnológica e ainda pela pesquisa científica. Há algumas particularidades nos processos a vácuo no setor industrial em relação àqueles utilizados na pesquisa, como por exemplo, as grandes dimensões dos sistemas de vácuo e as enormes quantidades de gases e vapores a serem bombeados. Dentre as características mais marcantes dos processos a vácuo no setor industrial, e talvez a que mais chame a atenção, seja aquela de buscar a realização do processo em um menor tempo possível, visando a minimização dos custos de fabricação. Complementando, do ponto de vista de princípios físicos e a instrumentação necessária, existem poucas diferenças entre as particularidades do vácuo utilizado na pesquisa tecnológica e na pesquisa científica. É possível identificar uma série de instrumentos analíticos junto à câmara de vácuo na pesquisa científica que são os mesmos que aqueles usados na pesquisa tecnológica, como por exemplo, os necessários para o controle e medição precisos de variáveis como pressão total, temperatura, pressão parcial dos gases e vapores, bombas de vácuo, e outras.

Em algumas atividades com o envolvimento de alta tecnologia vemos que há uma distância cada vez menor entre a ciência básica e a fabricação. Como exemplo, no setor da microeletrônica, muitos equipamentos, metodologias de trabalho e procedimentos em tecnologia do vácuo são praticamente os mesmos na pesquisa pura e na linha de produção de microcircuitos eletrônicos [7-14].

No contexto da pesquisa básica, encontramos algumas áreas que exigem equipamentos da tecnologia do vácuo de grande porte, como por exemplo:

- Na física experimental das partículas elementares, encontramos os aceleradores de alta energia, os anéis de colisão, os anéis de armazenamento, as câmaras de espalhamento, os calorímetros, e outros [11-16].
- Na física da fusão nuclear controlada por meio do confinamento magnético, temos os *tokamaks*, os *stellarators*, os espelhos magnéticos, os injetores de partículas neutras e outros [14-20].
- Na cosmologia, encontramos as antenas para a detecção de ondas gravitacionais [19,22].
- Na astronomia, temos os telescópios com grandes espelhos [10].

Os equipamentos citados acima são de grandes dimensões, com câmaras de vácuo e tubulações que têm volumes de vários metros cúbicos. Estes equipamentos apresentam pressões bases da ordem de 10^{-8} mbar ou menores. Além das características específicas e inerentes de cada equipamento, como: a temperatura de trabalho, intensas radiações ionizantes, a injeção de gases e vapores corrosivos e explosivos durante a operação, e outros, convém observar que alguns dos equipamentos mencionados operam em pressões da ordem 10^{-5} mbar.

A fim de que tenham um bom desempenho, estes equipamentos devem ter a capacidade de atingir pressões na região do ultra alto-vácuo. Para que este propósito seja alcançado devemos lançar mão dos chamados processos de limpeza e de condicionamento. Os processos de limpeza e condicionamento são em geral os tratamentos recebidos pelos sistemas de vácuo com a finalidade de reduzir a quantidade de gases e vapores adsorvidos nas paredes expostas ao vácuo. Muitos dos processos de condicionamento são realizados em pressões da ordem de 10^{-3} mbar, como por exemplo, o processo por *glow-discharge* e o processo por descarga *Taylor*, extensamente utilizados nas máquinas para o estudo de fusão termonuclear controlada. Assim, para atingir pressões dentro da faixa do alto-vácuo e principalmente no ultra alto-vácuo, muitos equipamentos exigem processos de limpeza e condicionamento específicos, desenvolvidos especialmente para um dado tipo de equipamento.

Em geral, o processo de limpeza ocorre antes da montagem final do equipamento. Em alguns casos, após a montagem final do sistema de vácuo, é feita uma limpeza adicional. O processo de condicionamento é realizado com o equipamento completamente montado e em fase de operação. Há sistemas de vácuo que apesar de operarem em pressões da ordem de 10^{-4} ou 10^{-5} mbar, precisam ter sua pressão base dentro do ultra alto-vácuo. As várias características expostas acima trazem uma série de dificuldades para o projeto dos sistemas de vácuo, entre elas a escolha dos materiais a serem utilizados, que devem ser compatíveis para operar com pressões muito baixas, e ainda, receber processos de condicionamento em altas temperaturas, operar em ambientes com altas taxas de radiação e outras exigências [18,26].

Como exemplos de aplicação junto ao setor industrial temos a fundição a vácuo, o empacotamento de alimentos a vácuo, a metalização, a produção de recipientes com paredes isolantes térmicas, a isolação elétrica a vácuo, a liofilização, o tratamento de óleo de transformadores, em várias etapas da fabricação de micro-circuitos eletrônicos, produção de cinescópios, microscópios eletrônicos, tubos de raios-X. Os seguintes equipamentos necessitam de sofisticadas técnicas de fabricação, com a participação essencial da tecnologia do vácuo: os amplificadores de microondas na eletrônica de potência, os tubos e válvulas eletrônicas de potência, soldagem por feixe de elétrons, etc. Existe também a necessidade no transporte e fixação de peças, na filtragem e limpeza, na conformação mecânica, na secagem e desidratação, na micro-balança, e em outras mais. Constatamos que as aplicações da tecnologia do vácuo crescem e expandem em muitas áreas do setor produtivo [1,14].

Historicamente falando, a tecnologia do vácuo teve um grande desenvolvimento a partir dos anos 40 do século XX. Saindo da esfera das experiências científicas e de algumas poucas aplicações industriais a tecnologia do vácuo ganhou espaço e firmou-se definitivamente como ferramenta de processo. Isso fez com que ela também tivesse que se firmar como ciência e tecnologia. A partir da Segunda Guerra Mundial muitos componentes eletrônicos, principalmente os de alta potência, tiveram sua fabricação intensificada, exigindo um aprimoramento da tecnologia do vácuo para o seu bom funcionamento com suficiente tempo de vida útil [1-11, 23-27].

Os setores que influenciaram de forma decisivamente a tecnologia do vácuo nos últimos 60 anos foram:

- A eletrônica de potência, principalmente durante o período da Guerra Fria, uma vez que as válvulas *magnetron* e *klystron*, para a geração e amplificação de microondas para radares, exigem alto-vácuo para a sua operação. Cabe mencionar que vários esforços estão sendo empregados no desenvolvimento e na produção de válvulas de potência de microondas com catodos frios [10-11,26-28].
- Os aceleradores de partículas, cada vez mais empregados em física nuclear, além das cavidades aceleradoras, tubos de transporte de feixe de partículas e as câmaras de espalhamento demandam alto-vácuo e ultra alto-vácuo [10-11,28-29].
- Na indústria espacial, os satélites e naves espaciais devem ser testados em laboratório para verificar o seu desempenho em vácuo sideral. Os laboratórios para estes testes são enormes sistemas de ultra alto-vácuo [10-11,19-21].
- A corrida para se chegar à fusão nuclear controlada, iniciada na década de 50, principalmente entre os Estados Unidos da América e a ex-União das Repúblicas Socialistas Soviéticas e outros países, fez com que a tecnologia do vácuo experimentasse grande avanço. Outros países

também tiveram uma participação bastante ativa nesta área. O progresso ocorreu, além da construção e aprimoramento de bombas de vácuo e medidores de pressão, mas principalmente nos processos de limpeza e condicionamento, e também a criação de novos materiais empregados em grandes sistemas de vácuo. Nesta área ocorreu uma diminuição muito grande em suas atividades nos últimos 15 anos. Atualmente há esperança que ela ressurja como uma área novamente de muita intensidade de trabalho com a construção de um protótipo de reator de fusão nuclear controlada em nível mundial [10,29-31].

- Na indústria de microeletrônica, quase todos os processos de fabricação utilizam a tecnologia do vácuo. Existem particularidades nos sistemas de vácuo dedicados na fabricação de microcircuitos, impondo desenvolvimento e melhorias nas bombas de vácuo, nos medidores de pressão, nos analisadores de gases residuais, e em outros. Os detalhes relevantes são a injeção controlada de vários gases de processo, o bombeamento de gases e vapores tóxicos e corrosivos, etapas envolvendo gases ionizados e plasma, manipulação automática em vácuo, sistemas de caracterização de propriedades dos materiais em vácuo e sistemas de vácuo com controle de impurezas e poeiras [10-23].
- Na indústria de mostradores de informação temos atualmente, além do tubo de raios catódicos, a tecnologia de plasma e a tecnologia por emissão de elétrons por efeito de campo. Nestes casos a tecnologia do vácuo está sendo muito solicitada, uma vez que o vácuo joga um papel central tanto na qualidade como na vida do equipamento. Muitos desenvolvimentos estão ocorrendo na área de materiais em vácuo, nas bombas de vácuo tipo *getter*. O estudo da emissão de elétrons por efeito de emissão de campo tem experimentado um grande avanço nesta área. Cabe mencionar que este tipo de dispositivo está fazendo com que cálculos mais elaborados sobre determinação de campos de pressão sejam realizados [10-11,32].

Os desenvolvimentos e progressos ocorridos nestas áreas foram levados também para inúmeras outras áreas, sendo que além de novos equipamentos desenvolvidos, foram também absorvidas novas metodologias de trabalho, procedimentos de limpeza e condicionamento para se alcançar pressões ainda mais baixas. Um outro ponto que deve ser destacado é o desenvolvimento de novos materiais e a sua utilização em vácuo. Com a melhora no desempenho e na confiabilidade alcançados em processos utilizando vácuo, verificamos um aumento das suas aplicações tanto na indústria como na ciência [9,14,32].

1.6 Abordagens dos Cálculos, Análises e Modelagens em Tecnologia do Vácuo.

Os projetos em tecnologia do vácuo são geralmente realizados com cálculos, análises e modelagens bastante simplificados. Os seus cálculos e análises dos projetos rotineiros são

realizados com o propósito único de especificar as bombas de vácuo a fim de alcançar a pressão pretendida. Em contrapartida, temos sistemas de vácuo que necessitam de mais detalhes em seus projetos. Podemos assim, identificar dois tipos básicos de cálculos de projetos de sistemas de vácuo realizados por meio da formulação tradicional, que será apresentada a seguir. No primeiro tipo de cálculo, temos os sistemas de vácuo de pequeno ou médio porte; nestes casos, em geral não temos a necessidade de conhecer os detalhes do processo de bombeamento, precisamos apenas dimensionar a capacidade das bombas de vácuo, a partir da identificação da quantidade de gases e vapores que deverão ser bombeados. No segundo tipo de cálculo, temos os sistemas de vácuo utilizados nos processos industriais de uso geral. Nestes casos, deveremos considerar os detalhes relativos às fontes de gases e vapores, a dependência da velocidade de bombeamento das bombas de vácuo com relação à pressão, os valores das condutâncias em função do regime de escoamento dos gases, e ainda, os tipos de gases e vapores envolvidos no processo de bombeamento. Nestes casos a modelagem matemática dará origem às equações ordinárias não-lineares de primeira ordem, cujas soluções deverão ser obtidas por meio de métodos numéricos, uma vez que dificilmente métodos analíticos possam ser suficientes.

Como parte do trabalho desta tese, apresentaremos um programa computacional capaz de resolver matematicamente os problemas de modelagem de sistemas de vácuo de forma bastante rigorosa, considerando a dependência da velocidade de bombeamento com a pressão para todas as bombas de vácuo importantes encontradas no mercado, e ainda, considerando as condutâncias em função dos regimes de escoamento, dimensões dos tubos e tipo de gás. Neste tipo de modelagem, com o desenvolvimento matemático apresentado em detalhe no Apêndice A, poderemos alcançar apenas um valor de pressão dependente do tempo para toda a câmara de vácuo, sendo impossível obter o campo de pressão para o sistema de vácuo, isto é, a pressão em cada ponto da câmara de vácuo. A este tipo de abordagem na modelagem de sistemas de vácuo chamaremos de abordagem discreta.

Em contrapartida, podemos construir formulações capazes de nos fornecer os valores de pressão em função do tempo para todos os pontos da câmara de vácuo, e ainda, para as outras partes que compõem o sistema de vácuo. Este tipo de informação é importante para muitos sistemas de vácuo. Por exemplo, existem atualmente projetos de sistemas de ultra alto-vácuo, como é o caso dos aceleradores de partículas, dos anéis de armazenamento de partículas e das antenas gravitacionais – em que as modelagens têm atingido um alto grau de sofisticação – cujos valores de pressão, em todos os pontos de sua extensão, precisamos conhecer. Nestes casos identificamos que as modelagens têm sido realizadas preferencialmente por meio do método de *Monte Carlo*. Estes

programas computacionais foram desenvolvidos e implementados por especialistas na área de tecnologia do vácuo e são em geral usados por eles próprios e não são de amplo uso.

Vemos que em alguns projetos de sistemas de ultra alto-vácuo e alto-vácuo, em forma tubular, que a equação de difusão tem sido utilizada em suas modelagens, alcançando resultados bastante bons. Nos Apêndices B e G estão expostos em detalhe o desenvolvimento teórico sobre a modelagem de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo por meio da equação de difusão. Além desses dois métodos de análise e modelagem de sistemas de alto-vácuo há ainda outros métodos e mais à frente citaremos e faremos alguns comentários sobre eles.

Com relação aos sistemas de pré-vácuo operando no regime de escoamento viscoso laminar – estes ocorrem quando o número de *Knudsen* for menor que 0,01 e o número de *Reynolds* for menor que 2000 –, em suas análises e modelagens realizadas com bastante rigor são utilizados os programas computacionais consagrados na área da mecânica dos fluidos. Como observação cabe mencionar que os limites dos números de *Knudsen* e *Reynolds*, que definem o regime de escoamento viscoso laminar, variam conforme o autor, isto expõe o fato de que não há uma fronteira nitidamente demarcada, isto ocorre inclusive para os outros regimes de escoamento dos gases e vapores. O número de *Knudsen* é fundamental em tecnologia do vácuo, uma vez que ele expressará matematicamente o tipo de regime de escoamento presente no escoamento dos gases e vapores [3-12, 28-45].

Em suma, adotamos neste trabalho de tese a formalização de dois tipos de abordagens utilizadas nas modelagens e análises detalhadas de sistemas de vácuo: a abordagem discreta e a abordagem contínua, que algumas vezes chamaremos de tratamento discreto e tratamento contínuo, ou ainda, modelagem discreta e modelagem contínua. Elas serão definidas e explicadas como veremos a seguir.

1.6.1 Tratamento Discreto.

No caso dos sistemas de vácuo projetados e construídos pelas grandes empresas especializadas vemos que em algumas delas os seus cálculos são realizados com a utilização de programas computacionais próprios, desenvolvidos internamente e mantidos como sigilo industrial. Em geral os cálculos realizados por esses programas computacionais consideram além dos aspectos inerentes ao processo de bombeamento – condutância da linha de bombeamento e velocidade de bombeamento das bombas de vácuo –, os dados referentes às propriedades físico-químicas dos gases e vapores envolvidos no processo em vácuo, sendo que algumas das suas propriedades determinadas experimentalmente pelas próprias empresas. Por outro lado, os projetistas em tecnologia do vácuo, que não dispõem dessas ferramentas computacionais, têm como alternativa

realizar cálculos de forma simplificada ou criar as suas próprias ferramentas numéricas e computacionais.

De forma bastante esquemática, mas sem perder a sua essência básica, os sistemas de vácuo podem ser representados como o mostrado na Figura 1.1. Neste desenho vemos as partes principais apresentadas pela maioria dos sistemas de vácuo, que são: a câmara de vácuo, as bombas de vácuo e a linha de bombeamento dos gases e vapores. As três partes que compõe o sistema de vácuo normalmente são bem localizadas, ou seja, têm caracter discreto; assim, determinamos sem ambigüidade as partes principais que formam o sistema de vácuo.

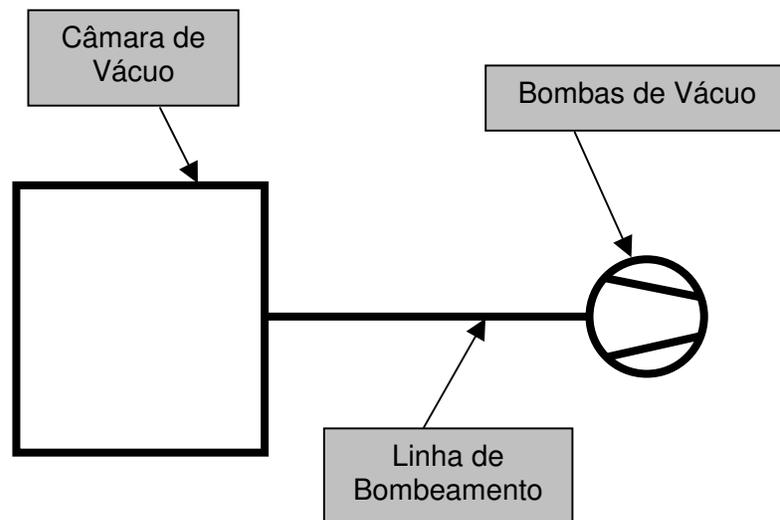


Figura 1.1 Configuração esquemática e básica dos sistemas de vácuo.

Entretanto, há sistemas de vácuo nos quais podemos encontrar bombas de vácuo localizadas imediatamente junto à câmara de vácuo e até mesmo dentro delas, e ainda, sistemas de vácuo nos quais a câmara de vácuo confunde-se com a tubulação, ou seja, a região de interesse é praticamente tubular. Em suma, existem vários sistemas de vácuo de interesse nos quais não encontramos uma demarcação nítida entre as três partes discretas mencionadas, criando desta forma uma ambigüidade nas posições das várias partes que formam o sistema de vácuo.

Como exemplo importante, podemos citar câmaras de vácuo utilizadas nas linhas de luz dos aceleradores síncrotrons, em que parte das bombas de vácuo encontram-se no interior da própria câmara de vácuo. Para estes casos, a modelagem físico-matemática detalhada é bastante complexa, e verificamos que a abordagem discreta é insuficiente para estudá-las em detalhe. Alguns destes casos serão discutidos em profundidade, sendo parte do objeto principal deste trabalho.

A principal equação utilizada na modelagem dos sistemas de vácuo, por meio da abordagem discreta, é a Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} , mostrada a seguir na Expressão 1.1

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \quad 1.1$$

onde, V_{CV} representa o volume da câmara de vácuo, $p_{CV} = p_{CV}(t)$ a função pressão na câmara de vácuo, S_{ef} a velocidade efetiva de bombeamento e $\sum_{i=1}^n Q_i$ é a soma das quantidades das possíveis fontes gasosas do sistema de vácuo multiplicada por kT , assim chamadas comumente de *throughput*. No Apêndice A temos em detalhe o desenvolvimento rigoroso que leva à Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} . As diversas fontes de gases e vapores podem ser explicitadas pela Expressão 1.2

$$Q_{Total} = \sum_{i=1}^n Q_i = Q_{VR} + Q_{VV} + Q_{Vap} + Q_{Sub} + Q_{Deg} + Q_{Perm} + Q_{FBV} + Q_{GP} + Q_{IC} \quad 1.2$$

onde Q_{VR} representa o *throughput* do vazamento real, Q_{VV} do vazamento virtual, Q_{Vap} da vaporização, Q_{Sub} da sublimação, Q_{Deg} da degaseificação, Q_{Perm} da permeação, Q_{FBV} da fonte gasosa da bomba de vácuo, Q_{GP} dos gases e vapores de processo e Q_{IC} da injeção controlada de gases e vapores. Estas fontes de gases e vapores estão descritas no Capítulo 2 [4-6,8-9,11-12,29].

A velocidade efetiva de bombeamento – S_{ef} – é função da condutância total – C_{total} – e da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo – S_{bv} –, conforme mostrada na Expressão 1.3

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} \Rightarrow S_{ef} = \frac{S_{bv} \cdot C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} \quad 1.3$$

Em geral, a velocidade da bomba de vácuo é função da pressão e o valor da condutância depende do regime de escoamento dos gases, que depende da pressão, exceto no regime de escoamento molecular. Desta forma, a velocidade efetiva de bombeamento geralmente é uma função fortemente não linear da pressão. Resolvendo a equação diferencial E_{PBV} , com a imposição da condição inicial $p_{cv}(0) = p_o$, encontramos a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo, $p_{cv} = p_{cv}(t)$.

Os sistemas de vácuo utilizados no setor industrial, junto aos seus processos ligados à produção, em geral são fabricados por empresas especializadas em tecnologia do vácuo e são projetados com um nível de detalhamento que exige a solução da equação diferencial E_{PBV} . Os modelos físicos construídos são geralmente sofisticados, uma vez que devem estar mais próximos da realidade do processo de bombeamento dos gases e vapores em estudo. São considerados os aspectos como: a velocidade de bombeamento das bombas de vácuo em função da pressão, a variação da taxa de degaseificação específica em função do tempo e da temperatura, a evolução temporal das fontes de gases inerentes ao processo em vácuo, e também, a dependência da condutância dos vários componentes em função do regime de escoamento dos gases. Este último item é muito importante, uma vez que as condutâncias variam muito em função da pressão no regime de escoamento viscoso laminar e no regime intermediário. Nestes regimes de escoamento dos gases e vapores o processo de bombeamento é representado matematicamente por uma equação diferencial não linear ordinária de primeira ordem [11-12,30-32].

As empresas especializadas em projetos e construção de sistemas de vácuo usados, tanto em processos industriais como em pesquisa, podem ensaiar e testar em bancada os seus equipamentos em situações reais. Com a experiência acumulada em anos de trabalho e com os dados experimentais disponíveis para análise, os modelos físico-matemáticos podem ser construídos e comparados com as medições feitas. Em seguida, novos ajustes e aprimoramentos nos modelos podem ser introduzidos. De um modo geral, estes dados experimentais, incluindo os valores das taxas de degaseificação específica de vários materiais tratados com processos de limpeza e condicionamento, os resultados analítico-numéricos detalhados dos modelos constituem geralmente segredo industrial [33-38].

O procedimento de cálculo mais utilizado nos projetos de sistemas de vácuo, por meio de cálculos simplificados, é descrito a seguir: temos que nestes casos pretendemos determinar exclusivamente a velocidade efetiva de bombeamento, para fazer o projeto do sistema de bombeamento de vácuo. Para atingir este propósito, devemos impor a pressão final a ser atingida na câmara de vácuo. Neste caso, na Expressão 1.1, a derivada da função temporal da pressão na câmara de vácuo será identicamente igual a zero, depois de certo instante de tempo, ou seja, a pressão atingirá um valor final constante, assim

$$\frac{dp_{final}}{dt} \equiv 0,$$

portanto, encontramos a Expressão 1.4

$$-S_{ef} p_{final} + \sum_{i=1}^n Q_i = 0, \quad 1.4$$

na qual encontramos a velocidade efetiva de bombeamento, isto é, a velocidade de bombeamento que efetivamente bombeia a câmara de vácuo, conforme mostrada na expressão seguinte

$$S_{ef} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{p_{final}}.$$

Com a determinação da condutância total – C_{Total} – da linha de bombeamento, calculamos a velocidade de bombeamento necessária para as bombas de vácuo usando a Expressão 1.3, assim

$$\frac{1}{S_{bv}} = \frac{1}{S_{ef}} - \frac{1}{C_{Total}} \Rightarrow S_{bv} = \frac{S_{ef} \cdot C_{Total}}{C_{Total} - S_{ef}}.$$

Quando o sistema de bombeamento de gases e vapores não é suficiente para atingir a pressão final pretendida, simplesmente acrescentamos uma ou mais bombas de vácuo. O fato de termos imposto que a pressão final é constante – isto configura o estado permanente –, por meio desta modelagem não temos no resultado obtido informação alguma a respeito da evolução temporal da pressão na câmara de vácuo [5-6,8-12,39-40].

Encontramos na literatura dados que servem como uma indicação de ordem de grandeza para os valores de taxa de degaseificação específica para vários materiais [6, 11-16]. Entretanto, freqüentemente não mencionam como foram obtidos os valores apresentados, ou ainda, quais as condições para a sua aplicação. Também não são mencionadas as procedências dos materiais e principalmente, o método e os produtos químicos usados na limpeza. Estas informações são mais que importantes, podemos dizer com segurança que são fundamentais, pois o desempenho do sistema de vácuo depende muito da “*história*” da fabricação dos materiais utilizados na sua construção [5,8-9,11-12,41-49].

Com o ferramental físico-matemático desenvolvido e implementado neste trabalho pretendemos alcançar resultados que expressem o valor da pressão em função do tempo na câmara de vácuo. Considerados os detalhes referentes à condutância da linha de bombeamento para os

regimes de escoamento dos gases e vapores, as curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão das bombas de vácuo, e a especificação das fontes de gases e vapores. Os Apêndices A e C expõem rigorosamente a física-matemática necessária para alcançar os objetivos pretendidos. O Capítulo 3 traz casos de estudos sobre a modelagem discreta. Nestes estudos de caso temos o cálculo do número de *Knudsen*, explicitando o critério matemático para a identificação do tipo de regime de escoamento dos gases e vapores. Este assunto é de fundamental importância tanto para o entendimento do comportamento do escoamento dos gases como para o projeto de sistemas de vácuo. Uma vez que a principal motivação para este trabalho de tese é a modelagem, análise e cálculo detalhados de sistemas de vácuo, a determinação do número de Knudsen será o ponto de partida para o estudo do escoamento dos gases e vapores.

1.6.2 Tratamento Contínuo.

Como vimos as três partes que compõem os sistemas de vácuo – a câmara de vácuo, a linha de bombeamento e as bombas de vácuo – normalmente são bem localizadas, ou seja, têm caráter discreto. Entretanto, há sistemas de vácuo nos quais podemos encontrar bombas de vácuo localizadas imediatamente junto à câmara de vácuo e até mesmo dentro dela. E ainda, sistemas de vácuo nos quais as suas câmaras de vácuo confundem-se com as tubulações, ou seja, a região onde ocorre o processo em vácuo é praticamente tubular. Existem também vários sistemas de vácuo de interesse nos quais não encontramos uma demarcação nítida entre as três partes mencionadas. Para estes casos, a modelagem físico-matemática é bastante complexa. Alguns destes casos serão discutidos em detalhe, sendo o objeto principal deste trabalho.

Iniciamos uma discussão neste Capítulo 1 sobre as abordagens discreta e contínua de sistemas de vácuo. Na oportunidade, comentamos num primeiro contato, o alcance e as limitações encontradas em cada uma delas. Neste capítulo, estamos dando início à argumentação para nos prepararmos para a construção das ferramentas físicas e matemáticas necessárias para análise, cálculo e modelagem de sistemas de vácuo.

Nos problemas da tecnologia do vácuo, a abordagem discreta leva ao conhecimento da função pressão dependente do tempo, chamada de pressão da câmara de vácuo $p_{CV} = p_{CV}(t)$. Dependendo da distribuição e da intensidade dos *throughputs* das fontes de gases e vapores e da forma da câmara de vácuo podemos ter variações grandes de pressão de um ponto para outro nela. Esta é a principal limitação da formulação discreta, ou seja, não somos capazes de encontrar os valores de pressão para cada ponto da câmara de vácuo. Podemos ainda encontrar outra limitação na modelagem de sistemas de vácuo com as bombas de vácuo colocadas diretamente dentro da câmara de vácuo. Por exemplo, os painéis criogênicos, *getters* nos cinescópios, válvulas eletrônicas de

potência, visores por efeito de campo e outros apresentam bombas de vácuo dentro da câmara de vácuo. Nestes casos a análise por meio da abordagem discreta é bastante aproximada, podendo ocultar detalhes importantes e até cruciais sobre o desempenho dos sistemas de vácuo. Há situações importantes em tecnologia do vácuo, nas quais, as pressões de trabalho levam a números de *Knudsen* menores que 0,01, ou seja, $K_N < 0,01$, nestes casos a hipótese do contínuo é verificada. Com isso, a equação de *Navier-Stokes* da mecânica dos fluidos pode ser empregada e com ela as técnicas e os programas computacionais já bem consagrados e testados. Assim, para os sistemas de pré-vácuo temos como encontrar de forma rigorosa o campo de pressão tanto estacionário como dependente do tempo [1-6,11-12,14,16,39-41].

No caso mais geral da análise de sistemas de vácuo, fazendo uso da abordagem contínua, devemos considerar os quatro regimes de escoamento dos gases e vapores. Devemos ter sempre presente que os quatro tipos de escoamento têm naturezas completamente diferentes entre si. No caso do regime viscoso laminar, usamos a equação de *Navier-Stokes* para obter o campo de pressão, assim como nos problemas envolvendo escoamento de gases no regime viscoso turbulento. Como exemplo importante e marcante, temos as modelagens das câmaras de vácuo dos reatores para processos empregados na microeletrônica e processos realizados a plasma em geral [11-12,27,31,42-43]. No caso do regime de escoamento intermediário a situação é mais complicada. Este regime apresenta características ainda em desenvolvimento, principalmente no que se refere ao estabelecimento das condições de contorno. Neste regime de escoamento, as modelagens são realizadas de forma mais segura e correta empregando a chamada simulação direta em gases, ou seja, considerando a teoria das colisões atômicas e moleculares, com a equação de *Boltzmann* sendo a sua base física. Este tipo de análise é bastante difícil, requerendo programas computacionais complicados e computadores com grande capacidade de processamento de dados. Temos aplicações importantes ocorrendo no regime de escoamento intermediário, por exemplo, a microeletrônica, processos industriais realizados a plasma, e outros [11-12,42-56].

Neste trabalho partimos da hipótese, que no caso do regime de escoamento molecular, o escoamento dos gases e vapores pode ser considerado um fenômeno de origem difusiva. Esta suposição, apesar de ser empregada naturalmente, requer um estudo mais detido e cuidadoso. No Apêndice G está apresentada uma discussão sobre a questão e comparando resultados obtidos com o método de *Monte Carlo*. As modelagens e análises detalhadas de sistemas de vácuo, com o escoamento dos gases e vapores no regime molecular, devem ser construídas observando-se os seguintes pontos. Inicialmente, deveremos considerar em detalhe a geometria da câmara de vácuo e as posições das aberturas que dão acesso às bombas de vácuo, além da disposição das fontes de gases e vapores a serem consideradas e as suas intensidades. Esperamos obter soluções com

estrutura de campo escalar, no caso o campo de pressão para a câmara de vácuo em estudo. Desta forma utilizamos a equação de difusão adaptada à pressão como variável dependente [37-38].

Considerando que a solução obtida por meio da formulação contínua é mais rica que aquela solução obtida pela formulação discreta, esperamos que na modelagem contínua surjam dificuldades adicionais. Mas, por meio da solução do problema usando a abordagem contínua, teremos o conhecimento do campo escalar de pressão na câmara de vácuo, isto é, $p_{CV} = p_{CV}(\vec{r}, t)$ para todos os pontos de interesse. As dificuldades encontradas não serão somente matemáticas para a obtenção da solução da equação diferencial parcial, mas também na definição de grandezas básicas relacionadas ao sistema de vácuo. Neste tipo de abordagem, deveremos definir grandezas como condutância específica, taxa de degaseificação específica tanto para as fontes gasosas estacionárias como para as dependentes do tempo, e ainda, a definição geométrica do sistema de vácuo.

Estas grandezas têm caracter contínuo, uma vez que a equação diferencial parcial tem como solução uma função com propriedades de campo escalar, no caso campo de pressão [47-48,51-63]. Em suma, a dificuldade na modelagem do problema, por meio da abordagem contínua, está em responder a seguinte questão: o que é condutância específica para um problema de uma, duas ou três dimensões espaciais? Ainda, quando o tubo tem área da seção transversal variável? A única situação encontrada, pelo autor deste trabalho de tese, nas publicações da área de tecnologia do vácuo é a de tubos com área de seção constante [1,11-12,14,24,47-48]. Neste caso, a obtenção da condutância específica é imediata e o tratamento matemático do problema depende exclusivamente das fontes gasosas e das condições de contorno e inicial. Neste trabalho de tese conseguimos generalizar para todas as dimensões espaciais e para todos os casos de fontes gasosas estacionárias e dependentes do tempo [59-62].

Mencionamos que existem quatro maneiras de modelar sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo, que são: método de *Monte Carlo*, método dos Coeficientes Angulares, método da Integral Cinética e o método das Áreas Equivalentes [36-45]. Estes métodos são bastante especializados e não são fáceis de serem implementados na prática. O método da Equação de Difusão, que estamos desenvolvendo neste trabalho de tese, tem a vantagem de o ferramental matemático-numérico necessário à obtenção das soluções dos problemas é o mesmo que aquele usado nos problemas de fenômenos de transporte de calor por condução [41,59-62].

Assim, neste trabalho, desenvolvemos uma metodologia geral para modelar sistemas de vácuo com os gases escoando no regime molecular, para todas as dimensões espaciais estacionárias e transientes no tempo. Mais, foram considerados problemas que apresentam fontes gasosas extensas e localizadas na posição e no tempo. Quando falamos em sistemas de vácuo, com uma,

duas ou três dimensões espaciais, queremos dizer que os sistemas de vácuo apresentam nitidamente uma dimensão dominante ou duas dimensões dominantes. Nas estruturas com geometria tubular, temos claramente três dimensões! Mas, ocorre que os fenômenos relativos ao escoamento dos gases e a variação de pressão se dá significativamente somente na direção ao longo do tubo. Isto faz com que possamos considerar o problema com geometria unidimensional. O mesmo tipo de raciocínio pode ser aplicado em duas e três dimensões. Em suma, nas estruturas com geometria planar com a terceira dimensão pequena frente às outras, podemos considerar as variações de pressão e os gases escoando significativamente em apenas duas dimensões. Estas últimas considerações são bastante comuns no estudo de outros fenômenos físicos [49]. A teoria para a modelagem de sistemas de vácuo no regime de escoamento molecular por meio da equação de difusão está desenvolvida em detalhe no Apêndice C.

Procuramos sempre identificar e buscar simetrias no problema, isto geralmente leva a uma série de simplificações no tratamento matemático e ainda deixa o sistema físico mais fácil de ser estudado e interpretado. Os sistemas de vácuo unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais estudados consideram vários detalhes, como: diferentes disposições e velocidades das bombas de vácuo, vários tipos de fontes de gases tanto em estado estacionário como em estado transiente [50-56,59-62].

1.7 Alcance, Limitações e Dificuldades nos Cálculos e nas Análises Tradicionais em Tecnologia do Vácuo.

Na ciência, na tecnologia e na engenharia, o alcance tanto dos cálculos como das análises depende fundamentalmente dos modelos que construímos para representar um determinado processo ou fenômeno. Os modelos devem ser simplificados a fim de conseguirmos resolvê-los matematicamente, mas não devem ser exageradamente simplificados, de modo a perder a essência do objeto em estudo. Encontrar a fronteira entre a simplificação e sofisticação é a tarefa mais difícil e depende do tirocínio e da experiência do profissional. Veja que quando falamos em resolução matemática do problema, estamos considerando a obtenção da solução tanto por meios analíticos como numéricos. Assim, na ciência e na tecnologia, é sempre uma tarefa difícil determinar qual o nível de detalhamento que deveremos considerar na construção da modelagem do objeto em estudo. Ao propor um modelo físico-matemático, o ideal seria conseguir o máximo de informação requerida para as nossas necessidades com o mínimo de esforço para a obtenção delas. A questão é que nem sempre sabemos *a priori* se um determinado detalhe será importante para a modelagem do sistema [34-36, 63-68].

Em tecnologia do vácuo, como já vimos, os modelos físicos construídos a partir da abordagem discreta são tratados matematicamente por meio da solução da equação diferencial fundamental para o processo de bombeamento. Dependendo dos detalhes a serem considerados no estudo em questão, a equação diferencial poderá ficar fortemente não linear, acarretando dificuldade na solução matemática do problema. Como já foi mencionado, não há ferramentas de análise disponíveis para a solução matemática de problemas específicos em tecnologia do vácuo. Assim, os projetistas e analistas em tecnologia do vácuo, ou ainda usuários que necessitam de resultados mais detalhados, precisam criar as suas próprias ferramentas para solucionar seus problemas. Desta forma, infelizmente, geralmente muitos problemas em tecnologia do vácuo não são tratados em profundidade que merecem.

Apesar das considerações feitas acima, devemos ter em mente que os problemas apresentados precisam ser tratados e analisados com rigor. Assim, como ocorrem em outras áreas da tecnologia, deveremos desenvolver os procedimentos e ferramentas adequados para estudo. Mesmo levando em conta os refinamentos e as sofisticções no modelo, há um alcance limitado na modelagem construída a partir da equação diferencial – E_{PBV} –, explicitada na Expressão I.1. A questão está no fato da Expressão I.1 fornecer a função pressão na câmara de vácuo em função somente do tempo. Neste caso, está implícito que a pressão é a mesma em todos os pontos da câmara de vácuo. Esta hipótese certamente é uma simplificação e que pode ser considerada grosseira na maioria dos casos. Uma análise mais detida sobre o assunto mostrará que deveremos considerar em muitos casos um campo de pressão na câmara de vácuo, ou seja, a pressão em todas as partes do sistema de vácuo. Assim, matematicamente teremos que a pressão deverá ser um campo escalar, representado por uma função $p_{CV} = p_{CV}(x, y, z, t)$.

Pelo exposto, o máximo alcance possível feito em uma análise tradicional em tecnologia do vácuo – abordagem discreta – é a obtenção de um valor de pressão em função do tempo na câmara de vácuo. Isso, mesmo considerando todos os possíveis detalhes relativos às fontes de gases e vapores, os valores das condutâncias dos componentes que compõem a linha de bombeamento, e ainda as curvas das velocidades de bombeamento das bombas de vácuo. Desta forma, está claro que a modelagem e análise dos sistemas de vácuo, utilizando a E_{PBV} , têm limitações e alcances intrínsecos a esta formulação.

Do ponto de vista básico, esta E_{PBV} é deduzida a partir do princípio de conservação de energia. Ela é um balanço entre a potência recebida pela câmara de vácuo, provenientes dos átomos e moléculas que compõem os gases e vapores $\sum_{i=1}^n Q_i$, da potência transferida para as bombas de

vácuo $S_{ef} p_{CV}(t)$ e a parte da potência que faz variar a pressão na câmara de vácuo, cujo termo é $V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt}$. Este assunto é discutido em detalhe no Apêndice A.

Em contrapartida à abordagem discreta temos a abordagem contínua, esta mais sofisticada que aquela para o tratamento detalhado de sistemas de vácuo. Na abordagem contínua podemos encontrar o valor de pressão em função do tempo e também em função de cada ponto da câmara de vácuo. Este tipo de abordagem tem sido usado para diferentes sistemas físicos, como por exemplo: escoamento de fluidos, transferência de calor, distribuição de cargas elétricas, distribuição de fontes de campos magnéticos, etc. Estes problemas são típicos em física e em tecnologia, surgindo da sua formulação em termos de equações diferenciais parciais.

Assim, esperamos neste trabalho estar contribuindo para a formulação em termos de campos de pressão, por meio da equação de difusão com as condições de contorno e condições iniciais bem estabelecidas, com claro significado físico para a modelagem detalhada de sistemas de vácuo [37-39, 59-62]. Entretanto, deveremos ter claro que a obtenção de soluções envolvendo equações diferenciais parciais, com condições de contorno e condição inicial, é uma tarefa muito difícil. Raríssimas são as situações nas quais encontramos soluções analíticas e, nesses casos, a sua obtenção é bastante árdua. A grande maioria dos problemas envolvendo condições de contorno tem as suas soluções alcançadas utilizando métodos numérico-computacionais [40-46,53-57,59-63,65-68].

1.8 Síntese desta Tese.

Os principais resultados obtidos no presente trabalho são de dois tipos: o primeiro deles – abordagem discreta – refere-se ao instrumental de análise capaz de contribuir para resolver numericamente a equação diferencial do processo de bombeamento E_{PBV} por meio do método de *Euler-Heun*, similar ao método de *Runge-Kutta* de segunda ordem, e do método de *Runge-Kutta* de quarta ordem. Iniciamos com o Capítulo 1 a apresentação da tecnologia do vácuo com seus objetivos e aplicações, resumo histórico dos seus principais eventos e realizações e principalmente, procuramos enfatizar e descreve os passos de como são realizadas as análises, cálculos e modelagens de sistemas de vácuo de uso geral. No Capítulo 1 fizemos uma descrição essencialmente descritiva e apenas introduzimos alguns aspectos matemáticos das modelagens.

Apresentamos com detalhe e rigor, no Apêndice A, a teoria pertinente para a abordagem discreta. Nas análises realizadas foram consideradas as condutâncias dependentes do regime de escoamento e também foram consideradas as velocidades de bombeamento das bombas de vácuo dependentes da pressão. As condutâncias das linhas de bombeamento são calculadas considerando

os regimes de escoamento viscoso turbulento, viscoso laminar, intermediário e molecular. As curvas de velocidade de bombeamento, para as bombas de vácuo mais utilizadas, foram conseguidas expressões analíticas, por meio de ajustes das curvas disponíveis nos catálogos dos produtos de vácuo. As bombas de vácuo para as quais conseguimos a expressão da velocidade de bombeamento em função da pressão são: bomba mecânica de palhetas de um estágio, bomba mecânica de palhetas de dois estágios, bomba de pistão, bomba de diafragma, bomba de anel líquido, bomba *scroll*, bomba injetora de vapor ou bomba *booster* de vapor, bomba de difusão, bomba turbomolecular-*drag*, bomba turbomolecular e bomba iônica. Os resultados obtidos por meio de métodos numéricos são bastante precisos quando comparados com aqueles casos nos quais podemos obter soluções analíticas. As expressões matemáticas das curvas de velocidade de bombeamento são mostradas em detalhe no Apêndice C.

Foram realizadas modelagens detalhadas de sistemas de vácuo, com o propósito de ilustrar a utilização das ferramentas analíticas e computacionais construídas neste trabalho. Os sistemas de vácuo considerados foram um sistema de pré-vácuo com bomba mecânica de palhetas de dois estágios, um outro sistema de pré-vácuo com bomba *roots*, um sistema de alto-vácuo com bomba difusora, e um sistema de ultra alto-vácuo com bomba turbomolecular. Obtivemos a pressão como função do tempo, partindo da pressão atmosférica até a pressão final que pode atingir o sistema de vácuo em questão. Com o propósito de conseguirmos uma análise detalhada enfatizamos os aspectos físicos do processo de bombeamento, em particular na construção da equação diferencial fundamental para o processo de bombeamento. No Capítulo 2 foram consideradas as definições das várias fontes de gases e vapores importantes nos sistemas de vácuo, assim como as suas expressões matemáticas. Em particular, para as fontes de gás devido ao vazamento virtual, o Apêndice E traz um estudo detalhado. Ainda para os casos em que a injeção controlada de gás precisa ser considerada, o Apêndice F traz este assunto em detalhe.

O segundo tipo de resultado – abordagem contínua – refere-se ao instrumental de análise para a obtenção dos valores de pressão em todos os pontos da câmara de vácuo, ou seja, conseguimos descrever os problemas de vácuo a partir de uma formulação de campo escalar, no caso, campo de pressão. A fim de tratar o problema adequadamente, foram desenvolvidas as ferramentas matemáticas necessárias para considerar os sistemas de alto-vácuo e de ultra alto-vácuo como sendo problemas de difusão de átomos e moléculas. Foram tratados problemas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, estacionários e transientes no tempo. No caso de sistemas de vácuo em uma dimensão – estruturas tubulares – muito encontrados em várias aplicações da tecnologia do vácuo, por exemplo, os aceleradores de partículas, válvulas *klystron*, anéis de armazenamento de partículas, microscópio eletrônico e os próprios tubos de transporte de

gases. Foi obtida uma generalização para o tratamento de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo tubulares para quaisquer fontes de gases, impulsivas e extensivas no tempo e no espaço. As expressões matemáticas obtidas podem ser usadas para tubos com seção transversal variável no comprimento. A teoria e as expressões matemáticas para a abordagem contínua são desenvolvidas em detalhe no Apêndice B. Uma discussão extensa sobre a utilização da equação de difusão, para modelar sistemas de vácuo com gases escoando no regime molecular, é apresentada no Apêndice G.

Para o caso de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo bidimensionais foram consideradas as câmaras de vácuo das telas de mostradores de informação com tecnologia de emissão de elétrons por efeito de campo, tanto retangular como circular. Estes casos apresentam grande interesse atualmente, uma vez que este tipo de mostrador de informação parece ser o mais promissor para substituir o centenário e ainda presente o tubo de raios catódicos. Em conjunto com as equações diferenciais obtidas, apresentamos também a construção detalhada das condições de contorno e condição inicial. Construímos também a grandeza condutância específica, fundamental para a modelagem de sistemas de vácuo pela equação de difusão. Na opinião do autor deste trabalho, a condutância específica é a principal grandeza que representa os sistemas de vácuo. Ela, comparada à velocidade de bombeamento, que determinará como será a evolução temporal da pressão, além de sua distribuição espacial nos sistemas de vácuo. São apresentados casos de estudo de sistemas de alto-vácuo modelados pela equação de difusão. No Apêndice D comparamos, confrontamos e estabelecemos os limites de aplicação às abordagens discreta e contínua. De forma abreviada, dizemos que as principais contribuições deste trabalho de tese são: a construção de uma planilha de cálculo detalhado para análise de sistemas de vácuo com a abordagem discreta; a construção matemática de expressões para a velocidade de bombeamento para as principais bombas de vácuo; cálculo de sistemas de vácuo considerando detalhes sobre a condutância da linha de bombeamento; definição das grandezas condutância específica e taxa de degaseificação específica por unidade de comprimento de tubos, para casos gerais de tubos com área de seção transversal variável com o comprimento; construção matemática para a representação de fontes de gases para tubos de área de seção transversal variável com o comprimento; tratamento em detalhe de vários tipos de fontes de gases e vapores; construção de equações diferenciais para a análise de sistemas de vácuo gerais pelo método de difusão de gases e comparação dos resultados analíticos e computacionais obtidos pelo método de difusão de gases com o método de *Monte Carlo*.

1.9 Referências.

1. Madey, T. E. and Brown, W. C., History of Vacuum Science and Technology, American Vacuum Society and American Institute of Physics, 1984.

2. Redhead, P. A., *Vacuum Science and Technology – Pioneers of the 20th Century*, American Vacuum Society, 1994.
3. Dushman, S., *Scientific Foundations of Vacuum Technique*, Second Edition, John Wiley and Sons Inc, 1962.
4. Hucknall, D., *Vacuum Technology and Applications*, Butterworth-Heinemann Ltd, 1991.
5. O’Hanlon, J. F., *A User’s Guide to Vacuum Technology*, Second Edition, A Wiley-Interscience Publication, 1989.
6. Roth, A., *Vacuum Technology*. Second and Revised Edition, North-Holland, 1986.
7. Kittel, C., *Elementary Statistical Physics*, Dover Publications, 2004. XXXXX
8. Sugano, T., *Applications of Plasma Processes to VLSI Technology*, Wiley-Interscience Publication, 1985.
9. Degasperis, F. T., *Notas de Trabalho e de Aulas da Disciplina de Tecnologia do Vácuo da Faculdade de Tecnologia de São Paulo*, Terceira Edição, Circulação Restrita, 1999.
10. Chambers, A., *Modern Vacuum Physics*, Chapman & Hall / CRC, 2005.
11. Wei Zhu, *Vacuum Microelectronics*, JohnWiley & Sons, 2001.
12. Lafferty, J. M., *Foundations of Vacuum Science and Technology*, Wiley-Interscience Publication, 1998.
13. Marquardt, N., et al, *CERN-Yellow Reports – 99-05*.
14. Duval, P., *High Vacuum Production in the Microelectronics Industry*, Elsevier Science Publishers B.V., 1988.
15. Dylla, H. F., *Development of Ultrahigh Vacuum Technology for Particle Accelerators and Magnetic Fusion Devices*, *J. Vac. Sci. Technol. A* 12(4), 1994.
16. Gröber, O., *J. Vac. Sci. Technol. A* 9(3), 1991.
17. Benvenuti, C., Calder, R. and Grobner, O., *Vacuum*, 37(8/9), 1987.
18. Dylla, H. F., *A Review of Surface Conditioning Techniques for Ultrahigh Vacuum Systems*. Proceedings of the Workshop on Wall Conditioning in Large Ultra High Vacuum Devices. International Union for Vacuum Science, Technique and Applications – IUVSTA, Switzerland, 1995.
19. Winter, J., *Wall Conditioning in Fusion Devices*. Proceedings of the Workshop on Wall Conditioning in Large Ultra High Vacuum Devices. International Union for Vacuum Science, Technique and Applications – IUVSTA, Switzerland, 1995.
20. Varandas, C.A.F., *Vacuum*, 45(10/11), 1994.

21. Degasperri, F.T., The Vacuum Pumping, Controlled Gas Injection and Residual Gas Analyses Systems for the TCA-BR Tokamak, 14th International Vacuum Congress (IVC 14), Birmingham, United Kingdom, 1998. (*Trabalho apresentado em Sessão Oral*).
22. Degasperri, F.T., Elisondo, J.I., Larche, E.A., Reis, A.P. dos, Sanada, E.K., Ferreira, A.A., Lima, R.R. and Nascimento, I.C., The Vacuum Pumping, Controlled Gas Injection, Residual Gas Analyses and Conditioning Wall Systems for the TCABR Tokamak, 14th Technical Committee Meeting on Research Using Small Fusion Devices, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 2001. (*Trabalho apresentado em Sessão de Paineis*).
23. Bradaschia, C., Large Interferometers for Gravitational Waves Detection, Proceedings of the Workshop on Wall Conditioning in Large Ultra High Vacuum Devices. International Union for Vacuum Science, Technique and Applications – IUVTSA, , Switzerland, 1995.
24. Bernardini, M., Bradaschia, C., Pan, H.B., Pasqualetti, A., Torelli, G. and Zhang, Z., Gravitation Antenna Vacuum Prototype. Proceedings of the Workshop on Wall Conditioning in Large Ultra High Vacuum Devices. International Union for Vacuum Science, Technique and Applications – IUVTSA, Switzerland, 1995.
25. Beni, G., Hackwood, S., Belinski, S., Shirazi, M., Li, Shigang and Karupiah, L., Vacuum Mechatronics, Artech House, Inc. 1990.
26. Porta, P. Della., The Gettering Process in Modern Receiving Valve Manufacture, Progress in Vacuum Science and Technology, Ed. A. Barrett, Pergamon Press, 1959.
27. Hablanian, M.H., J. Vac. Sci. Technol. A2(2), 1984.
28. Redhead, P.A., J. Vac. Sci. Technol. A2(2), 1984.
29. Duke, C.B., J. Vac. Sci. Technol. A2(2), 1984.
30. Hobson, J.P., J. Vac. Sci. Technol. A2(2), 1984.
31. Loevinger, R., Fundamental Considerations in Vacuum Practice. Vacuum Equipment and Techniques, Ed. A. Guthrie and R.K. Wakerling. McGraw-Hill Book Company, 1949.
32. Sedlacek, M., Electron Physics of Vacuum and Gaseous Devices, John Wiley and Sons, 1996.
33. Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, 2nd Edition, Wiley, 2003.
34. Walton, A.J., Three Phases of Matter, Oxford University Press, 2nd Edition, 1992.
35. Tabor, D., Gases, Liquids and Solid and Other States of Matter, Cambridge University Press, 3rd Edition, 1991.
36. Saksaganskii, G.L., Molecular Flow in Complex Vacuum Systems, Gordon and Science Publishers, 1988.
37. Cercignani, C., Mathematical Methods in Kinetic Theory, Plenum Press, 1969.

38. Knudsen, M., Kinetic Theory of Gases, 3rd Edition, John Wiley and Sons, 1950.
39. Bird, G.A., Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow, Clarendon Press Oxford, 1996.
40. Kersevan, R., Vacuum System Optimization: Computational Methods, School on “Use of Synchrotron Radiation in Science and Technology”, International Centre for Science and High Technology, Trieste, Italy, 1991.
41. Kersevan, R., Considerations on Vacuum Calculations, Private Communication, 2005.
42. Kersevan, R., Molflow - User’s Guide, Sincrotrone Trieste, Trieste, Italy, 1991.
43. Cercignani, C., Rarefied Gas Dynamics: From Basic Concepts to Actual Calculations, Cambridge Text Applied Mathematics, 1999.
44. Sharipov, F., Seleznev, V., Data on Internal Rarified Gas Flows, J. Phys. Chem. Ref. Data, Vol. 27, no. 3, 1998.
45. Kalempa, D., Fenômenos de Transporte no Escoamento de Misturas de Gases Rarefeitos, Dissertação de Mestrado, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2005.
46. Hoffman, D.M., Singh, B. and Thomas III, J.H., Handbook of Vacuum Science and Technology, Academic Press, 1997.
47. Roberts, R.W. and Vanderslice, T.A., Ultrahigh Vacuum and its Applications. Prentice-Hall, 1963.
48. Davy, J.R., Industrial High Vacuum, Sir Isaac Pitman and Sons, 1951.
49. Ryans, J.L. and Roper, D.L., Process Vacuum Systems Design and Operation, McGraw-Hill Book Company, 1986.
50. Woods, R.L. and Lawrence, K.L., Modeling and Simulation of Dynamics Systems, Prentice-Hall, 1997.
51. Gershendeld, N., The Nature of Mathematical Modeling, Cambridge University Press, 1999.
52. MacCluer, C.R., Industrial Mathematics – Modeling in Industry, Science and Government, Prentice Hall, 2000.
53. Svobodny, T., Mathematical Modeling for Industry and Engineering, Prentice Hall, 1998.
54. Arfken, G. and Weber, H., Mathematical Methods for Physicists, 4th Edition, Academic Press, 1998.
55. Tijonov, A.N. and Samarsky, A.A., Ecuaciones de la Fisica Matematica, Segunda Edición, Editorial Mir, 1980.
56. Snider, A.D., Partial Differencial Equations: Sources and Solutions, Printice Hall, 1999.

57. Souza-Santos, M. L. de, Analytical and Approximate Methods Applied to Transport Phenomena, Livro-Texto da Disciplina da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp, 2004.
58. Gershendeld, N., The Physics of Information Technology, Cambridge University Press, 2000.
59. Degasperri, F.T., Baranauskas, V., Pressure Field in High-Vacuum Systems: Mathematical Physics Formulation, 8th European Vacuum Conference – EVC-8 – 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society, Berlin, Germany, 2003.
60. Degasperri, F.T., Mammana, V.P., Baranauskas, V., Steady-State and Transient Profile in Field Emission Display, 8th European Vacuum Conference – EVC-8 – 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society, Berlin, Germany, 2003.
61. Degasperri, F.T., Pressure Field Distribution in Ultra High-Vacuum Systems, 41st IUVSTA – Workshop – Vacuum System Design for Particle Accelerators: a multidisciplinary approach, Brdopri Kranju, Slovenia, 2004.
62. Degasperri, F.T., Baranauskas, V., Mathematical Physics Formulation to Pressure Field in a Tube with an Arbitrary Axisymmetric Cross Section, 16th International Vacuum Congress – IVC-16, Venice, Italy, 2004.
63. Fortuna, A.O., Técnicas Computacionais para a Dinâmica dos Fluidos – Conceitos Básicos e Aplicações, Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
64. Van Atta, C.M., Vacuum Science and Engineering, McGraw-Hill Book Company, 1965.
65. Degasperri, F.T., Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo - Objetivo Didático, Trabalho apresentado em Sessão Oral, XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria, Florianópolis, SC, Brasil, 1991.
66. Sanches Junior, R.L., Tratamento Matemático Analítico-Numérico para o Processo de Bombeamento em Tecnologia do Vácuo. Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Fatec-SP, orientado por F.T. Degasperri, 1997.
67. Degasperri, F.T., Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo, Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999. Seminário.
68. Pauletti, R.M.O., Degasperri, F.T., Morel, J.C.O.; Saraiva, J.R.; Onusic, H.; Xavier, O.A.M.; Mathias Jr. V. - "Determinação do Campo de Temperaturas em Rodas de Ônibus Urbanos". VII SIMEA - Simpósio de Engenharia Automotiva, São Paulo, SP, Brasil, 1993. Publicado nos Anais do Simpósio. Este trabalho recebeu Menção Honrosa da Associação Brasileira da Indústria Automotiva (AEA).

Capítulo 2

Princípios Físicos e Equações Fundamentais

Neste capítulo apresentamos os conceitos físicos fundamentais para análise, cálculo e modelagem de sistemas de vácuo. Com o propósito, inicialmente estabelecido, de construir modelos rigorosos em tecnologia do vácuo listamos e discutimos as várias fontes de gases e vapores importantes que surgem nos processos em vácuo. Em seguida, tratamos o transporte dos gases e o seu bombeamento em baixa pressão. Posteriormente, apresentamos as equações fundamentais para a modelagem de sistemas de vácuo tanto na formulação discreta como na contínua. Seguindo, como a modelagem dos sistemas de vácuo segue uma formulação matemática de equações diferenciais, discutimos em detalhe o estabelecimento da condição inicial e das condições de contorno dos problemas. Complementando e fechando, mostramos que as formulações discreta e contínua devem ser tratadas como complementares.

2.1 Introdução.

O principal objetivo da tecnologia do vácuo é apresentar soluções para a remoção dos gases e vapores presentes nas câmaras de vácuo. Tendo sempre presente que as soluções propostas devem ser de custo que viabilize economicamente o produto e que podemos remover apenas parte do gás e vapor presente na câmara de vácuo. Há essencialmente duas grandes classes de fenômenos importantes que ocorrem em vácuo. Uma delas é oriunda das possíveis fontes de gases e vapores e a outra delas é devido ao transporte dos gases rarefeitos. De forma geral, verificamos que os fenômenos observados em baixas pressões são devidos à interação dos átomos e moléculas entre si e a interação deles com as superfícies dos materiais sólidos e líquidos que compõem e participam dos sistemas de vácuo. No caso específico dos fenômenos ligados ao transporte dos gases e vapores em vácuo há quatro maneiras distintas de os gases escoarem. Isto torna a modelagem rigorosa do processo de bombeamento em vácuo geralmente bastante difícil de ser realizada. Mas, a identificação dos tipos de escoamento dos gases e vapores é determinante para se conseguir estudar o bombeamento dos gases em vácuo. Assim, além do transporte dos gases, para que possamos realizar uma análise profunda dos sistemas de vácuo, deveremos ter uma definição clara e quantitativa das várias fontes de gases e vapores que participam dos processos sob vácuo.

Como estamos propondo dois modos de abordar os sistemas de vácuo – a abordagem discreta e a abordagem contínua –, teremos que considerar tanto a especificação das fontes de gases e vapores como as grandezas relativas ao transporte dos gases para cada uma das formas de modelagem. Na formulação discreta os sistemas de vácuo são formados por três partes distintas: a câmara de vácuo, as bombas de vácuo e a linha de bombeamento. Neste caso, deveremos identificar as fontes gasosas presentes na câmara de vácuo e quantificá-las. Em seguida, determinar a condutância total da linha de bombeamento, e posteriormente, de posse das velocidades de bombeamento das bombas de vácuo, proceder à obtenção da solução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} . Por meio da modelagem discreta poderemos determinar a função pressão em função do tempo na câmara de vácuo. Nos Apêndices A, C, D, E e F são tratados de temas que interessam diretamente à abordagem discreta e ainda, no Capítulo 3 exemplificaremos com casos de estudo bastante presentes na tecnologia do vácuo.

Na formulação contínua, por sua vez, temos que os sistemas de vácuo podem ser tratados de forma completamente integrada. Assim, tanto a câmara de vácuo como a linha de bombeamento assim como a bomba de vácuo são consideradas na modelagem contínua de forma que a pressão pode ser obtida em todos os pontos que compõem o sistema de vácuo. Neste sentido, todas as partes do sistema de vácuo que participam da modelagem contínua têm o mesmo nível de atuação. Como conseqüência, determinaremos o campo de pressão em todos os pontos que compõem o sistema de vácuo. Assim, para podermos efetuar este tipo de modelagem deveremos identificar e definir as fontes de gases e vapores e as condutâncias em cada ponto que compõem o sistema de vácuo. Além de identificar as posições das bombas de vácuo com suas velocidades de bombeamento. Posteriormente, escreveremos a equação diferencial parcial com as condições de contorno e a condição inicial para podermos obter a solução matemática do problema. Por meio da modelagem contínua poderemos determinar o campo de pressão em função do tempo para todos os pontos considerados na modelagem. Nos Apêndices B, C, D, E, F e G são tratados de temas que interessam diretamente à abordagem contínua e ainda, no Capítulo 3 exemplificaremos com casos de estudo bastante ilustrativos à tecnologia do vácuo.

Verificaremos que ambas as formulações discreta e contínua devem ser tratadas como complementares. Inclusive, pode ocorrer que para a obtenção de uma ou mais condições de contorno, essenciais à formulação contínua, deveremos primeiramente realizar uma modelagem discreta. Este mesmo tipo de situação também ocorre em problemas de transferência de calor e em outros problemas, cuja formulação é feita em termos de campo, seja campo escalar, ou seja, campo vetorial. Podemos interpretar que na essência, a abordagem discreta considera o princípio de conservação de energia dependente exclusivamente do tempo e, a abordagem contínua considera o

princípio de conservação de energia dependente do tempo e em cada posição do sistema físico em estudo. Podemos ainda utilizar a abordagem discreta em uma modelagem para verificarmos a coerência na realização de uma modelagem contínua. Em suma, devemos sempre considerar as abordagens discreta e contínua como complementares e nunca como antagônicas e excludentes. Ainda, há situações em que a modelagem discreta é suficiente, sendo supérflua e desperdício de tempo e recursos computacionais a modelagem contínua, este assunto é discutido no Apêndice D.

2.2 Teoria Cinética dos Gases para Projetos de Sistemas de Vácuo.

A teoria cinética dos gases é a base teórica para a tecnologia do vácuo. Além do comportamento geral dos gases e vapores, devemos ainda considerar os fenômenos importantes dos gases relacionados a sua interação com as superfícies sólidas e líquidas. Assim, em baixas pressões, temos os fenômenos de adsorção e de desorção, que dão origem ao *outgassing*, que é a liberação de gás das superfícies expostas ao vácuo na temperatura ambiente, e a degaseificação (do inglês *degassing*), que é a liberação de gás com energia adicionada às paredes, estes são processos importantes que ocorrem em vácuo [1,2]. A teoria cinética dos gases é uma área da física bastante extensa e pode ser tratada em diferentes níveis de profundidade. Tendo em vista os nossos propósitos, apenas citaremos os conceitos básicos relevantes da teoria cinética dos gases importantes à tecnologia do vácuo. Há textos que tratam a teoria cinética dos gases adequadamente à modelagem dos sistemas de vácuo [3-7]. Para o estudo e a modelagem dos sistemas de vácuo, além dos fenômenos relacionados ao comportamento geral dos gases e vapores nos volumes e da sua interação com as superfícies, devemos também considerar o transporte dos gases nos quatro regimes de escoamento que ocorrem com os gases rarefeitos.

A equação dos gases perfeitos ou ideais, também chamada de equação de *Clapeyron-Mendeleev*, mostrada na Expressão 2.1

$$pV = nRT \quad \text{ou} \quad pV = NkT \quad 2.1$$

é uma sistematização das leis de *Boyle e Mariotte*, de *Charles*, de *Avogadro* e de *Gay-Lussac*. A expressão matemática simples para a equação de estado dos gases perfeitos reflete a forma simples do comportamento dos gases ideais [4,5]. As grandezas que aparecem na equação dos gases perfeitos são: a pressão p , o volume do recipiente V , a quantidade de gás em número de mols n ou em número de moléculas N , a temperatura absoluta T , e ainda, R , a constante universal dos gases perfeitos e k é a constante de *Boltzmann*. Na maioria dos casos dos processos em vácuo, a equação acima é suficiente para tratar do comportamento dos gases no volume. Para os sistemas de

vácuo voltados à metrologia, utilizaremos a equação de estado do virial com a primeira potência na pressão, como veremos mais à frente [1,2].

Há aplicações da tecnologia do vácuo nas quais temos a presença de vapores. Nestes casos, deveremos tratar o estado gasoso usando a equação dos gases reais. Adotamos assim, mostrada na Expressão 2.2 a equação de *van der Waals*,

$$\left(p + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad 2.2$$

onde, a e b são parâmetros para um dado tipo de composto gasoso. A expressão acima considera a existência do fenômeno da pressão de vapor. Este fenômeno é importante em vários processos que ocorrem em vácuo. Por exemplo, o desempenho de algumas bombas de vácuo, muitos aspectos do processo de bombeamento e muitas aplicações da tecnologia do vácuo são dependentes do conceito de pressão de vapor [1-12]. Do ponto de vista do comportamento dos gases e vapores em sistemas de vácuo, as duas equações de estados apresentadas são suficientes. De uma forma mais geral e abrangente, podemos generalizar as possíveis equações de estado dos gases por meio da equação de estado do virial, como mostrada a seguir na Expressão 2.3

$$pV = RT(1 + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots) \quad 2.3$$

onde, B , C , D são constantes que dependem de um particular composto gasoso. Em tecnologia do vácuo, mesmo em condições bastante exigentes que são necessárias em metrologia de baixas pressões, basta a consideração do termo até a primeira potência na pressão na equação de estado do virial, assim

$$pV = RT(1 + Bp) .$$

Esta última equação é suficiente para a maioria dos gases utilizados nas condições de operação dos equipamentos metrológicos [2,6,13-14]. Nas pressões de trabalho em vácuo, a lei de Dalton, que relaciona a pressão total com as pressões parciais é válida para as misturas gasosas.

A teoria cinética dos gases teve um grande avanço com a função de distribuição de *Maxwell-Boltzmann* das velocidades e de energias – energia cinética de translação – e uma série de propriedades físicas foi explicada a partir de primeiros princípios. Para a tecnologia do vácuo, os

conceitos e cálculos relativos ao transporte de gases e vapores dependem desta distribuição. As funções de distribuição de velocidades e energias de *Maxwell-Boltzmann* são mostradas a seguir, para uma quantidade de gás com N moléculas, sendo a massa de cada molécula igual a m e estando a uma temperatura T , assim temos a Expressão 2.4

$$\frac{N(v)}{N} dv = f(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} 4\pi v^2 e^{-mv^2/2kT} dv, \quad 2.4$$

e, sabendo-se que a energia de cada molécula é a sua energia cinética, isto é, $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$, desta forma, escrevemos $d\varepsilon = mv dv$ e temos que a distribuição de energias é dada pela Expressão 2.5

$$\frac{N(\varepsilon)}{N} d\varepsilon = f(\varepsilon)d\varepsilon = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon. \quad 2.5$$

A partir dessas expressões de função de distribuição podemos encontrar a velocidade média, dada pela Expressão 2.6

$$\langle v \rangle = \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad 2.6$$

a velocidade mais freqüente, ou também chamada de velocidade mais provável, dada pela Expressão 2.7

$$v_{MP} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad 2.7$$

e, a velocidade quadrática média dada pela seguinte Expressão 2.8

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = v_{QM} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad 2.8$$

Os resultados mostrados acima têm enorme aplicação dentro da tecnologia do vácuo, uma vez que os fenômenos de transporte de gases e vapores, para os quatro regimes de escoamento, encontram-se totalmente apoiados na distribuição de *Maxwell-Boltzmann* das energias e das velocidades. É interessante observar que a verificação experimental direta da distribuição de velocidades somente foi realizada 50 anos após a sua proposta teórica e ainda cabe notar que somente foi possível realizá-la devido ao desenvolvimento de bombas de alto-vácuo e da tecnologia de feixes moleculares.

Junto com a condutância e a velocidade de bombeamento, a outra grandeza fundamental para análise e cálculo de sistemas de vácuo é o *throughput*, definido como

$$Q(t) \equiv RT \frac{dn(t)}{dt} = kT \frac{dN(t)}{dt} .$$

O *throughput* tem unidade de potência e podemos interpretá-lo como sendo diretamente proporcional à *vazão* da energia cinética média de translação das moléculas no sistema de vácuo [1-2,11-12]. Este assunto é tratado em detalhe no Apêndice A.

As moléculas no estado gasoso estão em incessante e caótico movimento de translação. Desta forma, elas podem colidir entre elas e com as paredes e outras superfícies do sistema de vácuo. Dada certa quantidade de gás em um volume, temos os seguintes conceitos e grandezas importantes para a tecnologia do vácuo. A densidade de moléculas em um recipiente é dada pela expressão $\frac{N}{V}$ ou $\frac{n}{V}$. O número de choques das partículas com a superfície por unidade de área e unidade de tempo é dado pela Expressão 2.9

$$J = \frac{\frac{N}{V} \langle v \rangle}{4} = \frac{N}{4V} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{N}{4V} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \Rightarrow \tag{2.9}$$

$$J = \frac{pN_A}{\sqrt{2\pi MRT}} \quad \text{ou} \quad J = \frac{p}{\sqrt{2\pi mkT}}$$

onde, M é a massa molecular, m é massa do átomo ou da molécula e N_A o número de *Avogadro*. Este é um dos mais importantes conceitos da teoria cinética dos gases para a tecnologia do vácuo e suas aplicações. O caminho livre médio λ é definido como a distância média percorrida pelas moléculas entre dois choques sucessivos. Ele é dado pela Expressão 2.10

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d_m^2 \frac{N}{V}}, \quad 2.10$$

onde, d_m é o diâmetro da molécula. A grandeza λ determina, direta ou indiretamente, uma série de propriedades relacionadas aos fenômenos de transportes dos gases e vapores e ela é de fundamental importância para o estudo e projeto de sistemas de vácuo [8]. A relação mostrada a seguir é fundamental para o estudo do escoamento dos gases e vapores

$$Kn \equiv \frac{\lambda}{L},$$

ela define o chamado de número de *Knudsen*, que determina o tipo de escoamento dos gases presente no sistema de vácuo. A determinação de *Kn* é o ponto de partida para os projetos em tecnologia do vácuo. Na expressão, L é uma distância típica do sistema de vácuo, em geral o diâmetro da tubulação que liga a câmara de vácuo à bomba de vácuo [1-2,9-12].

O tempo de formação de uma monocamada de moléculas em uma superfície é dado pela Expressão 2.11

$$t_{fmc} = \frac{4}{\left(\frac{V}{N}\right) \left(\frac{8RT}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}} d_m^2}. \quad 2.11$$

Este é outro conceito importante na teoria cinética dos gases, com muitas aplicações em vácuo sustentadas na Expressão 2.11 [10]. A frequência de colisões de moléculas entre si por unidade de tempo ε é dada pela Expressão 2.12

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{8RT}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}}}{\lambda}. \quad 2.12$$

Um outro conceito importante para os sistemas de vácuo que apresentam partes com diferentes temperaturas é a transpiração térmica [1,4,9,12]. Muitos dos conceitos citados acima têm importância também no estudo dos fenômenos de transportes dos gases. Devemos considerar os fenômenos relativos aos gases e vapores tanto em um volume como em transporte [14].

Finalizando, as inúmeras e crescentes aplicações do vácuo estão baseadas na teoria cinética dos gases e ela continua nos fornecendo idéias para novas aplicações e aprimoramento das já existentes [1,10,12,16].

2.3 Fontes de Gases e Vapores nos Sistemas de Vácuo.

A determinação da evolução temporal da pressão na câmara de vácuo – $p_{CV} = p_{CV}(t)$ – é um dos objetivos deste trabalho, como resultado da modelagem de sistemas de vácuo por meio da abordagem discreta. A Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – é mostrada abaixo

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i .$$

Como vimos no capítulo anterior, a identificação das fontes de gases e vapores é fundamental para podermos construir e resolver a equação diferencial para o processo de bombeamento. Em sua forma mais geral, o termo relativo às fontes dos gases e vapores é dado a seguir

$$Q_{Total} = \sum_{i=1}^n Q_i = Q_{VR} + Q_{VV} + Q_{Vap} + Q_{Sub} + Q_{Deg} + Q_{Perm} + Q_{OBV} + Q_{GVP} + Q_{IC} ,$$

na qual identificamos cada parcela da expressão acima como sendo: Q_{VR} o *throughput* do vazamento real, Q_{VV} do vazamento virtual, Q_{Vap} da vaporização, Q_{Sub} da sublimação, Q_{Deg} da degaseificação, Q_{Perm} da permeação, Q_{OBV} da fonte gasosa com origem na bomba de vácuo, Q_{GVP} dos gases e vapores de processo e Q_{IC} da injeção controlada de gases e vapores. A solução da equação diferencial – E_{PBV} –, para um particular processo a ser realizado em vácuo, somente poderá ser obtida com a definição matemática de cada uma das parcelas da Expressão 1.1 [1,2,11-15]. Desta forma, as fontes de gases e vapores presentes no processo em vácuo deverão ser representadas por meio de funções matemáticas. A obtenção das expressões matemáticas para as fontes gasosas geralmente não é uma tarefa imediata; ela está deduzida e discutida em detalhe no Apêndice A.

O primeiro passo a ser dado, no sentido de quantificar as fontes gasosas, é ter os conceitos físicos muito claros sobre elas. De um modo geral, as várias fontes gasosas listadas estão presentes na maioria dos processos em vácuo. Observamos, contudo, que para um particular processo em vácuo, uma fonte de gás geralmente é a dominante em certa faixa de pressão, podendo as outras

fontes de gás ser desprezadas. Temos situações em que duas, três ou mais fontes gasosas deverão ser consideradas concomitantemente em certo processo em vácuo. Determinar quais fontes de gases deverão ser consideradas na modelagem é muito importante, e isto fará com que o problema possa ser tratado de forma eficiente. Entretanto, as simplificações criteriosas nas modelagens matemáticas de fenômenos físicos exigem um conhecimento bastante grande e seguro do assunto tratado. Neste sentido, um conhecimento profundo relativo às fontes gasosas assume um papel central na modelagem em tecnologia do vácuo. Em seguida, apresentamos esquematicamente um sistema de vácuo com a totalidade das possíveis fontes de gases e vapores.

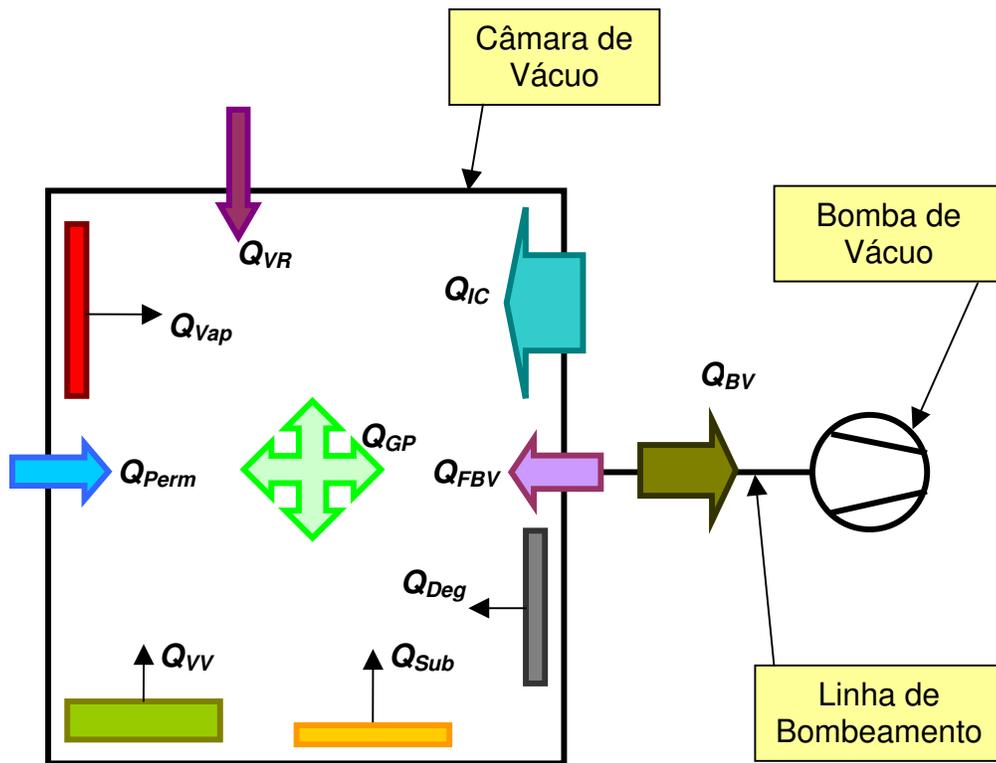


Figura 2.1 Esquema de um sistema de vácuo mostrando as possíveis fontes de gases e vapores na câmara de vácuo, com a linha de bombeamento e com a bomba de vácuo.

As definições e os conceitos relativos às possíveis fontes de gases e vapores presentes nos sistemas de vácuo são apresentados a seguir. Esta seção deve nortear as principais idéias sobre as fontes gasosas, além de propor uma sistemática de trabalho a fim de ser possível calcular os *throughputs* de cada uma delas. Este assunto, extenso e com algumas dificuldades, é imprescindível às modelagens e análises detalhadas dos sistemas de vácuo.

- **Vazamento Real - Q_{VR} :** Esta fonte de gás é devida à passagem de gás entre os meios externo e interno ao sistema de vácuo. Comumente ela é ocasionada por uma trinca em um cordão de solda, ou um risco em uma superfície de vedação, ou ainda, um pequeno objeto atravessando uma vedação. Os gases e vapores do vazamento real têm origem na atmosfera circunstante ao sistema de vácuo. Matematicamente, o *throughput* Q_{VR} é dado pela Expressão 2.13

$$Q_{VR} = C_{VR} (p_{am} - p_{CV}), \quad 2.13$$

onde, C_{VR} é a condutância da passagem do vazamento real, p_{am} é a pressão atmosférica e p_{CV} é pressão na câmara de vácuo. Apesar de ser formalmente simples a expressão acima, ela é impossível de ser obtida, uma vez que não temos disponíveis os valores das dimensões da passagem do vazamento real. Isto não deve causar problemas, uma vez que o vazamento real geralmente não participa da modelagem dos sistemas de vácuo. Quando identificado o vazamento real, nós o eliminamos! Caso queiramos determinar o valor de Q_{VR} podemos fazê-lo experimentalmente, por meio do conhecimento da pressão final e da velocidade efetiva de bombeamento, ou seja, $Q_{VR} = S_{ef} P_{final}$, subtraindo as outras fontes gasosas ou, se for o caso, até desprezando-as. Para podermos proceder desta forma devemos ter um acompanhamento constante do desempenho do sistema de vácuo [10,15]. A localização e determinação do *throughput* do vazamento real são tarefas da detecção de vazamentos, com suas técnicas, metodologias de trabalho e seus instrumentos.

- **Vazamento Virtual, Q_{VV} :** Este tipo de fonte de gás tem sua origem na liberação de gás acumulado em um pequeno volume ligado ao sistema de vácuo através de uma passagem de pequena condutância. O estudo desta fonte de gás é bastante negligenciado em tecnologia do vácuo, principalmente nos textos recentes. Os textos apenas apresentam uma descrição rápida como os vazamentos virtuais ocorrem e como eles podem comprometer o bom desempenho dos sistemas de vácuo. Alguns textos antigos procuram esboçar um modelo bastante simplificado para o vazamento virtual, mas sem discutir e analisar as suas conseqüências para o desempenho dos sistemas de vácuo e para os processos em vácuo. Com o propósito de contribuir para a modelagem matemática rigorosa do vazamento virtual, propomos um trabalho detalhado no Apêndice E [2,15].

- **Vaporização, Q_{Vap} :** Esta fonte gasosa é devida ao fenômeno de pressão de vapor nos líquidos. Os líquidos geralmente apresentam altos valores de pressão de vapor, e em geral, comprometendo bastante a pressão final dos sistemas de vácuo. Como veremos em seguida, os líquidos normalmente têm alguma presença nos sistemas de vácuo. Nos processos de limpeza dos

sistemas de vácuo são comumente utilizados álcoois, acetonas, detergentes e água. Os produtos líquidos usados durante a limpeza devem ser completamente removidos, devendo-se certificar que não há porções líquidas no interior dos sistemas de vácuo. Por outro lado, existem componentes dos sistemas de vácuo que usam produtos líquidos, por exemplo, os fluidos de algumas bombas de vácuo e as graxas para lubrificação e vedação. Neste sentido, os sistemas de vácuo precisam estar constantemente sendo monitorados em relação as possíveis contaminações destes compostos líquidos. É importante lembrar que a pressão de vapor depende exponencialmente da temperatura. Também, ocorrem inúmeros processos em vácuo baseados no fenômeno de pressão de vapor, como exemplo, temos a secagem, a liofilização, o tratamento de óleo de transformadores, empacotamento de alimentos, etc. Nestes casos, a pressão de vapor deve ser diretamente considerada como uma fonte gasosa e quantificada. A quantidade de moléculas por unidade de área e unidade de tempo que evapora de uma superfície é dada pela Expressão 2.14

$$J_{vap} = \frac{P_{vapor} N_A}{\sqrt{2\pi MRT}} = \frac{P_{vapor}}{\sqrt{2\pi mkT}}, \quad 2.14$$

onde, p_{vapor} é a pressão de vapor do material líquido. Usando a expressão anterior, determinamos o *throughput* devido à evaporação em vácuo por unidade de área como sendo

$$Q_{vap} = J_{vap} k T.$$

Podemos também determinar o fluxo de massa Fl_{vap} de material líquido que evapora por meio da Expressão 2.15

$$Fl_{vap} = J_{vap} \cdot m = \frac{P_{vapor} N_A}{\sqrt{2\pi MRT}} m = p_{vapor} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}, \quad 2.15$$

sendo a pressão de vapor dada em Pa e M em kg. Em suma, na modelagem de muitos sistemas de vácuo, deveremos examinar cuidadosamente todos os componentes líquidos e procurar determinar o *throughput* referente a cada um dos seus compostos [2,4-5,12,16].

- **Sublimação, Q_{Sub} :** A fonte de gás devida à sublimação tem origem, como no caso da evaporação, no fenômeno de pressão de vapor. Na sublimação temos a passagem direta do estado

sólido para o estado gasoso, sem passar pelo estado líquido. Como no caso dos líquidos, os sólidos também têm a pressão de vapor fortemente dependente da temperatura. Os materiais sólidos geralmente apresentam valores de pressão de vapor muito menores que os materiais líquidos. Entretanto, deveremos sempre observar os materiais utilizados em vácuo, uma vez que o *throughput* devido à sublimação pode ser uma fonte de gás excessivamente intensa em certos casos, limitando a pressão final do sistema de vácuo. Apesar de poder constituir um problema para o bom desempenho dos sistemas de vácuo, o fenômeno da sublimação também é usado em uma série de aplicações da tecnologia do vácuo, por exemplo, na metalização em geral. O *throughput* devido à sublimação em vácuo, similarmente à vaporização, é dado pela expressão

$$Q_{Sub} = J_{Sub} k T$$

sendo

$$J_{Sub} = \frac{P_{vapor} N_A}{\sqrt{2\pi MRT}} = \frac{P_{vapor}}{\sqrt{2\pi mkT}}.$$

Podemos também determinar o fluxo de massa Fl_{Sub} de material sólido que sublima por meio da Expressão 2.16

$$Fl_{Sub} = J_{Sub} \cdot m = \frac{P_{vapor} N_A}{\sqrt{2\pi MRT}} m = P_{vapor} \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}, \quad 2.16$$

sendo a pressão de vapor dada em Pa e M em kg [2,4-5,12,16,19].

- **Degaseificação, Q_{Deg} :** Esta é a fonte gasosa mais comum e presente nos sistemas de vácuo. Apesar de estar também presente em pressões na região de pré-vácuo, geralmente torna-se a fonte predominante em pressões abaixo de 10^{-3} mbar; certamente o valor da pressão que começa a ser importante a degaseificação depende da sua intensidade e da relação entre a totalidade da área exposta ao vácuo e o volume do sistema de vácuo. A degaseificação é devida à geração de gases e vapores resultantes da desorção. Quando os materiais são deixados na atmosfera, eles absorvem e adsorvem uma quantidade das moléculas da atmosfera. Dependendo da temperatura, do material, dos gases e vapores e da pressão, teremos que a quantidade de moléculas adsorvidas pelas superfícies expostas atingirá um valor de equilíbrio. Em seguida, se estas superfícies ficarem

expostas no vácuo, ocorrerá a liberação de parte das moléculas adsorvidas ou absorvidas. A desorção é um fenômeno complicado e depende de muitos fatores. Fisicamente falando, as forças que ligam as moléculas às paredes são do tipo de *van der Waals*. As energias de ligação dessas forças de natureza elétrica são da ordem de 0,1 a 1 elétron-volt por molécula. Os processos de limpeza e condicionamento dentro da tecnologia do vácuo sempre procuram diminuir a quantidade de gases e vapores devida à desorção. Há uma série de técnicas de limpeza e condicionamento desenvolvidas no sentido de diminuir o *throughput* da degaseificação. Este é um dos assuntos mais importantes dentro da tecnologia do vácuo.

Com relação a degaseificação adotaremos dois resultados bem estabelecidos para a sua dependência temporal. Nas primeiras horas, aproximadamente 10 horas do material exposto ao vácuo, o *throughput* devido à degaseificação das superfícies varia segundo a Expressão 2.17

$$q_{Deg}^a(t) = q_0^{Inicial} \frac{1}{t^a}, \quad 2.17$$

onde $q_0^{Inicial}$ é a taxa de degaseificação no início do processo de bombeamento, t o tempo dado em horas e a depende a classe de material que está degaseificando. Por exemplo, para os metais geralmente $a=1$. Prosseguindo com o bombeamento, a partir da 11ª hora, o *throughput* de degaseificação terá a seguinte dependência temporal dada pela Expressão 2.18

$$q_{Deg}^b(t) = q_0^b \exp[-\beta(t-t_c)], \quad 2.18$$

onde, β depende do material e de seu estado de limpeza e condicionamento. Para haver continuidade na função matemática que representa a degaseificação, quando passarmos da primeira função para a segunda função, devemos ter $q_0^b = q_{Deg}^a(t_c)$, onde t_c é igual a dez horas. Vemos que as expressões matemáticas da fonte de gás da degaseificação têm formas simples, mas a dificuldade em considerá-la nas análises e cálculo está exposta a seguir. A dificuldade em considerar a degaseificação nas modelagens surge do fato que os dados disponíveis dos *throughputs* de degaseificação dos materiais dependem fortemente dos processos de limpeza e condicionamento. Neste caso constatamos que são bastante diferentes entre si os valores obtidos de degaseificação, podendo variar de mais de 10 vezes.

Outro motivo para as diferenças nos valores disponíveis de degaseificação está na falta de padronização nas suas medições. A fim de diminuir a pressão final dos sistemas de alto-vácuo e

ultra alto-vácuo vários processos de limpeza e condicionamento são ainda desenvolvidos no sentido de acelerar a remoção das moléculas das superfícies expostas ao vácuo. Como exemplo, o aquecimento, o bombardeamento com elétrons, fótons ou átomos são usados para a remoção das moléculas adsorvidas à superfície. Assim, deveremos necessariamente considerar esta importante fonte gasosa nas análises e modelagens dos sistemas de vácuo. [1-4,11-14,15-23].

- **Permeação, Q_{Perm} :** Esta fonte de gás corresponde à passagem de moléculas da atmosfera para o sistema de vácuo por meio do fenômeno de difusão. O mecanismo deste fenômeno pode ser descrito da seguinte forma. Moléculas da atmosfera são adsorvidas pelas paredes externas do sistema de vácuo, posteriormente, algumas dessas moléculas, devido à agitação térmica, são difundidas através do material que forma a parede do sistema de vácuo, e em seguida as moléculas encontram a face da parede da câmara de vácuo exposta ao vácuo e são desorvidas. A permeação depende da temperatura, da espessura da parede e do tipo do material que ela é fabricada, e ainda, da pressão externa e do tipo de gás da atmosfera. Para um dado tipo de gás, o *throughput* por unidade de área devido à permeação geralmente é considerado constante e os seus valores tabelados. Pelo exposto, esta fonte de gás não apresenta dificuldades formais na modelagem e na análise de sistemas de vácuo, pois provem de resultados bem estabelecidos da difusão de gases em sólidos. A permeação assume importância nos sistemas de ultra alto-vácuo com as paredes muito finas de parte dos sistemas de vácuo e dependendo do tipo de material. Ainda, em casos de sistemas de alto-vácuo com partes em vidro, a permeação para o gás hélio pode ser significativa [12,20].

- **Origem na Bomba de Vácuo, Q_{OBV} :** Esta fonte é devida aos gases e vapores que têm origem na bomba de vácuo e provocam o aumento de pressão no sistema de vácuo. Dependendo do tipo da bomba de vácuo, dos procedimentos de operação, do seu estado de manutenção e também da qualidade dos seus componentes internos, o valor do *throughput* dessa fonte gasosa pode assumir valores grandes. Geralmente os catálogos das bombas de vácuo, do tipo de difusão, fornecem o *throughput* desta fonte gasosa. Para muitos processos em vácuo, a qualidade obtida no processo é bastante influenciada pelo *throughput* dos gases e vapores que saem da bomba de vácuo e chegam à câmara de vácuo. Por exemplo, vapores de óleo da bomba mecânica ou da bomba difusora são prejudiciais para muitos processos de fabricação na indústria óptica [2,22].

- **Gases e Vapores de Processo, Q_{GVP} :** Esta fonte de gás depende essencialmente do processo que está sendo realizado em vácuo. Na verdade não é um tipo diferente de fonte gasosa, mas estamos enfatizando que, dado um processo em vácuo, deveremos determinar o *throughput* das fontes dos gases e vapores gerados no processo em questão. Por exemplo, no processo de tratamento de óleo para ampolas de raios-X, a fonte gasosa tem origem no fenômeno de pressão de vapor dos fluidos envolvidos. Neste caso, precisamos conhecer os detalhes do sistema de tratamento

do óleo para determinar o *throughput* gerado. Pode também ocorrer que, para um determinado processo, apesar de sabermos qual o tipo de fonte gasosa envolvida, não temos condições de calculá-lo a partir das definições e dos conceitos básicos, uma vez que a geometria do sistema físico é bastante complicada. Neste caso deveremos determinar experimentalmente o valor do *throughput*. Como exemplo, podemos citar a secagem de papel ou tecidos assistidos a vácuo, o empacotamento de alimentos a vácuo, cujo processo pode liberar enormes quantidades de vapor de água, ou ainda, a liofilização para a produção de vacinas na indústria farmacêutica [23].

- **Injeção Controlada de Gases e Vapores, Q_{IC} :** Há processos em vácuo cuja presença de certa quantidade de gases ou vapores é necessária. Nestes casos, a fim de tornar o processo controlado e reprodutível a injeção de gases e vapores deve ser feita de maneira que tanto a quantidade de gás como os instantes e a duração da sua injeção sejam determinados *a priori*. Geralmente, o procedimento é conectar a fonte gasosa à câmara de vácuo através de uma válvula com condutância e com tempos de abertura e de fechamento determinados. No caso de injetarmos vapor, devemos manter a linha de transporte à mesma temperatura do reservatório de vapor, para que não haja condensação do vapor e com isso um possível entupimento no circuito de injeção. Para o caso da injeção de gases, ela pode ser modelada considerando o gás saindo de uma câmara à pressão atmosférica e entrando na câmara de vácuo à pressão zero. A mecânica dos fluidos trata este problema como transporte de fluidos incompressíveis, ele é chamado “efeito de blocagem”. Este fenômeno é modelado em detalhe no Apêndice F.

Na maior parte das suas aplicações, as condições de operação determinam um *throughput* de injeção de gases independente do valor da pressão na câmara de vácuo. No caso da injeção de vapores, geralmente a sua fonte está no estado líquido. Neste caso, a pressão do vapor, antes de entrar na câmara de vácuo, é dada pela pressão de vapor do material líquido. Desta forma, devemos especificar a sua temperatura. O *throughput* neste caso também irá depender da área de acesso do vapor à câmara de vácuo. Como exemplos de aplicação temos a fabricação de refletores de faróis, neste caso, temos a injeção de um vapor para a formação de uma película protetora do filme metálico refletor. Na indústria de microeletrônica, em várias etapas de processo temos a injeção de gases e vapores. Na pesquisa e nas aplicações envolvendo plasmas temos a injeção de gases com o *throughput* bastante bem determinado, em geral usamos as chamadas válvulas piezelétricas. [15,24-30].

Concluindo o assunto sobre fontes de gases e vapores em sistemas de vácuo, podemos dizer que ele é fundamental para muitos processos assistidos a vácuo e também para a própria tecnologia do vácuo. Na especificação das fontes de gases e vapores, teremos frequentemente a tarefa de determinar alguns parâmetros, na maior parte deles por meios experimentais. Isto é necessário a fim

de poder completar a formulação matemática da modelagem do sistema de vácuo. Este é o caso, por exemplo, das fontes do vazamento virtual, vazamento real, injeção controlada de gases e vapores e permeação. As fontes de gases e vapores com origem na sublimação e vaporização são bastante conhecidas e com os valores de pressão de vapor disponíveis. Para estas fontes gasosas, precisamos somente conhecer o material e a sua temperatura. Temos também as fontes de gases mais complicadas de modelar como é o caso da degaseificação. Sua origem está nos efeitos e fenômenos de superfície, cujos processos são complexos e difíceis de modelar. Na degaseificação há um problema adicional, que é a sua forte dependência com a seqüência de acontecimentos pelo qual passou a superfície, isto é, os processos de limpeza e condicionamento.

2.4 Transporte de Gases em Vácuo.

O processo de bombeamento dos gases e vapores e a modelagem contínua dos sistemas de vácuo são descritos por meio da equação diferencial E_{PBV}

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i .$$

O termo $S_{ef} p_{CV}(t)$ refere-se ao *throughput* removido do sistema de vácuo pelas bombas de vácuo. A grandeza S_{ef} é a velocidade efetiva de bombeamento, ou seja, a velocidade com que efetivamente os gases e vapores são bombeados da câmara de vácuo e S_{bv} é a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo. A velocidade efetiva de bombeamento depende de características da bomba de vácuo, além de características ligadas ao transporte dos gases entre a câmara de vácuo e a bomba de vácuo, isto é, a linha de bombeamento. Matematicamente, a velocidade efetiva de bombeamento é dada por

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} \quad \Rightarrow \quad S_{ef} = \frac{S_{bv} \cdot C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} .$$

Desta forma, a determinação de S_{ef} exige o conhecimento da condutância total da linha de bombeamento que liga a câmara de vácuo à bomba de vácuo e as características de bombeamento das bombas de vácuo [14,24].

Como enfatizado, os gases rarefeitos apresentam basicamente quatro formas distintas de escoar através de tubos e de orifícios. Partindo da pressão atmosférica até atingir pressões do alto-

vácuo e do ultra alto-vácuo, os gases e vapores passam pelos seguintes regimes de escoamento: viscoso turbulento, viscoso laminar, intermediário e molecular. Em geral, o regime turbulento não é considerado nos sistemas de vácuo, mas neste trabalho de tese iremos adotá-lo em nossas análises. Os regimes de escoamento são determinados pelo número de *Knudsen* a partir do seguinte critério: Para $K_N < 0,01$ e número de *Reynolds* > 2000 teremos o viscoso turbulento; para $K_N < 0,01$ e número de *Reynolds* < 2000 teremos o viscoso laminar; para $0,01 < K_N < 1$ teremos o regime intermediário e para $K_N \geq 1$, teremos o regime molecular. Reforçando: a determinação de K_N é o ponto de partida nos projetos em tecnologia do vácuo, uma vez que o cálculo das condutâncias depende do tipo de regime de escoamento. Fisicamente, no regime de escoamento viscoso laminar o transporte dos gases e vapores apresenta um comportamento de um meio contínuo, como é o caso dos fluidos em geral. Apesar de as moléculas estarem em constante movimento caótico, o movimento do gás como um todo se dá de forma coletiva. Observando o movimento do gás no regime viscoso laminar, ele pode ser caracterizado de forma pictórica como sendo formado por lâminas deslizando uma sobre a outra. O fato essencial é que o livre caminho médio das moléculas é muito pequeno comparado ao diâmetro do tubo do escoamento. Ao contrário, no caso do regime de escoamento molecular, o transporte dos gases ocorre devido exclusivamente à agitação térmica das moléculas. Novamente, o movimento molecular é caótico, de translação e permanente. As grandezas importantes do movimento molecular são determinadas pela distribuição de *Maxwell-Boltzmann* das velocidades e energias e depende da temperatura e da massa molecular do gás.

No caso do regime de escoamento intermediário, as moléculas apresentam frequências de colisões entre si comparáveis com as frequências de colisão com as paredes do sistema de vácuo [5,14,24,31-32]. Complementando, para tratar o escoamento dos gases rarefeitos no regime molecular, devemos considerar a chamada lei ou regra dos cossenos de *Knudsen* – em alguns textos encontramos como lei de *Lambert*, como encontrado na óptica para a difusão da luz. Esta lei supõe que no regime de escoamento molecular, quando uma molécula choca-se com uma superfície, o ângulo de ejeção da molécula não tem relação alguma com o ângulo de incidência. Ainda, ela afirma que a direção de ejeção é proporcional ao cosseno do ângulo formado pela linha de ejeção da molécula com a normal à superfície onde ocorreu o choque. Este assunto é tratado no Apêndice G.

O fenômeno referente à ejeção de moléculas de uma superfície é bastante complicado e depende tanto de propriedades da superfície do material como de propriedades das moléculas incidentes, sendo que a lei dos cossenos de *Knudsen* nem sempre é obedecida. Entretanto, consideraremos a sua validade nos estudos sobre o escoamento no regime molecular [33-35]. Na modelagem dos sistemas de vácuo serão considerados em detalhe aspectos relativos ao processo de

bombeamento dos gases, tais como: a velocidade de bombeamento das bombas de vácuo em função da pressão e os valores das condutâncias em cada regime de escoamento dos gases e vapores. Para os sistemas de vácuo com geometrias complexas, tais como: tubos com área de seção transversal variável com o comprimento, cotovelos, tubos anulares, armadilhas, filtros, etc, temos que nos cálculos das suas condutâncias e suas associações precisam considerar a probabilidade de transmissão de moléculas [1,5,11-14,36-38].

2.5 Modelagem e Análise Discretas de Sistemas de Vácuo.

Na modelagem discreta dos sistemas de vácuo teremos inicialmente que identificar as três partes distintas: a câmara de vácuo, a linha de bombeamento dos gases e as bombas de vácuo. A seguir, teremos que especificar e quantificar todas as fontes de gases e vapores importantes que participam do processo em vácuo. Depois, dimensionar as bombas de vácuo, para que a pressão requerida seja alcançada no tempo estabelecido. Esta última parte da análise pode ser realizada mesmo de forma bastante aproximada. Ela pode ser realizada de forma simples apenas para nortear a escolha do tipo da bomba de vácuo e a sua velocidade de bombeamento. Posteriormente, podemos refinar os cálculos redimensionando as bombas de vácuo e em seguida, considerar as condutâncias de forma mais detalhada. Todos esses passos são necessários uma vez que estamos diante da seguinte situação: para encontrar a velocidade de bombeamento das bombas de vácuo, precisamos conhecer o valor da condutância total. Ocorre que para achar a condutância, precisamos saber qual o diâmetro da entrada da bomba de vácuo. Matematicamente significa que temos uma equação algébrica com duas incógnitas, como mostrada na Expressão 1.3. Consideremos a Figura 2.2 que mostra de forma esquemática um sistema de vácuo geral com as suas partes essenciais presentes.

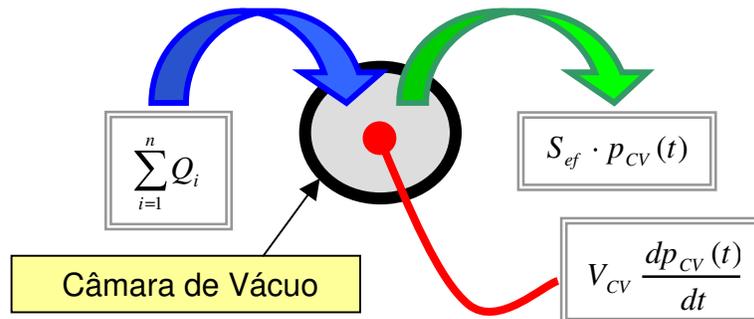


Figura 2.2 Representação puntual de um sistema de vácuo por meio da abordagem discreta.

Assim, podemos, isto é, uma equação e duas incógnitas, de forma iterativa, isto é, supondo uma velocidade de bombeamento para as bombas de vácuo maior que a velocidade efetiva de bombeamento. Em seguida realizamos os cálculos novamente, levando em conta a condutância da

linha de bombeamento, pois temos o diâmetro de entrada da bomba de vácuo considerada, e verificando se recuperamos a velocidade efetiva de bombeamento desejada.

Após o início da modelagem e dando continuidade, podemos determinar a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo resolvendo a equação diferencial E_{PBV} . A partir desta análise inicial, podemos fazer ajustes e melhorar a modelagem, considerando mais detalhes, refinamentos e particularidades do sistema de vácuo. Este procedimento de análise deve ser retido até encontrarmos uma solução satisfatória e exequível. Devemos sempre acompanhar as soluções obtidas e verificar se elas são coerentes com as propriedades físicas das fontes de gases e vapores e também das propriedades relativas à remoção dos gases. Esta forma de procedimento é bastante comum nas análises e modelagens matemáticas de sistemas físicos.

A Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – utilizada em tecnologia do vácuo é dada por

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i$$

com,

$$S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}}$$

onde, S_{bv} a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo e C_{Total} a condutância total da linha de

bombeamento. A parcela $\sum_{i=1}^n Q_i$ refere-se ao *throughput* total associado às fontes de gases e vapores

que participam do processo realizado na câmara de vácuo

$$Q_{Total} = \sum_{i=1}^n Q_i = Q_{VR} + Q_{VV} + Q_{Vap} + Q_{Sub} + Q_{Deg} + Q_{Perm} + Q_{OBV} + Q_{GVP} + Q_{IC} .$$

Para obter a solução matemática da modelagem do sistema de vácuo específico em estudo deveremos necessariamente impor a condição inicial, isto é, $p_{CV}(t_0) = p_0$. Assim, de forma explícita, temos que a E_{PBV} toma a forma mostrada abaixo

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} =$$

$$= - \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} p_{CV}(t) + Q_{VR} + Q_{VV} + Q_{Vap} + Q_{Sub} + Q_{Deg} + Q_{Perm} + Q_{OBV} + Q_{GVP} + Q_{IC}$$

Como vimos, por meio da abordagem discreta dos sistemas de vácuo, conseguimos obter em princípio apenas a função temporal da pressão – $p_{CV} = p_{CV}(t)$ – para toda a extensão da câmara de vácuo. Dependendo da geometria da câmara de vácuo e da distribuição e da intensidade das fontes de gases e vapores, podemos ter intensos gradientes de pressão no seu interior. Esta é a principal limitação da formulação discreta. Podemos ainda encontrar outra dificuldade, como no caso de sistemas de vácuo com as bombas de vácuo colocadas diretamente dentro da própria câmara de vácuo. Alguns exemplos são os painéis criogênicos, *getters* nos tubos cinescópios e nas válvulas eletrônicas de potência e também nos visores por efeito de campo, e em outros sistemas de vácuo de importância. Nestes casos, a modelagem por meio da abordagem discreta é bastante aproximada, podendo ocultar detalhes importantes e até cruciais sobre os sistemas de vácuo [1,11,14,16,39-41].

De forma esquemática e sistemática a modelagem discreta de sistemas de vácuo pode seguir os seguintes passos:

- Identificar e calcular as condutâncias das partes da linha de bombeamento em função do regime de escoamento dos gases e vapores e da sua geometria.
- Identificar e quantificar as fontes de gases e vapores que participam no processo em vácuo. Considerar a importância relativa entre as várias fontes gasosas em função das faixas de pressão.
- Verificar se diferentes tipos de gases e vapores participam significativamente no processo em vácuo e determinar as suas quantidades presentes. Neste caso, deve ser estudada a necessidade de analisar o problema de bombeamento para cada gás ou vapor.
- Obter as curvas de velocidades de bombeamento das bombas de vácuo em função da pressão.
- Observar as possíveis particularidades que podem estar ocorrendo no processo de bombeamento gasoso na operação do sistema de vácuo, como por exemplo: temperatura de trabalho da câmara de vácuo, espécie de gás usado no arejamento da câmara de vácuo e se as limpezas e condicionamentos periódicos do sistema de vácuo introduzem fontes novas de gases e vapores, etc.
- Repetir a análise de forma mais refinada e verificar a coerência dos resultados.

Considerando que a condição inicial $p_{CV}(t_0) = p_0$, onde t_0 é o instante inicial e p_0 é a pressão inicial deve ser especificada. A solução desta equação diferencial para a grande maioria dos problemas de interesse não tem solução analítica, mas sempre será possível obter a solução do problema por métodos numéricos [1-2,5,11-22,24,49-52].

2.6 Modelagem e Análise Contínuas de Sistemas de Vácuo.

Com a modelagem de sistemas de vácuo, por meio da abordagem contínua, podemos obter o campo de pressão transiente ou estacionário – $p_{CV} = p_{CV}(\vec{r}, t)$ – para todas as regiões consideradas na análise. Este tipo de modelagem pode ser realizado nos quatro regimes de escoamento. As bases físicas dos quatro regimes de escoamento são completamente diferentes entre si. No caso do regime viscoso laminar, usamos a equação de *Navier-Stokes* para obter o campo de pressão. Como exemplos importantes e marcantes temos as modelagens das câmaras de vácuo dos reatores para processos empregados na indústria de microeletrônica [27,31,42-43]. No caso do regime de escoamento intermediário a situação é mais complicada. Este regime apresenta características ainda em estudo referentes principalmente ao estabelecimento das condições de contorno. Neste regime de escoamento as modelagens são realizadas de forma mais segura e correta empregando a chamada simulação direta em gases, ou seja, considerando a teoria das colisões atômicas e moleculares por meio da equação de *Boltzmann*. Este tipo de análise é bastante difícil, requerendo programas computacionais complicados e computadores com grande capacidade de processamento de dados. Temos aplicações importantes ocorrendo no regime de escoamento intermediário, por exemplo, dentro da microeletrônica, processos assistidos a plasma, e outros [42-46].

No caso do regime de escoamento molecular, nas modelagens realizadas neste trabalho, partimos da hipótese que o escoamento dos gases é um fenômeno difusivo. Esta suposição, apesar de ser empregada naturalmente, requer um estudo mais detido e cuidadoso. No Apêndice G estudamos detalhadamente este assunto [37-38]. As modelagens e análises de sistemas de vácuo, no regime molecular, devem ser construídas observando-se os seguintes pontos. Inicialmente, deveremos detalhar a geometria da câmara de vácuo e as posições das aberturas que dão acesso às bombas de vácuo e em seguida especificar as posições e as intensidades das fontes de gases e vapores. Este tipo de modelagem dará origem a uma equação a derivadas parciais, cuja solução pode ser obtida, uma vez impostas as condições de contorno e a condição inicial. A solução matemática do problema pode ser alcançada por meios analíticos ou numéricos. Em geral, as soluções numéricas podem ser conseguidas utilizando programas computacionais que fazem uso do método dos elementos finitos [1,12,14,24,47-48]. Cabe mencionar que uma grande vantagem de

modelarmos sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo usando a equação de difusão é o fato de podermos utilizar os programas computacionais para a modelagem de problemas de transferência de calor por condução. Estes programas computacionais são disponíveis no mercado e são muito poderosos. A equação de transferência de calor por condução tem estrutura matemática similar à equação de difusão utilizada neste trabalho.

Na modelagem contínua teremos como solução do problema uma função matemática ou uma solução numérica com estrutura e propriedades de campo escalar. Em cada ponto da câmara de vácuo ou das outras partes do sistema de vácuo, especificado pelo vetor posição \vec{r} , será possível determinar o valor da pressão em função do tempo, matematicamente expressa por $p_{CV} = p_{CV}(\vec{r}, t)$. A forma explícita do vetor \vec{r} dependerá do sistema de coordenadas a ser adotado; por exemplo, em coordenadas cartesianas cada ponto na câmara de vácuo será especificado por $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ e a pressão na câmara de vácuo será representada por $p_{CV} = p_{CV}(x, y, z, t)$.

Assim, a modelagem contínua de sistemas de vácuo exige a definição da região na qual desejamos conhecer o campo de pressão $p_{CV} = p_{CV}(\vec{r}, t)$. Desta forma, poderemos escolher qual a parte específica do sistema de vácuo que desejamos estudar. Deveremos estabelecer a fronteira da região em estudo e especificar matematicamente esta fronteira e as grandezas físicas dos processos que nela ocorrem. Nas fronteiras do problema deveremos estabelecer as condições de contorno. E, para toda região em estudo deveremos também estabelecer a condição inicial. O Apêndice G traz uma discussão e casos de estudo sobre a consideração do escoamento dos gases e vapores no regime molecular como sendo um processo de difusão de átomos e moléculas.

Apresentaremos a formulação para a modelagem contínua de sistemas de alto-vácuo em uma, duas e três dimensões espaciais, dependentes do tempo – transientes – e não dependentes do tempo – estacionárias. Os fenômenos de difusão são expressos matematicamente por meio da equação de difusão, que é uma equação diferencial a derivadas parciais de segunda ordem na posição e de primeira ordem no tempo. A obtenção da equação de difusão de gases no regime de escoamento molecular é apresentada e discutida em detalhe no apêndice B, além das considerações relativas ao estabelecimento das condições de contorno e inicial.

A Figura 2.3 mostra as partes de um sistema de vácuo geral. A câmara de vácuo é a região que será analisada por meio da modelagem contínua, mas poderia ser também qualquer outra parte do sistema de vácuo. Deveremos encontrar condições de contorno fisicamente aceitáveis e que expressem as fontes gasosas e as partes em bombeamento de gases [56-59].

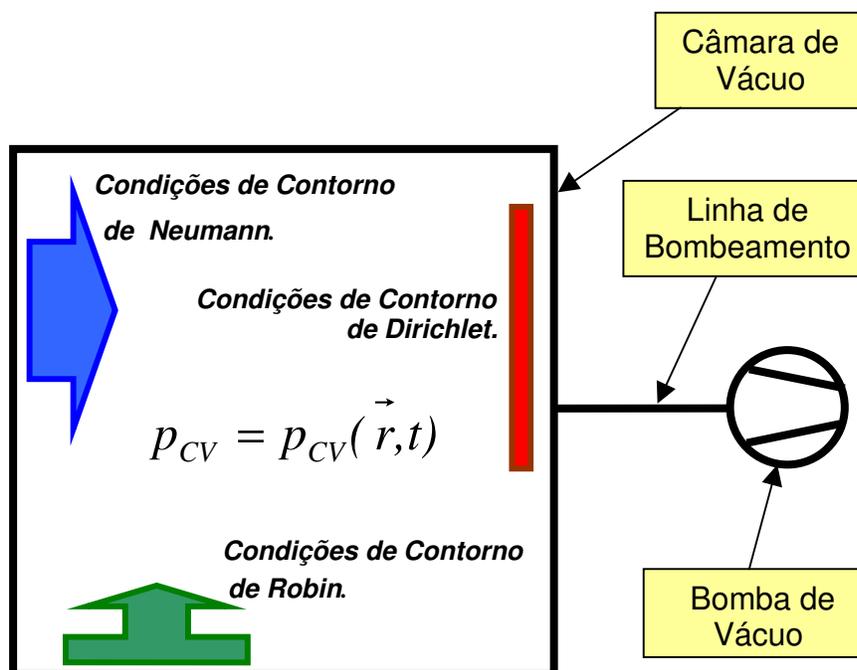


Figura 2.3 Configuração esquemática de um sistema de vácuo. A modelagem contínua de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo impõe a determinação de condições de contorno e inicial à equação de difusão.

A seguir estaremos desenvolvendo em detalhe a dedução da equação de difusão para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional transientes e estacionárias e em conjunto apresentando as condições de contorno e a condição inicial necessárias às suas soluções matemáticas. Definimos as grandezas condutância específica, *throughput* específico para taxa de degaseificação e *throughput* para qualquer outra fonte gasosa. Os detalhes da dedução das equações diferenciais estão apresentados no Apêndice B e casos de estudos com sistemas de vácuo de interesse estão apresentados no Capítulo 3.

2.6.1 Equação para o Campo de Pressão Unidimensional.

O transporte dos gases e vapores em regime molecular tem um mecanismo bastante distinto daquele que estamos familiarizados com os fluidos em geral; e para estudar o transporte dos fluidos utilizamos as equações diferenciais da mecânica dos fluidos. A suposição básica da mecânica dos fluidos é considerar os fluidos como um meio contínuo, apesar de os fluidos serem formados individualmente por átomos e moléculas e estes estarem incessantemente em movimento aleatório devido à agitação térmica. No caso gasoso, se o número de *Knudsen* for menor que 0,01 ($Kn < 0,01$) seguramente podemos aplicar as equações de *Navier-Stokes* para modelar o comportamento dos

gases e vapores. No caso dos gases e vapores escoando no regime molecular ($Kn > 1$) a hipótese do contínuo não pode ser adotada, assim, nestes casos não são válidas as equações de *Navier-Stokes*. Desta forma deveremos procurar uma formulação adequada à situação física para a modelagem dos sistemas de alto-vácuo. Adotaremos que no caso do escoamento dos gases no regime molecular, o transporte dos gases pode ser tratado como um fenômeno difusivo. Este assunto é tratado em detalhe no Apêndice B, com as equações diferenciais deduzidas rigorosamente.

A equação de difusão unidimensional para a modelagem de sistemas de alto-vácuo tubulares de áreas de seção constantes e as condições de contorno possíveis e a condição inicial são mostradas a seguir na Expressão 2.19

$$c \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -q(x,t) + A \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}, \quad 2.19$$

$$p(x_A, t) = p_A(t) \quad -c \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A(t) \quad \pm c \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = S_A p(x_A)$$

$$p(x,0) = p_0(x)$$

com as constantes definidas formalmente como:

- volume por unidade de comprimento, $A \equiv \frac{V}{L}$, vemos que a constante A coincide com a área da seção transversal do tubo,
- condutância por unidade de comprimento ou condutância específica, $c \equiv C L$, e
- a quantidade de gás em termos de *throughput específico* ou *throughput* por unidade de comprimento do tubo das fontes gasosas presentes no sistema de vácuo, $q=q(x,t)$.

Para determinar a solução de um problema específico, deveremos especificar duas condições de contorno, que podem ser dos seguintes tipos:

- *Condição de Dirichlet*. A pressão é especificada um determinado ponto do sistema de vácuo tubular. Matematicamente,

$$p(x_A, t) = p_A(t), \quad \forall t \geq t' .$$

Nos casos mais comuns a serem modelados encontramos que a pressão, especificada em um particular ponto, é constante no tempo, desta forma $p(x_A, t) = p_A$.

- *Condição de Neumann*. O *throughput* é especificado em algum ponto do sistema de vácuo tubular. Assim, matematicamente

$$-c \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A(t), \quad \forall t \geq t' .$$

Na maior parte dos sistemas de vácuo temos que o *throughput*, especificado em um determinado ponto, é constante no tempo, assim $q(t)=q_A$. Em muitos sistemas de vácuo esta condição de contorno também será usada para estabelecer a continuidade do *throughput*, escoando em regiões da tubulação com condutâncias específicas de diferentes valores. Ainda, este tipo de condição de contorno será usado na modelagem para unir trechos de tubos com diferentes taxas de degaseificação por unidade de comprimento. Nestes modelos escreveremos a equação de difusão para cada trecho de tubo, em seguida, a condição de contorno de *Neumann* nas regiões apresentando diferentes condutâncias específicas ou diferentes *throughputs* específicos. Nestes casos poderemos expressar a condição de contorno de *Neumann* das seguintes formas

$$c \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A ,$$

ou,

$$c_1 \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = c_2 \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} ,$$

ou ainda,

$$c \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = c \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} \Rightarrow \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} .$$

No caso de um ponto a , ao longo do eixo x , cujo *throughput* é igual a zero, podemos escrever

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = 0 .$$

Podemos interpretar fisicamente este último caso de duas formas: podemos ter no ponto a uma tampa ou uma válvula que impede o escoamento de átomos e moléculas. Em outro caso, podemos ter no ponto a um ponto de máxima pressão.

- *Condição de Robin*: Há uma dependência entre o valor da pressão num ponto e o valor do throughput no mesmo ponto ao longo do sistema de vácuo tubular, matematicamente,

$$\pm c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = S_A p_A$$

Na condição de contorno de *Robin* há uma combinação linear do valor da pressão com a derivada da pressão em relação à direção x . No caso mais geral, este tipo de condição de contorno pode ser formulada como

$$c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + S p(x, t) = f(x, t)$$

onde S_A é a velocidade de bombeamento. Nos problemas mais gerais encontrados em tecnologia do vácuo, a última expressão é colocada na sua forma homogênea,

$$c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} + S_A p(x_A, t) = 0.$$

O significado físico desta última expressão pode ser interpretado da seguinte forma: junto à bomba de vácuo, na posição x_A , o *throughput* de gás bombeado pode ser expresso de duas formas distintas. Em uma das formas temos que o *throughput* bombeado q_A é função da variação da pressão neste

ponto, assim $q_A = -c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A}$, e em outra forma, q_b é função da velocidade de

bombeamento da bomba de vácuo, assim $q_A = S_A p(x_A, t)$.

No caso de termos um tubo com área de seção transversal variável, apresentando simetria cilíndrica, a sua área de seção transversal poderá ser escrita matematicamente como uma função que depende do comprimento do tubo. Assim, mostramos a seguir na Expressão 2.20 a equação diferencial com as condições de contorno e a condição inicial

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[c(x) \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right] = -q(x,t) + A(x) \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}$$

$$c(x) \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \frac{dc(x)}{dx} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -q(x,t) + A(x) \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \quad . 2.20$$

$$p(x_A, t) = p_A(t) \quad - c(x_A) \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A(t) \quad \pm c(x_A) \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = S_A p(x_A)$$

$$p(x,0) = p_0(x)$$

Quando o problema de condições de contorno é independente do tempo, isto é, um problema estacionário, podemos fazer simplificações. Assim, temos que para $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \equiv 0, \forall t \geq t'$ a equação de difusão e as possíveis condições de contorno tomam as seguintes formas, conforme Expressão 2.21,

$$\frac{d}{dx} \left[c(x) \frac{dp(x)}{dx} \right] = -q(x) \quad \Rightarrow \quad c(x) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + \frac{dc(x)}{dx} \frac{dp(x)}{dx} = -q(x) \quad . 2.21$$

$$p(x_A) = p_A \quad - c(x_A) \frac{dp(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} = q_A \quad \pm c(x_A) \frac{dp(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} = S_A p(x_A)$$

A equação diferencial encontrada acima pode assumir uma forma integral, como podemos ver abaixo. Esta forma de tratar matematicamente o problema pode ser adequada em muitos casos, uma vez que a solução pode ser obtida diretamente de duas integrações e as suas constantes de integração podem ser encontradas a partir da imposição das condições de contorno. Assim, manipulando matematicamente temos a Expressão 2.22

$$p(x) = \int_b^x \frac{1}{c(x')} \left[\int_a^{x'} -q(x'') dx'' \right] dx' \quad 2.22$$

com as constantes a e b determinadas a partir da imposição das condições de contorno.

Conseguimos obter por meio de primeiros princípios a equação de difusão, para o escoamento dos gases e vapores em regime molecular, para tubos de área de seção transversal variável com o seu comprimento. Na dedução aparecem os coeficientes: condutância específica, *throughput* por unidade de comprimento e área de seção transversal em função da posição x do tubo. Esses coeficientes são de fundamental importância, uma vez que eles definirão o sistema de alto-vácuo tubular a ser modelado. Desta forma, definimos neste trabalho a condutância específica para uma dada posição do tubo, ou seja, a condutância por unidade de comprimento para uma dada posição do tubo, que chamaremos simplesmente de condutância específica, como na Expressão 2.23

$$c(x) \equiv \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi(x)}{F^2(x)}}, \quad 2.23$$

onde, $\Pi = \Pi(x)$ é a função que define o perímetro do tubo, dependente da posição x , e a função $F = F(x)$ define a área da seção transversal do tubo em função de x .

Ainda, podemos encontrar uma expressão mais adequada para o cálculo da condutância específica, considerando diretamente a definição do tubo a partir da sua função geratriz $f=f(x)$. Assim, encontramos a Expressão 2.24

$$c(x) = \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi(x)}{F^2(x)}} = \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{2\pi f(x)}{[\pi f^2(x)]^2}} \Rightarrow \quad 2.24$$

$$c(x) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{8RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} f^3(x)$$

vemos que a condutância específica cresce com a temperatura. Com ela, aumenta a velocidade média das moléculas, portanto aumenta a probabilidade de escoar pelo tubo. O movimento devido à agitação térmica é responsável exclusivo pelo transporte dos gases e vapores no regime de escoamento molecular, não há movimento coletivo, somente o individual. Ainda, a condutância específica decresce com a massa molecular. Uma vez que a energia cinética média de translação é função exclusiva da temperatura para o gás ideal – suposição considerada válida nas condições de gás rarefeito – com o aumento da massa molecular, deveremos ter uma diminuição da velocidade média de translação, com isso, haverá uma diminuição na mobilidade das moléculas. A função

$f=f(x)$ é o raio do tubo na posição x ; como visto para o tubo cilíndrico, na expressão da condutância total, a sua dependência com o diâmetro, ou com o raio, é cúbica. Desta maneira, vemos que há coerência em nossa proposta de definição da condutância específica para tubos de área de seção transversal arbitrária.

As fontes de gases e vapores devem ser especificadas a fim de realizarmos a modelagem do sistema de alto-vácuo. Mais, elas devem ser quantificadas adequadamente para poderem participar da equação de difusão, ou seja, precisamos objetivamente construir a função $q=q(x,t)$. Para construir a função $q=q(x,t)$ convém fazer uma distinção entre as fontes gasosas que têm origem exclusivamente nas paredes do tubo, das outras fontes possíveis. Esta distinção não deve ser considerada como sendo essencial do ponto de vista físico, apenas refere-se à construção matemática das funções que as representam.

Com relação à fonte gasosa que está distribuída na extensão da parede do tubo, temos associadas a ela a degaseificação natural (*outgassing*) ou a degaseificação forçada (*degassing*), ainda podemos citar a permeação, a vaporização e a sublimação. Com relação às outras fontes gasosas, que são localizadas em pontos ou pequenas extensões do tubo, podemos citar o vazamento real, o vazamento virtual, a desorção induzida por elétrons, fótons e íons, ou ainda, a injeção controlada de gases.

Iniciaremos construindo as funções para os *throughputs* das fontes gasosas que são diretamente proporcionais a área das paredes do tubo. A função, que representa o *throughput* por unidade de comprimento, devido à degaseificação natural ou forçada, pode ser construída partindo-se da Expressão 2.25

$$q_D^{Total} = q_0 A_L \quad 2.25$$

onde q_0 é a taxa de degaseificação específica em *throughput* por unidade de área do material, ou seja, cada área unitária do material usado na construção do tubo, adotado um processo de limpeza e condicionamento, degaseifica natural ou forçadamente um *throughput* de gás ou vapor. A_L é área lateral do tubo, ou seja, a área da parede do tubo exposta ao vácuo. Assim, q_D é o *throughput* devido a toda área do tubo exposta ao vácuo. Matematicamente, podemos construir essas grandezas partindo da expressão que calcula a área lateral do tubo, a partir de área lateral de um tubo elementar de comprimento Δx . Matematicamente A_L é dada pela Expressão 2.26

$$A_L = 2\pi \int_0^L f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} dx . \quad 2.26$$

Este é um resultado conhecido da geometria diferencial, partindo-se do conceito de comprimento de arco. A construção geométrica do tubo partiu da revolução da linha representada pela função $f=f(x)$ em torno do eixo x . Assim, definimos a função área lateral do tubo na posição x pela Expressão 2.27

$$A_L(x) \equiv 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} . \quad 2.27$$

Considerando esta última equação, podemos definir de forma imediata o *throughput* por unidade de comprimento do tubo de área de seção transversal arbitrária, como vemos na Expressão 2.28

$$q_D(x) \equiv q_0 A_L(x) , \quad 2.28$$

$$q_D(x) = q_0 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}$$

e verificamos a coerência da definição, calculando o *throughput* total para toda a área do tubo exposta ao vácuo, encontramos a expressão de partida

$$q_D^{Total} = q_0 2\pi \int_0^L f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow q_D^{Total} = q_0 A_L .$$

A estrutura da expressão matemática obtida acima pode ser estendida às outras fontes de gases que têm origem em toda a extensão das paredes do tubo. Complementado, se estas fontes dependerem explicitamente do tempo, como por exemplo, é o caso da degaseificação em suas primeiras horas expostas ao vácuo, imediatamente podemos introduzir este fato na expressão. Substituímos o valor constante q_0 pelo valor dependente do tempo e a parte da expressão dependente da área permanece inalterada, ficamos com a Expressão 2.29

$$q_D(x, t) \equiv q_0(t) A_L(x) , \quad 2.29$$

$$q_D(x, t) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} q_0(t)$$

No caso mais geral, deveremos considerar a definição matemática do *throughput* daquelas fontes gasosas que podem ocorrer em qualquer parte do tubo. Essas fontes gasosas podem ser

bastante localizadas, podendo ser modeladas como fontes pontuais, ou ainda podem ocorrer em regiões com áreas bem pequenas. Podem ocorrer em intervalos de tempo curtos, podendo ser modeladas como sendo fontes impulsivas.

Estes casos são bastante freqüentes em sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo que têm feixes de partículas e estas podem chocar-se com as paredes do tubo. Uma ferramenta matemática adequada a essa situação é a função delta de *Dirac*. A forma matemática do *throughput* por unidade de comprimento, considerando a ocorrência de fontes gasosas quaisquer, tem forma mostrada na Expressão 2.30

$$q_{Total}(x,t) = q_D(x,t) + q_T(x,t) \Rightarrow \quad , \quad 2.30$$

$$q_{Total}(x,t) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} q_0(t) + q_{Tr}(x,t)$$

onde, a função $q=q(x,t)$ representará o *throughput* de fontes gasosas ocorrendo em posições definidas e instantes ou intervalos de tempo arbitrários, que são específicos para cada caso a ser modelado.

Fontes gasosas transientes, que têm muito interesse e ocorrência freqüente em sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo tubulares, são da forma impulsivas no tempo e na posição e impulsivas no tempo e extensivas na posição. Esses casos ocorrem em tubos por onde passam feixes de partículas, podendo esse feixe induzir degaseificação – seja por choque direto dessas partículas, ou seja, por emissão de fótons – em partes bem localizadas nas paredes do tubo, chamamos respectivamente de eletrodesorção e fotodesorção. Nos projetos de microscópios eletrônicos, aceleradores de partículas, anéis de armazenamento de elétrons ou prótons, válvulas amplificadoras *klystron* e *girotrons*, e outros sistemas de vácuo tubulares é de fundamental importância determinar as velocidades de bombeamento das bombas de vácuo e suas posições. O ferramental físico-matemático, que desenvolvemos e apresentamos neste trabalho, tem mostrado se útil nos projetos de sistemas de vácuo mencionados acima.

Apresentaremos a seguir a maneira como podemos objetivamente construir matematicamente as fontes gasosas transientes de maior interesse. Essas fontes gasosas são impulsivas no tempo, no espaço ou em ambos. A função generalizada ou distribuição delta de *Dirac* mostra-se uma ferramenta matemática adequada e precisa para representar essas fontes gasosas transientes. A seguir vamos apresentar as estruturas das funções matemáticas generalizadas que representam essas fontes gasosas e também, como construí-las considerando a quantidade de gás ou vapor que entrará no sistema de vácuo:

- Fonte gasosa impulsiva no tempo e impulsiva na posição.

Esta fonte gasosa, dependente do tempo e da posição, pode ser modelada pela seguinte função generalizada, conforme mostrada abaixo na Expressão 2.31

$$q_T^{Ipos Item}(x,t) = q' \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \quad 2.31$$

A quantidade de gás ou vapor $q_T^{Ipos Item} = q_T^{Ipos Item}(x,t)$, considerada em termos de *throughput*, entra no sistema de vácuo na posição $x=x_0$ no instante $t=t_0$. Essa representação matemática é adequada para modelar, quando uma parte de um feixe de partículas formado por elétrons, prótons, nêutrons, íons, ou ainda, por fótons, bombardeiam uma região bem localizada da parede do tubo em um dado instante de tempo.

A unidade física de $q_T^{Ipos Item} = q_T^{Ipos Item}(x,t)$ é mbar.litro.segundo⁻¹centímetro⁻¹, ou de forma concisa, mbar.l.s⁻¹cm⁻¹. Para a grandeza q' temos a unidade mbar.l. Interpretamos fisicamente a grandeza $q_T^{Ipos Item} = q_T^{Ipos Item}(x,t)$ como sendo uma quantidade de gás ou vapor q' que entra no sistema de vácuo na posição $x=x_0$ no tubo e no instante $t=t_0$. Podemos considerar um pequeno recipiente auxiliar de volume V , com gás a certa pressão p , de modo que $q' = pV = nRT = NkT$. Assim, essa quantidade de gás $q' = pV$ entra no sistema de vácuo tubular, instantaneamente, em $t=t_0$ e na posição bem localizada $x=x_0$.

- Fonte gasosa impulsiva no tempo e extensiva na posição.

Esta fonte gasosa, dependente do tempo e da posição, pode ser modelada pela seguinte função matemática generalizada, conforme mostrada sua forma na Expressão 2.32

$$q_T^{Epos Item}(x,t) = q'(x) \delta(t - t_0), \quad 2.32$$

onde $q' = q'(x)$ é a quantidade gasosa da em termos de mbar.l.cm⁻¹, ou seja, é uma quantidade de gás ou vapor, em termos de mbar.l, ocorrendo em certas posições do tubo e especificada em termos de unidade de comprimento do tubo. Assim, é uma quantidade gasosa que entra no tubo em uma extensão dele, ou mais de uma, com as posições definidas pela função $q' = q'(x)$, ocorrendo no instante $t=t_0$. Essa representação matemática é adequada para modelar um feixe de partículas, do tipo elétrons, prótons, nêutrons, íons, ou ainda, um feixe de fótons, bombardeando regiões extensas da parede do tubo em um dado instante de tempo. Um dado instante de tempo significa, no sentido físico, um intervalo de tempo muito pequeno; no caso de sistemas de alto-vácuo, menor que 10⁻⁴ segundos.

A unidade de $q_T^{Epos Item} = q_T^{Epos Item}(x, t)$ é $\text{mbar.l.s}^{-1}\text{cm}^{-1}$. Para $q' = q'(x)$ temos a unidade mbar.l.cm^{-1} . Interpretamos fisicamente a grandeza $q_T^{Epos Item} = q_T^{Epos Item}(x, t)$ como sendo uma quantidade de gás ou vapor e agindo nas regiões do tubo definidas pela função $q'(x)$ no instante $t=t_0$. Assim, considerando um trecho do tubo com comprimento muito pequeno Δx sem torno da posição x_a , temos que a quantidade de gás, em termos de mbar.l , que entra no sistema de vácuo tubular é dada pela expressão $\Delta q = q'(x_a)\Delta x$ no instante $t=t_0$.

- Fonte gasosa extensiva no tempo e impulsiva no espaço.

Esta fonte gasosa, dependente do tempo e da posição, pode ser modelada pela seguinte função matemática generalizada, conforme mostrada na Expressão 2.33

$$q_T^{Ipos Etem}(x, t) = q'(t)\delta(x - x_0), \quad 2.33$$

onde $q' = q'(t)$ é a quantidade gasosa da em termos de mbar.l.s^{-1} , ou seja, é uma quantidade de gás, em termos de mbar.l , ocorrendo em uma posição bem localizada do tubo, no ponto $x=x_0$, e especificada em termos de unidade de tempo. Assim, é uma quantidade gasosa $q' = q'(t)$ que entra no tubo em uma posição definida, por exemplo, $x=x_0$. Essa representação matemática é adequada para modelar vazamentos reais e vazamentos virtuais.

A unidade de $q_T^{Ipos Etem} = q_T^{Ipos Etem}(x, t)$ é $\text{mbar.l.s}^{-1}\text{cm}^{-1}$. Para $q' = q'(t)$ temos a unidade mbar.l.s^{-1} . Interpretamos fisicamente a grandeza $q_T^{Ipos Etem} = q_T^{Ipos Etem}(x, t)$ como sendo uma quantidade de gás ou vapor, dada em termos de *throughput* por unidade de comprimento, por $q' = q'(t)$, sendo liberada para o sistema de vácuo tubular no ponto $x=x_0$. Assim, considerando um intervalo de tempo pequeno Δt , no instante t_a , temos que a quantidade de gás, em termos de mbar.l , que entra no sistema de vácuo tubular é dada pela expressão $\Delta q = q'(t_a)\Delta t$ na posição $x=x_0$. difusão, com cada termo apresentando a unidade de $\text{mbar.l.s}^{-1}\text{cm}^{-1}$, devemos proceder com discutido acima [37,49,50,57,58].

2.6.2 Equação para o Campo de Pressão Bidimensional.

Inicialmente apresentaremos algumas considerações sobre a modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais. A modelagem de certos sistemas de vácuo considerando-os bidimensionais não deve ser entendida como uma simplificação excessiva. Quando assumimos sistemas de alto-vácuo com geometria nitidamente tubular como sendo unidimensionais, queremos com isso explicitamente considerar que as direções perpendiculares ao eixo do tubo não apresentam

variações significativas de pressão, ou seja, os seus gradientes são desprezíveis, em relação aos gradientes de pressão ao longo do eixo do tubo.

Assim, do ponto de vista da construção de modelos matemáticos que representam realidades físicas, desconsiderar uma dimensão ou mais significa que as grandezas físicas que estamos querendo determinar não variam significativamente. Ou colocado de outra forma, admitimos a grandeza tem valor constante, ou próximo de constante, ao longo daquela direção desconsiderada. Fisicamente estamos admitindo simetrias no problema.

Para os sistemas de alto-vácuo bidimensionais a equação de difusão pode ser obtida por meio do mesmo raciocínio utilizado no caso unidimensional; apenas cabe uma importante consideração. Fazendo um paralelo com os fenômenos de difusão de calor por condução em sólidos, temos que para os materiais homogêneos e isotrópicos a condutividade térmica é constante. No caso mais geral deveremos definir a condutividade térmica para cada ponto do material que está sendo estudado o campo de temperatura. No caso de escoamento de gases no regime molecular em sistemas de alto-vácuo bidimensionais, a condutância específica – também chamada de condutância por unidade de comprimento –, em geral, deve ser definida para as duas dimensões, se usarmos o sistema cartesiano, as direções x e y . Assim, teremos uma condutância específica definida na direção x , que pode ser dependente da própria variável x , e o mesmo para a direção y . Neste caso dizemos que o sistema de alto-vácuo é anisotrópico e não-homogêneo.

Realçando, a condutância específica é uma grandeza que expressa a facilidade com que os gases escoam. Deveremos agora especificar qual a direção de escoamento, pois os sistemas de vácuo bidimensionais são definidos em duas direções. Para cada direção de definição do sistema de vácuo teremos uma condutância específica. A condutância específica depende do tipo de gás, da temperatura, mas principalmente depende das dimensões da região onde ocorre o escoamento. Como ocorreu para o caso unidimensional, neste trabalho estamos propondo uma definição de condutância específica para o caso bidimensional. Assim, para as direções x e y respectivamente, definimos as condutâncias específicas como nas Expressões 2.34

$$c_x(x) \equiv \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi_x(x)}{F_x^2(x)}} \quad 2.34$$

$$c_y(y) \equiv \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi_y(y)}{F_y^2(y)}}$$

onde as funções: $\Pi_x = \Pi_x(x)$ define o perímetro perpendicular à direção x do sistema de vácuo e $F_x = F_x(x)$ define a área da seção transversal, do sistema de vácuo, perpendicular à direção x . De forma análoga construímos as funções $\Pi_y = \Pi_y(y)$ e $F_y = F_y(y)$ para a direção y .

Uma vez definidas as condutâncias específicas para as direções x e y do sistema de vácuo, podemos obter a equação de difusão bidimensional. Admitiremos um sistema de vácuo com as seções transversais constantes, tanto na direção x como na direção y . As demonstrações rigorosas das funções definidas acima se encontram no Apêndice B [37,48,50,56-85].

2.6.2.1 Equação para o Campo de Pressão Bidimensional – Coordenadas Cartesianas.

A equação de difusão e as condições de contorno e a condição inicial, para a modelagem de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo bidimensionais dependentes do tempo escrita em coordenadas cartesianas, são mostradas abaixo na Expressão 2.35

$$\frac{c_x}{La} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial y^2} = -q(x, y, t) + \frac{V_{CV}}{Co \cdot La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t}$$

$$p(x_A, y_A, t) = p_A(t)$$

$$-c_x \left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=x_A, y, t} = q_A(t) \quad -c_y \left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \right|_{x, y=y_B, t} = q_B(t) \quad . \quad 2.35$$

$$\pm c_x \left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=x_A, y, t} = S_A p(x_A, y, t) \quad \pm c_y \left. \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \right|_{x, y=y_B, t} = S_B p(x, y_B, t)$$

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y)$$

Com Co , La e Ha as dimensões das arestas da câmara de vácuo. Para o cálculo do *throughput*, para uma dada posição do sistema de vácuo bidimensional, podemos construir as seguinte expressões auxiliares para as direções x e y respectivamente chegamos à Expressão 2.36

$$Q_x(x, y_i, y_f, t) = \int_{y_i}^{y_f} \left[-\frac{c_x(x)}{La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \right] dy. \quad 2.36$$

Da mesma forma, podemos deduzir a expressão referente ao *throughput* na direção y .

No caso de uma direção arbitrária, o cálculo do *throughput* deve ser composto pela parcela dos *throughputs* nas direções x e y , obtidas como na expressão acima. Cabe realçar que nos casos gerais temos condutâncias específicas diferentes entre si nas direções x e y . Nestes casos o cálculo do *throughput* em uma direção arbitrária de considerar as componentes nas direções x e y com os respectivos valores de condutâncias específicas para cada uma dessas direções. Esta mesma situação ocorre nos problemas de transferência de calor por condução para os meios anisotrópicos.

Concluindo a exposição do ferramental físico-matemático desenvolvido para a modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais, apresentamos a seguir a equação de difusão, considerando a possibilidade das condutâncias específicas dependerem da posição, chegamos à Expressão 2.37

$$\frac{1}{La} \frac{\partial}{\partial x} \left[c_x(x) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{Co} \frac{\partial}{\partial y} \left[c_y(y) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \right] = -q(x, y, t) + \frac{V_{cv}}{Co \cdot La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t}, \quad 2.37$$

com $V_{cv}=Co.La.Ha$ e complementado, cada termo da equação de difusão tem a dimensão mbar.litro.s⁻¹.cm⁻² ou, torr.litro.s⁻¹.cm⁻², ainda, no Sistema Internacional de Unidades Pa.m³.s⁻¹.m⁻². A condutância específica – $c=c(x)$ – tem unidade de l.s⁻¹.cm. O *throughput* por unidade de área – $q=q(x,y,t)$ – tem unidade de mbar.litro.s⁻¹.cm⁻². Encontramos problemas similares a estes naqueles de transferência de calor por condução nos meios anisotrópicos e não homogêneos [37,48,50,56-85].

2.6.2.2 Equação para o Campo de Pressão Bidimensional – Coordenadas Polares.

Apresentamos a seguir a equação de difusão escrita em termos das coordenadas polares para a modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais. Nestes casos as câmaras de vácuo são em geral em forma circular e com a altura bem menor que o raio, ou ainda, com o gradiente de pressão na direção z muito menor que os gradientes na direção do raio ou também na direção da variação do ângulo.

Para a sua obtenção consideramos exatamente o mesmo raciocínio do utilizado para as coordenadas cartesianas. As variáveis ρ e φ são a distância do ponto $P(x,y)$ – que define o raio vetor – à origem do sistema de coordenadas e o ângulo do raio vetor em relação ao eixo x respectivamente. A equação de difusão em coordenadas polares dependente do tempo tem a forma mostrada a seguir pela Expressão 2.38

$$\frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[c_\rho \rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} = -q(\rho, \varphi, t) + \frac{V_{cv}}{\pi a^2} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} = \\ = -q(\rho, \varphi, t) + \frac{V_{CV}}{\pi a^2} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad 2.38$$

Nas situações comumente encontradas na modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais, temos que a condutância específica c_ρ é função da variável ρ . Complementando, temos a seguir mostradas as seguintes condições de contorno e condição inicial fisicamente aceitáveis,

$$\begin{aligned} p(\rho_A, \varphi_A, t) &= p_A(t) \\ -c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, t} &= q_A(t) \quad -c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, t} = q_B(t) \\ p \pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, t} &= S_A p(\rho_A, \varphi, t) \quad \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, t} = S_B p(\rho, \varphi_B, t) \\ p(\rho, \varphi, 0) &= p_0(\rho, \varphi) \end{aligned}$$

onde, a é o raio da câmara de vácuo cilíndrica, c_ρ e c_f são as condutâncias específicas nas direções ρ e f respectivamente. Ainda, V_{CV} é o volume da câmara de vácuo com formato cilíndrico, sendo seu valor dado, em termos dos elementos diferenciais de volume, pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} V_{CV} &= \iiint_{\text{Volume da Câmara de Vácuo Cilíndrica}} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz = \int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^c \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz = \\ &= \int_{\rho=0}^a \rho \, d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^c dz \Rightarrow V_{CV} = \pi a^2 c \end{aligned}$$

Continuando, no caso do problema estacionário, a Expressão 2.40, em coordenadas polares e as possíveis condições de contorno escritas em coordenadas polares, são mostradas a seguir.

$$\frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -q(\rho, \varphi) \quad 2.40$$

Sendo em geral $c_\rho = c_\rho(\rho)$. Para o estabelecimento das possíveis fontes de gases e vapores, e ainda, com relação as definições da condições de contorno apresentadas a seguir, podemos seguir em linhas gerais o mesmo raciocínio daquele usado no caso de sistemas de alto-vácuo unidimensionais [37,48,50,56-80]. Assim, temos respectivamente as condições de contorno do tipo de *Dirichlet*, de *Neumann* e de *Robin*

$$\begin{aligned}
 p(\rho_A, \varphi_A) &= p_A \\
 -c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi} &= q_A & -c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B} &= q_B \\
 \pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi} &= S_A p(\rho_A, \varphi) & \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B} &= S_B p(\rho, \varphi_B) .
 \end{aligned}$$

Concluindo a exposição do ferramental físico-matemático desenvolvido neste trabalho para a modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais e expressos em coordenadas polares, apresentaremos as unidades das grandezas físicas que participam desta equação de difusão. Cada termo da Expressão 2.40 tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$ ou $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades $\text{Pa.m}^3.\text{s}^{-1}.\text{m}^{-2}=\text{Pa.s}^{-1}.\text{m}$. As condutâncias específicas têm unidade de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de área – $q=q(\rho, f, t)$ – tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$.

2.6.3 Equação para o Campo de Pressão Tridimensional – Coordenadas Cartesianas e Cilíndricas.

A seguir apresentaremos a equação de difusão tridimensional para modelar sistemas de alto-vácuo nos casos gerais. Nestes sistemas de vácuo as três dimensões são comparáveis, assim não podemos de imediato, sem uma análise mais detida, dizer que há gradientes de pressão que podem ser desprezados. Apresentamos a seguir a equação de difusão tridimensional, Expressão 2.41, para a modelagem de sistemas de vácuo com os gases e vapores escoando no regime molecular

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{La \cdot Ha} \frac{\partial}{\partial x} \left[c_x(x, y, z) \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{Co \cdot Ha} \frac{\partial}{\partial y} \left[c_y(x, y, z) \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} \right] + \\
 + \frac{1}{Co \cdot La} \frac{\partial}{\partial z} \left[c_z(x, y, z) \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \right] = -q(x, y, z, t) + \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

onde as constante Co , La e Ha são respectivamente as dimensões das arestas da câmara de vácuo nas direções x , y e z . Sendo as constantes c_x , c_y e c_z respectivamente as condutâncias específicas nas direções x , y e z . A função $q=q(x,y,z,t)$ representa matematicamente as fontes gasosas do problema. Para os casos de as condutâncias específicas serem constantes temos a Expressão 2.42

$$\begin{aligned} \frac{c_x}{La \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{c_z}{Co \cdot La} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial z^2} = \\ = -q(x, y, z, t) + \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad , \quad 2.42$$

com as possíveis condições de contorno e condição inicial expostas a seguir

$$\begin{aligned} p(x_A, y_A, z_A, t) &= p_A(t) \\ -c_x \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, z, t} &= q_A(t) & \pm c_x \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, z, t} &= S_A p(x_A, y, z, t) \\ -c_y \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, z, t} &= q_B(t) & \pm c_y \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, z, t} &= S_B p(x, y_B, z, t) \\ -c_z \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{x, y, z=z_A, t} &= q_C(t) & \pm c_z \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{x, y, z=z_A, t} &= S_C p(x, y, z_C, t) \\ p(x, y, z, 0) &= p_0(x, y, z) \end{aligned} \quad ,$$

e complementando, consideramos os casos de modelagem em estado estacionário, com a forma apropriada da equação de difusão conforme a Expressão 2.43

$$\frac{c_x}{La \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{c_z}{Co \cdot La} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial z^2} = -q(x, y, z) \quad . \quad 2.43$$

Sendo o volume da câmara de vácuo igual $V_{CV}=Co.La.Ha$. Cada termo da equação de difusão tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$ ou, $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades Pa.s^{-1} . As condutâncias específicas têm unidades de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de volume –

$q=q(x,y,z,t)$ – tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$. Similarmente, encontramos a mesma estrutura matemática nos problemas de transferência de calor por condução.

Impondo a conservação do *throughput*, ou seja, a conservação de energia ao volume elementar qualquer da câmara de vácuo e assumindo que podemos ter fontes de gases e vapores, chegamos à equação de difusão em coordenadas cilíndricas mostrada na Expressão 2.44

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi ac} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[c_\rho(\rho) \rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{ac} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z^2} = -q(\rho, \varphi, z, t) + \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad , \quad 2.44$$

nos casos mais comuns que podemos modelar sistemas de alto-vácuo utilizando a equação diferencial acima, temos que a condutância específica na direção ρ é função desta variável espacial – $c_\rho=c_\rho(\rho)$ – assim, a equação diferencial toma a seguinte forma dada pela Expressão 2.45

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi ac} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{ac} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z^2} = -q(\rho, \varphi, z, t) + \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad . \quad 2.45$$

onde as constantes a e c são respectivamente as dimensões do raio da câmara de vácuo – estamos admitindo uma câmara de vácuo cilíndrica – e a sua altura. Ainda, c_ρ , c_φ e c_z são respectivamente as condutâncias específicas nas direções ρ , φ e z . A função $q=q(\rho, \varphi, z, t)$ representa matematicamente as fontes gasosas do problema. Com as seguintes condições de contorno e a condição inicial

$$\begin{aligned} p(\rho_A, \varphi_A, z_A, t) &= p_A(t) \\ -c_\rho(\rho) \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z, t} &= q_A(t) \quad \pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z, t} = S_A p(\rho_A, \varphi, z, t) \\ -c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z, t} &= q_B(t) \quad \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z, t} = S_B p(\rho, \varphi_B, z, t) \end{aligned}$$

$$-c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z=z_C, t} = q_C(t) \quad \pm c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z_C, t} = S_C p(\rho, \varphi, z_C, t)$$

$$p(\rho, \varphi, z, 0) = p_0(\rho, \varphi, z)$$

Podemos escrever a equação na forma adequada para modelar casos de sistemas de vácuo em estado estacionário, isto é, com o campo de pressão não dependente do tempo, assim temos a Expressão 2.46

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi a c} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a c} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z)}{\partial z^2} = -q(\rho, \varphi, z) \end{aligned} \quad , \quad 2.46$$

com as seguintes condições de contorno fisicamente aceitáveis e possíveis para os problemas independentes do tempo ou estacionários

$$p(\rho_A, \varphi_A, z_A) = p_A$$

$$\begin{aligned} -c_\rho(\rho) \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z} = q_A \quad \pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z} = S_A p(\rho_A, \varphi, z) \\ -c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z} = q_B \quad \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z} = S_B p(\rho, \varphi_B, z) \\ -c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z=z_C} = q_C \quad \pm c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z_C} = S_C p(\rho, \varphi, z_C) \end{aligned}$$

Complementado, cada termo das equações de difusão, tanto a transiente como a de estado estacionário, tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$ ou, $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades Pa.s^{-1} . As condutâncias específicas têm unidades de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de volume – $q=q(\rho, \varphi, z, t)$ – tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$. Similarmente, encontramos tal estrutura matemática nos problemas de transferência de calor por condução nos meios anisotrópicos e não homogêneos em seus casos mais gerais [80-85].

De forma esquemática e sistemática a modelagem contínua de sistemas de vácuo pode seguir os seguintes passos:

- Identificar as partes do sistema de vácuo que deveremos encontrar o campo de pressão.
- Estudar e verificar as possíveis simetrias no sistema físico e propor um sistema de coordenadas adequado para a modelagem do sistema de vácuo.
- Identificar, determinar geometricamente e quantificar as fontes de gases e vapores que participam no processo em vácuo. Considerar a importância relativa entre as várias fontes gasosas em função das faixas de pressão.
- Estabelecer as condições de contorno e condição inicial do problema. Para isso as fontes de gases e vapores, as curvas de velocidades de bombeamento das bombas de vácuo em função da pressão e outras grandezas já devem ter sido obtidas.
- Iniciar a modelagem. A partir dos primeiros resultados, ganhando confiança no modelo, poderemos melhorá-lo. Verificar a coerência dos resultados, por exemplo, comparando com uma análise e modelagem discretas.

2.7. Formulações Discreta e Contínua como Complementares.

Apresentamos as formulações discreta e contínua para a modelagem e análise detalhadas de sistemas de vácuo. Indicamos que a formulação discreta leva ao conhecimento da pressão na câmara de vácuo em função do tempo, $p_{CV} = p_{CV}(t)$. Enfatizamos que a formulação discreta para a análise de sistemas de vácuo é incapaz de nos fornecer os valores de pressão em cada ponto da região em estudo. Fazendo uso da terminologia da mecânica dos fluidos e da termodinâmica das máquinas térmicas, dizemos que na formulação discreta da tecnologia do vácuo, o contorno do volume de controle da formulação discreta é o próprio contorno da câmara de vácuo. Neste caso, consideramos a conservação da energia no volume de controle, obtendo a equação fundamental para o processo de bombeamento em vácuo. Em primeira aproximação, sem uma definição rigorosa, dissemos que a função $p_{CV} = p_{CV}(t)$ é o valor de uma *pressão média* na câmara de vácuo em função do tempo.

Em contraste, a formulação contínua na modelagem de sistemas de vácuo permite-nos determinar os valores de pressão em todos os pontos da câmara de vácuo ou ainda, em outras partes do sistema de vácuo, por exemplo, certa região da tubulação. A formulação contínua para a análise e modelagem de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo foi descrita neste trabalho em termos da equação de difusão de átomos e moléculas. Assim, resolvendo o problema de contorno com a condição inicial, determinamos o campo de pressão em qualquer parte do sistema de alto-vácuo.

Matematicamente teremos o campo escalar $p = p(\vec{r}, t)$ descrito em um sistema de coordenadas convenientemente escolhido.

Apesar de a formulação contínua levar a um conhecimento mais refinado dos sistemas de alto-vácuo, a formulação discreta é importante. Informações relativas ao processo de bombeamento, como o tempo de bombeamento, o dimensionamento das bombas de vácuo, a determinação ou simples verificação do desempenho de materiais em vácuo e outras mais, podem ser obtidas por meio da formulação discreta. Considerando tanto a simplicidade na especificação das grandezas físicas que participam no sistema de vácuo como a facilidade na obtenção da solução matemática da modelagem matemática, a formulação discreta apresenta vantagens em relação à formulação contínua. A tomada de decisão em usar uma ou outra formulação está discutida no Apêndice D. Mas devemos ter sempre presente que as duas formulações devem ser vistas como ferramentas complementares no estudo dos sistemas de vácuo.

Assim, mesmo sendo necessária a realização da análise por meio da formulação contínua, podemos iniciar a modelagem com o uso da formulação discreta com o propósito de obter dados gerais e global do sistema de vácuo. Um motivo adicional e muitas vezes essencial é que para o estabelecimento das condições de contorno, na modelagem com a equação de difusão, deveremos ter o conhecimento de dados gerais do sistema de vácuo, por exemplo, a pressão no flange da câmara de vácuo que dá acesso às bombas de vácuo.

Portanto, devemos considerar os dois tipos de formulação na análise de sistemas de vácuo como sendo complementares. Contudo deve ficar claro o estabelecimento das condições físicas para a validade das formulações apresentadas, ou seja, os limites de suas aplicações. Na formulação discreta a Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento – E_{PBV} – é válida para todos os tipos de sistemas de vácuo, isto é, para os sistemas de pré-vácuo, alto-vácuo e ultra alto-vácuo, ou de outra forma, a E_{PBV} é válida para os regimes de escoamento viscoso turbulento, viscoso laminar, intermediário e molecular. No caso da modelagem contínua estamos admitindo neste trabalho a hipótese que o processo de escoamento dos átomos e moléculas se dá de forma completamente aleatória. A equação de difusão só pode ser aplicada nos sistemas de vácuo em que ocorra escoamento dos átomos e moléculas no regime molecular, ou seja, o número de *Knudsen* deve ser maior que um.

A hipótese fundamental sobre a validade da equação de difusão dos gases e vapores para a análise e modelagem de sistemas de alto-vácuo está fundamentada no movimento caótico devido às colisões dos átomos e moléculas com as paredes e internos do sistema de vácuo. No caso do escoamento dos gases e vapores se dar no regime viscoso laminar ou no regime intermediário, devemos utilizar a mecânica dos fluidos. A hipótese básica neste caso é supor o escoamento gasoso

como sendo um meio contínuo; matematicamente, a modelagem é feita empregando-se as equações de *Navier-Stokes*. A quase totalidade dos casos e problemas de interesse é praticamente impossível de ser resolvida por meio de meios analíticos, uma vez que as modelagens matemáticas dos problemas são muito difíceis e extensas. Nestes casos, a intervenção de programas computacionais especializados em mecânica dos fluidos é necessária. Atenção especial deve ser dada nas análises e modelagens de sistemas de vácuo operando no regime de escoamento intermediário, uma vez que o estabelecimento das condições de contorno não é simples e ainda objeto de muitas dúvidas [31,39,66-72, 80-85].

2.8. Referências.

1. Lafferty, J. M., Foundations of Vacuum Science and Technology, Wiley-Interscience Publication, 1998.
2. Wutz, M., Adam, H. and Walcher, W., Theory and Practice of Vacuum Technology. Friedr. Vieweg and Sohn, 1989.
3. Loeb, L.B., The Kinetic Theory of Gases, Second Edition, McGraw-Hill, 1934.
4. Tabor, D., Gases, Liquids and Solids and Other States of Matter, Third Edition, Cambridge University Press, 1991.
5. Walton, A.J., Three Phases of Matter, Second Edition. Oxford University Press, 1983.
6. Present, R.D., Kinetic Theory of Gases, McGraw-Hill, 1958.
7. Kennard, E.H., Kinetic Theory of Gases. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1938.
8. Huang, Kerson., Statistical Mechanics, Second Edition, John Wiley and Sons, 1987.
9. Dushman, S., Scientific Foundations of Vacuum Technique, Second Edition, John Wiley, 1962.
10. Hucknall, D., Vacuum Technology and Applications, Butterworth-Heinemann, 1991.
11. O'Hanlon, J.F., A User's Guide to Vacuum Technology, Second Edition, Wiley-Interscience, 1989.
12. Roth, A., Vacuum Technology, Second and Revised Edition, North-Holland, 1986.
13. Beni, G., Hackwood, S., Belinski, S., Shirazi, M., Li, Shigang., and Karuppiah, L., Vacuum Mechatronics, Artech House, 1990.
14. Chambers, A., Modern Vacuum Physics. Chapman&Hall/CRC, 2005.
15. Saksaganskii, G.L., Molecular Flow in Complex Vacuum Systems, Gordon and Science Publishers, 1988.
16. Wedler, G., Manual de Química Física, Fundação Galuste Gulbenkian, 2001.
17. Cercignani, C., Mathematical Methods in Kinetic Theory, Plenum Press, 1969.

18. Knudsen, M., Kinetic Theory of Gases, 3rd Edition, John Wiley and Sons, 1950.
19. Bird, G.A., Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow, Clarendon Press Oxford, 1996.
20. Kersevan, R., Vacuum System Optimization: Computational Methods, School on “Use of Synchrotron Radiation in Science and Technology”, International Centre for Science and High Technology, Trieste, Italy, 1991.
21. Kersevan, R., Considerations on Vacuum Calculations, Private Communication, 2005.
22. Kersevan, R., Molflow - User's Guide, Sincrotrone Trieste, Trieste, Italy, 1991.
23. Cercignani, C., Rarefied Gas Dynamics: From Basic Concepts to Actual Calculations, Cambridge Text Applied Mathematics, 1999.
24. Berman, A., Vacuum Engineering Calculations, Formulas, and Solved Exercises. Academic Press, Inc, 1992.
25. Degasperri, F.T., Cadernos de Atividades, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, Circulação Restrita, 1990 até 1999.
26. Hoffman, D.M., Singh, B., and Thomas III, J.H., Handbook of Vacuum Science and Technology, Academic Press, 1997.
27. Ryans, J.L. and Roper, D.L., Process Vacuum Systems Design and Operation, McGraw-Hill, 1986.
28. Elsey, R.J., Vacuum, 25(7), 1975.
29. Elsey, R.J., Vacuum, 25(8), 1975.
30. Weston, G.F., Vacuum, 25(11/12), 1975.
31. Woods, R.L. and Lawrence, K.L., Modeling and Simulation of Dynamics Systems, Prentice-Hall, 1997.
32. Catálogos das empresas fabricantes de bombas de vácuo. BOC-Edwards, Alcatel, Varian, Leybolb, Balzers, Ulvac.
33. Degasperri, F.T., Instrumentação e Metodologia para o Tratamento e Carga de Óleo Empregado em Cúpulas de Raio-X Utilizando Vácuo, Instituto de Eletrotécnica e Energia da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1997, Curso.
34. Hablanian, M.H., High-Vacuum Technology – A Practical Guide, 2nd Edition, Marcel Dekker, 1998.
35. Shames, I., Mechanics of Fluids, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1985.
36. Catálogos da MKS sobre os Medidores de Fluxo de Massa (Mass Flow Meters).

37. Degasperi, F.T., Fluxo de Gases no Sistema CVD para Síntese de Filmes de Diamante, Laboratório de Filmes de Diamante do Instituto de Física da USP, São Paulo, SP, Brasil, 1994, Seminário.
38. Degasperi, F.T., The Vacuum Pumping, Controlled Gas Injection and Residual Gas Analyses Systems for the TCA-BR Tokamak, 14th International Vacuum Congress (IVC 14), Birmingham, United Kingdom, 1998, Apresentação Oral.
39. Degasperi, F.T., Elizondo, J.I., Lerche, E.A., Reis, A.P. dos, Sanada, E.K., Ferreira, A.A., Lima, R.R. and Nascimento, I.C., The Vacuum Pumping, Controlled Gas Injection, Residual Gas Analysis and Conditioning Wall Systems for the TCABR Tokamak, 14th IAEA – Technical Committee Meeting on Research Using Small Fusion Devices, São Paulo, SP, Brazil, 2001.
40. Freitas, L.C. de, Tabacnicks, M.H., Degasperi, F.T., Silva, M.N.M., Castro, C.S.C. de, Franklin, T.P., Couto, P.R.G. and Ferreira, M.J., The Brazilian Primary Vacuum Standart Project, 3rd CCM International Conference, Pressure Metrology from Ultra-High Vacuum to Very High Pressures, Torino, Italy, 1999, Apresentação Oral.
41. Bird, R.B., Stewart, W.E. and Lightfoot, E.N., Transport Phenomena, 2nd Edition, Wiley, 2002.
42. Steckelmacher, W., Reports on Progress Physics, 49(10), 1986.
43. Redhead, P.A., Hobson, J.P. and Kornelsen, E.V., The Physical Basis of Ultra-high Vacuum, Chapman and Hall and reprint by American Vacuum Society's Series of Classic Texts, AVS, 1993.
44. Comsa, G., David, R. and Rendulic, K.D., Physical Review Letters, 38(14), 1977.
45. Comsa, G., Surface Science, 299/300, 1994.
46. Holkeboer, D.H., Jones, D.W., Pagano, F. and Santeler, D.J., Vacuum Technology and Space Simulation, Boston Technical Publishers and reprint by American Vacuum Society's Series of Classics Text, AVS, 1993.
47. Viana, E.R., Desenvolvimento e Implementação de um Simulador para Estudos de Escoamento de Gases em Regime Molecular. Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Faculdade de Tecnologia de São Paulo. Orientado por Francisco Tadeu Degasperi. 1999.
48. Raimundo, D.S., Simulação de Transporte de Gases em Tubos e Orifícios no Regime de Escoamento Molecular, Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Faculdade de Tecnologia de São Paulo, Orientado por F.T. Degasperi, 2001.
49. Degasperi, F.T., Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo, Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999, Seminário.

50. Degasperi, F.T. and Mammana, V.P., Pressure Field Detailed Calculations for a New Field Emission Device with Improved Vacuum Features, 46th International Symposium Vacuum, Thin Films, Surfaces/Interfaces and Processing, American Vacuum Society (AVS), Seattle, Washington, USA, 1999, Apresentação Oral.
51. Mammana, V.P., Degasperi, F.T., Monteiro, O.R., Vuolo, J.H., Salvadori, M.C.B. and Brown, I.G., A New Field Emission Device with Improved Vacuum Features, Journal of Vacuum Science and Technology, 18A(4), 2000.
52. Middleman, S. and Hochberg, A.K., Process Engineering Analysis in Semiconductor Device Fabrication, McGraw-Hill, 1993.
53. Sugano, T., Applications of Plasma Processes to VLSI Technology, Wiley-Interscience, 1985.
54. Haile, J.M., Molecular Dynamics Simulation: Elementary Methods, Wiley-Interscience, 1992.
55. Rapaport, D.C., The Art of Molecular Dynamics Simulation, Cambridge University Press, 1995.
56. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., Fluid Mechanics – Course of Theoretical Physics – Volume 6, Butterworth-Heinemann, 1997.
57. Degasperi, F.T., Martins, M.N., Takahashi, J. and Verardi, S.L.L., Time Dependence of the Pressure Profile in a Tube with Axially-Dependent Degassing, Particle Accelerator Conference, PAC-2001, Chicago, Illinois, USA, 2001. Apresentado em forma de painel e publicado nos anais.
58. Degasperi, F.T., Mammana, V.P., Verardi, S.L.L. and Baranauskas, V., Calculation of the Vacuum Pressure Gradient in Field Emission Display, Trabalho apresentado no International Conference on Metallurgical Coating and Thin Films, ICMCTF-2001, San Jose, California, USA, 2001. Trabalho publicado “Surface and Coating Technology”, 2002.
59. Gershendeld, N., The Nature of Mathematical Modeling, Cambridge University Press, 1999.
60. Bequette, B.W., Process Dynamics: Modeling, Analysis and Simulation, Prentice-Hall PTR, 1998.
61. MacCluer, C.R., Industrial Mathematics – Modeling in Industry, Science and Government, Prentice Hall, 2000.
62. Svobodny, T., Mathematical Modeling for Industry and Engineering, Prentice Hall, 1998.
63. Shearer, J.L. and Kulakowski, B.T., Dynamics Modeling and Control of Engineering Systems, Maxwell Macmillan International Editions, 1990.
64. Gershendeld, N., The Physics of Information Technology, Cambridge University Press, 2000.
65. Rice, R.G. and Do, D.D., Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers, John Wiley & Sons, 1995.

66. Arfken, G. and Weber, H., *Mathematical Methods for Physicists*, 4th Edition, Academic Press, 1998.
67. Tjonov, A.N. and Samarsky, A.A., *Ecuaciones de la Fisica Matematica*, Segunda Edición, Editorial Mir, 1980.
68. Snider, A.D., *Partial Differential Equations: Sources and Solutions*, Prentice Hall, 1999.
69. Powers, D.L., *Boundary Value Problems*, 4th Edition, Harcourt – Academic Press, 1999.
70. Özisik, M.N., *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Dover Publications, 1989.
71. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford University Press, 1957.
72. Lewin, G., *Fundamentals of Vacuum Science and Technology*, McGraw-Hill, 1965.
73. Degasperi, F.T., Martins, M.N., Takahashi, J. and Verardi, S.L.L., Pressure Field in a Tube with a Time- and Position-Dependent Degassing, Trabalho a ser submetido ao Journal of Vacuum Science and Technology (JVST).
74. Degasperi, F.T., Martins, M.N., Verardi, S.L.L. and Takahashi, J., Pressure Field Along the Axis of an Accelerating Structure, European Particle Accelerator Conference, EPAC-2002, Paris, France, 2002. Trabalho apresentado e publicado nos anais.
75. Degasperi, F.T. e Baranauskas, V., Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo, XXII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência (CBRAVIC), Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, UNESP, Guaratinguetá, SP, Brasil, 2001. Trabalho apresentado na forma de painel.
76. Anderson, J.D., *Modern Compressible Flow: with Historical Perspective*, McGraw-Hill, 1982.
77. Programa Computacional *Ansys* para Simulação em Mecânica dos Fluidos, Manual da Versão 4, 1999.
78. Fortuna, A.O., *Técnicas Computacionais para a Dinâmica dos Fluidos – Conceitos Básicos e Aplicações*, Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
79. Degasperi, F.T., Estudo de Fluxo de Gases em Reatores Assistidos a Plasmas em Baixas Pressões, Trabalho apresentado na Disciplina Processos em Eletrohidrodinâmica I, Curso de Pós-Graduação da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 1999.
80. Degasperi, F.T., Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo - Objetivo Didático, XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria, Florianópolis, SC, Brasil, 1991. Trabalho apresentado na Sessão Oral.
81. Sanches Junior, R.L., Tratamento Matemático Analítico-Numérico para o Processo de Bombeamento em Tecnologia do Vácuo, Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Fatec-SP, Orientado por F.T. Degasperi, 1997.

82. Degasperi, F.T., Baranauskas, V., Pressure Field in High-Vacuum Systems: Mathematical Physics Formulation, 8th European Vacuum Conference – EVC-8 – 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society, Berlin, Germany, 2003.
83. Degasperi, F.T., Mammana, V.P., Baranauskas, V., Steady-State and Transient Profile in Field Emission Display, 8th European Vacuum Conference – EVC-8 – 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society, Berlin, Germany, 2003.
84. Degasperi, F.T., Pressure Field Distribution in Ultra High-Vacuum Systems, 41st IUVSTA – Workshop – Vacuum System Design for Particle Accelerators: a multidisciplinary approach, Brdopri Kranju, Slovenia, 2004.
85. Degasperi, F.T., Baranauskas, V., Mathematical Physics Formulation to Pressure Field in a Tube with an Arbitrary Axisymmetric Cross Section, 16th International Vacuum Congress – IVC-16, Venice, Italy, 2004.

Capítulo 3

Sistemas de Vácuo Complexos

Neste capítulo apresentamos análises, cálculos e modelagens detalhados de sistemas de vácuo que são utilizados tanto em processos industriais como na pesquisa. As modelagens são realizadas tanto com a formulação discreta como com a formulação contínua. Iniciamos analisando em detalhe dois sistemas de vácuo por meio da abordagem discreta. O primeiro caso em estudo é um sistema de pré-vácuo com bomba roots e o segundo deles é um sistema de alto-vácuo com bomba de difusão. Mostramos as etapas para a construção do modelo – com procedimentos que são aplicáveis a outros sistemas de vácuo – e quais resultados podem ser alcançados por meio da abordagem discreta com o ferramental desenvolvido neste trabalho. Seguindo, utilizamos a abordagem contínua para modelar sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo. Tratamos de sistemas de alto-vácuo tubulares com área de seção transversal constante e variável e de sistemas de alto-vácuo bidimensionais com fontes de gases estacionárias e transientes. Finalizando o capítulo fazemos uma discussão sobre os resultados alcançados e as limitações das formulações apresentadas.

3.1 Introdução.

Como apresentado nos capítulos anteriores, podemos realizar a modelagem de sistemas de vácuo adotando as abordagens que chamamos de discreta e contínua. A abordagem discreta é a mais utilizada e em geral com muitas simplificações. Esta abordagem leva somente ao estabelecimento da pressão em função do tempo na câmara de vácuo. Não obstante esta limitação intrínseca à abordagem discreta, ela tem um alcance suficiente para realizar muitos projetos na área de tecnologia do vácuo. Apesar de termos disponíveis a equação diferencial fundamental para o processo de bombeamento em vácuo e alguns modelos para as fontes de gases e vapores, verificamos que não são freqüentes programas computacionais com ferramentas numéricas de uso geral para a modelagem detalhada e rigorosa de sistemas de vácuo. Com o propósito de tornar as análises e modelagens de sistemas de vácuo mais profundas e detalhadas apresentamos uma plataforma computacional de trabalho capaz de auxiliar nos projetos de vácuo.

Os modelos construídos neste trabalho consideram várias fontes de gases e vapores com as condutâncias da linha de bombeamento e ainda as velocidades das bombas de vácuo em função da pressão. Os programas computacionais para a modelagem discreta são documentados em detalhe e podem ser utilizados e facilmente alterados de forma a modelar uma vasta gama de situações encontradas na área de vácuo. Ainda, com os programas desenvolvidos, poderemos calcular numericamente as condutâncias para os quatro regimes de escoamento. Apesar de procuramos proceder com rigor, jamais poderemos escapar de simplificações e hipóteses *ah doc* em muitas situações corriqueiras. Isto faz parte intrínseca da modelagem de sistemas da natureza!

Apresentamos dois casos de estudos utilizando a formulação discreta. O primeiro caso modela um sistema de vácuo de médio porte utilizando bomba *roots*. Este tipo de sistema de vácuo é amplamente utilizado na indústria em processos de secagem, de empacotamento de alimentos, tratamento de óleos isolantes elétricos, e outros. O segundo caso de estudo é um sistema de alto-vácuo com bomba difusora com armadilha gelada. Nestes dois casos as modelagens foram feitas com bastante detalhe, incorporando aspectos referentes às fontes gasosas, condutâncias da linha de bombeamento e bombas de vácuo. Introduzimos ainda detalhes sobre a evolução temporal da degaseificação e injeção controlada de gases. Obtivemos as soluções numéricas com códigos computacionais desenvolvidos neste trabalho utilizando as plataformas *MathCADTM* e *MapleTM*. As modelagens e análises numéricas realizadas empregam os métodos de *Euler-Heun* e *Runge-Kutta* de segunda e quarta ordens. Estes métodos e os programas computacionais desenvolvidos mostraram-se eficientes e confiáveis, pois, as soluções numéricas encontradas foram testadas e comparadas com sucesso com soluções analíticas para os casos possíveis. Apesar de termos tratados de poucos sistemas de vácuo, as ferramentas e metodologias desenvolvidas são de larga aplicação em tecnologia do vácuo e são facilmente estendíveis a outros casos.

Prosseguindo, modelamos sistemas de alto-vácuo tanto unidimensionais como sistemas de alto-vácuo bidimensionais por meio da abordagem contínua. Consideramos nas modelagens fontes de gases transientes e estacionárias, obtendo os seus respectivos campos de pressão transientes e estacionários, e ainda, os seus gradientes tanto por procedimentos analíticos como numéricos. No caso dos sistemas de alto-vácuo bidimensionais modelados, as suas soluções numéricas foram obtidas pelo método dos elementos finitos.

Um aspecto muito importante considerado neste trabalho foi o fato dos códigos computacionais desenvolvidos e a sistemática de trabalho serem abertos, permitindo aos usuários introduzir modificações de forma clara. Assim, acreditamos que o propósito inicial apresentado – contribuir à análise e modelagem detalhadas de sistemas de vácuo – foi atingido, tanto por procedimentos analíticos como numéricos. Outro aspecto que cabe ser enfatizado refere-se à ampla

e detalhada documentação com que os programas computacionais e o desenvolvimento teórico foram construídos e implementados.

3.2 Modelagem Discreta de Sistemas de Vácuo.

Com o propósito de ilustrar e propor uma metodologia de trabalho para a modelagem e análise de sistemas de vácuo por meio da formulação discreta, trataremos de dois casos bastante presentes nas aplicações da tecnologia do vácuo. O desenho mostrado na Figura 3.1 apresenta as partes principais de um sistema de vácuo geral, a câmara de vácuo com as possíveis fontes de gases e vapores, a linha de bombeamento e as bombas de vácuo. A clara identificação destas partes é essencial e crucial para a modelagem de sistemas de vácuo com a abordagem discreta.

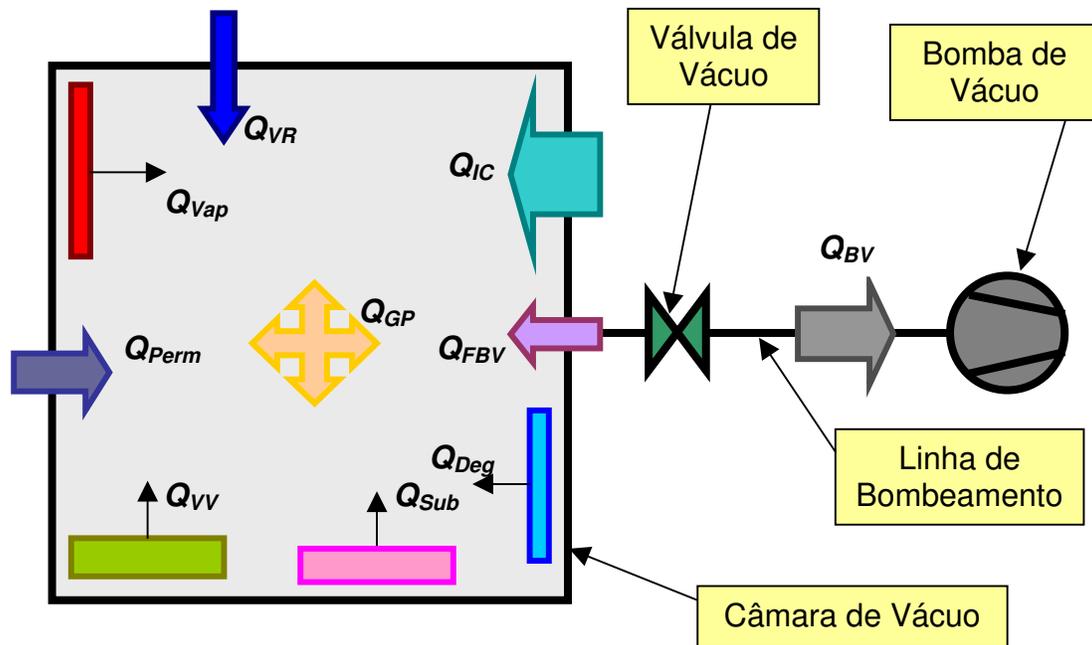


Figura 3.1 Esquema de um sistema de vácuo. Na modelagem usando a formulação discreta, as partes essenciais são: a câmara de vácuo, a linha de bombeamento e as bombas de vácuo.

A Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – é dada pela equação diferencial mostrada a seguir, Expressão 1.1, com a condição inicial a ser imposta

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \quad 1.1$$

$$p_{CV}(t = 0) = p_0$$

O termo $V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt}$ é a variação do *throughput* na câmara de vácuo. Quando o volume e a temperatura são constantes, este termo nos fornece a variação temporal da pressão na câmara de vácuo. O termo $S_{ef} p_{CV}(t)$ está relacionado com o gás que escoo pela linha de bombeamento e é igual ao *throughput* bombeado pelas bombas de vácuo. A velocidade efetiva de bombeamento é dada por $S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}}$, mostrando explicitamente a sua dependência com a condutância da

linha de bombeamento e com a velocidade de bombeamento das bombas de vácuo. O termo $\sum_{i=1}^n Q_i$ está relacionado com a quantidade de gás das fontes de gases e vapores e identificamos como sendo igual ao *throughput* dessas fontes gasosas que alimenta a câmara de vácuo. Assim, temos a estrutura matemática do problema colocada e os seus termos identificados com as partes do sistema de vácuo. A equação diferencial E_{PBV} está deduzida e discutida em detalhe no Apêndice A.

Prosseguindo com a modelagem, devemos identificar e quantificar as várias fontes gasosas relevantes ao processo em vácuo. Mesmo não dispondo de dados precisos sobre as fontes de gases e vapores, podemos fazer inicialmente cálculos preliminares no sentido de apontar direções a serem seguidas no projeto. Em seguida, especificamos bombas de vácuo e a linha de bombeamento, propondo valores inicialmente obtidos por meio de cálculos simples. A partir de uma determinada quantidade total de gás envolvida no processo e com a pressão final que pretendemos atingir, podemos encontrar a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo. A partir deste valor podemos detalhar e aprofundar o modelo. Partindo da pressão atmosférica, tendo as dimensões das tubulações, flanges, e outros componentes da linha de bombeamento podemos determinar o número de *Knudsen* – *Kn* – e assim calcular a condutância total em função do regime de escoamento dos gases e vapores. As curvas de velocidade de bombeamento das bombas de vácuo em função da pressão podem ser obtidas por meio das expressões no Apêndice C.

Desta forma, o sistema de vácuo em questão pode ser modelado e os resultados preliminares podem sugerir e indicar alterações e aprimoramentos a serem feitos. O processo de modelagem é sempre um processo iterativo, ou seja, dados obtidos alimentam a obtenção de novos dados. A modelagem é sempre uma idealização da realidade, uma forma de montar o problema real em termos matemáticos sustentado no conhecimento da física envolvida no sistema em estudo [1-9]. Detalhes sobre o comportamento de sistemas de vácuo em geral podem ser encontrados no Apêndice D.

3.2.1 Sistema de Pré-Vácuo com Bomba *Roots*.

Muitos processos industriais ocorrem na faixa do vácuo grosseiro, pressão entre a pressão atmosférica até 1 mbar, e pré-vácuo, pressão de 1 mbar até 10^{-3} mbar. As aplicações cobrem a indústria alimentícia, passando pela indústria farmacêutica, de secagem, de impregnação, tratamento de óleos isolantes elétricos para transformadores e ampolas de raios-X, e outras. Os sistemas de vácuo, que operam desde a pressão atmosférica até pressões da ordem de 10^{-3} mbar, têm em geral algumas das seguintes características:

- Câmaras de vácuo com grandes dimensões.
- Grandes quantidades de gases e vapores, ou seja, grandes *throughput's* a serem bombeados.
- Presença de grandes quantidades de vapores.
- Atmosfera com poeira e particulados.
- Vapores corrosivos e agressivos.
- Busca de redução de tempo de processo.
- Processos que exigem grande higiene e atmosferas inertes.

Muitas das características apontadas acima podem levar a instalação de acessórios e sistemas de proteção às bombas de vácuo, ao processo em vácuo e ao ambiente externo. Estes componentes auxiliares de proteção devem fazer parte da modelagem do sistema de vácuo, podendo interferir de forma marcante e até decisiva no valor da condutância e assim, no valor da velocidade efetiva de bombeamento. A Figura 3.2 mostra esquematicamente um sistema de pré-vácuo com bomba *roots* tendo em seu flange de exaustão conectada uma bomba mecânica de palhetas.

A modelagem deste sistema de vácuo será realizada por meio da solução da equação diferencial E_{PBV} , para isto devemos especificar a bomba de vácuo *roots*, determinando a sua velocidade de bombeamento e por meio da escolha de parâmetros construir a expressão matemática da sua curva de velocidade de bombeamento em função da pressão, conforme a Expressão 3.1

$$S_{BR}(p) = S_{MÁX} \frac{A}{\left[1 + \left(\frac{a \cdot p_{final}}{p}\right)^b\right]^c \left[1 + \left(\frac{p}{d \cdot p_{final}}\right)^e\right]^f}, \quad 3.1$$

onde,

- p é a pressão no flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade de bombeamento máxima, ou ainda, a velocidade nominal da bomba de vácuo,
- p_{final} é a pressão mínima que a bomba de vácuo atinge, e

- a, b, c, d, e, f e A são constantes que dependem de um particular modelo de bomba *roots*.

Como sabemos a bomba *roots* somente funciona como bomba de vácuo desde que haja em seu flange de saída uma bomba de pré-vácuo com taxa de compressão suficiente para exaurir os gases contra a atmosfera. Podemos neste caso utilizar uma bomba mecânica de palhetas de dois estágios, ou mesmo de um estágio, desta forma poderemos atingir pressões da ordem de 10^{-5} mbar. Vemos a seguir um esquema de um sistema de vácuo com bomba *roots*, com válvula de arejamento instalada na câmara de vácuo. Dependendo do processo em vácuo deveremos arejar a câmara de vácuo com gás inerte.

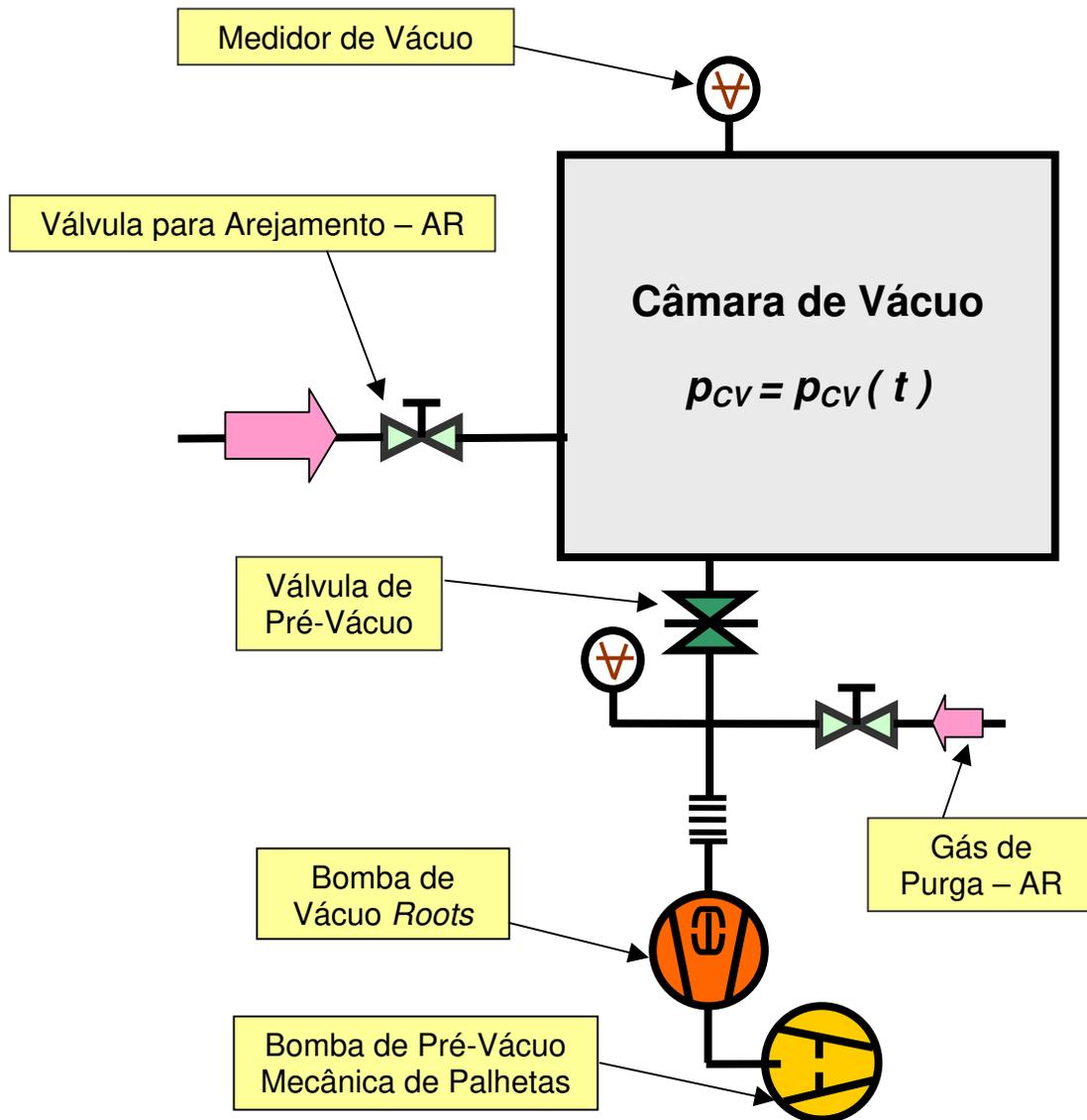


Figura 3.2 Sistemas de vácuo de médio porte operando da pressão atmosférica até a pressão final da ordem de 10^{-3} mbar. As bombas de vácuo utilizadas são a *roots* e a mecânica de palhetas.

Prosseguindo, a determinação das condutâncias é feita por meio de expressões considerando o gás N_2 e temperatura de 296 K, conforme mostrada na modelagem realizada a seguir utilizando o código numérico criado na plataforma *MathCADTM*. As expressões para calcular as condutâncias dependem do regime de escoamento. Com a determinação do número de *Knudsen* podemos encontrar o regime de escoamento dos gases e vapores na linha de bombeamento. As expressões acima são para tubos cilíndricos longos, tubo cujo comprimento é 10 vezes ou maior que o seu diâmetro. O cálculo da condutância em função da pressão é feito automaticamente por meio de uma sentença condicional; sendo que o próprio código computacional passa de uma expressão matemática para outra dependendo do número de *Knudsen*. Assim, podemos utilizar o método de *Euler-Heun* ou o método de *Runge-Kutta* de quarta ordem para resolver numericamente a equação diferencial E_{PBV} . No caso do método de *Euler-Heun* ou do método de *Runge-Kutta* de segunda ordem temos a Expressão 3.2

$$P_{n+1} = P_n + \frac{h}{2} \left\{ f(t_n, P_n) + f\left[t_{n+1}, (P_n + h f(t_n, P_n))\right] \right\} \quad 3.2$$

com

$$f(t, P) = \frac{Q(P, t)}{V_{CV}} - \frac{S_{ef}}{V_{CV}} P \quad \text{e} \quad S_{ef} = \frac{S_{BV} C_{Total}}{S_{BV} + C_{Total}} .$$

Sendo $Q=Q(P, t)$ a função que representa as fontes de gases e vapores. De posse da função $f=f(P, t)$ encontramos a curva da pressão em função do tempo na câmara de vácuo. Assim, podemos encontrar outras grandezas de interesse para o conhecimento do sistema de vácuo, por exemplo, a determinação do *throughput* de gás bombeado, neste caso $Q_{Bombeado}(t) = S_{ef}(p_{CV}) p_{CV}(t)$. Desta forma, o problema pode ser analisado e o seu sistema de bombeamento determinado. A escolha das bombas de vácuo na primeira modelagem pode ser feita por meio de cálculos simples conforme discutidos no Capítulo 1. Os Apêndices A, C e D trazem em detalhe a teoria e estudos de casos de interesse. Assim, vamos a seguir à modelagem de um sistema de vácuo utilizando bomba *roots*. Apresentamos todas as etapas dos cálculos necessários para analisar em detalhe o sistema de vácuo. A modelagem é feita considerando bombas de vácuo existentes no mercado e adotamos os dados extraídos de catálogo e também de sistemas de vácuo construídos e que estão em operação e alcançaram bom desempenho.

Sistema de Pré-Vácuo com Bomba Roots

- Definição do intervalo das pressões:

$$w := 1..14 \quad c_w := 10^{w-11} \quad z := 1..126 \quad a := 1..9$$

$$\delta := 0,9..117 \quad p_{a+\delta} := a \cdot c \cdot \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{9}}$$

- Dados referentes à câmara de vácuo e à tubulação da linha de bombeamento:

- Volume de câmara de vácuo: $V_{cv} := 6000$ litros

- Diâmetro da tubulação: $dia := 10$ cm

- Comprimento da tubulação, curvas e outros componentes da linha de bombeamento:

$$l_{tub} := 1000 \text{ cm}$$

- Critério de *Knudsen* para a determinação do regime de escoamento dos gases.

$$\lambda_z := \frac{6.7 \cdot 10^{-3}}{p_z} \quad Kn_z := \frac{\lambda_z}{dia} \quad \text{Número de Knudsen}$$

- Adotamos o gás nitrogênio - 28 uma - a temperatura ambiente - 296 K.
- As condutâncias da tubulação estão calculadas abaixo, nos regimes de escoamento viscoso turbulento, viscoso laminar, intermediário e molecular.
- Para os regimes de escoamento viscoso laminar e viscoso turbulento fizemos simplificações a fim de modelar o problema por meio da abordagem discreta. Calculamos por meio dos comandos condicionais definidos abaixo.
- A pressão crítica é determinada com o conhecimento do throughput bombeando. O procedimento de encontrar a pressão cujo escoamento de gás passa de viscoso laminar para viscoso turbulento para viscoso é fundamental para o cálculo da condutância.

$$p_{cr} := 60 \text{ mbar}$$

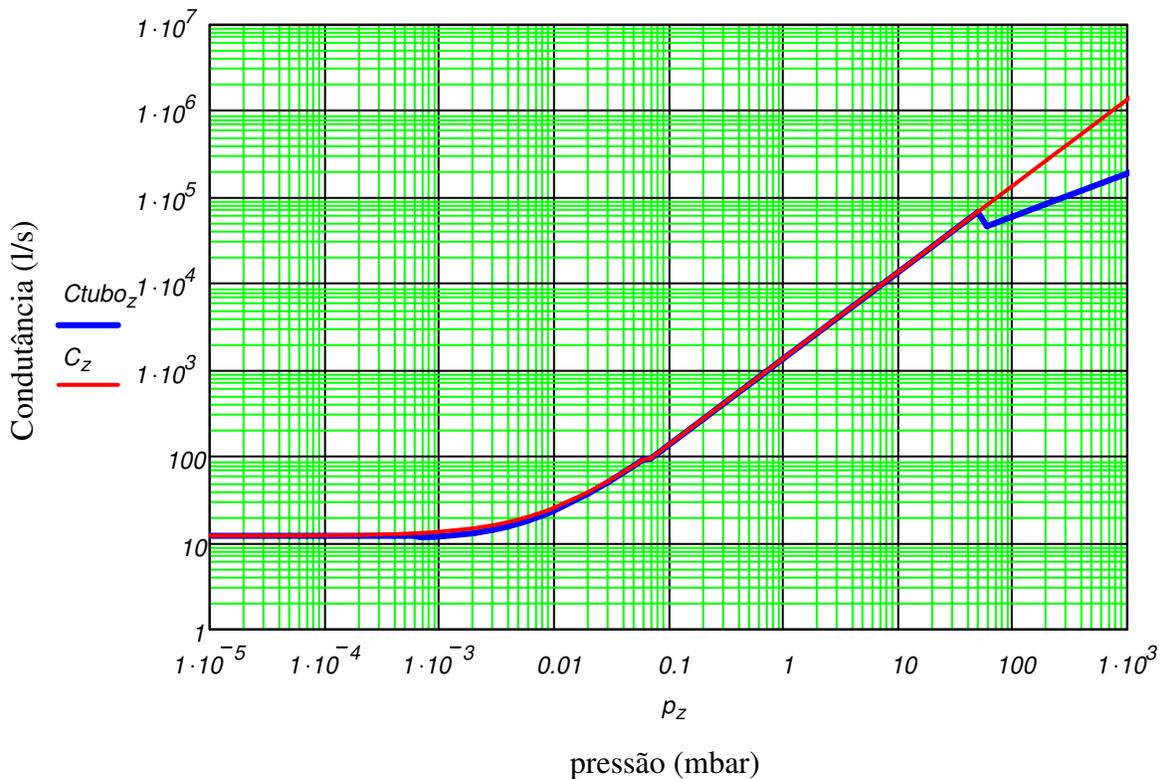
$$d_{ifp} := 0.1 \text{ mbar}$$

$$C_{tubo_z} := \begin{cases} 12.1 \cdot \frac{dia^3}{l_{tub}} & \text{if } Kn_z \geq 1 \\ \frac{dia^3}{l_{tub}} \cdot \left[136.5 \cdot dia \cdot p_z + 12.1 \cdot \left(\frac{1 + 192 \cdot dia \cdot p_z}{1 + 237 \cdot dia \cdot p_z} \right) \right] & \text{if } 1 \geq Kn_z \geq 0.01 \\ \text{if } Kn_z < 0.01 \\ \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ 134 \cdot dia \cdot \left[\frac{dia^3 \cdot (2 \cdot p_z)}{l_{tub} \cdot d_{ifp}} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{if } p_z \geq p_{cr} \\ 135 \cdot \frac{dia^4}{l_{tub}} \cdot p_z & \text{if } p_z < p_{cr} \end{array} \right. \end{cases}$$

- Para efeito de comparação vamos utilizar a sequência de cálculo para as condutâncias em função da pressão, sendo considerados os regimes de escoamento viscoso laminar, intermediário e molecular.

$$C_z := \text{if} \left[\frac{\text{dia}}{6.7 \cdot 10^{-3}} > 100, 136 \cdot \frac{\text{dia}^4}{\text{ltub}} \cdot p_z, \left(12.1 \cdot \frac{\text{dia}^3}{\text{ltub}} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{\text{dia}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right]$$

- A curva seguinte é da condutância em função da pressão, sendo considerados os regimes de escoamento viscoso laminar, intermediário e molecular.

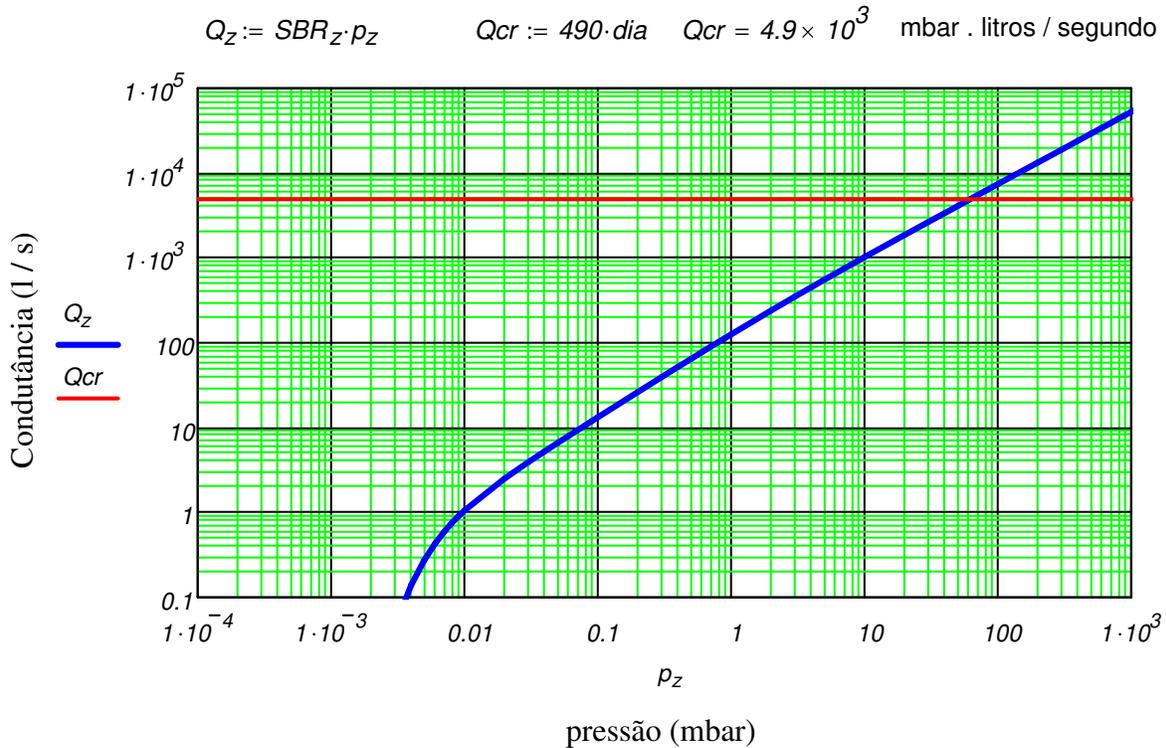


- Velocidade de bombeamento da bomba *roots*, modelo EH500A/E2M80 da Edwards. Dados obtidos no catálogo da empresa.

$Smáx := 133$ litros/segundo

$$SBR_z := Smáx \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{p_z} \right)^2 \right]^6} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{p_z}{1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \right)^1 \right]^{0.15}}$$

- O critério para a decisão de cálculo da condutância do regime de escoamento viscoso turbulento para o regime de escoamento viscoso laminar é mostrado a seguir.



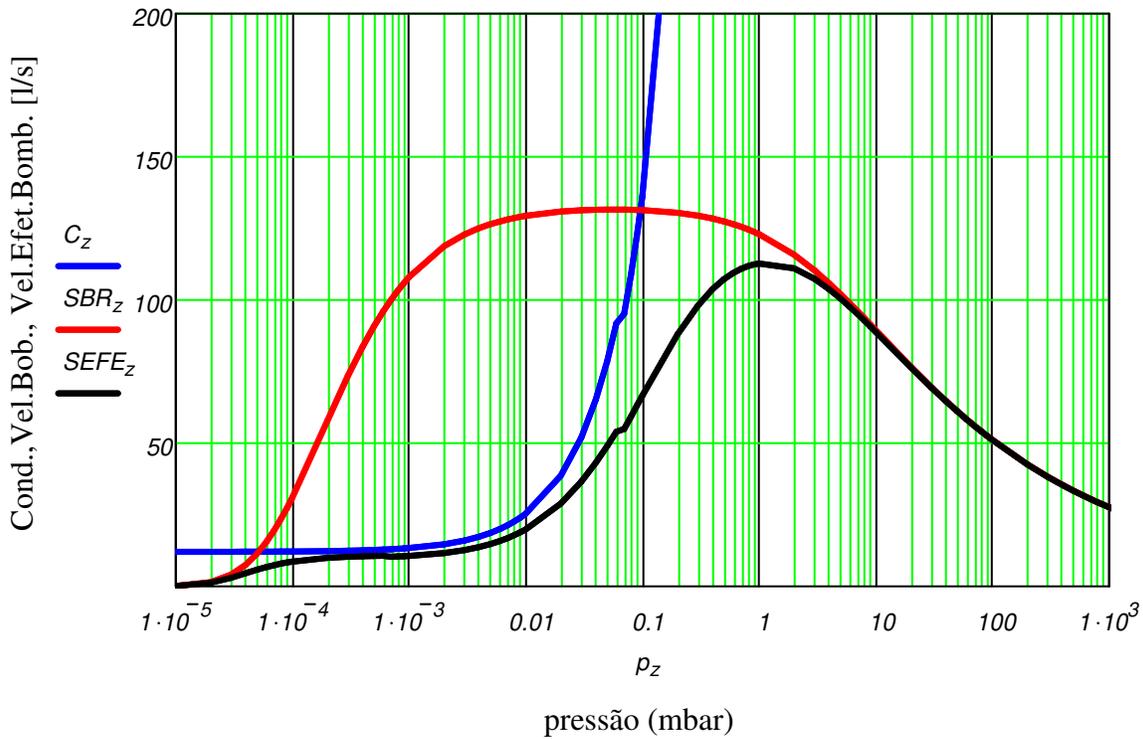
- Velocidade de bombeamento da bomba *roots*, modelo EH500A/E2M80 da Edwards. Dados obtidos no catálogo da empresa.

$$S_{m\acute{a}x} := 133 \text{ litros/segundo}$$

$$SBR_z := S_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{3 \cdot 10^{-5}}{p_z}\right)^{0.9}\right]^5} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{p_z}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}\right)^1\right]^{0.27}}$$

- Está sendo considerado um sistema de pré-vácuo típico para o bombeamento de grandes quantidades de gases ou vapores. Por exemplo, bombeamento na saída de bombas difusoras de grande porte, na indústria de empacotamento a vácuo, tratamento de óleo de transformadores e muitos exemplos. Cabe notar que fontes de gases ou vapores adicionais no sistema de vácuo podem ser introduzidas na modelagem.
- No caso do bombeamento de grandes quantidades de vapor, por exemplo, nos processos de secagem, deveremos inserir no circuito de vácuo um condensador antes da bomba *roots* e devemos também inserir outro condensador antes da bomba mecânica. A instalação dos condensadores deve-se a dois motivos: o primeiro é que o condensador é uma eficiente bomba de vácuo para vapores e o segundo motivo é que eles protegem as bombas *roots* e principalmente a bomba mecânica.
- A velocidade efetiva de bombeamento pode ser determinada pela expressão $(1/S_{ef}) = (1/S_b) + (1/C_{total})$.

$$SEFE_z := \frac{C_{tubo_z} \cdot SBR_z}{C_{tubo_z} + SBR_z}$$



- A equação fundamental para o processo de bombeamento é escrita como

$$V_{cv}.dpcv(t)/dt = - Sef.pcv(t) + Q_{vv} + Q_{vr} + Q_{deg} = Q_{vap} + \dots$$

No nosso caso consideraremos um valor de Q_{final} representando todas as fontes de gases e vapores que determinam o valor de pressão final.

- Determinação da pressão em função do tempo na câmara de vácuo.

$$N := 10000 \quad t_0 := 0 \text{ (instante inicial)} \quad t_f := 1500 \text{ (instante final)} \quad P_0 := 1000 \text{ (pressão atmosférica)}$$

$$h := \frac{t_f - t_0}{N + 1} \quad h = 0.1499850015 \quad n := 0..N \quad t_{n+1} := t_n + h$$

- Método Numérico de *Euler-Heun* ou método de *Runge-Kutta* de segunda ordem usado para a obtenção da solução da equação diferencial para o processo de bombeamento. Com o propósito de aumentarmos a confiança nas soluções numéricas, construímos um programa com o método de *Runge-Kutta* de quarta ordem, utilizado mais à frente.
- No cálculo abaixo estamos considerando a bomba de vácuo ligada diretamente na câmara de vácuo, ou em outros termos, condutância muito grande. Vemos que poderemos introduzir outras fontes de gases e vapores no primeiro termo da função mostrada abaixo.

$$f(t, P) := \frac{9.0 \cdot 10^{-1}}{V_{cv}} \cdot \frac{S_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{3 \cdot 10^{-5}}{P}\right)^{0.9}\right]^5} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{P}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}\right)^{\bar{1}}\right]^{0.27}} \cdot P}{V_{cv}}$$

- **Observação:** 0,9 mbar.l/s é o throughput final arbitrariamente imposto.

$$g(t, PP) := \frac{9 \cdot 10^{-1}}{V_{cv}} \cdot \left[\frac{S_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{3 \cdot 10^{-5}}{PP}\right)^{0.9}\right]^5} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{PP}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}\right)^{\bar{1}}\right]^{0.27}}}{V_{cv}} \right] \cdot PP$$

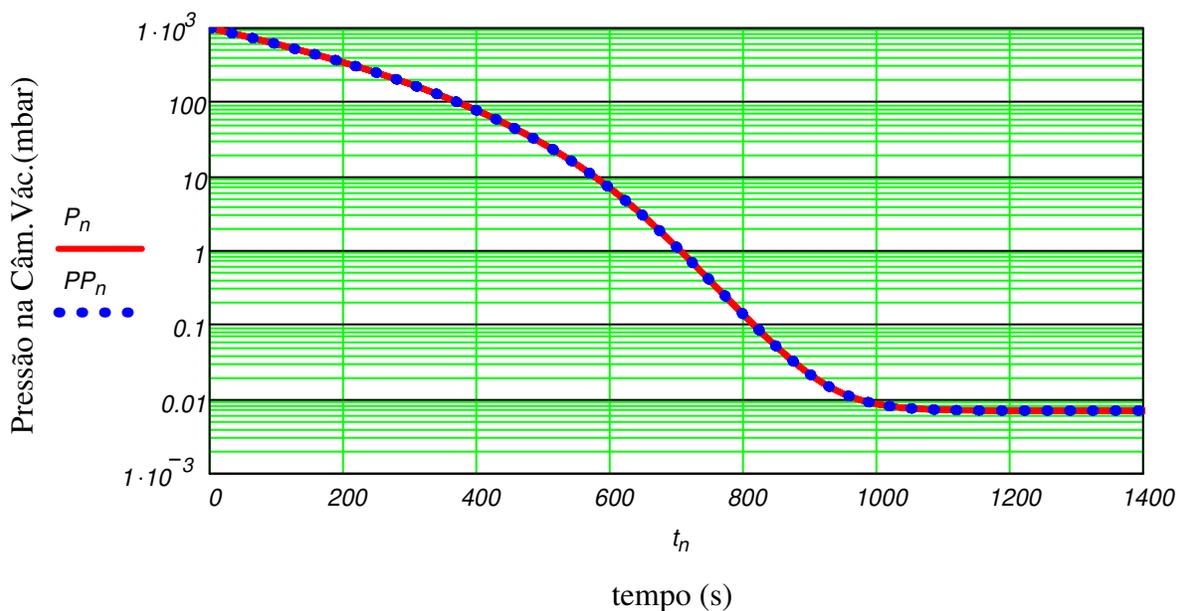
$PP_0 := 1000$ mbar (pressão atmosférica) $P_0 := 1000$ mbar (pressão atmosférica)

$$PP_{n+1} := PP_n + \left(\frac{h}{2}\right) \cdot \left[g(t_n, PP_n) + g\left[t_{n+1}, \left(PP_n + h \cdot g(t_n, PP_n)\right)\right] \right]$$

- Método de *Euler-Heun* para a determinação numérica da pressão na câmara de vácuo em função do tempo.

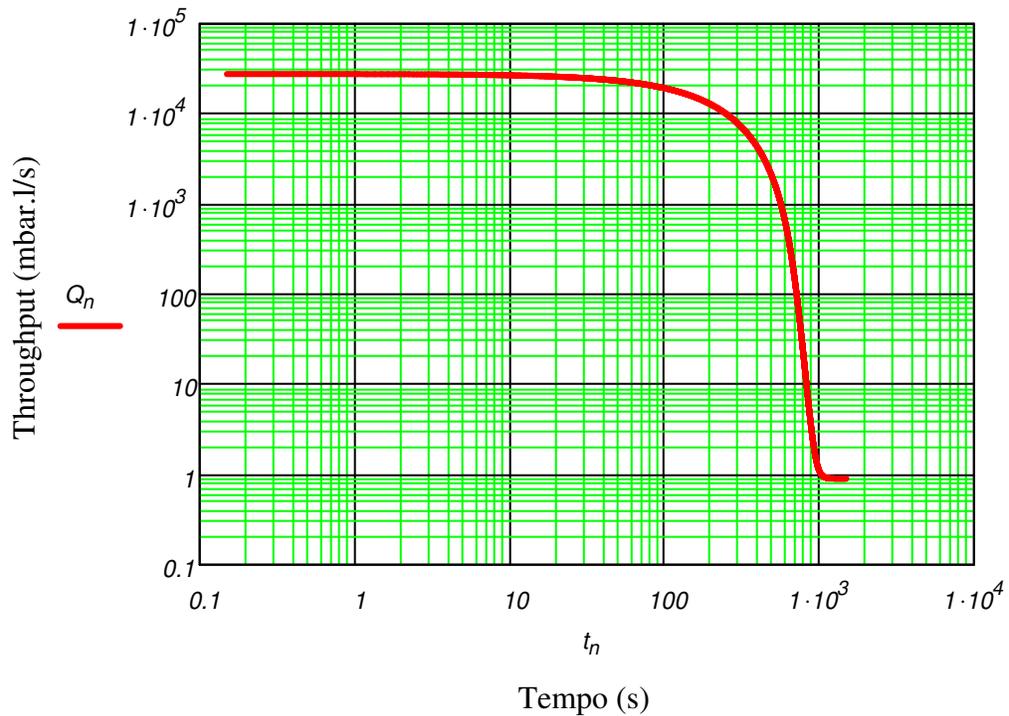
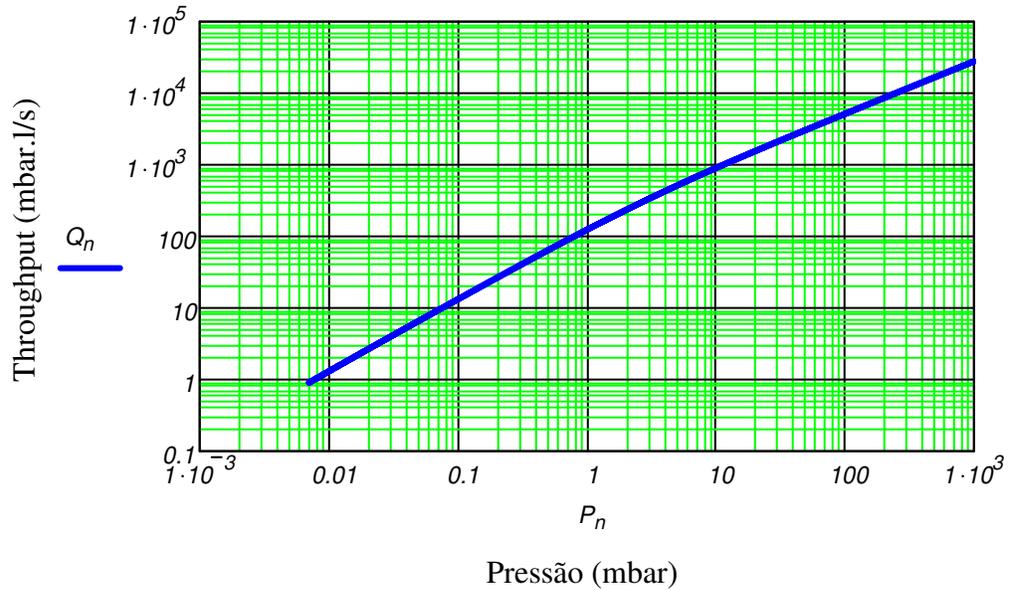
$$P_{n+1} := P_n + \frac{1}{6} \cdot \left[h \cdot f(t_n, P_n) + 2 \cdot \left[h \cdot f\left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot (h \cdot f(t_n, P_n))\right] \right] \dots \right. \\ \left. + 2 \cdot \left[h \cdot f\left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot \left[h \cdot f\left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot (h \cdot f(t_n, P_n))\right]\right] \right] \dots \right. \\ \left. + h \cdot f\left[t_n + h, P_n + h \cdot \left[h \cdot f\left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot \left[h \cdot f\left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot (h \cdot f(t_n, P_n))\right]\right] \right] \right] \right] \right]$$

- Temos a seguir o gráfico da pressão na câmara de vácuo em função do tempo.



- O *throughput* bombeado em função da pressão e do tempo pode ser determinado como segue. Esta informação pode ser importante no sentido de de ser um dado à manutenção preventiva e preditiva.

$$Q_n := S_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{3 \cdot 10^{-5}}{P_n}\right)^{0.9}\right]^5} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{P_n}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}\right)^1\right]^{0.27}} \cdot P_n$$



$PI_0 := 1000$ mbar (pressão atmosférica)

- No cálculo a seguir estamos considerando o efeito da condutância da tubulação no processo de bombeamento.

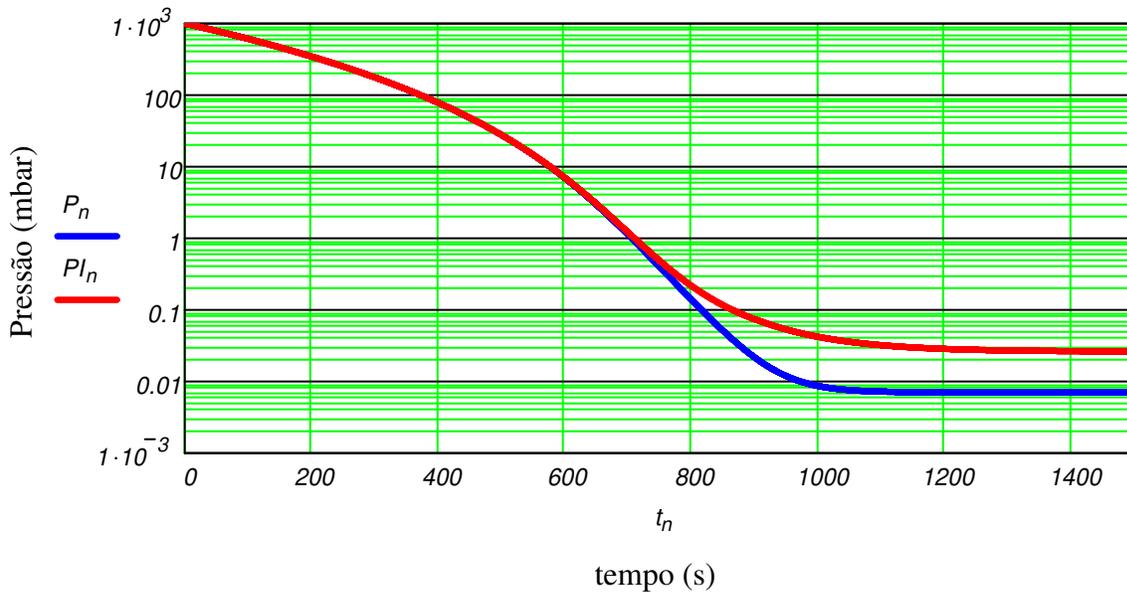
$$A(PI) := \text{if} \left[\frac{\text{dia}}{6.7 \cdot 10^{-3}} > 100, 136 \cdot \frac{\text{dia}^4}{l_{\text{tub}}} \cdot PI, \left(12.1 \cdot \frac{\text{dia}^3}{l_{\text{tub}}} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{\text{dia}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right]$$

$$fl(t, PI) := \frac{9 \cdot 10^{-1}}{V_{\text{cv}}} - \frac{\left[\frac{S_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{3 \cdot 10^{-5}}{PI} \right)^{0.9}}}{\left[1 + \left(\frac{PI}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \right)^1 \right]^{0.27}} \right]^5 \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{PI}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \right)^1 \right]^{0.27}} \cdot A(PI)}{\left[\frac{S_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{3 \cdot 10^{-5}}{PI} \right)^{0.9}}}{\left[1 + \left(\frac{PI}{1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} \right)^1 \right]^{0.27}} \right]^5 + A(PI)} \cdot PI$$

- Observação: Novamente estamos considerando 0,9 mbar.l/s como sendo o throughput final (arbitrariamente imposto).

$$PI_{n+1} := PI_n + \frac{h}{2} \cdot \left[fl(t_n, PI_n) + fl\left(t_{n+1}, \left(PI_n + h \cdot fl(t_n, PI_n) \right) \right) \right]$$

- A curva da pressão na câmara de vácuo em função do tempo é mostrada a seguir. Foram considerados o bombeamento com condutância finita e com condutância muito grande (infinita).



- Considerando a condutância muito grande do tubo.
- Considerando a condutância finita do tubo.

- Vemos claramente o efeito da condutância no valor da velocidade efetiva de bombeamento. Há dois fatos decorrentes da introdução da tubulação no circuito de vácuo que chamam a atenção e cabe discutí-los.
- Um deles é o aumento do tempo para se atingir um valor de pressão na câmara de vácuo quando se considera o efeito da condutância do tubo. O aumento da pressão final na câmara de vácuo devido a condutância do tubo. Devemos também notar que para o início do processo de bombeamento, quando pressão está próxima da pressão atmosférica, o efeito da condutância é quase imperceptível, uma vez que a condutância no regime de escoamento viscoso turbulento e também a condutância no regime de escoamento viscoso laminar é muito grande. Qualquer fonte de gas ou vapor, em princípio, pode ser considerada no problema. Deveremos especificá-la e por meio de sua expressão matemática usá-la na expressão do cálculo numérico da pressão com o tempo.

Comparação entre a Solução Analítica e as Soluções Numéricas
Método de Euler-Heun e Método Runge-Kutta de Quarta Ordem.

Sistema de Pré-Vácuo Operando da Pressão Atmosférica - 1000 mbar
até 10⁻² mbar - Sistema de Vácuo de Pequeno Porte.

-Definição da escala das pressões.

$$w := 1..14 \quad c_w := 10^{w-11} \quad z := 1..126 \quad a := 1..9$$

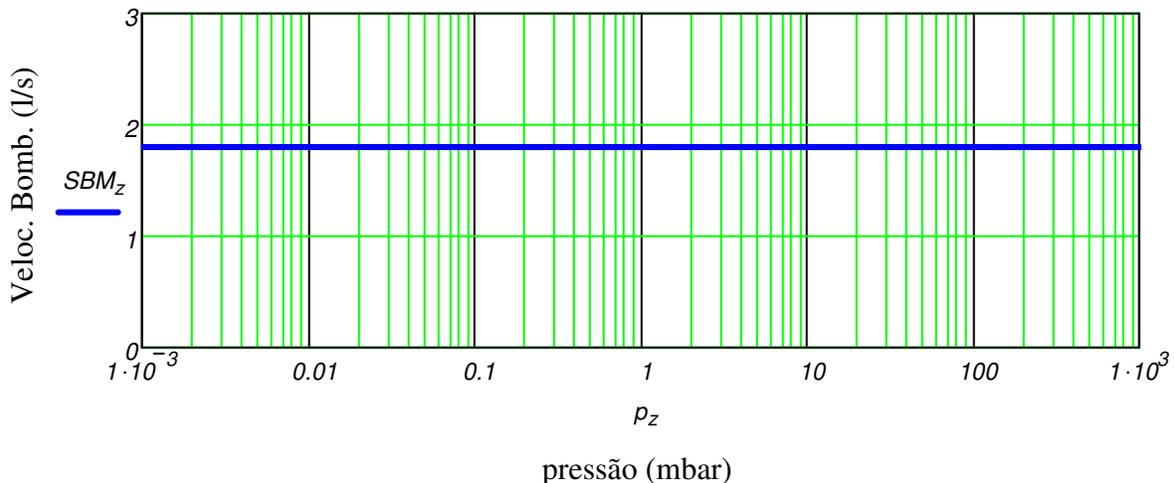
$$\chi := 0,9..117 \quad p_{a+\chi} := a \cdot c \cdot \frac{\chi}{1+\frac{\chi}{9}}$$

- O volume da câmara de vácuo é de 700 litros. $V_{CV} := 700$ litros
- A expressão da velocidade de bombeamento, para a bomba mecânica adotada, é dada a seguir.

$$SBM_{m\acute{a}x} := 1.8 \quad \text{litros / segundo} \quad SBM_z := SBM_{m\acute{a}x}$$

Assim, a velocidade de bombeamento é adotada constante.

- A curva de velocidade de bombeamento em função da pressão da bomba mecânica é mostrada abaixo.



- Determinaremos agora a evolução da pressão na câmara de vácuo em função do tempo, tanto numericamente como analiticamente.

$$N := 100000 \quad t_0 := 0 \quad t_f := 10000 \quad P_0 := 1000 \text{ mbar} \quad (\text{pressão atmosférica})$$

$$h := \frac{t_f - t_0}{N + 1} \quad h = 0.0999999 \quad n := 0..N \quad t_{n+1} := t_n + h$$

- Curva da pressão na câmara de vácuo considerando a bomba de vácuo conectada diretamente à bomba de vácuo, ou seja, condutância muito grande compara a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo.

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

$$SBM(P) := SBMmáx$$

$$P_0 := 1000 \text{ mbar} \quad \text{Pressão Atmosférica} \quad f(t, P) := \frac{2 \cdot 10^{-2}}{V_{cv}} - \left(\frac{SBMmáx}{V_{cv}} \right) \cdot P$$

$$P_{n+1} := P_n + \frac{1}{6} \left[\begin{aligned} &h \cdot f(t_n, P_n) + 2 \cdot \left[h \cdot f \left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot (h \cdot f(t_n, P_n)) \right] \right] \dots \\ &+ 2 \cdot \left[h \cdot f \left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot \left[h \cdot f \left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot (h \cdot f(t_n, P_n)) \right] \right] \right] \dots \\ &+ h \cdot f \left[t_n + h, P_n + h \cdot f \left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot \left[h \cdot f \left[t_n + \frac{h}{2}, P_n + \frac{1}{2} \cdot (h \cdot f(t_n, P_n)) \right] \right] \right] \right] \dots \end{aligned} \right]$$

Método de Euler-Heun

$$SBM(PP) := SBMmáx$$

$$PP_0 := 1000 \text{ mbar} \quad (\text{Pressão Atmosférica}) \quad g(t, PP) := \frac{2 \cdot 10^{-2}}{V_{cv}} - \left(\frac{SBMmáx}{V_{cv}} \right) \cdot PP$$

$$PP_{n+1} := PP_n + \left(\frac{h}{2} \right) \cdot \left[g(t_n, PP_n) + g \left[t_{n+1}, (PP_n + h \cdot g(t_n, PP_n)) \right] \right]$$

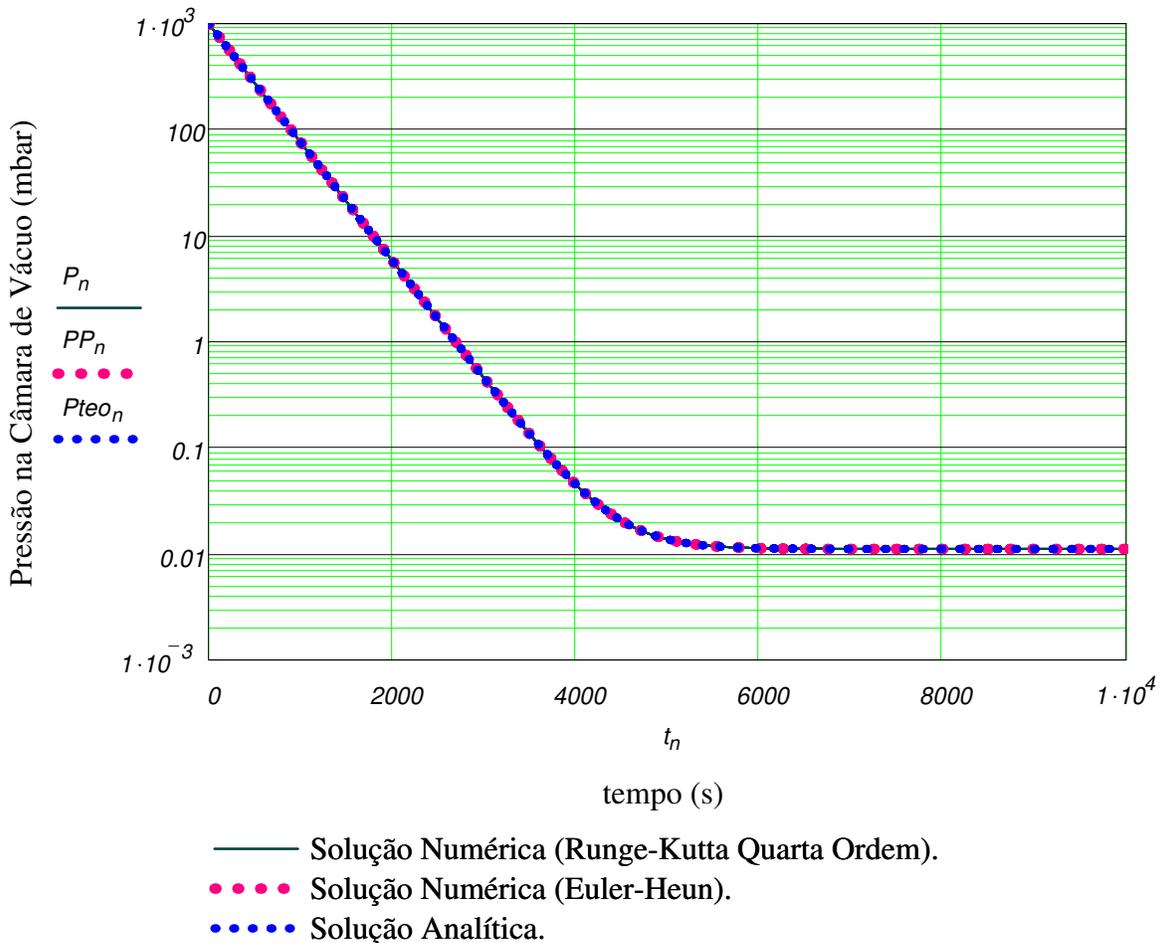
- Método de Euler-Heun para a determinação numérica da pressão na câmara de vácuo em função do tempo.

Método Analítico

- A equação diferencial para o problema é mostrada a seguir: $V_{cv} \cdot dp(t)/dt = -S_{bm} \cdot p(t) + Q$
- A solução analítica para o problema é dada a seguir pela função abaixo:

$$P_{teo_n} := P_0 \cdot \exp\left(\frac{-SBMmáx \cdot t_n}{V_{cv}}\right) + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{SBMmáx}$$

- A figura abaixo mostra a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo, estamos mostrando tanto a solução analítica como as soluções numéricas. Estamos considerando a bomba de vácuo conectada diretamente à câmara de vácuo.



- O propósito deste cálculo foi mostrar a precisão das soluções obtidas numericamente por meio do método de *Euler-Heun* e do método de *Runge-Kutta* de quarta ordem. Vemos que no caso particular imposto de velocidade de bombeamento constante as três soluções obtidas, uma analítica e duas numéricas, são suficientemente coincidentes. Do ponto de vista de cálculo e modelagem visando projetos de sistemas de vácuo, as três soluções podem ser consideradas seguramente iguais entre si.
- A utilização de um ou outro método dependerá da equação diferencial. Para os casos em que as fontes de gases e vapores podem variar bruscamente com o tempo, ou seja, tenham carácter impulsivo, o método de *Runge-Kutta* de quarta ordem deve ser preferido. De qualquer forma, acreditamos que eles devem ser utilizados em conjunto, no sentido de verificar os cálculos.
- Conseguimos também encontrar a curva de bombeamento da câmara de vácuo em função do tempo para o caso da utilização de uma bomba *roots*. Neste caso obtivemos duas soluções numéricas e elas são coincidentes para os nossos propósitos. Desta forma acreditamos que o ferramental numérico atende a casos como o tratado nesta aplicação bastante presente em sistemas de vácuo utilizados na indústria.

3.2.2 Sistema de Alto-Vácuo com Bomba Difusora.

Existem inúmeros processos que ocorrem na região de alto-vácuo, cobrindo desde as aplicações industriais até as atividades de pesquisa tanto básica como aplicada. As mais significativas aplicações industriais estão na fabricação de filmes finos, cinescópio, válvulas eletrônicas, metalização a vácuo e outras. Há ainda equipamento que precisam de alto-vácuo para a sua operação, como exemplos temos o microscópios eletrônicos, tubos de raios-X, aceleradores de partículas e muitas outras. Os sistemas de alto-vácuo operam na faixa de 10^{-3} mbar até 10^{-7} mbar. Para pressões menores temos a região do ultra alto-vácuo, nesta região de pressão os procedimentos de trabalho são os mesmos que para o alto-vácuo, apenas deveremos observar as fontes de gases e vapores que têm importância e são mais significativas nesta faixa de pressão. Via de regra, as características mais importantes para os sistemas de alto-vácuo e de ultra alto-vácuo são:

- Câmaras de vácuo limpas.
- Pequenas, médias ou grandes quantidades de gases e vapores devido à degaseificação.
- Processos que temem contaminação de óleos e gorduras.
- Grande duração no tempo de bombeamento
- Vapores corrosivos e agressivos.
- Dimensões da linha de bombeamento são determinantes para a velocidade efetiva de bombeamento.

Há aplicações, cuja proteção da câmara de vácuo devido à contaminação de origem nas bombas de alto-vácuo, que exigem a instalação de dispositivos com pequena condutância comparada à velocidade da bomba de alto-vácuo, trazendo assim uma diminuição significativa na velocidade efetiva de bombeamento. Certamente, estes componentes auxiliares de proteção devem fazer parte na modelagem do sistema de vácuo, uma vez que na região de alto-vácuo as condutâncias são em geral determinantes para o processo de bombeamento. Não devemos perder de vista que no regime de escoamento molecular o processo de bombeamento é sempre o mais difícil, isto se traduz com valores de condutância que restringem o efetivo bombeamento. A Figura 3.3 mostra esquematicamente um sistema de alto-vácuo operando com bomba difusora, também conhecida como bomba de difusão.

A modelagem deste sistema de vácuo será realizada por meio da equação diferencial E_{PBV} conforme mostrada a seguir, e ainda obedecendo a condição inicial

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \quad \text{e} \quad p_{CV}(t=0) = p_0,$$

assim, devemos especificar a bomba de alto-vácuo, para determinar a expressão matemática da sua velocidade de bombeamento em função da pressão, por meio da escolha dos parâmetros nas seguintes expressões matemáticas obtidas no Apêndice C. A expressão matemática para a construção da curva de velocidade de bombeamento em função da pressão, para as bombas mecânica de palhetas, está mostrada a seguir na Expressão 3.3

$$S_{BM}(p) = S_{MÁX} \frac{A}{\left[1 + \left(\frac{a \cdot p_{final}}{p}\right)^b\right]^c} \cdot \left[1 - \frac{B}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{d \cdot p_{final}}\right)^e}}\right], \quad 3.3$$

onde,

- p é a pressão no flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade de bombeamento máxima, ou ainda, a velocidade nominal da bomba de vácuo,
- p_{final} é a pressão mínima que a bomba de vácuo atinge, e
- a, b, c, d, e, A e B são constantes que dependem de um particular modelo de bomba mecânica de palhetas.

A expressão matemática básica para expressar a curva de velocidade de bombeamento para as bombas de alto-vácuo do tipo de difusão é mostrada a seguir na Expressão 3.4

$$S_{BD}(p) = S_{MÁX} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{p}{a \cdot p_{inicial}}\right)^b\right]^c}, \quad 3.4$$

onde:

- p é a pressão no flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade de bombeamento máxima, ou ainda, velocidade nominal da bomba de vácuo,
- $p_{inicial}$ é a pressão que a bomba de vácuo inicia sua operação,
- a, b e c são constantes que dependem de um particular tipo e modelo das bombas de vácuo.

Prosseguindo, a determinação das condutâncias é feita por meio das expressões mostradas no próprio código numérico, também feito neste caso, utilizando a plataforma *MathCADTM*. As expressões acima são para tubos cilíndricos, mas isto não é essência, podemos introduzir novas expressões para as condutâncias.

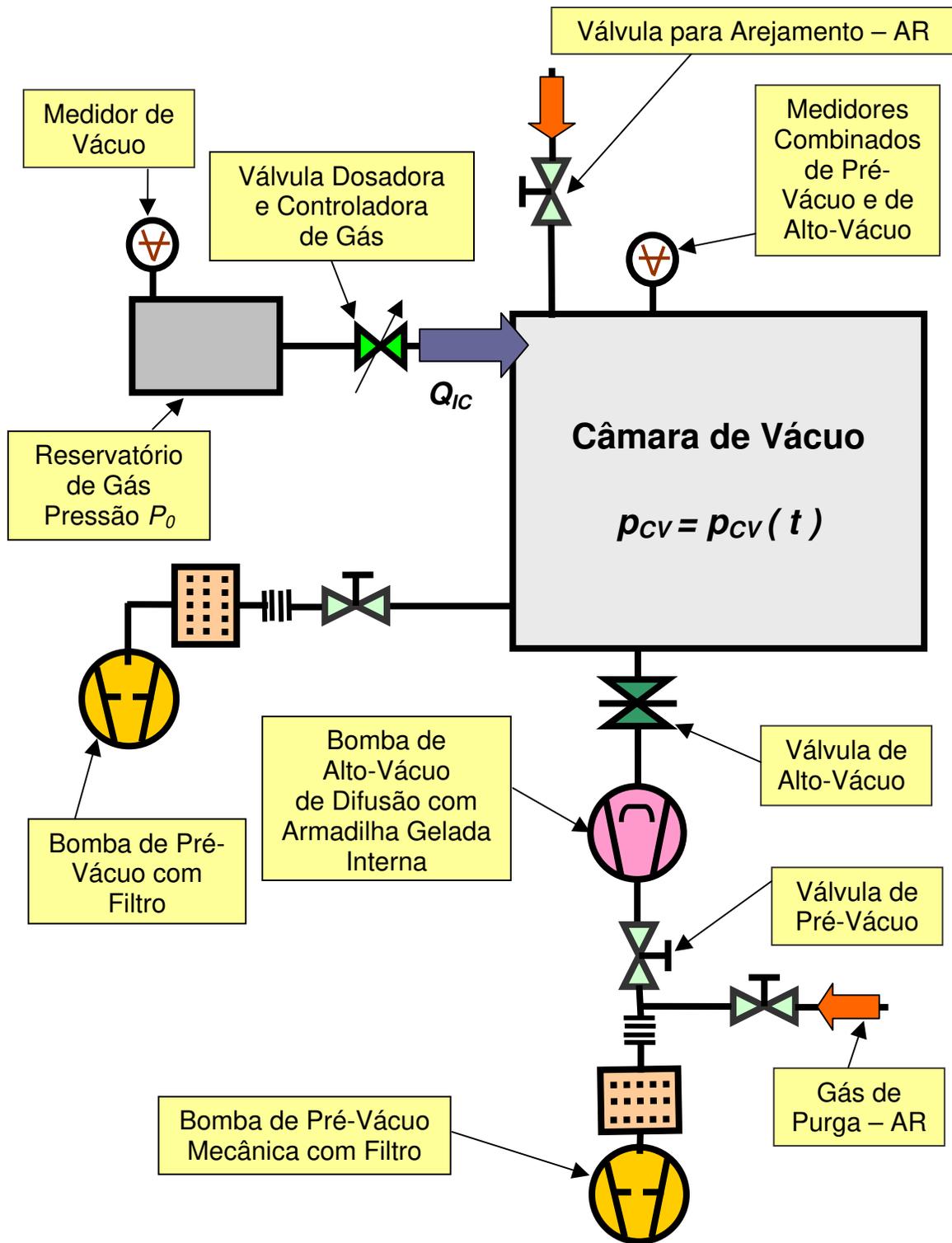


Figura 3.3 Sistemas de alto-vácuo com bomba difusora com armadilha gelada embutida.

Neste sistema de alto-vácuo temos uma bomba mecânica de duplo estágio exclusiva para o pré-vácuo. Assim, devemos adotar no cálculo do pré-vácuo as dimensões da tubulação pertinente,

além de filtros e outros acessórios nesta linha de bombeamento. Para o alto-vácuo há tubulação com acessórios próprios e a respectiva bomba de alto-vácuo. Na modelagem dos sistemas de alto-vácuo deveremos considerar a taxa de degaseificação, uma vez que esta fonte de gás está sempre presente e na maioria dos sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo a pressão final é determinada por ela. Adotamos nesta modelagem a dependência da degaseificação conforme estudado no Capítulo 2. Adotaremos dois resultados bem estabelecidos para a dependência temporal da degaseificação. Nas primeiras 10 horas o *throughput* devido à degaseificação das superfícies metálicas varia segundo a expressão $q_{Deg}^a(t) = q_0^a \frac{1}{t}$, onde q_0 é a taxa de degaseificação no início do processo de bombeamento e t o tempo dado em horas. Prosseguindo, o *throughput* de degaseificação terá a dependência temporal $q_{Deg}^b(t) = q_0^b \exp[-\beta(t-t_c)]$, onde β depende da superfície do material em vácuo. Para haver continuidade quando passarmos da primeira função para a segunda função, devemos ter $q_0^b = q_{Deg}^a(t_c)$, onde t_c é igual a dez horas. Com o propósito de diminuir a pressão final dos sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo vários processos de condicionamento foram desenvolvidos. Assim, com os dados obtidos, podemos aplicar o método de *Euler-Heun* ou também o método de *Runge-Kutta* de segunda ordem, desta forma, temos a seguinte Expressão 3.5

$$P_{n+1} = P_n + \frac{h}{2} \left\{ f(t_n, P_n) + f\left[t_{n+1}, (P_n + h f(t_n, P_n))\right] \right\}, \quad 3.5$$

sendo que,

$$f(t, P) = \frac{Q_{Deg}(t)}{V_{CV}} - \frac{S_{ef}}{V_{CV}} P \quad \text{e} \quad S_{ef} = \frac{S_{BV} C_{Total}}{S_{BV} + C_{Total}} .$$

Ainda $Q=Q_{Deg}(t)$ é a função que representa a fonte de gás devido à degaseificação. A curva da pressão na câmara de vácuo em função do tempo é determinada em duas etapas, o bombeamento no regime viscoso laminar e nos regimes intermediário e molecular. Após um intervalo de tempo fazemos introduzir na câmara de vácuo certa quantidade de gás, de forma controlada. Este procedimento chamamos de injeção controlada de gás. Este tipo de fonte de gás ou vapor é bastante utilizado em diversos processos industriais.

Sistema de Alto-Vácuo com Bomba Difusora

- Definição do intervalo das pressões para o cálculo numérico:

$$w := 1..14 \quad c_w := 10^{w-11} \quad z := 1..126 \quad a := 1..9$$

$$\delta := 0,9..117 \quad p_{a+\delta} := a \cdot c \cdot \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{9}}$$

- Grandezas necessária à modelagem do sistema de alto-vácuo:
- Volume de câmara de vácuo: $V_{cv} := 600$ litros
- Área da câmara de vácuo e outros internos: $A_{cv} := 4.5$ m²
- Taxa de degaseificação específica em t=0: $q_{esp} := 2.4 \cdot 10^{-8}$ mbar.l/s.cm²
- Degaseificação Total em t=0: $Q_0 := q_{esp} \cdot 10^4 \cdot A_{cv} \quad Q_0 = 1.08 \times 10^{-3}$ mbar.l/s
- Diâmetro do tubo: $d_{pv} := 4$ cm
 - para o pré-vácuo
- Comprimento do tubo: $l_{pv} := 120$ cm
- Diâmetro da tubulação: $d_{av} := 14$ cm
 - para o alto-vácuo
- Comprimento da tubulação: $l_{av} := 90$ cm
- Critério de *Knudsen* para a determinação do regime de escoamento dos gases.

$$\lambda_z := \frac{6.7 \cdot 10^{-3}}{p_z}$$

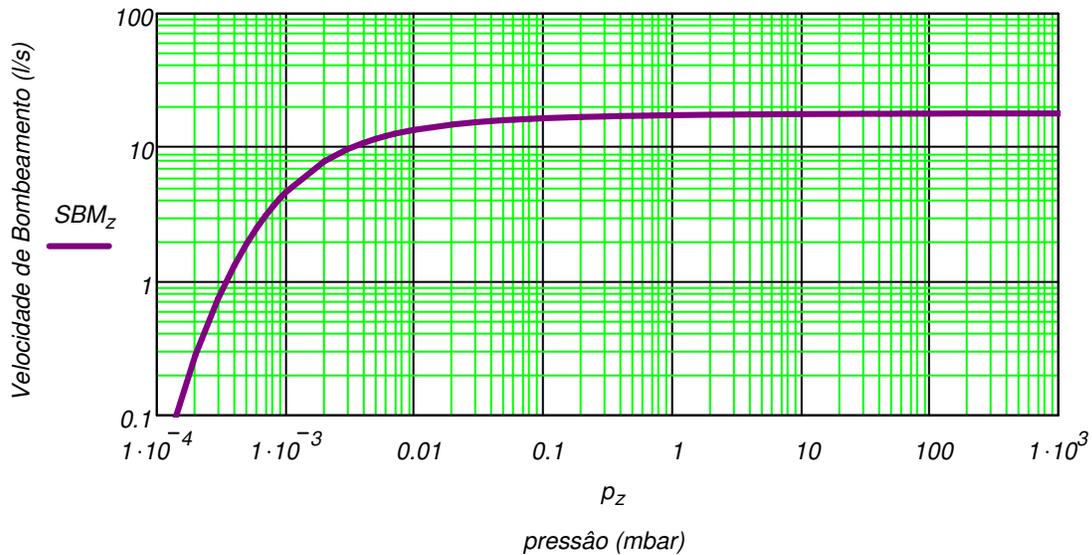
- Adotamos como o gás de trabalho nitrogênio 28 uma a temperatura ambiente 296 Kelvin.

$$Kn_z := \frac{\lambda_z}{d_{av}} \quad \text{Número de Knudsen}$$

- Para o pré-vácuo temos a bomba mecânica de palhetas de 2 estágios tipo TrivacD65G da Leybold-Vacuum.

$$SBM_{m\acute{a}x} := 18 \quad \text{l/s} \quad \text{Velocidade de Bombeamento Nominal}$$

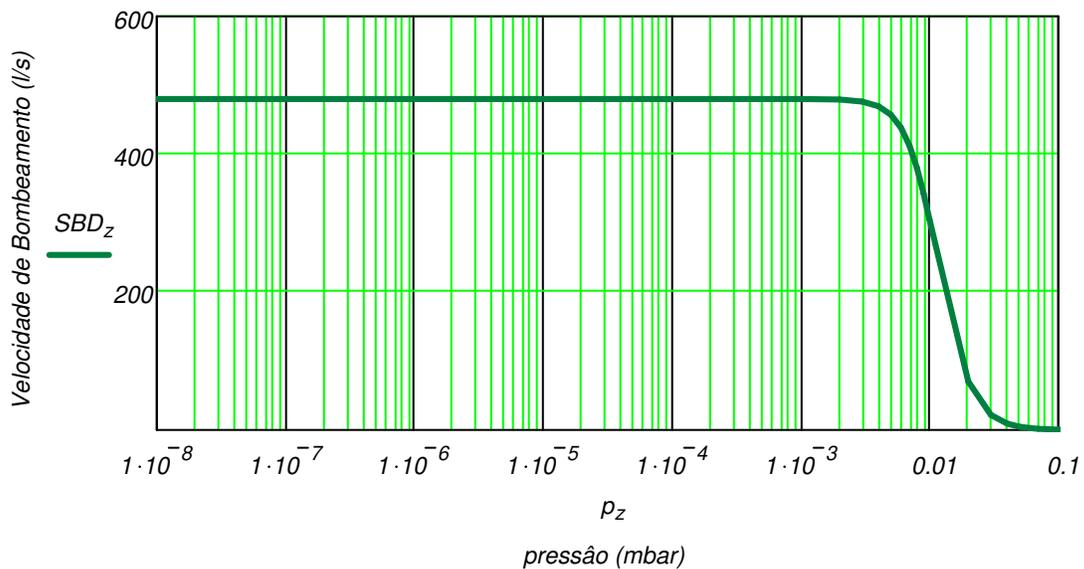
$$SBM_z := SBM_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{p_z}\right)^{0.95}\right]^5} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{0.38 \cdot 1 \cdot 10^{-4}}\right)^{0.67}}}\right]$$



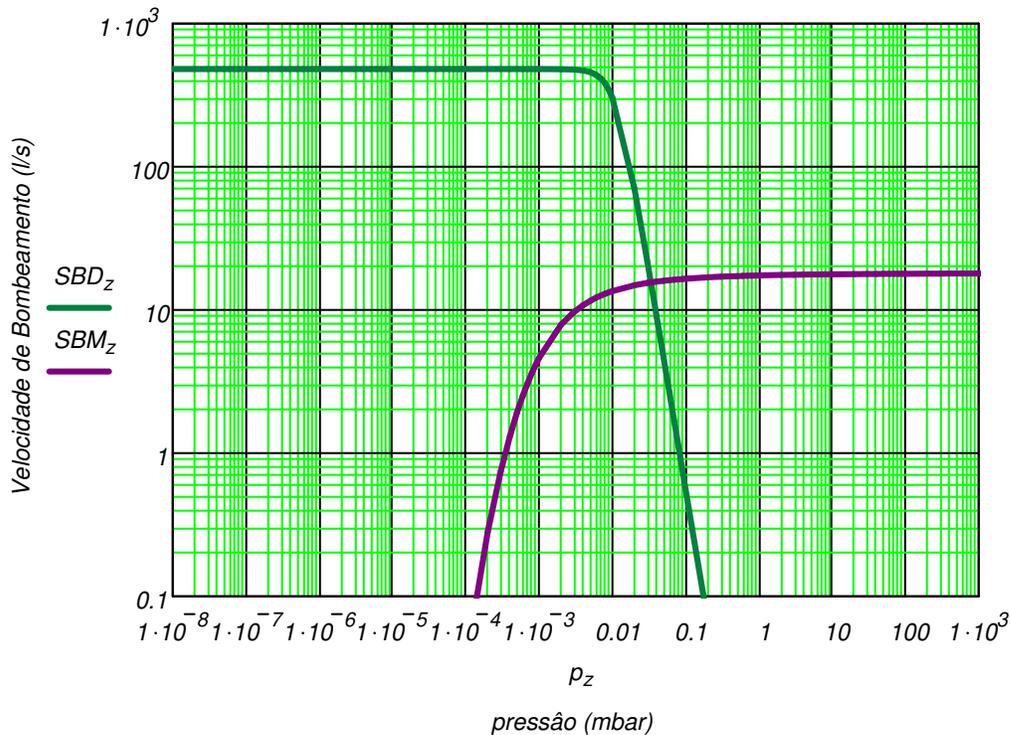
- Para o alto-vácuo temos a bomba difusora tipo M4 da Varian com Armadilha Gelada do tipo 362-4 Cryotrap da Varian.

$SBD_{m\acute{a}x} := 480 \text{ l/s}$

$$SBD_z := SBD_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{p_z}{1.1 \cdot 10^{-2}} \right)^{3.6} \right]^{0.85}}$$



- Curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão para a bomba de pré-vácuo e para a bomba de alto-vácuo (somente as bombas de vácuo conforme fornecidas as curvas pelos fabricantes). A velocidade de bombeamento nominal é definida para as bombas de vácuo mecânica e difusora como sendo a máxima velocidade de bombeamento em suas respectivas faixas de operação. A determinação experimental é feita considerando uma geometria padrão para a câmara de vácuo a ser acoplada à bomba de vácuo.



- Cálculo da velocidade efetiva de bombeamento. São consideradas as condutâncias nos regimes de escoamento viscoso laminar, intermediário e molecular. Automaticamente é feito o cálculo do número de *Knudsen* e determinado o regime de escoamento com o uso da expressão de condutância adequada ao regime de escoamento.

$$A_z := \text{if} \left[\frac{dpv}{6.7 \cdot 10^{-3}} \geq 100, 136 \cdot \frac{dpv^4}{lpv} \cdot p_z, \left(12.1 \cdot \frac{dpv^3}{lpv} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{dpv}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right] \left[\frac{dpv}{p_z} \right]$$

- O cálculo abaixo determina a velocidade efetiva de bombeamento para o pré-vácuo. Consideramos a curva de velocidade de bombeamento da bomba mecânica de palhetas e as condutâncias da tubulação de pré-vácuo.

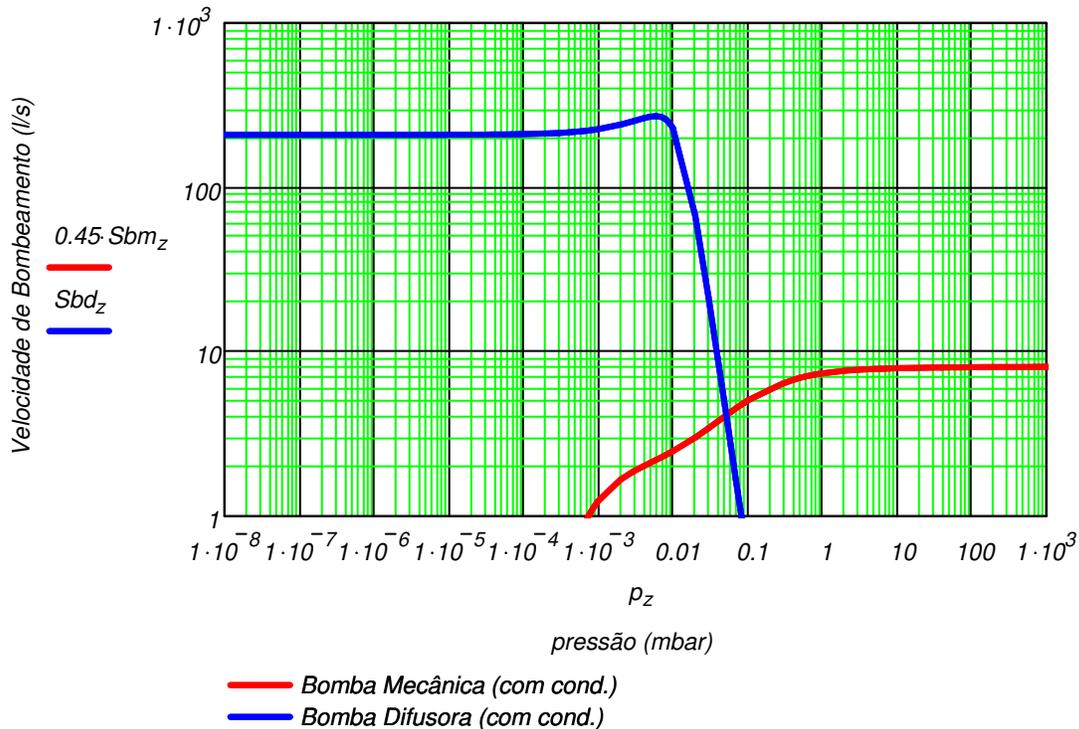
$$S_{bm_z} := \frac{\left[SBM_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{p_z} \right)^{0.95} \right]^5} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{0.38 \cdot 10^{-4}} \right)^{0.67}}} \right] \right] \cdot A_z}{\left[SBM_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{p_z} \right)^{0.95} \right]^5} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{0.38 \cdot 10^{-4}} \right)^{0.67}}} \right] \right] + A_z}$$

- O cálculo abaixo determina a velocidade efetiva de bombeamento para o alto-vácuo. Consideramos a curva de velocidade de bombeamento da bomba de difusão e as condutâncias da tubulação de alto -vácuo.

$$B_z := \text{if} \left[\frac{d_{av}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \geq 100, 136 \cdot \frac{d_{av}^4}{l_{av}} \cdot p_z, \left(12.1 \cdot \frac{d_{av}^3}{l_{av}} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{d_{av}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right] \cdot \left(\frac{d_{av}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$Sbd_z := \frac{\left[\frac{SBD_{m\acute{a}x} \cdot 1}{\left[1 + \left(\frac{p_z}{1.1 \cdot 10^{-2}} \right)^{3.6} \right]^{0.85}} \right] \cdot B_z}{\left[\frac{SBD_{m\acute{a}x} \cdot 1}{\left[1 + \left(\frac{p_z}{1.1 \cdot 10^{-2}} \right)^{3.6} \right]^{0.85}} \right] + B_z}$$

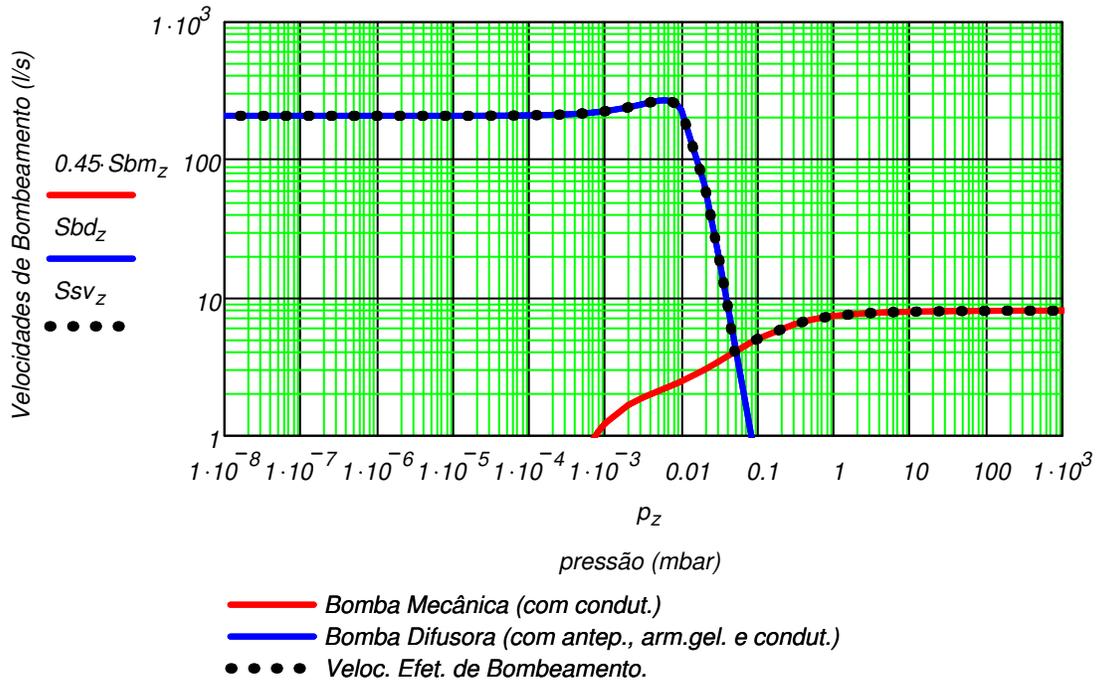
- Curva da velocidade efetiva de bombeamento para toda a faixa de operação do sistema de vácuo (são levadas em consideração filtros, anteparos, armadilhas geladas e tubulações, etc). O sistema de vácuo exige proteção da câmara de vácuo ao fazer o pré-vácuo, desta forma instalaremos um filtro, verifica-se que ele diminui muito a velocidade efetiva de bombeamento da bomba de pré-vácuo, exclusiva para esta finalidade junto à câmara de vácuo. Podemos avaliar a condutância do filtro e calcular a velocidade efetiva de bombeamento logo na entrada do filtro, desta forma consideramos 0,45.Sbm.



- A expressão numérica para a velocidade efetiva de bombeamento, para toda faixa de operação do sistema de vácuo, será definida a seguir.
- Valor da pressão na passagem da bomba mecânica para a bomba difusora.

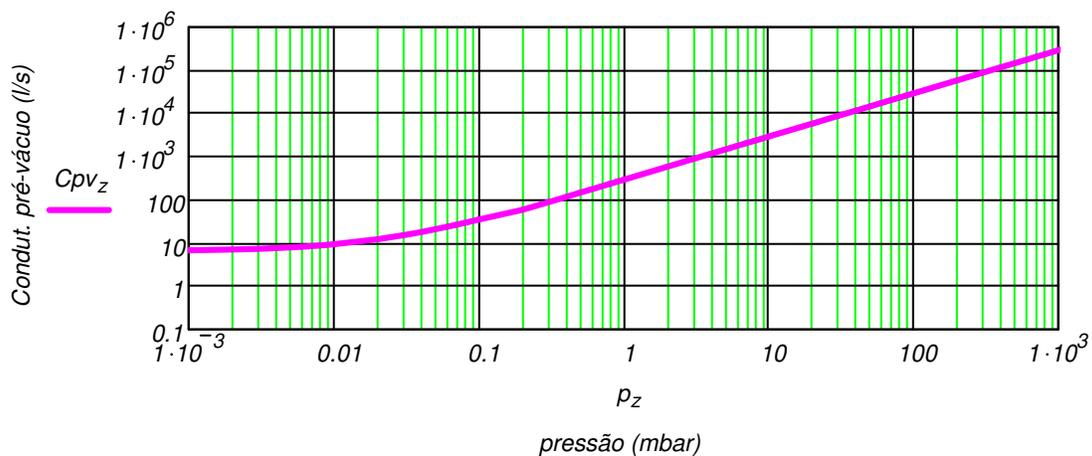
$$PnCO := 4 \cdot 10^{-2} \text{ mbar}$$

$$Ssv_z := \text{if}(p_z > PnCO, 0.45 \cdot Sbm_z, Sbd_z)$$



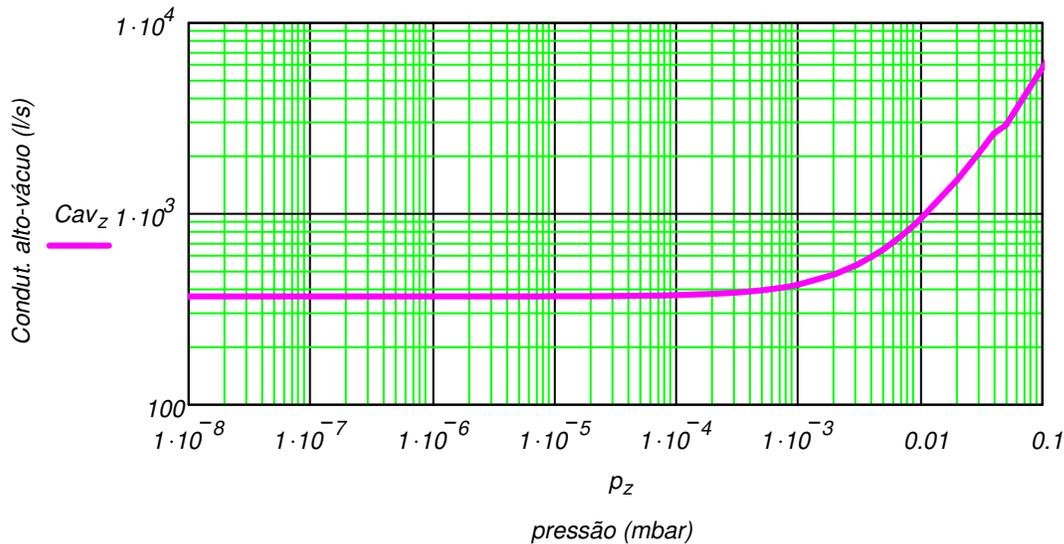
- O gráfico para a condutância da tubulação de pré-vácuo é mostrado abaixo.

$$Cpv_z := \text{if} \left[\frac{dpv}{6.7 \cdot 10^{-3}} > 100, 136 \cdot \frac{dpv^4}{lpv} \cdot p_z, \left(12.1 \cdot \frac{dpv^3}{lpv} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{dpv}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right]$$



- O gráfico para a condutância da tubulação de alto-vácuo é mostrado abaixo.

$$C_{avz} := \text{if} \left[\frac{d_{av}}{6.7 \cdot 10^{-3}} > 100, 136 \cdot \frac{d_{av}^4}{l_{av}} \cdot p_z, \left(12.1 \cdot \frac{d_{av}^3}{l_{av}} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{d_{av}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right]$$



- Estamos definindo abaixo a malha para a discretização no tempo.

$$\begin{aligned} N &:= 45000 & n &:= 0..N & t_0 &:= 0 & t_f &:= 40000 & P_0 &:= 1000 \\ h &:= \frac{t_f - t_0}{N + 1} & h &= 0.8888691362 & t_{n+1} &:= t_n + h & h1 &:= h \end{aligned}$$

- Para o cálculo da variação da pressão no tempo, precisamos conhecer a velocidade efetiva de bombeamento: $(1/S_{efe}) = (1/S_b) + (1/C_{total})$. Esta expressão é geral, independente do regime de escoamento.
- Temos a seguir a construção do comando condicional para o cálculo das condutâncias no tubo de diâmetro d_{pv} . Veja que temos uma linha de pré-vácuo exclusiva com a própria bomba mecânica de duplo estágio. O processo em vácuo exige que o pré-vácuo seja feito dentro do regime de escoamento viscoso laminar, impondo assim restrição à abertura da válvula de pré-vácuo. Existem processos em vácuo que temos partes delicadas que podem se romper devido ao regime de escoamento viscoso turbulento. Assim, usaremos a expressão exclusiva para o cálculo da condutância no regime viscoso laminar.

$$A(P) := \text{if} \left[\frac{d_{pv}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \geq 100, 136 \cdot \frac{d_{pv}^4}{l_{pv}} \cdot P, \left(12.1 \cdot \frac{d_{pv}^3}{l_{pv}} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{d_{pv}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right]$$

- O cálculo da velocidade efetiva de bombeamento em pré-vácuo é mostrado a seguir.

$$S_{bm}(P) := \frac{\left[SBM_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{P} \right)^{0.95} \right]^5} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{0.38 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} \right)^{0.67}}} \right] \right] \cdot A(P)}{\left[SBM_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-4}}{P} \right)^{0.95} \right]^5} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P}{0.38 \cdot 1 \cdot 10^{-4}} \right)^{0.67}}} \right] \right] + A(P)}$$

- Temos a seguir a construção do comando condicional para o cálculo das condutâncias no tubo de diâmetro d_{av} . Neste caso a tarefa mais importante é o bombeamento em alto-vácuo.

$$B(P) := \text{if} \left[\frac{d_{av}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \geq 100, 136 \cdot \frac{d_{av}^4}{l_{av}} \cdot P, \left(12.1 \cdot \frac{d_{av}^3}{l_{av}} \right) \cdot \left(1 + 0.0736 \cdot \frac{d_{av}}{6.7 \cdot 10^{-3}} \right) \right]$$

- O cálculo da velocidade efetiva de bombeamento em alto-vácuo é mostrado a seguir.

$$S_{bd}(P) := \frac{\left[SBD_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{P}{2.0 \cdot 10^{-2}} \right)^{3.6} \right]^{0.85}} \right] \cdot B(P)}{\left[SBD_{\text{máx}} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{P}{2.0 \cdot 10^{-2}} \right)^{3.6} \right]^{0.85}} \right] + B(P)}$$

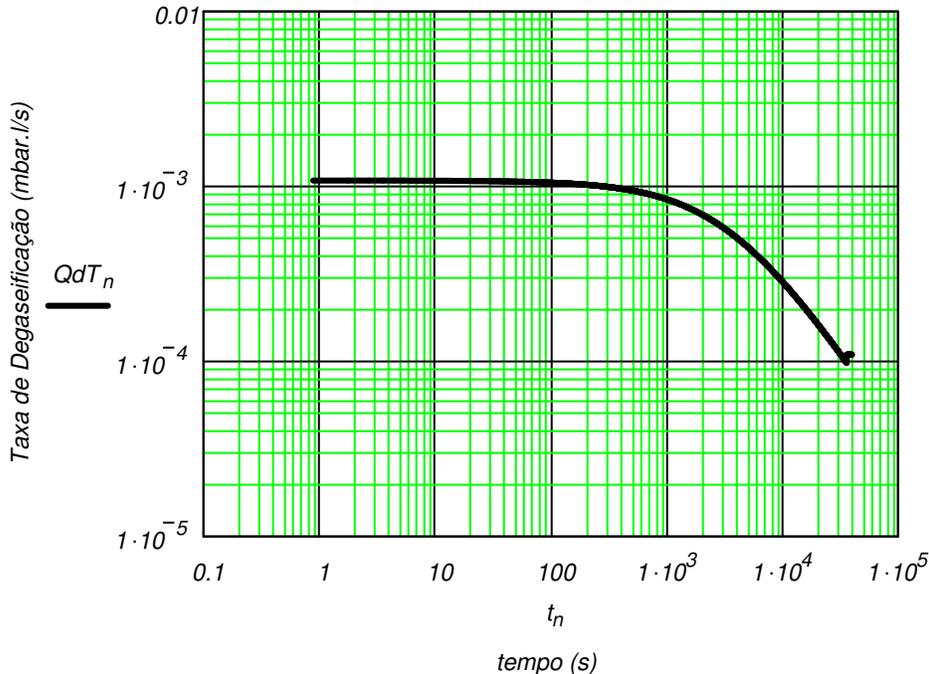
- OBS. Os valores de $S_{bm}(P)$ e $S_{bd}(P)$ são as velocidades efetivas de bombeamento.
- A seguir nós introduziremos a modelagem relativa a taxa de degaseificação natural das paredes expostas ao vácuo. Esta modelagem será feita em detalhe, observando os fatos experimentais consagrados para as superfícies metálicas. Para outros tipos de superfícies deveremos considerar a potência na lei de decaimento da taxa de degaseificação no tempo.
- Vamos considerar o modelo aceito para a taxa de degaseificação de metais. Para as primeiras horas (aprox. 10 horas) a lei é de $1/t$ em seguida $\exp(-cte \cdot t)$.

$$Qd1_n := Q_0 \cdot \frac{3600}{3600 + t_n} \quad Qd1_{36000} = 1.0921566468 \times 10^{-4} \text{ mbar.l/segundo}$$

$$\beta := 1 \cdot 10^{-9} \quad Qd2_n := Qd1_{36000} \cdot \exp[-\beta \cdot (36000 - t_n)]$$

$$QdT_n := (1 - \Phi(-36000 + t_n)) \cdot Qd1_n + \Phi(-36000 + t_n) \cdot Qd2_n$$

- O gráfico a seguir mostra a degaseificação em função do tempo, tanto para a parte da curva proporcional a 1/t assim como a parte da curva proporcional a exp(-const.t).



- Equação diferencial para o processo de bombeamento.

$$V_{cv} \cdot dp_{cv}(t)/dt = - S_{ef} \cdot p_{cv}(t) + Q_{deg} + Q_{vaz} + Q_{evap} + \dots = - S_{ef} \cdot p_{cv}(t) + Q_{deg}$$

$$Degas(t) := (1 - \Phi(-36000 + t)) \cdot Q_0 \cdot \frac{3600}{3600 + t} + \Phi(-36000 + t) \cdot Qd1_{36000} \cdot \exp[-\beta \cdot (36000 - t)]$$

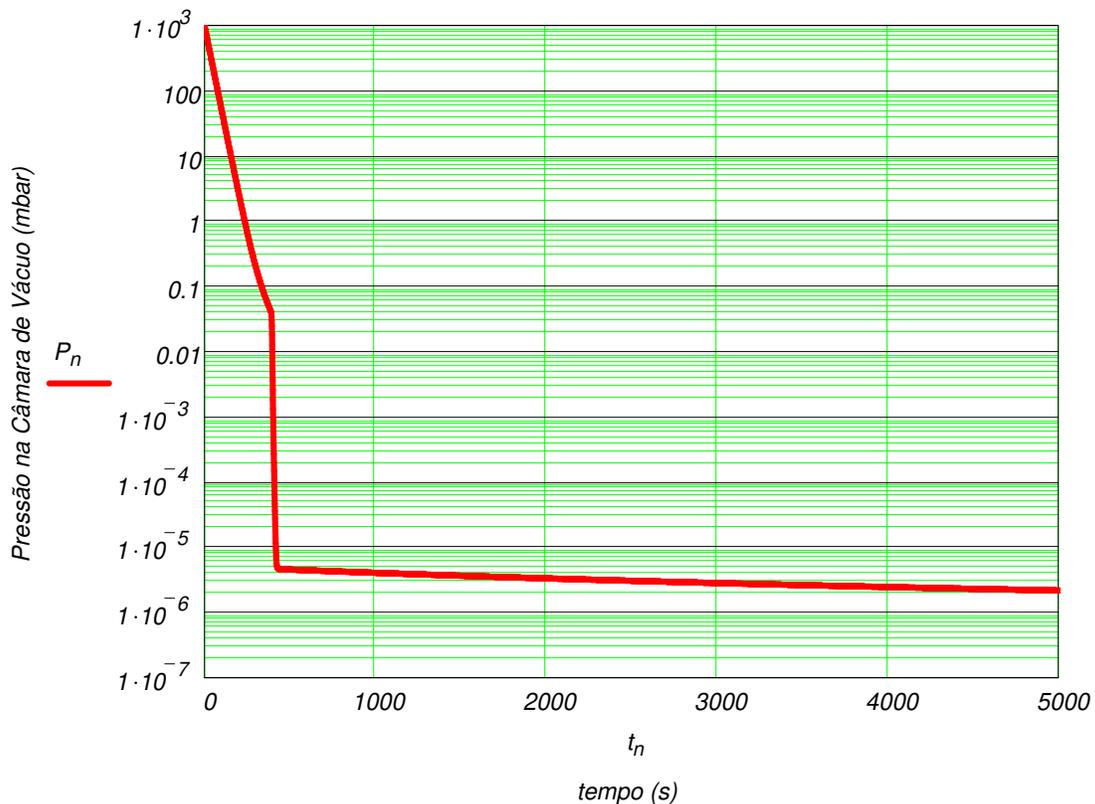
$$f(t, P) := - \frac{\text{if}(P > 4 \cdot 10^{-2}, S_{bm}(P), S_{bd}(P))}{V_{cv}} \cdot P + \frac{Degas(t)}{V_{cv}}$$

$$P_{n+1} := P_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n, P_n) + f(t_{n+1}, (P_n + h \cdot f(t_n, P_n)))]$$

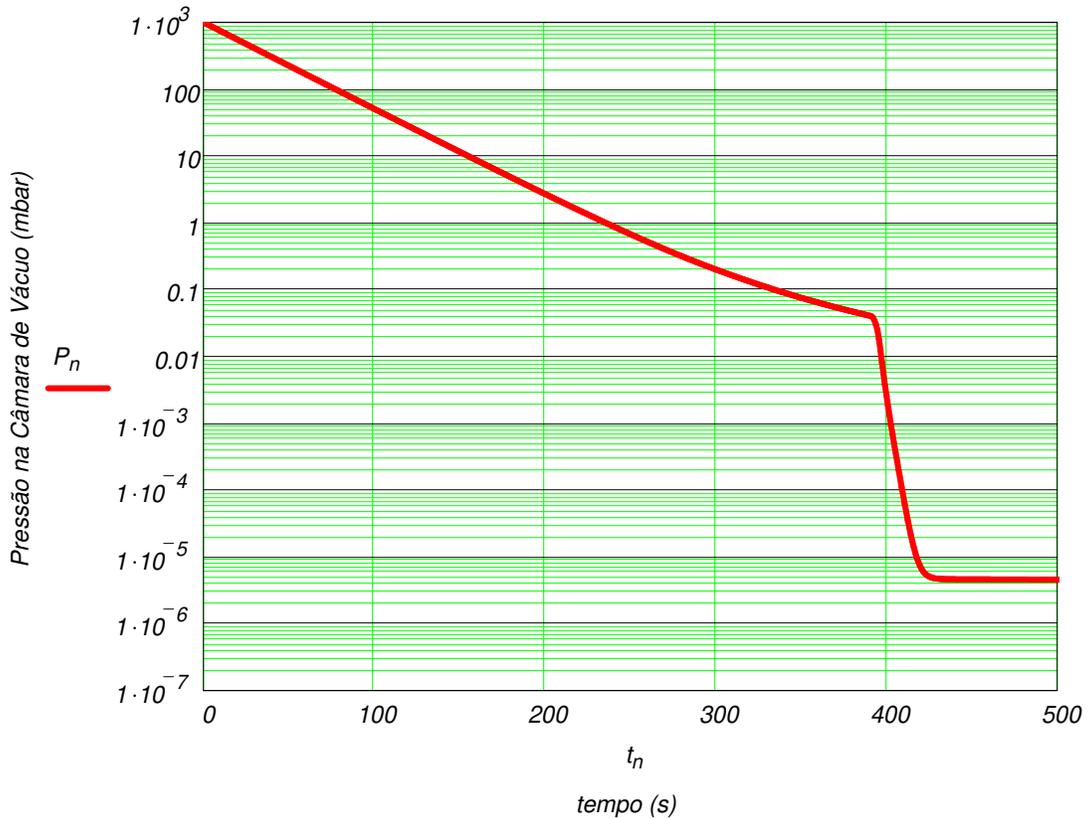
- Método de Euler-Heun ou método de Runge-Kutta de segunda ordem.

NOTA: Como critério de passo no tempo, isto é, Δt , consideramos vários valores norteados pela experiência do autor. Se adotarmos um valor de intervalo muito grande, teremos imprecisões no cálculo da curva de pressão. Agora, se adotarmos um valor de intervalo de tempo muito pequeno, teremos um aumento no tempo de processamento do cálculo da curva de pressão. Embasado em nossa experiência e comparando resultados obtidos, poderemos propor intervalos de tempo aceitáveis considerando o tempo de cálculo e a precisão necessária.

- Temos a seguir o gráfico da pressão na câmara de vácuo em função do tempo.



- Podemos ver na curva mostrada abaixo o detalhe de bombeamento em pré-vácuo (com a bomba mecânica de palhetas exclusiva). Ele ocorre desde o instante zero até aproximadamente 400 segundos. Em seguida temos a passagem da bomba de pré-vácuo para a bomba de alto-vácuo. Vemos neste caso a variação bastante abrupta de pressão, isto se deve ao fato de termos uma variação bastante grande na velocidade de bombeamento, no caso aumento dela. Vemos uma variação grande entre a velocidade de bombeamento da bomba mecânica e a bomba difusora.
- **Explicando mais detalhadamente a queda abrupta de pressão!**
- Observação: A queda abrupta da pressão, quando passamos da bomba de pré-vácuo (bomba mecânica de palhetas) para a bomba de alto-vácuo (bomba difusora) pode ser explicada facilmente da seguinte forma: Inicialmente, temos considerar o efeito da condutância. A velocidade efetiva de bombeamento junto a bomba mecânica tem a tendência de diminuição, enquanto a da bomba difusora têm a tendência de aumento na sua velocidade de bombeamento. Vemos este fato no gráfico da velocidade efetiva de bombeamento em função da pressão. Assim, quando comutamos da primeira para a segunda bomba de vácuo, a câmara de vácuo fica sujeita a um bombeamento muito mais intenso, desta forma temos uma variação (queda) muito grande de pressão.
- Em detalhe vemos a variação abrupta da pressão na câmara de vácuo na fase do bombeamento em pré-vácuo na figura abaixo.

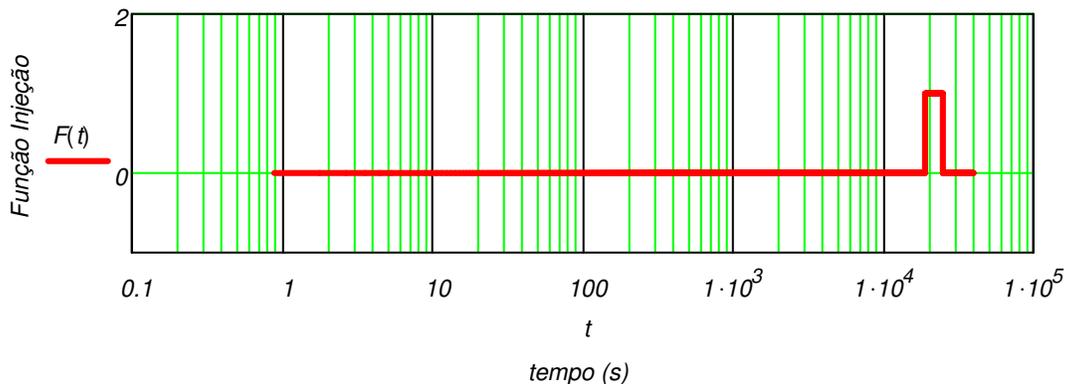


- Podemos agora considerar uma fonte de gás adicional (ou mais), ou também aquecer a câmara de vácuo. Neste caso podemos modelar o problema considerando um gás de processo sendo injetado na câmara de vácuo, no caso usamos a função degrau.
- O ponto de partida da modelagem pela abordagem discreta, por meio de um procedimento determinístico é feito utilizando a equação diferencial a seguir mostrada.

$$V_{cv}.dpcv(t)/dt = - Sef.pcv(t) + Qdeg + Qvaz + Qevap + = - Sef.pcv(t) + Qdeg$$

- A construção matemática do pulso de gás é feita com as funções seguintes - Função degrau de Heaviside.

$$F1(t) := \Phi(-19000 + t) \quad F2(t) := \Phi(-25000 + t) \quad \underline{\underline{F(t)}} := F1(t) - F2(t)$$



$$Q_{daq}(t) := 12 \cdot Q_0 \cdot F(t)$$

- A intensidade do pulso é dada pela função acima mostrada. Temos muita facilidade em impor fontes de gases do tipo impulsivo. As aplicações em tecnologia do vácuo cada vez mais exigem injeções controladas de gases e vapores de processo. Assim, podemos em nossas modelagens considerar com precisão a introdução de gases e vapores e calcular a evolução da pressão no tempo.

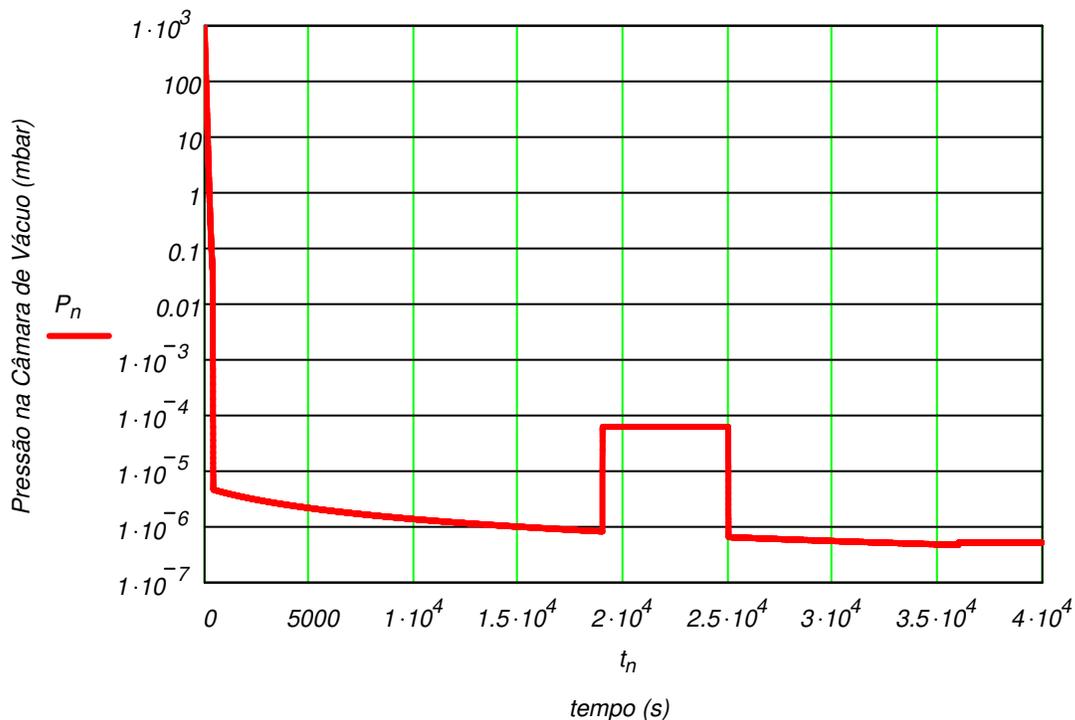
$$f(t, P) := - \frac{\text{if}(P > 4 \cdot 10^{-2}, S_{bm}(P), S_{bd}(P))}{V_{cv}} \cdot P \dots$$

$$+ \left[\frac{(1 - \Phi(-36000 + t)) \cdot Q_0 \cdot \frac{3600}{3600 + t} + \Phi(-36000 + t) \cdot Q_{d136000} \cdot \exp[-\beta \cdot (36000 - t)]}{V_{cv}} \right] \dots$$

$$+ \frac{Q_{daq}(t)}{V_{cv}}$$

$$P_{n+1} := P_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n, P_n) + f(t_{n+1}, (P_n + h \cdot f(t_n, P_n)))]$$

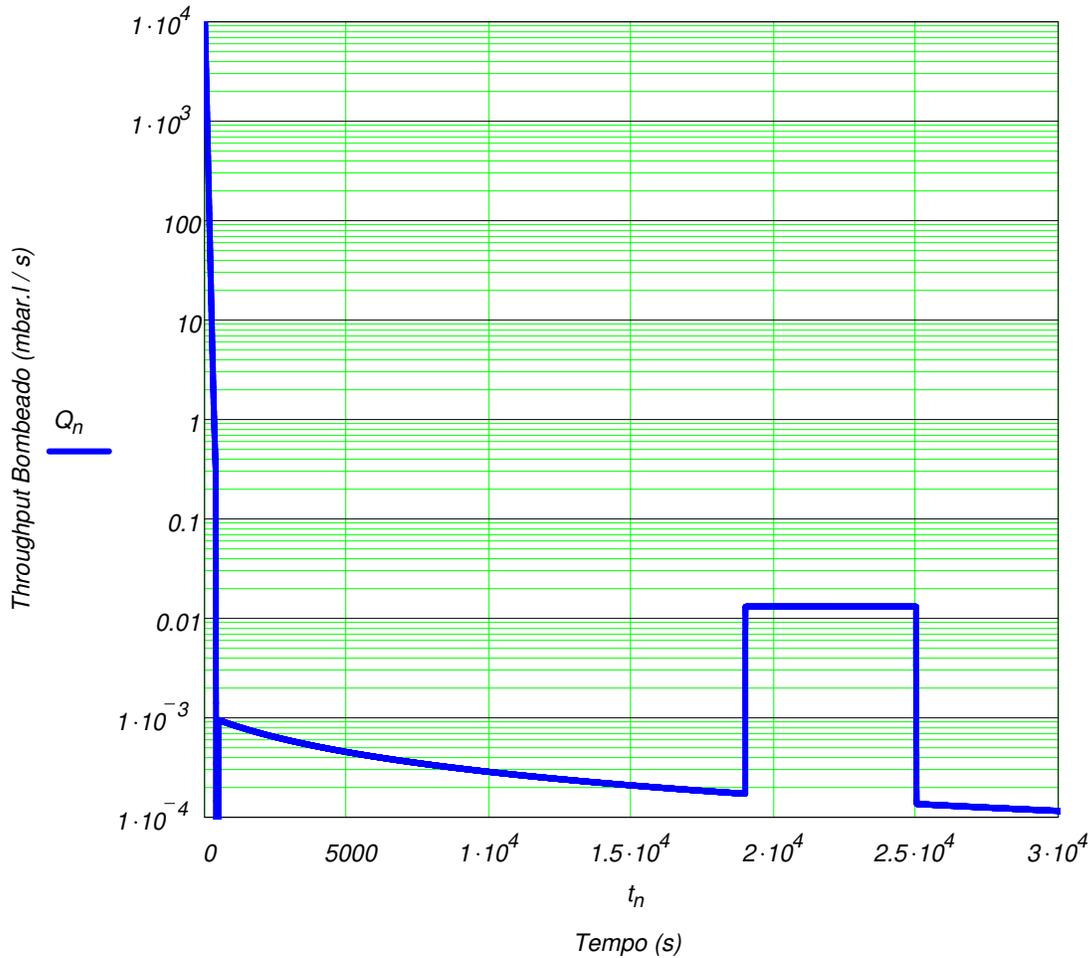
- Método de *Euler-Heun* ou método de *Runge-Kutta* de segunda ordem.
- O gráfico abaixo mostra a variação da pressão na câmara de vácuo com o tempo. Estamos considerando além da degaseificação das paredes uma outra fonte de gás, por exemplo, uma injeção de gás de processo. Podemos em princípio, considerar qualquer outra fonte de gás ou vapor e inserí-la na expressão acima e encontrar a função $pcv=pcv(t)$.



- Podemos calcular o throughput bombeado desde a pressão atmosférica até a pressão final.

$$Q1_n := Sbm(P_n) \cdot P_n \quad Q2_n := Sbd(P_n) \cdot P_n \quad Q_n := \text{if}(t_n > 495, Q2_n, Q1_n)$$

- Onde, no instante $t=495$ segundos ocorre a mudança da bomba mecânica para a bomba difusora. Este instante foi determinado a partir do gráfico da pressão na câmara de vácuo em função do tempo.



- Desta forma, conseguimos modelar com bastante detalhe um sistema de alto-vácuo, introduzindo uma série de características referentes ao processo de bombeamento, seja relativo as bombas de vácuo, tanto de pré-vácuo como a de alto-vácuo, também características referentes a linha de bombeamento.
- Finalizando esta análise, podemos dizer que caso queiramos realizar uma nova análise em um sistema de alto-vácuo, ou ainda, de ultra alto-vácuo, em linhas gerais todo o procedimento é o mesmo realizado nesta análise. Poderemos considerar outros tipos de bombas de vácuo e com outros valores de velocidade de bombeamento em função da pressão; neste caso, podemos considerar os resultados obtidos no Apêndice C e adotar as expressões das curvas de velocidade de bombeamento em questão. Dependendo do sistema de vácuo, certamente teremos outras fontes de gases e vapores, neste caso teremos que escrever as funções relativas a elas. Assim, a estrutura numérica para a análise detalhada de sistema de vácuo em geral está realizada.

Os sistemas de vácuo modelados neste trabalho, por meio da formulação discreta, encontram muitas aplicações tanto no setor industrial como na pesquisa. Apesar de termos apresentado poucos exemplos, a plataforma de cálculo numérico foi construída de forma a ter alcance suficiente para modelar vários tipos de sistemas de vácuo. Ainda, a plataforma de cálculo tem mostrado ser bastante versátil e sendo capaz de absorver melhorias e sofisticções. Além, das questões referentes aos aspectos computacionais para a obtenção da solução do problema proposto, temos as fontes de gases e vapores suficientemente descritas e algumas bastante detalhadas, de forma que possam ser utilizadas nas modelagens. A construção de um modelo é em geral uma tarefa difícil e sabemos que muitas vezes há uma distância enorme entre a realidade e a construção de uma representação matemática sofisticada capaz de descrever vários detalhes do sistema físico em estudo. Outrossim, acreditamos que estamos diante de um ferramental suficientemente poderoso para a obtenção de soluções numéricas para a modelagem de sistemas de vácuo de uso geral por meio da formulação discreta [7-11].

3.3 Modelagem Contínua de Sistemas de Vácuo.

O alto-vácuo está presente em muitos dispositivos e equipamentos com as mais variadas formas geométricas. Inúmeros sistemas de alto-vácuo de grande interesse apresentam geometria tubular, estes sistemas de vácuo têm aplicações tanto na indústria como em pesquisa. Os dispositivos e equipamentos mais importantes são: aceleradores de partículas elementares, anéis de armazenagem de feixe, estruturas para a colisão de feixes de partículas, dispositivos elétricos de potência como as válvulas *klystron*, fotomultiplicadoras, microscópios eletrônicos e espectrômetros de massa e muitos outros. Para que estes equipamentos tenham bom desempenho, eles devem operar em condições de alto-vácuo e alguns deles em condições de ultra alto-vácuo.

Apesar de os dispositivos mencionados acima apresentarem detalhes construtivos que introduzem complicações às suas superfícies expostas ao vácuo, podemos fazer aproximações e em muitos casos modelar sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo considerando basicamente a geometria tubular. Por meio da formulação contínua, os sistemas de alto-vácuo com geometria em forma de tubo podem ser considerados problemas matemáticos apresentando apenas uma dimensão espacial ou caso unidimensional [11-14]. Uma vez que temos disponível a equação de difusão para o caso unidimensional, vamos aplicá-la à geometria tubular e estudar os caso em que as extremidades dos tubos são bombeadas com bombas de alto-vácuo e assim garantir que estamos operando no regime de escoamento molecular. Esta última exigência é fundamental para que possamos utilizar a equação de difusão. Uma discussão a respeito desta importante questão está feita no Apêndice G. Um sistema de alto-vácuo em forma tubular está esquematizado na Figura 3.4.

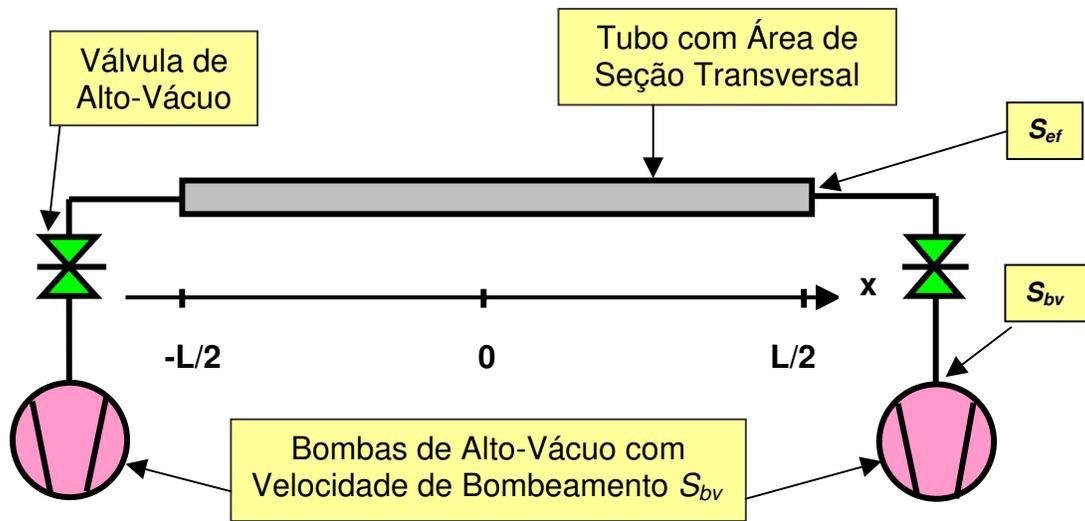


Figura 3.4 Estrutura geral de um sistema de alto-vácuo com geometria tubular.

A equação de difusão unidimensional dependente do tempo é dada pela expressão

$$c \cdot \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -q(x,t) + A \cdot \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} ,$$

onde $c=C.L$ e $A=V/L$; quando o estado estacionário for atingido, isto é, a pressão em cada ponto do sistema de vácuo não varia mais no tempo, temos a condição $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0, \forall t \geq t'$, assim para os instantes posteriores a t' o sistema de vácuo pode ser modelado pela equação de difusão unidimensional estacionária dada pela expressão a seguir na Expressão 3.6

$$c \cdot \frac{d^2 p(x)}{dx^2} = -q \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 p(x)}{dx^2} = -\frac{q}{c} . \quad 3.6$$

Os problemas matemáticos do tipo tratados acima constituem os problemas de valores de contorno. As equações diferenciais parciais de segunda ordem, do tipo da equação de difusão, precisam da especificação de duas condições de contorno e uma condição inicial para a obtenção da solução do problema fisicamente aceitável. Adotaremos a direção definida pela reta x como sendo a orientação do sistema de vácuo tubular, com uma extremidade do tubo em $x = -L/2$ e a outra extremidade em $x = +L/2$.

3.3.1 Tubo com Taxa de degaseificação constante.

Estudaremos o caso de um tubo com taxa de degaseificação constante, o campo de pressão em estado estacionário pode ser determinado pela mostrada anteriormente. Esquemáticamente o sistema de alto-vácuo tubular é mostrado na Figura 3.5.

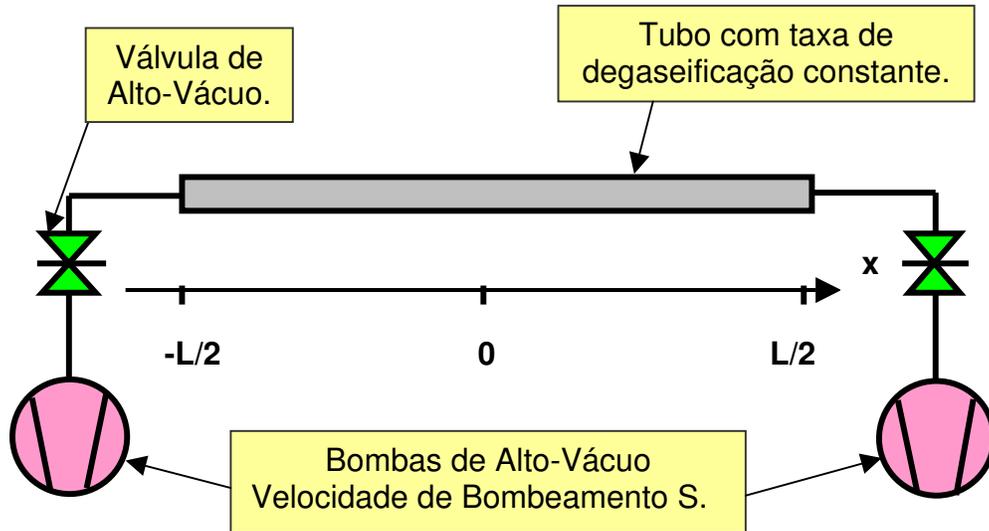


Figura 3.5 Sistema de alto-vácuo como geometria tubular com taxa de degaseificação constante e bombas de vácuo iguais nas extremidades do tubo.

Para a obtenção da solução do problema estacionário, deveremos impor as duas condições de contorno. Uma condição de contorno vem do fato do bombeamento nas extremidades do tubo garantir uma pressão que pode ser determinada em função da taxa de degaseificação total do tubo e a outra condição de contorno pode ser imposta devido à simetria do problema, ou seja, no ponto médio do tubo a pressão é máxima. Desta forma, matematicamente temos as duas condições de contorno dadas pelas expressões abaixo

$$p\left(-\frac{L}{2}\right) = p\left(+\frac{L}{2}\right) = \frac{Q_r}{2 \cdot S_{ef}} \quad \text{e} \quad \left. \frac{dp(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 .$$

Assim, encontramos a solução da equação de difusão dada pela Expressão 3.7 mostrada a seguir

$$p(x) = -\frac{q}{2c} x^2 + \frac{Q_r}{2} \left(\frac{1}{S_{ef}} + \frac{L}{4c} \right), \quad 3.7$$

onde, Q_T é a taxa de degaseificação total do tubo dada por $Q_T = q L$ e S_{ef} é a velocidade de bombeamento em cada extremidade do tubo. A Expressão 3.6 mostra que o perfil de pressão estacionário é de forma parabólica. É interessante e importante mencionar que muitos sistemas de alto-vácuo podem ser em primeira aproximação colocados na forma tubular, e assim, determinar características importantes deles.

O Apêndice D traz sistemas de vácuo tubulares estudados em detalhe. Ainda, na mesma linha de raciocínio, podemos fazer algumas variações na configuração o sistema de vácuo tubular acima e obter soluções de problemas de interesse, por exemplo, considerar uma das extremidades sem bombeamento, neste caso continuamos a ter o perfil parabólico de pressão, somente que o máximo de pressão estará localizado na extremidade fechada, ou seja, sem bombeamento. Em muitos casos além da determinação do campo de pressão ao longo do tubo, queremos determinar a quantidade de gás que chega às extremidades do tubo, assim, à quantidade de gás que é bombeada pelas bombas de vácuo. Uma vez que em geral nas extremidades dos tubos temos o sistema de bombeamento de vácuo. Para isso, *throughput* em cada ponto do tubo pode ser determinado pela Expressão 3.8

$$Q(x) = -c \frac{dp(x)}{dx} . \quad 3.8$$

Em particular, podemos aplicar a Expressão 3.8 nos pontos onde estão as bombas de vácuo. Este modelo simples pode ser aplicado, por exemplo, em uma linha de bombeamento, a fim de determinarmos a distância que devem ficar as bombas de alto-vácuo a fim de que a pressão na pior situação, ou seja, entre duas bombas de alto-vácuo consecutivas, fique abaixo de um valor estipulado *a priori* pelo projeto. Antes de mostrarmos o cálculo do campo de pressão ao longo do tubo, vemos que por meio da modelagem contínua podemos falar em pressão no ponto médio do tubo, na extremidade junto à bomba de alto-vácuo, ou ainda, em qualquer outro ponto deste tubo.

Vemos também que o sistema de vácuo tubular tem o seu comprimento bastante grande comparada ao seu diâmetro – de modo geral –, desta forma esperamos grandes gradientes de pressão. Sendo assim, a modelagem deste tipo de sistema de vácuo por meio da abordagem discreta é muito limitada, ou sendo mais prudente, pode ser muito enganosa. Encontramos para os sistemas de vácuo tubulares grandes variações de pressão em seu comprimento. Veja o Apêndice D para um estudo detalhado a esse respeito e a exposição de um critério objetivo para decidir qual tipo de abordagem adotar na modelagem. A seguir mostraremos o cálculo do caso estudado acima.

Campo de Pressão em Tubo com Taxa de Degaseificação Constante.

- Comprimento do tubo: $L := 400 \text{ cm}$
- Diâmetro do tubo : $D := 3 \text{ cm}$
- Condutância específica, $c=C.L$: $c := 12 \cdot D^3 \quad c = 324 \text{ l.cm / s}$
- Volume específico ou Volume por unidade de comprimento, $v=V/L$:

$$A := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad V := 10^{-3} \cdot A \cdot L \quad v := \frac{V}{L} \quad v = 7.069 \times 10^{-3} \text{ l / cm}$$

- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento, $qs=Q_{\text{Total}}/L$:

$$qs := 4.7 \cdot 10^{-8} \text{ mbar.litro/(s.cm)} \quad \text{com,} \quad Q_{\text{Total}} = qs \cdot (3,1416 \cdot D \cdot L)$$

- qs é a taxa de degaseificação específica do material. Foi adotado como material o aço inoxidável 304 L.

$$Q_{\text{Total}} = qs \cdot L \quad qs \cdot L = 1.88 \times 10^{-5} \text{ mbar.litros/segundo}$$

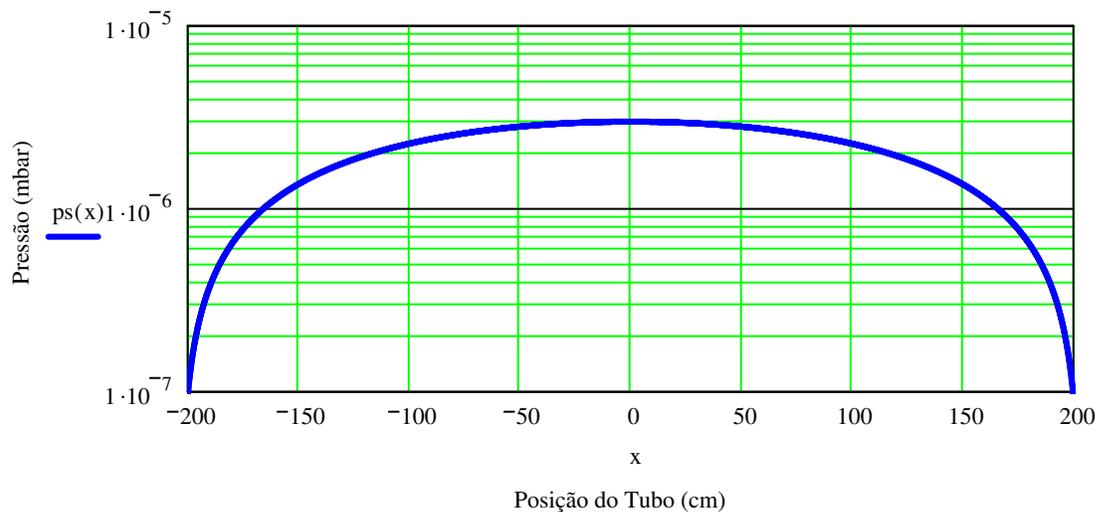
- Velocidade de bombeamento nas extremidades do tubo:

$$S := 100 \text{ litros/segundo}$$

- Coeficiente de difusão: $\alpha := \left(\frac{c}{v} \right) \quad \alpha = 4.584 \times 10^4 \text{ l.cm / s / l}$
- Definição da malha para as posições ao longo de todo o tubo. $x := -200, -199.9 .. 200 \text{cm}$
- A solução estacionária é dada pela função parabólica, mostrada abaixo, devido a taxa de degaseificação constante ao longo do tubo:

$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2} \right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S} \right)$$

- A função pressão ao longo do tubo é dada pela função pressão estacionária (perfil parabólico).



- Esta análise está considerando o problema de escoamento de átomos e moléculas ao longo do tubo no regime de escoamento molecular, como sendo um problema de difusão.

3.3.2 Tubo com Trechos de Diferentes Taxas de Degaseificação.

Trataremos a seguir da situação na qual o tubo apresenta partes com diferentes taxas de degaseificação específica ou, colocado de outro modo, diferentes taxas de degaseificação por unidade de comprimento. Como exemplo, teremos o tubo dividido em três partes, conforme esquematizado na Figura 3.6

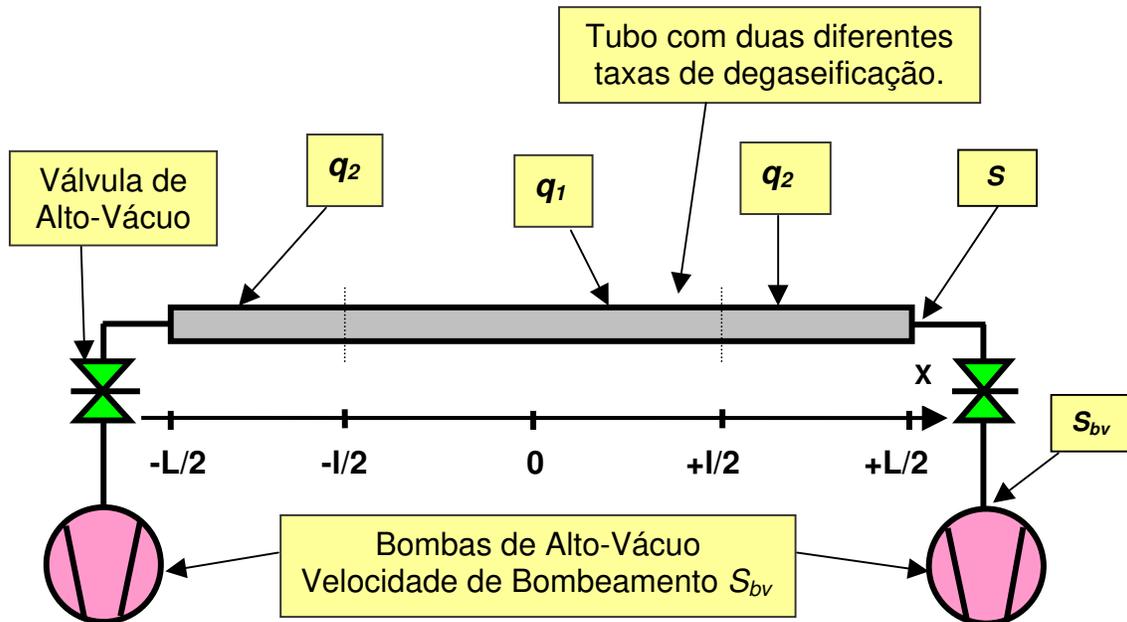


Figura 3.6 Estrutura geral de um sistema de alto-vácuo como geometria tubular apresentando taxas de degaseificação específicas diferentes – tubo em três partes.

Vemos que temos o tubo sendo formado por três trechos, o trecho de $-\frac{L}{2} \leq x \leq -\frac{l}{2}$ tem taxa de degaseificação específica q_2 , o trecho $-\frac{l}{2} < x < +\frac{l}{2}$ tem taxa de degaseificação específica q_1 e o trecho $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$ tem taxa de degaseificação específica q_2 . Devido à simetria do problema, poderemos encontrar a sua solução para o intervalo positivo da reta x . Deveremos ter a pressão máxima em $x=0$. Nos pontos de união entre os trechos de diferentes tubos teremos a continuidade do *throughput*, isto é, nos pontos $x=-l/2$ e $x=+l/2$. Assim, matematicamente temos a expressão seguinte expondo a continuidade do *throughput* nos pontos de união dos trechos diferentes do tubo

$$Q_1(l/2) = Q_2(l/2) \quad \Rightarrow \quad -c \frac{dp_1(x)}{dx} \Big|_{x=l/2} = -c \frac{dp_2(x)}{dx} \Big|_{x=l/2} .$$

Outra condição de contorno vem do estabelecimento da pressão nas extremidades do tubo dada pela expressão

$$p\left(-\frac{L}{2}\right) = p\left(+\frac{L}{2}\right) = \frac{Q_T}{2S} = \frac{1}{S} \left[q_1 \frac{l}{2} + q_2 \left(\frac{L-l}{2} \right) \right]$$

assim, uma vez considerando as condições de contorno e a equação de difusão em estado estacionário, encontramos a solução geral do problema apresentado dadas pelas expressões mostradas abaixo nas Expressões 3.9 e 3.10

$$p_1(x) = -\frac{q_1}{2c} x^2 + \frac{q_2 (L^2 - l^2)}{8c} + \frac{(q_2 - q_1) (l^2 - lL)}{4c} + \frac{q_1 l^2}{8c} + \frac{Q_T}{2S} , \quad 3.9$$

válida para x pertencente ao intervalo $0 \leq x < +\frac{l}{2}$, e

$$p_2(x) = -\frac{q_2}{2c} x^2 + \frac{(q_2 - q_1)}{2c} l |x| + \frac{q_2 L^2}{8c} - \frac{(q_2 - q_1) l L}{4c} + \frac{Q_T}{2S} , \quad 3.10$$

válida para x pertencente ao intervalo $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$.

Assim, encontramos o campo de pressão ao longo do tubo dado pelas expressões mostradas acima. Vemos que temos continuidade no valor da pressão e no *throughput* nos pontos que unem os trechos de diferentes taxas de degaseificação do tubo. Este modelo pode representar uma situação na qual uma tubulação é construída em partes com materiais diferentes, ou ainda, um trecho da tubulação é formado por um fole metálico sensível, mais conhecido como *bellows*. A seguir mostramos em detalhe um caso numérico de estudo. Outro exemplo numérico de interesse pode ser encontrado no Apêndice D. Este modelo, além de sua aplicação junto ao projeto de sistemas de alto-vácuo, tem mostrado ser útil para a compreensão dos sistemas de vácuo tubulares.

Campo de Pressão em Tubo com Trechos com Diferentes Taxas de Degaseificação.

- Comprimento do tubo: $L := 400$ cm
- Comprimento do trecho central: $l := 200$ cm
- Diâmetro do tubo : $D := 3$ cm
- Condutância específica, $c=C.L$: $c := 12 \cdot D^3$
- Volume específico ou Volume por unidade de comprimento, $v=V/L$:

$$A := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad V := 10^{-3} \cdot A \cdot L \text{ litros} \quad v := \frac{V}{L} \text{ l/cm} \quad v = 7.069 \times 10^{-3} \text{ l/cm}$$

- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento para cada trecho do tubo.
- Para o trecho central, isto é, $-l/2 < x < +l/2$, com $l=200$ cm. A taxa de degaseificação para este trecho é $q1=4 \cdot 10^{-6}$ mbar.litro/(s.cm).

$$q1 := 4 \cdot 10^{-6} \text{ mbar.litro/(segundo.cm)}$$

- Para os trechos externos, isto é, $-L/2 < x < -l/2$ e $l/2 < x < L/2$. A taxa de degaseificação para este trecho é $q2=7 \cdot 10^{-7}$ mbar.litro/(s.cm).

$$q2 := 7 \cdot 10^{-7} \text{ mbar.litro/(segundo.cm)}$$

- As taxas de degaseificação específicas dos materiais adotados referem-se ao aço inoxidável 304 L e o cobre.

$$Q_{\text{Total}} = q1 \cdot l + q2 \cdot (L - l) \quad \text{mbar.litros/segundo}$$

$$Q_{\text{Total}} := q1 \cdot l + q2 \cdot (L - l)$$

$$Q_{\text{Total}} = 9.4 \times 10^{-4} \text{ mbar.litro/segundo}$$

- A velocidade de bombeamento, em cada extremidades do tubo, é dada a seguir.

$$S := 100 \text{ litros/segundo}$$

- Definição da malha para as posições ao longo de todo o tubo. Faremos uma malha para cada trecho do tubo, como mostrado abaixo.

- A solução estacionária é dada por funções de segundo grau (função parabólica), tanto para os trechos externos como para o trecho interno. As funções para o campo de pressão ao longo do tubo são mostradas a seguir. Devido a simetria do problema, estudaremos o intervalo de $0 \leq x \leq 200$ cm.

- Para o trecho de $0 \leq x \leq 100$ cm, temos a solução. $x := 0, 0.1 \dots 200$ cm

$$p1s(x) := -\frac{q1}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{q2 \cdot (L^2 - l^2)}{8 \cdot c} + \frac{(q2 - q1) \cdot (l^2 - l \cdot L)}{4 \cdot c} + \frac{q1 \cdot l^2}{8 \cdot c} + \frac{Q_{Total}}{2 \cdot S}$$

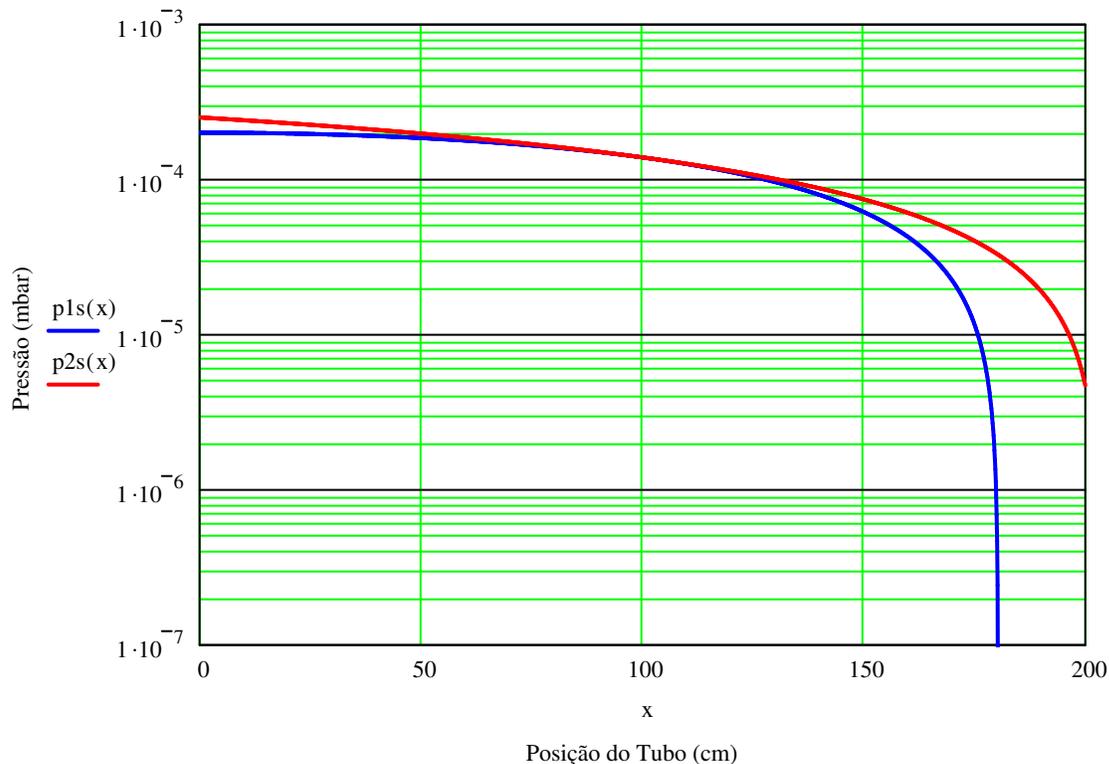
- Para o trecho de $100 < x \leq 200$ cm, temos a solução. $x := 0,01..200$ cm

$$p2s(x) := -\frac{q2}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{(q2 - q1) \cdot l \cdot |x|}{2 \cdot c} + \frac{q2 \cdot L^2}{8 \cdot c} - \frac{(q2 - q1) \cdot l \cdot L}{4 \cdot c} + \frac{Q_{Total}}{2 \cdot S}$$

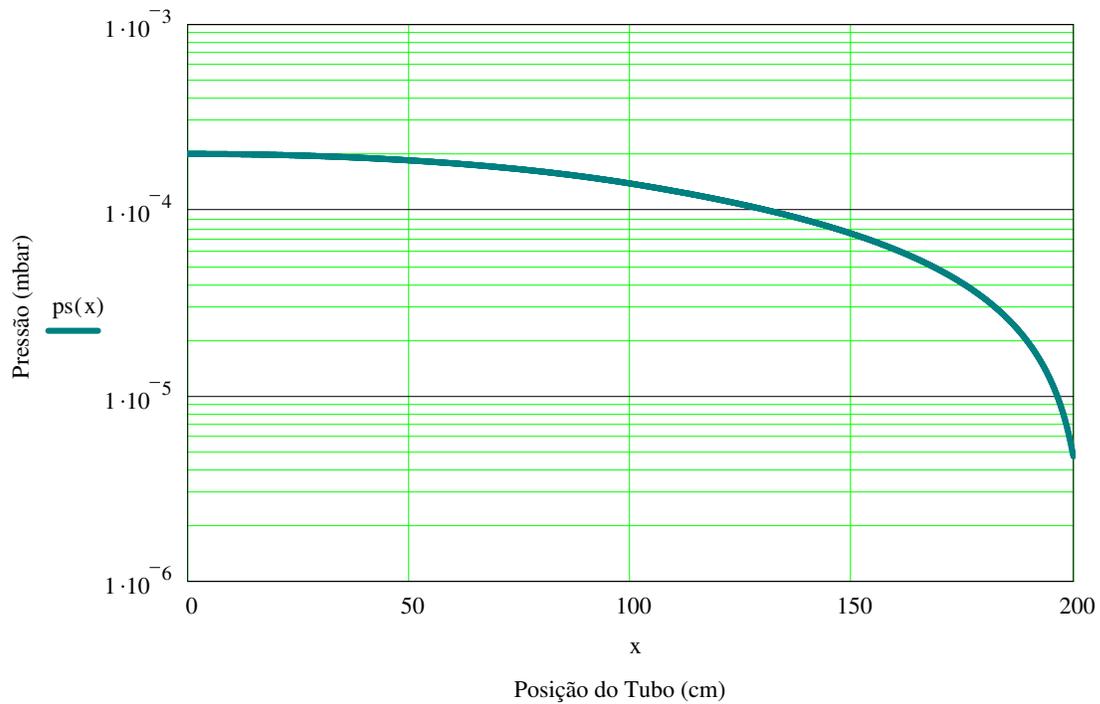
- Seja a função $ps=ps(x)$ definida para o intervalo $0 \leq x \leq 200$ cm.

$$ps(x) := (1 - \Phi(-100 + x)) \cdot p1s(x) + \Phi(-100 + x) \cdot p2s(x)$$

- Onde a função $\Phi=\Phi(x)$ é a função degrau Heveaside.
- O campo de pressão ao longo do tubo é dado pelas funções em cada trecho. As funções são de segundo grau (perfil parabólico). O gráfico está mostrado abaixo.



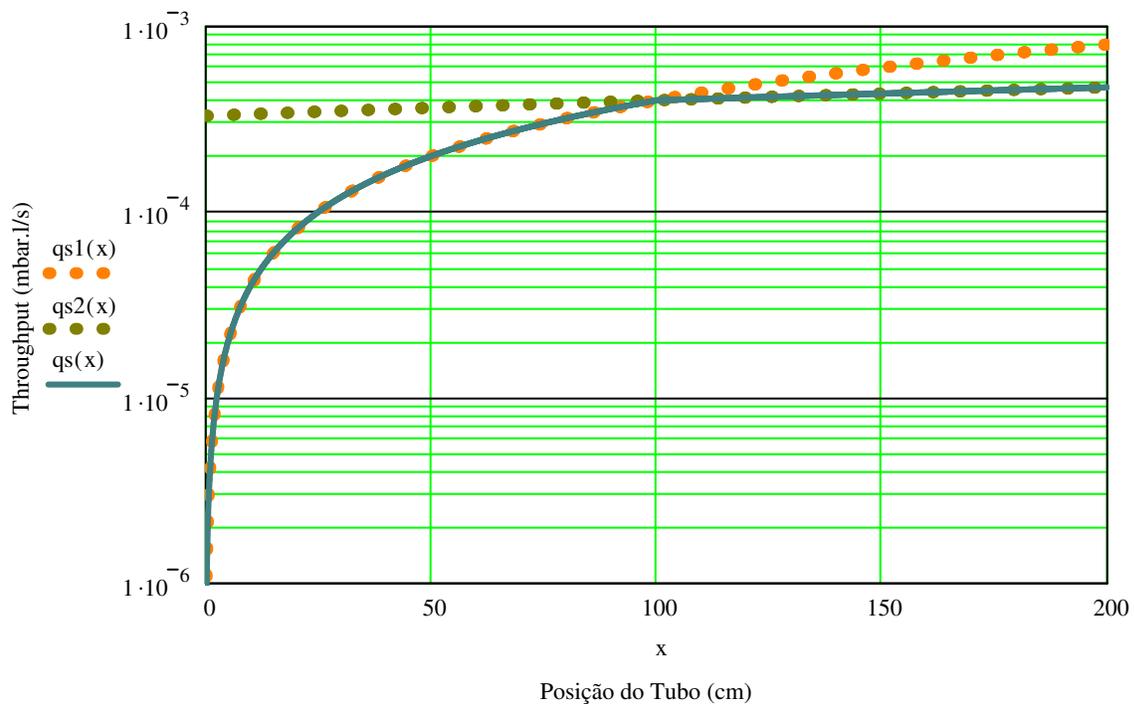
- Veja que no ponto $x=100$ cm temos a coincidência dos valores das funções definidas em cada trecho do tubo, com as respectivas taxas de degaseificação específica por unidade de comprimento. Mas veja que também temos a coincidência das derivadas da função pressão em relação a x . Fisicamente falando, temos a continuidade do throughput também neste ponto.



- O gráfico acima mostra o campo de pressão ao longo do tubo.
- O throughput ao longo do tubo pode ser calculado da seguinte forma:

$$qs1(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} p1s(x) \quad qs2(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} p2s(x) \quad qs(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} ps(x)$$

- Cabe mencionar que o throughput devido a solução geral do problema em questão é dado por $qs=qs(x)$. O gráfico abaixo mostra as curvas os throughputs $qs1$, $qs2$ e qs .



3.3.3 Tubo com Velocidades de Bombeamento Diferentes nas Extremidades.

No caso a seguir a ser estudado, modelaremos um tubo com taxa de degaseificação constante sendo bombeado em suas extremidades com velocidades de bombeamento diferentes entre si. Assim, estamos diante de um problema sem simetria e certamente teremos a pressão máxima ocorrendo em algum ponto do tubo diferente de seu ponto médio. As extremidades do tubo terão pressões diferentes entre si. A Figura 3.7 esquematiza a situação em estudo

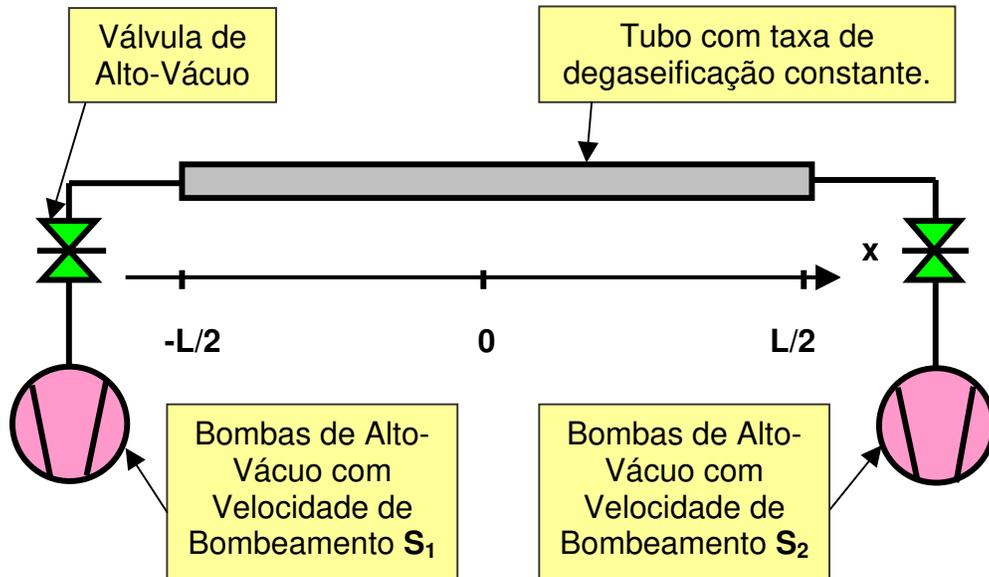


Figura 3.7 Tubo sendo bombeado nas suas extremidades com bombas de alto-vácuo com velocidades de bombeamento S_1 – à esquerda – e S_2 – à direita.

O problema será modelado a fim de determinarmos o campo de pressão em estado estacionário, utilizando a equação de difusão em estado estacionário conforme encontrada no Apêndice B. Impondo que o *throughput* a ser bombeado pela bomba de alto-vácuo da esquerda é devido à taxa de degaseificação específica multiplicada pelo trecho do tubo, desde a extremidade à esquerda até o ponto de máxima pressão, denominado de ponto x_M , encontramos o valor deste

ponto em função das grandezas conhecidas. Ou ainda, fazendo $S_1 p\left(-\frac{L}{2}\right) = c \frac{dp(x)}{dx} \Big|_{-\frac{L}{2}}$ e o

mesmo para o lado direito do tubo, encontramos o ponto de pressão máxima com a Expressão 3.11

$$x_M = \frac{1}{2} \frac{c L (S_1 - S_2)}{L S_1 S_2 + c (S_1 + S_2)}. \quad 3.11$$

e o campo de pressão é representado pela Expressão 3.12

$$p(x) = -\frac{q}{2c} x^2 + \frac{\frac{1}{2} q L (S_1 - S_2)}{L S_1 S_2 + c (S_1 + S_2)} x + \frac{q L^2}{8c} + \frac{q \frac{L^2}{4} (S_1 + S_2) + q L c}{L S_1 S_2 + c (S_1 + S_2)}, \quad 3.12$$

onde x está definido no intervalo $-\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$. A solução deste problema mostra que o perfil do campo de pressão é parabólico, somente que no caso das velocidades de bombeamento nas extremidades do tubo serem diferentes entre si, a parábola não está centrada em $x=0$.

Analisando o caso numérico vemos que a posição do ponto de máxima pressão, chamado de x_M ; é pouco influenciado pelos valores diferentes da velocidade de bombeamento, o determinante é a condutância específica do tubo. Este último resultado é importantíssimo para determinarmos as distâncias que devem estar as bombas de vácuo em uma linha de bombeamento tubular. Na realidade este é um dos resultados mais marcantes neste trabalho, ou seja, determinar objetivamente e de forma precisa a influência da condutância no processo de bombeamento e conseqüentemente determinar a dependência da pressão confrontando a velocidade de bombeamento com a condutância.

O aumento da velocidade de bombeamento nas extremidades do tubo não leva a uma diminuição expressiva da pressão na parte central do tubo, ou seja, próximo de $x=0$. Necessitando diminuir a pressão nas partes mais próximas do ponto médio do tubo, deveremos colocar mais bombas de vácuo afastadas das extremidades do tubo. Ou seja, em situações deste tipo é preferível ter várias bombas de velocidade de bombeamento menores, mas colocadas mais próximas entre si, em vez de termos poucas bombas de vácuo de altas velocidades de bombeamento. O programa computacional para modelar matematicamente esta situação pode ser uma ferramenta eficiente também no aprendizado sobre o comportamento dos sistemas de vácuo, no caso discutido acima podemos verificar a dependência e o domínio da condutância específica no processo de bombeamento do sistema de vácuo tubular.

Chamando a atenção, veja que as duas condições de contorno necessárias para alcançar a solução geral do problema foram obtidas a partir de condições de contorno do tipo *Robin*. Esta é a condição de contorno mais freqüente nos problemas envolvendo quantidades de gases e pressões. A seguir mostramos um caso numérico sobre a situação apresentada; devemos prestar atenção e verificar que o ponto de máxima pressão não dista significativamente do ponto médio do tubo.

Campo de Pressão em Tubo com Velocidades de Bombeamento Diferentes nas Extremidades.

- Comprimento do tubo: $L := 400 \text{ cm}$
- Diâmetro do tubo : $D := 3 \text{ cm}$
- Condutância específica, $c=C.L$: $c := 12 \cdot D^3$ $c = 324 \text{ l.cm / s}$
- Volume específico ou Volume por unidade de comprimento, $v=V/L$:

$$A := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad V := 10^{-3} \cdot A \cdot L \text{ litro} \quad v := \frac{V}{L} \text{ l / cm} \quad v = 7.069 \times 10^{-3} \text{ l / cm}$$

- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento para cada trecho do tubo.
- Para o trecho central, isto é, $-L/2 \leq x \leq +L/2$, com $L=400 \text{ cm}$. A taxa de degaseificação específica por unidade de comprimento é igual a $q_s=4,7 \cdot 10^{-8} \text{ mbar.litro/(s.cm)}$.

$$q_s := 4.7 \cdot 10^{-8} \text{ mbar.litro/(segundo.cm)}$$

- A taxa de degaseificação específica do material adotado refere-se ao aço inoxidável 304 L.

$$Q_{\text{Total}} := q_s \cdot L \quad \text{mbar.litros/segundo}$$

$$Q_{\text{Total}} = 1.88 \times 10^{-5} \text{ mbar.litro/segundo}$$

- A velocidade de bombeamento nas extremidades do tubo pode assumir valores diferentes entre si.
-A velocidade de bombeamento na extremidade esquerda, isto é, para $x=-200 \text{ cm}$ é S_1 .
-A velocidade de bombeamento na extremidade direita, isto é, para $x=200 \text{ cm}$ é S_2 .

$$S_1 := 100 \text{ litros / segundo} \quad S_2 := 400 \text{ litros/segundo}$$

- Definição da malha para as posições ao longo de todo o tubo. Faremos uma malha para cada trecho do tubo, como mostrado abaixo.
- A solução estacionária é dada por uma função de segundo grau (função parabólica). A função para o campo de pressão ao longo do tubo é mostrada a seguir. Devido a assimetria do problema, estudaremos no intervalo de $-200 \leq x \leq 200 \text{ cm}$.

$$x := -200, -199.9 .. 200 \text{ cm}$$

$$ps(x) := -\frac{q_s}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{q_s \cdot \frac{L}{2} \cdot (S_1 - S_2) \cdot x}{L \cdot S_1 \cdot S_2 + c \cdot (S_1 + S_2)} + \frac{q_s \cdot L^2}{8 \cdot c} + \frac{q_s \cdot \frac{L^2}{4} \cdot (S_1 + S_2) + q_s \cdot L \cdot c}{L \cdot S_1 \cdot S_2 + c \cdot (S_1 + S_2)}$$

- O ponto, cujo valor de pressão é máximo, é dado pela seguinte expressão.

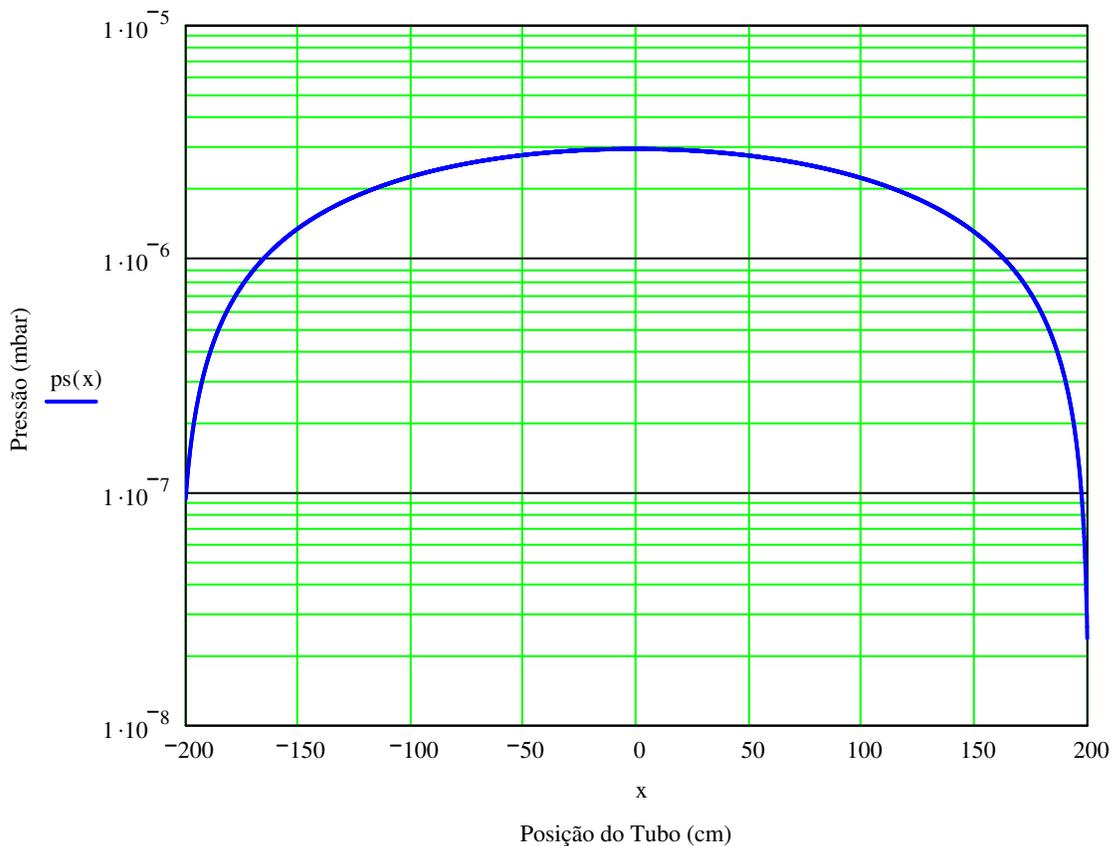
$$x_M := \frac{\frac{1}{2} \cdot c \cdot L \cdot (S_1 - S_2)}{L \cdot S_1 \cdot S_2 + c \cdot (S_1 + S_2)} \quad x_M = -1.203 \text{ cm}$$

- O gráfico da função pressão ao longo da extensão do tubo pode ser visto abaixo. Note a assimetria da parábola em relação ao ponto $x=0$.
- A pressão nos seguintes pontos notáveis vale:

-para $x=-200$ cm, $ps(-200) = 9.343 \times 10^{-8}$ mbar

-para $x=x_M$ $x_M = -1.203$ cm $ps(x_M) = 2.96 \times 10^{-6}$ mbar (pressão máxima)

-para $x=200$ cm, $ps(200) = 2.364 \times 10^{-8}$ mbar

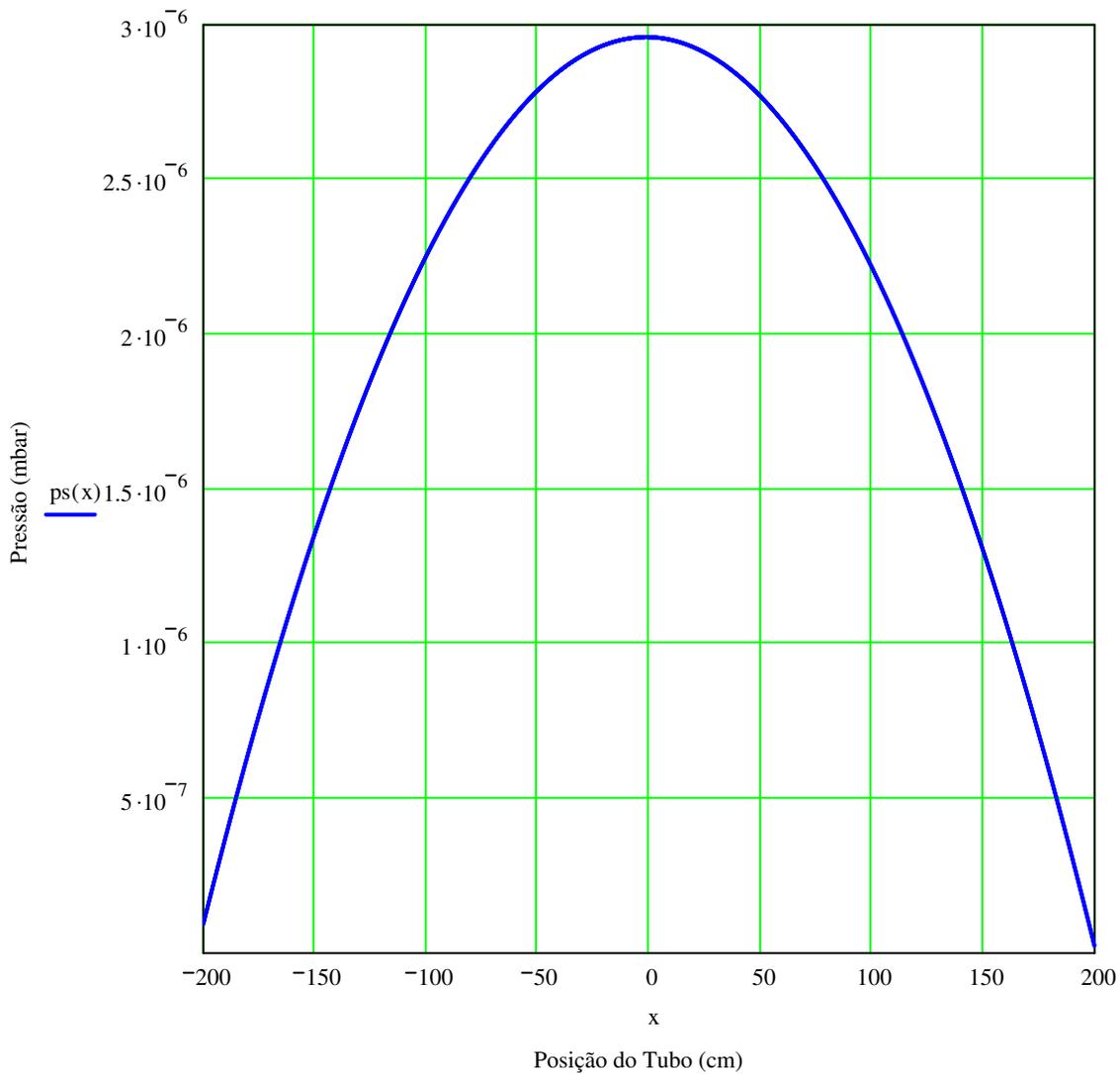


- Veja que apesar de termos uma velocidade de bombeamento em $x=+200$ cm, $S_2=400$ l/s, quatro vezes maior que a velocidade de bombeamento em $x=-200$ cm, $S_1=100$ l/s, o ponto de pressão máxima (x_M) está bem próximo de $x=0$. Também, notamos que a poucos centímetros das extremidades do tubo, as pressões ao longo do tubo, são praticamente simétricas em relação a $x=0$. Desta forma, considerando a condutância específica, a diferença de velocidade de bombeamento não são determinantes para as pressões nas partes próximas de $x=0$ cm.

- Sempre devemos nos lembrar que a velocidade de bombeamento em cada ponto do tubo depende da velocidade da bomba de vácuo e da condutância entre o ponto em questão e o ponto da bomba de vácuo; mas verificamos, para o caso dos tubos, que o determinante em geral é a condutância.

$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{qs \cdot \frac{L}{2} \cdot (S1 - S2) \cdot x}{L \cdot S1 \cdot S2 + c \cdot (S1 + S2)} + \frac{qs \cdot L^2}{8 \cdot c} + \frac{qs \cdot \frac{L^2}{4} \cdot (S1 + S2) + qs \cdot L \cdot c}{L \cdot S1 \cdot S2 + c \cdot (S1 + S2)}$$

- O gráfico em escala linear fica como mostrado abaixo.



$$ps(-200) = 9.343 \times 10^{-8} \text{ mbar} \quad ps(200) = 2.364 \times 10^{-8} \text{ mbar}$$

- Fica bem claro neste gráfico que apesar da diferença de velocidade de bombeamento igual a 4 vezes, o campo de pressão ao longo do tubo é praticamente o mesmo a partir de uma pequena distância da extremidade do tubo. O ponto de máxima pressão está praticamente no ponto médio do tubo.

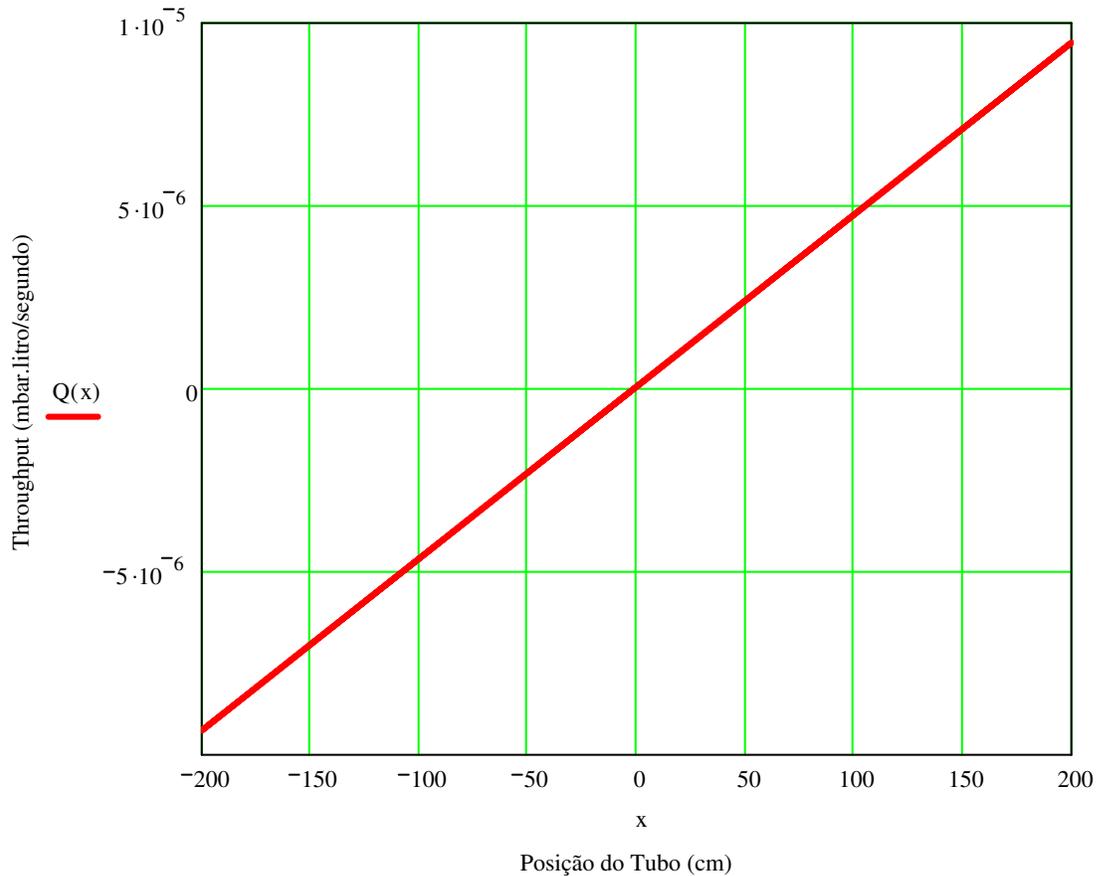
- Os comentários feitos na página anterior sobre a questão das velocidades diferentes de bombeamento, nas extremidades do tubo, podem ser melhores visualizados com o do campo de pressão ao longo do tubo a partir do gráfico em escala linear.
- O throughput pode ser determinado da seguinte forma.

$$Q(x) = -c \cdot dp(x)/dx \quad \text{mbar.litro/segundo}$$

$$Q(x) := q_s \cdot x - \frac{q_s \cdot L \cdot c \cdot (S1 - S2)}{2 \cdot L \cdot S1 \cdot S2 + c \cdot (S1 + S2)}$$

$$Q(-200) = -9.343 \times 10^{-6} \text{ mbar.l/s}$$

$$Q(200) = 9.457 \times 10^{-6} \text{ mbar.l/s}$$



- O gráfico acima mostra o throughput ao longo do tubo. A parte negativa da curva significa que o throughput está dirigido no sentido negativo do eixo x.

3.3.4 Tubo com Fonte de Gás Transiente Impulsiva.

Iniciaremos o estudo de casos com a presença de fontes gasosas que variam no tempo. Teremos além da fonte de gás devido a degaseificação das paredes do tubo, uma fonte de gás que varia no tempo. Como a equação de difusão é linear e na modelagem dos sistemas de alto-vácuo tubulares aparecem termos constantes no seu equacionamento, as soluções obedecem ao princípio de superposição. Veja que este fato está de acordo com a essência do processo de escoamento dos gases e vapores no regime molecular; uma vez que o transporte dos gases ocorre devido aos choques aleatórios exclusivos com as paredes do sistema de vácuo – no caso como as paredes do tubo. Assim, há completa independência das várias fontes gasosas entre si e podemos encontrar a solução para cada uma delas e superpor as soluções obtidas para cada fonte gasosa particular. A Figura 3.8 mostra esquematicamente a situação, na qual temos a presença da fonte devida a degaseificação natural do tubo e uma fonte de gás que depende da posição e do tempo, neste caso de estudo consideraremos que a fonte transiente seja uma fonte impulsiva de gás, ocorrendo “instantaneamente” em uma posição do tubo.

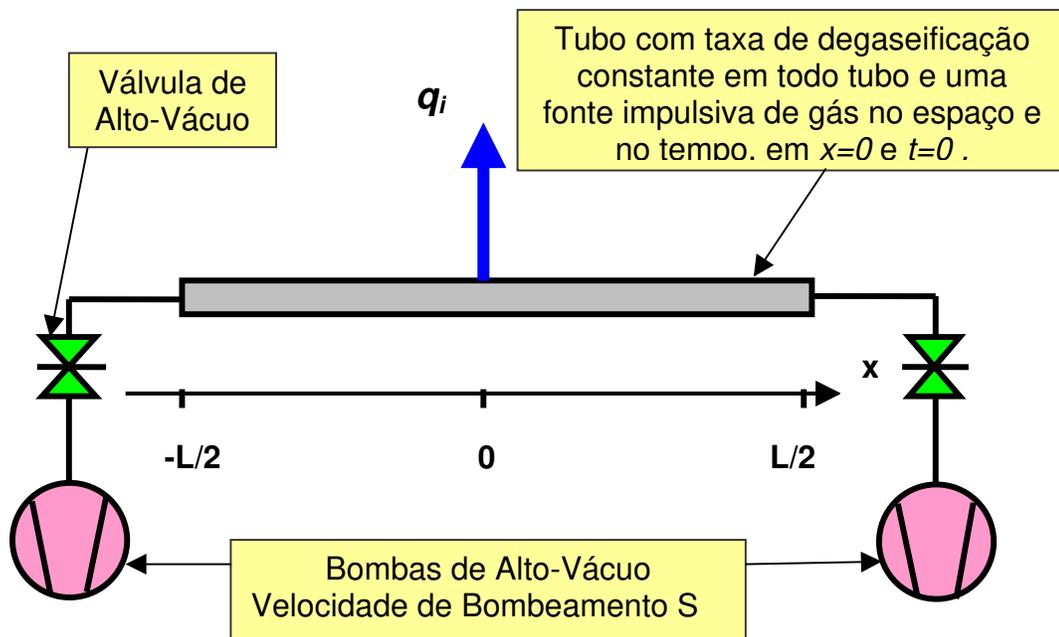


Figura 3.8 Tubo com degaseificação constante e uma fonte de gás transiente do tipo impulsiva no tempo e na posição.

A modelagem do problema será feita baseada na linearidade da equação de difusão para o escoamento dos gases em regime molecular e, portanto, na superposição das soluções para cada fonte de gás tratada independentemente. A equação de difusão é dada por

$$c \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -q(x,t) + A \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} ,$$

admitiremos que a solução geral do problema seja dada pela Expressão 3.13

$$p_G(x,t) = p_E(x) + p_T(x,t) , \quad 3.13$$

onde temos que a solução geral é soma da solução do caso estacionário – fonte de gás devida exclusivamente a degaseificação – mais a solução do caso transiente – fonte de gás devida à fonte impulsiva – respectivamente. Este caso encontra uma aplicação muito importante, podemos modelar uma entrada brusca de gás no sistema de alto-vácuo. Por exemplo, um vazamento intermitente, ou ainda, um feixe de partículas ou luz chocando-se com as paredes do tubo. Por meio deste modelo podemos determinar a distância máxima entre as bombas de alto-vácuo e as suas velocidades de bombeamento, a fim de que a quantidade de gás, que ocorre de forma bem localizada no tempo e no espaço, possa ser bombeada em tempo pré-determinado. Este é um dado importante para a especificação das bombas de alto-vácuo e a sua distribuição ao longo do sistema de vácuo tubular.

As fontes gasosas podem, no problema em questão, ser colocadas matematicamente conforme a seguinte Expressão 3.14

$$q_G(x,t) = q + q_T(x,t) , \quad 3.14$$

onde, o primeiro termo é relativo a fonte de gás devido a taxa de degaseificação específica do tubo, considerada constante. O segundo termo, relativo à fonte transiente de gás, considerada impulsiva no espaço e no tempo. Modelaremos a fonte de gás impulsiva no tempo e na posição, por meio da função delta de Dirac, mostrada na Expressão 3.15

$$q_T(x,t) = q' \delta(x) \delta(t) , \quad 3.15$$

onde, q' é uma quantidade constante que é proporcional à quantidade de gás da fonte impulsiva liberada. Podemos entender e interpretar fisicamente esta quantidade de gás, que será o *throughput* da fonte impulsiva de gás, como se esta quantidade de gás estivesse armazenada em um pequeno volume a certa pressão, de forma que quando liberada produza o *throughput* $q_T = q_T(x,t)$.

Admitiremos que o gás liberado ocorra em $x = 0$ e em $t = 0$. A solução geral do problema é mostrada na Expressão 3.16

$$p_G(x, t) = p_E(x) + p_T(x, t) \Rightarrow$$

$$p_G(x, t) = -\frac{q}{2c}x^2 + \frac{Q_T}{2}\left(\frac{1}{S} + \frac{L}{4c}\right) + \frac{q'}{(4\pi c A t)^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{A}{4ct}x^2\right). \quad 3.16$$

Explicitamente considerada a superposição das soluções, uma vez que a equação diferencial é linear. A solução geral do problema modelado é formada pela parte estacionária, dada pela função parabólica – como obtida em casos anteriores – e formada pela parte transiente – dada pela função de *Gauss*.

As condições de contorno para o caso estacionário são as mesmas impostas no caso tratado do tubo de taxa de degaseificação constante e velocidades de bombeamento iguais entre si. O modelo adotado para a fonte gasosa transiente é de uso bastante restritivo e a origem dela é bastante sutil. Ocorre que para o caso da fonte de gás transiente, consideramos que a pressão seja igual à zero para valores de x tendendo ao infinito, tanto à esquerda como à direita do tubo. Esta última imposição à condição de contorno da solução transiente poderá ser – e em geral é – bastante distante da realidade caso a fonte gasosa impulsiva seja muito intensa.

Verificamos que os resultados são próximos dos tempos medidos, em situações como a modelada, se adotarmos fontes gasosas impulsivas de pequena intensidade, comparáveis ao *throughput* da fonte estacionária – devida a degaseificação das paredes do tubo [9-17]. Podemos explorar muito este modelo, uma vez que em princípio qualquer fonte gasosa transiente, impulsiva ou não, pode ser estudada matematicamente a partir do problema tratado nesta seção, estamos falando dos problemas de contorno do tipo de *Poisson*, isto é, com o termo de fontes. Este caso está exemplificado a seguir. Mais à frente trataremos este problema com rigor e imporemos as condições de contorno que levam em conta o tamanho finito do tubo e que as bombas de vácuo estão localizadas nas extremidades do tubo.

O modelo matemático deste problema é muito mais difícil e trabalhosa de ser obtida, entretanto, sua aplicação é bem mais segura em casos de fontes gasosas impulsivas. Cabe mencionar que para os tempos em que o gás ainda não atingiu as extremidades do tubo, as duas soluções coincidem impressionantemente bem. Este tipo de comparação é essencial para verificarmos a coerências entre os vários modelos e, sempre devemos fazê-las!

Campo de Pressão em Tubo com Taxa de Degaseificação Constante e com Uma Fonte Impulsiva de Gás no Tempo e na Posição.

- Comprimento do tubo: $L := 400 \text{ cm}$
- Diâmetro do tubo : $D := 3 \text{ cm}$
- Condutância específica, $c=C.L$: $c := 12 \cdot D^3$
- Volume específico ou Volume por unidade de comprimento, $v=V/L$:

$$A := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad V := 10^{-3} \cdot A \cdot L \quad v := \frac{V}{L} \quad v = 7.069 \times 10^{-3} \text{ l/cm}$$

- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento, $q_s=Q_{\text{Total}}/L$:

$$q_s := 4.7 \cdot 10^{-8} \text{ mbar.litro/(s.cm)}$$

$$\text{com, } Q_{\text{Total}}=q_s \cdot (3,1416 \cdot D \cdot L)$$

- q_e é a taxa de degaseificação específica do material. Foi adotado como material o aço inoxidável 304 L.

$$Q_{\text{Total}}=q_s \cdot L \quad q_s \cdot L = 1.88 \times 10^{-5} \text{ mbar.litros/segundo}$$

- Velocidade de bombeamento nas extremidades do tubo:

$$S := 100 \text{ litros/segundo}$$

- Coeficiente de difusão: $\alpha := \left(\frac{c}{v} \right) \quad \alpha = 4.584 \times 10^4$

- Fonte impulsiva de gás - no tempo e no espaço - atuando em $t=0$ e $x=0$.

- Representação da fonte impulsiva de gás; $q' \cdot \delta(t=0) \cdot \delta(x=0)$.

- Obs: representaremos no Mathcad q' como q_1 . $q_1 := 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ mbar.litro}$

- Definição da malha para as posições ao longo de todo o tubo. $x := -200, -199.9 \dots 200 \text{ cm}$

- A solução estacionária é dada pela função parabólica, mostrada abaixo, devido a taxa de degaseificação constante ao longo do tubo:

$$p_s(x) := -\frac{q_s}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{q_s \cdot L}{2} \right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S} \right)$$

- A solução para cada uma das fontes impulsivas de gás, no tempo e no espaço, são mostradas abaixo.

- O instante usado para a determinação do campo de pressão longo do tubo é mostrado a seguir.

$$t := 10^{-4} \text{ segundo}$$

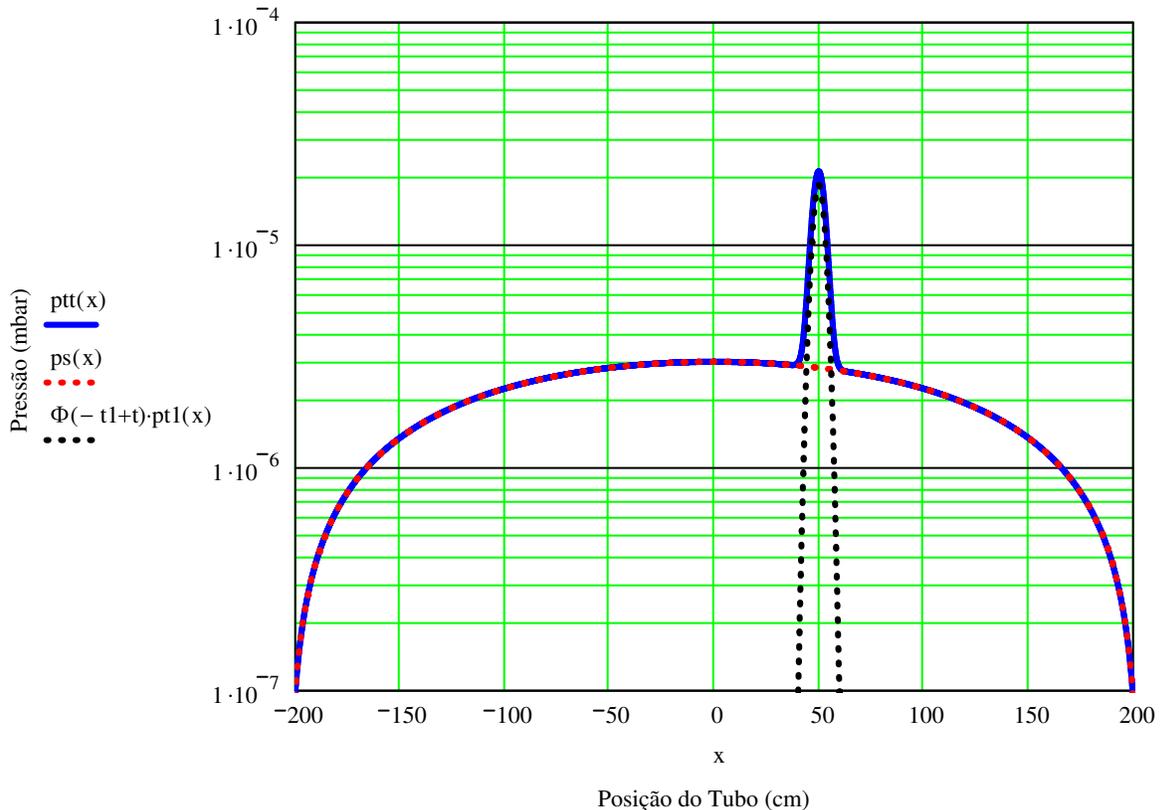
- Fonte impulsiva 1. Posição x_1 e instante t_1 . $x_1 := 50\text{cm}$ $t_1 := 0$ segundo

$$pt1(x) := \left(\frac{\alpha \cdot q_1}{c} \right) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot (t - t_1)}} \right] \cdot \exp \left[\frac{-(x - x_1)^2}{4 \cdot \alpha \cdot (t - t_1)} \right]$$

- A função pressão ao longo do tubo é dada pela soma das função pressão estacionária (perfil parabólico), somada a função pressão transiente (função erro). Isto pode ser feito devido a equação diferencial parcial ser linear, assim, podemos aplicar o princípio de superposição. A função abaixo mostrada representa o campo de pressão ao longo do tubo, considerando o instante $t=0,0001$ segundo.

$$ptt(x) := ps(x) + \Phi(-t_1 + t) \cdot pt1(x)$$

- A função Φ é a função degrau de Heveaside.
- O gráfico abaixo mostra o campo de pressão ao londo do tubo para $t=0,0001$ segundo.



- Agora, o instante usado para a determinação do campo de pressão longo do tubo é mostrado a seguir.

$$t := 10^{-2} \text{ segundo}$$

- Fonte impulsiva 1. Posição x_1 e instante t_1 .

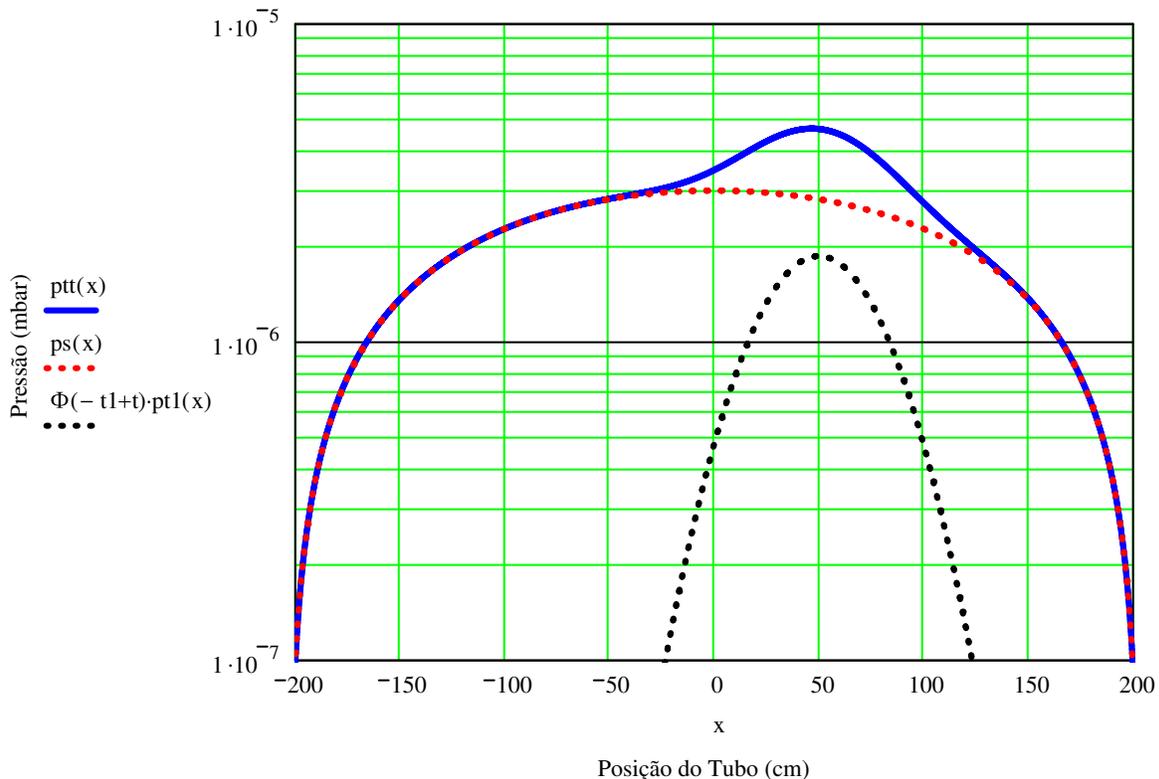
$$x_1 := 50 \text{ cm} \quad t_1 := 0 \text{ segundos}$$

$$pt_1(x) := \left(\frac{\alpha \cdot q_1}{c} \right) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot (t - t_1)}} \right] \cdot \exp \left[\frac{-(x - x_1)^2}{4 \cdot \alpha \cdot (t - t_1)} \right]$$

- A função pressão ao longo do tubo é dada pela soma das função pressão estacionária (perfil parabólico), somada a função pressão transiente (função erro). Isto pode ser feito devido a equação diferencial parcial ser linear, assim, podemos aplicar o princípio de superposição. A função abaixo mostrada representa o campo de pressão ao longo do tubo, considerando o instante $t=0,01$ segundo.

$$ptt(x) := ps(x) + \Phi(-t_1 + t) \cdot pt_1(x)$$

- A função Φ é a função degrau de Heveaside.
- O gráfico abaixo mostra o campo de pressão ao londo do tubo para $t=0,01$ segundo.



- Esta análise está considerando o problema de difusão de átomos e moléculas ao longo do tubo, no regime de escoamento molecular, linear. Desta forma, as fontes de gases agem de forma totalmente independentes. Inclusive, este aspecto está no bojo da conceituação do regime molecular.

Vemos que à medida que o tempo evolui a parte transiente da solução tende a zero, resgatando a parte estacionária, ou seja, o campo de pressão parabólico. Este modelo deve ser aplicado quando a fonte impulsiva de gás não for muito intensa, da ordem do *throughput* total do tubo, este ponto está discutido mais à frente.

3.3.5 Tubo com Várias Fonte de Gases Transientes Impulsivas.

No caso anterior modelamos um sistema de alto-vácuo em forma tubular com uma fonte impulsiva de gás presente, além da degaseificação das paredes de vácuo. Vimos que matematicamente podemos tratar separadamente cada um dos problemas, relativos a cada tipo de fonte de gás e em seguida superpor as soluções individuais e obter a solução geral do problema proposto. Discutimos que este procedimento está sustentado no fato dos átomos e moléculas no escoamento em regime molecular apresentar choques somente com as paredes do sistema de alto-vácuo.

Continuando com a exemplificação de sistemas de alto-vácuo tubulares, modelaremos o caso de estar presentes quatro fontes impulsivas de gases, além da fonte devida a degaseificação. A Figura 3.9 mostra esquematicamente a situação com a presença de algumas fontes impulsivas de gases, iniciaremos o estudo deste caso.

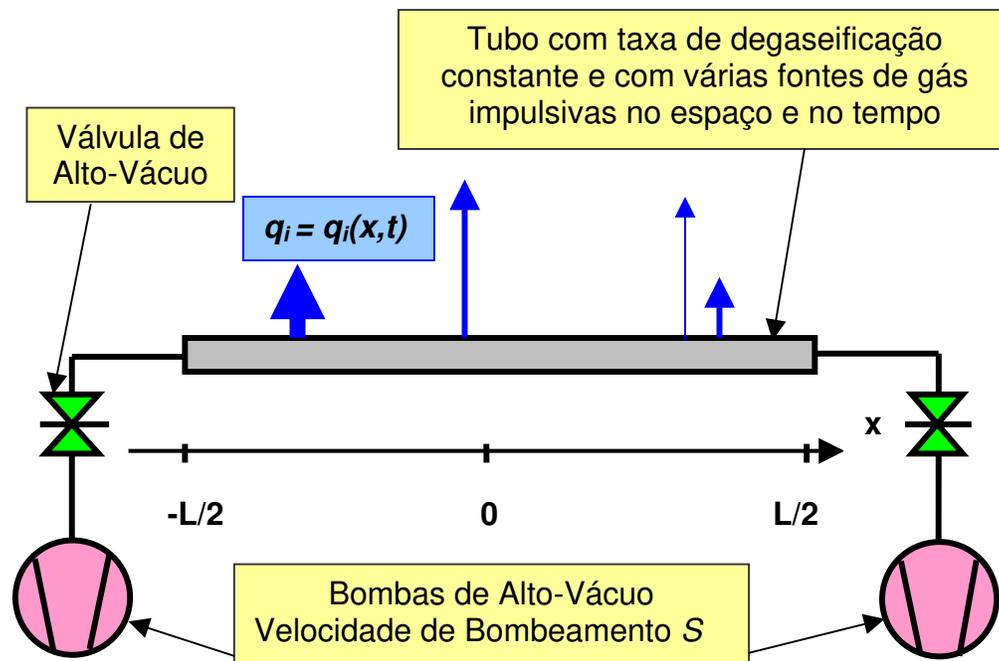


Figura 3.9 Sistema de alto-vácuo tubular apresentando degaseificação natural das paredes e várias fontes impulsivas de gases e vapores.

Este problema não apresenta dificuldade maior que o do caso anterior, apenas teremos que considerar mais fontes impulsivas, mas cada uma delas terá solução transiente do mesmo tipo do caso tratado na seção anterior. A modelagem do problema será feita baseada na linearidade da equação de difusão, que exprime o fato de as partículas não se chocarem entre si no escoamento dos gases em regime molecular e, portanto, na superposição das soluções para cada fonte de gás tratada independentemente. A equação de difusão é dada por

$$c \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -q(x,t) + A \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} ,$$

admitiremos que a solução geral do problema seja dada pela Expressão 3.17

$$p_G(x,t) = p_E(x) + p_{T1}(x,t) + p_{T2}(x,t) + p_{T3}(x,t) + p_{T4}(x,t) , \quad 3.17$$

ou seja, a solução geral do problema é a soma da solução do caso estacionário individual – fonte de gás devida exclusivamente à degaseificação – mais as soluções dos casos transientes – fontes de gás devidas às fontes impulsivas. As fontes gasosas podem ser colocadas matematicamente conforme a Expressão 3.18

$$q_G(x,t) = q + q_T^{Total}(x,t) , \quad 3.18$$

onde o primeiro termo é devido à taxa de degaseificação específica do tubo, considerada constante, e o segundo termo é devido a todas as quatro fontes transientes de gás, consideradas impulsivas no espaço e no tempo, cada uma agindo em instantes e posições que são em geral diferentes entre si. Modelaremos as quatro fontes impulsivas de gás conforme mostrada na Expressão 3.19

$$q_T^{Total}(x,t) = q'_1 \delta(x_1) \delta(t_1) + q'_2 \delta(x_2) \delta(t_2) + q'_3 \delta(x_3) \delta(t_3) + q'_4 \delta(x_4) \delta(t_4) , \quad 3.19$$

com os q'_i são quantidades constantes de gases ou vapores das fontes impulsivas. A interpretação física é a mesma que o caso estudado anteriormente. A solução geral do problema pode ser obtida considerando o princípio da superposição, na qual devemos adicionar todas as soluções obtidas individualmente. Devemos apenas prestar atenção para o fato das fontes impulsivas de gases e

vapores poderem ocorrer em instantes diferentes, neste caso deveremos fazer atuar a respectiva solução no instante correspondente a sua fonte impulsiva. Isto pode ser conseguida fazendo uso da função degrau *Heveaside* representada por $\Phi(t-t_i)$. Assim, a solução geral do problema é mostrada na Expressão 3.20

$$\begin{aligned}
 p_G(x,t) = & -\frac{q}{2c}x^2 + \frac{Q_r}{2}\left(\frac{1}{S} + \frac{L}{4c}\right) + \Phi(t-t_1)\frac{q'_1}{[4\pi c A(t-t_1)]^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{A(x-x_1)^2}{4c(t-t_1)}\right) + \\
 & + \Phi(t-t_2)\frac{q'_2}{[4\pi c A(t-t_2)]^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{A(x-x_2)^2}{4c(t-t_2)}\right) + \dots + \\
 & + \Phi(t-t_4)\frac{q'_4}{[4\pi c A(t-t_4)]^{\frac{1}{2}}}\exp\left(-\frac{A(x-x_4)^2}{4c(t-t_4)}\right)
 \end{aligned} \quad . 3.20$$

A solução geral do problema modelado é formada pela parte estacionária, dada pela função parabólica e pelas partes transientes. A discussão relativa às condições de contorno é exatamente a mesma no caso anterior, a linearidade do problema garante esta afirmação. A discussão relativa à limitação no modelo proposto segue o mesmo tipo de argumentação para o caso de somente uma fonte impulsiva de gás.

3.3.6 Tubo com Fonte de Gás Transiente Impulsiva no Tempo e Extensiva na Posição.

Este caso que modelaremos pode ser considerado uma generalização dos casos anteriores, uma vez que definiremos uma fonte gasosa impulsiva no tempo, mas que tem uma extensão espacial. Em outras palavras, a fonte de gás age em um instante bem definido – matematicamente falando – e em uma extensão finita do tubo. Esta situação pode ser o caso, por exemplo, de uma fonte gasosa devido ao choque de um feixe de partículas ou fótons em uma parte extensa do tubo da linha do feixe de um microscópio eletrônico. A modelagem realizada deve considerar em detalhe o processo de desorção física transiente que ocorre nas paredes do tubo.

Desta forma, devemos identificar o tipo de bombardeamento que está ocorrendo, podendo ser de elétrons, de fótons, ou ainda de íons leves ou pesados. Esta identificação é importante, uma vez que a seção de choque destas colisões será fundamental. Junto com a determinação do fluxo de partículas incidentes à superfície podemos calcular da taxa de gás removida das paredes do tubo em estudo, ou seja, o *throughput* da degaseificação transiente.

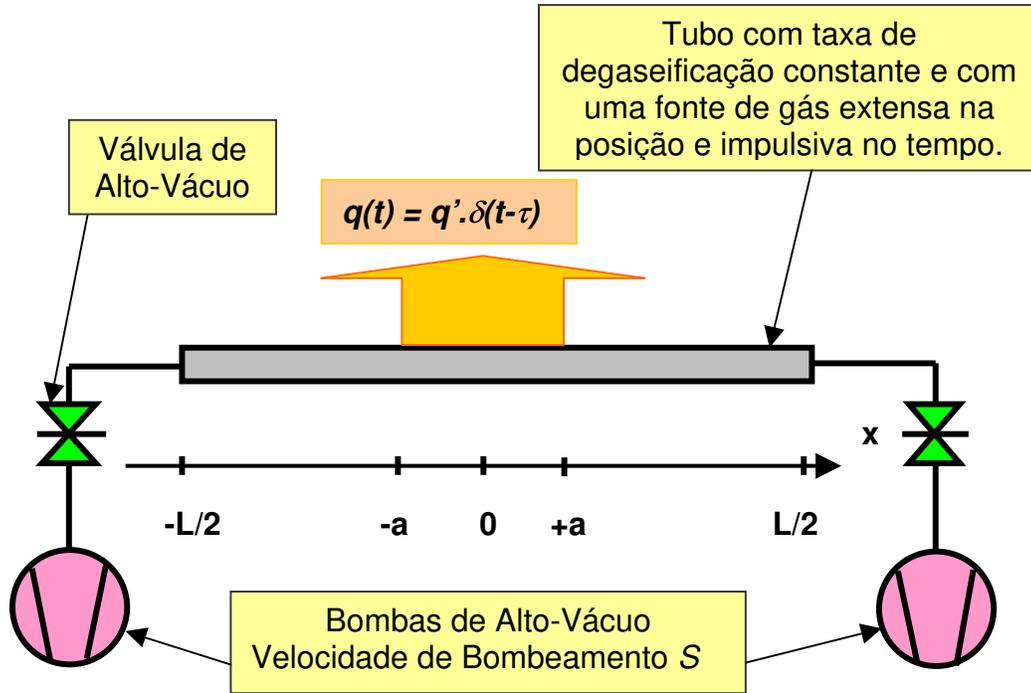


Figura 3.10 Estrutura de um sistema de alto-vácuo tubular apresentando uma fonte gasosa devido a degaseificação e uma fonte gasosa transiente que é impulsiva no tempo e extensiva na posição.

Este problema pode ser modelado considerando que qualquer função que represente uma fonte gasosa transiente pode ser considerada como uma superposição de fontes impulsivas. No caso mais geral, a solução do problema pode ser obtida pela Expressão 3.21

$$p_G(x,t) = -\frac{q}{2c} \cdot x^2 + \frac{qL}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{L}{4c} \right) + \int_0^t \int_a^b \frac{q_T(\xi, \tau)}{\left[4\pi c A (t - \tau) \right]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{A(x - \xi)^2}{4c(t - \tau)} \right) d\xi d\tau, \quad 3.21$$

para o intervalo que corresponde ao comprimento do tubo, $-\frac{L}{2} \leq a \leq \xi \leq b \leq +\frac{L}{2}$ e $0 \leq \tau \leq t$. A

fonte gasosa transiente, impulsiva no tempo e extensiva na posição, pode ser modelada conforme a Expressão 3.22

$$q(x,t) = q + q'(x) \cdot \delta(t - \tau), \quad 3.22$$

onde, q é relativo à fonte estacionária devido à degaseificação natural do tubo, $\delta(x - \tau)$ é a função delta de Dirac e $q'(x)$ é a função que representa a quantidade de gás liberado no intervalo espacial

$a \leq x \leq b$ e no instante $t = \tau$. Para a fonte gasosa estacionária – taxa de degaseificação específica constante ao longo do tubo – e a fonte gasosa transiente – impulsiva no tempo e extensiva na posição –, temos a solução do problema dada pela Expressão 3.23

$$p_G(x, t) = -\frac{q}{2c} x^2 + \frac{qL}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{L}{4c} \right) + \frac{1}{(4\pi c A t)^{\frac{1}{2}}} \int_a^b q'(\xi) \exp\left(-\frac{A(x-\xi)^2}{4ct}\right) d\xi. \quad 3.23$$

Encontramos esta situação ocorrendo em sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo, por exemplo, em aceleradores de partículas, tubos de microscópios eletrônicos, e outros, o feixe de partículas ou radiação chocando-se com as paredes do tubo, produz uma quantidade de gás devido a elétron ou fóton desorção. Nestes casos a modelagem do comportamento do alto-vácuo pode ser feita por meio do seguinte equacionamento. Matematicamente, a fonte gasosa transiente pode ser representada como na Expressão 3.24

$$q'(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -\frac{L}{2} \leq x < a \\ q', & \text{for } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{for } b < x \leq +\frac{L}{2} \end{cases}. \quad 3.24$$

Considerando tanto a solução estacionária como a solução transiente e mais uma vez usando a linearidade do sistema, obtemos a solução geral para o campo de pressão dada pela Expressão 3.25

$$\begin{aligned} p_G(x, t) &= p(x) + q' \frac{\alpha}{c} \int_a^b \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha t}\right] d\xi \\ &= p(x) + q' \frac{\alpha}{c} \int_{\frac{(x-b)/\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\alpha}}}^{\frac{(x-a)/\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{2\alpha}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = p(x) + \frac{q'}{2} \frac{\alpha}{c} \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{(x-a)}{\sqrt{4\alpha t}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{(x-b)}{\sqrt{4\alpha t}}\right] \right\} \end{aligned}, \quad 3.25$$

com os extremos das integrações dadas pelas posições do início e do fim da fonte gasosa transiente. A função $p=p(x)$ é devida a degaseificação natural do tubo, obtendo o perfil parabólico. Ainda, na solução alcançada acima a função $\operatorname{erf}(x)$ é a função erro, resultado bastante importante da física-matemática, presente em todos os fenômenos de difusão [5,7]. A seguir vemos um caso numérico que ilustra o caso estudado acima.

Campo de Pressão em Tubo com Taxa de Degaseificação Constante com uma Fonte de Gás Extensiva na Posição e Impulsiva no Tempo.

- Comprimento do tubo: $L := 400 \text{ cm}$
- Diâmetro do tubo : $D := 3 \text{ cm}$
- Comprimento da metade da extensão da fonte impulsiva de gás:
 $a := 30 \text{ cm} \quad 2 \cdot a = 60 \text{ cm}$
- Intervalo da extensão da fonte impulsiva de gás: $-30 \leq x \leq +30 \text{ cm}$
- Condutância específica, $c=C.L$: $c := 12 \cdot D^3 \quad c = 324 \text{ litros.cm/s}$
- Volume específico ou Volume por unidade de comprimento, $v=V/L$:
 $A := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad V := 10^{-3} \cdot A \cdot L \quad v := \frac{V}{L} \quad v = 7.069 \times 10^{-3} \text{ litro / cm}$
- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento, $q_s=Q_{\text{Total}}/L$:
 $q_s := 4.7 \cdot 10^{-9} \text{ mbar.litro/(s.cm)}$
com, $Q_{\text{Total}}=q_e \cdot (3,1416 \cdot D \cdot L)$
- q_e é a taxa de degaseificação específica do material.
 $q_s \cdot L = 1.88 \times 10^{-6} \text{ mbar.litros/segundo}$
- Velocidade de bombeamento nas extremidades do tubo: $S := 100 \text{ litros/segundo}$
- Coeficiente de difusão: $\alpha := \left(\frac{c}{v} \right) \quad \alpha = 4.584 \times 10^4 \text{ cm}^2/\text{segundo}$
- Fonte impulsiva de gás. Atuando no intervalo $-30 \leq x \leq +30 \text{ cm}$ e em $t=0$.
- Representação da fonte impulsiva de gás; $q' \cdot \delta$ de Dirac(t)
- Obs: representaremos q' no Mathcad como q_1 . $q_1 := 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ mbar.litro/cm}$
- Definição dos intervalos do tempo.
 $w := 1 \dots 14 \quad d_w := 10^{w-6} \quad z := 1 \dots 126 \quad b := 1 \dots 9 \quad \lambda := 0,9 \dots 117$
 $t_{b+\lambda} := b \cdot d \cdot \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda}{9}}$
- Solução do problema: Superposição da solução estacionária com a solução transiente. Estamos diante de um problema linear. As fontes de gases e vapores no regime de escoamento molecular podem ser tratadas como independentes.

- para $x=0$ cm.

$$x0 := 0$$

$$ps0 := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x0^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right)$$

$$p0t_z := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x0 + a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x0 - a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right)\right)$$

$$p0g_z := ps0 + p0t_z$$

- para $x=50$ cm.

$$x1 := 50$$

$$ps1 := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x1^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right)$$

$$p1t_z := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x1 + a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x1 - a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right)\right)$$

$$p1g_z := ps1 + p1t_z$$

- para $x=100$ cm.

$$x2 := 100$$

$$ps2 := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x2^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right)$$

$$p2t_z := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x2 + a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x2 - a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right)\right)$$

$$p2g_z := ps2 + p2t_z$$

- para $x=150$ cm.

$$x3 := 150$$

$$ps3 := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x3^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right)$$

$$p3t_z := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x3 + a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x3 - a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right)\right)$$

$$p3g_z := ps3 + p3t_z$$

- para $x=200$ cm.

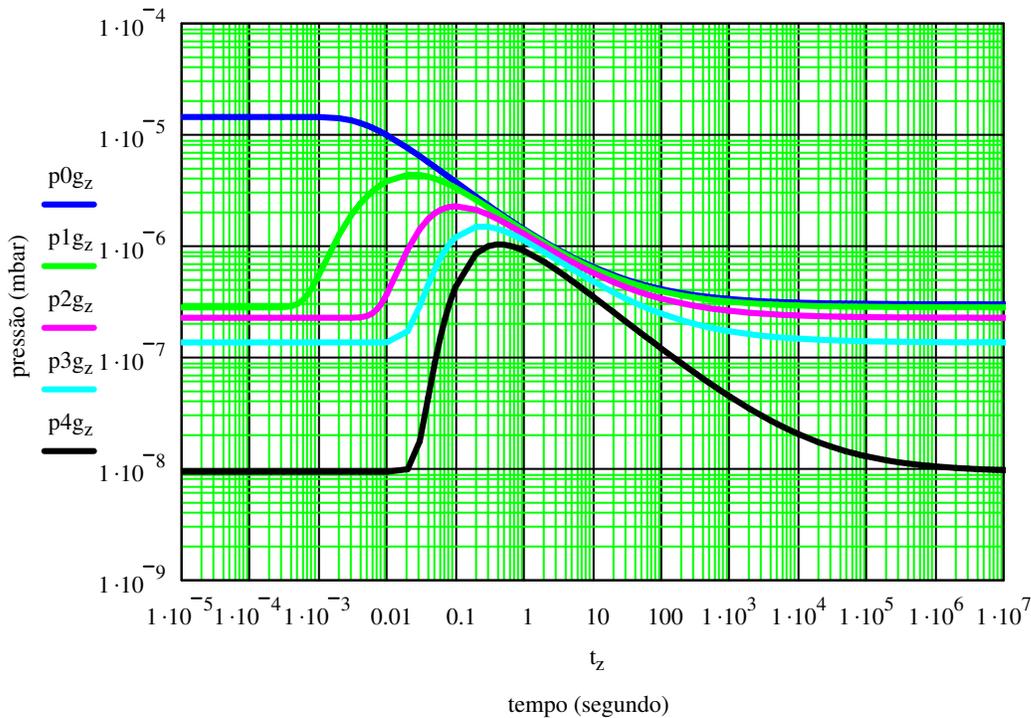
$$x4 := 200$$

$$ps4 := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x4^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right)$$

$$p4t_z := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x4 + a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x4 - a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t_z}}\right)\right)$$

$$p4g_z := ps4 + p4t_z$$

- O gráfico da pressão para algumas posições do tubo em função do tempo é mostrado abaixo.



- Vemos no gráfico acima o perfil de pressão para cinco posições do tubo, $x=0$ cm, $x=50$ cm, $x=100$ cm, $x=150$ cm e $x=200$ cm. O intervalo de tempo considerado é grande, da ordem de 1 ano. Vemos que as partes mais próximas de $x=0$ cm, a pressão volta rapidamente aos valores de estado estacionário (perfil parabólico), mas, a pressão junto à bomba de vácuo, isto é, $x=200$ cm, a pressão demora para retornar ao valor de estado estacionário.

Uma análise apressada pode levar-nos às conclusões erradas, apesar da posição junto à bomba de vácuo ter a maior velocidade de bombeamento, esta posição tem a menor pressão e mais, todo o gás devido à fonte transiente chegará em $x=200$ cm para ser bombeado. **O problema está em considerar o tubo infinito.**

- A seguir temos o cálculo do throughput ao longo do tubo para alguns tempos.

$$x := 0, 0.1 \dots 200 \quad t1 := .00000001$$

$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2} \right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S} \right) \quad pt1(x) := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c} \right) \cdot \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x+a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t1}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t1}} \right) \right)$$

$$pg1(x) := ps(x) + pt1(x) \quad Q1(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} pg1(x)$$

$$t2 := 0.0001$$

$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2} \right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S} \right) \quad pt2(x) := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c} \right) \cdot \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x+a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t2}} \right) \right)$$

$$pg2(x) := ps(x) + pt2(x) \quad Q2(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} pg2(x)$$

$$t3 := 0.01$$

$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right) \quad pt3(x) := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t3}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t3}}\right)\right)$$

$$pg3(x) := ps(x) + pt3(x) \quad Q3(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} pg3(x)$$

$$t4 := 1.0$$

$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right) \quad pt4(x) := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t4}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t4}}\right)\right)$$

$$pg4(x) := ps(x) + pt4(x) \quad Q4(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} pg4(x)$$

$$t5 := 1000$$

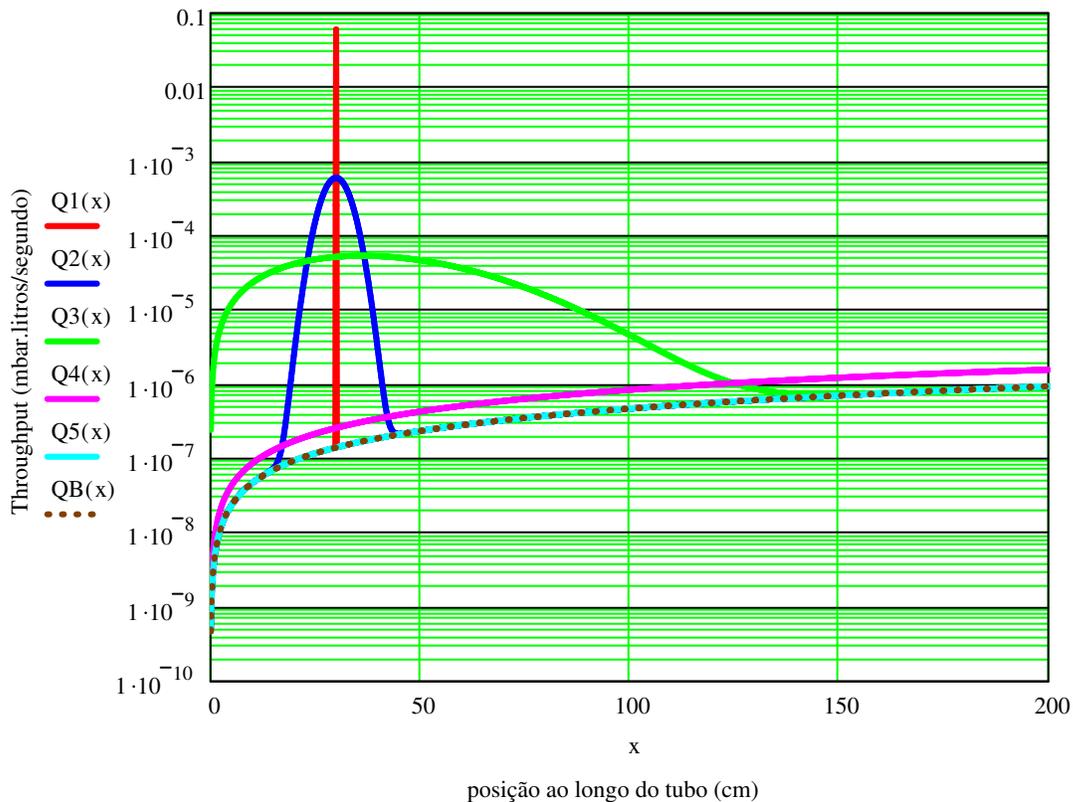
$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right) \quad pt5(x) := \left(\frac{q1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t5}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t5}}\right)\right)$$

$$pg5(x) := ps(x) + pt5(x) \quad Q5(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} pg5(x)$$

$$QB(x) := -c \cdot \frac{d}{dx} ps(x)$$

Tempos em segundo e Posições em cm

- O gráfico do throughput ao longo do tubo é mostrado a seguir. São feitos os cálculos para alguns instante de tempo.



- Vemos o *throughput* ao longo do tubo para alguns instantes de tempo. Para o instante bem próximo da ação da fonte impulsiva de gás, temos a variação abrupta do *throughput*, e em seguida, o gás escoando tanto para a esquerda como para a direita. Pouco tempo depois, recuperamos o perfil parabólico de pressão.

- Determinação da pressão ao longo do tubo para alguns instantes de tempo.

- Solução estacionária:
$$p_{ps}(x) := -\frac{q_s}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{q_s \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S}\right)$$

- Solução transiente:
$$p_{pt}(x, t) := \left(\frac{q_1 \cdot \alpha}{2 \cdot c}\right) \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sqrt{4 \cdot \alpha \cdot t}}\right)\right)$$

- Solução geral do problema linear:
$$p_g(x, t) := p_s(x) + p_t(x, t)$$

$$t_1 := 10^{-6}$$

$$p_{g1}(x, t_1) := p_s(x) + p_t(x, t_1)$$

$$t_3 := 10^{-4}$$

$$p_{g3}(x, t_3) := p_s(x) + p_t(x, t_3)$$

$$t_4 := 10^{-2}$$

$$p_{g4}(x, t_4) := p_s(x) + p_t(x, t_4)$$

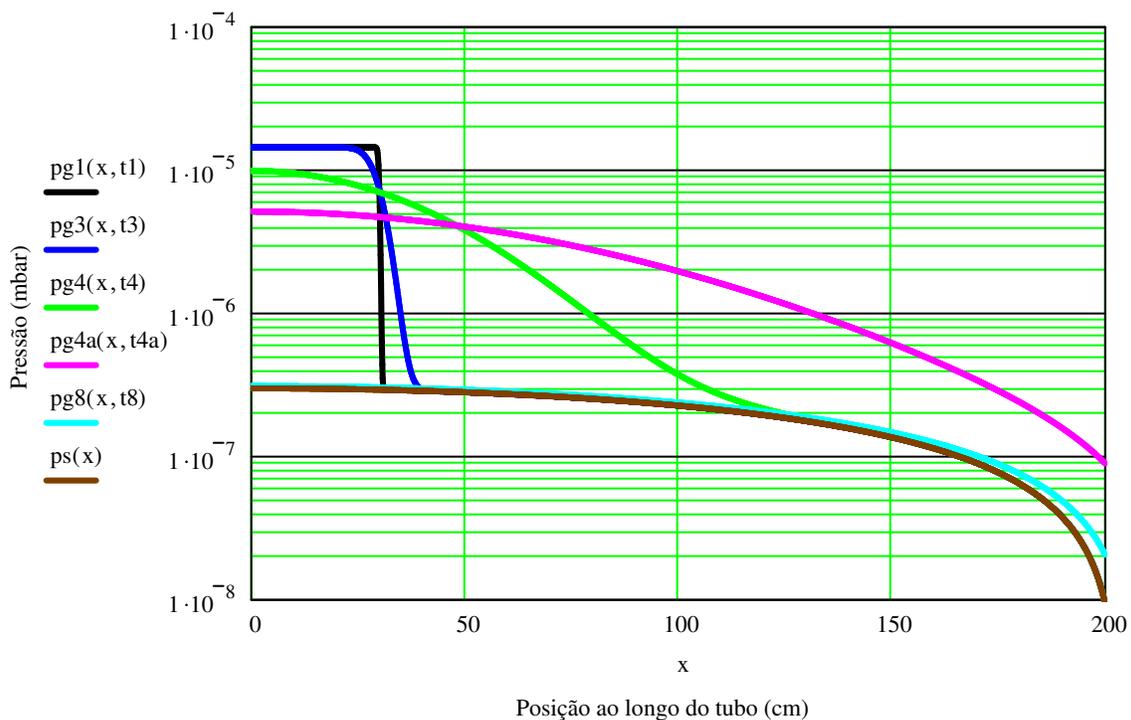
$$t_8 := 10^4$$

$$p_{g8}(x, t_8) := p_s(x) + p_t(x, t_8)$$

$$t_{4a} := 5 \cdot 10^{-2}$$

$$p_{g4a}(x, t_{4a}) := p_s(x) + p_t(x, t_{4a})$$

- Gráfico da pressão ao longo do tubo para alguns instantes de tempo.



- Faremos um modelo mais realístico a seguir. Considerando que o tubo é finito e com bombas de vácuo nas suas extremidades.

3.3.7 Tubo com Fonte de Gás Transiente Impulsivas no Tempo e na Posição e com Fonte de Gás Impulsiva no Tempo e Extensiva na Posição.

Apresentaremos a seguir modelagens realísticas para o tratamento de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo tubulares com fontes de gases transientes impulsivas no tempo e na posição e impulsiva no tempo e extensiva na posição. Complementando os casos tratados anteriormente e cujas soluções obtidas têm um alcance limitado, como expusemos e discutimos o assunto. Os esquemas dos sistemas de vácuo são os mesmos das Figuras 3.9 e 3.10.

A equação diferencial para modelar o sistema de vácuo é mostrada a seguir com o campo de pressão dado pela função $p=p(x,t)$

$$c \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -q(x,t) + A \frac{\partial p(x,t)}{\partial t},$$

sendo que $q=q(x,t)$ inclui ambas as fontes de gás estacionária e transiente, respectivamente $q_S(x,t)=q_S$ e $q_T=q_T(x,t)$, e A o volume por unidade de comprimento do tubo, assim a Expressão 3.26

$$q(x,t) = q_S + q_T(x,t). \quad 3.26$$

A solução geral é dada pela superposição da solução estacionária com a solução transiente, como mostrada na Expressão 3.27

$$p_G(x,t) = p_S(x) + p_T(x,t). \quad 3.27$$

A solução para o problema estacionário adiantamos é a conhecida função parabólica e o gás que alcança a extremidade direita do tubo deve satisfazer a igualdade, assim em $x = L/2$

$$-c \left. \frac{\partial p_T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L/2} = S p_T(L/2, t), \quad \forall t \geq 0.$$

E por simetria devemos ter que no intervalo $0 \leq x \leq +L/2$, tal que em $x=0$

$$c \left. \frac{\partial p_T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

A fonte de gás transiente ocorre em $t=0$, então

$$p_T(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq +L/2.$$

De forma explicita a solução geral do problema é mostrada a seguir pela Expressão 3.28

$$p_G(x,t) = -\frac{q_s}{2c} \cdot x^2 + \frac{q_s \cdot L}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{L}{4c} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\alpha \beta_m^2 t) K(\beta_m, x) \cdot \int_0^t \exp(-\alpha \beta_m^2 t') \frac{\alpha}{c} \bar{q}(\beta_m, t') dt' \quad 3.28$$

Os primeiros dois termos correspondem a solução estacionária referente ao perfil parabólico e o terceiro termo é relativo ao caso da fonte transiente. Demos encontrar os seguintes termos

$$K(\beta_m, x) = \sqrt{2} \left[\frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L'(\beta_m^2 + H_2^2) + H_2} \right]^{1/2} \cos(\beta_m, x)$$

e ainda,

$$\bar{q}(\beta_m, t') = \int_0^{L/2} K(\beta_m, x') q(x', t') dx'$$

onde β_m são soluções da equação transcendental

$$\beta_m \operatorname{tg} \left(\beta_m \frac{L}{2} \right) = \frac{S}{c} = H_2$$

e $q(x,t)$ é a função que representa a fonte de gás transiente, para $0 \leq x \leq +L/2$ e $t \geq 0$. O *throughput* em cada ponto do tubo é obido pela expressão

$$Q(x,t) = -c \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} ,$$

e ainda

$$Q_T(L/2,t) = \int_0^t -c \frac{\partial p(x,t')}{\partial x} \Big|_{x=L/2} dt'$$

onde Q_T é dado em mbar.litros.

Para o caso de fonte impulsivas na posição e no tempo, modelamos o problema da seguinte forma com a função mostrada a seguir na Expressão 3.29

$$q(x,t) = q_s + q' \delta(x - x') \cdot \delta(t - t') , \quad 3.29$$

onde q' representa a quantidade de gás liberada em $x = x'$ e $t = t'$. Assim, adotando $x' = 0$ e $t' = 0$, temos a função conforme a Expressão 3.30

$$p_G(x,t) = -\frac{q_s}{2c} \cdot x^2 + \frac{q_s \cdot L}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{L}{4c} \right) + \frac{q'}{2v} \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 \cos(\beta_m x) \exp(-\alpha \beta_m^2 t) , \quad 3.30$$

com $\alpha = \frac{c}{A}$, e

$$B_m^2 = 2 \frac{\beta_m^2 + H_2^2}{\left[\frac{L}{2} (\beta_m^2 + H_2^2) + H_2 \right]} .$$

Desta forma o throughput que chega à bomba de vácuo é dada pela função mostrada a na Expressão 3.31

$$Q_T(L/2,t) = q_s \frac{L}{2} t + \frac{q'}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m^2}{\beta_m} \operatorname{sen} \left(\beta_m \frac{L}{2} \right) \left[1 - \exp(-\alpha \beta_m^2 t) \right] . \quad 3.31$$

Fazendo o limite encontramos o resultando que nos expressa a coerência da solução obtida, assim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{q'}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m^2}{\beta_m} \operatorname{sen} \left(\beta_m \frac{L}{2} \right) [1 - \exp(-\alpha \beta_m^2 t)] \right\} = \frac{q'}{2}.$$

Para o caso de fonte de gás extensiva na posição e impulsiva no tempo, temos a Expressão 3.32 relativa à modelagem desta fonte de gás em questão

$$q(x, t) = q_s + q'(x) \cdot \delta(t - t'). \quad 3.32$$

Podemos assim, modelar a fonte de gás neste caso com a função mostrada na Expressão 3.33

$$q'(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } -L/2 \leq x < -a \\ q', & \text{for } -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{for } a < x \leq +L/2 \end{cases} \quad 3.33$$

Cuja solução geral do problema é dada pela Expressão 3.34

$$p_G(x, t) = -\frac{q_s}{2c} \cdot x^2 + \frac{q_s \cdot L}{2} \left(\frac{1}{S} + \frac{L}{4c} \right) + \frac{q'}{v} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m^2}{\beta_m} \sin(\beta_m a) \cos(\beta_m x) \exp(-\alpha \beta_m^2 t) \quad 3.34$$

Como no caso anterior, podemos calcular a quantidade de gás que chega à bomba de vácuo em função do tempo,

$$Q_T(L/2, t) = q_s \frac{L}{2} t + q' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m^2}{\beta_m^2} \sin(\beta_m a) \operatorname{sen} \left(\beta_m \frac{L}{2} \right) [1 - \exp(-\alpha \beta_m^2 t)],$$

que fazendo o limite para tempos muito grandes chegamos a expressão

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ q' \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m^2}{\beta_m^2} \sin \left(\beta_m \frac{L}{2} \right) \sin(\beta_m a) [1 - \exp(-\alpha \beta_m^2 t)] \right\} = q' a$$

mostrando mais uma vez coerência nos cálculos.

Podemos aplicar essas soluções gerais para casos numéricos específicos, com o propósito de ilustrar as soluções. Assim, para o caso de fonte gasosa impulsivas no tempo e na posição com

$x = 0$ cm e $t = 0$ s. Tendo os seguintes parâmetros $L = 400$ cm, $D = 3$ cm, $q_s = 4.7 \times 10^{-9}$ mbar.l.s⁻¹.cm⁻¹, $q' = 1.0 \times 10^{-6}$ mbar.l, $c = 324$ l.s⁻¹.cm, $A = 7.1 \times 10^{-3}$ l.cm⁻¹, $q_s L = 1.9 \times 10^{-5}$ mbar.l.s⁻¹, $\alpha = 4.56 \times 10^4$ cm².s⁻¹ e $S = 100$ l.s⁻¹. Entramos o seguinte perfil de pressão ao longo do tubo, considerando vários instante de tempo conforme a Figura 3.11.

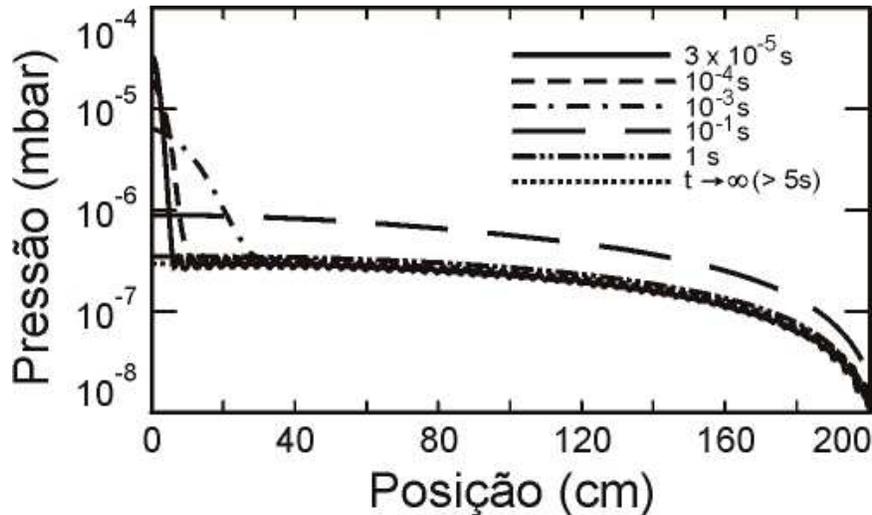


Figura 3.11 Campo de pressão no tubo para $x \geq 0$ para diferentes instantes de tempo.

Podemos ver o campo de pressão para tempos bem próximos ao disparo da fonte impulsiva e também para instante de tempo suficientemente longos para recuperar o perfil parabólico de pressão. Para fazer o traçado do gráfico acima foram utilizados 200 termos da série infinita da função obtida. O motivo de tamanho número de termos é que para representar funções impulsivas em tempos pequenos devemos reproduzir os detalhes da variação abrupta. Praticamente em menos de 10 segundos o perfil parabólico é recuperado. Este tipo de solução é de muita utilidade para o projeto de tubos aceleradores de partículas e sistemas de vácuo tubulares em geral. A Figura 3.12 mostra a evolução da pressão em função do tempo para cinco posições do tubo, explicitando, $x = 0$, 50, 100, 150 e 200 cm. Continuando, vamos fazer uma discussão que consideramos muito importante e que mostra a importância fundamental em estabelecermos com realismo e precisão as condições de contorno do problema em análise. Neste caso em estudo, verificamos que a imposição da condição de contorno do tipo Robin foi fundamental para fazermos coincidir a quantidade total de gás desenvolvida no tubo com aquela bombeada pelas bombas de vácuo colocadas nas extremidades deste tubo. Como mencionado na seção 3.3.6, nela, a modelagem considera o tubo infinito, segundo a condição de contorno imposta nas extremidades do tubo. Este modelo está bom considerando pequenas quantidades de gás desenvolvidas na fonte impulsiva – comparável à quantidade da fonte de gás estacionária.

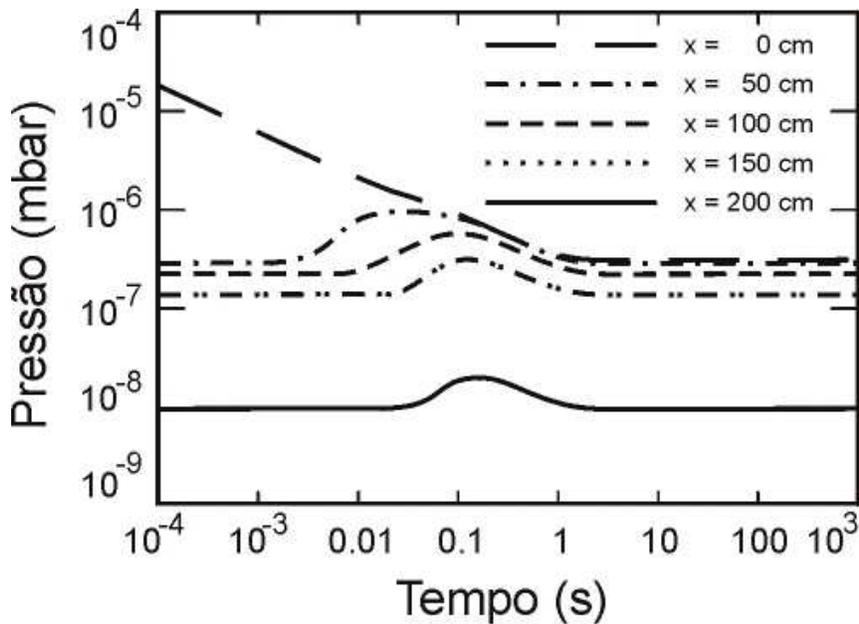


Figura 3.12 Evolução temporal da pressão observadas em cinco diferentes posições do tubo.

Para o caso de fonte de gás impulsiva no tempo e extensiva na posição, consideramos o seguinte caso numérico a fim de ilustrar a solução obtida. Com os parâmetros típicos $L= 400$ cm, $D= 3$ cm, $a= 30$ cm, $q_s = 4.7 \times 10^{-9}$ mbar.l.s⁻¹.cm⁻¹, $q' = 1.0 \times 10^{-6}$ mbar.l.cm⁻¹, $A = 7.1 \times 10^{-3}$ l.cm⁻¹, $c = 324$ l.s⁻¹.cm, $q_s.L = 1.9 \times 10^{-5}$ mbar.l.s⁻¹, $\alpha = 4.56 \times 10^4$ cm².s⁻¹ e $S = 100$ l.s⁻¹. Levando esses valores à solução geral temos o seguinte campo de pressão ao longo do tubo, conforme mostrado na Figura 3.13.

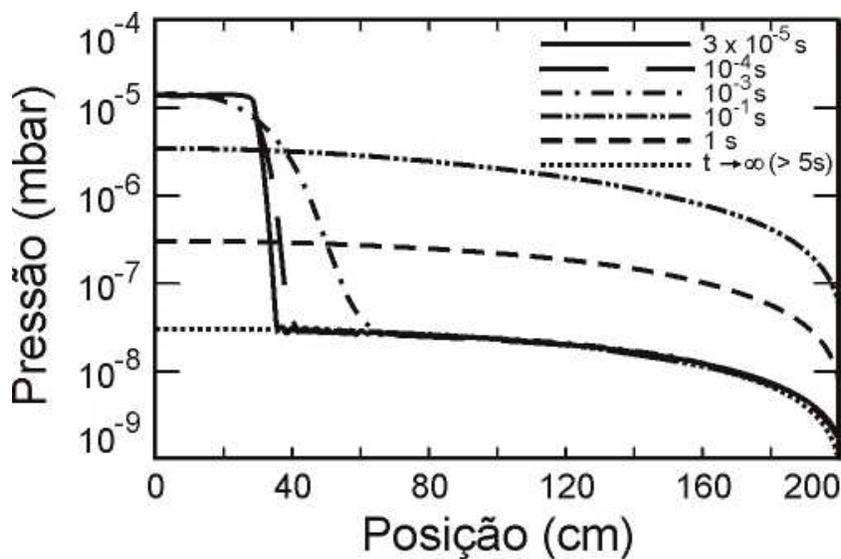


Figura 3.13 Campo de pressão ao longo do tubo para $x \geq 0$ para diferentes tempos.

Podemos ver o campo de pressão para tempos bem próximos ao disparo da fonte impulsiva extensiva na posição e também para instante de tempo suficientemente longos para recuperar o perfil parabólico de pressão. Para fazer o traçado do gráfico acima foram utilizados 200 termos da série infinita da função obtida. A discussão é a mesma que no caso anterior. Praticamente em menos de 10 segundos o perfil parabólico é recuperado. A Figura 3.14 mostra a evolução da pressão em função do tempo para cinco posições do tubo, explicitando, $x = 0, 50, 100, 150$ e 200 cm.

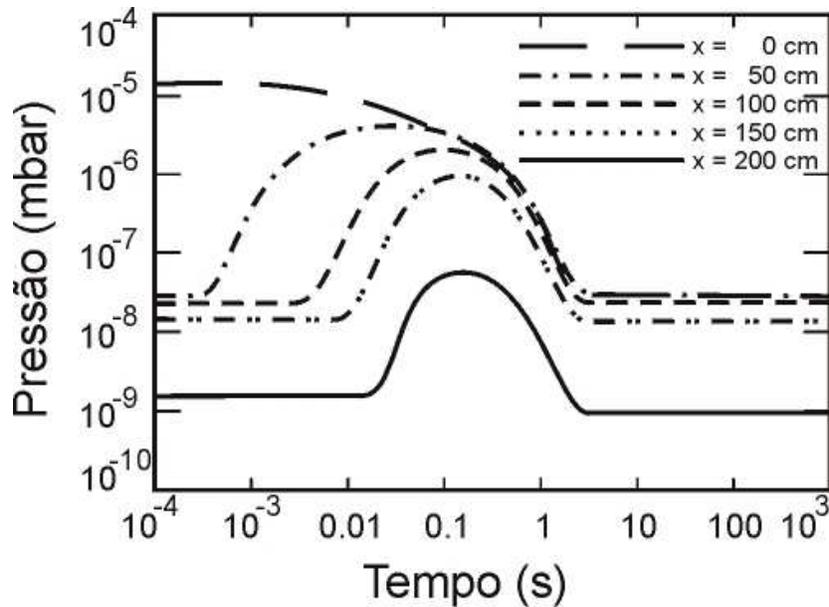


Figura 3.14 Evolução temporal da pressão observadas em cinco diferentes posições do tubo.

Concluindo, conseguimos obter uma solução bastante realista para fontes impulsivas em sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo em forma tubular. Fontes de gás impulsivas sempre estão presentes em sistemas de alto-vácuo, principalmente naqueles cuja participação de campos elétricos se fazem presentes. Nestes casos devemos considerar a proteção e o bom funcionamento do equipamento, neste sentido, os resultados conseguidos podem ser de grande ajuda no projeto do sistema de bombeamento. Continuando, podemos dizer que por meio das análises realizadas com os sistemas de alto-vácuo tubulares, os resultados obtidos não se restringem ao entendimento específico dos sistemas tubulares. Muito dos resultados obtidos podem ser um ponto de partida, mesmo que seja uma idéia, de como deve ser o comportamento de sistemas de alto-vácuo e de ultra alto-vácuo bidimensionais. Conforme mostrado no Apêndice B, a construção da equação de difusão bidimensional partiu do raciocínio da obtenção da equação de difusão unidimensional, mesmo que definições mais sofisticadas necessitem ser feitas.

3.3.8 Campo de Pressão em Tubo Cônico com Degaseificação Constante e Fonte de Gás Transiente Impulsivas na Posição e no Tempo.

Consideraremos a seguir a determinação do campo de pressão em um sistema de alto-vácuo tubular com taxa de degaseificação constante por unidade de área da parede e com uma fonte transiente de gás ocorrendo ao longo do tubo. As bases teóricas são as mesmas que aquelas do caso de estudo anterior, somente que deveremos considerar a geometria cônica do tubo. A condutância específica é dada pela Expressão 3.35

$$c(x) \equiv \frac{16}{3} \left(\frac{RT}{2\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} f^3(x), \quad 3.35$$

com $f=f(x)$ a função que representa o linha do contorno do tubo. O gás considerado é N_2 a temperatura de 293 K, assim

$$c(x) = 96 f^3(x).$$

A taxa de degaseificação por unidade de comprimento é dada pela Expressão 3.36

$$q(x) \equiv 2p q_0 f(x) \left[1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad 3.36$$

Para modelar o problema em alto-vácuo – regime de escoamento molecular – usamos a equação diferencial

$$c(x) \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \frac{dc(x)}{dx} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -q(x,t) + \nu(x) \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}.$$

A fonte de gás é dada pela Expressão 3.37

$$q(x,t) = q_s + q_T(x,t), \quad 3.37$$

explicitando a fonte de gás transiente em conjunto com a fonte de gás estacionária temos que

$$q(x,t) = q_s + q' \delta(x - x') \delta(t - t')$$

O campo de pressão estacionário é dado pela Expressão 3.38 mostrada a seguir

$$p_s(x) = -\frac{C_1}{2a(ax+b)^2} - \frac{bB}{196a^2(ax+b)^2} + \frac{Ab^2}{384a^3(ax+b)^2} + \frac{B}{96a^2(ax+b)} - \frac{bA}{96a^3(ax+b)} - \frac{A \ln(ax+b)}{192a^3} + C_2. \quad 3.38$$

Com os seguintes valores das constantes,

$$a = \frac{D-d}{2L}, \quad b = \frac{d}{2}, \quad A = 2pq_0(1+a^2)^{\frac{1}{2}}a \quad \text{e} \quad B = 2pq_0(1+a^2)^{\frac{1}{2}}b.$$

O sistema de vácuo tubular cônico está esquematizado na Figura 3.15

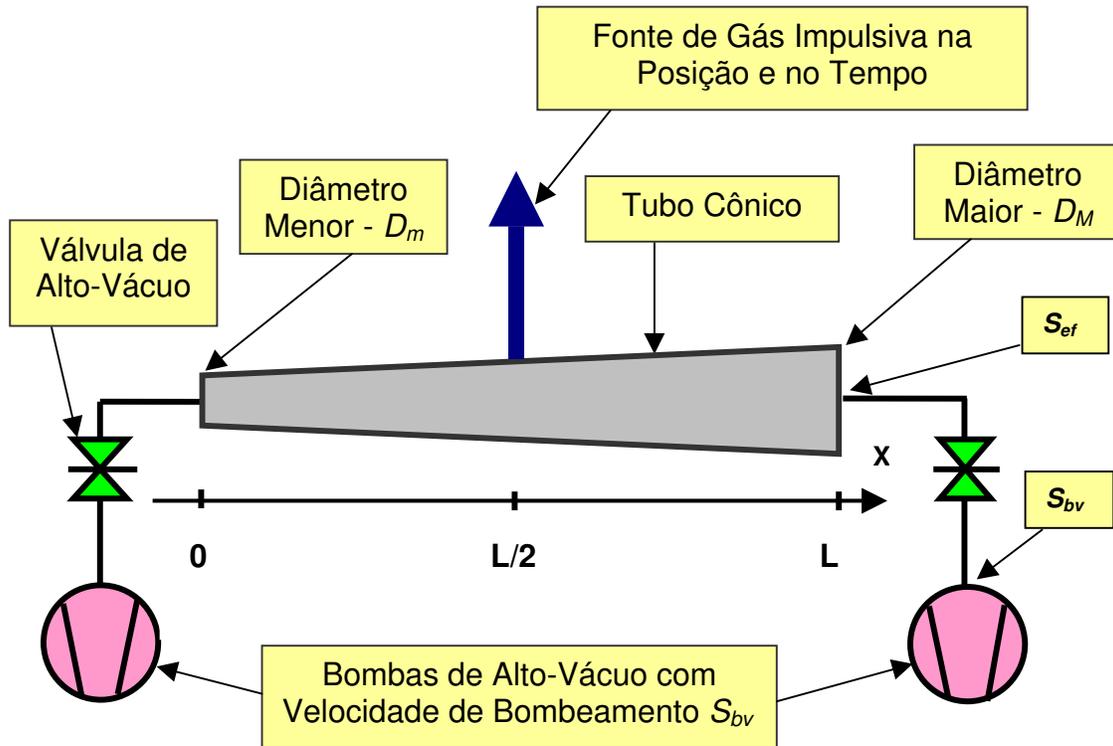


Figura 3.15 Sistema de alto-vácuo tubular cônico com bombas de vácuo nas suas extremidades.

Temos as seguintes condições de contorno – condição de contorno de Robin – e condição inicial do problema, para as extremidades do tubo cônico

$$c(0)\frac{\partial p_G(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = S_L p_G(0,t), \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad c(L)\frac{\partial p_G(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=L} = -S_R p_G(L,t), \quad \forall t \geq 0,$$

com a condição inicial

$$p_G(x,0) = p_s(x), \quad \forall x, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Encontramos, assim o campo de pressão dado pelas fontes de gás estacionária e transiente, conforme mostrado na Figura 3.16.

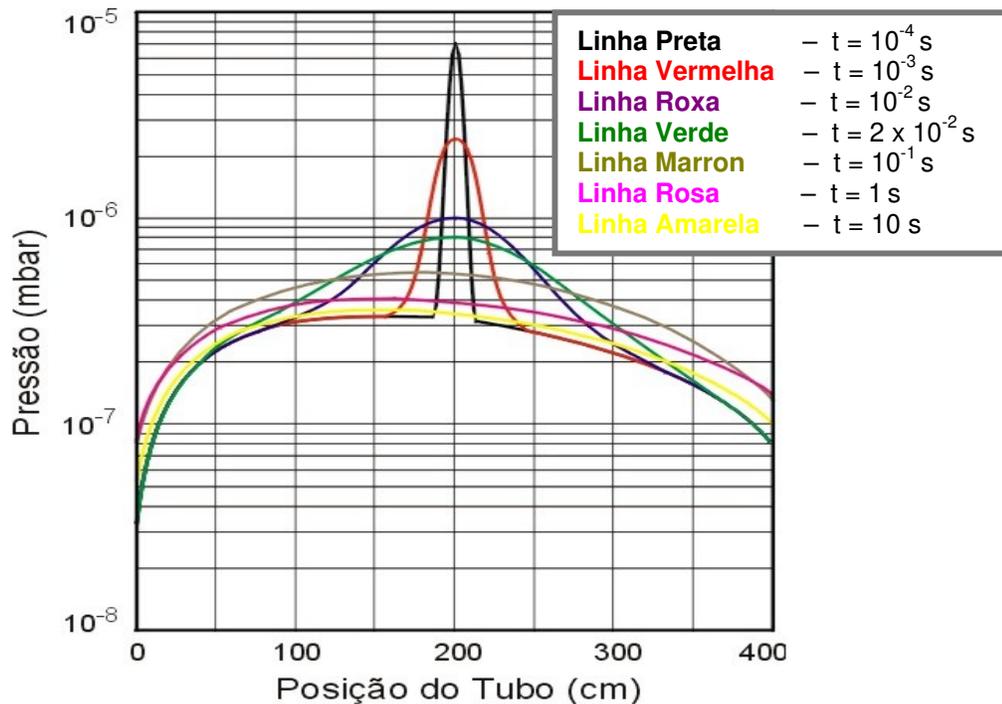


Figura 3.16 Campo de pressão ao longo do eixo do tubo cônico para vários instantes de tempo

Vemos assim o campo de pressão determinado para as fontes de gás estacionária, com obtenção neste caso de solução analítica, e transiente, com a respectiva solução obtida por métodos numéricos. Como mencionado, no Apêndice G, o campo de pressão estacionário foi comparado pelo método de Monte Carlo e os resultados estão em excelente acordo com aquele obtido pela equação de difusão, deduzida neste trabalho.

3.3.9 Campo de Pressão em Estruturas Aceleradoras com Cavidades Ressonantes.

Apresentamos a seguir o campo de pressão ao longo de uma estrutura aceleradora de partículas elementares com cavidades ressonantes, esquematicamente representada na Figura 3.17.

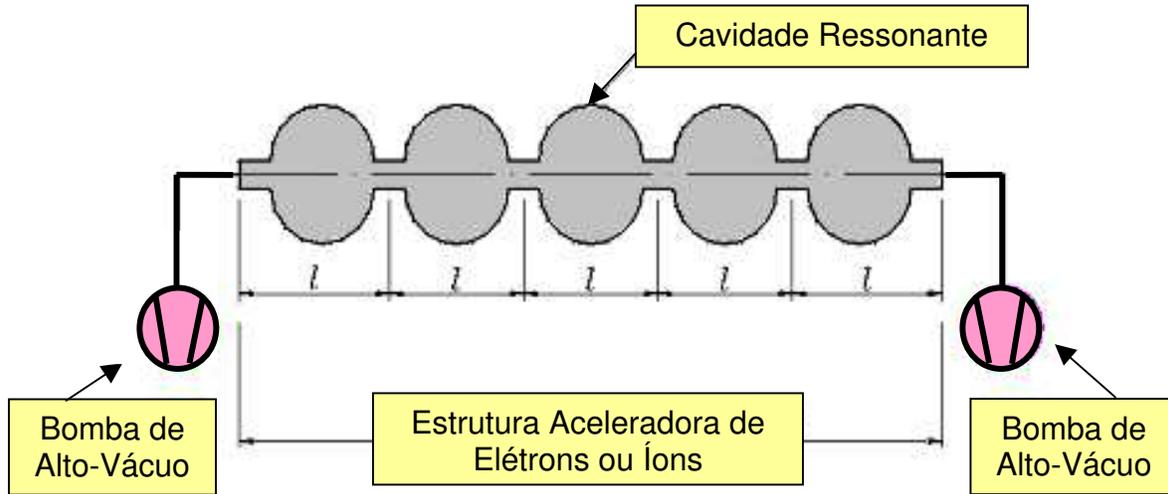


Figura 3.17 Desenho esquemático de uma estrutura aceleradora de partículas elementares com cavidades ressonantes.

Com cinco cavidades ressonantes e em cada extremidade da estrutura aceleradora temos uma bomba de alto-vácuo com velocidade de bombeamento igual à $S_{eff} = 10 \text{ l.s}^{-1}$. O material que é construída a estrutura aceleradora tem taxa de degaseificação específica por unidade de área igual à $q_{Cu} = 1.0 \times 10^{-7} \text{ mbar.l.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$, os detalhes da cavidade na Figura 3.18.

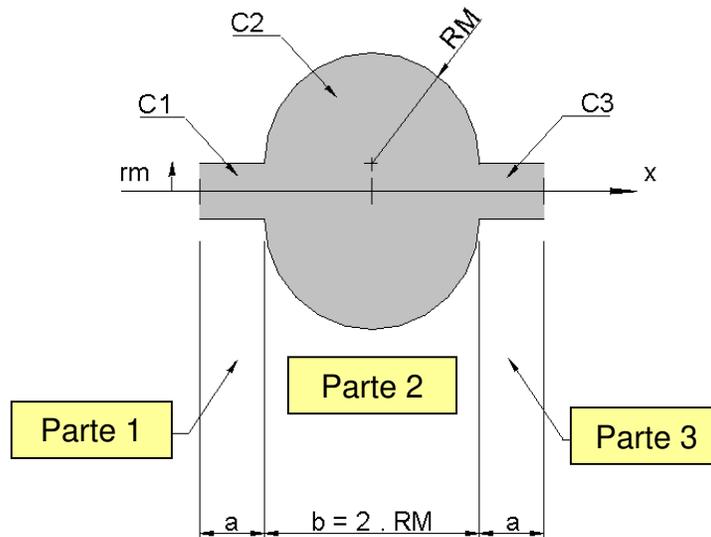


Figura 3.18 Mostrando esquematicamente a cavidade ressonante.

Com as seguintes condições de contorno podemos encontrar o campo de pressão ao longo do eixo da estrutura aceleradora de partículas elementares, em $x=0$ cm. Por meio da conservação do *throughput* – conservação da energia – chegamos às expressões mostradas a seguir,

$$p(0) = \frac{5 \cdot q_{RC}}{2 \cdot S_{eff}} \quad \text{e} \quad q(0) = -c(0) \left. \frac{dp(x)}{dx} \right|_{x=0},$$

mas ocorre que temos cinco cavidades ressonantes, como $5q_{RC}$, ficamos com

$$q(0) = -\frac{5q_{RC}}{2}.$$

Com a condutância específica por unidade de comprimento – parte 2 – dada pela Expressão 3.39

$$c_2(x) = 96.0 \cdot \left[\sqrt{9 - (x - 4)^2} + 0.4 \right]^3, \quad 3.39$$

a taxa de degassificação específica por unidade de comprimento dada pela Expressão 3.40 – parte 2 –

$$q_2(x) = \left\{ 2p \cdot 10^{-7} \left[\sqrt{9 - (x - 4)^2} + 0.4 \right] \sqrt{1 + \left[9 - (x - 4)^2 \right]^{-1} (x - 4)^2} \right\}. \quad 3.40$$

Obtemos o campo de pressão ao longo do eixo x , Figura 3.19 por procedimentos analíticos e numéricos.

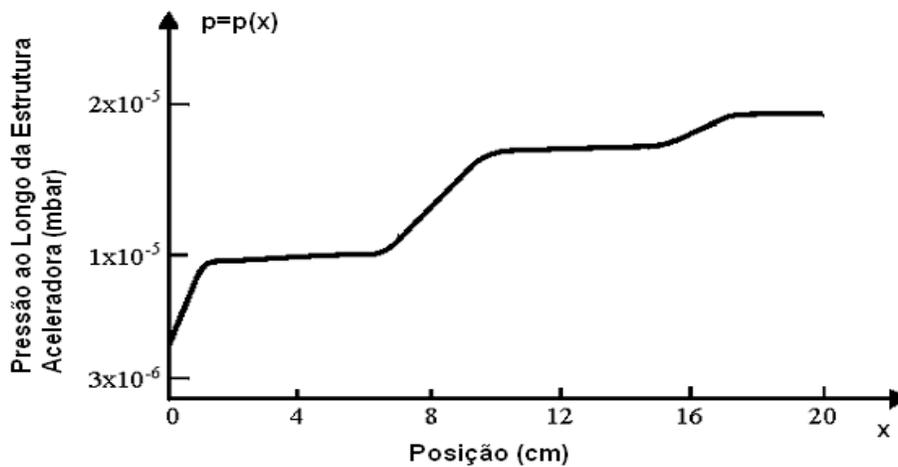


Figura 3.19 Campo de pressão ao longo da estrutura aceleradora.

3.3.10 Campos de Pressão em Sistemas de Vácuo Bidimensionais.

Aprofundando os estudos de casos de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo fizemos a modelagem em situações que apresentam muito interesse na atualidade. No caso estamos nos referindo a um possível substituto dos tubos de raios catódicos – TRC. Por mais de um século estes tubos têm mostrado ser eficientes e até o momento não há mostradores de imagens com a sua qualidade. Os problemas do TRC são o seu tamanho, consumo de energia e peso. Uma proposta que tem mostrado ser capaz de superar em todos os aspectos os TRC é o do Mostrador por Efeito de Campo – MEC. Do ponto de vista do vácuo, ele pode ser considerado formado por uma câmara de vácuo com geometria básica bidimensional, como mostrada esquematicamente na Figura 3.20.

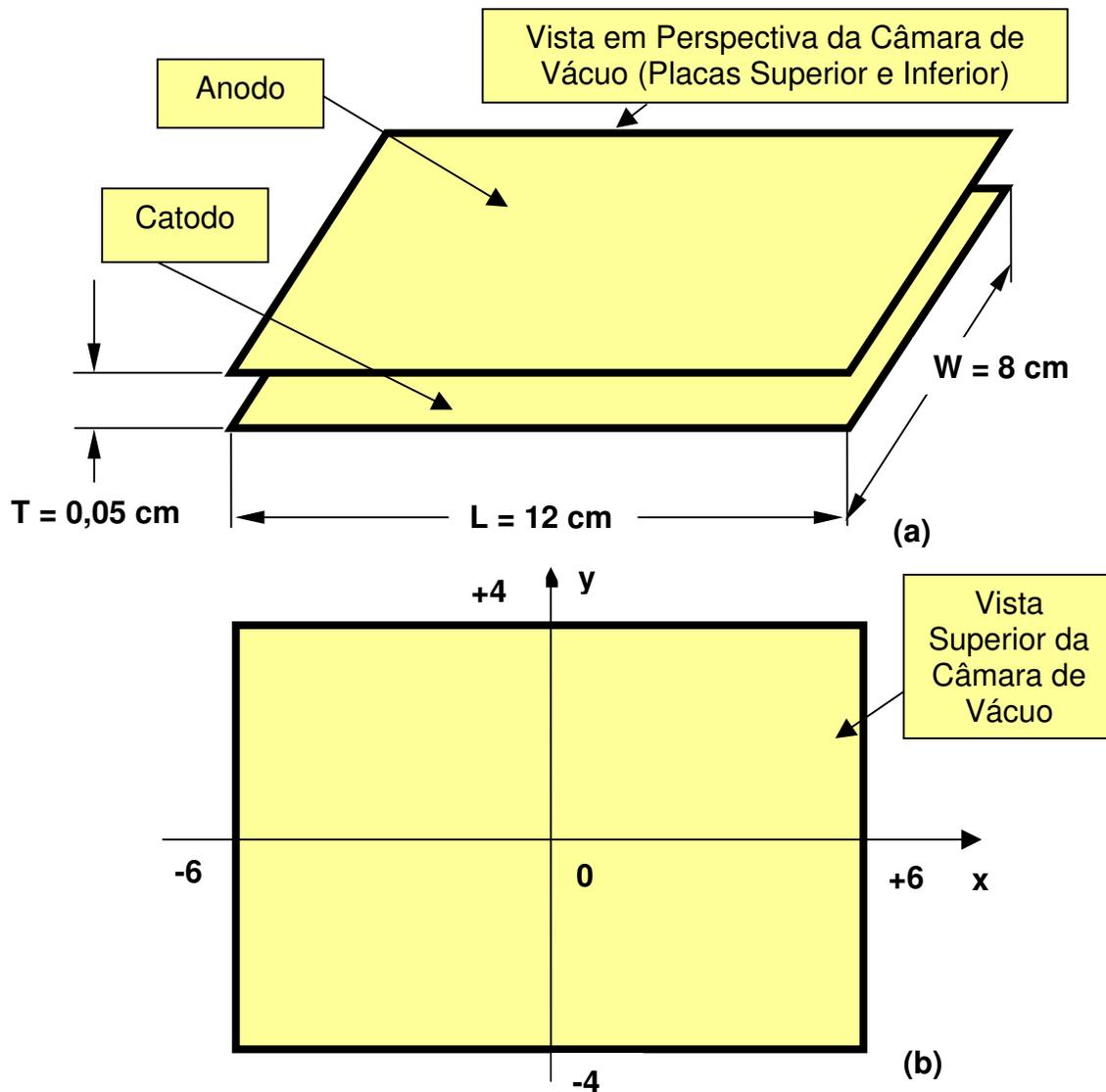


Figura 3.20 Esquema do sistema de alto-vácuo do Mostrador por Efeito de Campo – MEC, com as suas dimensões típicas em (a) e o sistema de coordenadas adotado à análise numérica em (b).

Muitos avanços têm sido feitos com esse tipo de dispositivo. Uma modelagem realística deste tipo de sistema de vácuo certamente não poderá ser realizada utilizando a abordagem discreta, uma vez que a altura da câmara de vácuo é muito menor que as outras dimensões, e com isso temos uma condutância muito pequena. Desta forma, a abordagem contínua deve ser utilizada. Desenvolvemos a equação de difusão capaz de modelar este tipo de sistema de vácuo. Temos a equação de difusão tanto para os casos estacionários como para os casos transientes.

Como no caso dos sistemas de alto-vácuo tubulares, a formulação contínua na modelagem leva à determinação do campo de pressão, ao contrário, a formulação discreta somente conseguimos determinar um valor de pressão para a câmara do sistema de vácuo. Tanto no caso dos tubos como nos casos, que trataremos nesta seção, das câmaras de vácuo bidimensionais, a formulação discreta somente consegue determinar uma pressão para cada instante e analisando os casos vemos que há enormes gradientes de pressão no sistema de alto-vácuo. Mais uma vez realçamos que a limitação na formulação discreta é intrínseca a sua própria estrutura e que no caso de sistemas de alto-vácuo como os MEC a formulação contínua é essencial [11-18, 20-25, 27-37]. Uma vez que temos disponível a equação de difusão bidimensional aplicaremos às estruturas do MEC, determinando o campo de pressão estacionário, isto é, os valores de pressão em todos os pontos da câmara de alto-vácuo não variam no tempo.

A Figura 3.21 mostra os casos bidimensionais a serem apresentados os seus campos de pressão, impondo as condições de contorno pertinentes a cada caso. Veja que a equação de difusão é a mesma para todos os casos, a distinção entre um particular caso e outro está expressa nas condições de contorno. Trataremos do caso de bombeamento ser feito através de um orifício, de seis orifícios, por duas fendas e por quatro fendas. O estabelecimento das condições de contorno é um passo essencial para solução do problema e certamente demanda muito esforço e o conhecimento detalhado do sistema físico em estudo. Para as condições de contorno do tipo de *Neumann*, impomos os valores de *throughput*, que estão relacionados ao operador gradiente, em certas linhas ou bordas da estrutura do sistema de alto-vácuo. Agora para as condições de contorno do tipo de *Dirichlet* impomos os valores de pressão em certas regiões, no caso específico dos visores, junto às regiões que dão acesso às bombas de vácuo.

Trataremos o problema em coordenadas cartesianas, devido à própria geometria do sistema em estudo. Desta forma, deveremos encontrar a função $p = p(x, y)$ que representa o campo de pressão. Apresentaremos o problema a seguir e a sua determinação será feita por meio da equação diferencial mostrada na expressão seguinte em sua forma geral com as condições de contorno possíveis e condição inicial. Neste caso temos a equação de *Poisson* mostrada a seguir.

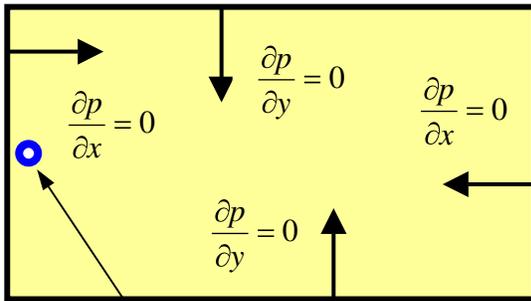
$$\frac{c_x}{La} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial y^2} = -q(x, y, t) + \frac{V_{cv}}{Co \cdot La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t}$$

$$p(x_A, y_A, t) = p_A(t)$$

$$-c_x \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, t} = q_A(t) \quad -c_y \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, t} = q_B(t)$$

$$\pm c_x \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, t} = S_A p(x_A, y, t) \quad \pm c_y \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, t} = S_B p(x, y_B, t)$$

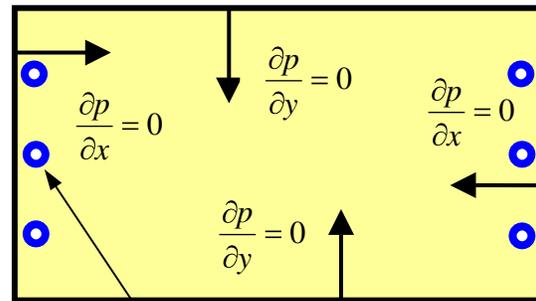
$$p(x, y, 0) = p_0(x, y)$$



$$p(-6, 0) = 3,8 \times 10^{-7} \text{ mbar}$$

$$S_{ef} = 1 \text{ l.s}^{-1}$$

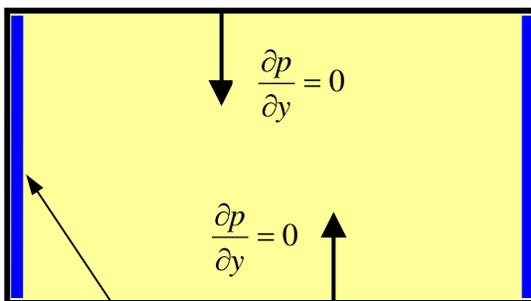
(a)



$$p(-6, 0) = 6,3 \times 10^{-8} \text{ mbar}$$

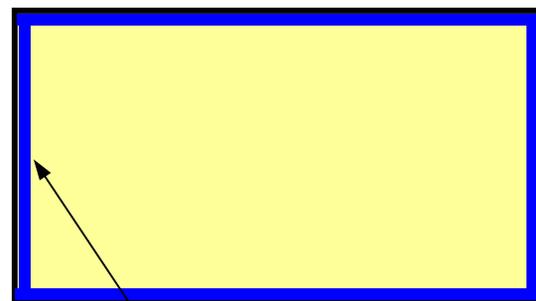
$$S_{ef} = 1 \text{ l.s}^{-1}$$

(b)



$$p(-6, y) = 1,9 \times 10^{-7} \text{ mbar}$$

$$S_{ef} = 1 \text{ l.s}^{-1}$$



$$p(-6, y) = 7,7 \times 10^{-8} \text{ mbar}$$

$$S_{ef} = 1 \text{ l.s}^{-1}$$

$$p(x, -4) = 7,7 \times 10^{-8} \text{ mbar}$$

$$S_{ef} = 1,5 \text{ l.s}^{-1}$$

(d)

Figura 3.21 Sistemas de alto-vácuo considerados para análise e obtenção do campo de pressão: (a) um orifício, (b) seis orifícios, (c) duas fendas e (d) quatro fendas.

Devemos estabelecer a seguir as condições de contorno do problema específico. Temos que nas regiões das bordas que definem a estrutura da câmara do visor, não havendo bombas de vácuo, teremos fluxo de gás igual a zero, desta forma assumimos nestas regiões que o *throughput* é nulo, matematicamente teremos

$$\frac{\partial p(x, y)}{\partial n} = 0 \quad ,$$

sendo n é a direção considerada em análise e nos casos as direções são x e y .

Continuando, as pressões nas regiões que dão acesso às bombas de vácuo e que constituem as outras condições de contorno podem ser determinadas pelo conhecimento do valor do *throughput* total de degaseificação e pela imposição de uma velocidade de bombeamento nas regiões escolhidas, conforme Expressão 3.41

$$p(x', y') = \frac{Q_{Total}}{S_{eff}} \quad . \quad 3.41$$

Veja que estamos implicitamente utilizando um ingrediente da modelagem discreta para a obtenção deste último resultado e como dissemos para estabelecer condições de contorno. O *throughput* total é determinado a partir do conhecimento do material utilizado na fabricação do visor e assim conhecemos a taxa de degaseificação específica deste material. A determinação matemática pode ser feita conforme vemos a seguir,

$$Q_{Total} = 2 q_e^{Mat} A_{Visor}$$

onde A_{Visor} é a área da placa do visor. Desta forma, podemos tratar da modelagem dos casos propostos. A solução será determinada numericamente utilizando um programa baseado no método dos elementos finitos [26-29]. Estaremos expondo o campo bidimensional de pressão e a respectiva curva isobárica ou as chamadas curvas de nível.

Conforme mostrado na Figura 3.21 (a), a configuração do sistema de alto-vácuo bidimensional sendo bombeado através de um orifício. A solução do problema é mostrada na Figura 3.22, com a determinação do campo de pressão e as curvas isobáricas.

Vemos que mesmo para regiões pouco afastadas do orifício de bombeamento as pressões aumentam muito comparadas à pressão no orifício. Este exemplo deixa claro que os resultados seriam impossíveis de ser obtidos por meio da formulação discreta. Mas veja que usamos a formulação discreta como ponto de partida para determinação da pressão junto ao orifício, ou seja, a região de bombeamento. Este exemplo expõe o fato de termos as duas abordagens como complementares entre si.

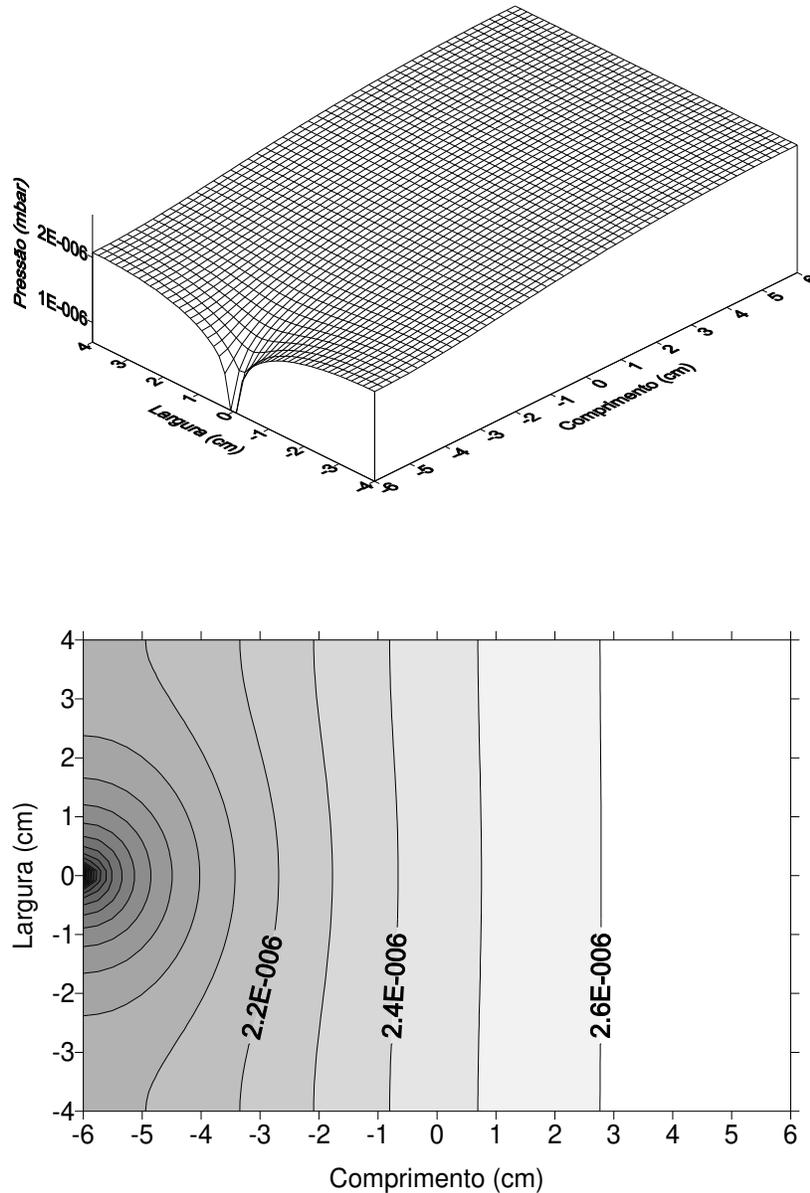


Figura 3.22 Na parte superior vemos o campo de pressão para o caso do visor ser bombeado através de um orifício. Na parte inferior vemos as curvas isobáricas.

A seguir temos um caso mais difícil de ser modelado, com o mesmo dispositivo MEC. A câmara de alto-vácuo dele é bombeada através de seis orifícios, como podemos ver na Figura 3.21 (b). Como no caso anterior, a velocidade de bombeamento em cada orifício é imposta e assim, estabelecidas as condições de contorno resolvemos a equação diferencial, mais uma vez lançando mão do método dos elementos finitos, determinando o campo de pressão e o seu campo gradiente mostrados na Figura 3.23.

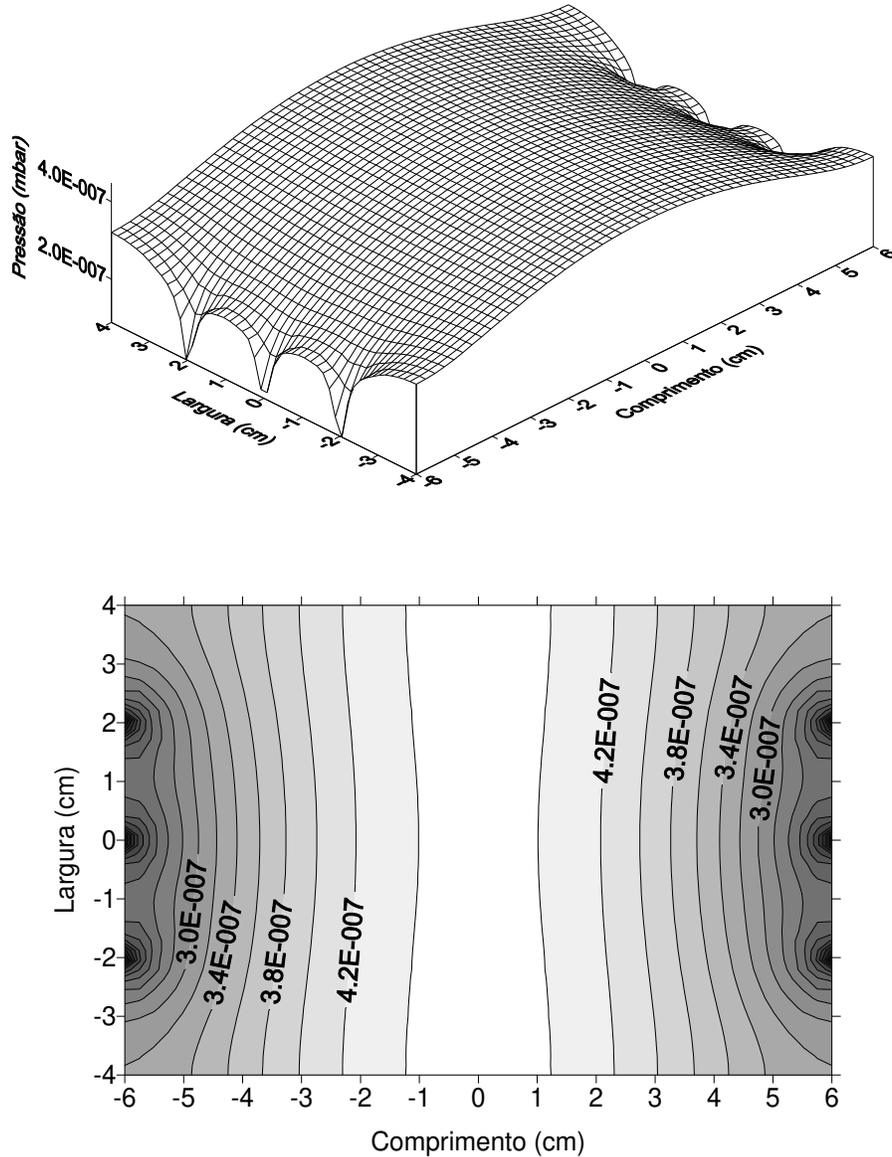


Figura 3.23 Na parte superior vemos o campo de pressão para o caso do visor ser bombeado através de seis orifício. Na parte inferior vemos as curvas isobáricas.

Como no caso anterior, também neste caso vemos que à medida que nos afastamos dos orifícios, a pressão aumenta rapidamente, indicando com isso a dificuldade de bombear em estruturas deste tipo, ou seja, câmaras de vácuo bidimensionais. Na figura 3.23 temos mostrados o campo de pressão e o respectivo campo de seu gradiente, as chamadas curvas isobáricas. Como nos casos anteriores, mais uma vez a abordagem discreta foi utilizada para estabelecer as condições de contorno do problema apresentado na Figura 3.21 (c). Apesar de todos os casos apresentarem velocidades do bombeamento muito próximas entre si, vemos que os campos de pressão são muito diferentes, fato que não seria possível de ser observado objetivamente com a modelagem a partir da abordagem discreta. Vemos o campo de pressão e seu gradiente na Figura 2.24.

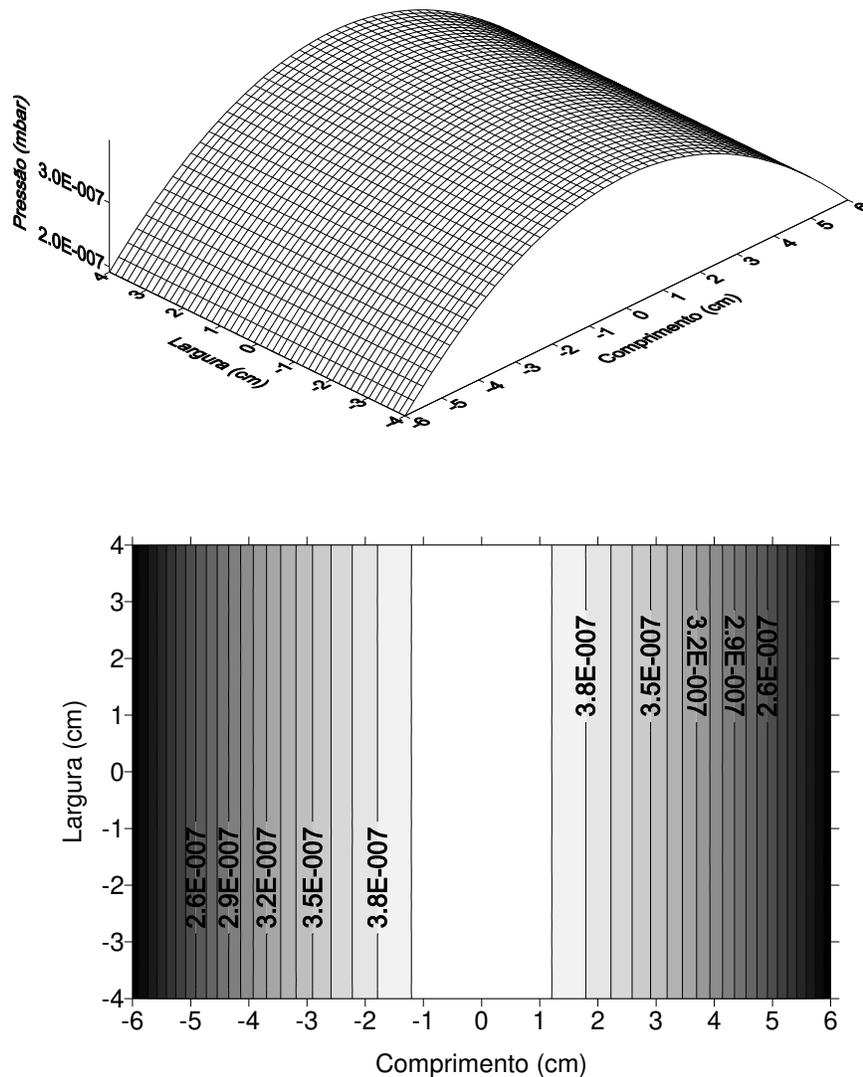


Figura 3.24 Na parte superior vemos o campo de pressão para o caso do MEC sendo bombeado através de duas fendas. Na parte inferior vemos as curvas isobáricas.

O bombeamento feito desta forma tem uma linha de extensão maior que aquele feito através dos orifícios. Podemos assim esperar variações menos intensas no campo de pressão, ou em outras palavras, gradientes menores de pressão. Apesar de neste caso a velocidade de bombeamento total ser de 2 litros/segundo a pressão no centro do visor é em torno de $3,8 \cdot 10^{-7}$ mbar, enquanto que no caso do bombeamento através dos seis furos ter velocidade de bombeamento total de 6 litros/segundo, a pressão alcançada no centro de visor é em torno de $4,2 \cdot 10^{-7}$ mbar. Vemos a importância de termos o bombeamento distribuído em relação ao concentrado. Não conseguiríamos obter estes resultados por meio de abordagem discreta.

No caso seguinte, a câmara de alto-vácuo do MEC é bombeada através de quatro fendas colocadas bem junto a cada lado da estrutura retangular, conforme podemos ver na Figura 3.19 (d). Na Figura 3.25 temos o campo de pressão e o respectivo campo de gradiente de pressão. Analisando este caso e comparando com os casos anteriores, principalmente em relação ao caso do bombeamento feito através dos orifícios e das duas fendas, acarretando com isso variações menos bruscas no campo de pressão em relação aos casos anteriores.

Vemos que neste caso em estudo, apesar da velocidade de bombeamento total ser de 5 litros/segundo a pressão no centro do visor é aproximadamente de $1,4 \cdot 10^{-7}$ mbar, enquanto que para o caso do bombeamento através do seis furos ter velocidade de bombeamento total de 6 litros/segundo a pressão no centro de visor é em torno de $4,2 \cdot 10^{-7}$ mbar. Vemos mais uma vez a importância de termos o bombeamento distribuído em relação ao concentrado, podemos dizer da enorme importância dos bombeamentos distribuídos para obtermos pressões e seus gradientes menos intensos que os concentrados.

No caso do bombeamento distribuído no contorno do MEC conseguimos obter a solução analítica para o caso de uma câmara de vácuo de bidimensional com L e W quaisquer, com a solução geral do problema é mostrada na próxima página. Encontramos também a solução analítica para o caso de uma fonte de gás impulsiva tanto na posição como no tempo estiver correndo em qualquer parte do MEC. Este tipo de fonte de gás é fundamental ser modelada, pois corresponde à situação física de um feixe de elétrons de grande intensidade chocando-se com a tela do mostrador de imagens MEC. Fato presente também nos tubos de raios catódicos, corresponde à situação de uma imagem de grande intensidade de luz sendo formada na tela. Assim, no caso do MEC devemos estudar o sistema de vácuo de modo a que situações transientes de grande intensidade sejam evitadas com acionamento adequado de circuito eletrônico de proteção, restringindo assim o sinal elétrico a ser enviado à tela do MEC.

Assim, a função $p=p(x,y)$ do campo de pressão estacionário para o caso de bombeamento em toda a borda é dada a seguir pela Expressão 3.42

$$\begin{aligned}
p(x, y) = & \frac{4p_B}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{b}\left(\frac{a}{2}-x\right)\right] \operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{b}\left(\frac{a}{2}+y\right)\right]}{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi a}{b}\right](2n+1)} + \\
& + \frac{4p_B}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{b}\left(\frac{a}{2}+x\right)\right] \operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{b}\left(\frac{a}{2}+y\right)\right]}{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi a}{b}\right](2n+1)} + \\
& + \frac{4p_B}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{a}\left(\frac{b}{2}+y\right)\right] \operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{a}\left(\frac{a}{2}+x\right)\right]}{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi b}{a}\right](2n+1)} + \\
& + \frac{4p_B}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y\right)\right] \operatorname{sen}\left[(2n+1)\frac{\pi}{a}\left(\frac{a}{2}+x\right)\right]}{\sinh\left[(2n+1)\frac{\pi b}{a}\right](2n+1)} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-F_{mn}}{(m^2+n^2)\pi^2} \operatorname{sen}\left[n\pi\left(\frac{x+a}{2a}\right)\right] \cos\left[m\pi\left(\frac{y+b}{2b}\right)\right]
\end{aligned}$$

3.42

com

$$F_{mn} = \frac{1}{ab} \int_{\frac{-a-b}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{-b}{2}}^{\frac{b}{2}} q_s \operatorname{sen} n\pi\left(\frac{x+a}{2a}\right) \cos m\pi\left(\frac{y+b}{2b}\right) dx dy .$$

Sendo que o campo de pressão transiente para uma fonte impulsiva no tempo e na posição é dada por

$$P_T(x, y, t) = \left(\frac{q\alpha}{2c}\right) \left\{ \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+A}{\sqrt{4\alpha t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-A}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \right] x \left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+B}{\sqrt{4\alpha t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-B}{\sqrt{4\alpha t}}\right) \right] \right\}$$

com q a quantidade de gás em termos de *throughput*, A e B as dimensões da fonte de gás impulsiva. Cabe mencionar que neste caso valem também os comentários referentes a consideração da fonte impulsiva ter sido modelada com no caso daqueles dos sistemas de alto-vácuo unidimensionais, ou seja, tubulares.

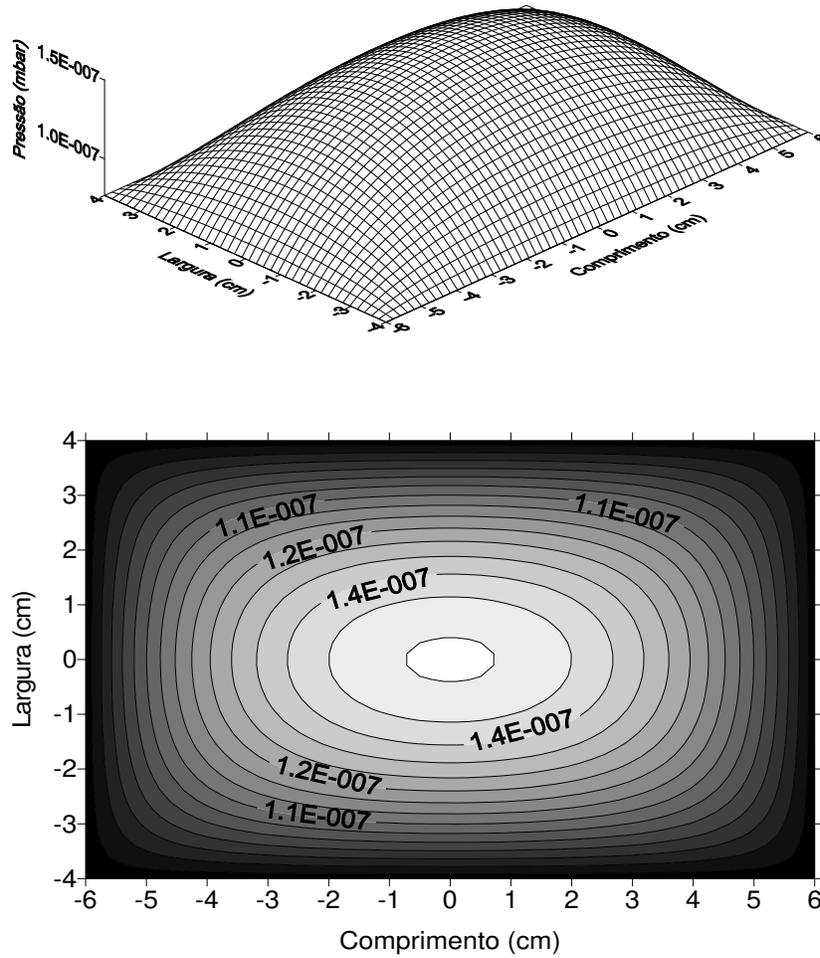


Figura 3.25 Na parte superior vemos o campo de pressão para o caso do visor ser bombeado através de toda a borda da câmara de vácuo do MEC. Na parte inferior vemos as curvas referentes ao campo gradiente de pressão.

Concluindo esta seção, vimos que os campos de pressão e os respectivos campos gradientes de pressão puderam ser obtidos por meio da equação de difusão. Em um estudo mais profundo realizado no Apêndice G fizemos uma comparação com resultados obtidos por meio do método de *Monte Carlo*. Apesar de no caso do bombeamento efetuado por todo o contorno da

câmara de alto-vácuo bidimensional ter sido possível encontrar a sua solução analítica, em geral, temos que dificilmente nos casos corriqueiros isso é possível. Nestes casos certamente deveremos lançar mão dos métodos numéricos, sendo o mais indicado e bem desenvolvido o método dos elementos finitos. O módulo térmico dos pacotes computacionais comerciais pode ser utilizado. Fica claro, comparando com as modelagens feitas casos apresentados anteriormente, que por meio da formulação discreta não seria possível obter o campo de pressão dos sistemas de vácuo bidimensionais estudados, não obstante, usamos a formulação discreta para determinar as condições de contorno a serem imposta à obtenção da solução do problema particular.

3.4 Discussão.

Com as modelagens realizadas nesta seção foi possível estudar e aprender sobre o comportamento de sistemas de alto-vácuo com geometrias unidimensionais e bidimensionais. Obtivemos soluções analíticas para vários casos de interesse, com situações bastante encontradas na tecnologia do vácuo. Com o desenvolvimento de uma plataforma de trabalho versátil do ponto de vista computacional, afirmação feita devido a verificação que nos casos de estudos realizados, as suas soluções foram obtidas em questão de minutos, uma vez construídos os modelos físicos. Desta forma, poderemos estudar de forma eficiente e segura situações de projeto para a determinação, por exemplo, do espaçamento máximo entre bombas de alto vácuo em uma linha de transporte de feixe de elétrons. Também estudamos o tempo que será necessário deixar sem feixe um tubo acelerador de partículas caso haja um processo que libere uma quantidade impulsiva de gás no tubo. Poderemos neste caso decidir se devemos ou não colocar mais bombas de vácuo ou esperar restabelecer uma pressão segura no tubo do sistema de vácuo. Assim, foi possível atingir o objetivo de modelar e analisar em detalhe os sistemas de alto-vácuo unidimensionais e bidimensionais por meio da formulação contínua e assim obter o valor de pressão em todos os seus pontos.

Sempre poderemos aprimorar os modelos feitos nesta seção, em particular, referentes a especificação das fontes de gases e principalmente os vapores, estes últimos participam de forma determinante em muitos sistemas de vácuo [11, 19-22, 25-28, 31-38].

3.5 Alcance e Limitações das Formulações Discreta e Contínua.

Do apresentado neste trabalho de tese tanto na construção da base teórica como nas aplicações, contidos nos capítulos e nos apêndices, acreditamos que foi possível contribuir no desenvolvimento e aprimoramento de ferramentas matemáticas analíticas e computacionais para análise, modelagem e cálculo de sistemas de vácuo. Foram discutidas e sistematizadas as formulações discreta e contínua na modelagem de sistemas de vácuo. Foram construídas as curvas

de velocidade de bombeamento para todos os tipos de bombas de vácuo, as condutâncias foram consideradas em detalhe na modelagem, a degaseificação foi tratada e introduzida de forma rigorosa no processo de bombeamento de gases e vapores. Construímos funções matemáticas que definem tanto a condutância específica como as fontes gasosas estacionárias e transientes. Continuando, foram modelados com rigor o vazamento virtual e a injeção controlada de gases e vapores.

Obtivemos ainda a equação para o processo de bombeamento na formulação discreta de forma rigorosa, mostrando a sua importância e descrevendo as fontes de gases e vapores importantes aos processos realizados em vácuo. Apesar do alcance mostrado nas análises e modelagens tanto na formulação discreta como na formulação contínua devemos ter claro que a modelagem é sempre uma idealização de algum fenômeno que ocorre na Natureza; a modelagem tem sempre limites, dependendo da necessidade, seja prática seja fundamental, ela poderá ser extremamente difícil de ser construída. Podemos sempre fazer mais e aprimorar o que já foi feito, produzindo mais ferramentas para o projeto e modelagem de sistemas de vácuo – sem perder de vista o aspecto prático da tecnologia do vácuo –, mas também procurando tratá-la como uma ciência na área dos processos e fenômenos em baixas pressões [30-38].

3.6 Referências.

1. Lafferty, J. M., Foundations of Vacuum Science and Technology, Wiley-Interscience Publication, 1998.
2. Wutz, M., Adam, H. and Walcher, W., Theory and Practice of Vacuum Technology. Friedr. Vieweg and Sohn, 1989. Gershendeld, N., The Nature of Mathematical Modeling, Cambridge University Press, 1999.
3. Bequette, B.W., Process Dynamics: Modeling, Analysis and Simulation, Prentice-Hall PTR, 1998.
4. MacCluer, C.R., Industrial Mathematics – Modeling in Industry, Science and Government, Prentice Hall, 2000.
5. Svobodny, T., Mathematical Modeling for Industry and Engineering, Prentice Hall, 1998.
6. Shearer, J.L. and Kulakowski, B.T., Dynamics Modeling and Control of Engineering Systems, Maxwell Macmillan International Editions, 1990.
7. Gershendeld, N., The Physics of Information Technology, Cambridge University Press, 2000.
8. Rice, R.G. and Do, D.D., Applied Mathematics and Modeling for Chemical Engineers, John Wiley & Sons, 1995.
9. Degasperis, F.T., Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo, Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999, Seminário.

10. Roth, A., Vacuum Technology, Second and Revised Edition, North-Holland, 1986.
11. Degasperi, F.T., Cadernos de Atividades, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, Circulação Restrita, 1990 até 1999.
12. Hoffman, D.M., Singh, B., and Thomas III, J.H., Handbook of Vacuum Science and Technology, Academic Press, 1997.
13. Woods, R.L. and Lawrence, K.L., Modeling and Simulation of Dynamics Systems, Prentice-Hall, 1997.
14. Hablani, M.H., High-Vacuum Technology – A Practical Guide, 2nd Edition, Marcel Dekker, 1998.
15. Degasperi, F.T., Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo - Objetivo Didático, XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria, Florianópolis, SC, Brasil, 1991. (*Trabalho apresentado em Sessão Oral*).
16. Sanches Junior, R.L., Tratamento Matemático Analítico-Numérico para o Processo de Bombeamento em Tecnologia do Vácuo. (*Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Fatec-SP, orientado por F.T. Degasperi, 1997*).
17. Degasperi, F.T., Martins, M.N., Takahashi, J. and Verardi, S.L.L., Time Dependence of the Pressure Profile in a Tube with Axially-Dependent Degassing, Particle Accelerator Conference, PAC-2001, Chicago, Illinois, USA, 2001. Apresentado em forma de painel e publicado nos anais do congresso.
18. Degasperi, F.T., Martins, M.N., Takahashi, J. and Verardi, S.L.L., Pressure Field in a Tube with a Time- and Position-Dependent Degassing, Trabalho a ser submetido ao Journal of Vacuum Science and Technology (JVST).
19. Degasperi, F.T., Martins, M.N., Verardi, S.L.L. and Takahashi, J., Pressure Field Along the Axis of an Accelerating Structure, European Particle Accelerator Conference, EPAC-2002, Paris, France, 2002. Trabalho apresentado e publicado nos anais.
20. Redhead, P.A., Hobson, J.P. and Kornelsen, E.V., The Physical Basis of Ultra-high Vacuum, Chapman and Hall and reprint by American Vacuum Society's Series of Classics, 1993.
21. Viana, E.R., Desenvolvimento e Implementação de um Simulador para Estudos de Escoamento de Gases em Regime Molecular. Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Faculdade de Tecnologia de São Paulo. Orientado por Francisco Tadeu Degasperi. 1999.
22. Raimundo, D.S., Simulação de Transporte de Gases em Tubos e Orifícios no Regime de Escoamento Molecular, Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Faculdade de Tecnologia de São Paulo, Orientado por F.T. Degasperi, 2001.

23. Degasperi, F.T., Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo, Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999, Seminário.
24. Degasperi, F.T. and Mammana, V.P., Pressure Field Detailed Calculations for a New Field Emission Device with Improved Vacuum Features, 46th International Symposium Vacuum, Thin Films, Surfaces/Interfaces and Processing, American Vacuum Society (AVS), Seattle, Washington, USA, 1999, Apresentação Oral.
25. Mammana, V.P., Degasperi, F.T., Monteiro, O.R., Vuolo, J.H., Salvadori, M.C.B. and Brown, I.G., A New Field Emission Device with Improved Vacuum Features, Journal of Vacuum Science and Technology, 18A(4), 2000.
26. Degasperi, F.T., Mammana, V.P., Verardi, S.L.L. and Baranauskas, V., Calculation of the Vacuum Pressure Gradient in Field Emission Display, Trabalho apresentado no International Conference on Metallurgical Coating and Thin Films, ICMCTF-2001, San Jose, California, USA, 2001. Surface and Coating Technology, 2002.
27. Tjonov, A.N. and Samarsky, A.A., Ecuaciones de la Fisica Matematica, Segunda Edición, Editorial Mir, 1980.
28. Snider, A.D., Partial Differential Equations: Sources and Solutions, Prentice Hall, 1999.
29. Verardi, S.L.L. Cálculo de Campos em Magnetohidrodinâmica. Tese de Doutorado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2002.
30. Özisik, M.N., Boundary Value Problems of Heat Conduction, Dover Publications, 1989.
31. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, 1957.
32. Lewin, G., Fundamentals of Vacuum Science and Technology, McGraw-Hill, 1965.
33. Degasperi, F.T., Motta, C.C., Verardi, S.L.L., Pressure Field Along the Axis of an Klystron Amplifier, IEEE Congress on High Power Devices. To be submitted.
34. Degasperi, F.T. e Baranauskas, V., Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo, XXII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência (CBRAVIC), Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, UNESP, Guaratinguetá, SP, Brasil, 2001. Trabalho apresentado na forma de painel.
35. Degasperi, F.T., Baranauskas, V., Pressure Field in High-Vacuum Systems: Mathematical Physics Formulation, 8th European Vacuum Conference – EVC-8 – 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society, Berlin, Germany, 2003.
36. Degasperi, F.T., Mammana, V.P., Baranauskas, V., Steady-State and Transient Profile in Field Emission Display, 8th European Vacuum Conference –EVC-8 –2nd Annual Conference of the German Vacuum Society, Berlin, Germany, 2003.

37. Degasperi, F.T., Pressure Field Distribution in Ultra High-Vacuum Systems, 41st IUUSTA – Workshop – Vacuum System Design for Particle Accelerators: a multidisciplinary approach, Brdopri Kranju, Slovenia, 2004.
38. Degasperi, F.T., Baranauskas, V. Mathematical Physics Formulation to Pressure Field in a Tube with an Arbitrary Axisymmetric Cross Section, 16th International Vacuum Congress – IVC-16, Venice, Italy, 2004.

Capítulo 4

Conclusões, Perspectivas e Trabalhos Futuros

Apresentamos neste capítulo as conclusões do trabalho de tese e situamos os resultados alcançados para a modelagem, análise e cálculos de sistema de vácuo. Pretendemos também traçar uma possível perspectiva de trabalho a ser desenvolvido no futuro próximo, visando sempre aprofundar e estender os conceitos e resultados aqui obtidos às configurações mais complexas de sistemas de vácuo.

Neste trabalho de tese foi proposto contribuir para o desenvolvimento de ferramentas matemáticas analíticas e numéricas para modelar, calcular e analisar em profundidade sistemas de vácuo de uso geral. Foram consideradas duas maneiras diferentes de modelar sistemas de vácuo, denominadas neste trabalho de formulação discreta e formulação contínua. Na formulação discreta vimos que os sistemas de vácuo são tratados de modo que a câmara de vácuo é considerada um ponto e assim conseguimos especificar apenas um valor de pressão dependente do tempo. Para isto devemos partir da identificação e determinação das fontes de gases e vapores que intervêm no processo em vácuo, das dimensões e particularidades da linha de bombeamento por onde escoam os gases e vapores e fornecer os tipos e capacidades de bombas de vácuo.

Na formulação contínua vimos que os sistemas de vácuo são tratados de modo que em cada parte do sistema de vácuo é possível obter a pressão em função do tempo. Desta forma, temos um problema físico com a estrutura matemática de campo, no caso, campo escalar de pressão. Ainda, de posse do campo de pressão é possível obter o campo gradiente de pressão. Na modelagem contínua os sistemas de vácuo são tratados com o estabelecimento de equações diferenciais parciais, assim, necessariamente precisamos especificar as condições de contorno e condição inicial do problema. Apresentamos o desenvolvimento teórico para a modelagem contínua de sistemas de alto-vácuo unidimensional e bidimensionais por meio da equação de difusão.

Determinamos as condições de contorno fisicamente aceitáveis às situações físicas encontradas nos sistemas de vácuo e ainda, definimos as grandezas fundamentais como condutância específica, volume específico e taxa de degaseificação específica por unidade de comprimento e para fontes de gases quaisquer.

Ainda, neste trabalho tanto para a formulação discreta como para a formulação contínua consideramos as condutâncias em função da geometria, do regime de escoamento e das propriedades físicas dos gases e vapores. Cabe frisar que consideramos em detalhe a participação da condutância nos cálculos dos sistemas de vácuo. Fizemos uma introdução às fontes de gases e vapores e mostramos as expressões matemáticas para elas serem introduzidas na modelagem. Desenvolvemos em detalhe as expressões matemáticas para as curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão para todas as bombas de vácuo de ampla utilização tanto em laboratórios como na indústria. Diante disso, pudemos modelar sistemas de vácuo observando vários dos seus detalhes e particularidades procurando nos aproximar bastante da realidade física. A análise numérica foi feita utilizando os métodos de *Euler-Heun* e *Runge-Kutta* de segunda e quarta ordens, com os programas computacionais desenvolvidos e construídos com a linguagem *MathCadTM* e *MapleTM*

Atenção foi dada no aspecto da documentação tanto do desenvolvimento teórico como dos códigos computacionais, sendo que a exposição do conjunto do trabalho procurou ser bastante explícita e detalhada. Também, referente aos códigos computacionais, facilmente podem ser introduzidas mudanças gerais. Assim, acreditamos que conseguimos contribuir para o desenvolvimento de um conjunto coerente de ferramentas matemáticas à modelagem de sistemas de vácuo, com alcance precisão. Fizemos um estudo detalhado sobre como devemos optar pela formulação discreta ou formulação contínua. A exposição e desenvolvimento sobre esse assunto mostraram várias particularidades sobre o comportamento de sistemas de vácuo em geral e, em especial, mostrou o papel central da grandeza condutância.

Com o propósito de utilizar as idéias desenvolvidas neste trabalho de tese aplicamos a teoria e os conceitos em geral, assim como o instrumental numérico, à modelagem de vários sistemas de vácuo com bastante presença tanto na indústria como na pesquisa. Atentos a muitas aplicações atuais da tecnologia do vácuo, constatamos que muitos modelos podem ser criados no sentido de estudá-las de forma bastante realista.

De forma que podemos dizer que as principais contribuições deste trabalho de tese são: a construção de uma planilha de cálculo detalhado para análise de sistemas de vácuo com a abordagem discreta; a construção matemática de expressões para a velocidade de bombeamento para as principais bombas de vácuo; cálculo de sistemas de vácuo considerando detalhes sobre a condutância da linha de bombeamento; definição das grandezas condutância específica e taxa de degaseificação específica por unidade de comprimento de tubos, para casos gerais de tubos com área de seção transversal variável com o comprimento; construção matemática para a representação de fontes de gases para tubos de área de seção transversal variável com o comprimento; tratamento

em detalhe de vários tipos de fontes de gases e vapores; construção de equações diferenciais para a análise de sistemas de vácuo gerais pelo método de difusão de gases e comparação dos resultados analíticos e computacionais obtidos pelo método de difusão de gases com o método de *Monte Carlo*.

Os resultados obtidos neste trabalho podem ser estendidos e aprimorados de forma a considerar mais detalhes e particularidades de sistemas de vácuo tanto de uso industrial como de pesquisa, tornando os modelos mais realistas e confiáveis. As perspectivas de trabalhos futuros são tanto para a formulação discreta como para a formulação contínua. Nas duas formulações podemos propor as seguintes melhorias e aprimoramentos:

- Incorporar às modelagens dos sistemas de alto-vácuo a função taxa de degaseificação determinadas experimentalmente.
- Considerar o bombeamento em pré-vácuo de misturas gasosas.
- Aprofundar a comparação entre os resultados obtidos por meio da formulação contínua com o uso da equação de difusão e aqueles obtidos por meio do método de *Monte Carlo*.
- Comparar os resultados por meio de modelagens com os resultados experimentais.
- Estender modelagens a mais sistemas de vácuo complexos.

Apêndices

Apêndice A. Processo de Bombeamento em Vácuo – Abordagem Discreta.....	189
Apêndice B. Equação de Difusão de Gases no Regime de Escoamento Molecular.....	209
Apêndice C. Expressões Matemáticas para as Curvas de Velocidade de Bombeamento de Bombas de Vácuo.....	263
Apêndice D. Comparação entre a Abordagem Discreta e a Abordagem Contínua na Modelagem de Sistemas de Vácuo.....	279
Apêndice E. Modelagem do Vazamento Virtual.....	307
Apêndice F. Modelagem da Injeção Controlada de Gases.....	329
Apêndice G. Escoamento dos Gases e Vapores no Regime de Escoamento Molecular Considerado como um Fenômeno de Difusão.....	345

- *Apêndice A – Processo de Bombeamento em Vácuo – Abordagem Discreta* desenvolvemos em detalhe a dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – para a realização da modelagem discreta. A dedução rigorosa deixa claro cada termo da equação e o seu papel e a sua participação no processo assistido a vácuo. Analisamos também o balanço de átomos e moléculas entre os termos da equação e interpretamos fisicamente cada um deles. Definimos também as principais grandezas da tecnologia do vácuo.

- *Apêndice B – Equação de Difusão de Gases no Regime de Escoamento Molecular* apresentamos as equações diferenciais parciais para a modelagem de sistemas de alto-vácuo usando a abordagem contínua. Deduzimos em detalhe as equações de difusão para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional dependentes e não-dependentes do tempo. No caso bidimensional consideramos as coordenadas cartesianas e polares e no caso tridimensional as coordenadas cartesianas e cilíndricas. Definimos a condutância específica – grandeza que consideramos fundamental e essencial à análise contínua – para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional. Definimos matematicamente as fontes gasosas extensivas e impulsivas no tempo e no espaço. Em seguida verificamos a coerência entre as várias expressões e conseguimos recuperar a equação diferencial bidimensional a partir da imposição de simetria no caso tridimensional. Este procedimento também foi feito para o caso bidimensional e assim recuperando a equação do caso unidimensional. O mesmo procedimento foi feito para o caso unidimensional até degenerar ao caso da equação diferencial da abordagem discreta, ou seja, dependente exclusivamente do tempo. Desta forma, mostramos coerência interna na modelagem contínua.

- *Apêndice C – Expressões Matemáticas para as Curvas de Velocidade de Bombeamento de Bombas de Vácuo* desenvolvemos expressões matemáticas para as curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão para várias bombas de vácuo. Estas expressões são importantes para a modelagem de sistemas de vácuo em geral por meio da abordagem discreta. As expressões matemáticas foram obtidas considerando a partir de ajustes das curvas de velocidades de bombeamento disponíveis nos catálogos das bombas de vácuo.

- *Apêndice D – Comparação entre a Abordagem Discreta e a Abordagem Contínua na Modelagem de Sistemas de Vácuo* fizemos um estudo detalhado considerando a comparação das abordagens discreta e contínua para a análise de sistemas de vácuo. Identificamos também quando é possível fazer apenas uma análise do sistema de vácuo usando a abordagem discreta, dispensando a abordagem contínua, esta última sempre mais trabalhosa. Os casos de estudo considerados neste apêndice mostraram muito sobre o comportamento geral dos sistemas de vácuo, principalmente do papel determinante da condutância, considerado pelo autor deste trabalho como a mais expressiva e importante grandeza para a modelagem dos sistemas de vácuo.

- *Apêndice E – Modelagem do Vazamento Virtual* construímos um modelo bastante detalhado do vazamento virtual. Obtivemos uma função que representa bastante bem o comportamento desta fonte gasosa em sistemas de vácuo. Argumentamos da importância do seu conhecimento a fim de poder identificar a sua ocorrência nos sistemas de vácuo.

- *Apêndice F – Modelagem da Injeção Controlada de Gases* consideramos o caso de termos de introduzir gases e vapores de forma controlada em sistemas de vácuo, a partir da passagem do gás através de um bocal, sendo esta a situação mais comum e simples, não por isso menos confiável e precisa. O estudo pode ser aplicado para outras formas de injeção de gases e também de vapores.

- *Apêndice G – Escoamento dos Gases e Vapores no Regime de Escoamento Molecular Considerado como um Fenômeno de Difusão* fizemos uma discussão, que procurou ser bastante profunda, sobre a consideração do transporte de gases no regime de escoamento molecular como sendo um fenômeno de natureza difusiva. Esta discussão é essencial para a modelagem de sistemas de vácuo por meio da abordagem contínua. Apresentamos vários casos de estudo que foram modelados por meio da equação de difusão e que foram comparados com o método de Monte Carlo. A comparação dos resultados obtidos por meio dos dois métodos de análise encorajar-nos a continuar e aprofundar as modelagens de sistemas de vácuo com os gases escoando no regime molecular a partir da equação de difusão.

Apêndice A

□ Processo de Bombeamento em Vácuo – Abordagem Discreta.

O principal objetivo deste apêndice é deduzir de forma rigorosa a Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} . Por meio da dedução pretendemos apresentar de forma clara como ocorre o processo de transporte de gases e vapores em baixas pressões. Apresentaremos também as diversas fontes gasosas possíveis de ocorrência nos sistemas de vácuo e qual o papel do bombeamento, tanto da dependência das bombas de vácuo como das condutâncias da linha de transporte dos gases e vapores. Partiremos da suposição que a equação de estado dos gases ideais possa ser empregada para os gases rarefeitos, no caso, pressões abaixo da pressão atmosférica. Esta suposição é perfeitamente aceitável, uma vez que a densidade dos gases é pequena, tornando a distância média entre as moléculas suficientemente grande. Este fato é experimentalmente bastante verificado, tanto para os gases – acima da temperatura crítica – como para os vapores que estão não saturados – abaixo da temperatura crítica. Desta forma, a interação – de natureza elétrica – entre átomos e moléculas será importante somente nos choques delas entre si e com as paredes da câmara de vácuo e seus internos.

A equação dos gases perfeitos ou ideais, chamada de equação de *Clapeyron-Mendeleev*, é dada pela Expressão A.1

$$p V = n R T, \quad \text{A.1}$$

ou ainda, $p V = N k T$, onde p é a pressão, V é o volume disponível para as moléculas no recipiente – neste caso a câmara de vácuo –, n é o número de mols, R é a constante dos gases perfeitos, T é a temperatura absoluta, N é o número de moléculas e k é a constante de *Boltzmann*. Como exemplo de aplicação direta da equação de *Clapeyron-Mendeleev* citamos o método da expansão estática, usado extensamente na metrologia em vácuo, cuja base física está sustentada na lei de *Boyle-Mariotte*. Assim, apesar da sua grande simplicidade, a equação dos gases ideais ou perfeitos é bastante bem aplicável à tecnologia do vácuo.

Partindo da equação dos gases perfeitos, vamos derivar em relação ao tempo ambos os membros da equação *Clapeyron-Mendeleev*, ficamos com a Expressão A.2

$$p V = N k T \Rightarrow \frac{d}{dt}(p V) = \frac{d}{dt}(N k T) \Rightarrow p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} = k T \frac{dN}{dt} + k N \frac{dT}{dt}. \quad \text{A.2}$$

Para a maior parte dos sistemas de vácuo, geralmente, a temperatura T e o volume V da câmara de vácuo são mantidos constantes, assim, a equação acima se reduz a Expressão A.3

$$V \frac{dp}{dt} = k T \frac{dN}{dt} . \quad \text{A.3}$$

Importante notar que estamos assumindo explicitamente que a equação dos gases perfeitos pode ser aplicada para estados termodinâmicos de não-equilíbrio. Ao derivar a equação de estado em relação ao tempo, obtemos uma expressão que fornece explicitamente a variação da pressão com o tempo. Como sabemos, a termodinâmica clássica pressupõe estados de equilíbrio, mas admitindo que as variações de pressão em função do tempo sejam suficientemente lentas, ou seja, que podemos considerar as variáveis termodinâmicas mudando continuamente e passando por sucessivos estados de equilíbrio, é legítimo proceder com a derivação em relação ao tempo feita acima.

Devido ao movimento de translação dos átomos e moléculas, temos associado a esse movimento uma energia cinética. Há três graus de liberdade no movimento de translação, um para cada direção possível do movimento. Para cada grau de liberdade temos que a energia cinética média de translação é igual a $\frac{1}{2} k T$, resultado obtido do princípio de equipartição de energia.

Desta forma, a energia cinética média de translação por molécula – E_{ECM} – é dada por

$$E_{ECM} = 3 \left(\frac{1}{2} k T \right) = \frac{3}{2} k T .$$

Considerando N moléculas, a energia cinética média total de

translação é igual a $E = N E_{ECM} = N \left(\frac{3}{2} k T \right) = \frac{3}{2} N k T$. Usando a equação dos gases perfeitos

neste último resultado ficamos com $E = \frac{3}{2} N k T = \frac{3}{2} p V$. Tomando a derivada em relação ao

tempo da última expressão obtida, associamos a variação da energia cinética média total de translação à variação da pressão, temos assim a Expressão A.4

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (N E_{ECM}) = E_{ECM} \frac{dN}{dt} = \frac{3}{2} k T \frac{dN}{dt} = \frac{3}{2} V \frac{dp}{dt} \Rightarrow V \frac{dp}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dE}{dt} . \quad \text{A.4}$$

Vamos considerar um sistema de vácuo com várias fontes de gases e vapores possíveis presentes na câmara de vácuo. As fontes de gases e vapores possíveis estão listadas a seguir: vazamento real, vazamento virtual, vaporização, sublimação, degaseificação, permeação, fonte gasosa da bomba de vácuo, gases e vapores de processo e injeção controlada de gases e vapores. Para cada uma dessas fontes gasosas associamos uma quantidade de moléculas, variando em função do tempo, alimentando a câmara de vácuo. Como consequência, a ação exclusiva destas fontes gasosas fará com que aumente a pressão na câmara de vácuo. Por outro lado, a ação das bombas de vácuo fará com que uma quantidade de gases e vapores seja removida da câmara de vácuo num certo intervalo de tempo.

Desta forma, podemos identificar três parcelas na equação que estabelece o balanço de número de moléculas, para um intervalo de tempo Δt , na câmara de vácuo. Temos a parcela relativa ao número de moléculas que alimenta a câmara de vácuo devido às fontes de gases e vapores, a parcela devida à variação de pressão na câmara de vácuo ou, posto de outra forma, a variação do número de moléculas na câmara de vácuo, e ainda, a parcela relativa ao número de moléculas removidas pela ação das bombas de vácuo. Esquemáticamente, podemos representar as três partes da equação do balanço entre a variação do número de átomos e moléculas na câmara de vácuo, conforme mostrado na Figura A.1

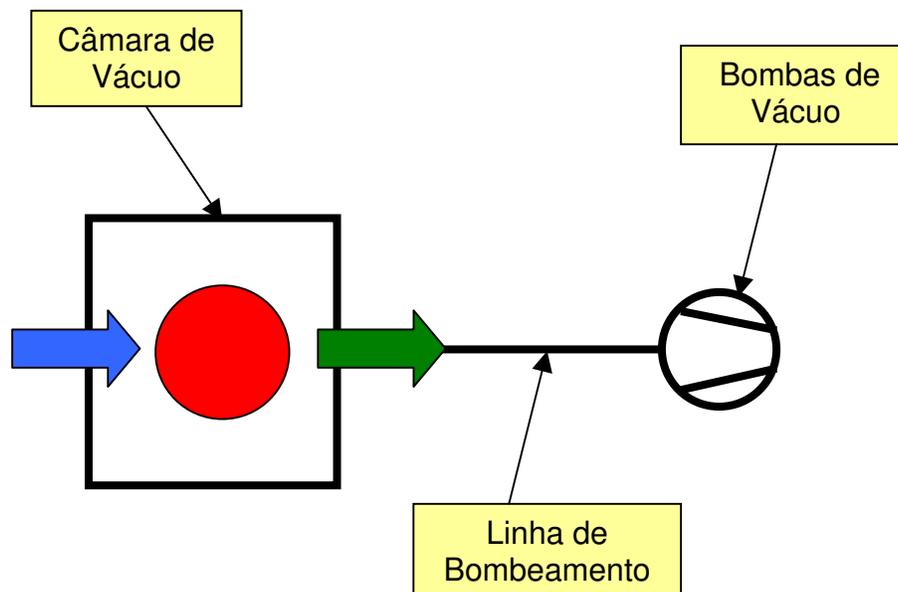


Figura A.1 Configuração genérica de um sistema de vácuo. O processo de bombeamento em tecnologia do vácuo considera três partes principais: a quantidade gasosa sendo bombeada pelas bombas de vácuo – seta verde –, a quantidade gasosa devido às fontes gasosas que alimentam a câmara de vácuo – seta azul –, e a variação de pressão na câmara de vácuo – círculo vermelho.

Matematicamente escrevemos o balanço – a variação – do número de moléculas, ocorrendo em um intervalo de tempo Δt , na câmara de vácuo da seguinte forma

$$\Delta N_{CV} = \Delta N_{FGV} - \Delta N_{BV} ,$$

onde, ΔN_{CV} é a variação do número de moléculas na câmara de vácuo, ΔN_{FGV} é o número de moléculas que alimenta a câmara de vácuo e ΔN_{BV} é o número de moléculas removida pelas bombas de vácuo, para todos eles no intervalo de tempo Δt . No caso do número de moléculas relativo à totalidade das fontes dos gases e vapores ΔN_{FGV} , podemos considerar o número de moléculas que alimenta a câmara de vácuo no intervalo de tempo Δt , para cada particular tipo de fonte gasosa. Assim, a Expressão A.5 está mostrada a seguir

$$\Delta N_{FGV} = \Delta N_{VR} + \Delta N_{VV} + \Delta N_{Vap} + \Delta N_{Sub} + \Delta N_{Deg} + \Delta N_{Perm} + \Delta N_{FBV} + \Delta N_{GP} + \Delta N_{IC} , \quad A.5$$

onde,

- ΔN_{VR} é o número de moléculas que alimenta a câmara de vácuo, no intervalo de tempo Δt , devido ao vazamento real,
- ΔN_{VV} ao vazamento virtual,
- ΔN_{Vap} à vaporização,
- ΔN_{Sub} à sublimação,
- ΔN_{Deg} à degaseificação,
- ΔN_{Perm} à permeação,
- ΔN_{FBV} à fonte gasosa da bomba de vácuo,
- ΔN_{GP} aos gases e vapores de processo e
- ΔN_{IC} à injeção controlada de gases e vapores.

No caso da variação do número de moléculas na câmara de vácuo ΔN_{CV} , ocorrendo num intervalo de tempo Δt , podemos escrever considerando a temperatura constante, a partir da equação dos gases perfeitos para o volume da câmara de vácuo V_{CV}

$$V_{CV} p_{CV} = N_{CV} k T \Rightarrow V_{CV} \Delta p_{CV} = \Delta N_{CV} k T \Rightarrow$$

$$V_{CV} \Delta p_{CV} = (\Delta N_{FGV} - \Delta N_{BV}) k T = \Delta N_{FGV} k T - \Delta N_{BV} k T .$$

Fazendo uso da expressão explicitas das fontes dos gases e vapores, a equação acima fica conforme mostrado na Expressão A.6

$$V_{CV} \Delta p_{CV} =$$

$$= (\Delta N_{VR} + \Delta N_{VV} + \Delta N_{vap} + \Delta N_{Sub} + \Delta N_{Deg} + \Delta N_{Perm} + \Delta N_{FBV} + \Delta N_{GP} + \Delta N_{IC}) k T - \Delta N_{BV} k T$$

A.6

Assim, temos a expressão que relaciona a variação de pressão na câmara de vácuo com a variação do número de moléculas alimentando a câmara de vácuo, e ainda, relacionando ao número de moléculas removidas pelas bombas de vácuo.

Dando continuidade, definimos a grandeza $Q' \equiv \frac{dN}{dt}$. Ela expressa a variação do número de

moléculas na câmara de vácuo, no tempo. Como $p V = N k T$, temos que $N = \frac{p V}{k T}$. Assim,

escrevemos a Expressão A.7

$$Q' = \frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p V}{k T} \right) = \frac{1}{k T} \frac{d}{dt} (p V),$$

A.7

considerando a temperatura constante. Admitindo que o volume não varie no tempo, temos

$Q' = \frac{1}{k T} V \frac{dp}{dt}$. Como obtido anteriormente, sabemos que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{3}{2} k T \frac{dN}{dt} = \frac{3}{2} V \frac{dp}{dt} \Rightarrow V \frac{dp}{dt} = \frac{2}{3} \frac{dE}{dt} .$$

Portanto, $Q' = \frac{2}{3} \frac{1}{k T} \frac{dE}{dt}$. Definimos agora a grandeza *throughput* como sendo $Q \equiv k T Q'$.

Desta forma, encontramos $Q = \frac{2}{3} \frac{dE}{dt}$, ou seja, verificamos que o *throughput* é igual a dois terços da variação no tempo da energia cinética média do movimento de translação das moléculas na câmara de vácuo. Como forma alternativa, assumida em alguns textos, o *throughput* é definido de partida como sendo $Q \equiv k T \frac{dN}{dt}$, levando aos mesmos resultados obtidos pela outra definição.

O *throughput* é uma grandeza que depende da variação no tempo do número de moléculas, digamos, em uma câmara de vácuo, ou ainda, que cruza uma determinada seção transversal de um tubo. O *throughput* também depende da temperatura. A maneira como ele é definido, à primeira vista pode parecer trazer alguma dificuldade na identificação do número de moléculas variando no tempo em certa região do sistema de vácuo, uma vez que devemos precisar a temperatura do gás. Isto é um fato, devemos conhecer a temperatura. Por outro lado, uma vez conhecida a temperatura, podemos encontrar o número de moléculas variando no tempo. Um aspecto importante, e que não é óbvio à primeira vista, refere-se à interpretação física da grandeza *throughput*.

Como dissemos, ela é dois terços da variação no tempo da energia cinética média de translação das moléculas. Assim, podemos interpretar que, durante o processo de bombeamento nos sistemas de vácuo, estamos determinando a vazão de energia cinética média de translação das moléculas! Vemos que a unidade do *throughput* é energia na unidade de tempo, ou seja, potência. Como as moléculas estão em constante movimento de translação, elas têm energia cinética correspondente a esse movimento, assim, a evolução temporal da pressão nos sistemas de vácuo pode ser modelada e interpretada como sendo um processo de balanço de energia cinética devido ao movimento dos átomos e moléculas presentes no sistema de vácuo.

Do ponto de vista conceitual, estamos procurando obter uma relação para o transporte dos gases e vapores no sistema de vácuo. Vemos que construímos uma expressão baseada no princípio de conservação de energia. Ainda, além de considerações formais, por meio do procedimento estabelecido, poderíamos considerar o transporte de gases e vapores em sistemas de vácuo com partes apresentando diferentes temperaturas. A definição da grandeza *throughput* leva à essa possibilidade.

Continuando, podemos rescrever a equação que relaciona a variação de pressão na câmara de vácuo, com a variação do número de moléculas alimentando a câmara de vácuo, e ainda, o efeito das bombas de vácuo, para um dado intervalo de tempo Δt . Como

$$\begin{aligned}
V_{CV} \Delta p_{CV} &= \\
&= k T \left(\Delta N_{VR} + \Delta N_{VV} + \Delta N_{Vap} + \Delta N_{Sub} + \Delta N_{Deg} + \Delta N_{Perm} + \Delta N_{FBV} + \Delta N_{GP} + \Delta N_{IC} \right) - k T \Delta N_{BV}
\end{aligned}$$

explicitando cada um dos *throughput's*, ficamos com

$$\begin{aligned}
V_{CV} \Delta p_{CV} &= \\
&= k T \Delta N_{VR} + k T \Delta N_{VV} + k T \Delta N_{Vap} + k T \Delta N_{Sub} + k T \Delta N_{Deg} + \\
&\quad + k T \Delta N_{Perm} + k T \Delta N_{FBV} + k T \Delta N_{GP} + k T \Delta N_{IC} - k T \Delta N_{B.V.}
\end{aligned}$$

Vamos considerar, nesta última equação, as parcelas variando na unidade de tempo, desta forma, dividimos por Δt . Ficamos assim com a Expressão A.8

$$\begin{aligned}
V_{CV} \frac{\Delta p_{CV}}{\Delta t} &= \\
&= k T \frac{\Delta N_{Vr}}{\Delta t} + k T \frac{\Delta N_{VV}}{\Delta t} + k T \frac{\Delta N_{Vap}}{\Delta t} + k T \frac{\Delta N_{Sub}}{\Delta t} + k T \frac{\Delta N_{Deg}}{\Delta t} + \\
&\quad + k T \frac{\Delta N_{Perm}}{\Delta t} + k T \frac{\Delta N_{FBV}}{\Delta t} + k T \frac{\Delta N_{GP}}{\Delta t} + k T \frac{\Delta N_{IC}}{\Delta t} - k T \frac{\Delta N_{B.V.}}{\Delta t}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Fazendo o limite para $\Delta t \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned}
V_{CV} \frac{dp_{CV}}{dt} &= \\
&= k T \frac{dN_{Vr}}{dt} + k T \frac{dN_{VV}}{dt} + k T \frac{dN_{Vap}}{dt} + k T \frac{dN_{Sub}}{dt} + k T \frac{dN_{Deg}}{dt} + \\
&\quad + k T \frac{dN_{Perm}}{dt} + k T \frac{dN_{FBV}}{dt} + k T \frac{dN_{GP}}{dt} + k T \frac{dN_{IC}}{dt} - k T \frac{dN_{B.V.}}{dt}.
\end{aligned}$$

Identificamos, para cada uma das parcelas do segundo membro como sendo os *throughput's* relativos às fontes dos gases e vapores e a última parcela como sendo o *throughput* bombeado pelas bombas de vácuo. Rescrevendo a última equação diferencial de forma mais compacta, temos a Expressão A.9

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = Q_{VR} + Q_{VV} + Q_{Vap} + Q_{Sub} + Q_{Deg} + Q_{Perm} + Q_{FBV} + Q_{GP} + Q_{IC} - k T \frac{dN_{BV}(t)}{dt} \Rightarrow$$

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -k T \frac{dN_{BV}(t)}{dt} + \sum_{i=1}^n Q_i,$$

A.9

onde,

- Q_{VR} é o *throughput* devido ao vazamento real,
- Q_{VV} ao vazamento virtual,
- Q_{Vap} à vaporização,
- Q_{Sub} à sublimação,
- Q_{Deg} à degaseificação,
- Q_{Perm} à permeação,
- Q_{FBV} à fonte gasosa da bomba de vácuo,
- Q_{GP} aos gases e vapores de processo, e
- Q_{IC} à injeção controlada de gases e vapores.

Um sistema de vácuo geral pode ser representado, nas suas partes essenciais, como mostrado na Figura A.2. Temos a câmara de vácuo, estando a pressão $p_{CV} = p_{CV}(t)$, e esquematicamente apresentando as possíveis fontes de gases e vapores. Estão mostradas também a linha de bombeamento dos gases e vapores e as bombas de vácuo.

Nosso objetivo agora é uma vez identificado o termo relativo ao *throughput* do bombeamento dos gases e vapores, escrever este termo a partir das grandezas as quais especificamos os sistemas de vácuo, na situação particular, as bombas de vácuo e a linha de bombeamento.

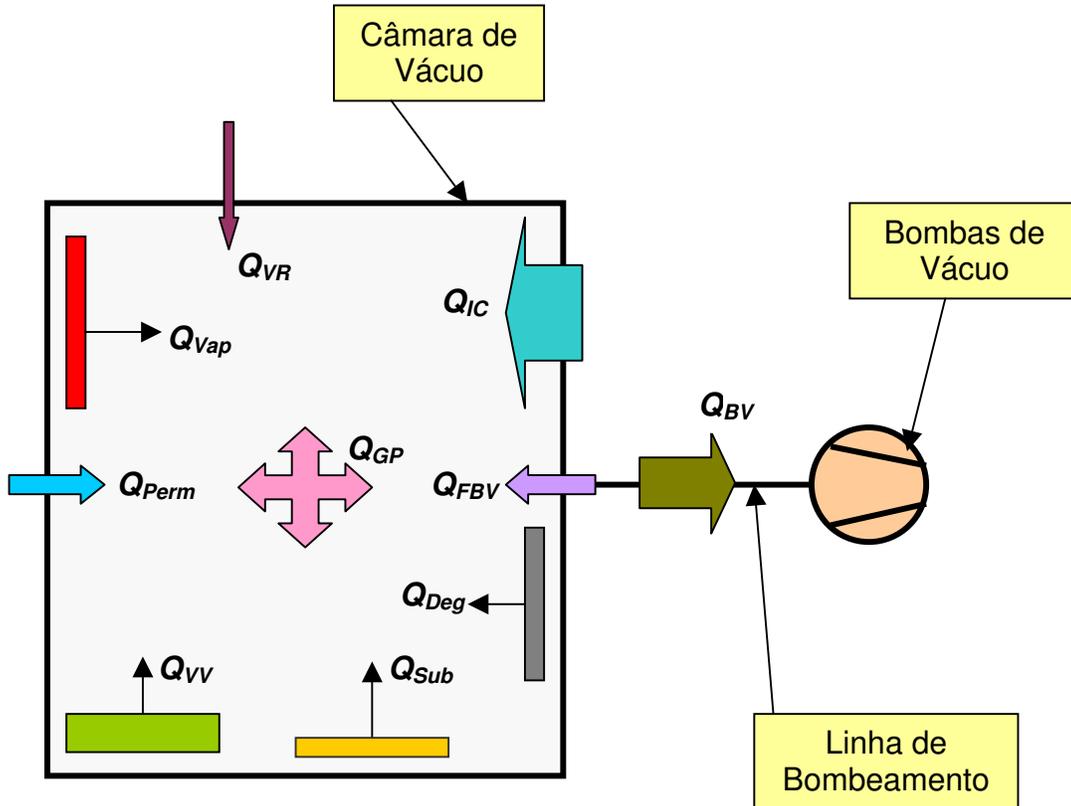


Figura A.2 Esquema de um sistema de vácuo mostrando as possíveis fontes de gases e vapores que alimentam a câmara de vácuo, com a linha de bombeamento, que através dela, os gases e vapores escoam até atingirem a bomba de vácuo.

Identificamos na última equação diferencial a parcela $k T \frac{dN_{BV}(t)}{dt}$ como sendo o *throughput* bombeado pelas bombas de vácuo. Podemos escrever este *throughput*, que está deixando a câmara de vácuo, como função da velocidade efetiva de bombeamento – S_{ef} – e a pressão na câmara de vácuo – $p_{CV}(t)$ –. A velocidade efetiva de bombeamento é a velocidade de bombeamento que *efetivamente – de fato* – está bombeando os gases e vapores na câmara de vácuo. Ela é considerada como sendo a velocidade de bombeamento ocorrendo, imediatamente, no acesso da câmara de vácuo à tubulação que segue em direção às bombas de vácuo. Na Expressão A.10 escrevemos o *throughput* devido ao efeito das bombas de vácuo como sendo

$$Q_{BV} = k T \frac{dN_{BV}(t)}{dt} = S_{ef} p_{CV}(t). \quad \text{A.10}$$

Assim, temos a equação diferencial para o processo de bombeamento dos gases e vapores na câmara de vácuo mostrada na Expressão A.11

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -Q_{BV} + \sum_{i=1}^n Q_i \Rightarrow$$

A.11

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Esta última equação diferencial ordinária de primeira ordem é básica para a tecnologia do vácuo, uma vez que a partir dela, em princípio, podemos obter o conhecimento da evolução temporal da pressão na câmara de vácuo. Ela está escrita em termos das variáveis que representam as grandezas que ocorrem nos projetos em tecnologia do vácuo. Como sabemos, a velocidade efetiva de bombeamento pode ser escrita em termos da velocidade da bomba de vácuo – S_{bv} –, geralmente fornecida pelas empresas fabricantes, e da condutância total – C_{Total} – da linha de bombeamento que liga a câmara de vácuo às bombas de vácuo. A seguinte equação conecta estas últimas grandezas

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} \Rightarrow S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}}.$$

Esta última função, no caso mais geral, é dependente da pressão, uma vez que a velocidade de bombeamento das bombas de vácuo e a condutância podem ser dependentes da pressão. Assim, a Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} –, com a condição inicial do problema, são mostradas abaixo na Expressão A.12 com a sua condição inicial

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = - S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i.$$

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = - \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i.$$

$$p_{CV}(t=0) = p_0$$

A.12

Complementando, podemos interpretar fisicamente os termos da equação diferencial acima.

O termo $V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt}$ refere-se à variação temporal da pressão na câmara de vácuo. O termo

$\frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} p_{CV}(t)$ refere-se ao *throughput* bombeado pelas bombas de vácuo; a presença deste

termo faz com que a pressão na câmara de vácuo tenda a diminuir. O termo $\sum_{i=1}^n Q_i$ refere-se ao

throughput total devido às fontes dos gases e vapores presentes no sistema de vácuo; este termo é intrinsecamente não-negativo e faz com que a pressão na câmara de vácuo tenda a aumentar.

Analisemos os seguintes casos notáveis:

1) A bomba de vácuo está fechada. Assim, $\frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} = 0$, pois $S_{bv} = 0$. Como o termo relativo

às fontes de gases e vapores $\sum_{i=1}^n Q_i \geq 0$, ficamos com $V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} \geq 0$, desta forma a pressão na

câmara de vácuo estará crescendo, até que o termo das fontes gasosas seja igual a zero.

2) O termo do bombeamento é maior que o termo relativo às fontes gasosas. Neste caso,

matematicamente temos $S_{ef} p_{CV}(t) = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} p_{CV}(t) > \sum_{i=1}^n Q_i$, desta forma, temos que

$V_{CV} \cdot \frac{dp_{CV}(t)}{dt} < 0$. Explicitando, temos que o volume é sempre uma grandeza positiva, concluimos

desta forma que a pressão na câmara de vácuo está diminuindo no tempo, pois a sua derivada no tempo é negativa.

3) O termo relativo às fontes gasosas é maior que aquele relativo ao bombeamento dos gases e

vapores. Neste caso, matematicamente $V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} > 0$, significando que a pressão na câmara de

vácuo está crescendo com o tempo.

4) O termo relativo às fontes de gases e vapores é igual ao termo relativo ao bombeamento.

Matematicamente temos $S_{ef} p_{CV}(t) = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} p_{CV}(t) = \sum_{i=1}^n Q_i$, consequentemente,

$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = 0$, como o volume da câmara de vácuo é sempre número positivo, necessariamente

$\frac{dp_{CV}(t)}{dt} = 0$, digamos para $t > t'$. Isto significa que a pressão na câmara de vácuo tem valor

constante no tempo, este é o caso quando a pressão atinge o valor da pressão final. Do ponto de vista matemático, para resolvermos a equação diferencial devemos especificar um determinado valor da variável dependente – p_{CV} – para um determinado valor da variável independente – t –; geralmente sabemos o valor da pressão no início do bombeamento. Por exemplo, a pressão atmosférica é a pressão na câmara de vácuo para $t=0$. Ou ainda, quando passamos do pré-vácuo para o alto-vácuo, temos que a pressão inicial na câmara de vácuo para o processo de bombeamento em alto-vácuo é a pressão final na câmara de vácuo para o processo de bombeamento em pré-vácuo.

Concluindo, podemos dizer que construímos a equação fundamental para o processo de bombeamento dos gases e vapores para a tecnologia do vácuo, a partir do princípio de conservação de energia. Em termos gerais, estamos em condições de especificar quais fontes de gases e vapores participam do processo ocorrendo em vácuo, e mais, devemos ser capazes de julgar se temos fontes gasosas dominantes e, com isso, fazer simplificações, desprezando as fontes de gases e vapores pouco intensas frente a dominante. Lembrando, as fontes gasosas são aditivas, ou seja, várias fontes pouco intensas somadas podem resultar em um *throughput* apreciável.

Outro ponto que merece ser discutido é o referente aos sistemas de vácuo, cujo processo de bombeamento tem a intervenção de diferentes tipos de gases e vapores. Na maior parte das aplicações há vários gases e vapores presentes na câmara de vácuo. Ocorre que na maioria desses sistemas de vácuo há a predominância de um determinado tipo de gás ou vapor. Nestes casos, o estudo do processo de bombeamento é realizado considerando somente aquela espécie gasosa e, negligenciando a presença dos outros gases e vapores. Desta forma, a condutância total e a velocidade de bombeamento das bombas de vácuo precisam ser determinadas para o particular gás ou vapor considerado. Em contra partida, há situações nas quais temos a participação de dois ou mais tipos de gases e vapores no processo ocorrendo em vácuo. Nos casos em que os vários gases e vapores estão participando em um particular processo em quantidades comparáveis, ou ainda, o desempenho do bombeamento de um tipo gasoso é bem diferente do outro tipo gasoso, deveremos considerar a análise do sistema de vácuo para cada um dos gases ou vapores.

A título de ilustração e exemplificação da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – vamos considerar um sistema de vácuo simples composto de uma bomba mecânica de palhetas de duplo estágio conectada a uma câmara de vácuo por meio de um tubo e válvula. Este sistema de vácuo pode ser considerado o mais simples possível dentro da

tecnologia do vácuo, desde que a bomba de vácuo tenha velocidade de bombeamento constante, a condutância da tubulação seja muito grande comparada à velocidade de bombeamento da bomba de vácuo e ainda a fonte de gás, além da do volume da câmara de vácuo gasosa, seja de *throughput* constante. A Figura A.3 mostra esquematicamente o sistema de vácuo a ser analisado. Este pode ser considerado o sistema de vácuo mais simples que pode ser concebido, uma vez que temos as três partes essenciais presentes, que são: a câmara de vácuo, a linha de bombeamento e a bomba de vácuo. Veremos que mesmo dentro desta aparente simplicidade, a modelagem deste sistema de vácuo pode ser muito complicada, basta considerarmos alguns aspectos em detalhe, como por exemplo, a dependência da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo com a pressão.

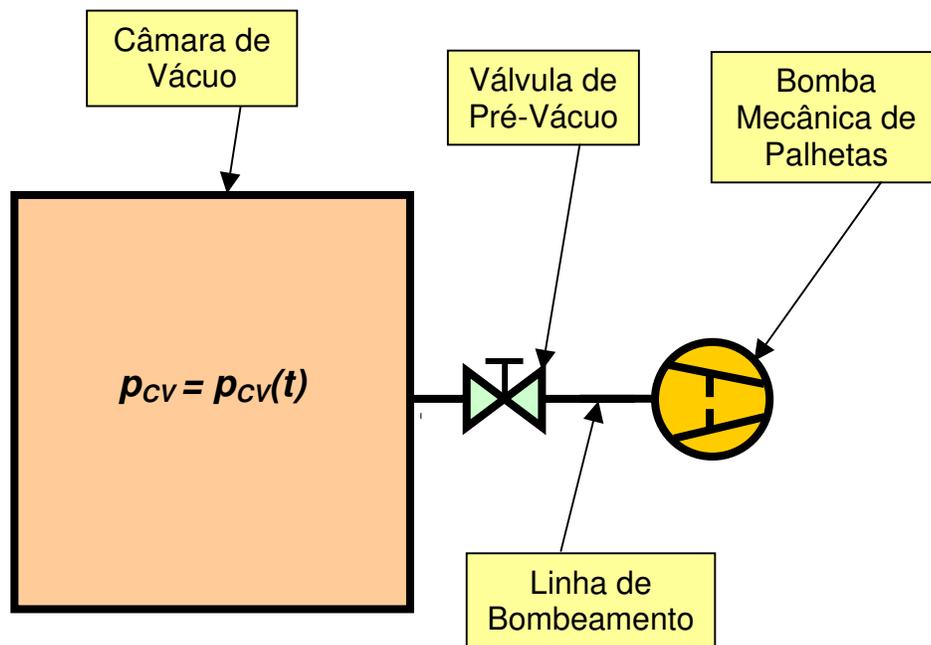


Figura A.3 Esquema de um sistema de vácuo mostrando a câmara de vácuo, com a linha de bombeamento e a bomba de vácuo mecânica de palhetas.

A bomba mecânica de palhetas de duplo estágio tem velocidade de bombeamento constante desde a pressão atmosférica, $p_{atm} = 1000$ mbar até pressões em torno de 1 mbar. Podemos modelar o sistema de vácuo utilizando a E_{PBV} conforme mostrado a seguir

$$V_{cv} \frac{dp_{cv}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{cv}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \quad ,$$

considerando que estamos admitindo que a condutância seja muito maior que a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo na faixa de pressão em estudo, temos que $S_{ef} \cong S_{BV}$. Ainda, supomos que a fonte de gás relevante seja aquela do gás do volume da câmara de vácuo e um *throughput* residual, ficamos com

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{BV} p_{CV}(t) + Q_{final}.$$

Desta forma, podemos escrever

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{BV} p_{CV}(t) + S_{BV} p_{final} \Rightarrow$$

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{BV} (p_{CV}(t) - p_{final})$$

Considerando a pressão inicial $p_{CV}(t=0) = p_{atm}$, temos a seguinte solução geral, mostrada na Expressão A.13

$$p_{CV}(t) = (p_{atm} - p_{final}) \exp\left(-\frac{S_{BV}}{V_{CV}} t\right) + p_{final}, \quad \text{para } p_{atm} \geq p_{CV}(t) \geq 1 \text{ mbar}. \quad \text{A.13}$$

Assim, nas condições apresentadas acima, a pressão na câmara de vácuo varia com o tempo conforme a última função matemática apresentada. Com o propósito de validar o modelo construído, fizemos no Laboratório de Tecnologia do Vácuo – LTV da Faculdade de Tecnologia de São Paulo – FATEC-SP uma experiência nas condições do modelo apresentado e medimos a pressão na câmara de vácuo em função do tempo. Utilizamos dois sensores de vácuo, uma coluna de mercúrio e um Pirani.

Na Figura A.4 vemos a curva da pressão na câmara de vácuo em função do tempo, variando desde a pressão atmosférica até a pressão final. A pressão final depende da velocidade efetiva de bombeamento – considerada igual à velocidade de bombeamento da bomba de vácuo – e do *throughput* da fonte de gás com valor $Q_{final} = S_{BV} \cdot p_{final}$. Veja que consideramos a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo constante.

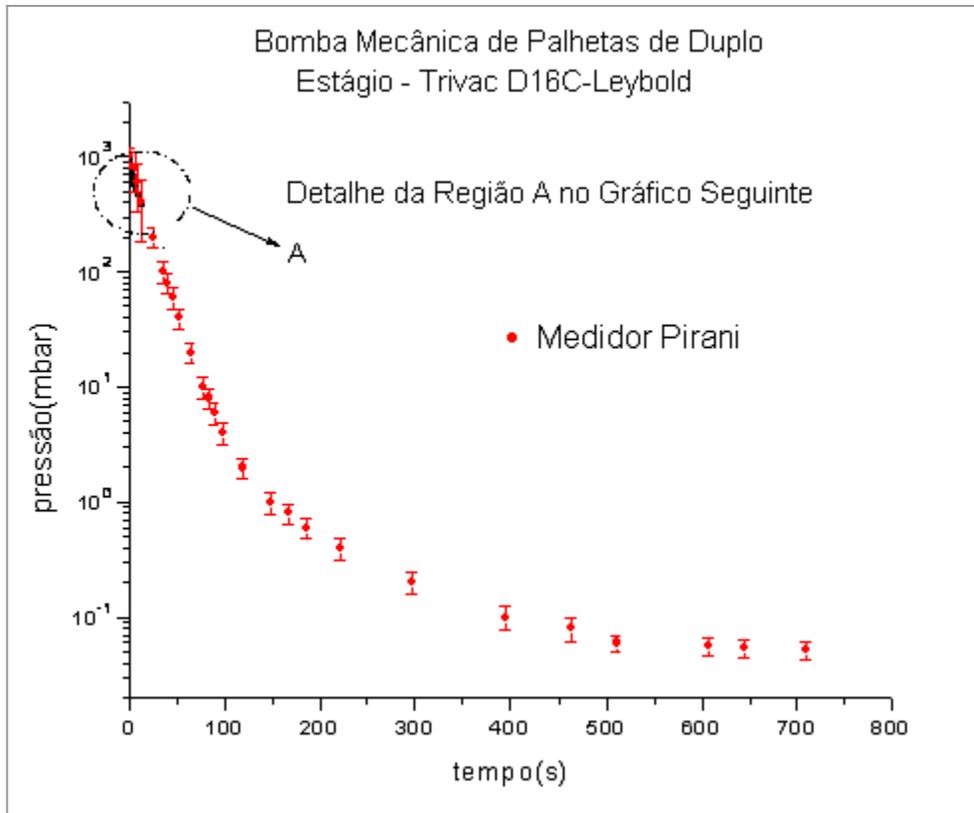


Figura A.4 Gráfico da variação da pressão na câmara de vácuo em função do tempo. O sistema de vácuo é composto da câmara de vácuo, da linha de bombeamento e da bomba de vácuo.

Vemos que desde a pressão atmosférica $p_{atm}=1000$ mbar até $p_{cv}=1$ mbar a pressão varia na câmara de vácuo conforme a expressão apresentada na modelagem considerando a velocidade de bombeamento constante. A partir desta pressão não podemos mais desconsiderar o efeito da condutância da linha de bombeamento e o fato de a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo variar com a pressão.

Utilizamos um medidor Pirani para fazer as medições de pressão na câmara de vácuo a medida que ocorre o bombeamento de gás. Desde a pressão atmosférica até aproximadamente 300 mbar, o sensor Pirani nos fornece o valor de pressão com uma incerteza de 200 mbar, sendo assim muito grande frente à pressão em medição. Para conseguirmos realizar uma medição com incerteza menor, utilizamos uma coluna de mercúrio, e fizemos uso dela desde a pressão atmosférica até a pressão na câmara de vácuo de 300 mbar. A Figura A.5 mostra a curva de variação de pressão na câmara de vácuo com a utilização do medidor de coluna de mercúrio, para a primeira faixa de pressão – 1000 mbar até 200 mbar – e o sensor Pirani para a segunda faixa de pressão – 200 mbar até a escala de 10^{-2} mbar.

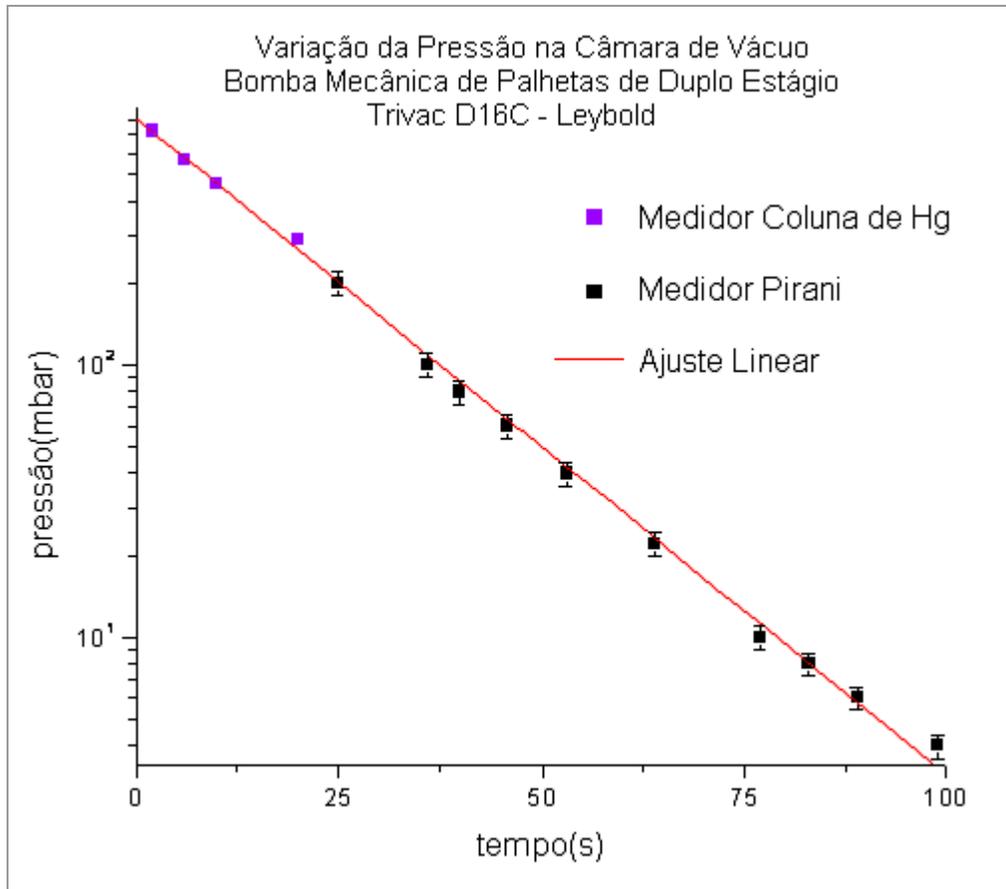


Figura A.5 Gráfico da variação da pressão na câmara de vácuo em função do tempo. O sistema de vácuo é composto da câmara de vácuo, da linha de bombeamento e da bomba de vácuo. Foram utilizados os sensores coluna de mercúrio e Pirani.

Vemos que o ajuste linear dos pontos experimentais concorda muito bem com o modelo considerando as hipóteses assumidas. Temos que os resultados alcançados, mesmo considerando as hipóteses simplificadoras, são bastante bem modelados por meio da expressão empregada. Com isso argumentamos que podemos modelar sistemas de vácuo considerando as várias faixas de pressão de sua operação. Para cada região de trabalho devemos analisar o problema e fazer as simplificações pertinentes e plausíveis, esperando ser fiel à realidade do processo em vácuo sendo modelado.

Assim, voltando à questão referente ao transporte de gases e vapores, a análise e a modelagem do processo de bombeamento, para um particular gás ou vapor, podem constituir um problema complicado, dependendo quase que exclusivamente do tipo de regime de escoamento gasoso. No caso do regime de escoamento viscoso laminar, os gases escoam de forma coletiva, considerando a hipótese do contínuo, tratado adequadamente pela mecânica dos fluidos. O

escoamento dos gases e vapores, no regime viscoso laminar, através da linha de bombeamento é feito de forma que os choques das moléculas entre si mantenham a mistura gasosa homogênea. Desta forma, a condutância será, também, função da viscosidade da mistura gasosa e a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo deverá ser considerada, também, para a mistura gasosa.

Dado o carácter coletivo e contínuo do escoamento viscoso laminar, as diferentes moléculas escoam de forma que permaneça a homogeneidade da mistura gasosa; devendo ser considerados os valores das grandezas físicas desta mistura. A discussão sobre a análise e modelagem dos sistemas de vácuo com a mistura gasosa escoando no regime intermediário é essencialmente a mesma que a feita anteriormente. Frisando que neste caso a teoria é menos desenvolvida e podemos em primeira aproximação considerar os modelos que fazem uso da “ponderação” entre os regimes de escoamento viscoso laminar e molecular. Com relação à velocidade de bombeamento das bombas de vácuo, podemos adotar um valor para cada particular gás ou vapor.

A análise e a modelagem dos sistemas de vácuo, com o transporte da mistura gasosa ocorrendo no regime de escoamento molecular, são mais simples, dado o carácter individual deste tipo de escoamento. As moléculas chocam-se exclusivamente com as paredes do sistema de vácuo, desta forma, elas podem ser consideradas completamente independentes uma das outras. Assim, o tratamento matemático é feito também de modo individual para cada tipo de gás ou vapor. Para isso, adotamos as fontes gasosas, as condutâncias e as velocidades de bombeamento das bombas de vácuo para cada tipo de gás ou vapor e resolvendo a equação diferencial do processo de bombeamento individualmente.

Concluindo, vemos que pela própria essência da construção da equação diferencial dependente exclusivamente do tempo, o resultado que poderemos alcançar somente poderá nos fornecer a pressão na câmara de vácuo em função do tempo. Este tipo de análise, neste trabalho chamado de abordagem discreta, em princípio nada pode dizer sobre ao valor da pressão em cada ponto do sistema de vácuo. O modelo tem apenas dimensão temporal. Para muitos sistemas de vácuo isto não constitui uma limitação excessiva.

Há uma série de casos na tecnologia do vácuo cuja câmara de vácuo é suficientemente grande e sem partes de geometria complicada, e com as bombas de vácuo e fontes gasosas dispostas de forma que não encontramos intensos gradientes de pressão. Por outro lado, também encontramos uma série de importantes sistemas de vácuo, cuja geometria e disposição de bombas de vácuo e fontes gasosas levam à enormes variações de pressão na câmara de vácuo e conseqüentemente a intensos gradientes de pressão. Para esses casos desenvolvemos um tipo de análise para sistemas de alto-vácuo, chamada neste trabalho de abordagem contínua, capaz de encontrar os valores de pressão em todos os pontos da câmara de vácuo. Para sistemas de vácuo grosseiro e pré-vácuo

podemos lançar mão dos programas computacionais da mecânica dos fluidos. Atenção especial deve ser dada no sentido do estabelecimento das condições de contorno do problema.

Cabe mencionar que no caso de empreendermos uma análise, tanto em sistemas de pré-vácuo como em sistemas de alto-vácuo, usando a abordagem contínua, certamente usaremos uma análise via abordagem discreta para obtermos à condição inicial e às condições de contorno. De forma alguma a análise e a modelagem, usando a abordagem discreta devem ser vista como uma ferramenta menor.

A seguir apresentamos um curto glossário com as definições das grandezas fundamentais da tecnologia do vácuo. As grandezas que apresentamos as definições são: pressão, *throughput*, condutância, velocidade de bombeamento e velocidade efetiva de bombeamento.

- Pressão – Do ponto de vista físico baseado em primeiros princípios, podemos definir a pressão exercida por um gás como sendo a intensidade média da força normal total que age em uma superfície, devido aos choques de origem molecular, dividido pelo valor da área. Matematicamente, podemos escrever

$$p \equiv \frac{d|\vec{F}_N|}{dA},$$

onde, $|\vec{F}_N|$ é a intensidade média da força normal total que age na superfície de área A .

- Throughput – Esta grandeza é definida pela expressão

$$Q \equiv \frac{d(p \cdot V)}{dt} = p \cdot \frac{dV}{dt} + V \cdot \frac{dp}{dt}.$$

Ainda, podemos escrever o *throughput* como sendo

$$Q = p \cdot S,$$

onde S é a velocidade de bombeamento cujo valor de pressão é p . O termo *throughput* não tem uma boa tradução para a língua portuguesa; uma possível tradução que preserve o significado físico talvez seja vazão energética. Este caso foi tratado em detalhe neste apêndice, cujo significado físico foi muito explorado e sua importância para a modelagem de sistemas de vácuo enfatizada.

- Condutância – É uma grandeza de fundamental importância para a modelagem dos sistemas de vácuo. Na opinião do autor deste trabalho, ela é a grandeza que mais caracteriza um sistema de vácuo; todos os aspectos importantes para determinar o escoamento dos gases e vapores estão contidos na condutância. A condutância quantifica a facilidade que os gases e vapores têm de escoar por uma tubulação ou orifício. Ela depende de vários fatores, que são: do regime de escoamento, do gás ou vapor, da temperatura, da forma do tubo e de suas dimensões e da pressão (exceto no regime de escoamento molecular, cujas condutâncias são independentes da pressão). O inverso da condutância é a impedância. Matematicamente podemos escrever a seguinte relação que define a condutância

$$Q = C_{AB}(p_A - p_B) \Leftrightarrow C_{AB} \equiv \frac{Q}{p_A - p_B},$$

onde, Q é o *throughput* que passa entre os pontos A e B de uma tubulação ou orifício, C_{AB} é a condutância do tubo ou orifício entre os pontos A e B e p_A e p_B as pressões nos pontos A e B respectivamente.

- Velocidade de Bombeamento – Esta grandeza expressa a quantidade em volume de gás ou vapor na unidade de tempo que é removida por uma bomba de vácuo, ou ainda, que passa por uma seção transversal do tubo ou orifício. Em termos matemáticos temos que a velocidade de bombeamento é dada pela expressão

$$S \equiv \frac{dV_{GÁS}}{dt}.$$

- Velocidade Efetiva de Bombeamento – Esta grandeza tem o mesmo conceito da velocidade de bombeamento. A velocidade efetiva de bombeamento é aquela velocidade de bombeamento bem junto à câmara de vácuo. Em termos matemáticos podemos escrever

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} \Rightarrow S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}},$$

com S_{bv} a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo e C_{Total} a condutância total da linha de bombeamento.

Referências:

- Degasperi, F.T.; “Caderno de Atividades - Notas Particulares”. Instituto de Física da Universidade de São Paulo.
- Degasperi, F.T.; "Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo. Objetivo Didático". XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria, Florianópolis, SC, Brasil, 1991. Seminário.
- Degasperi, F.T.; Corrêa Filho, W.F.; Sanches Junior, R.L.; "Detalhes do Processo de Bombeamento em Sistemas de Vácuo Industriais". Sessão "Tecnologia do Vácuo na Indústria" do XIX Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência – XIX CBRAVIC, LNLS, Campinas, SP, Brasil, 1998. Comunicação Oral.
- Degasperi, F.T.; Bottecchia, J.P.; Jungel, M.; “Tópicos de Preparação e Manuseio de Sistemas de Vácuo Indústrias em Geral”. Sessão “Tecnologia do Vácuo na Indústria” do XVIII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência – XVIII CBRAVIC, Inmetro, Xerém, RJ, Brasil, 1997. Palestra.
- Degasperi, F.T.; “Aplicações da Tecnologia do Vácuo na Indústria”. Programa de Atualização Tecnológica. Faculdade de Tecnologia de São Paulo - Fatec-SP, CEETESP, São Paulo, SP, Brasil, 1998. Palestra.
- Degasperi, F.T.; “Detecção de Vazamentos”. XX Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência – XX CBRAVIC. Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999. Curso.
- Degasperi, F.T.; “Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo”. Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999. Seminário.
- Degasperi, F.T.; “Caderno de Atividades - Notas Particulares”. Faculdade de Tecnologia de São Paulo, Fatec-SP, CEETEPS, São Paulo, SP. 2005.
- Acciari, R.; - “Medição de Velocidade de Bombeamento de Bombas de Vácuo”. Monografia de Trabalho de Graduação do Curso de Materiais, Processos e Componentes Eletrônicos – MPCE. Orientador: Francisco Tadeu Degasperi. Trabalho realizado no Laboratório de Tecnologia do Vácuo LTV. 2004.
- Berman, A.; “Vacuum Engineering Calculations, Formulas, and Solved Exercises”. Academic Press, Inc, 1992.

Apêndice B

□ Equação de Difusão de Gases no Regime de Escoamento Molecular.

A difusão está presente em muitos processos básicos que ocorrem na natureza. Ela tem importância em fenômenos físicos, químicos e biológicos, tanto para a ciência e conhecimento básicos como para aplicações. Há processos de transportes de massa, de calor por condução e de quantidade de movimento em fluidos que são tratados como fenômenos difusivos. Estes fenômenos podem ocorrer nos estados sólido, líquido e gasoso e também no estado de plasma. Consideraremos o fenômeno relativo ao transporte de gases no regime de escoamento molecular como sendo de difusão. A adoção desta suposição não é imediata e requer um estudo mais detido e profundo do fenômeno de transporte em questão, no mínimo ele precisa de uma justificativa, mesmo que seja heurística.

Uma condição básica que deve satisfazer o processo de transporte para que ele seja considerado um fenômeno difusivo é quanto ao mecanismo básico de movimentação daquilo que está se difundindo. O movimento deve estar sustentado no chamado *passeio aleatório*. No Apêndice O discutimos em detalhe o escoamento de gases e vapores no regime molecular como sendo um fenômeno de transporte de origem difusiva. Como sabemos, o regime de escoamento molecular é aquele cujo caminho livre médio é maior que as dimensões do sistema de vácuo. Matematicamente falando, o número de *Knudsen* é maior que um. Apresentamos estudos de casos de sistemas de alto-vácuo com modelagens realizadas por meio da equação de difusão e por meio do método de Monte Carlo. Comparando os resultados obtidos por meio desses dois métodos completamente diferentes, verificamos que os resultados são bastante próximos entre si, o suficiente para estar dentro da incerteza dos medidores de alto-vácuo utilizados. Sabemos que este fato não prova que o transporte de gases e vapores no regime de escoamento molecular possa ser considerado um fenômeno difusivo, apenas corrobora o fato. Não temos como provar este fato! Uma vez feita esta suposição, deveremos comparar os resultados obtidos com os dados experimentais – caso seja possível obtê-los –, ou comparar com outras análises e modelagens confiáveis.

Pelo que já foi alcançado, estamos confiantes e encorajados em utilizar a equação de difusão para modelar os sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo, ou melhor, de maneira mais precisa, os sistemas de vácuo com os gases em regime de escoamento molecular. Uma vez que a física-matemática dos fenômenos de difusão é bastante desenvolvida, principalmente devido à transferência de calor por condução nos sólidos, poderemos utilizar uma série de raciocínios, abordagens e resultados desta área na tecnologia do vácuo. Assim, determinar os valores de pressão em função do tempo para todos os pontos do sistema de vácuo, ou seja, teremos uma solução com

estrutura de campo escalar. Cabe um alerta: apesar de termos disponíveis muitos resultados matemáticos da equação de difusão para a transferência de calor por condução, a sua adaptação à situação do escoamento dos gases em regime molecular não é um procedimento direto e mecânico. No *Apêndice O* apresentamos casos muito particulares de modelagens de sistemas de alto-vácuo, com os campos de pressão obtidos por meio da equação de difusão e que são comparados com os obtidos pelo método de Monte Carlo. Os resultados obtidos encorajaram-nos a construir, neste trabalho de tese, equações diferenciais para modelar sistemas de alto-vácuo com geometrias mais complexas.

Precisamos interpretar e desenvolver todos os conceitos inerentes ao transporte de gases rarefeitos em regime molecular. A Figura B.1 mostra de forma esquemática um recipiente contendo gás com os átomos e moléculas sendo bombeados através de um tubo até atingirem a bomba de alto-vácuo.

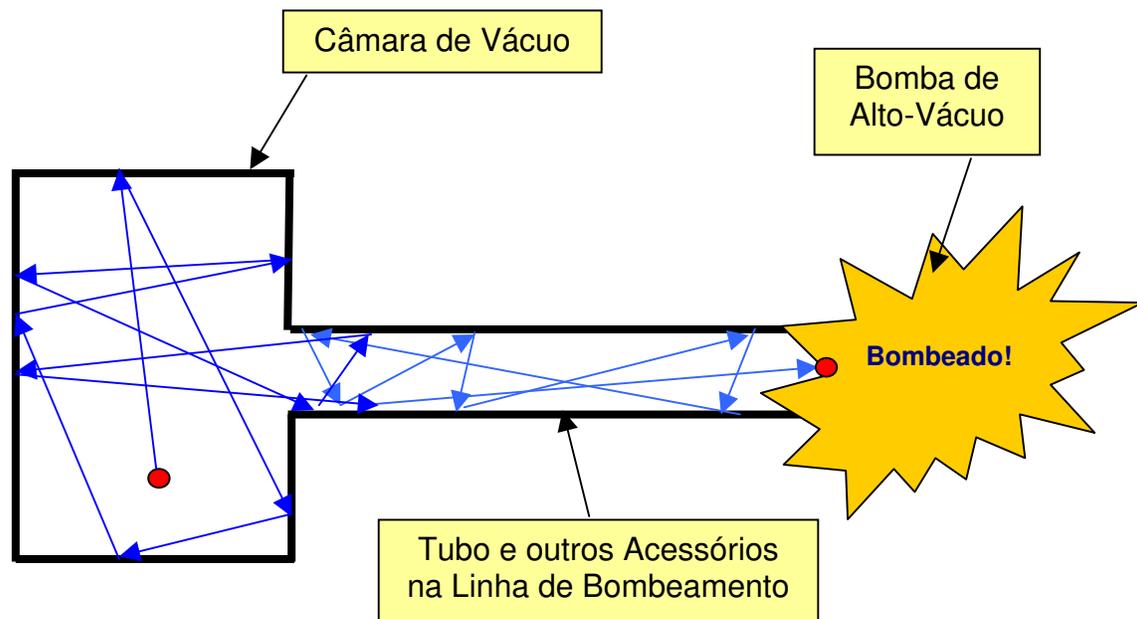


Figura B.1 Representação esquemática do processo de bombeamento de átomos e moléculas dos gases e vapores no regime de escoamento molecular.

Neste trabalho definimos as grandezas condutância específica, *throughput* específico para taxa de degaseificação e *throughput* para qualquer outra fonte gasosa. Nessas grandezas estarão representadas matematicamente as características básicas dos sistemas de vácuo, necessárias para a sua modelagem na abordagem contínua. Estaremos desenvolvendo a seguir a dedução da equação de difusão para os casos unidimensional, bidimensional e tridimensional. Conjuntamente

apresentaremos as condições de contorno e a condição inicial necessárias à solução matemática do problema.

- **Caso Unidimensional.**

O transporte dos gases e vapores em regime molecular tem um mecanismo bastante distinto daquele que estamos familiarizados com os fluidos em geral. No caso dos fluidos, seja líquido ou gás, o seu transporte é tratado pela mecânica dos fluidos. A suposição básica da mecânica dos fluidos é considerá-los um meio contínuo, apesar de os fluidos serem formados individualmente por átomos e moléculas e estes estarem incessantemente em movimento aleatório devido à agitação térmica. No caso gasoso, se o número de *Knudsen* for menor que 0,01 ($Kn < 0,01$) seguramente podemos aplicar as equações de *Navier-Stokes* para modelar o comportamento dos gases e vapores.

No caso dos gases e vapores escoando no regime molecular ($Kn > 1$) a hipótese do contínuo não pode ser adotada, assim não são válidas as equações de *Navier-Stokes*. Desta forma deveremos procurar uma formulação adequada à situação física para a modelagem dos sistemas de alto-vácuo. Vemos na Figura B.2 de forma esquemática, mas bastante fiel à situação física, o processo de escoamento dos gases ocorrendo ao longo do tubo de forma completamente aleatória. Recorrendo novamente à Figura B.1, ela mostra que para os átomos e moléculas serem bombeados, eles precisam encontrar o orifício do tubo e em seguida vencer todo o comprimento do tubo e finalmente chegar à bomba de alto-vácuo. A trajetória das partículas é completamente ao acaso ocorrendo num movimento sem direção preferencial. É devido a este fato que se torna difícil o bombeamento no regime molecular em comparação ao regime viscoso laminar e viscoso turbulento.

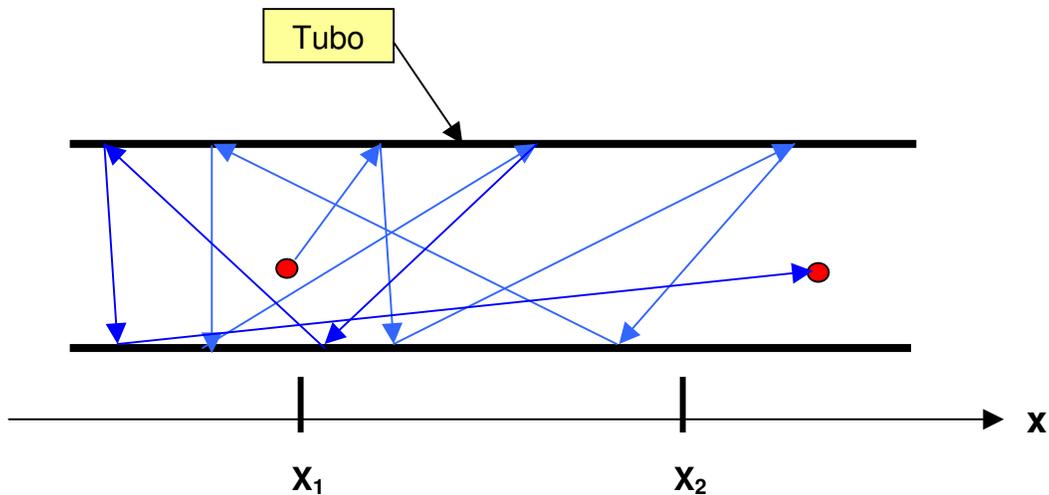


Figura B.2 Átomos e moléculas realizando ao longo do tubo o *passeio aleatório* devido a ocorrência dos choques com as paredes deste tubo obedecendo a regra de *Knudsen*.

No regime viscoso o transporte dos gases e vapores dá-se de forma coletiva, o movimento de uma partícula influencia no movimento de outras partículas. No caso do transporte dos gases e vapores no regime molecular, o movimento é individual e depende exclusivamente da agitação térmica das partículas. Assim, como não temos choques entre as partículas gasosas entre si, somente com as paredes do sistema de vácuo, ocorre como se os átomos e moléculas estivessem “sozinhos” no sistema de vácuo. Desta forma, o movimento de uma partícula não influencia o movimento de outras partículas. Vamos nos ater ao transporte dos gases ao longo do tubo. Esquemáticamente podemos considerá-lo de forma simples, mas sem perder a sua essência, conforme mostrado na Figura B.3. Determinaremos o balanço do número de átomos ou moléculas que atravessa duas superfícies, posicionadas em x_1 e x_2 e perpendiculares ao eixo do tubo.

Assim, consideremos um tubo reto de área de seção transversal constante A , – orientado na direção x –. Diremos que no ponto x_1 a corrente molecular é j_1 , e no ponto x_2 a corrente molecular j_2 , para um dado instante t . Definimos corrente molecular como sendo o número de átomos ou moléculas que cruza uma seção transversal do tubo por unidade de área na unidade de tempo, isto é, o fluxo de partículas. Temos que a corrente molecular é uma função da posição x e do tempo t , escrevemos $j=j(x,t)$. Assim, para os pontos x_1 e x_2 temos que $j_1=j(x_1,t)$ e $j_2=j(x_2,t)$. A Figura B.3 mostra esquemáticamente a construção matemática do balanço do número de partículas na região entre x_1 e x_2 . Definimos a função $n=n(x,t)$ como sendo o número de partículas (átomos ou moléculas) por unidade de volume na posição x e no instante t .

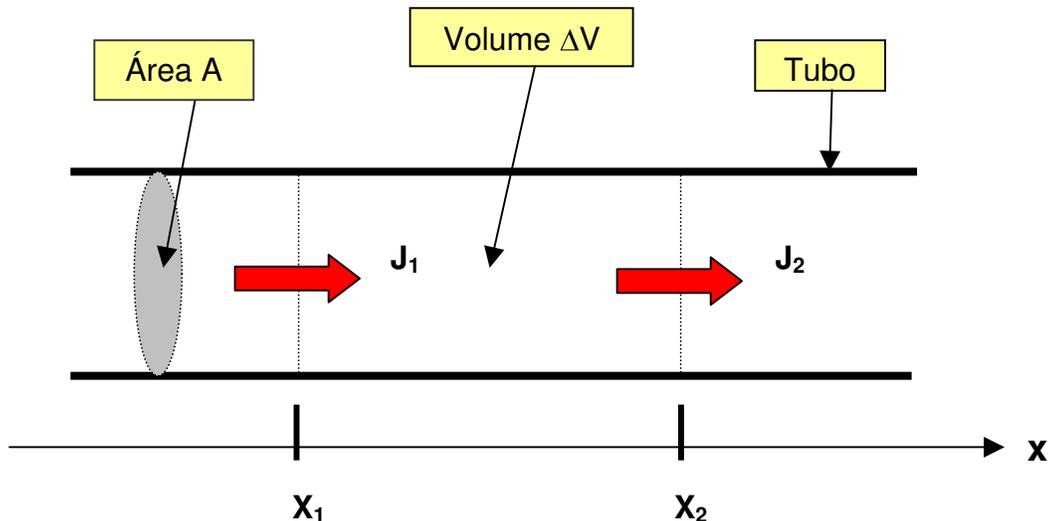


Figura B.3 Os elementos geométricos para a construção da equação de balanço do número de partículas em transporte entre os pontos x_1 e x_2 .

Vamos adotar a validade da 1ª lei de *Fick* para o processo difusivo de gases e vapores em baixas pressões, particularmente, assim ficamos com a Expressão B.1

$$j = j(x,t) = -D \frac{\partial n(x,t)}{\partial x}, \quad \text{B.1}$$

onde D é o coeficiente de difusão. A forma da última expressão praticamente define o fenômeno de origem difusiva. Considerando a conservação do número de partículas no intervalo espacial $\Delta x = x_2 - x_1$, no instante t , temos que a expressão

$$j_2 A - j_1 A = j(x_2,t) A - j(x_1,t) A = [j(x_2,t) - j(x_1,t)] A,$$

é igual ao número de partículas que atravessa a superfície em x_2 menos o número de partículas que atravessa a superfície x_1 , no intervalo de tempo Δt . Assim, escrevendo em termos da variação da densidade de partículas no volume $\Delta V = A \Delta x$, ficamos com

$$j_2 A - j_1 A = j(x_2,t) A - j(x_1,t) A = [j(x_2,t) - j(x_1,t)] A \cong -\frac{\Delta n(\bar{x},t)}{\Delta t} \Delta V$$

onde $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$. Assim, sabendo-se que $\Delta V = A \Delta x$ temos a Expressão B.2

$$\begin{aligned} \Delta j(\bar{x},t) A &\cong -\frac{\Delta n(\bar{x},t)}{\Delta t} \Delta V = -\frac{\Delta n(\bar{x},t)}{\Delta t} A \Delta x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta j(\bar{x},t)}{\Delta x} \cong \frac{\Delta n(\bar{x},t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad \text{B.2}$$

fazendo os limites para $\Delta t \rightarrow 0$ e simultaneamente $\Delta x \rightarrow 0$ encontramos a igualdade

$$\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial n(x,t)}{\partial t}.$$

Usando explicitamente a 1ª lei de *Fick* na expressão acima, ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-D \frac{\partial n(x,t)}{\partial x} \right] = -\frac{\partial n(x,t)}{\partial t},$$

considerando que o coeficiente de difusão D seja constante, temos a Expressão B.3

$$D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}. \quad \text{B.3}$$

Esta última é a equação de difusão escrita em termos da densidade de átomos ou moléculas por unidade de volume, ou seja, a densidade volumétrica de partículas. Vamos escrever esta equação diferencial em termos da pressão, uma vez que nos sistemas de vácuo, esta é a grandeza medida. Consideraremos que a pressão no sistema de vácuo varie de forma que possamos ainda definir estados de equilíbrio termodinâmico em cada instante. Assim, utilizando a equação de estado dos gases perfeitos aplicada a cada pequeno volume centrado nos pontos da reta x encontramos

$$p \Delta V = \Delta N k T \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta V} = \frac{1}{k T} p$$

mas sabemos que

$$n = n(x,t) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N(x,t)}{\Delta V}$$

então, encontramos a expressão da densidade volumétrica de gás em termos da pressão

$$n(x,t) = \frac{1}{k T} p(x,t).$$

Finalmente, a equação de difusão é escrita na Expressão B.4 em termos da variável pressão do gás

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[-D \frac{1}{k T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right] = -\frac{1}{k T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right] = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$D \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \quad . \text{ B.4}$$

$$p(x_A, t) = p_A(t) \quad -D \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A \quad \pm D \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = S_A p_A \quad p(x,0) = p_0(x)$$

Consideramos o coeficiente de difusão constante na equação de difusão mostrada acima. Este fato será bastante explorado mais à frente e veremos que este coeficiente tem fundamental importância para a modelagem rigorosa de sistemas de alto-vácuo. A sua definição precisa é um dos resultados deste trabalho e exemplificaremos em várias situações bastante freqüentes e relevantes em tecnologia do vácuo. Vemos que estamos diante de um problema de condições de contorno com condição inicial, com uma equação diferencial a derivadas parciais de segunda ordem. Escrevemos as condições de contorno possíveis e a condição inicial, em breve serão discutidas e veremos como impô-las nas modelagens de problemas unidimensionais dependentes do tempo. Existem muitos sistemas de vácuo que podem ser perfeitamente modelados considerando apenas uma dimensão espacial. A solução da equação diferencial, representada pela função pressão $p=p(x,t)$ tem estrutura de campo escalar. A solução deste tipo de problema somente será possível se forem especificadas duas condições de contorno na variável espacial x e a condição inicial para um dado instante t , em geral o instante inicial.

A corrente molecular foi utilizada para estabelecer o balanço do número de átomos ou moléculas no volume ΔV , porém para a tecnologia do vácuo a grandeza de maior interesse é o *throughput*. Assim, da mesma forma como fizemos no *Apêndice A* para o *throughput* em termos do número de átomos e moléculas sendo bombeado na unidade de tempo

$$Q = k T \frac{dN}{dt}$$

e podemos escrever para a formulação de campo de pressão unidimensional o *throughput* como sendo,

$$Q(x,t) = k T A j(x,t) .$$

Mas sabemos que

$$j(x,t) = -D \frac{\partial n(x,t)}{\partial x} = -D \frac{1}{k T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

portanto encontramos a Expressão B.5

$$Q(x,t) = k T A j(x,t) = -D k T A \frac{1}{k T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -D A \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \Rightarrow$$

B.5

$$Q(x,t) = -D A \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

A Expressão B.5 será utilizada intensamente em nossas modelagens de sistemas de vácuo por meio da formulação contínua. Para tanto deveremos associar e interpretar a grandeza $D.A$ apropriadamente à terminologia e conceitos relativos à tecnologia do vácuo. Veremos que esta grandeza está ligada à condutância do tubo ou orifício por onde os gases escoam. O A partir dela poderemos encontrar por exemplo a quantidade de gás que chega em uma bomba de vácuo, ou ainda, as condições de contorno que tenham origem nas fontes gasosas.

Podemos tirar uma conclusão muito importante sobre o escoamento dos gases nos sistemas de vácuo a partir das seguintes relações obtidas anteriormente

$$\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{k T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \quad \text{e} \quad Q(x,t) = k T A j(x,t).$$

Assim, encontramos a seguinte igualdade mostrada na Expressão B.6

$$\frac{1}{k T A} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{k T} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \Rightarrow$$

B.6

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}$$

A última expressão nos diz que o *throughput* será constante ao longo de uma tubulação, ou seja, o *throughput* não depende da coordenada espacial x , se a pressão em cada ponto do sistema de

vácuo não variar com o tempo. Portanto, no estado estacionário $\left(\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \equiv 0, \forall t \geq t'\right)$ o *throughput* não depende da posição. Este resultado somente será válido se não ocorrerem outras fontes de gases ou vapores além daquelas da câmara de vácuo, ou seja, o tubo é apenas um caminho para o transporte dos gases. A parede do tubo, ela mesma, não degaseifica ou apresenta qualquer outra fonte gás, como por exemplo, vazamentos. Considerando o efeito dos gases que têm origem nos tubos, deveremos incorporar o *throughput* desta fonte de gás a última expressão.

Agora consideraremos a expressão para o caso de um trecho de um sistema de vácuo unidimensional que possa ter fontes de gases e vapores ao longo do seu comprimento. Admitiremos um tubo de área de seção transversal constante de área A , conforme esquematizado na Figura B.4. O elemento de volume pode ser escrito como $\Delta V = A \Delta x$ com $\Delta x = x_2 - x_1$. Temos que o tubo apresenta uma taxa de degaseificação por unidade de comprimento que denominaremos por $q = q(x,t)$. No trecho do tubo com comprimento $\Delta x = x_2 - x_1$ escreveremos a equação de balanço do *throughput* dos gases e vapores.

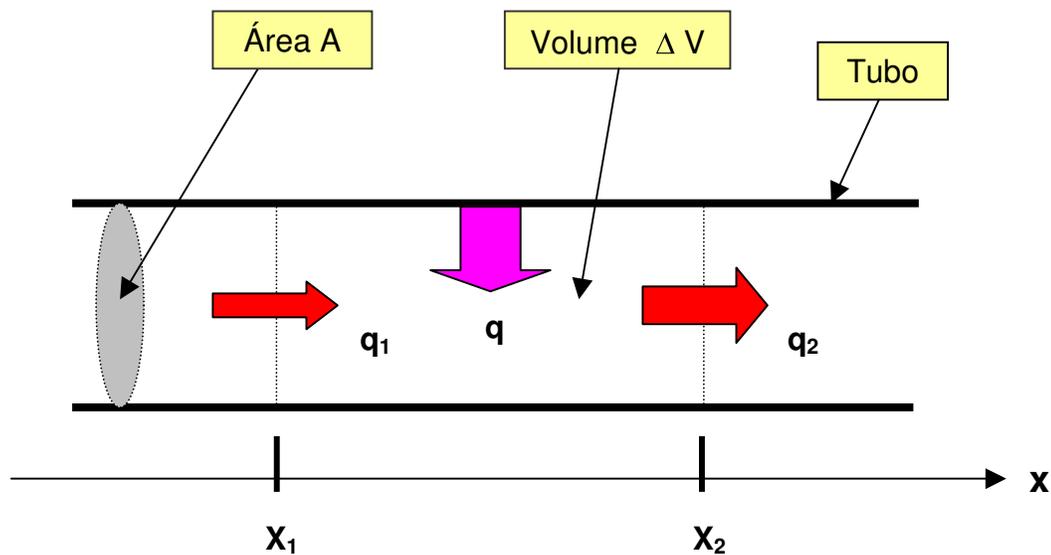


Figura B.4 Construção geométrica para a determinação do balanço do *throughput* no elemento de tubo com comprimento $\Delta x = x_2 - x_1$, podendo apresentar fontes de gases e vapores em sua extensão.

Considerando o trecho do tubo entre x_1 e x_2 teremos a seguinte relação,

$$q_1 + q \Delta x - q_2 \cong A \Delta x \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

nesta relação, as fontes de gases e vapores podem depender da posição e do tempo, assim como a pressão. Para uma maior generalidade, escrevemos a última relação como

$$Q(x_1, t) + q \Delta x - Q(x_2, t) \cong A \Delta x \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t},$$

com $q_1 = Q(x_1, t)$ e $q_2 = Q(x_2, t)$ para o intervalo $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$. Continuando, o *throughput* em cada ponto x ao longo do tubo pode ser determinado como função da condutância específica $-c-$, que é a condutância por unidade de comprimento. Assim, seja a condutância do tubo de comprimento L igual a C , temos que a condutância específica é dada por $c=C.L$. Ainda, para um trecho de tubo de comprimento Δx , temos que o *throughput* Q , que escoar através do tubo, pode ser escrito como

$$Q = C_{\Delta x} (p_1 - p_2) = C \Delta p \Rightarrow Q = C_{\Delta x} (p_1 - p_2) \frac{\Delta x}{\Delta x} = C_{\Delta x} \Delta x \frac{(p_1 - p_2)}{\Delta x} = C_{\Delta x} \Delta x \frac{-(p_2 - p_1)}{\Delta x}$$

assim, construímos a Expressão B.7

$$Q(x, t) = -c \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x}, \quad \text{B.7}$$

assim, teremos que

$$q_1 = Q(x_1, t) \cong -c \left. \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \right|_{x_1, t} \quad \text{e} \quad q_2 = Q(x_2, t) \cong -c \left. \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \right|_{x_2, t}.$$

Desta forma, temos na equação do balanço do *throughput* para o trecho Δx do tubo

$$Q(x_1, t) + q \Delta x - Q(x_2, t) \cong A \Delta x \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$-c \left. \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \right|_{x_1, t} + q(x, t) \Delta x - \left(-c \left. \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \right|_{x_2, t} \right) \cong A \Delta x \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t}$$

colocando em uma forma mais adequada, ficamos com

$$\frac{c \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, t} - c \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, t}}{\Delta x} \cong -q(x, t) \frac{\Delta x}{\Delta x} + A \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{\Delta \bar{p}(x, t)}{\Delta t}$$

fazendo simultaneamente os limites para $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x' \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ na expressão abaixo

$$\lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{c \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, t} - c \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, t}}{\Delta x} \cong \lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[-q(x, t) \frac{\Delta x}{\Delta x} + A \frac{\Delta \bar{p}(x, t)}{\Delta t} \right]$$

encontramos a equação de difusão unidimensional para a modelagem de sistemas de alto-vácuo com as condições de contorno possíveis e condição inicial mostradas na Expressão B.8

$$c \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = -q(x, t) + A \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}$$

$$p(x_A, t) = p_A(t) \quad -c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A(t) \quad \pm c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = S_A p(x_A) \quad p(x, 0) = p_0(x)$$

B.8

As constantes definidas formalmente como:

- volume por unidade de comprimento, $A \equiv \frac{V}{L}$, vemos que a constante A coincide com a área A ,
- condutância por unidade de comprimento ou condutância específica, $c \equiv C L$, e
- a quantidade de gás em termos de *throughput específico* ou *throughput* por unidade de comprimento do tubo das fontes gasosas presentes no sistema de vácuo, $q=q(x, t)$.

Para determinar a solução de um problema específico, deveremos especificar duas condições de contorno, que podem ser dos seguintes tipos:

- *Condição de Dirichlet*. A pressão é especificada em determinado ponto do sistema de vácuo tubular. Matematicamente, temos a Expressão B.9

$$p(x_A, t) = p_A(t), \quad \forall t \geq t' . \quad \text{B.9}$$

Nos casos mais comuns a serem modelados encontramos que a pressão, especificada em um particular ponto, é constante no tempo, desta forma $p(x_A, t) = p_A$.

- *Condição de Neumann.* O *throughput* é especificado em algum ponto do sistema de vácuo tubular. Assim, matematicamente escrevemos a Expressão B.10

$$-c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A(t), \quad \forall t \geq t' . \quad \text{B.10}$$

Na maior parte dos sistemas de vácuo temos que o *throughput*, especificado em um determinado ponto, é constante no tempo, assim $q(t) = q_A$. Em muitos sistemas de vácuo esta condição de contorno também será usada para estabelecer a continuidade do *throughput*, escoando em regiões da tubulação com condutâncias específicas de diferentes valores. Ainda, este tipo de condição de contorno será usado na modelagem para unir trechos de tubos com diferentes taxas de degaseificação por unidade de comprimento. Nestes modelos escreveremos a equação de difusão para cada trecho de tubo, em seguida, a condição de contorno de *Neumann* nas regiões apresentando diferentes condutâncias específicas ou diferentes *throughputs* específicos. Nestes casos poderemos escrever a condição de contorno de *Neumann* das seguintes formas mostradas na Expressão B.11

$$c \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = q_A, \quad \text{B.11.a}$$

ou,

$$c_1 \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = c_2 \frac{\partial p_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A}, \quad \text{B.11.b}$$

ou ainda,

$$c \left. \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_A} = c \left. \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_A} \Rightarrow \left. \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_A} = \left. \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_A} .$$

No caso de um ponto a , ao longo do eixo x , cujo *throughput* é igual a zero, podemos escrever

$$\left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_A} = 0 . \quad \text{B.11.c}$$

Podemos interpretar fisicamente este último caso de duas formas: podemos ter no ponto a uma tampa ou uma válvula que impede o escoamento de átomos e moléculas. Em outro caso, podemos ter no ponto a um ponto de máxima pressão.

- *Condição de Robin*: Há uma dependência entre o valor da pressão num ponto o valor do *throughput* no mesmo ponto ao longo do sistema de vácuo tubular, matematicamente, temos a Expressão B.12

$$\pm c \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_A} = S_A p_A \quad \text{B.12}$$

Na condição de contorno de *Robin* há uma combinação linear do valor da pressão com a derivada da pressão em relação à direção x . No caso mais geral, este tipo de condição de contorno pode ser formulada como na Expressão B.13

$$c \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + S_A p(x,t) = f(x,t) \quad \text{B.13}$$

onde S_A é a velocidade de bombeamento. Nos problemas mais gerais encontrados em tecnologia do vácuo, a última equação é colocada na sua forma homogênea, mostrada na Expressão B.14

$$c \left. \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_A} + S_A p(x_A, t) = 0 . \quad \text{B.14}$$

O significado físico desta última expressão pode ser interpretado da seguinte forma: junto à bomba de vácuo, na posição x_A , o *throughput* de gás bombeado pode ser expresso de duas formas distintas. Assim, na Expressão B.14, temos que o *throughput* bombeado q_A é função da variação da pressão em relação a posição x , calculado em x_A , assim

$$q_A = -c \left. \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_A}, \text{ e escrito em outra forma, } q_A \text{ é função da velocidade de bombeamento}$$

da bomba de vácuo, assim $q_A = S_A p(x_A, t)$.

No caso de termos um tubo com área de seção transversal variável, apresentando simetria cilíndrica, a sua área de seção transversal poderá ser escrita matematicamente como uma função que depende do comprimento do tubo. A Figura B.5 mostra esquematicamente um tubo com seção transversal que depende de x .

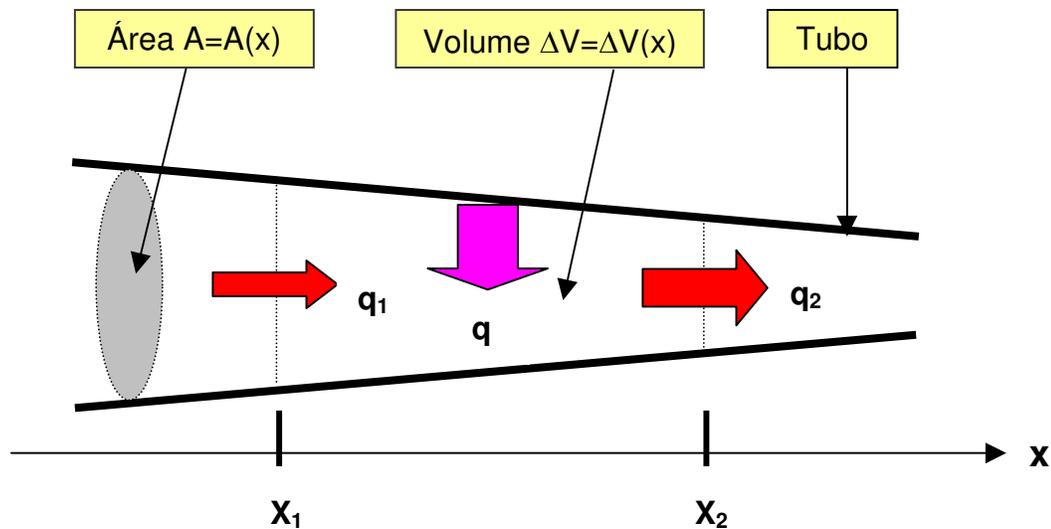


Figura B.5 Construção geométrica para a determinação do balanço do *throughput* no elemento de tubo com área de seção variável com comprimento $\Delta x = x_2 - x_1$, podendo apresentar fontes de gases e vapores em sua extensão.

Seguiremos o mesmo raciocínio adotado anteriormente, isto é, baseado na conservação do *throughput* no volume $\Delta V = \bar{A} \Delta x$, encontramos para o trecho do tubo entre x_1 e x_2 a seguinte relação,

$$q_1 + q \Delta x - q_2 \cong \bar{A} \Delta x \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

nesta relação, as fontes de gases e vapores podem depender da posição e do tempo, assim como a pressão. Para uma maior generalidade escrevemos a última relação como mostrada na Expressão B.15

$$Q(x_1, t) + q \Delta x - Q(x_2, t) \cong \bar{A} \Delta x \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t}, \quad \text{B.15}$$

com $q_1 = Q(x_1, t)$ e $q_2 = Q(x_2, t)$ para o intervalo $x_1 \leq \bar{x} \leq x_2$. Continuando, o *throughput* em cada ponto x ao longo do tubo pode ser determinado como função da condutância específica, que neste caso varia de ponto a ponto ao longo do tubo, uma vez que o diâmetro do tubo não é constante, assim

$$Q(x, t) = -c(x) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x}.$$

Podemos escrever que

$$q_1 = Q(x_1, t) \cong -c(x_1) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, t} \quad \text{e} \quad q_2 = Q(x_2, t) \cong -c(x_2) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, t}.$$

Desta forma temos, junto à equação do balanço do *throughput* para o trecho Δx do tubo

$$Q(x_1, t) + q \Delta x - Q(x_2, t) \cong \bar{A} \Delta x \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$-c(x_1) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, t} + q(x, t) \Delta x - \left(-c(x_2) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, t} \right) \cong \bar{A} \Delta x \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t},$$

colocando em uma forma mais adequada, ficamos com

$$\frac{c(x_2) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, t} - c(x_1) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, t}}{\Delta x} \cong -q(x, t) \frac{\Delta x}{\Delta x} + A(\bar{x}) \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t}$$

fazendo simultaneamente os limites para $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x' \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ na expressão abaixo

$$\lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{c(x_2) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, t} - c(x_1) \frac{\Delta p(x, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, t}}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[-q(x, t) \frac{\Delta x}{\Delta x} + A(\bar{x}) \frac{\Delta p(\bar{x}, t)}{\Delta t} \right]$$

encontramos finalmente a equação de difusão unidimensional para a modelagem de sistemas de alto-vácuo tubulares com área de seção transversal variável com o comprimento do tubo, como mostrada na Expressão B.16. Apresentamos também as condições de contorno possíveis e a condição inicial, cuja discussão referente a sua especificação é idêntica àquela feita no caso anterior. Adiantamos que deveremos definir com precisão as grandezas condutância específica, *throughput* por unidade de comprimento e área de seção transversal em função da posição do tubo. Mais à frente definiremos rigorosamente estas grandezas.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[c(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \right] &= -q(x, t) + A(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \\ c(x) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dc(x)}{dx} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} &= -q(x, t) + A(x) \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \\ p(x_A, t) = p_A(t) \quad -c(x_A) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} &= q_A(t) \quad \pm c(x_A) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A} = S_A p(x_A) \\ p(x, 0) &= p_0(x) \end{aligned}$$

B.16

Quando o problema de condições de contorno é independente do tempo, isto é, um problema estacionário, podemos fazer simplificações. Assim, temos que para $\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \equiv 0, \forall t \geq t'$ a equação de difusão e as possíveis condições de contorno tomam a seguinte forma, como na Expressão B.17

$$\frac{d}{dx} \left[c(x) \frac{dp(x)}{dx} \right] = -q(x) \Rightarrow c(x) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + \frac{dc(x)}{dx} \frac{dp(x)}{dx} = -q(x)$$

B.17

$$p(x_A) = p_A \quad -c(x_A) \frac{dp(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} = q_A \quad \pm c(x_A) \frac{dp(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} = S_A p(x_A)$$

A equação diferencial encontrada acima pode assumir uma forma integral, como podemos ver abaixo. Esta forma de tratar matematicamente o problema pode ser adequada em muitos casos, uma vez que a solução pode ser obtida diretamente de duas integrações e as suas constantes de integração podem ser encontradas a partir da imposição das condições de contorno. Assim, manipulando matematicamente temos

$$c(x) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + \frac{dc(x)}{dx} \frac{dp(x)}{dx} = -q(x) \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[c(x) \frac{dp(x)}{dx} \right] = -q(x) \Rightarrow$$

$$c(x) \frac{dp(x)}{dx} = \int_a^{x'} -q(x'') dx'' \Rightarrow \frac{dp(x)}{dx} = \frac{1}{c(x)} \int_a^{x'} -q(x'') dx'' \Rightarrow$$

$$\int_0^p \frac{dp'(x)}{dx} dx = \int_b^x \left[\frac{1}{c(x')} \int_a^{x'} -q(x'') dx'' \right] dx'$$

e, finalmente chegamos à expressão matemática mostrada na Expressão B.18

$$p(x) = \int_b^x \frac{1}{c(x')} \left[\int_a^{x'} -q(x'') dx'' \right] dx'$$

B.18

com as constantes a e b determinadas a partir da imposição das condições de contorno.

Conseguimos obter por meio de primeiros princípios a equação de difusão, para o escoamento dos gases e vapores em regime molecular, para tubos de área de seção transversal variável com o seu comprimento. Na dedução aparecem os coeficientes: condutância específica, *throughput* por unidade de comprimento e área de seção transversal em função da posição x do tubo. Esses coeficientes são de fundamental importância, uma vez que eles definirão o sistema de alto-vácuo tubular a ser modelado. Fazendo um paralelo com a transferência de calor por condução

temos neste caso os coeficientes: condutibilidade térmica, quantidade de geração de calor por unidade de volume e o produto entre a capacidade térmica específica e a densidade do material. Nos materiais homogêneos e anisotrópicos a condutibilidade térmica é constante para qualquer forma do corpo; ela é uma característica do meio material que flui por condução o calor.

Este último ponto é bastante interessante – e igualmente importante – quando o transposto à situação do escoamento de gases no regime molecular. No caso do escoamento dos gases em regime molecular o meio é o vácuo! Podemos à primeira vista criticar esta última afirmação, dizendo que o meio é o próprio gás rarefeito. Uma vez que, por menor que seja a pressão, sempre temos um meio material composto por átomos e moléculas. A questão física essencial é que estamos supondo o escoamento dos gases no regime molecular; neste regime as moléculas se chocam com as paredes do tubo. Os choques das moléculas entre si são eventos bastante raros. Desta forma, apesar de termos gás no tubo, o meio é o vácuo, ou melhor, o meio é o vácuo “cercado” pelas paredes do tubo. Assim, no caso do escoamento molecular – $Kn > 1$ –, a grandeza condutância específica deve dependem de características geométricas do tubo. Sabemos deste fato quando calculamos a condutância para um trecho de tubo.

Queremos encontrar uma expressão para a condutância específica, ou seja, para um dado comprimento unitário de tubo. A grandeza condutância, de um trecho de tubo, está relacionada com a facilidade com que os gases escoam ao longo deste tubo. Vamos então construir a grandeza condutância específica para tubos de área de seção variável com o seu comprimento. Antes vamos construir uma expressão matemática capaz de tratar com a situação esquematizada na Figura B.6.

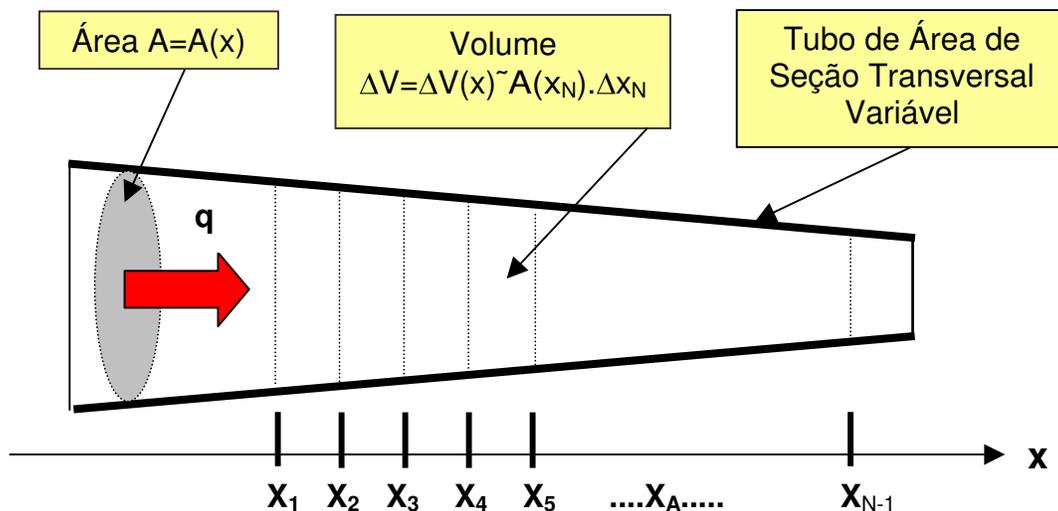


Figura B.6 Construção geométrica para a determinação da condutância total do tubo em função da associação das condutâncias de cada elemento de comprimento $\Delta x_N = x_N - x_{N-1}$.

Temos um tubo de comprimento L , com área de seção transversal variável $A=A(x)$. A expressão matemática que construiremos será muito útil para verificarmos a expressão da condutância específica, detalharemos à frente. Assim, dividimos o tubo de comprimento L em comprimentos elementares e nomeamos as suas extremidades, como vemos a seguir.

Consideremos a condutância total do tubo igual a C . Vamos admitir que cada trecho elementar do tubo de área variável possa ser substituído por um tubo cilíndrico. Assim, teremos uma composição de trechos cilíndricos associados em série. Para cada tubo elementar, de comprimento $\Delta x_N = x_N - x_{N-1}$, escrevemos que a condutância específica é igual a $c_N = C_N \Delta x_N$.

Temos que C_N é a condutância total do tubo elementar de comprimento Δx_N , calculado por meio da

expressão $C_N = \left(\frac{\pi RT}{18M} \right)^{1/2} \frac{d_N^3}{\Delta x_N}$, com T a temperatura absoluta, M a massa molecular do gás, d_N o

diâmetro do tubo e Δx_N o seu comprimento. Como a condutância específica, ou também chamada de condutância por unidade de comprimento, é definida como $c_N = C_N \Delta x_N$ temos a Expressão B.19

$$C_N = \left(\frac{\pi RT}{18M} \right)^{1/2} \frac{d_N^3}{\Delta x_N}$$

$$c_N = C_N \Delta x_N = \left(\frac{\pi RT}{18M} \right)^{1/2} \frac{d_N^3}{\Delta x_N} \Delta x_N \Rightarrow . \quad \text{B.19}$$

$$c_N = \left(\frac{\pi RT}{18M} \right)^{1/2} d_N^3$$

Para cada tubo elementar escrevemos a expressão da respectiva condutância específica, temos

$$c_1 = C_1 \Delta x_1, \quad c_2 = C_2 \Delta x_2, \quad c_3 = C_3 \Delta x_3, \quad \dots \quad c_N = C_N \Delta x_N .$$

Colocando na seguinte forma

$$\frac{c_1}{\Delta x_1} = C_1, \quad \frac{c_2}{\Delta x_2} = C_2, \quad \frac{c_3}{\Delta x_3} = C_3, \quad \dots \quad \frac{c_N}{\Delta x_N} = C_N ,$$

sem perda de generalidade, consideraremos que os tubos elementares têm o mesmo comprimento, assim $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x_N = \Delta x$. Esses tubos elementares – de área de seção transversal que podem ser diferentes entre si –, de comprimento Δx_N são aproximados por tubos cilíndricos de igual comprimento Δx_N e associados em série, formando um tubo de comprimento total L . Cada tubo cilíndrico elementar tem diâmetro que pode ser considerado como sendo um valor médio do tubo de área de seção transversal variável, conforme esquematizado na Figura B.7

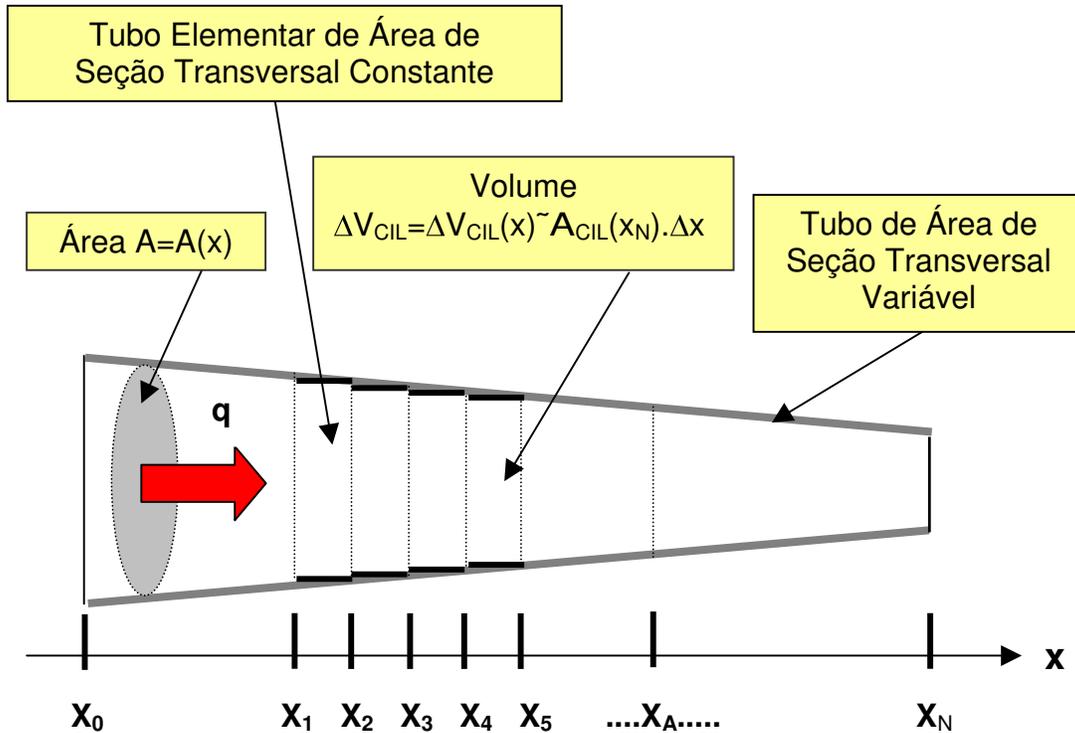


Figura B.7 Construção geométrica do tubo original a partir dos tubos elementares cilíndricos. Cada tubo elementar tem comprimento $\Delta x_N = x_N - x_{N-1}$.

Podemos calcular a condutância total a partir da associação em série dos tubos cilíndricos elementares, a expressão é mostrada abaixo

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \Rightarrow \frac{1}{C_T} = \frac{1}{\frac{c_1}{\Delta x_1}} + \frac{1}{\frac{c_2}{\Delta x_2}} + \frac{1}{\frac{c_3}{\Delta x_3}} + \dots + \frac{1}{\frac{c_N}{\Delta x_N}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{\frac{c_1}{\Delta x}} + \frac{1}{\frac{c_2}{\Delta x}} + \frac{1}{\frac{c_3}{\Delta x}} + \dots + \frac{1}{\frac{c_N}{\Delta x}} \Rightarrow \frac{1}{C_T} = \frac{\Delta x}{c_1} + \frac{\Delta x}{c_2} + \frac{\Delta x}{c_3} + \dots + \frac{\Delta x}{c_N} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_T} = \Delta x \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_N} \right)$$

O elemento de comprimento Δx pode ser determinado como $\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{x_N - x_0}{N}$, onde N é o número de tubos elementares cilíndricos. Desta forma, a condutância total em função das condutâncias específicas é dada pela Expressão B.20

$$\frac{1}{C_T} = \Delta x \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_N} \right) \Rightarrow \frac{1}{C_T} = \frac{L}{N} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \dots + \frac{1}{c_N} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{L}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i} \Rightarrow C_T = \frac{1}{\frac{L}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i}} \Rightarrow C_T = \frac{N}{L} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i}}$$

assim,

$$C_T = \frac{N}{L} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i}} .$$

B.20

Podemos considerar a expressão acima para o caso da discretização aumentar muito, a ponto de admitirmos que o tamanho de cada tubo elementar tenda à zero. Assim, podemos escrever

$$C_T = \frac{N}{L} \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i}} = \frac{1}{\frac{L}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i}} = \frac{1}{\Delta x \sum_{i=1}^N \frac{1}{c_i}} \Rightarrow C_T = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{c_i} \Delta x \right)} .$$

Fazendo o limite da expressão acima para $N \rightarrow \infty$ e $\Delta x \rightarrow 0$, encontramos a Expressão B.21

$$C_T = \frac{1}{\int_0^L \frac{1}{c(x)} dx} . \quad \text{B.21}$$

Assim, uma vez determinada a condutância específica do tubo de área de seção variável em função da posição ao longo do seu eixo – $c=c(x)$ –, podemos em princípio obter a condutância total deste tubo. Mais uma vez vemos que é fundamental encontrar a expressão para o cálculo da condutância específica para tubos de área de seção transversal qualquer. Assim vamos à construção desta expressão.

O ponto de partida é a expressão de *Knudsen* para o cálculo da condutância de um tubo no regime de escoando molecular, conforme mostrada abaixo

$$C_T = \frac{4}{3} \bar{v} \frac{1}{\int_0^L \frac{\Pi(x)}{F^2(x)} dx}$$

sendo \bar{v} é a velocidade quadrática média do gás $\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2RT}{M} \right)^{\frac{1}{2}}$, a expressão $\Pi = \Pi(x)$

define o perímetro do tubo em função da sua posição e $F = F(x)$ é a expressão que define a área da seção transversal do tubo em função da posição. Proposta por *Knudsen*, por meio desta expressão calculamos a condutância de tubos no regime de escoamento molecular. Assim, temos a expressão de *Knudsen* colocada em sua forma operacional

$$C_T = \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\int_0^L \frac{\Pi(x)}{F^2(x)} dx} .$$

Quando *Knudsen*, em 1909, propôs esta equação, em princípio ela foi considerada válida para qualquer geometria tubular, ou seja, desde que mantivesse a sua simetria em torno do eixo do tubo. Essa expressão foi criticada e proposta uma outra por *Smoluchowski* em 1910.

Smoluchowski considerou a equação de *Knudsen* válida somente para o tubo cilíndrico. Adiantamos que neste trabalho de tese estamos usando a equação de *Knudsen* para outras geometrias e os resultados obtidos nas modelagens, comparados com o método de *Monte Carlo*, têm mostrado excelente concordância entre eles, de fato, menor que a incerteza intrínseca dos

medidores de pressão. Desta forma, definiremos neste trabalho a condutância específica para uma dada posição do tubo, ou seja, a condutância por unidade de comprimento para uma dada posição do tubo, que chamaremos simplesmente de condutância específica, como sendo a Expressão B.22

$$c(x) \equiv \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi(x)}{F^2(x)}}, \quad \text{B.22}$$

onde, na expressão $\Pi = \Pi(x)$ é a função que define o perímetro do tubo, dependente da posição x , e a função $F = F(x)$ define a área da seção transversal do tubo em função de x . Com o propósito de verificar a coerência da definição da condutância específica de um tubo de comprimento L , com a

expressão $C_T = \frac{1}{\int_0^L \frac{1}{c(x)} dx}$, vemos que o resultado mostrado a seguir

$$C_T = \frac{1}{\int_0^L \frac{1}{c(x)} dx} = \frac{1}{\int_0^L \frac{1}{\frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi(x)}{F^2(x)}} dx} = \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\int_0^L \frac{1}{\frac{\Pi(x)}{F^2(x)}} dx} \Rightarrow$$

$$C_T = \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\int_0^L \frac{\Pi(x)}{F^2(x)} dx}$$

recupera a expressão de *Knudsen* para a determinação da condutância do tubo no regime de escoamento molecular.

Vamos agora definir as grandezas área de seção transversão em função da posição x e o *throughput* por unidade de comprimento em função de x . Esta tarefa, como veremos, é essencialmente geométrica, fazendo uso da geometria diferencial. Vamos considerar que o tubo é gerado a partir da revolução de uma linha que define o perfil do tubo, chamada de geratriz, em torno do eixo x . A linha geratriz definirá a parede do tubo com eixo de simetria axial em torno da reta x . A Figura B.8 ilustra a construção geométrica do tubo gerado pela função geratriz $f=f(x)$. Neste

ponto podemos, uma vez tendo claramente definido o tubo do ponto de vista geométrico, escrever explicitamente as funções $\Pi = \Pi(x)$, que define o perímetro do tubo e $F = F(x)$, que define a área da seção transversal do tubo.

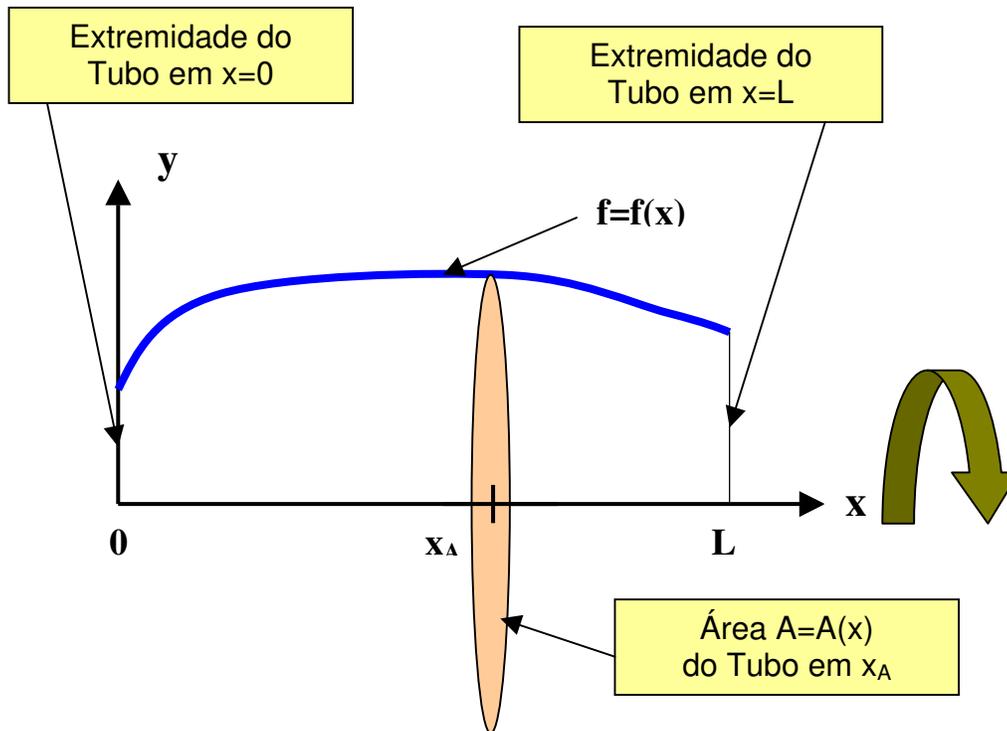


Figura B.8 Construção do tubo a partir da revolução da função geratriz $f(x)$ em torno do eixo x .

Assim, construímos as funções $\Pi = \Pi(x)$ e $F = F(x)$, para o intervalo $0 \leq x \leq L$

$$\Pi(x) = 2\pi f(x) \quad e \quad F(x) = \pi f^2(x).$$

Com essas definições encontramos prontamente a função $A = A(x)$, necessária para a construção da equação de difusão para tubos

$$A(x) \equiv \pi f^2(x).$$

Ainda, podemos encontrar uma expressão mais adequada para o cálculo da condutância específica, considerando diretamente a definição do tubo a partir da sua função geratriz $f=f(x)$. Assim, temos a Expressão B.22

$$c(x) = \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi(x)}{F^2(x)}} = \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{2\pi f(x)}{[\pi f^2(x)]^2}} \Rightarrow$$

B.22

$$c(x) = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{8RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} f^3(x)$$

vemos que a condutância específica cresce com a temperatura. Com ela, aumenta a velocidade média das moléculas, portanto aumenta a probabilidade de escoar pelo tubo. O movimento devido à agitação térmica é responsável exclusivo pelo transporte dos gases e vapores no regime de escoamento molecular, não há movimento coletivo, somente o individual. Ainda, a condutância específica decresce com a massa molecular. Uma vez que a energia cinética média de translação é função exclusiva da temperatura para o gás ideal – suposição considerada válida nas condições de gás rarefeito – com o aumento da massa molecular, deveremos ter uma diminuição da velocidade média de translação, com isso, haverá uma diminuição na mobilidade das moléculas. A função $f=f(x)$ é o raio do tubo na posição x ; como visto para o tubo cilíndrico, na expressão da condutância total, a sua dependência com o diâmetro, ou com o raio, é cúbica. Desta maneira, vemos que há coerência em nossa proposta de definição da condutância específica para tubos de área de seção transversal arbitrária.

As fontes de gases e vapores devem ser especificadas a fim de realizarmos a modelagem do sistema de alto-vácuo. Mais, elas devem ser quantificadas adequadamente para poderem participar da equação de difusão, ou seja, precisamos objetivamente construir a função $q=q(x,t)$. Para construir a função $q=q(x,t)$ convém fazer uma distinção entre as fontes gasosas que têm origem exclusivamente nas paredes do tubo, das outras fontes possíveis. Esta distinção não deve ser considerada como sendo essencial do ponto de vista físico, apenas refere-se a construção matemática das funções que as representam. Com relação a fonte gasosa que está distribuída na extensão da parede do tubo, temos associadas a ela a degaseificação natural ou a degaseificação forçada, ainda podemos citar, a permeação, a vaporização e a sublimação. Com relação as outras fontes gasosas, que são localizadas em pontos ou pequenas extensões do tubo, podemos citar, o vazamento real, vazamento virtual, desorção induzida por elétrons, fótons e íons, ou ainda, uma injeção controlada de gases.

Iniciaremos construindo as funções para os *throughputs* das fontes gasosas que são diretamente proporcionais a área das paredes do tubo. A função, que representa o *throughput* por

unidade de comprimento, devido à degaseificação natural ou forçada, pode ser construída partindo-se da expressão

$$q_D^{Total} = q_0 A_L$$

onde, q_0 é a taxa de degaseificação específica em *throughput* por unidade de área do material, ou seja, cada área unitária do material usado na construção do tubo, adotado um processo de limpeza e condicionamento, degaseifica natural ou forçadamente um *throughput* de gás ou vapor. A_L é área lateral do tubo, ou seja, a área da parede do tubo exposta ao vácuo. Assim, q_D é o *throughput* devido a toda área do tubo exposta ao vácuo. Matematicamente, podemos construir essas grandezas partindo da expressão que calcula a área lateral do tubo, a partir de área lateral de um tubo elementar de comprimento Δx . A expressão matemática de A_L é dada a seguir pela Expressão B.23

$$A_L = 2\pi \int_0^L f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx. \quad \text{B.23}$$

Este é um resultado conhecido da geometria diferencial, partindo-se do conceito de comprimento de arco. A construção geométrica do tubo partiu da revolução da linha representada pela função $f=f(x)$ em torno do eixo x . Assim, definimos a função área lateral do tubo na posição x da seguinte forma

$$A_L(x) \equiv 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}.$$

Considerando esta última definição, construímos a seguir o *throughput* por unidade de comprimento mostrada na Expressão B.24

$$q_D(x) \equiv q_0 A_L(x), \quad \text{B.24}$$

$$q_D(x) = q_0 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}$$

e verificamos a coerência da definição, calculando o *throughput* total para toda a área do tubo exposta ao vácuo, encontramos a expressão de partida

$$q_D^{Total} = q_0 2\pi \int_0^L f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow q_D^{Total} = q_0 A_L .$$

A estrutura da expressão matemática obtida acima pode ser estendida às outras fontes de gases que têm origem em toda a extensão das paredes do tubo. Complementado, se estas fontes dependerem explicitamente do tempo, como por exemplo, é o caso da degaseificação em suas primeiras horas expostas ao vácuo, imediatamente podemos introduzir este fato na expressão. Substituímos o valor constante q_0 pelo valor dependente do tempo e a parte da expressão dependente da área permanece inalterada, ficamos com a forma mostrada na Expressão B.25

$$q_D(x, t) \equiv q_0(t) A_L(x) . \tag{B.25}$$

$$q_D(x, t) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} q_0(t)$$

No caso mais geral, deveremos considerar a definição matemática do *throughput* daquelas fontes gasosas que podem ocorrer em qualquer parte do tubo. Essas fontes gasosas podem ser bastante localizadas, podendo ser modeladas como fontes pontuais, ou ainda podem ocorrer em regiões com áreas bem pequenas. Podem ocorrer em intervalos de tempo curtos, podendo ser modeladas como sendo fontes impulsivas. Estes casos são bastante freqüentes em sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo que têm feixes de partículas e estas podem chocar-se com as paredes do tubo. Uma ferramenta matemática adequada a essa situação é a função delta de *Dirac*. A forma matemática do *throughput* por unidade de comprimento, considerando a ocorrência de fontes gasosas quaisquer, tem a seguinte forma da Expressão B.26

$$q_{Total}(x, t) = q_D(x, t) + q_T(x, t) \Rightarrow \tag{B.26}$$

$$q_{Total}(x, t) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} q_0(t) + q_{Tr}(x, t)$$

onde, a função $q=q(x,t)$ representará o *throughput* de fontes gasosas ocorrendo em posições definidas e instantes ou intervalos de tempo arbitrários, que são específicos para cada caso a ser modelado.

Fontes gasosas transientes, que têm muito interesse e ocorrência freqüente em sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo tubulares, são da forma impulsivas no tempo e na posição e impulsivas no tempo e extensivas na posição. Esses casos ocorrem em tubos por onde passam feixes de partículas, podendo esse feixe induzir degaseificação – seja por choque direto dessas partículas ou seja por emissão de fótons – em partes bem localizadas nas paredes do tubo. Nos projetos de microscópios eletrônicos, aceleradores de partículas, anéis de armazenamento de elétrons ou prótons, válvulas amplificadoras *klystron* e *girotrons*, e outros sistemas de vácuo tubulares é de fundamental importância determinar as velocidades de bombeamento das bombas de vácuo e suas posições.

O ferramental físico-matemático, que desenvolvemos e apresentamos neste trabalho, tem mostrado se útil nos projetos de sistemas de vácuo mencionados acima. Apresentaremos a seguir a maneira como podemos objetivamente construir matematicamente as fontes gasosas transientes de maior interesse, sendo esquematicamente mostradas na Figura B.9.

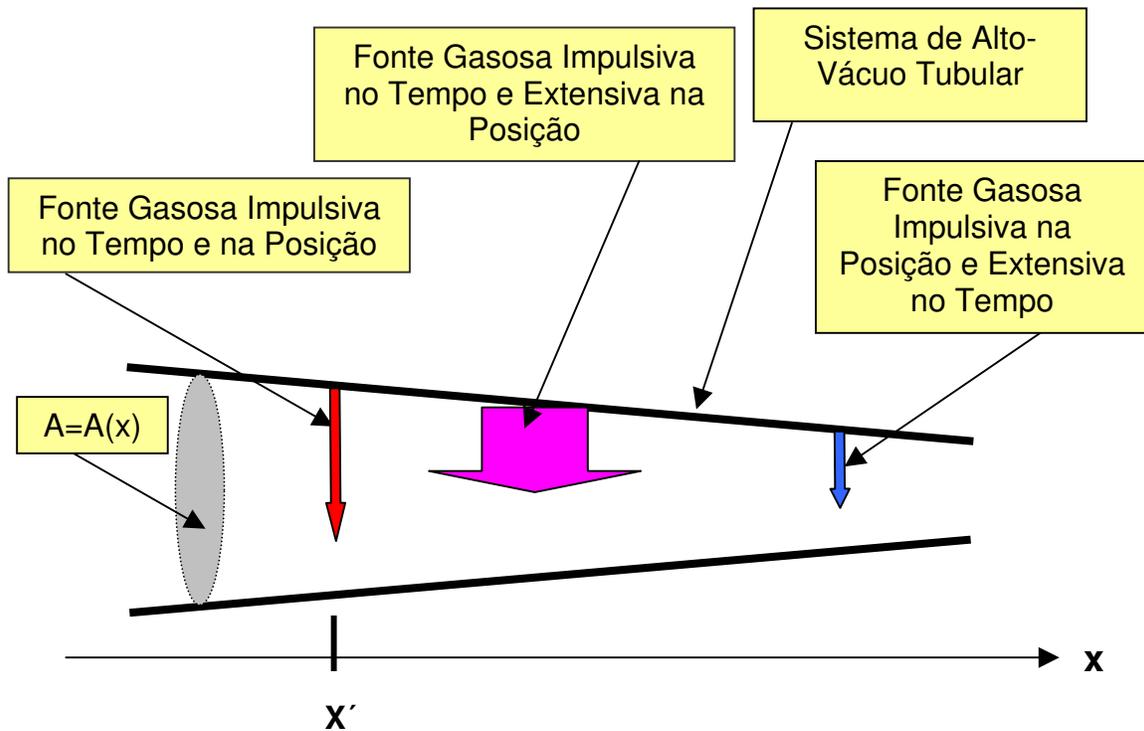


Figura B.9 Representação esquemática das fontes gasosas impulsivas no tempo, ou na posição, ou ainda, em ambos os casos, ao longo do tubo.

Essas fontes gasosas são impulsivas no tempo, no espaço ou em ambos. A função generalizada delta de *Dirac* mostra-se uma ferramenta matemática adequada e precisa para

representar essas fontes gasosas transientes. A seguir vamos apresentar as estruturas das funções matemáticas generalizadas que representam essas fontes gasosas e também, como construí-las considerando a quantidade de gás ou vapor que entrará no sistema de vácuo:

- Fonte gasosa impulsiva no tempo e impulsiva na posição.

Esta fonte gasosa, dependente do tempo e da posição, pode ser modelada pela seguinte função generalizada, conforme mostrada na Expressão B.27

$$q_T^{Ipos Item}(x,t) = q' \delta(x - x_0) \delta(t - t_0). \quad \text{B.27}$$

A quantidade de gás ou vapor $q_T^{Ipos Item} = q_T^{Ipos Item}(x,t)$, considerada em termos de *throughput*, entra no sistema de vácuo na posição $x=x_0$ no instante $t=t_0$. Essa representação matemática é adequada para modelar, quando uma parte de um feixe de partículas formado por elétrons, prótons, neutrons, íons, ou ainda, por fótons, bombardeiam uma região bem localizada da parede do tubo em um dado instante de tempo.

A unidade física de $q_T^{Ipos Item} = q_T^{Ipos Item}(x,t)$ é $\text{mbar.litro.segundo}^{-1}\text{centímetro}^{-1}$, ou de forma concisa, $\text{mbar.l.s}^{-1}\text{cm}^{-1}$. Para a grandeza q' temos a unidade mbar.l . Interpretamos fisicamente a grandeza $q_T^{Ipos Item} = q_T^{Ipos Item}(x,t)$ como sendo uma quantidade de gás ou vapor q' que entra no sistema de vácuo na posição $x=x_0$ no tubo e no instante $t=t_0$. Podemos considerar um pequeno recipiente auxiliar de volume V , com gás a certa pressão p , de modo que $q' = pV = nRT = NkT$. Assim, essa quantidade de gás $q' = pV$ entra no sistema de vácuo tubular, instantaneamente, em $t=t_0$ e na posição bem localizada $x=x_0$.

- Fonte gasosa impulsiva no tempo e extensiva na posição.

Esta fonte gasosa, dependente do tempo e da posição, pode ser modelada pela seguinte função matemática generalizada, conforme mostrada sua estrutura abaixo na Expressão B.28

$$q_T^{Epos Item}(x,t) = q'(x) \delta(t - t_0), \quad \text{B.28}$$

onde $q' = q'(x)$ é a quantidade gasosa da em termos de mbar.l.cm^{-1} , ou seja, é uma quantidade de gás ou vapor, em termos de mbar.l , ocorrendo em certas posições do tubo e especificada em termos de unidade de comprimento do tubo. Assim, é uma quantidade gasosa que entra no tubo em uma extensão dele, ou mais de uma, com as posições definidas pela função $q' = q'(x)$, ocorrendo no instante $t=t_0$. Essa representação matemática é adequada para modelar um feixe de partículas, do tipo elétrons, prótons, neutrons, íons, ou ainda, um feixe de fótons, bombardeando regiões extensas

da parede do tubo em um dado instante de tempo. Um dado instante de tempo significa, no sentido físico, um intervalo de tempo muito pequeno; no caso de sistemas de alto-vácuo, menor que 10^{-4} segundos.

A unidade de $q_T^{Epos Item} = q_T^{Epos Item}(x, t)$ é $\text{mbar.l.s}^{-1}\text{cm}^{-1}$. Para $q' = q'(x)$ temos a unidade mbar.l.cm^{-1} . Interpretamos fisicamente a grandeza $q_T^{Epos Item} = q_T^{Epos Item}(x, t)$ como sendo uma quantidade de gás ou vapor e agindo nas regiões do tubo definidas pela função $q'(x)$ no instante $t=t_0$. Assim, considerando um trecho do tubo com comprimento muito pequeno Δx sem torno da posição x_a , temos que a quantidade de gás, em termos de mbar.l , que entra no sistema de vácuo tubular é dada pela expressão $\Delta q = q'(x_a)\Delta x$ no instante $t=t_0$.

- Fonte gasosa extensiva no tempo e impulsiva no espaço.

Esta fonte gasosa, dependente do tempo e da posição, pode ser modelada pela seguinte função matemática generalizada, conforme mostrada sua estrutura abaixo na Expressão B.29

$$q_T^{Ipos Etem}(x, t) = q'(t)\delta(x - x_0), \quad \text{B.29}$$

onde $q' = q'(t)$ é a quantidade gasosa da em termos de mbar.l.s^{-1} , ou seja, é uma quantidade de gás, em termos de mbar.l , ocorrendo em uma posição bem localizada do tubo, no ponto $x=x_0$, e especificada em termos de unidade de tempo. Assim, é uma quantidade gasosa $q' = q'(t)$ que entra no tubo em uma posição definida, por exemplo $x=x_0$. Essa representação matemática é adequada para modelar vazamentos reais e vazamentos virtuais.

A unidade de $q_T^{Ipos Etem} = q_T^{Ipos Etem}(x, t)$ é $\text{mbar.l.s}^{-1}\text{cm}^{-1}$. Para $q' = q'(t)$ temos a unidade mbar.l.s^{-1} . Interpretamos fisicamente a grandeza $q_T^{Ipos Etem} = q_T^{Ipos Etem}(x, t)$ como sendo uma quantidade de gás ou vapor, dada em termos de *throughput* por unidade de comprimento, por $q' = q'(t)$, sendo liberada para o sistema de vácuo tubular no ponto $x=x_0$. Assim, considerando um intervalo de tempo pequeno Δt , no instante t_a , temos que a quantidade de gás, em termos de mbar.l , que entra no sistema de vácuo tubular é dada pela expressão $\Delta q = q'(t_a)\Delta t$ na posição $x=x_0$.

Concluindo a exposição do ferramental físico-matemático desenvolvido neste trabalho para a modelagem detalhada de sistemas de alto-vácuo tubulares, apresentaremos as unidades das grandezas físicas que geralmente participam da equação de difusão. Assim, na equação de difusão, na sua forma mais geral mostrada abaixo, para a modelagem de sistemas de alto-vácuo tubulares

$$c(x)\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{dc(x)}{dx}\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = -q(x, t) + A(x)\frac{\partial p(x, t)}{\partial t},$$

cada termo dela tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$ ou, $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades $\text{Pa.m}^3.\text{s}^{-1}.\text{m}^{-1}$. A condutância específica – $c=c(x)$ – tem unidade de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de comprimento – $q=q(x,t)$ – tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$. A área da seção transversal – $A=A(x)$ – tem unidade de l.cm^{-1} . A unidade desta última grandeza merece um comentário. No caso de utilizarmos as unidades de litro para volume e cm para comprimento devemos tomar uma precaução: ao calcularmos a área da seção transversal adotamos a unidade de cm^2 , ocorre que na dedução da equação de difusão ocorre o fator $\frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{A\Delta x}{\Delta x} = A$ – que multiplica a derivada temporal da pressão; assim temos que a unidade da área A precisa ser escrita em termos de l.cm^{-1} . Desta forma, se as dimensões do forem dadas em cm, a sua área da seção transversal estará em cm^2 ; calculando o volume teremos cm^3 , para transformar em l.cm^{-1} fazemos $10^{-3}A.L$. Assim, para haver coerência na análise dimensional dos termos da equação de difusão, com cada termo apresentando a unidade de $\text{mbar.l.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}$, devemos proceder com discutido acima.

- **Caso Bidimensional.**

Agora estudaremos os sistemas de alto-vácuo que podem ser modelados como sendo bidimensionais. A modelagem de certos sistemas de vácuo considerando-os bidimensionais não deve ser entendida como uma simplificação excessiva. Quando assumimos sistemas de alto-vácuo com geometria nitidamente tubular como sendo unidimensionais, queremos com isso explicitamente considerar que as direções perpendiculares ao eixo do tubo não apresentam variações significativas de pressão, ou seja, os seus gradientes são desprezíveis, em relação aos gradientes de pressão ao longo do eixo do tubo. Assim, do ponto de vista da construção de modelos matemáticos que representam realidades físicas, desconsiderar uma dimensão ou mais significa que as grandezas físicas que estamos querendo determinar não variam significativamente. Ou colocado de outra forma, admitimos a grandeza tem valor constante, ou próximo de constante, ao longo daquela direção desconsiderada. Fisicamente estamos admitindo simetrias no problema.

Este aspecto é extremamente importante, pois a identificação de uma ou mais simetrias em problemas físicos reduz enormemente o esforço a obtenção da sua solução. Assim, antes da escolha de um método matemático, dentro de todo arsenal matemático disponível, é boa prática fazer uma análise física e verificar se há simetrias a serem exploradas. Este particular é muito observado nos modelos construídos neste trabalho. Desta forma, construindo modelos bidimensionais de sistemas de vácuo, estamos admitindo e assumindo que a pressão tem valor constante, ou quase constante, em uma das três direções. Sendo mais preciso na linguagem, podemos dizer que não são os sistemas de vácuo bidimensionais, a realidade dos sistemas de vácuo sempre ocupa três dimensões espaciais,

o que temos é a modelagem da realidade física considerada em duas dimensões, ou seja, bidimensional. Apesar disto, usaremos o termo sistemas de vácuo bidimensionais, quando for o caso. Estes últimos comentários fazem parte da essência da modelagem de sistemas físicos.

Para os sistemas de alto-vácuo bidimensionais a equação de difusão pode ser obtida por meio do mesmo raciocínio utilizado no caso unidimensional; apenas cabe uma importante consideração. Fazendo um paralelo com os fenômenos de difusão de calor por condução em sólidos, temos que para os materiais homogêneos e isotrópicos a condutividade térmica é constante. No caso mais geral deveremos definir a condutividade térmica para cada ponto do material que está sendo estudado o campo de temperatura. No caso de escoamento de gases no regime molecular em sistemas de alto-vácuo bidimensionais, a condutância específica – também chamada de condutância por unidade de comprimento –, em geral, deve ser definida para as duas dimensões, se usarmos o sistema cartesiano, as direções x e y . Assim, teremos uma condutância específica definida na direção x , que pode ser dependente da própria variável x , e o mesmo para a direção y . Neste caso dizemos que o sistema de alto-vácuo é anisotrópico e não-homogêneo.

A Figura B.10 esquematiza um sistema de vácuo bidimensional. Vemos que a altura da câmara de vácuo tem dimensão bem menor que o seu comprimento e a sua largura. Admitimos no caso que não haja variação apreciável da pressão ao longo da direção z , desta forma, na modelagem matemática não participará a variável z . Sem perda de generalidade, do ponto de vista conceitual, estudaremos o sistema de vácuo em coordenadas cartesianas.

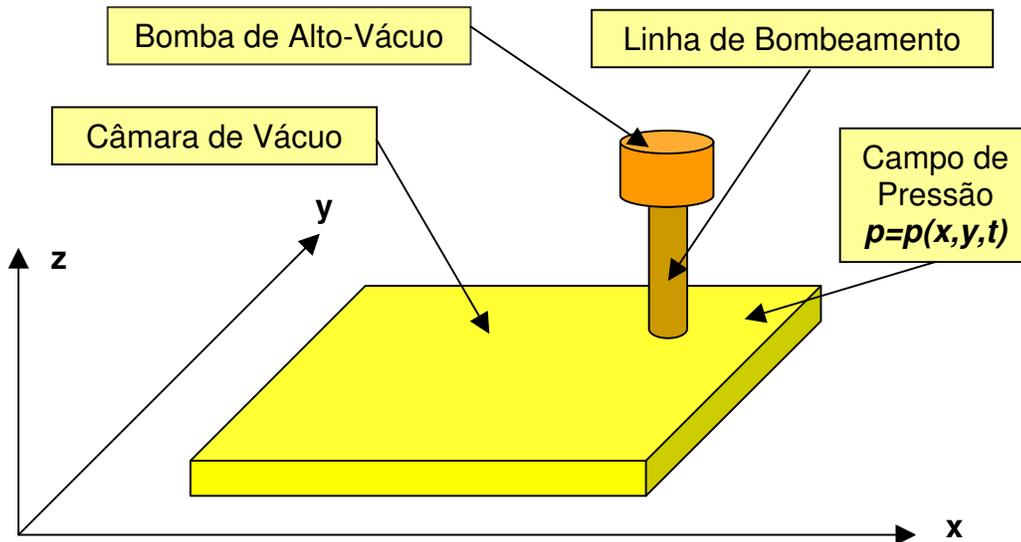


Figura B.10 Representação esquemática de um sistema de alto-vácuo bidimensional, mostrando a câmara de vácuo, a tubulação e a bomba de vácuo.

Na figura acima vemos as principais partes que compõe um sistema de alto-vácuo, ou seja, a câmara de vácuo, na qual deveremos especificar as condições de contorno, que serão essenciais à construção matemática da solução do problema. Vemos também a linha de bombeamento e a bomba de alto-vácuo. Realçando, a condutância específica é uma grandeza que expressa a facilidade com que os gases escoam. Deveremos agora, especificar qual a direção de escoamento, pois, os sistemas de vácuo bidimensionais são definidos em duas direções. Para cada direção de definição do sistema de vácuo teremos uma condutância específica. A condutância específica depende do tipo de gás, da temperatura, mas principalmente depende das dimensões da região onde ocorre o escoamento. Como ocorreu para o caso unidimensional, neste trabalho estamos propondo uma definição de condutância específica para o caso bidimensional. Assim, para as direções x e y respectivamente, definimos as condutâncias específicas como mostradas nas Expressões B.30

$$c_x(x) \equiv \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi_x(x)}{F_x^2(x)}}$$

$$c_y(y) \equiv \frac{8}{3} \left(\frac{2RT}{\pi M} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{\Pi_y(y)}{F_y^2(y)}}$$

B.30

onde as funções: $\Pi_x = \Pi_x(x)$ define o perímetro perpendicular à direção x do sistema de vácuo e $F_x = F_x(x)$ define a área da seção transversal, do sistema de vácuo, perpendicular à direção x . De forma análoga construímos as funções $\Pi_y = \Pi_y(y)$ e $F_y = F_y(y)$ para a direção y .

Uma vez definidas as condutâncias específicas para as direções x e y do sistema de vácuo, podemos obter equação de difusão bidimensional. Admitiremos um sistema de vácuo com as seções transversais constantes, tanto na direção x como na direção y . A Figura B.11 mostra esquematicamente as paredes de um sistema de vácuo bidimensional bastante simplificado, em formato de paralelepípedo. Apesar desta restrição geométrica, a equação de difusão a ser obtida será aplicável a qualquer sistema de vácuo bidimensional, desde que descrito em coordenadas cartesianas. Devemos ter uma atenção permanente para o fato de o escoamento dos gases e vapores ser em regime molecular, para isso devemos ter $Kn > 1$, em toda a extensão do sistema de vácuo. Ainda, na Figura B.11 esquematizamos um acesso à bomba de vácuo e vemos que a altura da

câmara de vácuo – direção z – é bastante menor que o comprimento e a largura – direções x e y , desta forma, matematicamente $Ha \ll La$ e $Ha \ll Co$, com as dimensões Co e La da mesma ordem de grandeza.

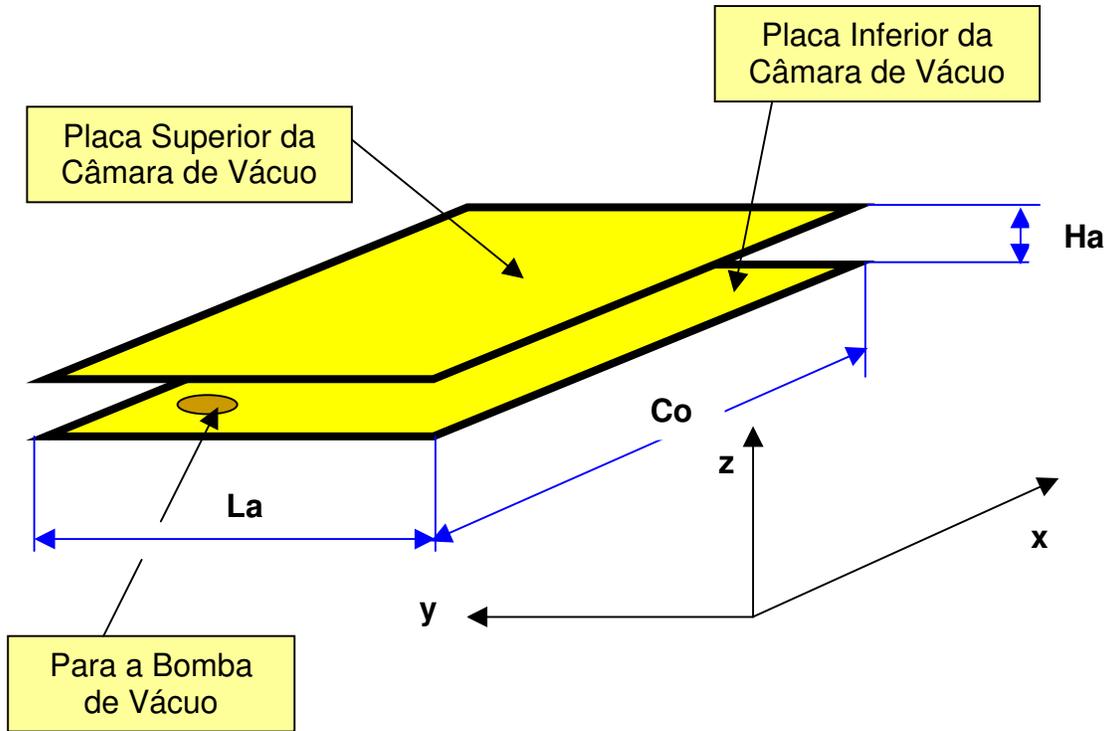


Figura B.11 Representação esquemática de um sistema de alto-vácuo bidimensional, mostrando as paredes superior e inferior da câmara de vácuo e um acesso à bomba de vácuo.

Consideremos um elemento de volume ΔV do sistema de vácuo bidimensional. Este elemento de volume pode ser escrito como $\Delta V = \Delta A Ha$, onde Ha é a altura da câmara de vácuo. No elemento de área ΔA , conforme mostrado na Figura B.12, faremos o balanço de *throughput* considerando também a possibilidade de uma fonte gasosa que possa $q = q(x, y, t)$. Podemos escrever para o elemento de volume que $\Delta V = \Delta A Ha = \Delta x \Delta y Ha$. Considerando os trechos x_1 e x_2 , e y_1 e y_2 da área elementar da câmara de vácuo, em torno do ponto (x_0, y_0) , observando a conservação do *throughput*, para todo o instante t temos a seguinte relação

$$[(q_{x1} + q_{y1}) + q \Delta A] - (q_{x2} + q_{y2}) \cong Ha \Delta A \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$[(q_{x1} + q_{y1}) + q \Delta x \Delta y] - (q_{x2} + q_{y2}) \cong Ha \Delta x \Delta y \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

nesta relação, as fontes de gases e vapores podem depender da posição e do tempo, assim como a pressão.

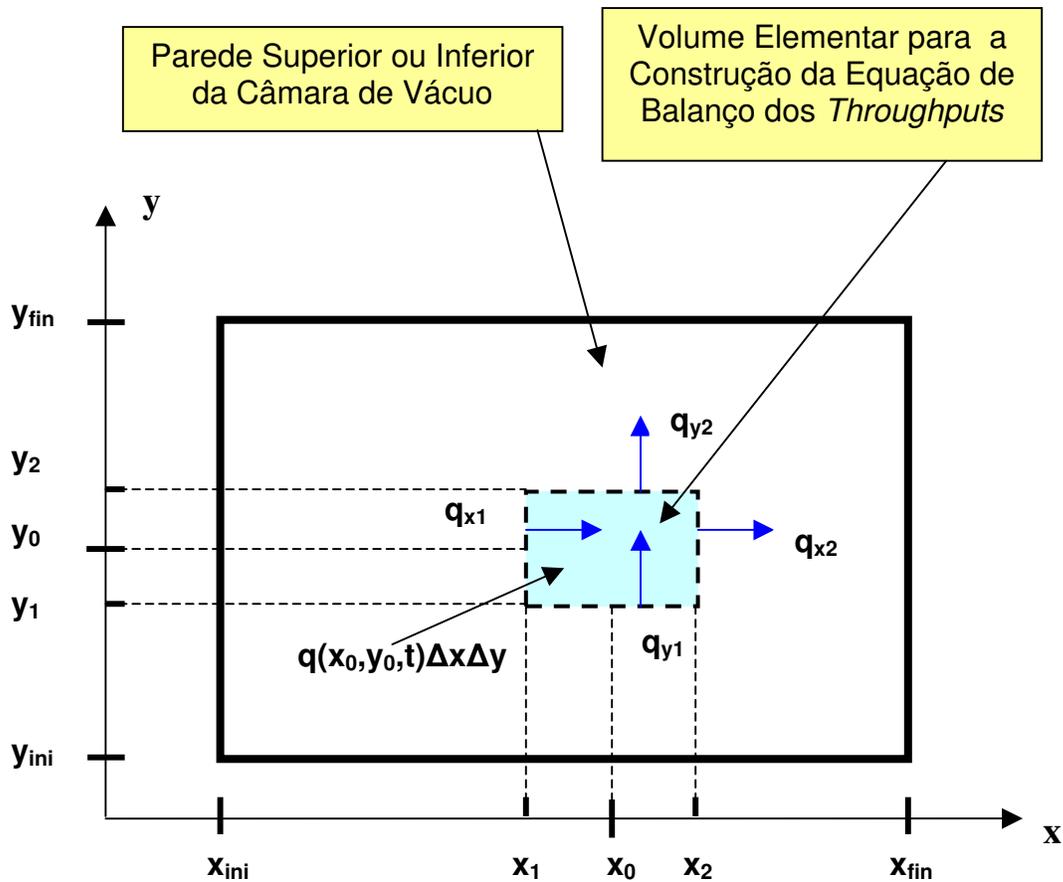


Figura B.12 Construção geométrica para a determinação do balanço do *throughput* no elemento de volume da câmara de vácuo bidimensional.

Continuando, o *throughput* em cada ponto (x, y) ao longo do sistema de vácuo e para cada instante t pode ser determinado como função da condutância específica – c_x e c_y –, que é a condutância por unidade de comprimento. Assim, podemos escrever para as direções x e y respectivamente

$$q_x(x_1, y, t) \cong -c'_x \left. \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \right|_{x_1, y, t} \quad \text{e} \quad q_y(x, y_1, t) \cong -c'_y \left. \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \right|_{x, y_1, t} .$$

Sendo que c'_x e c'_y são definidas como $c'_x \equiv c_x \frac{\Delta y \cdot Ha}{La \cdot Ha} = c_x \frac{\Delta y}{La}$ e $c'_y \equiv c_y \frac{\Delta x \cdot Ha}{Co \cdot Ha} = c_y \frac{\Delta x}{Co}$. Veja que estamos considerando as condutâncias específicas para o elemento de volume $\Delta V = \Delta A \cdot Ha$. Desta forma, temos junto à equação do balanço do *throughput* para o volume elementar ΔV do sistema de vácuo bidimensional

$$\begin{aligned} & \left[(q_{x_1} + q_{y_1}) + q \Delta x \Delta y \right] - (q_{x_2} + q_{y_2}) \cong Ha \Delta x \Delta y \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \\ & (q_{x_1} - q_{x_2}) + (q_{y_1} - q_{y_2}) \cong -q \Delta x \Delta y + Ha \Delta x \Delta y \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \\ & -c'_x \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, y, t} - \left(-c'_x \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, y, t} \right) - c'_y \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_1, t} - \left(-c'_y \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_2, t} \right) \cong \\ & \cong -q \Delta x \Delta y + \Delta x \Delta y Ha \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

colocando em uma forma mais adequada, ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{c_x \frac{\Delta y}{La} \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, y, t} - c_x \frac{\Delta y}{La} \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, y, t}}{\Delta x \Delta y} + \frac{c_y \frac{\Delta x}{Co} \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_2, t} - c_y \frac{\Delta x}{Co} \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_1, t}}{\Delta x \Delta y} \cong \\ & \cong -\frac{q \Delta x \Delta y}{\Delta x \Delta y} + \frac{\Delta x \Delta y Ha \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta t}}{\Delta x \Delta y} \end{aligned}$$

simplificando esta última expressão, chegamos à forma seguinte

$$\begin{aligned} & \frac{c_x}{La} \left[\frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, y, t} - \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, y, t} \right] + \frac{c_y}{Co} \left[\frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_2, t} - \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_1, t} \right] \cong \\ & \cong -q(x, y, t) + Ha \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

fazendo simultaneamente os limites para $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x' \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta y' \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, ficamos com a expressão

$$\lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y' \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\frac{c_x}{La} \left[\frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_2, y, t} - \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta x'} \Big|_{x_1, y, t} \right]}{\Delta x} + \lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y' \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\frac{c_y}{Co} \left[\frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_2, t} - \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta y'} \Big|_{x, y_1, t} \right]}{\Delta y}$$

$$\cong \lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y' \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \left[-q(x, y, t) + Ha \frac{\Delta p(x, y, t)}{\Delta t} \right]$$

e finalmente encontramos a equação de difusão bidimensional para a modelagem de sistemas de alto-vácuo, escrita em coordenadas cartesianas, com as possíveis condições de contorno e condição inicial mostrada na Expressão B.31

$$\frac{c_x}{La} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial y^2} = -q(x, y, t) + \frac{V_{CV}}{Co \cdot La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t}$$

$$p(x_A, y_A, t) = p_A(t)$$

$$-c_x \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, t} = q_A(t) \quad -c_y \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, t} = q_B(t)$$

$$\pm c_x \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, t} = S_A p(x_A, y, t) \quad \pm c_y \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, t} = S_B p(x, y_B, t)$$

$$p(x, y, 0) = p_0(x, y)$$

B.31

As constantes definidas formalmente como:

- volume da câmara de vácuo dado por $V_{CV} = Co \cdot La \cdot Ha$,
- condutâncias específicas c_x e c_y definidas acima,

- quantidade de gás, em termos de *throughput específico*, presente no sistema de vácuo, $q=q(x,y,t)$, e
- velocidade efetiva de bombeamento nas posições x_A e y_B respectivamente S_A e S_B .

Para o cálculo do *throughput*, para uma dada posição do sistema de vácuo bidimensional, podemos construir as seguinte definições matemáticas auxiliares para as direções x e y respectivamente

$$c_x''(x) \equiv \frac{c_x(x)}{La \cdot Ha} \quad \text{e} \quad c_y''(y) \equiv \frac{c_y(y)}{Co \cdot Ha} .$$

Considerando a direção x , definimos a seguinte função dependente do *throughput*

$$q_x'(x, y, t) \equiv -c_x''(x) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} = -\frac{c_x(x)}{La \cdot Ha} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} .$$

Assim, para um dado segmento de reta paralelo à direção y , iniciando em y_i e terminando em y_f com comprimento $\Delta l_y = y_f - y_i$, temos que o *throughput* que cruza esse segmento de reta em toda a altura Ha da câmara de vácuo é dado por

$$Q_x(x, y_i, y_f, t) = \int_{y_i}^{y_f} \left[-q_x'(x, y, t) \cdot Ha \right] dy = \int_{y_i}^{y_f} \left[-c_x''(x) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} Ha \right] dy \Rightarrow$$

$$Q_x(x, y_i, y_f, t) = \int_{y_i}^{y_f} \left[-\frac{c_x(x)}{La \cdot Ha} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} Ha \right] dy$$

chegamos à Expressão B.32

$$Q_x(x, y_i, y_f, t) = \int_{y_i}^{y_f} \left[-\frac{c_x(x)}{La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \right] dy . \quad \text{B.32}$$

Da mesma forma, podemos deduzir a expressão referente ao *throughput* na direção y . No caso de uma direção arbitrária, o cálculo do *throughput* deve ser composto pela parcela dos *throughputs* nas

direções x e y , obtidas como na expressão acima. Cabe realçar que nos casos gerais temos condutâncias específicas diferentes entre si nas direções x e y . Nestes casos o cálculo do throughput em uma direção arbitrária de considerar as componentes nas direções x e y com os respectivos valores de condutâncias específicas para cada uma dessas direções. Esta mesma situação ocorre nos problemas de transferência de calor por condução para os meios anisotrópicos.

Concluindo a exposição do ferramental físico-matemático desenvolvido para a modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais, apresentamos a seguir a equação de difusão, considerando a possibilidade das condutâncias específicas dependerem da posição, conforme mostrada na Expressão B.32

$$\frac{1}{La} \frac{\partial}{\partial x} \left[c_x(x) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{Co} \frac{\partial}{\partial y} \left[c_y(y) \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y} \right] = -q(x, y, t) + \frac{V_{cv}}{Co \cdot La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t}, \text{ B.32}$$

com $V_{cv}=Co.La.Ha$ e complementado, cada termo da equação de difusão tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$ ou, $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades $\text{Pa.m}^3.\text{s}^{-1}.\text{m}^{-2}$. A condutância específica $c=c(x)$ tem unidade de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de área $q=q(x,y,t)$ tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$. Encontramos problemas similares a estes naqueles de transferência de calor por condução nos meios anisotrópicos e não homogêneos.

Apresentamos a seguir a equação de difusão escrita em termos das coordenadas polares para a modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais. Nestes casos as câmaras de vácuo são em geral em forma circular e com a altura bem menor que o raio, ou ainda, com o gradiente de pressão na direção z muito menor que os gradientes na direção do raio ou também na direção da variação do ângulo. Para a sua obtenção consideramos exatamente o mesmo raciocínio do utilizado para deduzir a equação diferencial em coordenadas cartesianas.

As variáveis ρ e φ são a distância do ponto $P(x,y)$ – que define o raio vetor – à origem do sistema de coordenadas e o ângulo do raio vetor em relação ao eixo x respectivamente. A equação de difusão em coordenadas polares dependente do tempo tem a forma mostrada a seguir na Expressão B.33

$$\frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[c_\rho \rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} = -q(\rho, \varphi, t) + \frac{V_{cv}}{\pi a^2} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} =$$

$$= -q(\rho, \varphi, t) + \frac{V_{CV}}{\pi a^2} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial t} \quad , \quad \text{B.33}$$

nas situações comumente encontradas na modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais, temos que a condutância específica c_ρ é função da variável ρ . Completando com as seguintes condições de contorno e condição inicial possíveis

$$p(\rho_A, \varphi_A, t) = p_A(t)$$

$$-c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, t} = q_A(t) \quad -c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, t} = q_B(t)$$

$$\pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, t} = S_A p(\rho_A, \varphi, t) \quad \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, t} = S_B p(\rho, \varphi_B, t)$$

$$p(\rho, \varphi, 0) = p_0(\rho, \varphi)$$

onde a é o raio da câmara de vácuo, c_ρ e c_φ são as condutâncias específicas nas direções ρ e φ respectivamente. Ainda, V_{CV} é o volume da câmara de vácuo com formato cilíndrico, sendo seu valor dado, em termos dos elementos diferenciais de volume, pela seguinte expressão

$$V_{CV} = \underbrace{\iiint}_{\text{Volume da Câmara de Vácuo Cilíndrica}} \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz = \int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^c \rho \, d\varphi \, d\rho \, dz =$$

$$= \int_{\rho=0}^a \rho \, d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^c dz \Rightarrow V_{CV} = \pi a^2 c$$

No caso do problema estacionário, a equação de difusão bidimensional e as possíveis condições de contorno escritas em coordenadas polares, são mostradas a seguir mostrada na Expressão B.34

$$\frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} = -q(\rho, \varphi) \quad \text{B.34}$$

sendo em geral $c_\rho = c_\rho(\rho)$

Para o estabelecimento das possíveis fontes de gases e vapores, e ainda, com relação as definições da condições de contorno apresentadas a seguir, podemos seguir em linhas gerais o mesmo raciocínio daquele usado no caso de sistemas de alto-vácuo unidimensionais

$$p(\rho_A, \varphi_A) = p_A$$

$$-c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi} = q_A \quad -c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B} = q_B$$

$$\pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi} = S_A p(\rho_A, \varphi) \quad \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B} = S_B p(\rho, \varphi_B)$$

Concluindo a exposição do ferramental físico-matemático desenvolvido neste trabalho para a modelagem de sistemas de alto-vácuo bidimensionais e expressos em coordenadas polares, apresentaremos as unidades das grandezas físicas que participam desta equação de difusão. Cada termo dela tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$ ou $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades $\text{Pa.m}^3.\text{s}^{-1}.\text{m}^{-2} = \text{Pa.s}^{-1}.\text{m}$. As condutâncias específicas têm unidade de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de área – $q=q(\rho, f, t)$ – tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$.

- **Caso Tridimensional.**

A seguir apresentaremos a equação de difusão tridimensional para modelar sistemas de alto-vácuo nos casos gerais. Nestes sistemas de vácuo as três dimensões são comparáveis, assim não podemos de imediato, sem uma análise mais detida, dizer que há gradientes de pressão que podem ser desprezados. Veremos a seguir que por meio de um raciocínio simples e baseado no comportamento geral dos sistemas de alto-vácuo fazer algumas suposições sobre a utilidade da obtenção da equação de difusão para o caso tridimensional. Consideremos uma câmara de vácuo em forma de paralelepípedo, com as três arestas com dimensões próximas entre si, conforme mostrada na Figura B.13. Admitamos que uma bomba de vácuo esteja instalada em uma das faces de menor área. Ao longo da aresta de dimensão maior, no caso a direção x , esperamos encontrar o maior

gradiente de pressão. Consideremos que há somente a fonte de gás devido à degaseificação das paredes da câmara de vácuo. Ocorre que, como as três arestas têm dimensões comparáveis entre si, a área da seção transversal à direção x introduz uma condutância suficientemente grande a ponto de não termos gradientes apreciáveis na direção x . Desta forma surge uma questão: Temos utilidade para a equação de difusão tridimensional? Podemos encontrar duas respostas plausíveis. Uma, do ponto de vista pragmático, ou seja, do cálculo para obtenção do campo de pressão. Dizemos que não há utilidade nela que justifique o esforço, tanto na modelagem matemática como da obtenção da solução analítica ou numérica do problema. Pois podemos dizer *a priori* que os gradientes de pressão são pequenos e assim os valores de pressão nos pontos da câmara de vácuo terão valores próximos entre si. Outra resposta pode ser dada do ponto de vista da construção de uma modelagem consistente do ponto de vista matemático. Com isto queremos dizer que poderemos verificar matematicamente se a equação de difusão tridimensional reduz-se à equação de difusão bidimensional quando identificamos uma simetria no sistema físico. E ainda se uma vez identificadas duas direções com simetrias obtemos a equação de difusão unidimensional. Podemos ir mais longe à busca por uma coerência na construção de modelos matemáticos de sistemas de alto-vácuo. Caso imponhamos simetrias nas três direções espaciais, deveremos obter a Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} . Esta equação foi obtida rigorosamente no *Apêndice A* e ela considera os sistemas de vácuo como sendo pontuais, desta forma, a pressão pode variar apenas no tempo.

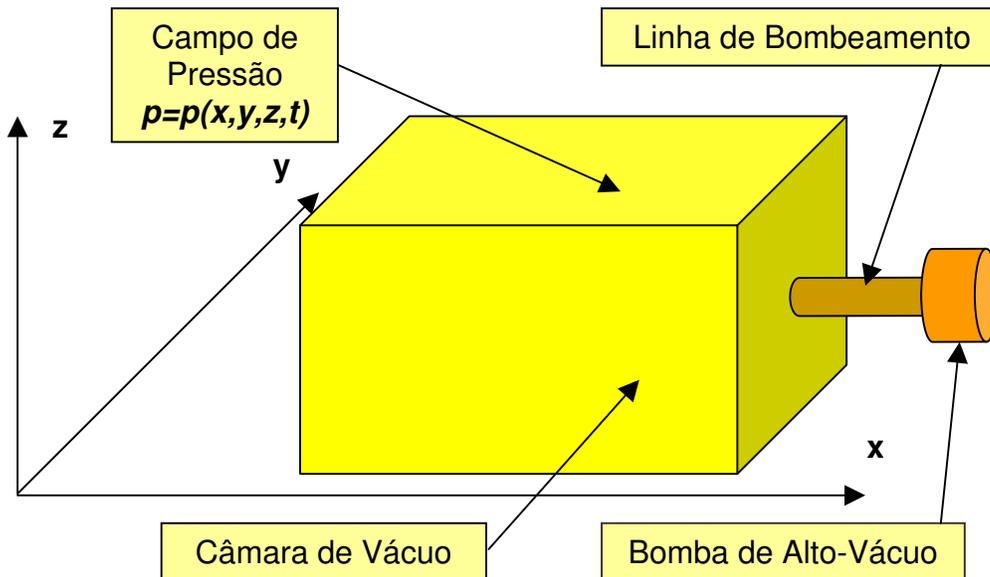


Figura B.13 Representação esquemática de um sistema de alto-vácuo tridimensional em forma de paralelepípedo com as três dimensões das arestas comparáveis entre si.

Do ponto de vista físico, se um sistema de vácuo tridimensional tem os valores de pressão aproximadamente iguais entre si à medida que o tempo evolui, então podemos considerar o sistema de vácuo reduzido a um ponto! Este mesmo tipo de situação encontramos nas modelagens de muitos sistemas físicos, como por exemplo, nos fenômenos de transporte de calor por condução. Neste caso o problema da modelagem reduz-se exclusivamente a imposição do princípio de conservação de energia em função do tempo.

Apresentamos a seguir a equação de difusão tridimensional para a modelagem de sistemas de vácuo com os gases e vapores escoando no regime molecular. A Figura B.14 esquematiza um elemento de volume de um sistema de vácuo tridimensional. Obteremos a equação de difusão em coordenadas cartesianas.

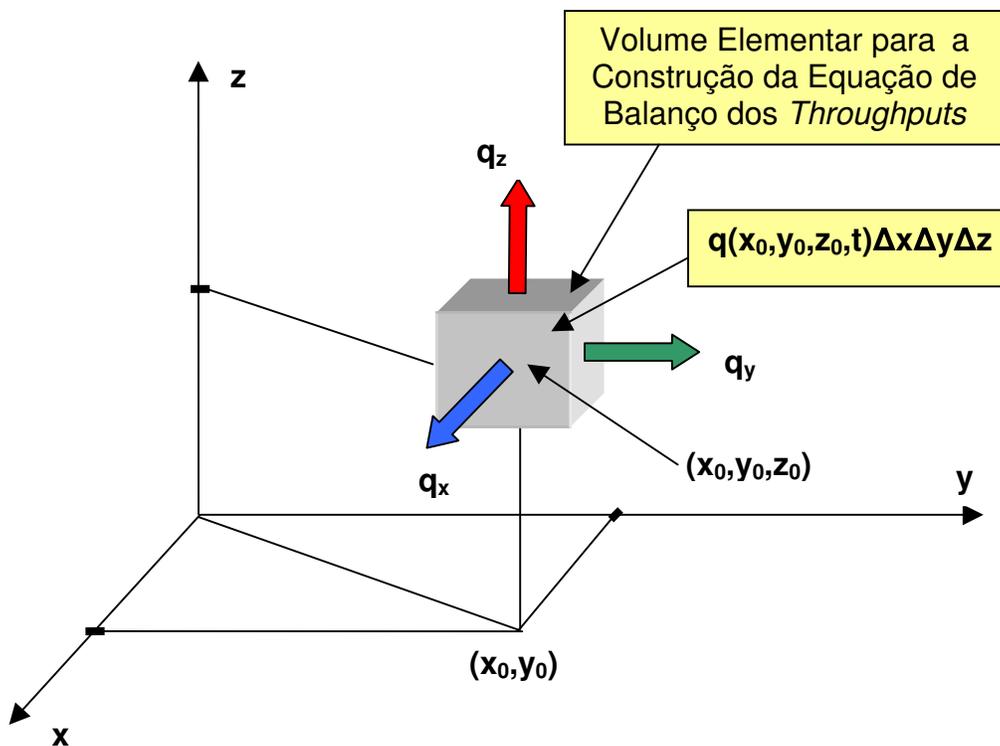


Figura B.14 Construção geométrica para a determinação do balanço do *throughput* no elemento de volume da câmara de vácuo tridimensional em coordenadas cartesianas.

Impondo a conservação do *throughput* ao volume elementar qualquer da câmara de vácuo e assumindo que podemos ter fontes de gases e vapores, chegamos à equação de difusão em coordenadas cartesianas como mostrada na Expressão B.35

$$\frac{1}{La \cdot Ha} \frac{\partial}{\partial x} \left[c_x(x, y, z) \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} \right] + \frac{1}{Co \cdot Ha} \frac{\partial}{\partial y} \left[c_y(x, y, z) \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} \right] +$$

$$+ \frac{1}{Co \cdot La} \frac{\partial}{\partial z} \left[c_z(x, y, z) \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \right] = -q(x, y, z, t) + \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial t}$$
, B.35

onde as constante Co , La e Ha são respectivamente as dimensões das arestas da câmara de vácuo nas direções x , y e z . E as constantes c_x , c_y e c_z são respectivamente as condutâncias específicas nas direções x , y e z . A função $q=q(x,y,z,t)$ representa matematicamente as fontes gasosas do problema.

Ela é dependente do tempo, forma adequada para tratar problemas transientes. Podemos escrevê-la para os casos de as condutâncias específicas serem constantes como na Expressão B.36

$$\frac{c_x}{La \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{c_z}{Co \cdot La} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial z^2} =$$

$$= -q(x, y, z, t) + \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial t}$$
, B.36

com as possíveis condições de contorno e condição inicial expostas a seguir

$$p(x_A, y_A, z_A, t) = p_A(t)$$

$$-c_x \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, z, t} = q_A(t) \quad \pm c_x \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_A, y, z, t} = S_A p(x_A, y, z, t)$$

$$-c_y \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, z, t} = q_B(t) \quad \pm c_y \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} \Big|_{x, y=y_B, z, t} = S_B p(x, y_B, z, t)$$

$$-c_z \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{x, y, z=z_C, t} = q_C(t) \quad \pm c_z \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{x, y, z=z_C, t} = S_C p(x, y, z_C, t)$$

$$p(x, y, z, 0) = p_0(x, y, z)$$

e complementando, consideramos os casos de modelagem em estado estacionário com a forma apropriada da equação de difusão mostrada na Expressão B.37

$$\frac{c_x}{La \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{c_z}{Co \cdot La} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial z^2} = -q(x, y, z) \quad \text{B.37}$$

Sendo o volume da câmara de vácuo igual $V_{CV}=Co.La.Ha$. Cada termo da equação de difusão tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$ ou, $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades Pa.s^{-1} . As condutâncias específicas têm unidades de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de volume – $q=q(x,y,z,t)$ – tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$. Similarmente, encontramos a mesma estrutura matemática nos problemas de transferência de calor por condução.

Apresentamos a seguir a equação de difusão tridimensional em coordenadas cilíndricas, com a Figura B.15 esquematizando um elemento de volume nestas coordenadas.

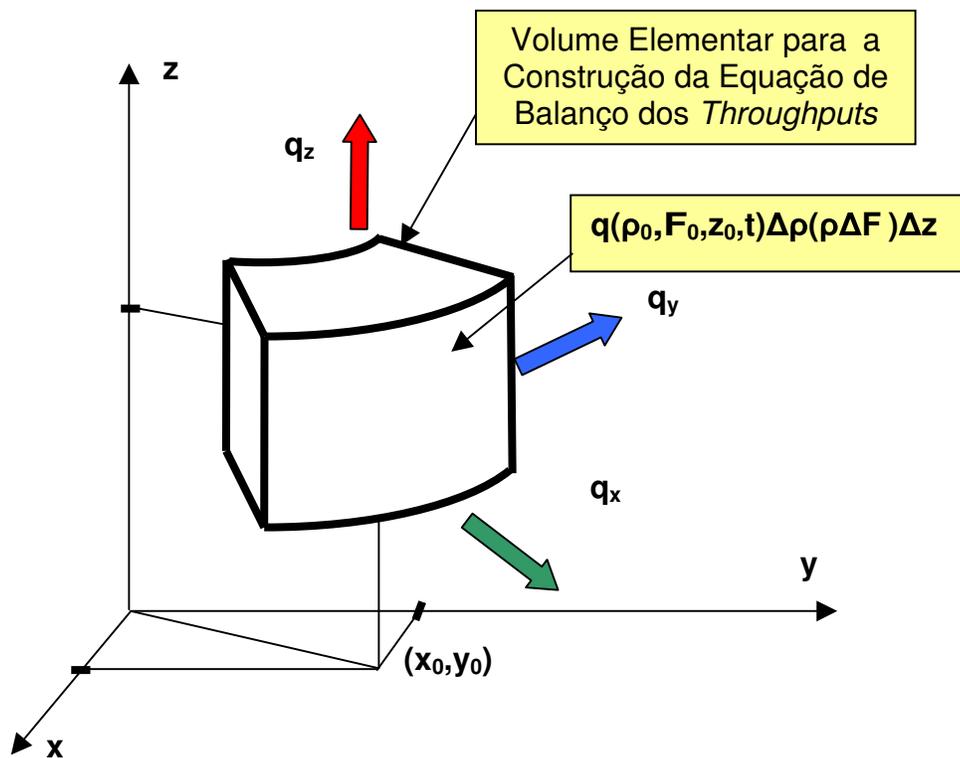


Figura B.15 Construção geométrica para a determinação do balanço do *throughput* no elemento de volume da câmara de vácuo tridimensional em coordenadas cilíndricas.

Impondo a conservação do *throughput*, ou seja, a conservação de energia ao volume elementar qualquer da câmara de vácuo e assumindo que podemos ter fontes de gases e vapores, chegamos à equação de difusão em coordenadas cilíndricas em sua forma mais geral conforme a Expressão B.38

$$\frac{1}{2\pi ac} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[c_\rho(\rho) \rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{ac} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z^2} = -q(\rho, \varphi, z, t) + \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial t}$$
B.38

nos casos mais comuns que podemos modelar sistemas de alto-vácuo utilizando a equação diferencial acima, temos que a condutância específica na direção ρ é função desta variável espacial – $c_\rho = c_\rho(\rho)$ – assim, a equação diferencial toma a seguinte forma dada pela Expressão B.39

$$\frac{1}{2\pi ac} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{ac} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z^2} = -q(\rho, \varphi, z, t) + \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial t}$$
B.39

onde as constante a e c são respectivamente as dimensões do raio da câmara de vácuo – estamos admitindo uma câmara de vácuo cilíndrica – e a sua altura. Ainda, c_ρ , c_φ e c_z são respectivamente as condutâncias específicas nas direções ρ , φ e z . A função $q = q(\rho, \varphi, z, t)$ representa matematicamente as fontes gasosas do problema. Para determinarmos a solução do problema de forma unívoca devemos impor as condições de contorno e a condição inicial

$$p(\rho_A, \varphi_A, z_A, t) = p_A(t)$$

$$-c_\rho(\rho) \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z, t} = q_A(t) \quad \pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z, t} = S_A p(\rho_A, \varphi, z, t)$$

$$-c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z, t} = q_B(t) \quad \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z, t} = S_B p(\rho, \varphi_B, z, t)$$

$$-c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z=z_C, t} = q_C(t) \quad \pm c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z=z_C, t} = S_C p(\rho, \varphi, z_C, t)$$

$$p(\rho, \varphi, z, 0) = p_0(\rho, \varphi, z)$$

Podemos escrever a equação na forma adequada para modelar casos de sistemas de vácuo em estado estacionário, isto é, com o campo de pressão não dependente do tempo, assim temos a Expressão B.40

$$\frac{1}{2\pi ac} \frac{1}{\rho} \left\{ \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \frac{\partial c_\rho}{\partial \rho} \right] + c_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{ac} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi^2} + \frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z)}{\partial z^2} = -q(\rho, \varphi, z) \quad , \text{ B.40}$$

com as seguintes condições de contorno possíveis para os problemas

$$\begin{aligned} p(\rho_A, \varphi_A, z_A) &= p_A \\ -c_\rho(\rho) \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z} &= q_A \quad \pm c_\rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_A, \varphi, z} = S_A p(\rho_A, \varphi, z) \\ -c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z} &= q_B \quad \pm c_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial \varphi} \Big|_{\rho, \varphi=\varphi_B, z} = S_B p(\rho, \varphi_B, z) \\ -c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z=z_C} &= q_C \quad \pm c_z \frac{\partial p(\rho, \varphi, z)}{\partial z} \Big|_{\rho, \varphi, z=z_C} = S_C p(\rho, \varphi, z_C) \end{aligned}$$

Complementado, cada termo das equações de difusão, tanto a transiente como a de estado estacionário, tem a dimensão $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$ ou, $\text{torr.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$, ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades Pa.s^{-1} . As condutâncias específicas têm unidades de $\text{l.s}^{-1}.\text{cm}$. O *throughput* por unidade de volume – $q=q(\rho, f, z, t)$ – tem unidade de $\text{mbar.litro.s}^{-1}.\text{cm}^{-3}$. Similarmente, encontramos tal estrutura matemática nos problemas de transferência de calor por condução nos meios anisotrópicos e não homogêneos em seus casos mais gerais.

Para concluir este apêndice, vamos obter as equações de difusão para os casos unidimensional, bidimensional e para a dependência exclusiva no tempo, a partir da equação de difusão tridimensional. Como já foi discutido este assunto, inclusive de forma bastante detalhada, um objetivo a ser alcançado, além da construção das equações diferenciais, é enfatizar o aspecto da construção de modelos em tecnologia do vácuo. A disponibilidade de um ferramental físico-

matemático é de fundamental importância, mas devemos ter sempre em mente que a tradução da realidade física para a linguagem matemática é também de fundamental importância para a busca de soluções para o problema. A realidade física sempre é bastante complexa. Procuramos constantemente, neste trabalho de tese, discutir e argumentar sobre a construção dos modelos de problemas reais encontrado na tecnologia do vácuo.

Vamos trabalhar as idéias esboçadas logo acima. Para tanto vamos considerar novamente a equação de difusão tridimensional em coordenadas cartesianas e dependente do tempo, conforme mostrada abaixo

$$\frac{c_x}{La \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{c_z}{Co \cdot La} \frac{\partial^2 p(x, y, z, t)}{\partial z^2} =$$

$$= -q(x, y, z, t) + \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial t}$$

digamos que, após uma análise da situação física de um dado problema, verificamos que na direção z a pressão deve ter valor praticamente constante, ou seja, o módulo do gradiente de pressão é bastante pequeno – o termo de comparação é o das outras direções da câmara de vácuo. Neste caso, a equação acima se reduz a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{c_x}{La \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co \cdot Ha} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial y^2} = -q(x, y, z, t) + \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t},$$

uma vez que $\frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \equiv 0$, para todo os instantes de tempo e para toda a extensão câmara de

vácuo. Podemos escrever portanto a seguinte igualdade

$$\frac{c_x}{La} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial y^2} = -Ha \cdot q_T(x, y, z, t) + Ha \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t}$$

$$\frac{c_x}{La} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{c_y}{Co} \frac{\partial^2 p(x, y, t)}{\partial y^2} = -q_B(x, y, t) + \frac{V_{cv}}{Co \cdot La} \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t}$$

sendo que a grandeza $q_B(x,y,t)=Ha \cdot q_T(x,y,z,t)$ é a quantidade de gás em termos de *throughput* desenvolvida em toda a altura c da câmara de vácuo e que $Ha = \frac{V_{CV}}{Co \cdot La}$. Assim, transformamos a grandeza $q_T(x,y,z,t)$ – que é o *throughput* por unidade de volume – na grandeza $q_B(x,y,t)$ – que é o *throughput* por unidade de área. Esta é a equação de difusão que obtivemos no caso de sistemas de vácuo bidimensionais.

Continuando, vamos considerar uma câmara de vácuo, que digamos após uma análise da situação física do problema, verificamos que além da direção z , também na direção y a pressão deve ter valor praticamente constante. Neste caso o módulo do seu gradiente de pressão é bastante pequeno em comparação ao módulo do gradiente de pressão na direção x . Assim, uma vez que $\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial y} \equiv 0$, para todos os instantes de tempo e para toda a extensão câmara de vácuo. Podemos escrever, portanto a seguinte igualdade

$$c_x \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -La \cdot Ha \cdot q_T(x,y,z,t) + La \cdot Ha \frac{\partial p(x,t)}{\partial t},$$

e como $La \cdot Ha = \frac{V_{CV}}{Co}$, podemos obter a equação de difusão unidimensional na direção x a seguir

$$c_x \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = -q_U(x,t) + \frac{V_{CV}}{Co} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}.$$

Sendo que a grandeza $q_U(x,t)=La \cdot Ha \cdot q_T(x,y,z,t)$ é a quantidade de gás em termos de *throughput* desenvolvida em toda a altura Ha da câmara de vácuo e a sua largura La . Assim, transformamos a grandeza $q_T(x,y,z,t)$ – que é o *throughput* por unidade de volume – na grandeza $q_U(x,t)$ – que é o *throughput* por unidade de comprimento. Esta é a equação de difusão que obtivemos no caso de sistemas de vácuo unidimensionais.

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado nos casos anteriores, vamos considerar uma câmara de vácuo, que digamos após uma análise da situação física do problema, verificamos que além das direções z e y , a pressão deve ter valor praticamente constante também ao longo da direção x . Neste caso o módulo do seu gradiente de pressão é também bastante pequeno, como nas outras direções, como já havíamos considerado. Assim, chegamos à seguinte identidade matemática válida, para

todos os instantes de tempo, $\frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial y} = \frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial z} \equiv 0$, e em todos os pontos da câmara de vácuo e ainda para todos os instantes de tempo t . Dessa forma podemos escrever

$$0 \equiv c_x \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} = -q_U(x, t) + \frac{V_{CV}}{Co} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$-q_U(t) + \frac{V_{CV}}{Co} \frac{\partial p(t)}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad -Co \cdot q_U(t) + V_{CV} \frac{dp(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \cdot$$

$$V_{CV} \frac{dp(t)}{dt} = Co \cdot q_U(t) = Q(t)$$

Pois, como o problema também não depende da variável x , deveremos ter que o *throughput* total, devido à totalidade das fontes gasosas, pode depender apenas do tempo t , ou ser constante. Assim, podemos interpretar o termo $Q=Q(t)$ como sendo o *throughput* total desenvolvido na câmara de vácuo. Deste total fazem parte o *throughput* $-Q_{FG}=Q_{FG}(t)$ – que “entra” na câmara de vácuo, isto é, aquele que faz a pressão aumentar, e aquele *throughput* $-Q_{BV}=Q_{BV}(t)$ – que “sai” da mesma câmara de vácuo, isto é, aquele que é bombeado. Assim podemos escrever

$$V_{CV} \frac{dp(t)}{dt} = Q(t) = -|Q_{BV}(t)| + Q_{FG}(t),$$

em termos das grandezas que definem os sistemas de vácuo

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -|Q_{BV}(t)| + Q_{FG}(t) \quad \Rightarrow \quad V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \Rightarrow$$

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -\frac{S_{BV} \cdot C_{Total}}{S_{BV} + C_{Total}} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \quad ,$$

com a seguinte condição inicial, $p_{CV}(t=0) = p_0$

sendo S_{ef} a velocidade efetiva de bombeamento, S_{BV} a velocidade de bombeamento das bombas de vácuo, C_{Total} a condutância total da linha de bombeamento e $\sum_{i=1}^n Q_i$ a soma dos *throughputs* das fontes dos gases e vapores envolvidos no processo em vácuo.

Vamos considerar novamente a equação de difusão tridimensional em coordenadas cilíndricas como mostrada abaixo

$$\frac{1}{2\pi ac} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[c_\rho(\rho) \rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{ac} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial z^2} = -q(\rho, \varphi, z, t) + \frac{\partial p(\rho, \varphi, z, t)}{\partial t}$$

digamos que, após uma análise da situação física de um dado problema, verificamos que na direção z a pressão deve ter valor praticamente constante, ou seja, o módulo do gradiente de pressão é bastante pequeno – o termo de comparação é o das outras direções da câmara de vácuo. Neste caso, a equação acima se reduz a seguinte equação

$$\frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[c_\rho \rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} = -cq_T(\rho, \varphi, z, t) + \frac{V_{cv}}{\pi a^2} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial t},$$

e encontramos a forma idêntica da equação de difusão bidimensional em coordenadas polares

$$\frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[c_\rho \rho \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial \rho} \right] \right\} + \frac{c_\varphi}{a} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p(\rho, \varphi, t)}{\partial \varphi^2} = -q_B(\rho, \varphi, t) + \frac{V_{cv}}{\pi a^2} \frac{\partial p(\rho, \varphi, t)}{\partial t}.$$

Continuando, se em nossa análise identificarmos na equação de difusão tridimensional simetrias, tanto na direção ρ como na direção φ , podemos escrever

$$\frac{c_z}{\pi a^2} \frac{\partial^2 p(z, t)}{\partial z^2} = -q_T(\rho, \varphi, z, t) + \frac{\partial p(z, t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$c_z \frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} = -\pi a^2 q_T(\rho, \varphi, z, t) + \pi a^2 \frac{\partial p(z,t)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$c_z \frac{\partial^2 p(z,t)}{\partial z^2} = -q_U(z,t) + \pi a^2 \frac{\partial p(z,t)}{\partial t}$$

que é expressão que deduzimos para modelar tubos com área de seção transversal constante.

Do exposto acima, verificamos que há consistência interna na proposição das equações de difusão tridimensionais e dependentes do tempo, escritas tanto em coordenadas cartesianas como em coordenadas cilíndricas. Voltemos às questões centrais referentes a modelagem de sistemas de vácuo utilizando a equação de difusão: Podemos considerar os gases escoando no regime molecular como sendo um fenômeno de difusão? Quais são as geometrias nas quais podemos aplicar este tipo de suposição? As respostas a estas questões não são imediatas e nem simples. No *Apêndice O* discutimos em detalhe estas considerações.

Finalizando, foi possível construir as equações de difusão unidimensional, bidimensional e tridimensional dependentes do tempo e em estado estacionário. Definimos as grandezas condutância específica – fundamental para a construção deste tipo de modelagem – e o *throughput* específico para todas as possíveis fontes gasosas.

Referências:

- Lewin, G.; Fundamentals of Vacuum Science and Technology. McGraw-Hill. 1965.
- Degasperi, F.T.; “Caderno de Atividades – Notas Particulares”. Instituto de Física da Universidade de São Paulo. São Paulo, SP, Brasil. 1991-2000.
- Degasperi, F.T.; "Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo – Objetivo Didático". XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria, Florianópolis, SC, Brasil, 1991. Seminário.
- Degasperi, F.T.; “Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo”. Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999. Seminário.
- Özisik, M.N.; Boundary Value Problems of Heat Conduction, Dover Publications, 1989.
- Mammana, V.P.; Degasperi, F.T.; Monteiro, O.R.; Vuolo, J.H.; Salvadori, M.C.B.; Brown, I.G.; "A New Field Emission Device with Improved Vacuum Features". Journal of Vacuum Science and Technology (JVST) da American Vacuum Society. Volume 18 (A), Número 4, Jul-Aug. de 2000.
- Mammana, V.P.; Pavani Filho, A.; Degasperi, F.T.; “Inovações Brasileiras para a Tecnologia de Displays de Emissão de Campo (FEDs)”. Revista OESP – Eletrotelemática, O Estado de São Paulo, Ano 6 - N° 33 Jan/Fev. 2001. Brasil.

- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; Verardi, S.L.L.; "Time Dependence of the Pressure Profile in a Tube with Axially-Dependent Degassing". Particle Accelerator Conference, PAC-2001, Chicago, Illinois, USA, 2001. Apresentado em forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Mammana, V.P.; Verardi, S.L.L.; Baranauskas, V.; "Calculation of the Vacuum Pressure Gradient in Field Emission Displays". Trabalho Publicado no Periódico "Surface Coatings and Technology", 2001.
- Buikema, H.; Hering, V.R.; Mammana, V.P.; Degasperi, F.T.; Pavani Filho, A.; "Calculation of the Deflection for Porous Polyimide Membranes in Field Emission Displays". Asia Display – IDW 2001 – Society for Information Display. 21st International Display Research Conference. The 8th International Displays Workshops. Nagoya, Japan, 2001. Trabalho e Painel Premiados pela Excelência.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; Verardi, S.L.L.; "Pressure Field Along the Axis of an Accelerating Structure". European Particle Accelerator Conference, EPAC-2002, Paris, França, 2002. Trabalho apresentado em forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Motta, C.C.; Verardi, S.L.L.; "Pressure Field Along the Axis of a High Power Klystron Amplifier". 14th IEEE International Pulsed Power Conference - 2003 – PPC-IEEE. Austin, Texas, USA, 2003. Trabalho Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Verardi, S.L.L.; Motta, C.C.; "Pressure Field in the Cathode-Anode Regions of a High-Power Klystron Amplifier". 15th IEEE International Vacuum Electronics Conference – IVEC-2004, Monterey, California, USA, 2004. Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Verardi, S.L.L.; Takahashi, J.; "Pressure Field Distribution in a Cylindrical Geometry with Arbitrary Cross Section". 9th European Particle Accelerator Conference EPAC-2004, Lucerne, Swiss, 2004. Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; Verardi, S.L.L.; "Pressure Field in a Tube with a General and Arbitrary Time- and Position-Dependent Gas Source". Journal of Vacuum Science and Technology – JVST-A, American Vacuum Society. Sep-Oct 2004.
- Degasperi, F.T.; Verardi, S.L.L.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; "Pressure Field Distribution in a Conical Tube with a Transient Gas Source and Outgassing". 5th Particle Accelerator Conference – PAC-2005, Knoxville, TN, USA, 2005. Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Baranauskas, V.; "Pressure Field in High Vacuum Systems: Mathematical Physics Formulation". 8th European Vacuum Conference - EVC-8 e 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society. Berlin, Germany, 2003. Trabalho Apresentado em Forma de Painel.

- Degasperi, F.T.; Mammana, V.P.; Baranauskas, V.; “Steady-State and Transient Pressure Profile in Field Emission Display”. 8th European Vacuum Conference - EVC-8 e 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society. Berlin, Germany, 2003. Trabalho Apresentado em Forma Oral.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Verardi, S.L.L.; Takahashi, J; “Pressure Field in a Tube with a General and Arbitrary Time- and Position-Dependent Degassing”. 8th European Vacuum Conference - EVC-8 e 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society. Berlin, Germany, 2003. Trabalho Apresentado em Forma de Painel.
- Degasperi, F.T. – “Pressure Field Distribution in a Superconductor Accelerator Tube of CERN”. Seminário Convidado e Apresentado no Grupo de Vácuo do CERN. Genebra, Swiss, 2004.
- Degasperi, F. T.; Baranauskas, V.; “Mathematical Physics Formulation to Pressure Field in a Tube with an Arbitrary Axisymmetric Cross Section”. 16th International Vacuum Congress – IVC-16, Venice, Italy, 2004. Apresentado em forma oral.
- Degasperi, F.T.; “Pressure Field Distribution in Ultra High-Vacuum Systems”. 41st IUVESTA – WORKSHOP – Vacuum System Design for Particle Accelerators: a multidisciplinary approach. Brdo pri Kranju, Slovenia, 2004. Apresentado em forma oral.
- Degasperi, F.T.; "Campo de Pressão em Associação de Tubos em Sistemas de Alto-Vácuo". XXVI Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência – XXVI CBRAVIC, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil, 2005. Apresentação Oral.
- Degasperi, F.T.; Mammana, V.P.; Baranauskas, V.; “Vacuum Calculation and System to Field Emission Display”. XII InfoDisplay – III BrDisplay – VII DisplayEscola – Centro de Pesquisa Renato Archer – CenPRA – Campinas, SP, Brasil, 2005. Apresentação Oral Convidada.

Apêndice C

□ Expressões Matemáticas para as Curvas de Velocidade de Bombeamento de Bombas de Vácuo.

A análise, modelagem e cálculo de sistemas de vácuo em geral – pré-vácuo, alto-vácuo e ultra alto-vácuo – exigem o conhecimento de vários dados pertinentes ao processo de bombeamento de gases e vapores. Alguns desses dados, como por exemplo, as condutâncias dos componentes da linha de bombeamento, podem ser determinados por meio de cálculos. Em geral, são necessárias as dimensões dos tubos, válvulas, filtros, etc., além das grandezas físicas relativas à cinética dos gases, como temperatura, massa molecular dos gases envolvidos no bombeamento.

Outros dados necessários às modelagens, análises e os cálculos detalhados de sistemas de vácuo são as curvas de velocidade de bombeamento das bombas de vácuo em função da sua pressão de operação. Geralmente, as curvas de velocidade de bombeamento, da maioria das bombas de vácuo comercializadas, estão disponíveis nos catálogos dos fabricantes. Esquemáticamente, um sistema de vácuo, operando em qualquer faixa de pressão pode ser representado conforme mostrado a Figura C.1

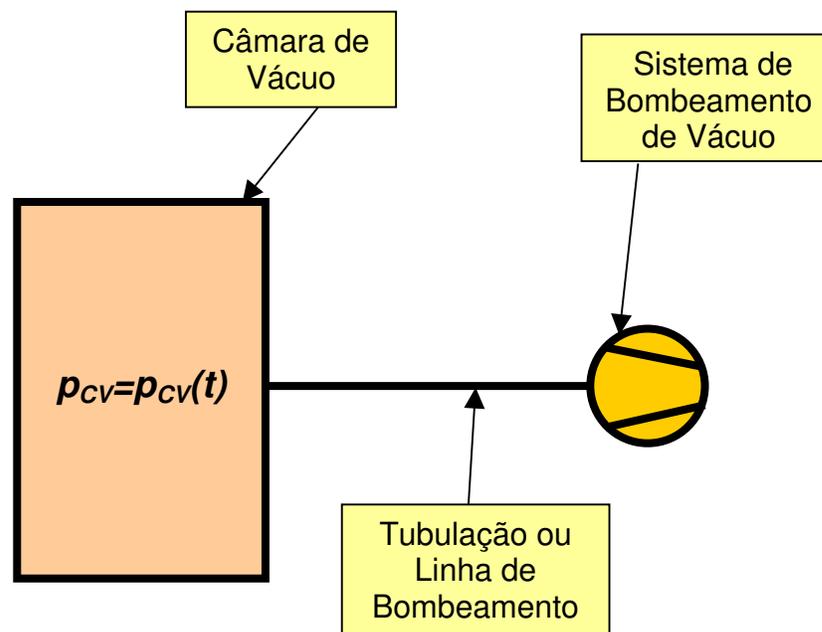


Figura C.1 Configuração de um sistema de vácuo geral apresentando as suas três partes principais: a câmara de vácuo, a linha de bombeamento – os tubos, conexões, válvulas, filtros, etc. – e o sistema de bombeamento de vácuo – as bombas de vácuo.

Como estudado detalhadamente no *Apêndice A*, a determinação da evolução temporal da pressão na câmara de vácuo envolve a solução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – *EPV*, conforme mostrada a seguir com a sua condição inicial

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = - S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$p_{CV}(t = 0) = p_0$$

Sendo que S_{ef} – a velocidade efetiva de bombeamento – pode ser escrita em termos da velocidade da bomba de vácuo – S_{bv} –, geralmente fornecida pelas empresas fabricantes, e da condutância total da linha de bombeamento – C_{Total} –, que liga a câmara de vácuo às bombas de vácuo. Desta forma, nas modelagens de sistemas de vácuo, precisamos ter o conhecimento da função velocidade de bombeamento das bombas de vácuo em função da pressão, e assim construímos a função, em geral dependente da pressão, mostrada abaixo

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} \Rightarrow S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} .$$

Apesar de estarmos expondo a necessidade do conhecimento das curvas de velocidade de bombeamento das bombas de vácuo, argumentando em torno da modelagem por meio da abordagem discreta, o mesmo ocorre na abordagem contínua. Algumas bombas de vácuo como, por exemplo, a bomba de sorpção, a bomba de sublimação de titânio, a bomba criogênica e a bomba *NEG* não acompanham em seus catálogos as suas curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão de operação; assumimos nestes casos que a velocidade de bombeamento é o valor fornecido pelos fabricantes e válido para toda a sua faixa de operação. Em particular, para a bomba de sorpção, os seus fabricantes fornecem as curvas de pressão em função do tempo para situações típicas de sistemas de vácuo. Os fabricantes exemplificam-na mostrando os valores de pressão no tempo para uma câmara de vácuo, com certo volume, considerando uma particular bomba de sorpção. Por meio desta curva é possível obter e construir a curva da velocidade de bombeamento.

No caso de projetos de sistemas de vácuo de grande porte, um procedimento seguro é fazermos um protótipo, ou ainda, determinar experimentalmente as curvas de velocidade de bombeamento para as bombas de vácuo que não trazem informação sobre o seu comportamento

geral em função da pressão. Ainda há a possibilidade de obter informações adicionais sobre o seu desempenho junto aos seus fabricantes. Mesmo para as bombas de vácuo cujas curvas de velocidade de bombeamento são disponíveis, temos situações particulares, como por exemplo: a presença de gases especiais, perigosos, ou ainda vapores, também no caso de temperatura de operação fora do usual, enfim, situações não corriqueiras nos sistemas de vácuo.

Podemos obter a solução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – *EPV* – tanto analítica como numericamente, aproximando a curva real da velocidade de bombeamento, de uma particular bomba de vácuo, por uma função composta por várias funções de valor constante. Assim, para cada intervalo de pressão assumimos um valor de velocidade de bombeamento constante, o mesmo para outro intervalo de pressão, e assim por diante. Este é um procedimento legítimo. Certamente é uma aproximação, como é a tarefa de modelagem! O que pretendemos mostrar a seguir é uma série de expressões matemáticas, que representam de forma bastante precisa, as curvas de velocidade de bombeamento das mais importantes e usuais bombas de vácuo. O alcance de uma expressão matemática é sempre maior que o conhecimento de uma tabela ou de uma curva aproximada por degraus; por meio do conhecimento de uma expressão matemática poderemos fazer qualquer operação matemática com ela, ou seja, integrá-la, diferenciá-la, determinar pontos de máximo e mínimo, e outras operações.

Assim, foram obtidas as expressões matemáticas da velocidade de bombeamento das seguintes bombas de vácuo: bomba mecânica de palheta de um estágio, bomba mecânica de palheta de dois estágios, bomba de pistão, bomba de diafragma, bomba de anel líquido, bomba *scroll*, bomba *roots*, bomba injetora de vapor, bomba de difusão ou difusora, bomba turbomolecular-*drag*, bomba turbomolecular e bomba iônica.

Cabe mencionar que as expressões matemáticas foram obtidas por meio de ajustes das curvas disponíveis nos catálogos dos fabricantes. Assim, enfatizamos que as expressões matemáticas não foram obtidas a partir de primeiros princípios de funcionamento das bombas de vácuo em questão. O ponto de partida para a obtenção das expressões matemáticas foi a constatação de que as curvas de velocidades de bombeamento são muito similares às daquelas das curvas de resposta dos filtros elétricos em função da frequência, ou seja, os filtros passa-alta, passa-baixa e passa-banda. A seguir mostraremos as curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão.

1. Bomba Mecânica de Palheta de um Estágio, Bomba Mecânica de Palheta de Dois Estágios, Bomba de Pistão, Bomba de Diafragma, Bomba de Anel Líquido e Bomba *Scroll*.

Estes tipos de bombas de vácuo iniciam sua operação à pressão atmosférica e atingem pressões da ordem de 20 mbar para a bomba de anel líquido e 10^{-1} até 10^{-4} mbar para as demais. A

expressão matemática básica para expressar a curva de velocidade de bombeamento dessas bombas de pré-vácuo está mostrada a seguir, mostrada na Expressão C.1

$$S_{BM}(p) = S_{MÁX} \frac{A}{\left[1 + \left(\frac{a \cdot p_{final}}{p}\right)^b\right]^c} \left[1 - \frac{B}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{d \cdot p_{final}}\right)^e}}\right], \quad C.1$$

onde

- p é a pressão na flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade de bombeamento máxima, ou ainda, a velocidade nominal da bomba de vácuo,
- p_{final} é a pressão mínima que a bomba de vácuo atinge, e
- a, b, c, d, e, f, A e B são constantes que dependem de um particular tipo ou modelo de bomba de vácuo.

À primeira vista, o fato de termos uma expressão aparentemente complicada e com algumas constantes a serem determinadas pode parecer uma desvantagem, mas acreditamos que não devemos olhar desta forma. Com as constantes a serem determinadas – que não será uma tarefa difícil de realizar! – nos dará a possibilidade de ajustar muito bem a curva da velocidade de bombeamento de uma particular bomba de vácuo. Também, do ponto de vista computacional, esta expressão não trará dificuldade alguma em sua manipulação numérica.

Complementando, cabe mencionar que um particular tipo de bomba de vácuo, dessas que listamos, ou ainda, dentro de certo tipo de bomba de vácuo, podemos encontrar pequenas variações na forma da curva de velocidade de bombeamento dada pela expressão acima. Estas variações dependem da capacidade da bomba de vácuo, isto é, se são bombas de vácuo de pequeno ou grande porte. Ainda, do fabricante, uma vez que detalhes de projeto podem introduzir detalhes que levam a alguma particularidade à bomba de vácuo. Assim, certamente, a expressão matemática mostrada acima deverá também incorporar estas particularidades.

Poderemos em alguns casos ter necessidade de compor outras funções matemáticas com a expressão dada, pois, poderemos ter uma particular bomba de vácuo cuja velocidade de bombeamento, em certo intervalo de pressão, seja difícil de ser ajustado unicamente por meio da manipulação da expressão dada. No final deste apêndice construiremos curvas de velocidade de bombeamento para as várias bombas de vácuo listadas. Adotaremos os catálogos das empresas fabricantes das bombas de vácuo, como a literatura técnica para a obtenção das curvas de

velocidade de bombeamento a serem reproduzidas. Para esta tarefa utilizaremos o programa *MathCAD™*.

2. Bomba Roots.

A expressão matemática para a construção da curva de velocidade de bombeamento em função da pressão, para as bombas mecânicas *roots*, está mostrada a seguir na Expressão C.2

$$S_{BR}(p) = S_{MÁX} \frac{A}{\left[1 + \left(\frac{a \cdot p_{final}}{p}\right)^b\right]^c \left[1 + \left(\frac{p}{d \cdot p_{final}}\right)^e\right]^f}, \quad C.2$$

onde

- p é a pressão na flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade de bombeamento máxima, ou ainda, a velocidade nominal da bomba de vácuo,
- p_{final} é a pressão mínima que a bomba de vácuo atinge, e
- a, b, c, d, e, f e A são constantes que dependem de um particular modelo de bomba *roots*.

Os comentários tecidos no item acima valem para o caso da bomba *roots*. No final deste apêndice construiremos curvas de velocidade de bombeamento para bombas de vácuo *roots*. Adotaremos os catálogos das empresas fabricantes das bombas de vácuo, como a literatura técnica para a obtenção das curvas de velocidade de bombeamento a serem reproduzidas. Para esta tarefa utilizaremos o programa *MathCAD™*.

3. Bomba Injetora de Vapor ou Bomba *Booster* de Vapor.

Este tipo de vácuo inicia sua operação à pressão de 1 mbar e atingem pressões da ordem de 10^{-4} mbar. A expressão matemática básica para expressar a curva de velocidade de bombeamento dessas bombas de vácuo está mostrada a seguir na Expressão C.3

$$S_{BIV}(p) = \begin{cases} S_{MÁX} & \text{para } p_1 \leq p \leq p_{MÁX} \\ 10^{\left[\frac{\log S_{MÁX} - \log S_{INT}}{\log p_1 - \log p_2}\right](\log p - \log p_1) + \log S_{INT}} & \text{para } p_1 < p \leq p_2 \\ 10^{\left[\frac{\log S_{INT} - \log S_{m'n}}{\log p_2 - \log p_{m'n}}\right](\log p - \log p_2) + \log S_{m'n}} & \text{para } p_2 < p \leq p_{m'n} \end{cases}, \quad C.3$$

onde

- p é a pressão na flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade máxima de bombeamento, ou ainda, a velocidade nominal da bomba de vácuo,
- S_{INT} é a velocidade de bombeamento para a pressão p_2 ,
- $S_{mín}$ é a velocidade de bombeamento para a pressão $p_{mín}$, e
- $p_{mín}$ é a pressão mínima que a bomba de vácuo atinge.

Os comentários feitos no item acima valem para o caso da bomba *booster* de vapor ou também chamada bomba injetora de vapor. No final deste apêndice construiremos curvas de velocidade de bombeamento para estas bombas de vácuo. Adotaremos os catálogos das empresas fabricantes das bombas de vácuo, como a literatura técnica para a obtenção das curvas de velocidade de bombeamento a serem reproduzidas. Para esta tarefa utilizaremos o programa *MathCADTM*.

4. Bomba de Difusão ou Difusora, Bomba Turbomolecular-*Drag* e Bomba Turbomolecular.

Estes tipos de bombas de vácuo iniciam sua operação à pressão em torno de 10^{-1} a 10^{-2} mbar e podem atingir pressões da ordem de 10^{-6} para as bombas turbomolecular-*drag*, 10^{-9} mbar para as bombas difusoras – com certos tipos de óleo e com armadilha gelada – e 10^{-10} mbar para as bombas turbomoleculares. A expressão matemática básica para expressar a curva de velocidade de bombeamento para as bombas de vácuo listadas está mostrada a seguir na Expressão C.4

$$S_{BD}(p) = S_{MÁX} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{p}{a \cdot p_{inicial}} \right)^b \right]^c}, \quad \text{C.4}$$

onde

- p é a pressão na flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade de bombeamento máxima, ou ainda, velocidade nominal da bomba de vácuo,
- $p_{inicial}$ é a pressão que a bomba de vácuo inicia sua operação,
- a , b e c são constantes que dependem de um particular tipo e modelo das bombas de vácuo.

No caso de sistemas de alto-vácuo utilizando bomba difusora, tendo como exigência um vácuo não contaminado com vapor de óleo – na verdade, quantidades muito pequenas de vapor de óleo – podemos instalar as chamadas armadilhas geladas e os anteparos. Nestes casos teremos uma diminuição significativa da velocidade de bombeamento efetiva. Nas modelagens, deveremos incluir este fato associando em série com a bomba de difusão o anteparo e a armadilha gelada.

Os comentários tecidos no item acima continuam válidos para o caso das bombas de vácuo listadas neste item. No final deste apêndice construiremos curvas de velocidade de bombeamento para as bombas de vácuo mencionadas. Adotaremos os catálogos das empresas fabricantes das bombas de vácuo, como a literatura técnica para a obtenção das curvas de velocidade de bombeamento a serem reproduzidas. Para esta tarefa utilizaremos o programa *MathCADTM*.

5. Bomba Iônica.

A expressão matemática da curva de velocidade de bombeamento em função da pressão, para a bomba iônica está mostrada a seguir na Expressão C.4

$$S_{BR}(p) = S_{MÁX} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{a \cdot p_{final}}{p}\right)^b\right]^c \left[1 + \left(\frac{p}{d \cdot p_{final}}\right)^e\right]^f}, \quad \text{C.4}$$

onde

- p é a pressão na flange de entrada da bomba de vácuo,
- $S_{MÁX}$ é a velocidade de bombeamento máxima, ou ainda, a velocidade nominal da bomba de vácuo,
- p_{final} é a pressão mínima que a bomba de vácuo atinge, e
- a, b, c, d, e e f são constantes que dependem de um particular modelo de bomba mecânica iônica.

No final deste apêndice construiremos curvas de velocidade de bombeamento para as bombas iônicas. Adotaremos os catálogos das empresas fabricantes das bombas de vácuo, como a literatura técnica para a obtenção das curvas de velocidade de bombeamento a serem reproduzidas. Para esta tarefa utilizaremos o programa *MathCADTM*. Como comentário geral podemos dizer que somos capazes de representar matematicamente as curvas de velocidade de bombeamento, para a maioria das bombas de vácuo disponíveis no mercado, a partir das expressões matemáticas construídas neste apêndice. Cabe mencionar que este trabalho é original, sendo que o autor não encontrou na literatura da área, expressões matemáticas para as curvas de velocidade de bombeamento para as bombas de vácuo. Também é pertinente enfatizar que as expressões matemáticas não foram obtidas a partir do princípio de funcionamento das bombas de vácuo. Mas sim da exploração de funções que ajustem bem as curvas obtidas dos catálogos dos fabricantes. Fechando este apêndice, fizemos uma apresentação das expressões matemáticas das curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão para as bombas de vácuo mais usadas tanto na indústria como na ciência e na tecnologia. A seguir são mostradas curvas de velocidade de bombeamento para as bombas de vácuo listadas neste apêndice com os seus gráficos.

Expressões Matemáticas para as Curvas de Velocidade de Bombeamento de Bombas de Vácuo.

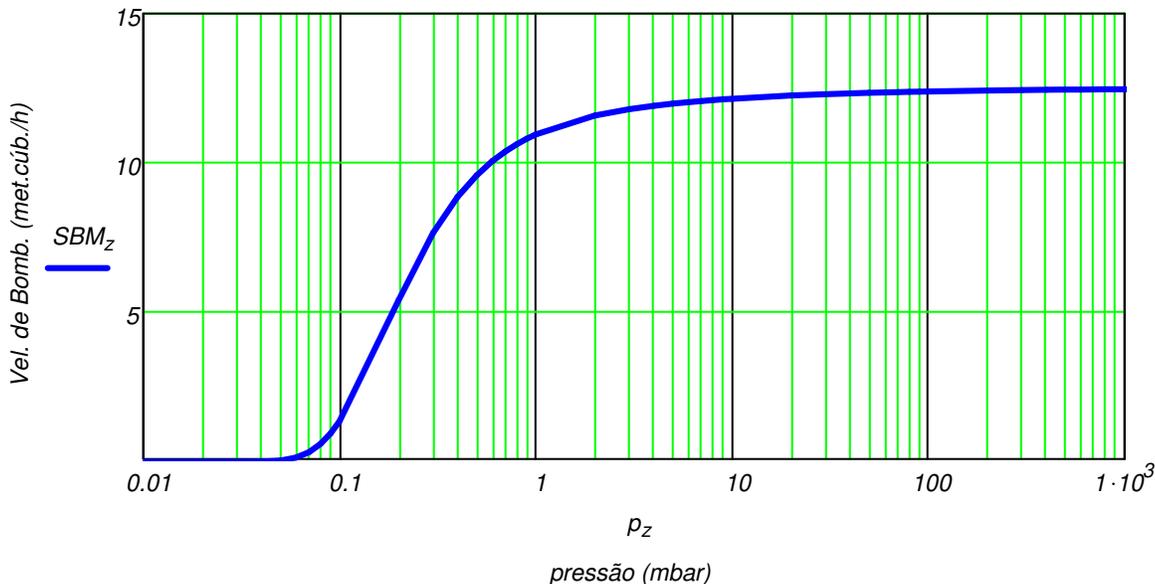
- Definição da escala das pressões.

$$w := 1..14 \quad c_w := 10^{w-11} \quad z := 1..126 \quad a := 1..9 \quad \chi := 0,9..117 \quad p_{a+\chi} := a \cdot c \cdot 10^{\frac{\chi}{9}}$$

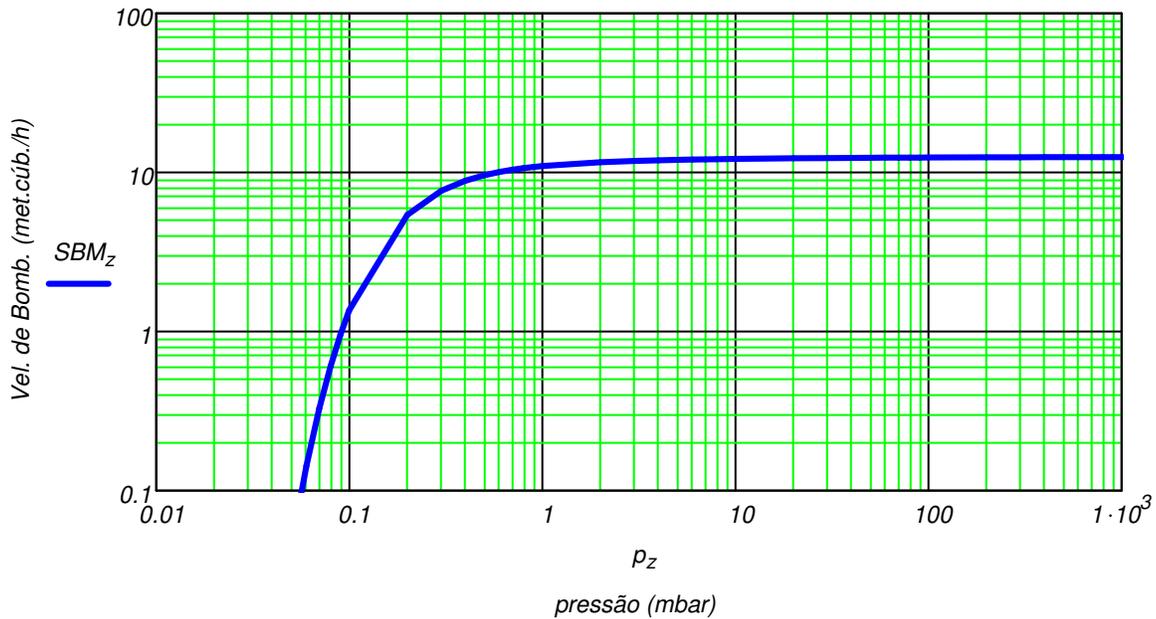
- Bomba Mecânica de Palhetas de um Estágio. Modelo 1015 SD, série Pascal e marca Alcatel.**

$$SBM_{m\acute{a}x} := 12.5 \quad \text{metros cúbicos / hora}$$

$$SBM_z := SBM_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0.8 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{p_z}\right)^{1.7}\right]^{10}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{1.5 \cdot 10^{-1} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}\right)^1}}\right]$$



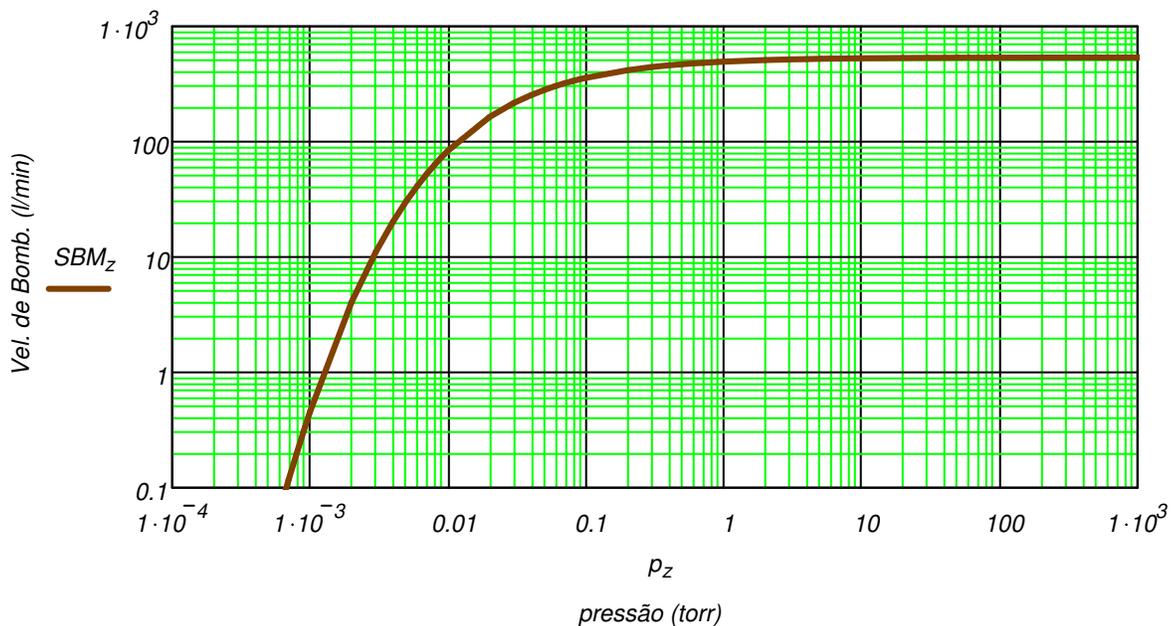
- Cabe mencionar que as curvas a serem obtidas, como a curva mostrada acima, são curvas aproximadas. Por meio de uma inspeção visual nos catálogos, construímos as curvas ajustando as constantes nas expressões matemáticas.
- A curva mostrada acima, a representação da velocidade de bombeamento foi feita em escala linear. Muitas vezes a velocidade de bombeamento é representada em escala logarítmica.
- A seguir mostramos a mesma curva acima em escala logarítmica.
- Devemos prestar atenção às unidades considerada em nossa modelagem e assim extrair corretamente as informações a partir das curvas.



- **Bomba Mecânica de Palhetas de dois Estágios. Modelo E2M30 e marca BOC Edwards.**

$SBM_{máx} := 537$ litros / minuto

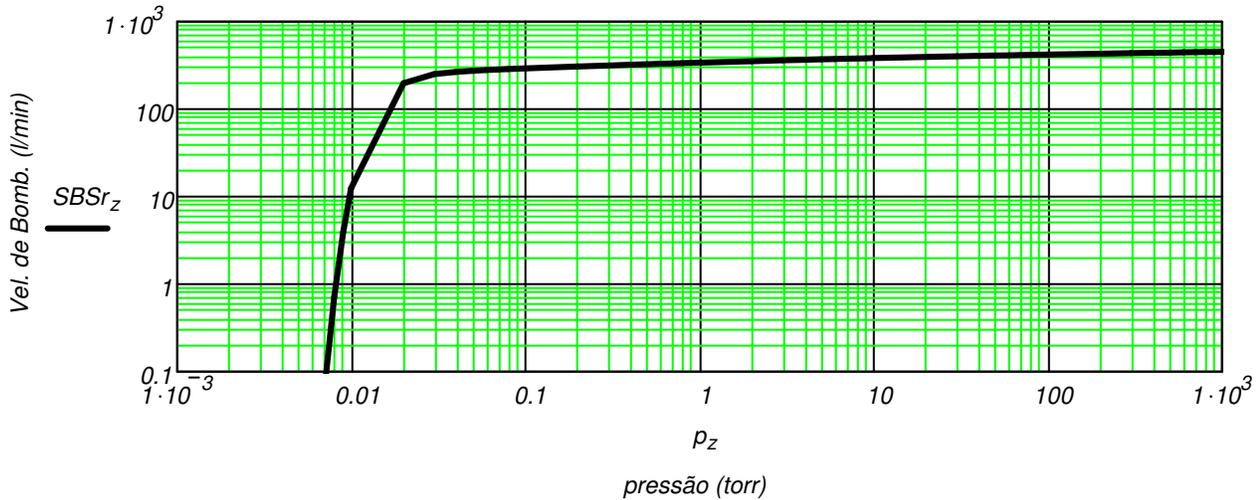
$$SBM_z := SBM_{máx} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1.3 \cdot 7.5 \cdot 10^{-4}}{p_z}\right)^{0.7}\right]^{10}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{0.5 \cdot 10^{-1} \cdot 7.5 \cdot 10^{-4}}\right)^{0.95}}}\right]$$



- **Bomba Scroll. Modelo DS 610 e marca Varian.**

$SBSr_{m\acute{a}x} := 585$ litros / minuto

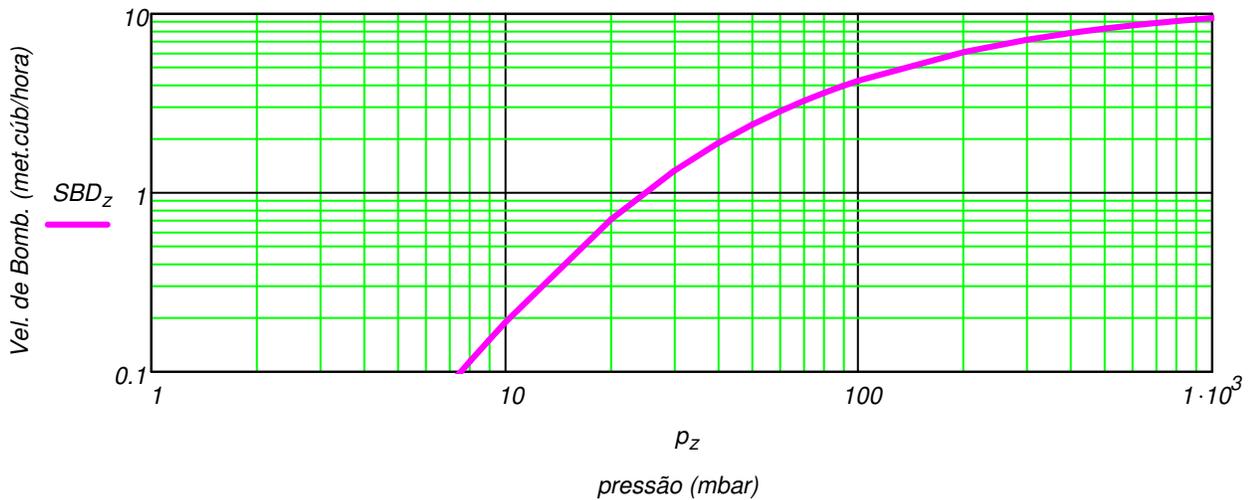
$$SBSr_z := SBSr_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1.0 \cdot 7.5 \cdot 10^{-3}}{p_z}\right)^{3.7}\right]^{10}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{0.5 \cdot 10^{-1} \cdot 7.5 \cdot 10^{-3}}\right)^{0.195}}}\right]$$



- **Bomba Diafragma de dois Estágios. Modelo DIVAC 0.6 L e marca Leybold.**

$SBDm\acute{a}x := 10.0$ metros cúbicos / hora

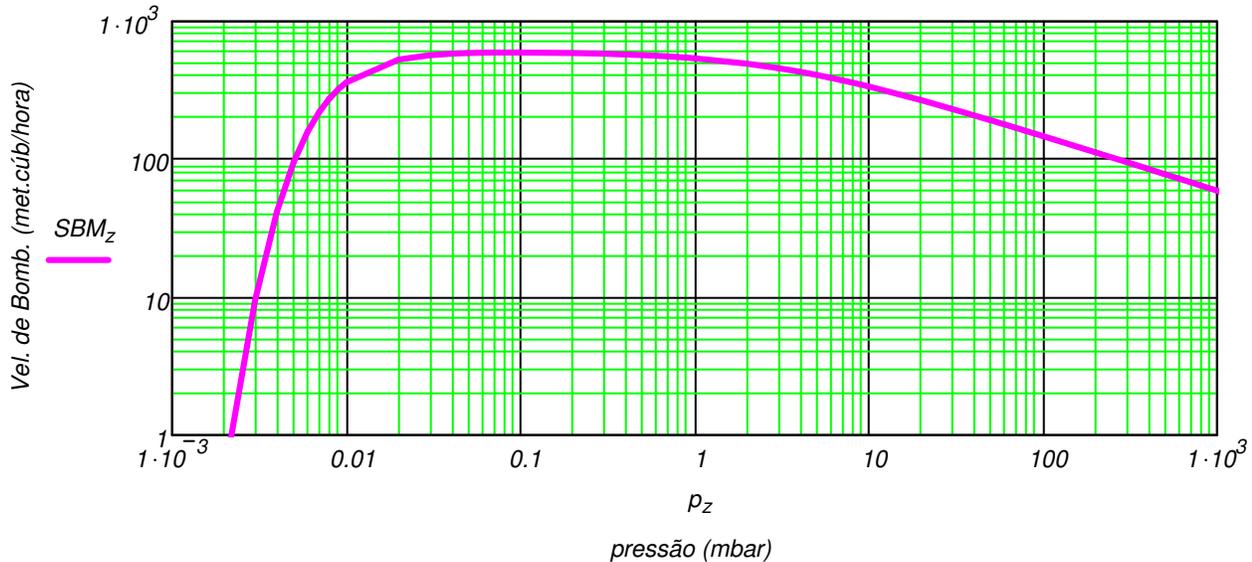
$$SBD_z := SBDm\acute{a}x \cdot \frac{1.15}{\left[1 + \left(\frac{17.0 \cdot 8}{p_z}\right)^{0.8}\right]^{0.9}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_z}{2.50 \cdot 8}\right)^{1.8}}}\right]$$



- **Bomba Roots. Modelo EH500 - E1M80 e marca BOC Edwards.**

$SBM_{m\acute{a}x} := 605$ metros cúbicos / hora

$$SBM_z := SBM_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 10^{-3}}{p_z}\right)^2\right]^6 \cdot \left[1 + \left(\frac{p_z}{10^3 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 10^{-3}}\right)^1\right]^{0.4}}$$



- **Bomba Injetora de Vapor. Modelo 18B4B e marca BOC Edwards.**

$SBIV_{m\acute{a}x} := 1 \cdot 10^4$ litros / segundo

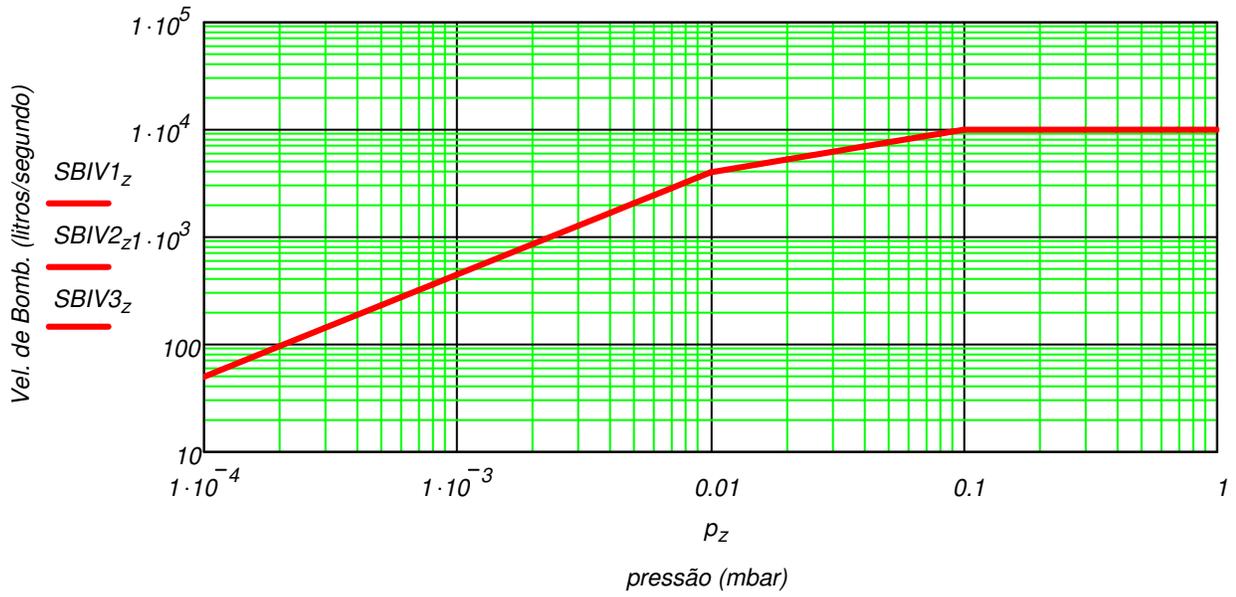
$$SBIV1_z := SBIV_{m\acute{a}x} \cdot (\Phi(-9 \cdot 10^{-2} + p_{z-1}) - \Phi(-1 + p_{z-1}))$$

$$A_z := (\Phi(-9 \cdot 10^{-3} + p_{z-1}) - \Phi(-10^{-1} + p_{z-1}))$$

$$SBIV2_z := 10^{\left(\frac{\log(1 \cdot 10^4) - \log(4 \cdot 10^3)}{\log(10^{-1}) - \log(10^{-2})}\right) \cdot (\log(p_z) - \log(10^{-2})) + \log(4 \cdot 10^3)} \cdot A_z$$

$$B_z := (\Phi(-9 \cdot 10^{-5} + p_{z-1}) - \Phi(-10^{-2} + p_{z-1}))$$

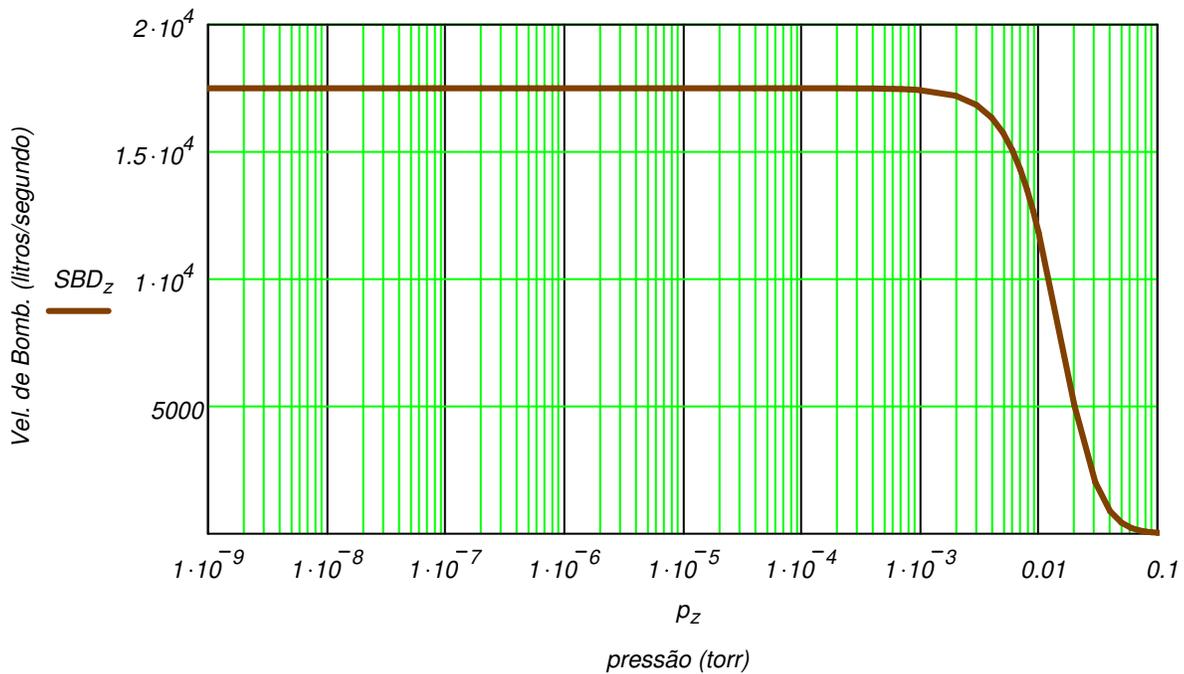
$$SBIV3_z := 10^{\left(\frac{\log(4 \cdot 10^3) - \log(50)}{\log(10^{-2}) - \log(10^{-4})}\right) \cdot (\log(p_z) - \log(10^{-4})) + \log(50)} \cdot B_z$$



- **Bomba Difusora. Modelo HS-20 e marca Varian.**

SBDmáx := 17500 litros / segundo

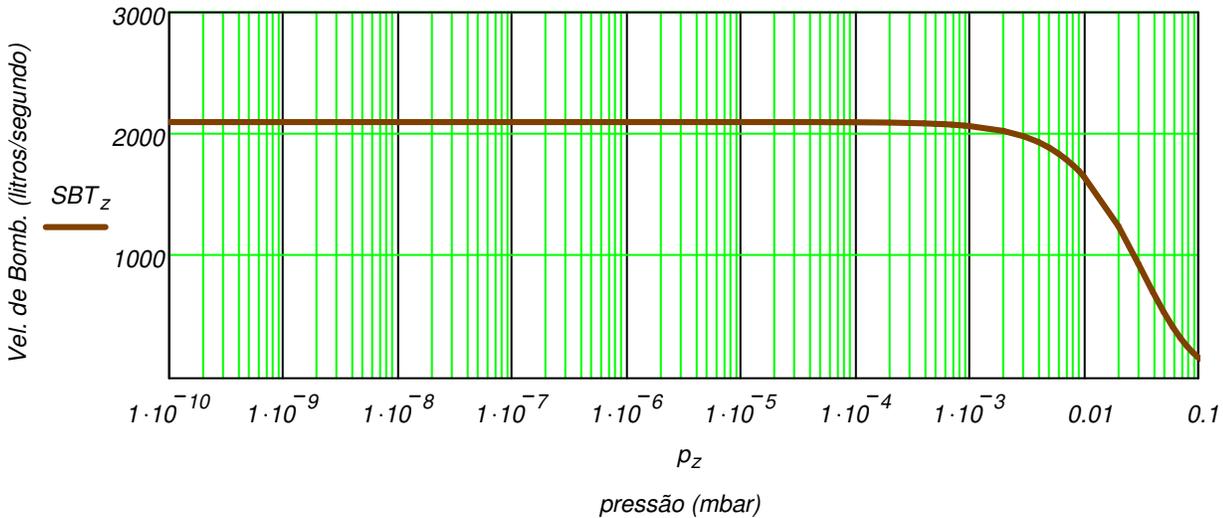
$$SBD_z := SBD_{máx} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{p_z}{0.215 \cdot 1.0 \cdot 10^{-1}} \right)^2 \right]^2}$$



- **Bomba Turbomolecular. Modelo TC TPU 2201 C e marca Pfeiffer.**

$SBT_{m\acute{a}x} := 2100$ litros / segundo

$$SBT_z := SBT_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{p_z}{0.8 \cdot 1.0 \cdot 10^{-1}} \right)^{1.2} \right]^3}$$

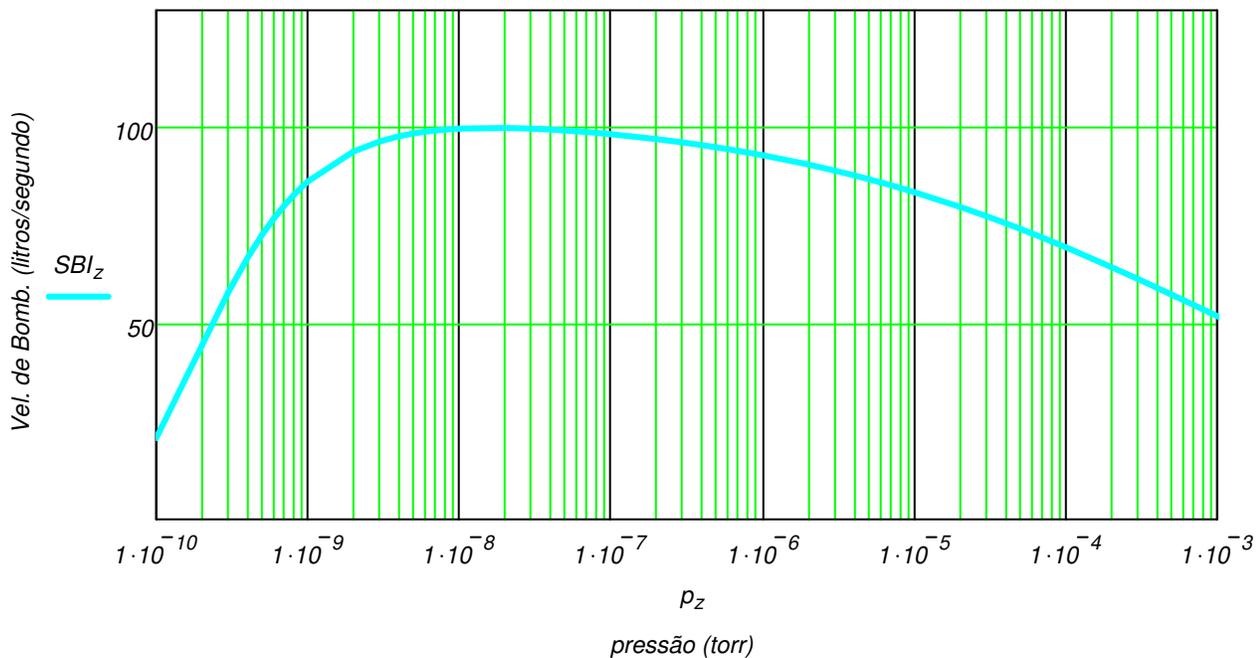


- **Bomba Iônica. Modelo MI-150 Mag-Ion e marca Veeco.**

$SBI_{m\acute{a}x} := 105$ litros / segundo

$$SBI_z := SBI_{m\acute{a}x} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{3 \cdot 1.0 \cdot 10^{-11}}{p_z} \right)^7 \right]^6 \cdot \left[1 + \left(\frac{p_z}{10^8 \cdot 1.0 \cdot 10^{-11}} \right)^{0.3} \right]^1}$$

- Na representação matemática das curvas de velocidade de bombeamento das bombas de vácuo, poderemos enfrentar o problema de não conseguirmos obter uma boa aderência entre a proposta da expressão matemática e a curva encontrada no catálogo que quearemos trabalhar. Neste caso podemos agir da seguinte forma: construir por pedaços a curva da velocidade de bombeamento. Assim, podemos para cada trecho da curva de velocidade de bombeamento fornecida pelo catálogo utilizar uma expressão matemática que a represente bem, dentro do critério de qualidade estabelecido na análise a ser realizada.
- Citando um caso cuja situação comentada acima ocorre com freqüência, temos as bombas *roots*. Existem marcas deste tipo de bomba de vácuo, cuja velocidade de bombeamento, desde a pressão atmosférica até 100 mbar, é praticamente constante e igual a bomba mecânica acoplada a ela. A partir de 110 mbar, para pressões menores há um aumento bastante acentuado de velocidade de bombeamento, neste caso verificamos que é mais fácil considerar a construção da função matemática da velocidade de bombeamento em duas partes.



CONCLUINDO:

- Contruímos curvas de velocidade de bombeamento em função da pressão para várias bombas de vácuo muito utilizadas tanto na indústria como na ciência. Cabe mencionar que são curvas aproximadas das curvas disponíveis em catálogos dos fabricantes.
- Certamente, para muitas bombas de vácuo teremos muita dificuldade em ajustar as suas curvas de velocidade de bombeamento para toda a sua faixa de operação. Caso haja necessidade de uma boa reprodução, podemos lançar mão de um artifício, que é ajustar a curva por pedaços. Esta tarefa em geral é trabalhosa mas podemos chegar a bons resultados; nestes casos usamos a função degrau ou função Hevisade.
- Para saber se uma modelagem sobre o processo de bombeamento em vácuo é muito dependente da curva velocidade de bombeamento ajustada, podemos simplesmente fazer pequenas variações em torno da curva proposta e verificar o seu efeito nos cálculos.

Referências:

- Degasperri, F.T.; “Caderno de Atividades - Notas Particulares”. Instituto de Física da Universidade de São Paulo. 1990 a 2000.
- Degasperri, F.T.; - "Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo: Objetivo Didático". XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria, Florianópolis, SC, Brasil, 1991. Seminário.
- Sanches Júnior, R.L.; Trabalho de Graduação do Curso de Materiais, Processos e Componentes Eletrônicos. Trabalho desenvolvido no Laboratório de Tecnologia do Vácuo da Faculdade de Tecnologia de São Paulo. Trabalho orientado por Francisco Tadeu Degasperri. 1997.
- Degasperri, F.T.; Corrêa Filho, W.F.; Sanches Junior, R.L.; "Detalhes do Processo de Bombeamento em Sistemas de Vácuo Industriais". Sessão "Tecnologia do Vácuo na Indústria" do XIX Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência (CBRAVIC), LNLS, Campinas, SP, Brasil, 1998. Comunicação Oral.
- Catálogos das Seguintes Empresas de Vácuo: Leybold, Pfeiffer-Balzars, Alcatel, Varian, Edwards e Kurt-Lesker.
- Manual do Programa *MathCad*TM – Professional - versão 6.0, *MathSoft* Inc. Instalado na Faculdade de Tecnologia de São Paulo – Fatec-SP.
- Wieder, S.; Introduction to *MathCAD*TM for Scientists and Engineers. McGraw-Hill, Inc. 1992.
- Kaganov, I.L.; *Electronica Industrial* – Curso General. Editorial Mir. 1971.

Apêndice D

❑ Comparação entre a Abordagem Discreta e a Abordagem Contínua na Modelagem de Sistemas de Vácuo.

Em tecnologia do vácuo as análises, modelagens e cálculos dos sistemas de vácuo em geral são realizados por meio da abordagem discreta, sejam eles de pré-vácuo, de alto-vácuo ou de ultra alto-vácuo. Este tipo de abordagem, apesar de útil na maioria dos casos, é bastante limitado, uma vez que por meio dela conseguimos obter um único valor de pressão – geralmente dependente do tempo – para toda a extensão da câmara de vácuo. A análise discreta não fornece o campo de pressão e o seu gradiente em função da posição interna da câmara de vácuo. A abordagem discreta foi detalhada e rigorosamente desenvolvida no *Apêndice A*. Em contra partida, na abordagem contínua podemos obter a pressão em função do tempo para cada ponto que compõe a câmara de vácuo, isto é, temos uma solução com estrutura de campo, no caso campo escalar de pressão. A partir da função matemática que representa o campo de pressão, podemos determinar o gradiente de pressão. A abordagem contínua foi detalhada e rigorosamente desenvolvida no *Apêndice B*.

Na modelagem realizada por meio da abordagem discreta os sistemas de vácuo são divididos em três partes distintas e independentes, que são: a câmara de vácuo, a tubulação ou linha de bombeamento e o sistema de bombeamento de vácuo. Esquemáticamente temos representado abaixo na Figura D.1 um sistema de vácuo típico

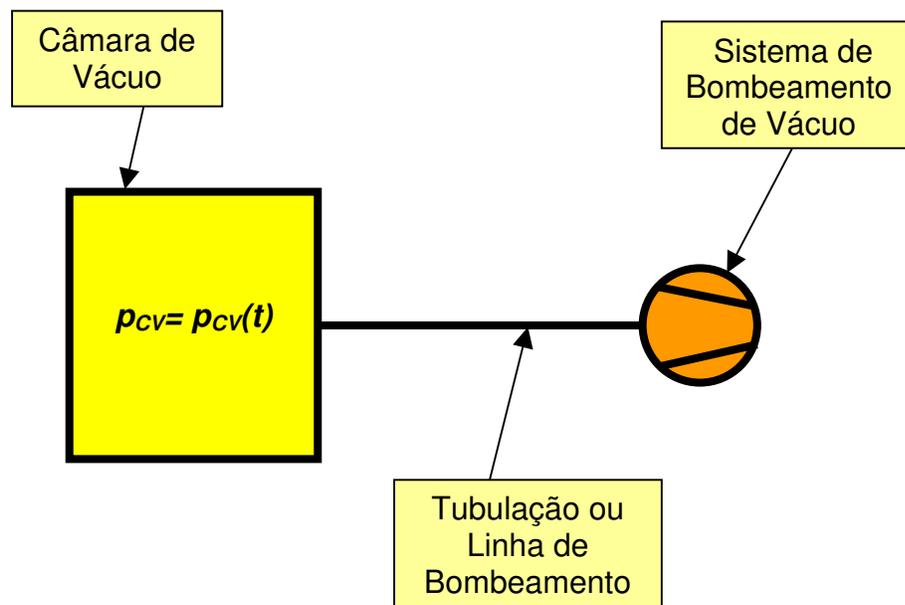


Figura D.1 Configuração de um sistema de vácuo apresentando as suas três partes principais: a câmara de vácuo, a tubulação ou linha de bombeamento e o sistema de bombeamento de vácuo.

Definindo sucintamente estas três partes, podemos dizer que a câmara de vácuo é a região onde realizamos o processo em vácuo, a tubulação ou linha de bombeamento compreende as partes da conexão da câmara de vácuo ao sistema de bombeamento de vácuo – fazem parte os tubos, conexões, válvulas, filtros, armadilhas geladas, conexões em geral – e finalmente temos o sistema de bombeamento de vácuo, este último responsável pela remoção dos gases e vapores do sistema de vácuo. Como mostramos no *Apêndice A*, a modelagem dos sistemas de vácuo, por meio da abordagem discreta, determinamos um único valor de pressão em função do tempo para toda a câmara de vácuo. Para muitas situações encontradas na tecnologia do vácuo esse tipo de abordagem atende às necessidades de projeto, porém para muitas outras situações, como por exemplo, nos sistemas de alto-vácuo tubulares a pressão ao longo da sua extensão pode variar por várias ordens de grandeza. Nestes casos a pressão dependente unicamente do tempo, obtida por meio da abordagem discreta, esconde completamente a realidade física do problema. Veremos neste apêndice uma situação realística cuja análise por meio da abordagem contínua é imprescindível.

A Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} na abordagem discreta é mostrada abaixo

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i ,$$

com

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} \Rightarrow S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} ,$$

assim ficamos com a equação diferencial ordinária de primeira ordem e a sua condição inicial

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -\frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$p_{CV}(t = 0) = p_0$$

Este tipo de análise considera todo o sistema de vácuo – câmara de vácuo, linha de bombeamento e sistema de bombeamento – como sendo constituído de dimensão geométrica puntual.

A abordagem discreta faz exclusivamente uso do princípio de conservação de energia e podemos esquematicamente representar o balanço energético do sistema físico conforme Figura D.2 mostrada abaixo

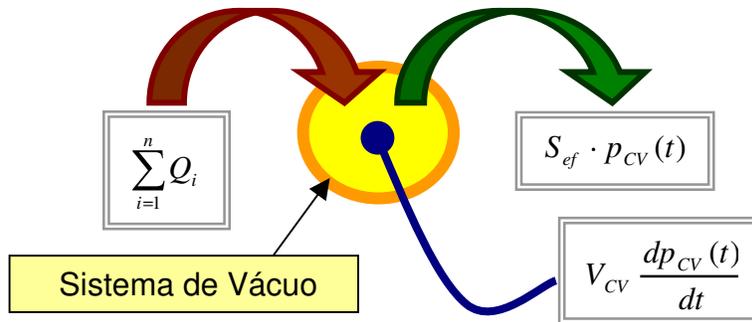


Figura D.2 Representação puntual de um sistema de vácuo por meio da abordagem discreta.

Vemos que os termos da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} têm dimensão de potência – energia na unidade de tempo –, que pode ser expressa como: mbar.l.s^{-1} , ou torr.l.s^{-1} , ou ainda, no Sistema Internacional de Unidades – SI, $\text{Pa.m}^3.\text{s}^{-1}$ que equivale a W.

• **Caso de Estudo 1.**

O objetivo deste apêndice é confrontar as abordagens discreta e contínua nas modelagens de sistemas de vácuo. Para tanto vamos considerar um sistema de vácuo bastante simples e por meio dele estudar e comparar as duas abordagens. Vamos considerar um sistema de alto-vácuo composto por uma câmara de vácuo em forma cilíndrica – isto não é essencial em nossa modelagem – conforme mostrado na Figura D.3

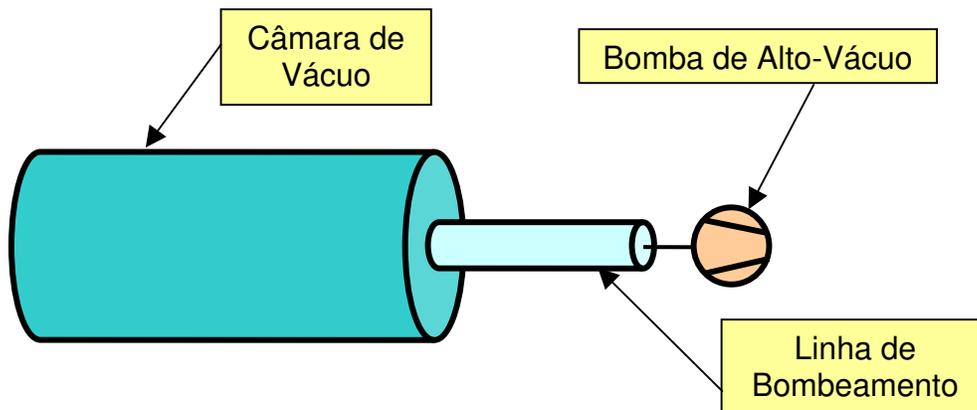


Figura D.3 Sistema de alto-vácuo com câmara de vácuo, linha de bombeamento e bomba de vácuo.

A câmara de vácuo tem diâmetro de $D_{CV} = 80$ cm e comprimento de $L_{CV} = 160$ cm. A tubulação tem diâmetro de $D_{Tub} = 20$ cm e comprimento de $L_{Tub} = 60$ cm. A velocidade de bombeamento da bomba de alto-vácuo é constante e de $S_{bv} = 150$ l.s⁻¹. O volume da câmara de vácuo é de aproximadamente $V_{CV} = 804$ litros e a sua área exposta ao vácuo é de aproximadamente $A_{CV} = 5 \times 10^4$ cm². Consideraremos a taxa de degaseificação específica do material da câmara de vácuo igual a $q_{deg}^{CV} = 1 \times 10^{-10}$ mbar.l.s⁻¹.cm⁻². Desta forma, a taxa de degaseificação da câmara de vácuo, considerando as áreas das tampas de da parte cilíndrica é de aproximadamente $Q_{deg} = 5 \times 10^{-6}$ mbar.l.s⁻¹. A velocidade efetiva de bombeamento, isto é, a velocidade que efetivamente bombeia a câmara de vácuo é dada por $\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}}$ ou de uma forma mais

conveniente $S_{ef} = \frac{S_{bv} C_{Total}}{S_{bv} + C_{Total}}$. Calculando a condutância total da linha de bombeamento,

admitindo o gás N₂ e temperatura $T = 293$ K, encontramos o valor aproximado de $C_{Total} = 916$ l.s⁻¹. Consideramos o orifício de entrada do tubo da linha de bombeamento em série com o próprio tubo, matematicamente temos que a condutância resultante é dada pela seguinte expressão

$$\frac{1}{C_{Total}} = \frac{1}{C_{Orificio}} + \frac{1}{C_{Tubo}} .$$

Assim, determinamos a velocidade efetiva de bombeamento como sendo $S_{ef} = 129$ l.s⁻¹. A partir da equação fundamental para o processo de bombeamento em vácuo, considerando que a pressão final foi atingida, isto é, a pressão na câmara de vácuo não varia no tempo, temos que

$$-S_{ef} p_{CV}^{final} + \sum_{i=1}^n Q_i = 0 \Rightarrow S_{ef} p_{CV}^{final} = \sum_{i=1}^n Q_i \text{ e como estamos admitindo somente a}$$

degaseificação como fonte de gás chegamos à seguinte expressão $S_{ef} \cdot p_{CV}^{final} = Q_{deg}$. Encontramos,

na câmara de vácuo o seguinte valor aproximado de pressão final, $p_{CV}^{final} = 3,9 \times 10^{-8}$ mbar.

Conforme mencionamos – de forma enfática e até exaustiva – e agora constatamos neste exemplo, obtivemos um único valor de pressão para toda a câmara de vácuo. Esta é uma limitação intrínseca da abordagem discreta. Veja que o fato de termos considerado o problema independente do tempo, isto é, a pressão final na câmara de vácuo foi atingida, não é essencial. Nos problemas cuja pressão é dependente do tempo, temos ainda um só valor dela, para instante, para toda a câmara de vácuo!

Modelaremos a seguir o mesmo problema – cuja geometria é muito comum em sistemas de alto-vácuo – adotando a abordagem contínua. Consideraremos este sistema de alto-vácuo como sendo formado por um tubo cilíndrico conforme esquematizado na Figura D.4. Ou seja, a câmara de

vácuo do sistema de alto-vácuo será considerada como sendo de geometria tubular. No desenho abaixo vemos uma extensão pontilhada que tem início em $x = 0$ e fim em $x = L_i$. O comprimento de L_i até L_f é igual a 160 cm, ou seja, $L_{CV} = L_f - L_i = 160$ cm. Posteriormente discutiremos sobre o trecho da parte inicial da câmara de vácuo, representada em linha pontilhada, isto é, 0 até L_i . Vamos considerar o cálculo da pressão na câmara de vácuo, ou melhor, o cálculo do campo de pressão. Vamos admitir um modelo tubular com as mesmas dimensões adotadas na abordagem discreta a menos de algumas correções como iremos discuti-las posteriormente. Mesmo na modelagem contínua consideraremos que a pressão somente possa variar ao longo da sua extensão, ou seja, estaremos construindo um modelo unidimensional, chamaremos de direção x . O cálculo do campo de pressão será estacionário no tempo e dependerá exclusivamente da variável x .

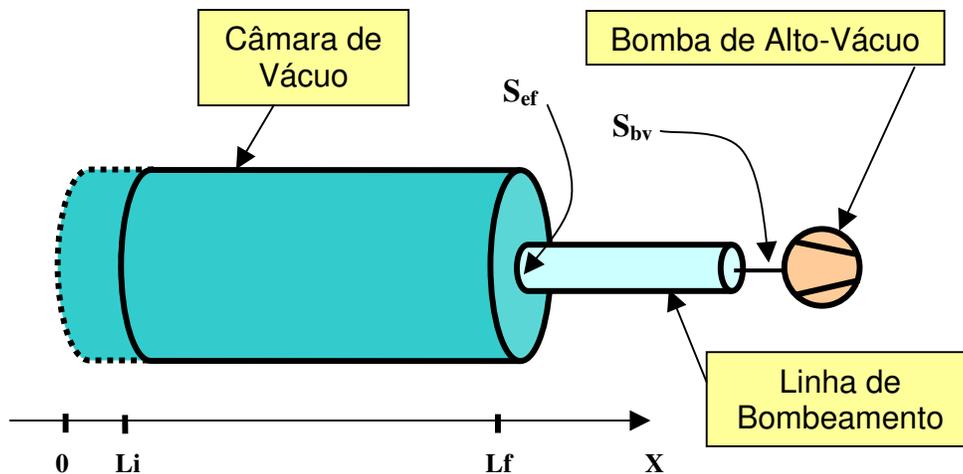


Figura D.4 Sistema de alto-vácuo com câmara de vácuo cilíndrica, linha de bombeamento e bomba de alto-vácuo.

Como na abordagem discreta, também na modelagem por meio da abordagem contínua a fonte gasosa que será considerada é exclusivamente a degaseificação. Na abordagem contínua ela deverá ser especificada ao longo do tubo cilíndrico. Com relação ao acréscimo, fizemos um aumento para compensar a degaseificação na tampa da esquerda da câmara de vácuo. Na abordagem contínua adotaremos que tanto a tampa da esquerda como a tampa da direita não degaseificam. A degaseificação devido à tampa da esquerda será compensada por um aumento no comprimento da câmara de vácuo, dado por $\Delta L = L_i - 0 = L_i$, que será calculado mais à frente. A degaseificação devido a tampa da direita, a que está próxima ao acesso à bomba de alto-vácuo, será acrescida à parede do tubo. Estas aproximações são feitas para tornar o problema em questão unidimensional, ainda, há uma arbitrariedade no sentido que poderíamos considerar, por exemplo,

que a degaseificação total devido às duas tampas fosse acrescida à degaseificação da parede cilíndrica. Este é um aspecto importantíssimo na construção de modelos físicos, ou seja, as aproximações e simplificações são totalmente dependentes da experiência e da vivência do analista. Certamente, poderemos fazer várias simplificações em nossas modelagens. Algumas serão necessárias e plausíveis, fazendo com que não nos afastamos da realidade física a ser estudada. Como saber? Falando precisamente, é impossível! Mas sempre poderemos comparar com dados experimentais, caso tenhamos disponíveis, ou ainda, verificando a coerência dos resultados, fazendo pequenas variações em torno de alguns valores e analisando os novos resultados, verificando se convergem para casos bem estabelecidos ou com soluções analíticas. Enfim, analisar detalhadamente e criticamente os resultados alcançados na modelagem.

No caso específico aqui estudado, poderíamos substituir a degaseificação das duas tampas tratadas individualmente e colocá-las juntas na degaseificação da parede cilíndrica da câmara de vácuo. Assim, há algumas possibilidades. Uma análise do problema leva-nos a admitir que não haja variações apreciáveis – podemos e devemos tentar novas simplificações –, uma vez que o diâmetro da câmara de vácuo é metade do seu comprimento, com isso não devemos esperar gradientes intensos de pressão.

Para a determinação da nova taxa de degaseificação específica da parede da câmara de vácuo, temos o seguinte roteiro de cálculo, conforme a Expressão D.1

$$Q_{\text{deg}}^{CV(Parede+Tampa)} = Q_{\text{deg}}^{CVParede} + Q_{\text{deg}}^{CVTampa} = q_{\text{deg}}^{CV} \cdot (A_{CV}^{Parede} + A_{CV}^{Tampa}), \quad \text{D.1}$$

atribuindo os valores numéricos, temos que o *throughput* é igual a

$$\begin{aligned} Q_{\text{deg}}^{CV(Parede+Tampa)} &= Q_{\text{deg}}^{CVParede} + Q_{\text{deg}}^{CVTampa} = q_{\text{deg}}^{CV} \left(\pi D_{CV} \cdot L_{CV} + \frac{\pi}{4} D_{CV}^2 \right) = \\ &= 1 \cdot 10^{-10} \left(\pi \cdot 80 \cdot 160 + \frac{\pi}{4} \cdot 80^2 \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$Q_{\text{deg}}^{CV(Parede+Tampa)} = 4,52 \cdot 10^{-6} \text{ mbar.l.s}^{-1}$$

A seguir determinamos o *throughput* da degaseificação devido exclusivamente a desorção de uma das tampas da câmara de vácuo, encontramos o valor

$$Q_{deg}^{CVTampa} = 5,03 \cdot 10^{-7} \text{ mbar.l.s}^{-1}.$$

Vamos considerar a taxa de degaseificação específica do tubo corrigida – q_{degCor}^{CV} –, uma vez que deveremos somar o gás desorvido da tampa da direita da câmara de vácuo ao gás desorvido da parede lateral da câmara de vácuo. Assim, temos a Expressão D.2

$$q_{degCor}^{CV} \cdot \pi D_{CV} \cdot L_{CV} = Q_{deg}^{CV(Parede+Tampa)} \Rightarrow q_{degCor}^{CV} \cdot \pi \cdot 80 \cdot 160 = 4,52 \cdot 10^{-6} \text{ mbar.l.s}^{-1} \Rightarrow$$

$$q_{degCor}^{CV} = 1,12 \cdot 10^{-10} \text{ mbar.l.s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$$

D.2

Nas modelagens por meio da abordagem contínua, em geral, é mais conveniente apresentar o *throughput* devido à degaseificação por unidade de comprimento da câmara de vácuo. Desta forma ficamos com

$$q_{degesacom}^{CV} = \pi D_{CV} \cdot q_{degCor}^{CV} \Rightarrow q_{degesacom}^{CV} = 2,825 \cdot 10^{-8} \text{ mbar.l.s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

A quantidade que deveremos acrescentar ao comprimento original da câmara de vácuo é dada pelo seguinte cálculo

$$Q_{deg}^{CVTampa} = q_{degesacom}^{CV} \cdot \Delta L_{CV} \Rightarrow 5,03 \cdot 10^{-7} = q_{degesacom}^{CV} \cdot \Delta L_{CV} = q_{degesacom}^{CV} \cdot (L_i - 0) \Rightarrow$$

$$5,03 \cdot 10^{-7} = 2,825 \cdot 10^{-8} \cdot \Delta L_{CV} = 2,825 \cdot 10^{-8} \cdot L_i \Rightarrow$$

$$\Delta L_{CV} = L_i = 17,805 \text{ cm}$$

Assim, o comprimento da câmara de vácuo cilíndrica, que estamos modelando por meio da abordagem contínua, é igual a $L_{CV}^{MAC} = (160 + 17,805) \text{ cm} \Rightarrow L_{CV}^{MAC} = 177,805 \text{ cm}$. Temos todos os elementos necessários para obter o campo de pressão ao longo do eixo x da câmara de vácuo, ou seja, a condutância específica, a taxa de degaseificação por unidade de comprimento, e ainda a velocidade de bombeamento junto ao acesso à câmara de vácuo. Adotaremos o símbolo $q_s = q_{degesacom}^{CV}$ nos cálculos realizados a seguir com a intervenção do programa *MathCAD™*.

Campo de Pressão em Câmara de Vácuo Cilíndrica

- Comprimento do câmara de vácuo: $L_{cv} := 2 \cdot (160 + 17.805) \text{ cm}$ $\frac{L_{cv}}{2} = 177.805 \text{ cm}$
- Diâmetro da câmara de vácuo: $D_{cv} := 80 \text{ cm}$
- Condutância específica, $ccv=Ccv.Lcv$: $ccv := 12 \cdot D_{cv}^3$ $ccv = 6.144 \times 10^6 \text{ l.cm / s}$
- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento, $qs=Q_{Total}/L$:

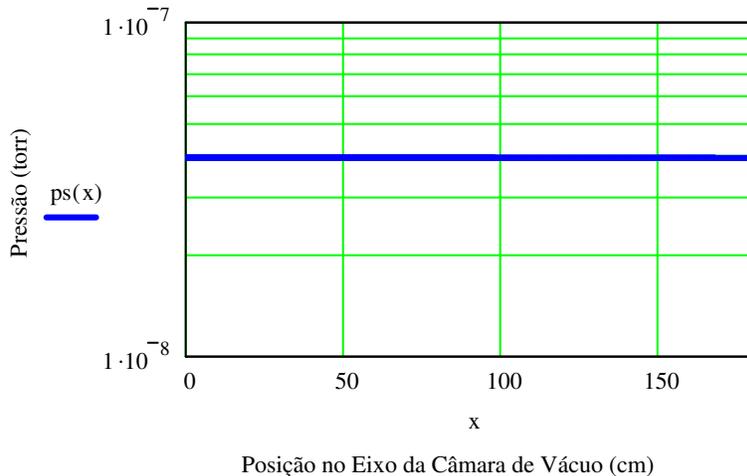
$$qs := 2.85 \cdot 10^{-8} \text{ torr.litro/(s.cm)}$$

$$Q_{Total}=qs.Lcv \quad qs \cdot Lcv = 1.013 \times 10^{-5} \text{ torr.litros/segundo}$$

- Velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo: $S_{ef} := 129 \text{ litros/segundo}$
- Definição da malha para as posições ao longo de todo a CV. $x := 0, 0.1 .. 180 \text{ cm}$
- A solução estacionária é dada pela função parabólica, mostrada abaixo, devido a taxa de degaseificação constante ao longo da câmara de vácuo:

$$ps(x) := -\frac{qs}{2 \cdot ccv} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot Lcv}{2}\right) \cdot \left(\frac{Lcv}{4 \cdot ccv} + \frac{1}{S_{ef}}\right)$$

- A função pressão ao longo do eixo da câmara de vácuo é o bem conhecido perfil parabólico.



- A pressão ao longo do eixo da câmara de vácuo em alguns pontos:

$$ps(0) = 3.936 \times 10^{-8} \text{ torr}$$

$$ps(50) = 3.935 \times 10^{-8} \text{ torr}$$

$$ps(100) = 3.933 \times 10^{-8} \text{ torr}$$

$$ps(177.8) = 3.928 \times 10^{-8} \text{ torr}$$

- Vemos que o campo de pressão ao longo do eixo x da câmara de vácuo é praticamente constante. O motivo deste fato está na alta condutância da câmara de vácuo em comparação a velocidade efetiva de bombeamento. Neste sistema de vácuo verificamos que não há diferença prática entre os resultados obtidos por meio das análise discreta e contínua.

Vemos que o resultado obtido é o bem conhecido campo de pressão com perfil parabólico. Devido às dimensões do comprimento e do diâmetro da câmara de vácuo temos uma condutância bastante grande comparada com o a velocidade efetiva de bombeamento. Desta forma, não temos uma variação apreciável de pressão ao longo do eixo da câmara de vácuo. Vemos que há praticamente uma igualdade entre os valores de pressão na câmara de vácuo obtidos por meio das abordagens discreta e contínua. Em suma, como a condutância da câmara de vácuo é muito grande comparada à velocidade efetiva de bombeamento, não temos gradiente de pressão apreciável na câmara de vácuo em toda a sua extensão. Mas cabe um comentário: apesar de a pressão praticamente constante ao longo do eixo da câmara de vácuo, precisa haver um gradiente, por menor que seja, senão não haverá fluxo de gases! Pois, veja que há fonte gasosa na câmara de vácuo. Neste sistema de vácuo estudado, a abordagem discreta mostrou ser suficiente.

Para finalizar os comentários relativos à modelagem deste sistema de vácuo, cabe mencionar que fizemos algumas simplificações e suposições – sempre teremos que fazer hipóteses e simplificações na construção de modelos físicos. É da sua essência! Mas, se tivéssemos feito algumas hipóteses e simplificações diferentes, não se distanciando da realidade física, os resultados obtidos não devem ser diferentes. Este é um ponto que devemos explorar em nossas análises. Ou seja, se fizermos variações em nosso modelo, que acreditamos ser razoáveis, não podemos encontrar resultados muito diferentes entre si. Isto é um indício forte que o nosso modelo representa bem a realidade física.

- **Caso de Estudo 2.**

O nosso objetivo a seguir é estudar um outro sistema de alto-vácuo, e mais uma vez, comparar as modelagens obtidas por meio das abordagens discreta e contínua. Temos também o propósito de mostrar que, na ausência da possibilidade de realizar uma análise mais sofisticada, podemos ousar algumas simplificações mais arrojadas e tentar obter resultados que representem razoavelmente bem a realidade física. Consideraremos o problema em estado estacionário.

Seja o sistema de vácuo em forma tubular cilíndrica mostrado na Figura D.5. Temos o diâmetro D e comprimento L . Há duas bombas de alto-vácuo, uma em cada extremidade do tubo. A velocidade de bombeamento de cada bomba de alto-vácuo é igual S_{bv} e a velocidade efetiva de bombeamento em cada extremidade do tubo é igual à S_{ef} . A taxa de degasificação específica por unidade de comprimento q_s é constante e a condutância específica ou condutância por unidade de comprimento é c e igual a $c = C_{Tubo} \cdot L$, onde C_{Tubo} é a condutância total do tubo. Este problema está tratado em detalhe no *Capítulo 3* e sua teoria no *Apêndice B*. A solução deste problema, em estado estacionário, é a função que representa o perfil parabólico de pressão válido para o seguinte intervalo $-L/2 \leq x \leq L/2$, mostrada na Expressão D.3

$$p_{Tubo}(x) = -\frac{q_s}{2c}x^2 + \frac{q_s L}{2} \left(\frac{1}{S_{ef}} + \frac{L}{4c} \right). \quad D.3$$

Vemos que esta solução é simétrica em relação ao ponto médio do tubo, isto é $x = 0$ e neste ponto a pressão assume o seu valor máximo.

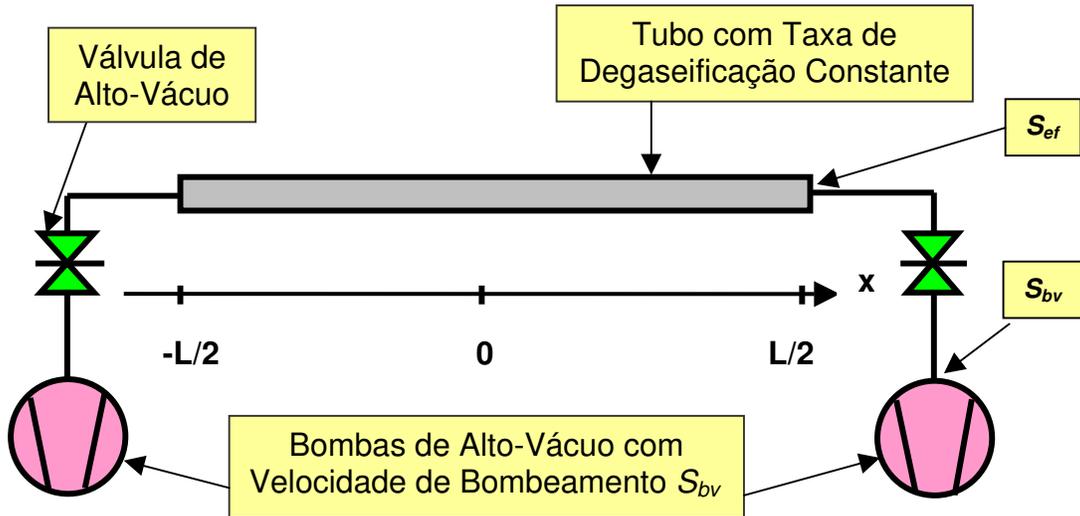


Figura D.5 Sistema de alto-vácuo tubular com taxa de degaseificação constante. Bombas de alto-vácuo nas extremidades do tubo.

Consideraremos em seguida a modelagem deste sistema de alto-vácuo dispondo somente ferramental de análise relativo à abordagem discreta. Neste caso deveremos elaborar um sistema de alto-vácuo equivalente ou o mais próximo dele, com as suas partes principais – câmara de vácuo, linha de bombeamento e bombas de vácuo – que se aproxime da realidade física do problema original. Resumidamente: deveremos considerar um sistema de alto-vácuo composto por uma câmara de vácuo, uma linha de bombeamento e uma bomba de vácuo que represente bem – se for possível! – o sistema de alto-vácuo tubular. O sistema de alto-vácuo a ser modelado pela abordagem discreta está mostrado na Figura D.6.

Vamos considerar, de forma totalmente arbitrária, que todo o gás degaseificado ao longo do tubo – da Figura D.5 – tenha origem somente na câmara de vácuo – da Figura D.6. Veja que a adoção arbitrária de que toda a fonte de gás tem origem na câmara de vácuo é um modelo. O gás de origem na câmara de vácuo deverá ser bombeado pelas duas bombas de vácuo, escoando através das respectivas linhas de bombeamento formadas por metade do comprimento do tubo que compõem o sistema de alto-vácuo tubular. Admitiremos que nas linhas de bombeamento não há degaseificação. Elas são apenas os dutos nos quais escoam o gás que tem origem na câmara de

vácuo. Por meio dos resultados obtidos, verificaremos se este modelo é realístico e representa bem a situação física.

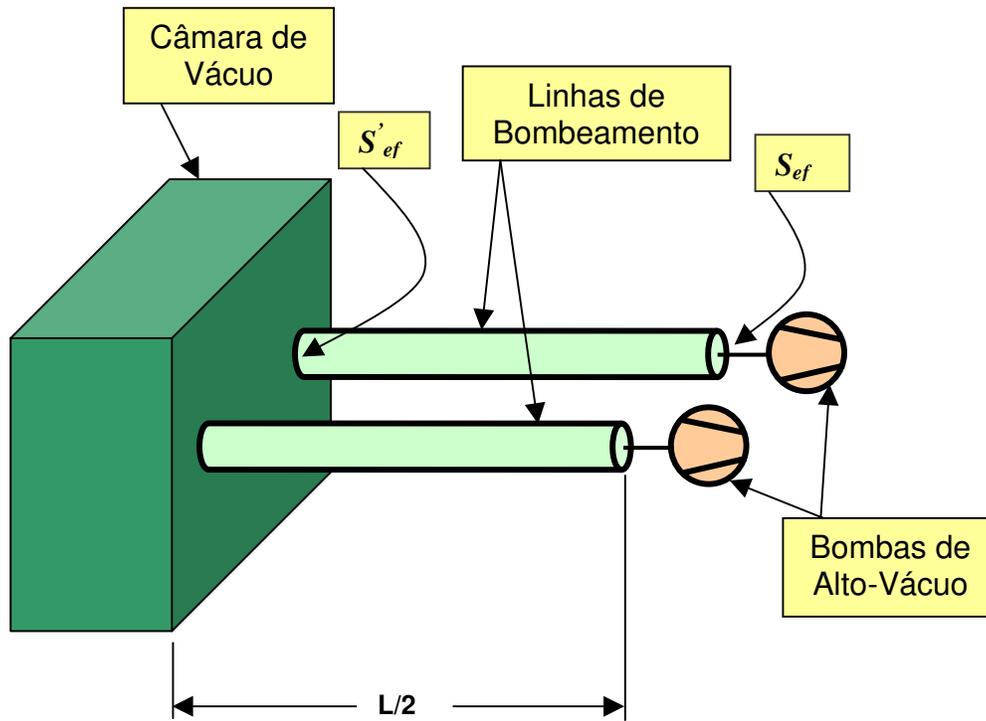


Figura D.6 Sistema de alto-vácuo com as suas partes discretas – câmara de vácuo, linha de bombeamento e bomba de vácuo.

A quantidade total de gás, em termos de *throughput*, que tem origem na câmara de vácuo é dada por $Q_{Total} = q_s \cdot L$. A velocidade efetiva total de bombeamento – $S_{ef}^{Total} = 2 \cdot S'_{ef}$ – na câmara de vácuo, na modelagem discreta, é dada pela Expressão D.4

$$\frac{1}{S'_{ef}} = \frac{1}{S_{ef}} + \frac{1}{C_{Tubo}^{L/2}} \Rightarrow S'_{ef} = \frac{S_{ef} \cdot C_{Tubo}^{L/2}}{S_{ef} + C_{Tubo}^{L/2}} \Rightarrow S_{ef}^{Total} = 2 \cdot S'_{ef} \Rightarrow S_{ef}^{Total} = 2 \cdot \frac{S_{ef} \cdot C_{Tubo}^{L/2}}{S_{ef} + C_{Tubo}^{L/2}}, \quad D.4$$

sendo que $C_{Tubo}^{L/2}$ é a condutância do tubo da linha de bombeamento com comprimento $L/2$. A condutância do tubo de comprimento $L/2$ é o dobro da condutância do tubo de comprimento L , – C_{Tubo} –, mantendo constantes as outras condições de escoamento. Estamos em condições de comparar as pressões obtidas por meio das abordagens discreta e contínua modelando o sistema de alto-vácuo tubular. No caso da abordagem contínua o valor de pressão no ponto médio do tubo, isto é, em $x = 0$ é dada por

$$p_{Tubo}(0) = \frac{q_s L}{2} \left(\frac{1}{S_{ef}} + \frac{L}{4c} \right),$$

sabemos que $c = C_{Tubo} \cdot L$, assim temos que

$$p_{Tubo}(0) = \frac{q_s L}{2} \left(\frac{1}{S_{ef}} + \frac{1}{4C_{Tubo}} \right) \Rightarrow p_{Tubo}(0) = \frac{q_s L}{2} \left(\frac{S_{ef} + C_{Tubo}}{4S_{ef} C_{Tubo}} \right).$$

Agora, por meio da abordagem discreta, temos que a pressão na câmara de vácuo é dada pela seguinte Expressão D.5

$$p_{CV} = \frac{Q_{Total}}{S_{ef}^{Total}} = \frac{q_s \cdot L}{S_{ef}^{Total}} = \frac{q_s \cdot L}{2 \cdot \frac{S_{ef} \cdot C_{Tubo}^{L/2}}{S_{ef} + C_{Tubo}^{L/2}}} = \frac{q_s \cdot L}{2 \cdot \frac{S_{ef} \cdot 2C_{Tubo}}{S_{ef} + 2C_{Tubo}}} = \frac{q_s \cdot L}{2 \cdot \frac{S_{ef} \cdot 2C_{Tubo}}{S_{ef} + 2C_{Tubo}}} \Rightarrow$$

. D.5

$$p_{CV} = \frac{q_s \cdot L}{2} \left(\frac{S_{ef} + 2C_{Tubo}}{2S_{ef} C_{Tubo}} \right)$$

Comparando os dois valores de pressão obtidos por meio das duas abordagens na modelagem, temos que

$$\frac{p_{CV}}{p_{Tubo}(0)} = \frac{\frac{q_s \cdot L}{2} \left(\frac{S_{ef} + 2C_{Tubo}}{2S_{ef} C_{Tubo}} \right)}{\frac{q_s L}{2} \left(\frac{S_{ef} + C_{Tubo}}{4S_{ef} C_{Tubo}} \right)} = \frac{\left(\frac{S_{ef} + 2C_{Tubo}}{2S_{ef} C_{Tubo}} \right)}{\left(\frac{S_{ef} + C_{Tubo}}{4S_{ef} C_{Tubo}} \right)} \Rightarrow \frac{p_{CV}}{p_{Tubo}(0)} = 2 \frac{S_{ef} + 2C_{Tubo}}{S_{ef} + 4C_{Tubo}},$$

cuja expressão depende exclusivamente das grandezas inerentes ao transporte dos gases.

Ao inspecionarmos a expressão acima, podemos analisar duas situações notáveis: uma delas ocorre quando temos satisfeita a condição $S_{ef} \gg C_{Tubo}$, isto é, a velocidade efetiva de bombeamento, que ocorre na extremidade da tubulação, é muito maior que a condutância da mesma tubulação. Assim, obteremos a relação $\frac{p_{CV}}{p_{Tubo}(0)} \approx 2 \Rightarrow p_{CV} \approx 2 \cdot p_{Tubo}(0)$. Desta forma,

obtivemos em nosso modelo que a pressão calculada na câmara de vácuo – modelo discreto – é duas vezes maior que a pressão no ponto médio do tubo – modelo contínuo –, desde que a velocidade efetiva de bombeamento seja muito maior que a condutância do tubo. Podemos interpretar este resultado como sendo uma consequência do efeito da condutância no processo de bombeamento, que na condição de $S_{ef} \gg C_{Tubo}$ faz com que o efeito dominante no processo de escoamento dos gases para as bombas de vácuo é determinado pela condutância da linha de bombeamento. Então, para que os gases sejam bombeados, existe uma dificuldade muito grande para chegar às bombas de vácuo, devido à condutância da linha de bombeamento.

Vemos que no modelo discreto consideramos a totalidade dos gases tendo origem em uma câmara de vácuo hipotética localizada no ponto médio do tubo. Veja que esse gás precisa percorrer toda a extensão da metade do comprimento do tubo. Já, caso do modelo contínuo, os gases têm origem em toda a extensão do tubo, trazendo uma facilidade maior para o seu bombeamento, pois há gases mais próximos das bombas de vácuo! Esta análise qualitativa está em acordo com o resultado matemático, pois chegamos à conclusão que a pressão na câmara de vácuo – modelo discreto – é o dobro da pressão no ponto médio do tubo – modelo contínuo.

Temos que ter sempre presente a dificuldade em conceber um modelo de sistema de alto-vácuo tubular que possa ser substituído por um sistema de alto-vácuo com suas partes discretizadas, com isso, a sua câmara de vácuo reduzida a um ponto. Mas também temos que ter sempre presente que a arbitrariedade na construção de modelos físico-matemáticos é total. A questão está em estarmos sempre presos à realidade física!

Outro caso notável ocorre quando temos satisfeita a condição $C_{Tubo} \gg S_{ef}$. Desta forma

obteremos $\frac{p_{CV}}{p_{Tubo}(0)} \cong 1 \Rightarrow p_{CV} \cong p_{Tubo}(0)$. Assim, por meio das modelagens obtivemos que a

pressão calculada na câmara de vácuo – modelo discreto – é aproximadamente igual à pressão no ponto médio do tubo – modelo contínuo. Este resultado é mais simples de ser interpretado. Como $C_{Tubo} \gg S_{ef}$ temos que os gases não encontram resistência em seu escoamento, e assim, o processo de bombeamento é essencialmente determinado pela capacidade de bombeamento das bombas de vácuo. Nesta situação vemos que as duas modelagens levam ao mesmo resultado de valor de pressão na câmara de vácuo. Mas devemos mencionar que apesar de termos obtido resultados iguais de pressão, a abordagem discreta nada nos revela sobre os possíveis valores de pressão ao longo da linha de bombeamento. Esta limitação é da essência da abordagem discreta. No caso da abordagem contínua tanto as fontes gasosas como as bombas de vácuo são consideradas ponto a ponto, assim podemos obter os valores de pressão também ponto a ponto. Este alcance é da essência da

abordagem contínua. Este último resultado obtido está em total acordo com aquele obtido no *Caso de Estudo 1*, cuja condutância da câmara de vácuo muito grande compara à velocidade efetiva de bombeamento levou ao resultado de um campo de pressão praticamente constante.

- **Caso de Estudo 3.**

Consideraremos a seguir um sistema de alto-vácuo tubular com partes do tubo apresentando diferentes taxas de degaseificação por unidade de comprimento entre si. A Figura D.7 mostra esquematicamente o sistema de alto-vácuo tubular com comprimento total L e com área de seção transversal circular e constante. As velocidades de bombeamento das bombas de vácuo são iguais e dadas por S_{bv} .

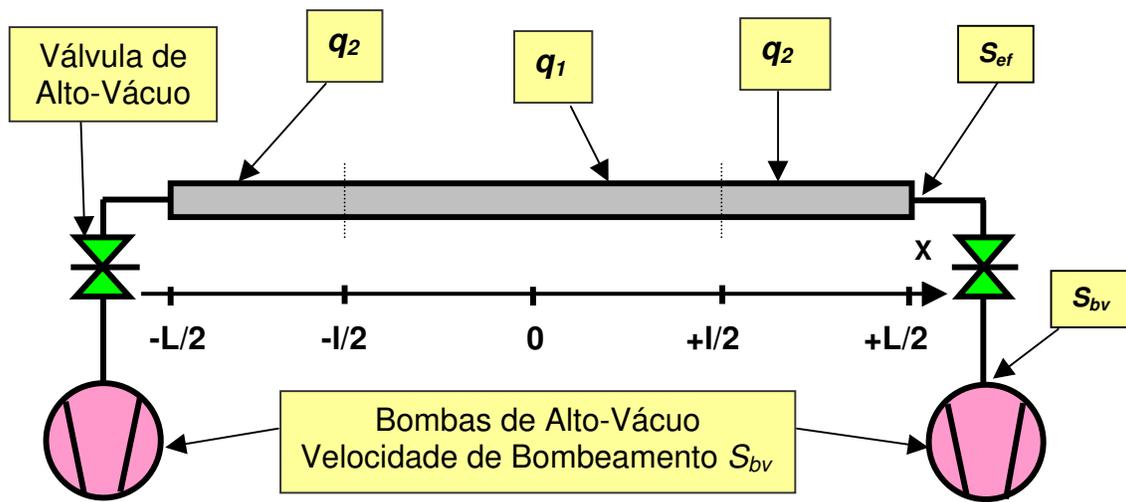


Figura D.7 Estrutura geral de um sistema de alto-vácuo como geometria tubular apresentando taxas de degaseificação específicas diferentes – tubo em três partes.

Vemos o tubo sendo formado por três trechos, o trecho de $-\frac{L}{2} \leq x \leq -\frac{l}{2}$ tem taxa de degaseificação específica q_2 , o trecho $-\frac{l}{2} < x < +\frac{l}{2}$ tem taxa de degaseificação específica q_1 e o trecho $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$ tem taxa de degaseificação específica q_2 . Devido à simetria do problema, poderemos encontrar a sua solução para o intervalo positivo da reta x . Deveremos ter a pressão máxima em $x=0$. O valor da pressão nos extremos do tubo é dada por

$$p\left(-\frac{L}{2}\right) = p\left(+\frac{L}{2}\right) = \frac{Q_T}{2S_{ef}} = \frac{1}{S_{ef}} \left[q_1 \frac{l}{2} + q_2 \left(\frac{L-l}{2} \right) \right],$$

a solução geral do problema dado pelas seguintes Expressões D.6 e D.7

$$p_1(x) = -\frac{q_1}{2c}x^2 + \frac{q_2(L^2 - l^2)}{8c} + \frac{(q_2 - q_1)(l^2 - lL)}{4c} + \frac{q_1 l^2}{8c} + \frac{Q_T}{2S_{ef}} \quad \text{D.6}$$

para x no intervalo $0 \leq x < +\frac{l}{2}$, e

$$p_2(x) = -\frac{q_2}{2c}x^2 + \frac{(q_2 - q_1)}{2c}l|x| + \frac{q_2 L^2}{8c} - \frac{(q_2 - q_1)L}{4c} + \frac{Q_T}{2S_{ef}} \quad \text{D.7}$$

para x no intervalo $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$.

Pretendemos estudar as duas situações seguintes: a primeira quando $q_1 \neq 0$ e $q_2 = 0$ e a segunda quando $q_1 = 0$ e $q_2 \neq 0$. Veremos que os resultados serão bastante interessantes e elucidativos, e mais uma vez veremos o alcance da abordagem contínua frente à abordagem discreta. Os cálculos da análise pela abordagem contínua estão mostrados a seguir e foram realizados usando o programa *MathCADTM*. Veremos no caso do sistema de alto-vácuo tubular em que $q_1 = 0$ e $q_2 \neq 0$ a sua modelagem realizada por meio da abordagem discreta leva a um resultado completamente descabido, sem vinculação alguma com a realidade.

Veremos como a abordagem contínua é poderosa e pode fornecer informações sobre detalhes dos sistemas de vácuo cuja abordagem discreta mostra-se totalmente falha. Ficará claro que na abordagem contínua os gases tendo origem, por exemplo, na tubulação do sistema de bombeamento de vácuo influencia diretamente os valores de pressão em toda a extensão do sistema de vácuo. Este aspecto é muito difícil de ser considerado na abordagem discreta e, além disso, a introdução desses detalhes sempre está acompanhado de muito artificialismo e hipóteses difíceis de serem sustentadas. Mas, apesar de estarmos advogando em favor da abordagem contínua, encontramos uma série de casos importantes e corriqueiros em tecnologia do vácuo, cuja análise por meio da abordagem discreta é suficiente e conduz a resultados confiáveis. A opção por uma abordagem ou outra deverá ser avaliada pelo analista, uma vez que uma escolha errada poderá levar por um lado ao desperdício de tempo e recursos computacionais, ou por outro lado, poderá levar a resultados insuficientes para a realização do projeto e terá certamente conseqüências na escolha correta da instrumentação. A seguir mostramos a análise usando a abordagem contínua.

Campo de Pressão em Tubo com Trechos com Diferentes Taxas de Degaseificação

Situação 1

- Comprimento do tubo: $L := 400$ cm
- Comprimento do trecho central: $l := 100$ cm
- Diâmetro do tubo : $D := 3$ cm
- Condutância específica, $c=C.L$: $c := 12 \cdot D^3$ $c = 324$ l.s(-1) .cm
- Volume específico ou Volume por unidade de comprimento, $v=V/L$:

$$A := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad V := 10^{-3} \cdot A \cdot L \quad \text{litro}$$

- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento para cada trecho do tubo.
- Para o trecho central, isto é, $-l/2 \leq x \leq +l/2$, com $l=200$ cm.
-A taxa de degaseificação para este trecho.

$$q1 := 5 \cdot 10^{-6} \quad \text{mbar.litro/(segundo.cm)}$$

- Para os trechos externos, isto é, $-L/2 < x < -l/2$ e $l/2 < x < L/2$.
-A taxa de degaseificação para este trecho.

$$q2 := 0 \quad \text{mbar.litro/(segundo.cm)}$$

- As taxas de degaseificação específicas usadas produzem os seguintes valores.

$$Q_{\text{Total}} = q1 \cdot l + q2 \cdot (L - l)$$

$$Q_{\text{Total}} := q1 \cdot l + q2 \cdot (L - l)$$

$$Q_{\text{Total}} = 5 \times 10^{-4} \quad \text{mbar.litro/segundo}$$

- A velocidade de bombeamento, em cada extremidades do tubo, é dada a seguir.

$$S := 10 \quad \text{litros/segundo}$$

- Definição da malha para as posições ao longo de todo o tubo. Faremos uma malha para cada trecho do tubo, como mostrado abaixo.
- A solução estacionária é dada por funções de segundo grau (função parabólica), tanto para os trechos externos como para o trecho interno. As funções para o campo de pressão ao longo do tubo são mostradas a seguir. Devido a simetria do problema, estudaremos o intervalo de $0 \leq x \leq 200$ cm.
- Veja que no ponto $x=50$ cm temos a coincidência dos valores das funções definidas em cada trecho do tubo, com as respectivas taxas de degaseificação específica por unidade de comprimento. Mas veja que também temos a coincidência das derivadas da função pressão em relação a x . Fisicamente falando, temos a continuidade do *throughput* também neste ponto.

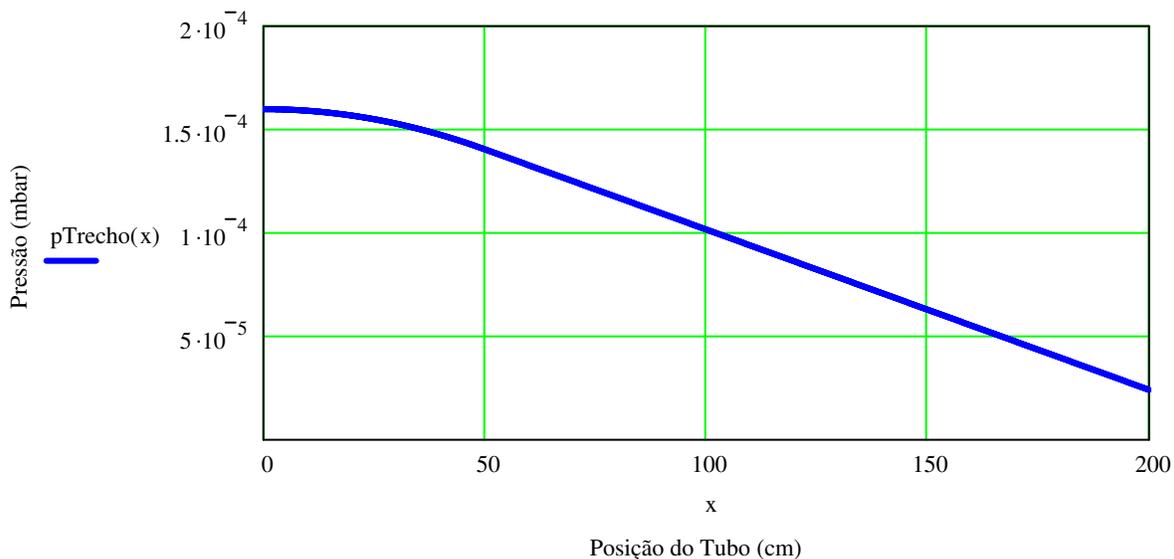
- Para o trecho de $0 \leq x \leq 50$ cm, temos a solução. $x := 0, 0.1 \dots 200$ cm

$$p_{\text{Trecho1}}(x) := -\frac{q1}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{q2 \cdot (L^2 - l^2)}{8 \cdot c} + \frac{(q2 - q1) \cdot (l^2 - l \cdot L)}{4 \cdot c} + \frac{q1 \cdot l^2}{8 \cdot c} + \frac{Q_{\text{Total}}}{2 \cdot S}$$

- Para o trecho de $50 < x \leq 200$ cm, temos a solução. $x := 0, 0.1 \dots 200$

$$p_{\text{Trecho2}}(x) := -\frac{q_2}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{(q_2 - q_1) \cdot l \cdot |x|}{2 \cdot c} + \frac{q_2 \cdot L^2}{8 \cdot c} - \frac{(q_2 - q_1) \cdot l \cdot L}{4 \cdot c} + \frac{Q_{\text{Total}}}{2 \cdot S}$$

- Seja a função $ps=ps(x)$ definida para o intervalo $0 \leq x \leq 200$ cm.
 $p_{\text{Trecho}}(x) := (1 - \Phi(-50 + x)) \cdot p_{\text{Trecho1}}(x) + \Phi(-50 + x) \cdot p_{\text{Trecho2}}(x)$
- Onde a função $\Phi=\Phi(x)$ é a função degrau Heveaside.
- O campo de pressão ao longo do tubo é dado pelas funções em cada trecho. As funções são de segundo grau (perfil parabólico). O gráfico está mostrado abaixo.



- Comprimento do tubo: $L_{\text{MW}} := 400$ cm
- Comprimento do trecho central: $l_{\text{MW}} := 100$ cm
- Diâmetro do tubo : $D_{\text{MW}} := 3$ cm
- Condutância específica, $c=C.L$: $c_{\text{MW}} := 12 \cdot D^3$ $c = 324$ l.s(-1) .cm
- Volume específico ou Volume por unidade de comprimento, $v=V/L$:

Situação 2

$$A_{\text{MW}} := \frac{\pi}{4} \cdot D^2 \quad V_{\text{MW}} := 10^{-3} \cdot A \cdot L \quad \text{litro}$$

- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento para cada trecho do tubo.
- Para o trecho central, isto é, $-l/2 \leq x \leq +l/2$, com $l=200$ cm.
-A taxa de degaseificação para este trecho.

$$q_{1,\text{MW}} := 0 \quad \text{mbar.litro}/(\text{segundo.cm})$$

- Para os trechos externos, isto é, $-L/2 < x < -l/2$ e $l/2 < x < L/2$.
-A taxa de degaseificação para este trecho.

$$q_{2,\text{MW}} := 5 \cdot 10^{-6} \quad \text{mbar.litro}/(\text{segundo.cm})$$

- As taxas de degaseificação específicas usadas produzem os seguintes valores.

$$Q_{\text{Total}} = q_1 \cdot l + q_2 \cdot (L - l) \quad \underline{Q_{\text{Total}}} := q_1 \cdot l + q_2 \cdot (L - l)$$

$$Q_{\text{Total}} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ mbar.litro/segundo}$$

- A velocidade de bombeamento, em cada extremidades do tubo, é dada a seguir.

$$\underline{S} := 10 \text{ litros/segundo}$$

- Definição da malha para as posições ao longo de todo o tubo. Faremos uma malha para cada trecho do tubo, como mostrado abaixo.
- A solução estacionária é dada por funções de segundo grau (função parabólica), tanto para os trechos externos como para o trecho interno. As funções para o campo de pressão ao longo do tubo são mostradas a seguir. Devido a simetria do problema, estudaremos o intervalo de $0 \leq x \leq 200$ cm.
- Para o trecho de $0 \leq x \leq 50$ cm, temos a solução. $x := 0, 0.1 \dots 200$ cm

$$\underline{p_{\text{Trecho1}}(x)} := -\frac{q_1}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{q_2 \cdot (L^2 - l^2)}{8 \cdot c} + \frac{(q_2 - q_1) \cdot (l^2 - l \cdot L)}{4 \cdot c} + \frac{q_1 \cdot l^2}{8 \cdot c} + \frac{Q_{\text{Total}}}{2 \cdot S}$$

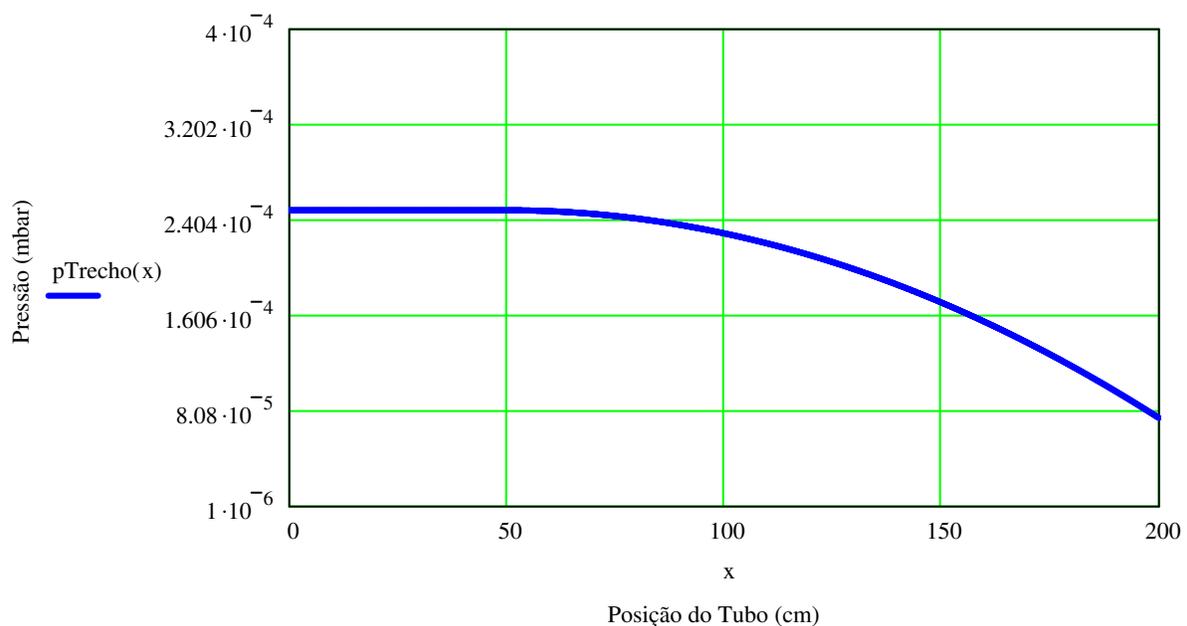
- Para o trecho de $50 < x \leq 200$ cm, temos a solução. $x := 0, 0.1 \dots 200$

$$\underline{p_{\text{Trecho2}}(x)} := -\frac{q_2}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \frac{(q_2 - q_1) \cdot l \cdot |x|}{2 \cdot c} + \frac{q_2 \cdot L^2}{8 \cdot c} - \frac{(q_2 - q_1) \cdot l \cdot L}{4 \cdot c} + \frac{Q_{\text{Total}}}{2 \cdot S}$$

- Seja a função $p_s = p_s(x)$ definida para o intervalo $0 \leq x \leq 200$ cm.

$$\underline{p_{\text{Trecho}}(x)} := (1 - \Phi(-50 + x)) \cdot p_{\text{Trecho1}}(x) + \Phi(-50 + x) \cdot p_{\text{Trecho2}}(x)$$

- Onde a função $\Phi = \Phi(x)$ é a função degrau Heveaside.



Cabem duas observações que são bastante instrutivas e representativas dos sistemas de vácuo. Na situação com $q_1 = 0$ e $q_2 \neq 0$, vimos que a pressão é constante no trecho $0 \leq x < +\frac{l}{2}$, assim, terá seu gradiente igual a zero e conseqüentemente não haverá *throughput* – conhecemos a expressão $q(x) = -c \frac{dp(x)}{dx}$ válida em todos os pontos do sistema de vácuo. Desta forma, teremos apenas uma quantidade de gás, à pressão constante, no trecho em que ocorre $q_1 = 0$. Fisicamente falando, não há degaseificação da parede do tubo neste trecho, assim, não poderá haver variação de pressão à medida que percorremos o tubo no trecho $0 \leq x < +\frac{l}{2}$. Agora, no trecho $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$ a pressão varia quadraticamente com a posição, pois neste trecho $q_2 \neq 0$. Temos que a solução obtida neste trecho é a mesma que se não tivéssemos o primeiro trecho do tubo.

Na situação com $q_1 \neq 0$ e $q_2 = 0$ temos que a pressão varia linearmente com a posição no trecho $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$. Assim, o gradiente da pressão neste trecho é constante, uma vez que o gás que passa em sua extensão foi degaseificado apenas no trecho $0 \leq x < +\frac{l}{2}$. Veja que no trecho $0 \leq x < +\frac{l}{2}$ o perfil de pressão é parabólico e a sua solução depende do comprimento do tubo do trecho $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$. O motivo está no fato de a velocidade de bombeamento no ponto $x = \frac{l}{2}$ depender tanto da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo como da condutância do trecho $+\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$. Consideramos este caso tão importante e instrutivo em tecnologia do vácuo. Muito sobre o comportamento e particularidades dos sistemas de vácuo podem ser extraídos deste caso de estudo.

Complementando a análise deste sistema de alto-vácuo tubular, por meio da abordagem discreta, na situação com as seguintes taxas de degaseificação por unidade de comprimento $q_1 = 0$ e $q_2 \neq 0$. Podemos adotar no trecho em que se verifica $q_2 = 0$, ou seja, no intervalo $0 \leq x < +\frac{l}{2}$, como sendo bombeado pela abertura na posição $x = \frac{l}{2}$. Considerando um modelo discreto tal que o gás desenvolvido no trecho à direita não intervêm no trecho à esquerda, chegaremos a um resultante não realístico. Vejamos, sendo a velocidade de bombeamento

em $x = \frac{l}{2}$, diferente de zero, teremos que a pressão no trecho $0 \leq x < +\frac{l}{2}$ será igual a zero. Isto não é fisicamente aceitável! Poderíamos, por outro lado, considerar que o gás tendo origem no trecho $\frac{l}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$ fosse colocado no trecho $0 \leq x < +\frac{l}{2}$. Assim, a velocidade de bombeamento no ponto $x = l/2$ é igual a

$$\frac{1}{S_{\frac{l}{2}}} = \frac{1}{C_{\frac{l}{2} \leq x < +\frac{L}{2}}} + \frac{1}{S_{ef}} \Rightarrow S_{\frac{l}{2}} = \frac{\frac{324}{150} \times 10}{\frac{324}{150} + 10} \Rightarrow S_{\frac{l}{2}} = 1,78 \text{ litros/segundo} ,$$

chegamos assim à pressão no trecho $0 \leq x < +\frac{l}{2}$, dada pela expressão abaixo

$$p\left(0 \leq x < +\frac{l}{2}\right) = \frac{q_1 \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{l}{2}\right)}{S_{\frac{l}{2}}} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{400}{2} - \frac{100}{2}\right)}{1,78} \Rightarrow p\left(0 \leq x < +\frac{l}{2}\right) = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ mbar} .$$

Por meio da modelagem, adotando a abordagem contínua, o valor de pressão neste mesmo trecho foi encontrado como aproximadamente sendo igual a $p\left(0 \leq x < +\frac{l}{2}\right) = 2,41 \cdot 10^{-4} \text{ mbar} .$

Vemos que podemos chegar a resultados aceitáveis em alguns casos importantes que ocorrem na tecnologia do vácuo por meio de um ou outro tipo de abordagem. A questão é saber quais são esses casos cujos resultados são aceitáveis. Para saber podemos realizar a análise por meio da abordagem contínua! Se assim fosse poderíamos dispensar definitivamente a abordagem discreta. Não é o caso. Podemos em princípio fazer estudos como fizemos até este ponto, ou seja, aprendendo e adquirindo sensibilidade sobre o comportamento dos sistemas de vácuo. Vimos como a análise contínua é sempre muito mais poderosa comparada à análise discreta; mas vimos também como aquela é muito mais trabalhosa e exige muito mais esforço matemático-analítico e/ou numérico-computacional. Qual caminho seguir certamente será guiada pela experiência, vivência e conhecimento do analista.

- **Caso de Estudo 4.**

Estudaremos a seguir como o campo de pressão de um sistema de alto-vácuo tubular, com taxa de degaseificação constante, depende da velocidade de bombeamento das bombas de vácuo

instaladas nas extremidades do tubo e da condutância específica deste tubo. Veremos que os resultados obtidos para vários valores de velocidade de bombeamento, fixando as dimensões do tubo, são bastante interessantes. O estudo de casos como este, mais uma vez, mostrará que podemos aprender muito sobre o comportamento de sistemas de vácuo, em particular, da importância fundamental da condutância – do próprio sistema de vácuo com sua linha de bombeamento – comparada à velocidade de bombeamento das bombas de vácuo. A Figura D.8 mostra esquematicamente o sistema de alto-vácuo tubular com comprimento total L e com área de seção transversal circular e constante. As velocidades de bombeamento das bombas de vácuo são iguais e dadas por S_{bv} .

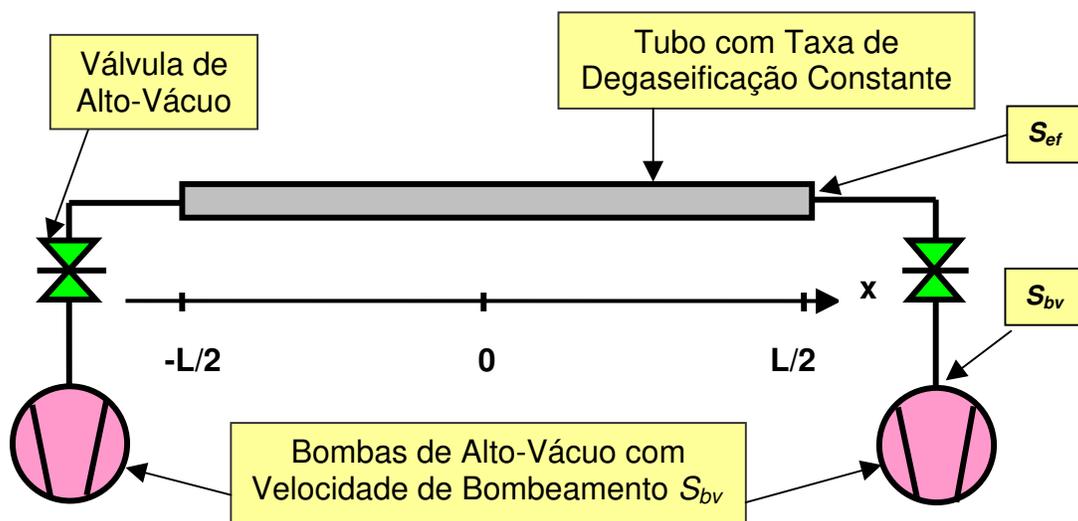


Figura D.8 Sistema de alto-vácuo tubular com taxa de degaseificação constante. Bombas de alto-vácuo nas extremidades do tubo.

A análise adotando a abordagem contínua é bastante simples de realizar e está mostrada a seguir, realizada utilizando o programa *MathCADTM*. Como há simetria no sistema de vácuo, estudaremos apenas o trecho relativo ao intervalo $-\frac{L}{2} \leq x \leq 0$. Manteremos constante a geometria do sistema de alto-vácuo tubular e também constante a sua taxa de degaseificação ao longo do tubo. Estudaremos os campos de pressão obtidos em função da variação da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo instalada na extremidade do tubo. Veja que, por simetria, o mesmo ocorre relativo ao intervalo $0 \leq x \leq +\frac{L}{2}$.

Campo de Pressão em Tubo com Taxa de Degaseificação Constante com Várias Velocidades de Bombeamento nas Extremidades do Tubo.

- Comprimento do tubo: $L := 400 \text{ cm}$
- Diâmetro do tubo : $D := 3 \text{ cm}$
- Condutância específica, $c=C.L$: $c := 12 \cdot D^3 \quad c = 324 \text{ l.cm / s}$
- Condutância do tubo de comprimento $L/2 = 200 \text{ cm}$. $C_{\text{metubo}} := \frac{c}{\frac{L}{2}} \quad C_{\text{metubo}} = 1.62 \text{ l / s}$
- Taxa de degaseificação por unidade de comprimento, $qs=Q_{\text{Total}}/L$:
 $qs := 1.0 \cdot 10^{-8} \text{ mbar.litro/(s.cm)}$
 $Q_{\text{Total}}=qs.L \quad qs \cdot L = 4 \times 10^{-6} \text{ mbar.litros/segundo}$
- Velocidade de bombeamento nas extremidades do tubo:
 $S1 := 0.01 \quad S2 := 0.1 \quad S3 := 1 \quad S4 := 10 \quad S5 := 20$
 $S6 := 30 \quad S7 := 40 \quad S8 := 50 \quad S9 := 100 \quad S10 := 200 \quad \text{litros/segundo}$
 $S11 := 500 \quad S12 := 1000 \quad S13 := 5000 \quad S14 := 10000$
- Definição da malha para as posições ao longo de todo o tubo. $x := -200, -199.9 .. 0 \text{ cm}$
- A solução estacionária é dada pela função parabólica:

$$ps1(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S1}\right) \quad ps8(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S8}\right)$$

$$ps2(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S2}\right) \quad ps9(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S9}\right)$$

$$ps3(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S3}\right) \quad ps10(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S10}\right)$$

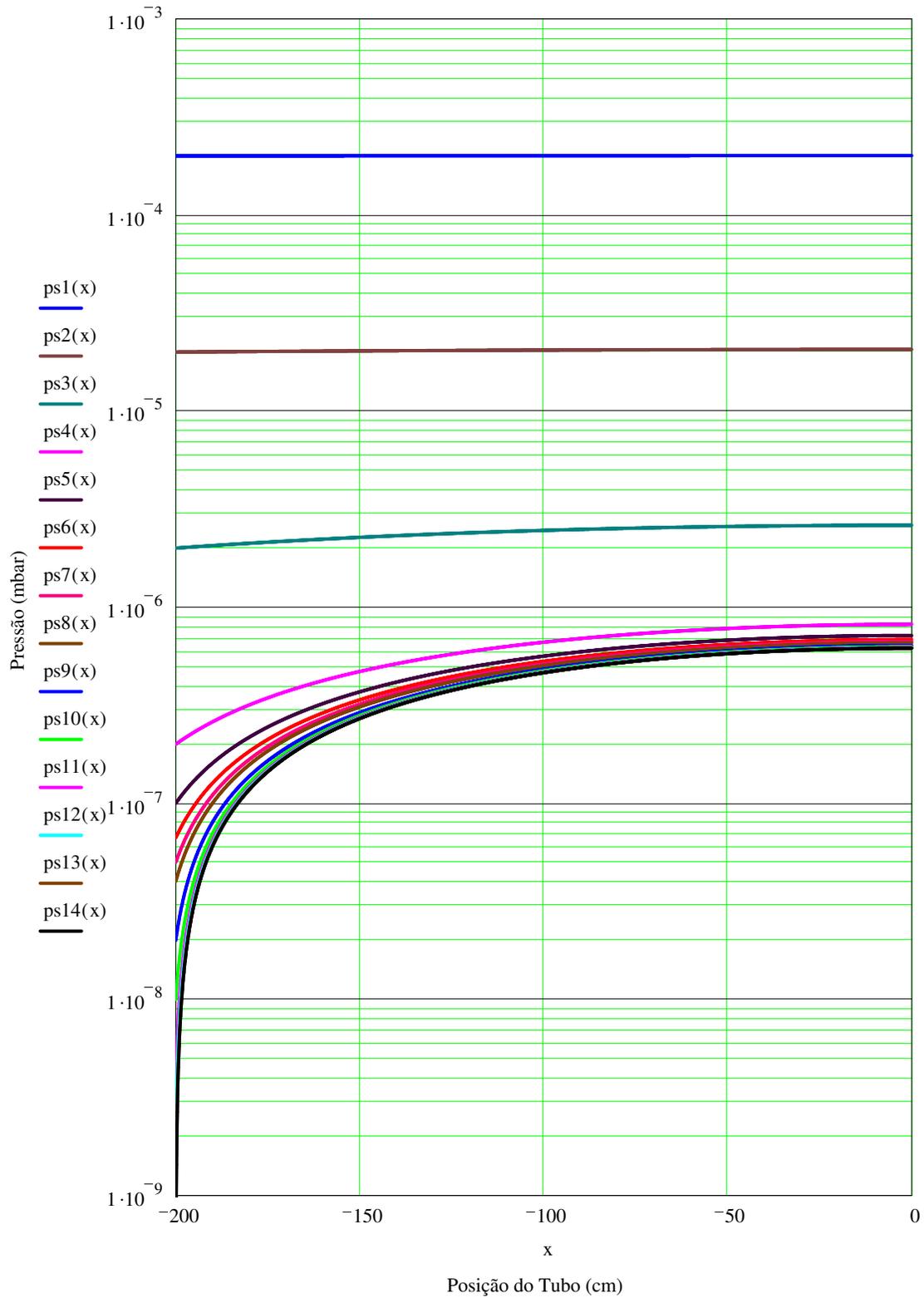
$$ps4(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S4}\right) \quad ps11(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S11}\right)$$

$$ps5(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S5}\right) \quad ps12(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S12}\right)$$

$$ps6(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S6}\right) \quad ps13(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S13}\right)$$

$$ps7(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S7}\right) \quad ps14(x) := -\frac{qs}{2 \cdot c} \cdot x^2 + \left(\frac{qs \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{4 \cdot c} + \frac{1}{S14}\right)$$

- Os campos de pressão para as várias velocidades de bombeamento na extremidades do tubo estão mostrados a seguir.



- Vemos como a pressão na extremidade ($x = -200$ cm) é muito dependente da velocidade de bombeamento neste ponto. No caso da pressão no ponto médio do tubo há duas situações marcantes que podem ser sistematizadas comparando a velocidade de bombeamento na extremidade do tubo e a condutância do tubo. No caso, a condutância do tubo de comprimento $L/2 = 200$ cm é $C_{\text{mettubo}} = 0,62$ l / s. Para velocidades de bombeamento menores que C_{mettubo} observamos que a pressão é praticamente constante em toda a extensão do tubo. Para a velocidade de bombeamento $S3 = 1$ l / s, aproximadamente igual a C_{mettubo} começamos a notar o perfil parabólico. Para velocidades de bombeamento maiores que C_{mettubo} vemos que a pressão em $x = 0$ cm diminui mais converge para um valor, no caso $p(0) = 6,17 \times 10^{-7}$ mbar.
- Podemos verificar os valores de pressão na extremidade do tubo, em $x = -200$ cm e no ponto médio do tubo, em $x = 0$ cm.

- Pressão na extremidade do tubo ($x = -200$ cm):

$$\begin{array}{ll}
 ps1(-200) = 2 \times 10^{-4} & ps8(-200) = 4 \times 10^{-8} \\
 ps2(-200) = 2 \times 10^{-5} & ps9(-200) = 2 \times 10^{-8} \\
 ps3(-200) = 2 \times 10^{-6} & ps10(-200) = 10 \times 10^{-9} \\
 ps4(-200) = 2 \times 10^{-7} & ps11(-200) = 4 \times 10^{-9} \\
 ps5(-200) = 10 \times 10^{-8} & ps12(-200) = 2 \times 10^{-9} \\
 ps6(-200) = 6.667 \times 10^{-8} & ps13(-200) = 4 \times 10^{-10} \\
 ps7(-200) = 5 \times 10^{-8} & ps14(-200) = 2 \times 10^{-10}
 \end{array}$$

- Pressão no ponto médio do tubo ($x = 0$ cm):

$$\begin{array}{ll}
 ps1(0) = 2.006 \times 10^{-4} & ps8(0) = 6.573 \times 10^{-7} \\
 ps2(0) = 2.062 \times 10^{-5} & ps9(0) = 6.373 \times 10^{-7} \\
 ps3(0) = 2.617 \times 10^{-6} & ps10(0) = 6.273 \times 10^{-7} \\
 ps4(0) = 8.173 \times 10^{-7} & ps11(0) = 6.213 \times 10^{-7} \\
 ps5(0) = 7.173 \times 10^{-7} & ps12(0) = 6.193 \times 10^{-7} \\
 ps6(0) = 6.84 \times 10^{-7} & ps13(0) = 6.177 \times 10^{-7} \\
 ps7(0) = 6.673 \times 10^{-7} & ps14(0) = 6.175 \times 10^{-7}
 \end{array}$$

- As pressões em unidades de mbar.

A análise realizada, do sistema de alto-vácuo tubular, apresenta resultados interessantes e que são bastante reveladores e expõem claramente o seu comportamento quando variamos a velocidade de bombeamento na extremidade do tubo. Mais ainda, verificamos como são importantes as grandezas condutância, velocidade de bombeamento efetiva e também a relação entre essas grandezas. Vemos que para o mesmo sistema de alto-vácuo temos comportamentos bem distintos, em função das grandezas que o definem. Assim, para uma mesma configuração geométrica e fixando a taxa de degaseificação específica por unidade de comprimento, o perfil de pressão é fundamentalmente dependente da relação entre a condutância do trecho do tubo considerado e a velocidade de bombeamento na extremidade do tubo. Podemos identificar três situações cujos comportamentos são bem distintos entre si. A primeira situação ocorre quando $S_{bv} \ll C_{Tubo}$; temos que obtemos campos de pressão parabólicos, mas praticamente com a pressão constante em toda a extensão do tubo. Nesta situação vemos que a abordagem discreta é suficiente para modelar o problema. A explicação física, para o fato de o campo de pressão ser praticamente constante, está em o transporte dos gases ser dominado pela velocidade de bombeamento na extremidade do tubo, a condutância do tubo não é o fator limitante no escoamento dos gases.

A segunda situação ocorre quando $S_{bv} \cong C_{Tubo}$; temos que obtemos campos de pressão exibindo a forma parabólica, mas as pressões ao longo do tubo não variando acentuadamente para uma dada velocidade de bombeamento. Mas observamos que, variando a velocidade de bombeamento, obtemos campos de pressão que distintos entre si em toda a extensão do tubo.

A terceira situação ocorre quando $S_{bv} \gg C_{Tubo}$; temos que obtemos campos de pressão parabólicos bem acentuados e com as pressões nas extremidades do tubo variando em função da velocidade de bombeamento. As pressões nas extremidades variam inversamente com a velocidade de bombeamento. Mas, ao afastarmos da entrada do tubo vemos que as pressões praticamente não mudam de forma acentuada. Ainda, verificamos que a pressão no ponto médio do tubo – isto é, em $x = 0$ cm – tende a um valor limite de pressão, este valor é dado pela Expressão D.8

$$\lim_{S_{bv} \rightarrow +\infty} ps(0) = \lim_{S_{bv} \rightarrow +\infty} \frac{q_s L}{2} \left(\frac{L}{4c} + \frac{1}{S_{bv}} \right) = \frac{q_s L^2}{8c}, \quad \text{D.8}$$

que, para o sistema de alto-vácuo em estudo leva à menor pressão possível de ser atingida – em $x = 0$ cm – igual a $ps(0) = 6,173 \cdot 10^{-7}$ mbar. Este é um resultado dos mais expressivos em tecnologia do vácuo – acredito que seja mesmo o mais expressivo! –, ele expõe claramente o papel da condutância no processo de bombeamento dos gases. Veja que, por mais que aumentemos a

velocidade de bombeamento das bombas de vácuo – satisfazendo $S_{bv} \gg C_{Tubo}$ –, o campo de pressão não se altera expressivamente, exceto bem próximo às extremidades do tubo. Este é um resultado geral em tecnologia do vácuo e vimos o mesmo comportamento em sistemas de vácuo estudados pela abordagem discreta, cujo equivalente está contido na expressão

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{bv}} + \frac{1}{C_{Total}} .$$

Ela mostra que mesmo aumentando muito a velocidade de bombeamento S_{bv} , a velocidade efetiva de bombeamento S_{ef} estará limitada pela condutância da linha de bombeamento. Este resultado é importante não somente do ponto de vista conceitual, exibindo claramente o papel da condutância no processo de bombeamento em vácuo, mas também tem importância do ponto de vista de projeto. Com isto queremos dizer que, para um dado sistema de vácuo, tubular ou qualquer outra geometria, a diminuição de pressão muitas vezes não será conseguida aumentando a velocidade de bombeamento das bombas existentes, mas instalando novas bombas de vácuo mais próximas das regiões nas quais precisamos diminuir a pressão. Em transporte de gases rarefeitos, devemos ter sempre presente o fato de que, por mais capacidade de bombeamento que uma bomba de vácuo possa ter, o gás deverá chegar até ela. Neste caso a responsabilidade recai na linha de bombeamento, assim ela deverá ter uma condutância condizente com a capacidade das bombas de vácuo.

Desta forma, encerramos o *Apêndice D* assinalando que os casos em estudos foram todos complementares entre si, e que encontramos coerência entre eles, e ainda, realçamos e enfatizamos a distinção entre as abordagens discreta e contínua. E mais, vimos em todos os casos estudados a importância da grandeza condutância para a análise e modelagem dos sistemas de vácuo.

Referências:

- Degasperi, F.T.; “Caderno de Atividades – Notas Particulares”. Instituto de Física da Universidade de São Paulo. São Paulo, SP, Brasil. 1991-2000.
- Degasperi, F.T.; "Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo. Objetivo Didático". XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria – XII CBRAVIC, Florianópolis, SC, Brasil, 1991. Seminário.
- Degasperi, F.T.; “Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo”. Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999. Seminário.

- Mammana, V.P.; Degasperi, F.T.; Monteiro, O.R.; Vuolo, J.H.; Salvadori, M.C.B.; Brown, I.G.; "A New Field Emission Device with Improved Vacuum Features". Journal of Vacuum Science and Technology (JVST) da American Vacuum Society. Volume 18 (A), Número 4, Julho-Agosto de 2000.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; Verardi, S.L.L.; "Time Dependence of the Pressure Profile in a Tube with Axially-Dependent Degassing". Particle Accelerator Conference, PAC-2001, Chicago, Illinois, USA, 2001. Apresentado em forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Mammana, V.P.; Verardi, S.L.L.; Baranauskas, V.; "Calculation of the Vacuum Pressure Gradient in Field Emission Displays". Trabalho Publicado no Periódico "Surface Coatings and Technology", 2001.
- Buikema, H.; Hering, V.R.; Mammana, V.P.; Degasperi, F.T.; Pavani Filho, A.; "Calculation of the Deflection for Porous Polyimide Membranes in Field Emission Displays". Asia Display – IDW 2001 – Society for Information Display. 21st International Display Research Conference. The 8th International Displays Workshops. Nagoya, Japan, 2001. Trabalho e Painel Premiados pela Excelência.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; Verardi, S.L.L.; "Pressure Field Along the Axis of an Accelerating Structure". European Particle Accelerator Conference, EPAC-2002, Paris, França, 2002. Trabalho apresentado em forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Motta, C.C.; Verardi, S.L.L.; "Pressure Field Along the Axis of an High Power Klystron Amplifier". 14th IEEE International Pulsed Power Conference - 2003 – PPC-IEEE. Austin, Texas, USA, 2003. Trabalho Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Verardi, S.L.L.; Motta, C.C.; "Pressure Field in the Cathode-Anode Regions of a High-Power Klystron Amplifier". 15th IEEE International Vacuum Electronics Conference – IVEC-2004, Monterey, California, USA, 2004. Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Verardi, S.L.L.; Takahashi, J.; "Pressure Field Distribution in a Cylindrical Geometry with Arbitrary Cross Section". 9th European Particle Accelerator Conference EPAC-2004, Lucerne, Swiss, 2004. Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; Verardi, S.L.L.; "Pressure Field in a Tube with a General and Arbitrary Time- and Position-Dependent Gas Source". Journal of Vacuum Science and Technology – JVST-A, American Vacuum Society. Sep-Oct 2004.
- Degasperi, F.T.; Verardi, S.L.L.; Martins, M.N.; Takahashi, J.; "Pressure Field Distribution in a Conical Tube with a Transient Gas Source and Outgassing". 5th Particle Accelerator Conference – PAC-2005, Knoxville, TN, USA, 2005. Apresentado em Forma de Painel e Publicado nos Anais.

- Degasperi, F.T.; Baranauskas, V.; “Pressure Field in High Vacuum Systems: Mathematical Physics Formulation”. 8th European Vacuum Conference - EVC-8 e 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society. Berlin, Germany, 2003. Trabalho Apresentado em Forma de Painel.
- Degasperi, F.T.; Mammana, V.P.; Baranauskas, V.; “Steady-State and Transient Pressure Profile in Field Emission Display”. 8th European Vacuum Conference - EVC-8 e 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society. Berlin, Germany, 2003. Trabalho Apresentado em Forma Oral.
- Degasperi, F.T.; Martins, M.N.; Verardi, S.L.L.; Takahashi, J; “Pressure Field in a Tube with a General and Arbitrary Time- and Position-Dependent Degassing”. 8th European Vacuum Conference - EVC-8 e 2nd Annual Conference of the German Vacuum Society. Berlin, Germany, 2003. Trabalho Apresentado em Forma de Painel.
- Degasperi, F.T. – “Pressure Field Distribution in a Superconductor Accelerator Tube of CERN”. Seminário Convidado e Apresentado no Grupo de Vácuo do CERN. Genebra, Swiss, 2004.
- Degasperi, F. T.; Baranauskas, V.; “Mathematical Physics Formulation to Pressure Field in a Tube with an Arbitrary Axisymmetric Cross Section”. 16th International Vacuum Congress – IVC-16, Venice, Italy, 2004. Apresentado em forma oral.
- Degasperi, F.T.; “Pressure Field Distribution in Ultra High-Vacuum Systems”. 41st IUVESTA – WORKSHOP – Vacuum System Design for Particle Accelerators: a multidisciplinary approach. Brdo pri Kranju, Slovenia, 2004. Apresentado em forma oral.
- Degasperi, F.T.; "Campo de Pressão em Associação de Tubos em Sistemas de Alto-Vácuo”. XXVI Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência – XXVI CBRAVIC, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, Brasil, 2005. Apresentação Oral.
- Degasperi, F.T.; Mammana, V.P.; Baranauskas, V.; “Vacuum Calculation and System to Field Emission Display”. XII InfoDisplay – III BrDisplay – VII DisplayEscola – Centro de Pesquisa Renato Archer – CenPRA – Campinas, SP, Brasil, 2005. Apresentação Oral Convidada.

□ Modelagem do Vazamento Virtual.

A identificação das fontes de gases e vapores constitui um problema central na modelagem e nos cálculos de sistemas de vácuo. Para realizar análises detalhadas de sistemas de vácuo somente será possível se os *throughputs* das fontes de gases e vapores forem devidamente determinados. Em geral as funções que representam os *throughputs* não são simples de serem construídas. A dificuldade em construir essas funções geralmente se dá em dois aspectos: a física envolvida na fonte gasosa, ou seja, como é a física do fenômeno referente àquela particular fonte gasosa, e o outro aspecto é quantificar, encontrar os parâmetros que especifique aquela particular fonte gasosa. Em muitos casos temos somente um conhecimento parcial, e isto pode limitar o alcance da análise do sistema de vácuo.

De todas as fontes de gases importantes para os sistemas de vácuo, o vazamento virtual é aquele com que temos menos informações. Muitos textos sobre vácuo simplesmente o mencionam, dizendo como ele é prejudicial e sugerem algumas práticas construtivas no sentido de evitar o seu aparecimento. A proposição de medidas preventivas está correta. Inclusive, somente elas irão evitar a existência do vazamento virtual! O fato de não podermos localizar o vazamento virtual, mesmo que consigamos identificá-lo, torna-o ainda mais indesejado. Ele pode comprometer seriamente o bom desempenho de um sistema de vácuo e até mesmo condená-lo definitivamente. O motivo ficará claro quando construirmos o seu modelo.

Quando se trata do vazamento virtual, a seguinte questão pode ser: O que nós conseguimos com o estudo e a construção de um modelo matemático para o vazamento virtual? Poderíamos simplesmente responder dizendo que há o interesse acadêmico, ou seja, o seu conhecimento. Mas, há também a questão prática envolvida. Com um modelo matemático do vazamento virtual, poderemos ser capazes de identificar a sua presença, comparando os resultados teóricos com as medições de pressão na câmara de vácuo em função do tempo. Veremos que será possível construir um modelo bastante simples sobre ele e obter uma solução analítica de fácil aplicação e de grande alcance.

Na sua essência, o vazamento virtual é uma pequena quantidade de gás aprisionado em um pequeno volume – bolsão de gás – dentro da câmara de vácuo que libera seu gás para a câmara de vácuo. O vazamento virtual será prejudicial para o sistema de vácuo se a passagem, que liga o pequeno volume contendo gás com a câmara de vácuo, tiver uma condutância bastante pequena. Desta forma, o gás aprisionado demorará muito para ser bombeado! Veremos este aspecto mais precisamente a seguir e este é o aspecto essencial da modelagem do vazamento virtual. Do ponto de

vista prático, devemos evitar o surgimento do vazamento virtual, e a regra geral é a seguinte: qualquer construção dentro do sistema de vácuo que produza volumes com pequenas passagens de gás para o vácuo deve ser evitada. Durante o processo de bombeamento em alto-vácuo, caso haja um vazamento virtual, haverá uma superposição dos efeitos da degaseificação e do vazamento virtual. Isto certamente trará uma dificuldade adicional na identificação do vazamento virtual. Mais uma razão para conhecermos bem o comportamento dele!

A configuração básica do vazamento virtual pode ser visto esquematicamente na Figura E.1. Vemos a câmara de vácuo, de volume V_{VC} , conectada a uma bomba de vácuo por meio de uma tubulação; a velocidade efetiva de bombeamento é S_{ef} . A câmara de vácuo – que denominaremos de câmara de vácuo principal – está conectada a uma pequena câmara – que denominaremos de câmara de vácuo do vazamento virtual – de volume V_{VV} , por meio de uma passagem de condutância C_{VV} .

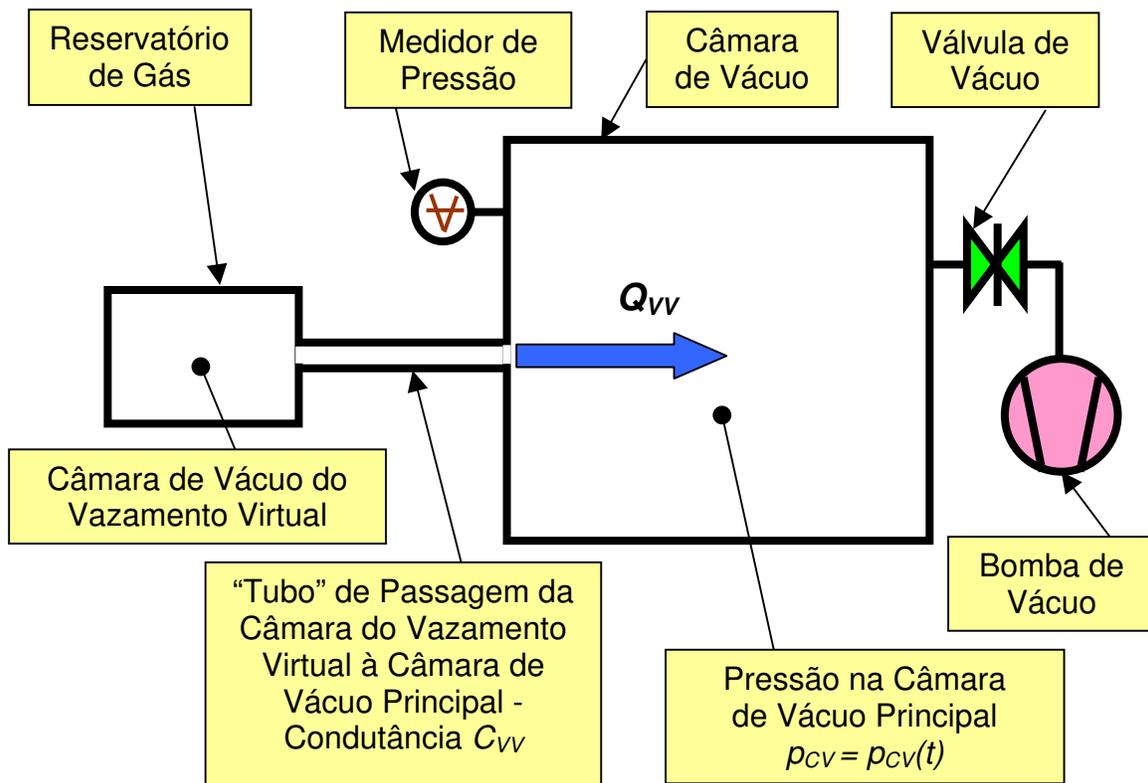


Figura E.1 O sistema de vácuo mostrando a câmara de vácuo principal, a câmara de vácuo do vazamento virtual, a condutância C_{VV} e a bomba de vácuo.

A denominação de vazamento virtual pode trazer alguma confusão. Precisamos ter presente o vazamento virtual é uma de fonte de gás com características e comportamentos próprios. O seu nome tem origem no fato de o vazamento virtual pode ser confundido na prática ao vazamento real.

Mas devemos fazer a distinção entre eles. Assim, o vazamento real é formado por uma passagem de gás entre o meio externo – meio da atmosfera – e o meio interno – do sistema de vácuo. Neste caso, temos uma passagem de gás com *throughput* praticamente constante alimentando o sistema de vácuo. Agora, no caso do vazamento virtual, à medida que o gás contido no seu pequeno volume está sendo liberado à câmara de vácuo, a sua quantidade de gás diminui, até ser completamente consumida – isto se passar um tempo suficientemente grande. Fisicamente falando, a fonte de gás do vazamento real é constituída por um volume praticamente infinito – a atmosfera é o reservatório de gás! Isto faz com que a modelagem do vazamento real seja mais simples, e podemos adotar para o seu modelo aquele estudado na injeção controlada de gás. O escoamento do gás através da passagem no vazamento real se dá em regime viscoso, e para todos os efeitos, consideramos a pressão da câmara de vácuo como sendo zero, uma vez que esta pressão geralmente é muito menor que a pressão atmosférica. Como consequência prática, temos que o *throughput* do vazamento real é constante, desde que a pressão na câmara de vácuo principal seja menor que a metade da pressão atmosférica – pressão externa –, este assunto é tratado em detalhe no *Apêndice F*.

A Figura F.2 mostra as partes essenciais componentes do vazamento virtual para a construção da sua modelagem. A imposição da sua geometria determinará quase que naturalmente a dinâmica do gás nas duas câmaras de vácuo – a do vazamento virtual e a principal.

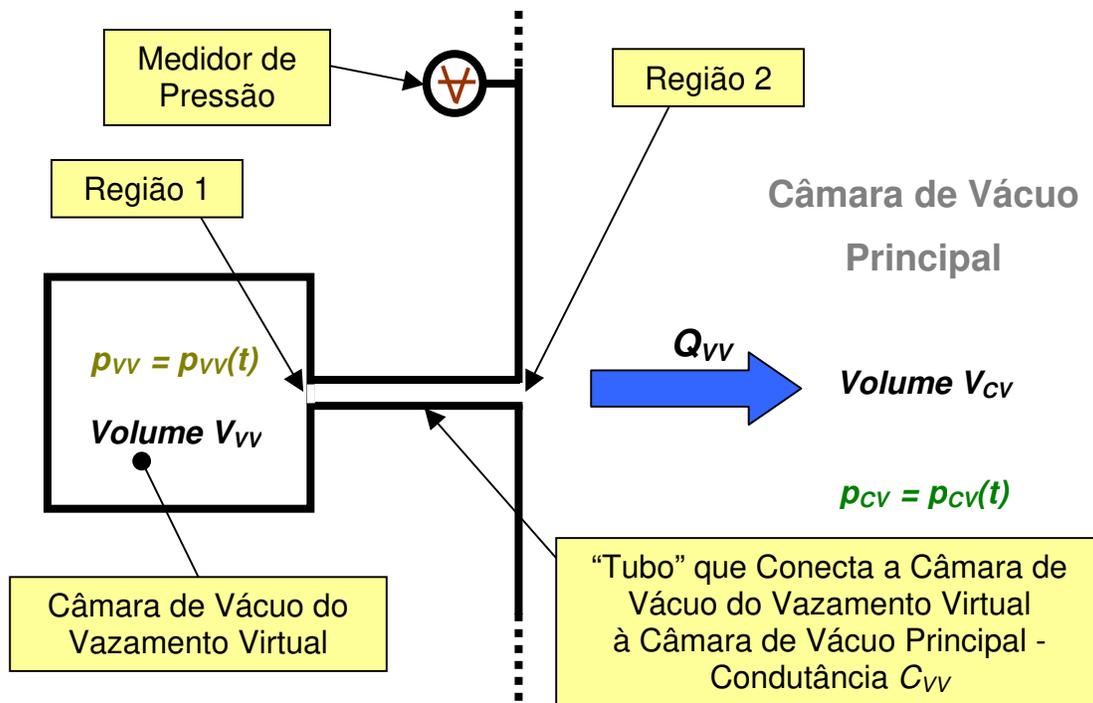


Figura E.2 Detalhe mostrando a câmara de vácuo do vazamento virtual – de volume V_{vv} – e a câmara de vácuo principal – de volume V_{cv} – interligadas por uma conexão de condutância C_{vv} .

A dinâmica do fluxo dos gases tanto na câmara de vácuo principal como na câmara de vácuo do vazamento virtual pode ser assim descrita. Consideremos que antes de iniciar a remoção dos gases, o sistema de vácuo estava à pressão atmosférica, de modo que a pressão era a mesma em todas as suas partes – a câmara de vácuo principal, o tubo e a câmara de vácuo do vazamento virtual. Ao iniciarmos o bombeamento dos gases, a pressão diminuirá na câmara de vácuo principal. Desta forma, haverá uma diferença de pressão entre a câmara de vácuo principal e a câmara de vácuo do vazamento virtual. Como consequência teremos o surgimento de um fluxo de gás da pressão maior – na câmara de vácuo do vazamento virtual, que é $p_{VV} = p_{VV}(t)$ –, para a pressão menor – câmara de vácuo principal, que é $p_{CV} = p_{CV}(t)$. Desta forma, os gases da câmara de vácuo do vazamento virtual estarão sendo também bombeados. Sem nenhum cálculo prévio, apenas apoiados no comportamento geral dos sistemas de vácuo, podemos dizer que: acreditamos que o tempo de bombeamento dos gases na câmara do vazamento virtual dependerá da razão entre a condutância C_{VV} do tubo e do volume V_{VV} do vazamento virtual. Como veremos este resultado se confirmará!

A velocidade de bombeamento na região 2, na câmara vácuo do vazamento virtual, bem junto à uma extremidade do tubo, será chamada de S_2 e a velocidade de bombeamento na região 1, na câmara de vácuo principal, bem na outra extremidade do tubo, será chamada de S_1 . Podemos relacionar estas velocidades de bombeamento e a condutância do tubo C_{VV} por meio da expressão mostrada abaixo

$$\frac{1}{S_2} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{C_{VV}} \Rightarrow S_2 = \frac{S_1 C_{VV}}{S_1 + C_{VV}}.$$

Para a existência *de fato* do vazamento virtual, devemos ter $C_{VV} \ll S_1$; assim, podemos simplificar a expressão acima e ficar com $S_2 \cong C_{VV}$. Veja que se $C_{VV} \gg S_1$ teremos rapidamente o gás sendo bombeado da câmara de vácuo do vazamento virtual, desta forma, a questão referente ao vazamento na prática nem se coloca. Isto mostra que a remoção dos gases da câmara de vácuo do vazamento virtual é determinada pela condutância do tubo que liga a câmara de vácuo principal com a câmara de vácuo do vazamento virtual. Assim, apesar de a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo S_b poder ser de alto valor, o que determinará a queda da pressão na câmara de vácuo do vazamento virtual será a razão $\frac{C_{VV}}{V_{VV}}$. Neste sentido, devemos esperar, na região de alto-

vácuo, três etapas bem distintas na curva da pressão em função do tempo na câmara de vácuo principal. Na primeira etapa, teremos a queda de pressão devido à remoção dos gases remanescentes do pré-vácuo. Na segunda etapa, a pressão cai lentamente devido aos gases que saem da câmara de vácuo do vazamento virtual. Finalmente, na terceira etapa, a pressão na câmara de vácuo principal atinge o seu valor mínimo, ou seja, a pressão final – p_{final} .

Em cada uma das etapas apresentadas, referentes ao processo de bombeamento da câmara de vácuo principal, as fontes de gases presentes no sistema de vácuo participam conjuntamente. Em geral, teremos a predominância de uma particular fonte de gás durante uma etapa do processo de bombeamento. Ainda, se uma determinada fonte de gás for demasiadamente intensa – digamos a sublimação de um determinado material – poderá ocorrer que a fonte de gás relativa ao vazamento virtual seja completamente irrelevante frente àquela. Assim, devemos analisar cada caso e cada etapa do sistema de vácuo, de forma a considerar as particularidades e aspectos marcantes do processo de bombeamento em questão. Uma análise detalhada em sistemas de vácuo somente poderá ser realizada se a identificação e quantificação das fontes de gases e vapores forem feitas. Essa é a tarefa mais importante e difícil na realização da modelagem de sistemas de vácuo.

Continuando, vamos escrever a Equação Diferencial Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – $Epbv$ – para a câmara de vácuo principal e também para a câmara de vácuo do vazamento virtual. A modelagem de sistemas de vácuo utilizando a equação diferencial mostrada abaixo é estudada em detalhe no *Apêndice A* e no *Apêndice D*. No caso da câmara de vácuo principal, temos a equação $Epbv$ mostrada a seguir

$$V_{cv} \frac{dp_{cv}(t)}{dt} = -S_{efcv} \cdot p_{cv}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i ,$$

onde $\sum_{i=1}^n Q_i$ é a totalidade das fontes de gases presentes no sistema de vácuo. Consideraremos, no caso em estudo, apenas a presença do vazamento virtual e da degaseificação. Adotaremos para a fonte de gás devido à degaseificação simplesmente um valor constante, isto deve ser imposto como uma das condições para que a pressão final do sistema de vácuo atinja um valor constante – p_{final} . Escrevemos matematicamente a presença das duas fontes de gás como mostrado abaixo na Expressão E.1

$$\sum_{i=1}^n Q_i = Q_{VV} + Q_{Deg} . \tag{E.1}$$

Seguindo em nossa análise, vamos introduzir esta última função, a Expressão E.1, na equação diferencial – E_{PBV} – para a câmara de vácuo principal, obtendo a Expressão E.2

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{efCV} \cdot p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \Rightarrow$$

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{efCV} \cdot p_{CV}(t) + Q_{VV} + Q_{Deg}$$

E.2

Prosseguindo, podemos expressar o *throughput* devido à degaseificação, em termos da pressão final, da seguinte forma $Q_{Deg} = S_{efCV} \cdot p_{final}$, com S_{efCV} a velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo principal. Ainda, o *throughput* de origem no vazamento virtual pode ser escrito como $Q_{VV}(t) = C_{VV} [p_{VV}(t) - p_{CV}(t)]$. Desta maneira, temos que a equação E_{pbv} acima toma a seguinte forma mostrada na Expressão E.3

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{efCV} \cdot p_{CV}(t) + C_{VV} [p_{VV}(t) - p_{CV}(t)] + S_{efCV} \cdot p_{final} .$$

E.3

Reagrupando os termos da Expressão E.3, ficamos com uma forma adequada para a resolução desta equação diferencial. Explicitando, a equação diferencial do processo de bombeamento de gases da câmara de vácuo principal fica como na Expressão E.4

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{efCV} [p_{CV}(t) - p_{final}] + C_{VV} [p_{VV}(t) - p_{CV}(t)] .$$

E.4

Vemos que, para resolver esta equação, mostrada na Expressão E.4, precisamos conhecer a função $p_{VV} = p_{VV}(t)$, ou seja, precisamos saber como varia no tempo a pressão na câmara de vácuo do vazamento virtual. Continuando com a análise, vamos escrever a Equação Diferencial Fundamental para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – na câmara de vácuo do vazamento virtual, temos assim mostrada a Expressão E.5

$$V_{VV} \frac{dp_{VV}(t)}{dt} = -S_{efVV} \cdot p_{VV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \Rightarrow$$

$$V_{VV} \frac{dp_{VV}(t)}{dt} = -\frac{S_1 \cdot C_{VV}}{S_1 + C_{VV}} \cdot p_{VV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i$$

onde S_{efVV} é a velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual e pode ser escrita como $S_{efVV} = \frac{S_1 \cdot C_{VV}}{S_1 + C_{VV}}$, e a parcela representada pela somatória $\sum_{i=1}^n Q_i$ é a totalidade das fontes de gases presentes na câmara de vácuo do vazamento virtual. Consideraremos, no caso do vazamento virtual, somente a fonte de gás devida à degaseificação. Adotaremos simplesmente uma degaseificação constante que fará com que nesta câmara de vácuo a pressão final atinja o valor p_{final} . Assim, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^n Q_i = Q_{Deg}$$

e o processo de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual ficará expresso como mostrado na equação diferencial – E_{PBV} – a seguir mostrada na Expressão E.6

$$V_{VV} \frac{dp_{VV}(t)}{dt} = -S_{efVV} \cdot p_{VV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i \Rightarrow$$

$$V_{VV} \frac{dp_{VV}(t)}{dt} = -S_{efVV} \cdot p_{VV}(t) + Q_{Deg}$$

Continuando, mais uma vez, podemos expressar o *throughput* devido à degaseificação, em termos da pressão final na câmara de vácuo do vazamento virtual, da seguinte forma $Q_{Deg} = S_{efVV} p_{final}$. Explicitamente estamos adotando que a pressão final na câmara de vácuo principal é a mesma que na câmara de vácuo do vazamento virtual. Está é uma suposição bastante razoável e nada restritiva, não alterando a essência da modelagem do vazamento virtual. Assim, a expressão para o processo de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual é dada pela equação – E_{PBV} – mostrada na Expressão E.7

$$V_{VV} \frac{dp_{VV}(t)}{dt} = -S_{efVV} \cdot p_{VV}(t) + S_{efVV} \cdot p_{final} \Rightarrow$$

$$V_{VV} \frac{dp_{VV}(t)}{dt} = -S_{efVV} [p_{VV}(t) - p_{final}]$$

E.7

A velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual S_{efVV} é identificada com S_2 , desta forma, temos que $S_{efVV} = S_2$. A solução da equação – E_{PBV} , para a modelagem da câmara de vácuo do vazamento virtual –, é dada pela função mostrada na Expressão E.8

$$p_{VV}(t) = (p_{VV}^0 - p_{final}) \exp\left(-\frac{S_{efVV}}{V_{VV}} t\right) + p_{final} .$$

E.8

Impusemos que a condição inicial do problema é dada por $p_{VV}(t=0) = p_{VV}^0$. Desta forma, a função $p_{VV} = p_{VV}(t)$ representa matematicamente a variação temporal da pressão na câmara de vácuo do vazamento virtual. De posse desta última função, podemos considerar novamente a equação E_{pbv} escrita para a câmara de vácuo principal. Desta maneira, rescrevendo-a temos a Expressão E.9

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{efCV} [p_{CV}(t) - p_{final}] + C_{VV} [p_{VV}(t) - p_{CV}(t)] .$$

E.9

A partir desta última equação e introduzindo explicitamente nela a função $p_{VV} = p_{VV}(t)$, ficamos com a seguinte equação – E_{PBV} , para a câmara de vácuo principal – mostrada a seguir na Expressão E.10

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -(S_{efCV} + C_{VV}) p_{CV}(t) +$$

$$+ C_{VV} (p_{VV}^0 - p_{final}) \exp\left(-\frac{S_{efVV}}{V_{VV}} t\right) + (C_{VV} + S_{efCV}) p_{final}$$

E.10

reagrupando os seus termos, finalmente ficamos com a seguinte equação mostrada na Expressão E.11

$$\frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -\left(\frac{S_{efCV} + C_{VV}}{V_{CV}}\right)p_{CV}(t) + \left[\frac{C_{VV}(p_{VV}^0 - p_{final})}{V_{CV}}\right] \exp\left(-\frac{S_{efVV}}{V_{VV}}t\right) + \left(\frac{C_{VV} + S_{efCV}}{V_{CV}}\right)p_{final} \quad E.11$$

Apesar de trabalhosa, a solução desta última equação diferencial ordinária de primeiro grau pode ser obtida sem muita dificuldade. Estaremos impondo como condição inicial que a pressão na câmara de vácuo principal, em $t = 0$, seja igual a $p_{CV}(t = 0) = p_{cv}^0$. Assim, a última equação diferencial tem como solução a seguinte função mostrada a seguir na Expressão E.12

$$p_{CV}(t) = \left[p_{CV}^0 - \frac{C_{VV}(p_{VV}^0 - p_{final})}{S_{efCV} + C_{VV} - \frac{S_{efVV} \cdot V_{CV}}{V_{VV}}} - p_{final} \right] \exp\left[-\frac{(S_{efCV} + C_{VV})}{V_{CV}}t\right] + \left[\frac{C_{VV}(p_{VV}^0 - p_{final})}{S_{efCV} + C_{VV} - \frac{S_{efVV} \cdot V_{CV}}{V_{VV}}} \right] \exp\left(-\frac{S_{efVV}}{V_{VV}}t\right) + p_{final} \quad E.12$$

A função $p_{CV} = p_{CV}(t)$ descreve matematicamente a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo principal. Ela é composta de três partes conforme adiantamos anteriormente em discussão preliminar. A primeira parcela da função $p_{CV} = p_{CV}(t)$ mostra os efeitos dominantes relativos aos gases de origem na própria câmara de vácuo principal. A segunda parcela mostra os efeitos relativos aos gases da câmara do vazamento de vácuo do vazamento virtual na câmara de vácuo principal. Finalmente, a terceira e última parcela mostra simplesmente ao efeito da degaseificação residual do sistema de vácuo. Vemos que a importância, mais ou menos acentuada, do vazamento virtual, na evolução temporal na pressão na câmara de vácuo principal, dependerá da relação entre as várias grandezas pertinentes do sistema de vácuo. Ainda, na função $p_{CV} = p_{CV}(t)$ participam grandezas com valores bastante distintos entre si. Desta forma, algumas simplificações

podem ser conseguidas, tornando a expressão mais fácil de ser manipulada e os cálculos mais simples e adequados para tratar as situações realista, sem alterar certamente o seu conteúdo.

Com o propósito de manter as duas funções, que representam a evolução temporal da pressão nas duas câmaras de vácuo, escreveremos abaixo $p_{VV} = p_{VV}(t)$ na Expressão E.13

$$p_{VV}(t) = (p_{VV}^0 - p_{final}) \exp\left(-\frac{S_{efVV}}{V_{VV}}t\right) + p_{final} . \quad \text{E.13}$$

Iniciaremos observando os vários termos da função $p_{CV} = p_{CV}(t)$ e procedendo às simplificações aceitáveis, após uma análise física. Assim, enquanto o vazamento virtual tiver importância, a pressão na câmara de vácuo do vazamento virtual será sempre muito maior que a pressão na câmara de vácuo principal. Caso isso não se verifique, o vazamento virtual deixa de ser importante, e praticamente a questão sobre a sua existência nem se coloca!

Continuando, existindo o vazamento virtual, podemos escrever que $p_{VV}(t) \gg p_{CV}(t)$ para todos os instantes de tempo. A condutância C_{VV} é o fator que limita, ou seja, é o fator determinante do processo de bombeamento dos gases da câmara de vácuo do vazamento virtual, desta maneira, $S_{efVV} \cong C_{VV}$. Em relação às pressões iniciais nas câmaras de vácuo, seguramente temos verificadas as seguintes desigualdades: $p_{VV}^0 \gg p_{final}$ e $p_{CV}^0 \gg p_{final}$ – essas hipóteses estavam presentes desde o início da construção do modelo do vazamento virtual e as vemos coerentemente explicitadas na função $p_{CV} = p_{CV}(t)$.

Ainda, a velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo principal será sempre muito maior que velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual – caso contrário, não teríamos o vazamento virtual! –, então $S_{efCV} \gg S_{efVV} \cong C_{VV}$. Levando-se em conta as aproximações apresentadas acima, podemos rescrever os termos da função $p_{CV} = p_{CV}(t)$ como segue

$$\left[p_{CV}^0 - \frac{C_{VV}(p_{VV}^0 - p_{final})}{S_{efCV} + C_{VV} - \frac{S_{efVV}V_{CV}}{V_{VV}}} - p_{final} \right] \cong \left[p_{CV}^0 - \frac{C_{VV}p_{VV}^0}{S_{efCV} - \frac{C_{VV}V_{CV}}{V_{VV}}} \right]$$

e também, para o outro termo

$$\left[\frac{C_{VV}(p_{VV}^0 - p_{final})}{S_{efCV} + C_{VV} - \frac{S_{efVV}V_{CV}}{V_{VV}}} \right] \cong \left[\frac{C_{VV}p_{VV}^0}{S_{efCV} - \frac{C_{VV}V_{CV}}{V_{VV}}} \right].$$

De posse destas simplificações e introduzindo-as na expressão de $p_{CV} = p_{CV}(t)$ temos a Expressão

E.14

$$p_{CV}(t) \cong \left[p_{CV}^0 - \frac{C_{VV}p_{VV}^0}{S_{efCV} - \frac{C_{VV}V_{CV}}{V_{VV}}} \right] \cdot \exp\left[-\frac{S_{efCV}}{V_{CV}}t\right] + \left[\frac{C_{VV}p_{VV}^0}{S_{efCV} - \frac{C_{VV}V_{CV}}{V_{VV}}} \right] \exp\left(-\frac{C_{VV}}{V_{VV}}t\right) + p_{final}.$$

E.14

Finalmente encontramos a expressão que representa a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo principal. Nesta expressão estão sendo consideradas como fontes de gases as de origem no vazamento virtual e na degaseificação das paredes da câmara de vácuo principal. Poderíamos em princípio ter considerado a degaseificação dependente do tempo, como estudado no *Capítulo 3*. Neste caso, mesmo não havendo uma solução analítica para a Equação Diferencial para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} –, lançaríamos mão de métodos numéricos, tais como, o de *Euler-Heun* ou de *Runge-Kutta* de 4ª ordem para chegarmos à solução. Mesmo não considerando o aspecto – mais realista – da evolução temporal da degaseificação na modelagem do vazamento virtual, os resultados alcançados mostram o seu comportamento essencial em um sistema de vácuo.

Podemos explorar um pouco mais a questão da degaseificação na modelagem realizada. Sabemos que as várias fontes de gases que concorrem nos sistema de vácuo manifestam-se geralmente ao mesmo tempo. Temos que uma fonte de gás será mais ou menos importante dependendo de sua intensidade durante uma etapa específica do processo de bombeamento. Pode

ocorrer, por exemplo, que a degaseificação seja tão intensa em um sistema de vácuo que torne a fonte de gás devido ao vazamento virtual completamente imperceptível. Nesta situação o vazamento virtual poderá não trazer problemas. Mas nem sempre a realidade é assim. Devido aos possíveis cenários apresentados estarem dentro do plano da realidade, deveremos ter um conhecimento suficiente das várias fontes gasosas a ponto de discerni-las e quantificá-las. Isto justifica mais uma vez a construção de modelos capazes de representar matematicamente as fontes de gases presentes nos sistemas de vácuo.

Voltando ao vazamento virtual, ele pode também ser prejudicial em um sistema de vácuo quando vários gases de processo são empregados. Digamos que, após o bombeamento, foi atingida uma dada pressão na câmara de vácuo principal. Em seguida, um determinado gás é injetado na câmara de vácuo principal; este gás preencherá parcial ou totalmente a câmara de vácuo do vazamento virtual. Posteriormente, com a interrupção da entrada do gás injetado, uma pressão mais baixa será novamente atingida. Agora, um outro gás de processo é injetado na câmara de vácuo principal. Mas o gás injetado anterior ainda estará suprindo a câmara de vácuo principal, uma vez que a fonte do vazamento virtual está presente. Isto pode ser extremamente prejudicial para o processo em andamento. Ele poderá ter um efeito de contaminante, assim, apesar de nem sempre estarmos preocupados com o valor da pressão final, o vazamento virtual será uma fonte de gás que poderá prejudicar as etapas de um processo. Este fato é de extrema importância em vários processos de fabricação de produtos, por exemplo, circuitos integrados na indústria de microeletrônica, na fabricação de discos compactos – *CD* e *DVD*, indústria de lâmpadas de descargas em gases, fabricação de superfícies construídas por filmes finos, e outros mais.

Podemos também usar os resultados obtidos neste estudo sobre o vazamento virtual para testar a estanqueidade de peças seladas. Digamos, por exemplo, que os vários invólucros bem distintos um do outro, um marca-passo cardíaco, um circuito integrado, ou ainda uma lata de leite condensado, deverão ter a estanqueidade testada. Podemos proceder da seguinte forma. Inicialmente submetemos uma dada peça a uma alta pressão – duas ou três atmosferas – de gás hélio, com duração de tempo determinada por normas de operação técnicas.

Assim, se a peça tiver um furo que determina uma passagem do meio exterior ao seu interior, mesmo que muito pequena, ou seja, pequena condutância, uma quantidade de hélio entrará nela. Em seguida, colocamos a peça em uma câmara de vácuo, acoplada a um detetor de vazamentos ou a um analisador de gases residuais. Assim, poderemos monitorar a evolução temporal da pressão parcial do hélio. Pelo exposto, se a evolução temporal da pressão parcial do hélio for do tipo representada pela Expressão E.14

$$p_{cv}(t) \cong \left[p_{cv}^0 - \frac{C_{VV} p_{VV}^0}{S_{efCV} - \frac{C_{VV} V_{CV}}{V_{VV}}} \right] \cdot \exp\left[-\frac{S_{efCV}}{V_{CV}} t\right] + \left[\frac{C_{VV} p_{VV}^0}{S_{efCV} - \frac{C_{VV} V_{CV}}{V_{VV}}} \right] \exp\left(-\frac{C_{VV}}{V_{VV}} t\right) + p_{final} \quad , \quad E.14$$

estaremos diante de um vazamento virtual, significando que a peça tem um furo com passagem ao seu interior. Deve ficar claro que este tipo de procedimento requer alguns testes e calibrações para a sua validação. Estes procedimentos de validação da metodologia e de sua quantificação não são muito difíceis, requerendo essencialmente, uma compreensão dos conceitos básicos envolvidos.

Finalizando este estudo sobre o vazamento virtual, vamos mostrar como é possível obter as grandezas que definem o vazamento virtual, isto é, a condutância C_{VV} e o volume da câmara de vácuo do vazamento virtual V_{VV} . Através da Figura E.3 mostrada abaixo, vemos a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo principal.

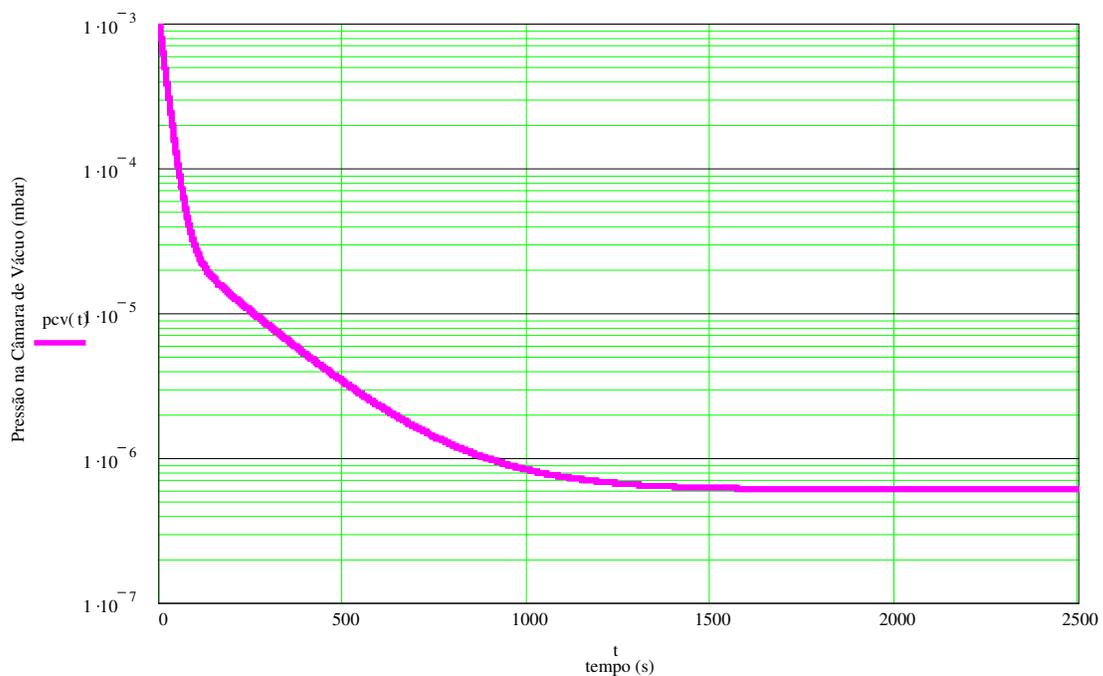


Figura F.3 Gráfico da função temporal da pressão na câmara de vácuo principal com a presença de um vazamento virtual.

O gráfico construído acima tem os seguintes valores para as grandezas pertinentes na modelagem do vazamento virtual: $V_{CV} = 100$ litros, $S_{efCV} = 5$ litros/segundo, $V_{VV} = 3 \cdot 10^{-5}$ litros, $C_{VV} = 1,5 \cdot 10^{-7}$ litros/segundo, $p_{CV}^0 = 1 \cdot 10^{-3}$ mbar, $p_{VV}^0 = 1000$ mbar e $p_{final} = 6 \cdot 10^{-7}$ mbar. O primeiro trecho reto da curva acima refere-se a evolução temporal da pressão devido ao gás do volume. Nesta etapa do bombeamento em geral as outras fontes gasosas não têm importância significativa e na maior parte dos casos são completamente desprezíveis. Analisando o segundo trecho reto da curva da função $p_{CV} = p_{CV}(t)$, vemos que podemos extrair os valores das grandezas determinantes do vazamento virtual a partir do valor do seu coeficiente angular, que denominamos por α . Continuando, a interseção deste segundo trecho de reta, com o eixo da pressão na câmara de vácuo principal, nos fornece o fator que multiplica a segunda exponencial da função $p_{CV} = p_{CV}(t)$, que denominamos por β . Desta forma, temos um sistema de duas equações algébricas e duas variáveis, explicitadas abaixo

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{C_{VV}}{V_{VV}} = \alpha \\ \frac{C_{VV} p_{VV}^0}{S_{efCV} - \frac{C_{VV} V_{CV}}{V_{VV}}} = \beta \end{array} \right. ,$$

vemos que assumimos que as outras grandezas presentes do sistema algébrico mostrado acima são consideradas conhecidas.

Vamos ilustrar com alguns exemplos, o efeito do vazamento virtual nos sistemas de vácuo. São apresentados três casos de estudo, tendo o vazamento virtual uma presença mais ou menos pronunciada. No primeiro caso, apesar de existir e ser notada a sua presença, o vazamento virtual, em aproximadamente 300 segundos, deixa de ser uma fonte de gás importante para o sistema de vácuo. Isto não significa que ele não possa ser danoso ao processo em vácuo. Por exemplo, pode ocorrer que neste íterim haja a introdução de um gás de processo, e ainda o gás presente na câmara de vácuo do vazamento virtual estará sendo liberado. Esta mistura pode ser completamente inadmissível. No segundo caso de estudo, o gás do vazamento virtual demora em torno de 1200 segundos para ser bombeado. Finalmente, no último caso, o vazamento virtual não tem participação notada no decorrer do processo de bombeamento dos gases e vapores da câmara de vácuo principal.

A relação $\frac{C_{VV}}{V_{VV}}$ é a que define a participação do vazamento virtual para a evolução temporal da pressão na câmara de vácuo principal.

Podemos ainda dizer que esta última relação define se há ou não vazamento virtual. Com isso queremos dizer que não basta termos uma pequena câmara de vácuo – bolsão – com uma passagem ligando ao sistema de vácuo, matematicamente falando, não importa os valores isolados de C_{VV} e V_{VV} , o que é importante para a própria definição do vazamento virtual é a relação $\frac{C_{VV}}{V_{VV}}$.

Nos casos estudados, foram adotados valores realistas para as variáveis que aparecem na expressão $p_{CV} = p_{CV}(t)$. Poderíamos ainda ter adotados valores para C_{VV} e V_{VV} , os quais tornariam a fonte de gás do vazamento virtual atuando, na queda da pressão na câmara de vácuo principal, por dias, semanas, meses, ou ainda tempos maiores.

Finalizando este estudo sobre o vazamento virtual, cabe novamente enfatizar que ele pode comprometer seriamente o bom desempenho de um sistema de vácuo. Neste sentido, devemos ter especial atenção no projeto, construção e instalação das partes componentes dos sistemas de vácuo, a fim de evitar qualquer formação que introduza volumes de gases aprisionados neles. Assim, a modelagem do vazamento virtual e a medição da pressão em função do tempo na câmara de vácuo principal possibilitam ou auxiliam a identificação desta fonte de gases nos sistemas de vácuo. Igualmente, podemos também fazer uso do conhecimento do comportamento do vazamento virtual para estudar o grau de estanqueidade de volumes de sistemas de vácuo selados.

Acrescentando, podemos construir uma série de situações encontradas na tecnologia do vácuo, que são sofisticações da modelagem do vazamento virtual. Assim, podemos ter a câmara de vácuo principal ligada a duas pequenas câmaras de vácuo pequenas, sendo estas conectadas entre si por um pequeno tubo. Ou ainda, três câmaras de vácuo pequenas conectadas entre si por pequenos tubos. Estas situações não são comumente encontradas nos sistemas de vácuo, mas encontramos aplicações em vácuo que usam as situações descritas. Podemos ainda usar a modelagem do vazamento virtual para tratar sistemas de vácuo que apresentem a estrutura de bombeamento diferencial. Nestes casos podemos, em conjunto com a análise específica para o bombeamento diferencial, construir uma análise baseada na modelagem do vazamento virtual. Enfim, este tipo de procedimento está sempre presente na modelagem de sistemas físicos, isto é, adaptar modelos já realizados a outras situações.

Apresentamos a seguir cálculos de sistemas de vácuo para a obtenção da curva de pressão na câmara de vácuo em função do tempo, usando a modelagem do vazamento virtual construída acima.

Aplicações da Modelagem do Vazamento Virtual

CASO 1

- O modelo básico do vazamento virtual é utilizado e supondo que junto à câmara de vácuo principal há uma outra câmara de vácuo de volume muito pequeno ligada a ela por meio de uma condutância muito pequena.

$V_{cv} := 100$ litros Volume da câmara de vácuo principal.

$S_{fcv} := 10.0$ litros / segundo Velocidade de bombeamento da câmara de vácuo principal.

$V_{vv} := 30.0 \cdot 10^{-6}$ litros Volume da câmara de vácuo do vazamento virtual.

$C_{vv} := 5 \cdot 10^{-7}$ litros / segundo Condutância da ligação da câmara de vácuo principal à câmara de vácuo do vazamento virtual.

$S_{fvv} := \frac{S_{fcv} \cdot C_{vv}}{S_{fcv} + C_{vv}}$ litros / segundo Velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual.

$p_{ocv} := 10^{-3}$ mbar

- Esta é a pressão na câmara de vácuo quando iniciamos o bombeamento em alto-vácuo. Estamos admitindo esta pressão da passagem da bomba de pré-vácuo para a bomba de alto-vácuo. Supor outro valor de pressão de troca das bombas de vácuo não muda a essência do problema e o modelo também não muda.

$p_{ovv} := 1000$ mbar

- Esta está sendo considerada a pressão na câmara do vazamento virtual. Na verdade, entre o tempo da partida do bombeamento da câmara de vácuo e a queda da pressão até a troca da bomba de pré-vácuo para a bomba de alto-vácuo, ocorreu também o bombeamento de algum gás da câmara do vazamento virtual. Estamos supondo que não houve tempo para uma variação apreciável. Isto certamente depende da condutância C_{vv} e do volume do vazamento virtual V_{vv} .

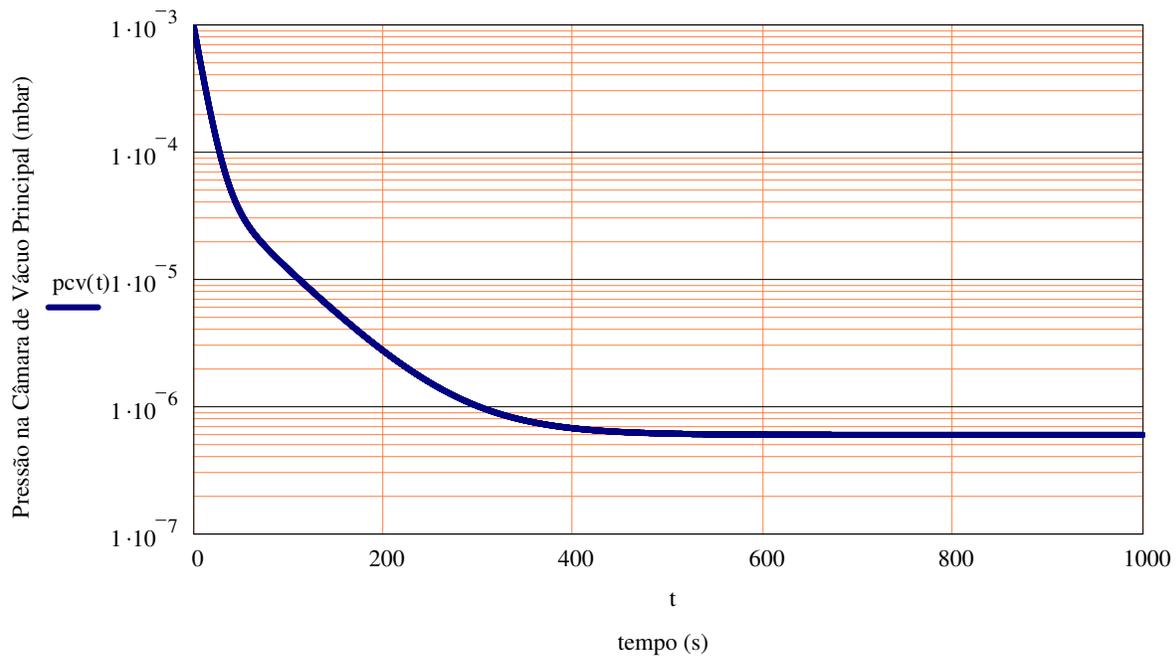
$p_f := 6 \cdot 10^{-7}$ mbar Pressão considerada como pressão final que atinge o sistema de vácuo.

- Definição da escala de tempo $t := 0, 0.1 .. 1000$ (segundos)
- A solução da equação diferencial para o processo de bombeamento, considerando o vazamento virtual, é mostrada abaixo

$$p_{cv}(t) := \left[p_{ocv} - p_f + \frac{-C_{vv} \cdot (p_{ovv} + p_f)}{S_{fcv} + C_{vv} - \frac{S_{fvv} \cdot V_{cv}}{V_{vv}}} \right] \cdot \exp\left[\frac{-(S_{fcv} + C_{vv}) \cdot t}{V_{cv}} \right] \dots$$

$$+ \frac{C_{vv} \cdot (p_{ovv} - p_f)}{S_{fcv} + C_{vv} - \frac{S_{fvv} \cdot V_{cv}}{V_{vv}}} \cdot \exp\left(\frac{-S_{fvv} \cdot t}{V_{vv}} \right) + p_f$$

- O gráfico da evolução temporal da pressão na câmara de vácuo é mostrado abaixo



Comentário Geral do CASO 1

- Vemos no gráfico acima que a pressão cai rapidamente na câmara de vácuo considerando apenas os gases do volume. Agora, a partir de aproximadamente 50 segundos, temos outra inclinação da curva, mostrando o efeito do vazamento virtual, que faz com que a pressão final seja atingida somente após 500 segundos (aproximadamente). A inclinação da segunda parte da curva depende da relação S_{efvv} / V_{vv} , em palavras, para um dado volume da câmara do vazamento virtual, se a condutância C_{vv} for muito grande, teremos o bombeamento dos gases aprisionados feito rapidamente. Ou ainda, se para uma dada condutância C_{vv} muito pequena (S_{efvv} também muito pequena) tivermos um volume do vazamento virtual muito pequeno, também neste caso, os gases serão removidos rapidamente. Desta forma, enfatizando, o que importa é a relação C_{vv}/V_{vv} , como podemos ver na expressão $pcv = pcv(t)$.

CASO 2

- O modelo básico do vazamento virtual é utilizado e supondo que junto à câmara de vácuo principal há uma outra câmara de vácuo de volume muito pequeno ligada a ela por meio de uma condutância muito pequena.

$V_{cv} := 100$ litros Volume da câmara de vácuo principal.

$S_{efcv} := 5.0$ litros / segundo Velocidade de bombeamento da câmara de vácuo principal.

$V_{vv} := 30.0 \cdot 10^{-6}$ litros Volume da câmara de vácuo do vazamento virtual.

$C_{vv} := 1.5 \cdot 10^{-7}$ litros / segundo Condutância da ligação da câmara de vácuo principal à câmara de vácuo do vazamento virtual.

$$\text{Sefv}_{vv} := \frac{\text{Sefcv} \cdot \text{C}_{vv}}{\text{Sefcv} + \text{C}_{vv}} \quad \text{litros / segundo} \quad \text{Velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual.}$$

$$\text{pocv} := 10^{-3} \quad \text{mbar}$$

$$\text{povv} := 1000 \quad \text{mbar}$$

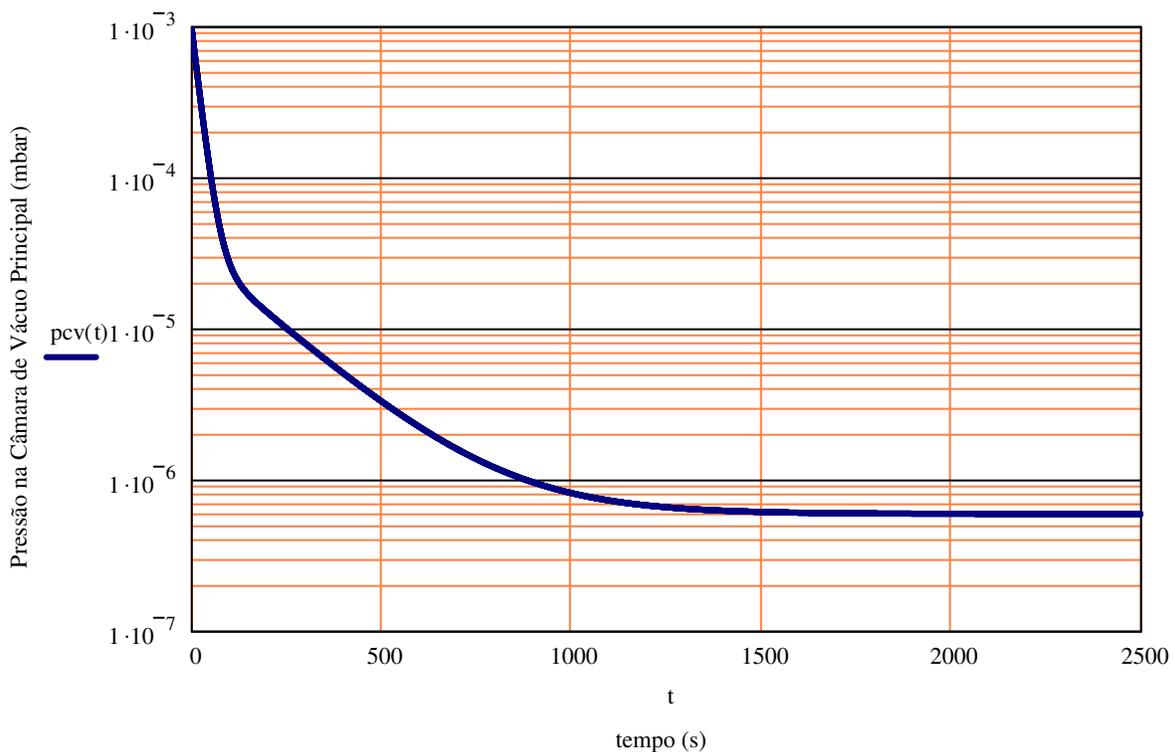
$$\text{pf} := 6 \cdot 10^{-7} \quad \text{mbar} \quad \text{Pressão considerada como pressão final que atinge o sistema de vácuo.}$$

- Definição da escala de tempo $t := 0, 0.1 \dots 2500$ (segundos)
- A solução da equação diferencial para o processo de bombeamento, considerando o vazamento virtual, é mostrada abaixo

$$\text{pcv}(t) := \left[\text{pocv} - \text{pf} + \frac{-\text{C}_{vv} \cdot (\text{povv} + \text{pf})}{\text{Sefcv} + \text{C}_{vv} - \frac{\text{Sefvv} \cdot \text{V}_{cv}}{\text{V}_{vv}}} \right] \cdot \exp\left[\frac{-(\text{Sefcv} + \text{C}_{vv}) \cdot t}{\text{V}_{cv}} \right] \dots$$

$$+ \frac{\text{C}_{vv} \cdot (\text{povv} - \text{pf})}{\text{Sefcv} + \text{C}_{vv} - \frac{\text{Sefvv} \cdot \text{V}_{cv}}{\text{V}_{vv}}} \cdot \exp\left(\frac{-\text{Sefvv} \cdot t}{\text{V}_{vv}} \right) + \text{pf}$$

- O gráfico da evolução temporal da pressão na câmara de vácuo é mostrado abaixo.



Comentário Geral do CASO 2

- Vemos no gráfico acima que a pressão cai rapidamente na câmara de vácuo considerando apenas os gases do volume. Agora, a partir de aproximadamente 100 segundos, temos outra inclinação da curva, mostrando o efeito do vazamento virtual, que faz com que a pressão final seja atingida somente após 1500 segundos (aproximadamente). A inclinação da segunda parte da curva depende da relação S_{efvv} / V_{vv} ; em palavras, para um dado volume da câmara do vazamento virtual, se a condutância C_{vv} for muito grande, teremos o bombeamento dos gases aprisionados feito rapidamente. Ou ainda, se para uma dada condutância C_{vv} muito pequena (S_{efvv} também muito pequena) tivermos um volume do vazamento virtual muito pequeno, também neste caso, os gases serão removidos rapidamente. Desta forma, enfatizando, o que importa é a relação C_{vv}/V_{vv} , como podemos ver na expressão $p_{cv} = p_{cv}(t)$.

CASO 3

- O modelo básico do vazamento virtual é utilizado e supondo que junto à câmara de vácuo principal há uma outra câmara de vácuo de volume muito pequeno ligada a ela por meio de uma condutância muito pequena.

$V_{cv} := 100$ litros Volume da câmara de vácuo principal.

$S_{efcv} := 5.0$ litros / segundo Velocidade de bombeamento da câmara de vácuo principal.

$V_{vv} := 30.0 \cdot 10^{-6}$ litros Volume da câmara de vácuo do vazamento virtual.

$C_{vv} := 50 \cdot 10^{-7}$ litros / segundo Condutância da ligação da câmara de vácuo principal à câmara de vácuo do vazamento virtual.

$S_{efvv} := \frac{S_{efcv} \cdot C_{vv}}{S_{efcv} + C_{vv}}$ litros / segundo Velocidade efetiva de bombeamento na câmara de vácuo do vazamento virtual.

$p_{ocv} := 10^{-3}$ mbar

$p_{ovv} := 1000$ mbar

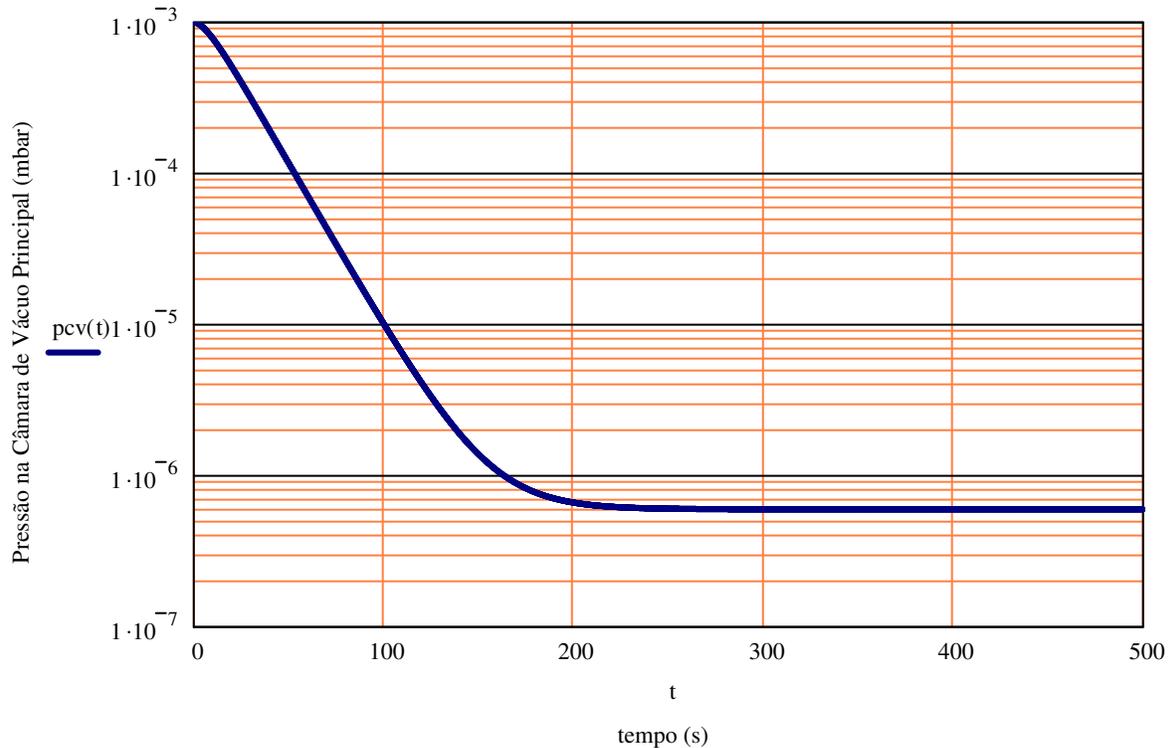
$p_f := 6 \cdot 10^{-7}$ mbar Pressão considerada como pressão final que atinge o sistema de vácuo.

- Definição da escala de tempo $t := 0, 0.1 .. 500$ (segundos)
- A solução da equação diferencial para o processo de bombeamento, considerando o vazamento virtual, é mostrada abaixo

$$p_{cv}(t) := \left[p_{ocv} - p_f + \frac{-C_{vv} \cdot (p_{ovv} + p_f)}{S_{efcv} + C_{vv} - \frac{S_{efvv} \cdot V_{cv}}{V_{vv}}} \right] \cdot \exp\left[\frac{-(S_{efcv} + C_{vv}) \cdot t}{V_{cv}} \right] \dots$$

$$+ \frac{C_{vv} \cdot (p_{ovv} - p_f)}{S_{efcv} + C_{vv} - \frac{S_{efvv} \cdot V_{cv}}{V_{vv}}} \cdot \exp\left(\frac{-S_{efvv} \cdot t}{V_{vv}} \right) + p_f$$

- O gráfico da evolução temporal da pressão na câmara de vácuo é mostrado abaixo.



Comentário Geral do CASO 3

- NESTE CASO O VAZAMENTO VIRTUAL PRATICAMENTE NÃO EXISTE, APESAR DE EXISTIREM A CÂMARA DE VÁCUO DO VAZAMENTO VIRTUAL E A PASSAGEM DESTA CÂMARA À CÂMARA DE VÁCUO PRINCIPAL.
- DECORRENTE DO VALOR DA RELAÇÃO S_{efvv}/V_{vv} O BOMBEAMENTO NA CÂMARA DO VAZAMENTO VIRTUAL É FEITO RAPIDAMENTE. ASSIM, A PRESSÃO FINAL NA CÂMARA DE VÁCUO PRINCIPAL É ATINGIDA RAPIDAMENTE, DEPENDENDO DA RAZÃO ENTRE AS GRANDEZAS S_{efcv} E V_{cv} .

Referências:

- Degasper, F.T.; “Cadernos de Atividades – Notas Particulares”. Instituto de Física da Universidade de São Paulo. 1990, 1991 e 1993.
- Degasper, F.T.; "Dedução da Equação Diferencial para o Vazamento Virtual e sua Solução – Objetivo Didático”. XI Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Indústria e na Ciência – XI CBRAVIC. São Paulo, SP, Brasil, 1990.
- Degasper, F.T.; "Modelagem para o Vazamento Virtual". Centro Tecnológico para a Informática, Campinas, SP, Brasil, 1990. Seminário.
- Degasper, F.T.; "Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo. Objetivo Didático". XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria – XII CBRAVIC. Florianópolis, SC, Brasil, 1991. Seminário.
- Ueta, K.; Watari, K.; “Equações Diferenciais Ordinárias” - Apostilas da Disciplina de Métodos da Física Teórica. Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 1976.

❑ Modelagem da Injeção Controlada de Gases.

Em muitas atividades de pesquisa, de fabricação e de condicionamento, envolvendo a tecnologia do vácuo, temos o uso de gases e vapores, que devem ser introduzidos de forma controlada nas câmaras de vácuo. Nestes casos, os gases e vapores devem ser introduzidos nas câmaras de vácuo de modo tal que, tanto as suas quantidades quanto os tempos de dosagem sejam controlados e monitorados durante o processo. Desta forma, quando especificamos a instrumentação necessária à injeção controlada de gases e vapores em sistemas de vácuo, estamos pressupondo a observação de dois aspectos: as doses gasosas devem ter as suas quantidades determinadas *a priori*, e ainda, o instante de entrada dos gases e a duração da injeção devem ser especificados e controlados. A Figura F.1 representa esquematicamente um sistema de vácuo com uma linha de injeção de gases.

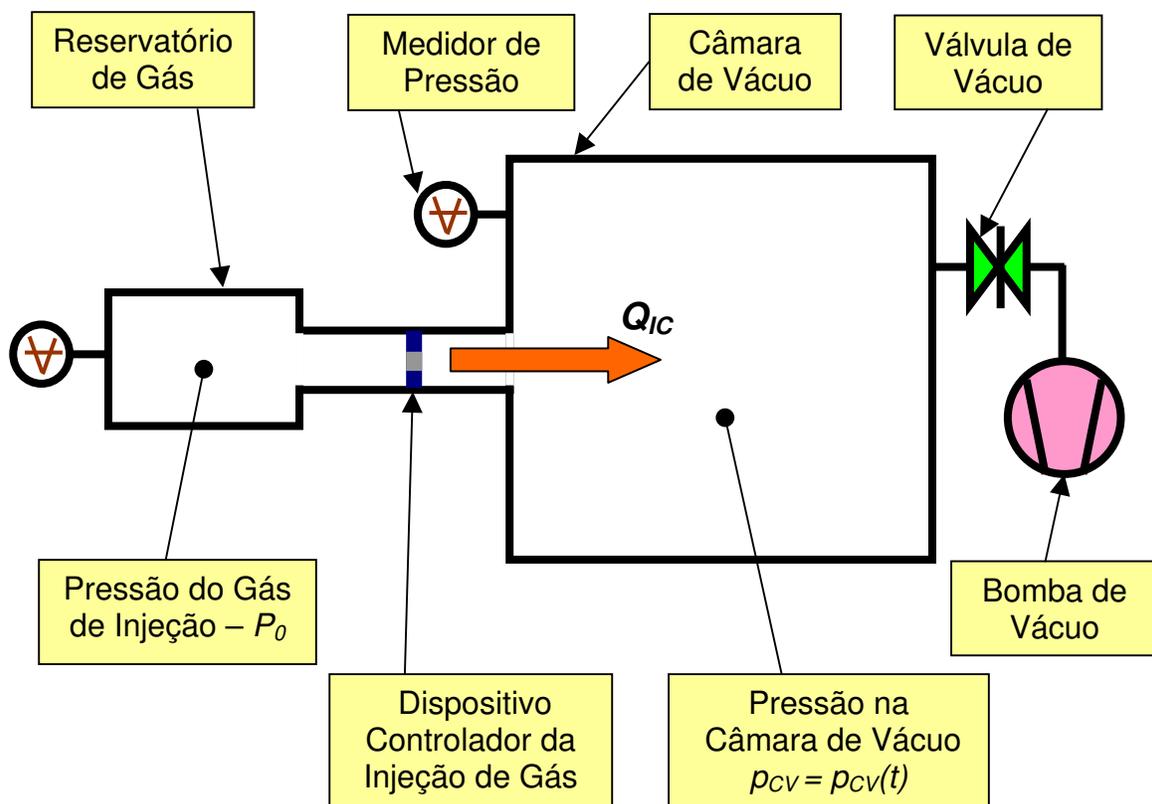


Figura F.1 Representação esquemática da injeção de gases e vapores em sistemas de vácuo. São mostrados o reservatório de gás de injeção, o dispositivo medidor-controlador da injeção de gás, a câmara de vácuo com sua linha de bombeamento e a bomba de vácuo, e os medidores de pressão.

Com o propósito de modelar a entrada de gás em uma câmara de vácuo, vamos considerar inicialmente a definição do problema. Temos um reservatório de gás – a uma pressão constante P_0 –, conectado à câmara de vácuo de volume V_{CV} . O controle da injeção de gás, do reservatório de gás à câmara de vácuo, é realizado por meio de um dispositivo capaz de comandar a sua abertura e seu fechamento. Após a injeção de gases, a pressão na câmara de vácuo aumentará. O sistema de bombeamento de gás é utilizado para bombear os gases produzidos depois da injeção de gases, pois muitas vezes haverá reação química na câmara de vácuo e os gases de produto devem ser removidos.

Muitos dispositivos construídos para essa função também são capazes de injetar uma quantidade previamente determinada de gás. Frequentemente, o dispositivo controlador da injeção de gás é uma válvula de acionamento rápido, podendo ser uma válvula do tipo solenóide, ou ainda, uma válvula com elemento de cristal piezoelétrico. Essas válvulas têm sua abertura e fechamento determinados pela excitação elétrica em seu elemento piezoelétrico. Estas válvulas, geralmente, apresentam um acionamento bastante rápido, tipicamente com tempo de resposta da ordem de 10^{-3} s, podendo ser ainda menores. Cabe mencionar que estas válvulas e os sistemas de injeção de gases tratados neste apêndice encontram muita aplicação na indústria espacial. Estes dispositivos são utilizados nos sistemas de propulsão de satélites, com o propósito de prover pequenos e precisos impulsos.

A injeção de gases e vapores nas aplicações envolvendo o vácuo ocorre, em linhas gerais, da seguinte forma: um reservatório contendo gás, que será injetado na câmara de vácuo, está a uma pressão constante P_0 , o gás escoará até a câmara de vácuo, passando através do dispositivo controlador da injeção do gás. Para efeito de modelagem da injeção controlada de gases, consideraremos o dispositivo controlador da injeção do gás sendo representado apenas por uma abertura de área A . Consideraremos a condutância da linha de alimentação do gás de injeção como tendo um valor muito grande, assim ela não ofereça resistência à passagem de gás.

O reservatório de gás está ligado a um cilindro de gás e válvulas reguladoras, a fim de manter a pressão constante na fonte de gás. A pressão no reservatório de gás será mantida em $P_0 = 1000$ mbar. A pressão na câmara do reservatório pode assumir uma extensa faixa de valores. O modelo que iremos apresentar é válido desde que o gás escoar no regime viscoso. Observando esta exigência, podemos escolher a pressão de entrada arbitrariamente. O fato de podermos variar a pressão de entrada faz com que tenhamos mais liberdade na escolha da quantidade de gás a ser injetada na câmara de vácuo. Assim, o gás passa através de uma abertura de área A – considerada a única restrição à passagem do gás. Após percorrer a linha de injeção, o gás atingirá a câmara de vácuo, cuja pressão base é $p_{CV} = 1 \times 10^{-4}$ mbar.

O livre caminho médio é dado por $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n_d m_d \delta^2}$ onde, n_d é a densidade do gás e δ é o diâmetro cinético da molécula considerada. Sabemos que $pV = n_m RT$, ainda $n_d = \frac{n_m}{V} = \frac{p}{RT}$ assim, podemos escrever

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n_d m_d \delta^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi \frac{n_m}{V} \delta^2} \Rightarrow \lambda = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi p \delta^2} .$$

Para o gás nitrogênio à temperatura ambiente, a expressão do livre caminho médio é $\lambda_{N_2} = \frac{6,7 \cdot 10^{-3}}{p}$, com a pressão em mbar e λ_{N_2} em cm. No caso do reservatório de gás estar à pressão $P_0 = 1000$ mbar, temos que $\lambda_{N_2}^{Res} = 6,7 \cdot 10^{-6}$ cm.

Em muitas aplicações em sistemas de vácuo cuja injeção de gás deva ser feita de forma bastante precisa e reprodutível a válvula piezelétrica é geralmente utilizada. Os dispositivos de injeção de gás são sempre dispositivos mecânicos, mas o acionamento em geral são eletromecânicos, como por exemplo, por meio de uma bobina solenóide ou um elemento piezoelétrico. Consultando os desenhos disponíveis da válvula piezoelétrica, vemos que a sua abertura tem aproximadamente um diâmetro de $D_{VP} = 1$ mm. Assim, determinamos o regime de escoamento para o gás nitrogênio, por meio do critério de *Knudsen*. Como o número de *Knudsen* é dado pela Expressão F.1

$$N_K = \frac{\lambda_{N_2}^{Res}}{D_{VP}} \Rightarrow N_K = \frac{\frac{RT}{\sqrt{2}\pi p \delta_{N_2}^2}}{D_{VP}} \Rightarrow N_K = \frac{RT}{\sqrt{2}\pi p \delta_{N_2}^2 D_{VP}} , \quad \text{F.1}$$

assim, encontramos que sendo $N_K = 6,7 \cdot 10^{-7}$ o regime de escoamento é o viscoso. No âmbito da área da mecânica dos fluidos, chamamos de bocais os dispositivos que apresentam a característica geométrica de aberturas do tipo orifício, ou ainda, em forma de tubos, através dos quais escoam gases em alta velocidade. Estes dispositivos são muito importantes, uma vez que, a vazão de gases é constante para uma larga faixa de pressão. Mantendo a pressão no reservatório de gás constante, no nosso caso $P_0 = 1000$ mbar – mantida constante – e, inicialmente, na câmara de vácuo também à

pressão de 1000 mbar. Nesta situação não haverá *throughput* de gás do reservatório para a câmara de vácuo. Entretanto, se diminuirmos a pressão na câmara de vácuo, verificamos um aumento do *throughput* de gás saindo do reservatório à câmara de gás. Verificamos que o aumento do *throughput* atingirá um valor limite que depende da razão da pressão no reservatório de gás com a pressão na câmara de vácuo.

Um resultado da mecânica dos fluidos aplicada à dinâmica dos gases escoando através de bocais é que o aumento do *throughput* ocorre até atingir o seu valor máximo, que é dado pela seguinte relação entre pressões, mostrada na Expressão F.2

$$\frac{p_{CV}}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = r_C, \quad \text{F.2}$$

onde a constante r_C é a razão crítica das pressões e $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – para um gás diatômico $\gamma = 1,4$, para

a temperatura de 293 K temos que $r_C = 0,525$. Assim, quando a pressão na câmara de vácuo atingir o valor de $p_{CV} = 0,525 \cdot P_0$, a partir deste valor, diminuindo a pressão na câmara de vácuo – que inicialmente estava a uma pressão igual a do reservatório de gás –, não se verifica mais o aumento do *throughput* de gás que sai do reservatório de gás e chega à câmara de vácuo. A situação é similar ao caso de termos na câmara de vácuo uma pressão muito menor que a pressão no reservatório de gás e injetarmos gás à câmara de vácuo. Até atingir a na câmara de vácuo igual a $p_{CV} = 0,525 \cdot 1000 = 525$ mbar não teremos aumento do *throughput* de gás. Este resultado é tão inesperado e intrigante como útil. Ele é muito utilizado na metrologia de vazão de gases, uma vez que é intrínseco à natureza dos gases, isto é, se é atômico, diatômico ou triatômico; certamente depende também da temperatura.

Considerando uma expansão adiabática, conforme os resultados da dinâmica dos fluidos compressíveis, temos que o *throughput* de gás passando por um orifício de área A é dado pela Expressão F.3

$$Q_{IC}(p_{CV}) = AP_0 \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT}{M} \left[1 - \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \text{F.3}$$

para o intervalo $0,525 \cdot P_0 \leq p_{CV} \leq P_0$. Fazendo a seguinte mudança de variável – passando de p_{CV} para p_{CV}/P_0 – teremos a Expressão F.4

$$Q_{IC}^* \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right) = A P_0 \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT}{M} \left[1 - \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad \text{F.4}$$

É importante observar que esta expressão é válida somente para o seguinte intervalo de pressão $0,525 \cdot P_0 \leq p_{CV} \leq P_0$. Para o intervalo $0 \leq p_{CV} < 0,525 \cdot P_0$ a expressão do throughput é dada pela função constante $Q_{IC}^* \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right) = Q_{IC}^{Máx}$. A condutância da abertura pode ser obtida diretamente da definição, por meio da seguinte expressão operacional $Q_{IC} = C_{Ab} (P_0 - p_{CV})$. A expressão da condutância da abertura – C_{Ab} – é mostrada a seguir mostrada na Expressão F.5

$$C_{Ab} = \frac{Q_{IC}}{(P_0 - p_{CV})} \Rightarrow$$

$$C_{Ab} = A \frac{P_0}{(P_0 - p_{CV})} \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT}{M} \left[1 - \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow. \quad .5$$

$$C_{Ab} = \frac{A}{1 - \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)} \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{RT}{M} \left[1 - \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Vamos apresentar alguns pontos notáveis na expressão do *throughput* – $Q_{IC}^* = Q_{IC}^* \left(\frac{p_{CV}}{P_0} \right)$.

Ela será igual a zero para a pressão $p_{CV} = P_0$. Vemos também que o *throughput* é máximo – e constante $Q_{IC}^{Máx}$ – no intervalo de pressão na câmara de vácuo, $0 \leq p_{CV} \leq r_C \cdot P_0$. O primeiro ponto de máximo, a partir da direita no eixo das abcissas pode ser obtido matematicamente por

meio da imposição da seguinte condição $\frac{\partial Q_{IC}^*}{\partial \left(\frac{P_{CV}}{P_0}\right)} = 0$ à expressão do *throughput*

$$Q_{IC}^* = Q_{IC}^* \left(\frac{P_{CV}}{P_0} \right), \text{ em função da razão entre as pressões } p_{CV} \text{ e } P_0.$$

A expressão para o *throughput* máximo, ou seja, quando $0 \leq \frac{P_{CV}}{P_0} \leq r_c = 0,525$, considerando o nitrogênio molecular – N₂ – a temperatura de 293 K, é dada por

$$Q_{IC}^{Máx} = 76,6 A P_0 (0,525)^{0,714} [1 - (0,525)^{0,286}]^{0,5} \Rightarrow$$

$$Q_{IC}^{Máx} = 26,7 A P_0$$

Adotando a pressão no reservatório de gás em mbar, a área da abertura da passagem do gás em cm², o *throughput* é dado em mbar.l.s⁻¹.

A condutância pode ser determinada para os dois trechos marcantes da curva do $Q_{IC} = Q_{IC} \left(\frac{P_{CV}}{P_0} \right)$. No caso de $0 \leq \frac{P_{CV}}{P_0} \leq r_c = 0,525$, temos que a condutância será dada por

$$C_{Ab,1} = \frac{20A}{1 - \frac{P_{CV}}{P_0}}. \text{ Agora, quando } 0,525 < \frac{P_{CV}}{P_0} < 1, \text{ temos que a condutância será dada por}$$

$$C_{Ab,2} = \frac{76,6 A}{1 - \frac{P_{CV}}{P_0}} \left(\frac{P_{CV}}{P_0} \right)^{0,714} \left[1 - \left(\frac{P_{CV}}{P_0} \right)^{0,286} \right]^{1/2}.$$

O gráfico da curva $Q_{IC}^* = Q_{IC}^* \left(\frac{P_{CV}}{P_0} \right)$ é mostrado na Figura F.2, com as duas partes marcantes em destaque, sendo separadas pelo valor da pressão crítica, $r_c = \frac{P_{CV}}{P_0} = 0,525$. Assim, temos a região da curva, cujo valor constante do *throughput* é verificado ao longo do eixo das

abscissas, no intervalo $0 \leq \frac{P_{CV}}{P_0} \leq r_c = 0,525$. Agora, temos o valor do *throughput* variável,

ocorrendo no intervalo $0,525 < \frac{P_{CV}}{P_0} \leq 1$. Em geral, nos sistemas de vácuo, com injeção controlada

de gases e vapores, temos na câmara de vácuo pressões menores que 10^{-2} mbar. A pressão no reservatório de gás está geralmente compreendida entre 1000 mbar até 2000 mbar. Tomando esses valores como indicativo, e ainda, considerando que a pressão crítica será em torno de 500 mbar, temos que a injeção de gás dar-se-á de forma que o *throughput* seja constante e determinado pela

expressão válida no intervalo $0 \leq \frac{P_{CV}}{P_0} \leq r_c$, com r_c dependendo se o gás é monoatômico,

diatômico, etc. No caso do gás nitrogênio, ou também hidrogênio, $r_c = 0,525$.

As últimas considerações são adotadas para a maioria dos sistemas de vácuo, operando tipicamente dentro da faixa de valores de pressão, tanto na injeção de gás como na câmara de vácuo. Mas, de qualquer forma, sempre deveremos verificar através do cálculo pertinente, a região

da curva do *throughput* em que estamos operando. A função *throughput* – dependente de $\frac{P_{CV}}{P_0}$ –

está mostrada na Figura F.2.

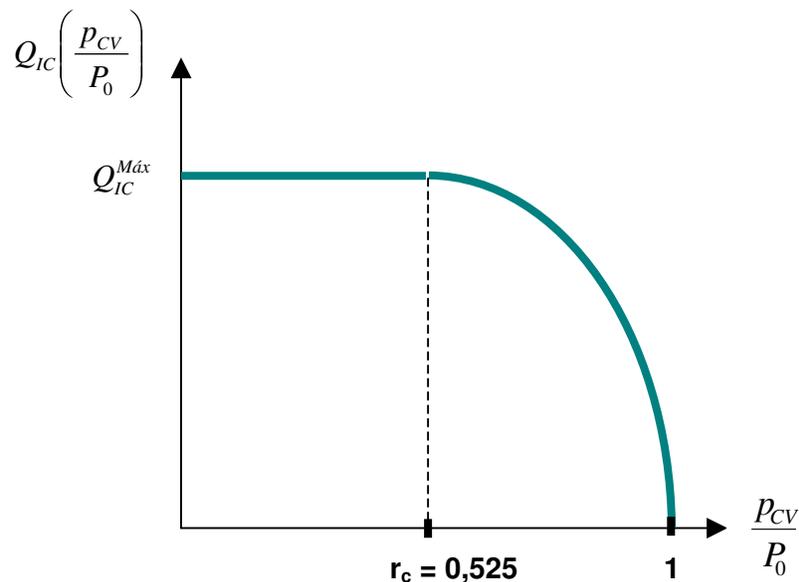


Figura F.2 Gráfico do *throughput* em função do quociente da pressão na câmara de vácuo pela pressão no reservatório de gás. O gás é o N_2 a temperatura $T = 293$ K.

Com o propósito de ilustrar a variação de pressão na câmara de vácuo devido à injeção controlada de gás, vamos exemplificar com a câmara de vácuo do *Tokamak TCABR*. A câmara de vácuo tem um volume de $V_{CV} = 1000$ litros. Considerando as dimensões da válvula piezoelétrica *PV-10* (Marca *Veeco*) temos que o diâmetro do orifício é igual a 0,02 cm; com isso, a área da abertura é $A = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2$. Assim, o *throughput* máximo de injeção de gás nitrogênio fica (mais à frente calcularemos para o gás hidrogênio)

$$Q_{IC}^{Máx} = 26,7 \text{ A } P_0 = 26,7 \cdot 1,36 \cdot 10^{-3} \cdot 1000$$

$$\Rightarrow Q_{IC}^{Máx} = 36,3 \text{ mbar} \cdot \text{l} \cdot \text{s}^{-1}$$

O esquema a seguir, na Figura F.3, mostra a concepção básica do circuito de vácuo e do circuito de injeção controlada de gás do *Tokamak TCABR*. Este circuito bastante simples foi usado nas primeiras injeções controladas de gás. Atualmente, o circuito é mais sofisticado, com controle dos seus parâmetros por computador e capaz de promover misturas gasosas, no entanto, o modelo físico construído para a injeção controlada de gases permanece válido.

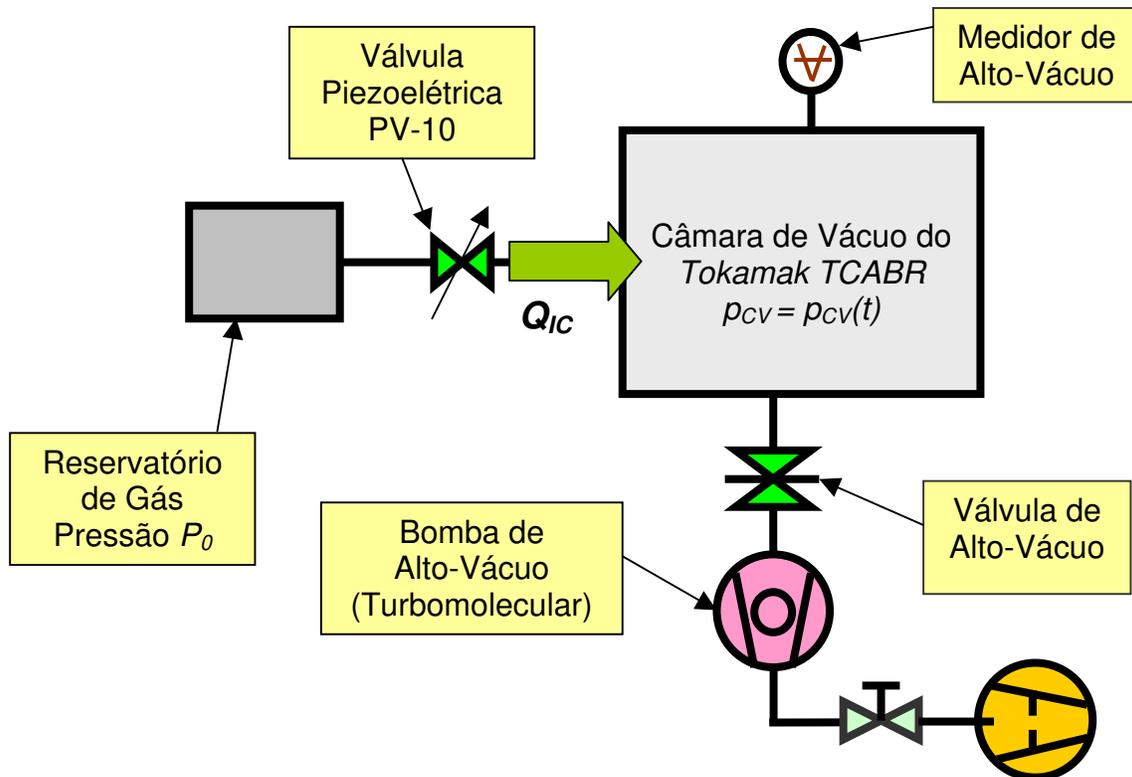


Figura F.3 Diagrama do circuito de vácuo com a injeção controlada de gás, com a válvula piezoelétrica PV-10, a bomba turbomolecular e a câmara de vácuo do *Tokamak TCABR*.

A modelagem da injeção controlada de gases à câmara de vácuo será feita empregando a Equação Diferencial para o Processo de Bombeamento em Vácuo – E_{PBV} – apresentada em detalhe no *Apêndice A*, mostrada abaixo

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = -S_{ef} p_{CV}(t) + \sum_{i=1}^n Q_i .$$

Para o caso em estudo, vamos considerar que há somente a fonte devida à injeção controlada de gás. A degaseificação pode ser considerada neste modelo, conforme representada matematicamente na equação seguinte

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = Q_{Deg} + Q_{IC} .$$

Verificando que ao impor doses gasosas de *throughput* muito superiores ao *throughput* da degaseificação, e ainda, injetando os vários pulsos de gases espaçados por poucos segundos, podemos desprezar o efeito da degaseificação, assim a equação diferencial fica

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = Q_{IC} .$$

A velocidade efetiva de bombeamento é $S_{ef} = 200 \text{ l.s}^{-1}$. Para medir a elevação da pressão na câmara de vácuo, após a abertura da válvula piezoelétrica, fechamos a válvula de alto-vácuo da bomba de vácuo turbomolecular. Assim, com a equação diferencial para o processo de bombeamento na forma do problema em questão, mostrada logo acima, e admitindo que a pressão na câmara de vácuo em $t = t'$, imediatamente antes da primeira injeção de gás, seja $p_{CV}(t') = p_{CV}^{inicial}$, encontramos a solução geral, mostrada abaixo

$$p_{CV}^{final} = p_{CV}^{inicial} + \frac{Q_{IC}}{V_{CV}} \Delta t_{pulso\ injeção} .$$

Assim, partindo de um valor de pressão na câmara de vácuo, logo após o disparo de um pulso de gás a pressão na câmara de vácuo aumenta conforme a expressão mostrada acima. Certamente se o próximo pulso de gás demorar a ocorrer, o valor da pressão na câmara de vácuo

começará a aumentar de forma significativa devido à degaseificação, ou ainda a outras possíveis fontes gasosas, por exemplo, um possível vazamento. Assim, no modelo construído, devemos disparar os pulsos gasosos um após o outro e em intervalos de tempo curtos. Adotamos neste caso o intervalo de tempo suficiente para podermos ler a medição no sensor de alto-vácuo instalado junto à câmara de vácuo. As hipóteses assumidas na modelagem construída para a injeção controlada de gases foram muito bem verificadas, como veremos por meio dos dados experimentais obtidos. Para cada pulso de injeção de gás com duração $\Delta t_{pulso\ injeção}$, – veja este é o valor da duração do pulso do gás injetado e não o intervalo de tempo entre pulsos! –, aplicamos a solução obtida acima, e assim, encontrar a nova pressão na câmara de vácuo. Ilustrando, vamos considerar uma série de disparos no sistema de injeção de gás do *Tokamak TCABR*, usando o gás hidrogênio. As grandezas relativas aos disparos são: pressão inicial na câmara de vácuo de 5.10^{-6} mbar, duração do pulso de injeção de gás de 0,28 ms, pressão no reservatório de gás de 2000 mbar e a temperatura do gás de 293 K. A Figura F.4 mostra a variação da pressão na câmara de vácuo em função do número do disparo da válvula piezoelétrica do sistema de injeção de gás.

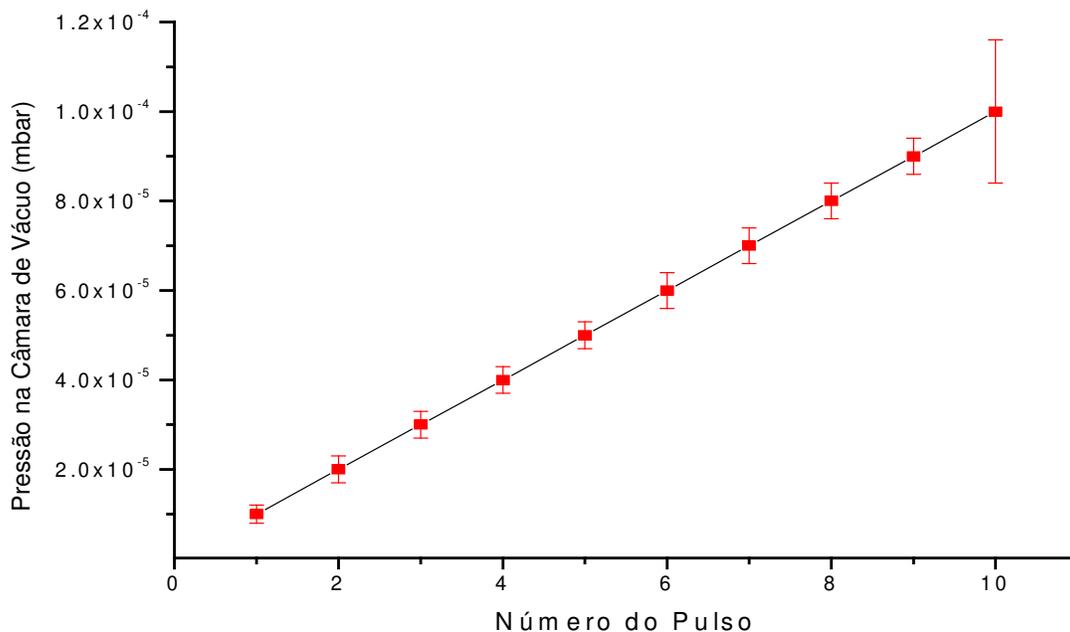


Figura F.4 Gráfico da pressão na câmara de vácuo em função do número do disparo do pulso da válvula piezoelétrica.

Vemos no gráfico acima que cada disparo na válvula piezoelétrica faz com que ocorra uma mesma elevação na pressão na câmara de vácuo. Encontramos que na modelagem da injeção controlada de gás na câmara de vácuo necessitou de dois estudos isolados. Em um deles, foi

necessária a determinação do *throughput* de gás que passa por uma abertura – chamada bocal – em condições de choque, com número de *Mach* igual a um. O outro, refere-se à variação de pressão na câmara de vácuo; a pressão na câmara de vácuo, em função do tempo, vem da solução da equação fundamental para o processo de bombeamento – E_{PBV} . Analisando os dados obtidos, no caso, com a injeção controlada de hidrogênio na câmara de vácuo do *Tokamak TCABR*, vemos que os dados experimentais têm muito boa concordância com o modelo proposto, em torno de 20%. O caso modelado acima considerou a variação da pressão na câmara de vácuo com o sistema de bombeamento de gases e vapores isolado da câmara de vácuo. Assim, partimos de uma pressão base e estudamos a elevação de pressão na câmara de vácuo após cada injeção de gás. Poderíamos considerar também o caso das bombas de vácuo estar atuando na câmara de vácuo, com isso, teríamos que acrescentar na equação diferencial para o processo de bombeamento o termo S_{ef} . O programa computacional desenvolvido neste trabalho – e apresentado em detalhe a sua teoria no *Apêndice A* e os casos de estudo no *Capítulo 3* – é capaz de tratar e analisar a fonte de gás dependente do tempo. No caso específico da injeção controlada de gás, poderíamos modelá-la como uma fonte impulsiva de gás, fazendo uso da função delta de *Dirac*, ou ainda, combinando várias funções do tipo da função degrau de *Heveaside*. No modelo proposto acima, a principal fonte de incerteza foi a suposição referente ao diâmetro da abertura da válvula piezoelétrica. O seu diâmetro, como mencionado, foi obtido por meio de desenho que acompanha o seu catálogo. Neste caso admitimos que o desenho feito conservou a escala fiel ao dispositivo. O estudo realizado da injeção controlada de gás também é válido para a injeção de vapor na câmara de vácuo. Nesta situação, devemos nos lembrar que, caso o vapor encontre uma superfície com temperatura abaixo da temperatura de injeção, teremos a sua condensação. Assim, a linha de injeção de vapor deve ser mantida à mesma temperatura da do reservatório, em toda a sua extensão, até atingir a câmara de vácuo. Na Figura F.5 vemos uma fotografia do arranjo experimental utilizado.



Figura F.5 Arranjo experimental utilizado para medir a descarga de gases em bocais.

Vamos a seguir continuar o estudo referente à injeção de gases em sistemas de vácuo, mostrando um arranjo experimental construído no Laboratório de Tecnologia do Vácuo – LTV – da Fatec-SP, com o propósito de realizar medições precisas sobre a descarga de gases em bocais. Por meio deste arranjo experimental foram feitas determinações precisas de descarga de gases em microbocais fabricados com diamante sintetizado. Este trabalho está sendo realizado em colaboração com o Laboratório de Filmes Finos do Instituto de Física da Universidade de São Paulo – IFUSP. Sendo o diamante um material inerte e que tem baixa dilatação térmica, isto faz com que ele seja um excelente material a ser utilizado na fabricação de bocais utilizados para fins metrológicos. O diagrama esquemático do circuito de vácuo, em conjunto com, os medidores de pressão, o dispositivo bocal a ser medido e o reservatório de gás de entrada, está mostrado na Figura F.6 a seguir.

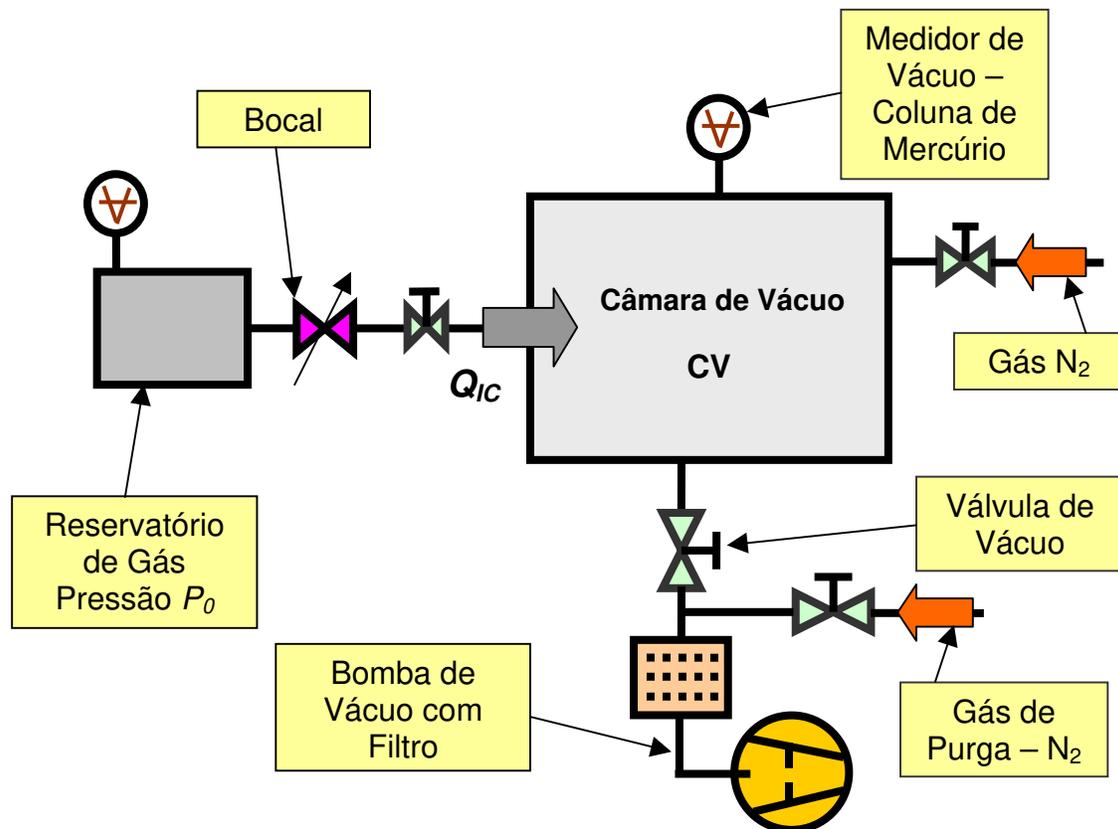


Figura F.6 Diagrama do circuito de vácuo com a injeção controlada de gás para estudar a descarga de gases em bocais.

Uma vez que os bocais de diamante medidos têm diâmetros da ordem de 200×10^{-6} m, ou seja, 0,2 mm, o arranjo experimental deverá medir pequenos *throughputs* de gás. Do exposto sucintamente sobre a pressão crítica nos bocais, temos interesse em determinar em qual pressão

ocorre a transição do intervalo de *throughput* constante para o intervalo de *throughput* variável, ou em outras palavras, em qual intervalo de pressão temos o fenômeno de brocagem. Essa determinação experimental é fundamental para a caracterização completa do bocal.

A Figura F.7 mostra os pontos experimentais da razão entre as pressões na câmara de vácuo e a pressão de entrada do bocal em relação ao tempo. A pressão de entrada do bocal é mantida constante. A derivada da curva ajustada dos pontos experimentais em relação ao tempo nos fornecerá o *throughput* que passa pelo bocal e preenche a câmara de vácuo.

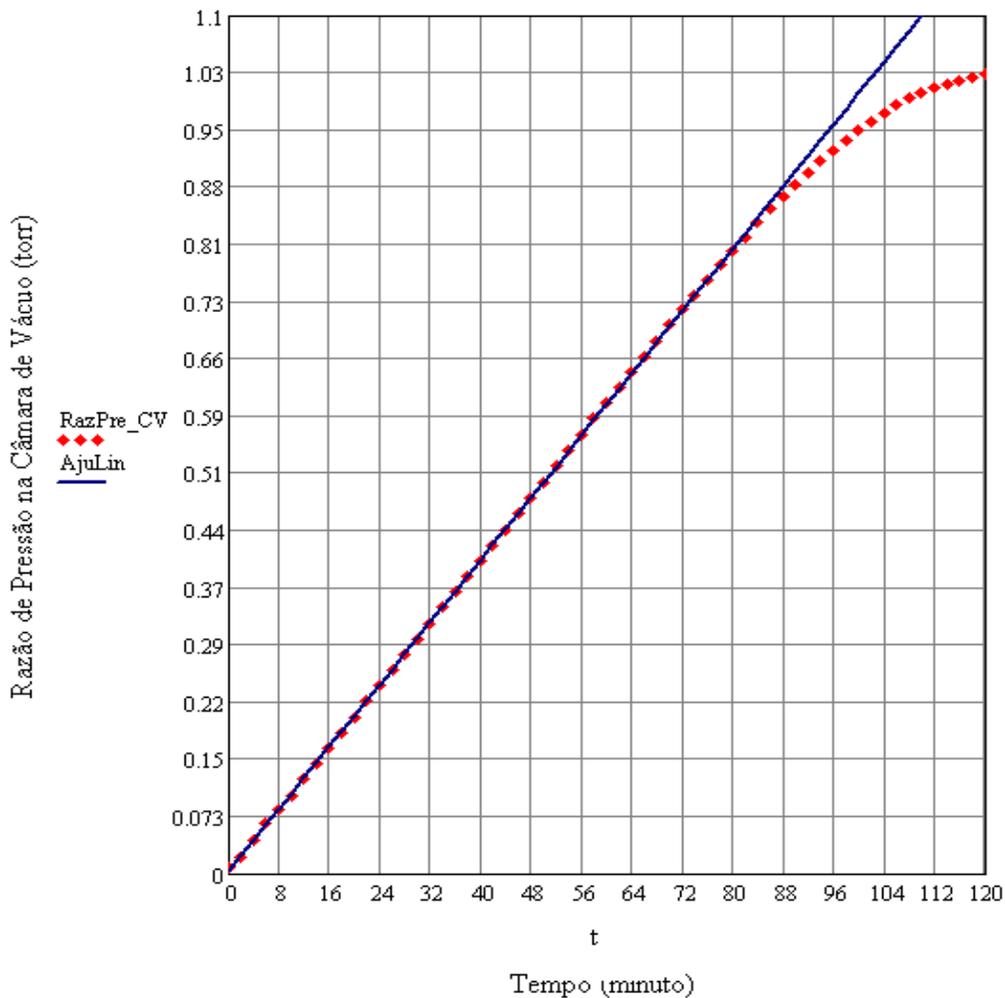


Figura F.7 Pontos experimentais da razão das pressões na câmara de vácuo e na entrada do bocal em relação ao tempo. Descarga de gás no bocal de diamante com diâmetro de 293 μm .

Na Figura F.7 vemos como foi possível fazer um bom ajuste linear referentes aos pontos experimentais até o instante no qual ocorre a brocagem. O instante de tempo é aquele cujo valor da

ordenada da curva é $\frac{P_{CV}}{P_0} = 0,525 = r_c$. Podemos determinar o *throughput* do gás que chega à câmara de vácuo conhecendo o valor da pressão em função do tempo. Temos que em cada instante na câmara de vácuo é válida a equação dos gases perfeitos ou equação de *Clapeyron-Mendeleev*

$$p_{CV}V_{CV} = n_{CV}RT_{CV} \Rightarrow p_{CV}V_{CV} = N_{CV}kT_{CV},$$

assim, podemos fazer

$$\frac{d}{dt}(p_{CV}V_{CV}) = \frac{d}{dt}(N_{CV}kT_{CV}),$$

como o volume da câmara de vácuo e a temperatura são constantes, ficamos com

$$V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = kT_{CV} \frac{dN_{CV}(t)}{dt} = Q(t) \Rightarrow$$

$$Q(t) = V_{CV} \frac{dp_{CV}(t)}{dt} = kT_{CV} \frac{dN_{CV}(t)}{dt}$$

Desta forma, calculando a derivada da pressão na câmara de vácuo em relação ao tempo, obtemos os valores do *throughput* em cada instante, e assim poderemos associar estes valores aos respectivos valores de pressão na câmara de vácuo. Normalizando a abscissa em relação à pressão de entrada no bocal e a ordenada em relação ao *throughput* máximo, construímos a curva que caracteriza o bocal. Os resultados experimentais obtidos – como mostrados na Figura F.7 – foram comparados com a teoria e houve uma aderência bastante boa entre eles. De posse desses resultados, podemos caracterizar com precisão o bocal de diamante. Todos os resultados obtidos neste apêndice corroboram o modelo considerado para a injeção controlada de gases em sistemas de vácuo.

Referências:

- Degasper, F.T.; “Cadernos de Atividades – Notas Particulares”. Instituto de Física da Universidade de São Paulo. 1998 e 1999.
- Shames, I.; *Mechanics of Fluids*, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Company, 1985.
- Faires, V. M.; *Termodinâmica*, Tradução 4^a Edição, Ao Livro Técnico S.A., 1966.
- Roth, A.; *Vacuum Technology*. Second and Revised Edition, North-Holland, 1986.

- Nardes, A.M.; Fontes Eletrônicas de Alimentação e Controle Usadas em Sistemas de Vácuo. Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Fatec-SP. Orientado por Ivan Cunha Nascimento, Juan Iraburu Elisondo, Ablício Pires dos Reis e Francisco Tadeu Degasperi. 1999.
- Rangel, R. A.; Efeito de Bocais em Bombeamento de Gases Rarefeitos. Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Fatec-SP. Estagiário do Laboratório de Tecnologia do Vácuo de Fatec-SP. Orientado por Francisco Tadeu Degasperi. 2006. Trabalho em Andamento.
- Sparapani, D.da C; Padrão para Vazamentos e Injeção Controlada de Gases. Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Fatec-SP. Bolsista Pibic-CNPq do Laboratório de Tecnologia do Vácuo de Fatec-SP. Orientado por Francisco Tadeu Degasperi. 2006. Trabalho em Andamento
- Laino, M. F.; Caracterização de Micro-Bocais Sônicos. Trabalho de Graduação do Curso MPCE da Fatec-SP. Bolsista Pibic-CNPq do Laboratório de Filmes Finos do IFUSP. Orientado pela Prof^a.Dr^a; Maria Cecília Salvadori. Trabalho em parte sendo realizado no Laboratório de Tecnologia do Vácuo de Fatec-SP. Co-orientado por Francisco Tadeu Degasperi. 2006. Trabalho em Andamento.

□ Escoamento dos Gases e Vapores no Regime de Escoamento Molecular Considerado como um Fenômeno de Difusão.

O fenômeno da difusão ocorre em muitos processos na natureza. Ele tem importância nas áreas da física, química e biologia, e ainda, em todas as áreas da engenharia. Em alguns dos chamados fenômenos de transporte, sendo os mais importantes: transporte de massa, de calor por condução e quantidade de movimento em fluidos; todos eles são considerados fenômenos de transporte por difusão. Ao construir modelos dos sistemas de vácuo, com os gases e vapores escoando no regime molecular, adotamos explicitamente o transporte desses gases como sendo um fenômeno difusivo. Desta forma, utilizamos a equação de difusão com o estabelecimento das condições de contorno e condição inicial para encontrar o campo de pressão em sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo. Uma vez que a física-matemática dos fenômenos de difusão é bastante desenvolvida, principalmente devido à transferência de calor por condução nos sólidos, poderemos utilizar uma série de raciocínios, abordagens e resultados matemáticos desta área na tecnologia do vácuo. É importante enfatizar uma vez mais, como procuramos deixar bastante claro no *Apêndice B*, que apesar de termos uma equação de difusão, aplicada ao transporte de gases escoando no regime molecular, do mesmo formato daquela aplicada à condução de calor em sólidos, a transposição de uma à outra não é direta, imediata e nem simples. Vimos que tivemos que definir aspectos próprios e inerentes à física dos gases rarefeitos no regime molecular e ainda definir a condutância específica e o *throughput* específico das fontes gasosas.

Apesar do exposto acima, ainda fica a questão – questão crucial: Podemos considerar os gases escoando no regime molecular como sendo um fenômeno de difusão? A resposta não é imediata e nem simples, e ainda, não é conclusiva. Na sua essência, o fenômeno da difusão em escala atômica está baseado em choques entre átomos e/ou moléculas e, dependendo da concentração das partículas dependente da posição, teremos o fluxo da grandeza inerente ao tipo de transporte. Assim, para que possamos considerar o transporte de uma grandeza como sendo do tipo difusivo, ele deve satisfazer uma condição básica, que o transporte, visto de forma microscópica, seja do tipo do *passeio aleatório*. Isto significa que, microscopicamente falando, o transporte da grandeza tem igual probabilidade de ser em qualquer direção em um dado evento de choque atômico e/ou molecular, quando nenhuma força externa age no sistema.

A Figura G.1 mostra de forma pictórica um recipiente contendo gás. Vamos supor a possibilidade de seguirmos a trajetória de um átomo ou molécula. Assim, veremos este átomo

chocando-se com os átomos vizinhos do gás e também com as paredes do recipiente. Dependendo da densidade do gás teremos um valor de livre caminho médio – cuja definição pode ser expressa como: a distância média percorrida por átomo ou molécula entre dois choques sucessivos, simbolizado por λ . Se o livre caminho médio for menor muito menor que as dimensões típicas do recipiente, teremos os choques dos átomos ou moléculas ocorrendo preferencialmente com os átomos vizinhos. Entretanto, se a densidade do gás for suficientemente baixa, teremos os choques dos átomos ou moléculas ocorrendo essencialmente com as paredes do recipiente, uma vez que o livre caminho médio será maior que as dimensões típicas do recipiente. Veja que nesta situação não é impossível ocorrer choques dos átomos ou moléculas entre si, mas é bastante improvável e quanto menor a densidade do gás mais improvável será. Apesar de o fenômeno da difusão, macroscopicamente falando, ser de carácter determinístico, a sua origem física – *passeio aleatório* – tem carácter intrinsecamente probabilístico.

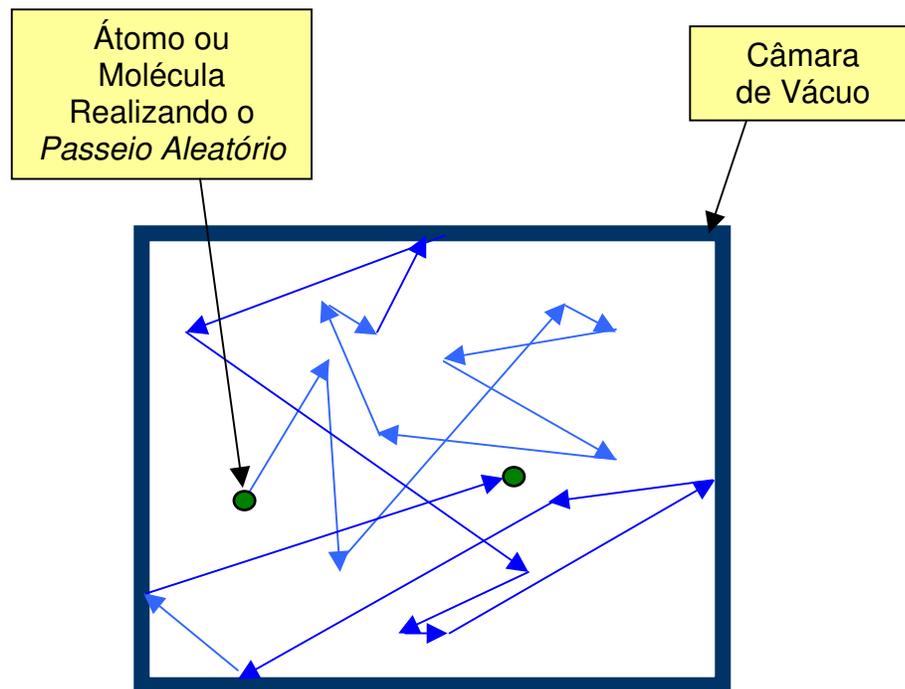


Figura G.1 Átomo ou molécula de um gás, confinado em um recipiente, realizando o *passeio aleatório*. Este fenômeno é de natureza física intrinsecamente probabilística.

Desta forma surge a necessidade de analisarmos o escoamento dos gases e vapores no regime molecular e dizer se podemos tratar este escoamento como sendo um fenômeno de origem difusiva. Considerando uma análise puramente heurística, podemos dizer que uma vez que os choques dos átomos ou moléculas, ocorrendo com as paredes do recipiente que contém o gás,

obedecem a regra de *Knudsen*, isto faz com que as partículas tenham igual probabilidade de seguir à direita ou à esquerda do tubo, ou ainda para frente ou para trás. A regra de *Knudsen* declara que o ângulo da ejeção de átomos e moléculas de uma superfície é proporcional ao cosseno do ângulo de ejeção com a reta normal à superfície, e mais, o ângulo de ejeção não depende do ângulo de incidência dos átomos e moléculas na superfície. Dizemos que não há “efeito de memória” no processo de colisão-espalhamento. Do ponto de vista da física fundamental, podemos dizer que para as condições normais de operação dos sistemas de alto-vácuo, os átomos e moléculas têm um comprimento de onda de *de Broglie* muito menor que os tamanhos das irregularidade das superfícies dos materiais que compõem o sistemas de vácuo.

Desta forma, supomos que a ejeção dos átomos e moléculas segue um comportamento de espalhamento aleatório o suficiente para torná-lo difusivo. Esta última consideração que faz com que adotemos o escoamento dos gases no regime de escoamento molecular um fenômeno difusivo. Ao contrário, se os tamanhos das irregularidades das superfícies for menor que o comprimento de onda de *de Broglie* dos átomos e moléculas, teremos um espalhamento especular. A analogia com o caso das ondas eletromagnéticas – caso óptico – não é mera coincidência, está no bojo dos princípios da mecânica quântica. A Figura G.2 mostra esquematicamente a construção geométrica para a regra de *Knudsen*.

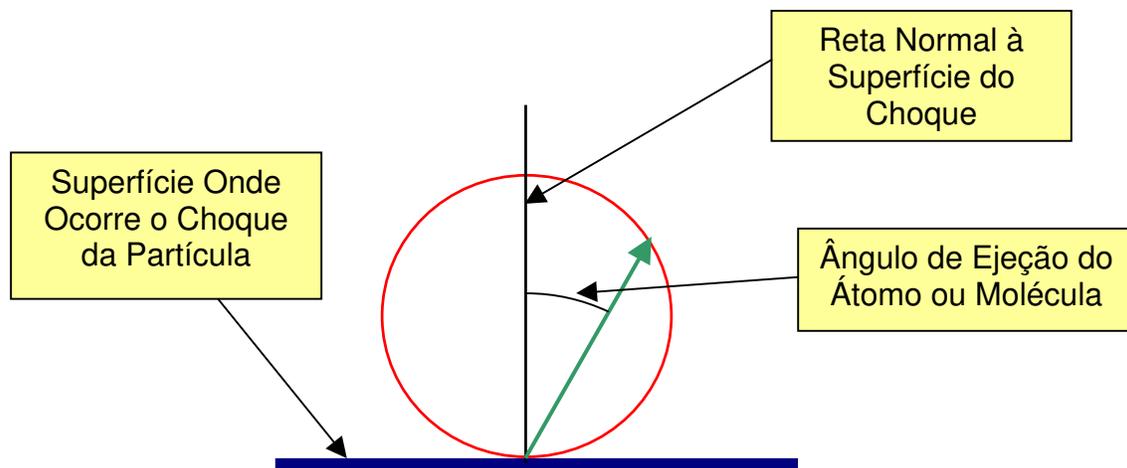


Figura G.2 Construção geométrica para a regra de Knudsen para a ejeção de átomos ou moléculas de uma superfície.

Assim, supomos que a verificação da regra de *Knudsen* leva à “randomização” na distribuição das direções das trajetórias dos átomos e moléculas no regime molecular. Esquematicamente, os gases e vapores escoam ao longo de um tubo conforme mostrado na Figura

G.3. Pelo exposto, consideramos o escoamento no regime molecular dos gases e vapores como sendo um fenômeno de origem difusiva. Existem casos, observados experimentalmente, nos quais há um desacordo com a regra de *Knudsen*. O processo de colisão e espalhamento de átomos e moléculas com superfícies sólidas depende em geral do tipo de átomo ou molécula, do material da superfície, do estado mecânico da superfície, da estrutura cristalina da superfície, do ângulo de ejeção e do momento linear do átomo ou molécula incidente à superfície. Como vemos o espalhamento de átomos e moléculas pode ser um processo físico complicado. Apesar disto, observamos experimentalmente que para os casos que ocorrem na tecnologia do vácuo a regra de *Knudsen* é obedecida.

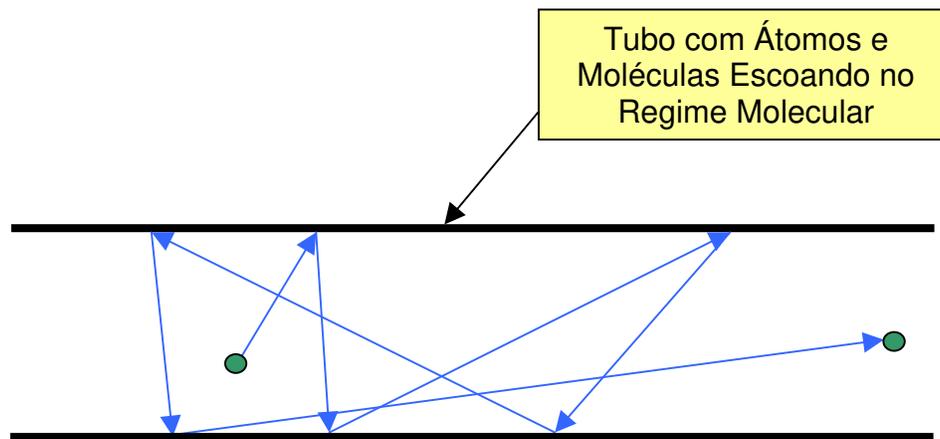


Figura G.3 Átomo ou molécula realizando o *passeio aleatório* em um tubo devido a ocorrência dos choques com as suas paredes verificando a regra de *Knudsen*.

Que pese a rápida argumentação feita acima sobre considerarmos o escoamento dos gases e vapores no regime molecular como sendo um fenômeno de origem difusiva, devemos ter em conta que para os outros tipos de fenômenos de transporte sempre estaremos fazendo a suposição se eles podem ou não também ser tratados como um fenômeno de difusão. A questão deve ser posta em prova. Uma vez feita a modelagem de um determinado caso particular, compararemos o resultado da análise com os resultados experimentais. Também podemos comparar com outras ferramentas de modelagem, por exemplo, os sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo são modelados usando o método de *Monte Carlo*, ou ainda utilizando a equação de *Boltzmann*. Mas, em última instância, a comparação dos resultados da modelagem por meio da equação de difusão com os dados experimentais será decisiva para o julgamento de estarmos diante de um fenômeno de difusão ou não. Neste trabalho foram feitas comparações de campos de pressão, em vários sistemas de alto-vácuo, utilizando a equação de difusão e o método de *Monte Carlo*.

O primeiro sistema de alto-vácuo considerado foi um simples tubo tendo as suas extremidades sendo bombeadas com velocidades de bombeamento iguais a $S_{ef} = 10$ litros/segundo. Mantivemos fixo o diâmetro do tubo e variamos o seu comprimento. Também, adotamos uma taxa de degaseificação por unidade de área igual para todos os oito casos modelados, com valor $q_{deg} = 1.0 \times 10^{-8}$ mbar.litros. s^{-1} . cm^{-2} . O diâmetro do tubo cilíndrico igual a $D = 3$ cm, variamos o comprimento do tubo com os seguintes valores: $L = 3$ cm, $L = 6$ cm, $L = 12$ cm, $L = 25$ cm, $L = 50$ cm, $L = 100$ cm, $L = 200$ cm e $L = 400$ cm.

Seja o sistema de vácuo em forma tubular cilíndrica mostrado na Figura G.4. Temos o diâmetro D e comprimento L . Há duas bombas de alto-vácuo, uma em cada extremidade do tubo. A velocidade de bombeamento de cada bomba de alto-vácuo é igual S_{bv} e a velocidade efetiva de bombeamento em cada extremidade do tubo é igual à S_{ef} . A taxa de degaseificação específica por unidade de comprimento q_s é constante e a condutância específica ou condutância por unidade de comprimento é c e igual a $c = C_{Tubo}/L$, onde C_{Tubo} é a condutância total do tubo.

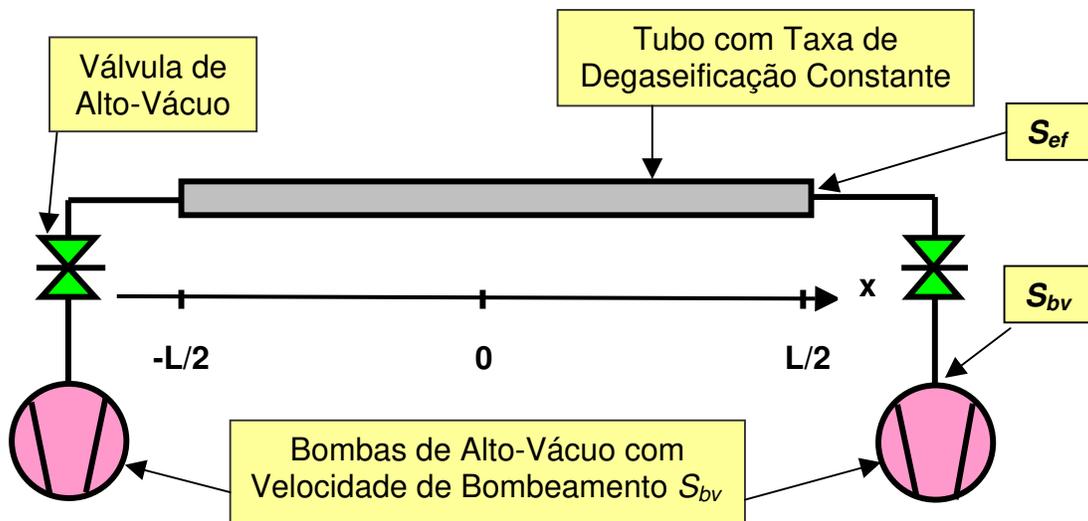


Figura G.4 Sistema de alto-vácuo tubular com taxa de degaseificação constante. Bombas de alto-vácuo nas extremidades do tubo.

Este problema está tratado em detalhe no *Capítulo 3* e sua teoria no *Apêndice B*. A solução deste problema, em estado estacionário, é a função que representa o perfil parabólico de pressão válido para o seguinte intervalo $-\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2}$, vemos que esta solução é simétrica em relação ao ponto médio do tubo, isto é $x = 0$, e neste ponto a pressão assume o seu valor máximo,

$$p_{Tubo}(x) = -\frac{q_s}{2c}x^2 + \frac{q_s L}{2} \left(\frac{1}{S_{ef}} + \frac{L}{4c} \right).$$

A Figura G.5 mostra as curvas de campo de pressão obtidas por meio da equação de difusão e o método de *Monte Carlo*. As curvas de campo de pressão são obtidas para os seguintes comprimentos de tubo $L = 3$ cm, $L = 6$ cm, $L = 12$ cm, $L = 25$ cm.

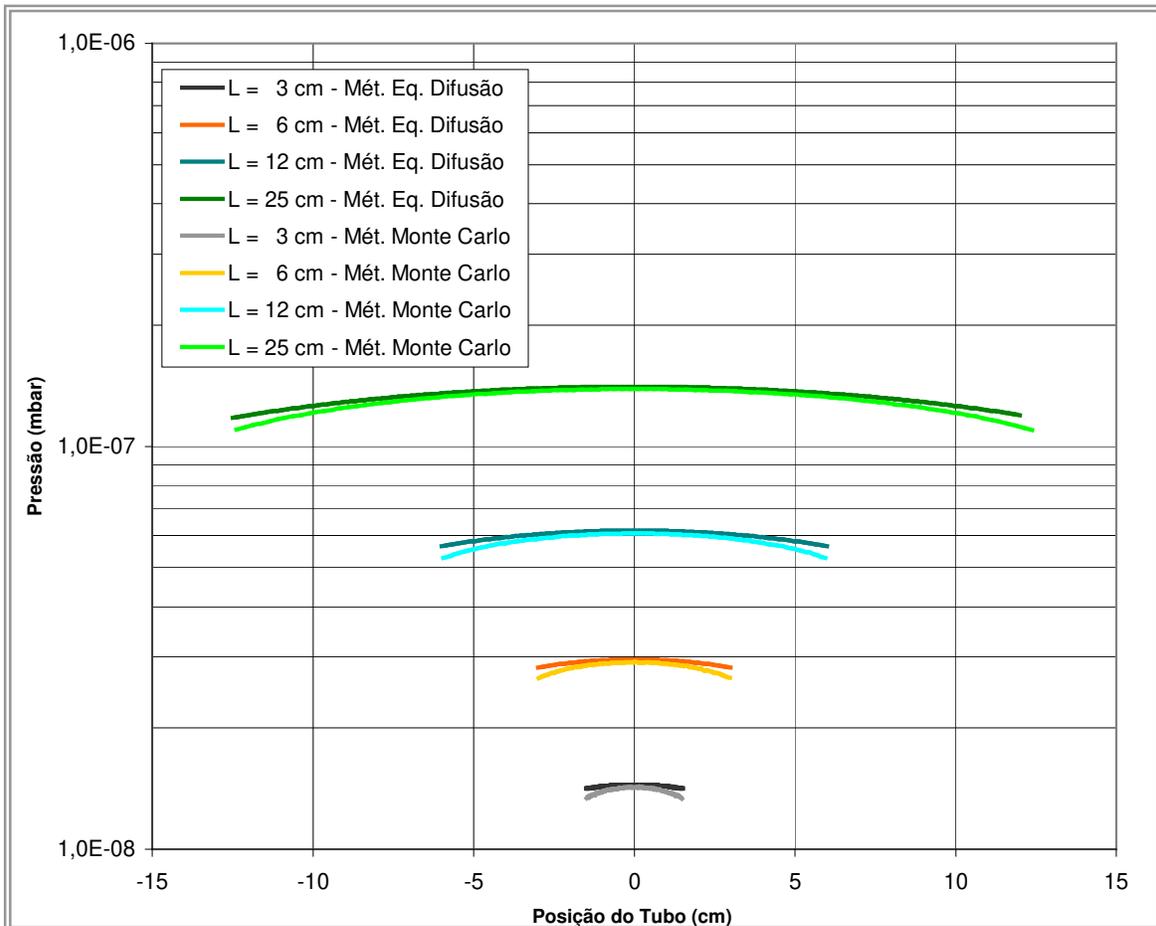


Figura G.5 Campo de pressão em sistema de alto-vácuo tubular com taxa de degaseificação constante. Bombas de alto-vácuo nas extremidades do tubo com velocidades de bombeamento iguais entre si.

Continuando, temos mostradas na Figura G.6 as curvas de campo de pressão para os seguintes comprimentos de tubo $L = 50$ cm, $L = 100$ cm, $L = 200$ cm e $L = 400$ cm. Também nestes casos a velocidade de bombeamento nas extremidades do tubo são iguais a $S_{ef} = 10$ litros/segundo e o diâmetro do tubo é de $D = 3$ cm.

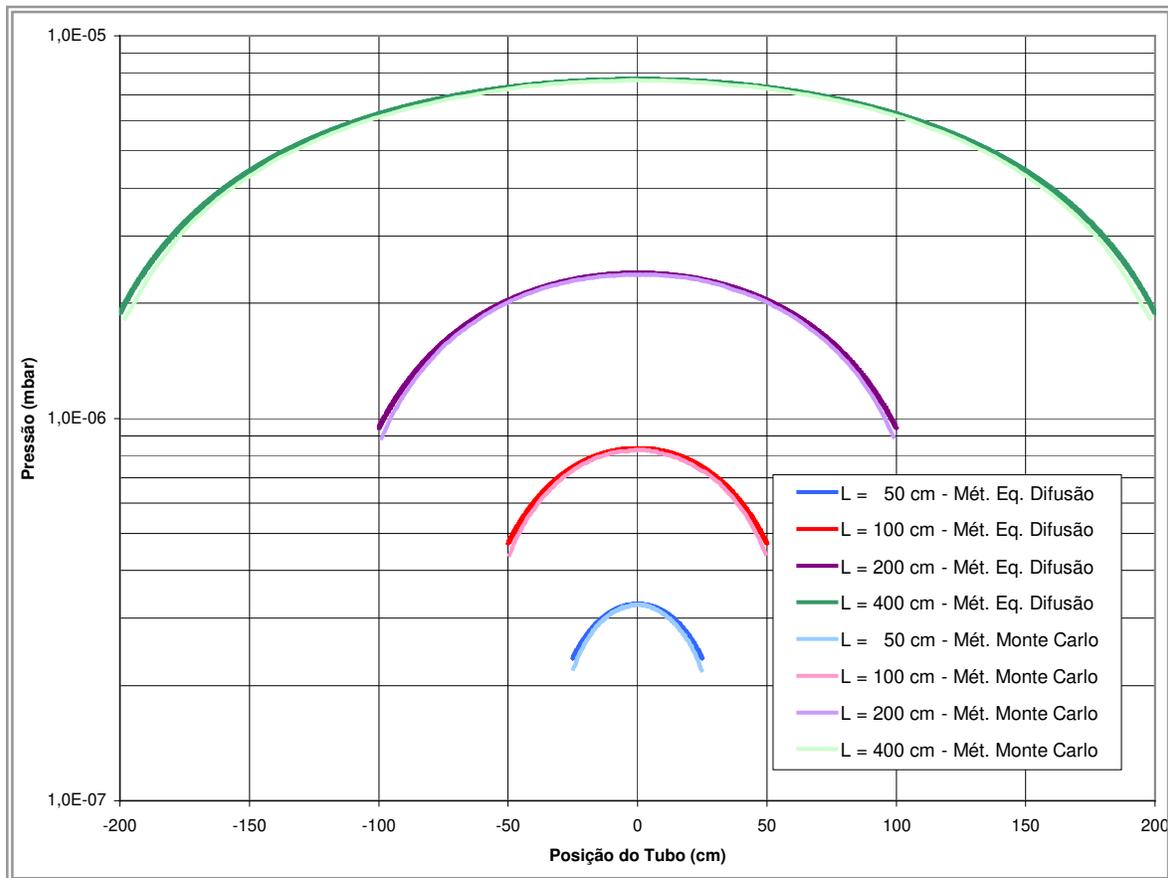


Figura G.6 Campo de pressão em sistema de alto-vácuo tubular com taxa de degaseificação constante. Bombas de alto-vácuo nas extremidades do tubo com velocidades de bombeamento iguais entre si.

Vemos que há uma concordância bastante boa entre os campos de pressão obtidos por meio da equação de difusão e pelo método de *Monte Carlo*. A concordância é bastante boa não somente para comprimentos grandes em relação ao diâmetro do tubo, mas também para comprimentos da ordem da dimensão do diâmetro. Estamos diante de um fato muito surpreendente. O modelo difusivo deveria ser válido apenas para os casos tubulares cujo comprimento do tubo fosse muito maior que a dimensão transversal ao seu eixo. No caso particular de tubo cilíndrico, com o comprimento muito menor que o diâmetro do tubo. Mas de forma completamente inesperada encontramos que o campo de pressão obtido por meio da equação de difusão é quase igual àquele obtido pelo método de *Monte Carlo*. Na prática, considerando a resolução dos medidores de alto-vácuo disponíveis no mercado, podemos dizer que, para uma dada situação, os campos de pressão são iguais! Observamos um outro fato notável, analisando as curvas acima. Sistemáticamente, a

pressão na extremidade do tubo obtido pela equação de difusão é maior que àquela obtida pelo método de *Monte Carlo*. A diferença entre os valores de pressão nas extremidades do tubo, para cada caso, no máximo é de 5%. À medida que percorremos a extensão do tubo no sentido do seu ponto médio, a diferença de pressão – obtida por meio dos dois métodos – tende a zero.

O aspecto marcante e inesperado está no fato de, mesmo para os casos em que o comprimento é da ordem do diâmetro, verificarmos que o modelo difusivo leva à resultados quase iguais àqueles obtidos por meio do método de *Monte Carlo*. A questão física está no fato de que mantendo o diâmetro do tubo fixo, ao diminuirmos o comprimento do tubo, podemos ter partículas viajando diretamente de uma extremidade à outra do tubo, sem a ocorrência de choques com as paredes do tubo, conseqüentemente não respeitando o equilíbrio local. Desta forma, do ponto de vista do processo físico básico de transporte, dizemos que não há observância e obediência do equilíbrio local. Isto quer dizer, matematicamente falando, que não podemos escrever em cada ponto do eixo do sistema de vácuo tubular a lei de *Fick* – sabemos que este tipo de lei declara que o transporte de alguma grandeza física é proporcional ao gradiente de alguma outra grandeza física, no caso, o *throughput* é proporcional ao gradiente da pressão. A seguir mostramos a lei de *Fick* adaptada ao transporte de gases no regime molecular

$$q(x,t) = -c \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} .$$

Sempre devemos ter presente que a imposição simplesmente da conservação de energia ao sistema físico não leva à equação de difusão. Observando detidamente a dedução da equação de difusão aplicada ao regime molecular, feita em detalhe no *Apêndice B*, verificamos que após o estabelecimento da equação de balanço energético, impusemos explicitamente a lei de *Fick* mostrada anteriormente. Assim, frisando mais uma vez: o aspecto marcante, inesperado e surpreendente está no fato de verificarmos que o modelo difusivo aplicado ao escoamento dos gases escoando no regime molecular leva à resultados que são verificados por meio do método de *Monte Carlo*. Veja que o cálculo por meio do método de *Monte Carlo* é completamente diferente daquele do modelo difusivo. Foi este fato surpreendente que levou o autor deste trabalho em acreditar que o modelo difusivo é aplicável em outras geometrias e levou à dedução da equação de difusão, tanto para o caso bidimensional como tridimensional. Cabe mencionar que não há explicação para o fato de verificarmos a validade da equação de difusão nos casos de tubos de comprimento da ordem do seu diâmetro. Deve acontecer algum processo adicional àquele dos choques com as paredes do tubo que faz com que o escoamento dos gases seja tratado como fenômeno de origem difusiva.

Certamente estamos diante de algo interessante a ser investigado. Apresentaremos a seguir outros casos de estudo em sistemas de alto-vácuo, cujos campos de pressão foram determinados tanto por meio da equação de difusão como pelo método de *Monte Carlo*, e em seguida comparados.

Os cálculos realizados em todos os casos de estudo deste apêndice, por meio do método de *Monte Carlo*, foram feitos utilizando o programa *MolFlowTM*. Este programa e as análises apresentadas são de autoria do Dr. Roberto Kersevan do European Synchrotron Radiation Facility – *ESRF* de Grenoble, França. O programa *MolFlowTM* é considerado o melhor da sua área e tem sido intensamente utilizado em grandes projetos de aceleradores de partículas.

Seja o sistema de vácuo em forma tubular com tubo cônico como mostrado na Figura G.7. Temos os diâmetros D_M e D_m e comprimento L . Há duas bombas de alto-vácuo, uma em cada extremidade do tubo cônico. A velocidade de bombeamento de cada bomba de alto-vácuo é igual S_{bv} e a velocidade efetiva de bombeamento em cada extremidade do tubo é igual à S_{ef} . A taxa de degaseificação específica por unidade de área da parede do tubo q_{deg} é constante, a condutância específica ou condutância por unidade de comprimento depende da posição ao longo do eixo do tubo cônico.

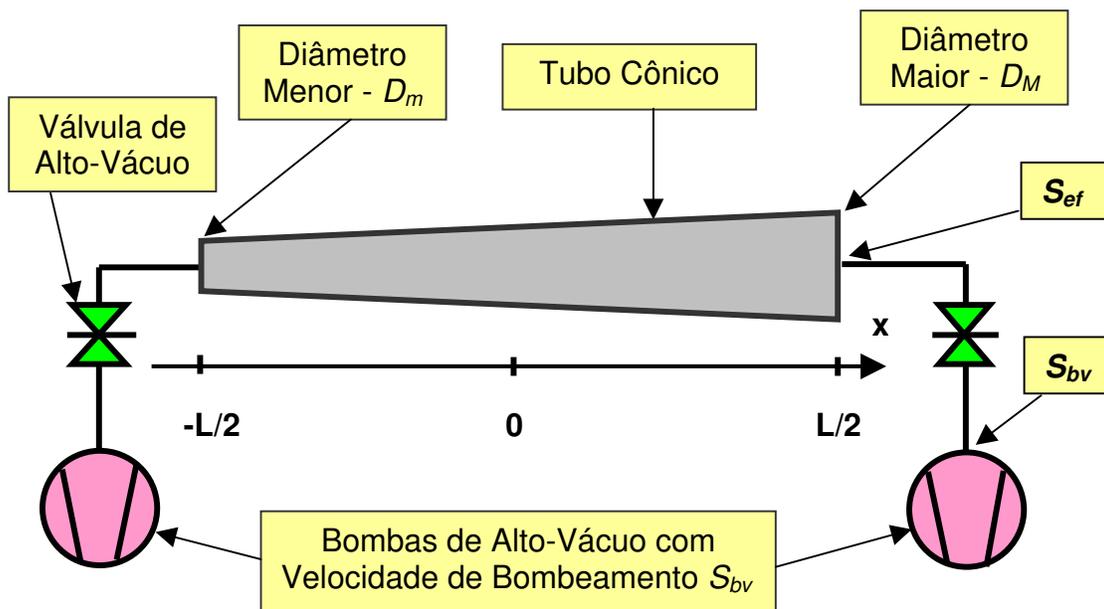


Figura G.7 Sistema de alto-vácuo com tubo cônico com taxa de degaseificação por unidade de área constante. Bombas de alto-vácuo com mesma velocidade de bombeamento.

Este problema está tratado em detalhe no *Capítulo 3* e sua teoria no *Apêndice B*. Na Figura G.8 mostramos as curvas de campo de pressão para o caso do tubo cônico adotando três velocidades de bombeamento em suas extremidade. Os resultados foram obtidos por meio do método de *Monte*

Carlo. O diâmetro maior do tubo cônico é $D_M = 6$ cm, o diâmetro menor é $D_m = 3$ cm, o comprimento é $L = 400$ cm, a taxa de degaseificação específica por unidade de área é $q_{deg} = 1 \times 10^{-9}$ mbar.litro.s⁻¹.cm⁻². As velocidades efetivas de bombeamento são: para o caso 1, $S_{-L/2} = S_{+L/2} = 5$ l.s⁻¹; para o caso 2, $S_{-L/2} = S_{+L/2} = 50$ l.s⁻¹; e para o caso 3, $S_{-L/2} = 83,2$ l.s⁻¹ e $S_{+L/2} = 332,8$ l.s⁻¹.

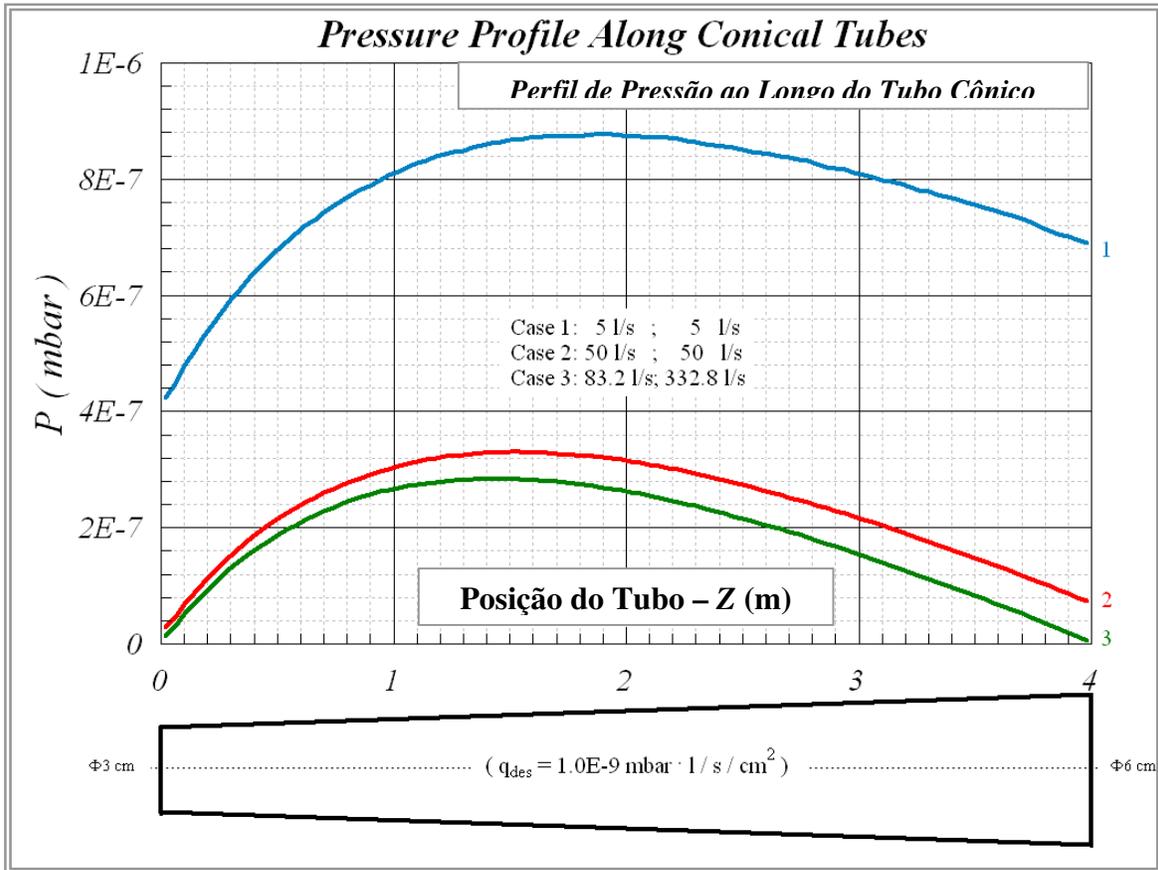


Figura G.8 Campo de pressão ao longo do eixo do tubo cônico. As velocidades efetivas de bombeamento são as seguintes: $S_{-L/2} = S_{+L/2} = 5$ l.s⁻¹ – linha azul; $S_{-L/2} = S_{+L/2} = 50$ l.s⁻¹ – linha vermelha; $S_{-L/2} = 83,2$ l.s⁻¹ e $S_{+L/2} = 332,8$ l.s⁻¹ – linha verde. Cálculos realizados pelo método de Monte Carlo.

Na Figura G.9 mostramos as curvas de campo de pressão para o caso de tubo cônico considerando as seguintes velocidades efetivas de bombeamento são: para o caso 1, $S_{-L/2} = S_{+L/2} = 5$ l.s⁻¹, para o caso 2, $S_{-L/2} = S_{+L/2} = 50$ l.s⁻¹, e para o caso 3, $S_{-L/2} = 500$ l.s⁻¹ e $S_{+L/2} = 500$ l.s⁻¹. Os resultados foram obtidos por meio da equação de difusão. As soluções foram obtidas tanto em forma analítica como por recursos numérico-computacionais. Nestes casos fizemos uso do método dos elementos finitos e método de Runge-Kutta de 2ª ordem. No caso do método dos elementos

finitos, a análise foi realizada pelo Dr. Sérgio Luiz Lopes Verardi, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – EPUSP, usando programa desenvolvido por ele mesmo. No caso do método de Runge-Kutta de 2ª ordem, o programa foi desenvolvido pelo autor deste trabalho utilizando o programa *MathCad™* – Versão 13 e o programa *Maple 5*.

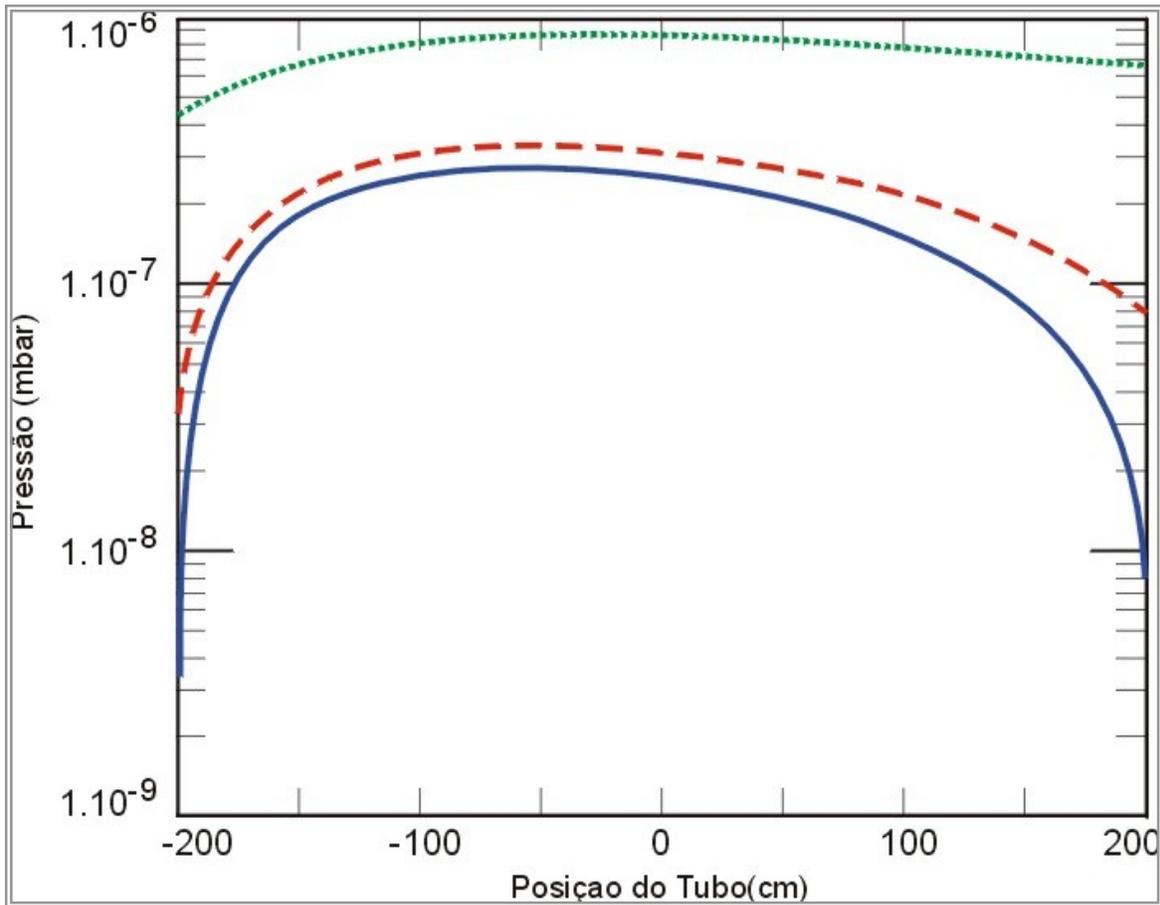


Figura G.9 Campo de pressão ao longo do eixo do tubo cônico. $S_{L/2} = S_{+L/2} = 5 \text{ l.s}^{-1}$ – linha pontilhada verde; $S_{L/2} = S_{+L/2} = 50 \text{ l.s}^{-1}$ – linha tracejada vermelha; $S_{L/2} = S_{+L/2} = 500 \text{ l.s}^{-1}$ – linha cheia azul. Cálculos realizados pelo modelo difusivo.

Vemos nestes sistemas de alto-vácuo tubular cônico que os campos de pressão obtidos tanto pela equação de difusão como pelo método de *Monte Carlo* são muito próximos entre si. Considerando os medidores de alto vácuo disponíveis no mercado as curvas podem ser adotadas como iguais. Observando as curvas detidamente, devemos tecer algumas considerações. No caso da análise feita utilizando o método de *Monte Carlo* não podemos impor qualquer velocidade de bombeamento em uma área. Pela própria característica inerente ao método de *Monte Carlo*, uma

determinada área terá no máximo uma velocidade de bombeamento que é dada pela probabilidade de choque nesta área. Assim, vemos que não foi possível determinar o campo de pressão para o caso da velocidade de bombeamento igual a 500 litros/segundo. Isto não constitui um problema prático grande, uma vez que nos casos em que a condutância específica na extremidade seja menor que a velocidade de bombeamento nesta extremidade, teremos que o gradiente do campo de pressão terá valores bastante altos. Desta forma, pouco distante desta extremidade o campo de pressão não será influenciado pela alta velocidade de bombeamento. Este fato está em total acordo com o discutido no *Apêndice D*. Este é um dos fatos mais marcantes da tecnologia do vácuo, como fizemos questão de inúmeras vezes de ressaltar. De qualquer forma temos um problema interessante e importante pela frente. Estudar como ficaria o caso de instalarmos uma câmara de vácuo junto a uma das extremidades do tubo, com a câmara de vácuo estando a uma pressão muito baixa.

Outro caso de estudo será considerado a seguir. Seja o sistema de alto-vácuo em forma tubular com a associação de um tubo cilíndrico ligado a um tubo cônico e ligado a um tubo cilíndrico, como mostrado na Figura G.10.

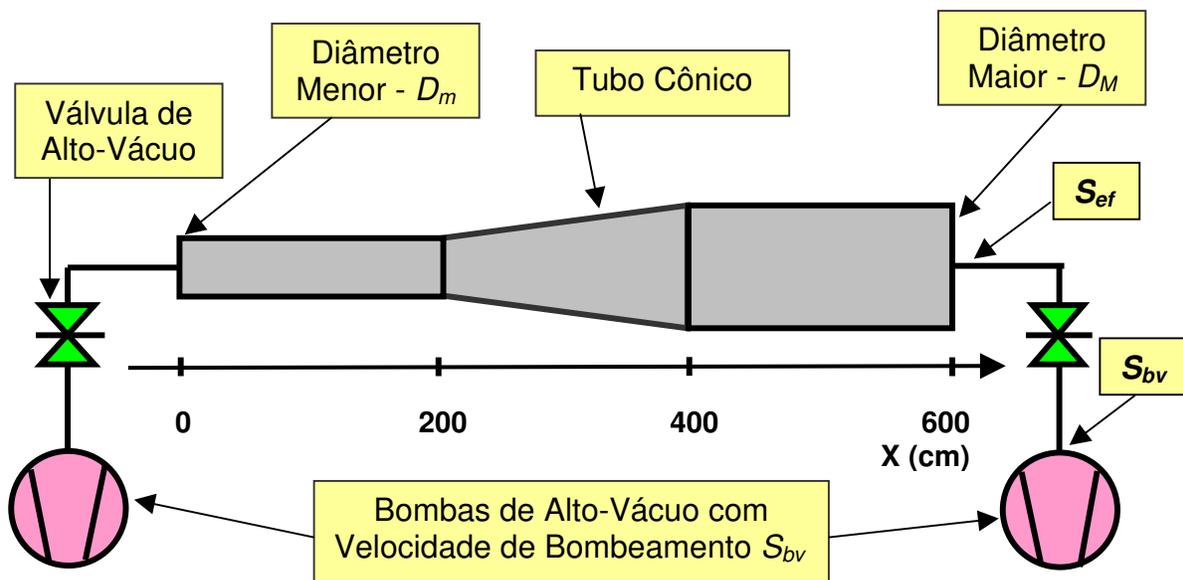


Figura G.10 Sistema de alto-vácuo com tubo cônico com taxa de degaseificação por unidade de área constante. Bombas de alto-vácuo com mesma velocidade de bombeamento.

Temos os diâmetros maior $D_M = 6$ cm e o menor $D_m = 3$ cm, o comprimento de cada trecho de tubo igual a 2 m, assim o comprimento total da associação de tubos é de 6 m. Há duas bombas de alto-vácuo, uma em cada extremidade da associação tubular cilíndrico-cônico-cilíndrico. A velocidade de bombeamento de cada bomba de alto-vácuo é igual S_{bv} e a velocidade efetiva de

bombeamento em cada extremidade do tubo é igual à S_{ef} . A taxa de degasificação específica por unidade de área da parede dos tubos é igual à $q_{deg} = 1.0 \times 10^{-8} \text{ mbar.litros.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$, a condutância específica ou condutância por unidade de comprimento depende da posição ao longo do eixo do tubo cônico. Na Figura G.11 mostramos as curvas de campo de pressão obtidas pelo método de *Monte Carlo*. O sistema de alto-vácuo é formado pela associação de tubo cilíndrico em série com tubo cônico em série com tubo cilíndrico considerando as seguintes velocidades efetivas de bombeamento são: para o caso 1, $S_0 = S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$, para o caso 2, $S_0 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$, para o caso 3, $S_0 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ e para o caso 4, $S_0 = 20 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$. Sendo S_0 a velocidade efetiva de bombeamento na extremidade tubo em $x = 0 \text{ m}$ e S_6 em $x = 6 \text{ m}$.

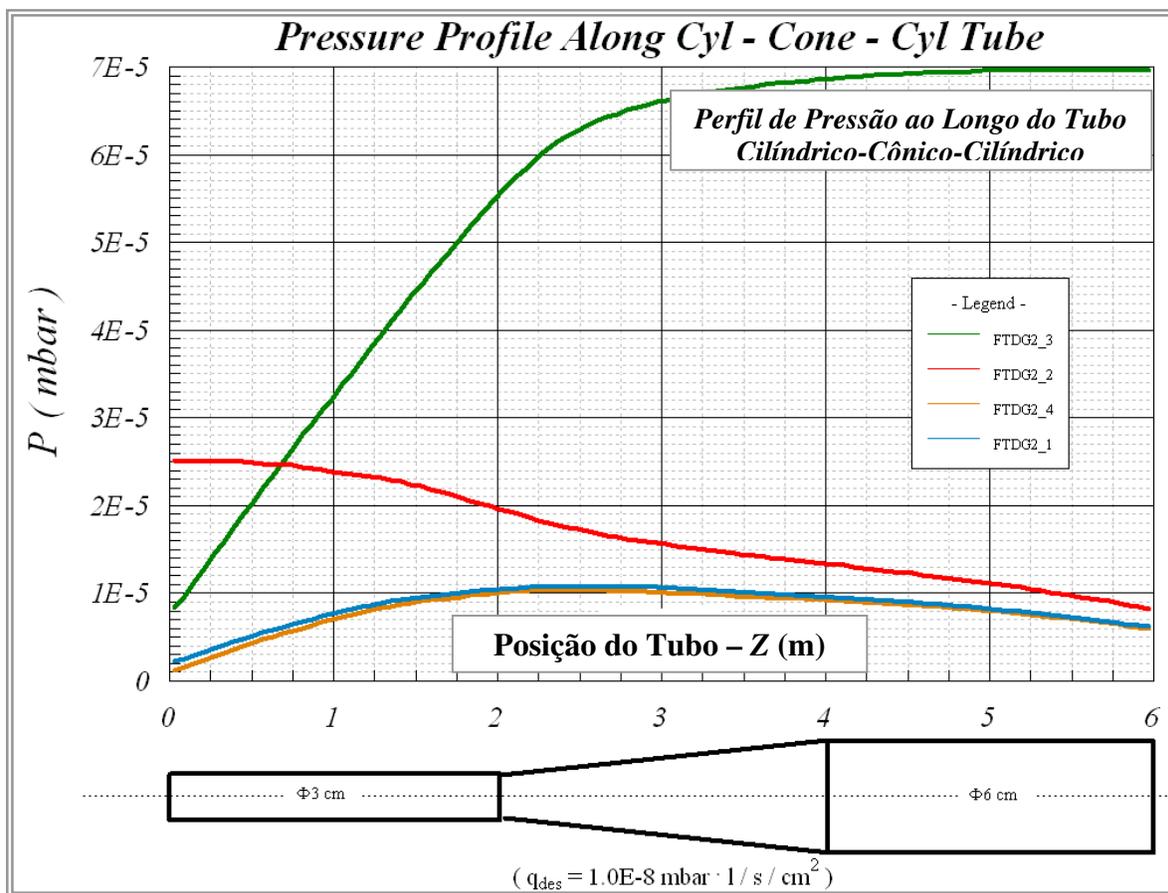


Figura G.11 Campo de pressão ao longo do eixo da associação tubular cilindro-cone-cilindro. As velocidades efetivas de bombeamento são as seguintes: caso 1, $S_0 = S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linha azul, para o caso 2, $S_0 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linha vermelha, para o caso 3, $S_0 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ – linha verde e para o caso 4, $S_0 = 20 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linha laranja. Cálculos realizados pelo método de *Monte Carlo*.

Os cálculos realizados pelo método de *Monte Carlo* foram feitos utilizando o programa *MolFlowTM* e as análises apresentadas são novamente de autoria do Dr. Roberto Kersevan. Na Figura G.12 mostramos em mais detalhe as curvas de campo de pressão. Na Figura G.12 mostramos as mesmas curvas de campo de pressão mostradas anteriormente, somente que ampliadas para detalhar as curvas em menores valores de pressão.

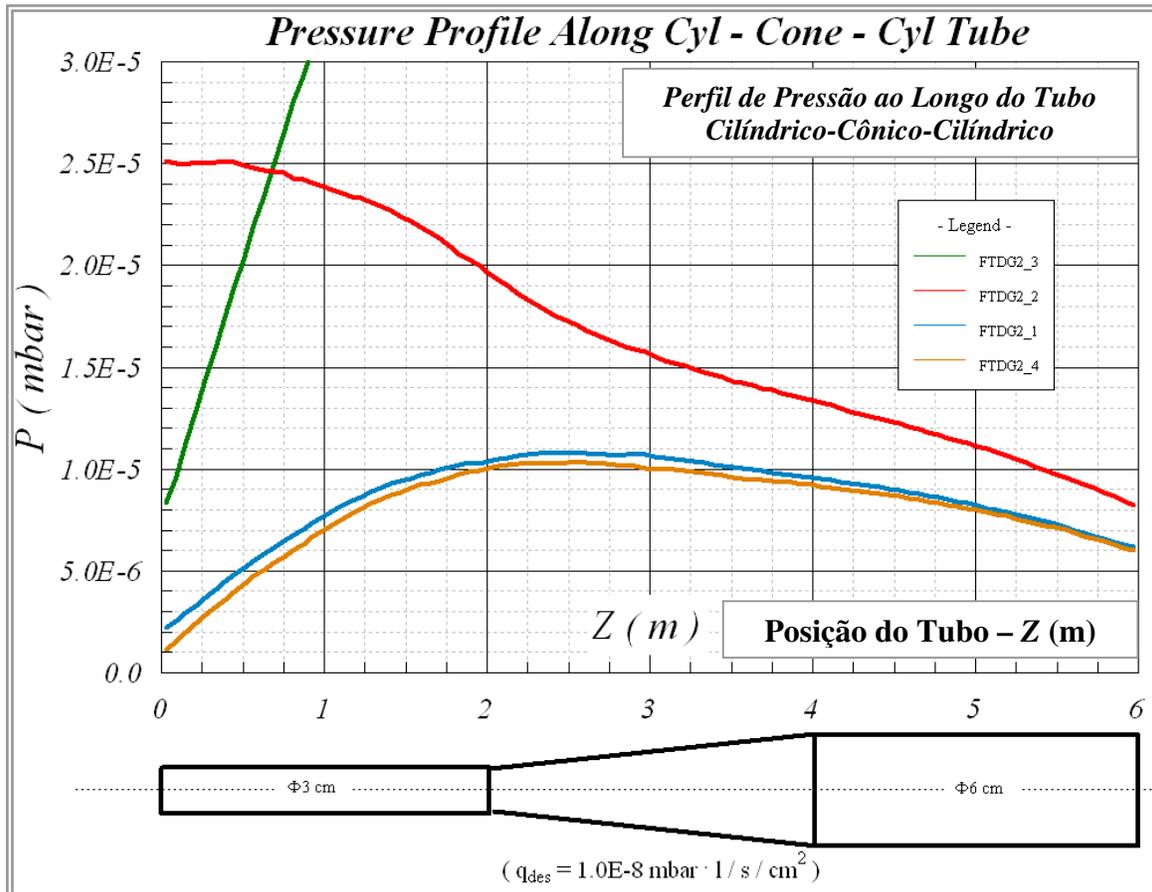


Figura G.12 Campo de pressão ao longo do eixo da associação tubular cilindro-cone-cilindro em detalhe para menores valores de pressão. As velocidades efetivas de bombeamento são as seguintes: caso 1, $S_0 = S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linha azul, para o caso 2, $S_0 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linha vermelha, para o caso 3, $S_0 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ – linha verde e para o caso 4, $S_0 = 20 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linha laranja. Cálculos realizados pelo método de *Monte Carlo*.

Continuando, na Figura G.13 mostramos as curvas de campo de pressão do mesmo caso anterior, mas com os resultados obtidos por meio da equação de difusão e graficadas junto às curvas obtidas pelo método de *Monte Carlo*. Desta forma fica mais direta a comparação entre os dois

métodos de análise. É importante frisar que os cálculos feitos das duas maneiras são completamente diferentes entre si, um é determinístico – equação de difusão – e o outro é de natureza intrinsecamente probabilístico – método de *Monte Carlo*. As soluções foram obtidas tanto em forma analítica como em forma utilizando recursos numérico-computacionais. Nestes casos de estudo também fizemos uso do método dos elementos finitos e método de *Runge-Kutta* de 2ª ordem. A análise feita pelo método dos elementos finitos foi realizada mais uma vez pelo Dr. Sérgio L. L. Verardi. No caso do método de Runge-Kutta de 2ª ordem, o programa foi desenvolvido pelo autor deste trabalho utilizando o programa *MathCad™* – Versão 13 e o programa *Maple 5*.

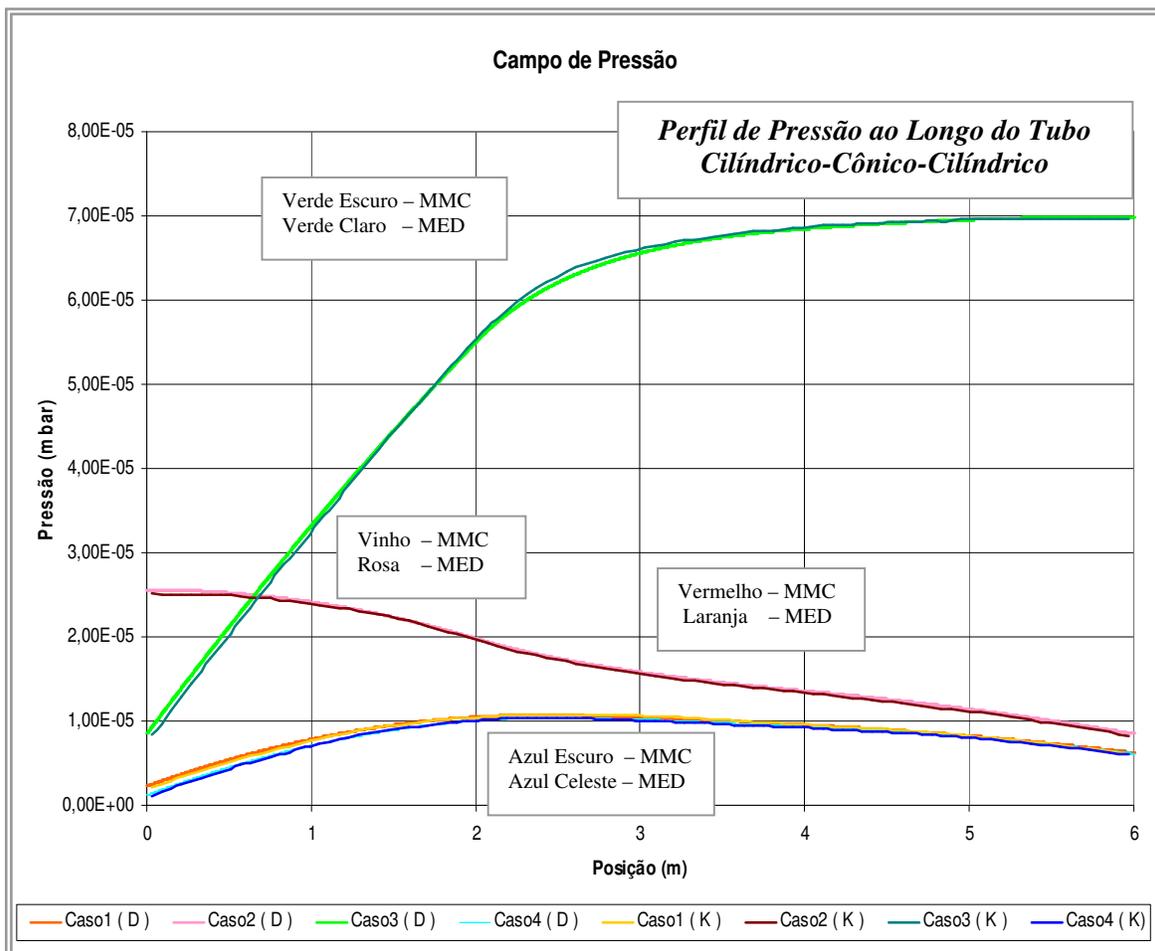


Figura G.13 Campo de pressão ao longo do eixo da associação tubular cilindro-cone-cilindro. As velocidades efetivas de bombeamento são as seguintes: caso 1, $S_0 = S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas vermelha e laranja, para o caso 2, $S_0 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas vinho e rosa, para o caso 3, $S_0 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas verde escuro e verde claro e para o caso 4, $S_0 = 20 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas azul e celeste. Modelo feito utilizando a equação de difusão com as soluções obtidas por meio do método dos elementos finitos.

Na Figura G.14 mostramos as mesmas curvas de campo de pressão mostradas anteriormente, somente que ampliadas para detalhar as curvas em menores valores de pressão.

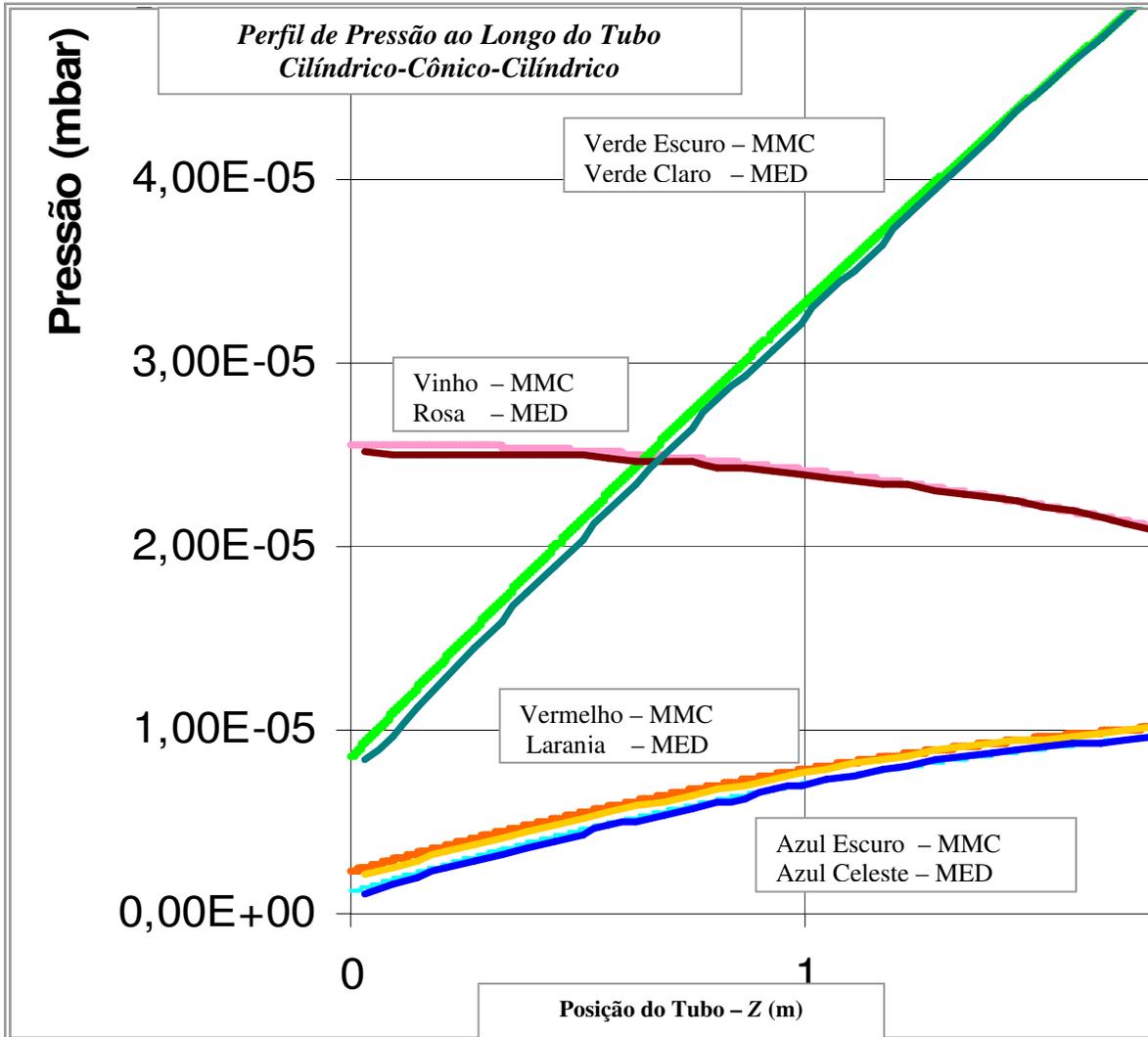


Figura G.14 Campo de pressão ao longo do eixo da associação tubular cilindro-cone-cilindro em detalhe para menores valores de pressão. As velocidades efetivas de bombeamento são as seguintes: caso 1, $S_0 = S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas vermelha e laranja, para o caso 2, $S_0 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas vinho e rosa, para o caso 3, $S_0 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 0 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas verde escuro e verde claro e para o caso 4, $S_0 = 20 \text{ l.s}^{-1}$ e $S_6 = 10 \text{ l.s}^{-1}$ – linhas azul e celeste. Modelo feito utilizando a equação de difusão com as soluções obtidas por meio do método dos elementos finitos.

Vemos também nestes sistemas de alto-vácuo tubular, com associação em série de três tubos cilíndrico-cônico-cilíndrico que os campos de pressão obtidos tanto pela equação de difusão

como pelo método de *Monte Carlo* são muito próximos entre si. Mais uma vez, considerando os medidores de alto vácuo disponíveis no mercado as curvas podem ser adotadas como iguais. Vemos um efeito interessante que ocorre na extremidade esquerda do tubo e que podemos arriscar uma generalização. Observamos nos casos, que ocorrem gradientes de pressão grandes, um maior distanciamento entre os resultados obtidos pelo método de *Monte Carlo* e a equação de difusão. Assim, à medida que temos a pressão variando pouco ao longo do tubo, isto é, gradientes de pressão pequenos, as curvas de campo de pressão, para um mesmo caso de estudo, praticamente se confundem. Com este fato podemos ver de forma bastante marcante na extremidade direita do tubo. Fisicamente falando, na extremidade direita do tubo a condutância específica é muito grande comparada às velocidades efetivas de bombeamento, assim a pressão varia muito pouco. Este comportamento geral, verificado nos sistemas de vácuo, foi discutido em detalhe no *Apêndice D*.

Finalizando as comparações feitas na modelagem de sistemas de alto-vácuo utilizando o método de Monte Carlo e a equação de difusão, temos um sistema de alto-vácuo bidimensional, conforme esquematizado na Figura G.15.

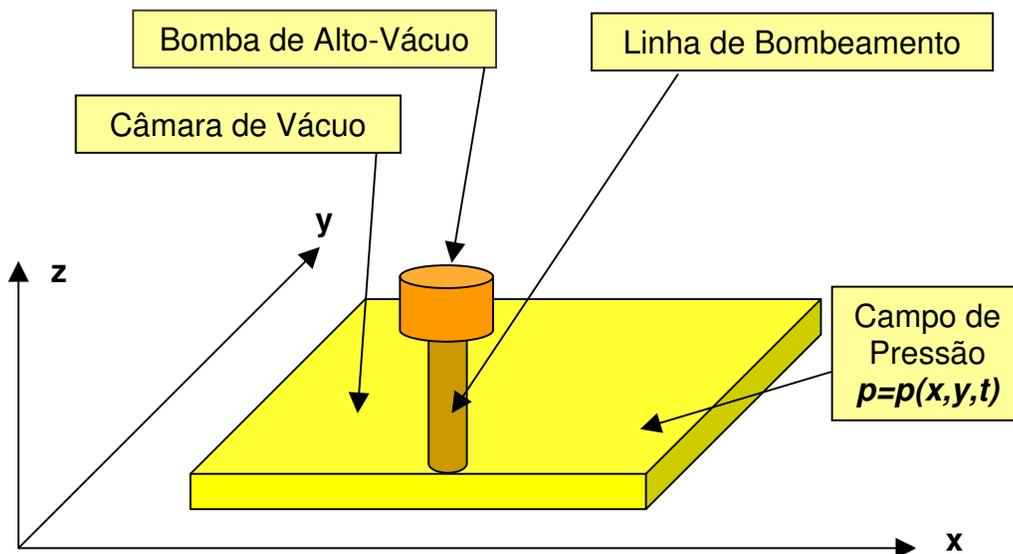


Figura G.15 Representação esquemática de um sistema de alto-vácuo bidimensional, mostrando a câmara de vácuo, a tubulação e a bomba de vácuo.

Este sistema de alto vácuo tem as seguintes dimensões geométricas: Comprimento de 12 cm, largura de 8 cm e altura de 0,05 cm. Vemos que devido à pequena altura, podemos dizer que é um sistema de vácuo bidimensional, este fato foi muito discutido no *Apêndice B*. A velocidade efetiva de bombeamento é igual a $S_{ef} = 1$ litro/segundo. A taxa de degasificação específica por

unidade de área da parede da câmara de vácuo é igual à $q_{deg} = 1 \times 10^{-8}$ mbar.litros.s⁻¹.cm⁻². A Figura G.16 mostra a curva de campo de pressão obtida pelo método de *Monte Carlo*.

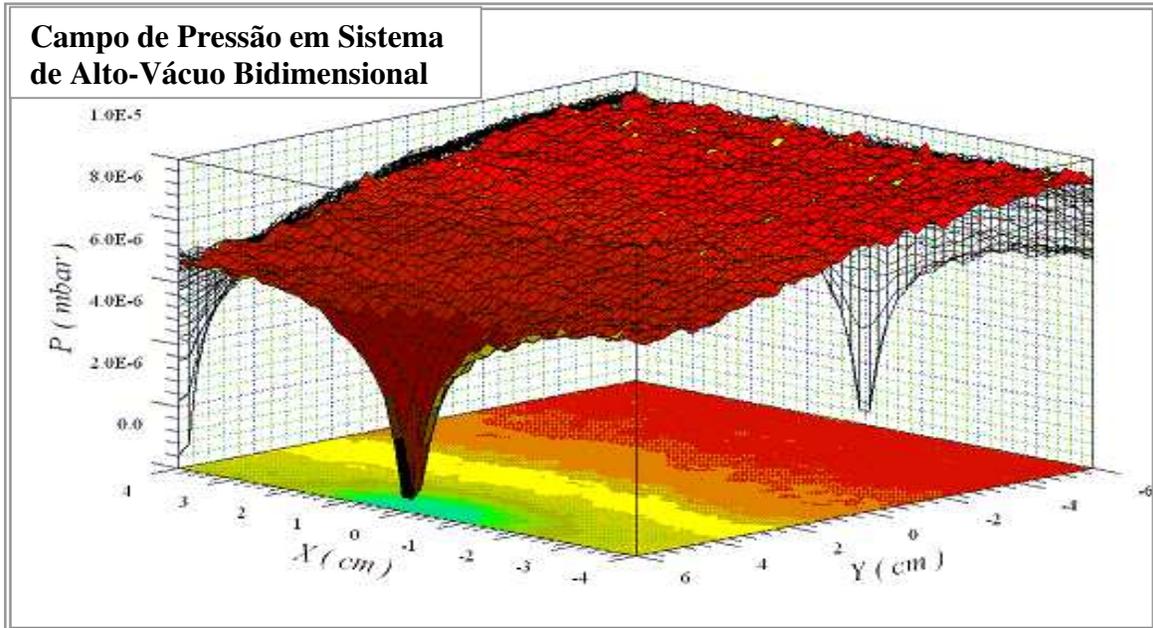


Figura G.16 Campo de Pressão em sistema de alto-vácuo bidimensional. A bomba de vácuo está instalada na posição $(x,y) = (0,-6)$. A solução foi obtida por meio do método de *Monte Carlo*.

A seguir vemos na Figura G.17 a curva de campo de pressão empregando a equação de difusão e a solução obtida pelo método dos elementos finitos, com $q_{deg} = 2 \times 10^{-9}$ mbar.litros.s⁻¹.cm⁻².

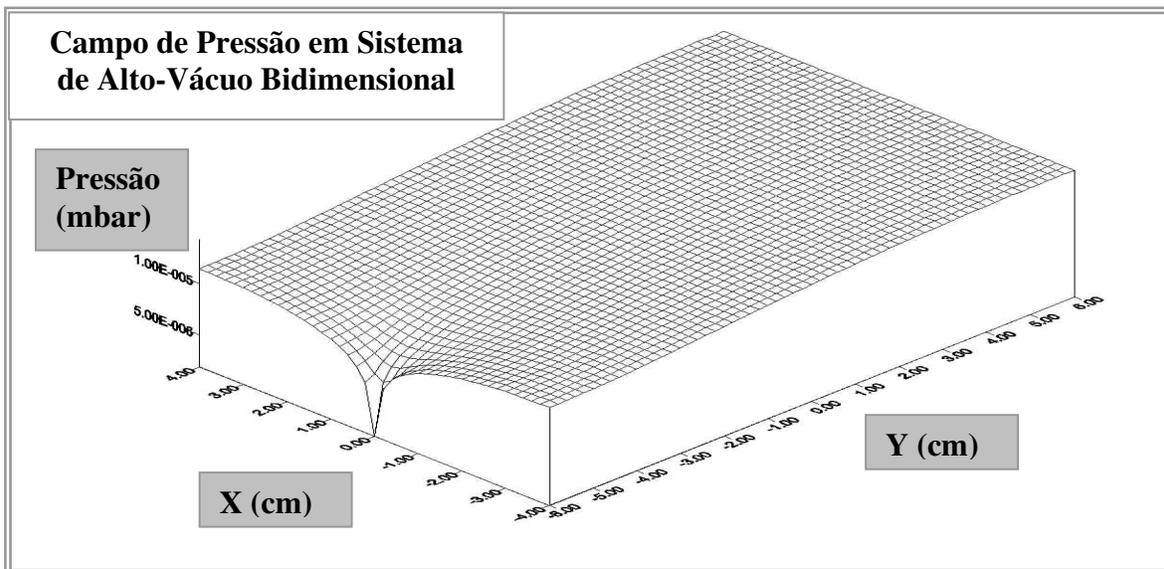


Figura G.17 Campo de Pressão em sistema de alto-vácuo bidimensional. A bomba de vácuo está instalada na posição $(x,y) = (0,-6)$. A solução foi obtida por meio da equação de difusão.

Vemos que neste sistema de alto-vácuo bidimensional os campos de pressão obtidos tanto pela equação de difusão como pelo método de *Monte Carlo* têm suas formas iguais. Neste caso de estudo houve um desencontro entre as análises feitas por meio dos dois métodos. O motivo foi que foram adotados valores diferentes para as taxas de degaseificação específica por unidade de área. Assim, obviamente não houve concordância numérica entre eles. Nos casos mostrados acima, temos que foi considerado $q_{deg} = 1 \times 10^{-8}$ mbar.litros.s⁻¹.cm⁻² para a análise pelo método de *Monte Carlo*, e para a análise usando a equação de difusão $q_{deg} = 2 \times 10^{-9}$ mbar.litros.s⁻¹.cm⁻². Foram feitas mais três análises sob as mesmas condições em sistemas de alto-vácuo bidimensionais mais sofisticados que este apresentado. Os formatos das curvas de campo de pressão são os mesmos para os dois métodos de modelagem.

Observamos mais uma vez o efeito marcante da pequena condutância específica do sistema de vácuo. O gradiente do campo de pressão é grande próximo à entrada da bomba de vácuo e a partir desta região a pressão não varia significativamente por unidade de comprimento. Este resultado foi obtido tanto pelo método de *Monte Carlo* como pela equação de difusão. Este comportamento geral, verificado nos sistemas de vácuo, foi discutido em detalhe no *Apêndice D*.

Finalizamos o *Apêndice G* dizendo que a modelagem de sistemas de alto-vácuo e ultra alto-vácuo, ou de maneira mais rigorosa, sistemas de vácuo com os gases escoando no regime molecular podem ser realizadas por meio da equação de difusão. Este tipo de abordagem é utilizado há vários anos, ocorre que a sua abrangência não é grande e está restrita a poucos especialistas. No caso de sistemas de vácuo tubulares o método difusivo é empregado e, quando o tubo tem sua área de seção dependente da posição, como, por exemplo, um tubo cônico, em geral ele acaba sendo aproximado por vários pequenos tubos cilíndricos montados em série. Um aspecto apresentado neste trabalho de tese é que temos agora um procedimento geral de definição de condutância específica, de taxa de degaseificação específica tanto para fontes gasosas extensas como localizadas espaço e no tempo. O fato de termos obtidos os resultados surpreendentes e inesperados do campo de pressão em tubos, de comprimento da mesma ordem do seu diâmetro, por meio do modelo difusivo em concordância com aqueles obtidos pelo método de *Monte Carlo* corroborou a idéia de utilizarmos o modelo difusivo em sistemas de alto-vácuo bidimensionais e tridimensionais. Desta forma, nos sistemas de alto-vácuo bidimensionais, aplicamos o modelo difusivo e conseguimos aparentemente resultados que podem ser considerados como promissores, com isto posto, encoraja-nos e estimula-nos a prosseguir com o trabalho.

Referências:

- Degasperi, F.T.; “Caderno de Atividades - Notas Particulares”. Instituto de Física da Universidade de São Paulo.
- Degasperi, F.T.; "Dedução da Equação Fundamental para o Processo de Bombeamento na Tecnologia do Vácuo. Objetivo Didático". XII Congresso Brasileiro de Aplicações de Vácuo na Ciência e na Indústria – XII CBRAVIC. Florianópolis, SC, Brasil, 1991. Seminário.
- Degasperi, F.T.; “Análise Detalhada de Sistemas de Vácuo”. Laboratório do Acelerador Linear do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil, 1999. Seminário.
- Viana, E.R.; “Estudos para a Simulação de Transporte de Gases em Regime de Escoamento Molecular”. Trabalho de Graduação do Curso de MPCE. Faculdade de Tecnologia de São Paulo. Orientador: F.T. Degasperi. 1999.
- Raimundo, D.E.; “Simulação de Escoamentos de Gases no Regime Molecular”. Trabalho de Graduação do Curso de MPCE. Faculdade de Tecnologia de São Paulo. Orientador: F.T. Degasperi. 2001.
- Walton, A.L.; “Three Phases of Matter”. Second Edition. Oxford University Press. 1992.
- Pécseli, H.L.; “Fluctuations in Physical Systems”. Cambridge University Press. 2000.
- Watanabe, E.T; “Simulação de Escoamentos de Gases no Regime Molecular em Três Dimensões pelo Método de *Monte Carlo*”. Trabalho de Graduação do Curso de MPCE. Faculdade de Tecnologia de São Paulo. Orientador: F.T. Degasperi. 2006. Trabalho em Andamento.
- Kersevan, R.; Discussões e Documentos Privados sobre Modelagens de Sistemas de Alto-Vácuo pelo Método de *Monte Carlo*. 2005 e 2006.