

Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação

# **Contribuições Teóricas para o Estudo de Funções de Distribuição Correlacionadas em um Canal sem Fio**

**Rausley Adriano Amaral de Souza**  
**Orientador: Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub**

**Tese de Doutorado** apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de concentração: **Engenharia Elétrica**.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub ..... DECOM/FEEC/UNICAMP  
Prof. Dr. Celso de Almeida ..... DECOM/FEEC/UNICAMP  
Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes ..... DECOM/FEEC/UNICAMP  
Prof. Dr. Adonias Costa da Silveira ..... Inatel  
Prof. Dr. Marcelo E. Pellenz ..... PUCPR

Campinas, SP

Maio/2009

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

So85c Souza, Rausley Adriano Amaral de  
Contribuições teóricas para o estudo de funções de  
distribuição correlacionadas em um canal sem fio /  
Rausley Adriano Amaral de Souza. – Campinas, SP:  
[s.n.], 2009.

Orientador: Miched Daoud Yacoub.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica  
e de Computação.

1. Sistemas de comunicação sem fio. 2. Rádio -  
Transmissores e transmissão - desvanecimento. 3.  
Correlação (Estatística). 4. Comunicações digitais. 5.  
Variáveis aleatórias. I. Yacoub, Michel Daoud. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

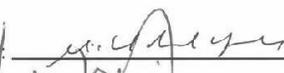
Título em Inglês:	Theoretical contributions to the study of correlated distributions functions of wireless channels
Palavras-chave em Inglês:	Correlation, Probability density functions, Fading, Diversity, Nakagami
Área de concentração:	Telecomunicações e Telemática
Titulação:	Doutor em Engenharia Elétrica
Banca Examinadora:	Adonias Costa da Silveira, Celso de Almeida, Marcelo Eduardo Pellenz, Renato da Rocha Lopes
Data da defesa:	21/05/2009
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Elétrica

**COMISSÃO JULGADORA - TESE DE DOUTORADO**

**Candidato:** Rausley Adriano Amaral de Souza

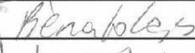
**Data da Defesa:** 21 de maio de 2009

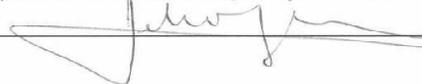
**Título da Tese:** "Contribuições Teóricas para o Estudo de Funções de Distribuição Correlacionadas em um Canal sem Fio"

Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub (Presidente): 

Prof. Dr. Adonias Costa da Silveira: 

Prof. Dr. Marcelo Eduardo Pellenz: 

Prof. Dr. Renato da Rocha Lopes: 

Prof. Dr. Celso de Almeida: 

# Resumo

Em comunicações móveis, o desvanecimento por múltiplos percursos é modelado por várias distribuições incluindo Hoyt, Rayleigh, Weibull, Nakagami- $m$  e Rice. Nesta tese, são deduzidas expressões exatas para o modelo de duas variáveis Hoyt (Nakagami- $q$ ) com correlação arbitrária em um ambiente não estacionário. De forma específica, as seguintes estatísticas são encontradas: função densidade de probabilidade conjunta, função de distribuição cumulativa conjunta, coeficiente de correlação e algumas estatísticas relacionadas ao parâmetro SNR na saída do combinador de seleção, a saber, probabilidade de indisponibilidade e função densidade de probabilidade. As expressões fazem uso dos polinômios de Laguerre generalizados. Elas são matematicamente tratáveis e possuem flexibilidade suficiente para acomodar um grande número de cenários de correlação, úteis na análise de um ambiente com desvanecimento mais geral. Depois disto, aproveitando os resultados previamente deduzidos, expressões exatas relacionadas a processos Nakagami- $m$  com duas variáveis com correlação arbitrária e parâmetros de desvanecimento igualmente arbitrários são encontradas. De forma mais específica, as seguintes estatísticas são obtidas neste trabalho: função geratriz de momentos, função densidade de probabilidade conjunta, função de distribuição cumulativa conjunta, coeficiente de correlação de potência, e várias estatísticas ligadas à relação sinal-ruído na saída do combinador de seleção, especialmente, probabilidade de indisponibilidade, função densidade de probabilidade e valor médio da relação sinal-ruído. Recentemente, o modelo de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  foi proposto que leva em conta a não linearidade do meio de propagação assim como o fenômeno de *cluster* de múltiplos percursos das ondas de rádio. A distribuição  $\alpha$ - $\mu$  é geral, flexível e matematicamente tratável. Ela inclui importantes distribuições tais como Gamma (e suas versões discretas Erlang e Chi-Quadrada Central), Nakagami- $m$  (e sua versão discreta Chi), Exponencial, Weibull, Gaussiana Unilateral e Rayleigh. Nesta tese, uma formulação através de série infinita para a função densidade de probabilidade multivariável  $\alpha$ - $\mu$  com matriz de correlação *arbitrária* e variáveis *não identicamente* distribuídas é encontrada. A expressão é *exata e geral* e inclui todos os resultados anteriormente publicados na literatura relacionados às distribuições compreendidas pela distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . A expressão geral é então particularizada para uma *solução aproximada simples na forma fechada*. Adicionalmente, a função distribuição cumulativa conjunta multivariável é obtida, novamente, em uma *forma fechada e simples*. Os resultados exato e aproximado são muito próximos para valores pequenos e médio de correlação. Nós mantemos, entretanto, que uma relação entre os coeficientes de correlação das correspondentes componentes gaussianas deve ser mantida de forma a atender os critérios de convergência.

**Palavras-chave:** Correlação, funções densidade de probabilidade, desvanecimento, diversidade, Rayleigh, Nakagami e Hoyt.

---

# Abstract

In wireless communications, the multipath fading is modeled by several distributions including Hoyt, Rayleigh, Weibull, Nakagami- $m$ , and Rice. In this thesis, new, exact expressions for the bivariate Hoyt (Nakagami- $q$ ) processes with arbitrary correlation in a nonstationary environment are derived. More specifically, the following are obtained: joint probability density function, joint cumulative distribution function, power correlation coefficient, and some statistics related to the signal-to-noise ratio at the output of the selection combiner, namely, outage probability and probability density function. The expressions make use of the well known generalized Laguerre polynomials. They are mathematically tractable and flexible enough to accommodate a myriad of correlation scenarios, useful in the analysis of a more general fading environment. After this, capitalizing on result previously deduced, exact expressions concerning the bivariate Nakagami- $m$  processes with arbitrary correlation and fading parameters are derived. More specifically, the following are obtained in the present work: joint moment generating function; joint probability density function; joint cumulative distribution function; power correlation coefficient; and several statistics related to the signal-to-noise ratio at the output of the selection combiner, namely, outage probability, probability density function, and mean SNR. More recently, the  $\alpha$ - $\mu$  fading model has been proposed that accounts for the non-linearity of the propagation medium as well as for the multipath clustering of the radio waves. The  $\alpha$ - $\mu$  distribution is general, flexible, and mathematically easily tractable. It includes important distributions such as Gamma (and its discrete versions Erlang and Central Chi-Squared), Nakagami- $m$  (and its discrete version Chi), Exponential, Weibull, One-Side Gaussian, and Rayleigh. An infinite series formulation for the multivariate  $\alpha$ - $\mu$  joint probability density function with *arbitrary* correlation matrix and *non-identically* distributed variates is derived. The expression is *exact* and *general* and includes all of the results previously published in the literature concerning the distributions comprised by the  $\alpha$ - $\mu$  distribution. The general expression is then particularized to an indeed *very simple, approximate closed-form solution*. In addition, a multivariate joint cumulative distribution function is obtained, again in *simple, closed-form manner*. Approximate and exact results are very close to each other for small as well medium values of correlation. We maintain, however, that a relation among the correlation coefficients of the corresponding Gaussian components must be kept so that convergence is attained.

**Keywords:** Correlation, probability density functions, fading, diversity, Rayleigh, Nakagami, and Hoyt.

# Agradecimentos

Primeiramente, a Deus por estar comigo durante toda esta jornada.

Ao meu orientador Prof. Dr. Michel Daoud Yacoub pela excelente orientação técnica e, principalmente, por tudo que ensinou-me como pesquisador. Tive a grata satisfação de compreender o significado da palavra orientação. Minha gratidão pelos anos de convivência.

Aos meus colegas do laboratório Wisstek que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para a elaboração desta tese. Em especial, agradeço ao Gustavo Fraidenraich pelo acompanhamento inicial e ao amigo Daniel Benevides pelas contribuições ao longo do trabalho.

Aos que contribuíram com minha formação não acadêmica. Em especial José Carlos Ribeiro, José Francisco Cançado Braga e Artur de Paula Coutinho.

Poucos pessoas participaram tanto deste processo quanto o professor Estevan Marcelo Lopes. Agradeço imensamente a este meu amigo pessoal pelas diferentes formas em que fui ajudado por ele. Espero sinceramente poder retribuir à altura o companheirismo ao longo deste últimos anos.

À minha esposa Andrea. Pelo incentivo e dedicação ao longo dos anos. Estou alegre por completar mais um ciclo em nossas vidas ao teu lado.

Aos meus filhos Daniel e Samuel. Vocês tem sido uma grande alegria em minha vida.

Ao Inatel, pelo apoio ao longo do trabalho.

*À minha esposa, Andrea,  
e aos meus filhos, Daniel e Samuel.*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Siglas</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>Trabalhos Publicados Pelo Autor</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Canal com Desvanecimento . . . . .	1
1.2 Tratamento Estatístico . . . . .	3
1.2.1 A Distribuição Rayleigh . . . . .	3
1.2.2 A Distribuição Rice . . . . .	4
1.2.3 A Distribuição Nakagami- $m$ . . . . .	5
1.2.4 A Distribuição Hoyt (Nakagami- $q$ ) . . . . .	7
1.2.5 A Distribuição Weibull . . . . .	8
1.2.6 A Distribuição $\alpha$ - $\mu$ . . . . .	8
1.2.7 A Distribuição $\eta$ - $\mu$ . . . . .	10
1.2.8 A Distribuição $\kappa$ - $\mu$ . . . . .	12
1.3 Diversidade . . . . .	13
1.4 Tipos de Diversidade . . . . .	14
1.4.1 Métodos de Combinação . . . . .	14
1.5 Correlação . . . . .	16
1.5.1 Modelos de Correlação . . . . .	17
1.6 Revisão Bibliográfica . . . . .	18
1.7 Objetivos e Contribuições do Trabalho . . . . .	20
1.8 Estrutura da Tese . . . . .	21
<b>2 Estatísticas Conjuntas de Duas Variáveis Hoyt Correlacionadas</b>	<b>23</b>
2.1 Introdução . . . . .	23
2.2 PDF Conjunta de Duas Envoltórias Correlacionadas . . . . .	24
2.3 CDF Conjunta de Duas Envoltórias Correlacionadas . . . . .	30
2.4 Coeficiente de Correlação de Potência . . . . .	32

2.5	Casos Especiais . . . . .	33
2.6	Formulação Aproximada . . . . .	35
2.7	Aplicações . . . . .	36
2.7.1	Receptor SC de Dois Ramos . . . . .	37
2.7.2	Receptor MRC de Dois Ramos . . . . .	41
2.7.3	Receptor EGC de Dois Ramos . . . . .	43
2.8	Conclusões . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Estatísticas Conjuntas de Duas Variáveis Nakagami-<math>m</math> Correlacionadas</b>	<b>46</b>
3.1	Introdução . . . . .	46
3.2	PDF Conjunta de duas Envoltórias Nakagami- $m$ Correlacionadas . . . . .	47
3.3	CDF Conjunta de Duas Envoltórias Nakagami- $m$ Correlacionadas . . . . .	51
3.4	Coeficiente de Correlação de Potência . . . . .	52
3.5	Casos Especiais . . . . .	53
3.6	Convergência . . . . .	53
3.7	Aplicações - Receptor SC de Dois Ramos . . . . .	54
3.7.1	Formulações para OP . . . . .	55
3.7.2	PDF da SNR . . . . .	57
3.7.3	Valor Médio da SNR . . . . .	58
3.8	Conclusão . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Distribuição Conjunta <math>\alpha</math>-<math>\mu</math></b>	<b>60</b>
4.1	Introdução . . . . .	60
4.2	A Distribuição Conjunta Gamma . . . . .	60
4.3	Formulação Exata para a Distribuição Conjunta $\alpha$ - $\mu$ Multivariável . . . . .	67
4.4	Conclusões . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Casos Particulares da PDF Conjunta <math>\alpha</math>-<math>\mu</math></b>	<b>70</b>
5.1	Introdução . . . . .	70
5.2	Alguns Casos Particulares - Formulações Exatas . . . . .	70
5.3	Formulação Exata para a Distribuição $\alpha$ - $\mu$ de Duas Variáveis . . . . .	72
5.4	Formulação Aproximada para a Distribuição $\alpha$ - $\mu$ Conjunta Multivariável . . . . .	73
5.4.1	A Expressão Aproximada é uma PDF Válida . . . . .	74
5.4.2	A Forma Aproximada da PDF e CDF Conjunta $\alpha$ - $\mu$ em uma Representação ainda mais Simples . . . . .	75
5.4.3	Aplicações - Receptor SC Multirramos . . . . .	77
5.5	Conclusões . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>85</b>
6.1	Conclusões . . . . .	85
6.2	Trabalhos Futuros . . . . .	86
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>87</b>

# Lista de Figuras

2.1	Padrões de correlação arbitrários definidos em (2.7) em uma perspectiva gráfica. . . . .	26
2.2	OP de um sistema SC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e $\delta_4$ . . . . .	41
2.3	OP de um sistema SC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e $\delta_4$ . . . . .	42
2.4	OP de sistemas MRC e EGC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de $\delta_1 = \delta_2, \eta_1$ e $\eta_2$ . . . . .	44
2.5	OP de sistemas MRC e EGC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de $\delta_1, \delta_2$ e $\eta_1 = \eta_2$ . . . . .	45
3.1	Padrão arbitrário de correlação definido em (3.2) em uma perspectiva gráfica. . . . .	48
3.2	OP de um sistema SC de dois ramos em um canal correlacionado Nakagami- $m$ para vários valores de $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e $\delta_4$ . . . . .	57
3.3	Valor médio da SNR ( $\bar{\gamma}$ ) na saída do Combinador de Seleção. . . . .	59
5.1	CDF na saída do SC com $\delta = 0.3$ e $\mu_i = 2$ . . . . .	79
5.2	CDF na saída do SC com $\delta = 0.5$ e $\mu_i = 2$ . . . . .	80
5.3	CDF na saída do SC com $\delta = 0.7$ e $\mu_i = 2$ . . . . .	81
5.4	CDF na saída do SC com $\delta = 0.3$ e $\mu_i = 3.25$ . . . . .	82
5.5	CDF na saída do SC com $\delta = 0.5$ e $\mu_i = 3.25$ . . . . .	83
5.6	CDF na saída do SC com $\delta = 0.7$ e $\mu_i = 3.25$ . . . . .	84

# Lista de Tabelas

2.1	Número de termos em (2.48), (2.49) e (2.50) necessários para sete casas decimais de precisão. . . . .	39
3.1	Número de termos em (3.16) ou (3.21) necessário para uma precisão de sete casas decimais. . . . .	55
5.1	$C_{ij}$ para diferentes valores de $L$ . . . . .	76



# Lista de Siglas

CDF	-	Função Densidade Cumulativa
DQPSK	-	<i>Differential Quadrature Phase Shift Keying</i>
EGC	-	Combinador de Ganho Igual
FGM	-	Função Geratriz de Momentos
HF	-	<i>High-Frequency</i>
HpCC	-	Coefficiente de Correlação <i>Hyperpower</i>
ISI	-	Interferência entre Símbolos
LOS	-	Linha de Visada Direta
MRC	-	Combinador de Máxima Razão
OP	-	Probabilidade de Indisponibilidade
PDF	-	Função Densidade de Probabilidade
QPSK	-	<i>Quadrature Phase Shift Keying</i>
SC	-	Combinador de Seleção
SHF	-	<i>Super High-Frequency</i>
SNR	-	Relação Sinal-Ruído
UHF	-	<i>Ultra High-Frequency</i>
VHF	-	<i>Very High-Frequency</i>

# Lista de Símbolos

$L$	- Número de ramos de diversidade
$F_A(\cdot)$	- CDF de uma variável aleatória $A$
$f_A(\cdot)$	- PDF de uma variável aleatória $A$
$F_{A_1, A_2, \dots, A_n}(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$	- CDF conjunta das variáveis aleatórias $A_1, A_2, \dots, A_n$
$f_{A_1, A_2, \dots, A_n}(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$	- PDF conjunta das variáveis aleatórias $A_1, A_2, \dots, A_n$
$c(\cdot, \cdot)$	- Função Densidade de Copula
$C(\cdot)$	- Operador Covariância
$V(\cdot)$	- Operador Variância
$E(\cdot)$	- Operador Média
$ \cdot $	- Operador determinante
$\subset$	- Símbolo está contido
$(\cdot)^{[j]}$	- Operador indicando a $j$ -ésima derivada
$J$	- Jacobiano de uma transformação de variáveis
$\Sigma$	- Matriz de correlação entre as componentes gaussianas
$\Lambda$	- Matriz de covariância entre as componentes gaussianas
$\alpha$	- Parâmetro de não linearidade
$m$	- Parâmetro de desvanecimento Nakagami- $m$
$\mu$	- Número real de <i>clusters</i>
$\hat{r}$	- Valor eficaz de $R$
$\Omega$	- Potência média do sinal
$\kappa$	- Razão entre a potência total da componente dominante e a potência total das componentes espalhadas
$k$	- Fator de Rice
$b$	- Parâmetro de desvanecimento de Hoyt
$\delta$	- <i>Hyperpower Correlation Coefficient</i>

---

$\rho_{wl}$	-	Coefficiente de correlação entre gaussianas
$\delta_1$	-	Coefficiente de correlação entre as componentes (gaussianas) em fase
$\delta_2$	-	Coefficiente de correlação entre as componentes (gaussianas) em quadratura
$\delta_3$	-	Coefficiente de correlação cruzada entre as componentes (gaussianas) em fase e em quadratura
$\delta_4$	-	Coefficiente de correlação cruzada entre as componentes (gaussianas) em quadratura e em fase
$\ \cdot\ _\alpha$	-	$\alpha$ -norma
$\Gamma(\cdot)$	-	Função Gamma
$B(\cdot, \cdot)$	-	Função Beta
$\Phi(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$	-	Função Geratriz de Momentos
<b>I</b>	-	Matriz Identidade
<b>S</b>	-	Matriz Diagonal
$[\cdot]^T$	-	Matriz transposta
$s$	-	Variável Complexa de Laplace
$\vartheta(\cdot)$	-	Operador Produto
$(\cdot)_k$	-	Símbolo de Pochhammer
$(\cdot; \cdot, \cdot, \dots, \cdot)$	-	Coefficientes Multinomiais
${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$	-	Função Hipergeométrica de Gauss
${}_1\tilde{F}_1(\cdot, \cdot; \cdot)$	-	Função Hipergeométrica Regularizada Confluente
${}_1F_1(\cdot, \cdot; \cdot)$	-	Função Hipergeométrica Confluente de Kummer
$Q(\cdot, \cdot)$	-	Função de Marcum-Q
$Q_\nu(\cdot, \cdot)$	-	Função de Marcum-Q Generalizada
$P(\cdot, \cdot)$	-	Função Gamma Incompleta Regularizada
$\gamma(\cdot, \cdot)$	-	Função Gamma Incompleta
$I_0(\cdot)$	-	Função de Bessel Modificada de primeiro tipo de ordem 0
$I_\nu(\cdot)$	-	Função de Bessel Modificada de primeiro tipo de ordem $\nu$
$\exp$	-	Função Exponencial
$\sum$	-	Somatório
$\prod$	-	Produtório
$\int$	-	Integral
$E_b$	-	Energia de Bit
$N_0$	-	Densidade Espectral de Ruído
$\gamma$	-	Valor médio da relação sinal-ruído

# Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. De Souza, R.A.A. e Yacoub, M.D., “Bivariate Nakagami- $m$  distribution with arbitrary correlation and fading parameters”. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 7, no. 12, pp. 5227–5232, Dez. 2008.
2. De Souza, R.A.A. e Yacoub, M.D., “The multivariate  $\alpha$ - $\mu$  distribution”. - submetido para *IEEE Trans. Wireless Commun.*, Jan. 2009.
3. De Souza, R.A.A. e Yacoub, M.D., “Maximal-Ratio and Equal-Gain combining in Hoyt (Nakagami- $q$ ) Fading”. *Proc. IEEE Veh. Tech. Conf. (VTC09)*, Barcelona, Espanha, Abr., 2009.
4. De Souza, R.A.A. e Yacoub, M.D., “Bivariate Nakagami- $q$  (Hoyt) distribution”. *Proc. IEEE Int. Conf. on Commun. (ICC09)*, Dresden, Alemanha, Jun., 2009.
5. De Souza, R.A.A. e Yacoub, M.D., “On the multivariate  $\alpha$ - $\mu$  distribution with arbitrary correlation and fading parameters”. *Proc. IEEE Int. Conf. on Commun. (ICC08)*, Pequim, China, Maio, 2008, pp. 4456-4460.
6. De Souza, R.A.A. e Yacoub, M.D., “The multivariate  $\alpha$ - $\mu$  distribution”. *Proc. IEEE Wireless Commun and Networking Conf. (WCNC08)*, Las Vegas, Nevada, EUA, Março, 2008, pp. 808-812.
7. De Souza, R.A.A., Gustavo Fraidenraich e Yacoub, M.D., “On the multivariate  $\alpha$ - $\mu$  distribution with arbitrary correlation”. *Proc. IEEE Int. Telecommun. Symp. (ITS06)*, Fortaleza, Ceará, Brasil, Set., 2006, pp. 38-41.
8. De Souza, R.A.A. e Yacoub, M.D., “On the multivariate Nakagami- $m$  distribution with arbitrary correlation and fading parameters”. *Proc. IEEE Int. Microwave and Optoelectronics Conf. (IMOC07)*, Salvador, Bahia, Brasil, Out./Nov. 2007.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Canal com Desvanecimento

O desvanecimento é usualmente classificado em duas categorias: o lento (ou de longo prazo) e o rápido (ou de curto prazo). O desvanecimento de longo prazo é causado por variações em grandes escalas na topografia ao longo do caminho de propagação. O desvanecimento de curto prazo, também conhecido como desvanecimento por múltiplos percursos, é causado por interferência entre versões do mesmo sinal transmitido que chegam ao receptor em instantes diferentes. Como consequência, essas ondas dos múltiplos percursos que chegam à antena receptora combinam-se formando um sinal que pode variar de forma intensa tanto em amplitude quanto em fase dentro de um curto período de tempo ou distância [1, 2]. Em um canal de comunicação sem fio, tal como no ambiente celular e no canal de satélite, o desvanecimento e as interferências dos múltiplos percursos são causados principalmente pelos seguintes mecanismos:

**Reflexão** ocorre quando a onda eletromagnética incide sobre uma superfície lisa, sendo esta de dimensões maiores que o comprimento de onda do sinal de rádiofrequência.

**Difração** ocorre quando o percurso de propagação entre o transmissor e o receptor é interceptado por um obstáculo com dimensões maiores que o comprimento de onda do sinal de rádiofrequência.

A partir desta obstrução geram-se ondas secundárias que se propagam além da obstrução. A difração é um fenômeno que considera uma onda que se propaga entre um transmissor e um receptor sem uma linha de visada direta entre os dois.

**Espalhamento** ocorre quando a onda eletromagnética incide em uma superfície irregular ou em uma superfície com dimensões da ordem do comprimento de onda do sinal de rádiofrequência ou menor. O resultado é que a energia do sinal se espalha (*scatter*) ou reflete em todas as direções. O termo espalhamento aplica-se ao fenômeno no percurso de propagação que resulta em um sinal refletido ou espalhado.

Além disso, o movimento relativo entre o transmissor e o receptor resulta em uma modulação aleatória de frequência no sinal devido aos diferentes deslocamentos Doppler em cada componente dos múltiplos percursos [3]. O movimento dos objetos entre o transmissor e receptor também provoca um deslocamento Doppler nas componentes dos múltiplos percursos. Basicamente, o canal com desvanecimento possui uma resposta impulsiva variante no tempo. As componentes dos múltiplos percursos provocam interferência entre símbolos (ISI - do inglês, *Intersymbol Interference*) quando o período de símbolo for menor que o maior atraso dos múltiplos percursos [4]. Se o período de símbolo for maior que o maior atraso dos múltiplos percursos teremos apenas desvanecimento na potência do sinal recebido. Deslocamento Doppler provoca dispersão em frequência da portadora, ocasionando espalhamento da banda do sinal. Todos estes fatores resultam na degradação de desempenho dos sistemas de comunicações.

A partir da descrição dos fenômenos físicos do meio de propagação, pode ser possível modelar o canal matematicamente. Existem pelo menos três razões principais para a criação de modelos matemáticos [5]: A primeira é ajudar a entender o canal e seus efeitos nos sinais de comunicação. A segunda é utilizar as formulações no projeto e dimensionamento de sistemas de comunicação. Por último, esta modelagem fornece bases para a simulação do canal em computadores que, usualmente, são utilizados em situações em que a análise matemática é complexa.

Esta caracterização serve como modelo para sinais de transmissão em vários tipos de canais e podem variar para comunicações através de ondas ionosféricas ou celestes em ondas curtas na banda de HF (do inglês, *High-Frequency*) (3-30 MHz), comunicações por ondas troposféricas na faixa de microondas em UHF (do inglês, *Ultra High-Frequency*) (300-3000 MHz), SHF (do inglês, *Super High-Frequency*) (3000-30000 MHz) e por espalhamento ionosférico na faixa das ondas métricas em VHF (do inglês, *Very High-Frequency*) (30-300 MHz).

As primeiras pesquisas em busca da caracterização de canais com desvanecimento são de longa data, tendo Price [6, 7] e Rice [8] como alguns pioneiros no campo. Os estudos, desde então, continuaram nas décadas seguintes com Nakagami [9], Clarke [10] e outros, chegando até os nossos dias.

## 1.2 Tratamento Estatístico

Algumas distribuições, tais como Rayleigh, Rice, Nakagami- $m$ , Hoyt (Nakagami- $q$ ) e Weibull, são de grande utilidade prática na descrição das estatísticas do sinal de rádio. Vamos descrever as principais características de cada uma das principais distribuições utilizadas no ambiente de comunicação sem fio.

### 1.2.1 A Distribuição Rayleigh

A distribuição Rayleigh, proposta inicialmente por Lord Rayleigh [11] para ser utilizada na área de eletromagnetismo e posteriormente utilizada por Pawsey [12] para modelar dados de medidas de potência do sinal de rádio, descreve a envoltória do sinal recebido resultante de uma propagação com múltiplos percursos e sem uma linha de visada direta (LOS - do inglês, *Line-of-Sight*) com potência predominante. A variável aleatória Rayleigh é obtida como a raiz quadrada da soma dos quadrados de dois processos gaussianos de média nula, independentes, chamados de componentes em fase e em quadratura. A função densidade de probabilidade (PDF - do inglês, *Probability Density Function*)

Rayleigh é dada por

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.1)$$

com  $r \geq 0$ , onde  $R$  é a envoltória do sinal e  $\sigma^2$  a variância das componentes em fase e em quadratura. Analogamente, a função distribuição cumulativa (CDF - do inglês, *Cumulative Distribution Function*)  $F_R(\cdot)$  de  $R$  pode ser obtida de (1.1) como

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right). \quad (1.2)$$

Esta modelagem também se aplica à propagação das ondas refletidas e refratadas através da troposfera [13] e ionosfera [14, 15] e os enlaces de rádio nas comunicações marítimas [16].

### 1.2.2 A Distribuição Rice

A distribuição Rice [8, eq. (1.4-1)] descreve a envoltória do sinal recebido resultante de uma propagação com múltiplos percursos e uma componente em linha de visada direta. A distribuição Rice é dada por

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ra}{\sigma^2}\right) \quad (1.3)$$

com  $r \geq 0$ , onde  $a^2$  e  $2\sigma^2$  são as potências das ondas direta e refletida, respectivamente,  $I_0(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de primeiro tipo de ordem zero [17, eq. (9.6.16)]. No caso da inexistência de uma onda com potência predominante, ou seja,  $a = 0$ , a equação (1.3) reduz-se à distribuição Rayleigh dada em (1.1). A distribuição Rice é frequentemente descrita em termos do parâmetro  $k$  definido como

$$k = \frac{a^2}{2\sigma^2} \quad (1.4)$$

que, no presente contexto, pode ser interpretado como a razão das potências do sinal direto (dominante) e das componentes dos múltiplos percursos. A CDF de  $R$  pode ser obtida diretamente de (1.3)

sendo dada por

$$F_R(r) = 1 - Q\left(\frac{a}{\sigma}, \frac{r}{\sigma}\right) \quad (1.5)$$

onde

$$Q(a, b) = \int_b^{\infty} x \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_0(ax) dx \quad (1.6)$$

é a função de Marcum-Q [18]. Este tipo de desvanecimento é observado em microcélulas em ambientes urbano e suburbano com LOS [19], picocélulas *indoor* [20] e ambientes de fábrica [21]. Também aplica-se às comunicações por satélites [22, 23] e comunicações marítimas entre embarcações [16].

### 1.2.3 A Distribuição Nakagami- $m$

A distribuição Nakagami- $m$  [24, eq. (3)] é dada por

$$f_R(r) = \frac{2m^m r^{2m-1}}{\Omega^m \Gamma(m)} \exp\left(-m \frac{r^2}{\Omega}\right) \quad (1.7)$$

onde

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt \quad (1.8)$$

é a função Gamma [17, eq. (6.1.1)],  $\Omega = E(R^2)$  é a potência média do sinal Nakagami- $m$ , sendo  $E(\cdot)$  o operador esperança estatística,  $m$  é o fator de desvanecimento [24, eq. (4)] representando o inverso da variância normalizada de  $R^2$ , dado por

$$m = \frac{\Omega^2}{V(R^2)} \quad (1.9)$$

sendo  $V(\cdot)$  o operador variância. O parâmetro  $m$  é útil para descrever o grau de desvanecimento sofrido pelo sinal propagando-se em um ambiente de múltiplos percursos. Desta maneira, se  $m < 1$  o desvanecimento é mais severo do que o modelo Rayleigh ( $m = 1$ ). Se  $m > 1$  o desvanecimento é menos severo do que Rayleigh. E para  $m \rightarrow \infty$ , reproduz-se um ambiente sem desvanecimento. A

CDF da envoltória Nakagami- $m$  é dada por

$$F_R(r) = \frac{\gamma(m, mr^2/\Omega)}{\Gamma(m)} \quad (1.10)$$

onde  $\gamma(a, x)$  é a função Gamma incompleta [25, eq. (8.350/1)] dada por

$$\gamma(a, x) = \int_0^x \exp(-t)t^{a-1}dt. \quad (1.11)$$

Partindo da distribuição de Rice, a distribuição Nakagami- $m$  para  $m > 1$  pode ser obtida somente em uma forma *aproximada* considerando o fator de Rice  $k > 0$ . Esta aproximação pode ser feita através das seguintes relações

$$m = \frac{(1+k)^2}{2k+1} \quad (1.12)$$

e

$$\sigma^2 = \frac{\Omega}{2} \left(1 - \sqrt{1 - m^{-1}}\right). \quad (1.13)$$

De maneira semelhante, sendo dados os parâmetros  $m$  e  $\Omega$ , que descrevem a distribuição Nakagami- $m$ , os parâmetros  $k$  e  $\sigma^2$  podem ser estimados para serem usados na geração do correspondente sinal Rice [26, 27]. Para valores de  $m < 1$  a distribuição Nakagami- $m$  não pode ser aproximada a partir da distribuição de Rice. Um modelo físico para o sinal Nakagami- $m$  foi proposto em [28]. Neste modelo a variável aleatória Nakagami- $m$  pode ser obtida como sendo a raiz quadrada da soma dos quadrados de  $2m$  processos gaussianos independentes ou, de maneira análoga, a raiz quadrada da soma dos quadrados de  $m$  processos Rayleigh. As distribuições Rayleigh e Semi-Gaussiana são casos particulares da distribuição Nakagami- $m$  quando ajustamos os valores de  $m = 1$  e  $m = 0.5$ , respectivamente. A distribuição Nakagami- $m$  fornece bom ajuste às comunicações sem fio [13, 29, 30] e *indoor* [31], bem como aos enlaces de rádio ionosféricos [32].

### 1.2.4 A Distribuição Hoyt (Nakagami- $q$ )

A distribuição Hoyt, também denominada Nakagami- $q$  [33], considera as componentes em fase e em quadratura do sinal como sendo processos gaussianos com média nula e variâncias arbitrárias. A distribuição Hoyt é dada por [34, eq. (10)]

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma_1 \sigma_2} \exp \left[ -\frac{r^2}{4} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \right] I_0 \left[ \frac{r^2}{4} \left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) \right] \quad (1.14)$$

com  $r \geq 0$ , sendo  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  as variâncias das componentes em fase e em quadratura, respectivamente. Uma outra forma de representação da distribuição Hoyt é através do parâmetro de desvanecimento de Hoyt,  $b$ , dado por

$$b = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (1.15)$$

com  $-1 \leq b \leq 1$ . A distribuição é então dada por [35]

$$f_R(r) = \frac{2r}{\Omega \sqrt{1-b^2}} \exp \left[ -\frac{r^2}{\Omega(1-b^2)} \right] I_0 \left[ \frac{br^2}{\Omega(1-b^2)} \right] \quad (1.16)$$

onde  $\Omega = E(R^2)$ . Definindo-se

$$q = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (1.17)$$

é possível representar a CDF da envoltória Hoyt como [36]

$$F_R(r) = Q \left[ \alpha(q) \frac{r}{\sqrt{\Omega}}, \beta(q) \frac{r}{\sqrt{\Omega}} \right] - Q \left[ \beta(q) \frac{r}{\sqrt{\Omega}}, \alpha(q) \frac{r}{\sqrt{\Omega}} \right] \quad (1.18)$$

onde

$$\alpha(q) = \sqrt{\frac{1+q^4}{2q}} \sqrt{\frac{1+q}{1-q}} \quad (1.19a)$$

$$\beta(q) = \sqrt{\frac{1-q^4}{2q}} \sqrt{\frac{1-q}{1+q}} = \alpha(q) \frac{1-q}{1+q}. \quad (1.19b)$$

Para o caso de variâncias idênticas, ou seja,  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma$ , a distribuição Hoyt reduz para a distribuição Rayleigh.

### 1.2.5 A Distribuição Weibull

Em 1928, Fisher e Tippet [37] propuseram uma distribuição relacionada à teoria dos valores extremos. Em 1939, Waloddi Weibull [38] apresenta a mesma distribuição para calcular o tempo médio de vida útil em máquinas industriais como um modelo estatístico para análise de confiabilidade. Devido à sua simplicidade, flexibilidade e ao excelente ajuste que se tem conseguido com medidas de campo em ambientes *indoor* [30, 39] e *outdoor* [40, 41], sua aplicação foi logo estendida a sistemas de comunicação sem fio. A PDF da distribuição Weibull é dada por [42]

$$f_R(r) = \frac{\alpha r^{\alpha-1}}{\hat{r}^\alpha} \exp\left(-\frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right) \quad (1.20)$$

onde o parâmetro  $\hat{r}$  definido aqui representa a raiz  $\alpha$ -ésima do valor médio de  $R^\alpha$ , isto é,  $\hat{r} = \sqrt[\alpha]{\mathbb{E}(R^\alpha)}$ . A CDF  $F_R(\cdot)$  da envoltória Weibull  $r$  é dada por

$$F_R(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right). \quad (1.21)$$

### 1.2.6 A Distribuição $\alpha$ - $\mu$

A maioria das distribuições conhecidas considera um ambiente de propagação onde os múltiplos percursos refletem-se nas superfícies de forma homogênea. Esta é uma aproximação, já que, conforme descrito por Braun [30], para que seja caracterizado um campo de espalhamento homogêneo, fazem-se necessárias as seguintes características: grande número de ondas parciais, amplitudes das ondas parciais idênticas, ondas parciais descorrelacionadas, nenhuma correlação de fase e amplitude de uma onda parcial e distribuição de fase homogênea entre  $[0, 2\pi)$ . Estas características descrevem um campo de espalhamento difuso homogêneo, resultante de pontos de espalhamento distribuídos

aleatoriamente. Supondo-se a existência de apenas um *cluster*, ou seja, um conjunto de ondas espalhadas, a distribuição Rayleigh pode ser obtida. Se, dentro deste *cluster*, existir uma onda proveniente dos múltiplos percursos com potência predominante sobre as demais componentes, teremos o ambiente modelado pela distribuição Rice. O sinal Nakagami- $m$  pode ser entendido como um conjunto de *clusters*, sendo que dentro de cada *cluster* as fases das ondas espalhadas são aleatórias e tem atrasos temporais semelhantes e, entre os diferentes *clusters*, o espalhamento ou o atraso entre as ondas é relativamente grande. Três novas distribuições, com o objetivo de modelar o fenômeno de desvanecimento em pequena escala em um ambiente não homogêneo, foram propostas recentemente: as distribuições  $\alpha$ - $\mu$ ,  $\eta$ - $\mu$  (descrita na Seção 1.2.7) e  $\kappa$ - $\mu$  (descrita na Seção 1.2.8). Nestes ambientes o sinal é composto de vários *clusters* com ondas provenientes dos múltiplos percursos.

A distribuição  $\alpha$ - $\mu$  [43] pode ser considerada uma generalização da distribuição Nakagami- $m$ , onde o parâmetro  $\alpha$  descreve o fenômeno de não linearidade sofrido pelo sinal que se propaga em um ambiente com desvanecimento. De fato, com a distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , Yacoub faz uma conexão entre os parâmetros da distribuição Gamma generalizada (Stacy) [44, eq. (1)] com as propriedades físicas do meio de propagação. A distribuição  $\alpha$ - $\mu$  é dada por

$$f_R(r) = \frac{\alpha \mu^\mu r^{\alpha\mu-1}}{\hat{r}^{\alpha\mu} \Gamma(\mu)} \exp\left(-\mu \frac{r^\alpha}{\hat{r}^\alpha}\right) \quad (1.22)$$

com  $r \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  e o parâmetro  $\mu$  é dado por

$$\mu = \frac{\mathbf{E}^2(R^\alpha)}{\mathbf{V}(R^\alpha)} \quad (1.23)$$

com  $\mu > 0$  e corresponde ao número real de *clusters* de múltiplos percursos. A CDF da envoltória pode ser obtida de (1.22) como

$$F_R(r) = \frac{\gamma(\mu, \mu r^\alpha / \hat{r}^\alpha)}{\Gamma(\mu)}. \quad (1.24)$$

A distribuição  $\alpha$ - $\mu$  é uma distribuição geral que inclui várias distribuições conhecidas. A distribuição de Weibull pode ser obtida a partir da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  ajustando o valor de  $\mu = 1$ . Da distribuição

de Weibull se fizermos  $\alpha = 1$ , teremos a distribuição Rayleigh. Ainda da distribuição de Weibull, a distribuição Exponencial Negativa é obtida quando  $\alpha = 1$ . A distribuição Nakagami- $m$  pode ser obtida a partir da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  ajustando  $\alpha = 2$  e  $\mu = m$ . Se  $\mu = 1$  a partir da distribuição Nakagami- $m$ , a distribuição Rayleigh é obtida. Ainda da distribuição Nakagami- $m$  se fizermos  $\mu = 0.5$  o resultado será a distribuição Semi-Gaussiana.

### 1.2.7 A Distribuição $\eta$ - $\mu$

A distribuição  $\eta$ - $\mu$  [45, 46] é uma distribuição de desvanecimento geral que pode ser usada para representar as variações em pequena escala do sinal em desvanecimento em uma condição NLOS (do inglês, *Non Line-of-Sight*). Na modelagem a partir da distribuição  $\eta$ - $\mu$  o ambiente é considerado não homogêneo. O sinal é composto de vários *clusters* com ondas provenientes dos múltiplos percursos. Dentro de cada *cluster*, as fases das ondas são aleatórias e tem atrasos temporais semelhantes e, entre os vários *clusters*, os atrasos das ondas são relativamente grandes. A distribuição pode aparecer em dois diferentes formatos. No Formato 1, as componentes em fase e em quadratura do sinal em desvanecimento dentro de cada *cluster* são consideradas gaussianas independentes de média nula e possuem potências diferentes (variâncias distintas). No Formato 2, as componente em fase e em quadratura do sinal em desvanecimento dentro de cada *cluster* são consideradas gaussianas correlacionadas de média nula e possuem potências idênticas (variâncias idênticas). O parâmetro  $\eta$  é a relação entre as variâncias das componentes em fase e em quadratura.

Em ambos os formatos, o parâmetro  $\mu$  é uma extensão real do número de *clusters* e é dado por

$$\mu = \frac{\mathbf{E}^2(R^2)}{2\mathbf{V}(R^2)} \times \left[ 1 + \left( \frac{H}{h} \right)^2 \right], \mu > 0 \quad (1.25)$$

onde  $H$  e  $h$  são funções do parâmetro  $\eta$  e variam de um formato para outro. Para os dois formatos, a PDF da envoltória  $\eta$ - $\mu$  pode ser expressa como

$$f_R(r) = \frac{4\sqrt{\pi}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}h^\mu r^{2\mu}}{\Gamma(\mu)H^{\mu-\frac{1}{2}}\Omega^{\mu+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{2\mu hr^2}{\Omega}\right) I_{\mu-\frac{1}{2}}\left(\frac{2\mu Hr^2}{\Omega}\right), r \geq 0 \quad (1.26)$$

onde  $I_\nu(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de primeiro tipo de ordem arbitrária  $\nu$  [17, eq. (9.6.18)]. No Formato 1,  $h = (2 + \eta^{-1} + \eta)/4$  e  $H = (\eta^{-1} - \eta)/4$ , enquanto que no Formato 2,  $h = 1/(1 - \eta^2)$  e  $H = \eta/(1 - \eta^2)$ . Um formato pode ser convertido para outro por meio de uma simples transformação bilinear dada por  $\eta_1 = (1 - \eta_2)/(1 + \eta_2)$ , onde  $\eta_1$  é o parâmetro  $\eta$  no Formato 1 e  $\eta_2$  é o parâmetro  $\eta$  no Formato 2. Além disso, pode ser constatado que a PDF da envoltória  $\eta$ - $\mu$  é simétrica em torno de  $\eta = 1$  no Formato 1 ou em torno de  $\eta = 0$  no Formato 2, isto é, ela possui os mesmos valores nos intervalos  $0 < \eta \leq 1$  e  $0 < \eta^{-1} \leq 1$ , no Formato 1, e nos intervalos  $0 < \eta \leq 1$  e  $-1 \leq \eta < 0$ , no Formato 2. A CDF da envoltória  $\eta$ - $\mu$  pode ser expressa como

$$F_R(r) = 1 - Y_\mu \left( \frac{H}{h}, \sqrt{\frac{2h\mu}{\Omega}} r \right) \quad (1.27)$$

onde

$$Y_\nu(a, b) \triangleq \frac{2^{-\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} (1-a^2)^\nu}{\Gamma(\nu) a^{\nu-\frac{1}{2}}} \int_b^\infty x^{2\nu} \exp(-x^2) I_{\nu-\frac{1}{2}}(ax^2) dx. \quad (1.28)$$

A distribuição  $\eta$ - $\mu$  é uma distribuição de desvanecimento geral que inclui as distribuições Hoyt (Nakagami- $q$ ), Gaussiana Unilateral, Rayleigh e, de forma geral, a distribuição Nakagami- $m$  como casos especiais. A distribuição Hoyt (Nakagami- $q$ ) pode ser obtida a partir da distribuição  $\eta$ - $\mu$  de uma maneira exata considerando-se  $\mu = 0.5$ . Neste caso o parâmetro de Hoyt (Nakagami- $q$ ), é dado por  $b = -(1 - \eta)/(1 + \eta)$  (ou  $q^2 = \eta$ ) no Formato 1, ou  $b = -\eta$  (ou  $q^2 = (1 - \eta)/(1 + \eta)$ ) no Formato 2. A partir desta distribuição, obtém-se a distribuição Unilateral Gaussiana considerando  $\eta \rightarrow 0$  ou  $\eta \rightarrow \infty$  no Formato 1, ou  $\eta \rightarrow \pm 1$  no Formato 2. Da mesma forma, a distribuição Rayleigh é obtida de uma forma exata para  $\mu = 0.5$  e  $\eta = 1$  no Formato 1 ou  $\eta = 0$  no Formato 2. Obtém-se a distribuição Nakagami- $m$  de uma forma exata a partir da distribuição  $\eta$ - $\mu$  para  $\mu = m$  e  $\eta \rightarrow 0$  ou  $\eta \rightarrow \infty$  no Formato 1 ou  $\eta \rightarrow \pm 1$  no Formato 2. Da mesma maneira, a densidade Nakagami- $m$  é obtida considerando  $\mu = m/2$  e  $\eta \rightarrow 1$  no Formato 1 ou  $\eta \rightarrow 0$  no Formato 2. Da distribuição Nakagami- $m$ , obtém-se a distribuição Gaussiana Unilateral considerando  $m = 0.5$  e a distribuição Rayleigh considerando  $m = 1$ .

### 1.2.8 A Distribuição $\kappa$ - $\mu$

A distribuição  $\kappa$ - $\mu$  [46, 47] é uma distribuição de desvanecimento geral que pode ser usada para representar as variações em pequena escala do sinal em desvanecimento em uma condição LOS. Na modelagem a partir da distribuição  $\kappa$ - $\mu$  o ambiente é considerado não homogêneo. O sinal é composto de vários *clusters* com ondas provenientes dos múltiplos percursos. Dentro de cada *cluster*, as fases das ondas são aleatórias e tem atrasos temporais semelhantes e, entre os vários *clusters*, os atrasos das ondas são relativamente grandes. Por hipótese, considera-se que as ondas dos múltiplos percursos dos vários *clusters* possuem potências idênticas, mas dentro de cada *cluster* existe uma componente dominante de potência arbitrária. A distribuição é dada por

$$f_R(r) = \frac{2\mu(1+\kappa)^{\frac{\mu+1}{2}}}{\hat{r}\kappa^{\frac{\mu-1}{2}} \exp(\mu\kappa)} \left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^\mu \exp\left[-\mu(1+\kappa)\left(\frac{r}{\hat{r}}\right)^2\right] I_{\mu-1}\left[2\mu\sqrt{\kappa(1+\kappa)}\frac{r}{\hat{r}}\right] \quad (1.29)$$

com  $r \geq 0$ , onde  $\kappa$  é a razão entre a potência total da componente dominante e a potência total das componentes espalhadas. E o parâmetro  $\mu$  é definido como

$$\mu = \frac{\mathbf{E}(R^2)}{\mathbf{V}(R^2)} \times \frac{1+2\kappa}{(1+\kappa)^2}. \quad (1.30)$$

A partir de (1.29), a CDF de  $R$  pode ser obtida como

$$F_R(r) = 1 - Q_\mu\left[\sqrt{2\kappa\mu}, \sqrt{2\mu(1+\kappa)}\frac{r}{\hat{r}}\right] \quad (1.31)$$

onde

$$Q_v(a, b) = \frac{1}{a^{v-1}} \int_b^\infty x^v \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2}\right) I_{v-1}(ax) dx \quad (1.32)$$

é a função de Marcum-Q generalizada [18]. A distribuição  $\kappa$ - $\mu$  é uma distribuição de desvanecimento geral que inclui as distribuições como Nakagami- $m$  e Rice. Note que ambas as distribuições, Nakagami- $m$  e Rice, incluem a distribuição de Rayleigh como caso especial e, adicionalmente, a distribuição Nakagami- $m$  também inclui a distribuição Gaussiana Unilateral. Então estas distribuições

também podem ser obtidas a partir da distribuição  $\kappa$ - $\mu$ . A distribuição Rice é obtida a partir da relação (1.29) ajustando-se o parâmetro  $\mu = 1$ , ou seja, apenas um *cluster*, reduzindo-se à fórmula (1.3). Neste caso, a constante  $\kappa$  coincide com o fator de Rice  $k$ . A partir da distribuição de Rice se considerarmos  $\kappa = k = 1$  (então  $\mu = 1$  e  $\kappa \rightarrow 0$  na distribuição  $\kappa$ - $\mu$ ), a distribuição de Rayleigh em (1.1) é obtida de uma maneira exata. O sinal Nakagami- $m$  pode ser entendido como sendo a composição de *clusters* de ondas de múltiplos percursos sem uma componente dominante dentro de cada *cluster*. Então, considerando-se  $\kappa \rightarrow 0$  e  $\mu = m$ , sendo  $m$  o fator de desvanecimento da distribuição Nakagami- $m$ , a densidade Nakagami- $m$  é obtida de uma maneira exata. Considerando-se  $\mu = m = 1$  na distribuição Nakagami- $m$  (então,  $\mu = 1$  e  $\kappa \rightarrow 0$  na distribuição  $\kappa$ - $\mu$ ), a distribuição Rayleigh é obtida. Semelhantemente, considerando-se  $\mu = m = 0.5$  na distribuição Nakagami- $m$  (então,  $\mu = 0.5$  e  $\kappa \rightarrow 0$  na distribuição  $\kappa$ - $\mu$ ), a distribuição Unilateral Gaussiana é obtida de uma maneira exata.

### 1.3 Diversidade

O efeito do desvanecimento de múltiplo percurso em sistemas sem fio pode ser combatido usando, dentre outros, diversidade, codificação, equalização, antenas adaptativas e espalhamento espectral. A diversidade é uma técnica largamente utilizada devido à sua simplicidade e por não implicar aumento de potência de transmissão ou de banda de frequência [48]. A princípio, pode-se utilizar esta técnica tanto na recepção quanto na transmissão. A técnica de diversidade consiste em receber redundantemente a mesma informação por dois ou mais canais (conhecidos como ramos de diversidade - *branches*) com desvanecimentos independentes ou correlacionados. Estas réplicas são combinadas de acordo com um critério específico para melhorar a relação Sinal-Ruído (SNR - do inglês, *Signal-to-Noise Ratio*) do sinal utilizado na decisão. O objetivo principal é explorar o fato de a probabilidade de ocorrência simultânea de desvanecimento profundo em todos os  $L$  canais ser pequena. Fornecendo-se para a recepção múltiplos sinais com a mesma informação, diminui-se, de forma considerável, a probabilidade de ocorrência de um desvanecimento profundo no sinal, se os sinais são independentes.

## 1.4 Tipos de Diversidade

Existem várias formas de se obter réplicas do mesmo sinal, dentre as quais destacam-se as seguintes:

### Diversidade em Frequência

A mesma informação é transmitida ou recebida através de  $L$  diferentes portadoras. Neste caso, a diferença de frequência entre as portadoras adjacentes deve ser igual ou maior que a banda de coerência do canal.

### Diversidade Temporal

A mesma informação é transmitida ou recebida em  $L$  diferentes instantes de tempo. Neste caso, a diferença entre os instantes de tempo de transmissão adjacentes deve ser igual ou maior que o tempo de coerência do canal.

### Diversidade Espacial

Outra técnica utilizada para obter diversidade é a utilização de múltiplas antenas. Por exemplo utiliza-se uma antena transmissora e múltiplas antenas receptoras. A distância entre as antenas receptoras deve ser tal que as diferentes componentes resultantes dos múltiplos percursos sejam estatisticamente independentes e descorrelacionadas. De maneira geral, são necessários apenas alguns comprimentos de ondas de separação entre duas antenas para conseguir sinais com desvanecimentos independentes. Embora a independência estatística entre os sinais seja desejável, isto não é possível em todas as situações, conforme será detalhado na Seção 1.5.

#### 1.4.1 Métodos de Combinação

Tendo-se obtido as versões necessárias do sinal, deve-se processá-los com o objetivo de se obter os melhores resultados. Existem três maneiras básicas para associar os sinais recebidos em cada

percurso, os chamados métodos de combinação [49].

### Combinação por Seleção

Conceitualmente e, algumas vezes, analiticamente, o método de combinação por seleção (SC - do inglês, *Selection Combining*) é a mais simples dentre todas as técnicas de diversidade. Nos métodos de combinação por seleção, somente um dos sinais de entrada é usado por instante de tempo, sendo este selecionado segundo algum critério. Normalmente, o ramo com maior SNR. De uma maneira geral [50]

$$R = \text{máximo entre } \{R_1, R_2, \dots, R_L\} \quad (1.33)$$

onde  $R$  é a envoltória resultante do método de combinação e  $R_i, i = 1, \dots, L$ , são as envoltórias dos sinais de entrada. Na prática, entretanto, a presença de ruído dificulta a estimativa da potência do sinal puro, desta maneira o ramo com maior potência de “sinal+ruído” é selecionado. Dentre as limitações técnicas cita-se a necessidade de um receptor para cada ramo de diversidade e de monitoramento dos sinais a uma taxa superior a da ocorrência de desvanecimento.

### Combinação por Ganho Igual

A técnica de combinação por ganho igual (EGC - do inglês, *Equal Gain Combining*) é um método de combinação por adição onde o sinal resultante é uma combinação linear dos sinais recebidos, dada por [50]

$$R = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^L R_i. \quad (1.34)$$

É importante observar que neste método o sinal na saída do combinador corresponde à soma coerente dos sinais de diversidade. Faz-se necessária, portanto, a implementação de circuitos para alinhar em fase os sinais dos vários ramos. As curvas de desempenho deste método estão entre as curvas do método SC e combinação de máxima razão (descrita a seguir) e, em geral, pouco abaixo do método de combinação de máxima razão mesmo sendo substancialmente menos complexa.

### Combinação de Máxima Razão

Na combinação de máxima razão (MRC - do inglês, *Maximal Ratio Combining*) cada sinal (ramos da diversidade) é ponderado na proporção direta do parâmetro SNR por ramo antes de serem somados. O coeficiente de ponderação de cada ramo é proporcional à razão entre o valor do seu sinal e a potência média do ruído correspondente. Estes pesos minimizam o ruído que é adicionado a cada ramo de diversidade em desvanecimento. Esta é uma técnica ótima, ou seja, aquela que fornece máxima relação sinal ruído na saída do combinador. Desta forma a envoltória na saída do combinador é dada por [50]

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^L R_i^2}. \quad (1.35)$$

Um fator limitante no desempenho deste sistema ocorre devido a erros na estimativa dos ganhos de cada ramo.

## 1.5 Correlação

A suposição de independência estatística entre os vários ramos da diversidade é válida somente se eles estão suficientemente separados [51]. Entretanto nos sistemas de comunicações sem fio esta separação nem sempre é possível. Como exemplo, no desvanecimento de longo prazo, pode-se citar a diversidade espacial através da separação de antenas em que são necessário de 30 a 50 comprimentos de onda de distância entre as antenas para que os vários sinais possam ser considerados descorrelacionados [49]. No desvanecimento de curto prazo, a separação é da ordem de meio comprimento de onda. O efeito da correlação entre os vários sinais que compõem um sistema com diversidade tem sido estudado por vários autores [52–57]. Os estudos envolvem a escolha de vários parâmetros, tais como a escolha do tipo de ambiente a ser analisado (Rayleigh, Rice, Nakagami- $m$ ,  $\alpha$ - $\mu$  entre outros), a modulação (QPSK - do inglês, *Quadrature Phase Shift Keying*, DQPSK - do inglês, *Differential Quadrature Phase Shift Keying* entre outros), o tipo de correlação envolvida (constante, exponencial, circular entre outros), o tipo de seleção de diversidade (SC, MRC, EGC entre outros) e a da ordem

diversidade (dois, três ou  $L$  ramos).

Normalmente mede-se a relação existente entre duas variáveis aleatórias quaisquer através do momento cruzado normalizado destas variáveis. Esta relação é conhecida como coeficiente de correlação [58, eq. (5.1-17b)] dado por

$$\rho_{ij} = \frac{C(Y_i, Y_j)}{\sqrt{V(Y_i)V(Y_j)}} \quad (1.36)$$

onde  $C(\cdot)$  é o operador covariância e  $Y_i$  e  $Y_j$  variáveis aleatórias quaisquer.

### 1.5.1 Modelos de Correlação

Dentre os modelos de correlação normalmente adotados podemos citar:

#### Modelo Constante

Pode ser obtido através de antenas muito próximas [53, Sec. II-A]. Neste caso a matriz de correlação  $\Sigma_{ij}$  é dada por  $\Sigma_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\Sigma_{ij} = \rho$ , se  $i \neq j$ .

#### Modelo Exponencial

Pode ser obtido através de antenas equidistantes [53, Sec. II-B]. Neste caso, a correlação entre os pares de sinais decai à medida que o espaçamento entre as antenas aumenta [59]. Um exemplo é a colocação de três antenas dispostas na forma de um triângulo equilátero [60]. Neste caso a matriz de correlação  $\Sigma_{ij}$  é dada por  $\Sigma_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\Sigma_{ij} = \rho^{|i-j|}$ , se  $i \neq j$ .

#### Modelo Circular

No caso de correlação circular [55,61], a matriz de correlação não é apenas simétrica, mas também possui simetria de ordem  $n$ , ou seja,  $\rho_1 = \rho_{n-1}$ ,  $\rho_2 = \rho_{n-2}, \dots$ . Este modelo pode ser aplicado a antenas dispostas em um círculo ou quatro antenas dispostas em um quadrado.

## Arbitrário

Modelo em que é adotada uma correlação arbitrária para cada par de sinal, portanto mais geral que os modelos anteriormente descritos. Normalmente, este é o modelo que leva a maiores dificuldades no tratamento matemático. A matriz de correlação não permite simplificações. Um levantamento empírico deste modelo foi feito em [62]. Neste caso a matriz de correlação  $\Sigma_{ij}$  é dada por  $\Sigma_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\Sigma_{ij} = \rho_{ij}$ , se  $i \neq j$ .

## 1.6 Revisão Bibliográfica

Dentre os principais trabalhos envolvendo distribuições multivariáveis correlacionadas podemos citar:

1. Nakagami propôs uma PDF para duas variáveis Nakagami- $m$  [24, eq. (126)]. Neste caso Nakagami considerou as variáveis com o mesmo fator de desvanecimento [24, eq. (4)], o que, em última análise, limita a avaliação de sistemas correlacionados mais gerais. A correlação, expressa pelo coeficiente de correlação  $\rho_2$ , corresponde à correlação entre as potências Rayleigh que compõem cada uma das variáveis Nakagami- $m$ , sendo esta correlação constante [24, eq. (121)]. Esta PDF está expressa através da função de Bessel modificada [17, eq. (9.6.18)]. Utilizando uma conhecida relação entre a função de Bessel modificada e a função de Laguerre generalizada [25, eq. (8.976/1)], o mesmo autor ainda fez a expansão da função de duas variáveis em uma série utilizando a função generalizada de Laguerre [24, eq. (135)].
2. Em [63, eq. (3)] Beaulieu apresenta uma expressão na forma de série infinita para a CDF da distribuição bivariável Nakagami- $m$ . A restrição existente é a necessidade de as duas variáveis serem identicamente distribuídas, ou seja, possuírem o mesmo fator de desvanecimento. O mesmo autor propõe e analisa um limitante superior para a série infinita [63, eq. (7)].
3. Baseado no trabalho de Krishnammoorthy [64], Ugweje e Aalo deduziram uma PDF conjunta para  $n$  variáveis [56, eq. (6)] Nakagami- $m$ . Permanece aqui a restrição que o fator de desva-

- necimento que descreve cada uma das  $n$  variáveis deve ser o mesmo. A grande contribuição deste trabalho é a obtenção da PDF conjunta através da correlação entre as gaussianas que compõem as variáveis Nakagami- $m$  [56, eq. (8)]. Não existe aqui necessidade de que a matriz de correlação seja de um modelo específico tal como constante ou exponencial. A PDF foi deduzida a partir dos polinômios de Laguerre [25, eq. (8.970/1)].
4. Utilizando os resultados de Krishnammoorthy [64], Adachi propôs uma PDF conjunta para  $n$  variáveis correlacionadas em um ambiente Rayleigh [52, eq. (14)]. A correlação é entre as gaussianas, podendo existir correlação entre as componentes em fase e em quadratura de duas diferentes variáveis Rayleigh. A PDF está baseada na expansão em série em termos da função de Laguerre [25, eq. (8.970/1)].
  5. Baseado na suposição da existência de correlação do tipo exponencial e mesmo fator de desvanecimento entre as várias variáveis, Karagiannidis [54] propôs uma densidade conjunta em um ambiente com desvanecimento modelado através da distribuição Nakagami- $m$  para  $n$  variáveis [54, eq. (3)]. A correlação é entre as variáveis Rayleigh [54, eq. (2)].
  6. Aproveitando o resultado em [54], os mesmos autores propuseram uma nova PDF para vários modelos de correlação [55, eq. (2)]. Os modelos abordados pelo autor foram o exponencial, linearmente arbitrário, constante e circular. A restrição imposta pelo método é que a matriz inversa da matriz de correlação deve ser tridiagonal [65]. De fato, o único modelo a atender a esta restrição é o exponencial. Assim, os próprios autores propuseram uma aproximação da matriz de correlação baseada na matriz de Green [66].
  7. Quando é considerado o modelo Nakagami- $m$  com diferentes fatores de desvanecimento para cada variável, normalmente os trabalhos estão restritos a duas variáveis. O trabalho proposto por Reig [67] considera uma PDF de duas variáveis com diferentes fatores de desvanecimento para cada uma das variáveis [67, eq. (12)]. Na expressão da PDF aparece a função hipergeométrica confluyente [17, eq. (13.1.2)]. Os mesmos autores propõem uma relação fechada para

o coeficiente de correlação de potência, como uma função da correlação entre as componentes Rayleigh que compõem a variável Nakagami- $m$  e dos fatores de desvanecimento.

8. Para a distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , Yacoub propôs uma PDF de duas variáveis correlacionadas [43, eq. (15)] baseado no trabalho de Reig [67]. A constante  $\mu$  é uma generalização do fator de desvanecimento proposto por Nakagami- $m$ .
9. Paralelamente ao trabalho de Yacoub [68], Piboongunon [69] propôs uma PDF e uma CDF bivariável considerando parâmetros de desvanecimento arbitrários para a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  (denotada por Gamma generalizada).
10. Ainda com relação à distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , Yacoub propôs uma PDF multivariável correlacionada [43, eq. (38)]. Esta PDF é válida somente para coeficientes de correlação do tipo exponencial. O grande atrativo aqui é o fato de esta densidade ser multivariável e não existir restrição nos parâmetros  $\alpha$  e  $\mu$  em cada variável. O mesmo autor deduz uma relação fechada para o coeficiente de correlação generalizado [68, eq. (31)]. É interessante notar a importância desta relação já que é uma fórmula que generaliza todos os casos anteriormente encontrados na literatura quando, logicamente, considerado os modelos derivados desta distribuição.
11. A principal aplicação utilizada pelos autores citados nesta Seção para as estatísticas conjuntas foi a análise em algum tipo de sistema com diversidade, especialmente SC, EGC e MRC.

## 1.7 Objetivos e Contribuições do Trabalho

Esta tese tem como objetivo explorar ambientes de desvanecimento correlacionados para uma melhor caracterização do canal sem fio. Nesse sentido as seguintes contribuições são propostas:

- Obtenção de uma distribuição exata bivariável Hoyt com coeficientes de correlação arbitrários.
- Obtenção do coeficiente de correlação de potência considerando a correlação entre as gaussianas que compõem o processo Hoyt.

- Dedução de expressões exatas para PDF e CDF na saída do SC como uma função da relação sinal-ruído.
- Obtenção de uma PDF e uma CDF exatas bivariável Nakagami- $m$  com coeficientes de correlação arbitrários.
- Obtenção do coeficiente de correlação de potência considerando a correlação entre as gaussianas que compõem o processo Nakagami- $m$ .
- Obtenção de uma PDF exata multivariável  $\alpha$ - $\mu$ .
- Obtenção de uma PDF e uma CDF multivariável  $\alpha$ - $\mu$  aproximadas e em fórmulas fechadas, para a modelagem de ambientes correlacionados.

## 1.8 Estrutura da Tese

Este trabalho de tese é organizado da seguinte forma:

**Capítulo 2** : O objetivo deste capítulo é deduzir, de uma forma exata, a PDF e CDF conjunta de dois sinais Hoyt correlacionados. Também será deduzida a expressão do coeficiente de correlação de potência. Adicionalmente, serão deduzidas expressões aproximadas para a PDF e CDF.

**Capítulo 3** : Este capítulo particulariza a distribuição  $\alpha$ - $\mu$  para o caso Nakagami- $m$  de duas variáveis. Serão apresentadas expressões exatas para várias estatísticas considerando um ambiente com correlação arbitrária e fator de desvanecimento igualmente arbitrário.

**Capítulo 4** : Neste capítulo, deduz-se uma expressão para a PDF conjunta da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . Considera-se uma matriz de correlação arbitrária e parâmetros de desvanecimento arbitrários para uma densidade multivariável.

**Capítulo 5** : Este capítulo trata de alguns casos particulares resultantes da PDF conjunta deduzida

no capítulo 4. É feita uma análise detalhada de uma PDF  $\alpha$ - $\mu$  aproximada para o caso multi-variável.

**Capítulo 6** : Neste capítulo, algumas considerações finais e perspectivas de investigações futuras serão apresentadas.

# Capítulo 2

## Estatísticas Conjuntas de Duas Variáveis Hoyt Correlacionadas

### 2.1 Introdução

Em um sistema de comunicação sem fio, a envoltória do sinal flutua de forma aleatória quando este se propaga em um ambiente com condições de desvanecimento rápido. Dentre as várias distribuições usadas para modelar esta envoltória, podemos citar: Rayleigh, Rice, Hoyt (Nakagami- $q$ ) e Nakagami- $m$ . Em particular, o modelo de Hoyt [33] considera as componentes em fase e em quadratura como sendo processos gaussianos com média nula e variâncias arbitrárias. Para o caso de variâncias idênticas, a distribuição de Hoyt reduz-se para Rayleigh. Como exemplo de aplicação, este modelo tem sido usado para descrever a distribuição da amplitude do sinal em enlaces de satélite sujeito a cintilação ionosférica [70]. Esta distribuição também tem sido utilizada para a análise de desempenho em sistemas de comunicação sem fio [71–74]. Mais recentemente, diversas estatísticas relacionadas ao modelo de Hoyt tem sido objeto de investigação [75–79]. Entretanto, as estatísticas PDF e CDF conjunta da distribuição de Hoyt bivariável ainda não foram determinadas na literatura técnica especializada.

O objetivo deste capítulo é deduzir, de forma exata, a PDF e CDF conjunta de dois sinais Hoyt cor-

relacionados. Também será deduzida a expressão, em uma forma simples e fechada, do coeficiente de correlação de potência. As expressões para a PDF e CDF conjunta fazem uso de funções bem conhecidas e fáceis de serem manipuladas: função hipergeométrica confluyente e a função Gamma incompleta. Estas funções estão disponíveis em programas de cálculos numéricos tais como *MATHEMATICA*. Embora longas, estas fórmulas são matematicamente tratáveis, fáceis de serem avaliadas e suficientemente flexíveis para acomodar um grande número de cenários em ambientes correlacionados. O modelo considerado aqui é geral e engloba um ambiente não estacionário, no qual as variâncias das componentes em fase e em quadratura são distintas. Como aplicação serão analisados combinadores SC, cuja OP (do inglês, *Outage Probability*) - Probabilidade de Indisponibilidade é encontrada de uma forma exata, MRC e EGC. É importante ressaltar que uma relação entre os coeficientes de correlação entre as componentes gaussianas deve ser atendida de forma que o critério de convergência da respectiva série infinita seja atendida.

## 2.2 PDF Conjunta de Duas Envoltórias Correlacionadas

Seja o vetor  $\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4]^T$ , onde  $[\cdot]^T$  significa a transposta de  $[\cdot]$  e cada  $Y_i$  é uma variável aleatória gaussiana com média nula e matriz de covariância  $\mathbf{\Lambda}$  representada por

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \rho_{13} & \rho_{14} \\ 0 & \sigma_2^2 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{13} & \rho_{23} & \sigma_3^2 & 0 \\ \rho_{14} & \rho_{24} & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

onde  $\rho_{kl} = C(Y_k, Y_l)$  com  $1 \leq k, l \leq 4$ . Quando  $k = l$ , então  $\rho_{kl} = \sigma_k^2$ , que é a variância de  $Y_k$ . Os elementos nulos em  $\mathbf{\Lambda}$  aparecem devido à descorrelação (independência estatística) entre as componentes em fase e em quadratura.

Considere agora quatro variáveis Gamma  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , com densidades marginais dadas por

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{\exp(-x_i)x_i^{p-1}}{\Gamma(p)}. \quad (2.2)$$

A Função Geratriz de Momentos (FGM) de quatro variáveis Gamma com  $p = 1/2$  é dada por [64, eq. (2.2)]

$$\Phi(s'_1, s'_2, s'_3, s'_4) = |\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda S}|^{-1/2} \quad (2.3)$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade e  $\mathbf{S}$  é uma matriz diagonal cujos elementos que não são zero (diagonal) são as variáveis de Laplace (frequência complexa)  $s'_1, s'_2, s'_3, s'_4$ . Vamos definir  $\beta'_i(s'_i) = \sigma_i^2 s'_i / (1 - \sigma_i^2 s'_i) \triangleq \beta'_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , tal que (2.3) possa ser reescrita como

$$\Phi(s'_1, s'_2, s'_3, s'_4) = \{(1 - \sigma_1^2 s'_1)(1 - \sigma_2^2 s'_2)(1 - \sigma_3^2 s'_3)(1 - \sigma_4^2 s'_4)\}^{-1/2} \{g(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4)\}^{-1/2} \quad (2.4)$$

onde  $g(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4)$  é o determinante, dado por

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{\rho_{13}}{\sigma_3} \beta'_3 & -\frac{\rho_{14}}{\sigma_4} \beta'_4 \\ 0 & 1 & -\frac{\rho_{23}}{\sigma_3} \beta'_3 & -\frac{\rho_{24}}{\sigma_4} \beta'_4 \\ -\frac{\rho_{13}}{\sigma_1} \beta'_1 & -\frac{\rho_{23}}{\sigma_2} \beta'_2 & 1 & 0 \\ -\frac{\rho_{14}}{\sigma_1} \beta'_1 & -\frac{\rho_{24}}{\sigma_2} \beta'_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

A expressão em (2.5), após o cálculo do determinante, pode ser simplificada para

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3, \beta'_4) = 1 - \{\beta'_1 \beta'_3 \delta_1^2 + \beta'_2 \beta'_3 \delta_4^2 + \beta'_1 \beta'_4 \delta_3^2 + \beta'_2 \beta'_4 \delta_2^2 - \beta'_1 \beta'_2 \beta'_3 \beta'_4 (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^2\} \triangleq 1 - A \quad (2.6)$$

onde

$$\delta_1 = \frac{\rho_{13}}{\sigma_1 \sigma_3}, \quad \delta_2 = \frac{\rho_{24}}{\sigma_2 \sigma_4}, \quad \delta_3 = \frac{\rho_{14}}{\sigma_1 \sigma_4}, \quad \delta_4 = \frac{\rho_{23}}{\sigma_2 \sigma_3}. \quad (2.7)$$

Cada  $\delta_i$  denota a covariância normalizada, com  $1 \leq i \leq 4$ , ou seja:

1.  $\delta_1$  é a correlação entre as componentes em fase;
2.  $\delta_2$  é a correlação entre as componentes em quadratura;
3.  $\delta_3$  é a correlação cruzada entre as componentes em fase e em quadratura e
4.  $\delta_4$  é a correlação cruzada entre as componentes em quadratura e em fase.

Em um modelo de desvanecimento, os coeficientes de correlação  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  e  $\delta_4$  dependem de vários parâmetros tais como a distância dos pontos de recepção, a diferença de frequência entre os sinais transmitidos entre outros fatores [3]. A Figura 2.1 mostra os padrões de correlação definidos em (2.7).

$$\begin{array}{ccc}
 R_1^2 = Y_1^2 & + & Y_2^2 \\
 \delta_1 \uparrow & & \delta_3 \uparrow \\
 & \delta_3 & \\
 & \delta_4 & \\
 \delta_1 \downarrow & & \delta_2 \downarrow \\
 R_2^2 = Y_3^2 & + & Y_4^2
 \end{array}$$

Fig. 2.1: Padrões de correlação arbitrários definidos em (2.7) em uma perspectiva gráfica.

Substituindo (2.6) em (2.4) e expandindo  $(1 - A)^{-1/2}$  através do teorema binomial [25, eq. (1.110)], dado por

$$(1 - A)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} A^k \quad (2.8)$$

onde  $(\cdot)_k$  é o símbolo de Pochhammer [17, eq. (6.1.22)] dado por

$$(a)_k \equiv \frac{\Gamma(a + k)}{\Gamma(a)} = a(a + 1) \cdots (a + k - 1) \quad (2.9)$$

sendo o critério de convergência da série infinita dado por  $|A| < 1$  [25, eq. (1.110)]. Então (2.4) pode ser reescrita com um somatório infinito dado por

$$\Phi(s'_1, s'_2, s'_3, s'_4) = (1 - \sigma_1^2 s'_1)^{-1/2} (1 - \sigma_2^2 s'_2)^{-1/2} (1 - \sigma_3^2 s'_3)^{-1/2} (1 - \sigma_4^2 s'_4)^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} A^k. \quad (2.10)$$

Expandindo  $A^k$  em (2.10) através do teorema multinomial [17, eq. (24.1.2)] para cinco termos dado por

$$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)^k = \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \binom{k_2}{k_3} \binom{k_3}{k_4} b_1^{k-k_1} b_2^{k_1-k_2} b_3^{k_2-k_3} b_4^{k_3-k_4} b_5^{k_4} \quad (2.11)$$

e após algumas manipulações algébricas, (2.10) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Phi(s'_1, s'_2, s'_3, s'_4) &= (1 - \sigma_1^2 s'_1)^{-1/2} (1 - \sigma_2^2 s'_2)^{-1/2} (1 - \sigma_3^2 s'_3)^{-1/2} (1 - \sigma_4^2 s'_4)^{-1/2} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k}{k!} \binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \binom{k_2}{k_3} \binom{k_3}{k_4} \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \delta_2^{2(k_3-k_4)} \\ &\times (-1)^{k_4} (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4} (\beta'_1)^{k-k_1+k_2-k_3+k_4} (\beta'_2)^{k_1-k_2+k_3} (\beta'_3)^{k-k_2+k_4} (\beta'_4)^{k_2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sabendo-se da independência (correlação igual a zero) entre  $Y_1$  e  $Y_2$  e também entre  $Y_3$  e  $Y_4$ , podemos fazer

$$\begin{aligned} s'_1 &= s'_2 = s_1 \\ s'_3 &= s'_4 = s_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Portanto, como consequência,

$$\begin{aligned} \Phi(s_1, s_2) &= \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k}{k!} \binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \binom{k_2}{k_3} \binom{k_3}{k_4} \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \delta_2^{2(k_3-k_4)} \\ &\times (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4} (-1)^{k_4} (1 - \sigma_1^2 s_1)^{-1/2} (1 - \sigma_2^2 s_1)^{-1/2} (1 - \sigma_3^2 s_2)^{-1/2} (1 - \sigma_4^2 s_2)^{-1/2} \\ &\times \left( \frac{\sigma_1^2 s_1}{1 - \sigma_1^2 s_1} \right)^{k-k_1+k_2-k_3+k_4} \left( \frac{\sigma_2^2 s_1}{1 - \sigma_2^2 s_1} \right)^{k_1-k_2+k_3} \left( \frac{\sigma_3^2 s_2}{1 - \sigma_3^2 s_2} \right)^{k-k_2+k_4} \left( \frac{\sigma_4^2 s_2}{1 - \sigma_4^2 s_2} \right)^{k_2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aplicaremos agora a transformada inversa de Laplace [17, eq. (29.1.2)] em (2.14), onde  $s_1$  e  $s_2$  são as variáveis complexas de Laplace. Como as variáveis de Laplace estão escalonadas por uma constante (as variâncias), usaremos a propriedade do escalonamento [17, eq. (29.2.13)]. Faremos

também uso do já conhecido Teorema da Convolução onde o produto de duas funções no domínio complexo de Laplace é mapeado em uma convolução das respectivas transformadas inversas. Utilizando a função generalizada de Laguerre definida como [25, eq. (8.970/1)]

$$L_r^p(x) = r!L_r^{p-1}(x) \quad (2.15)$$

onde

$$L_r^{p-1}(x) = \sum_{j=0}^r \frac{(-1)^j \Gamma(p+r)x^j}{j!(r-j)!\Gamma(p+j)} \quad (2.16)$$

assim como a propriedade [64, eq. (1.3)]

$$\alpha^r (1-\alpha)^{-p-r} = \int_0^\infty \frac{\exp[(\alpha-1)x] x^{p-1} L_r^p(x)}{(p)_r \Gamma(p)} dx \quad (2.17)$$

em (2.14), então a PDF conjunta Gamma é encontrada como

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k}{k!} \binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \binom{k_2}{k_3} \binom{k_3}{k_4} \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \\ &\times \frac{\delta_2^{2(k_3-k_4)} (-1)^{k_4} (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4} (k-k_1+k_2-k_3+k_4)! (k_1-k_2+k_3)! (k-k_2+k_4)! k_2!}{(1/2)_{k-k_1+k_2-k_3+k_4} (1/2)_{k_1-k_2+k_3} (1/2)_{k-k_2+k_4} (1/2)_{k_2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \pi^2} \\ &\times \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} \frac{L_{k-k_1+k_2-k_3+k_4}^{-1/2} \left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2}\right) L_{k_1-k_2+k_3}^{-1/2} \left(\frac{x_1-\tau_1}{\sigma_2^2}\right) L_{k-k_2+k_4}^{-1/2} \left(\frac{\tau_2}{\sigma_3^2}\right) L_{k_2}^{-1/2} \left(\frac{x_2-\tau_2}{\sigma_4^2}\right)}{\sqrt{\tau_1} \exp\left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2}\right) \sqrt{x_1-\tau_1} \exp\left(\frac{x_1-\tau_1}{\sigma_2^2}\right) \sqrt{\tau_2} \exp\left(\frac{\tau_2}{\sigma_3^2}\right) \sqrt{x_2-\tau_2} \exp\left(\frac{x_2-\tau_2}{\sigma_4^2}\right)} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A partir de (2.18) e as relações  $R_1 = \sqrt{X_1}$  e  $R_2 = \sqrt{X_2}$  é possível deduzirmos a PDF conjunta para duas variáveis Hoyt correlacionadas através da transformação  $f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = |J| f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , sendo  $J$  o Jacobiano da transformação. Seguindo o procedimento estatístico padrão de transformação de variáveis e após algumas manipulações algébricas e simplificações, a PDF conjunta Hoyt com duas variáveis é dada por

$$\begin{aligned}
 f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k}{k!} \binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \binom{k_2}{k_3} \binom{k_3}{k_4} \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \\
 &\times \frac{\delta_2^{2(k_3-k_4)} (-1)^{k_4} (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4} (k - k_1 + k_2 - k_3 + k_4)! (k_1 - k_2 + k_3)! (k - k_2 + k_4)! k_2!}{(1/2)_{k-k_1+k_2-k_3+k_4} (1/2)_{k_1-k_2+k_3} (1/2)_{k-k_2+k_4} (1/2)_{k_2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \pi^2} \\
 &\times \int_0^{r_2^2} \int_0^{r_1^2} \frac{2r_1 L_{k-k_1+k_2-k_3+k_4}^{-1/2} \left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2}\right) L_{k_1-k_2+k_3}^{-1/2} \left(\frac{r_1^2-\tau_1}{\sigma_2^2}\right) 2r_2 L_{k-k_2+k_4}^{-1/2} \left(\frac{\tau_2}{\sigma_3^2}\right) L_{k_2}^{-1/2} \left(\frac{r_2^2-\tau_2}{\sigma_4^2}\right)}{\sqrt{\tau_1} \exp\left(\frac{\tau_1}{\sigma_1^2}\right) \sqrt{r_1^2 - \tau_1} \exp\left(\frac{r_1^2-\tau_1}{\sigma_2^2}\right) \sqrt{\tau_2} \exp\left(\frac{\tau_2}{\sigma_3^2}\right) \sqrt{r_2^2 - \tau_2} \exp\left(\frac{r_2^2-\tau_2}{\sigma_4^2}\right)} d\tau_1 d\tau_2
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Perceba, entretanto, que a expressão ainda é dada em termos de uma integral dupla, o que não é desejável. Com o objetivo de resolver as integrais em (2.19), procederemos como a seguir:

(i) [25, eq. (8.972/1)], a relação entre a função hipergeométrica e as funções de Laguerre dada por

$$L_n^\alpha(x) = \binom{n + \alpha}{n} {}_1F_1(-n, \alpha + 1; x) \tag{2.20}$$

(ii) [25, eq. (9.212/1)], uma relação funcional envolvendo as funções exponencial e hipergeométrica dada por

$${}_1F_1(\alpha, \gamma; z) = \exp(z) {}_1F_1(\gamma - \alpha, \gamma; -z) \tag{2.21}$$

(iii) a expansão da função de Laguerre dada em (2.16) e (iv) [25, eq. (3.383/1)] dado por

$$\int_0^u x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} \exp(\beta x) dx = B(\mu, \nu) u^{\mu+\nu-1} {}_1F_1(\nu, \mu + \nu; \beta u) \tag{2.22}$$

onde  $B(\cdot, \cdot)$  é a função Beta [17, eq. (6.2.2)]. É desejável que a PDF conjunta seja expressa em função de parâmetros físicos. Desta maneira, vamos definir

$$\eta_1 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \tag{2.23a}$$

$$\eta_2 = \frac{\sigma_3^2}{\sigma_4^2} \quad (2.23b)$$

sendo  $\eta_1$  e  $\eta_2$  a razão entre as potências das ondas espalhadas das componentes em fase e em quadratura de cada *cluster* de múltiplo percurso, respectivamente.

Após várias manipulações algébricas, simplificações e a utilização das expressões anteriormente dadas, a PDF conjunta de duas variáveis para a distribuição Hoyt é dada por

$$\begin{aligned} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \delta_2^{2(k_3-k_4)} (-1)^{k_4} (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!(k_2-k_3)!(k_3-k_4)!k_4!} \\ & \times \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2-k_3+k_4} \sum_{j_2=0}^{k_1-k_2+k_3} \binom{k-k_1+k_2-k_3+k_4}{j_1} \binom{k_1-k_2+k_3}{j_2} \left(\frac{1+\eta_1}{2\Omega_1}\right)^{j_1+j_2+1} (-1)^{j_1+j_2} \\ & \times \frac{2r_1^{2(j_1+j_2)+1}}{\eta_1^{j_1+1/2} \exp\left(\frac{1+\eta_1}{2\Omega_1} r_1^2\right)} {}_1\tilde{F}_1\left(j_1+1/2, j_1+j_2+1; \frac{\eta_1^2-1}{2\Omega_1\eta_1} r_1^2\right) \sum_{j_3=0}^{k-k_2+k_4} \sum_{j_4=0}^{k_2} \binom{k-k_2+k_4}{j_3} \binom{k_2}{j_4} \\ & \times \left(\frac{1+\eta_2}{2\Omega_2}\right)^{j_3+j_4+1} \frac{(-1)^{j_3+j_4} 2r_2^{2(j_3+j_4)+1}}{\eta_2^{j_3+1/2} \exp\left(\frac{1+\eta_2}{2\Omega_2} r_2^2\right)} {}_1\tilde{F}_1\left(j_3+1/2, j_3+j_4+1; \frac{\eta_2^2-1}{2\Omega_2\eta_2} r_2^2\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  ${}_1\tilde{F}_1(\cdot, \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica regularizada confluyente [17, eq. (13.1.2)],  $\Omega_1 = E(R_1^2)$  e  $\Omega_2 = E(R_2^2)$ . Como caso particular, no modelo de Rayleigh  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ .

### 2.3 CDF Conjunta de Duas Envoltórias Correlacionadas

A CDF conjunta Hoyt correlacionada através de coeficientes de correlação arbitrários pode ser deduzida integrando (2.24) da seguinte maneira

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \int_0^{r_1} \int_0^{r_2} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) dr_2 dr_1. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) em (2.25), usando [25, eq. (9.210/1)], uma representação da função hipergeométrica na forma de série infinita dada por

$${}_1F_1(\alpha, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(\gamma)_k k!} \quad (2.26)$$

e [25, eq. (3.381/1)] após várias manipulações algébricas, podemos encontrar a CDF conjunta dada por

$$\begin{aligned} F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \delta_2^{2(k_3-k_4)} (-1)^{k_4} (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!(k_2-k_3)!(k_3-k_4)!k_4!} \\ & \times \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2-k_3+k_4} \sum_{j_2=0}^{k_1-k_2+k_3} \frac{(-1)^{j_1+j_2}}{\eta_1^{j_1+1/2}} \binom{k-k_1+k_2-k_3+k_4}{j_1} \binom{k_1-k_2+k_3}{j_2} \\ & \times \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{(j_1+1/2)_{j_3}}{j_3!} \left( \frac{\eta_1-1}{\eta_1} \right)^{j_3} P \left( j_1+j_2+j_3+1, \frac{1+\eta_1}{2\Omega_1} r_1^2 \right) \sum_{j_4=0}^{k-k_2+k_4} \sum_{j_5=0}^{k_2} \frac{(-1)^{j_4+j_5}}{\eta_2^{j_4+1/2}} \\ & \times \binom{k-k_2+k_4}{j_4} \binom{k_2}{j_5} \sum_{j_6=0}^{\infty} \frac{(j_4+1/2)_{j_6}}{j_6!} \left( \frac{\eta_2-1}{\eta_2} \right)^{j_6} P \left( j_4+j_5+j_6+1, \frac{1+\eta_2}{2\Omega_2} r_2^2 \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde  $P(a, x)$  é a função Gamma incompleta regularizada [17, eq.(6.5.1)] dada por

$$P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x \exp(-t) t^{a-1} dt. \quad (2.28)$$

Seguindo o mesmo procedimento descrito em [64], é possível demonstrar que as séries deduzidas (PDF e CDF) são absolutamente convergentes atendendo o critério

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^2 < 1. \quad (2.29)$$

## 2.4 Coeficiente de Correlação de Potência

Usando (2.24) e a relação dada em [25, eq. (7.621/4)], os momentos centrais conjuntos da distribuição Hoyt bivariável na potência e com variâncias arbitrárias podem ser calculados usando o procedimento padrão da teoria da probabilidade, ou seja,

$$E(R_1^2 R_2^2) = \int_0^\infty \int_0^\infty r_1^2 r_2^2 f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) dr_1 dr_2. \quad (2.30)$$

Portanto, após manipulações algébrica, temos

$$E(R_1^2 R_2^2) = \frac{(1 + 2\delta_1^2)\sigma_1^2\sigma_3^2 + (1 + 2\delta_3^2)\sigma_1^2\sigma_4^2 + (1 + 2\delta_4^2)\sigma_2^2\sigma_3^2 + (1 + 2\delta_2^2)\sigma_2^2\sigma_4^2}{4}. \quad (2.31)$$

Mas  $C(R_1^2, R_2^2) = E(R_1^2 R_2^2) - E(R_1^2)E(R_2^2)$  onde  $E(R_1^2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2$ ,  $E(R_2^2) = (\sigma_3^2 + \sigma_4^2)/2$ . Ainda  $V(R_1^2) = E(R_1^4) - \{E(R_1^2)\}^2$ ,  $V(R_2^2) = E(R_2^4) - \{E(R_2^2)\}^2$ . O quarto momento de cada processo  $E(R_1^4)$  e  $E(R_2^4)$  pode ser calculado utilizando [24, eq. (52)], que resulta em

$$E(R_1^4) = \frac{3\sigma_1^4 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 + 3\sigma_2^4}{4} \quad (2.32a)$$

$$E(R_2^4) = \frac{3\sigma_3^4 + 2\sigma_3^2\sigma_4^2 + 3\sigma_4^4}{4}. \quad (2.32b)$$

Assim, as variâncias são dadas por

$$V(R_1^2) = \frac{\sigma_1^4 + \sigma_2^4}{2} \quad (2.33a)$$

$$V(R_2^2) = \frac{\sigma_3^4 + \sigma_4^4}{2}. \quad (2.33b)$$

O coeficiente de correlação resultante pode ser expresso de uma maneira exata por

$$\rho = \frac{\delta_1^2\sigma_1^2\sigma_3^2 + \delta_2^2\sigma_2^2\sigma_4^2 + \delta_3^2\sigma_1^2\sigma_4^2 + \delta_4^2\sigma_2^2\sigma_3^2}{\sqrt{(\sigma_1^4 + \sigma_2^4)(\sigma_3^4 + \sigma_4^4)}} \quad (2.34)$$

e, de uma maneira similar, agora em função de  $\eta_1$  e  $\eta_2$  como

$$\rho = \frac{\delta_1^2 \eta_1 \eta_2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 \eta_1 + \delta_4^2 \eta_2}{\sqrt{(\eta_1^2 + 1)(\eta_2^2 + 1)}}. \quad (2.35)$$

A expressão em (2.35) é *geral e exata* e considera coeficientes de correlação *arbitrários* e valores de  $\eta_1$  e  $\eta_2$  também arbitrários. Se consideramos  $\delta_1 = \delta_2$  e  $\delta_4 = -\delta_3$ , a correlação conforme deduzida em [78, eq. (11)] é obtida. De forma particular, para o modelo de Rayleigh,  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ .

## 2.5 Casos Especiais

Partindo de (2.6) e seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente, formas mais simples da PDF conjunta assim como da CDF conjunta podem ser obtidas.

Um caso especial interessante pode ser obtido se fizermos  $\delta_3 = \delta_4 = 0$  (correlação cruzada nula). Neste caso, a PDF conjunta em (2.24) pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1+k_2)} \delta_2^{2k_1} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \\ &\times \left( \frac{1+\eta_1}{2\Omega_1} \right)^{j_1+j_2+1} \frac{2r_1^{2(j_1+j_2)+1} (-1)^{j_1+j_2} {}_1\tilde{F}_1 \left( j_1 + 1/2, j_1 + j_2 + 1; \frac{\eta_1^2-1}{2\Omega_1\eta_1} r_1^2 \right)}{\eta_1^{j_1+1/2} \exp \left( \frac{1+\eta_1}{2\Omega_1} r_1^2 \right)} \\ &\times \sum_{j_3=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_4=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_3} \binom{k_1}{j_4} \left( \frac{1+\eta_2}{2\Omega_2} \right)^{j_3+j_4+1} \\ &\times \frac{2r_2^{2(j_3+j_4)+1} (-1)^{j_3+j_4} {}_1\tilde{F}_1 \left( j_3 + 1/2, j_3 + j_4 + 1; \frac{\eta_2^2-1}{2\Omega_2\eta_2} r_2^2 \right)}{\eta_2^{j_3+1/2} \exp \left( \frac{1+\eta_2}{2\Omega_2} r_2^2 \right)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A CDF conjunta simplificada de (2.27) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1+k_2)} \delta_2^{2k_1} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \frac{(-1)^{j_1+j_2}}{\eta_1^{j_1+1/2}} \\
&\times \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{(j_1+1/2)_{j_3}}{j_3!} \left(\frac{\eta_1-1}{\eta_1}\right)^{j_3} P\left(j_1+j_2+j_3+1, \frac{1+\eta_1}{2\Omega_1} r_1^2\right) \\
&\times \sum_{j_4=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_5=0}^{k_1} \frac{(-1)^{j_4+j_5}}{\eta_2^{j_4+1/2}} \binom{k-k_1+k_2}{j_4} \binom{k_1}{j_5} \\
&\times \sum_{j_6=0}^{\infty} \frac{(j_4+1/2)_{j_6}}{j_6!} \left(\frac{\eta_2-1}{\eta_2}\right)^{j_6} P\left(j_4+j_5+j_6+1, \frac{1+\eta_2}{2\Omega_2} r_2^2\right)
\end{aligned} \tag{2.37}$$

e

$$\rho = \frac{\delta_1^2 \eta_1 \eta_2 + \delta_2^2}{\sqrt{(\eta_1^2 + 1)(\eta_2^2 + 1)}}. \tag{2.38}$$

Neste caso, o critério de convergência é atendido se  $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_1^2 \delta_2^2 < 1$ .

Ainda neste caso, se  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , então a PDF conjunta em (2.24) pode ser simplificada para

$$\begin{aligned}
f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta^{2(k+k_2)} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \\
&\times \frac{\left(\frac{1+\eta_1}{2\Omega_1}\right)^{j_1+j_2+1} 2r_1^{2(j_1+j_2)+1} (-1)^{j_1+j_2} {}_1\tilde{F}_1\left(j_1+1/2, j_1+j_2+1; \frac{\eta_1^2-1}{2\Omega_1\eta_1} r_1^2\right)}{\eta_1^{j_1+1/2} \exp\left(\frac{1+\eta_1}{2\Omega_1} r_1^2\right)} \\
&\times \sum_{j_3=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_4=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_3} \binom{k_1}{j_4} \left(\frac{1+\eta_2}{2\Omega_2}\right)^{j_3+j_4+1} \\
&\times \frac{2r_2^{2(j_3+j_4)+1} (-1)^{j_3+j_4} {}_1\tilde{F}_1\left(j_3+1/2, j_3+j_4+1; \frac{\eta_2^2-1}{2\Omega_2\eta_2} r_2^2\right)}{\eta_2^{j_3+1/2} \exp\left(\frac{1+\eta_2}{2\Omega_2} r_2^2\right)}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

A CDF conjunta simplificada de (2.27) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta^{2(k+k_2)} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \frac{(-1)^{j_1+j_2}}{\eta_1^{j_1+1/2}} \\
&\times \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{(j_1+1/2)_{j_3}}{j_3!} \left(\frac{\eta_1-1}{\eta_1}\right)^{j_3} P\left(j_1+j_2+j_3+1, \frac{1+\eta_1}{2\Omega_1} r_1^2\right) \\
&\times \sum_{j_4=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_5=0}^{k_1} \frac{(-1)^{j_4+j_5}}{\eta_2^{j_4+1/2}} \binom{k-k_1+k_2}{j_4} \binom{k_1}{j_5} \\
&\times \sum_{j_6=0}^{\infty} \frac{(j_4+1/2)_{j_6}}{j_6!} \left(\frac{\eta_2-1}{\eta_2}\right)^{j_6} P\left(j_4+j_5+j_6+1, \frac{1+\eta_2}{2\Omega_2} r_2^2\right)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

e

$$\rho = \frac{\delta^2(\eta_1\eta_2 + 1)}{\sqrt{(\eta_1^2 + 1)(\eta_2^2 + 1)}}. \tag{2.41}$$

Neste caso, o critério de convergência é atendido se  $2\delta^2 + \delta^4 < 1$ .

As expressões deduzidas nesta seção são exatas, mas consideram condições de correlação menos restritivas.

## 2.6 Formulação Aproximada

Se considerarmos pequenos valores do coeficiente de correlação na expressão (2.24), somente  $r = 0$  e  $r = 1$ , ou seja, apenas dois termos na série infinita são relevantes na composição da densidade conjunta. Neste caso, (2.24) pode ser aproximada por uma fórmula fechada simples dada por  $\tilde{f}_{R_1, R_2}(r_1, r_2) \approx f_{R_1, R_2}(r_1, r_2)$  para os seguintes casos:

1. Partindo diretamente de (2.24), a expressão resultante é dada por

$$\tilde{f}_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1)f_{R_2}(r_2) + \delta_1^2 G_1 G_2 + \delta_2^2 H_1 H_2 + \delta_3^2 G_1 H_2 + \delta_4^2 G_2 H_1 - (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^2 S_1 S_2 \tag{2.42}$$

onde

$$G_i = \exp \left[ -\frac{(1 + \eta_i)^2 r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] \frac{(1 + \eta_i) r_i}{\sqrt{8\eta_i^3 \Omega_i^2}} \times \left\{ [(1 + \eta_i) r_i^2 - 2\Omega_i \eta_i] I_0 \left[ \frac{(\eta_i^2 - 1) r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] + (1 + \eta_i) r_i^2 I_1 \left[ \frac{(\eta_i^2 - 1) r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] \right\} \quad (2.43)$$

$$H_i = \exp \left[ -\frac{(1 + \eta_i)^2 r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] \frac{(1 + \eta_i) r_i}{\sqrt{8\eta_i^3 \Omega_i^2}} \times \left\{ [(1 + \eta_i) r_i^2 - 2\Omega_i] I_0 \left[ \frac{(\eta_i^2 - 1) r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] - (1 + \eta_i) r_i^2 I_1 \left[ \frac{(\eta_i^2 - 1) r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] \right\} \quad (2.44)$$

$$S_i = \exp \left[ -\frac{(1 + \eta_i)^2 r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] \frac{(1 + \eta_i) r_i}{\sqrt{8\eta_i^3 \Omega_i^2}} \times \left\{ [(1 + \eta_i) r_i^2 - 2\Omega_i \eta_i] I_0 \left[ \frac{(\eta_i^2 - 1) r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] + \frac{(1 + \eta_i)(1 + \eta_i^2)}{\eta_i - 1} r_i^2 I_1 \left[ \frac{(\eta_i^2 - 1) r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] \right\} \quad (2.45)$$

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{(1 + \eta_i) r_i}{\sqrt{\eta_i \Omega_i}} \exp \left[ -\frac{(1 + \eta_i)^2 r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] I_0 \left[ \frac{(\eta_i^2 - 1) r_i^2}{4\eta_i \Omega_i} \right] \quad (2.46)$$

com  $i = 1, 2$ ,  $r_i > 0$  e  $I_1(\cdot)$  é a função de Bessel modificada de primeiro tipo e de ordem um [17, eq. (9.6.16)]. Note que  $f_{R_i}(r_i)$  é a PDF marginal Hoyt.

2. Considerando correlação cruzada nula, ou seja  $\delta_3 = \delta_4 = 0$ . A expressão resultante é dada por

$$\tilde{f}_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) + \delta_1^2 G_1 G_2 + \delta_2^2 H_1 H_2 - \delta_1^2 \delta_2^2 S_1 S_2. \quad (2.47)$$

## 2.7 Aplicações

Nesta Seção resultados adicionais são obtidos utilizando-se a distribuição de Hoyt correlacionada bivariável em três tipos de combinadores: SC, MRC e EGC. Especificamente, para o caso SC, serão

deduzidas expressões exatas para OP e a PDF como uma função da SNR na saída do combinador.

### 2.7.1 Receptor SC de Dois Ramos

A PDF conjunta (2.24) expressa como uma função do parâmetro SNR,  $\Gamma_i = R_i^2 E_b / N_o$  no ramo  $i$ , assim como os casos especiais dados em (2.36) e (2.39), podem ser escritos, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
 f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \delta_2^{2(k_3-k_4)} (-1)^{k_4} (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!(k_2-k_3)!(k_3-k_4)!k_4!} \\
 & \times \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2-k_3+k_4} \sum_{j_2=0}^{k_1-k_2+k_3} \binom{k-k_1+k_2-k_3+k_4}{j_1} \binom{k_1-k_2+k_3}{j_2} (1+\eta_1)^{j_1+j_2+1} \\
 & \times \frac{(-\gamma_1)^{j_1+j_2+1} \tilde{F}_1 \left[ j_1 + 1/2, j_1 + j_2 + 1; \frac{\gamma_1(\eta_1^2-1)}{2\bar{\gamma}_1\eta_1} \right]}{(2\bar{\gamma}_1)^{j_1+j_2+1} \eta_1^{j_1+1/2} \exp \left[ \frac{\gamma_1(1+\eta_1)}{2\bar{\gamma}_1} \right]} \sum_{j_3=0}^{k-k_2+k_4} \sum_{j_4=0}^{k_2} \binom{k-k_2+k_4}{j_3} \binom{k_2}{j_4} \\
 & \times \frac{(1+\eta_2)^{j_3+j_4+1} (-\gamma_2)^{j_3+j_4} \tilde{F}_1 \left[ j_3 + 1/2, j_3 + j_4 + 1; \frac{\gamma_2(\eta_2^2-1)}{2\bar{\gamma}_2\eta_2} \right]}{(2\bar{\gamma}_2)^{j_3+j_4+1} \eta_2^{j_3+1/2} \exp \left[ \frac{\gamma_2(1+\eta_2)}{2\bar{\gamma}_2} \right]}
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1+k_2)} \delta_2^{2k_1} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \\
 & \times \frac{(1+\eta_1)^{j_1+j_2+1} (-\gamma_1)^{j_1+j_2} \tilde{F}_1 \left[ j_1 + 1/2, j_1 + j_2 + 1; \frac{\gamma_1(\eta_1^2-1)}{2\bar{\gamma}_1\eta_1} \right]}{(2\bar{\gamma}_1)^{j_1+j_2+1} \eta_1^{j_1+1/2} \exp \left[ \frac{\gamma_1(1+\eta_1)}{2\bar{\gamma}_1} \right]} \sum_{j_3=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_4=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_3} \\
 & \times \binom{k_1}{j_4} \frac{(1+\eta_2)^{j_3+j_4+1} (-\gamma_2)^{j_3+j_4} \tilde{F}_1 \left[ j_3 + 1/2, j_3 + j_4 + 1; \frac{\gamma_2(\eta_2^2-1)}{2\bar{\gamma}_2\eta_2} \right]}{(2\bar{\gamma}_2)^{j_3+j_4+1} \eta_2^{j_3+1/2} \exp \left[ \frac{\gamma_2(1+\eta_2)}{2\bar{\gamma}_2} \right]}
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\begin{aligned}
f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta^{2(k+k_2)} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \\
&\times \frac{(1+\eta_1)^{j_1+j_2+1} (-\gamma_1)^{j_1+j_2} {}_1\tilde{F}_1 \left[ j_1+1/2, j_1+j_2+1; \frac{\gamma_1(\eta_1^2-1)}{2\bar{\gamma}_1\eta_1} \right]}{(2\bar{\gamma}_1)^{j_1+j_2+1} \eta_1^{j_1+1/2} \exp \left[ \frac{\gamma_1(1+\eta_1)}{2\bar{\gamma}_1} \right]} \sum_{j_3=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_4=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_3} \\
&\times \binom{k_1}{j_4} \frac{(1+\eta_2)^{j_3+j_4+1} (-\gamma_2)^{j_3+j_4} {}_1\tilde{F}_1 \left[ j_3+1/2, j_3+j_4+1; \frac{\gamma_2(\eta_2^2-1)}{2\bar{\gamma}_2\eta_2} \right]}{(2\bar{\gamma}_2)^{j_3+j_4+1} \eta_2^{j_3+1/2} \exp \left[ \frac{\gamma_2(1+\eta_2)}{2\bar{\gamma}_2} \right]}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

onde  $E_b/N_o$  é a razão entre a energia por bit e a densidade espectral de ruído e  $\bar{\gamma}_i$  é a razão sinal-ruído média, dada por  $\bar{\gamma}_i = E_b/N_o E(R_i^2)$ .

As estatísticas conjuntas (PDF e CDF), embora representadas através de uma série infinita, convergem de maneira rápida para um dado valor prático de precisão. Como exemplo, a Tabela 2.1 fornece o número de termos  $K$  de (2.48), (2.49) e (2.50) considerando sete casas decimais de precisão e para vários valores  $\eta_1, \eta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  e  $\delta_4$ , com  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$ . Note que, de uma maneira geral, o número de termos necessários na série é pequeno. De maneira particular, perceba que para valores altos de envoltória somente dois termos são necessários.

A técnica de combinação SC escolhe o ramo com o maior valor instantâneo do parâmetro SNR para a decisão a respeito de um símbolo. Então a SNR na saída é igual a  $\Gamma = \max\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$  [55]. Sobre um desvanecimento em pequena escala

$$F_{\Gamma}(\gamma) = \int_0^{\gamma} \int_0^{\gamma} f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2. \tag{2.51}$$

Substituindo (2.48) em (2.51) e expandindo a função de Laguerre através da equação (2.16) pode-se

Tab. 2.1: Número de termos em (2.48), (2.49) e (2.50) necessários para sete casas decimais de precisão.

$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\eta_1$	$\eta_2$	$K$	
						$\gamma_1 = 1$	$\gamma_1 = 10$
						$\gamma_2 = 1$	$\gamma_2 = 10$
0.9	0	0	0	1	1	34	2
0.8	0	0	0	1	1	19	2
0.6	0.3	0	0	1	1	14	2
0.5	0.5	0	0	1	1	15	2
0.4	0.4	0.4	-0.4	1	1	18	2
0.3	0.3	0.3	-0.3	1	1	8	2
0.1	0.1	0.1	0.1	1	1	5	2
0.9	0	0	0	0.5	0.5	24	2
0.8	0	0	0	0.5	0.5	22	2
0.6	0.3	0	0	0.5	0.5	13	2
0.5	0.5	0	0	0.5	0.5	9	2
0.4	0.4	0.4	-0.4	0.5	0.5	17	2
0.3	0.3	0.3	-0.3	0.5	0.5	9	2
0.1	0.1	0.1	0.1	0.5	0.5	5	2

obter

$$\begin{aligned}
F_{\Gamma}(\gamma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \sum_{k_3=0}^{k_2} \sum_{k_4=0}^{k_3} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1)} \delta_4^{2(k_1-k_2)} \delta_3^{2(k_2-k_3)} \delta_2^{2(k_3-k_4)} (-1)^{k_4} (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k_4}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!(k_2-k_3)!(k_3-k_4)!k_4!} \\
&\times \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2-k_3+k_4} \sum_{j_2=0}^{k_1-k_2+k_3} \binom{k-k_1+k_2-k_3+k_4}{j_1} \binom{k_1-k_2+k_3}{j_2} \\
&\times \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{(j_1+1/2)_{j_3} (-1)^{j_1+j_2}}{j_3! \eta_1^{j_1+1/2}} \left( \frac{\eta_1-1}{\eta_1} \right)^{j_3} P \left( j_1+j_2+j_3+1, \frac{1+\eta_1}{2\bar{\gamma}_1} \gamma \right) \sum_{j_4=0}^{k-k_2+k_4} \sum_{j_5=0}^{k_2} \binom{k-k_2+k_4}{j_4} \\
&\times \binom{k_2}{j_5} \sum_{j_6=0}^{\infty} \frac{(j_4+1/2)_{j_6} (-1)^{j_4+j_5}}{j_6! \eta_2^{j_4+1/2}} \left( \frac{\eta_2-1}{\eta_2} \right)^{j_6} P \left( j_4+j_5+j_6+1, \frac{1+\eta_2}{2\bar{\gamma}_2} \gamma \right).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Seguindo o mesmo procedimento para os casos especiais dados em (2.49) e (2.50) a CDF  $F_{\Gamma}(\gamma)$

na saída do combinador é dada por

$$\begin{aligned}
F_{\Gamma}(\gamma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta_1^{2(k-k_1+k_2)} \delta_2^{2k_1} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \\
&\times \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{(j_1+1/2)_{j_3} (-1)^{j_1+j_2}}{j_3! \eta_1^{j_1+1/2}} \left( \frac{\eta_1-1}{\eta_1} \right)^{j_3} P \left( j_1+j_2+j_3+1, \frac{1+\eta_1}{2\bar{\gamma}_1} \gamma \right) \sum_{j_4=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_5=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_4} \\
&\times \binom{k_1}{j_5} \sum_{j_6=0}^{\infty} \frac{(j_4+1/2)_{j_6} (-1)^{j_4+j_5}}{j_6! \eta_2^{j_4+1/2}} \left( \frac{\eta_2-1}{\eta_2} \right)^{j_6} P \left( j_4+j_5+j_6+1, \frac{1+\eta_2}{2\bar{\gamma}_2} \gamma \right)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Gamma}(\gamma) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \frac{(1/2)_k \delta^{2(k+k_2)} (-1)^{k_2}}{(k-k_1)!(k_1-k_2)!k_2!} \sum_{j_1=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_2=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_1} \binom{k_1}{j_2} \\
&\times \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{(j_1+1/2)_{j_3} (-1)^{j_1+j_2}}{j_3! \eta_1^{j_1+1/2}} \left( \frac{\eta_1-1}{\eta_1} \right)^{j_3} P \left( j_1+j_2+j_3+1, \frac{1+\eta_1}{2\bar{\gamma}_1} \gamma \right) \sum_{j_4=0}^{k-k_1+k_2} \sum_{j_5=0}^{k_1} \binom{k-k_1+k_2}{j_4} \\
&\times \binom{k_1}{j_5} \sum_{j_6=0}^{\infty} \frac{(j_4+1/2)_{j_6} (-1)^{j_4+j_5}}{j_6! \eta_2^{j_4+1/2}} \left( \frac{\eta_2-1}{\eta_2} \right)^{j_6} P \left( j_4+j_5+j_6+1, \frac{1+\eta_2}{2\bar{\gamma}_2} \gamma \right).
\end{aligned} \tag{2.54}$$

A Figura 2.2 mostra a OP versus a SNR média de um sistema de diversidade SC com dois ramos em um canal Hoyt considerando o caso geral dado em (2.52) e os casos especiais dados em (2.53) e (2.54). Para o mesmo coeficiente de correlação de potência, como obtido em (2.35), diferentes curvas de desempenho podem ser obtidas. Isto significa que embora para um determinado ambiente seja determinado um valor específico do coeficiente de correlação de potência, o desempenho depende, em última análise, do tipo de correlação que envolve as componentes gaussianas em fase e em quadratura. Perceba também que não existe diferença significativa de desempenho entre as curvas do caso geral (linha pontilhada) e do caso especial para  $\delta_3 = \delta_4 = 0$  (linha contínua). De fato, neste caso a diferença de desempenho é praticamente imperceptível. A Figura 2.3 representa graficamente (2.52), para diferentes valores de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  e  $\delta_4$ . É perceptível que diferentes valores destes parâmetros

resultam em diferentes curvas de desempenho. Portanto, um grande número de diferentes cenários pode ser analisado. Algumas destas situações são ilustradas na Figura 2.3.

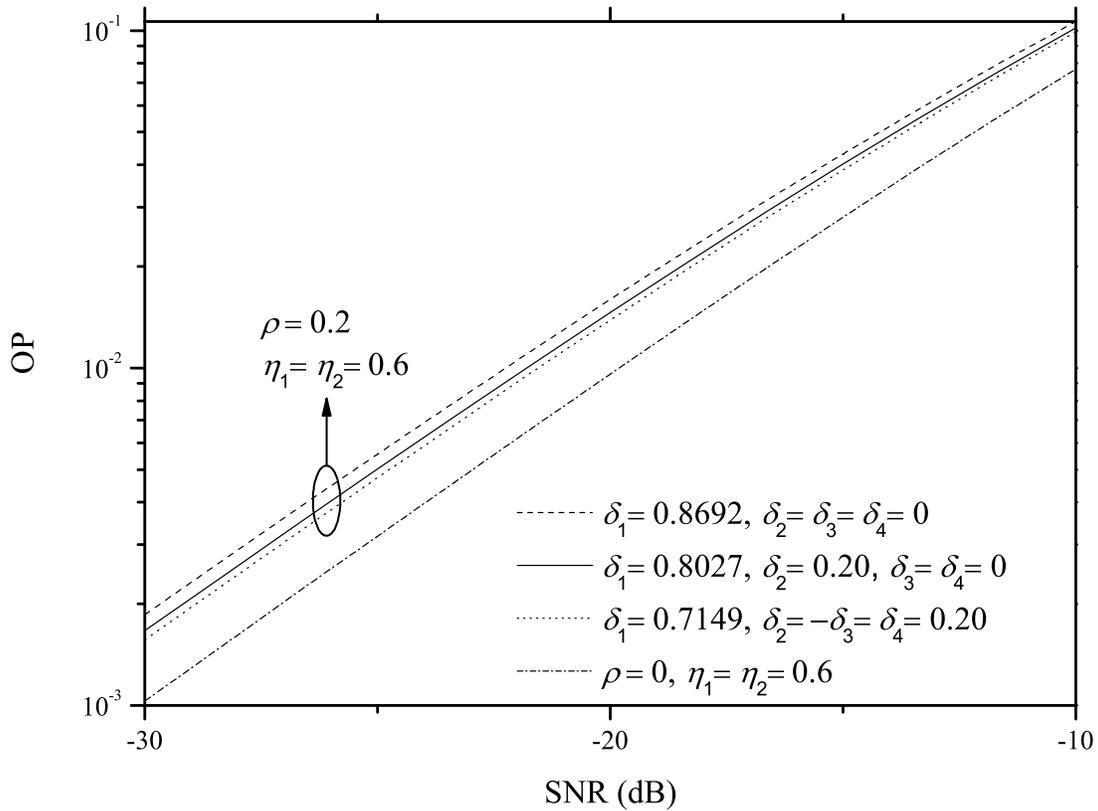


Fig. 2.2: OP de um sistema SC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  e  $\delta_4$ .

### 2.7.2 Receptor MRC de Dois Ramos

No sistema MRC, os sinais recebidos são postos em fase, cada sinal é apropriadamente amplificado para uma combinação ótima e os sinais resultantes são adicionados. O valor da SNR na saída do combinador com dois ramos é escrito como  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ . A CDF conjunta pode ser calculada

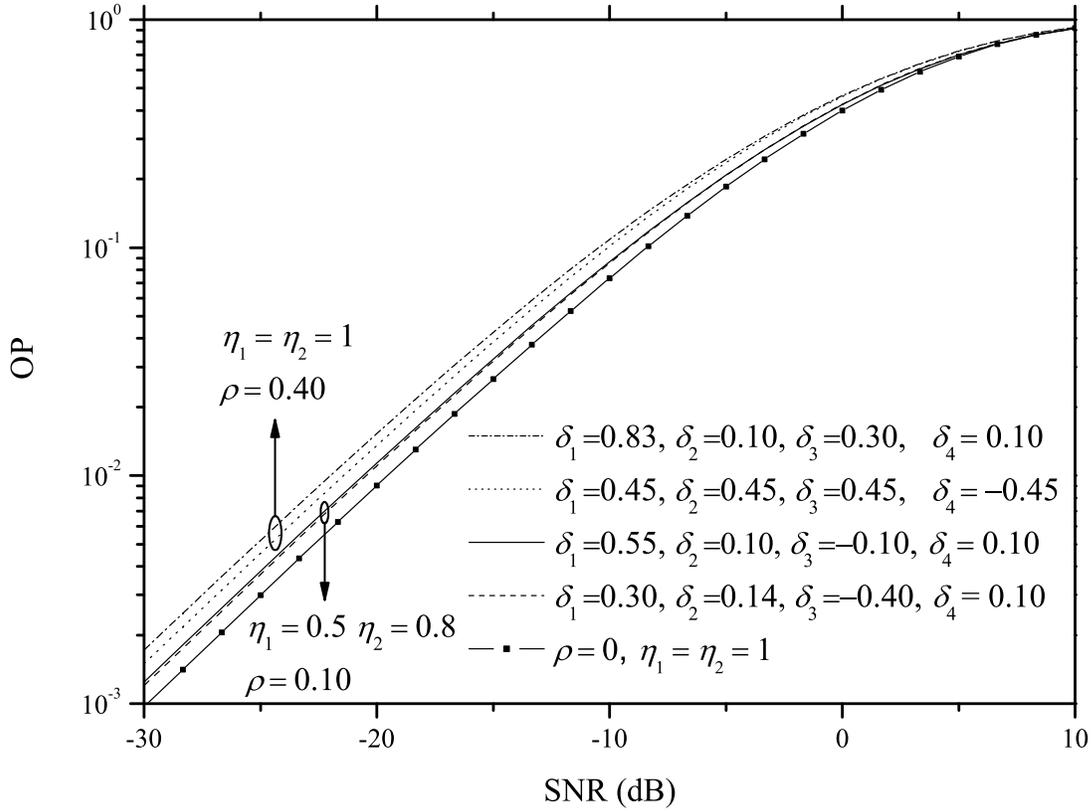


Fig. 2.3: OP de um sistema SC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  e  $\delta_4$ .

integrando-se a PDF conjunta em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , sobre o plano bidimensional limitado pelos hiperplanos  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  e suas coordenadas. Usando o procedimento descrito em [80], a CDF conjunta  $F_\Gamma(\gamma)$  na saída do combinador é dada por

$$F_\Gamma(\gamma) = \int_0^\gamma \int_0^{\sqrt{\gamma^2 - \gamma_2^2}} f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2. \quad (2.55)$$

### 2.7.3 Receptor EGC de Dois Ramos

No sistema EGC, os sinais recebidos são postos em fase e adicionados. O valor da SNR na saída do combinador de dois ramos é escrito por  $\Gamma = (\Gamma_1 + \Gamma_2)/\sqrt{2}$ . A CDF conjunta pode ser calculada integrando-se a PDF conjunta em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , sobre o plano bidimensional limitado pelos hiperplanos  $(\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2)/\sqrt{2}$  e suas coordenadas. Utilizando-se do procedimento deduzido em [80], a CDF conjunta  $F_\Gamma(\gamma)$  na saída do combinador é dada por

$$F_\Gamma(\gamma) = \int_0^{\sqrt{2}\gamma} \int_0^{\sqrt{2}\gamma^2 - \gamma_1^2} f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2. \quad (2.56)$$

A Figura 2.4 representa graficamente (2.55) e (2.56) para alguns valores de  $\delta_1 = \delta_2, \delta_3 = \delta_4 = 0, \eta_1, \eta_2$  e  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$ . A Figura 2.5 representa graficamente (2.55) e (2.56) para alguns valores de  $\delta_1, \delta_2, \delta_3 = \delta_4 = 0, \eta_1 = \eta_2 = 0.5$  e  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$ . É claramente possível observarmos que diferentes valores destes parâmetros resultam em diferentes situações de desempenho e assim um grande número de diferentes cenários pode ser analisado.

## 2.8 Conclusões

Neste capítulo vários novos resultados relacionados à distribuição de Hoyt foram obtidos. As formulações fazem uso das bem conhecidas funções hipergeométrica confluyente e Gamma incompleta. Tais expressões são matematicamente tratáveis, de fácil manipulação e flexíveis suficientes para acomodar um número diverso de ambientes com desvanecimentos correlacionados.

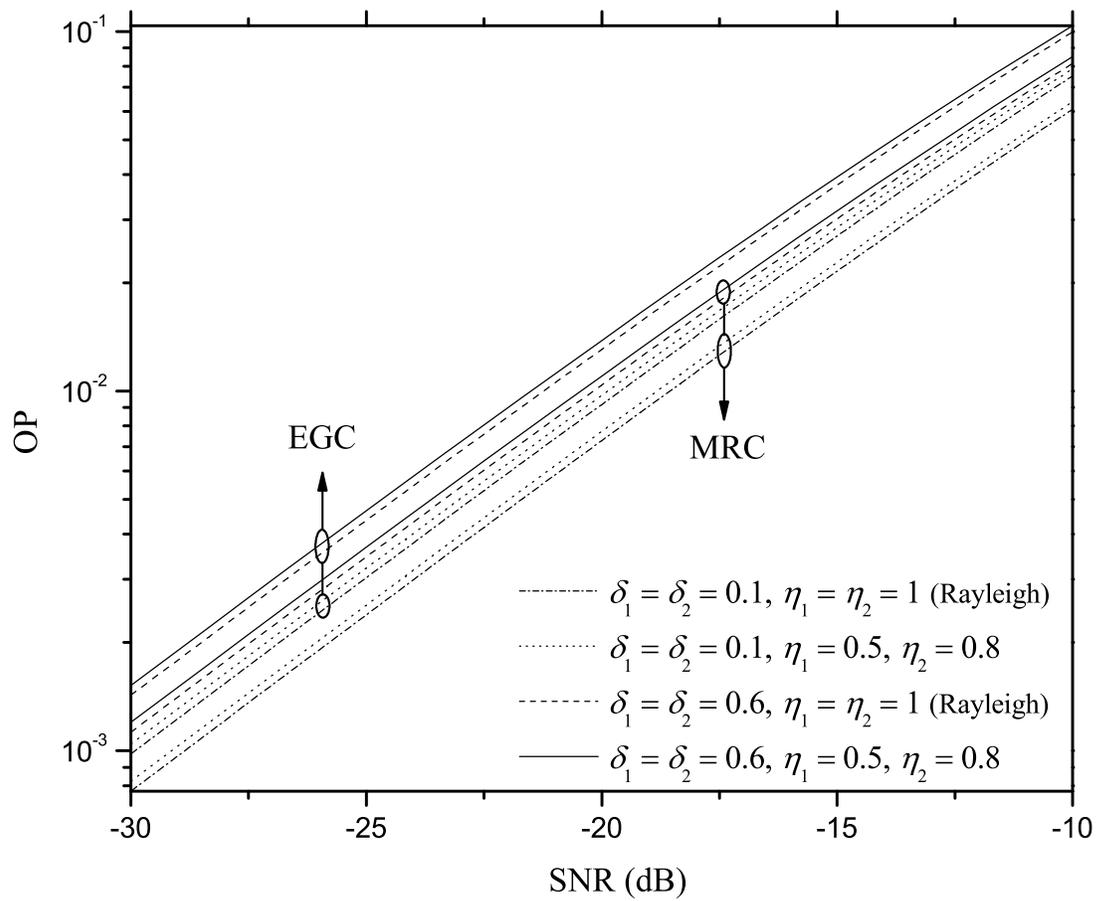


Fig. 2.4: OP de sistemas MRC e EGC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de  $\delta_1 = \delta_2, \eta_1$  e  $\eta_2$ .

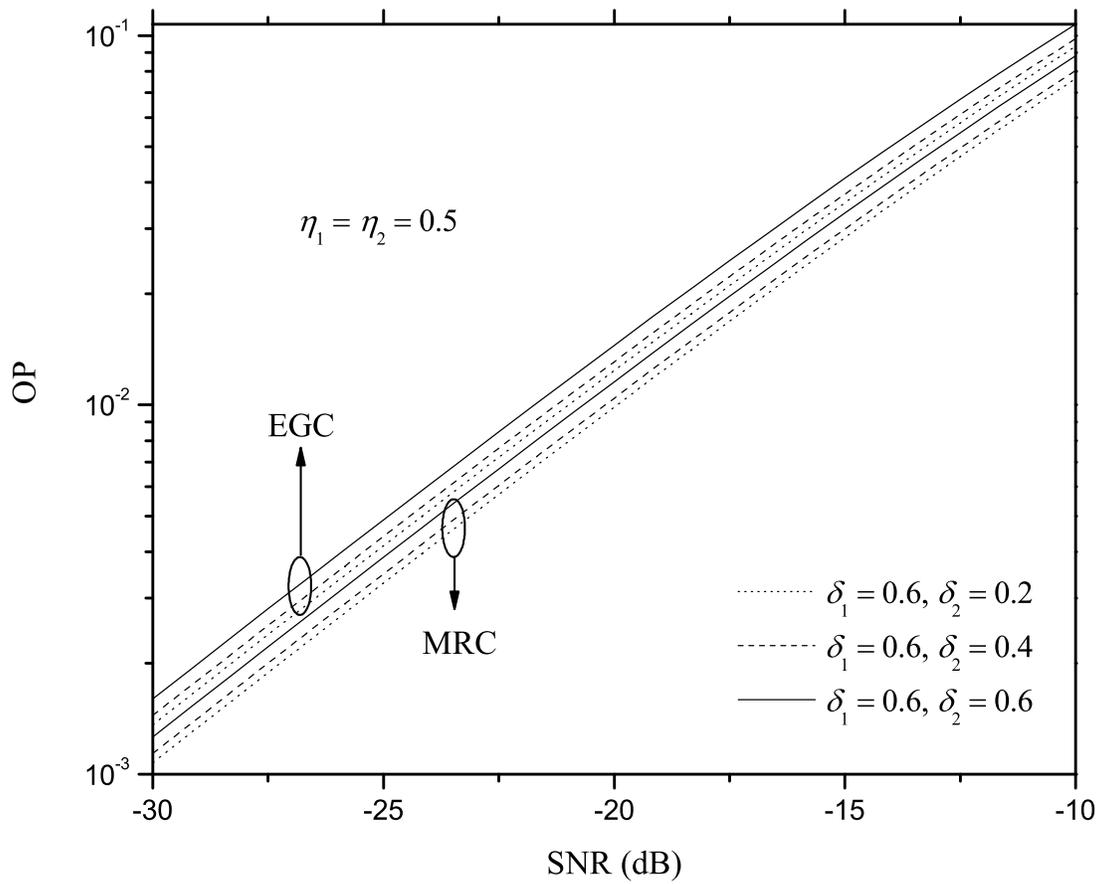


Fig. 2.5: OP de sistemas MRC e EGC de dois ramos em um canal correlacionado Hoyt para diversos valores de  $\delta_1, \delta_2$  e  $\eta_1 = \eta_2$ .

## Capítulo 3

# Estatísticas Conjuntas de Duas Variáveis

## Nakagami- $m$ Correlacionadas

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será considerado e analisado o caso da distribuição conjunta de duas variáveis para a distribuição Nakagami- $m$ . Serão apresentadas expressões exatas considerando um ambiente com correlação arbitrária e fator de desvanecimento igualmente arbitrário. De maneira mais específica, as seguintes expressões serão deduzidas: FGM conjunta, PDF conjunta, CDF conjunta, coeficiente de correlação de potência e várias outras estatísticas consideradas na saída do SC, tais como, OP, PDF e SNR média. É importante ressaltar que uma relação entre os coeficientes de correlação entre as componentes gaussianas deve ser atendida de forma que o critério de convergência da respectiva série infinita seja atendida.

## 3.2 PDF Conjunta de duas Envoltórias Nakagami- $m$ Correlacionadas

Vamos definir  $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_j]^T$ , com  $\mathbf{Y}_i$  e  $\mathbf{Y}_j$  sendo vetores coluna com dimensão  $2m_1$  e  $2m_2$ , respectivamente, com  $1 \leq i \leq 2m_1$  e  $2m_1 + 1 \leq j \leq 2m_1 + 2m_2$ . Sem perda de generalidade, considera-se  $m_2 \geq m_1$ . As variáveis  $Y_k$  são distribuídas de acordo com uma gaussiana de média nula e matriz de correlação  $\Sigma$ , cujos elementos são dados por  $\Sigma_{ij} \equiv 1$  para  $i = j$  e  $\Sigma_{ij} \equiv \rho_{ij}$  para  $i \neq j$ , onde  $\rho_{ij}$  satisfaz as condições  $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$  e  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ , tal que

$$\rho_{kl} = \frac{\mathbf{C}(Y_k, Y_l)}{\sqrt{\mathbf{V}(Y_k)\mathbf{V}(Y_l)}} \quad (3.1)$$

onde  $1 \leq k, l \leq 2m_1 + 2m_2$ .

Uma variável Nakagami- $m$  pode ser obtida como a raiz quadrada de uma variável gamma, que por sua vez, é dada pela soma dos quadrados de  $2m$  variáveis gaussianas independentes [55]. Definindo  $R_1$  e  $R_2$  como duas variáveis Nakagami- $m_1$  e  $-m_2$ , então  $R_1 = \|\mathbf{Y}_i\|_2$  e  $R_2 = \|\mathbf{Y}_j\|_2$ , com  $\|\mathbf{Y}_k\|_2$  significando a norma de  $\mathbf{Y}_k$  [25, eq. (15.212)]. Da mesma maneira,  $X_1 = R_1^2$  e  $X_2 = R_2^2$  são variáveis gamma.

Com o objetivo de formarmos o processo Nakagami- $m$ , vamos definir  $Y_k$  como o  $k$ -ésimo componente em fase do sinal com desvanecimento, para  $k$  ímpar, e  $Y_k$  como o  $k$ -ésimo componente em quadratura do sinal com desvanecimento, para  $k$  par. Assim, considerando correlação arbitrária entre as componentes em fase e em quadratura dos processos Rayleigh que compõe o sinal Nakagami, temos

$$\rho_{kl} = \begin{cases} \delta_1, & k \text{ ímpar e } & l = 2m_1 + k, & k < 2m_1 \\ \delta_2, & k \text{ par e } & l = 2m_1 + k, & k \leq 2m_1 \\ \delta_3, & k \text{ ímpar e } & l = 2m_1 + k + 1, & k < 2m_1 \\ \delta_4, & k \text{ par e } & l = 2m_1 + k - 1, & k \leq 2m_1 \\ 0, & \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo  $\rho_{kl} = \rho_{lk}$ . A definição em (3.2) estabelece que a correlação entre os pares de processos Rayleigh que compõem os dois sinais Nakagami ocorre da seguinte maneira:

1.  $\delta_1$  é a correlação entre as componentes (gaussianas) em fase;
2.  $\delta_2$  é a correlação entre as componentes (gaussianas) em quadratura;
3.  $\delta_3$  é a correlação cruzada entre as componentes (gaussianas) em fase e em quadratura e
4.  $\delta_4$  é a correlação cruzada entre as componentes (gaussianas) em quadratura e em fase.

A Figura 3.1 mostra, em uma perspectiva gráfica, o padrão arbitrário em (3.2). Esta suposição é muito geral. Para  $\rho^2 = \delta_1^2 + \delta_3^2 = \delta_2^2 + \delta_4^2$ , onde  $\rho^2$  é a correlação de potência de dois sinais Rayleigh, (3.2) reduz para [24, eq. (121)] considerando  $m_1 = m_2 = m$ ; para  $m_1 \neq m_2$  (3.2) reduz para [67, eq. (2)]. Se considerarmos  $\delta_1 = \delta_2, \delta_3 = \delta_4 = 0$ , os resultados em [81, eq. (5)] e [82, p. 302] são casos especiais de (3.2) para uma distribuição Nakagami- $m$  com duas variáveis.

$$\begin{aligned}
 R_1^2 &= Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \cdots + Y_{2m_1-1}^2 + Y_{2m_1}^2 \\
 &\quad \begin{array}{ccc} \delta_1 \uparrow & \delta_3 \swarrow & \delta_2 \uparrow \\ \delta_4 \downarrow & \delta_3 \searrow & \delta_2 \downarrow \end{array} \\
 R_2^2 &= Y_{2m_1+1}^2 + Y_{2m_1+2}^2 + Y_{2m_1+3}^2 + Y_{2m_1+4}^2 + \cdots + Y_{4m_1-1}^2 + Y_{4m_1}^2 + Y_{4m_1+1}^2 + \cdots + Y_{2m_1+2m_2}^2 \\
 &\quad \begin{array}{ccc} \delta_1 \uparrow & \delta_3 \swarrow & \delta_2 \uparrow \\ \delta_4 \downarrow & \delta_3 \searrow & \delta_2 \downarrow \end{array}
 \end{aligned}$$

Fig. 3.1: Padrão arbitrário de correlação definido em (3.2) em uma perspectiva gráfica.

Seja a FGM de  $n$  variáveis, com  $n = 2m_1 + 2m_2$ , dada por

$$\Phi(s'_1, s'_2, \dots, s'_n) = |\mathbf{I} - \Sigma \mathbf{S}|^{-1/2}. \quad (3.3)$$

Vamos definir  $\beta'_i(s'_i) = s'_i / (1 - s'_i) \triangleq \beta'_i, i = 1, 2, \dots, n$ , tal que (3.3) possa ser reescrita como

$$\Phi(s'_1, \dots, s'_n) = \{(1 - s'_1)(1 - s'_2) \cdots (1 - s'_n)\}^{-1/2} \{g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)\}^{-1/2} \quad (3.4)$$

onde  $g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$  é o determinante, dado por

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = \begin{vmatrix} 1 & -\rho_{12}\beta'_2 & \cdots & -\rho_{1n}\beta'_n \\ -\rho_{21}\beta'_1 & 1 & \cdots & -\rho_{2n}\beta'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_{n1}\beta'_1 & -\rho_{n2}\beta'_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

Com o objetivo de obtermos a PDF conjunta Nakagami- $m_1$ - $m_2$ , vamos fazer

$$\begin{aligned} s'_1 &= s'_2 = \cdots = s'_{2m_1} = s_1 \\ s'_{2m_1+1} &= s'_{2m_1+2} = \cdots = s'_{2m_1+2m_2} = s_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como resultado de (3.6)

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= \beta'_2 = \cdots = \beta'_{2m_1} = \beta_1 \\ \beta'_{2m_1+1} &= \beta'_{2m_1+2} = \cdots = \beta'_{2m_1+2m_2} = \beta_2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Substituindo as relações dadas em (3.5), e após vários cálculos e simplificações, começando com  $m_1 = a$  ( $a = 1, 2, 3, \dots$ ) e  $m_2 = a + b$  ( $b \geq 0, 1, 2, \dots$ ), surge um padrão e o determinante que compõe a função  $g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$  é encontrado exatamente como

$$g(\beta_1, \beta_2) = \{1 + \beta_1^2 \beta_2^2 (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^2 - \beta_1 \beta_2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)\}^{m_1}. \quad (3.8)$$

Usando (3.8) em (3.4), a FGM resulta como

$$\Phi(s_1, s_2) = (1 - s_1)^{-m_1} (1 - s_2)^{-m_2} \{1 + \beta_1^2 \beta_2^2 (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^2 - \beta_1 \beta_2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)\}^{-\frac{m_1}{2}}. \quad (3.9)$$

A expressão  $\{1 + \beta_1^2 \beta_2^2 (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^2 - \beta_1 \beta_2 (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)\}^{-\frac{m_1}{2}} \triangleq (1 - A)^{-\frac{m_1}{2}}$  pode ser expandida usando, primeiramente, o teorema binomial, que é  $(1 - A)^{-\frac{m_1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} (m_1/2)_r / r! A^r$ , com

critério de convergência da série infinita dado por  $|A| < 1$  e  $m_1 > 0$  [25, eq. (1.110)]. Agora é possível expandir  $A^r$  na forma do teorema multinomial [17, eq. (24.1.2)] para dois termos dado por

$$(b_1 + b_2)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} b_1^{r-k} b_2^k. \quad (3.10)$$

Então, (3.9) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Phi(s_1, s_2) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)_r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} (1 - s_1)^{-m_1} \\ &\times \left( \frac{s_1}{1 - s_1} \right)^{r+k} (1 - s_2)^{-m_2} \left( \frac{s_2}{1 - s_2} \right)^{r+k}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Usando as expressões (2.15), (2.16) e (2.17), que estão relacionadas com a função generalizada de Laguerre, em (3.11), então a PDF conjunta de duas variáveis Gamma com diferentes parâmetros de desvanecimento é obtida, através da transformada inversa de Laplace, como

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)_r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} \\ &\times (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} \frac{(r+k)! L_{r+k}^{(m_1-1)}(x_1)}{(m_1)_{r+k}} \frac{(r+k)! L_{r+k}^{(m_2-1)}(x_2)}{(m_2)_{r+k}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Uma variável Nakagami- $m$  relaciona-se com uma variável Gamma através da relação  $R_i = \sqrt{\Omega_i X_i / m_i}$ , onde  $\Omega_i = E(R_i^2)$  e  $m_i$  é o  $i$ -ésimo parâmetro de desvanecimento definido como o inverso da variância normalizada de  $R_i^2$ . Com (3.12) e as relações anteriormente dadas, a PDF conjunta Nakagami- $m$  para duas variáveis pode ser encontrada através de  $f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = |J| f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ . Depois de várias manipulações algébricas seguindo o procedimento estatístico padrão, temos a PDF conjunta dada por

$$\begin{aligned} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)_r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} \\ &\times (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} \frac{(r+k)! L_{r+k}^{(m_1-1)} \left( m_1 \frac{r_1^2}{\Omega_1} \right)}{(m_1)_{r+k}} \frac{(r+k)! L_{r+k}^{(m_2-1)} \left( m_2 \frac{r_2^2}{\Omega_2} \right)}{(m_2)_{r+k}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

$$f_{R_i}(r_i) = \frac{2m_i^{m_i} r_i^{2m_i-1}}{\Omega_i^{m_i} \Gamma(m_i)} \exp\left(-m_i \frac{r_i^2}{\Omega_i}\right) \quad (3.14)$$

com  $r_i > 0$ , é a PDF marginal de Nakagami- $m$ . Embora durante todo o processo de dedução anteriormente descrito considere valores inteiros ou múltiplo de meio para os parâmetros de desvanecimento  $m_1$  e  $m_2$ , não há nenhuma restrição matemática para estes parâmetros assumirem quaisquer valores positivos, ou seja,  $m_2 \geq m_1 > 0$ . A mesma argumentação tem sido utilizada por vários outros autores. Começando pelo próprio Nakagami [24, p. 31], e passando através de [67, p. 1716], [54, p. 1241] e vários outros. A expressão (3.13) é *geral e exata*. Ela reduz de uma maneira exata para vários resultados largamente conhecidos na literatura, conforme será demonstrado posteriormente. Interessante, (3.13) está escrita na forma de copulas [83], ou seja,  $f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) c(r_1, r_2)$ , onde  $f_{R_1}(r_1)$  e  $f_{R_2}(r_2)$  são as densidades marginais e  $c(r_1, r_2)$  é a função densidade de copula [83, eq. (1)].

### 3.3 CDF Conjunta de Duas Envoltórias Nakagami- $m$ Correlacionadas

A CDF conjunta de duas variáveis Nakagami- $m$  com parâmetros de desvanecimento arbitrários pode ser calculada resolvendo-se como

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \int_0^{r_2} \int_0^{r_1} f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) dr_1 dr_2. \quad (3.15)$$

Inserindo (3.13) em (3.15) e utilizando (2.16), encontramos a CDF conjunta dada por

$$\begin{aligned} F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)^r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} \\ &\times \sum_{j=0}^{r+k} \binom{r+k}{j} \frac{(-1)^j \gamma\left(m_1 + j, m_1 \frac{r_1^2}{\Omega_1}\right)}{\Gamma(m_1 + j)} \sum_{i=0}^{r+k} \binom{r+k}{i} \frac{(-1)^i \gamma\left(m_2 + i, m_2 \frac{r_2^2}{\Omega_2}\right)}{\Gamma(m_2 + i)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A expressão (3.16) é *geral e exata* e uma contribuição desta tese. Ela está de acordo com [67, eq. (15)] para  $\rho^2 = \delta_1^2 + \delta_3^2 = \delta_2^2 + \delta_4^2$ , onde  $\rho^2$  é a correlação de potência entre sinais Rayleigh, conforme definição em [67, eq. (2)]. Adicionalmente, para  $m_2 = m_1$ , (3.16) reduz-se para [63, eq. (3)].

É bom salientar que, embora as equações (3.13) e (3.16) sejam escritas em termos de uma série infinita, elas são dadas em termos de funções bem conhecidas da literatura técnica e facilmente implementadas usando, por exemplo, o programa *MATHEMATICA*.

### 3.4 Coeficiente de Correlação de Potência

O coeficiente de correlação de potência,  $\rho_{m_1, m_2}$ , entre  $R_1^2$  e  $R_2^2$  pode ser calculado como

$$\rho_{m_1, m_2} = \frac{C(R_1^2, R_2^2)}{\sqrt{V(R_1^2)V(R_2^2)}}. \quad (3.17)$$

Usando (3.13) e as relações dadas em [25, eq. (7.414/7)], os momentos conjuntos centrais da distribuição Nakagami- $m$  com os parâmetros de desvanecimento arbitrários podem ser calculados de uma forma exata como

$$E(R_1^2 R_2^2) = \frac{(2m_2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)\Omega_1 \Omega_2}{2m_2}. \quad (3.18)$$

Mas  $C(R_1^2, R_2^2) = E(R_1^2 R_2^2) - E(R_1^2)E(R_2^2)$ ,  $E(R_1^2) = \Omega_1$ ,  $E(R_2^2) = \Omega_2$ ,  $V(R_1^2) = \Omega_1^2/m_1$  e  $V(R_2^2) = \Omega_2^2/m_2$ . Substituindo as expressões dadas em (3.17), o coeficiente de correlação de potência pode ser expresso de uma maneira exata como

$$\rho_{m_1, m_2} = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2}{2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}. \quad (3.19)$$

A fórmula em (3.19) é *geral e exata*. Fixando  $\rho^2 = \delta_1^2 + \delta_3^2 = \delta_2^2 + \delta_4^2$ , onde  $\rho^2$  é o coeficiente de correlação de potência entre dois sinais Rayleigh, como definido em [67, eq. (2)], a correlação deduzida em [67] é obtida. Se fizermos  $\delta_1 = \delta_2$ ,  $\delta_3 = \delta_4 = 0$ , a suposição em [82, Sec. IV-C]

torna-se um caso especial de (3.2) para o caso de uma distribuição bivariável Nakagami- $m$ .

### 3.5 Casos Especiais

Os casos especiais que serão analisados aqui podem ser colocados na seguinte forma

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1)f_{R_2}(r_2) \sum_{r=0}^{\infty} r!(m)_r \delta^{2r} \frac{L_r^{(m_1-1)}\left(m_1 \frac{r_1^2}{\Omega_1}\right)}{(m_1)_r} \frac{L_r^{(m_2-1)}\left(m_2 \frac{r_2^2}{\Omega_2}\right)}{(m_2)_r} \quad (3.20)$$

onde  $m$  e  $\delta$  assumem valores específicos dependendo das seguintes condições:

1. Se  $\delta_1\delta_2 = \delta_3\delta_4$ , então  $m = m_1/2$  e  $\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2$ . Um caso de interesse é quando  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4$ . A fórmula resultante segue diretamente de (3.20).
2. Se  $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = 2(\delta_1\delta_2 - \delta_3\delta_4)$ , então  $m = m_1$  e  $2\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2$ . Vários casos de interesse resultam desta situação. Por exemplo, para  $\delta_1 = \delta_2$  e  $\delta_3 = -\delta_4$ , então (3.20) particulariza para [67, eq. (12)]. Neste caso, se  $m_1 = m_2 = m$ ,  $\delta_1 = \delta_2$  e  $\delta_3 = -\delta_4$ , ou, da mesma maneira  $\delta_1 = \delta_2$  e  $\delta_3 = \delta_4 = 0$ , então (3.20) particulariza para [24, eq. (136)] ou, equivalentemente, para [24, eq. (135)].

A CDF simplificada é dada por

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m)_r}{r!} \delta^{2r} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \frac{(-1)^j \gamma\left(m_1 + j, m_1 \frac{r_1^2}{\Omega_1}\right)}{\Gamma(m_1 + j)} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \frac{(-1)^i \gamma\left(m_2 + i, m_2 \frac{r_2^2}{\Omega_2}\right)}{\Gamma(m_2 + i)} \quad (3.21)$$

### 3.6 Convergência

As estatísticas conjuntas (PDF e CDF), embora dadas na forma de série infinita, convergem rapidamente para qualquer valor prático de precisão. Seguindo o mesmo procedimento descrito em [64],

é possível demonstrar que o caso geral, dado pelas séries (3.13) e (3.16), são absolutamente convergentes se

$$(\delta_1\delta_2 - \delta_3\delta_4)^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 < 1. \quad (3.22)$$

Partindo de (3.9), para os casos especiais dados em (3.20) e (3.21), se:

1.  $\delta_1 = \delta_2$  e  $\delta_3 = \delta_4 = 0$ , então o critério de convergência será  $\delta_1^2 < 1$ ;
2.  $\delta_1 = \delta_2$  e  $\delta_3 = -\delta_4$ , então a convergência ocorre se  $\delta_1^2 + \delta_3^2 < 1$ ;
3.  $\delta_1\delta_2 = \delta_3\delta_4$ , então a convergência é atendida para  $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 < 1$ .

Alguns exemplos do número de termos  $K$  para uma precisão de sete casas decimais e para vários valores de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  e  $\delta_4$  com  $\Omega_1 = \Omega_2 = 1$  são apresentados na Tabela 3.1. Nota-se claramente que o número de termos necessário para atingir a precisão desejada é plenamente factível. De forma particular, para valores altos de argumentos, por exemplo  $r_1 = r_2 = 10$ , somente dois termos são necessários.

### 3.7 Aplicações - Receptor SC de Dois Ramos

Nesta Seção, novos resultados serão obtidos para o caso de um esquema SC de dois ramos utilizando a distribuição conjunta Nakagami- $m$  correlacionada. Em particular, expressões exatas para OP, PDF da SNR e valor médio da SNR na saída do combinador.

Tab. 3.1: Número de termos em (3.16) ou (3.21) necessário para uma precisão de sete casas decimais.

$\rho_{m_1, m_2}$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$m_1$	$m_2$	$K$
							$r_1 = 1$
							$r_2 = 1$
0.80	0.94	0.94	0	0	2.5	3	42
0.60	0.81	0.81					20
0.50	0.55	0.55					13
0.20	0.45	0.45	0.45	0.45	1	1	11
0.20					1.75	1.75	9
0.18					2.5	3	11
0.41	0.45	0.45	0.45	-0.45	1	1	11
0.41					1.75	1.75	9
0.37					2.5	3	11
0.20	0.45	0.45	0	0	1	1	7
0.20					1.75	1.75	7
0.18					2.5	3	7

### 3.7.1 Formulações para OP

A PDF conjunta em (3.13) expressa como uma função da SNR recebida  $\Gamma_i = R_i^2 E_b / N_o$  é dada por

$$\begin{aligned}
 f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) &= f_{\Gamma_1}(\gamma_1) f_{\Gamma_2}(\gamma_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)_r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} \\
 &\times (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} \frac{(r+k)! L_{r+k}^{(m_1-1)} \left( m_1 \frac{\gamma_1}{\bar{\gamma}_1} \right)}{(m_1)_{r+k}} \frac{(r+k)! L_{r+k}^{(m_2-1)} \left( m_2 \frac{\gamma_2}{\bar{\gamma}_2} \right)}{(m_2)_{r+k}}
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $E_b/N_o$  é a razão entre a energia de bit e densidade espectral de ruído, e cada  $f_{\Gamma_i}(\gamma_i)$  é uma PDF definida como

$$f_{\Gamma_i}(\gamma_i) = \frac{m_i^{m_i} \gamma_i^{m_i-1}}{\Gamma(m_i) \bar{\gamma}_i^{m_i}} \exp \left( -m_i \frac{\gamma_i}{\bar{\gamma}_i} \right) \quad (3.24)$$

com  $\gamma_i > 0$  e

$$\bar{\gamma}_i = \frac{E_b}{N_o} \mathbf{E}(R_i^2) \quad (3.25)$$

é o valor médio da relação sinal-ruído.

A técnica de combinação SC escolhe o ramo com o maior valor instantâneo da SNR para a decisão a respeito de um símbolo. Então a SNR da saída é igual a  $\Gamma = \max\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$  [55]. Sobre um desvanecimento em pequena escala

$$F_{\Gamma}(\gamma) = \int_0^{\gamma} \int_0^{\gamma} f_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.23) em (3.26) e expandindo o polinômio de Laguerre conforme dado em (2.16), encontramos a CDF desejada como

$$\begin{aligned} F_{\Gamma}(\gamma) = & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)^r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} \\ & \times \sum_{j=0}^{r+k} \binom{r+k}{j} \frac{(-1)^j \gamma \left(m_1 + j, m_1 \frac{\gamma}{\bar{\gamma}_1}\right)}{\Gamma(m_1 + j)} \sum_{i=0}^{r+k} \binom{r+k}{i} \frac{(-1)^i \gamma \left(m_2 + i, m_2 \frac{\gamma}{\bar{\gamma}_2}\right)}{\Gamma(m_2 + i)}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A equação (3.27) simplifica para [84, eq. (7)] quando  $\rho^2 = \delta_1^2 + \delta_3^2 = \delta_2^2 + \delta_4^2$ , onde  $\rho^2$  é a correlação de potência entre os sinais Rayleigh. A Figura 3.2 representa (3.27), para alguns valores de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  e  $\delta_4$ . Logicamente, diferentes valores destes parâmetros resultam em diferentes curvas de desempenho. E assim, um grande número de diferentes situações podem ser exercitadas. Um ponto interessante a ser notado aqui é o seguinte: o mesmo valor de coeficiente de correlação, conforme deduzido em (3.19), resulta em diferentes curvas de desempenho. Isto significa que, embora para um determinado cenário no qual o coeficiente de correlação seja determinado, o desempenho final depende do padrão de correlação das gaussianas em fase e em quadratura que compõem o processo. Algumas ilustrações desta situação podem ser vistas na Figura 3.2.

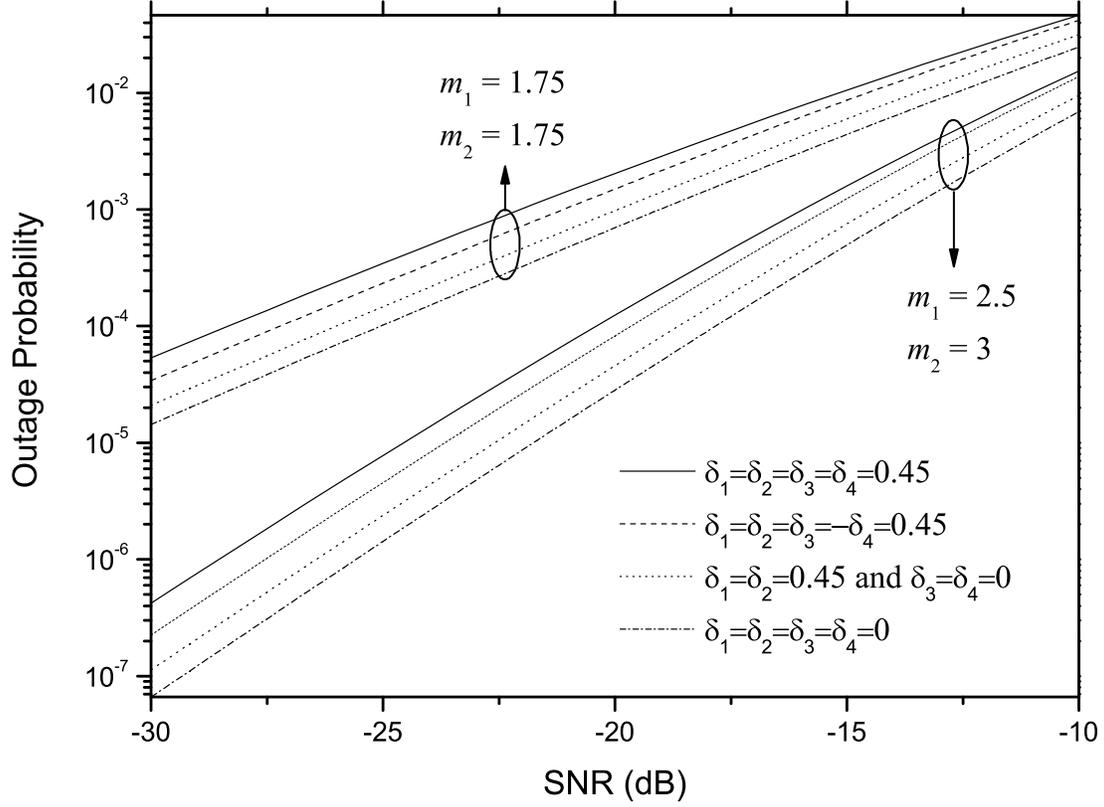


Fig. 3.2: OP de um sistema SC de dois ramos em um canal correlacionado Nakagami- $m$  para vários valores de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  e  $\delta_4$ .

### 3.7.2 PDF da SNR

A PDF da SNR pode ser encontrada a partir da derivada [85] de (3.27) usando a relação [25, eq. (8.356/4)]. Então,  $f_{\Gamma}(\gamma)$  é dada por

$$\begin{aligned}
 f_{\Gamma}(\gamma) = & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)^r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} \\
 & \times \left[ f_{\Gamma_1}(\gamma) {}_1F_1 \left( -(r+k), m_1; m_1 \frac{\gamma}{\gamma_1} \right) \sum_{j=0}^{r+k} \binom{r+k}{j} \frac{(-1)^j \gamma \left( m_2 + j, m_2 \frac{\gamma}{\gamma_2} \right)}{\Gamma(m_2 + j)} \right. \\
 & \left. + f_{\Gamma_2}(\gamma) {}_1F_1 \left( -(r+k), m_2; m_2 \frac{\gamma}{\gamma_2} \right) \sum_{i=0}^{r+k} \binom{r+k}{i} \frac{(-1)^i \gamma \left( m_1 + i, m_1 \frac{\gamma}{\gamma_1} \right)}{\Gamma(m_1 + i)} \right] \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

onde  ${}_1F_1(\cdot, \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica confluyente de Kummer [25, eq. (9.210/1)] e  $f_{\Gamma_1}(\gamma)$  e  $f_{\Gamma_2}(\gamma)$  são dados por

$$f_{\Gamma_i}(\gamma) = \frac{m_i^{m_i} \gamma^{m_i-1}}{\Gamma(m_i) \bar{\gamma}_i^{m_i}} \exp\left(-m_i \frac{\gamma}{\bar{\gamma}_i}\right) \quad (3.29)$$

com  $i = 1, 2$ . Para  $\rho^2 = \delta_1^2 + \delta_3^2 = \delta_2^2 + \delta_4^2$ , onde  $\rho^2$  é a correlação em termos da potência, então (3.28) reduz para [84, eq. (10)].

### 3.7.3 Valor Médio da SNR

O valor médio do parâmetro SNR na saída do combinador pode ser calculado através da seguinte expressão

$$\bar{\gamma} = \int_0^\infty \gamma f_{\Gamma}(\gamma) d\gamma. \quad (3.30)$$

Usando [25, eq. (6.455/2)], a integral simples em (3.30) pode ser calculada e resulta em

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m_1/2)_r}{r!} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k (\delta_1 \delta_2 - \delta_3 \delta_4)^{2k} (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2)^{r-k} \\ & \times \left[ \sum_{j=0}^{r+k} \sum_{i=0}^{r+k} (-1)^{i+j} \binom{r+k}{j} \binom{r+k}{i} \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + i + j) \bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2}{(m_2 \bar{\gamma}_1 + m_1 \bar{\gamma}_2)^{m_1 + m_2 + i + j}} \right. \\ & \times \left[ \frac{(m_1 \bar{\gamma}_2)^{m_1 + j} (m_2 \bar{\gamma}_1)^{m_2 + i}}{\Gamma(m_2 + 1 + i) \Gamma(m_1 + j)} {}_2F_1 \left( 1, m_1 + m_2 + i + j; m_2 + i + 1; \frac{m_2 \bar{\gamma}_1}{m_2 \bar{\gamma}_1 + m_1 \bar{\gamma}_2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{(m_2 \bar{\gamma}_1)^{m_2 + j} (m_1 \bar{\gamma}_2)^{m_1 + i}}{\Gamma(m_1 + 1 + i) \Gamma(m_2 + j)} {}_2F_1 \left( 1, m_1 + m_2 + i + j; m_1 + i + 1; \frac{m_2 \bar{\gamma}_2}{m_2 \bar{\gamma}_1 + m_1 \bar{\gamma}_2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  ${}_2F_1(\cdot, \cdot; \cdot; \cdot)$  é a função hipergeométrica de Gauss [25, eq. (9.14/2)]. A equação (3.31) reduz para [84, eq. (12)] quando  $\rho^2 = \delta_1^2 + \delta_3^2 = \delta_2^2 + \delta_4^2$ , onde  $\rho^2$  é a correlação entre os sinais de potência Rayleigh. A Figura 3.3 representa o valor da SNR como um função dos parâmetros de correlação cruzada  $\delta_3$  e  $\delta_4$ . Neste caso, foi considerado  $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$ ,  $\bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2 = 1$ ,  $m_1 = 1.25$  e  $m_2 = 2.5$ . Logicamente, o mesmo comportamento é observado se fixarmos  $\delta_3$  e  $\delta_4$  e variarmos  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

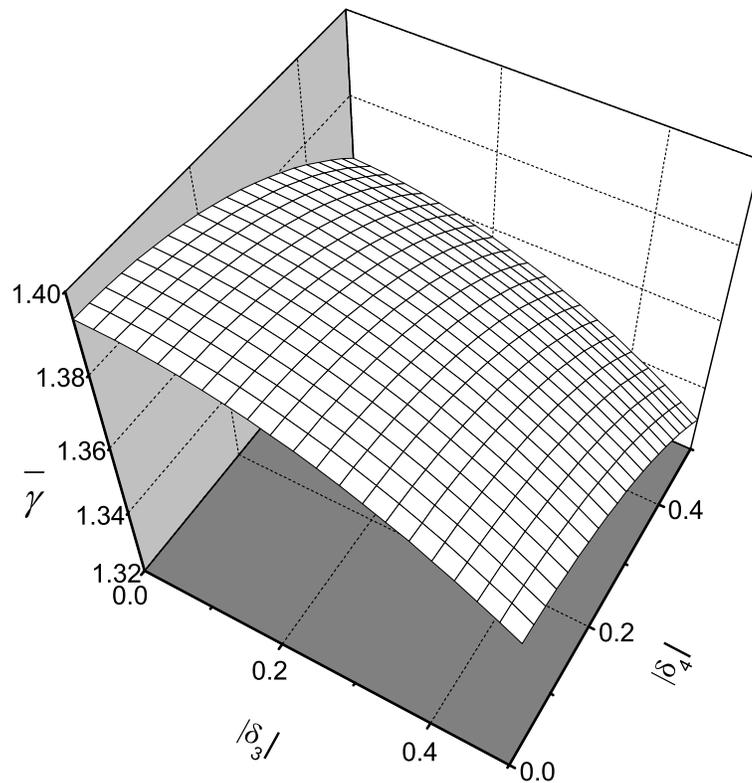


Fig. 3.3: Valor médio da SNR ( $\bar{\gamma}$ ) na saída do Combinador de Seleção.

## 3.8 Conclusão

Neste capítulo, vários resultados foram obtidos de uma maneira exata considerando a distribuição Nakagami- $m$  de duas variáveis. As formulações propostas fazem uso das conhecidas funções de Laguerre. Estes resultados incluem como casos especiais outras formulações disponíveis na literatura técnica. As expressões são matematicamente tratáveis e flexíveis o suficiente para acomodar um grande número de cenários, úteis na análise de um ambiente com desvanecimento mais generalizado.

# Capítulo 4

## Distribuição Conjunta $\alpha$ - $\mu$

### 4.1 Introdução

Neste capítulo será deduzida uma expressão para a PDF conjunta da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . Esta expressão considera o caso mais geral até então obtido na literatura: parâmetros de correlação arbitrários, diferentes valores do fator de desvanecimento para cada *cluster* de múltiplo percurso e, principalmente, uma função multivariável. A expressão resultante está na forma de série infinita. Entretanto, para este caso geral, uma relação entre os coeficientes de correlação entre as gaussianas que formam o sinal  $\alpha$ - $\mu$  deve ser atendida de maneira a atender o critério de convergência.

### 4.2 A Distribuição Conjunta Gamma

Vamos definir  $\mathbf{Y} = [ \mathbf{Y}_1 \ \mathbf{Y}_2 \ \mathbf{Y}_3 \ \dots \ \mathbf{Y}_L ]^T$  como um vetor coluna e cada vetor  $\mathbf{Y}_k$  como tendo dimensão  $2\mu_k$  com  $k = 1, 2, \dots, L$ . A dimensão do vetor  $\mathbf{Y}$  é definida então por

$$2 \sum_{i=1}^L \mu_i \triangleq n. \quad (4.1)$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar  $\mu_L > \dots > \mu_2 > \mu_1$ . As variáveis aleatórias



É importante novamente ressaltar que pela própria definição da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , as variáveis gaussianas, que compõem uma distribuição  $\alpha$ - $\mu$ , são independentes. Assim,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2\mu_1}$  são variáveis gaussianas independentes, ou seja, possuem correlação nula.

Considere agora  $n$  variáveis Gamma  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ , com densidades marginais dadas por

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{\exp(-x_i) x_i^{p-1}}{\Gamma(p)}. \quad (4.6)$$

A FGM de  $n$  variáveis Gamma com  $p = 1/2$  é dada por [64, eq. (2.2)]

$$\Phi(s'_1, s'_2, \dots, s'_n) = |\mathbf{I} - \Sigma \mathbf{S}|^{-1/2} \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade e  $\mathbf{S}$  é uma matriz diagonal cujos elementos que não são zero (diagonal) são as variáveis de Laplace  $s'_1, s'_2, \dots, s'_n$ . Vamos definir  $\beta'_i(s'_i) = s'_i/(1 - s'_i) \triangleq \beta'_i, i = 1, 2, \dots, n$ , tal que (4.7) possa ser reescrita como

$$\Phi(s'_1, \dots, s'_n) = \{(1 - s'_1)(1 - s'_2) \cdots (1 - s'_n)\}^{-1/2} \{g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)\}^{-1/2} \quad (4.8)$$

onde  $g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$  é o determinante, dado por

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = \begin{vmatrix} 1 & -\rho_{12}\beta'_2 & \cdots & -\rho_{1n}\beta'_n \\ -\rho_{21}\beta'_1 & 1 & \cdots & -\rho_{2n}\beta'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_{n1}\beta'_1 & -\rho_{n2}\beta'_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Expandindo  $g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n)$  através do Teorema de Maclaurin para uma função de  $n$  variáveis, podemos obter

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \sum_{i=1}^n \beta'_i \frac{\partial}{\partial \beta'_i} \right)^{[j]} g(\beta'_1, \dots, \beta'_n) \Big|_{(0,0,\dots,0)} \quad (4.10)$$

onde  $[j]$  denota o operador da  $j$ -ésima derivada dada por

$$\left( \sum_{i=1}^n \beta'_i \frac{\partial}{\partial \beta'_i} \right)^{[j]} = \sum_{j_1=0}^j \sum_{j_2=0}^{j_1} \cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{j_{n-2}} \binom{j}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{n-2}}{j_{n-1}} \left( \beta'_1 \frac{\partial}{\partial \beta'_1} \right)^{j-j_1} \left( \beta'_2 \frac{\partial}{\partial \beta'_2} \right)^{j_1-j_2} \cdots \left( \beta'_n \frac{\partial}{\partial \beta'_n} \right)^{j_{n-1}}. \quad (4.11)$$

Observe que  $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n$  são substituídas por zero depois de aplicarmos as derivadas parciais em (4.10). Seguindo os passos anteriormente descritos e definindo  $g_0 = g(\beta'_1, \dots, \beta'_n)|_{(0,0,\dots,0)}$  após a operação de derivação, então resulta

$$g(\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n) = 1 - \left( \sum_{i<j} C'_{ij} \beta'_i \beta'_j + \sum_{i<j<k} C'_{ijk} \beta'_i \beta'_j \beta'_k + \cdots + C'_{12\dots n} \beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta'_n \right) \quad (4.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_0}{\partial \beta'_1 \partial \beta'_2} &= -C'_{12} \\ \frac{\partial^3 g_0}{\partial \beta'_1 \partial \beta'_2 \partial \beta'_3} &= -C'_{123} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^n g_0}{\partial \beta'_1 \partial \beta'_2 \cdots \partial \beta'_n} &= -C'_{12\dots n}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Observe que as constantes  $C'_{12}, C'_{123}, \dots, C'_{12\dots n}$  estão expressas como uma função dos coeficientes de correlação ( $\rho_{ij}$ ) entre as gaussianas. Por exemplo, se  $n = 3$ , então  $C'_{12} = \rho_{12}\rho_{21}$ ,  $C'_{13} = \rho_{13}\rho_{31}$ ,  $C'_{23} = \rho_{23}\rho_{32}$  e  $C'_{123} = \rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} + \rho_{21}\rho_{31}\rho_{32}$ .

Considerando a independência das gaussianas que compõem uma distribuição  $\alpha$ - $\mu$  e com o objetivo de obtermos a PDF conjunta  $\alpha$ - $\mu$ , todos  $s'_i$  serão feitos  $s_i$ , tal que

$$\begin{aligned}
s'_1 &= s'_2 = \cdots = s'_{2\mu_1} = s_1 \\
s'_{2\mu_1+1} &= s'_{2\mu_1+2} = \cdots = s'_{2\mu_1+2\mu_2} = s_2 \\
s'_{2\mu_1+2\mu_2+1} &= \cdots = s'_{2\mu_1+2\mu_2+2\mu_3} = s_3 \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
s'_{2\mu_1+\cdots+1} &= s'_{2\mu_1+\cdots+2} = \cdots = s'_n = s_L.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Como resultado da transformação dada em (4.14)

$$\begin{aligned}
\beta'_1 &= \beta'_2 = \cdots = \beta'_{2\mu_1} = \beta_1 \\
\beta'_{2\mu_1+1} &= \beta'_{2\mu_1+2} = \cdots = \beta'_{2\mu_1+2\mu_2} = \beta_2 \\
\beta'_{2\mu_1+2\mu_2+1} &= \cdots = \beta'_{2\mu_1+2\mu_2+2\mu_3} = \beta_3 \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\beta'_{2\mu_1+\cdots+1} &= \beta'_{2\mu_1+\cdots+2} = \cdots = \beta'_n = \beta_L.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Substituindo (4.14) e (4.15) em (4.8), então podemos obter a FGM de  $L$  variáveis  $\alpha$ - $\mu$  dada por

$$\Phi(s_1, \dots, s_L) = (1 - s_1)^{-\mu_1} (1 - s_2)^{-\mu_2} \cdots (1 - s_L)^{-\mu_L} \{g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)\}^{-1/2} \tag{4.16}$$

onde  $g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L)$  é (4.9) com  $\beta$  substituindo cada  $\beta'$ .

Após cada uma das transformações em (4.12), podemos obter

$$\begin{aligned}
g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L) &= 1 - \left[ \sum_{i < j} C_{ij} \vartheta(\beta'_i \beta'_j) + \cdots + \sum_{i < j < k} C_{ijk} \vartheta(\beta'_i \beta'_j \beta'_k) + C_{12 \dots L} \vartheta(\beta'_1 \beta'_2 \cdots \beta'_L) \right] \\
&\triangleq 1 - B
\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde cada  $C_{ij \dots}$  é dado por (4.13) depois da transformação de (4.14) e (4.15). Note que  $\vartheta(\cdot)$  é o

operador produto definido aqui com o objetivo de escrever (4.12) de uma maneira mais compacta. Descrever todas as possibilidades de combinações possíveis não é prático, já que elas dependem dos vários parâmetros que compõem a FGM. Usaremos alguns exemplos para ilustrar a utilidade do operador. Por exemplo,

1. se  $\beta'_i \in \{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{2\mu_j}\}$  então  $\vartheta(\prod_{i=1}^{2\mu_j} \beta'_i) = \beta_1^{2\mu_j}$ , com  $j = 1, \dots, L$ ,
2. se  $\beta'_i \in \{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{2\mu_j}\}$  e  $\beta'_j \in \{\beta'_{2\mu_1+1}, \dots, \beta'_{2\mu_1+2\mu_2}\}$  então  $\vartheta(\beta'_i \beta'_j) = \beta_1 \beta_2$ ,
3. se  $\beta'_i \in \{\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{2\mu_1}\}$  e  $\beta'_j, \beta'_k \in \{\beta'_{2\mu_1+1}, \dots, \beta'_{2\mu_1+2\mu_2}\}$  então  $\vartheta(\beta'_i \beta'_j \beta'_k) = \beta_1 \beta_2^2$
4. e assim por diante.

Substituindo (4.17) em (4.16) e expandindo  $(1 - B)^{-\frac{1}{2}}$  pelo teorema binomial [25, eq. (1.110)], dado por

$$(1 - B)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} B^r \quad (4.18)$$

sendo o critério de convergência da série infinita dado por  $|B| < 1$  [25, eq. (1.110)], então (4.16) pode ser escrito como um somatório infinito dado por

$$\Phi(s_1, s_2, \dots, s_L) = (1 - s_1)^{-\mu_1} (1 - s_2)^{-\mu_2} \dots (1 - s_L)^{-\mu_L} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} B^r. \quad (4.19)$$

O próximo passo é expandir (4.19), especificamente  $B^r$ , através do teorema multinomial [17, eq. (24.1.2)]. Após algumas manipulações algébricas,

$$\Phi(s_1, s_2, \dots, s_L) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} K_r \prod_{i=1}^L (1 - s_i)^{-\mu_i} \left( \frac{s_i}{1 - s_i} \right)^{a_i} \quad (4.20)$$

onde  $K_r$  é um polinômio em  $C_{ij}, \dots, C_{12\dots L}$  e  $a_i$  são potências inteiras positivas, resultantes da expansão de  $B^r$ . Por exemplo, se  $L = 2$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 2$ ,  $\rho_{ij} = 1$  para  $i = j$  e  $\rho_{ij} = \delta$  quando  $i \neq j$ , a

FGM é dada por

$$\Phi(s_1, s_2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} (8\delta^2)^r (1-s_1)^{-1} \left( \frac{s_1}{1-s_1} \right)^r (1-s_2)^{-2} \left( \frac{s_2}{1-s_2} \right)^r. \quad (4.21)$$

Neste caso,  $K_r = (8\delta^2)^r$  e  $a_i = r$ . De maneira geral, o teorema multinomial pode ser escrito como

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^r = \sum (r; a_1, a_2, \dots, a_n) b_1^{a_1} b_2^{a_2} \dots b_n^{a_n}. \quad (4.22)$$

A soma em (4.22) é feita sobre todas as possibilidades para índices inteiros não negativos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tal que  $\sum_{i=1}^n a_i = r$ . (Quantidades na forma  $0^0$  são consideradas como 1.) Os números denotados por  $(r; a_1, a_2, \dots, a_n)$  são os coeficientes multinomiais [17, eq. (24.1.2)] dados por

$$(r; a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{r!}{a_1! a_2! \dots a_n!}. \quad (4.23)$$

Consequentemente, o teorema multinomial para  $n$  termos é dado por

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^k = \sum_{k_1=0}^k \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_{n-1}=0}^{k_{n-2}} \binom{k}{k_1} \binom{k_1}{k_2} \dots \binom{k_{n-2}}{k_{n-1}} b_1^{k-k_1} b_2^{k_1-k_2} \dots b_n^{k_{n-1}} \quad (4.24)$$

Vamos agora usar o polinômio generalizado de Laguerre com o objetivo de reescrever (4.20) em uma forma apropriada para as transformações necessárias, especificamente, a transformada inversa de Laplace da equação (4.20). O polinômio generalizado de Laguerre é dado por [25, eq. (8.970/1)]

$$L_r^p(x) = r! L_r^{p-1}(x) \quad (4.25)$$

onde

$$L_r^{p-1}(x) = \sum_{j=0}^r \frac{(-1)^j \Gamma(p+r) x^j}{j! (r-j)! \Gamma(p+j)}. \quad (4.26)$$

Usando a propriedade de Laplace [64, eq. (1.3)]

$$\alpha^r(1-\alpha)^{-p-r} = \int_0^\infty \frac{\exp[(\alpha-1)x] x^{p-1} L_r^p(x)}{(p)_r \Gamma(p)} dx \quad (4.27)$$

a densidade conjunta multivariável correlacionada Gamma pode ser obtida como

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_L}(x_1, x_2, \dots, x_L) = \prod_{k=0}^L f_{X_k}(x_k) \sum_{r=0}^\infty \frac{(1/2)_r}{r!} \times \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \vartheta \left[ \frac{L(x_i, \mu_i)}{\mu_i} \frac{L(x_j, \mu_j)}{\mu_j} \right] + \dots + C_{12\dots L} \vartheta \left[ \frac{L(x_1, \mu_1)}{\mu_1} \dots \frac{L(x_L, \mu_L)}{\mu_L} \right] \right\}^r \quad (4.28)$$

No processo de expansão, as seguintes notações foram usadas

$$\left\{ \frac{L(x, p)}{p} \right\}^m \left\{ \frac{L(x, p)}{p} \right\}^n = \left\{ \frac{L(x, p)}{p} \right\}^{m+n} \quad (4.29)$$

e

$$\left\{ \frac{L(x, p)}{p} \right\}^m \equiv \frac{L_m^p(x)}{(p)_m} \quad (4.30)$$

para todo inteiro positivo  $m$  e  $n$ .

### 4.3 Formulação Exata para a Distribuição Conjunta $\alpha$ - $\mu$ Multivariável

Uma variável  $\alpha$ - $\mu$  relaciona-se com uma variável Gamma através da relação [43]

$$R_k = \alpha_k \sqrt{\frac{\hat{r}_k^{\alpha_k}}{\mu_k}} X_k \quad (4.31)$$

onde  $\hat{r}_k = \sqrt[\alpha_k]{E(R_k^{\alpha_k})}$ , como anteriormente definido e  $\mu_k > 0$  é o inverso da variância normalizada de  $R_k^{\alpha_k}$  [43, eq. (2)], ou seja

$$\mu_k = \frac{E^2(R_k^{\alpha_k})}{V(R_k^{\alpha_k})}. \quad (4.32)$$

Com a equação (4.28) e as relações dadas anteriormente, a PDF conjunta de  $L$  variáveis aleatórias  $\alpha$ - $\mu$  correlacionadas pode ser obtida através da transformação padrão  $f_{R_1, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = |J|f_{X_1, \dots, X_L}(x_1, x_2, \dots, x_L)$ , sendo  $J$  o Jacobiano da transformação. Seguindo o procedimento estatístico padrão de transformação de variáveis e após algumas manipulações algébricas e simplificações, podemos finalmente obter a PDF conjunta da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  como

$$\begin{aligned} f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = & \prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)_r}{r!} \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \vartheta \left[ \frac{L \left( \frac{\mu_i}{\hat{r}_i^{\alpha_i}} r_i^{\alpha_i}, \mu_i \right)}{\mu_i} \frac{L \left( \frac{\mu_j}{\hat{r}_j^{\alpha_j}} r_j^{\alpha_j}, \mu_j \right)}{\mu_j} \right] + \right. \\ & \left. \dots + C_{123 \dots L} \vartheta \left[ \frac{L \left( \frac{\mu_1}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} r_1^{\alpha_1}, \mu_1 \right)}{\mu_1} \dots \frac{L \left( \frac{\mu_L}{\hat{r}_L^{\alpha_L}} r_L^{\alpha_L}, \mu_L \right)}{\mu_L} \right] \right\}^r \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde cada  $f_{R_k}(r_k)$  é uma PDF  $\alpha$ - $\mu$  marginal dada por

$$f_{R_k}(r_k) = \frac{\alpha_k \mu_k^{\mu_k} \hat{r}_k^{\alpha_k \mu_k - 1}}{\hat{r}_k^{\alpha_k \mu_k} \Gamma(\mu_k)} \exp \left( -\mu_k \frac{\hat{r}_k^{\alpha_k}}{r_k} \right) \quad (4.34)$$

com  $r_k > 0$ . Seguindo o mesmo procedimento descrito em [64], é possível demonstrar que a PDF conjunta dada em (4.33) é absolutamente convergente quando

$$\sum_{i,j} |C_{ij}| + \sum_{i,j,k} |C_{ijk}| + \dots + |C_{123 \dots L}| < 1. \quad (4.35)$$

A PDF deduzida em (4.33) é *exata* e *geral*, e considera valores arbitrários para os coeficientes de correlação entre as gaussianas.

## 4.4 Conclusões

Este capítulo apresentou a dedução da PDF conjunta multivariável  $\alpha$ - $\mu$  utilizando os polinômios generalizados de Laguerre. Esta PDF é geral e inclui todos os casos particulares descritos na literatura resultantes da distribuição  $\alpha$ - $\mu$ : matriz de correlação arbitrária e valores diferentes do parâmetro de desvanecimento em cada *cluster* tornam esta PDF atrativa no estudo do fenômeno de desvanecimento. No capítulo 5 serão apresentados e analisados vários casos particulares da PDF conjunta deduzida.

# Capítulo 5

## Casos Particulares da PDF Conjunta $\alpha$ - $\mu$

### 5.1 Introdução

Este capítulo trata de alguns casos particulares resultantes da PDF conjunta deduzida no capítulo 4. Serão aqui deduzidas expressões para PDF e CDF conjuntas para várias situações de interesse prático. Também, serão deduzidas expressões fechadas aproximadas para a PDF e a CDF.

### 5.2 Alguns Casos Particulares - Formulações Exatas

Vários casos particulares podem ser considerados a partir da expressão (4.33). A distribuição de Weibull pode ser obtida de forma exata a partir da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  fixando-se  $\mu_k = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ , dada por

$$f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)^r}{r!} \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \vartheta \left[ \frac{L \left( \frac{\hat{r}_i^{\alpha_i}}{r_i^{\alpha_i}}, 1 \right)}{1} \frac{L \left( \frac{\hat{r}_j^{\alpha_j}}{r_j^{\alpha_j}}, 1 \right)}{1} \right] + \dots + C_{123 \dots L} \vartheta \left[ \frac{L \left( \frac{\hat{r}_1^{\alpha_1}}{r_1^{\alpha_1}}, 1 \right)}{1} \dots \frac{L \left( \frac{\hat{r}_L^{\alpha_L}}{r_L^{\alpha_L}}, 1 \right)}{1} \right] \right\}^r \quad (5.1)$$

onde cada  $f_{R_k}(r_k)$  é uma PDF Weibull marginal dada por

$$f_{R_k}(r_k) = \frac{\alpha_k r_k^{\alpha_k - 1}}{\hat{r}_k^{\alpha_k}} \exp\left(-\frac{r_k^{\alpha_k}}{\hat{r}_k^{\alpha_k}}\right) \quad (5.2)$$

com  $r_k > 0$ . A partir da distribuição de Weibull se fizermos  $\alpha_k = 2$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$ , a distribuição de Rayleigh é obtida. Ainda considerando a distribuição de Weibull, a distribuição exponencial negativa é obtida fazendo-se  $\alpha_k = 1$ .

A distribuição Nakagami- $m$  pode ser obtida a partir da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  de forma exata considerando-se  $\alpha_k = 2$  e  $\mu_k = m_k$ , sendo  $m_k$  o fator de desvanecimento Nakagami- $m$ . Para  $\Omega_k = E(R_k^2)$ , temos então a PDF conjunta Nakagami- $m$  dada por

$$\begin{aligned} f_{R_1, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1/2)^r}{r!} \left\{ \sum_{i < j} C_{ij} \vartheta \left[ \frac{L\left(\frac{m_i}{\Omega_i} r_i^2, m_i\right)}{m_i} \frac{L\left(\frac{m_j}{\Omega_j} r_j^2, m_j\right)}{m_j} \right] + \dots \right. \\ &\quad \left. + C_{123 \dots L} \vartheta \left[ \frac{L\left(\frac{m_1}{\Omega_1} r_1^2, m_1\right)}{m_1} \dots \frac{L\left(\frac{m_L}{\Omega_L} r_L^2, m_L\right)}{m_L} \right] \right\}^r. \end{aligned} \quad (5.3)$$

A partir da distribuição Nakagami- $m$ , fazendo-se  $m_k = 1$  e  $\Omega_k = 2\sigma_k^2$ , a distribuição de Rayleigh, descrita em [52, (14)], resulta. Ainda a partir da distribuição Nakagami- $m$ , a distribuição gaussiana unilateral é obtida fazendo  $m_k = 1/2$ .

Note que ajustando de forma individual e apropriada os parâmetros para cada sinal na PDF conjunta  $\alpha$ - $\mu$ , diferentes combinações de cenários (por exemplo, Gaussiana Unilateral, Rayleigh, Weibull, Nakagami- $m$ ) com diferentes tipos e número de variáveis podem ser trabalhadas de forma simultânea.

### 5.3 Formulação Exata para a Distribuição $\alpha$ - $\mu$ de Duas Variáveis

Se fizermos  $L = 2$  e  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  então a partir de (4.33), pode-se obter uma expressão mais simples para uma distribuição conjunta  $\alpha$ - $\mu$  de duas variáveis dada por

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r! \delta^r}{(\mu)_r} L_r^{\mu-1} \left( \frac{\mu r_1^{\alpha_1}}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} \right) L_r^{\mu-1} \left( \frac{\mu r_2^{\alpha_2}}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} \right) \quad (5.4)$$

onde

$$\delta = \frac{C(R_1^{\alpha_1}, R_2^{\alpha_2})}{\sqrt{V(R_1^{\alpha_1})V(R_2^{\alpha_2})}} \quad (5.5)$$

é aqui definido como sendo o HpCC (do inglês, *Hyperpower Correlation Coefficient*) de dois sinais  $\alpha$ - $\mu$  sofrendo um processo de desvanecimento. Como demonstrado em [43], o parâmetro HpCC é idêntico à correlação de potência de dois sinais Rayleigh, que, por sua vez, é idêntico à correlação de potência de dois sinais Nakagami- $m$  com o mesmo fator de desvanecimento. Considerando  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ , (5.4) reduz de uma maneira exata para a conhecida relação em [24, eq. (135)]. Adicionalmente, se dois diferentes sinais apresentam condições diferentes de desvanecimento com parâmetros  $\mu_1$  e  $\mu_2$  então uma expressão mais geral para uma distribuição conjunta  $\alpha$ - $\mu$  de duas variáveis pode ser obtida como

$$f_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1) f_{R_2}(r_2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r! \delta^r}{(\mu_2)_r} L_r^{\mu_1-1} \left( \frac{\mu_1 r_1^{\alpha_1}}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} \right) L_r^{\mu_2-1} \left( \frac{\mu_2 r_2^{\alpha_2}}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} \right) \quad (5.6)$$

que é equivalente à expressão [43, eq. (27)], mas escrita em termos dos polinômios de Laguerre apresentados em (4.26). Como deduzido em [43], o parâmetro HpCC neste caso é dado por  $\delta \sqrt{\mu_1/\mu_2}$ , com  $\mu_1 \leq \mu_2$ . Desta maneira,  $\delta$  corresponde ao parâmetro HpCC de dois sinais com desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$  para  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Assim,  $\delta$  pode ser entendido como sendo o HpCC dos *clusters* dos sinais  $\alpha$ - $\mu$  1 e 2 que estão correlacionados entre si [43, 67]. Em referências futuras o parâmetro  $\delta$  será denotado por HpCC- $\mu$ .

## 5.4 Formulação Aproximada para a Distribuição $\alpha$ - $\mu$ Conjunta Multivariável

Se considerarmos pequenos valores do coeficiente de correlação na expressão (4.33), somente  $r = 0$  e  $r = 1$ , ou seja, apenas dois termos na série infinita, assim como  $C_{ij}$ , com  $i < j$ , são termos relevantes na composição da densidade conjunta. Neste caso, (4.33) pode ser aproximada por uma fórmula fechada mais simples dada por  $\tilde{f}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) \approx f_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L)$  com

$$\tilde{f}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} C_{ij} \frac{L_1^{\mu_i - 1} \left( \frac{\mu_i r_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}} \right) L_1^{\mu_j - 1} \left( \frac{\mu_j r_j^{\alpha_j}}{\hat{r}_j^{\alpha_j}} \right)}{\mu_i \mu_j} \right] \quad (5.7)$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, L$ . Usando o fato que  $L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1$  [25, eq. (15.212)], uma fórmula mais simples ainda pode ser encontrada como

$$\tilde{f}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \left[ 1 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} C_{ij} \left( 1 - \frac{r_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}} \right) \left( 1 - \frac{r_j^{\alpha_j}}{\hat{r}_j^{\alpha_j}} \right) \right]. \quad (5.8)$$

A CDF conjunta  $\alpha$ - $\mu$  multivariável pode ser calculada pela integração de (5.8) da seguinte maneira

$$\tilde{F}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \underbrace{\int_0^{r_L} \cdots \int_0^{r_2} \int_0^{r_1}}_L \tilde{f}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) dr_1 dr_2 \cdots dr_L. \quad (5.9)$$

Inserindo (5.8) em (5.9), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \prod_{k=1}^L F_{R_k}(r_k) + \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq j}}^L F_{R_k}(r_k) \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{i < j} C_{ij} \left[ F_{R_i}(r_i) + P \left( \mu_i + 1, \frac{\mu_i r_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}} \right) - 1 \right] \left[ F_{R_j}(r_j) + P \left( \mu_j + 1, \frac{\mu_j r_j^{\alpha_j}}{\hat{r}_j^{\alpha_j}} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde

$$F_{R_k}(r_k) = P\left(\mu_k, \frac{\mu_k r_k^{\alpha_k}}{\hat{r}_k^{\alpha_k}}\right) \quad (5.11)$$

é a CDF da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  [43, eq. (8)]. A discussão sobre a precisão e a utilidade destas aproximações será postergada para a Seção 5.4.3.

### 5.4.1 A Expressão Aproximada é uma PDF Válida

Como já mencionado anteriormente,  $\tilde{f}_{R_1, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L)$  é uma versão truncada da PDF exata  $f_{R_1, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L)$ . Entretanto, a sua integral definida com os devidos limites é exatamente igual a 1. Ou seja, embora seja uma expressão aproximada esta é uma PDF válida. Isto é demonstrado a seguir. Integrando (5.8) nos limites de 0 até  $\infty$ , então

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{L} \tilde{f}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) dr_1 dr_2 \cdots dr_L \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{L} \prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) dr_k + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{L-2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq j}}^L f_{R_k}(r_k) dr_k \\ & \quad \times \sum_{i < j} C_{ij} \int_0^\infty f_{R_i}(r_i) \left(1 - \frac{r_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right) dr_i \int_0^\infty f_{R_j}(r_j) \left(1 - \frac{r_j^{\alpha_j}}{\hat{r}_j^{\alpha_j}}\right) dr_j \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} C_{ij} \left(1 - \frac{\mathbf{E}(R_i^{\alpha_i})}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right) \left(1 - \frac{\mathbf{E}(R_j^{\alpha_j})}{\hat{r}_j^{\alpha_j}}\right) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

já que pela definição do modelo de desvanecimento  $\alpha$ - $\mu$

$$\mathbf{E}(R_k^{\alpha_k}) = \hat{r}_k^{\alpha_k}. \quad (5.13)$$

### 5.4.2 A Forma Aproximada da PDF e CDF Conjunta $\alpha$ - $\mu$ em uma Representação ainda mais Simples

A forma mais geral da densidade conjunta  $\alpha$ - $\mu$ , como expressa em (4.33), utiliza os parâmetros de correlação  $C_{ij}$ ,  $C_{ijk}$ ,  $\dots$ ,  $C_{123\dots L}$ , que são construídos a partir das propriedades de correlação das gaussianas que compõem um sinal com desvanecimento modelado de acordo com uma distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . Para o caso particular e aproximado, como expresso em (5.8), somente os coeficientes  $C_{ij}$  são considerados. É de grande interesse escrever a forma aproximada da densidade conjunta  $\alpha$ - $\mu$  em termos do parâmetro de correlação HpCC  $\delta_{ij}$  de cada par  $(i,j)$  de sinais  $\alpha$ - $\mu$ . Considere, inicialmente, dois sinais  $\alpha$ - $\mu$  com parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\mu$ ,  $\hat{r}_1$  e  $\alpha_2$ ,  $\mu$ ,  $\hat{r}_2$  e HpCC  $\delta_{12}$ . Partindo de (5.8) e depois de calcular  $C_{12}$ , como necessário, ou seja,  $C_{12} = 2\mu\delta_{12}$ , então

$$\tilde{f}_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1)f_{R_2}(r_2) \left[ 1 + \mu\delta_{12} \left( 1 - \frac{r_1^{\alpha_1}}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} \right) \left( 1 - \frac{r_2^{\alpha_2}}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} \right) \right]. \quad (5.14)$$

Se o parâmetro HpCC for agora calculado utilizando a relação (5.5), a partir da fórmula aproximada dada em (5.14), encontraremos exatamente  $\delta_{12}$ , *que é o HpCC calculado a partir da fórmula exata* (5.4). Em outras palavras, os HpCCs calculados a partir das PDFs conjunta de duas variáveis usando as fórmulas exata e aproximada são idênticos considerando-se *clusters* com os mesmos parâmetros  $\mu$ . Agora, considere dois sinais  $\alpha$ - $\mu$  com parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\hat{r}_1$  e  $\alpha_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\hat{r}_2$  e HpCC- $\mu$   $\delta_{12}$ . Um grande número de situações com diferentes parâmetros que descrevem os *clusters* foram analisados, e foi observado o surgimento de um padrão que leva à relação  $C_{12} = 2\mu_1\delta_{12}$ . Neste caso,

$$\tilde{f}_{R_1, R_2}(r_1, r_2) = f_{R_1}(r_1)f_{R_2}(r_2) \left[ 1 + \mu_1\delta_{12} \left( 1 - \frac{r_1^{\alpha_1}}{\hat{r}_1^{\alpha_1}} \right) \left( 1 - \frac{r_2^{\alpha_2}}{\hat{r}_2^{\alpha_2}} \right) \right]. \quad (5.15)$$

Novamente, se o HpCC for agora calculado utilizando a relação (5.5), a partir da fórmula aproximada (5.15), pode-se encontrar o valor exato  $\delta_{12}\sqrt{\mu_1/\mu_2}$ , *que é o HpCC calculado a partir da fórmula exata* (5.6). Em outras palavras, o HpCC para o caso de duas variáveis de uma distribuição conjunta  $\alpha$ - $\mu$  com diferentes parâmetros de *cluster*, calculado a partir das fórmulas exata e aproximada é o

mesmo.

Neste ponto, partiremos para o procedimento de encontrarmos uma expressão aproximada de uma PDF conjunta  $\alpha$ - $\mu$  multivariável em termos do parâmetro HpCC- $\mu$ . Observando (5.8) e (5.15), é possível intuitivamente escrever a expressão aproximada simplesmente generalizando a formação em termos das expressões dadas. Entretanto, de maneira a não incorrer em uma conclusão falsa, um grande número de diferentes situações foi analisado e os correspondentes  $C_{ij}$  deduzidos. Algumas destas situações são mostradas na Tabela 5.1. Valores de correlação HpCC- $\mu$ s do tipo constante ( $\delta_{ij} = \delta$ ) assim como correlação exponencial ( $\delta_{ij} = \delta^{|i-j|}$ ) foram consideradas. Portanto, aquilo que foi observado intuitivamente, agora é confirmado.

Tab. 5.1:  $C_{ij}$  para diferentes valores de  $L$ .

	$L = 5$			
	$L = 4$			
	$L = 3$			
	$L = 2$			
	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$	$\mu_3 = 3$	$\mu_4 = 4$	$\mu_5 = 5$
Constante	$C_{12} = 2\delta = 2\mu_1\delta_{12}$	$C_{13} = 2\delta = 2\mu_1\delta_{13}$ $C_{23} = 4\delta = 2\mu_2\delta_{23}$	$C_{14} = 2\delta = 2\mu_1\delta_{14}$ $C_{24} = 4\delta = 2\mu_2\delta_{24}$ $C_{34} = 6\delta = 2\mu_3\delta_{34}$	$C_{15} = 2\delta = 2\mu_1\delta_{15}$ $C_{25} = 4\delta = 2\mu_2\delta_{25}$ $C_{35} = 6\delta = 2\mu_3\delta_{35}$ $C_{45} = 8\delta = 2\mu_4\delta_{45}$
Exponencial	$C_{12} = 2\delta = 2\mu_1\delta_{12}$	$C_{13} = 2\delta^2 = 2\mu_1\delta_{13}$ $C_{23} = 4\delta = 2\mu_2\delta_{23}$	$C_{14} = 2\delta^3 = 2\mu_1\delta_{14}$ $C_{24} = 4\delta^2 = 2\mu_2\delta_{24}$ $C_{34} = 6\delta = 2\mu_3\delta_{34}$	$C_{15} = 2\delta^4 = 2\mu_1\delta_{15}$ $C_{25} = 4\delta^3 = 2\mu_2\delta_{25}$ $C_{35} = 6\delta^2 = 2\mu_3\delta_{35}$ $C_{45} = 8\delta = 2\mu_4\delta_{45}$

Desta maneira, uma PDF conjunta multivariável  $\alpha$ - $\mu$  na forma fechada e simples expressa em função do parâmetro HpCC- $\mu$  é dada por

$$\tilde{f}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) = \prod_{k=1}^L f_{R_k}(r_k) \left[ 1 + \sum_{i < j} \mu_i \delta_{ij} \left( 1 - \frac{r_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}} \right) \left( 1 - \frac{r_j^{\alpha_j}}{\hat{r}_j^{\alpha_j}} \right) \right]. \quad (5.16)$$

Seguindo o mesmo procedimento, uma expressão igualmente simples para a CDF conjunta multiva-

riável  $\alpha$ - $\mu$  é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L) &= \prod_{k=1}^L F_{R_k}(r_k) + \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \neq j}}^L F_{R_k}(r_k) \\ &\times \sum_{i < j} \mu_i \delta_{ij} \left[ F_{R_i}(r_i) + P\left(\mu_i + 1, \frac{\mu_i r_i^{\alpha_i}}{\hat{r}_i^{\alpha_i}}\right) - 1 \right] \left[ F_{R_j}(r_j) + P\left(\mu_j + 1, \frac{\mu_j r_j^{\alpha_j}}{\hat{r}_j^{\alpha_j}}\right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

As equações (5.16) e (5.17) são resultados de extrema importância. Elas são muito simples, aproximadas e, principalmente, expressões na forma fechada para a distribuição multivariável  $\alpha$ - $\mu$  com correlação arbitrária. Note que pode-se considerar qualquer padrão de correlação, que é dado em função do parâmetro HpCC- $\mu$ ,  $0 \leq \delta_{ij} \leq 1$ . Como demonstrado logo a seguir, as expressões aproximadas são mais precisas para pequenos valores de  $\delta_{ij}$  e sofrem uma pequena deterioração com o aumento de  $\delta_{ij}$ .

### 5.4.3 Aplicações - Receptor SC Multirramos

Com o objetivo de demonstrarmos a aplicabilidade das formulações matemáticas anteriores e verificarmos a precisão e utilidade das aproximações propostas, analisaremos o sistema SC como exemplo.

Em um receptor SC com  $L$  ramos e envoltórias de entradas  $R_1, R_2, \dots, R_L$ , a envoltória de saída  $R$  é dada por

$$R = \text{máximo entre } \{R_1, R_2, \dots, R_L\}. \quad (5.18)$$

Em um ambiente de correlação, a CDF  $F_R(r)$  na saída pode ser obtida a partir da CDF conjunta multivariável  $F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r_1, r_2, \dots, r_L)$  na entrada da seguinte maneira

$$F_R(r) = F_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r, r, \dots, r) \quad (5.19)$$

ou, de maneira semelhante, para a versão aproximada

$$\tilde{F}_R(r) = \tilde{F}_{R_1, R_2, \dots, R_L}(r, r, \dots, r). \quad (5.20)$$

Para um padrão de correlação exponencial, uma expressão para a PDF conjunta  $\alpha$ - $\mu$  exata e fechada é dada em [43, eq. (38)], que é um caso particular do modelo mais geral deduzido aqui em (4.33), este dado na forma de série infinita. Substituindo [43, eq. (38)] em (5.19) e (5.17) em (5.20) pode-se comparar o desempenho do receptor SC com vários ramos nas formulações exata e aproximada. Alguns exemplos de curvas são mostradas nas Figuras 5.1, 5.2 e 5.3 para  $L = 2, 3, 4$ ,  $\mu_i = 2$  e HpCC- $\mu = 0.3; 0.5; 0.7$ . É importante ressaltar que as curvas exata e aproximada são muito próximas para pequenos valores de correlação ( $\delta = 0.3$ ). Os resultados mantêm-se bons para valores medianos de correlação ( $\delta = 0.5$ ), mas somente razoável para altos valores de correlação ( $\delta = 0.7$ ). As mesmas conclusões podem ser retiradas do conjunto das Figuras 5.4, 5.5 e 5.6, nas quais os mesmos valores parâmetros são mantidos com exceção de  $\mu_i = 3.25$ . Em todas as curvas foi considerado  $\hat{r}_k^{\alpha k} = 1$ .

Embora durante todo processo de dedução anteriormente descrito considere valores inteiros ou múltiplo de meio para o parâmetro de desvanecimento  $\mu$ , não há nenhuma restrição matemática para este parâmetro assumir qualquer valor positivo, ou seja,  $\mu_L > \dots > \mu_2 > \mu_1 > 0$ . A mesma argumentação tem sido utilizada por vários outros autores para a distribuição Nakagami- $m$ . Começando pelo próprio Nakagami [24, p. 31], e passando através de [67, p. 1716], [54, p. 1241] e vários outros.

É muito importante observarmos que embora a fórmula exata leve várias horas (e muitos *warnings* no *MATHEMATICA*) para calcular (ou até mesmo não calcular) as expressões exatas, para um número de ramos maior do que quatro, a expressão aproximada proposta neste tese resulta no cálculo instantâneo independentemente no número de ramos.

## 5.5 Conclusões

Este capítulo apresentou vários casos particulares da distribuição  $\alpha$ - $\mu$  conjunta. Um caso simples e aproximado foi encontrado. Foram encontrados excelentes resultados para valores pequenos e médio de correlação. Vale a pena ressaltar que a simplicidade de nossas formulações, aliada à sua excelente precisão, torna a aproximação proposta excelente alternativa no estudo de canais com diversidade correlacionados.

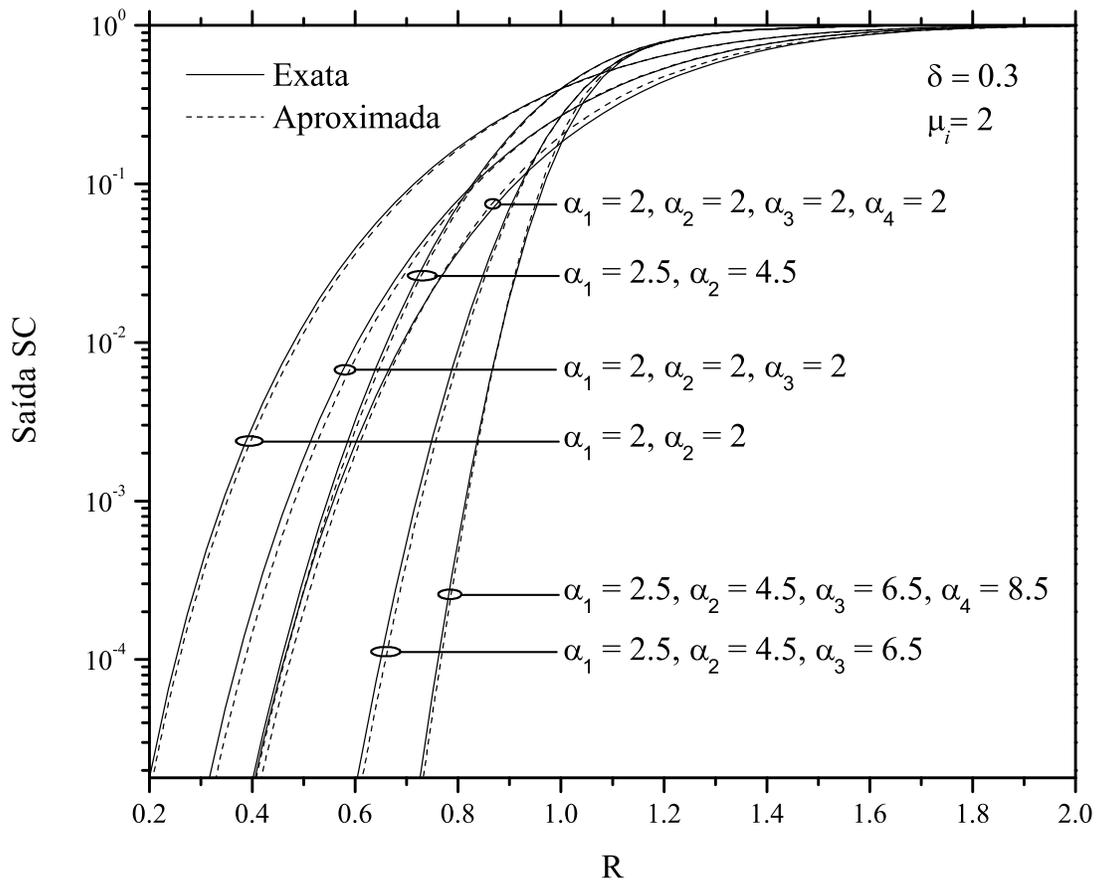


Fig. 5.1: CDF na saída do SC com  $\delta = 0.3$  e  $\mu_i = 2$ .

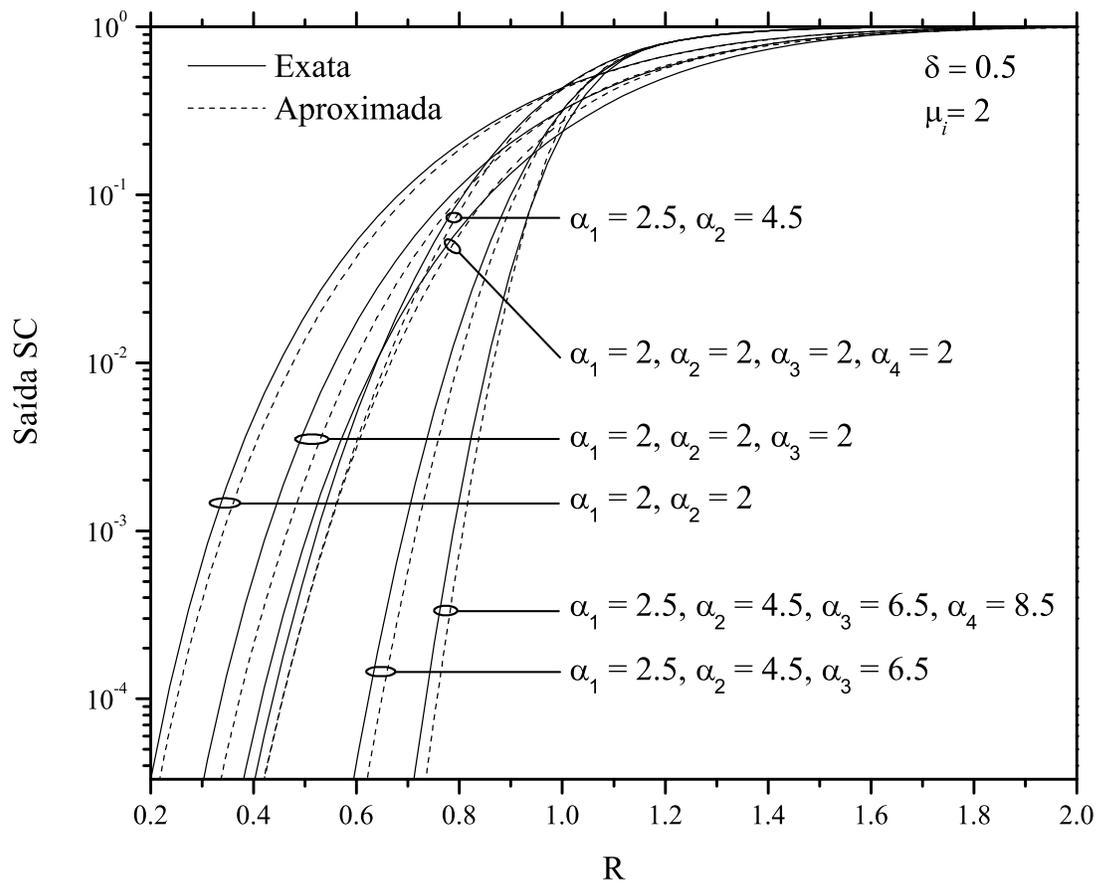


Fig. 5.2: CDF na saída do SC com  $\delta = 0.5$  e  $\mu_i = 2$ .

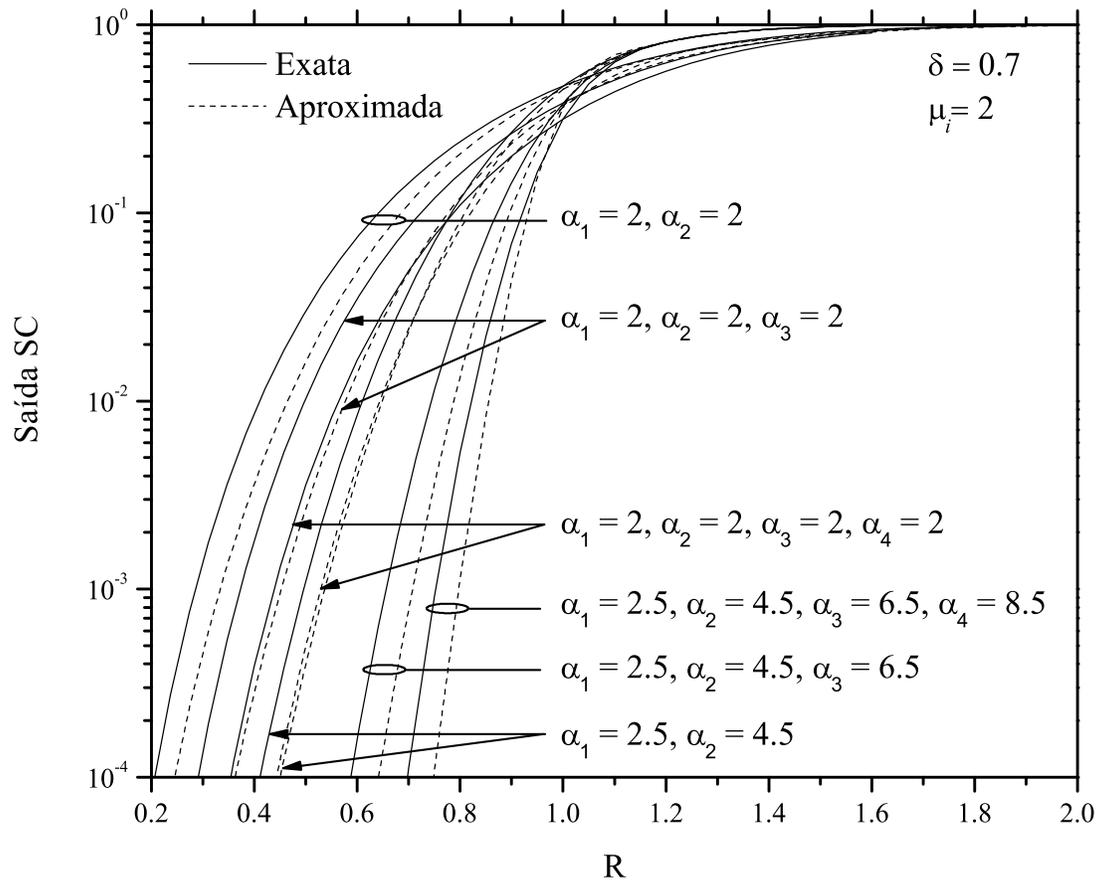


Fig. 5.3: CDF na saída do SC com  $\delta = 0.7$  e  $\mu_i = 2$ .

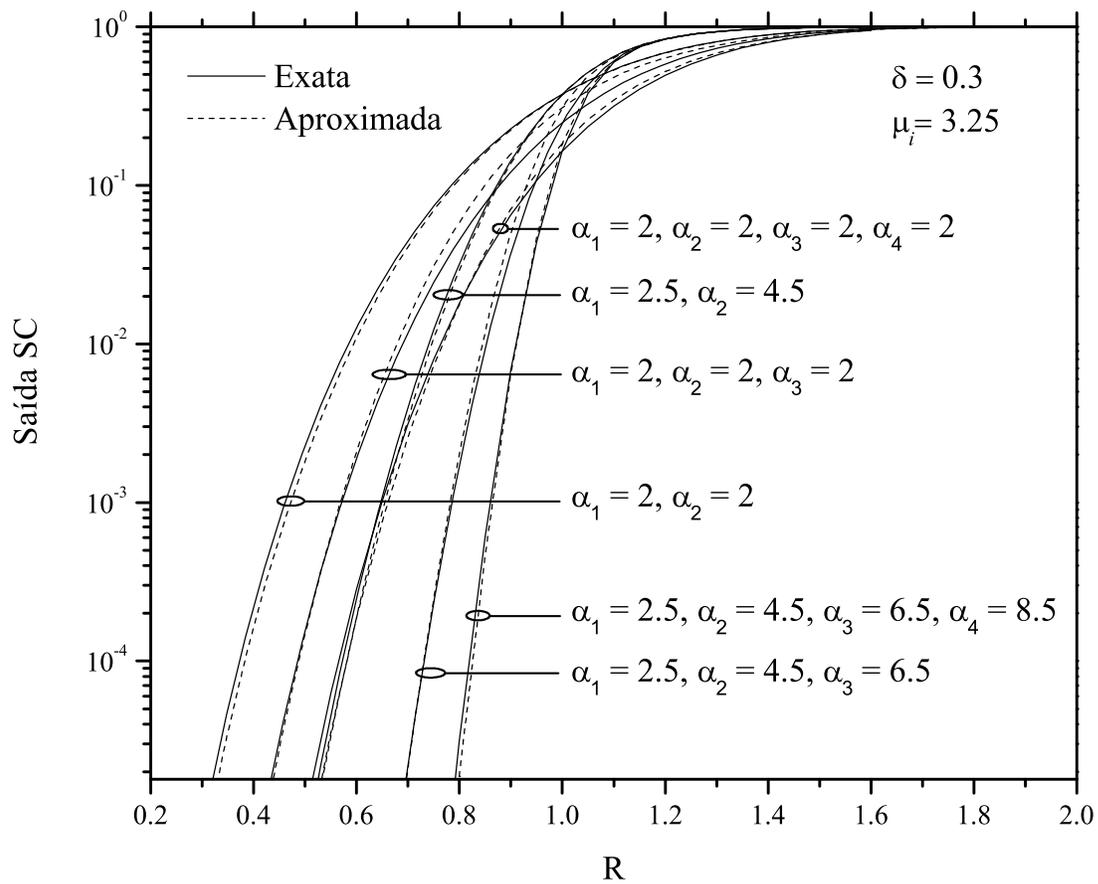


Fig. 5.4: CDF na saída do SC com  $\delta = 0.3$  e  $\mu_i = 3.25$ .

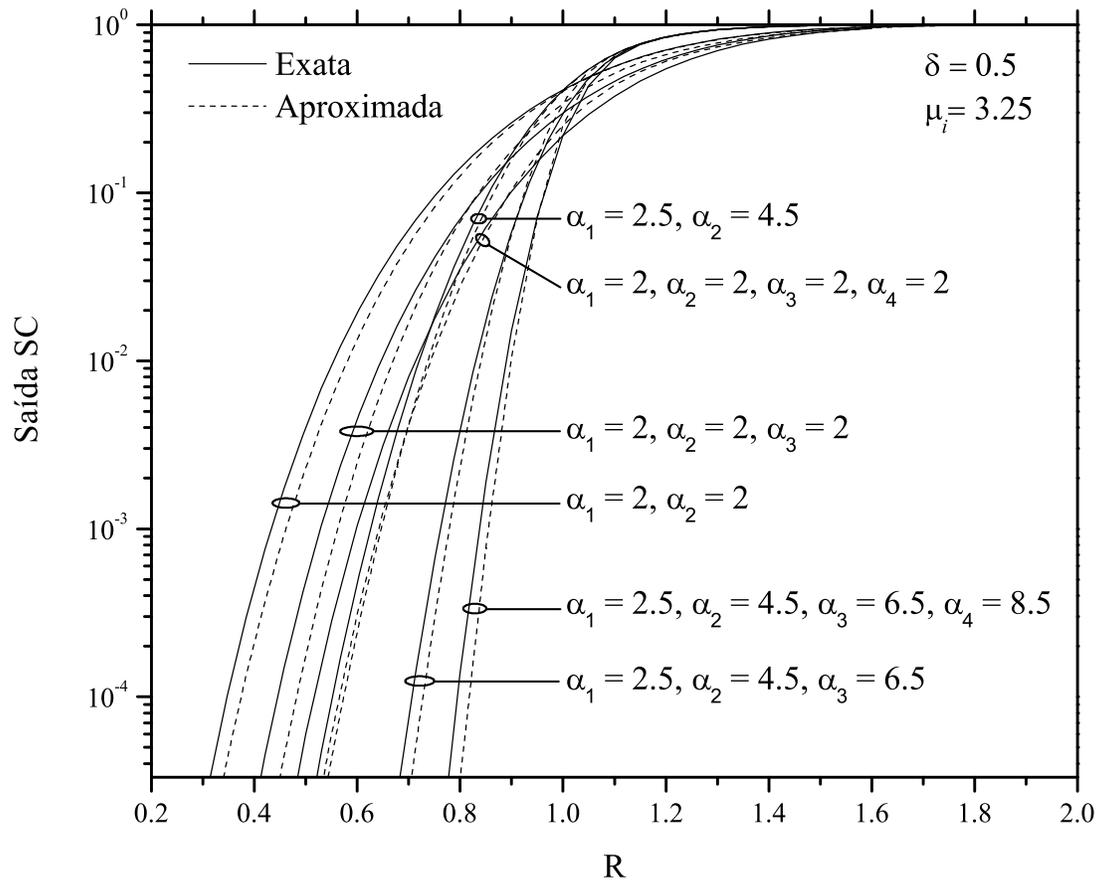


Fig. 5.5: CDF na saída do SC com  $\delta = 0.5$  e  $\mu_i = 3.25$ .

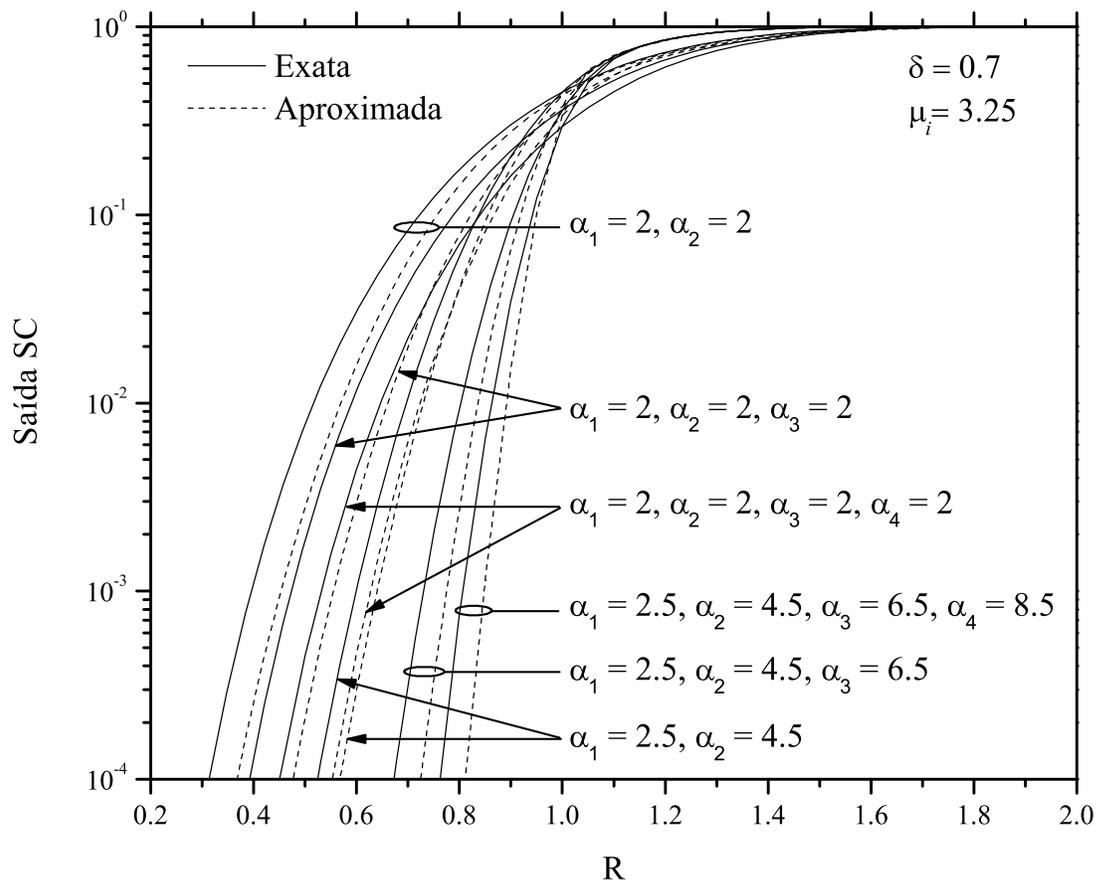


Fig. 5.6: CDF na saída do SC com  $\delta = 0.7$  e  $\mu_i = 3.25$ .

# Capítulo 6

## Conclusões e trabalhos futuros

### 6.1 Conclusões

Nesta tese foram deduzidas expressões exatas para o modelo de duas variáveis Hoyt (Nakagami- $q$ ) com correlação arbitrária em um ambiente não estacionário. De forma específica, as seguintes estatísticas foram encontradas: função densidade de probabilidade conjunta, função de distribuição cumulativa conjunta, coeficiente de correlação e algumas estatísticas relacionadas ao parâmetro SNR na saída do combinador de seleção, a saber, probabilidade de indisponibilidade e função densidade de probabilidade. As expressões fazem uso dos polinômios de Laguerre generalizados. Elas são matematicamente tratáveis e possuem flexibilidade suficiente para acomodar um grande número de cenários de correlação, úteis na análise de um ambiente com desvanecimento mais geral.

Depois disto, aproveitando os resultados previamente deduzidos, expressões exatas relacionadas a processos Nakagami- $m$  com duas variáveis com correlação arbitrária e parâmetros de desvanecimento igualmente arbitrários foram encontradas. De forma mais específica, as seguintes estatísticas foram obtidas neste trabalho: função geratriz de momentos, função densidade de probabilidade conjunta, função de distribuição cumulativa conjunta, coeficiente de correlação de potência, e várias estatísticas ligadas à relação sinal-ruído na saída do combinador de seleção, especialmente, probabilidade de indisponibilidade, função densidade de probabilidade e valor médio da relação sinal-ruído.

Uma formulação através de série infinita para a função densidade de probabilidade multivariável  $\alpha$ - $\mu$  com matriz de correlação *arbitrária* e variáveis *não identicamente* distribuídas foi encontrada. A expressão é *exata e geral* e inclui todos os resultados anteriormente publicados na literatura relacionados às distribuições compreendidas pela distribuição  $\alpha$ - $\mu$ . A expressão geral foi então particularizada para uma *solução aproximada simples na forma fechada*. Adicionalmente, a função distribuição cumulativa conjunta multivariável foi obtida, novamente, em uma *forma fechada e simples*. Os resultados exato e aproximado são muito próximos para valores pequenos e médio de correlação.

Nós mantemos, entretanto, que uma relação entre os coeficientes de correlação das correspondentes componentes gaussianas deve ser mantida de forma a atender os critérios de convergência.

## 6.2 Trabalhos Futuros

Ao longo deste trabalho foram identificados vários problemas que ainda não foram resolvidos e que seriam contribuições interessantes para a área. São estes:

- Implementação de um simulador para  $L$  ramos correlacionados em canais com correlação arbitrária;
- Determinação da PDF e CDF conjunta para a distribuição  $\eta$ - $\mu$ , que é a generalização da distribuição Hoyt;
- Cálculo da capacidade de canal para modelos com desvanecimento correlacionados

# Referências Bibliográficas

- [1] M. D. Yacoub, *Foundations of Mobile Radio Engineering*. CRC Press, 1993.
- [2] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. New York: McGraw Hill, 2000.
- [3] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*. New York: Willey, 1997.
- [4] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [5] Alister Burr, *Modulation and coding for Wireless Communications*. Prentice Hall, 2001.
- [6] R. Price, “Detection of Signals perturbed by scatter and noise,” *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. PGIT-4, pp. 163–170, Sept. 1954.
- [7] ———, “Optimum detection of random signal in noise, with application to scatter-multipath communication,” *IRE Trans. Inform. Theory*, vol. IT-2, pp. 125–135, Dec. 1956.
- [8] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” *Bell System Technical Journal*, vol. 23, pp. 282–332, July 1944.
- [9] M. Nakagami, “The  $m$ -distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading,” in *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. G. Hoffman, Ed. Oxford, U.K.: Pergamon, 1960, pp. 3–36.
- [10] R. H. Clarke, “A statistical theory of mobile radio reception,” *Bell System Technology Journal*, vol. 1, no. 47, pp. 957–1000, 1968.

- [11] Lord Rayleigh J. W. S., *Phil. Mag.*, vol. 73(10), 1880.
- [12] Pawsey J. L., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 31(125), 1935.
- [13] H. B. James and P. I. Wells, “Some tropospheric scatter propagation measurements near the radio-horizon,” *IRE*, pp. 1336–1340, Oct. 1955.
- [14] G. R. Sugar, “Some fading Characteristics of regular VHF ionospheric propagation,” *IRE*, pp. 1432–1436, 1955.
- [15] S. Basu, E. Costa Mackenzie, P. F. Fougere, H. C. Carlson, and H. E. Whitney, “250 MHz/GHz scintillation parameter in the equatorial, polar, and aural environments,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 5, pp. 102–115, Feb. 1987.
- [16] T. L. Staley, R. C. North, W. H. Ku, and J. R. Zeidler, “Performance of Coherent MPSK on frequency selective slowly fading channels,” in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC 2000)*, Atlanta, GA, Apr. 1996, pp. 784–788.
- [17] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1972.
- [18] J. I. Marcum, “A statistical theory of target detection by pulsed radar,” *IRE Trans. Inf. Theory*, vol. 6, no. 2, pp. 59–267, Apr. 1960.
- [19] K. A. Stewart, G. P. Labeledz and K. Sohrabi, “Wideband channel measurements at 900 MHz,” in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC95)*, vol. 1, Chicago, July 1995, pp. 236–240.
- [20] R. J. C. Bultitude, S. A. Mahmoud, and W. A. Sullivan, “A comparison of indoor radio propagation characteristics at 910 MHz and 1.75 GHz,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 7, pp. 20–30, Jan. 1989.
- [21] T. S. Rappaport and C. D. Mcgillem, “UHF fading in factories,” *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 7, pp. 40–48, Jan. 1989.

- [22] G. H. Munro, "Scintillation of radio signal from satellites," *J. Geophys. Res.*, vol. 68, Apr. 1963.
- [23] P. D. Shaft, "On the relationship between scintillation index and Rician fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 22, pp. 731–732, May 1974.
- [24] M. Nakagami, "The  $m$ -distribution - A general formula of intensity distribution of rapid fading," *Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, pp. 3–36, 1960, W. G. Hoffman, Ed. Oxford, U.K.: Pergamon.
- [25] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*. New York: Academic Press, 1980.
- [26] J. E. Vargas B. and M. D. Yacoub, "Wideband radio channel simulations with shadowed-Nakagami statistics," in *Int. Telecomm. Symp. (ITS96)*, Acapulco, Mexico, Oct. 1996.
- [27] U. Dersch and R. J. Rüeegg, "Simulations of the time and frequency selective outdoor mobile radio channel," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 42, no. 3, pp. 338–344, Aug. 1993.
- [28] M.D. Yacoub, J. E. Vargas B., and Leonardo G. de R. Guedes, "On higher order statistics of the Nakagami- $m$  distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, no. 3, pp. 790–794, May 1999.
- [29] H. Suzuki, "A statistical model of urban radio propagation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 25, no. 7, pp. 673–680, July 1977.
- [30] Walter R. Braun and Ulrich Dersch, "A physical mobile radio channel model," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 40, no. 2, pp. 472–482, May 1991.
- [31] A. U. Sheikh, M. Handforth and M; Abdi, "Indoor mobile radio channel at 956 MHz: measurements and modeling," in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC93)*, Secaucus, NJ, May 1993, pp. 73–76.
- [32] E. J. Fremouw and H. F. Bates, "Worldwide behavior of average VHF-UHF scintillation," *Radio Sci.*, vol. 6, pp. 863–869, Oct. 1971.

- [33] R. S. Hoyt, "Probability functions for the modulus and angle of the normal complex variate," *Bell Syst. Tech. J.*, vol. 26, no. Apr., pp. 318–359, 1947.
- [34] Neji Youssef, Cheng-Xiang Wang, and Matthias Pätzold, "A study on the second order statistics of Nakagami-Hoyt mobile fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 54, no. 4, pp. 1259–1265, July 2005.
- [35] G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Mendes, and J. C. S Santos Filho, "Second-order statistics of Maximal-Ratio and Equal-Gain combining in Hoyt fading," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 1, pp. 19–21, Jan. 2005.
- [36] J. F. Paris, "Nakagami-q (Hoyt) distribution function with applications," *IEE Electron. Lett.*, vol. 45, no. 4, pp. 210–211, Feb. 2009.
- [37] Fisher R.A. and Tippet L.H.C., "Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample," in *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1928, pp. 180–190.
- [38] Waloddi Weibull, "A statistical theory of the strength of materials," *Royal Swedish Institute for Engineering Research*, vol. 151, 1939.
- [39] H. Hashemi, "The indoor radio propagation channel," *Proc. IEEE*, vol. 81, pp. 943–968, July 1993.
- [40] M. S. Adawi, "Coverage prediction for mobile radio systems operating in the 800/900 MHz frequency range," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 37, pp. 3–72, Feb. 1988.
- [41] N. H. Shepherd, "Radio wave loss deviation and shadow loss at 900 MHz," in *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 26, Boston, USA, June 1977, pp. 309–313.
- [42] G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Mendes, and J. C. S Santos Filho, "Second-order statistics of Maximal-Ratio and Equal-Gain combining in Weibull fading," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 9, no. 6, pp. 499–501, June 2005.

- [43] M. D. Yacoub, "The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A physical fading model for the Stacy distribution," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 56, no. 1, pp. 27–34, Jan. 2007.
- [44] E. W. Stacy, "A generalization of the gamma distribution," *Ann. Math. Stat.*, vol. 33, pp. 1187–1192, Sept. 1962.
- [45] M. D. Yacoub, "The  $\eta$ - $\mu$  distribution: A general fading distribution," in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC 2000)*, vol. 46, Boston, USA, Sep. 2000.
- [46] ———, "The  $\kappa$ - $\mu$  distribution and the  $\eta$ - $\mu$  distribution," *IEEE Antennas Propagat. Mag.*, vol. 49, no. 1, pp. 68–81, Feb. 2007.
- [47] ———, "The  $\kappa$ - $\mu$  distribution: A general fading distribution," in *Proc. IEEE Fall Veh. Technol. Conf. (VTC 2001)*, Atlantic City, USA, oct 2001.
- [48] J. D. Parsons, *The Mobile Radio Propagation Channel*, 2nd ed. Willey, 2000.
- [49] D. G. Brennan, "Linear Diversity Combining Techniques," *IRE*, vol. 47, pp. 1075–1102, May 1959.
- [50] Michel Daoud Yacoub, Cláudio Rafael Cunha Monteiro da Silva, and Jose Edson Vargas Bautista, "Second-Order statistics for diversity-combining techniques in Nakagami-fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 50, no. 6, pp. 1464–1470, Nov. 2001.
- [51] M. Schwartz, W. R. Bennett, and S. Stein, *Communication Systems and Techniques*. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [52] Y. Li, T. T. Tjhung and F. Adachi, "Performance of DS-CDMA in correlated Rayleigh-fading channel with Rake combining," in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC 2000)*, Tokyo, Japan, May 2000, pp. 785–789.
- [53] V. A. Aalo, "Performance of maximal-ratio diversity systems in a correlated Nakagami-Fading environment," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 8, pp. 2360–2369, Aug. 1995.

- [54] G. K. Karagiannidis, D. S. Zogas, and S. A. Kotsopoulos, "On the multivariate Nakagami- $m$  distribution with exponential correlation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no. 8, pp. 1240–1244, Aug. 2003.
- [55] ———, "An efficient approach to multivariate Nakagami- $m$  distribution using Green's matrix approximation," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 2, no. 5, pp. 883–889, Sept. 2003.
- [56] Okechukwu C. Ugweje and Valentine A. Aalo, "Performance of selection diversity system in correlated Nakagami fading," in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC97)*, Phoenix, AZ, May 1997, pp. 1448–1492.
- [57] Emad K. Al-Hussaini and Abdel Aziz M. Al-Bassiouni, "Performance of MRC diversity systems for the detection of signals with Nakagami fading," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 33, no. 12, pp. 1315–1319, Dec. 1985.
- [58] Z. Peyton Peebles Jr., *Probability, Random Variables and Random Signals Principles*. McGraw-Hill, Inc., 1987.
- [59] M. K. Simon and M. Alouini, *Digital Modulation over Fading Channels*, 1st ed. New York: Wiley, 2000.
- [60] R. G. Vaughan and J. B. Anderson, "Antenna diversity in mobile communications," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 36, pp. 149–172, Nov. 1987.
- [61] M. S. Alouini, A. Abdi, and M. Kaveh, "Sum of gamma variates and performance of wireless communication systems over Nakagami-fading," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 50, pp. 1471–1480, Nov. 2001.
- [62] Q. T. Shang, "Maximal-ratio combining Nakagami fading channels with an arbitrary branch covariance matrix," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 48, pp. 1141–1150, July 1999.
- [63] C. C. Tan and N. C. Beaulieu, "Infinite series representation of the bivariate Rayleigh and Nakagami- $m$  distributions," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 45, no. 10, pp. 1159–1161, Oct. 1997.

- [64] A. S. Krishnammoorthy and M. Parthasarathy, "A multivariate gamma-type distribution," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, no. 4, pp. 549–557, Dec. 1951.
- [65] Eric W. Weisstein, "Tridiagonal Matrix," From MathWorld—A Wolfram Web Resource," Página na Internet, 2002, <http://mathworld.wolfram.com/TridiagonalMatrix.html>.
- [66] R. Nabben, "On Green's matrices of trees," *SIAM J. Anal. Appl.*, vol. 4, pp. 1014–1026, 2000.
- [67] J. Reig, L. Rubio, and N. Cardona, "Bivariate Nakagami- $m$  distribution with arbitrary fading parameters," *IEE Electron. Lett.*, vol. 38, no. 25, pp. 1715–1717, Dec. 2002.
- [68] M. D. Yacoub, "The  $\alpha$ - $\mu$  distribution: A general fading distribution," in *IEEE Inter. Symp. on Personal, Indoor and Mobile Radio Commun. (PIMRC2002)*, vol. 2, Sept. 2002, pp. 629–633.
- [69] C. D. I. T. Piboongunon, V. A. Aalo and G. P. Efthymoglou, "Bivariate generalised gamma distribution with arbitrary fading parameters," *IEE Electron. Lett.*, vol. 41, no. 12, pp. 49–50, June 2006.
- [70] B. Chytil, "The distribution of amplitude scintillation and the conversion of scintillation indices," *J. Atmos. Terr. Phys.*, vol. 29, pp. 1175–1177, Sept. 1967.
- [71] A. Annamalai, C. Tellambura, and V. K. Bhargava, "Simple and accurate methods for the outage analysis in cellular mobile radio systems—A unified approach," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, pp. 303–316, Feb. 2001.
- [72] A. Mehrnia and H. Hashemi, "Mobile satellite propagation channel part II—A new model and its performance," in *Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC99)*, Amsterdam, The Netherlands, Sept. 1999, pp. 2780–2784.
- [73] C. X. Wang, N. Youssef, and M. Pätzold, "Level-crossing rate and average duration of fades of deterministic simulation models for Nakagami-Hoyt fading channels," in *Proc. WPMC'02*, Honolulu, HI, Oct. 2002, pp. 272–276.

- [74] M. K. Simon and M. S. Alouini, "A unified approach to the performance analysis of digital communication over generalized fading channels," in *Proc. IEEE*, vol. 86, Sept. 1998, pp. 1860–1877.
- [75] N. Youssef, W. Elbahri, M. Pätzold, and S. Elasmî, "On the crossing statistics of phase processes and random FM noise in Nakagami- $q$  mobile fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, pp. 24–29, Jan. 2005.
- [76] J. Cheng and T. Berger, "Capacity of Nakagami- $q$  (Hoyt) fading channels with channel side information," in *Proc. Int. Conf. on Commun. Technol.*, vol. 2, Apr. 2003, pp. 1915–1918.
- [77] C.-D. Iskander and P. T. Mathiopoulos, "Exact performance analysis of dual-branch coherent equal-gain combining in Nakagami- $m$ , Rice and Hoyt fading," in *Proc. IEEE Southeast Conf.*, vol. 57, Apr. 8–10, 2005, pp. 233–239.
- [78] J. R. Mendes, M. D. Yacoub, and G. Fraidenraich, "Closed-form generalized power correlation coefficient of the Hoyt fading signal," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 2, pp. 94–96, Feb. 2006.
- [79] G. Fraidenraich, M. D. Yacoub, J. R. Mendes, and J. C. S Santos Filho, "Second-order statistics for diversity-combining of non-identical correlated Hoyt signals," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 56, no. 2, pp. 183–188, Feb. 2008.
- [80] M.D. Yacoub, C.R.C.M. da Silva and J. E. Vargas B., "Second-order statistics for diversity-combining techniques in Nakagami-fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 50, no. 6, pp. 1464–1470, Nov. 2001.
- [81] T. A. Tran and A. B. Sesay, "Sum of arbitrarily correlated gamma variates and performance of wireless communication systems over Nakagami- $m$  fading channels," *IET Commun.*, vol. 1, no. 6, pp. 1133–1137, Dec. 2007.

- 
- [82] M. Z. Win, G. Chrisikos, and J. H. Winters, “MRC performance for  $M$ -ary modulation in arbitrarily correlated Nakagami fading channels,” *IEEE Commun. Lett.*, vol. 4, no. 10, pp. 301–303, Oct. 2000.
- [83] T. S. Durrani and X. Zeng, “Copulas for bivariate probability distributions,” *IEE Electron. Lett.*, vol. 43, no. 4, pp. 248–249, Feb. 2007.
- [84] J. Reig, L. Rubio, and V. M. R. Peñarrocha, “Performance of dual selection combiners over correlated Nakagami- $m$  fading with different fading parameters,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 9, pp. 1527–1532, Sept. 2006.
- [85] A. Papoulis., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, 4th ed., 2002.