

Caracterizações de Conjuntos de Matrizes Estáveis via Desigualdades Matriciais Lineares

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da
Universidade Estadual de Campinas, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de Mestre em Engenharia Elétrica.

por

Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira
Engenheiro de Computação – PUC-PR

Março de 2003

Orientador: **Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres** FEEC/UNICAMP

Banca Examinadora

Prof. Dr. Amit Bhaya	COPPE/UFRJ
Prof. Dr. Paulo Augusto Valente Ferreira	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Maurício Carvalho de Oliveira	FEEC/UNICAMP
Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres	FEEC/UNICAMP (orientador)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

OL4c

Oliveira, Ricardo Coração de Leão Fontoura de
Caracterizações de Conjuntos de Matrizes
Estáveis via Desigualdades Matriciais Lineares
Ricardo Coração de Leão Fontoura de Oliveira.-
Campinas,SP:[s.n.], 2003.

Orientador: Pedro Luis Dias Peres
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação

1. Teoria do controle. 2. Liapunov, funções de.
3. Estabilidade. 4. Sistemas lineares.
I. Peres, Pedro Luis Dias.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Elétrica e de Computação. III. Título

Resumo

Esta dissertação trata do problema de estabilidade robusta de sistemas lineares sujeitos a incertezas estruturais. A matriz dinâmica do sistema é representada pelo produto AB , sendo que A é uma matriz precisamente conhecida e B pertence a um politopo convexo.

Para essa classe de sistemas, novas condições de estabilidade são apresentadas em termos de desigualdades matriciais lineares que, se factíveis, fornecem uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros que garante a estabilidade robusta de todo o politopo definido por AB . Essas condições fornecem resultados menos conservadores que os existentes na literatura, tanto para sistemas contínuos como para sistemas discretos no tempo.

Problemas como $\mathbb{ID}$ -estabilidade e estabilidade diagonal são tratados de maneira imediata através das escolhas convenientes de AB e da estrutura da matriz de Lyapunov.

Abstract

This work is concerned with the problem of robust stability of linear systems subject to structural uncertainties. The dynamic matrix of the system is represented by the product AB where A is a precisely known matrix and B belongs to a convex polytope.

For this class of systems, new stability conditions are presented in terms of linear matrix inequalities which, if feasible, yield a parameter dependent Lyapunov matrix assuring the robust stability of the entire domain defined by AB . These conditions provide less conservative results than the ones presented in the literature, for both continuous and discrete-time systems.

Problems such $\mathbb{ID}$ -stability and diagonal stability are handled immediately by the convenient choices of AB and Lyapunov matrix structure.

AO PAI, QUE NO PRINCÍPIO
PRESENTEOU-ME COM O “QUERER”
PARA EU TUDO CONQUISTAR, E UM
DIA RETORNAR A SUA CASA, CHEIO
DE COMPREENSÃO E LUZ.

Agradecimentos

Agradeço

- a meus pais, por sempre me apoiarem.
- ao Prof. Pedro, que é mais que um Mestre.
- aos colegas mais próximos Paulo, Valter e Vinícius, com quem muito aprendi.
- a todos os demais colegas do DT, que me proporcionaram um excelente ambiente de trabalho (e inúmeras semanas no *Carpe Diem* ☺).
- à CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo e Abstract	ii
Agradecimentos	iv
1 Introdução Geral	1
1.1 Apresentação	1
1.2 Revisão Histórica	2
1.3 Notação	7
2 Preliminares e Definições	9
2.1 Problema de Lur'e	9
2.2 Problema de Persidskii	10
2.3 ID-Estabilidade	14
2.3.1 Hurwitz ID-Estabilidade	14
2.3.2 Schur ID-Estabilidade	15
3 Sistemas Contínuos no Tempo	17
3.1 Introdução	17
3.2 Preliminares	19
3.3 Novas Condições para AB -Estabilidade	21
3.3.1 ID-Estabilidade	26
3.3.2 Estabilidade Robusta com Restrições Estruturais	27
3.4 Exemplos Numéricos	28
4 Sistemas Discretos no Tempo	31
4.1 Introdução	31
4.2 Preliminares	32
4.3 Novas Condições para AB -Estabilidade	35
4.3.1 ID-Estabilidade	40
4.3.2 Estabilidade Robusta com Restrições Estruturais	41
4.4 Exemplos Numéricos	41

5	Conclusão e Perspectivas	46
5.1	Perspectivas	49
	Bibliografia	51

Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica da classe de funções $\mathcal{S}_c$ (setor infinito).	11
2.2	Representação gráfica da classe de funções $\mathcal{S}_d$ (setor normalizado $[-1, 1]$).	13
3.1	Representação gráfica de um politopo $\mathcal{B}$ de ordem 2 com os vértices dados por (3.26) e $\epsilon > 0$ arbitrário.	27
3.2	Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{A}$ definido por A em (3.27) e $B(\alpha)$ dado por (3.3) e os vértices $B_i, i = 1, \dots, N$ dados por (3.26), com $\epsilon = 0.001$.	28
4.1	Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{A}$ definido por A dado em (4.34) e $B(\alpha)$ dado em (4.33).	42
4.2	Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{A}$ definido por S dado em (4.35) e $B(\alpha)$ dado em (4.33).	43
4.3	Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{B}$ definido pelos vértices dados em (4.36).	45
5.1	$X_c =$ Conjunto de todas as matrizes $\mathbb{D}_c$; $D_c =$ Matrizes $\mathbb{D}_c$ que são Hurwitz diagonalmente estáveis; L_c, T_{c1} e $T_{c3} =$ Matrizes $\mathbb{D}_c$ que são detectáveis pelos Lema 3.3, Teorema 3.1 e Teorema 3.3 respectivamente.	47
5.2	$X_d =$ Conjunto de todas as matrizes $\mathbb{D}_d$; $D_d =$ Matrizes $\mathbb{D}_d$ que são Schur diagonalmente estáveis; L_d, T_{d1} e $T_{d3} =$ Matrizes $\mathbb{D}_d$ que são detectáveis pelos Lema 4.2, Teorema 4.1 e Teorema 4.3 respectivamente.	47

Lista de Tabelas

- 3.1 Número de variáveis escalares K e de linhas L das LMIs em função do número de estados n e do número de vértices N para os testes de AB -estabilidade Lema 3.3, Teorema 3.1 e Teorema 3.3. A complexidade é proporcional a K^3L quando se utilizam métodos de pontos interiores. 26
- 4.1 Número de variáveis escalares K e de linhas L das LMIs em função do número de estados n e do número de vértices N para os testes de AB -estabilidade Lema 4.2, Teorema 4.1 e Teorema 4.3. A complexidade é proporcional a K^3L quando se utilizam métodos de pontos interiores. 40

Capítulo 1

Introdução Geral

1.1 Apresentação

Esta dissertação apresenta novas condições de estabilidade para sistemas lineares sujeitos a incertezas estruturais. Os problemas de ID-estabilidade e estabilidade diagonal são abordados de maneira imediata como principais aplicações. Este trabalho é motivado pelas idéias de novos testes de estabilidade robusta apresentados recentemente na literatura [RP01], [RP02], que exploram o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

Estruturalmente, o trabalho está dividido em cinco capítulos.

- **Capítulo 1** - Este capítulo inicial tem como intuito fazer uma revisão histórica sucinta dos problemas relacionados direta ou indiretamente com a proposta do trabalho, na qual são mencionados alguns resultados fundamentais na área de estabilidade de sistemas e alguns dos trabalhos mais importantes da literatura nas últimas duas décadas. Uma excelente fonte de referências complementar é o livro *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*, de autoria de Kaskurewicz e Bhaya. Por questões de estilo, optou-se por não apresentar equações e definições neste capítulo, ficando o capítulo 2 incumbido dessa tarefa.
- **Capítulo 2** - Destina-se a apresentar alguns resultados básicos de estabilidade de sistemas não lineares e algumas definições relevantes ao desenvolvimento do texto.
- **Capítulos 3 e 4** - Apresentam as novas condições de estabilidade e suas aplicações

para sistemas contínuos e discretos no tempo, respectivamente. Os resultados obtidos são comparados aos obtidos por outros métodos por meio de exemplos numéricos.

- **Capítulo 5** - O trabalho se encerra neste capítulo, com algumas conclusões e discussões sobre perspectivas.

1.2 Revisão Histórica

Esta revisão segue uma linha de raciocínio que começa no problema mais geral e termina no caso mais particular, muitas vezes não respeitando a ordem cronológica dos fatos. Basicamente os fatos são apresentados¹ na seguinte ordem: Problema de Lur'e $\rightarrow$ Problema de Persidskii $\rightarrow$ Estabilidade diagonal e aplicações $\rightarrow$ $\mathbb{ID}$ -estabilidade e aplicações.

A publicação do trabalho de A. I. Lur'e e V. N. Postnikov em 1944 [LP44], formulando um problema de estabilidade, deu origem a uma nova teoria na área de sistemas não lineares, conhecida como teoria de estabilidade absoluta. Dois outros nomes que tiveram fundamental importância na formulação desta foram B. V. Bulgakov, que pela primeira vez considerou equações diferenciais com não linearidades desconhecidas porém restritas a setores [Bul42], [Bul46] e M. A. Aizerman, que com seus trabalhos ([Aiz66], [AG64]) e sua famosa hipótese [Aiz49] deu novos rumos ao desenvolvimento da teoria de estabilidade absoluta. Durante os anos subseqüentes a idéia de estabilidade absoluta foi consideravelmente ampliada tanto no sentido das definições dadas por diferentes autores como na variedade dos sistemas considerados. Entretanto, a essência do problema de Lur'e ainda continua a mesma. Um histórico completo do avanço das pesquisas na área da teoria de estabilidade absoluta pode ser encontrado em [Lib01] e [Lib02] e referências internas. O surgimento de hipóteses, conjecturas, contra-exemplos, novas abordagens, aplicações e todo o desenrolar da evolução da estabilidade absoluta até a atualidade é narrado em detalhes. Cabe aqui mencionar um *site* na internet (<http://www.fund.ru/stability>) que lista e comenta inúmeras publicações sobre o tema estabilidade absoluta.

¹As definições formais do problema de Lur'e, problema de Persidskii, estabilidade diagonal e $\mathbb{ID}$ -estabilidade são apresentadas no capítulo 2.

Os resultados de Quirk e Ruppert [QR65] e seu complemento [JKdD77] introduziram o conceito de estabilidade qualitativa em sistemas lineares, no qual a estabilidade depende basicamente da estrutura do sistema e não da magnitude de seus parâmetros. Em [Per69] Persidskii estendeu os resultados de estabilidade qualitativa de Quirk e Ruppert para uma determinada classe de sistemas não lineares. O problema de Persidskii pode ser considerado como um caso particular do problema de Lur'e, e portanto também é considerado como um problema de estabilidade absoluta. Persidskii usou a abordagem clássica de Lyapunov para estabelecer condições de estabilidade para uma classe de sistemas não lineares, utilizando funções de Lyapunov do tipo diagonal. O uso deste tipo de funções na análise de estabilidade de sistemas é muito freqüente, principalmente por serem as mais simples dentro da classe de funções de Lyapunov. Historicamente, o pioneirismo no uso de funções de Lyapunov do tipo diagonal é atribuído a Volterra em seus estudos sobre a população de peixes no mar Adriático [Vol31].

O conceito de estabilidade diagonal de matrizes tem sido muito explorado nas generalizações e aplicações do problema de Persidskii nas últimas décadas. A versão discreta do teorema de Persidskii [Per69] foi introduzida em [KH84]. Em [KH79] novas condições de estabilidade absoluta baseadas no problema original de Persidskii são apresentadas. A conexão entre estabilidade diagonal e estabilidade de matrizes com estrutura JSS (*Jacobi sign stable*) [BS68] é explorada, fornecendo novas condições suficientes de estabilidade. Também são apresentados algoritmos que verificam a realizabilidade de sistemas com a estrutura JSS, sendo um critério algébrico alternativo para estabilidade absoluta. A classe de perturbações definidas em Persidskii [Per69] (e seu correspondente discreto [KH84]) é estendida em [KB93]. Explorando a estrutura da matriz dinâmica do sistema nominal ([Š78], [FP62], [Her92], [KBc90]) funções de Lyapunov diagonais permitem concluir sobre a estabilidade assintótica de sistemas frente a classes mais gerais de perturbações paramétricas, como não linearidades e atrasos variantes no tempo [KBc90]. Dentre as inúmeras aplicações, destacam-se ecologia matemática ([Goh76], [Goh77]), sistemas de potência, controle potência-freqüência [Pai81], filtros digitais com quantização no sinal [MM85].

O problema de estabilidade robusta de sistemas lineares a tempo discreto sujeitos a uma classe de perturbações [KB93] é investigado em [BK93]. É mostrado que a estabilidade diagonal implica na estabilidade simultânea (estabilidade quadrática [Bar85]) e, para várias classes de matrizes importantes ([Bau63], [BK91a], [HK90], [Moy77]), a recíproca também é verdadeira. Dentro da extensa literatura gerada a partir dos anos sessenta, abordando sistemas de grande porte ([Š78], [Š91]), em [KB99a] encontra-se uma visão geral da importância da estabilidade diagonal no contexto dessa classe de sistemas.

Em [Dus96], sistemas a tempo discreto com incertezas paramétricas descritos por matrizes dinâmicas na forma companheira são considerados. As incertezas são modeladas como efeitos de precisão computacional finita (truncamento, quantização, *overflow*, etc.). Novamente, lança-se mão de um função de Lyapunov diagonal no contexto particular de sistemas na forma companheira ([BCZ95], [Reg92]) para tratar problemas de análise de estabilidade diagonal e síntese de controladores robustos diagonalmente estabilizantes através de realimentação estática de saída. Em [Dus00] estas condições são estendidas através da representação das incertezas paramétricas na forma linear fracional (em inglês, *Linear Fractional Representation* — LFR), fornecendo resultados mais abrangentes. Esta nova abordagem encontra inúmeras aplicações, como por exemplo, projeto de filtros digitais robustos. Maiores detalhes sobre trabalhos que usam a estabilidade diagonal para tratar do problema de precisão finita podem ser encontrados em [KB92], [KB93], [MMR78] e [VL87]. Um trabalho que estuda soluções diagonais da inequação discreta de Lyapunov para matrizes na forma companheira pode ser encontrado em [Wim98], que também discute a complexidade da solução para o caso contínuo. Uma caracterização da estabilidade diagonal de certa classe de matrizes (tri-diagonais) em função de certas propriedades dos menores principais pode ser encontrada em [BH83]. Condições necessárias e suficientes para a estabilidade diagonal de matrizes de ordem três podem ser encontradas em [Kra91].

Um conceito relacionado à estabilidade diagonal é o de $\mathbb{D}$ -estabilidade² que, coinciden-

²O termo D-estabilidade com a letra caligráfica $\mathcal{D}$ é muito usado na literatura para denotar regiões do plano complexo. Por falta de um padrão, adotou-se a letra composta $\mathbb{D}$ para denotar $\mathbb{D}$ -estabilidade e $\mathcal{D}$ para estabilidade diagonal, no contexto deste trabalho.

temente, pode ser considerado como um caso particular do problema de Persidskii. A idéia de $\mathbb{ID}$ -estabilidade foi introduzida no final dos anos cinquenta por Arrow e McManus [AM58] e Enthoven e Arrow [EA56] no contexto de ajuste de preços em sistemas econômicos, e está intimamente relacionada a robustez de sistemas dinâmicos. Desde então muitas pesquisas têm sido desenvolvidas na tentativa de se caracterizar por completo a $\mathbb{ID}$ -estabilidade, tanto no caso contínuo como no caso discreto.

Em [Joh74b] são apresentadas treze condições suficientes para a $\mathbb{ID}$ -estabilidade no caso contínuo, com destaque para a estabilidade diagonal, que é essencialmente a condição original apresentada por Arrow e McManus [AM58]. Outras condições baseadas em propriedades estruturais específicas de certas classes de matrizes também são apresentadas. O artigo [Cro78] faz comparações entre $\mathbb{ID}$ -estabilidade e estabilidade diagonal, fornecendo condições necessárias em função dos menores principais, suficientes para certas classes de matrizes e necessárias e suficientes para matrizes de ordem dois e três. Baseado neste trabalho, [Red85] fornece soluções teóricas para matrizes de ordem quatro e sugere um procedimento computacional para matrizes de dimensão maior. Outro artigo que fornece condições suficientes para formas particulares de matrizes é [Dat78].

O conceito de valor singular estruturado (μ) foi introduzido em [Doy82] como uma ferramenta de análise e síntese de sistemas de controle lineares. Em [CFY95] são mostrados os estreitos laços existentes entre o conceito de $\mathbb{ID}$ -estabilidade de uma matriz e certas quantidades assumidas pelo valor singular estruturado. Em particular, é mostrado que verificar a $\mathbb{ID}$ -estabilidade de uma matriz real é equivalente ao cálculo do valor singular estruturado real de uma matriz complexa, o que é, uma problema *NP-Hard* [BYDM94]. As relações equivalentes para sistemas discretos são apresentada em [MB96]. Uma caracterização topológica do espaço das matrizes $\mathbb{ID}$ -estáveis e seu relacionamento com as matrizes diagonalmente estáveis pode ser encontrada em [Cai84] e [Har80]. Em [Kra91] são apresentadas relações entre o produto de Hadamard [Joh74a] e estabilidade diagonal e $\mathbb{ID}$ -estabilidade. Um apanhado geral sobre diversos tipos de estabilidade, critérios clássicos, resultados recentes, correlações entre propriedades de matrizes e principalmente relações de estabilidade diagonal e $\mathbb{ID}$ -estabilidade

com, por exemplo, inércia de matrizes, pode ser encontrado em [Her92].

No contexto desta dissertação, o trabalho de Boyd e Yang [BY89] merece destaque pela sua importante contribuição na área de estabilidade robusta de sistemas. Em particular, é mostrado como tratar o problema geral de estabilidade absoluta através da estabilidade simultânea de Lyapunov, estendendo os resultados de [HB76], [Kam83] e [PS83]. Toda a complexidade de um sistema não linear é convertida em um simples teste de estabilidade quadrática aplicado nos vértices de um politopo construído de forma conveniente. O equivalente para o caso discreto deste resultado é introduzido por Bhaya e Kaszkurewicz em [BK91b] e [BK93], apresentando pela primeira vez a idéia de $\mathbb{D}$ -estabilidade no contexto de sistemas discretos. Novas implicações entre estabilidade diagonal, estabilidade quadrática e $\mathbb{D}$ -estabilidade também são discutidas.

A partir desses últimos resultados citados, fica claro que o problema de $\mathbb{D}$ -estabilidade de matrizes genéricas possa ser formulado como um problema de estabilidade robusta de politopos de matrizes, em um primeiro momento tratado através da estabilidade quadrática.

A estabilidade quadrática [Bar85], que surgiu nos anos oitenta permitiu a solução de diversos problemas de controle robusto através de procedimentos convexos de otimização, precursores das abordagens hoje largamente utilizadas e difundidas através das LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* ou desigualdades matriciais lineares) [BEFB94]. A formulação de problemas através de LMIs permite o uso de pacotes computacionais especializados de comprovada eficiência como [GNLC95] e [Stu99].

A estabilidade quadrática pode, entretanto, levar a resultados conservadores em muitos casos. Extensões têm surgido na literatura, principalmente com o uso das chamadas funções de Lyapunov dependentes de parâmetros [MK00], [Tro99] ou lineares por partes [RJ00], mas em geral essas condições exigem algum tipo de condição de acoplamento, ou parâmetros de ajuste, ou ainda requerem esforço computacional elevado. Em [GdOH98] novas condições de estabilidade robusta baseadas em funções de Lyapunov dependente de parâmetros são apresentadas. Estas condições contêm a estabilidade quadrática como caso particular, fornecendo testes de estabilidade robusta menos conservadores. Pela primeira vez, a construção da fun-

ção de Lyapunov dependente de parâmetros usada para garantir a estabilidade robusta de um politopo de matrizes pode ser feita de maneira sistemática, a partir de um teste de factibilidade de LMIs descritas nos vértices do domínio de incertezas. Desse teste obtém-se um conjunto de matrizes de Lyapunov cuja combinação convexa constitui a função de Lyapunov dependente de parâmetros. O problema de ID-estabilidade é explorado de maneira imediata. O equivalente para o caso discreto é apresentado em [dOGH99].

Finalmente, esta dissertação apresenta novas condições de estabilidade robusta formuladas em termos de LMIs explorando as funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Essas condições estendem os resultados de [GdOH98] e [dOGH99] através das idéias de Ramos e Peres apresentadas em [RP02] (caso contínuo) e [RP01] (caso discreto), fornecendo novos testes que apresentam resultados menos conservadores, como será demonstrado através de exemplos numéricos.

1.3 Notação

A notação deste trabalho é padronizada. Matrizes são grafadas em letras latinas maiúsculas, vetores em letras latinas minúsculas e escalares em letras gregas minúsculas. Os elementos de uma matriz A são denotados (a_{ij}) . O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$. As letras n e N são usadas exclusivamente para denotar número de estados e número de vértices, respectivamente. Politopo de matrizes ou classe de funções são grafados em letras latinas maiúsculas caligráficas, ex.: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$, etc. As letras f e ϕ são utilizadas para representar funções a tempo contínuo e a tempo discreto, respectivamente, e $v(x)$ para representar funções quadráticas de Lyapunov nos casos contínuo e discreto. Os subscritos $_c$ e $_d$ são utilizados para denotar explicitamente casos contínuo e discreto, respectivamente.

A operação de transposição é indicada por meio do símbolo $(^T)$, e o símbolo $:=$ significa “por definição”. $\lambda(A)$ denota autovalores da matriz A . A notação $R > 0$ ($R < 0$) indica que a matriz R é estritamente definida positiva (negativa), isto é, todos seus autovalores são estritamente positivos (negativos). $\mathbf{I}$ ($\mathbf{0}$) denota a matriz identidade (nula) de dimensão apropriada. O subscrito $_D$ indica matriz diagonal. $|\cdot|$ indica o módulo (valor absoluto) de

$(\cdot)$; usado para matrizes indica o módulo elemento a elemento.

Capítulo 2

Preliminares e Definições

Este capítulo apresenta resultados fundamentais de análise de estabilidade de sistemas, relevantes ao assunto abordado no presente trabalho. Algumas definições bem conhecidas na literatura também são apresentadas.

2.1 Problema de Lur'e

Em seu enunciado original (segundo [Lib01]), o problema de estabilidade absoluta de sistemas automáticos de controle consiste em determinar condições para que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema

$$\dot{x} = Ax + by, \quad y = f(\sigma), \quad \sigma = c^T x, \quad f(0) = 0 \quad (2.1)$$

seja assintoticamente estável para qualquer função $f(\sigma)$ tal que

$$0 \leq f(\sigma)\sigma \leq k\sigma^2, \quad k > 0 \quad (2.2)$$

Isto é, a função $f(\sigma)$ situa-se no setor $[0, k]$. x é um vetor de dimensão n de coordenadas; A é uma matriz quadrada $n \times n$, b um vetor coluna, c^T um vetor linha, y um número real. Além disso é necessário que a função $f(\sigma)$ seja tal que a existência e unicidade da solução do sistema (2.1) estejam garantidas.

O problema de Lur'e também pode ser encontrado na literatura com enunciados ligeiramente diferentes, principalmente na definição dos setores nos quais as não linearidades estão contidas [Kha96]. Entretanto, a essência do problema descrito por Lur'e continua a mesma.

Esse problema tem atraído a atenção de inúmeros cientistas e engenheiros de diferentes países ao longo dos anos não somente pelo interesse teórico mas também pela grande importância de suas aplicações na indústria, engenharia elétrica, tecnologia, fundamentos da ciência, entre outras [Lib02]. Dentre as abordagens que tratam desse problema pode-se destacar o método de Lyapunov proposto pelo próprio Lur'e [Lur51], o critério de Popov [Pop61], o critério quadrático de Yakubovich [Yak67], a abordagem variacional introduzida por Pyatnitsky em [Pya70], dentre outras.

2.2 Problema de Persidskii

O problema de Persidskii pode ser considerado como um caso particular do problema de Lur'e, escolhendo-se conveniente A , b e c definidos anteriormente. Basicamente, a função de perturbação age internamente ao sistema, isto é, atua diretamente sobre o vetor de estado. Uma definição relevante para o problema de Persidskii é a de não linearidade diagonal, apresentada a seguir.

Definição 2.1 *Uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto F(x)$ é chamada de não linearidade diagonal se $F_i(\cdot)$, a i -ésima componente de $F(\cdot)$, é função de apenas um x_i .*

Considere a seguinte classe de funções não lineares [Per69]

$$\mathcal{S}_c = \left\{ f(\cdot) \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(\varepsilon)\varepsilon > 0; f(0) = 0; \right. \\ \left. \text{e } \int_0^x f(\tau)d\tau \rightarrow \infty \text{ à medida que } |x| \rightarrow \infty \right\} \quad (2.3)$$

Um sistema dinâmico $\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é considerado do tipo Persidskii se apresentar a seguinte forma

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j), \quad i = 1, \dots, n \quad f_j \in \mathcal{S}_c, \quad \forall j \quad (2.4)$$

As funções f_j devem ser tais que a existência e unicidade das soluções de (2.4) sejam garantidas. O sistema dinâmico também pode ser escrito na forma compacta $\dot{x} = AF(x)$, com $A = (a_{ij})$ e F uma não linearidade diagonal tal que $F \in \mathcal{S}_c^n$ ($\mathcal{S}_c^n$ denota n produtos

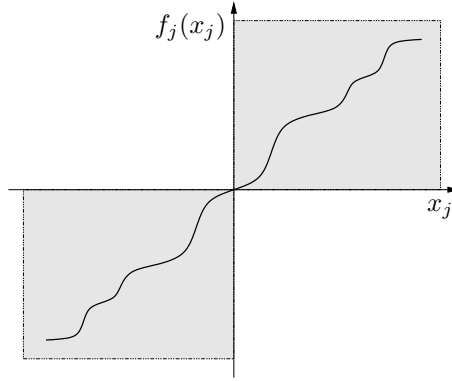


Figura 2.1: Representação gráfica da classe de funções $\mathcal{S}_c$ (setor infinito).

cartesianos de $\mathcal{S}_c$). A classe $\mathcal{S}_c$ também é conhecida na literatura como setor infinito e tem sua representação gráfica mostrada na Figura 2.1. Neste ponto é conveniente apresentar a seguinte definição, fundamental no contexto deste trabalho.

Definição 2.2 *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser Hurwitz diagonalmente estável (alternativamente, pertence à classe $\mathcal{D}_c$ ou, simplesmente, pertence a $\mathcal{D}_c$) se e somente se existir uma matriz P diagonal definida positiva tal que $A^T P + P A$ é definida negativa.*

Note que estabilidade diagonal Hurwitz também é conhecida por outros nomes na literatura: estabilidade de Volterra, Volterra-Lyapunov ou VL-estabilidade, D^+L -estabilidade ([Cro78], [CDHJ98]). Com a Definição 2.2 em mãos enuncia-se o teorema de Persidskii.

Teorema 2.1 [Per69] *O ponto de equilíbrio, $x = 0$, do sistema não linear (2.4) é globalmente assintoticamente estável para toda $f(\cdot) \in \mathcal{S}_c^n$ se A for Hurwitz diagonalmente estável, isto é, $A \in \mathcal{D}_c$.*

Prova: Define-se a seguinte função de Lyapunov (também conhecida como função de Persidskii)

$$v(x) = 2 \sum_{i=1}^n P_{ii} \int_0^{x_i} f_i(\tau) d\tau \quad (2.5)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \dot{v}(x) &= 2 \sum_{i=1}^n P_{ii} f_i(x_i) \dot{x}_i \\
 &= 2f(x)^T P_D \dot{x} \\
 &= f(x)^T (A^T P_D + P_D A) f(x) \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

■

Sistemas descritos pela equação diferencial (2.4) com $f \in \mathcal{S}_c^n$ têm um papel importante no estudo de estabilidade de sistemas não lineares [KB99b]. Algumas aplicações recentes desta classe de sistemas incluem o estudo de estabilidade de redes neurais de Hopfield [KB99b] e sistemas com elementos sujeitos à saturação [AD96]. Em alguns casos, a classe de funções $\mathcal{S}_c$ e a função de Persidskii (2.5) podem apresentar um caráter muito restritivo. Na tentativa de incorporar alguma flexibilidade a este contexto, alguns autores impõem que a matriz P seja apenas diagonalmente dominante, ao invés de diagonal, para tratar, por exemplo, não linearidades repetidas [CG99]. Certas propriedades da matriz A são exploradas em [KH79] e [KB93] na tentativa de considerar perturbações mais gerais. Uma abordagem LMI mais geral, que analisa a estabilidade de sistemas do tipo (2.4) usando funções de Lyapunov do tipo Lur'e-Persidskii, pode ser encontrada em [dOGH02]

O problema equivalente de Persidskii para sistemas discretos foi introduzido em [KH84]. Considere um sistema dinâmico descrito pela equação a diferenças

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(x_j(k)), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

no qual $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $A = (a_{ij})$ é uma matriz real $n \times n$ e $\phi(x) = (\phi_1(x_1), \dots, \phi_n(x_n))$ pertence à classe

$$\mathcal{S}_d = \{\phi(\cdot) \mid \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; |\phi(\epsilon)| \leq |\epsilon|; \phi(0) = 0\} \quad (2.7)$$

também conhecida como setor normalizado $[-1, 1]$ (Figura 2.2).

Uma notação mais compacta para representar (2.6) é

$$x(k+1) = A\phi(x(k)), \quad \phi \in \mathcal{S}_d^n \quad (2.8)$$

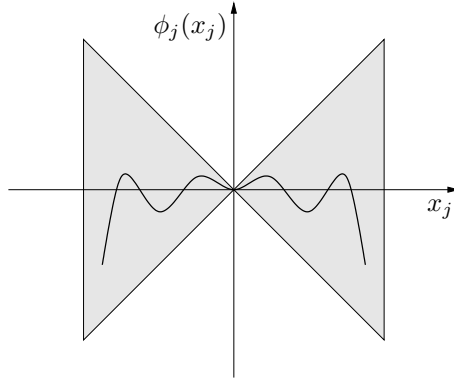


Figura 2.2: Representação gráfica da classe de funções $\mathcal{S}_d$ (setor normalizado $[-1, 1]$).

Definição 2.3 Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser Schur diagonalmente estável (alternativamente, pertence à classe $\mathcal{D}_d$ ou, simplesmente, pertence a $\mathcal{D}_d$) se e somente se existir uma matriz P diagonal definida positiva tal que $A^T P A - P$ é definida negativa.

Teorema 2.2 [KH84] O ponto de equilíbrio, $x = 0$, do sistema não linear (2.6) é globalmente assintoticamente estável para toda $\phi_j \in \mathcal{S}_d$ se A for Schur diagonalmente estável, isto é, $A \in \mathcal{D}_d$.

Prova: Como $A \in \mathcal{D}_d$, existe uma matriz P diagonal definida positiva tal que $A^T P A - P$ é definida negativa. Definindo a função de Lyapunov candidata $v(x(k)) = x(k)^T P x(k)$ tem-se

que

$$\begin{aligned}\Delta v(x(k)) &= v(x(k+1)) - v(x(k)) \\ &= x^T(k+1)Px(k+1) - x^T(k)Px(k) \\ &= \phi^T(x(k))A^T PA \phi(x(k)) - x^T(k)Px(k)\end{aligned}$$

(i) Se $\phi(x(k)) = 0$ e $x(k) \neq 0$

$$\begin{aligned}\Delta v(x(k)) &= -x^T(k)Px(k) \\ &< 0\end{aligned}$$

(ii) Se $\phi(x(k)) \neq 0$

$$\begin{aligned}&\leq \phi^T(x(k))A^T PA \phi(x(k)) - \phi^T(x(k))P\phi(x(k)) \\ &= \phi^T(x(k))(A^T PA - P)\phi(x(k)) \\ &< 0\end{aligned}$$

■

O artigo [KB93] estende esses resultados para não linearidades variantes no tempo. Também é mostrado que se $|A| \in \mathcal{D}_d$ o sistema (2.6) continua robusto frente a uma classe mais geral de perturbações, como atrasos variantes.

2.3 ID-Estabilidade

Embora o problema de ID-estabilidade tenha surgido no contexto de sistemas econômicos [AM58], o mesmo pode ser considerado como um caso particular do problema de Persidskii, isto é, somente as funções lineares contidas nas classes $\mathcal{S}_c$ e $\mathcal{S}_d$ são consideradas.

2.3.1 Hurwitz ID-Estabilidade

Para o caso contínuo, o problema de Hurwitz ID-estabilidade pode ser enunciado através da Definição 2.4.

Definição 2.4 *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser Hurwitz ID-estável (alternativamente, pertence à classe $\mathbb{ID}_c$ ou, simplesmente, pertence a $\mathbb{ID}_c$) se e somente se AD é estável (isto é,*

a parte real de todo autovalor de AD é estritamente menor do que zero) para todas matrizes diagonais D cujos elementos são todos estritamente maiores do que zero, isto é, $D > 0$.

Como apresentado em [GdOH98], o conjunto de matrizes diagonais estritamente definidas positivas pode ser descrito de maneira aproximada por um politopo $\mathcal{B}$ de matrizes a partir de uma escolha adequada das matrizes vértices desse politopo. Sem perda de generalidade, pode-se normalizar os elementos desse conjunto, considerando como vértices apenas matrizes de traço unitário, visto que $\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)$. Deste modo, o problema de ID-estabilidade pode ser convertido (de maneira aproximada) em um teste de estabilidade aplicado nos vértices de $A\mathcal{B}$. A geração dos vértices será apresentada na seção 3.3.1.

Naturalmente, a estabilidade diagonal Hurwitz é uma condição de estabilidade para o problema de ID-estabilidade Hurwitz, ainda que seja de extrema suficiência. Testes baseados na análise politópica têm apresentados resultados menos conservadores, inclusive contendo o teste de estabilidade diagonal [GdOH98].

2.3.2 Schur ID-Estabilidade

O problema de ID-estabilidade para sistemas discretos foi introduzido em [BK91b].

Definição 2.5 *Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ser Schur ID-estável (alternativamente, pertence à classe $\mathbb{ID}_d$ ou, simplesmente, pertence a $\mathbb{ID}_d$) se e somente se AD é estável (isto é, o módulo de todo autovalor de AD é estritamente menor do que a unidade) para todas matrizes diagonais D cujo elementos em módulo são todos menores ou iguais à unidade, isto é, $|D| \leq \mathbf{I}$.*

Para fins de teste de estabilidade de AD , com $|D| \leq \mathbf{I}$, pode-se definir um politopo $\mathcal{B}$ de matrizes a partir de matrizes vértices. Se o politopo definido for estável, então AD , com $|D| \leq \mathbf{I}$, também será estável. A geração dos vértices para o caso discreto será apresentada na seção 4.3.1. Apesar da elevada suficiência, a estabilidade diagonal Schur também é uma condição de estabilidade para o problema de ID-estabilidade no caso discreto. Em [BK93] é mostrado que a estabilidade diagonal Schur de uma matriz A implica na estabilidade simultânea do politopo $A\mathcal{B}$ com vértices convenientemente construídos e, conseqüentemente, na

ID-estabilidade Schur de A . Entretanto, a recíproca só é verdadeira para algumas classes de matrizes. Por exemplo, para matrizes de ordem dois as seguintes equivalências são verificadas [BK93]:

$$\text{ID-estabilidade} \Leftrightarrow \text{estabilidade diagonal} \Leftrightarrow \text{estabilidade simultânea}$$

Sendo que por “estabilidade simultânea” entende-se o teste de estabilidade realizado no politopo $A\mathcal{B}$ com uma matriz fixa de Lyapunov.

Exemplos de outras classes de matrizes que verificam essas equivalências são matrizes simétricas estáveis, matrizes triangulares estáveis, matrizes M (M -matrices [Moy77]), matrizes *checkerboard*. Para mais detalhes veja [BK93] e suas referências. Outro trabalho que apresenta condições de Schur ID-estabilidade para matrizes de pequena ordem pode ser encontrado em [FGL⁺98].

Capítulo 3

Sistemas Contínuos no Tempo

3.1 Introdução

Funções de Lyapunov têm sido amplamente utilizadas na análise do comportamento dinâmico de sistemas, principalmente em testes de estabilidade de pontos de equilíbrio [BEFB94]. No caso de um sistema linear contínuo e invariante no tempo descrito pela equação diferencial $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, o ponto de equilíbrio $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável se e somente se a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for Hurwitz (isto é, todos os autovalores de A estão no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo). Ademais, A é Hurwitz se e somente se existir uma matriz de Lyapunov simétrica e definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que a desigualdade matricial linear (LMI)

$$A^T P + P A < 0 \quad (3.1)$$

seja satisfeita. Neste caso, a matriz $P = P^T > 0$ pode ser obtida como solução da equação de Lyapunov $A^T P + P A = -Q$, na qual $Q = Q^T > 0$ é uma matriz arbitrária [Che99]. Se (3.1) for satisfeita com a restrição adicional $P = P_D$, então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema $\dot{x} = Af(x)$ com $f(x) = Bx$, com B pertencente ao conjunto das matrizes diagonais definidas positivas, é globalmente assintoticamente estável. Como $f(x) = Bx$ é uma função particular de $\mathcal{S}_c$, a restrição $P = P_D$ (estabilidade diagonal), embora possa ser facilmente implementada pelos programas computacionais atuais especializados em resolver LMIs ([Stu99], [GNLC95]), fornece resultados muito conservadores. Uma alternativa para diminuir o conservadorismo é utilizar condições de estabilidade que tratam especificamente do sistema $\dot{x} = ABx$. O termo

AB -estabilidade também pode ser utilizado.

Em [GdOH98], o problema de análise da estabilidade de matrizes do tipo $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz precisamente conhecida e B pertencente a um politopo convexo $\mathcal{B}$, foi analisado. Explorando a conexão entre positividade real e estabilidade AB , condições suficientes formuladas em termos de LMIs foram apresentadas. A principal contribuição vem do fato de que, graças a algumas variáveis extras, a estabilidade é assegurada por meio de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, que permite avaliações menos conservadoras do que a função quadrática, por exemplo. Note que este problema equivale ao problema de estabilidade robusta se $A = \mathbf{I}$ e ao problema de $\mathbb{D}$ -estabilidade de A se $\mathcal{B}$ é construído de modo a representar (de maneira aproximada) o conjunto de todas as matrizes diagonais definidas positivas.

Neste capítulo, o problema da estabilidade AB é novamente investigado. Primeiramente, será feita uma extensão de um teste de estabilidade robusta de politopos que apareceu recentemente na literatura [RP02], fornecendo condições suficientes em termos de LMIs para AB -Estabilidade. Então, condições LMIs aprimoradas para AB -Estabilidade, contendo as demais, serão apresentadas. Um simples teste de factibilidade aplicado neste conjunto de LMIs definidas nos vértices do politopo $\mathcal{B}$ fornece uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que assegura a estabilidade desejada. Essas condições podem atestar sobre a $\mathbb{D}$ -estabilidade em casos nas quais os resultados de [GdOH98] falham, como será ilustrado através de exemplos.

Finalmente, as condições LMIs apresentadas são adaptadas para permitirem a busca de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal para um politopo de matrizes, isto é, $A = \mathbf{I}$ e $B \in \mathcal{B}$, assegurando a estabilidade global do ponto de equilíbrio $x = 0$ de $\dot{x} = Bf(x)$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e $f \in \mathcal{S}_c^n$. Por falta de uma nomenclatura padrão, adotou-se o termo “estabilidade diagonal robusta” para esse problema. Os resultados serão ilustrados através de exemplos numéricos.

3.2 Preliminares

Como apresentado em [GdOH98], o seguinte conjunto de matrizes quadradas é considerado neste trabalho

$$\mathcal{A} := \left\{ AB : B \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \right\} \quad (3.2)$$

sendo que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz precisamente conhecida e $\mathcal{B}$ é um politopo convexo com vértices conhecidos $B_i, i = 1, \dots, N$. Em outras palavras, qualquer $B(\alpha) \in \mathcal{B}$ pode ser escrito como combinação convexa dos vértices B_i e o conjunto $\mathcal{B}$ pode ser definido como

$$\mathcal{B} := \left\{ B(\alpha) : B = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i ; \alpha_i \geq 0 ; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (3.3)$$

O principal objetivo deste capítulo é fornecer condições que garantem que: *i)* todas as matrizes pertencentes a $\mathcal{A}$ são Hurwitz; *ii)* todas as matrizes pertencentes a $\mathcal{A}$ admitem uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva. Note que quando $B = \mathbf{I}$, o conjunto $\mathcal{A}$ se reduz à uma simples matriz A ; quando $A = \mathbf{I}$, o problema se reduz a investigação da estabilidade de um politopo de matrizes, como considerado por exemplo em [PABB00], [RP02].

A investigação da $\mathbb{D}$ -estabilidade está relacionada com ambos os problemas *i)* and *ii)*, pois quando $\mathcal{B}$ representa o conjunto de todas as matrizes diagonais definidas positivas, foi mostrado em [GdOH98] que a estabilidade Hurwitz de $\mathcal{A}$ garante a $\mathbb{D}$ -estabilidade da matriz A . Ademais, se o conjunto $\mathcal{A}$ admite uma função de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal, então qualquer matriz pertencente ao politopo é diagonalmente estável, e portanto $\mathbb{D}$ -estável.

Os resultados apresentados em [GdOH98] exploram uma conexão interessante entre a estabilidade Hurwitz de $\mathcal{A}$ para um B fixo e a condição conhecida como positividade real estrita [SKS94], que pode ser formulada como um problema de factibilidade LMI:

Lema 3.1 *A matriz $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Hurwitz se e somente se existirem matrizes $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que a função de transferência*

$$T(s) := (G^T A + H^T s)(s\mathbf{I} - BA)^{-1} \quad (3.4)$$

seja positiva real estrita.

Prova: Veja [GdOH98]. ■

Lema 3.2 *A função de transferência (3.4) é positiva real estrita se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} GB + B^T G^T & PA - G + B^T H^T \\ A^T P - G^T + HB & -H - H^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

Prova: Veja [GdOH98]. ■

Note que o fato da matriz AB ser Hurwitz é equivalente à existência de uma matriz de Lyapunov $P = P^T > 0$ tal que

$$(AB)^T P + P(AB) < 0 \quad (3.6)$$

que por sua vez, é equivalente a condição do Lema 3.2 (veja [GdOH98] para mais detalhes).

Imagine agora que a estabilidade Hurwitz de $\mathcal{A}$ é investigada e $\mathcal{B}$ é um politopo convexo dado por (3.3). O objetivo é determinar uma função de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha) > 0$ tal que

$$(AB(\alpha))^T P(\alpha) + P(\alpha) (AB(\alpha)) < 0 \quad (3.7)$$

seja satisfeita para todo $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$. Note que a maneira mais simples para tratar a condição (3.7) é impor que a mesma $P(\alpha) = P = P^T > 0$ verifique

$$(AB_i)^T P + P(AB_i) < 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

que implica que (3.7) é satisfeita para todo $B(\alpha) \in \mathcal{B}$. Entretanto, essa maneira pode ser muito conservadora na avaliação da estabilidade Hurwitz de $\mathcal{A}$, já que a mesma P é imposta. Outra abordagem foi proposta em [GdOH98], usando os conceitos de positividade real, forçando uma função de Lyapunov dependente de parâmetros dada por

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (3.9)$$

As condições suficientes propostas em [GdOH98] são reproduzidas no próximo Lema.

Lema 3.3 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} GB_i + B_i^T G^T & P_i A - G + B_i^T H^T \\ A^T P_i - G^T + H B_i & -H - H^T \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (3.10)$$

então $P(\alpha) > 0$ dado por (3.9) é tal que (3.7) é satisfeita.

Prova: Veja [GdOH98]. ■

Com os resultados do Lema 3.3, uma função de Lyapunov dependente de parâmetros $v(x) = x^T P(\alpha)x$ com $P(\alpha)$ dado por (3.9) pode ser usada avaliar a estabilidade de $\mathcal{A}$. Note que, como discutido em [GdOH98], as condições de (3.10) contêm o caso em que $P_i = P$, $i = 1, \dots, N$ como uma solução particular. Na sequência, duas novas condições LMIs suficientes que asseguram que (3.7) seja satisfeita com $P(\alpha)$ dado por (3.9) são apresentadas. A primeira é baseada em uma condição de estabilidade robusta de politopos que surgiu recentemente na literatura, aqui adaptada para o caso específico do conjunto $\mathcal{A}$. A segunda contém ambos os resultados do Lema 3.3 e a primeira condição, fornecendo avaliações menos conservadoras.

3.3 Novas Condições para AB-Estabilidade

Considere o conjunto de matrizes $\mathcal{A}$ definido em (3.2) com o politopo $\mathcal{B}$ dado por (3.3).

Teorema 3.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que*

$$B_i^T A^T P_i + P_i A B_i < -\mathbf{I} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (3.11)$$

$$B_i^T A^T P_j + P_j A B_i + B_j^T A^T P_i + P_i A B_j < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \quad ; \quad i = 1, \dots, N-1 \quad ; \quad j = i+1, \dots, N \quad (3.12)$$

então $P(\alpha)$ dado por (3.9) assegura que (3.7) é satisfeita, implicando que $\mathcal{A}$ é Hurwitz.

Prova: Segue os mesmo passos que em [RP02]. Desenvolvendo a expressão (3.7), com $AB(\alpha) \in \mathcal{A}$, obtém-se

$$\begin{aligned} (AB(\alpha))^T P(\alpha) + P(\alpha) (AB(\alpha)) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (B_i^T A^T P_i + P_i A B_i) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j (B_i^T A^T P_j + P_j A B_i + B_j^T A^T P_i + P_i A B_j) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Impondo as condições (3.11)-(3.12) (note que $\alpha_i \alpha_j \geq 0, \forall i, j$), tem-se

$$(AB(\alpha))^T P(\alpha) + P(\alpha) (AB(\alpha)) < - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \frac{2}{N-1} \right) \mathbf{I} \leq 0 \quad (3.14)$$

pois a expressão dentro dos parênteses é sempre maior ou igual a zero. De fato,

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (N-1) \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \geq 0 \quad (3.15)$$

■

Vários pontos sobre o Teorema 3.1 merecem ser comentados. A primeira observação diz respeito ao fato de que a condição $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ não foi utilizada na demonstração. Embora se exija que os termos α_i sejam todos não negativos, não é necessário que a soma desses termos seja igual à unidade. Na verdade, basta apenas que os α_i não sejam todos nulos ou, equivalentemente, que $\sum_{i=1}^N \alpha_i = \rho, \rho > 0$. Em outras palavras, se o Teorema 3.1 afirmar a estabilidade de um politopo $\mathcal{A}$, então qualquer combinação positiva dos vértices $AB_i, i = 1, \dots, N$ também produz politopos estáveis. Pode parecer surpreendente que um teste realizado nos vértices de um politopo conclua sobre a estabilidade de combinações lineares positivas desses mesmos vértices e, portanto, além da região delimitada pelo envelope convexo dos vértices. Mas se um politopo de matrizes, representando um sistema linear incerto contínuo no tempo, é estável, isto é, $AB(\alpha)$ tem autovalores com parte real estritamente negativa para todo valor de α , então qualquer combinação positiva dos vértices desse politopo também produz matrizes estáveis. Dessa forma, $\rho AB(\alpha)$, para $\rho > 0$, também terá autovalores com parte real negativa. As condições do Teorema 3.1 reproduzem essa propriedade estrutural

de politopos estáveis. Note que a condição de estabilidade quadrática, se verificada, também garante a estabilidade de qualquer combinação positiva $\sum_{i=1}^N \alpha_i AB_i$, mas o mesmo não ocorre com a condição do Lema 3.3.

O Teorema 3.1 é uma simples extensão dos resultados apresentados em [RP02] para estabilidade robusta de politopo de matrizes. Note que se uma mesma matriz de Lyapunov $P = P^T$ existe como solução de (3.8) então (3.11) também é verificada e, neste caso, (3.12) sempre é satisfeita. O próximo teorema apresenta uma extensão do Lema 3.3.

Teorema 3.2 *O conjunto $\mathcal{A}$ é Hurwitz se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} G(\alpha)B(\alpha) + B(\alpha)^T G(\alpha)^T & P(\alpha)A - G(\alpha) + B(\alpha)^T H(\alpha)^T \\ A^T P(\alpha) - G(\alpha)^T + H(\alpha)B(\alpha) & -H(\alpha) - H(\alpha)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

Prova: Para mostrar a necessidade, note que se $\mathcal{A}$ é Hurwitz então (3.7) é satisfeita para algum $P(\alpha) > 0$. Defina

$$-Q(\alpha) := (AB(\alpha))^T P(\alpha) + P(\alpha) (AB(\alpha)) < 0 \quad (3.17)$$

e escolha $G(\alpha) = P(\alpha)A$, $H(\alpha) = H = \epsilon \mathbf{I}$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$2\epsilon \mathbf{I} > \epsilon^2 B(\alpha) Q(\alpha)^{-1} B(\alpha)^T \quad (3.18)$$

implicando que

$$H(\alpha) + H(\alpha)^T > (A^T P(\alpha) + H(\alpha)B(\alpha) - G(\alpha)^T) Q(\alpha)^{-1} (P(\alpha)A + B(\alpha)^T H(\alpha)^T - G(\alpha))$$

que, pelo complemento de Schur, fornece (3.16). Para provar a suficiência, suponha que (3.16) seja satisfeita para algum $P(\alpha) > 0$, $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$. Então, multiplicando (3.16) por

$$T := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & B(\alpha)^T \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

à esquerda e por T^T à direita obtém-se (3.7). ■

Note que o Teorema 3.2 não estabelece uma estrutura particular para a matriz de Lyapunov $P(\alpha) > 0$, nem para as matrizes extras $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$, e que o vetor α , associado a uma matriz incerta $B(\alpha) \in \mathcal{B}$ dado por (3.3), é desconhecido. No teorema seguinte, condições suficientes são apresentadas para que uma função de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha)$, dada pela combinação convexa das N matrizes vértices P_i como descrito na equação (3.9), satisfaça (3.7). Para tanto, uma estrutura similar é imposta a $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$.

Teorema 3.3 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} G_i B_i + B_i^T G_i^T & P_i A - G_i + B_i^T H_i^T \\ A^T P_i - G_i^T + H_i B_i & -H_i - H_i^T \end{bmatrix} < -\mathbf{I} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

$$\begin{bmatrix} G_i B_j + B_j^T G_i^T + G_j B_i + B_i^T G_j^T \\ A^T (P_i + P_j) - G_i^T - G_j^T + H_i B_j + H_j B_i \\ (P_i + P_j) A - G_i - G_j + B_i^T H_j^T + B_j^T H_i^T \\ -H_i - H_i^T - H_j - H_j^T \end{bmatrix} < \frac{2}{N-1} \mathbf{I} \quad (3.21)$$

$i = 1, \dots, N-1 ; j = i+1, \dots, N$

então a condição (3.16) do Teorema 3.2 é satisfeita com

$$G(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i G_i \quad ; \quad H(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i H_i \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (3.22)$$

e $P(\alpha) > 0$ dado por (3.9), implicando que (3.7) é satisfeita.

Prova: Note que o lado esquerdo da condição (3.16) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} G(\alpha) B(\alpha) + B(\alpha)^T G(\alpha)^T & P(\alpha) A - G(\alpha) + B(\alpha)^T H(\alpha)^T \\ A^T P(\alpha) - G(\alpha)^T + H(\alpha) B(\alpha) & -H(\alpha) - H(\alpha)^T \end{bmatrix} = \\ & \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \begin{bmatrix} G_i B_i + B_i^T G_i^T & P_i A - G_i + B_i^T H_i^T \\ A^T P_i - G_i^T + H_i B_i & -H_i - H_i^T \end{bmatrix} \\ & + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \begin{bmatrix} G_i B_j + B_j^T G_i^T + G_j B_i + B_i^T G_j^T \\ A^T (P_i + P_j) - G_i^T - G_j^T + H_i B_j + H_j B_i \\ (P_i + P_j) A - G_i - G_j + B_i^T H_j^T + B_j^T H_i^T \\ -H_i - H_i^T - H_j - H_j^T \end{bmatrix} \quad (3.23) \end{aligned}$$

Impondo as condições (3.20)-(3.21) tem-se que

$$\begin{bmatrix} G(\alpha)B(\alpha) + B(\alpha)^T G(\alpha)^T & P(\alpha)A - G(\alpha) + B(\alpha)^T H(\alpha)^T \\ A^T P(\alpha) - G(\alpha)^T + H(\alpha)B(\alpha) & -H(\alpha) - H(\alpha)^T \end{bmatrix} < - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \frac{2}{N-1} \right) \mathbf{I} \leq 0 \quad (3.24)$$

visto que

$$(N-1) \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (\alpha_i - \alpha_j)^2 \geq 0 \quad (3.25)$$

■

As LMIs do Teorema 3.3 fornecem condições suficientes para testar se $\mathcal{A}$ é Hurwitz, e podem ser resolvidas por métodos numéricos de complexidade polinomial, como por exemplo o método de pontos interiores [GNLC95] ou o método de cones duais [Stu99]. Essas condições são menos conservadoras que as apresentadas no Lema 3.3. De fato, a condição (3.20) contém (3.10) como um caso particular quando $G_i = G$, $H_i = H$, $i = 1, \dots, N$. Note que o lado direito da LMI pode ser arbitrariamente fixado como $-\mathbf{I}$ graças à propriedade da homogeneidade, e que, neste caso (isto é, $G_i = G$ and $H_i = H$) as LMIs (3.21) sempre são verificadas se (3.20) for satisfeita. As LMIs do Teorema 3.3 também contêm os resultados do Teorema 3.1, já que o bloco $(1, 1)$ das LMIs (3.20)-(3.21) se reduz às condições (3.11)-(3.12) fixando-se $G_i = P_i A$, $i = 1, \dots, N$.

Finalmente, como mostrado em [GdOH98], a existência de uma solução diagonal $P_D > 0$ para $A^T P + P A < 0$ (que é uma condição suficiente para a $\mathbb{D}$ -estabilidade de A) implica que as condições do Lema 3.3 também são satisfeitas. A partir da discussão acima, o Teorema 3.3 também fornece uma solução factível nesse caso.

As condições suficientes aqui apresentadas para a AB -estabilidade de um politopo de matrizes baseiam-se todas em testes de factibilidade de um conjunto de LMIs. A complexidade de problemas formulados em termos de LMIs está associada ao número K de variáveis escalares e também com o número L de linhas do sistema de inequações. O número de operações em ponto flutuante ou o tempo necessário para se resolver um problema é proporcional a $K^3 L$ [BEFB94], [GNLC95]. A tabela 3.1 mostra os valores de K e L para cada um dos testes apresentados (n é o número de estados do sistema e N o número de vértices do politopo).

Condição	K (variáveis escalares)	L (linhas)
Lema 3.3	$\frac{Nn(n+1)}{2} + 2n^2$	$3Nn$
Teorema 3.1	$\frac{Nn(n+1)}{2}$	$\frac{nN(N+3)}{2}$
Teorema 3.3	$\frac{Nn(5n+1)}{2}$	$nN(N+2)$

Tabela 3.1: Número de variáveis escalares K e de linhas L das LMIs em função do número de estados n e do número de vértices N para os testes de AB -estabilidade Lema 3.3, Teorema 3.1 e Teorema 3.3. A complexidade é proporcional a K^3L quando se utilizam métodos de pontos interiores.

A complexidade do Teorema 3.1 torna-se maior que a do Lema 3.3 a partir de $N > 12$. Pode-se observar também que a influência de N^2 no Teorema 3.1 torna-se fator preponderante para valores grandes de N ($N > 20$), independente do número de estados n . Obviamente, o Teorema 3.3 é o que apresenta a maior complexidade, pois possui mais variáveis escalares e mais linhas do que todos os demais.

3.3.1 ID-Estabilidade

O problema específico de ID-estabilidade, isto é, determinar se uma dada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é tal que AD é Hurwitz para todas as matrizes $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definidas positivas e diagonais, pode ser tratado de maneira aproximada testando-se a estabilidade Hurwitz de $\mathcal{A}$ para o caso particular de $\mathcal{B}$ construído com os vértices dados por

$$B_i = \text{diag} \left\{ \frac{\epsilon}{n-1}, \dots, \underbrace{1-\epsilon}_i, \dots, \frac{\epsilon}{n-1} \right\} > 0; \quad i = 1, \dots, N, \quad n = N \quad (3.26)$$

com $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeno. A restrição $\text{Tr}(B_i) = 1$ pode ser imposta sem perda de generalidade para fins de análise de estabilidade. Note que o conjunto de matrizes diagonais positivas é um conjunto aberto. A representação gráfica de um politopo $\mathcal{B}$ de ordem 2 com vértices dados por (3.26), é apresentada na Figura 3.1. A região hachurada $\mathcal{W}$ representa todas as matrizes diagonais geradas a partir da combinação convexa de B_1 e B_2 dados por

(3.26). A região $\mathcal{W}$ aproxima-se da região desejada (quadrante aberto) a medida que ϵ tende a zero. Numericamente, o teste de Hurwitz $\mathbb{ID}$ -Estabilidade sempre estará testando um subconjunto das matrizes diagonais definidas positivas, em função da precisão ϵ . A estabilidade do politopo $\mathcal{A}$ somente afirmará a $\mathbb{ID}$ -estabilidade de uma matriz A no limite de ϵ tendendo a zero.

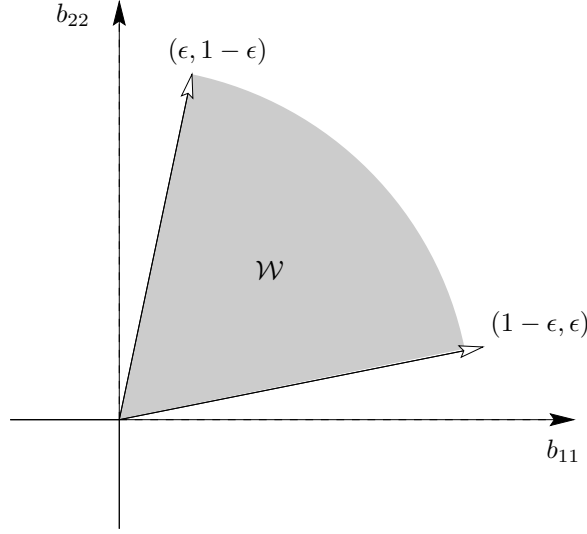


Figura 3.1: Representação gráfica de um politopo $\mathcal{B}$ de ordem 2 com os vértices dados por (3.26) e $\epsilon > 0$ arbitrário.

3.3.2 Estabilidade Robusta com Restrições Estruturais

As condições LMIs apresentadas neste capítulo podem ser facilmente estendidas para tratar restrições estruturais nas matrizes de Lyapunov usadas na avaliação da estabilidade diagonal robusta de $\mathcal{A}$. Por exemplo, com $A = \mathbf{I}$, $B \in \mathcal{B}$ e impondo que $P_i = P_{Di}$, $i = 1, \dots, N$ (matrizes diagonais) em (3.9) tem-se condições LMIs suficientes para testar se $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ admite uma função de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal através dos resultados do Lema 3.3 e Teoremas 3.1 e 3.3. A existência de uma tal matriz diagonal dependente de parâmetros $P_D(\alpha)$ assegura a estabilidade global do ponto de equilíbrio $x = 0$ para $\dot{x} = Bf(x)$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e para todo $f \in \mathcal{S}_c^n$.

3.4 Exemplos Numéricos

Apesar da existência de caracterizações algébricas para matrizes de dimensão 3×3 , alguns exemplos são apresentados aqui para ilustrar que, mesmo em casos simples as condições mais conservadoras do Lema 3.3 e do Teorema 3.1 podem não identificar a $\mathbb{ID}$ -estabilidade. A condição do Teorema 3.3, no entanto, verificou corretamente as matrizes como $\mathbb{ID}$ -estáveis. Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Ao testar a estabilidade Hurwitz do politopo incerto $\mathcal{A}$ definido por $AB(\alpha)$ com $B(\alpha)$ dado por (3.3) e os vértices $B_i, i = 1, \dots, N$ dados por (3.26) adotando-se $\epsilon = 0.001$, o Lema 3.3 não encontra uma solução factível, mas ambos os Teoremas 3.1 e 3.3 afirmam que A é $\mathbb{ID}$ -estável. A nuvem de autovalores (gerada a partir da varredura exaustiva em α) do politopo $\mathcal{A}$ é mostrada na Figura 3.2.

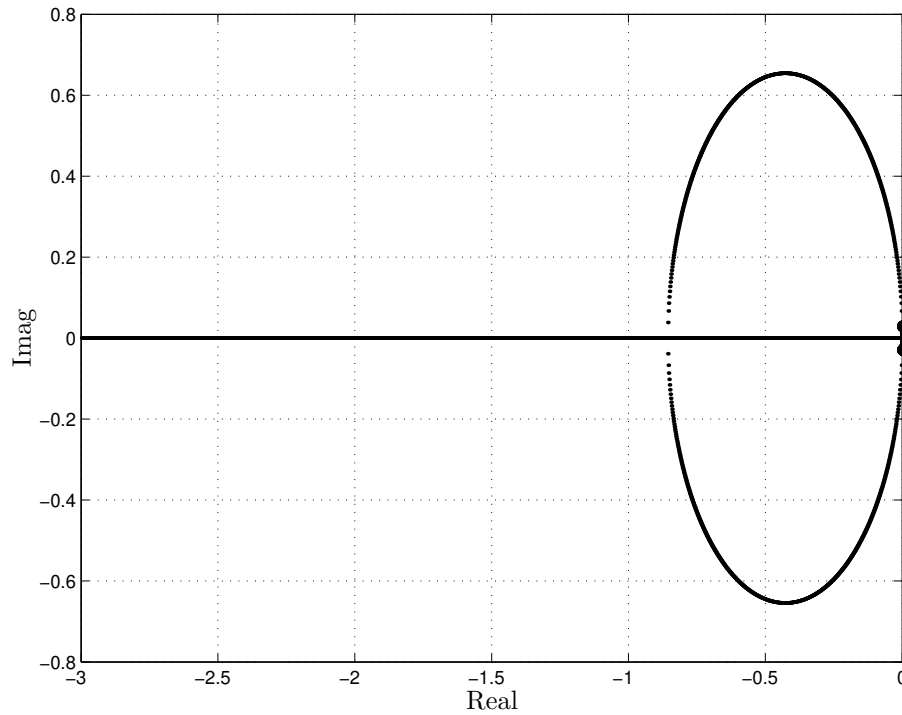


Figura 3.2: Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{A}$ definido por A em (3.27) e $B(\alpha)$ dado por (3.3) e os vértices $B_i, i = 1, \dots, N$ dados por (3.26), com $\epsilon = 0.001$.

De fato, o Teorema 3.1 e o Lema 3.3 apresentam condições independentes para AB -estabilidade. Em outras palavras, podem existir matrizes AB -Estáveis para as quais o Teorema 3.1 fornece uma solução factível e o Lema 3.3 não, e vice-versa. Entretanto, como era esperado, sempre que o Lema 3.3 ou o Teorema 3.1 identificam uma matriz $\mathbb{D}$ -estável, o Teorema 3.3 também encontra uma solução. Em muitos casos, somente o Teorema 3.3 fornece uma avaliação positiva. Por exemplo, somente o Teorema 3.3 afirma que as seguintes matrizes de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são $\mathbb{D}$ -estáveis ($\epsilon = 0.001$ foi usado em (3.26)). O mesmo ocorre para as seguintes matrizes de ordem 4 ($\epsilon = 0.001$)

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} ; \quad K = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, para ilustrar o problema de encontrar uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal para todo o politopo incerto $\mathcal{A}$, considere $A = \mathbf{I}$ e $\mathcal{B}$ definido pelos

vértices:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1.6 & -0.6 & -0.9 \\ -0.7 & -0.5 & -0.4 \\ 0.4 & 0.8 & -0.1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.0 & 0.0 \\ -0.7 & -0.1 & 0.1 \\ -0.4 & -0.2 & -0.7 \end{bmatrix};$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.8 & 0.9 \\ 0.0 & -0.4 & 0.5 \\ 0.0 & 0.1 & -1.4 \end{bmatrix}$$

Este sistema incerto não admite uma mesma matriz de Lyapunov diagonal (estabilidade quadrática). Ademais, quando a restrição diagonal $P_i = P_{Di}$ é imposta, nem o Lema 3.3 nem o Teorema 3.1 encontram uma solução factível. Somente o Teorema 3.3 encontra uma solução factível com

$$P_{D1} = \begin{bmatrix} 3.15 & 0 & 0 \\ 0 & 7.61 & 0 \\ 0 & 0 & 3.91 \end{bmatrix}; \quad P_{D2} = \begin{bmatrix} 7.38 & 0 & 0 \\ 0 & 3.91 & 0 \\ 0 & 0 & 3.59 \end{bmatrix};$$

$$P_{D3} = \begin{bmatrix} 4.06 & 0 & 0 \\ 0 & 5.08 & 0 \\ 0 & 0 & 4.87 \end{bmatrix}$$

fornecendo uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal $P_D(\alpha) > 0$ dada por

$$P_D(\alpha) = \alpha_1 P_{D1} + \alpha_2 P_{D2} + \alpha_3 P_{D3} \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$$

Os experimentos numéricos foram realizados usando o LMI CONTROL TOOLBOX e o SEDuMi ([GNLC95], [Stu99]).

Capítulo 4

Sistemas Discretos no Tempo

4.1 Introdução

Assim como no caso contínuo, a estabilidade de sistemas discretos no tempo pode ser avaliada por meio de funções de Lyapunov. A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Schur estável se todos os seus autovalores estiverem localizados dentro do disco unitário aberto centrado na origem do plano complexo. Sabe-se que o ponto de equilíbrio $x = 0$ da equação a diferenças invariante no tempo $x(k+1) = Ax(k)$ é assintoticamente estável se e somente se a matriz A for Schur estável ou, equivalentemente, se e somente se existir uma matriz de Lyapunov simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que a LMI

$$A^T P A - P < 0 \quad (4.1)$$

seja satisfeita. Nesse caso, a solução da LMI acima pode ser facilmente obtida escolhendo-se uma matriz simétrica definida positiva $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e resolvendo a equação discreta de Lyapunov $A^T P A - P = -Q$. Assim como no caso contínuo, uma avaliação positiva de (4.1), com a restrição adicional $P = P_D$, garante a estabilidade assintótica global do sistema $x(k+1) = A\phi(x(k))$ com $\phi(k) = Bx(k)$, $|B| \leq \mathbf{I}$, que é uma função particular da classe $\mathcal{S}_d$. Logo, a imposição $P = P_D$, que caracteriza a estabilidade diagonal (Definição 2.3), leva a resultados conservadores. Novamente, o conceito de AB -estabilidade é utilizado na tentativa de conseguir resultados mais abrangentes.

O problema de análise da estabilidade de matrizes $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz precisamente conhecida e B pertencente a um politopo convexo $\mathcal{B}$ foi analisado em

[dOGH99]. Note que esse problema se reduz à análise da estabilidade robusta de um politopo $\mathcal{B}$ quando $A = \mathbf{I}$ e ao problema de $\mathbb{D}$ -estabilidade de A quando o politopo $\mathcal{B}$ é construído convenientemente para representar o conjunto de todas as matrizes diagonais $|D| \leq \mathbf{I}$.

Em linhas gerais, as idéias apresentadas em [dOGH99] seguem as apresentadas na versão para o caso contínuo [GdOH98], explorando uma conexão entre positividade real e a estabilidade da matriz AB . Como principal resultado de [dOGH99], um conjunto de LMIs com algumas variáveis extras fornece condições suficientes para a existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que pode ser usada para garantir a estabilidade robusta de AB com A precisamente conhecida e B pertencendo a um politopo convexo genérico $\mathcal{B}$ com vértices conhecidos. A função de Lyapunov dependente de parâmetros obtida contém os resultados de análise avaliados com uma mesma matriz P (estabilidade quadrática).

O problema de estabilidade AB é novamente investigado neste capítulo. Primeiro, estendendo um teste de estabilidade robusta de politopos [RP01], são fornecidas condições suficientes apresentadas em termos de LMIs. Essas condições podem fornecer avaliações positivas em casos nos quais as LMIs de [dOGH99] falham, como será ilustrado através de um exemplo. Então, condições LMI aprimoradas, contendo as demais, são apresentadas. Um simples teste de factibilidade aplicado a um conjunto de LMIs definidas nos vértices do politopo $\mathcal{B}$ fornece uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que assegura a condição de estabilidade desejada. Finalmente, as condições LMI são estendidas a fim de investigar a existência de uma função de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal para um politopo de matrizes, isto é, $A = \mathbf{I}$ e $B \in \mathcal{B}$, assegurando a estabilidade global do ponto de equilíbrio $x = 0$ de $x(k+1) = B\phi(x(k))$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e para todo $\phi \in \mathcal{S}_d^n$. Os resultados são ilustrados através de exemplos numéricos.

4.2 Preliminares

Com em [dOGH99], o seguinte conjunto de matrizes quadradas é considerado neste capítulo

$$\mathcal{A} := \left\{ AB : B \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n \times n} \right\} \quad (4.2)$$

sendo que $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz precisamente conhecida e $\mathcal{B}$ é um politopo convexo com vértices conhecidos $B_i, i = 1, \dots, N$. Em outras palavras, qualquer $B(\alpha) \in \mathcal{B}$ pode ser escrito como uma combinação convexa dos vértices B_i e o conjunto $\mathcal{B}$ pode ser definido como

$$\mathcal{B} := \left\{ B(\alpha) : B = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i ; \alpha_i \geq 0 ; \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\} \quad (4.3)$$

O principal objetivo deste capítulo é fornecer condições que asseguram que: *i)* todas as matrizes pertencentes a $\mathcal{A}$ são Schur estáveis; *ii)* com $A = \mathbf{I}$ e $B \in \mathcal{B}$, todas as matrizes pertencentes a $\mathcal{A}$ admitem uma função de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal definida positiva. Note que quando $B = \mathbf{I}$, o conjunto $\mathcal{A}$ se reduz a uma simples matriz A ; quando $A = \mathbf{I}$, o problema converte-se na investigação da estabilidade de um politopo de matrizes, como considerado por exemplo em [PABB00], [RP02].

A investigação da $\mathbb{ID}$ -estabilidade está relacionada com ambos os problemas *i)* e *ii)*, visto que quando $\mathcal{B}$ é construído de maneira apropriada, foi mostrado em [BK93] que a estabilidade Schur de $\mathcal{A}$ implica na $\mathbb{ID}$ -estabilidade da matriz A . Ademais, se a matriz A é diagonalmente estável, então $\mathcal{A}$ é Schur estável [BK93]. Os resultados apresentados em [dOGH99] introduzem algumas variáveis extras na caracterização da estabilidade Schur da matriz AB , como reproduzido no Lema 4.1.

Lema 4.1 *A matriz $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é Schur estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} GB + B^T G^T - P & B^T H^T - G \\ HB - G & A^T P A - H - H^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.4)$$

Prova: Veja [dOGH99]. ■

Note que o fato da matriz AB ser Schur estável é equivalente à existência de uma matriz de Lyapunov $P > 0$ tal que

$$(AB)^T P (AB) - P < 0 \quad (4.5)$$

ou, pelo complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} -P & PAB \\ B^T A^T P & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (4.6)$$

que, por sua vez, é equivalente à condição do Lema 4.1 (veja [dOGH99] para mais detalhes).

Suponha agora que a estabilidade Schur de $\mathcal{A}$ é investigada, e $\mathcal{B}$ é um politopo convexo dado por (4.3). O objetivo é determinar uma função de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha) > 0$ que assegura que

$$(AB(\alpha))^T P(\alpha) (AB(\alpha)) - P(\alpha) < 0 \quad (4.7)$$

é satisfeita para todo $\alpha \in \mathbb{R}^N$ tal que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$. Usando o complemento de Schur, (4.7) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & P(\alpha)AB(\alpha) \\ B(\alpha)^T A^T P(\alpha) & -P(\alpha) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.8)$$

A maneira mais simples de tratar a condição (4.7) é impor que a mesma $P(\alpha) = P = P^T > 0$ deva verificar

$$(AB_i)^T P(AB_i) - P < 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (4.9)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} -P & PAB_i \\ B_i^T A^T P & -P \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (4.10)$$

implicando que (4.7) é satisfeita para todo $B(\alpha) \in \mathcal{B}$. Entretanto, isto pode ser muito conservador na avaliação da estabilidade Schur de $\mathcal{A}$ já que a mesma P é imposta. Outra abordagem foi proposta em [dOGH99], usando as variáveis extras em (4.4) para construir uma função de Lyapunov dependente de parâmetros dada por

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (4.11)$$

As condições suficientes propostas em [dOGH99] são reproduzidas no próximo Lema.

Lema 4.2 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, matrizes $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{bmatrix} GB_i + B_i^T G^T - P_i & B_i^T H^T - G \\ HB_i - G^T & A^T P_i A - H - H^T \end{bmatrix} < 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (4.12)$$

então $P(\alpha) > 0$ dada por (4.11) é tal que (4.7) é satisfeita.

Prova: Veja [dOGH99]. ■

Com os resultados do Lema 4.2, uma função de Lyapunov dependente de parâmetros dada por $v(x(k)) = x(k)^T P(\alpha)x(k)$ com $P(\alpha)$ dado por (4.11) pode ser usada para avaliar a estabilidade de $\mathcal{A}$. Na sequência, duas condições LMIs suficientes que asseguram que (4.7) é satisfeita com $P(\alpha)$ dado por (4.11) são apresentadas. A primeira é baseada em uma condição de análise de estabilidade robusta de politopos [RP01] que surgiu recentemente e aqui é adaptada para o caso do conjunto $\mathcal{A}$. A segunda contém ambos os resultados, do Lema 4.2 e a primeira condição, fornecendo avaliações menos conservadoras.

4.3 Novas Condições para AB-Estabilidade

Considere o conjunto de matrizes $\mathcal{A}$ definido em (4.2) com o politopo $\mathcal{B}$ dado por (4.3).

Teorema 4.1 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, tais que*

$$M_i := \begin{bmatrix} -P_i & P_i A B_i \\ B_i^T A^T P_i & -P_i \end{bmatrix} < -\mathbf{I} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (4.13)$$

$$M_{ij} := \begin{bmatrix} -2P_i - P_j & P_i(AB_i + AB_j) + P_j AB_i \\ (AB_i + AB_j)^T P_i + B_i^T A^T P_j & -2P_i - P_j \end{bmatrix} < \frac{1}{(N-1)^2} \mathbf{I} \quad ; \quad i = 1, \dots, N; i \neq j; j = 1, \dots, N \quad (4.14)$$

$$M_{ijk} := \begin{bmatrix} -2(P_i + P_j + P_k) & P_i A B_j + P_i A B_k + P_j A B_i + P_j A B_k + P_k A B_i + P_k A B_j \\ B_j^T A^T P_i + B_k^T A^T P_i + B_i^T A^T P_j + B_k^T A^T P_j + B_i^T A^T P_k + B_j^T A^T P_k & -2(P_i + P_j + P_k) \end{bmatrix} < \frac{6}{(N-1)^2} \mathbf{I} \quad ; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N-2 \\ j = i+1, \dots, N-1 \\ k = j+1, \dots, N \end{matrix} \quad (4.15)$$

então $P(\alpha)$ dado por (4.11) é tal que (4.7) é satisfeita, implicando na estabilidade Schur de $\mathcal{A}$.

Prova: Segue os mesmo passos que [RP01]. Note que o lado esquerdo de (4.8) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & P(\alpha) A B(\alpha) \\ B(\alpha)^T A^T P(\alpha) & -P(\alpha) \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^3 M_i + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j M_{ij} + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k M_{ijk} \quad (4.16)$$

e, se as condições (4.13)-(4.15) são satisfeitas ($\alpha_i \geq 0$), então

$$\begin{bmatrix} -P(\alpha) & P(\alpha)AB(\alpha) \\ B(\alpha)^T A^T P(\alpha) & -P(\alpha) \end{bmatrix} < - \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \right) \mathbf{I} \quad (4.17)$$

Definindo θ e σ como

$$\theta := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (N-1) \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j \geq 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma &:= \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^{N-1} \sum_{k \neq i, j, k=2}^N \alpha_i (\alpha_j - \alpha_k)^2 = \\ &= (N-2) \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j - 6 \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \geq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

tem-se que $(N-1)\theta + \sigma \geq 0$ implicando que (4.8) é satisfeita. $\blacksquare$

Observe que todos os elementos do lado esquerdo de (4.16) foram multiplicados por (4.20), com r escolhido de forma conveniente para cada elemento, de modo que o lado direito pudesse ser escrito como uma soma de três parcelas, como em [RP01]. Em particular, foi usado $r = 2$ para os termos da diagonal e $r = 1$ para os demais.

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^r = 1 \quad (4.20)$$

Note que nesse caso é necessário considerar que $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, enfatizando que a estabilidade do politopo $\rho\mathcal{A}$ no contexto de sistemas discretos pode variar frente a multiplicação de um número positivo ρ , ao contrário do caso contínuo. Também é interessante observar que outras condições suficientes de estabilidade poderiam ser geradas a partir de escolhas convenientes de r de modo que o lado direito de (4.16) possa ser escrito como a soma de um número maior

de parcelas (contendo as anteriores). O estudo dessas outras condições foge ao escopo deste trabalho, inserindo-se no contexto de perspectivas.

O Teorema 4.1 usa uma simples e direta extensão dos resultados apresentados em [RP01] para o caso discreto de estabilidade robusta de politopo de matrizes. O próximo teorema apresenta uma extensão do Lema 4.2.

Teorema 4.2 *O conjunto $\mathcal{A}$ é Schur estável se e somente se existir uma matriz simétrica definida positiva dependente de parâmetros $P(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes dependentes de parâmetros $G(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo a seguinte LMI*

$$\begin{bmatrix} G(\alpha)B(\alpha) + B(\alpha)^T G(\alpha)^T - P(\alpha) & B(\alpha)^T H(\alpha)^T - G(\alpha) \\ H(\alpha)B(\alpha) - G(\alpha)^T & A^T P(\alpha)A - H(\alpha) - H(\alpha)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.21)$$

Prova: A necessidade pode ser provada seguindo os passos apresentados em [dOGH99]. Note que se AB é Schur estável para todo $B \in \mathcal{B}$, então (4.7) é satisfeita para algum $P(\alpha) > 0$, isto é,

$$B(\alpha)^T A^T P(\alpha)AB(\alpha) - P(\alpha) := -Q(\alpha) < 0 \quad (4.22)$$

Sempre existe um $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$A^T P(\alpha)A + 2\epsilon \mathbf{I} > \epsilon^2 B(\alpha)Q(\alpha)^{-1}B(\alpha)^T \quad (4.23)$$

implicando, pelo complemento de Schur, que

$$\begin{bmatrix} Q(\alpha) & \epsilon B(\alpha)^T \\ \epsilon B(\alpha) & A^T P(\alpha)A + 2\epsilon \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.24)$$

e escolhendo $G(\alpha) = \mathbf{0}$, $H(\alpha) = A^T P(\alpha)A + \epsilon \mathbf{I}$ e $Q(\alpha)$ dado por (4.22) resulta em

$$\begin{bmatrix} B(\alpha)^T A^T P(\alpha)AB(\alpha) - P(\alpha) & B(\alpha)^T A^T P(\alpha)A - G(\alpha) - B(\alpha)^T H(\alpha) \\ A^T P(\alpha)AB(\alpha) - G(\alpha)^T - H(\alpha)^T B(\alpha) & A^T P(\alpha)A - H(\alpha) - H(\alpha)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

Pré-multiplicando (4.25) pela matriz não singular

$$V := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -B(\alpha)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

e pós-multiplicando por V^T tem-se (4.21). Para mostrar a suficiência, suponha que (4.21) é satisfeita para algum $P(\alpha) > 0$, $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$. Então, multiplica-se (4.21) por

$$U := \begin{bmatrix} \mathbf{I} & B(\alpha)^T \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

à esquerda e por U^T à direita para obter (4.7). $\blacksquare$

É importante ressaltar que o Teorema 4.2 não estabelece uma estrutura particular para a matriz de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha) > 0$ ou para as matrizes extras $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$. Condições suficientes são apresentadas no próximo teorema para que uma função de Lyapunov dependente de parâmetros $P(\alpha)$ dada pela combinação convexa das N matrizes vértices P_i , como descrito na equação (4.11), satisfaça (4.7), impondo à $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$ estruturas similares.

Teorema 4.3 *Se existirem matrizes simétricas definidas positivas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, \dots, N$, satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\overline{M}_i := \begin{bmatrix} G_i B_i + B_i^T G_i^T - P_i & B_i^T H_i^T - G_i \\ H_i B_i - G_i^T & A^T P_i A - H_i - H_i^T \end{bmatrix} < -\mathbf{I} \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_{ij} := & \begin{bmatrix} G_i B_i + B_i^T G_i^T + G_i B_j + B_j^T G_i^T + G_j B_i + B_i^T G_j^T - 2P_i - P_j \\ (H_i + H_j) B_i + H_i B_j - 2G_i^T - G_j^T \\ B_i^T (H_i^T + H_j^T) + B_j^T H_i^T - 2G_i - G_j \\ 2A^T P_i A + A^T P_j A - 2H_i - 2H_i^T - H_j - H_j^T \end{bmatrix} < \frac{1}{(N-1)^2} \mathbf{I} \\ & i = 1, \dots, N \quad ; \quad j \neq i \quad ; \quad j = 1, \dots, N \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{M}_{ijk} := & \begin{bmatrix} G_i B_j + B_j^T G_i^T + G_i B_k + B_k^T G_i^T + G_j B_i + B_i^T G_j^T + G_j B_k + B_k^T G_j^T \\ + G_k B_i + B_i^T G_k^T + G_k B_j + B_j^T G_k^T - 2(P_i + P_j + P_k) \\ H_j B_i + H_k B_i + H_i B_j + H_k B_j \\ + H_i B_k + H_j B_k - 2(G_i + G_j + G_k)^T \\ B_i^T H_j^T + B_i^T H_k^T + B_j^T H_i^T + B_j^T H_k^T \\ + B_k^T H_i^T + B_k^T H_j^T - 2(G_i + G_j + G_k) \\ 2(A^T P_i A + A^T P_j A + A^T P_k A) \\ - 2(H_i + H_i^T + H_j + H_j^T + H_k + H_k^T) \end{bmatrix} \\ & < \frac{6}{(N-1)^2} \mathbf{I} \quad ; \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, N-2 \\ j = i+1, \dots, N-1 \quad ; \quad k = j+1, \dots, N \end{matrix} \quad (4.30) \end{aligned}$$

então a condição (4.21) do Teorema 4.2 é satisfeita com

$$G(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i G_i \quad ; \quad H(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i H_i \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad (4.31)$$

e $P(\alpha) > 0$ dada por (4.11), implicando que (4.7) é satisfeita.

Prova: Segue passos similares aos da prova do Teorema 4.1. O lado esquerdo da condição (4.21) pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} G(\alpha)B(\alpha) + B(\alpha)^T G(\alpha)^T - P(\alpha) & B(\alpha)^T H(\alpha)^T - G(\alpha) \\ H(\alpha)B(\alpha) - G(\alpha)^T & A^T P(\alpha)A - H(\alpha) - H(\alpha)^T \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^3 \bar{M}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j, j=1}^N \alpha_i^2 \alpha_j \bar{M}_{ij} + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \bar{M}_{ijk} \quad (4.32)$$

Impondo as condições (4.28)-(4.30) ($\alpha_i \geq 0$) e usando (4.18)-(4.19), (4.21) é satisfeita. ■

O Teorema 4.3 fornece condições suficientes para testar se $\mathcal{A}$ é Schur estável, e o teste de factibilidade LMI pode ser resolvido por algoritmos de tempo polinomial como, por exemplo, o método de pontos interiores [GNLC95]. Essas condições são menos conservadoras do que as apresentadas no Lema 4.2. De fato, a condição (4.28) contém (4.12) como um caso particular quando $G = G_i$, $H = H_i$, $i = 1, \dots, N$. Note que o lado direito da LMI pode ser arbitrariamente escolhido como $-\mathbf{I}$ graças à propriedade da homogeneidade, e que, nesse caso (isto é, $G = G_i$ e $H = H_i$) as LMIs (4.29)-(4.30) são sempre satisfeitas se (4.28) é verificada. As LMIs do Teorema 4.3 também contêm os resultados do Teorema 4.1, já que as LMIs (4.28)-(4.30) reduzem-se a condições equivalentes a (4.13)-(4.15) fixando $G_i = G_i^T = \mathbf{0}$ e $H_i = H_i^T = A^T P_i A + \epsilon \mathbf{I}$, $i = 1, \dots, N$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno (veja a prova do Teorema 4.2).

Como uma observação final, foi provado em [dOGH99] que a existência de uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva é uma condição suficiente para que as condições do Lema 4.2 sejam sempre satisfeitas, visto que as condições do Lema 4.2 são um caso particular das condições do Teorema 4.3, uma solução factível do Teorema 4.3 também ocorre nesse caso.

A tabela 4.1 mostra os valores de K e L (a complexidade é proporcional a K^3L , [BEFB94], [GNLC95]) para cada um dos testes relativos a sistemas discretos no tempo, sendo n o número de estados do sistema e N o número de vértices do politopo.

Condição	K (variáveis escalares)	L (linhas)
Lema 4.2	$\frac{Nn(n+1)}{2} + 2n^2$	$3Nn$
Teorema 4.1	$\frac{Nn(n+1)}{2}$	$\frac{n(N^3 + 3N^2 + 8N)}{6}$
Teorema 4.3	$\frac{Nn(5n+1)}{2}$	$\frac{n(N^3 + 3N^2 + 8N)}{3}$

Tabela 4.1: Número de variáveis escalares K e de linhas L das LMIs em função do número de estados n e do número de vértices N para os testes de AB -estabilidade Lema 4.2, Teorema 4.1 e Teorema 4.3. A complexidade é proporcional a K^3L quando se utilizam métodos de pontos interiores.

Como ocorreu no caso contínuo, o Teorema 4.3 (que engloba os demais resultados) é o de maior complexidade, apresentando um número de linhas nas LMIs que cresce com N^3 e que rapidamente torna-se o fator dominante.

4.3.1 ID-Estabilidade

O problema específico de ID-estabilidade, isto é, determinar se uma dada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é tal que AD é Schur estável para todas as matrizes D diagonais tais que $|D| \leq \mathbf{I}$, pode ser abordado testando-se a Schur estabilidade de $\mathcal{A}$ para o caso particular de $\mathcal{B}$, construído com os vértices dados por

$$B_i = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n \} \quad ; \quad i = 1, \dots, 2^{n-1} \quad (4.33)$$

com $\lambda_j \in \{-1, 1\}$, $j = 1, \dots, n$ e $B_k \neq -B_\ell \quad \forall k, \ell$. Diferentemente do caso contínuo, o conjunto de matrizes diagonais tais que $|D| \leq \mathbf{I}$ é um conjunto fechado, e pode ser representado de maneira conveniente pelo politopo $\mathcal{B}$ com vértices dado por (4.33).

4.3.2 Estabilidade Robusta com Restrições Estruturais

A formulação LMI apresentada neste capítulo pode ser facilmente estendida para tratar de restrições estruturais nas matrizes de Lyapunov usadas para avaliar a estabilidade diagonal robusta de $\mathcal{A}$. Por exemplo, com $A = \mathbf{I}$, $B \in \mathcal{B}$ e impondo que $P_i = P_{Di}$, $i = 1, \dots, N$ (matrizes diagonais) em (4.11), têm-se condições LMI suficientes para determinar se $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ admite uma função de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal através dos resultados do Lema 4.2 e Teoremas 4.1 e 4.3. A existência de tal matriz de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal $P_D(\alpha) > 0$ garante a estabilidade global do ponto de equilíbrio $x = 0$ de $x(k+1) = B\phi(x(k))$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e para todo $\phi \in \mathcal{S}_d^n$.

4.4 Exemplos Numéricos

Os testes numéricos foram realizados usando o LMI CONTROL TOOLBOX [GNLC95] e o SEDUMI [Stu99]. A seguinte matriz foi gerada randomicamente

$$A = \begin{bmatrix} -0.714045003 & -0.266035990 & 0.198347552 \\ 0.331829001 & -0.860889180 & 0.478723555 \\ -0.246835970 & -0.061865207 & -0.965067265 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Essa matriz não admite uma matriz de Lyapunov diagonal definida positiva P_D . A estabilidade Schur do politopo $\mathcal{A}$ definido por $AB(\alpha)$ com $B(\alpha)$ dado por (4.33) foi avaliada usando o Lema 4.2, Teoremas 4.1 e 4.3. Somente o Teorema 4.3 forneceu uma avaliação positiva, indicando que A dada por (4.34) é ID-estável. A nuvem de autovalores do politopo $\mathcal{A}$, usando uma varredura exaustiva em α , é mostrada na Figura 4.1. Em [FGL⁺00] é mostrado que para matrizes de ordem 3 é necessário e suficiente apenas testar a estabilidade dos vértices do politopo $\mathcal{A}$; neste caso, o maior autovalor em módulo do vértice crítico vale 0.99999999955417.

Note que no teste de Schur estabilidade de $\mathcal{A}$, o Teorema 4.3 contém o Lema 4.2 e também o Teorema 4.1, mas pode ocorrer casos em o Teorema 4.1 fornece uma solução factível e o Lema 4.2 não, como por exemplo as matrizes R e S dadas por

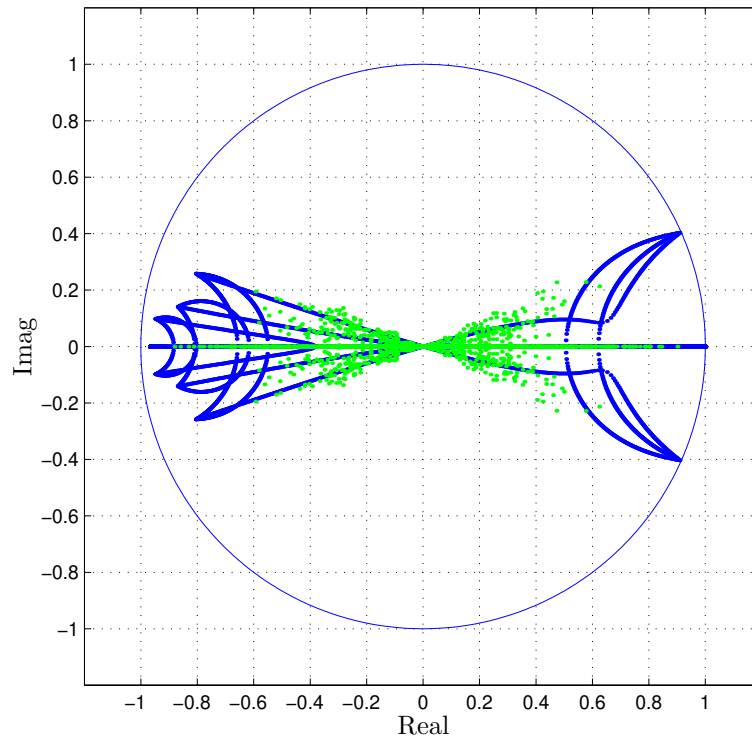


Figura 4.1: Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{A}$ definido por A dado em (4.34) e $B(\alpha)$ dado em (4.33).

$$R = \begin{bmatrix} 0.690 & -0.492 & 0.579 \\ 0.156 & -0.675 & -0.383 \\ 0.662 & -0.202 & -0.732 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.26 & -0.54 & 0.12 \\ -0.63 & 0.59 & 0.29 & -0.13 \\ 0.22 & 0.26 & -0.68 & 0.18 \\ -0.78 & 1.10 & -0.04 & -0.19 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

que foram determinadas $\mathbb{D}$ -estáveis somente pelos Teoremas 4.1 e 4.3.

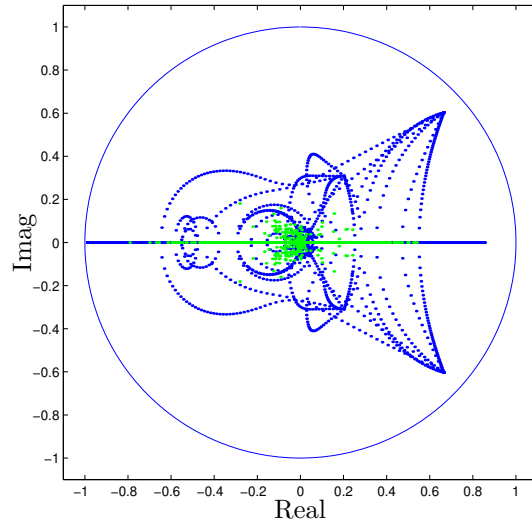


Figura 4.2: Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{A}$ definido por S dado em (4.35) e $B(\alpha)$ dado em (4.33).

O problema de encontrar uma matriz de Lyapunov diagonal para todo o politopo incerto $\mathcal{A}$, isto é, com $A = \mathbf{I}$ e $\mathcal{B}$ definido pelos vértices

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.4 & -0.2 \\ 0.4 & 0.0 & -0.3 \\ 1.5 & -1.1 & -0.1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0.0 \\ -2.0 & 0.0 & 1.9 \\ -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{bmatrix};$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.4 & 0.7 \\ 0.2 & -0.4 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

foi investigado. Este politopo não admite uma mesma matriz de Lyapunov P (estabilidade quadrática). Ademais, quando a restrição diagonal $P_i = P_{D_i}$ é imposta, nem o Lema 4.2 nem Teorema 4.1 encontram uma solução factível. Somente o Teorema 4.3 encontra uma solução factível com

$$P_{D1} = \begin{bmatrix} 132.3 & 0 & 0 \\ 0 & 77.9 & 0 \\ 0 & 0 & 15.1 \end{bmatrix}; \quad P_{D2} = \begin{bmatrix} 190.0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.5 & 0 \\ 0 & 0 & 98.8 \end{bmatrix}$$

$$P_{D3} = \begin{bmatrix} 18.5 & 0 & 0 \\ 0 & 37.3 & 0 \\ 0 & 0 & 63.3 \end{bmatrix};$$

forneendo uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros diagonal $P_D(\alpha) > 0$ dada por

$$P_D(\alpha) = \alpha_1 P_{D1} + \alpha_2 P_{D2} + \alpha_3 P_{D3} \quad ; \quad \alpha_i \geq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$$

O lugar das raízes de $\mathcal{B}$ definido pelos vértices dados em (4.36) é mostrado na Figura 4.3.

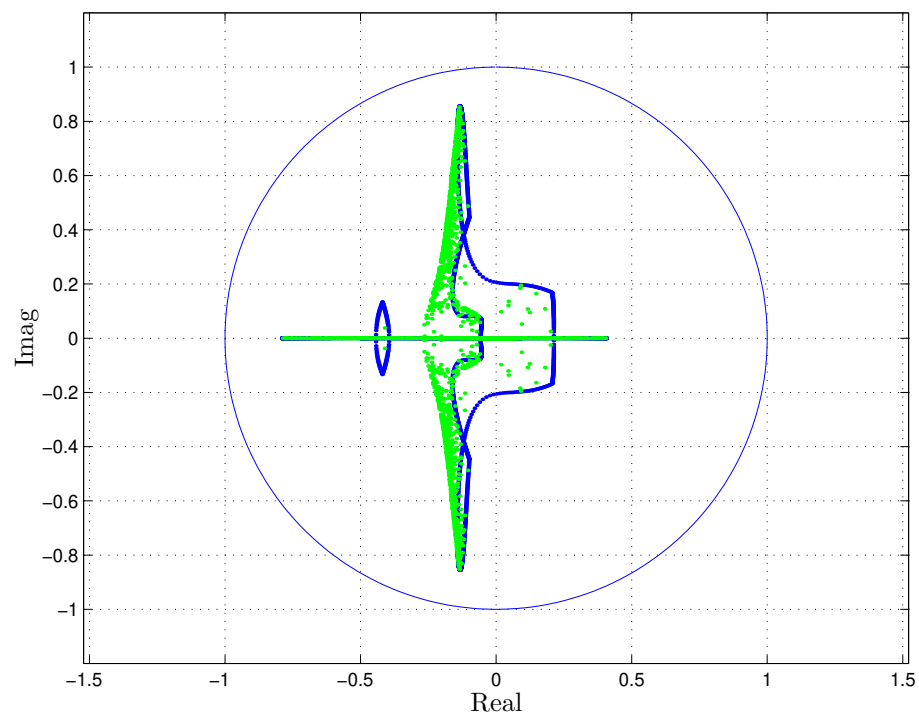


Figura 4.3: Nuvem de autovalores do politopo incerto $\mathcal{B}$ definido pelos vértices dados em (4.36).

Capítulo 5

Conclusão e Perspectivas

Novas condições de estabilidade para sistemas lineares sujeitos a incertezas estruturais foram apresentadas. A matriz dinâmica dos sistemas considerados é representada pelo produto de A por B , sendo A uma matriz precisamente conhecida e B pertencente a um politopo convexo. Os testes são formulados como problemas de factibilidade por meio de desigualdades matriciais lineares e, se verificados, fornecem uma função de Lyapunov dependente de parâmetros que garante a estabilidade em todo domínio de incerteza. Os problemas de $\mathbb{ID}$ -estabilidade e estabilidade diagonal foram abordados de maneira imediata através da escolha conveniente do modelo de incertezas e da estrutura das matrizes de Lyapunov. No caso contínuo, o Lema 3.3 e Teorema 3.1 apresentaram-se como condições de estabilidade suficientes independentes, ou seja, podem existir casos nos quais o Teorema 3.1 encontra uma solução e o Lema 3.3 não, e vice-versa. Entretanto, além do Teorema 3.3 conter essas duas condições como casos particulares, é uma condição mais geral, no sentido de encontrar avaliações positivas para casos nos quais os outros dois falham. Essas considerações também são válidas para o caso discreto.

Uma forma mais clara de sintetizar as contribuições deste trabalho pode ser visualizada através de um diagrama de Venn do conjunto das matrizes $\mathbb{ID}$ -estáveis. As figuras 5.1 (caso contínuo) e 5.2 (caso discreto) mostram os subconjuntos de matrizes $\mathbb{ID}$ -estáveis que são detectados pelos testes apresentados ao longo do trabalho. Embora o tamanho do subconjunto das matrizes $\mathbb{ID}$ -estáveis que não são detectáveis por nenhum dos métodos ($X_c \cap \overline{T}_c$ e $X_d \cap \overline{T}_d$) não represente a realidade (distância da necessidade), os experimentos numéricos realizados

permitem inferir que o subconjunto T_d está mais perto da necessidade do que T_c , isto é, em um processo de geração de matrizes estáveis aleatórias, as condições do caso discreto fornecem muito mais avaliações positivas do que as condições do caso contínuo. A equivalência entre $\mathbb{ID}$ -estabilidade e estabilidade diagonal para matrizes de ordem dois no caso discreto realça esse fato [KB99b].

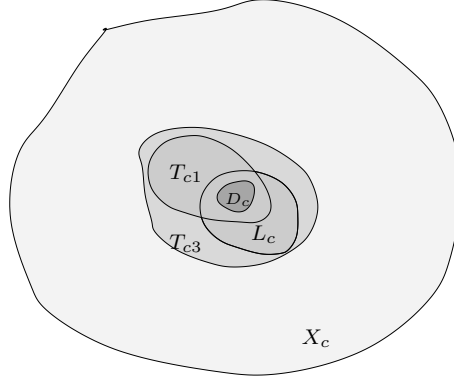


Figura 5.1: X_c = Conjunto de todas as matrizes $\mathbb{ID}_c$; D_c = Matrizes $\mathbb{ID}_c$ que são Hurwitz diagonalmente estáveis; L_c , T_{c1} e T_{c3} = Matrizes $\mathbb{ID}_c$ que são detectáveis pelos Lema 3.3, Teorema 3.1 e Teorema 3.3 respectivamente.

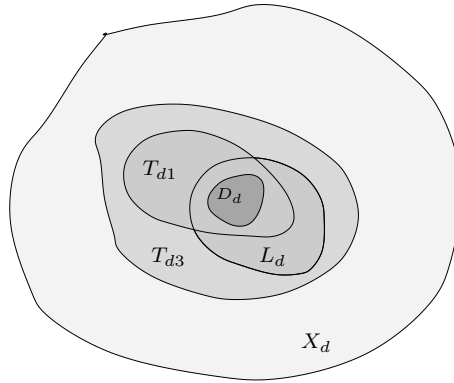


Figura 5.2: X_d = Conjunto de todas as matrizes $\mathbb{ID}_d$; D_d = Matrizes $\mathbb{ID}_d$ que são Schur diagonalmente estáveis; L_d , T_{d1} e T_{d3} = Matrizes $\mathbb{ID}_d$ que são detectáveis pelos Lema 4.2, Teorema 4.1 e Teorema 4.3 respectivamente.

Como parte dos trabalhos preliminares para esta dissertação, foram estudadas técnicas recentes de análise de estabilidade robusta para sistemas lineares incertos, com destaque para o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros nas formulações realizadas através

de LMIs [GdOH98], [dOGH99], [dOBG99], [PABB00], [RP01], [RP02].

Algumas extensões foram investigadas, resultando nos seguintes trabalhos:

- P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. A new LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10):1775–1779, October 2002. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 670–675, Las Vegas, December 2002.
- P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. LMI based robust stability conditions for linear uncertain systems: a numerical comparison. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 644–649, Las Vegas, December 2002.
- P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner, and P. L. D. Peres. Estabilidade robusta de sistemas discretos no tempo através de desigualdades matriciais lineares. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 2884–2889, Natal, RN, Setembro 2002.
- P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, and P. L. D. Peres. Uma nova condição LMI para estabilidade robusta de politopos de matrizes polinomiais. In *XIV Congresso Brasileiro de Automática*, pages 2872–2877, Natal, RN, Setembro 2002.
- P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner and P. L. D. Peres, $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions, submetido.
- P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira, V. J. S. Leite, V. F. Montagner and P. L. D. Peres, $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost computation by means of parameter dependent Lyapunov functions, submetido.
- V. J. S. Leite, P. J. de Oliveira, R. C. L. F. Oliveira and P. L. D. Peres, Improved LMI conditions for $\mathcal{D}$ -stability of polynomial matrix polytopes, submetido.

Especialmente em relação aos assuntos abordados nesta dissertação, foram produzidos os seguintes textos (submetidos à publicação):

- Ricardo C. L. F. Oliveira and Pedro L. D. Peres, Improved LMI conditions for structural and robust stability, *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, submetido.
- Ricardo C. L. F. Oliveira and Pedro L. D. Peres, Improved LMI conditions for structural and robust stability: The discrete-time case, *Linear Algebra and Its Applications*, 2002, submetido.
- Ricardo C. L. F. Oliveira and Pedro L. D. Peres, Less conservative LMI conditions for ID-stability, 42th *IEEE Conference on Decision and Control*, 2003, submetido.

5.1 Perspectivas

Dentre as possíveis investigações que têm por base este trabalho, citam-se algumas que recebem no momento maior motivação.

• Síntese de controle robusto

A partir dos resultados de estabilidade quadrática [Bar85], inúmeras extensões para procedimentos de síntese de controladores e de filtros robustos foram desenvolvidas. Entre outros, podem ser citados [BPG89], [GPB91], [PGB93], [PP00], [Ger99], [KR91], [PP99]. Veja também [BEFB94] e [GN00].

O uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros possibilitou, para sistemas discretos, alguns resultados menos conservadores [dOBG99], [dOGB02], [GdOB] para o cálculo de controladores e filtros robustos, porém não existem resultados semelhantes para sistemas contínuos.

Uma perspectiva para abordar o problema poderia ser a utilização de controladores dependentes de parâmetros (*gain-scheduling*) ou ainda o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros, porém com blocos fixos ou com alguma estrutura particular.

• Custo garantido H_2 e H_∞

A extensão das condições de análise de estabilidade robusta para introduzir critérios como as normas H_2 e H_∞ , obtendo assim o cálculo de custos garantidos para sistemas incertos que sejam menos conservadores é sem dúvida uma possibilidade bastante real de continuação deste trabalho.

- **Sistemas de grande porte ou descentralizados**

A extensão dos resultados para tratar sistemas com alguma estrutura na qual apenas uma parcela do vetor de estados está sujeita a perturbações também pode ser investigada.

- **Estrutura das matrizes $G(\alpha)$ e $H(\alpha)$**

Na caracterização de estabilidade diagonal e $\mathbb{D}$ -estabilidade a estrutura das matrizes P (matriz de Lyapunov) e A (matriz a ser testada) tem um papel relevante. Talvez o estudo da estrutura das matrizes auxiliares possa trazer alguma nova contribuição.

Bibliografia

- [AD96] F. Albertini and D. D'Alessandro. Asymptotic stability of continuous-time systems with saturation nonlinearities. *Systems & Control Letters*, 29(3):175–180, 1996.
- [AG64] M. A. Aizerman and F. R. Gantmacher. *Absolute Stability of Regulation Systems*. Holden-Day, San Francisco, 1964.
- [Aiz49] M. A. Aizerman. About one problem concerning the stability “in large” of dynamic systems. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 4:186–188, 1949.
- [Aiz66] M. A. Aizerman. *Theory of Automatic Control*. Moscow, Nauka, 1966.
- [AM58] K. J. Arrow and M. McManus. A note on dynamic stability. *Econometrica*, 26:448–454, 1958.
- [Bar85] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 46(4):399–408, August 1985.
- [Bau63] F. L. Bauer. Optimally scaled matrices. *Numerische Mathematik*, 5:73–87, 1963.
- [BCZ95] A. Betser, N. Cohen, and E. Zeheb. On solving the Lyapunov and Stein equations for a companion matrix. *Systems & Control Letters*, 25(3):211–218, June 1995.
- [BEFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1994.
- [BH83] A. Berman and D. Hershkowitz. Matrix diagonal stability and its implications. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 4(3):377–382, September 1983.
- [BK91a] A. Bhaya and E. Kaszkurewicz. Discrete-time diagonal and D-stability. Technical report, Dept. of Electrical Engineering, COPPE/UFRJ, 1991.

- [BK91b] A. Bhaya and E. Kaszkurewicz. Robust, diagonal and D-stability via QLF's: the discrete-time case. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2624–2629, Brighton, England, December 1991.
- [BK93] A. Bhaya and E. Kaszkurewicz. On discrete-time diagonal and D-stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 187:87–104, 1993.
- [BPG89] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 13(1):65–72, January 1989.
- [BS68] S. Barnett and C. Storey. Some applications of the Lyapunov matrix equation. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 4:33–42, 1968.
- [Bul42] B. V. Bulgakov. Auto oscillations of controlled systems. *Dokladi Akademii Nauk SSSR*, 37:283–287, 1942.
- [Bul46] B. V. Bulgakov. Some problems of the control theory with nonlinear characteristics. *Prikladnaya Matematika I Mekhanika*, 10:313–332, 1946.
- [BY89] S. P. Boyd and Q. Yang. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems. *International Journal of Control*, 49(6):2215–2240, 1989.
- [BYDM94] R. P. Braatz, P. Young, J. C. Doyle, and M. Morari. Computational complexity of μ calculations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1000–1002, May 1994.
- [Cai84] B. E. Cain. Inside the D-stable matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 56:237–243, 1984.
- [CDHJ98] B. Cain, L. M. DeAlba, L. Hogben, and C. R. Johnson. Multiplicative perturbations of stable and convergent operators. *Linear Algebra and Its Applications*, 268:151–169, 1998.
- [CFY95] J. Chen, M. K. H. Fan, and C. C. Yu. On D-stability and structured singular values. *Systems & Control Letters*, 24(1):19–24, 1995.
- [CG99] Y-C. Chu and K. Glover. Bounds of the induced norm and model reduction errors for systems with repeated scalar nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):471–483, 1999.

- [Che99] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3 edition, 1999.
- [Cro78] G. W. Cross. Three types of matrix stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 20:253–263, 1978.
- [Dat78] B. N. Datta. Stability and D -stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 21:135–141, 1978.
- [dOBG99] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, July 1999.
- [dOGB02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Extended $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ characterization and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 75(9):666–679, 2002.
- [dOGH99] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case. *Linear Algebra and Its Applications*, 296(1–3):27–38, June 1999.
- [dOGH02] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and L. Hsu. A new absolute stability test for systems with state-dependent perturbations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(14):1209–1226, December 2002.
- [Doy82] J. C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainty. *IEEE Proceedings*, 129(6):242–250, November 1982.
- [Dus96] S. Dussy. Robust stabilization of discrete-time parameter-dependent systems: the finite precision problem. *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, 1:3976–3981, December 1996.
- [Dus00] S. Dussy. Robust diagonal stabilization: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(1):125–128, January 2000.
- [EA56] A. C. Enthoven and K. J. Arrow. A theorem on expectations and the stability of equilibrium. *Econometrica*, 24:288–293, 1956.
- [FGL⁺98] R. Fleming, G. Grosman, T. Lenker, S. Narayan, and S.-C. Ong. On Schur D -stable matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 279:39–50, 1998.

- [FGL⁺00] R. Fleming, G. Grosman, T. Lenker, S. Narayan, and S.-C. Ong. Classes of Schur D -stable matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 306:15–24, 2000.
- [FP62] M. Fiedler and V. Pták. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 12:382–400, 1962.
- [GdOB] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and J. Bernussou. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 41(3):700–711.
- [GdOH98] J. C. Geromel, M. C. de Oliveira, and L. Hsu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 285(1–3):69–80, December 1998.
- [Ger99] J. C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1):168–175, 1999.
- [GN00] L. El Ghaoui and S. I. Niculescu, editors. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Advances in Design and Control. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox for use with Matlab*. User’s Guide, The Math Works Inc., 1995.
- [Goh76] B. S. Goh. Nonvulnerability of ecosystems in unpredictable environments. *Theoretical Population Biology*, 10:83–95, 1976.
- [Goh77] B. S. Goh. Global stability in many-species systems. *American Naturalist*, 111:135–143, 1977.
- [GPB91] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(2):381–402, March 1991.
- [Har80] D. J. Hartfiel. Concerning the interior of the D -stable matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 30:201–207, 1980.
- [HB76] H. P. Horisberger and P. R. Belanger. Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21:705–708, 1976.

- [Her92] D. Hershkowitz. Recent directions in matrix stability. *Linear Algebra and Its Applications*, 171:161–186, 1992.
- [HK90] A. Hermeto and E. Kaszkurewicz. Equivalence of D-stability and diagonal stability for 2×2 matrices. Technical Report RT/1/90/hk, COPPE/UFRJ, 1990.
- [JKdD77] C. Jeffries, V. Klee, and P. Van den Driessche. When is a matrix sign-stable? *Canadian Journal of Mathematics*, 29(2):315–326, 1977.
- [Joh74a] C. R. Johnson. Hadamard products of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 1:295–307, 1974.
- [Joh74b] C. R. Johnson. Sufficient conditions for D-stability. *Journal of Economic Theory*, 9:53–62, 1974.
- [Kam83] V. A. Kamenetskii. Absolute stability and absolute instability of control systems with several nonlinear nonstationary elements. *Automation and Remote Control*, 12:1543–1552, 1983.
- [KB92] E. Kaszkurewicz and A. Bhaya. Comments on “overflow oscillations in state-space digital filters”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, 39:675–676, September 1992.
- [KB93] E. Kaszkurewicz and A. Bhaya. Robust stability and diagonal Liapunov functions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 14:508–520, 1993.
- [KB99a] E. Kaszkurewicz and A. Bhaya. Diagonal stability in the large-scale systems approach. *Nonlinear Analysis*, 35:143–152, 1999.
- [KB99b] E. Kaszkurewicz and A. Bhaya. *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*. Birkhäuser, Boston, MA, 1999.
- [KBc90] E. Kaszkurewicz, A. Bhaya, and D. D. Šiljak. On the convergence of parallel asynchronous block-iterative computations. *Linear Algebra and Its Applications*, 131:139–160, 1990.
- [KH79] E. Kaszkurewicz and L. Hsu. Stability of nonlinear systems: a structural approach. *Automatica*, 15:609–614, 1979.
- [KH84] E. Kaszkurewicz and L. Hsu. A note on the absolute stability of nonlinear discrete time systems. *International Journal of Control*, 40:867–869, 1984.

- [Kha96] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [KR91] P. P. Khargonekar and M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7):824–837, July 1991.
- [Kra91] J. F. B. M. Kraaijevanger. A characterization of Lyapunov diagonal stability using Hadamard products. *Linear Algebra and Its Applications*, 151:245–254, 1991.
- [Lib01] M. R. Liberzon. Lur’e problem of absolute stability – a historical essay. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium “Nonlinear Control Systems NOLCOS’01”*, volume 1, pages 22–25, Saint-Petersburg, Russia, 2001.
- [Lib02] M. R. Liberzon. Absolute stability of dynamical systems (survey). In *15th IFAC Triennial World Congress*, volume 1, pages 2928–2933, Barcelona, Spain, 2002.
- [LP44] A. I. Lur’e and V. M. Postnikov. On the theory of stability of controlled systems. *Prikladnaya Matematika I Mekhanika*, 8:283–286, 1944.
- [Lur51] A. I. Lur’e. *Certain Nonlinear Problems in the Automatic Regulating Theory*. Gostehizdat (in Russian, English Translation: London, HMSO, 1975), 1951.
- [MB96] F. C. Mota and A. Bhaya. On D-stable and D-semistable matrices and structured singular value. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1284–1286, Kobe, Japan, December 1996.
- [MK00] T. Mori and H. Kokame. A parameter-dependent Lyapunov function for a polytope of matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8):1516–1519, August 2000.
- [MM85] A. N. Michel and R. K. Miller. Stability analysis of discrete-time interconnected systems via computer generated Lyapunov functions with applications to digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 32:737–753, 1985.
- [MMR78] W. Mills, C. Mullis, and R. Roberts. Digital filter realizations without overflow oscillations. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 26(4):334–338, August 1978.
- [Moy77] P. J. Moylan. Matrices with positive principal minors. *Linear Algebra and Its Applications*, 17:53–58, 1977.

- [PABB00] D. Peaucelle, D. Arzelier, O. Bachelier, and J. Bernussou. A new robust $\mathcal{D}$ -stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 40(1):21–30, May 2000.
- [Pai81] M. A. Pai. *Power System Stability*. Elsevier North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1981.
- [Per69] S. K. Persidskii. Problem of absolute stability. *Automation and Remote Control*, 12:1889–1895, 1969.
- [PGB93] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains. *Automatica*, 29(2):491–493, March 1993.
- [Pop61] V.-M. Popov. On the absolute stability of nonlinear controlled systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 8:961–970, 1961.
- [PP99] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust $\mathcal{H}_\infty$ filtering design with pole constraints for discrete-time systems: an LMI approach. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, volume 1, pages 4418–4422, San Diego, CA, June 1999.
- [PP00] R. M. Palhares and P. L. D. Peres. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance — an LMI approach. *Automatica*, 36(6):851–858, June 2000.
- [PS83] E. S. Pyatnitskii and V. I. Skorodinskii. Numerical method of construction of Lyapunov functions and absolute stability criteria in the form of numerical procedures. *Automation and Remote Control*, 11:1427–1437, 1983.
- [Pya70] E. S. Pyatnitsky. Absolute stability of non-stationary nonlinear systems. *Avtomatika i telemekhanika*, 1:5–15, 1970.
- [QR65] J. Quirk and R. Ruppert. Qualitative economics and the stability of equilibrium. *Review of Economic Studies*, 32:311–326, 1965.
- [Red85] R. Redheffer. Volterra multipliers - I. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 6(4):612–623, 1985.
- [Reg92] P. Regalia. On finite Lyapunov functions for companion matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(10):1640–1644, October 1992.

- [RJ00] A. Rantzer and M. Johansson. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4):629–637, April 2000.
- [RP01] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems. *Systems & Control Letters*, 43(5):371–378, August 2001.
- [RP02] D. C. W. Ramos and P. L. D. Peres. An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4):675–678, April 2002.
- [SKS94] W. Sun, P. P. Khargonekar, and D. Shim. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:2034–2046, 1994.
- [Stu99] J. F. Sturm. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11–12:625–653, 1999. URL: <http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>.
- [Tro99] A. Trofino. Parameter dependent Lyapunov functions for a class of uncertain linear systems: an LMI approach. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 2341–2346, Phoenix, AZ, December 1999.
- [VL87] P. Vaidyanathan and V. Liu. An improved sufficient condition for absence of limit cycles in digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34(3):319–332, March 1987.
- [Vol31] V. Volterra. *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [Š78] D. D. Šiljak. *Large Scale Dynamic Systems: Stability and Structure*. Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [Š91] D. D. Šiljak. *Decentralized Control of Complex Systems*. Academic Press, San Diego, 1991.
- [Wim98] H. K. Wimmer. Diagonal matrix solutions of a discrete-time Lyapunov inequality. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(3):442–445, 1998.

-
- [Yak67] V. A. Yakubovich. Frequency conditions of absolute stability of the control systems with some non-linear and linear non-stationary blocks. *Avtomatika i telemekhanika*, 6:5–30, 1967.