

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MICROONDA E ÓPTICA

Simulação por Elementos Finitos da Propagação de Sólitons Ópticos

Tese submetida à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Microonda e Óptica, como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de

Mestre em Engenharia Elétrica

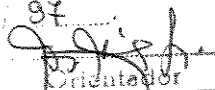
Autor

Cosme Eustaquio Rubio Mercedes

Orientador

Prof. Dr. Hugo Enrique Hernández Figueroa

Campinas, 18 de dezembro de 1997

Este exemplar corresponde a redação final da tese	
defendida por	Cosme Eustaquio Rubio
Mercedes	aprovada pela Comissão
Julgada em	18 / 12 / 97
	
	Orientador

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	TUNICAMP
	R825S
V.	II
TOMBO PC/	34442
PROC.	395/98
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	14/07/98
N.º CPD	

CM-00112904-8

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R825s Rubio Mercedes, Cosme Eustaquio
Simulação por elementos finitos da propagação de
sólitons ópticos. / Cosme Eustaquio Rubio Mercedes.--
Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Hugo Enrique Hernández Figueroa
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação.

1. Sólitons. 2. Luz - Espalhamento. 3. Análise
numérica. 4. Diferenças finitas. 5. Método dos elementos
finitos. 6. Fourier, Transformações de. I. Hernández
Figueroa, Hugo Enrique. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Elétrica e de
Computação. III. Título.

Abstract

In this thesis, the propagation of optical solitons in single-mode nonlinear waveguides are studied and simulated. For either, the temporal or the spatial generalized Nonlinear Schrödinger Equation, several numerical experiments was carried out to study some nonlinear and dispersive effects that originate from the optical solitons propagation. For that, different numerical schemes, such as the Fourier, Finite Elements, Finite Differences, and Fourier Series Methods, written in FORTRAN language, were employed.

The Transparent Boundary Condition to Optical Solitons using the Finite Element Methods was implemented for the first time. Several results that justify that method, for example, the optimization of computational window, are presented. Also, the relevant aspects of the methods used during the simulation, with particular emphasis on the modifications introduced by the Transparent Boundary Conditions, are compared.

Sumário

Nesta tese estudamos e simulamos a propagação de Sólitons Ópticos em guias de onda Não-Lineares monomodo, principalmente fibras ópticas. A partir da equação Não-Linear de Schrödinger Generalizada, no regime temporal ou espacial, diversas simulações numéricas foram realizadas para estudar alguns efeitos não lineares e dispersivos que surgem na propagação de sólitons ópticos. Para isso, foram utilizados diferentes esquemas numéricos baseados nos Métodos de Fourier, Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Série de Fourier, todos escritos na linguagem de programação FORTRAN. Implementamos as Condições de Fronteiras Transparentes para Sólitons Ópticos, utilizando o Método de Elementos Finitos. Até onde podemos pesquisar estes resultados são novos na literatura. Diversos resultados que justificam a necessidade da sua implementação são apresentados; em particular, a otimização do tamanho da janela computacional torna-se imperativo. No decorrer do trabalho, fazemos também algumas comparações dos aspectos relevantes dos métodos utilizados, dando particular ênfase às suas modificações quando da implementação das Condições de Fronteiras Transparentes.

Agradecimentos

Primeiro agradeço a Deus pela sua infinita bondade comigo.

Agradeço ao Professor Doutor Hugo Enrique Hernández Figueroa, pela dedicação, paciência, orientação, e pelo material fornecido durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha mãe Olinda e ao meu pai Felix, pelo apoio constante durante os meus estudos; a eles dedico esta tese.

Aos meus irmãos: Obidio, German, Wilmer, Arnildo, Odar, Carlos, e Elder. Pois eles sempre foram um grande estímulo de superação e apoio, tanto espiritual como material, nas horas difíceis.

Finalmente, agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior- CAPES, pelo apoio financeiro.

Conteúdo

1	Introdução	6
1.1	Considerações Iniciais	6
1.2	Sumário da Tese	7
2	Sólitons Ópticos	8
2.1	Introdução	8
2.2	Equação Não-Linear de Schrödinger Generalizada	9
2.2.1	Equações de Maxwell	9
2.2.2	Equação de Propagação em Fibras Ópticas Monomodo	11
2.2.3	Equação Não-Linear de Schrödinger	12
2.3	Regimes de Propagação	13
2.3.1	Regimes de Propagação	13
2.3.2	Dispersão de Velocidade de Grupo	14
2.3.3	Auto-modulação de Fase	20
2.4	Surgimento dos Sólitons Ópticos	23
3	Técnicas Numéricas para Resolver a Equação Não-Linear de Schrödinger	27
3.1	Introdução	27
3.2	Discretização por Elementos Finitos.	28
3.3	Esquema de Propagação de Operador Particionado	30
3.4	Esquema de Propagação de Operador Completo	33
3.5	Implementação Numérica	34
3.6	Método das Séries de Fourier.	37
4	Condições de Fronteira Transparentes Para a Propagação de Sólitons	40
4.1	Introdução	40
4.2	Fundamentação Matemática	41
4.3	Resultados Numéricos	42

5	Intrapulso por Espalhamento Estimulado Raman	50
5.1	Introdução	50
5.2	Efeito Intrapulso por Espalhamento Estimulado Raman	50
6	Conclusões e Perspectivas Futuras	57
6.1	Conclusões	57
6.2	Proposta para Trabalhos Futuros	59
A	Derivação da Equação Não-Linear de Schrödinger com Termos Não-Lineares e Dispersivos de Alta Ordem	60
B	Espalhamento Estimulado Raman	66
B.1	Descrição Matemática	66
B.2	Formulação do Fenômeno para Pulsos Ultra-Curtos	69
C	Lista de Abreviaturas	72
D	Lista de Notações	74

Lista de Figuras

2-1	Variação do índice de refração n e do índice de refração de grupo n_g com o comprimento de onda, para sílica fundida.	16
2-2	Variação do parâmetro de dispersão D com o comprimento de onda, para sílica fundida.	17
2-3	Alargamento induzido pela dispersão para um pulso gaussiano, após propagar-se por uma distância $z=2L_D$ e $z=4L_D$	19
2-4	Variação temporal do desvio da fase ϕ_{NL} induzido pela SPM para o caso de um pulso gaussiano incidente.	22
2-5	Variação temporal do gorjeio de frequência $\delta\omega T_0$ induzido pela SPM para o caso de um pulso gaussiano incidente.	23
2-6	Evolução de sóliton fundamental ($N=1$), em uma distância de $\xi = 100$	25
2-7	Evolução do sóliton de terceira ordem ($N=3$).	26
2-8	Evolução do sóliton fundamental ($N = 1$) na presença de perdas ($\Gamma = 0,03$).	26
3-1	Resultados da propagação de, (a) um sóliton fundamental e, (b) um sóliton de segunda ordem após percorrer uma distância equivalente a um período de sóliton ($\xi = \frac{\pi}{2}$). Desprezan-se as perdas e a dispersão de terceira ordem.	39
4-1	Sóliton fundamental propagando-se com velocidade unitária, e com condições de fronteira de Neumann homogêneas.	43
4-2	Sóliton fundamental propagando-se com velocidade unitária, e condições de fronteira transparentes.	43
4-3	Formação do sóliton fundamental a partir de um pulso quadrado, com condições de fronteira de Neumann homogêneas.	44
4-4	Formação de sóliton fundamental, a partir de um pulso quadrado, utilizando TBC.	44
4-5	Formação de um sóliton fundamental a partir de um pulso incidente da forma $U(0, \tau) = (1 + 0,6 \cos(7\tau)) \operatorname{sech}(\tau)$, com condições de fronteira de Neumann homogêneas.	45
4-6	Formação de um sóliton fundamental a partir de um pulso incidente da forma $U(0, \tau) = (1 + 0,6 \cos(7\tau)) \operatorname{sech}(\tau)$, com TBC.	46
4-7	Geometria de guia de onda planar não-linear.	46

4-8	Emissão solitônica para pulsos incidente gaussiano, considerando fronteiras de Neuman homogêneas.	47
4-9	Emissão solitônica para pulso incidente gaussiano, considerando TBC.	47
5-1	Evolução do sóliton de ordem 10, até $\xi = 0,1$ ($\simeq 1,8m$); observa-se o estreitamento e a partição associada com os sólitons de alta ordem. Aqui o ISRS é desprezado, considerando $\tau_R = 0$	53
5-2	Efeito do ISRS, com $\delta = s = 0$, e $\tau_R = 0,01$. Este valor de τ_R corresponde ao pulso de entrada de largura de 1 picosegundo.	54
5-3	Evolução do sóliton de ordem 10, com efeito ISRS ($\tau_R = 0,01$); distância de propagação $\xi = 0,12$ ($\simeq 2,16m$) e condições de fronteira periódicas impostas no SO-FM.	55
5-4	Evolução do sóliton de ordem 10, com efeito ISRS ($\tau_R = 0,01$), comprimento de propagação $\xi = 0,12$ ($\simeq 2,16m$), (a) condições de fronteira de Neumann homogêneas e (b) com TBC.	56

Lista de Tabelas

3.1	Resultados obtidos utilizando o método de FSA e SO-FM.	38
4.1	Resultados obtidos utilizando FO-FEM, SOT-FEM, e SOC-FEM. Todos os métodos foram implementados com fronteiras de Neumann homogeneas e TBC para propagação de sóliotns ópticos. Somente foram utilizados elementos quadráticos.	48
5.1	Resultados obtidos utilizando SO-FM, SOT-FEM, e FO-FEM, para a propagação do sóliton de ordem 10 com ISRS. Para o caso de FEM utilizou-se elementos quadráticos. Observe-se os resultados comparativos quando da implementação com condições de fronteira periódicas impostas pela FFT no método de SO-FM, condições de fronteiras de Neumann homogêneas e TBC.	56

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

O acelerado crescimento da óptica não-linear a partir de 1980 [1], estimulado pelo descobrimento de novos materiais, tem demandado um volume extraordinário de pesquisas tanto teóricas como experimentais. A utilização e desenvolvimento de ferramentas computacionais, têm sido, sem dúvida, de fundamental importância no desenvolvimento desta tecnologia.

Logo após a invenção do laser, recebeu-se considerável atenção o desenvolvimento de guias de onda que, além de transportar eficientemente a luz do laser, seja também capaz de processar os sinais luminosos associados. Guias de onda cilíndricos feitos de silício, de comprimentos quilométricos, chamados de fibras ópticas, e semi-condutores de guias, de onda de comprimentos micrométricos ou milimétricos, foram introduzidos como componentes nessa emergente área chamada de optoeletrônica [2]. Optoeletrônica significa que o processamento óptico é feito com a ajuda de sinais elétricos. Esta combinação faz com que a velocidade de processamento desses sistemas seja necessariamente limitada pela velocidade da corrente elétrica, a qual é substancialmente mais lenta do que a velocidade da luz [3].

Com o aumento das taxas de transmissão, armazenamento e processamento de informação, os sistemas ópticos se transformam em uma alternativa aos problemas existentes. Com isso, a necessidade de se ter sistemas com capacidades ainda maiores, onde o processamento seja totalmente óptico, tem motivado o desenvolvimento da óptica não-linear, que virá desempenhar um papel fundamental nas comunicações futuras [4]. Dentro desse quadro, os sólitons ópticos possuem algumas características que os credenciam como uma das opções mais promissoras nas comunicações a longas distâncias e altas taxas [3]. Portanto, o estudo dos sólitons se torna fundamental e é de grande interesse no cenário atual das comunicações.

Na óptica não-linear, como em muita outras áreas, é necessário o desenvolvimento e utilização de Métodos Numéricos eficientes para resolver o modelo que descreve o fenômeno de interesse. Na verdade, isto por um lado é de caráter fundamental quando a solução analítica do modelo não existe,

ou mesmo que ela exista, mas a tarefa de calculá-la, mesmo aproximadamente, possa ser complicada. Por outro lado, a realização de técnicas experimentais é, às vezes, muito cara e essa é outra razão para o desenvolvimento das simulações numéricas.

Esta tese trata de alguns aspectos de simulação numérica da propagação de sólitons ópticos em guias de onda (especialmente fibra óptica) do ponto de vista do eletromagnetismo clássico. Dito de outra forma, nos propomos visualizar computacionalmente os campos eletromagnéticos oscilando numa região do espectro descritos pela equação Não-Linear de Schrödinger Generalizada (GNLS).

1.2 Sumário da Tese

No Capítulo 2, apresentamos a formulação teórica e a análise do surgimento e propagação de sólitons. Na seção 2.1 faremos uma introdução dos aspectos históricos da descoberta dos sólitons. Na seção 2.2 descrevemos a equação Não-Linear Generalizada de Schrödinger (GNLS). A definição dos regimes de propagação, os efeitos da Dispersão de Velocidade de Grupo e da auto-modulação de fase são apresentados na seção 2.3. Na seção 2.4 mostrá-se como esses dois últimos efeitos interagem para o surgimento e a propagação dos sólitons. Também nesta seção apresentamos algumas características das soluções da equação NLS.

No Capítulo 3, apresentamos uma introdução ao Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method* -FEM), baseado no esquema de Galerkin, que é utilizado como ferramenta numérica para a discretização da seção transversal do modelo utilizado. Neste capítulo, estamos concentrados em resolver numericamente a equação GNLS utilizando os Métodos de Propagação de Operador Completo (*Full Operator Method*-FOM), Operador Particionado (*Split-Operator Method*-SOM), e o Método da Série de Fourier (*Fourier-Series Approach*-FSA).

No Capítulo 4, apresentamos a implementação das Condições de Fronteira Transparentes (*Transparent Boundary Condition*-TBC). Este capítulo começa com um breve estudo do algoritmo associado às TBC utilizando o FEM, e logo após, a aplicabilidade dessas condições são ilustradas com diversos exemplos.

No Capítulo 5, estudamos o efeito não-linear do Intrapulso por Espalhamento Estimulado Raman (*Intrapulse Stimulated Raman Scattering*-ISRS). Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões e discutimos as perspectivas de continuação do trabalho aqui apresentado.

Capítulo 2

Sólitons Ópticos

2.1 Introdução

O conceito de onda solitária foi introduzido na hidrodinâmica há mais de um século, pela observação de J. Scott-Russell [5] feita no ano 1834 no canal de Edinburgh-Glasgow, na Escócia. Russell observou que, em um canal estreito, quando um bote parava rapidamente, o bote gerava uma onda solitária, suavemente arredondeada e bem definida, que continuava seu percurso ao longo do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua velocidade.

No tempo da primeira observação dos sólítos, a equação que descreve a propagação de ondas em águas rasas ainda não tinha sido desenvolvida. Com o desenvolvimento da equação de Korteweg e de Vries (KdV) em 1895 [5], encontrou-se uma formulação analítica simples para o estudo de ondas solitárias na água. Uma das formas da equação KdV é dada por [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \left(1 + \frac{3}{2} \frac{u}{h} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2.1)$$

Onde u é a amplitude da onda com relação à superfície da água sem perturbação, e h é profundidade da camada de água; c é a velocidade da onda de água quando a perturbação é pequena ($\frac{u}{h} \ll 1$) e o comprimento de onda grande ($\frac{u}{h}$ e a derivada espacial de terceira ordem são desprezadas). Em geral, a velocidade depende da amplitude da onda relativa à profundidade da água. A derivada espacial de segunda ordem expressa a dispersão e, portanto, leva em conta a dependência da velocidade da onda de água com o comprimento de onda. Note que na Eq. (2.1) somente aparece a primeira derivada temporal, a equação não-linear parcial KdV tem sido simplificada para ondas que viajem apenas numa direção [3], [6] e [7]. As ondas solitárias do tipo KdV (soluções da Eq. KdV), que colidem entre si e recuperam sua forma original após a colisão são chamadas de sólítos.

Aproximadamente 80 anos depois da formulação feita por Korteweg, Hasegawa e Tapper sugeriram, em 1973 [8] a existência de sólítos em fibras ópticas (material dielétrico), afirmando que os sólítos se manifestam através da combinação do efeito Kerr e da Dispersão de Velocidade de Grupo (*Group*

Velocity Dispersion-GVD) negativa. O efeito Kerr muda o índice óptico devido à intensidade do campo elétrico. Já a GVD negativa é a propriedade dos meios nos quais as frequências mais altas propagam-se mais rápido do que as baixas frequências. A proposta teórica feita por Hasegawa, foi observada experimentalmente por Mollenauer (1980) [9], desenvolvendo uma fonte de laser em regime de fibras de dispersão negativa com comprimento de onda maiores de $1,3 \mu m$. Durante a década de 80, os sólitons se transformaram de uma simples curiosidade matemática para um necessário ente de comunicações ópticas: Com o desenvolvimento dos amplificadores ópticos dopados com Érbio, vislumbram-se diversas aplicações práticas dos sólitons, em particular na transmissão transoceânica [3].

Zakharov e Shabat mostraram (1971) [10], [11] que a equação NLS,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + i |u|^2 u \quad (2.2)$$

que descreve a propagação de luz em fibra ópticas, pode ser resolvida pelo *Método do Espalhamento Inverso* (MEI), do mesmo modo que a equação KdV, possui soluções características do tipo sólitons. Na Eq. (2.2), $u(z, \tau)$ representa a envoltória do campo elétrico que se propaga numa fibra óptica monomodo, z representa a distância ao longo da direção de propagação, e τ é o tempo local da envolvente. O primeiro termo da equação (2.2) representa a evolução da envoltória ao longo do eixo z , o segundo termo leva em conta a GVD e o terceiro termo representa a não-linearidade Kerr [9].

2.2 Equação Não-Linear de Schrödinger Generalizada

2.2.1 Equações de Maxwell

A equação GNLS, é deduzida a partir das equações de Maxwell; portanto, escreveremos aqui essas equações fundamentais, as quais exprimem o chamado eletromagnetismo clássico (não quântico):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (Lei de Faraday)} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + J \text{ (Lei de Ampère)} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \text{ (Lei de Gauss)} \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

onde ρ e J são as densidades de carga e corrente, respectivamente. Nesta tese, consideramos ausência de carga e fluxo de corrente: $\rho = 0$ e $J = 0$. As densidade de fluxo $\vec{D}$ e $\vec{B}$ surgem em resposta aos

campos Elétrico $\vec{E}$ e Magnético $\vec{H}$ propagando-se dentro do meio relacionado. As relações entre $\vec{D}$ e $\vec{B}$ e os campos são:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (2.8)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo ($\simeq 8,85 \times 10^{-12}$ farads/metro, F/m), μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo ($= 4\pi \times 10^{-7}$ henrys/metro, H/m), e $\vec{P}$ e $\vec{M}$ são as polarizações induzidas Elétrica e Magnética, repectivamente. Nesta tese consideramos $\vec{M} = 0$ (materiais dielétricos são não magnéticos).

Quando uma onda eletromagnética passa através de um material dielétrico, o vidro por exemplo, existe uma interação do campo elétrico com o meio. A polarização elétrica descreve a forma como se processa esta interação, e assim traz embutidos todas as propriedades elétricas do material. Para uma descrição matemática compreensível da resposta dos dipolos elétricos na matéria condensada, a susceptibilidade deve ser representada na forma tensorial de forma pode-se levar em conta o efeito combinado de todas as forças locais dos campos. Uma vez que a susceptibilidades seja caracterizada por completo, a polarização resultante a um campo elétrico aplicado pode ser expressa por [1]

$$\vec{P} = \epsilon_0 \left[\chi^{(0)} \cdot \vec{E} + \chi^{(1)} : \vec{E} \vec{E} + \chi^{(2)} : \vec{E} \vec{E} \vec{E} + \dots \right] \quad (2.9)$$

onde $\chi^{(j)} (j = 0, 1, \dots)$ são as susceptibilidades de ordem $j+1$. A susceptibilidade linear $\chi^{(0)}$ representa a contribuição dominante a $\vec{P}$. Seus efeitos são incluídos através do índice de refração n e o coeficiente de perdas α , a serem descritos posteriormente. A susceptibilidade de segunda ordem $\chi^{(1)}$ é responsável pelos efeitos de geração de harmônicos de segunda ordem e soma de frequências; ela é diferente de zero somente em meios sem inversão simétrica de moléculas. Nas fibras de sílica, $\chi^{(1)}$ é zero. Finalmente, os efeitos não-lineares em fibras ópticas se originam a partir da susceptibilidade de terceira ordem $\chi^{(2)}$, a qual é responsável pelos fenômenos de geração de harmônicos de terceira ordem, mistura de quatro ondas, e refração não-linear [1].

Em geral, a polarização pode ser escrita como a soma de uma parte linear mais uma parte não-linear,

$$\vec{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL}, \quad (2.10)$$

sendo a linear, $\vec{P}_L$, devida à susceptibilidade de primeira ordem $\chi^{(0)}$ enquanto que a polarização não-linear, $\vec{P}_{NL}$, é devida à susceptibilidade elétrica de terceira ordem $\chi^{(2)}$ [1]. A relação entre $\vec{P}$ e $\vec{E}$, longe das frequências de ressonância do meio, portanto sem absorção de luz, é dada por [1]

$$\vec{P}_L = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(0)}(t-t') \vec{E}(r, t') dt' \quad (2.11)$$

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \vec{E}(r, t_1) \vec{E}(r, t_2) \vec{E}(r, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \quad (2.12)$$

As Eq. (2.11) e (2.12) são relações de convolução entre a polarização e o campo, essas relações são para situações em que a resposta não-linear da matéria é atrasada em relação ao campo aplicado, dessa forma, a relação passa a ser descrita por uma convolução entre o campo e a função susceptibilidade elétrica.

2.2.2 Equação de Propagação em Fibras Ópticas Monomodo

Como estamos interessados principalmente na propagação de sólitons em fibras ópticas monomodo, descreveremos a equação de propagação que utilizaremos nos seguinte capítulos.

Definindo o campo elétrico $\vec{E}(r, t)$ como

$$\vec{E}(r, t) = \hat{x} \frac{1}{2} \{ \Psi(x, y) A(z, t) \exp[i(\beta_0 z - w_0 t)] + cc. \}$$

onde $A(z, t)$ é a amplitude de variação lenta em z , $\Psi(x, y)$ função modal que descreve a distribuição do campo na seção transversal da fibra, w_0 frequência portadora, β_0 constante de propagação de referência, cc. especifica a conjugada complexa e $\hat{x}$ é o vetor unitário de polarização da luz suposta linear no eixo x . Com isso, utilizando a Eq. (A.9) do Apêndice A, constante de propagação β (parte real do número de onda), e incluindo o parâmetro que representa as perdas α (parte imaginária do número de onda), a equação de propagação (A.27) do Apêndice A, para a amplitude de variação lenta A pode ser escrita como [1], [12]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - a_1 \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) - a_2 A \frac{\partial}{\partial t} |A|^2 \quad (2.13)$$

onde $\beta_i = \frac{\partial^i \beta}{\partial w_0^i}$ ($i=1,2,3$), β_1 é o inverso da velocidade de grupo definido aqui por $\beta_1 = v_g^{-1}$, β_2 é o parâmetro de GVD, β_3 descreve os efeitos de dispersão de maior ordem e só é relevante para pulsos extremamente curtos, γ é coeficiente não-linear definido por

$$\gamma = \frac{n_2 w_0}{c A_{eff}}, \quad (2.14)$$

onde n_2 é o coeficiente do índice não-linear expresso em unidade de m^2/W (geralmente em fibras de sílica $n_2 = 3 \times 10^{-20} m^2/W$) e A_{eff} é a área efetiva do núcleo da fibra, dado por [1]

$$A_{eff} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx dy \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^4 dx dy}. \quad (2.15)$$

Aqui, o termo proporcional a a_1 resulta da inclusão da primeira derivada da parte de variação lenta do segundo termo do lado direito da Eq. (A.2) e provoca a fenômeno denominado de auto-deflexão do pulso. Ele pode ser escrito aproximadamente por [1]:

$$a_1 = \gamma/w_0 \quad (2.16)$$

O último termo, proporcional a a_2 , representa o retardo na resposta não-linear e provoca o auto-desvio em frequência (efeito Raman) [13], [14]. Em geral, a_2 é uma quantidade complexa com parte real muito pequena que pode ser ignorada. A sua parte imaginária pode ser relacionada com o ganho Raman [14], veja Eq. (B.28).

$$a_2 = i\gamma T_R \quad (2.17)$$

onde T_R é função da inclinação do ganho Raman, sendo a sua variação, como a frequência linear na vizinhança de w_0 .

2.2.3 Equação Não-Linear de Schrödinger

A Eq.(2.13) pode ser simplificada considerando o tempo no esquema referencial da velocidade grupo v_g ,

$$T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z \quad (2.18)$$

com isso, utilizando as Eqs. (2.13)-(2.17), obtém-se

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} + \frac{\alpha}{2}A = i\gamma \left[|A|^2 A + \frac{i}{w_0} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - T_R A \frac{\partial}{\partial T} |A|^2 \right] \quad (2.19)$$

Aqui, a amplitude A foi normalizada de tal forma que $|A|^2$ represente a potência óptica; assim, a quantidade $\gamma |A|^2$ está em unidades de m^{-1} [1]. A Eq. (2.19) descreve a propagação de pulsos curtos da ordem de femtosegundos. Para pulso de duração relativamente largos, acima de 100fs, e sem perdas, a Eq. (2.19) reduz-se a

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + i\gamma |A|^2 A \quad (2.20)$$

a qual é comumente chamada de Equação Não-Linear de Schrödinger (NLS) para a amplitude A . Por analogia, a Eq. (2.19) será chamada de equação de Não-Linear Schrödinger Generalizada (GNLS).

Vale ressaltar que na obtenção de (2.19), a inclusão da resposta não-linear retardada foi feita de forma apenas aproximada, existindo aproximações mais rigorosas, para expressar a resposta não-linear retardada, que serão descritas no Apêndice B, [15].

2.3 Regimes de Propagação

2.3.1 Regimes de Propagação

Incluindo as perdas na Eq. (2.20), obtemos:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \alpha A + \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A \quad (2.21)$$

Aqui, os três termos no lado direito da Eq. (2.21) representam os efeitos de absorção, dispersão, e não-linearidade dos pulsos de propagação dentro da fibra. Dependendo da largura T_0 e da potência de pico P_0 do pulso incidente, os efeitos dispersivos ou os não-lineares podem dominar a evolução do pulso ao longo da fibra.

Para estudar os regimes de propagação, introduzimos duas escalas de comprimento: o comprimento de dispersão L_D e o comprimento não-linear L_{NL} .

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}, \quad L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}. \quad (2.22)$$

Introduzindo também o tempo τ normalizado pela largura do pulso inicial T_0 ,

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \frac{t - z/v_g}{T_0} \quad (2.23)$$

e amplitude de variação lenta normalizada $U(z, \tau)$, dada por

$$A(z, \tau) = \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z/2) U(z, \tau), \quad (2.24)$$

podemos escrever (2.21), como:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\exp(-\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (2.25)$$

onde $\text{sgn}(\beta_2) = \pm 1$ dependendo da dispersão apresentada pela fibra, normal ou anômala, respectivamente. Dependendo de L_D , L_{NL} , e o comprimento da fibra L , a conduta de propagação pode ser classificada nas seguintes regimens:

Quando o comprimento de propagação $L \ll L_{NL}$ e $L \ll L_D$, nenhum dos efeitos, lineares ou não-lineares, apresentam importância significativa durante a propagação do pulso, pois os termos do lado direito da Eq. (2.25) podem ser desprezados. Como resultado, obtém-se $U(z, \tau) = U(0, \tau)$, i.e., o pulso mantém a sua forma durante a propagação, e a fibra comporta-se como um mero transportador

do pulso óptico (apenas reduzindo a energia produzida pelas perdas). Este regime de propagação é de muita utilidade nos sistemas de comunicações; assim por exemplo, para $L \approx 50$ km, L_D e L_{NL} devem ser maiores que 500 km para transmissão livre de distorção. Os parâmetros T_0 e P_0 podem ser estimados à partir da Eq. (2.22) para dar valores adequados dos parâmetros de fibra β_2 e γ .

Quando o comprimento da fibra $L \ll L_{NL}$ e $L \simeq L_D$, somente o ultimo termo do lado direito da Eq. (2.25) pode ser desprezado comparado aos outros termos. Aqui, a evolução do pulso é determinada pela GVD, e o efeito não-linear é insignificante. O regime dispersivo somente é aplicável quando tem-se

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \ll 1 \quad (2.26)$$

De outro modo, quando o comprimento de fibra $L \simeq L_{NL}$ e $L \ll L_D$, o termo da dispersão na Eq. (2.25) é desprezível comparado com os outros termos. Nesse caso, a evolução na fibra é descrita pelo fenômeno de *Auto-modulação de Fase* (“Self-Phase Modulation”-SPM) que mostra o alargamento espectral do pulso. O regime não-linear é aplicável sempre que seja satisfeita a relação:

$$\frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \gg 1 \quad (2.27)$$

Quando o comprimento da fibra L é comparável com os comprimentos L_D e L_{NL} , a dispersão e a não-linearidade atuam juntos sobre o pulso. A interação dos efeitos GVD e SPM leva a uma conduta qualitativamente diferente comparada com alguns dos regimes de GVD ou SPM. Mas esse ponto será discutido posteriormente.

2.3.2 Dispersão de Velocidade de Grupo

Em geral todo tipo de meios contém propriedades de dispersão. A dispersão é causada pela dependência das características elétricas e magnéticas do meio com a frequência. Dito de outra forma, a propriedade dos meios em que diferentes componentes de frequência que compõem um pulso viajem com diferentes velocidades distorcendo o mesmo é chamada de Dispersão de Velocidade de Grupo.

Em comunicações a altas taxas de bits e longas distâncias geralmente utilizam-se fibras monomodo. Nas fibras monomodo, de cada excitação do pulso resulta uma excitação do espectro de frequências; em geral, cada componente de frequência contém diferentes velocidades de grupo, e essa dispersão é comumente chamada de dispersão intramodal. A dispersão é resultante das contribuições da dispersão material e a dispersão do guia [4]. As fibras multimodo contém modos de diferente fase e diferentes velocidades de grupo que podem causar expansão da envoltória de cada modo de pulso excitado, assim, as fibras multimodo não podem suportar correntes de altas taxas de bits a longas distâncias. A dispersão em fibras multimodo é chamada de dispersão intermodal [4].

Considerando fibra monomodo de comprimento L , uma componente espectral de frequência w deve chegar na saída da fibra depois de um retardo no tempo $T = \frac{L}{v_g}$, onde a velocidade de grupo é dada

agora por $v_g^{-1} = \frac{\partial \beta}{\partial w}$. Utilizado $\beta = n \frac{w}{c}$, onde n é o índice de refração efetivo, podemos expressar v_g como $v_g = c/n_g$, onde o índice de grupo n_g é dado por

$$n_g = n + w \frac{\partial n}{\partial w} \quad (2.28)$$

A dependência da velocidade de grupo v_g em frequência leva ao alargamento do pulso, pois diferentes componentes espectrais dispersam-se durante a propagação sendo dessintonizadas na saída da fibra. Se Δw é a largura espectral do pulso, o alargamento do pulso é determinado por

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial w} \Delta w = L \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Delta w = L \frac{\partial^2 \beta}{\partial w^2} \Delta w = L \beta_2 \Delta w \quad (2.29)$$

onde $\beta_2 = \partial^2 \beta / \partial w^2$ é o parâmetro de GVD que determina como o pulso deve ser alargado dentro da fibra.

A largura espectral Δw é determinada à partir da faixa de comprimentos de onda $\Delta \lambda$ emitidos por uma fonte óptica. Utilizando $w \lambda = 2\pi c$ e $\Delta w = (-2\pi c / \lambda^2) \Delta \lambda$, a Eq. (2.29) pode ser escrita como $\Delta T = D L \Delta \lambda$, onde o *parâmetro de dispersão* D é dado por:

$$D = - \left(2\pi c / \lambda^2 \right) \beta_2 \quad (2.30)$$

expresso em unidades de $ps / (km.nm)$.

A dependência com o comprimento de onda do parâmetro D é determinada a partir da dependência com a frequência do índice efetivo. Utilizando (2.28); a Eq. (2.30) pode ser escrita como

$$D = - \frac{2\pi c}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{v_g} \right) = - \frac{2\pi}{\lambda^2} \left(2 \frac{\partial n}{\partial w} + w \frac{\partial^2 n}{\partial w^2} \right) \quad (2.31)$$

Dispersão de material ocorre quando o índice de refração para sílica muda com a frequência óptica w . No nível fundamental, a origem da dispersão de material está relacionada às características das frequências de ressonância nas quais o material absorve a radiação eletromagnética através dos elétrons presos. Distantes das frequências de ressonância do meio, o índice de refração de sílica é dado pela equação de Sellmeier [1], [4].

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j w_j}{w_j^2 - w^2} \quad (2.32)$$

onde w_j são as frequências de ressonância e B_j são os pesos correspondentes a cada frequência oscilatória, e são determinadas experimentalmente a partir da quantidade de dopagem em cada fibra. Em fibra de sílica fundida, para $m = 3$, esses parâmetros são dados por: $B_1 = 0,6961663$, $B_2 = 0,4079426$, $B_3 = 0,8974794$, $\lambda_1 = 0,0684043 \mu m$, $\lambda_2 = 0,1162414 \mu m$, $\lambda_3 = 9,896161 \mu m$. onde $\lambda_j = 2\pi c / w_j$ [4]. Na Fig. 2-1 mostramos os índices efetivo e de grupo na faixa de 0,5 - 1,6 μm , em função do comprimento

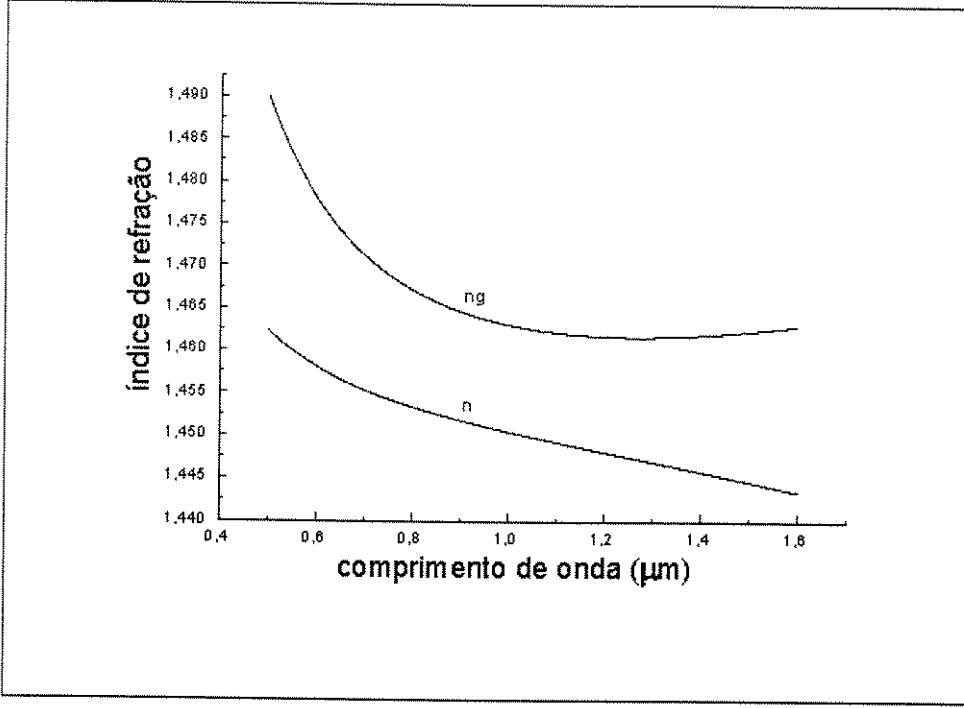


Fig. 2-1: Variação do índice de refração n e do índice de refração de grupo n_g com o comprimento de onda, para sílica fundida.

de onda; similarmente, na Fig. 2-2 mostra-se a variação da dispersão D com o comprimento de onda para fibras de sílica, a partir das Eqs. (2.28) e (2.31), respectivamente.

Note na Fig. 2-2, que D é zero aproximadamente no comprimento $\lambda_D = 1,27\mu m$ e que torna-se positivo para comprimentos de onda maiores. Essas curvas são relativas à sílica fundida, diferindo das curvas de uma fibra real devido à dopagem do núcleo e ao efeito de dispersão de guia de onda [4], que deslocam λ_D para próximo de $1,31\mu m$ em fibras típicas.

Um fato interessante da dispersão em um guia de onda é que a sua contribuição à D dependem dos parâmetros de projeto da fibra, tal como o raio do núcleo da fibra e do perfil do índice de refração, possibilitando, com isso, atuar-se na característica da dispersão da fibra, e deslocando o comprimento de onda λ_D para $1,55\mu m$ onde as perdas da fibra são mínimas. Para $D < 0$ a fibra exhibe dispersão normal, onde as componentes de frequência mais baixas viajam em uma velocidade maior do que as componentes de frequências mais elevadas; para $D > 0$, a fibra apresenta dispersão anômala, onde as componentes de menor frequência se propagam mais lentamente do que as frequências maiores [1], [4], [16].

Considerando os efeitos de GVD na propagação do pulso em um meio dispersivo linear ($\gamma = 0$ na Eq. (2.21)), a equação resultante para a amplitude $U(z, T)$ pode ser obtido a partir de (2.25), como

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (2.33)$$

Esta equação é similar à equação de onda paraxial que descreve a difração de luz em guias de onda

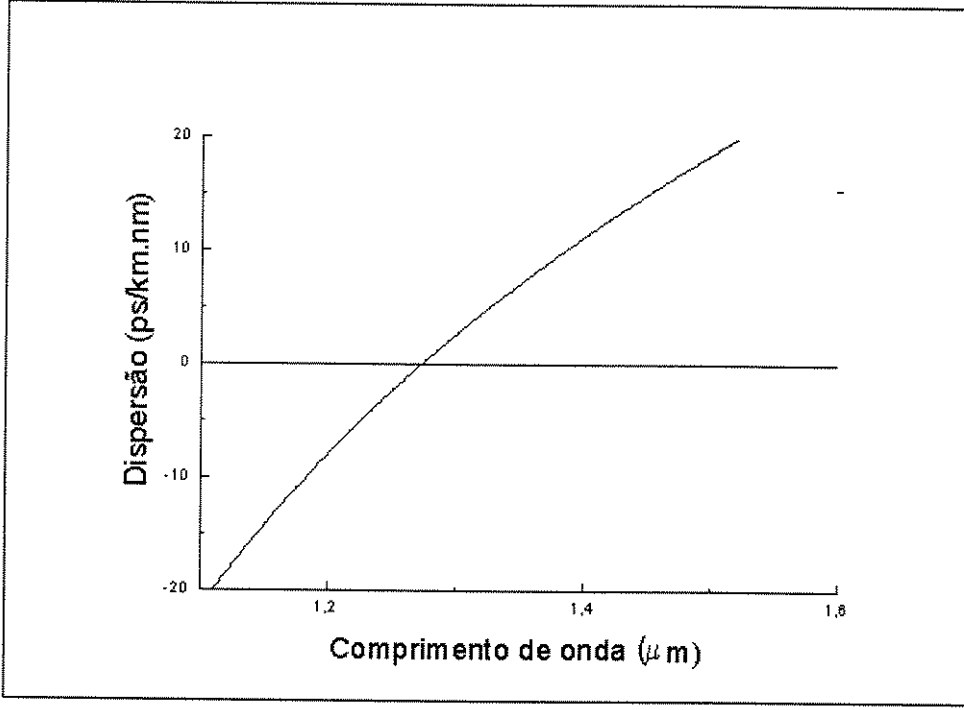


Fig. 2-2: Variação do parâmetro de dispersão D com o comprimento de onda, para sílica fundida.

planares, onde a difração ocorre apenas na direção transversal e β_2 é substituído por $\lambda/(2\pi)$. Por esta razão, os efeitos temporais induzidos pela dispersão tem analogia com os efeitos espaciais induzidos pela difração. Se $\tilde{U}(z, w)$ é a transformada de Fourier de $U(z, T)$, então ela satisfaz a seguinte equação diferencial ordinária

$$i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 w^2 \tilde{U} \quad (2.34)$$

onde a solução é dada por

$$\tilde{U}(z, w) = \tilde{U}(0, w) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 w^2 z\right) \quad (2.35)$$

A Eq. (2.35) mostra que a GVD muda a fase de cada componente espectral do pulso por uma quantidade que depende da frequência e pela distância de propagação. Tal mudança de fase não afeta o espectro do pulso, mas podendo modificar a forma do pulso. A solução geral da Eq. (2.33) é obtida mediante a Transformada Inversa de Fourier

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(0, w) \exp\left(\frac{i}{2} \beta_2 w^2 z - iwT\right) dw \quad (2.36)$$

onde $\tilde{U}(0, w)$ é transformada de Fourier do campo incidente

$$\tilde{U}(0, w) = \int_{-\infty}^{\infty} U(0, T) \exp(iwT) dT \quad (2.37)$$

Como exemplo, consideremos um pulso Gaussiano com o campo incidente

$$U(0, T) = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \right] \quad (2.38)$$

onde T_0 é a meia largura no ponto de intensidade $1/e$. Na prática, sempre utiliza-se a largura na metade de sua altura máxima (FWHM) T_{FWHM} em lugar de T_0 . Para pulsos gaussianos, esses parâmetros são relacionados por

$$T_{FWHM} = 2(\ln 2)^{1/2} T_0 \simeq 1,665 T_0 \quad (2.39)$$

enquanto para o pulso incidente de secante hiperbólica, dado posteriormente pela Eq. (2.64), essa relação torna-se

$$T_{FWHM} = 2(1 + \ln \sqrt{2}) T_0 \simeq 1,76 T_0 \quad (2.40)$$

Utilizando as Eqs. (2.36)-(2.38), e integrando, a amplitude ao longo da fibra é dado por

$$U(z, T) = \frac{T_0}{(T_0^2 - i\beta_2 z)^{1/2}} \exp \left(-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)} \right) \quad (2.41)$$

Note que, o pulso gaussiano mantém a sua forma na propagação mas sua largura T_1 resulta ser

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[1 + (z/L_D)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.42)$$

As Eqs. (2.38), (2.41) mostram mesmo que os pulso incidente não tenha qualquer tipo de modulação de fase inicial (*chirp*), o pulso transmitido resulta ser gorjeado. Isso pode ser analisado claramente se escrevemos

$$U(z, T) = |U(z, T)| \exp [i\phi(z, T)] \quad (2.43)$$

onde a fase é dada por

$$\phi(z, T) = -\frac{\text{sgn}(\beta_2) (z/L_D) T^2}{1 + (z/L_D)^2} \frac{1}{T_0^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z}{L_D} \right) \quad (2.44)$$

mostrando que a dependência da fase com o tempo, implica que a frequência instantânea na frente do pulso difere da frequência central w_0 . A diferença em frequência é dada por

$$\delta w = -\frac{\partial \phi}{\partial T} = -\frac{2 \text{sgn}(\beta_2) (z/L_D) T}{1 + (z/L_D)^2} \frac{1}{T_0^2} \quad (2.45)$$

mostrando que a frequência muda linearmente na frente do pulso. Isso é conhecido como gorjeio linear de frequência.

O alargamento induzido pela dispersão pode ser entendido notando que as componentes vermelhas viajam mais rápido do que as componentes azuis no regime de dispersão normal, enquanto acontece

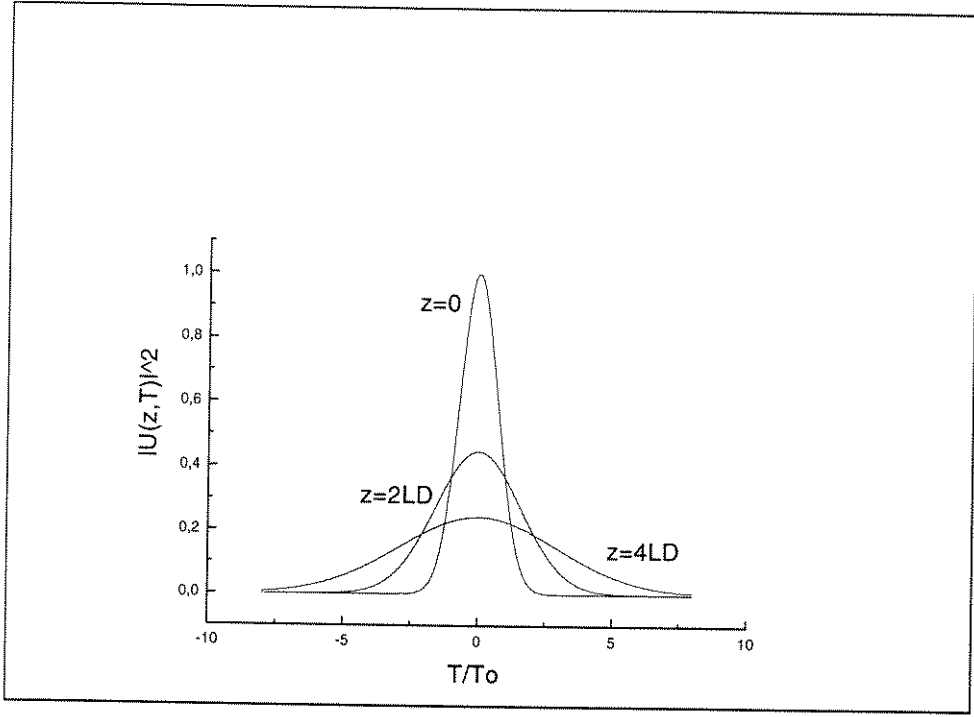


Fig. 2-3: Alargamento induzido pela dispersão para um pulso gaussiano, após propagar-se por uma distância $z=2L_D$ e $z=4L_D$.

tudo ao contrário no regime de dispersão anômala. O pulso pode manter a sua largura apenas se as componentes espectral chegarem juntas, ou equivalentemente $\beta_2 = 0$. O tempo de retardo em chegar as diferentes componentes espectrais resulta o alargamento. Na Fig. 2-3 se ilustra a variação do pulso em função da distância de propagação z .

Quando opera-se na região de dispersão zero, λ_D , os pulsos ópticos experimentam efeitos dispersivos de alta ordem. Isso pode ser entendido notando que D não é zero em todos os comprimentos de onda contidos dentro dos espectro centrado em λ_D . Os efeitos dispersivos de alta ordem são governados pelo “parâmetro diferencial de dispersão” $S = \frac{\partial D}{\partial \lambda}$. Utilizando a Eq. (2.30) podemos escrever S como

$$S = \left(2\pi c/\lambda^2\right)^2 \beta_3 + \left(4\pi c/\lambda^3\right) \beta_2 \quad (2.46)$$

Note que em $\lambda = \lambda_D$, $\beta_2 = 0$, e S é proporcional a β_3 . Valores típicos de S em λ_D são $0,085ps/km.nm^2$ para fibras monomodo convencionais e $0,05ps/km.nm^2$ para fibra de dispersão deslocada ($\lambda_D = 1,55\mu m$). De outro modo, para o caso de propagação de pulsos ultra-curtos ($T_0 < 0,1ps$), mesmo que não se esteja operando em comprimento de onda de dispersão zero é necessário levar em conta termos de dispersão de alta ordem.

Incluindo efeitos de dispersão de alta ordem, a Eq. (2.33) pode ser escrita como

$$i\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{i}{6}\beta_3\frac{\partial^3 U}{\partial T^3} \quad (2.47)$$

com solução dada por:

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(0, w) \exp \left(\frac{i}{2} \beta_2 w^2 z + \frac{i}{6} \beta_3 w^3 z - iwT \right) dw \quad (2.48)$$

Como pulso incidente consideramos, outra vez, um pulso gaussiano; dessa forma, a solução analítica da equação acima pode ser representada em termos das funções de Airy para pulsos gaussianos [17]. Nessas considerações, vê-se que o pulso já não tende a manter o formato gaussiano com a distância propagada, apresentando uma assimetria acompanhada de oscilações nas suas extremidades. Dependendo do sinal de β_3 , essa oscilação pode localizar-se na parte frontal do pulso ou na parte final do mesmo (veja [1], pag. 76).

A Eq. (2.42), pode ser generalizada para incluir termos de dispersão de alta ordem. Uma medida da largura do pulso é o erro quadrático medio *rms* (root-mean-square) com largura do pulso definida por

$$\sigma = \left[\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 \right]^{1/2} \quad (2.49)$$

onde

$$\langle T \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} T |U(z, T)|^2 dT}{\int_{-\infty}^{\infty} |U(z, T)|^2 dT} \quad (2.50)$$

Para o caso de um pulso incidente gaussiano que não possui gorjeio inicial, o alargamento do pulso é definido por

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \left[1 + \left(\frac{\beta_2 z}{2\sigma_0^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_3 z}{4\sigma_0^3} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.51)$$

onde σ_0 é a largura rms do pulso incidente ($\sigma_0 = T_0/\sqrt{2}$). Observe da Eq. (2.51) que ambos termos (β_2 e β_3) contribuem para o alargamento do pulso, e para o caso de dispersão de maior ordem esse alargamento não depende do sinal de β_3 e de um eventual gorjeio inicial, de forma contrária a β_2 em que sim depende. Essa dependência é qualitativamente diferente. Enquanto β_2 depende do sinal de $\beta_2 C$, a contrinuição de β_3 não depende dos sinais de β_3 e C , veja Eq. (3.3.11) na referência [1].

2.3.3 Auto-modulação de Fase

Uma manifestação interessante da dependência na intensidade do índice de refração em meios não-lineares ocorre pela SPM, o fenômeno que resulta no alargamento espectral do pulso óptico propagante. A SPM é o análogo temporal do auto-focamento que se apresenta em guias de onda espaciais. As fibras ópticas possuem não-linearidade Kerr [3], levando o perfil de intensidade do pulso modular ao índice de refração do mesmo, sendo que esse índice modula, em contrapartida, a fase da onda propagante. Daí advém a designação de auto-modulação de fase. Como a frequência instantânea é a derivada da fase com respeito ao tempo mais a frequência da portadora óptica, vemos que a frequência varia sobre

o pulso com a distribuição do campo.

Contrário ao que ocorre no caso da propagação em regime unicamente linear, o espectro se torna modulado em fase (*chirped*), onde as componentes de baixa frequência se localizam na parte frontal do pulso e, as de alta, são atrasadas.

Considerando regime de propagação unicamente não-linear ($L_D \gg L_{NL} \simeq L$), a Eq. (2.25) pode ser escrita como

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\exp(-\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (2.52)$$

A solução dessa equação é dada por

$$U(z, T) = |U(0, T)| \exp[i\phi_{NL}(z, T)] \quad (2.53)$$

onde $U(0, T)$ é a amplitude do campo incidente, e com

$$\phi_{NL}(z, T) = |U(0, T)|^2 \left(\frac{z_{eff}}{L_{NL}} \right), \quad z_{eff} = \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha z)] \quad (2.54)$$

da Eq. (2.53) verifica-se que o formato da amplitude do pulso mantém-se invariante com a distância, enquanto que a SPM aparece como um desvio de fase dependente do tempo e da distância. O desvio de fase não-linear $\phi_{NL}(z, T)$ aumenta com a distância de propagação. A quantidade z_{eff} representa a distância efetiva que é menor do que a distância de propagação z devido às perdas da fibra. O desvio de fase máximo $\phi_{máx}$ ocorre no centro do pulso, localizado em $T = 0$. Desde que U é normalizada, de tal forma que $|U(0, 0)| = 1$, obtém-se que

$$\phi_{máx} = \frac{z_{eff}}{L_{NL}} = \gamma P_0 z_{eff}, \quad (2.55)$$

com isso pode-se dizer que L_{NL} é a distância de propagação efetiva em que $\phi_{máx} = 1$. O alargamento induzido pelo SPM é uma consequência da dependência temporal de $\phi_{NL}(z, T)$. Pode ser mostrado que uma fase variante no tempo implica uma frequência óptica que difere de sua frequência central w_0 . Essa diferença é dada por

$$\delta w = -\frac{\partial \phi_{NL}}{\partial T} = -\frac{\partial |U(0, T)|^2}{\partial T} \frac{z_{eff}}{L_{NL}} \quad (2.56)$$

Do mesmo modo como no caso linear, a dependência temporal de δw pode ser entendida como um gorjeio em frequência. O gorjeio é induzido pela SPM e a sua amplitude aumenta com a distância propagada. Ou seja, novas componentes são geradas com a propagação do pulso, provocando alargamento do espectro com relação ao espectro inicial. Da equação acima, observamos que o alargamento espectral depende do formato do pulso. Considerando um formato de pulso incidente gaussiano,

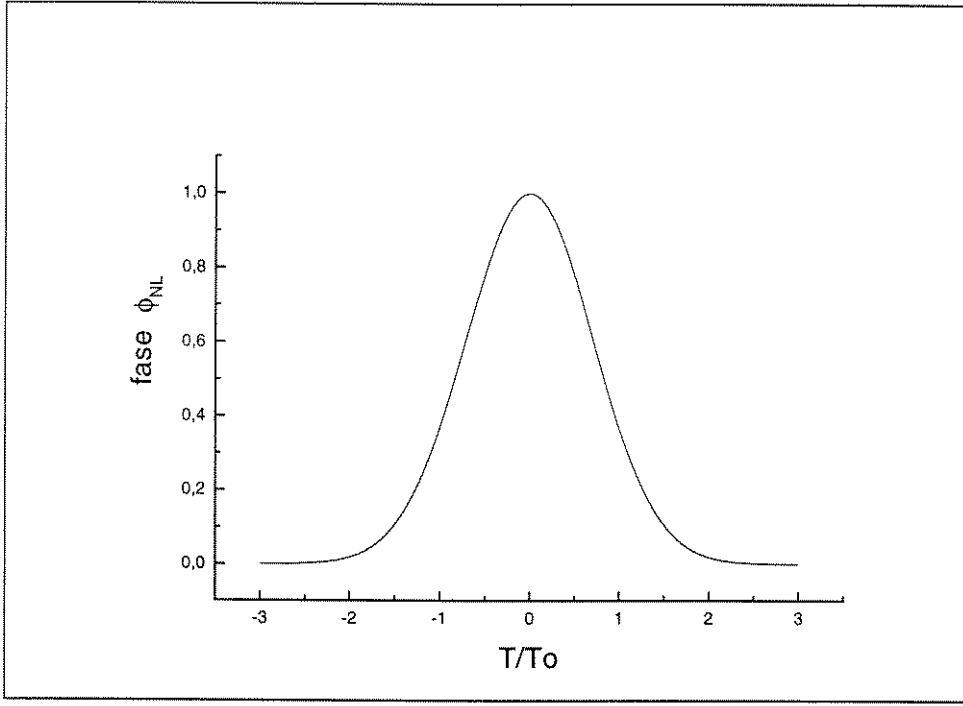


Fig. 2-4: Variação temporal do desvio da fase ϕ_{NL} induzido pela SPM para o caso de um pulso gaussiano incidente.

pode-se calcular o gorjeio induzido pela SPM

$$\delta w = \frac{2}{T_0} \frac{z_{eff}}{L_{NL}} \left[\frac{T}{T_0} \right] \exp \left[- \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \right], \quad (2.57)$$

Nas Figs. 2-4, 2.5 mostramos a variação da fase e o gorjeio com respeito ao tempo normalizado. Observe que, δw é negativa na parte frontal do pulso (desvio para o vermelho) e torna-se positivo para a parte posterior do mesmo (desvio para o azul), e finalmente, o gorjeio comporta-se linearmente sobre uma grande parte central do pulso.

Para estimar a ordem da grandeza do alargamento espectral induzido pela SPM, da equação acima obtém-se o valor pico de δw , como sendo

$$\delta w_{\max} = \frac{0,86}{T_0} \phi_{\max} \quad (2.58)$$

onde $\phi_{\max}$ é dado por (2.55). Para obter o fator de alargamento espectral, o parâmetro de largura T_0 deve ser relacionado à largura espectral Δw . Para pulsos gaussianos sem gorjeio inicial, obtém-se $\Delta w = T_0^{-1}$, portanto, (2.58) pode ser escrita como:

$$\delta w_{\max} = 0,86 \Delta w \phi_{\max} \quad (2.59)$$

mostrando que o alargamento do pulso é, aproximadamente, dado pelo valor numérico do desvio de fase máximo $\phi_{\max}$.

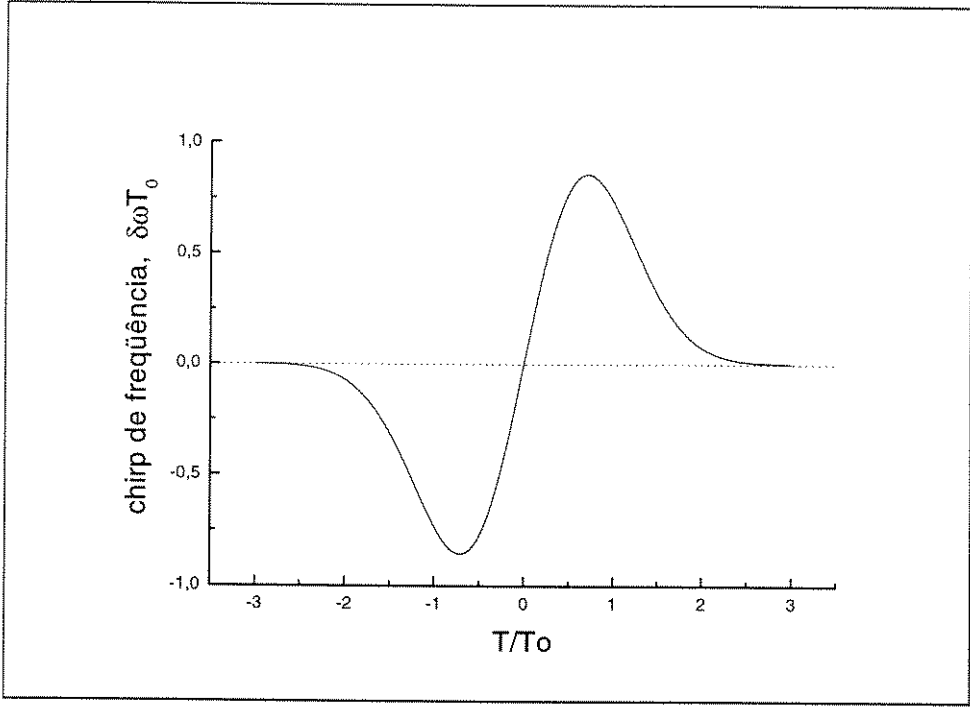


Fig. 2-5: Variação temporal do gorjeio de frequência $\delta\omega T_0$ induzido pela SPM para o caso de um pulso gaussiano incidente.

Similar ao caso da GVD, o gorjeio inicial do pulso de entrada influencia fortemente as características de propagação em regime puramente não-linear [1].

2.4 Surgimento dos Sólitons Ópticos

Uma manifestação fascinante, devida à não-linearidade das fibras, ocorre no regime de dispersão anômala onde as fibras podem suportar pulsos solitônicos através da interação dos efeitos da GVD e SPM, onde as relações dadas pelas Eqs. (2.26), (2.27) não são mais satisfeitas. Como mostrado na Seção 2.3, a GVD espalha o pulso durante a sua propagação ao longo da fibra. Por outro lado, SPM, resultante da dependência do índice com a intensidade, impõe uma modulação de fase (*chirp*) ao pulso. Sob essas condições, a SPM e a GVD podem cooperar-se de maneira que o gorjeio induzido pela SPM cancela exatamente o alargamento induzido pela GVD. Nesse cenário obtém-se ondas que se propagam sem mudar na sua forma por longas distâncias e recuperam sua forma original depois de colidir entre elas; essas ondas são chamadas de sólitons.

A equação NLS pode ser resolvida utilizando o MEI [10]. Embora existam soluções para fibras com dispersão anômala e normal, atualmente pulsos solitônicos em fibras com aplicações em comunicações são, na grande maioria, encontrados em fibras com dispersão anômala [8]. Em caso de operação na região de dispersão normal, as soluções recebem a denominação de sólitons escuros, enquanto que na região de dispersão anômala eles se denominam sólitons claros.

Utilizando a distância normalizada pelo comprimento de dispersão L_D ,

$$\xi = \frac{z}{L_D}, \quad (2.60)$$

a Eq. (2.25) pode ser escrita como

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} = \text{sgn}(\beta_2) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - N^2 |U|^2 U \quad (2.61)$$

sendo N dado por

$$N^2 = \gamma P_0 L_D = \frac{\gamma P_0 T_0^2}{|\beta_2|} \quad (2.62)$$

parâmetro extremamente importante para caracterizar os sólitons.

Em fibra de dispersão anômala, Eq. (2.61) torna-se

$$-i \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + N^2 |U|^2 U, \quad (2.63)$$

onde o parâmetro N descreve a ordem do sóliton. Para $N = 1$ o pulso não muda sua forma a longo da propagação e é denominado de sóliton fundamental. Se observamos a solução sóliton fundamental obtida pelo MEI [1], [10]

$$U(\xi, \tau) = \text{sech}(\tau) \exp(i\xi/2), \quad (2.64)$$

mostra-se que o pulso de entrada adquire um desvio de fase $\phi = \xi/2$ à medida que se propaga dentro da fibra; porém, sua amplitude permanece inalterada, veja Fig. (2-6). Essa propriedade do sóliton fundamental é que o torna bastante atraente para sistemas de comunicações ópticas de altíssimas taxas. Outra característica dos sólitons é que são altamente estáveis. Com isso, mesmo que as características do pulso de entrada desviem-se do pulso inicial, dado por (2.64) com $\xi = 0$, o sóliton fundamental pode ser excitado, como mostra-se em resultados do Capítulo 3, onde o próprio pulso ajusta-se à sua forma e à sua largura, na tentativa de tornar-se um sóliton fundamental.

Um comportamento parecido é observado para casos em que N difere de um inteiro. Um sóliton de ordem N pode ser formado quando o valor de N na entrada varia na faixa de $N - 1/2$ a $N + 1/2$. Portanto, pequenos desvios com relação às condições iniciais não comprometem a propagação de pulsos solitônicos. Alguma energia do pulso é perdida durante essa fase de adaptação do pulso sob forma de ondas dispersivas. Conseqüentemente, é interessante casar-se, na medida do possível, as condições iniciais do pulso com aquelas que são as ideais.

O período do sóliton $\xi = \frac{\pi}{2}$ ($z_0 = \frac{\pi}{2} L_D$) é definido como a distância na qual o sóliton de ordem N recupera sua forma inicial desempenha um papel importante na teoria dos sólitons ópticos. Na Fig. 2-7 ilustra-se o sóliton de ordem 3 ($N=3$); observe que o pulso inicialmente experimenta uma contração, reparte-se em seguida em várias componentes e retorna à sua forma original em $\xi = \frac{\pi}{2}$.

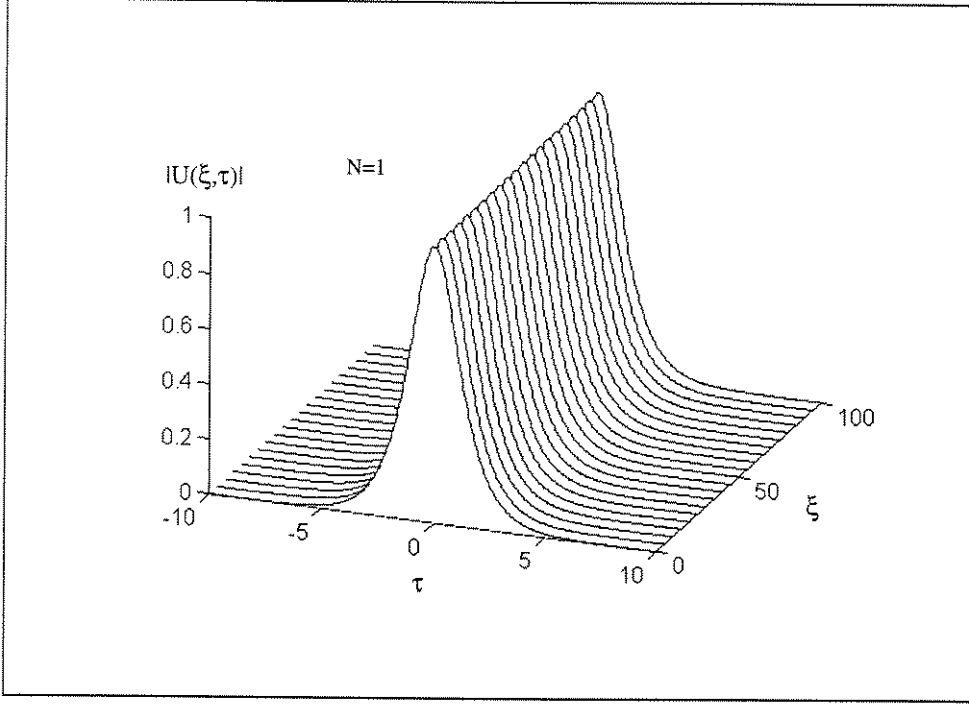


Fig. 2-6: Evolução de sóliton fundamental ($N=1$), em uma distância de $\xi = 100$.

Comportamento qualitativo similar ocorre para outros valores de $N > 1$.

Além da GVD, outro efeito que pode ser limitante nas fibras ópticas, são as perdas. Quando a energia do sóliton cai abaixo de um certo valor limite, o efeito não-linear não é mais suficiente para compensar a GVD. Porém, torna-se necessário buscar-se mecanismos que possam amplificar os pulsos a fim de restituir a energia do sóliton. Considerando $-i\alpha L_D U/2$ ao lado direito da Eq. (2.25), essa equação em fibra de dispersão anômala pode ser escrita como

$$-i\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + i\Gamma U + N^2 |U|^2 U \quad (2.65)$$

onde

$$\Gamma = \frac{\alpha}{2} L_D = \frac{\alpha}{2} \frac{T_0^2}{|\beta_2|} = \frac{\alpha z_0}{\pi} \quad (2.66)$$

Finalmente, na Fig. 2-8, visualiza-se a propagação de sóliton fundamental com pulso incidente dado pela Eq. (2.64) em $\xi = 0$, onde o parâmetro de perdas Γ é 0,03. Note que o pulso apresenta um alargamento com a distância de propagação; esse alargamento não é válido para distâncias longas, sendo limitado a distâncias $\Gamma\xi \ll 1$ para que o sóliton possa manter o seu formato inicial [1], [18].

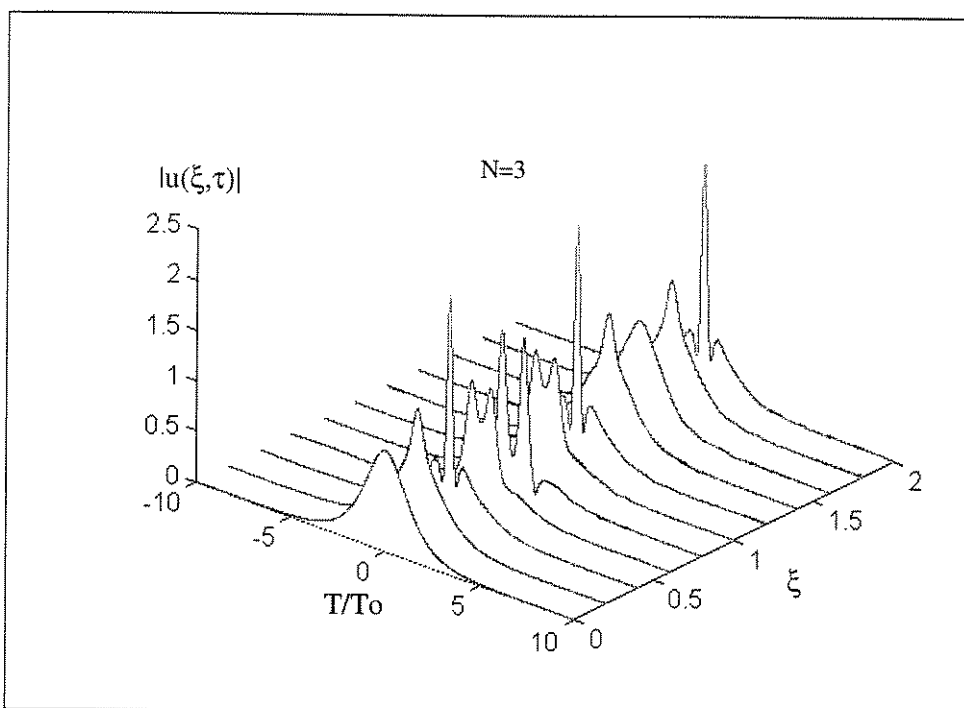


Fig. 2-7: Evolução do sóliton de terceira ordem ($N=3$).

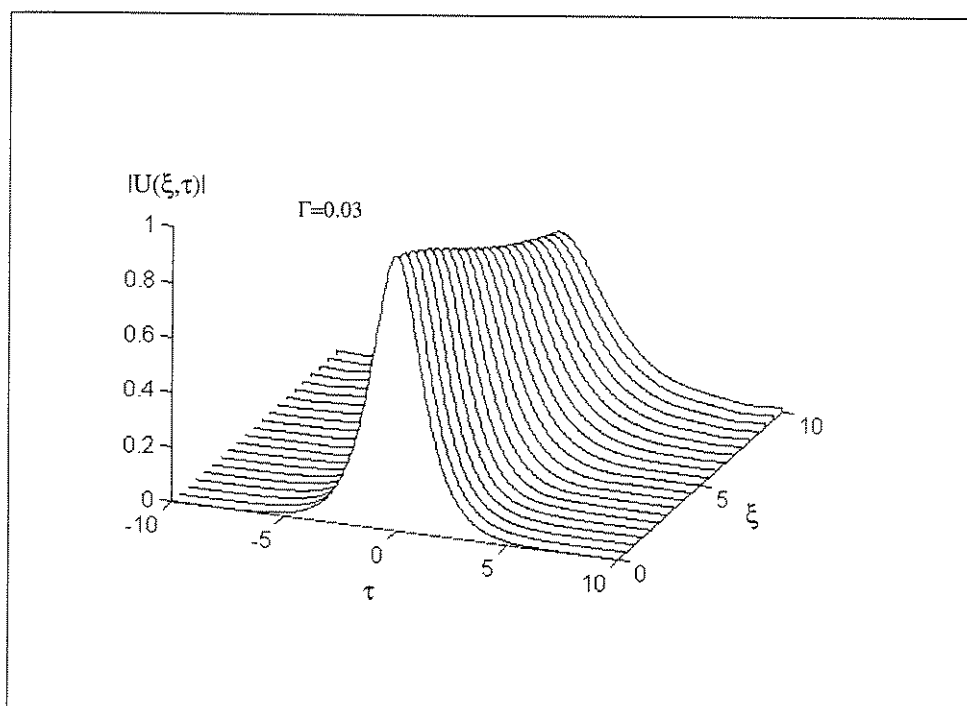


Fig. 2-8: Evolução do sóliton fundamental ($N=1$) na presença de perdas ($\Gamma=0,03$).

Capítulo 3

Técnicas Numéricas para Resolver a Equação Não-Linear de Schrödinger

3.1 Introdução

A propagação de raios monocromáticos através de guias de onda ópticos se descreve através de equações de onda que podem ser lineares ou não-lineares, dependendo das características do material utilizado e da potência na entrada no guia. No caso de guia de onda não-linear e polarização TE essa equação é chamada equação generalizada de Schrödinger (GNLS) espacial, por outro lado, para a propagação da envoltória de um pulso óptico em fibras ópticas monomodo, a equação é denominada de equação GNLS temporal, pois as coordenadas transversais são relacionadas ao tempo relativo [2]. Para as duas situações, espaciais ou temporais, o Método de Propagação de Feixes (BPM) é uma das técnicas numéricas mais utilizadas [1], [16]. Este método resolve as equações correspondentes passo a passo (*step-by-step*) ao longo da coordenada de propagação, que usualmente é escolhida como sendo a coordenada z (ou ξ).

Como foi indicado no Capítulo 1, a obtenção de soluções analíticas das equações NLS ou GNLS, tanto espaciais como temporais, é muito difícil em muitas situações. Desta forma, neste capítulo nos concentraremos em estudar as formas de resolver numericamente as equações GNLS. Faremos um estudo detalhado dos esquemas de propagação de Operador Particionado (SOM), Operador Completo (FOM) e a suas versões baseadas no Método de Elementos Finitos de Operador Particionado (SO-FEM), Método de Diferenças Finitas de Operador Particionado (SO-FDM), Método de Fourier de Operador Particionado (SO-FM), Método de Elementos Finitos de Operador Completo (FO-FEM), e o Método de Diferenças Finitas de Operador Completo (FO-FDM) [2]. Finalmente, discutiremos também o Método Série de Fourier [42]-[45]. No decorrer deste capítulo e dos seguintes apresentaremos exemplos comparativos dos métodos discutidos aqui.

3.2 Discretização por Elementos Finitos.

As equações de tipo GNLS, veja Eq. (2.19), tanto espaciais como temporais, podem ser escritas na forma geral [1], [28]:

$$\frac{\partial U(\xi, \zeta)}{\partial \xi} = \{D + N(\xi, \zeta, \langle U \rangle)\} U(\xi, \zeta) \quad (3.1)$$

onde $U(\xi, \zeta)$ é a envoltória do campo elétrico normalizado, dado em (2.24), ξ representa a coordenada de propagação normalizada, dada pela Eq. (2.60) para o caso de propagação de pulsos em fibras ópticas, e z para o caso de propagação de raios de luz em guias de onda não-lineares; ζ representa a coordenada espacial x para o caso da equação GNLS espacial, e o tempo normalizado τ no esquema da velocidade de grupo, para o caso de equação GNLS temporal, [1],[2]; D e $N(\xi, \zeta, \langle U \rangle)$ são operadores lineares e não-lineares respectivamente, $\langle \cdot \rangle$ denota a forma em que N depende de U . Essa dependência, normalmente, é dada por [28]:

$$N(\xi, \zeta, \langle \phi \rangle) \equiv N\left(\xi, \zeta, A_1 \phi_1, \dots, A_P \phi_P, B_1 \phi_1^*, \dots, B_Q \phi_Q^*, C_1 |\phi_1|^2, \dots, C_R |\phi_R|^2\right) \quad (3.2)$$

onde A_i, B_j, C_k para $i = 1, P; j = 1, Q; k = 1, R$ são operadores lineares que dependem somente da coordenada transversal ζ e $*$ indica a conjugada complexa. Formas explícitas de D e N serão dadas posteriormente, de acordo com a situação a ser analisada.

Para utilizar o FEM na discretização de (3.1) precisa-se adotar uma forma integral equivalente [26] e [25]. Isso pode ser feito, encontrando uma forma variacional associada a (3.1), de tal forma que a função que minimiza o funcional seja a solução da Eq. (3.1). Nesta tese, usaremos alternativamente a formulação de Galerkin

A formulação de Galerkin, proporciona uma forma integral equivalente para resolver (3.1). Além do mais, se a forma funcional existe esta é, em geral, equivalente à forma integral de Galerkin. A formulação de Galerkin é enunciada da seguinte forma: Para ξ fixo, dado um espaço de funções $H^2(\Omega)$, achar $U \in H^2(\Omega)$ tal que

$$\left\langle \dot{U}, w \right\rangle = \langle [D + N(U)] U, w \rangle, \text{ para todo } w \in H^2(\Omega) \quad (3.3)$$

onde $H^2(\Omega)$ é o espaço de Sobolev de ordem dois, que é constituído de funções cujas primeiras e segundas derivadas pertencem a $L^2(\Omega)$, que é o espaço de funções quadrado integrável, no sentido de Lebesgue [22], [41]; Ω é o domínio no qual a seção transversal da fibra está contida, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa o produto interno usual de $L^2(\Omega)$, i.e. dado $v, w \in L^2(\Omega)$

$$\langle v, w \rangle = \int_{\Omega} v w^* d\Omega. \quad (3.4)$$

Logo, se consideramos uma sequência de sub-espços finito-dimensionais $S_m(\Omega) \subset H^2(\Omega)$, tal que

$S_m(\Omega) \subset S_{m+1}(\Omega)$; a versão discreta da formulação de Galerkin, para (3.1), é dada por [26]: Para ξ fixo, dado o espaço $S_m(\Omega)$, achar $U_m \in S_m(\Omega)$ tal que

$$\left\langle \dot{U}_m, w_m \right\rangle = \langle [D + N(U_m)] U_m, w_m \rangle, \text{ para todo } w_m \in S_m(\Omega) \quad (3.5)$$

Note que, (3.5) define uma seqüência de funções $\{U_m\}$ de tal forma que para certas condições de regularidade dos operadores D e N (por exemplo, limitados) pode-se demonstrar que quando $m \rightarrow \infty$; $U_m \rightarrow U$, na norma definida pelo produto interno, Eq. (3.4) [41]. A interpretação desse resultado é que ao resolver o problema integral, dado pela Eq. (3.5), obtemos uma solução aproximada U_m , de (3.3) e, conseqüentemente, de (3.1).

Para calcular U_m , introduzimos o conjunto de funções base do espaço S_m , $\{\phi_j(\zeta)\}_j^m$ com m a dimensão de S_n . Com isso, U_m pode ser escrita como:

$$U_m(\xi, \zeta) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \phi_j = \phi^T \cdot \vec{\alpha} \quad (3.6)$$

onde α_i são as constantes na coordenada transversal a serem determinadas, $\vec{\alpha}$ e ϕ são os vetores coluna contendo os elementos α_i e ϕ_i , respectivamente, e $(\cdot)^T$ representa a operação de transposta. Substituindo (3.6) na Eq. (3.5) e escolhendo w_n como sendo as funções base de S_n , obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$[A] \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial \xi} = ([D] + [N]) \vec{\alpha} \quad (3.7)$$

onde $[A]$, $[D]$, $[N]$ são matrizes com elementos (i, j) expressos por

$$([A])_{i,j} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle \quad (3.8)$$

$$([D])_{i,j} = \langle D\phi_j, \phi_i \rangle \quad (3.9)$$

$$([N])_{i,j} = \langle N(U_m) \phi_j, \phi_i \rangle \quad (3.10)$$

Assumindo que $D = p \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$, onde p é uma constante, podemos integrar por partes este operador na formulação de Galerkin, dada nas Eqs. (3.3) e (3.5), e obtermos a seguinte expressão para a matriz D .

$$[D] \vec{\alpha} = -[D_0] \vec{\alpha} + g \quad (3.11)$$

onde

$$([D_0])_{i,j} = p \left\langle \frac{\partial \phi_j}{\partial \zeta}, \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \right\rangle \quad (3.12)$$

$$(g)_{i,j} = p \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi_j}{\partial \zeta} \phi_i d(\partial\Omega) \quad (3.13)$$

onde $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω . A contribuição da integração por partes na formulação de Galerkin é que a procura da solução pode ser efetuada no espaço menos restrito: $H^1(\Omega)$, que é equivalente ao espaço de funções contínuas. Nessas condições, a formulação de Galerkin, dada em (3.3) e (3.5), é chamada de *Formulação Fraca de Galerkin*.

O conjunto de funções base são as Funções Lagrangianas, que estão em $S_m(\Omega)$, as quais são polinomiais de Lagrange de ordem k , $k=1,2,\dots$. Assim, as funções mais simples são os polinômios lineares ($k=1$) definidos por [2]:

$$\phi_i(\zeta) = \begin{cases} (\zeta_{i+1} - \zeta) / (\zeta_{i+1} - \zeta_i) & , \text{ quando } \zeta \in [\zeta_i, \zeta_{i+1}] \\ (\zeta - \zeta_{i-1}) / (\zeta_i - \zeta_{i-1}) & , \text{ quando } \zeta \in [\zeta_{i-1}, \zeta_i] \\ 0 & , \text{ outro} \end{cases}$$

onde ζ_i , $i = 1, m$; m representa o número de nós associado à partição do domínio $\Omega = [a, b]$. Da equação acima obtem-se $\phi_i(\zeta_j) = \delta_{i,j}$. Notemos que as matrizes obtidas utilizando essa classe de funções são tridiagonais, pois o domínio de cada função $\phi_i(\zeta)$ intersecta o domínio das funções $\phi_{i-1}(\zeta)$ $\phi_{i+1}(\zeta)$; conseqüentemente, todos os elementos das matrizes dadas pelas Eqs. (3.8)-(3.10) são zero para $|i - j| > 2$. Por outro lado, funções de base construídas a partir de polinômios quadráticos de Lagrange ($k=2$) produzem matrizes pentadiagonais. Em geral, as matrizes produzidas pelos polinômios de ordem k são $(2k+1)$ -diagonais [2], [24]. Conseqüentemente, existe um compromisso entre a esparsidade e a ordem k das funções de base. Mas, de acordo com as sugestões de alguns autores [24]-[25], não é recomendável utilizar $k > 2$, pois isto implica num decréscimo da esparsidade e, portanto, no aumento no esforço computacional.

3.3 Esquema de Propagação de Operador Particionado

Como indicado no Capítulo 2, a complexidade dos termos não-lineares na equação que descreve a propagação de campos eletromagnéticos em estruturas de guias ópticos não-lineares é mais ou menos proporcional à duração do pulso envolvido. Portanto, observa-se equações não-lineares mais simples para pulsos de duração de pico-segundos do que para pulsos de duração de femtosegundo.

Para aplicar o SOM na Eq. (3.1), escrevemos a solução associada, como:

$$\begin{aligned}
U_1(\xi + \Delta\xi) &= \exp\{1/2\Delta\xi D\} \exp\{\Delta\xi N(\xi + 1/2\Delta\xi, \langle V \rangle)\} V(\xi), \\
V(\xi) &= \exp(1/2\Delta\xi D) U(\xi),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde suprimimos a coordenada transversal, por conveniência de notação. O esquema expresso na Eq. (3.14) não é um esquema de operador particionado de segunda ordem para um operador generalizado não-linear, como mostrarmos posteriormente. Para calcular o erro de arroximação, definimos aqui, do mesma forma como em [28], o erro de convergência

$$\varepsilon_1 = |U(\xi + \Delta\xi) - U_1(\xi + \Delta\xi)| \tag{3.15}$$

onde U representa a solução exata de (3.1), a solução exata $U(\xi + \Delta\xi)$ é representada utilizando a série de Taylor na Eq. (3.1) como:

$$\begin{aligned}
U(\xi + \Delta\xi) &= (1 + \Delta\xi [D + N(\xi, \langle U \rangle)] + 1/2 (\Delta\xi)^2 \times \\
&\quad \{[D + N(\xi, \langle U \rangle)]^2 + \partial N(\xi, \langle U \rangle) / \partial \xi\}) U(\xi) + 0 (\Delta\xi)^3
\end{aligned} \tag{3.16}$$

A seguir, fixamos ξ constante, considerando $\Delta\xi$ como variável independente, de modo que podemos obter a seguinte expansão de Taylor.

$$\begin{aligned}
N\left(\xi + \frac{1}{2}\Delta\xi, \left\langle U\left(\xi + \frac{1}{2}\Delta\xi\right) \right\rangle\right) &= N\left(\xi + \frac{1}{2}\Delta\xi, \left\langle U(\xi) + \frac{1}{2}\Delta\xi\mu + 0(\Delta\xi)^2 \right\rangle\right) \\
&= N[\xi, \langle U(\xi) \rangle] + \frac{1}{2} (\Delta\xi) v + 0 (\Delta\xi)^2
\end{aligned} \tag{3.17}$$

onde v é μ são funções arbitrária de ξ .

Notando que $V(\xi) = \exp(1/2\Delta\xi D) U(\xi) = U(\xi) + 1/2\Delta\xi D U(\xi) + 0(\Delta\xi)^2$; a expressão para $U_1(\xi + \Delta\xi)$, na Eq. (3.14), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
U_1(\xi + \Delta\xi) &= \exp\{1/2\Delta\xi D\} \exp\left\{\Delta\xi \left[N(\xi, \langle U(\xi) \rangle) + \frac{1}{2} (\Delta\xi) v + 0 (\Delta\xi)^2\right]\right\} \\
&\quad \cdot \exp(1/2\Delta\xi D) U(\xi)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Finalmente, aplicando a o teorema de Baker Hausdorff [1] em (3.18), obtém-se:

$$U_1(\xi + \Delta\xi) = (1 + \Delta\xi [D + N(\xi, \langle U(\xi) \rangle)] + 1/2 (\Delta\xi)^2 \times$$

$$\{[D + N(\xi, \langle U(\xi) \rangle)]^2 + V\}U(\xi) + 0(\Delta\xi)^3 \quad (3.19)$$

A partir de (3.16) para $U(\xi + \Delta\xi)$ e (3.19) para $U_1(\xi + \Delta\xi)$ estima-se o erro ε_1 [28], como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\Delta\xi)^2 \max |GU| + 0(\Delta\xi)^3, \\ G &= \sum_{p=1}^P [\partial N / \partial (A_p U) A_p N U] + \sum_{q=1}^Q [\partial N / \partial (B_q U^*) B_q N^* U^*] \\ &\quad + 2 \sum_{r=1}^R \left[\partial N / \partial (C_r |U|^2) C_r |U|^2 \text{Re}(U) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

Portanto, a condição para que o esquema (3.14) seja de segunda ordem é que $G = 0$.

Operadores não-lineares dependendo simplesmente da intensidade, produzem $G = 0$ desde que eles sejam imaginários. Equações associadas com essa classe de operadores constituem uma importante classe de equações GNLS chamadas de equações GNLS com dependência da intensidade imaginária. Alguns exemplos das equações GNLS apresenta-se em propagação de onda TE em guias de onda não-lineares e são definidas pelos seguintes operadores:

$$D \equiv \frac{i}{2k_0\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\Gamma(z, x) \quad (3.21)$$

$$N(z, x, |U|^2) \equiv \frac{ik_0}{2\beta} \left[n^2(z, x, |U|^2) - \beta^2 \right] \quad (3.22)$$

onde k é número de onda, β é a constante de propagação de referência, Γ é o perfil de absorção (ganho), e n é o índice de refração. De acordo com a Eq. (3.2), tem-se que $A_P = B_Q = 0$ e $R = 1$, com $C_1 = 1$, e o índice de refração, por exemplo, pode ser dado por:

$$n^2 = n_0^2 + \alpha |U|^2, \text{ Meio não-linear do tipo Kerr,} \quad (3.23)$$

onde n_0 é o índice de refração linear, α é definido por $\alpha = n_0^2 c \varepsilon_0 n_2$; onde c , ε_0 , n_2 representam a velocidade da luz, permissividade do vácuo e o coeficiente Kerr do meio, respectivamente. Note que, em geral, n_0 , α dependem de (x, z) . Uma outra equação GNLS apresenta-se em análise de propagação de pulsos em fibra ópticas monomodo, para a qual os operadores dados em (3.27), são dados por:

$$D \equiv \frac{i}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \delta \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} - \frac{1}{2}\Gamma \quad (3.24)$$

$$N(\partial U / \partial \tau, U^*, |U|^2, \partial |U|^2 / \partial \tau) \equiv i \left(|U|^2 - \tau_R \partial |U|^2 / \partial \tau \right) - s \left(U^* \partial U / \partial \tau + \partial |U|^2 / \partial \tau \right) \quad (3.25)$$

onde os parâmetros de δ , s , τ_R representam os efeitos de dispersão terceira ordem, auto-deflexão e a

resposta retardada não-linear responsável pelo deslocamento de frequência. Da Eq. (3.2) obtém-se que $P = G = 1$ e $R = 2$, com $A_1 = \partial/\partial\tau$, $B_1 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = \partial/\partial\tau$. A partir da Eq. (3.20), obtém-se o correspondente erro ε_1 na seguinte forma:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} (\Delta\xi)^2 \max |sU \{U^* \partial(NU)/\partial\tau + (\partial U/\partial\tau) N^* U^* + 2\Phi [i - (s + i\tau_R) \partial/\partial\tau] |U|^2 - 2\partial\Phi/\partial\tau (s + i\gamma) |U|^2\} + 0 (\Delta\xi)^3, \quad (3.26)$$

onde $\Phi = \text{Re} \{U^* \partial U/\partial\tau\} \partial/\partial\tau + \partial |U|^2/\partial\tau$. Note que se $s = 0$ na Eq. (3.26), ε_1 é de segunda ordem. Isto é, quando não levamos em conta o efeito de auto-deflexão na Eq. (3.25), o operador não-linear N resultante depende da intensidade imaginária apenas; portanto, a utilização do esquema dado em (3.14), produz soluções de segunda ordem.

3.4 Esquema de Propagação de Operador Completo

Outros esquemas de propagação muito eficientes, são os métodos baseados no esquema de Operador Completo; estes métodos são caracterizados pela utilização conjunta dos operadores lineares e não-lineares. Nestas condições, a solução da Eq. (3.1) pode ser escrita como [2]:

$$U_2(\xi + \Delta\xi) = \exp \left\{ \Delta\xi \left[D + N \left(\xi + \frac{1}{2} \Delta\xi, \langle V \rangle \right) \right] \right\} U(\xi), \quad (3.27)$$

onde

$$V = \frac{1}{2} (U + U_2) \quad (3.28)$$

Utilizando a aproximação racional [2] na Eq. (3.27), obtém-se,

$$U_2(\xi + \Delta\xi) = \left\{ \left(1 + \frac{\Delta\xi}{2} \left[D + N \left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle V \rangle \right) \right] \right) / \left(1 - \frac{\Delta\xi}{2} \left[D + N \left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle V \rangle \right) \right] \right) \right\} U(\xi), \quad (3.29)$$

Para o caso linear, a Eq. (3.29) representa o esquema de Crank-Nicolson de segunda ordem de exatidão em $\Delta\xi$. Para o caso não-linear, utilizando-se aproximação de primeira ordem para U_2 ; $U_2 = U + \Delta\xi \left[D + N \left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle U \rangle \right) \right] U + 0 (\Delta\xi)^2$, a Eq. (3.28) pode ser escrita,

$$V = U + \frac{\Delta\xi}{2} \left[D + N \left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle U \rangle \right) \right] U + 0 (\Delta\xi)^2 \quad (3.30)$$

Logo, desenvolvendo (3.29) em série de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned}
U_2(\xi + \Delta\xi) = & \{1 + \Delta\xi \left[D + N\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle V \rangle\right) \right] + \frac{(\Delta\xi)^2}{2} \left[\frac{1}{2} \left(D + N\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle V \rangle\right) \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(D + N\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle V \rangle\right) \right) \left(D + \frac{1}{2} N\left(\xi + \frac{\Delta\xi}{2}, \langle V \rangle\right) \right) \right] \} U(\xi) + O(\Delta\xi)^3
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Substituindo (3.30) em (3.31), utilizando (3.17) (com $\mu = \frac{\Delta\xi}{2} [D + N(\xi, \langle U \rangle)]$), e comparando com a expressão exata, dada em (3.16) obtém-se um esquema de segunda ordem de exatidão em $\Delta\xi$ [2].

Uma consequência imediata desse esquema, é que para utilizar (3.29), juntamente com a Eq. (3.28), devemos levar em conta um processo iterativo a cada passo para resolver a não-linearidade de forma exata [2]. Os efeitos da utilização dessas iterações são mostrados nos exemplos do Capítulo 3, 4 e 5. Na literatura, [31], não é comum levar em conta este processo iterativo na resolução do esquema (3.29). Nesta tese, apresentaremos exemplos, mostrando que em algumas situações é vantajoso utilizar iterações.

3.5 Implementação Numérica

Para implementar o SOM, dado na Eq. (3.14), e o FOM em (3.29), precisa-se discretizar o domínio na coordenada transversal. Se nessa discretização utiliza-se Elementos Finitos (FE) ou Diferenças Finitas (FD), obtém-se, como temos indicado anteriormente, SO-FEM, SO-FDM, FO-FEM, FO-FDM. Além disto, SOM pode ser implementado, também, utilizando-se a Transformada Rápida de Fourier (FFT), obtendo-se o SO-FM [2].

Com isso, nesta implementação, no caso espacial, utilizamos a equação GNLS com efeito Kerr definida pelos operadores (3.21), (3.22), e o índice de refração dado em (3.23), com α , n_0 , em geral, dependendo de x . Já no caso temporal, a equação GNLS é definida pelos operadores (3.24), (3.25), com $s = \tau_R = \delta = 0$.

Discretizando via FE, conforma a Seção 3.2, ou via FD, chega-se ao seguinte sistema matricial de equações diferenciais de primeira ordem:

$$A \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial \xi} = [L + N(\vec{\alpha})] \vec{\alpha} + \vec{g} \tag{3.32}$$

onde a janela computacional é definida como $W = [a, b]$, dividida em $M-1$ sub-intervalos $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$, $i=1, M-1$; e as componentes do vetor $\vec{\alpha}$ são dadas por α_i , $i = 1, M$.

Para o FEM, os elementos das matrizes A , L , N , e o vetor $\vec{g}$ são dados por:

$$(A)_{i,j} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle \tag{3.33}$$

$$(L)_{i,j} = -\alpha_1 \left\langle \frac{\partial \phi_j}{\partial \zeta}, \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \right\rangle - \alpha_2 \langle \phi_j, \Gamma \phi_i \rangle \quad (3.34)$$

$$(N)_{i,j} = \langle N \phi_j, \phi_i \rangle \quad (3.35)$$

$$(g)_i = \alpha_1 \left(\delta_{i,M} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_m} - \delta_{i,1} \frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_1} \right) \quad (3.36)$$

Onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno usual do espaço $L^2(a, b)$, $\{\phi_i\}$, $i = 1, M$, representa o conjunto de funções de base FE; $\alpha_1 = \frac{i}{2\beta}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, e $\zeta = x$ para a equação definida pelos operadores (3.21), (3.22), e $\alpha_1 = \frac{i}{2}$, $\alpha_2 = 1$, e $\zeta = \tau$ para a equação definida pelos operadores (3.24) e (3.25), e $\delta_{i,j}$ representa a função delta de Kronecker. Mostra-se que a discretização transversal em FE das Eqs. (3.32)-(3.36) é exata em primeira ou segunda ordem, em $\Delta\zeta$ para partição uniforme, quando utilizamos funções de base lineares ou quadráticas [2] e [24]. De qualquer modo, utilizando uma partição de FE não-uniforme pode-se melhorar substancialmente a ordem global de aproximação, dependendo do problema a ser analisado.

Por outro lado, utilizando esquemas em Diferenças Finitas centrais para partição uniforme, os elementos das matrizes A , L , N e o vetor $\vec{g}$, na Eq. (3.32), são escritas como:

$$(A)_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ (diagonal)} \quad (3.37)$$

$$(L)_{i,j} = \frac{\alpha_1}{\Delta\zeta} (\delta_{i-1,j} - 2\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j}) - \alpha_2 \Gamma(\zeta_i) \delta_{i,j} \text{ (tridiagonal)} \quad (3.38)$$

$$(N)_{i,j} = N(\zeta_i, U(\zeta_i)) \delta_{i,j} \text{ (diagonal)} \quad (3.39)$$

$$(g)_i = \frac{\alpha_1}{\Delta\zeta} (U(\zeta_i) \delta_{2,j} + U(\zeta_i) \delta_{M-1,j}) \quad (3.40)$$

onde $i, j = 2, \dots, M-1$, e α_i ($i = 1, 2$), $\Delta\zeta$ são definidos como no caso dos FE. Esta discretização transversal é da ordem $O(\Delta\zeta)^2$ [2].

Se consideramos

$$L' \vec{\alpha} = L \vec{\alpha} - \vec{g} \quad (3.41)$$

os operadores lineares e não lineares das Eqs. (3.21)-(3.25) devem ser substituídos por

$$D \longrightarrow -A^{-1}L', \quad N \longrightarrow -A^{-1}N(\vec{\alpha}). \quad (3.42)$$

Com isso, o esquema de SOM dado pela Eq. (3.14), fica representado matricialmente por:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha}(\xi + \Delta\xi) &= \left[A - \frac{\Delta\xi}{2} L' \right]^{-1} \left[A + \frac{\Delta\xi}{2} L' \right] \exp \left[\Delta\xi A^{-1} N(V) \right] V, \\ V &= \left[A - \frac{\Delta\xi}{2} L' \right]^{-1} \left[A + \frac{\Delta\xi}{2} L' \right] \overrightarrow{\alpha}(\xi)\end{aligned}\quad (3.43)$$

onde, utilizamos a aproximação racional para $\exp \left[\frac{\Delta\xi}{2} A^{-1} L' \right]$, a qual é de segunda ordem de exatidão em $\Delta\xi$. O cálculo do operador matricial não-linear $\exp \left[\Delta\xi A^{-1} N(V) \right]$ em FD é uma matriz diagonal, veja Eq. (3.39), com elementos dados por $\exp \left[\Delta z A^{-1} N(\zeta_i, V_i) \right] \delta_{i,j}$. Usando em FE, esse operador pode ser calculado através de uma expansão em série de Taylor [2]. Observa-se que em SOM, dado por (3.14), precisa-se apenas duas operações $\exp[\gamma N(V)]$ e $\exp[\gamma D(V)]$, sendo γ uma constante arbitrária.

Do mesmo modo, utilizando (3.41), o esquema FOM dado pela Eq. (3.29) pode ser escrito como:

$$\overrightarrow{\alpha}(\xi + \Delta\xi) = \left[A - \frac{\Delta\xi}{2} \{L' - N(V)\} \right]^{-1} \left[A + \frac{\Delta\xi}{2} \{L' - N(V)\} \right] \overrightarrow{\alpha}(\xi) \quad (3.44)$$

onde, $V = \frac{1}{2} (\overrightarrow{\alpha}(\xi + \Delta\xi) + \overrightarrow{\alpha}(\xi))$. Este esquema pertence aos comumente chamados, esquemas implícitos iterativos [2], já que requer inversão do operador $\left[A - \frac{\Delta\xi}{2} \{L' - N(V)\} \right]$ a cada passo de iteração. Merece especial atenção o cálculo da matriz N, na Eq. (3.35), para o FO-FEM. Nesta tese temos utilizado a aproximação

$$(N(\overrightarrow{\alpha}))_{i,j} \cong N(\alpha_i) \langle \phi_i, \phi_j \rangle \quad (3.45)$$

com resultados que não afetam o desempenho do método, veja [34], [26], e [35].

Para resolver o sistema de equações do tipo

$$C \overrightarrow{x} = \overrightarrow{z} \quad (3.46)$$

onde C é uma matriz regular nxn, $\overrightarrow{z}$ é um n-vetor dado, $\overrightarrow{x}$ é um n-vetor a ser determinado. Quando C é tridiagonal, a solução de (3.46) pode ser obtida em um número de operações da ordem $O(n)$ [27]. Por outro lado, quando a matriz C é da largura de banda $B > 3$ e $B \ll n$, a solução de (3.46) é feita em duas etapas. Primeiro, fazemos a fatoração $C = LU$ [27] (L triangular Inferior e U triangular Superior) com número de operações da ordem $O(Bn)$; logo resolve-se o sistema LU , fazendo $L \overrightarrow{y} = \overrightarrow{z}$ (*forward substitution*) e $U \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ (*backward substitution*) com número de operações $O(n)$. Este procedimento tem sido adotado para matrizes pentadiagonais ($B = 5$).

O Método de Fourier de Operador Particionado [1], [29] é obtido aplicando o esquema (3.14) às equações GNLS definida pelos operadores dados pelas Eqs. (3.21)- (3.24). Podemos expressar o método SO-FM como:

$$\begin{aligned}
U(\xi + \Delta\xi) &= F^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{\Delta\xi}{2} D(k_\zeta) \right] F \left\{ \exp \left[\Delta\xi \hat{N}(W) \right] W \right\} \right\} \\
W &= F^{-1} \left\{ \exp \left[\frac{\Delta\xi}{2} D(k_\zeta) \right] F \{ U(\xi) \} \right\}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Onde F e F^{-1} representa a Transformada de Fourier direta e inversa, respectivamente, a qual pode ser calculada com a ajuda do algoritmo da FFT. k_ζ representa a variável no domínio de Fourier. Embora, o método seja de rápida implementação, por usar o algoritmo FFT, este requer condições periódicas e uma partição regular com $M = 2^n$, n inteiro. Aqui, Γ deve ser constante, de outro modo, ele deve ser incluído como parte do operador não-linear N . De qualquer modo, se isso acontece, (3.47) será exato de primeira ordem em $\Delta\xi$, como discutido na Seção 3.3. Outro aspecto do esquema (3.47), é que a ordem de aproximação em $\Delta\zeta$ é infinita; também é incondicionalmente estável, desde que as funções envolvidas no operador N sejam infinitamente contínuas, como acontece na equação definida pelos operadores (3.21) e (3.22). No caso de funções não-contínuas por trechos, a convergência uniforme da Transformada de Fourier não está garantida nas descontinuidades, mesmo que exista convergência puntual; conseqüentemente, a exatidão de (3.47) em $\Delta\zeta$ é indefinida. Nesses casos de acordo com a literatura existente [2], [66], requer-se um grande número de incógnitas em ζ , juntamente com $\Delta\xi$ suficientemente pequeno, para obter convergência.

3.6 Método das Séries de Fourier.

Finalmente, apresentaremos o Método das Séries de Fourier (*Fourier Series Approach-FSA*). A FSA é uma técnica computacional bastante simples, proposta recentemente por Ghafouri-Shiraz *et al.* no ano 1995 [42], [43] como uma alternativa competitiva com relação aos métodos conhecidos, em particular ao SO-FM.

O método proposto aqui consiste em expressar $U(\xi, \tau)$ em termos da série de Fourier:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=-N}^N \hat{U}_n(\xi) \exp(jn\omega\tau) \tag{3.48}$$

onde $\hat{U}_n(\xi)$ é o coeficiente de Fourier e ω , a frequência fundamental. Substituindo a Eq. (3.48) na equação GNLS definida pelos operadores (3.24) e (3.25) com $s = \tau_R = 0$ dada por

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \delta \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + iN^2 |U|^2 U - \Gamma U \tag{3.49}$$

onde $\delta = \frac{\beta_3}{6|\beta_2|T_0}$, $\Gamma = \frac{\alpha T_0^2}{2|\beta_2|}$, obtém-se

$$\frac{\partial \hat{U}_n}{\partial \xi} = (-jn - \Gamma) \hat{U}_n(\xi) + jN^2 \sum_{\mu-\nu+\lambda=n} \hat{U}_\mu(\xi) \hat{U}_\nu^*(\xi) \hat{U}_\lambda(\xi) \tag{3.50}$$

onde n é um inteiro tal que $-N \leq n \leq N$ e $\sigma_n = n^2\omega^2/2 + \delta n^3\omega^3$

A Eq. (3.50) representa um sistema de $2N + 1$ equações de diferenças parciais não lineares de primeira ordem. Para resolvê-lo, utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem [27]. As $2N + 1$ condições iniciais podem ser obtidas a partir da Eq. (3.48), com $\xi = 0$:

$$\hat{U}_n(0) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} U(0, \tau) \exp(-jn\omega\tau) d\tau \tag{3.51}$$

na qual utilizou-se o método de Simpson para a integração. Uma vez calculados os valores de $\hat{U}_n(\xi)$, encontra-se a solução no domínio temporal através da Eq. (3.48).

Para os resultados numéricos, M representa o número de pontos na janela temporal W e o inteiro N esta relacionado ao numero total de termos na expansão da série de Fourier $2N + 1$. Nos dois problemas apresentados posteriormente, considerou-se janela temporal $W = [-10, 10]$, o número de termos na expansão da série de Fourier, para a FSA foi $N = 20$, como mostrase na Tabela 3.1.

No primeiro problema de comparação (s_1), analisamos a propagação de um sóliton fundamental, sem perdas e sem dispersão de segunda ordem ($\delta = \Gamma = 0$), ou seja resolvemos a equação NLS. Na Fig. 3-1(a) comparamos os resultados da FSA e SO-FM com a solução analítica, após propagar uma distância de um período ($\xi = \frac{\pi}{2}$). Os dois métodos apresentam mesma precisão mas o SO-FM é aproximadamente 3 vezes mais rápido.

Do mesmo modo, no segundo exemplo (s_2), apresentamos a propagação do sóliton de segunda ordem em fibra sem perdas e sem dispersão de segunda ordem. Na Fig. 3-1(b) mostramos a solução analítica e os resultados obtidos por FSA e SO-FM após percorrer um período de sóliton. Outra vez os resultados mostram a mesma precisão, porém o SO-FM é, aproximadamente, seis vezes mais rápido.

Método	W	$\Delta\xi$	N	M	T (Seg.)	erro ($\times 10^{-3}$)
FSA (s1)	20	0,0157	20	200	4.70	1,28
——— (s2)	20	0,0015	20	100	60.00	10,04
SO-FM(s1)	20	0,0157	-	512	1.28	1,28
——— (s2)	20	0,0015	-	512	10.04	10,04

Tabela 3.1: Resultados obtidos utilizando o método de FSA e SO-FM.

Quando leva-se em conta fibras com perdas, assim como dispersão de terceira ordem, a FSA é comparável com SO-FM, porém com uma diferença substancial do tempo de cálculo [45]. De qualquer forma, experiências numéricas também mostram que em problemas de propagação de sólitons de maior ordem, ou colisão de sólitons, a FSA não se aproxima com a mesma precisão do que SO-FM [45], veja o erro apresentado na Tabela 3.1. Nesses casos, precisa-se aumentar o número de termos ($N = 40 - 50$) da série de Fourier, fazendo com que a FSA torne-se muito lenta, devido ao processo de casamento (seleção das componentes que participam no somatorio, veja Eq. (3.50)). Esta operação demanda um custo computacional muito alto (ordem exponencial), o que torna este método pouco competitivo.

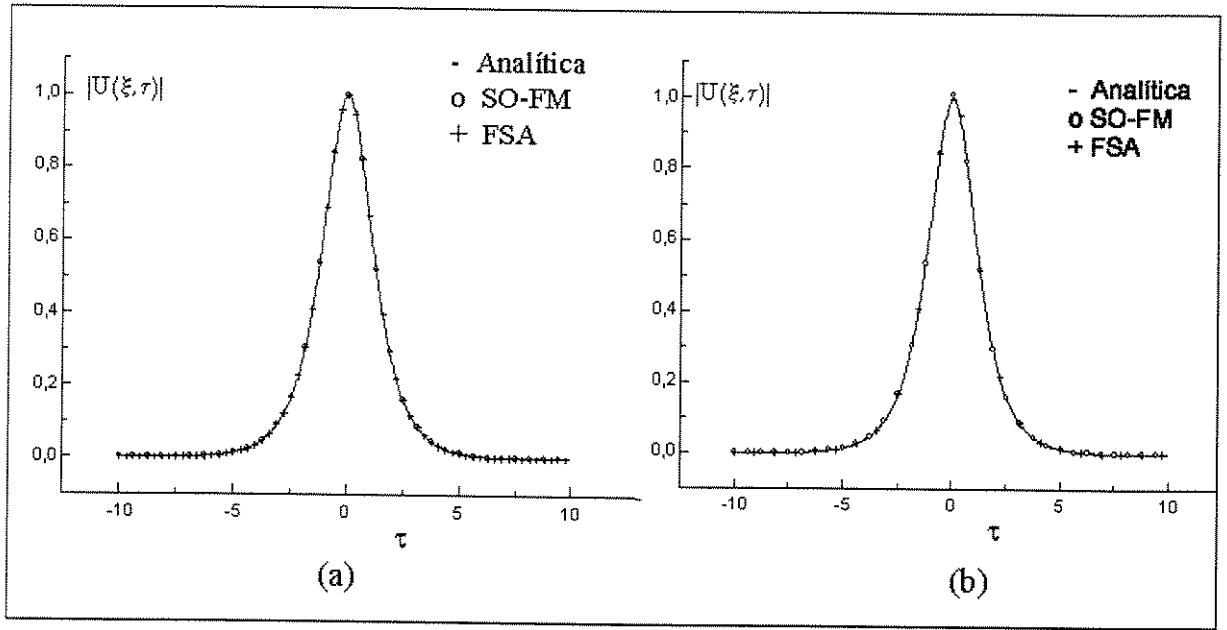


Fig. 3-1: Resultados da propagação de, (a) um sólton fundamental e, (b) um sólton de segunda ordem após percorrer uma distância equivalente a um período de sólton ($\xi = \frac{\pi}{2}$). Desprezan-se as perdas e a dispersão de terceira ordem.

Os exemplos de comparação aqui apresentados, sugerem que o método da FSA não é eficiente o suficiente para ser considerado um método alternativo, ainda mais se considerarmos situações mais complexas como a propagação de sóltons de alta ordem ou múltiplas colisões de sóltons. Estas situações demandam um grande número de termos na série de Fourier; conseqüentemente, o número de equações diferenciais a ser resolvidas, pelo Método de Runge-Kuta, fazem com que a FSA seja muito lenta (considerando ainda o processo de casamento) quando comparada com outros métodos conhecidos.

Capítulo 4

Condições de Fronteira Transparentes Para a Propagação de Sólitons

4.1 Introdução

As Condições de Fronteira Transparentes (*Transparent Boundary Condition*-TBC) [46], [47], é baseada na suposição de que os feixes comportam-se como ondas planas na vizinhança da fronteira truncada. As TBC reduzem drasticamente as reflexões não desejadas na fronteira virtual. Até agora, as TBC têm sido aplicadas às equações de onda lineares espaciais. Neste trabalho, aplicamos as TBC às equações de onda não-lineares, tanto no domínio espacial como também no temporal.

Como mencionamos anteriormente, para problemas de propagação, a técnica numérica mais utilizada é o BPM que está baseada no esquema de SOM juntamente com a FFT, chamada aqui de SO-FM [16], [1]. Desde que o SO-FM utiliza o algoritmo FFT, este impõe condições de fronteira periódicas, as mesmas que no caso de radiação forte, precisam de janelas computacionais muito grandes para minimizar as interações não desejadas entre a solução e a radiação na fronteira. Para resolver este problema, alguns autores tem incluído termos absorvedores no modelo considerado [49] e [50]; de qualquer modo, estas técnicas, porém, dependem de parâmetros ajustáveis para cada situação analisada; portanto, sua aplicabilidade é altamente restrita.

Para resolver as equações de onda não-lineares aplicando o FEM ou FDM, e outros métodos numéricos, temos utilizado até agora condições de fronteira de Dirichlet Homogêneas, Neumann Homogêneas, ou periódicas. Neste trabalho, pela primeira vez, utilizamos as TBC juntamente com o FEM para resolver equações de onda não-lineares, e, deste modo, é possível reduzir a radiação não desejada nas fronteiras do problema.

4.2 Fundamentação Matemática

Para utilizar as TBC nas equações não-lineares de onda, consideraremos primeiramente dois modelos: A equação NLS em fibra com dispersão anômala, definida pelos operadores (3.24) (3.25), com $s = \gamma = \delta = 0$, e $\Gamma = 0$.

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + i|U|^2 U \quad (4.1)$$

e as equações GNLS com efeito Kerr, definida pelos operadores (3.21), (3.22), com $\Gamma(x, z) = 0$, e o índice de refração dado por $n^2(x, |U|^2) = n_i^2 + \alpha_i |U|^2$, $i = c, f, s$.

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{i}{2k_0\beta} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{ik_0}{2\beta} \left[n^2(x, |U|^2) - \beta^2 \right] U \quad (4.2)$$

Aqui, U representa a envoltória de variação lenta do campo elétrico e c , f , e s referem-se à casca ($x \leq -d$), filme ($-d \leq x \leq d$) e substrato ($x \geq d$), respectivamente.

Das Eqs. (4.1), (4.2), observando que $\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} = U \frac{\partial U^*}{\partial \xi} + U^* \frac{\partial U}{\partial \xi}$, ξ e ζ são, respectivamente, as variáveis de propagação e transversais dos modelos (4.1), (4.2), como descritas no Capítulo 3, podemos escrever

$$\frac{\partial |U|^2}{\partial \xi} = \frac{i}{2\kappa} \left\{ -U \frac{\partial^2 U^*}{\partial \zeta^2} + U^* \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right\} \quad (4.3)$$

onde $\kappa = k_0\beta$ para a Eq. (4.2) e $\kappa = 1$ para a Eq. (4.1). Integrando no domínio $[a, b]$, podemos escrever (4.3) na forma de conservação da energia como:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_a^b |U|^2 d\zeta = \frac{i}{2\kappa} \left\{ \left[U^* \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial U^*}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=b} - \left[U^* \frac{\partial U}{\partial \zeta} - U \frac{\partial U^*}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=a} \right\}. \quad (4.4)$$

Logo, aplicando a hipótese de que os feixes comportam-se como ondas planas em torno às fronteiras virtuais $\zeta = a, b$ [46], escrevemos, $U = U_a \exp(-ik_a\zeta)$ em $\zeta = a$, e $U = U_b \exp(ik_b\zeta)$ em $\zeta = b$; aqui os parâmetros k_a e k_b são constantes a serem determinadas. Com isso, de acordo com a discretização em FE podemos escrever,

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=a} = -ik_a U(a), \quad \frac{\partial U}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=b} = ik_b U(b) \quad (4.5)$$

Desta forma, com as TBC dadas em (4.5), a Eq. (4.4) pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_a^b |U|^2 d\zeta = -\frac{|U(b)|^2}{\kappa} \text{Re}(k_b) - \frac{|U(a)|^2}{\kappa} \text{Re}(k_a) \equiv -F_b + F_a \quad (4.6)$$

na qual $F_b = \frac{|U(b)|^2}{\kappa} \text{Re}(k_b)$ é o fluxo de energia saindo pela fronteira direita da janela computacional W , $F_a = -\frac{|U(a)|^2}{\kappa} \text{Re}(k_a)$ a energia entrando pela fronteira esquerda. Portanto, se mantermos as partes reais de k_a e k_b como sendo positivas, os fluxos de energia em ambas fronteiras ($F_a < 0$, $F_b > 0$) serão sempre expelidos do domínio truncado do problema. Essa propriedade importante

das equações diferenciais de propagação devem ser incorporadas nos métodos numéricos. Se não considerarmos as TBC's nestes tipos de problemas, ocorrerá uma considerável reflexão nas fronteiras da janela computacional W , interferindo com a solução numérica procurada.

Para o cálculo dos parâmetros das TBC: k_a e k_b , utilizamos a Eq. (4.5) na sua forma discreta, veja Eq. (3.36), isto é:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \exp[ik_a(\zeta_2 - \zeta_1)], \quad \frac{\alpha_M}{\alpha_{M-1}} = \exp[ik_b(\zeta_M - \zeta_{M-1})] \quad (4.7)$$

i.e.,

$$k_a = -\frac{i}{\Delta\zeta} \ln\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \quad k_b = -\frac{i}{\Delta\zeta} \ln\left(\frac{\alpha_M}{\alpha_{M-1}}\right) \quad (4.8)$$

Desta forma, temos calculado completamente a matriz L' combinando adequadamente o vetor $\vec{g}$ e a matriz L , como expresso na Eq. (3.41).

4.3 Resultados Numéricos

Para os resultados numéricos, utilizamos o esquema FO-FEM, usando o esquema de Crank-Nicholson com 2 iterações a cada passo ($nit = 2$) [34]. Na primeira parte desta seção apresentaremos resultados considerando a equação NLS temporal com dispersão anômala. Como mencionamos anteriormente, esta equação descreve a propagação de sólitons brilhantes em fibras ópticas monomodais. Utilizamos 200 elementos quadráticos para representar o campo óptico na coordenada temporal τ , e o passo em ξ como sendo 0,02. Os primeiros resultados são mostrados nas Figs. 4-1 e 4-2; a Fig. 4-1 mostra a propagação de sóliton fundamental com amplitude unitária, velocidade unitária [1], e considerando condições de fronteira de Neumann homogêneas. Devido ao ângulo entre o eixo ξ e a direção de propagação, o sóliton colide com a fronteira truncada da direita, ocorrendo reflexão total. Quando consideramos TBC, observe-se que não existe reflexão na fronteira, como mostramos na Fig. 4-2.

Nas Figs. 4-3 e 4-4, observamos a formação de sólitons brilhantes a partir de um pulso quadrado de amplitude unitária na entrada; note, na Fig. 4-3, que a radiação é refletida, afetando a precisão da solução numérica, quando consideramos condições de fronteira de Neumann homogêneas. Por outro lado, na Fig. 4-4 observa-se que as componentes de radiação são expelidas para fora da janela numérica quando consideramos as TBC. O pulso quadrado inicial está definido por:

$$U(0, \tau) = \begin{cases} 0 & \text{para } \tau < -1,5 \\ 0,9 & \text{para } \tau \in [-1,5, 1,5] \\ 0 & \text{para } \tau > 1,5 \end{cases} \quad (4.9)$$

Com o mesmo esquema de simulação anteriormente descrito, propagamos um pulso inicial $U(0, \tau) = (1 + 0,6 \cos(7\tau)) \operatorname{sech}(\tau)$, o qual é uma superposição de um sóliton com uma perturbação rápida do mesmo. Esta forma de pulso foi implementada por P. Berg [49], onde para resolver o problema de

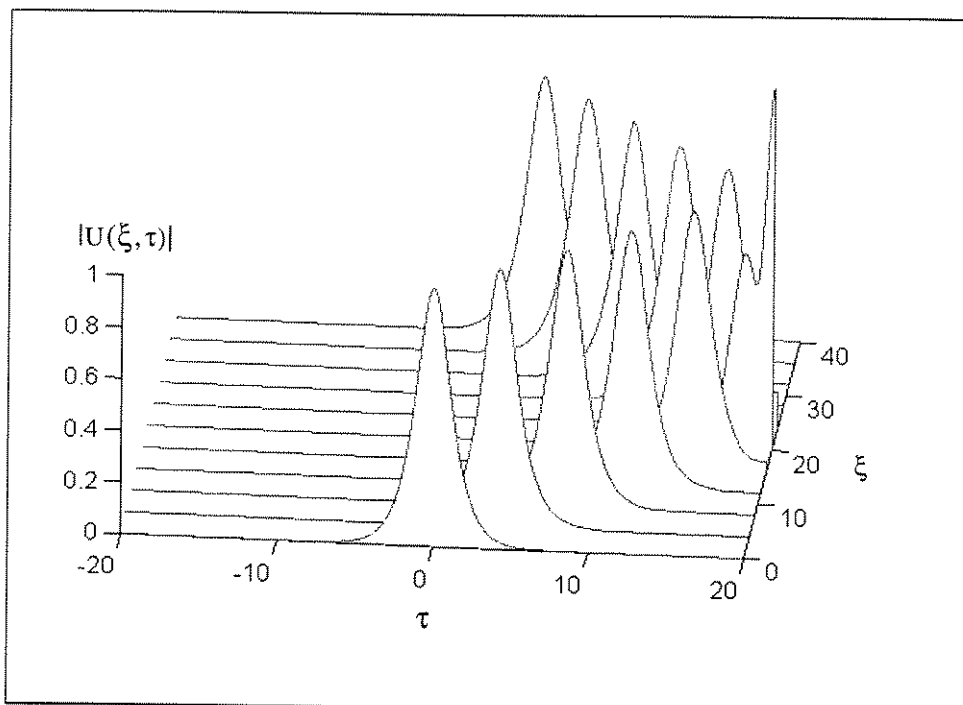


Fig. 4-1: Sóliton fundamental propagando-se com velocidade unitária, e com condições de fronteira de Neumann homogêneas.

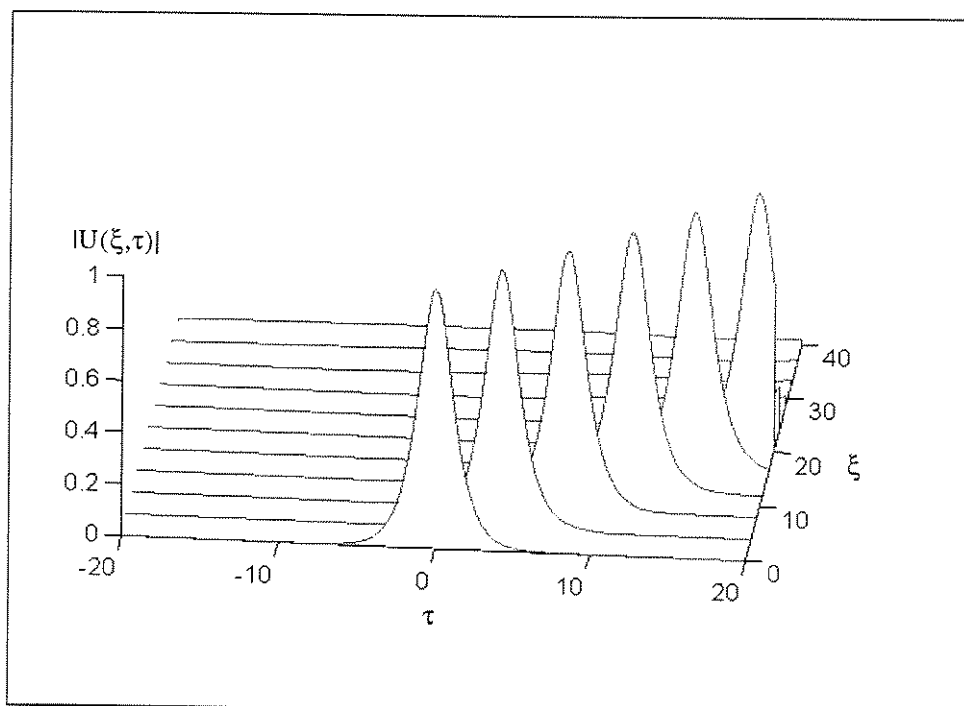


Fig. 4-2: Sóliton fundamental propagando-se com velocidade unitária, e condições de fronteira transparentes.

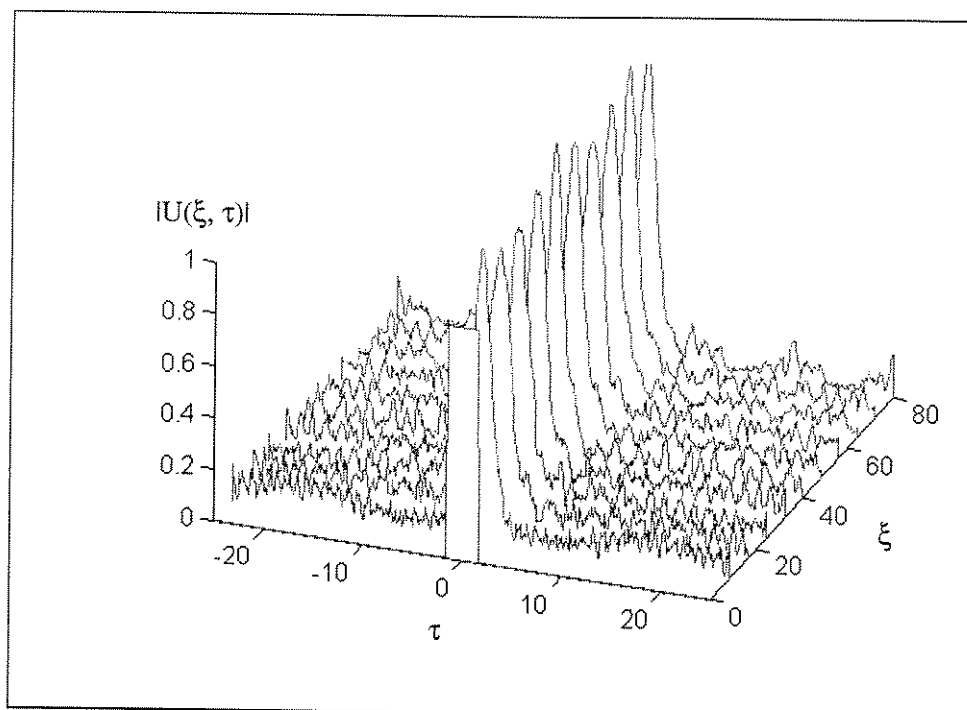


Fig. 4-3: Formação do sóliton fundamental a partir de um pulso quadrado, com condições de fronteira de Neumann homogêneas.

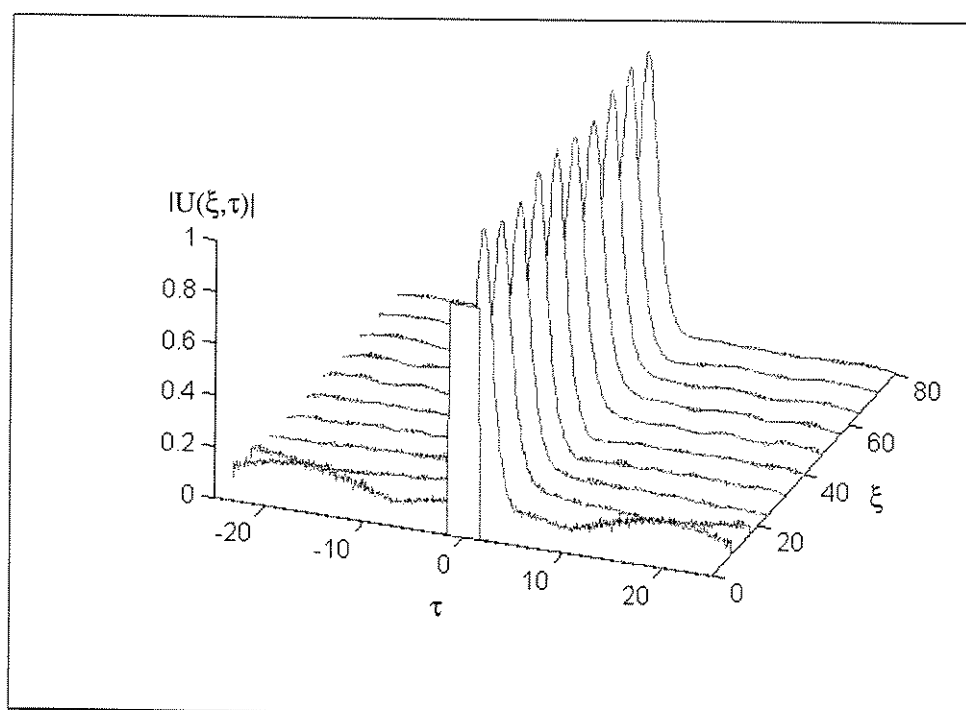


Fig. 4-4: Formação de sóliton fundamental, a partir de um pulso quadrado, utilizando TBC.

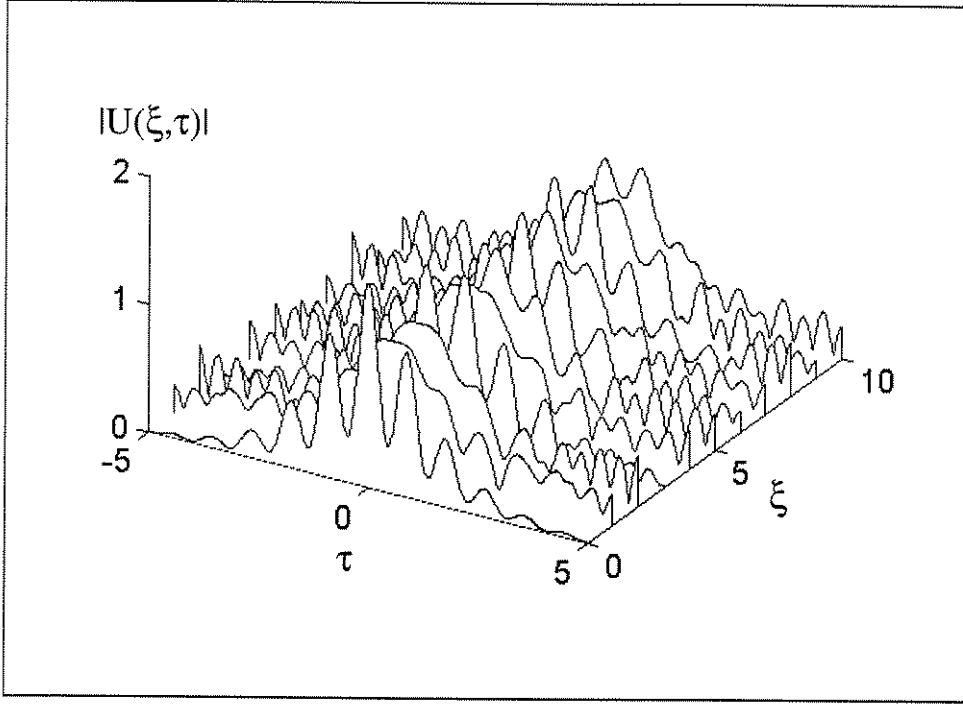


Fig. 4-5: Formação de um sóliton fundamental a partir de um pulso incidente da forma $U(0, \tau) = (1 + 0,6 \cos(7\tau)) \sec h(\tau)$, com condições de fronteira de Neumann homogêneas.

radiação, sugeriu a adição de um termo absorvente na equação diferencial parcial a ser resolvida utilizando SO-FM. De qualquer forma, como é mostrado na literatura, a adição do termo absorvente implica resolver um modelo diferente para cada problema analisado [49], [50]. Portanto, a aplicação desse método é altamente restrito.

As Figs. 4-5 e 4-6 mostram a simulação para o campo de entrada mencionado anteriormente, utilizando FO-FEM com condições de Neuman e TBC, respectivamente.

Na segunda parte deste capítulo, consideramos a equação NLS espacial (4.2) para propagar ondas TE na frequência w ao longo de guias de onda planares não-lineares, cuja geometria é dada na Fig. 4-7. Neste caso, U representa a variação lenta do campo elétrico, i.e. a envoltória. Para os resultados apresentados aqui, consideramos $d = 8\frac{c}{w}$, $n_c = n_s = 1,55$, $n_f = 1,57$, $\alpha_f = \alpha_s = 0$, e $\alpha_c = 0,01$, que corresponde ao auto-focamento não-linear do tipo Kerr na casca.

O perfil de entrada considerado é gaussiano com amplitude $A = 6,32$, largura $\sigma = 10$, centrado em $x_0 = 0$, com ângulo de incidência $\theta = 0$, dado por:

$$U(0, x) = A \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right)^2 + i \sin(\theta) \right]$$

Este perfil de entrada assemelha-se ao modo guiado linear TE_0 em sistemas sem perdas. Por outro lado, o fluxo de entrada, S_{in} , foi avaliado com $\frac{1}{2Z_0} \frac{\beta}{k_0} \int_{-\infty}^{\infty} |U(0, x)|^2 dx$, $Z_0 = 377\Omega$ [63]. Porém, para $S_{in} \geq 0,4$, sabe-se que existe emissão de dois sólitons brilhantes espaciais, do filme para a casca, [60], e [61].

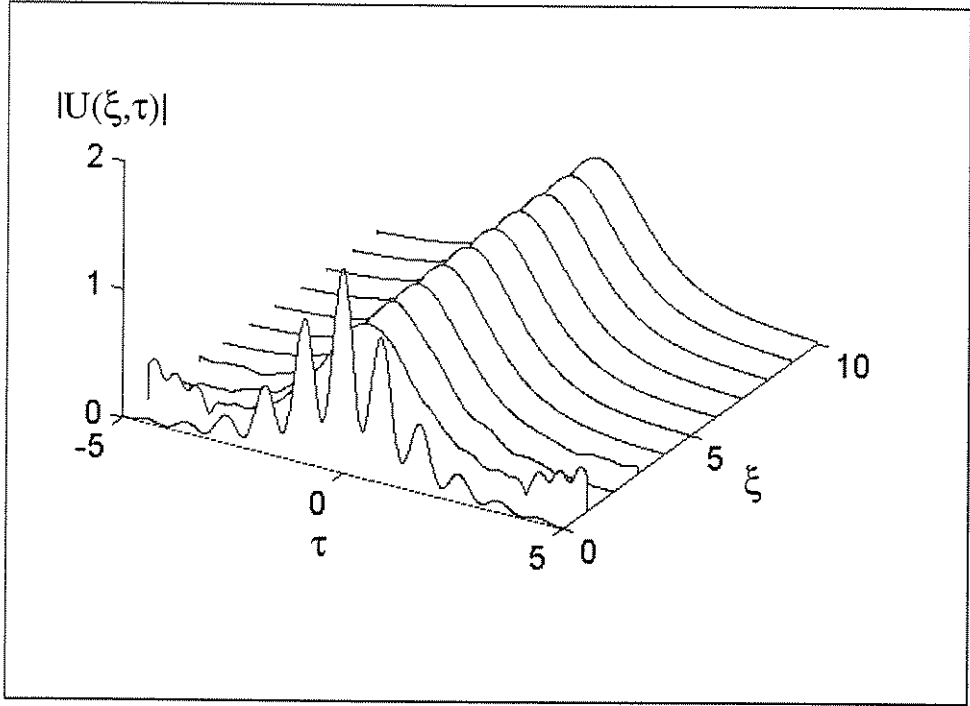


Fig. 4-6: Formação de um sólton fundamental a partir de um pulso incidente da forma $U(0, \tau) = (1 + 0,6 \cos(7\tau)) \operatorname{sech}(\tau)$, com TBC.

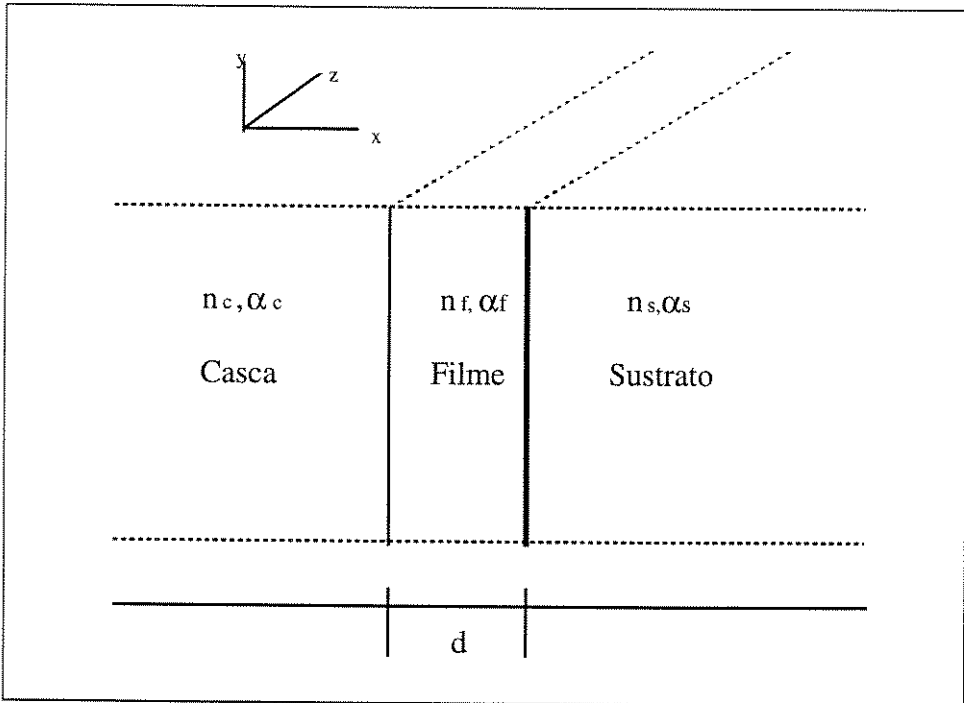


Fig. 4-7: Geometria de guia de onda planar não-linear.

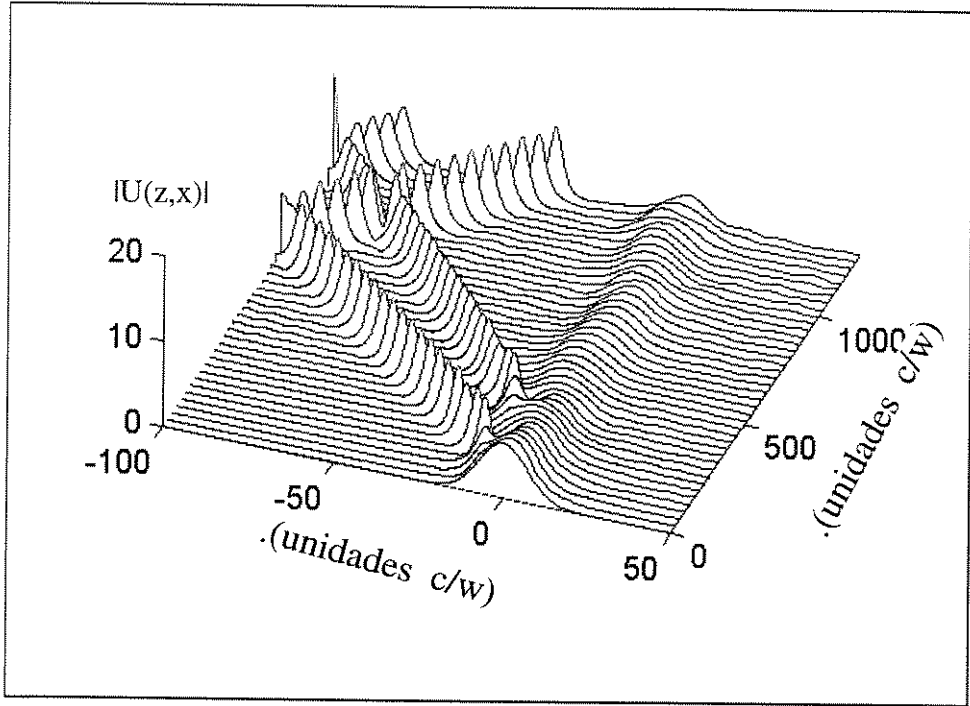


Fig. 4-8: Emissão solitônica para pulsos incidente gaussiano, considerando fronteiras de Neumann homogêneas.

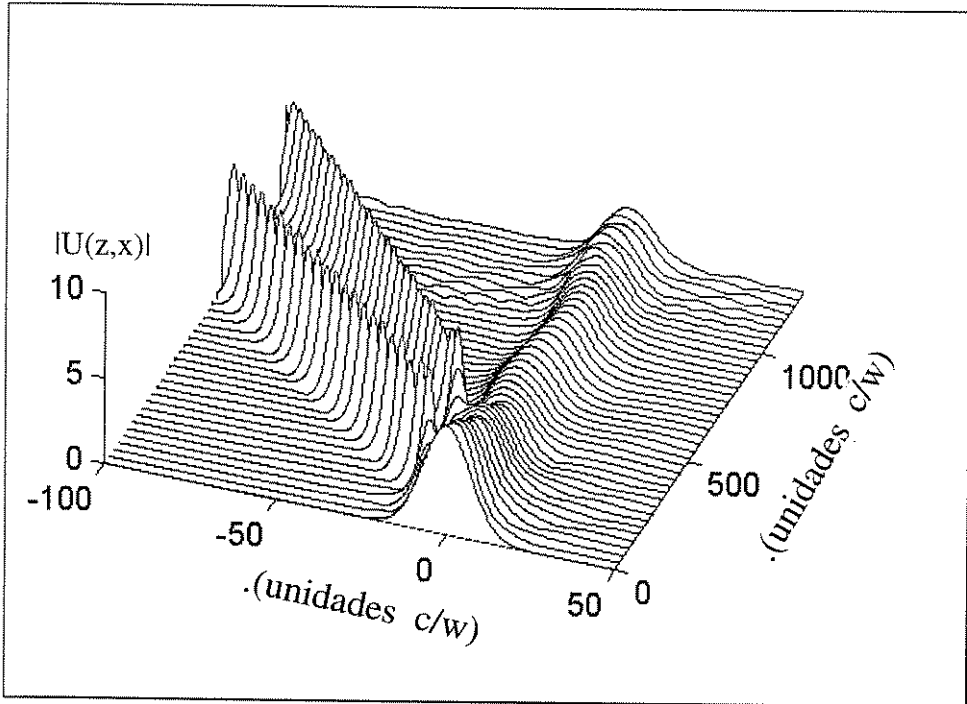


Fig. 4-9: Emissão solitônica para pulso incidente gaussiano, considerando TBC.

A janela computacional $W = [-100,50]$ está em unidades de $\frac{c}{w}$, com número de nós $M = 651$; a distância de propagação em ξ foi de 1280 unidades de $\frac{c}{w}$ (ou seja 203,72 comprimentos de onda), com passo de propagação $\Delta\xi = 0,4$ (0,064 comprimentos de onda). Os resultado obtidos, via FO-FEM, estão ilustrados nas Figs. 4-8 e 4-9. Também, foi verificada a convergência diminuindo o comprimento do passo de propagação $\Delta\xi$, e aumentando o número de nós M em W . A janela computacional foi dividida em três sub-intervalos $[-100,-8]$, $[-8,8]$, e $[8, 50]$, com cada sub-intervalo dividido em 500, 50, e 100 elementos lineares, ou com 300, 30, e 50 elementos quadráticos, respectivamente. A melhoria nos resultados torna-se evidente quando uma malha irregular é considerada [65].

Para uma comparação quantitativa entre os métodos utilizados, usamos a solução analítica para o caso de propagação de sóliton temporal fundamental sem perdas. Na Tabela 4.1 apresentamos os resultados obtidos com refinamento de malha uniforme, e comprimento de propagação $\xi = 100$, com $W = [-10,10]$, número de nós $M = 400$. Os métodos utilizados e implementados com TBC são: FO-FEM, SO-FEM com expansão de Taylor para o operador não-linear (SOT-FEM), e o SO-FEM associado com o método de colocação no operador não-linear (SOC-FEM). O erro foi definido como sendo o $\max |u - u'|$, onde o máximo é tomado entre todos os nós M ; u, u' representam a solução exata e aproximada [2], em $\xi = 100$, respectivamente.

Método	$\Delta\xi$	nit	T (Seg.)	Erro ($\times 10^{-3}$)
FO-FEM semTBC	0,1	2	31,52	17,86
	0,1	4	54,85	0,27
FO-FEM com TBC	0,1	2	52,36	17,90
	0,1	4	75,50	0,28
SOT-FEM sem TBC	0,05	-	21,80	3,35
SOT-FEM com TBC	0,05	-	48,30	0,78
SOC-FEM sem TBC	0,05	-	53,30	3,36
SOC-FEM com TBC	0,05	-	76,50	0,04

Tabela 4.1: Resultados obtidos utilizando FO-FEM, SOT-FEM, e SOC-FEM. Todos os métodos foram implementados com fronteiras de Neumann homogeneas e TBC para propagação de sólitons ópticos. Somente foram utilizados elementos quadráticos.

Uma vez que precisa-se incorporar os parâmetros de TBC a cada passo de propagação, torna-se necessário fazer o processo de inversão de matriz (decomposição LU) a cada passo de propagação, sistemas (3.43) e (3.45). Deste modo, os algoritmos ficam mais lentos comparados aos implementados sem TBC; no entanto, os algoritmos de SOT-FEM com 3 termos na expansão de Taylor, e SOC-FEM, o tempo de cálculo é suficientemente curto. A utilização desses algoritmos de SOM foram sugeridos mas não matematicamente fundamentados até agora. Observa-se que no SOC-FEM utiliza-se como funções peso as funções delta sugeridas no método de colocação em [24], e embora não recomendadas na formulação de Galerkin, apresentada no Capítulo 3, os resultados são ainda aceitáveis. As experiências numéricas mostram que a eficiência e confiabilidade dos resultados neste método, são satisfatórios

somente para $\Delta\xi \leq 0,1$.

Para aumentar a velocidade dos algoritmos e evitarmos o processo de inversão a cada passo de propagação, os parâmetros da TBC podem ser incorporados na matriz não-linear, dada em (3.22), mas até agora os resultados foram infrutíferos, tanto no caso temporal como espacial. Isto pode-se justificar em parte, devido ao fato de que, em SOT-FEM, o operador não-linear com os parâmetros TBC, deixa de ser considerado uma perturbação do operador linear; e as funções delta δ não oferecem a regularidade requerida para a formulação de Galerkin no SOC-FEM. Finalmente, todos os resultados deste capítulo assim como dos outros capítulos da tese, foram obtidos utilizando-se um computador Sun SPARCserver 1000E, 6 processadores SuperSPARC de 50 MHz, 256 Mbytes de Memória RAM, Sistema Operacional Solaris Versão 2.5.1.

Capítulo 5

Intrapulso por Espalhamento Estimulado Raman

5.1 Introdução

Do ponto de vista matemático, os sólitons são uma classe especial de soluções de equações diferenciais que podem ser resolvidas analiticamente utilizando-se Métodos de Transformadas Espectrais Não-Lineares [5], [6]. Enquanto esta classe de equações inclui a equação NLS (2.63), as equações que resultam, quando levamos em conta os efeitos de dispersão de alta ordem, birrefringência, Raman, Brillouin, e de atenuação linear, não podem ser resolvidas utilizando-se as técnicas de transformadas espectrais não-lineares [9]. Os termos que modelam esses efeitos surgem como perturbações da equação NLS. Para analisarmos o comportamento dessas equações quando comparadas com a equação NLS, devemos estudar cada um dos efeitos incorporados, através da análise das soluções solitônicas correspondentes.

Neste Capítulo estuda-se o efeito da resposta não-linear retardada do meio e como esse efeito, chamado de Intrapulso por Espalhamento Estimulado Raman (*Intrapulse Stimulated Raman Scattering-ISRS*), pode ser utilizado na compressão de pulsos solitônicos [69]; isso será feito utilizando a equação GNLS.

5.2 Efeito Intrapulso por Espalhamento Estimulado Raman

O Intrapulso por Espalhamento Estimulado Raman (ISRS) é um efeito que se apresenta quando o pulso tem uma largura da ordem de femtosegundos; este fenômeno é responsável pelo deslocamento auto-induzido em frequência, e o decaimento do sólito [14], [71]. Dianov *et al.* observaram o ISRS, chamando-o de Espalhamento auto-induzido Raman [70]. Mitschke e Mollenauer [68] observaram o deslocamento auto-induzido da frequência, e Gordon interpretou este efeito como sendo um efeito causado pelo ISRS [14]. Fisicamente, no fenômeno de ISRS [69] ou Espalhamento Estimulado Raman

(SRS) auto-induzido [70], apresenta-se quando o espectro do pulso é muito largo (excede alguns THz), quando as componentes de altas frequências podem transferir energia para as componentes de baixas frequências. Tal transferência de energia resulta em uma mudança gradual do espectro do pulso para os comprimentos de onda maiores, destruindo o período do s6liton.

Pulsos 6pticos com comprimentos de onda maiores do que $1,3 \mu m$ geralmente experimentam SPM e GVD durante a propaga73o dentro da fibra de s6lica [1]. As fibras de s6lica podem atuar como compressores sem a necessidade de uma grade externa. O mecanismo de compress3o 6 relacionado 3s propriedades fundamentais dos s6litons de alta ordem. Nos 6ltimos anos tem-se verificado um grande interesse na compress3o de pulsos atrav6s do uso de s6litons [1]. Dependendo se a fibra apresenta GVD normal ou an6mala, utiliza-se dois esquemas diferentes de compress3o. No caso de GVD normal, a fibra imp6e um gorjeio de frequ6ncia linear na frente do pulso, o mesmo que 6 comprimido passando atrav6s de um par de grades [1], [4]. No caso de GVD an6mala, o pulso 6 gorjeado e comprimido pela mesma fibra, atrav6s do uso de s6litons de alta ordem em fibras 6pticas. Como temos indicado anteriormente, Cap6tulo 2, esses s6litons sofrem um estreitamento do pulso inicial durante suas evolu73es peri6dicas, de acordo com a equa73o NLS. Desta forma, escolhe-se o comprimento da fibra, de tal forma que o pulso seja retirado quando apresente o m6nimo estreitamento poss6vel [73]. Esta t6cnica 6 conhecida como a t6cnica de compress3o solit6nica, para enfatizar a sua origem.

O comprimento, z_{opt} , 6 o comprimento da fibra na qual a largura do pico central 6 m6nima, e o fator de compress3o F_c 6 o raio entre o $FWHM$ do pulso comprimido e a largura do pulso inicial. Resultados num6ricos mostram que o fator de compress3o, F_c , e o comprimento 6timo z_{opt} de compress3o solit6nica para a equa73o NLS s3o dadas por [1]

$$F_c = 4,1N \quad (5.1)$$

$$z_{opt} = z_0 \left(\frac{0,32}{N} + \frac{1,1}{N^2} \right) \quad (5.2)$$

No entanto, o ISRS afeta tanto o comprimento 6timo da fibra e o fator de compress3o dadas pelas Eqs. (5.1) e (5.2), quando utiliza-se a t6cnica de compress3o solit6nica [1], [69]. Na verdade, Gouveia *et al.* [72] observaram experimentalmente que este aspecto longitudinal da fibra, para a compress3o de pulsos ultra-curtos, n3o coincide com o comprimento estabelecido pela equa73o NLS.

Para pulsos de largura da ordem de 100fs devemos levar em conta os efeitos de ordem superior, tanto de dispers3o, como n3o-lineares. Desta forma, em termos das vari3aveis normalizadas U , ξ , τ introduzidas nas Eqs. (2.23), (2.24), (2.60), a Eq. (2.19) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{i}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \delta \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + iN^2 \left[|U|^2 U + is \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - \tau_R U \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2) \right] \quad (5.3)$$

onde o pulso propaga-se no regime de dispers3o an6mala e as perdas na fibra s3o desprezadas. O

parâmetro N está dado pela Eq (2.62), e os parâmetros s , δ , e τ_R são dados por

$$\delta = \frac{\beta_3}{6|\beta_2|T_0}, \quad s = \frac{1}{w_0T_0}, \quad \tau_R = \frac{T_R}{T_0}. \quad (5.4)$$

que levam em conta os efeitos de dispersão de ordem superior, auto-deflexão do pulso, e o atraso na resposta não-linear do meio (efeito Raman), respectivamente. Nota-se que estes parâmetros variam inversamente com a largura do pulso e são praticamente desprezíveis para T_0 maiores que 1 picosegundo. A utilização da Eq. (5.3) torna-se questionável para pulsos de largura menores do que 100 femtosegundos, pois ela leva em conta efeitos da forma do espectro do ganho Raman nesses tipos de pulsos [1], nessas condições utiliza-se a Eq. (B.25), do Apêndice B.

Como observado anteriormente, o parâmetro τ_R leva em conta o efeito ISRS, e está governado pelo termo proporcional ao τ_R na Eq. (5.3). A magnitude de τ_R é determinada a partir do parâmetro T_R , o qual está relacionado com o desvio do ganho Raman em torno da frequência portadora w_0 ($T_R = 6 - 8fs$) [14]. Para pulsos ultra-curtos com largura $T_0 < 1ps$, os termos de não-linearidade e dispersão de alta ordem em (5.3) influenciam na propagação do pulso em proporção inversa à largura do pulso. Isto faz com que o ISRS seja dominante nessas condições, enquanto os termos de dispersão alta ordem e auto-deflexão são importantes somente para pulsos de largura $T_0 < 100fs$.

Para observar o efeito ISRS, resolvemos a Eq. (5.3) utilizando os FEM e FM descritos no Capítulo 3. Consideramos um pulso de entrada como sendo um sólon de ordem 10, ou seja $N = 10$ e $U(0, \tau) = \text{sech}(\tau)$ onde a largura do pulso corresponde a 1 picosegundo. Qualitativamente, um comportamento similar apresenta-se para outros valores de $N > 1$ [1]. Na Fig. 5-1, mostramos a evolução do sólon de ordem 10 com $\delta = s = \tau_R = 0$, com comprimento de propagação $\xi = 0,1$. Observe o estreitamento do pico central em $\xi = 0,07$ e, logo após, o pulso particiona-se em várias componentes. Esse comprimento de fibra ($\xi \simeq 0,07$) é escolhido para efeitos de compressão do pulso. A energia restante que fica na forma de anel na parte central do pulso apresenta-se desde que durante o estreitamento inicial os sólons de alta ordem sejam dominados por SPM, induzindo um gorjeio linear no centro do pulso, veja Capítulo 2; desta forma, unicamente o pulso central é comprimido pela GVD e a energia no resto do anel fica sem ser comprimida.

No segundo caso consideramos a evolução do pulso solitônico de ordem 10 com efeito ISRS. Nessas condições, $\delta = s = 0$, e $\tau_R = 0,01$, na equação GNLS (5.3). Como indicado, esses valores correspondem ao caso em que a largura do pulso inicial, T_{FWHM} , é de aproximadamente $1ps$, o parâmetro de GVD $\beta_2 \simeq -20ps^2/km$, e o comprimento de dispersão $L_D = T_0^2/|\beta_2| \simeq 18m$. Com isso, os parâmetros δ e s são desprezíveis e o fator de compressão é de, aproximadamente, $F_c = 90$ [69]. Observe nas Figs. 5-1 e 5-2, que a forma dos pulsos são aproximadamente os mesmos até o comprimento de $\xi = 0,06$, excepto por uma assimetria fraca. O ISRS muda bruscamente a forma do pulso para $\xi \geq 0,07$. O fato mais notável é que o pico central se desloca à direita. Este pico corresponde ao pico central da Fig. 5-1, observado em $\xi = 0,07$. Enquanto o pico particiona-se em vários picos em $\xi \geq 0,07$ para o

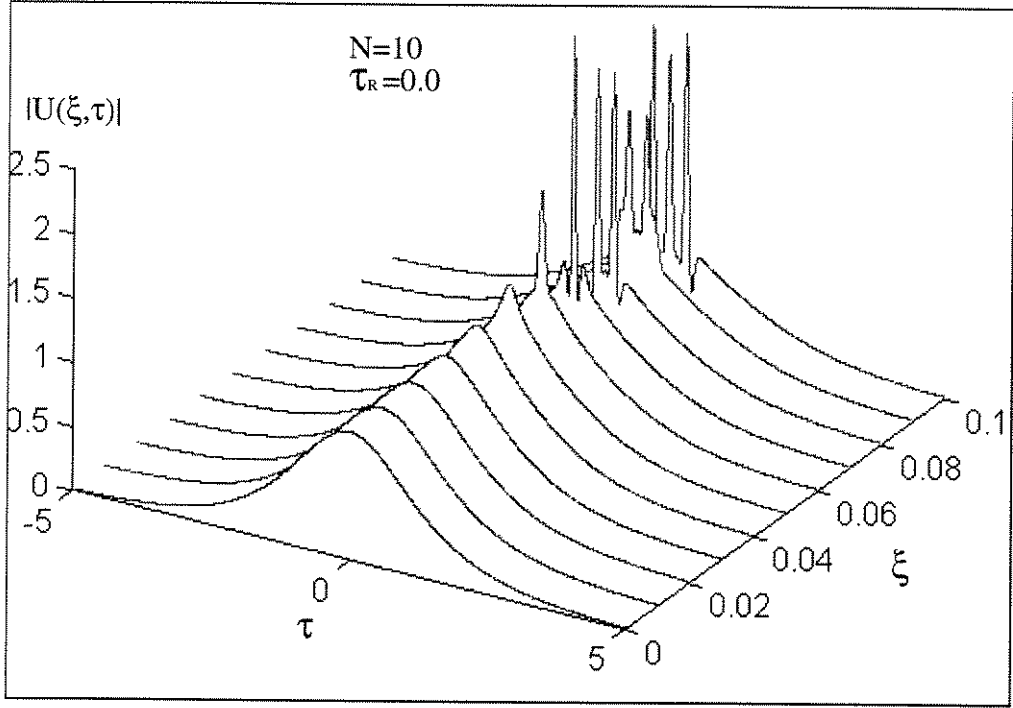


Fig. 5-1: Evolução do sóliton de ordem 10, até $\xi = 0,1$ ($\simeq 1,8m$); observa-se o estreitamento e a partição associada com os sólitons de alta ordem. Aqui o ISRS é desprezado, considerando $\tau_R = 0$.

caso em que $\tau_R = 0$; este permanece intacto deslocando-se à direita, no caso em que $\tau_R = 0,01$. Esses resultados estão de acordo com os existentes na literatura [1], [69] onde tem-se utilizado o SO-FM. Na verdade, este é um interessante resultado para ser utilizado na validação dos esquemas numéricos apresentados, devido à dinâmica do pulso envolvido.

O deslocamento à direita pode ser entendido considerando que em fibras com GVD anômala, as componentes vermelhas viajam mais lento do que as componentes azuis; desta forma, o deslocamento vermelho aumenta a largura espectral do pulso que corresponde ao pico central do pulso que, desta forma, desloca-se à direita, veja Fig. 5-2, enquanto o deslocamento das componentes azuis correspondem aos picos restantes na região central, que desloca-se à esquerda. De acordo com Agrawal [1], o fato mais notável no domínio espectral é o alargamento espectral do pulso de aproximadamente 4 vezes a largura espectral do pulso inicial. O deslocamento vermelho é chamado de deslocamento auto-induzido em frequência do sóliton, para enfatizar que o pico central deslocado surge pelo desvio da frequência auto-induzida do sóliton, iniciada pelo ISRS [13], [14] e [70].

Fisicamente, para pulsos da ordem de 1 ps ou menores, a largura espectral do pulso de entrada é alargada de forma que o ganho Raman pode amplificar as componentes espectrais vermelhas pelo bombeio das componentes azuis do mesmo pulso, através do ISRS, veja Apêndice B. Este processo continua ao longo da fibra, de tal forma que o pico central move-se mais lento do que o resto do pulso, separando-se deste pela mudança na sua velocidade de grupo induzida pelo deslocamento em frequência do sóliton e ainda com um aumento da sua distância de propagação. Observando a Fig.

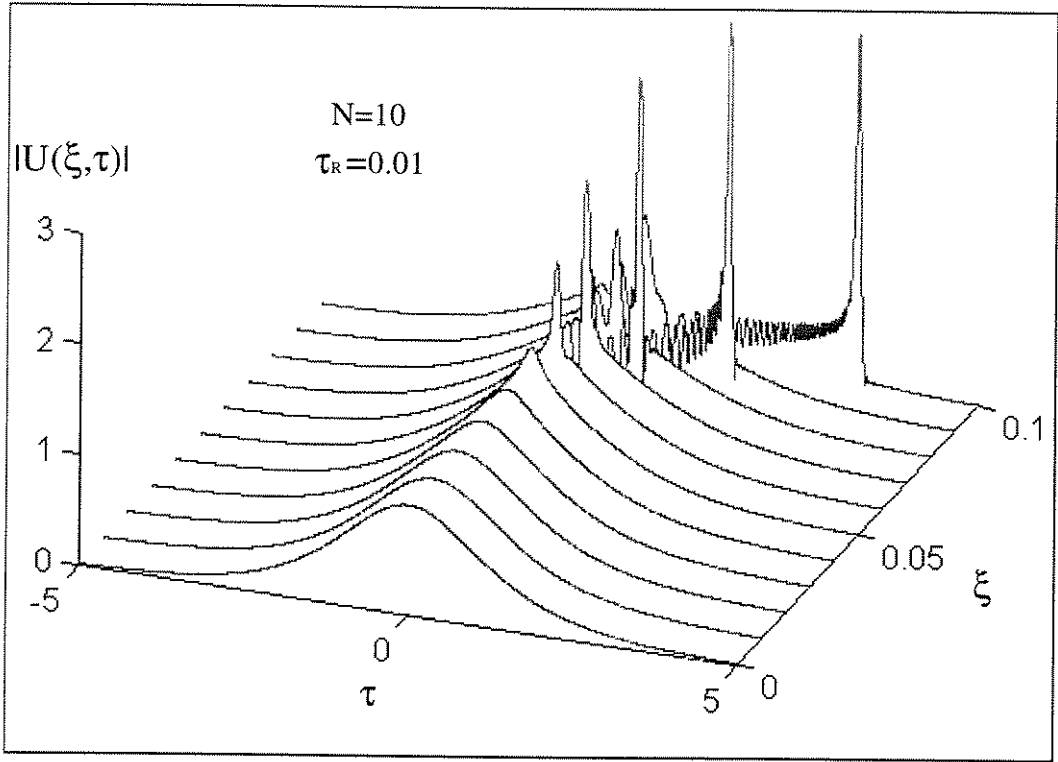


Fig. 5-2: Efeito do ISRS, com $\delta = s = 0$, e $\tau_R = 0,01$. Este valor de τ_R corresponde ao pulso de entrada de largura de 1 picosegundo.

5-2, podemos afirmar que o pulso torna-se assimétrico, aproximadamente, para comprimentos de fibra $\xi = 0,08$, com energia transferida para comprimentos de onda maiores. Nessas condições, podemos obter o pulso comprimido desde que a energia do pulso não comprimido possa ser removida por processo de filtragem.

Na Fig. 5-3 mostramos o resultado obtido utilizando o SO-FM. Com distância de propagação $\xi = 0,12$, mesma largura de passo de propagação das figuras anteriores $\Delta\xi = 10^{-5}$, e número de incógnitas $M = 1024$. Pode-se observar que, devido às condições periódicas da FFT usada em SO-FM, precisa-se aumentar a janela numérica na coordenada temporal. Isto pode afetar a precisão do método. De qualquer forma, com a utilização do algoritmo FO-FEM juntamente com TBC, a largura da janela computacional pode ser fixada da ordem desejada, sem afetar a natureza física, como será ilustrada posteriormente.

O uso de N -sóliton permite uma compressão significativa do pulso inicial, veja [55], [69], conforme pode ser observado através da comparação das Figs. 5-1 e 5-2. Porém, o uso de ISRS faz com que o comprimento da fibra não precisa ser tão crítico pois, a partir de um certo valor ($\xi = 0,07$ neste caso), o pulso comprimido pode ainda ser recuperado. Isto não acontece quando não levamos em conta o ISRS, veja Fig. 5-1.

Da mesma forma como no Capítulo 4, implementou-se as TBC conjuntamente com FO-FEM e SO-FEM. Na Fig. 5-4(a) mostramos o efeito ISRS utilizando-se fronteiras de Neumann homogêneas,

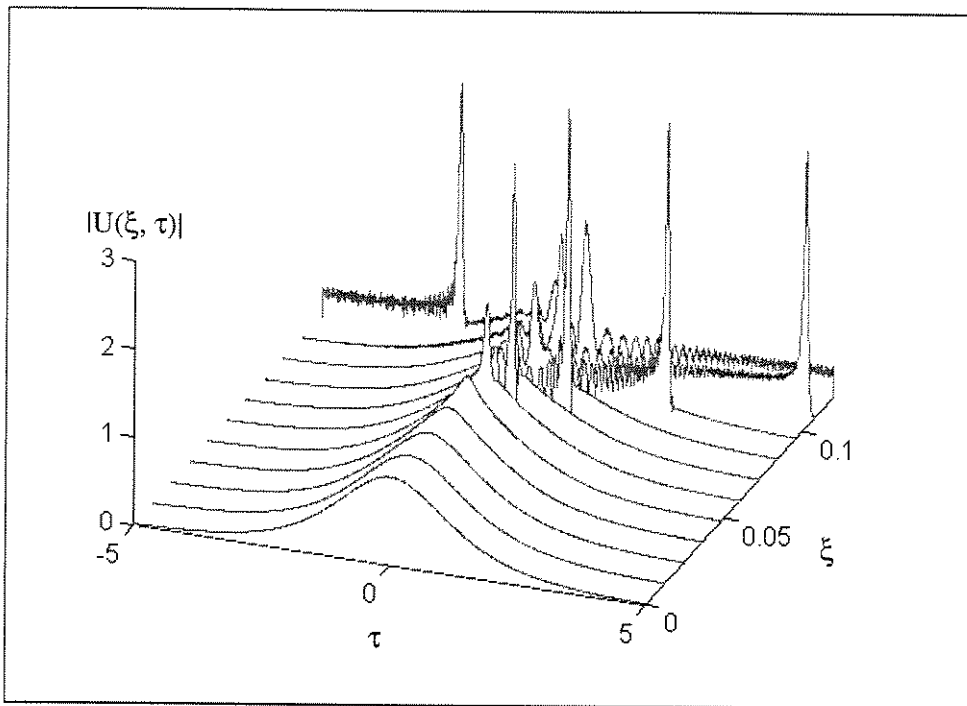


Fig. 5-3: Evolução do sóliton de ordem 10, com efeito ISRS ($\tau_R = 0,01$); distância de propagação $\xi = 0,12$ ($\simeq 2,16m$) e condições de fronteira periódicas impostas no SO-FM.

onde o pulso é propagado até $\xi = 0,12$, enquanto que na Fig. 5-4(b). Observamos que o pulso comprimido escapa pela fronteira direita do domínio truncando quando utiliza-se TBC; no entanto, a utilização das fronteiras de Neumann homogêneas claramente deteriora a observação do efeito físico. A janela computacional $W = [-5, 5]$, está em unidades de tempo normalizado, com número de nós $M = 1024$ e comprimento de propagação $\Delta\xi = 10^{-5}$. Para essa figura, utilizou-se o FO-FEM com número de iterações $nit = 2$ e uma malha irregular onde a janela computacional W , foi dividida em três subintervalos $[-5, -3]$, $[-3, 3]$ e $[3, 5]$ com 100, 312 e 100 elementos quadráticos, respectivamente. Experiências com este tipo de problemas mostram uma grande melhoria na eficiência das TBC, quando considera-se malha irregular com uma discretização menos refinada nas regiões das fronteiras.

Para medir o grau de convergência da solução aproximada, u' , em $\xi = 0,12$, da mesma forma como no Capítulo 4, define-se o erro, como sendo $mxe = \max|u - u'|$. A solução exata foi considerada como sendo a solução obtida com o FO-FEM e TBC, com comprimento de passo de propagação $\Delta\xi = 10^{-6}$, número de iterações $nit = 4$, e número de nós $M = 3072$.

Na Tabela 5.1, apresentamos resultados obtidos para o sóliton de ordem 10, com ISRS. Aqui, considerou-se refinamento de malha uniforme com número de nós $M = 1024$. Como no Capítulo 4, utilizou-se elementos quadráticos para os FEMs, e o SOT-FEM foi implementado com três termos na expansão de Taylor, que representa a matriz não-linear. De outra forma, tem-se implementado os FEM com TBC, mostrando sua precisão com cálculo de erros e comparando quando eles são implementados sem TBC. Também tem-se utilizado o SO-FM nessa comparação; veja resultados e erro na Tabela

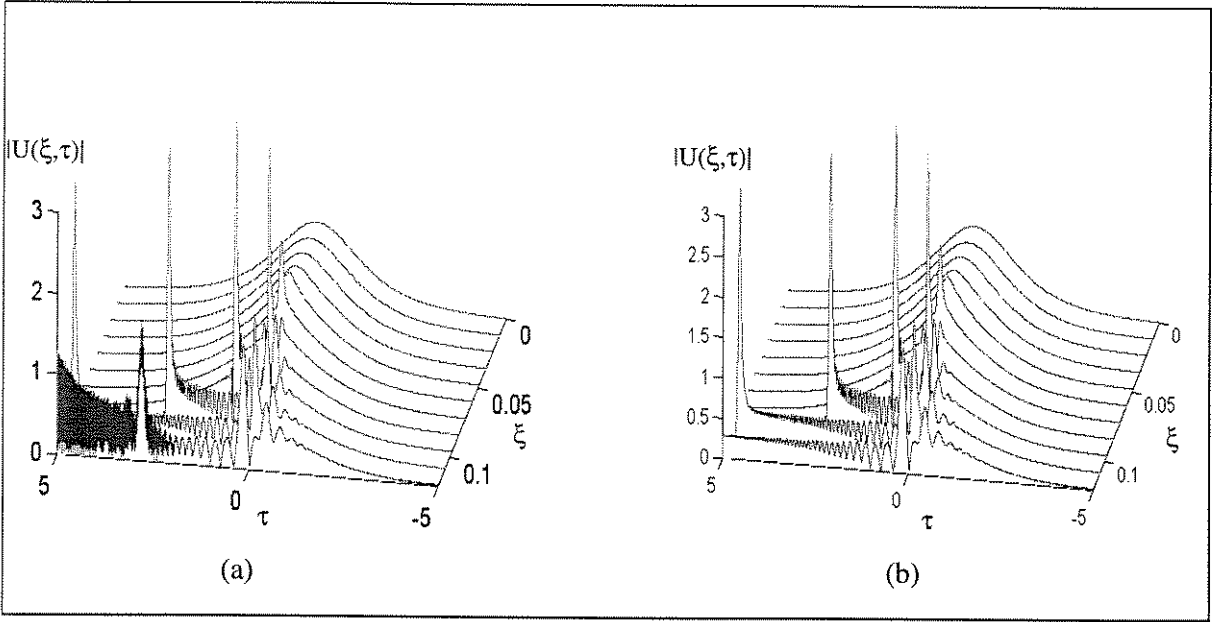


Fig. 5-4: Evolução do sóliton de ordem 10, com efeito ISRS ($\tau_R = 0,01$), comprimento de propagação $\xi = 0,12$ ($\simeq 2,16m$), (a) condições de fronteira de Neumann homogêneas e (b) com TBC.

Método	$\Delta\xi \times 10^{-5}$	nit	T (min)	Erro
SO-FM	1	-	12,56	2,82951
SOT-FEM sem TBC	1	-	11,22	1,73503
SOT-FEM com TBC	1	-	16,31	0,06490
FO-FEM sem TBC	1	2	13,54	1,78120
	1	4	24,20	1,77510
FO-FEM com TBC	1	2	22,44	0,00925
	1	4	33,24	0,00011

Tabela 5.1: Resultados obtidos utilizando SO-FM, SOT-FEM, e FO-FEM, para a propagação do sóliton de ordem 10 com ISRS. Para o caso de FEM utilizou-se elementos quadráticos. Observe-se os resultados comparativos quando da implementação com condições de fronteira periódicas impostas pela FFT no método de SO-FM, condições de fronteiras de Neumann homogêneas e TBC.

sem TBC. Também tem-se utilizado o SO-FM nessa comparação; veja resultados e erro na Tabela 5.1. Observe-se que a precisão dos FO-FEMs aumenta substancialmente quando maior for o número de iterações. Como é de se esperar, o SOT-FEM e o SO-FM, são, ainda, mais rápidos do que o FO-FEM. Observe-se que a implementação das TBC não implica em muito esforço computacional adicional nos FEM, fazendo, deste modo, com que as TBC sejam facilmente aplicáveis. Finalmente, verificou-se a convergência dos métodos implementados com TBC diminuindo a largura do passo de propagação, e aumentando o número nós M em W . Além disso, mostrou-se o melhoramento qualitativo e quantitativo da técnica de compressão do pulso solitônico de ordem 10, através de ISRS e a utilização das TBC, para propagação de sólitons temporais.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas Futuras

6.1 Conclusões

Como descrevemos no Capítulo 2, o estudo da propagação de sólitons ópticos nesta tese refere-se principalmente à propagação de sólitons em fibras ópticas. Embora o estudo apresentado aqui esteja concentrado na propagação de sólitons temporais, o tratamento dos sólitons espaciais é análogo [1], sendo factível a utilização dos mesmos algoritmos nos dois casos.

No Capítulo 3, apresentamos os esquemas de propagação de SOM e FOM [2], e o Método de FSA para resolver a equação GNLS (3.1), tanto temporal como espacial. Neste capítulo, através de exemplos de comparação, determinou-se que o método de FSA não é robusto e rápido como para ser considerado um método alternativo, ainda mais se considerarmos sólitons de alta ordem ou iterações entre sólitons. Tivemos oportunidade de observar que para obter uma boa precisão com o método de FSA precisa-se um grande número de termos na série de Fourier e, conseqüentemente, o número de equações diferenciais a ser resolvido, pelo Método de Runge-Kutta, fazem com que este método seja muito lento quando comparado com o SO-FM. Portanto, a proposta feita por Ghafouri-Shiraz [42], resulta contraditória.

No Capítulo 4 implementamos as TBC, conjuntamente com o Método de Elementos Finitos, para a simulação de sólitons ópticos. Como foi indicado, essa implementação baseia-se em que o campo elétrico comporta-se como onda plana nas fronteiras do domínio do problema, de modo que é válida uma forma exponencial para a componente transversal do campo óptico. Com isso, e com certas propriedades de conservação da energia, obtém-se o algoritmo da TBC. Mostrou-se a necessidade da utilização das TBC, com vários exemplos relacionados com a equação GNLS: sóliton com velocidade, pulsos quadrados, sóliton fundamental com perturbação, e gaussiano, para o caso de emissão espacial solitônica em guias de onda planares não-lineares. Esses exemplos ilustram o melhoramento quantitativo e qualitativo quando utiliza-se as TBC. A vantagem do algoritmo das TBC para sólitons baseia-se na determinação automática dos parâmetros correspondentes de uma forma geral e direta. Outro método baseado em absorvedores virtuais, foi proposto na literatura [49] e [50]. Porém, neste

caso, os parâmetros associados calculados heurísticamente têm de ser para cada caso particular; portanto, sua aplicabilidade é altamente restrita.

Para o SO-FEM, as TBC são eficientes desde que o passo de propagação $\Delta\xi$ seja suficientemente pequeno, veja Tabela 4.1. Por outro lado, a implementação das TBC conjuntamente com o FOM, resulta ser o método mais consistente e estável, conseguindo aumentar $\Delta\xi$ até a ordem 0,5. Finalmente, a implementação das TBC implica em resolver os esquemas matriciais (3.43) ou (3.44) a cada passo e, portanto, o processo de inversão (fatoração de matrizes LU), aplicado a cada passo, fazem com que os métodos tornam-se lentos comparados com os métodos implementados sem utilizar TBC.

No Capítulo 5 simulamos a propagação de um sóliton de ordem 10, com e sem efeito de ISRS. Na primeira parte desse capítulo estudou-se os efeitos do ISRS, e o seu desempenho na compressão de pulsos propagando-se em fibra monomodo com GVD anômala. Na ausência de ISRS, o pulso propaga-se como sóliton de alta ordem e passa através de um estado inicial no qual o estreitamento do pico desenvolve-se, particionando em várias componentes. Observamos que o ISRS pode melhorar qualitativamente e quantitativamente o efeito de compressão de sóliton. Em particular, o pulso comprimido separa-se da parte central pois ele viaja mais lento do que o resto através do ISRS [14], [69]. Observou-se, também, o efeito das TBC, juntamente com o ISRS, quando o pulso comprimido sai pela fronteira sem ser refletido, Fig. 5-4. Em todos os resultados apresentados com ISRS, observou-se que o comprimento do passo de propagação é inversamente proporcional à ordem do sóliton; assim, para sóliton de ordem 10, o comprimento de passo de propagação deve ser $\Delta\xi < 10^{-3}$ para manter-se a estabilidade do método, Tabela 5.1; de qualquer forma, o FOM com iterações permite aumentar $\Delta\xi$ até 10^{-3} . Por outro lado, o número de nós M , na janela W , foi da ordem de 1024 e torna-se relativamente invariante para qualquer ordem de sóliton.

Existem outros esquemas de propagação utilizando FEM, desenvolvidos por Koshiba, nos quais a equação GNLS (5.3) é resolvida baseando-se no esquema de Crank-Nicolson sem iterações [31], [32], enquanto que aqui utilizou-se o algoritmo de Crank-Nicolson com iterações, tornando esse método mais consistente e robusto, como mostram as Tabelas. 4.1 e 5.1.

Finalmente, verificou-se que o SO-FM é um método numérico bastante eficiente na resolução de equações diferenciais não-lineares, apresentando resultados bastante precisos, dependendo da amostragem do sinal. Por utilizar o algoritmo da FFT, o sinal deve possuir um número de amostras igual a uma potência de dois. Isso faz com que o SO-FM não seja flexível quanto ao refinamento de malha, enquanto nos esquemas de FEM, sim, pode-se fazer um refinamento de malha regular ou irregular; por outro lado, verificou-se que, dependendo da complexidade do problema, é necessário fazer uma escolha cuidadosa ótima escolha de $\Delta\xi$, para obter resultado desejados. Pelas condições de periodicidade da FFT, a janela W terá que ser suficientemente grande para não utilizar os termos absorventes, e a energia do pulso fique confinada dentro da região do problema. De outra forma, a energia que sai de uma fronteira automaticamente entra na outra fronteira causando instabilidades numéricas no método.

Apesar deste fato, o SO-FM pode ser considerada uma ferramenta computacional muito robusta, eficiente e precisa para resolver a equação GNLS, e preferida por muitos pesquisadores da comunidade óptica [1].

6.2 Proposta para Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros pretende-se estudar em detalhe o fenômeno de Mistura de Quatro Ondas (FWM), incluindo efeitos de birrefringência. Aqui faz-se necessário resolver equações não-lineares acopladas de Schrödinger (CNLS) [32]. Resultados existentes na literatura [75] e [76], mostram que no SO-FM, por utilizar o algoritmo da Transformada Rápida de Fourier (FFT), o espectro do sinal considerado deve ser limitado em frequência, uma vez que podem ocorrer efeitos de falsa transladação da parte do espectro onde $|f| > f_c$ ($f_c \equiv$ frequência de Nyquist), à porção considerada $(-f_c, f_c)$. Aqui $f_c = \frac{1}{2\Delta}$, sendo Δ o intervalo de amostragem utilizado. Este fenômeno é chamado de *aliasing* na literatura, e pode influenciar muito negativamente na análise de FWM, onde algumas das frequências de interesse podem ser geradas fora da banda considerada. Um segundo objetivo é o desenvolvimento de algoritmos que tornem o SO-FEM mais robusto e consistente quando ele é implementado conjuntamente com a TBC.

Apêndice A

Derivação da Equação Não-Linear de Schrödinger com Termos Não-Lineares e Dispersivos de Alta Ordem

A partir das equações de Maxwell, que descrevem a propagação de ondas de luz em fibras ópticas do ponto de vista clássico, derivaremos a equação NLS com termos de dispersão e não-linearidade de alta ordem. O método utilizado é a técnica de perturbações assintóticas, e a dedução está baseada no desenvolvimento publicado por Kodama e Hasegawa em 1987 [9], [12].

O campo elétrico $\vec{E}$, com constante dielétrica $\varepsilon_0\chi$, e o vetor de propagação $\vec{D} = \varepsilon_0\chi * \vec{E}$, satisfaz a equação de Maxwell:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} \quad (\text{A.1})$$

Onde $*$ indica convolução integral, e a Transformada de Fourier do vetor de propagação $\hat{D}(w)$ é dada por,

$$\begin{aligned} \chi * \vec{E} = & \int_{-\infty}^t \chi^{(0)}(t-t_1) \vec{E}(t_1) dt_1 + \\ & \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \chi^{(2)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \left(\vec{E}(t_1) \cdot \vec{E}(t_2) \right) \vec{E}(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 \\ & + (\text{termos de alta ordem}) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

o segundo termo do lado direito descreve a polarização não-linear incluindo os efeitos Kerr e Raman com seu retardo correspondente. As susceptibilidades $\chi^{(0)}$, $\chi^{(2)}$ dependem das coordenadas espaciais na direção transversal ao eixo da fibra.

Consideremos a seção reta da fibra como sendo constituída de camadas dielétricas perfeitamente

circulares e concêntricas. Com isso, a Eq. (A.1) pode ser escrita como:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{D} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}). \quad (\text{A.3})$$

Para utilizar o Método de Perturbações Assintóticas, escrevemos a Eq. (A.3) na forma matricial

$$LE = 0 \quad (\text{A.4})$$

onde E representa o vetor coluna, dado em coordenadas cilíndricas por $(E_r, E_\theta, E_z)^T$, z coincide com o eixo da fibra, e a matriz L é constituída pela soma de três matrizes $L = L_a + L_b - L_c$; com L_a , L_b , L_c definidas por

$$L_a = \begin{pmatrix} \nabla_\perp^2 - \frac{1}{r^2} & -\frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \nabla_\perp^2 - \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_\perp^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$L_b = \left(\frac{\partial}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi^*}{\partial t^2} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$L_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1}{r \partial \theta \partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} r & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} r & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Considerando o campo elétrico como uma onda quase monocromática propagando-se ao longo do eixo z , com número de onda k_0 e frequência angular ω_0 ; assume-se que E pode ser representado através da expansão

$$E(r, \theta, z, t) = \sum_{l=-\infty}^{l=\infty} E_l(r, \theta, \xi, \tau; \varepsilon) \exp \{i(k_l - \omega_l t)\} \quad (\text{A.8})$$

com $E_{-l} = E_l^*$ (conjugado complexo de E_l), $k_l = lk_0$, $\omega_l = l\omega_0$, e l inteiro. A soma é considerada sobre todos os harmônicos gerados pela resposta não-linear da polarização, e $E_l(r, \theta, \xi, \tau; \varepsilon)$ é a envolvente do l -ésimo harmônico que varia lentamente com z e t , que são relacionados a ξ e τ por,

$$\xi = \varepsilon^2 z, \quad \tau = \varepsilon \left(t - \frac{z}{\nu_g} \right) \quad (\text{A.9})$$

onde ν_g é a velocidade de grupo, e ε é um pequeno parâmetro de perturbação, definido por $\varepsilon \simeq 0(\frac{\Delta \omega}{\omega_0})$.

Desenvolvendo a susceptibilidade elétrica em Série de Taylor, centrada na frequência da portadora, e utilizando as Eqs. (A.2) e (A.9), o vetor de propagação $\vec{D}$ pode ser escrito como:

$$\chi * \vec{E} = \sum D_l \exp [i (k_l z - w_l t)] \quad (\text{A.10})$$

onde D_l é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0} D_l = & \hat{\chi}^{(0)}(w_0) E_l + i\varepsilon \frac{\partial \hat{\chi}_l^{(0)}(w_0)}{\partial w_l} \frac{\partial E_l}{\partial \tau} - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \hat{\chi}_l^{(0)}(w_0)}{\partial w^2} \frac{\partial^2 E_l}{\partial \tau^2} - \varepsilon^3 \frac{i}{6} \frac{\partial^3 \hat{\chi}_l^{(0)}(w_0)}{\partial w^3} \\ & \cdot \frac{\partial^3 E_l}{\partial \tau^3} + \sum_{l_1+l_2+l_3} \left\{ \chi_{l_1 l_2 l_3}^{(2)}(E_{l_1} \cdot E_{l_2}) E_{l_3} + i \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \chi_{l_1 l_2 l_3}^2}{\partial w_{l_j}} \right) \frac{\partial}{\partial \tau_j} (E_{l_1} \cdot E_{l_2}) E_{l_3} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

e $\chi_l^{(0)}$, $\chi_{l_1 l_2 l_3}^{(2)}$ são os coeficientes de Fourier $\hat{\chi}_l^{(0)}(\Omega)$, $\hat{\chi}_{l_1 l_2 l_3}^{(2)}(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ de $\chi^{(0)}(t)$, $\chi^{(2)}(t_1, t_2, t_3)$ em $\Omega = w_l$, $\Omega_1 = w_{l_1}$, $\Omega_2 = w_{l_2}$, $\Omega_3 = w_{l_3}$ respectivamente. O quinto termo do lado direito da Eq. (A.11) representa a resposta retardada da polarização não-linear.

Utilizando as Eqs. (A.9), (A.11), podemos escrever (A.4) da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & L_l E_l + \varepsilon i \frac{\partial L_l}{\partial w_l} \frac{\partial E_l}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 L_l}{\partial w_l^2} \frac{\partial^2 E_l}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6} \varepsilon^3 \frac{\partial^3 L_l}{\partial w_l^3} \frac{\partial^3 E_l}{\partial \tau^3} - \\ & \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial k_l} \left(L_l - \frac{w_l^2 \chi_l^{(0)}}{c^2} \right) \right\} \left(i \frac{\partial E_l}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_l}{\partial w_l^2} \frac{\partial^2 E_l}{\partial \tau^2} - \frac{\varepsilon i}{6} \frac{\partial^3 k_l}{\partial w_l^3} \frac{\partial^3 E_l}{\partial \tau^3} \right) \\ & - \varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial w_l \partial k_l} \left(L_l - \frac{w_l^2 \chi_l^{(0)}}{c^2} \right) \right\} i \frac{\partial}{\partial \tau} \left(i \frac{\partial E_l}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_l}{\partial w_l^2} \frac{\partial^2 E_l}{\partial \tau^2} \right) + \\ & \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\nu_g} - \frac{\partial k_l}{\partial w_l} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \left(\frac{1}{\nu_g} + \frac{\partial k_l}{\partial w_l} \right) \frac{\partial E_l}{\partial \tau} - 2\varepsilon \frac{\partial E_l}{\partial \xi} \right\} + \\ & + i\varepsilon \left(\frac{1}{\nu_g} - \frac{\partial k_l}{\partial w_l} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial k_l} \left(L_l - \frac{w_l^2 \chi_l^{(0)}}{c^2} \right) \right\} \frac{\partial E_l}{\partial \tau} + \frac{1}{c^2} \cdot \\ & \sum_{l_1+l_2+l_3} [w_l^2 \chi_{l_1 l_2 l_3}^{(2)}(E_{l_1} \cdot E_{l_2}) E_{l_3} + i \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \chi_{l_1 l_2 l_3}^2}{\partial w_{l_j}} \right) \frac{\partial}{\partial \tau_j} (E_{l_1} \cdot E_{l_2}) E_{l_3}] + \dots \\ = & 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

onde L_l está dado por L nas Eqs. (A.5)-(A.7) substituindo: $\frac{\partial}{\partial z} = ik_l$, $\frac{\partial}{\partial \tau} = -iw_l$ e $\chi^* = \chi_l^{(0)}$. O operador L_l , assim definido, é auto-adjunto no sentido do seguinte produto interno [9]:

$$\langle U, LV \rangle \equiv \int U^* LV ds = \int L^* U^* \cdot V ds = \langle LU, V \rangle \quad (\text{A.13})$$

onde $ds = r dr d\theta$.

Assumindo, também, que podemos expandir E_l em série assintótica no parâmetro ε ,

$$E_l(r, \theta, \xi, \tau; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n E_l^{(n)}(r, \theta, \xi, \tau). \quad (\text{A.14})$$

Utilizando as Eqs. (A.4), (A.8), (A.9), (A.11), e considerando termos até a ordem de ε , obtém-se

$$L_l E_l^{(1)} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Na equação acima, consideramos que a fibra é monomodo; portanto existe apenas um autovalor k_0^2 ($l = \pm 1$) e uma auto-função $\Psi(r, \theta)$, solução modal que representa a distribuição do campo na direção transversal. Também, assumindo que a fibra mantém a polarização, a solução da Eq. (A.15) pode ser escrita como

$$E_l^{(1)}(r, \theta, \xi, \tau) = \begin{cases} A_l^{(1)}(\xi, \tau) \Psi(r, \theta) & \text{para } l = 1 \\ 0 & \text{para } l \neq \pm 1 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

onde o coeficiente $A_l^{(1)}(\xi, \tau)$ com $A_{-l}^{(1)} = A_l^{(1)*}$, função escalar descrita por equações de alta ordem em (A.12). Note que, de (A.15), utilizando a propriedade de L_l ser auto-adjunto, deduz-se que $\langle \Psi, L_1 \Psi \rangle = 0$, a qual representa a relação de dispersão linear $k_1 = k_1(w_1)$

$$\frac{S_0 k_0^2}{4} = \frac{w_0^2}{c^2} \langle \Psi, n_0^2 \Psi \rangle + \langle \Psi, L_0 \Psi \rangle + i k_0 \int (\Psi_z \nabla_{\perp} \cdot \Psi^* - \Psi_z^* \nabla_{\perp} \cdot \Psi) ds$$

onde $\frac{S_0}{4} = \int (|\Psi_r|^2 + |\Psi_{\theta}|^2) ds$, e o índice de refração é dado por $n_0^2 = \chi_0^{(0)}$.

Substituindo (A.14) em (A.12), e considerando termos até a ordem de ε^2 , obtemos

$$L_l E_l^{(2)} = i \left\{ -\frac{\partial k_l}{\partial w_l} - \left(\frac{1}{\nu_g} - \frac{\partial k_l}{\partial w_l} \right) \frac{\partial}{\partial k_l} \left(L_l - \frac{w_l^2 \chi_l^{(0)}}{c^2} \right) \right\} \frac{\partial E_l}{\partial \tau}. \quad (\text{A.17})$$

Portanto, $E_l^{(2)} = 0$, para $l \neq \pm 1$ (fibra monomodo); quando $l = 1$, a Eq. (A.17) deve satisfazer a condição de compatibilidade de Fredholm [22]:

$$\langle \Psi, L_l E_l^{(2)} \rangle = 0 \quad (\text{A.18})$$

De (A.18) resulta a velocidade de grupo em termos da dispersão linear,

$$\frac{1}{\nu_g} = \frac{\partial k_0}{\partial w_0} \quad (\text{A.19})$$

e para $l = 1$, da Eq. (A.17), obtém-se

$$L_l E_l^{(2)} = -i \frac{\partial L_l}{\partial w_0} \frac{\partial A_l^{(1)}}{\partial \tau} \Psi. \quad (\text{A.20})$$

Quando consideramos os termos até a ordem de ε^3 , obtém-se

$$L_l E_l^{(3)} = \begin{cases} 0 & \text{para } l \neq \pm 1, \pm 3 \\ -\frac{27w_0^2}{c^2} \chi_{111}^{(2)} A_l^{(1)3} \langle \Psi, \Psi \rangle \Psi & \text{para } l = 3 \\ -i \frac{\partial L_l}{\partial w_0} \frac{\partial E_l^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_l}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 E_l^{(1)}}{\partial \tau^2} \\ + \left(i \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_0}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 A_1^{(1)}}{\partial \tau^2} \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial k_l} \left(L_l - \frac{w_0^2 \chi_0^{(0)}}{c^2} \right) \right\} \Psi \\ - |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} \frac{w_0^2}{c^2} F(\Psi, \Psi^*, \chi^{(2)}) & \text{para } l = 1 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

onde F é definido por $F(\Psi, \Psi^*, \chi^{(2)}) = \chi_{-111}^{(2)} \langle \Psi^*, \Psi \rangle \Psi + \chi_{1-11}^{(2)} \langle \Psi, \Psi^* \rangle \Psi + \chi_{11-1}^{(2)} \langle \Psi, \Psi \rangle \Psi^*$. Da Eq. (A.21) obtém-se $E_l^{(3)} = 0$ para $l \neq \pm 1$ ou $l \neq \pm 3$, e desde que L_3 não tenha auto-funções

$$E_3^{(3)} = -\frac{27w_0^2}{c^2} \chi_{11-1}^{(2)} A_l^{(1)3} L_3^{-1} \left\{ \chi_{111}^{(2)} \langle \Psi, \Psi \rangle \Psi \right\}$$

que corresponde ao harmônico gerado pelas propriedades não-lineares da fibra óptica. Para $l = 1$, e a condição de compatibilidade em (A.21), resulta a equação NLS para $A_1^{(1)}$

$$i \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_0}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 A_1^{(1)}}{\partial \tau^2} - v |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Aqui, o coeficiente Kerr v é um número real positivo definido por

$$v = \frac{2w_0^2}{\tilde{k}_1 c^2 S_0} \left\langle \Psi, F(\Psi, \Psi^*, \chi^{(2)}) \right\rangle \quad (\text{A.23})$$

onde $\tilde{k}_1 = k_1 = (2i/S_0) \int (\Psi_z \nabla_\perp \cdot \Psi^* - \Psi_z^* \nabla_\perp \cdot \Psi) ds$.

Para observar os efeitos dos termos de alta ordem, considera-se em (A.12) termos até a ordem ε^4 ,

$$\begin{aligned} L_1 E_1^{(4)} = & -i \frac{\partial L_1}{\partial w_0} \frac{\partial E_1^{(3)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L_1}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + \frac{i}{6} \frac{\partial^3 L_1}{\partial w_0^3} \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3} + \\ & \frac{\partial}{\partial k_0} \left\{ L_1 - \frac{w_0^2 n_0^2}{c^2} \right\} \left(i \frac{\partial E_1^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_0}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 E_1^{(2)}}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6} \frac{\partial^3 k_0}{\partial w_0^3} \frac{\partial^3 E_1^{(1)}}{\partial \tau^3} \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial w_0 \partial k_0} \left\{ \left(L_1 - \frac{w_0^2 n_0^2}{c^2} \right) \right\} i \frac{\partial}{\partial \tau} \left(i \frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_0}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial \tau^2} \right) \\ & - \frac{1}{c^2} \sum_{l_1+l_2+l_3=1} [w_0^2 \chi_{l_1 l_2 l_3}^{(2)} \langle E_{l_1}^i, E_{l_2}^j \rangle E_{l_3}^k + \\ & i \sum_{j=1}^3 \left(\left(2w_0 + w_0^2 \frac{\partial}{\partial w_{l_j}} \right) \chi_{l_1 l_2 l_3}^2 \right) \frac{\partial}{\partial \tau_j} \langle E_{l_1}, E_{l_2} \rangle E_{l_3}] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Utilizando as Eqs. (A.15), (A.20), (A.21), e a condição de compatibilidade para (A.24), a equação

resultante para $A_1^{(2)}$ é

$$\begin{aligned}
& i \frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_0}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 A_1^{(1)}}{\partial \tau^2} + 2v |A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} + v (A_1^{(1)})^2 A_1^{(2)*} - \\
& \frac{i}{6} \frac{\partial^3 L_1}{\partial w_0^3} \frac{\partial^3 A_1^{(1)}}{\partial \tau^3} + i a_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(|A_1^{(1)}|^2 A_1^{(1)} \right) + i a_2 A_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(|A_1^{(1)}|^2 \right) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{A.25}$$

onde $A_1^{(2)} = A_1^{(2)}(\xi, \tau)$ com $A_{-1}^{(2)} = A_1^{(2)*}$ função escalar descrita por equações de alta ordem em (A.12), e os coeficientes de não-linearidade são dados por:

$$a_1 = \frac{\partial v}{\partial w_0}, \quad a_2 = \frac{2w_0^2}{k_1 c^2 S_0} \langle \Psi, G \rangle \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}
G(\Psi, \Psi^*, \chi^{(2)}) &= \frac{\partial F}{\partial w_0} + \chi_{-111}^{(2)} \left\langle \frac{\partial \Psi^*}{\partial w_0} \cdot \Psi \right\rangle \Psi - \frac{\partial \chi_{1-11}^{(2)}}{\partial w_{-0}} \langle \Psi^*, \Psi \rangle \Psi \\
&+ \chi_{1-11}^{(1)} \left\langle \Psi \cdot \frac{\partial \Psi^*}{\partial w_0} \right\rangle \Psi - \frac{\partial \chi_{1-11}^{(2)}}{\partial w_{-0}} \langle \Psi, \Psi^* \rangle \Psi \\
&+ \chi_{11-1}^{(1)} \langle \Psi \cdot \Psi \rangle \frac{\partial \Psi^*}{\partial w_0} - \frac{\partial \chi_{1-11}^{(2)}}{\partial w_{-0}} \langle \Psi, \Psi \rangle \Psi^*
\end{aligned}$$

A equação para E_1 não pode ser separada para cada ordem ε nas funções $A_1^{(1)}$ e $A_1^{(2)}$. Fazendo $A = \varepsilon A_1^{(1)} + \varepsilon^2 A_1^{(2)}$; definindo também $\tilde{v} = \frac{v}{\varepsilon^2}$, $\tilde{a}_1 = \frac{a_1}{\varepsilon^2}$, $\tilde{a}_2 = \frac{a_2}{\varepsilon^2}$, obtém-se a equação para A dada por:

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_0}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} - \frac{\varepsilon i}{6} \frac{\partial^3 k_0}{\partial w_0^3} \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} + \tilde{v} |A|^2 A + \varepsilon i \tilde{a}_1 \frac{\partial}{\partial \tau} (|A|^2 A) + \varepsilon i \tilde{a}_2 A \frac{\partial}{\partial \tau} (|A|^2) = 0 \left(\varepsilon^3 \right) \tag{A.27}$$

A Eq. (A.27) é a equação desejada para a função envoltória A . Os coeficientes v , a_1 , a_2 definidas em (A.23) e (A.26) são calculados de acordo com o tipo de guia utilizado [9].

Apêndice B

Espalhamento Estimulado Raman

Um efeito bastante interessante e que fornece muita informação sobre o estados quânticos moleculares foi descoberto por Raman (1928) [19]. Trata-se do espalhamento de luz por moléculas, acompanhado de uma mudança de frequência, denominado de Espalhamento Estimulado Raman (SRS) ou simplesmente efeito Raman. No efeito Raman, a frequência da luz espalhada é diferente da frequência de luz incidente; assim, a frequência incidente não está relacionada com alguma frequência da molécula espalhada, como acontece com outros espalhamentos (Rayleigh, por exemplo) [1], [19].

O espalhamento Raman é causado pela interação da luz com os modos dos fônons ópticos. A luz espalhada possui frequência menor, como um resultado da emissão do fônnon, e é observada principalmente no sentido direto de propagação. Na sílica, as altas frequências no fônnon levam os desvios de frequência da luz espalhada a serem extremamente grandes (13,2 THz) e, geralmente, leva ao espalhamento Raman sem casamento de fase. Finalmente, nota-se que a energia do fônnon é muito menor que a energia óptica, de forma que a energia óptica é, aproximadamente, conservada na interação Raman.

B.1 Descrição Matemática

O espalhamento Raman é normalmente formulado para ondas planas onde leva-se em conta o acoplamento das ondas com k-vetores em diferentes direções. A situação em fibras monomodo é algo mais simples, já que os k-vetores dos modos propagantes são todos paralelos. Para o nosso propósito trataremos somente com as amplitudes escalares dos modos transversais [19].

A formulação do SRS parte da derivação heurística das equações clássicas que descrevem o processo. Parte-se das equações da onda para os campos do fônnon e óptico, e adiciona-se os termos de interação não-lineares de frequência apropriada. A conservação da energia óptica é, então, utilizada para obter a relação entre os coeficientes não-lineares. As equações de onda que viajam para frente e que incluem a interação não-linear generalizada pode ser escrita como

$$i\frac{\partial E_L}{\partial z} = \beta_L E_L + G_L(w_L; E_L; E_s; Q) \quad (\text{B.1})$$

$$i\frac{\partial E_s}{\partial z} = \beta_s E_s + G_s(w_s; E_L; E_s; Q) \quad (\text{B.2})$$

$$i\frac{\partial Q}{\partial z} = kQ + G_Q(w_Q; E_L; E_s; Q) \quad (\text{B.3})$$

onde E_L , E_s , e Q são os campos que descrevem o bombeamento de Stokes e dos fônons ópticos, respectivamente, as funções G podem ser calculadas exatamente a partir da energia livre da interação de onda. Aqui, assume-se que as funções são quadráticas nos campos e que a frequência da interação é a mesma, bem como aquela do lado esquerdo da Eq. (B.3) com $w_L - w_s = \Omega_Q$. Isso fornece as seguintes funções de interação

$$G_L = g_L E_s Q, \quad G_S = g_S E_L Q^*, \quad G_Q = g_Q E_L E_s^* \quad (\text{B.4})$$

onde o campo Q^* possui frequência $-\Omega_Q$. Substituindo a Eq. (B.4) nas Eqs. (B.1)-(B.3), obtêm-se as seguintes equações não-lineares

$$i\frac{\partial E_L}{\partial z} = \beta_L E_L + g_L E_s Q \quad (\text{B.5})$$

$$i\frac{\partial E_s}{\partial z} = \beta_s E_s + g_s E_L Q^* \quad (\text{B.6})$$

$$i\frac{\partial Q}{\partial z} = kQ + g_Q E_L E_s^* \quad (\text{B.7})$$

Até aqui, podemos reduzir o problema trabalhando em regime estacionário, onde as dependências no espaço e tempo (implícita na dependência em frequência de k) no movimento de fônon se tornam nulas. Com isso, da Eq. (B.7) tem-se a relação para o campo do fônon

$$Q = -\frac{g_Q}{k} E_L E_s^* \quad (\text{B.8})$$

onde k é uma constante calculada na frequência do fônon. Com a Eq. (B.8), elimina-se o campo do fônon da Eq. (B.5) e (B.6), como:

$$i\frac{\partial E_L}{\partial z} = \beta_L E_L - \frac{g_L g_Q}{k} |E_s|^2 E_L \quad (\text{B.9})$$

$$i\frac{\partial E_s}{\partial z} = \beta_s E_s - \frac{g_s g_Q^*}{k} |E_L|^2 E_s. \quad (\text{B.10})$$

Tem-se as equações para os campos ópticos que envolvem dois coeficientes não-lineares. Para prosseguir, é necessário calcular a quantidade conservada pelas equações acima e compará-la com a energia óptica

total. Multiplicando a Eq. (B.9) por E_L^* e somando a essa equação o seu complexo conjugado (fazendo o mesmo para (B.10)), tem-se as equações de evolução para a intensidade óptica

$$i \frac{\partial I_L}{\partial z} = -\chi_L I_S I_L \quad (\text{B.11})$$

$$i \frac{\partial I_S}{\partial z} = \chi_S I_S I_L \quad (\text{B.12})$$

onde, $\chi_S = \text{Im}(g_S g_Q^*/k^*)$, $\chi_L = \text{Im}(g_L g_Q^*/k)$. Multiplicando (B.11) por χ_S e (B.12) por χ_L e subtraindo-as, obtém-se a quantidade conservada

$$\chi_L I_S - \chi_S I_L = \text{const.} \quad (\text{B.13})$$

Pode-se ter, então, a condição necessária entre os coeficientes não-lineares impondo-se que o número total de fônons seja conservado. O número de fônons é definido como a energia da onda óptica dividida pela energia do fônon hw ; isso pode ser expresso como

$$\frac{I_L}{w_L} + \frac{I_S}{w_S} = \text{const.} \quad (\text{B.14})$$

Comparando (B.13) e (B.14), chega-se à relação

$$w_L \chi_S = -w_S \chi_L \equiv -w_L w_S \chi_R \quad (\text{B.15})$$

Portanto, pode-se escrever as equações que descrevem SRS em regime estacionário (CW) como

$$i \frac{\partial I_L}{\partial z} = -w_L \chi_R I_S I_L \quad (\text{B.16})$$

$$i \frac{\partial I_S}{\partial z} = -w_S \chi_R I_S I_L \quad (\text{B.17})$$

Para resolver as equações acima, definimos

$$S = \frac{I_L}{w_L} + \frac{I_S}{w_S}, \quad D = \frac{I_L}{w_L} - \frac{I_S}{w_S} \quad (\text{B.18})$$

na qual S é a energia total, e D é a diferença entre energias de bombeio e de Stokes. A equação para D é dada por

$$\frac{\partial D}{\partial z} = -w_S w_L \frac{\chi_R}{2} (S^2 - D^2) \quad (\text{B.19})$$

que pode ser integrada fornecendo a solução

$$D = S \tanh \left[-\frac{w_S w_R \chi_R}{2} (z - z_1) \right] \quad (\text{B.20})$$

onde o parâmetro z_1 é definido por $D_0 = S \tanh (w_S w_R S z_1 / 2)$.

Até aqui, temos assumido que o SRS pode ser descrito como uma interação entre o bombeio CW e a onda Stokes. Em fibras ópticas, o SRS acopla o bombeio a muitas ondas Stokes [20], desde que o ganho do sinal seja exponencial [19]. Quando observamos a luz espontânea amplificada na região do pico do espectro, observa-se a radiação Stokes. Na prática, o SRS não é gerado utilizando o bombeio CW pois os níveis de potência requeridos são muito altos. Esse problema pode ser abordado utilizando-se lasers pulsados como fontes.

B.2 Formulação do Fenômeno para Pulsos Ultra-Curtos

O desenvolvimento do SRS descrito anteriormente é adequado quando a largura de faixa da luz nas linhas de bombeio ou de Stokes é pequena comparada às suas separações. Analogamente, a Eq. NLS, dada em (2.21), é adequada quando a banda do sólton é pequena comparado ao desvio de Stokes. Quando tem-se pulsos ultra-curtos apresenta-se um acoplamento muito forte entre o sólton e o fenômeno Raman, e uma equação mais exata se faz necessária. Com isso, para pulsos que possuem larguras não desprezíveis, o tratamento do SRS não deve ser mais realizado no domínio da frequência, que considera pulsos quase monocromáticos. A formulação no domínio do tempo se mostra mais eficiente computacionalmente e a sua análise menos complexa [20].

A principal consideração que não pode mais ser feita é a que despreza a dependência no tempo da polarização de onda do fônon óptico. Matematicamente, isso significa que deve-se inserir, na Eq. (B.7), a dependência em frequência da constante de propagação do fônon k . Expandindo k em primeira ordem em Ω , tem-se

$$k = k_0 - i\kappa + k'_0\Omega \quad (\text{B.21})$$

a qual pode ser substituída em (B.7). Utilizando as propriedades da curva de dispersão do fônon óptico podemos desprezar a derivada com respeito a z e o pequeno termo constante k_0 , para chegar à seguinte equação, que leva em conta a dependência da polarização do fônon

$$ik_0 \frac{\partial Q}{\partial t} + i\kappa Q = g_Q E_L E_S^* \quad (\text{B.22})$$

A Eq. (B.22) pode ser resolvida, uma vez que os campos ópticos sejam conhecidos, como

$$Q(t) = -i \frac{g_Q}{k_0} \int \exp \left[-\frac{\kappa}{k_0} (t - t') \right] E_S^* (t') E_L (t') dt' \quad (\text{B.23})$$

que tem a forma de uma resposta do campo óptico atrasada no tempo. Em geral, a susceptibilidade dependente da frequência possui uma função resposta no domínio do tempo. Sob condições normais, onde os campos são quase CW, a descrição no domínio da frequência é mais conveniente, enquanto que em regime transitório deve-se trabalhar no domínio do tempo de forma a obter-se uma solução mais simples [1]. Nessas condições, a polarização não-linear, dada pela Eq. (2.12), pode ser escrita

como [19].

$$P_{NL}(t) = \chi^{(3)} E(t) \int_{-\infty}^t R(t-t') E(t')^2 dt' \quad (B.24)$$

onde a resposta retardada é aplicada à intensidade óptica. A função resposta $R(t-t')$ pode ser obtida do espectro do ganho Raman aplicando-se, primeiramente, a transformada de Kramers-Kronig para se obter a parte real da susceptibilidade e, a seguir então aplica-se a transformada de Fourier [20].

Com a polarização, a resposta não-linear retardada, dada em (B.24), a Eq. (2.13), pode ser escrita em forma mais exata, incluindo a resposta retardada Raman [1], [15] por:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} - \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 U}{\partial T^3} + \frac{\alpha}{2} U = i\gamma \left[1 + \frac{i}{w_0} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[U(z, t) \int_0^\infty R(t') |U(z, t-t')|^2 dt' \right] \quad (B.25)$$

onde a variação de A_{eff} com w é geralmente desprezível [1]. A função resposta $R(t)$ deve conter as contribuições eletrônica e vibracional (Raman). Supondo que a contribuição eletrônica é, aproximadamente, instantânea, a forma funcional de $R(t)$ pode ser escrita como [15]

$$R(t) = (1 - f_R) \delta(t) + f_R g_R(t) \quad (B.26)$$

onde f_R representa a contribuição fracionária da resposta retardo Raman, governado por $g_R(t)$. $g_R(t)$ é função resposta Raman que pode ser obtida, experimentalmente, a partir do espectro do ganho Raman [1],

$$g_R = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \exp \left[-\frac{t}{\tau_2} \right] \sin \left[\frac{t}{\tau_1} \right] \quad (B.27)$$

e os parâmetros τ_1, τ_2 são ajustáveis de modo a obter um bom espectro do ganho; geralmente utiliza-se $\tau_1 = 12,2 \text{ fs}$ $\tau_2 = 32 \text{ fs}$.

As Eqs. (B.25) e (B.26) governam a evolução de pulsos ópticos da largura de femtosegundos, sob a aproximação de envelope de variação lenta. O parâmetro f_R pode ser estimado a partir do espectro do ganho g_R [1]. Utilizando valores conhecidos do ganho Raman, calcula-se $f_R \simeq 0,18$ [20]. A Eq. (B.25) reduz-se à equação NLS para largura de pulsos relativamente grandes, $R(t)$ é substituído pela função delta $\delta(t)$. Finalmente, a partir da Eq. (B.25), chega-se à Eq. (2.19), expandindo em série de Taylor a expressão $|U(z, t-t')|^2$ em (B.25) e considerando somente termos de primeira ordem em t' . Essa expansão, relaciona o parâmetro T_R ao desvio do espectro do ganho Raman, por:

$$T_R = \int_0^\infty t' R(t') dt'. \quad (B.28)$$

Apêndice C

Lista de Abreviaturas

Como ajuda para o leitor, neste apêndice apresentamos as abreviaturas utilizadas nesta tese.

BPM: método de propagação de feixes.

CW: onda contínua.

CNLS: especifica as equações não-lineares de Schrödinger acopladas.

FD: diferenças finitas.

FE: elementos finitos.

FEM: método de elementos finitos.

FDM: método de diferenças finitas.

FM: método de Fourier.

FFT: transformada de Fourier rápida.

FSA: aproximação da série de Fourier.

FWM: mistura de quatro ondas (*Four Wave Mixing*).

FOM: método de operador completo (*Full-Operator Method*).

FO-FEM: método de elementos finitos de operador completo.

FO-FDM: método de diferenças finitas de operador completo.

GNLS: especifica a equação não-linear de Schrödinger generalizada.

GVD: dispersão de velocidade de grupo.

ISRS: intrapulso por espalhamento estimulado Raman.

MEI: método do espalhamento inverso.

NLS: especifica a equação não-linear de Schrödinger.

NBC: condições de fronteira de Neumann homogêneas.

SRS: espalhamento estimulado Raman.

SOM: método de operador particionado (*Split-Operator Method*).

SO-FM: método de Fourier de operador particionado.

SO-FEM: método de elementos finitos de operador particionado.

SOT-FEM: método de elementos finitos de operador particionado com aproximação de Taylor

na matriz não-linear.

SOC-FEM: método de elementos finitos de operador particionado associado com o método de colocação na matriz não-linear.

SO-FDM: método de diferenças finitas de operador particionado.

SPM: auto-modulação de fase.

TBC: condições de fronteira transparentes.

TE: especifica o campo transversal elétrico.

fs : especifica fentosegundos.

ps : especifica picosegundos.

Apêndice D

Lista de Notações

Da mesma forma como no apêndice anterior, neste apêndice apresentamos um lista de notações utilizadas neste texto.

k : Número de onda ; k_1 para a componente A , k'_1 a derivada de k com respeito a w em $w = w_1$.

w : frequência angular; e w_1 portadora.

$\vec{E}$: vetor campo elétrico; $\hat{E}$ a transformada de Fourier.

$\vec{H}$: vetor campo magnético.

$\chi^{(0)}$: Susceptibilidade linear; $\hat{\chi}^{(0)}$ a transformada de Fourier.

$\chi^{(2)}$: Susceptibilidade Não-linear, $\hat{\chi}^{(2)}$ a transformada de Fourier.

ϕ : função de onda escalar que representa o campo elétrico TE em fibra de guiamento fraco.

n : índice de refração.

A : função do envoltória a qual depende das coordenadas axiais z e t .

a_1 : coeficiente do termo de dispersão não-linear.

a_2 : coeficiente do termo da resposta retardada não-linear do meio.

$\vec{D}$: vetor de propagação do campo elétrico.

$\vec{B}$: vetor de densidade de fluxo magnético (vetor de propagação do campo magnético).

L : matriz de operação.

E : vetor coluna $(E_r, E_\theta, E_z)^T$.

l : inteiro que representa o número de harmônico da frequência portadora e número de onda.

v_g : velocidade de grupo.

ξ : coordenada de propagação normalizada.

τ : coordenada temporal normalizada no esquema referencial da velocidade de grupo.

Ψ : função modal que representa a distribuição transversal do campo elétrico.

v : coeficiente do termo não-linear (efeito Kerr).

U : envoltória do campo elétrico normalizado.

D : operador linear associado com a equação GNLS no Capítulo 3.

N : operador não-linear associado com a equação GNLS no Capítulo 3.

ϕ_i : funções base de elementos finitos ($i=1,M$, com M número de incógnitas), Capítulo 3.
 ε_1 : erro de aproximação dos esquemas numéricos, Capítulo 3.
 U_1 : envoltória do campo elétrico aproximado no esquema de propagação SOM, Capítulo 3.
 U_2 : envoltória do campo elétrico aproximado no esquema de propagação FOM, Capítulo 3.
 Γ : perfil de absorção (ganho).
 $L^2[a, b]$: Espaço de funções quadrado integráveis.
 β : constante de propagação.
 β_i : derivadas da constante de propagação com respeito a w em w_0 ($i=1,2,3$).
 α : parâmetro associado às perdas da fibra.
 T_0 : largura do pulso incidente na intensidade $1/e$.
 T_{FWHM} : largura na meia altura máxima do pulso incidente.
 T_R : Função da inclinação do ganho Raman.
 D : parâmetro de dispersão.
 S : parâmetro de dispersão diferencial ($S = \frac{\partial D}{\partial \lambda}$), Capítulo 2.
 δ : parâmetro de dispersão de segunda ordem normalizado.
 τ_R : parâmetro proporcional ao termo do efeito Raman, na GNLS.
 A_{eff} : área efetiva do núcleo da fibra.
 $\langle . \rangle$: produto interno, geralmente no espaço $L^2[a, b]$.

Referências

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, New York, 1995.
- [2] H. E. Hernández Figueroa, *Computer Modelling Of Optical Waveguides*, Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, University of London, Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1992.
- [3] H. A. Hauss, "Optical Fiber Solitons, their Properties and Uses ", Proceedings of the IEEE, Vol. 81, No. 7, pp. 969-983, July 1993.
- [4] G. P. Agrawal *Fiber-Optic Communication Systems*, John Wiley & Sons, Inc. 1992.
- [5] A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin. "The Soliton: A New Concept in Applied Science", Proceeding of the IEEE, Vol. 61, No. 10, pp. 1443-1483, October 1973.
- [6] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Soliton an Introduction*, Cambridge University Press, 1989.
- [7] P. D. Lax, "Integrate of Nonlinear Equation of Evolution of Soliton and Solitary Waves", Comunication on Pure and Applied Mathematicas, Vol. 21, No. 21, pp. 467-490, February 1968.
- [8] A. Hasegawa and F. Tapper, "Tansmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. I. Anomalous dispersion", App. Phys. Lett., Vol. 23, pp. 142-144, Augusto 1973.
- [9] J. R. Taylor, *Optical Solitons - Theory and Experiment*, Cambridge University Press, 1992.
- [10] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, "Exact Theory of Two-dimensional Self-focusing and One-dimensional Self-Modulation of Waves in Nolnlinear Media", Soviet Physics JETP, Vol. 34, No.1, pp. 62-69, January 1972.
- [11] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, "Interaction between solitons in a stable medium", Sov. Phys., JEPT, Vol. 37, No.5, pp. 34-35, November 1973.
- [12] Y. Kodama and A. Hasegawa, "Nonlinear pulse Propagation in a Monomode Dielectric Guide", IEEE J. of Quantum Electronics, Vol. QE-23, No. 5, pp. 510-524, May 1987.
- [13] F. M. Mitschke and L. F. Mollenauer, "Discovery of the Self-frequency shift", Optics Letters, Vol. 11, No.10, pp. 659-661, October 1986.

- [14] J. P. Gordon, "Theory of the Soliton Self-frequency Shift," *Optics Letters*, Vol.11, No. 10, pp. 662-664, October 1986.
- [15] K. J. Blow and D. Wood, "Theoretical Description of Transient Stimulated Raman Scattering in Optical Fibers", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 25, No.12, pp. 2665-1673, December 1989.
- [16] Alan C. Newell and J. V. Moloney, *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [17] W. F. Miyagi and S. Nishida, "Pulse Spreading in a Single-mode Fiber due to Third Order Dispersion", *Applied Optics*, Vol. 18, No. 5, pp. 678-682, March 1979.
- [18] A. A. Machado, *Análise da Propagação de Sólitos Usando Técnica de FDTD*, UNICAMP, tese de Mestrado, 1995.
- [19] A. D. Boardman, M. Bertolotti and T. Twardowski, *Nonlinear Waves In Solid State Physics*, Plenum Press, New York, 1990.
- [20] R. H. Stolen, J. P. Gordon, W. J. Tomlinson, and H. A. Haus, "Raman Response Function of Silica-Core Fibers", *Journal of Optical Society of America B*, Vol. 6, No. 6, pp. 1159-1166, June 1989.
- [21] H. Abe and H. Okuda, "Numerical Studies on Soliton Propagation in Dielectric Media by the Nonlinear Lorentz Computational Model", *IEEE J. of Quantum Electronics* Vol. 31, No. 6, pp. 1098-1106, June 1995.
- [22] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Tradução para o português. Editora Mir, 1982.
- [23] A. Hasegawa and Y. Kodama, "Signal Transmission by Optical Solitons in Monomode Fiber", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 69, No. 9, pp. 1145-1151, September 1981.
- [24] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Son, Inc. 1993.
- [25] M. Koshiba, *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*, Ktk Scientific Publishers (KTK), 1992.
- [26] Y. Tourigny and J. Ll. Mourris, "An Investigation into the Effect of Product Approximation in the Numerical Solution of the Cubic Nonlinear Schrödinger Equation", *Journal of Computational Physics*, Vol. 76, pp. 103- 130, 1988.
- [27] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Flannery, and William T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

- [28] H. E. Hernández-Figueroa, "Improved Split-Step Schemes for Nonlinear-Optical Propagation", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 11, No. 5, pp. 798-803, May 1994.
- [29] B. Hermansson and D. Yevick, "Generalized Propagation Technique", Optics Letters, Vol. 16, No. 6, pp. 354-356, March 1991.
- [30] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst, "Split-Step Method for the Solution of the Nonlinear Schrödinger Equation", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 23, No. 3, pp. 485-507, June 1986.
- [31] M. Eguchi, K. Hayata, and M. Koshiba, "Analysis of Soliton Pulse Propagation in an Optical Fiber Using the Finite-Element Method", Electronics and Communications in Japan, Part 2, Vol. 73, No. 3, pp. 81-91, 1990.
- [32] M. Eguchi, K. Hayata, and M. Koshiba, "Analysis of Soliton Pulse Propagation in Birefringent Optical Fiber Using the Finite-Element Method", Electronics and Communications in Japan, Part 2, Vol. 73, No. 11, pp. 50- 59, 1990.
- [33] K. Hayata, M. Nagai, and M. Koshiba, "Finite-Element Formalism for Nonlinear Slab-Guided Waves", IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 36, No. 7, pp. 1207-1215, July 1988.
- [34] H. E. Hernández-Figueroa, "A New Finite Element Scheme for Optical Temporal Soliton Analysis", International Conference on Computation in Electromagnetics, London, UK, IEE Conference Publication No 350, pp. 167-170, November 1991.
- [35] B. M. Herbert, J. LL. Morris, and A. R. Mitchell, "Numerical Experience With the Nonlinear Schrödinger Equation", J. of Computational Physics 60, pp. 282-505, 1985.
- [36] D. Pathria, and J. LL. Morris, "Pseudo-Spectral Solution of Nonlinear Schrödinger Equations" J. of Computational Physics, 87, pp. 108-125, 1990.
- [37] D. Pathria, and J. LL. Morris, "Exact Solutions for a Generalized Nonlinear Schrödinger Equation", Physica Scripta, Vol. 39, pp. 673-679, 1989.
- [38] G. P. Agrawal, "Effect of Intrapulse Stimulated Raman Scattering on Soliton-effect Pulse Compression in Optical Fibers", Optics Letters, Vol. 15, No. 4, pp. 224-226, February 1990.
- [39] G. P. Agrawal, and M. J. Potasek, "Nonlinear pulse Distortion in Single-Mode Optical Fibers at the Zero-Dispersion Wavelength", Physical Review A, Vol. 33, No. 3, March 1986.
- [40] S. Granville, *The Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*, Academic Press, Inc. 1988.

- [41] R. Dautray, Jacques, and L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Commissariat à l' Energie Atomique, Paris 1984, 1985.
- [42] H. Ghafouri-Shiraz, P. Shum, and M. Nagata, "A Novel Method for Analysis of Soliton Propagation in Optical Fiber", *IEEE J. of Quantum Electronics*, Vol. 31, No. 1, pp. 190-200, January 1995.
- [43] H. Ghafouri-Shiraz and P. Shum, "Analysis of Soliton Propagation in an Optical Fiber Using a Fourier-Series Approach", *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 8, No. 4, pp. 210-212, March 1995.
- [44] P. Shum and S. F. Yu, "Improvement of Fourier Series Analysis Technique by Time-Domain Window Funtion", *IEEE Photonics Technology Letters*. Vol. 8, No. 10, pp. 1364-1366, October 1996.
- [45] T. Gornsztejn and J. R. Souza, "Numerical Schemes for Optical Solitons Propagation Analysis: A Test Comaprison", *Proceedings of the SBMO/IEEE International Microwave and Optoelectronics Conference*, Natal, RN, pp. 543-547, August 11-14, 1997.
- [46] G. R. Hadley, "Transparent Boundary Condition for Beam Propagation", *Optics Letters*, Vol. 16, No. 9, pp.624-626, May 1991.
- [47] G. R. Hadley, "Transparent Boundary Condition for the Beam Propagation Method", *J. of Quantum Electronics*, Vol. 28, No. 1, pp. 363-370, January 1992.
- [48] Y. Tsuji and M. Koshiba, " A Finite Element Beam Propagation Method for Strongly Guiding and Longitudinally Varying Optical Waveguides", *J. of Linghtwave Technology*, Vol. 14, No. 2, pp. 217-222, February 1996.
- [49] F. If, P. Berg, P. L. Christiansen, and O. Skovgard, "Split-Step Spectral Method for Nonlinear Schrödinger Equation with Absorbing Boundaries", *J. of Computation Physics*, Vol. 72, pp. 501-503, 1987.
- [50] T. Gusur, P. I. Christiansen, J. Mork, and P. S. Ramanuam, "Split-Step Spectral Method for Nonlinear Schrödinger Equation with Constant Background Intensities", *J. of Computational Physics*, Vol. 86, pp. 492-495, 1990.
- [51] H. E. Hernández-Figueroa and Marcelo Lyra Brandão, "Efficient 3D Split-Operator Finite-Element Algorithm for Scalar-Integrated Optics", *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol 9, No 3, pp. 351-353, March 1997.
- [52] Y. Arai, A. Maruta, and M. Matsuhara, "Transparent boundary for the finite-element beam-propagation method", *Optics Letters*, Vol. 18, No. 10, pp. 765-766, May 1993.

- [53] C. Vassallo and J. Michel van der Keur, "Comparison of a Few Transparent Boundary Conditions for the Finite-Difference Optical Mode-Solvers", *J. of Lightwave Technology*, Vol. 15, No. 2, pp.397-402, February 1997.
- [54] H. E. Hernández-Figueroa and C. E. Rubio-Mercedes, "Transparent Boundary for the Finite-Element Simulation of Temporal Soliton Propagation", *COMPUMAG-The 11th Conference on the Computation of Eletromagnetic Fields*, Vol. 1, OB-1, pp. 205-206, November 03-06, 1997, Rio de Janeiro.
- [55] H. E. Hernández-Figueroa and C. E. Rubio-Mercedes, "Transparent Boundary Condition Applied to the Finite-Element Simulation of Temporal Optical Solitons", *Submetido ao IEEE Transactions on Magnetism* em 03/ 11/ 1997.
- [56] N. N. Akhmediev, "Novel Class of Nonlinear Surface Waves: Asymmetric Modes in a Symmetric Layered Structure", *Sov. Phys. JETP*, Vol. 56, No. 2, pp. 299-332, August 1982.
- [57] T. Shi and S. Chi, "Beam Propagation Method Analysis of Transverse-Electric Waves Propagating in a Nonlinear Tapered Planar Waveguide", *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 8, No. 11, pp. 2318-2325, November 1991.
- [58] K. Hayata, A. Misawa, and M. Koshiba, "Nonstationary Simulation of Nonlinearity Coupled TE-TM Waves Propagating Down Dielectric Slab Structures by the Step-by-Step Finite-Element Method", *Optics Letters*, Vol. 15, No. 1, pp. 24-26, January 1990.
- [59] J. V. Moloney, J. Ariyasu, C. T. Seaton, and G. I. Stegeman, "Numerical Evidence for Nonstationary, Nonlinear, Slab-Guided Waves", *Optics Letters*, Vol. 11, No. 5, pp. 315-317, May 1996.
- [60] E. M. Writht, G. I. Stegeman, J. V. Moloney, and A. D. Boadman, "Multisoliton Emission from a Nonlinear Waveguide", *Physical Review A*, Vol. 34, No. 5, pp. 4442-4444, November 1986.
- [61] M. A. Gubbels, E. M. Wrigth, G. I. Stegeman, and C. T. Seaton, "Numerical Study of Soliton Emission from a Nonlinear Waveguide", *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 4, No. 11, pp. 1837-1842, November 1987.
- [62] H. E. Hernández-Figueroa, F. Pasquele, R. D. Ettinger, F. A. Fernández, and J. B. Davies, "Controlled Spatial Bright Soliton Emission from a Nonlinear Waveguide", *Optics Letters*, Vol. 19, No. 5, pp. 326-328, March 1994.
- [63] Dietrich Marcuse, *Theory of Dielectric Optical Waveguides*, Academic Press, San Diego 1974, 1991.
- [64] Donald L. Lee, *Electromagnetic Principles of Integrated Optics*, John Wiley & Sons, inc. 1986.

- [65] H. E. Hernández-Figueroa, "An Efficient Finite Element Scheme for Highly Nonlinear Waveguides", in Dig. Conf. Nonlinear Guided-Wave Phenomena, Opt. Soc. Amer., Washington, DC, pp. 92-95, 1991.
- [66] E. González, H. E. Hernández-Figueroa and F. A. Fernández, "Marching methods for the Soliton of the Generalized Nonlinear Schrödinger Equation", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 31, No. 3, pp.1741-1744, May 1995.
- [67] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, and J. P. Gordon, "Experimental Observation of Picosecond pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers", Physical Review Letters, Vol. 45, No.13, pp.1095-1098, September 1980.
- [68] F. M. Mitschke, and L. F. Mollenauer, "Discovery of the Soliton Self-Frequency Shift", Optics Letters, Vol. 11, No. 10, pp. 659-661, October 1986.
- [69] G. P. Agrawal, "Effect of intrapulse stimulated Raman scattering on soliton-effect pulse compression in optical fibers", Optics Letters, Vol. 15, No. 4, pp. 224-226, February 15, 1990.
- [70] E. M. Dianov, A. Y. Karasik, P.V. Mamyshev, A. M. Prokhorov, V. N. Serin, M.F. Stel'markh, and A. A. Fomichev, "Stimulated-Raman Conversion of Multisoliton pulses in Quartz Optical Fibers", JETP Letters, Vol. 41, No. 6, pp. 293-296, March 1985.
- [71] K. Tai, and A. Hasegawa, "Fission of Optical Solitons Induced by Stimulated Raman Effect", Optics Letters, Vol. 13, No. 5, pp. 392-394, May 1988.
- [72] A. S. Gouveia-Neto, A. S. L. Gomes, and J. R. Taylor, "Generation of 33-fsec Pulses at $1.32\ \mu\text{m}$ Through a High-Order Soliton Effect in a Single-Mode Optical Fiber", Optics Letters, Vol. 12, No. 6, pp. 395-397, June 1987.
- [73] R. H. Stolen, L. F. Mollenauer, and W. J. Tomlinson, "Observation of Pulse Restoration at the Soliton Period in Optical Fibers", Optics Letters, Vol. 8, No. 3, pp.186-188, March 1983.
- [74] E. A. Golovchenko and A. N. Pilipetskii, "Unified Analysis of Four-Photon Mixing, Modulational Instability, and Stimulated Raman Scattering Under Various Polarization Conditions in Fibers", J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 11, No. 1, pp. 92-101, January 1994.
- [75] D. Marcuse, A. R. Chraplyvy, and R. W. Tkach, "Effect of Fiber Nonlinearity on Long-Distance Transmission", Journal of Lightwave Technology, Vol. 9, No. 1, pp. 121-127, January 1991.
- [76] R. W. Tkach, A. R. Chraplyvy, Fabrizio Forghieri, A. H. Gnauck, and R. M. Derosier, "Four-Photon Mixing and High-Speed WDM Systems", Journal of Lightwave Technology, Vol. 13, No. 5, pp. 841-849, May 1995.